Универзитет у Београду
Математички факултет

магистарски рад

Геометрија CR подмногострукости комплексних просторних форми

Ментор :
др Мирјана Ђорић

Кандидат :
Мирјана Милијевић

Београд, 2011.

Садржај

Апстракт

Нека је M реална n-димензионална подмногострукост реалне кодимензије p, комплексне многострукости $\overline{M}$ са скоро комплексном структуром J. Ако максимални J-инваријантни потпростор $H_x(M) = JT_x(M) \cap T_x(M)$ од тангентног простора $T_x(M)$ има константну димензију за свако $x \in M$, онда M називамо CR подмногострукост а константну комплексну димензију од $H_x(M)$ називамо CR димензија од M. Ако је CR димензија од M једнака $\frac{n-1}{2}$, онда M називамо CR подмногострукост максималне CR димензије.

Типични примјер CR подмногострукости максималне CR димензије је реална хиперповрш. Због тога је за очекивати да можемо уопштити неке резултате који вриједе на реалној хиперповрши, на CR подмногострукост максималне CR димензије.

У овом раду посматрамо четири услова на CR подмногострукости максималне CR димензије, M: када је оператор облика специјалног вектора нормале паралелан, када друга фундаментална форма h од M задовољава услов $h(JX, Y) = Jh(X, Y)$; $X, Y \in T(M)$, када је оператор облика специјалног вектора нормале умбилички и η-умбилички. Такође, претпостављамо да је амбијентна многострукост $\overline{M}$ комплексна просторна форма, тј. Келерова многострукост константне холоморфне секционе кривине.

Мотивација за проучавање наведених услова су резултати добијени на реалним хиперповршима у комплексним просторним формама, а дати су у радовима [17], [16], [2], [13] и [20].

Abstract

Let M be an n-dimensional submanifold of real codimension p of a complex manifold $\overline{M}$ with an almost complex structure J. If the maximal J-invariant subspace $H_x(M) = JT_x(M) \cap T_x(M)$ of the tangent space $T_x(M)$ has constant dimension for any $x \in M$, then M is called a CR submanifold and the constant complex dimension of $H_x(M)$ is called the CR dimension of M. We say that M is a CR submanifold of maximal CR dimension if the CR dimension of M equals $\frac{n-1}{2}$.

A typical example of a CR submanifold of maximal CR dimension is a real hypersurface. Hereby we may expect to generalize some results which are valid in a real hypersurface to a CR submanifold of maximal CR dimension.

In this paper we study the next four conditions on a CR submanifold of maximal CR dimension, M, that is, the shape operator of the distinguished normal is parallel, the second fundamental form of M satisfies $h(JX, Y) = Jh(X, Y)$; X, $Y \in T(M)$, the shape operator of the distinguished normal is umbilical and η-umbilical. Also, we assume that an ambient manifold $\overline{M}$ is a complex space form, i. e. a Kaehler manifold of the constant holomorphic sectional curvature.

The motivation for studying the above conditions were the results that are obtained on real hypersurfaces in complex space forms which are given in the papers [17], [16], [2], [13] and [20].

Увод

Реалне хиперповрши у комплексном пројективном простору $\mathbf{CP}^n$ и комплексном хиперболичком простору $\mathbf{CH}^n$ су чест предмет проучавања у диферен-цијалној геометрији. 1963. Таширо и Тачибана су доказали да не постоје умбиличке хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$ и у $\mathbf{CH}^n$ [23] . J. Маеда је показао да за оператор облика A реалне хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$ вриједи $\| \nabla A \|^2 \geq 4(n-1)$, одакле закључујемо да у $\mathbf{CP}^n$ не постоје хиперповрши са паралелним оператором облика [12]. Такаги је 1973. класификовао хомогене реалне хиперповрши у комплексном пројективном простору, показао је да има пет типова таквих хиперповрши које је означио са A_1, A_2, B, C, D и E [22]. Даље је показао да хомогене реалне хиперповрши могу имати 2, 3 или 5 основних кривина [23]. Показало се да су те основне кривине константне [5]. Од наведених типова хомогених хиперповрши врло су важне A_1- геодезијске сфере и A_2- тубе око тотално геодезијске Келерове подмногострукости $\mathbf{CP}^k$ у $\mathbf{CP}^n$, $1 \leq k \leq n-2$, више о њиховој карактеризацији може се наћи у [7]. У [11] су аутори показали да су геодезијске хиперсфере једини примјер реалних хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$ са највише двије различите основне кривине, што значи да су геодезијске хиперсфере најједноставније хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$. У раду [10] се може наћи више о карактеризацији геодезијских хиперсфера у $\mathbf{CP}^n$.

Примјер хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$ које нису хомогене су праволинијске хиперповрши [6], док у $\mathbf{CH}^n$ постоји јединствена хомогена праволинијска реална хиперповш (минимална) [1], као и много примјера нехомогених праволинијских хиперповрши.

Структурни вектор U дефинисан са $U = -J\xi$, гдје је J скоро комплексна структура и ξ вектор нормале на хиперповрш, је врло битан у добијању резултата на реалним хиперповршима. Посебно је значајан случај када је U сопствени вектор оператора облика A реалне хиперповрши, такве хиперповр-ши називају се Хопфове. J. Маеда је показао да је сопствена вриједност која одговара сопственом вектору U константна [12]. Хомогене реалне хиперповши су Хопфове. J. Матсујама је посматрао неке услове на другој фундаменталној форми реалних хиперповрши у $\mathbf{CP}^n$ и показао да не постоје хиперповши које задовољавају услов $h(JX, Y) = Jh(X, Y)$, за тангентне векторе X и Y, скоро комплексну структуру J и другу фундаменталну форму h, у $\mathbf{CP}^n$ [13].

На реалним хиперповршима у комплексном хиперболичком простору добијени су слични резултати као у $\mathbf{CP}^n$. Хомогене реалне хиперповрши у $\mathbf{CH}^n$ класификовали су аутори у [1]. Показано је и да Хопфове хиперповрши са константним основним кривинама у $\mathbf{CH}^n$ могу имати двије или три основне кривине.

Пошто је показано да су неки услови прејаки на хиперповршима у $\mathbf{CP}^n$ и $\mathbf{CH}^n$, као нпр. непостојање убмиличких хиперповрши, посматрали су се исти услови на тзв. холоморфној дистрибуцији $U^\perp$, тангентних вектора ортогоналних на структурни вектор U. Тако су добијене теореме о класифи-кацији умбиличких хиперповрши на $U^\perp$, које још називамо и η-умбиличке хиперповрши [16], [2].

Нека је $(\overline{M}, J, \overline{g})$ $(n+p)$-димензионална комплексна просторна форма, и нека је M n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије од $\overline{M}$, са индукованом метриком g. За $x \in M$, са $T_x(M)$ и $T_x(M)^\perp$ означавамо тангнетни и

нормални простор од M у тачки x. С обзиром на то да је $dim(JT_x(M) \cap T_x(M)) = n-1$, слиједи да постоји јединични вектор ξ, нормалан на M, такав да је $JT(M) \subset T(M) \oplus span\{\xi\}$, као и да локалну ортонормирану базу $\{\xi, \xi_a, \xi_{a^*}\}$, $a \in \{1, .., q\}$, $q = \frac{p-1}{2}$, од $T(M)^\perp$, можемо изабрати тако да вриједи $\xi_{a^*} = J\xi_a$.
Резултати добијени на хиперповршима у комплексним просторним формама, као важном примјеру CR подмногострукости максималне CR димензије, били су мотивација за писање ове тезе. Природно је очекивати да уопштавањем наведених услова можемо добити сличне резултате на CR подмногострукостима максималне CR димензије у комплексним просторним формама. Специјално, уопштили смо услове проучаване у радовима [17], [16], [2], [13] и [20]. У раду [17] је показано да је амбијентна комплексна просторна форма Еуклидов простор уколико се претпостави да је оператор облика вектора нормале хиперповрши паралелан. У [20] су аутори показали да не постоје умбиличке хиперповрши у нееуклидским комплексним просторним формама. У радовима [16] и [2] аутори класификују η-умбиличке хиперповрши у нееуклидским комплексним просторним формама, док је у раду [13] аутор изучавао неке услове на другој фундаменталној форми.
У Поглављима 1 и 2, овога рада, дајемо дефиниције комплексне многострукости и скоро комплексне структуре као и важне примјере комплексних многострукости. Поглавље 3 је посвећено Келеровим многострукостима, гдје дајемо дефиницију и примјере Келерове многострукости, те наводимо доказе важних теорема које вриједе на Келеровим многострукостима. Поглавља 4, 5 и 6 садрже, поред дефиниција, и тврђења која вриједе на подмногострукостима Риманових многострукости, подмногострукостима Келерових многострукости и на J-инваријант--ним подмногострукостима Келерових многострукости. У Поглављу 7 смо извели једначине које вриједе на CR подмногострукостима максималне CR димензије, а које користимо у доказивању оригиналних резултата у овом раду. С обзиром на то да претпостављамо да је амбијентна многострукост комплексна просторна форма, у Поглављу 8 смо дали дефиницију и примјере комплексних просторних форми и израчунали холоморфну секциону кривину комплексног пројективног и комплексног хиперболичког простора.
У Поглављу 9 дајемо оригиналне резултате, садржане у Теореми 9.2 и Теореми 9.3, гдје доказујемо да уколико је оператор облика специјалног нормалног вектора паралелан, онда је амбијентна комплексна просторна форма Еуклидов простор.
У Поглављу 10, оригинални резултати су садржани у Теореми 10.5 и Пропозицији 10.2, гдје је претпостављено да друга фундаментална форма задовољава услов $h(JX, Y) = Jh(X, Y)$; X, $Y \in T(M)$. У том случају је показано да је амбијентна комплексна просторна форма Еуклидов простор.
И на крају, у Поглављу 11, смо у Теореми 11.4, доказали да не постоје CR подмногострукости максималне CR димензије са умбиличким оператором облика специјалног вектора нормале, у нееуклидским комплексним просторним формама. Из тог разлога у Поглављу 12, посматрамо слабији услов на CR подмногостру -костима максималне CR димензије, тј. да је оператор облика специјалне нормале, η-умбилички.

Овдје ћу се посебно захвалити ментору, професорици Мирјани Ђорић, на стрпљивом праћењу мога рада у току магистарских студија и на великој помоћи у савлађивању проблема који су се јављали током припреме ове тезе. Захваљујем се и члановима комисије, професорима Стани Никчевић и Срђану Вукмировићу, на корисним сугестијама које су утицале на побољшање првобитне верзије рада.

Бања Лука, 2010. год.

1 Комплексне многострукости

Дефиниција 1.1 Нека је $\mathbf{D}$ отворен подскуп n-димензионалног комплексног простора $\mathbf{C}^n$ и нека је f функција $f:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$. За f кажемо да је холоморфна у тачки z_0, ако постоји

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(z_0^1,\ldots,z_0^i+h,\ldots,z_0^n)-f(z_0^1,\ldots,z_0^i,\ldots,z_0^n)\}. \tag{1}$$

Ако лимес (1) означимо са c^i, (1) је еквивалентно са

$$f(z_0^1,\ldots,z_0^i+h,\ldots,z_0^n)-f(z_0^1,\ldots,z_0^i,\ldots,z_0^n)-hc^i=\alpha^i(h)|h|, \tag{2}$$

при чему $h\to 0$ повлачи да $\alpha^i(h)\to 0$.
Сада ставимо да је $z^i=x^i+\sqrt{-1}y^i$ и $h=t+\sqrt{-1}s$. Тада уређену n-торку $(z^1,\ldots,z^n)\in\mathbf{C}^n$ можемо идентификовати са 2n-торком $(x^1,y^1,\ldots,x^n,y^n)\in\mathbf{R}^{2n}$, гдје смо са $\mathbf{R}^{2n}$ означили 2n-димензионални реални простор. У овом случају (2) је еквивалентно са

$$\begin{aligned}&f(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i+t,y_0^i+s\ldots,x_0^n,y_0^n)-f(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)\\&=c^i(t+\sqrt{-1}s)+\alpha^i(t,s)\sqrt{t^2+s^2}.\end{aligned}$$

Ставимо ли да је $c^i=a^i+\sqrt{-1}b^i,\ \alpha^i=\beta^i+\sqrt{-1}\gamma^i$ и $f=u+\sqrt{-1}v$, задња једначина постаје

$$\begin{aligned}&u(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i+t,y_0^i+s,\ldots,x_0^n,y_0^n)+\sqrt{-1}v(x_0^1,\ldots,x_0^i+t,y_0^i+s,\ldots,y_0^n)\\&-u(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)-\sqrt{-1}v(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)\\&=(a^it-b^is)+\sqrt{-1}(a^is+b^it)+\sqrt{t^2+s^2}(\beta^i+\sqrt{-1}\gamma^i),\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}&u(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i+t,y_0^i+s,\ldots,x_0^n,y_0^n)-u(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)\\&=a^it-b^is+\sqrt{t^2+s^2}\beta^i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i+t,y_0^i+s,\ldots,x_0^n,y_0^n)-v(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)\\&=a^is+b^it+\sqrt{t^2+s^2}\gamma^i.\end{aligned}$$

Значи, услов да $h\to 0$ повлачи $\alpha(h)\to 0$ је еквивалентан са условом да $t\to 0$ и $s\to 0$ повлачи $\beta\to 0$ и $\gamma\to 0$. Овим је показано да су u и v тотално диференцијабилне функције.
Нека је $f=u+\sqrt{-1}v$ холоморфна функција. Пустимо да $h=t\to 0,$ тада је

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)=a^i,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x^i}(x_0^1,y_0^1,\ldots,x_0^i,y_0^i,\ldots,x_0^n,y_0^n)=b^i.$$

Слично, ако пустимо да $h = s \to 0$, имамо

$$\frac{\partial u}{\partial y^i}(x_0^1, y_0^1, \ldots, x_0^i, y_0^i, \ldots, x_0^n, y_0^n) = -b^i,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y^i}(x_0^1, y_0^1, \ldots, x_0^i, y_0^i, \ldots, x_0^n, y_0^n) = a^i.$$

Према томе, ако је f холоморфна функција, тада u и v задовољавају сљедеће Коши-Риманове једначине:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial v}{\partial y^i}, \; \frac{\partial u}{\partial y^i} = -\frac{\partial v}{\partial x^i}. \tag{3}$$

Дефиниција 1.2 Нека је $\psi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}^n$ пресликавање дефинисано са

$$\psi(z^1, \ldots, z^n) = (w^1, \ldots, w^n).$$

ψ је холоморфно ако је за свако i, $w^i = \psi^i(z^1, \ldots, z^n)$ холоморфно по z^j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Дефиниција 1.3 Хаусдорфов простор $\mathbf{M}$ се назива комплексна многостру-
-кост комплексне димензије n, ако задовољава сљедеће особине:
1) Постоји отворено покривање $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ од $\mathbf{M}$ и хомеоморфизам $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{C}^n$, за свако α.
2) За произвољна два отворена скупа U_α и U_β таква да је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, пресликава
-ња $f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ су холоморфна.

Скуп $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ називамо холоморфни координатни систем околина.

Примјер 1.1 n-димензионални комплексни простор $\mathbf{C}^n$ је комплексна мно-
-гострукост.

Примјер 1.2 Риманова сфера.
Нека је $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Ставимо да је $U_1 = S^2 - \{n\}$ и $U_2 = S^2 - \{s\}$, при чему је $n = (0, 0, 1)$ и $s = (0, 0, -1)$. Дефинишимо пресликавања $\psi_1 : U_1 \to \mathbf{C}$ и $\psi_2 : U_2 \to \mathbf{C}$ са

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{x + \sqrt{-1}y}{1 - z}, \; \psi_2(x, y, z) = \frac{x - \sqrt{-1}y}{1 + z}.$$

Нека је $w = u + \sqrt{-1}v \in \mathbf{C}$. Тада из $u = \frac{x}{1-z}$, $v = \frac{y}{1-z}$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, слиједи

$$z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \; x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \; y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Према томе, вриједи

$$\psi_1^{-1}(w) = \psi_1^{-1}(u + \sqrt{-1}v) = (\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}),$$

одакле закључујемо да је

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(w) = \frac{u}{u^2+v^2} - \sqrt{-1}\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{1}{w}.$$

Значи, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ је холоморфно пресликавање. На сличан начин се показује да је и $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ холоморфно.

Примјер 1.3 Комплексни пројективни простор $\mathbf{CP}^n$.
Нека су $z = (z^1, \dots, z^n)$ и $w = (w^1, \dots, w^n)$ елементи скупа $\mathbf{C}^n - \{0\}$. Кажемо да је $w \sim z$ ако постоји комплексни број α различит од нуле такав да је $w = \alpha z$. Тада је са $\sim$ дата једна релација еквиваленције на $\mathbf{C}^n - \{0\}$. Комплексни пројективни простор је количнички простор $\mathbf{C}^n - \{0\}/\sim$ са топологијом из $\mathbf{C}^n - \{0\}$.
Нека је $U_\alpha = \{[(z^1, \dots, z^\alpha, \dots, z^n)] |\ z^\alpha \neq 0\}$. Дефинишимо пресликавање $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}^n$ са

$$\psi_\alpha([(z^1, \dots, z^\alpha, \dots, z^n)]) = (\frac{z^1}{z^\alpha}, \dots, \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha}, \frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha}, \dots, \frac{z^n}{z^\alpha}).$$

Тада је

$$\psi_\alpha^{-1}(w^1, \dots, w^n) = [(w^1, \dots, w^{\alpha-1}, 1, w^\alpha, \dots, w^n)]$$

и

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(z^1, \dots, z^n) = (\frac{z^1}{z^\beta}, \dots, \frac{z^{\alpha-1}}{z^\beta}, \frac{1}{z^\beta}, \frac{z^\alpha}{z^\beta}, \dots, \frac{z^{\beta-1}}{z^\beta}, \frac{z^{\beta+1}}{z^\beta}, \dots, \frac{z^n}{z^\beta}).$$

Значи, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ је холоморфно пресликавање и комплексни пројективни простор је комплексна многострукост.

