Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Lucija Pajić

REŠAVANJE ŠTURM-LIUVILOVIH PROBLEMA KORIŠĆENJEM METODA KONAČNIH RAZLIKA I KONAČNIH ELEMENATA U MATLAB-U

Master rad

Beograd, 2010.

SADRŽAJ

SADRŽAJ 2

SADRŽAJ SLIKA 4

PREDGOVOR 5

1 UVOD 6

1.1 Granični problem za diferencijalne jednačine drugog reda . 8

1.2 Granični zadaci sa parametrom 9

1.3 Diferencijalne jednačine drugog reda u Šturm-Liuvilovoj formi 11

1.4 Šturm-Liuvilov granični problem 13

2 OSOBINE ŠTURM-LIUVILOVOG OPERATORA 15

2.1 Svojstva rešenja Šturm-Liuvilovog problema 18

3 PRIMERI JEDNAČINA ŠTURM-LIUVILOVOG TIPA 21

3.1 Beselove jednačine 21

3.2 Ležandrove jednačine 23

3.3 Čebiševljeve jednačine 24

4 POSTAVKA ZADATKA 26

4.1 Granični test zadatak (1) 27

4.2 Granični test zadatak (2) 27

5 NUMERIČKA APROKSIMACIJA ZADATKA 29

5.1 Aproksimacija zadatka metodom konačnih razlika 29

5.2 Aproksimacija zadatka metodom konačnih elemenata 33

5.3 Poređenje dve metode 38

6 MATLAB REZULTATI 40

6.1 Rezultati metode konačnih razlika 42
6.2 Rezultati metode konačnih elemenata............................ 47
6.3 Poređenje rezultata 51
ZAKLJUČAK 53
DODATAK A – DEFINICIJE OSNOVNIH POJMOVA...................... 54
LITERATURA 57

SADRŽAJ SLIKA

Slika 1. Beselove funkcije prve vrste reda $\nu = 0,1,2,3,4$ 22

Slika 2. Beselove funkcije druge vrste reda $\nu = 0,1,2,3,4$ 23

Slika 3. Ležandrovi polinomi prve vrste za $n = 0,1,2,3,4$ 24

Slika 4. Čebiševljevi polinomi prve vrste za $n = 0,1,2,3,4$ 25

Slika 5. Sopstvene funkcije graničnog zadatka (1) 27

Slika 6. Sopstvene funkcije graničnog zadatka (2) 28

Slika 7 Konačne razlike - diskretizacija domena 30

Slika 8. a) “Krov” funkcija, b) Bazisne funkcije $\phi_i(x)$ i $\phi_{i+1}(x)$ u opsegu od x_i do x_{i+1} 35

Slika 9. Deo-po-deo linearne bazne funkcije i rezultujuća deo-po-deo linearna aproksimacija 35

Slika 10. Zadatak (1) Metoda konačnih razlika – h=0.2. 43

Slika 11. Zadatak (1) metoda konačnih razlika. Aproksimativno rešenje a) sopstvene funkcije 2, i b) sopstvene funkcije 3 43

Slika 12. Zadatak (1) metoda konačnih razlika – h=0.1. 44

Slika 13. Zadatak (1) metoda konačnih razlika – h=0.05............. 45

Slika 14. Zadatak (2) metoda konačnih razlika – h=0.2. 46

Slika 15. Zadatak (2) metoda konačnih razlika – h=0.05............. 47

Slika 16. Zadatak (1) metoda konačnih elemenata – h=0.2.......... 48

Slika 17. Zadatak (1) metoda konačnih elemenata – h=0.05. 49

Slika 18. Zadatak (2) metoda konačnih elemenata – h=0.2.......... 50

Slika 19. Zadatak (2) metoda konačnih elemenata – h=0.05. 51

Slika 20. Granični zadatak (2) – h=0.2. Upoređivanje tačnog rešenja sa rezultatima dobijenim korišćenjem metoda. 52

PREDGOVOR

U ovom radu opisano je rešavanje (specijalnog slučaja diferencijalnih jednačina drugog reda) takozvanih Šturm-Liuvilovih jednačina sa zadatim graničnim uslovima, korišćenjem dve metode numeričke matematike.

Rad je podeljen na sedam poglavlja i jedan dodatak.

U prvom poglavlju predstavljeni su uvodni pojmovi, koji se u kasnijim poglavljima koriste za opširnije predstavljanje problema, i dat je kratak pregled radova u kojima se mogu naći metode za rešavanje Šturm-Liouvillovih problema.

U drugom poglavlju data je teorijska postavka Šturm-Liouvillovog graničnog problema i pokazane su osobine rešenje problema.

Treće poglavlje sadrži pregled najčešće korišćenih tipova Šturm-Liouvillovih problema u praksi.

Četvrto poglavlje daje postavku dva granična test zadatka odabranih iz tog razloga što je za njih jednostavno naći analitičko rešenje, koje nam je potrebno da bismo mogli da testiramo rezultate dobijene primenom metoda.

Peto poglavlje daje numeričku aproksimaciju problema. Predstavljene su dve numeričke metode – metoda konačnih razlika i metoda konačnih elemenata, i njima je prikazana aproksimacija test zadataka.

U šestom poglavlju rezultati dobijeni u poglavlju pet su iskorišćeni za jednostavnu implementaciju ovih metoda u numeričkom softverskom alatu, Matlab-u. Dalje, prikazani su rezultati koji se dobijaju primenom pomenute dve numeričke metode u Matlab-u na granične test zadatke. Ovi numerički rezultati su upoređeni sa analitičkim rezultatima.

Zaključak rada, zajedno sa preporukama za dalje istraživanje problema dat je u sedmom poglavlju.

Dodatak A daje kratak pregled osnovnih pojmova korišćenih u radu.

Zahvaljujem se mentoru Prof. Dr. Bošku Jovanoviću na podršci i sugestijama datim tokom izrade rada.

Matemački fakultet

Beograd, 2010. Lucija Pajić

1 UVOD

U matematici, mehanici, fizici, i u inžinjerskim problemima, klasična Šturm-Liuvilova jednačina [22], nazvana u čast Švajcarskog matematičara Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) i Francuskog matematičara Joseph Liouville (1809 – 1882), predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda r(x)y \tag{1.1}$$

gde su $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ neprekidne funkcije, na intervalu $x\in(a,b)$ i važi da su $p(x)>0,\ r(x)>0$ za $x\in[a,b]$.

Dodatno, funkcija y mora zadovoljiti homogene granične uslove na krajevima zadatog intervala.

Veličina λ nije zadata u jednačini (1.1). Tako, Šturm-Liuvilov problem predstavlja zapravo nalaženje vrednosti parametra λ za koje u datoj jednačini (1.1) postoje ne-trivijalna rešenja, koja zadovoljavaju date granične uslove.

Šturm-Liuvilove jednačine se pojavljuju u problemima primenjene matematike. Na primer, one predstavljaju vibraciona stanja različitih sistema, kao što su vibracije žice, ili energetske sopstvene funkcije kvantno-mehaničkih oscilatora. U prvom slučaju rešenja jednačina, takozvane sopstvene vrednosti, odgovaraju rezonantnim frekvencijama vibracije, odnosno u drugom slučaju energetskim nivoima. Štaviše, upravo ideja da se diskretni energetski nivoi uočeni u atomskim sistemima mogu predstaviti kao sopstvene vrednosti diferencijalnog operatora, dovela je do toga da Schrödinger predloži svoju talasnu jednačinu [20].

Šturm-Liuvilovi problemi se pojavljuju direktno kao problemi sopstvenih vrednosti u jednoj dimenziji prostora. Veoma često, oni se dobijaju iz graničnih i mešovitih problema za linearne parcijalne jednačine drugog reda (kao što su Laplasova jednačina, jednačina provođenja toplote i talasna jednačina), kad se jednačine razdvajaju u nekim koordinatnim sistemima, kao na primer u cilindričnim, ili sfernim koordinatama.

S obzirom na njihovu veoma široku primenu, Šturm-Liuviove jednačine i njihovi pripadajući granični problemi su obrađeni od strane mnogih autora. Nakon uvođenja prvih termina vezanih za ovaj problem, i kasnijim (1910) proučavanjem njihovih singularnih problema, uz razvoj kvantne mehanike, i izvođenje dokaza opšte spektralne teoreme za neograničene samoadjungovane operatore u Hilbertovim prostorima, otvorili su se široki okviri za razvoj ovog problema.

Mnoge numeričke metode su razvijene tokom godina za aproksimaciju sopstvenih vrednosti (regularnog) Šturm-Liuvilovog problema. Među njima, takozvane *matrične metode* predstavljaju jednu od najpopularnijih familija. One su zasnovane na primeni metoda konačnih razlika i konačnih elemenata za redukovanje Šturm-Liuvilovog problema u matrični problem sopstvenih vrednosti.

Pored ovih metoda, često se koristi takozvana CPM familija (Constant reference potential Perturbation Method) [9], koja se primenjuje za rešavanje onih problema kod kojih se pripadajuće Šturm-Liuvilove jednačine mogu prevesti u Šredingerovu formu. Samim tim, prednost ovih metoda je što je kod njih energetska zavisnost greške ograničena, što ne važi za ostale numeričke metode. Kao posledica ove energetske nezavisnosti greške, veličina koraka je neuobičajeno velika, i izračunavanja su brza. Za razliku od prethodnih metoda, CP metode se ređe primenjuju i kod neregularnih problema.

Samim tim što postoji interesovanje za numeričko rešavanje Šturm-Liuvilovih problema, razvijeno je i nekoliko kompjuterskih kodova u tu svrhu:
(1) U prvu grupu se mogu uvrstiti dobro ustanovljeni Fortran kodovi. Jedan od njih je SLEDGE [16] (skraćenica od Sturm-Liouville Estimates Determined by Global Errors) koji računa sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije za takozvane regularne i široku klasu singularnih problema, kao i funkcije spektralne gustine za singularne probleme koji imaju neprekidan spektar. Zatim, često pominjan u literaturi je SLEIGN [3] (skraćenica dolazi od Sturm-Liouville eigenvalue) softverski paket opšte namene, dizajniran da izračunava sopstvene vrednosti: (a) Šturm-Liuvilovih problema sa regularnim, razdvojenim, samo-adjungovanim graničnim uslovima, i (b) singularnih Šturm-Liuvilovih problema. Nova, poboljšana verzija ovog koda za probleme sa singularnim graničnim uslovima je SLEIGN2 [4]. Svi ovi Šturm-Liuvilovi solveri, zajedno sa SL02F kodom [17] su deo takozvanog SLTSTPAK paketa [19].
(2) Sledeći je SLCPM12 kod [9], pisan takođe u Fortranu, koji prvo konvertuje originalnu Šturm-Liuvilovu jednačinu u jednačinu Šredingerove forme, a zatim ovu poslednju rešava metodom CPM. Zbog osobine ove metode, u SLCPM12 su izračunavanja sopstvenih vrednosti i pripadajućih

funkcija neuobičajeno brza. Ovaj kod se koristi za rešavanje regularnih Šturm-Liuvilovih problema.
(3) MATSLISE je grafički MATLAB paket, za interaktivno numeričko rešavanje regularnih Šturm-Liuvilovih problema, koji omogućava brza i tačna izračunavanja sopstvenih vrednosti i vizualizaciju pripadajućih sopstvenih funkcija.

U okviru ovog rada biće pokazano kako specijalni slučaj Šturm-Liuvilovog problema može da se reši korišćenjem dve numeričke metode u Matlabu.

Svrha ovog poglavlja je da prvo približi pojam Šturm-Liuvilovih jednačina kao specijalnih vrsta običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, a zatim da uvede definiciju njima pripadajućih graničnih problema.

1.1 Granični problem za diferencijalne jednačine drugog reda

Opšti (implicitni) oblik diferencijalne jednačine višeg reda je:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.2}$$

gde je x nezavisna promenljiva, a $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ zavise od x.
Eksplicitni (normalni) oblik diferencijalne jednačine višeg reda je

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.3}$$

Jednačina oblika:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{1.4}$$

gde su $a_i(x)$, $b(x)$ neprekidne funkcije, se naziva linearna diferencijalna jednačina n-tog reda.

Specijalno za slučaj $n = 2$ dobijamo opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1.5}$$

Eksplicitni (normalni) oblik diferencijalne jednačine drugor reda je:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.6}$$

dok je linearna diferencijalna jednačina drugog reda data sa:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{1.7}$$

U daljem tekstu ćemo se najviše posvetiti ovom poslednjem obliku jednačine. Ove jednačine se transformacijama koje će biti prikazane u potpoglavlju 1.3 mogu svesti na jednačine sa takozvanom Šturm-Liuvilovom formom.

Kako opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine n-tog reda sadrži n proizvoljnih konstanti, za njihovo određivanje je neophodno n nezavisnih uslova. Primer takvih uslova su granični uslovi, kod kojih vrednost rešenja ili odgovarajućeg broja njegovih izvoda zadovoljavaju određene uslove u različitim tačkama, obično krajevima intervala. Odatle je problem nalaženja rešenja koje zadovoljava ove granične uslove dobio naziv granični problem. (za razliku od početnog, Košijevog problema, gde se uslovi zadaju u početnoj tački intervala).

Opšti oblik graničnih uslova je

$$\begin{aligned} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ako je $\alpha_i = 0,\ \beta_i \neq 0,\ i = 1,2$,granični uslovi su prvi, ili Dirihleovi uslovi

$$y(a) = y(b) = 0\ , \tag{1.9}$$

a granični problem (1.7), (1.9) nazivamo prvi ili **Dirihleov granični problem**.

Ako je $\alpha_i \neq 0,\ \beta_i = 0,\ i = 1,2$, granični uslovi su drugi, ili Nojmanovi

$$y'(a) = y'(b) = 0 \quad , \tag{1.10}$$

a granični problem (1.7), (1.10) se naziva drugi ili **Nojmanov granični problem**.

Ako je $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0,\ i = 1,2$,granični uslovi su treći (mešoviti) ili Robinovi granični uslovi:

$$\begin{aligned} y'(a) - \sigma_1 y(a) = 0, \\ y'(b) - \sigma_2 y(b) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Granični problem (1.7), (1.11) se naziva treći (mešoviti), ili **Robinov granični problem**.

1.2 Granični zadaci sa parametrom

Kao što je već rečeno na početku ovog poglavlja, Šturm-Liuvilov problem se sastoji u nalaženju vrednosti parametra λ za koje za datu jednačinu (1.1) postoje ne-trivijalna rešenja, koja zadovoljavaju date granične uslove. Zbog toga ćemo se u ovom potpoglavlju osvrnuti na granične probleme sa parametrom, koji ćemo obeležavati sa λ.

U zadacima ovog tipa, rešenje problema zavisi od vrednosti parametra, koji učestvuje u diferencijalnoj jednačini. Tako na primer, razmotrimo sledeći (mešoviti) granični slučaj (sličan primer u [21]):

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad \lambda - \text{parametar} \\ &y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Očigledno je da ovaj granični problem ima trivijalno rešenje. Međutim, nas zanimaju one vrednosti parametra λ za koje jednačina (1.12) ima netrivijalna rešenja, koja zadovoljavaju granične uslove.

