Uvod u logiku

Biblioteka
Prirodno - matematičkih nauka

Prof. dr Žana Kovijanić Vukićević
Prof. dr Slobodan Vujošević

UVOD U LOGIKU
Drugo izdanje

Glavni urednik
Prof. dr Ilija Vujošević

Recenzenti
Prof. dr Predrag Obradović
Prof. dr Milojica Jaćimović

Likovni urednik
Marina Vešović

Izdavač
Univerzitet Crne Gore
Cetinjska 2, Podgorica
www.ucg.ac.me

Tiraž
300

Štampa
Pobjeda - Podgorica

Podgorica 2009

Zabranjeno preštampavanje i fotokopiranje u cjelini ili u djelovima.
Sva prava zadržava izdavač i autori

Žana Kovijanić Vukićević

Slobodan Vujošević

UVOD U LOGIKU

Podgorica
2009

Kosti

Sadržaj

Uvod

Nauka o dedukcijama

Logika se tradicionalno shvata kao nauka o pravilima korektnog zaključivanja. U zaključivanju sa jednog skupa rečenica prelazimo na novu rečenicu. Rečenice od kojih polazimo su *pretpostavke*, a rezultat je *zaključak.* Takav prelaz je logički ispravan ako zadovoljava uslov *salva veritate:* polazeći od istinitih pretpostavki prelazimo na istinit zaključak. Prelaz sa pretpostavki na zaključak vrši se po određenim pravilima i primarni zadatak logike jeste da utvrdi i istraži ta pravila. Zaključivanje u kome koristimo samo pravila koja zadovoljavaju uslov *salva veritate* je *dedukcija.*

Za logiku su posebno važna pravila zaključivanja u kojima se u pretpostavkama i zaključku javljaju *logički veznici.* Uobičajeni logički veznici su *iskazni veznici: i, ili, ako* i *nije*, njihova svojstva izučavaju se u *iskaznoj logici*, kao i *predikatski veznici: za svako, postoji* i *jednakost*, koji se zajedno sa iskaznim veznicima izučavaju u *predikatskoj logici.* Osim logičkih veznika, u pretpostavkama i zaključku javljaju se i neke druge riječi, ali je korektnost zaključivanja zasnovana samo na smislu logičkih veznika. Značenje drugih riječi ne utiče na korektnost dedukcije. Te druge riječi shvatamo kao promjenljive, pa je dedukcija prelazak sa jednog broja *formi* na novu formu. Iz tog razloga, kao sinonim za logiku, koristi se termin *formalna logika.*

Na primjer, jedna tipična logička dedukcija je sljedeća: ako pretpostavimo A *i* B, možemo da zaključimo B *i* A. U ovom zaključivanju napravili smo prelaz sa *forme* A *i* B na formu B *i* A. Korektnost dedukcije ne zavisi od smisla riječi A i B, već samo od toga kako shvatamo logički veznik *i.* Iz ovakvih razloga, logika se definiše kao nauka o *formalnim* dedukcijama.

U svakodnevnom životu i nauci ne koristimo samo dedukcije. Najvažnije zaključivanje koje ne zadovoljava uslov salva veritate naziva se *induktivno zaključivanje.* Logika proučava i takva zaključivanja, ali je taj njen dio praktično nevidljiv u odnosu na glavni tok, pa su dedukcija i zaključivanje sinonimi. Da bi smo otklonili eventualnu zabunu, naglašavamo da matematička indukcija zadovoljava uslov salva veritate, tj. matematička indukcija jeste dedukcija.

Logika kao oblast matematike

Od *Aristotelovog* doba, kao teorija dedukcije, logika je izučavana u okviru filozofije. Njegovo učenje, izloženo u kolekciji spisa pod nazivom *Organon*, dominiralo je u logici sve do devetnaestog vijeka. Tada je sa radovima *Džordža Bula* i posebno *Gotloba Fregea* uspostavljena tradicija savremene logike kao oblasti matematike. Svakako, logika i danas ima bliske veze sa filozofijom ali je ipak grana matematike, a ne filozofije.

Kao njena oblast, logika pripada *osnovama matematike.* Iz više razloga. Prije svega, postoji shvatanje da se matematika može svesti na logiku, ili nešto blaže, da se matematika može zasnovati i razvijati kao striktno formalna teorija. Ovaj program potiče još od Gotfrida Vilhema Lajbnica, ali su ključni napori na njegovoj realizaciji napravljeni krajem devetnaestog vijeka, kada je *Gotlob Frege* fomulisao predikatsku logiku i početkom dvadesetog vijeka, kada je *David Hilbert* postavio jednu grupu problema iz osnova matematike. Njihovo otkriće, da se svako korektno matematičko tvrđenje može formalno izraziti i svaki dokaz tog tvrđenja prevesti u formalan dokaz (teorije u čijem jeziku je to tvrđenje zapisano), ostavilo je dubok trag u matematici. Međutim, Gedelove teoreme iz tridesetih godina dvadesetog vijeka pokazale su da je formalizacija matematike nužno nepotpuna: u svakoj formalizaciji matematike, postoje istinita tvrđenja koja možemo formalizovati ali ne i formalno dokazati.

Za matematiku je formalizacija principijelno važna zato što postoje tvrđenja koja sticajem okolnosti nismo u stanju niti da dokažemo, niti da opovrgnemo. U tom slučaju, jedino što nam preostaje jeste da dokažemo da ni takvo tvrđenje, ni njegova negacija nisu dokazivi, tj. da pokažemo da skup svih dokaza odgovarajuće teorije ne sadrži njihove dokaze. Tada je formalizacija nezaobilazna, bar kada su u pitanju osnovne matematičke teorije poput aritmetike i teorije skupova.

Logički sistem u kome se mogu formulisati i dokazivati matematička tvrđenja jeste *predikatska logika prvog reda.* U okviru naših razmatranja izložićemo njen *jezik* i *sintaksu* i podrobno objasniti matematički smisao, tj. *semantiku* tog jezika.

Dobra osnova za razumevanje ovde izloženih ideja, kao i njihova vrlo sadržajna dopuna je knjiga Koste Došena "Osnovna logika." Ona je dostupna na adresi *kosta@turing.mi.sanu.ac.rs.* Autori su zahvalni Kosti Došenu na korisnim primedbama.

Iskazna logika

Rečenica je *iskaz* ako možemo sa smislom postaviti pitanje njene istinitosti. Ako takva rečenica može biti samo istinita ili neistinita, govorimo o *dvovalentnoj logici*. Ako istinitosnih vrijednosti ima više od dvije, logika je *viševalentna*. Osim u jednom slučaju, što će biti posebno naglašeno, bavimo se isljučivo dvovalentnom logikom, budući da je sa stanovišta matematike značaj viševalentnih logika marginalan.

Na primjer, rečenica "zbir dva parna broja je paran broj" je istinit iskaz, a rečenica "broj 727 je deljiv sa tri" je neistinit iskaz, jer zbir njegovih cifara nije deljiv sa tri. Takođe, rečenica "postoji broj x koji zadovoljava relaciju $x^2 + 1 = 0$" je iskaz, budući da je ona ili istinita ili neistinita, u zavisnosti od konteksta u kojem razumijevamo njeno značenje: ako je to kontekst racionalnih brojeva ona je neistinita, a ako je to kontekst kompleksnih brojeva - istinita. Sa stanovišta iskazne logike, irelevantan je smisao pojedinačnog iskaza, interesantna je samo činjenica da on može biti ili istinit ili neistinit, i da to zavisi samo od njegove logičke strukture.

Strukturu iskaza određuju iskazni veznici *i, ili, ako* i *nije*: ako su A i B proizvoljni izkazi, onda su redom $A\,i\,B$, $A\,ili\,B$, $ako\,A\ onda\,B$ i $nije\,A$ takođe iskazi, sada nešto složeniji, čija istinitost zavisi od iskaza od kojih su sastavljeni.

Iskaz $A\,i\,B$ je *konjunkcija* iskaza A i iskaza B.

Iskaz $A\,ili\,B$ je *disjunkcija* iskaza A i iskaza B.

Iskaz $ako\,A\ onda\ B$ je *implikacija* iskaza A i iskaza B.

Iskaz *nije* A je *negacija* iskaza A.

U logici je danas uobičajeno da konjunkciju iskaza A i B označavamo simbolom $A \wedge B$, disjunkciju simbolom $A \vee B$, implikaciju simbolom $A \to B$, a negaciju simbolom $\neg A$.

Iskazi "271 je prost broj" ili "361 je potpun kvadrat" ne sadrže logičke veznike i u tom smislu su elementarni. Svaki matematički iskaz je ili elementaran ili je složen od elementarnih iskaza pomoću logičkih veznika.

Jezik iskazne logike

Iz svega do sada rečenog slijedi da jezik u kome bi se mogla izraziti logička struktura matematičkih iskaza treba da sadrži simbole za elementarne iskaze i simbole za logičke veznike, ali to nije sve.

Na primjer, od iskaza A i B možemo formirati iskaz $A \to B$. Sada, od iskaza $A \to B$ i iskaza A, pomoću implikacije, možemo formirati novi iskaz. Međutim, ne bi bilo dobro da tako dobijeni iskaz zapišemo sa $A \to B \to A$, budući da takav zapis može nastati i kao implikacija iskaza A i $B \to A$, a to nisu isti iskazi. Naime, iskazi $(A \to B) \to A$ i $A \to (B \to A)$ nemaju isti logički smisao. Prvi je lažan ako je A lažan iskaz, a drugi je uvijek istinit, bez obzira na istinitost iskaza A i B. Da bi smo obezbijedili jedinstvenost čitanja i razumijevanja svakog zapisa o iskazima, neophodno je da jezik sadrži dvije male zagrade - *desnu*) i *lijevu* (*zagradu.*

Jezik iskazne logike je skup simbola

$$\mathcal{L} = \{s_0, s_1, s_2, \dots\} \cup \{\wedge, \vee, \to, \neg\} \cup \{(\ ,)\}.$$

Simboli skupa $\{s_0, s_1, s_2 \dots\}$, koga označavamo sa P, su *iskazni simboli* ili *elementarni iskazi*, simboli skupa $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ su *simboli iskaznih veznika*, a desna i lijeva zagrada su *interpunkcijski simboli.*

Simboli skupa $\{\wedge, \vee, \to, \neg\} \cup \{(\ ,)\}$ su *logički simboli jezika* $\mathcal{L}$, a simboli skupa P su *nelogički simboli.* To stoga što sve iskazne logike imaju iste logičke simbole, dok im nelogički dio može biti različit.

Na primjer, pretpostavili smo da je skup P iskaznih simbola *prebrojiv beskonačan skup*, tj. da ima jednak broj elemenata kao i skup *prirodnih brojeva* $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Međutim, u logici se razmatraju i jezici u kojima to nije slučaj. Kasnije ćemo vidjeti da naše ograničenje na prebrojive jezike ipak nije suštinsko, utoliko što se sva svojstva prebrojivog iskaznog računa mogu uopštiti na *neprebrojive iskazne račune*, tj. na račune čiji je skup elementarnih iskaza po kardinalnosti veći od skupa prirodnih brojeva.

Iskazne formule

Jezik iskazne logike je mnogo jednostavniji i pravilniji od prirodnog jezika, ali je u osnovi napravljen na istim principima. Kao što u prirodnom jeziku, polazeći od njegovih simbola i po određenim gramatičkim pravilima, formiramo smislene riječi ili rečenice, tako od simbola jezika iskazne logike, po strogim pravilima, konstruišemo smislene *riječi*, tj. smislene konačne nizove simbola. Definišemo ih induktivno i nazivamo *iskaznim formulama:*

(1) Elementarni iskazi su iskazne formule,

(2) Ako su A i B iskazne formule, onda su $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ i $\neg A$ iskazne formule.

Skup svih iskaznih formula označavamo sa F. Smisao prvog uslova jeste da $P \subseteq F$. Polazeći od elementarnih iskaza, primjenom drugog uslova, korak po korak pravimo nove formule. Neka je $F_0 = P$ i za svako $n \geq 0$

$$F_{n+1} = \{(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), \neg A : A, B \in F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_n\}.$$

Polazeći od nivoa F_0, koji se sastoji od elementarnih iskaza, na nivou F_1, pravimo formule koristeći jedan od iskaznih veznika i formule nivoa F_0, Na nivou F_{n+1} pravimo formule koristeći jedan od veznika i formule sa prethodnih nivoa $F_0, \ldots F_n$, za svaki prirodan broj $n \geq 0$. Tako dobijamo sve iskazne formule, tj. $F = \bigcup_{n \in N} F_n$.

Ovakva konstrukcija skupa iskaznih formula omogućava nam da u dokazu svojstava iskaznih formula koristimo *matematičku indukciju.* Nivo F_n, na kome se data formula prvi put javlja, meri složenost formule, pa indukciju po nivoima F_n, $n \geq 0$, nazivamo *indukcijom po složenosti formule.*

Zadatak 1. Svakoj iskaznoj formuli odgovara jedno *konačno drvo.* Drvo se grana u čvoru, u kome se nalazi jedna formula. Ako je ona oblika $\neg A$, iz njega raste jedna grana A, ako ima oblik $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ ili $(A \to B)$, iz čvora rastu dve grane A i B, a ako je u čvoru iskazno slovo, iz njega ne raste nista. U čvoru na dnu drveta je polazna formula, a listovi su elementarni iskazi. Odrediti drvo formule $((s_1 \to \neg s_0) \wedge ((s_0 \wedge \neg s_1) \vee \neg s_0)))$.

Indukcija po složenosti formule

Ako formule nultog nivoa imaju svojsto $\mathcal{S}$ i ako na osnovu pretpostavke da formule nivoa n imaju svojsto $\mathcal{S}$ dokažemo da svojstvo $\mathcal{S}$ imaju i formule nivoa $n+1$, onda sve iskazne formule imaju svojsto $\mathcal{S}$.

Lema 1. Svaka formula ima jednak broj lijevih i desnih zagrada.

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo matematičkom indukcijom. Formula nultog nivoa je elementarni iskaz i uopšte nema zagrade, pa ima jednak broj lijevih i desnih zagrada. Ako sve formule nivoa n imaju jednak broj lijevih i desnih zagrada i ako je A formula nivoa $n+1$, onda postoje formule B i C nivoa n, takve da formula A ima jedan od oblika $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \to C)$ ili $\neg B$. Po induktivnoj pretpostavci, svaka od formula B i C ima jednak broj lijevih i desnih zagrada, pa i formula A ima jednak broj lijevih i desnih zagrada. Dakle, svaka iskazna formula ima jednak broj lijevih i desnih zagrada. $\lhd$

Zapravo, nivoi mjere složenost formule, pa se u logici ustalilo da se navedeni oblik matematičke indukcije naziva *indukcija po složenosti formule* i primjenjuje se u sljedećoj formi:

Ako elementarne formule imaju svojstvo $\mathcal{S}$ i ako iz pretpostavke da formule A i B imaju svojstvo $\mathcal{S}$ slijedi da svojstvo $\mathcal{S}$ imaju formule $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ i $\neg A$, onda sve iskazne formule imaju svojstvo $\mathcal{S}$.

Dakle, ako želimo da dokažemo da sve formule imaju svojstovo $\mathcal{S}$, dovoljno je dokazati dvije stvari - *bazu indukcije* i *induktivni korak*.

Baza indukcije: Sve elementarne formule imaju svojstvo $\mathcal{S}$.

Induktivni korak: Iz pretpostavke da formule A i B imaju svojsto $\mathcal{S}$ (*induktivna pretpostavka*) slijedi da svojstvo $\mathcal{S}$ imaju formule $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ i $\neg A$.

Većina logičkih pojmova definiše se induktivno, pa je indukcija po složenosti glavni metod za dokazivanje svojstava logičkih pojmova. Poput iskaznih formula, induktivno su definisani pojam dokaza, pojam terma, pojam predikatske formule itd. pa je u našim dokazima prirodno javlja indukcija po složenosti dokaza, po složenosti terma, po složenosti predikatske formule.

Čitanje iskazne formule

Formula je konačan niz simbola jezika $\mathcal{L}$, tj. formula je *riječ* jezka $\mathcal{L}$. Ako riječi X dopišemo riječ Y, dobija se riječ XY. Kažemo da je riječ X je *početni*, a riječ Y *završni dio riječi* XY.

Lema 1. Razlika broja lijevih i desnih zagrada je pozitivna na svakom početnom dijelu formule, ako početni dio nije prazan, jednak čitavoj formuli ili jednom znaku negacije.

Dokaz. Pošto se odnosi na sve iskazne formule i ovo tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule.

Za svaku riječ X, nekaje n_X razlika broja lijevih i desnih zagrada u riječi X i neka je A iskazna formula jezika $\mathcal{L}$.

Baza indukcije: Ako je A elementarna formula, ona sadrži samo jedan simbol, pa je svaki početni dio formule A prazan ili jednak čitavoj formuli, pa tvrđenje važi.

Induktivni korak: Ako formula A ima oblik $\neg B$, svaki početni dio Y formule A koji zadovoljava uslove teoreme je oblika $Y = \neg X$, gde je X početni dio formule B. Očigledno, $n_Y = n_X$. Po induktivnoj pretpostavci, $n_X > 0$, pa je $n_Y > 0$.

Ako formula A ima oblik $(B \to C)$, svaki početni dio Y formule A ima oblik $Y = (X$, gde je X početni dio formule B, ili oblik $Y = (B \to Z$, gde je Z početni dio formule C. Po induktivnoj pretpostavci, $n_X \geq 0$, pa je $n_Y = 1 + n_X > 0$. U drugom slučaju, po induktivnoj pretpostavci $n_Z \geq 0$, pa je $n_Y = 1 + n_B + n_Z$. Kako formula B ima jednak broj lijevih i desnih zagrada, $n_B = 0$, imamo da je $n_Y = 1 + n_Z > 0$.

Na isti način postupamo kada formula A ima oblik $(B \wedge C)$ ili $(B \vee C)$, pa dakle, tvrđenje važi za svaku formulu A. $\lhd$

Teorema o čitanju formule: Ako je različita od iskazne promjenljive, iskazna formula može biti predstavljena na tačno jedan od četiri načina $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ ili $\neg A$, gde su A i B jedinstveno određene formule.

Dokaz. Ako formula počinje negacijom, mogla je nastati jedino po trećem pravilu, tj. ima oblik $\neg A$. Ako formula počinje zagradom, uklonimo tu zagradu i tražimo najmanji neprazan početni dio A formule u kome je razlika desnih i lijevih zagrada jednaka nuli. Taj početni dio jedinstveno je određen i predstavlja prvi dio formule. Prvi simbol poslije početnog dijela A je jedan od veznika $\wedge$, $\vee$ ili $\to$, njega obrišemo i obrišemo zadnju desnu zagradu. Preostali dio je formula B. Tako se formula čita jednoznačno. $\lhd$

Treba primijetiti da formula može biti veoma dugačka, pa je izloženi algoritam daleko od optimalnog.

Zadatak: Napraviti algoritam koji provjerava da li je data riječ jezika $\mathcal{L}$ iskazna formula.

Semantika iskazne logike

Jezik iskazne logike definisali smo tako da se u njemu mogu izražavati logička svojstva matematičkih iskaza. Međutim, sam po sebi, jezik iskazne logike je čisto *sintaksni objekt*, pa se u različitim kontekstima njegove formule mogu različito tumačiti. Sada ćemo precizirati kako tumačimo iskazne formule, tj. preciziraćemo njihovu *semantiku*.

Kako smo već napomenuli, iskaz je rečenica koja može biti ili istinita ili neistinita, pa ako interpretacija iskazne formule treba da odgovara iskazu, logički veznici $\wedge, \vee, \rightarrow$ i $\neg$ treba da imaju onaj isti smisao kakav u prirodnom jeziku imaju redom riječi *i, ili, ako i nije*. Te riječi u prirodnom jeziku matematike shvatamo na sljedeći način:

Iskaz $A\,i\,B$ je istinit $\Leftrightarrow$ iskaz A i iskaz B su istiniti.

Iskaz A *ili* B je istinit $\Leftrightarrow$ bar jedan od iskaza A i B je istinit.

Iskaz *ako* A *onda* B je lažan $\Leftrightarrow$ A je istinit, a B lažan iskaz.

Iskaz *nije* A je istinit $\Leftrightarrow$ iskaz A je lažan.

Napominjemo da se ova definicija logičkih veznika pre svega odnosi na matematičke iskaze. U njenoj osnovi je naše matematičko iskustvo u rasuđivanju o logičkim veznicima, tj. u njoj smo logičke veznike definisali onako kako se oni shvataju u matematici. U nekom drugom, nematematičkom kontekstu, takva definicija ne bi obavezno odgovarala našem razumijevanju logičkih veznika. Na primjer, iz definicije konjunkcije slijedi da je iskaz $A \wedge B$ istinit ako i samo ako iskaz $B \wedge A$ je istinit, tj. u matematici ta dva iskaza imaju isto značenje. Kažemo da je u matematici konjunkcija komutativna. U prirodnom jeziku to nije uvijek slučaj. Na primjer, iskazi "udala se i dobila dijete" i "dobila dijete i udala se" u prirodnom jeziku nemaju isto značenje. Još gore, konjunkcija "vidio Rim i umro" ima puni smisao, dok je njena komutacija "umro i vidio Rim" sasvim besmislena.

Valuacija iskaznih formula

Kako smo iskazne formule definisali polazeći od elementarnih iskaza, istinitost formule zavisiće od istinitosti elementarnih iskaza od kojih je napravljena. Uobičajeno je da se utvrđivanje vrijednosti istinitosti formule naziva *valuacijom*. Valuacija dakle preslikava skup formula F u skup $\overline{2} = \{0, 1\}$. Kako smo napomenuli ona je određena valuacijom elementarnih iskaza:

Preslikavanje $v : P \to \overline{2}$ je *valuacija elementanih iskaza* jezika $\mathcal{L}$. Pritom, ako $v(p) = 1$, elementarni iskaz p je *istinit*, a ako $v(p) = 0$, elementarni iskaz p je *neistinit*, za valuaciju v. Skup svih valuacija označavamo sa 2^P.

Kada je zadata valuacija $v \in 2^P$, zadata je istinitost samo elementarnih iskaza, pa sada treba preslikavanje v skupa $P \subseteq F$ proširiti na cio skup formula F, tj. treba definisati preslikavanje $\overline{v} : F \to \overline{2}$, tako da $\overline{v}(p) = v(p)$, za svako $p \in P$. Pritom, ako $\overline{v}(A) = 1$, formula A je *istinita*, a ako $\overline{v}(A) = 0$, formula A je *neistinita*, za valuaciju $\overline{v}$.

Takođe, istinitost iskazne formule treba da bude saglasna sa matematičkim iskaznim veznicima tako da: logičkom simbolu $\wedge$ odgovara veznik *i*, logičkom simbolu $\vee$ odgovara veznik *ili*, logičkom simbolu $\to$ odgovara veznik *ako ... onda* i logičkom simbolu $\neg$ odgovara veznik *nije*.

To znači da proširenje $\overline{v} : F \to \overline{2}$ valuacije $v \in 2^P$ mora da zadovoljava sledeće uslove: za sve $A, B \in F$,

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \overline{v}(A \wedge B) = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{v}(A) = 1 \text{ i } \overline{v}(B) = 1,\\
(2) & \overline{v}(A \vee B) = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{v}(A) = 1 \text{ ili } \overline{v}(B) = 1,\\
(3) & \overline{v}(A \to B) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{v}(A) = 1 \text{ i } \overline{v}(B) = 0,\\
(4) & \overline{v}(\neg A) = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{v}(A) = 0.
\end{array}
$$

Pritom, umjesto $v((A \wedge B))$, pisali smo $v(A \wedge B)$ itd. Valuaciju $v \in 2^P$ i njeno proširenje $\overline{v} : F \to \overline{2}$ u daljem tekstu oznaăćemo istim slovom v. To ima opravdanje jer važi sledeća teorema:

Teorema o jedinstvenosti proširenja valuacije: Svaka valuacija elementarnih iskaza ima jedinstveno proširenje na sve iskazne formule.

Dokaz. Zapravo, treba dokazati da za proizvoljna preslikavanja v_1 i v_2 skupa F iskaznih formula u skup $\overline{2}$ istinitosnih vrijednosti, koja zadovoljavaju uslove (1) - (4), ako $v_1(p) = v_2(p)$, za svako $p \in P$, onda $v_1(A) = v_2(A)$, za svaku iskaznu formulu A.

Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule A.

Baza indukcije: Ako $A \in P$, onda po uslovu teoreme $v_1(A) = v_2(A)$.

Induktivni korak: Ako formula A ima oblik $(B \wedge C)$ i ako $v_1(A) = 1$, onda po uslovu (1) imamo $v_1(B) = 1$ i $v_1(C) = 1$, tj. po induktivnoj pretpostavci, $v_2(B) = 1$ i $v_2(C) = 1$, pa $v_2(A) = 1$. Slično postupamo, koristeći preostale uslove, kada formula A ima oblik $(B \vee C)$, $(B \to C)$ ili oblik $\neg A$. $\lhd$

Primjer 1. Ako je $v \in 2^P$ valuacija $\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$, odrediti vrijednost iskazne formule $A = ((s_0 \to s_3) \to ((s_0 \vee s_3) \to s_0))$ za valuaciju v.

Kako je $v(s_0) = 0$, prema uslovu (3), $v(s_0 \to s_3) = 1$. Prema uslovu (2), $v(s_0 \vee s_3) = 1$, pa je $v((s_0 \vee s_3) \to s_0) = 0$. Otuda se prema uslovu (3) dobija da je $v(A) = 0$. $\lhd$

Valuacija je beskonačan niz vrijednosti svih iskaznih simbola, ali samo konačan broj tih vrijednosti utiče na vrijednost iskazne formule. U prethodnom primjeru, vrijednost formule A zavisi samo od vrijednosti elementarnih iskaza s_0 i s_3 za valuaciju v, budući da se samo oni stvarno javljaju u A, dok vrijednosti $v(s_n), n \neq 0$ i $n \neq 3$, nijesu uticale na vrijednost formule A.

Iako vrijednost formule zavisi samo od konačnog broje vrijednosti iskaznih simbola koji se u njoj zaista javljaju, valuaciju smo ipak definisali kao beskonačan niz. Nas neće interesovati samo vrijednost jedne, već i čitavog skupa formula za datu valuaciju, a skup može biti i beskonačan.

Tablica iskazne formule

Definicije istinitosti logičkih veznika mogu se pregledno predstaviti *tablicama:*

$v(A)$	$v(B)$	$v(A \wedge B)$	$v(A \vee B)$	$v(A \to B)$	$v(\neg A)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

za svaku valuaciju $v \in 2^P$ i proizvoljne iskazne formule A i B. Tablice logičkih veznika su veoma stare. Zna se da je Filon iz Megare, antički logičar iz trećeg vijeka prije nove ere, upotrebljavao tablicu implikacije.

Ako je A iskazna formula, sa $A(p_1, \ldots, p_n)$, $n \geq 1$, označavamo da su svi elementarni iskazi koji se javljaju u formuli A, neki od iskaza $p_1, \ldots, p_n$ (ne obavezno svi). Ako $v(p_1) = w(p_1), \ldots v(p_n) = w(p_n)$, onda $v(A) = w(A)$, za proizvoljne valuacije $v, w \in 2^P$

Neka su $A(p_1, \ldots, p_n)$ i $A_1, \ldots, A_n$ formule. Formula koja se iz formule A dobija zamenom svih javljanja promenljivih $p_1, \ldots, p_n$ redom formulama $A_1, \ldots, A_n$, je *supstituciona instanca* formule A

Neka je $v \in 2^P$ valuacija i A iskazna formula. Ako je $v(A) = 1$ kažemo da *valuacija v zadovoljava formulu A* ili da *formula A važi za valuaciju v* i tu činjenicu označavamo sa $v \models A$. Dakle $v \models A$ ako i samo ako $v(A) = 1$.

Primjer 1. Ako je $A(s_0, s_3) = ((s_0 \to s_3) \to ((s_0 \vee s_3) \to s_0)))$, odrediti valuaciju v koja zadovoljava formulu A.

Kako se u formuli A javljaju samo iskazni simboli s_0 i s_3, vrijednost formule A zavisi samo od mogućih parova $(v(s_0), v(s_3))$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Takvih mogućnosti ima četiri:

$v(s_0)$	$v(s_3)$	$v(A)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Dakle, svaka valuacija $v \in 2^P$, za koju je $v(s_0) = 0$ i $v(s_3) = 1$, ne zadovoljava, dok sve ostale valuacije zadovoljavaju formulu A. $\lhd$

Svakoj formuli $A(p_1, \ldots, p_n), n \geq 1$, odgovara tablica njenih vrijednosti, za moguće kombinacije $(v(p_1), \ldots, v(p_n))$ vrijednosti elementarnih iskaza koje se mogu dobiti za različite valuacije $v \in 2^P$. Tih kombinacija ima koliko i nizova nula i jedinica dužine n, tj. ima ih 2^n, za svako $n \geq 1$.

Primjer 2. Odrediti tablicu formule $A(p, q, r) = \neg(p \to (\neg q \to r))$, za proizvoljne iskazne simbole $p, q, r \in P$. Odrediti formulu $B(p, q, r)$, različitu od A, sa istom tablicom kao i formula A.

Tablica formule A je sledeća

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(A)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Uočimo sve valuacije za koje je $v(A) = 1$. Iz tablice čitamo da su to valuacije $v \in 2^P$, za koje je redom $v(p) = 1, v(q) = 0$ i $v(r) = 0$, ili valuacije $w \in 2^P$, za koje je redom $w(p) = 1, w(q) = 1$ i $w(r) = 0$. Formirajmo konjunkcije $((p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$ i $((p \wedge q) \wedge \neg r)$ i napravimo njihovu disjunkciju

$$B = (((p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)).$$

Lako je provjeriti da za svaku valuaciju $v \in 2^P$, $v(A) = v(B)$. $\lhd$

Logički zakoni

Ako $v(A) = v(B)$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$, iskazne formule A i B su *logički ekvivalentne.*

Zadatak 1. Formule $((p \wedge q) \wedge r)$ i $(p \wedge (q \wedge r))$ su logički ekvivalentne, za sve $p, q, r \in P$.

Takođe, formule $((p \vee q) \vee r)$ i $(p \vee (q \vee r)))$ su logički ekvivalentne, za proizvoljne $p, q, r \in P$.

Formula koja je istinita za svaku valuaciju iskaznih promjenljivih je *tautologija.* Saglasno našoj notaciji, formula A je *tautologija* ako $v \models A$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Budući da je istinita za svaku valuaciju, u oznaci tautologije valuacija se ne mora spominjati, pa činjenicu da je formula A tautologija označavamo sa $\models A$.

Termin tautologija je prvobitno označavao formulu $(A \to A)$, zato što grčka riječ tautologija doslovno znači *ista riječ* ili ista ideja. U tom smislu on se i danas upotrebljava u retorici i ima pomalo pežorativno značenje; "prazna tautologija". U smislu logičkog zakona prvi ga je upotrebio filozof Ludvig Vitgenštajn u delu *Tractatus Logico-Philosophicus* objavljenom 1921. godine, a potom je vrlo brzo u tom značenju preuzet i u matematici.

Nekada, pogotovo u logici, za formulu koja je istinita za svaku valuaciju, bio je u upotrebi mnogo prirodniji termin *logički zakon.* Zanimljivo je da se danas zakon $(A \to A)$ nikada ne naziva tautologijom, dok se sve druge tautologije pojedinačno nazivaju zakonima (zakon komutacije, zakon distribucije, De Morganov zakon, Persov zakon). Budući da logički zakoni nijesu samo puko ponavljanje istog, već nose vrlo mnogo informacija o osobinama logičkih veznika, u našim razmatranjima ravnopravno koristimo oba termina.

Osim u iskaznoj, logički zakoni se javljaju i u predikatskoj logici. Iz nekog razloga tamo se više ne koristi termin tautologija za formulu istinitu za svaku valuaciju i u svakoj interpretaciji, već se odomaćio različit termin *valjana formula.* Pošto se u oba slučaja radi o logičkim zakonima, pored valjane formule i u predikatskoj logici koristićemo termin logički zakon.

Zadatak 2. Dokazati da su formule A i B logički ekvivalentne ako i samo ako formula $((A \to B) \wedge (B \to A))$ je tautologija.

Time je definisan novi binarni logički veznik $\leftrightarrow$, koji se naziva *ekvivalencija.* Zapis $(A \leftrightarrow B)$ zamjenjuje iskaznu formulu $((A \to B) \wedge (B \to A))$.

Supstitucija ekvivalentnih formula

Iskazna formula B je *potformula* formule A, ako se kao formula bar jednom javlja u formuli A. Svakako, potformula može imati više javljanja u istoj formuli.

Na primjer, u formuli $B \to (C \to B)$, formula B ima bar dva javljanja. Ako formula B nije potformula formule C, onda B ima tačno dva javljanja u datoj formuli.

Lema o supstituciji ekvivalentnih formula: Ako su A, B i C iskazne formule i ako sa $A(B/C)$ označimo formulu koja se dobija kada se u formuli A neka javljanja formule B zamijene formulom C, onda

$$\models (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow A(B/C)).$$

Dokaz. Za date formule B i C, teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Primetimo da oznaka $A(B/C)$ podrazumeva i mogućnost da nijedno javljanje formule B u formuli A nismo zamenili sa C. U tom slučaju je $A(B/C) = A$

Baza indukcije: U ovom dokazu, bazu indukcije čine formule čija je složenost manja ili jednaka od složenosti formule B. Ako formula A ima manju složenost od B, onda $A(B/C) = A$, pa se tvrđenje svodi na

$$\models (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow A).$$

Ako formule A i B imaju istu složenost onda $A(B/C) = A$ ili $A(B/C) = C$, pa se tvrđenje svodi na prethodni slučaj ili na

$$\models (B \leftrightarrow C) \to (C \leftrightarrow C).$$

U oba slučaja, lako se provjerava da su dobijene formule tautologije.

Induktivni korak: Ako formula A ima oblik $A_1 \wedge A_2$, onda

$$A(B/C) = A_1(B/C) \wedge A_2(B/C).$$

Ako $v(B \leftrightarrow C) = 1$, po induktivnoj pretpostavci, $v(A_1) = v(A_1(B/C))$ i $v(A_2) = v(A_2(B/C))$, pa je $v(A) = v(A(B/C))$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Na sličan način postupamo kada formula A ima oblik disjunkcije, implikacije ili negacije. $\lhd$

U zadacima sledeća tri poglavlja navodimo jedan broj najvažnijih logičkih zakona. Grupisani su tako da ilustruju značajna svojstva logičkih veznika i njihov međusobni odnos.

Logička svojstva implikacije

Implikacija je ključni logički veznik. Svi drugi veznici mogu se prilično dobro analizirati i algebarskim sredstvima. U sledećem primjeru navedena su dva najvažnija svojstva implikacije.

Primjer 1. Za proizvoljne iskazne formule A, B i C,

$$\models (A \to (B \to A))$$
$$\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

Intuitivni smisao prvog svojstva implikacije je pomalo zbunjujući - ako je A, onda A slijedi iz bilo koje formule B, koja ne mora da ima ništa zajedničko sa A. Zbog tog i nekih drugih svojstava, koja su navedena u narednim zadacima, logičari ne smatraju da je iskazna logika dobar kontekst za implikaciju. Drugo svojstvo izražava distributivnost implikacije preko same sebe i ono se smatra, ne samo poželjnim, već i suštinskim za implikaciju.

Dokazaćemo drugo tvrđenje, prvo je mnogo lakše. Pretpostavimo suprotno, da navedena formula nije logički zakon. To znači da postoji valuacija $v \in 2^P$, za koju je ta formula lažna, tj. za koju je

$$v(A \to (B \to C)) = 1,$$
$$v((A \to B) \to (A \to C)) = 0.$$

Na osnovu drugog uslova, mora biti $v(A \to B) = 1$ i $v(A \to C) = 0$, tj. $v(A \to B) = 1$, $v(A) = 1$ i $v(C) = 0$. Iz uslova $v(A \to B) = 1$ i $v(A) = 1$, dobijamo da je $v(B) = 1$. Dakle iz drugog uslova gornje relacije dobijamo da mora biti $v(A) = 1$, $v(B) = 1$ i $v(C) = 0$. Međutim, ako $v(A) = 1$ i $v(B) = 1$, onda iz prvog uslova slijedi $v(C) = 1$, a to nije moguće, budući da smo utvrdili da je $v(C) = 0$. Dakle, ne postoji valuacija za koju bi posmatrana formula bila lažna. $\lhd$

Zadatak 1. *Tranzitivnost implikacije:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Tranzitivnost je sasvim poželjno svojstvo - implikacija se u skupu svih formula iskazne logike ponaša kao poredak. Ali, kako smo napomenuli, u iskaznoj logici implikacija ima i neka sasvim problematična svojstva. Zaista zbunjuje što je implikacija kao poredak i linearna: ili iz A slijedi B, ili iz B slijedi A, za bilo koja dva ničim povezana iskaza A i B.

Zadatak 2. *Linearnost implikacije:* Za proizvoljne formule A i B,

$$\models (A \to B) \lor (B \to A).$$

Zadatak 3. *Persov zakon:* $\models ((A \to B) \to A) \to A$, za proizvoljne formule A i B.

Logička svojstva konjunkcije i disjunkcije

Zadatak 1. *Svojstva konjunkcije:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\begin{aligned}
&\models (A \wedge B) \to A,\\
&\models (A \wedge B) \to B,\\
&\models (C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \wedge B))).
\end{aligned}$$

Navedeni zakoni karakterišu prirodu konjunkcije kao logičkog veznika. Ako se implikacija shvati kao poredak među formulama, onda konjunkcija ima sva svojstva infimuma. Prve dvije formule znače da je konjunkcija $A \wedge B$ donje ograničenje za A i B, a treća, da je $A \wedge B$ najveće donje ograničenje za formule A i B.