Примјер 1.4 Комплексни хиперболички простор $\mathbf{CH}^n$ је комплексна много--струкост.

Дефиниција 1.4 Нека је (U, ψ) холоморфна координатна околина компле--ксне многострукости $\mathbf{M}$. Функција $f : U \to \mathbf{C}$ је холоморфна ако је $f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \mathbf{C}$ холоморфна.

Дефиниција 1.5 Нека су $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ комплексне многострукости и (U, ψ) холо--морфна координатна околина тачке $x \in \mathbf{M}$. Непрекидно пресликавање $\phi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ је холоморфно ако за свако $x \in \mathbf{M}$ и за произвољну координатну околину (V, ψ') из $\mathbf{N}$ такве да $\phi(x) \in V$ и $\phi(U) \subset V$, пресликавање $\psi' \circ \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \psi'(V)$ је холоморфно.

Дефиниција 1.6 $\mathbf{M}$ се назива комплексна подмногострукост комплексне много-струкости $\mathbf{M}'$, ако задовољава сљедеће особине:
1) $\mathbf{M}$ је подмногострукост од $\mathbf{M}'$ као диференцијабилна многострукост.
2) Ињективно пресликавање $\iota : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ је холоморфно.

2 Скоро комплексна структура

Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална комплексна многострукост. Ако идентификујемо локалне комплексне координате $(z^1, \dots, z^n)$ са $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$, при чему је $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{M}$ посматрамо као 2n-димензионалну диференцијабилну многострукост.
За $x \in \mathbf{M}$, $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x, (\frac{\partial}{\partial y^1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x, (\frac{\partial}{\partial y^n})_x\}$ је база тангентног простора $T_x(\mathbf{M})$ многострукости $\mathbf{M}$. За $i \in \{1, \dots, n\}$ ставимо да је

$$J_x(\frac{\partial}{\partial x^i})_x = (\frac{\partial}{\partial y^i})_x,\ J_x(\frac{\partial}{\partial y^i})_x = -(\frac{\partial}{\partial x^i})_x.$$

Са J_x је дефинисан изоморфизам $J_x : T_x(\mathbf{M}) \to T_x(\mathbf{M})$. Овако дефинисано пресликавање J_x не зависи од избора холоморфних координата и добро је дефинисано. Кореcподенција J, која свакој тачки x придружује J_x назива се скоро комплексна структура.

Дефиниција 2.1 Диференцијабилна многострукост $\mathbf{M}$ се назива скоро комплексна многострукост ако на $\mathbf{M}$ постоји линеарно пресликавање $J : T(\mathbf{M}) \to T(\mathbf{M})$ које задовољава услов $J^2 = -Id,$ гдје смо са Id означили идентичко пресликавање. Пресликавање J се назива скоро комплексна структура.

Пропозиција 2.1 Димензија скоро комплексне многострукости је паран број.

Овдје треба напоменути да на диференцијабилној многострукости парне димензи -је не мора постојати скоро комплексна структура. Познато је да нпр. на сфери S^4 не постоји скоро комплексна структура.

Нијенхуисов тензор N се дефинише са

$$N(X,Y) = J[X,Y] - [JX,Y] - [X,JY] - J[JX,JY];\ X,Y \in T(\mathbf{M}).$$

Теорема 2.1 Нека је $(\mathbf{M}, J)$ скоро комплексна многострукост. На $\mathbf{M}$ постоји комплексна структура и J је структура индукована из комплексне структуре на $\mathbf{M}$ ако и само ако је Нијенхуисов тензор N идентички једнак нули.

3 Келерове многострукости

Дефиниција 3.1 Нека је $(\mathbf{M}, J)$ скоро комплексна многострукост. Ако Риманова метрика g на $\mathbf{M}$ задовољава услов

$$g(X, Y) = g(JX, JY), \tag{4}$$

за произвољне $X, Y \in T(\mathbf{M})$, g се назива Хермитова метрика.

Скоро комплексну многострукост $(\mathbf{M}, J)$ са Хермитовом метриком g називамо скоро Хермитова многострукост.

Теорема 3.1 На свакој скоро комплексној многострукости $(\mathbf{M}, J)$ постоји Хермито -ва метрика.
Доказ. На $(\mathbf{M}, J)$ постоји Риманова метрика g'. Ставимо да је

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}\{g'(X, Y) + g'(JX, JY)\}.$$

g је очигледно Хермитова метрика. $\square$

Нека је $(\mathbf{M}, J, g)$ скоро Хермитова многострукост. Дефинишемо 2-форму

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y), \tag{5}$$

за $X, Y \in T(\mathbf{M})$.

Лема 3.1 Ω је антисиметрична 2-форма, односно вриједи

$$\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X).$$

Доказ. $\Omega(X, Y) = g(JX, Y) = g(J^2X, JY) = g(-X, JY) = -g(X, JY) = -\Omega(Y, X).\square$

Дефиниција 3.2 Ако на Хермитовој многострукости $(\mathbf{M}, J, g)$ вриједи услов $d\Omega = 0, (\mathbf{M}, J, g)$ називамо Келерова многострукост, а метрику g Келерова метрика.

Теорема 3.2 Потребан и довољан услов да Хермитова многострукост $(\mathbf{M}, J, g)$ буде Келерова је $\nabla_X J = 0$, за произвољно $X \in T(\mathbf{M})$.

Примјер 3.1 Комплексни простор $\mathbf{C}^n$, димензије n, је Келерова многостру- -кост.

Примјер 3.2 Комплексни пројективни простор $\mathbf{CP}^n$ је Келерова многостру- -кост.

Примјер 3.3 Комплексни хиперболички простор $\mathbf{CH}^n$ је Келерова многостру- -кост.

4 Подмногострукости Риманових многострукости

Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална подмногострукост (n+p)-димензионалне Риманове многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, \bar{g})$ и нека је $\iota : \mathbf{M} \to \overline{\mathbf{M}}$ имерсија, тј. пресликавање $d\iota_x : T_x(\mathbf{M}) \to T_{\iota(x)}(\overline{\mathbf{M}})$ је инјективно, за свако $x \in M$.
Риманову метрику g на $\mathbf{M}$ дефинишемо са $g(X,Y) = \bar{g}(\iota X, \iota Y)$. Риманова метрика g се назива метрика индукована из $\bar{g}$.

Тангентно раслојење $T(\overline{\mathbf{M}})$ многострукости $\overline{\mathbf{M}}$ се дијели на дио тангентан на $\mathbf{M}$ и дио нормалан на $\mathbf{M}$, тј. $T(\overline{\mathbf{M}}) = \iota T(\mathbf{M}) \oplus T^{\perp}(\mathbf{M})$.
Вриједи сљедећа Гаусова једначина

$$\overline{\nabla}_{\iota X}\iota Y = \iota\nabla_X Y + h(X,Y). \tag{6}$$

Са $\overline{\nabla}$ смо у једначини (6) означили повезаност на $\overline{\mathbf{M}}$.

Пропозиција 4.1 Са ∇ је у једначини (6) дефинисана повезаност на $\mathbf{M}$.
Доказ. С обзиром на то да је $\overline{\nabla}$ повезаност, из (6) слиједи да је

$$\overline{\nabla}_{f_1\iota X + f_2\iota Y}\iota Z = \iota\nabla_{f_1 X + f_2 Y} Z + h(f_1 X + f_2 Y, Z),$$

односно

$$f_1\overline{\nabla}_{\iota X} Z + f_2\overline{\nabla}_{\iota Y} Z = \iota\nabla_{f_1 X + f_2 Y} Z + h(f_1 X + f_2 Y, Z),$$

одакле слиједи

$$f_1(\iota\nabla_X Z + h(X,Z)) + f_2(\iota\nabla_Y Z + h(Y,Z)) = \iota\nabla_{f_1 X + f_2 Y} Z + h(f_1 X + f_2 Y, Z).$$

Изједначавањем тангентних дијелова у задњој једначини, добијамо

$$\nabla_{f_1 X + f_2 Y} Z = f_1\nabla_X Z + f_2\nabla_Y Z.$$

Такође, вриједи и

$$\overline{\nabla}_{\iota X}(\iota Y + \iota Z) = \iota\nabla_X(Y+Z) + h(X, Y+Z),$$

односно

$$\overline{\nabla}_{\iota X}(\iota Y) + \overline{\nabla}_{\iota X}(\iota Z) = \iota\nabla_X(Y+Z) + h(X, Y+Z),$$

одакле слиједи

$$\iota\nabla_X Y + h(X,Y) + \iota\nabla_X Z + h(X,Z) = \iota\nabla_X(Y+Z) + h(X, Y+Z).$$

Изједначавањем тангентних дијелова у задњој једначини, добијамо

$$\nabla_X Y + \nabla_X Z = \nabla_X(Y+Z).$$

Даље, имамо

$$\overline{\nabla}_{\iota X}(f_1 \iota Y) = \iota \nabla_X f_1 Y + h(X, f_1 Y),$$

односно

$$f_1 \overline{\nabla}_{\iota X} \iota Y + \iota X(f_1) \iota Y = \iota \nabla_X f_1 Y + h(X, f_1 Y),$$

одакле слиједи

$$f_1(\iota \nabla_X Y + h(X, Y)) + \iota X(f_1) \iota Y = \iota \nabla_X f_1 Y + h(X, f_1 Y).$$

Изједначавањем тангентних дијелова у задњој једначини, добијамо

$$f_1 \nabla_X Y + X(f_1) Y = \nabla_X f_1 Y.$$

Овим смо доказали тврђење.
У доказу смо са f_1 и f_2 означили произвољне диференцијабилне функције на $\overline{\mathbf{M}}$, као и њихове рестрикције на $\mathbf{M}$, и са X, Y и Z произвољне тангентне векторе на $\mathbf{M}$. $\square$

Повезаност ∇ називамо повезаност индукована из $\overline{\nabla}$.

Пропозиција 4.2 ∇ је Леви-Чивита повезаност у односу на индуковану Риманову метрику g.
Доказ. С обзиром на то да је $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност у односу на $\overline{g}$, тензор торзије $\overline{T}$ је идентички једнак нули, тј.

$$\overline{T}(\iota X, \iota Y) = \overline{\nabla}_{\iota X} \iota Y - \overline{\nabla}_{\iota Y} \iota X - [\iota X, \iota Y] = 0.$$

Из задње једначине и (6) имамо да је

$$\iota \nabla_X Y + h(X, Y) - \iota \nabla_Y X - h(Y, X) - \iota [X, Y] = 0.$$

Из задње једначине слиједи да је $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$ што значи да је $T(X, Y) = 0.$ Још треба показати да је ∇ метричка повезаност.
Пошто је $\overline{\nabla}$ метричка повезаност на $\overline{\mathbf{M}}$, имамо да вриједи

$$X(g(Y, Z)) = (\iota X)(\overline{g}(\iota Y, \iota Z)) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\iota X} \iota Y, \iota Z) + \overline{g}(\iota Y, \overline{\nabla}_{\iota X} \iota Z).$$

С друге стране, имамо да вриједи

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) + \overline{g}(\iota \nabla_X Y, \iota Z) + \overline{g}(\iota Y, \iota \nabla_X Z) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\iota X} \iota Y, \iota Z) + \overline{g}(\iota Y, \overline{\nabla}_{\iota X} \iota Z). \end{aligned}$$

Ако упоредимо двије задње једначине, добијамо да је

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = 0,$$

односно

$$\nabla_X g = 0.$$

Према томе, ∇ је метричка повезаност. $\square$

Пропозиција 4.3 Пресликавање $h : T(\mathbf{M}) \times T(\mathbf{M}) \to T^{\perp}(\mathbf{M})$ из једначине (6) је симетрично и билинеарно.

Пресликавање h називамо друга фундаментална форма.

У нашем случају $\mathbf{M}$ је кодимензије p, тако да можемо изабрати p ортонорми- -раних векторских поља $\xi_1, \ldots, \xi_p$, у локалном смислу, нормалних на $\mathbf{M}$.
Тада h можемо изразити на сљедећи начин:

$$h(X,Y) = \sum_{i=1}^{p} h^i(X,Y)\xi_i,$$

гдје су $h^i(X,Y) : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$ симетрична билинеарна пресликавања, $\mathcal{F}(U)$ скуп свих диференцијабилних функција на U, $\mathcal{X}(U)$ скуп свих диферен- -цијабилних векторских поља на U и U околина тачке у којој смо изабрали $\xi_1, \ldots, \xi_p$.
За $\xi \in T^{\perp}(\mathbf{M})$ вриједи сљедећа Вајнгартенова једначина

$$\overline{\nabla}_{\iota X}\xi = -\iota A_\xi(X) + D_X\xi. \tag{7}$$

Пропозиција 4.4
(1) Пресликавање $(X,\xi) \mapsto A_\xi(X), (X,\xi) \in T(\mathbf{M}) \times T^{\perp}(\mathbf{M}),\ A_\xi(X) \in T(\mathbf{M})$, је билинеарно.
(2) За свако $\xi \in T^{\perp}(\mathbf{M})$ вриједи $\overline{g}(\iota A_\xi(X), \iota Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi)$, за произвољне $X, Y \in T(\mathbf{M})$. Дакле, A_ξ је симетрична линеарна трансформација од $T(\mathbf{M})$ у односу на $\overline{g}$.
Доказ.
(1) Адитивност по X или ξ је очигледна. Даље, за произвољно $f \in \mathcal{F}(\overline{M})$, вриједи

$$\overline{\nabla}_{\iota X}(f\xi) = (\iota Xf)\xi + f\overline{\nabla}_{\iota X}\xi = (\iota Xf)\xi - f(\iota A_\xi(X)) + fD_X\xi,$$

због (7). С друге стране, имамо

$$\overline{\nabla}_{\iota X}(f\xi) = -\iota A_{f\xi}(X) + D_X(f\xi).$$

Упоредимо ли двије задње једначине, добијамо

$$A_{f\xi}(X) = fA_\xi(X)\ ,\ D_X(f\xi) = (\iota Xf)\xi + fD_X\xi.$$

Ако исти поступак примјенимо на $\overline{\nabla}_{\iota fX}(\xi)$, добијамо да је

$$A_\xi(fX) = fA_\xi(X)\ ,\ D_{fX}\xi = fD_X\xi.$$

Овим је показано да је $A_\xi(X)$ билинеарно пресликавање.

(2) За произвољно $Y \in T(\mathbf{M})$, вриједи $\overline{g}(\iota Y, \xi) = 0$. Ако задњу једначину диференцирамо, добијамо

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\iota X}\iota Y, \xi) + \overline{g}(\iota Y, \overline{\nabla}_{\iota X}\xi) = 0, \ \ X \in T(\mathbf{M}).$$

Из задње једначине, примјеном једначина (6) и (7) слиједи да је

$$\overline{g}(\iota\nabla_X Y + h(X,Y), \xi) + \overline{g}(\iota Y, -\iota A_\xi(X) + D_X\xi) = 0.$$

С обзиром на то да је

$$\overline{g}(\iota\nabla_X Y, \xi) = 0$$

и

$$\overline{g}(\iota Y, D_X\xi) = 0,$$

имамо

$$\overline{g}(h(X,Y), \xi) = \overline{g}(\iota Y, \iota A_\xi(X)) = g(Y, A_\xi(X)),$$

чиме је тврђење доказано. □

Пресликавање A_ξ из једначине (7) називамо оператор облика вектора ξ.

Пропозиција 4.5 D у једначини (7) је метричка повезаност на $T^\perp(\mathbf{M})$.
Доказ.
У доказу Пропозиције 4.4 смо показали да вриједи

$$D_X(f\xi) = (\iota X f)\xi + f D_X\xi$$

и

$$D_{fX}\xi = f D_X\xi,$$

$f \in \mathcal{F}(\overline{\mathbf{M}})$, $X \in T(\mathbf{M})$, $\xi \in T^\perp(\mathbf{M})$.

Још преостаје да докажемо адитивност.

