

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITETA U BEOGRADU

1971. god.

STACIONARNI RAVANSKI LAMINARNI GRANIČNI SLOJ
NENJUTNOVSKE TEČNOSTI SA STEPENOM REOLOŠKOM
JEDNAČINOM STANJA

(Doktorska disertacija)

DJORDJE S. DJUKIĆ

asistent Mašinskog fakulteta

Univerziteta u Novom Sadu

Na moj početni naučni rad imali su neposredni uticaj profesor beogradskog Univerziteta Dr. V. Saljnikov i profesor novosadskog Univerziteta Dr. B. Vujanović te osećam zadovoljstvo što mogu na ovaj način da izrazim zahvalnost za pomoć i usmeravanje na mom postdiplomskom i kasnijem naučnom usavršavanju.

Akademiku profesoru beogradskog Univerziteta Dr. K. Voronjecu se najsrdačnije zahvaljujem na korisnim sugestijama u oblikovanju ovog rada.

Osećam se takodje neobično zahvalan Matematičkom institutu u Beogradu zato što mi je bilo omogućeno da se besplatno koristim njihovom računskom mašinom IBM 360.

Asistentu niškog Univerziteta Dr. Z. Boričiću se zahvaljujem na ukazanoj pomoći pri numeričkom rešavanju matematičkih problema u ovom radu.

STACIONARNI RAVANSKI LAMINARNI GRANIČNI SLOJ NENJUTNOVSKE
TEČNOSTI SA STEPENOM REOLOŠKOM JEDNAČINOM STANJA

Pregled upotrebljenih oznaka:

- τ_{ij} - tenzor napona,
- p - pritisak,
- δ_{ij} - kronekerov delta simbol,
- \dot{e}_{ij} - tenzor brzine deformisanja,
- e_{ij} - tenzor deformacije,
- $\dot{\gamma}$ - brzina deformisanja jednodimenzionog strujanja
- τ - tangencijalni napon jednodimenzionog strujanja
- k - koeficijent konzistencije stepene tečnosti*
- n - parametar nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti,
- x, y - uobičajene koordinate graničnog sloja,
- u, v - projekcije brzine u pravcima x i y osa,
- t - vreme,
- ρ - gustina tečnosti,
- V - brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja,
- x, y, t, η, \dots - kao donji indeks označavaju parcijalni izvod po odnosnoj promenljivoj,
- u_0 - zadati profil brzine u nekom odredjenom preseku graničnog sloja $x = x_0$,
- ψ - strujna funkcija,
- v - konstanta $(= \frac{k}{\rho})'$,
- V_∞ - brzina jednolike struje u beskonačnosti,
- L_0 - karakteristična dužina tela,
- Re - uopšten Rejnoldsov broj za stepenu tečnost,
- δ^* - debljina istiskivanja graničnog sloja,

* Napomena: U ovom radu, nenjutnovske tečnosti sa stepenom reološkom jednačinom stanja, odnosno tečnosti sa stepenom zavisnošću tenzora napona od tenzora brzine deformisanja, zvaće se kratko stepene tečnosti.

- δ^{**} - debljina gubitka impulsa graničnog sloja,
- f - parametar oblika graničnog sloja stepene tečnosti
($f \cong f_1$),
- L - Lagranževa gustina,
- I - funkcional, akcioni integral.

Pregled ostalih oznaka je dat u samom tekstu.

Zbog sve šire primene novih materijala u tehnici (preradjevine nafte, polimeri, plastične mase itd.), a takodje i zbog povećanog interesa za izučavanje strujanja različitih neprekidnih sredina (krv, limfa itd.), u sadašnje doba, sve veći značaj dobija proučavanje zakonitosti formiranja reoloških jednačina stanja i zakona kretanja raznih nenjutnovskih tečnosti.

Ako se od reologa preuzme već formiran matematički model tečnosti, onda se proučavanjem strujanja nenjutnovskih tečnosti dolazi do fundamentalnih informacija, o osobinama tih tečnosti u kretanju

Jednačine kretanja nenjutnovskih tečnosti je moguće rešiti samo u najprostijim slučajevima strujanja. Kod proučavanja strujanja nenjutnovske tečnosti, kao i kod proučavanja strujanja njutnovskih tečnosti, javlja se hipoteza graničnog sloja, kao vrlo perspektivna i plodna metoda za rešavanje čitavog niza problema hidrodinamike.

U ovom radu će se izučavati stacionarni laminarni ravanski granični sloj nenjutnovske tečnosti sa stepenom reološkom jednačinom stanja

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{ms} \dot{e}_{sm} \right|^{\frac{n-1}{2}} \dot{e}_{ij}.$$

U prvom delu rada biće izvedena univerzalna diferencijalna jednačina takvih graničnih slojeva, rešiće se jednoparametarsko približenje univerzalne jednačine i to rešenje primeniti na konkretne probleme. U drugom delu rada, biće data približna metoda za rešavanje ovih graničnih slojeva, koja je zasnovana na varijacionom principu Hamiltonovog tipa za ove granične slojeve. I ona će se primeniti na konkretne probleme strujanja stepene tečnosti.

U primerima, koji će biti rešeni, težište proučavanja biće u posmatranju uticaja parametara reološke jednačine stanja stepene tečnosti, na karakteristične veličine graničnog sloja (tačka odvajanja, debljina graničnog sloja, koeficijent trenja, itd.).

1.1 UVODNA RAZMATRANJA

Pri proučavanju strujanja tečnosti, kako njutnovskih, tako i nenjutnovskih, najveću teškoću predstavlja rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina kretanja. Za razliku od diferencijalnih jednačina kretanja njutnovske tečnosti, gde se nelinearnost javljala samo preko inercionih članova u diferencijalnim jednačinama kretanja, kod nenjutnovskih tečnosti, sile viskoznog trenja imaju takodje nelinearan karakter. Nelinearnost viskoznih sila trenja, još više otežava rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja nenjutnovskih tečnosti.

Strujanje nenjutnovskih tečnosti, kroz cevi i kanale, je proučavano u radovima [36], [35], [6] i [2]. U pomenutim radovima je dobijena uopštena formula Poaselja za pad pritiska u cevi. Dobro poklapanje teorijskih rezultata iz ovih radova se eksperimentalnim je bilo važno sa stanovišta opravdanosti reoloških jednačina stanja odgovarajućih nenjutnovskih tečnosti.

Poznato je, da je hipoteza graničnog sloja prvobitno formulisana za proučavanje strujanja njutnovskog fluida. Kasnije je ona primenjena i na dinamiku sledećih reoloških modela nenjutnovske tečnosti: viskoplastičnog materijala, Eyringovog fluida, stepene tečnosti i "izvesne" klase nenjutnovskih fluida.

U radu [24] su date jednačine graničnog sloja Eyringovog fluida i proučavana slična rešenja tih jednačina. U radu [19] je primenjena hipoteza graničnog sloja na viskoplastičan materijal, ali nije rešen ni jedan konkretan problem. "Izvesna" klasa nenjutnovskih graničnih slojeva tečnosti, koja je definisana sledećom vezom tenzora napona i tenzora brzine deformisanja

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1 \dot{e}_{ij} + \mu_2 \dot{e}_{ik} \dot{e}_{kj} + \mu_3 \dot{e}_{ik} \dot{e}_{ks} \dot{e}_{sj} + \dots,$$

gde su μ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), konstantne karakteristike fluida, je proučavana u radu [27]. U tom radu su date jednačine graničnog sloja i ispitana slična rešenja tih jednačina, a takodje nije rešen ni jedan konkretan slučaj strujanja.

Od svih reoloških modela nenjutnovske tečnosti, hipoteza graničnog sloja je najviše korišćena pri proučavanju strujanja stepene tečnosti, pre svega zbog toga, što je reološka jednačina stanja stepenih tečnosti prilično jednostavna, a ona istovremeno obuhvata široku klasu realnih tečnosti. Diferencijalne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti izveo je Showalter 1960. godine u radu [33]. Ispitivanja, pri kojim spoljašnjim potencijalnim strujanjima postoje slična rešenja jednačina graničnog sloja stepene tečnosti, vršena su u radovima [33], [24] i [3]. Numerička rešenja diferencijalne jednačine sličnih rešenja, za slučaj spoljašnje potencijalne brzine oblika $V = V_{\infty} x^m$, postoje samo u monografiji [3] i to za $m = 0; \frac{1}{3}; 1$. Granični sloj stepene tečnosti na ravnoj ploči je proučavan u radovima [17], [16], [18] i [3]. Strujanje ovih tečnosti u okolini zaustavne tačke je rešeno u [17] i [3], a granični sloj na ravnoj ploči pri ravnomernom usisivanju graničnog sloja u radu [3]. Rešenja za dvodimenziono strujanje stepene tečnosti u mlazu postoje u radovima [3], [25] i [26]. U radu [23] je eksperimentalno proučavano strujanje stepene tečnosti u graničnom sloju oko sfere, a u [3] je razmatran jedan jednostavan problem nestacionarnog graničnog sloja iste tečnosti. U radu [7] Djordjević je dao metodu Görtlera [15] i metodu Lojčjanskog [1] za ove granične slojeve, ali on nije rešio ni jednu diferencijalnu jednačinu tih metoda, a samim tim ni jedan konkretan primer strujanja stepene tečnosti.

Približne metode za rešavanje graničnog sloja stepene tečnosti su razvijane u radovima [31], [16], [18], [24], [3], [28] i [20]. U radu [18] je metodom Karman-Pohlhauzena, sračunat granični sloj na ravnoj ploči. Poredjenjem svojih rezultata sa onim iz rada [17], autori rada [18] izvlače zaključak da su rezultati Karman-Pohlhauzenove metode za granični sloj stepene tečnosti vrlo skromni. Na osnovu njihovih rezultata vidi se da je približna integralna metoda primenljiva sa zadovoljavajućom tačnošću samo na nenjutnovske stepene tečnosti vrlo bliske njutnovskoj tečnosti. U radu [31] je metodom Karman-Pohlhauzena

sračunat granični sloj stepene tečnosti u pravom kanalu. U radu [28] je preneta varijanta Holsteina i Bohlena [9] integralne metode njutnovskog graničnog sloja na granični sloj stepene tečnosti. Iznenadjujući je zaključak tog rada da se ta metoda može primeniti samo za ograničenu oblast stepenog reološkog zakona; naime za $n \leq 1$ za ravansko strujanje i za $0,7356 \leq n \leq 1$ pri osnosimetričnom strujanju. U tom radu je analiziran granični sloj na sferi, pri čemu je pokazano da se sa porastom parametra n reološke jednačine stanja stepene tečnosti tačka odvajanja graničnog sloja pomera uzvodno. Acrivos je u radu [16] dao jednu približnu metodu za određivanje tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti i tangencijalnog napona na telu proizvoljnog oblika. Treba napomenuti da je ta metoda bila prvobitno razvijena za njutnovsku tečnost [32] i da je za taj slučaj dala vrlo dobre rezultate. Metoda Acrivosa, pri razmatranju graničnog sloja stepene tečnosti na ravnoj ploči i u okolini zaustavne tačke takodje je dala odlične rezultate, ali nije šire primenjivana na raznovrsnije probleme ovih graničnih slojeva. Približna metoda Lojczjanskog [67], za rešavanje stacionarnog graničnog sloja njutnovske tečnosti, je u monografiji [3] uopštena za sračunavanje graničnog sloja stepene tečnosti. Ovom metodom u monografiji [3], nije rešen ni jedan konkretan problem, pa o efikasnosti i tačnosti te metode ne može ništa da se kaže. U 1970 godini Dorfman i Višnjevski su u radu [20] dali jednu približnu metodu za proračun ovih graničnih slojeva, zasnovanu na linearizaciji diferencijalnih jednačina pomoću sličnih rešenja. Autori ponovo nisu rešili ni jednu diferencijalnu jednačinu te metode, ni jedan primer, pa se ni o toj metodi ne može ništa više reći.

Na osnovu navedene literature iz teorije graničnog sloja nenjutnovske stepene tečnosti vidi se da se dobijeni rezultati, sem onih u radu [28], odnose na slična rešenja ovih graničnih slojeva. Slična rešenja ovih graničnih slojeva nisu detaljno proučena kao što je to slučaj kod graničnih slojeva njutnovske tečnosti. Takoreći sve metode, koje su razvijane u teoriji graničnog sloja njutnovske tečnosti, mogu se formalno preneti i na granične slojeve stepene tečnosti. O njihovoj efi-

kasnosti i tačnosti ne može se ništa reći sve dok se tom metodom ne prouči klasa konkretnih problema i razmotri realnost dobijenih rezultata. Pri formalnom prenošenju neke metode nju-tnovskog graničnog sloja na nenjutnovski, nema nekih većih teškoća. Teškoće se pojavljuju kada se pristupi rešavanju diferencijalnih jednačina te metode. Recimo metoda Karman-Pohlhauzena je pokazala svoju ograničenost primene na granične slojeve stepene tečnosti samo za određeni interval parametra n reološke veze stepene tečnosti, zato što su se u diferencijalnoj jednačini te metode neočekivano pojavile singularne tačke i onemogućili njeno rešavanje.

Diferencijalne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti sadrže parametar n reološke jednačine stanja stepene tečnosti. On se iz njih ne može eliminisati, pa je te jednačine potrebno rešavati za razne vrednosti tog parametra.

Osnovni zadatak ovog rada, biće proučavanje kretanja stepene tečnosti u graničnom sloju na telima proizvoljnog oblika. Detaljna rešenja različitih konkretnih problema daće nam predstavu o fizičkim osobinama graničnog sloja nenjutnovske stepene tečnosti. Ovaj rad je teorijskog karaktera, ali će se u njemu naći i konkretnih rezultata potrebnih praktičaru.

Treba još da se napomene da su dosadašnji rezultati postignuti u teoriji graničnog sloja stepene tečnosti vrlo skromni u odnosu na rezultate kojim je raspolagala teorija graničnog sloja njutnovske tečnosti oko 1940. godine.

1.2 KLASIFIKACIJA NENJUTNOVSKIH TEČNOSTI

Klasična mehanika viskozne nestišljive izotropne tečnosti, zasniva se na Njutnovoj hipotezi da je tenzor napona direktno proporcionalan tenzoru brzine deformisanja. Takva tečnost tzv. njutnovska, je svestrano proučavana sa mehaničke tačke gledišta. U njutnovske tečnosti se ubrajaju svi gasovi i tečnosti niske molekularne težine. Kod njutnovskih tečnosti koeficijent proporcionalnosti između tenzora napona i tenzora brzine deformisanja je u opštem slučaju funkcija tem-

perature i pritiska, ali se u najvećem broju slučajeva može opravdano usvojiti da je on konstantan.

Medjutim, mnoštvo realnih fluida (emulzije, suspenzije, plastične mase, itd.), pokazuju pri svom kretanju nelinearnu anomalnu viskoznost i još mnoge osobine (plastičnost, visoku elastičnost, itd.), koje njutnovska tečnost nije imala. Proučavanje anomalnih tečnosti spada u oblast reologije.

Osnovni zadatak reologije predstavlja formiranje reološke jednačine stanja materije, tj. uspostavljanja funkcionalne zavisnosti tenzora napona τ_{ij} , tenzora deformacije e_{ij} , i tenzora brzine deformisanja \dot{e}_{ij} . Uspostavljanje što realnije reološke jednačine stanja neke tečnosti je važno, jer se tek na osnovu jedne takve stvarne reološke veze može doći do korektnih jednačina kretanja te tečnosti, tj. do uopštenih Navije-Stoksovih jednačina.

Realne nenjutnovske tečnosti, se ne mogu obuhvatiti jednom univerzalnom reološkom jednačinom stanja, zato postoji dosta raznovrsnih jednačina stanja, tzv. modela nenjutnovskih tečnosti. Svaka od tih jednačina stanja sadrži izvestan broj empirijskih parametara, koji se određuju u zavisnosti od fizičkih osobina deformisanog stanja tečnosti, (napon, gradijent brzine) i od termodinamičkih karakteristika (pritisak, temperatura, sastav itd.). Stvarno ponašanje materijala, okarakterisano je čitavim nizom osobina, pa je svaki reološki model izvesna idealizacija realnog ponašanja tečnosti pri kretanju.

Postoji više klasifikacija nenjutnovskih sistema. Sve te klasifikacije su uslovne i u izvesnoj meri proizvoljne. Najjednostavnija je klasifikacija Dodga [37], koji je izvršio podelu nenjutnovskih tečnosti prema karakteru krive tečenja, tj. prema obliku jednačine $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\dot{e}_{ij})$, pri čemu je sve nenjutnovske tečnosti podelio na tri osnovne grupe:

1. Viskozne tečnosti, kod kojih brzina deformisanja u makojoj tački predstavlja neku funkciju samo od napona deformisanja u toj tački.

2. Materijali kod kojih veza između napona i brzine

deformisanja zavisi i od vremena dejstva napona ili od prethodnog stanja materijala.

3. Materijali koji poseduju i svojstva elastičnog tela i tečnost.

1. VISKOZNE TEČNOSTI

U ovoj grupi se razlikuju sledeći sistemi:

a/ Njutnovska tečnost sa linearnom krivom tečenja.

Obeležimo sa u projekciju brzine jednodimenzionog strujanja u pravcu x ose, a sa y poprečnu koordinatu. Onda je brzina deformisanja ovog strujanja

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} . \quad (1.1)$$

Odgovarajuća reološka jednačina stanja glasi

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.2)$$

pri čemu dinamički koeficijent viskoznosti μ ne zavisi od brzine deformisanja $\dot{\gamma}$.

b/ Viskoplastično telo (Bingamovo telo).

Kriva tečenja za te materijale je predstavljena pravom linijom, koja preseca osu napona deformisanja na rastojanju τ_y od njenog početka. Veličina τ_y , nazvana granicom tečenja, karakteriše plastična svojstva materijala. Tečenje Bingamovog tela je moguće samo ako tangencijalni naponi postanu veći od τ_y .

Reološka jednačina stanja Bingamovog tela ima oblik

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \left\{ \mu_p - \frac{\tau_y}{\sqrt{\frac{1}{2} \dot{e}_{km} \cdot \dot{e}_{mk}}} \right\} \dot{e}_{ij} \quad (1.3)$$

pri

$$\frac{1}{2}(\tau_{ij} \cdot \tau_{ji}) > \tau_y^2,$$

$$\dot{e}_{ij} = 0 \quad \text{pri} \quad \frac{1}{2}(\tau_{ij} \cdot \tau_{ji}) < \tau_y^2. \quad (1.4)$$

Ovde je μ_p plastična viskoznost i kao kod njutnovske tečnosti ona ne zavisi od tenzora napona i tenzora brzine deformisanja.

Mnoge tečnosti su po svom ponašanju vrlo bliske Binghamovom telu. To su naprimer glinasti rastvori, paste, kreme, pulpe, vodene suspenzije oksida urana i torija itd. Brojne vrednosti za parametre τ_y i τ_p nekih Binghamovih tela mogu se naći u monografiji [3].

c/ Anomalno-viskozni sistemi.

Ovi sistemi su okarakterisani krivom tečenja koja prolazi kroz koordinatni početak i koja nema oblik prave linije. U zavisnosti od oblika krive tečenja u ravni $\tau, \dot{\gamma}$ razlikujemo dva tipa anomalno-viskozne tečnosti. Tečnosti kod kojih je $\frac{d^2\tau}{d\dot{\gamma}^2} < 0$ nazivaju se pseudoplastične, a one sa $\frac{d^2\tau}{d\dot{\gamma}^2} > 0$ dilatantne. Reološka jednačina stanja anomalno-viskozne tečnosti može se dati u obliku

$$\tau = \mu_a \cdot \dot{\gamma}, \quad (1.5)$$

gde efektivna viskoznost μ_a , zavisi od tenzora brzine deformisanja. Efektivna viskoznost μ_a se kod pseudoplastičnog strujanja smanjuje, a kod dilatantnog povećava sa porastom brzine deformisanja. Kriva tečenja anomalno-viskoznih tečnosti ima linearan karakter pri malim brzinama deformisanja, tj. tada se materijal ponaša kao njutnovska tečnost. Efektivna viskoznost u toj oblasti brzina deformisanja se naziva: "viskoznost pri nultoj deformaciji". Kriva tečenja anomalno-viskozne tečnosti ima linearan karakter i pri vrlo velikim brzinama deformisanja.

Skoro sve anomalno-viskozne tečnosti se sastoje iz dve ili više komponenti ili faza. U običnoj šematskoj predstavi, jedna od faza se naziva neprekidnom sredinom, a druga se sastoji iz diskretnih čestica.

Dilatantne tečnosti, su obično suspenzije sa znatnim sadržajem inertne čvrste faze, ili inertnih diskretnih čestica. Pri manjim brzinama deformisanja tečna faza igra

ulogu maziva i smanjuje trenje čestice o česticu. Naponi su u tom slučaju mali. Pri velikim brzinama deformisanja ravnomerna raspodela čvrste faze u tečnoj se narušava, a dimenzije tečne faze se povećavaju. Tađa tečnost gubi svoju ulogu maziva za čvrstu fazu, što dovodi do znatnog trenja čestica medju sobom i do velikog porasta napona trenja.

Postoji nekoliko različitih fizičkih objašnjenja modela pseudoplastične tečnosti, vezanih za proučavanje mikroreologije ovih tečnosti. Zbog različitosti ovih objašnjenja izgleda da ni jedno nije još potpuno opravdano i realno [3], [2] [6].

Za anomalno-viskozne pseudoplastične tečnosti predlagane su izmedju ostalih i sledeće empirijske jednačine stanja:

Prandtl

$$\tau = A \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\dot{\gamma}}{C} \right), \quad (1.6)$$

Eyring

$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{B} + c \sin \left(\frac{\tau}{A} \right), \quad (1.7)$$

Powell-Eyring

$$\tau = A\dot{\gamma} + B \operatorname{arc} \operatorname{sh}(c\dot{\gamma}), \quad (1.8)$$

Williamson

$$\tau = \frac{A\dot{\gamma}}{B+\dot{\gamma}} + \mu_{\infty}\dot{\gamma}. \quad (1.9)$$

Ovde su A, B, c i μ_{∞} reološki koeficijenti, koji se određuju za svaku konkretnu tečnost.

Model Elisa definisan je sledećom jednačinom

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \left\{ \mu_1^* + \mu_2^* \left| \dot{\epsilon}_{mk} \cdot \dot{\epsilon}_{km} \right|^{\frac{\alpha-1}{2}} \right\} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.10)$$

odnosno

$$\dot{\gamma} = \left\{ \tau_0 + \tau_1 |\tau|^{\beta-1} \right\} \tau. \quad (1.11)$$

Iz reološke jednačine stanja Elisa (1.10), koja sadrži tri parametra μ_1^* , μ_2^* i α , dobija se za $\alpha = 1$ njutnovska tečnost. Zakon (1.10) sadrži u sebi i dilatantnu tečnost ($\alpha > 1$) i pseudoplastičnu ($\alpha < 1$).

Model Rajner-Filipova određen jednačinom

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \left\{ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + 0,5 |\tau_{km} \cdot \tau_{mk}| / \tau_0^2} \right\} \dot{e}_{ij}, \quad (1.12)$$

sadrži tri parametra μ_0 , μ_∞ i τ_0 , koji se posebno određuju za pojedine tečnosti.

Vrednosti parametara μ_1^* , μ_2^* i α , odnosno β , φ_0 i φ_1 Elisovog modela i μ_0 , μ_∞ i τ_0 modela Rajner - Filipova mogu se naći za neke konkretne tečnosti u monografiji [3].

Model Ostvalda (stepena tečnost) određen jednačinom

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{ms} \cdot \dot{e}_{sm} \right|^{\frac{n-1}{2}} \cdot \dot{e}_{ij}, \quad (1.13)$$

definiše takozvanu stepenu anomalno-viskoznu tečnost [6]. Reološki model anomalne-viskozne stepene tečnosti je interesantan, jer je sa matematičke strane relativno jednostavan, a istovremeno obuhvata široku klasu realnih tečnosti.

Što je tečnost manje tečna, to je koeficijent konzistencije tečnosti, parametar k , veći. Drugi parametar jednačine (1.13) n pokazuje stepen nenjutnovskog ponašanja tečnosti. Za $n = 1$ iz (1.13) se dobija reološki model njutnovske tečnosti. Efektivna viskoznost stepene tečnosti se definiše izrazom

$$\mu_a = k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{ms} \cdot \dot{e}_{sm} \right|^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.14)$$

Za $n < 1$ se efektivna viskoznost μ_a smanjuje sa porastom brzine deformisanja a za $n > 1$ povećava. Ranije je rečeno, da se anomalno viskozne tečnosti na osnovu te osobine efektivne viskoznosti dele na pseudoplastične i dilatantne. Za $n < 1$ stepena tečnost je pseudoplastična a za $n > 1$ dilatantna.

Stepeni zakoni, sa promenljivim eksponentom se ne sreću samo u reologiji, nego se često javljaju i u eksperimentalnoj hidrodinamici i termodinamici. Oni su vrlo pogodni zbog svoje opštosti i jednostavnosti, ali istovremeno imaju izvesnih nedostataka koji ograničavaju njihovu primenu. Efektivna viskoznost (1.14) pri malim brzinama deformisanja teži nuli za $n > 1$ a za $n < 1$ beskonačnosti. Eksperimenti pokazuju da se kod realnih tečnosti tako ekstremni rezultati ne pojavljuju. To govori da se u rezultate sračunavanja graničnog sloja u blizini granice graničnog sloja i u blizini prednje kritične tačke, gde je $\dot{\epsilon}_{ij} \approx 0$, može opravdano sumnjati. Zbog toga postoje i mišljenja pojedinih autora, koja ne govore u prilog stepenog zakona, kao na primer Reiner-a u radu [38].

Za stepeni zakon je takodje pokazano da on ne može dobro da interpretira osobine vrlo viskoelastičnih materijala ili materijala koji poseduju Wajzenbergov efekt [39].

U opštem slučaju kod realne tečnosti parametri k i n su funkcije od temperature, položaja pa čak i od tenzora brzine deformisanja. Predpostavićemo da k i n ne zavise od položaja. To je moguće učiniti, uvek kad je oblast strujanja stepene tečnosti ograničena. Kako je pri razmatranju nekog problema oblast promene brzine deformisanja takodje ograničena, to se može uzeti da k i n ne zavise ni od tenzora brzine deformisanja. Ako temperaturske razlike za vreme strujanja, ne prelaze $30 - 50^\circ$ onda se može usvojiti da parametri k i n ne zavise od temperature, kao što je to obrazloženo u [3].

U ovom radu će se smatrati da su uvek ispunjeni pomenuti uslovi pri kojim su parametri k i n konstantni.

Parametri k i n se odredjuju eksperimentalno. Opis eksperimenata pri odredjivanju karakteristika nenjutnovskih tečnosti i odgovarajućih viskozimetara mogu se naći u [18], [30], [21], [23], [6], [2] itd.

U sledećoj tablici date su, na osnovu [3], vrednosti konstanti k i n za neke stepene tečnosti.

Tablica 1

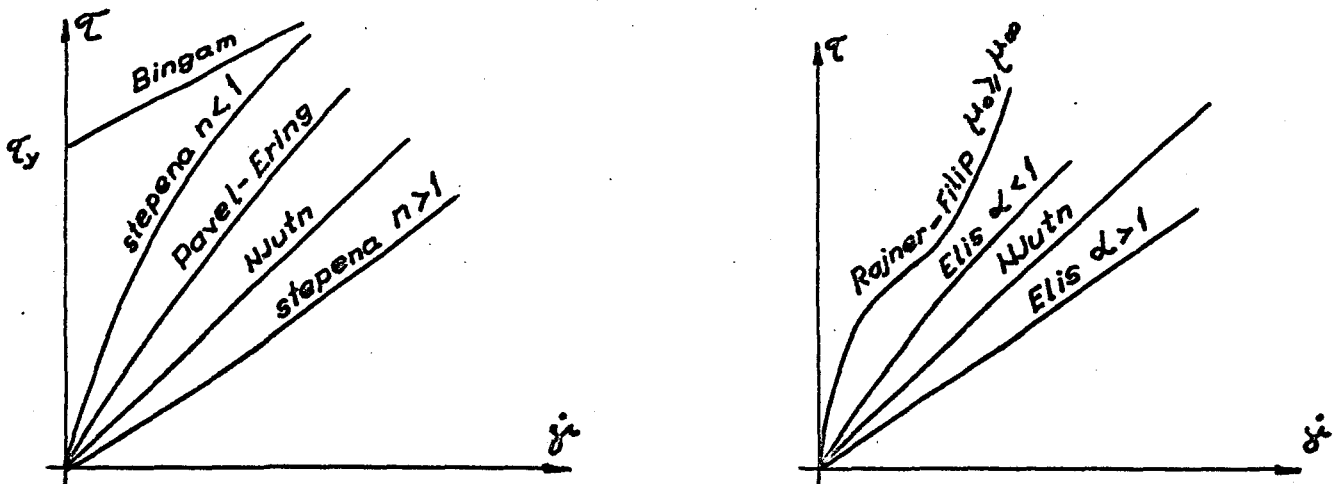
Stepena tečnost	Koncen- -tracija %	dijapaz. brz. def. s^{-1}	n	K $\frac{K_p s^n}{m^2}$
Lepak od štirka	1,54	/	0,952	0,003
— —	2,01	/	0,926	0,004
— —	2,89	/	0,794	0,035
Vodeni rastvor KMC*	0,09	10^3-10^4	0,72	0,044
— —	0,22	$10-10^3$	0,79	0,081
— —	— —	10^3-10^4	0,63	0,302
— —	0,35	10^2-10^3	0,66	0,259
— —	— —	10^3-10^4	0,58	0,429
Pužpa za hartiju	4,0	/	0,575	20,02
Napalm u kerozinu	10,0	/	0,520	4,28
Krečno testo	23,0	/	0,178	7,43
Rastvor gline u vodi	33,0	/	0,171	7,2
Rastvor cementnog kamena u vodi	54,3	/	0,153	2,51
Smesa kreča sa vodom	14	/	1,47	/

*KMC - karboksimetilceluloza

Sem tečnosti iz tablice 1, koje se ponašaju kao stepene, postoji još niz drugih tečnosti (polietilen, polistirol, tečni pleksiglas, polistirol-kaučuk, itd.), čije se ponašanje može predstaviti izrazom (1.13).

Iako se zna da mnoge dvofazne sredine poseduju osobine dilatantnih stepenih tečnosti, ipak za njih ima relativno malo eksperimentalnih rezultata. Razlog za to, je nepostojanje pogodnih viskozimetara za merenje karakteristika tih tečnosti.

Na slici 1, je prikazan oblik krivih tečenja $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ za razne reološke modele nenjutnovskih tečnosti, prema kojima je Dodge i izvršio klasifikaciju.



Slika br. 1

Reološke jednačine stanja nenjutnovskih tečnosti mogu se predstaviti po Rajneru i Rivlinu [23], modelom uopštene nenjutnovske nestišljive izotropne tečnosti.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_1 \dot{e}_{ij} + \mu_2 \dot{e}_{im} \dot{e}_{mj}, \quad (1.15)$$

gde je μ_1 - efektivna viskoznost deformabilnog tečenja, a μ_2 koeficijent poprečne viskoznosti.

Koeficijenti μ_1 i μ_2 su u opštem slučaju funkcije od invarijanti I_1 , I_2 i I_3 tenzora brzine deformisanja.

Invarijanta I_1

$$I_1 = \dot{\epsilon}_{ii}, \quad (1.16)$$

određuje brzinu relativnog povećanja zapremine tečnosti. Za nestišljivu tečnost je $I_1 = 0$.

Invarijanta I_2 je data u obliku

$$I_2 = \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}, \quad (1.17)$$

dok je invarijanta I_3 definisana izrazom

$$I_3 = \dot{\epsilon}_{mi} \dot{\epsilon}_{is} \dot{\epsilon}_{sm}. \quad (1.18)$$

Za izotropnu nestišljivu sredinu I_2 predstavlja disipativnu funkciju, a I_3 karakteriše viskozne efekte, pri zapreminskom tečenju sredine.

Za nestišljiv fluid viskoznosti μ_1 i μ_2 su funkcije samo od invarijanti I_2 i I_3 . O parametru μ_2 i o uticaju invarijante I_3 na μ_1 malo se zna. Eksperimentalni rezultati iz rada [23], dobijeni pri ispitivanju strujanja karboksimetilceluloze oko sfere, pokazuju da je uticaj I_3 na koeficijent μ_1 vrlo mali, a da se poprečna viskoznost μ_2 može takođe zanemariti. Za takva strujanja su stepena reološka veza i Elisov model vrlo bliski stvarnoj krivi tečenja.

Ako se, na osnovu pomenutih eksperimentalnih rezultata iz rada [23], usvoji da je $\mu_2 = 0$ i da je $\mu_1 = \mu_1(I_2)$ onda se iz (1.15) dobijaju različiti reološki modeli za različite zakonitosti $\mu_1(I_2)$. Naprimer

Binghamovo telo (1.3)

$$\text{za } \mu_1 = -\left\{ \mu_p - \frac{\tau_y}{\pm \sqrt{\frac{1}{2} I_2}} \right\},$$

Powell-Eyringov model (1.8)

$$\text{za } \mu_1 = -k_1 \left\{ 1 - \frac{\text{arc sh} \left[-\alpha_0 \left(\frac{1}{2} I_2 \right)^{1/2} \right]}{\beta_0 \left(\frac{1}{2} I_2 \right)^{1/2}} \right\},$$

gde su k_1 , α_0 i β_0 parametri,

Model Elisa (1.10)

$$\text{za } \mu_1 = -\{\mu_1^* + \mu_1^* |I_2|^{\frac{\alpha-1}{2}}\},$$

Stepena tečnost

$$\text{za } \mu_1 = k \left| \frac{1}{2} I_2 \right|^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{itd.}$$

1.3 JEDNAČINE RAVANSKOG LAMINARNOG GRANIČNOG SLOJA NENJUTNOVSKE STEPENE TEČNOSTI

Tačna rešenja diferencijalnih jednačina kretanja, kako njutnovskih tako i nenjutnovskih tečnosti, moguće je naći samo u vrlo jednostavnim problemima strujanja. U želji, da se diferencijalnim jednačinama kretanja njutnovske tečnosti da šira mogućnost primene, Prandtl je 1904 godine, uveo koncepciju graničnog sloja njutnovske tečnosti. Prema toj koncepciji u blizini tela postoji granični sloj (viskozna njutnovska tečnost), a izvan te oblasti se nalazi savršena tečnost.

