972 4793

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr. Slavko Ranković
Asistent Građevinskog
fakulteta u Beogradu

DEPLANACIONA TERMOELASTIČNA TEORIJA PUNIH PRIZMATIČNIH I TANKOZIDNIH ŠTAPOVA

- doktorska disertacija -

Rukovodilac disertacije
Prof.Dr.Rastko Stojanović

Beograd, 1972

SADRŽAJ

I UVOD

I.1 Kraći prikaz radova iz oblasti racionalne teorije štapa

Teorija savijanja elastičnog štapa je započeta radom Jakoba Bernoulli-ja 1691 godine. Sledeći pogrešnu postavku Mariot-a o položaju neutralne osovine, oko koje se okreće poprečni presek, Bernoulli tačno zaključuje da je krivina elastične linije u svakoj njenoj tački, srazmerna momentu savijanja. Kasniji istraživači su zanemarivali rezultate Bernoull-ija izuzev Euler-a, koji je u svome veoma značajnom radu iz 1771 godine izveo potpune statičke jednačine štapa savijenog u svojoj ravni.

U vreme kada je Euler radio na formulisanju teorija savijanja štapa, opisivanje deformacije štapa je još uvek primitivno i neadekvatno sve do pojave radova St, Venant-a (1843) i (1845). Tek u njegovim radovima srećemo pojam uvrtanja i glavnih osa u zadacima torzije i savijanja štapa. Ostale pokušaje opisivanja deformacije nalazimo u radovima Kirchhoff-a (1856) i (1876) i Clebsch-a (1862). Prva direktna i uspešna analiza malih deformacija i linearne elastičnosti je data od strane Love-a (1893) godine.

St. Venant je izveo 6 jednačina da bi opisao ravnotežu savijenog i uvrnutog štapa. Kirchhoff je izveo opšte jednačine ravnoteže tankih štapova a Clebsch je formulisao eksplicitne kinematičke jednačine štapa, pa se potpun sistem ovih jednačina naziva: Jednačine Kirchhoff-Clebsch-a.

Nove ideje za opisivanje deformacija nalazimo u radu Duhem-a (189[illegible]). Telo se razmatra ne samo kao zbir materijalnih tačaka, već se tačkama asociraju vektori radi registrovanja pravaca, odnosno rotacija i razmicanja, koje su nezavisne od uobičajene deformacije. Ovakav model orijentisanog tela dopušta i mogućnost predstavljanja molekularnih koncepcija, gde molekuli poseduju internu strukturu. Kako su primetili braća Cosserat, ovakav model može poslužiti za [illegible] odnosno dvodimenzionu interpretaciju torzije štapa odnosno ljuske u superpoziciji sa savijanjem. Braća Cosserat opisuju ovakve vrste deformacija, služeći se pri tome mrežom pravougaonih Cartezijanskih koordinata, insistirajući na jednoj vrsti generalisane energije deformacije, koju pak nazivaju "Euklidska akcija".

Radovi braće Cosserat (3), ostaju dugo nezapaženi, izuzev jednog prikaza iz 1935 godine, u kome Sudria izlaže osnovne postavke pomenutih radova, služeći se pri tome vektorskim računom. Tek pedeset godina od svog nastanka, teorija braće Cosserat pobuđuje interes istraživača. Prvo je Güenter /4/ 1958 godine ukazao na efekte Cosserat kontinuuma kod grednih nosača (slučaj obrtanja poprečnih preseka izazvanih smičućim silama i nezavisnih od pomeranja odnosno deformacija usled savijanja). Iste godine se pojavljuje i rad Ericksen-a i Truesdell-a /5/, u kome se daje moderan prilaz kinematici orijentisanih tela preko pomeranja i nezavisnih deformacija n-vektora, koji registruju pravce pa se često nazivaju direktorima, u jednom n-dimenzionom prostoru. Nešto kasnije, 1961 godine, Ericksen /6/ koristi direktore pri formulaciji svoje teorije tečnih kristala, a Toupin /7/ daje teoriju trodimenzionog orijentisanog medija. Dalje priloge teoriji multipolarnog kontinuuma mehanike su dali Green i Rivlin /8/ 1964, a potpunu dinamičku teoriju direktora Green, Naghdi i Rivlin /9/ 1965 godine. U radu /20/, Stojanović i Đurić su pokazali da funkcija energije ne može zavisiti od komponenata direktora, već samo od njihovih gradijenata.

Ovako plodan razvitak teorije orijentisanih tela, podstakao je i intenzivniji i uspešniji rad na teoriji štapa. Tako u radu /10/ Green-a i Laws-a, razmotrena opšta termodinamička teorija štapa. Za računski model je izabrana Timošenkova greda /22/, gde je težišna kriva štapa, potopljena u Euklidev trodimezioni prostor. Pored tangentnog vektora težišne krive linija, uvedena su još dva vektora, koje autori nazivaju direktorima, pa je tako omogućeno praćenje ravni poprečnog preseka posle deformacije. Koristeći prvi zakon termodinamike, napsana je jednačina balansa energije,a postavljanjem zahteva za invarijantnost ove jednačine na superponirana kruta kretanja,određene su jednačine kretanja. Koristeći drugi zakon termodinamike,raznatrana je Clausius-Duhem-ova nejednakost,a uvođenjem slobodne energije utvrđena funkcionalna zavisnost iste energije od određenih argumenata,pa su ispisane i konstitutivne jednačine za sile i momente poprečnog preseka.Ovakav pristup racionalnoj teoriji štapa,biće prihvaćen od niza drugih autora.

Rad /11/ Green-a,Laws-a i Naghdi-ja,objavljen 1967,predstavlja nastavak rada /10/.Polazeći od opšte nelinearne teorije elastičnog štapa, izvedena je linearna teorija pravog štapa,koja uključuje u sebe i termičke efekte.Slobodna energija je predstavljena u obliku kvadratne funkcije kinematičkih promenljivih,a redukovana je korišćenjem izvesnih osobina kinetičke simetrije.Osnovne jednačine su odvojene u četiri grupe,dve za savijanje,jedna za torziju i jedna za ekstenziju štapa.Temperaturni efekti figurišu samo u poslednjoj jednačini.

Treba napomenuti da je u radu /11/ razmatrana temperatura,ravnomerno raspoređena po poprečnom preseku,tako da nisu mogli biti obuhvaćeni takvi termički efekti kao temperaturni gradijenti,sa kojima se inače srećemo u tehničkoj teoriji savijanja štapa.

U međuvremenu su se pojavili radovi Cohen-a /12/ i Whitmann-De Silva /13/.Prvi tretira nelinearnu teoriju elastičnih orijentisanih krivih linija,izvodeći je na osnovu principa virtualnog rada.Sama funkcija energije deformacije je izabrana tako da sem klasičnih napona,postoje dvojni naponi sa i bez momenata.U radu /13/ se razvija nelinearna dinamička teorija elastične krive linije sa orijentacijom.Izvedene su diferencijalne jednačine kretanja,ispisani granični uslovi, i određene konstitutivne jednačine primenom Hamiltonovog principa,zakona o konzervaciji mase i zahteva za invarijantnost funkcije dejstva u odnosu na varijacije kretanja krutog tela. Radovi /12/ i /13/ prema

načinu opisivanja deformacije štapa,predstavljaju nastavak Ericksen-Truesdell-ovog prilaza teoriji štapa.
Treba takođe istaći rad Suhubi-ja /14/ 1968 godine,koji razmatra racionalnu teoriju štapa,gde su osnovne jednačine izvedene iz trodimenzionih jednačina polja.
U radu /15/,Green,Knops i Laws razmatraju probleme stabilnosti i velikih deformacija.Polazeći od istog modela kao u radu /10/,izložena je teorija malih pomeranja,koja se dodaju velikim pomeranjima elastičnog štapa.Razmatrani su neki vidovi simetrijom materijala kao i geometrijska simetrija.Pri razmatranju polinomijalne funkcije energije,utvrđena je zavisnost iste funkcije od 45 invarijanata, čiji se stepen kreće od 1 do 4.
Za dalji razvitak teorije štapa je vrlo značajan rad /16/ od 1968, u kome Green,Laws i Naghdi biraju takav model štapa,kod koga je vektor položaja proizvoljne tačke štapa prikazan sledećim izrazom:

$$\vec{r}^{*} = \vec{r}(\theta,t) + \sum_{N=1} \theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\,\vec{d}_{\alpha_1\dots\alpha_N}(\theta,t)$$

Ovde su $\vec{d}_{\alpha_1\dots\alpha_N}$ vektorske funkcije od podužne koordinate štapa i vremena,potpuno simetrične u odnosu na indekse $\alpha_1\dots\alpha_N$,a sumiranje se vrši po svim vrednostima $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_N=1$ i n= 1,2,3, . . .
Ovakav prilaz teoriji štapa predstavlja njen najopštiji tretman, jer se za poprečni presek,koji je do deformacije bio jedna ravan, dopušta prelaz u površ N-tog reda posle deformacije.Ispitivanjem jednačine balansa energije i zahtevom za invarijantnost iste pri superponiranim kretanjima krutog tela,dobiveno je 6 jednačina kretanja.Uvedena je čitava grupa nepoznatih veličina:

$$\sqrt{a_{33}}\,\rho\,q^{\alpha_1\dots\alpha_N i} + \frac{\delta p^{\alpha_1\dots\alpha_N i}}{\delta\theta}$$

pa zadržavajući ih u jednačini balansa energije umnožene grupom veličina koja predstavlja krivljenja prvobitno ravnog poprečnog preseka,definisana je odgovarajuća grupa konstitutivnih jednačina.

Kako ova grupa konstitutivnih jednačina predstavlja kombinacije zadatih sila i već definisanih generalisanih sila
to su ove jednačine iskorišćene kao sistem jednačina kretanja i na taj način formulisan potpun sistem jednačina kretanja.

U radu /17/ je razmatrana termodinamička teorija štapa, gde je u skladu sa izabranim računskim modelom /Timošenkova greda,vidi rad /22// razmatrana nehomogena raspodela temperature po poprečnom preseku,te dopuštena pojava temperaturnih gradijenata. Koristeći metode rada /10/, autor je pri ispisivanju jednačine balansa energije, pored efekta rada koji vrše sile i momenti poprečnog preseka, uzeo u obzir i rad odnosno efekat toga rada izazvan dejstvom fiktivnih momenata temperature.

Rad /18/ predstavlja dalje istraživanje teorije štapa.Polazeći od navedenog modela u radu /16/,Green i Naghdi daju neizotermičku teoriju štapa, razmatrajući temperaturu prikazanu Tajlorovim razvitkom N-tog reda za funkciju sa dve nezavisne promenljive, na isti način kao što je vektor položaja proizvoljne tačka štapa prikazan Tajlorovim razvitkom N-tog reda za funkciju sa dve nezavisne promenljive. Autori uvode pojam generalisanih jednačina balansa energije, množeći podintegralne izraze klasične jednačine balansa nekim funkcijama koordinata.Analizirajući ovakve generalisane jednačine balansa možemo pokazati da su to jednačine balansa energije i momenti ovih jednačina balansa do n-tog reda.Sprovodeći ovu generalizaciju dosledno,autori dobijaju i slobodnu energiju , odnosno njene momente do n-tog reda,takođe u zavisnosti od sledećih argumenata: tenzor deformacije, tenzor torzije, i vektor krivine težišne ose štapa, veličina zakrivljenosti poprečnih i podužnih preseka, promena ovih zakrivljenosti duž štapa, homogena temperatura i temperaturni gradijenti do n-tog reda. Imajući u vidu ove funkcionalne zavisnosti, određene su konstitutivne jednačine za entropiju, momente entropije, kao i za sve uvedene sile i momente poprečnog preseka i podužnih preseka.

I.2 Prikaz deplanacione termoelastične teorije punih prizmatičnih i tankozidnih štapova

I.2.1 Puni prizmatični štapovi

U prva dva poglavlja se izlaže geometrija prizmatičnog štapa. Polazeći od nedeformisane konfiguracije,gde se za model bira Bernoulli-Navijeov štap,definisan je tangentni vektor težišne krive štapa, pa mu asocirana dva vektora,koji signiraju ravan poprečnog preseka, i zajedno sa tangentnim vektorom čine trijedar linearno nezavisnih vektora.Deformisana konfiguracija dopušta prelaz ravni poprečnog preseka u površ N-tog reda.Pri razmatranju kinematike štapa, brzina proizvoljnog elementa je prikazana shodno izabranom modelu, kao zbir brzina težišne krive i odgovarajućih direktorskih brzina,množenih konvektivnim koordinatama razmatranog elementa. Za određivanje jednačine balansa energije,ispisani su izrazi za kinetičku energiju, toplotu i efekat rada usled dejstva zapreminskih sila i momenata kao i usled sila i momenata po poprečnom preseku i po jedinici dužine podužnih preseka.

Jednačina balansa energije je učinjena invarijantnom na superponirane uniformne brzine translacije, rotacije i deplanacije, u skladu sa usvojenim kinematičkim modelom štapa. Treba napomenuti da se primenom zahteva za invarijantnost na superponirana deplanaciona kretanja ne dobijaju korektne jednačine kretanja, već se one moraju odrediti na drugi način.

Razmatranje termoelastičnih štapova se vrši uvođenjem slobodne energije preko poznate veze trodimenzione teorije termoelastičnosti. Kako je temperatura prikazana Tajlorovim razvitkom N-tog reda, na isti način kao što je vektor položaja proizvoljne tačke štapa prikazan Tajlorovim razvitkom N-tog reda za vektorsku funkciju sa dve nezavisne promenljive, to će se sem entropije poprečnog preseka pojaviti i njeni momenti do N-tog reda. Funkcionalna zavisnost slobodne energije od odgovarajućih argumenata je utvrđena korišćenjem odgovarajuće veze između entropije i izvoda slobodne energije po temperaturi, odnosno preko Clausius-Duhem-ove nejednakosti.

Ispisivanjem konstitutivnih jednačina za sile i momente poprečnog preseka, kao i za entropiju i njene momente, izvršena je redukcija jednačine energije. Da bi se kompletirao sistem jednačina termoelastične teorije štapa, određena je i konstitutivna jednačina za toplotni fluks.

U poglavlju broj 9 je pokazano da je broj nepoznatih jednak broju jednačina iz kojih se mogu odrediti nepoznate veličine.

U desetom poglavlju je razmotrena linearna teorija štapa drugog reda, tj. takvog štapa čija ravan poprečnog preseka posle deformacije prelazi u krivu površ drugog reda. Energija deformacije je prikazana kao homogena,kvadratna funkcija elemenata tenzora deformacije,vektora krivine,tenzora torzije,promena veličina zakrivljenosti poprečnog i podužnih preseka duž težišne linije štapa,homogene temperature i njenih gradijenata.Postavljanjem zahteva za invarijantnost argumenata energije deformacije pri transformacijama koje karakterišu kinetičku simetriju materijala,izvršena je redukcija argumenata energije deformacije . Posle ispisivanja polinomijalnog oblika ove funkcije, određene su konstitutivne jednačine za entropiju i njene momente, vektor unutrašnjih sila poprečnih preseka, tenzor unutrašnjih sila po jedinici dužine podužnog preseka,vektor momenata i momente drugog reda unutrašnjih sila poprečnih preseka.

Treba napomenuti da je u drugoj glavi sproveden jedan postupak zasnovan na generalizaciji Pioline teoreme i zahtevu za invarijantnost jednačine energije pri superpoziciji viših direktorskih kretanja. (Vidi naprimer /19/,/21/).

Ovde možemo konstatovati da ispunjenjem zahteva za invarijantnost jednačine energije pri superponiranim uniformnim brzinama translacije,rotacije i deplanacije, dobijamo dovoljan broj jednačina kretanja,ali sa anuliranim veličinama tonzionih polimomenata.Na taj način se dobijaju nekorekne jednačine kretanja pa se iste moraju odrediti korišćenjem drugih postupaka.

U trećoj glavi su odredjene korekne jednačine kretanja primenom principa virtualnog efekta rada. Polazise od jednačina kretanja čestice,prema rešenju tro dimenzione teorije kontinuuma. Veličine koje figurišu u ovim jednačinama kretanja posmatramo kao sistem ravnotežnih generalisanih sila, koje ostvaruju efekat rada na virtualnim brzinama.Ako za virtualne brzine izaberemo neko moguće polje brzina koje dopušta usvojen kinematički model našeg štapa, to posle integracije po zapremini štapa, zahtevamo da efekat rada ovog sistema sila bude jednak nuli. Imajući u vidu broj funcionalnih stepeni slobode,možemo utvrditi da će broj jednačina kretanja biti jednak broju stepeni sloboda usvojenog kinematičkog modela štapa.

Ovde napominjemo da su iste jednačine kretanja dobili takodje autori rada /18/, koristeći sa svim različiti postupak zasnovan na ispisivanju jednačine balansa energije i njenih momenata sve do N-tog reda.

U drugom poglavlju treće glave se razmatra potpun sistem linearnih jednačina za štapove drugog reda.Imajući u vidu korektan sistem jednačina kretanja, upotrebljene su konstitutivne veze dobijene iz jednačine balansa energije, invarijantne na superponirane uniformne brzine translacije, rotacije i deklamacije.Pokazano je da se za slučaj linearne teorije prizmatičnog štapa drugog reda, dobija potpun sistem jednačina. Treba naglasiti da ovak potpun sistem jednačina definiše stanje napona i deformacija u poprečnim presecima štapa.

Ako pored stanja napona i deformacija u poprečnim presecima štapa tražimo odgovor i na pitanje o stanju napona i deformacija u podužnim presecima štapa onda se ovakva teorija prizmatičnog štpa može smatrati približnom teorijom.

Kako je jednačina balansa energije invarijantna na viša direktorska kretanja to generalisanje sile i momenti,odredjeni ovom teorijom ne zavise od veličina zakrivljenosti poprečnih i podužnih preseka, već samo od promena ovih zakrivljenosti duž štapa. Da bi se ustanovili efekti ovih veličina, tj. njihov uticaj na naponsko stanje, trebalo bi izvršiti i neka laboratorijska ispitivanja pa iste rezultate uporediti sa računskim.Predhodno je potrebno izvršiti identifikaciju konstanti kako bi se pomenuta poredjenja mogla i brojno ostvariti.

U poslednjem poglavlju se analiziraju rezultati Green=Naghdi-jeve neizotermičke teorije štapa.Kako su jednačine balansa energije i momenti ovih jednačina sve do reda N, učinjeni invarijantni samo na kruta kretanja,to se kao argumenti slobodne energije u ovoj teoriji pojavljuju i veličine zakrivljenosti poprečnih i podužnih preseka.
Polazeći od date funkcionalne zavisnosti,razmotrena je linearna teorija štapa drugog reda i odredjen potpun sistem jednačina. Kao rezime ove analize proizlazi zaključak da linearna deplanaciona teorija štapa drugog reda daje odgovor na pitanja o stanju napona i deformacija, kako u poprečnim presecima štapa, tako i u podužnim presecima.

I.2.2. Tankozidni štapovi

Za prikaz deformisane konfiguracije štapa, upotrebljen je takav model kod koga ravan poprečnog preseka, sem relativnih pomeranja i obrtanja dobija i deplanaciju predstavljenu proizvodom dveju funkcija.Prva funcija predstavlja generalisanu sektorsku koordinatu a druga funkcija predstavlja meru deplanacije i zavisi od podužne koordinate štapa.
U skladu sa izabranim kinematičkim modelom štapa, odredjena je brzina proizvoljne tačke, pa je definisana kinetička energija i uvedeni odgovarajući koeficijenti enercije.
Osnovne jednačine kretanja su odredjene polazeći od poznatih jednačina kretanja čestice u trodimenzionoj teoriji kontinuuma. Smatrajući veličine koje figurišu u ovim jednačinama kao sistem ravnotežnih sila,to je sproveden zahtev o anuliranju efekta rada ovih sila na dopuštenom polju virtualnih brzina.Za polje virtualnih brzina su izabrane takve brzine koje dopušta usvojeni kinematički model štapa. Broj jednačina kretanja odgovara broju funkcionalnih stepena slobode posmatranog modela.
Jednačina balansa energije je korišćena za dobijanje konstitutivnih jednačina. Pri tome je učinjena invarijantnom na kretanja koja štap učini kao kruto telo.
Formulisana je Clausius-Duhem-ova nejednakost i preko nje utvrdjena funkcionalna zavisnost slobodne energije od elemenata tenzora deformacije,vektora krivine i tenzora torzije referentne krive,kao i od mere deplonacije i njene promene duž štapa, i homogene temperature poprečnog preseka.Odredjivanjem konstitutivnih jednačina za entropiju i generalisanja sile i momente izvršena je redukcija Clausius-Duhemove nejednakosti.

U poslednjem poglavlju je razmotrena linearna teorija tankozidnog štapa pa je slobodna energija predstavljena kao polinomijalna, homogena, kvadratna funkcija odredjenih argumenata. Uprošćenje ove funkcije je izvršeno pod predpostavkom da materijal poseduje osobine kinetičke simetrije pa je postavljen zahtev za infarijantnost slobodne energije pri promeni smera koordinantnih osa. Na kraju su odredjene konstitutivne jednačine za entropiju i uvedene sile i momente poprečnog preseka.

Ispisan je potpun sistem jednačina linearne teorije tankozidnog štapa. Izvršena su grupisanja ovih jednačina prema vrstama kretanja i pokazano da se može izvršiti separacija prema vrstama ovih kretanja uvodjenjem dopunskih predpostavkih o simetrijama preseka. Za slučaj torzionih i deplanacionih kretanja je pokazano da ovakva separacija nije moguća.

II PUNI PRIZMATIČNI ŠTAPOVI

II.1 Geometrija nedeformisane konfiguracije štapa

Uočićemo krivu C u Euklidovom trodimenzionom prostoru. Sve tačke obuhvaćenog prostora se nalaze u odgovarajućim ravnima upravnim na ovu krivu. Vektor položaja ovih tačaka je određen sledećim izrazom:

$$\vec{R}^*(\theta^i) = \vec{R}(\theta) + \theta^\alpha \vec{A}_\alpha(\theta) \tag{1.1}$$

Svi latinski indeksi, koje ćemo u daljem izlaganju upotrebljavati, idu od 1 do 3, a svi grčki od 1 do 2. Slovima θ^α i $\theta^3 = \theta$ označavamo konvektne koordinate. Jednačine $\theta^\alpha = 0$ definišu krivu C :

$$\vec{R} = \vec{R}(\theta) = \vec{R}^*(0,0,\theta) \tag{1.2}$$

Prostorne bazne vektore krivolinijskih koordinata (1.1) određujemo sledećim formulama:

$$\vec{G}_\alpha = \vec{R}^*_{,\alpha} = \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial \theta^\alpha} = \vec{A}_\alpha(\theta)$$

$$\vec{G}_3 = \vec{R}^*_{,3} = \vec{R}_{,3} + \theta^\alpha \vec{A}_{\alpha,3} = \tag{1.3}$$

$$= \vec{A}_3 + \theta^\alpha \vec{A}_{\alpha,3}$$

U jednačini $(1.3)_2$ figuriše oznaka: $\vec{A}_3(\theta) = \vec{R}_{,3}$ (1.4)

Ovu oznaku smo uveli za tangentni vektor krive. Ako je ovaj vektor jediničan, to imajući u vidu (1,1) sledi:

$$\vec{A}_\alpha \cdot \vec{A}_3 = 0 \quad ; \quad \vec{A}_3 \cdot \vec{A}_3 = 1 \tag{1.5}$$

Polazeći od veza (1.5) možemo izvesti sledeće relacije:

$$\vec{A}_3 \cdot \vec{A}_{3,3} = 0 \quad ; \quad \vec{A}_{3,3} \cdot \vec{A}_\alpha = -\vec{A}_3 \cdot \vec{A}_{\alpha,3} \tag{1.6}$$

Štap se definiše kao region B, čije su tačke određene vezom (1.1) a ograničen zatvorenom površi $f(\theta^1,\theta^2,\theta)=0$. Ravan $\theta=const$, ograničenu krivom $\mathcal{L}$, koja je nastala presekom ove ravni sa površi $f=0$, nazivamo poprečnim presekom regiona. Neka je D maksimalni dijametar regiona odnosno njegovog poprečnog preseka a L dužina ovog regiona merena duž krive C. Ako je ispunjena nejednakost $\frac{D}{L}\ll 1$ tada smatramo da region B predstavlja štap. Kriva C je osa štapa i obično je to linija koja spaja težišta poprečnih preseka. Ako $f=0$ ne zavisi od koordinate θ onda je štap konstantnog poprečnog preseka.

Razmotrićemo podrobnije geometriju krive linije C pa ćemo uvesti simetričnu matricu čiji su elementi određeni skalarnim proizvodom

$$A_{ij}=\vec{A}_i\cdot\vec{A}_j \tag{1.7}$$

Ovu matricu možemo napisati i u sledećem obliku:

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix}[A_{\alpha\beta}] & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Inverznu matricu pišemo služeći se inverznom submatricom $A^{\alpha\beta}$ submatrice $A_{\alpha\beta}$.

$$[A^{ij}]=\begin{bmatrix}[A^{\alpha\beta}] & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Sada je moguće definisati recipročne bazne vektore krive linije:

$$\vec{A}^i=A^{ij}\vec{A}_j \tag{1.10}$$

Lako je pokazati da važe i sledeće veze:

$$\vec{A}^i\cdot\vec{A}_j=A^{ik}\vec{A}_k\cdot\vec{A}_j=A^{ik}A_{kj}=\delta^i_j \tag{1.11}$$

Imajući u vidu (1.9) i (1.10) možemo pisati:

$$\vec{A}^\alpha=A^{\alpha\beta}\vec{A}_\beta\quad;\quad\vec{A}^3=\vec{A}_3 \tag{1.12}$$

Prema (1.3) i (1.5), možemo odrediti komponente metričkog tenzora:

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$$

$$G_{\alpha 3} = -\theta^{\beta}\vec{A}_{\alpha}\cdot\vec{A}_{\beta,3} \tag{1.13}$$

$$G_{33} = 1 + 2\theta^{\alpha}\vec{A}_{3}\cdot\vec{A}_{\alpha,3} + \theta^{\alpha}\theta^{\beta}\vec{A}_{\alpha,3}\cdot\vec{A}_{\beta,3}$$

Očigledno je da matrica $(\mathcal{G})$ prelazi u matricu $(\mathcal{A})$ za slučaj $\theta^{\alpha}=0$. Polazeći od (1.11) možemo uvesti i matricu $(\mathcal{K})$, sledećom vezom:

$$\vec{A}^{i}\cdot\vec{A}_{j,3} = -\vec{A}^{i}_{,3}\cdot\vec{A}_{j} = K^{i}_{j}(\theta) \tag{1.14}$$

Može se pokazati da matrica $(\mathcal{K})$ određuje krivinu i torziju krive C. Ako uvedemo:

$$\vec{A}_{\alpha}\cdot\vec{A}_{\beta,3} = B_{\alpha\beta} \quad ; \quad \vec{A}_{\alpha}\cdot\vec{A}_{3,3} = B_{\alpha} \tag{1.15}$$

možemo lako pokazati da važe sledeće veze:

$$\vec{A}^{\alpha}\cdot\vec{A}_{\beta,3} = B^{\alpha}_{\beta} \quad ; \quad \vec{A}^{\alpha}\cdot\vec{A}_{3,3} = -\vec{A}^{\alpha}_{,3}\cdot\vec{A}_{3} = B^{\alpha}$$

$$\vec{A}^{\alpha}_{,3}\cdot\vec{A}_{\beta} = -\vec{A}^{\alpha}\cdot\vec{A}_{\beta,3} = -B^{\alpha}_{\beta}$$

$$\vec{A}^{\alpha}_{,3}\cdot\vec{A}^{\beta} = -B^{\alpha\beta} \quad ; \quad \vec{A}_{\alpha,3}\cdot\vec{A}_{3} = -B^{\alpha} \tag{1.16}$$

U ovim vezama figurišu nove oznake:

$$B^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta} \quad ; \quad B^{\alpha\beta} = A^{\alpha\gamma}A^{\beta\delta}B_{\gamma\delta} \quad ; \quad B^{\alpha} = A^{\alpha\beta}B_{\beta}$$

Poređenjem izraza (1.6) i (1.12), dobijamo :

$$K^{\alpha}_{\beta} = B^{\alpha}_{\beta} \; ; \; K^{\alpha}_{3} = B^{\alpha} \; ; \; K^{3}_{\alpha} = - B_{\alpha} \qquad (1.17)$$

Veličina B^{α}_{β} predstavlja tenzor torzije a veličina B_{α} vektor krivine težišne krive C .Kako iz (1.15) sledi:

$$B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta,3} \qquad (1.18)$$

to možemo zaključiti da je $B_{\alpha\beta}$ antisimetričan, ako $A_{\alpha\beta}$ ne zavisi od koordinate θ . Uzmemo li da je $|\vec{A}_{\alpha}| = 1$, biće:

$$B_{11} = B_{22} = 0$$

Ako su uglovi između vektora $\vec{A}_{\alpha}$ konstantni, dobićemo:

$$B_{12} = - B_{21}$$

Odavde se lako dobijaju sledeći rezultati:

$$B^{2}_{2} = - B^{1}_{1} = A^{12} B_{12} \qquad B^{1}_{2} = A^{11} B_{12}$$

$$B^{2}_{1} = - A^{22} B_{12}$$

Za ortonormiran sistem vektora, imamo klasične rezultate:

$$B^{1}_{1} = B^{2}_{2} = 0 \quad ; \quad B^{1}_{2} = - B^{2}_{1} = B_{12} = - \tau$$

Ovde smo sa τ označili torziju krive linije.
Ako su $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ i $\vec{f}_3$ vektori glavne normale, binormale, i tangente krive C , to možemo dalje pisati:

$$\vec{A}_{\alpha} = L^{\beta}_{\alpha}(\theta) \vec{f}_{\beta} \qquad \vec{A}_{3} = \vec{f}_{3}$$

Prema (1.15) i (1.16), sledi :

$$B^{\alpha}_{\beta} = L^{\alpha}_{\gamma} L^{\gamma}_{\beta,3} + L^{\alpha}_{\delta} L^{\gamma}_{\beta} \nu^{\delta}_{\gamma}$$

$$[\nu_\gamma^\delta] = [\vec{f}^\delta \cdot \vec{f}_{\gamma,3}] = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\nu_\beta] = [\vec{f}_\beta \cdot \vec{f}_{3,3}] = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovde smo sa k i ε označili krivinu i torziju krive linije. Razmatranjem jednačine (1.14), možemo izvesti izraz za izvod vektora $\vec{A}_i$ po koordinati ϑ :

$$\vec{A}_{i,3} = K_i^j \vec{A}_j \qquad \vec{A}^i_{,3} = -K_j^i \vec{A}^j \tag{1.19}$$

$$\vec{A}_{\alpha,3} = B_\alpha^\beta \vec{A}_\beta - B_\alpha \vec{A}_3$$

$$\vec{A}^\alpha_{,3} = -(B_\beta^\alpha \vec{A}^\beta + B^\alpha \vec{A}_3) \tag{1.20}$$

$$\vec{A}_{3,3} = \vec{A}^3_{,3} = B^\alpha \vec{A}_\alpha = B_\alpha \vec{A}^\alpha$$

Jednačine (1.2o) se redukuju na dobro poznate Frenet+Serret-ove formule.

