26

Serija II. T. 3. Zagreb 1948. Broj 4 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SUR LES ENSEMBLES ORDONNES DENOMBRABLES

par

Georges Kurepa

Zagreb 1948

Štamparski zavod „Ognjen Prica" • Zagreb, Savska cesta 31

SUR LES ENSEMBLES ORDONNES DENOMBRABLES

par

Georges Kurepa

1. G. Cantor a prouvé, d'une part, que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (v. [2], p. 297)[1] et d'autre part, que l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classe n'est pas dénombrable (v. [1], p. 332, théor. D et p. 333, théor. F).

En désignant (v. [1], p. 304, formule (1)) respectivement par

(1) $$\eta,\ \Omega$$

les types d'ordre de ces deux ensembles-là chacun étant ordonné d'après la grandeur de ses éléments, et en convenant que

(2) pX désigne la puissance de X[2)]

on a donc

(3) $$p\eta = \aleph_0,\ p\Omega = \aleph_1.$$

D'autre part, le type d'ordre de tout ensemble ordonné au plus dénombrable est, au plus égal à η[3]; en particulier, α étant un nombre ordinal quelconque $< \Omega$, on a

(4) $$\alpha \leq \eta$$

---

[1] Les crochets se rattachent à la Bibliographie (voir la fin de la Note).

[2] Cantor désigne pX par $\overline{\overline{X}}$ ou $\overline{X}$, suivant que X est un ensemble ou un type d'ordre (v. [2], p. 282, formule (3) et p. 298, formule (5)).

[3] Voir Hausdorff, [3], p. 99; aussi Cantor, [2], p. 305.

puisque l'ensemble ordonné des nombres ordinaux $< \alpha$ est au plus dénombrable et du type d'ordre α[4].

Soit, pour un ensemble ordonné E,

(8) $$\Gamma E = \sup_F t\, F \quad (\sup = \text{borne supérieure})$$

F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E. Au lieu de

(9) $$\Gamma E$$

on écrira aussi $\Gamma\,(t\,E)$ et réciproquement.

Ceci étant, on a donc

(10) $$p\,\eta = \aleph_0, \quad \Gamma \eta = \Omega.$$

Le but de la Note c'est de prouver les deux propositions suivantes:

Théorème 1 (caractérisation des E dénombrables non clairsemés). La relation

(11) $$t\,E = \eta \qquad \text{(voir (1) et (5))}$$

est equivalente à ce que

(12) $$p\,E = \aleph_0, \quad \Gamma E = \Omega \qquad \text{(voir (2) et (8))}.$$

Théorème 2. Pour un ensemble ordonné E la relation

(13) $$\Gamma E + \Gamma(E^*) < \Omega$$ [5]

---

[4] La façon d'écrire se rattache à celle que Cantor emploie pour des ensembles bien ordonnés (Ibidem, p. 321): en désignant pour un ensemble ordonné E par

(5) $$t\,E$$

le type d'ordre de E, nous écrirons, F étant un ensemble ordonné quelconque,

(6) $$t\,E \leq t\,F \quad \text{ou} \quad t\,F \geq t\,E,$$

si E est semblable à un sous-ensemble de F. La relation

(7) $$t\,E = t\,F$$

équivaudra à ce que simultanément $tE \leq tF$ et $tF \leq tE$. Si $tE \leq tF$ sans que $tF \leq tE$, on écrit $tE < tF$ (cf. Cantor loc. cit. p. 285).

Remarquons que l'egalité $tE = tF$ ne suffit pas pour que E et F soient semblables c'est-à-dire pour que $tE \equiv tF$. Par exemple $1 + \eta = \eta$ sans que $1 + \eta \equiv \eta$. Remarquons toutefois que, d'après Banach [1] si $tE = tF$, on peut décomposer les ensembles E et F en deux parties disjointes respectivement semblables.

