Mihailo P. Arsenović

CAUCHY-EV PROBLEM ZA JEDNAČINU TIPA EULER-POISSON-DARBOUX

- doktorska disertacija -

BEOGRAD 1972

U V O D

Linearna diferencijalna parcijalna jednačina drugoga reda je oblika

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f ,$$

gde su a_{ij}, b_i, c, f date realne funkcije realnih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u datoj oblasti D i $a_{ij} = a_{ji}$. Neka je M tačka oblasti D. Pretpostavlja se da je $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(M) \neq 0$, tj. da se red jednačine u tački M ne snižava. Linearnom ortogonalnom transformacijom kvadratna forma $\sum_{i,j=1} a_{ij}(M)\xi_i\xi_j$, gde su $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ realni brojevi i $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2 \neq 0$; može se svesti na takozvani kanonični oblik $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$, gde su koeficijenti λ_i realni brojevi. Po dogovoru (definiciji) za proučavanu jednačinu kažemo: da je paraboličkog tipa (oblika) ako je bar jedan od brojeva λ_i jednak nuli, da je eliptičkog tipa ako su svi brojevi λ_i različiti od nule i ako su istoga znaka, da je hiperboličkog tipa ako su svi brojevi λ_i različiti od nule i nisu svi istoga znaka.

Predmet daljeg izlaganja jesu jednačine hiperboličkog tipa. Izvesna odstupanja biće posebno naglašena.

Pri rešavanju Cauchy-evog problema, početni uslovi mogu biti zadani u oblasti hiperboličnosti.

U daljem izlaganju reč je samo o jednačinama za koje su početni Cauchy-evi uslovi zadani u oblasti (prava, ravan, hiperravan) čije neke tačke, ili pak sve tačke, nisu tačke hiperboličnosti. U izlaganju pod A) dat je izvestan prikaz radova koji se odnose na rešavanje jednačine hiperboličkog tipa. Pod B) navedeni su neki radovi koji proučavaju u izvesnom smislu opštiju linearnu jednačinu, poznatu pod nazivom jednačina tipa Euler-Poisson-Darboux. Pod C) je najpre formulisan problem i njegovo rešenje za jednačinu u naslovu priložene disertacije, tj. za jednačinu tipa Euler-Poisson-Darboux, zatim ukazane razlike u odnosu na već pomenute autore i na kraju je ukratko skiciran dokaz formulisanih teorema.

A) Cauchy-ev problem rešavanja jednačine hiperboličkog tipa, kada su početni uslovi zadani u oblasti čije sve tačke nisu tačke hiperboličnosti, izučavali su mnogi autori [3, 12]

F. TRICOMI [14] je 1927. godine za jednačinu

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

odredio rešenje koje zadovoljava uslove $u = \varphi$ na σ i $u = \psi$ na AC,

gde je σ Jordan-ova kriva u poluravni $y > 0$ sistema oxy, sa krajnjim tačkama $A(o, o)$, $B(1, o)$; AC je deo linije karakteristika sa tačkom C u poluravni $y < 0$. Napomenimo da je ovde $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = 1$ te je posmatrana jednačina: za $y > 0$ eliptičkog tipa, za $y < 0$ hiperboličkog tipa, za $y = 0$ paraboličkog tipa. Takav domen D u kome se odredjuje rešenje, obično se zove domen mešovitog tipa, a odredjivanje rešenja u takvom domenu poznato je u literaturi pod nazivom rešavanje Tricomi-evog zadatka ili rešavanje mešovitog problema.

S. GELLERSTEDT [3] (st. 79) je 1936. godine odredio rešenje Tricomi-evog problema za jednačinu

$$y^{2n+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

F.I. FRANKLJ [4] je 1945. godine pokazao da je rešenje Cauchy-evog problema za jednačinu

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

$$(y > 0)$$

sa početnim uslovima

$$u(x, o) = \varphi(x), \quad u_y(x, o) = \psi(x),$$

jedinstveno i korektno postavljeno, pod odredjenim uslovima što ih zadovoljavaju koeficijenti jednačine. Napomenimo, da je i ovde $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = -1$; da su početni uslovi zadani na liniji paraboličnosti, i da se jednačina proučava u domenu hiperboličnosti jer je $y > 0$.

I. S. BEREZIN [2] je 1949. godine proučio rešenje Cauchy-evog problema za jednačinu

$$y^{\alpha} k^2(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

gde je $\alpha > 0$, $k(x,y) \neq 0$, $y > 0$; sa početnim uslovima

$u(x,o) = \varphi(x)$, $u_y(x,o) = \psi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Jednačina je hiperboličkog tipa, a početni uslovi su zadani na liniji paraboličnosti ($\lambda_1 = y^{\alpha} k^2(x,y)$, $\lambda_2 = -1$, $y > 0$). I. S. Berezin dokazuje teoremu egzistencije, jedinosti i korektnosti Cauchy-evog rešenja za slučaj $0 < \alpha < 2$. U paragrafu 3, I. S. Berezin navodi primer jednačine

$$y^{2+\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(ovde je $\alpha = 2 + \varepsilon > 2$) za koju je Cauchy-ev problem postavljen nekorektno na liniji $y = 0$.

M. H. PROTTER [11] je 1954. godine dokazao da je za jednačinu hiperboličkog tipa

$$k(y)\, h(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

gde je $k(y)$ monotona funkcija, $k(o) = o$, $h(x,y) \geqslant \delta > 0$, $y > 0$; sa uslovima na liniji paraboličnosti $y = 0$; Cauchy-ev problem postavljen korektno za $a = \sigma(k^{1/2}(y)/y)$. Za $k(y) = y^2$ iz rezultata M. H. Protter-a sleduje da je Cauchy-ev problem sa početnim uslovima na liniji $y = 0$ korektno postavljen ako $a \to 0$ kada $y \to 0$. Sa ovim rezultatom dato je rešenje i jednačine I. S. Berezina u slučaju kada je $\alpha = 2$.

K. I. KARAPETJAN [6] je 1956. godine proučio Cauchy-ev problem za jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_o \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f,$$

gde koeficijenti a_{ij}, b_i, c_o, c i f zavise od promenljivih $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(0 < t \leqslant T)$.

U unutrašnjim tačkama oblasti $G\{0<t\leq T,\ x=(x_1,\dots,x_n)\in R_n\}$ jednačina je hiperboličkog tipa tj. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$, a na njenoj granici tj. u ravni t=0 jednačina ima tačke paraboličnosti (točki vyroždenija) u kojima je $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j=0$. Poslednja jednakost može biti ispunjena i u svim tačkama ravni t=0. Početni uslovi dati su u ravni t=0. Za najmanju karakterističnu vrednost $\min \lambda_i(x,t)\equiv \rho(x,t)$ matrice $\| a_{ij}\|$, koja je veća od nule u oblasti G, pretpostavlja se da u ravni t=0 postoje tačke u kojima je $\rho(x,t)=0$. Pri uslovima: funkcije $a_{ij}(x,t)$ imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right]+5$; funkcije b_i, c_0, c, f imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right]+4$; početne vrednosti (funkcije φ i ψ) imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right]+6$; $\rho(x,t)>ct^m$ $(m>0)$; i nekih uslova za koeficijente na ravni $t=0$, K. I. Karapetjan dokazuje teoremu egzistencije, jedinosti i korektnosti. U radu je takodje proučena i jednačina I. S. Berezina za slučaj $\alpha=2$.

Teorema se dokazuje metodom aproksimacija, što znači da se najpre dokazuje ograničenost integrala kvadrata izvoda aproksimirajućih rešenja do odredjenog reda. Osnovu dokaza ograničenosti integrala predstavlja rezultat poznat u teoriji jednačina hiperboličkog tipa pod nazivom nejednakost integrala energije ([13], strana 211). Naime, u oblasti G definiše se takozvani fundamentalni zarubljeni konus oblasti Ω, omotača S, čije su paralelne strane S_1 i S_2 respektivno u ravnima t=0 i t=T. Presek konusa na zadanoj visini t $(0<t<T)$ obeležimo sa $\Omega(t)$. Tada se za $w(x,t)\in C^2$ dokazuje sledeće:

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}-2\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+2\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right\}d\Omega$$

$$=\int_{S}\left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right]\cos(\vec{n}t)-2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial t}\cos(\vec{n}x_i)\right\}ds=$$

$$=\int_{S}\frac{1}{\cos(\vec{n}t)}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left[\frac{\partial w}{\partial x_i}\cos(\vec{n}t)-\frac{\partial w}{\partial t}\cos(\vec{n}x_i)\right]\left[\frac{\partial w}{\partial x_j}\cos(\vec{n}t)-\frac{\partial w}{\partial t}\cos(\vec{n}x_j)\right]+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\left[\cos^2(\vec{n}t)-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(\vec{n}x_i)\cos(\vec{n}x_j)\right]\Bigg\}\geqslant\int_{\Omega(t)}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right]dx.$$

K. I. Karapetjan u daljem izlaganju generališe poznatu nejednakost [8]

$$\left|W(b_1,a_2)-W(a_1,a_2)\right|\leqslant\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2}\left(\int_\omega W_{x_1}^2\,d\omega\right)^{1/2}+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\left(\int_\omega W_{x_1x_2}^2\right)^{1/2},$$

na n promenljivih, i dokazuje

$$\left|W(b_1,a_2,\dots,a_n)-W(a_1,a_2,\dots,a_n)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{i}\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}{\alpha_{ik}\alpha_{i,k+1}\dots\alpha_{i,n-1}}\left(\int_\omega W^2_{x_1x_i\dots x_{i,k-1}}d\omega\right)^{1/2},$$

gde je ω paralelepiped odredjen sa $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ i $\alpha_i = b_i - a_i$. Koristeći ocene integrala i generalisanu nejednakost autor dokazuje ravnostepenu neprekidnost i ravnomernu ograničenost aproksimirajućih rešenja i njihovih izvoda do drugoga reda. Dalje se na osnovu poznatih teorema (teorema Arzela i sl.) utvrdjuje postojanje niza aproksimirajućih rešenja koji konvergira traženom rešenju. Prikaz navedenog rada je nešto opširniji jer, pre svega, sadrži gotovo sve detalje u modelu rešavanja jednačine hiperboličkog tipa i, s druge strane, što će rezultati dokaza ravnostepene neprekidnosti i ravnomerne ograničenosti pomenutog niza funkcija, biti iskorišćeni u gotovo neizmenjenom obliku u radu koji je naslov priložene disertacije.

O. A. OLEJNIK [9] je 1966. godine proučila jednačinu hiperboličkog tipa sa tačkama paraboličnosti kako u unutrašnjosti posmatrane oblasti $G\left\{0 \leqslant t \leqslant T,\quad x=(x_1,\dots,x_m)\in R_m\right\}$, tako i na njenoj granici.

Za jednačinu :

$$L(u) \equiv -u_{tt} + \left(a^{ij}(t,x)\, u_{x_i} \right)_{x_j} + b^i(t,x)\, u_{x_i} + b^0(t,x)\, u_t + c(t,x)u = f(t,x)\,,$$

pri uslovima: $a^{ij}(t,x)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0$; $A\, a^{ij}\xi_i\xi_j + a_t^{ij}\xi_i\xi_j - \alpha\,(b^i\,\xi_i)^2 \geqslant 0$ $(A > 0\,,\ \alpha > 0)$; koeficijenti jednačine i funkcija f imaju ravnomerno ograničene izvode reda $k\ (k \geqslant 2)$ i početnim uslovima $u(0,x)=0$, $u_t(0,x)=0$, dokazuje se u oblasti G teorema egzistencije i jedinosti Cauchy-evog rešenja u klasi W_2 (G). Za $2(k-2) > m+1$ dokazuje se egzistencija klasičnog rešenja.

Ako su navedeni uslovi i uslov $u|_S = 0$, $S = \left\{ [0,T] \times \sigma \right\}$, ispunjeni u oblasti cilindra $Q\left\{ 0 \leqslant t \leqslant T\,,\ \ x \in \Omega \right\}$, gde je Ω oblast u Rm sa granicom σ ; dokazuje se teorema egzistencije uopštenog rešenja graničnog problema, a u posebnom slučaju i njegova jedinost.

Navedene teoreme su najpre dokazane za jednačinu

$$-u_{tt} + \varepsilon\Delta u + (a_\varepsilon^{ij}\, u_{x_i})_{x_j} + b_\varepsilon^i\, u_{x_i} + b_\varepsilon^0\, u_t + c_\varepsilon u = f_\varepsilon\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

čiji su koeficijenti i funkcija f_ε srednje funkcije odgovarajućih koeficijenata i funkcije f, polazne jednačine i gde je ε radijus srednjih funkcija. Za poslednju se jednačinu dokazuje ograničenost integrala kvadrata funkcije i njenih izvoda tj.

$$\left\| \frac{\delta^k u}{\delta t^{k_0}\, \delta x_1^{k_1} \ldots \delta x_m^{k_m}} \right\|_{\mathcal{L}_2(G)} \leqslant M\,, \quad k \geqslant 0\,,$$

odakle i sleduje tvrdjenje navedenih teorema.

Traženo rešenje je granica slabe konvergencije u $\mathcal{L}_2(G)$ kada $\varepsilon \to 0$ u nizu aproksimirajućih rešenja. Napomenimo da se do ocena integrala ne dolazi integraljenjem po oblasti fundamentalnog zarubljenog konusa, već se primenjuje metod množenja izvesnim faktorom. U navedenom radu, posmatrana jednačina se množi faktorom

$$e^{st} \int_t^{\tau} u(s,x)\, ds\,,$$

a potom se tako dobijena jednačina integrali po oblasti $G_\tau \left\{ 0 \leqslant t \leqslant \tau\,,\ x \in R_m \right\}$.

B) Linearna diferencijalna parcijalna jednačina drugoga reda

$$u_{tt}+\frac{b}{t}u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\,u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i u_{x_i}+cu=f$$

sa uslovom $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j > 0$, je hiperboličkog oblika i poznata je u literaturi pod nazivom jednačina tipa Euler-Poisson-Darboux. Slučaj kada su Cauchy-evi uslovi zadani u ravni $t=t_o$ $(t_o > o)$, obuhvaćen je radovima pod A). Ostaje, od interesa, rešavanje Cauchy-evog problema kada su početni uslovi zadani u ravni $t=o$. Problem je još opštiji ako se pretpostavi da je u oblasti $G\left\{0<t\leq T,\quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in R_n\right\}$ kvadratna forma nenegativna, tj. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant 0$.

M.B.KAPILEVIČ [5] 1952. godine, pored ostalog, posmatra jednačinu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^p}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-b^2u=0 ,$$

gde je $(-1)^p=-1$, $p\geqslant o$, $y>0$ sa početnim uslovima na liniji $y=0$. Smenom

$$\sigma=\frac{2}{2+p}\cdot(-y)^{\frac{2+p}{2}} ,$$

posmatrana jednačina se transformiše u jednačinu tipa Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+\frac{a}{\sigma}\,\frac{\partial u}{\partial \sigma}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2u=0 \quad \left(\sigma>0,\quad 0<a=\frac{p}{2+p}<1,\right.$$

$b=\mathrm{const.})$,

za koju autor, tražeći rešenje u obliku $u=\phi(r)$ $\left(r=\sqrt{\sigma^2-(x-x')^2}\right)$, svodi postavljeni problem na problem rešavanja Bessel-ove jednačine

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1+a}{r}\,\frac{d\phi}{dr}+b^2\phi=0 .$$

A. WEINSTEIN [15] 1954. godine proučava jednačinu tipa Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 , \quad -\infty < k < +\infty$$

sa početnim uslovima $u(x,o) = f(x)$, $u_t(x,o) = 0$,

i, pod odredjenim ograničenjima za k, odredjuje rešenje Cauchy-evog problema.