Bazni vektori prostora (1.1), mogu biti izraženi preko baznih vektora krive linije $\vec{A}_i$. Uvođenjem jednačina (1.2o) u (1.3) dobijamo:

$$\vec{G}_\alpha = \vec{A}_\alpha \tag{1.21}$$

$$\vec{G}_3 = \mu \vec{A}_3 + \mu^\alpha \vec{A}_\alpha$$

Ovde su uvedene sledeće oznake:

$$\mu = 1 - B_\alpha \theta^\alpha \quad ; \quad \mu^\alpha = B^\alpha_\beta \theta^\beta \tag{1.22}$$

Očigledno je da se elementi $(\vec{A_i})$ transformišu u elemente $(\vec{G_i})$ pomoću matrice μ .

$$\vec{G_i} = \mu_i^j \vec{A_j} \tag{1.23}$$

Ovde su uvedene sledeće veličine:

$$\mu_i^j = \delta_i^j - (1-\mu)\delta_3^j \delta_i^3 + \mu^\alpha \delta_\alpha^j \delta_i^3 \tag{1.24}$$

Prema (1.23) sledi takođe:

$$\vec{A_i} = (\mu^{-1})_i^j \vec{G_j} \tag{1.25}$$

Sada smo sa (μ^{-1}) obeležili komponente inverzne matrice:

$$(\mu^{-1})_i^j = \mu^{-1}\left[\delta_i^j - (1-\mu)\delta_i^\alpha \delta_\alpha^j - \mu^\alpha \delta_i^3 \delta_\alpha^j\right]$$

(1.26)

2. Geometrija deformisanog štapa

Do sada smo razmatrali štap koji je ispunjavao region $\mathcal{B}$ u prostoru. Svaka tačka koja se nalazi u regionu $\mathcal{B}$ određena je jednačinom (1.1). Pretpostavićemo da se pri dejstvu opterećenja region $\mathcal{B}$ deformiše te izvesnim kretanjem prelazi u region b, čije će koordinate biti vezane za krivu $\mathcal{C}$ u koju posle deformacije prelazi kriva C. Proizvoljna tačka u regionu b je određena jednačinom:

$$\vec{r}^* = \vec{r}^*(\theta^1,\theta^2,\theta,t) = \vec{r}^*(0,0,\theta,t) +$$

$$+\sum_{N=1} \theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_N}\left(\frac{1}{N!}\,\frac{\partial^N \vec{r}^*}{\partial\theta^{\alpha_1}\ldots\partial\theta^{\alpha_N}}\right)_{\theta^\alpha=0} =$$

$$= \vec{r}(\theta,t) + \sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_N}\vec{d}_{\alpha_1\ldots\alpha_N} \qquad (2.1)$$

U jednačini (2.1) smo sa $\vec{r}^*$ obeležili vektor položaja proizvoljne tačke prostora unutar regiona b a sa $\vec{r}$ vektor položaja tačke na krivoj $\mathcal{C}$. Takođe su uvedene oznake:

$$\vec{d}_{\alpha_1\ldots\alpha_N} = \frac{1}{N!}\,\frac{\partial^N\vec{r}^*}{\partial\theta^{\alpha_1}\ldots\partial\theta^{\alpha_N}}\ ;\ \vec{d}_\alpha = \vec{a}_\alpha \qquad (2.2)$$

Poprečni presek regiona $\mathcal{B}$ koji je bio deo ravni $\theta = const$ ograničen linijom $\mathcal{L}$, nije u regionu b više ravan već prelazi u krivu površ, to jest vrši se deplanacija poprečnog preseka. Trijedar baznih vektora $\vec{A}_i$ prelazi u trijedar $\vec{a}_i$.

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\ ;\ \vec{a}_\alpha = \left(\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial\theta^\alpha}\right)_{\theta^\alpha=0} \qquad (2.3)$$

Odredićemo prostorne bazne vektore krivolinijskih koordinata (2.1) na sličan način kao i u prethodnom poglavlju:

$$\vec{g}_{\alpha} = \vec{r}^{*}_{,\alpha} = \vec{a}_{\alpha} + \sum_{N=2} N\theta^{\alpha_2}\cdots\theta^{\alpha_N}\vec{d}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_N}$$

$$\vec{g}_{3} = \vec{r}^{*}_{,3} = \vec{a}_{3} + \sum_{N=1} \theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_N}\vec{d}_{\alpha_1\ldots\alpha_N 3} \qquad (2.4)$$

Tangentni vektor krive $\mathcal{L}$ ne mora više biti jedinični kao što ni tangencijalna ravan na površ poprečnog preseka u tački $\theta^{\alpha}=0$ regiona $\mathcal{B}$, nije u opštem slučaju normalna na krivu liniju $\mathcal{L}$. Otuda, umesto izraza (1.5) imaćemo sada izraze (2.5).

$$\vec{a}_{\alpha}\cdot\vec{a}_{3} = a_{\alpha 3} \; ; \; \vec{a}_{3}\cdot\vec{a}_{3} = a_{33} \qquad (2.5)$$

U daljem razmatranju geometrije krive linije $\mathcal{L}$, pogodno je uvesti simetričnu matricu čiji su elementi određeni skalarnim proizvodom:

$$a_{ji} = a_{ij} = \vec{a}_{i}\cdot\vec{a}_{j} \qquad (2.6)$$

Ako postoji $$[\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3] > 0 \qquad (2.7)$$

možemo definisati trijedar recipročnih baznih vektora $\vec{a}^{\,i}$

$$\vec{a}^{\,i}\cdot\vec{a}_{j} = \delta^{i}_{j} \qquad (2.8)$$

Navešćemo neke osobine ovih vektora:

$$a^{ji} = a^{ij} = \vec{a}^{\,i}\cdot\vec{a}^{\,j}$$

$$a^{kj}a_{ji} = \delta^k_i \; ; \; \vec{a}^k \cdot \vec{a}_i = \delta^k_i$$
$$\vec{a}_i = a_{ij}\vec{a}^j \; ; \; \vec{a}^i = a^{ij}\vec{a}_j \qquad (2.9)$$

Odredićemo neke komponente metričkog tenzora:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \sum_{N=2} 2N\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_N} d_{\alpha\beta\alpha_2\dots\alpha_N} +$$
$$+ \sum_{N=2;M=2} NM\theta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_N}\theta^{\beta_2}\dots\theta^{\beta_M} d_{\alpha\beta\alpha_2\dots\alpha_N\beta_2\dots\beta_M}$$

$$g_{\alpha 3} = a_{\alpha 3} + \sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\vec{a}_3\cdot\vec{d}_{\alpha\alpha_2\dots\alpha_N} + \qquad (2.10)$$
$$+ \sum_{N=1;M=2} M\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\theta^{\beta_2}\dots\theta^{\beta_M}\vec{d}_{\alpha_1\dots\alpha_N,3}\cdot\vec{d}_{\alpha\beta_2\dots\beta_M}$$

$$g_{33} = a_{33} + 2\sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\vec{a}_3\cdot\vec{d}_{\alpha_1\dots\alpha_N,3} +$$
$$+ \sum_{N=1;M=1}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\theta^{\beta_1}\dots\theta^{\beta_M}\vec{d}_{\alpha_1\dots\alpha_N,3}\cdot\vec{d}_{\beta_1\dots\beta_M,3}$$

Odavde takođe sledi da elementi matrice (g) prelaze u elemente matrice (a) za $\theta^\alpha \equiv 0$.
Polazeći od baznih vektora $\vec{a}_i$ i odgovarajućih recipročnih vektora $\vec{a}^i$,možemo uvesti matricu (k) :

$$\vec{a}^i\cdot\vec{a}_{j,3} = -\vec{a}^i_{,3}\cdot\vec{a}_j = k^i_j(\theta,t) \qquad (2.11$$

Matrica (k) određuje krivinu i torziju krive $\mathcal{C}$. Tenzor torzije $b_{\alpha\beta}$ i vektor krivine b_α su određeni odgovarajućim skalarnim proizvodima:

$$\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{\beta,3} = b_{\alpha\beta} \quad ; \quad \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,3} = b_\alpha \tag{2.12}$$

Mešovita odnosno kontravarijantna forma ovih veličina je određena sledećim izrazima:

$$\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_{\beta,3} = b^\alpha_\beta \quad ; \quad \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_{3,3} = -\vec{a}^\alpha_{,3} \cdot \vec{a}_3 = b^\alpha$$

$$\vec{a}^\alpha_{,3} \cdot \vec{a}_\beta = -b^\alpha_\beta \quad ; \quad \vec{a}_{\alpha,3} \cdot \vec{a}_3 = -b_\alpha$$

$$\vec{a}^\alpha_{,3} \cdot \vec{a}^\beta = -b^{\alpha\beta} \tag{2.13}$$

Poređenjem (2.11),(2.12) i (2.13) zaključujemo:

$$k^\alpha_\beta = b^\alpha_\beta \quad ; \quad k^\alpha_3 = b^\alpha ; \quad k^3_3 = 0 \tag{2.14}$$

Prema (2.12) i ovde ima mesta sledećoj relaciji:

$$b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta,3} \tag{2.15}$$

Ako $a_{\alpha\beta}$ ne zavisi od koordinate θ onda je $b_{\alpha\beta}$ antisimetrična veličina.

Izvode baznih vektora krive $\mathcal{L}$ po koordinati θ određujemo prema jednačini (2.11).

$$\vec{a}_{i,3} = k^j_i \vec{a}_j \quad ; \quad \vec{a}^i_{,3} = -k^i_j \vec{a}^j \tag{2.16}$$

$$\vec{a}_{\alpha,3} = b^\beta_\alpha \vec{a}_\beta - b_\alpha \vec{a}_3 \quad ; \quad -\vec{a}^\alpha_{,3} = b^\alpha_\beta \vec{a}^\beta + b^\alpha \vec{a}^3$$

$$\vec{a}_{3,3} = b^\beta \vec{a}_\beta \quad ; \quad \vec{a}^3_{,3} = -k^3_\beta \vec{a}^\beta$$

3. Kinematika štapa

U prethodnom poglavlju smo videli da vektor položaja tačaka na krivoj $\mathcal{C}$, trijedar vektora $\vec{a}_i$ kao i vektori $\vec{d}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}$ zavise od podužne koordinate θ i vremena t.
Ako sa tačkom iznad slova obeležimo izvod po vremenu t pri fiksiranoj koordinati θ, to možemo odrediti brzinu proizvoljne tačke diferenciranjem izraza (2.1):

$$\vec{v}^{*} = \dot{\vec{r}}^{*} = \dot{\vec{r}} + \sum_{N=1} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_N} \dot{\vec{d}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} =$$

$$= \vec{v} + \sum_{N=1} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_N} \vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \tag{3.1}$$

U ovome izrazu figurišu oznake za brzinu tačke na krivoj $\mathcal{C}$ $\vec{v}$, za direktorsku brzinu $\vec{w}_\alpha$ i za deplanacione brzine $\vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}$.

$$\vec{w}_\alpha = \dot{\vec{d}}_\alpha \quad ; \quad \dot{\vec{d}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} = \vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \tag{3.2}$$

Promenu baznih vektora $\vec{a}_i$ po vremenu t možemo predstaviti linearnom kombinacijom vektora:

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial t} = \dot{\vec{a}}_i = e_{ki} \vec{a}^{k} \tag{3.3}$$

Veličinu e_{ki} možemo napisati u sledećem obliku:

$$e_{ki} = \vec{a}_k \cdot \dot{\vec{a}}_i \tag{3.4}$$

Rastavićemo ovu veličinu na simetričan i antimetričan deo:

$$e_{(ki)} = \eta_{ki} = \frac{1}{2}(\vec{a}_k \cdot \dot{\vec{a}}_i + \dot{\vec{a}}_k \cdot \vec{a}_i) = \frac{1}{2} \dot{a}_{ki}$$

$$e_{[ki]} = \gamma_{ki} = \frac{1}{2}(\vec{a}_k \cdot \dot{\vec{a}}_i - \dot{\vec{a}}_k \cdot \vec{a}_i) = -\gamma_{ik} \tag{3.5}$$

Imajući u vidu izraze (3.5) pišemo (3.3) u sledećem vidu:

$$\overset{\circ}{\vec{a}}_i = (\eta_{ki} + \gamma_{ki})\vec{a}^k \tag{3.6}$$

Od posebnog interesa je određivanje izvoda kontravarijantnog baznog vektora po vremenu. Diferenciranje veze (2.8) daje:

$$\overset{\circ}{\vec{a}}_i \cdot \vec{a}^j + \vec{a}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{a}}^j = 0$$

Rešimo li ovu jednačinu po $\overset{\circ}{\vec{a}}^j$ to posle unošenja vrednosti za $\overset{\circ}{\vec{a}}_i$ prema (3.6) sledi:

$$\overset{\circ}{\vec{a}}^j = a^{ij}(\gamma_{ki} - \eta_{ki})\vec{a}^k \tag{3.7}$$

Promena brzine tačaka krive ℓ jeste jednaka izvodu po vremenu tangentnog vektora:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) = \overset{\circ}{\vec{a}}_3 = (\gamma_{k3} + \eta_{k3})\vec{a}^k \tag{3.8}$$

Na sličan način određujemo i izvode direktorskih odnosno deplanacionih brzina:

$$\frac{\partial \vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \vec{d}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{d}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial \theta}\right) = \tag{3.9^x}$$

$$= \overset{\circ}{m}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N i}\,\vec{a}^i + m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N i}\, a^{ik}(\gamma_{lk} - \eta_{lk})\vec{a}^l$$

U prethodnom poglavlju smo definisali veličinu $\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 = a_{33}$ kao prvi glavni tenzor krive linije ℓ pa možemo napisati i izraz za elemenat luka iste krive:

$$ds = \sqrt{a_{33}}\, d\theta \tag{3.10}$$

x Vidi jednačinu $(6.9)_3$

Drugi glavni tenzor krive linije smo odredili na sledeći način:

$$\vec{a}^{\,i}_{\,,3} \cdot \overset{\circ}{\vec{a}}_j = -k^{\,i}_{j} \; ; \; \vec{a}^{\,i} \cdot \vec{a}_{j,3} = k^{\,i}_{j} \qquad (3.11)$$

Imajući u vidu ovu veličinu definisaćemo izvod vektorske funkcije $\vec{b} = \vec{b}(\theta, t)$ po koordinati θ :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b^i \vec{a}_i\right) = \frac{\delta b^i}{\delta \theta}\vec{a}_i$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(b_i \vec{a}^{\,i}\right) = \frac{\delta b_i}{\delta \theta}\vec{a}^{\,i} \qquad (3.12)$$

U izrazu (3.12) figurišu oznake za izvod vektorskog polja po njegovom argumentu:

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \theta} = \frac{\partial b^i}{\partial \theta}\vec{a}_i + b^i \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \theta} = \frac{\partial b^i}{\partial \theta}\vec{a}_i + b^i k_i^{\,j}\vec{a}_j =$$

$$= \left(\frac{\partial b^j}{\partial \theta} + k_i^{\,j} b^i\right)\vec{a}_j = \frac{\delta b^j}{\delta \theta}\vec{a}_j \qquad (3.13)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \theta} = \frac{\partial b_i}{\partial \theta}\vec{a}^{\,i} + b_i \frac{\partial \vec{a}^{\,i}}{\partial \theta} = \frac{\partial b_i}{\partial \theta}\vec{a}^{\,i} - b_i k^{\,i}_{j}\vec{a}^{\,j} =$$

$$= \left(\frac{\partial b_j}{\partial \theta} - b_i k^{\,i}_{j}\right)\vec{a}^{\,j} = \frac{\delta b_j}{\delta \theta}\vec{a}^{\,j} \qquad (3.14)$$

Imajući u vidu (3.9),(3.6),(3.2) i (2.2) možemo ispisati još i ove izraze:

$$\vec{w}_\alpha = \overset{\circ}{\vec{a}}_\alpha = \left(\gamma_{k\alpha} + \eta_{k\alpha}\right)\vec{a}^{\,k}$$

$$\frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial \theta} = \overset{\circ}{k}_{\alpha r}\vec{a}^{\,r} + k_\alpha^{\,j}\left(\gamma_{kj} - \eta_{kj}\right)\vec{a}^{\,k}$$

4. Osnovne veličine štapa

Razmatraćemo proizvoljan elemenat štapa ograničen površima $\theta=\alpha$ i $\theta=\beta$ gde je $\beta\geq\theta\geq\alpha$, i omotačem $f(\theta^1,\theta^2)=0$. Označićemo masu po jedinici dužine krive $\mathcal{L}$ sa $\rho(\theta,t)$. Da odredimo ovu veličinu uzećemo da je totalna masa elementa štapa predstavljena izrazom:

$$\iiint \rho^{*}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$

Ovde je sa ρ^{*} označena masa po jedinici zapremine a sa g determinanta metričkog tenzora. Kako je element dužine krive $\mathcal{L}$ određen izrazom (3.1o) to možemo pisati:

$$\iiint \rho^{*}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \int_{\mathcal{L}} \rho\sqrt{a_{33}}\,d\theta$$

Tako smo masu po jedinici dužine krive linije odredili izrazom:

$$\rho\sqrt{a_{33}} = \iint_{\mathcal{A}} \rho^{*}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.1}$$

Kako su θ^i konvektne koordinate a $\rho^{*}\sqrt{g}$ ne zavisi od vremena to ćemo i veličinu $\rho\sqrt{a_{33}}$ smatrati nezavisnom od vremena.

Pri definiciji štapa i opisivanju njegove nedeformisane konfiguracije pretpostavljali smo da je kriva C težišna linija. Pretpostavljajući da posle deformacije kriva C prelazi u krivu $\mathcal{L}$, smatramo da i kriva linija $\mathcal{L}$ spaja težišta poprečnih preseka posle deformacije. Ovaj uslov da je kriva linija $\mathcal{L}$ težišna linija deformisanog štapa ispisujemo u sledećem obliku:

$$\iint_{\mathcal{A}} \rho^{*}\sqrt{g}\,\theta^{\alpha} d\theta^1 d\theta^2 = 0;\ (\alpha=1,2) \tag{4.2}$$

Ovaj integral se odnosi na površinu poprečnog preseka, koja je obeležena sa $\mathcal{A}$. Ovaj uslov (4.2), koji neznatno umanjuje opštost naših razmatranja, proširujemo zahtevom da se on ne menja u toku vremena.

Razmotrićemo sada izraz za kinetičku energiju polazeći od odgovarajućeg izraza za proizvoljan elemenat zapremine:

$$K = \frac{1}{2}\iiint \overset{*}{\rho}\, \vec{v}^{*}\cdot\vec{v}^{*}\sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$

Imajući u vidu izraze (3.1),(4.1) i (4.2) možemo dalje pisati:

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \rho\Big(\vec{v}\cdot\vec{v} + 2\sum_{N=2} i^{\alpha_1\ldots\alpha_N}\vec{v}\cdot\vec{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_N} +$$

$$+\sum_{N=1}\sum_{M=1} i^{\alpha_1\ldots\alpha_N\beta_1\ldots\beta_M}\vec{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\cdot\vec{W}_{\beta_1\ldots\beta_M}\Big)\sqrt{a_{33}}\, d\theta \qquad (4.3)$$

U ovome izrazu figurišu sledeće oznake za inercione koeficiente:

$$\rho\, i^{\alpha_1\ldots\alpha_N}\sqrt{a_{33}} = \iint_a \overset{*}{\rho}\sqrt{g}\,\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_N} d\theta^1 d\theta^2 \qquad (N\geq 2)$$

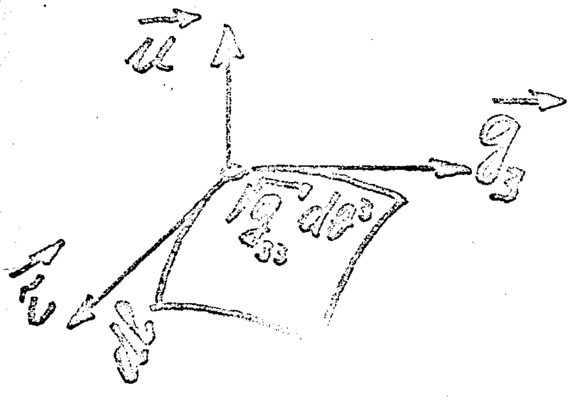
$$\rho\, i^{\alpha_1\ldots\alpha_N\beta_1\ldots\beta_M}\sqrt{a_{33}} = \iint_a \overset{*}{\rho}\sqrt{g}\,\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_N}\theta^{\beta_1}\ldots\theta^{\beta_M} d\theta^1 d\theta^2 \qquad (4.4)$$

Iz izraza (4.4) sledi da svi inercioni koeficienti $i^{\alpha_1\ldots\alpha_N}$ $i^{\alpha_1\ldots\alpha_N\beta_1\ldots\beta_M}$ zavise samo od koordinate θ .

Toplotna energija zavisi od snabdevanja toplotom i od toplotnog fluksa. Ako sa r^{*} obeležimo funkciju snabdevanja toplotom po jedinici mase proizvoljnog elementa zapremine i po jedinici vremena, to uzimajući u obzir i gubitke toplote kroz površinu omotača možemo definisati funkciju snabdevanja toplotom po jedinici mase krive linije $\mathcal{C}$.

$$Q_1 = \iiint \overset{*}{\rho}\, r^{*}\sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 - \iint_m h^{*} dm$$

U ovom izrazu površinski integral treba uzimati po površini omotača $\mathcal{M}$. Izračunaćemo prethodno elemenat površine omotača.



$$dm = dl\sqrt{g_{33}}\,d\theta^3$$

$$dl = d\vec{r}\cdot\vec{t}$$

$$dl = d\theta^i\vec{g}_i\cdot\left(\frac{\vec{g}_3\times\vec{u}}{\sqrt{g_{33}}}\right)$$

$$dl = d\theta^i\vec{g}_i\cdot\left(\frac{\vec{g}_3}{\sqrt{g_{33}}}\times u^j\vec{g}_j\right) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}}\,e_{i3j}\,d\theta^i u^j$$

$$dl = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}}\left(-d\theta^1 u^2 + d\theta^2 u^1\right)$$

$$dm = \sqrt{g}\left(u^1 d\theta^2 - u^2 d\theta^1\right) \quad (4.5)$$

Unoseći izraz (4.5) u izraz za Q_1 možemo definisati funkciju snabdevanja toplotom r po jedinici mase krive linije ℓ i po jedinici vremena:

$$\rho r\sqrt{a_{33}} = \iint_a \rho^* r^*\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 - \int_l h^*\left(u^1 d\theta^2 - u^2 d\theta^1\right)\sqrt{g} \quad (4.6)$$

Prvi integral se uzima po površini poprečnog preseka a, a drugi duž konture l koja je određena presekom površi omotača sa površi poprečnog preseka.

$$f(\theta^1,\theta^2) = 0 \quad ; \quad \theta = const \qquad (l) \qquad (4.7)$$

Razmotrićemo sada izvesne veličine koje se prenose preko poprečnog preseka. Prethodno ćemo odrediti elementarnu površinu ovog preseka: $da = |d\theta^1\vec{g}_1\times d\theta^2\vec{g}_2|$

$$da=|\vec{g}_1\times\vec{g}_2|d\theta^1 d\theta^2=\sqrt{g\,g^{33}}\,d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.8}$$

Ako sa h^* obeležimo toplotni fluks po jedinici površine tada možemo definisati i toplotni fluks duž krive linije $\mathcal{L}$.

$$h=\iint_a h^*\sqrt{g\,g^{33}}\,d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.9}$$

Preostaje da se još definišu sile i momenti štapa i to kako zapréminske tako i sile i momenti poprečnog preseka.

Označićemo sa $\vec{P}$ zadatu površinsku silu koja deluje na površinu omotača. Ako je dm elemenat ove površine, onda je rezultujuća zapreminska sila zajedno sa površinskim silama nekog dela štapa određena izrazom:

$$\iiint \rho^*\vec{f}^*\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3+\iint_m \vec{P}\,dm$$

Vektor napona $\vec{t}$ na površini sa jediničnom normalom $\vec{u}$ možemo predstaviti u sledećem obliku:

$$\vec{t}=\frac{u_i}{\sqrt{g}}\vec{T}^i \quad ; \quad \vec{u}=u_i\vec{g}^i=u^i\vec{g}_i \tag{4.10}$$

Ovde smo sa $\vec{T}^i$ označili sledeću veličinu:

$$\vec{T}^i=\sqrt{g}\,\tau^{ij}\vec{g}_j \tag{4.11}$$

U izrazu (4.11) figuriše simetrični kontravarijantni tenzor napona τ^{ij}. Kako zadate površinske sile $\vec{P}$ deluju na konturnoj površini štapa tj. na omotaču, to ima mesta sledeća jednakost:

$$\vec{t}=\vec{P} \tag{4.12}$$

pa izraz za rezultujuću zapreminsku silu glasi:

$$\iiint \rho^*\vec{f}^*\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3+\iint_m \frac{u_i}{\sqrt{g}}\vec{T}^i dm \tag{4.13}$$

Unesemo li u drugi integral izraza (4.13) vrednost za dm prema (4.5), dobićemo:

$$\iiint \rho^{*} \vec{F}^{*} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 + \iint_{m} (\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1) d\theta^3 \tag{4.14}$$

Imajući u vidu izraz (4.14) možemo definisati zapreminske sile $\vec{F}$ po jedinici mase linije $\mathcal{L}$:

$$\rho \vec{F} \sqrt{a_{33}} = \iint_{a} \rho^{*} \vec{F}^{*} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 + \int_{\ell} (\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1) \tag{4.15}$$

Na sličan način se mogu definisati i momenti zapreminskih i površinskih sila. Ove momente neki autori nazivaju zapreminskim direktorskim silama $\vec{\ell}^{\,\alpha_1 \ldots \alpha_N}$ koje deluju po jedinici mase linije $\mathcal{L}$:

$$\rho \vec{\ell}^{\,\alpha_1 \ldots \alpha_N} \sqrt{a_{33}} = \iint_{a} \rho^{*} \vec{F}^{*} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_N} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 + \int_{\ell} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_N} (\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1) \tag{4.16}$$

Razmatrajući deo štapa moramo dejstvo uklonjenih delova zameniti silama i momentima poprečnog preseka. Imajući u vidu izraz (4.10) definišemo ove veličine na sledeći način:

$$\vec{N} = \iint_{a} \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.17}$$

$$\vec{M}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} = \iint_{a} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_N} \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.18}$$

Unutrašnju energiju štapa U po jedinici mase krive linije $\mathcal{L}$ možemo odrediti ako poznajemo unutrašnju energiju U^{*} po jedinici mase proizvoljnog elementa zapremine. Tako možemo pisati:

$$\rho U \sqrt{a_{33}} = \iint_{a} \rho^{*} U^{*} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 \tag{4.19}$$

5. Jednačina energije

Jednačina energije proizvoljnog elementa zapremine v ograničenog površinom s u trenutku t jeste određena izrazom:

$$\frac{d}{dt}\int_v \left(u^* + \frac{1}{2}\vec{v}^*\cdot\vec{v}^*\right)\rho^* dv =$$

$$\int_v \left(r^* + \vec{f}^*\cdot\vec{v}^*\right)\rho^* dv + \int_s \left(\vec{t}\cdot\vec{v}^* - h^*\right) ds \tag{5.1}$$

U prethodnom poglavlju smo se upoznali sa svim veličinama koje figurišu u ovoj jednačini energije. Elemenat zapremine dv je određen na sledeći način:

$$dv = \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \; ; \; g = \det g_{ij} \tag{5.2}$$

Veličina $\rho^*\sqrt{g}$ jeste nezavisna od vremena prema zakonu o konzervaciji mase. Budući da se razmatra deo štapa ograničen površima $\theta=\alpha$ i $\theta=\beta$, gde je $\beta \geq \theta \geq \alpha$ i površi omotača $f(\theta^1,\theta^2)=0$, to će se integrali duž krive C uzimati od Φ_1 do Φ_2, gde je $\alpha \leq \Phi_1 \leq \theta \leq \Phi_2 \leq \beta$.

Razmotrićemo podrobno poslednji integral jednačine energije. Toplotni fluks kroz površinu s računaćemo izvršivši prethodno sledeću transformaciju:

$$\int_s h^* ds = \int_s h^{*j} ds_j = \int_v h^{*j}{}_{,j}\, dv \tag{5.3}$$

Divergenciju toplotnog fluksa prikazaćemo u sledećem vidu:

$$\operatorname{div}\vec{h}^* = h^{*j}{}_{,j} = \partial_j h^{*j} + \Gamma^j_{jl} h^{*l}$$

$$= \partial_j h^{*j} + \partial_l \ln\sqrt{g}\, h^{*l} = \partial_j h^{*j} + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j \sqrt{g}\, h^{*j}$$

$$\operatorname{div}\vec{h}^* = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,\partial_j h^{*j} + h^{*j}\partial_j\sqrt{g}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j\left(\sqrt{g}\, h^{*j}\right) \tag{5.4}$$

Unesemo li izraz za divergenciju vektora prema (5.4) u (5.3), dobićemo:

$$\int_s h^{\alpha} ds = \int_v \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g}\, h^{\alpha i}) dv$$

$$\int h^{\alpha} ds = \int_v \partial_i (\sqrt{g}\, h^{\alpha i}) d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (J_1 + J_2) d\theta$$

$$J_1 = \iint_a \partial_\alpha (\sqrt{g}\, h^{\alpha\alpha}) d\theta^1 d\theta^2 \;;\; J_2 = \iint_a \partial_3 (\sqrt{g}\, h^{\alpha 3}) d\theta^1 d\theta^2$$

Imajući u vidu Grinovu formulu za transformaciju površinskog u krivolinijski integral, možemo izračunati integral J_1. (Vidi na pr. Spravočnik po matematike, Bronštejn i Semendjajev, Moskva 1957, str. 545).

$$J_1 = \iint_a \left[\frac{\partial (\sqrt{g}\, h^{\alpha 1})}{\partial \theta^1} + \frac{\partial (\sqrt{g}\, h^{\alpha 2})}{\partial \theta^2} \right] d\theta^1 d\theta^2 =$$

$$= \oint_l \sqrt{g} (-h^{\alpha 2} d\theta^1 + h^{\alpha 1} d\theta^2) = \oint_l \sqrt{g}\, h^{\alpha} (u^1 d\theta^2 - u^2 d\theta^1) \tag{5.5}$$

Što se tiče integrala J_2, to možemo, obzirom na (4.9) pisati:

$$J_2 = \iint_a \partial_3 (\sqrt{g}\, h^{\alpha 3}) d\theta^1 d\theta^2 = \partial_3 \iint_a \sqrt{g}\, h^{\alpha 3} d\theta^1 d\theta^2$$

$$J_3 = \partial_3 \iint_a \sqrt{g g^{33}}\, h^{\alpha} d\theta^1 d\theta^2 = \partial_3 h \tag{5.6}$$

Drugi deo površinskog integrala u jednačini energije (5.1) predstavlja efekat rada sila i momenata poprečnog preseka:

$$E = \int_s \vec{t} \cdot \vec{v}^{*} ds$$

Imajući u vidu izraze (4.1o) možemo efekat rada transformisati:

$$E = \int_s \vec{t} \cdot \vec{v}^{*} ds = \int_s \vec{v}^{*} \cdot \vec{T}^{i} \frac{u_i}{\sqrt{g}} ds = \int_s \vec{v}^{*} \cdot \frac{\vec{T}^{i}}{\sqrt{g}} ds_i$$

$$E = \int_v \left(\vec{v}^{*} \cdot \frac{\vec{T}^{i}}{\sqrt{g}}\right)_{,i} dv = \int_v \left(\vec{v}^{*} \cdot \frac{\vec{T}^{i}}{\sqrt{g}}\right)_{,i} \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$

(5.7)

Ako izraz u zagradi smatramo vektorom, to primenjujući i na njega formulu za divergenciju slično kao kod (5.4), dobićemo:

$$\int_{\Gamma} \vec{t} \cdot \vec{v}^{*} d\Gamma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left\{ \iint_a \partial_i (\vec{T}^{i} \cdot \vec{v}^{*}) d\theta^1 d\theta^2 \right\} d\theta^3 \tag{5.8}$$

Grinova transformacija daje sledeće rezultate:

$$E = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left\{ \iint_a \left[\frac{\partial(\vec{T}^{1} \cdot \vec{v}^{*})}{\partial\theta^1} + \frac{\partial(\vec{T}^{2} \cdot \vec{v}^{*})}{\partial\theta^2} \right] d\theta^1 d\theta^2 + \right.$$

$$\left. + \partial_3 \iint_a (\vec{T}^{3} \cdot \vec{v}^{*}) d\theta^1 d\theta^2 \right\} d\theta$$

$$E = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left\{ \int_l \vec{v}^{*} (\vec{T}^{1} d\theta^2 - \vec{T}^{2} d\theta^1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\vec{N} \cdot \vec{v} + \sum_{N=1} \vec{M}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \cdot \vec{W}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \right) \right\} d\theta \tag{5.9}$$

Imajući u vidu rezultate (5.5), (5.6) i (5.9) kao i definicije osnovnih veličina iz prethodnog poglavlja, to jednačinu energije (5.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \left(U + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \sum_{N=1} l^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \vec{v} \cdot \vec{W}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{N=1} \sum_{M=1} l^{\alpha_1 \dots \alpha_N \beta_1 \dots \beta_M} \vec{W}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \cdot \vec{W}_{\beta_1 \dots \beta_M} \right) \sqrt{a_{33}} \, d\theta =$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho \left(r + \vec{f} \cdot \vec{v} + \sum_{N=1} \vec{l}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \cdot \vec{W}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \right) \sqrt{a_{33}} \, d\theta +$$

$$+ \left[\vec{N} \cdot \vec{v} + \sum_{N=1} \vec{M}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \cdot \vec{W}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} - h \right]_{\phi_1}^{\phi_2} \tag{5.10}$$

sle izvršenja naznačenih operacija jednačinu energije pišemo u edećem vidu :

$$r - \lambda \dot{U} + \left(\lambda \vec{F} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta}\right) \cdot \vec{v} + \vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} +$$

$$\left(\lambda \vec{q}^{\,\alpha} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha}}{\partial \theta}\right) \cdot \vec{w}_{\alpha} + \sum_{N=2} \left(\lambda \vec{q}^{\,\alpha_1 .. \alpha_N} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha_1 .. \alpha_N}}{\partial \theta}\right) \cdot \vec{w}_{\alpha_1 .. \alpha_N} +$$

$$\vec{M}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{w}_{\alpha}}{\partial \theta} + \sum_{N=2} \vec{M}^{\alpha_1 .. \alpha_N} \cdot \frac{\partial \vec{w}_{\alpha_1 .. \alpha_N}}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (5.11)$$

vde su uvedene sledeće oznake :

$$\lambda(\theta) = \rho \sqrt{a_{33}}$$

$$\vec{F} = \vec{f} - \dot{\vec{v}} - \sum_{N=2} i^{\alpha_1 .. \alpha_N} \dot{\vec{W}}_{\alpha_1 .. \alpha_N}$$

$$\vec{q}^{\,\alpha} = \vec{l}^{\,\alpha} - \sum_{N=1} i^{\alpha \gamma_1 .. \gamma_N} \dot{\vec{W}}_{\gamma_1 .. \gamma_N} \qquad (5.12)$$

$$\vec{q}^{\,\alpha_1 .. \alpha_n} = \vec{l}^{\,\alpha_1 .. \alpha_n} - i^{\alpha_1 .. \alpha_n} \dot{\vec{v}} -$$

$$- \sum_{N=1} i^{\alpha_1 .. \alpha_n \gamma_1 .. \gamma_N} \dot{\vec{W}}_{\gamma_1 .. \gamma_N} \qquad (n \geq 2)$$

6. Osnovne jednačine kretanja

U ovome poglavlju ćemo odrediti jednačine kretanja štapa kao rezultat zahteva o invarijantnosti jednačine energije pri takvim kretanjima koja se od stvarnih kretanja razlikuju samo za superponirane brzine translacije, rotacije i brzine deplanacije u skladu sa novo-uvedenim stepenima slobode.