Pri stvaranju koncepcije graničnog sloja kod stepene tečnosti, postojao je predlog [27] da šema graničnog sloja bude sledeća: nenjutnovska tečnost pored samog tela, onda njutnovska tečnost pa savršena tečnost, ali je na kraju kroz radove [16], [17], [18], [20], [28], [32], [33], i [3] preovladala ideja za sledeći poredak nenjutnovska tečnost - savršena tečnost.

U ovom radu biće korišćena šema graničnog sloja stepene tečnosti: stepena tečnost - savršena tečnost. Smatraće se da se brzina spoljašnjog strujanja na granici graničnog sloja dobija iz rešenja strujanja savršene tečnosti oko istog tela. U prilog tome, govore i rezultati rada [30] o vrlo dobrom slaganju izmerenih i teorijskih vrednosti pritiska na kružnom cilindru u struji stepene tečnosti.

Pokazano je u radu [35], da se strujanja većine

nenjutnovskih tečnosti mogu smatrati laminarnim, ako uopšteni Reynoldsov broj ne prelazi 2000. Smatraće se prečutno, da je taj uslov uvek ispunjen.

U ovom radu će se uzimati, da je za kretanje stepene tečnosti oko nepokretne tvrde granice tela opravdan granični uslov prijanjanja. To i potvrđuju rezultati eksperimenata izvršenih u radu [6].

Za problem ravanskog laminarnog nestacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti (1.13) Schowalter [33] je izveo sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$u_t + uu_x + vv_y = v_t + vv_x + \frac{k}{\rho} \{ (u_y)^n \}_y \quad (1.19)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (1.20)$$

sa graničnim i početnim uslovima

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad y = 0 & \quad t > 0, \\ u = V(x, t) & \quad y = \infty & \quad t > 0, \\ u = u_0(y, t) & \quad x = x_0 & \quad t > 0, \\ u = V(x, t), \quad v = 0 & \quad y = 0 & \quad t = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Za korektno formulisanje graničnog problema diferencijalnih jednačina graničnog sloja (1.19) i (1.20), važan je treći granični uslov (1.21) o zadatom profilu brzine u u nekom odredjenom preseku graničnog sloja $x=x_0$. Treba napomenuti da se do pojave univerzalnih jednačina graničnog sloja ovaj granični uslov nije spominjao. Sa pojavom univerzalnih jednačina se medjutim videlo da je on neophodan za korektno rešavanje tih jednačina na računskoj mašini.

Ako posredstvom veza

$$u = \psi_y \quad v = -\psi_x, \quad (1.22)$$

uvedemo strujnu funkciju ψ , onda je jednačina kontinuiteta (1.20) identički zadovoljena, dok se jednačina (1.19) granični i početni uslovi (1.21) dovode na sledeći oblik:

$$\Psi_{yt} + \Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy} = V_t + V V_x + v \{ (\Psi_{yy})^n \}_y, \quad (1.23)$$

$$\Psi_y = \Psi_x = 0 \quad y = 0 \quad t > 0,$$

$$\Psi_y = V(x, t) \quad y = \infty \quad t > 0,$$

(1.24)

$$\Psi_y = u_0(y, t) \quad x = x_0 \quad t > 0,$$

$$\Psi_y = V(x, t) \quad \Psi_x = 0 \quad y = 0 \quad t = 0,$$

pri čemu je uvedena oznaka

$$v = \frac{k}{\rho}. \quad (1.25)$$

Razmatrane jednačine graničnog sloja stepene tečnosti, su asimptotske jednačine osnovnih punih jednačina kretanja pod uslovom da za uopšteni Rejnoldsov broj R_e zadat izrazom

$$R_e = \frac{\rho V_\infty^{2-n} \cdot L_0^n}{k}, \quad (1.26)$$

gde je L_0 - karakteristična dužina, važi

$$R_e \gg 1. \quad (1.27)$$

Analizirajući Rejnoldsov broj stepene tečnosti i uslov formiranja graničnog sloja (1.27), mogu se izvući sledeći zaključci:

1. Ako je $n < 2$, onda je Rejnoldsov broj monotonno rastuća funkcija brzine V_∞ . Iz ovoga sledi da za $n < 2$, do formiranja graničnog sloja dolazi pri velikim brzinama V_∞ , jer je tada i Rejnoldsov broj dovoljno velik. U tom slučaju strujanje u graničnom sloju je asimptotsko približenje stvarnom laminarnom strujanju za velike vrednosti V_∞ .

2. Ako je $n > 2$ i brzina V_∞ vrlo velika onda je Rejnoldsov broj jako mali i ne dolazi do formiranja graničnog sloja. Zbog malih vrednosti Rejnoldsovog broja tada se

u jednačinama kretanja mogu zanemariti inercijalni članovi i dobija se Stoksovo strujanje.

Za $n > 2$ i pri vrlo sporim strujanjima, tj. kada je brzina V_∞ o, Reynoldsov broj postaje beskonačno velik. Kako su u tom slučaju brzine strujanja male to je i uticaj inercionih sila u jednačinama kretanja vrlo mali. U tom slučaju ponovo se može primeniti Stoksova šema strujanja. Znači ni u slučaju malih vrednosti brzine V_∞ , iako je ispunjen uslov (1.27), ne dolazi do formiranja graničnog sloja.

Vidi se da za $n > 2$ i pri strujanju stepene tečnosti sa vrlo malim, ili vrlo velikim brzinama V_∞ , ne dolazi do formiranja graničnog sloja, već se tada mogu za posmatranje strujanja koristiti Stoksove jednačine.

Za $n > 2$, granični sloj stepene tečnosti će se formirati, samo pri srednjim vrednostima brzine V_∞ , ako je uslov (1.27) ispunjen zahvaljujući velikim vrednostima gustine ρ , karakteristične dužine L_0 i malim vrednostima parametra k .

Potrebno je takodje da se napomene da za $n > 2$ strujanje u graničnom sloju nije asimptotsko približenje stvarnom laminarnom strujanju za velike vrednosti brzine V_∞ , kao što je to bio slučaj kod strujanja njutnovske tečnosti.

1.4 OPŠTA TRANSFORMACIJA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE RAVANSKOG GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

U ovom delu biće izvedena univerzalna jednačina za problem ravanskog stacionarnog laminarnog graničnog sloja stepene tečnosti, na način kako je odgovarajuću jednačinu, za slučaj njutnovske tečnosti, izveo i analizirao Saljnikov u radu [4].

Za razmatranje ovih graničnih slojeva uvešće se umesto promenljivih x i y nove nezavisno promenljive ξ i η

$$\xi = \xi(x); \quad \eta = h(x) \frac{v(x)^{a/2}}{\sqrt{2\xi}} \cdot y. \quad (1.28)$$

Ovde je a proizvoljan prirodan broj, a h proizvoljna funkcija promenljive x . Pretpostaviće se da su nove pro-

menljive ξ i η neprekidne funkcije promenljivih x i y .

Umesto strujne funkcije Ψ uvodi se bezdimenziona strujna funkcija F

$$\Psi(x, y) = \frac{v\sqrt{2\xi}}{h(x)} V(x)^{1-\frac{a}{2}} \cdot F(\xi, \eta). \quad (1.29)$$

Dalje se uvode poznate veličine graničnog sloja:

debljina istiskivanja

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy \quad (1.30)$$

i debljina gubitka impulsa

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy. \quad (1.31)$$

Parametar oblika graničnog sloja stepene tečnosti, koji karakteriše razvijanje brzinskog polja u graničnom sloju u produžnom pravcu, ima prema [3] sledeći oblik

$$f = -\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right)^n \right] \right\}_{y_1=0}, \quad (1.32)$$

gde je bezdimenziona brzina

$$u_1 = \frac{u}{V},$$

i bezdimenziona koordinata y_1

$$y_1 = \frac{y}{\delta(x)},$$

a $\delta(x)$ neka karakteristika debljine graničnog sloja.

Vidi se, da je parametar oblika ustvari jednak negativnoj vrednosti bezdimenzione viskozne sile na konturi tela. Ako se u jednačini (1.19) stavi da je za $y = 0$ $u = v = 0$ onda se dobija sledeća jednačina

$$v v_x + \frac{k}{\rho} \left\{ \left[(u_y)^n \right]_y \right\}_{y=0} = 0. \quad (1.33)$$

Kombinacijom gornjih izraza dobija se parametar oblika graničnog sloja stepene tečnosti

$$f = \frac{\rho \delta^{n+1}}{k v^{n-1}} \cdot v_x. \quad (1.34)$$

Izraz (1.34), predstavlja uopštenje parametra oblika njutnovskog graničnog sloja [10] i za $n = 1$ on se na njega i svodi.

Posredstvom (1.28) i (1.29) izrazi (1.30) i (1.31) postaju

$$\delta^* = \frac{v \sqrt{2\xi}}{h v^{a/2}} A; \quad A(x) = \int_0^{\infty} (1 - F_{\eta}) d\eta \quad (1.35)$$

i

$$\delta^{**} = \frac{v \sqrt{2\xi}}{h v^{a/2}} B; \quad B(x) = \int_0^{\infty} F_{\eta} (1 - F_{\eta}) d\eta. \quad (1.36)$$

Primetimo da iz (1.28) i (1.36) sledi i ovaj izraz za novo promenljivu η

$$\eta = B(x) \frac{y}{\delta^{**}(x)}. \quad (1.36a)$$

Usvajajući da je karakteristična debljina graničnog sloja $\delta = \delta^{**}$, dobija se iz (1.34), uvođenjem (1.36) i (1.25), parametar oblika

$$f^{**} = f = \frac{B^{n+1} v^n v_x (2\xi)^{\frac{n+1}{2}}}{h^{n+1} v^{a(n+1)/2 + n - 1}} \equiv \frac{\delta^{** (n+1)} v_x}{v^{n-1}}. \quad (1.37)$$

Posredstvom zadatih transformacija (1.28) i (1.29) i izraza (1.37) diferencijalna jednačina (1.23) se dovodi na sledeći oblik

$$\left[(F_{\eta\eta})^n \right]_{\eta} + \frac{f}{B^{n+1}} (1 - F_{\eta}^2) + \left\{ \frac{v}{n+1} \left(\frac{f}{B^{n+1} v_x} \right) + \frac{2 \cdot n \cdot f}{(n+1) B^{n+1}} \right\} F F_{\eta\eta} =$$

$$= \frac{V}{V_x} \cdot \frac{f}{B^{n+1}} \xi_x (F_\eta F_{\eta\xi} - F_\xi F_{\eta\eta}). \quad (1.38)$$

Pri tome odgovarajući granični uslovi (1.24) postaju

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta \rightarrow 1; \quad F_\eta = F_\eta^0(\eta) \quad \text{za} \quad \xi = \xi_0, \quad (1.39)$$

$$F_\eta = 0; \quad \left(\frac{v\sqrt{2\xi}}{h} v^{1-\frac{a}{2}} \right)_x F + \frac{v\sqrt{2\xi}}{h} v^{1-\frac{a}{2}} \xi_x F_\xi = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0.$$

1.5 UOPŠTENA JEDNAČINA GÖRTLERA ZA GRANIČNI SLOJ STEPENE TEČNOSTI

Ako se pretpostavi da je proizvoljna funkcija $h(x)$ u zakonu transformacije (1.28)

$$h(x) = \text{const.}, \quad (1.40)$$

da je nova promenljiva ξ zadata izrazom

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b}{2} (n+1) \frac{h^{n+1}}{v^n} \int_0^x v(x) \frac{\frac{a}{2}(1+n)+n-2}{n+1} dx \right\}^{\frac{2}{n+1}}, \quad (1.41)$$

gde je b neka konstanta, i ako se uvede sledeća oznaka za uopštenu "glavnu funkciju"

$$\beta(x) = \frac{f}{B^{n+1}}, \quad (1.42)$$

onda se posredstvom (1.40), (1.41) i (1.42) dobija iz (1.38) sledeća diferencijalna jednačina

$$\left[(F_{\eta\eta})^n \right]_\eta + \beta(x) (1 - F_\eta^2) + \left[\frac{b}{2} + \beta \left(1 - \frac{a}{2} \right) \right] \cdot F F_{\eta\eta} =$$

$$= b \xi (F_\eta F_{\eta\xi} - F_\xi F_{\eta\eta}). \quad (1.43)$$

Granični uslovi (1.39) sada glase

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_{\eta} \rightarrow 1 \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_{\eta} = F_{\eta}^0(\eta) \quad \text{za } \xi = \xi_0, \quad (1.44)$$

$$F_{\eta} = 0; \quad b\xi F_{\xi} + \left[\frac{b}{2} + \beta(1 - \frac{a}{2}) \right] \cdot F = 0 \quad \text{za } \eta = 0.$$

Ako se usvoji da su konstante

$$a = 2, \quad b = 2 \quad \text{i} \quad h = 1 \quad (1.45)$$

onda se iz (1.43) i (1.44) dobija sledeća diferencijalna jednačina

$$\left[(F_{\eta\eta})^n \right]_{\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(1 - F_{\eta}^2) = 2\xi(F_{\eta}F_{\eta\xi} - F_{\xi}F_{\eta\eta}), \quad (1.46)$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_{\eta} \rightarrow 1, \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_{\eta} = F_{\eta}^0(\eta) \quad \text{za } \xi = \xi_0, \quad (1.47)$$

$$F_{\eta} = 0; \quad 2\xi F_{\xi} + F = 0 \quad \text{za } \eta = 0.$$

Posredstvom (1.45), (1.42), (1.41), (1.37), (1.29) i (1.28) dobijaju se za taj specijalni slučaj promenljive

$$\eta = \frac{V(x)y}{v\sqrt{2\xi}}; \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{v^n} \cdot \int_0^x V(x)^{2n-1} dx \right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad (1.48)$$

strujna funkcija

$$\Psi = v\sqrt{2\xi} \cdot F(\xi, \eta), \quad (1.49)$$

i glavna funkcija

$$\beta(x) = \frac{(n+1)V_x \int_0^x V(x)^{2n-1} dx}{V(x)^{2n}}, \quad (1.50)$$

koji se poklapaju sa odgovarajućim izrazima u radu Djordjevića [7], uvedenim pri generalizaciji Görtler-ove metode [15], na ravanski stacionarni granični sloj stepene tečnosti.

1.6 UNIVERZALNA JEDNAČINA RAVANSKOG STACIONARNOG GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI TIPA SALJNIKOVA - OKE

Diferencijalna jednačina Görtler-ovog tipa (1.46), može da posluži kao osnova za dobijanje univerzalne jednačine graničnih slojeva stepene tečnosti tipa Saljnikova i Oke [5].

Iz (1.46) vidimo da je rešenje te diferencijalne jednačine funkcija promenljivih η i ξ , funkcija parametra nenjutnovskog ponašanja tečnosti n i funkcional funkcije β

$$F = F(\xi, \eta, \{\beta\}, n). \quad (1.51)$$

Umesto promenljive ξ se uvodi beskonačan skup nezavisno promenljivih

$$\beta_k(\xi) = \frac{d^k \beta}{d\xi^k} \cdot \xi^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.52)$$

koji se za $k = 0$ svodi na glavnu funkciju

$$\beta_0 = \beta(\xi). \quad (1.53)$$

Strujna funkcija je sada

$$F(\xi, \eta, \{\beta\}, n) = F(\eta, \beta_0, \beta_1, \dots, n). \quad (1.54)$$

Na osnovu (1.52) može lako da se pokaže veza

$$\xi \frac{d\beta_k}{d\xi} = \beta_{k+1} + k\beta_k \equiv \theta_k, \quad (1.55)$$

kao i veza parcijalnih izvoda po ξ i po novim promenljivim β_0, β_1, \dots ,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \frac{\partial}{\partial \beta_k}. \quad (1.56)$$

Posredstvom (1.54) i (1.56), diferencijalna jednačina (1.46) i granični uslovi (1.47), dovode se na sledeći oblik

$$\{(F_{\eta\eta})^n\}_\eta + \beta(1-F_\eta^2) + FF_{\eta\eta} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k (F_\eta F_{\eta\beta_k} - F_{\eta\eta} F_{\beta_k}), \quad (1.57)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta \rightarrow 1 \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_\eta = F_\eta^0(\eta) \quad \text{za } \beta_k = \beta_k^0(\xi_0), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.58)$$

$$F_\eta = 0; \quad F + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k F_{\beta_k} = 0 \quad \text{za } \eta = 0.$$

Pošto se u diferencijalnoj jednačini (1.57) i u graničnim uslovima (1.58), više ne pojavljuju podaci nekog specijalnog problema, ta se jednačina prema Lojcjanskom [1], zove univerzalna jednačina ravanskih laminarnih stacionarnih graničnih slojeva stepene tečnosti. Uticaj raspodele spoljašnje brzine, na granici graničnog sloja, u toj jednačini izražen je preko parametara β_k , koji preuzimaju ulogu podužne koordinate ξ .

Za vrednost parametra $n = 1$, odnosno za njutnovsku tečnost, (1.57) se svodi na univerzalnu jednačinu Saljnjkova-Oke [5], izvedenu za stacionaran ravanski granični sloj njutnovske nestišljive tečnosti.

Kad se uzme da su svi parametri skupa β_k (1.52), počev od $k = 1$ jednaki nuli, a samo β_0 različito od nule

$$\beta_0 = \beta; \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad (1.59)$$

onda se iz (1.55) dobija

$$\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_k = 0. \quad (1.60)$$

Tada iz (1.57) i (1.58) dobijamo univerzalnu jednačinu u jednoparametarskom približenju i njene granične uslove

$$\{(F_{\eta\eta}^{(1)})^n\}_\eta + F_{\eta\eta}^{(1)} F_\eta^{(1)} + \beta \{1 - (F_\eta^{(1)})^2\} = 0 \quad (1.61)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta^{(1)} \rightarrow 1, \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_\eta^{(1)} = F_\eta^0(\eta), \quad \text{za } \beta = \beta^0, \quad (1.62)$$

$$F_\eta^{(1)} = 0, \quad F_\eta^{(1)} = 0 \quad \text{za } \eta = 0.$$

Diferencijalnu jednačinu (1.61) smo nazvali jednoparametarskom zato što u njoj figuriše samo jedan parametar $\beta_0 = \beta$ skupa parametara - promenljivih β_k [1]. Napominjem, da u jednačini (1.61) figuriše i parametar nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti n i tu jednačinu bi trebalo rešavati za razne vrednosti, kako parametra - promenljive β tako i parametra n . U graničnom uslovu (1.62) je sa $F'_0(n)$ označen zadati profil brzine za neku vrednost parametra $\beta = \beta^0$, odnosno za neki odredjeni presek graničnog sloja.

Diferencijalna jednačina (1.61), se poklapa sa uopštenom jednačinom Falkner-Skana, koju je dobio Schowalter u radu [33] proučavajući slična rešenja ravanskih stacionarnih graničnih slojeva nenjutnovske stepene tečnosti.

Iako je jednačina (1.61), ustvari obična diferencijalna jednačina sa parametrima β i n , ipak je ona, zbog svoje nelinearnosti, neobično složena za rešavanje. Do sad su jedino u radu [3] data numerička rešenja te diferencijalne jednačine, ali nažalost samo za tri vrednosti parametra β od kojih $\beta = 0$ odgovara graničnom sloju na ravnoj ploči.

Rešavajući univerzalnu diferencijalnu jednačinu (1.57) u jedno, dvoparametarskom,, približenju mi bi mogli da dobijemo rešenje graničnog sloja stepene tečnosti za sve probleme ravanskog strujanja.

Za $n = 1$, odnosno za njutnovsku tečnost, rešenja te jednačine je detaljno proučavao Saljnikov i ona se mogu naći u monografiji [68]. Rezultati, koja su davala rešenja te jednačine, nisu bili dovoljno tačni u odnosu na druge metode graničnog sloja, zbog toga što se skup parametara β_k (1.52) pokazao kao nedovoljno konvergentan, naročito u blizini tačke odvajanja graničnog sloja. Na osnovu ovoga može se sa velikom sigurnošću očekivati da ni rešenja jednačine (1.57) nebi dala zadovoljavajuće rezultate za probleme graničnog sloja stepene tečnosti.

1.7 O UNIVERZALNIM JEDNAČINAMA GRANIČNOG SLOJA

U teoriji graničnog sloja se teži da se diferencijalne jednačine graničnog sloja i odgovarajući granični uslovi, učine nezavisnim od brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja na granici graničnog sloja, odnosno nezavisnim od oblika tela na kome se proučava granični sloj. S obzirom na ovu tendenciju, možemo u sadašnje doba da razlikujemo dva pravca u dobijanju univerzalnih jednačina graničnog sloja.

Prvi pravac potiče još od Blazijusa [9], pa preko Hiemenza, Howarth-a i drugih autora postiže u radu Görtlera [15] svoj vrhunac. Sve metode tog pravca su zasnovane na transformaciji promenljivih u diferencijalnim jednačinama graničnog sloja i razvijanjem rešenja tih jednačina u redove, bilo po stepenima od pođužne koordinate, odnosno transformisane pođužne koordinate, bilo po parametrima koji su uvek zavisili samo od karaktera spoljašnje brzine na granici graničnog sloja. Po tim metodama matematički problem graničnog sloja se svodio na rešavanje rekurzivnog sistema običnih diferencijalnih jednačina, za odredjivanje koeficijenata u pomenutim redovima. U samim tim jednačinama, kao i u odgovarajućim graničnim uslovima nisu figurisali uslovi nekog specijalnog problema, pa su ti sistemi rekurzivnih jednačina bili univerzalni. Tim metodama, univerzalnost problema graničnog sloja se postizala tek razvojem rešenja u red, a time se matematički problem graničnog sloja, neminovno svodio na rešavanje rekurzivnog sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Temelje drugog pravca u dobijanju univerzalnih jednačina graničnog sloja postavio je Lojcjanski u radu [1]. Po metodi iz tog rada, univerzalnost diferencijalne jednačine i graničnih uslova graničnog sloja se postiže transformacijom poprečne koordinate graničnog sloja i uvodjenjem beskonačnog skupa parametara - promenljivih umesto pođužne koordinate graničnog sloja. Na taj način se početna diferencijalna jednačina graničnog sloja, sa nepoznatom funkcijom dveju nezavisno promenljivih, svodi na univerzalnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu nepoznate funkcije beskonačno mnogo nezavisno promenljivih. Po metodi Lojcjanskog, univerzalnost se postiže

direktno u samoj diferencijalnoj jednačini graničnog sloja. Prema ranijim metodama ona se postizala već pomenutim razvojem u redove. Univerzalna jednačina metode Lojtcjanskog, se može rešavati kao parcijalna diferencijalna jednačina, u svojim parametarskim približenjima sa konačnim brojem nezavisno promenljivih - parametara, ili razvojem u redove, po tim parametrima - promenljivim, ali ni jedan od ova dva načina rešavanja nije ničim unapred odredjen. Važno je što se pomenuti skup parametara - promenljivih Lojtcjanskog može izabrati na racionalan način i što ti parametri obezbeđuju vrlo brzu konvergenciju parametarskih približenja pune univerzalne diferencijalne jednačine graničnog sloja.

Metoda Lojtcjanskog je do sad primenjivana na sledeće probleme laminarnog stacionarnog graničnog sloja njutnovske tečnosti: ravanske nestišljive tečnosti [1], nestišljive elektroprovodne tečnosti u magnetnom polju [69], prostorni granični sloj [70], granični sloj na poroznoj površini [71] i na granični sloj gasa pri velikim brzinama [72]. U svim tim problemima diferencijalne jednačine parametarskih približenja univerzalne jednačine su rešavane numerički i ti rezultati primenjivani na razne konkretne probleme graničnog sloja. Dobijeni rezultati su uvek bili tako reći istovetni sa rezultatima dobijenim pri rešavanju istih tih problema i to direktno posredstvom početne diferencijalne jednačine graničnog sloja.

Metodu Lojtcjanskog je preneo na probleme graničnog sloja stepene tečnosti Djordjević u radu [7]. On je izveo univerzalnu jednačinu graničnog sloja ne ulazeći u njeno rešavanje.

U radu [4] Saljnikov je izveo univerzalnu jednačinu laminarnog stacionarnog graničnog sloja njutnovske nestišljive tečnosti, koja predstavlja uopštenje univerzalne jednačine Lojtcjanskog [1] i u specijalnom slučaju ona se na nju i svodi.

1.8 O IMPULSNOJ JEDNAČINI GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Jednačina impulsa ravanskog laminarnog stacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti se može, prema [3], napisati u sledećem obliku

$$\frac{df}{dx} = \frac{V_x}{V} \phi + \frac{V_{xx}}{V_x} f, \quad (1.63)$$

gde je parametar oblika f dat sa (1.34), odnosno posle transformacija (1.28) i (1.29) sa (1.37).

Ovde je, prema [3], uvedena oznaka ϕ za funkciju

$$\phi = (n+1) \left\{ \zeta - \left(2+H + \frac{n-1}{n+1} \right) f \right\}, \quad (1.64)$$

gde je

$$\zeta = \left\{ \left[\frac{\partial \left(\frac{u}{V} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta^{**}} \right)} \right]^n \right\}_{y=0}$$

i

$$H = \frac{\delta^{**}}{\delta}$$

Posredstvom izraza (1.35) i (1.36) imamo sledeći izraz za H

$$H = \frac{A}{B}. \quad (1.65)$$

Uvodjenjem opšte transformacije koordinata u obliku (1.28) ili u obliku (1.36a), veza (1.29) i (1.22) dobija se

$$\zeta = B^n \left[(F_{\eta\eta})^n \right]_{\eta=0}. \quad (1.66)$$

Ako umesto nepoznatog parametra oblika f u impulsnoj jednačini (1.63) uvedemo nepoznatu funkciju

$$z^{**} = \frac{f}{V_x} \quad (1.67)$$

onda se impulsna jednačina može napisati kao

$$\frac{dz^{**}}{dx} = \frac{\phi}{V}. \quad (1.68)$$

Zbog (1.37) izraz (1.67) se može napisati i u obliku

$$z^{**} = \frac{\delta^{** (n+1)}}{\nu} \cdot \nu^{1-n}. \quad (1.69)$$

1.9 AFINA SLIČNOST I PARAMETRI OBLIKA GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Pojam afine sličnosti i racionalan izbor parametara oblika graničnog sloja njutnovske nestišljive tečnosti, koje je razmatrao Lojczjanski u [8], mogu se kao što će dalje biti pokazano lako preneti i na problem stacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti.

Neka se bezdimenzioni profil brzine u u graničnom sloju može dati u obliku

$$\frac{u}{V(x)} = \varphi \left(\frac{y}{g(x)}, f_1(x), f_2(x), \dots \right), \quad (1.70)$$

gde je $g(x)$ razmera za poprečnu koordinatu y (neka karakteristika debljine graničnog sloja) i gde su f_1, f_2, \dots , parametri funkcije koordinate x .

Profili brzine (1.70) biće afino slični ako za dva bilo koja preseka jednoga graničnog sloja $x=x_1$ i $x=x_2$ parametri f_1, f_2, \dots , imaju iste vrednosti

$$f_1(x_1) = f_1(x_2); \quad f_2(x_1) = f_2(x_2), \quad (1.71)$$

.....

Kako se parametri f_1, f_2, \dots , menjaju od preseka do preseka graničnog sloja to uslov afine sličnosti profila brzine (1.71) u opštem slučaju neće biti ispunjen. Tada se, prema Lojczjanskom, izraz (1.70) može smatrati kao izraz uopštene afine sličnosti profila brzine u presecima graničnog sloja, a bezdimenzione veličine $\frac{u}{V}, \frac{y}{g}, f_1, f_2, \dots$, odgovarajućim koordinatima i parametrima te uopštene afine sličnosti. Parametri f_1, f_2, \dots , koji karakterišu osobine oblika profila brzine u različitim presecima graničnog sloja, mogu se nazvati parametrima oblika graničnog sloja.

Problem graničnog sloja je definisan diferencijalnim jednačinama (1.19) i (1.20) i graničnim uslovima (1.21). Rešenje tog problema je funkcija brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja $V(x)$ i zadatog profila brzine $u_0(y)$ u nekom odredjenom preseku graničnog sloja $x = x_0$. Ako rešenje problema graničnog sloja zadovoljava uslov uopštene afine sličnosti (1.70), onda to rešenje nije više funkcija brzine spoljašnjeg strujanja već je funkcija skupa parametara oblika graničnog sloja.

Ako se uvede oznaka za bezdimenzionu promenljivu

$$\eta = \frac{y}{g(x)}, \quad (1.72)$$

i ako je zadovoljen uslov uopštene afine sličnosti (1.70) onda se iz

$$u = \Psi_y,$$

može dobiti oblik strujne funkcije Ψ u slučaju uopštene afine sličnosti.

$$\Psi = \int_0^y u dy = V(x)g(x) \cdot \int_0^{\eta} \varphi(\eta, f_1, f_2, \dots) d\eta$$

ili u obliku

$$\Psi = g(x)V(x)F(\eta, f_1, f_2, \dots). \quad (1.73)$$

Korišćenjem impulsne jednačine (1.63) može se pokazati da je izbor parametara oblika f_1, f_2, \dots , graničnog sloja stepene tečnosti univerzalan i nezavistan od oblika brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja $V(x)$ na granici graničnog sloja.

Ako se naime za karakteristiku debljine graničnog sloja usvoji debljina gubitka impulsa δ^{**} i u svojstvu prvog parametra f_1 ranije odredjen parametar oblika (1.37), koji posredstvom (1.69) dobija oblik

$$f_1 = f = V_x z^{**}, \quad (1.74)$$

onda se jednačina impulsa graničnog sloja stepene tečnosti (1.63), posle uvođenja (1.67), može napisati u obliku

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{V}{Vf_1} (\phi f_1 + VV_{xx} z^{**2}).$$

Ako se kao drugi parametar oblika usvoji

$$f_2 = VV_{xx} z^{**2}, \quad (1.75)$$

onda se gornja jednačina svodi na

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{V}{Vf_1} (\phi f_1 + f_2). \quad (1.76)$$

Diferenciranjem izraza (1.75) po x i uvođenjem (1.74) i (1.75) dobija se

$$\frac{V}{V_x} f_1 \frac{df_2}{dx} = f_2 (f_1 + 2\phi) + V^2 V_{xxx} z^{**2}, \quad (1.77)$$

odnosno posle uvrštavanja trećeg parametra u obliku

$$f_3 = V^2 V_{xxx} z^{**2}, \quad (1.78)$$

sleđuje jednačina

$$\frac{V}{V_x} f_1 \frac{df_2}{dx} = (f_1 + 2\phi) f_2 + f_3. \quad (1.79)$$

Ako bi se ovaj postupak na sličan način i dalje nastavio dobilo bi se da su parametri oblika graničnog sloja određeni sa

$$f_k = V^{k-1} \frac{d^k V}{dx^k} (z^{**})^k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (1.80)$$

i da zadovoljavaju rekurentnu vezu

$$\frac{V}{V_x} f_1 \frac{df_k}{dx} = \{(k-1)f_1 + k\phi\} f_k + f_{k+1}. \quad (1.80)$$

Uvodjenjem oznake

$$\theta_k = \{(k-1)f_1 + k\phi\}f_k + f_{k+1} \quad (1.82)$$

rekurentna veza (1.81) postaje

$$\frac{V}{V_x} f_1 \frac{df_k}{dx} = \theta_k \quad (1.83)$$

Interesantno je primetiti, da je struktura parametara oblika graničnog sloja stepene tečnosti potpuno ista kao i struktura parametara oblika graničnog sloja njutnovske tečnosti. Ista je i rekurentna veza (1.81), ali se izrazi za ϕ (1.64), ζ (1.66), kao i veza između veličina δ^{**} , v , V i parametra f_1 graničnog sloja stepene tečnosti razlikuju od odgovarajućih izraza graničnog sloja njutnovske tečnosti. Ovo razmatranje nameće eventualni zaključak da su parametri oblika stacionarnog graničnog sloja zavisni samo od spoljašnje brzine na granici graničnog sloja i karakteristike debljine graničnog sloja z^{**} , a da su invarijantni u odnosu na reološku jednačinu stanja tečnosti čiji se granični sloj posmatra.

U svim parametrima oblika se posredstvom veličine z^{**} , odnosno njenih stepena, pojavljuje u integralnom obliku uticaj predistorije kretanja u graničnom sloju. Prvi parametar oblika f_1 (1.74) izražava uticaj lokalnog nagiba krive rasporeda brzine $V(x)$. Pozitivnim vrednostima f_1 odgovara ubrzano strujanje a negativnim usporeno. Drugi parametar f_2 nosi u sebi uticaj krivine krive $V(x)$. Parametri višeg reda međjutim nemaju očigledno geometrijsko tumačenje, ali se može reći da je njihov uticaj i značaj utoliko veći ukoliko viši izvodi brzine spoljašnjeg strujanja $V(x)$ imaju veće vrednosti u posmatranom intervalu promenljive x .

Kako je funkcija $V(x)$ potpuno proizvoljna, neprekidna i potreban broj puta diferencijabilna, to parametri f_k ($k = 1, 2, \dots$) sačinjavaju skup nezavisnih funkcija promenljive x .

1.10 UNIVERZALNA JEDNAČINA RAVANSKOG LAMINARNOG STACIONARNOG GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI U FORMI SALJNIKOVA - LOJJCJANSKOG

Kao osnova za izvodjenje univerzalne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti u formi Saljnikova - Lojccjanskog, poslužiće rezultati dobijeni u paragrafu 1.4 prilikom opšte transformacije jednačine graničnog sloja stepene tečnosti.