За X, $Y \in T(\mathbf{M})$; ξ, $\eta \in T^\perp(\mathbf{M})$, вриједи

$$\begin{aligned} D_{X+Y}\xi &= \overline{\nabla}_{\iota X + \iota Y}\xi + \iota A_\xi(X+Y) \\ &= \overline{\nabla}_{\iota X}\xi + \overline{\nabla}_{\iota Y}\xi + \iota A_\xi(X) + \iota A_\xi(Y) \\ &= D_X\xi + D_Y\xi, \end{aligned}$$

Даље, вриједи

$$\begin{aligned} D_X(\xi + \eta) &= \overline{\nabla}_{\iota X}(\xi + \eta) + \iota A_{\xi+\eta}(X) \\ &= \overline{\nabla}_{\iota X}(\xi) + \overline{\nabla}_{\iota X}(\eta) + \iota A_\xi(X) + \iota A_\eta(X) \\ &= D_X(\xi) + D_X(\eta), \end{aligned}$$

гдје смо искористили чињеницу да је $\overline{\nabla}$ повезаност, адитивност оператора облика A и (7).
Значи, D је повезаност на $T^{\perp}(\mathbf{M})$.
Даље, за ξ, $\eta \in T^{\perp}(\mathbf{M})$ вриједи

$$\overline{\nabla}_{\iota X}\xi = -\iota A_{\xi}(X) + D_X\xi, \;\; \overline{\nabla}_{\iota X}\eta = -\iota A_{\eta}(X) + D_X\eta,$$

$X \in T(\mathbf{M})$.
Према томе, имамо

$$\begin{aligned} \overline{g}(D_X\xi, \eta) + \overline{g}(\xi, D_X\eta) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\iota X}\xi, \eta) + \overline{g}(\xi, \overline{\nabla}_{\iota X}\eta) \\ &= \iota X\overline{g}(\eta, \xi). \end{aligned}$$

Овим смо показали да је D метричка повезаност на $T^{\perp}(\mathbf{M})$. $\square$

D називамо нормална повезаност на $\mathbf{M}$.

5 Подмногострукости Келерових многострукости

У даљем тексту претпостављамо да је $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$ Келерова многострукост.

Пропозиција 5.1 Нека је $S_x(\mathbf{M})$ неки потпростор тангентног простора $T_x(\mathbf{M})$, $x \in \mathbf{M}$. Тада је $S_x(\mathbf{M}) \cap JS_x(\mathbf{M})$ J-инваријантни потпростор од $T_x(\mathbf{M})$.
Доказ.
Нека је $X \in S_x(\mathbf{M}) \cap JS_x(\mathbf{M})$. Значи, $X \in S_x(\mathbf{M})$ и $JX \in JS_x(\mathbf{M})$. С друге стране, $X \in JS_x(\mathbf{M})$, па постоји $Y \in S_x(\mathbf{M})$ такав да је $JY = X$. Према томе, $JX = J^2Y = -Y \in S_x(\mathbf{M})$. Значи да $JX \in S_x(\mathbf{M}) \cap JS_x(\mathbf{M})$, чиме је показано да је $S_x(\mathbf{M}) \cap JS_x(\mathbf{M})$ J-инваријантни потпростор тангентног простора $T_x(\mathbf{M})$. □

Дефиниција 5.1 $H_x(\mathbf{M}) = JT_x(\mathbf{M}) \cap T_x(\mathbf{M})$ називамо холоморфни тангент--ни простор од $\mathbf{M}$.

Пропозиција 5.2 $H_x(\mathbf{M})$ је максимални J-инваријантни потпростор од $T_x(\mathbf{M})$.
Доказ.
С обзиром на Пропозицију 5.1 треба још показати да је $H_x(\mathbf{M})$ максимални потпростор од $T_x(\mathbf{M})$. Нека је $T'_x(\mathbf{M})$ J-инваријантни потпростор од $T_x(\mathbf{M})$, тј. вриједи $JT'_x(\mathbf{M}) \subset T'_x(\mathbf{M})$. За произвољно $X \in T'_x(\mathbf{M}) \subset T_x(\mathbf{M}), JX \in JT'_x(\mathbf{M}) \subset T'_x(\mathbf{M})$. Ставимо да је $JX = Y$, тада је $-X = J^2X = JY \in JT'_x(\mathbf{M}) \subset JT_x(\mathbf{M})$. Значи да $X \in JT_x(\mathbf{M})$, односно да $X \in H_x(\mathbf{M})$. Овим је показано да је $T'_x(\mathbf{M}) \subset H_x(\mathbf{M})$, чиме је тврђење доказано. □

Тотално реални дио од $T_x(\mathbf{M})$ је $R_x(\mathbf{M}) = T_x(\mathbf{M})/H_x(\mathbf{M})$.

Пропозиција 5.3 $JR_x(\mathbf{M}) \cap R_x(\mathbf{M}) = \{0\}$.

Пропозиција 5.4 $T_x(\mathbf{M}) = H_x(\mathbf{M}) \oplus R_x(\mathbf{M})$.

Пропозиција 5.5 Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална подмногострукост комплексне многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, J)$ реалне димензије $n + p$. Тада вриједи

$$n - p \leq dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) \leq n. \tag{8}$$

Доказ.
Из $H_x(\mathbf{M}) \subset T_x(\mathbf{M})$ слиједи да је $dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) \leq dim T_x(\mathbf{M}) = n$. С друге стране, из $T_x(\mathbf{M}) \oplus JT_x(\mathbf{M}) \subset T_{\iota(x)}(\overline{\mathbf{M}})$ слиједи да је

$$dim_{\mathbf{R}} T_{\iota(x)}(\overline{\mathbf{M}}) \geq dim T_x(\mathbf{M}) + dim JT_x(\mathbf{M}) - dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}),$$

одакле добијамо

$$n + p \geq 2n - dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}).$$

Значи, $dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) \geq n - p$, чиме је тврђење доказано. □

Посљедица 5.1 $0 \leq dim_{\mathbf{R}} R_x(\mathbf{M}) \leq p$.

Примјер 5.1 Нека је

$$\mathbf{M} = \{z \in \mathbf{C}^n | \, |z| = 1, \ Imz^n = 0\}$$
$$= \{(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n) \in \mathbf{R}^{2n} | \ \sum_{i=1}^{n} ((x^i)^2 + (y^i)^2) = 1, \ y^n = 0\}.$$

Тада је $dim\mathbf{M} = 2n - 2$, $p = 2$ и $\frac{\partial}{\partial y^n}$ је нормала на $\mathbf{M}$. Из Пропозиције 5.5 имамо да је $2n - 4 \leq dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) \leq 2n - 2$. Нека је p_1 тачка са координатама $z^1 = z^2 = \cdots = z^{n-2} = 0, \ z^{n-1} = 1, \ z^n = 0,$ тј. посматрана као тачка из $\mathbf{R}^{2n}$, p_1 има координате $x^1 = y^1 = \cdots = x^{n-2} = y^{n-2} = 0, \ x^{n-1} = 1, \ y^{n-1} = x^n = y^n = 0$. $\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$ је вектор нормалан на $\mathbf{M}$ у тачки p_1. Значи,

$$T_{p_1}(\mathbf{M}) = span\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-2}}, \frac{\partial}{\partial y^{n-2}}, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$$

и

$$J(\frac{\partial}{\partial x^n}) = \frac{\partial}{\partial y^n}, \ J(\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}) = -\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$$

су ортогонални на $T_{p_1}(\mathbf{M})$. Према томе $R_{p_1}(\mathbf{M}) = span\{\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ и
$H_{p_1}(\mathbf{M}) = span\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-2}}, \frac{\partial}{\partial y^{n-2}}\}$. Дакле, $dim_{\mathbf{R}} H_{p_1}(\mathbf{M}) = 2n - 4$.
Сада узмимо тачку p_2 са комплексним координатама $z^1 = 0, \ldots, z^{n-1} = 0, z^n = 1$, тј. са реалним координатама $x^1 = y^1 = \cdots = x^{n-1} = y^{n-1} = 0, \ x^n = 1, \ y^n = 0$. $\frac{\partial}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial}{\partial y^n}$ су вектори нормални на $\mathbf{M}$ у тачки p_2. $J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}$ и $J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$, па је $JT_{p_2}(\mathbf{M}) = T_{p_2}(\mathbf{M}), \ H_{p_2}(\mathbf{M}) = T_{p_2}(\mathbf{M})$ и $dim_{\mathbf{R}} H_{p_2}(\mathbf{M}) = 2n - 2$.

Из наведеног примјера видимо да димензија од $H_p(\mathbf{M})$ зависи од тачке $p \in \mathbf{M}$.

Дефиниција 5.2 [3] Ако $H_p(\mathbf{M})$ има константну димензију у односу на $p \in \mathbf{M}$, подмногострукост $\mathbf{M}$ се назива Коши-Риманова подмногострукост или краће CR подмногострукост. Константна комплексна димензија се назива CR димензија од $\mathbf{M}$.

Примјер 5.2 J-инваријантне подмногострукости су CR подмногострукости CR димензије $\frac{n}{2}$.

Нека је $\mathbf{M}$ подмногострукост комплексне многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, J)$ таква да је $JT_x(\mathbf{M}) \subset T_x(\mathbf{M})$, за произвољно $x \in \mathbf{M}$. Тада је $H_x(\mathbf{M}) = T_x(\mathbf{M})$ и $dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) = n$. У овом случају $\mathbf{M}$ постаје скоро комплексна многострукост у односу на скоро комплексну структуру индуковану из J коју ћемо означити са J'. Тангентни простор $T_x(\mathbf{M})$ је инваријантан у односу на J, вриједи да је $J\iota X = \iota J'X$ и $-\iota X = J^2 \iota X = J\iota J'X = \iota J'^2 X$. Значи, $J'^2 X = -X$ и $dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ је паран број.

Примјер 5.3 Реалне хиперповрши су CR подмногострукости CR димензије $\frac{n-1}{2}$.

Примјер 5.4 Тотално реалне подмногострукости су CR подмногострукости.

Ако у свакој тачки $x \in \mathbf{M}$ вриједи $H_x(\mathbf{M}) = \{0\}, \mathbf{M}$ се назива тотално реална подмногострукост.
За тотално реалну подмногострукост вриједи $n - p \leq dim_{\mathbf{R}} H_x(\mathbf{M}) = 0$.

Дефиниција 5.3 [3] $\mathbf{M}$ се назива CR подмногострукост по Бежанку ако постоји пар ортогоналних комплементарних дистрибуција $(\Delta, \Delta^{\perp})$ таквих да је $J\Delta_x = \Delta_x$ и $J\Delta_x^{\perp} \subset T_x^{\perp}(\mathbf{M}), x \in \mathbf{M}$.

Пропозиција 5.6 Ако је $\mathbf{M}$ CR подмногострукост по Бежанку, онда је $\mathbf{M}$ CR подмногострукост у смислу Дефиниције 5.2.
Доказ.
Вриједи да је $\Delta_x = H_x(\mathbf{M})$. У супротном, ако би постојао $X \in H_x(\mathbf{M})$ такав да $X \notin \Delta_x$, X би морао припадати $\Delta^{\perp}$, јер су Δ и $\Delta^{\perp}$ комплементарне дистрибуције. Значи, $JiX \in T_x^{\perp}(\mathbf{M})$, што је у контрадикцији са тим да $X \in H_x(\mathbf{M})$. С обзиром на то да је Δ дистрибуција, $dim\Delta_x$ је константна. Овим је тврђење доказано. $\square$

У случају када је CR димензија мања од $\frac{n-1}{2}$, обрнуто тврђење од тврђења из Пропозиције 5.6 није тачно.

За произвољно $X \in T(\mathbf{M})$, $J\iota X$ напишимо као суму тангентног дијела и нормалног дијела, тј.

$$J\iota X = \iota F X + \nu(X), \tag{9}$$

при чему је $F : T(\mathbf{M}) \to T(\mathbf{M})$ ендоморфизам и $\nu : T(\mathbf{M}) \to T^{\perp}(\mathbf{M})$.

Пропозиција 5.7 Нека је $\mathbf{M}$ CR подмногострукост по Бежанку, ендоморфи--зам F задовољава једначину $F^3 + F = 0$ и $rankF = dim\Delta$. Обрнуто, ако F задовољава једначину $F^3 + F = 0$ и ако је $rankF$ константа, $\mathbf{M}$ је CR подмногострукост по Бежанку.
Доказ.
Нека је $\mathbf{M}$ CR подмногострукост по Бежанку и $X \in T(\mathbf{M})$. Тада вриједи $X = X_1 + X_2$, при чему је $X_1 \in \Delta, X_2 \in \Delta^{\perp}$. Такође, вриједи и $\nu(X_1) = 0$ и $FX_2 = 0$. Према томе, имамо

$$-\iota X_1 = J^2 \iota X_1 = \iota F^2 X_1 + \nu(F X_1)$$

и

$$-\iota X_2 = J^2 \iota X_2 = J\nu(X_2).$$

Ако сада упоредимо тангентне и нормалне дијелове у предзадњој једначини, добијамо

$$F^2 X_1 = -X_1,\ \nu(F X_1) = 0.$$

Значи да је $J\iota FX_1 = \iota F^2X_1 \in T(\mathbf{M})$ и $FX_1 \in \Delta$. Даље, имамо да је

$$J^2\iota X = J\iota FX_1 + J\nu(X_2) = \iota F^2X_1 - \iota X_2 = \iota(F^2X_1 - X_2).$$

$$J^3\iota X = J\iota(F^2X_1 - X_2) = \iota F(F^2X_1 - X_2) + \nu(F^2X_1 - X_2) = \iota F^3X_1 - \nu(X_2).$$

С друге стране, вриједи

$$F^3X = F^3X_1 + F^3X_2 = F^3X_1$$

и

$$\nu(X) = \nu(X_1) + \nu(X_2) = \nu(X_2).$$

Сада имамо да је

$$J^3\iota X = -J\iota X = -\iota FX - \nu(X) = \iota F^3X - \nu(X).$$

Значи, за F вриједи да је $F^3 + F = 0$ и $rankF = dim\Delta$.
Обрнуто, нека за F вриједи $F^3 + F = 0$ и $rankF = r$, при чему је r нека константа. Ставимо да је $\Delta^\perp = \{X \in T(\mathbf{M}) | FX = 0\}$ и $\Delta = \{X \in T(\mathbf{M}) | g(X,Y) = 0, Y \in \Delta^\perp\}$. Тада је, по дефиницији, $J\Delta^\perp \subset T^\perp(\mathbf{M})$ и $\overline{g}(J\iota X, \iota Y) = -\overline{g}(\iota X, J\iota Y) = -\overline{g}(\iota X, \nu(Y)) = 0$. Слиједи да је $J\iota X \perp \Delta^\perp$, односно да је $J\Delta = \Delta$. $\Box$

6 J-инваријантне подмногострукости Келерових многострукости

Нека је $\mathbf{M}$ J-инваријантна подмногострукост Келерове многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, J је скоро комплексна структура и g је метрика. С обзиром на Примјер 5.2, знамо да J индукује скоро комплексну структуру J' на M.

Лема 6.1 Ако је M J-инваријантна подмногострукост Келерове многострукости, онда је за свако $\xi \in T^{\perp}(\mathbf{M})$, $J\xi \in T^{\perp}(\mathbf{M})$.
Доказ.
Вриједи да је

$$0 = \overline{g}(\iota X, \xi) = \overline{g}(J\iota X, J\xi) = \overline{g}(\iota J' X, J\xi).$$

С обзиром на то да је $J' : T(\mathbf{M}) \to T(\mathbf{M})$ изоморфизам, за произвољно $Y \in T(\mathbf{M})$ постоји $X \in T(\mathbf{M})$ такав да је $Y = J'X$. Из посљедње једначине имамо да је за произвољно $Y \in T(\mathbf{M})$, $\overline{g}(\iota Y, J\xi) = 0$, односно да $J\xi \in T^{\perp}(\mathbf{M})$. $\square$

Теорема 6.1 J-инваријантна подмногострукост Келерове многострукости је Келерова многострукост.
Доказ.
Ако диференцирамо једначину $J\iota Y = \iota J'Y$ и искористимо да је $\overline{\nabla}_{\iota X} J = 0$, при чему је $\overline{\nabla}$ повезаност на $\overline{\mathbf{M}}$, имамо да је

$$J\overline{\nabla}_{\iota X}\iota Y = \iota\nabla_X(J'Y) + h(X, J'Y),$$

са ∇ смо означили повезаност на $\mathbf{M}$ индуковану из $\overline{\nabla}$. Из посљедње једначине и једначине (6) слиједи да је

$$J(\iota\nabla_X Y + h(X,Y)) = \iota(\nabla_X J')Y + \iota J'\nabla_X Y + h(X, J'Y),$$

односно

$$\iota J'\nabla_X Y + Jh(X,Y) = \iota(\nabla_X J')Y + \iota J'\nabla_X Y + h(X, J'Y).$$

Ако упоредимо тангентни и нормални дио у задњој једначини, добијамо да је

$$Jh(X,Y) = h(X, J'Y) \tag{10}$$

и да је $\nabla_X J' = 0$, одакле закључујемо да је $(\mathbf{M}, J')$ Келерова многострукост. $\square$