U sek. 10 se konstatuje činjenica da je jedinost rešenja za $k > 0$ ustanovio Asgeirsson metodom Zaremba. Medjutim, za $k < 0$ ne postoji jedinost zato što bilo koja funkcija oblika $t^{1-k}\, u^{(2-k)}(x,t)$, koja teži nuli zajedno sa svojim izvodima po t, može biti dodana rešenju Cauchy-evog problema tj. funkciji $u^{(k)}(x,t)$. Blum je, u specijalnom primeru, takodje pokazao da je za proizvoljno $k<0$ razlika izmedju bilo koja dva rešenja data sa $t^{1-k}\, u^{(2-k)}(x,t)$, gde je $u^{(2-k)}(x,t)$ rešenje sa osobinama

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{k}{2}}\, u^{(2-k)}(x,t) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{t\to 0} t^{-\frac{k-1}{2}}\, u_t^{(2-k)}(x,t) = 0 .$$

M. L. KRASNOV [7] 1959. godine, pored ostalog, proučava jednačinu tipa Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + c u = f ,$$

gde je $0 < t < l$, $0 < a = \text{const} < +\infty$ i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \xi_j \geqslant c^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad (c^2 = \text{const} > 0).$$

U oblasti cilindra $Q = D \times (0 < t < l)$, gde je D ograničena oblast u R_n sa granicom Γ, pod izvesnim uslovima za koeficijente jednačine, M. L. Krasnov dokazuje egzistenciju i jedinost uopštenog rešenja graničnog problema sa nultom vrednošću rešenja na $\sigma = \Gamma \times (0 < t < l)$ i početnim vrednostima $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$

Za dokaz jedinosti koristi se metoda Galerkina, kojom se problem svodi na rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina. Ocene integrala autor dobija množenjem posmatrane jednačine faktorom $e^{-\gamma t} C'_s(t)$ ($C_s(t)$ su funkcije pomenutog sistema i $\gamma > 0$), i potom se tako dobijena jednačina integrali u oblasti Q.

F. T. BARANOVSKI [1] 1960. godine proučava u oblasti $G_{oh} \{0 \leq t \leq h,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n\}$ jednačinu tipa Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{b}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

sa početnim uslovima $u(o, x) = \Psi(x)$, $u_t(o, x) = 0$.
Ako su ispunjeni uslovi: $b(t, x) \geq 0$; $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ($\lambda = \text{const.} > 0$); koeficijenti a_{ij} imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right] + 6$; koeficijenti b, b_i, c i slobodan član f imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right] + 5$; početni uslovi imaju neprekidne izvode do reda $\left[\frac{3n}{2}\right] + 7$, autor dokazuje teoremu egzistencije i jedinosti Cauchy-evog problema. Teorema se dokazuje metodom aproksimacija, a ocene integrala se dobijaju tako što se proučavana jednačina najpre množi faktorom $2\frac{\partial u}{\partial t}$ i potom integrali po oblasti $G_{\varepsilon t}$ ($\varepsilon > 0$).

C) U priloženom radu proučava se u oblasti $G_{oT} \{0 < t \leq T,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n\}$ jednačina tipa Euler-Poisson-Darboux

$$L(u) \equiv u_{tt} + \frac{b}{t} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f$$

gde je: $b(t, x) \geq 0$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0$, $\sum_{i,j=1}^{n} \left(K a_{ij} - a_{ijt}\right) \xi_i \xi_j \geq \delta \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i\right)^2$ (K i δ pozitivne konstante); i rešava Cauchy-ev problem sa početnim uslovima $u(o, x) = 0$, $u_t(o, x) = 0$, tj. sa uslovima koji su zadani u ravni $t=0$.

Ako su ispunjeni uslovi: koeficijenti $a_{ij}(t, x)$ imaju u oblasti G_{oT} ograničene uopštene izvode do reda $n+3$; koeficijenti $b(t, x)$, $b_i(t, x)$, $c(t, x)$ imaju u G_{oT} ograničene uopštene izvode do reda $n+2$; funkcija $f(t, x) \in W_2^{n+2}(G_{oT})$; dokazuje se teorema egzistencije, jedinosti i da rešenje neprekidno zavisi od desne strane jednačine.

Navedimo razlike rešenog problema u odnosu na već pomenute autore.

a) Uslov $b(t, x) \geqslant 0$ je potreban zbog jedinosti rešenja ([15], sek. 10). Autori [5, 7, 15] proučavaju slučaj $b = \text{const}$. F. T. Baranovski [1] proučava slučaj $b(t, x) \geqslant 0$ ali sa uslovom $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ($\lambda = \text{const.} > 0$), to će reći da posmatrana jednačina u oblasti proučavanja nema tačaka paraboličnosti.

b) Uslov hiperboličnosti kod autora [1, 5, 7, 15] je oblika $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ($\lambda = \text{const.} > 0$); dok se u priloženom radu proučava jednačina hiperboličkog tipa sa tačkama paraboličnosti u oblasti G_{0T}, otuda uslov

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant 0 .$$

c) U priloženom radu, javlja se u odnosu na pomenute autore, [1, 5, 7, 15], nov uslov $\sum_{ij=1}^{n} \left(K a_{ij} - a_{ijt} \right) \xi_i \xi_j \geqslant \delta \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i \right)^2$ (K i δ pozitivne konstante). Iz [9] sleduje, da je taj uslov potreban uslov zbog $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant 0$, a jednačina proučavana u radu [9] je specijalan slučaj jednačine tipa Euler-Poisson-Darboux, naime kada je u ovoj poslednjoj $b(t, x) \equiv 0$.

Navedena teorema se dokazuje metodom aproksimacija. Posmatra se u oblasti $G_{\varepsilon T} \left\{ 0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant T , \quad x \in R_n \right\}$ Cauchy-ev problem za jednačinu

$$u_{\varepsilon tt} + \frac{b_\varepsilon}{t} u_{\varepsilon t} - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon x_i x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{\varepsilon ij} u_{\varepsilon x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_{\varepsilon i} u_{\varepsilon x_i} + c_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$$

sa početnim uslovima: $u_\varepsilon(\varepsilon, x) = 0$, $\quad u_{\varepsilon t}(\varepsilon, x) = 0$.

Koeficijenti poslednje jednačine su srednje funkcije koeficijenta posmatrane jednačine. Dokaz teoreme se zasniva na oceni integrala kvadrata funkcije $u(t, x)$ i njenih izvoda do odredjenog reda, što je izloženo u delovima I, II, III, IV. Faktor množenja jednačine je oblika $2 u_{t x_k \ldots x_r} e^{-\theta_m t}$ $(\theta_m > 0)$. U odeljku I se dokazuje ograničenost integrala kvadrata funkcije $u(t, x)$. Izloženi postupak je u principu poznat i iz navedenih radova. U delovima II, III, IV, odnosno u sekcijama II.1, III.1, IV.1, se pokazuje da taj postupak nije dovoljan za dokaz ograničenosti integrala kvadrata viših izvoda funkcije $u(t, x)$. Nastale teškoće jesu rezultat zamene uslova $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ($\lambda = \text{const.} > 0$)

koji je prisutan u radovima autora [1, 5, 7, 15], sa uslovom $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant 0$. U cilju rešavanja nastalog problema, primenjuje se u sekcijama II.2, III.2, IV.2 metod množenja faktorom $2u_{tt} x_k \ldots x_r e^{-\lambda_m t}$ $(\lambda_m > 0)$, a zatim se u trećim sekcijama tih delova, kombinovanjem rezultata prve i druge sekcije, dokazuje lema tj. ograničenost integrala kvadrata viših izvoda funkcije $u(t, x)$. U radovima u kojima se javlja problem ocene integrala izvesnih funkcija, gotovo redovno se dolazi do novih integralnih nejednakosti koje pomažu rešavanje tog problema. U priloženom radu, integralne nejednakosti koje su dovoljne za dalje proučavanje, dokazane su u sekciji II.1 (nejednakosti (9), (10), (11), (12)), a njihova generalizacija data je u sekciji III.1. Koristeći rezultate leme i poznate stavove navedene u radovima [1, 6, 9], dokazuje se u daljem tekstu egzistencija i jedinost rešenja Cauchy-evog problema kao i njegova neprekidna zavisnost od desne strane posmatrane jednačine.

CAUCHY-EV PROBLEM ZA JEDNAČINU TIPA EULER - POISSON - DARBOUX

U oblasti $G_{oT}\left\{0 < t \leqslant T,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n\right\}$

proučava se jednačina tipa Euler-Poisson-Darboux

$$L(u) \equiv u_{tt} + \frac{b}{t}u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f \qquad (1)$$

gde su koeficijenti $a_{ij} = a_{ji}$, b, b_i, c, f funkcije promenljivih t, $x_1, \dots, x_n$ i za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

$$b\,(t, x) \geqslant 0\,; \qquad (1.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant 0\,; \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(Ka_{ij} - a_{ijt})\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \delta\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\,\xi_i\right)^2, \qquad (1.3)$$

K i δ su pozitivne konstante a $\xi_1, \dots, \xi_n$ proizvoljni realni brojevi; koeficijenti $a_{ij}(t, x)$ imaju u oblasti G_{oT} ograničene uopštene izvode do reda $n+3$: koeficijenti $b(t, x)$, $b_i(t, x)$, $c(t, x)$ imaju u G_{oT} ograničene uopštene izvode do reda $n+2$; i funkcija $f(t, x) \in W_2^{n+2}(G_{oT})$ (1.4)

Za jednačinu (1) odredjuje se rešenje $u(t, x)$, Cauchy-evog problema, u oblasti G_{oT} sa početnim uslovima

$$u(0, x) = 0\,, \quad u_t(0, x) = 0 \qquad (2)$$

D e f i n i c i j a. Za funkciju $u(t, x)$ kažemo da predstavlja klasično rešenje zadatka (1), (2) ako ona zadovoljava sledeće uslove: 1) funkcija $u(t, x)$ i svi njeni izvodi koji se javljaju u jednačini (1), su funkcije klase $L_2(G_{oT})$; 2) u_{tt} je neprekidna funkcija u G_{oT}, a u, u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ su neprekidne funkcije u zatvorenoj oblasti $\overline{G_{oT}}$; 3) funkcija $u(t, x)$ zadovoljava jednačinu (1) u oblasti G_{oT} i početne uslove (2) za $t = 0$.

T e o r e m a 1. Ako su ispunjeni navedeni uslovi za koeficijente jednačine (1), (uslovi: (1. 1), (1. 2), (1. 3), (1. 4)), tada u oblasti G_{OT} postoji klasično rešenje Cauchy-evog problema (1), (2).

T e o r e m a 2. Ako su funkcije a_{ij}, a_{ijx_i} a_{ijt}, b_i, c ograničene u oblasti G_{OT}, i ako su ispunjeni uslovi (1. 1), (1. 2), (1. 3), tada je klasično rešenje Cauchy-evog problema (1), (2) jedino i neprekidno (po normi L_2) zavisi od desne strane jednačine (1).

Za dokaz navedenih teorema, koristeći metode primenjene u radovima [9, 6, 1], proučimo u oblasti $G_{\varepsilon T}\left\{0<\varepsilon\leqslant t\leqslant T,\quad x\in R_n\right\}$ Cauchy-ev problem za jednačinu

$$u_{\varepsilon tt}+\frac{b_\varepsilon}{t}u_{\varepsilon t}-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{\varepsilon ij}u_{\varepsilon x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_{\varepsilon i}u_{\varepsilon x_i}+c_\varepsilon u_\varepsilon=f_\varepsilon,\quad \varepsilon>0 \tag{3}$$

sa početnim uslovima: $u_\varepsilon(\varepsilon, x)=0,\quad u_{\varepsilon t}(\varepsilon, x)=0.$ (4)

Ovde su b_ε, $a_{\varepsilon ij}$, $b_{\varepsilon i}$, c_ε, F_ε srednje funkcije odgovarajućih koeficijenata b, a_{ij}, b_i, c, f i $f_\varepsilon=F_\varepsilon\,\zeta_\varepsilon(x)$, gde je $\zeta_\varepsilon(x)\in C_0^\infty$ i $\zeta_\varepsilon(x)\equiv 1$ za $|x|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$.

Koristeći osobine srednjih funkcija, lako se dokazuje da koeficijenti jednačine (3) zadovoljavaju uslove (1.1), (1. 2), (1. 3), (1. 4).
Prema poznatim teoremama [9] za svako $\varepsilon>0$ Cauchy-ev problem (3), (4) ima jedino rešenje $u_\varepsilon(t,x)$. Rešenje $u_\varepsilon(t,x)$, jednačine (3), je finitna funkcija po x, jer je f_ε finitna funkcija.

Rešenje Cauchy-evog problema (1), (2) može se dobiti iz rešenja problema (3), (4) tj. iz skupa funkcija $\{u_\varepsilon(t,x)\}$, kada $\varepsilon\to 0$. Zbog prelaza na granicu, potrebno je za funkcije $\{u_\varepsilon(t,x)\}$ pored ostalog, dokazati ravnostepenu neprekidnost i ravnomernu ograničenost. Dokaz ovih osobina je relativno lak, ako se za skup funkcija $\{u_\varepsilon(t,x)\}$ može dokazati sledeće: funkcija u_ε i svi njeni izvodi do odredjenog reda su funkcije iz $L_2(G_{\varepsilon T})$.

Dokaz navedenih teorema (teorema 1, teorema 2) zasniva se na sledećem tvrdjenju.

L e m a. Za funkciju $u_\varepsilon(t,x)$, koja je rešenje Cauchy-evog problema (3), (4), tačne su sledeće nejednakosti :

$$\left\| \frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^{k_0}\, \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{L_2(G_{\varepsilon T})} \leqslant M , \qquad (5)$$

gde je $k \leqslant n+3$, $k_0 \leqslant 2$ i konstanta M ne zavisi od ε.

D o k a z l e m e. Radi veće preglednosti u radu, izostavljaćemo u pisanju indeks ε i takodje pri integraciji po oblasti $\{\varepsilon \leqslant t \leqslant T,\ x \in R_n\}$ izostavljaćemo znak $G_{\varepsilon T}$.