Koristeći jednačinu impulsa graničnog sloja stepene tečnosti (1.63) i imajući u vidu da je veličina B (1.36) funkcija promenljive x , dobija se veza

$$\frac{V}{n+1} \left(\frac{f}{B^{n+1} V_x} \right) x = \frac{\phi}{(n+1)B^{n+1}} - \frac{f V B_x}{V_x B^{n+2}}.$$

Posredstvom prethodnog izraza diferencijalna jednačina (1.38) se transformiše na sledeći oblik

$$\begin{aligned} & \left\{ (F_{\eta\eta})^n \right\}_\eta + \frac{\phi + 2n \cdot f}{(n+1)B^{n+1}} F F_{\eta\eta} + \frac{f}{B^{n+1}} (1 - F_\eta^2) = \\ & = \frac{f}{B^{n+1}} \cdot \frac{V}{V_x} \cdot \frac{d\xi}{dx} \left(\frac{B}{B} F F_{\eta\eta} + F_\eta F_\eta \xi - F_\eta F_{\eta\eta} \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Treba napomenuti da se do gornje diferencijalne jednačine došlo, sa još ne definisanim zakonom transformacije promenljive x i još uvek neodređenom funkcijom $h(x)$ u izrazima (1.28).

Univerzalizacija jednačine (1.84) može se izvršiti na različite načine. Za svaki definisani zakon transformacije $\xi = \xi(x)$, može se umesto promenljive ξ uvesti neki beskonačan skup parametara, koji diferencijalnu jednačinu (1.84) dovodi na univerzalan oblik. Ako se recimo za koordinatu ξ usvoji zakon transformacije (1.48), onda se jednačina (1.84) svodi na

$$\begin{aligned} & \{ (F_{\eta\eta})^n \}_\eta + \frac{\phi + 2n \cdot f}{(n+1) B^{n+1}} FF_{\eta\eta} + \frac{f}{B^{n+1}} (1 - F_\eta^2) = \\ & = 2\xi \left(\frac{B}{B} FF_{\eta\eta} + F_\eta F_{\eta\xi} - F_\xi F_{\eta\eta} \right). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Ova jednačina Görtlerovog tipa se transformiše na oblik (1.46), ako se koristi jednačina impulsa (1.63), uvede oznaka (1.42) i za vrednost funkcije h usvoji $h=1$. Diferencijalna jednačina (1.85) je opštija od diferencijalne jednačine (1.46), jer ona u transformacijama (1.28) i (1.29) sadrži neodređjenu funkciju $h(x)$. Diferencijalna jednačina (1.85) se može dovesti na univerzalan oblik, ako se umesto promenljive ξ uvede beskonačan skup parametara (1.52), koji u slučaju graničnog sloja njutnovske tečnosti nije pokazao zadovoljavajuće rezultate.

Razmatrajući različite moguće oblike transformacije $\xi(x)$, nije teško pokazati da se prirodno i racionalno dobijen skup parametara oblika graničnog sloja stepene tečnosti (1.80) može uvesti samo ako je

$$\xi = x. \quad (1.86)$$

U tom slučaju rešenje diferencijalne jednačine (1.84), je funkcija promenljivih x i η funkcional od $V(x)$ i funkcija parametra nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti n

$$F = F(x, \eta, \{V(x)\}, n). \quad (1.87)$$

Ako se umesto promenljive x uvede beskonačan skup nezavisno promenljivih - parametara (1.80), onda je

$$F(x, \eta, \{V\}, n) = F(\eta, n, f_1, f_2, \dots). \quad (1.88)$$

Za funkcijū F će se pretpostaviti da je neprekidna funkcija svih promenljivih i da je diferencijabilna po svim promenljivim.

Koristeći se izrazom (1.83), nije teško pokazati sledeću vezu parcijalnih izvoda po staroj promenljivoj x i po novim promenljivim f_1, f_2, \dots ,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{V}{Vf_1} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial}{\partial f_k}, \quad (1.89)$$

gde je $f_1 = f$ i θ_k dato sa (1.82).

Posredstvom (1.86), (1.88) i (1.89) diferencijalna jednačina (1.84) dobija konačan univerzalan oblik

$$\begin{aligned} & \{(F_{\eta\eta})^n\}_\eta + \frac{\phi(f_k) + 2nf_1}{(n+1)B^{n+1}} FF_{\eta\eta} + \frac{f_1}{B^{n+1}} (1-F_\eta^2) = \\ & = \frac{1}{B^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k (F_\eta F_{\eta f_k} - F_{\eta\eta} F_{f_k} + \frac{1}{B} B_{f_k} FF_{\eta\eta}). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Uvodjenjem jednačine impulsa (1.63) i veza (1.88) i (1.83) granični uslovi (1.39) postaju

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta \rightarrow 1 \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_\eta = F'_0(\eta) \quad \text{za } f_k = f_{k0}, \quad (1.91)$$

$$F_\eta = 0; \quad \frac{2nf_1 + \phi}{n+1} F + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k (F_{f_k} - \frac{1}{B} B_{f_k} F) = 0 \quad \text{za } \eta = 0.$$

Pošto se u nelinearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini (1.90) kao i u odgovarajućim graničnim uslovima (1.91), ne pojavljuje brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja na granici graničnog sloja, to je ovo univerzalna diferencijalna jednačina stacionarnih ravanskih laminarnih graničnih slojeva nenjutnovske stepene tečnosti.

Funkcija $F_0(\eta)$ u graničnim uslovima (1.91) se bira, tako da se za vrednost parametara $f_k = f_{k0}$ jednačina (1.90) svodi na bilo koju jednačinu sličnih rešenja.

U prostoru promenljivih f_1, f_2, \dots , tačka $f_1 = f_2 = \dots = 0$ predstavlja singularnu tačku jednačine (1.90). Za $f_1 = f_2 = \dots = 0$ iz (1.82) se ima da je i $\theta_1 = \theta_2 = \dots = 0$. U toj tački se naprimer može zahtevati da se jednačina (1.90) poklapa sa sledećom jednačinom graničnog sloja za podužno opstrujavanje ploče sa stepenom tečnošću [17], [16], [18], [3].

$$n(F_0'')^{n-1} F_0''' + F_0' F_0'' = 0, \quad (1.92)$$

$$F_0(0) = 0, \quad F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1.$$

Ovo je međjutim moguće samo ako je ispunjen uslov

$$(n+1)B_0^{n+1} = \phi_0 = (n+1)\xi_0. \quad (1.93)$$

Potsetimo se, da je univerzalna diferencijalna jednačina (1.90) dobijena posredstvom transformacija (1.86), (1.28) i (1.29)

$$\xi = x, \quad \eta = h(x) \frac{v(x)^{a/2}}{v \sqrt{2\xi}} \cdot y \quad (1.94)$$

$$\psi = \frac{v \sqrt{2\xi}}{h(x)} \cdot v(x)^{1 - \frac{a}{2}} F(\xi, \eta). \quad (1.95)$$

Korišćenjem (1.29), (1.28) i (1.36), može se pokazati da u ovom radu, za celo vreme transformacija jednačina graničnog sloja stepene tečnosti, promenljiva η i strujna funkcija ψ imaju i ovaj oblik

$$\eta = \frac{B(x)}{\delta^{**}(x)} \cdot y, \quad (1.96)$$

i

$$\psi = \frac{\delta^{**}(x)}{B(x)} v(x) F(\xi, \eta). \quad (1.97)$$

Ako se karakteristika debljine graničnog sloja definiše posredstvom izraza

$$g(x) = \frac{\delta^{**}(x)}{B(x)}, \quad (1.98)$$

onda se iz (1.72) i (1.73) dobija promenljiva η i strujna funkcija ψ uopštene afine sličnosti

$$\eta = \frac{B(x)}{\delta^{**}(x)} \cdot y, \quad (1.99)$$

$$\psi = \frac{\delta^{**}(x)}{B(x)} v(x) F(\eta, f_1, f_2, \dots). \quad (1.100)$$

Univerzalna jednačina tipa Saljnikova - Oke (1.57) dobijena je uvođenjem skupa parametara β_k (1.52) i funkcije

$$F = F(\eta, \beta_0, \beta_1, \dots), \quad (1.101)$$

dok je univerzalna jednačina tipa Saljnikova - Lojcjanskog (1.90) rezultat uvođenja skupa parametara oblika (1.80) i zavisnosti

$$F = F(\beta, f_1, f_2, \dots). \quad (1.102)$$

Vidi se da je u slučaju univerzalne jednačine u obliku Saljnikova - Lojcjanskog ispunjen uslov uopštene afine sličnosti (1.100), dok u slučaju univerzalne jednačine tipa Saljnikova - Oke, on nije ispunjen, zbog nejednakosti parametara β_k sa parametrima oblika graničnog sloja stepene tečnosti f_k .

Ako se nova promenljiva η posmatra u obliku (1.94), koji je potpuno ekvivalentan sa (1.96), onda se vidi da u tom zakonu transformacije figuriše još jedna neodređena funkcija $h(x)$.

Usvajanjem te funkcije u obliku

$$h(x) = B(x) v^{\frac{n}{n+1}} (2\xi)^{1/2} \left\{ \frac{\phi_1^{-\frac{a}{2}(n+1)-n+1} V(x)}{\phi_0 \int_0^x V(x) \phi_1^{-1} dx} \right\}^{\frac{1}{n+1}}, \quad (1.103)$$

gde su ϕ_0 i ϕ_1 prirodni brojevi, iz (1.37) i (1.94) se dobijaju sledeći izrazi za parametar oblika i novu promenljivu η

$$f = \frac{\phi_0 V_x(x) \cdot \int_0^x V(x) \phi_1^{-1} dx}{V(x) \phi_1}, \quad (1.104)$$

$$\eta = \frac{B(x) \cdot V(x) \frac{\phi_1+1-n}{n+1}}{\left(v \phi_0 \int_0^x V(x) \phi_1^{-1} dx \right)^{\frac{1}{n+1}}} \cdot y. \quad (1.105)$$

Kasnije će se pokazati da (1.104), ustvari predstavlja rešenje linearizovane jednačine impulsa (1.63), koja se integrali tek posle nalaženja rešenja univerzalne jednačine (1.90).

Poredjenjem izraza (1.105) i (1.48), se vidi da nova promenljiva η ima oblik uopštene promenljive Görtlera.

Sva ovde izneta razmatranja predstavljaju ustvari uopštavanje rezultata Saljnikova dobijenih u radu [4], pri proučavanju graničnih slojeva njutnovske tečnosti. Poredjenjem zaključaka iz ovog rada sa onim iz [4] vidi se da način pristupanja proučavanju graničnih slojeva njutnovske tečnosti ostaje potpuno očuvan pri proučavanju graničnih slojeva nenjutnovske stepene tečnosti.

Za $n = 1$, tj. za njutnovsku tečnost, univerzalna jednačina (1.90) graničnih slojeva stepene tečnosti, se svodi na univerzalnu jednačinu Saljnikova [4] graničnih slojeva njutnovske tečnosti. Isto to se događa i sa svim ostalim izrazima upotrebljenim prilikom izvodjenja diferencijalne jednačine (1.90).

Ako se učini pretpostavka da je funkcija B (1.36) konstantna, tj.

$$B = \text{const},$$

onda se (1.90) svodi na univerzalnu jednačinu, koju je Djordjević izveo u radu [7], pri uopštavanju metode Lojczjanskog [1], na granični sloj stepene tečnosti.

Može se postaviti pitanje o mogućnosti eliminacije parametra nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti n iz univerzalne jednačine (1.90)? Svi pokušaji u tom pravcu učinjeni u toku mojih istraživanja nisu urodili plodom. S obzirom da je veličina n karakteristika reološke jednačine stanja stepene tečnosti, tj. fizička karakteristika koja definiše fizičko stanje posmatranog fluida, čini mi se da bi bilo mesto pretpostavci da se taj parametar ne može uopšte eliminisati iz univerzalne jednačine (1.90).

1.11 REŠAVANJE UNIVERZALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Prema tome problem stacionarnih ravanskih laminarnih graničnih slojeva stepene tečnosti se sveo na rešavanje univerzalne diferencijalne jednačine (1.90). Ta diferencijalna jednačina je nelinearna, parcijalna jednačina trećeg reda. Nepoznata funkcija F je funkcija beskonačno mnogo nezavisno promenljivih η, f_1, f_2, \dots . Određivanje funkcije F u zavisnosti od svih tih promenljivih predstavlja složen za sada nerešiv matematički problem. Ako bi se mogla naći takva funkcija F , onda bi ona bila tačno rešenje svih problema graničnih slojeva stepene tečnosti.

Ako se u univerzalnoj jednačini (1.90) usvoji da su k promenljivih - parametara skupa f_k (1.80) različiti od nule a svi ostali jednaki nuli, onda se dobija k -to parametarsko približenje pune univerzalne jednačine. U diferencijalnoj jednačini k -tog parametarskog približenja, uvek figuriše još jedan parametar, parametar n nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti. Ako se u jednačini (1.90) zadrži k promenljivih skupa f_k , a odbaci parcijalan izvod po k -tom parametru na desnoj strani jednačine (1.90) onda se dobija lokalizovano k -to parametarsko približenje univerzalne jednačine. Vidi se da postoji čitava klasa približnih - parametarskih rešenja pune univerzalne diferencijalne jednačine (1.90).

Nije teško pokazati da se razmatranja Karjakina [11], koja se odnose na univerzalne jednačine u obliku Lojtcjanskog graničnog sloja njutnovske tečnosti, mogu preneti i na univerzalnu jednačinu (1.90). Zato se citira samo zaključak iz tog rada, koji se odnosi na k -to parametarsko približenje univerzalne jednačine. Prema tome zaključku naime k -to parametarsko približenje univerzalne jednačine, predstavlja tačno rešenje graničnog sloja na telu oštrem ivice, za koje je brzina spoljašnje struje $V(x)$ data u vidu proizvoljnog polinoma k -tog stepena promenljive x , tj.

$$V(x) = \sum_{i=0}^k a_i \cdot x^i, \quad a_i = \text{const.}$$

U daljem radu će se razmatrati jedno-parametarsko približenje univerzalne diferencijalne jednačine (1.90). Ono se dobija ako se usvoji da su svi parametri f_k sem prvog jednaki nuli

$$f_2 = f_3 = \dots = 0. \quad (1.106)$$

Tada iz (1.82) sleduje

$$\theta_1 = f_1 \phi(f_1); \quad \theta_2 = \theta_3 = \dots = 0. \quad (1.107)$$

Uvodjenjem (1.107) u (1.90), dobija se jednoparametarsko približenje univerzalne jednačine

$$\begin{aligned} & \{(F_{nn}^{(1)})^n\}_n + \frac{\phi^{(1)}(f_1) + 2n \cdot f_1 F_{nn}^{(1)}}{(n+1)(B^{(1)})_{n+1}} F_{nn}^{(1)} + \frac{f_1}{(B^{(1)})_{n+1}} \{1 - (F_n^{(1)})^2\} = \\ & = \frac{f_1}{(B^{(1)})_{n+1}} \phi^{(1)}(f_1) (F_n^{(1)} F_{nf_1}^{(1)} - F_{nn}^{(1)} F_{f_1}^{(1)} + \frac{B_{f_1}^{(1)}}{B^{(1)}} F_n^{(1)} F_{nn}^{(1)}), \quad (1.108) \end{aligned}$$

dok iz (1.91) sleduju odgovarajući granični uslovi

$$F_n^{(1)} = 1 \quad \text{za } n = \infty,$$

$$F_n^{(1)} = F_0'(n) \quad \text{za } f_1 = f_{10} = 0, \quad (1.109)$$

$$F_n^{(1)} = 0; \quad \frac{\phi^{(1)}(f_1) + 2nf_1}{n+1} F_n^{(1)} + f_1 \phi^{(1)}(f_1) (F_{f_1}^{(1)} - \frac{1}{B^{(1)} B_{f_1}^{(1)}} F_n^{(1)}) = 0, n = 0,$$

gde je $F_0(n)$ rešenje sistema (1.92).

Diferencijalna jednačina jednoparametarskog približenja (1.108), se rešava zajedno sa izrazima (1.64), (1.65), (1.66), (1.35) i (1.36), koji u jednoparametarskom približenju glase

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \int_0^\infty (1 - F_n^{(1)}) dn; & B^{(1)} &= \int_0^\infty F_n^{(1)} (1 - F_n^{(1)}) dn, \\ H^{(1)} &= \frac{A^{(1)}}{B^{(1)}}; & \zeta^{(1)} &= \{B^{(1)} (F_{nn}^{(1)})_{n=0}^n\}, \quad (1.110) \end{aligned}$$

$$\phi^{(1)} = (n+1) \left\{ \zeta^{(1)} - (2+H^{(1)}) + \frac{n-1}{n+1} f_1 \right\}.$$

Istovremenim rešavanjem sistema jednačina (1.108), (1.109), (1.92) i (1.110) dobilo bi se rešenje za sve probleme ravanskog graničnog sloja stepene tečnosti u jednoparametarskom približenju. Pri numeričkom rešavanju ovih jednačina dolazi se do zaključka, da je rešenje tog sistema nestabilno i višeznačno. Ovom problemu, graničnog sloja njutnovske tečnosti ($n=1$), su u poslednje vreme posvetili pažnju Lušius M. i Saljnikov V. u svom još neobjavljenom radu. Oni su pokazali da univerzalna diferencijalna jednačina oblika Saljnikova - Lojtcjanskog sadrži višeznačna rešenja, ako se funkcija $h(x)$ ne definiše unapred pre rešavanja sistema. Prema (1.103), je vidljivo da se ta višeznačnost može izbeći i ako se pre rešavanja sistema jednačina, umesto funkcije $h(x)$ usvoji funkcija $B^{(1)}(f_1)$.

Najjednostavnije je, usvojiti funkciju $B^{(1)}(f_1)$, na osnovu sličnih rešenja jednačina graničnog sloja. Kod rešavanja pomenutog sistema, moglo bi se onda primeniti i sledeći postupak iteracija funkcije $B^{(1)}$. Naime, prvo se usvoji funkcija $B^{(1)}(f_1)$ na osnovu sličnih rešenja reši ceo sistem i na kraju ponovo izračuna funkcija $B_1^{(1)}(f_1)$. Ta funkcija $B_1^{(1)}(f_1)$ bi bila polazna za ponovno rešavanje celog sistema jednačina, i sračunavanje $B_2^{(1)}(f_1)$. Ceo postupak iteracija bi se ponavljao sve dok se iz dve susedne iteracije nebi dobilo približno ista kriva $B^{(1)}(f_1)$. Taj postupak bi zahtevao mnogo vremena i rada na računskoj mašini, te stoga on u ovom radu neće biti obradjen, već će se usvojiti funkcija $B^{(1)}(f_1)$, na osnovu sličnih rešenja jednačina graničnog sloja stepene tečnosti na ravnoj ploči.

Za taj slučaj je

$$B_0 = B^{(1)}(f_1) = \text{const.} \quad (1.111)$$

Potrebno je napomenuti, da Lojtcjanski uzima ovu pretpostavku već na samom početku razmatranja, pri izvodjenju svojih univerzalnih jednačina graničnog sloja njutnovske tečnosti [1]. Nije teško da se proveriti, da je oblik univerzalne jednačine nezavisan od toga, u kojoj se fazi njenog izvodjenja učini pretpostavka (1.111). Medjutim, ako se ta pretpostavka shvati kao

aproksimacija kompletno postavljenog problema graničnog sloja u ovom radu, onda se prethodni postupak iteracija veličine $B^{(1)}(f_1)$, može smatrati kao mogući put za poboljšanje te aproksimacije, a samim tim i metode Lojcjanskog.

Uvodjenjem pretpostavke (1.111) iz (1.108) i (1.109), se dobija diferencijalna jednačina

$$\begin{aligned} \{ (F_{\eta\eta}^{(1)})^n \}_\eta + \frac{\phi^{(1)}(f_1) + 2nf_1}{(n+1) B_0^{n+1}} F_\eta^{(1)} F_{\eta\eta}^{(1)} + \frac{f_1}{B_0^{n+1}} \{1 - (F_\eta^{(1)})^2\} = \\ = \frac{f_1 \phi^{(1)}(f_1)}{B_0^{n+1}} (F_\eta^{(1)} F_{\eta f_1}^{(1)} - F_{\eta\eta}^{(1)} F_{f_1}^{(1)}), \end{aligned}$$

sa graničnim uslovima

$$F_\eta^{(1)} = 1 \quad \text{za } \eta = \infty,$$

$$F_\eta^{(1)} = F_0'(\eta) \quad \text{za } f_1 = 0,$$

$$F_\eta^{(1)} = 0, \quad \frac{2nf_1 + \phi^{(1)}(f_1)}{n+1} F_\eta^{(1)} + f_1 \phi^{(1)}(f_1) F_{f_1}^{(1)} = 0 \quad \text{za } \eta = 0,$$

gde je $F_0(\eta)$ rešenje sistema (1.92).

Sistem (1.110) sada postaje

$$\begin{aligned} A^{(1)} = \int_0^\infty (1 - F_\eta^{(1)}) d\eta; \quad B_0 = B^{(1)} = \int_0^\infty F_\eta^{(1)} (1 - F_\eta^{(1)}) d\eta = \text{const}, \\ H^{(1)} = \frac{A^{(1)}}{B_0}; \quad \zeta^{(1)} = B_0^n \{ (F_{\eta\eta}^{(1)})^n \}_{\eta=0}, \end{aligned} \quad (1.113)$$

$$\phi^{(1)} = (n+1) \left\{ \zeta^{(1)} - \left(2 + H^{(1)} + \frac{n-1}{n+1} f_1 \right) f_1 \right\}.$$

Kako je za granični sloj na ravnoj ploči parametar oblika $f_1 = 0$ i $F_\eta^{(1)} = F_0'(\eta)$, to je tada iz (1.113)

$$\zeta_0 = B_0^n \{ (F_0'')^n \}_{\eta=0} \quad (1.114)$$

(1.112)

a iz (1.93)

$$B_0 = \{(F_0'')^n\}_{n=0}. \quad (1.115)$$

Znači, vrednost konstante B_0 se određuje posle nalaženja funkcije F_0 , odnosno posle rešavanja sistema (1.92) graničnog sloja stepene tečnosti na ravnoj ploči.

Postoje dva tačna rešenja diferencijalne jednačine (1.92) i jedno približno dobijeno metodom Karman-Polhauzena [18]. Kao osnova za rešavanje jednoparametarske univerzalne jednačine (1.112) i sistema (1.113), za određivanje konstante B_0 mora se poznavati vrednost $F_0''(0)$ i to za različite vrednosti parametra n . Tačne vrednosti za $F_0''(0)$ iz rada Šuljmana i Berkovskog [3] i tačne vrednosti za $F_0''(0)$ iz rada Acrivos [16], bitno se razlikuju. To nije teško konstatovati, ako se pogledaju tablica 1 rada [16] i tablice na kraju monografije [3]. Za $n = 1$, tj. za njutnovsku tečnost, vrednosti su iste, dok je za $n = 0,1$ naprimer, vrednost $F_0''(0)$ prema [3] oko 8,2 puta manja od one date u radu [16]. Za $n = 2$ vrednost $F_0''(0)$ prema radu [3] je za 1,27 puta veća od iste prema radu [16]. Karman-Polhauzenova metoda [18] daje bliske vrednosti za $F_0''(0)$ sa onim iz rada [16].

Pre nego što su u ovom radu usvojene vrednosti za $F_0''(0)$, koje predstavljaju osnovu za rešavanje jednoparametarske jednačine, izračunato je $F_0''(0)$ na novi četvrti način primenom varijacionog principa. Ovaj način će biti detaljnije izložen u drugom delu rada. Dobijene približne vrednosti za $F_0''(0)$ su bile bliže vrednostima $F_0''(0)$ iz rada [16] nego one po metodi Karman-Polhauzena. Međutim, treba istaći da su sve tri vrednosti za razno n , medju sobom vrlo bliske. Zato je usvojeno kao tačno rešenje graničnog sloja stepene tečnosti na ravnoj ploči ono objavljeno u radu [16].

Potrebne vrednosti za $F_0''(0)$, iz rada [16] date su u tabeli 2.

Tablica 2

n	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$F_0''(0)$	0,434102	0,46961	0,5258	0,5766	0,6188	0,6540	0,7036	0,7741

Ako se posmatra jednoparametarska univerzalna jednačina (1.112) zajedno sa izrazima (1.113), koji se svi moraju rešavati simultano, onda je jasno da o traženju nekog analitičkog rešenja tog problema nema ni govora. Međutim, zahvaljujući razvijenim metodama numeričke integracije nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina matematičke fizike (naprimer [76], [8], [9] itd.) i moćnim digitalnim računskim mašinama, moguće je da se pridje rešavanju sistema (1.112), (1.113).

Na Katedri aerohidromehanike Politehničkog Instituta u Lenjingradu je razvijena metoda numeričke integracije parcijalnih nelinearnih diferencijalnih jednačina - parametarskih približenja univerzalnih jednačina teorije graničnog sloja [11], [12], [13]. Prema toj metodi numerička integracija k-to parametarskih približenja univerzalnih jednačina graničnog sloja, se vrši na taj način što se te jednačine svedu na sistem tzv. implicitnih (nejavnih) algebarskih jednačina, zamenom diferencijala sa konačnim razlikama. Ti algebarski sistemi nelinearnih jednačina se linearizuju i rešavaju iterativno metodom napred - nazad (progonke) [76]. Ta metoda rešavanja je prilagodjena za rešavanje sistema jednačina (1.112), (1.113) i (1.115), pri čemu su vrednosti $F_0''(0)$ uzimane za razno n iz tablice 2. Rešavanje je uradjeno na računskoj mašini IBM - 360 Model 44, Matematičkog instituta u Beogradu.

Rešenja su nadjena za vrednosti parametra nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti $n = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4$ i 5 . Rešenje za $n = 1$, za njutnovsku tečnost, se poklapa sa rešenjem iz rada [1], pa se ovde neće ni navoditi. Rešenje za $n = 1$ je služilo za testiranje celog programa. Za $n < 0,5$ dobijena rešenja su pokazivala nestabilnost u okolini tačke odvajanja graničnog sloja, iako su uslovi stabilnosti metode

napred - nazad (progonke) bili ispunjeni. Ova nestabilna rešenja su imala nelogičan tok u oblasti bliskoj tački odvajanja graničnog sloja, pa se zato ovde neće ni navoditi. Za $n > 0,5$ koraci po η i f_1 su se smanjivali sve dok rešenje više nije trpelo nikakvu promenu pri daljem smanjenju koraka. Za $n < 0,5$ taj proces izgleda nije konvergentan, jer se broj iteracija beskonačno povećava pri smanjivanju koraka. Pitanje nestabilnosti rešenja u ovoj oblasti biće predmet jednog naknadnog istraživanja. S obzirom da se iz rešenja dobijenih za druge vrednosti parametra n , mogu izvesti kvalitativni zaključci koji se odnose i na područje $n < 0,5$, na dobijanju ovih rešenja u nestabilnoj oblasti se u ovom radu nije insistiralo.

Sračunate funkcije $\zeta^{(1)}(f_1)$, $H^{(1)}(f_1)$ i $\phi^{(1)}(f_1)$ date su za razno n , naime za $n = 0,5; 1,5; 2; 2,5; 3; 4$ i 5 na dijagramima br. 2 do 8, i za karakteristične vrednosti parametra f_1 u tablicama br. 1 do 7 priloga I.

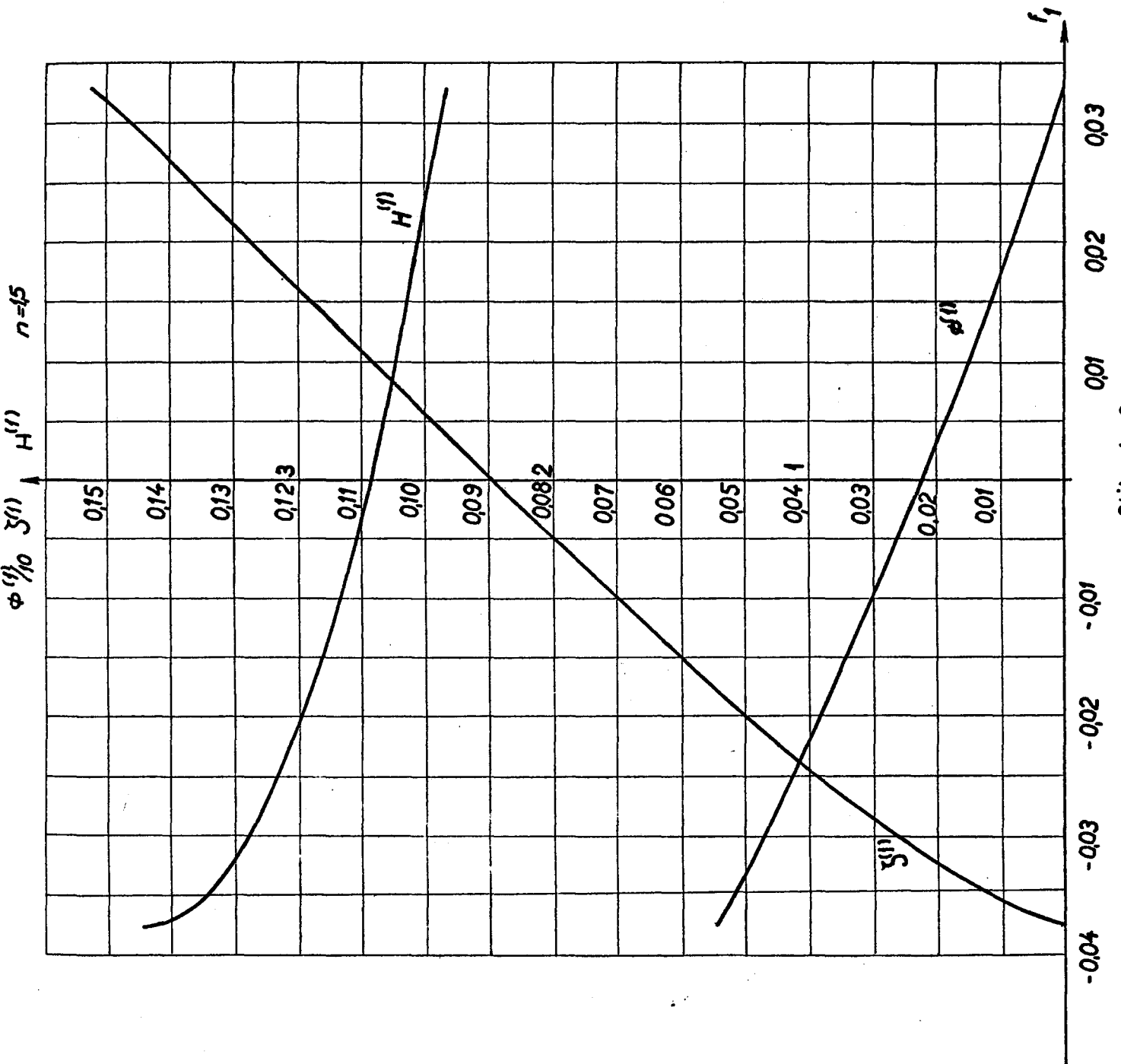
Profili brzine $\frac{u}{V(x)} = F_\eta^{(1)}(n, \eta, f_1)$ dati su za iste vrednosti parametra n i karakteristične vrednosti η i f_1 na dijagramima br. 9 do 15 i u tablicama br. 8 do 14 priloga II. Na tim dijagramima je sa η_m obeležena vrednost koordinate η za koju je zadovoljen granični uslov

$$F_\eta^{(1)} = 1 \quad \text{za } \eta = \eta_m.$$

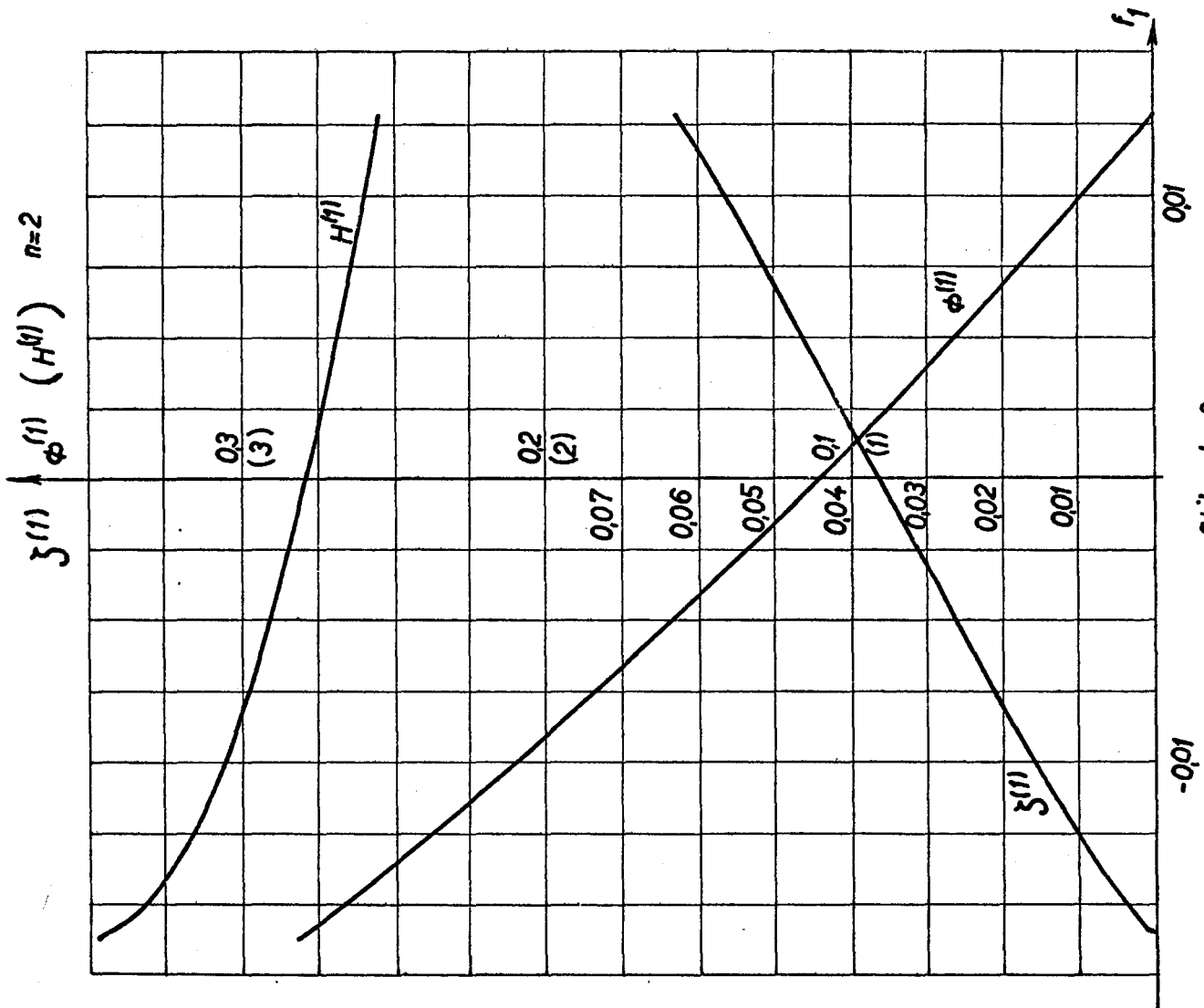
Tačka odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti, se nalazi na onom mestu konture tela gde tangencijalan napon postaje ravan nuli, odnosno gde je

$$\zeta^{(1)}(n, f_1) = 0. \quad (1.116)$$

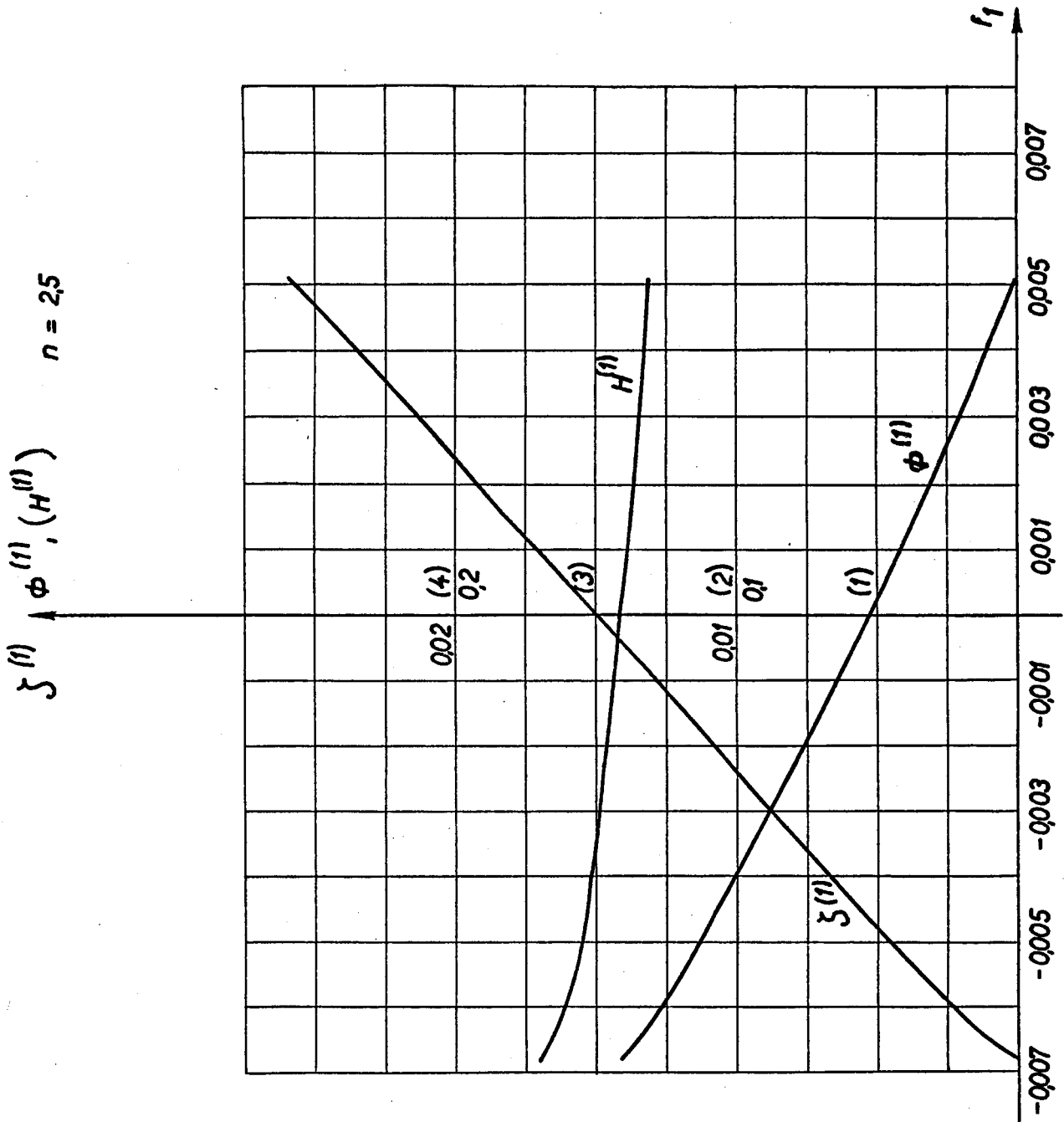
Vrednosti parametra f_1 u tački odvajanja su obeležene sa f_{1odv} i za razno n date u tablici br. 3.