[5] E^* désigne l'ensemble des points de E ordonnés par la relation inverse à celle ordonnant E. Par conséquent, $\Gamma E^* = \mathrm{Sup}\, t\,(F^*)$, F parcourant tous les sous-ensembles, inversement bien ordonnés de E.

est équivalente aux systèmes de relations

(14) $$pE \leq \aleph_0, \quad \eta \text{ non} \leq tE$$

et est donc caractéristique pour des ensembles ordonnés au plus dénombrables et clairsemés au point de vue d'ordre.[6]

Remarque 1. Dans le côté gauche de (13) on ne peut omettre aucun terme; par exemple, pour tout ensemble bien ordonné E on aura $\Gamma(E^*) \leq \omega$, alors que pE peut être un aleph quelconque.

Ajoutons que $pE \leq 2^{p(\Gamma E + \Gamma E^*)}$ (il y a une meilleure évaluation de pE, même dans le cas des E partiellement ordonné; cf. Kurepa, [4]).

Remarque 2. Dans le théorème 1 on peut remplacer ΓE par $\Gamma(E^*)$.

2. *La condition du théorème 2 est nécessaire.* En effet, nous allons prouver que si E vérifie (13) alors E est au plus dénombrable et clairsemé ordinalement.

Que l'ensemble E est clairsemé ordinalement c'est bien évident, puisque, dans le cas contraire, E contiendrait un sous-ensemble dense, soit F', et dès lors un sous-ensemble semblable à l'ensemble des nombres rationnels c'est-à-dire $\eta \leq tE$ et par conséquent $\Gamma\eta \leq \Gamma E$. Or, $\Gamma\eta = \Omega$ et par conséquent $\Omega \leq \Gamma E$ contrairement à l'hypothèse (13).

Prouvons encore que $pE \leq \aleph_0$.

Pour le voir, définissons pour deux points a, b de E la relation $\backsim$ que voici (cf. Hausdorff [2], p. 96):

(15) $$a \backsim b \text{ si et seulement si}^{7}$$

(15') $$p\,[a, b]_E \leq \aleph_0 \quad \text{(cf. (2))}.$$

---

[6] E est dit *clairsemé* au point de vue d'ordre s'il ne contient aucun sous-ensemble F tel que, entre tout couple de points de F il y ait d'autres points de F.

Remarquons qu'un ensemble linéaire peut être composé de points *isolés* et pourtant, au point de vue d'ordre, être dense: tel est le cas de l'ensemble des centres des intervalles contigus d'un ensemble linéaire fermé nulle-part dense.

[7] $[a, b]_E$ désigne l'ensemble des points de E situés entre a et b, ces deux points, y étant inclus. En particulier, $[a, a]_E$ se compose du point a.

On vérifie sans peine que $\sim$ est une relation d'équivalence ou de classification.[8]

Si alors, pour un $a \varepsilon E$, l'on désigne par

(16) $$C(a)$$

l'ensemble de tous les $b \varepsilon E$ tels que $a \sim b$, on aura des lemmes suivants:

Lemme 1. $C(a)$ est une portion de E c'est-à-dire un sous-ensemble X de E tels que si $a \varepsilon X$, $b \varepsilon X$, alors aussi $[a, b]_E \subseteq X$.

Lemme 2. Si $a \varepsilon E$, $b \varepsilon E$, alors ou bien $C(a) = C(b)$ ou bien $C(a)$,, $C(b)$ sont disjoints.

Lemme 3. $C(a)$ est au plus dénombrable.

Le lemme étant évident si $C(a)$ a un premier point et un dernier point, supposons que $C(a)$ n'ait pas un premier point pas plus qu'un dernier point. Supposons, par impossible, que $C(a)$ soit infini et non-dénombrable et de plus que l'ensemble $(a, \cdot)_A$ des points de $A \equiv C(a)$ succédant à a soit $> \aleph_0$.