Nađimo takve vrednosti λ - sopstvene vrednosti, i odgovarajuća rešenja - sopstvene funkcije. Da bismo našli netrivijalna rešenja, prvo treba odrediti generalno rešenje diferencijalne jednačine, a onda proveriti za koje vrednosti parametra λ dati granični uslovi su zadovoljeni. Kako je karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine (1.12) $m^2 + \lambda = 0$, postojaće tri različita rešenja u zavisnosti od toga da li su koreni jednačine realni i različiti, realni i jednaki, ili kompleksno konjugovani. Tako, razlikujemo slučajeve:

$\boxed{\lambda < 0}$

Neka je $\lambda = -K^2$ za neki realni broj K, različit od nule. Onda su koreni karakteristične jednačine $m^2 - K^2 = 0$, $m_{1,2} = \pm K$. Generalno rešenje je oblika $y(x) = c_1 e^{Kx} + c_2 e^{-Kx}$, odnosno $y(x) = A\cosh(Kx) + B\sinh(Kx)$.

Koeficijente A i B nalazimo tako da zadovoljavaju granične uslove

$$\begin{aligned} y(0) &= A\cosh(K \cdot 0) + B\sinh(K \cdot 0) = A = 0, \\ y'(1) &= A \cdot K\sinh(K \cdot 1) + B \cdot K\cosh(K \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

Kako je $A = 0$, a $K \neq 0$, iz drugog uslova sledi da je i $B = 0$. To znači da je jedino rešenje trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$, pa ne postoje negativne sopstvene vrednosti.

$\boxed{\lambda = 0}$

U ovom slučaju, karakteristični polinom je $m^2 = 0$, sa dvostrukim korenom $m_{1,2} = 0$. Opšte rešenje je $y(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 x e^{0 \cdot x} = c_1 + c_2 x$, a izvod $y'(x) = c_2$.

Iz $y(0) = c_1 = 0$, $y'(1) = c_2 = 0$, sledi da je opet jedino rešenje jednačine jednako nuli. Znači, $\lambda = 0$ nije sopstvena vrednost.

$\boxed{\lambda > 0}$

Pretpostavimo da je $\lambda = K^2$, $K \neq 0$. Karakteristični polinom $m^2 + K^2 = 0$ ima kompleksno-konjugovana rešenja $m_{1,2} = \pm Ki$. Opšte rešenje je onda

$$y(x) = c_1 e^{0 \cdot x}\cos(Kx) + c_2 e^{0 \cdot x}\sin(Kx) = c_1\cos(Kx) + c_2\sin(Kx),$$

dok je izvod

$$y'(x) = -Kc_1 \sin(Kx) + Kc_2 \cos(Kx)$$

Da bi bili zadovoljeni granični uslovi, treba da je

$$y(0) = c_1 = 0, \quad y'(1) = Kc_2 \cos(K) = 0.$$

Kako je $K \neq 0$, da bi bilo i $c_2 \neq 0$, neophodno je da bude $\cos(K) = 0$. Ovo je ispunjeno za sledeći skup vrednosti: $K = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots$ odnosno, ako opšti član rešenja predstavimo u obliku $K_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, onda su sopstvene vrednosti graničnog problema (1.12) u ovom slučaju:

$$\lambda_n = K_n^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.13}$$

Odgovarajuće sopstvene funkcije su:

$$y_n(x) = C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \tag{1.14}$$

O prirodi rešenja (sopstvenih funkcija) graničnih problema sa parametrom, i u opštem slučaju Šturm-Liuvilovih problema, biće diskusije u drugom poglavlju.

1.3 Diferencijalne jednačine drugog reda u Šturm-Liuvilovoj formi

U ovom poglavlju želimo da napravimo vezu između diferencijalnih jednačina drugog reda i Šturm-Liuvilovih jednačina. Naime, važi sledeće:

Teorema 1. Svaka diferencijalna jednačina drugog reda može se transformisati u diferencijalnu jednačinu „Šturm-Liuvilovog“ oblika:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = F(x) \tag{1.15}$$

Dokaz:
Ne umanjujući opštost, možemo dokazati da se svaka diferencijalna jednačina drugog reda može transformisati u oblik

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

Zaista, pretpostavimo da je zadata klasična homogena digerencijalna jednačina drugog reda, oblika

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + (a_0(x) + \lambda r(x))y = 0, \qquad a_2(x) \neq 0,$$

cilj je da predstavimo prva dva činioca jednačine u vidu totalnog diferencijala nekog izraza. Na taj način, dobićemo diferencijalnu jednačinu napisanu u „Šturm-Liuvilovoj“ formi. Da bismo to postigli, pomnožićemo jednačinu sa integracionim faktorom $I(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$. Dobijamo:

$$a_2(x)I(x)y'' + a_1(x)I(x)y' + a_0(x)I(x)y + \lambda r(x)I(x)y = 0$$

Kako je $I(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, radi jednostavnosti, ovaj integracioni faktor možemo zapisati u obliku $I(x) = e^u$, a kako je $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$, imamo da je

$$I'(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot I(x).$$

Koristeći ovu jednakost za $I'(x)$, diferencijalna jednačina se svodi na

$$a_2(x)I(x)y'' + a_2(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}I(x)y' + a_0(x)I(x)y + \lambda r(x)I(x)y = 0,$$

odnosno, kombinovanjem prva dva člana

$$a_2(x)\left(I(x)y'\right)' + a_0(x)I(x)y + \lambda r(x)I(x)y = 0.$$

Stavljajući $p(x) = I(x)$ i deleći jednačinu sa $a_2(x)$ dobija se

$$\left(p(x)y'\right)' + p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)} + p(x)\frac{\lambda r(x)}{a_2(x)} = 0.$$

Konačno, ako je $q(x) = \frac{p(x)a_0(x)}{a_2(x)}$, $r(x) = \frac{p(x)r(x)}{a_2(x)}$, dobija se Šturm-Liuvilova jednačina $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$.

<u>Primer 1.</u>
Neka je data diferencijalna jednačina oblika

$$xy'' + 2y' + xy + \lambda e^x y = 0.$$

Postupak svođenja diferencijalne jednačine na Šturm-Liuvilovu formu izgleda ovako: Integracioni faktor je $I(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$, pa množeći jednačinu sa x^2 dobijamo

$$x^3y'' + 2x^2y' + x^3y + \lambda x^2e^xy = 0,$$

odatle $x \cdot \left(x^2y'' + 2xy'\right) + x^3y + \lambda x^2e^xy = 0$, pa kombinujući prva dva člana, sledi $\left(x^2y'\right)' + x^2y + \lambda xe^xy = 0$.

To znači da je

$$p(x) = x^2, \quad q(x) = x^2, \quad r(x) = xe^x.$$

Pošto smo jednačinu delili sa $a_2(x) = x$, tačka $x = 0$ mora biti isključena iz domena problema. Takođe, kako mora biti $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, onda treba zahtevati još i da bude $x > 0$.

1.4 Šturm-Liuvilov granični problem

U prethodnim potpoglavljima smo prvo predstavili diferencijalnu jednačinu drugog reda, zajedno sa graničnim uslovima. Zatim smo videli kako izgleda rešavanje graničnih zadataka, kad u diferencijalnoj jednačini figuriše parametar. U prethodnom poglavlju smo pokazali da svaka diferencijalna jednačina drugog reda može da se transformiše u jednačinu Šturm-Liuvilovog oblika (posebno je razmatran slučaj jednačina sa parametrom). Sad možemo predstaviti Šturm-Liuvilov granični problem.

Uvodimo definicije sledećih funkcionalnih prostora:

$C[a,b]$ - prostor neprekidnih funkcija na zatvorenom intervalu $[a,b]$

Norma je zadata sa $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$C(a,b)$ - prostor neprekidnih funkcija na otvorenom intervalu (a,b)

$C^n[a,b]$ i $C^n(a,b)$ - prostori funkcija neprekidnih, zajedno sa svim izvodima reda $\leq n$ na intervalu $[a,b]$, odnosno na (a,b)

Neka su date funkcije $p \in C^1[a,b]$, $p(x) \neq 0$, $q \in C[a,b]$. Definišimo Šturm-Liuvilov operator $L : C^2[a,b] \to C[a,b]$ sa

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) \tag{1.16}$$

Šturm-Liuvilova granični problem se može onda definisati na sledeći način:

Odrediti netrivijalno rešenje $y \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ obične diferencijalne jednačine

$$L(y) + \lambda r(x) y(x) = 0, \quad 0 < x < l \tag{1.17}$$

gde je λ kompleksan parametar, a funkcija $r \in C[0,l]$, i koje na krajevima intervala zadovoljava granične uslove:

$$\begin{gathered} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \end{gathered} \tag{1.18}$$

Definicija 1. Vrednost parametra λ za koju granični zadatak (1.17), (1.18) ima netrivijalno rešenje naziva se sopstvena vrednost, a pripadajuće netrivijalno rešenje sopstvena funkcija.

Definicija 2. Šturm-Liuvilov granični problem je:
- regularan problem, ako važi da je $p > 0, \ r > 0$, na intervalu $[a,b]$.
- singularan problem, ako je:
(i) $p > 0$, na (a,b), i $p(a) = 0 = p(b)$, $r \geq 0$ na $[a,b]$, ili
(ii) ako makar jedna od funkcija $p(x), q(x)$, ili $r(x)$ teži beskonačnosti u bilo kojoj graničnoj tački, ili
(iii) jedna od graničnih tačaka teži beskonačnosti.
- periodičan problem, ako je $p(a) = p(b)$, $p > 0$ i $r > 0$ na $[a,b]$, p, q, r su neprekidne funkcije na $[a,b]$ i važe uslovi: $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

U daljem tekstu biće razmatran regularan Šturm-Liuvilov granični problem (1.17), (1.18).

Pre nego što pređemo na diskusiju o osobinama sopstvenih vrednosti i njima odgovarajućih sopstvenih funkcija, tj. rešenja Šturm-Liuvilovih graničnih problema, videćemo koje osobine ima Šturm-Liuvilov operator (1.16).

2 OSOBINE ŠTURM-LIUVILOVOG OPERATORA

Jedna od veoma korisnih činjenica u matematici je ta da simetrična matrica ima realne sopstvene vrednosti, i da skup odgovarajućih sopstvenih vektora čini ortonormiranu bazu. Ova osobina simetričnih matrica ima veoma široku generalizaciju kod spektralnih osobina samoadjungovanih operatora u Hilbertovom prostoru, od kojih su Šturm-Liuvilovi diferencijalni operatori fundamentalni primeri.

Posmatramo Šturm-Liuvilov operator $L : C^2[a,b] \to C[a,b]$

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) \tag{2.1}$$

gde su funkcije $p \in C^1[a,b]$, $p(x) \neq 0$, $q \in C[a,b]$, i njemu pridruženi Šturm-Liuvilov granični zadatak iz potpoglavlja 1.4:

$$\begin{gathered} Ly(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \\ B_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ B_2(y) = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

koji zapravo predstavlja problem pronalaženja sopstvenih vrednosti λ.

Uvodimo oznake:
$L_2(a,b)$ - Lebegov prostor kvadratno integrabilnih funkcija, sa skalarnim proizvodom:

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)dx \quad \text{i}$$

normom:

$$\|u\|_{L_2(a,b)} = (u,u)^{1/2} = \left(\int_a^b u^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Takođe, ako je $(u,v) = 0$, onda za funkcije u i v kažemo da su ortogonalne na skupu (a,b).
Sa ovako definisanim skalarnim proizvodom, linearan operator dat na prostoru ovih funkcija Lu, je adjungovan operator ako važi sledeća jednakost: $(Lu,v) = (u,L^*v)$, za sve funkcije u i v.

Neka $D = \{u \mid u \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b] \wedge u(a) = u(b) = 0\}$, i $\alpha, \beta \in R$.

Osobina 1. Šturm-Liuvilov operator L je linearan operator na skupu D.
Dokaz: Neka $u, v \in D$. Imamo

$$\begin{aligned}
L(\alpha u+\beta v) &= \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d(\alpha u(x)+\beta v(x))}{dx}\right)-q(x)(\alpha u(x)+\beta v(x)) = \\
&= \frac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\frac{d}{dx}(\alpha u(x))+p(x)\cdot\frac{d}{dx}(\beta v(x))\right)-q(x)\cdot\alpha u(x)-q(x)\cdot\beta v(x) = \\
&= \frac{d}{dx}\left(\alpha p(x)\cdot\frac{d}{dx}u(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(\beta p(x)\cdot\frac{d}{dx}v(x)\right)-\alpha q(x)\cdot u(x)-\beta q(x)\cdot v(x) = \\
&= \alpha\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right)-q(x)\cdot u(x)\right]+\beta\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}v(x)\right)-q(x)\cdot v(x)\right] = \\
&= \alpha L(u)+\beta L(v)
\end{aligned}$$

■

Osobina 2. Šturm-Liuvilov operator L definisan sa (2.1) na skupu D je samoadjungovan operator.
Dokaz: Operator L je samoadjungovan na nekoj klasi funkcija ako je $L = L^*$. Ukratko, treda dokazati da važi $(Lu, v) = (u, Lv)$ za $u, v \in D$.
Parcijalnom integracijom dolazimo do takozvane Grinove formule:

$$\int_a^b [vL(u)-uL(v)]dx = p(x)(u'v-v'u)\,|_a^b = P(u,v)\,|_a^b \tag{2.3}$$

Ako u i v zadovoljavaju granične uslove za $x = a$, onda važi

$$\begin{pmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kako je $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ imamo

$$u'(a)\cdot v(a) - v'(a)\cdot u(a) = 0.$$

Na isti način, ako u i v zadovoljavaju granične uslove za $x = b$, onda važi

$$u'(b)\cdot v(b) - v'(b)\cdot u(b) = 0.$$

Odatle se dobija da je $P(u,v)\,|_a^b = 0$, čime je tvrđenje dokazano.

■

Osobina 3. Šturm-Liuvilov operator L definisan sa (2.1) je pozitivno definisan na D.
Dokaz: Operator L će biti pozitivno definisan, ako je $(Lu, u) \geq 0$, za sve funkcije $u \in D$. Za potrebe ovog dokaza ćemo posmatrati interval $x \in [0,1]$.

Takođe, prvo se izvodi dokaz za slučaj prvog i drugog graničnog uslova, a pokazuje se da i treći granični uslov daje isti krajnji rezultat [10].
Za funkciju $u(x)$ važi sledeći zapis

$$u^2(x) = (1-x)\left(\int_0^x u'(t)dt\right)^2 + x\left(\int_x^1 u'(t)dt\right)^2 .$$

Koristeći nejednakost Cauchy-Schwarza dobijamo:

$$u^2(x) \le (1-x)\int_0^x dt \int_0^x [u'(t)]^2 dt + x\int_x^1 dt \int_x^1 [u'(t)]^2 dt =$$

$$= x(1-x)\int_0^1 [u'(t)]^2 dt .$$

Sledi:

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x)|^2 \le \max_{x\in[0,1]} x(1-x)\int_0^1 [u'(t)]^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^1 [u'(t)]^2 dt . \tag{2.4}$$

Odatle se dobija:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2(x)dx &\le \max_{x\in[0,1]} |u(x)|^2 \le \frac{1}{4}\int_0^1 [u'(x)]^2 dx \le \\ &\le \frac{1}{4}\int_0^1 \left\{[u'(x)]^2 + pu^2(x\}\right) dx . \end{aligned} \tag{2.5}$$

U (2.4) i (2.5) nejednakosti važe i u slučaju da $u'(x)$ ima konačan broj prekida prve vrste na intervalu $[0,1]$, a $u(x)$ je neprekidna na tom intervalu.

U prostoru $C[0,1]$ skalarni proizvod je dat sa $(u,v) = \int_0^1 uvdx$, a norme sa:

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \quad , \quad i \quad \|u\|_C = \max_{x\in[0,1]} |u(x)| .$$

Koristeći prethodnu nejednakost (2.4) i upravo dokazano svojstvo 2 da je L samoadjungovan operator, sledi:

$$\|u\|^2 \le \|u\|_C^2 \le \frac{1}{4}(Lu,u). \tag{2.6}$$

Kako se pokazuje da se i za slučaj trećeg graničnog problema dobija nejednakost istog tipa kao i (2.6), sledi da je operator L pozitivno definisan.