Slika br. 2

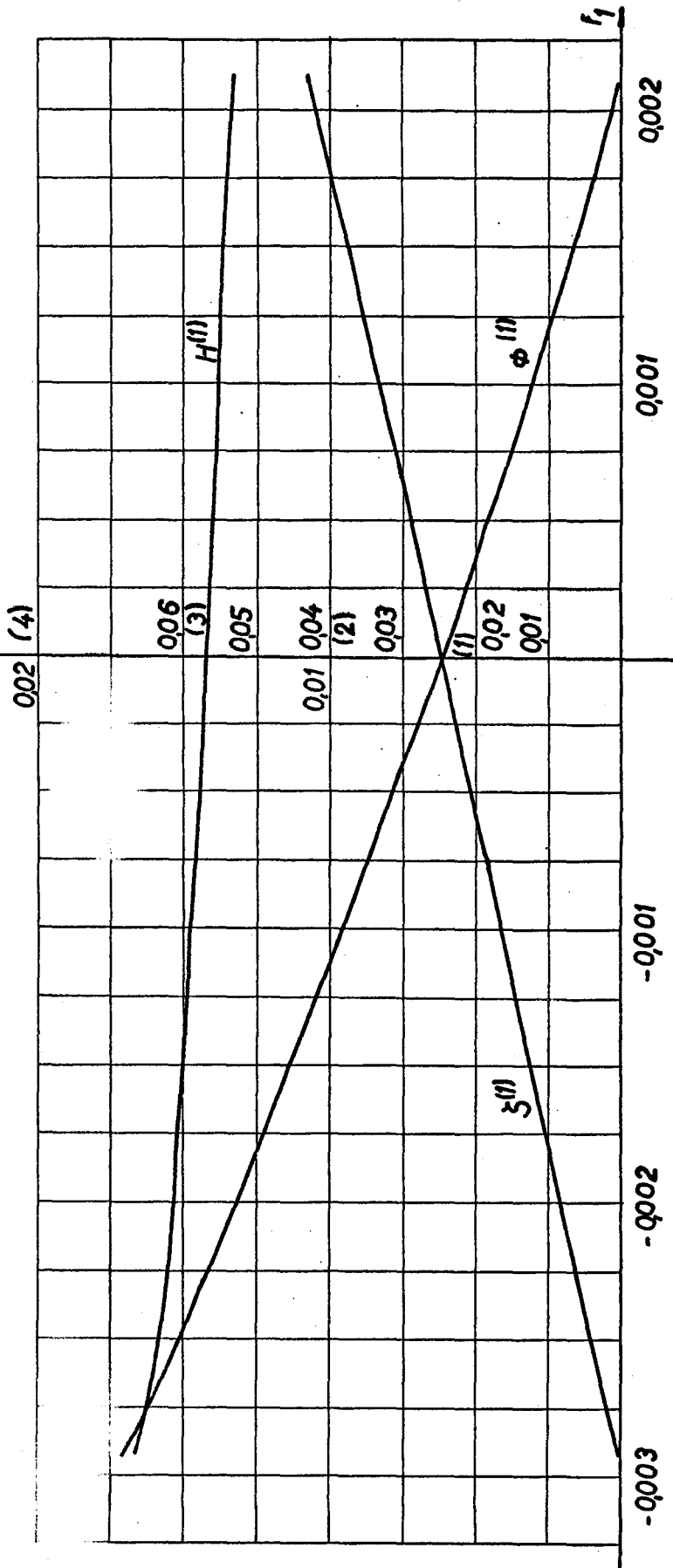


Stika br. 3

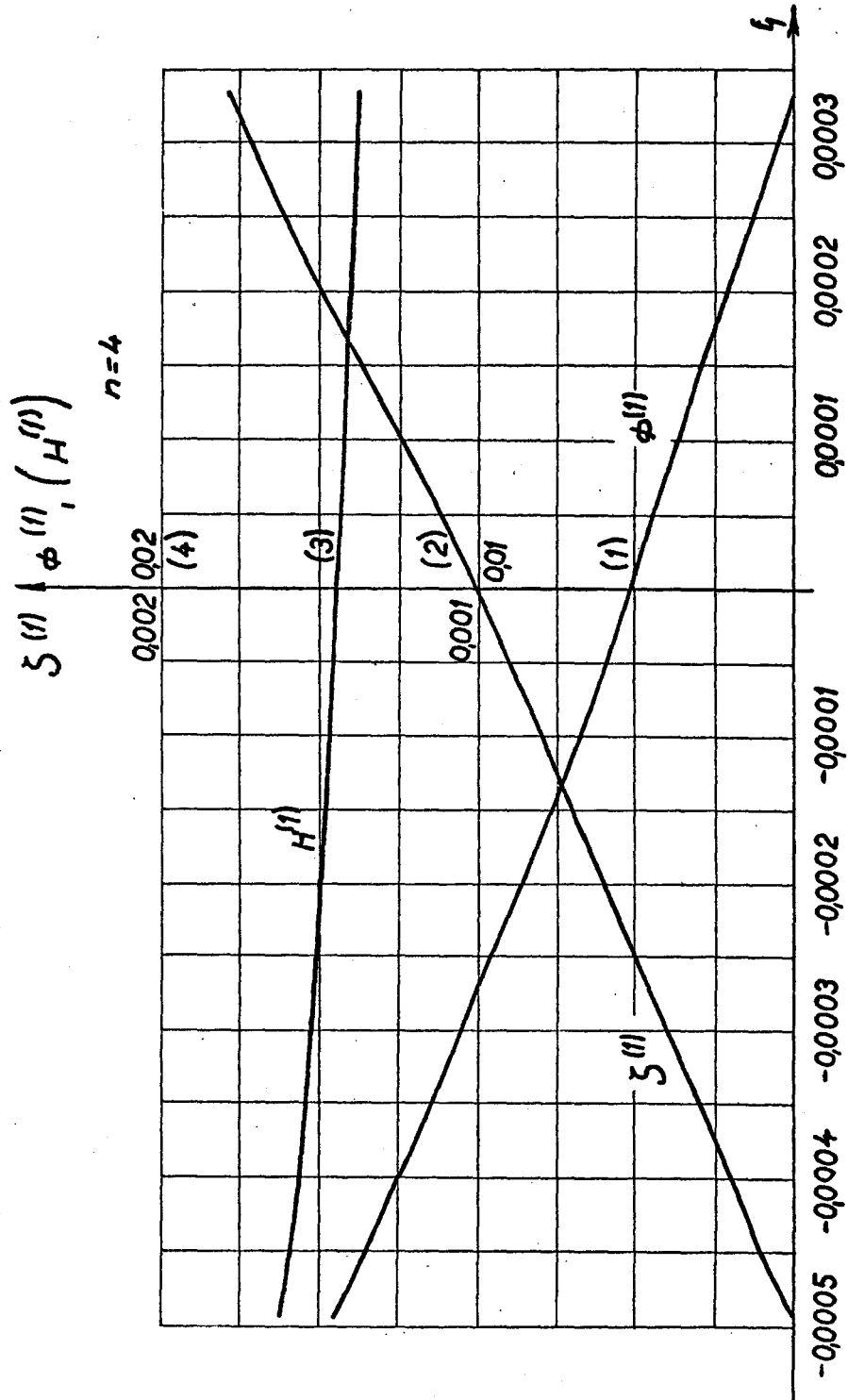


Stika br 4

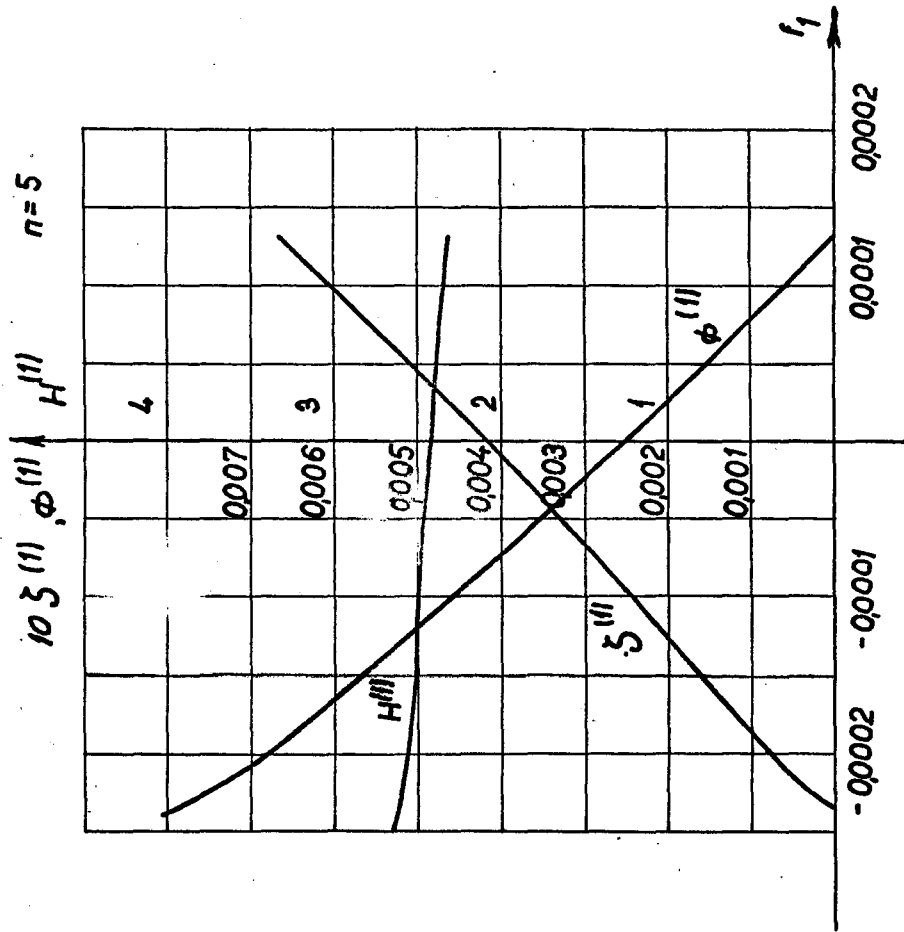
$\zeta^{(1)} \uparrow \phi^{(1)}, (H^{(1)}) \quad n=3$



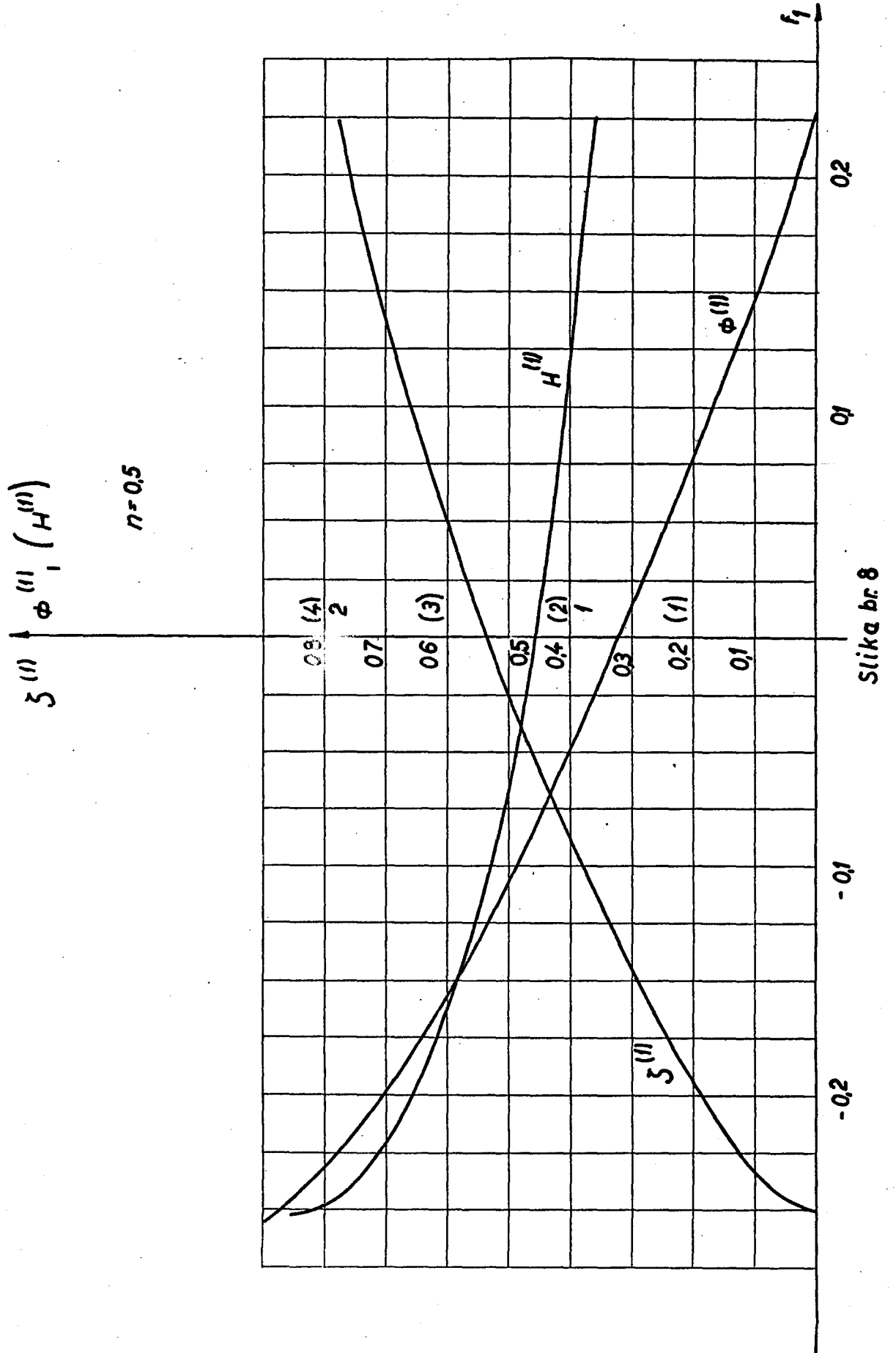
Sika br:5

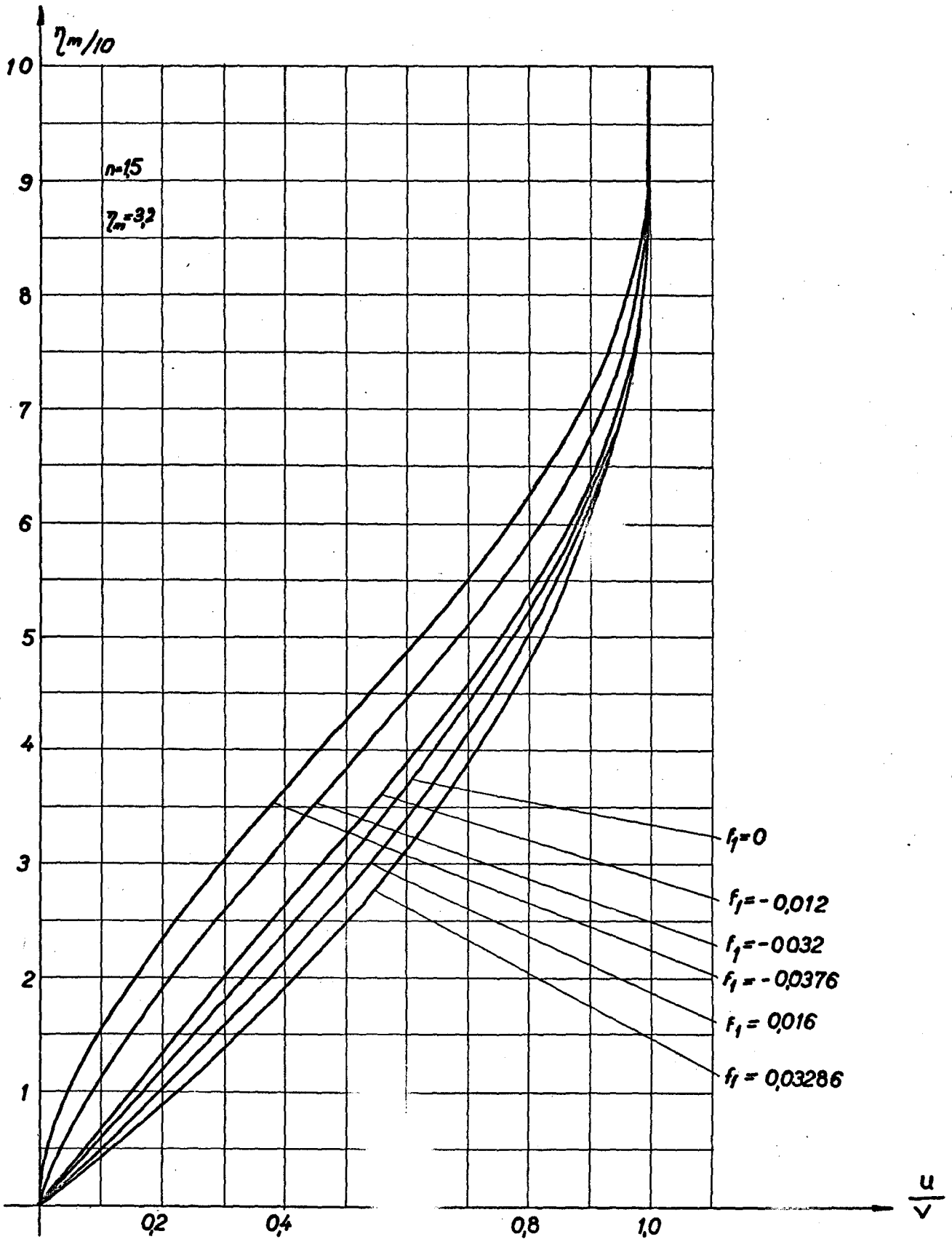


Slika br. 6

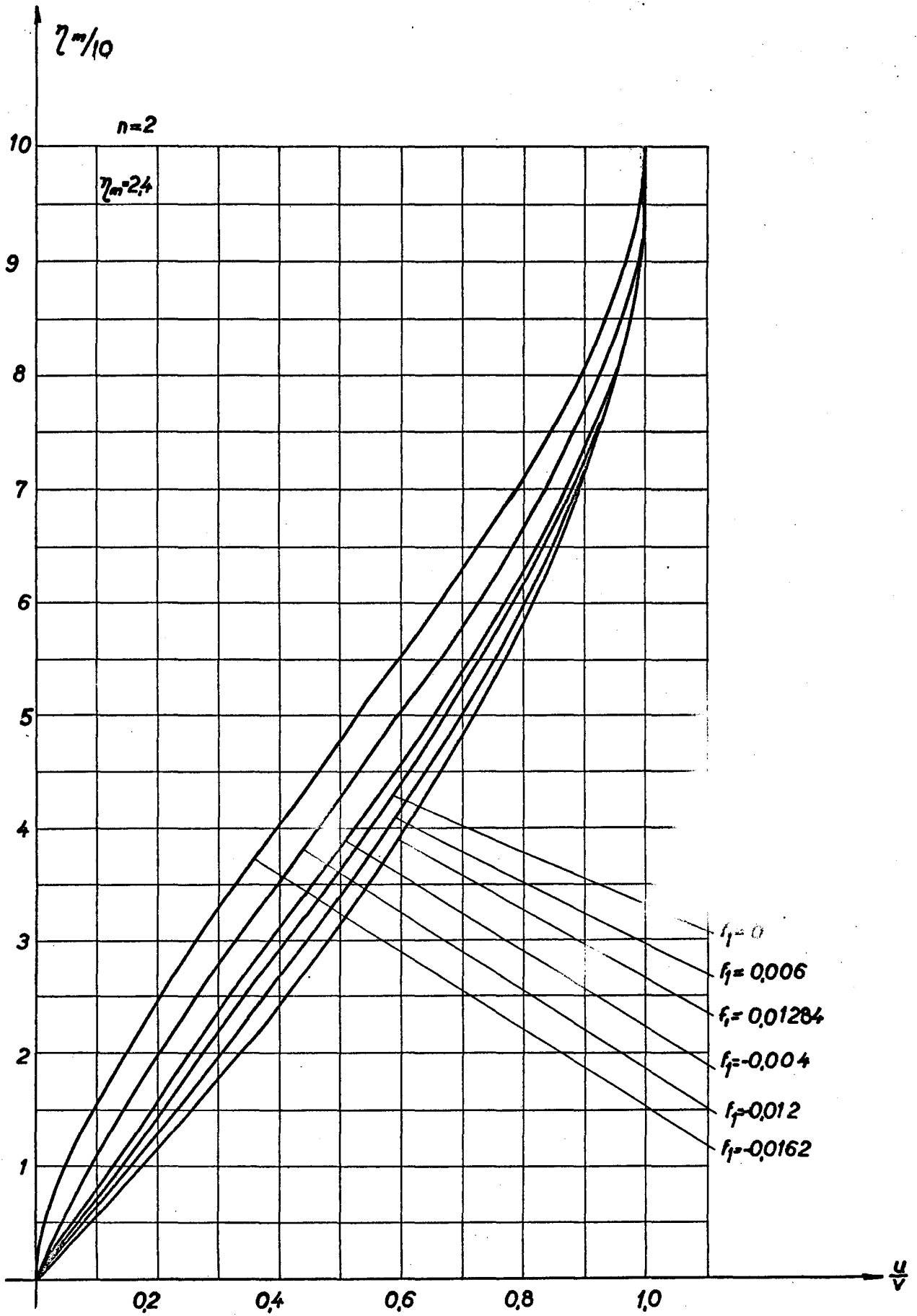


Slika br.7

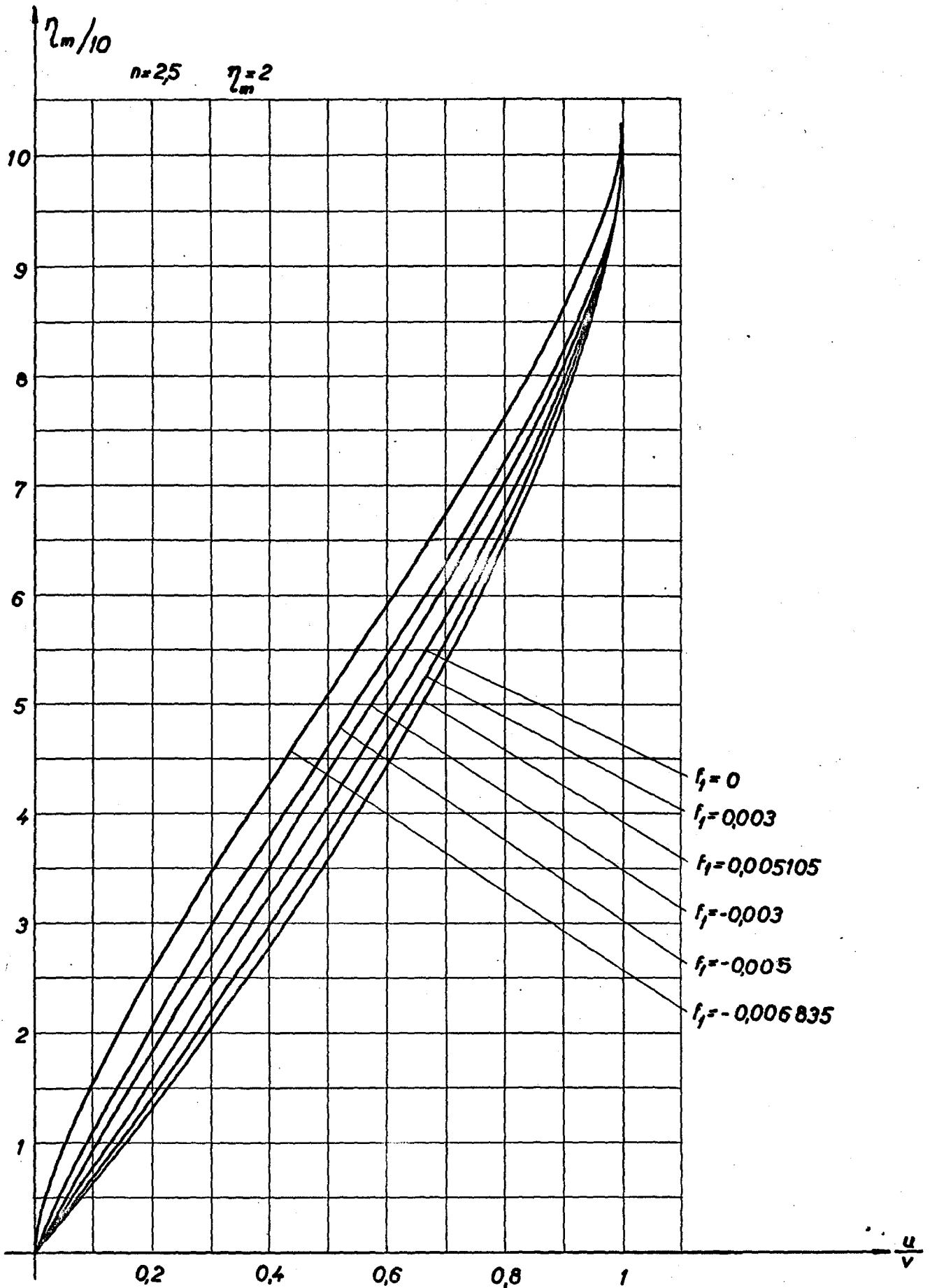




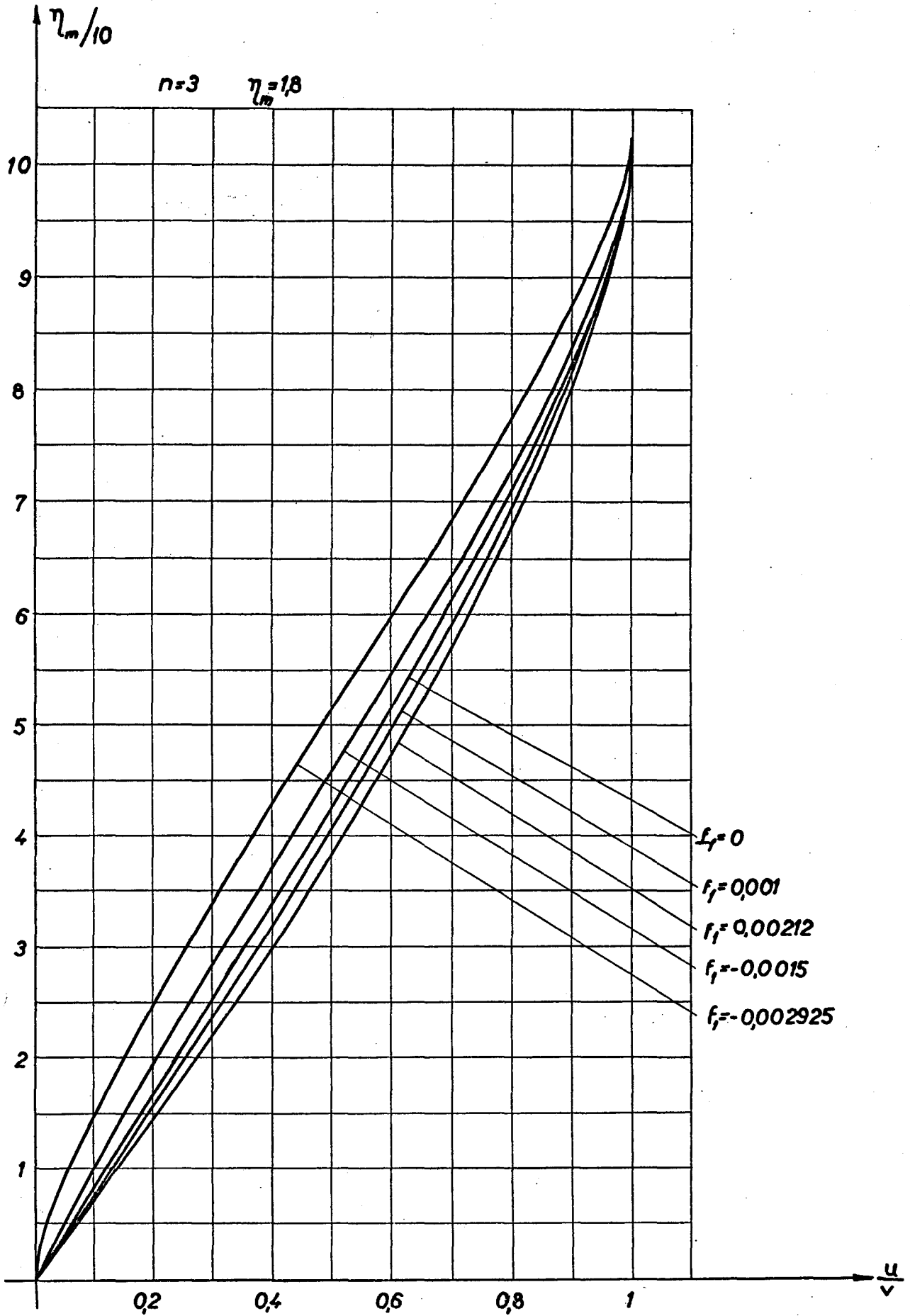
Slika b.