I DOKAZ OGRANIČENOSTI INTEGRALA FUNKCIJA u^2 i u_t^2

Pomnožimo jednačinu (3) sa $2u_t e^{-\lambda_0 t}$ $(\lambda_0 > 0)$ i tako dobijenu jednačinu integralimo po oblasti $G_{\varepsilon T}$. Za odgovarajuće sabirke dobijamo

$$2\iint u_{tt}\, u_t e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt = \int \left\{ \int e^{-\lambda_0 t} (u_t^2)_t\, dt \right\} dx =$$

$$= \int \left\{ u_t^2 e^{-\lambda_0 t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=T} + \lambda_0 \int u_t^2 e^{-\lambda_0 t}\, dt \right\} dx =$$

$$= e^{-\lambda_0 T} \int_{t=T} u_t^2\, dx + \lambda_0 \iint u_t^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt,$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}\, u_t\, e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt = -2\varepsilon \iint \sum_{i=1}^{n} u_t\, e^{-\lambda_0 t} (u_{x_i})_{x_i}\, dx\, dt =$$

$$= 2\varepsilon \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\, e^{-\lambda_0 t} (u_{x_i})_t\, dx\, dt = 2\varepsilon e^{-\lambda_0 T} \int_{t=T} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\, dx -$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{i=1}^{n} u_{t x_i}\, u_{x_i}\, e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt + 2\varepsilon \lambda_0 \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt =$$

$$= \varepsilon e^{-\lambda_0 T} \int_{t=T} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\, dx + \varepsilon \lambda_0 \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt,$$

$$-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\ u_{x_i})_{x_j}\ u_t\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt =$$

$$=-2\sum_{i,j=1}^{n}\iint\left\{\int u_t\,e^{-\lambda_0 t}(a_{ij}\ u_{x_i})_{x_j}\,dx_j\right\}\frac{dx}{dx_j}\,dt =$$

$$=2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,(u_{x_j})_t\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt =$$

$$=2\,e^{-\lambda_0 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,dx-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt-$$

$$-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_it}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+2\lambda_0\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt =$$

$$=e^{-\lambda_0 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,dx-\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+$$

$$+\lambda_0\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt\,,$$

i jednačina (3) postaje

$$e^{-\lambda_0 T}\int_{t=T}\left(u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\right)dx+$$

$$+\ 2\iint\frac{b}{t}\,u_t^2\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+\lambda_0\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+$$

$$+\lambda_0\iint u_t^2\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt-\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon\lambda_0\iint\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+2\iint\sum_{i=1}^{n}b_i\,u_{x_i}\,u_t\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt+$$

$$+2\iint c\,u\,u_t\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt-2\iint f\,u_t\,e^{-\lambda_0 t}\,dx\,dt=0.$$

Koristeći nejednakost

$$2\,ab\geq-\alpha_{ik}\,a^2-\frac{1}{\alpha_{ik}}\,b^2\quad(\alpha_{ik}=\text{const.}>0\ )\tag{6}$$

(u nekim slučajevima umesto α_{ik} pisaćemo β_{ik}) i činjenicu da su koeficijenti a_{ij}, b_i, c, f, i njihovi odgovarajući izvodi ograničeni po modulu konstantnom A, a koeficijenat b i njegovi odgovarajući izvodi ograničeni po modulu konstantom B dobijamo

$$2\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u_t \equiv 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}\right) u_t \geqslant$$

$$\geqslant -\alpha_{01}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}\right)^2 - \frac{1}{\alpha_{01}} u_t^2 ,$$

$$2\, c\, u\, u_t \equiv 2\,(c\,u)\, u_t \geqslant -\alpha_{02}\, c^2 u^2 - \frac{1}{\alpha_{02}} u_t^2 \geqslant$$

$$\geqslant -\alpha_{02} A^2 u^2 - \frac{1}{\alpha_{02}} u_t^2 ,$$

$$-2 f\, u_t \equiv 2\,(-f)\, u_t \geqslant -\alpha_{03} f^2 - \frac{1}{\alpha_{03}} u_t^2 .$$

Koristeći prethodne rezultate, za jednačinu (3) dobijamo

$$e^{-\lambda_0 T}\int_{t=T}\left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) dx \, +$$

$$+ \varepsilon \lambda_0 \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt + \lambda_0 \iint \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \, +$$

$$+ 2\iint \frac{b}{t} u_t^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt - \iint \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt} u_{x_i} u_{x_j} e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \, +$$

$$+ \lambda_0 \iint u_t^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt - \alpha_{01} \iint \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}\right)^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \, -$$

$$- \frac{1}{\alpha_{01}} \iint u_t^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt - \alpha_{02} A^2 \iint u^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \, -$$

$$- \frac{1}{\alpha_{02}} \iint u_t^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt - \frac{1}{\alpha_{03}} \iint u_t^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \leqslant \alpha_{03} \iint f^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt .$$

Proučavajući dobijenu nejednakost zaključujemo da je

$$0<\alpha_{03}\iint f^2 e^{-\lambda_0 t} dx\,dt \leqslant \alpha_{03}\iint f^2 dx\,dt \leqslant \alpha_{03} A = M_0 ,$$

gde je $M_0 = \text{const.} > 0$ jer funkcija $f(t,x)$

nije identički jednaka nuli u $G_{\varepsilon T}$; i

$$\lambda_0\iint\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i}\, u_{x_j}\, e^{-\lambda_0 t}\, dx\,dt - \iint \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt} u_{x_i} u_{x_j}\, e^{-\lambda_0 t} dx\,dt -$$

$$- \alpha_{01}\iint\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i} \Big)^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\,dt =$$

$$=\iint\Big\{ \sum_{i,j=1}^{n}\big(\lambda_0\, a_{ij} - a_{ijt} \big)\, u_{x_i} u_{x_j} - \alpha_{01}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i}\Big)^2 \Big\}\, e^{-\lambda_0 t}\, dx\,dt > 0 ,$$

prema (1.3), birajući λ_0 i α_{01} tako da je $\lambda_0 > K$ i $\alpha_{01} \leqslant \delta$.

Problem ocene integrala biće rešen ako ustanovimo odredjenu relaciju izmedju funkcije $u(t, x)$ i njenog izvoda $u_t(t, x)$.

U tom cilju dokažimo sledeću nejednakost

$$\iint u^2 e^{-\nu t}\, dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}T^2\iint u_t^2\, e^{-\nu t}\, dx\,dt, \quad (\nu \geqslant 0). \tag{7}$$

Polazeći od

$$u^2(t,x)\, e^{-\nu t} \equiv \Big(u(t,x)\, e^{-\frac{\nu}{2}t}\Big)^2 = \Big\{\int_\varepsilon^t 1\cdot\Big[u(\tau,x)\, e^{-\frac{\nu}{2}\tau}\Big]_\tau d\tau\Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_\varepsilon^t d\tau \int_\varepsilon^t \Big(u_\tau(\tau,x)\, e^{-\frac{\nu}{2}\tau} - \frac{1}{2}\,\nu\, u(\tau,x)\, e^{-\frac{\nu}{2}\tau}\Big)^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant t\int_\varepsilon^t\Big(u_\tau^2\, e^{-\nu\tau} - \nu u u_\tau e^{-\nu\tau} + \frac{1}{4}\nu^2 u^2 e^{-\nu\tau}\Big)\, d\tau ,$$

kako je

$$\frac{1}{4}\nu^2\int_\varepsilon^t u^2\, e^{-\nu\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\nu\int_\varepsilon^t (u^2)_\tau\, e^{-\nu\tau}\, d\tau = \frac{1}{4}\nu^2\int_\varepsilon^t u^2\, e^{-\nu\tau}\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\nu\, u^2(t,x)\, e^{-\nu t} - \frac{1}{2}\nu^2\int_\varepsilon^t u^2\, e^{-\nu\tau}\, d\tau \leqslant 0 ,$$

sleduje

$$u^2(t,x)\, e^{-\nu t} \leqslant t\int_\varepsilon^t u_\tau^2\, e^{-\nu\tau}\, d\tau \leqslant T\int_\varepsilon^T u_\tau^2\, e^{-\nu\tau}\, d\tau .$$

Integraljenjem poslednje nejednakosti po oblasti $G_{\varepsilon T}$, dobijamo (7).

Napomenimo još, da iz nejednakosti

$$\iint u^2 e^{-\nu T}\, dx\, dt \leq \iint u^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt\,, \quad (\nu \geqslant 0)$$

sleduje

$$\iint u^2\, dx\, dt \leqslant e^{\nu T} \iint u^2 e^{-\nu t} dx\, dt$$

odakle zaključujemo da iz ograničenosti integrala desne strane sleduje ograničenost integrala leve strane.

Koristeći (7) i izbor $\lambda_0 > K$, $\alpha_{01} \leqslant \delta$, za jednačinu (3) dobijamo

$$e^{-\lambda_0 t} \int_{t=T} \Big(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \Big)\, dx \, +$$

$$+ \varepsilon \lambda_0 \iint \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt + 2 \iint \frac{b}{t} u_t^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt \, +$$

$$+ \iint \Big(\lambda_0 - \frac{1}{2} \alpha_{02} A^2 T^2 - \frac{1}{\alpha_{01}} - \frac{1}{\alpha_{02}} - \frac{1}{\alpha_{03}} \Big) u_t^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{03} \iint f^2 e^{-\lambda_0 t}\, dx\, dt = Mo = \text{const.}$$

Uvek se mogu izabrati konstante

λ_0 , α_{01} , α_{02} , α_{03} tako da je

$$\lambda_0 > K\,, \quad \alpha_{01} \leqslant \delta\,, \quad \lambda_0 - \frac{1}{2}\alpha_{02} A^2 T^2 - \frac{1}{\alpha_{01}} - \frac{1}{\alpha_{02}} - \frac{1}{\alpha_{03}} > 1\,,$$

i kako je u dobijenoj nejednakosti

$b(t,x) \geqslant 0$ (1.1) , $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \geqslant 0$ (1.2) , $0 < Mo < +\infty$;

sleduje

$$\iint u^2\,dx\,dt \leq Mo \quad , \quad \iint u_t^2\,dx\,dt \leq Mo \quad ,$$

$$\int_{t=T} u_t^2\,dx \leq Mo \qquad (8)$$

gde je M_o pozitivna konstanta.

II DOKAZ OGRANIČENOSTI INTEGRALA FUNKCIJA u_{tt}^2, $u_{tx_k}^2$, $u_{x_k}^2$

II.1. Diferenciranjem jednačine (3) po x_k dobijamo

$$u_{ttx_k} + \left(\frac{b}{t}u_t\right)_{x_k} - \varepsilon\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i x_k} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ijx_k}u_{x_i}\right)_{x_j} -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}u_{x_i x_k}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i u_{x_i}\right)_{x_k} + (cu)_{x_k} - f_{x_k} = 0 .$$

Pomnožimo dobijenu jednačinu sa $2u_{tx_k}e^{-\theta_1 t}$ $(\theta_1 > 0)$, integralimo je po oblasti $G_{\varepsilon T}$ i zatim izvršimo sumiranje po k od 1 do n.

Ovde, a i u daljem tekstu, često ćemo koristiti nejednakosti

$$\iint \frac{1}{t}u_t^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leq \frac{1}{\nu}\iint u_{tt}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \quad , \nu > 0 \quad , \qquad (9)$$

$$\iint \frac{1}{t^2}u_t^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leq 4\iint u_{tt}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \quad , \nu \geq 0 \quad , \qquad (10)$$

$$\iint u_{x_k}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leq \frac{1}{2}T^2\iint u_{tx_k}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \quad , \nu \geq 0 \quad , \qquad (11)$$

$$e^{-\nu T}\int_{t=T} u_{x_k}^2\,dx \leq T\iint u_{tx_k}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \quad , \nu \geq 0 \quad , \qquad (12)$$

D o k a z . Nejednakost (9) sleduje iz

$$\iint \frac{1}{t} u_t^2 e^{-\nu t} dx\, dt = \int \left\{ \int \frac{1}{t} u_t^2 (e^{-\nu t} dt) \right\} dx =$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{\nu} \frac{1}{t} u_t^2 e^{-\nu t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=T} + \frac{1}{\nu} \int \left(-\frac{1}{t^2} u_t^2 + 2 \frac{1}{t} u_t u_{tt} \right) e^{-\nu t} dt \right\} dx =$$

$$= -\frac{e^{-\nu T}}{\nu T} \int_{t=T} u_t^2 dx - \frac{1}{\nu} \iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt + \frac{1}{\nu} \iint 2 \left(\frac{1}{t} u_t \right) u_{tt} e^{-\nu t} dx dt \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{e^{-\nu T}}{\nu T} \int_{t=T} u_t^2 dx - \frac{1}{\nu} \iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt + \frac{1}{\nu} \iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\nu} \iint u_{tt}^2 e^{-\nu t} dx dt \leqslant \frac{1}{\nu} \iint u_{tt}^2 e^{-\nu t} dx dt .$$

P o l a z e ć i od

$$\iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt = \int \left\{ \int u_t^2 e^{-\nu t} \left(\frac{1}{t^2} dt \right) \right\} dx =$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{t} u_t^2 e^{-\nu t} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=T} + \int \frac{1}{t} \left(2 u_t u_{tt} e^{-\nu t} - \nu u_t^2 e^{-\nu t} \right) dt \right\} dx =$$

$$= -\frac{e^{-\nu T}}{T} \int_{t=T} u_t^2 dx - \nu \iint \frac{1}{t} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt + \iint 2 \left(\frac{1}{t} u_t \right) u_{tt} e^{-\nu t} dx dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint 2 \left(\frac{1}{t} u_t \right) u_{tt} e^{-\nu t} dx dt \leqslant \gamma \iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \iint u_{tt}^2 e^{-\nu t} dx dt \qquad (0 < \gamma < 1) ,$$

d o b i j a m o

$$\iint \frac{1}{t^2} u_t^2 e^{-\nu t} dx dt \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{\gamma} \iint u_{tt}^2 e^{-\nu t} dx dt ,$$

odakle i sleduje (10), jer je

$$\min_{0<\gamma<1} \frac{1}{\gamma - \gamma^2} = \frac{1}{\gamma - \gamma^2} \Big|_{\gamma = \frac{1}{2}} = 4 .$$

Primetimo, da smo za dokaz nejednakosti (7) koristili samo uslov (4), $u(\varepsilon, X)=0$. Pošto iz $u(\varepsilon, X)=0$ sleduje $u_{x_k}(\varepsilon, x)=0$ nejednakost (7) tačna je i za funkciju $u_{x_k}(t,x)$ odakle i sleduje (11).

Kako je

$$u_{x_k}^2(t,x)=\left(\int_\varepsilon^t 1\cdot u_{\tau x_k}(\tau,x)\,d\tau\right)^2 \leqslant t\int_\varepsilon^t u_{\tau x_k}^2(\tau,x)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant T\int_\varepsilon^T u_{\tau x_k}^2(\tau,x)\,d\tau\,, \qquad \int_{t=T} u_{x_k}^2\,dx \leqslant T\int_\varepsilon^T\int_{-X}^{X} u_{\tau x_k}^2\,d\tau\,dx =$$

$$= T\iint u_{tx_k}^2\,dx\,dt\,,$$

$$e^{-\nu T}\int_{t=T} u_{x_k}^2\,dx \leqslant T\iint u_{tx_k}^2 e^{-\nu T}\,dxdt \leqslant T\iint u_{tx_k}^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

dobijamo (12).