7 CR подмногострукости максималне CR димензије

Нека је $\mathbf{M}$ CR подмногострукост максималне CR димензије, тј. у свакој тачки $x \in \mathbf{M}$ вриједи $dim(JT_x(\mathbf{M}) \cap T_x(\mathbf{M})) = n-1$. Тада је димензија подмногострукости $\mathbf{M}$ непаран број и постоји јединични вектор ξ_x ортогоналан на $\mathbf{M}$ такав да је $JT_x(\mathbf{M}) \subset T_x(\mathbf{M}) \oplus span\{\xi_x\}$. Према томе, за свако $X \in T(\mathbf{M})$ вриједи

$$J\iota X = \iota FX + u(X)\xi, \tag{11}$$

са u смо означили 1-форму на $\mathbf{M}$.
Пропозиција 7.1 Ендоморфизам $F : T(\mathbf{M}) \to T(\mathbf{M})$ је антисиметрично преслика -вање.
Доказ.
За произвољне $X \in T(\mathbf{M})$ и $Y \in T(\mathbf{M})$, имамо да вриједи

$$\overline{g}(J\iota X, \iota Y) = \overline{g}(\iota FX + u(X)\xi, \iota Y) = \overline{g}(\iota FX, \iota Y) = g(FX, Y),$$

гдје смо користили једначину (11).
С друге стране, вриједи

$$\begin{aligned} \overline{g}(J\iota X, \iota Y) &= \overline{g}(J^2\iota X, J\iota Y) = \overline{g}(-\iota X, J\iota Y) = -\overline{g}(\iota X, \iota FY + u(Y)\xi) \\ &= -\overline{g}(\iota X, \iota FY) = -g(X, FY), \end{aligned}$$

због једначине (11) и чињенице да је $\overline{g}$ Хермитова метрика.
Изједначавањем десних страна задње двије једначине, закључујемо да је

$$g(FX, Y) = -g(X, FY),$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

Нека је сада $\eta \in T^{\perp}(\mathbf{M})$ и нека је η ортогоналан на ξ. Тада вриједи

$$\overline{g}(J\eta, \iota X) = \overline{g}(J^2\eta, J\iota X) = -\overline{g}(\eta, J\iota X) = 0.$$

С друге стране, вриједи

$$\begin{aligned} 0 = \overline{g}(\iota X, \eta) &= \overline{g}(J\iota X, J\eta) = \overline{g}(\iota FX, J\eta) + u(X)\overline{g}(\xi, J\eta) \\ &= u(X)\overline{g}(\xi, J\eta), \end{aligned}$$

гдје смо користили (11). Ако би у некој тачки $x \in \mathbf{M}$ вриједило $u_x(X) = 0$, за произвољно $X \in T(\mathbf{M})$, онда би из (11) сљедило да је $T_x(\mathbf{M})$ J-инваријантан, а самим тим и парне димензије. Ово је контрадикција. Значи да је $\overline{g}(\xi, J\eta) = 0$, односно да је $J\eta$ ортогоналан на $T(\mathbf{M}) \oplus span\{\xi\}$. Другим ријечима, подраслојење $T_1^{\perp}(\mathbf{M}) = \{\eta \in T^{\perp}(\mathbf{M}) | \ \overline{g}(\eta, \xi) = 0\}$ је J-инваријантно, одакле закључујемо да је $J\xi$ тангентни вектор којег ћемо означити са

$$J\xi = -\iota U. \tag{12}$$

Такође, локалну ортонормирану базу $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{1^*}, \ldots, \xi_{q^*}$ од $T^{\perp}(\mathbf{M})$, можемо изабрати тако да вриједи

$$\xi_{a^*} = J\xi_a, \tag{13}$$

$a \in \{1, \ldots, q\}$ и $q = \frac{p-1}{2}$.

Ако сада примјенимо J на једначину (11), добијамо

$$J^2 \iota X = J\iota FX + u(X)J\xi,$$

односно

$$-\iota X = \iota F^2 X + u(FX)\xi - \iota u(X)U,$$

одакле закључујемо да је

$$F^2 X = -X + u(X)U \tag{14}$$

и

$$u(FX) = 0. \tag{15}$$

Сада примјенимо J на једначину (12), добијамо

$$J^2 \xi = -J\iota U,$$

односно

$$-\xi = -\iota FU - u(U)\xi,$$

због (11).
Из задње једначине слиједи да је

$$FU = 0 \tag{16}$$

Ако сада помножимо једначину (14) скаларно са U и примјенимо једначину (16) и Пропозицију 7.1, добијамо да је

$$g(F^2X, U) = -g(X, U) + u(X),$$

односно

$$-g(FX, FU) = -g(X, U) + u(X),$$

одакле слиједи да је

$$g(X, U) = u(X). \tag{17}$$

Са F, g, u и U (дефинисан са (12)) је дефинисана скоро контактна структура

на **M** [21].
За векторе $\xi,\ \xi_a$ и ξ_{a^*}, Вајнгартенове једначине, редом, гласе :

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\iota X}\xi &= -\iota AX + D_X\xi \\ &= -\iota AX + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)\xi_a + s_{a^*}(X)\xi_{a^*}\},\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\iota X}\xi_a = -\iota A_a X + D_X\xi_a &= -\iota A_a X - s_a(X)\xi \\ &+ \sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)\xi_b + s_{ab^*}(X)\xi_{b^*}\}\end{aligned} \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\iota X}\xi_{a^*} = -\iota A_{a^*} X + D_X\xi_{a^*} &= -\iota A_{a^*} X - s_{a^*}(X)\xi \\ &+ \sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)\xi_b + s_{a^*b^*}(X)\xi_{b^*}\},\end{aligned} \tag{20}$$

гдје смо са $A,\ A_a$ и A_{a^*} означили операторе облика вектора ξ, ξ_a и ξ_{a^*}, редом, и са $s_a, s_{a^*}, s_{ab}, s_{a^*b^*}, s_{ab^*}, s_{a^*b}$, коефицијенте нормалне повезаности D.

Друга фундаментална форма и оператори облика $A,\ A_a$ и A_{a^*} су повезани сљедећом релацијом:

$$\begin{aligned}h(X,Y) &= g(AX,Y)\xi \\ &+ \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aX,Y)\xi_a + g(A_{a^*}X,Y)\xi_{a^*}\}.\end{aligned} \tag{21}$$

Диференцирањем једначине $\xi_{a^*} = J\xi_a$, добијамо

$$\overline{\nabla}_{\iota X}\xi_{a^*} = J\overline{\nabla}_{\iota X}\xi_a.$$

Ако у задњу једначину уврстимо једначине (19) и (20), добијамо

$$\begin{aligned}&-\iota A_{a^*}X - s_{a^*}(X)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)\xi_b + s_{a^*b^*}(X)\xi_{b^*}\} = \\ &-\iota FA_aX - u(A_aX)\xi + J(-s_a(X)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)\xi_b + s_{ab^*}(X)\xi_{b^*}\}),\end{aligned}$$

због (11). Примјеном једначина (12) и (13), задња једначина постаје

$$\begin{aligned}&-\iota A_{a^*}X - s_{a^*}(X)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)\xi_b + s_{a^*b^*}(X)\xi_{b^*}\} = \\ &-\iota FA_aX - u(A_aX)\xi + \iota s_a(X)U + \sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)\xi_{b^*} - s_{ab^*}(X)\xi_b\}.\end{aligned}$$

Ако упоредимо тангентне и нормалне дијелове у задњој једначини, добијамо

$$A_{a^*}X = FA_aX - s_a(X)U, \tag{22}$$

$$s_{a^*}(X) = u(A_aX) \tag{23}$$

и

$$s_{a^*b} = -s_{ab^*},\ s_{a^*b^*} = s_{ab}. \tag{24}$$

Примјенимо сада J на једначину (13), добијамо

$$\xi_a = -J\xi_{a^*}. \tag{25}$$

На сличан начин, диференцирањем једначине (25) добијамо једначине

$$A_aX = -FA_{a^*}X + s_{a^*}(X)U \tag{26}$$

и

$$s_a(X) = -u(A_{a^*}X). \tag{27}$$

На основу Пропозиције 4.4 (тврђење (2)), Пропозиције 7.1 и једначине (22) добија -мо да је

$$\begin{aligned} g((A_aF + FA_a)X, Y) &= g(A_aFX, Y) + g(FA_aX, Y) \\ &= g(FX, A_aY) + g(FA_aX, Y) \\ &= -g(X, FA_aY) + g(FA_aX, Y) \\ &= -g(X, A_{a^*}Y + s_a(Y)U) + g(A_{a^*}X + s_a(X)U, Y) \\ &= -s_a(Y)g(X, U) + s_a(X)g(Y, U), \end{aligned}$$

односно, због (17), добијамо да вриједи

$$g((A_aF + FA_a)X, Y) = u(Y)s_a(X) - u(X)s_a(Y). \tag{28}$$

На сличан начин, из Пропозиције 4.4 (тврђења (2)), Пропозиције 7.1, једначине (26) и једначине (17), слиједи да је

$$g((A_{a^*}F + FA_{a^*})X, Y) = u(Y)s_{a^*}(X) - u(X)s_{a^*}(Y). \tag{29}$$

Ако диференцирамо једначину (11), добијамо једначину

$$J\overline{\nabla}_{\iota Y}\iota X = \overline{\nabla}_{\iota Y}\iota FX + \overline{\nabla}_{\iota Y}(u(X)\xi).$$

Примјеном једначина (6) и (7), задња једначина постаје

$$J(\iota\nabla_Y X + h(Y, X)) = \iota\nabla_Y(FX) + h(Y, FX) + (\overline{\nabla}_{\iota Y}u(X))\xi + u(X)\overline{\nabla}_{\iota Y}\xi,$$

односно

$$
\begin{aligned}
J\iota\nabla_Y X + Jh(Y,X) = \iota(\nabla_Y F)X + \iota F(\nabla_Y X) + h(Y,FX) + (\overline{\nabla}_{\iota Y} u(X))\xi \\
+ u(X)(-\iota AY + D_Y\xi).
\end{aligned}
$$

Из задње једначине, примјеном (11) и (21) слиједи да је

$$
\begin{aligned}
&\iota F\nabla_Y X + u(\nabla_Y X)\xi + J\{g(AX,Y)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_a X,Y)\xi_a + g(A_{a^*}X,Y)\xi_{a^*}\}\} = \\
&\iota(\nabla_Y F)X + \iota F\nabla_Y X + g(AY,FX)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_a Y,FX)\xi_a + g(A_{a^*}Y,FX)\xi_{a^*}\} \\
&+ (\overline{\nabla}_{\iota Y} u(X))\xi - u(X)\iota AY + u(X)D_Y\xi,
\end{aligned}
$$

одакле, због (12) и (13), слиједи

$$
\begin{aligned}
&u(\nabla_Y X)\xi - g(AX,Y)\iota U + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_a X,Y)\xi_{a^*} - g(A_{a^*}X,Y)\xi_a\} = \\
&\iota(\nabla_Y F)X + g(AY,FX)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_a Y,FX)\xi_a + g(A_{a^*}Y,FX)\xi_{a^*}\} \qquad (30)\\
&+ (\nabla_Y u)(X)\xi + u(\nabla_Y X)\xi - u(X)\iota AY + u(X)D_Y\xi.
\end{aligned}
$$

Ако у једначини (30) изједначимо тангентне дијелове на лијевој и десној страни, добијамо

$$
(\nabla_Y F)X = u(X)AY - g(AX,Y)U. \tag{31}
$$

Слично, ако у (30) изједначимо коефицијенте уз ξ на лијевој и десној страни, добијамо

$$
(\nabla_Y u)(X) = -g(AY,FX),
$$

односно, због Пропозиције 7.1,

$$
(\nabla_Y u)(X) = g(FAY,X). \tag{32}
$$

Сада ћемо диференцирати једначину (12), имамо

$$
J\overline{\nabla}_{\iota X}\xi = -\overline{\nabla}_{\iota X}\iota U,
$$

односно, због (6) и (7),

$$J(-\iota AX + D_X\xi) = -(\iota\nabla_X U + h(X,U)),$$

одакле, због (11), слиједи да је

$$-\iota FAX - u(AX)\xi + JD_X\xi = -\iota\nabla_X U - h(X,U).$$

Ако у задњој једначини упоредимо тангентне дијелове на лијевој и десној страни, добијамо

$$\nabla_X U = FAX. \tag{33}$$

Сада ћемо навести три примјера CR подмногострукости максималне CR димензи -је.

Примјер 7.1 Реалне хиперповрши су CR подмногострукости максималне CR димензије.
Нека је $\mathbf{M}$ реална хиперповрш комплексне просторне форме $\overline{\mathbf{M}}$, и нека је ξ јединични вектор нормалан на $\mathbf{M}$. Риманове повезаности $\overline{\nabla}$ на $\overline{\mathbf{M}}$ и ∇ на $\mathbf{M}$ су повезане сљедећом Гаусовом и Кодацијевом једначином, редом:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX,Y)\xi,$$

$$\overline{\nabla}_X\xi = -AX,$$

X, $Y \in T(\mathbf{M})$, g је Риманова метрика на $\mathbf{M}$ индукована из метрике на $\overline{\mathbf{M}}$, и A је оператор облика од $\mathbf{M}$ у $\overline{\mathbf{M}}$.
На $\mathbf{M}$ је дефинисана скоро контактна структура (F,U,u,g) индукована из скоро комплексне структуре J на $\overline{\mathbf{M}}$ [21].
Карактеристично векторско поље U на $\mathbf{M}$ је дефинисано са $U = -J\xi$. За скоро контактну структуру (F,U,u,g) вриједе сљедеће једначине:

$$F^2 = -Id + u\otimes U, \quad u(U) = 1 \quad g(FX,FY) = g(X,Y) - u(X)u(Y),$$

при чему је Id идентичко пресликавање од $T(\mathbf{M})$ и X, $Y \in T(\mathbf{M})$.
Из Гаусове и Кодацијеве једначине слиједе једначине:

$$(\nabla_X F)Y = u(Y)AX - g(AX,Y)U$$

и

$$\nabla_X U = FAX.$$

Сопствене вриједности и сопствене векторе оператора облика A називамо основне кривине и основни вектори кривине, редом. На хиперповршима је често посматран услов да је карактеристични вектор U основни. У [17] је показано да ако на реалној хиперповрши $\mathbf{M}$ од $\overline{\mathbf{M}}$ вриједи да је $AU = \alpha U$, за неку функцију α на $\mathbf{M}$, онда је α константа. У комплексном пројективном простору, на свакој реалној хиперповрши која лежи на туби константног радијуса r (> 0) око неке комплексне подмногострукости комплексног пројективног простора, вриједи да је U основни вектор. Такође, U је основни вектор на свакој реалној хиперповрши која лежи на туби око неке комплексне подмногострукости или неке тотално реалне подмногострукости комплексног хиперболичког простора. Хиперповрши на којима је U основни вектор називамо Хопфове хиперповрши. Умбиличке и η-умбиличке хиперповрши су примјери Хопфових хиперповрши. Познато је да η-умбиличка хиперповрш у комплексној просторној форми има двије основне кривине [23]. С друге стране, праволинијске хиперповрши су типични примјери хиперповрши које нису Хопфове. Важан примјер хиперповрши су и хомогене хиперповрши које се дефинишу као орбите под дејством подгрупе пројективне унитарне групе. Такаги је у [22] класификовао хомогене реалне хиперповрши у комплексном пројективном простору, а затим је у [23] показао да хомогене хиперповрши могу имати двије, три или пет константних основних кривина.

Примјер 7.2 Нека је $\mathbf{M}'$ комплексна подмногострукост од комплексне многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, J)$ и $\iota_1 : \mathbf{M}' \to \overline{\mathbf{M}}$ имерсија. Нека је $\mathbf{M}$ реална хиперповрш од $\mathbf{M}'$ и $\iota_0 : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ имерсија, и нека је $\iota = \iota_1\iota_0$. Означимо са ξ' јединични вектор из $\mathbf{M}'$, нормалан на $\mathbf{M}$. С обзиром на то да је ι_1 холоморфно пресликавање, слиједи да је $\iota_1 J' = J\iota_1$, при чему је J' скоро комплексна структура на $\mathbf{M}'$, индукована из J.

За произвољно $X \in T(\mathbf{M})$, вриједи да је

$$J\iota X = J\iota_1\iota_0 X = \iota_1 J'\iota_0 X = \iota_1(\iota_0 F'X + u(X)\xi') = \iota F'X + u(X)\iota_1\xi',$$

због (11). Такође, с обзиром на (11), вриједи да је

$$J\iota X = \iota F X + \sum_{a=1}^{p} u^a(X)\xi_a,$$

при чему су ξ_a, $a \in \{1, \ldots, p\}$, локална ортонормирана векторска поља из $\overline{\mathbf{M}}$, нормална на $\mathbf{M}$.
Сада изаберимо вектор ξ тако да вриједи $\xi = \iota_1\xi'$. Тада вриједи

$$J\iota X = \iota F X + u(X)\xi,$$

због (11).
Према томе, произвољна реална хиперповрш $\mathbf{M}$, комплексне подмногострукости $\mathbf{M}'$ од $\overline{\mathbf{M}}$, је CR подмногострукост максималне CR димензије од $\overline{\mathbf{M}}$.