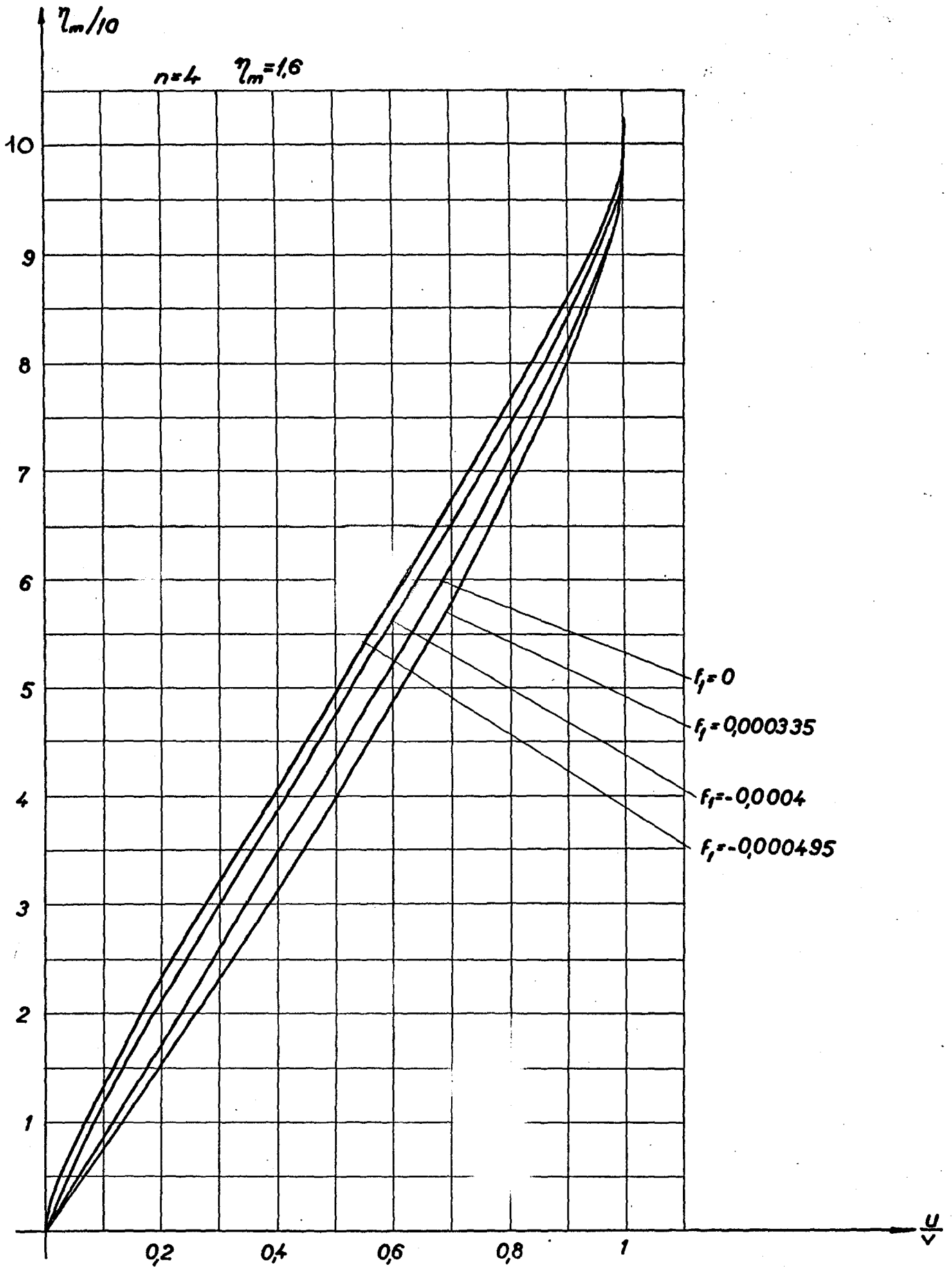
Slika br.10



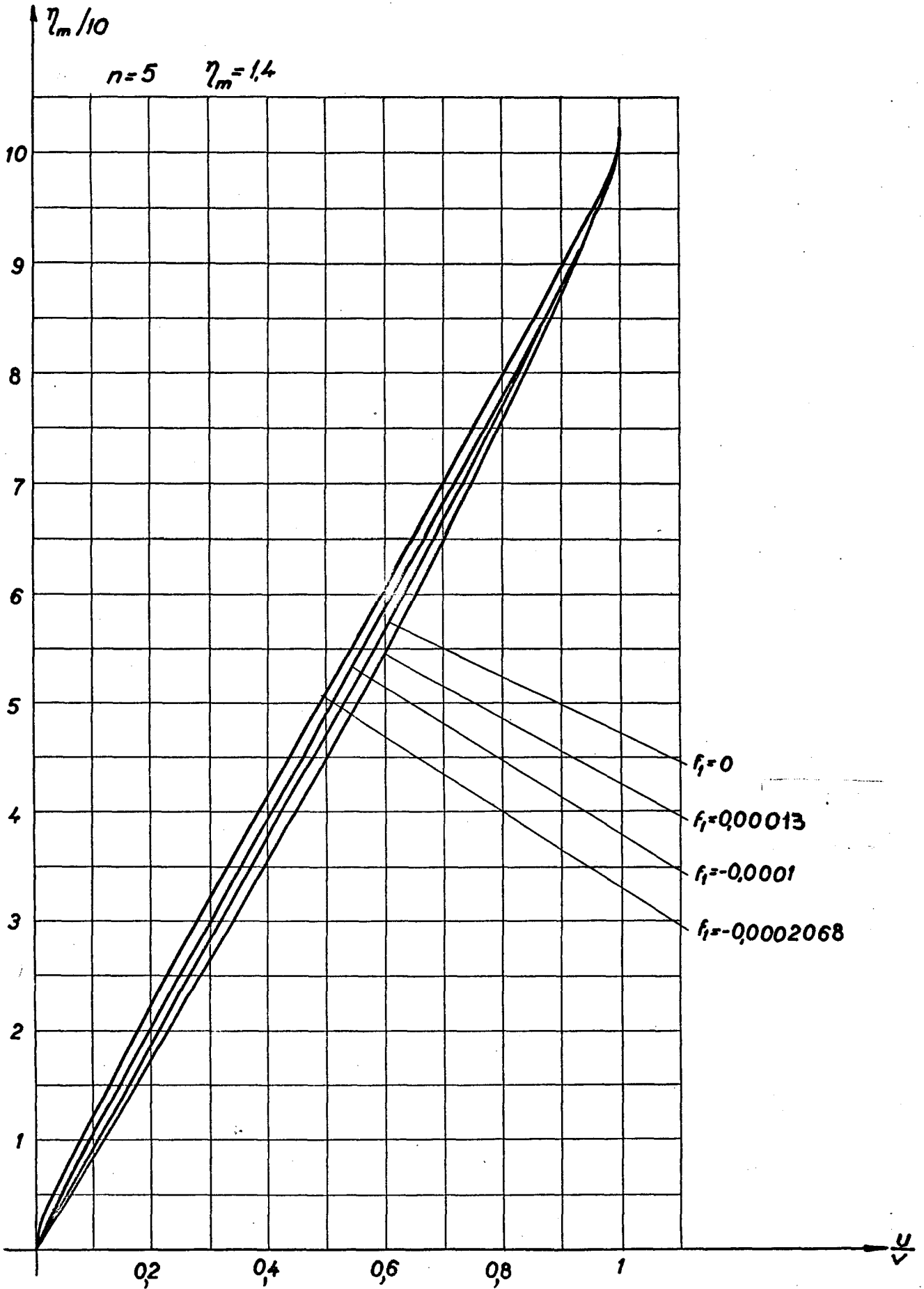
Slika br. 11



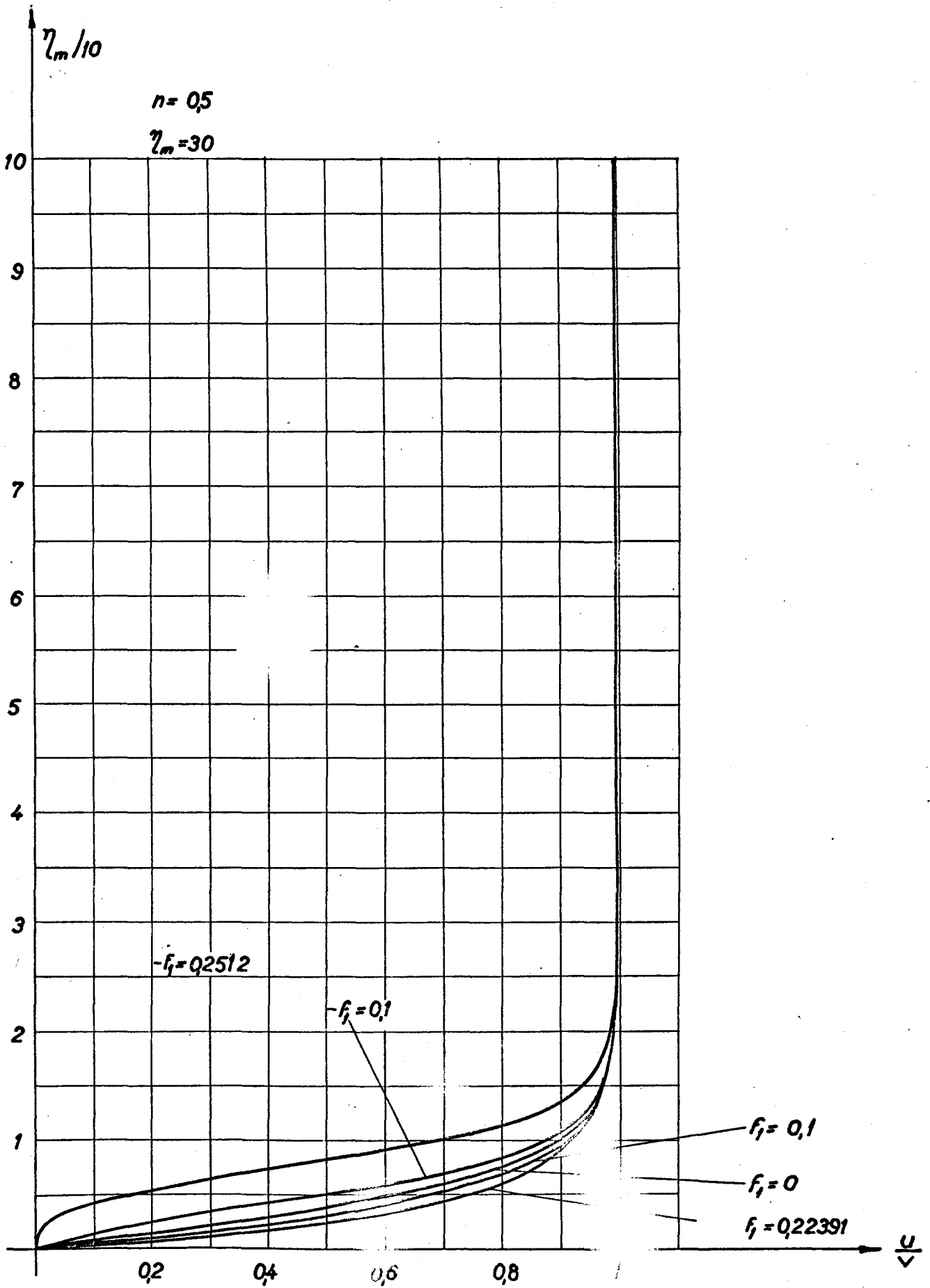
Slika br.12



Slika br. 13



Slika br. 14



Slika br.15

Tablica br 3

n	0,5	1 [1]	1,5	2	2,5	3	4	5
ϕ_2	0,602185	0,4408	0,22497	0,11007	0,052537	0,024737	$0,50982 \cdot 10^{-2}$	$0,25063 \cdot 10^{-2}$
$\phi_1 = T$	+4,467	+5,7139	+7,638	+9,524	+11,344	+13,02	+16,675	+20,14
ϕ_2	3,931	6,0189	2,432	7,2001	20,41	632,41	4374,4	6475
$f_{\text{odv.}}$	-0,2512	-0,0852	-0,0376	-0,0162	-0,006835	-0,002925	-0,000495	$-0,2068 \cdot 10^{-3}$
f_{max}	0,22391	0,0854	0,03286	0,01284	0,005105	0,00212	0,000335	$0,13 \cdot 10^{-3}$
$S = -\frac{f_{\text{odv.}}}{\phi_0}$	0,314	0,1935	0,1675	0,1472	0,1301	0,1182	0,0971	0,0824

Vrednosti parametra f_1 u zaustavnoj tački, tj. za koje je zadovoljen uslov da je

$$\phi^{(1)}(n, f_1) = 0 \quad (1.117)$$

obeležene su sa $f_{1\max}$ i takođe date u tablici br. 3 za razno n .

Numerička integracija jednoparametarske univerzalne jednačine je, kao i kod njutnovske tečnosti, izvršena u intervalu $f_{1\text{odv}} \leq f_1 \leq f_{1\max}$. Integraciju izvan tačke odvajanja, tj. za $f_1 < f_{1\text{odv}}$, nemoguće je izvršiti, jer za $f_1 = f_{1\text{odv}}$ univerzalna diferencijalna jednačina poseduje singularitet.

U daljem radu biće potrebne vrednosti veličine

$$S = - \frac{f_{1\text{odv}}}{\phi_0}, \quad (1.118)$$

pa su i one date u tablici br. 3.

Isto tako će biti potrebne i vrednosti konstanti ϕ_0 , ϕ_1 i ϕ_2 razvoja funkcije $\phi^{(1)}(n, f_1)$ u red po stepenima od parametra f_1

$$\phi^{(1)}(n, f_1) = \phi_0 - \phi_1 f_1 + \phi_2 (f_1)^2 + \dots \quad (1.119)$$

One su sračunate, na osnovu tablica br. 1 do 7 iz priloga I, i za razno n date u tablici br. 3.

Ne rešavajući još nijedan konkretan primer graničnog sloja stepene tečnosti već se mogu, na osnovu ovih rezultata numeričke integracije, izvesti neki zaključci o fizičkim osobinama ravanskih laminarnih stacionarnih graničnih slojeva stepene tečnosti.

Iz dijagrama br. 2 do 8 se naime, vide osobine funkcija $\zeta^{(1)}$, $H^{(1)}$ i $\phi^{(1)}$. Oblik krive $\zeta^{(1)}$ za $n = 0,5$, najviše odstupa od linearnog zakona, dok se sa porastom n , ta kriva sve više približava obliku prave linije. Krive $H^{(1)}$ i $\phi^{(1)}$ imaju nelinearan karakter za svako n u blizini tačke odvajanja graničnog sloja. Odstupanje od pravolinijskog karaktera krive $H^{(1)}$ opada sa porastom parametra n .

Sa dijagrama br. 9 do 15, vidi se da se profil brzine $\frac{u}{V(x)}$ za različite vrednosti parametra f_1 , najviše deformiše za pseudoplastičnu tečnost, tj. za $n = 0,5$. Sa porastom parametra n , te deformacije su sve manje, tako da su za $n = 5$ (vrlo dilatantna tečnost), neznatne. Ispunjenje graničnog uslova za u_m , je kod pseudoplastične tečnosti ($n = 0,5$) asimptotsko, dok za $1 < n$ (dilatantna tečnost), to nije slučaj. Ova osobina profila brzine posmatranih graničnih slojeva je već zapažena u radovima [16], [17] i [18], ali samo u slučaju graničnog sloja na ravnoj ploči.

Iz tablice br. 3 se vidi, da se sa porastom n od 0,5 do 5 f_{10dv} menja od -0,2512 do -0,0002068. Na osnovu toga, se već sada može reći da se sa porastom parametra n tačka odvajanja graničnog sloja na nekom telu pomera uzvodno.

1.12 O INTEGRACIJI IMPULSNE JEDNAČINE GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Posle određivanja rešenja univerzalne diferencijalne jednačine, tj. funkcije $F^{(1)}(n, f_1, n)$, potrebno je da se za rešavanje pojedinih konkretnih problema teorije ravanskog laminarnog graničnog sloja stepene tečnosti, nađe zavisnost veličina $z^{**}(x)$ ili $f_1(x)$. Medjutim, u tom cilju potrebno je rešiti običnu nelinearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda, odnosno jednačinu impulsa u obliku (1.63)

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{V_x}{V} \phi^{(1)}(n, f_1) + \frac{V_{xx}}{V_x} f_1, \quad (1.120)$$

$$\text{za } x = x_0 \quad f_1 = f_{10},$$

ili u obliku (1.68)

$$\frac{dz^{**}}{dx} = \frac{\phi^{(1)}(n, V_x z^{**})}{V}, \quad (1.121)$$

$$\text{za } x = x_0 \quad z^{**} = z_0^{**}.$$

Ako tačka $x = 0$ odgovara prednjoj zaustavnoj tački tela u kojoj je $V = 0$, onda je to singularna tačka u

kojoj je takodje i $\phi^{(1)}(n, f_1) = 0$. Prema (1.117), vrednosti parametra f_1 , za koje je zadovoljen taj uslov obeležene su sa $f_{1\max}$ i date u tablici 3 za različite vrednosti n . Prema tome početne vrednosti za numeričku integraciju jednačine (1.120) odnosno (1.121) su

$$\text{za } x = 0: \quad f_1 = f_{1\max}; \quad z_0^{**} = \frac{f_{1\max}}{V_x(0)}. \quad (1.122)$$

Ako se razmatra telo sa oštrom prednjom ivicom ili profil sa nultim nagibom pri vrhu, onda je u toj tački $V \neq 0$ i granični uslovi su, zbog $\delta_0^{**} = 0$, sledeći:

$$\text{za } x = 0: \quad f_1 = 0; \quad z_0^{**} = 0. \quad (1.123)$$

U opštem slučaju ako je $V \neq 0$ za neko $x = x_0 > 0$ onda je početni uslov dat sa

$$\text{za } x = x_0 > 0: \quad z = z_0^{**} > 0. \quad (1.124)$$

Primetimo da veličina $z_0^{**} = \frac{\delta_0^{**}(n+1)}{V} V_0^{1-n}$ izražava u približnoj formi predistoriju razvitka graničnog sloja na intervalu $0 \leq x \leq x_0$.

Integracija nelinearne jednačine (1.120), odnosno jednačine (1.121), se može izvršiti metodom "korak po korak", koju je predložio Lojczjanski [1].

U ovom radu će se ta jednačina u linearizovanom obliku rešiti običnom kvadraturom. Ranije je dat oblik reda za funkciju $\phi^{(1)}(n, f_1)$ (1.119). Ako se u tom redu zanemare svi članovi koji sadrže stepene f_1 veće od (f_1) , onda se dobija linearizovana funkcija

$$\phi^{(1)}(n, f_1) = \phi_0(n) - \phi_1(n)f_1. \quad (1.125)$$

Ova aproksimacija se može opravdati već ranije spomenutom činjenicom da funkcija $\phi^{(1)}$ ima približno linearan karakter na celom intervalu promenljive f_1 , sem u blizini tačke odvajanja graničnog sloja.

Ako se linearizovan oblik funkcije $\phi^{(1)}$ (1.125) uvrsti u (1.20), onda se dobija diferencijalna jednačina

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{V}{V_x} (\phi_0 - \phi_1 f_1) + \frac{V_{xx}}{V_x} f_1,$$

čije je opšte rešenje

$$f_1 = \frac{\phi_0 V_x \int_0^x V(x) \phi_1^{-1} dx}{V(x) \phi_1} + C \frac{V_x}{V \phi_1}.$$

Iz uslova da je na telima sa prednjom zaustavnom tačkom za $x = 0$ $V = 0$ i da, prema (1.122), f_1 mora da bude konačno, sleduje da je konstanta integracije $C = 0$.

Pošto je na telima sa oštrom prednjom ivicom za $x = 0$ $V \neq 0$, a prema (1.123) je $f_1 = 0$, te je ponovo $C = 0$.

Znači, za tela sa prednjom zaustavnom tačkom i za tela sa oštrom prednjom ivicom, rešenje linearizovane impulsne jednačine glasi

$$f_1(x) = \frac{\phi_0 V_x(x) \int_0^x V(t) \phi_1^{-1} dt}{V(x) \phi_1}. \quad (1.126)$$

Rešavanje impulsne jednačine u nelinearnom obliku, pomenutom metodom Lojtcjanskog, ne predstavlja složen problem. Takvo rešenje daje tačnije rezultate u blizini tačke odvajanja i tačniji položaj same tačke odvajanja graničnog sloja. Međutim, kako je jedan od osnovnih ciljeva ovog rada proučavanje fizičkih osobina graničnih slojeva stepene tečnosti, a ne poboljšanje već postojećih rezultata, to će u tom cilju rešenje (1.126) poslužiti na zadovoljavajući način.

Ako se uporede izrazi (1.126) i (1.104), onda se vidi da su ti izrazi za parametar oblika f_1 potpuno isti ($f \equiv f_1$). Znači, ako nova promenljiva η pri izvodjenju univerzalne diferencijalne jednačine (1.90), ima oblik (1.105), onda se parametar oblika u novim promenljivim poklapa sa rešenjem linearizovane impulsne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti.

Koristeći rešenja univerzalne diferencijalne jednačine $F^{(1)}$, tablice i dijagrame za funkcije $\zeta^{(1)}$, $H^{(1)}$ i $\phi^{(1)}$ i rešenje linearizovane jednačine impulsa mogu se sada rešavati

svi specijalni slučajevi laminarnih ravanskih stacionarnih graničnih slojeva stepene tečnosti za vrednosti parametra nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti u intervalu $0,5 \leq n \leq 5$.

1.13 PRIMERI

U ovom delu, razmatraće se nekoliko konkretnih problema ravanskog stacionarnog graničnog sloja stepene nenjutnovske tečnosti. Treba da se napomene, da sem problema sličnih rešenja, ni jedan od narednih problema nije rešavan u postojećoj literaturi. Već na početku je rečeno da su i slična rešenja samo delimično obradjena u monografiji [3]. Poredjenje dobijenih rezultata sa poznatim i tačnim je zato moguće samo za $n = 1$, tj. za njutnovski granični sloj.

U daljem tekstu, sve veličine sa donjim indeksom 1 biće bezdimenzione. Naprimer, bezdimenziona koordinata x , biće obeležena sa x_1 itd. Sa donjim indeksom s biće označene vrednosti veličina u tački odvajanja graničnog sloja. Naprimer, x_{1s} je vrednost bezdimenzione koordinate x u tački odvajanja graničnog sloja.

Iz (1.126), ima se vrednost parametra oblika f_1 u tački odvajanja graničnog sloja

$$f_{10dv} = \phi_0 \frac{V_x(x_s) \int_0^{x_s} V(t) \phi_1^{-1} dt}{V(x_s) \phi_1}.$$

Posredstvom (1.118) i uvođenjem bezdimenzionih veličina, prethodni izraz se transformiše na oblik

$$\frac{V_{1x_1}(x_{1s}) \int_0^{x_{1s}} V_1(t) \phi_1^{-1} dt}{V_1(x_{1s}) \phi_1} = -S, \quad (1.127)$$

gde su vrednosti za ϕ_1 i S date u tablici 3.

i_1 / Slična rešenja

Slična rešenja jednačina ravanskog stacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti postoje, kao i kod njutnovske tečnosti, pri strujanju oko klina [33]. Pri tome je brzina spoljašnjeg strujanja data sa

$$V_1 = x_1^p,$$

dok je ugao otvora klina

$$\alpha = \frac{2p}{1+p} \pi,$$

gde je p prirodan broj.

Ako se izraz za V_1 uvrsti u (1.127), onda se posle integracije i sredjivanja dobija

$$p_s = - \frac{S}{1+S(\phi_1-1)}. \quad (1.128)$$

Zbog ispunjenja uslova odvajanja graničnog sloja (1.127), tangencijalan napon na površini klina je pri ovoj vrednosti p_s ravan nuli. Koristeći (1.128) i tablične vrednosti za S i ϕ_1 iz tablice 3, izračunate su vrednosti za p_s za razno n i date u tablici 4.

Tablica 4

n	0,5	1[1]	1,5	2	2,5	3	4	5
p_s	-0,1505	-0,1012	-0,0794	-0,0653	-0,055	-0,0488	-0,0385	-0,0319

Ovde je oznakom [1] naznačeno da je, za slučaj njutnovske tečnosti ($n = 1$), p_s izračunato na osnovu rezultata Lojtcjanskog [1].

Tačno rešenje ovog problema za $n = 1$, tj. za njutnovsku tečnost, je dao Hartree [73], i njegova odgovarajuća vrednost za p_s iznosi -0,091.

Iz tablice 4 se vidi da se sa porastom n od 0,5 do 5 povećava i p_s i približava nuli. Na osnovu ovoga se može zaključiti da se usporenje strujanja pri kome granični sloj

još uvek naleže na telo smanjuje sa porastom parametra n reološke jednačine stanja stepene tečnosti.

$i_2/$ Konvergentno - divergentni kanal

Neka je brzina potencijalnog strujanja data sa

$$V = V_{\infty} - bx. \quad (1.129)$$

Ovo strujanje se može interpretirati kao strujanje kroz kanal, koji se sastoji od dela sa paralelnim zidovima (brzina V_{∞}) i konvergentnog ($b < 0$) odnosno divergentnog dela ($b > 0$).

Ako se uvedu bezdimenziona brzina i bezdimenziona koordinata x

$$V_1 = \frac{V}{V_{\infty}}; \quad x_1 = \frac{x}{V_{\infty}/b}, \quad (1.130)$$

onda se iz (1.129) dobija

$$V_1 = 1 - x_1. \quad (1.131)$$

Posredstvom (1.129) iz (1.127) se dobija tačka odvajanja graničnog sloja

$$x_{1s} = 1 - \frac{1}{(1+S\phi_1)^{\frac{1}{n}}}. \quad (1.132)$$

Korišćenjem tablice 3 izračunate su vrednosti apscise tačke odvajanja, za razne vrednosti parametara n , i date u tablici 5.

Tablica 5

n	0,5	1[1]	1,5	2	2,5	3	4	5
x_{1s}	0,179	0,123	0,103	0,0905	0,0761	0,069	0,0575	0,047

Prema Leigh-tu [74], za $n = 1$, tj. za njutnovsku tečnost, tačna vrednost za x_{1s} iznosi $x_{1s} = 0,1198$. Iz tablice se vidi da se sa porastom parametra n tačka odvajanja graničnog sloja pomera uzvodno. Pri povećanju parametra n od 0,5 do 5 apscisa tačke odvajanja se naime smanjuje za oko 3,8 puta.

Ako se uvede bezdimenziona debljina gubitka impulsa

$$\delta_1^{**} = \frac{\delta^{**}}{V_\infty/b}$$

i iskoriste izrazi (1.129), (1.130), (1.126) i (1.37), onda se dobija

$$\delta_1^{**} = R_e^{-\frac{1}{n+1}} \left\{ \frac{\phi_0 [1 - (1-x_1)^{\phi_1}]}{\phi_1 (1-x_1)^{\phi_1+1-n}} \right\}^{\frac{1}{n+1}}, \quad (1.133)$$

gde je uopšteni Rejnoldsov broj

$$R_e = \frac{V_\infty^{2-n} (V_\infty/b)^n}{\nu}. \quad (1.134)$$

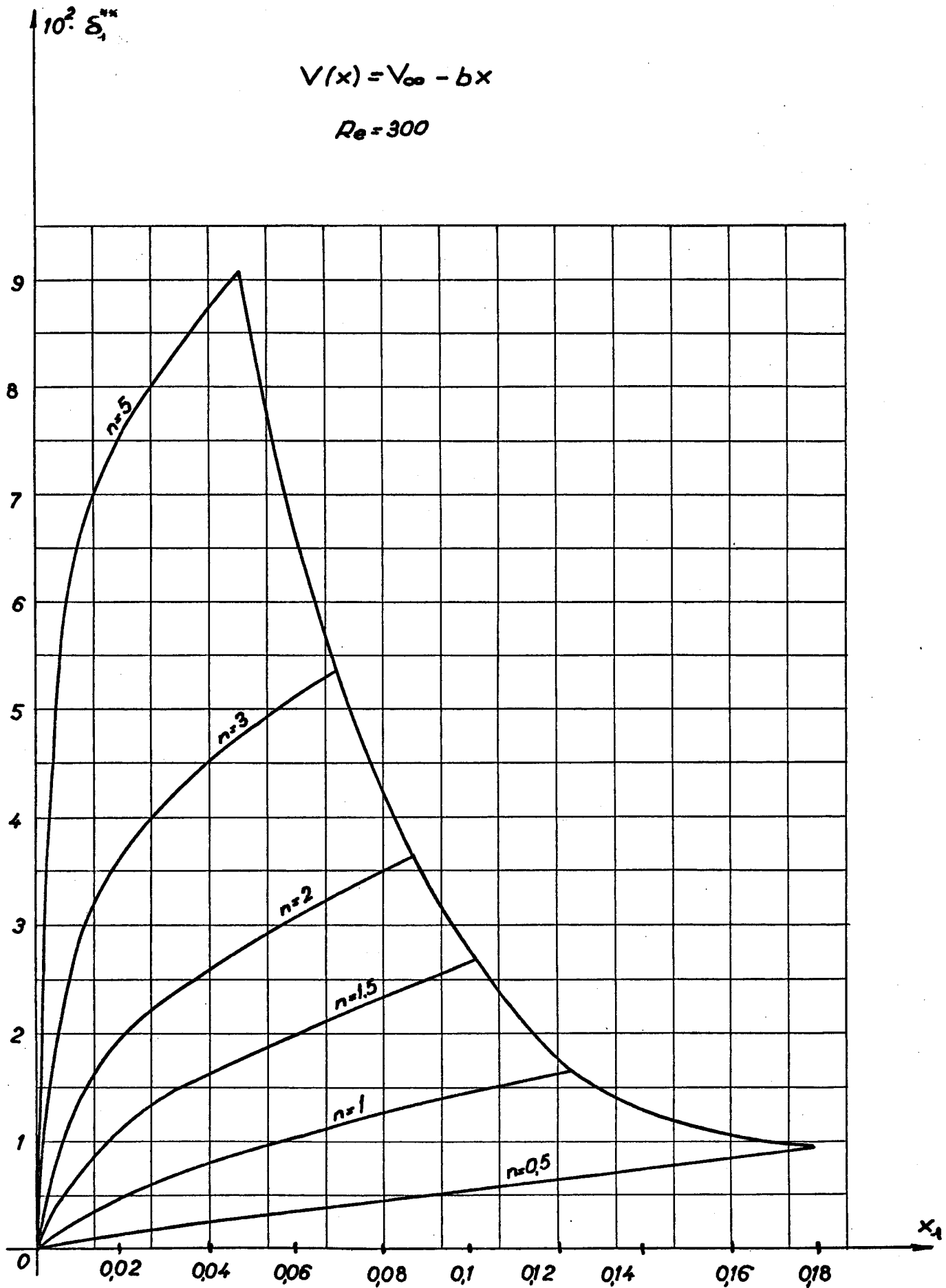
Na dijagramu br. 16 je, posredstvom tablice 3, data raspodela bezdimenzione debljine gubitka impulsa (1.133) za vrednost uopštenog Rejnoldsovog broja $R_e = 300$ i različite vrednosti parametra n .

Sa dijagrama 16 se vidi da bezdimenziona debljina gubitka impulsa δ_1^{**} , pri istim vrednostima uopštenog Rejnoldsovog broja i apscise x_1 , raste sa porastom parametra n .

Ako se ovaj zaključak poveže sa zaključkom o tački odvajanja graničnog sloja, onda se može uočiti sledeća fizička osobina graničnih slojeva stepene tečnosti.

Za pseudoplastičnu stepenu tečnost, tj. za $n < 1$, sa opadanjem parametra n debljina gubitka impulsa graničnog sloja se smanjuje, dok se tačka odvajanja graničnog sloja pomera nizvodno u divergentnom delu kanala.

Kod dilatantne stepene tečnosti, tj. za $n > 1$, sa porastom parametra nenjutnovskog ponašanja stepene tečnosti n , debljina graničnog sloja naglo raste, a apscisa tačke odvajanja se približava samom početku divergentnog dela kanala.



Slika br. 16

Ovi zaključci su potpuno u saglasnosti sa poznatim osobinama graničnog sloja, da je mogućnost pojave odvajanja graničnog sloja veća ukoliko je on deblji.

$i_3/$ Usporena strujanja sa rasporedom potencijalne brzine oblika $V_1 = (1 \pm x_1)^m$ za $m > 1$.

Ovde su dati položaji tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti za nekoliko usporenih strujanja. Rezultati su sredjeni u tablicama br. 6 do 9.

$v_1 = (1 + x_1)^{-1}$ $x_{1s} = 0,159$ za $n=1$ [15] Tablica 6

0,5	1 [1]	1,5	2	2,5	3	4	5
0,263	0,157	0,125	0,104	0,089	0,078	0,062	0,052

$v_1 = (1 + x_1)^{-2}$ $x_{1s} = 0,078$ za $n=1$ [15] Tablica 7

0,5	1 [1]	1,5	2	2,5	3	4	5
0,118	0,089	0,0595	0,0501	0,043	0,038	0,0305	0,0254

$v_1 = (1 - x_1)^{1/2}$ $x_{1s} = 0,223$ za $n=1$ [15] Tablica 8

0,5	1 [1]	1,5	2	2,5	3	4	5
0,307	0,220	0,186	0,164	0,144	0,131	0,106	0,0895

$v_1 = (1 - x_1)^2$ $x_{1s} = 0,067$ za $n=1$ [15] Tablica 9

0,5	1 [1]	1,5	2	2,5	3	4	5
0,096	0,065	0,0502	0,045	0,0392	0,036		0,024

Iznad svake tablice, je dat položaj tačke odvajanja graničnog sloja njutnovske tečnosti, tj. za $n = 1$, koji

je dobio Görtler u radu [15].

Iz ovih tablica se vidi da se pri porastu parametra n , kod svih posmatranih usporenenih strujanja, apscisa tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti smanjuje, odnosno da se tačka odvajanja graničnog sloja pomera uzvodno. Na prošlim primerima je ova osobina graničnih slojeva stepene tečnosti već primećena a ovde je na novim primerima i potvrđjena.

i₄/ Granični sloj na kružnom cilindru

Brzina potencijalnog strujanja oko kružnog cilindra poluprečnika R je data izrazom

$$V(x) = 2 V_{\infty} \sin \frac{x}{R}, \quad (1.135)$$

ili u bezdimenzionom obliku

$$V_1 = 2 \sin x_1. \quad (1.135a)$$

Da bi se dobio položaj tačke odvajanja graničnog sloja na kružnom cilindru, potrebno je da se (1.135a) uvrsti u (1.127) i da se u tom izrazu izvrši numerička integracija za svako n i odgovarajuće vrednosti za ϕ_1 i S iz tablice br. 3. Vrednosti apscise tačke odvajanja ($x_{1s} = x_s/R$) za različito n , su sredjene u tablici br. 10.