Ako sa $\vec{v}_0$ obeležimo vektor uniformne translacije, sa $\vec{\omega}$ vektor uniformne rotacije, sa $\vec{W}_{\alpha_1..\alpha_N 0}$ vektore uniformne deplanacije, to obeležavajući promenjene brzine sa vertikalnom crticom možemo napisati :

$$\vec{v}^{*\prime} = \vec{v}^{\prime} + \theta^{\alpha}\vec{W}_{\alpha}^{\prime} + \sum_{N=2}\theta^{\alpha_1}..\theta^{\alpha_N}\vec{W}^{\prime}_{\alpha_1..\alpha_N} =$$

$$= \vec{v}^{*} + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{*} + \sum_{N=2}\theta^{\alpha_1}...\theta^{\alpha_N}\vec{W}_{\alpha_1..\alpha_N 0}$$

Odavde sledi :

$$\vec{v}^{\prime} = \vec{v} + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{W}_{\alpha}^{\prime} = \vec{W}_{\alpha} + \vec{\omega}\times\vec{a}_{\alpha}$$

$$\vec{W}^{\prime}_{\alpha_1..\alpha_N} = \vec{W}_{\alpha_1..\alpha_N} + \vec{\omega}\times\vec{d}_{\alpha_1..\alpha_N} + \vec{W}_{\alpha_1..\alpha_N 0} \quad (N\geq 2) \qquad (6,1)$$

Za direktore ćemo pretpostaviti da im se dužina ne menja pri superpoziciji brzina. Tako će promena ovih vektora posle superpozicije biti posledica uniformne rotacije pa možemo pisati :

$$\mathring{\vec{a}}_i^{\prime} = \mathring{\vec{a}}_i + \vec{\omega}\times\vec{a}_i$$

Unesemo li ovaj izraz u jednakost (3.5) dobićemo :

$$2\eta_{ik}^{\prime} = \vec{a}_k\cdot(\mathring{\vec{a}}_i + \vec{\omega}\times\vec{a}_i) + \vec{a}_i\cdot(\mathring{\vec{a}}_k + \vec{\omega}\times\vec{a}_k)$$

$$2\eta_{ik}^{\prime} = \vec{a}_k\cdot\mathring{\vec{a}}_i + \vec{a}_i\cdot\mathring{\vec{a}}_k + \vec{a}_k\cdot(\vec{\omega}\times\vec{a}_i) + \vec{a}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{a}_k)$$

Kako se promenom mesta vektora u mešovitom vektorskom proizvodu menja znak, to sledi :

$$2\eta_{ik}^{\prime} = 2\eta_{ik} \qquad (6.2)$$

Na sličan način možemo odrediti i veličinu γ'_{ik}:

$$2\gamma'_{ki} = \vec{a}_k \circ (\mathring{\vec{a}}_i + \vec{\omega} \times \vec{a}_i) - \vec{a}_i \circ (\mathring{\vec{a}}_k + \vec{\omega} \times \vec{a}_k)$$

$$2\gamma'_{ki} = 2\gamma_{ki} - 2\varepsilon_{kim}\,\omega^m \qquad (6.3)$$

Ovde smo upotrebili oznaku $\vec{\omega} = \omega^m \vec{a}_m$

Pretpostavićemo da se sledeće veličine neće menjati pri superponiranim uniformnim brzinama translacije :

$$\rho,\ U,\ r,\ h,\ \vec{F},\ \vec{Q}^{\alpha},\ \vec{Q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N},\ \vec{N},\ \vec{M}^{\alpha};\ \vec{M}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N}$$

Unesemo li u jednačinu energije umesto $\vec{v}$ veličinu $\vec{v} + \vec{v}_0$ to zahtev invarijantnosti jednačine energije može biti zadovoljen samo tada kad izjednačimo sa nulom sve članove uz $\vec{v}_0$. Tako dobijamo vektorsku jednačinu kretanja:

$$\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.4)$$

Upotrebićemo jednačinu (6.4) za uprošćenje jednačine energije:

$$\rho r - \rho \mathring{U} + \vec{N} \circ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \left(\rho \vec{Q}^{\alpha} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha}}{\partial \theta}\right) \circ \vec{w}_{\alpha} +$$

$$+ \sum_{N=2} \left(\rho \vec{Q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial \theta}\right) \circ \vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} + \vec{M}^{\alpha} \circ \frac{\partial \vec{w}_{\alpha}}{\partial \theta} +$$

$$+ \sum_{N=2} \vec{M}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \circ \frac{\partial \vec{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.5)$$

Zahtev za invarijantnost jednačine energije pri superponiranim uniformnim brzinama deplanacije daje sledeći sistem jednačina:

$$\rho \vec{Q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N}}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.6) \qquad (N = 2, 3, \ldots n)$$

Kompletiranje zahteva invarijantnosti postižemo superpozisijom uniformne rotacije i zahtevom za anuliranje svih članova uz vektor uniformne rotacije. Imajući u vidu uprošćenje jednačine (6.5) kao posledicu sistema jednačina (6.6), to unoseći brzine posle superpozicije prema jednakostima (6.1) jednačina energije postaje :

$$v - \lambda \dot{U} + \vec{N}\cdot\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \vec{\omega}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) +$$
$$+ \left(\lambda \vec{Q}^{\alpha} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha}}{\partial \theta}\right)\cdot\left(\vec{v}_{\alpha} + \vec{\omega}\times\vec{a}_{\alpha}\right) +$$
$$+ \vec{M}^{\alpha}\cdot\left(\frac{\partial \vec{w}_{\alpha}}{\partial \theta} + \vec{\omega}\times\frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial \theta}\right) + \qquad (6.7)$$
$$+\sum_{N=2} \vec{M}^{\alpha_1..\alpha_N}\cdot\left(\frac{\partial \vec{w}_{\alpha_1...\alpha_N}}{\partial \theta} + \vec{\omega}\times\frac{\partial \vec{d}_{\alpha_1...\alpha_N}}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$$

Novu vektorsku jednačinu kretanja pišemo u sledećem vidu :

$$\vec{a}_3\times\vec{N} + \vec{a}_{\alpha}\times\left(\lambda\vec{Q}^{\alpha} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha}}{\partial \theta}\right) + \qquad (6.8)$$
$$+ \frac{\partial \vec{a}_{\alpha}}{\partial \theta}\times\vec{M}^{\alpha} + \sum_{N=2}\frac{\partial \vec{d}_{\alpha_1...\alpha_N}}{\partial \theta}\times\vec{M}^{\alpha_1..\alpha_N} = 0$$

Dalje uprošćenje jednačine energije možemo izvršiti posle prelaza na komponentni oblik. Služeći se baznim vektorima krive linije $\mathcal{L}$ predstavićemo sledeće veličine u komponentnoj formi :

$$\vec{d}_{\alpha_1..\alpha_N} = d_{\alpha_1..\alpha_N i}\,\vec{a}^{i} = d_{\alpha_1..\alpha_N}{}^{i}\,\vec{a}_i$$
$$\frac{\partial \vec{d}_{\alpha_1...\alpha_N}}{\partial \theta} = m_{\alpha_1..\alpha_N i}\,\vec{a}^{i} = m_{\alpha_1..\alpha_N}{}^{i}\,\vec{a}_i$$
$$m_{\alpha_1..\alpha_N i} = \frac{\partial d_{\alpha_1..\alpha_N i}}{\partial \theta} - d_{\alpha_1..\alpha_N j}\,k_i{}^{j}$$
$$d_{\alpha i} = a_{\alpha i} \quad ; \quad m_{\alpha i} = k_{\alpha i}$$
$$\vec{F} = F^{i}\vec{a}_i \quad ; \quad \vec{Q}^{\alpha_1..\alpha_N} = Q^{\alpha_1..\alpha_N i}\,\vec{a}_i$$
$$\vec{N} = N^{i}\vec{a}_i \quad ; \qquad (6.9)$$
$$\vec{M}^{\alpha_1..\alpha_N} = M^{\alpha_1..\alpha_N i}\,\vec{a}_i$$

Jednačina energije (6.7) napisana u komponentnom obliku glasi:

$$\rho r - \rho \mathring{U} + N^{i}(\gamma_{i3} + \eta_{i3}) + \left(\rho q^{\alpha i} + \frac{\partial H^{\alpha i}}{\partial \theta}\right)(\gamma_{i\alpha} + \eta_{i\alpha}) +$$
$$+ M^{\alpha i}\mathring{k}_{\alpha i} + M^{\alpha i} k_{\alpha}^{\cdot j}(\gamma_{ij} - \eta_{ij}) +$$
$$+ \sum_{N=2} M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N i}\, \mathring{m}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N i} + \qquad (6.10)$$
$$+ \sum_{N=2} M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N i}\, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\cdot j}(\gamma_{ij} - \eta_{ij}) - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$$

Sve članove jednačine (6.lo) koji sadrže množitelj γ_{ij} možemo grupisati tako da u zagradi stoji izraz čiju jednakost nuli iskazuje komponentna forma jednačine (6.8) :

$$\left(\rho q^{\nu\mu} + \frac{\partial H^{\nu\mu}}{\partial \theta}\right) - \left(\rho q^{\mu\nu} + \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial \theta}\right) + M^{\alpha\mu} k_{\alpha}^{\cdot\nu} -$$
$$- M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot\mu} + \sum_{N=2}\Big(M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N \mu}\, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\cdot\nu} -$$
$$- M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N \nu}\, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\cdot\mu}\Big) = 0 \qquad (6.11)$$

$$\left(\rho q^{\nu 3} + \frac{\partial H^{\nu 3}}{\partial \theta}\right) - N^{\nu} + M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot\nu} -$$
$$- M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot 3} + \sum_{N=2}\Big(M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N 3}\, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\cdot\nu} -$$
$$- M^{\alpha_1 \ldots \alpha_N \nu}\, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\cdot 3}\Big) = 0 \qquad (6.12)$$

Na kraju ćemo napisati i sažeti oblik jednačine energije :

$$\rho r - \rho \dot{U} + n^{(\lambda\mu)} \eta_{\lambda\mu} + n^{\lambda} \eta_{\lambda 3} + n\, \eta_{33} + M^{\alpha i} \dot{k}_{\alpha i} + \sum_{N=2} M^{\alpha_1 \dots \alpha_N i} \dot{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_N i} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.13)$$

U ovoj jednačini figurišu i nove veličine čije je dejstvo vezano za rad na odgovarajućim komponentama tenzora deformacije:

$$n = N^{3} - M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot 3} - \sum_{N=2} M^{\alpha_1 \dots \alpha_N 3} m_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\;3} -$$

$$n^{\lambda} = N^{\lambda} + \left(\rho Q^{\lambda 3} + \frac{\partial M^{\lambda 3}}{\partial \theta}\right) - 2 M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot \lambda} - 2 \sum_{N=2} M^{\alpha_1 \dots \alpha_N 3} m_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\;\lambda}$$

$$2 n^{(\lambda\mu)} = \left(\rho Q^{\lambda\mu} + \frac{\partial M^{\lambda\mu}}{\partial \theta}\right) + \left(\rho Q^{\mu\lambda} + \frac{\partial M^{\mu\lambda}}{\partial \theta}\right) - \left(M^{\alpha\lambda} k_{\alpha}^{\cdot \mu} + M^{\alpha\mu} k_{\alpha}^{\cdot \lambda}\right) - \sum_{N=2} \left(M^{\alpha_1 \dots \alpha_N \lambda} m_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\;\mu} + M^{\alpha_1 \dots \alpha_N \mu} m_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\;\lambda}\right)$$

$$(6.14)$$

7. Termoelastični štapovi

Pri razmatranju temperaturnih uticaja pogodno je raditi sa Helmholcovom slobodnom energijom.Ako sa A^* obeležimo slobodnu energiju po jedinici mase proizvoljnog elementa zapremine tada je slobodna energija po jedinici mase štapa odredjena izrazom :

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,A = \lambda A = \iint_a \rho^* \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 \qquad (7.1)$$

U trodimenzionoj termoelastičnoj teoriji je poznata sledeća veza:

$$A^* = U^* - T^* S^* \qquad (7.2)$$

Ovde je sa T^* označena apsolutna temperatura proizvoljnog elementa zapremine,sa S^* entropija po jedinici mase.Sledeći (2.1) prikazaćemo temperaturu proizvoljnog elementa zapremine preko homogene temperature i njenih gradijenata :

$$T^* = T + \sum_{N=1} \theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_N}\, T_{\alpha_1\ldots\alpha_N} \qquad (7.3)$$

Unoseći (7.3) u (7.2) to posle množenja sa $\rho^*\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2$ i integracije po površini poprečnog preseka dobijamo izraz za slobodnu energiju po jedinici mase štapa u funkciji od homogene temperature i njenih gradijenata,entropije po jedinici mase štapa i njenih momenata prvog,drugog i viših redova S, S^{α} i $S^{\alpha_1\ldots\alpha_N}$:

$$\lambda A = \iint_a \rho^* U^* \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 - \iint_a \rho^* S^* \sqrt{g}\Big(T + \sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_N} T_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\Big) d\theta^1 d\theta^2$$

$$\lambda A = \lambda U - \lambda S T - \lambda \sum_{N=1} S^{\alpha_1\ldots\alpha_N} T_{\alpha_1\ldots\alpha_N} \qquad (7.4)$$

Posle diferenciranja izraza (7.4) po vremenu napisaćemo isti izraz u sledećem obliku :

$$\lambda \mathring{U} = \lambda \mathring{A} + \lambda(\mathring{S} T + S \mathring{T}) + \qquad (7.5)$$

$$+ \lambda \sum_{N=1} \big(\mathring{S}^{\alpha_1\ldots\alpha_N} T_{\alpha_1\ldots\alpha_N} + S^{\alpha_1\ldots\alpha_N} \mathring{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\big)$$

Unesemo li izraz (7.5) u jednačinu energije (6.13),dobićemo :

$$\rho r-\rho\Big[\mathring{A}+\mathring{T}S+T\mathring{S}+\sum_{N=1}\big(\mathring{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}S^{\alpha_1\ldots\alpha_N}+$$

$$+T_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\mathring{S}^{\alpha_1\ldots\alpha_N}\big)\Big]+n^{(\partial\mu)}\eta_{\partial\mu}+n^{\partial}\eta_{\partial 3}+n\eta_{33}+$$

$$+M^{\alpha i}\mathring{k}_{\alpha i}+\sum_{N=2}M^{\alpha_1\ldots\alpha_N i}\mathring{m}_{\alpha_1\ldots\alpha_N i}-\frac{\partial h}{\partial\theta}=0 \qquad (7.6)$$

Poznata je jednačina trodimenzione teorije termoelastičnosti

$$S^{*}=-\frac{\partial A^{*}}{\partial T^{*}} \qquad (7.7)$$

iz koje sledi da je temperatura argument slobodne energije i da je ovu vezu moguće napisati u nešto širem obliku:

$$S^{*}=-\frac{\partial A^{*}}{\partial T}-\frac{\partial A^{*}}{\partial T_{\alpha}}\frac{1}{\theta^{\alpha}}-\sum_{N=2}\frac{\partial A^{*}}{\partial T_{\alpha_1\ldots\alpha_N}}\frac{1}{\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_N}} \qquad (7.8)$$

Odavde se može zaključiti da je Helmholcova slobodna energija funkcija sledećih argumenata :

$$A=A(T,T_{\alpha_1\ldots\alpha_n},\gamma_{ij},k_{\alpha i},m_{\alpha_1\ldots\alpha_n}) \qquad (7.9)$$

Ovde je sa γ_{ij} označen tenzor deformacije za okolinu težišne ose štapa a određen je razlikom metričkih tenzora pre i posle deformacije :

$$\gamma_{ij}=a_{ij}-A_{ij}\ ;\quad \mathring{\gamma}_{ij}=\mathring{a}_{ij}=2\eta_{ij} \qquad (7.10)$$

Imajući u vidu zavisnost (7.9) napisaćemo izvod po vremenu Helmholcove slobodne energije :

$$\mathring{A}=\frac{\partial A}{\partial T}\mathring{T}+\sum_{N=1}\frac{\partial A}{\partial T_{\alpha_1\ldots\alpha_N}}\mathring{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}+\frac{\partial A}{\partial\gamma_{ij}}\mathring{\gamma}_{ij}+$$

$$+\frac{\partial A}{\partial k_{\alpha i}}\mathring{k}_{\alpha i}+\sum_{N=2}\frac{\partial A}{\partial m_{\alpha_1\ldots\alpha_N i}}\mathring{m}_{\alpha_1\ldots\alpha_N i} \qquad (7.11)$$

Posle unošenja izraza za $\dot{A}$ prema (7.11) u jednačinu energije (7.6) dobićemo jednačinu energije u obliku pogodnom za određivanje sistema konstitutivnih jednačina :

$$\rho r-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial T}+S\right)\dot{T}-\rho T\dot{S}-\rho\sum_{N=1}T_{\alpha_1..\alpha_N}\dot{S}^{\alpha_1..\alpha_N}-$$

$$-\rho\sum_{N=1}\left(\frac{\partial A}{\partial T_{\alpha_1..\alpha_N}}+S^{\alpha_1..\alpha_N}\right)\dot{T}_{\alpha_1..\alpha_N}-$$

$$-\left(\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{\nu\beta}}-\frac{1}{2}n^{(\nu\beta)}\right)\dot{\gamma}_{\nu\beta}-\left(\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{\nu 3}}-\frac{1}{2}n^{\nu}\right)\dot{\gamma}_{\nu 3}-$$

$$-\left(\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{33}}-\frac{1}{2}n\right)\dot{\gamma}_{33}-\left(\rho\frac{\partial A}{\partial k_{\alpha i}}-M^{\alpha i}\right)\dot{k}_{\alpha i}-$$

$$-\sum_{N=2}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial m_{\alpha_1..\alpha_N i}}-M^{\alpha_1..\alpha_N i}\right)\dot{m}_{\alpha_1..\alpha_N i}-\frac{\partial h}{\partial \theta}=0 \qquad (7.12)$$

$$S=-\frac{\partial A}{\partial T}\ ;\quad S^{\alpha_1..\alpha_N}=-\frac{\partial A}{\partial T_{\alpha_1..\alpha_N}}\ ;\ (N=1,2,..n) \qquad (7.13)$$

$$n=2\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{33}}\ ;\quad n^{\nu}=2\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{\nu 3}}\ ;\quad n^{(\nu\beta)}=2\rho\frac{\partial A}{\partial \gamma_{\nu\beta}} \qquad (7.14)$$

$$M^{\alpha i}=\rho\frac{\partial A}{\partial k_{\alpha i}}\ ;\quad M^{\alpha_1..\alpha_N i}=\rho\frac{\partial A}{\partial m_{\alpha_1..\alpha_N i}} \qquad (7.15)$$

Pomoću konstitutivnih jednačina (7.13),(7.14) i (7.15) vršimo dalje uprošćenje jednačine energije :

$$\rho r-\rho T\dot{S}-\sum_{N=1}\rho T_{\alpha_1..\alpha_N}\dot{S}^{\alpha_1..\alpha_N}-\frac{\partial h}{\partial \theta}=0 \qquad (7.16)$$

Potpun sistem jednačina dobijamo tek posle određivanja konstitutivne veze za h.

Ispisaćemo potpun sistem jednačina koje određuju kretanje štapa.

$$\lambda F^{i} + \frac{\delta N^{i}}{\delta\theta} = 0$$

$$\lambda q^{\alpha_1 .. \alpha_N i} + \frac{\delta M^{\alpha_1 .. \alpha_N i}}{\delta\theta} = 0 \qquad (N = 1, 2, .. n)$$

$$\left(\lambda q^{\nu\mu} + \frac{\partial M^{\nu\mu}}{\partial\theta}\right) - \left(\lambda q^{\mu\nu} + \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial\theta}\right) + M^{\alpha\mu} k_{\alpha}{}^{\cdot\nu} -$$

$$- M^{\alpha\nu} k_{\alpha}{}^{\cdot\mu} + \sum_{N=2} \left(M^{\alpha_1 .. \alpha_N \mu} m_{\alpha_1 .. \alpha_N}{}^{\nu} -\right.$$

$$\left. - M^{\alpha_1 .. \alpha_N \nu} m_{\alpha_1 .. \alpha_N}{}^{\mu}\right) = 0$$

$$\left(\lambda q^{\nu 3} + \frac{\partial M^{\nu 3}}{\partial\theta}\right) - N^{\nu} + M^{\alpha 3} k_{\alpha}{}^{\cdot\nu} -$$

$$- M^{\alpha\nu} k_{\alpha}{}^{\cdot 3} + \sum_{N=2} \left(M^{\alpha_1 .. \alpha_N 3} m_{\alpha_1 .. \alpha_N}{}^{\nu} -\right.$$

$$\left. - M^{\alpha_1 .. \alpha_N \nu} m_{\alpha_1 .. \alpha_N}{}^{3}\right) = 0$$

$$m_{\alpha_1 .. \alpha_N i} = \frac{\delta d_{\alpha_1 .. \alpha_N i}}{\delta\theta} \qquad (7.17)$$

Ovaj sistem jednačina (7.17) zajedno sa sistemom konstitutivnih jednačina (7.13) do (7.15) kao i redukovana jednačina energije (7.16) i jednačine za n, n^{λ} i $n^{(\lambda\beta)}$ (6.14), čine jedan potpun sistem jednačina kome nedostaje samo konstitutivna veza za h.

Pri pisanju izraza za slobodnu energiju A treba koristiti izvesnu simetriju deformacionih veličina $\gamma_{\alpha\beta}$ i $m_{\alpha_1 .. \alpha_N i}$.

8. Clausius-Duhem-ova nejednakost

Prirodni procesi se definišu kao tokovi koji jedan sistem iz određenog početnog stanja prevode u konačno stanje. U opštem slučaju svi ovakvi procesi su ireverzibilni.
Da bi utvrdili da li je jedan ovakav proces reverzibilan, ireverzibilan ili nemoguć uvodi se karakteristična veličina stanja koju nazivamo entropijom i obeležavamo sa S^*. Matematička formulacija ove veličine je količnik promene toplote u odnosu na apsolutnu temperaturu :

$$dS^* = \frac{dQ^*}{T^*} \tag{8.1}$$

Veličinu dS^* obično rastavljamo na reverzibilni i ireverzibilni deo. Pri tome se doznačena entropija sistemu prikazuje kao količnik toplote doznačene spolja i apsolutne temperature i tretira kao njen reverzibilni deo, dok se proizvodnja entropije unutar jednoga sistema tretira kao ireverzibilni deo.
Svi ireverzibilni procesi imaju proizvodnju entropije veću od nule, dok je ona kod reverzibilnih procesa jednaka nuli.
Značajni uslovi za obavljanje reverzibilnih procesa jesu sledeći : 1) sve promene stanja se ostvaruju preko niza ravnotežnih stanja; 2) otsustvo svakog trenja ili drugih disipativnih efekata (plastična deformacija i sl.).
Sva naša dalja razmatranja vršimo pod pretpostavkom da će se svi naši procesi odvijati ireverzibilno pa radi toga uvodimo i funkciju snabdevanja toplotom iz unutrašnjih izvora r^*.
Kako smo izraz za toplotu utvrdili ranije , to ćemo Clausius-Duhem-ov princip ireverzibilnosti formulisati na sledeći način:

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho^* S^* dv - \int_v \frac{\rho^* r^*}{T^*} + \int_s \frac{h^*}{T^*} ds \geq 0 \tag{8.2}$$

Napisaćemo i poslednji član nejednakosti (8.2) preko zapreminskog integrala:

$$\int_s \frac{h^*}{T^*} ds = \int_s \frac{h^{*i}}{T^*} ds_i = \int_v \left(\frac{h^{*i}}{T^*}\right)_{,i} dv \tag{8.3}$$

Kako smo videli iz izraza (5.4), važi sledeća formula:

$$\left(\frac{h^{*i}}{T^*}\right)_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*i}}{T^*}\right)$$

Izraz (8.3) možemo sada napisati u sledećem obliku:

$$\int_{s}\frac{h^{*}}{T^{*}}ds=\int_{v}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*i}}{T^{*}}\right)_{,i}dv \tag{8.3a}$$

Imajući u vidu (8.3a) možemo nejednakost (8.2) predstaviti u nešto izmenjenom vidu:

$$T^{*}\rho^{*}\overset{\circ}{S}{}^{*}-\rho^{*}r^{*}+\frac{T^{*}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*i}}{T^{*}}\right)_{,i}\geq 0 \tag{8.4}$$

Sada možemo pristupiti integraciji po zapremini v štapa, imajući u vidu specifičnost ove integracije izvršavajući je prvo po poprečnom preseku a a tek zatim po elementu krive linije $\mathscr{C}$.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Big\{\iint_{a}\rho^{*}\sqrt{g}\,\overset{\circ}{S}{}^{*}\big(T+\sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}T_{\alpha_1\dots\alpha_N}\big)d\theta^1 d\theta^2-$$

$$-\iint_{a}\rho^{*}r^{*}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2+\iint_{a}T^{*}\Big[\frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*1}}{T^{*}}\right)}{\partial\theta^1}+$$

$$+\frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*2}}{T^{*}}\right)}{\partial\theta^2}\Big]d\theta^1 d\theta^2+\iint_{a}T^{*}\frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*3}}{T^{*}}\right)}{\partial\theta}d\theta^1 d\theta^2\Big\}d\theta\geq 0 \tag{8.5}$$

Izračunaćemo jedan za drugim sve članove nejednakosti (8.5) :

$$J_1=\iint_{a}\rho^{*}\sqrt{g}\,\overset{\circ}{S}{}^{*}\big(T+\sum_{N=1}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}T_{\alpha_1\dots\alpha_N}\big)d\theta^1 d\theta^2$$

$$J_1=T\frac{\partial}{\partial t}\iint_{a}\rho^{*}\sqrt{g}\,S^{*}d\theta^1 d\theta^2+$$

$$+\sum_{N=1}T_{\alpha_1\dots\alpha_N}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{a}\rho^{*}\sqrt{g}\,\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_N}\dot{S}^{*}d\theta^1 d\theta^2=$$

$$=\lambda\big(T\overset{\circ}{S}+\sum_{N=1}T_{\alpha_1\dots\alpha_N}\dot{S}^{\alpha_1\dots\alpha_N}\big) \tag{8.6}$$

$$J_2+J_3=-\iint_{a}\rho^{*}r^{*}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2+\int_{\ell}\sqrt{g}\,h^{*}(u^1 d\theta^2-$$

$$-u^2 d\theta^1)=-\lambda r \tag{8.7}$$

$$J_4=\iint_a \frac{T^*}{\sqrt{g}}\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*3}}{T^*}\right)_{,3}\sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2$$

$$J_4=\iint_a T^*\Big[\frac{\partial(\sqrt{g}\,h^{*3})}{\partial\theta}\frac{1}{T^*}-$$

$$-\sqrt{g}\,h^{*3}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\frac{1}{(T^*)^2}\Big]d\theta^1 d\theta^2$$

$$J_4=\frac{\partial h}{\partial\theta}-\iint_a \sqrt{gg^{33}}\,h^*\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\frac{1}{T^*}d\theta^1 d\theta^2 \qquad (8.8)$$

Sa izrazima (8.6),(8.7) i (8.8) možemo nejednakost (8.5) napisati u sledećem obliku:

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\Big\{\lambda(T\mathring{S}+\sum_{N=1}T_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\mathring{S}^{\alpha_1\ldots\alpha_N})-\lambda r+\frac{\partial h}{\partial\theta}-$$

$$-\iint_a \sqrt{gg^{33}}\,h^*\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\frac{1}{T^*}d\theta^1 d\theta^2\Big\}d\theta\geq 0 \qquad (8.9)$$

Imajući u vidu izraz za jednačinu energije (7.6),nejednakost (8.9) pišemo u sledećem obliku:

$$-\lambda\mathring{A}-\lambda S\mathring{T}-\lambda\sum_{N=1}S^{\alpha_1\ldots\alpha_N}\mathring{T}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}+n^{(\nu\mu)}\eta_{\nu\mu}+$$

$$+n^{\nu}\eta_{\nu 3}+n\,\eta_{33}+M^{\alpha i}\mathring{k}_{\alpha i}+$$

$$+\sum_{N=2}M^{\alpha_1\ldots\alpha_N i}\mathring{m}_{\alpha_1\ldots\alpha_N i}-$$

$$-\iint_a \sqrt{gg^{33}}\,h^*\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\frac{1}{T^*}d\theta^1 d\theta^2\geq 0$$

$$(8.10)$$

Broj nepoznatih statičkih veličina iznosi :

$$M^{\alpha_1 \ldots \alpha_n i} \quad (n \geq 1) \quad \rightarrow \quad \frac{3n}{2}(3+n)$$

$$n, \; n^{\vartheta}, \; n^{(\vartheta\beta)} \quad \rightarrow \quad 6$$

$$N_S = 6 + \frac{3n}{2}(3+n)$$

Ukupan broj nepoznatih iznosi :

$$N = 6 + \frac{9n}{2}(3+n)$$

Odavde zaključujemo da je ukupan broj nepoznatih jednak ukupnom broju jednačina koje nam stoje na raspolaganju.

$$J = N$$

Razmatrajući nejednakost (8.1o) zaključujemo da je slobodna energija $\mathring{A}$ funkcija argumenata navedenih u izrazu (7.9). Posle unošenja izraza za $\mathring{A}$ prema (7.11) u nejednakost (8.1o) imajući u vidu sistem konstitutivnih jednačina (7.13) do (7.15) nejednakost (8.1o) postaje :

$$-\iint_a \sqrt{gg^{33}}\, h^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \frac{1}{T^*} d\theta^1 d\theta^2 \geq 0 \qquad (8.11)$$

Što se tiče redukovane jednačine energije to ona zadržava oblik (7.16). Nejednakost (8.11) zajedno sa izrazom (7.9) ukazuje na konstitutivnu jednačinu za h.

$$h = h\left(T^*, \gamma_{ij}, k_{\alpha i}, m_{\alpha_1 \ldots \alpha_N i}, \frac{\partial T^*}{\partial \theta}\right) \qquad (8.12)$$

10. Energija deformacije i konstitutivne veze linearne teorije elastičnog štapa

Polazeći od zavisnosti energije deformacije od tenzora deformacije za okolinu težišne linije, promene krivine i torzije za istu osu, promena krivljenja prvobitno ravnog poprečnog preseka duž težišne ose štapa, homogene temperature i temperaturnih gradijenata, prikazaćemo energiju deformacije kao homogenu kvadratnu funkciju ovih argumenata. Argumente biramo kao određene kombinacije elemenata deformacionih i temperaturnih veličina a eliminaciju argumenata vršimo postavljanjem zahteva za invarijantnost energije deformacije pri promeni smera koordinatnih osa, ostvarujući tako kinetičku simetriju materijala.