Примјер 7.3 Нека је $\mathbf{M}'$ реална хиперповрш комплексне многострукости $(\overline{\mathbf{M}}, J)$. И нека је $\iota_1 : \mathbf{M}' \to \overline{\mathbf{M}}$ имерсија. Тада, за свако $X' \in T(\mathbf{M}')$ вриједи

$$J\iota_1 X' = \iota_1 F'X' + u'(X')\xi.$$

Нека је $\mathbf{M}$ F'-инваријантна подмногострукост од $\mathbf{M}'$, тј. вриједи $F'T(\mathbf{M}) \subset T(\mathbf{M})$. Означимо са ι_0 имерсију и ставимо $\iota = \iota_1 \circ \iota_0$. Ортонормирану базу од $T^{\perp}(\mathbf{M})$ у $T(\overline{\mathbf{M}})$ изаберимо тако да вриједи $\xi_1 = \xi$ и $\xi_2, \ldots, \xi_p$ су ортонормирани у $T(\mathbf{M}')$. Тада, за свако $X \in T(\mathbf{M})$ вриједи

$$J\iota X = \iota FX + \sum_{a=1}^{p} u^a(X)\xi_a.$$

Такође вриједи

$$\begin{aligned} J\iota X &= J\iota_1 \circ \iota_0 X = \iota_1 F' \iota_0 X + u'(\iota_0 X)\xi \\ &= \iota_1 \circ \iota_0 FX + u'(\iota_0 X)\xi = \iota FX + u'(\iota_0 X)\xi, \end{aligned}$$

због тога што је $\mathbf{M}$ F'-инваријантна подмногострукост.
Из задње двије једначине слиједи да је $u^1(X) = u'(\iota_0 X)$, $u^a(X) = 0$, $a = 2, \ldots, p$. Према томе, произвољна F'-инваријантна подмногострукост реалне хиперповрши од $\overline{\mathbf{M}}$ је CR подмногострукост максималне CR димензије.

Лема 7.1 У CR подмногострукости максималне CR димензије вриједи да је специјално нормално векторско поље ξ, паралелно у односу на нормалну повезаност ако и само ако је $s_a = s_{a^*} = 0, a \in \{1, \ldots, q\}$.
Доказ.
Тврђење слиједи из

$$D_X\xi = \sum_{a=1}^{q} \{s_a(X)\xi_a + s_{a^*}(X)\xi_{a^*}\} = 0$$

и линеарне независности вектора ξ_a, ξ_{a^*}, $a \in \{1, \ldots, q\}$. $\square$

Примјер 7.4 У Примјеру 7.2, претпоставимо да је $\mathbf{M}'$ тотално геодезијска комплексна подмногострукост од $\overline{\mathbf{M}}$. Тада, из Вајнгартенове једначине, слиједи да је

$$\overline{\nabla}_{\iota X}\xi = \overline{\nabla}_{\iota_1\iota_0 X}\iota_1\xi' = \iota_1\nabla'_{\iota_0 X}\xi' + h'(\iota_0 X, \xi') = \iota_1(-\iota_0 A_0 X) = -\iota A_0 X,$$

при чему смо са h' означили другу фундаменталну форму од $\mathbf{M}'$ у $\overline{\mathbf{M}}$, и са A_0 оператор облика од $\mathbf{M}$ у $\mathbf{M}'$. Из задње једначине видимо да је $D_X\xi = 0$, тј. ξ је паралелан у односу на нормалну повезаност D.

8 Комплексне просторне форме

Нека је $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$ Келерова многострукост реалне димензије $2(n+p)$. Риманова кривина, $\overline{R} : \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \to \mathbf{R}$, задовољава сљедеће особине:

(1) $\overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota Z, \iota W) = -\overline{R}(\iota Y, \iota X, \iota Z, \iota W) = -\overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota W, \iota Z)$,

(2) $\overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota Z, \iota W) = \overline{R}(\iota Z, \iota W, \iota X, \iota Y)$,

(3) $\overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota Z, \iota W) + \overline{R}(\iota X, \iota Z, \iota W, \iota Y) + \overline{R}(\iota X, \iota W, \iota Y, \iota Z) = 0$ и

(4) $\overline{R}(J\iota X, J\iota Y, \iota Z, \iota W) = \overline{R}(\iota X, \iota Y, J\iota Z, J\iota W) = \overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota Z, \iota W)$.

Пропозиција 8.1 Нека су $\overline{R} : \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \to \mathbf{R}$ и $\overline{T} : \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \times \overline{\mathbf{M}} \to \mathbf{R}$ два пресликавања која задовољавају горе наведене особине, (1), (2), (3) и (4). Ако вриједи да је

$$\overline{R}(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X) = \overline{T}(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X),$$

за све $\iota X \in T(\overline{\mathbf{M}})$, онда је $\overline{R} = \overline{T}$.

Сада ставимо да је

$$\begin{aligned}\overline{R}_0(\iota X, \iota Y, \iota Z, \iota W) = \frac{1}{4}\{&\overline{g}(\iota X, \iota Z)\overline{g}(\iota Y, \iota W) - \overline{g}(\iota X, \iota W)\overline{g}(\iota Y, \iota Z)\\ &+ \overline{g}(\iota X, J\iota Z)\overline{g}(\iota Y, J\iota W) - \overline{g}(\iota X, J\iota W)\overline{g}(\iota Y, J\iota Z)\\ &+ 2\overline{g}(\iota X, J\iota Y)\overline{g}(\iota Z, J\iota W)\}.\end{aligned}$$

Пропозиција 8.2 Пресликавање $\overline{R}_0$ задовољава горе наведене особине, (1), (2), (3), (4), и сљедеће релације:

$$\overline{R}_0(\iota X, \iota Y, \iota X, \iota Y) = \frac{1}{4}\{\overline{g}(\iota X, \iota X)\overline{g}(\iota Y, \iota Y) - \overline{g}^2(\iota X, \iota Y) + 3\overline{g}^2(\iota X, J\iota Y)\},$$

$$\overline{R}_0(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X) = \overline{g}^2(\iota X, \iota X).$$

Нека је p раван у $\overline{\mathbf{M}}$ и нека је $\{\iota X, \iota Y\}$ ортонормирана база за p. Познато је да је секциона кривина, дефинисана са

$$K(p) = \overline{R}(\iota X, \iota Y, \iota X, \iota Y),$$

независна од избора ортонормиране базе за p и да зависи само од p.

Пропозиција 8.3 Нека је $\overline{R}$ Риманова кривина Келерове многострукости $\overline{\mathbf{M}}$. Ако је $K(p) = c$, гдје је c нека константа, за све J-инваријантне равни p, онда је $\overline{R} = c\overline{R}_0$.
Доказ.
Раван p је J-инваријантна ако и само ако је $\{\iota X, J\iota X\}$ ортонормирана база од

p, гдје је ιX јединични вектор из p.
Значи, претпоставка да је $K(p) = c$ је еквивалентна са

$$\overline{R}(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X) = c,$$

за све јединичне векторе $\iota X \in T(\overline{\mathbf{M}})$.
Из Пропозиције 8.2 слиједи да је

$$\overline{R}(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X) = c\overline{R}_0(\iota X, J\iota X, \iota X, J\iota X).$$

Ако примјенимо Пропозицију 8.1, добијамо да је

$$\overline{R} = c\overline{R}_0,$$

чиме смо доказали тврђење. $\square$

$K(p)$ се за све J-инваријантне равни p назива холоморфна секциона кривина.

Ако је холоморфна секциона кривина, $K(p)$, константна за све J-инваријантне равни p из $T_x(\overline{\mathbf{M}})$ и за све тачке $x \in \overline{\mathbf{M}}$, онда $\overline{\mathbf{M}}$ називамо простором константне холоморфне секционе кривине.

Примјер 8.1 Холоморфна секциона кривина комплексног пројективног простора $\mathbf{CP}^n$ једнака је 4.

Нека је $\mathbf{C}^{n+1}$ $(n+1)$-димензионални комплексни простор са Келеровом структуром $(J', <\ ,\ >)$ и нека је $\mathbf{S}^{2n+1}$ сфера дефинисана са

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{2n+1} &= \{(z^1, \dots, z^{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} z^i \overline{z}^i = 1\} \\ &= \{(x^1, y^1, \dots, x^{n+1}, y^{n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+2} | \sum_{i=1}^{n+1} [(x^i)^2 + (y^i)^2] = 1\}.\end{aligned}$$

Јединични вектор ξ, нормалан на $\mathbf{S}^{2n+1}$, дат је са

$$\xi = -\sum_{i=1}^{n+1} (x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i}).$$

С обзиром на то да вриједи

$$< J'\xi, \xi > = < J'^2\xi, J'\xi > = - < \xi, J'\xi >,$$

слиједи да је

$$< J'\xi, \xi > = 0,$$

тј.

$$J'\xi \in T(\mathbf{S}^{2n+1}).$$

Ставимо да је

$$J'\xi = -\iota V,$$

при чему смо са ι означили имерсију од $\mathbf{S}^{2n+1}$ у $\mathbf{C}^{n+1}$.
Због тога што је $< , >$ Хермитова метрика, слиједи да је V јединични вектор из $T(\mathbf{S}^{2n+1})$ и може се изразити преко вектора базе на сљедећи начин

$$\iota V = \sum_{i=1}^{n+1}(-y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i}).$$

Ако дефинишемо пресликавање u на $\mathbf{S}^{2n+1}$ са $u(X) = g'(V, X) =< \iota V, \iota X >$, за $X \in T(\mathbf{S}^{2n+1})$, онда је

$$u = \sum_{i=1}^{n+1}(-y^i dx^i + x^i dy^i),$$

гдје смо са g' означили метрику на $\mathbf{S}^{2n+1}$, индуковану из метрике $< , >$.
Нека је v^i i-та компонента вектора ιV у односу на комплексне координате $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ од $\mathbf{C}^{n+1}$. Значи, ιV је вектор положаја, $v^i = \sqrt{-1}z^i$, и интегрална крива од ιV је круг $\mathbf{S}^1 = \{e^{\sqrt{-1}\theta} | \ 0 \leq \theta < 2\pi\}$.
Ако дефинишемо пресликавање $\mathbf{S}^{2n+1} \times \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^{2n+1}$ са $(z, e^{\sqrt{-1}\theta}) \to ze^{\sqrt{-1}\theta}$, онда $\mathbf{S}^1$ дејствује слободно на $\mathbf{S}^{2n+1}$.
Количнички простор $\mathbf{S}^{2n+1}/\mathbf{S}^1$ је комплексни пројективни простор $\mathbf{CP}^n$.
Ако ставимо да је

$$H_p(\mathbf{S}^{2n+1}) = \{X \in T_p(\mathbf{S}^{2n+1}) | \ u(X) = g'(V, X) = 0\},$$

онда је

$$T_p(\mathbf{S}^{2n+1}) = H_p(\mathbf{S}^{2n+1}) \oplus span\{V_p\}.$$

$H_p(\mathbf{S}^{2n+1})$ и $span\{V_p\}$ називамо хоризонтални потпростор и вертикални потпростор од $T_p(\mathbf{S}^{2n+1})$, редом.
По дефиницији, хоризонтални потпростор $H_p(\mathbf{S}^{2n+1})$ је изоморфан са $T_{\pi(p)}(\mathbf{CP}^n)$, при чему је π пројекција са $\mathbf{S}^{2n+1}$ на $\mathbf{CP}^n$.
Као потпростор од $T_p(\mathbf{C}^{n+1})$, $H_p(\mathbf{S}^{2n+1})$ је J'-инваријантни потпростор, тако да можемо индуковати скоро комплексну структуру J на $T_{\pi(p)}(\mathbf{CP}^n)$.
Сада ћемо посматрати деривацију вектора V по хоризонталном векторском пољу X. Имамо да је

$$\begin{aligned} \nabla'_X V &= \nabla^E_{\iota X} \iota V - < \iota X, \iota V > \xi = -\nabla^E_{\iota X}(J'\xi) \\ &= -J' \nabla^E_{\iota X} \xi = -J' \iota X, \end{aligned} \tag{34}$$

при чему је ∇' повезаност на $\mathbf{S}^{2n+1}$ и ∇^E повезаност на $\mathbf{C}^{n+1}$.
За векторско поље X из $\mathbf{CP}^n$, постоји јединствено хоризонтално векторско поље X^* из $\mathbf{S}^{2n+1}$ такво да је $\pi(X^*) = X$. X^* називамо хоризонтално подизање

векторског поља X.
Индуковану скоро комплексну структуру J на $\mathbf{CP}^n$ можемо написати у облику

$$(JX)^* = J'\iota X^*$$

и (34) у облику

$$\nabla'_{X^*}V = -(JX)^*.$$

Риманову метрику g и повезаност ∇ на $\mathbf{CP}^n$ дефинишемо, редом, са

$$g(X,Y) = g'(X^*,Y^*)$$

и

$$\nabla_X Y = \pi\nabla'_{X^*}Y^*.$$

С обзиром на то да је $(\nabla_X Y)^*$ хоризонтални дио од $\nabla'_{X^*}Y^*$, вриједи да је

$$\nabla'_{X^*}Y^* = (\nabla_X Y)^* + g'(\nabla'_{X^*}Y^*,V)V.$$

С друге стране, имамо да вриједи

$$\begin{aligned} g'(\nabla'_{X^*}Y^*,V) &= -g'(Y^*,\nabla'_{X^*}V) = <\iota Y^*, J'\iota X^*> \\ &= g'(Y^*,(JX)^*) = g(Y,JX), \end{aligned}$$

тако да је

$$\nabla'_{X^*}Y^* = (\nabla_X Y)^* + g(JX,Y)V. \tag{35}$$

Повезаност ∇ на $\mathbf{CP}^n$ је Леви-Чивита повезаност у односу на метрику g.
С обзиром на (35), имамо да вриједи

$$\begin{aligned} [X^*,Y^*] &= [X,Y]^* + g'([X^*,Y^*],V)V = [X,Y]^* + g'(\nabla'_{X^*}Y^* - \nabla'_{Y^*}X^*,V)V \\ &= [X,Y]^* - g'(Y^*,\nabla'_{X^*}V)V + g'(X^*,\nabla'_{Y^*}V)V \\ &= [X,Y]^* + <\iota Y^*, J'\iota X^*> V - <\iota X^*, J'\iota Y^*> V \\ &= [X,Y]^* + g'(Y^*,(JX)^*)V - g'(X^*,(JY)^*)V, \end{aligned}$$

односно

$$[X^*,Y^*] = [X,Y]^* + 2g(JX,Y)V.$$

Према томе, тензор кривине R комплексног пројективног простора $\mathbf{CP}^n$ можемо израчунати на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \pi\{\nabla'_{X^*}(\nabla_Y Z)^* - \nabla'_{Y^*}(\nabla_X Z)^* - \nabla'_{[X,Y]^*}Z^*\} \\ &= \pi\{\nabla'_{X^*}(\nabla'_{Y^*}Z^* - g(JY,Z)V) - \nabla'_{Y^*}(\nabla'_{X^*}Z^* - g(JX,Z)V) \\ &- \nabla'_{[X^*,Y^*]-2g(JX,Y)V}Z^*\} \\ &= \pi\{\nabla'_{X^*}\nabla'_{Y^*}Z^* - g(JY,Z)\nabla'_{X^*}V - \nabla'_{Y^*}\nabla'_{X^*}Z^* \\ &+ g(JX,Z)\nabla'_{Y^*}V - \nabla'_{[X^*,Y^*]}Z^* + 2g(JX,Y)\nabla'_V Z^*\} \\ &= \pi\{R'(X^*,Y^*)Z^* + g(JY,Z)J'\iota X^* - g(JX,Z)J'\iota Y^* \\ &- 2g(JX,Y)J'\iota Z^*\} \end{aligned}$$

С обзиром на то да за тензор кривине R' сфере $\mathbf{S}^{2n+1}$ вриједи

$$R'(X^*,Y^*)Z^* = g'(Y^*,Z^*)X^* - g'(X^*,Z^*)Y^* = g(Y,Z)X^* - g(X,Z)Y^*,$$

имамо да је

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY \\ & - 2g(JX,Y)JZ. \end{aligned} \tag{36}$$

Сада ћемо израчунати секциону кривину K_{XY} комплексног пројективног простора $\mathbf{CP}^n$.
За ортонормиране тангентне векторе X и Y вриједи

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \\ &= \frac{g(Y,Y)g(X,X)-g(X,Y)^2+3g(JX,Y)^2}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \\ &= 1+\frac{3g(JX,Y)^2}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} = 1+3cos^2\theta, \end{aligned}$$

гдје смо користили (36). Са θ смо означили угао између $span\{JX,JY\}$ и $span\{X,Y\}$.
Значи, у $\mathbf{CP}^n$ вриједи да је

$$1 \leq K_{XY} \leq 4.$$

С обзиром на то да холоморфну секциону кривину $H(x)$ дефинишемо са

$$H(x) = K_{X,JX} = \frac{g(R(X,JX)JX,X)}{g(X,X)^2},$$

у $\mathbf{CP}^n$ имамо да вриједи

$$H(x) = 1+\frac{3g(X,X)^2}{g(X,X)^2} = 4.$$

Примјер 8.2 Холоморфна секциона кривина комплексног хиперболичког просто -ра $\mathbf{CH}^n$ једнака је -4.