Tablica 10

n	0,5	1 [1]	1,5	2
x_{1s} [rad]	1,863	1,796	1,782	1,774
x_{1s} [°]	107,0	103,1	102,2	101,6
n	2,5	3	4	5
x_{1s} [rad]	1,762	1,754	1,7408	1,726
x_{1s} [°]	101,1	100,7	99,87	99,07

Tačan položaj tačke odvajanja za njutnovski granični sloj ($n = 1$) na kružnom cilindru je, prema Terril-u [14], određen uglom $x_{1s} = 104,5^\circ$.

Ponovo se može zaključiti da i na kružnom cilindru povećanje parametra n , utiče na smanjenje apscise tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti.

Za slučajeve $n > 1$, tačka odvajanja se sa porastom n pomera ka tački najveće brzine ($x_1 = 90^\circ$) na kružnom cilindru, Za slučajeve $n < 1$ tačka odvajanja se sa smanjivanjem n pomera ka zadnjoj kritičnoj tački na kružnom cilindru.

Za dalja razmatranja se uvode bezdimenzione veličine

$$x_1 = \frac{x}{R}; \quad V_1 = \frac{V}{2V_\infty}; \quad u_1 = \frac{u}{2V_\infty};$$

$$\delta_1^{**} = \frac{\delta^{**}}{R} (R_e)^{\frac{1}{n+1}}; \quad y_1 = \frac{y}{R} (R_e)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (1.136)$$

gde je uopšteni Rejnoldsov broj

$$R_e = \frac{(2V_\infty)^{2-n} \cdot R^n}{\nu}. \quad (1.137)$$

Korišćenjem (1.136) se dobija da je

$$V_1 = \sin x_1. \quad (1.138)$$

Posredstvom (1.138), (1.136) i (1.37) se dobija parametar oblika graničnog sloja u formi

$$f_1 = \cos x_1 (\sin x_1)^{1-n} (\delta_1^{**})^{n+1}. \quad (1.139)$$

Sa druge strane, korišćenjem (1.136), (1.137), (1.138), (1.99), (1.100) i (1.22) se dobija bezdimenziona veličina

$$\left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right)_{y_1=0} \right\}^n = \left(\frac{V_1}{\delta_1^{**}} \right)^n \zeta, \quad (1.140)$$

gde je ζ dato sa (1.66).

Prema radu [18], tangencijalni napon na površini tela je dat sa

$$\tau_o = k \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right\}_{y=0}.$$

Uvodeći izraze (1.136) i (1.137) u ovaj definicioni izraz dobija se koeficijent trenja

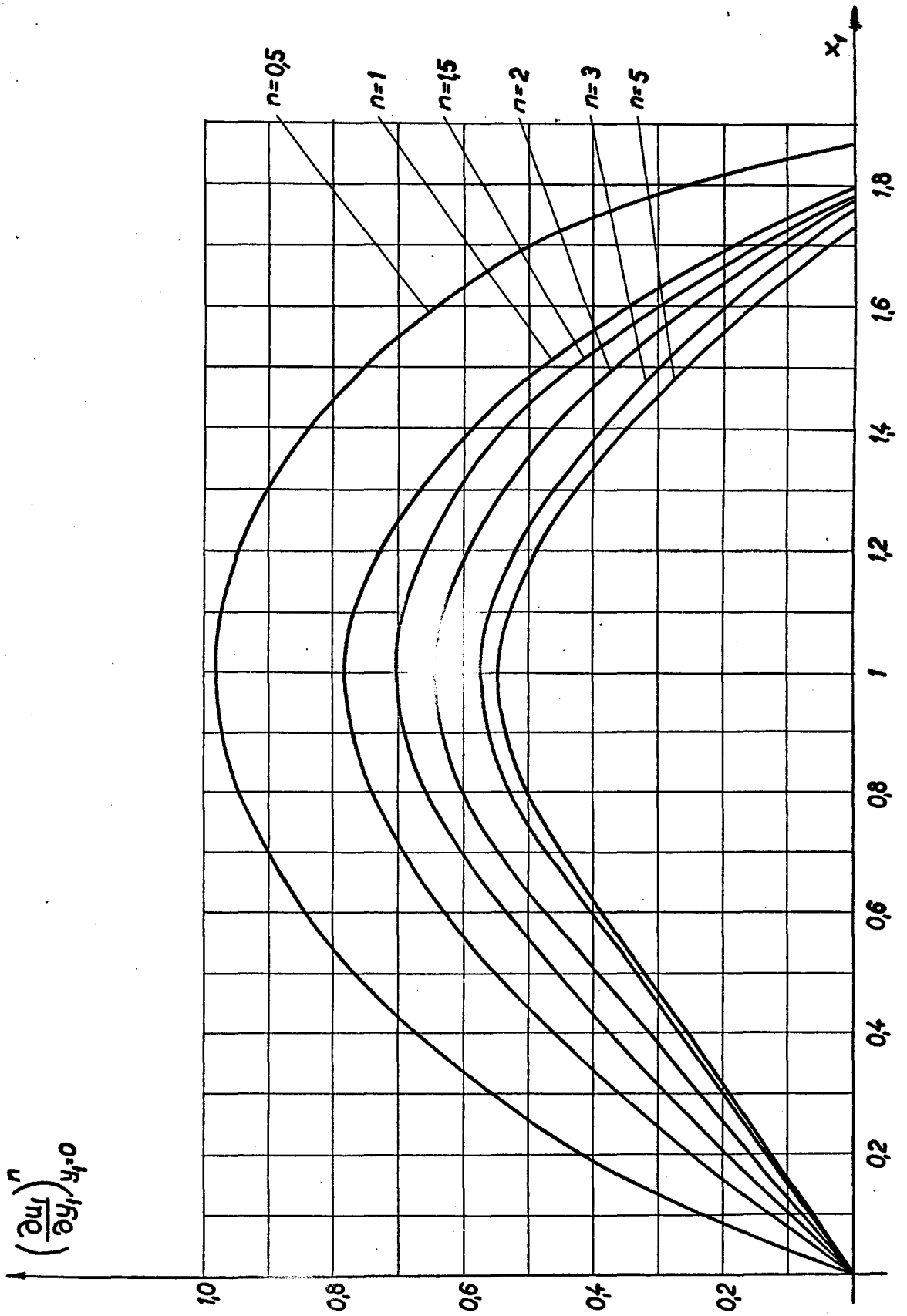
$$C_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = R_e^{-\frac{1}{n+1}} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right)^n \right\}_{y_1=0}. \quad (1.141)$$

Posredstvom izraza (1.139), (1.138), (1.140), (1.141), tablica za funkciju ζ , i numeričkog rešavanja integrala u izrazu (1.126), dobija se raspodela bezdimenzione veličine (1.140) i koeficijent trenja C_f (1.141), pri strujanju stepene njutonovske tečnosti oko kružnog cilindra. Te vrednosti su prikazane u obliku krivih na dijagramima br. 17 i 18. Koeficijent trenja C_f je izračunat pri vrednosti uopštenog Reynoldsovog broja $R_e = 600$. Za njutonovsku tečnost, tj. za $n = 1$, korišćeni su rezultati Lojczjanskog iz rada [1].

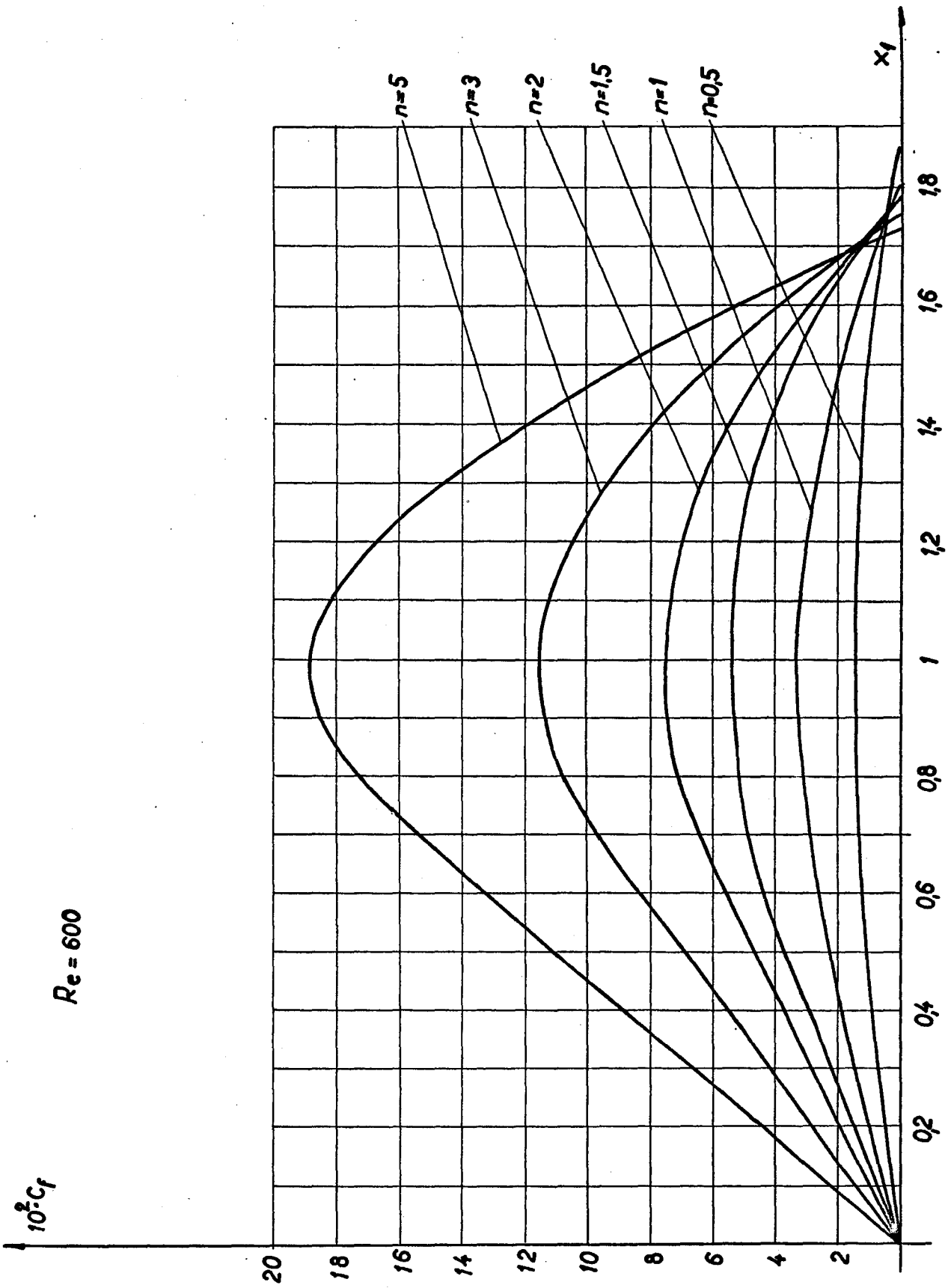
Sa dijagrama 18 se vidi, da se sa porastom parametra stepene tečnosti n od 0,5 do 5 koeficijent trenja na kružnom cilindru povećava. Kako otpor trenja kružnog cilindra sigurno zavisi od površine ograničene krivom $C_f = C_f(x_1)$ i ose x_1 to se može zaključiti da se sa porastom parametra n otpor trenja kružnog cilindra povećava.

Za pseudoplastičnu tečnost ($n < 1$) otpor trenja kružnog cilindra je manji od otpora trenja istog cilindra u struji njutonovske tečnosti. Smanjenje stepena n reološke jednačine stanja smanjuje i otpor trenja kružnog cilindra.

Za dilatantnu stepenu tečnost ($n > 1$), je otpor trenja kružnog cilindra veći od otpora istog cilindra u struji njutonovske tečnosti.



Slika br. 17



Slika br.18

Zadržimo se sada na analizi debljine gubitka impulsa graničnog sloja stepene tečnosti u okolini prednje zaustavne tačke na kružnom cilindru.

Iz (1.139) sleduje da je bezdimenziona debljina gubitka impulsa na kružnom cilindru

$$\delta_1^{**} = \left[\frac{f_1(x_1) (\sin x_1)^{n-1}}{\cos x_1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (1.142)$$

Kada $x_1 \rightarrow 0$, onda se iz izraza (1.126) i (1.142) vidi da je

$$f_1(0) = \frac{\phi_0}{\phi_1}$$

neka konačna veličina, dok $\delta_1^{**} \rightarrow 0$ za $n > 1$ (dilatantna tečnost), a $\delta_1^{**} \rightarrow \infty$ za $n < 1$ (pseudoplastična tečnost).

U paragrafu 1.2 data je reološka jednačina stanja stepene tečnosti (1.13)

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_a \dot{\epsilon}_{ij},$$

gde je efektivna viskoznost imala oblik

$$\mu_a = k \left| \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{mp} \dot{\epsilon}_{pm} \right|^{\frac{n-1}{2}}.$$

U blizini prednje zaustavne tačke na kružnom cilindru je $\dot{\epsilon}_{ij} \approx 0$, pa se vidi da za $n > 1$ $\mu_a \rightarrow 0$ a za $n < 1$ $\mu_a \rightarrow \infty$.

Iz ovog razmatranja se može izvući sledeći zaključak:

a/ Iz analize efektivne viskoznosti i poznate činjenice, da je debljina graničnog sloja proporcionalna sa viskoznošću, moglo se odmah pretpostaviti da bi debljina graničnog sloja trebalo da bude beskonačno velika tamo gde je i viskoznost beskonačno velika, i da je ona ravna nuli kada je viskoznost nula. Ta pretpostavka je prethodnom analizom i potvrđena. Za $n > 1$ (dilatantna tečnost) efektivna viskoznost i δ_1^{**} u prednjoj kritičnoj tački teže ka nuli. Za $n < 1$ (pseudoplastična stepena tečnost), u prednjoj zaustavnoj tački $\mu_a \rightarrow \infty$ što izaziva porast debljine graničnog sloja

u toj tački, tj. $\delta_1^{**} \rightarrow \infty$.

b/ Međutim, pri stvarnom strujanju stepene tečnosti oko kružnog cilindra sigurno neće postojati u prednjoj zaustavnoj tački te ekstremne vrednosti debljine graničnog sloja ($\delta_1^{**} = 0$ ili $\delta_1^{**} = \infty$).

Prema tome u oblastima tečenja gde je $\dot{\epsilon}_{ij} \approx 0$ dolazi do izražaja nepogodnost i nereálnost reološkog modela stepene nenjutnovske tečnosti. Ova razmatranja potvrđuju pretpostavke Reinerja [38].

1.14 PRIMEDBE O PRIMENLJIVOSTI JEDNOPARAMETARSKOG REŠENJA UNIVERZALNE JEDNAČINE GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Kao što je već napomenuto, dobijeni rezultati u ovom radu, pri sračunavanju graničnog sloja za konkretne probleme strujanja stepene tečnosti, ne mogu se porediti sa nekim drugim rezultatima, tačnim ili približnim, zato što u raspoloživoj literaturi oni ne postoje.

Poredjenje rezultata je moguće samo u slučaju graničnog sloja njutnovske tečnosti, tj. za $n = 1$. Ta poredjenja pokazuju, kod svih razmotrenih primera, vrlo dobro slaganje rezultata iz ovog rada sa rezultatima drugih autora.

Kako je pokazao Lojtcjanski [1], predstava o tačnosti jednoparametarskog približenja univerzalne jednačine, može da se dobije analizom parametara oblika višeg reda u intervalu promenljive x $0 < x < x_s$. Ako su naime, ispunjeni uslovi da je za svako $x \in [0, x_s]$

$$|f_2|_{\max} \ll \epsilon, \quad |f_3|_{\max} \ll \epsilon,$$

.....

gde je

$$\epsilon = |f_1|_{\max},$$

onda je opravdano zanemarivanje parametara oblika f_2, f_3, \dots u univerzalnoj jednačini i jednoparametarsko približenje je vrlo blisko tačnom rešenju tog problema.

Ova detaljna analiza bi mogla da se sprovede za svaki konkretan problem strujanja. Naprimer, u slučaju strujanja stepene tečnosti oko kružnog cilindra parametri oblika višeg reda glase:

$$f_2 = -\text{tg}^2 x_1 (f_1)^2; \quad f_3 = -\text{tg}^2 x_1 (f_1)^3,$$

.....

Posmatranjem krivih $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)$ i $f_3(x_1)$, za razne vrednosti parametra n , dolazi se do zaključka da je karakter tih krivih isti kao kod Lojczjanskog [1] za $n = 1$, tj. za granični sloj njutnovske tečnosti. U tački odvajanja graničnog sloja na kružnom cilindru, parametri f_2 i f_3 imaju karakteristične vrednosti. Pri porastu n od 0,5 do 5, parametri f_2 i f_3 se u tački odvajanja po apsolutnoj vrednosti smanjuju, tj. f_2 se menja od vrednosti -0,675 do $-0,17 \cdot 10^{-5}$, a parametar f_3 od 0,169 do $0,356 \cdot 10^{-9}$. Može se zaključiti da je jednoparametarsko rešenje za $n > 1$ blisko tačnom, dok je ono za $n < 1$ manje tačno, jer su u tom slučaju vrednosti za f_2 i f_3 u tački odvajanja ne baš potpuno zanemarljive. Znači da bi se, pri daljim istraživanjima u oblasti pseudoplastičnih stepenih tečnosti, ako se žele tačniji rezultati, trebalo ići na dvoparametarsko približenje univerzalne jednačine.

1.15 O FIZIČKIM OSOBINAMA GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI I NJENOJ REOLOŠKOJ JEDNAČINI STANJA

Na osnovu obradjenih problema, mogu se izvesti neki zaključci o fizičkim osobinama graničnih slojeva stepene tečnosti i njenoj reološkoj jednačini stanja. Ovo je bio, i jedan od osnovnih ciljeva rada. Ti zaključci su sledeći:

- a/ Pri povećanju parametra n reološke jednačine stanja stepene tečnosti, dolazi do smanjenja apscise x_s tačke odvajanja graničnog sloja na nekom telu. Ovu osobinu je eksperimentalno opazio i Slattery [23], pri proučavanju graničnog sloja stepene tečnosti na sferi. U radu [28], on je tu osobinu dokazao i teorijski ispitujući granični sloj

na sferi u intervalu parametra n $0,7356 \leq n \leq 1$.

- b/ Pri istoj vrednosti uopštenog Rejnoldsovog broja, sa porastom parametra stepene tečnosti n , dolazi do zadebljanja graničnog sloja na nekom telu. Ova osobina je ranije zapažena pri proučavanju graničnog sloja na ravnoj ploči [3].
- c/ Sa povećanjem parametra n stepene tečnosti, dolazi do povećanja otpora trenja tela koje se kreće kroz stepenu tečnost. Ova osobina je i ranije zapažena u rezultatu teorijskog razmatranja graničnog sloja na ravnoj ploči [3]. Osim toga je zapaženo u istom radu [3], da sa dodavanjem karboksimetilceluloze vodi, dolazi do smanjenja otpora trenja u kanalima. Iz tablice 1, se vidi da povećanje KMC u vodi smanjuje parametar n stepene tečnosti. Znači ovaj eksperimentalan zaključak je u saglasnosti sa teorijskim zaključkom iz ovog rada.
- d/ Ako se ova tri zaključka povežu, onda se vidi da pri povećanju parametra n reološke veze stepene tečnosti, dolazi do zadebljanja graničnog sloja, do povećanja otpora tranja i do skraćivanja apscise tačke odvajanja graničnog sloja na nekom telu.
- Ovaj zaključak o fizičkim osobinama graničnog sloja stepene tečnosti je u potpunoj saglasnosti sa opštim osobinama graničnog sloja. Naime, ovaj zaključak se slaže sa poznatom činjenicom da povećanje debljine graničnog sloja izaziva veći otpor trenja i manju apscisu tačke odvajanja graničnog sloja.
- e/ Realnost osobina graničnog sloja stepene tečnosti, govori istovremeno i o realnosti reološke jednačine stanja stepene tečnosti, izuzev u slučajevima koji su ranije bili posebno razmotreni ($\dot{\epsilon}_{ij} \approx 0$).

2. APROKSIMATIVNA VARIJACIONA METODA ZA SRAČUNAVANJE RAVANSKIH LAMINARNIH GRANIČNIH SLOJEVA STEPENE TEČNOSTI

U drugom delu rada izlaže se jedna približna metoda, za rešavanje različitih problema graničnog sloja nenjutnovske stepene tečnosti. Cilj je da se pokaže varijaciona formulacija problema graničnog sloja stepene tečnosti i da se ta formulacija iskoristi za dobijanje aproksimativnih rešenja.

U uvodnom delu, je već bilo rečeno da približna metoda Karman-Polhauzena nije dala u slučaju graničnih slojeva stepene tečnosti, zadovoljavajuće rezultate, kako u pogledu tačnosti (slučaj ravne ploče), tako i u pogledu oblasti primenljivosti.

Sem metode Karman-Polhauzena u literaturi još postoji za rešavanje problema graničnih slojeva stepene tečnosti, ranije takođe citirana intuitivna približna metoda Acrivos [16].

Ovo bi bila, prema raspoloživoj literaturi, treća približna metoda za sračunavanje graničnog sloja stepene tečnosti, koja će biti razvijena do kraja, odnosno pomoću koje će se moći rešavati konkretni problemi.

Činjenica da se rezultati i po jednoj i po drugoj metodi rada dobro slažu, učvrstiće naše uverenje, da su obe metode dovoljno pouzdane i da je tačno rešenje blisko dobijenim rezultatima.

2.1 O VARIJACIONIM PRINCIPIMA U MEHANICI KONTINUMA

Naporedno sa razvojem svih oblasti fizike u nauci se teži da se razni fizički procesi opišu na jedan jedinstven način. U vezi sa ovim, varijacioni aspekti mehanike dobijaju sve značajnije mesto u savremenoj fizici.

Varijacioni principi i njihova primena imaju dvojak značaj. Prvo, za filozofsko-teorijskog aspekta, jer se pokazalo da gotovo svi konzervativni procesi fizike, mogu da se izučavaju na jedinstven način kao ekstremalno svojstvo jednog karakterističnog integrala (akcije), koji definiše

proces. I drugo, sa aspekta praktične primene, jer varijacioni principi mehanike mogu da se iskoriste ^{za dobijanje} kako tačnih tako i aproksimativnih rešenja za onu klasu problema za koju postoji varijaciona formulacija. Ova druga osobina varijacionih principa postaje sve značajnija, kada su u pitanju nelinearni problemi, čiju individualnost i matematičke teškoće nije lako prevazići klasičnim aparatom matematičke analize. Nažalost, značaj varijacione metode u fizici je umanjen činjenicom da za mnoge procese, tačna varijaciona formulacija za sada ne postoji. Poslednjih nekoliko godina varijacionom prilazu mnogih procesa fizike se pridaje veliki značaj. Tako je naprimer u sadašnje vreme zapažen intenzivan razvoj varijacionih prilaza problemima ireverzibilne termodinamike.

Dobro je poznato da se jednačine mehanike kontinuma ne mogu izvesti iz Hamiltonovog varijacionog principa. Do nepremostivih teškoća se dolazi naročito, ako se za razmatranje kretanja fluida upotrebi Ojlerova koncepcija polja. Pri varijacionoj formulaciji mehanike kontinuma u Ojlerovoj koncepciji, glavnu teškoću pričinjavaju članovi lokalnog i konvektivnog ubrzanja u jednačinama kretanja neprekidne sredine.

Postoje različiti načini za varijaciono opisanje procesa mehanike kontinuma, odnosno za izvodjenje jednačina procesa iz varijacionog principa. U sadašnje vreme mogu se uočiti sledeći varijacioni principi ove oblasti fizike: a/ "Klasični" varijacioni principi.

Kod ovih principa mehanike fluida, upotrebljavaju se klasična pravila varijacionog računa. Medjutim, oni imaju manu, da se više od polovine jednačina procesa koriste kao pomoćni uslovi, dok se ostale diferencijalne jednačine izvode iz varijacionog principa. U ovu grupu varijacionih principa spadaju i oni principi kod kojih se, pri variranju akcionog integrala, koriste posebna ograničenja za varijacije generalisanih koordinata na granicama oblasti kretanja fluida. Pregled literature ovih varijacionih prilaza mehanici fluida može se naći u radovima [45], [46], [47].

b/ Hidrodinamički varijacioni princip.

Ovaj varijacioni princip je najpre formulisan od strane Drajdena, Marnagana i Bejtmana [48], a zatim dalje razvijan u radovima [49], [50], [51]. Po ovom principu se svakom fizičkom sistemu pridružuje jedan imaginaran sistem. Iz varijacionog principa se dobijaju diferencijalne jednačine stvarnog i imaginarnog procesa. Imaginarni sistem nema nikakvo fizičko značenje i o njemu se ništa ne zna. Zbog toga ne postoji nikakav način da se za imaginarni sistem izaberu granični i početni uslovi, a samim tim je praktična primenljivost ovog principa svedena na minimum.

c/ Princip lokalnog potencijala [52], [53], [41], [42], [40], [64].

Ovaj varijacioni princip se razlikuje, od uobičajenih varijacionih principa klasične mehanike po tome što se njime, kako sleđuje iz daljeg izlaganja, grubo narušavaju pravila varijacionog računa.

Prema varijacionom principu lokalnog potencijala, postoje dve vrste fizičkih promenljivih (temperatura T , brzina v , pritisak p , itd.). Jednu vrstu čine tzv. termodinamičke promenljive, koje se variraju u procesu varijacije integrala akcije. Drugu vrstu promenljivih, čine promenljive istog tipa (T_0 , p_0 , v_0 , itd.), koje u procesu variranja ostaju konstantne. To su tzv. "smrznute" promenljive. Posle variranja ova dvoiličnost promenljivih nestaje postupkom "odmrzavanja". Posle variranja se stavlja da je $T_0 = T$, $v_0 = v$, $p_0 = p$ itd., što dovodi do tačnih diferencijalnih jednačina procesa koji se razmatra. Prema tome, u "smrzavanju" koordinata prilikom procesa variranja, leži spomenuto narušavanje pravila varijacionog računa.

Ovaj princip je primenjivan, na niz praktičnih problema termodinamike, hidrodinamike i drugih oblasti fizike, u monografiji [40].

d/ Biot-ov varijacioni princip.

Ovaj princip je prvobitno formulisan u radovima [54], [55], za probleme prenošenja toplote i ima specijalnu

strukturu sa obzirom na uvedene koncepcije toplotnog potencijala, disipativne funkcije i generalisanih toplotnih sila. Kako za ovaj varijacioni princip ne postoji Lagranžian, to ovaj princip nema Hamiltonovu strukturu, kao ranije pomenu- ti principi. On je povezan sa mehanikom fluida samo zato što je primenjivan na probleme provodjenja toplote kroz gra- nični sloj, i to samo na energijsku jednačinu graničnog slo- ja.

Od svih nabrojanih principa u teoriji graničnog sloja i to na osnovnu dinamičku jednačinu, je primenjivan sa- mo princip lokalnog potencijala $c/$. U [40] je posredstvom tog principa sračunat granični sloj njutnovske tečnosti na ravnoj ploči.

U radu [22] je formulisan varijacioni princip za klasu nenjutnovskih tečnosti u slučaju stacionarnih i vrlo sporih strujanja. Kako pri tim strujanjima u jednačinama kre- tanja otpadaju članovi konvektivnog i lokalnog ubrzanja, to taj varijacioni princip nije od nekog većeg značaja.

2.2 VARIJACIONI PRINCIP

U ovom radu se na probleme graničnog sloja stepene tečnosti primenjuje varijacioni princip, prvobitno formulisan od strane Vujanovića u radu [56] za probleme pro- vodjenja toplote. Taj varijacioni princip je kasnije prošir- ren i uopšten za primenu u opštoj teoriji polja [59], dok je u radovima [57], [58], [60], [61] i [62] on upotrebljen za dobijanje aproksimativnih rešenja niza nelinearnih proble- ma provodjenja toplote, difuzije i teorije graničnog sloja njutnovske tečnosti. U svim proučenim problemima dobijena približna rešenja su bila vrlo bliska sa tačnim.

Osnovna ideja ovog varijacionog principa je da se pomoću njega dobijaju složenije jednačine, od diferen- cijalnih jednačina posmatranog procesa. U tim složenijim di- ferencijalnim jednačinama, kao i u Lagranžijanu problema, me- edjutim figuriše jedan parametar. Kada taj parametar teži nu- li, onda se iz tih složenijih jednačina dobijaju tačne dife-

rencijalne jednačine razmatranog procesa.

Neka su v_i ($i=1,2,\dots,n$) realne promenljive polja (brzina, pritisak, itd.), x_j ($j=1,2,3$) prostorne promenljive i t vreme. Promenljive polja su $v_i=v_i(x_j,t)$. Neka je Lagranževa gustina L , funkcija prostornih promenljivih x_j , vremena t , generalisanih koordinata - promenljivih polja v_i , parcijalnog izvoda $\partial v_i/\partial t$ i parcijalnih izvoda proizvoljnog reda promenljivih polja v_i po prostornim promenljivim x_j .

Odnosno u matematičkoj formulaciji neka je

$$L = L(x_j, t, v_i, \frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \dots). \quad (2.1)$$

Za Lagranževu gustinu (2.1) se definiše funkcional ili akcioni integral u obliku

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_V L dV dt, \quad (2.2)$$

gde je $t_0 \rightarrow t_1$ proizvoljan interval vremena i $dV = \prod_{j=1}^3 dx_j$ element zapremine geometrijskog prostora.

U slučaju da su varijacije generalisanih koordinata v_i jednake nuli, u svakom trenutku vremena, na granici oblasti V

$$\delta v_i|_V = 0,$$

i da su te varijacije jednake nuli svuda u oblasti V u trenutcima t_0 i t_1

$$\delta v_i|_{t_0} = \delta v_i|_{t_1} = 0,$$

onda je uslov ekstremalnosti dejstva (2.2)

$$\delta I = 0$$

ekvivalentan sa Ojler-Lagranževim jednačinama, datim na primer u [65], za generalisane koordinate v_i

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial v_i}{\partial t})} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2})} + \dots + (-1)^k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial^k v_i}{\partial x_j^k})} = c. \quad (2.3)$$

Neka je Lagranževa gustina (2.1) data u obliku

$$L = \{ m(\frac{1}{2}u(u_x)^2 + v u_x u_y + u_x u_t -$$

$$- u_x (V_t + v V_x)) - \frac{v}{(n+1)} (u_y)^{n+1} \} e^{x/m}, \quad (2.4)$$

gde je m konstantan parametar, koji će posle variranja težiti nuli.

Dejstvo, za slučaj Lagranžiana datog u obliku (2.4), glasi

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{x=l} \int_0^{y_1} L dx dy dt. \quad (2.5)$$

U Lagranžianu (2.4) se za generalisanu koordinatu usvaja komponenta brzine u. Pretpostaviće se da je brzina u potpuno određena na svim granicama oblasti, sem na krivoj $x = l$. Da bi za Lagranževu gustinu (2.4), Ojler-Lagranževe jednačine (2.3) stvarno predstavljale uslov ekstremalnosti funkcionala (2.5) na toj granici mora da bude zadovoljen, za proizvoljnu varijaciju generalisane koordinate u na toj granici, prirodan granični uslov u sledećem obliku

$$\frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} \cdot \delta u \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.6)$$

Uvodeći (2.4) u (2.6) dobija se

$$m(u u_x + v u_y + u_t - V_t - v V_x) \delta u \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.7)$$

Kada se pusti da parametar $m \rightarrow 0$, onda se iz (2.7) vidi, da je uslov transverzalnosti (2.6) automatski zadovoljen, i da je upotreba Ojler-Lagranževih jednačina (2.3) opravdana.

Kada se (2.4) uvrsti u (2.3) i u usvoji za generalisanu koordinatu, onda se posle deljenja sa $e^{x/m}$, dobija sledeća jednačina

$$u_t + uu_x + vu_y + m \{ (u_t + uu_x + vu_y)_x + (vu_x)_y - \frac{1}{2}(u_x)^2 \} = \\ = v_t + vv_x + v \{ (u_y)^n \}_y - m(u_t - v_t - vv_x)_x \quad (2.8)$$

Ako se u duhu varijacionog principa [56] ÷ [62] pusti da parametar $m \rightarrow 0$, onda se (2.8) svodi na jednačinu

$$u_t + uu_x + vu_y = v_t + vv_x + v \{ (u_y)^n \}_y \quad (2.9)$$

koja ustvari predstavlja diferencijalnu jednačinu ravnanskog laminarnog nestacionarnog graničnog sloja nenjutnovske stepene tečnosti (1.19), gde je $v = \frac{k}{\rho}$. Prema tome je pokazano da se ideja pomenutog varijacionog principa može primeniti i na granične slojeve stepene tečnosti.

Teško je da se za parametar m da neko fizičko objašnjenje u slučaju Lagranževe gustine (2.4) graničnog sloja stepene tečnosti. U varijacionoj formulaciji provodjenja toplote međjutim, taj parametar je imao svoje fizičko tumačenje [56].

Treba primetiti da ovim varijacionim principom nije obuhvaćena jednačina kontinuiteta (1.20). Kasnije će se međjutim pokazati da se u teoriji graničnog sloja jednačina kontinuiteta može razmatrati kao neholonomna veza.

Pošto varijacioni princip ne sadrži granične uslove, to je kod praktične primene ovog principa zato neophodno, da se rešenja biraju tako da ona već unapred identički zadovoljavaju granične uslove.

2.3 METODA APROKSIMATIVNOG SRAČUNAVANJA GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Formulisani varijacioni princip za granični sloj stepene tečnosti iskoristiće se za neposredno približno sračunavanje ovih graničnih slojeva. Približno rešenje će se naime dobiti iz direktnog proučavanja akcionog integrala (2.5) sa Lagraževom gustinom (2.4).