■

Kako smo upravo pokazali da je operator L linearan, samoadjungovan, i pozitivno definisan, sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije zadatka (2.2) imaju određena svojstva, sa kojima ćemo se upoznati u narednom potpoglavlju.

2.1 Svojstva rešenja Šturm-Liuvilovog problema

Svojstvo 1. Neka su λ i μ sopstvene vrednosti, a u i v odgovarajuće sopstvene funkcije regularnog Šturm-Liuvilovog problema (2.2). Tada važi

$$(\lambda-\mu)\int_a^b u(x)\cdot v(x)\cdot r(x)\,dx=0 \tag{2.7}$$

odnosno, u i v su ortogonalne sopstvene funkcije na $[a,b]$ u odnosu na težinsku funkciju r.

Dokaz:

Iz Grinove formule se dobija

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\int_a^b u(x)\cdot v(x)\cdot r(x)dx &= \int_a^b [uL(v)-vL(u)]dx = \\ &= p(x)(u'v-v'u)\,|_a^b = 0\end{aligned}$$

■

Svojstvo 2. Sopstvene vrednosti regularnog Šturm-liuvilovog zadatka su realne.

Dokaz: Ako je $L(u)+\lambda ru=0$, onda je $\overline{L(u)}+\overline{\lambda ru}=0$, sledi

$$L(\overline{u})+\overline{\lambda}r\overline{u}=0,$$

a za granične uslove važi $B_1(\overline{y})=0=B_2(\overline{y})$.

To znači da je $\overline{\lambda}$ sopstvena vrednost, a $\overline{u}$ odgovarajuća sopstvena funkcija zadatka (2.2), pa je

$$(\lambda-\overline{\lambda})\int_a^b u\cdot\overline{u}\cdot r dx=0$$

odnosno $(\lambda-\overline{\lambda})\int_a^b |u|^2 r dx=0$.

Kako je $r>0$, i $|u|^2\neq 0$ (pošto je u sopstvena funkcija), onda mora biti

$$\lambda=\overline{\lambda}\,. \tag{2.8}$$

■

Svojstvo 3. Svakoj sopstvenoj vrednosti regularnog Šturm-Liuvilovog problema odgovara sa tačnošću do proizvoda sa konstantom jedna sopstvena funkcija.

Dokaz: Pretpostavimo da su u i v sopstvene funkcije koje odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ. Slično dokazu osobine 2 o samoadjungovanosti operatora L na skupu D, dobijamo

$$\begin{pmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gde u i v zadovoljavaju jednačinu $Ly(x) + \lambda r(x)y(x) = 0$.

Kako je $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ determinanta koeficijenata matrice mora biti nula, pa bi zbog toga u i v morale biti linearno zavisne funkcije, tj. $v(x) = cu(x)$.

■

Svojstvo 4. Sve sopstvene vrednosti su pozitivne.

Dokaz: Ovo svojstvo direktno sledi iz pozitivne definisanosti operatora L, ovde će biti dat dokaz za slučaj kad je $r(x) \equiv 1$, i za Dirihleove granične uslove $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$. Znači, problem (2.2) svodimo na:

$$\begin{aligned} L(y) + \lambda y &= 0 \\ y(a) = y(b) &= 0 \end{aligned}.$$

Neka je $u = u(x)$ sopstvena funkcija koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Treba da dokažemo da je λ pozitivno. Kako je

$(L(u), u) = -\lambda(u, u)$, uzimajući da je $(u, u) = \int_a^b u^2(x)dx = 1$ dobijamo sledeći izraz:

$$\lambda = -(L(u), u) = \int_a^b q(x)u^2(x)dx + \int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx .$$

Ako bismo pretpostavili da je $du/dx = 0$, onda bi $u(x) \equiv \text{const}$, pa bismo primenom graničnih uslova dobili da je $u(x) \equiv 0$, što isključujemo. Znači $du/dx \neq 0$ za $x \in [a, b]$. Konačno

$$\lambda = \int_a^b q(x)u^2(x)dx + \int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 > 0 \qquad (2.9)$$

■

Poslednja dva svojstva su navedena bez dokaza.

Svojstvo 5. Samoadjungovani regularni Šturm-Liuvilov granični problem ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, i jedina tačka nagomilavanja ovog niza je: $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Svojstvo 6. Sopstvene funkcije $y_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$ regularnog Šturm-Liuvilovog graničnog zadatka (2.2) obrazuju potpun sistem funkcija u $L_2[a, b]$, tj. svaka funkcija $f \in L_2[a, b]$ se može razložiti u red po funkcijama $y_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{2.10}$$

koji konvergira u srednjem ka funkciji $f(x)$ na $[a, b]$, tj.

$$\left\| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n y_n(x) \right\| = \left(\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n y_n(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \to 0 \tag{2.11}$$

<u>Napomena.</u> Beskonačne sume oblika

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

predstavljaju generalisane Furijeove redove, koji konvergiraju ka $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$, ako su koeficijenti c_n pogodno izabrani (tj ako su oblika $c_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \langle f, y_n \rangle$).

3 PRIMERI JEDNAČINA ŠTURM-LIUVILOVOG TIPA

U ovom poglavlju biće navedene neke od najpoznatijih jednačina Šturm-Liuvilovog tipa, koje su našle primenu u oblasti fizike i primenjene matematike. Katalog sa više od 50 primera jednačina ovog oblika može se naći u [8].

3.1 Beselove jednačine

Ova jednačina se dobija kod rešavanja Laplasovih i Helmholcovih jednačina, pri razdvajanju promenljivih u cilindričnim polarnim koordinatama. Kada u jednačini (1.16), (1.17) stavimo da je:

$$x \in [0,\infty),\ p(x) = x,\ \ q(x) = -\nu^2/x\,,\ \ r(x) = x,\ \ i\ \ \lambda = n^2\,,$$

Šturm-Liuvilova jednačina postaje Beselova jednačina oblika

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(-\frac{\nu^2}{x} + n^2 x\right)y = 0 \tag{3.1}$$

Množeči ovu jednačinu sa x, dobijamo Beselovu diferencijalnu jednačinu reda ν:

$$x^2 y'' + xy' + \left(n^2 x^2 - \nu^2\right)y = 0\,,$$

gde je parametar $\nu \geq 0$ realan broj (u opštem slučaju ν može biti kompleksan parametar sa $\operatorname{Re}\nu \geq 0$. Standardna forma ove jednačine je

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$$

Regularno-singularna tačka je 0, a iregularno-singularna je ∞. Kako je ovo diferencijalna jednačina drugog reda, opšte rešenje se sastoji od kombinacije dva linearno nezavisna rešenja $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$, gde je

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad x \geq 0 \tag{3.2}$$

Beselova funkcija prve vrste reda ν, a

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad x > 0 \tag{3.3}$$

Beselova funkcija druge vrste reda $-\nu$.

Iako ν i $-\nu$ čine istu diferencijalnu jednačinu, definišu se različite Beselove funkcije, da bi bile glatke funkcije od ν. Međutim, kako $J_{-\nu}(x)$ divergira za $x = 0$, odgovarajući koeficijent C_2 mora u tom slučaju biti nula, da bi se obezbedio rezultat koji ima fizički smisao. Beselove funckije, kao rešenja Beselove diferencijalne jednačine čine potpun skup ortogonalnih funkcija na intervalu $0 < x < \infty$, u odnosu na težinsku funkciju $r(x) = x$.

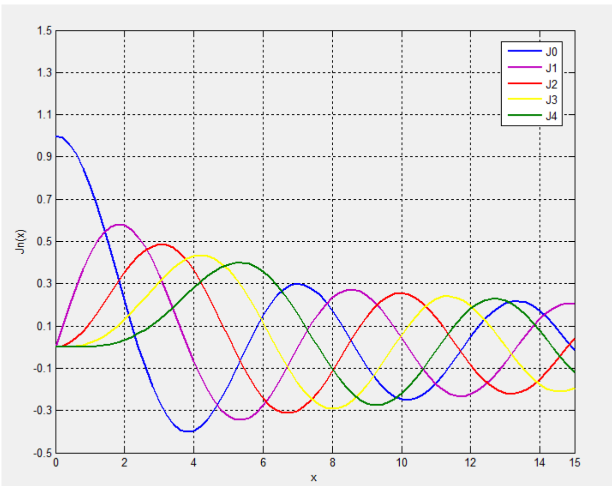
Za deo-po-deo neprekidnu funkciju $f(x)$ problema $L(y) = f(x), \quad 0 \le x \le \rho$, je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} J_n\left(\lambda_{np}\frac{x}{\rho}\right), \qquad c_{np} = \frac{\int_0^\rho x f(x) J_n(x)\left(\lambda_{np}\frac{x}{\rho}\right)}{\int_0^\rho x\left[J_n\left(\lambda_{np}\frac{x}{\rho}\right)\right]^2 dx} \tag{3.4}$$

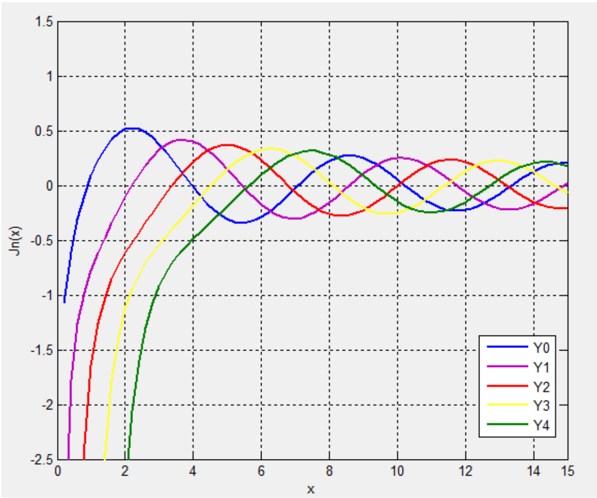
Beselove funkcije su međusobno povezane rekurentnim formulama. Ako za parametar ν uzmemo da je nenegativan ceo broj $n = 0,1,2,\ldots$, opšte rešenje standardne forme Beselove jednačine često se zapisuje u obliku $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, pa se rekurentne formule za Beselove funkcije prve i druge vrste zapisuju kao

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)\ , \qquad Y_{n+1} = \frac{2n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x)\,.$$

Slika 1 i Slika 2 daju prikaz Beselovih funckija prvog i drugog reda za $\nu = 0,1,2,3,4$.



Slika 1. Beselove funkcije prve vrste reda $\nu = 0,1,2,3,4$



Slika 2. Beselove funkcije druge vrste reda $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$

Ostale Šturm-Liuvilove forme Beselove jednačine se mogu naći u [8]

3.2 Ležandrove jednačine

Kada u jednačini (1.16), (1.17) stavimo da je:

$$x \in [-1, 1],\ p(x) = 1 - x^2,\ \ q(x) = 0,\ \ r(x) = 1 \ \text{ i } \ \lambda = n(n+1),$$

Šturm-Liuvilova jednačina postaje Ležandrova diferencijalna jednačina

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0 \tag{3.5}$$

Regularno-singularne tačke su: $-1, 1, \text{i}\ \infty$.

Ova jednačina se javlja pri rešavanju Laplasove jednačine (i ostalih parcijalnih diferencijalnih jednačina tog tipa) u sfernim koordinatama. Rešenja ove jednačine za $n = 0, 1, 2, \ldots$ su Ležandrovi polinomi $P_n(x)$, a kako je ovo diferencijalna jednačina drugog reda, opšte rešenje se sastoji od kombinacije dva linearno nezavisna rešenja, pa se koriste i Ležandrovi polinomi druge vrste. Tako, opšte rešenje je oblika $y(x) = A_n P_n(x) + B_n Q_n(x)$. Pošto $Q_n(x)$ divergira za $x = \pm 1$, odgovarajući koeficijent B_n mora u tom slučaju biti nula, da bi se obezbedio rezultat koji ima fizički smisao. Ležandrovi polinomi se mogu predstaviti preko takozvane Rodrigove formule:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

u međusobno su rekurentnim vezama,

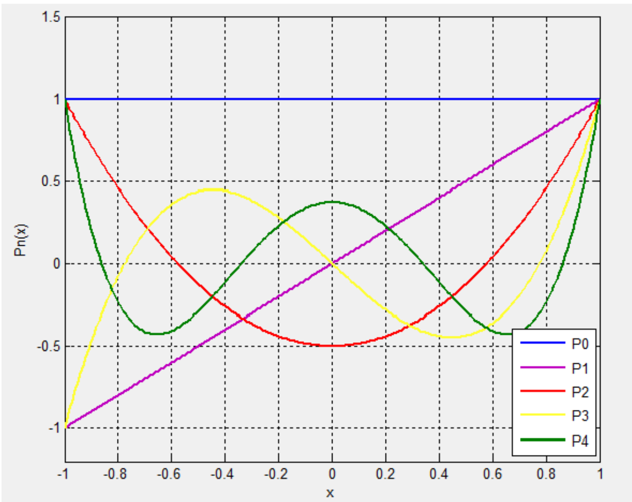
$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

i obrazuju potpun ortogonalan sistem na intervalu $-1 \le x \le 1$, gde važi:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}.$$

Koristeći ovo svojstvo ortogonalnosti, deo-po-deo neprekidna funkcija $f(x)$ problema $L(y) = f(x)$, $0 \le x \le 1$, se može predstaviti preko Ležandrovih polinoma kao:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \text{neprekidna} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & \text{za t. prekida} \end{cases} \qquad C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$



Slika 3. Ležandrovi polinomi prve vrste za $n = 0,1,2,3,4$

3.3 Čebiševljeve jednačine

Čebiševljeve diferencijalne jednačine su definisane sa

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad n \in R \tag{3.7}$$

Regularno-singularne tačke su: $-1, 1$, i ∞.

Rešenja ove jednačine se nazivaju Čebiševljeve funkcije stepena n. Ako je n nenegativni ceo broj, Čebiševlje funkcije se predstavljaju Čebiševljevim polinomima $T_n(x)$, koji se mogu izraziti preko Rodrigove formule:

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

Čebiševljevi polinomi formiraju kompletan ortogonalan skup na intervalu $-1 \le x \le 1$, u odnosu na težinsku funkciju $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Može se pokazati da

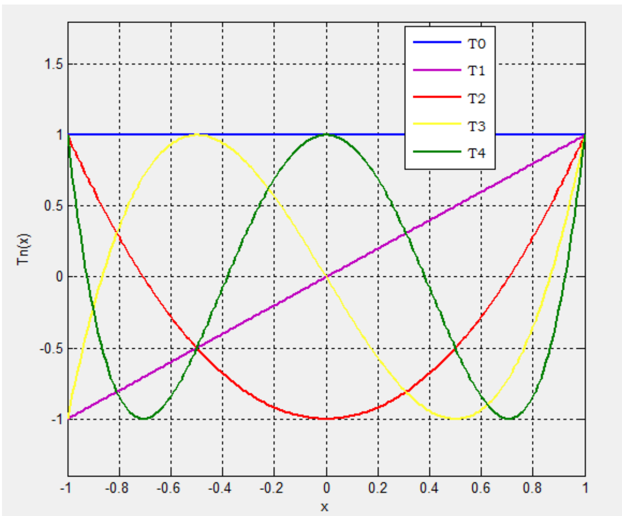
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \pi & m = n = 0 \\ \pi/2 & m = n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Rekurentne formule su oblika

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Deo-po-deo neprekidna funkcija f(x), na $-1 \le x \le 1$, može se predstaviti preko Čebiševljevih polinoma kao

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x)\,\text{neprek.} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{t. prekida} \end{cases} \qquad C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)T_n(x)dx & n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)T_n(x)dx & n = 1,2,.. \end{cases}$$



Slika 4. Čebiševljevi polinomi prve vrste za $n = 0,1,2,3,4$

4 POSTAVKA ZADATKA

Šturm-Liuvilovi granični problemi koji će biti razmatrani u ovom radu su njegovi specijalni slučajevi, koji se dobijaju kada se za funkcije $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, naprave sledeće pretpostavke:

$$p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 0,\ r(x) \equiv 1 \tag{4.1}$$

Interval na kome posmatramo zadatak je $0 \le x \le 1$, a posmatraćemo dva tipa graničnih uslova:

(1) $\alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \alpha_2 = \beta_1 = 0$, pa granični zadatak postaje

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1 \\ &y(0) = y(1) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

što je zapravo Dirihleov granični problem date Šturm-Liuvilove diferencijalne jednačine na intervalu $[0,1]$.