Нека је $\mathbf{C}^{n+1}$ $(n+1)$-димензионални комплексни простор са Келеровом структуром $(J', <\,,\,>)$ и нека је $\mathbf{H}^{2n+1}$ анти-Де Ситеров простор дефинисан са

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{2n+1} &= \{(z^1,\dots,z^{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} | -z^1\overline{z}^1 + \sum_{i=2}^{n+1} z^i\overline{z}^i = -1\} \\ &= \{(x^1,y^1,\dots,x^{n+1},y^{n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+2} | -(x^1)^2-(y^1)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1}[(x^i)^2+(y^i)^2] = -1\} \end{aligned}$$

Рестрикцијом метрике $< , >$ на $\mathbf{H}^{2n+1}$ добијамо Лоренцову метрику g'.
Ако са ξ означимо јединични вектор нормалан на $\mathbf{H}^{2n+1}$, онда $J'\xi \in T(\mathbf{H}^{2n+1})$, као у Примјеру 8.1.
Ставимо да је $J'\xi = -\iota V$, гдје смо са ι означили имерсију од $\mathbf{H}^{2n+1}$ у $\mathbf{C}^{n+1}$.
Интегрална крива од ιV је круг $\mathbf{S}^1$.
Количнички простор $\mathbf{H}^{2n+1}/\mathbf{S}^1$ је комплексни хиперболички простор $\mathbf{CH}^n$.
Ставимо да је

$$H_p(\mathbf{H}^{2n+1}) = \{X \in T_p(\mathbf{H}^{2n+1}) | g'(V, X) = 0\},$$

онда је

$$T_p(\mathbf{H}^{2n+1}) = H_p(\mathbf{H}^{2n+1}) \oplus span\{V_p\}.$$

$H_p(\mathbf{H}^{2n+1})$ се може идентификовати са $T_{\pi(p)}(\mathbf{CH}^n)$, гдје смо са π означили пројекцију $\pi : \mathbf{H}^{2n+1} \to \mathbf{CH}^n$.
С обзиром на то да је $H_p(\mathbf{H}^{2n+1})$ J'-инваријантни потпростор од $T_p(\mathbf{C}^{n+1})$, можемо индуковати скоро комплексну структуру J на $T_{\pi(p)}(\mathbf{CH}^n)$.
На исти начин као у Примјеру 8.1 рачунамо деривацију вектора V по хоризонталном вектору X, и добијамо да је

$$\nabla_{X^*} V = (JX)^*,$$

гдје смо са X^* означили хоризонтално подизање вектора X.
Такође, дефинишемо метрику g и повезаност ∇ на $\mathbf{CH}^n$ sa

$$g(X, Y) = g'(X^*, Y^*)$$

и

$$\nabla_X Y = \pi \nabla'_{X^*} Y^*,$$

гдје смо са ∇' означили повезаност на $\mathbf{H}^{2n+1}$.
И на крају, истим рачуном као у Примјеру 8.1, добијамо да је холоморфна секциона кривина комплексног хиперболичког простора једнака -4.

Теорема 8.1 Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална просто повезана комплетна Келерова многострукост константне холоморфне секционе кривине једнаке $4c$. Тада је
1) $\mathbf{M}$ изометрична са комплексним хиперболичким простором $\mathbf{CH}^n$, ако је $c < 0$,
2) $\mathbf{M}$ изометрична са комплексним еуклидским простором $\mathbf{C}^n$, ако је $c = 0$,
3) $\mathbf{M}$ изометрична са комплексним пројективним простором $\mathbf{CP}^n$, ако је $c > 0$.

Келерове многострукости константне холоморфне секционе кривине називамо комплексне просторне форме.

Нека је $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$ комплексна просторна форма димензије $n+p$ и нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије од $\overline{\mathbf{M}}$. И нека је холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$, $c = const$. Сада ћемо помоћу једначина (6), (18), (21), (19) и (20), израчунати Риманов тензор кривине, $\overline{R}$, комплексне просторне форме $\overline{\mathbf{M}}$.

Повезаност на $\overline{\mathbf{M}}$ и на $\mathbf{M}$ означићемо са $\overline{\nabla}$ и ∇, редом. Метрику на $\mathbf{M}$ индуковану из $\overline{g}$ означићемо са g. За произвољне ιX, ιY, ιZ из $T(\overline{\mathbf{M}})$ и $q = \frac{p-1}{2}$, имамо

$$\begin{aligned}
&\overline{R}(\iota X, \iota Y)\iota Z = \overline{\nabla}_{\iota X}\overline{\nabla}_{\iota Y}\iota Z - \overline{\nabla}_{\iota Y}\overline{\nabla}_{\iota X}\iota Z - \overline{\nabla}_{\iota[X,Y]}\iota Z = \\
&\overline{\nabla}_{\iota X}(\iota\nabla_Y Z + g(AY, Z)\xi + \sum_{a=1}^{q} g(A_a Y, Z)\xi_a + \sum_{a=1}^{q} g(A_{a^*}Y, Z)\xi_{a^*}) - \\
&\overline{\nabla}_{\iota Y}(\iota\nabla_X Z + g(AX, Z)\xi + \sum_{a=1}^{q} g(A_a X, Z)\xi_a + \sum_{a=1}^{q} g(A_{a^*}X, Z)\xi_{a^*}) - \\
&\iota\nabla_{[X,Y]}Z - g(A[X,Y], Z)\xi - \sum_{a=1}^{q} g(A_a[X,Y], Z)\xi_a - \sum_{a=1}^{q} g(A_{a^*}[X,Y], Z)\xi_{a^*}.
\end{aligned}$$

Из чега слиједи

$$
\begin{aligned}
&\overline{R}(\iota X, \iota Y)\iota Z = \iota\nabla_X\nabla_Y Z + g(AX, \nabla_Y Z)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{g(A_b X, \nabla_Y Z)\xi_b \\
&+ g(A_{b^*}X, \nabla_Y Z)\xi_{b^*}\}+ \\
&g((\nabla_X A)Y, Z)\xi + g(A(\nabla_X Y), Z)\xi + g(AY, \nabla_X Z)\xi+ \\
&g(AY, Z)\{-\iota AX + \sum_{b=1}^{q}\{s_b(X)\xi_b + s_{b^*}(X)\xi_{b^*}\}\}+ \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g((\nabla_X A_a)Y, Z) + g(A_a(\nabla_X Y), Z) + g(A_a Y, \nabla_X Z)\}\xi_a+ \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_a Y, Z)\{-\iota A_a X - s_a(X)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(X)\xi_b + s_{ab^*}(X)\xi_{b^*}\}\}\}+ \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g((\nabla_X A_{a^*})Y, Z) + g(A_{a^*}(\nabla_X Y), Z) + g(A_{a^*}Y, \nabla_X Z)\}\xi_{a^*}+ \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}Y, Z)\{-\iota A_{a^*}X - s_{a^*}(X)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(X)\xi_b + s_{a^*b^*}(X)\xi_{b^*}\}\}\}- \\
&\iota\nabla_Y\nabla_X Z - g(AY, \nabla_X Z)\xi - \sum_{b=1}^{q}\{g(A_b Y, \nabla_X Z)\xi_b + g(A_{b^*}Y, \nabla_X Z)\xi_{b^*}\}- \\
&g((\nabla_Y A)X, Z)\xi - g(A(\nabla_Y X), Z)\xi - g(AX, \nabla_Y Z)\xi- \\
&g(AX, Z)\{-\iota AY + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(Y)\xi_a + s_{a^*}(Y)\xi_{a^*}\}\}- \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g((\nabla_Y A_a)X, Z) + g(A_a(\nabla_Y X), Z) + g(A_a X, \nabla_Y Z)\}\xi_a- \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_a X, Z)\{-\iota A_a Y - s_a(Y)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{ab}(Y)\xi_b + s_{ab^*}(Y)\xi_{b^*}\}\}\}- \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g((\nabla_Y A_{a^*})X, Z) + g(A_{a^*}(\nabla_Y X), Z) + g(A_{a^*}X, \nabla_Y Z)\}\xi_{a^*}- \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}X, Z)\{-\iota A_{a^*}Y - s_{a^*}(Y)\xi + \sum_{b=1}^{q}\{s_{a^*b}(Y)\xi_b + s_{a^*b^*}(Y)\xi_{b^*}\}\}- \\
&\iota\nabla_{[X,Y]}Z - g(A[X,Y], Z)\xi - \sum_{a=1}^{q} g(A_a[X,Y], Z)\xi_a- \\
&\sum_{a=1}^{q} g(A_{a^*}[X,Y], Z)\xi_{a^*}.
\end{aligned}
$$

Ако претходну једначину помножимо са ξ, добијамо

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{R}(\iota X,\iota Y)\iota Z,\xi) = g((\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z)- \\ \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aY,Z)-s_a(Y)g(A_aX,Z)\}- \\ \sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)g(A_{a^*}Y,Z)-s_{a^*}(Y)g(A_{a^*}X,Z)\},\end{aligned}$$

одакле, због Пропозиције 8.3, добијамо

$$\begin{aligned}&\overline{g}(c\{\overline{g}(\iota Y,\iota Z)\iota X-\overline{g}(\iota X,\iota Z)\iota Y+\overline{g}(J\iota Y,\iota Z)J\iota X-\overline{g}(J\iota X,\iota Z)J\iota Y \\ &-2\overline{g}(J\iota X,\iota Y)J\iota Z\},\xi)= \\ &g((\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z)-\sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aY,Z)-s_a(Y)g(A_aX,Z)\}- \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)g(A_{a^*}Y,Z)-s_{a^*}(Y)g(A_{a^*}X,Z)\},\end{aligned}$$

односно, због (11), имамо

$$\begin{aligned}&\overline{g}(c\{g(Y,Z)\iota X-g(X,Z)\iota Y+\overline{g}(\iota FY+u(Y)\xi,\iota Z)(\iota FX+u(X)\xi)- \\ &\overline{g}(\iota FX+u(X)\xi,\iota Z)(\iota FY+u(Y)\xi)- \\ &2\overline{g}(\iota FX+u(X)\xi,\iota Y)(\iota FZ+u(Z)\xi)\},\xi)= \\ &g((\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z)-\sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aY,Z)-s_a(Y)g(A_aX,Z)\}- \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)g(A_{a^*}Y,Z)-s_{a^*}(Y)g(A_{a^*}X,Z)\}.\end{aligned}$$

Даљим сређивањем, из задње једначине добијамо

$$\begin{aligned}&c\{g(FY,Z)u(X)-g(FX,Z)u(Y)-2g(FX,Y)u(Z)\}= \\ &g((\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X,Z)-\sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aY,Z)-s_a(Y)g(A_aX,Z)\}- \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)g(A_{a^*}Y,Z)-s_{a^*}(Y)g(A_{a^*}X,Z)\}.\end{aligned}$$

С обзиром на то да је Z произвољно векторско поље, из задње једначине, примјеном (17), добијамо познату Кодацијеву једначину

$$\begin{aligned}&(\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X=c\{g(X,U)FY-g(Y,U)FX-2g(FX,Y)U\}+ \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)A_aY-s_a(Y)A_aX\}+\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)A_{a^*}Y-s_{a^*}(Y)A_{a^*}X\}.\end{aligned} \tag{37}$$

У даљем тексту ћемо посматрати неке услове на CR подмногострукостима максималне CR димензије комплексне просторне форме $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, које задовољавају оператор облика, A, специјалног векторског поља ξ и друга фундаментална форма, $h(X, Y)$. Видјећемо у каквој су вези холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ и посматрани услови. Такође, исте услове ћемо посматрати на реалним хиперповршима комплексне просторне форме $\overline{\mathbf{M}}$. Подразумијеваћемо да је холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$, $c = const$. Са $\overline{\nabla}$ и ∇ ћемо означавати повезаност на $\overline{\mathbf{M}}$ и на CR подмногострукости максималне CR димензије тј. на реалној хиперповрши од $\overline{\mathbf{M}}$, редом.

9 Оператор облика A је паралелан

Познато је да не постоје реалне хиперповрши са паралелним оператором облика у нееуклидским комплексним просторним формама. Резултат је дат у сљедећој теореми.

Теорема 9.1 [17] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална, $n \geq 3$, хиперповрш у комплексној просторној форми $\overline{\mathbf{M}}$. Нека је холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Ако је оператор облика A од $\mathbf{M}$ паралелан, тј. $\nabla A = 0$, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
Из Кодацијеве једначине (37) добијамо да је

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\}.$$

Због претпоставке теореме задња једначина је еквивалентна са

$$c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\} = 0.$$

У задњој једначини замијенимо вектор Y са вектором U, при чему је U дефинисан са (12), добијамо

$$c\{-FX - 2g(FX,U)U\} = 0,$$

због (16).
Задња једначина, због Пропозиције 7.1, постаје

$$c\{-FX + 2g(X,FU)U\} = 0,$$

односно

$$-cFX = 0,$$

због (16).
Из задње једначине слиједи да је $c = 0$. $\Box$

Сада ћемо доказати да и у случају CR подмногострукости максималне CR димензије, уз нека ограничења која намећемо, услов паралелности оператора облика не може бити испуњен, тј. такве подмногострукости не постоје у нееуклидским комплексним просторним формама.

Теорема 9.2 [14] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је специјално нормално векторско поље ξ паралелно у односу на нормалну повезаност D и A оператор облика од ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов $\nabla A = 0$, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.

Доказ.
Ако ставимо да је $Y = U$ у Кодацијевој једначини (37), добијамо

$$(\nabla_X A)U - (\nabla_U A)X = -cFX + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)A_aU - s_a(U)A_aX\}+$$
$$\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)A_{a^*}U - s_{a^*}(U)A_{a^*}X\}.$$

Из претпоставке теореме и задње једначине добијамо

$$cFX = 0,$$

одакле закључујемо да је $c = 0$. $\square$

Теорема 9.3 [14] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је $p < n$ и A оператор облика специјалног нормалног векторског поља ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов $\nabla A = 0$, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
Ставимо да је $Y = U$ у (37) и искористимо претпоставку теореме, добијамо

$$\begin{aligned} &- cFX + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)A_aU - s_a(U)A_aX\}+ \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)A_{a^*}U - s_{a^*}(U)A_{a^*}X\} = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Помножимо ли скаларно једначину (38) са произвољним векторским пољем $Y \in T(\mathbf{M})$, имамо да је

$$\begin{aligned} &- cg(FX, Y) + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aU, Y) - s_a(U)g(A_aX, Y)\}+ \\ &\sum_{a=1}^{q}\{s_{a^*}(X)g(A_{a^*}U, Y) - s_{a^*}(U)g(A_{a^*}X, Y)\} = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Замијенимо X и Y у (39) и одузмимо (39) и добијену једначину, добијамо да је

$$- 2cg(FX, Y) + \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)g(A_aU, Y) + s_{a^*}(X)g(A_{a^*}U, Y)\}-$$
$$\sum_{a=1}^{q}\{s_a(Y)g(A_aU, X) + s_{a^*}(Y)g(A_{a^*}U, X)\} = 0.$$

Сада, из (17), (23), (27) и задње једначине слиједи

$$cFX = \sum_{a=1}^{q}\{s_a(X)A_aU + s_{a^*}(X)A_{a^*}U\}. \tag{40}$$

Из (40) слиједи да је FX линеарна комбинација вектора A_aU and $A_{a^*}U$; $a = 1, \cdots, q$.
С обзиром на претпоставку да је $p < n$, закључујемо да постоји вектор $Y \in T(\mathbf{M})$ који је ортогоналан на $span\{U, A_aU, A_{a^*}U\}$; $a = 1, \cdots, q$, $q = \frac{p-1}{2}$. Пошто је тангентни вектор Y ортогоналан на U, Y је облика $Y = FX$, $X \in T(\mathbf{M})$. Сада, ставимо вектор $Y = FX$ у једначину (40) умјесто вектора X. Добијамо

$$cF^2X = 0.$$

Из задње једначине и једначине (14), закључујемо да је $c = 0$. $\Box$

10 Друга фундаментална форма $h(X,Y)$ задовоља -ва услов $h(JX,Y) = Jh(X,Y)$

Навешћемо овдје, познату Такагијеву класификацију хомогених реалних хиперпо -врши у комплексном пројективном простору $\mathbf{CP}^n, n \geq 2$.

Теорема 10.1 [22] Нека је $\mathbf{M}$ хомогена хиперповрш у комплексном пројективном простору $\mathbf{CP}^n, n \geq 2$. Тада је $\mathbf{M}$ туба радијуса r на некој од сљедећих Келерових подмногострукости:
(A_1) хиперравни $\mathbf{CP}^{n-1}$, при чему је $0 < r < \frac{\pi}{2}$,
(A_2) тотално геодезијском комплексном пројективном простору $\mathbf{CP}^k$, при чему је $1 \leq k \leq n-2$,
(B) комплексној квадрики $\mathbf{Q}_{n-1}$, при чему је $0 < r < \frac{\pi}{4}$,
(C) $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^{\frac{n-1}{2}}$, при чему је $0 < r < \frac{\pi}{4}$ и $n \geq 5$ непаран број,
(D) комплексном Грасмановом простору $\mathbf{CG}_{2,5}$, при чему је $0 < r < \frac{\pi}{4}$ и $n = 9$,
(E) Хермитовом симетричном простору $\mathbf{SO}(10)/\mathbf{U}(5)$, при чему је $0 < r < \frac{\pi}{4}$ и $n = 15$.

Теорема 10.2 [7] На реалној хиперповрши $\mathbf{M}$, из комплексног пројективног простора $\mathbf{CP}^n, n \geq 2$ вриједи услов

$$AF - FA = 0,$$

ако и само ако је $\mathbf{M}$ локално конгруентна са (A_1) или (A_2). Са A смо означили оператор облика специјалног векторског поља ξ, а са F ендоморфизам дефинисан са (11).