Primeniće se koncepcija o graničnom sloju konačne debljine $\delta(x,t)$. Tada granični uslovi (1.21) glase

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad y = 0, \\ u = V(x,t) & \quad y = \delta(x,t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da bi se dobilo aproksimativno rešenje graničnog sloja stepene tečnosti uvodi se profil brzine u u obliku

$$u(x,y,t) = V(x,t)\phi(\lambda), \quad (2.11)$$

gde je ϕ poznata funkcija nove promenljive λ

$$\lambda = \frac{y}{\delta(x,t)} \quad (2.12)$$

sa zasada nepoznatom funkcijom $\delta(x,t)$.

Pretpostavlja se da komponenta brzine v ima oblik

$$v(x,y,t) = g(x,t)E(\lambda) - p(x,t)R(\lambda). \quad (2.13)$$

U izrazima (2.11) i (2.13) funkcije δ , g i p imaju ulogu generalisanih koordinata, a zavisnosti ϕ , E i R moraju biti takve da su granični uslovi (2.10) i jednačina kontinuiteta (1.20) identički zadovoljeni.

Ako se (2.11) i (2.13) uvrsti u izraz (2.5), a ovaj zatim integrali po y u granicama od 0 do $y_1 = \delta$, onda se posredstvom (2.4) i (2.12) dobija dejstvo

$$\begin{aligned}
 I = & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} \left\{ m(VV_x^2 \delta A_0 + V^2 V_x \delta_x A_1 + \frac{V^3 \delta_x^2}{2\delta} A_2 + VV_x A_3 + \frac{V^2 \delta_x}{\delta} A_4 + \right. \\
 & + V_t V_x \delta A_5 - VV_x \delta_t A_6 + VV_t \delta_x A_7 + \frac{V^2 \delta_t \delta_x}{\delta} A_8) - \\
 & \left. - v \frac{v^{n+1}}{\delta^n} A_9 \right\} e^{x/m} dx dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} L(\delta, \delta_x, \delta_t, x, t, m) dx dt, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

gde su uvedene sledeće oznake

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \phi^3 - \phi \right) d\lambda; & A_1 &= \int_0^1 \lambda \phi' (1 - \phi^2) d\lambda; \\
 A_2 &= \int_0^1 \lambda^2 \phi \phi'^2 d\lambda; & A_3 &= \int_0^1 (g \Xi \phi \phi' - p R \phi \phi') d\lambda; \\
 A_4 &= p A_{10} - g A_{11}; & A_5 &= \int_0^1 (\phi^2 - \phi) d\lambda; \\
 A_6 &= \int_0^1 \lambda \phi \phi' d\lambda; & A_7 &= \int_0^1 \lambda \phi' \cdot (1 - \phi) d\lambda; \\
 A_8 &= \int_0^1 \lambda^2 \phi'^2 d\lambda; & A_{10} &= \int_0^1 \lambda \cdot R \phi'^2 d\lambda; \\
 A_9 &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 (\phi')^{n+1} d\lambda; & A_{11} &= \int_0^1 \lambda \Xi \phi'^2 d\lambda;
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

i pri čemu je sa prim označen izvod po λ .

Treba napomenuti da je ovde primenjeni postupak smanjivanja reda integrāla u akcionom integralu poznat pod imenom direktne metode Kāforoviča [65].

Nepoznata funkcija $\delta(x, t)$ u funkcionalu (2.14) treba da se izabere tako da za nju akcioni integral (2.14) bude ekstreman. U tom cilju mora da bude zadovoljena Ojler-Lagranževa jednačina (2.3) za Lagranževu funkciju (2.14) i za generalisanu koordinatu δ

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial L}{\partial \delta_t} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \delta_x} = 0. \quad (2.16)$$

Ako se u (2.16) uvrsti (2.14), izvrši delje-
nje sa $e^{x/m}$, i u duhu formulisanog varijacionog principa
ponovo pusti posle variranja da parametar m teži nuli,
onda se dobija

$$\begin{aligned} & v^2 v_x A_1 + \frac{v^3}{\delta} \delta_x A_2 + \frac{v^2}{\delta} A_4 + v v_t A_7 + \\ & + \frac{v^2 \delta_t}{\delta} A_8 - v n A_9 \frac{v^{n+1}}{\delta^{n+1}} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

U cilju dobijanja dopunske veze izmedju genera-
lisanih koordinata δ , p i g uvodi se (2.11) i (2.13) u
jednačinu kontinuiteta (1.20). Iz uslova da ova jednačina
mora da bude identički zadovoljena za svako δ , p i g sle-
duju veze

$$g = v \delta_x; \quad p = v_x \cdot \delta, \quad (2.18)$$

$$i \quad \lambda \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dE}{d\lambda}; \quad \frac{dR}{d\lambda} = \phi. \quad (2.19)$$

Uzimajući u obzir izraze (2.18) i (2.15) dife-
rencijalna jednačina (2.17) dobija oblik

$$M v^{1-n} \frac{\partial z}{\partial t} + v^{2-n} \frac{\partial z}{\partial x} + (N v^{1-n} \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial v / \partial t}{v^n}) z = b, \quad (2.20)$$

gde je

$$z = \frac{\delta^{n+1}}{v}, \quad (2.21)$$

a konstante imaju vrednosti

$$M = \frac{A_8}{A_2 - A_{11}}; \quad N = (n+1) \frac{A_1 + A_{10}}{A_2 - A_{11}};$$

$$a = (n+1) \frac{A_7}{A_2 - A_{11}}; \quad b = n(n+1) \frac{A_9}{A_2 - A_{11}}. \quad (2.22)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (2.20) dobija se $z(x,t)$, odnosno debljina graničnog sloja $\delta(x,t)$. Za $n = 1$ (njutnovska tečnost) jednačina (2.20) se po obliku svodi na jednačinu Targu [75], koju je on dobio na drugi način prilikom proučavanja graničnog sloja njutnovske tečnosti.

Pretpostavljajući da je profil brzine oblika

$$u = \frac{V(x,t)}{2} (3\lambda - \lambda^3), \quad (2.23)$$

iz (2.11) sleduje

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2} (3\lambda - \lambda^3), \quad (2.24)$$

a iz (2.19) se dobija

$$E = \frac{3}{4} (\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{2}); \quad R = \frac{1}{4} (3\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{2}). \quad (2.25)$$

Nije teško proveriti, posredstvom (2.23), (2.25), (2.13) i (2.12) da su sa ovim oblicima funkcija ϕ , E i R granični uslovi (2.10) zadovoljeni.

Ako se (2.24), (2.25) uvrsti u (2.15) i izvrši integracija po λ onda se za konstante (2.22) diferencijalne jednačine (2.20), za slučaj profila brzine (2.23), dobijaju sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} M &= 2,612; & a &= (n+1)1,795, \\ N &= (n+1)3,72, & & \\ b &= 15,25 \cdot n \cdot 6^{n+1} \frac{\Gamma^2(n+2)}{\Gamma(2n+4)}, & & \end{aligned} \quad (2.26)$$

pri čemu je sa Γ ovde obeležena gama funkcija. Vrednosti ovih konstanti za razne vrednosti parametra n stepene tečnosti su date u tablici br. 11.

Tablica #1

<i>n</i>	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	4	5
<i>a</i>	1,9745	2,154	2,33	2,51	2,69	2,87	3,05	3,225	3,41	3,59	5,375	7,18	8,96	10,77
<i>N</i>	4,085	4,457	4,828	5,202	5,444	5,943	6,314	6,685	7,057	7,428	11,15	14,85	18,57	22,28
<i>b</i>	1,55	2,99	4,76	6,47	8,22	10,1	12,05	13,95	16,1	18,31	47,1	94,01	171,02	320,0
<i>M</i>	2,612													

2.4 O NEHOLONOMNOJ STRUKTURI PROBLEMA GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Ovde će biti izložena diskusija o neholonomnoj strukturi jednačina graničnog sloja stepene tečnosti (1.19) i (1.20), slična diskusiji datoj u radu [60] za jednačine graničnog sloja njutnovske tečnosti.

Pokazaće se naime da zahvaljujući postojanju potpune Lagranževe formulacije za problem graničnog sloja, rezultujuće jednačine varijacionog principa formiraju potpuni skup neholonomnih jednačina u odnosu na generalisane koordinate δ i g .

Da bi izlaganje bilo što prostije posmatraće se stacionaran granični sloj stepene tečnosti na ravnoj ploči. U tom slučaju je

$$V_x = 0; \quad V_t = 0; \quad \delta_t = 0; \quad p = 0. \quad (2.27)$$

Posredstvom prethodnih izraza se iz (2.14) dobija Lagranževa gustina ovog problema u obliku

$$L = \left\{ m \left(\frac{V^3 \delta^2}{2\delta} \right) A_2 - \frac{V^2 \delta}{\delta} g A_{11} \right\} - v \frac{V^{n+1}}{\delta^n} A_9 \cdot e^{x/m} \quad (2.28)$$

Uvodeći odgovarajuće profile (2.11) i (2.13) u jednačinu kontinuiteta (1.20) i koristeći (2.27) i (2.19) dobija se

$$a_{11} \delta_x + a_{12} g_x + a_1 = 0, \quad (2.29)$$

gde je

$$a_{11} = V; \quad a_{12} = 0; \quad a_1 = -g. \quad (2.30)$$

Jasno je da se jednačina (2.29), može posmatrati kao neholonomna veza. Naime, prema dobro poznatim pravilima neholonomne mehanike [66], diferencijalne jednačine "kretanja" u odnosu na generalisane koordinate δ i g za Lagranževu gustinu (2.28) i neholonomnu vezu (2.29) glase

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial L}{\partial \delta_x} - \frac{\partial L}{\partial \delta} = \mu_1 a_{11},$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial L}{\partial g_x} - \frac{\partial L}{\partial g} = \mu_1 a_{12}, \quad (2.31)$$

gde je μ_1 Lagranžev množitelj.

Uvođeći Lagranževu gustinu (2.28) u (2.31) i koristeći (2.30) dobija se

$$\frac{v^3 \delta_x}{\delta} A_2 - \frac{v^2}{\delta} g A_{11} - n v \frac{v^{n+1}}{\delta^{n+1}} A_9 + m(\dots) = \mu_1 v e^{-x/m},$$

$$m \frac{v^2 \delta_x}{\delta} A_{11} = \mu_1 \cdot 0 = 0. \quad (2.32)$$

Ovim jednačinama treba dodati i jednačinu neholonomne veze (2.29), koja posredstvom (2.30) postaje

$$v \delta_x - g = 0. \quad (2.33)$$

Diferencijalne jednačine (2.32) i (2.33) poseduju očigledno u smislu klasične mehanike neholonomnu strukturu. Problem je da se iz ove tri jednačine nadju nepoznate funkcije δ i g i nepoznat Lagranžev množitelj μ_1 . Kako u duhu formulisanog varijacionog principa posle variranja, odnosno posle primene "Lagranževih jednačina druge vrste" (2.31), parametar m teži nuli to se iz izraza (2.32) i (2.33) dobijaju jednačine za određivanje δ i g

$$\frac{v^3 \delta_x}{\delta} A_2 - \frac{v^2}{\delta} g A_{11} - n v A_9 \frac{v^{n+1}}{\delta^{n+1}} = 0,$$

$$v \delta_x - g = 0, \quad (2.34)$$

a Lagranžev množitelj ostaje neodređen. Kombinujući gornje dve jednačine i uvođeći oznake (2.21) i (2.22), dobija se ranije izvedena jednačina (2.20) za slučaj stacionarnog graničnog sloja na ravnoj ploči.

Iz ove diskusije proizlazi, da jednačina kontinuiteta u teoriji graničnog sloja predstavlja neholonomnu vezu u smislu klasične mehanike. Iz klasične mehanike je međjutim poznato da akcioni integral gubi svoj smisao, ako se u njega uvede neholonomna veza. Uzimajući u obzir tu osobinu akcionog integrala i neholonomnost jednačine kontinuiteta, postaje jasniji postupak iz prošlog poglavlja za

dobijanje približnog rešenja. Tamo je za komponentu u usvojen profil (2.11) sa jednom generalisanom koordinatom δ . Pri tome je komponenta brzine v uzeta u obliku (2.13) sa druge dve generalisane koordinate g i p . Uvodjenjem izraza za u i v u jednačinu kontinuiteta, mogle su odmah da se dobiju veze između δ , g i p (2.18). Pošto te veze potiču iz jednačine kontinuiteta, tj. iz neholonomne veze, to njihovim direktnim zamenjivanjem u akcioni integral, (2.14) on gubi svoj smisao. Sprovedjenjem ovog postupka može se pokazati da dobijena aproksimativna rešenja nemaju u tom slučaju skoro nikakvog smisla. Postupak dat u ovom radu je već ranije uspešno korišćen pri sračunavanju graničnog sloja njutnovske tečnosti u radu [60].

Izloženu diskusiju o jednačini kontinuiteta treba shvatiti, kao objašnjenje postupka dobijanja aproksimativnog rešenja u prošlom poglavlju i kao polaznu ideju za neki strožiji dokaz o njenoj neholonomnosti.

2.5 ODREDJIVANJE TAČKE ODVAJANJA GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

Kako je pretpostavljeni profil brzine u (2.11) vrlo jednostavan, tj. ne sadrži u sebi parametar oblika graničnog sloja, to je jasno da se posredstvom njega ne može odrediti položaj tačke odvajanja graničnog sloja. Stoga se ova približna metoda za rešavanje graničnih slojeva stepene tečnosti dalje kombinuje sa metodom Targa [75], koju je on razvio za granični sloj njutnovske tečnosti. Naime, varijacioni princip služi za dobijanje debljine graničnog sloja (rešenje diferencijalne jednačine (2.20)), a Targova metoda se koristi za odredjivanje tačke odvajanja graničnog sloja.

Kombinujući jednačine (1.19) i (1.20) i vodeći računa o oznaci (1.25) dobija se

$$v\{(u_y)^n\}_y = -V_t - VV_x + u_t + uu_x - u_y \cdot \int_0^y u_x dx. \quad (2.35)$$

Ako se u desnu stranu gornje jednačine uvede približan profil brzine u oblika (2.23), integrali zatim leva i desna strana tako dobijene jednačine po y , a integraciona konstanta odredi iz graničnog uslova

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{za } y = \delta(x, t),$$

onda se dobija

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)^n = & v\left\{\frac{V_t}{2V}z\left(\frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda^4 - 2\lambda + \frac{3}{4}\right) + \frac{V_x}{16}z\left(\frac{366}{35} - 16\lambda + 6\lambda^3 + \frac{\lambda^7}{7} - \frac{3}{5}\lambda^5\right) + \right. \\ & + \frac{3}{16} \cdot \frac{V}{n+1} z_x \left(\frac{26}{35} - 2\lambda^3 + \frac{7}{5}\lambda^5 - \frac{\lambda^7}{7}\right) + \\ & \left. + \frac{3}{2(n+1)} z_t \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{4}\right)\right\}, \quad (2.36) \end{aligned}$$

gde je z dato sa (2.21) i λ sa (2.12).

Za njutnovsku tečnost, tj. za $n = 1$, (2.36) se poklapa sa odgovarajućim izrazom Targa [75].

Prema Targovoj metodi, za njutnovski granični sloj, da bi se dobila diferencijalna jednačina za određivanje debljine graničnog sloja δ treba izraz (2.36) da se još jedanput integrali po y . Pošto je očigledno da se izraz (2.36) ne može integraliti po y , jer to onemogućava član na levoj strani (2.36), to se u slučaju graničnog sloja stepene tečnosti, Targova metoda ne može sprovesti do kraja. Zato je u ovom radu i iskorišćen varijacioni princip za određivanje debljine graničnog sloja stepene tečnosti δ .

Prema tome jednačina (2.36) se koristi za određivanje tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti. Od ranije je poznato, da se položaj tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti određuje iz uslova

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n_{y=0} = 0.$$

Uvodjenjem prethodnog izraza u (2.36) i zamenom u tako dobijenu jednačinu parcijalnog izvoda z_x iz jednačine (2.20), koja je dobijena posredstvom varijacionog principa, dobija se jednačina za određivanje tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti

$$V_x z_s = -AV^{n-1} - B \frac{V_t}{V} z_s - D(z_t)_s, \quad (2.37)$$

gde su konstante A, B i D date izrazima

$$\begin{aligned} A &= \frac{13 \cdot b}{61(n+1) - 13N}; & B &= \frac{35(n+1) - 13a}{61(n+1) - 13N}, \\ D &= \frac{35 - 13M}{61(n+1) - 13N}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

i gde su sa donjim indeksom s označene vrednosti veličina u tački odvajanja graničnog sloja.

Sva dosadašnja izvodjenja su obuhvatala kako stacionarne tako i nestacionarne granične slojeve stepene tečnosti. Međutim, u slučaju stacionarnog strujanja je

$$V = V(x) \quad \text{i} \quad z = z(x), \quad (2.39)$$

pa se u tom slučaju (2.20) svodi na običnu diferencijalnu jednačinu

$$V^{2-n} \frac{dz}{dx} + NV^{1-n} \frac{dV}{dx} z = b. \quad (2.40)$$

Rešenje gornje diferencijalne jednačine, uz granični uslov $z(0) = 0$, glasi

$$z(x) = \frac{b \cdot \int_0^x V(x)^{N+n-2} dx}{V(x)^N}. \quad (2.41)$$

Zamenom (2.41) u (2.37), pod pretpostavkom (2.39), dobija se sledeći uslov za brzinu na granici graničnog sloja u tački odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti

$$S = - \frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)_s \cdot \int_0^{x_s} V(x)^{T-1} dx}{V(x_s)^T}, \quad (2.42)$$

u kome su, s obzirom na (2.38) i (2.26), uvedene sledeće oznake

$$N = (n+1)3,72; \quad T=N+n-1, \quad (2.43)$$

$$S(n) = \frac{1,022}{n+1}.$$

U tabeli br. 12 date su, za slučaj profila brzine u u obliku (2.23), vrednosti za T i S u zavisnosti od parametra n stepene tačnosti.

Tablica 12

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$S(n)$	0,93	0,852	0,787	0,732	0,682	0,638	0,603
$T(n)$	3,185	3,657	4,128	4,601	4,944	5,543	6,014
n	0,8	0,9	1	2	3	4	5
$S(n)$	0,568	0,539	0,511	0,341	0,257	0,2045	0,1705
$T(n)$	6,485	6,957	7,428	12,15	16,85	21,57	26,28

Izložena približna metoda za rešavanje graničnih nlojeva stepene tačnosti može sada da se primeni, u cilju ispitivanja njene tačnosti, na razne konkretne probleme strujanja. Vidi se da je metoda primenljiva za svako $0 < n < n_1$, za skupa pozitivnih prirodnih brojeva. Pošto su u prvom delu rada rešenja sračunata za vrednosti parametra n_1 do $n_1=5$, to će se i primeri u ovom delu rada obraditi u toj istoj oblasti.

2.6 PRIMERI

Ovde će biti razmotreno nekoliko primera strujanja, koji su već bili razmatrani i u prvom delu rada. Pošto su tamo na nizu konkretnih problema već bile detaljno proučene fizičke osobine graničnih slojeva stepene tečnosti, to je nepotrebno da se ovde ponovo rešavaju ti isti primeri tako detaljno i opširno. Primeri izneti ovde imaju prvenstveno za cilj da pokažu tačnost ove približne metode a da usput potvrde osobine graničnih slojeva stepene tečnosti konstatovane u prvom delu rada.

a/ Granični sloj stepene tečnosti na ravnoj ploči

U slučaju strujanja duž ravne ploče je

$$V = \text{const.}$$

tako da iz (2.41) i (2.21) sleduje

$$\delta = (vbV^{n-2}x) \frac{1}{n+1}. \quad (2.44)$$

Obzirom na ranije navedeni definicioni obrazac za tangencijalan napon na telu

$$\tau_0 = k \{(u_y)^n\}_{y=0},$$

dobija se, posredstvom izraza (2.23), (2.12), (2.44) i uslova da je $V = \text{const}$, formula za izračunavanje tangencijalnog napona na ploči, odnosno koeficijenta trenja,

$$C_f = \frac{\tau_0}{V^2 \rho} = C(n) R_{ex}^{-\frac{1}{1+n}}, \quad (2.45)$$

gde je

$$C(n) = \frac{(3/2)^n}{b \frac{n}{n+1}}, \quad (2.46)$$

a

$$R_{ex} = \frac{V^{2-n} x^n}{v} \quad (2.47)$$

predstavlja lokalni Reynoldsov broj.

Posredstvom (2.46) i tablice 11 izračunate su vrednosti za $C(n)$ i sredjene u tablici br. 12a.

Tablica 12a

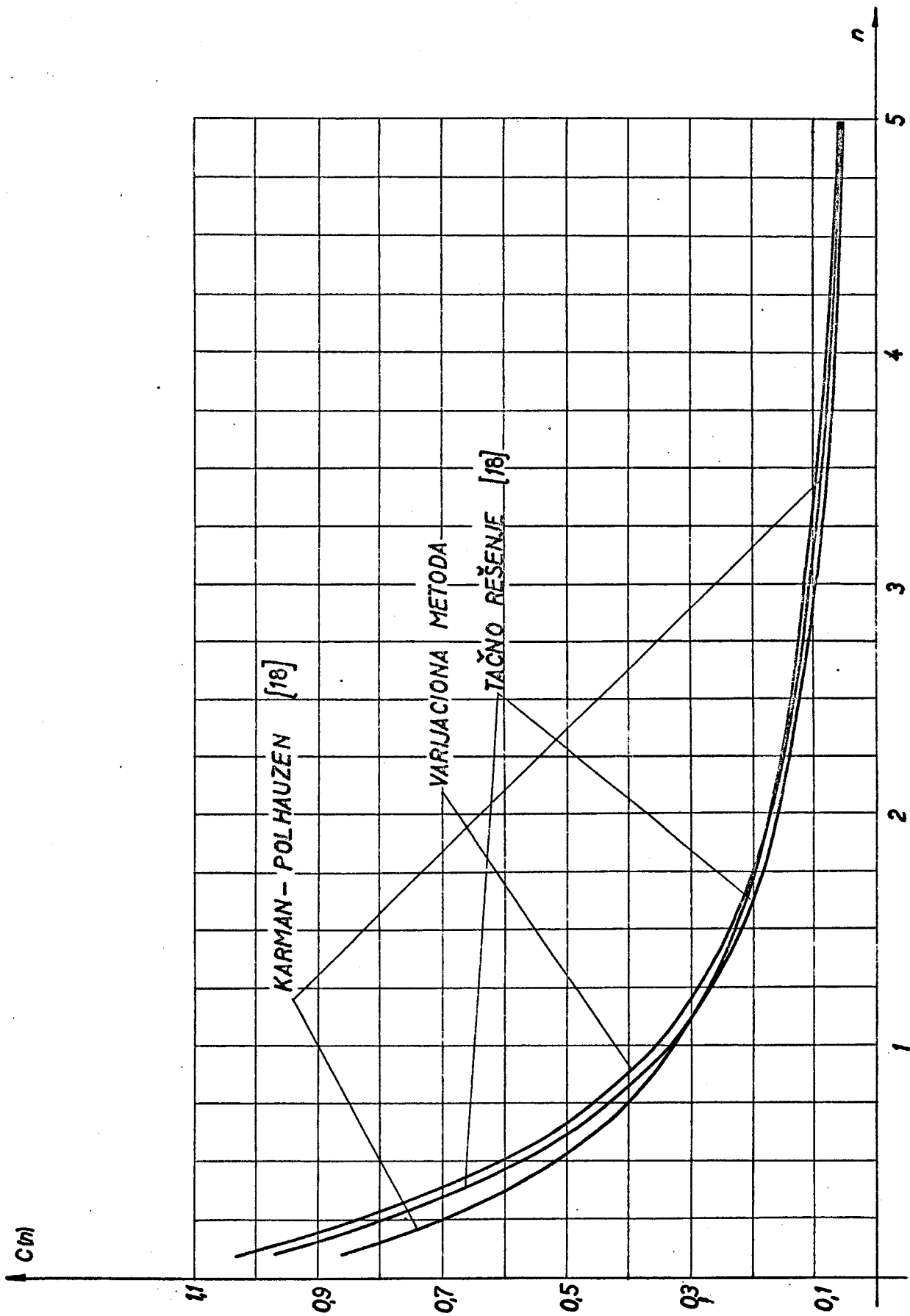
n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$C(n)$	1,01	0,9005	0,786	0,689	0,6075	0,5375
n	0,8	1	2	3	4	5
$C(n)$	0,435	0,351	0,173	0,1119	0,0822	0,0617

Na dijagramu br. 19, je upoređena kriva za $C(n)$, koja je sračunata prema metodi iz ovog rada, sa tačnim rešenjima iz rada [18] i približnim rezultatima Karman-Polhauzenove metode [18].

Sa tog dijagrama se vidi da su za dilatantne stepene tečnosti ($n > 1$) rezultati i prema Karman-Polhauzenovoj i prema varijacionoj metodi vrlo bliski tačnim rešenjima.

Za pseudoplastične tečnosti ($n < 1$), je očigledno da približna varijaciona metoda daje, naročito za vrlo malo n , bolje rezultate od približne metode Karman-Polhauzena.

Otstupanje rezultata varijacione metode od tačnih rešenja je za ceo interval parametra n manji od 6%.



Slika br. 19

b/ Slučaj sličnih rešenja

Za slučaj sličnih rešenja graničnog sloja stepene tečnosti, tj. za strujanje oko tela oblika klina, brzina potencijalnog strujanja je određena izrazom

$$v = v_{\infty} x^p, \quad (2.48)$$

gde p pripada skupu prirodnih brojeva.

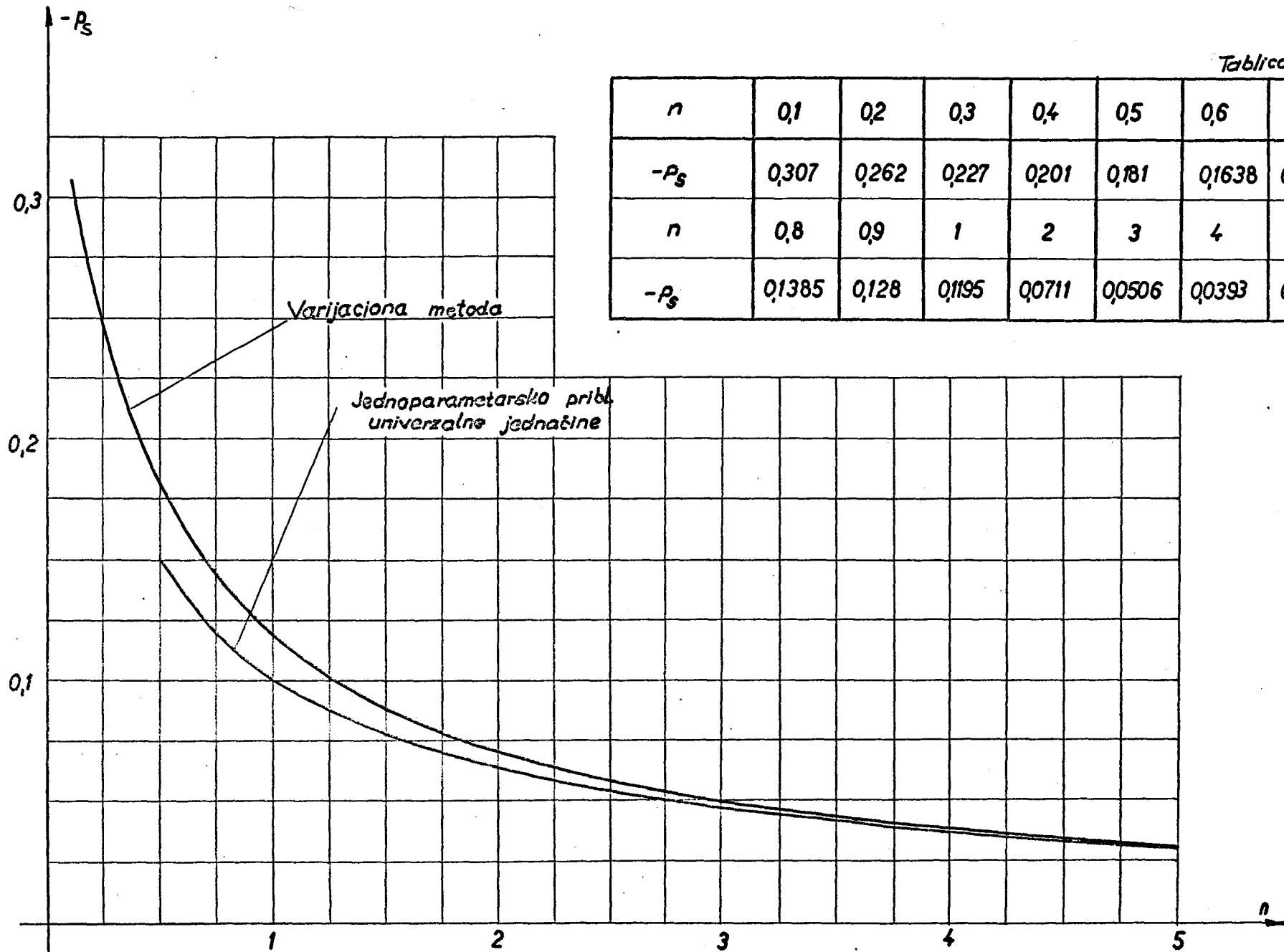
Ako se (2.48) uvrsti u uslov za odvajanje graničnog sloja (2.42), onda se dobija ona vrednost za eksponent p za koji je lokalni tangencijalni napon duž cele konture tela jednak nuli. Za vrednosti iz tablice br. 12 i za n iz intervala $0,1 \leq n \leq 5$ te vrednosti parametra p su sračunate i sredjene u tablici br. 13. Na dijagramu br. 20 su te približne vrednosti upoređene sa rezultatima dobijenim posredstvom jednoparametarskog rešenja univerzalne jednačine iz prvog dela ovog rada. (tablica br. 4).

Treba podvući da su pomoću približne varijacione metode dobijeni rezultati i u intervalu za $n < 0,5$, za koji nije bilo moguće naći stabilno rešenje jednoparametarskog približenja univerzalne diferencijalne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti.

Zaključak o uticaju parametra n na p_s , je ovde isti kao pri obradi posmatranog problema u prvom delu rada, pa se zato on ovde ne navodi.

Za dilatantne stepene tečnosti ($n > 1$), rezultati jednoparametarskog približenja univerzalne jednačine i rezultati ove približne metode su vrlo bliski. Za $n > 3$ naprimer razlike skoro i nema.

Za pseudoplastičnu stepenu tečnost ($n < 1$) rezultati tih dveju metoda međjutim se sve više razilaze sa smanjivanjem parametra n .



Tablica br. 13

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$-P_s$	0,307	0,262	0,227	0,201	0,181	0,1638	0,1495
n	0,8	0,9	1	2	3	4	5
$-P_s$	0,1385	0,128	0,1195	0,0711	0,0506	0,0393	0,0322

Slika br. 20

-402-

c/ Granični sloj stepene tečnosti na kružnom cilindru

U ovom slučaju brzina potencijalnog strujanja ima, kao što je poznato, oblik

$$V = 2V_{\infty} \sin \frac{x}{R}, \quad (2.49)$$

gde je R poluprečnik cilindra.

Tačka odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti na kružnom cilindru se dobija, kada se (2.49) uvrsti u (2.42) i izvrši numerička integracija tako dobijene jednačine za svako T i S iz tablice br. 12.

Položaji tačke odvajanja $x_{1s} = \frac{x_s}{R}$, za razne vrednosti parametra stepene tečnosti n su date u tablici br. 14. Na dijagramu br. 21 su upoređene vrednosti apscise tačke odvajanja graničnog sloja sračunate varijacionom metodom, sa odgovarajućim rezultatima jednoparametarskog približenja univerzalne jednačine (tablica br. 10). Rezultati ove varijacione metode su ponovo dobijene i za oblast $n < 0,5$, u kojoj nije moglo da se nadje stabilno rešenje u prvom delu rada.

Osobina da se tačka odvajanja graničnog sloja pomera sa promenom parametra n, može ovde lepo da se potvrdi i to ne samo posmatranjem rezultata tablice br. 14, već i na sledeći način.