10.1 Definicija deformacionih veličina

Razmatramo linearnu teoriju štapa čija je osa prostorna kriva linija. Neka je kriva koja spaja težišta poprečnih preseka štapa pre deformacije C, određena vektorskom jednačinom:

$$\vec{R} = \vec{R}(\theta) \tag{10.1}$$

Ovde smo sa $\vec{R}$ obeležili vektor položaja težišne krive štapa pre deformacije. Tangentni vektor iste krive linije određujemo izrazom:

$$\vec{A}_3 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta} \tag{10.2}$$

Izabraćemo još dva vektora, $\vec{A}_1$ i $\vec{A}_2$, takva da određuju pravce glavnih težišnih osa preseka. Posle deformacije, težišna kriva linija C ostaje takođe težišna kriva, ali prelazi u krivu c kretanjem, koje je određeno sledećim jednačinama:

$$\vec{r} = \vec{R}(\theta) + \xi \vec{u} \quad ; \quad \vec{a}_i = \vec{A}_3 + \xi \vec{b}_i \tag{10.3}$$

U ovoj jednačini sem vektora pomeranje $\vec{u}$, vektora deformacije $\vec{b}_i$, figuriše i bezdimenzioni parametar ξ koga uvodimo radi utvrđivanja malih veličina višeg reda. Posle zanemarivanja odgovarajućih malih veličina višeg reda možemo staviti $\xi = 1$.

Neka je razmatrani štap imao u trenutku $t=0$ temperaturu T_0 i entropiju S_0. Pretpostavićemo da stanje temperature T^* pretstavlja određenu promenu temperature T_0. Ovakvu promenu temperature možemo takođe ograničiti pa ćemo imati ξT^*.

Na sličan način shvatamo i entropiju odnosno njen prirast pa i ovde pišemo ξS^*.

Prva posledica linearizacije jeste mogućnost prikazivanja svih komponenata vektora pomoću fiksnih, ortonormiranih baznih vektora $\vec{A}_i$, gde neće biti razlike između donjih i gornjih indeksa pa ćemo ubuduće sve indekse pisati u donjem (kovarijantnom) položaju.

Imajući u vidu izraz (lo.2) i (lo.3) možemo pisati:

$$\vec{a}_3 = \vec{A}_3 + \xi \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta^3} \qquad (lo.4)$$

Poredeći jednakosti $(lo.3)_2$ i (lo.4) dobijamo:

$$\vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta^3} \quad ; \quad b_{3i} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta^3} \qquad (lo.5)$$

Sa oznakom $\vec{b}_i$ smo obeležili promenu baznih vektora $\vec{A}_i$.

Smatrajući vektore $\vec{u}$ i $\vec{b}_i$ malim veličinama možemo ih takođe prikazati pomoću baznih vektora krive linije:

$$\vec{u} = u_i \vec{A}_i \quad ; \quad \vec{b}_i = b_{ij} \vec{A}_j \qquad (lo.6)$$

Konfiguracija krive $\mathcal{L}$ u trenutku t jeste određena metričkim tenzorom:

$$a_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = A_{ij} + \xi (b_{ji} + b_{ij}) + \xi^2 b_{ij} b_{ji}$$

Posle linearizacije odnosno odbacivanja svih članova uz ξ^2, možemo definisati tenzor deformacije γ_{ij} kao razliku metričkih tenzora trenutne i početne konfiguracije:

$$\gamma_{ij} = a_{ij} - A_{ij} = b_{ij} + b_{ji} \tag{10.7}$$

Na sličan način se određuje i krivina i torzija nove konfiguracije:

$$k_{ij} = \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \theta} = (\vec{A}_j + \xi \vec{b}_j)\cdot\left(\frac{\partial \vec{A}_i}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \vec{b}_i}{\partial \theta}\right)$$

Ako je K_{ij} krivina i torzija početne konfiguracije:

$$K_{ij} = \vec{A}_j \cdot \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial \theta}$$

to konačno dobijamo:

$$k_{ij} = K_{ij} + \xi \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta} + \xi K_{lj} b_{il} + \xi K_{il} b_{jl}$$

Sada možemo odrediti i promenu krivine i torzije:

$$\varkappa_{ij} = k_{ij} - K_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta} \tag{10.8}$$

Poredeći izraze (10.7) i (10.8) sledi:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \theta} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta} + \frac{\partial b_{ji}}{\partial \theta} = \varkappa_{ij} + \varkappa_{ji} \tag{10.9}$$

Do sada smo govorili o štapu kao o krivoj liniji (težišna linija) potopljenoj u Euklidov trodimenzioni prostor. Budući da želimo obuhvatiti i izvesne deplanacione uticaje to ćemo napisati vektorsku jednačinu proizvoljne tačke štapa, posmatrajući štap kao jedno trodimenziono telo. Tako u konfiguraciji $t=0$ imamo:

$$\vec{R}^* = \vec{R}(\theta) + \theta^\alpha \vec{A}_\alpha \tag{10.10}$$

Odavde sledi da osnovne vektore $\vec{A}_\alpha$ određujemo izrazima:

$$\vec{A}_\alpha = \left(\frac{\partial \vec{R}^*}{\partial \theta^\alpha}\right)_{\theta=0} \tag{10.11}$$

Kako smo za model štapa izabrali takav štap čiji poprečni preseci posle deformacije prelaze u krivu površ drugog reda, to jest deplaniraju, to ćemo položaj proizvoljne tačke štapa posle deformacije opisati jednačinom:

$$\vec{r}^{*}=\vec{r}(\theta,t)+\vartheta^{\alpha}\vec{a}_{\alpha}+\vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta}\vec{d}_{\alpha\beta} \qquad (10.12)$$

Vektore $\vec{a}_{\alpha}$ i $\vec{d}_{\alpha\beta}$ određujemo prema jednačini (10.12) :

$$\vec{a}_{\alpha}=\left(\frac{\partial\vec{r}^{*}}{\partial\vartheta^{\alpha}}\right)_{\vartheta^{\alpha}=0}\ ;\quad \vec{d}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}\vec{r}^{*}}{\partial\vartheta^{\alpha}\partial\vartheta^{\beta}}\right)_{\vartheta^{\alpha}=\vartheta^{\beta}=0} \qquad (10.13)$$

Imajući u vidu $(10.3)_2$ i $(10.13)_2$ dobićemo:

$$\vec{d}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\beta}}(\vec{A}_{\alpha}+\xi\vec{b}_{\alpha})=\xi\frac{\partial\vec{b}_{\alpha}}{\partial\vartheta^{\beta}} \qquad (10.14)$$

Upotrebljavajući za referentni sistem bazne vektore krive C, vektore $\vec{A}_{i}$,možemo pisati:

$$d_{\alpha\beta i}=b_{\alpha i,\beta} \qquad (10.15)$$

Veličine $d_{\alpha\beta i}$ predstavljaju komponentalna krivljenja prvobitno ravnog poprečnog preseka.

Veličina koja predstavlja promenu komponentalnih krivljenja poprečnog preseka duž težišne ose štapa, jeste određena izrazom:

$$\frac{\partial\vec{d}_{\alpha\beta}}{\partial\theta}=m_{\alpha\beta i}\vec{A}_{i}=\xi\frac{\partial^{2}\vec{b}_{\alpha}}{\partial\vartheta^{\beta}\partial\theta} \qquad (10.16)$$

Imajući u vidu da $\vec{b}_{\alpha}$ možemo napisati: $\vec{b}_{\alpha}=b_{\alpha i}\vec{A}_{i}$,sledi:

$$\frac{\partial\vec{d}_{\alpha\beta}}{\partial\theta}=\xi\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\beta}}\left(\frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial\theta}\vec{A}_{i}+b_{\alpha r}K_{ri}\vec{A}_{i}\right)$$

Poredeći ovu veličinu sa izrazom (10.16), dobićemo:

$$m_{\alpha\beta i}=\frac{\partial^{2}b_{\alpha i}}{\partial\vartheta^{\beta}\partial\theta}+K_{ri}\frac{\partial b_{\alpha r}}{\partial\vartheta^{\beta}} \qquad (10.17)$$

Budući da je ovde reč o linearnoj teoriji to su veličine γ_{ij}, $d_{\alpha\beta i}$ i $m_{\alpha\beta i}$ simetrične u odnosu na prva dva indeksa.

10.2 Energija deformacije

U poglavlju o termoelastičnim štapovima, izrazom (7.9) je definisana slobodna energija štapa kao funkcija deformacionih veličina, temperature i njenih gradijenata. Imajući u vidu linearnu teoriju koja se u ovom poglavlju izlaže to možemo pisati:

$$A=A(T,T_{\alpha},T_{\alpha\beta},\gamma_{ij},\varkappa_{\alpha i},m_{\alpha\beta i}) \tag{10.18}$$

Ovaj izraz možemo napisati i u razvijenom obliku:

$$A=A(T,T_1,T_2,T_{11},T_{12},T_{22},\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{23},\varkappa_{11},\varkappa_{12},\varkappa_{13},\varkappa_{21},\varkappa_{22},\varkappa_{23},m_{223},m_{111},m_{112},m_{113},m_{121},m_{122},m_{123},m_{221},m_{222}) \tag{10.19}$$

Kada je reč o linearnoj teoriji, energija deformacije mora biti homogena, kvadratna funkcija svojih argumenata. Sem toga mora biti invarijantna na sledeće transformacije:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &\to -\vec{a}_1 \quad \text{odnosno} \quad \vec{A}_1 \to -\vec{A}_1 \\ \vec{a}_2 &\to -\vec{a}_2 \quad \text{odnosno} \quad \vec{A}_2 \to -\vec{A}_2 \\ \vec{a}_3 &\to -\vec{a}_3 \quad \text{odnosno} \quad \vec{A}_3 \to -\vec{A}_3 \end{aligned} \tag{10.20}$$

Ispitaćemo slučaj $(10.20)_1$.

Tada menjaju znak svi argumenti kod kojih se indeks 1 pojavljuje neparan broj puta. Tako veza (10.19) prelazi u vezu:

$$A=A(T,-T_1,T_2,T_{11},-T_{12},T_{22},\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},$$
$$-\gamma_{12},-\gamma_{13},\gamma_{23},\varkappa_{11},-\varkappa_{12},-\varkappa_{13},-\varkappa_{21},\varkappa_{22},\varkappa_{23}, \tag{10.21}$$
$$-m_{111},m_{112},m_{113},m_{121},-m_{122},-m_{123},-m_{221},m_{222},m_{223})$$

U izrazu (10.21) zadržavamo i dalje sve argumente čiji se znak nije promenio pri transformaciji $(10.20)_1$. Da bi argumente sa promenjenim znakom učinili invarijantnim na transformaciju $(10.20)_1$ zadržaćemo samo njihove kvadratne kombinacije svaki sa svakim. Na ovaj način ćemo učiniti sve argumente invarijantnim na pomenutu transformaciju.

$$A=A(T,T_2,T_{11},T_{22},\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},\gamma_{23},\varkappa_{11},\varkappa_{22},\varkappa_{23},$$
$$m_{112},m_{113},m_{121},m_{222},m_{223},T_1^2,T_1T_{12},T_1\gamma_{12},T_1\gamma_{13},$$
$$T_1\varkappa_{12},T_1\varkappa_{13},T_1\varkappa_{21},T_1m_{111},T_1m_{122},T_1m_{123},T_1m_{221},$$
$$T_{12}^2,T_{12}\gamma_{12},T_{12}\gamma_{13},T_{12}\varkappa_{12},T_{12}\varkappa_{13},T_{12}\varkappa_{21},T_{12}m_{111},T_{12}m_{122},$$
$$T_{12}m_{123},T_{12}m_{221},\gamma_{12}^2,\gamma_{12}\gamma_{13},\gamma_{12}\varkappa_{12},\gamma_{12}\varkappa_{13},\gamma_{12}\varkappa_{21},\gamma_{12}m_{111},$$
$$\gamma_{12}m_{111},\gamma_{12}m_{122},\gamma_{12}m_{123},\gamma_{12}m_{221},\gamma_{13}^2,\gamma_{13}\varkappa_{12},\gamma_{13}\varkappa_{13},\gamma_{13}\varkappa_{21},$$
$$\gamma_{13}m_{111},\gamma_{13}m_{122},\gamma_{13}m_{123},\gamma_{13}m_{221},\varkappa_{12}^2,\varkappa_{12}\varkappa_{13},\varkappa_{12}\varkappa_{21},$$
$$\varkappa_{12}m_{111},\varkappa_{12}m_{122},\varkappa_{12}m_{123},\varkappa_{12}m_{221},\varkappa_{13}^2,\varkappa_{13}\varkappa_{21},\varkappa_{13}m_{111},$$
$$\varkappa_{13}m_{122},\varkappa_{13}m_{123},\varkappa_{13}m_{221},\varkappa_{21}^2,\varkappa_{21}m_{111},\varkappa_{21}m_{122},\varkappa_{21}m_{123},$$
$$\varkappa_{21}m_{221},m_{111}^2,m_{111}m_{122},m_{111}m_{123},m_{111}m_{221},m_{122}^2,m_{122}m_{123},$$

Razmotrićemo sada transformaciju $(1o.2o)_2$. Znak menjaju samo oni argumenti kod kojih je ukupan broj dvojki u indeksu neparan. Tako će posle pomenute transformacije izraz (1o22) postati:

$$
\begin{aligned}
A = A(& T_1, -T_2, T_{11}, T_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, -\gamma_{23}, \varkappa_{11}, \varkappa_{22}, -\varkappa_{23}, \\
& -m_{112}, m_{113}, -m_{121}, -m_{222}, m_{223}, T_1^2, -T_1 T_{12}, -T_1\gamma_{12}, T_1\gamma_{13}, \\
& -T_1\varkappa_{12}, T_1\varkappa_{13}, -T_1\varkappa_{21}, T_1 m_{111}, T_1 m_{122}, -T_1 m_{123}, T_1 m_{221}, \\
& T_{12}^2, T_{12}\gamma_{12}, -T_{12}\gamma_{13}, T_{12}\varkappa_{12}, -T_{12}\varkappa_{13}, T_{12}\varkappa_{21}, -T_{12}m_{111}, -T_{12}m_{122}, \\
& T_{12}m_{123}, -T_{12}m_{221}, \gamma_{12}^2, -\gamma_{12}\gamma_{13}, \gamma_{12}\varkappa_{12}, -\gamma_{12}\varkappa_{13}, \gamma_{12}\varkappa_{21}, -\gamma_{12}m_{111}, \\
& -\gamma_{12}m_{111}, -\gamma_{12}m_{122}, \gamma_{12}m_{123}, -\gamma_{12}m_{221}, \gamma_{13}^2, -\gamma_{13}\varkappa_{12}, \gamma_{13}\varkappa_{13}, -\gamma_{13}\varkappa_{21}, \\
& \gamma_{13}m_{111}, \gamma_{13}m_{122}, -\gamma_{13}m_{123}, \gamma_{13}m_{221}, \varkappa_{12}^2, -\varkappa_{12}\varkappa_{13}, \varkappa_{12}\varkappa_{21}, \\
& -\varkappa_{12}m_{111}, -\varkappa_{12}m_{122}, \varkappa_{12}m_{123}, -\varkappa_{12}m_{221}, \varkappa_{13}^2, -\varkappa_{13}\varkappa_{21}, \varkappa_{13}m_{111}, \\
& \varkappa_{13}m_{122}, -\varkappa_{13}m_{123}, \varkappa_{13}m_{221}, \varkappa_{21}^2, -\varkappa_{21}m_{111}, -\varkappa_{21}m_{122}, \varkappa_{21}m_{123}, \\
& -\varkappa_{21}m_{221}, m_{111}^2, m_{111}m_{122}, -m_{111}m_{123}, m_{111}m_{221}, m_{122}^2, -m_{122}m_{123}, \\
& -m_{122}m_{221}, m_{123}^2, -m_{123}m_{221}, m_{221}^2)
\end{aligned}
\tag{1o.23}
$$

Poredeći izraze (1o.22) i (1o.23) možemo zakjlučiti da je potrebno zadržati sve argumente čiji se znak pri ovoj transformaciji ne menja. Od argumenata čiji se znak promenio, stvaramo kvadratne kombinacije, množeći ih među sobom svaki sa svakim, zadržavajući pri tome samo kvadratne članove ovih kombinacija budući da se ovde radi o linearnoj teóriji štapa.

$$
\begin{aligned}
A = A(&T, T_{11}, T_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, m_{113}, m_{223}, \\
&T_1^2, T_1\gamma_{13}, T_1\kappa_{13}, T_1 m_{111}, T_1 m_{122}, T_1 m_{221}, T_{12}^2, T_{12}\gamma_{12}, T_{12}\kappa_{12}, \\
&T_{12}\kappa_{21}, T_{12} m_{123}, \gamma_{12}^2, \gamma_{12}\kappa_{12}, \gamma_{12} m_{123}, \gamma_{13}^2, \gamma_{13}\kappa_{13}, \gamma_{13} m_{111}, \\
&\gamma_{13} m_{122}, \gamma_{13} m_{221}, \kappa_{12}^2, \kappa_{12}\kappa_{21}, \kappa_{12} m_{123}, \kappa_{13}^2, \kappa_{13} m_{111}, \\
&\kappa_{13} m_{122}, \kappa_{13} m_{221}, \kappa_{21}^2, \kappa_{21} m_{123}, m_{111}^2, m_{111} m_{122}, \\
&m_{111} m_{221}, m_{122}^2, m_{122} m_{221}, m_{221}^2, T_2^2, T_2\gamma_{23}, T_2\kappa_{23}, \\
&T_2 m_{112}, T_2 m_{121}, T_2 m_{222}, \gamma_{23}^2, \gamma_{23}\kappa_{23}, \gamma_{23} m_{112}, \gamma_{23} m_{121}, \\
&\gamma_{23} m_{222}, \kappa_{23}^2, \kappa_{23} m_{112}, \kappa_{23} m_{121}, \kappa_{23} m_{222}, m_{112}^2, \\
&m_{112} m_{121}, m_{112} m_{222}, m_{121}^2, m_{121} m_{222}, m_{222}^2) \qquad (10.24)
\end{aligned}
$$

Preostaje da se razmotri još transformacija $(10.20)_3$. Poznato je da se tada elementi deformacionih veličina transformišu na sledeći način:

$$
\begin{array}{lll}
\gamma_{11} \to \gamma_{11} & & \\
\gamma_{12} \to \gamma_{12} & \gamma_{22} \to \gamma_{22} & \\
\gamma_{13} \to -\gamma_{13} & \gamma_{23} \to -\gamma_{23} & \gamma_{33} \to \gamma_{33} \\
 & & \\
\kappa_{11} \to -\kappa_{11} & \kappa_{21} \to -\kappa_{21} & \\
\kappa_{12} \to -\kappa_{12} & \kappa_{22} \to -\kappa_{22} & \qquad (10.25) \\
\kappa_{13} \to \kappa_{13} & \kappa_{23} \to \kappa_{23} & \\
 & & \\
m_{111} \to -m_{111} & m_{121} \to -m_{121} & m_{221} \to -m_{221} \\
m_{112} \to -m_{112} & m_{122} \to -m_{122} & m_{222} \to -m_{222} \\
m_{113} \to m_{113} & m_{123} \to m_{123} & m \to m
\end{array}
$$

Imajući u vidu osobine argumenata (10.25) pri transformaciji $(10.20)_3$ izraz (10.24) postaje:

$$A=A\big(T, T_{11}, T_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, -\mathcal{R}_{11}, -\mathcal{R}_{22}, m_{113}, m_{223}, T_1^2, -T_1\gamma_{13}, T_1\mathcal{R}_{13}, -T_1 m_{111}, -T_1 m_{122}, -T_1 m_{221}, T_{12}^2, T_{12}\gamma_{12}, -T_{12}\mathcal{R}_{12}, -T_{12}\mathcal{R}_{21}, T_{12}m_{123}, \gamma_{12}^2, -\gamma_{12}\mathcal{R}_{12}, -\gamma_{12}\mathcal{R}_{21}, \gamma_{12}m_{123}, \gamma_{13}^2, -\gamma_{13}\mathcal{R}_{13}, \gamma_{13}m_{111}, \gamma_{13}m_{122}, \gamma_{13}m_{221}, \mathcal{R}_{12}^2, \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{21}, -\mathcal{R}_{12}m_{123}, \mathcal{R}_{13}^2, -\mathcal{R}_{13}m_{111}, -\mathcal{R}_{13}m_{122}, -\mathcal{R}_{13}m_{221}, \mathcal{R}_{21}^2, -\mathcal{R}_{21}m_{123}, m_{111}^2, m_{111}m_{122}, m_{111}m_{221}, m_{122}^2, m_{122}m_{221}, m_{221}^2, T_2^2, -T_2\gamma_{23}, T_2\mathcal{R}_{23}, -T_2 m_{112}, -T_2 m_{121}, -T_2 m_{222}, \gamma_{23}^2, -\gamma_{23}\mathcal{R}_{23}, \gamma_{23}m_{112}, \gamma_{23}m_{121}, \gamma_{23}m_{222}, \mathcal{R}_{23}^2, -\mathcal{R}_{23}m_{112}, -\mathcal{R}_{23}m_{121}, -\mathcal{R}_{23}m_{222}, m_{112}^2, m_{112}m_{121}, m_{112}m_{222}, m_{121}^2, m_{121}m_{222}, m_{222}^2\big) \qquad (10.26)$$

Kao i u prethodnim slučajevima, zadržaćemo sve pozitivne argumente izraza (10.26). Od linearnih negativnih argumenata pravimo kvadratne kombinacije uzajamnim množenjem članova svakog sa svakim, čineći ih na taj način invarijantnim na transformaciju $(10.20)_3$. Sve negativne kvadratne argumente ćemo odbaciti jer se zadržavamo samo na kvadratnim članovima dok bi kombinacije sa kvadratnim argumentima premašile drugi stepen. Tako ćemo dobiti:

$$A=A\big(T, T_{11}, T_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, m_{113}, m_{223}, \mathcal{R}_{11}^2, \mathcal{R}_{11}\mathcal{R}_{22}, \mathcal{R}_{22}^2, T_1^2, T_1\mathcal{R}_{13}, T_2^2, T_2\mathcal{R}_{23}, T_{12}^2, \gamma_{12}T_{12}, T_{12}m_{123}, \gamma_{12}^2, \gamma_{12}m_{123}, \gamma_{13}^2, \gamma_{13}m_{111}, \gamma_{13}m_{122}, \gamma_{13}m_{221}, \gamma_{23}^2, \gamma_{23}m_{112}, \gamma_{23}m_{121}, \gamma_{23}m_{222}, \mathcal{R}_{12}^2, \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{21}, \mathcal{R}_{13}^2, \mathcal{R}_{21}^2, \mathcal{R}_{23}^2, m_{111}^2, m_{111}m_{122}, m_{111}m_{221}, m_{122}^2, m_{122}m_{221}, m_{221}^2, m_{123}^2, m_{112}^2, m_{112}m_{121}, m_{112}m_{222}, m_{121}^2, m_{121}m_{222}, m_{222}^2\big) \qquad (10.27)$$

.3 Konstitutivne jednačine

U prethodnom poglavlju je definisana energija deformacije kao homogena kvadratna funkcija argumenata, određčnih kao kombinacije deformacionih veličina i temperature i njenih gradijenata. Parcijalni izvodi ove funkcije definišu niz mehaničkih veličina, u tehničkoj teoriji štapa označavanih kao vektori unutrašnjih sila i momenata.

Napisaćemo ovu funkciju u obliku sume kvadrata svih njenih argumenata množeći svaki od ovih sabiraka određenom konstantom. Polazeći od izraza (1o.27) pravimo kvadratne kombinacije od svih linearnih članova uzajamnim množenjem svakog člana sa svakim, zadržavajući uz to i kvadratne argumente iste funkcije. Na taj način ćemo dobiti sledeći sledeći sumarni oblik energije deformacije:

$$
\begin{aligned}
A = {} & c_1 T^2 + c_2 T T_{11} + c_3 T T_{22} + c_4 T \gamma_{11} + c_5 T \gamma_{22} + c_6 T \gamma_{33} + \\
& + c_7 T m_{113} + c_8 T m_{223} + c_9 T_{11}^2 + c_{10} T_{11} T_{22} + c_{11} T_{11} \gamma_{11} + c_{12} T_{11} \gamma_{22} + \\
& + c_{13} T_{11} \gamma_{33} + c_{14} T_{11} m_{113} + c_{15} T_{11} m_{223} + c_{16} T_{22}^2 + c_{17} T_{22} \gamma_{11} + c_{18} T_{22} \gamma_{22} + \\
& + c_{19} T_{22} \gamma_{33} + c_{20} T_{22} m_{113} + c_{21} T_{22} m_{223} + c_{22} \gamma_{11}^2 + c_{23} \gamma_{11} \gamma_{22} + c_{24} \gamma_{11} \gamma_{33} + \\
& + c_{25} \gamma_{11} m_{113} + c_{26} \gamma_{11} m_{223} + c_{27} \gamma_{22}^2 + c_{28} \gamma_{22} \gamma_{33} + c_{29} \gamma_{22} m_{113} + \\
& + c_{30} \gamma_{22} m_{223} + c_{31} \gamma_{33}^2 + c_{32} \gamma_{33} m_{113} + c_{33} \gamma_{33} m_{223} + c_{34} m_{113}^2 + c_{35} m_{113} m_{223} + \\
& + c_{36} m_{223}^2 + c_{37} \varkappa_{11}^2 + c_{38} \varkappa_{11} \varkappa_{22} + c_{39} \varkappa_{22}^2 + c_{40} T_1^2 + c_{41} T_1 \varkappa_{13} + \\
& + c_{42} T_2^2 + c_{43} T_2 \varkappa_{23} + c_{44} T_{12}^2 + c_{45} T_{12} \gamma_{12} + c_{46} T_{12} m_{123} + c_{47} \gamma_{12}^2 + \\
& + c_{48} \gamma_{12} m_{123} + c_{49} \gamma_{13}^2 + c_{50} \gamma_{13} m_{111} + c_{51} \gamma_{13} m_{122} + c_{52} \gamma_{13} m_{221} + \\
& + c_{53} \gamma_{23}^2 + c_{54} \gamma_{23} m_{112} + c_{55} \gamma_{23} m_{121} + c_{56} \gamma_{23} m_{222} + c_{57} \varkappa_{12}^2 + \\
& + c_{58} \varkappa_{12} \varkappa_{21} + c_{59} \varkappa_{13}^2 + c_{60} \varkappa_{21}^2 + c_{61} \varkappa_{23}^2 + c_{62} m_{111}^2 +
\end{aligned}
$$

$$+ c_{63} m_{111} m_{122} + c_{64} m_{111} m_{221} + c_{65} m_{122}^2 + c_{66} m_{122} m_{221} +$$
$$+ c_{67} m_{221}^2 + c_{68} m_{112}^2 + c_{69} m_{112} m_{121} + c_{70} m_{112} m_{222} +$$
$$+ c_{71} m_{121}^2 + c_{72} m_{121} m_{222} + c_{73} m_{222}^2 + c_{74} m_{123}^2 \qquad (10.28)$$

Izrazima (7.15) je definisana entropija odnosno njen prirast kao parcijalni izvod energije deformacije po temperaturi. Statički odnosno kvadratni momenti entropije su određeni kao parcijalni izvodi energije deformacije po temperaturnim gradijentima prvog odnosno drugog reda.

$$-S = 2c_1 T + c_2 T_{11} + c_3 T_{22} + c_4 \gamma_{11} + c_5 \gamma_{22} + c_6 \gamma_{33} +$$
$$+ c_7 m_{113} + c_8 m_{223}$$
$$-S_1 = 2c_{10} T_1 + c_{11} \varkappa_{13}$$
$$-S_2 = 2c_{12} T_2 + c_{13} \varkappa_{23}$$
$$-S_{11} = 2c_9 T_{11} + c_2 T + c_{10} T_{22} + c_{11} \gamma_{11} + c_{12} \gamma_{22} + c_{13} \gamma_{33} +$$
$$+ c_{14} m_{113} + c_{15} m_{223}$$
$$-S_{22} = 2c_{16} T_{22} + c_3 T + c_{17} \gamma_{11} + c_{18} \gamma_{22} + c_{19} \gamma_{33} +$$
$$+ c_{20} m_{113} + c_{21} m_{223} + c_{10} T_{11}$$
$$-S_{12} = 2c_{44} T_{12} + c_{45} \gamma_{12} + c_{46} m_{123} \qquad (10.29)$$

Tehnička teorija savijanja štapa definiše tri komponente vektora unutrašnjih sila: jedna normalna i dve transverzalne komponente. Kako su smicanja γ_{13} i γ_{23} bivala redovno zanemarivana, to su jedino dilatacije γ_{33} bile vezivane za dejstvo normalne sile a transverzalne sile su određivane iz uslova ravnoteže. Budući da naš izraz (10.28) zavisi od šest komponenata tenzora deformacije γ_{ij} ,to ćemo konstitutivnim vezama odrediti i šest komponenata unutrašnjih sila. Imajući u vidu da ove komponente deluju na poprečni presek, čija se normala poklapa sa tangentnim vektorom krive $\mathcal{L}$,to ćemo ove komponente podeliti na dve grupe: vektor unutrašnjih sila poprečnog preseka i tenzor drugog reda unutrašnjih sila za prostor sa dve dimenzije.

$$N_{i(3)} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{i3}} \; ; \; N_{\alpha\beta} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \qquad (10.30)$$

Dok se dejstvo komponenata vektora unutrašnjih sila manifestuje relativnim pomeranjem dva bliska poprečna preseka, ne menjajući pri tome njegov oblik, dotle se dejstvo komponenata tenzora unutrašnjih sila manifestuje prelaskom kvadratnog poprečnog preseka u pravougaonike odnosno romb.

$$N_{1(3)} = 2c_{49}\gamma_{13} + c_{50}m_{111} + c_{51}m_{122} + c_{52}m_{221}$$

$$N_{2(3)} = 2c_{53}\gamma_{23} + c_{54}m_{112} + c_{55}m_{121} + c_{56}m_{222}$$

$$N_{3(3)} = 2c_{31}\gamma_{33} + c_6 T + c_{13}T_{11} + c_{19}T_{22} + c_{24}\gamma_{11} + c_{28}\gamma_{22} + c_{32}m_{113} + c_{33}m_{223} \qquad (10.31)$$

$$N_{11} = 2c_{22}\gamma_{11} + c_{23}\gamma_{22} + c_{24}\gamma_{33} + c_4 T + c_{11}T_{11} + c_{17}T_{22} + c_{25}m_{113} + c_{26}m_{223}$$

$$N_{22} = 2c_{27}\gamma_{22} + c_{23}\gamma_{11} + c_{28}\gamma_{33} + c_5 T + c_{12}T_{11} + c_{18}T_{22} + c_{29}m_{113} + c_{30}m_{223}$$

$$N_{12} = 2c_{47}\gamma_{12} + c_{48}m_{123} + c_{15}T_{12} \qquad (10.32)$$

Imajući u vidu vektore promene krivine $\mathcal{K}_{\alpha 3}$ i tenzor promene torzije $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ (vidi na primer (1.17) odnosno (2.14)), možemo definisati i vektor momenata savijanja kao i tenzor momenata torzije unutrašnjih sila.

$$M_{\alpha(3)} = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{K}_{\alpha 3}} \quad i \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial A}{\partial \mathcal{K}_{\alpha\beta}} \tag{10.33}$$

$$M_{11} = 2c_{37}\mathcal{K}_{11} + c_{38}\mathcal{K}_{22}$$
$$M_{22} = 2c_{39}\mathcal{K}_{22} + c_{38}\mathcal{K}_{11}$$
$$M_{12} = 2c_{57}\mathcal{K}_{12} + c_{58}\mathcal{K}_{21}$$
$$M_{21} = 2c_{60}\mathcal{K}_{21} + c_{58}\mathcal{K}_{12}$$
$$M_{1(3)} = 2c_{59}\mathcal{K}_{13} + c_{41}T_1$$
$$M_{2(3)} = 2c_{61}\mathcal{K}_{23} + c_{43}T_2 \tag{10.34}$$

Tehnička teorija savijanja štapa operiše sa vektorom savijanja $M_{\alpha(3)}$ a od momenata torzije samo sa sledećom kombinacijom $M_{12} - M_{21}$

Komponente simetrizovanog tenzora momenata torzije nazvaćemo momentima stišljivosti i klizanja jer je dejstvo ovih komponenata vezano za odgovarajuće promene oblika dva bliska poprečna preseka. Kvadratni poprečni presek na mestu $\theta = const$ prelazi u pravougaonik odnosno romb na mestu $\theta + d\theta$. Tako je ostvarena određena promena krivine odnosno torzije.

$$M_{11} = L_{11}$$
$$M_{22} = L_{22}$$
$$M_{12} + M_{21} = L_{12} \tag{10.35}$$

Odredićemo i devet komponenata momenata unutrašnjih sila višeg reda kao parcijalne izvode energije deformacije po komponentalnim deformacijama .

$$M_{111} = 2c_{62}\, m_{111} + c_{50}\, \gamma_{13} + c_{63}\, m_{122} + c_{64}\, m_{221}$$

$$M_{112} = 2c_{68}\, m_{112} + c_{69}\, m_{121} + c_{70}\, m_{222} + c_{54}\, \gamma_{23}$$

$$M_{113} = c_7 T + c_{11} T_{11} + c_{20} T_{22} + c_{25}\, \gamma_{11} + c_{29}\, \gamma_{22} + c_{32}\, \gamma_{33} + 2c_{31}\, m_{113} + c_{35}\, m_{223}$$

$$M_{121} = 2c_{71}\, m_{121} + c_{72}\, m_{222} + c_{69}\, m_{112} + c_{55}\, \gamma_{23}$$

$$M_{122} = 2c_{65}\, m_{122} + c_{66}\, m_{221} + c_{63}\, m_{111} + c_{51}\, \gamma_{13}$$

$$M_{123} = 2c_{74}\, m_{123} + c_{18}\, \gamma_{12} + c_{16} T_{12}$$

$$M_{221} = 2c_{67}\, m_{221} + c_{64}\, m_{111} + c_{66}\, m_{122} + c_{52}\, \gamma_{13}$$

$$M_{222} = 2c_{73}\, m_{222} + c_{72}\, m_{121} + c_{70}\, m_{112} + c_{56}\, \gamma_{23}$$

$$M_{223} = c_8 T + c_{15} T_{11} + c_{21} T_{22} + c_{26}\, \gamma_{11} + c_{30}\, \gamma_{22} + c_{33}\, \gamma_{33} + c_{35}\, m_{113} + 2c_{36}\, m_{223} \qquad (1o.36)$$

Ovu veličinu možemo nazvati bimomentom prema odgovarajućem nazivu u ruskoj literaturi u teoriji tankozidnih štapova.