Поред хомогених хиперповрши, у комплексном пројективном простору често се сусрећемо и са праволинијским хиперповршима.
Нека је γ регуларна крива из $\mathbf{CP}^n, n \geq 2$ и нека је X тангентно векторско поље криве. У свакој тачки криве γ постоји једнозначно одређена комплексна пројективна хиперраван која сијече γ и ортогонална је на X и на JX. Унија оваквих хиперравни се назива праволинијска хиперповрш [6].

Пропозиција 10.1 [13] Нека је $\mathbf{M}$ реална хиперповрш из комплексног пројек--тивног простора $\mathbf{CP}^n, n \geq 2$. На $\mathbf{M}$ је испуњен услов

$$(AF - FA)X = 0,$$

за X из ортогоналног комплемента вектора U, дефинисаног са (12), ако и само ако на $\mathbf{M}$ вриједи

$$AF - FA = 0.$$

A је оператор облика специјалног векторског поља ξ и F је ендоморфизам дефинисан са (11).

Доказ.
Претпоставимо да је

$$(AF - FA)X = 0,$$

за произвољно X из ортогоналног комплемента вектора U.
Тада имамо

$$g(FAU, X) = -g(U, AFX) = -g(U, FAX) = g(FU, AX) = 0,$$

због (16), Пропозиције 7.1 и Пропозиције 4.4 (тврђење (2)). Са g смо означили метрику на $\mathbf{M}$ индуковану из метрике на $\mathbf{CP}^n$.
Такође, вриједи да је

$$g(FAU, U) = 0,$$

због (16) и Пропозиције 7.1.
С обзиром на двије задње једначине, закључујемо да је

$$FAU = 0,$$

тј. вриједи

$$AFU - FAU = 0, \tag{41}$$

због (16).
Значи да је

$$AF - FA = 0$$

на $\mathbf{M}$. □

Теорема 10.3 [13] Нека је $\mathbf{M}$ реална хиперповрш из комплексног пројективног простора $\mathbf{CP}^n$, $n > 2$. На $\mathbf{M}$ је испуњен услов

$$g((AF - FA)X, Y) = 0,$$

ако и само ако је $\mathbf{M}$ локално конгруентна са (A_1), (A_2) или са праволинијском реалном хиперповрши. A је оператор облика специјалног векторског поља ξ, F је ендоморфизам дефинисан са (11) и g метрика на $\mathbf{M}$ индукована из метрике на $\mathbf{CP}^n$.

Овдје ћемо напоменути да није познато да ли претходна теорема вриједи у случају да је $n = 2$.

На реалним хиперповршима доказана је сљедећа теорема.

Теорема 10.4 [13] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална, $n \geq 3$, реална хиперповрш у комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$ и нека је константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Ако друга фундаментална форма задовољава

услов $h(JX,Y) = Jh(X,Y)$; $X,Y \in T(\mathbf{M})$, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
С обзиром на то да је у случају реалне хиперповрши

$$h(JX,Y) = g(AJX,Y)\xi$$

и

$$Jh(X,Y) = g(AX,Y)J\xi = -g(AX,Y)\iota U,$$

због (12) и (21), из претпоставке теореме добијамо да је

$$g(AJX,Y)\xi = -g(AX,Y)\iota U,$$

односно да је

$$g(AJX,Y) = 0 \tag{42}$$

и

$$g(AX,Y) = 0, \tag{43}$$

X и Y су произвољни вектори из тангентног простора $T(\mathbf{M})$ и g је метрика на $\mathbf{M}$ индукована из $\overline{g}$.
Из једначине (43) слиједи да је

$$A = 0. \tag{44}$$

Из Кодацијеве једначине (37) и једначине (44) добијамо да је

$$0 = c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\}. \tag{45}$$

У једначини (45) замијенимо вектор Y са вектором U, имамо

$$0 = -cFX,$$

одакле закључујемо да је $c = 0$. $\square$

Теорема 10.5 [14] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална, $n \geq 3$, CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$ и нека је константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Ако друга фундаментална форма задовољава услов $h(JX,Y) = Jh(X,Y)$; $X,Y \in T(\mathbf{M})$, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
С обзиром на једначину (21), вриједи

$$h(JX,Y) = g(AJX,Y)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aJX,Y)\xi_a + g(A_{a^*}JX,Y)\xi_{a^*}\} \tag{46}$$

и

$$Jh(X,Y) = -g(AX,Y)\iota U + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aX,Y)\xi_{a^*} - g(A_{a^*}X,Y)\xi_a\}, \tag{47}$$

$q = \frac{p-1}{2}$,

гдје смо у једначини (47) користили једначине (12), (13) и (25).
Сада ћемо, због претпоставке теореме, изједначити десне стране једначина (46) и (47), имамо

$$g(AX,Y)\iota U + g(AJX,Y)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aJX,Y) + g(A_{a^*}X,Y)\}\xi_a + \tag{48}$$

$$\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}JX,Y) - g(A_aX,Y)\}\xi_{a^*} = 0,$$

$q = \frac{p-1}{2}$.

Због Пропозиције 4.4, једначину (48) можемо написати у сљедећем облику

$$g(AX,Y)\iota U + g(JX,AY)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(JX,A_aY) + g(A_{a^*}X,Y)\}\xi_a + \tag{49}$$

$$\sum_{a=1}^{q}\{g(JX,A_{a^*}Y) - g(A_aX,Y)\}\xi_{a^*} = 0,$$

$q = \frac{p-1}{2}$,

односно, због (11)

$$g(AX,Y)\iota U + g(FX,AY)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(FX,A_aY) + g(A_{a^*}X,Y)\}\xi_a + \tag{50}$$

$$\sum_{a=1}^{q}\{g(FX,A_{a^*}Y) - g(A_aX,Y)\}\xi_{a^*} = 0,$$

$q = \frac{p-1}{2}$.

Ако опет искористимо Пропозицију 4.4, једначину (50) можемо написати у сљеде -ћем облику

$$g(AX,Y)\iota U + g(FX,Y)\xi + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aFX,Y) + g(A_{a^*}X,Y)\}\xi_a + \tag{51}$$

$$\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}FX,Y) - g(A_aX,Y)\}\xi_{a^*} = 0,$$

$q = \frac{p-1}{2}$.

Због линеарне независности вектора $\iota U, \xi, \xi_a, \xi_{a^*}, a \in \{1, \cdots, q\}; q = \frac{p-1}{2}$, из једначине (51) закључујемо да вриједе сљедеће једначине

$$g(AX, Y) = 0, \tag{52}$$

$$g(AFX, Y) = 0, \tag{53}$$

$$g(A_a FX, Y) = -g(A_{a^*} X, Y) \tag{54}$$

и

$$g(A_{a^*} FX, Y) = g(A_a X, Y). \tag{55}$$

С обзиром на то да су X и Y произвољни тангентни вектори, из (52), (54) и (55) слиједи да је

$$A = 0, \tag{56}$$

$$A_a F = -A_{a^*} \tag{57}$$

и

$$A_{a^*} F = A_a, \tag{58}$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$.

Из Кодацијеве једначине (37) и једначине (56) добијамо да је

$$\begin{aligned} 0 &= c\{g(X, U)FY - g(Y, U)FX - 2g(FX, Y)U\} \\ &+ \sum_{a=1}^{q} \{s_a(X) A_a Y - s_a(Y) A_a X\} + \sum_{a=1}^{q} \{s_{a^*}(X) A_{a^*} Y - s_{a^*}(Y) A_{a^*} X\}, \end{aligned} \tag{59}$$

$q = \frac{p-1}{2}$.

Из једначина (22) и (57) слиједи да је

$$-A_a FX = FA_a X - s_a(X) U,$$

односно

$$(FA_a + A_a F)X = s_a(X) U,$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$.

Помножимо ли скаларно задњу једначину са произвољним вектором $Y \in T(\mathbf{M})$, добијамо

$$g((FA_a + A_aF)X, Y) = g(s_a(X)U, Y) = s_a(X)g(U, Y) = s_a(X)u(Y),$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$,

због (17).
Због (28), задњу једначину можемо написати у сљедећем облику

$$u(Y)s_a(X) - u(X)s_a(Y) = s_a(X)u(Y).$$

Из задње једначине слиједи да је

$$s_a(Y) = 0, \tag{60}$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$.

Из једначина (26) и (58) слиједи да је

$$A_{a^*}FX = -FA_{a^*} + s_{a^*}(X)U,$$

односно

$$(A_{a^*}F + FA_{a^*})X = s_{a^*}(X)U,$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$.

Задњу једначину ћемо помножити скаларно са произвољним вектором $Y \in T(\mathbf{M})$,добијамо

$$g((A_{a^*}F + FA_{a^*})X, Y) = g(s_{a^*}(X)U, Y).$$

Због једначине (29), задњу једначину можемо написати у сљедећем облику

$$u(Y)s_{a^*}(X) - u(X)s_{a^*}(Y) = s_{a^*}(X)g(U, Y),$$

односно

$$u(Y)s_{a^*}(X) - u(X)s_{a^*}(Y) = s_{a^*}(X)u(Y),$$

због (17).
Из задње једначине слиједи да је

$$u(X)s_{a^*}(Y) = 0,$$

односно да је

$$s_{a^*}(Y) = 0, \tag{61}$$

$a = 1, \cdots, q; q = \frac{p-1}{2}$.

Из једначине (59), једначина (60) и (61), слиједи да је

$$0 = c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\}.$$

Сада, у задњу једначину ставимо да је $Y = U$, добијамо

$$0 = -cFX,$$

одакле закључујемо да је $c = 0$.
Овим смо доказали тврђење. $\square$

Пропозиција 10.2 [14] Ако су испуњени услови Теореме 10.5, онда је специјално нормално векторско поље ξ паралелно у односу на нормалну повезаност D.

11 Оператор облика A је умбилички

Таширо и Тачибана су доказали да не постоје убмиличке хиперповрши у нееуклидским комплексним просторним формама (1963.). За хиперповрш $\mathbf{M}$ кажемо да је умбиличка ако њен оператор облика A задовољава услов

$$AX = \alpha X,$$

за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољну глатку функцију α.

Теорема 11.1[20] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална, $n \geq 3$, хиперповрш у комплексној просторној форми $\overline{\mathbf{M}}$. Нека је холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Ако је оператор облика A од $\mathbf{M}$ умбилички, тј. $AX = \alpha X$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољну глатку функцију α, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
Кодацијева једначина (37) је у случају хиперповрши облика

$$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\},$$

X, $Y \in T(\mathbf{M})$ и U је дефинисан са (12).
Због претпоставке, из задње једначине добијамо

$$(X\alpha)Y - (Y\alpha)X = c\{g(X,U)FY - g(Y,U)FX - 2g(FX,Y)U\}.$$

Ако ставимо да је $X = U$ у задњу једначину, добијамо

$$(X\alpha)U - (U\alpha)X = -cFX.$$

За вектор $X \neq 0$, ортогоналан на U, вектори $\{X, FX, U\}$ су линеарно независни, тако да из задње једначине закључујемо да је $c = 0$. □

У случају CR подмногострукости максималне CR димензије, вриједе сљедећа тврђења.

Теорема 11.3[3] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је специјално нормално векторско поље ξ паралелно у односу на нормалну повезаност D и A оператор облика од ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов $AX = \alpha X$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољну глатку функцију α, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
Доказ слиједи из Кодацијеве једначине (37), Леме 7.1, и доказа Теореме 11.1. □

Теорема 11.4 [15] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је $p < n$ и A оператор облика специјалног нормалног векторског поља ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов $AX = \alpha X$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољну глатку

функцију α, онда је $\overline{\mathbf{M}}$ Еуклидов простор.
Доказ.
Вриједи

$$(\nabla_X A)U = \nabla_X(AU) - A(\nabla_X U) = \\ \nabla_X(\alpha U) - \alpha\nabla_X U = (X\alpha)U + \alpha\nabla_X U - \alpha\nabla_X U = (X\alpha)U. \tag{62}$$

Ако Кодацијеву једначину (37) помножимо са U, U је дефинисан са (12), добијамо

$$g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, U) = -2cg(FX, Y) \\ + \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U, Y)g(A_aU, X) - 2g(A_{a^*}U, X)g(A_aU, Y)\}, \tag{63}$$

због (23), (27) и (16).
Ако у (63) ставимо $Y = U$, добијамо

$$g((\nabla_X A)U, U) = g((\nabla_U A)X, U) \\ + \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U, U)g(A_aU, X) - 2g(A_{a^*}U, X)g(A_aU, U)\}. \tag{64}$$

Сада, из (62) и (64), имамо да је

$$X\alpha = g((\nabla_X A)U, U) = g((\nabla_U A)X, U) \\ + \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U, U)g(A_aU, X) - 2g(A_{a^*}U, X)g(A_aU, U)\}, \tag{65}$$

односно

$$grad\alpha = (U\alpha)U + \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U, U)A_aU - 2g(A_aU, U)A_{a^*}U\}. \tag{66}$$

Из (63) и (66) слиједи

$$-cg(FX, Y) + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, Y)g(A_aU, X) - g(A_{a^*}U, X)g(A_aU, Y)\} \\ = \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)g(A_aU, X)g(U, Y) - g(A_aU, U)g(A_{a^*}U, X)g(U, Y)\} \\ - \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)g(A_aU, Y)g(U, X) - g(A_aU, U)g(A_{a^*}U, Y)g(U, X)\}. \tag{67}$$

Из (67), (28) и (29), добијамо

$$-cg(FX, Y) + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, Y)g(A_aU, X) - g(A_{a^*}U, X)g(A_aU, Y)\} \\ = \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)g((A_{a^*}F + FA_{a^*})X, Y) + g(A_aU, U)g((A_aF + FA_a)X, Y)\}. \tag{68}$$

Пошто је Y произвољан, из (68) слиједи

$$-cFX+\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,X)A_{a^*}U-g(A_{a^*}U,X)A_aU\} \tag{69}$$
$$=\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)(A_{a^*}F+FA_{a^*})X+g(A_aU,U)(A_aF+FA_a)X\}.$$

Сада у (69) замијенимо X са FX и искористимо једначину (14), имамо

$$-cF^2X+\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,FX)A_{a^*}U-g(A_{a^*}U,FX)A_aU\}= \tag{70}$$
$$\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X+g(A_{a^*}U,U)g(X,U)A_{a^*}U+g(A_{a^*}U,U)FA_{a^*}FX$$
$$-g(A_aU,U)A_aX+g(A_aU,U)g(X,U)A_aU+g(A_aU,U)FA_aFX\}.$$

Ако у (68) замијенимо Y са FX и искористимо једначине (22), (26) и (14), добијамо

$$-cg(FX,FX) \tag{71}$$
$$+\sum_{a=1}^{q}\{g(FA_aU+g(A_{a^*}U,U)U,FX)g(A_aU,X)$$
$$-g(A_{a^*}U,X)g(-FA_{a^*}U+g(A_aU,U)U,FX)\}$$
$$=\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(FA_aFX+g(A_{a^*}U,FX)U,FX)$$
$$+g(A_{a^*}U,U)g(-A_{a^*}X,-X+g(X,U)U)$$
$$+g(A_aU,U)g(-FA_{a^*}FX+g(A_aU,FX)U,FX)$$
$$+g(A_aU,U)g(-A_aX,-X+g(X,U)U)\}.$$

Даљим срeђивањем једначине (71), добија се

$$-cg(FX,FX) \tag{72}$$
$$+\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_aU,-X+g(X,U)U)g(A_aU,X)$$
$$+g(A_{a^*}U,X)g(-A_{a^*}U,-X+g(X,U)U)\}=$$
$$\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(-A_aFX,-X+g(X,U)U)+g(A_{a^*}U,U)g(A_{a^*}X,X)$$
$$-g(A_{a^*}U,U)g(U,X)g(A_{a^*}X,U)+g(A_aU,U)g(A_{a^*}FX,-X+g(X,U)U)$$
$$+g(A_aU,U)g(A_aX,X)-g(A_aU,U)g(A_aX,U)g(X,U)\}.$$

Пошто је X произвољан, из (72) добијамо

$$\begin{aligned} cF^2X + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,X)A_aU + g(A_{a^*}U,X)A_{a^*}U\} \\ = \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)A_aFX + g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU \\ + g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X - g(A_aU,U)A_{a^*}FX \\ - g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U + g(A_aU,U)A_aX\}. \end{aligned} \tag{73}$$

Из (73) и једначина (22) и (26), добијамо

$$\begin{aligned} cF^2X + \sum_{a=1}^{q}\{g(-FA_{a^*}U + g(A_aU,U)U,X)A_aU \\ + g(FA_aU + g(A_{a^*}U,U)U,X)A_{a^*}U\} \\ = \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)(-FA_{a^*}FX + g(A_aU,FX)U) + g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU \\ + g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X - g(A_aU,U)(FA_aFX + g(A_{a^*}U,FX)U) \\ - g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U + g(A_aU,U)A_aX\}, \end{aligned} \tag{74}$$

одакле, након сређивања, добијамо

$$\begin{aligned} cF^2X + \sum_{a=1}^{q}\{-g(FA_{a^*}U,X)A_aU + g(A_aU,U)g(U,X)A_aU \\ + g(FA_aU,X)A_{a^*}U + g(A_{a^*}U,U)g(U,X)A_{a^*}U\} \\ = \sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,U)FA_{a^*}FX + g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,FX)U \\ + g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU + g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X \\ - g(A_aU,U)FA_aFX - g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,FX)U \\ - g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U + g(A_aU,U)A_aX\}. \end{aligned} \tag{75}$$

Сабирањем једначина (70) и (75), добија се

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,FX)U + g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU \\ - g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,FX)U - g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U\} = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Ако помножимо (76) са U, имамо

$$\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,U)FA_aU + g(A_aU,U)FA_{a^*}U\} = 0, \tag{77}$$

пошто је X произвољан.
Из (66) и (77), добијамо да је

$$Fgrad\alpha = 0. \tag{78}$$

Из (78) слиједи да је

$$grad\alpha = \beta U, \tag{79}$$

гдје је β нека функција.
Из Кодацијеве једначине (37) и (79), слиједи

$$\begin{aligned}
&(X\alpha)Y - (Y\alpha)X = \beta g(U,X)Y - \beta g(U,Y)X = \\
&c\{g(U,X)FY - g(U,Y)FX - 2g(FX,Y)U\} + \\
&\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,X)A_aY + g(A_{a^*}U,Y)A_aX\} + \\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,X)A_{a^*}Y - g(A_aU,Y)A_{a^*}X\}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Множењем (80) са U, добија се

$$0 = -cg(FX,Y) + \sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,X)g(A_aU,Y) + g(A_{a^*}U,Y)g(A_aU,X)\}, \tag{81}$$

одакле слиједи да је

$$cFX = \sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,X)A_aU + g(A_aU,X)A_*U\}, \tag{82}$$

пошто је Y произвољан.
Из (82), на исти начин као у доказу Теореме 9.3, закључујемо да је $c = 0$. $\square$

12 Оператор облика A је η-умбилички

Сада ћемо посматрати слабији услов на хиперповрши у комплексној просторној форми, а то је да вриједи

$$AX = \alpha X, \tag{83}$$

за $X \in T(\mathbf{M})$ ортогоналан на U, U је дефинисан са (12), и произвољну функцију α.
Хиперповрши које задовољавају услов (83), за $X \in T(\mathbf{M})$ ортогоналан на U и произвољну функцију α, називамо η-умбиличке, а наведени услов можемо написати у другачијем облику

$$AX = \alpha X + \beta u(X)U, \tag{84}$$

за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољне функције α и β [10].
η-умбиличке хиперповрши у комплексном пројективном простору и у комплексном хиперболичком простору су проучавали аутори у [16] и [2]. Резултат њиховог проучавања је дат у сљедећој теореми.