Soit alors

$$a \equiv a_0, \ a_1, \ \ldots, \ a_\xi, \ \ldots, \ (\xi < \alpha)$$

un sous-ensemble bien ordonné de A tel que

$$\sum_\xi (\cdot, a_\xi)_A \equiv A, \ (\xi < \alpha),$$

le signe $(\cdot, x)_A$ désignant tous les points de A précédant le point x. On a nécessairement, $\alpha \leq \Gamma A \leq \Gamma E$ et donc à la suite de (13), $\alpha < \Omega$. Or, chacun des ensembles $[a_0, a_\xi]_A$ étant au plus dénombrable puisque $a_0 \sim a_\xi$, la relation évidente

$$[a, \cdot)_A = \sum_\xi [a_\xi, a_{\xi+1}]_A, \ (\xi < \alpha)$$

nons dirait, α étant au plus dénombrable, que l'ensemble $(a, \cdot)_A$ des points de A succédant à a serait au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse.

Lemme 4. Il n'y a pas de classes $C(a)$ consécutives c'est-à-dire il n'y a aucun couple d'élements a, b de E tels que la portion $C(a)$ de E précède immédiatement la portion $C(b)$ de E.

---

[8] Une relation binaire ϱ est une relation d'équivalence dans un ensemble M si

1) $a \varrho a$, $(a \varepsilon M)$,
2) $a \varrho b$ entraîne $b \varrho a$, quels que soient $a \varepsilon M$, $b \varepsilon M$,
3) $a \varrho b$, $b \varrho c$ entraînent $a \varrho c$, quels que soient $a \varepsilon M$, $b \varepsilon M$, $c \varepsilon M$.

En effet, dans le cas contraire, chacune des portions $C(a)$, $C(b)$ étant, d'après le lemme 3, au plus dénombrable, l'ensemble $C(a)+C(b)$ le serait encore et à la suite de (15), $a \backsim b$ et donc $C(a) \equiv C(b)$.

L e m m e 5. Quel que soit $a \varepsilon E$, on aura $C(a) = E$.

En effet, si l'on avait deux portions distinctes $C(a)$, $C(b)$, on en aurait, d'après le lemme 4, une infinité F telles que entre deux éléments quelconque de F, il y en a d'autres; si alors on choisit un point de chaque élément de F, on obtiendrait un sous-ensemble dense, soit A, de E, et dès lors $\eta \leq t\,A \leq t\,E$ donc $\eta \leq t\,E$, contrairement à la seconde relation (14).

Ainsi donc le lemme 5 est prouvé, ce qui, vu le lemme 3, entraîne $p\,E \leq \aleph_0$.

3. *La condition du théorème 2 est suffisante.* En effet, si les relations (14) n'avaient pas pour conséquence la relation (13), on aurait $\Gamma E + \Gamma(E^*) > \Omega$ et dès lors au moins un des deux nombres ordinaux ΓE, $\Gamma(E^*)$ serait $= \Omega$, disons $\Gamma E = \Omega$. Ainsi donc, on aurait $\Gamma E = \Omega$, $p\,E = \aleph_0$ et, d'après le théorème 1 que nous allons établir, $\eta = t\,E$, contrairement à (14).

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1.

4. Que la condition (11) entraîne (12) c'est ce que nous avons rappelé dans (3).

Il s'agit encore de prouver la réciproque c'est-à-dire que (12) entraîne (11) ce qui revient à démontrer que E contient un sous-ensemble dense.

Définissons dans E, une relation binaire $\backsim$ que voici:

(17) $\quad a \backsim b$ signifie que $a \varepsilon E$, $b \varepsilon E$ et $\Gamma\,[a, b]_E < \Omega$.

On vérifie que la relation $\backsim$ est une relation de classification dans E[8]. Soit alors, pour un $a \varepsilon E$, $C(a)$ la classe de tous les $x \varepsilon E$ vérifiant $x \backsim a$. Les lemmes 1, 2 et 4 subsistent encore pour la relation (17).

L e m m e 6. $\Gamma C(a) < \Omega$ quel que soit $a \varepsilon E$ (cf. [8]).