III POTPUN SISTEM JEDNAČINA PRIZMATIČNOG ŠTAPA

1. Jednačine kretanja

U drugom poglavlju izloženog rada je izvedena teorija prizmatičnog štapa pod pretpostavkom invarijantnosti jednačine energije na superponirana uniformna kretanja translacije, rotacije i viša direktorska kretanja. Ovakav prilaz jednačini balansa energije se svodi na generalizaciju Pioline teoreme, i poznat je u literaturi. /19/, /21/

Da bi odredili potpun sistem jednačina, daćemo prethodno sistem jednačina kretanja polazeći od poznatih izraza za jednačine kretanja elementa u klasičnoj termoelastičnoj teoriji kontinuuma, i izraza za brzinu proizvoljne tačke štapa.

Radi konciznijeg izlaganja, predstavićemo izraze za vektor položaja kao i brzinu proizvoljne tačke štapa u sledećem vidu:

$$\vec{r}^{\,*} = \sum_{N=0} \theta^{\alpha_0} \ldots \theta^{\alpha_N} \vec{a}_{\alpha_0 \ldots \alpha_N} \qquad (1.1)$$

$$\vec{w}^{\,*} = \sum_{N=0} \theta^{\alpha_0} \ldots \theta^{\alpha_N} \vec{w}_{\alpha_0 \ldots \alpha_N} \qquad (1.2)$$

U ovim jednačinama figurišu sledeće veličine:

$$\vec{a}_{\alpha_0} = \vec{a}(\theta,t) = \vec{r}(\theta,t) \; ; \; \theta^{\alpha_0} = 1 \qquad (1.3)$$

$$\vec{w}_{\alpha_0} = \vec{w}(\theta,t) = \vec{v}(\theta,t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.4)$$

Referentni trijedar ostaje trijedar baznih vektora težišne krive štapa:

$$\vec{a}_{\alpha_1} = \vec{a}_{\alpha} = \vec{a}_{\alpha}(\theta,t) \; ; \; \vec{a}_3 = \vec{a}_{\alpha_0,3} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} \qquad (1.5)$$

Metričke vektore pišemo takođe u konciznijem obliku:

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}^{\,*}}{\partial \theta^\alpha} = \sum_{N=1} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}(\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_N})\vec{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \qquad (1.6)$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}^{\,*}}{\partial \theta} = \sum_{N=0} \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_N} \frac{\partial \vec{a}_{\alpha_0 \dots \alpha_N}}{\partial \theta} \qquad (1.7)$$

Jednačine kretanja trodimenzione teorije pišemo u obliku:

$$\vec{T}^{i}{}_{,i} + \rho^* \vec{f}^{\,*} \sqrt{g} - \rho^* \sqrt{g}\, \mathring{\vec{w}}^{*} = 0 \qquad (1.8)$$

$$\vec{g}_i \times \vec{T}^i = 0 \qquad (1.9)$$

Ako za vektor fiktivne brzine izaberemo vektor oblika (1.2), to posle množenja jednačina (1.8) izabranim vektorom i integracije po zapremini štapa između dva poprečna preseka na diferencijalnom rastojanju možemo napisati sledeću jednakost:

$$\int_{c_1}^{c_2} \vec{w}_{(f)\alpha_0 \dots \alpha_n} \cdot \Big\{ \iint \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_n} \Big(\frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{T}^\beta}{\partial \theta^\beta} \Big) d\theta^1 d\theta^2 +$$

$$+ \iint \rho^* \sqrt{g}\, \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_n} \vec{f}^{\,*} d\theta^1 d\theta^2 -$$

$$\sum_{N=0} \iint \rho^* \sqrt{g}\, \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_n} \theta^{\beta_0} \dots \theta^{\beta_N} \mathring{\vec{w}}_{\beta_0 \dots \beta_N} d\theta^1 d\theta^2 \Big\} d\theta = 0 \qquad (1.10)$$

Izračunaćemo jedan za drugim sve članove ove jednakosti (1.1o) :

$$J_1 = \iint \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_n} \frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta} d\theta^1 d\theta^2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \iint \theta^{\alpha_0} \dots \theta^{\alpha_n} \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial \vec{M}^{\alpha_0 \dots \alpha_n}}{\partial \theta} \qquad (1.11)$$

$$(n = 0, 1, \dots)$$

Za određivanje vrednosti drugog integrala treba napraviti sledeću transformaciju:

$$\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}\frac{\partial\vec{T}^{\beta}}{\partial\theta^{\beta}}=\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}\vec{T}^{\beta})-$$

$$-\vec{T}^{\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}) \qquad (1.12)$$

Imajući u vidu jednakost (1.12), možemo odrediti drugi integral:

$$J_2=\iint\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}\frac{\partial\vec{T}^{\beta}}{\partial\theta}d\theta^1d\theta^2=$$

$$\iint\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}\vec{T}^{\beta})d\theta^1d\theta^2-\iint\vec{T}^{\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n})d\theta^1d\theta^2$$

Kako između površinskog integrala i integrala po konturi koja ovu površinu obuhvata, postoji određena veza, to dobijamo:

$$J_2=\oint\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n}(\vec{T}^1d\theta^2-\vec{T}^2d\theta^1)-\vec{\pi}^{\alpha_0\cdot\cdot\alpha_n} \qquad (1.13)$$

Ovde uvodimo pojam torzionih polimomenata $\vec{\pi}^{\alpha_0\cdot\cdot\alpha_n}$, koji su određeni sledećim integralom:

$$\vec{\pi}^{\alpha_0\cdot\cdot\alpha_n}=\iint\vec{T}^{\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(\theta^{\alpha_0}\cdot\cdot\theta^{\alpha_n})d\theta^1d\theta^2 \qquad (1.14)$$

$$\vec{\pi}^{\alpha_0}\equiv\vec{\pi}\equiv 0\ ;\quad \vec{\pi}^{\alpha_1}=\iint\vec{T}^{\beta}\delta^{\alpha_1}_{\beta}d\theta^1d\theta^2.$$

Definisaćemo takođe i zadate zapreminske i površinske sile. Imajući u vidu prvi član integrala J_2 (1.13) kao i vrednost integrala J_3, pomenute sile se određuju jednostavno.

$$J_3 = \iint \theta^{\alpha_0} \cdots \theta^{\alpha_n} \vec{f}^* \rho^* \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 = \lambda \vec{f}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$$

$$\lambda \vec{l}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n} = \lambda \vec{f}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n} + \oint \theta^{\alpha_0} \cdots \theta^{\alpha_n} (\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1) \tag{1.15}$$

Inercijalne sile dobijamo razmatranjem poslednjeg člana jednakosti (1.lo), i uvođenjem inercionih koeficienata:

$$J_4 = \iint \rho^* \sqrt{g}\, \theta^{\alpha_0} \cdots \theta^{\alpha_n} \sum_{N=0} \theta^{\beta_0} \cdots \theta^{\beta_N} \vec{W}_{\beta_0 \ldots \beta_N} d\theta^1 d\theta^2$$

$$J_4 = \lambda \sum_{N=0} i^{\alpha_0 \ldots \alpha_n \beta_0 \ldots \beta_N} \overset{\circ}{\vec{W}}_{\beta_0 \ldots \beta_N} \tag{1.16}$$

Inercioni koeficienti su određeni izrazom:

$$\lambda i^{\alpha_0 \ldots \alpha_n \beta_0 \ldots \beta_N} = \iint \rho^* \sqrt{g}\, \theta^{\alpha_0} \cdots \theta^{\alpha_n} \theta^{\beta_0} \cdots \theta^{\beta_N} d\theta^1 d\theta^2 \tag{1.17}$$

Konačno jednakost (1.lo) možemo napisati u sažetom obliku:

$$\int \vec{W}_{(f)\alpha_0 \ldots \alpha_n} \cdot \left[\lambda \vec{Q}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n}}{\partial \theta} - \vec{\Pi}^{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \right] d\theta = 0 \tag{1.18}$$

Polazeći od poznatog principa da je efekat rada ravnotežnog sistema generalisanih sila na dopuštenom polju virtualnih odnosno fiktivnih brzina jednak nuli, možemo zahtevati jednakost nuli svakog izraza koji je pomnožen sa vektorskom veličinom koja predstavlja oblik funkcionalnog stepena slobode. Tako će se jednakost (1.18) raspasti na sledeći sistem jednačina kretanja:

$$\lambda\vec{Q}^{\alpha_0..\alpha_n} + \frac{\partial\vec{M}^{\alpha_0..\alpha_n}}{\partial\theta} = \vec{\Pi}^{\alpha_0..\alpha_n} \quad (n=0,1,..) \quad (1.19)$$

U ovim jednačinama figurišu objektivne veličine $\vec{Q}^{\alpha_0..\alpha_n}$ koje su date kao razlika između zadatih sila i momenata izazvanih zapreminskim i površinskim silama i sila i momenata izazvanih sila-inercije:

$$\lambda\vec{Q}^{\alpha_0..\alpha_n} = \lambda\vec{L}^{\alpha_0..\alpha_n} - \lambda\sum_{N=0} i^{\alpha_0..\alpha_n\beta_0..\beta_N}\dot{\vec{W}}_{\beta_0..\beta_N} \quad (1.20)$$

Na sličan način određujemo drugu grupu jednačina, polazeći sada od jednačina rotacija čestice trodimenzionog kontinuuma (1.9), koje možemo takođe shvatiti kao sistem ravnotežnih sila. Množeći sve članove jednačine (1.9) vektorom virtualne brzine oblika (1.2), to posle integracije po zapremini štapa, možemo napisati sledeću jednakost:

$$\iiint \vec{W}_{(f)\alpha_0..\alpha_n} \cdot \Big\{\theta^{\alpha_0}..\theta^{\alpha_n}\sum_{N=0}\theta^{\beta_0}..\theta^{\beta_N}\frac{\partial\vec{a}_{\beta_0..\beta_N}}{\partial\theta}\times\vec{T}^3 +$$

$$+\theta^{\alpha_0}..\theta^{\alpha_n}\sum_{N=1}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^{\beta_1}..\theta^{\beta_N})\vec{a}_{\beta_1..\beta_N}\times\vec{T}^\alpha\Big\}d\theta^1 d\theta^2 d\theta = 0$$

$$(1.21)$$

Pri pisanju jednakosti (1.21), uneli smo izraze za $\vec{g}_3$ i $\vec{g}_\alpha$ prema (1.6) i (1.7). Ako vektorske veličine $\vec{a}_{\alpha_0..\alpha_n}$ i $\frac{\partial\vec{a}_{\alpha_0..\alpha_n}}{\partial\theta}$ koje ne zavise od koordinata θ^1 i θ^2, po kojima se inače vrši integracija po poprečnom preseku, izvučemo ispred znaka integrala, zajedno sa sumama, to jednakost (1.21) možemo napisati u obliku:

$$\int\vec{W}_{(f)\alpha_0..\alpha_n}\cdot\Big\{\sum_{N=0}\frac{\partial\vec{a}_{\beta_0..\beta_N}}{\partial\theta}\times\iint\theta^{\alpha_0}..\theta^{\alpha_n}\theta^{\beta_0}..\theta^{\beta_N}\vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 +$$

$$\sum_{N=1}\vec{a}_{\beta_1..\beta_N}\times\iint\theta^{\alpha_0}..\theta^{\alpha_n}(\theta^{\beta_0}..\theta^{\beta_N})_{,\alpha}\vec{T}^\alpha d\theta^1 d\theta^2\Big\}d\theta = 0$$

$$(1.22)$$

Imajući u vidu jednačine (1.14) i (1.11), kojima su definisane generalisane sile: torzioni polimomenti $\vec{\Pi}^{\alpha_0..\alpha_n}$ i polimomenti $\vec{M}^{\alpha_0..\alpha_n}$, to jednakost (1.22), možemo napisati u obliku:

$$\sum_{N=0}\left(\frac{\partial\vec{a}_{\beta_0..\beta_N}}{\partial\theta}\times\vec{M}^{\alpha_0..\alpha_n\beta_0..\beta_N}+\vec{a}_{\beta_0..\beta_N}\times\vec{\Pi}^{\alpha_0..\alpha_n\beta_0..\beta_N}\right)=0\quad(n=0,1,..)\tag{1.23}$$

Pri raspadanju jednakosti (1.22) u sistem jednačina (1.23), imali smo u vidu broj funkcionalnih stepeni slobode vektora fiktivnih brzina, kojim je bio množen izraz u vitičastoj zagradi jednakosti (1.22).

Rezimirajući rezultate ovog poglavlja, možemo zaključiti da je primenom principa virtualnog efekta rada, koji vrši sistem ravnotežnih sila na polju fiktivnih brzina, dopuštenih izabranim modelom štapa, moguće dobiti dve grupe jednačina kretanja (1.19) i (1.23). Treba napomenuti da su obe grupe jednačina kretanja dobili takođe Green i Naghdi u radu /18/, koristeći sasvim različiti postupak. U drugoj glavi ovog rada je razmatrana jednačina balansa energije pa je vršena sukcesivna redukcija iste jednačine postavljanjem zahteva za invarijantnost ove jednačine pri superponiranim kretanjima uniformne translacije, uniformne rotacije i uniformnih deplanacionih kretanja. Tako je dobijena konačna zavisnost slobodne energije od sasvim određenih argumenata. Postavljanjem gore naznačenih zahteva za invarijantnost pri navedenim superponiranim kretanjima ne može se dobiti potpun sistem jednačina kretanja, već se potpun sistem može dobiti ili uvođenjem pojma generalisanih jednačina balansa energije, kako su to radili Green i Naghdi, ili primenom principa virtualnog efekta rada, kako je to urađeno u ovome poglavlju.

2. Potpun sistem linearnih jednačina štapa drugog reda

Razmotrićemo sistem linearnih jednačina prvobitno pravog štapa, čiji trijedar baznih vektora težišne linije jeste trijedar ortogonalnih vektora, sa tangentnim vektorom $\vec{A}_3$, jednim jediničnim vektorom. Ispisaćemo jednačine kretanja, linearizujući komponentni oblik jednačina (1.19) i (1.24), pazeći pri tome na upotrebljene oznake iz druge glave.

$$\lambda q^{i} + \frac{\partial N^{i}}{\partial \theta} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\left(\lambda q^{\nu\mu} + \frac{\partial M^{\nu\mu}}{\partial \theta}\right) - \left(\lambda q^{\mu\nu} + \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

$$\lambda q^{\nu 3} + \frac{\partial M^{\nu 3}}{\partial \theta} = N^{\nu} \qquad (2.3)$$

$$2n^{(\nu\mu)} = \left(\lambda q^{\nu\mu} + \frac{\partial M^{\nu\mu}}{\partial \theta}\right) + \left(\lambda q^{\mu\nu} + \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial \theta}\right) \qquad (2.4)$$

$$n^{\nu} = N^{\nu} + \left(\lambda q^{\nu 3} + \frac{\partial M^{\nu 3}}{\partial \theta}\right) \qquad (2.5)$$

$$n^{3} = N^{3} \qquad (2.6)$$

$$\lambda q^{\alpha_1 \ldots \alpha_n i} + \frac{\partial M^{\alpha_1 \ldots \alpha_n i}}{\partial \theta} = \pi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n i} \quad (n \geq 2) \qquad (2.7)$$

Ovim jednačinama treba dodati grupu konstitutivnih jednačina. Pre nego što pređemo na ispisivanje konstitutivnih jednačina, možemo poređenjem jednačina (2.3) i (2.5) ustanoviti da jeste:

$$n^{\nu} = 2N^{\nu} \qquad (2.8)$$

Ako za model štapa izaberemo štap drugog reda, što će reći da se prvobitno ravnom poprečnom preseku dopušta da posle deformacije pređe u krivu površ drugog reda, to od celog sistema jednačina (2.7), zadržavamo samo njegovih devet jednačina:

$$\lambda \vec{Q}^{\alpha\beta} + \frac{\partial \vec{M}^{\alpha\beta}}{\partial\theta} = \vec{\Pi}^{\alpha\beta} \qquad (2.9)$$

U poglavlju (1o.3) su određene konstitutivne jednačine za entropijke veličine, komponente vektora unutrašnjih sila poprečnog preseka N^{i}, zatim tenzora unutrašnjih sila po jedinici dužine štapa $N^{\alpha\beta}$ ao i komponente momenata unutrašnjih sila poprečnog preseka $M^{\alpha i}$ dnosno $M^{\alpha\beta i}$.

majući u vidu linearnu teoriju štapa drugog reda, pokazaćemo da jednane kretanja (2.1) do (2.6), kao i (2.8) i (2.9), zajedno sa pomenutim nstitutivnim jednačinama poglavlja (1o.3), kao i vezama između pomeanja i deformacija, čini potpun sistem jednačina.

adržaćemo se nešto podrobnije na veličinama $\vec{\Pi}^{\alpha}$ i $\vec{\Pi}^{\alpha\beta}$, koje redstavljaju vektore smičućih sila i momenata torzije.

majući u vidu vezu između vektora napona $\vec{T}^{i}$ i simetričnog kontraarijantnog tenzora napona τ^{ij}, koja u opštem slučaju glasi:

$$\vec{T}^{i} = \sqrt{g}\, \tau^{ij} \vec{g}_j$$

dnosno, za slučaj linearne teorije: $\vec{T}^{i} \cong \sqrt{g}\, \tau^{ij} \vec{a}_j$

to sem veza (2.2) i (2.3), možemo dobiti i sledeće veze između polimomenata i momenata torzije:

$$\begin{aligned} \Pi^{113} &= 2M^{11} \\ \Pi^{123} &= M^{12} + M^{21} \\ \Pi^{223} &= 2M^{22} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Veze (2.1o) možemo takođe dobiti polazeći od jednačina (1.23). Među komponentama za koje ne postoje konstitutivne veze prema ovoj teoriji nalaze se sve sporedne komponente veličina $\Pi^{\alpha\beta i}$. Ispisaćemo definicione izraze za pomenute komponente:

$$\Pi^{111} = 2\iint \sqrt{g}\,\theta^1 \tau^{11} d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\omega^{111}$$

$$\Pi^{112} = 2\iint \sqrt{g}\,\theta^1 \tau^{12} d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\omega^{112}$$

$$\Pi^{121} = \iint \sqrt{g}\,(\theta^2 \tau^{11} + \theta^1 \tau^{21}) d\sigma^1 d\sigma^2 = \omega^{121} + \omega^{211}$$

$$\Pi^{122} = \iint \sqrt{g}\,(\theta^2 \tau^{12} + \theta^1 \tau^{22}) d\sigma^1 d\sigma^2 = \omega^{122} + \omega^{212}$$

$$\Pi^{221} = 2\iint \sqrt{g}\,\theta^2 \tau^{21} d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\omega^{221}$$

$$\Pi^{222} = 2\iint \sqrt{g}\,\theta^2 \tau^{22} d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\omega^{222}$$

$$(2.11)$$

Između definicionih izraza (2.11),odnosno veličina koje ovi izrazi definišu,postoje sledeće očigledne veze:

$$\omega^{112} - \omega^{211} = 0$$
$$\omega^{122} - \omega^{211} = 0 \qquad (2.12)$$

Analizirajući veličine date izrazima (2.11),koje ćemo u toku daljeg razmatranja zanemarirti jer ih teorija zasnovana na jednačini energije invarijantnoj na deplanaciona kretanja ne može definisati niti pak odrediti konstitutivnu vezu,možemo zaključiti da su funkcije komponenata τ^{11}, τ^{22} i τ^{12},simetričnog kovarijantnog tenzora napona τ^{ij} .Zanemarenjem ovih komponenata $\Pi^{\alpha\beta\lambda}$ mi ne isključujemo egzistenciju napona τ^{11}, τ^{22} i τ^{12}, već zanemarujemo samo učešće ovih generalisanih sila na ukupne iznose napona. Kao što je poznato,pomenuti naponi će biti obuhvaćeni postojanjem komponenata $\Pi^{\alpha\lambda}$.

pisaćemo potpun sistem jednačina koje definišu sve vrste kretanja apa drugog reda. Pri tome ćemo nastojati da ih grupišemo prema vrsta- kretanja, iako se ova kretanja bez uvođenja nekih dopunskih pretpo- avki ne mogu razdvojiti.

upa jednačina koja određuje transverzalna kretanja i pravcu baznog ktora $\vec{A_1}$, glasi:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \lambda l_1 = \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial \theta} - N_1 + \lambda l_{13} = \lambda \left(i_{1\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2} + i_{1\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta 3}}{\partial t^2} \right)$$

$$N_1 = 2c_{49}(b_{13} + b_{31}) + c_{50} \frac{\partial a_{111}}{\partial \theta} + c_{51} \frac{\partial a_{122}}{\partial \theta} + c_{52} \frac{\partial a_{221}}{\partial \theta}$$

$$M_{13} = 2c_{59} \frac{\partial b_{13}}{\partial \theta} + c_{41} T_1$$

$$-\lambda S_1 = 2c_{40} T_1 + c_{41} \frac{\partial b_{13}}{\partial \theta}$$

$$b_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \qquad (2.13)$$

Druga grupa jednačina određuje transverzalna kretanja štapa u pravcu vektora $\vec{A_2}$:

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \lambda l_2 = \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta} - N_2 + \lambda l_{23} = \lambda \left(i_{2\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2} + i_{2\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta 3}}{\partial t^2} \right)$$

$$N_2 = 2c_{53}(b_{23} + b_{32}) + c_{54} \frac{\partial a_{112}}{\partial \theta} + c_{55} \frac{\partial a_{121}}{\partial \theta} + c_{56} \frac{\partial a_{222}}{\partial \theta}$$

$$M_{23} = 2c_{61} \frac{\partial b_{23}}{\partial \theta} + c_{43} T_2$$

$$-\lambda S_2 = 2c_{42} T_2 + c_{43} \frac{\partial b_{23}}{\partial \theta} \qquad (2.14)$$

U posebnu grupu jednačina izdvajamo sve jednačine odnosno njihove kombinacije da bi odredili torziona kretanja poprečnog preseka štapa:

$$\frac{\partial(M_{12}-M_{21})}{\partial\theta}+\lambda(l_{12}-l_{21})=\lambda\left(i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$+\lambda\left(i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$M_{12}-M_{21}=(2c_{57}-c_{58})\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}-(2c_{60}-c_{58})\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}$$

$$M_{12}+M_{21}=(c_{58}+2c_{57})\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}+(2c_{60}+c_{58})\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial(M_{12}+M_{21})}{\partial\theta}+\lambda(l_{12}+l_{21})-\lambda\left(i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}+i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$-\lambda\left(i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}+i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)=2N_{12}$$

$$N_{12}=2c_{47}(b_{12}+b_{21})+c_{48}\frac{\partial a_{123}}{\partial\theta}+c_{45}T_{12} \qquad (2.15)$$

Sve jednačine koje određuju podužna kretanja tačaka poprečnog preseka štapa, svrstavamo u posebnu grupu jednačina ekstenzije:

$$\frac{\partial N_3}{\partial\theta}+\lambda l_3=\lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\lambda i_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial\theta}+\lambda\left(l_{11}-i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}-i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)=N_{11}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial\theta}+\lambda\left(l_{22}-i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}\right)=N_{22}$$

$$N_3 = 4c_{31}b_{33} + 2c_{24}b_{11} + 2c_{28}b_{22} + c_5 T_0 + c_{17} T_{11}$$
$$+ c_{19}T_{22} + c_{32}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{33}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$
$$N_{11} = 4c_{22}b_{11} + 2c_{27}b_{22} + 2c_{24}b_{33} + c_3 T_0 + c_{11}T_{11}$$
$$+ c_{17}T_{22} + c_{25}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{26}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$
$$N_{22} = 4c_{27}b_{22} + 2c_{23}b_{11} + 2c_{28}b_{33} + c_5 T_0 + c_{12}T_{11}$$
$$+ c_{18}T_{22} + c_{29}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{30}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$M_{11} = 2c_{37}\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta} + c_{38}\frac{\partial b_{22}}{\partial \theta}$$
$$M_{22} = 2c_{39}\frac{\partial b_{22}}{\partial \theta} + c_{38}\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta}$$
$$-\lambda S = 2c_1 T_0 + c_2 T_{11} + c_3 T_{22} + 2c_4 b_{11} + 2c_5 b_{22}$$
$$+ 2c_6 b_{33} + c_7\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_8\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta} \qquad (2.13)$$

Torziono deplanaciona kretanja su spregnuta sa torzionim kreta-njima preko niza veličina pa ih nije moguće razdvojiti uvođenjem bilio kakvih dopunskih pretpostavki.

$$\frac{\partial M_{123}}{\partial \theta} + \lambda l_{123} - \Pi_{123} = \lambda\left(i_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + i_{12\alpha}\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{\partial t^2}\right)$$
$$+ \lambda\, i_{12\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}$$

$$M_{123} = 2c_{34}\frac{\partial a_{123}}{\partial \theta} + c_{18}(b_{12} + b_{21}) + c_{36}T_{12}$$

$$\Pi_{123} = M_{12} + M_{21}$$

$$-\lambda S_{12} = 2c_{44} T_{12} + c_{45}(b_{12} + b_{21}) + c_{46} \frac{\partial a_{123}}{\partial \theta}$$

$$(2.17)$$

U posebnu grupu jednačina izdvajamo sve jednačine kojima su opisana takva kretanja štapa, kojima će ravan poprečnog preseka preći u jednu krivu površ drugog reda, sa konstantnim poluprečnicima krivine onih krivih linija koje su nastale od pravih paralelnih vektorima $\vec{A}_1$ i $\vec{A}_2$. Ova kretanja nazivamo glavnim deplanacionim kretanjima:

$$\frac{\partial M_{113}}{\partial \theta} + \lambda b_{113} - \Pi_{113} = \lambda\left(i_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + i_{11\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2}\right) + \lambda i_{11\alpha\beta} \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{223}}{\partial \theta} + \lambda b_{223} - \Pi_{223} = \lambda\left(i_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + i_{22\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2}\right) + \lambda i_{22\alpha\beta} \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}$$

$$M_{113} = c_7 T_0 + c_{14} T_{11} + c_{20} T_{22} + 2c_{25} b_{11} + 2c_{[illegible]} b_{22} + 2c_{32} b_{33} + 2c_{34} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{35} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$M_{223} = c_8 T_0 + c_{15} T_{11} + c_{21} T_{22} + 2c_{26} b_{11} + 2c_{[illegible]} b_{22} + 2c_{33} b_{33} + c_{35} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + 2c_{36} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$\Pi_{113} = 2M_{11} \quad ; \quad \Pi_{223} = 2M_{22}$$

$$-\lambda S_{11} = 2c_9 T_{11} + c_2 T_0 + c_{10} T_{22} + 2c_{11} b_{11} + 2c_{12} b_{22} + 2c_{13} b_{33} + c_{14} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{15} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$-\lambda S_{22} = 2c_{16} T_{22} + c_3 T_0 + 2c_{17} b_{11} + 2c_{18} b_{22} + 2c_{19} b_{33} + c_{10} T_{11} + c_{20} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{21} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$(2.18)$$

Ispisaćemo i grupu jednačina kojima se određuju sporedna deplanaciona kretanja štapa. Pri ovim kretanjima sve tačke prvobitno ravnog poprečnog preseka ostaju i dalje u ravnima, ali svi pravci paralelni vektorima $\vec{A}_1$ i $\vec{A}_2$, prelaze u krive linije sa konstantnim poluprečnicima krivine. Pri ispisivanju ove grupe jednačina, polazimo od sledećih konstitutivnih veza:

$$\Pi_{\alpha\beta\lambda} = 0 \qquad (2.19)$$

Imajući u vidu veze (2.19), možemo napisati grupu jednačina koje određuju sporedna deplanaciona kretanja štapa:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta\lambda}}{\partial \theta} + \lambda L_{\alpha\beta\lambda} = \lambda i_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 b_{\gamma\lambda}}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta\lambda}}{\partial t^2}$$

$$M_{111} = 2c_{62} \frac{\partial a_{111}}{\partial \theta} + c_{50}(b_{13} + b_{31}) + c_{63} \frac{\partial a_{122}}{\partial \theta} + c_{64} \frac{\partial a_{221}}{\partial \theta}$$

$$M_{112} = 2c_{68} \frac{\partial a_{112}}{\partial \theta} + c_{69} \frac{\partial a_{121}}{\partial \theta} + c_{70} \frac{\partial a_{222}}{\partial \theta} + c_{71}(b_{23} + b_{32})$$

$$M_{121} = 2c_{71}\frac{\partial a_{121}}{\partial \theta} + c_{72}\frac{\partial a_{222}}{\partial \theta} + c_{59}\frac{\partial a_{112}}{\partial \theta} + c_{55}(b_{23} + b_{32})$$

$$M_{122} = 2c_{65}\frac{\partial a_{122}}{\partial \theta} + c_{66}\frac{\partial a_{221}}{\partial \theta} + c_{57}\frac{\partial a_{111}}{\partial \theta} + c_{51}(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{221} = 2c_{67}\frac{\partial a_{221}}{\partial \theta} + c_{64}\frac{\partial a_{111}}{\partial \theta} + c_{65}\frac{\partial a_{122}}{\partial \theta} + c_{52}(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{222} = 2c_{71}\frac{\partial a_{222}}{\partial \theta} + c_{72}\frac{\partial a_{121}}{\partial \theta} + c_{70}\frac{\partial a_{112}}{\partial \theta} + c_{58}(b_{23} + b_{32})$$

(2.20)

Kao rezime ovog poglavlja možemo utvrditi sledeće:

Teorija prizmatičnih štapova ,čije su konstititivne jednačine dobivene iz jednačine balansa energije invarijantne na viša direktorska kretanja,a osnovne jednačine kretanja primenom principa virtualnog efekta rada ,daje potpun sistem jednačina.