Zadatak 2. *Svojstva disjunkcije:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\begin{aligned}
&\models A \to (A \vee B),\\
&\models B \to (A \vee B),\\
&\models (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)).
\end{aligned}$$

Navedeni logički zakoni pokazuju da, u odnosu na implikaciju, disjunkcija ima svojstvo supremuma. Prve dvije formule znače da je $A \vee B$ gornje ograničenje za A i B, a treća, da je formula $A \vee B$ najmanje gornje ograničenje za formule A i B.

Zadatak 3. *Zakoni apsorpcije za konjunkciju i disjunkciju:* Za proizvoljne formule A i B,

$$\models (A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A, \qquad \models (A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A.$$

Zadatak 4. *Zakoni komutativnosti i asocijativnosti konjunkcije:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A), \quad \models ((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C)).$$

Zakoni komutativnosti i asocijativnosti disjunkcije: Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A), \quad \models ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C)).$$

Ekvivalencije iz prethodnog zadatka omogućavaju da, bez opasnosti da dovedemo u pitanje jednoznačno čitanje formule, u konjunkcijama i dijunkcijama više formula izostavimo zagrade tako što umjesto $((A \wedge B) \wedge C)$ pišemo $A \wedge B \wedge C$, a umjesto $((A \vee B) \vee C)$ pišemo $A \vee B \vee C$.

Kada govorimo o datoj formuli, izostavićemo njene spoljne zagrade, ali kada ona treba da uđe u sastav neke druge formule, zagrade moramo vratiti.

Za svako $n \geq 1$, ako su $A_1, \ldots, A_n$ formule, njihovu *konačnu konjunkciju* $\bigwedge_{i \leq n} A_i$ definišemo indukcijom: za $n = 1$, formula $\bigwedge_{i \leq 1} A_i$ je formula A_1 i za svako $n \geq 1$, formula $\bigwedge_{i \leq (n+1)} A_i$ je formula $(\bigwedge_{i \leq 1} A_i) \wedge A_{n+1}$. Na isti način definišemo i *konačnu disjunkciju* $n \geq 1$ formula.

Zadatak 5. *Zakon distributivnosti konjunkcije u odnosu na disjunkciju:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)),$$

Zakon distributivnosti disjunkcije u odnosu na konjunkciju: Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models (A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

Logička svojstva negacije

Zadatak 1. Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models \neg A \to (A \to B),$$
$$\models (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A).$$

Prvi zakon je *ex falso quodlibet*, tj. iz lažne pretpostavke slijedi sve, a drugi, dobro poznati *reductio ad absurdum*, tj. ako iz A slijede B i $\neg B$, onda $\neg A$, za proizvoljne iskazne formule A i B.

Zadatak 2. *De Morganovi zakoni:* Za proizvoljne formule A, B i C,

$$\models \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$
$$\models \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

De Morganovi zakoni pokazuju da se konjunkcija i disjunkcija, u prisustvu negacije, mogu uzajamno definisati.

Zadatak 3. *Zakon kontrapozicije:* Za proizvoljne formule A i B,

$$\models (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A).$$

Zadatak 4. *Zakon dvojne negacije:* $\models A \leftrightarrow \neg\neg A$, za svaku formulu A.
Zadatak 5. *Zakon isključenja trećeg:* $\models A \vee \neg A$, za svaku formulu A.
Zadatak 6. Za sve formule A i B, $\models (A \to B) \ \leftrightarrow \ (\neg A \vee B)$.

Normalna forma

U načelu, normalna forma je ekvivalentan oblik formule u kome se negacije javljaju samo uz njena iskazna slova, a svi drugi njeni logički veznici su konjunkcija i disjunkcija.

Neka su formule $A_1, \ldots, A_n$ iskazni simboli ili negacije iskaznih simbola. Formula oblika $\bigwedge_{i \leq n} A_i$ je *elementarna konjunkcija*, a formula $\bigvee_{i \leq n} A_i$ je *elementarna disjunkcija*.

Zadatak 1. Svaka formula $A(p_1, \ldots, p_n)$ ekvivalentna je konačnoj disjunkciji elementarnih konjunkcija, tj. može se predstaviti u obliku $\bigvee_{j \leq k} B_j$, $k \geq 1$, gde su formule B_j elementarne konjunkcije iskaznih slova $p_1, \ldots, p_n$. Takav oblik formule je *disjunktivna normalna forma*.

Uputstvo: Uočimo valuacije v za koje je $v(A) = 1$. Njih ima $k \leq n$ različitih na iskaznim slovima $p_1, \ldots, p_n$. Za valuaciju v, neka je $p_i^v = p_i$ ako je $v(p_i) = 1$ i $p_i^v = \neg p_i$ ako je $v(p_i) = 0$. Ako je $B_j = \bigwedge_{i \leq n} p_i^v$ i $A' = \bigvee_{j \leq k} B_j$, formule A i A' su ekvivalentne. Ako je $k = 0$, formula A' moze biti $p \wedge \neg p$, za bilo koje iskazno slovo p.

Zadatak 2. Svaka formula $A(p_1, \ldots, p_n)$ ekvivalentna je konačnoj konjunkciji elementarnih disjunkcija, tj. može se predstaviti u obliku $\bigwedge_{j \leq k} B_j$, gde su formule B_j elementarne disjunkcije is. Takav oblik formule je *konjunktivna normalna forma*.

Uputstvo: Uočiti valuacije v iskaznih slova $p_1, \ldots, p_n$ za koje je $v(A) = 0$. Njih ima $k \leq n$. Neka je $p_i^v = p_i$ ako $v(p_i) = 0$ i $p_i^v = \neg p_i$ ako $v(p_i) = 1$. Sada su formule B_j, $j \leq k$, oblika $\bigvee_{i \leq n} p_i^v$, a formula A' ima oblik $\bigwedge_{j \leq k} B_j$. Ako je $k = 0$, formula A' može biti $p \vee \neg p$, za bilo koje iskazno slovo p.

Logičke posljedice

Formula A je *logička posljedica* skupa pretpostavki Σ ako $v(A) = 1$, za svaku valuaciju v, za koju su istinite sve formule skupa Σ. To označavamo sa $\Sigma \models A$, a formule skupa Σ nazivamo *logičkim pretpostavkama*.

Dakle, formula A je logička posljedica skupa pretpostavki Σ ako je formula A istinita kad god su istinite sve pretpostavke skupa Σ. Ako je $\Sigma = \emptyset$, pišemo $\models A$, što je u saglasnosti sa pojmom tautologije.

Skup formula Σ je *logički konzistentan* ili *neprotivrečan* ako ne postoji iskazna formula A za koju $\Sigma \models A$ i $\Sigma \models \neg A$. U suprotnom, Σ je *logički nekonzistentan* ili protivrečan skup formula. Skup formula je *zadovoljiv* ako postoji valuacija za koju su istinite sve njegove formule.

Zadatak 1. Skup formula Σ je logički konzistentan ako i samo ako Σ je zadovoljiv.

Zadatak 2. Skup formula je logički nekonzistentan ako i samo ako svaka iskazna formula je njegova logička posljedica.

Ako su A i B iskazne formule i Σ skup formula, činjenicu da je formula B logička posljedica skupa $\Sigma \cup \{A\}$ obeležavaćemo sa $\Sigma, A \models B$.

Zadatak 3. *Teorema dedukcije:* Ako su A i B formule i Σ skup formula iskazne logike, onda

$$\Sigma, A \models B \;\Rightarrow\; \Sigma \models A \to B.$$

Ovde važi ekvivalencija $\Sigma, A \models B \Leftrightarrow \Sigma \models A \to B$, ali je obratna implikacija zapravo modus ponens.

Zadatak 4. *Teorema interpolacije:* Neka je formula $A \to B$ tautologija. Ako formula A nije kontradikcija i formula B nije tautologija, postoji iskazna formula C, koja sadrži samo iskazne promjenljive zajedničke za formule A i B, takva da su formule $A \to C$ i $C \to B$ tautologije.

Uputstvo: formulu A predstaviti u disjunktivnoj, a formulu B u konjunktivnoj normalnoj formi.

Sintaksa iskazne logike

Skup logičkih zakona okarakterisali smo kao skup formula koje su istinite za svaku valuaciju. Kada je data formula A, napravimo njenu tablicu, pa ako su sve vrijednosti formule A jedan, formula A je tautologija, a ako to nije slučaj, formula A nije tautologija. Dakle, postoji algoritam koji za ulaz A, u konačno mnogo koraka, daje odgovor na pitanje da li je formula A tautologija. Kažemo da je predikat "A je tautologija," tj. predikat "$\models A$", gdje je A formula iskazne logike, *odlučiv predikat.* Na isti način, konstrukcijom tablice, rešava se problem odlučivosti predikata "A je zadovoljiva formula", ili "formule A i B su ekvivalentne."

Pošto postoji efektivan postupak za provjeravanje logičkih zakona, izgleda kao da je svaka dalja formalizacija iskazne logike pomalo izlišna.

Međutim, mi smo u uvodnim napomenama naglasili da je iskazna logika samo fragment predikatske logike, koja je za matematiku mnogo značajnija. U predikatskoj logici, predikat "A je logički zakon" nije odlučiv, pa je njena formalizacija neminovna. Iz tog razloga, ideju formalizacije logičkih zakona izložićemo u nešto jednostavnijem kontekstu, a to je iskazni račun.

Formalizacija logičkih zakona podrazumijeva dvije stvari:

(1) Izbor skupa logičkih zakona, tj. *aksioma*,
(2) Izbor skupa *pravila zaključivanja*,

tako da, polazeći od aksioma, koristeći pravila zaključivanja, možemo dobiti sve logičke zakone.

Neka je $\mathcal{I}$ skup svih logičkih zakona, $T \subseteq \mathcal{I}$ skup aksioma i $\mathrm{Con}(T)$ skup svih formula koje se, po pravilima zaključivanja, mogu dobiti iz T. Formalizacija je *korektna* ako polazeći od aksioma, po pravilima zaključivanja, dobijamo samo logičke zakone, tj. ako $\mathrm{Con}(T) \subseteq \mathcal{I}$. Sa druge strane, formalizacija je *potpuna* ako $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Con}(T)$.

Korektnih i potpunih formalizacija iskaznog račuma ima mnogo. Izbor aksioma i pravila izvođenja zavisi od tipa problema zbog kojih definišemo formalni sistem. Na primjer, za analizu svojstava samih dedukcija, pogodne su formalizacije sa samo jednim tipom aksioma (najčešće to su tautologije $A \to A$, za svaku formulu A) i mnoštvom pravila zaključivanja. Takvi logički sistemi su *gencenovski sistemi* (po Gerhardu Gencenu, koji ih je otkrio) i izučavaju se u *teoriji dokaza*. Druga krajnost su *hilbertovski sistemi* (po Davidu Hilbertu, koji je značajan za samu ideju formalizacije), sa samo jednim pravilom zaključivanja i mnoštvom aksioma. U našim razmatranjima, opredijelili smo se za hilbertovski sistem, budući da on više odgovara potrebama formalizacije matematike.

Takođe, u izboru skupa aksioma nismo se rukovodili zahtjevima minimalnosti i nezavisnosti. Aksiome smo odabrali tako da pregledno izražavaju svojstva logičkih veznika. To će nam omogućiti da se osvrnemo i na takozvanu intuicionističku logiku, kao značajan fragment iskazne logike.

Aksiome iskazne logike

Aksiome smo podijelili u pet grupa. Svaka grupa, izuzimajući poslednju koja ima posebnu ulogu, odnosi se na jedan od logičkih veznika i karakteriše njegova svojstva. Aksiome su definisane oblikom formule iskazne logike, tj. date su kao *sheme*.

Aksiome implikacije su sve formule oblika

$$\begin{aligned}&A \to (B \to A),\\&(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),\end{aligned}$$

za proizvoljne iskazne formule A, B i C.

O smislu aksioma implikacije već je bilo riječi. Prva aksioma tvrdi: ako je A, onda A slijedi iz bilo koje formule B. Druga aksioma izražava distributivnost implikacije preko same sebe.

Aksiome konjunkcije su sve formule oblika

$$\begin{aligned}&(A \wedge B) \to A,\\&(A \wedge B) \to B,\\&A \to (B \to (A \wedge B)),\end{aligned}$$

za sve iskazne formule A i B.

Prve dvije aksiome određuju konjunkciju kao donje ograničenje za svaki od njenih sastojaka. Treća aksioma je posebno motivisana (o tome će biti riječi kasnije), a na osnovu nje može se dokazati da je konjunkcija najveće donje ograničenje, tj. infimum njenih sastojaka.

Aksiome disjunkcije su sve formule oblika

$$\begin{aligned}&A \to (A \vee B),\\&B \to (A \vee B),\\&(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)),\end{aligned}$$

za sve iskazne formule A, B i C.

Prve dvije aksiome određuju disjunkciju kao gornje ograničenje za svaki od njenih sastojaka, a treća, kao najmanje gornje ograničenje, tj. supremum njenih sastojaka.

Aksiome negacije su sve formule oblika

$$\begin{aligned}&\neg A \to (A \to B),\\&(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A),\end{aligned}$$

za sve iskazne formule A i B.

Aksiome negacije su logički zakoni *ex falso quodlibet* i *reductio ad absurdum*, koje smo ranije razmotrili.

Aksiome zakona isključenja trećeg su sve formule oblika

$$A \vee \neg A,$$

za svaku iskaznu formulu A.

Ovaj logički zakon, posebno je izdvojen da bi se jasno sagledalo da on zapravo određuje prirodu iskazne logike. Blisko je povezan sa našom semantičkom pretpostavkom da je svaki iskaz ili istinit ili lažan i da treće mogućnosti nema.

Dakle, skup aksioma iskazne logike, koji smo označili sa T, sastoji se od jedanaest disjunktnih skupova formula ili *shema aksioma*:

$$\begin{aligned} &T_1 = \{A \to (B \to A) : A, B \in F\}, \\ &\ldots \\ &T_{11} = \{A \vee \neg A : A \in F\}, \end{aligned}$$

tj. $T = T_1 \cup \cdots \cup T_{11}$.

Zadatak 1. Formulisati algoritam koji, za zadatu formulu A, provjerava da li $A \in T_1$. Takav algoritam postoji za svaki od predikata "$A \in T_k$," za sve $k = 1, \ldots, 11$, pa možemo zaključiti da je predikat "$A \in T$" odlučiv. Drugačije račeno, predikat "formula A je aksioma" je odlučiv predikat.

Modus ponens

Formalizacija iskazne logike, za koju smo se opredijelili, sadrži jedno osnovno pravilo izvođenja - *modus ponendo ponens* ili kraće:

modus ponens: Za proizvoljne formule A i B,

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Modus ponens razumijemo na sledeći način: iz formula A i $A \to B$ zaključujemo B, za bilo kakve formule A i B.

Pritom, o formulama A i $A \to B$ nismo ništa pretpostavili. One mogu biti istinite ili neistinite, dokazane ili nedokazane - ako smo sa formula A i $A \to B$ prešli na formulu B, taj prelaz je korektan.

Svakako, modus ponens zadovoljava uslov salva veritate: ako su pretpostavke A i $A \to B$ istinite, istinit je i zaključak B. U antičkoj i srednjevjekovnoj logici, pretpostavka A nazivana je *malom*, a pretpostavka $A \to B$ *velikom premisom.* Tvrdeći u maloj premisi tvrdimo u zaključku, pa je stoga pravilo nazivano *modus* (oblik, način) *ponendo ponens* (tvrdim tvrdeći), ali se vremenom ustalio skraćeni naziv *modus ponens.* Jedan broj logičara modus ponens naziva *pravilom izdvajanja,* jer nam omogućava da iz složenog iskaza $A \to B$ izdvojimo kao istinit iskaz B ukoliko smo pretpostavili da su A i $A \to B$ istiniti iskazi.

Dokaz u iskaznoj logici

Neka je A proizvoljna formula. *Dokaz formule* A u iskaznom računu je konačan niz formula $(A_1, \ldots, A_n)$, $n \geq 1$, takav da $A = A_n$ i za svako $i \leq n$, formula A_i je aksioma ili se po modus ponensu dobija iz njoj prethodnih članova niza $(A_1, \ldots, A_n)$.

Formula je *dokaziva* ili *teorema* ako ima dokaz. Činjenicu da je formula A teorema označavamo sa $\vdash A$. Skup svih teorema iskazne logike označavamo sa $\mathcal{T}$. Dakle, $\mathcal{T} = \{A \in F : \vdash A\}$.

Neka je Σ skup formula. Formula A ima *dokaz iz pretpostavki* Σ ako postoji konačan niz formula $(A_1, \ldots, A_n)$, $n \geq 1$, takav da $A = A_n$ i za svako $i \leq n$, formula A_i je aksioma, pripada skupu Σ ili se po modus ponensu dobija iz njoj prethodnih članova niza $(A_1, \ldots, A_n)$. Činjenicu da formula A ima dokaz iz pretpostavki Σ označavamo sa $\Sigma \vdash A$.

Ako $\Sigma \vdash A$, kažemo da je formula A *posljedica* skupa pretpostavki Σ. Ako je Σ prazan skup, pišemo $\vdash A$, što jeste saglasno sa definicijom pojma teoreme.

Umjesto, $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$, pisaćemo $\Sigma, A \vdash B$, a umjesto $\Sigma \cup \Gamma \vdash A$, pisaćemo $\Sigma, \Gamma \vdash A$, a ako je $\Sigma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, umjesto $\Sigma \vdash A$, pisaćemo:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A,$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n$ sve formule skupa Σ.

Sve posljedice skupa Σ označavamo sa $\mathrm{Con}\,(\Sigma)$. Dakle,

$$\mathrm{Con}\,(\Sigma) = \{A \in F : \Sigma \vdash A\}.$$

Skupove iskaznih formula označavaćemo velikim grčkim slovima Σ, Γ, moguće sa indeksima Σ_1, Σ_2 itd.

Izvedena pravila zaključivanja

Osim modus ponensa, kao osnovnog pravila, definisaćemo i mnoga druga pravila zaključivanja. Sva pravila iskazne logike, različita od modus ponensa, su *izvedena pravila.* Koristeći samu definiciju dokaza iz pretpostavki, modus ponens i aksiome, svako od izvedenih pravila ćemo dokazati. Ona nam služe da dokaze učinimo preglednijim i kraćim.

Primjer 1. Ako su Σ_1 i Σ_2 skupovi formula, za proizvoljne formule A i B, važi sledeće pravilo:

$$\frac{\Sigma_1 \vdash A, \quad \Sigma_2 \vdash A \to B}{\Sigma_1, \Sigma_2 \vdash B}$$

Ovo pravilo je poseban slučaj modus ponensa i pokazuje da on čuva dokazivost: ako formule A i $A \to B$ imaju dokaze iz skupova pretpostavki Σ_1 i Σ_2 respektivno, formula B ima dokaz iz skupa pretpostavki Σ_1, Σ_2.

Ako je niz $(A_1, \dots A_n)$ dokaz formule A iz pretpostavki Σ_1 i ako je niz $(B_1, \dots, B_n)$ dokaz formule $A \to B$ iz pretpostavki Σ_2, onda je niz

$$(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n, B),$$

dokaz formule B iz pretpostavki Σ_1, Σ_2. $\lhd$

Zadatak 1. Ako je Σ skup formula, za proizvoljne formule A i B,

$$\frac{\Sigma \models A, \quad \Sigma \models A \to B}{\Sigma \models B}$$

Zadatak pokazuje da modus ponens čuva istinitost, tj. da čuva logičke posljedice. Dakle, modus ponens ima one osobine koje očekujemo od svih korektnih pravila zaključivanja: ako su pretpostavke istinite ili dokazive, takav je i zaključak.

Primjer 2. *Pravilo slabljenja:* Ako je Σ skup formula, za proizvoljne formule A i B,

$$\frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, B \vdash A}$$

Pravilo slabljenja slijedi iz same definicije dokaza: sve što se može dokazati iz datog skupa pretpostavki, ima dokaz iz šireg skupa pretpostavki. Naime, svaki dokaz za formulu A iz pretpostavki Σ, istovremeno je dokaz za A iz pretpostavki Σ, B. $\lhd$

Primjer 3. *Pravilo permutacije pretpostavki.* Ako je Σ skup formula, za proizvoljne formule A, B i C,

$$\frac{\Sigma, B, C \vdash A}{\overline{\Sigma, C, B \vdash A}}$$

Pravilo permutacije slijedi neposredno iz definicije dokaza. Naime, u toj definiciji govorimo o skupu pretpostavki, a u skupu je irelevantan poredak njegovih elemenata. $\lhd$

Specifičnost pravila permutacije pretpostavki je u tome što ga možemo tumačiti na dolje, ako $\Sigma, B, C \vdash A$, onda $\Sigma, C, B \vdash A$, kao i na gore, ako $\Sigma, C, B \vdash A$, onda $\Sigma, B, C \vdash A$. Takva pravila su *dvostrana pravila*, a dvostranost naglašavamo dvostrukom crtom između premisa i zaključka. Na primjer, pravilo slabljenja nije dvostrano pravilo.

Semantika i sintaksa

Skup formula Σ je *konzistentan* ili *neprotivrečan* ako ne postoji formula A, takva da $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash \neg A$. U suprotnom, ako takva formula A postoji, skup formula je *nekonzistentan* ili *protivrečan*. O pojmu konzistentnog skupa bilo je riječi kada smo govorili o logičkoj konzistentnosti. Kasnije ćemo dokazati da su konzistentnost i logička konzistentnost isti pojmovi.

Uvod u raspravu o sintaksi iskazne logike, o njegovim aksiomama i pravilima zaključivanja, završićemo sledećom sistematizacijom ključnih sintaksnih i semantičkih pojmova:

Sintaksa	Semantika
$\vdash A$	$\models A$
$\Sigma \vdash A$	$\Sigma \models A$
konzistentan skup	zadovoljiv skup

Ovaj pregled sintaksnih i semantičkih pojmova smo napravili da nagovijestimo tri ključne teoreme iskaznog računa: svaka dva pojma u istom redu se poklapaju. Iste takve teoreme važe i u predikatskom računu.

U dosadašnjim izlaganjima ustalili smo običaj da matematičke promjenljive, koje uzimaju vrijednosti iz skupa elementarnih iskaza, označavamo malim slovima p, q i r, po potrebi indeksirane p_1, p_2 itd. Za iskazne formule koristili smo matematičke promjenljive A, B, C i D, po potrebi i indeksirane, koje uzimaju vrijednosti iz skupa iskaznih formula. Bitno je da naglasimo da, kao grafički simboli, promjenljive p, q i r, kao i promjenljive A, B, C i D, nijesu simboli jezika $\mathcal{L}$, već simboli svakodnevnog matematičkog jezika.

U načelu, u logici su uvijek prisutna dva jezika: jezik o kome govorimo ili *objek-tjezik*, kao i jezik u kome saopštavamo svojstva objekt-jezika ili *metajezik*. Na primjer, objek-tjezik jeste jezik $\mathcal{L}$, a metajezik je svakodnevni matematički jezik. Veoma je važno jasno razdvojiti ova dva jezika. Objekt-jezik je osnova sintakse, dok u metajeziku formulišemo semantiku. Ponekad, takvo razdvajanje uopšte nije jednostavno.

Na primjer, termini prirodnog jezika, kao što su "dokaz" ili "teorema", mogu se odnositi na oba jezika. Formalni dokaz u iskaznoj logici (ili objekt-dokaz) je jedna, a matematički dokaz (ili metadokaz) nekog svojstva koje imaju formalni dokazi, sasvim druga stvar. Da to ilustrujemo, napominjemo da ćemo uskoro dokazati da važi:

TEOREMA TAUTOLOGIJE: Ako je A formula, $A \to A$ je teorema.

U navedenom tvrđenju, *teorema tautologije* je metateorema, a njen dokaz je zapravo metadokaz. On se sastoji u tome da dokažemo da formula $A \to A$ jeste objekt-teorema, tj. u tome da dokažemo da postoji objekt-dokaz za formulu $A \to A$, za svako $A \in F$. Dokaz ove metateoreme izložićemo nešto kasnije.

Treba takođe naglasiti da sve logičke veznike koristimo na oba nivoa, u metajeziku i objek-tjeziku. Kada postoji potreba, implikaciju u metajeziku označavamo sa $\Rightarrow$, za razliku od implikacije kao veznika u iskaznoj logici, koju označavamo sa $\to$. U metajeziku, ekvivalenciju označavamo sa $\Leftrightarrow$, a u jeziku iskazne logike, kao objekt-jeziku, ekvivalenciju označavamo sa $\leftrightarrow$.

Teoreme iskazne logike

Ključna teorema iskazne logike jeste *teorema potpunosti:* svaka tautologija je teorema iskazne logike. Uz *teoremu korektnosti,* koja tvrdi da je svaka teorema iskazne logike tautologija, teorema potpunosti potvrđuje da sintaksa iskazne logike sasvim odgovara njenoj matematičkoj semantici. Teoremu korektnosti dokazaćemo odmah, a dokaz teoreme potpunosti izložićemo pošto detaljnije upoznamo svojstva sintakse iskazne logike.

U dokazu teoreme korektnosti koristićemo još jednu varijantu principa matematičke indukcije, koja se naziva *indukcija po složenosti dokaza.* Ona se koristi kada treba dokazati da sve teoreme imaju dato svojstvo.

Teoreme iskazne logike generišemo, polazeći od aksioma, pomoću modus ponensa. Svaki korak dokaza je ili aksioma, ili predstavlja primjenu modus ponensa na već dokazane formule. Stoga, bazu indukcije po složenosti dokaza čine aksime, a induktivni korak je primjena modus ponensa. Dakle, princip indukcije po složenosti dokaza glasi:

Ako sve aksiome imaju svojstvo $\mathcal{S}$ i ako iz pretpostavke da teoreme A i $A \to B$ imaju svojstvo $\mathcal{S}$ slijedi da teorema B ima svojstvo $\mathcal{S}$, onda sve teoreme imaju svojsto S.

Teorema korektnosti: Svaka teorema je tautologija.

Dokaz. Teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti dokaza. To znači da treba dokazati da su sve aksiome tautologije i da modus ponens čuva tautologije.

U zadacima poglavlja o logičkim zakonima, u kojima se govori o osnovnim svojstvima logičkih veznika i o zakonu isključenja trećeg, dokazano je da su sve aksiome logički zakoni, tj. tautologije, sa izuzetkom treće aksiome konjunkcije:

$$A \to (B \to (A \wedge B)),$$

gdje su A i B proizvoljne formule. Ako je $v \in 2^P$ valuacija za koju ova formula nije istinita, po definiciji istinitosti za implikaciju, to znači da mora biti $v(A) = 1$ i $v(B \to (A \wedge B)) = 0$, tj. $v(A) = 1$, $v(B) = 1$ i $v(A \wedge B) = 0$, što protivreči definiciji istinitosti konjukcije. Dakle, treća aksioma konjunkcije je tautologija.

Pretpostavimo da se teorema B dobija primjenom modus ponensa na teoreme A i $A \to B$. Po induktivnoj pretpostavci, teoreme A i $A \to B$ su tautologije, tj. za svaku valuaciju $v \in 2^P$, $v(A) = 1$ i $v(A \to B) = 1$. Po definiciji istinitosti implikacije, to znači da mora biti $v(B) = 1$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Dakle, teorema B je tautologija. $\lhd$

Naš sledeći zadatak biće da bliže upoznamo posljedice aksioma iskaznog računa, tj. njegove teoreme. Grupisali smo ih po logičkim veznicima. Za svaki logički veznik napravili smo pregled najvažnijih posljedica njegovih aksioma i dokazali jedno njegovo važno pravilo.

Posljedice aksioma implikacije

Implikacija je najvažniji logički veznik, a njeno najvažnije svojstvo izražava *Teorema dedukcije.* Tu teoremu smo već spomenuli u semantičkoj verziji. Prethodno, ilustracije radi, dokazaćemo *zakon tautologije* i *zakon tranzitivnosti implikacije.* Ovi zakoni i teorema dedukcije dokazuju se samo na osnovu aksioma implikacije.

Teorema tautologije: Za svaku iskaznu formulu A,

$$\vdash A \to A.$$

Dokaz. Konstruisaćemo konačan niz formula, koji završava sa formulom $A \to A$, a čije su sve formule ili aksiome implikacije ili iz njih slijede po modus ponensu:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)),\\
&A_2 = A \to ((A \to A) \to A)),\\
&A_3 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A),\\
&A_4 = A \to (A \to A),\\
&A_5 = A \to A.
\end{aligned}
$$

Formula A_1 je *instanca* ili poseban slučaj druge aksiome, u koju je umjesto formule B stavljena formula $A \to A$, a umjesto formule C formula A. Formula A_2 je instanca prve aksiome u koju je umjesto formule B stavljena formula $A \to A$. Formula A_3 se dobija po modus ponensu iz A_1 i A_2, formula A_4 je instanca prve aksiome, u kojoj je umjesto formule B stavljena formula A, a formula A_5 dobija se primjenom modus ponensa na formule A_3 i A_4. Po definiciji pojma dokaza, to znači da je formula $A \to A$ teorema iskaznog računa. $\lhd$

U implikaciji oblika $A \to B$, formula A je *antecedens*, a formula B *konsekvens.* Teorema dedukcije omogućava da implikaciju $A \to B$ dokažemo tako što antecedens prenesemo u prtpostavke i dokažemo konsekvens. U matematici najčešće tako i rasuđujemo: pretpostavimo neko tvrđenje A, dokažemo njegovu posljedicu B i zaključimo tvrđenje $A \to B$. Teorema dedukcije potvrđuje formalnu legitimnost takvog rasuđivanja.

Teorema dedukcije

Na osnovu aksioma implikacije, može se dokazati sledeće pravilo za dokazivanje implikacije tj. *teorema dedukcije*:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

za svaki skup formula Γ i proizvoljne formule A i B. Ovo pravilo se možemo pročitati i na gore: ako $\Gamma \vdash A \to B$, slabljenjem imamo $\Gamma, A \vdash A \to B$, pa zbog $\Gamma, A \vdash A$, po modus ponensu dobijamo $\Gamma, A \vdash B$.

Na taj način dobili smo dvostrano pravilo koje pretpostavke prenosi u antecedens i obratno, antecedens prenosi u pretpostavke: za svaki skup formula Γ i proizvoljne formule A i B,

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\overline{\Gamma \vdash A \to B}}$$

Teorema o tranzitivnosti implikacije: za sve formule A, B i C,

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Dokaz. Primjenom dvostranog pravila za implikaciju, antecedense redom prenesemo u pretpostavke:

$$\begin{aligned} &\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)). \\ A \to B &\vdash (B \to C) \to (A \to C), \\ A \to B, B \to C &\vdash A \to C, \\ A \to B, B \to C, A &\vdash C. \end{aligned}$$

Sada iz pretpostavki $A \to B, B \to C$ i A treba dokazati C. Po definiciji dokaza, dokaz formule C iz pretpostavki $A \to B, B \to C$ i A je niz formula

$$(A, A \to B, B, B \to C, C).$$

Sada preostaje da, primjenom teoreme dedukcije, pretpostavke vratimo u antecedens, pa u tri koraka dobijamo da zakon tranzitivnosti implikacije jeste teorema iskazne logike. $\lhd$

Ako je $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 1$, dokaz formule A iz pretpostavki Γ, kažemo da formula A ima *dokaz dužine* n iz pretpostavki Γ.

Teorema dedukcije: Ako je Γ, A, B skup formula,

$$\Gamma \vdash A \to B \;\Rightarrow\; \Gamma, A \vdash B.$$

Dokaz. Teoremu dokazujemo *indukcijom po dužini dokaza* formule B iz pretpostavki Γ, A.

Pretpostavimo $\Gamma, A \vdash B$, tj. da postoji dokaz $(B_1, \ldots, B_n)$, dužine $n \geq 1$, formule B iz pretpostavki Γ, A. Tvrdimo da $\Gamma \vdash A \to B$.

Ako je $n = 1$, onda je formula B aksioma ili pripada skupu formula Γ, A. Ako je formula B aksioma ili pripada skupu Γ, onda

$$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash B & \text{(pravilo slabljenja)} \\ \Gamma \vdash B \to (A \to B) & \text{(aksioma implikacije)} \\ \Gamma \vdash A \to B, & \text{(modus ponens)} \end{array}$$

a ako je B formula A, onda po teoremi tautologije, $\Gamma \vdash A \to B$.

Neka je $n \geq 1$ prirodan broj. Pretpostavimo da (induktivna pretpostavka) ako formula C ima dokaz iz pretpostavki Γ, A dužine $k \leq n$, onda $\Gamma \vdash A \to C$, za svaku formulu C.

Pretpostavimo sada da formula B ima dokaz $(B_1, \ldots, B_{n+1})$, dužine $n+1$, iz pretpostavki Γ, A. Po definiciji dokaza, formula $B = B_{n+1}$ je aksioma ili pripada skupu Γ, A ili po modus ponensu sledi iz formula B_i i B_j, za neke $i, j \leq n$. Ako je formula B aksioma ili pripada skupu Γ, A, postupamo isto kao u slučaju $n = 1$. Ako je formula B dobijena po modus ponensu iz formula B_i i B_j, za neke $i, j \leq n$, gde je $B_j = (B_i \to B)$, po induktivnoj pretpostavci

$$\Gamma \vdash A \to B_i,$$
$$\Gamma \vdash A \to (B_i \to B).$$

Po drugoj aksiomi za implikaciju i po pravilu slabljenja imamo

$$\Gamma \vdash (A \to (B_i \to B)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B)),$$

odakle se dvostrukom primenom modus ponensa dobija $\Gamma \vdash A \to B$, čime je teorema dedukcije u potpunosti dokazana. $\lhd$

Pravilo supstitucije i pravilo sječenja

Umjesto u obliku shema, aksiome iskazne logike se mogu zadati samo instancama svake od shema, ali se u tom slučaju, pored modus ponensa, mora pretpostaviti još jedno pravilo zaključivanja - *pravilo supstitucije.*

Iskazna logika sa supstitucijom je formalni sistem čije su aksiome:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 & s_0 \to (s_1 \to s_0), \\
A_2 & s_0(\to (s_1 \to s_2)) \to ((s_0 \to s_1) \to (s_0 \to s_2)), \\
A_3 & (s_0 \wedge s_1) \to s_0, \\
A_4 & (s_0 \wedge s_1) \to s_1, \\
A_5 & s_0 \to (s_1 \to (s_0 \wedge s_1)), \\
A_6 & s_0 \to (s_0 \vee s_1), \\
A_7 & s_1 \to (s_0 \vee s_1), \\
A_8 & (s_0 \to s_2) \to ((s_1 \to s_2) \to ((s_0 \vee s_1) \to s_2)), \\
A_8 & \neg s_0 \to (s_0 \to s_1), \\
A_{10} & (s_0 \to s_1) \to ((s_0 \to \neg s_1) \to \neg s_0) \\
A_{11} & s_0 \vee \neg s_0,
\end{array}
$$

a pravila zaključivanja modus ponens i *pravilo supstitucije:*

$$\frac{A(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{A(A_1, A_2, \ldots, A_n)}$$

gde je $A(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formula koja se iz formule A dobija zamjenom svih javljanja elementarnih iskaza $p_1, p_2, \ldots, p_n$ formulama $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Neka $\vdash_s A$ označava da je formula A teorema iskazne logike sa supstitucijom.

Zadatak 1. Dokazati da za svaku formulu A,

$$\vdash A \;\Leftrightarrow \vdash_s A.$$

Uputstvo: Svaka instanca aksiome iskazne logike može se dobiti primjenom pravila supstitucije na odgovarajuću aksiomu A_i, pa se svaki dokaz u iskaznoj logici može prevesti u dokaz u iskaznoj logici sa supstitucijom. Da bi se dokazalo obratno, treba prvo dokazati da u svakom dokazu pravila supstitucije i modus ponensa mogu da promijene poredak, tako da se supstitucija uvijek vrši na aksiomama.

Zadatak 2. Dokazati da u iskaznoj logici sa supstitucijom ne važi teorema dedukcije.

Zadatak 2. *Pravilo sječenja:* Na osnovu teoreme dedukcije, dokazati pravilo

$$\frac{\Sigma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Sigma, \Gamma \vdash B}$$

za proizvoljne formule A, B i skupove formula Σ, Γ.

Specifičnost ovog pravila je u tome što formula A koja se javlja u pretpostavkama nestaje u zaključku, pa se iz tog razloga ovo pravilo naziva pravilom sječenja.

Ako se među pravilima zaključivanja nalazi pravilo sječenja, koje nije moguće eliminisati, rekonstrukcija pretpostavki iz kojih je dati zaključak dobijen praktično nije moguća. Stoga, *eliminacija sječenja* predstavlja ključni problem u formalnim sistemima, pogotovo u sistemima gencenovskog tipa.

Posljedice aksioma konjunkcije

Teorema 1. *Pravilo konjunkcije:* Ako je Σ skup formula, za proizvoljne formule A i B,

$$\frac{\Sigma \vdash A \qquad \Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash A \wedge B}$$

DOKAZ. Iz treće aksiome $A \to (B \to (A \wedge B))$ i pretpostavki $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash B$, dvostrukom primjenom modus ponensa, dobijamo $\Sigma \vdash A \wedge B$, tj. pravilo konjunkcije važi na dolje.

Ako $\Sigma \vdash A \wedge B$, iz prve aksiome konjunkcije $(A \wedge B) \to A$, po modus ponensu, dobijamo $\Sigma \vdash A$, a iz druge aksiome konjunkcije $(A \wedge B) \to B$, po modus ponensu, dobijamo $\Sigma \vdash B$. To znači da pravilo konjunkcije važi i kada se čita na gore. $\lhd$

Na osnovu pravila konjunkcije možemo zaključiti da je konjunkcija $A \wedge B$ dokazana ako i samo ako su dokazana oba konjunkta A i B.