Pored dokazanih nejednakosti, često ćemo koristiti i nejednakost

$$\left(\sum_{i,j,\rho=1}^{n} a_{ij x_\rho}\, u_{x_i x_j}\right)^2 \leqslant M\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j} \tag{13}$$

gde je $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ i M konstanta,[10] (st. 577).

$$2\iint \sum_{k=1}^{n} u_{tt x_k}\, u_{tx_k}\, e^{-\theta_1 t}\,dxdt = \iint\sum_{k=1}^{n} (u_{tx_k}^2)_t\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt =$$

$$= e^{-\theta_1 T}\int_{t=T}\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,dx + \theta_1\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dxdt\,,$$

$$2\iint\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{t}u_t\right)_{x_k} u_{tx_k}\, e^{-\theta_1 t}dxdt = 2\iint\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{x_k}}{t}\,u_t\, u_{tx_k}\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt\, +$$

$$+\,2\iint\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{t}\,u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dxdt \geqslant -\,\alpha_{11} B n\iint \frac{1}{t^2}\,u_t^2\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt\, -$$

$$-\,\frac{1}{\alpha_{11}}B\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}dx\,dt + 2\iint\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{t}\,u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -4\,\alpha_{11}\,Bn\iint u_{tt}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - \frac{1}{\alpha_{11}}\,B\iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt +$$

$$2\iint\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{t}\,u_{tx_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i x_i}\,u_{tx_k}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt = 2\varepsilon\iint\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}\,u_{tx_k x_i}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt =$$

$$= 2\varepsilon\, e^{-\theta_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}^2\,dx - 2\varepsilon\iint\sum_{i,k=1}^{n} u_{tx_k x_i}\,u_{x_k x_i}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt +$$

$$+2\varepsilon\theta_1\iint\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt =$$

$$= \varepsilon\, e^{-\theta_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}^2\,dx + \varepsilon\theta_1\iint\sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt\,,$$

$$-2\iint\sum_{i,j,k=1}^{n}(a_{ijx_k}u_{x_i})_{x_j}\,u_{tx_k}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt =$$

$$= -2\iint\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijx_k x_j}\,u_{x_i}\,u_{tx_k}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - 2\iint\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijx_k}\,u_{x_i x_j}\,u_{tx_k}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -An^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - An^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt -$$

$$-\iint\Big(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijx_k}\,u_{x_i x_j}\Big)^2 e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - n^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}An^2T^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - An^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt -$$

$$-M\iint\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\,u_{x_k x_i}\,u_{x_k x_j}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt - n^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt\,,$$

$$-2\iint\sum_{i,j,k=1}^{n}(a_{ij}\,u_{x_k x_i})_{x_j}\,u_{tx_k}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt = 2\iint\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\,u_{x_k x_i}\,u_{tx_k x_j}\,e^{-\theta_1 t}\,dx\,dt =$$

$$= 2 e^{-\theta_1 T} \int \sum_{\substack{t=T \\ i,j,k=1}}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, dx - 2 \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijt}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt -$$

$$- 2 \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\, u_{t x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt + 2\theta_1 \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt =$$

$$= e^{-\theta_1 T} \int \sum_{\substack{t=T \\ i,j,k=1}}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, dx - \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijt}\, u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \theta_1 \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt .$$

Koristeći uslov (1. 3) kada je $\xi_i \equiv (u_{x_k})_{x_i}$, i za $\theta_1 - M > K$ dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(K a_{ij} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \xi_i \xi_j \right] \geqslant \delta \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\, \xi_i \right)^2 .$$

Na osnovu tih rezultata imamo

$$- 2 \iint \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ij}\ \ u_{x_i}\ \ )_{x_j x_k}\, u_{t x_k}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant e^{-\theta_1 T} \int \sum_{\substack{t=T \\ i,j,k=1}}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, dx + \delta \sum_{k=1}^{n} \iint \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_k x_i} \right)^2 e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt -$$

$$- \iint \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} A n^2 T^2 + A n^2 + n^2 \right) u_{t x_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt .$$

Dalje je

$$2 \iint \sum_{i,k=1}^{n} (b_i\, u_{x_i})_{x_k}\, u_{t x_k}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt =$$

$$= 2 \iint \sum_{i,k=1}^{n} b_{i x_k}\, u_{x_i}\, u_{t x_k} e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt + 2 \iint \sum_{i,k=1}^{n} b_i\, u_{x_k x_i}\, u_{t x_k}\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant - A n \iint \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt - A n \iint \sum_{k=1}^{n} u_{t x_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt -$$

$$- \alpha_{12} \sum_{k=1}^{n} \iint \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\ \ u_{x_k x_i} \right)^2 e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt - \frac{1}{\alpha_{12}}\, n \iint \sum_{k=1}^{n} u_{t x_k}^2\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2} A n^2 T^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt - A n^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt -$$

$$-\alpha_{12} \sum_{k=1}^{n} \iint \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \; u_{x_k x_i} \Big)^2 e^{-\theta_1 t} dx\, dt - \frac{1}{\alpha_{12}} n \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt,$$

$$2 \iint \sum_{k=1}^{n} (c u)_{x_k} u_{tx_k} e^{-\theta_1 t} dx dt =$$

$$= 2 \iint \sum_{k=1}^{n} c_{x_k} u\, u_{tx_k} e^{-\theta_1 t} dx dt + 2 \iint \sum_{k=1}^{n} c\, u_{x_k} u_{tx_k} e^{-\theta_1 t} dx dt \geqslant$$

$$\geqslant -A n \iint u^2 e^{-\theta_1 t} dx dt - A n^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt -$$

$$-\frac{1}{2} A n^2 T^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx\, dt - A n^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt,$$

$$-2 \iint \sum_{k=1}^{n} f_{x_k} u_{tx_k} e^{-\theta_1 t} dx dt \geqslant -\iint \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt - \iint \sum_{k=1}^{n} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt.$$

Koristeći rezultat (8), pri izboru $\alpha_{12} \leqslant \delta$, i

$$\iint f_{x_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx\, dt \leqslant \iint f_{x_k}^2 dx\, dt \leqslant A \equiv M_{11} < +\infty ;$$

sleduje

$$e^{-\theta_1 T} \int_{t=T} \sum_{k=1}^{n} \Big(u_{tx_k}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{x_k x_i}^2 \Big) dx +$$

$$+ \varepsilon \theta_1 \iint \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_k x_i}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt + 2 \iint \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{t} u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt +$$

$$+ \iint \sum_{k=1}^{n} \Big(\theta_1 - \frac{B}{\alpha_{11}} - \frac{n}{\alpha_{12}} - \frac{3}{2} A n^2 T^2 - 4 A n^2 - n^2 - 1 \Big) u_{tx_k}^2 e^{-\theta_1 t} dx dt -$$

$$-4\,\alpha_{11} B n \iint u_{tt}^2\, e^{-\theta_1 t}\, dx\, dt \leq M_{11}, \tag{14}$$

II.2. Pomnožimo jednačinu (3) sa $2\, u_{tt}\, e^{-\lambda_1 t}$ $(\lambda_1 > 0)$ i integralimo je po oblasti $G_{\varepsilon T}$.

$$2\iint \Big[\, u_{tt} + \frac{b}{t} u_t - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i} +$$

$$+ c u - f \,\Big]\, u_{tt}\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt = 0 \,.$$

Za odgovarajuće sabirke dobijamo

$$2\iint u_{tt}\, u_{tt}\, e^{-\lambda_1 t}\, dx dt = 2\iint u_{tt}^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt$$

$$2\iint \frac{b}{t}\, u_t\, u_{tt}\, e^{-\lambda_1 t}\, dx dt = \iint \frac{b}{t} (u_t^2)_t\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt =$$

$$= e^{-\lambda_1 T} \int\limits_{t=T} \frac{b}{t}\, u_t^2\, dx - \iint \frac{b_t}{t}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \iint \frac{b}{t^2}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx dt + \lambda_1 \iint \frac{b}{t}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \geq$$

$$\geq e^{-\lambda_1 T} \int\limits_{t=T} \frac{b}{t}\, u_t^2\, dx - \frac{B}{\lambda_1} \iint u_{tt}^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \iint \frac{b}{t^2}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt + \lambda_1 \iint \frac{b}{t}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt,$$

$$\Big(\text{jer je} \qquad -\iint \frac{b_t}{t}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \geq$$

$$\geq -B \iint \frac{1}{t}\, u_t^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx dt \geq -\frac{B}{\lambda_1} \iint u_{tt}^2\, e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \quad \Big)$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}u_{tt}\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=2\varepsilon\iint\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\,u_{ttx_i}\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=$$

$$=2\varepsilon\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\,u_{tx_i}\,dx-2\varepsilon\iint\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon\lambda_1\iint\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^2)_t\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=2\varepsilon\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\,u_{tx_i}\,dx-$$

$$-\varepsilon\iint\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_1\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,dx-$$

$$-\varepsilon\iint\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_1 e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,dx+$$

$$+\varepsilon\lambda_1^2\iint\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\geqslant-\beta_{11}\varepsilon T\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{\beta_{11}}\varepsilon e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\,dx-2\varepsilon\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon\lambda_1 e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}^2\,dx+\varepsilon\lambda_1^2\iint\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt,$$

(jer je $\quad 2\varepsilon e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\,u_{tx_i}\,dx\geqslant$

$$\geqslant-\beta_{11}\,\varepsilon\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,dx-\frac{1}{\beta_{11}}\varepsilon\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant-\beta_{11}\,\varepsilon T\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt-\frac{1}{\beta_{11}}\,\varepsilon e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\,dx\quad)$$

$$-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\,u_{x_i})_{x_j}\,u_{tt}\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{ttx_j}e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=$$

$$=2\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,u_{x_i}u_{tx_j}\,dx-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\,u_{x_i}\,u_{tx_j}\,e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt-$$

$$-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{tx_i}\ u_{tx_j}\ e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+\lambda_1 2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{x_i}\ u_{tx_j}\ e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt=$$

$$=2e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{x_i}\ u_{tx_j}\ dx\ -2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\ u_{x_i}\ u_{tx_j}\ e^{-\lambda_1 t}\ dx\,dt-$$

$$-2\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{tx_i}\ u_{tx_j}\ e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+\lambda_1 e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{x_i}\ u_{x_j}\ dx\ +$$

$$+\ \lambda_1\iint\sum_{i,j=1}^{n}\left[(\lambda_1 a_{ij}-\ a_{ijt}\ )\ u_{x_i}\ \ u_{x_j}\ \right]e^{-\lambda_1 t}\ dx\,dt\ \geqslant$$

$$\geqslant-\beta_{12}\,An\ e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\ \ dx-\frac{1}{\beta_{12}}\,An\,e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{j=1}^{n}u_{tx_j}^2\ dx\ -$$

$$-\ An\iint\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\ e^{-\lambda_1 t}\ dx\,dt\ -\ An\iint\sum_{j=1}^{n}u_{tx_j}^2\ e^{-\lambda_1 t}\ dx\ dt\ -$$

$$-\ 2An\iint\sum_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2\ e^{-\lambda_1 t}\ \ dx\ dt\ +\ \lambda_1\ e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ u_{x_i}\ u_{x_j}dx\ +$$

$$+\ \lambda_1\delta\iint\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\ \ u_{x_i}\Big)^2\ e^{-\lambda_1 t}dx\,dt\ \geqslant-\beta_{12}\ AnT\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2 e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{\beta_{12}}\ An\ e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\ dx\ -\ \frac{1}{2}\ An^2T^2\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\ \ e^{-\lambda_1 t}\ \ dx\,dt\ -$$

$$-An^2\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\ e^{-\lambda_1 t}\ \ dx\,dt\ -2An^2\iint\sum_{k=1}^{n}u_{tx_k}^2\ \ e^{-\lambda_1 t}\ dx\ dt\ +$$

$$+\lambda_1\ e^{-\lambda_1 T}\int_{t=T}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ \ u_{x_i}\ \ u_{x_j}\ dx\ +\ \lambda_1\delta\iint\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\ \ u_{x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\ ,$$

$$2\iint\sum_{i=1}^{n}b_i\ \ u_{x_i}\ \ \ u_{tt}\ \ e^{-\lambda_1 t}\ \ \ dx\,dt\ \geqslant$$

$$\geqslant-\beta_{13}\iint\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\ \ u_{x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\ -\frac{1}{\beta_{13}}\iint u_{tt}^2\ \ e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\,,$$

$$2\iint c\,u\;u_{tt}\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{13}\,A^2\iint u^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt - \frac{1}{\beta_{13}}\iint u_{tt}^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\,,$$

$$-2\iint f\;u_{tt}\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{13}\iint f^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt - \frac{1}{\beta_{13}}\iint u_{tt}^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\;.$$

Koristeći rezultat (8), pri izboru $\lambda_1\delta - \beta_{13} > 0$ i znajući da je funkcija $f(t,x)$ ograničena, sleduje

$$e^{-\lambda_1 T}\int\limits_{t=T}\Big(\frac{b}{t}\,u_t^2 + \lambda_1\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j} + \varepsilon\,\lambda_1\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\Big)dx\, +$$

$$+\varepsilon\,\lambda_1^2\iint\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt + \lambda_1\iint\frac{b}{t}\,u_t^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\, +$$

$$+\frac{b}{t^2}\,u_t^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt - e^{-\lambda_1 T}\int\limits_{t=T}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\varepsilon}{\beta_{11}} + \frac{An}{\beta_{12}}\Big)\,u_{tx_k}^2\,dx\, -$$

$$-\iint\sum_{k=1}^{n}\Big(2\,\varepsilon + \varepsilon\beta_{11}T + \frac{1}{2}An^2\,T^2 + \beta_{12}\,An\,T + 3An^2\Big)\,u_{tx_k}^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\, +$$

$$+\iint\Big(2 - \frac{B}{\lambda_1} - \frac{3}{\beta_{13}}\Big)\,u_{tt}^2\;e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt \leqslant M_{12}\,, \qquad (15)$$

II.3. Neka je : $\nu_1 \geqslant \max(\theta_1, \lambda_1)$, $M_{11} + M_{12} = M_{13}$; sabiranjem (14) i (15), pri izboru konstanata ν_1, α_{11}, α_{12}, β_{11}, β_{12}, β_{13}, tako da je

$$\nu_1 > K + M, \quad \nu_1 \delta - \beta_{13} > 0, \quad \alpha_{12} \leqslant \delta,$$

$$\mu_{11} \equiv 1 - \frac{\varepsilon}{\beta_{11}} - \frac{An}{\beta_{12}} > 0,$$

$$\mu_{21} \equiv 2 - \frac{B}{\nu_1} - \frac{3}{\beta_{13}} - 4\alpha_{11} Bn > 0,$$

$$\mu_{31} \equiv \nu_1 - \frac{B}{\alpha_{11}} - \frac{n}{\alpha_{12}} - 2An^2T^2 - 7An^2 - n^2 - \beta_{12}AnT - \varepsilon\beta_{11}T - 2\varepsilon - 1 > 0,$$

dobijamo

$$e^{-\nu_1 T} \int_{t=T} \Big(\frac{b}{t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + \nu_1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 + \varepsilon \nu_1 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \Big) dx + \varepsilon \nu_1^2 \iint \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \varepsilon \nu_1 \iint \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i x_k}^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt + \nu_1 \iint \frac{b}{t} u_t^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ 2 \iint \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{t} u_{t x_k}^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt + \iint \frac{b}{t^2} u_t^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \mu_{11} e^{-\nu_1 T} \int_{t=T} u_{t x_k}^2\, dx + \mu_{31} \iint \sum_{k=1}^{n} u_{t x_k}^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt +$$

$$+ \mu_{21} \iint u_{tt}^2 e^{-\nu_1 t}\, dx\, dt \leqslant M_{13}$$

odakle, koristeći i (11), sleduje

$$\iint u_{tt}^2\, dx\, dt \leqslant M_1 , \qquad \iint u_{tx_k}^2\, dx dt \leqslant M_1 ,$$

$$\iint u_{x_k}^2\, dx\, dt \leqslant M_1 , \qquad \int_{t=T} u_{tx_k}^2\, dx \leqslant M_1 , \tag{16}$$

gde je M_1 pozitivna konstanta.