(2) $\alpha_1 = \beta_2 = 1,\ \alpha_2 = \beta_1 = 0$, pa je granični zadatak dat sa

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1 \\ &y(0) = y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

što je mešoviti granični problem date Šturm-Liuvilove diferencijalne jednačine na intervalu $[0,1]$.

Ove pretpostavke su napravljene da bi se granični zadatak pojednostavio, jer nam je cilj da zadatak za koji možemo da izračunamo rešenja analitički, kasnije uporedimo sa njegovim numeričkim aproksimacijama rešenja. Šturm-Liuvilova jednačina se može za kasniji rad posmatrati i u opštem slučaju (1.17), (1.18), na bilo kom intervalu $a \le x \le b$.

Rešenje zadataka tražimo na sličan način kao što je urađeno u zadatku potpoglavlja 1.2. Uzimajući u obzir zaključke iz tog zadatka, kao i koristeći svojstva rešenja Šturm-Liuvilovih problema datih u potpoglavlju 3.1, vrednosti $\lambda < 0$ i $\lambda = 0$ nećemo posmatrati, jer to neće biti sopstvene vrednosti ovih zadataka. Dakle, rešenja zadataka (4.2) i (4.3) tražimo u slučaju da je $\lambda > 0$.

Pretpostavimo da je $\lambda = K^2$, $K \neq 0$. Karakteristični polinom $m^2 + K^2 = 0$ ima kompleksno-konjugovana rešenja $m_{1,2} = \pm Ki$. Opšte rešenje je onda

$$y(x) = c_1 e^{0\cdot x}\cos(Kx) + c_2 e^{0\cdot x}\sin(Kx) = c_1\cos(Kx) + c_2\sin(Kx).$$

4.1 Granični test zadatak (1)

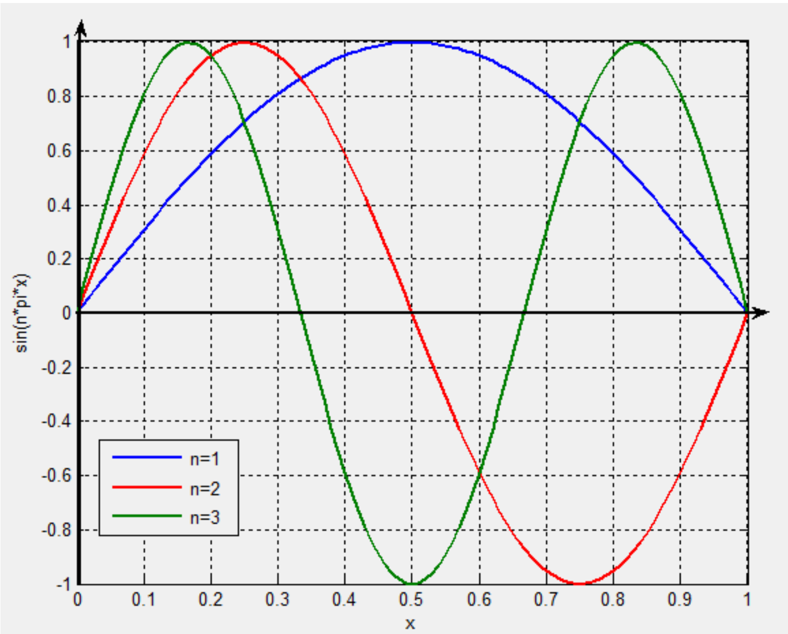
Kako je $y(0) = y(1) = 0$ sledi da je, $c_1 = 0$, $c_2 \sin(K) = 0$. Kako je $K \neq 0$ i mora biti $c_2 \neq 0$ da bismo imali netrivijalna rešenja, sledi da je $\sin(K) = 0$, odnosno $K = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$, pa je opšti član rešenja oblika $K_n = n\pi$. Sopstvene vrednosti graničnog problema (4.2) u ovom slučaju su onda:

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.4}$$

Odgovarajuće sopstvene funkcije su:

$$y_n(x) = \sin(n\pi)x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.5}$$

Na slici 5 je dat prikaz prve tri sopstvene funkcije za ovaj granični zadatak.



Slika 5. Sopstvene funkcije graničnog zadatka (1)

4.2 Granični test zadatak (2)

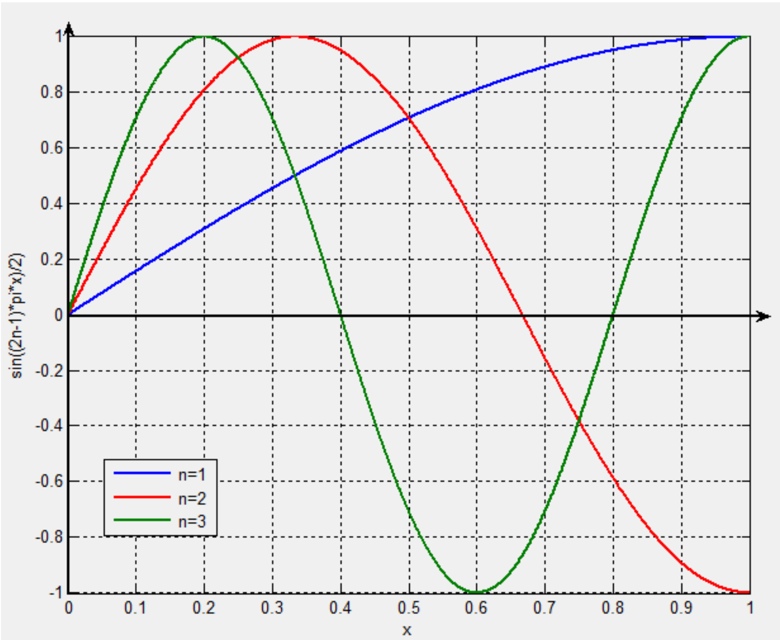
Rešenje ovog problema je već izračunato u potpoglavlju 1.3. Sopstvene vrednosti ovog zadatka su:

$$\lambda_n = K_n^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.6}$$

Odgovarajuće sopstvene funkcije su:

$$y_n(x) = C_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.7}$$

Na slici 6 je dat prikaz prve tri sopstvene funkcije za ovaj granični zadatak.



Slika 6. Sopstvene funkcije graničnog zadatka (2)

Iz ova dva primera takođe možemo primetiti da sopstvena funkcija $y_k(x)$ koja odgovara sopstvenoj vrednosti λ_k ima tačno $k-1$ nula na intervalu $(0,1)$. Znači, sopstvene funkcije osciluju češće što su sopstvene vrednosti veće.

Inače, ova dva granična zadatka će biti polazna tačka rešavanja Šturm-Liuvilovih problema korišćenjem metoda konačnih razlika i konačnih elemenata u Matlab-u. U naredna dva poglavlja, prvo ćemo napraviti aproksimacije datih graničnih zadataka pomoću ove dve numeričke metode, a zatim ih implementirati u Matlab-u. Rešenja koja se dobiju pomoću ove dve numeričke metode će biti upoređena sa analitičkim rešenjima, izračunatim u ovom poglavlju.

5 NUMERIČKA APROKSIMACIJA ZADATKA

Numeričke metode koje će biti obrađene u naredna dva poglavlja predstavljaju veoma važne i često korišćene metode za inžinjersku analizu i dizajn. To su takozvane *matrične metode*, što znači da se uz pomoć njih Šturm-Liuvilov problem (1.17), (1.18) redukuje u matrični problem sopstvenih vrednosti.

Prve među njima, metode konačnih razlika, služe za numeričko rešavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Jednostavne su za korišćenje u problemima definisanim na regularnim geometrijama, kao što su interval u 1D, pravougaoni domen u dve dimenzije, i kocka u tri prostorne dimenzije. Licencirani softver specijalizovan za rešavanje problema isključivo metodom konačnih razlika se ne koristi, već se ova metoda najčešće poziva Fortran rutinama koje se mogu implementirati u okviru većih softverskih platformi. Više informacija o ovoj metodi i njenoj primeni na konkretne probleme, može se naći u [14], ili [10].

Metoda konačnih elemenata se koristi za traženje aproksimativnog rešenja parcijalnih i integralnih jednačina i veoma je efikasna kod problema u kojima je granica domena složena. Literatura iz oblasti metoda konačnih elemenata je brojna, a neke od najčešće citiranih knjiga su [25] i [5] naročito u oblasti inžinjerstva, a sa matematičkog aspekta korisna je [23]. Softverski paketi za analizu konačnim elementima imaju široku primenu u gotovo svim oblastima inžinjerstva; najpoznatiji su paketi Nastran, Abaqus, Ansys a koriste se za analizu čvrstih tela i njihovih struktura, za praćenje provođenja toplote i za proučavanje ponašanja tečnih tela.

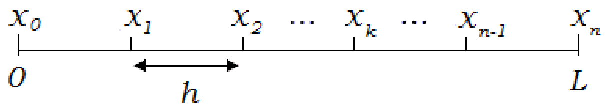
5.1 Aproksimacija zadatka metodom konačnih razlika

Metoda konačnih razlika se sastoji iz sledećih koraka:

1) Pretpostavimo da je problem dat na nekom domenu $x \in [0, L]$. Diskretizaciju problema započinjemo tako što podelimo domen na skup od konačno mnogo, recimo n+1 tačaka (čvorova) $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, takvih da je

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j, \; j = 0, 1, \ldots, n$$

U slučaju da je $n+1$ tačaka podjednako raspoređeno, važi: $\Delta x = \Delta x_j = h, \ \forall j$.
Mrežu onda možemo definisati sa: $\omega_h = \left\{ x_i \mid x_i = ih, \ i = 0,\dots,n, h = \frac{1}{n} \right\}$.



Slika 7 Konačne razlike - diskretizacija domena

2) Aproksimiramo izvode date diferencijalne jednačine pogodno izabranim količnicima konačnih razlika. Tako, prvi izvod funkcije u čvoru x_j možemo aproksimirati na jedan on sledećih načina:

$$
\begin{aligned}
y_x(x_j) = y_{x,i} &\approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} && \text{razlika unapred} \\
y_{\bar{x},i} &\approx \frac{y(x_j) - y(x_j - h)}{h} && \text{razlika unazad} \\
y_{\dot{x},i} &\approx \frac{y(x_j + h) - y(x_j - h)}{2h} && \text{centralna razlika}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

dok drugi izvod funkcije definišemo kao:

$$
y_{xx}(x_j) \approx \frac{y(x_j + h) - 2y(x_j) + y(x_j - h)}{h^2} \tag{5.2}
$$

U ovom koraku možemo oceniti grešku aproksimacija izvoda funkcije. Naime, pod pretpostavkom da je funkcija $y(x)$ dovoljno glatka, korišćenjem Tejlorovog razvoja funkcije y u okolini čvora (tačke) x_i, za aproksimaciju prvog izvoda razlikom unapred važi:

$$
\begin{aligned}
y'(x_i) - y_{x,i} &= y'(x_i) - \frac{1}{h}\left(y(x_{i+1}) - y(x_i)\right) = \\
&= y'(x_i) - \frac{1}{h}\left(y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i + \theta h) - y(x_i) \right) = \\
&= -\frac{h}{2} y''(x_i + \theta h), \qquad 0 \le \theta \le 1
\end{aligned}
$$

Sličnim postupkom dobijamo i ocene greški ostalih aproksimacija, odnosno važi sledeće:

$$y'(x_i) = y_{x,i} + O(h) = y_{\bar{x},i} + O(h) = y_{\dot{x},i} + O(h^2)$$
$$y''(x_i) = y_{\bar{x}x,i} + O(h^2). \tag{5.3}$$

Kada se mreža zgušnjava, odnosno kad $h \to 0$, aproksimacije teže vrednostima izvoda funkcije $y(x)$ u čvorovima. Pri tome, kod aproksimacija izvoda centralnim količnicima konačnih razlika $y_{\dot{x}}$ i $y_{\bar{x}x}$ konvergencija je brža, jer je glavni član greške $O(h^2)$.

3) U ovom koraku vršimo diskretizaciju problema tako što zamenjujemo funkciju $y(x)$ i njene izvode iz graničnog problema (1.17), (1.18) odgovarajućim količnicima konačnih razlika u čvorovima mreže ω_n. To znači da će se zadatak svesti na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina, uz korišćenje uslova na granici.

U nastavku, primena metode konačnih razlika biće prikazana na prvom i drugom graničnom zadatku iz poglavlja 4.

<u>Granični zadatak</u> (1) - prateći prethodno objašnjene korake metode, (4.2) se zamenjuje sledećim sistemom linearnih jednačina:

$$-y_{x\bar{x},i} = \lambda_h y_i \ , \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$
$$y_0 = y_n = 0 \tag{5.4}$$

Diferencijaska šema u operatorskom obliku glasi:

$$\Lambda y = \lambda_h y \qquad , \tag{5.5}$$

gde je $y = (0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0)$. Definišimo sa $\overset{0}{H} = \{y = (0, y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \mid y_i \in R\}$, pa je operator $\Lambda : \overset{0}{H} \to \overset{0}{H}$ definisan sa:

$$\Lambda y_i = \begin{cases} -y_{\bar{x}x,i} & , \quad i = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & , \quad i = 0,\ i = n \end{cases} \tag{5.6}$$

Može se dokazati da je ovaj operator samokonjugovan i pozitivno definisan. [10]

U razvijenom obliku, ova diferencijska šema (5.5) se zapisuje kao:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \lambda_h y_i, \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$
$$y_0 = y_n = 0 \tag{5.7}$$

i uz eliminaciju y_0 i y_n zadatak 1 (4.2) se svodi na problem sopstvenih vrednosti (trodijagonalne) matrice

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

reda $n-1$. Shodno tome dobijeni sistem jednačina $Ay = \lambda_h y$ može imati najviše n-1 linearno nezavisan sopstveni vektor.

<u>Granični zadatak</u> (2) - (4.3) Matrica sistema A će imati nešto drugačiji oblik, zbog prisustva izvoda u drugom graničnom uslovu, tj. imamo da je diferencijska šema oblika:

$$\begin{gathered} -y_{x\bar{x},i} = \lambda_h y_i \ , \qquad i = 1,2,\dots,n-1 \\ y_0 = 0\,, \quad y_{\dot{x},n} = 0 \end{gathered} \tag{5.8}$$

Diferencijaska šema u operatorskom obliku glasi:

$$\Lambda y = \lambda_h y\,, \qquad y = (0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n).$$

Definišimo sa $H_0 = \{y = (0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \mid y_i \in R\}$, pa imamo da je operator $\Lambda: H_0 \to H_0$ definisan sa:

$$\Lambda y_i = \begin{cases} 0\,, & i = 0 \\ -y_{\bar{x}x,i}\,, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dfrac{2}{h} y_{\dot{x},n}\,, & i = n \end{cases} \tag{5.9}$$

Može se dokazati da je ovaj operator samokonjugovan i pozitivno definisan. [10]

Prvi izvod funkcije, koji se pojavljuje u graničnom uslovu je u ovom slučaju aproksimiran formulom za centralnu razliku,

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = 0$$

da bismo dobili šemu veće tačnosti, tj. $O(h^2)$. Kako je y_{n+1} fiktivna vrednost, da bismo mogli da je izračunamo, koristimo dodatno i uslov

$$-\frac{1}{h^2}\left(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}\right) = \lambda_h y_n$$

Tako, zadatak se takođe svodi na rešavanje sopstvenih vrednosti trodijagonalne matrice A oblika:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dobijena matrica A je reda n, pa sistem $Ay = \lambda_h y$ može imati najviše n linearno nezavisnih sopstvenih vektora.