ZADATAK 1. Dokazati teoreme o komutativnosti i asocijativnosti konjunkcije. Dokazati da $\vdash A \leftrightarrow A \wedge A$, za svaku formulu A.

ZADATAK 2. Dokazati *teoremu infimuma:* za sve formule A, B i C,

$$\vdash (C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \wedge B))).$$

ZADATAK 3. Dokazati *teoremu o konjunkciji pretpostavki:* za proizvoljne formule A i B,

$$\vdash (A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C).$$

ZADATAK 4. Dokazati *pravilo o konjunkciji pretpostavki:* za svaki skup formula Σ i proizvoljne formule A, B i C,

$$\frac{\Sigma,\ A, B \vdash C}{\Sigma,\ A \wedge B \vdash C}$$

Posljedice aksioma disjunkcije

TEOREMA 1. Iz aksioma disjunkcije slijedi dvostrano *pravilo disjunkcije* ili *pravilo dokazivanja po slučajevima:*

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

za svaki skup formula Γ i proizvoljne formule A, B i C.

Dokaz. Ako $\Gamma, A \vdash C$ i $\Gamma, B \vdash C$, po teoremi dedukcije, $\Gamma \vdash (A \to C)$ i $\Gamma \vdash (B \to C)$. Na osnovu treće aksiome disjunkcije

$$\Gamma \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)),$$

po modus ponensu, dobijamo formulu $\Gamma \vdash (A \lor B) \to C$, pa konačno, na osnovu teoreme dedukcije, $\Gamma,\ A \lor B \vdash C$. Dakle, pravilo disjunkcije važi na dolje.

Da bi smo dokazali pravilo na gore, dokažimo da važi teorema

$$\vdash ((A \lor B) \to C) \to ((A \to C) \land (B \to C)),$$

za sve formula A, B i C.

Po teoremi dedukcije i pravilu za dokazivanje konjunkcije, na osnovu pretpostavke $(A \lor B) \to C$, treba dokazati formule $A \to C$ i $B \to C$. U prvom slučaju redom imamo:

$$\begin{array}{ll}
A_1 = A \to (A \lor B) & \text{(aksioma)}, \\
A_2 = (A \lor B) \to C & \text{(pretpostavka)}, \\
A_3 = (A \to (A \lor B)) \to (((A \lor B) \to C) \to (A \to C)) & \\
A_4 = ((A \lor B) \to C) \to (A \to C) & \text{(modus ponens)}, \\
A_5 = A \to C & \text{(modus ponens)},
\end{array}$$

gdje je A_3 instanca teoreme tranzitivnosti. Na isti način, polazeći od druge aksiome disjunkcije, iz pretpostavke $(A \lor B) \to C$, dobijamo $B \to C$.

Ako $\Gamma, A \lor B \vdash C$, po teoremi dedukcije $\Gamma \vdash (A \lor B) \to C$, pa na osnovu upravo dokazane teoreme, $\Gamma \vdash A \to C$ i $\Gamma \vdash B \to C$, tj. $\Gamma, A \vdash C$ i $\Gamma, B \vdash C$. Dakle, pravilo disjunkcije važi na gore. $\lhd$

Zadatak 1. Dokazati *teoreme o obostranoj distributivnusti konjunkcije i disjunkcije:* za proizvoljne formule A, B i C,

$$\vdash ((A \land C) \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land C),$$

$$\vdash ((A \lor C) \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor C).$$

Posljedice aksioma negacije

Teorema 1. *Pravilo za dokazivanje negacije:* Ako je Σ skup formula, za proizvoljne formule A i B,

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Dokaz. Ako $\Gamma, A \vdash B$ i $\Gamma, A \vdash \neg B$, po teoremi dedukcije, $\Gamma \vdash A \to B$ i $\Gamma \vdash A \to \neg B$. Otuda, na osnovu druge aksiome negacije

$$\Gamma \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A),$$

po modus ponensu, dobijamo $\Gamma \vdash \neg A$, pa pravilo negacije važi na dolje.

Obratno, ako $\Gamma \vdash \neg A$, na osnovu prve aksiome negacije

$$\Gamma \vdash \neg A \to (A \to B),$$

mora biti $\Gamma \vdash A \to B$, tj. $\Gamma, A \vdash B$. Ako u prvoj aksiomi negacije, umjesto formule B, stavimo formulu $\neg B$, dobijamo $\Gamma, A \vdash \neg B$, pa pravilo negacije važi na gore. $\triangleleft$

Teorema slabe kontrapozicije: Za proizvoljne formule A i B,

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)).$$

Dokaz. Prema teoremi dedukcije, treba dokazati $A \to B, \neg B \vdash \neg A$, tj. po pravilu za dokazivanje negacije, iz pretpostavki $A \to B, \neg B$ i A, treba dokazati kontradikciju. Očigledno, iz ovih pretpostavki slijede formula B i formula $\neg B$. $\triangleleft$

Zadatak 1. Koristeći pravilo za dokazivanje negacije, dokazati teoremu *slabe dvojne negacije:* $\vdash A \to \neg\neg A$, za svaku formulu A.

Zadatak 2. Dokazati *modus tolendo tolens* ili kraće *modus tolens*:

$$\frac{\neg B, \ \ A \to B}{\neg A}$$

Modus (oblik, način) tolendo tolens (poričući poričem) je pravilo zaključivanja u kome poričući u maloj premisi poričemo zaključak.

Zakon isključenja trećeg

Preostalo nam je da razmotrimo posljedice poslednje aksiome iskazne logike. To je zakon isključenja trećeg: za svaku formulu A,

$$A \vee \neg A.$$

Posljedice ovog zakona su predmet opširnih rasprava u logici i matematici. Zna se da su antički logičari znali za zakon isključenja trećeg, ali nije poznato da li su ga koristili u matematici. Prvu zabunu oko ovog zakona, krajem devetnaestog vijeka, izazvao je jedan dokaz Davida Hilberta, u kome se on pozvao na zakon isključenja trećeg.

Kako pokušaji matematičara da dokažu tvrđenje A, o postojanju jedne funkcije, dugo nisu dali ploda, Hilbert je pretpostavio $\neg A$, tj. da takva funkcija uopšte ne postoji. Otuda je lako dobio kontradikciju, tj. da nije $\neg A$. Pozivajući se na zakon isključenja trećeg, zaključio je A, tj. zaključio je da je dokazao egzistenciju spomenute funkcije. Budući da uopšte nije odredio traženu funkciju, većina matematičara se pobunila, tvrdeći da se egzistencija nekog matematičkog objekta može dokazati samo njegovom eksplicitnom konstrukcijom.

Primjer 1. Prva posljedica zakona isključenja trećeg je teorema *jake dvojne negacije:* $\vdash \neg\neg A \to A$, za svaku formulu A

Po teoremi dedukcije, treba dokazati da $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A$. Sada možemo primijeniti pravilo dokazivanja po slučajevima. Prvi slučaj $A, \neg\neg A \vdash A$ je očigledan, a drugi $\neg A, \neg\neg A \vdash A$ važi, budući da se iz protivrečnih pretpostavki $\neg A$ i $\neg(\neg A)$, po pravoj aksiomi negacije, može dobiti bilo koja formula, pa dakle i formula A. $\lhd$

Primjer 2. Druga važna posljedica zakona isključenja trećeg je teorema *jake kontrapozicije:* za proizvoljne formule A i B,

$$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B).$$

Po teoremi dedukcije, treba dokazati $\neg B \to \neg A, A \vdash B$, tj. po jakom zakonu dvojne negacije, treba dokazati $\neg B \to \neg A, A \vdash \neg\neg B$. Po pravilu za dokazivanje negacije, iz pretpostavki $\neg B \to \neg A, A$ i $\neg B$, treba dokazati kontradikciju, a to su očigledno formule A i $\neg A$. $\lhd$

Zadatak 1. Ako se pretpostavi zakon dvojne negacije, može se dokazati zakon isključenja trećeg.

Zadatak 2. Na osnovu zakona isključenja trećeg i ostalih aksioma, može se dokazati druga aksioma negacije.

Zadatak 3. Koristeći zakon isključenja trećeg, dokazati

$$\vdash ((A \vee B) \to A) \vee ((A \vee B) \to B),$$

za proizvoljne formule A i B.

Sintaksna svojstva ekvivalencije

Formule A i B su *sintaksno ekvivalentne* ako $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$. Kao i ranije, navedenu formulu označavamo sa $A \leftrightarrow B$ i tako dobijamo novi iskazni veznik ekvivalenciju. On nije isto što i semantička ekvivalencija, osim ako imamo dokazanu teoremu potpunosti ili, kao aksiomu, zakon isključenja trećeg. U sledećim zadacima navedene su neke njegove osobine, formulisana je teorema o supstituciji ekvivalenata i jedno pravilo koje nam služi da, po potrebi, pretpostavke u dokazu zamenimo ekvivalentnim pretpostavkama.

Zadatak 1. Za sve formule A i B, $\vdash (A \leftrightarrow B) \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$, a uz pretpostavku zakona isključenja trećeg, važi i obratna implikacija.

Formula $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$, za proizvoljne formule A i B je teorema iskazne logike, ali se implikacija sa leva na desno ne može dokazati bez pozivanja na zakon isključenja trećeg.

Zadatak 2. Dokazati da za proizvoljne formule A, B i C,

$$\vdash (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow A(B/C)),$$

gde je $A(B/C)$ formula koja se iz A dobija zamenom nekog, moguće nijednog i ne obavezno svih, javljanja formule B sa formulom C.

Za zadate formule B i C, tvrđenje se dokazuje indukcijom po složenosti formule A i u tom dokazu ne koristimo zakon isključenja trećeg. Kada formula A ima oblik negacije, koristimo teoremu iz prethodnog zadatka.

Zadatak 3. Dokazati pravilo o supstituciji ekvivalentnih pretpostavki:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Sigma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma, \Sigma, B \vdash C}$$

De Morganovi zakoni

De Morganove zakoni sastoje se od dvije teoreme oblika ekvivalencije, tj. od četiri teoreme oblika implikacije. Jedino implikaciju

$$\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B),$$

nije moguće dokazati bez korišćenja zakona isključenja trećeg. Zapravo, u dokazu ove teoreme, treba koristiti jaki zakon dvojne negacije.

Zadatak 1. Ne koristeći zakon isključenja trećeg, dokazati *prvi De Morganov zakon:*

$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B),$$

za proizvoljne formule A i B.

Zadatak 2. Koristeći zakon isključenja trećeg, dokazati *drugi De Morganov zakon:*

$$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$

za proizvoljne formule A i B.

Primjer 1. Koristeći zakon dvojne negacije, dokazati *Persov zakon:*

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A,$$

za proizvoljne formule A i B.

Po teoremi dedukcije, iz pretpostavke $(A \to B) \to A$, treba dokazati A, tj. po zakonu dvojne negacije, treba dokazati $\neg\neg A$. Prema pravilu za dokazivanje negacije, iz $(A \to B) \to A$ i $\neg A$, treba dobiti kontradikciju. Zbog aksiome negacije $\neg A \to (A \to B)$, po modus ponensu, dobijamo $A \to B$, tj. dobijamo A, dok $\neg A$ već imamo. $\lhd$

Aksiome implikacije i Persov zakon od logičkih veznika sadrže samo implikaciju. Te formule aksiomatizuju implikativni fragment iskaznog računa, tj. sve teoreme koje u sebi sadrže samo implikaciju.

Zadatak 3. Bez pozivanja na zakon isključenja trećeg, dokazati negirani zakon isključenja trećeg: $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$, za svaku formulu A.

Zadatak 4. Za formulu A koja ima oblik negacije, ne koristeći zakon isključenja trećeg, dokazati jaki zakon dvojne negacije $\vdash \neg\neg A \to A$.

Svi logički zakoni koje smo dokazali pretpostavljajući zakon isključenja trećeg ne mogu se dokazati bez pozivanja na taj zakon. Ali dokaz da smo zakon isključenja trećeg koristili samo kada smo to zaista i morali uopšte nije jednostavan. O tome će biti reči u okviru rasprave o intuicionističkom iskaznoj logici.

Zadatak 5. Ako se pretpostavi zakon isključenja trećeg, implikacija postaje materijalna, tj. za proizvoljne formule A i B,

$$\models A \to B \leftrightarrow \neg A \vee B.$$

Zadatak pokazuje da se, uz zakon isključenja trećeg, neki logički veznici mogu definisati polazeći od drugih. Ali, to važi samo u klasičnoj semantici, kako smo je mi definisali, ali ne i kada se logički veznici shvate drugačije. Primjer takvog shvatanja je intuicionistička logika, o kojoj ćemo upravo otvoriti raspravu.

Zadatak 6. Neka je A iskazna formula. Postoji formula A' u konjunktivnoj normalnoj formi takva da je $\vdash A \leftrightarrow A'$ i postoji formula A'' u disjunktivnoj normalnoj formi takva da je $\vdash A \leftrightarrow A''$.

Uputstvo: Na osnovu prethodnog zadatka, možemo prvo pretpostaviti da se u formuli A ne javlja implikacija, a zatim, na osnovu De morganovih zakona i zakona dvojne negacije, da se u formuli A negacija javlja samo uz iskazna slova. Koristeći teoreme obostrane distributivnosti konjunkcije i disjunkcije dobijamo konjunktivnu (disjunktivnu) normalnu formu date formule.

Intuicionistička logika

Kada iz spiska aksioma eliminišemo zakon isključenja tećeg, preostale aksiome, sa modus ponensom kao pravilom izvođenja, čine *intuicionističku iskaznu logiku.* Da bi se istakla razlika ta dva logička sistema, prethodna logika naziva se *klasična iskazna logika.* Opštije, matematička rasuđivanja koja se pozivaju na zakon isključenja trećeg nazivaju se klasičnim, a ona koja opravdanost tog argumenta negiraju su intuicionistička.

Primjer 1. Dokazati da postoje iracionalni brojevi α i β takvi da je α^β racionalan broj.

Dokaz. Klasični matematičar bi mogao rasuđivati na sledeći način: broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ili jeste racionalan ili nije. Ako broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jeste racionalan, onda su traženi brojevi $\alpha = \sqrt{2}$ i $\beta = \sqrt{2}$, a ako taj broj nije racionalan, $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $\beta = \sqrt{2}$ su traženi brojevi. Dakle, postoje postoje iracionalni brojevi α i β takvi da je α^β racionalan broj. $\lhd$

Za intuicionistu, takvo rasuđivanje je potpuno neprihvatljivo, budući da uopše nismo odredili brojeve koji zadovoljavaju traženi uslov. Primijetimo da postoji dokaz da broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ zaista nije racionalan.

Ilustracije radi, dokazaćemo da se zakon isključenja trećeg ne može dobiti iz preostalih deset aksioma iskazne logike.

Teorema 1. Formula $p \vee \neg p$ nije dokaziva u intuicionističkoj logici.

Dokaz. Za dokaz ove teoreme neophodno je da bitno promijenimo našu semantiku. Dopustićemo da iskaz može biti istinit, lažan ili nešto treće. To treće dopuštamo upravo stoga što želimo da zaobiđemo zakon isključenja trećeg. Svakako, sa tom promjenom, nužna je i promjena definicije značenja logičkih veznika.

Skup vrijednosti istinitosti proširićemo još jednim elementom koji označavamo sa $1/2$. Dakle, taj skup je sada $\overline{3} = \{0, 1/2, 1\}$. Dokazaćemo da sve intuicionistički dokazive formule imaju vrijednost jedan, a da to nije slučaj i sa formulom $p \vee \neg p$. Da bi se definisalo značenje formule u trovrednosnoj logici, neophodno je zadati definicije istinitosti logičkih veznika:

$v(p)$	$v(q)$	$v(\neg p)$	$v(p \wedge q)$	$v(p \vee q)$	$v(p \rightarrow q)$
0	0	1	0	0	1
0	1/2	1	0	1/2	1
0	1	1	0	1	1
1/2	0	0	0	1/2	0
1/2	1/2	0	1/2	1/2	1
1/2	1	0	1/2	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1/2	0	1/2	1	1/2
1	1	0	1	1	1

za svaku 3-*valuaciju* $v : P \rightarrow \overline{3}$. Formula je 3-tautologija ako ima vrijednost jedan za svaku 3-valuaciju iskaznih promjenljivih. Tvrdimo da je svaka intuicionistički dokaziva formula 3-tautologija.

Naime, sve aksiome intuicionističkog iskaznog računa su 3-tautologije. To se provjerava konstrukcijom tablice svake od deset aksioma. Kako modus ponens čuva 3-tautologije, a to slijedi neposredno iz tablice za implikaciju, svaka dokaziva formula je 3-tautologija.

Ostaje još da naglasimo da formula $p \vee \neg p$ ima vrijednost $v(p \vee \neg p) = 1/2$, za svaku valuaciju v, za koju je $v(p) = 1/2$, što znači da nije 3-tautologija, tj. da nije dokaziva u intuicionističkoj iskaznoj logici. $\triangleleft$

Zadatak 1. Svaka 3-tautologija je klasična tautologija.

Važno je naglasiti da nije svaka 3-tautologija dokaziva u intuicionističkoj iskaznoj logici. Na primjer, formula $\neg p \vee \neg\neg p$ jeste 3-tautologija, ali nije intuicionistički dokaziva. Dakle, intuicionistička iskazna logika je korektna, ali nije i potpuna u odnosu na 3-tautologije. Semantika u odnosu na koju ona jeste potpuna prevazilazi okvire naših razmatranja.

Zadatak 2. Poznato je da sledeći klasični logički zakoni nisu dokazivi u intuicionističkoj logici: $\neg\neg p \to p$, $p \vee \neg p$, $\neg p \vee \neg\neg p$, $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$, $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$, za proizvoljne elementarne iskaze p i q.

Provjeriti koji od navedenih zakona jesu 3-tautologije. Naglašavamo da prethodne tautologije nismo dali u obliku shema formula. Na primjer, neke instance formule $\neg\neg A \to A$ mogu biti intuicionističke teoreme: ako je A oblika $\neg B$, dobija se intuicionistički dokaziva formula $\neg\neg\neg B \to \neg B$.

Teorema potpunosti iskazne logike

Dosadašnja izlaganja svojstava iskaznog računa dovoljna su nam da izložimo nekoliko dokaza teoreme potpunosti: *Svaka tautologija je teorema.*

Izložićemo tri dokaza teoreme potpunosti. Prvi je otkrio Emil Post, dvadesetih godina prošlog vijeka i suština tog dokaza sastoji se u formalizaciji tablice iskazne formule. Drugi počiva na ideji kompletiranja neprotivrečnog skupa formula i ta se ideja javlja se u dokazima teoreme potpunosti skoro svih formalnih sistema. Treći dokaz otkrio je Pol Bernajs, on je začuđujuće kratak i po duhu blizak prvom dokazu.

Pokazaćemo da svakom redu tablice formule $A(p_1, \ldots, p_n)$ odgovara jedan dokaz formule A, ako formula A ima vrijednost jedan, tj. formule $\neg A$, ako formula A ima vrijednost nula. Pretpostavke tog dokaza sastoje se od iskaznih slova $p_1, \ldots, p_n$ ili njihovih negacija: ako slovo p_i ima vrijednost jedan, onda je pretpostavka p_i, a ako slovo p_i ima vrijednost nula u tom redu tablice, pretpostavka je $\neg p_i$, za sve $1 \leq i \leq n$.

Da bi smo razradili i potvrdili ovu ideju, vratićemo se na tablice iskaznih veznika:

$v(A)$	$v(B)$	$(A \wedge B)$	$v(A \vee B)$	$v(A \to B)$	$v(\neg A)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

za svaku valuaciju $v \in 2^P$ i proizvoljne formule A i B.

Za zvaku valuaciju $v \in 2^P$, neka je A^v formula A ako je $v(A) = 1$, a ako je $v(A) = 0$, neka je A^v formula $\neg A$.

Teorema o tablici iskaznih veznika: Za proizvoljne formule A i B,

$$A^v, B^v \vdash (A \wedge B)^v,$$

$$A^v, B^v \vdash (A \vee B)^v,$$

$$A^v, B^v \vdash (A \rightarrow B)^v,$$

$$A^v \vdash (\neg A)^v,$$

za svaku valuaciju $v \in 2^P$.

Dokaz. Teorema tvrdi da svakom redu tablice iskaznog veznika odgovara jedno tvrđenje oblika $A^v, B^v \vdash C$. Takvih tvrđenja ima četrnaest – po četiri za konjunkciju, disjunkciju i implikaciju, kao i dva za negaciju.

Na primjer, kada čitamo treći red tablice konjunkcije, dobijamo tvrđenje

$$A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B).$$

Po pravilu za dokazivanje negacije, iz pretpostavki $A, \neg B$ i $A \wedge B$, treba dokazati kontradikciju. Zbog $A \wedge B$ i aksiome $(A \wedge B) \rightarrow B$, po modus ponensu, imamo B, dok $\neg B$ već imamo kao pretpostavku. Na sličan način, dokazujemo i preostala tri tvrđenja koja se odnose na konjunkciju.

Kada čitamo prvi red tablice disjunkcije, dobijamo tvrđenje

$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B).$$

Po pravilu za dokazivanje negacije, iz pretpostavki $\neg A, \neg B$ i $A \vee B$, treba dokazati kontradikciju. Po pravilu disjunkcije, kontradikciju treba dokazati iz pretpostavki $\neg A, \neg B$ i A, kao i iz pretpostavki $\neg A, \neg B$ i B, a to je u oba slučaja već imamo. Slično dokazujemo i preostala tri tvrđenja koja se odnose na disjunkciju.

Kada čitamo treći red tablice implikacije, dobijamo tvrđenje

$$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B).$$

Po pravilu za dokazivanje negacije, iz pretpostavki $A, \neg B$ i $A \rightarrow B$, treba dokazati kontradikciju, a to je očigledno. Slično se dokazuju i preostala tri tvrđenja koja se odnose na implikaciju.

Konačno, kada čitamo tablicu negacije, iz prvog reda dobijamo tvrđenje $\neg A \vdash \neg A$, a iz trećeg reda, tvrđenje $A \vdash \neg\neg A$. Oba su očigledna. $\lhd$

Sada možemo formulisati teoremu o dokazivosti tablice formule iskaznog računa. Prije nego što pređemo na izlaganje ove teoreme, podsjećamo da oznaka $A(p_1, \ldots, p_n)$ podrazumijeva da su sva slova formule A, neka od iskaznih slova $p_1, \ldots, p_n \in P$.

Teorema o tablici: Ako je $A(p_1,\dots,p_n)$ formula iskazne logike,

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash A^v,$$

za proizvoljnu iskaznu formulu $A(p_1,\dots,p_n)$ i svaku valuaciju $v \in 2^P$.

Dokaz. Neka je $v \in 2^P$ proizvoljna valuacija iskaznih slova. Teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Ako je A iskazno slovo p_i, onda $p_i^v \vdash p_i^v$, za svako $1 \le i \le n$.

Ako je A formula oblika $B \wedge C$, po induktivnoj pretpostavci i teoremi o tablicama iskaznih veznika

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash B^v, \quad p_1^v,\dots,p_n^v \vdash C^v, \quad B^v, C^v \vdash A^v,$$

pa dvostrukom primjenom pravila sječenja dobijamo

$$\dfrac{\dfrac{p_1^v,\dots,p_n^v \vdash B^v \qquad B^v, C^v \vdash A^v}{p_1^v,\dots,p_n^v, C^v \vdash A} \qquad p_1^v,\dots,p_n^v \vdash C^v}{p_1^v,\dots,p_n^v \vdash A^v}$$

Na isti način postupamo kada formula ima oblik disjunkcije ili implikacije, pa preostaje još slučaj kada formula A ima oblik $\neg B$. Po induktivnoj pretpostavci, $p_1^v,\dots,p_n^v \vdash B^v$.

Ako $v(A) = 0$, onda $v(B) = 1$, pa

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash B,$$

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash \neg\neg B,$$
$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash \neg A.$$

Ako $v(A) = 1$, onda $v(B) = 0$, pa

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash \neg B,$$

$$p_1^v,\dots,p_n^v \vdash A.$$

To znači da važi $p_1^v,\dots,p_n^v \vdash A^v$, što je i trebalo dokazati. $\triangleleft$

Umesto teorema o tablici, u literaturi se ova teorema naziva i Kalmarovom lemom. To bi značilo da dokaz teoreme potpunosti iskazne logike, o kome ovde govorimo, nije bilo opravdano pripisati Emilu Postu, koji se u svom dokazu oslanjao na konjunktivnu normalnu formu iskazne formule. Kako su pojmovi tablice i konjunktivne normalne forme bliski, a Postov dokaz znatno stariji, dokaz smo po njemu nazvali.

Dokaz teoreme potpunosti: Konačno, iz teoreme o dokazivosti tablice slijedi teorema potpunosti iskaznog računa. Naime, ako je A tautologija čije su sve iskazne promjenljive $p_1, \ldots, p_n$, $n \geq 1$, prema teoremi o dokazivosti tablice, formula A ima 2^n dokaza u kojima su pretpostavke samo iskazne promjenljive ili njihove negacije. Te dokaze razvrstavamo po parovima tako da se svaki par razlikuje samo kod promjenljive p_1: u jednom dokazu javlja se p_1, a u drugom $\neg p_1$. U svakom od tih 2^{n-1} parova dokaza primenimo pravilo za uvođenje disjunkcije i dobijamo novi dokaz u kome se kao pretpostavka javlja $p_1 \vee \neg p_1$, a nju možemo izbrisati, budući da se radi o aksiomi iskaznog računa. Tako se dobija 2^{n-1} dokaza formule A u kojima se kao pretpostavka više ne javlja ni promjenljiva p_1, a ni njena negacija. Jasno, ponavljanjem ovog postupka mogu se ukloniti sve pretpostavke, pa se tako dobija dokaz tautologije A bez ikakvih pretpostavki. To znači da tautologija A jeste teorema iskaznog računa. $\triangleleft$

Naglašavamo da je navedeni dokaz teoreme potpunosti neposredan utoliko što za datu tautologiju konstuišemo njen formalni dokaz. U narednim razmatranjima izložićemo i jedan posredan dokaz teoreme potpunosti tako što ćemo povezati pojmove potpunosti i korektnosti iskazne logike, sa pojmovima konzistentnog i zadovoljivog skupa formula. Ta veza je posebno značajna zato što neposredan dokaz teoreme potpunosti predikatske logike, poput prethodnog dokaza, uopšte ne postoji.

Opšta teorema potpunosti iskazne logike

Iz teoreme korektnosti i teoreme potpunosti slijedi da su pojmovi teoreme i tautologije ekvivalentni, tj. da važi ekvivalencija

$$\vdash A \;\Leftrightarrow\; \models A,$$

za svaku iskaznu formulu A.

Kako smo nagovijestili, izložićemo još jedan oblik teoreme potpunosti, čiji dokaz ima uopštenje u predikatskoj logici. Da bi istakli njegov značaj, taj oblik teoreme nazivamo opštom teoremom potpunosti.

Izlaganje počinjemo podsjećanjem na definicije pojmova konzistentnog zadovoljivog i skupa formula. Treba primetiti da smo pojam konzistentnog skupa formula ranije definisali pozivajući se na semantiku, dok ovde govorimo o njegovoj sintaksnoj definiciji. (U odeljku o logičkim posljedicama vidjeti Zadatak 1.)

– Skup formula Γ je *konzistentan* ako ne postoji iskazna formula A, za koju istovremeno važi $\Gamma \vdash A$ i $\Gamma \vdash \neg A$.

– Skup formula Γ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija iskaznih promjenljivih za koju su sve formule iz Γ istinite.

Formula A je tautologija ako i samo ako skup $\{\neg A\}$ nije zadovoljiv.

Zadatak 1. *Opšta teorema korektnosti:* Ako $\Gamma \vdash A$, onda $\Gamma \models A$, za svaku formulu A i svaki skup formula Γ.

Kao i teorema korektnosti, opšta teorema korektnosti dokazuje se indukcijom po složenosti dokaza formule A iz hipoteza Γ. Sada bazu indukcije čine aksiome iskazne logike i formule skupa Γ, a induktivni korak je modus ponens.

Opšta teorema potpunosti: Skup iskaznih formula je zadovoljiv ako i samo ako je konzistentan.

Dokaz. Dokažimo da je svaki zadovoljiv skup formula konzistentan. Pretpostavimo suprotno, tj. da Γ nije konzistentan skup formula i neka je $v \in 2^P$ valuacija za koju su sve formule iz Γ istinite. Zbog nekonzistentnosti skupa Γ, postoji formula A takva da $\Gamma \vdash A$ i $\Gamma \vdash \neg A$, pa opštoj teoremi korektnosti, imamo $v(A) = 1$ i $v(\neg A) = 1$, a to nije moguće.

Ovdje ćemo prekinuti dokaz stava potpunosti da bi smo prvo izložili njegovu ideju, zatim dokazali njegove neophodne pretpostavke i na kraju izložili sam dokaz.

Ideja dokaza: Pretpostavimo da je Γ konzistentan skup. Treba odrediti valuaciju $v \in 2^P$, za koju su sve formule iz Γ istinite. Budući da svaka valuacija koja zadovoljava skup Γ, zadovoljava i svaku njegovu posljedicu, ako $\Gamma \vdash p$ treba staviti $v(p) = 1$, tj. ako $\Gamma \vdash \neg p$, treba staviti $v(p) = 0$, za svako $p \in P$. Ali, ako nije ni $\Gamma \vdash p$, a ni $\Gamma \vdash \neg p$, za neko $p \in P$, onda skup Γ treba proširiti tako da se u tom smislu izjasni.

Teorema 1. Bar jedan od skupova Γ, A ili $\Gamma, \neg A$ je konzistentan, za svaku formulu A i svaki konzistentan skup formula Γ.

Dokaz. U suprotnom, po pravilu za dokazivanje negacije, imali bi smo $\Gamma \vdash \neg A$ i $\Gamma \vdash \neg\neg A$, a to nije moguće, budući da je Γ konzistentan skup formula. $\triangleleft$

Kompletni skupovi formula

Konzistentan skup formula Σ je *kompletan*, ako $\Sigma \vdash A$ ili $\Sigma \vdash \neg A$, za svaku iskaznu formulu A.

Teorema 1. Svaki konzistentan skup formula ima kompletno proširenje.

Dokaz. Neka je Γ konzistennntan skup. Skup F svih iskaznih formula je prebrojiv i neka je $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ jedno prebrojavanje skupa F. Polazeći od skupa Γ, konstruišemo niz konzistentnih skupova

$$(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots),$$

takav da $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$, za svako $n \geq 0$.

Neka je $\Gamma_0 = \Gamma$, i neka je konzistentan skup Γ_{n-1}, $n > 0$, konstruisan. Prema prethodnoj teoremi, bar jedan od skupova Γ_{n-1}, A_n ili $\Gamma_{n-1}, \neg A_n$ je konzistentan, pa neka je konzistentan skup Γ_n jedan od tih skupova. Po konstrukciji, $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$, za svako $n \geq 0$.

Neka je $\overline{\Gamma} = \bigcup_{n>0} \Gamma_n$. Jasno, $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$. Kako niz $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ sadrži sve formule, $A \in \overline{\Gamma}$ ili $\neg A \in \overline{\Gamma}$, za svaku formulu A, pa ako jeste konzistentan, skup $\overline{\Gamma}$ je kompletan i sadrži dati konzistentan skup Γ.

Manje očigledno je da skup $\overline{\Gamma}$ jeste konzistentan, budući da je napravljen kao beskonačna unija konzistentnih skupova. Pretpostavimo suprotno, da postoji formula A, takva $\overline{\Gamma} \vdash A$ i $\overline{\Gamma} \vdash \neg A$.

Niz $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ sadrži sve iskazne formule, pa dakle i sve formule dokaza A i dokaza $\neg A$ iz pretpostavki $\overline{\Gamma}$. Dokazi su konačni nizovi, pa postoji prirodan broj $m > 0$, koji je veći od indeksa svake od formula, koje se javljaju u dokazima za A i $\neg A$ iz pretpostavki $\overline{\Gamma}$. Niz $\Gamma_n, n \geq 0$, je rastući, pa $\Gamma_m \vdash A$ i $\Gamma_m \vdash \neg A$, a to nije moguće. $\lhd$

Dokaz opšte teoreme potpunosti

Kako se svaki konzistentan skup formula može kompletirati, za dokaz stava potpunosti, preostaje nam da dokažemo da je svaki kompletan skup zadovoljiv.

Teorema 1. Ako je Γ kompletan skup formula, postoji valuacija, za koju su sve formule skupa Γ istinite.

Dokaz. Ako je Γ kompletan skup formula, za svako iskazno slovo $p \in P$, $\Gamma \vdash p$ ili $\Gamma \vdash \neg p$, pa neka je $v(p) = 1$ ako i samo ako $\Gamma \vdash p$. Tvrdimo da

$$v(A) = 1 \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash A,$$

za svaku iskaznu formulu A.

Zbog kompletnosti skupa formula Γ, dovoljno je dokazati da, za svaku formulu A,

$$v(A) = 1 \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A,$$

$$v(A) = 0 \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \neg A.$$

Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Ako je A iskazno slovi, tvrđenje važi po definiciji valuacije v.

Neka formula A ima oblik $B \wedge C$. Ako $v(A) = 1$, onda $v(B) = v(C) = 1$, pa po induktivnoj hipotezi $\Gamma \vdash B$ i $\Gamma \vdash C$, odnosno $\Gamma \vdash B \wedge C$, tj. $\Gamma \vdash A$. Ako je $v(A) = 0$, bar jedna od formula B ili C nije istinita, pa neka je to formula B. Po induktivnoj pretpostavci $\Gamma \vdash \neg B$, pa kako $\vdash \neg B \to \neg(B \wedge C)$, imamo $\Gamma \vdash \neg A$.

Neka formula A ima oblik $B \vee C$. Ako $v(A) = 1$, onda je bar jedna od formula B ili C istinita. Neka je to formula B. Po induktivnoj pretpostavci, $\Gamma \vdash B$, tj. $\Gamma \vdash A$. Ako $v(A) = 0$, onda $v(B) = 0$ i $v(C) = 0$, pa po induktivnoj pretpostavci $\Gamma \vdash \neg B$ i $\Gamma \vdash \neg C$. Koristeći De Morganove zakone, dobijamo $\Gamma \vdash \neg A$.

Neka formula A ima oblik $B \to C$. Ako $v(A) = 1$, onda $v(B) = 0$ ili $v(C) = 1$. Po induktivnoj pretpostavci, $\Gamma \vdash \neg B$ ili $\Gamma \vdash C$. Ako $\Gamma \vdash \neg B$, zbog aksiome negacije $\neg B \to (B \to C)$, dobijamo $\Gamma \vdash A$. Ako $\Gamma \vdash C$, zbog $\vdash C \to (B \to C)$, dobijamo $\Gamma \vdash A$.

Preostao je slučaj kada formula A ima oblik $\neg B$. Ako $v(A) = 1$, onda $v(B) = 0$, pa, po induktivnoj pretpostavci, $\Gamma \vdash \neg B$, tj. $\Gamma \vdash A$. Ako $v(A) = 0$, onda $v(B) = 1$, pa, po induktivnoj pretpostavci, $\Gamma \vdash B$. Otuda, zbog zakona dvojne negacije $\vdash B \to \neg\neg B$, dobijamo $\Gamma \vdash \neg\neg B$, pa konačno $\Gamma \vdash \neg A$. $\lhd$

Dokaz opšte teoreme potpunosti. Preostaje da zaključimo da je svaki konzistentan skup zadovoljiv.

Neka je Γ konzistentan skup i $\overline{\Gamma}$ njegovo kompletno proširenje. Definišimo valuaciju $v \in 2^P$ tako da $v(p) = 1$ ako i samo ako $\overline{\Gamma} \vdash p$. Prema prethodnoj teoremi valuacija v zadovoljava Γ. $\lhd$

Posljedice opšte teoreme potpunosti

Kao njegove prve posljedice, dokazaćemo da iz opšte teoreme korektnosti slijedi teorema korektnosti i da iz opšte teoreme potpunosti sledi teorema potpunostiskazne logike.

Lema 1. Iz pretpostavke da je svaki zadovoljiv skup konzistentan, slijedi teorema korektnosti.

Dokaz. Ako je formula A teorema, $\{\neg A\}$ je protivrečan skup (iz njega su dokazive formule A i $\neg A$). Po pretpostavci, skup $\{\neg A\}$ nije zadovoljiv, pa $v(A) = 1$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$, tj. formula A je tautologija. $\lhd$

Lema 2. Iz činjenice da je svaki neprotivrečan skup formula zadovoljiv, slijedi teorema potpunosti.

Dokaz. Naime, ako je formula A tautologija, onda skup $\{\neg A\}$ nije zadovoljiv, pa iz $\neg A$ slijedi protivrečnost. Otuda, po pravilu za dokazivanje negacije, imamo $\vdash \neg\neg A$, pa zbog teoreme o dvojnoj negaciji, imamo $\vdash A$. $\lhd$

Teorema kompaktnosti: Ako je svaki konačan podskup skupa formula Γ zadovoljiv, Γ je zadovoljiv skup formula.

Dokaz. Ako skup Γ nije zadovoljiv, prema opťoj teoremi potpunosti, on je protivrečan. Kako je dokaz protivrečnosti konačan, postoji konačan protivrečan podskup od Γ. $\lhd$

Zadatak 1. Dokazati da za svaki skup formula Γ i svaku formulu A,

$$\Gamma \vdash A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models A.$$

Zadatak 2. Neka je *riječ* je konačan niz nula i jedinica, a kao i ranije, riječ v je početna podriječ riječi u ako postoji riječ w takva da je $u = vw$. *Drvo* je skup riječi koji sa svakom riječi sadrži i svaku njenu početnu podriječ. *Beskonačna grana* drveta T je beskonačan niz nula i jedinica čiji svaki konačan početni podniz pripada T. Koristeći stav kompaktnosti, dokazati *Kenihovu lemu:* svako beskonačno drvo ima beskonačnu granu.