III DOKAZ OGRANIČENOSTI INTEGRALA FUNKCIJA $u_{ttx_k}^2$, $u_{tx_kx_l}^2$, $u_{x_kx_l}^2$

III.1. Primenimo na jednačinu (3) operator $D^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$, pomnožimo dobijenu jednačinu sa $2u_{tx_kx_l} e^{-\theta_2 t}$ $(\theta_2 > 0)$, integralimo dobijeni rezultat po oblasti $G_{\varepsilon T}$ i izvršimo sabiranje po k i l od 1 do n.

Pre svega primetimo da su nejednakosti (9), (10), (11), (12) tačne i za funkciju $u_{x_k \dots x_p}(t, x)$ (jer iz $u(\varepsilon, x) = 0$, $u_t(\varepsilon, x) = 0$ sleduje $u_{x_k \dots x_p}(\varepsilon, x) = 0$, $u_{tx_k \dots x_p}(\varepsilon, x) = 0$), otuda

$$\iint \frac{1}{t} u_{tx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{\nu} \iint u_{ttx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt, \ \nu > 0, \tag{17}$$

$$\iint \frac{1}{t^2} u_{tx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant 4 \iint u_{ttx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt, \ \nu \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\iint u_{x_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{2} T^2 \iint u_{tx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt, \ \nu \geqslant 0, \tag{19}$$

$$e^{-\nu T} \int_{t=T} u_{x_k \dots x_p}^2\, dx \leqslant T \iint u_{tx_k \dots x_p}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt , \quad \nu \geqslant 0 , \tag{20}$$

Napomenimo još da ćemo u daljem radu sa $\sum_k a_k$ obeležavati izraz $\sum_{k=1}^{n} a_k$; a sa $\overline{M}_m$ obeležavati ocene integrala oblika

$$\iint u_{ttx_{k_1} \dots x_{k_m}}^2\, dx\, dt , \iint u_{tx_{k_1} \dots x_{k_m}}^2\, dx\, dt, \int_{t=T} u_{tx_{k_1} \dots x_{k_m}}^2\, dx$$

pomnoženih nekom konstantom, na primer

$$\frac{1}{2} A n^2 T^2 \iint \sum_k u_{tx_k}^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{2} A n^2 T^2 \sum_k M_1 \leqslant \frac{1}{2} A n^3 T^2 M_1 \equiv \overline{M}_1$$

Sve pozitivne integrale koji su pomnoženi sa ε, ili u podintegralnoj funkciji sadrže faktor b(t, x), ili u podintegralnoj funkciji sadrže faktor $\sum\limits_{k\ldots pij} a_{ij} \; u_{x_k \ldots x_p x_i} u_{x_k \ldots x_p x_j}$, ocenjivaćemo sa nulom. Takodje ćemo, ne jednom, koristiti sledeći rezultat

$$-2 \iint \sum_{i,j,k\ldots p} \left(a_{ij} \; u_{x_i x_k \ldots x_p}\right)_{x_j} u_{t x_k \ldots x_p} e^{-\nu t} dx\, dt =$$

$$= 2 \iint \sum_{ijk\ldots p} a_{ij} \; u_{x_i x_k \ldots x_p} \; u_{t x_k \ldots x_p x_j} \; e^{-\nu t} \, dx\, dt =$$

$$= e^{-\nu T} \int\limits_{t=T} \sum_{k\ldots p} \sum_{i,j} a_{ij} \; u_{x_k \ldots x_p x_i} \; u_{x_k \ldots x_p x_j} \, dx \; +$$

$$+ \sum_{k\ldots p} \iint \Big[\sum_{ij} \left(\nu a_{ij} - a_{ijt}\right) u_{x_k \ldots x_p x_i} u_{x_k \ldots x_p x_j} \Big] e^{-\nu t} dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k\ldots p} \iint \delta \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \; u_{x_k \ldots x_p x_i} \right)^2 e^{-\nu t} \, dx\, dt ,$$

gde je δ odredjeno uslovom (1. 3) i $\nu > K$. Vratimo se rešenju zadatka koji je postavljen na početku ove sekcije. Za pojedine sabirke dobijamo

$$2 \iint \sum_{kl} u_{tt x_k x_l} \; u_t \, x_k \; x_l \; e^{-\theta_2 t} \, dx\, dt = \iint \sum_{kl} (u_t^2 \, x_k x_l)_t \; e^{-\theta_2 t} \, dx\, dt =$$

$$= e^{-\theta_2 T} \int\limits_{t=T} \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l} \; dx + \theta_2 \iint \sum_{kl} u^2_{t\, x_k x_l} \; e^{-\theta_2 t} dx\, dt ,$$

$$2 \iint \sum_{kl} \left(\frac{b}{t} u_t \right)_{x_k x_l} \; u_{t x_k x_l} \; e^{-\theta_2 t} \, dx\, dt \; =$$

$$= 2\iint \sum_{kl} \frac{b_{x_k x_l}}{t} u_t\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt + 2\iint \sum_{kl} \frac{b_{x_k}}{t} u_{t x_l}\, u_{t x_k x_l} e^{-\theta_2 t} dx\, dt +$$

$$+ 2\iint \sum_{kl} \frac{b_{x_l}}{t} u_{t x_k}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx dt + 2\iint \frac{b}{t} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\iint \sum_{kl} \frac{b_{x_k x_l}}{t} u_t\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\, dt + 4\iint \sum_{kl} \frac{b_{x_l}}{t} u_{t x_k}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -Bn^2 \iint \frac{1}{t^2} u_t^2\, e^{-\theta_2 t} dx\, dt - B\iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt -$$

$$-4\alpha_{31}\, Bn \iint \sum_{k} \frac{1}{t^2} u^2_{t x_k}\, e^{-\theta_2 t}\, dx dt - 4\frac{B}{\alpha_{31}} \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -4\, Bn^2 \iint u^2_{tt}\, e^{-\theta_2 t}\, dx dt - B\iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt -$$

$$-16\, \alpha_{31}\, Bn \iint \sum_{k} u^2_{tt x_k} e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt - 4\, \frac{B}{\alpha_{31}} \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -16\, \alpha_{31}\, Bn \iint \sum_{k} u^2_{tt x_k}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt - B\left(1 + \frac{4}{\alpha_{31}}\right) \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx dt - \overline{M}_1,$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{ikl} u_{x_i x_i x_k x_l}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx dt =$$

$$= 2\varepsilon \iint \sum_{ikl} u_{x_i x_k x_l}\, u_{t x_i x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt = \varepsilon \iint \sum_{ikl} (u^2_{x_i x_k x_l})_t\, e^{-\theta_2 t} dx dt =$$

$$= \varepsilon\, e^{-\theta_2 T} \int_{t=T} \sum_{ikl} u^2_{x_i x_k x_l}\, dx + \varepsilon\theta_2 \iint \sum_{ikl} u^2_{x_i x_k x_l} e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt \geqslant 0,$$

$$-2\iint \sum_{ijkl} (a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j x_k x_l}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\, dt =$$

$$= -2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_j\,x_k\,x_l} u_{x_i} u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt - 2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_j\,x_k} u_{x_i x_l}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_j\,x_l}\, u_{x_i x_k}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt - 2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_k\,x_l}\, u_{x_i\,x_j}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_k}\, u_{x_i x_j x_l}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt - 2\iint \sum_{ijkl} a_{ij\,x_l}\, u_{x_i\,x_j\,x_k}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijkl} (a_{ij}\, u_{x_i\,x_k\,x_l})_{x_j}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -An^3 \iint \sum_i u^2_{x_i}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt - An^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-An^2 \iint \sum_{il} u^2_{x_i x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt - An^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-An^2 \iint \sum_{ik} u^2_{x_i x_k}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt - An^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-An^2 \iint \sum_{ij} u^2_{x_i x_j}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt - An^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-\sum_l \iint \Big(\sum_{ijk} a_{ij\,x_k}\, u_{x_l x_i x_j}\Big)^2 e^{-\theta_2 t} dx\,dt - n^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l} e^{-\theta_2 t} dx\,dt -$$

$$-\sum_k \iint \Big(\sum_{ijl} a_{ij\,x_l}\, u_{x_k x_i x_j}\Big)^2 e^{-\theta_2 t} dx\,dt - n^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l} e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijkl} (a_{ij}\, u_{x_i x_k x_l})_{x_j}\, u_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt =$$

$$= -An^3 \iint \sum_k u^2_{x_k}\, e^{-\theta_2 t} dx\,dt - 3An^2 \iint \sum_{kl} u^2_{x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-(4A+2)\,n^2 \iint \sum_{kl} u^2_{t x_k x_l}\, e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt - 2\sum_k \iint \Big(\sum_{ijl} a_{ij\,x_l}\, u_{x_k x_i x_j}\Big)^2 e^{-\theta_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-2\iint\sum_{ijkl}(a_{ij}\,u_{x_i x_k x_l})_{x_j}\,u_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\overline{M}_1 - \frac{3}{2}An^2T^2\iint\sum_{kl}u^2_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt - (4A+2)n^2\iint\sum_{kl}u^2_{tx_kx_l}e^{-\theta_2 t}dx\,dt -$$

$$-2\sum_{k}\iint M\sum_{ijl}a_{ij}\,u_{x_kx_lx_i}\,u_{x_kx_lx_j}\,e^{-\theta_2 t}dx\,dt + \sum_{kl}\iint\delta\Big(\sum_i b_i\,u_{x_kx_lx_i}\Big)^2 e^{-\theta_2 t}dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\overline{M}_1 - (2+4A+\frac{3}{2}An^2T^2)\iint\sum_{kl}u^2_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt + \sum_{kl}\iint\delta\Big(\sum_i b_i\,u_{x_kx_lx_i}\Big)^2 e^{-\theta_2 t}dx\,dt,$$

$$2\iint\sum_{kl}\Big[\sum_i(b_i u_{x_i})_{x_kx_l} + (cu)_{x_kx_l} - f_{x_kx_l}\Big]u_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt =$$

$$= 2\sum_{kl}\iint\sum_i b_i\,u_{x_kx_lx_i}\,u_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt +$$

$$+2\sum_{kl}\iint\Big[\sum_i(b_{ix_k}\,u_{x_ix_l} + b_{ix_l}\,u_{x_ix_k} + b_{ix_kx_l}\,u_{x_i}) + c\,u_{x_kx_l} +$$

$$+ c_{x_k}\,u_{x_l} + c_{x_l}\,u_{x_k} + c_{x_kx_l}u - f_{x_kx_l}\Big]u_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\alpha_{32}\sum_{kl}\iint\Big(\sum_i b_i u_{x_kx_lx_i}\Big)^2 e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt - A_1\iint\sum_{kl}u^2_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt -$$

$$-M_0 - \overline{M}_1 .$$

Prema sledećim relacijama

$$\alpha_{32} \leqslant \delta, \qquad 2+4A+\frac{3}{2}An^2T^2 + A_1 \equiv A_{31}$$

dobijamo

$$e^{-\theta_2 T}\int\sum_{kl}u^2_{tx_kx_l}\Big|_{t=T}\,dx + \iint\sum_{kl}\Big(\theta_2 - B - \frac{4B}{\alpha_{31}} - A_{31}\Big)u^2_{tx_kx_l}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt -$$

$$-16\alpha_{31}Bn\iint\sum_k u^2_{ttx_k}\,e^{-\theta_2 t}\,dx\,dt \leqslant M_{21}, \qquad (21)$$

III.2. Primenimo na jednačinu (3) operator $D^1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}$, pomnožimo dobijenu jednačinu sa $2u_{ttx_k} \; e^{-\lambda_2 t}$ $(\lambda_2 > 0)$, integralimo dobijeni rezultat po oblasti $G_{\varepsilon T}$ i izvršimo sabiranje po k od 1 do n.

$$2\iint \sum_k u_{ttx_k} u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt = 2\iint \sum_k u_{ttx_k}^2 e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt,$$

$$2\iint \sum_k \left(\frac{b}{t} u_t\right)_{x_k} u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt =$$

$$= 2\iint \sum_k \frac{b_{x_k}}{t} u_t \, u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt + \iint \sum_k \frac{b}{t} (u_{tx_k}^2)_t \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt =$$

$$= 2\iint \sum_k \frac{b_{x_k}}{t} u_t \, u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt + e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_k \frac{b}{t} u_{tx_k}^2 \, dx -$$

$$- \iint \sum_k \frac{b_t}{t} u_{tx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt + \iint \sum_k \frac{b}{t^2} u_{tx_k}^2 e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt +$$

$$+ \lambda_2 \iint \sum_k \frac{b}{t} u_{tx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\iint \sum_k \frac{b_{x_k}}{t} u_t \, u_{ttx_k} \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt - \iint \sum_k \frac{b_t}{t} u_{tx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{31} B n \iint \frac{1}{t^2} u_t^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt - \frac{B}{\beta_{31}} \iint \sum_k u_{ttx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt -$$

$$- B \iint \sum_k \frac{1}{t} u_{tx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\overline{M}_1 - \frac{B}{\beta_{31}} \iint \sum_k u_{ttx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt - \frac{B}{\lambda_2} \iint \sum_k u_{ttx_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\, dt =$$

$$= -B\left(\frac{1}{\beta_{31}} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\iint \sum_k u_{ttx_k}^2 e^{-\lambda_2 t}\, dx\, dt - \overline{M}_1 ,$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{ik} u_{x_i x_i x_k} u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t} dx\, dt = 2\varepsilon \iint \sum_{ik} u_{x_i x_k} u_{ttx_i x_k} e^{-\lambda_2 t} dx\, dt =$$

$$= 2\varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l} u_{tx_k x_l} dx - 2\varepsilon \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt +$$

$$+ \varepsilon \lambda_2 \iint \sum_{kl} \left(u_{x_k x_l}^2\right)_t e^{-\lambda_2 t} dx\, dt =$$

$$= 2\varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l} u_{tx_k x_l} dx - 2\varepsilon \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt +$$

$$+ \varepsilon \lambda_2 e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 dx + \varepsilon \lambda_2^2 \iint \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant 2\varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l} u_{tx_k x_l} dx - 2\varepsilon \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{32} \varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 dx - \frac{1}{\beta_{32}} \varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 dx -$$

$$- 2\varepsilon \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{32} \varepsilon T \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt - \frac{1}{\beta_{32}} \varepsilon e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 dx -$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 e^{-\lambda_2 t} dx\, dt .$$