5.2 Aproksimacija zadatka metodom konačnih elemenata

Umesto da vrši aproksimaciju parcijalne, ili diferencijalne jednačine direktno, kao što je slučaj kod metode konačnih razlika, metoda konačnih elemenata koristi varijaciono-diferencijski princip, koji uključuje računanje integrala diferencijalne jednačine na domenu problema. Ova metoda je specijalni slučaj Ritz-ove, odnosno Galerkinove metode, s tom razlikom što se kod ove dve metode određivanje približnog rešenja graničnog problema svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina, čija je matrica „popunjena“ (tj., njeni elementi su različiti od nule), dok se metodom konačnih elemenata dobija sistem, čija je matrica „retka“ (na primer, trodijagonalna). Iz tog razloga, za rešavanje sistema, koji se dobijaju pri korišćenju metode konačnih elemenata potrebno je izršiti znatno manje aritmetičkih operacija. Kako i metoda konačnih razlika ima slično svojstvo, metoda konačnih elemenata se ponekad interpretira i kao varijanta ove metode.

U opštem slučaju metodom konačnih elemenata domen problema se deli na konačan broj poddomena, koji se nazivaju konačni elementi, a rešenje parcijalne diferencijalne jednačine se aproksimira jednostavnim probnim (uglavnom polinomskim) funkcijama na svakom elementu. Između elemenata domena ne smeju postojati praznine, kao ni preklapanja. Sa druge strane, polinomske funkcije se biraju tako da budu identički jednaki nuli u najvećem delu oblasti, a na preostalom delu domena su opisane deo po deo polinomima. Takođe, aproksimativno rešenje, koje je predstavljeno u vidu linearne kombinacije ovih polinoma, treba da ima odgovarajući stepen glatkosti na celom domenu. Nakon što su ovi uslovi ispunjeni, varijacioni integral se računa kao suma doprinosa od svakog elementa. Rezultat je algebarski sistem aproksimativnog rešenja, koji ima konačnu dimenziju.

Kako za najveći broj probnih funkcija važi da su oblasti u kojima su one različite od nule disjunktne, sledi da će matrice sistema linearnih jednačina biti retke. Znači, metoda konačnih elemenata diskretizuje parcijalnu diferencijalnu jednačinu, tako što se pravi aproksimativno rešenje poznato na celom domenu kao deo po deo polinomska funkcija, a ne samo na skupu tačaka.

Granični zadatak (1) - Metoda će biti ilustrovana na zadatku (1) - (4.2) iz poglavlja 4, tj. na graničnom problemu zadatom na jednodimenzionalnom domenu, odnosno na intervalu [0,1]. Na njemu je zadat skup čvorova

$$\omega_n = \left\{ x_i \mid x_{i+1} - x_i = h_i \, , \, i = 0, 1, \ldots , n \, , \, \sum_{i=0}^{n} h_i = 1 \right\}$$

a konačni elementi su predstavljeni podintervalima $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$.
Napomena: U opštem slučaju, konačni elementi ne moraju biti jednaki međusobno, ali radi jednostavnosti, za potrebe ovog problemaa, pogodnije je odabrati ravnomernu mrežu elemenata.

Aproksimacija zadatka se traži u prostoru deo po deo linearnih funkcija, i oblika je

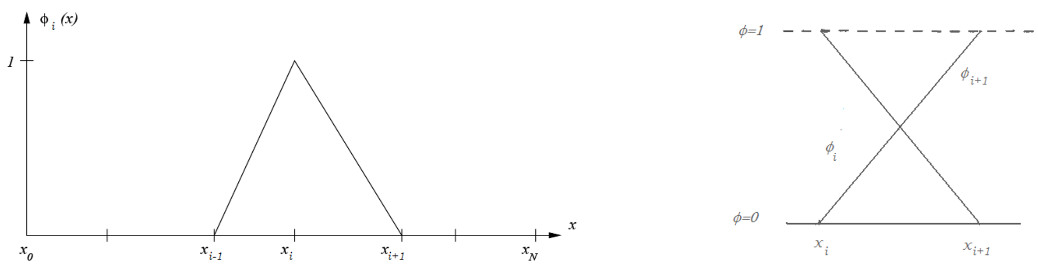
$$y(x) \approx \hat{y}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) \tag{5.10}$$

Prostor probnih („krovnih“) funkcija je predstavljen neprekidnim funkcijama, koje su na dva susedna elementa linearne, a na ostalim identički jednake nuli

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - x_i}{h_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{h_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \, , & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{5.11}$$

Na slici 8 a) može se videti izgled funkcije $\phi_i(x)$ u opsegu od x_{i-1} do x_{i+1}, dok su na slici 8 b) prikazane dve bazisne funkcije $\phi_i(x)$ i $\phi_{i+1}(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

Napomena: Osim funkcija oblika (5.11) u [7] je pokazano da se za problem (1), na intervalu $[0, \pi]$ mogu koristiti i trigonometrijske krovne funkcije.



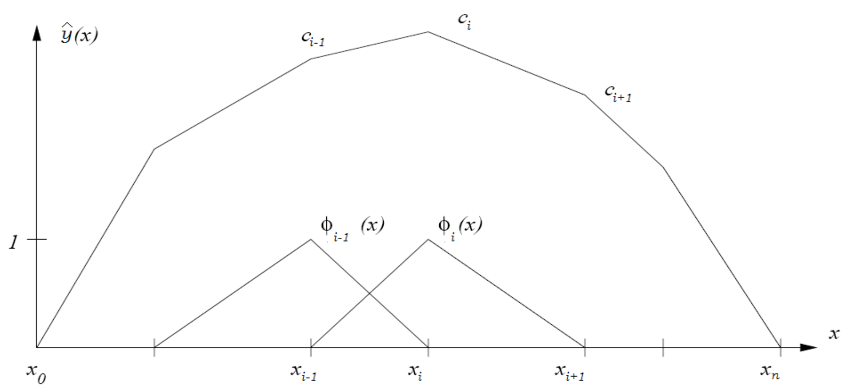
Slika 8. a) “Krov” funkcija, b) Bazisne funkcije $\phi_i(x)$ i $\phi_{i+1}(x)$ u opsegu od x_i do x_{i+1}

Kao što se može videti na slici 8 a), $\phi_i(x)$ nije jednaka nuli jedino na ona dva elementa koja sadrže čvor x_i. Ova funkcija prvo linearno raste a zatim i opada na ova dva elementa, a maksimalnu vrednost jednaku jedinici dostiže baš u tački $x = x_i$, što znači da je oblika

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Odatle, $\hat{y}(x_i) \equiv y_i = c_i$, odnosno koeficijenti u reprezentaciji (5.10) predstavljaju približne vrednosti rešenja graničnog problema u unutrašnjim čvorovima mreže ω_n (pogledaj sliku 9), pa se približno rešenje (5.10) može tražiti u obliku

$$\hat{y}(x) = \sum_{1=0}^{n} y_i \phi_i(x)$$



Slika 9. Deo-po-deo linearne bazne funkcije i rezultujuća deo-po-deo linearna aproksimacija

Treba primetiti da kako su sve $\phi_i(x)$ deo po deo linearno neprekidne, i njihova suma $\hat{y}(x)$ će biti deo po deo linearno neprekidna funkcija. Takođe, restrikcija rešenja $\hat{y}(x)$ na element $[x_{i-1}, x_i]$ je linearna funkcija

$$\hat{y}(x) = y_{i-1}\phi_{i-1}(x) + y_i\phi_i(x).$$

Napomena: U slučaju homogenih graničnih uslova reprezentacija aproksimativnog rešenja (5.10) je ekvivalentna sa

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i\phi_i(x)$$

uzimajući u obzir uslov $y_0 = y_n = 0$.

Diferencijalna jednačina graničnog zadatka (1) (4.2) je data u takozvanoj jakoj formi. Prebacujemo je u takozvanu slabu formu množenjem sa test funkcijom v (neprekidno diferencijabilna funkcija, koja je jednaka nuli na krajevima intervala), a zatim integraljenjem jednačine po intervalu (0,1), pa tako dobijamo

$$\int_0^1 y'(x)v'(x)dx = \int_0^1 \lambda y(x)v(x)\,dx \tag{5.12}$$

Podsetimo da za zadatak (1) rešenje tražimo u aproksimativnoj formi (5.10) a takođe možemo pretpostaviti da se i test funkcija može zapisati u obliku $v(x) = \sum_{i=0}^{n} v_i\phi_i(x)$, tj. da je test funkcija linearna kombinacija probnih funkcija, i da zadovoljava granične uslove zadatka. Ubacivanjem ovih reprezentacija funkcija u prethodnu slabu formu jednačine dobijamo sistem

$$\sum_{j=0}^{n} v_i \sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \phi_i'\phi_j' dx = \sum_{j=0}^{n} v_j \sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \lambda\phi_i\phi_j dx$$

Kako je ova jednačina zadovoljena za svako ϕ_j ona važi i u sledećem slučaju

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \phi_i'\phi_j' dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \lambda\phi_i\phi_j dx, \quad j = 0,\ldots,n \tag{5.13}$$

što se u matričnom obliku zapisuje kao

$$Ay = \Lambda By \tag{5.14}$$

i predstavlja generalisani problem sopstvenih vrednosti. Ovde su $A = A_{ij}$, i $B = B_{ij}$ simetrične, kvadratne matrice, dimenzija n-1, sa članovima

$$a_{i,i} = \sum_{j=0}^{1} \int_{x_{i-1+j}}^{x_{i+j}} \phi_i'^2 dx \ , \qquad a_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}' \phi_i' \ , \qquad a_{i,j} = 0 \ , \quad |i-j| > 1 \qquad (5.15)$$

$$b_{ii} = \sum_{j=0}^{1} \int_{x_{i-1+j}}^{x_{i+j}} \phi_i^2 dx \ , \qquad b_{i,j} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}\phi_i dx \ , \qquad b_{i,j} = 0 \ , \quad |i-j| > 1$$

Polazeći od jednačina (5.11), za zadatak (1) se direktno mogu izračunati elementi matrica A i B, odnosno dobija se

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & . & . & . & . & . & & \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & . & & \\ . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & . & . \\ . & 1 & 4 & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Obe matrice su reda n-1. Može se primetiti da je forma matrice A gotovo identična odgovarajućoj matrici koja se dobija pri primeni metode konačnih razlika. To je, uzimajući u obzir odabir mreže i bazisnih funkcija, i bilo očekivano.

Granični zadatak (2) - Prirodni granični uslov, odnosno granični uslov na desnom kraju intervala, je uključen u integraciji jednačina oblika (5.10). Stoga, nikakvo dodatno nametanje uslova nije neophodno. Takođe se dobija sistem oblika (5.14), s tim što su u ovom slučaju dimenzije matrica n.

Za metodu konačnih elemenata se može dokazati [10] da u čvorovima mreže zadovoljava takozvanu superkonvergenciju

$$\max_{1\le i\le n} |y(x_i) - y_i| = O(h^2) \qquad (5.16)$$

Za razliku od rešenja koje se dobija korišćenjem metode konačnih razlika i koje je definisano samo u čvorovima mreže ω_h, približno rešenje $\hat{y}(x)$ dobijeno metodom konačnih elemenata definisano je na čitavom intervalu $[0,1]$. Iz tog razloga, za ovo rešenje se pored "diskretne" ocene brzine konvergencije, može izvesti i "kontinuirana" ocena.
Naime, za proizvoljnu linearnu kombinaciju bazisnih funkcija

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} w_j \phi_j(x)$$

imamo da važi

$$\int_0^1 \left[(y' - \hat{y}')^2 + (y - \hat{y})^2\right] dx \le \int_0^1 \left[(y' - w')^2 + (y - w)^2\right] dx$$

Koristeći zatim nejednakost (2.5) iz poglavlja 2 dobijamo

$$\max_{x \in [0,1]} |y(x) - \hat{y}(x)|^2 \le c \int_0^1 (y' - w')^2 dx \ , \quad c = \text{const} \tag{5.17}$$

Ako biramo funkciju $w(x)$ takvu da se u čvorovima $x_i \in \omega_n$ poklapa sa $y(x)$

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} y(x_j)\phi_j(x)$$

onda dobijamo

$$\int_0^1 (y' - w')^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y' - w')^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[y'(x) - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \right]^2 dx$$

Ako je funkcija $y(x)$ dva puta diferencijabilna, sledi

$$\int_0^1 (y' - w')^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [O(h)]^2 dx = nhO(h^2) = O(h^2) \ .$$

Koristeći poslednju i nejednakost (5.17) dobijamo “kontinuiranu” ocenu

$$\max_{x \in [0,1]} |\hat{y}(x) - y(x)| = O(h) \, . \tag{5.18}$$

5.3 Poređenje dve metode

Obe metode se ponašaju slično pri rešavanju zadataka (1) i (2), i imaju isti stepen tačnosti u čvorovima ravnomerne mreže.

U metodi konačnih elemenata, promena promenljive polja u fizičkom domenu je integralni deo procedure. To znači, na osnovu izabranih interpolacionih funkcija, promena promenljive polja kroz konačni element je data kao integralni deo formulacije problema. U metodi konačnih razlika, to nije slučaj: promenljive polja se računaju samo u određenim tačkama. Odatle, izvodi (do određenog nivoa) mogu da se izračunaju u metodi konačnih elemenata, dok metoda konačnih razlika daje podatke samo u promenljivoj samoj po sebi. U strukturalnim problemima, na primer, obe metode daju rešenja o pomeraju, ali rešenja metodom konačnih elemenata mogu da se koriste da se direktno izračunaju komponenete sile (prvi izvodi).

Da bi se dobili podaci o sili u metodi konačnih razlika, zahteva dodatna razmatranja, koja nisu deo matematičkog modela.

Postoje i neke sličnosti između metoda. Tačke integracije u metodi konačnih razlika su analogne čvorovima u metodi konačnih elemenata. Promenljiva je eksplicitno izračunata u takvim tačkama. Takođe, kako se smanjuje korak integracije (veličina koraka) u metodi konačnih razlika, tako se očekuje da rešenje konvergira tačnom rešenju. Ovo je slično očekivanoj konvergenciji u metodi konačnih elemenata, kad se mreža elemenata profini. U oba slučaja, profinjenje predstavlja redukciju matematičkog modela od konačnog do infinitezimalnog. Takođe, u oba slučaja diferencijalne jednačine se redukuju u algebarske jednačine.

Možda najbolji način za opisivanje razlika ove dve metode je u činjenici da metode konačnih razlika modeluju diferencijalne jednačine problema i koriste numeričku integraciju za dobijalnje rešenja u diskretnim tačkama. Metoda konačnih elemenata modelira ceo domen problema i koristi poznate fizičke principe da razvije algebarske jednačine koje opisuju problem. Tako, metoda konačnih razlika modelira diferencijalne jednačine, dok metoda konačnih elemenata modelira bliže fizički problem. Postoje slučajevi kada je veoma korisno koristiti kombinaciju ova dva modela u dobijanju rešenja inžinjerskih problema, naročito gde su bitni dinamički efekti.