Podsjećamo da smo u ranijim razmatranjima sa $\mathrm{Con}(\Gamma)$ označavali sve posljedice skupa formula Γ.

Zadatak 3. Dokazati da operator Con ima sledeća svojstva:

$$\begin{aligned}
&\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma),\\
&\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma),\\
&\Gamma \subseteq \Sigma \;\Rightarrow\; \mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Sigma),\\
&\mathrm{Con}(\Sigma) \subseteq \textstyle\bigcup_{\Gamma \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} \mathrm{Con}(\Gamma),
\end{aligned}$$

gdje je Σ_{fin}, skup svih konačnih podskupova skupa Σ.

Skup formula Σ je *zatvorena teorija u iskaznoj logici* ako $\mathrm{Con}(\Sigma) = \Sigma$.

Skup formula Γ je skup *aksioma teorije* Σ ako $\mathrm{Con}(\Gamma) = \mathrm{Con}(\Sigma)$.

Teorija je *konačno aksiomatska* ako ima konačan skup aksioma.

Skup formula Γ je *nezavisan* ako za svaku formulu $A \in \Gamma$, formula A nije posljedica skupa formula $\Gamma - \{A\}$.

Relacija $v \models \Sigma$, označava da valuacija $v \in 2^P$ zadovoljava skup Σ.

Zadatak 4. Ako je Γ je skup aksioma teorije Σ, onda $v \models \Gamma \Leftrightarrow v \models \Sigma$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Važi i obratno, tj. ako $v \models \Gamma \Leftrightarrow v \models \Sigma$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$, onda je Γ skup aksioma teorije Σ

Zadatak 5. Neka su Σ_1 i Σ_2 teorije takve da $v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_2$, za svaku valuaciju $v \in 2^P$. Dokazati da su Σ_1 i Σ_2 konačno aksiomatske teorije.

Zadatak 6. Svaka teorija ima nezavisan skup aksioma.

Bernajsov dokaz teoreme potpunosti

Izložićemo još jedan dokaz teoreme potpunosti koji ima sličnu inspiraciju kao i Postov dokaz. On se ne oslanja na tablicu iskazne formule, već na njenu konjunktivnu normalnu formu. Kako normalnu formu neposredno čitamo iz tablice i obratno, ti dokazi su vrlo bliski. Dokaz potiče iz 1914. godine i pronađen je u zaostavštini logičara Pola Bernajsa. Moguće da je to prvi dokaz teoreme potpunosti uopšte.

Bernajsov dokaz teoreme potpunosti: Neka je A formula koja nije teorema iskazne logike. Uočimo teoriju Σ čije su sve formule supsitucione instance formule A. Tvrdimo da je teorija Σ protivrečna. Ako to dokažemo, formula A nije tautologija, jer bi u suprotnom sve formule iskaznog računa bile tautologije. Dakle, ako formula A nije teorema, onda A nije tautologija, pa $\models A$ implicira $\vdash A$, za svaku formulu A.

Neka je A' konjunktivna normalna forma formule A. Kako $\vdash A \leftrightarrow A'$, mora biti $\Sigma \vdash A'$. Kako A' nije teorema iskazne logike, bar jedan njen konjunkt B nije teorema iskazne logike. Po aksiomi konjunkcije $\vdash A' \to B$, pa $\Sigma \vdash B$. Formula B je elementarna disjunkcija, tj. konačna disjunkcija u kojoj se javljaju samo iskazna slova ili njihove negacije. Ako je p iskazno slovo i ako u formuli B sva iskazna slova koja nisu negirana zamenimo sa p, a sva negirana iskazna slova sa $\neg p$, dobijamo formulu $p \vee \neg\neg p$, tj. p, pa dakle $\Sigma \vdash p$. Dakle, Σ je protivrečna teorija. $\triangleleft$

Predikatska logika

Centralna ideja matematičke logike sastoji u tome da se matematička tvrđenja zapišu u obliku konačnih nizova simbola sa kojima se može operisati po formalnim pravilima tako da se korektnost takvog rasuđivanja može provjeriti mehanički, nezavisno od smisla koji matematički simboli mogu imati.

Sa stanovišta tog programa, izražajne mogućnosti iskaznog računa su veoma ograničene. One se uglavnom iscrpljuju na svojstvima logičkih veznika tako da jezik u kojem bi se sistematski mogla izražavati svojstva matematičkih struktura mora biti mnogo bogatiji. Prije nego što izložimo jedan takav jezik, preciziraćemo kontekst u kojem će on biti interpretiran - definisaćemo pojam *matematičke strukture*.

Matematičke strukture

Kada u matematici govorimo o grupi, prstenu, polju, uređenju, uređenom polju, vektorskom prostoru, prirodnim brojevima itd, uvijek govorimo o nepraznom skupu na kojem je definisan određen broj relacija, operacija i istaknutih elemenata, tj. govorimo o strukturi. Prije definicije, navodimo nekoliko važnih primjera matematičkih struktura.

Primjer 1. *Grupa* je struktura $\mathbb{G} = (G, +, 0)$ definisana na nepraznom skupu G, sa binarnom operacijom $+$ skupa G i istaknutim elementom 0, koji pripada skupu G. Operacija $+$ je asocijativna, istaknuti element 0 je neutralni element grupe i svaki element grupe u odnosu na operaciju $+$ ima inverzni.

Primjer 2. *Polje* je struktura $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ definisana na nepraznom skupu F, sa dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ skupa F i dva istakuta elementa 0 i 1. Skup F, u odnosu na operaciju $+$, ima svojstva komutativne grupe sa neutralnim elementom 0. Skup $F - \{0\}$, u odnosu na operaciju $\cdot$, ima svojstva komutativne grupe, sa neutralnim elementom 1. Operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na operaciju $+$, a istaknuti elemeti 0 i 1 su različiti, tj. skup F ima bar dva elementa.

Primjer 3. *Linearno uređenje* je struktura $\mathbb{P} = (P, <)$ sa nerefleksivnom, tranzitivnom i linearnom relacijom $<$ nepraznog skupa P.

Primjer 4. *Uređeno polje* je struktura $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, <, 0, 1)$ definisana na skupu F, sa dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ skupa F, jednom binarnom relacijiom $<$ skupa F i dva istaknuta elementa 0 i 1. Skup F sa operacijama $+$ i $\cdot$ i istaknutim elementima 0 i 1 ima svojstva polja, a relacija $<$ je linearno striktno uređenje bez krajeva (skup M je beskonačan), koje je saglasno sa obje operacije.

Primjer 5. *Prirodni brojevi* $\mathbb{N} = (N, +, \cdot, s, 0)$ se u matematici uobičajeno shvataju kao struktura koja zadovoljava Peanove aksiome. Od tih aksioma, sedam izražava svojstva sabiranja $+$, množenja $\cdot$ i operacije sledbenika s, dok preostale aksiome izražavaju princip matematičke indukcije.

Sa ovim primjerima matematičkih struktura željeli smo da ukažemo čitaocu da u svim daljim izlaganjima mora imati pred očima neku matematičku strukturu, koja se izučava u algebri, poput grupe i polja, u analizi, poput uređenog polja, aritmetici ili geometriji. Bez toga, smisao pojmova o kojima budemo govorili ostaće nejasan, a njihov sadržaj prazan.

Predikatska logika ima dovoljno veliku ekspresivnu moć da formalno definiše sva svojstva koja smo naveli u prethodnim primjerima, kao i mnoga druga znatno složenija i dublja svojstva navedenih i mnogih drugih struktura. Neka ipak ne može, tj. njegova ekspresivna moć je ograničena.

Relacije, operacije i istaknuti elementi

Ako je M neprazan skup, $M^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in M\}$ je Dekartov n-ti stepen skupa M, za svako $n \geq 0$. Dakle, skup M^n sastoji se od nizova dužine n, tj. od uređenih n-torki skupa M.

Ako je $n = 1$, nizove dužine jedan skupa M identifikujemo sa njegovim elementima, pa je $M^1 = M$. Ako $n = 0$, jedini niz dužine nula je prazan niz, koji označavamo sa $\varnothing$, pa je $M^0 = \{\varnothing\}$, jednočlan skup, za svako M.

Skup $r \subseteq M^n$ je *relacija dužine* $n \geq 0$ *skupa* M. Ako $(x_1, \dots, x_n) \in r$, kažemo da su elementi $x_1, \dots, x_n$ skupa M, tim redom, u relaciji r. Umjesto $(x_1, \dots, x_n) \in r$, često koristimo i oznaku $r(x_1, \dots, x_n)$.

Napomenimo da se svaka relacija $r \subseteq M^n$ može shvatiti i kao preslikavanje $\overline{r} : M^n \to \{0, 1\}$ takvo da za sve $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$\overline{r}(x_1, \dots, x_n) = 1 \;\Leftrightarrow\; (x_1, \dots, x_n) \in r.$$

Specijalno, kada je $n = 0$, Dekartov stepen $M^0 = \{\varnothing\}$ je jednočlan skup, pa postoje dvije relacije dužine nula:

$$\begin{gathered}\overline{0} : M^0 \to \{0, 1\}, \text{ za koju je } \overline{0}(\varnothing) = 0,\\ \overline{1} : M^0 \to \{0, 1\}, \text{ za koju je } \overline{1}(\varnothing) = 1.\end{gathered}$$

Ako relaciju $\overline{0}$ identifikujemo sa nulom, a relaciju $\overline{1}$ sa jedinicom, onda su neistina i istina, relacije dužine nula.

Kada je $n = 1$, unarne relacije skupa M su njegovi podskupovi, pa ako $r \subseteq M$, onda $r(x)$ znači $x \in r$.

Kada se radi o binarnoj relaciji $r \subseteq M^2$, umjesto $(x, y) \in r$ ili $r(x, y)$, često koristimo infiksnu notaciju $x\, r\, y$.

Preslikavanje oblika $f : M^k \to M$ je *operacija dužine* $k \geq 0$ skupa M.

Ako je $k = 0$, operacija dužine nula $\overline{c} : M^0 \to M$ preslikava jedočlan skup M^0 u neprazan skup M, tj. određuje jedan *istaknuti element* $\overline{c}(\varnothing) = c$ skupa M. Ako identifikujemo $\overline{c}$ i c, istaknuti element je operacija dužine nula skupa M.

Kada se radi o binarnoj operaciji, izraz $f(x, y)$ često zapisujemo u infiksnoj notaciji $x\, f\, y$.

Svaka operacija $f : M^n \to M$, $n \geq 0$ određuje relaciju r_f dužine $(n+1)$ takvu da za sve $x_1, \ldots, x_n, y \in A$,

$$r_f(x_1, \ldots, x_n, y) \;\Leftrightarrow\; f(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

To znači da svaku operaciju f dužine n, možemo shvatiti kao relaciju r_f dužine $(n+1)$, koja zadovoljava funkcijske uslove

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \exists y\;\; r_f(x_1, \ldots, x_n, y),$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \forall y\, \forall z\;\; (r_f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge r_f(x_1, \ldots, x_n, z) \to y = z).$$

Važi i obratno: svaka relacija dužine $n+1$ sa navedenim *funkcijskim svojstvima*, određuje operaciju dužine n.

U opštem slučaju, *struktura* $\mathbb{M}$ je matematički objekt koji sadrži sljedeće komponente:

(1) Neprazan skup M, ili *domen strukture* $\mathbb{M}$,
(2) Skupove relacija, operacija i istaknutih elemenata skupa M.

Opskurnim matematičkim jezikom rečeno, struktura $\mathbb{M}$ je niz skupova

$$\mathbb{M} = (M, \mathcal{R}, F, C)$$

u kojem je M neprazan skup, $\mathcal{R}$ skup relacija, $\mathcal{F}$ skup operacija i $\mathcal{C}$ skup istaknutih elemenata skupa M. Pritom, svaki od skupova $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{C}$ (i svi zajedno) može biti prazan.

Kako se istaknuti elementi mogu shvatiti kao operacije dužine nula, tj. kao relacije dužine jedan, a operacije dužine $n \geq 1$ kao relacije dužine $n+1$, sve strukture su zapravo relacijske strukture. Iako smo ih mogli tretirati kao posebne slučajeve relacija i time možda pojednostavili izlaganje, kako su pojmovi istaknutog elementa i operacije važni u matematici ipak ih tretiramo zasebno.

Matematičke formule

Važna prednost matematike u odnosu na sve druge nauke jeste u tome što ona svoje zakone može da izrazi sasvim precizno i nedvosmisleno - matematičkom formulom. U logici treba precizno i nedvosmisleno da definišemo samu matematičku formulu. Prije takve definicije, navodimo primjere matematičkih formula.

Primjer 1. U grupi $\mathbb{G} = (G, +, 0)$, asocijativnost operacije $+$ izražava se matematičkom formulom

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z)).$$

Primjer 2. Aksiomu, po kojoj svaki element polja različit od nule ima inverzni u odnosu na operaciju $\cdot$, izražavamo formulom

$$\forall x\, (\neg(x = 0) \to \exists y\, (x \cdot y = 1)).$$

Primjer 3. Svojstva nerefleksivnosti, tranzitivnosti, linearnosti i neograničenosti relacije $<$ uređenog polja mogu se izraziti formulama

$$\begin{aligned}
&\forall x\, \neg(x < x),\\
&\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((x < y\ \wedge\ y < z) \to x < z),\\
&\forall x\, \forall y\ (x < y\ \vee x = y \vee\ y < x),\\
&\forall x\, \exists y\ (x < y)\ \wedge\ \forall x\, \exists y\ (y < x).
\end{aligned}$$

Primjer 4. Prve tri Peanove aksiome govore o svojstvima unarne operacije sljedbenika. Jedna tvrdi da nula nije sljedbenik prirodnog broja, druga da je preslikavanje s injektivno, a treća da je svaki prirodan broj različit od nule sljedbenik. One se mogu izraziti formulama

$$\begin{aligned}
&\forall x\, (\neg(0 = s(x))),\\
&\forall x\, \forall y\, (s(x) = s(y) \to x = y).\\
&\forall x\, (\neg(x = 0) \to \exists y\, (x = s(y))).
\end{aligned}$$

U izražavanju svojstava relacija, operacija i istaknutih elemenata koristili smo: promjenljive x, y i z, iskazne veznike $\wedge, \vee, \to$ i $\neg$, kvantifikatore $\forall x, \forall y$ i $\forall z$, znak jednakosti $=$, lijevu i desnu zagradu, oznake relacije $<$, operacija $+\,, \cdot$ i s, kao i oznake istaknutih elemenata 0 i 1.

Da se u prethodnim primjerima pojavila i relacija r dužine tri, njen matematički zapis bio bi $r(x, y, z)$, u kome koristimo i simbol zapete. Iz tog razloga jezik sadrži i jednu zapetu, kao interpunkcijski simbol.

Kako smo ranije napomenuli, interpunkcijsji simboli osiguravaju jednoznačno čitanje formula formalnog sistema. Treba ipak istaći ta se takva jednoznačnost može postići i bez interpunkcije. Ako bi smo formulu $(A \wedge B)$ zapisali sa $\wedge AB$, tj. ako bi smo formule zapisivali u *poljskoj notaciji*, imali bi smo njihov jednoznačan zapis bez upotrebe zagrada. Takodje, ako u zapisivanju simbola relacija ne koristimo infiksnu notaciju, oslobodili bi smo se upotrebe zagrada i zapete. Ipak, zbog stečenih navika u matematici, u formalizacijama često koristimo interpunkciju.

Jezik pradikatske logike

Zapisivanje svojstava relacija, operacija i istaknutih elemenata sugeriše da jezik predikatske logike treba da sadrži sljedeće skupove simbola:

(1) Simbole individualnih promjenljivih $V = \{v_n : n \in N\}$,

(2) Simbole iskaznih logičkih veznika $\wedge, \vee, \rightarrow$ i $\neg$,

(3) Simbole kvantifikatora $\exists x$ i $\forall x$, za svako $x \in V$,

(4) Simbol jednakosti $=$, kao binarni relacijski simbol,

(5) Interpunkcijske simbole: zapetu i male zagrade,

(5) Simbole relacija, operacija i istaknutih elemenata.

Neka je $\overline{I}$ skup interpunkcijskih simbola, tj. tročlani skup koji sadrži zapetu i obje male zagrade. Kada izražavamo svojstva bilo koje matematičke strukture koristimo simbole

$$V \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\} \cup \{\forall x : x \in V\} \cup \{\exists x : x \in V\} \cup \{=\} \cup \overline{I},$$

pa ove simbole nazivamo *logičkim simbolima.*

Simbole relacija, operacija i istaknutih elemenata biramo u zavisnosti od matematičkog konteksta koji formalizujemo, pa takve simbole nazivamo *nelogičkim simbolima.* Pošto su logički simboli jezika matematičkih struktura stalni, taj jezik je potpuno određen njegovim nelogičkim simbolima. Stoga, kada zadajemo jezik konkretne matematičke strukture navodimo samo njegove nelogičke simbole, a logički simboli se podrazumevaju.

Primjer 1. Po njenoj definiciji, grupi $\mathbb{G} = (G, +_G, 0_G)$, odgovara jezik je $\mathcal{L}_G = \{+\,, 0\}$, koji sadrži jedan binarni opercijski simbol $+$ i jedan simbol istaknutog elementa 0. Formule jezika $\mathcal{L}_G$ mogu se interpretirati u bilo kojoj grupi, pa taj jezik nazivamo *jezikom teorije grupa.*

Naglašavamo da su simbol $+$ i simbol 0 elementi jezika $\mathcal{L}_G$, dakle to simboli, a da su $+_G$ i 0_G redom oznake za konkretnu binarnu operaciju, tj. konkretan element skupa G.

Primjer 2. Po njegovoj definiciji, polju $\mathbb{F} = (F, +_F, \cdot_F, 0_F, 1_F)$ odgovara jezik $\mathcal{L}_F = \{+\,, \cdot\,, 0, 1\}$, koji sadrži dva binarna operacijska simbola i dva simbola istaknutih elemenata. Jezik $\mathcal{L}_F$ je *jezik teorije polja.*

Primjer 3. Uređenom polju $\mathbb{F} = (F, +_F, \cdot_F, <_F, 0_F, 1_F)$ odgovara jezik $\mathcal{L}_{OF} = \{+\,, \cdot\,, <, 0, 1\}$, koji sadrži dva binarna operacijska simbola, jedan binarni relacijski simbol i dva simbola istaknutih elemenata. Jezik $\mathcal{L}_{OF}$ je *jezik teorije uređenih polja.*

Primjer 4. Strukturi $\mathbb{N} = (N, +_N, \cdot_N, s_N, 0_N)$ prirodnih brojeva odgovara jezik $\mathcal{L}_{PA} = \{+, \cdot, s, 0\}$, koji sadrži dva binarna operacijska simbola, jedan unarni operacijski simbol i jedan simbol istaknutog elementa. Jezik $\mathcal{L}_{PA}$ je *jezik aritmetike.*

Na osnovu prethodnih primjera možemo zaključiti da jezik koji odgovara strukturi $\mathbb{M} = (M, \mathcal{R}, F, C)$, koji označavamo sa $\mathcal{L}_M$, pored logičkog dijela, treba da sadži:

(1) Skup R relacijskih simbola ili *predikata*,

(2) Skup F operacijskih simbola,

(3) Skup C individualnih konstanti.

Pritom, svakoj relaciji $r_M \in \mathcal{R}$, dužine $n \geq 1$, odgovara predikat $r \in R$, dužine $n \geq 1$, svakoj operaciji $f_M \in \mathcal{F}$, dužine $k \geq 1$, odgovara operacijski simbol $f \in F$, dužine $k \geq 1$ i svakom istaknutom elementu $c_M \in \mathcal{C}$, odgovara simbol konstante $c \in C$. Prirodno, pretpostavljamo da su skupovi R, F i S disjunktni u parovima. U suprotnom, smisao jezika $\mathcal{L}$ ne bi bio jednoznačan.

Da zaključimo, ako sa $\mathcal{L}_\emptyset$ označimo logički dio jezika, jezik $\mathcal{L}_M$ strukture $\mathbb{M} = (M, \mathcal{R}, F, C)$ je skup simbola $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_\emptyset \cup R \cup F \cup C$ u kome je sakom relacijskom i svakom operacijskm simbolu zadata njegova *dužina*, tj. prirodan broj $n \geq 1$.

Napominjemo da, kako jezik sadrži konstante, nijesu nam potrebni funkcijski simboli dužine nula, a kako simboli istine i laži nijesu navedeni kao simboli jezika, nijesu nam potrebni ni predikati dužine nula.

Kako smo već napomenuli, pošto su logički simboli jezika stalni, jezik je određen nelogičkim simbolima, pa kada zadajemo jezik $\mathcal{L}_M$ strukture $\mathbb{M}$, navodimo samo njegove nelogičke simbole i naglašavamo njihovu dužinu. Iz tih razloga

$$\mathcal{L}_M = R \cup F \cup C,$$

gde je za relacijske i operacijske simbole data njihova dužina.

Svaki od skupova R, F i C može biti prazan, pa dakle i njihova unija može biti prazan skup. Ako $\mathcal{L}_M = \emptyset$, struktura $\mathbb{M}$ se svodi na njen domen, tj. na neprazan skup M, bez ikakvih relacija, operacija i istaknutih elemenata. Ali, iako je nelogički dio jezika prazan, u takvom jeziku mogu se formulisati logička svojstva jednakosti, budući da smo u definiciji jezika pretpostavili da on sadrži jednakost kao logički simbol. Svaki neprazan skup može se shvatiti kao struktura (sa jednakošću kao relacijom).

Napominjemo da ćemo simbol jednakosti $=$ uvijek interpreti kao *stvarnu jednakost*, tj. kao binarnu relaciju $i_M = \{(x,x) : x \in M\}$, na nepraznom skupu M. Takođe naglašavamo da osim kao simbol jezika $\mathcal{L}_\emptyset$, simbol jednakosti $=$ će se javljati i u neformalnim razmatranjima, ali će iz konteksta biti jasno u kom smislu taj simbol koristimo.

Interpretacija jezika predikatske logike

Kada za datu strukturu $\mathbb{M} = (M, r_M, f_M, c_M)$ definišemo odgovarajući jezik $\mathcal{L}_M = \{r, f, c\}$, taj jezik je sintaksni objekt i može se interpretirati u drugim strukturama. Formule jezika $\mathcal{L}_M$, možemo tumačiti u svakoj strukturi $\mathbb{H} = (H, r_H, f_H, c_H)$ u kojoj su dužine relacija r_M i r_H jednake dužini simbola r i dužine operacija f_M i f_H jednake dužini simbola f.

Neka je zadat jezik $\mathcal{L} = R \cup F \cup C$ i neprazan skup M. *Interpretacija* jezika $\mathcal{L}$ na skupu M je preslikavanje

$$I : R \cup F \cup C \to \mathrm{Rel}\,(M) \cup \mathrm{Fun}\,(M) \cup M,$$

takvo da: interpretacija simbola $r \in R$ dužine $n \geq 1$ je relacija $I(r)$ dužine n skupa M, interpretacija simbola $f \in F$ dužine $k \geq 1$ je operacija $I(f)$ dužine k skupa M, interpretacija simbola $c \in C$ je element $I(c)$ skupa M, za sve $r \in R$, $f \in F$ i $c \in C$. Pritom, sa $\mathrm{Rel}\,(M)$ i $\mathrm{Fun}\,(M)$ označili smo redom skup svih relacija i skup svih operacija skupa M.

Interpretacija I jezika $\mathcal{L}$ na skupu M određuje strukturu

$$\mathbb{M}_I = (M, I(R), I(F), I(C)),$$

koju nazivamo *model* jezika $\mathcal{L}$. Kako se jezik $\mathcal{L}$ može interpretirati na svakom nepraznom skupu i kako svi neprazni skupovi nisu skup, već *klasa*, jeziku $\mathcal{L}$ odgovara klasa $\mathrm{Mod}\,(\mathcal{L})$ njegovih modela.

Jezik $\mathcal{L}$ je skup simbola i po potrebi se može širiti ili redukovati. Ako je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, jezik $\mathcal{L}'$ je *proširenje jezika* $\mathcal{L}$, a jezik $\mathcal{L}$ je *redukcija jezika* $\mathcal{L}'$.

Neka je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Ako interpretaciju I jezika $\mathcal{L}$ u modelu $\mathbb{M}$ proširimo tako što svakom novom simbolu $s \in \mathcal{L}'$ pridružimo odgovarajuću relaciju, operaciju ili konstantu $I'(s)$ skupa M, dobijamo model M' jezika $\mathcal{L}'$. Model $\mathbb{M}'$ je *ekspanzija modela* $\mathbb{M}$ na jezik $\mathcal{L}'$, tj. model $\mathbb{M}$ je *redukcija modela* $\mathbb{M}'$ na jezik $\mathcal{L}$. Naglašavamo da modeli $\mathbb{M}$ i $\mathbb{M}'$ imaju isti domen, skup M. Ekspanzija i redukcija modela ne mijenjaju njegov domen.

Primjer 1. Jezik teorije polja $\mathcal{L}_F = \{+\,\cdot\,0, 1\}$ je proširenje jezika teorije grupa $\mathcal{L}_G = \{+\,, 1\}$.

Ako je $\mathbb{Q} = (Q, +_Q, 0_Q)$ grupa racionalnih brojeva, s obzirom na sabiranje, polje $\mathbb{Q}' = (Q, +_Q, \cdot_Q, 0_Q, 1_Q)$ racionalnih brojeva je ekspanzija grupe $\mathbb{Q}$ na jezik teorije polja $\mathcal{L}_F$.

Sa druge strane, jezik teorije polja $\mathcal{L}_F = \{+\ \cdot\ 0, 1\}$ je redukcija jezika teorije uređenih polja $\mathcal{L}_{OF} = \{+\,,\,\cdot\,, <, 0, 1\}$.

Ako je $\mathbb{Q} = (Q, +_Q, \cdot_Q, <_Q, 0_Q, 1_Q)$ uređeno polje racionalnih brojeva, njegova redukcija na jezik teorije polja $\mathcal{L}_F$ je polje $\mathbb{Q}' = (Q, +_Q, \cdot_Q, 0_Q, 1_Q)$ racionalnih brojeva.

Struktura $\mathbb{S} = (S, <_S)$ je *striktno linearno uređenje* ako je binarna relacija $<_S$ nerefleksivna, linearna i tranzitivna. Jezik teorije striktnog linearnog uređenja je $\mathcal{L}_S = \{<\}$. Jezik $\mathcal{L}_S$ je redukcija jezika teorije uređenih polja $\mathcal{L}_{OF}$. Redukcija uređenog polja $\mathbb{Q}$ na jezik teorije linearnog uređenja $\mathcal{L}_S$ je linearno uređenje $\mathbb{Q}' = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva.

Kada smo precizirali strukturu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva naveli smo i nulu kao istaknuti element, pa se u jeziku aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$ prirodno pojavio i simbol konstante 0. Da smo zeleli da istaknemo jedinicu, u jeziku bi se pojavio i njen simbol. U opštem slučaju, ako je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, svakom elementu $b \in M$ može se pridružiti konstanta c_b. Kažemo da je konstanta c_b *ime* elementa $b \in M$. Proširimo li jezik $\mathcal{L}$ imenima svih elemenata skupa $X \subseteq M$, dobijamo jezik $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_b : b \in X\}$. Ako u modelu $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$ istaknemo elemente $b \in X$, dobija se model $\mathbb{M}_X = (\mathbb{M}, b \in X)$ jezika $\mathcal{L}'$, u kome je svaka nova individualna konstanta c_b interpretirana elementom $b \in M$. Model $\mathbb{M}_X$ je *prosta ekspanzija* modela $\mathbb{M}$.

Puni naziv jezika koji smo definisali glasi *jezik predikatske logike prvog reda.* Naime, u toj logici postoje kvantifikatori samo za individualne promjenljive, koje uzimaju vrijednosi iz domena strukture, a ne kvantifikuje se po promjenljivima koje uzimaju vrijednosti u skupovima relacija i operacija domena strukture. Jezik u kome takva kvantifikacija postoji jeste jezik *drugog reda*, a formalni sistem na tom jeziku je *predikatska logika drugog reda.* Postoji suštinska razlika između logike prvog i logike drugog reda. Mi govorimo samo o predikatskoj logici prvog reda, pa nema posebne potrebe da to naglašavamo u njenom nazivu.

Termi i formule predikatske logike

Za razliku od iskazne, predikatska logika sadrži dvije vrste sintaksnih objekata: terme i formule. Termi su konačni izrazi koji se mogu dobiti od promjenljivih, konstanti i operacijskih simbola i koji, kao riječi, imaju smisla. Formule su izrazi sastavljeni od predikata nad termima, logičkih veznika i kvantifikatora.

Skup terma, kao skup konačnih nizova simbola jezika $\mathcal{L}$, definisan je na sledeći način:

(1) Individualne promjenljive i konstante su termi,

(2) Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi, onda je $\overline{f}(t_1, \ldots, t_n)$ term, za svaki operacijski simbol $\overline{f}$ dužine $n \geq 1$.

Pojam terma definisali smo induktivno. Bazu indukcije čine elementarni termi, to su individualne promenljive i sve individualne konstante koje dati jezik sadrži. U induktivom koraku, od već dobijenih terma pomoću operacijskih simbola gradimo nove terme. Svojstva terma dokazivaćemo *indukcijom po složenosti terma*: dokazaćemo da svi elementarni termi imaju dato svojstvo, za svaki opercijski simbol u jeziku pokazaćemo da čuva dato svojstvo i zaključiti da svi termi u jeziku imaju dato svojstvo.

Skup formula je takođe skup konačnih nizova simbola jezika $\mathcal{L}$ i definiše se indukcijom po složenosti njegovih elemenata. Bazu indukcije čine *elementarne formule:*

(1) $(t_1 = t_2)$ je elementarna formula, za proizvoljne terme t_1 i t_2,

(2) $\overline{r}(t_1, \ldots, t_n)$ je elementarna formula, za svaki simbol $\overline{r}$ dužine $n \geq 1$ i proizvoljne terme $t_1, \ldots, t_n$.

Skup predikatskih formula F je skup konačnih nizova simbola jezika $\mathcal{L}$ koji definišemo polazeći od skupa elementarnih formula:

(1) Elementarne formule su formule,

(2) Ako su A i B formule, onda su $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $\neg A$ formule, redom

(3) Ako je A formula, $\forall x\, A$ i $\exists x\, A$ su formule, za svaku individualnu promjenljivu $x \in V$,

Kao i u iskaznoj logici, svojstva predikatskih formula dokazivaćemo indukcijom po složenosti formule. Bazu te indukcije čine elementarne formule a u induktivnom koraku, osim iskaznih veznika, pojavljuju se i formule dobijene primenom ezistencijalnih i univerzalnih kvantifikatora.

Zadatak 1. Svakom termu odgovara jedno konačno drvo. Šta se u ovom slučaju nalazi u čvorovima drveta, od čega zavisi grananje u datom čvoru, koji termi se nalaze na njegovim listovima i šta se nalazi u dnu drveta. Odrediti drvo terma $t(x, y, z) = (((x \cdot z) + y) \cdot (x + (z \cdot y)))$.

Kako su formule induktivno definisane, za svaku formulu određen je skup njenih potformula. Niz susjednih simbola u formuli A koji je sam po sebi formula je *potformula* formule A. Svakoj formuli odgovara drvo u čijim su čvorovima njene potformule, listovi su elementarne formule, a u dnu drveta je sama formula.

Zadatak 2. Poput algoritma za čitanje iskazne formule, formulisati algoritam za čitanje formule predikatskog računa.

Parametri formule

U formuli oblika $\exists x B$, formula B je *oblast kvantifikatora* $\exists x$, tj. u formuli oblika $\forall x B$, formula B je *oblast kvantifikatora* $\forall x$, za svaku individualnu promjenljivu $x \in V$.

Javljanje promjenljive x u formuli A je *vezano* ako se, u tom javljanju, promjenljiva x nalazi u oblasti kvantifikatora $\exists x$ ili $\forall x$. Javljanje promjenljive u datoj formuli koje nije vezano je *slobodno.* U istoj formuli promjenljiva može imati i vezana i slobodna javljanja.

Promjenljiva x je *parametar* ili *slobodna promjenljiva* formule A, ako ima slobodno javljanje u A. Najčešće, kada govorimo o formuli, ne navodimo njene parametre. Ako to činimo, navodimo ih sve. Sa $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bez izuzetka označavamo da su svi parametri formule neke (ne obavezno sve) od promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Takođe, sa $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ označavamo da su svi parametri terma t, neke od promjenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Svaka formula $A(x_1, \ldots, x_n)$ definiše jedan odnos ili relaciju između svojih parametara, kada se oni protumače kao elementi domena neke strukture. Ako formula nema parametara (određuje relaciju dužine nula) ona je u datoj strukturi ili istinita ili lažna, tj. izražava jedan zakon te strukture.

Primjer 1. Formula $\forall x \forall y\,(x + y = y + x)$ jezika teorije grupa $\mathcal{L}_G$ nema parametara. Ona izražava zakon komutativnosti i ako važi u grupi $\mathbb{G}$, grupa $\mathbb{G}$ je komutativna.

Primjer 2. Formula $\exists x\,(y = x + x)$ jezika Peanove aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$ ima jednu vezanu promjenljivu x i jedan parametar y. Ona u strukturi $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva izražava relaciju "y je paran broj" - ona nešto govori o svom parametru y.

Primjer 3. Ako je A formula $\exists u\,(x = z \cdot u) \wedge \exists u\,(y = z \cdot u)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$, formula A izražava relaciju "z je djelilac brojeva x i y."

Ako je $(\exists u\,(x = v \cdot u) \wedge \exists u\,(y = v \cdot u)) \to \exists u\,(z = v \cdot u)$ formula B jezika $\mathcal{L}_{PA}$, smisao formule B je sljedeći: "ako je v djelilac brojeva x i y, onda je v djelilac i broja z."

Formula $A \wedge \forall v\, B$ izražava relaciju "z je najveći zajednički djelilac brojeva x i y" u strukturi $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva.

Primjer 4. U strukturi $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva, formulom jezika aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$, može se predstaviti predikat "x je ostatak dijeljenja y sa z".

Po definiciji ostatka x dijeljenja prirodnih brojeva y i z, postoji prirodan broj u, tako da važi $y = u \cdot z + x$ i $x < z$. Pritom, $x < z$ ako i samo ako $z = x + y$, za neko $y \neq 0$. Otuda se dobija formula A jezika $\mathcal{L}_{PA}$:

$$\exists u\,((y = u \cdot z + x) \wedge \exists y\,(\neg(y = 0) \wedge (z = x + y))).$$

U formuli A, sva javljanja promjenljivih x i z su slobodna, promjenljiva y ima jedno slobodno i dva vezana javljanja, a sva javljanja promjenljive u su vezana.

U navedenim primjerim, formula nešto govori mjenim parametrima. Navikli smo da parametre u matematičkim formulama možemo zamjenjivati drugim izrazima. Takva supstitucija je legitimna, pod uslovom da ne mijenja smisao prvobitne formule.

Promjenljiva y je *slobodna za promjenljivu* x u formuli A ako x nema slobodno javljanje u oblasti kvantifikatora $\exists y$ ili $\forall y$ u formuli A.

Term $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je slobodan za promjenljivu x u formuli A ako su sve promjenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slobodne za promjenljivu x u formuli A.

Zadatak 1. *Zatvoreni term* je term bez promjenljivih. Zatvoreni term je slobodan za svaku promjenljivu u svakoj formuli.

Svaka slobodna promjenljiva je slobodna za samu sebe u svakoj formuli.

Zadatak 2. Neka je $A(x)$ formula $\neg\exists y\,(\exists z(z + y = x))$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$. Svaka promjenljiva različita od y i z je slobodna za promjenljivu x. Šta je smisao redom formula $A(x)$, $A(y)$ i $A(z)$ u strukturi prirodnih brojeva?

Neka je $B(x, y)$ formula $\exists z\,(y = z \cdot x)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$. Odrediti promjenljive slobodne za promjenljivu x u formuli B.

Neka je $C(x, y)$ formula aritmetike čije je značenje da su x i y uzajamno prosti brojevi. Napisati formulu C i navesti promenljive za koje su njeni parametri slobodni za supstituciju.

Svojstva matematičkih struktura

Zadatak 1. Formulom jezika grupa $\mathcal{L}_G = \{+\,,0\}$ izraziti sledeća svojstva: grupa je komutativna, svaki element grupe je reda četiri, grupa ima bar tri elementa, svaki element grupe ima jedinstven inverzni element.

Zadatak 2. Struktura $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$, u kojoj je binarna relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, je *parcijalno uređenje* ili *parcijalni poredak*. Da li se formulom jezika parcijalnog uređenja $\mathcal{L}_P = \{\leq\}$ mogu izraziti: svojstvo linearnog uređenja, odsustvo najvećeg elementa, prisustvo maksimalnog elementa, svojstvo gustine, tj. odsustvo susjednih elemenata.

Svi matematički objekti su skupovi, pa je za matematiku nesporno važna teorija skupova. Na prvi pogled, začuđuje da je njen jezik vrlo jednostavan. Sastoji se od jednog jedinog, binarnog relacijskog simbola $\{\in\}$. Ipak, u tom jeziku mogu se formulisati sva matematička tvrđenja. Osnovna svojstva relacije $\in$ su sljedeća:

(1) jednaki skupovi imaju iste elemente;

(2) svaki neprazan skup ima $\in$-minimalni element;

(3) svaki skup ima uniju svih svojih elemenata;

(4) za svaki skup x, postoji skup svih podskupova skupa x;

(5) za svaki skup x i svaku formulu A(y), postoji skup svih $y \in x$, koji imaju svojstvo $A(y)$;

(6) postoji beskonačan skup;

(7) za svaki skup x i svaku funkciju f, definisanu formulom jezika teorije skupova, postoji skup $\{f(y) : y \in x\}$.