Kako je

$$-2\iint \sum_{ijk}(a_{ij}\, u_{x_k x_i})_{x_j}\, u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt = 2\iint \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{ttx_k x_j} e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt =$$

$$= 2 e^{-\lambda_2 T}\int_{t=T} \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, dx - 2\iint \sum_{ijk} a_{ijt}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{tx_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt + 2\lambda_2 \iint \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt,$$

$$2\lambda_2 \iint \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt = \lambda_2 e^{-\lambda_2 T}\int_{t=T} \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, dx +$$

$$+ \lambda_2 \iint \sum_{k}\sum_{ij} (\lambda_2 a_{ij} - a_{ijt})\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_2 \sum_{k} \iint \sum_{ij} (\lambda_2 a_{ij} - a_{ijt})\, u_{x_k x_i}\, u_{x_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_2 \sum_{k} \iint \delta\Big(\sum_{i} b_i\, u_{x_k x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt, \quad (\lambda_2 > K)$$

dobijamo

$$-2\iint \sum_{ijk}(a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j x_k}\, u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt = -2\iint \sum_{ijk} a_{ijx_k x_j}\, u_{x_i}\, u_{ttx_k} e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijk} a_{ijx_k}\, u_{x_i x_j}\, u_{ttx_k}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt - 2\iint \sum_{ijk}(a_{ij}\, u_{x_k x_i})_{x_j}\, u_{ttx_k}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -2\iint \sum_{ijk} a_{ijx_k x_j}\, u_{x_i}\, u_{ttx_k}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt - 2\iint \sum_{ijk} a_{ijx_k}\, u_{x_i x_j}\, u_{ttx_k}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt +$$

$$+ 2 e^{-\lambda_2 T}\int_{t=T} \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, dx - 2\iint \sum_{ijk} a_{ijt}\, u_{x_k x_i}\, u_{tx_k x_j} e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt -$$

$$-2\iint \sum_{ijk} a_{ij}\, u_{tx_k x_i}\, u_{tx_k x_j}\, e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt + \lambda_2 \delta \sum_{k} \iint \Big(\sum_{i} b_i\, u_{x_k x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{33} An^2 \iint \sum_i u_{x_i}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - \frac{1}{\beta_{33}} An^2 \iint \sum_k u_{tt x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- \beta_{33} An \iint \sum_{ij} u_{x_i x_j}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - \frac{1}{\beta_{33}} An^2 \iint \sum_k u_{tt x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- \beta_{34} An e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 \, dx - \frac{e^{-\lambda_2 T}}{\beta_{34}} \int_{t=T} An \sum_{jk} u_{tx_j x_k}^2 \, dx -$$

$$- An \iint \sum_{ik} u_{x_i x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - An \iint \sum_{jk} u_{tx_j x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- 2An \iint \sum_{ik} u_{tx_i x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt + \lambda_2 \delta \sum_k \iint \Big(\sum_i b_i \, u_{x_k x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt =$$

$$= -\beta_{33} An^2 \iint \sum_k u_{x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - \frac{2}{\beta_{33}} An^2 \iint \sum_k u_{tt x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- 3An \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - (\beta_{33}+1) An \iint \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- \beta_{34} An e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{x_k x_l}^2 \, dx - \frac{e^{-\lambda_2 T}}{\beta_{34}} An \int_{t=T} \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, dx +$$

$$+ \lambda_2 \delta \sum_k \iint \Big(\sum_i b_i \, u_{x_k} u_{x_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\overline{M}_1 - \frac{2}{\beta_{33}} An^2 \iint \sum_k u_{tt x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - 3An \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}(\beta_{33}+1) AnT^2 \iint \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - \beta_{34} AnT \iint \sum_{kl} u_{t\,x_k x_l}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt -$$

$$- \frac{e^{-\lambda_2 T}}{\beta_{34}} An \int_{t=T} \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, dx + \lambda_2 \delta \sum_k \iint \Big(\sum_i b_i \, u_{x_k x_i}\Big)^2 e^{\lambda_2 t} \, dx\,dt =$$

$$= -\frac{2}{\beta_{33}} An^2 \iint \sum_k u_{tt x_k}^2 \, e^{-\lambda_2 t} \, dx\,dt - \frac{An}{\beta_{34}} e^{-\lambda_2 T} \int_{t=T} \sum_{kl} u_{tx_k x_l}^2 \, dx -$$

$$-A_2\iint\sum_{kl}u_{tx_kx_l}^2\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt+\lambda_2\delta\iint\Big(\sum_i b_i\,u_{x_kx_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t}dx\,dt-\overline{M}_1,$$

$$\Big(3An+\beta_{34}AnT+\frac{1}{2}(\beta_{33}+1)AnT^2\equiv A_2\Big)$$

$$2\iint\sum_k\Big[\sum_i(b_i u_{x_i})_{x_k}+(cu)_{x_k}-f_{x_k}\Big]u_{ttx_k}\,e$$

$$=\sum_k 2\iint\sum_i b_i\,u_{x_kx_i}\,u_{ttx_k}\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt+$$

$$+2\iint\sum_k\Big[\sum_i b_{ix_k}\,u_{x_i}+c_{x_k}u+cu_{x_k}-f_{x_k}\Big]u_{ttx_k}\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\beta_{35}\sum_k\iint\Big(\sum_i b_iu_{x_kx_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt-\frac{1}{\beta_{35}}\sum_k\iint u_{ttx_k}^2\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt-$$

$$-\beta_{35}\sum_k\iint\Big(A\sum_i u_{x_i}^2+Au^2+Au_{x_k}^2+f_{x_k}^2\Big)e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{4}{\beta_{35}}\iint\sum_k u_{ttx_k}^2\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\beta_{35}\sum_k\iint\Big(\sum_i b_i\,u_{x_kx_i}\Big)^2 e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt-\frac{5}{\beta_{35}}\iint\sum_k u_{ttx_k}^2\,e^{-\lambda_2 t}\,dx\,dt-$$

$$-\overline{M}_0-\overline{M}_1.$$

Napomenimo, da $\overline{M}_0$ i $\overline{M}_1$ ne zavise od λ_2.

Na taj način, za $\lambda_2\delta-\beta_{35}>0$ dobijamo

$$\iint\sum_k\Big(2-\frac{B}{\beta_{31}}-\frac{B}{\lambda_2}-\frac{2An^2}{\beta_{33}}-\frac{5}{\beta_{35}}\Big)u_{ttx_k}^2\quad e^{-\lambda_2 t}\quad dx\,dt-$$

$$\iint\sum_{kl}\Big(2\varepsilon+\varepsilon\beta_{32}T+3An+\beta_{34}AnT+\frac{1}{2}(\beta_{33}+1)AnT^2\Big)u_{tx_kx_l}^2\;e^{-\lambda_2 t}\;dx\,dt-$$

$$-e^{-\lambda_2 T}\int\limits_{t=T}\sum\left(\frac{\varepsilon}{\beta_{32}}+\frac{An}{\beta_{34}}\right)u^2_{tx_kx_l}\,dx\leq M_{22}\,. \tag{22}$$

III. 3. Neka je $\nu_2 \geqslant \max\ (\theta_2, \lambda_2)$.

Sabiranjem nejednakosti (21) i (22), birajući konstante

$\alpha_{31}, \ \alpha_{32}, \ \beta_{31}, \ \beta_{32}, \ \beta_{33}, \ \beta_{34}, \ \beta_{35}$ tako da je

$$\nu_2 > K + 2\ldots, \qquad \nu_2\,\delta - \beta_{35} > 0, \qquad \alpha_{32}\leq\delta\,,$$

$$\mu_{12}\equiv 1-\frac{\varepsilon}{\beta_{32}}-\frac{An}{\beta_{34}}>0\,,$$

$$\mu_{22}\equiv 2-\frac{B}{\beta_{31}}-\frac{B}{\nu_2}-\frac{2An^2}{\beta_{33}}-\frac{5}{\beta_{35}}-16\,\alpha_{31}\,Bn>0\,,$$

$$\mu_{32}\equiv \nu_2-\frac{4B}{\alpha_{31}}-\frac{3}{2}AnT^2-\frac{1}{2}(\beta_{33}+1)AnT^2-\beta_{34}AnT-3An-4A-A_1-$$

$$-\ldots-3\beta_{32}T-2\varepsilon-2>0\,,$$

dobijamo

$$e^{-\nu_2 T}\int\limits_{t=T}\sum_{kl}\mu_{12}\,u^2_{tx_kx_l}\,dx\,+$$

$$+\iint\sum_{k}\mu_{22}\,u^2_{ttx_k}\,e^{-\nu_2 t}\,dx\,dt\,+$$

$$+\iint\sum_{kl}\mu_{32}\,u^2_{tx_kx_l}\,e^{-\nu_2 t}\,dx\,dt\leq M_{23}\,,$$

odakle sleduje

$$\iint u^2_{ttx_k}\,dx\,dt\leqslant M_2\,,\qquad \iint u^2_{tx_kx_l}\,dx\,dt\leq M_2\,,$$

$$\iint u^2_{x_kx_l}\,dx\,dt\leq M_2\,,\qquad \int\limits_{t=T}u^2_{tx_kx_l}\,dx\leq M_2\,. \tag{23}$$

IV DOKAZ OGRANIČENOSTI INTEGRALA FUNKCIJA

$$u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\ ,\quad u^2_{t\,x^{(m)}}\ ,\quad u^2_{x^{(m)}}$$

Napomenimo, da ćemo dalje ocene integrala vršiti po indukciji. Neka su sledeće ocene

$$\iint u^2_{tt\,x_k\ldots x_p}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,\quad \iint u^2_{t\,x_k\ldots x_p\,x_q}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,$$

$$\iint u^2_{x_k\ldots x_p\,x_q}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,\quad \int\limits_{t=T} u^2_{t\,x_k\ldots x_p\,x_q}\,dx \leqslant M_{m-1}\ ,$$

$$\left(u_{x_k\ldots x_p\,x_q} \equiv \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_k\cdots\partial x_p\,\partial x_q} \right)$$

tačne.

Uvodeći označavanje

$$D^m \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\cdots\frac{\partial}{\partial x_p}\,\frac{\partial}{\partial x_q}\,\frac{\partial}{\partial x_r} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{(m)}}$$

možemo ih napisati u obliku

$$\iint u^2_{tt\,x^{(m-2)}}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,\quad \iint u^2_{t\,x^{(m-1)}}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,$$

$$\iint u^2_{x^{(m-1)}}\,dx\,dt \leqslant M_{m-1}\ ,\quad \int\limits_{t=T} u^2_{t\,x^{(m-1)}}\,dx \leqslant M_{m-1}\,. \tag{24}$$

IV.1. Primenimo na jednačinu (3) operator $D^m \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\cdots\frac{\partial}{\partial x_r}$, pomnožimo dobijenu jednačinu sa $2u_{t\,x_k\ldots x_r}\,e^{-\theta_m t}$ $(\theta_m > 0)$, integralimo dobijeni rezultat po oblasti $G_{\varepsilon T}$ i izvršimo sabiranje po $k, l, \ldots, p, q, r$, od 1 do n. Za pojedine sabirke dobijamo

$$2\iint \sum_{k\ldots r} u_{tt\,x^{(m)}}\,u_{t\,x^{(m)}}\,e^{-\theta_m t}\,dx\,dt = \iint \sum_{k\ldots r} (u^2_{t\,x^{(m)}})_t\,e^{-\theta_m t}\,dx\,dt =$$

$$= e^{-\theta_m T}\int\limits_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{t\,x^{(m)}}\,dx + \theta_m\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{t\,x^{(m)}}\,e^{-\theta_m t}\,dx\,dt\ ,$$

$$2\iint \sum_{k\ldots r}\left(\frac{b}{t}u_t\right)_{x^{(m)}} u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$=\binom{m}{0}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x^{(m)}}}{t}u_t\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+\binom{m}{1}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x^{(m-1)}}}{t}u_{tx_k}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+\binom{m}{2}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x^{(m-2)}}}{t}u_{tx_kx_l}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+\binom{m}{m-1}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x_r}}{t}u_{tx^{(m-1)}}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+\binom{m}{m}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b}{t}u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x^{(m-s)}}}{t}u_{tx^{(s)}}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x^{(m-s)}}}{t}u_{tx^{(s)}}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+\binom{m}{m-1}\iint \sum_{k\ldots r} 2\,\frac{b_{x_r}}{t}u_{tx^{(m-1)}}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint \sum_{k\ldots r} B\,\frac{1}{t^2}u^2_{tx^{(s)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint \sum_{k\ldots r} B\,u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-\alpha_{m,1}\binom{m}{m-1}\iint \sum_{k\ldots r} B\,\frac{1}{t^2}u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{\alpha_{m,1}}\binom{m}{m-1}\iint \sum_{k\ldots r} B\,u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta m t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -4B\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{ttx^{(s)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;-$$

$$-\left(2^m-m-1\right)B\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;-$$

$$-4\alpha_{m,1}\;Bm\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;-$$

$$-\frac{1}{\alpha_{m,1}}\,Bm\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;\geqslant$$

$$\geqslant -4\,m\,\alpha_{m,1}\,B\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;-$$

$$-\left(2^m-m-1+\frac{m}{\alpha_{m,1}}\right)B\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt-A_{41},$$

gde ovde, kao i u daljem tekstu, sa A_{ik} obeležavamo ocene integrala oblika (24). Napomenimo još, da smo pri oceni poslednjeg integrala koristili jednakost

$$\sum_{k\ldots r}(b\,u_t)_{x^{(m)}} = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\sum_{k\ldots r}b_{x^{(m-s)}}\;u_{t\,x^{(s)}}$$

ili stavljajući $b\equiv\varphi$, $u_t\equiv\psi$; dobijamo

$$\sum_{k\ldots r}(\varphi\,\psi)_{x^{(m)}} = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\sum_{k\ldots r}\varphi_{x^{(m-s)}}\;\psi_{x^{(s)}}$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots r}u_{x_i x_i x^{(m)}}\,u_{tx^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\;=$$

$$=2\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots r}u_{x_i x^{(m)}}\;u_{tx_i x^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt=\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots r}(u^2_{x_i x^{(m)}})_t\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt=$$

$$=\varepsilon\,e^{-\theta mT}\int_{t=T}\sum_{ik\ldots r}u^2_{x_i\,x^{(m)}}\;dx\;+\varepsilon\,\theta m\iint\sum_{ik\ldots r}u^2_{x_i x^{(m)}}\;e^{-\theta mt}\;dx\,dt\geqslant 0$$

$$-2\iint\sum_{ijk\ldots r}(a_{ij}\,u_{x_i})_{x_j x^{(m)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$= -2\iint\sum_{ijk\ldots r}(a_{ij\,x_j}\,u_{x_i})_{x^{(m)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2\iint\sum_{ijk\ldots r}(a_{ij}\,u_{x_i x_j})_{x^{(m)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$= -2\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x_j x^{(m-s)}}\,u_{x_i x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x^{(m-s)}}\,u_{x_i x_j x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$= -2\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x_j x^{(m-s)}}\,u_{x_i x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x^{(m-s)}}\,u_{x_i x_j x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2\binom{m}{m}\iint\sum_{ijk\ldots r}\left(a_{ij}\,u_{x_i x^{(m)}}\right)_{x_j}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt =$$

$$= -2\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x_j x^{(m-s)}}\,u_{x_i x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij\,x^{(m-s)}}\,u_{x_i x_j x^{(s)}}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-2m\sum_{k\ldots r}\iint\sum_{ij}a_{ij\,x_r}\,u_{x^{(m-1)} x_i x_j}\,u_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt +$$

$$+2\iint\sum_{ijk\ldots r}a_{ij}\,u_{x_i x^{(m)}}\,u_{t x_j x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -A\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}u^2_{x_i x^{(s)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt - A\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r}u^2_{t x^{(m)}}\,e^{-\theta m t}\,dx\,dt -$$

$$-A\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r} u^2_{x_i x_j x^{(s)}}\, e^{-\theta_m t}\, dx\,dt - A\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m}{s}\iint\sum_{ijk\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta_m t}\, dx\,dt -$$

$$-m\sum_{k\ldots r}\iint\Big(\sum_{ij} a_{ij\,x_r}\; u_{x^{(m-1)}x_i x_j}\Big)^2 e^{-\theta_m t}\,dx\,dt - m\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\; e^{-\theta_m t}\, dx\,dt +$$