6 MATLAB REZULTATI

Za rad sa numeričkim metodama često se koristi Matlab programski jezik, jer se ove metode veoma brzo mogu u njemu implementirati, ali i iz razloga što Matlab program sadrži veliku biblioteku prethodno definisanih funkcija, matrica, vektora, i mnogih alata za rad sa problemima linearne algebre. Takođe, svi grafički alati koji su potrebni za vizualizaciju dobijenih podataka su dostupni u ovom programu. Tako, zaključci koji su izvedeni u okviru poglavlja 5 biće iskorišćeni prvo za implementaciju metoda konačnih razlika i konačnih elemenata u Matlabu, a nakon toga, biće prikazani grafici aproksimativnih rešenja i upoređeni sa graficima koji se dobijaju analitičkim rešavanjem problema.

Pomenute numeričke metode su, za potrebe ovog rada, definisane u okviru Matlab funkcija pisanih u takozvanim M datotekama (tekstualnim fajlovi, koji sadrže komande koje zadaje korisnik, a program ih zatim interpretira). Tako, definisane su dve funckije: jedna koja rešava probleme (1) i (2) korišćenjem metode konačnih razlika, i druga koja ova dva problema rešava korišćenjem metode konačnih elemenata.

Sintaksa funkcija u Matlabu data je sa:

function [out1, out2, ...] = user_func(in1, in2, ...)

što znači da u zavisnosti od ulaznih podataka koje zadaje korisnik (in1, in2,...), dobijamo tražene izlazne podatke (out1, out2,..).

Polazeći od ove sintakse, za rešavanje problema korišćenjem metode konačnih razlika, napisana je jednostavna funkcija:

function [x,y,eigvals] = fdm_sl(x0,xn,a,b,N)

gde je *fdm_sl* naziv funkcije, a ulazni podaci predstavljaju parametre vezane za granične uslove opšteg oblika (1.18), tj.

- *x0* i *xn* su krajevi intervala
- *a* je vektor vrsta, dimenzije 2, koja sadrži koeficijente α_1, α_2 graničnog uslova (1.18)
- *b* je vektor vrsta dimenzije 2, koja sadrži koeficijente β_1, β_2
- *N-1* prestavlja broj čvorova u unutrašnjosti intervala

Tako, pogodnim odabirom parametara, funkcija se može koristi za rešavanje:
problema (1), gde pozivamo funkciju

fdm_sl(0,1,[1 0],[1 0],N)

a zatim i problema (2), uz poziv funkcije

fdm_sl(0,1,[1 0],[0 1],N)

Za oba zadatka ćemo ispitati tri različite vrednosti od N.

Kad se unesu ulazni podaci, ova Matlab funckija prvo ispituje njihovu korektnost, odnosno kom graničnom problemu ovi podaci odgovaraju. Zatim se prelazi na formiranje matrice A, koja se neznatno menja u zavisnosti od toga koji zadatak rešavamo. Kao što je već rečeno, ova funkcija se takođe može iskoristiti i za rešavanje problema sa drugačijim graničnim uslovima, pa će shodno tome i pripadajuća matrica A, biti nešto drugačijeg oblika od već izračunatih.

U poglavlju 5 je pokazano da se rešavanje graničnih zadataka (1) i (2) korišćenjem metode konačnih razlika, zapravo svodi na rešavanje problema sopstvenih vrednosti, oblika

$$AY = \lambda Y$$

gde je λ sopstvena vrednost matrice A, a Y je odgovarajući sopstveni vektor. Shodno tome, nakon formiranja matrice A, iskorišćena je Matlab komanda

[Y,D]=eig(A)

koja daje vektor Y, čije su kolone sopstveni vektori, i dijagonalnu matricu D čije su vrednosti sopstvene vrednosti matrice A.

Nakon što se dobiju sopstveni vektori, radi se njihova grafička reprezentacija i upoređivanje sa tačnim rešenjima zadatka.

Sličan je princip primenjen i pri rešavanju graničnih problema (1) i (2) korišćenjem metode konačnih elemenata. Funkcija se poziva
za zadatak (1) sa

fem_sl(0,1,[1 0],[0 1],N)

za zadatak (2) sa

fem_sl(0,1,[1 0],[0 1],N)

U poglavlju 5 je pokazano da se pri rešavanju graničnih zadataka (1) i (2) korišćenjem metode konačnih elemenata, dolazi do generalisanog problema sopstvenih vrednosti oblika

$$AY = \Lambda BY$$

U ovom slučaju, veoma je korisna Matlab komanda

[V,D]=eig(A,B)

koja daje dijagonalnu matricu D uopštenih sopstvenih vrednosti i vektor Y, čije su kolone odgovarajući sopstveni vektori.

Matlab je veoma pogodan pri implementaciji ovakvih problema, jer se matrice mogu formirati u svega nekoliko redova, a rešavanje problema sopstvenih vrednosti matrica, na koje se naši polazni zadaci svode, se može automatski izračunati, uz pomoć već ugrađene Matlab funkcije eig. Takođe, pri pisanju korisničkih funkcija, nije striktno određen broj izlaznih podataka koje možemo zahtevati, pa tako, ako nas zanima izgled same matrice A u funkciji fdm_sl, potrebno je samo ubaciti zahtev u samoj definiciji funkcije, tj. pišemo

function [x,y,eigvals] = fdm_sl(x0,xn,a,b,N)

U naredna dva potpoglavlja će biti prikazani rezultati korišćenja metode konačnih razlika, a zatim i metode konačnih elemenata za rešavanje zadataka iz poglavlja 4, a zatim će dobijeni rezultati biti međusobno upoređeni.

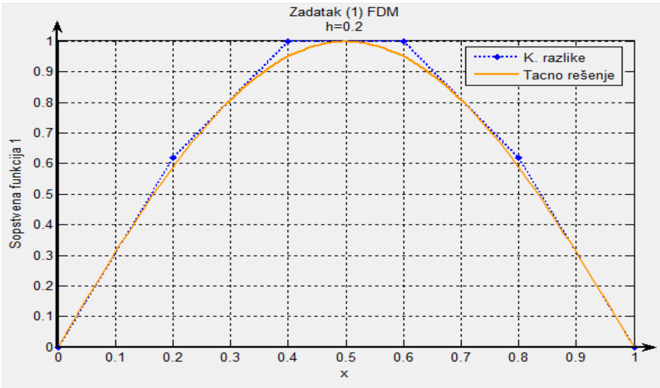
6.1 Rezultati metode konačnih razlika

Oba zadatka ćemo razmatrati na nekoliko mreža, počevši od mreže u kojoj je rastojanje između dva susedna čvora h=0.2, zatim h=0.1, i na kraju h=0.05.

<u>Granični zadatak (1)</u>

$\boxed{h=0.2}$

Na slici 10 je prikazano rešenje zadatka (1) dobijeno korišćenjem metode, na veoma retkoj mreži, gde je broj unutrašnjih čvorova četiri, a ukupan broj čvorova je šest.

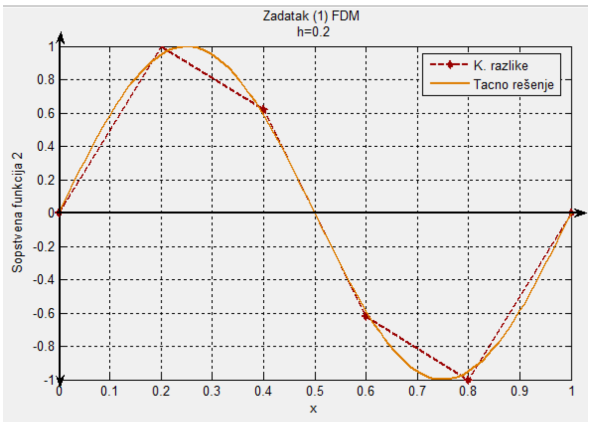


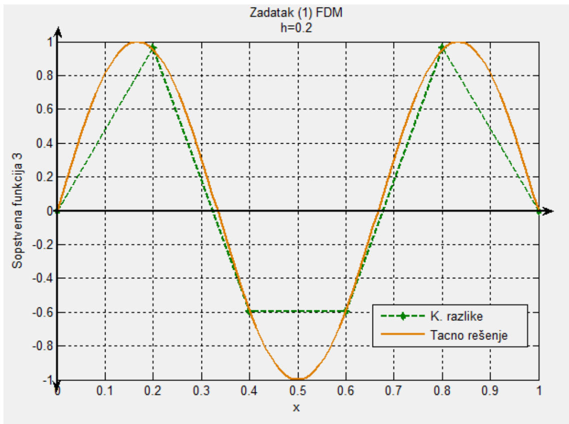
Slika 10. Zadatak (1) Metoda konačnih razlika – h=0.2.

Aproksimativno i tačno rešenje sopstvene funkcije

Na ovako retkoj mreži može se videti da metoda konačnih razlika solidno aproksimira rešenje jedino u delovima gde je ono približno linearne prirode, dok u ostalim delovima aproksimacija, koja je predstavljena tangentama u tačkama na polovini svakog intervala (odnosno između susednih čvorova), zavisi od promene krive rešenja.

Takođe, urađene su i aproksimacije za naredne dve sopstvene funkcije, što se može videti na slici 11. Kako ova rešenja imaju veće oscilacije, sa smanjenjem perioda oscilacije, aproksimacija je sve manje precizna. Tako, sa slike 11 se može videti da aproksimacija metodom konačnih razlika za slučaj sopstvene funkcije 3 (k=3) ne daje precizan rezultat.



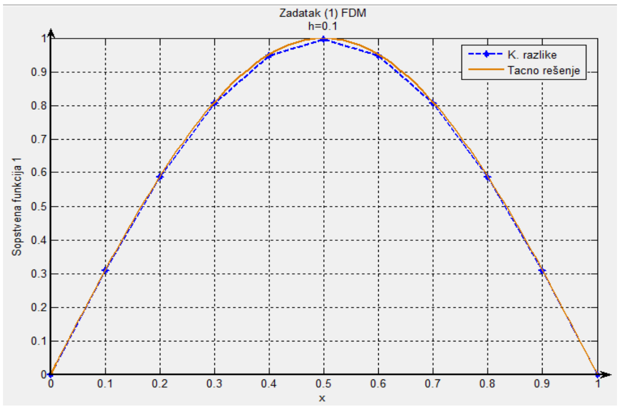


a) b)

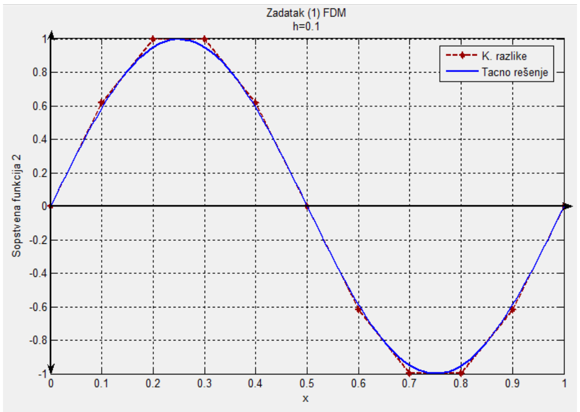
Slika 11. Zadatak (1) metoda konačnih razlika. Aproksimativno rešenje a) sopstvene funkcije 2, i b) sopstvene funkcije 3

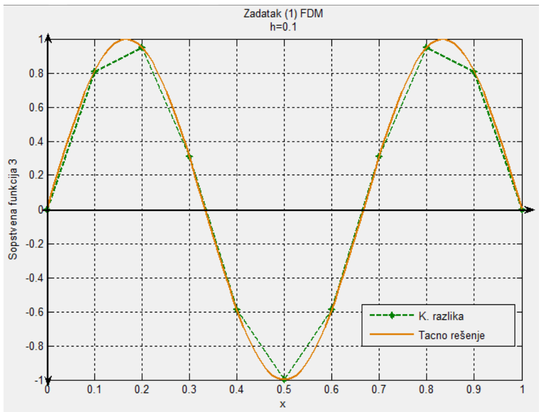
h=0.1

Ukupan broj čvorova u ovom slučaju je jedanaest. Na osnovu (5.3) možemo očekivati da će se sa smanjenjem rastojanja između čvorova mreže, tačnost aproksimacije povećati. Zaista, slika 12 nam to i potvrđuje. Dobijene aproksimacije su daleko bolje od onih dobijenih korišćenjem prethodne mreže. Pošto aproksimacija u slučaju sopstvene funkcije 3 u pojedinim delovima i dalje nije dovoljno dobra, uradićemo još jednu diskretizaciju intervala, sa dvostruko manjim rastojanjima.



a)





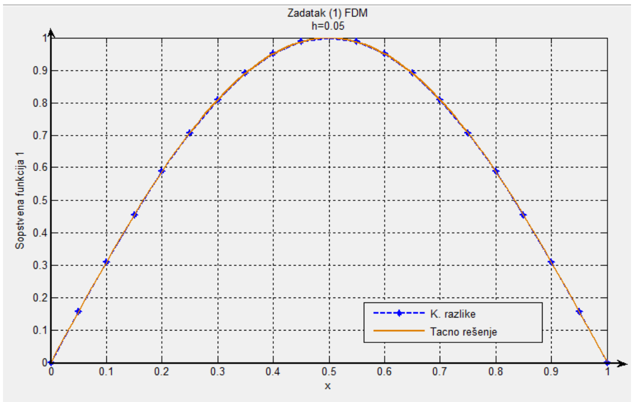
b) c)

Slika 12. Zadatak (1) metoda konačnih razlika – h=0.1. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

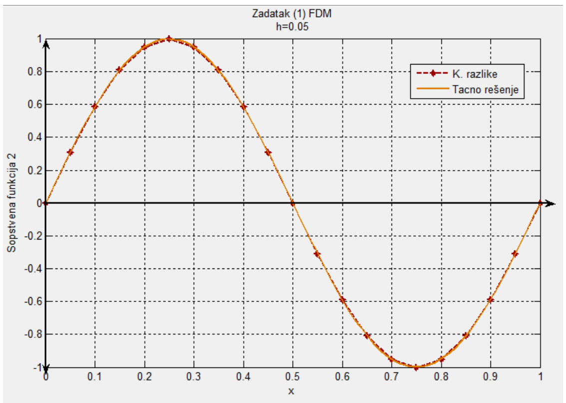
h=0.05

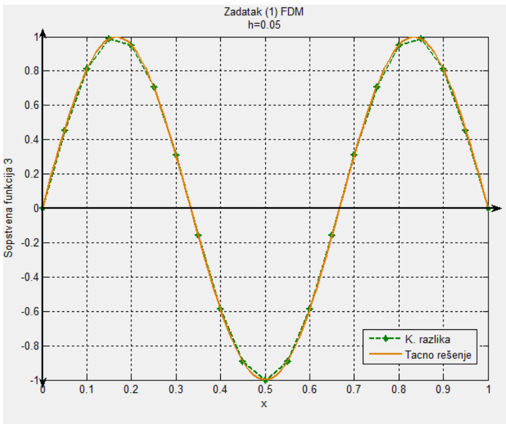
Ukupan broj čvorova u ovom slučaju je dvadeset i jedan. Konačne razlike sa ovako odabranom mrežom daju bolju aproksimaciju rešenja nego prethodne dve. Za slučaj sopstvene funkcije 1 dva rešenja se gotovo poklapaju; slično se može zaključiti i za funkciju 2, na većem delu mreže. Daljim usitnjavanjem mreže, mogu se postići ovakve aproksimacije i za sopstvene funkcije većih frekvencija.