Ako se ovaj skup svojstava relacije $\in$ formuliše u predikatskoj logici, dobija se formalna Zermelo-Frenkelova teorija skupova. Označava sa ZF, a njen jezik je $\mathcal{L}_{ZF} = \{\in\}$.

Zadatak 3. Jedna od aksioma teorije ZF je aksioma ekstenzionalnosti:

$$\forall z(z \in x \to z \in y) \to (\forall z(z \in y \to z \in x) \to x = y).$$

Ako formula $x \in y$ znači "skup x je element skupa y," kakav je smisao aksiome ekstenzionalnosti, tj. šta ona govori o skupovima x i y?

Zadatak 4. Ako je $A(x, z)$ formula $\forall u(u \in z \to u \in x)$ jezika $\mathcal{L}_{ZF}$, šta formula A govori o skupovima x i z?

Ako je $B(x, y)$ formula $\forall z\,(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \to u \in x))$, šta formula B govori o skupovima x i y?

Formulom jezika $\mathcal{L}_{ZF}$ izraziti *aksiomu partitivnog skupa*: za svaki skup, postoji skup svih njegovih podskupova.

Zadatak 5. Ako je $A(x,y)$ formula $\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u\,(u \in x \wedge z \in u))$, šta formula A govori o skupovima x i y?

Formulom jezika $\mathcal{L}_{ZF}$ izraziti *aksiomu unije*: za svaki skup, postoji unija svih njegovih elemenata.

Zadatak 6. Formulom jezika $\mathcal{L}_{ZF}$ izraziti *aksiomu regularnosti:* svaki neprazan skup ima $\in$-minimalni element, tj. element koji sa datim skupom nema zajedničkih elemenata.

Zadatak 7. U jeziku teorije polja, izraziti aksiome teorije polja. Mogu li se formulom ili skupom formula tog jezika izraziti sledeća tvrđenja: polje ima karakteristiku 2, polje ima konačnu karakteristiku, polje je algebarski zatvoreno.

Zadatak 8. Ako je M neprazan skup, formulom ili skupom formula jezika jednakosti $\mathcal{L} = \varnothing$ izraziti sledeća tvrđenja: skup M ima bar n elemenata, skup M ima tačno n elemenata, skup M je beskonačan, skup M je konačan.

Semantika predikatske logike

Kako je formula induktivno definisana, njena istinitost određena je vrijednostima istinitosti njenih elementarnih formula. Ali, za razliku od elementarnih iskaza, vrijednosti elementarnih formula ne mogu se zadati proizvoljno. One zavise od strukture u kojoj ih interpretiramo i određene su vrijednostima njihovih parametara u domenu te strukture.

Primjer 1. Elementarna formula $x + y = z$ jezika aritmetike je istinita za one vrijednosti k, m i n, promjenljivih x, y i z, redom, za koje je zbir brojeva k i m jednak broju n. Ova formula je lažna u strukturi $\mathbb{N}$ za sve ostale vrijednosti njenih promjenljivih. To znači da se valuacija elementarne formule dobija kada svi termi koji se u njoj javljaju, u ovom slučaju to su termi $x + y$ i z, dobiju svoju vrijednost. Svakako, njihova vrijednost je određena kada znamo vrijednosti promjenljivih x, y i z.

Budući da želimo da govorimo o istinitosti ne samo jedne, već i moguće beskonačnog skupa formula, u svakoj valuaciji zadajemo vrijednosti svih promjenljivih u domenu strukture u kojoj evaluiramo dati skup formula.

Ako je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, *valuacija* individualnih promjenljivih u modelu $\mathbb{M}$ je niz $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ elemenata skupa M. Skup svih valuacija, tj. skup svih prebrojivih nizova skupa M, označavamo sa M^N.

Neka je t term, $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$ i $a \in M^N$ valuacija. *Vrijednost terma* t za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$, u oznaci $[t]_a^M$, definišemo indukcijom po složenosti terma t:

(1) $[v_n]_a^M = a_n$, za svako $n \geq 0$,

(2) $[c]_a^M = c_M$, za svaku individualnu konstantu $c \in C$,

(3) $[f(t_1, \dots, t_n)]_a^M = f_M([t_1]_a^M, \dots, [t_n]_a^M)$, za svaki operacijski simbol f, dužine $n \geq 1$ i proizvoljne terme $t_1, \dots, t_n$,

gdje su c_M i f_M interpretacije simbola c i f u modelu $\mathbb{M}$.

Ako je $a \in N^M$ valuacija u modelu $\mathbb{M}$, x promjenljiva i $b \in M$, sa $a(x/b)$ označavamo valuaciju u kojoj promjenljiva x ima vrijednost b, dok su vrijednosti ostalih promjenljivih određene valuacijom a. Na primjer, ako je x promjenljiva v_n,

$$a(x/b) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b, a_{n+1}, \dots).$$

Zadatak 1. Svaki term t jezika $\mathcal{L}$ ima jedinstveno određenu vrijednost $[t]_a^M \in M$ u modelu $\mathbb{M}$, za svaku valuaciju $a \in M^N$.

Interpretacija nelogičkih simbola jezika $\mathcal{L}$ i denotacija njegovih terma u datom modelu $\mathbb{M}$, omogućava valuaciju svih formula u modelu $\mathbb{M}$.

Neka je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$ i $a \in M^N$ valuacija promjenljivih. Za svaku formulu A, relaciju "formula A je istinita za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$", koju označavamo sa $\mathbb{M} \models_a A$, definišemo indukcijom po složenosti formule A:

(1) Ako je A elementarna formula oblika $t_1 = t_2$,

$$\mathbb{M} \models_a (t_1 = t_2) \ \Leftrightarrow\ [t_1]_a^M = [t_2]_a^M,$$

(2) Ako je A elementarna formula oblika $r(t_1, \dots, t_n)$,

$$\mathbb{M} \models_a r(t_1, \dots, t_n) \ \Leftrightarrow\ r_M([t_1]_a^M, \dots, [t_n]_a^M),$$

(3) Ako su A i B formule jezika $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{M} \models_a A \wedge B \ \Leftrightarrow\ \mathbb{M} \models_a A \ \text{ i } \ \mathbb{M} \models_a B,$$
$$\mathbb{M} \models_a A \vee B \ \Leftrightarrow\ \mathbb{M} \models_a A \ \text{ ili } \ \mathbb{M} \models_a B,$$
$$\mathbb{M} \models_a A \to B \ \Leftrightarrow\ \mathbb{M} \models_a A \ \text{ implicira } \ \mathbb{M} \models_a B,$$
$$\mathbb{M} \models_a \neg A \ \Leftrightarrow\ \text{nije } \mathbb{M} \models_a A,$$

(4) Ako je A formula i x promjenljiva jezika $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{M} \models_a \exists x\, A \;\Leftrightarrow\; \text{za neko } b \in M,\ \mathbb{M} \models_{a(x/b)} A,$$
$$\mathbb{M} \models_a \forall x\, A \;\Leftrightarrow\; \text{za svako } b \in M,\ \mathbb{M} \models_{a(x/b)} A,$$

za sve formule A i B, proizvoljne terme $t_1, \ldots, t_n$ i svaku promjenljivu $x \in V$.

Uz denotaciju terma, definicija istinitosti formule može se shvatiti kao neka vrsta rečnika koji, u zadatom kontekstu, prevodi formule jezika $\mathcal{L}$ na neformalni jezik matematike.

Zadatak 2. Indukcijom po složenosti formule, dokazati da istinitost formule, za datu valuaciju, zavisi samo od njenih slobodnih promjenljivih.

Preciznije, ako su a i b valuacije i $[x]_a^M = [x]_b^M$, za svaku slobodnu promjenljivu x formule A,

$$\mathbb{M} \models_a A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \models_b A.$$

Ako $A(x_1, \ldots, x_n)$, tj. ako su sve slobodne promjenljive formule A neke do promjenljivih $x_1, \ldots, x_n$, pored oznake $\mathbb{M} \models_a A$, ponekad koristimo i oznaku $\mathbb{M} \models A[a_1, \ldots, a_n]$, gdje je $[x_i]_a^M = a_i$, za sve $1 \leq i \leq n$.

Logički zakoni u predikatskoj logici

Formula A je *logička posljedica* skupa formula Σ, tj. Σ je skup *logičkih pretpostavki* formule A, u oznaci $\Sigma \models A$, ako za svaki model $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$ i svaku valuaciju $a \in M^N$,

$$\mathbb{M} \models_a \Sigma \;\Rightarrow\; \mathbb{M} \models_a A,$$

gde $\mathbb{M} \models_a \Sigma$ znači da u modelu $\mathbb{M}$ za valuaciju a važe sve formule skupa Σ.

Formula A je *istinita u modelu* $\mathbb{M}$, tj. $\mathbb{M}$ je model formule A, ako $\mathbb{M} \models_a A$, za svaku valuaciju $a \in M^N$. Tu činjenicu označavamo sa $\mathbb{M} \models A$.

Ako $\mathbb{M} \models A$, za svaku formulu A skupa formula Σ, kažemo da je $\mathbb{M}$ model skupa Σ i za to koristimo oznaku $\mathbb{M} \models \Sigma$.

Formulu bez parametara nazivamo *rečenicom.* Nekada je u logici umjesto rečenice bio u upotrebi termin *sud*, ali je on sasvim napušten.

Ako je A rečenica ona nema slobodnih promenljivih, pa valuacija ne utiče na njenu istinitost. U svakom modeu $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$, ili $\mathbb{M} \models_a A$ ili $\mathbb{M} \models_a \neg A$.

Formula jezika $\mathcal{L}$ je *logički zakon* predikatske logike ako je istinita u svakom modelu jezika $\mathcal{L}$. Za logički zakon u predikatskoj logici, matematičari nikada ne koriste termin tautologija. Najčešće se koristi termin *valjana formula* ili ređe univerzalno važeća formula.

Kada je već o terminologiji riječ, ako $\mathbb{M} \models_a A$, umjesto, formula A je istinita u modelu $\mathbb{M}$ za valuaciju a, ponekad kažemo da formula A *važi* u modelu $\mathbb{M}$ za valuaciju a. Ako $\mathbb{M} \models A$, kažemo da formula A važi u modelu $\mathbb{M}$. Ako je formula A logički zakon, koristimo oznaku $\models A$.

Skup logičkih zakona predikatske logike, u izvjesnom smislu, sadrži tautologije. Preciznije, ako je iskazna formula tautologija, supstitucijom njenih iskaznih promjenljivih formulama jezika $\mathcal{L}$, dobija se *instanca tautologije* u jeziku $\mathcal{L}$.

TEOREMA 1. Svaka instanca tautologije je logički zakon.

DOKAZ. Napomenimo da je po uslovu (3), u definiciji istinitosti formule jezika $\mathcal{L}$, istinitost iskaznih veznika definisana isto kao u iskaznoj logici. Neka je formula B instanca tautologije $A(p_1, \ldots, p_n)$, dobijena supstituciom elementarnih iskaza $p_1, \ldots, p_n$ redom formulama $A_1, \ldots, A_n$ jezika $\mathcal{L}$. Ako je $a \in M^N$ valuacija u modelu $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$ za koju nije $\mathbb{M} \models B$, neka je v valuacija elementarnih iskaza $p_1, \ldots, p_n$ takva da

$$v(p_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \models_a A_i,$$

kada je $1 \leq i \leq n$. Zbog spomenutog uslova (3) dobijamo $\mathbb{M} \models_a B$ ako i samo ako $v(A) = 1$. Kako nije $\mathbb{M} \models B$, mora biti $v(A) = 0$, što protivreči pretpostavci da je A tautologija. $\lhd$

ZADATAK 2. *Modus ponens u predikatskoj logici:* Za proizvoljne formule A i B, ako $\models A$ i $\models A \to B$ onda $\models B$.

Kako se prirodno i očekuje, postoje mnogi zakoni predikatske logike koji nisu instance tautologija.

Korektne supstitucije

Dokazaćemo da, za datu valuaciju u datom modelu jezika $\mathcal{L}$, korektna supstitucija promjenljivih ne mijenja istinitost formule.

Ako je A formula, u i t termi jezika $\mathcal{L}$ i x promjenljiva, sa $u(x/t)$ označavamo term koji se iz terma u dobija zamjenom svih javljanja promjenljive x termom t. Sa $A(x/t)$ označavamo formulu koja se dobija zamjenom svih slobodnih javljanja promjenljive x u formuli A termom t.

TEOREMA 1. Neka je $\mathbb{M}$ model, u i t termi jezika $\mathcal{L}$ i x promjenljiva. Za svaku valuaciju $a \in M$,

$$[u(x/t)]^M_a = [u]^M_{a(x/[t]^M_a)}.$$

DOKAZ. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti terma u. Ako je term u promjenljiva različita od x, ni smjena promjenljive, a ni izmjena valuacije ne utiču na njegovu vrijednost. Ako je u promjenljiva x, onda $u(x/t) = t$, pa je $[u(x/t)]_a^M = [t]_a^M$. Sa druge strane, $[x]^M_{a(x/[t]_a^M)} = [t]_a^M$, pa tvrđenje važi.

Ako je u term oblika $f(u_1, \ldots, u_n)$, gde su $u_1, \ldots, u_n$ termi jezika $\mathcal{L}$, onda

$$u(x/t) = f(u_1(x/t), \ldots, u_n(x/t)),$$

pa redom imamo:

$$\begin{aligned} [u(x/t)]_a^M &= f_M([u_1(x/t)]_a^M, \ldots, [u_n(x/t)]_a^M) \\ &= f_M([u_1]^M_{a(x/[t]_a^M)}, \ldots, [u_n]^M_{a(x/[t]_a^M)}) \\ &= [u]^M_{a(x/[t]_a^M)}. \end{aligned}$$

U drugom koraku koristili smo induktivnu pretpostavku, tj. da teorema važi za terme manje složenosti od složenosti terma u. $\lhd$

TEOREMA 2 Ako je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$ i t term slobodan za promjenljivu x u formuli A:

$$\mathbb{M} \models_a A(x/t) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \models_{a(x/[t]_a^M)} A.$$

DOKAZ. Teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Ako je A elementarna formula, tvrđenje slijedi iz prethodne teoreme, a ako je A disjunkcija, konjunkcija, implikacija ili negacija, iz definicije relacije zadovoljenja.

Jedini zanimljiv slučaj je kada formula A ima oblik $\forall y\, B$. Ako x nije slobodna promjenljiva formule A, formula $A(x/t)$ je isto što i formula A, a promjena vrijednosti promjenljive x u valuaciji a ne utiče na istinitost formule A. Preostaje mogućnost da promjenljiva x jeste parametar formule A i sledstveno tome različita od promjenljive y. Po definiciji korektne supstitucije, promjenljiva y se ne javlja u termu t, pa

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \models_a \forall y\, B(x/t) \;&\Leftrightarrow\; \text{za svako } c \in M,\ \mathbb{M} \models_{a(y/c)} B(x/t), \\ &\Leftrightarrow\; \text{za svako } c \in M,\ \mathbb{M} \models_{a(y/c)(x/[t]_a^M)} B, \\ &\Leftrightarrow\; \text{za svako } c \in M,\ \mathbb{M} \models_{a(x/[t]_a^M)(y/c)} B \\ &\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \models_{a(x/[t]_a^M)} \forall y\, B. \end{aligned}$$

Pritom, prelazak sa poretka supstitucije $a(y/c)(x/[t]_a^M)$ u valuaciji a, na poredak $a(x/[t]_a^M)(y/c)$ jeste moguć, budući da se promjenljiva y ne javlja u termu t. Slučaj formule oblika $\exists y\, B$ se dokazuje na isti način. $\lhd$

Logička svojstva kvantifikatora

Lema o instancama kvantifikatora: Ako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A jezika $\mathcal{L}$,

$$\models \forall x\, A \to A(x/t),$$

$$\models A(x/t) \to \exists x\, A.$$

Dokaz. Ako je formula $\forall x\, A$ istinita za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$, formula A je istinita za svaku valuaciju $a(x/c)$, $c \in M$, pa je istinita i kada $c = [t]_a^M$, tj. za valuaciju $a(x/[t]_a^M)$. Kako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A, prema prethodnoj teoremi, formula $A(x/t)$ je istinita u modelu $\mathbb{M}$ za valuaciju a.

Kako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A jezika $\mathcal{L}$, ako je formula $A(x/t)$ istinita za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$, po prethodnoj teoremi, formula A je istinita i za valuaciju $a(x/[t]_a^M)$. To znači da postoji $c \in M$ (zapravo $c = [t]_a^M$) takvo da je formula A istinita za valuaciju $a(x/c)$ u modelu $\mathbb{M}$, pa po definiciji istinitosti, formula $\exists x A$ je istinita za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$. $\lhd$

Zadatak 1. Navesti primjere terma t i formule A jezika $\mathcal{L}$, za koje ne važi $\models \forall x\, A \to A(x/t)$, tj. za koje ne važi $\models A(x/t) \to \exists x\, A$.

Lema o Bernajsovim pravilima: Ako su A i B formule i promjenljiva x nije slobodna u formuli A,

$$\models A \to B \;\Rightarrow\; \models A \to \forall x\, B.$$

$$\models B \to A \;\Rightarrow\; \models \exists x\, B \to A.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \to B$ logički zakon i da promjenljiva x nije slobodna u formuli A. Neka je a valuacija promjenljivih u modelu $\mathbb{M}$ za koju je formula A istinita. Kako promjenljiva x nije slobodna u formuli A, formula A je istinita za valuaciju $a(x/c)$, za svako $c \in M$. Dakle, formule $A \to B$ i A su istinite za valuaciju $a(x/c)$, pa je formula B istinita za valuaciju $a(x/c)$, za svako $c \in M$. Po definiciji istinitosti, formula $\forall x\, B$ je istinita za valuaciju a.

Pretpostavimo da je $B \to A$ logički zakon i da promjenljiva x nije slobodna u formuli A. Neka je a valuacija promjenljivih u modelu $\mathbb{M}$ za koju je formula $\exists x\, B$ istinita. To znači da postoji $c \in M$ za koje je formula B istinita za valuaciju $a(x/c)$. Dakle, formule $B \to A$ i B su istinite za valuaciju $a(x/c)$, pa je formula A istinita za valuaciju $a(x/c)$. Kako promjenljiva x nije slobodna u A, formula A je istinita za valuaciju a. $\triangleleft$

Zadatak 2. Navesti primjere formula A i B za koje ne važi zaključak prethodne teoreme.

Ekvivalencija u predikatskoj logici

Formule A i B su *logički ekvivalentne* ako u svakom modelu $\mathbb{M}$, za svaku valuaciju $a \in M^N$,

$$\mathbb{M} \vdash_a A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \vdash_a B.$$

Iz definicije istinitosti implikacije slijedi da su formule A i B logički ekvivalentne ako i samo ako

$$\models (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Ovo je razlog da u predikatskoj logici definišemo ekvivalenciju. Formula $A \leftrightarrow B$ je zamjena za formulu $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Zadatak 3. Ako je A formula i x promjenljiva, $\models A \;\Leftrightarrow\; \models \forall x\, A$.

Implikacija $\Rightarrow$ je *pravilo generalizacije*, a implikacija $\Leftarrow$ je dokazana u lemi o instancama kvantifikatora.

Navesti primjer formule A, za koju ne važi $\models A \leftrightarrow \forall x\, A$.

Zadatak 4. *Svojstva jednakosti:* Ako su x, y, z, x_i, y_i, $1 \le i \le n$, promjenljive, t term i A formula,

$$\models (x = x)$$
$$\models (x = y) \to (y = x)$$
$$\models (x = y) \wedge (y = z) \to (x = x)$$
$$\models ((x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)) \to (t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)),$$
$$\models ((x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)) \to (A(x_1, \ldots, x_n) \to A(y_1, \ldots, y_n)).$$

Jednakost je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija (relacija ekvivalencije) koja je saglasna sa operacijama i relacijama definisanih na proizvoljnom domenu, tj. jednakost je *kongruencija* u svakoj strukturi.

Formula $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$ je *univerzalno zatvorenje* formule $A(x_1, \ldots, x_n)$. Univerzalna zatvorenja navedenih svojstava su *aksiome jednakosti*.

Zadatak 5. Ako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A,

$$\models A(x/t) \leftrightarrow \forall x\, ((x = t) \ \rightarrow\ A),$$
$$\models A(x/t) \leftrightarrow \exists x\, ((x = t) \ \wedge\ A).$$

Primjer 1. Ako je A formula, $\models \neg\exists x A \rightarrow \neg\forall x\, A$, za svako $x \in V$.

Pretpostavimo da nije $\mathbb{M} \models_a \neg\exists x\, A \rightarrow \neg\forall x\, A$, za valuaciju $a \in M$, u nekom modelu $\mathbb{M}$. Po definiciji istinitosti implikacije, imamo $\mathbb{M} \models_a \neg\exists x\, A$ i nije $\mathbb{M} \models_a \neg\forall x\, A$, tj. po definiciji istinitosti negacije, nije $\mathbb{M} \models_a \exists x\, A$ i jeste $\mathbb{M} \models_a \forall x\, A$. Ovo nije moguće, jer $M \neq \emptyset$ (u definiciji strukture pretpostavili smo da njen domen nije prazan). $\triangleleft$

Primjer 1. Ako su A i B formule,

$$\models \forall x\, (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(\exists x\, A \wedge \forall x\, B),$$

$$\models \forall x\, (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(\forall x\, A \wedge \exists x\, B).$$

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\mathbb{M}$ model u kome ne važi data formula. To znači da $\mathbb{M} \models_a \forall x\, (A \rightarrow \neg B)$, $\mathbb{M} \models_a \exists x\, A$ i $\mathbb{M} \models_a \forall x\, B$, za neku valuaciju $a \in M^N$. Otuda, postoji $b \in M$ takvo da $\mathbb{M} \models_a (x/b)A$, pa za takvo $b \in M$ dobijamo da $\mathbb{M} \models_a (x/b)(A \rightarrow \neg B)$, tj. nije $\mathbb{M} \models_a (x/b)B$, a to protivreči $\mathbb{M} \models_a \forall x\, B$.

Slično, ako $\mathbb{M} \models_a \forall x\, (A \rightarrow \neg B)$, $\mathbb{M} \models_a \forall x\, A$ i $\mathbb{M} \models_a \exists x\, B$, za neku valuaciju $a \in M^N$, onda postoji $b \in M$, tako da $\mathbb{M} \models_{a(x/b)} B$. Za takvo $b \in M$ važi $\mathbb{M} \models_{a(x/b)} (A \rightarrow \neg B)$, tj. $\mathbb{M} \models_{a(x/b)} (B \rightarrow \neg A)$, pa dakle nije $\mathbb{M} \models_{a(x/b)} A$, a to protivreči $\mathbb{M} \models_a \forall x\, A$. $\triangleleft$

Kvantifikatori i negacija

Semantika predikatske logike je takva da se svaki od kvantifikatora može definisati pomoću negacije i drugog kvantifikatora.

Zadatak 1. *Uopšteni De Morganovi zakoni:* Za svaku formulu A,

$$\models \neg\forall x\, A \leftrightarrow \exists x\, \neg A,$$

$$\models \neg\exists x\, A \leftrightarrow \forall x\, \neg A.$$

Ovi zakoni predstavljaju uopštenje De Morganovih zakona zato što se univerzalni kvantifikator može shvatiti kao moguće beskonačna konjunkcija, a egzistencijalni, kao moguće beskonačna diskunkcija. Da to ilustrujemo, podsjetimo se, za svaki model $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$, definisali smo njegovu prostu ekspanziju $\mathbb{M}_M = (\mathbb{M}, b \in M)$, kao model jezika $\mathcal{L} \cup \{c_b : b \in M\}$ u kome svaki element b skupa M, ima svoje ime c_b.

Zadatak 2. Ako je A formula i $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, onda

$$\mathbb{M} \models_{a(x/b)} A \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbb{M}_M \models_a A(x/c_b),$$

za svako $b \in M$ i svaku valuaciju $a \in M$.

Zadatak 3. Neka je A formula i $\mathbb{M}$ konačan model jezika $\mathcal{L}$. Ako je $M = \{b_1, \ldots, b_n\}$, onda

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \models_a \forall x\, A \;\;&\Leftrightarrow\;\; \mathbb{M}_M \models_a A(x/c_{b_1}) \wedge \cdots \wedge A(x/c_{b_n}), \\ \mathbb{M} \models_a \exists x\, A \;\;&\Leftrightarrow\;\; \mathbb{M}_M \models_a A(x/c_{b_1}) \vee \cdots \vee A(x/c_{b_n}), \end{aligned}$$

za svaku valuaciju $a \in M^N$.

U konačnom modelu $\mathbb{M}$, formula $\forall x\, A$ ekvivalentna je konačnoj konjunkciji, a formula $\exists x\, A$ konačnoj disjunkciji, pa se odnos negacije i kvantifikatora svodi na De Morganove zakone

$$\mathbb{M} \models \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A(x/c_{b_i})) \;\leftrightarrow\; \bigvee_{i=1}^{n} \neg A(x/c_{b_i}),$$

$$\mathbb{M} \models \neg(\bigvee_{i=1}^{n} A(x/c_{b_i})) \;\leftrightarrow\; \bigwedge_{i=1}^{n} \neg A(x/c_{b_i}).$$

Opštije, ako je A formula i $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, onda

$$\mathbb{M} \models_a \forall x\, A \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbb{M}_M \models_a \bigwedge_{b \in M} A(x/c_b),$$

$$\mathbb{M} \models_a \exists x\, A \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbb{M}_M \models_a \bigvee_{b \in M} A(x/c_b),$$

za svaku valuaciju $a \in M^N$. Pritom, $\mathbb{M}_M \models_a \bigwedge_{b \in M} A(x/c_b)$, je oznaka za rečenicu "za svako $b \in M$, $\mathbb{M}_M \models_a A(x/c_b)$."

Na taj način, odnos iskaznih logičkih veznika prema kvantifikatorima, svodi se na njihov odnos prema beskonačnim disjunkcijama i konjunkcijama.

Kvantifikatori i konjunkcija

Kao beskonačna konjunkcija, univerzalni kvantifikator se jednostavno distribuira preko konjunkcije. Međutim, egzistencijalni kvantifikator je beskonačna disjunkcija, pa njegova distribucija preko konjunkcije, u opštem slučaju, ne važi.

Zadatak 1. Ako su A i B formule, univerzalni kvantifikator se može prenijeti ispred konjunkcije:

$$\models (\forall x\, A \wedge \forall x\, B) \leftrightarrow \forall x\, (A \wedge B).$$

Međutim, takvo tvrđenje ne važi za egzistencijalni kvantifikator. Bez ograničenja na parametre formula A i B, on se ne može prenijeti na početak, već samo prolazi kroz konjunkciju:

Zadatak 2. Za proizvoljne formule A i B,

$$\models \exists x\, (A \wedge B) \rightarrow (\exists x\, A \wedge \exists x\, B).$$

Navesti primjere formula A i B, za koje u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ ne važi formula $(\exists x\, A \wedge \exists x\, B) \rightarrow \exists x\, (A \wedge B)$.

Zadatak 3. Ako formula B ne sadrži parametar x, za svaku formulu A,

$$\models (\exists x\, A \wedge B) \leftrightarrow \exists x\, (A \wedge B).$$

Kvantifikatori i disjunkcija

Kao beskonačna disjunkcija, egzistencijalni kvantifikator se distribuira preko disjunkcije, ali distribucija univerzalnog kvantifikatora preko disjunkcije, ne važi u svim modelima.

Zadatak 1. Ako su A i B formule, egzistencijalni kvantifikator se može prenijeti ispred disjunkcije:

$$\models (\exists x\, A \vee \exists x\, B) \leftrightarrow \exists x\, (A \vee B).$$

Međutim, takvo tvrđenje ne važi za univerzalni kvantifikator. Bez ograničenja na parametre formula A i B, on ne prolazi kroz disjunkciju, već se samo može prenijeti na početak:

Zadatak 2. Za proizvoljne formule A i B,

$$\models (\forall x\, A \vee \forall x\, B) \to \forall x\,(A \vee B).$$

Navesti primjere formula A i B, tako da u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva ne važi formula $\forall x\,(A \vee B) \to (\forall x\, A \vee \forall x\, B)$.

Zadatak 3. Ako formula B ne sadrži parametar x, za svaku formulu A,

$$\models (\forall x\, A \vee B) \leftrightarrow \forall x\,(A \vee B).$$

Kvantifikatori i implikacija

Zadatak 1. Ako su A, B formule i x promjenljiva koja nije slobodna u formuli B,

$$\models (\forall x\, A \to B) \leftrightarrow \exists x\,(A \to B),$$
$$\models (B \to \forall x\, A) \leftrightarrow \forall x\,(B \to A),$$
$$\models (\exists x\, A \to B) \leftrightarrow \forall x\,(A \to B),$$
$$\models (B \to \exists x\, A) \leftrightarrow \exists x\,(A \to B).$$

Navesti primjere formula A i B, tako da u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva ne važi formula $\exists x\,(A \to B) \to (\exists x\, A \to \exists B)$.

Zadatak 2. Navesti primjere formula A i B, tako da u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva ne važi formula $\forall x\,(A \leftrightarrow \forall x\, B) \to \forall x\,(A \leftrightarrow B)$.

Zadatak 3. Navesti primjere formula A i B, tako da u prirodnim brojevima $\mathbb{N} = (N, +_N, \cdot_N, s_N, 0_N)$, ne važi $\forall x\,(A \to \forall x\, B) \to \forall x\,(A \to B)$.

Zadatak 4. Za svaku formulu A,

$$\models \exists x\, \forall y\, A \to \forall y\, \exists x\, A.$$

Navesti primjer formule A, tako da formula $\forall x\, \exists y\, A \to \exists y\, \forall x\, A$, ne važi u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva.

Ovaj logički zakon se može shvatiti i kao uopštenje jednog iskaznog logičkog zakonom. Ako se formula A interpretira u proizvoljnoj strukturi sa dvoelementnim domenom, navedeni logički zakon postaje tautologija

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \to (A \vee C) \wedge (B \vee D).$$

Ova tautologija se rijetko sreće u literaturi. U njoj je čudno što disjunkcija implicira konjunkciju, a da istovremeno ne važi i obratno.

Zadatak 5. Navesti primjer formule A, tako da formula $\forall x\,(A \to \forall x\, A)$ ne važi u modelu $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ racionalnih brojeva. Isto pitanje za formulu $\forall x\,(\exists x\, A \to A)$.

Sa druge strane, formula $\exists x\,(A \to \forall x\, A)$ jeste logički zakon, za svaku formulu A. Njegov smisao je pomalo neočekivan: za svaku formulu A, postoji neki poseban x takav da, ako važi $A(x)$, onda važi i $\forall x\, A$.

Preneksni oblik formule

Uslovi za primjenu logičkih zakona o odnosu kavantifikatora i iskaznih veznika, ostvaruju se preimenovanjem promjenljivih i supstitucijom ekvivalentnih formula.

Zadatak 1. *Preimenovanje vezanih promjenljivih:* Ako formula A ne sadrži promjenljivu y,

$$\models \forall x\, A \leftrightarrow \forall y A(x/y),$$

$$\models \exists x\, A \leftrightarrow \exists y A(x/y),$$

Navesti primjer formule A, tako da $\forall x\, A \to \forall y\, A(x/y)$ ne važi u modelu racionalnih brojeva $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$. Isto pitanje za $\exists x\, A \to \exists y\, A(x/y)$.

Zadatak 2. Navesti primjer formule A, tako da $\forall x\, \forall y\, A \to \forall x\, A(y/x)$ ne važi u strukturi $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$. Isto pitanje za $\exists x\, \exists y\, A \to \exists x\, A(y/x)$.

Zadatak 3. *Supstitucija ekvivalentnih formula:* Ako je $A(B/C)$ formula koja se iz formule A dobija supstitucijom nekih, ne obavezno svih, javljanja njene potformule B formulom C, onda

$$\models B \leftrightarrow C \;\Rightarrow\; \models A \leftrightarrow A(B/C).$$

Formula $Q_1 x_1 \ldots, Q_n x_n\, A$, gde su Q_i kvantivikatori $\forall$ ili $\exists$, i gde je formula A bez kvantifikatora, ima preneksni oblik. Dokazaćemo da svaka formula ima ekvivalentni preneksni oblik. Ovde se taj dokaz zasniva na semantičkim pretpostavkama. Kada definišemo sintaksu predikatske logike, pokazaćemo da se ova teorema može dokazati i u toj sintaksi.

Teorema o preneksnom obliku formule. Za svaku formulu A, postoji formula A^* u preneksnom obliku, takva da

$$\models A \;\leftrightarrow\; A^*.$$

Pritom, pridruživanje $A \mapsto A^*$ je efektivno.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule A. Ako je A elementarna formula, kako elementalne formule ne sadrže kvantifikatore, formula A^* je formula A, pa teorema važi. Takođe, trivijalan je induktivni korak u kome formula A ima oblik $\forall x\, B$ ili $\exists x\, B$, za neku formulu B. U preostalim koracima, za svaki iskazni logički veznik, preimenovanjem vezanih promjenljivih, osiguravamo pretpostavke za primjenu odgovarajućeg odnosa tog veznika i kvantifikatora. $\lhd$

Zadatak 4. Detaljno opisati algoritam koji formulu A prevodi u A^*

Zadatak 5. Ako su A i B formule bez kvantifikatora, odrediti preneksni oblik formula: $(\exists x\, \forall y\, A \wedge \exists x\, \forall y\, B)$ i $(\exists x\, \forall y\, A \vee \exists x\, \forall y\, B)$.

Skolemove funkcije

Kada formulu svedemo na preneksnu formu, jedini način da se formula dalje uprosti i smanji njena složenost jeste da mijenjamo poredak kvantifikatora ili da ih na neki način eliminišemo.

Neka je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Posmatrajmo rečenicu $\forall x\, \exists y A(x, y)$, čiji je smisao: "za svako x, postoji neko y, koje je funkcija od x, takvo da važi A." Kada bi smo datu rečenicu transformisali na sljedeći način:

$$\mathbb{M} \models \forall x\, \exists y A(x, y) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M} \models \exists f\, \forall x\, A(x, y/f(x)),$$

poredak kvantifikatora $\forall\,\exists$ bi se promijenio u poredak $\exists\,\forall$, ali se u tako dobijenoj formuli kvantifikuje po funkcijama skupa M, pa to nije formula predikatske logike prvog reda. U predikatskoj logici kvantifikujemo samo po individualnim promjenljivim.

Jedini način da opisanu transformaciju korektno napravimo jeste da uvedemo novi operacijski simbol f i proširimo jezik. Sada, u ekspaniziji $\mathbb{M}' = (\mathbb{M}, f_M)$ modela $\mathbb{M}$, u kojoj je funkcijom f_M, interpretiran novi operacijski simbol jezika $\mathcal{L} \cup \{f\}$, imamo

$$\mathbb{M}' \models \forall x\, \exists y A(x, y) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M}' \models \forall x\, A(x, y/f(x)),$$

svakako, pod uslovom da je promjenljiva y slobodna za x u formuli A.

Ideja da se broj kvantifikatora u formuli smanji uvođenjem novih operacijskih i relacijskih simbola, pojavila se u prvoj polovini dvadesetog vijeka u radovima Žaka Erbrana i Torlafa Skolema. Uobičajeno je da se taj metod naziva *skolemizacijom.* U narednim primjerima, pretpostavljamo da su sve supstitucije promjenljivih korektne.

Formula A je *zadovoljiva* ako postoji model $\mathbb{M}$ i valuacija $a \in M^N$, takva da formula A važi za valuaciju a u modelu $\mathbb{M}$. Dualno, formula A nije zadovoljiva ako je formula $\neg A$ logički zakon.

Primjer 1. Neka je $A(x, y, z, u, v)$ formula bez kvantifikatora jezika $\mathcal{L}$. Posmatrajmo rečenicu

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v\, A(x, y, z, u, v).$$

Ako je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, neka su f i g novi operacijski simboli, dužine dva i tri, redom. Definišimo ekspanziju $\mathbb{M}'$ modela $\mathbb{M}$ u proširenom jeziku $\mathcal{L} \cup \{f, g\}$. Fiksirajmo valuaciju $a \in M^N$ modela $\mathbb{M}$ i proizvoljne $b, c \in M$.

Pretpostavimo da važi $\mathbb{M} \models_a \exists z\, \forall u\, \exists v\, A[b, c]$. Tada, postoji $d \in M$, takvo da važi $\mathbb{M} \models_a \forall u\, \exists v\, A[b, c, d]$, pa neka je $f_M(b, c) = d$. Dalje, za proizvoljno $t \in M$, ako važi $\mathbb{M} \models_a \exists v\, A(b, c, d, t)$, postoji $s \in M$, takvo da važi $\mathbb{M} \models_a A(b, c, d, t, s)$. Neka je $g'_M(b, c, d, t) = s$. Kako je $f(b, c) = d$, neka je $g_M(b, c, t) = g'_M(b, c, f(b, c), t)$.

Ako ne važi $\mathbb{M} \models_a \exists z\, \forall u\, \exists v\, A[b, c]$, dakle u svim drugim mogućim slučajevima, neka je $f_M(c, d) = g_M(b, c, t) = m$, gde je $m \in M$ proizvoljno.