Ako svaku generalisanu silu odnosno momenat karakterišemo prema njenom glavnom argumentu,onda su torzioni polimomenti $\mathcal{T}^{\alpha_1..\alpha_n i}$ funkcije krivljenja vlakana poprečnog preseka $a_{\alpha_1..\alpha_n i}$ dok su polimomenti funkcije promena ovih krivljenja duž štapa.U okviru linearne teorije štapa,glavne komponente torzionih polimomenata se identifikuju sa kombinacijama sporednih komponenata polimomenata. Kako su torzioni polimomenti takve generalisane sile,koje su definisane po jedinici dužine podužnih preseka štapa,čije su normale bazni vektori $\vec{A}_1$ odnosno $\vec{A}_2$,to možemo tvrditi da ova teorija prizmatičnih štapova,daje odgovor na sva pitanja o stanju napona i deformacija poprečnih preseka štapa.Ako se pored stanja napona i deformacija u poprečnim presecima štapa,traži odgovor i na pitanja o stanju napona i deformacija u podužnim presecima štapa,onda se ova teorija prizmatičnog štapa može smatrati približnom teorijom.

3. Potpun sistem linearnih jednačina štapa drugog reda prema rezultatima neizotermičke teorije Greena i Naghdija

U svome radu "Neizotermička teorija štapova, ploča i ljuski", /18/, Green i Naghdi razmatraju teoriju štapova N-tog reda. Ispisane su jednačine balansa energije, kao i momenti jednačina balansa energije sve do reda N. Osnovne jednačine kretanja su dobijene postavljanjem zahteva za invarijantnost kako jednačine balansa enrgije, tako i za invarijantnost momenata jednačina balansa energije na superponirana kretanja krutog tela. Na taj način su dobijene dve grupe jednačina kretanja, potpuno istovetne osnovnim jednačinama (1.19) i (1.23), koje smo mi dobili koristeći princip virtualnog efekta rada, koji vrši jedan ravnotežni sistem sila na polju virtualnih brzina, čiji oblik jeste dopušten usvojenim modelom štapa.

Imajući u vidu osnovne jednačine kretanja, Green i Naghdi su izvršili redukciju pomenutih jednačina balansa energije, odnosno momenata jednačina balansa energije, i posle uvođenja slobodne energije, odnosno definicija izvesnih temperaturnih i entropijskih veličina, utvrdili da slobodna energija, odnosno svi njeni momenti do reda N, zavise od sledećih argumenata:

$$A^{\alpha_0\ldots\alpha_n} = A^{\alpha_0\ldots\alpha_n}(T_0, T_{\beta_1\ldots\beta_n}, \gamma_{ij}, k_{\alpha i}, \varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n i}, \eta_{\alpha_1\ldots\alpha_n i})$$

Imajući u vidu gornju funkcionalnu zavisnost slobodne energije od navedenih argumenata, u radu "Energija deformacije i konstitutivne veze deplanacione teorije elastičnog štapa", štampanom u časopisu "Naše građevinarstvo", Beograd, 1971, broj 10, su određene komponente entropijskih i mehaničkih veličina za slučaj linearne teorije štapa drugog reda, i pokazano da su ove veličine funkcije odgovarajućih komponenata temperaturnih i kinematičkih varijabli.

Sledeći način grupisanja jednačina primenjen u poglavlju 2, ispisaćemo odgovarajuće grupe jednačina:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \lambda l_1 = \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial \theta} - N_1 + \lambda l_{13} = \lambda \left(i_{1\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2} + i_{1\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta 3}}{\partial t^2} \right)$$

$$N_1 = 2c_{62}(b_{13} + b_{31}) + c_{63} \frac{\partial a_{111}}{\partial \theta} + c_{64} \frac{\partial a_{122}}{\partial \theta} + c_{65} \frac{\partial a_{221}}{\partial \theta}$$

$$M_{13} = 2c_{73} \frac{\partial b_{13}}{\partial \theta} + c_{74} a_{111} + c_{75} a_{122} + c_{76} a_{221} + c_{48} T_1$$

$$-\lambda S_1 = 2c_{47} T_1 + c_{48} \frac{\partial b_{13}}{\partial \theta} + c_{49} a_{111} + c_{50} a_{122} + c_{51} a_{221}$$

$$\lambda (r_1 + R_1) - \lambda \theta_0 \dot{S}_1 - \frac{\partial h_1}{\partial \theta} = 0$$

$$b_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \qquad (3.2)$$

Ovde smo sa θ_0 označili ravnomerno raspoređenu temperaturu štapa u nenapregnutom stanju. Sa T^* označavamo promenu veličine θ_0.

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \lambda l_2 = \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta} - N_2 + \lambda l_{23} = \lambda \left(i_{2\alpha} \frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2} + i_{2\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta 3}}{\partial t^2} \right)$$

$$N_2 = 2c_{66}(b_{23} + b_{32}) + c_{67} \frac{\partial a_{112}}{\partial \theta} + c_{68} \frac{\partial a_{121}}{\partial \theta} + c_{69} \frac{\partial a_{222}}{\partial \theta}$$

$$M_{23} = 2c_{79} \frac{\partial b_{23}}{\partial \theta} + c_{80} a_{112} + c_{81} a_{121} + c_{82} a_{222} + c_{53} T_2$$

$$-\lambda S_2 = 2c_{52} T_2 + c_{53} \frac{\partial b_{23}}{\partial \theta} + c_{54} a_{112} + c_{55} a_{121} + c_{56} a_{222}$$

$$\lambda (r_2 + R_2) - \lambda \theta_0 \dot{S}_2 - \frac{\partial h_2}{\partial \theta} = 0$$

$$(3.3)$$

Grupama jednačina (3.2) i (3.3) su određena transverzalna kretanja u pravcima baznih vektora $\vec{A_1}$ i $\vec{A_2}$.

Imajući u vidu izraz za torziju poprečnog preseka pretstavljen kao kombinacija određenih pomeranja, ispisujemo sledeće jednačine:

$$\frac{\partial(M_{12}-M_{21})}{\partial\theta}+\lambda(l_{12}-l_{21})=\lambda\left(i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$+\lambda\left(i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$M_{12}-M_{21}=(2C_{70}-C_{71})\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}-(2C_{77}-C_{71})\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}+$$

$$+(C_{72}-C_{78})a_{123}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(M_{12}+M_{21})+\lambda(l_{12}+l_{21})-\lambda\left(i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}+i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}\right)$$

$$-\lambda\left(i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}+i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)=\Pi_{12}+\Pi_{21}$$

$$M_{12}+M_{21}=(2C_{70}+C_{71})\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}+(2C_{77}+C_{71})\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}+$$

$$+(C_{72}+C_{78})a_{123}$$

$$\Pi_{12}=2C_{60}(b_{12}+b_{21})+C_{61}\frac{\partial a_{123}}{\partial\theta}\cancel{+C_{57}}\,T_{12}$$

$$(3.4)$$

Podužna kretanja tačaka poprečnog preseka štapa su određena sledećom grupom jednačina koje nazivamo jednačine ekstenzije:

$$\frac{\partial N_3}{\partial\theta}+\lambda l_3=\lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\lambda i_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial\theta}+\lambda\left(l_{11}-i_{1\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2}-i_{1\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 1}}{\partial t^2}\right)=\Pi_{11}$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial\theta}+\lambda\left(l_{22}-i_{2\alpha}\frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2}-i_{2\alpha\beta}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 2}}{\partial t^2}\right)=\Pi_{22}$$

$$N_3 = 4c_{31}b_{33} + 2c_{24}b_{11} + 2c_{28}b_{22} + c_6T_0 + c_{13}T_{11}$$
$$+ c_{19}T_{22} + c_{32}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{33}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$\Pi_{11} = 4c_{22}b_{11} + 2c_{23}b_{22} + 2c_{24}b_{33} + c_4T_0 + c_{11}T_{11} +$$
$$+ c_{17}T_{22} + c_{25}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{26}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$\Pi_{22} = 4c_{17}b_{22} + 2c_{23}b_{11} + 2c_{28}b_{33} + c_5T_0 + c_{12}T_{11}$$
$$+ c_{18}T_{22} + c_{29}\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{30}\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$M_{11} = 2c_{37}\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta} + c_{38}\frac{\partial b_{22}}{\partial \theta} + c_{39}a_{113} + c_{40}a_{223}$$

$$M_{22} = 2c_{41}\frac{\partial b_{22}}{\partial \theta} + c_{38}\frac{\partial b_{11}}{\partial \theta} + c_{42}a_{113} + c_{43}a_{223}$$

$$-\lambda S = 2c_1T_0 + c_2T_{11} + c_3T_{22} + 2c_4b_{11} + 2c_5b_{22}$$
$$+ 2c_6b_{33} + c_7\frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_8\frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$\lambda r - \lambda \theta_0 \dot{S} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (3.5)$$

Jednačine torziono-deplanacionih kretanja su date sledećom grupom jednačina:

$$\frac{\partial M_{123}}{\partial \theta} + \lambda l_{123} - \Pi_{123} = \lambda\left(i_{12}\frac{\partial \ddot{u}_3}{\partial t^2} + i_{12\alpha}\frac{\partial \ddot{b}_{12}}{\partial t^2} + i_{12\alpha\beta}\frac{\partial \ddot{a}_{\alpha\beta 3}}{\partial t^2}\right)$$

$$M_{123} = 2c_{108}\frac{\partial a_{123}}{\partial \theta} + c_{61}(b_{12} + b_{21}) + c_{59}T_{12}$$

$$\Pi_{123} = 2c_{95}a_{123} + c_{78}\frac{\partial b_{21}}{\partial \theta} + c_{79}\frac{\partial b_{12}}{\partial \theta}$$

$$-\lambda S_{12} = 2c_{57}T_{12} + c_{58}(b_{12} + b_{21}) + c_{59}\frac{\partial a_{123}}{\partial \theta}$$

$$\lambda(r_{01} + R_{12}) - \lambda \theta_0 \dot{S}_{12} - \frac{\partial h_{12}}{\partial \theta} = 0 \qquad (3.6)$$

Glavna deplanaciona kretanja prevode prvobitno ravan poprečni presek u krivu površ drugog reda. Ova kretanja su određena [illegible] grupom jednačina:

$$\frac{\partial M_{113}}{\partial \theta} + \lambda l_{113} - \Pi_{113} = \lambda \Big(i_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + i_{11\alpha} \frac{\partial^2 a_{\alpha 3}}{\partial z^2} + i_{11\alpha\beta} \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial z^2} \Big)$$

$$\frac{\partial M_{223}}{\partial \theta} + \lambda l_{223} - \Pi_{223} = \lambda \Big(i_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + i_{22\alpha} \frac{\partial^2 a_{\alpha 3}}{\partial z^2} + i_{22\alpha\beta} \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta 3}}{\partial z^2} \Big)$$

$$M_{113} = 2c_{34} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{35} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta} + c_7 T_0 + c_{11} T_{11} + c_{20} T_{22} + 2c_{25} b_{11} + 2c_{29} b_{22} + 2c_{32} b_{33}$$

$$M_{223} = 2c_{36} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta} + c_{35} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_8 T_0 + c_{15} T_{11} + c_{21} T_{22} + 2c_{26} b_{11} + 2c_{30} b_{22} + 2c_{33} b_{33}$$

$$\Pi_{113} = 2c_{44} a_{113} + c_{45} a_{223} + c_{42} \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta} + c_{39} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta}$$

$$\Pi_{223} = 2c_{46} a_{223} + c_{45} a_{113} + c_{43} \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta} + c_{40} \frac{\partial b_{11}}{\partial \theta}$$

$$-\lambda S_{11} = 2c_9 T_{11} + c_2 T_0 + c_{10} T_{22} + 2c_{11} b_{11} + 2c_{12} b_{22} + 2c_{13} b_{33} + c_{14} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{15} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$-\lambda S_{22} = 2c_{16} T_{22} + c_3 T_0 + 2c_{17} b_{11} + 2c_{18} b_{22} + 2c_{19} b_{33} + c_{10} T_{11} + c_{20} \frac{\partial a_{113}}{\partial \theta} + c_{21} \frac{\partial a_{223}}{\partial \theta}$$

$$\lambda (r_{11} + R_{11}) - \lambda \theta_0 \frac{\partial S_{11}}{\partial z} - \frac{\partial h_{11}}{\partial \theta} = 0$$

$$\lambda (r_{22} + R_{22}) - \lambda \theta_0 \frac{\partial S_{22}}{\partial z} - \frac{\partial h_{22}}{\partial \theta} = 0 \qquad (3.7)$$

Sporedna deplanaciona kretanja prevode prvobitno ravne podužne preseke štapa u krive površi drugog reda. Pri takvim kretanjima ravni poprečnih preseka ostaju ravni, ali svi pravci paralelni vektorima $\vec{A}_1$ i $\vec{A}_2$ prelaze u krive linije konstantnih krivina.

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta\nu}}{\partial\theta} + \lambda l_{\alpha\beta\nu} = \lambda i_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 b_{\gamma\nu}}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 a_{\gamma\delta\nu}}{\partial t^2} + \Pi_{\alpha\beta\nu}$$

$$M_{111} = 2c_{96} \frac{\partial a_{111}}{\partial\theta} + c_{97} \frac{\partial a_{122}}{\partial\theta} + c_{98} \frac{\partial a_{221}}{\partial\theta} + c_{61}(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{112} = 2c_{102} \frac{\partial a_{112}}{\partial\theta} + c_{107} \frac{\partial a_{121}}{\partial\theta} + c_{104} \frac{\partial a_{222}}{\partial\theta} + c_{67}(b_{23} + b_{32})$$

$$M_{121} = 2c_{105} \frac{\partial a_{121}}{\partial\theta} + c_{106} \frac{\partial a_{222}}{\partial\theta} + c_{103} \frac{\partial a_{112}}{\partial\theta} + c_{64}(b_{23} + b_{32})$$

$$M_{122} = 2c_{99} \frac{\partial a_{122}}{\partial\theta} + c_{100} \frac{\partial a_{221}}{\partial\theta} + c_{97} \frac{\partial a_{111}}{\partial\theta} + c_{64}(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{221} = 2c_{101} \frac{\partial a_{221}}{\partial\theta} + c_{100} \frac{\partial a_{122}}{\partial\theta} + c_{98} \frac{\partial a_{111}}{\partial\theta} + c_{61}(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{222} = 2c_{107} \frac{\partial a_{222}}{\partial\theta} + c_{106} \frac{\partial a_{121}}{\partial\theta} + c_{104} \frac{\partial a_{112}}{\partial\theta} + c_{67}(b_{23} + b_{32}) \tag{3.9}$$

$$\Pi_{111} = 2c_{83} a_{111} + c_{74} \frac{\partial b_{13}}{\partial\theta} + c_{84} a_{122} + c_{85} a_{221} + c_{77} T_1$$

$$\Pi_{112} = 2c_{89} a_{112} + c_{90} a_{121} + c_{91} a_{222} + c_{80} \frac{\partial b_{23}}{\partial\theta} + c_{75} T_2$$

$$\Pi_{121} = 2c_{92} a_{121} + c_{93} a_{222} + c_{90} a_{112} + c_{81} \frac{\partial b_{23}}{\partial\theta} + c_{75} T_2$$

$$\Pi_{122} = 2c_{86} a_{122} + c_{87} a_{221} + c_{84} a_{111} + c_{78} \frac{\partial b_{13}}{\partial\theta} + c_{76} T_1$$

$$\Pi_{221} = 2c_{88} a_{221} + c_{87} a_{122} + c_{85} a_{111} + c_{76} \frac{\partial b_{13}}{\partial\theta} + c_{77} T_1$$

$$\Pi_{222} = 2c_{94} a_{222} + c_{93} a_{121} + c_{91} a_{112} + c_{82} \frac{\partial b_{23}}{\partial\theta} + c_{76} T_2$$

Pri ispisivanju redukovanih jednačina energije, pretposlednje jednačine sistema (3.2), poslednje jednačine sistema (3.3), (3.5) i (3.6) kao i poslednje dve jednačine sistema (3.7), pretpostavljena je simetrija poprečnih preseka u odnosu na bazne vektore .

Pri ispisivanju potpunog sistema jednačina, od (3.2) do (3.8), kojima su određena sva kretanja štapa drugog reda, nisu uzimane u obzir veze između glavnih komponenata polimomenata torzije i sporednih komponenata polimomenata, čiji je red niži za jedinicu od polimomenata torzije. Razmotrićemo ove veze podrobnije:

$$\begin{aligned} \Pi_{113} &= 2M_{11} \\ \Pi_{223} &= 2M_{22} \\ \Pi_{123} &= M_{12} + M_{21} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Poređenjem konstitutivnih veza (3.9) možemo odrediti izvesne veze između koeficienata:

$$\begin{aligned} c_{44} &= c_{39} & c_{46} &= c_{43} & 2c_{47} &= c_{72} + c_{78} \\ c_{45} &= 2c_{40} & c_{40} &= 2c_{38} & c_{78} &= 2c_{72} + c_{71} \\ c_{42} &= 2c_{28} & c_{43} &= 4c_{41} & c_{79} &= 2c_{70} + c_{71} \\ c_{39} &= 4c_{37} & & & & \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Kao rezime ovog poglavlja možemo konstatovati da neizotermička teorija prizmatičnog štapa, definiše stanje napona i deformacija kako u poprečnim presecima štapa, tako i u njegovim podužnim presecima.

ermoelastična teorija tankozidnog štapa

. Geometrija tankozidnog štapa

tapove,čije tri dimenzije:debljina zidova poprečnog preseka,visina
dnosno širina gabarita poprečnog preseka i dužina štapa,pretstavlja-
u tri veličine različitog poretka, nazivamo tankozidnim.

d neke karakteristične tačke poprečnog preseka odmeravamo konvekt-
e koordinate θ^α ,koje određuju položaj proizvoljne tačke popreč-
og preseka u ravni.Za referentnu osu štapa biramo onu liniju koja
paja sve karakteristične tačke poprečnih preseka.

eka je tangentni vektor referentne ose štapa P u početnoj konfi-
uraciji vektor $\vec{A}_3$. Ako ovome vektoru pridružimo još dva vektora
$\vec{A}_\alpha$,koji leže u ravni poprečnog preseka, onda ćemo imati tri-
edar baznih vektora referentne ose štapa.Vektori $\vec{A}_\alpha$ se biraju ta-
o da budu nosioci izvesnih privilegovanih pravaca.

oložaj proizvoljne tačke štapa u nedeformisanoj konfiguraciji odre-
ujemo jednačinom:

$$\vec{R}^*(\theta^i) = \vec{R}(\theta) + \theta^\alpha \vec{A}_\alpha(\theta) \qquad (1.1)$$

Svi grčki indeksi uzimaju vrednosti 1 i 2 a svi latinski 1,2 i 3.

Posle deformacije štapa,referentna linija P prelazi u liniju p
a vektori $\vec{A}_i$ u bazne vektore $\vec{a}_i$,linije p .Položaj proizvoljne
tačke štapa u deformisanoj konfiguraciji pretstavljamo jednačinom:

$$\vec{r}^*(\theta^i,\phi,t) = \vec{r}(\theta,t) + \theta^\alpha \vec{a}_\alpha(\theta,t) + \phi\,\vartheta(\theta,t)\,\vec{a}_3(\theta,t)$$

Ovde smo sa ϕ obeležili sektorske koordinate, a sa ϑ meru depla-
acije poprečnog preseka.

etrički vektori su određeni sledećim izrazima:

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}^*(\theta^i,\phi,t)}{\partial \theta^\alpha} = \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial \theta^\alpha}\vartheta \vec{a}_3 \qquad (1.3)$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}^*(\theta^i,\phi,t)}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} + \theta^\alpha \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \theta} + \phi \frac{\partial(\vartheta \vec{a}_3)}{\partial \theta}$$

Bazne vektore referentne linije štapa dobijamo kao vrednosti metričkih vektora u ishodnoj tački koordinata:

$$\vec{a}_\alpha = (\vec{g}_\alpha)_{\theta^\alpha=0} = \vec{a}_\alpha \qquad (1.5)$$

$$\vec{a}_3 = (\vec{g}_3)_{\theta^\alpha=0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \qquad (1.6)$$

Veze (1.5) i (1.6), važe samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta^\alpha}\right)_{\theta^\alpha=0} = 0 \quad ; \quad (\phi)_{\theta^\alpha=0} = 0 \qquad (1.7)$$

Prema (1.7) sledi zaključak da je za ishodnu tačku koordinata pogodno izabrati onu karakterističnu tačku, u kojoj će i sektorske koordinate ϕ biti jednake nuli.

Ako je težište poprečnog preseka pre deformacije C, i ako posle deformacije tačka C prelazi u tačku $\bar{C}$, takođe težište poprečnog preseka, to će bazni vektori težišne linije štapa biti određeni izrazima:

$$\vec{i}_\alpha = \vec{a}_\alpha + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta^\alpha}\right)_{\theta^\alpha=\theta^\alpha_C} \vartheta \vec{a}_3 \qquad (1.8)$$

$$\vec{i}_3 = \vec{a}_3 + \theta^\alpha_C \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \theta} + \phi_C \frac{\partial (\vartheta \vec{a}_3)}{\partial \theta} \qquad (1.9)$$

2. Kinematika tankozidnog štapa

Da odredimo brzinu proizvoljne tačke štapa, diferenciraćemo izraz (1.2) po vremenu t, fiksirajući pri tome koordinate θ^i i ϕ :

$$\dot{\vec{r}}^* = \dot{\vec{r}} + \theta^\alpha \dot{\vec{a}}_\alpha + \phi\, \dot{\vartheta} \vec{a}_3 \qquad (2.1)$$

Ako umesto oznaka $\dot{\vec{r}}^*$, $\dot{\vec{r}}$ i $\dot{\vec{a}}_\alpha$, unesemo oznake $\vec{v}^*$, $\vec{v}$ odnosno $\vec{w}_\alpha$, za brzinu proizvoljne čestice štapa, brzine poprečnog preseka, odnosno direktorske brzine, (vidi na pr. /lo/), tada izraz (2.1) možemo pretstaviti u obliku:

$$\vec{v}^* = \vec{v} + \theta^\alpha \vec{w}_\alpha + \phi(\dot{\vartheta} \vec{a}_3 + \vartheta \vec{v}_3) \qquad (2.2)$$

Promenu baznih vektora $\vec{a}_i$, referentne linije štapa $\mathcal{L}$, pretstavljamo linearnom kombinacijom recipročnih vektora $\vec{a}^k$:

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial t} = \dot{\vec{a}}_i = c_{ki} \vec{a}^k \qquad (2.3)$$

Posle množenja (2.3) sa vektorom $\vec{a}_j$, sledi:

$$\dot{\vec{a}}_i \cdot \vec{a}_j = c_{ji} \qquad (2.4)$$

Rastavljanjem na simetrični i antisimetrični deo dobijamo:

$$c_{(ji)} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{a}}_i \cdot \vec{a}_j + \vec{a}_i \cdot \dot{\vec{a}}_j) = \frac{1}{2} \dot{a}_{ji} = \eta_{ji}$$

$$c_{[ji]} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{a}}_i \cdot \vec{a}_j - \vec{a}_i \cdot \dot{\vec{a}}_j) = \tau_{ji} = -\tau_{ij} \qquad (2.5)$$

Imajući u vidu (2.5), možemo (2.3) napisati u obliku:

$$\dot{\vec{a}}_i = (\eta_{ki} + \tau_{ki}) \vec{a}^k \qquad (2.6)$$

Navodimo još nekoliko formula, koje ćemo kasnije koristiti:

$$\dot{\vec{a}}^j = a^{ij}(\tau_{ki} - \eta_{ki}) \vec{a}^k$$

$$\frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{\vec{a}}_\alpha}{\partial \theta} = \dot{k}_{\alpha r} \vec{a}^r + k_\alpha^{\ j}(\tau_{kj} - \eta_{kj}) \vec{a}^k \qquad (2.7)$$

$$\vec{a}_j \cdot \dot{\vec{a}}_{3,3} = \dot{k}_{3j} + k_3^{\ \ell}(\tau_{j\ell} - \eta_{j\ell})$$

3. Osnovne jednačine kretanja

Da izvedemo osnovne jednačine kretanja tankozidnog štapa, polazimo od poznatih jednačina kretanja čestice, datih u trodimenzionoj teoriji kontinuuma:

$$\frac{\partial \vec{T}^i}{\partial \theta^i} + \rho^* \sqrt{g}\, \vec{f}^* - \rho^* \sqrt{g}\, \overset{\circ}{\vec{v}}{}^* = 0 \qquad (3.1)$$

$$\vec{g}_i \times \vec{T}^i = 0 \qquad (3.2)$$

U ovim jednačinama smo sa $\vec{T}^i$ obeležili vektor unutrašnjih napona na odgovarajućoj površini. Ako sa τ^{ij} obeležimo simetrični kontravarijantni tenzor napona, onda možemo napisati vezu:

$$\vec{T}^i = \sqrt{g}\, \tau^{ij} \vec{g}_j \qquad (3.3)$$

Veličina g pretstavlja determinantu metričkog tenzora, ρ^* označava masu po jedinici zapremine, $\vec{f}^*$ veličinu zapreminske sile, takođe po jedinici zapremine.

Smatraćemo veličine koje figurišu u jednačinama (3.1) i (3.2), kao sistem ravnotežnih sila, pa ćemo zahtevati da efekat rada ovakvog ravnotežnog sistema generalisanih sila, na dopuštenom polju virtualnih brzina, bude jednak nuli. Za polje dopuštenih virtualnih brzina biramo izraze oblika (2.2), koje dopušta usvojeni model štapa:

$$\vec{v}^*_{(s)} = \vec{v}_{(s)} + \theta^\alpha \vec{w}_{(s)\alpha} + \phi (\vartheta \overset{\circ}{\vec{a}}_3)_{(s)} \qquad (3.4)$$

Množeći (3.1) vektorima $\vec{v}^*_{(s)}$ i integrišući po zapremini štapa, imajući pri tome u vidu da integracijom treba obuhvatiti ceo poprečni presek, odnosno podužni presek jedinične dužine, pišemo:

$$\int \Big\{ \iint \Big[\vec{v}_{(s)} + \theta^\alpha \vec{w}_{(s)\alpha} + \phi (\vartheta \overset{\circ}{\vec{a}}_3)_{(s)} \Big] \cdot \Big\{ \Big(\frac{\partial \vec{T}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta^3} \Big) -$$

$$- \rho^* \sqrt{g} \Big[\overset{\circ}{\vec{v}} + \theta^\alpha \overset{\circ}{\vec{w}}_\alpha + \phi (\vartheta \overset{\circ}{\vec{a}}_3) \Big] \Big] + \rho^* \sqrt{g}\, \vec{f}^* \Big\} d\theta^1 d\theta^2 \Big\} d\theta^3 = 0$$

$$(3.5)$$

Pri ispisivanju jednakosti (3.5), imali smo u vidu sledeće transformacije:

$$\theta^\alpha \frac{\partial \vec{T}^\beta}{\partial \theta^\beta} = \frac{\partial}{\partial \theta^\beta}\left(\theta^\alpha \vec{T}^\beta\right) - \vec{T}^\beta \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\beta}$$

$$\phi \frac{\partial \vec{T}^\beta}{\partial \theta^\beta} = \frac{\partial}{\partial \theta^\beta}\left(\phi \vec{T}^\beta\right) - \vec{T}^\beta \frac{\partial \phi}{\partial \theta^\beta} \qquad (3.6)$$

Uvodimo sledeće veličine:

$$\iint \frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta} d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \iint \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta} \qquad (3.7)$$

$$\iint \theta^\alpha \frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta} d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \iint \theta^\alpha \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial \vec{M}^\alpha}{\partial \theta} \qquad (3.8)$$

$$\iint \phi \frac{\partial \vec{T}^3}{\partial \theta} d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \iint \phi \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2 = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \theta} \qquad (3.9)$$

Imajući u vidu transformaciju (3.6), definisaćemo veličine:

$$\iint \vec{T}^\beta \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\beta} d\theta^1 d\theta^2 = \vec{T}^\alpha \qquad (3.10)$$

$$\iint \vec{T}^\beta \frac{\partial \phi}{\partial \theta^\beta} d\theta^1 d\theta^2 = \vec{D} \qquad (3.11)$$

Veličine (3.10) i (3.11), pretstavljaju generalisane sile po jedinici dužine podužnih preseka štapa, čije su normale bazni vektori. Imajući u vidu sledeće transformacije površinskog integrala u integral po konturi koja ovu površinu obuhvata:

$$\iint \left(\theta^\alpha \vec{T}^\beta\right)_{,\beta} d\theta^1 d\theta^2 = \oint \theta^\alpha \left(\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1\right)$$

$$\iint \left(\phi \vec{T}^\beta\right)_{,\beta} d\theta^1 d\theta^2 = \oint \phi \left(\vec{T}^1 d\theta^2 - \vec{T}^2 d\theta^1\right) \qquad (3.12)$$

možemo definisati zadate zapreminske i površinske sile, o[illegible] mente ovih sila, sledećim izrazima:

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,\vec{F}=\iint\rho^{*}\sqrt{g}\,\vec{F}^{*}d\theta^{1}d\theta^{2}+\oint(\vec{F}^{1}d\theta^{2}-\vec{F}^{2}d\theta^{1})$$

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,\vec{\ell}^{\alpha}=\iint\rho^{*}\sqrt{g}\,\theta^{\alpha}\vec{F}^{*}d\theta^{1}d\theta^{2}+\oint\theta^{\alpha}(\vec{F}^{1}d\theta^{2}-\vec{F}^{2}d\theta^{1})\qquad(3.13)$$

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,\vec{d}=\iint\rho^{*}\sqrt{g}\,\phi\vec{F}^{*}d\theta^{1}d\theta^{2}+\oint\phi(\vec{F}^{1}d\theta^{2}-\vec{F}^{2}d\theta^{1})$$

Sada jednakost (3.5) pišemo u obliku:

$$\int\Big\{\vec{v}_{(3)}\cdot\Big[\frac{\partial\vec{N}}{\partial s}+\lambda\vec{F}\Big]+\vec{w}_{(3)\alpha}\cdot\Big[\frac{\partial\vec{m}^{\alpha}}{\partial s}+\lambda\vec{Q}^{\alpha}-\vec{m}^{\alpha}\Big]+$$

$$+(\nu\vec{a}_{3})_{(3)}\cdot\Big[\frac{\partial\vec{W}}{\partial s}+\lambda\vec{D}-\vec{P}\Big]\Big\}ds=0\qquad(3.14)$$

U izrazu (3.14) figurišu sledeće objektivne veličine,koje su od-
ređene kao razlika između zadatih sila,odnosno momenata i sila,
odnosno momenata,koje koje su izazvane inercijom:

$$\lambda\vec{F}=\lambda\vec{f}-\lambda\dot{\vec{v}}-\lambda J^{\alpha}\dot{\vec{w}}_{\alpha}-\lambda J^{\phi}\nu\ddot{\vec{a}}_{3}$$

$$\lambda\vec{Q}^{\alpha}=\lambda\vec{\ell}^{\alpha}-\lambda J^{\alpha}\dot{\vec{v}}-\lambda i^{\alpha\beta}\dot{\vec{w}}_{\beta}-i^{\alpha\phi}\nu\ddot{\vec{a}}_{3}\qquad(3.15)$$

$$\lambda\vec{D}=\lambda\vec{d}-\lambda J^{\phi}\dot{\vec{v}}-\lambda i^{\alpha\phi}\dot{\vec{w}}_{\alpha}-\lambda i^{\phi\phi}\nu\ddot{\vec{a}}_{3}.$$

Imajući u vidu broj funkcionalnih stepeni slobode izabranog mode-
la štapa,to jednakost (3.14) rastavljamo na sledeći sistem jedna-
čina kretanja:

$$\frac{\partial\vec{N}}{\partial s}+\lambda\vec{F}=0$$

$$\frac{\partial\vec{m}^{\alpha}}{\partial s}+\lambda\vec{Q}^{\alpha}=\vec{m}^{\alpha}\qquad(3.16)$$

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial s}+\lambda\vec{D}=\vec{P}$$

Druga grupa jednačina kretanja se određuje na sličan način, polazeći pri tome od jednačine (3.2), i imajući u vidu izraze (1.3) i (1.4), za metričke vektore $\vec{g}_\alpha$ i $\vec{g}_3$.