Grafici prve tri sopstvene funkcije graničnog zadatka (1), uporedo sa tačnim rešenjima problema, su date na slici 13.



a)





b) c)

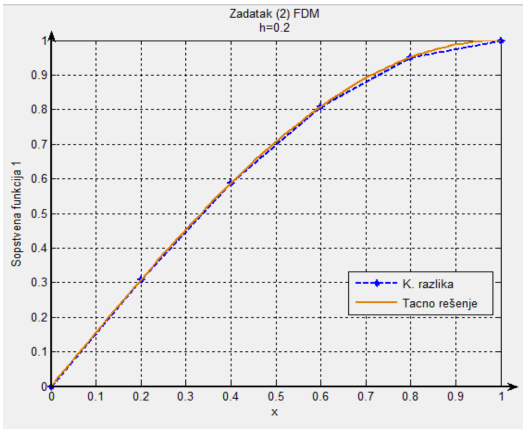
Slika 13. Zadatak (1) metoda konačnih razlika – h=0.05. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

<u>Granični zadatak (2)</u>

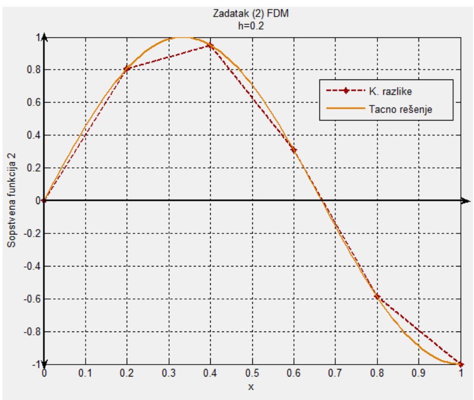
Nadalje ćemo posmatrati samo mreže, kod kojih su rastojanja između čvorova h=0.2 i h=0.05. Prvu koristimo, jer nas zanima ponašanje metode na retkoj mreži, a drugu, jer je dovoljno gusta.

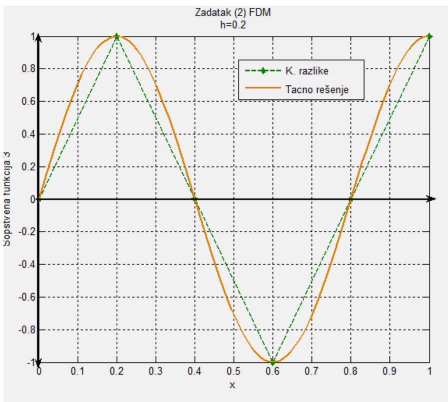
h=0.2

Zaključci izvedeni u prethodnom zadatku, mogu se iskoristiti i u ovom slučaju. Dakle, za retku mrežu, problem pri aproksimaciji nastupa tamo gde se funkcija menja, Slika 14. Najbolja aproksimacija se postiže za sopstvenu funkciju 1, a svaka sledeća funkcija je aproksimirana sa manjom preciznošću.



a)



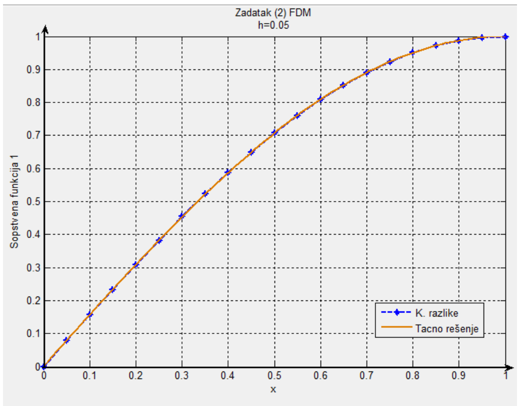


b) c)

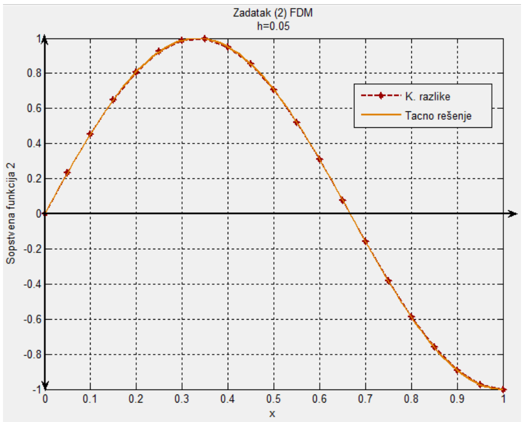
Slika 14. Zadatak (2) metoda konačnih razlika – h=0.2. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

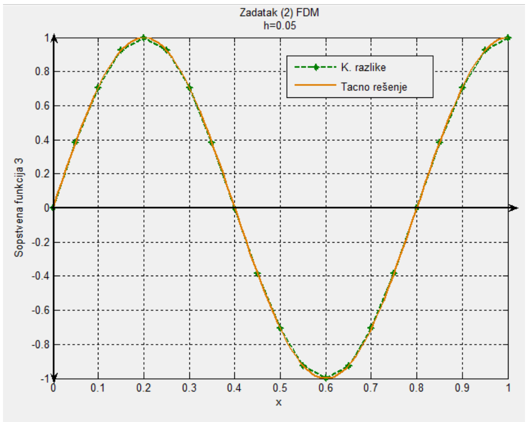
$\boxed{h=0.05}$

Na slici 15Slika 15 je prikazano da su u ovom slučaju aproksimacije rešenja dobijene sa prilično zadovoljavajućom tačnošću.



a)





b) c)

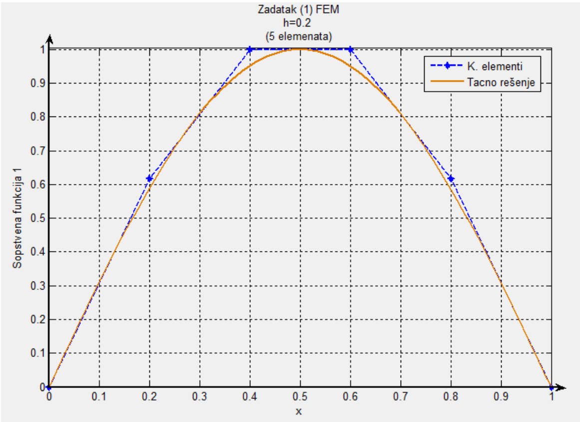
Slika 15. Zadatak (2) metoda konačnih razlika – h=0.05. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

6.2 Rezultati metode konačnih elemenata

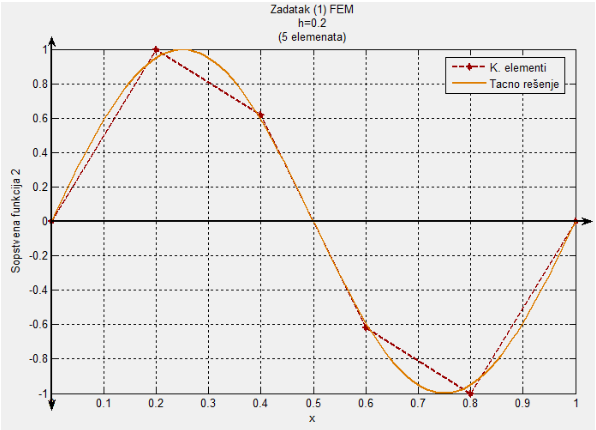
Granični zadatak (1)

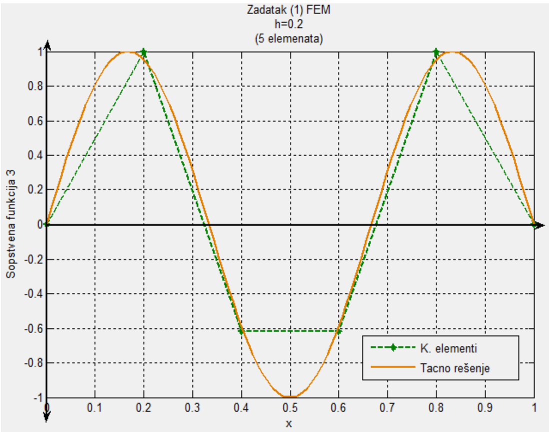
$\boxed{h=0.2}$

Broj elemenata ove mreže je pet, od kojih su tri unutrašnja. Sa slike 16 se može zaključiti da su za ovu mrežu aproksimacije rešenja graničnog problema (1) slične onim dobijenim korišćenjem metode konačnih razlika. Kao i kod prethodne metode, i ovde je aproksimacija manje tačna tamo gde se funkcija menja. U ovoj metodi je to zato što na svakom elementu funkciju aproksimiramo deo po deo lineranim funkcijama. Bolji rezultati se stoga dobijaju pri korišćenju gušće mreže.



a)



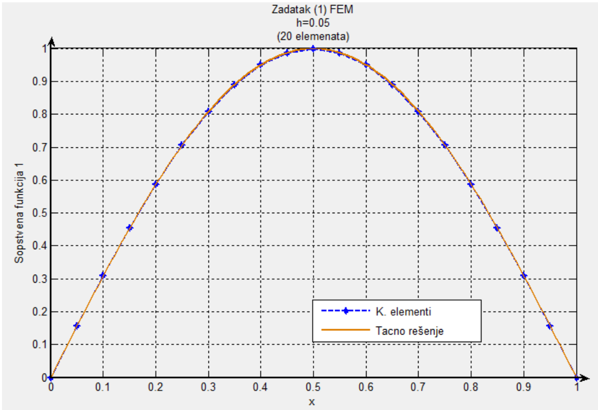


a) b)

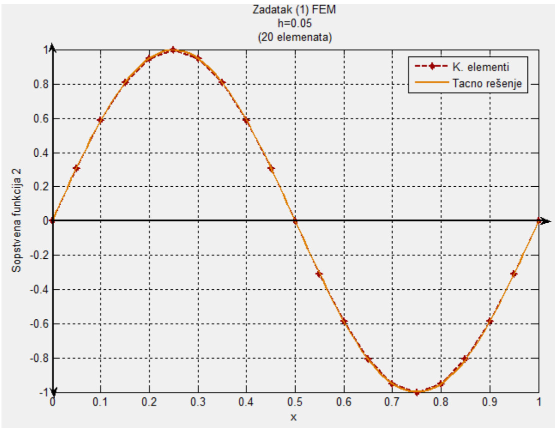
Slika 16. Zadatak (1) metoda konačnih elemenata – h=0.2. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

h=0.05

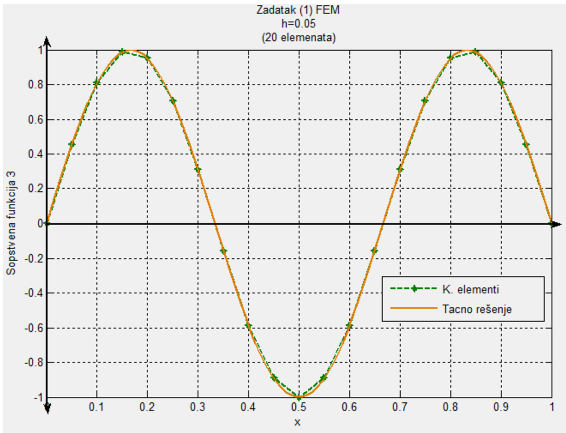
Rezultati dobijeni u ovom slučaju su gotovo identični onim vezanim za metodu konačnih razlika. I ovde važi da se daljim usitnjavanjem mreže postižu bolje aproksimacije sopstvenih funkcija većih frekvencija.



a)



b)



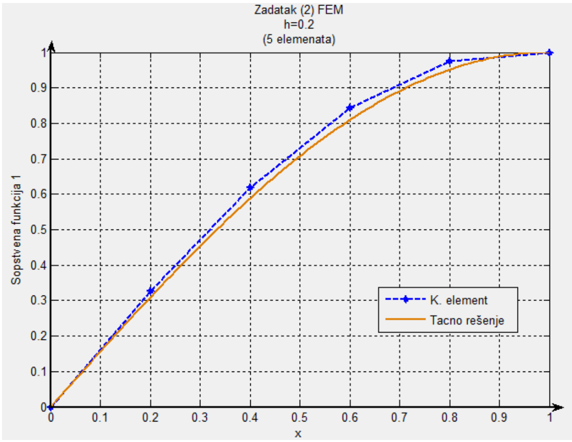
c)

Slika 17. Zadatak (1) metoda konačnih elemenata – h=0.05. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

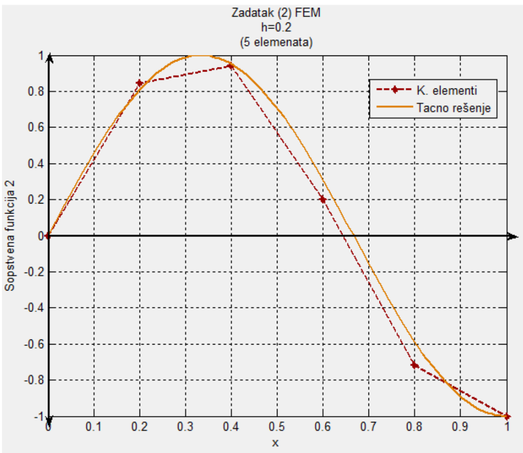
Granični zadatak (2)

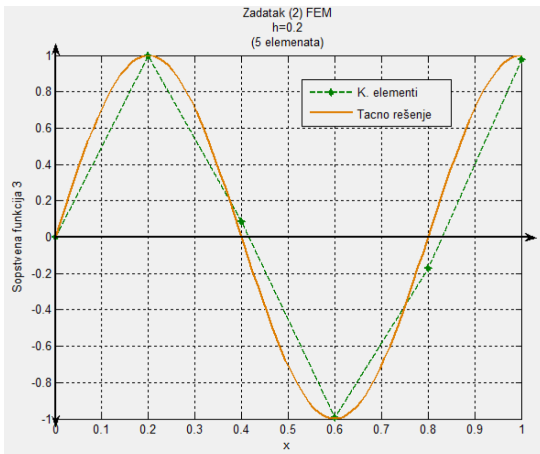
h=0.2

Ovde su rezultati nešto drugačiji od onih koji se dobijaju korišćenjem metode konačnih razlika. Naime, primećuje se da su aproksimacije nešto bolje u okolini granica, dok na preostalom delu domena, one imaju nezatno manje vrednosti od onih dobijenih metodom konačnih elemenata. Ovde se jasno vidi razlika u načinu traženja aproksimacije ovih dvaju metoda – prva to vrši po svakom čvoru, dok metoda konačnih elemenata rešenja aproksimira po elementu intervala.



a)



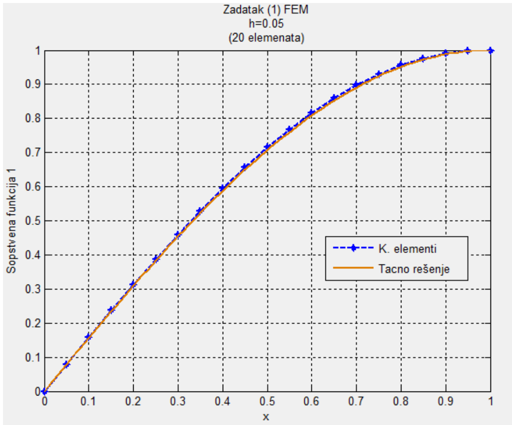


b) c)