Ako je $\mathbb{M}' = (\mathbb{M}, f_M, g_M)$ ekspanzija modela $\mathbb{M}$, po konstrukciji

$$\begin{aligned}&\mathbb{M} \models_a \forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v\, A(x, y, z, u, v) \iff \\ &\mathbb{M}' \models_a \forall x\, \forall y\, \forall u\, A(x, y, f(x, y), u, g(x, y, u)),\end{aligned}$$

za svaku valuaciju $a \in M^N$. Rečenica $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v\, A$ je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiva rečenica $\forall x\, \forall y\, \forall u\, A(x, y, f(x, y), u, g(x, y, u))$.

Uvođenjem novih operacijskih simbola, problem zadovoljivosti rečenice oblika $\forall\, \exists\, \forall\, \exists$ sveden je na problem zadovoljivosti rečenice oblika $\forall\, \forall\, \forall$.

Skup formula ekvivalentnih formuli oblika $\forall x_1, \ldots \forall x_n A, n \geq 0$, gde je A formula bez kvantifikatira, uobičajeno se označava sa Π_1.

Skup formula ekvivalentnih formuli oblika $\exists x_1, \ldots \exists x_n A, n \geq 0$, gde je A formula bez kvantifikatira, uobičajeno se označava sa Σ_1.

Prethodni primer pokazuje da se problem zadovoljivosti svake rečenice može svesti na rečenice klase Π_1.

Lema 2. Za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$, postoji rečenica A^* klase Π_1 proširenog jezika $\mathcal{L}^*$ koja je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiva rečenica A. Pritom, prošireni jezik $\mathcal{L}^*$ dobija se dodavanjem novih opercijskih simbola jeziku $\mathcal{L}$.

Dokaz: Tvrđenje dokazujemo tako što rečenicu A jezika $\mathcal{L}$ prevedemo u preneksnu formu A', pa izvedemo konstrukciju iz prethodnog primjera. $\triangleleft$

Kako smo već napomenuli, formula A nije zadovoljiva ako je formula $\neg A$ logički zakon, pa kako je negacija Π_1 formule, formula klase Σ_1, prethodno tvrđenje se može preformulisati na sledeći način:

Skolemova teorema: Za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$, postoji formula A^* klase Σ_1 jezika $\mathcal{L}$ koji je proširen novim operacijskim simbolima, takva da važi

$$\models A \;\Leftrightarrow\; \models A^*.$$

Dokaz. Napomenimo da je pridruživanje $A \mapsto A^*$ efektivno: Negaciju rečenice A prevedemo u preneksni oblik A', taj prelaz je efektivan. Čitajući formulu A' sa lijeva na desno, za svaku kombinaciju blokova kvantifikatora $\forall \overrightarrow{x} \, \exists \overrightarrow{y}$, u kojima se javlja $m \geq 1$, tj. $n \geq 1$ promjenljivih, redom, uvedemo n operacijskih simbola dužine $m \geq 1$. Izvršimo supstituciju promjenljivih $\overrightarrow{y}$ odgovarajućim operacijskim simbolima, pa dobijamo formulu A''. Formula A'' je klase Π_1 i nije zadovoljiva ako i samo ako nije zadovoljiva formula $\neg A$. Kako $B \Leftrightarrow C$ ako i samo ako $\neg B \Leftrightarrow \neg C$, iz formule A'' klase Π_1, dobijamo formulu $\neg A''$ klase Σ_1, pa ako je A^* formula $\neg A''$, konačno imamo da važi, $\models A \;\Leftrightarrow\; \models A^*$, gde je A^* formula klase Σ_1. $\lhd$

Svakako najvažnija posljedica prve Skolemove teoreme jeste da ona odlučivost predikata $\models$ svodi na odlučivost tog predikata za formule klase Σ_1, u kojima učestvuju operacijski simboli.

Napominjemo da, iako efektivan, prelaz sa formule A na formulu A^*, ne donosi mnogo kada, u konkretnom modelu, treba definisati Skolemove funkcije. Ako $\mathbb{M} \models \forall x \, \exists y A(x, y)$, za svako $b \in M$, postoji neprazan skup

$$F_b = \{c \in M : A[b, c]\},$$

koji uopšte ne mora biti jednočlan, niti mora biti konačan. U definiciji funkcije f, za svako $b \in M$, treba izabrati $c \in F_b$, tako da $f(b) = c$. Dakle, za familiju nepraznih skupova $(F_b : b \in M)$, treba napraviti funkciju izbora.

Pretpostavka da svaka familija nepraznih skupova ima funkciju izbora, osim kada se radi o familiji konačnih ili bar prebrojivih skupova, važi za veoma neefektivnu pretpostavku. Ta pretpostavka naziva se *aksioma izbora*. Uvođenjem novih operacijskih simbola, ostali smo u predikatskoj logici prvog reda i tako izbegli logiku drugog reda, ali nam je sada neophodan isuviše jak metamatematički princip - aksioma izbora.

Elementarna ekvivalentncija

Ako $\mathbb{M}_1 \models A$ implicira $\mathbb{M}_2 \models A$, za svaku rečenicu A, modeli $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ jezika $\mathcal{L}$ su *elementarno ekvivalentni.* Elementarnu ekvivalenciju označavamo sa $\mathbb{M}_1 \equiv \mathbb{M}_2$.

TEOREMA 1. Ako $\mathbb{M}_1 \equiv \mathbb{M}_2$, za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{M}_1 \models A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M}_2 \models A.$$

DOKAZ. Ako, $\mathbb{M}_1 \models A$, po definiciji, $\mathbb{M}_2 \models A$. Ako nije $\mathbb{M}_1 \models A$, onda $\mathbb{M}_1 \models \neg A$, pa po definiciji $\mathbb{M}_2 \models \neg A$, tj. nije $\mathbb{M}_2 \models A$. $\lhd$

Elementarno ekvivalentni modeli jezika $\mathcal{L}$ imaju ista svojstva izražena u jeziku $\mathcal{L}$, ali se u matematičkom smislu ne mogu identifikovati, tj. nisu obavezno izomorfni.

Modeli $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ jezika $\mathcal{L}$ su *izomorfni* ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje g skupa M_1 na skup M_2, takvo da za sve $a_1, \dots, a_n \in M_1$,

$$\begin{aligned}
&r_{M_1}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow r_{M_2}(g(a_1), \dots, g(a_n)),\\
&g(f_{M_1}(a_1, \dots, a_n)) = f_{M_2}(g(a_1), \dots, g(a_n)),\\
&g(c_{M_1}) = c_{M_2},
\end{aligned}$$

za svaki predikat r, svaki operacijski simbol f i svaku konstantu c jezika $\mathcal{L}$. Izomorfne modele označavamo sa $\mathbb{M}_1 \simeq \mathbb{M}_2$.

Dakle, kada treba dokazati da je preslikavanje g izomorfizam modela $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$, treba dokazati da f zadovoljava sledeće uslove:

(1) za sve $a_1, a_2 \in M_1$, ako $g(a_1) = g(a_2)$, onda $a_1 = a_2$, tj. treba dokazati da je preslikavanje g *obostrano jednoznačno,*

(2) za svako $b \in M_2$, postoji $a \in M$, tako da $g(a) = b$, tj. treba dokazati da g preslikava skup M_1 *na* skup M_2,

(3) *prvi uslov definicije izomorfizma*, tj. treba dokazati da preslikavanje g čuva relacije modela $\mathbb{M}_1$,

(4) *drugi uslov definicije izomorfizma*, tj. treba dokazati da preslikavanje g čuva operacije modela $\mathbb{M}_1$,

(5) *treći uslov definicije izomorfizma*, tj. treba dokazati da preslikavanje g čuva istaknute elemennte modela $\mathbb{M}_1$.

Zadatak 1. Struktura $\mathbb{G} = (G, +_G, <_G, 0_G)$ je *uređena grupa*, ako je struktura $(G, +_G, 0_G)$ grupa i $\mathbb{G} \models \forall x \forall y \forall z\,((x+z<y+z) \leftrightarrow (x<y))$.

Ako je $\mathbb{R} = (R, +_R, <_R, 0_R)$ uređena aditivna grupa realnih brojeva i $\mathbb{R}^+ = (R^+, \cdot_{R^+}, <_{R^+}, 1_{R^+})$ uređena multiplikativna grupa pozitivnih realnih brojeva, dokazati da je preslikavanje $g(x) = a^x$, $a > 1$, izomorfizam uređenih grupa $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$. Da li je g izomorfizam, ako $0 < a \leq 1$?

Teorema 2. Izomorfni modeli su elementarno ekvivalentni.

Dokaz. Ako su $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ izomorfni modeli jezika $\mathcal{L}$, treba dokazati da $\mathbb{M}_1 \models A$ ako i samo ako $\mathbb{M}_2 \models A$, za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$. Međutim, rečenice nisu induktivno definisane, pa tvrđenje treba dokazati za sve formule jezika $\mathcal{L}$. Preciznije, indukcijom po složenosti formule A, treba dokazati sledeće tvrđenje:

Ako je g izomorfizam modela $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$, za svaku formulu A jezika $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{M}_1 \models_a A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{M}_2 \models_{f(a)} A,$$

za svaku valuaciju $a \in M_1^N$. Pritom, ako je $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ valuacija u modelu $\mathbb{M}_1$, $f(a) = (f(a_0), f(a_1), f(a_3), \dots)$ je valuacija u modelu $\mathbb{M}_2$.

Ako je A elementarna formula, tvrđenje važi po definiciji pojma izomorfizma. Svi induktivni koraci dokazuju se neposredno, na osnovu definicije relacije istinitosti. $\lhd$

Postoje elementarno ekvivalentni modeli koji nisu izomorfni. Takav primjer su uređenja racionalnih i realnih brojeva. Skup racionalnih brojeva je prebojiv, dok skup realnih brojeva to nije, pa je jasno da njihova uređenja ne mogu biti izomorfna.

Teorema 3. Ako $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ i $\mathbb{R} = (R, <_Q)$, onda $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}$.

Dokaz. Ako je $\mathcal{L} = \{<\}$, indukcijom po složenosti formule dokazaćemo da za svaku formulu A jezika $\mathcal{L}$,

$$\mathbb{Q} \models_a A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R} \models_a A,$$

za svaku valuaciju $a \in Q^N$. Otuda se po definiciji dobija da $\mathbb{Q} \models A$ ako i samo ako $\mathbb{R} \models A$, za svaku rečenicu jezika $\mathcal{L}$.

Ako je A elementarna formula, kako $Q \subseteq R$, trvđenje je očigledno. Zapravo, jedini interesantan korak u indukciji jeste kada formula A ima oblik $\exists x\, B$, za neku formulu B.

Ako $\mathbb{Q} \models_a \exists x\, B$, onda teorema takođe važi neposredno. Naime, onda postoji $q \in Q$, takvo da $\mathbb{Q} \models_{a(x/q)} B$, pa kako je $q \in R$ i po induktivnoj pretpostavci $\mathbb{R} \models_{a(x/q)} B$, dobijamo $\mathbb{Q} \models_a \exists x\, B$.

Obratno, ako $\mathbb{R} \models_a \exists x\, B$, onda postoji $r \in R$, takav da $\mathbb{R} \models_{a(x/r)} B$. Ali, kako da utvrdimo da je realan broj r istovremeno i racionalan?

Jedan dokaz ove teoreme počiva na činjenici da uređenje $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva dopušta *eliminaciju kvantifikatora,* tj. da za svaku formulu A jezika $\mathcal{L} = \{<\}$, postoji formula A^* bez kvantifikatora, takva da $\mathbb{Q} \models_a A$ ako i samo ako $\mathbb{Q} \models_a A^*$. To zapravo znači da se teorema svodi samo na formule jezika $\mathcal{L}$ bez kvantifikatora. $\lhd$

Uređenje racionalnih brojeva

Teorema 1. Struktura $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$ dopušta eliminaciju kvantifikatora.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule, treba dokazati da za svaku formulu A jezika $\mathcal{L} = \{<\}$, postoji formula A^*, takva da $\mathbb{Q} \models_a A$ ako i samo ako $\mathbb{Q} \models_a A^*$, za svaku valuaciju $a \in Q^N$. Kao u prethodnoj teoremi, interesantna je samo formula oblika

$$\exists x B(x, x_1, \ldots, x_n),$$

gde je B formula bez kvantifikatora.

Može se pretpostaviti da je formula B zadata u disjunktivnoj normalnoj formi. To znači da je B disjunkcija konjunkcija, gde svaka konjunkcija sadrži samo elementarne formule i njihove negacije.

Kako su sve elementarne formule oblika $x = y$ ili $x < y$, negacije se mogu eliminisati. Formula $\neg(x = y)$ može se zameniti formulom $(x < y) \vee (y < x)$, a formula $\neg(x < y)$ sa $(x = y) \vee (y < x)$.

Ako se poslije eliminacije negacija elementarnih formula, primijeme zakoni distributivnosti, formula B se dalje svodi se na disjunkciju konjunkcija elementarnih formula. Ako imamo u vidu logički zakon

$$\models \exists x\, (B_1 \vee B_2) \leftrightarrow \exists x\, B_1 \vee \exists x\, B_2,$$

formula $\exists x\, B$ svodi se na disjunkciju formula oblika $\exists x\, (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)$, gde su C_i elementarne formule. Ako promjenljiva x nije slobodna u formuli B_1,

$$\models \exists x\, (B_1 \wedge B_2) \to B_1 \wedge \exists x\, B_2,$$

pa se dokaz teoreme svodi na formule oblika $\exists x\, (C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)$, gde svaka elementarna formula C_i, za sve $i \leq k$, ima jedan od oblika

$$x < x_i,\, x = x_i,\; x_i < x.$$

Ako je neka od formula C_i jednakost, ona se takođe može eliminisati, tako što se koristi logički zakon

$$\models \exists x\,((x = y) \wedge C(x)) \leftrightarrow C(y).$$

Ostaje dakle slučaj kada se promjenljiva x javlja samo u elementarnim nejednakostima.

Ako su sve nejednakosti oblika $x < x_i$, $i \leq n$, ili ako su sve nejednakosti oblika $x_i < x$, $i \leq n$, kako u racionalnim brojevima nema ni najmanjeg, ni najvećeg elementa, u oba slučaja, takav $x \in Q$ postoji, za svaku valuaciju promjenljivih x_i, pa formulu $\exists x\,(E_1 \wedge \cdots \wedge E_n)$ možemo zamijeniti bilo kojom iskaznom tautologijom.

Ostaje slučaj nejednakosti u kojima se javljaju i gornja i donja ograničenja za x. Na primjer, ako formula $\exists x\, B$ ima oblik

$$\exists x\,((x_1 < x) \wedge (x_2 < x) \wedge (x < x_3) \wedge (x < x_4)),$$

ekvivalentan uslov koji treba da zadovoljavaju promjenljive x_1, x_2, x_3, x_4, jeste da su sva donja ograničenja manja od svih gornjih ograničenja, tj. formula A^* je formula:

$$(x_1 < x_3) \wedge (x_1 < x_4) \wedge (x_2 < x_3) \wedge (x_2 < x_4).$$

Kako je $\mathbb{Q}$ gusto uređenje, poslednje dvije formule su ekvivalentne, pa je teorema dokazana. $\triangleleft$

U dokazu prethodne teoreme koristili smo odsustvo najmanjeg i najvećeg elementa i gustinu uređenja $\mathbb{Q} = (Q, <_Q)$, pa teorema važi za svako linearno gusto uredjenje bez krajeva.

Na osnovu prethodne teoreme, svaka dva linearna gusta uredjenja bez krajeva su elementarno ekvivalentna. To znači da je $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}$.

Teorije u predikatskoj logici

Kako smo već napomenuli, kao specifična grana matematike, logika se bavi izučavanjem jezika u kojem se izražavaju matematička tvrđenja. Preciznije, ona se bavi odnosom matematičkih teorija izraženih u formalnom jeziku i matematičkih struktura u kojima se takve teorije realizuju. Razmotrićemo osnove tog odnosa, za nekoliko najvažnijih matematičkih teorija. U predikatskom računu, matematičke teorije formalizujemo skupovima rečenica, tj. skupovima formula bez slobodnih promjenljivih.

Neka je T skup rečenica i $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Ako $\mathbb{M} \models A$, za svaku rečenicu $A \in T$, rekli smo da je $\mathbb{M}$ model skupa rečenica T i koristili oznaku $\mathbb{M} \models T$. Takođe, rekli smo da je rečenica A je logička posljedica skupa rečenica T ako $\mathbb{M} \models T$ implicira $\mathbb{M} \models A$, za svaki model $\mathbb{M}$ jezika $\mathcal{L}$. Sa $T \models A$ označili smo činjenicu da je A logička posljedica skupa T.

Teorema 1. Neka je T skup rečenica jezika $\mathcal{L}$. Za svaku rečenicu A,

$$T \models A \;\Leftrightarrow\; T, \neg A \text{ nema model.}$$

Dokaz. Pretpostavimo $T \models A$. Ako skup $T, \neg A$ ima model $\mathbb{M}$, onda bi bilo $\mathbb{M} \models \neg A$ i $\mathbb{M} \models A$, a to nije moguće.

Obratno, pretpostavimo da skup $T, \neg A$ nema model. Ako je je $\mathbb{M}$ model za T, onda u $\mathbb{M}$ ne važi $\neg A$, tj. u $\mathbb{M}$ važi A. Dakle, rečenica A je istinita u svakom modelu skupa T, tj. $T \models A$. $\lhd$

Skup rečenica je *teorija*. Jezik teorije je skup svih nelogičkih simbola koji se u njoj javljaju. Ako je T skup rečenica jezika $\mathcal{L}$, sa $\mathrm{Cn}(T)$ označavamo skup svih njegovih logičkih posljedica. Ako je $\mathrm{Cn}(T) = T$, skup rečenica T je *zatvorena teorija* u jeziku $\mathcal{L}$. U daljim razmatranjima, kada govorimo o teoriji podrazumijevamo i sve njene posljedice, tj. podrazumijevamo da je teorija zatvorena.

U načelu, teorije se mogu zadati na dva načina. Prvi način, najčešći i najprikladniji, jeste da se zada konačan ili beskonačan skup aksioma: skup rečenica Γ je skup aksioma teorije T ako $\mathrm{Cn}(\Gamma) = T$.

Drugi način jeste da se teorija zada nekom klasom modela, kao skup rečenica koje zadavoljavaju svi modeli te klase, ukoliko takav skup rečenica uopšte postoji. Na primer, ako je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$, sa $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$, označavamo skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}$, koje važe u modelu $\mathbb{M}$. Teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ je *elementarna teorija* modela $\mathbb{M}$.

Elementarna teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{M})$ je kompletna, tj. za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$, ili $\mathrm{Th}(\mathbb{M}) \models A$ ili $\mathrm{Th}(\mathbb{M}) \models \neg A$. Po definiciji, svi modeli elementarne teorije su elementarno ekvivalentni.

Teorema 2. Zadovoljiv skup rečenica T je kompletan ako i samo ako svaka dva modela skupa T su elementarno ekvivalentna.

Dokaz. Neka je T kompletan skup rečenica. Ako modeli $\mathbb{M}_1$ i $\mathbb{M}_2$ skupa T nisu elementarno ekvivalentni, onda postoji rečenica A takva da $\mathbb{M}_1 \models A$ i $\mathbb{M}_2 \not\models A$. Otuda $\mathbb{M}_1 \not\models \neg A$ i $\mathbb{M}_2 \not\models A$, pa $T \not\models \neg A$ i $T \not\models A$, a to protivreči kompletnosti skupa T.

Obratno, pretpostavimo da su svaka dva modela skupa rečenica T elementarno ekvivalentna. Neka je A proizvoljna rečenica jezika $\mathcal{L}$. Po pretpostavci, T je zadovoljiv skup rečenica, pa ima model $\mathbb{M}_0$. Kako je A rečenica, $\mathbb{M}_0 \models A$ ili $\mathbb{M}_0 \models \neg A$. Ako $\mathbb{M}_0 \models A$, za svaki model $\mathbb{M}$ skupa T, $\mathbb{M} \equiv \mathbb{M}_1$, pa $\mathbb{M} \models A$, tj. $T \models A$. Analogno, ako $\mathbb{M}_0 \models \neg A$, onda $T \models \neg A$. $\triangleleft$

Zadatak 1. Neka je E teorija u jeziku bez nelogičkih simbola, tj. njen jezik je prazan skup. Aksiome te teorije su rečenice koje izražavaju refleksivnost $\forall x(x = x)$, simetričnost $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$, i tranzitivnost jednakosti $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$. Teoriju E nazivamo *teorijom jednakosti*. Dokazati da teorija jednakosti nije kompletna.

Modeli teorije jednakosti su strukture bez logičkih simbola, tj. neprazni skupovi. Njihovi izomorfizmi su obostrano jednoznačne i na funkcije.

Zadatak 2. Ako je A rečenica $\forall x \forall y\,(x = y)$, teorija $T = E \cup \{A\}$ je kompletna teorija u jeziku jednakosti.

Zadatak 3. Neka je E_0 rečenica $\exists x(x = x)$ i za svako $n > 0$, neka je E_n rečenica $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\,(\neg(y = x_1) \wedge \cdots \wedge \neg(y = x_n))$. Smisao rečenice E_n jeste da "domen modela sadrži više od $n \geq 0$ elemenata."

Dokazati da je teorija $\Gamma = E \cup \{E_n \wedge \neg E_{n+1}\}$ kompletna, za svako $n \geq 0$.

Dokazati da je skup rečenica $\Sigma = E \cup \{E_n : n \in N\}$ kompletan. Svi modeli skupa Σ su beskonačni. Pokazati da postoji kompletno proširenje teorije E različito od Γ i Σ.

Teorija grupa

Teorija grupa T_G je teorija u jeziku $\mathcal{L}_G = \{+\,, 0\}$, a njene aksiome su sledeće tri rečenice:

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z)),\\
&\forall x\,(x + 0 = x\ \wedge\ 0 + x = x),\\
&\forall x \exists y\,(x + y = 0\ \wedge\ y + x = 0).
\end{aligned}$$

Svaka struktura $\mathbb{G}$ u jeziku $\mathcal{L}_G$, u kojoj važe navedene rečenice je grupa. Logičke posljedice aksioma teorije grupa su sve rečenice jezika teorije grupa koje važe u svim grupama.

Zadatak 1. Rečenica $\forall x \forall y\,((x + y = x\ \wedge\ y + x = x) \to y = 0)$ je logička posljedica aksioma teorije grupa. Naime, u svakoj grupi neutralni element je jedinstven. Jezikom teorije grupa izraziti svojstvo: svaki element grupe ima jedinstven inverzni element.

Zadatak 2. Dokazati da su rečenice $\forall x\,(x+0=x)$ $\forall x \exists y\,(x+y=0)$ i $\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z=x+(y+z))$ aksiome teorije T_G.

Zadatak 3. Dokazati da ni rečenica $\forall x \forall y\,(x+y=y+x)$, ni njena negacija nisu logičke posljedice aksioma grupe.

Ako je x promjenljiva, izraz $\underbrace{x+\cdots x}_{n}$ označavamo sa $n \cdot x$, dokazati da rečenica $\exists x\,(n \cdot x = 0)$, nije logička posljedica aksioma teorije grupa?

Ako je $\mathbb{G}$ grupa, prirodan broj $n \geq 1$ je *red elementa* $a \in G$ ako $n \cdot a = 0$ i $m \cdot a \neq 0$, za $m < n$.

Zadatak 4. Ako je $p \geq 2$ prost broj, u jeziku teorije grupa formulisati teoriju beskonačnih komutativnih grupa čiji su svi elementi reda p. Ako imaju istu kardinalnost, svi modeli ove teorije su izomorfni. Ovo je takođe primjer kompletne teorije.

Zadatak 5. Grupa $\mathbb{G}$ je *bez torzije* ako su svi njeni elementi beskonačnog reda. Element $a \in G$ je *beskonačnog reda*, ako $na \neq 0$, za svako $n \geq 1$. Skupom formula jezika $\mathcal{L}_G$ opisati sve komutativne grupe bez torzije.

Zadatak 6. Grupa $\mathbb{G}$ je *grupa sa dijeljenjem* ako za svako $a \in G$, postoji $b \in G$, tako da $n \cdot b = a$, za svako $n \geq 1$. Skupom formula jezika $\mathcal{L}_G$ opisati sve komutativne grupe sa dijeljenjem.

Primjer 1. Grupe sabiranja cijelih, racionalnih i realnih brojeva nemaju torziju. Grupe racionalnih i realnih brojeva su grupe sa dijeljenjem. Teorija komutativnih grupa sa dijeljenjem i bez torzije je kompletna.

Teorija linearnog uređenja

Linearno uređenje je struktura $\mathbb{P} = (P, <_P)$ jezika $\mathcal{L} = \{<\}$, koja zadovoljava sledeće rečenice:

$$\forall x\, \neg(x < x),$$
$$\forall x \forall y \forall z\,(x < y \wedge y < x \rightarrow x < z),$$
$$\forall x \forall y\,(x < y \vee x = y \vee y < x).$$

Navedene rečenice su aksiome teorije linearnog uređenja T_S. Iz aksioma slijedi da, ako relacija $< \subseteq P^2$ nije prazan skup, linearno uređenje $\mathbb{P}$ ima bar dva elementa.

Linearno uređenje $\mathbb{P} = (P, <)$ je gusto ako za sve $a, b \in P$ takve da $a < b$, postoji $c \in P$, tako da $a < c < b$. Uređenje $\mathbb{P}$ ima *najmanji element,* ako postoji $a \in P$, takvo da $a < b$, za svako $b \in P$, tj. ima *najveći element,* ako postoji $a \in P$, takvo da $b < a$, za svako $b \in P$.

Zadatak 1. Formulom jezika $\mathcal{L}$ izraziti svojstvo gustine linearnog uređenja. Ako formula A izražava svojstvo gustine, dokazati da $T_S \not\models A$.

Zadatak 2. Formulisati aksiome teorije T gustog linearnog uređenja bez krajeva. Dokazati da je teorija T kompletna.

Zadatak 3. Ako je $\mathbb{Z} = (Z, <)$ uređenje cijelih brojeva, dokazati da za svako $a \in Z$, postoji najmanji b takav da $a < b$. Izraziti ovo svojstvo formulom jezika $\mathcal{L}$.

Ako su $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ linearna uređenja, takva da $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Neka je $P = P_1 \cup P_2$ i $\mathbb{P} = (P, <_P)$ uređenje u kome:

(i) Ako $a, b \in P_1$, $a <_P b$ ako i samo ako $a <_{P_1} b$,

(ii) Ako $a \in P_1$, $b \in P_2$, onda $a <_P b$,

(iii) Ako $a, b \in P_2$, $a <_P b$ ako i samo ako $a <_{P_2} b$.

Uređenje $\mathbb{P}$ je *suma linearnih uređenja* $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ i označava se sa $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$.

Zadatak 4. Dokazati da su linearna uređenja $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ elementarno ekvivalentna i nisu izomorfna. Modeli $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ jezika $\{<\}$ su iste kardinalnosti (oba su prebrojivi), elementarno su ekvivalentni i nisu izomorfni.

Ovaj pregled svojstava linearnog uređenja završavamo jednom važnom osobinom uređenja prirodnih brojeva $\omega = (N, <)$. Skup prirodnih brojeva je *dobro uređen,* tj. svaki njegov podskup ima najmanji element.

Ako je $\mathbb{P} = (P, <)$ linearno uređenje, uređenje $\mathbb{P}^* = (P, <^*)$ je linearno uređenje u kome $a <^* b$ ako i samo ako $b < a$, za sve $a, b \in P$. Na primjer, u uređenju ω, $0 < 1 < 2 < \cdots$, a u uređenju $\omega,^*$ $\cdots < 2 < 1 < 0$.

Zadatak 5. Dokazati da su ω i $\omega + \omega$, linearna dobra uređenja. Da li je uređenje $\omega + \omega^* + \omega$, dobro uređenje.

U dobrom uređenju $\mathbb{P} = (P, <_P)$, za svako $S \subseteq P$, skup S ima najmanji element. U ovoj definicii ne kvantifikuje se po elementima skupa P, već po njegovim podskupovima, tj. po unarnim relacijama skupa P. Ona je formulisana u logici drugog reda i nije jasno da li se može izraziti u jeziku $\mathcal{L} = \{<\}$, ili njegovom proširenju?

U više navrata smo pretpostavili da svaki prebrojiv skup ima dobro uređenje. Ako se ta pretpostavka proširi na sve skupove, dobija se *princip dobrog* *uređenja*. Taj princip je ekvivalentan aksiomi izbora. Sva svojstva skupova koja smo nabrojali u okviru teorije ZF prihvatljiva su svim matematičarima. Svakodnevno ih koriste, ali to posebno ne ističu, dok princip dobrog uređenja uvijek naglase i samo njega nazivaju aksiomom teorije skupova. To čine sa razlogom jer se princip dobrog uređenja ne može dokazati, niti opovrgnuti na osnovu aksioma teorije ZF.

Parcijalno uređenje

Struktura $\mathbb{P} = (P, \leq_P)$ je *parcijalno uređenje* ako je binarna relacija $\leq_P$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna:

$$\forall x\, (x \leq x)$$
$$\forall x\, \forall y\, ((x \leq y\, \wedge y \leq x) \rightarrow\, x = y)$$
$$\forall x\, \forall y\, ((x \leq y\, \wedge y \leq x) \rightarrow\, x = y).$$

Jezik parcijalnog uređenja je $\mathcal{L}_P = \{\leq\}$, a njegovi modeli, za razliku od linearnog uređenja, mogu imati i samo jedan element.

Zadatak 1 Neka je $<$ binarna relacija nepraznog skupa P i neka je $\leq$ binarna relacija definisana tako da: $a \leq b$ ako i samo ako $\neg(b < a)$, za sve $a, b \in P$. Relacija $<$ je nerefleksivna i tranzitivna ako i samo ako relacija $\leq$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Zadatak 2. U jeziku parcijalnog uređenja, formulisati svojstva maksimalnog, najvećeg, minimalnog i najmanjeg elementa.

Dokazati da parcijalno uređenje ima najviše jedan najveći element, tj. da je to logička posljedica aksioma parcijalnog uređenja.

Navesti primjer parcijalnog uređenja koje nema ni najmanji, ni najveći element, a ima minimalni i maksimalni element.

Zadatak 3. Ako je $P(x)$ skup svih podskupova skupa x, koji može biti i prazan, struktura $(P(x), \subseteq)$ je parcijalno uređenje.

Parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ je *linerano* ako $a \leq b$ ili $b \leq a$, za sve $a, b \in P$. Skup $L \subseteq P$ je *lanac* u parcijalnom uređenju $\mathbb{P}$ ako $a \leq b$ ili $b \leq a$, za sve $a, b \in L$.

Parcijalno uređenje se kao struktura prirodno javlja u svim oblastima matematike. Stoga je za matematiku važna jedna verzija principa dobrog uređenja koju je početkom dvadesetog vijeka, u terminima parcijalnog uređenja, formulisao Maks Corn. Naziva se *Cornova lema* i glasi;

Ako svaki lanac u parcijalnom uređenju ima gornje ograničenje, parcijalno uređenje ima maksimalni element.

ZADATAK 4. Ako $r_1 \subseteq r_2$, relacija r_2 je *proširenje relacije* r_1, za proizvoljne relacije r_1 i r_2, nepraznog skupa M. Dokazati da se svako konačno parcijalno uređenje može proširiti do linearnog uređenja.

Teorija polja

Aksiome teorije polja izražavamo u jeziku $\mathcal{L}_F = \{+, \cdot, 0, 1\}$, sa binarnim operacijskim simbolima $+$ i $\cdot$ i konstantama 0 i 1:

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y\,(x + y = y + x) \\
\forall x \forall y \forall z\,((x + y) + z = x + (y + z)), \\
\forall x\,(x + 0 = x), \\
\forall x \exists y\,(x + y = 0), \\
\forall x \forall y\,(x \cdot y = y \cdot x) \\
\forall x \forall y \forall z\,((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)), \\
\forall x\,(x \cdot 1 = x), \\
\forall x\,(\neg(x = 0) \to \exists y\,(x \cdot y = 1)), \\
\forall x \forall y \forall z\,((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z), \\
\neg(0 = 1).
\end{array}$$

Teorija polja T_F je skup svih logičkih posljedica navedenih rečenica. Polje je struktura jezika $\mathcal{L}_F$ sa bar dva elementa u kojoj važe sve rečenice teorije T_F.

Prototip polja jeste polje $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva, sa kojim se u matematici svakodnevno susrećemo, a zatim dolaze polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva i polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. Ta polja se ipak suštinski razlikuju i ta se razlika dobro može predstaviti sredstvima predikatske logike.

ZADATAK 1. Dokazati da su rečenice $\forall x \forall y\,((x \cdot y = 0) \to (x = 0 \vee y = 0))$ i $\forall x\,(x \cdot 0 = 0)$ logičke posljedice aksioma teorije polja.

Dokazati da rečenica $\forall x\,(x + x = 0 \to x = 0)$, nije posljedica aksioma teorije polja.

ZADATAK 2. Struktura $\mathbb{Z}_2$ jezika $\mathcal{L}_F$, čiji je domen skup $Z_2 = \{0, 1\}$, a operacije $+_2$ i $\cdot_2$ sabiranje i množenje po modulu 2, jeste polje.

U polju $\mathbb{Z}_2$ važi rečenica: $\mathbb{Z}_2 \models \forall x\,(x+x=0)$, pa kažemo da je polje $\mathbb{Z}_2$ *karakteristike* 2.

Polje $\mathbb{F}$ je *karakteristike* $n \geq 2$, ako je n najmanji prirodan broj takav da $n \cdot a = 0$, za svako $a \in F$. Polje je *karakteristike nula* ako nije karakteristike n, za svako $n \geq 2$.

Zadatak 3. Skup Z_n, ostataka po modulu $n \geq 2$, sa operacijama po modulu n i konstantama po modulu n, je struktura $\mathbb{Z}_n$ u jeziku $\mathcal{L}_F$. Dokazati da je $\mathbb{Z}_n$ polje, ako i samo ako $n \geq 2$ je prost broj.

Zadatak 4. Karakteristika polja je prost broj ili nula. Svako konačno polje karakteristike p ima p^k elemenata, za neko $k \geq 1$.

Zadatak 5. Dokazati da postoji beskonačno polje konačne karakteristike. Svako polje karakteristike nula je beskonačno.

Ako je K_p rečenica $(p \cdot 1 = 0)$, teorija polja karakteristike p je skup svih logičkih posljedica skupa rečenica T_F, K_p, za svaki prost broj $p \geq 2$. Dakle, teorija polja karakteristike p ima konačnu aksiomatizaciju.

Teorija polja karakteristike nula dobija se proširenjem teorije polja T_F rečenicama $\neg K_p$, za svaki prost broj $p \geq 2$. Može se dokazati da teorija polja karakteristike nula uopšte nema konačnu aksiomatizaciju.

Za svaku promjenljivu x, sa x^n označavamo izraz $\underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n}$. Ako se aksiome teorije polja prošire listom rečenica

$$P_k \quad \forall y_0 \,\forall y_1 \,\ldots\, \forall y_k \,(y_k \neq 0 \to \exists x\,(y_k x^k + \cdots + y_1 x + y_0 = 0)),$$

za svaki prirodan broj $k \geq 1$, dobija se teorija *algebarski zatvorenih polja*.

Smisao aksiome P_k jeste da svaki polinom stepena k ima nulu, za svako $k \geq 1$. Dakle, polje $\mathbb{F}$ je algebarski zatvoreno ako svaki polinom, sa koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$, ima nulu u polju $\mathbb{F}$.

Polje $\mathbb{Q}$ racionalnih i polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva nisu algebarski zatvorena polja, a prema osnovnoj teoremi algebre, polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, jeste algebarski zatvoreno.

Za svako polje $\mathbb{F}$ postoji "najmanje" algebarski zatvoreno polje $\mathbb{F}^*$, takvo da $F \subseteq F^*$. Pritom, ako je F prebrojiv skup, onda je i F^* prebrojiv skup. Dakle, polje $\mathbb{Q}$ ima prebrojivo algebarsko zatvorenje $\mathbb{Q}^*$. Poznato je da su svaka dva neprebrojiva algebarski zatvorena polja izomorfna, pa se na osnovu te činjenice može dokazati da je teorija polja iste karakteristike komletna.

Teorija realno zatvorenih polja

Još jedan primjer važne kompletne teorije jeste *teorija realno zatvorenih polja.* To je teorija u jeziku $\mathcal{L}_F$, čije su aksiome redom: sve aksiome teorije polja, rečenice oblika P_{2k+1}, za sve $k \geq 0$, rečenica

$$\forall x\, \exists y\, (y^2 = x \,\vee\, y^2 + x = 0),$$

kao i rečenice R_n, $n \geq 1$, oblika

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n\, (x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_n = 0).$$

Polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva je realno zatvoreno polje: svaki realan polinom neparnog stepena ima nulu, svaki pozitivan realan broj ima kvadratni korijen i svaka kvadratna forma realnih brojeva jednaka je nuli, samo ako su svi njeni sabirci jednaki nuli.

Zadatak 1. Dokazati da je svako realno zatvoreno polje beskonačno i karakteristike nula.

Primjer 1. Kvadratna jednačina sa realnim koeficijentima ima realan korijen ako i samo ako njena diskriminanta nije negativna. Ako to prevedemo na jezik teorije realnih polja, dobijamo

$$\mathbb{R} \models \exists x\, (ax^2 + bx + c = 0) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R} \models b^2 - 4ac \geq 0.$$

Formula $\exists x\, (ax^2 + bx + c = 0)$, u strukturi $\mathbb{R}$ ekvivalentna je formuli bez kvantifikatora $b^2 - 4ac \geq 0$.

To važi uopšte, za svaku formulu A jezika $\mathcal{L}_F$, postoji formula bez kvantifikatora A^* u istom jeziku, koja je u strukturi realnih brojeva ekvivalentna formuli A. Dakle, polje $\mathbb{R}$ dopušta eliminaciju kvantifikatora, pa su svaka dva realno zatvorena polja elementarno ekvivalentna, tj. teorija realno zatvorenih polja je kompletna.