$$(\vec{a}_\alpha + \phi_{,\alpha}\vartheta\vec{a}_3)\times\vec{T}^\alpha + (\vec{a}_3 + \theta^\alpha \frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta} + \phi\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta})\times\vec{T}^3 = 0 \qquad (3.17)$$

Shvatimo li izraz (3.17) kao sistem ravnotežnih sila, to množeći sve članove toga izraza vektorom virtualne brzine oblika (2.2) i integrišući po zapremini štapa, možemo napisati sledeću jednakost:

$$\iiint\{\vec{v}_{(3)}\cdot[(\vec{a}_\alpha+\phi_{,\alpha}\vartheta\vec{a}_3)\times\vec{T}^\alpha+(\vec{a}_3+\theta^\alpha\frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta}+\phi\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta})\times\vec{T}^3]+\vec{v}_{(3)\alpha}\cdot[\theta^\alpha(\vec{a}_\beta+\phi_{,\beta}\vartheta\vec{a}_3)\times\vec{T}^\beta+\theta^\alpha(\vec{a}_3+\theta^\beta\frac{\partial\vec{a}_\beta}{\partial\theta}+\phi\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta})\times\vec{T}^3]+(\dot{\overline{\vartheta\vec{a}_3}})_{(3)}\cdot[\phi(\vec{a}_\alpha+\phi_{,\alpha}\vartheta\vec{a}_3)\times\vec{T}^\alpha+\phi(\vec{a}_3+\theta^\alpha\frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta}+\phi\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta})\times\vec{T}^3]\}d\theta^1 d\theta^2 d\theta = 0 \qquad (3.18)$$

Imajući u vidu definicione izraze za generalisane sile i momente poprečnih i podužnih preseka (3.7), (3.8) i (3.9), možemo jednakost (3.18) napisati u sažetom obliku:

$$\int\{\vec{v}_{(3)}\cdot[\vec{a}_\alpha\times\vec{\Pi}^\alpha+\vartheta\vec{a}_3\times\vec{P}+\vec{a}_3\times\vec{N}^3+\frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta}\times\vec{M}^\alpha+\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta}\times\vec{W}]+\vec{v}_{(3)\beta}\cdot[\vec{a}_\alpha\times\vec{\Pi}^{\alpha\beta}+\vartheta\vec{a}_3\times\vec{P}^\beta+\vec{a}_3\times\vec{N}^\beta+\frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta}\times\vec{M}^{\alpha\beta}+\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta}\times\vec{W}^\beta]+(\dot{\overline{\vartheta\vec{a}_3}})_{(3)}\cdot[\vec{a}_\alpha\times\vec{\Pi}^\alpha_{(\phi)}+\vartheta\vec{a}_3\times\vec{P}_{(\phi)}+\vec{a}_3\times\vec{W}_{(\phi)}+\frac{\partial\vec{a}_\alpha}{\partial\theta}\times\vec{M}^\alpha_{(\phi)}+\frac{\partial(\vartheta\vec{a}_3)}{\partial\theta}\times\vec{W}_{(\phi\phi)}]\}d\theta=0 \qquad (3.19)$$

Imajući u vidu broj funkcionalnih stepeni slobode vektora fiktivne brzine, jednakost (3.19) se raspada na sledeći sistem jednačina, kojima se određuju međusobne veze između generalisanih sila:

$$\vec{a}_\alpha \times \vec{\Pi}^\alpha + \vartheta \vec{a}_3 \times \vec{P}_{(\varphi)} + \vec{a}_3 \times \vec{\Pi} + \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \theta} \times \vec{M}^\alpha + \frac{\partial (\vartheta \vec{a}_3)}{\partial \theta} \times \vec{W}_{(\varphi)} = 0$$

$$\vec{a}_\alpha \times \vec{\Pi}^{\alpha\beta} + \vartheta \vec{a}_3 \times \vec{P}^\beta_{(\theta\varphi)} + \vec{a}_3 \times \vec{\Pi}^\beta + \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \theta} \times \vec{M}^{\alpha\beta} +$$
$$+ \frac{\partial (\vartheta \vec{a}_3)}{\partial \theta} \times \vec{W}^\beta_{(\theta\varphi)} = 0$$

$$\vec{a}_\alpha \times \vec{\Pi}^\alpha_{(\varphi)} + \vartheta \vec{a}_3 \times \vec{P}_{(\varphi\varphi)} + \vec{a}_3 \times \vec{W}_{(\varphi)} + \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial \theta} \times \vec{M}^\alpha_{(\varphi)} +$$
$$+ \frac{\partial (\vartheta \vec{a}_3)}{\partial \theta} \times \vec{W}_{(\varphi\varphi)} = 0 \qquad (3.20)$$

Sem već uvedenih veličina, datih u izrazima od (3.7) do (3.11), ovde smo uveli još sledeće veličine:

$$\vec{\Pi}^{\alpha\beta} = \iint \theta^\beta \vec{T}^\alpha d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{\Pi}^\alpha_{(\varphi)} = \iint \varphi \vec{T}^\alpha d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{P}^\beta_{(\theta\varphi)} = \iint \theta^\beta \vec{T}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^\alpha} d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{P}_{(\varphi\varphi)} = \iint \vec{T}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^\alpha} \varphi \, d\theta^1 d\theta^2 \qquad (3.21)$$

$$\vec{W}^\beta_{(\theta\varphi)} = \iint \theta^\beta \varphi \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{W}_{(\varphi\varphi)} = \iint \varphi \varphi \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{M}^{\alpha\beta} = \iint \theta^\beta \theta^\alpha \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2$$

$$\vec{M}^\alpha_{(\varphi)} = \iint \varphi \theta^\alpha \vec{T}^3 d\theta^1 d\theta^2$$

4. Jednačina balansa energije

Polazimo od jednačine balansa energije za česticu kontinuuma:

$$-\int_V (\dot{u}^* + \vec{v}^*\cdot\dot{\vec{v}}^*)\rho^* dV + \int_V (r^* + \vec{F}^*\cdot\vec{v}^*)\rho^* dV + \int_A (\vec{t}\cdot\vec{v}^* - h^*)\, dA = 0 \qquad (4.1)$$

Transformisaćemo površinski integral kojim se definiše efekat rada površinskih sila na sledeći način:

$$J = \int_A \vec{v}^*\cdot\vec{t}\, dA = \int_A \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{v}^*\cdot\vec{T}^i u_i\, dA$$

$$J = \int_A \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{v}^*\cdot\vec{T}^i dA_i = \int_V \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\vec{v}^*\cdot\vec{T}^i\right)_{,i} dV \qquad (4.2)$$

Napisaćemo zapreminski integral (4.2) u sledećem obliku:

$$J = \int_V \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\vec{v}^*\cdot\vec{T}^i)}{\partial\theta^i} dV = \int_V \frac{\partial\vec{v}^*}{\partial\theta^i}\cdot\vec{T}^i\frac{dV}{\sqrt{g}} + \int_V \vec{v}^*\cdot\frac{\partial\vec{T}^i}{\partial\theta^i}\frac{dV}{\sqrt{g}} \qquad (4.3)$$

Konačno se jednačina balansa energije piše u obliku:

$$-\int_V (\dot{u}^* + \vec{v}^*\cdot\dot{\vec{v}}^*)\rho^* dV + \int_V (r^* + \vec{F}^*\cdot\vec{v}^*)\rho^* dV$$

$$+\int_V \frac{\partial\vec{v}^*}{\partial\theta^i}\cdot\vec{T}^i\frac{dV}{\sqrt{g}} + \int_V \vec{v}^*\cdot\frac{\partial\vec{T}^i}{\partial\theta^i}\frac{dV}{\sqrt{g}} - \int_A h^* dA = 0 \qquad (4.4)$$

Razmotrićemo vrednost integrala (4.3), posle unošenja izraza za brzinu proizvoljne čestice štapa (2.2), i integracije po zapremini elementa štapa:

$$J_1 = \int\Big\{\iint\Big[\frac{\partial\vec{v}}{\partial\theta} + \theta^\alpha\frac{\partial\vec{w}_\alpha}{\partial\theta} + \varphi\frac{\partial(v\vec{\Omega}_3)}{\partial\theta}\Big]\cdot\vec{T}^1 d\theta^1 d\theta^2 +$$

$$+\iint(\vec{w}_\alpha + \varphi_{,\alpha} v\vec{\Omega}_3)\cdot\vec{T}^\alpha d\theta^1 d\theta^2\Big\} d\theta$$

Imajući u vidu definicione izraze (3.7) do (3.11) možemo gornji integral napisati u obliku:

$$J_1 = \int\Big\{\vec{N}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\theta} + \vec{M}^\alpha\cdot\frac{\partial\vec{w}_\alpha}{\partial\theta} + \vec{B}\cdot\frac{\partial(v\vec{\Omega}_3)}{\partial\theta} +$$

$$+\vec{\Pi}^\alpha\cdot\vec{w}_\alpha + \vec{P}\cdot v\vec{\Omega}_3\Big\} d\theta \qquad (4.5)$$

Drugi integral izraza za efekat rada pišemo u sledećem vidu:

$$J_2=\int\left\{\iint\left[\vec{v}+\vartheta^{\alpha}\vec{w}_{\alpha}+\Phi\,\vartheta\mathring{\vec{Q}}_3\right]\cdot\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial\theta}+\frac{\partial\vec{T}^{\beta}}{\partial\theta^{\beta}}\right)d\theta^1 d\theta^2\right\}d\theta$$

Imajući u vidu sledeće transformacije:

$$\vartheta^{\alpha}\left(\frac{\partial\vec{T}^{\beta}}{\partial\theta^{\beta}}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\left(\vartheta^{\alpha}\vec{T}^{\beta}\right)-\vec{T}^{\alpha} \qquad (4.6)$$

$$\Phi\left(\frac{\partial\vec{T}^{\beta}}{\partial\theta^{\beta}}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}\left(\Phi\vec{T}^{\beta}\right)-\vec{T}^{\beta}\Phi_{,\beta}$$

Pišemo vrednost integrala J_2 :

$$J_2=\int\left\{\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{T}}{\partial\theta}+\vec{w}_{\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{M}^{\alpha}}{\partial\theta}+\vartheta\mathring{\vec{Q}}_3\cdot\frac{\partial\vec{Q}}{\partial\theta}+\vec{v}\oint\left(\vec{T}^1 d\theta^2-\vec{T}^2 d\theta^1\right)+\right.$$
$$\vec{w}_{\alpha}\cdot\left[\oint\vartheta^{\alpha}\left(\vec{T}^1 d\theta^2-\vec{T}^2 d\theta^1\right)-\vec{T}^{\alpha}\right]+ \qquad (4.7)$$
$$\left.\vartheta\mathring{\vec{Q}}_3\cdot\left[\oint\Phi\left(\vec{T}^1 d\theta^2-\vec{T}^2 d\theta^1\right)-\vec{P}\right]\right\}d\theta$$

Pri ispisivanju izraza (4.7), korišćena je veza između površinskog integrala i integrala po konturi krive linije, koja ovu površinu obuhvata.

Promenu kinetičke energije štapa u toku vremena određujemo kao vrednost sledećeg integrala:

$$\frac{dK}{dt}=\iiint\rho^{*}\sqrt{g}\left(\vec{v}+\vartheta^{\alpha}\vec{w}_{\alpha}+\Phi\vartheta\mathring{\vec{Q}}_3\right)\cdot\left(\dot{\vec{v}}+\vartheta^{\beta}\dot{\vec{w}}_{\beta}+\Phi\vartheta\ddot{\vec{Q}}_3\right)d\theta^1 d\theta^2 d\theta$$

$$\frac{dK}{dt}=\int\rho\sqrt{a_{33}}\left\{\vec{v}\cdot\left[\dot{\vec{v}}+J^{\alpha}\dot{\vec{w}}_{\alpha}+J^{\Phi}\vartheta\ddot{\vec{Q}}_3\right]+\right.$$
$$+\vec{w}_{\alpha}\cdot\left[J^{\alpha}\dot{\vec{v}}+I^{\alpha\beta}\dot{\vec{w}}_{\beta}+I^{\alpha\Phi}\vartheta\ddot{\vec{Q}}_3\right]+ \qquad (4.8)$$
$$\left.\vartheta\mathring{\vec{Q}}_3\cdot\left[J^{\Phi}\dot{\vec{v}}+I^{\alpha\Phi}\dot{\vec{w}}_{\alpha}+I^{\Phi\Phi}\vartheta\ddot{\vec{Q}}_3\right]\right\}d\theta$$

Toplota je predstavljena sledećim integralima po zapremini štapa i po površini koja ovu zapreminu obuhvata:

$$Q=\int_V\rho^{*}r^{*}dV-\int_A h^{*}dA$$

Veličina r^{*} preostavlja funkciju snabdevanja toplotom, dok je sa h^{*} obeležen toplotni fluks u proizvoljnoj čestici štapa. Da izračunamo vrednost površinskog integrala, transformisaćemo ga predhodno na integral po zapremini štapa.

$$I=\int_A h^{*}dA=\int_A h^{*i}dA_i=\int_V h^{*i}{}_{;i}\,dV$$

Kako jeste: $h^{*i}{}_{;i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,h^{*i})}{\partial\theta^i}$

To dalje sledi:

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{\iint\frac{\partial(\sqrt{g}\,h^{*\alpha})}{\partial\theta^\alpha}d\theta^1 d\theta^2+\iint\frac{\partial(\sqrt{g}\,h^{*3})}{\partial\theta}d\theta^1 d\theta^2\right\}d\theta$$

Posle transformacije površinskog integrala u integral po konturi koja ovu površinu obuhvata, sledi:

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{\oint\sqrt{g}\,h^{*}(u^1 d\theta^2-u^2 d\theta^1)+\frac{\partial}{\partial\theta}\iint\sqrt{g}\,h^{*3}d\theta^1 d\theta^2\right\}d\theta$$

Ako sa r, h i U označimo snabdevanje toplotom, toplotni fluks, odnosno internu energiju, sve po jedinici dužine štapa, onda možemo uvesti sledeće oznake:

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,U=\lambda U=\iint\rho^{*}\sqrt{g}\,U^{*}d\theta^1 d\theta^2$$

$$\lambda r=\iint\rho^{*}\sqrt{g}\,r^{*}d\theta^1 d\theta^2-\oint h^{*}\sqrt{g}\,(u^1 d\theta^2-u^2 d\theta^1)$$

$$h=\iint\sqrt{g g^{33}}\,h^{*}d\theta^1 d\theta^2 \qquad (4.9)$$

Sada ćemo jednačinu balansa energije napisati u nešto sažetijoj formi:

$$\lambda r-\lambda\dot{U}+\left(\lambda\vec{F}+\frac{\partial\vec{N}}{\partial\theta}\right)\cdot\vec{v}+\left(\lambda\vec{Q}^{\alpha}+\frac{\partial\vec{M}^{\alpha}}{\partial\theta}\right)\cdot\vec{w}_{\alpha}$$
$$+\left(\lambda\vec{D}+\frac{\partial\vec{w}}{\partial\theta}\right)\cdot\dot{\vec{v}}\vec{a}_3+\vec{N}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\theta}+\vec{M}^{\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{w}_{\alpha}}{\partial\theta}$$
$$+\vec{w}\cdot\frac{\partial(v\vec{a}_3)}{\partial\theta}-\frac{\partial h}{\partial\theta}=0 \qquad (4.11)$$

Pri ispisivanju jednačine (4.10), uzete su u obzir takođe i veze (3.13) i (3.15). Posle manjih transformacija predstavljamo jednačinu balansa energije u sledećem obliku:

$$\int_{P_1}^{P_2} \lambda \left(r - \overset{\circ}{U} + \vec{F}\cdot\vec{v} + \vec{Q}^{\alpha}\cdot\vec{w}_{\alpha} + \vec{D}\cdot\overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}}\right) d\theta \; +$$

$$+ \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\vec{N}\cdot\vec{v} + \vec{M}^{\alpha}\cdot\vec{w}_{\alpha} + \vec{\nu}\cdot\left(\overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}}\right) - h\right] d\theta = 0 \qquad (4.11)$$

Jednačinu balansa energije (4.11) možemo učiniti invarijantnom na kretanja, koja će štap izvršavati kao kruto telo. Da to učinimo, predstavićemo vektor brzine na sledeći način:

$$\vec{v}^{*\prime} = \vec{v}^{\prime} + \theta^{\alpha}\vec{w}_{\alpha}^{\prime} + \phi\left(\overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}}\right)^{\prime} =$$

$$= \vec{v}^{*} + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}^{*} \qquad (4.12)$$

Jednakost (4.12) definiše promenjene brzine proizvoljne čestice štapa $\vec{v}^{*\prime}$ kao zbir sledećih vektora: uobičajene brzine iste čestice $\vec{v}^{*}$, uniforme brzine translacije $\vec{v}_0$ i rotacije $\vec{\omega}\times\vec{r}^{*}$, pri čemu je $\vec{\omega}$ vektor uniformne rotacije. Imajući u vidu izraz za $\vec{r}^{*}$ pišemo jednačinu (4.12) u obliku:

$$\vec{v}^{\prime} = \vec{v} + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{w}_{\alpha}^{\prime} = \vec{w}_{\alpha} + \vec{\omega}\times\vec{a}_{\alpha} \qquad (4.13)$$

$$\left(\overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}}\right)^{\prime} = \overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}} + \vec{\omega}\times\left(\overset{\circ}{\overrightarrow{\vartheta a_3}}\right)$$

Ako u jednačinu balansa energije, u mesto vektora $\vec v$, $\vec w_0$ i $\rho\dot{\vec a}_3$, unesemo vektore $\vec v\,'$, $\vec w_0\,'$ odnosno $\rho\dot{\vec a}_3\,'$, prema izrazima (4.13), to ćemo dobiti:

$$\rho r-\rho\dot U+\left(\rho\vec F+\frac{\partial\vec N}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\vec v+\dot{\vec r}_0+\vec\omega\times r\right)+$$
$$+\left(\rho\vec Q^{*}+\frac{\partial\vec M^{*}}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\vec w_0+\vec\omega\times\vec a_3\right)+\vec N\cdot\left(\frac{\partial\vec v}{\partial\theta}+\vec\omega\times\vec a_3\right)$$
$$+\left(\rho\vec D+\frac{\partial\vec H}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\rho\dot{\vec a}_3+\vec\omega\times\rho\vec a_3\right)+\vec M^{*}\cdot\left(\frac{\partial\vec w_0}{\partial\theta}+\vec\omega\times\frac{\partial\vec a_3}{\partial\theta}\right)$$
$$+\vec W\cdot\left(\frac{\partial(\rho\dot{\vec a}_3)}{\partial\theta}+\vec\omega\times\frac{\partial(\rho\vec a_3)}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial h}{\partial\theta}=0 \qquad (4.14)$$

Zahtev za invarijantnost jednačine balansa energije pri superponiranim uniformnim brzinama translacije i rotacije, daje sledeće jednačine kretanja:

$$\rho\vec F+\frac{\partial\vec N}{\partial\theta}=0 \qquad (4.15)$$

$$\vec a_3\times\left(\rho\vec Q^{*}+\frac{\partial\vec M^{*}}{\partial\theta}\right)+\rho\vec a_3\times\left(\rho\vec D+\frac{\partial\vec H}{\partial\theta}\right)+\vec a_3\times\vec N+$$
$$+\frac{\partial\vec a_3}{\partial\theta}\times\vec M^{*}+\frac{\partial(\rho\vec a_3)}{\partial\theta}\times\vec W=0 \qquad (4.16)$$

Pri ispisivanju jednačine (4.14), sledeće veličine su smatrane objektivnim, odnosno invarijantnim na superpoziciju uniformnih kretanja štapa kao krutog tela:

$$\rho,\ U,\ r,\ h,\ \vartheta,\ F,\ \vec Q^{*},\ \vec D,\ \vec N,\ \vec M^{*},\ \vec W \qquad (4.17)$$

Da učinimo jednačinu balansa invarijantnom na uniformna kretanja štapa kao krutog tela, treba uzeti u obzir jednačine kretanja (4.15) i (4.16). Dosledno sprovođenje invarijantnosti možemo postići prelazom na komponentnu formu jednačina.

Ipak ćemo izvršiti izvesna uprošćenja jednačine balansa energije (4.11) u njenom vektorskom obliku. Imajući u vidu jednačine kretanja (3.16), od kojih je $(3.16)_1$ istovetna jednačini (4.15), možemo jednačinu (4.11) napisati u sledećem vidu:

$$\rho r - \rho \dot{U} + \vec{M}^{\alpha}\cdot \vec{w}_{\alpha} + \vec{D}\cdot(\vartheta \dot{\vec{a}}_3) + \vec{N}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \vec{M}^{\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{w}_{\alpha}}{\partial \theta} + \vec{W}\cdot\frac{\partial(\vartheta \dot{\vec{a}}_3)}{\partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (4.18)$$

Ako za referentni sistem izaberemo bazne vektore $\vec{a}_i$ referentne krive $\mathcal{R}$, to ćemo veličine koje figurišu u jednačini (4.18), predstavljati na sledeći način:

$$\vec{F} = F^i \vec{a}_i \; ; \; \vec{Q}^{\alpha} = Q^{\alpha i}\vec{a}_i \; ; \; \vec{N} = N^i \vec{a}_i$$

$$\vec{D} = D^i \vec{a}_i \; ; \; \vec{M}^{\alpha} = M^{\alpha i}\vec{a}_i \; ; \; \vec{W} = W^i \vec{a}_i \qquad (4.19)$$

Sada možemo napisati komponentnu formu jednačine balansa energije:

$$\rho r - \rho \dot{U} + N^i(\dot{\eta}_{3i} + \eta_{i3}) + M^{\alpha i}(\dot{\eta}_{\alpha i} + \eta_{i\alpha}) +$$
$$+ M^{\alpha i}\dot{k}_{\alpha i} + M^{\alpha i} k_{\alpha}^{\;l}(\eta_{il} - \eta_{li}) +$$
$$+ D^i[\dot{\vartheta} a_{3i} + \vartheta(\eta_{3i} + \eta_{i3})] +$$
$$+ W^i[\vartheta_{,3}\, a_{3i} + \dot{\vartheta} k_{3i} + \vartheta_{,3}(\eta_{3i} + \eta_{i3}) +$$
$$+ \vartheta \dot{k}_{3i} + \vartheta k_3^{\;l}(\eta_{il} - \eta_{li})] - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0$$

$$(4.20)$$

Sve članove jednačine (4.20), koji sadrže množitelj $\eta_{\nu 3}$, možemo grupisati tako da unutar zagrade stoje izrazi pomnoženi veličinama $\eta_{\nu 3}$. Izjednačujući ove izraze sa nulom, dobijamo komponentnu formu jednačine (4.16):

$$N^{\nu} - \Pi^{\nu 3} + (M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot 3} - M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot \nu}) + \vartheta P^{\nu} + \vartheta_{,3} W^{\nu} + \vartheta (W^{\nu} k_{3}^{\cdot 3} - W^{3} k_{3}^{\cdot \nu}) \qquad (4.21)$$

$$(\Pi^{\mu\nu} - \Pi^{\nu\mu}) + (M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot \mu} - M^{\alpha\mu} k_{\alpha}^{\cdot \nu}) + \vartheta (W^{\nu} k_{3}^{\cdot \mu} - W^{\mu} k_{3}^{\cdot \nu}) = 0 \qquad (4.22)$$

Radi konciznijeg pisanje definitivnog izraza za jednačinu balansa energije uvodimo sledeće veličine:

$$\bar{N}^{3} = N^{3} - M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot 3} + \vartheta P^{3} + \vartheta_{,3} W^{3} - 2\vartheta W^{3} k_{3}^{\cdot 3} \qquad (4.23)$$

$$\bar{N}^{\nu} = N^{\nu} - \Pi^{\nu 3} - (M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot 3} + M^{\alpha 3} k_{\alpha}^{\cdot \nu}) + \vartheta P^{\nu} + \vartheta_{,3} W^{\nu} - \vartheta (W^{\nu} k_{3}^{\cdot 3} + W^{3} k_{3}^{\cdot \nu}) \qquad (4.24)$$

$$\bar{\Pi}^{(\nu\mu)} = (\Pi^{\mu\nu} + \Pi^{\nu\mu}) - (M^{\alpha\nu} k_{\alpha}^{\cdot \mu} + M^{\alpha\mu} k_{\alpha}^{\cdot \nu}) - \vartheta (W^{\nu} k_{3}^{\cdot \mu} + W^{\mu} k_{3}^{\cdot \nu}) \qquad (4.25)$$

Pomoću izraza (4.23), (4.24), (4.25) i (4.26), transformišemo jednačinu balansa energije (4.20):

$$\rho r - \rho \dot{U} + \bar{N}^{3} \eta_{33} + \bar{N}^{\nu} \eta_{\nu 3} + \bar{\Pi}^{(\nu\mu)} \eta_{\nu\mu} + M^{\alpha\nu} \overset{\circ}{k}_{\alpha\nu} + W_{3} \overset{\circ}{\vartheta}_{,3} + P_{3} \overset{\circ}{\vartheta} + W^{3} \overset{\circ}{\overline{(\vartheta k_{33})}} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (4.26)$$

5. Termoelastični štapovi

5.1 Slobodna energija

U trodimenzionoj termoelastičnoj teoriji kontinuuma je poznata sledeća veza između slobodne energije A^*, interne energije U^*, entropije S^* i temperature T, koju merimo od apsolutne nule:

$$A^* = U^* - TS^* \tag{5.1}$$

Kako je A^* dato po jedinici zapremine, odnosno po jedinici mase elementa zapremine, slobodnu energiju po jedinici mase jedinične dužine štapa određujemo izrazom:

$$\rho\sqrt{a_{33}}\,A = \lambda A = \iint \rho^* \sqrt{g}\, A^* d\theta^1 d\theta^2 \tag{5.2}$$

Pomnožimo li izraz (5.1) veličinom $\rho^*\sqrt{g}$, to posle integracije po poprečnom preseku štapa, dobijamo:

$$\lambda A = \iint \rho^* \sqrt{g}\, U^* d\theta^1 d\theta^2 - T \iint \rho^* \sqrt{g}\, S^* d\theta^1 d\theta^2 \tag{5.3}$$

Uvedemo li pojam entropije po jedinici mase jedinične dužine štapa:

$$\lambda S = \iint \rho^* \sqrt{g}\, S^* d\theta^1 d\theta^2 \tag{5.4}$$

To imajući u vidu definicioni izraz za internu energiju po jedinici mase jedinične dužine štapa $(4.9)_1$, možemo izraz (5.3) napisati u sledećem vidu:

$$\lambda A = \lambda U - \lambda TS \tag{5.5}$$

Pri ispisivanju izraza (5.3) imali smo u vidu homogen raspored temperature po poprečnom preseku:

$$T = T(\theta, t) \qquad (5.6)$$

Ako diferenciramo izraz (5.5) po vremenu i rešimo po $\rho\dot{U}$, to unošenjem u jednačinu balansa energije (4.26) sledi:

$$\rho r - \rho(\dot{A} + \dot{T}S + T\dot{S}) + \bar{N}^{3}\eta_{33} + \bar{N}^{\nu}\eta_{\nu 3} + \bar{\Pi}^{(\nu\mu)}\eta_{\nu\mu} + M^{\alpha i}\dot{k}_{\alpha i} + W_{3}\dot{\vartheta}_{3} + P_{3}\dot{\vartheta} + W^{3}\left(\overset{\circ}{\overline{\vartheta k_{33}}}\right) - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (5.7)$$

Dalje razmatranje slobodne energije i utvrđivanje njene funkcionalne zavisnosti od temperature i kinematičkih varijabli kao što su γ_{ij}, tenzor deformacije poprečnog preseka, $k_{\alpha i}$, vektor krivine i tenzor torzije referentne ose štapa, ϑ i ϑ_{3}, deplanacija odnosno promena deplanacije duž štapa, zahteva istraživanje ovog sistema veličina kao jednog termodinamičkog sistema.