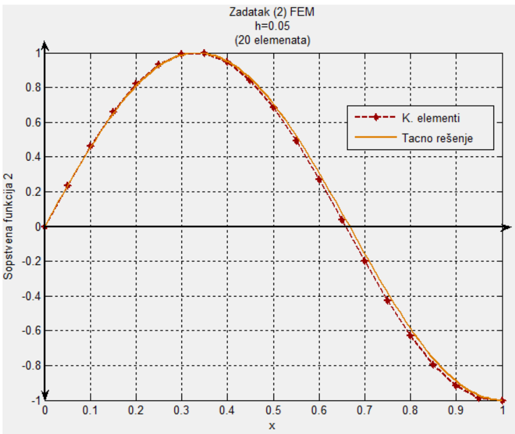
Slika 18. Zadatak (2) metoda konačnih elemenata – h=0.2. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

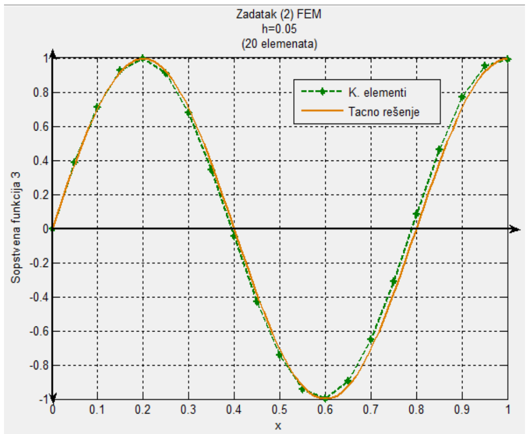
h=0.05

Na mreži od dvadeset elemenata dobijaju se znatno bolje aproksimacije rešenja. Međutim, primećuje se da u nekim slučajevima, rešenja koja daje metoda konačnih razlika su približnija tačnom, od onih koja daje metoda konačnih elemenata, slika 19.



a)





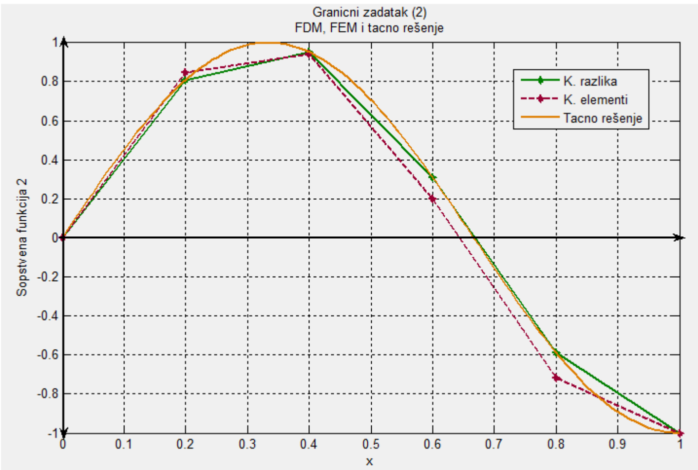
b) c)

Slika 19. Zadatak (2) metoda konačnih elemenata – h=0.05. Upoređivanje tačnih rešenja sa odgovarajućim sopstvenim funkcijama: a) S. funkcija 1, b) S. funkcija 2, c) S. funckija 3

6.3 Poređenje rezultata

U prethodna dva potpoglavlja smo videli kako metode konačnih razlika i konačnih elemenata aproksimiraju dva granična Šturm-Liuvilova test zadatka. Prvo je pokazano da obe metode uspešno rešavaju zadatke pri upotrebi nešto finije mreže čvorova, odnosno elemenata. Naime, dovoljno je koristi mrežu od 21 čvora kod konačnih razlika, odnosno 20 elemenata kod konačnih elemenata, da bi se postigle dovoljno dobre procene. Ovo naročito važi za aproksimacije sopstvenih funkcija niže frekvencije, dok je za bolju aproksimaciju funkcija viših frekvencija (odnosno, manjih perioda frekvencije) poželjno koristiti nešto finije mreže. Ovo je generalno problem obeju metoda, pri rešavanju problema oblika (1.17)(1.18). Jedan od načina da se taj problem prevaziđe je dat u [6].

Pri rešavanju graničnog problema (1) primećeno je da se metode ponašaju na sličan način, kao i da rešenja ne odstupaju jedno od drugog. Međutim, to nije slučaj i kod graničnog problema (2), gde je razlika u načinu aproksimacije rešenja više izražena. Na slici 20 se za sopstvenu funkciju 2 graničnog problema (2), za h=0.2 vidi da metoda konačnih elemenata nešto bolje aproksimira same krajeve intervala, dok na većem delu preostalog intervala bolju aproksimaciju daje metoda konačnih razlika. Eventualno poboljšanje rešenja u metodi konačnih elemenata treba tražiti u povoljnijem odabiru bazisnih funkcija, kao što su recimo funkcije sastavljene deo po deo od polinoma višeg stepena. Treba napomenuti da je i kod metoda konačnih razlika moguće koristi šeme povišene tašnosti, ako korišćena metoda ne daje dovoljno precizne rezultate. Međutim, ovakve izmene u okviru ove dve metode doprinose nešto složenijim algoritmima, odnosno povećanju broja čvorova (konačne razlike), što nije uvek najbolje rešenje, jer se čak i za jednostavne probleme, kao što su test problemi (1) i (2), računski broj operacija znatno povećava. Zato, pri izmenama metoda uvek treba uzeti u obzir odnos računarskog „gubitka“ prema preporučenoj tačnosti.



Slika 20. Granični zadatak (2) – h=0.2. Upoređivanje tačnog rešenja sa rezultatima dobijenim korišćenjem metoda.

ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljen je Šturm-Liuvilov granični problem, i dve numeričke metode koje mogu doprineti njegovom rešavanju.

Prvi deo rada objašnjava važnost rešavanja ovog problema sa stanovišta primenjene matematike i fizike. Zbog velike primene u ovim granama nauke, pomenute su metode numeričke matematike, koje se koriste za njegovo rešavanje, kao i softverski paketi sa istom namenom. Da bi bilo jasnije kakva rešenja treba da budu, pokazana su svojstva koja rešenja ovog problema poseduju.

Pokazano je da popularne metode numeričke matematike – metoda konačnih razlika i metoda konačnih elemenata mogu uspešno rešiti jednostavne Šturm-Liuvilove probleme za koje je poznato analitičko rešenje. Pri rešavanju graničnog test problema (1) ove dve metode dovode do gotovo identičnih rezultata, dok je pri rešavanju graničnog test zadatka (2) razlika u načinu na koji ove dve metode vrše aproksimacije rešenja više izražena. Na veoma retkoj mreži nešto bolju aproksimaciju daje metoda konačnih razlika, dok na gušćoj mreži obe metode uspešno rešavaju problem. Eventualno poboljšanje aproksimacije u metodi konačnih elemenata treba tražiti u povoljnijem odabiru bazisnih funkcija, kao što su recimo funkcije sastavljene deo po deo od polinoma višeg stepena. Treba napomenuti da je i kod metoda konačnih razlika moguće koristi šeme povišene tašnosti, ako korišćena metoda ne daje dovoljno precizne rezultate.

Svaka od metoda može da bude kandidat za rešavanje opšteg Šturm-Liuvilovog graničnog problema. Metoda konačnih razlika je jednostavnija za primenu, jer zahteva manje računanja, daje dovoljno dobre rezultate i lakša je za implementaciju od metode konačnih elemenata. Sa druge strane, korišćenjem metode konačnih elemenata je pokazano da pri promeni graničnih uslova nije bilo potrebno izvršiti nikakva dodatna izračunavanja, jer se granični uslovi mogu prirodno uvrstiti u slabu formu jednačine. (ova osobina važi i pri primeni metode u 2D i 3D problemima). Takođe, metoda konačnih elemenata je fleksibilnija od metode konačnih razlika, jer može koristiti i neravnomernu mrežu, ili polinome drugačijeg oblika od polaznog, uz naravno nešto složeniji algoritam.

Dalji rad se odnosi upravo na rešavanju opšteg Šturm-Liuvilovog problema (1.17), (1.18), primenom pomenutih metoda.

DODATAK A – DEFINICIJE OSNOVNIH POJMOVA

A 1. Metrički prostori

Definicija 1. (X,d) je metrički prostor ako funkcija $d: X \times X \to [0,+\infty)$ zadovoljava sledeće uslove:

$$d(x,y) = 0 \quad \text{akko} \quad x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \text{ nejednakost trougla.}$$

Definicija 2. Ovako definisanu funkciju d nazivamo metrikom na X.
Metrički prostor (X,d) je **kompletan** ako u njemu konvergira svaki Košijev niz.

Definicija 3. Neka je (X,d) metrički prostor. Za $K \subseteq X$ kažemo da je kompaktan ako svaki niz K ima konvergentan podniz u K. Kada je $K = X$ kažemo da je (X,d) kompaktan metrički prostor.
Više o metričkim prostorima se može naći u [2].

A 2. Normirani i Banahovi prostori

Definicija 1. Neka je X vektorski prostor nad R ili C.
Funkcija $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ sa osobinama:

$$\|x\| = 0 \text{ akko } x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

naziva se norma, a $(X,\|\cdot\|)$ normirani prostor.

Definicija 2. Ukoliko je normirani prostor X kompletan u odnosu na metriku koju indukuje njegova norma, onda se naziva Banahov prostor.

Definicija 3. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem.
Preslikavanje $A: X \to Y$ sa osobinama:

$$A(x+y) = Ax + Ay \text{ i}$$
$$A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad x, y \in X, \quad \lambda - \text{skalar}$$

naziva se linerani operator (linearno preslikavanje).

Definicija 4. Neka su X i Y normirani prostori nad istim poljem, i neka je $A : X \to Y$ linearni operator. A se naziva ograničen operator ako

$$(\exists M = \text{const} < +\infty) \; \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|, \; \forall x \in X.$$

Definicija 5. Norma operatora A se definiše na sledeći način:

$$\|A\| = \inf \{M : \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|, \; \forall x \in X\}.$$

Definicija 6. Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$. A je neprekidan operator u tački x_0 ako za svako $x_n \to x_0$ važi $A(x_n) \to A(x_0)$.
Više o normiranim prostorima se može naći u [2].

A 3. Hilbertovi prostori

Definicija 1. Neka je X vektorski prostor nad poljem K ($K = R$ ili $K = C$). Neka je $\Phi : X \times X \to K$ preslikavanje za koje zahtevamo da ima sledeće osobine:

$$\Phi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\Phi(x, z) + \beta\Phi(y, z) \text{ - linearnost po prvoj promenljivoj}$$
$$\Phi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\Phi(x, y) + \overline{\beta}\Phi(x, z) \text{ - antilinearnost po drugoj promenljivoj}$$

Ovako definisano preslikavanje se naziva **seskvilinearna forma.**
Ako je ovo preslikavanje linearno i po drugoj promenljivoj, nazivamo ga bilinearna forma.

Definicija 2. Ako je $\Phi(f, g) = \overline{\Phi(g, f)}$, seskvilinearna forma se naziva **hermitska forma**.

Definicija 3. Hermitska forma Φ za koju važi da je $\Phi(f, f) > 0$ za svako $f \neq 0$, $f \in X$, naziva se skalarni proizvod. Prostor X u koji je uveden skalarni proizvod naziva se unitarni prostor.

Definicija 4. Hilbertov prostor je svaki Banahov prostor čija je norma indukovana nekom seskvilinearnom formom sa osobinom $\Phi(f, f) > 0$ za svako $f \neq 0$.

Definicija 5. Adjungovan operator operatora A iz prostora ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru H je operator A^* za koga važi: $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$. Pri tome važi: $\|A\| = \|A^*\|$. Ako je $A = A^*$ onda se A naziva samoadjungovan operator.

Definicija 6. Operator A iz prostora ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru H naziva se pozitivnim i označava sa $A \geq 0$, ukoliko mu je kvadratna forma nenegativna, tj. ukoliko je $\langle Af, f \rangle \geq 0, \ \forall f \in H$. Naziv strogo pozitivan označava operatore za koje važi $\langle Af, f \rangle > 0, \ \forall f \in H \setminus 0$.

Više o Hilbertovim prostorima se može naći u [2].

LITERATURA

[1] Aceto L., Ghelardoni P., 2009, Magherini C., BVMs for Sturm-Liouville eigenvalue estimates with general boundary conditions, JNAIAM, vol.4, no.1-2

[2] Arsenović M., Dostanić M., Jocić D., 1998, *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

[3] Bailey, P. B., Gordon, 1978, M. K. and Shampine, L. F., *Automatic solution of the Sturm-Liouville problem*, ACM Trans. Math. Softw. vol. 4, pp. 193-207

[4] Bailey P. B., Garbow B. S., Kaper H. G., and Zettl A. , 1991, *Eigenvalue and eigenfunction computations for Sturm-Liouville problems*, ACM Trans. Math. Softw. vol. 17, pp. 491-499

[5] Bathe K. J., 1996, *Finite element procedures*, Prentice Hall

[6] Berghe L.V., Meyer H.D., 1991, *Accurate computation of higher Sturm-Liouville eigenvalues*, Numer. Math. vol. 59, pp. 243-254

[7] Berghe V. G., De Meyer H. , 1994, *A finite-element estimate with trigonometric hat functions for Sturm-Liouville eigenvalues*, Journal of Comp and Applied Mathematics, 53, pp. 389-396

[8] Everitt W.N., 2004, A catalogue of Sturm-Liouville differential equations, n.p.

[9] Ixaru, L. Gr., Mezer, H. De, Vanden Berghe, G., *SLCPM12 – A program for solving regular Sturm-Liouville problems*, 1999, Computer Physics Communications vol. 118, pp. 259-277

[10] Jovanović, B., 1984, *Numerička analiza*, Prirodno matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

[11] Jovanović, B., Radunović, D., 1993, *Numerička analiza*, Matematički fakultet, Beograd

[12] Kiusalaas J., 2005, *Numerical methods in engineering with MATLAB*, Cambridge University Press

[13] Ledoux, V., Van Daele, M., Vanden Berghe, G. , 2005, *Matslise: A Matlab package for the Numerical Solution of Sturm-Liouville and Shrödinger equations*, ACM Trans. on Math. Softw., vol. 31, pp. 532-554

[14] Morton K.W., Mayers D.F., 2005, Numerical solution of partial Ddfferential equations, An introduction. Cambridge University Press

[15] Prikazchikov V.G.; Loseva M.V., 2004, High Accuracy Finite Element Method for Sturm-Liouville problem, Cyb. Syst. Analysis, vol. 40, pp. 1-6

[16] Pruess, S. and Fulton, C, 1993, *Mathematical software for Sturm-Liouville problems*, ACM Trans. Math. Softw. vol. 19, pp. 360-376

[17] Pryce, J. D. and Marletta, M. , 1992, *Automatic solution of Sturm-Liouville problems using the Pruess method*, J. Comput. Appl. Math, vol. 39, pp. 57-78

[18] Pryce J. D., 1994, *Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press

[19] Pryce J. D. , 1999, *A test package for Sturm-Liouville solvers*, ACM Trans. Math. Softw. vol. 25, pp. 21-57

[20] Schrödinger E., 1926, *An Undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, Physical Review, vol. 28, no. 6, pp. 1049-1070

[21] Šćepanović, R., Knežević-Miljanović, J., Protić, Lj., 1999, Diferencijalne jednačine, Matematički fakultet, Beograd

[22] Sturm C., Liouville, J., 1837, Extrait d'un Mémoire sur le développment des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfare à une méme équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variabe, J. Math. Pures Appl. vol. 2, pp. 220-223

[23] Süli E., 2007, Finite element methods for partial differential equations, n.p.

[24] Zettl A, 2005, *Sturm-Liouville Theory*, Mathematical surveys and monographs, vol. 121

[25] Zienkiewicz O.C., 2000, *The finite element method*, Butterworth-Heinemann