Teorija uređenih polja

Ako se u teoriji realno zatvorenih polja, realni brojevi sagledavaju sa čisto algebarskog stanovišta, u teoriji uređenih polja sagledavamo ih sa stanovišta matematičke analize.

Jezik teorije uređenih polja je $\mathcal{L}_U = \{+\,,\,\cdot\,, <, 0, 1\}$, tj. to je jezik teorije polja proširen binarnim operacijskim simbolom $\{<\}$. Aksiome teorije uređenih polja su aksiome teorije polja, aksiome linearnog uređenja i sledeće dvije rečenice:

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \to (x + z < y + z)),$$
$$\forall x \forall y \forall z(0 < z \to (x < y \to (x \cdot z < y \cdot z))).$$

Dakle, uređeno polje $\mathbb{F}$ je struktura jezika $\mathcal{L}_U$ čija redukcija na jezik $\mathcal{L}_F$ je polje, redukcija na jezik linearnog uređenja $\mathcal{L}_S$ je linearno uređenje, u kojoj je relacija poretka saglasna sa operacijom sabiranja i uslovno saglasna sa operacijom množenja (aksioma U_2). Ta saglasnost izražena je navedenim rečenicama. Teoriju uređenih polja označavamo sa T_U. Njeni najvažniji modeli su polje $\mathbb{Q}$ racionalnih i polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Lema 1. $T_U \models (0 < 1)$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{F}$ uređeno polje. Po desetoj aksiomi teorije polja, $0 \neq 1$. Prema aksiomi linearnosti, $0 < 1 \vee 0 = 1 \vee 1 < 0$, pa $0 < 1 \vee 1 < 0$. Ako $1 < 0$, prema aksiomi uređenog polja, $1 + (-1) < 0 + (-1)$, pa $0 < -1$. Prema drugoj aksiomi uređenog polja, $0 \cdot (-1) < (-1) \cdot (-1)$, pa je $0 < 1$, tj. $0 = 1$, a to nije moguće. Dakle, $T_U \models 0 < 1$. $\lhd$

Zadatak 1. Dokazati da $T_U \models \forall x\,(x < x + 1)$.

Lema 2. Svako uređeno polje sadrži izomorfnu kopiju uređenog polja racionalnih brojeva.

Dokaz. Neka je $\mathbb{N} = (N, +, \cdot, 0, 1)$ struktura prirodnih brojeva (sa uobičajenim svojstvima operacija $+$ i $\cdot$ i konstanti 0 i 1) i neka je $\mathbb{F}$ uređeno polje. Ako je $\overline{0} = 0_F, \overline{1} = 1_F, \overline{2} = 1_F + 1_F, \ldots$, neka je preslikavanje $u : N \to F$ definisano sa $u(n) = \overline{n}$, za sve $n \in N$.

Na osnovu aksioma teorije polja, lako se provjerava da je $\overline{x+y} = \overline{x} +_F \overline{y}$ i $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot_F \overline{y}$, pa preslikavanje u čuva operacije $+$ i $\cdot$. Ako $\overline{x} = \overline{y}$, onda $x = y$, pa je preslikavanje u obostrano jednoznačno. To znači da svako uređeno polje sadrži izomorfnu kopiju prirodnih brojeva.

Kako je $N \subseteq Z \subseteq Q$, prethodna konstrukcija se lako može proširiti prvo na cijele, a potom i na racionalne brojeve, pa svako uređeno polje sadrži izomorfnu kopiju uređenog polja $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva. $\lhd$

Uređeno polje realnih brojeva je *kompletno.* To znači da svaki neprazan ograničen skup realnih brojeva ima supremum. Kako svako uređeno polje sadrži izomorfnu kopiju uređenog polja racionalnih brojeva, Dedekind je sječenjima dobio kompletiranje polja racionalnih brojeva i tako dokazao da, do na izomorfizam, postoji samo jedno kompletno uređeno polje - polje realnih brojeva.

Problem sa ovim Dedekindovim rezultatom je u tome što on počiva na *principu kompletnosti*: Svaki neprazan ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum. Ovdje se kvantifikacija ne vrši po elementima, već po podskupovima, tj. po unarnim relacijama skupa realnih brojeva. Dakle, princip kompletnosti je princip logike drugog reda.

Videli smo da problem logičkih zakona, u logici prvog reda nije odlučiv. Ali, on je ipak parcijalno odlučiv, zato što ima odlučivu aksiomatizaciju, pa se svi logički zakoni mogu generisati polazeći od skupa aksioma. U logici drugog reda, o logičkim zakonima znamo veoma malo. Ona nema rekurzivnu aksiomatizaciju, pa nije logički sistem u pravom smislu te riječi.

Sa stanovišta predikatske logike, polje realnih brojeva nije jedinstveno. Naime, njegova elementarna teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ ima model $\mathbb{R}^*$ koji nije izomorfan polju realnih brojeva $\mathbb{R}$. Pritom, $\mathrm{Th}(\mathbb{R}) = \mathrm{Th}(\mathbb{R}^*)$, tj. polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^*$ su elementarno ekvivalentna - imaju ista svojstva prvog reda.

Teorija brojeva

Elementarna teorija $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ strukture $\mathbb{N} = (N, +_N, \cdot_N, s_N, 0_N)$, prirodnih brojeva je *kompletna teorija brojeva.*

Jezik kompletne teorije brojeva je $\mathcal{L}_{PA} = \{+, \cdot, S, 0\}$. Dakle kompletna teorija brojeva je skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}_{PA}$ istinitih u modelu $\mathbb{N}$.

Model $\mathbb{N}$ je *standardni model* kompletne teorije brojeva. Svaki drugi model te teorije je *nestandardni model.*

Kao posljedicu stava potpunosti predikatske logike, dokazaćemo da kompletna teorija brojeva ima prebrojiv nestandardni model.

Prirodno se postavlja pitanje da li kompletna teorija brojeva ima aksiomatizaciju rekurzivnim, tj. odlučivim skupom aksioma? Najpoznatija rekurzivna aksiomatizacije teorije brojeva je *Peanova aritmetika:*

$$
\begin{array}{ll}
Q_1 & \forall x \, \neg(s(x) = 0), \\
Q_2 & \forall x \forall y \, (s(x) = s(y) \, \to \, x = y), \\
Q_3 & \forall x (\neg(x = 0) \, \to \, \exists y (x = s(y))), \\
Q_4 & \forall x \, (x + 0 = x), \\
Q_5 & \forall x \, \forall y \, (x + s(y) = s(x + y)), \\
Q_6 & \forall x \, (x \cdot 0 = 0), \\
Q_7 & \forall x \, \forall y \, (x \cdot s(y) = x \cdot y + x), \\
Q_A & A(0) \wedge \forall x \, (A(x) \to A(s(x)) \to \forall x \, A(x),
\end{array}
$$

za svaku formulu $A(x)$ jezika $\mathcal{L}_A$ sa parametrom $x \in V$.

Prve tri aksiome izražavaju svojstva funkcije sledbenika u prirodnim brojevima. Po prvoj aksiomi, unarna operacija s, ili *operacija sledbenika,* je obostrano jednoznačno preslikavanje skupa prirodnih brojeva, po drugoj aksiomi, nula nije sledbenik prirodnog broja i po trećoj aksiomi, svaki prirodan broj različit od nule je sledbenik nekog prirodnog broja.

Četvrta i peta aksioma čine rekurzivnu definiciju sabiranja prirodnih brojeva. Sabiranje se rekurzivno definiše preko funkcije sledbenika: za dati prirodan broj m, po četvrtoj aksiomi $m+0 = m$, pa ako smo izračunali $m+n$, po petoj aksiomi sledeću vrijednost $m + s(n)$ izračunavamo kao vrijednost funkcije sledbenika $s(m + n)$, za svaki prirodan broj n.

Šesta i sedma aksioma čine rekurzivnu definiciju množenja prirodnih brojeva. Množenje se rekurzivno definiše preko sabiranja: za dati prirodan broj m, po šestoj aksiomi, $m \cdot 0 = 0$, pa ako smo izračunali $m \cdot n$, po sedmoj aksiomi, sledeću vrijednost $m \cdot s(n)$ izračunavamo kao zbir $m \cdot n + n$, za svaki prirodan broj n.

Poslednja aksioma u ovom nizu je shema aksioma ili *aksioma indukcije.* To je beskonačan skup formula $\{Q_A : A(x) \in F, x \in V\}$, jezika $\mathcal{L}_{PA}$. Aksioma indukcije formalno izražava princip matematičke indukcije: ako u prirodnim brojevima važi $A[0]$ i ako $A[n]$ implicira $A[s(n)]$, za svako $n \geq 0$, onda u prirodnim brojevima važi $\forall x\, A(x)$.

Iz poštovanja prema Djuzepeu Peanu, koji je napravio prve pokušaje u formalizaciji svojstava prirodnih brojeva, navedena teorija naziva se Peanovom aritmetikom i označava sa PA.

Teorema 1. $PA \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{N})$.

Dokaz. Dovoljno je provjeriti da sve aksime PA važe u standardnom modelu $\mathbb{N}$, jer onda važe u svakom modelu teorije $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$. Dakle, sve njihove logičke posljedice važe u svakom modelu kompletne aritmetike. $\lhd$

Gedelova teorema nepotpunosti, iz 1931. godine, tvrdi da Peanova aritmetika nije kompletna. To znači da obratna inkluzija u prethodnoj teoremi ne važi, tj. kompletna teorija brojeva je prava ekstenzija Peanove aritmetike. Svaka teorija u jeziku $\mathcal{L}_{PA}$ sa rekurzivnim skupom aksioma koja sadrži Peanovu aritmetiku nije kompletna. Otuda slijedi da svako proširenje Peanove aritmetike konačnim skupom aksioma nije kompletno, pa kompletna teorija brojeva nema konačnu aksiomatizaciju nad Peanovom aritmetikom. To znači da kompletna aritmetika uop]v ste nema konačnu aksiomatizaciju. Koristeći nestandardne modele teorije brojeva, o kojima će kasnije biti reči, dokazano je da ni Peanova aritmetika nema konačan skup aksioma.

Interesantna podteorija Peanove aritmetike je Robinsonova aritmetika. To je teorija Q čije su aksiome rečenice $Q_1, \ldots, Q_7$. Teorija Q je značajna zato što se u njoj mogu izraziti sve rekurzivne funkcije, tj. u njoj se može opisati svaka procedura izračunavanja, na bilo kom računaru.

Iako se formulama teorije Q mogu predstaviti sve rekurzivne funkcije, ona ipak ne govori sve o svojstvima prirodnih brojeva. Sa druge strane, teško je zamisliti svojstvo prirodnih brojeva koje se ne može izraziti i dokazati u Peanovoj aritmetici. Mi znamo da takva svojstva postoje, jer Peanova aritmetika nije kompletna, ali je njihov praktični značaj prilično ograničen.

Napomenimo da teoriju brojeva Peano nije formulisao kao teoriju u predikatskoj logici prvog reda. Njegova aksiomatizacija sastojala se od aksioma Q_1 i Q_2 i principa indukcije izraženog u logici drugog reda:

Za svako $P \subseteq N$, ako $0 \in P$ i ako $n \in P$ implicira $s(n) \in P$, za svako $n \in N$, onda $P = N$.

Poput uređenog polja realnih brojeva, standardni model prirodnih brojeva je u Peanovoj aritmetici drugog reda jedinstveno određen: svaki model $\mathbb{M}$ je izomorfan standardnom modelu $\mathbb{N}$.

Na kraju ovog pregleda svojstava teorije brojeva, ističući značaj principa matematičke indukcije, navodimo tri njena ekvivalentna oblika: princip potpune indukcije, princip dobrog uređenja prirodnih brojeva i princip opadajućih lanaca.

Zadatak 1. Za svaku formulu $A(x)$ jezika aritmetike, logička posljedica aksioma Peanove aritmetike je *princip potpune indukcije:*

$$\forall x\, (\forall z\, (z < x \to A(z)) \to A(x)) \to \forall x\, A(x).$$

Uputstvo: Primijeniti aksiomu indukcije na formulu $\forall z\, (z < x \to A(z))$.

Zadatak 2. Za svaku formulu $A(x)$ jezika aritmetike, logička posljedica aksioma Peanove aritmetike je *princip dobrog uređenja:*

$$\exists x\, A(x) \to \exists y\, (A(y) \land \forall z\, (z < y \to \neg A(y))).$$

Uputstvo: Primijeniti princip potpune indukcije na formulu $\neg A(x)$.

Zadatak 3. Za svaku formulu $A(x)$ jezika aritmetike, logička posljedica aksioma Peanove aritmetike je *princip opadajućeg lanca:*

$$\forall x\, (A(x) \to \exists y\, (y < x \land A(y))) \to \forall x\, \neg A(x).$$

Uputstvo: Primijeniti princip dobrog uređenja.

Zadatak 4. Ako se teorija Q proširi principom dobrog uređenja prirodnih brojeva, dokazati da je princip matematičke indukcije logička posljedica tako dobijene teorije.

Sintaksa predikatske logike

Zbog semantičke neodlučivosti predikatskog računa, poseban značaj ima činjenica da on ipak ima sintaksu koja potpuno opisuje sve njegove logičke zakone. Pomoću pravila zaključivanja, oni se mogu generisati, polazeći od rekurzivnog skupa aksioma. To znači da je predikat "$\models$" *parcijalno odlučiv,* tj. postoji program koji proizvodi sve logičke zakone predikatskog računa.

Aksiome predikatske logike su dvije aksiome za implikaciju, tri za konjunkciju, tri za disjunkciju, dvije aksiome negacije i zakon isključenja trećeg. Osim tih aksioma, predikatska logika ima još dvije aksiome za kvantifikatore i pet aksioma jednakosti:

Instance iskaznih aksioma: Sve instance iskaznih aksioma su aksiome predikatskog računa prvog reda.

Aksioma univerzalnog kvantifikatora: Ako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A, formula

$$\forall x\, A \to A(x/t),$$

je aksioma predikatske logike.

Aksioma egzistencijalnog kvantifikatora: Ako je term t slobodan za promjenljivu x u formuli A, formula

$$A(x/t) \to \exists x\, A.$$

je aksioma predikatske logike.

Ograničnje na term t koje se javlja u aksiomama za kvantifikatore je neophodno. U suprotnom, postoje instance tih aksioma koje nisu valjane.

Primjer 1. Formula $\forall x \exists y\, A \to \exists y\, A(x/y)$ je instanca aksiome univerzalnog kvantifikatora, ali nije logički zakon.

Ako je $x < y$ formula A, i $\mathbb{N}' = (N, <_N)$, onda $\mathbb{N}' \models \forall x \exists y\, (x < y)$, ali ne važi $\mathbb{N}' \models \exists y\, (y < y)$, jer ne postoji $n \in N$, takav da $n < n$.

Primjer 2. Formula $\forall x\, A(y/t(x)) \to \exists y\, \forall x\, A$ je instanca aksiome egzistencijalnog kvantifikatora, ali nije logički zakon.

Ako je $x < y$ formula A i $\mathbb{N}' = (N, <_N, s_N)$, onda $\mathbb{N}' \models \forall x\,(x < s(x))$, ali ne važi $\mathbb{N}' \models \exists y\,\forall x\,(x < y)$, jer ne postoji najveći prirodan broj.

Aksiome jednakosti: Ako je f operacijski simbol dužine $k \geq 1$, r relacijski simbol dužine $n \geq 1$, x, y, z, $x_1, \ldots x_k$, $y_1, \ldots, y_n$ individualne promjenljive jezika $\mathcal{L}$, formule

E_1 $\quad \forall x\,(x = x)$,

E_2 $\quad \forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)$,

E_3 $\quad \forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \land y = z \to x = z)$,

E_4 $\quad \forall\,\overrightarrow{x}\,\forall\,\overrightarrow{y}\,(\bigwedge_{i=1}^{k}(x_i = y_i) \to f(x_1, \ldots, x_k) = f(y_1, \ldots, y_k))$,

E_5 $\quad \forall\,\overrightarrow{x}\,\forall\,\overrightarrow{y}\,(\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i = y_i) \to (r(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow r(y_1, \ldots, y_k)))$,

su aksiome predikatske logike.

Prve tri aksiome, izražavaju refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost i karakterišu jednakost kao relaciju ekvivalencije, a druge dvije, njenu saglasnost sa operacijama i relacijama svakog modela jezika $\mathcal{L}$.

Predikatska logika ima tri pravila izvođenja, modus ponens i dva *Bernajsova pravila* za uvođenje kvantifikatora:

Modus ponens: Ako su A i B formule,

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Pravilo univerzalnog kvantifikatora: Ako su A i B formule i promjenljiva x nije slobodna u formuli A,

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x B}$$

promjenljiva x nije slobodna u formuli A.

Pravilo egzistencijalnog kvantifikatora: Ako su A i B formule i promjenljiva x nije slobodna u formuli B,

$$\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$$

Pojmovi dokaza, dokaza iz hipoteza, teoreme i sintaksne posljedice se u predikatskom računu definišu isto kao u iskaznom računu. Jedina razlika je u primjeni novih pravila.

Neka je Γ skup formula, A formula jezika $\mathcal{L}$ i $n \geq 1$ prirodan broj. Konačan niz formula $(A_1, \ldots, A_n)$ je *dokaz formule A iz pretpostavki* Γ ako $A_n = A$ i za svako $k \leq n$, formula A_k je aksioma ili $A_k \in \Gamma$ ili, po nekom od pravila izvođenja, A_k slijedi iz prethodnih članova niza.

Formula A je *sintaksna posljedica* skupa formula Γ, u oznaci $\Gamma \vdash A$, ako A ima dokaz iz pretpostavki Γ. Kada je Γ prazan skup, formula A je *teorema* predikatskog računa, u oznaci $\vdash A$.

Po definiciji dokaza, ako $\Gamma \subseteq \Sigma$ i $\Gamma \vdash A$ onda $\Sigma \vdash A$, tj. u predikatskoj logici važi pravilo slabljenja. Takođe, kako je dokaz iz hipoteza konačan niz, ako $\Sigma \vdash A$, postoji konačan skup formula $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ takav da $\Sigma_0 \vdash A$.

Pravilo generalizacije

Teorema 1. U predikatskom računu važi *pravilo generalizacije:* za svaku formulu A jezika $\mathcal{L}$,

$$\frac{A}{\forall x A}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je formula B instanca bilo koje iskazne aksiome, u kojoj promjenljiva x nije slobodna, onda redom imamo:

A,	(pretpostavka)
$A \to (B \to A)$,	(aksioma implikacije)
$B \to A$,	(modus ponens)
$B \to \forall x\, A$,	(pravilo univerzalnog kvant.)
B,	(aksioma)
$\forall x\, A$.	(modus ponens)

Kako promjenljiva x nije slobodna u formuli B, uslov za primjenu pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora je ispunjen. $\lhd$

Zadatak 1. Ako se u predikatskom računu Bernajsova pravila zamijene pravilom generalizacije i dodaju aksiome

$$\forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x\, B),$$
$$\forall x\, (B \to A) \to (\exists x\, B \to A),$$

promjenljiva x nije slobodna u formuli A, dobija se logika sa istim skupom teorema.

Teorema 2. Za svaku formulu A, važe De Morganovi zakoni:

$$\vdash \forall x A \leftrightarrow \neg\exists x \neg A,$$

$$\vdash \exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A.$$

Dokaz. Dokaz formule $\exists x A \to \neg\forall x\neg A$, je sledeći niz formula

$\forall x\neg A \to \neg A$,	(aksioma univerzalnog kvant.)
$\neg\neg A \to \neg\forall x\neg A$,	(slaba kontrapozicija)
$A \to \neg\neg A$,	(slaba dvojna negacija)
$A \to \neg\forall x\neg A$,	(tranzitivnost implikacije)
$\exists x A \to \neg\forall x\neg A$.	(pravilo egzistencijalnog kvant.)

Uslov za primjenu aksiome univerzalnog kvantifikatora je ispunjen budući da je promjenljiva x slobodna za samu sebe u formuli $\neg A$. Promjenljiva x nije slobodna u formuli $\neg\forall x\neg A$, pa je uslov za primjenu pravila za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora takođe ispunjen.

Tvrđenje $\vdash \forall x A \to \neg\exists x\neg A$ dobija se kontrapozicijom iz prethodnog tvrđenja za slučaj formule $\neg A$.

Tvrđenje $\vdash \neg\exists x\neg A \to \forall x A$ dobijamo koristeći aksiomu za egzistencijalni kvantifikator. Njegov dokaz je sledeći niz formula:

$\neg A \to \exists x\neg A$,	(aksioma egzistencijalnog kvant.)
$\neg\exists x\neg A \to \neg\neg A$,	(slaba kontrapozicija)
$\neg\neg A \to A$,	(jaka dvojna negacija)
$\neg\exists x\neg A \to A$,	(tranzitivnost implikacije)
$\neg\exists x\neg A \to \forall x A$.	(pravilo univerzalnog kvant.)

Kako je promjenljiva x slobodna za samu u sebe u formuli $\neg A$, ispunjen je uslov aksiome egzistencijalnog kvantifikatora, a kako promjenljiva x nije slobodna u formuli $\neg\exists x\neg A$, ispunjen je uslov za primjenu pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

Tvrđenje $\vdash \neg\forall x\neg A \to \exists x A$ dobija se kontrapozicijom iz prethodnog tvrđenja za slučaj formule $\neg A$. $\lhd$

Lema 1. Za svaku formulu A, važi: $\vdash \exists y\forall x\, A \to \forall x\exists y\, A$.

Dokaz. Dokaz ovog tvrđenja je niz formula: $\forall x\, A \to A$, $A \to \exists y\, A$, $\forall x\, A \to \exists y\, A$, $\forall x\, A \to \forall x\exists y\, A$, $\exists y\forall x\, A \to \forall x\exists y\, A$.

Prva formula je aksioma univerzalnog, a druga egzistencijalnog kvantifikatora. Treća se dobija iz prve dve po tranzitivnosti, četvrta uvođenjem univerzalnog, a peta egzistencijalnog kvantifikatora. Pritom, uslovi za primjenu svake od aksioma i svakog od pravila su ispunjeni. $\lhd$

Zadatak 2. Ako je promjenljiva y slobodna za x u formuli A,

$$\vdash \forall x\, A \to \forall y\, A(x/y),$$
$$\vdash \exists x\, A \to \exists y\, A(x/y).$$

Lema 2. Dokazati da za proizvoljne formule A i B, u predikatskom računu važe sledeća pravila:

$$\frac{A \to B}{\forall x A \to \forall x B} \qquad \frac{A \to B}{\exists x A \to \exists x B}$$

Ako pretpostavimo $A \to B$, onda redom dobijamo: po aksiomi univerzalnog kvantifikatora, $\forall x\, A \to A$; po pretpostavci, $A \to B$; po tranzitivnosi, $\forall x\, A \to B$; kako x nije slobodna u formuli $\forall x\, A$, po pravilu za uvođenje univerzalnog kvantifikatora, $\forall x\, A \to \forall x\, B$. Na isti način, polazeći od aksiome egzistencijalnog kvantifikatora, po pravilu za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora, dobijamo da važi i drugo pravilo. $\lhd$

Teorema 1. Za svaku formulu $A(x_1, \dots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}$,

$$\vdash A(x_1, \dots, x_n) \;\Leftrightarrow \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A(x_1, \dots, x_n).$$

Dokaz. Ako pretpostavimo $\vdash A$, ponavljanjem pravila generalizacije dobijamo $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$. Obratno, ako pretpostavimo $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$, kako je promjenljiva x_k, $1 \leq k \leq n$, slobodna za sebe samu u formuli A, zbog aksiome univerzalnog kvantifikatora, u n koraka dobijamo $\vdash A$. $\lhd$

Formula $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A(x_1, \dots, x_n)$ je *univerzalno zatvorenje* formule A. Primetimo da prethodna teorema ne tvrdi da je formula dokazivo ekvivalentna svom univerzalnom zatvorenju.

Zadatak 3. Postoji formula A za koju ne važi $\vdash A \leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$.

Lema o novim konstantama

Ako je $\mathcal{L}'$ proširenje jezik $\mathcal{L}$, onda prirodno skup svih teorema T' jezika $\mathcal{L}'$ sadrži skup T svih teorema jezika $\mathcal{L}$. Međutim, samo po sebi nije jasno da li postoji formula A jezika $\mathcal{L}$, takva da $A \in T'$ i $A \notin T$. Odnosno, može li se u novom, bogatijem jeziku i sa jačim sredstvima, dokazati nova teorema starog jezika? Odgovor je negativan, takva proširenja su konzervativna, ona ne mijenjaju skup teorema polaznog jezika.

Jezik teorije T je skup nelogičkih simbola koji se javljaju u formulama teorije T. Ako je $T \subseteq T'$, teorija T' je *konzervativno proširenje* teorije T, ako za svaku formulu A jezika teorije T, $T' \vdash A$ implicira $T \vdash A$.

Lema o novoj konstanti: Ako je c konstanta koja se ne javlja u formuli A,

$$\vdash A(x/c) \;\Leftrightarrow \vdash A,$$

za svaku promjenljivu x.

Dokaz. Ako $\vdash A$, po pravilu generalizacije $\forall x\, A$, pa na osnovu aksiome univerzalnog kvantifikatora dobijamo $\vdash A(x/c)$.

Suštinu leme o novoj konstanti izražava drugi dio tvrđenja. Ako formulu $A(x/c)$ dokažemo za konstantu c koja se ne javlja u formuli A, time smo dokazali A.

Po pretpostavci, neka je $(A_1, \ldots, A_n)$ dokaz formule $A(x/c)$, Izaberimo promjenljivu y koja se ne javlja u navedenom dokazu i sva javljanja konstante c zamijenimo sa y. Tako se dobija niz $(A_1(c/y), \ldots, A_n(c/y))$, čiji je poslednji član $A_n(c/y) = A(c/y)$, koji jeste dokaz formule $A(c/y)$. Naime, sve kalkulacije sa konstantama i promjenljivim ostaju iste, po promjenljivoj y se ne kvantifikuje, a sve supstitucije koje se javljaju u aksiomama, kao i primjena svih pravila izvođenja, ostaju korektni, pa imamo $\vdash A(c/y)$.

Kako je $A(c/y)$ teorema jezika $\mathcal{L}$, po pravilu generalizacije $\forall y\, A(c/y)$, na osnovu $\forall y\, A(c/y) \to A(c/y)(y/x)$, jer x je slobodna u $A(c/y)$ (aksioma univerzalnog kvantifikatora), dobijamo $A(c/y)(y/x)$, a to je formula A, pa je formula A teorema jezika $\mathcal{L}$. $\lhd$

Lema o novim simbolima: Ako formula A jezika $\mathcal{L}$ koja ima dokaz u proširenom jeziku $\mathcal{L}'$, onda A ima dokaz u jeziku $\mathcal{L}$.

Dokaz. Pretpostavimo da formula A jezika $\mathcal{L}$ ima dokaz u proširenom jeziku $\mathcal{L}'$.

Ako je jezik $\mathcal{L}'$ dobijen dodavanjem novih konstanti, svaku novu konstantu u dokazu formule A, zamijenimo novom promjenljivom, koja se u njemu ne javlja. Tako dobijeni niz je dokaz formule A u jeziku $\mathcal{L}$.

Ako je jezik $\mathcal{L}'$ dobijen dodavanjem novih operacijskih simbola jeziku $\mathcal{L}$, u dokazu formule A u jeziku $\mathcal{L}'$, sve terme koji počinju novim opercijskim simbolom zamijenimo (jednom istom) novom promjenljivom, koja se u tom dokazu ne javlja. Tako dobijeni niz je dokaz formule A u jeziku $\mathcal{L}$.

Kada je jezik $\mathcal{L}'$ dobijen dodavanjem novih relacijskih simbola jeziku $\mathcal{L}$, u dokazu formule A u jeziku $\mathcal{L}'$, sve elementarne formule koje se odnose na nove simbole, zamijenimo (jednom istom) rečenicom jezika $\mathcal{L}$. Tako dobijeni niz formula je dokaz formule A u jeziku $\mathcal{L}$. $\lhd$

Teorema dedukcije u predikatskoj logici

Teorema dedukcije, u sasvim opštem vidu i bez ikakvih ograničenja, ne važi u predikatskom računu.

Primjer 1. Ako pretpostavimo formulu $x = 0$, primjenom generalizacije, dobija se $\forall x\,(x = 0)$, pa dakle $(x = 0) \vdash \forall x\,(x = 0)$. Primenom teoreme dedukcije dobili bi smo $\vdash (x = 0) \to \forall x\,(x = 0)$, a to nije valjana formula.

U standardnom modelu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, svaka valuacija, za koju je vrijednost promjenljive x jednaka nuli, zadovoljava formulu $x = 0$. Dakle, pretpostavka $x = 0$ je zadovoljena, ali u modelu $\mathbb{N}$ nipošto ne važi rečenica $\forall x\,(x = 0)$.

Iz takvih razloga, teoremu dedukcije primjenjivaćemo samo u slučaju kada su sve pretpostavke rečenice.

Teorema dedukcije: Ako je Γ, A skup rečenica i B formula

$$\Gamma, A \vdash B \;\;\Rightarrow\;\; \Gamma \vdash A \to B.$$

Dokaz. Postupamo kao u iskaznom računu, tj. tvrđenje dokazujemo indukcijom po dužini dokaza. Jedina razlika u tom dokazu je u tome što u induktivnom koraku imamo i dva pravila za uvođenje kvantifikatora.

Neka je $n \geq 1$ prirodan broj. Pretpostavimo da (induktivna pretpostavka) ako formula C ima dokaz iz pretpostavki Γ, A dužine $k \leq n$, onda $\Gamma \vdash A \to C$, za svaku formulu C.

Pretpostavimo sada da formula B ima dokaz $(B_1, \ldots, B_{n+1})$, dužine $n + 1$, iz pretpostavki Γ, A. Po definiciji dokaza, formula $B = B_{n+1}$ je aksioma ili pripada skupu Γ, A ili po pravilima izvođenja slijedi iz prethodnih članova niza $(B_i : 1 \leq i \leq n)$. modus ponensu sledi iz formula B_i i B_j, za neke $i, j \leq n$. Ako je formula B aksioma ili pripada skupu Γ, A ili je dobijena po modus ponensu iz formula B_i i B_j, za neke $i, j \leq n$, postupamo isto kao u iskaznoj logici.

Neka je B formula oblika $C \to \forall x\, D$ dobijena je primenom pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora na formulu B_k, $k \leq n$, oblika $C \to D$, gde x nije slobodna u formuli C. Po induktivnoj pretpostavci $A \to B_k$ ima dokaz iz hipoteza Γ. Kako je $(A \to B_k) \to (A \wedge C \to D)$ instanca iskazne teoreme, po modus ponensu, dobijamo $(A \wedge C) \to D$ i pritom, kako je A rečenica, promjenljiva x nije slobodna u formuli $A \wedge C$. Primenom pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora dobijamo $(A \wedge C) \to \forall x\, D$, tj. $A \to (C \to \forall x\, D)$, a to konačno znači da formula $A \to B$ ima dokaz iz hipoteza Γ.

Preostaje još mogućnost da formula B ima oblik $\exists x\, C \to D$ i dobijena je primjenom pravila za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora na formulu B_k, $k \leq n$, oblika $C \to D$, gde x nije slobodna u formuli D. Po induktivnoj pretpostavci $A \to B_k$ ima dokaz iz hipoteza Γ. Kako je $(A \to B_k) \to (C \to (A \to D))$ instanca iskazne teoreme, po modus ponensu, dobijamo $C \to (A \to D)$ i pritom, kako je A rečenica, promjenljiva x nije slobodna u formuli $A \to D$. Primjenom pravila za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora dobijamo $\exists x\, C \to (A \to D)$, tj. $A \to (\exists x\, C \to D)$, a to konačno znači da formula $A \to C_i$ ima dokaz iz hipoteza Γ. $\lhd$

Teorema o preneksnom obliku

U okviru rasprave o semantici predikatske logike, dokazali smo da svaka formula ima ekvivalentan preneksni oblik. Na osnovu toga, poslije dokaza stava potpunosti, mogli bi smo konstatovati da za svaku formulu A postoji formula B bez kvantifikatora takva da

$$\vdash A \leftrightarrow Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, B.$$

Ipak, smatramo dobrom vježbom, da se teorema o preneksnoj formi dokaže i sintaksnim sredstvima. Pritom, u indukciji po složenosti formule, koristimo iste odnose kvantifikatora i iskaznih veznika, koje sada treba dokazati.

Lema o supstituciji ekvivalentnih formula: Ako je $A(B/C)$ formula koja se iz formule A dobija supstitucijom nekih, ne obavezno svih, javljanja njene potformule B formulom C, onda

$$\vdash B \leftrightarrow C \;\Rightarrow\; \vdash A \leftrightarrow A(B/C).$$

Dokaz. Za date formule B i C, tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule A. Postupamo isto kao u iskaznoj logici, osim u slučaju kada formula A ima oblik $\forall x\, D$ ili $\exists x\, D$. Po induktivnoj pretpostavci, ako $\vdash B \leftrightarrow C$, onda $\vdash D \leftrightarrow D(B/C)$, pa ako na tu formulu primijenimo jedno od ranije dokazanih pravila

$$\frac{A \to B}{\forall x A \to \forall x B} \qquad \frac{A \to B}{\exists x A \to \exists x B}$$

neposredno dobijamo $\vdash \forall x\, D \leftrightarrow \forall x\, D(B/C)$ i $\exists x\, D \leftrightarrow \exists D(B/C)$. $\lhd$

Lema o preimenovanju vezanih promjenljivih: Ako formula A ne sadrži promjenljivu y,

$$\vdash \forall x\, A \leftrightarrow \forall y\, A(x/y),$$
$$\vdash \exists x\, A \leftrightarrow \exists y\, A(x/y).$$

Dokaz. Prema aksiomi univerzalnog kbantifikatora, kako se promjenljiva y ne javlja u formuli A, $\vdash \forall x\, A \to A(x/y)$, pa kako x nije slobodna u formuli $\exists x\, A$, primjenom pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora dobijamo $\vdash \forall x\, A \to \forall y\, A(x/y)$.

Obratno, kako je promjenljiva x slobodna za y u formuli $A(x/y)$, prema aksiomi univerzalnog kvantifikatora, $\vdash \forall y\, A(x/y) \to A(x/y)(y/x)$; kako je $A(x/y)(y/x)$ formula A, $\vdash \forall y\, A(x/y) \to A$; primjenom pravila za uvođenje univerzalnog kvantifikatora, $\vdash \forall y\, A(x/y) \to A$.

Drugi dio tvrđenja, dokazuje se na isti način, primjenom aksiome i pravila za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora. $\lhd$

Zadatak 1. Za proizvoljne formule A i B,

$$\vdash \exists x\, A \vee \exists x\, B \leftrightarrow \exists x\, (A \vee B),$$
$$\vdash \forall x\, A \wedge \forall x\, B \leftrightarrow \forall x\, (A \wedge B).$$
$$\vdash \neg \forall x\, A \leftrightarrow \exists x\, \neg A,$$
$$\vdash \neg \exists x\, A \leftrightarrow \forall x\, \neg A.$$

Zadatak 2. Ako promjenljiva x nije slobodna u formuli B, za svaku formulu A,

$$\vdash (\forall x\, A \to B) \leftrightarrow \exists x\, (A \to B),$$
$$\vdash (\exists x\, A \to B) \leftrightarrow \forall x\, (A \to B).$$

Zadatak 3. Ako promjenljiva x nije slobodna u formuli A, za svaku formulu B,

$$\vdash (A \to \forall x\, B) \leftrightarrow \forall x\, (A \to B),$$
$$\vdash (A \to \exists x\, B) \leftrightarrow \exists x\, (A \to B).$$

Zadatak 4. Ako promjenljiva x nije slobodna u formuli B, za svaku formulu A,

$$\vdash \exists x\, A \wedge B \leftrightarrow \exists x\, (A \wedge B),$$
$$\vdash \forall x\, A \wedge B \leftrightarrow \forall x\, (A \wedge B).$$

Zadatak 5. Ako promjenljiva x nije slobodna u formuli B, za svaku formulu A,

$$\vdash \forall x\, A \vee B \leftrightarrow \forall x\,(A \vee B),$$
$$\vdash \exists x\, A \vee B \leftrightarrow \exists x\,(A \vee B).$$

Teorema o preneksnom obliku: Za svaku formul A, postoji formula u preneksnom obliku A^* takva da $\vdash A \leftrightarrow A^*$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule A. Ako je A elementarna formula, tvrđenje važi samo po sebi. Ako je A formula oblika $\neg B$, primjenjujemo tvrđenje o negaciji kvantifikatora. Ako formula A ima jedan od oblika $B \wedge C$, $B \vee C$ ili $B \to C$, preimenovanjem vezanih promjenljivih i supstitucijom ekvivalentnih formula stvaraju se uslovi za primjenu distributivnosti kvantifikatora i odgovarajućih iskaznih veznika. U slučaju formule A oblika $\exists x\, B$, formula A^* je $\exists x\, B^*$. Kada je A oblika $\forall x\, B$, formula A^* je $\forall x\, B^*$. Dakle, za svaku formulu A, $\vdash A \leftrightarrow A^*$. $\lhd$

Korektnost predikatske logike

Sintaksu predikatske logike definisali smo tako da generiše valjane formule i samo takve formule, tj. tako da bude korektna i potpuna u odnosu na semantiku.

Teorema korektnosti predikatske logike: Svaka teorema je logički zakon.