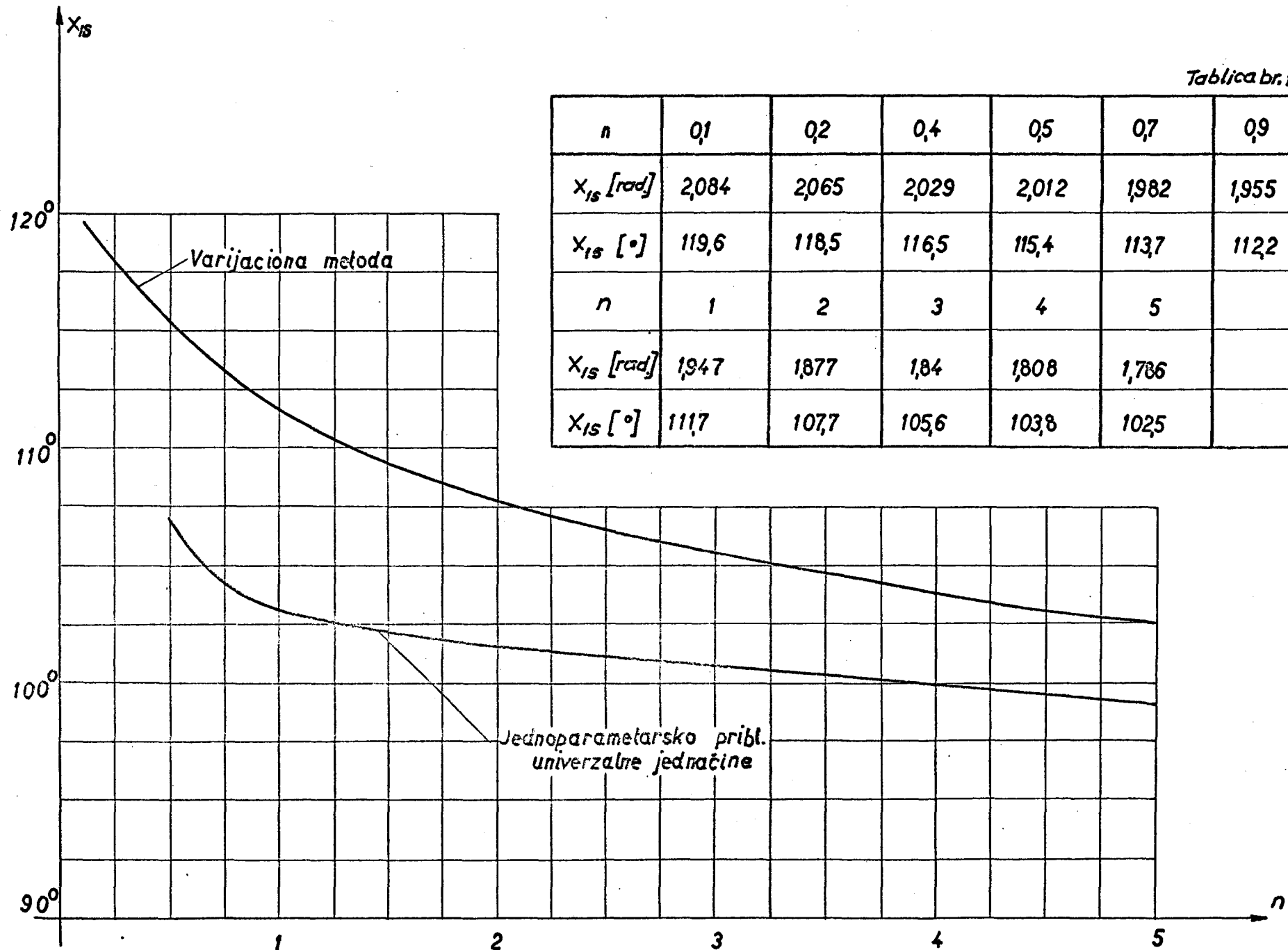
Zamenom bezdimenzione brzine potencijalnog strujanja oko kružnog cilindra $V_1 = \sin x_1$ u (2.42) dobija se, posredstvom (2.43), sledeći izraz:

$$\frac{\cos x_{1s} \int_0^{x_{1s}} (\sin x_1)^{T-1} dx_1}{(\sin x_{1s})^T} = - \frac{1,022}{n+1}. \quad (2.50)$$

Ako se pretpostavi da $n \rightarrow \infty$ onda desna strana (2.50) teži ka nuli. Ovome slučaju međjutim odgovara vrednost $x_{1s} = \pi/2$, odnosno odvajanje graničnog sloja nastupa u tački najveće brzine spoljašnjeg strujanja. Sa druge strane

Tablica br. 14

n	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7	0,9
X_{1s} [rad]	2,084	2,065	2,029	2,012	1,982	1,955
X_{1s} [°]	119,6	118,5	116,5	115,4	113,7	112,2
n	1	2	3	4	5	
X_{1s} [rad]	1,947	1,877	1,84	1,808	1,786	
X_{1s} [°]	111,7	107,7	105,6	103,8	102,5	



Slika br. 21

kada $n \rightarrow 0$, desna strana izraza (2.50) teži vrednosti 1.022. Iz poznatih osobina izraza sa leve strane (2.50), proizlazi prema tome da tačka odvajanja graničnog sloja teži ka nekom $x_{1s} = x_0$, za koje važi uslov da je $\pi/2 < x_0$.

Tako se ponovo dolazi do zaključka da sa porastom parametra n reološke jednačine stanja stepene tečnosti, dolazi do smanjenja apscise tačke odvajanja graničnog sloja na kružnom cilindru.

2.7 ZAKLJUČCI O PRIBLIŽNOJ VARIJACIONOJ METODI GRANIČNOG SLOJA STEPENE TEČNOSTI

a/ Ovaj približni postupak koristi varijacioni princip za sračunavanje debljine graničnog sloja a Targovu metodu za određivanje tačke odvajanja graničnog sloja.

b/ U slučaju ravanskog strujanja, ova približna metoda je primenljiva, kako za pseudoplastičnu stepenu tečnost ($n < 1$), tako i za dilatantnu ($n > 1$), dok je metoda Karman - Polhauzena [28] bila primenljiva samo za $n < 1$.

c/ Za jedini slučaj, za koji postoji tačno rešenje graničnog sloja stepene tečnosti na ravnoj ploči, ova metoda daje bolje rezultate od Karman-Polhauzenove metode.

d/ U obradjenim primerima rezultati ove metode su u punoj saglasnosti sa rezultatima iz prvog dela ovog rada, koji su dobijeni na osnovu jednoparametarskog približenja univerzalne diferencijalne jednačine.

e/ Metoda je vrlo jednostavna i lako primenljiva na konkretne probleme graničnog sloja stepene tečnosti.

$n=15$

Tablica br. 1

f_1	0	0,004	0,008	0,012	0,016	0,02	0,024	0,028	0,032	0,03286	
$\phi^{(1)}$	0,22497	0,19528	0,16606	0,13746	0,10953	0,08228	0,05580	0,03023	0,00590	0,00097	
$H^{(1)}$	2,72125	2,67902	2,64032	2,60343	2,56797	2,53361	2,49999	2,46663	2,43247	2,42448	
$\zeta^{(1)}$	0,08998	0,09762	0,10514	0,11262	0,12009	0,12758	0,135123	0,14275	0,15060	0,15234	
f_1	-0,004	-0,008	-0,012	-0,016	-0,02	-0,024	-0,028	-0,032	-0,036	-0,037	-0,0376
$\phi^{(1)}$	0,25556	0,28669	0,31850	0,35103	0,38437	0,41861	0,45392	0,49064	0,52953	0,53996	0,54691
$H^{(1)}$	2,76393	2,81087	2,86201	2,91847	2,98199	3,05535	3,14349	3,25710	3,43106	3,51432	3,61819
$\zeta^{(1)}$	0,08236	0,07459	0,06665	0,05851	0,05010	0,04131	0,03195	0,02163	0,009094	0,004555	0,000001

$n=2$

Tablica 2

f_1	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01	0,012	0,01284
$\phi^{(I)}$	0,11007	0,09169	0,07366	0,05613	0,03912	0,02272	0,00710	0,000990
$H^{(I)}$	2,78987	2,74703	2,70825	2,67121	2,63543	2,60037	2,56503	2,54840
$\zeta^{(I)}$	0,03669	0,04072	0,04472	0,04873	0,05279	0,05691	0,06114	0,06301
f_1	-0,002	-0,004	-0,006	-0,008	-0,01	-0,012	-0,014	-0,0162
$\phi^{(II)}$	0,12911	0,14862	0,16864		0,21042	0,23238	0,25535	0,28278
$H^{(II)}$	2,83321	2,88051	2,93267	2,99124	3,05881	3,14017	3,24616	3,47240
$\zeta^{(II)}$	0,03270	0,02868	0,02461	0,02047	0,01622	0,01178	0,007004	0,000210

 $n=2,5$

Tablica 3

f_1	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005105	
$\phi^{(I)}$	0,052537	0,041585	0,030906	0,020618	0,010800	0,0017755	0,000969	
$H^{(I)}$	2,82761	2,78361	2,74370	2,70512	2,66856	2,62361	2,61745	
$\zeta^{(I)}$	0,015010	0,017093	0,019175	0,021292	0,023466	0,025768	0,026037	
f_1	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004	-0,005	-0,006	-0,0066	-0,006835
$\phi^{(II)}$	0,063947	0,075707	0,087839	0,10038	0,11342	0,12705	0,13572	0,13954
$H^{(II)}$	2,87244	2,92171	2,97690	3,04050	3,11726	3,22409	3,32537	3,40412
$\zeta^{(II)}$	0,012969	0,01093	0,008880	0,006805	0,004678	0,002385	0,0006038	0,0000021

$n = 3$

Tablica br. 4

f_j	0	0,0005	0,001	0,0015	0,002	0,00212
$\phi^{(4)}$	0,024737	0,018379	0,012235	0,006393	0,0010368	0,000018
$H^{(4)}$	2,84601	2,80073	2,75932	2,71849	2,67370	2,65736
$\zeta^{(4)}$	0,0061842	$0,7245 \cdot 10^{-2}$	$0,83181 \cdot 10^{-2}$	$0,94261 \cdot 10^{-2}$	0,010606	0,010938
f_j	-0,0005	-0,001	-0,0015	-0,002	-0,0025	-0,002925
$\phi^{(1)}$	0,031393	0,038297	0,045464	0,052937	0,060812	0,068116
$H^{(1)}$	2,89284	2,94460	3,00429	3,07569	3,16965	3,31803
$10^2 \cdot \zeta^{(1)}$	0,51519	0,41295	0,31097	0,20830	0,10289	0,001149

 $n = 4$

Tablica br. 5

f_j	0	0,00032	0,00033	0,000335
$10^2 \cdot \phi^{(1)}$	0,50932	0,02105	0,005343	0,003579
$H^{(1)}$	2,89198	2,75897	2,75351	2,74996
$10^2 \cdot \zeta^{(1)}$	0,10196	0,17569	0,17843	0,17993
f_j	-0,0002	-0,0004	-0,00046	-0,000495
$10^2 \cdot \phi^{(1)}$	0,86113	1,24809	1,37340	1,45175
$H^{(1)}$	2,98687	3,11846	3,18286	3,24997
$10^2 \cdot \zeta^{(1)}$	0,06048	0,020879	0,008668	0,000776

$n=5$

Tablica 6

f_i	0	0,0001	0,00012	0,000125	0,00013
$\Phi^{(n)}$	0,00250636	0,00061315	0,00025716	0,00016989	0,00008351
$H^{(n)}$	2,41831	2,36430	2,35355	2,35080	2,34801
$\gamma^{(n)}$	0,000417727	0,00060528	0,00064528	0,00065549	0,00066582
f_i	-0,00005	-0,0001	-0,00015	-0,0002	-0,0002068
$\Phi^{(n)}$	0,0035131	0,0045568	0,0056409	0,0067687	0,0069256
$H^{(n)}$	2,44733	2,47943	2,51636	2,56381	2,57195
$10^3 \cdot \gamma^{(n)}$	0,329826	0,2448684	0,162706	0,082028	0,0709211

 $n=0,5$

Tablica 7

f_i	0	0,04	0,08	0,1	0,14	0,18	0,22	0,22391
$\Phi^{(n)}$	0,8021849	0,648673	0,499604	0,426712	0,284309	0,146957	0,017237	0,00502
$H^{(n)}$	2,26699	2,166923	2,080337	2,0408262	1,967119	1,89813	1,828371	1,821934
$\gamma^{(n)}$	0,534789	0,505792	0,49328338	0,4955224	0,4998269	0,739635	0,780400	0,784480
f_i	-0,04	-0,08	-0,1	-0,15	-0,20	-0,225	-0,25	-0,2512
$\Phi^{(n)}$	0,960714	1,1248519	1,209518	1,458302	1,759018	1,939765	2,168611	2,170201
$H^{(n)}$	2,386583	2,539379	2,635205	2,889135	3,267301	3,521329	4,049862	4,096540
$\gamma^{(n)}$	0,478345	0,413417	0,376158	0,289379	0,184792	0,127583	0,0198301	0,000013

$n=1,5$

Tablica 8

$\eta \backslash f_1$	-0,0376	-0,032	-0,028	-0,02	-0,012	-0,006	0	0,008	0,016	0,022	0,028	0,03286
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,32	0,04931	0,08892	0,10339	0,12596	0,14443	0,15678	0,16821	0,18267	0,19632	0,20629	0,21620	0,22444
0,64	0,15456	0,21575	0,23791	0,27205	0,29966	0,31799	0,33488	0,35628	0,37649	0,39133	0,40622	0,41882
0,96	0,29497	0,36722	0,39227	0,42985	0,45938	0,47863	0,49609	0,51813	0,53877	0,55396	0,56934	0,58276
1,28	0,45503	0,52916	0,55337	0,58327	0,61451	0,63107	0,64570	0,66390	0,68058	0,69276	0,70518	0,71625
1,60	0,61827	0,68593	0,70643	0,73445	0,75422	0,76609	0,77608	0,78818	0,79869	0,80614	0,81368	0,82064
1,92	0,76733	0,82144	0,83636	0,85539	0,86765	0,87442	0,87962	0,88554	0,88995	0,89270	0,89525	0,89767
2,24	0,88581	0,92182	0,93058	0,94075	0,94644	0,94912	0,95075	0,95220	0,95245	0,95203	0,95108	0,95001
2,56	0,96222	0,97962	0,98310	0,98660	0,98811	0,98857	0,98854	0,98816	0,98705	0,98569	0,98367	0,98124
2,88	0,99533	0,99897	0,99938	0,99968	0,99973	0,99972	0,99964	0,99947	0,99909	0,99855	0,99754	0,99597
3,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Prilog II. Profili brzine

$$\frac{v}{v_m} = F_{1,11}(n, \eta, f_1)$$
 za razno n, η, f_1

$n=2$

Tablica br. 9

$\eta \backslash f$	-0,0162	-0,012	-0,010	-0,008	-0,006	-0,004	0	0,004	0,006	0,008	0,010	0,01284
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,24	0,05279	0,09119	0,10138	0,11016	0,11802	0,12522	0,13823	0,15014	0,15576	0,16123	0,16663	0,17438
0,48	0,14606	0,20283	0,21844	0,23199	0,24419	0,25543	0,27591	0,29491	0,30394	0,31281	0,32163	0,33449
0,72	0,26238	0,32819	0,34613	0,36163	0,37554	0,38834	0,41160	0,43334	0,44369	0,45392	0,46418	0,47944
0,96	0,39262	0,46097	0,47902	0,49442	0,50809	0,52055	0,54294	0,56380	0,57368	0,58347	0,59336	0,60837
1,20	0,52891	0,59459	0,61111	0,62492	0,63695	0,64772	0,66663	0,68396	0,69202	0,69997	0,70800	0,72048
1,44	0,66326	0,72189	0,73570	0,74689	0,75637	0,76462	0,77850	0,79075	0,79618	0,80142	0,80665	0,81493
1,68	0,78710	0,83498	0,84529	0,85330	0,85979	0,86519	0,87356	0,88036	0,88300	0,88536	0,88753	0,89094
1,92	0,89112	0,92519	0,93162	0,93635	0,93969	0,94260	0,94612	0,94834	0,94873	0,94877	0,94846	0,94768
2,16	0,96525	0,98321	0,98589	0,98762	0,98876	0,98947	0,98996	0,98966	0,98907	0,98817	0,98689	0,98430
2,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$n=2,5$

Tablica 10

$z \backslash f$	-0,006835	-0,006	-0,005	-0,004	-0,003	-0,002	0	0,002	0,003	0,004	0,005105
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,05386	0,07480	0,08733	0,09670	0,10461	0,11159	0,12379	0,13461	0,13965	0,14458	0,15018
0,4	0,14160	0,17104	0,18982	0,20419	0,21654	0,22760	0,24726	0,26515	0,27361	0,28199	0,29168
0,6	0,24682	0,28070	0,30251	0,31919	0,33359	0,34653	0,36969	0,39111	0,40135	0,41163	0,42382
0,8	0,36278	0,39856	0,42130	0,43845	0,45316	0,46582	0,48978	0,51164	0,52214	0,53279	0,54584
1,0	0,48436	0,52003	0,54220	0,55848	0,57224	0,58440	0,60573	0,62549	0,63493	0,64459	0,65690
1,2	0,60678	0,64073	0,66100	0,67542	0,68731	0,69760	0,71509	0,73090	0,73809	0,74586	0,75601
1,4	0,72496	0,75555	0,77294	0,78476	0,79416	0,80203	0,81467	0,82548	0,83022	0,83500	0,84194
1,6	0,83313	0,85869	0,87230	0,88099	0,88755	0,89273	0,90023	0,90588	0,90790	0,90978	0,91311
1,8	0,92437	0,94280	0,95163	0,95675	0,96030	0,96285	0,96576	0,96716	0,96712	0,96683	0,96718
2,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

- 444 -

$n=3$

Tablica 11

$\eta \backslash f_1$	-0,002925	-0,002	-0,001	-0,0005	0	0,0005	0,001	0,0015	0,00212
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,18	0,05930	0,08964	0,10581	0,11227	0,11811	0,12359	0,12868	0,13357	0,13980
0,36	0,14820	0,19093	0,21606	0,22645	0,23602	0,24516	0,25375	0,26214	0,27315
0,54	0,25153	0,30009	0,32943	0,34174	0,35319	0,36429	0,37483	0,38528	0,39945
0,72	0,36357	0,41401	0,44423	0,45690	0,46871	0,48029	0,49132	0,50240	0,51805
0,90	0,48027	0,52975	0,55846	0,57031	0,58129	0,59211	0,60236	0,61275	0,62816
1,08	0,59795	0,64426	0,66969	0,67986	0,68911	0,69823	0,70669	0,71528	0,72882
1,26	0,71281	0,75404	0,77491	0,78282	0,78976	0,79653	0,80252	0,80848	0,81880
1,44	0,82047	0,85470	0,87011	0,87544	0,87980	0,88394	0,88717	0,89018	0,89633
1,62	0,91564	0,94012	0,94929	0,95199	0,95385	0,95548	0,95626	0,95668	0,95867
1,80	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$n=4$

Tablica 12

$z \backslash f_i$	-0,000495	-0,00046	-0,0004	-0,0002	0	0,00032	0,000335
0	0	0	0	0	0	0	0
0,16	0,07094	0,07966	0,08805	0,10497	0,11665	0,13161	0,13235
0,32	0,16621	0,17751	0,18911	0,21435	0,23315	0,25886	0,26021
0,48	0,27252	0,28501	0,29795	0,32679	0,34910	0,38130	0,38311
0,64	0,38527	0,39814	0,41140	0,44004	0,46384	0,49838	0,50047
0,80	0,50121	0,51397	0,52685	0,55482	0,57638	0,60939	0,61158
0,96	0,61758	0,62980	0,64177	0,66678	0,68531	0,71341	0,71549
1,12	0,73141	0,74268	0,75330	0,77422	0,78860	0,80912	0,81087
1,28	0,83906	0,84891	0,85767	0,87356	0,88311	0,89441	0,89564
1,44	0,93515	0,94293	0,94898	0,95842	0,96285	0,96524	0,96577
1,60	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$n=5$

Tablica 13

$\eta \backslash f_1$	-0,0002068	-0,000015	-0,00001	-0,000005	0	0,00001	0,000012	0,000013
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,14	0,08270	0,09161	0,09733	0,10209	0,10624	0,11345	0,11478	0,11545
0,28	0,17599	0,18900	0,19784	0,20551	0,21241	0,22486	0,22722	0,22841
0,42	0,27558	0,29040	0,30073	0,30991	0,31833	0,33403	0,33711	0,33866
0,56	0,37916	0,39445	0,40515	0,41476	0,42369	0,44075	0,44418	0,44593
0,70	0,48509	0,49992	0,51021	0,51943	0,52803	0,54471	0,54813	0,54990
0,84	0,59194	0,60564	0,61491	0,62313	0,63079	0,64549	0,64856	0,65016
0,98	0,69832	0,71031	0,71809	0,72483	0,73071	0,74252	0,74493	0,74620
1,12	0,80274	0,81240	0,81828	0,82317	0,82733	0,83498	0,83650	0,83730
1,26	0,90360	0,90992	0,91340	0,91610	0,91822	0,92155	0,92214	0,92245
1,40	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$n = 0,5$

Tablica 14

$\eta \backslash f_j$	0	0,06	0,10	0,16	0,22391	-0,06	-0,10	-0,16	-0,20	-0,2512
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,75	0,32236	0,37583	0,40852	0,45498	0,50450	0,26062	0,21163	0,15111	0,05670	0,01364
1,50	0,60542	0,64920	0,67400	0,70788	0,74476	0,54774	0,49412	0,41456	0,24271	0,14902
2,25	0,79681	0,81661	0,82729	0,84183	0,85967	0,76803	0,73771	0,68533	0,53213	0,41181
3,00	0,89851	0,90464	0,90759	0,91145	0,91753	0,88836	0,87642	0,85367	0,77332	0,69147
3,75	0,94709	0,94818	0,94831	0,94803	0,94855	0,94418	0,94005	0,93145	0,89831	0,86079
4,50	0,97044	0,97005	0,96940	0,96792	0,96622	0,96988	0,96850	0,96521	0,95171	0,93610
5,25	0,98231	0,98159	0,98084	0,97923	0,97685	0,98244	0,98201	0,98068	0,97477	0,96791
		0,98206	0,98139	0,98057	0,98355	0,98905	0,98896	0,98840	0,98557	0,98230
6,75	0,99248	0,99189	0,99134	0,99016	0,98795	0,99279	0,99282	0,99257	0,99111	0,98940
7,5	0,99476	0,99428	0,99384	0,99288	0,99094	0,99504	0,99510	0,99500	0,99419	0,99322
15,0	0,99953	0,99945	0,99938	0,99923	0,99877	0,99957	0,99959	0,99961	0,99959	0,99953
30,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

L I T E R A T U R A

- [1] Лойцянский, Л.Г., Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя, П.М.М., Том 29, 1965, 70-87.
- [2] Frederickson, A.G., Principles and Applications of Rheology, Prentice - Hall, 1964.
- [3] Шульман, З.П., Берковский, Б.М., Пограничный слой неньютоновских жидкостей, Н. и Т., Минск 1966.
- [4] Сальников, В., Обобщение универсального уравнения теории ламинарного пограничного слоя Л.Г. Лойцянского, биће објављено у Изв. АНСССР, МЖГ.
- [5] Сальников, В., Ока, С., Об одной возможной форме универсальных уравнений ламинарного пограничного слоя, Изв. АНСССР, МЖГ, 1969, No. 1, 141.
- [6] Wilkinson, W.L., Non-Newtonian Fluids, Pergamon Press, 1960.
- [7] Djordjević Vladan, Generalizacija nekih poznatih metoda proračuna graničnog sloja njutnovskih tečnosti na slučaj graničnog sloja nenjutnovskih tečnosti, Mat. Ves. 6(21), 1969, str. 277-281.
- [8] Лойцянский, Л.Г., Механика жидкости и газа, Наука, Ф.М.Л., Москва 1970.
- [9] Schlichting, H., Boundary - Layer theory, Mc Graw-Hill, Sixth. Ed., 1968.
- [10] Лойцянский, Л.Г., Ламинарный пограничный слой, Ф.М.Л., Москва, 1962.
- [11] Карякин, В.Е., Применение метода характеристик к решению универсальных уравнений ламинарного пограничного слоя, Аэротермодинамика, Труды ЛПИ, No. 313, 1970, 20 - 28,

- [12] Любенов, В.Й., Двухпараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя в газе, Аэротермодинамика, Труды ЛПИ, No. 313, 28-35, 1970.
- [13] Озерова, Е.Ф., Симуни, Л.М., Численное решение уравнений двухпараметрической теории пограничного слоя, Аэротермодинамика, Труды ЛПИ, No. 313, 44-53, 1970.
- [14] Terrill, R.M., Laminar boundary-layer flow near Separation with and without suction, *Phylos. Trans. Roy. Soc. London, A*, Vd. 253, 1022, p. 55-100. (1960).
- [15] Görtler, H., A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows, *J. Math. and Mech.*, 1957, vol. 6, p. 1-66.
- [16] Acrivos, A., Shah, M.J., Petersen, E.E., On the solution of the two - dimensional boundary-layer flow equations for a non-Newtonian power law fluid, *Ch. Eng. Scie.*, 1965, Vol. 20, pp. 101-105.
- [17] Shah, M.J., Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1961.
- [18] Acrivos, A., Shah, M.J., Petersen, E.E., Momentum and Heat Transfer in Laminar Boundary - Layer Flows of Non-Newtonian Fluids Past External Surfaces, *A. I. Ch. E. Journal*, June, 1960, Vol. 6, No.2, 312-317.
- [19] Oldroyd, J.G., *Proc. Cambridge Phylos. Soc.*, 43(1947), 383.
- [20] Дорфман, А.Ш., Вишневский, В.К., Теплофизика и Теплотехника, Акад. Наук Украинской ССР, 18, Киев, 1970, 89-95.
- [21] Metzner, A. B., Gluck, B.F., Heat transfer to non-Newtonian fluids under Laminar - flow conditions, *Ch. Eng. Scie.*, 1960, Vol. 12, pp.185-190.
- [22] Bird, R.B., New Variational Principle for Incompressible Non-Newtonian Flow, *The Physics of Fluids*, Vol3, No4, Juli-August 1960, 539-541.

- [23] Slattery, J.C. Bird, R.B., Non-Newtonian flow past a sphere, Ch. Eng. Sci, 1961, Vol. 16, pp.231-241.
- [24] Lee, S.Y., Ames, W.F., Similarity Solutions for Non-Newtonian Fluids, A.I. Ch. E. Journal, Juli 1966, Vol. 12, No. 4, 700-708.
- [25] Gutfinger, Ch., Shinnar, R., A.I.Ch. E. Journal, Vol. 12, No, 5, 631, (1964).
- [26] Kapur, J.N., Phys. Soc. Japan J., 17, 1303 (1962).
- [27] Kapur, J.N., Tyagi, V.P., Similar Solutions of Boundary Layer Equations for Two - Dimensional Flows of a Certain Class of Non-Newtonian fluids, ZAMM, 44, B7, 1964.
- [28] Bizzell, G.P. Slattery, J.C., Non-Newtonian boundary-layer flow, Ch. En. Sci. 1962, Vol. 17, pp. 777-782.
- [29] Slattery, J.C., Ch. Eng. Sci. 1961, 17. 689.
- [30] Shah M.J., Petersen, E.E., Acrivos, A., Heat Transfer from a Cylinder to a Power - Law Non-Newtonian Fluid, A.I. Ch. E. Journal, Vol. 8, No. 4, 1962, 542-549.
- [31] Kapur, J.N. Gupta, R.C. Two-Dimensional Flow of Power law Fluids in the Inlet Length of a Straight Channel II, ZAMM 44 (1964), Heft 7, Seite 277-284.
- [32] Acrivos, A., A rapid Method for Estimating the Shear Stress and the Separation Point in Laminar Incompressible Boundary - Layer Flows, Jour. of the Aero-Space Sci., April, 1960, 314-315.
- [33] Schowalter, W.R., The Application of Boundary Layer Theory to Power - Law Pseudoplastic Fluids: Similar Solutions, A.I. Ch. E. Journal, Vol. 6, No.1, 1960, 24-28.
- [34] Acrivos A., Amer. Inst. Chem. Eng. J. 1960, 6, 584.
- [35] Metzner, A.B., Reed, J.C., A.I. Ch. E. Journal, 1, 434, 1955.

- [36] Frederickson, A.G., Bird, R.B., *Ind. Eng. Chem.*, 50, 347, (1958).
- [37] Dodge, D.W., *Industrial and Engineering Chemistry*, 51, No. 7, 1959.
- [38] Reiner, M., *Deformation and Flow*, Lewis LTD, 1949.
- [39] Truesdell, C., *J. Ration. Mech. Anal.* 1952, 1, 125.
- [40] Schechter, R.S., *The variational method in engineering*, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1967.
- [41] Glansdorff, P., Prigogine, I., *On a General Evolution Criterion in Macroscopic Physics*, *Physica*, Vol. 30, pp. 351-374, 1964.
- [42] Glansdorff, P., Prigogine, I., *Variational Properties and Fluctuation Theory*, *Physica*, Vol. 31, pp. 1242-1256, 1965.
- [43] Shester, M., *Second Sound in Solids*, *Physical Review*, Vol. 131, No. 5, pp. 2013-2015, 1963.
- [44] Gurtin, M. E., Pipkin, A.C., *A General Theory of Heat Conduction with finite wave Speeds*, *Arch. for. Rat. Mech. and. Analys*, Vol. 31, No. 2, pp. 113-126, 1968.
- [45] Serrin, J., *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, *Handbuch der Physik*, Band VIII/1, Springer-Verlag, 1959.
- [46] Seliger, R.L., Whitham, G.B., *Variational principles in continuum mechanics*, *Proc. Roy. Soc. A.* 305, 1968, 1-25.
- [47] Заславский, М.М., Перфильев, В.А., *Принцип Гамильтона для модели невязкой сжимаемой жидкости в Элеровых координатах*, *Мех. Жид. и Газа*, *Изв.Ака. Наук СССР*, 1, 105, 1969.
- [48] Dryden, H.L., Murnaghan, F.P., Bateman, H., *Hydrodynamics*, Dower, New York, 1956, p. 168.

- [49] Morse, P.M., Feshbach, H. Methods of Theoretical Physics, part I, Mc Graw Hill Co., New York, 1953. p. 298.
- [50] Slattery, J. C., A widely applicable type of Variational integral I, Ch. En. Sci, 19, 801, 1964.
- [51] Flumerfelt, R.F., Slattery, J. C. A widely applicable type of Variational integral II, Chem. En. Sci. 20, 157, 1965.
- [52] Rosen, P. Use of restricted variational principles for the Solution of differential equations, J. Appl. Phys. 25, 3, 1954.
- [53] Chambers, L.G. A variational principle for the conduction of heat, Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. IX, pt. 2, 1956.
- [54] Biot, M.A., Variational Principles in Heat Transfer, Oxford Math. Monog. Clarendon Press, 1970.
- [55] Nigam, S.D., Arunawal, H.C., A variational principle for conduction of heat, Part I and II, J. Math. Mech. Vol. 9, No. 9, 1960.
- [56] Vujanovic, B., An approach to linear and nonlinear heat transfer problem using a Lagrangian, Jour. AIAA, Vol, 9, No. 1, January 1971, pp. 131-134.
- [57] Vujanovic, B., Strauss, A.M., Nonlinear Heat transfer via a Variational Principle Jour. AIAA, Vol. 9, No.2, February 1971, p. 327.
- [58] Vujanovic, B, Djukic, Dj., A Variational principle for the theory of laminar boundary layers in incompressible fluids, u štampi u Publ. Inst. Math. Beograd.
- [59] Djukic, Dj, Vujanovic, B., On a new Variational Principle of Hamiltonian type for Classical Field theory, u štampi u ZAMM-u.
- [60] Pavlovic, M., Djukic, Dj., Vujanovic, B., A Variational Approach to the Boundary Layer theory, poslato u ZAMM.

- [61] Vujanovic, B., Djukic, Dj., Tatic, N., On one Variational Principle of Hamilton's type for nonlinear Heat Transfer Problem,, poslato u Int. J. Heat and Mass Transfer.
- [62] Djukic, Dj. Vujanovic, B., On one Hamiltonian Principle for Heat Conduction problem, poslato u Int. J. Heat and Mass Transfer.
- [63] Finlayson, B.A., Scriven, L.E., On the search for variational principles, Int. J. Heat and Mass Trans., Vol. 10, pp. 799-821.
- [64] Gyarmati, I., Non-Equilibrium thermodynamics, Springer-Verlag, 1970.
- [65] Elsgolts, L., Differential equations and the calculus of variations, Mir Publishers, Moscow, 1970.
- [66] Неймарк, Ю. И., Фурфеев, Н.А., Динамика неавтономных систем, Ф.М.Л., Москва, 1967.
- [67] Лойцанский Л.Г., ДАН., СССР 35, No.8, (1942).
- [68] Saljnikov V., Methodes modernes de resolution des equations de la couche limite Laminare, Universite de Poitiers centre national de la Recherche Scientifique, Laboratoire de Dynamique des Fluides, Poitiers, Francuska.
- [69] Юфеев В.С., Параметрический метод расчета ламинарного пограничного слоя в магнитной гидродинамике, Магнитная гидродинамика, 4, 1966, 85.
- [70] Богданова В.В., Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя, Мех. жидк. и Газа, No. 6, 1968.
- [71] Chan, Y.Y., Loitsianskii's method for boundary layers with suction and injection, AIAA Journ. 7, No. 3.1969, 562, 563.

- [72] Канунчиков С.М., Ламинарный пограничный слой в газовой потоке больших скоростей, Труды ЛПИ, 248. 1965, № 4.
- [73] Hartree G.R., On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Camb. Phil. Soc. 33, Part II, 223-239, (1937).
- [74] Leigh D.C.F., The laminar boundary layer equation: A method of solution by means of an automatic computer, Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 320-332, (1955).
- [75] Тарг С.М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостехиздат, 1951, стр. 210.
- [76] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения Математической Физики, Ф.М.Л., Москва 1966, стр. 583.

S A D R Ž A J

Stacionarni ravanski laminarni granični sloj nenjutnovske tečnosti sa stepenom reološkom jednačinom stanja.....	1
Pregled upotrebljenih oznaka	1
1.1 Uvodna razmatranja.....	4
1.2 Klasifikacija nenjutnovskih tečnosti.....	7
1.3 Jednačine ravanskog laminarnog graničnog sloja nenjutnovske stepene tečnosti.....	17
1.4 Opšta transformacija diferencijalne jednačine ravanskog graničnog sloja stepene tečnosti.....	20
1.5 Uopštena jednačina Görtlera za granični sloj stepene tečnosti.....	23
1.6 Univerzalna jednačina ravanskog stacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti tipa Saljnikova-Oke.....	25
1.7 O univerzalnim jednačinama graničnog sloja..	28
1.8 O impulsnoj jednačini graničnog sloja stepene tečnosti.....	30
1.9 Afina sličnost i parametri oblika graničnog sloja stepene tečnosti.....	31
1.10 Univerzalna jednačina ravanskog laminarnog stacionarnog graničnog sloja stepene tečnosti u formi Saljnikova-Lojčjanskog.....	35
1.11 Rešavanje univerzalne diferencijalne jednačine.....	41
1.12 O integraciji impulsne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti.....	64
1.13 Primeri.....	67
1.14 Primećbe o primenljivosti jednoparametarskog rešenja univerzalne jednačine graničnog sloja stepene tečnosti.....	79
1.15 O fizičkim osobinama graničnog sloja stepene tečnosti i njenoj reološkoj jednačini stanja	80

2. Aproksimativna varijaciona metoda za sračunavanje ravanskih laminarnih graničnih slojeva stepene tečnosti.....	82
2.1 O varijacionim principima u mehanici kontinua.....	82
2.2 Varijacioni princip.....	85
2.3 Metoda aproksimativnog sračunavanja graničnog sloja stepene tečnosti.....	89
2.4 O neholonomnoj strukturi problema graničnog sloja stepene tečnosti.....	94
2.5 Odredjivanje tačke odvajanja graničnog sloja stepene tečnosti.....	96
2.6 Primeri.....	100
2.7 Zaključci o približnoj varijacionoj metodi graničnog sloja stepene tečnosti.....	107
Prilog I.....	108
Prilog II.....	112
Literatura.....	119
Sadržaj.....	126