Теорема 12.1[16], [2] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална, $n \geq 3$, хиперповрш у комплексној просторној форми $\overline{\mathbf{M}}$. Нека је холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c \neq 0$. Ако је оператор облика A од $\mathbf{M}$ η-умбилички, тј. $AX = \alpha X + \beta u(X)U$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и неке функције α и β, онда је $\mathbf{M}$ локално конгруентна са:

(1) геодезијском сфером радијуса r $(0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{c}})$ у комплексном пројектив-- ном простору $\mathbf{CP}^n$, гдје је $\alpha = \frac{\sqrt{c}}{2} cot \frac{\sqrt{c}r}{2}$ и $\beta = -\frac{1}{\alpha}$,

(2)
а) хоросфером у комплексном хиперболичком простору $\mathbf{CH}^n$, гдје је $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{|c|}}{2}$,
б) геодезијском сфером радијуса r $(0 < r < \infty)$ у комплексном хиперболичком простору $\mathbf{CH}^n$, гдје је $\alpha = \frac{\sqrt{c}}{2} coth \frac{\sqrt{c}r}{2}$ и $\beta = \frac{1}{\alpha}$,
в) тубом радијуса r $(0 < r < \infty)$ око тотално геодезијске комплексне хиперравни $\mathbf{CH}^{n-1}$ у комплексном хиперболичком простору $\mathbf{CH}^n$, гдје је $\alpha = \frac{\sqrt{c}}{2} tanh \frac{\sqrt{c}r}{2}$ и $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

Из Теореме 12. 1 можемо закључити да су α и β константе и да је $\alpha\beta = -c$.

У случају CR подмногострукости максималне CR димензије, вриједе сљедећа тврђења.

Теорема 12.2 [15] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је специјално нормално векторско поље ξ паралелно у односу на нормалну повезаност D и A оператор облика од ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов

$AX = \alpha X + \beta u(X)U$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољне глатке функције α и β, онда је $c = -\alpha\beta$.
Доказ.
Имамо да вриједи

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = &(X\alpha)Y + (X\beta)g(U,Y)U \\ &+ \alpha\beta g(U,Y)FX + \alpha\beta g(FX,Y)U \\ &- (Y\alpha)X - (Y\beta)g(U,X)U \\ &- \alpha\beta g(U,X)FY - \alpha\beta g(FY,X)U.\end{aligned} \tag{85}$$

Помножимо ли (85) са U, добијамо

$$\begin{aligned}g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, U) =&(X\alpha)g(Y,U) + (X\beta)g(U,Y) + 2\alpha\beta g(FX,Y) \\ &- (Y\alpha)g(X,U) - (Y\beta)g(U,X).\end{aligned} \tag{86}$$

С друге стране, помножимо ли Кодацијеву једначину (37) са U, добијамо

$$g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, U) = -2cg(FX,Y), \tag{87}$$

гдје смо користили Лему 7.1.
Из (86) и (87) слиједи

$$\begin{aligned}&(X\alpha)g(Y,U) + (X\beta)g(U,Y) + 2\alpha\beta g(FX,Y) \\ &- (Y\alpha)g(X,U) - (Y\beta)g(U,X) \\ &= -2cg(FX,Y).\end{aligned} \tag{88}$$

У (88) ставимо $Y = U$, слиједи

$$X\alpha + X\beta - (U\alpha)g(X,U) - (U\beta)g(X,U) = 0. \tag{89}$$

Означимо са $\gamma = \alpha + \beta$, онда из (89) добијамо

$$grad\gamma = (U\gamma)U. \tag{90}$$

Из (88) и (90), добијамо

$$2(\alpha\beta + c)g(FX,Y) = 0, \tag{91}$$

одакле закључујемо да је $c = -\alpha\beta$. $\square$

Теорема 12.3 [15] Нека је $\mathbf{M}$ n-димензионална CR подмногострукост максималне CR димензије у $(n+p)$-димензионалној комплексној просторној форми $(\overline{\mathbf{M}}, J, \overline{g})$, при чему је $n \geq 3$ и константна холоморфна секциона кривина од $\overline{\mathbf{M}}$ једнака $4c$. Нека је $p < n$ и A оператор облика специјалног нормалног векторског поља ξ. Ако је на $\mathbf{M}$ испуњен услов $AX = \alpha X + \beta u(X)U$, за $X \in T(\mathbf{M})$ и произвољне глатке функције α и β, онда је $c = -\alpha\beta$.
Доказ.
На исти начин као у доказу Теореме 12.2 добијамо једначину (86).

Из Кодацијеве једначине (37) помножене са U, U је дефинисан са (12), и (86), добијамо једначину

$$
\begin{aligned}
&(X\alpha)g(Y,U) + (X\beta)g(U,Y) + 2\alpha\beta g(FX,Y) \\
&- (Y\alpha)g(X,U) - (Y\beta)g(U,X) \\
&= -2cg(FX,Y) \\
&+ \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U,Y)g(A_aU,X) - 2g(A_{a^*}U,X)g(A_aU,Y)\}.
\end{aligned} \tag{92}
$$

Ставимо ли $Y = U$ у (92), добијамо

$$
\begin{aligned}
&X(\alpha+\beta) - U(\alpha+\beta)g(X,U) \\
&= \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,X) - 2g(A_{a^*}U,X)g(A_aU,U)\},
\end{aligned} \tag{93}
$$

односно

$$
grad\gamma = (U\gamma)U + \sum_{a=1}^{q}\{2g(A_{a^*}U,U)A_aU - 2g(A_aU,U)A_{a^*}U\}, \tag{94}
$$

гдје је $\gamma = \alpha + \beta$.
Сада, из (92) и (94), добијамо једначину

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,X)g(U,Y) - g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,X)g(U,Y)\} \\
&\quad + \alpha\beta g(FX,Y) \\
&- \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,Y)g(U,X) - g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,Y)g(U,X)\} \\
&\quad = -cg(FX,Y) \\
&\quad + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,X)g(A_{a^*}U,Y) - g(A_aU,Y)g(A_{a^*}U,X)\}.
\end{aligned} \tag{95}
$$

Из (95) и једначина (28) и (29), добијамо једначину

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g((A_{a^*}F + FA_{a^*})X,Y) \\
&\quad + g(A_aU,U)g((A_aF + FA_a)X,Y)\} \\
&\quad = (-\alpha\beta - c)g(FX,Y) \\
&+ \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,Y)g(A_aU,X) - g(A_{a^*}U,X)g(A_aU,Y)\}.
\end{aligned} \tag{96}
$$

Сада ћемо у (96) ставити $Y = FX$, имамо

$$
\begin{aligned}
&(-\alpha\beta - c)g(FX, FX) \qquad (97)\\
&+\sum_{a=1}^{q}\{g(FA_aU + g(A_{a^*}U, U)U, FX)g(A_aU, X)\\
&\quad - g(A_{a^*}U, X)g(-FA_{a^*}U + g(A_aU, U)U, FX)\}\\
&= \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)g(FA_aFX + g(A_{a^*}U, FX)U, FX)\\
&\quad + g(A_{a^*}U, U)g(-A_{a^*}X, -X + g(X, U)U)\\
&\quad + g(A_aU, U)g(-FA_{a^*}FX + g(A_aU, FX)U, FX)\\
&\quad + g(A_aU, U)g(-A_aX, -X + g(X, U)U)\},
\end{aligned}
$$

гдје смо користили (14), (22) и (26).
Даљим сређивањем једначине (97), добија се

$$
\begin{aligned}
&(-\alpha\beta - c)g(FX, FX) \qquad (98)\\
&+\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_aU, -X + g(X, U)U)g(A_aU, X)\\
&+ g(A_{a^*}U, X)g(-A_{a^*}U, -X + g(X, U)U)\} =\\
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)g(-A_aFX, -X + g(X, U)U) + g(A_{a^*}U, U)g(A_{a^*}X, X)\\
&- g(A_{a^*}U, U)g(U, X)g(A_{a^*}X, U) + g(A_aU, U)g(A_{a^*}FX, -X + g(X, U)U)\\
&+ g(A_aU, U)g(A_aX, X) - g(A_aU, U)g(A_aX, U)g(X, U)\},
\end{aligned}
$$

гдје смо користили (14).
С обзиром на то да је X произвољан, из (98) слиједи

$$
\begin{aligned}
&(c + \alpha\beta)F^2X + \sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU, X)A_aU + g(A_{a^*}U, X)A_{a^*}U\} \qquad (99)\\
&= \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)A_aFX + g(A_{a^*}U, U)g(X, U)FA_aU\\
&\quad + g(A_{a^*}U, U)A_{a^*}X - g(A_aU, U)A_{a^*}FX\\
&\quad - g(A_aU, U)g(X, U)FA_{a^*}U + g(A_aU, U)A_aX\}.
\end{aligned}
$$

Из (99) и једначина (22) и (26), добијамо

$$
\begin{aligned}
&(c + \alpha\beta)F^2X + \sum_{a=1}^{q}\{g(-FA_{a^*}U + g(A_aU, U)U, X)A_aU \qquad (100)\\
&+ g(FA_aU + g(A_{a^*}U, U)U, X)A_{a^*}U\}\\
&= \sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U, U)(-FA_{a^*}FX + g(A_aU, FX)U) + g(A_{a^*}U, U)g(X, U)FA_aU\\
&\quad + g(A_{a^*}U, U)A_{a^*}X - g(A_aU, U)(FA_aFX + g(A_{a^*}U, FX)U)\\
&\quad - g(A_aU, U)g(X, U)FA_{a^*}U + g(A_aU, U)A_aX\},
\end{aligned}
$$

одакле слиједи да је

$$
\begin{aligned}
&(c+\alpha\beta)F^2X+\sum_{a=1}^{q}\{-g(FA_{a^*}U,X)A_aU+g(A_aU,U)g(U,X)A_aU \qquad (101)\\
&\qquad +g(FA_aU,X)A_{a^*}U+g(A_{a^*}U,U)g(U,X)A_{a^*}U\}\\
&=\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,U)FA_{a^*}FX+g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,FX)U\\
&\qquad +g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU+g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X\\
&\qquad -g(A_aU,U)FA_aFX-g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,FX)U\\
&\qquad -g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U+g(A_aU,U)A_aX\}.
\end{aligned}
$$

Сада ћемо у (96) замијенити X са FX, добијамо

$$
\begin{aligned}
&(-\alpha\beta-c)F^2X+\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,FX)A_{a^*}U-g(A_{a^*}U,FX)A_aU\}= \qquad (102)\\
&\sum_{a=1}^{q}\{-g(A_{a^*}U,U)A_{a^*}X+g(A_{a^*}U,U)g(X,U)A_{a^*}U+g(A_{a^*}U,U)FA_{a^*}FX\\
&-g(A_aU,U)A_aX+g(A_aU,U)g(X,U)A_aU+g(A_aU,U)FA_aFX\},
\end{aligned}
$$

гдје смо користили (14).
Сабирањем једначина (101) и (102), добија се

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)g(A_aU,FX)U+g(A_{a^*}U,U)g(X,U)FA_aU \qquad (103)\\
&\qquad -g(A_aU,U)g(A_{a^*}U,FX)U-g(A_aU,U)g(X,U)FA_{a^*}U\}=0.
\end{aligned}
$$

Ако у (103) ставимо $X=U$, добијамо

$$
\sum_{a=1}^{q}\{g(A_{a^*}U,U)FA_aU-g(A_aU,U)FA_{a^*}U\}=0, \qquad (104)
$$

одакле слиједи

$$
Fgrad\gamma=0,
$$

односно да је

$$
grad\gamma=\delta U, \qquad (105)
$$

за неку функцију δ.
Из (92) и (105) слиједи

$$
(c+\alpha\beta)FX=\sum_{a=1}^{q}\{g(A_aU,X)A_{a^*}U-g(A_{a^*}U,X)A_aU\}, \qquad (106)
$$

одакле као и у доказу Теореме 9.3 закључујемо да је $c = -\alpha\beta$. $\square$

Напоменимо овдје да из тврђења Теореме 12.2 и Теореме 12.3, закључујемо да је U, дефинисан са (12), сопствени вектор оператора облика A са константном сопственом вриједности $(\alpha + \beta)$, тј. вриједи $AU = (\alpha + \beta)U$. Случај када је U сопствени вектор оператора облика A са константном сопственом вриједности, на CR подмногострукостима максималне CR димензије проучавали су аутори у [3].

Литература

[1] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one*, Trans. Amer. Math. Soc., 359 (2007), 3425-3438.

[2] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982), 481-499.

[3] M. Djorić and M. Okumura, *CR submanifolds of complex projective space*, Developments in Mathematics, vol. 19, Springer, Berlin, 2009.

[4] T. Itoh and S. Maeda, *Characterization of totally η-umbilic real hypersurfaces in nonflat complex space forms by some inequality*, Proc. Japan Acad., 80, Ser. A (2004), 61-64.

[5] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986), 137-149.

[6] M. Kimura, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurfaces in $P_n(\boldsymbol{C})$*, Math. Ann. 276 (1987), 487-497.

[7] M. Kimura and S. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, Math. Z. 202 (1989), 299-311.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I, II*, Interscience, New York (1963).

[9] S. Maeda, *Real hypersurfaces of complex projective spaces*, Math. Ann. 263 (1983), 473-478.

[10] S. Maeda and T. Adachi, *Exstrinsic geodesics and hypersurfaces of type A in a complex projective space*, Tohoku Math. J. 60 (2008), 597-605.

[11] S. Maeda and T. Adachi, *Characterizations of hypersurfaces of type A_2 in a complex projective space*, Bull. Austral. Math. Soc. 77 (2008), 1-8.

[12] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 529-540.

[13] Y. Matsuyama, *Real hypersurfaces in complex projective space satisfying a certain condition on the second fundamental form*, Yokohama Math. J. 49 (2001), 79-87.

[14] M. Milijević, *Geometry of CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms*, на рецензији (http://arxiv.org/abs/1012.4696)

[15] M. Milijević, *On CR submanifolds of maximal CR dimension in complex space forms with umbilical and η-umbilical shape operator*, на рецензији

[16] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 515-535.

[17] R. Niebergall and P.J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and Taut Submanifolds, MSRI Publications 32 (1997), 233-305.

[18] T. Okubo, *Differential Geometry*, Marcel Dekker Inc (1987).

[19] M. Okumura, *On some real hypersurfaces of a complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. 212 (1975), 355-364.

[20] Y. Tashiro and S. Tachibana, *On Fubinian and C-Fubinian manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep 15 (1963), 176-183.

[21] T. Tashiro, *Relations between almost complex spaces and almost contact spaces*, Sugaku 16 (1964), 34-61.

[22] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math., 10 (1973), 495-506.

[23] R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 27, No. 1 (1975), 43-53.