Le lemme 6 est évident si la portion $C(a)$ a un premier élément, soit x, et un dernier élément, soit y, puisque, dans ce cas, d'une part, $[x, y]_E = C(a)$ et d'autre part $x \backsim y$. Si $C(a)$ ne contient pas un dernier point, soit

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

une suite croissante de points de $C(a)$ et

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

une suite monotone non croissante de points de $C(a)$ tels que

$$C(a) \equiv \sum_n [a_n, b_n]_E, \quad (n < \omega).$$

L'existence des suites a_n, b_n étant évidente, nous en concluons que.

$$\Gamma C(a) = \sup_n \Gamma [a_n, b_n]_E, \quad (n < \omega).$$

Or, $a_n \varepsilon C(a)$, $b_n \varepsilon C(a)$ signifient que $a_n \backsim b_n$ c'est-à-dire $\Gamma [a_n, b_n] < \Omega$.

L'ordinal $\Gamma C(a)$ étant limite d'une suite au plus dénombrable d'ordinaux $< \Omega$, il est lui-même $< \Omega$.

Soit

(18) $$C$$

l'ensemble des classes $C(a)$, $(a \varepsilon E)$, ordonné par la convention que, A, B étant deux éléments de C, alors A précède B dans C si la portion A de E est dans E à gauche de la portion B de E.

Lemme 7. L'ensemble ordonné C a du moins deux éléments distincts.

C'est que, autrement, la relation évidente $E = \sum_a C(a)$, $(a \varepsilon E)$ entraînerait que E serait l'élément unique de C et à ce titre, d'après le lemme 6, on aurait $\Gamma E < \Omega$, contrairement à la condition (12).

Lemme 8. L'ensemble ordonné C est dense et dénombrable. C'est une conséquence immédiate des lemmes 4,6 et de la dénombrabilité de E, puisque $p\,C \leq p\,E = \aleph_0$. Par conséquent, $t\,C = \eta$.

Or, l'ensemble ordonné C est semblable à un sous-ensemble de E: pour le voir, il suffit de choisir de chaque élément de C un et un seul point et de considérer l'ensemble de tous les points ainsi choisis.

Finalement, des relations $\eta = t\,C$, $t\,C \leq t\,E$ on en conclut $\eta \leq t\,E$, ce qui avec la relation $t\,E \leq \eta$ de Cantor entraîne la relation $t\,E = \eta$ elle-même.

O PREBROJIVIM UREĐENIM SKUPOVIMA

Đuro Kurepa

Ako nam

$$\eta, \; \Omega$$

označuju *redni tip* uređene množine svih racionalnih brojeva, odnosno uređena skupa svih rednih brojeva, od kojih je svaki konačan ili prebrojiv, ako nam, nadalje,

$$pX$$

označuje potenciju (ili kardinalni broj) od X, imat ćemo relaciju (3).

Stavi le se za uređen skup E

$$\Gamma E = \sup_F tF$$

pri čemu F prolazi sve dijelove od E, koji su dobro uređeni s obzirom na istu poredbenu relaciju, prema kojoj je E uređen, onda se u člančiću dokazuju ova dva teorema:

Teorem 1. *Da za uređen skup E bude*

$$tE = \eta$$

treba a i dosta je da bude

$$pE = \aleph_0, \; \Gamma E = \Omega;$$

specijalno, da prebrojiv uređen skup E sadrži dio sličan sa skupom svih racionalnih brojeva uređenim po veličini, potrebno je i dovoljno, da za ma koji redni prebrojivi broj α skup E sadrži jedan dio kojemu je α redni tip.

Teorem 2. *Da uređen prebrojiv skup bude ordinalno rijedak t. j. da ne sadrži gusta dijela, nužno je i dovoljno da bude*

$$\Gamma E + \Gamma(E^*) < \Omega.$$

Pritom za uređen E znak E^* označuje skup koji se sastoji iz istih elemenata iz kojih se sastoji E ali je uređen relacijom koja je inversna onoj relaciji kojom je E uređen.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Banach, *Un théorème sur les transformation biunivoque*, Fund. Math., 6, 1924, 236—239).
2. Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* herausgegeben von Ernst Zermelo, Berlin 1932, 8 + 486.
3. Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, 6 + 476.
4. Georges Kurepa, *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés* (Compts Rendus Soc. Sci. Varsovie, 32, 1939, 61—67).