$$+\, e^{-\theta_m T}\int_{t=T}\sum_{ijk\ldots r} a_{ij}\; u_{x^{(m)}x_i}\; u_{x^{(m)}x_j}\; dx \quad +$$

$$+\sum_{k\ldots r}\iint\Big[\sum_{ij}(\theta_m a_{ij} - a_{ijt})\, u_{x^{(m)}x_i}\; u_{x^{(m)}x_j}\Big] e^{-\theta_m t}\; dx\,dt \;\geqslant$$

$$\geqslant -A_{42} - \Big[\frac{1}{4}Amn^2T^2(m+1) + A(2^{m+1} - m - 2)n^2 + m\Big]\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\; e^{-\theta_m t}\; dx\,dt -$$

$$-mM\sum_{k\ldots r}\iint\sum_{ij} a_{ij}\; u_{x_i x^{(m-1)} x_r}\; u_{x_j x^{(m-1)} x_r}\; e^{-\theta_m t}\; dx\,dt \;+$$

$$+\sum_{k\ldots r}\iint\Big[\sum_{ij}\big(\theta_m\; a_{ij} - a_{ijt}\big)\, u_{x^{(m)}x_i}\; u_{x^{(m)}x_j}\Big]\, e^{-\theta_m t}\; dx\,dt \;\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k\ldots r}\iint\Big\{\sum_{ij}\big[(\theta_m - mM)\,a_{ij} - a_{ijt}\big]\, u_{x^{(m)}x_i}\; u_{x^{(m)}x_j}\Big\}\, e^{-\theta_m t}\; dx\,dt -$$

$$-A_{43}\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{t\,x^{(m)}}\; e^{-\theta_m t}\; dx\,dt - A_{42} \;\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k\ldots r}\iint\delta\Big(\sum_i b_i\; u_{x^{(m)}x_i}\Big)^2 e^{-\theta_m t}\,dx\,dt - A_{43}\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{t\,x^{(m)}}\, e^{-\theta_m t}\, dx\,dt - A_{42},$$

$$(\theta_m - mM > K).$$

$$2\iint\sum_{ik\ldots r}(b_i\;\; u_{x_i})_{x^{(m)}}\; u_{t\,x^{(m)}}\; e^{-\theta_m t}\; dx\,dt =$$

$$= 2\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\iint\sum_{ik\ldots r} b_{i\,x^{(m-s)}}\; u_{x_i x^{(s)}}\; u_{t\,x^{(m)}}\; e^{-\theta_m t}\; dx\,dt \;=$$

$$= 2\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ik\ldots r} b_{ix^{(m-s)}}\, u_{x_i x^{(s)}}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt\, +$$

$$+ 2\iint\sum_{ik\ldots r} b_i\, u_{x^{(m)}x_i}\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ik\ldots r} B\, u^2_{x_i x^{(s)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt - \sum_{s=0}^{m-1}\binom{m}{s}\iint\sum_{ik\ldots r} B\, u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt\, -$$

$$- \alpha_{m,2}\sum_{k\ldots r}\iint\Big(\sum_i b_i\, u_{x^{(m)}x_i}\Big)^2 e^{-\theta mt}\, dx\,dt - \frac{n}{\alpha_{m,2}}\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{k\ldots r}\iint\alpha_{m,2}\Big(\sum_i b_i\, u_{x^{(m)}x_i}\Big)^2 e^{-\theta mt}\, dx\,dt - \Big(A_{45}+\frac{1}{\alpha_{m,2}}\Big)\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt - A_{44},$$

$$2\iint\sum_{k\ldots r}\big[(cu)_{x^{(m)}} - f_{x^{(m)}}\big]\, u_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -A_{46}\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt - A_{47}\,.$$

Birajući θm i $\alpha_{m,2}$ tako da je $\theta m > K + mM$, $\alpha_{m,2} \leqslant \delta^{\sim}$ dobijamo

$$e^{-\theta mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\, dx + \iint\sum_{k\ldots r}\Big(\theta m - \frac{Bm}{\alpha_{m,1}} - \frac{n}{\alpha_{m,2}} - A_{47}\Big)u^2_{tx^{(m)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt\, -$$

$$- 4\, B_m\, \alpha_{m,1}\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\theta mt}\, dx\,dt \leqslant M_{m,1}\,. \qquad (25)$$

IV.2. Primenimo na jednačinu (3) operator $D^{m-1} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}\cdots\frac{\partial}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial x_q}$, pomnožimo dobijenu jednačinu sa $2u_{tt x_k\ldots x_q}\, e^{-\lambda mt} \equiv 2u_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}$ $(\lambda m > 0)$, integralimo dobijeni rezultat po oblasti $G_{\varepsilon T}$ i izvršimo sabiranje po $k,\ldots,p$, q od 1 do n.

$$2\iint \sum_{k\ldots q} u_{ttx^{(m-1)}}\, u_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt =$$

$$= 2\iint \sum_{k\ldots q} u^2_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \, .$$

Pošto su, prema (24), integrali

$$\iint \frac{1}{t^2} u^2_{tx^{(s)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \leqslant 4 \iint u^2_{ttx^{(s)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \, ,$$

$s = 0,1,2,\ldots,m-2$, ograničeni i koristeći nejednakost

$$\iint \sum_{k\ldots q} \frac{b}{t} \left(u^2_{tx^{(m-1)}} \right)_t e^{-\lambda mt}\, dx\,dt =$$

$$= e^{-\lambda mT} \int_{t=T} \sum_{k\ldots q} \frac{b}{t} u^2_{tx^{(m-1)}}\, dx - \iint \sum_{k\ldots q} \frac{b_t}{t} u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt +$$

$$+ \iint \sum_{k\ldots q} \frac{b}{t^2} u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt + \lambda m \iint \sum_{k\ldots q} \frac{b}{t} u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant - \iint \sum_{k\ldots q} \frac{b_t}{t} u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \geqslant - B \iint \sum_{k\ldots q} \frac{1}{t} u^2_{tx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{B}{\lambda m} \iint \sum_{k\ldots q} u^2_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt \, ,$$

dobijamo

$$2\iint \sum_{k\ldots q} \left(\frac{b}{t} u_t \right)_{x^{(m-1)}} u_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{k\ldots q} 2 \frac{1}{t} b_{x^{(m-1-s)}}\, u_{tx^{(s)}}\, u_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{k\ldots q} 2 \frac{1}{t} b_{x^{(m-1-s)}}\, u_{tx^{(s)}}\, u_{ttx^{(m-1)}}\, e^{-\lambda mt}\, dx\,dt +$$

$$+\iint \sum_{k\ldots q} \frac{b}{t}\left(u^2_{tx^{(m-1)}}\right)_t e^{-\lambda mt} \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,1}\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m-1}{s}\iint\sum_{k\ldots q} B\,\frac{1}{t^2}\,u^2_{tx^{(s)}}\,e^{-\lambda mt}\,dxdt - \frac{B}{\beta_{m,1}}(2^{m-1}-1)\iint\sum_{k\ldots q} u_{ttx^{(m-1)}}e^{-\lambda mt}dxdt$$

$$-\frac{B}{\lambda_m}\iint\sum_{k\ldots q} u^2_{ttx^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\left(\frac{2^{m-1}-1}{\beta_{m,1}}+\frac{1}{\lambda_m}\right)B\iint\sum_{k\ldots q} u^2_{ttx^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt - A_{48}$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots q} u_{x_i x_i x^{(m-1)}}\,u_{ttx^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt =$$

$$= 2\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots q} u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{ttx_i x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt =$$

$$= 2\varepsilon\, e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{ik\ldots q} u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{tx_i x^{(m-1)}}\,dx -$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{ik\ldots q} u^2_{tx_i x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\lambda_m\iint\sum_{ik\ldots q}\left(u^2_{x_i x^{(m-1)}}\right)_t\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt =$$

$$= 2\varepsilon\, e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u_{x^{(m)}}\,u_{tx^{(m)}}\,dx -$$

$$-2\varepsilon\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dxdt +$$

$$+\varepsilon\lambda_m e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{x^{(m)}}\,dx + \varepsilon\lambda_m^2\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{x^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant 2\varepsilon e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u_{x^{(m)}}\,u_{tx^{(m)}}\,dx -$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; e^{-\lambda mt} \; dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,2}\, \varepsilon\, e^{-\lambda mt} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} u^2_{x^{(m)}} \; dx \; -$$

$$-\frac{1}{\beta_{m,2}}\, \varepsilon\, e^{-\lambda mT} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; dx \; -$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; e^{-\lambda mt} \; dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,2}\, \varepsilon T \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; e^{-\lambda mt} \; dx\,dt \; -$$

$$-\frac{1}{\beta_{m,2}}\, \varepsilon\, e^{-\lambda mT} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; dx \; -$$

$$-2\varepsilon \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}} \; e^{-\lambda mt} \; dx\,dt$$

Kako je

$$2\lambda_m \iint \sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\, u_{x^{(m-1)}x_i}\; u_{tx^{(m-1)}x_j}\; e^{-\lambda mt}\, dx\,dt =$$

$$= \lambda_m\, e^{-\lambda mT} \int_{t=T} \sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\; u_{x^{(m-1)}x_i}\; u_{x^{(m-1)}x_j} \; dx \; +$$

$$+\lambda_m \sum_{k\ldots q} \iint \sum_{ij} \left(\lambda_m\, a_{ij} - a_{ijt}\right) u_{x^{(m-1)}x_i}\; u_{x^{(m-1)}x_j}\; e^{-\lambda mt}\; dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_m \sum_{k\ldots q} \iint \delta \left(\sum_i b_i \; u_{x^{(m-1)}x_i} \right)^2 e^{-\lambda mt}\; dx\,dt\,, \quad (\lambda_m > K)$$

$$-2\iint\sum_{ijk\ldots q}\left(a_{ij}\,u_{x_i x^{(m-1)}}\right)_{x_j} u_{ttx^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt =$$

$$= 2\iint\sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\,u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{ttx_j x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt =$$

$$= 2\,e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\,u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{tx_j x^{(m-1)}}\,dx -$$

$$-2\iint\sum_{ijk\ldots q} a_{ijt}\,u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{tx_j x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt -$$

$$-2\iint\sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\,u_{tx_i x^{(m-1)}}\,u_{tx_j x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt +$$

$$+2\lambda m\iint\sum_{ijk\ldots q} a_{ij}\,u_{x_i x^{(m-1)}}\,u_{tx_j x^{(m-1)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,3}\,An\,e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{x^{(m)}}\,dx - \frac{1}{\beta_{m,3}}\,An\,e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,dx -$$

$$-An\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{x^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt - An\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt -$$

$$-2An\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt + \lambda m\,\delta\sum_{k\ldots \ell}\iint\Big(\sum_i b_i\,u_{x^{(m-1)}x_i}\Big)^2 e^{-\lambda mt}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,3}\,AnT\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt - \frac{1}{\beta_{m,3}}\,An\,e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}AnT^2\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt - 3An\iint\sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\,e^{-\lambda mt}\,dx\,dt +$$

$$+\lambda m\,\delta\sum_{k\ldots \ell}\iint\Big(\sum_i b_i\,u_{x^{(m-1)}x_i}\Big)^2 e^{-\lambda mt}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\beta_{m,3}\ AnT \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt - \frac{1}{\beta_{m,3}} A\, n e^{-\lambda mT} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\ dx -$$

$$- A_{49} \iint \sum_{k\ldots r} u^2_{tx^{(m)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt + \lambda m\, \delta \sum_{k\ldots q} \iint \Big(\sum_i b_i\ u_{x^{(m-1)}x_i} \Big)^2 e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ ,$$

dobijamo:

$$-2 \iint \sum_{ijk\ldots q} (a_{ij}\ \ u_{x_i})_{x_j\, x^{(m-1)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt =$$

$$= -2 \iint \sum_{ijk\ldots q} \Big(a_{ij\,x_j}\ u_{x_i} \Big)_{x^{(m-1)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt -$$

$$-2 \iint \sum_{ijk\ldots q} \Big(a_{ij}\ u_{x_i x_j} \Big)_{x^{(m-1)}}\ u_{tt}\, x^{(m-1)}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt =$$

$$= -2 \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{ijk\ldots q} a_{ij\,x_j\,x^{(m-1-s)}}\ u_{x_i\,x^{(s)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt -$$

$$-2 \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{ijk\ldots q} a_{ij\,x^{(m-1-s)}}\ u_{x_i x_j\,x^{(s)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt =$$

$$= -2 \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{ijk\ldots q} a_{ij\,x_j\,x^{(m-1-s)}}\ u_{x_i\,x^{(s)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt -$$

$$-2 \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} \iint \sum_{ijk\ldots q} a_{ij\,x^{(m-1-s)}}\ u_{x_i x_j\,x^{(s)}}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt -$$

$$-2 \iint \sum_{ijk\ldots q} \Big(a_{ij}\ \ u_{x_i\,x^{(m-1)}} \Big)_{x_j}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt \geqslant$$

$$\geqslant - \sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} A \iint \sum_{ijk\ldots q} u^2_{x_i\,x^{(s)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt -$$

$$- \frac{1}{\beta_{m,4}}\ 2 \iint \sum_{k\ldots q} u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx dt -$$

$$-A_{4,10}\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\quad e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ -$$

$$-\beta_{m,3}\,AnT\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\quad e^{-\lambda mt}\ dx\,dt-\frac{1}{\beta_{m,3}}An\,e^{-\lambda mt}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\ dx\ -$$

$$-A_{49}\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\ e^{-\lambda mt}dx\,dt+\lambda_m\,\delta\sum_{k\ldots q}\iint\Big(\sum_i b_i\ u_{x^{(m-1)}x_i}\Big)^2e^{-\lambda mt}dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{\beta_{m,3}}\ An\,e^{-\lambda mT}\int_{t=T}\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\ dx\ -\frac{2}{\beta_{m,4}}\iint\sum_{k\ldots q}u^2_{ttx^{(m-1)}}e^{-\lambda mt}\ dx\,dt-$$

$$-\beta_{m,3}\,AnT\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt-A_{4,10}\iint\sum_{k\ldots r}u^2_{tx^{(m)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ +$$

$$+\lambda_m\,\delta\sum_{k\ldots q}\iint\Big(\sum_i b_i\ u_{x^{(m-1)}x_i}\Big)^2e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ -A_{4,11}\ ;$$

$$2\iint\sum_{ik\ldots q}(b_i\,u_{x_i})_{x^{(m-1)}}\quad u_{ttx^{(m-1)}}\quad e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ =$$

$$=2\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\iint\sum_{ik\ldots q}b_{i\,x^{(m-1-s)}}\ u_{x_i x^{(s)}}\ u_{ttx^{(m-1)}}e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ =$$

$$=2\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m-1}{s}\iint\sum_{ik\ldots q}b_{ix^{(m-1-s)}}\ u_{x_ix^{(s)}}\quad u_{ttx^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\quad dx\,dt\ +$$

$$+\ 2\iint\sum_{ik\ldots q}b_i\ u_{x^{(m-1)}x_i}\ u_{tt\,x^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\quad dx\,dt\ \geqslant$$

$$\geqslant-A_{4,12}-\beta_{m,5}\sum_{k\ldots q}\iint\Big(\sum_i b_i\ u_{x^{(m-1)}x_i}\Big)^2e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ -$$

$$-\ \frac{A_{4,13}}{\beta_{m,5}}\iint\sum_{k\ldots q}u^2_{ttx^{(m-1)}}\ e^{-\lambda mt}\ dx\,dt\ ,$$

$$2\iint \sum_{k\ldots q} \left[(cu)_{x^{(m-1)}} - f_{x^{(m-1)}} \right] u_{ttx^{(m-1)}} \, e^{-\lambda m t} \, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant -A_{4,14} - \frac{A_{4,15}}{\beta_{m,5}} \iint \sum_{k\ldots q} u^2_{ttx^{(m-1)}} \, e^{-\lambda m t} \, dx\, dt \, .$$

Konačno, za $\lambda m \delta - \beta_{m,5} \geqslant 0$, dobijamo

$$\iint \sum_{k\ldots q} \left(2 - \frac{2^{m-1}-1}{\beta_{m,1}} - \frac{1}{\lambda m} - \frac{2}{\beta_{m,4}} - \frac{A_{4,16}}{\beta_{m,5}} \right) u^2_{ttx^{(m-1)}} \, e^{-\lambda m t} \, dx\, dt -$$

$$-\iint \sum_{k\ldots r} \left(\beta_{m,2}\, \varepsilon T + 2\varepsilon + \beta_{m,3}\, A n T + A_{4,10} \right) u^2_{tx^{(m)}} \, e^{-\lambda m t} \, dx\, dt -$$

$$- e^{-\lambda m T} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} \left(\frac{\varepsilon}{\beta_{m,2}} + \frac{An}{\beta_{m,3}} \right) u^2_{tx^{(m)}} \, dx \leqslant M_{m,2} \qquad (26)$$

IV.3. Neka je $\vartheta_m \geqslant \max(\theta_m, \lambda_m)$.