5.2 Drugi zakon termodinamike. Clausius-Duhem-ov princip ireverzibilnosti

Prirodni procesi se definišu kao tokovi kojima se jedan termodinamički sistem iz početnog stanja prevodi u konačno stanje.
Za ispitivanje prirodnih procesa, odnosno za utvrđivanje njegove reverzibilnosti, ireverzibilnosti, ili pak neodrživosti, uvodimo karakterističnu veličinu stanja S^*, koju nazivamo entropijom.
Matematička definicija ove veličine je data kao odnos između promene toplote i apsolutne temperature:

$$dS^* = \frac{d'Q^*}{T} \qquad (5.8)$$

U fizičkom pogledu razlikujemo deo entropije nastao dovođenjem toplote sistemu iz spoljnjih izvora, pa se smatra da je entropija ovakvog, u suštini reverzibilnog procesa, jednak nuli.
Količnik između toplote proizvedene unutar termodinamičkog sistema i apsolutne temperature je veći od nule, pa određuje entropiju ireverzibilnih procesa.
Formilisaćemo predhodno izraz za toplotu našeg termodinamičkog sistema:

$$Q = \int_V \rho^* r^* dV - \int_A h^* dA \qquad (5.9)$$

Kao što smo videli, veličina r^* predstavlja funkciju snabdevanja toplotom, dok je sa h^* obeležen toplotni fluks.
Imajući u vidu izraze (5.8) i (5.9) formulisaćemo princip ireverzibilnosti u sledećem vidu:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^* S^* dV - \int_V \frac{\rho^* r^*}{T} dV + \int_A \frac{h^*}{T} dA \geq 0 \qquad (5.10)$$

Dalja transformacija izraza (5.10) zahteva prelazak sa površinskog integrala na integral po zapremini obuhvaćenoj ovom površinom:

$$\int_A \frac{h^k}{T}\,dA = \int_V \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*i}}{T}\right)}{\partial\theta^i}\,dV \qquad (5.11)$$

Imajući u vidu transformaciju (5.11), nejednakost (5.10) postaje:

$$\rho^* T \mathring{s}^* - \rho^* r^* + \frac{T}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*i}}{T}\right)}{\partial\theta^i} \geq 0 \qquad (5.12)$$

Možemo integrisati nejednakost (5.12) po površini poprečnog preseka a zatim po dužini elementa:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big\{ \iint \rho^* \sqrt{g}\, \mathring{s}^* T\, d\theta^1 d\theta^2 - \iint \rho^* r^* \sqrt{g}\, d\theta^1 d\theta^2 + \iint T \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*3}}{T}\right)}{\partial\theta}\, d\theta^1 d\theta^2 + \iint T \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*\alpha}}{T}\right)}{\partial\theta^\alpha}\, d\theta^1 d\theta^2 \Big\}\, d\theta \geq 0 \qquad (5.13)$$

Odredićemo vrednosti pojedinih integrala gornje nejednakosti. Tako imamo:

$$J_1 = \iint T \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\,h^{*3}}{T}\right)}{\partial\theta}\, d\theta^1 d\theta^2 = \iint \frac{\partial(\sqrt{g}\,h^{*3})}{\partial\theta}\, d\theta^1 d\theta^2 - \iint \sqrt{g}\, h^{*3} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial\theta}\, d\theta^1 d\theta^2$$

Imajući u vidu definicioni izraz za toplotni fluks (4.9), vrednost integrala J_1 postaje:

$$J_1 = \frac{\partial h}{\partial\theta} - \frac{h}{T}\frac{\partial T}{\partial\theta} \qquad (5.14)$$

Ako iskoristimo vezu između površinskog i krivolinijskog integrala možemo odrediti sledeći integral:

$$J_2 = \iint T \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}\, h^{\alpha}}{T}\right)}{\partial \theta^{\alpha}}\, d\theta^1 d\theta^2 = \oint \sqrt{g}\, h^{\alpha}\left(u\, d\theta^2 - u\, d\theta^1\right) \qquad (5.15)$$

Imajući u vidu definicioni izraz za funkciju snabdevanja toplotom po jedinici mase referentne krive r, dat formulom $(4.9)_2$, možemo nejednakost (5.13) napisati:

$$\lambda T \mathring{S} - \lambda r + \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{h}{T}\frac{\partial T}{\partial \theta} \geq 0 \qquad (5.16)$$

Imajući u vidu jednačinu redukovane energije (5.7) i nejednakost (5.16), sledi:

$$-\lambda \mathring{A} - \lambda \mathring{T} S + \bar{N}^{3}\mathring{\eta}_{33} + \bar{N}^{j}\mathring{\eta}_{j3} + \bar{\Pi}^{(\beta\mu)}\mathring{\eta}_{\beta\mu} + M^{\alpha i}\mathring{k}_{\alpha i} + W_3 \mathring{\delta}_{33} + P_3 \mathring{\delta} + W^{j}\,\overset{\circ}{\overline{(\delta k_{3j})}} - \frac{h}{T}\frac{\partial T}{\partial \theta} \geq 0 \qquad (5.17)$$

Sledeći postupak Green-Laws-a /10/, možemo odrediti konstitutivne jednačine elastičnog štapa:

$$S = -\frac{\partial A}{\partial T}\ ; \quad \bar{N}^{3} = 2\lambda \frac{\partial A}{\partial \eta_{33}}\ ; \quad \bar{N}^{j} = 2\lambda \frac{\partial A}{\partial \eta_{j3}}$$

$$\bar{\Pi}^{(\beta\mu)} = 2\lambda \frac{\partial A}{\partial \eta_{\beta\mu}}\ ; \quad M^{\alpha i} = \lambda \frac{\partial A}{\partial k_{\alpha i}}$$

$$W_3 = \lambda \frac{\partial A}{\partial \delta_{33}}\ ; \quad P_3 = \lambda \frac{\partial A}{\partial \delta}$$

$$W^{j} = \lambda \frac{\partial A}{\partial (\delta k_{3j})} \qquad (5.18)$$

U jednačinama (5.18), slobodna energija je funkcija sledećih argumenata:

$$A = A(T, \gamma_{ij}, k_{\alpha i}, \vartheta_{,3}, \vartheta, \vartheta_{k,j}) \qquad (5.19)$$

Veličina γ_{ij} jeste tenzor deformacije, određen izrazom:

$$\gamma_{ij} = a_{ij} - A_{ij} \qquad (5.20)$$

Sada je moguće redukovati jednačine energije (5.7):

$$\rho r - \rho T\dot{S} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (5.21)$$

Nejednačina (5.17) postaje:

$$-h\,\frac{\partial T}{\partial \theta} \geq 0 \qquad (5.22)$$

Konstitutivna veza za h pokazuje zavisnost iste veličine od sledećih argumenata:

$$h = h\left(T, \frac{\partial T}{\partial \theta}, \gamma_{ij}, k_{\alpha i}, \vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}\right) \qquad (5.23)$$

6. Linearna teorija pravog štapa

6.1 Osnovne jednačine kretanja

Neka su početne vrednosti baznih vektora $\vec{a}_i$, referentne linije p, ortogonalni vektori $\vec{A}_i$, od kojih je vektor $\vec{A}_3$ jedinični vektor usmeren duž štapa, čija je osa pre deformacije bila prava li ija. Tada važi:

$$\vec{A}_i \cdot \vec{A}_j = \delta_{ij} \qquad (6.1)$$

Ako uzmemo da je:

$$\vec{r} = \theta \vec{A}_3 + \vec{u} \quad ; \quad \vec{a}_i = \vec{A}_i + \vec{b}_i \qquad (6.2)$$

to za male vrednosti vektora pomeranja $\vec{u}$ i vektora deformacije $\vec{b}_i$, nema razlike između gornjih i donjih indeksa. Tada sledi:

$$\vec{u} = u_i \vec{A}_i \quad ; \quad \vec{b}_i = b_{ij} \vec{A}_j$$

$$\vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \quad ; \quad b_{3i} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \qquad (6.3)$$

$$\gamma_{ij} = b_{ij} + b_{ji} \quad ; \quad k_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta}$$

Sledeći uobičajeni postupak linearizacije, jednačine kretanja (3.16), za prvobitno prav štap, pišemo u sledećem vidu:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \theta} + \lambda f_i = \lambda \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda J_\alpha \frac{\partial^2 b_{\alpha i}}{\partial t^2} + \lambda J_\theta \frac{\partial^2 (\theta b_{\theta i})}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha i}}{\partial \theta} + \lambda l_{\alpha i} = \Gamma_{\alpha i} + \lambda J_\alpha \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 b_{\beta i}}{\partial t^2} + i_{\alpha\theta} \frac{\partial^2 (\theta b_{\theta i})}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \theta} + \lambda d_i = P_i + \lambda J_\theta \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\theta} \frac{\partial^2 b_{\alpha i}}{\partial t^2} + \lambda i_{\theta\theta} \frac{\partial^2 (\theta b_{\theta i})}{\partial t^2}$$

$$(6.4)$$

Jednačine kretanja $(3.20)_1$, odnosno (4.21) i (4.22) daju posle linearizacije sledeće veze:

$$
\begin{aligned}
&N^{\nu} - \Pi^{\nu 3} = 0 \\
&\Pi^{\mu\nu} - \Pi^{\nu\mu} = 0
\end{aligned}
\qquad (6.5)
$$

Uvedene veličine $\bar{N}^3$, $\bar{N}^{\nu}$, $\bar{\Pi}^{(\nu\mu)}$ možemo napisati kao funkcije sledećih generalisanih sila:

$$
\begin{aligned}
&\bar{N}^3 = N^3 \\
&\bar{N}^{\nu} = N^{\nu} - \Pi^{\nu 3} \\
&\bar{\Pi}^{(\nu\mu)} = \Pi^{\mu\nu} + \Pi^{\nu\mu}
\end{aligned}
\qquad (6.6)
$$

Poredeći sistem (6.5) i (6.6) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\bar{N}^{\nu} = 2N^{\nu} \\
&\bar{\Pi}^{(\nu\mu)} = 2\Pi^{(\mu\nu)}
\end{aligned}
\qquad (6.7)
$$

6.2 Slobodna energija

Pri razmatranju linearne teorije štapa, slobodnu energiju treba predstaviti kao homogenu, kvadratnu funkciju navedenih argumenata:

$$A = A(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}, k_{13}, k_{23}, \vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}) \qquad (6.8)$$

Opšti izraz za funkciju slobodne energije dobijamo ako napišemo zbir kvadrata svih argumenata navedenih vezom (6.8), množeći ih pri tome svaki sa svakim. Takav izraz za slobodnu energiju bi bio veoma dug i nebi ispunjavao potrebne zahteve o invarijantnosti pri koordinatnim transformacijama. Ovde ćemo upotrebiti postupak, koga često srećemo kod A.E.Green-a et al, gde se razmatraju takvi materijali koji poseduju osobine kinetičke simetrije. Ovakva vrsta simetrije uslovljava invarijantnost energije deformacije pri promeni orijantacije koordinatnih osa, odnosno njihovih jediničnih vektora.

Postavićemo sada zahtev za invarijantnost slobodne energije pri transformaciji:

$$\vec{a}_1 \rightarrow -\vec{a}_1 \; ; \; \vec{A}_1 \rightarrow -\vec{A}_1 \qquad (6.9)$$

Tada će promeniti znak svi argumenti kod kojih se indeks 1 pojavljuje neparan broj puta. Orijentacija lučnih koordinata $\theta^{\alpha}_{(S)}$ jeste vezana za orijentaciju koordinatnih osa θ^{α}. Prema konvenciji, pozitivno $\theta^{1}_{(S)}$ odmeravamo od ishodne tačke u smeru koji bi vektor $\vec{a}_1$ doveo do poklapanja sa vektorom $\vec{a}_2$. Pri transformaciji (6.9), menja se znak lučne koordinate $\theta^{1}_{(S)}$, pa možemo pisati:

$$\theta^{1}_{(S)} \rightarrow -\theta^{1}_{(S)} \qquad (6.10)$$

$$\theta^1_{(s)} \rightarrow -\theta^1_{(s)} \qquad (6.10)$$

Izraz (6.10) važi takođe i pri sledećoj transformaciji:

$$\vec{a}_2 \rightarrow -\vec{a}_2 \; ; \quad \vec{A}_2 \rightarrow -\vec{A}_2 \qquad (6.11)$$

Utvrdićemo još i ponašanje veličina $\vartheta = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$, odnosno $\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \alpha}{(\partial \theta)^2}$ pri naznačenim transformacijama. U teoriji tankozidnog štapa, veličina α predstavlja obrtanje poprečnog preseka kao krutog diska oko prirodnog centra rotacije. Za pozitivan smer rotacije biramo takav ugao α, koji daje pomeranje razmatrane tačke S u smeru pozitivne lučne koordinate $\theta^1_{(s)}$. Na osnovu usvojenog dogovora o pozitivnom smeru rotacije poprečnog preseka, sledi zaključak da se promenom znaka koordinate $\theta^1_{(s)}$ menja i znak ugla rotacije α, kao i njegovog prvog i drugog izvoda u podužnoj koordinati θ. Tako možemo pisati:

$$\begin{aligned} &\vec{A}_1 \rightarrow -\vec{A}_1 \; ; \; \alpha \rightarrow -\alpha \; ; \; \vartheta \rightarrow -\vartheta \; ; \; \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \rightarrow -\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \\ &\vec{A}_2 \rightarrow -\vec{A}_2 \; ; \; \alpha \rightarrow -\alpha \; ; \; \vartheta \rightarrow -\vartheta \; ; \; \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \rightarrow -\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Posle transformacije (6.9), izvesni argumenti slobodne energije menjaju znak:

$$A = A(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, -\gamma_{13}, -\gamma_{12}, \gamma_{23}, k_{11}, -k_{12}, -k_{13}, - k_{21}, k_{22}, k_{23}, -\vartheta, -\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}) \qquad (6.13)$$

Zadržavajući sve argumente nepromenjenog znaka, i čineći sve argumente sa promenjenim znakom invarijantne na transformaciju (6.9), množeći ih međusobno, dobijamo:

$$A = A\Big(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{23}, \gamma_{12}^2, \gamma_{12}\gamma_{13}, \gamma_{12}k_{12}, \gamma_{12}k_{21}, \gamma_{12}k_{13}, \gamma_{12}\vartheta, \gamma_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, \gamma_{13}^2, \gamma_{13}k_{12}, \gamma_{13}k_{13}, \gamma_{13}\vartheta, \gamma_{13}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{12}^2, k_{12}k_{21}, k_{12}k_{13}, k_{12}\vartheta, k_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{21}^2, k_{21}k_{13}, k_{21}\vartheta, k_{21}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{13}^2, k_{13}\vartheta, k_{13}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, \vartheta^2, \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\Big) \qquad (6.14)$$

Na sličan način razmatramo i transformaciju (6.11). Sada će promeniti znak svi argumenti kod kojih se indeks 2 pojavljuje neparan broj puta:

$$A = A\Big(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, k_{11}, k_{22}, -\gamma_{23}, -k_{23}, \gamma_{12}^2, -\gamma_{12}\gamma_{13}, \gamma_{12}k_{12}, \gamma_{12}k_{21}, -\gamma_{12}k_{13}, \gamma_{12}\vartheta, \gamma_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, \gamma_{13}^2, -\gamma_{13}k_{12}, -\gamma_{13}k_{21}, \gamma_{13}k_{13}, -\gamma_{13}\vartheta, -\gamma_{13}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{12}^2, k_{12}k_{21}, -k_{12}k_{13}, k_{12}\vartheta, k_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{21}^2, -k_{21}k_{13}, k_{21}\vartheta, k_{21}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, -k_{13}\vartheta, -k_{13}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, k_{13}^2, \vartheta^2, \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\Big) \qquad (6.15)$$

U izrazu (6.15) zadržavamo sve argumente čiji se znak nije promenio pri transformaciji (6.11). Od argumenata sa promenjenim znakom stvaramo kvadratne kombinacije, množeći ih međusobno svaki sa svakim, zadržavajući pri tome samo kvadratne članove ovih kombinacija, budući da se ovde radi o linearnoj teoriji štapa.

$$A = A(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, k_{11}, k_{22}, \gamma_{23}^2, \gamma_{23} k_{23}, k_{23}^2, \gamma_{12}^2, \gamma_{12} k_{12}, \gamma_{12} k_{21}, \gamma_{12} \vartheta, \gamma_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \gamma_{13}^2, \gamma_{13} k_{13}, k_{12}^2, k_{12} k_{21}, k_{12} \vartheta, k_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, k_{21}^2, k_{21} \vartheta, k_{21} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, k_{13}^2, \vartheta^2, \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}) \qquad (6.16)$$

Razmotrićemo sada transformaciju:

$$\vec{a}_3 \to -\vec{a}_3 \; ; \; \vec{A}_3 \to -\vec{A}_3 \qquad (6.17)$$

Sada će znak promeniti svi elementi deformacionih veličina, za tenzor deformacije ako se indeks 3 pojavi neparan broj puta, za tenzor torzije i vektor krivine ako se indeks 3 ponovi 2 puta. Ostale veličine, koje zavise od koordinate, ϑ, transformišu na sledeći način:

$$T \to +T \; ; \; \alpha \to \alpha \; ; \; \alpha_{23} \to -\alpha_{23} \; ; \; \alpha_{333} \to \alpha_{333} \qquad (6.18)$$

Funkcionalna zavisnost (6.16) sada postaje:

$$A = A(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, -k_{11}, -k_{22}, \gamma_{23}^2, -\gamma_{23} k_{23}, k_{23}^2, \gamma_{12}^2, -\gamma_{12} k_{12}, -\gamma_{12} k_{21}, -\gamma_{12} \vartheta, \gamma_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \gamma_{13}^2, -\gamma_{13} k_{13}, k_{12}^2, k_{12} k_{21}, k_{12} \vartheta, -k_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, k_{21}^2, k_{21} \vartheta, -k_{21} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, k_{13}^2, \vartheta^2, -\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}) \qquad (6.19)$$

Kao i u predhodnom slučaju, učinićemo invarijantnim sve linearne negativne argumente međusobnim množenjem ovih članova. Pri tome odbacijemo sve kvadratne negativne argumente, jer bi njihovo međusobno množenje premašivalo kvadratnu formu slobodne energije.

$$A = A(T, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, k_{11}^2, k_{11} k_{22}, k_{22}^2, \gamma_{23}^2, k_{23}^2, \gamma_{12}^2, \gamma_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \gamma_{13}^2, k_{13}^2, k_{12} k_{21}, k_{12} \vartheta, k_{21}^2, k_{21} \vartheta, k_{13}^2, \vartheta^2, \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}) \qquad (6.20)$$

6.3 Konstitutivne jednačine

U prethodnom poglavlju smo odredili argumente od kojih zavisi slobodna energija štapa. Kako slobodna energija treba da bude homogena kvadratna funkcija utvrđenih argumenata, to ćemo formulisati funkcionalnu zavisnost ove energije od kvadrata navedenih argumenata:

$$
\begin{aligned}
2\lambda A = {} & C_1\gamma_{11}^2 + C_2\gamma_{22}^2 + C_3\gamma_{33}^2 + \tfrac{1}{4}C_4(\gamma_{12}+\gamma_{21})^2 + C_5\gamma_{23}^2 + \\
& + C_6\gamma_{13}^2 + C_7\gamma_{11}\gamma_{22} + C_8\gamma_{11}\gamma_{33} + C_9\gamma_{22}\gamma_{33} + C_{10}k_{11}^2 + \\
& + C_{11}k_{22}^2 + C_{12}k_{12}^2 + C_{13}k_{21}^2 + C_{14}k_{12}k_{21} + C_{15}k_{23}^2 + \\
& + C_{16}k_{13}^2 + C_{17}k_{11}k_{22} + 2C_{18}T\gamma_{11} + 2C_{19}T\gamma_{22} + 2C_{20}T\gamma_{33} \\
& + C_{21}T^2 + C_{22}\gamma_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + C_{23}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\frac{\partial\vartheta}{\partial s} + C_{24}k_{12}\vartheta + \\
& + C_{25}k_{21}\vartheta + C_{26}\vartheta^2
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Entropija je određena kao izvod slobodne energije po temperaturi T:

$$
-\lambda S = C_{21}T + C_{18}\gamma_{11} + C_{19}\gamma_{22} + C_{20}\gamma_{33} \tag{6.22}
$$

Komponente vektora unutrašnjih sila poprečnog preseka određujemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
N_3 &= 2C_3\gamma_{33} + C_8\gamma_{11} + C_9\gamma_{22} + 2C_{20}T \\
N_1 &= C_6\gamma_{13} \\
N_2 &= C_5\gamma_{23}
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Odredićemo i komponente tenzora unutrašnjih sila podužnih preseka jedinične dužine. Dejstvo ovih sila se manifestuje deformacijom, pri kojoj kvadratni poprečni preseci prelaze u pravougaonike odnosno romb:

$$\Pi_{11} = 2c_1\gamma_{11} + c_7\gamma_{22} + c_8\gamma_{33} + 2c_{18}T$$

$$\Pi_{22} = 2c_2\gamma_{22} + c_7\gamma_{11} + c_9\gamma_{33} + 2c_{19}T$$

$$\Pi_{12} = \frac{1}{2}c_4(\gamma_{12}+\gamma_{21}) + \frac{1}{2}c_{22}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} \qquad (6.24)$$

Komponente vektora momenata savijanja i tenzora torzije unutrašnjih sila poprečnog preseka određujemo na sledeći način:

$$M_{11} = c_{10}k_{11} + \frac{1}{2}c_{12}k_{22}$$

$$M_{22} = c_{11}k_{22} + \frac{1}{2}c_{12}k_{11}$$

$$M_{12} = c_{12}k_{12} + \frac{1}{2}c_{14}k_{21} + \frac{1}{2}c_{24}\vartheta$$

$$M_{21} = c_{13}k_{21} + \frac{1}{2}c_{14}k_{12} + \frac{1}{2}c_{25}\vartheta$$

$$M_{13} = c_{16}k_{13} \qquad (6.25)$$

$$M_{23} = c_{15}k_{23}$$

Ostale veličine određujemo sledećim izrazima:

$$W_3 = c_{23}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} + \frac{1}{4}(\gamma_{12}+\gamma_{21})c_{22}$$

$$P_3 = c_{26}\vartheta + \frac{1}{2}c_{24}k_{12} + \frac{1}{2}c_{25}k_{21} \qquad (6.26)$$

$$W_1 = W_2 = 0; \quad P_1 = P_2 = 0$$

6.4 Potpun sistem jednačina

Ispisaćemo potpun sistem jednačina koje definišu sve vrste kretanja tankozidnog štapa. Pri tome ćemo izvršiti grupisanje jednačina prema vrstama kretanja koja treba opisati, bez obzira da li se sva ova kretanja stvarno mogu između sebe razdvojiti.

grupa jednačina, koja određuje transverzalna kretanja u pravcu baznog vektora $\vec{A}_1$, glasi:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \lambda f_1 = \lambda\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \lambda a_\alpha \frac{\partial^2 b_{\alpha 1}}{\partial t^2} + J_\phi \frac{\partial^2 (\gamma b_{31})}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial \theta} + \lambda l_{13} - N_1 = \lambda\left(J_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \dot{i}_{1\beta} \frac{\partial^2 b_{\beta 1}}{\partial t^2} + \dot{i}_{1\phi} \frac{\partial^2 (\gamma b_{31})}{\partial t^2}\right)$$

$$N_1 = c_5(b_{13} + b_{31})$$

$$M_{13} = c_{16} \frac{\partial b_{13}}{\partial \theta} \quad ; \quad b_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \qquad (6.27)$$

Druga grupa jednačina određuje transverzalna kretanja štapa u pravcu vektora $\vec{A}_2$:

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \lambda f_2 = \lambda\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + J_\alpha \frac{\partial^2 b_{\alpha 2}}{\partial t^2} + J_\phi \frac{\partial^2 (\gamma b_{32})}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{23}}{\partial \theta} + \lambda l_{23} - N_2 = \lambda\left(J_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dot{i}_{2\beta} \frac{\partial^2 b_{\beta 2}}{\partial t^2} + \dot{i}_{2\phi} \frac{\partial^2 (\gamma b_{32})}{\partial t^2}\right)$$

$$N_2 = c_5(b_{23} + b_{32}) \; ; \; M_{23} = c_{15} \frac{\partial b_{23}}{\partial \theta} \; ; \qquad (6.28)$$

U posebnu grupu jednačina izdvajamo one kombinacije jednačina, koje određuju torziona kretanja poprečnog preseka štapa:

$$\frac{\partial (M_{12} - M_{21})}{\partial \theta} + \lambda(l_{12} - l_{21}) = \lambda\left(J_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - J_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ \lambda\left(\dot{i}_{1\beta} \frac{\partial^2 b_{\beta 2}}{\partial t^2} - \dot{i}_{2\beta} \frac{\partial^2 b_{\beta 1}}{\partial t^2}\right) + \lambda\left[\dot{i}_{1\phi} \frac{\partial^2 (\gamma b_{32})}{\partial t^2} - \dot{i}_{2\phi} \frac{\partial^2 (\gamma b_{31})}{\partial t^2}\right]$$

$$M_{12}-M_{21}=\left(c_{12}-\frac{1}{2}c_{11}\right)\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}-\left(c_{13}-\frac{1}{2}c_{11}\right)\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\left(c_{24}-c_{25}\right)\vartheta$$

$$M_{12}+M_{21}=\left(c_{12}+\frac{1}{2}c_{14}\right)\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}+\left(c_{13}+\frac{1}{2}c_{14}\right)\frac{\partial b_{21}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\left(c_{24}+c_{25}\right)\vartheta$$

$$\frac{\partial(M_{12}+M_{21})}{\partial\theta}+(l_{12}+l_{21})\lambda-\lambda\left(J_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+J_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)-\lambda\left(i_{1\beta}\frac{\partial^2 b_{\beta 2}}{\partial t^2}+i_{2\beta}\frac{\partial^2 b_{\beta 1}}{\partial t^2}\right)-\lambda\left[i_{14}\frac{\partial^2(\vartheta b_{22})}{\partial t^2}+i_{24}\frac{\partial^2(\vartheta b_{11})}{\partial t^2}\right]=2\Pi_{12}$$

$$\Pi_{12}=c_4(b_{12}+b_{21})+\frac{1}{2}c_{22}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\qquad(6.29)$$

Podužna kretanja štapa određuje grupa jednačina ekstenzije:

$$\frac{\partial N_3}{\partial\theta}+\lambda f_3=\lambda\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+J_\alpha\frac{\partial^2 b_{\alpha 3}}{\partial t^2}+J_\phi\frac{\partial^2 \vartheta b_{33}}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial\theta}+\lambda l_{11}=\Pi_{11}+\lambda\left(J_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+i_{1\beta}\frac{\partial^2 b_{\beta 1}}{\partial t^2}+i_{14}\frac{\partial^2 \vartheta b_{11}}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial\theta}+\lambda l_{22}=\Pi_{22}+\lambda\left(J_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+i_{2\beta}\frac{\partial^2 b_{\beta 2}}{\partial t^2}+i_{24}\frac{\partial^2 \vartheta b_{22}}{\partial t^2}\right)$$

$$N_3=4c_3 b_{33}+2c_8 b_{11}+2c_9 b_{22}+2c_{20}T$$

$$M_{11}=c_{10}\frac{\partial b_{11}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}c_{17}\frac{\partial b_{22}}{\partial\theta}$$

$$M_{22}=c_{11}\frac{\partial b_{22}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}c_{17}\frac{\partial b_{11}}{\partial\theta}$$

$$\Pi_{11} = 4c_1 b_{11} + 2c_7 b_{22} + 2c_8 b_{33} + 2c_{18} T$$

$$\Pi_{22} = 4c_2 b_{22} + 2c_7 b_{11} + 2c_9 b_{33} + 2c_{19} T$$

$$\lambda S = -c_{21} T - c_{18} \gamma_{11} - c_{19} \gamma_{22} - c_{20} \gamma_{33}$$

$$\lambda r - \lambda \theta_0 \dot{S} - \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \qquad (6.30)$$

Ako je štap u početnoj konfiguraciji bio nenapregnut, sa homogenom temperaturom θ_0 , tada treba shvatiti zadatu temperaturu T samo kao promenu uniformne temperature θ_0 .

Poslednja grupa jednačina određuje deplanaciona kretanja štapa:

$$\frac{\partial W_3}{\partial \theta} + \lambda d_3 = P_3 + \lambda \left(J_\phi \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \lambda i_{\alpha\phi} \frac{\partial^2 \delta_{\alpha 3}}{\partial t^2} + i_{\phi\phi} \frac{\partial^2 \delta_{33}}{\partial t^2} \right)$$

$$W_3 = c_{23} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \frac{1}{2}(b_{12} + b_{21}) c_{22}$$

$$P_3 = c_{26} \vartheta + \frac{1}{2} c_{24} \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} c_{25} \frac{\partial b_{21}}{\partial \theta} . \qquad (6.31)$$

Razmatrajući ovih pet grupa jednačina možemo zakjlučiti da je moguća separacija između pojedinih vrsti kretanja ako se uvedu izvesne pretpostavke o simetrijama poprečnog preseka. Jedino se torziona kretanja ne mogu razdvojiti od deplanacionih.

R e z i m e

U radu se razmatraju puni prizmatični štapovi i štapovi tankih zidova.
Pri razmatranju punih prizmatičnih štapova polazi se od Green-ovog kinematičkog modela, koji dopušta prelazak ravnih, poprečnih i podužnih preseka štapa u površi N tog reda. Pri tome se sve ukupnost mehaničkih veličina, kinematičkih varijabli i temperaturnih veličina, razmatra kao jedan termodinamički sistem i ispisuje jednačina balansa energije. Dalji postupak je sproveden postavljanjem zahteva da jednačina energije ne zavisi od uniformnih kretanja koja bi štap izvršavao kao kruto telo Imajući u vidu generalizaciju Pionine teoreme (vidi na primer /19/ i /21/),u ovome radu je izvršen pokušaj stwaranja potpunog sistema jednačina postavljanjem zahteva za invarijantnost jednačine energije pri višim direktorskim kretanjima.Dobijene su jednačine kretanja koje nisu sasvim korektne budući da su anulirane vrednosti torzionih polimomenata. Takodje je dobijena funkcionalna zavisnost slobodne energije od argumenata kao što su: temperatura i njeni gradijenti, tenzor deformacije, tenzor torzije i vektor krivine, promena zakrivljenosti poprečnih i podužnih preseka u funkciji od podužne koordinate, ali ne i od veličine zakrivljenosti istih preseka. Iz slobodne energije su odredjene konstitutivne jednačine za entropijske veličine i sile i momente po poprečnom preseku, odnosno po jedinici dužine podužnog preseka.U ovim konstitutivnim jednačinama ,sile i momenti ne zavise od veličina same zakrivljenosti ,već pored drugih argumenata još samo od promene zakrivljenosti duž štapa.
Za određivanje potpunog sistema jednačina štapa,izvedene su prvo jednačine kretanja primenom principa virtualnog efekta rada.Pri tome se polazi od jednačina kretanja jedne čestice.Shvatajući veličine koje figurišu u ovim jednačinama kao sistem ravnotežnih sila ,to će efekat rada ovih sila na virtualnim brzinama

koje dopušta izabrani kinematički model štapa, biti jednak nuli. Broj ovako dobijenih jednačina kretanja jeste jednak broju funkcionalnih stepeni slobode kinematičkog modela.

Ovako dobijen sistem jednačina kretanja, zajedno sa konstitutivnim jednačinama, određenim iz jednačine energije invarijantne na kruta kretanja kao i na viša direktorska kretanja, čine potpun sistem jednačina, za slučaj linearne teorije štapa. Treba naglasiti da je u svim veličinama ovog sistema jednačina zanemaren uticaj zakrivljenosti na veličine napona i deformacija, dok se obuhvataju uticaji koje imaju promene ovih veličina u funkciji od podužne koordinate.

Ovakva linearna teorija je poređena sa linearnom teorijom koju možemo dobiti polazeći od rezultata Green+Naghdi-jevog rada /18/. U pomenutom radu je pokazana funkcionalna zavisnost slobodne energije i od zakrivljenosti poprečnih, odnosno podužnih preseka. Razmatrajući linearnu teoriju štapa drugog reda, određena je polinomijalna veza za slobodnu energiju. Pretpostavljajući kinetičku simetriju materijala, učinjena je slobodna energija invarijantnom na koordinatne transformacije, pa su određene konstitutivne veze. Na kraju su ispisane grupe jednačina, koje određuju posebne vrste kretanja.

Poređenjem ova dva potpuna sistema linearnih jednačina za štapove drugog reda, zakjlučujemo da deplanaciona teorija zasnovana na rezultatima rada /18/ određuje stanje napona i deformacija, kako u poprečnim tako i u podužnim presecima štapa. Teorija zasnovana na jednačini energije, invarijantnoj na deplanaciona kretanja, određuje stanje napona i deformacija u poprečnim presecima, dok za podužne preseke obuhvata samo efekte prvog reda. Poslednja teorija takođe zanemaruje uticaj veličine zakrivljenosti poprečnih i podužnih preseka na stanje napona i deformacija.

Teorija tankozidnog štapa se zasniva na usvojenom kinematičkom modelu, koji sem relativnih pomeranja i obrtanja poprečnog preseka,

dozvoljava i njegovu deplanaciju.
Osnovne jednačine kretanja su određene polazeći od jednačina kretanja čestice trodimenzionog kontinuuma. Tretirajući sve veličine koje figurišu u ovim jednačinama kao sistem ravnotežnih sila ispisan je efekat rada istih sila na virtualnih brzinama dopuštenim kinematičkim modelom.
Za dobijanje konstitutivnih jednačina, razmatran je termodinamički sistem kogaččine temperatura,entropija, interna energija, kinematičke varijable i generalisane sile i momenti kako spoljnjih tako i unutrašnjih sila. Primenom prvog zakona termodinamike određena je jednačina balansa energije a korišćenjem drugog zakona termodinamike je ispisana Clauzius-Duhem-ova nejednakost.
Utvrđena je funkcionalna zavisnost slobodne energije od temperature,tenzora deformacije poprečnog preseka,vektora krivine i tenzora torzije referentne linije,mere deplanacije i njene promene duž štapa.
Određene su konstitutivne jednačine pa je razmotrena i linearna teorija tankozidnog štapa. Ispisane su jednačine koje određuju transferzalna kretanja štapa, ekstenziona kretanja,torziona kretanja i deplanaciona kretanja tačaka poprečnog preseka štapa.

Literatura

/1/ Timoshenko S.P.,History of strength of materials,Mc Graw-Hill Book Comp,New York,1953.

/2/ Duhem P.,Ann. Ecole Norm.(3),1o,187,1893.

/3/ Cosserat,Theorie des Corps Deformables,Paris,(Hermann),19o9.

/4/ Guenter W.,Zur Statik und Kinematik des Cosseratscher Kontinuums,Abh. der Braunschw. Wiss.Ges.,Band X,1958.

/5/ Ericksen J.L.,Truesdell C.,Exact theory of stresses and strain in rods and shells,Arch. rat. mech.,Vol.1,Nom.4,1958.

/6/ Ericksen J.L.,Trans.Soc. Rheol.,5(23),1961.

/7/ Toupin R.A.,Arch.rat.mech.anal.,17,85,1964.

/8/ Green,Rivlin,Arch. rat. mech. anal.,16,325, i 17,113,1964.

/9/ Green,Naghdi,Rivlin,Int.J.Engng Sci.,2,611,1965.

/1o/ Green,Laws, A general theory of rods,Proc.roy.soc.,Vol. 293, 1966.

/11/ Green,Laws,Nahgdi,A linear theory of straight elastic rods, Archs ration. mech. analysis,25,1967.

/12/ Cohen H.,Int.J.Eng.Sci.,A non-linear theory of elastic directed curves,4,1966.

/13/ Alan B. Whitman and Carl N De Silva,A dynamical theory of elastic directed curves,

/14/ Suhubi E.S.,On the foundations of the theory of rods,Int. J.Engng Sci.,Vol.6,1968.

/15/ Green,Knops,Laws,Large deformations and stability of elastic rods,Int.J. Solids Structures,Vol.4,1968.

/16/ Green,Laws,Naghdi, Rods,plates and shells,Proc.Camb.Phil. Soc.,64,895,1968.

/17/ Ranković S.,Opšta termodinamička teorija štapa kao orijentisanog tela,Zbornik radova građevinskog fakulteta,Beograd, 197o,Saopšteno na sastanku Grupe za reologiju JDM 1969.

/18/ Green,Naghdi, Non-isothermal theory of rods,plates and shells,Int.J. Solids Structures,Vol. 6,197o.

/19/ Stojanović R. , Mechanics of Materials with Microstructure, Acta Mechanika.

/2o/ Stojanović R.,Đurić S., On the measures of strain in the theory of the elastic generalized Cosserat continua,Symposia Mathematica 1, 1968.

/21/ Stojanović R. , Mechanics of polar continua,CISM,Udine,1969.

/22/ Timoshenko S.P.,Phil.Mag.(Ser.6),41,1921 .

/23/ Green,Zerna,Theoretical Elasticity,Clarendon Press,Oxford, 196o.