Dokaz. Teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti dokaza. Treba dokazati da su sve aksiome logički zakoni i da pravila zaključivanja čuvaju logičke zakone. U odeljku logički zakoni u predikatskoj logici, dokazali smo da su sve instance tautologija logički zakoni, kao i da modus ponens čuva logičke zakone. U odeljku o logičkim svojstvima kvantifikatora, dokazali smo da su aksiome kvantifikatora logički zakoni, da Bernajsova pravila čuvaju logičke zakone i da su aksiome jednakosti E_4 i E_5 logički zakoni.

Preostaju samo aksiome jednakosti E_1, E_2 i E_3. U svakoj interpretaciji, simbol jednakosti definišemo kao *stvarnu jednakost* na nepraznom skupu M, tj. kao relaciju $\{(a, a) : a \in M\}$. Kako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna na svakom nepraznom skupu M, aksiome jednakosti su logički zakoni. $\lhd$

Opšta teorema korektnosti: Za svaki skup rečenica Σ, A jezika $\mathcal{L}$,

$$\Sigma \vdash A \;\Rightarrow\; \Sigma \models A.$$

Dokaz. Ako $\Sigma \vdash A$, kako je dokaz konačan niz, postoji konačan skup $\Sigma_0 = \{A_1, \dots, A_n\}$ takav da $\Sigma_0 \vdash A$. Skup Σ je skup rečenica, pa na osnovu teoreme dedukcije, u n koraka dobijamo teoremu

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to A) \dots)).$$

Neka je $\mathbb{M}$ model skupa rečenice Σ, tj. $\mathbb{M} \models A_1, \dots, \mathbb{M} \models A_n$. Prema stavu korektnosti, prethodna teorema važi u svakom modelu, pa

$$\mathbb{M} \models A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to A) \dots)).$$

Otuda, po definiciji istinitosti implikacije, u n koraka dobijamo $\mathbb{M} \models A$, tj. $\Sigma \models A$. $\lhd$

Skup formula Σ je *konzistentan* ili *neprotivrečan* ako ne postoji formula A za koju $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash \neg A$. U protivnom, Σ je *nekonzistentan* ili *protivrečan* skup formula. Skup rečenica je *zadovoljiv*, ako je svaka njegova formula zadovoljiva.

Zadatak 1. Ako je Σ nekonzistentan skup formula, onda $\Sigma \vdash A$, za svaku formulu A.

Zadatak 2. Skup rečenica je neprotivrečan ako i samo ako svaki njegov konačan podskup je neprotivrečan.

Teorema korektnosti predikatske logike: Zadovoljiv skup rečenica je konzistentan.

Dokaz. Pretpostavimo da zadovoljiv skup rečenica Σ nije konzistentan, tj. da postoji rečenica A takva da $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash \neg A$. Ako je $\mathbb{M}$ model skupa Σ, to bi značilo da $\mathbb{M} \vdash A$ i $\mathbb{M} \vdash \neg A$, a to nije moguće. $\lhd$

Zadatak 3. Ako se konstanta c ne javlja u A, B i skupu formula Σ, onda $\Sigma, A(x/c) \vdash B$ implicira $\Sigma, \exists x\, A \vdash B$.

Zadatak 4. Ako se konstanta c ne javlja u skupu formula Σ, za svaku formulu A, $\Sigma \vdash A(x/c)$ implicira $\Sigma \vdash \forall x\, A(x)$.

Potpunost predikatske logike

Dokazaćemo teoremu potpunosti predikatske logike: svaki neprotivrečan skup rečenica je zadovoljiv. Postupamo kao u iskaznoj logici: neprotivrečan skup rečenica Σ proširujemo do kompletnog skupa T, za koji konstruišemo model. Razlika je u izboru kompletiranja koje ovde mora da zadovoljava uslov *egzistencijalne zatvorenosti*: za svaku rečenicu oblika $\exists x\, A$, ako $T \vdash \exists x\, A$ onda u jeziku $\mathcal{L}$ postoji konstanta c za koju $T \vdash A(x/c)$.

Poput logičke kompletnosti definišemo i sintaksnu kompletnost: konzistentan skup rečenica Σ je *kompletan,* ako $\Sigma \vdash A$ ili $\Sigma \vdash \neg A$, za svaku rečenicu A.

Zadatak 1. Ako je skup formula Σ konzistentan, bar jedan od skupova Σ, A ili $\Sigma, \neg A$ je konzistentan, za svaku formulu A.

Zadatak 2. Ako su skupovi formula $T_0, T_1, \ldots$ konzistentni i $T_i \subseteq T_{i+1}$, za sve $i \in N$, onda je $\bigcup_{i \in N} T_i$ konzistentan.

Lema o kompletiranju: Svaki konzistentan skup rečenica ima kompletno proširenje.

Dokaz. Neka je $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ prebrojavanje svih formula jezika $\mathcal{L}$ i T neprotivrečan skup formula. Neka je $T_0 = T$ i

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i, A_i & \text{ako je } T_i, A_i \text{ konzistentan,} \\ T_i, \neg A_i & \text{inače.} \end{cases}$$

za sve $i \in N$. Kako su skupovi T_i konzistentni i $T_i \subseteq T_{i+1}$, za sve $i \in N$, skup $\bigcup_{i \in N} T_i$ je konzistentan, a kako po konstrukciji sadrži A_i ili $\neg A_i$, za sve $i \in N$, ta unija je kompletan skup formula koji proširuje skup T. $\lhd$.

Ako jezik $\mathcal{L}$ nije prebrojiv, u prethodnoj teoremi koristimo princip linearnog dobrog uređenja, pa dokaz ostaje praktično isti.

Lema 1. Ako je T kompletan skup formula, A i B rečenice jezika $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} T \vdash A \wedge B \ &\Leftrightarrow\ T \vdash A \text{ i } T \vdash B, \\ T \vdash A \vee B \ &\Leftrightarrow\ T \vdash A \text{ ili } T \vdash B, \\ T \vdash \neg A \ &\Leftrightarrow\ T \nvdash A, \\ T \vdash A \rightarrow B \ &\Leftrightarrow\ T \nvdash A \text{ ili } T \vdash B. \end{aligned}$$

Dokaz. Prvo tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo $T \vdash A \vee B$. Ako $T \nvdash A$ i $T \nvdash B$, zbog kompletnosti skupa T, imamo $T \vdash \neg A$ i $T \vdash \neg B$, pa $T \vdash \neg(A \vee B)$, a to nije moguće, jer T je konzistentan skup. Slično se dokazuju sva preostala tvrđenja. $\lhd$

Lema 2. Pretpostavimo da kompletan skup formula T jezika $\mathcal{L}$ zadovoljava uslov: ako $T \vdash \exists x\, A$ onda $T \vdash A(x/t)$. Tada važi

$$T \vdash \exists x\, A \;\Leftrightarrow\; T \vdash A(x/t),$$

$$T \vdash \forall x\, A \;\Leftrightarrow\; T \vdash A(x/t),$$

gde je t term jezika $\mathcal{L}$ slobodan za promjenljivu x u formuli A.

Dokaz. Prvi dio tvrđenja slijedi iz pretpostavke, sa jedne, i aksiome egzistencijalnog kvantifikatora, sa druge strane.

Pretpostavimo da $T \nvdash \forall x\, A$. Zbog kompletnosti skupa T, $T \vdash \neg\forall x\, A$, pa po De Morganovom zakonu, $T \vdash \exists x\, \neg A$. Po pretpostavci, term t je slobodan za promenljivu x u formuli $\neg A$, pa $T \vdash \neg A(x/t)$. Skup T je kompletan pa $T \nvdash A(x/t)$. Dakle, $T \vdash A(x/t)$ implicira $T \vdash \forall x\, A$. Obratno tvrđenje slijedi iz aksiome univerzalnog kvantifikatora. $\lhd$

Lema 3. Ako je y promjenljiva koja se ne javlja u konzistentnom skupu formula T, $\exists x\, A$, onda je skup formula T, $\exists x\, A$, $A(x/y)$ konzistentan.

Dokaz. Prema lemi o konstanti, sve slobodne promjenljive u skupu formula T, $\exists x\, A$ možemo zamijeniti novim konstantama, tj. možemo pretpostaviti da je T, $\exists x\, A$ skup rečenica. Ako skup T, $\exists x\, A$, $A(x/y)$ nije konzistentan, onda $T, \exists x\, A \vdash \neg A(x/y)$, pa se prema pravilu generalizacije dobija $T, \exists x\, A \vdash \forall y\, \neg A(x/y)$. Otuda, poslije preimenovanja promjenljivih imamo $T, \exists x\, A \vdash \forall x\, \neg A$; pa konačno imamo $T, \exists x\, A \vdash \neg\exists x\, A$, a to protivreči pretpostavci da je skup $T, \exists x\, A$ konzistentan. $\lhd$

Egzistencijalno zatvoreni skupovi

Skup formula T jezika $\mathcal{L}$ je *egzistencijalno zatvoren* ako za svaku formulu A jezika $\mathcal{L}$

$$T \vdash \exists x\, A \;\Rightarrow\; T \vdash \exists A(x/c),$$

za neki simbol konstante $c \in \mathcal{L}$.

Teorema 1. Svaki konzistentan skup formula datog jezika ima kompletno egzistencijalno zatvoreno proširenje u jeziku sa novim konstantama.

Dokaz. Pretpostavimo da je T konzistentan skup formula jezika $\mathcal{L}$ i da je $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ proširenje jezika $\mathcal{L}$ novim simbolima konstanti. Neka je $(A_0, A_1, A_2, \dots)$ prebrojavanje svih formula jezika $\mathcal{L}'$ i $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ prebrojavanje novih konstanti. Ako je $T_0 = T$ i za svako $i \geq 0$,

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i, \neg A_i & \text{ako je } T_i, A_i \text{ nekonzistentan,} \\ \\ T_i, \exists x B, B(x/c_j) & \text{ako je } T_i, A_i \text{ konzistentan,} \\ & \text{formula } A_i \text{ ima oblik } \exists x B \\ & \text{i } c_j \text{ je prva konstanta koja} \\ & \text{se ne javlja u skupu } T_i, A_i, \\ \\ T_i, A_i & \text{inače,} \end{cases}$$

skupovi formula T_i su konzistentni, za svako $i \in N$, a skup $\bigcup_{i \in N} T_i$ je kompletan skup formula.

Za svako $i \in N$, prema prethodnoj lemi i prema lemi o konstanti, ako je skup formula $T_i, \exists x\, B$ konzistentan, onda je $T_i, \exists x\, B,\ B(x/c_j)$ konzistentan skup formula. Dakle, skup formula T_i je konzistentan, za svako $i \in N$.

Kako $T_i \subseteq T_{i+1}$, za sve $i \in N$, skup $\bigcup_{i \in N} T_i$ je konzistentan, a po konstrukciji on je kompletan i egzistencijalno zatvoren skup formula koji sadrži dati skup T. $\lhd$

Kanonski model

Nad skupom svih zatvorenih terma jezika $\mathcal{L}$, konstruisaćemo *kanonski model* kompletnog egzistencijalno zatvorenog skupa rečenica.

Teorema 2. Svaki kompletan egzistencijalno zatvoren skup rečenica je zadovoljiv.

Dokaz. Neka je T kompletan egzistencijalno zatvoren skup rečenica i S skup svih zatvorenih terma jezika $\mathcal{L}$. Kako jezik sadrži bar jedan simbol konstante, skup S nije prazan.

Neka je $\sim$ binarna relacija skupa S, definisana tako da, za proizvoljne $u, t \in S$,

$$u \sim t \;\Leftrightarrow\; T \vdash u = t,$$

Na osnovu aksioma jednakosti, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Ako je $\widetilde{t}$ klasa ekvivalencije terma $t \in S$, neka je $M = \{\widetilde{t} : t \in S\}$. Na skupu M konstruišemo model skupa rečenica T.

Ako je $c \in \mathcal{L}$ simbol konstante, njegova interpretacija u skupu M je klasa ekvivalencije $\widetilde{c}$ terma $c \in S$.

Ako je $f \in \mathcal{L}$ opercijski simbol dužine $n \geq 1$, njegova interpretacija je operacija f_M skupa M, takva da za sve $t_1, \ldots, t_n \in S$,

$$f_M(\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n}) = \widetilde{f}(t_1, \ldots t_n).$$

Ako je $r \in \mathcal{L}$ relacijski simbol dužine $n \geq 1$, njegova interpretacija je relacija r_M skupa M, takva da

$$r_M(\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n}) \ \Leftrightarrow \ T \vdash r(t_1, \ldots t_n),$$

za sve $t_1, \ldots, t_n \in S$.

Operacija f_M i relacija r_M skupa M, definisane su preko predstavnika $t_1, \ldots, t_n \in S$ klasa ekvivalencije $\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n} \in M$, ali ta definicija ne zavisi od izbora predstavnika:

Ako je $\widetilde{t_1} = \widetilde{u_1}, \ldots, \widetilde{t_n} = \widetilde{u_n}$, onda $T \vdash t_1 = u_1, \ldots, T \vdash t_n = u_n$, pa prema aksiomama jednakosti:

$$\begin{aligned} &T \vdash f(t_1, \ldots t_n) = f(u_1, \ldots u_n), \\ &T \vdash r(t_1, \ldots t_n) \ \Leftrightarrow \ T \vdash r(u_1, \ldots u_n), \end{aligned}$$

što, po definiciji relacije $\sim$, znači da:

$$\begin{aligned} &f_M(\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n}) = f_M(\widetilde{u_1}, \ldots, \widetilde{u_n}) \\ &r_M(\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n}) \ \Leftrightarrow \ r_M(\widetilde{u_1}, \ldots, \widetilde{u_n}), \end{aligned}$$

za sve $t_i, u_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.

Neka je $\mathbb{M} = (M, (c_M, f_M, r_M : c, f, r \in \mathcal{L}))$. Tvrdimo da $\mathbb{M} \models T$. Da bi smo to dokazali, dovoljno je dokazati da

$$\mathbb{M} \models A \ \Leftrightarrow \ T \vdash A,$$

za svaku rečenicu A jezika $\mathcal{L}$. Iako rečenice nisu induktivno definisane, u ovom slučaju, zbog egzistencijalne zatvorenosti skupa T dokaz indukcijom po složenosti rečenice je moguć.

Ako je A elementarna rečenica oblika $u = t$, za neke $u, t \in S$, po definiciji relacije $\sim$ i definiciji skupa M,

$$\mathbb{M} \models t = u \ \Leftrightarrow \ \widetilde{t} = \widetilde{u} \ \Leftrightarrow \ t \sim u \ \Leftrightarrow \ T \vdash t = u.$$

Ako je A elementarna rečenica $r(t_1, \ldots t_n)$, za neke $t_1, \ldots t_n \in S$, po definiciji interpretacije u modelu $\mathbb{M}$,

$$\mathbb{M} \models r(t_1, \ldots t_n) \ \Leftrightarrow \ r_M(\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n}) \ \Leftrightarrow \ T \vdash r(t_1, \ldots t_n).$$

Neka je A rečenica $\neg B$. Ako $\mathbb{M} \models \neg B$, onda $\mathbb{M} \not\models B$; po induktivnoj pretpostavci, $T \not\vdash B$; zbog kompletnosti teorije T, $T \vdash \neg B$. Obratno, ako

$T \vdash \neg B$; zbog neprotivrečnosti teorije T, $T \nvdash B$; po induktivnoj pretpostavci, $\mathbb{M} \not\models B$; po definiciji istinitosti, $\mathbb{M} \models \neg B$.

Ako rečenica A ima jedan od oblika $B \wedge C$, $B \vee C$ ili $B \rightarrow C$, tvrđenje slijedi neposredno iz Leme 1 poglavlja Potpunost predikatske logike.

Neka je A rečenica oblika $\exists x\, B$. Ako $T \vdash \exists x\, B$, zbog egzistencijalne zatvorenosti teorije T, postoji konstanta c jezika $\mathcal{L}$ takva da $T \vdash B(x/c)$. Po induktivnoj pretpostavci, $\mathbb{M} \models B(x/c)$, a to znači da $\mathbb{M} \models \exists x\, B$.

Obratno, ako $\mathbb{M} \models \exists x\, B$, za neko $b \in M$ i svaku valuaciju a, $\mathbb{M} \models_{a(x/b)} B$. Kako je svaki element skupa M oblika $[t]$, za neki zatvoren term t, to postoji t takvo da $b = [t]$, pa za takvo t, $\mathbb{M} \models B(x/t)$. Otuda, po induktivnoj pretpostavci, $T \vdash B(x/t)$, pa prema aksiomi egzistencijalnog kvantifikatora, $T \vdash \exists x\, B$.

Preostala je još mogućnost da rečenica A ima oblik $\forall x\, B(x)$. Pretpostavimo da $T \vdash \forall x\, B$. Po aksiomi univerzalnog kvantifikatora, $T \vdash B(t)$, pa po induktivnoj pretpostavci, $\mathbb{M} \models B(t)$, za svaki zatvoren term $t \in S$. Po definiciji skupa M, to znači da $\mathbb{M} \models \forall x\, B$.

Obratno, neka $\mathbb{M} \models \forall x\, B(x)$. Ako $T \nvdash \forall x\, B$, zbog kompletnosti teorije T imamo $T \vdash \neg \forall x\, B$, tj. $T \vdash \exists x\, \neg B$. Kako je T egzistencijalno zatvorena teorija, postoji konstanta c takva da $T \vdash \neg B(x/c)$. Sa druge strane, iz pretpostavke $\mathbb{M} \models \forall x\, B$ slijedi $\mathbb{M} \models B(x/c)$, tj. po induktivnoj pretpostavci, $T \vdash B(x/c)$. Dakle, istovremeno važi i $T \vdash \neg B(x/c)$ i $T \vdash B(x/c)$, a to protivreči pretpostavci da je teorija T neprotivrečna. $\lhd$

Teorema potpunosti predikatske logike: Svaki neprotivrečan skup rečenica je zadovoljiv.

Dokaz. Ako je T neprotivrečan skup rečenica jezika $\mathcal{L}$, njegovo kompletno egzistencijalno zatvoreno proširenje T^* ima model $\mathbb{M}'$ u proširenom jeziku $\mathcal{L}'$, koji sadrži nove simbole konstanti. Redukcija $\mathbb{M}$ modela $\mathbb{M}'$ na jezik $\mathcal{L}$, je model skupa rečenica T $\lhd$

Posljedice teoreme potpunosti

Skolemova teorema o prebrojivom modelu: Neprotivrečna teorija u prebrojivom jeziku ima prebrojiv model.

Skolemova teorema neposredno slijedi iz dokaza stava potpunosti, jer kanonski model je prebrojiv. Ova Skolemova teorema ima vrlo zanimljive posljedice.

Opšta teorema potpunosti: Ako je A formula i Σ skup rečenica,

$$\Sigma \vdash A \;\Leftrightarrow\; \Sigma \models A.$$

Dokaz. Tvrđenje da $\Sigma \vdash A$ implicira $\Sigma \models A$ je stav korektnosti, koji smo već dokazali. Pretpostavimo da nije $\Sigma \vdash A$. Po zakonu dvojne negacije, nije $\Sigma \vdash \neg\neg A$, pa je $\Sigma, \neg A$ neprotivrečan. Po teoremi potpunosti, $\Sigma, \neg A$ je zadovoljiv skup, tj. nije $\Sigma \models A$. $\lhd$

Teorema kompaktnosti: Ako je svaki konačan podskup skupa rečenica Γ zadovoljiv, Γ je zadovoljiv.

Dokaz. Ako skup rečenica Γ nije zadovoljiv, prema stavu potpunosti, Γ je protivrečan, pa $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$. Kako je dokaz konačan niz, postoji konačan $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ takav da $\Gamma_0 \vdash A \wedge \neg A$, tj. Γ_0 je konačan protivrečan podskup skupa Γ nije zadovoljiv. $\lhd$

Teorema 1. Ako skup rečenica Γ jezika $\mathcal{L}$ ima proizvoljno veliki konačan model, Γ ima beskonačan model.

Dokaz. Proširimo jezik $\mathcal{L}$ beskonačnim skupom simbola konstanti $C = \{c_i : i \in \omega\}$. Neka je $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup C$ i

$$\Gamma^* = \Gamma \cup \{\neg(c_i = c_j) : i < j < \omega\}$$

skup rečenica jezika $\mathcal{L}^*$. Tvrdimo da svaki konačan podskup skupa Γ^* ima model.

Ako je Γ_0^* konačan podskup od Γ^*, postoji konačan podskup Γ_0 skupa Γ i prirodan broj $n \in \omega$, takav da

$$\Gamma_0^* = \Gamma_0 \cup \{\neg(c_{i_k} = c_{j_k}) : k < n\}.$$

Po pretpostavci Γ_0 ima model $\mathbb{M}_0$ kardinalnosti $|M_0| \geq n$. Proširimo strukturu $\mathbb{M}_0$ konstantama $c_i \in C$. Konstante c_{i_k}, $k < n$, koje se javljaju u skupu Γ_0^*, njih ima najviše n, interpretiramo različitim elementima skupa M_0, a sve druge konstante skupa C proizvoljno. Tako se dobija model $\mathbb{M}_0^*$ skupa rečenica Γ_0^*.

Kako svaki konačan podskup od Γ^* ima model, prema stavu kompaktnosti, skup rečenica Γ^* ima model $\mathbb{M}^*$. Kako to propisuju rečenice skupa Γ^*, sve konstante $c_i \in C$ u modelu $\mathbb{M}^*$ moraju biti interpretirane različitim elementima domena M, pa je model $\mathbb{M}^*$ beskonačan. Neka je $\mathbb{M}$ redukcija model modela $\mathbb{M}^*$ na jezik $\mathcal{L}$. Model $\mathbb{M}$ je beskonačan model skupa Γ. $\lhd$

Zadatak 1. Ne postoji skup rečenica predikatskog računa Γ, takav da $\mathbb{M} \models \Gamma$ ako i samo ako model $\mathbb{M}$ je konačan.

To znači da ne postoji aksiomatizacija konačnih skupova, konačnih grupa, konačnih polja itd. Svaki skup rečenica koji zadovoljavaju konačne grupe, zadovoljava i neka beskonačna grupa. Ovaj rezultat valja uporediti sa sledećim zadacima.

Zadatak 2. Neka je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 1$, postoji rečenica A_n, takva da $\mathbb{M} \models A_n$ ako i samo ako model $\mathbb{M}$ ima kardinalnost n.

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Dokazati da postoji skup rečenica Γ, takav da $\mathbb{M} \models \Gamma$ ako i samo ako model $\mathbb{M}$ je beskonačan. Dokazati da i sam skup Γ mora biti beskonačan.

Dakle, svojstvo beskonačnosti strukture jeste izrazivo skupom rečenica. Beskonačnost jeste, a konačnost nije izraziva upredikatskom računu.

Zadatak 4. Ako je $(P, \leq)$ parcijalno uređenje konačnog skupa P, dokazati da se relacija $\leq$ može proširiti do linearnog uređenja $\leq^*$ skupa P.

Koristeći stav kompaktnosti, dokazati da se svako parcijalno uređenje može proširiti do linearnog uređenja.

Nestandardni prirodni brojevi

Posledica teoreme potpunosti je egzistencija modela elementarne teorije prirodnih brojeva $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ koji sadrži beskonačno velike prirodne brojeve. Konstrukcija se može izvesti i za model elementarne teorije realnih brojeva $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ koji, osim beskonačno velikih, sadrži i beskonačno male veličine.

Teorema 1. Kompletna aritmetika $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ ima model koji nije izomorfan standardnom modelu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva.

Dokaz. Neka je $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PA} \cup \{c_n : n \geq 1\}$, proširenje jezika aritmetike, dobijeno novim simbolima konstanti. Ako je $\mathbb{N}$ standardni model jezika aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$, neka je $\mathbb{N}'$ njegova ekspanzija na jezik $\mathcal{L}$ u kojoj svaki novi simbol c_n interpretiramo prirodnim brojem n, za svako $n \geq 1$.

Neka je $c \notin \mathcal{L}$, još jedan novi simbol konstante i A_n formula $\neg(c = c_n)$, $n \geq 1$. Formula A_n je formula jezika $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, za sve $n \geq 1$.

Posmatrajmo skup rečenica $\Gamma = \mathrm{Th}(\mathbb{N}') \cup \{A_n : n \in \omega\}$.

Ako je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ konačan, postoji prirodan broj $k \geq 1$, takav da za svako $n \geq k$, formula A_n ne pripada skupu Γ_0. Ako konstantu c interpretiramo brojem k, onda $\mathbb{N}' \models \Gamma_0$. Dakle svaki konačan podskup skupa Γ ima model, pa prema stavu kompaktnosti, Γ takođe ima model $\mathbb{M}'$. Neka je $\mathbb{M}$ redukcija modela $\mathbb{M}'$, na jezik aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$.

Tvrdimo da je model $\mathbb{M}$ nestandardni model prirodnih brojeva, tj. da model $\mathbb{M}$ nije izomorfan sa $\mathbb{N}$. U suprotnom, ako je $f : N \to M$ izomorfizam modela $\mathbb{N}$ i $\mathbb{M}$, onda postoji $n \in N$, takvo da je $f(n) = c_M$, gde je $c_M \in M$ interpretacija konstante c. Otuda

$$\mathbb{M} \models_{a(x/f(n))} \neg(x = c_n) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{N} \models_{a(x/n)} (x = c_n),$$

a to protivreči pretpostavci da je f izomorfizam. $\lhd$

Pošto $m < n$ ako i samo ako postoji $k > 0$, $m+k = n$, poredak u strukturi $\mathbb{N}$ je izraziv formulom A oblika $\exists z\,(\neg(z = 0) \land (x + z = y))$. Pritom,

$$(m < n) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{N} \models A[m, n].$$

Formula A jezika $\mathcal{L}$ u modelu $\mathbb{M}$ definiše poredak $<_M$, pa za svaki prirodan broj $n \geq 0$, $\mathbb{M} \models (n_M < c)$. Dakle, u nestandardnom modelu $\mathbb{M}$, postoji broj c koji je veći od svakog standardnog prirodnog broja. Kako je $\mathbb{M}$ model kompletne teorije brojeva $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, model $\mathbb{M}$ ima sva svojstva prirodnih brojeva, pa sasvim opravdano možemo reći da je c *beskonačan prirodan* broj.

Teorema 2. Postoji prebrojiv nestandardan model prirodnih brojeva.

Dokaz. Kako je jezik $\mathcal{L}'$, definisan u dokazu prethodne teoreme, prebrojiv, neprotivrečan skup rečenica Γ, koji smo takođe definisali u dokazu prethodne teoreme, ima prebrojiv model, pa kompletna aritmetika $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ ima prebrojiv model $\mathbb{M}$, koji nije izomorfan sa $\mathbb{N}$. $\lhd$

Zadatak 1. Uvođenjem skupa $\{c_r : r \in R\}$ novih simbola konstanti, izvesti konstrukciju nestandardnog modela elementarne teorije $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ realnih brojeva, u jeziku teorije uređenih polja. Ta konstrukcija ne razlikuje se od konstrukcije nestandardnog modela elementarne teorije $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$.

Ako je $\mathbb{R}^*$ nestandardni model realnih brojeva, dokazati da u modelu $\mathbb{R}$ postoje *beskonačno male veličine* ili *infinitezimale*, tj. da postoji $c \in R^*$, tako da $0 < c < \frac{1}{n}$, za svaki prirodan broj $n \geq 1$.

Erbranova teorema

Na osnovu stava potpunosti, dokazaćemo *Erbranovu teoremu.* Po svojoj ideji i sadržaju, ona je bliska Skolemovim teoremama o složenosti problema logičkih zakona, zato što taj problem za formule klase Σ_1 svodi na logički ekvivalentne formule bez kvantifikatora.

U dokazu koji ćemo izložiti pozivamo se na stav potpunosti, što na izvestan način odudara od duha same Erbranove teoreme, kao efektivnog kriterijuma logičkih zakona. Stoga napominjemo da postoji i njen sintaksni ili direktan dokaz. On je znatno komplikovaniji, ali moguće prikladniji u primjenama.

Erbranova teorema: Ako je A formula bez kvantifikatora jezika $\mathcal{L}$, formula $\exists x_1 \cdots \exists x_n\, A$ je logički zakon ako i samo ako postoje zatvoreni termi t_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, jezika $\mathcal{L}$, takvi da

$$\begin{aligned} \models A(x_1/t_{11}, x_2/t_{12}, \ldots, x_n/t_{1n}) \vee \\ \vee A(x_1/t_{21}, x_2/t_{22}, \ldots, x_n/t_{2n}) \vee \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \vee A(x_1/t_{m1}, x_2/t_{m2}, \ldots, x_n/t_{mn}). \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo sa B gornju disjunkciju. Ako $\models B$, po teoremi o svojstvima kvantifikatora, $\models B(x_i/t_{ij}) \rightarrow \exists x_i\, B$, pa imamo $\models \exists x_i\, B$. Ako to ponovimo za sve terme t_{ij}, dakle mn puta, dobijamo $\models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, B$, gde su u formuli B eliminisani svi termi t_{ij}. Posle eliminacije, formula B se svodi na disjunkciju u kojoj se mn puta ponavlja A, dakle, svodi se na formulu A. To znači da važi $\models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, A$.

Da dokažemo obratno, pretpostavimo da formula A nema drugih promjenljivih osim $x_1, \ldots, x_n$, u suprotnom, takve promjenljive zamijenimo novim konstantama i radimo u proširenom jeziku. Posmatrajmo skup T svih rečenica oblika

$$\neg A(x_1/t_1, \ldots x_n/t_n),$$

za proizvoljne zatvorene terme $t_1, \ldots t_n$ jezika $\mathcal{L}$.

Ako je skup rečenica T konzistentan, prema opštoj teoremi potpunosti, T ima model $\mathbb{M}$. Neka je $H \subseteq M$, $H = \{b \in M : b = [t]^M, \text{ za neko } t \in S\}$, gde je S skup svih zatvorenih terma jezika $\mathcal{L}$.

Za svaki simbol konstante $c \in \mathcal{L}$, neka je $c_H = c_M$.

Za svaki relacijski simbol $r \in \mathcal{L}$, dužine $n \geq 1$, neka je

$$r_H(a_1, \ldots, a_n) \;\Leftrightarrow\; r_M(a_1, \ldots, a_n),$$

za sve $a_1, \ldots a_n \in H$.

Za svaki operacijski simbol $f \in \mathcal{L}$, za sve $a_1, \ldots a_k \in H$, neka je

$$f_H(a_1, \ldots, a_k) \;\Leftrightarrow\; f_M(a_1, \ldots, a_k).$$

Neposredno se provjerava da su obje definicije korektne, pa je time definisan model $\mathbb{H} = (H, r_H, f_H, c_H : r, f, c \in \mathcal{L})$ jezika $\mathcal{L}$. Pritom, po definiciji modela $\mathbb{H}$, za svaku formulu C bez kvantifikatora:

$$\mathbb{M} \models_a C \;\Leftrightarrow\; \mathbb{H} \models_a C,$$

za svaku valuaciju $a \in H^N$. Kako sve rečenice skupa T ne sadrže kvantifikatore, i kako $\mathbb{M} \models T$, imamo da $\mathbb{H} \models T$.

Po pretpostavci $\models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, A$, pa postoje $a_1, \ldots, a_n \in H$, takvi da $\mathbb{H} \models A[a_1, \ldots, a_n]$. Otuda, ako je $a_i = [t_i]^M$, $1 \le i \le n$, dobijamo da važi $\mathbb{H} \models A(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$, a to protivreči pretpostavci $\mathbb{H} \models T$.

Dakle, T je protivrečan skup, pa $T \vdash C$ i $T \vdash \neg C$, za neku formulu C. Ako su $A_1, \ldots, A_n \in T$, sve rečenice u dokazima za C i $\neg C$ iz pretpostavki T, onda redom imamo: $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \vdash C \wedge \neg C$, ako i samo ako $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$, ako i samo ako $\models \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$, pa Erbranova teorema važi. $\lhd$

Skolemova teorema problem odlučivosti predikata $\models$ za formule sa operacijskim simbolima svodi na formule klase Σ_1. Kako Erbranova teorema problem odučivosti predikata $\models$ za formule klase Σ_1 svodi na formule bez kvantifikatora, ispada da je predikat $\models$ odlučiv. Međutim, Alonso Čerč je 1936. godine dokazao suprotno: predikat $\models$ nije odlučiv. Problem je u tome što kada jezik sadrži operacijske simbole, u disjunkciji koja se javlja u Erbranovoj teoremi treba proći kroz beskonačan skup terma, pa to ne daje proceduru odlučivosti. Ako jezik ne sadrži operacijske simbole, Erbranova teorema daje postupak odlučivosti za jednu klasu formula predikatske logike. Iz tog razloga, u računarskoj nauci postoji određeno interesovanje za fenomen Erbranove teoreme.

Primjer 1. Ako su c i d simboli konstanti, r binarni relacijski simbol i A formula

$$\exists x\, (r(c, x) \to r(x, d)),$$

svi zatvoreni termi u formuli A su konstante c i d, a (x/c) i (x/d) sve moguće supstitucije tih terma u formuli A, pa je Erbranova forma formule A sledeća formula:

$$(r(c, c) \to r(c, d)) \vee (r(c, d) \to r(d, d)).$$

U ovom slučaju ona jeste logički zakon budući da je formula $r(c, d)$ konsekvens prve i antecedens druge alternative.

Napomene

Dio logike koji je obuhvaćen ovom knjigom pripada *teoriji modela*, grani logike koja izučava odnos formalnih teorija i matematičkih struktura, u kojima se takve teorije realizuju. Kako je osnovna ideja teorije modela dualizam sintakse i semantike, ova teorija predstavlja prototip *platonističkog* shvatanja matematike.

Prema platonističkom shvatanju, matematički objekti postoje nezavisno od nas, kao što nezavisno od nas postoje objekti materijalnog svijeta. Prirodni, racionalni i realni brojevi, grupe kretanja, prsteni realnih funkcija, prostori operatora i čitav skupovni univerzum nisu samo mentalne konstrukcije, već apstraktni objekti koji postoje nezavisno od iskustva i uslova pod kojim saznajemo njihova svojstva. Jezik predikatskog računa je sredstvo za izražavanje svojstava matematičkih struktura, a one same postoje nezavisno od toga kako matematika istražuje njihova svojstva.

Platonističko shvatanje matematike je dosljedno zastupao Kurt Gedel. Posle Gedelovih rezultata, o kojima je ranije bilo riječi, logičari prave jasnu razliku između sintakse i semantike, tj. izmedju formalnih jezičkih objekata i njihovog značenja u matematičkim strukturama.

Na jedan specifičan način i Frege je zastupao platonističko shvatanje matematike. Naime, on je 1879. godine definisao pojam formalnog sistema, ali ne kao sredstvo izražavanja svojstava matematičkih struktura, već kao potpunu formalizaciju prirodnog jezika u kojem se problem različitih interpretacija njegovih simbola uopšte ne postavlja. Za razliku od većine matematičara, koji mogućnost različitih interpretacija formalnih simbola smatraju jednom od ključnih ideja matematičke logike, Frege je imao u vidu potpuni opis jedinstvenog matematičkog univerzuma. Njegovo shvatanje matematike je specifično i utoliko što je vjerovao da se ona, u sasvim strogom smislu, može svesti na logiku.

Napominjemo da u okviru naših izlaganja nismo zastupali nikakvo posebno filosofsko stanovište o prirodi matematičkih objekata, iako rezultati o kojima smo govorili implicitno podrazumijevaju platonističko stanovište. Sasvim uopšteno rečeno, matematiku shvatamo kao aprioran oblik saznanja, nezavisan od našeg iskustva. Svi njeni pojmovi, definicije pravila ili dokazi imaju nedvosmisleno značenje, a njeni rezultati ne mogu se preispitivati sa stanovišta eksperimentalnog iskustva. Eventualno, može se govoriti o adekvatnosti pojedinih teorija konkretnom empirijskom problemu, ili o uticaju takvih problema na razvoj određene matematičke discipline.

Prva verzija predikatske logike, koju je formulisao Frege 1879. godine, značajno se razlikuje od one koju smo ovdje izložili. Osim razlika u notaciji, izboru aksioma i pravila izvođenja, Fregeova formulacija dozvoljavala je i kvantifikaciju preko predikatskih promjenljivih. Uz ostale Fregeove pretpostavke, ta je teorija bila protivrečna.

Pojam induktivno definisanog formalnog sistema i pojam njegove induktivno definisane interpretacije javlja se eksplicitno dvadesetih godina prošlog vijeka, ali je strogu definiciju semantike predikatske logike definisao Alfred Tarski 1935. godine. Kasnije, pedesetih godina, on i Abraham Robinson formulisali su i većinu drugih modelsko-teorijskih ideja, uključujući definiciju elementarne ekvivalencije i dokazali ključne teoreme o eliminaciji kvantifikatora.

Stav potpunosti predikatske logike dokazao je Gedel u jednom radu iz 1930. godine. U istom radu za prebrojive jezike dokazani su prošireni stav potpunosti i stav kompaktnosti. Metod konstanti koji smo koristili u dokazu stava potpunosti formulisao je Leon Henkin 1949. godine.

Da svaka neprotivrečna teorija u prebrojivom jeziku ima prebrojiv model dokazao je Skolem 1920. godine. On je takođe, 1934. godine, definisao prvu konstrukciju prebrojivog nestandardnog modela aritmetike. Na posredan način i Lajbnic je vjerovao u egzistenciju takvih modela, tj. u postojanje nearhimedovskih proširenja uređenih polja. U kontekstu nestandardnih modela realnih brojeva, Abraham Robinson je 1960. godine oživeo Lajbnicove ideje u diferencijalnom i integralnom računu i zasnovao nestandardnu analizu. Pokazalo se da su Lajbnicove pretpostavke o aktualnoj egzistenciji beskonačno malih i beskonačno velikih brojeva bile opravdane.

Index