Sabiranjem nejednakosti (25) i (26), birajući konstante ϑ_m, α_{ik}, β_{ik}, tako da je

$$\vartheta_m > K + mM \, , \qquad \vartheta_m \, \delta - \beta_{m,5} \geqslant 0 \, , \quad \alpha_{m,2} \leqslant \delta \, ,$$

$$\mu_{1m} \equiv 1 - \frac{\varepsilon}{\beta_{m,2}} - \frac{An}{\beta_{m,3}} > 0 \, ,$$

$$\mu_{2m} \equiv 2 - \frac{2^{m-1}-1}{\beta_{m,1}} - \frac{1}{\vartheta_m} - \frac{2}{\beta_{m,4}} - \frac{A_{4,16}}{\beta_{m,5}} - 4Bmn\, \alpha_{m,1} > 0 \, ,$$

$$\mu_{3m} \equiv \vartheta_m - \frac{B}{\alpha_{m,1}} - \frac{1}{\alpha_{m,2}} - \beta_{m,3} A n T - \varepsilon \beta_{m,2} T - 2\varepsilon - A_{4,7} - A_{4,10} > 0 \, ,$$

dobijamo

$$e^{-\vartheta m T} \int_{t=T} \sum_{k\ldots r} \mu_{1m} \, u^2_{tx^{(m)}} \, dx \, +$$

$$+\iint \sum_{k\ldots r} \mu_{2m}\, u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\, e^{-\nu m t}\, dx\,dt\, +$$

$$+\iint \sum_{k\ldots r} \mu_{3m}\, u^2_{t\,x^{(m)}}\, e^{-\nu m t}\, dx\,dt \leq M_{m,3}\,,$$

odakle sleduje

$$\iint u^2_{tt\,x^{(m-1)}}\, dx\,dt \leq M_m\,, \qquad \iint u^2_{t\,x^{(m)}}\, dx\,dt \leq M_m\,,$$

$$\iint u^2_{x^{(m)}}\, dx\,dt \leq M_m\,, \qquad \int_{t=T} u^2_{t\,x^{(m)}}\, dx \leq M_m\,.$$

Lema je dokazana

V DOKAZ EGZISTENCIJE REŠENJA CAUCHY-EVOG PROBLEMA (1), (2) - DOKAZ TEOREME 1.

V. 1. Ravnostepena neprekidnost i ravnomerna ograničenost funkcija $u_\varepsilon, u_{\varepsilon x_0} \equiv u_{\varepsilon t}, u_{\varepsilon x_i}, u_{\varepsilon x_i x_j}, u_{\varepsilon tt}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Obeležimo sa $G^*_{\varepsilon T}$ zatvorenu oblast sadržanu u oblasti $G_{\varepsilon T}\{0 < \varepsilon \leq t \leq T, |x| < X\}$. Neka je $\rho (0 < \rho < 1)$ rastojanje oblasti $G^*_{\varepsilon T}$ i $G_{\varepsilon T}$; M i M_p tačke oblasti $G^*_{\varepsilon T}$, tako da je duž MM_p paralelna osi OX_p $(0 \leq p \leq n)$. Tada se može konstruisati paralelepiped, sa jednim temenom u tački M, ivicama MM_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ paralelnim sa koordinantnim osama, čije sve tačke pripadaju oblasti $G_{\varepsilon T}$. Za dokaz navedenog tvrdjenja dovoljno je konstruisati paralelepiped R sa dijagonalom čiji je merni broj d manji od rastojanja oblasti $G^*_{\varepsilon T}$ i $G_{\varepsilon T}$. Nejednakost $d < \rho$ biće ispunjena ako ivice paralelepipeda R izaberemo tako da je $\rho(M, M_\nu) = \alpha_\nu = \rho / \sqrt{3n}$ $(\nu \neq p)$, $\rho(M, M_p) = \alpha_p < \rho/\sqrt{2}$ jer je pri takvom izboru

$$d=\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)^{1/2}<\left(\frac{\rho^2}{2}+n\frac{\rho^2}{3n}\right)^{1/2}<\rho\,.$$

Koristeći već pomenutu nejednakost u radu K. I. Karapetjana [6]

$$|W(a_0,a_1,\ldots,a_{p-1},b_p,a_{p+1},\ldots,a_n)-W(a_0,a_1,\ldots,a_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s}\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\alpha_{s_k}\alpha_{s_{k+1}}\cdots\alpha_{s_n}}\left(\int_R W^2_{x_p x_{s_1}\cdots x_{s_{k-1}}}dx\right)^{1/2},$$

kada je $W\equiv u_{\varepsilon x_i}$ ($i\equiv$ const.), sleduje $|u_{\varepsilon x_i}(M_p)-u_{\varepsilon x_i}(M)|\leqslant$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s}\sqrt{\alpha_p}\left(\frac{\sqrt{3n}}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\int_R u^2_{\varepsilon x_i x_p x_{s_1}\ldots x_{s_{k-1}}}dx\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{\rho(M,M_p)}\left(\frac{\sqrt{3n}}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s}\left(\int_R u^2_{\varepsilon x_i x_p x_{s_1}\cdots x_{s_{k-1}}}dx\right)^{1/2}.$$

Prema rezultatima leme, ocene (5), zaključujemo da je

$$\left(\frac{\sqrt{3n}}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{s}\left(\int_R u^2_{\varepsilon x_i x_p x_{s_1}\ldots x_{s_{k-1}}}dx\right)^{1/2}\leqslant k\,,$$

gde je k pozitivna konstanta koja zavisi od oblasti $G^*_{\varepsilon T}$ i koja ne zavisi od ε. Prema izloženom, dobijamo

$$|u_{\varepsilon x_i}(M_p)-u_{\varepsilon x_i}(M)|\leqslant k\sqrt{\rho(M,M_p)}\,,$$

ili

$$|u_{\varepsilon x_i}(M_p)-u_{\varepsilon x_i}(M)|<\eta \text{ za } \rho(M,M_p)<\frac{\eta^2}{k^2}$$

i za svako $\varepsilon>0$.

Ravnostepena neprekidnost skupa funkcija $\{u_{\varepsilon x_i}\}$ u pravcu ose Ox_p $(p=0,1,\ldots,n)$ je dokazana. Ravnostepena neprekidnost u proizvoljnom pravcu MP sleduje iz ravnostepene neprekidnosti u pravcima koordinantnih osa.

Iz ravnostepene neprekidnosti skupa funkcija $\{u_{\varepsilon x_i}\}$ i ocena (5), sleduje ravnomerna ograničenost tih funkcija u oblasti $G^*_{\varepsilon T}$.

Analogno se dokazuje ravnostepena neprekidnost i ravnomerna ograničenost za funkcije $\{u_\varepsilon\}$, $\{u_{\varepsilon t}\}$, $\{u_{\varepsilon x_i x_j}\}$, $\{u_{\varepsilon tt}\}$ u oblasti $G^*_{\varepsilon T}$. Napomenimo da iz ravnostepene neprekidnosti i ravnomerne ograničenosti funkcija $\{u_\varepsilon\}$, $\{u_{\varepsilon t}\}$, $\{u_{\varepsilon x_i}\}$, $\{u_{\varepsilon x_i x_j}\}$, $\{f_\varepsilon\}$ i jednačine (3) sleduje ravnostepena neprekidnost i ravnomerna ograničenost funkcija $\{u_{\varepsilon tt}\}$.

V. 2. Dokaz teoreme 1.

Posmatrajmo skup funkcija $\{u_\varepsilon(t,x)\}$ $(\varepsilon>0)$ koje identički zadovoljavaju jednačinu (3) i uslove (4). Prema teoremi Arzela, iz skupa $\{u_\varepsilon(t,x)\}$, čija ravnostepena neprekidnost i ravnomerna ograničenost je dokazana u sekciji V. 1, može se izdvojiti podskup $\{u_{\varepsilon_k}(t,x)\}$ koji ravnomerno konvergira graničnoj funkciji $u(t,x)$ kada $\varepsilon_k \to 0$. Granična funkcija $u(t,x)$ je stoga neprekidna funkcija u oblasti $\overline{G_{0T}}$ i zadovoljava uslov $u(0,x)=0$. Analogno se dokazuje ravnomerna konvergencija za $\{u_{\varepsilon t}\}$, $\{u_{\varepsilon x_i}\}$, $\{u_{\varepsilon x_i x_j}\}$ kada $\varepsilon \to 0$ i neprekidnost odgovarajućih graničnih funkcija u_t, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ u oblasti $\overline{G_{0T}}$. Iz $u_{\varepsilon t}(\varepsilon, x)=0$ i neprekidnosti funkcije $u_t(t,x)=0$ sleduje $u_t(0,x)=0$. Neprekidnost funkcije $u_{tt}(t,x)$ u oblasti G_{0T} sleduje iz jednačine (3) i neprekidnosti funkcije $u(t,x)$ i njenih izvoda koji se javljaju u jednačini (3).

Svaka funkcija $u_{\varepsilon_k}(t,x)$, izdvojena po teoremi Arzela, identički zadovoljava (3) i uslove (4). Iz ravnomerne konvergencije podniza funkcija $\{u_{\varepsilon_k}(t,x)\}$ i ravnomerne konvergencije odgovarajućih izvoda tog podniza, prelaskom na graničnu vrednost u jednačini (3) kada $\varepsilon_k \to 0$ zaključujemo da funkcija $u(t,x)$ jeste rešenje Cauchy-evog problema (1), (2). Iz rezultata leme, ocene (5) neposredno sleduje da su funkcije $u(t,x)$ i svi njeni izvodi koji se javljaju u (1) iz klase L_2 (G_{0T}).

VI. DOKAZ JEDINOSTI REŠENJA I DOKAZ DA REŠENJE NEPREKIDNO ZAVISI, PO NORMI L_2, OD DESNE STRANE JEDNAČINE 1.

VI.1. Dokaz jedinosti rešenja.

Neka su $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ dva rešenja Cauchy-evog problema (1), (2); tj.

$$L[u_i(t,x)] \equiv f(t,x),$$

$$u_i(o,x) = 0, \quad u_{it}(o,x) = 0, \quad (i = 1,2).$$

Sleduje

$$L[u_2(t,x) - u_1(t,x)] \equiv 0,$$

$$u_2(o,x) - u_1(o,x) = 0, \quad u_{2t}(o,x) - u_{1t}(o,x) = 0,$$

to će reći da je funkcija $u_2(t,x) - u_1(t,x)$ rešenje homogene jednačine (1), sa uslovima (2).

Za rešenje Cauchy-evog problema (1), (2) tačne su ocene [8] u kojima je desna strana oblika $\iint f^2(t,x)\,dx\,dt$, otuda

$$\iint u_i^2(t,x)\,dx\,dt \leq \iint f^2(t,x)\,dx\,dt \quad (i = 1,2),$$

a za funkciju $u_2(t,x) - u_1(t,x)$

$$\iint [u_2(t,x) - u_1(t,x)]^2\,dx\,dt \leq 0,$$

odakle zbog neprekidnosti funkcija $u_2(t,x)$ i $u_1(t,x)$, sleduje

$$u_2(t,x) \equiv u_1(t,x)$$

u oblasti $G_{o\tau}$.

VI.2. Dokaz da rešenje Cauchy-evog problema (1), (2) neprekidno, po normi L_2, zavisi od desne strane jednačine (1).

Neka je $L(u_1) \equiv f$, $L(u_2) \equiv f + \eta$,

$$u_i(o,x) = 0, \quad u_{it}(o,x) = 0 \quad (i = 1,2),$$

gde je $|\eta(t,x)| \leq \varepsilon$ $(t,x) \in G_{o\tau}$.

Sleduje $L(u_2 - u_1) \equiv \eta$,

i prema ocenama (8)

$$\iint (u_2 - u_1)^2\,dx\,dt \leq \iint \eta^2\,dx\,dt \leq \varepsilon^2 G,$$

gde je G = const. koja ne zavisi od ε.

Iz poslednje nejednakosti sleduje

$$\iint (u_2 - u_1)^2\,dx\,dt \longrightarrow 0 \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

L I T E R A T U R A

1. Барановский Ф. Т. Задача Коши для уравнения типа Эйлера – Пуассона – Дарбу и вырождающегося гиперболического уравнения. Изв. высш. уч. завед., Математика, № 6 /19/, 11 – 23, 1960.

2. Березин И. С. О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности. Матем. сборник, т. 24 /66/, № 2, 301 – 320, 1949.

3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Изд – во АН СССР, 1959.

4. Франкль Ф. И. К теории уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ Изв. АН СССР, т. 10, № 2, 135 – 166, 1946.

5. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико – гиперболического типа. Матем. сборник, т.30 /72/, № 1, 11 – 38, 1952.

6. Карапетян К. И. О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости. ДАН СССР, т. 106, № 6, 963 – 966, 1956.

7. Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. Матем. сборник, т.49, /91/, 29 – 84, 1959.

8. Курант, Фридрихс, Леви. Успехи мат. наук., вып. VIII, 1940.

9. Олейник О. А. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе. ДАН СССР, т.169, № 3, 525 – 529, 1966.

10. О л е й н и к О. А. О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. ДАН СССР, т. 163, № 3, 577 - 581, 1965.

11. P r o t t e r M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line. Canad J. math., 6, N° 4, 542-553, 1954.

12. С м и р н о в М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. Изд - во Наука, Москва, 1966.

13. С о б о л е в С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд - во ЛГУ, 1950.

14. T r i c o m i F. Ancora sull'equazione $YZ_{xx}+Z_{yy}=0$. Rend. Acc. Lincei, Ser VI, VI, 1927.

15. W e i n s t e i n A. The singular Cauchy problem for the Euler - Poisson - Darboux eguations. Comm. Pure and Appl. Math. 7, N° 1, 105 - 120, 1954.

S A D R Ž A J: