ПРИНЦИП ДУАЛНОСТИ ЗА ОСЕРМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

Владица Андрејић

докторска дисертација

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД 2010.

АПСТРАКТ

У овом раду посматрамо принцип дуалности (и јаке дуалности) за Осерманове многострукости и уопштавамо га за псеудо-Риманов случај. Основни циљ је доказати принцип дуалности за Осерманове многострукости у општем случају или конструкција евентуалних контрапримера. За сада смо у стању да дамо само резултате под специфичним додатним условима. Прва могућност је мали индекс псеудо-Риманове многострукости, где доказујемо да јака дуалност важи за Риманове и Лоренцове просторе. Друга могућност су простори малих димензија где доказујемо да јака дуалност важи кад димензија није већа од четири. Последња олакшавајућа околност са којом радимо тиче се малог броја сопствених вредности редукованог Јакобијевог оператора, где посматрамо дволисно-Осерманове тензоре кривине. У том случају радимо са јаким условима из дефиниције квази-специјалних Осермановых тензора кривине и желимо да докажемо да под њима важи принцип дуалности. Коначан резултат је да скоро-специјалан Осерманов тензор кривине мора бити специјалан Осерманов. У наставку постављамо обратан проблем, те покушавамо да истражимо под којим условима алгебарски тензор кривине за који важи принцип дуалности мора бити Осерманов. Потврдан резултат добили смо у димензији три, као и у случају када се Фидлерова сума састоји од само једног члана.

ABSTRACT

The duality principle for Osserman manifolds

In this work we investigate the duality principle (and strong duality principle) for Osserman manifolds and we generalize it in a pseudo-Riemannian case. The main aim is to prove the duality principle for Osserman manifolds in general or construction of counterexamples. So far, we are able to give just results under some specific conditions. The first restriction is a low index of pseudo-Riemannian manifold, where we prove that the strong duality principle holds in Riemannian and Lorentzian setting. The second restriction is a low dimension of manifold, where we prove that the strong duality principle holds in dimensions not greater than four. The last restriction is a low number of eigenvalues of reduced Jacobi operator, where we look at two-leaves Osserman curvature tensors. The final result is that an almost-special Osserman curvature tensor is necessarily special Osserman.

ПРЕДГОВОР

Појам кривине основни је концепт диференцијалне геометрије, док је централни проблем повезати својства тензора кривине са геометријом одговарајуће многострукости. Шта се може рећи о метрици ако су познате секционе кривине многострукости? Најпростији случај је простор константне секционе кривине и тада је метрика у потпуности одређена. Наредни по једноставности је случај када Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ има константан карактеристичан полином, независан од тачке многострукости и јединичног временског или просторног вектора X. Такве многострукости зову се Осерманове, а читав овај рад бави се изучавањем њихових својстава.

Мора ли Осерманова многострукост бити равна или локално симетричан простор ранга један? Ово питање, познато као Осерманова хипотеза, још увек није у потпуности решено, а приликом решавања природно се појавила импликација

$$\mathcal{J}_X(Y) = \lambda Y \Rightarrow \mathcal{J}_Y(X) = \lambda X,$$

која, уколико важи, у знатној мери олакшава рачун. Ова импликација је позната као принцип дуалности, а њена валидност у Римановом случају је значајно допринела решавању неких случајева хипотезе. Касније је постало популарно решавати варијанту Осерманове хипотезе у псеудо-Римановом случају, а моја основна идеја је била уопштење принципа дуалности.

У Глави 1 уводимо основну нотацију и терминологију, те дефинишемо алгебарски тензор кривине, Јакобијев оператор и Осерманов услов. Глава 2 изучава изотропне векторе. У Глави 3 посматрамо k-штајн услов који нам даје неке конкретне једначине. Глава 4 дефинише принцип дуалности и јаке дуалности у псеудо-Римановом случају, а затим се доказују основне теореме. Принцип јаке дуалности за Осермanове многострукости важи у Римановим и Лоренцовим просторима, као и за многострукости димензије четири. Глава 5 изучава дволисно-Осерманове тензоре кривине и покушава да уклони неке услове из дефиниције специјалних Осермanових многострукости. Глава 6 бави се обратним проблемом, односно испитује под којим ће условима многострукост за коју важи принцип дуалности бити Осерманова.

Ова докторска дисертација природан је наставак моје магистарске тезе коју сам одбранио 2006. Кључни резултати ове тезе, пре свега мислим на Главу 5, били су спремни у октобру 2008, а сама теза исписана је априла 2009. Како се прича око одбране отегла, у јануару 2010. дописао сам целу Главу 6 у складу са мојим новим резултатима.

Овом приликом се захваљујем свом ментору др Зорану Ракићу на бројним дискусијама које смо обавили. Такође бих искористио прилику да се захвалим и комплетној комисији за преглед и оцену докторске дисертације у саставу (у азбучном редоследу): др Срђан Вукмировић, др Божидар Јовановић, др Стана Никчевић Симић, др Мирослава Петровић-Торгашев, др Зоран Ракић (ментор). Они су ревносно прочитали рад и својим примедбама га унапредили.

Београд, јануар 2010.
Владица Андрејић

САДРЖАЈ

ГЛАВА 1

ОСЕРМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

У овој глави уводимо основну нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз читав рад. У Секцији 1.1 дефинишемо основни објекат наших посматрања, псеудо-Риманову[1] многострукост. Скаларни производ на векторском простору одређује норму вектора, чији знак врши општу поделу вектора на просторне, временске и изотропне. У Секцији 1.2 уводимо Леви-Чивита[2] повезаност, преко које дефинишемо оператор кривине, тензор кривине, као и његов коваријантни извод. Они нам омогућавају да уведемо природне операторе и тензоре, где је Јакобијев[3] оператор изразити представник. Секција 1.3 доноси временске и просторне Осермановe[4] услове у тачки, те уводимо концепте тачка по тачка Осермановe и глобално Осермановe многострукости. Како сопствену структуру Јакобијевог оператора одређује његова Жорданова[5] форма, то уводимо појам Жордан-Осермановe многострукости,

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)
[2] Tullio Levi-Civita (1873–1941)
[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)
[4] Robert Osserman
[5] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)

као и појам дијагоналне многострукости као њен најједноставнији специјалан случај. Секција 1.4 дефинише алгебарски тензор кривине као чисто алгебарски концепт. Он илуструје геометријска дешавања у тачки многострукости, те преузимамо све геометријске појмове из претходних секција, од Јакобијевих оператора до Осермановых услова, у потрази за локалним резултатима. Овде ћемо видети и прве примере за Осерманов тензор кривине. Главу завршавамо Секцијом 1.5 у којој конструишемо разне фамилије Осермановых многострукости сигнатуре (2,2). Конкретним рачунима добијамо примере глобално Осермановых многострукости које могу, али не морају бити Жордан-Осерманове.

1.1 Основни појмови

На почетку уводимо основне објекте диференцијалне геометрије, као и нотацију коју ћемо користити кроз читав рад. Уводна прича и ознаке су углавном засноване по Греју[6] [20], док је као узор за причу о природним операторима и тензорима послужила Гилкијева[7] књига [17]. Напоменимо и да је око неких дефиниција и доказа припомогао До Кармо[8] [11].

Нека је M Хаусдорфов[9] простор, односно тополошки простор у коме се сваке две различите тачке могу раздвојити дисјунктним отвореним околинама. Отворена карта на M је уређен пар (U, φ), где је U отворен подскуп од M, а φ хомеоморфизам са U на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Глатка структура на M димензије n је фамилија отворених карти $(U_k, \varphi_k)_{k\in\Lambda}$ на M, где су $\varphi_k(U_k)$ за $k \in \Lambda$ отворени подскупови од $\mathbb{R}^n$ тако да важе аксиоме:
(1) $M = \bigcup_{k\in\Lambda} U_k$;
(2) За свака два индекса $i, j \in \Lambda$ пресликавање $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ је глатко пресликавање са $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_j(U_i \cap U_j)$;
(3) Фамилија $(U_k, \varphi_k)_{k\in\Lambda}$ је максимална фамилија отворених карата за коју важи (1) и (2).

Дефиниција 1.1 *Глатка многострукост димензије n је Хаусдорфов простор са глатком структуром димензије n.*

[6] Alfred Gray (1939–1998)
[7] Peter Belden Gilkey (1946)
[8] Manfredo Perdigão do Carmo
[9] Felix Hausdorff (1868–1942)

Нека је M глатка многострукост (у даљем тексту краће само "многострукост") димензије n. Са $\mathcal{F}(M)$ означићемо скуп свих глатких реалних пресликавања на M

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ је глатко}\}.$$

За $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$ природно се дефинишу пресликавања $\alpha f + \beta h$ и fh путем једначина

$$(\alpha f + \beta h)(p) = \alpha f(p) + \beta h(p) \quad \text{и} \quad (fh)(p) = f(p)h(p),$$

које важе за свако $p \in M$. Приметимо да је $\mathcal{F}(M)$ у односу на претходно дефинисане операције комутативан прстен (са јединицом), као и алгебра над $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.2 *Тангентни простор T_pM многострукости M у тачки $p \in M$ је скуп свих пресликавања $X : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ таквих да је*

$$X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h) \quad \textit{и} \quad X(fh) = f(p)X(h) + h(p)X(f)$$

за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$.

Многострукости су по својој природи закривљени простори и као такви могу бити веома компликовани за изучавање, док су векторски простори прилично једноставнији и пружају мноштво погодности. По претходној дефиницији T_pM је векторски простор и може се схватити као најбоља линеарна апроксимација многострукости M у тачки $p \in M$. То је разлог што смо склонији да уместо оригиналне многострукости користимо њен тангентни простор.

Дефиниција 1.3 *Векторско поље на многострукости M је глатко пресликавање $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ које задовољава*

$$X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h) \quad \textit{и} \quad X(fh) = fX(h) + hX(f)$$

за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathcal{F}(M)$.

Скуп свих векторских поља на многострукости M зовемо тангентно раслојење многострукости и обележаваћемо са $\mathcal{X}(M)$, док претходна дефиниција јасно показује да је $\mathcal{X}(M)$ један модул над $\mathcal{F}(M)$. Векторско поље на многострукости M може се интуитивно схватити као глатко пресликавање $X : M \to \mathcal{X}(M)$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X_p \in T_pM$. Веза која обједињује претходне концепте види се из формуле $(X(f))(p) = X_p(f)$, која важи за $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ и $p \in M$. На $\mathcal{X}(M)$ природно уводимо основне операције тако што за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(M)$ и $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ дефинишемо $\alpha X + \beta Y$, fX, XY и $[X, Y]$, тако да за свако $h \in \mathcal{F}(M)$ важе следеће једнакости

$$\begin{aligned}(\alpha X + \beta Y)(h) &= \alpha(X(h)) + \beta(Y(h)),\\ (fX)(h) &= fX(h),\\ (XY)(h) &= X(Y(h)),\\ [X, Y] &= XY - YX.\end{aligned}$$

Скаларни производ на векторском простору $\mathcal{V}$ димензије n је симетрична билинеарна форма $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, а он је недегенерисан ако $g(X, Y) = 0$ за свако $Y \in \mathcal{V}$ повлачи $X = 0$. Из линеарне алгебре је познато да за векторски простор $\mathcal{V}$ димезније n који је опремљен недегенерисаним скаларним производом постоји база $(E_1, ..., E_n)$ таква да је $g(E_i, E_j) = 0$ и $g(E_i, E_i) \in \{-1, 1\}$, за $1 \leq i \neq j \leq n$. За такву базу кажемо да је псеудо-ортонормирана (или краће "ортонормирана"), а за $\mathcal{V}$ да је недегенерисан. Ако са ν означимо број негативних $g(E_i, E_i)$, број позитивних $g(E_i, E_i)$ биће $n - \nu$ и он неће зависити од избора ортонормиране базе. Тада кажемо да скаларни производ g има сигнатуру $(\nu, n - \nu)$.

Дефиниција 1.4 *Псеудо-Риманова метрика (или краће само "метрика") на многострукости M је $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ које сваком $p \in M$ додељује недегенерисан скаларни производ $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, при чему се сигнатура од g_p не мења. Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је многострукост M опремљена псеудо-Римановом метриком g.*

Основна претпоставка је да сигнатура скаларног производа g_p не зависи од избора тачке $p \in M$, те кажемо да је она уједно и сигнатура метрике g, као и сигнатура псеудо-Риманове многострукости. Број ν зовемо индекс скаларног производа, односно метрике, као и индекс псеудо-Риманове многострукости. Честа појава код изучавања многострукости M је њено посматрање у конкретној тачки $p \in M$. T_pM је рестрикција од $\mathcal{X}(M)$ и зато ћемо у даљем тексту и векторска поља и тангентне векторе, ради једноставности, обележавати истим словима. Слично, ради краћег записа, и скаларни производ g_p обележаваћемо кратко са g кад нема бојазни од забуне, односно када је тачка p добро позната. Норма тангентног вектора игра важну улогу у псеудо-Римановој геометрији и за њу уводимо скраћену ознаку.

Дефиниција 1.5 *Норма вектора X векторског простора $\mathcal{V}$ опремљеног скаларним производом g је*

$$\varepsilon_X = g(X, X).$$

Знак норме вектора одређује његов тип.

Дефиниција 1.6 *За вектор $X \in \mathcal{V}$ кажемо да је:*
1) просторан ако је $\varepsilon_X > 0$;
2) временски ако је $\varepsilon_X < 0$;
3) изотропан ако је $\varepsilon_X = 0$;
4) дефинитан ако је $\varepsilon_X \neq 0$;
5) јединичан ако је $\varepsilon_X \in \{-1, 1\}$.

Уводимо и посебне ознаке $S^+(\mathcal{V})$, $S^-(\mathcal{V})$ и $S(\mathcal{V})$ за скупове јединичних просторних, јединичних временских, односно јединичних вектора.

$$\begin{aligned} S^+(\mathcal{V}) =& \{X \in \mathcal{V} \mid \varepsilon_X = 1\} \\ S^-(\mathcal{V}) =& \{X \in \mathcal{V} \mid \varepsilon_X = -1\} \\ S(\mathcal{V}) =& S^+(\mathcal{V}) \cup S^-(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

Уопштење по свим тачкама многострукости даје одговарајућа јединична раслојења.

$$\begin{aligned} S^+(M) =& \{X \in \mathcal{X}(M) \mid g(X, X) = 1\} \\ S^-(M) =& \{X \in \mathcal{X}(M) \mid g(X, X) = -1\} \\ S(M) =& S^+(M) \cup S^-(M) \end{aligned}$$

1.2 Природни оператори и тензори

У овој секцији постепено уводимо нове важне појмове, као што су природни оператори и тензори. Полазећи од Леви-Чивита повезаности дефинишемо оператор кривине, а онда и тензор кривине, као и његов коваријантни извод. На крају секције уводимо Јакобијев и њему сродне операторе.

Дефиниција 1.7 *Афина повезаност на многострукости M је пресликавање $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ са ознаком $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ и особинама*

$$\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z; \tag{1.1}$$
$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z; \tag{1.2}$$
$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (X(f))Y; \tag{1.3}$$

за све $f, h \in \mathcal{F}(M)$ и $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Леви-Чивита је наредном теоремом, коју дајемо без доказа, показао да од многобројних афиних повезаности на псеудо-Римановој многострукости једна има посебан значај.

Теорема 1.1 *На псеудо-Римановој многострукости (M, g) постоји јединствена афина повезаност ∇ која задовољава*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X; \tag{1.4}$$
$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z); \tag{1.5}$$

за свако $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Симетрија (1.4) говори да је повезаност ∇ без торзије, док (1.5) представља компатибилност метрике g и повезаности ∇. Јединствена афина повезаност из Теореме 1.1, назива се Леви-Чивита повезаност. У даљем тексту (M, g) ће увек бити псеудо-Риманова многострукост, а ∇ њој одговарајућа Леви-Чивита повезаност.

Дефиниција 1.8 *Оператор кривине је пресликавање $\mathcal{R} : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$ дефинисано са $\mathcal{R}(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$, за све $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

Претходна дефиниција заправо значи да је

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

за свако $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Напоменимо да неки аутори оператор кривине дефинишу са $-\mathcal{R}(X, Y)$, међутим та разлика у знаку суштински ништа не мења, но ипак треба бити опрезан. Основне особине оператора кривине виде се у наредној теореми.

Теорема 1.2 *За оператор кривине* $\mathcal{R}$ *важи*

$$\mathcal{R}(fX + hY, Z) = f\mathcal{R}(X, Z) + h\mathcal{R}(Y, Z); \tag{1.6}$$
$$\mathcal{R}(X, fY + hZ) = f\mathcal{R}(X, Y) + h\mathcal{R}(X, Z); \tag{1.7}$$
$$\mathcal{R}(X, Y)(fZ + hW) = f\mathcal{R}(X, Y)Z + h\mathcal{R}(X, Y)W; \tag{1.8}$$
$$\mathcal{R}(Y, X) = -\mathcal{R}(X, Y); \tag{1.9}$$
$$\mathcal{R}(X, X) = 0; \tag{1.10}$$
$$\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0; \tag{1.11}$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ *и* $f, h \in \mathcal{F}(M)$.

Доказ. Линеарност (1.6) је последица линеарности комутатора, као и особине (1.1) повезаности

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX + hY, Z) &= [\nabla_{fX+hY}, \nabla_Z] - \nabla_{[fX+hY,Z]}\\ &= [f\nabla_X + h\nabla_Y, \nabla_Z] - \nabla_{f[X,Z]+h[Y,Z]}\\ &= f[\nabla_X, \nabla_Z] + h[\nabla_Y, \nabla_Z] - f\nabla_{[X,Z]} - h\nabla_{[Y,Z]}\\ &= f\mathcal{R}(X, Z) + h\mathcal{R}(Y, Z),\end{aligned}$$

док се (1.7) сасвим слично доказује. Линеарност (1.8) ћемо доказати у два корака. Адитивност је последица особине (1.2)

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(X, Y)(Z + W) = \nabla_X\nabla_Y(Z + W) - \nabla_Y\nabla_X(Z + W) - \nabla_{[X,Y]}(Z + W)\\ &\quad = \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[X,Y]}W\\ &\quad = \mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(X, Y)W,\end{aligned}$$

док за множење скаларом интензивно користимо особине (1.3) и (1.2)

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(X, Y)(fZ) = \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\\ &\quad = \nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z + X(f)Z) - (f\nabla_{[X,Y]}Z + [X, Y](f)Z)\\ &\quad = f\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + XY(f)Z - f\nabla_Y\nabla_X Z\\ &\quad - Y(f)\nabla_X Z - X(f)\nabla_Y Z - YX(f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z - [X, Y](f)Z\\ &\quad = f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = f\mathcal{R}(X, Y)Z.\end{aligned}$$

Антисиметрија (1.9) је очигледна

$$\mathcal{R}(Y, X) = [\nabla_Y, \nabla_X] - \nabla_{[Y,X]} = -[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{-[X,Y]} = -\mathcal{R}(X, Y),$$

док је (1.10) њен специјалан случај за $Y = X$. Формула (1.11) позната је као Бјанкијев[10] идентитет и њу доказујемо вишеструком применом формуле (1.4)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y \\
&\quad = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X[Y,Z]] + [Y[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

Последња једначина је добро познати Јакобијев идентитет за векторска поља, чиме комплетирамо доказ теореме. □

Дефиниција 1.9 *Тензор реда r је r-линеарно пресликавање $T : \mathcal{X}(M)^r \to \mathcal{F}(M)$.*

Тензор је линеаран по сваком аргументу, те можемо писати

$$T(X_1,...,fY + hZ,...,X_r) = fT(X_1,...,Y,...,X_r) + hT(X_1,...,Z,...,X_r),$$

за све $X_1,...,X_r,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ и $f,h \in \mathcal{F}(M)$.

Дефиниција 1.10 *Коваријантни извод тензора T реда r је тензор ∇T реда $r+1$, односно тензор $\nabla_Z T$ реда r, при чему је*

$$\begin{aligned}
\nabla T(X_1,...,X_r,Z) &= \nabla_Z T(X_1,...,X_r) \\
&= Z(T(X_1,...,X_r)) - T(\nabla_Z X_1,...,X_r) - ... - T(X_1,...,\nabla_Z X_r),
\end{aligned}$$

за све $X_1,...,X_r,Z \in \mathcal{X}(M)$.

Један добар пример тензора је сама метрика g. Она је очигледно реда 2, а како по (1.5) важи

$$\nabla_X g(Y,Z) = \nabla g(Y,Z,X) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) = 0,$$

то је $\nabla_X g = 0$, што значи да је g паралелно тензорско поље.

Дефиниција 1.11 *Тензор кривине је пресликавање $R : \mathcal{X}(M)^4 \to \mathcal{F}(M)$ дефинисано са $R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$, за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$.*

[10] Luigi Bianchi (1856–1928)

Теорема 1.3 *Тензор кривине R је тензор реда 4 и за њега важи*

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W), \tag{1.12}$$
$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.13}$$
$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0, \tag{1.14}$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$.

Доказ. Тензор кривине је заиста тензор јер је по формулама (1.6), (1.7) и (1.8) пресликавање $\mathcal{R}$ линеарно по свим компонентама. По Дефиницији 1.11 то значи да је R линеарно по прве три компоненте, али је тако и по четвртој јер је g билинеарно. Формула (1.12) је директна последица (1.9), док је (1.14) директна последица (1.11)

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W) = g(-\mathcal{R}(Y,X)Z,W) = -R(Y,X,Z,W),\\
&R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W)\\
&\qquad\qquad = g(\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y, W) = 0.
\end{aligned}$$

Примена формуле (1.5) даје $g(\nabla_X\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z)$ и $g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}Z) = [X,Y]g(Z,Z)$ из чега добијамо

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z)\\
&= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z)\\
&= \frac{1}{2}XYg(Z,Z) - \frac{1}{2}YXg(Z,Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = 0.
\end{aligned}$$

Вишеструка примена ове особине и вишелинеарност тензора даје

$$\begin{aligned}
0 &= R(X,Y,Z+W,Z+W)\\
&= R(X,Y,Z,Z) + R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) + R(X,Y,W,W)\\
&= R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z),
\end{aligned}$$

што доказује формулу (1.13) и комплетира доказ теореме. $\square$

Формуле (1.12) и (1.13) представљају $\mathbb{Z}_2$ симетрије, док је (1.14) позната као први Бјанкијев идентитет.

Теорема 1.4 *За коваријантни извод тензора кривине* ∇R *важи*

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = -\nabla R(Y,X,Z,W,V), \tag{1.15}$$
$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = -\nabla R(X,Y,W,Z,V), \tag{1.16}$$
$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,Z,X,W,V) + \nabla R(Z,X,Y,W,V) = 0, \tag{1.17}$$
$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y) = 0, \tag{1.18}$$

за свако $X,Y,Z,W,V \in \mathcal{X}(M)$.

Доказ. Формуле (1.15) и (1.16) се добијају праволинијски применом особина (1.12) и (1.13). На пример

$$\begin{aligned}
\nabla R(X,Y,Z,W,V) &= V(R(X,Y,Z,W)) - R(\nabla_V X,Y,Z,W) - R(X,\nabla_V Y,Z,W)\\
&\qquad - R(X,Y,\nabla_V Z,W) - R(X,Y,Z,\nabla_V W)\\
&= -V(R(Y,X,Z,W)) + R(Y,\nabla_V X,Z,W) + R(\nabla_V Y,X,Z,W)\\
&\qquad + R(Y,X,\nabla_V Z,W) + R(Y,X,Z,\nabla_V W)\\
&= -\nabla R(Y,X,Z,W,V).
\end{aligned}$$

Формула (1.17) је последица вишеструке примене (1.11) и (1.14)

$$\begin{aligned}
&\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,Z,X,W,V) + \nabla R(Z,X,Y,W,V)\\
&\quad = V(R(X,Y,Z,W)) + V(R(Y,Z,X,W)) + V(R(Z,X,Y,W))\\
&\quad - R(\nabla_V X,Y,Z,W) - R(Z,\nabla_V X,Y,W) - R(Y,Z,\nabla_V X,W)\\
&\quad - R(\nabla_V Y,Z,X,W) - R(X,\nabla_V Y,Z,W) - R(Z,X,\nabla_V Y,W)\\
&\quad - R(\nabla_V Z,X,Y,W) - R(Y,\nabla_V Z,X,W) - R(X,Y,\nabla_V Z,W)\\
&\quad - R(X,Y,Z,\nabla_V W) - R(Y,Z,X,\nabla_V W) - R(Z,X,Y,\nabla_V W)\\
&\quad = V(R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W))\\
&\quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V X,Y)Z - \mathcal{R}(Z,\nabla_V X)Y - \mathcal{R}(Y,Z)\nabla_V X,W)\\
&\quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V Y,Z)X - \mathcal{R}(X,\nabla_V Y)Z - \mathcal{R}(Z,X)\nabla_V Y,W)\\
&\quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V Z,X)Y - \mathcal{R}(Y,\nabla_V Z)X - \mathcal{R}(X,Y)\nabla_V Z,W)\\
&\quad - g(\mathcal{R}(X,Y)Z - \mathcal{R}(Y,Z)X - \mathcal{R}(Z,X)Y,\nabla_V W) = 0.
\end{aligned}$$

Преостаје нам формула (1.18) због које посматрамо $\nabla R(X,Y,Z,W,V)$ по дефиницији. Ако искористимо (1.5) добијамо

$$\begin{aligned}\nabla R(X,Y,Z,W,V) &= V(g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)) - R(X,Y,Z,\nabla_V W)\\ &- R(X,Y,\nabla_V Z,W) - R(\nabla_V X,Y,Z,W) - R(X,\nabla_V Y,Z,W)\\ &= g(\nabla_V\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_V\nabla_{[X,Y]}Z,W)\\ &- g(\nabla_X\nabla_Y\nabla_V Z - \nabla_Y\nabla_X\nabla_V Z - \nabla_{[X,Y]}\nabla_V Z,W)\\ &- g(\nabla_{\nabla_V X}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{\nabla_V X}Z - \nabla_{[\nabla_V X,Y]}Z,W)\\ &- g(\nabla_X\nabla_{\nabla_V Y}Z - \nabla_{\nabla_V Y}\nabla_X Z - \nabla_{[X,\nabla_V Y]}Z,W).\end{aligned}$$

Претходно расписивање можемо записати са

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) = g((\mathcal{T}_1(X,Y,V) + \mathcal{T}_2(X,Y,V) + \mathcal{T}_3(X,Y,V))Z,W),$$

при чему је

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(X,Y,V) &= \nabla_V\nabla_X\nabla_Y - \nabla_V\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y\nabla_V + \nabla_Y\nabla_X\nabla_V\\ &= [\nabla_V,[\nabla_X,\nabla_Y]];\\ \mathcal{T}_2(X,Y,V) &= \nabla_Y\nabla_{\nabla_V X} - \nabla_{\nabla_V X}\nabla_Y + \nabla_{\nabla_V Y}\nabla_X - \nabla_X\nabla_{\nabla_V Y}\\ &+ \nabla_{[X,Y]}\nabla_V - \nabla_V\nabla_{[X,Y]}\\ &= [\nabla_Y,\nabla_{\nabla_V X}] + [\nabla_{\nabla_V Y},\nabla_X] + [\nabla_{[X,Y]},\nabla_V];\\ \mathcal{T}_3(X,Y,V) &= \nabla_{[X,\nabla_V Y]} + \nabla_{[\nabla_V X,Y]}.\end{aligned}$$

Јакобијев идентитет нам овога пута даје

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_1(X,Y,V) + \mathcal{T}_1(Y,V,X) + \mathcal{T}_1(V,X,Y)\\ &\qquad = [\nabla_V,[\nabla_X,\nabla_Y]] + [\nabla_X,[\nabla_Y,\nabla_V]] + [\nabla_Y,[\nabla_V,\nabla_X]] = 0.\end{aligned}$$

Примена формуле (1.4) даје

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_2(X,Y,V) + \mathcal{T}_2(Y,V,X) + \mathcal{T}_2(V,X,Y)\\ &\qquad = [\nabla_{\nabla_V Y - \nabla_Y V - [V,Y]},\nabla_X] + [\nabla_{\nabla_X V - \nabla_V X - [X,V]},\nabla_Y]\\ &\qquad + [\nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y,X]},\nabla_V] = 0.\end{aligned}$$

Из поновне примене формуле (1.4) и Јакобијевог идентитета имамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_3(X,Y,V) + \mathcal{T}_3(Y,V,X) + \mathcal{T}_3(V,X,Y)\\ &\quad = \nabla_{[X,\nabla_V Y]} + \nabla_{[\nabla_V X,Y]} + \nabla_{[Y,\nabla_X V]} + \nabla_{[\nabla_X Y,V]} + \nabla_{[V,\nabla_Y X]} + \nabla_{[\nabla_Y V,X]}\\ &\quad = \nabla_{[X,\nabla_V Y - \nabla_Y V]} + \nabla_{[Y,\nabla_X V - \nabla_V X]} + \nabla_{[V,\nabla_Y X - \nabla_X Y]}\\ &\quad = \nabla_{[X,[V,Y]]+[Y,[X,V]]+[V,[Y,X]]} = 0.\end{aligned}$$

Коначно, обједињавањем претходних резултата добијамо

$$\begin{aligned}&\nabla R(X,Y,Z,W,V)+\nabla R(Y,V,Z,W,X)+\nabla R(V,X,Z,W,Y)\\&\qquad=g\left(\sum_{j=1}^{3}(\mathcal{T}_j(X,Y,V)+\mathcal{T}_j(Y,V,X)+\mathcal{T}_j(V,X,Y))Z\ ,\ W\right)=0,\end{aligned}$$

што у потпуности доказује тврђење. $\square$

Формула (1.17) је коваријантни извод првог Бјанкијевог идентитета, док је (1.18) други Бјанкијев идентитет. Можемо посматрати и варијанту коваријантног извода базираног на следећој дефиницији

$$R(X,Y,Z,W;V)=\nabla_V(R(X,Y,Z,W))=V(R(X,Y,Z,W)).$$

За овако дефинисан $R(X,Y,Z,W;V)$, такође важе основне симетрије.

Теорема 1.5 *За коваријантни извод тензора кривине важи*

$$R(X,Y,Z,W;V)=-R(Y,X,Z,W;V), \tag{1.19}$$
$$R(X,Y,Z,W;V)=-R(X,Y,W,Z;V), \tag{1.20}$$
$$R(X,Y,Z,W;V)+R(Y,Z,X,W;V)+R(Z,X,Y,W;V)=0, \tag{1.21}$$
$$R(X,Y,Z,W;V)+R(Y,V,Z,W;X)+R(V,X,Z,W;Y)=0, \tag{1.22}$$

за свако $X,Y,Z,W,V\in\mathcal{X}(M)$.

Доказ. Формуле (1.19), (1.20) и (1.21) су директна последица примене коваријантног извода на формуле из Теореме 1.3. Да би избегли компликоване рачуне, попут оних у доказу Теореме 1.4, послужићемо се стандардним триком, који значајно убрзава ствари. Желимо да покажемо да формула (1.22) важи у конкретној тачки p многострукости. Захваљујући вишелинеарности довољно је показати формулу када су X,Y,Z,W,V базни вектори у односу на неки репер. Ако изаберемо нормалне координате у p, за сваку тачку p понаособ, а X,Y,Z,W,V поставимо за базне векторе, они ће имати два веома битна својства, која непроцењиво упрошћавају ствари. Прво је то да су њихови комутатори нула, а друго да су њихови коваријантни изводи у тачки p нула. Формула (1.22) је тада очигледна последица (1.18). $\square$

Веома важну улогу у нашем раду имају Јакобијев и њему сродни оператори. По узору на Гилкија [17] дефинишемо поларизован Јакобијев оператор.

Дефиниција 1.12 *Поларизован Јакобијев оператор је* $\mathcal{J} : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$ *дефинисан са*

$$\mathcal{J}(X,Y)(Z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Z,Y)X\right), \tag{1.23}$$

за све $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Дефиниција 1.13 *Јакобијев оператор за* $X \in \mathcal{X}(M)$ *је пресликавање* $\mathcal{J}_X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ *дефинисано са* $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}(X,X)$.

На основу претходних дефиниција лако можемо видети да за Јакобијев оператор важи

$$\mathcal{J}_X(Y) = \mathcal{R}(Y,X)X, \tag{1.24}$$

за свако $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Напоменимо да је Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ један симетричан оператор, односно такав да за њега важи $g(\mathcal{J}_X(Y),Y) = g(\mathcal{J}_Y(X),X)$. У питању је други запис за $R(Y,X,X,Y) = R(X,Y,Y,X)$, што је, на пример, последица двоструке примене формуле (1.12).

Из својства (1.13) имамо $g(\mathcal{J}_X(Y),X) = R(Y,X,X,X) = 0$, што даје $\mathcal{J}_X(Y) \perp X$, те је кодомен Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ заправо $X^\perp = \{Y \in \mathcal{X}(M) \mid g(Y,X) = 0\}$. У случају јединичног $Z \in S(M)$, простор $Z^\perp$ биће недегенерисана хиперповрш тангентног раслојења $\mathcal{X}(M)$. Са друге стране (1.10) даје $\mathcal{J}_Z(Z) = \mathcal{R}(Z,Z)Z = 0$, те је Јакобијев оператор $\mathcal{J}_Z$ одређен у потпуности рестрикцијом на $Z^\perp$.

Дефиниција 1.14 *Редукован Јакобијев оператор за* $Z \in S(M)$ *је пресликавање* $\tilde{\mathcal{J}}_Z : Z^\perp \to Z^\perp$ *дефинисано са* $\tilde{\mathcal{J}}_Z(Y) = \mathcal{J}_Z(Y)$, *за* $Y \in Z^\perp$.

Траг поларизованог Јакобијевог оператора је Ричијев[11] тензор.

Дефиниција 1.15 *Ричијев тензор је пресликавање* $\mathrm{Ric} : \mathcal{X}(M)^2 \to \mathcal{F}(M)$ *дефинисано са* $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y))$ *за* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

За крај секције дефинисаћемо секциону и скаларну кривину.

Дефиниција 1.16 *Секциона кривина недегенерисане равни* $\sigma = \mathrm{Span}\{X,Y\}$ *је дата са*

$$\kappa(\sigma) = \kappa(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X,Y))^2}.$$

[11] Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925)

Овако дефинисана секциона кривина је добро дефинисана, јер вредност $\kappa(\sigma)$ не зависи од избора базе за раван σ. Наиме, ако $X_1 = \alpha X + \beta Y$ и $Y_1 = \gamma X + \delta Y$ чине неку другу базу равни σ, тада је због линеарне независности $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, а након праволинијског рачуна лако добијамо

$$R(X_1, Y_1, Y_1, X_1) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 R(X, Y, Y, X),$$
$$\varepsilon_{X_1}^2 \varepsilon_{Y_1}^2 - (g(X_1, Y_1))^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \left(\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2\right).$$

Из претходних једначина лако је видети да важи $\kappa(X_1, Y_1) = \kappa(X, Y)$, те је секциона кривина добро дефинисана.

Дефиниција 1.17 *Скаларна кривина* $\mathrm{Sc} \in \mathcal{F}(M)$ *је траг Ричијевог тензора, односно* $\mathrm{Sc} = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ric})$.

Уколико је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ ортонормирана база од $\mathcal{X}(M)$, скаларна кривина се може записати са

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i} \varepsilon_{E_j} R(E_i, E_j, E_j, E_i),$$

и она не зависи од избора ортонормиране базе.

1.3 Осерманов услов

Ову секцију започињемо Осермановим условима који се посматрају у тачки многострукости. Заправо, посматра се оператор на T_pM који је рестрикција Јакобијевог оператора у тачки p многострукости.

Дефиниција 1.18 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, а ω_X карактеристичан полином оператора рестрикције $\mathcal{J}_X$ у тачки $p \in M$. (M, g) је временски Осерманова у тачки p ако је ω_X независан од избора јединичног временског X. (M, g) је просторно Осерманова у тачки p ако је ω_X независан од избора јединичног просторног X.*

Касније ће се испоставити (Теорема 3.1) да су временски Осерманова и просторно Осерманова многострукост у истој тачки еквивалентни појмови, те такве многострукости зовемо Осерманове у тачки.

Дефиниција 1.19 *Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је Осерманова у тачки $p \in M$ ако је и временски и просторно Осерманова у тачки p.*

Осерманов услов у тачки $p \in M$, дакле, захтева константност карактеристичног полинома Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ на јединичним псеудосферама $S^-(T_pM)$ и $S^+(T_pM)$. Он се може проширити на читаву многострукост на два основна начина који описују концепте тачка по тачка Осерманове многострукости и глобално Осерманове многострукости.

Дефиниција 1.20 *Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. (M, g) је тачка по тачка Осерманова ако је (M, g) Осерманова у свакој тачки $p \in M$. (M, g) је глобално Осерманова ако је карактеристичан полином оператора $\mathcal{J}_X$ независан од избора $X \in S^-(M)$ и независан од избора $X \in S^+(M)$.*

Термин Осерманова многострукост уобичајено подразумева глобално Осерманову многострукост, а очигледно је да тада она мора бити и тачка по тачка Осерманова. Међутим, постоје примери многострукости које су Осерманове тачка по тачка, али не и глобално Осерманове [9].

Осерманов услов првобитно је био постављен у случају Риманових многострукости, односно у сигнатури $(0, n)$. Дефинитност метрике у том случају омогућава да се Јакобијев оператор, као симетричан, дијагонализује, те се Осерманов услов може еквивалентно исказати као константност сопствених вредности Јакобијевог оператора рачунатих са вишеструкостима. У псеудо-Римановом случају ситуација се мења јер сопствена структура Јакобијевог оператора није у потпуности одређена карактеристичним полиномом, већ његовом Жордановом формом. Наведимо и неке добро познате ствари из линеарне алгебре [16].

Дефиниција 1.21 *Жорданов блок димензије $k \times k$ који одговара реалној сопственој вредности $\lambda \in \mathbb{R}$ је матрица $\mathcal{J}(k, \lambda)$ дефинисана са*

$$\mathcal{J}(k,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

У случају комплексне сопствене вредности $\lambda = a + ib$, Жорданов блок димензије $2k \times 2k$ који одговара вредности $\lambda \in \mathbb{C}$ је матрица дефинисана *са*

$$\mathcal{J}(k,a,b) = \begin{pmatrix} A & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

где су A *и* I_2 *блокови димензије* 2×2 *дефинисани са*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.6 *За сваки оператор* $\mathcal{J}$ *на реалном векторском простору* $\mathcal{V}$ *постоји база за* $\mathcal{V}$ *у којој он има блок дијагоналну матрицу састављену од Жордanових блокова описаних у (1.25) и (1.26). Неуређена колекција горе описаних Жордanових блокова назива се Жордanова форма оператора* $\mathcal{J}$*.*

Даља уопштења Осермановог услова тичу се сопствене структуре Јакобијевог оператора, те тако долазимо до наредних дефиниција.

Дефиниција 1.22 *Нека је* (M,g) *псеудо-Риманова многострукост и* $p \in M$*.* (M,g) *је временски Жордан-Осерманова у тачки* p *ако је Жорданова форма оператора* $\mathcal{J}_X$ *независна од* $X \in S^-(T_pM)$*.* (M,g) *је просторно Жордан-Осерманова у тачки* p *ако је Жорданова форма оператора* $\mathcal{J}_X$ *независна од* $X \in S^+(T_pM)$*.* (M,g) *је Жордан-Осерманова у тачки* p *ако је и временски и просторно Жордан-Осерманова у тачки* p*.* (M,g) *је тачка по тачка Жордан-Осерманова ако је Жордан-Осерманова у свакој тачки* $p \in M$*.* (M,g) *је глобално Жордан-Осерманова ако је Жорданова форма оператора* $\mathcal{J}_X$ *независна од избора* $X \in S^-(M)$ *и независна од избора* $X \in S^+(M)$*.*

Временски и просторни Жордан-Осерманови услови нису еквивалентни [16], а многи аутори одмах раде уз претпоставку да је многострукост глобално Жордан-Осерманова. Идеалан случај за псеудо-Риманову Осерманову многострукост је када се Јакобијев оператор може дијагонализовати, односно када Жорданова форма Јакобијевог оператора има за блокове само матрице 1×1.

Дефиниција 1.23 *Псеудо-Риманова многуструкост* (M,g) *је дијагонална у тачки* $p \in M$ *ако за свако* $X \in S(T_pM)$ *постоји ортонормирана база тангентног простора* T_pM *у којој рестрикција Јакобијевог оператора* $\mathcal{J}_X$

у тачки p има дијагоналну матрицу. (M,g) *је дијагонална ако је дијагонална у свакој тачки* $p \in M$.

Дијагоналне псеудо-Риманове многострукости најближе су матичном Римановом случају. Велики број резултата у наредним главама дајемо уз претпоставку дијагоналности. Гилки и Иванова[12] [18] су показали да је је тај услов на неки начин и природан јер Жордан-Осерманова многострукост сигнатуре која није неутрална $(n \neq 2\nu)$ мора бити дијагонална.

1.4 Алгебарски тензор кривине

У теорији псеудо-Риманових многострукости веома често се трага за алгебарским резултатима, односно посматрају се особине у конкретној тачки многострукости. Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост и $p \in M$ њена тачка. Рестрикција од $\mathcal{X}(M)$ у тачки p постаје векторски простор $\mathcal{V} = T_pM$. Природни оператори и тензори такође се могу посматрати у тачки p, што доводи до појма алгебарског тензора кривине.

Дефиниција 1.24 *Нека је* $\mathcal{V}$ *векторски простор са скаларним производом. За тензор* $R : \mathcal{V}^4 \to \mathbb{R}$ *кажемо да је алгебарски тензор кривине, ако важи*

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W), \tag{1.27}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.28}$$

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0, \tag{1.29}$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$.

Важно је приметити слагање Дефиниције 1.24 са Теоремом 1.3, односно тензор кривине псеудо-Риманове многострукости рестрикован на тачку јесте алгебарски тензор кривине. То значи да све оно што изведемо из алгебарског тензора кривине можемо касније применити на тензор кривине псеудо-Риманове многострукости, што је случај са наредном лемом која даје симетрију по паровима.

Лема 1.1 *Ако је* R *алгебарски тензор кривине на векторском простору* $\mathcal{V}$, *тада за свако* $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$ *важи*

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y). \tag{1.30}$$

[12] Raina Ivanova

Доказ. Применимо (1.28), затим (1.29) и на крају (1.27) и (1.28), те добијамо

$$\begin{aligned}
&2R(X,Y,Z,W) - 2R(Z,W,X,Y)\\
=&R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,W,Z) - R(Z,W,X,Y) + R(Z,W,Y,X)\\
=&(-R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W)) - (-R(Y,W,X,Z) - R(W,X,Y,Z))\\
&-(-R(W,X,Z,Y) - R(X,Z,W,Y)) + (-R(W,Y,Z,X) - R(Y,Z,W,X))\\
=&-R(Y,Z,X,W) - R(Y,Z,W,X) - R(Z,X,Y,W) + R(X,Z,W,Y)\\
&+R(Y,W,X,Z) - R(W,Y,Z,X) + R(W,X,Y,Z) + R(W,X,Z,Y) = 0.
\end{aligned}$$

Дељењем ове једначине са 2 добијамо (1.30). □

Приметимо да се по претходној леми једначина (1.28) у Дефиницији 1.24 може заменити са (1.30), јер (1.28) је директна последица једначина (1.27) и (1.30).

Рестрикцију оператора кривине у тачки многострукости зовемо афини оператор кривине и њега можемо повезати са алгебарским тензором кривине по формули

$$R(X,Y,Z,W) = g(\mathcal{R}(X,Y)Z,W),$$

за свако $X,Y,Z,W \in \mathcal{V}$. Ознаку R за тензор кривине и $\mathcal{R}$ за оператор кривине смо намерно задржали да би по аналогији преузели терминологију из глобалне приче. Ако је $(E_1,...,E_n)$ произвољна ортонормирана база простора $\mathcal{V}$, то повратна спрега мора бити

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \sum_{1\le i\le n} g(E_i,E_i)g(\mathcal{R}(X,Y)Z,E_i)E_i = \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_{E_i} R(X,Y,Z,E_i)E_i.$$

Преузимање појмова и ознака настављамо са Јакобијевим и њему сродним операторима, а онда и са Осермановим условима у тачки.

Дефиниција 1.25 *Нека је R алгебарски тензор кривине и $\mathcal{R}$ њему одговарајући афини оператор кривине. Тада за $X,Y \in \mathcal{V}$ и $Z \in S(\mathcal{V})$*

1) поларизован Јакобијев оператор $\mathcal{J}(X,Y) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ дефинише (1.23);

2) Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ дефинише (1.24);

3) редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_Z : Z^\perp \to Z^\perp$ дефинише $\tilde{\mathcal{J}}_Z = \mathcal{J}_Z|_{Z^\perp}$.

Дефиниција 1.26 *Нека је R алгебарски тензор кривине над векторским простором $\mathcal{V}$ и нека је ω_X каратеристичан полином, а $\tilde{\omega}_X$ Жорданова*

форма Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$, за $X \in \mathcal{V}$. Тада за R кажемо да је:
1) временски Осерманов ако ω_X не зависи од $X \in S^-(\mathcal{V})$;
2) просторно Осерманов ако ω_X не зависи од $X \in S^+(\mathcal{V})$;
3) Осерманов ако је и временски и просторно Осерманов;
4) временски Жордан-Осерманов ако $\tilde{\omega}_X$ не зависи од $X \in S^-(\mathcal{V})$;
5) просторно Жордан-Осерманов ако $\tilde{\omega}_X$ не зависи од $X \in S^+(\mathcal{V})$;
6) Жордан-Осерманов ако је такав и временски и просторно;
7) дијагоналан ако је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан за свако $X \in S(\mathcal{V})$.

Погледајмо сада основне примере за Осерманов алгебарски тензор кривине. Конструкцију вршимо помоћу афиног оператора кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ са скаларним производом g.

Пример 1.1 Нека је $\mathcal{R}^0$ афини оператор кривине на $\mathcal{V}$ дефинисан са

$$\mathcal{R}^0(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

За јединичан $X \in S(\mathcal{V})$ ортогоналан на Y, редукован Јакобијев оператор постаје

$$\tilde{\mathcal{J}}^0_X(Y) = \mathcal{R}^0(Y,X)X = g(X,X)Y - g(Y,X)X = \varepsilon_X Y,$$

те за свако јединично X имамо $\tilde{\mathcal{J}}^0_X = \varepsilon_X \mathrm{Id}$. За $X \in S^-(\mathcal{V})$, као и за $X \in S^+(\mathcal{V})$ пресликавање $\tilde{\mathcal{J}}^0_X$ је константно, те је такав и одговарајући карактеристични полином.

Пример 1.2 Нека је $J : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ермитска[13] комплексна структура, односно $J^2 = -\mathrm{Id}$ и $g(JX,JY) = g(X,Y)$ важи за све $X,Y \in \mathcal{V}$. Афини оператор кривине можемо дефинисати са

$$\mathcal{R}^J(X,Y)Z = g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ.$$

Овако конструисан $\mathcal{R}^J$ је Осерманов јер како је $g(X,JX) = 0$ имамо за одговарајући Јакобијев оператор

$$\mathcal{J}^J_X(Y) = \mathcal{R}^J(Y,X)X = -3g(Y,JX)JX = \left\{ \begin{array}{cl} -3\varepsilon_X \mathrm{Id} & \text{на Span}\{JX\} \\ 0 & \text{на Span}\{JX\}^\perp \end{array} \right. .$$

[13] Charles Hermite (1822–1901)

1.5 Примери Осермановых многострукости

У овој секцији дајемо прве нетривијалне примере Осермановых многострукости. Гарсија-Рио[14], Купели[15] и Васкез-Лоренцо[16] [15] конструисали су псеудо-Риманову многострукост $(\mathbb{R}^4, g)$ са метриком

$$g = \begin{pmatrix} x_3 f_1 & a & 1 & 0 \\ a & x_4 f_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

задатој на реперу (E_1, E_2, E_3, E_4) тангентног раслојења $\mathcal{X}(\mathbb{R}^4)$, где је $E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ за $1 \leq i \leq 4$, при чему су $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ глатке реалне функције које зависе само од x_1 и x_2, док је $a \in \mathbb{R}$ реалан број. Основни проблем код конструкције метрике је тај што она не сме да мења сигнатуру од тачке до тачке, те је зато Вокерова[17] метрика [29] јако захвална. Како g из (1.31) представља фамилију Вокерових метрика, она ће имати фиксирану сигнатуру $(2,2)$.

Да би дошли до Леви-Чивита повезаности морамо најпре срачунати Кристофелове[18] симболе, што су коефицијенти у развоју повезаности

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Они се рачунају по наредној формули [20]

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right), \tag{1.32}$$

где су g_{ij} елементи матрице g из (1.31), а g^{ij} елементи њој инверзне матрице

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_3 f_1 & -a \\ 0 & 1 & -a & -x_4 f_2 \end{pmatrix}.$$

[14] Eduardo García-Río
[15] Demir Nuri Kupeli
[16] Ramón Vázquez-Lorenzo
[17] Arthur Geoffrey Walker (1909–2001)
[18] Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

Конкретан рачун даје нам све ненула Кристофелове симболе

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2}f_1, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_3 f_1^2,\\
\Gamma_{11}^4 &= -\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}af_1, & \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2},\\
\Gamma_{12}^4 &= \Gamma_{21}^4 = \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{2}f_2,\\
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2}af_2, & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_4 f_2^2,\\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}f_1, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2}f_2.
\end{aligned}$$

Тако добијамо све ненула координатне коваријантне изводе

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1}E_1 &= -\frac{1}{2}f_1E_1 + \left(\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_3f_1^2\right)E_3 + \left(-\frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}af_1\right)E_4,\\
\nabla_{E_1}E_2 &= \frac{1}{2}x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3 + \frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4,\\
\nabla_{E_1}E_3 &= \frac{1}{2}f_1E_3,\\
\nabla_{E_2}E_2 &= -\frac{1}{2}f_2E_2 + \left(-\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2}af_2\right)E_3 + \left(\frac{1}{2}x_4\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_4f_2^2\right)E_4,\\
\nabla_{E_2}E_4 &= \frac{1}{2}f_2E_4.
\end{aligned}$$

Коначно, ненула координатни оператори кривине су

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_1 - \frac{1}{2}x_3f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3+\\
+\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} + (x_3f_2 - 2a)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_4f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - af_1f_2\right)E_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_2 + \frac{1}{2}x_4f_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4-\\
-\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} + x_3f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + (x_4f_1 - 2a)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - af_1f_2\right)E_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_3 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3, & R(E_1,E_2)E_4 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4, \\
R(E_1,E_3)E_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_4, & R(E_1,E_3)E_2 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_3, \\
R(E_2,E_4)E_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_4, & R(E_2,E_4)E_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}E_3.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

Матрицу Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ можемо добити расписивањем X у нашој бази $X=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i E_i$ и није тешко видети да формуле (1.33) дају блок матрицу

$$
\mathcal{J}_X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^T \end{pmatrix},
$$

где је

$$
A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & -\frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{1}{2}\alpha_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.
$$

Карактеристичан полином оператора $\mathcal{J}_X$ очигледно не зависи од матрице B

$$
\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{Id} - \mathcal{J}_X) = \det(\lambda\mathrm{Id} - A)\det(\lambda\mathrm{Id} - A^T) = (\det(\lambda\mathrm{Id} - A))^2.
$$

Како је

$$
\det(\lambda\mathrm{Id} - A) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\alpha_1\alpha_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right),
$$

можемо закључити да константан карактеристичан полином, имамо само у случају да је

$$
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,
\tag{1.34}
$$

у свакој тачки многострукости $\mathbb{R}^4$. Прихватићемо формулу (1.34) за основну претпоставку и тада карактеристичан полином Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ постаје $\omega_X(\lambda)=\lambda^4$, што доказује да је овако конструисана псеудо-Риманова многострукост $(\mathbb{R}^4, g)$ глобално Осерманова.

Овај пример је јако згодан за испитивање Жордан-Осермановог услова. Жорданова форма оператора $\mathcal{J}_X$ зависиће од његовог минималног полинома. Ако у некој тачки многострукости важи услов

$$
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,
\tag{1.35}
$$

тада се формуле (1.33) значајно поједностављују и координатни оператори кривине у тој тачки нису нула само за

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_1 &= \frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2\right)E_4,\\
R(E_1,E_2)E_2 &= -\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2\right)E_3,
\end{aligned}
$$

и тада је

$$
\mathcal{J}_X=\frac{1}{4}\left(2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2\right)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\alpha_2^2&\alpha_1\alpha_2&0&0\\\alpha_1\alpha_2&-\alpha_1^2&0&0\end{pmatrix}\ \text{и}\ {\mathcal{J}_X}^2=0.
$$

Можемо закључити да је у тачкама где су испуњене једначине (1.35), λ минималан полином у тачкама $2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2=0$, док је λ^2 минималан полином у тачкама $2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2\neq 0$. Конкретне Осерманове многострукости можемо добити погодним избором за f_1, f_2 и a.

Пример 1.3 За $f_1(x_1,x_2)=1,\ f_2(x_1,x_2)=1$ и $a=1$ је

$$
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0,\quad 2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2=-1\neq 0.
$$

По закључку минималан полином у свакој тачки многострукости је λ^2. Зато је овако конструисана многострукост Жордан-Осерманова, али није дијагонална.

Пример 1.4 За $f_1(x_1,x_2)=x_1,\ f_2(x_1,x_2)=1$ и $a=1$ је

$$
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0,\quad 2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2}+2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2}-af_1f_2=-x_1.
$$

По закључку λ је минималан полином у тачкама где је $x_1=0$, а λ^2 у тачкама где је $x_1\neq 0$. Овако конструисана многострукост јесте глобално Осерманова, али није Жордан-Осерманова.

Ради комплетности и још неких могућих примера, можемо израчунати и инстанце у матрици B. Уз услов (1.34) имаћемо

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{1}{2}\alpha_2^2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\alpha_2^2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4} a\alpha_2^2 f_1 f_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(2\alpha_1\alpha_2 x_3 f_1 + \alpha_2^2 x_3 f_2 - \alpha_2^2 x_4 f_1 + 4\alpha_2\alpha_3 + 2a\alpha_2^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ b_{12} &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4} a\alpha_1\alpha_2 f_1 f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(2\alpha_1^2 x_3 f_1 + \alpha_1\alpha_2 x_3 f_2 - \alpha_1\alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4} a\alpha_1\alpha_2 f_1 f_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\alpha_1\alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_2^2 x_4 f_2 - \alpha_1\alpha_2 x_3 f_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ b_{22} &= -\frac{1}{2}\alpha_1^2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4} a\alpha_1^2 f_1 f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(2\alpha_1\alpha_2 x_4 f_2 + \alpha_1^2 x_4 f_1 - \alpha_1^2 x_3 f_2 + 4\alpha_1\alpha_4 + 2a\alpha_1^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Праволинијски рачун нам даје

$$\mathcal{J}_X{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BA + A^T B & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\varepsilon_X\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_X{}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (BA + A^T B)A & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

за свако X. У случају $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq 0$ то значи да је минималан полином за $\mathcal{J}_X$ једнак λ^3. Секцију завршавамо још неким конкретним примерима.

Пример 1.5 За $f_1(x_1, x_2) = x_2,\ f_2(x_1, x_2) = -x_1$ и $a = 1$ је

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \neq 0.$$

Минималан полином је λ^3 у свакој тачки многострукости, што даје још један пример Жордан-Осерманове многострукости.

Пример 1.6 За $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2$ и $a = 1$ је

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_1, \quad 2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial {x_2}^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial {x_1}^2} - a f_1 f_2 = -2x_4 - \frac{1}{2}x_1^3 x_2.$$

У тачкама за које је $x_1 \neq 0$ минималан полином је λ^3, у тачкама $x_1 = 0, x_4 \neq 0$ минималан полином је λ^2, док је у тачкама $x_1 = x_4 = 0$ минималан полином једнак λ. Многострукост јесте глобално Осерманова, али њен минималан полином се поприлично мења од тачке до тачке, али је наравно фиксиран у свакој тачки понаособ.

ГЛАВА 2

ИЗОТРОПНИ ВЕКТОРИ

Ова кратка глава обухвата неке резултате из линеарне алгебре који се тичу изотропних вектора, а које ћемо интензивно користити у наредним главама. Огромним делом у питању су оригинална виђења аутора која су настала у тешкој борби са проблемима из Главе 5. У Секцији 2.1 приказујемо на које начине се изотропан вектор може раставити као збир међусобно ортогоналних дефинитних вектора. У Секцији 2.2 дефинишемо појам скроз изотропног простора и дајемо ограничења за димензију скроз изотропног потпростора неког недегенерисаног векторског простора.

2.1 Растављање изотропног вектора

Изотропни вектори, односно вектори норме нула, кључни су за разумевање псеудо-Риманових многострукости. Како наша урођена свест лако прихвата само позитивно дефинитну метрику, односно Риманове просторе, изотропни вектори су прилично незгодни и често контраинтуитивни. Читава ова глава разрађена је као користан апарат за борбу против тешких проблема из Главе 5 и огромним делом у питању су оригинална виђења аутора [2]. Започнимо једном добро познатом лемом из линеарне алгебре.

Лема 2.1 *Сваки векторски простор $\mathcal{V}$ сигнатуре (p,q) може се раставити као ортогонална сума $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, где је $\mathcal{V}^+$ максималан просторан потпростор димензије q, а $\mathcal{V}^-$ комплементаран максималан временски потпростор димензије p.*

Доказ. Нека је $(E_1, ..., E_p, F_1, ..., F_q)$ ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$, где су E_i, за $1 \leq i \leq p$, временски, а F_j, за $1 \leq j \leq q$, просторни вектори. Векторски потпростори $\mathcal{V}^- = \mathrm{Span}\{E_1, ..., E_p\}$ и $\mathcal{V}^+ = \mathrm{Span}\{F_1, ..., F_q\}$ су међусобно ортогонални и очигледно важи $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$. □

Лема 2.2 *Сваки изотропан вектор $N \neq 0$ из недегенерисаног простора $\mathcal{V}$ може се раставити са $N = S + T$, где $S, T \in \mathcal{V}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$.*

Доказ. По Леми 2.1 имамо $N \in \mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, те постоје $S \in \mathcal{V}^+$ и $T \in \mathcal{V}^-$, тако да је $N = S + T$. Из $\mathcal{V}^+ \perp \mathcal{V}^-$ биће $g(S,T) = 0$ и зато $0 = \varepsilon_N = g(S+T, S+T) = \varepsilon_S + \varepsilon_T$. Како је $N \neq 0$, биће $S \neq 0$, те $\varepsilon_S \neq 0$ и коначно $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. □

Међутим, растављање из Леме 2.2 није једнозначно, чак ни у истој равни $\mathrm{Span}\{S,T\}$. Поставимо ли $S_1 = \theta S + (1-\theta)T$ и $T_1 = (1-\theta)S + \theta T$ за неко $\theta > \frac{1}{2}$ имаћемо $S_1, T_1 \in \mathcal{V}$ са $S_1 + T_1 = S + T = N$, као и

$$g(S_1, T_1) = g(\theta S + (1-\theta)T, (1-\theta)S + \theta T) = \theta(1-\theta)(\varepsilon_S + \varepsilon_T) = 0.$$

Даље је $\varepsilon_{S_1} = \theta^2\varepsilon_S + (1-\theta)^2\varepsilon_T = (\theta^2 - (1-\theta)^2)\varepsilon_S = (2\theta - 1)\varepsilon_S > 0$, док $g(S_1, T_1) = 0$ повлачи $\varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{T_1} = \varepsilon_{S_1+T_1} = \varepsilon_N = 0$, одакле добијамо завршно $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} > 0$. Ова конструкција за свако $\theta > \frac{1}{2}$ даје ново растављање, што нам омогућава растављање на јединичне, као побољшану верзију Леме 2.2.

Последица 2.1 *Сваки изотропан вектор $N \neq 0$ из недегенерисаног простора $\mathcal{V}$ може се раставити са $N = S+T$, где $S, T \in S(\mathcal{V})$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1$.*

Доказ. Нека је $N = S + T$ растављање по Леми 2.2. По претходној дискусији узећемо $\theta = \frac{1+\varepsilon_S}{2\varepsilon_S} > \frac{1}{2}$ и добити $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} = 1$, односно

$$N = \left(\frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S}S + \frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S}T\right) + \left(\frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S}S + \frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S}T\right)$$

биће наше растављање са траженим својством. □

Нове конструкције могуће су у другим равнима. Ако је $\dim \mathcal{V} > 2$, тада постоји дефинитан $W \in \mathcal{V}$, такав да је $W \perp \mathrm{Span}\{S, T\}$. Желимо скаларе α, β, γ, тако да је $S_1 = \alpha S + \beta T + \gamma W$ и $T_1 = (1-\alpha)S + (1-\beta)T - \gamma W$, што гарантује $S_1 + T_1 = S + T = N$. За ортогоналност $S_1 \perp T_1$ потребно је

$$0 = g(S_1, T_1) = \alpha(1-\alpha)\varepsilon_S + \beta(1-\beta)\varepsilon_T - \gamma^2\varepsilon_W = ((\alpha-\alpha^2)-(\beta-\beta^2))\varepsilon_S - \gamma^2\varepsilon_W$$

и зато мора бити

$$\gamma^2\varepsilon_W = (\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S. \tag{2.1}$$

Последњи услов $\varepsilon_{S_1} > 0$ доноси

$$0 < \varepsilon_{S_1} = \alpha^2\varepsilon_S + \beta^2\varepsilon_T + \gamma^2\varepsilon_W = (\alpha^2-\beta^2)\varepsilon_S + (\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)\varepsilon_S = (\alpha-\beta)\varepsilon_S,$$

што ради само за $\alpha > \beta$. У случају просторног W бирамо $\alpha + \beta < 1$, док у случају временског W бирамо $\alpha + \beta > 1$, што по једначини (2.1) са $\alpha > \beta$ одређује коначне услове за α и β. За све α и β ограничене са те последње две неједнакости добијамо нова растављања, а за њих је

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)\varepsilon_S}{\varepsilon_W}}.$$

Последњи резултат у овој секцији је растављање у потпростору у односу на неки дефинитан вектор које ћемо користити у Глави 5.

Лема 2.3 *Нека је $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ недегенерисан потпростор и нека је $X \in \mathcal{V}$ дефинитан. Тада се сваки изотропан $0 \neq N \in \mathcal{U}$ ортогоналан на X може раставити са $N = S + T$, где је $S, T \in \mathcal{U}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$, тако да је бар један од вектора $X - S$ и $X - T$ дефинитан.*

Доказ. По Леми 2.2 имамо растављање $N = S + T$, где $S, T \in \mathcal{U}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Ако ни $X - S$ ни $X - T$ нису дефинитни имали би $0 = \varepsilon_{X-S} = \varepsilon_X - 2g(X, S) + \varepsilon_S$ и $0 = \varepsilon_{X-T} = \varepsilon_X - 2g(X, T) + \varepsilon_T$, што даје

$$2g(X, S) = \varepsilon_X + \varepsilon_S, \quad 2g(X, T) = \varepsilon_X - \varepsilon_S.$$

Збир претходних једначина био би $2g(X, S) + 2g(X, T) = 2\varepsilon_X$, и отуда $0 = g(X, N) = g(X, S + T) = \varepsilon_X \neq 0$, што је контрадикција. $\square$

2.2 Скроз изотропан простор

У овој секцији дефинишемо појам скроз изотропног простора, а процена његове димензије омогућиће нам да у Глави 5 одбацимо многе случајеве и тако докажемо нека важна тврђења.

Дефиниција 2.1 *Кажемо да је векторски простор скроз изотропан ако се састоји само од изотропних вектора.*

Лема 2.4 *Вектори из скроз изотропног простора су међусобно ортогонални.*

Доказ. Нека X и Y припадају скроз изотропном простору $\mathcal{U}$. Како је $X+Y \in \mathcal{U}$, имамо $0 = \varepsilon_{X+Y} = \varepsilon_X + 2g(X,Y) + \varepsilon_Y = 2g(X,Y)$, одакле следи $X \perp Y$. □

Лема 2.5 *Ако је $\mathcal{V}$ векторски простор сигнатуре (p,q), тада је* $\dim \mathcal{U} \leq \min(p,q)$ *за сваки скроз изотропан потпростор $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.*

Доказ. Не умањујући општост можемо претпоставити да је $p \leq q$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоји скроз изотропан $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ за који је $\dim \mathcal{U} > p$. Нека је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$ ортогонална сума из Леме 2.1. Тада постоје линеарно независни вектори $V_1, \dots, V_p, V_{p+1} \in \mathcal{U}$ и они се за $1 \leq i \leq p+1$ могу записати са $V_i = P_i + Q_i$, где $P_i \in \mathcal{V}^+$ и $Q_i \in \mathcal{V}^-$. Како је $\dim \mathcal{V}^- = p$, то постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}$, који нису сви нуле, тако да је $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i Q_i = 0$. Одатле је

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i Q_i = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i P_i.$$

Лева страна $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i V_i \in \mathcal{U}$ има норму нула, а десна $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i P_i \in \mathcal{V}^+$ припада позитивно дефинитном потпростору и зато је $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i V_i = 0$, те вектори V_i нису линеарно независни и имамо контрадикцију. □

Последица 2.2 *За сваки скроз изотропан потпростор $\mathcal{U}$ недегенерисаног векторског простора $\mathcal{V}$ важи* $\dim \mathcal{U} \leq \frac{1}{2} \dim \mathcal{V}$.

Доказ. Нека је (p,q) сигнатура векторског простора $\mathcal{V}$. По Леми 2.5 је $\dim \mathcal{U} \leq \min(p,q) \leq \frac{1}{2}(p+q) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{V}$, што доказује тврђење. □

Неке важне особине могу се продужити са дефинитних на све векторе, што се види из наредне леме.

Лема 2.6 *Нека су* $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ *и нека је* $\Xi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ *линеарно пресликавање такво да је* $\Xi(X)$ *изотропно за свако дефинитно* $X \in \mathcal{U}$. *Тада је* $\Xi(\mathcal{U})$ *скроз изотропан.*

Доказ. $\Xi(N)$ је већ изотропан за дефинитно N, као и $\Xi(0) = 0$ због линеарности, те је довољно доказати да је $\Xi(N)$ изотропан за сваки изотропан $0 \neq N \in \mathcal{U}$. По Леми 2.2, N се може раставити са $N = S + T$, где $S, T \in \mathcal{U}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$, те можемо расписати

$$\varepsilon_{\Xi(\alpha S+\beta T)} = \varepsilon_{\alpha\Xi(S)+\beta\Xi(T)} = \alpha^2\varepsilon_{\Xi(S)} + 2\alpha\beta g(\Xi(S), \Xi(T)) + \beta^2\varepsilon_{\Xi(T)}. \tag{2.2}$$

$S, T \in \mathcal{U}$ су дефинитни, те по претпоставци леме $\varepsilon_{\Xi(S)} = 0$ и $\varepsilon_{\Xi(T)} = 0$. Како је $\varepsilon_{2S+T} = 4\varepsilon_S + \varepsilon_T = 3\varepsilon_S > 0$, то је $2S + T \in \mathcal{U}$ такође дефинитан и важи $\varepsilon_{\Xi(2S+T)} = 0$. Једначина (2.2) за $\alpha = 2$ и $\beta = 1$ даје $g(\Xi(S), \Xi(T)) = 0$, док нам други поглед на ту једначину, овога пута за $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, даје $\varepsilon_{\Xi(N)} = \varepsilon_{\Xi(S+T)} = 2g(\Xi(S), \Xi(T)) = 0$. $\square$

ГЛАВА 3

K-ШТАЈН УСЛОВ

Ова глава посвећена је алгебарском тензору кривине који задовољава k-штајн услов. У Секцији 3.1 дефинишемо k-штајн услов преко константности трагова степенова Јакобијевог оператора на псеудосферама. Затим доказујемо еквивалентност k-штајн и Осермановог услова, као и да Осерманов услов повлачи да све сопствене вредности Јакобијевог оператора за изотропан вектор морају бити нуле. У Секцији 3.2 показујемо да су Ајнштајн[1] и 1-штајн услов еквивалентни, а затим дајемо карактеризацију Ајнштајн услова преко координатних компоненти тензора кривине. У Секцији 3.3 описане су формуле које важе под цвајштајн условом. Секција 3.4 решава питање Осермановог тензора кривине у Лоренцовом[2] простору, где доказујемо да је сваки цвајштајн тензор кривине у Лоренцовом простору константне секционе кривине. Главу завршавамо секцијама 3.5 и 3.6 где уз претпоставку да је алгебарски тензор кривине дијагоналан Осерманов изводимо важне формуле $\sum_{p\in\Lambda_a} Z_{pp} = 0$ и $\sum_{p,q\in\Lambda_a} Z_{pq}Z_{qp} = 0$. које ћемо користити у Глави 4.

[1] Albert Einstein (1879–1955)
[2] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)

3.1 Дефиниција и еквиваленције

Читава ова глава бави се Осермановим алгебарским тензором кривине, односно тензором кривине који је последица Осермановог услова. Основна идеја је докопати се конкретних једначина које су последица Осермановог услова, а затим из њих извући закључке који се онда природно пресликавају на Осерманове многострукости.

Дефиниција 3.1 *За алгебарски тензор кривине R кажемо да је k-штајн уколико постоје константе C_j за $1 \leq j \leq k$ такве да једнакости*

$$\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = (\varepsilon_X)^j C_j \tag{3.1}$$

важе за свако јединично X.

Трагови степенова линеарног оператора који се јављају у Дефиницији 3.1, могу се повезати са коефицијентима његовог карактеристичног полинома на следећи начин.

Лема 3.1 *Ако је $\mathcal{J}$ линеаран оператор на n-димензионом векторском простору са карактеристичним полиномом $\omega(\lambda) = \lambda^n + \sigma_1\lambda^{n-1} + ... + \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n$, тада за свако $1 \leq m \leq n$ важи*

$$m\sigma_m + \sigma_{m-1}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}) + \sigma_{m-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^2) + ... + \sigma_1\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^{m-1}) + \mathrm{Tr}(\mathcal{J}^m) = 0. \tag{3.2}$$

Доказ. Ако су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (не нужно различите и не нужно реалне) сопствене вредности оператора $\mathcal{J}$, то је

$$\omega(\lambda) = \lambda^n + \sigma_1\lambda^{n-1} + ... + \sigma_n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

Изразимо коефицијенте σ_m за $1 \leq m \leq n$ по Вијетовим[3] правилима.

$$\sigma_m = (-1)^m \sum_{i_1 < ... < i_m} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m}.$$

Даљи рачун нам за $1 \leq j \leq m-1$ даје

$$\sigma_{m-j}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^j) = (-1)^{m-j}(\lambda_1^j + \lambda_2^j + ... + \lambda_n^j) \sum_{i_1 < ... < i_{m-j}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{m-j}},$$

[3] François Viète (1540–1603)

што се, ако уведемо ознаку

$$S_q^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \cdot \sum_{j_1<\ldots<j_q,\ j_l\neq i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_q},$$

може краће записати са

$$\sigma_{m-j}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^j) = (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^{j}).$$

На тај начин добијамо

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^j) = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^{j}) = -S_0^m + (-1)^{m-1}S_{m-1}^1.$$

Очигледно

$$S_0^m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}^m),$$

док је

$$S_{m-1}^1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sum_{j_1<\ldots<j_{m-1},\ j_l\neq i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{m-1}}.$$

Сваки сабирак из суме

$$(-1)^m\sigma_m = \sum_{i_1<\ldots<i_m} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m},$$

на пример $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$, појављује се тачно m пута у S_{m-1}^1, што даје $S_{m-1}^1 = m(-1)^m\sigma_m$. Коначно добијамо

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^j) = -\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^m) - m\sigma_m,$$

а то је управо једначина (3.2). $\square$

Сада на располагању имамо једначину (3.2) за Јакобијев оператор и можемо испитати везу између Осермановог и k-штајн услова. Нека је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ који је k-штајн. По Дефиницији 3.1 постоје константе C_j тако да важи (3.1), што одмах даје константност трагова степенова Јакобијевог оператора на псеудосферама $S^+(\mathcal{V})$ и $S^-(\mathcal{V})$. Везе (3.2) даље повлаче константност коефицијената карактеристичног полинома, те је карактеристичан полином Јакобијевог оператора константан на псеудосферама, што значи да је R и временски и просторно Осерманов.

Претпоставимо сада, на пример, да је R временски Осерманов. Карактеристичан полином $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id} - \mathcal{J}_X)$ не зависи од избора $X \in S^-(\mathcal{V})$, те су коефицијенти карактеристичног полинома константни и по вези (3.2) постоје константе C_j такве да за свако $X \in S^-(\mathcal{V})$ важи $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = (\varepsilon_X)^j C_j$. Покажимо да то важи и за $X \in S^+(\mathcal{V})$.

Нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ произвољна ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$. Ради лакшег записа увешћемо ознаке $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i}$, $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_{E_i}$ и $\mathcal{J}_{ij} = \mathcal{J}(E_i, E_j)$, те за $1 \leq i \neq j \leq n$ посматрати вектор

$$X = \alpha E_i + \beta E_j.$$

Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ рачунамо по дефиницији, односно по (1.24)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X(Z) &= \mathcal{R}(Z, \alpha E_i + \beta E_j)(\alpha E_i + \beta E_j) \\
&= \alpha^2 \mathcal{R}(Z, E_i)E_i + \alpha\beta \mathcal{R}(Z, E_i)E_j + \beta\alpha \mathcal{R}(Z, E_j)E_i + \beta^2 \mathcal{R}(Z, E_j)E_j \\
&= \alpha^2 \mathcal{J}_{E_i}(Z) + 2\alpha\beta \mathcal{J}(E_i, E_j)Z + \beta^2 \mathcal{J}_{E_j}(Z),
\end{aligned}$$

што даје

$$\mathcal{J}_X = \alpha^2 \mathcal{J}_i + 2\alpha\beta \mathcal{J}_{ij} + \beta^2 \mathcal{J}_j. \tag{3.3}$$

За норму вектора X важи

$$\varepsilon_X = g(X, X) = g(\alpha E_i + \beta E_j, \alpha E_i + \beta E_j) = \alpha^2 \varepsilon_i + \beta^2 \varepsilon_j,$$

одакле добијамо важну везу

$$\alpha^2 = \varepsilon_X \varepsilon_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \beta^2. \tag{3.4}$$

Једначине (3.3) и (3.4) дају нам основну формулу

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_X \varepsilon_i \mathcal{J}_i + 2\alpha\beta \mathcal{J}_{ij} + \beta^2 (\mathcal{J}_j - \varepsilon_i \varepsilon_j \mathcal{J}_i). \tag{3.5}$$

Она нам омогућава да изразимо траг оператора ${\mathcal{J}_X}^k$ и поставимо $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^k) = (\varepsilon_X)^k C_k$ за $X \in S^-(\mathcal{V})$. Погодан избор α и β спрегнутих са (3.4) једноставно даје једнакост на слободном члану

$$\mathrm{Tr}((\varepsilon_X \varepsilon_i \mathcal{J}_i)^k) = (\varepsilon_X)^k C_k.$$

Наместимо ли $\varepsilon_X = \varepsilon_j = -1$ и $\varepsilon_i = 1$ са $\alpha^2 = \beta^2 - 1$, то је $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_i}^k) = (\varepsilon_i)^k C_k$. Произвољност ортонормиране базе даје нам могућност да сваки вектор из $S^+(\mathcal{V})$ поставимо за координатни вектор, те $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^k) = (\varepsilon_X)^k C_k$ важи и за свако $X \in S^+(\mathcal{V})$. Овим смо показали да, уколико постоји временски вектор у $\mathcal{V}$, временски Осерманов алгебарски тензор кривине мора бити k-штајн за свако k. Сасвим слично можемо показати да то важи и за просторни Осерманов алгебарски тензор кривине, што комплетира доказ Гилкијеве[16] теореме.

Теорема 3.1 *Ако је R алгебарски тензор кривине на векторском простору сигнатуре $(\nu, n-\nu)$, тада су следећа тврђења еквивалентна:*
1) Ако је $\nu \geq 1$ онда је R временски Осерманов;
2) Ако је $\nu \leq n-1$ онда је R просторно Осерманов;
3) R је k-штајн за свако $k \in \mathbb{N}$.

Зато су временски Осерманов и просторно Осерманов еквивалентни појмови и самим тим, уколико је барем једна од ставки из Теореме 3.1 испуњена, за алгебарски тензор кривине кажемо да је Осерманов. Такође, Осерманов алгебарски тензор кривине мора бити k-штајн за свако k, што ћемо често имати у виду. Међутим, ограничење на јединичне X у дефиницији k-штајн алгебарског тензора кривине (Дефиниција 3.1) није неопходно, што видимо из наредне теореме, која је код Гилкија[16] заправо дефиниција.

Теорема 3.2 *Алгебарски тензор кривине R на векторском простору $\mathcal{V}$ димензије $n \geq 3$ је k-штајн ако и само ако постоје константе C_j за $1 \leq j \leq k$ такве да једнакости $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = (\varepsilon_X)^j C_j$ важе за свако $X \in \mathcal{V}$.*

Доказ. Продужење ограничења са јединичних X на дефинитне је очигледна, јер се свако дефинитно X може написати као $X = \alpha X_0$, где је $X_0 = X/\sqrt{|\varepsilon_X|}$ јединично и $\alpha = \sqrt{|\varepsilon_X|} \neq 0$. Тада је

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) &= \mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{\alpha X_0}}^j) = \mathrm{Tr}((\alpha^2 \mathcal{J}_{X_0})^j) = \alpha^{2j}\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{X_0}}^j) \\ &= \alpha^{2j}(\varepsilon_{X_0})^j C_j = (\alpha^2 \varepsilon_{X_0})^j C_j = (\varepsilon_X)^j C_j.\end{aligned}$$

Преостаје случај изотропног X, те претпоставимо да је $\varepsilon_X = 0$. За $X = 0$ тврђење је очигледно, док се $X \neq 0$ по Леми 2.2 може раставити са $X = S + T$, где је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Како је $n > 2$ то постоји дефинитан $Y \in \mathrm{Span}\{S, T\}^\perp$ и за њега важи $Y \perp X$. Конструишимо фамилију вектора $\{Z_r \mid r > 0\}$ са

$$Z_r = \frac{1}{r}X + Y.$$

Z_r је дефинитан јер $\varepsilon_{Z_r} = g(\frac{1}{r}X + Y, \frac{1}{r}X + Y) = g(Y,Y) = \varepsilon_Y \neq 0$, те k-штајн услов доноси константе C_j такве да важи

$$\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{Z_r}}^j) = (\varepsilon_{Z_r})^j C_j.$$

Сада је

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{X+rY}}^j) &= \mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{rZ_r}}^j) = \mathrm{Tr}((r^2\mathcal{J}_{Z_r})^j) = r^{2j}\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{Z_r}}^j)\\ &= r^{2j}(\varepsilon_{Z_r})^j C_j = r^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j,\end{aligned}$$

и када пустимо да r опада ка нули добијамо

$$\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = \lim_{r\searrow 0}\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_{X+rY}}^j) = \lim_{r\searrow 0}\left(r^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j\right) = 0.$$

Одавде је $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = 0 = (\varepsilon_X)^j C_j$ што комплетира доказ. □

Осерманов алгебарски тензор кривине по Теореми 3.1 мора бити k-штајн за свако k, а по Теореми 3.2 за свако изотропно X важи $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^k) = 0$. Коефицијенти карактеристичног полинома Јакобијевог оператора су по формули (3.2) $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = 0$ и добијамо $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{Id} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n$, што доказује још једну Гилкијеву[16] теорему.

Последица 3.1 *Ако је R Осерманов алгебарски тензор кривине, тада су све сопствене вредности Јакобијевог оператора за изотропан вектор једнаке нули.*

3.2 Ајнштајн услов

Наставимо идеју из претходне секције и задржимо ознаке. Увођење ортонормиране базе $(E_1, ..., E_n)$ за $\mathcal{V}$ даје нам могућност да изразимо елементе матрица основних оператора $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{J}_{ij}$ преко координатних компоненти тензора кривине.

$$\mathcal{J}_j(E_t) = \mathcal{R}(E_t, E_j)E_j = \sum_p \varepsilon_p g(\mathcal{R}(E_t, E_j)E_j, E_p)E_p$$

$$\mathcal{J}_{ij}(E_t) = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p g\left(\mathcal{R}(E_t, E_i)E_j + \mathcal{R}(E_t, E_j)E_i, E_p\right)E_p$$

Претходне једначине могу се записати краће са

$$\mathcal{J}_j(E_t) = \sum_p \varepsilon_p R_{tjjp} E_p, \quad \mathcal{J}_{ij}(E_t) = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p (R_{tijp} + R_{tjip}) E_p, \tag{3.6}$$

где су $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ координатне компоненте тензора кривине и оне за $1 \leq i \neq j \leq n$ одређују A^i_{pq} и Z^{ij}_{pq} као елементе матрица оператора $\mathcal{J}_i$ и $2\mathcal{J}_{ij}$ са

$$A^i_{pq} = [\mathcal{J}_i]_{pq} = \varepsilon_p R_{qiip}, \quad Z^{ij}_{pq} = [2\mathcal{J}_{ij}]_{pq} = \varepsilon_p (R_{qijp} + R_{qjip}). \tag{3.7}$$

Како је

$$[\mathcal{J}_X{}^k]_{pq} = \sum_{p_2, p_3, \ldots, p_k} [\mathcal{J}_X]_{pp_2} [\mathcal{J}_X]_{p_2p_3} \cdots [\mathcal{J}_X]_{p_kq},$$

имамо

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^k) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_k} [\mathcal{J}_X]_{p_1p_2} [\mathcal{J}_X]_{p_2p_3} \cdots [\mathcal{J}_X]_{p_kp_1}$$

и једначина (3.5) $\mathcal{J}_X = \varepsilon_X \varepsilon_i \mathcal{J}_i + 2\alpha\beta \mathcal{J}_{ij} + \beta^2(\mathcal{J}_j - \varepsilon_i\varepsilon_j \mathcal{J}_i)$ нам уз превод на језик матрица по (3.7) и претпоставку да R задовољава k-штајн услов доноси

$$\varepsilon_X^k C_k = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^k) = \tag{3.8}$$

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1} = p_1} \prod_{1 \leq l \leq k} \left(\varepsilon_X \varepsilon_i A^i_{p_lp_{l+1}} + \alpha\beta Z^{ij}_{p_lp_{l+1}} + \beta^2 (A^j_{p_lp_{l+1}} - \varepsilon_i \varepsilon_j A^i_{p_lp_{l+1}}) \right).$$

Једначина (3.8) је основна у даљим разматрањима, и многе корисне информације добићемо тумачењем појединих специјалних случајева.

Дефиниција 3.2 *За алгебарски тензор кривине R на векторском простору $\mathcal{V}$ са метриком g кажемо да је Ајнштајн ако постоји константа C таква да важи* $\mathrm{Ric} = C \cdot g$.

Лема 3.2 *Тензор кривине је Ајнштајн ако и само ако је 1-штајн.*

Доказ. Нека је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ са метриком g. Ако је R Ајнштајн то постоји константа C тако да је

$$\varepsilon_X C = C \cdot g(X, X) = \mathrm{Ric}(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$$

и R је 1-штајн. Обратно, ако је R 1-штајн имамо

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{J}(X,Y)) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}(X+Y,X+Y) - \mathcal{J}(X,X) - \mathcal{J}(Y,Y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{X+Y} - \mathcal{J}_X - \mathcal{J}_Y) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{X+Y}C - \varepsilon_X C - \varepsilon_Y C) = g(X,Y)C\end{aligned}$$

и R је Ајнштајн. □

Претходна лема приказује Ајнштајн услов као специјалан случај k-штајн услова за $k=1$. Управо то је разлог за назив k-штајн, који су духовито одабрали Карпентер[4], Греј и Вилмор[5] [12]. Они су први дали уопштење базирано на Ајнштајн услову, а како име славног математичара и физичара Ајнштајна (Einstein) на немачком значи један камен (ein-stein), то су уопштења постала цвајштајн (zwei-stein, два камена), драјштајн (drei-stein, три камена) и тако даље.

Вратимо се на основну k-штајн једначину (3.8), која уз Ајнштајн услов, односно за $k=1$ постаје

$$\sum_{1\le p\le n}\left(\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{pp} + \alpha\beta Z^{ij}_{pp} + \beta^2(A^j_{pp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pp})\right) = \varepsilon_X C_1.$$

Погодном манипулацијом параметара α и β, који су спрегнути са (3.4), можемо закључити да коефицијенти уз $\alpha\beta$ и β^2 морају бити нула. Отуда једначине

$$\sum_{1\le p\le n} Z^{ij}_{pp} = 0, \tag{3.9}$$

$$\sum_{1\le p\le n} (A^j_{pp} - \varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pp}) = 0, \tag{3.10}$$

које у потпуности одређују Ајнштајн услов.

Теорема 3.3 *Алгебарски тензор кривине R је Ајнштајн ако и само ако у ортонормираној бази важе формуле*

$$\sum_{1\le p\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p R_{piip} = \mathrm{Const} = C_1 \tag{3.11}$$

$$\sum_{1\le p\le n} \varepsilon_p R_{pijp} = 0 \tag{3.12}$$

за свако $1\le i\ne j\le n$.

[4] P. Carpenter

[5] Thomas James Willmore (1919)

Доказ. Како по (3.7) важи

$$\sum_p Z^{ij}_{pp} = \sum_p \varepsilon_p (R_{pijp} + R_{pjip}) = 2 \sum_p \varepsilon_p R_{pijp},$$

$$\sum_p \varepsilon_i A^i_{pp} = \sum_p \varepsilon_j A^j_{pp} \;\Leftrightarrow\; \sum_p \varepsilon_i \varepsilon_p R_{piip} = \sum_p \varepsilon_j \varepsilon_p R_{pjjp},$$

то су формуле (3.11) и (3.12) еквивалентне формулама (3.10) и (3.9). Оне наравно важе ако је R Ајнштајн, те остаје да се покаже да оне чине и довољан услов.

Ако је $(E_1, ..., E_n)$ ортонормирана база за $\mathcal{V}$, то постоје $\alpha_p \in \mathbb{R}$ за $1 \leq p \leq n$ тако да је

$$X = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_p E_p.$$

Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ можемо изразити преко основних оператора

$$\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_{\sum \alpha_p E_p} = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_p^2 \mathcal{J}_p + \sum_{1 \leq p < q \leq n} 2 \alpha_p \alpha_q \mathcal{J}_{pq}.$$

Трагове основних оператора можемо израчунати из (3.6) користећи (3.11) и (3.12).

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_p) = \sum_{1 \leq t \leq n} \varepsilon_t R_{tppt} = \varepsilon_p C_1,$$

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{pq}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq t \leq n} \varepsilon_t (R_{tpqt} + R_{tqpt}) = \sum_{1 \leq t \leq n} \varepsilon_t R_{tpqt} = 0,$$

после чега имамо

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_p^2 \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_p) + \sum_{1 \leq p < q \leq n} 2 \alpha_p \alpha_q \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_{pq}) = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_p^2 \varepsilon_p C_1 = C_1 \varepsilon_X$$

и R је Ајнштајн. $\square$

3.3 Цвајштајн услов

Цвајштајн (2-штајн) услов представља специјалан случај k-штајн услова за $k = 2$. Цвајштајн алгебарски тензор кривине је, по дефиницији, свакако Ајнштајн, односно важе формуле (3.9) и (3.10), а приде можемо размотрити и нашу основну k-штајн једначину (3.8) за $k=2$.

$$\sum_{1\le p,q\le n}\big(\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{pq}+\alpha\beta Z^{ij}_{pq}+\beta^2(A^j_{pq}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pq})\big)$$
$$\big(\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{qp}+\alpha\beta Z^{ij}_{qp}+\beta^2(A^j_{qp}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{qp})\big)=\varepsilon_X^2 C_2.$$

Овога пута коефицијенти уз $\alpha\beta$, β^2, $\alpha\beta^3$ и β^4 морају бити нула, при чему су α и β спрегнути једначином (3.4), те се свако појављивање α^2 мења са $\varepsilon_X\varepsilon_i-\varepsilon_i\varepsilon_j\beta^2$. Одговарајуће једначине су редом

$$0=\sum_{1\le p,q\le n}\left(\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{pq}Z^{ij}_{qp}+Z^{ij}_{pq}\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{qp}\right),$$
$$0=\sum_{1\le p,q\le n}\left(\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{pq}(A^j_{qp}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{qp})+\varepsilon_X\varepsilon_i Z^{ij}_{pq}Z^{ij}_{qp}+(A^j_{pq}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pq})\varepsilon_X\varepsilon_i A^i_{qp}\right),$$
$$0=\sum_{1\le p,q\le n}\left(Z^{ij}_{pq}(A^j_{qp}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{qp})+(A^j_{pq}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pq})Z^{ij}_{qp}\right),$$
$$0=\sum_{1\le p,q\le n}\left((A^j_{pq}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{pq})(A^j_{qp}-\varepsilon_i\varepsilon_j A^i_{qp})-\varepsilon_i\varepsilon_j Z^{ij}_{pq}Z^{ij}_{qp}\right).$$

Рачун се може упростити коришћењем симетрије $\sum_{1\le p,q\le n}=\sum_{1\le q,p\le n}$, а њену примену можемо видети на примеру

$$\sum_{1\le p,q\le n}(A^i_{pq}Z^{ij}_{qp}+Z^{ij}_{pq}A^i_{qp})=\sum_{1\le p,q\le n}(A^i_{pq}Z^{ij}_{qp})+\sum_{1\le q,p\le n}(Z^{ij}_{qp}A^i_{pq}).$$

После симетрија и мало сређивања наше једначине постају:

$$0=\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}Z^{ij}_{qp}, \tag{3.13}$$
$$0=2\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}A^j_{qp}-2\varepsilon_i\varepsilon_j\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}A^i_{qp}+\sum_{1\le p,q\le n}Z^{ij}_{pq}Z^{ij}_{qp}, \tag{3.14}$$
$$0=\sum_{1\le p,q\le n}A^j_{pq}Z^{ij}_{qp}-\varepsilon_i\varepsilon_j\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}Z^{ij}_{qp}, \tag{3.15}$$
$$\begin{aligned}0=&\sum_{1\le p,q\le n}A^j_{pq}A^j_{qp}-2\varepsilon_i\varepsilon_j\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}A^j_{qp}+\sum_{1\le p,q\le n}A^i_{pq}A^i_{qp}\\&-\varepsilon_i\varepsilon_j\sum_{1\le p,q\le n}Z^{ij}_{pq}Z^{ij}_{qp}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ако помножимо (3.13) са $\varepsilon_i\varepsilon_j$ и додамо на (3.15), односно ако помножимо (3.14) са $\varepsilon_i\varepsilon_j$ и додамо на (3.16) добијамо једначине

$$\sum_{1\le p,q\le n} A^j_{pq} Z^{ij}_{qp} = 0, \tag{3.17}$$

$$\sum_{1\le p,q\le n} A^i_{pq} A^i_{qp} = \sum_{1\le p,q\le n} A^j_{pq} A^j_{qp}. \tag{3.18}$$

Обједнимо добијене резултате кроз наредно тврђење.

Теорема 3.4 *За цвајштајн алгебарски тензор кривине R и произвољну ортонормирану базу важе формуле (3.11), (3.12), као и*

$$\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q (R_{piiq})^2 = \mathrm{Const} = C_2 \tag{3.19}$$

$$\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq} R_{pijq} = 0 \tag{3.20}$$

$$2\sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq} R_{pjjq} - 2\varepsilon_i\varepsilon_j C_2 + \sum_{1\le p,q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q (R_{pijq} + R_{pjiq})^2 = 0 \tag{3.21}$$

за свако $1 \le i \ne j \le n$.

Доказ. Формуле (3.11) и (3.12) важе по Теореми 3.3 јер цвајштајн свакако мора бити Ајнштајн. За добијање преосталих формула извршићемо замену по (3.7). Тако (3.18) као директну последицу има (3.19). Обједињење (3.13) и (3.17) уз мало симетрије даје формулу (3.20), док је (3.21) заправо формула (3.14). □

3.4 Лоренцови простори

У овој секцији претпоставићемо да је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ сигнатуре $(1, n-1)$, односно Лоренцовом простору. Тај услов веома је рестриктиван, што се види из наредне теореме коју су доказали Блажић[6], Бокан[7] и Гилки [7], као и Гилки [16].

[6] Novica Blažić (1959–2005)
[7] Neda Bokan (1947)

Теорема 3.5 *Цвајштајн алгебарски тензор кривине на Лоренцовом простору мора бити константне секционе кривине.*

Доказ. Лоренцов векторски простор је сигнатуре $(1, n-1)$, те у ортонормираној бази $(E_1, ..., E_n)$ постоји само један временски вектор. Нека је то баш E_1, односно поставимо $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n = 1$. Претпоставимо да је R цвајштајн алгебарски тензор кривине и фиксирајмо $i = 1$ и $j > 1$. Како је R цвајштајн важиће све формуле изведене у претходне две секције. Формула (3.14) за $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_j = 1$ гласи

$$2 \sum_{1 \le p,q \le n} A^1_{pq} A^j_{qp} + 2 \sum_{1 \le p,q \le n} A^1_{pq} A^1_{qp} + \sum_{1 \le p,q \le n} Z^{1j}_{pq} Z^{1j}_{qp} = 0,$$

а применом формуле (3.18) она постаје

$$\sum_{1 \le p,q \le n} \big(2A^1_{pq} A^j_{qp} + A^1_{pq} A^1_{qp} + A^j_{pq} A^j_{qp} + Z^{1j}_{pq} Z^{1j}_{qp} \big) = 0.$$

Укључимо ли $2A^1_{pq} A^j_{qp} = (A^1_{pq} + A^j_{qp})^2 - (A^1_{pq})^2 - (A^j_{qp})^2$, уз симетрије $A^j_{qp} = \varepsilon_p \varepsilon_q A^j_{pq}$ и $Z^{ij}_{qp} = \varepsilon_p \varepsilon_q Z^{ij}_{pq}$ које се виде из (3.7), то добијамо

$$\sum_{1 \le p,q \le n} \big((A^1_{pq} + A^j_{qp})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1)(A^1_{pq})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1)(A^j_{pq})^2 + \varepsilon_p \varepsilon_q (Z^{1j}_{pq})^2 \big) = 0.$$

Ради лакшег записа означимо

$$W^{1j}_{pq} = (A^1_{pq} + A^j_{qp})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1)(A^1_{pq})^2 + (\varepsilon_p \varepsilon_q - 1)(A^j_{pq})^2 + \varepsilon_p \varepsilon_q (Z^{1j}_{pq})^2, \quad (3.22)$$

тако да наша једначина постаје

$$\sum_{1 \le p,q \le n} W^{1j}_{pq} = 0. \quad (3.23)$$

Из (3.22) је очигледно $W^{1j}_{pq} = W^{1j}_{qp}$, док елементи W^{1j}_{pq} имају посебан значај за индексе 1 и j. Из (3.7) важи

$$\begin{aligned} A^1_{1q} = A^1_{q1} = A^j_{jq} = A^j_{qj} = 0, \\ (Z^{1j}_{1q})^2 = (R_{q1j1} + R_{qj11})^2 = (-R_{q11j})^2 = (A^1_{jq})^2, \\ (Z^{1j}_{jq})^2 = (R_{q1jj} + R_{qj1j})^2 = (-R_{qjj1})^2 = (A^j_{1q})^2. \end{aligned}$$

За $q > 1$ je $W^{1j}_{1q} = -(A^j_{1q})^2 - (Z^{1j}_{1q})^2$ и $W^{1j}_{jq} = (A^1_{jq})^2 + (Z^{1j}_{jq})^2$, те отуда

$$W^{1j}_{1q} + W^{1j}_{jq} = -(A^j_{1q})^2 - (Z^{1j}_{1q})^2 + (A^1_{jq})^2 + (Z^{1j}_{jq})^2 = 0.$$

Посебно je $W^{1j}_{11} = (A^j_{11})^2$, $W^{1j}_{1j} = W^{1j}_{j1} = -(Z^{1j}_{1j})^2$, $W^{1j}_{jj} = (A^1_{jj})^2$, те

$$W^{1j}_{11} + W^{1j}_{1j} + W^{1j}_{j1} + W^{1j}_{jj} = (A^j_{11})^2 - 2(Z^{1j}_{1j})^2 + (A^1_{jj})^2 = 0.$$

Претходни рачуни дозвољавају да из суме (3.23) искључимо вредности 1 и j као могућности за p и q, те je тако

$$\sum_{p,q \notin \{1,j\}} W^{1j}_{pq} = 0.$$

За $p, q \notin \{1, j\}$ je $\varepsilon_p = \varepsilon_q = 1$ и по (3.22) W^{1j}_{pq} je сума квадрата

$$W^{1j}_{pq} = (A^1_{pq} + A^j_{qp})^2 + (Z^{1j}_{pq})^2.$$

Сума квадрата реалних бројева je нула само ако су сви сабирци једнаки нули, одакле за $p, q \notin \{1, j\}$ важи $A^1_{pq} + A^j_{qp} = 0$ и $Z^{1j}_{pq} = 0$, односно

$$R_{q11p} + R_{qjjp} = 0, \quad R_{q1jp} + R_{qj1p} = 0.$$

Специјално за $p = q \notin \{1, j\}$ имамо $R_{p11p} + R_{pjjp} = 0$, што даје

$$\varepsilon_p \varepsilon_j R_{pjjp} = \varepsilon_p \varepsilon_1 R_{p11p}.$$

Секционе кривине су $\kappa(E_u, E_v) = \varepsilon_u \varepsilon_v R_{uvvu}$, те претходна једначина говори да je $\kappa(E_p, E_j) = \kappa(E_p, E_1)$. Ако обележимо $\kappa = \kappa(E_1, E_2)$ имамо $\kappa(E_u, E_v) = \kappa(E_u, E_1) = \kappa(E_u, E_2) = \kappa(E_1, E_2) = \kappa$ за $u \notin \{1, 2, v\}$, те и

$$\kappa(E_u, E_v) = \kappa\ , \quad \text{за } u \neq v.$$

Секционе кривине на координатним 2-равнима су једнаке, а како то важи за произвољну ортонормирану базу лако je проширити једнакост на све 2-равни и коначно R je константне секционе кривине. $\square$

3.5 Коефицијент уз $\alpha\beta$

Као у претходној секцији узећемо ортонормирану базу $(E_1, ..., E_n)$ и фиксирати индексе са $i = 1$ и $j > 1$. Овога пута вратимо се на једначину (3.5)

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_X \varepsilon_1 \mathcal{J}_1 + 2\alpha\beta \mathcal{J}_{1j} + \beta^2(\mathcal{J}_j - \varepsilon_1 \varepsilon_j \mathcal{J}_1)$$

и претпоставимо да је R Осерманов, односно k-штајн за свако k. У Секцији 3.1 посматрали смо слободан члан у развоју $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^k)$, али можемо изједначити и остале коефицијенте, што је основна идеја за нове резултате. Ради једноставнијег записа уводимо ознаку $P^{[p]} \diamond Q^{[q]}$ за суму свих могућих производа у којима се P појављује p пута, а Q појављује q пута, што ће рећи $\binom{p+q}{p}$ сабирака. Најједноставнији случај је коефицијент уз $\alpha\beta$ у развоју $\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^k)$ који мора бити нула, што се може записати са

$$0 = \mathrm{Tr}\left((\varepsilon_X \varepsilon_1 \mathcal{J}_1)^{[k-1]} \diamond (2\mathcal{J}_{1j})^{[1]} \right) = 2(\varepsilon_X \varepsilon_1)^{k-1} \mathrm{Tr}({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[1]}),$$

односно

$$\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[1]}) = 0.$$

Како је $\mathrm{Tr}(P + Q) = \mathrm{Tr}(Q + P)$ то редослед сабирања није битан, док нам $\mathrm{Tr}(PQ) = \mathrm{Tr}(QP)$ даје $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^p \mathcal{J}_{1j} \mathcal{J}_1^q) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^q \mathcal{J}_1^p \mathcal{J}_{1j}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{p+q} \mathcal{J}_{1j})$, што олакшава даљи рачун

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Tr}({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[1]}) &= \sum_{p+q=k-1} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^p \mathcal{J}_{1j} \mathcal{J}_1^q) \\ &= \sum_{p+q=k-1} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{p+q} \mathcal{J}_{1j}) = k\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{k-1} \mathcal{J}_{1j}). \end{aligned}$$

Добијено $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{k-1} \mathcal{J}_{1j}) = 0$ можемо по (3.7) превести на језик матрица

$$0 = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{k-1} \mathcal{J}_{1j}) = \frac{1}{2} \sum_{p_1, \dots, p_k} A^1_{p_1 p_2} A^1_{p_2 p_3} \cdots A^1_{p_{k-1} p_k} Z^{1j}_{p_k p_1}. \tag{3.24}$$

У општем случају рачун почиње да се прилично компликује, те ћемо у даљем тексту ове главе претпоставити да је R дијагоналан. Тада постоји ортонормирана база за $\mathcal{V}$ у којој Јакобијев оператор $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу и нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ управо та база. За

$1 \leq p \neq q \leq n$ имаћемо $A^1_{pq} = 0$ и $A^1_{pp} = \mu_p$ и зато у (3.24) вреди посматрати само случај $p_1 = p_2 = ... = p_k$ што даје

$$\sum_p \mu_p^{k-1} Z_{pp}^{1j} = 0.$$

Једнаке сопствене вредности можемо груписати са $\Lambda_a = \{p \mid \mu_p = a\}$, где је Λ_a скуп свих индекса p за које је $\mu_p = a$. Претходна једначина постаје

$$\sum_a a^{k-1} \sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp}^{1j} = 0,$$

где се сумирање врши по различитим сопственим вредностима оператора $\mathcal{J}_1$. Уведемо ли ознаку

$$W_a = \sum_{p \in \Lambda_a} Z_{pp}^{1j},$$

добијамо систем једначина, јер за свако $k \geq 1$ имамо нову једначину

$$\sum_a a^{k-1} W_a = 0.$$

Ако је m број различитих сопствених вредности $a_1, ..., a_m$ оператора $\mathcal{J}_1$, можемо узети првих m једначина (за $1 \leq k \leq m$) и систем се може записати у матричном облику на следећи начин

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{a_1} \\ W_{a_2} \\ W_{a_3} \\ \vdots \\ W_{a_m} \end{pmatrix} = 0.$$

Детерминанта Δ матрице овог система је позната Вандермондова[8] детерминанта генерисана различитим елементима $a_1, ..., a_m$, те за њу важи

$$\Delta = \prod_{1 \leq u < v \leq m} (a_v - a_u),$$

[8] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

одакле је $\Delta \neq 0$ и систем мора имати јединствено решење. Систем је хомоген и то јединствено решење мора бити тривијално, одакле за свако a важи $W_a = 0$ и коначно

$$\sum_{p\in\Lambda_a} Z_{pp}^{1j} = 0. \tag{3.25}$$

Овај резултат можемо забележити имајући у виду да по (3.7) важи $Z_{pp}^{1j} = \varepsilon_p(R_{p1jp} + R_{pj1p}) = 2\varepsilon_p R_{p1jp}$.

Теорема 3.6 *Ако је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине тада за сваку сопствену вредност a Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_1$ и $j > 1$ важи*

$$\sum_{p\in\Lambda_a} \varepsilon_p R_{p1jp} = 0$$

у ортонормираној бази у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу.

3.6 Коефицијент уз β^2

Слично претходној секцији коефицијент, овога пута уз β^2, у развоју $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X^k)$ једначине (3.5) мора бити нула. Вредност β^2 се регуларно јавља у производима у којима једном узимамо $\beta^2(\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)$, док су преостали фактори $\varepsilon_X\varepsilon_1\mathcal{J}_1$. Међутим, β^2 се може јавити и у случају да узмемо два фактора $2\alpha\beta\mathcal{J}_{1j}$, али добијено $4\alpha^2\beta^2\mathcal{J}_{1j}^2$ морамо заменити по (3.4) са $4\varepsilon_X\varepsilon_1\beta^2\mathcal{J}_{1j}^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_j\beta^4\mathcal{J}_{1j}^2$, где само први сабирак има утицај на коефицијент уз β^2. Зато је

$$\mathrm{Tr}\left((\varepsilon_X\varepsilon_1\mathcal{J}_1)^{[k-1]} \diamond (\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)^{[1]} + 4\varepsilon_X\varepsilon_1\left((\varepsilon_X\varepsilon_1\mathcal{J}_1)^{[k-2]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right)\right) = 0,$$

што након дељења са $(\varepsilon_X\varepsilon_1)^{k-1}$ постаје

$$\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond (\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)^{[1]}\right) + 4\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-2]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right) = 0. \tag{3.26}$$

Напоменимо да све рачуне радимо уз претпоставку да је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине. При томе смо задржали све ознаке из претходне секције и $(E_1, ..., E_n)$ је ортонормирана база у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу. Овога пута на располагању нам је једначина (3.26) од које очекујемо нове резултате. Леви сабирак рачунамо као раније

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond (\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)^{[1]}\right) &= k\mathrm{Tr}\left(\mathcal{J}_1^{k-1}(\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)\right)\\ &= k\sum_p \mu_p^{k-1}(A_{pp}^j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mu_p),\end{aligned}$$

одакле имамо

$$\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-1]} \diamond (\mathcal{J}_j - \varepsilon_1\varepsilon_j\mathcal{J}_1)^{[1]}\right) = k\sum_a a^{k-1}\left(\sum_{p\in\Lambda_a} A_{pp}^j - \varepsilon_1\varepsilon_j|\Lambda_a|a\right), \quad (3.27)$$

где је $|\Lambda_a|$ број различитих p за које је $\mu_p = a$. Десни сабирак је нажалост доста компликованији

$$\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-2]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right) = \sum_{s+t+u=k-2} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^u).$$

Како је

$$\begin{aligned}&k\sum_{s+t=k-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j})\\ &= \sum_{s+t=k-2}(s+1)\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}) + \sum_{s+t=k-2}(t+1)\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j})\\ &= \sum_{s_1+s_2+t=k-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{s_1}\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^{s_2}) + \sum_{s+t_1+t_2=k-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^{t_1}\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^{t_2})\\ &= 2\sum_{s+t+u=k-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^u),\end{aligned}$$

рачун можемо упростити

$$\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-2]} \diamond {\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right) = \frac{k}{2}\sum_{s+t=k-2}\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}).$$

Елементи матрице пресликавања $\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}$ су

$$[\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}]_{xy} = \sum_q[\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}]_{xq}[\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}]_{qy} = \sum_q \mu_x^s\frac{1}{2}Z_{xq}^{1j}\mu_q^t\frac{1}{2}Z_{qy}^{1j},$$

одакле добијамо траг

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_1^s\mathcal{J}_{1j}\mathcal{J}_1^t\mathcal{J}_{1j}) = \frac{1}{4}\sum_{p,q}\mu_p^s\mu_q^t Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j},$$

те је зато

$$\begin{aligned}4\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-2]}\diamond{\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right) &= \frac{k}{2}\sum_{s+t=k-2}\sum_{p,q}\mu_p^s\mu_q^t Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}\\ &= \frac{k}{2}\sum_{p,q}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}\sum_{s+t=k-2}\mu_p^s\mu_q^t.\end{aligned}$$

За рачун суме $\sum_{s+t=k-2}\mu_p^s\mu_q^t$ потребно је дискутовати случајеве. Уколико је $\mu_p=\mu_q$, та сума је очигледно $(k-1)\mu_p^{k-2}$, док за $\mu_p\neq\mu_q$ имамо

$$\sum_{s+t=k-2}\mu_p^s\mu_q^t = \frac{\mu_p^{k-1}-\mu_q^{k-1}}{\mu_p-\mu_q} = \frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p-\mu_q}+\frac{\mu_q^{k-1}}{\mu_q-\mu_p}.$$

Ако објединимо запажања за $4\mathrm{Tr}\left({\mathcal{J}_1}^{[k-2]}\diamond{\mathcal{J}_{1j}}^{[2]}\right)$ добијамо

$$\frac{k}{2}\sum_{p,q,\mu_p\neq\mu_q}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}\left(\frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p-\mu_q}+\frac{\mu_q^{k-1}}{\mu_q-\mu_p}\right)+\frac{k}{2}\sum_{p,q,\mu_p=\mu_q}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}(k-1)\mu_p^{k-2},$$

што након сређивања уз помоћ симетрије по p и q постаје

$$k\sum_{p,q,\mu_p\neq\mu_q}\frac{\mu_p^{k-1}}{\mu_p-\mu_q}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}+\frac{k(k-1)}{2}\sum_{p,q,\mu_p=\mu_q}\mu_p^{k-2}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j},$$

и коначно после груписања сопствених вредности

$$k\sum_{a,b,a\neq b}\frac{a^{k-1}}{a-b}\sum_{p\in\Lambda_a,q\in\Lambda_b}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}+\frac{k(k-1)}{2}\sum_a a^{k-2}\sum_{p,q\in\Lambda_a}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}.$$

Овај резултат и (3.27) враћамо у једначину (3.26)

$$\begin{aligned}k\sum_a a^{k-1}\left(\sum_{p\in\Lambda_a}A_{pp}^j-\varepsilon_1\varepsilon_j|\Lambda_a|a\right)+k\sum_{a,b,a\neq b}\frac{a^{k-1}}{a-b}\sum_{p\in\Lambda_a,q\in\Lambda_b}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}&\\ +\frac{k(k-1)}{2}\sum_a a^{k-2}\sum_{p,q\in\Lambda_a}Z_{pq}^{1j}Z_{qp}^{1j}&=0.\end{aligned}$$

Уколико дефинишемо W_a и W_{ab} са

$$W_a = \sum_{p\in\Lambda_a} A^j_{pp} - \varepsilon_1\varepsilon_j|\Lambda_a|a, \quad W_{ab} = \sum_{p\in\Lambda_a, q\in\Lambda_b} Z^{1j}_{pq} Z^{1j}_{qp}$$

и претходну једначину поделимо са k добијамо

$$\sum_a a^{k-1}W_a + \sum_{a,b,a\neq b} \frac{a^{k-1}}{a-b} W_{ab} + \frac{k-1}{2}\sum_a a^{k-2}W_{aa} = 0,$$

одакле је

$$\sum_a a^{k-1}\left(W_a + \sum_{b\neq a}\frac{W_{ab}}{a-b}\right) + \sum_a (k-1)a^{k-2}\frac{W_{aa}}{2} = 0.$$

Уз нове ознаке

$$Y_a = W_a + \sum_{b\neq a}\frac{W_{ab}}{a-b}, \quad Z_a = \frac{W_{aa}}{2}$$

долазимо до система једначина

$$\sum_a a^{k-1}Y_a + \sum_a (k-1)a^{k-2}Z_a = 0,$$

где се сума врши по различитим сопственим вредностима a Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_1$. Систем од првих $2m$ једначина (за $1 \leq k \leq 2m$), где су $a_1, ..., a_m$ све различите сопствене вредности оператора $\mathcal{J}_1$, може се записати у матричном облику. Нула колона ће бити једнака следећем производу матрица.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_m & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & \cdots & a_m^2 & 2a_1 & \cdots & 2a_m \\ a_1^3 & \cdots & a_m^3 & 3a_1^2 & \cdots & 3a_m^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{2m-1} & \cdots & a_m^{2m-1} & (2m-1)a_1^{2m-2} & \cdots & (2m-1)a_m^{2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{a_1} \\ \vdots \\ Y_{a_m} \\ Z_{a_1} \\ \vdots \\ Z_{a_m} \end{pmatrix}$$

Детерминанта Δ матрице овог система добија се из Вандермондове детерминанте $V(a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m)$ са

$$\Delta = \left.\frac{\partial^m V(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m)}{\partial b_1 \partial b_2 \cdots \partial b_m}\right| b_t = a_t, \; 1 \leq t \leq m,$$

јер је $m+t$ колона заправо извод t колоне. Са друге стране имамо да је Вандермондова детерминанта $V(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_m)$ једнака

$$\prod_{u}(b_u-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(b_v-b_u)\prod_{u<v}(b_v-a_u)\prod_{u<v}(b_u-a_v).$$

Уколико применимо $\left.\dfrac{\partial V}{\partial b_t}\right| b_t=a_t$ добијамо суму у којој живи само сабирак у коме се диференцира (b_t-a_t), јер се након замене $b_t=a_t$ остали сабирци поништавају. Када ово својство применимо за свако $1\leq t\leq m$ добијамо

$$\Delta=\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_v-a_u)\prod_{u<v}(a_u-a_v).$$

Из претходног добијамо $\Delta\neq 0$, штавише $\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(V(a_1,...,a_n))^4$. Хомоген систем једначина зато има само тривијално решење $Y_a=0$ и $Z_a=0$, за свако a. Како $Z_a=0$ даје $W_{aa}=0$, то коначно добијамо формулу

$$\sum_{p,q\in\Lambda_a} Z^{1j}_{pq}Z^{1j}_{qp}=0. \tag{3.28}$$

Како је $Z^{1j}_{pq}Z^{1j}_{qp}=\varepsilon_p(R_{q1jp}+R_{qj1p})\varepsilon_q(R_{p1jq}+R_{pj1q})=\varepsilon_p\varepsilon_q(R_{p1jq}+R_{pj1q})^2$, то добијамо завршну теорему.

Теорема 3.7 *Ако је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине тада за сваку сопствену вредност a Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_1$ и $j>1$ важи*

$$\sum_{p,q\in\Lambda_a}\varepsilon_p\varepsilon_q(R_{q1jp}+R_{qj1p})^2=0$$

у ортонормираној бази у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу.

За крај секције напоменимо да је доказ Теореме 3.7 базиран на аргументима које је изнео Ракић [27]. Наравно уграђене су и одређене модификације да би успешно покрили псеудо-Риманов случај.

ГЛАВА 4

ПРИНЦИП ДУАЛНОСТИ

Мотивисан резултатима заједничког рада са Сарнаком[1], Осерман је поставио централно питање у теорији Осермановых многострукости познато као Осерманова хипотеза. Први фрагменти принципа дуалности, који значајно упрошћавају рачун, јавили су се у резултатима које је дао Чи[2] приликом решавања хипотезе. Принцип дуалности први је формулисао Ракић[3] у нади да ће бити корисна алатка у решавању Осерманове хипотезе. Он је доказао да принцип дуалности важи у Римановом случају, а Николајевски[4] је користећи управо тај резултат направио највећи пробој у решавању хипотезе. Ова глава је инспирисана тиме и читава представља оригиналне резултате аутора ових редова. У Секцији 4.1 дајемо дефиницију принципа дуалности за псеудо-Риманов алгебарски тензор кривине. Секција 4.2 доноси максимално уопштење, односно појам јаке дуалности, те доказујемо да су у дијагоналном случају принцип дуалности и јака дуалност еквивалентни појмови. У Секцији 4.3 користимо рачуне из Главе 3 да би доказали да принцип дуалности за дијагоналан Осерманов тензор кривине важи ако не постоји изотропан сопствени вектор Јакобијевог

[1]Peter Clive Sarnak (1953)
[2]Quo-Shin Chi
[3]Zoran Rakić (1964)
[4]Yuri Nikolayevsky

оператора. Посебно, принцип дуалности важи за Риманов Осерманов тензор кривине. Секција 4.4 одређује експлицитну формулу за алгебарски тензор са константном секционом кривином, а затим доказујемо да за њега важи принцип јаке дуалности. За крај секције доказујемо знамениту Шурову [5] теорему о константној секционој кривини. У Секцији 4.5 доказујемо да принцип јаке дуалности важи за четвородимензион Осерманов тензор кривине.

4.1 Увод и дефиниција

Познато је да за Риманове многострукости (M, g) које су равне или локално симетричне ранга један важи да локалне изометрије од (M, g) делују транзитивно на јединичном раслојењу $S(M)$, те су самим тим сопствене вредности Јакобијевог оператора константне на $S(M)$ и многострукост је Осерманова. Мотивисан резултатима заједничког рада са Сарнаком [25], Осерман [24] се упитао да ли важи обрат. Тако је настао централни проблем у теорији Осерманових многострукости познат под именом Осерманова хипотеза. Морају ли Риманове Осермановe многострукости бити равне или локално симетричне ранга један? Приликом решавања појединих случајева овог веома тешког проблема природно се појавила импликација

$$\mathcal{J}_X(Y) = \lambda Y \Rightarrow \mathcal{J}_Y(X) = \lambda X, \tag{4.1}$$

која, уколико важи, у знатној мери олакшава рачун. Прве резултате у овој области дао је Чи [13], који је доказао хипотезу у случајевима димензије $n \neq 4k$, $k > 1$. Он је у свом раду користио не тако тешко тврђење да импликација (4.1) важи уколико је λ екстремна (минимална или максимална) сопствена вредност Јакобијевог оператора. У нади да исправност формуле (4.1) за сваку вредност λ може допринети дубљем разумевању Осерманове хипотезе, Ракић [26, 27] је први формулисао принцип дуалности и доказао га у Римановом случају. Другачији доказ, касније је предложио Гилки [16], а испоставило се да је принцип дуалности заиста користан алат у решавању Осерманове хипотезе. Наиме, највећи пробој у овој области направио је Николајевски [21, 22, 23] који је користећи управо принцип дуалности [22] успео да покаже ваљаност Осерманове хипотезе за све димензије осим неких могућности у димензији $n = 16$.

[5] Friedrich Heinrich Schur (1856–1932)

Варијанта Осерманове хипотезе у псеудо-Римановом случају такође је заокупила пажњу. У Лоренцовом случају по Теореми 3.5 Осерманова многострукост (самим тим цвајштајн) мора бити константне секционе кривине и проблем је једноставан, што ћемо видети у Секцији 3.4. Посматрање Осермановиx многострукости у сигнатури $(2,2)$ била је веома честа појава, где треба напоменути резултате које су добили Блажић, Бокан и Ракић [8], а који се базирају на дискусији по могућим Жордановим формама Јакобијевог оператора. Наша идеја је прилично јасна, желимо да испитамо исправност принципа дуалности у псеудо-Римановом случају, што би можда довело до бољег разумевања Осермановиx многострукости и значајно олакшало поједине рачуне.

Оригинални Ракићев [26, 27] принцип дуалности дефинисан је формулом (4.1) за међусобно ортогоналне јединичне X и Y. Ракић [26] је дао наговештај принципа дуалности у псеудо-Римановом случају преко исте формуле, али само за истородне X и Y, што не описује довољно добро реалну слику. То је разлог што је аутор ових редова [1] поставио дефиницију на следећи начин.

Дефиниција 4.1 *Нека је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$. Кажемо да принцип дуалности важи за вредност λ ако за све међусобно ортогоналне јединичне X и Y из $\mathcal{V}$ важи*

$$\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y \Rightarrow \mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X. \tag{4.2}$$

Уколико принцип дуалности важи за све вредности λ кажемо да принцип дуалности важи за R.

4.2 Принцип јаке дуалности

Овако постављена Дефиниција 4.1 очигледно је уопштење принципа дуалности са Римановог на псеудо-Риманов случај. Важно је напоменути да у самој дефиницији није неопходно захтевати да X и Y буду јединични, већ је сасвим довољно да буду дефинитни. Наиме, дефинитни X и Y се безболно по формулу (4.2) могу скалирати до јединичних

$$X_0 = \frac{X}{\sqrt{|\varepsilon_X|}}, \ Y_0 = \frac{Y}{\sqrt{|\varepsilon_Y|}},$$

при чему је $\mathcal{J}_{X_0}(Y_0) = \varepsilon_{X_0}\lambda Y_0 \Rightarrow \mathcal{J}_{Y_0}(X_0) = \varepsilon_{Y_0}\lambda X_0$ еквивалентно нашој формули, док се знакови норми слажу са познатим примерима.

Претходни резултати наводе нас да се упитамо који су оптимални услови за векторе X и Y из формуле (4.2) Дефиниције 4.1. За изотропно X осећамо велике тешкоће, јер претпоставка постаје $\mathcal{J}_X(Y) = 0$ и не зависи од λ, док се λ пита у случају да је Y дефинитно. Уосталом, случај $\varepsilon_X = 0$ пада већ у димензији 4 на конкретној многострукости коју смо конструисали у Секцији 1.5. За Жордан-Осермановy многострукост из Примера 1.5 из формула (1.33) имамо да је $\mathcal{J}_{E_3}(E_1) = 0$, а такође и $\mathcal{J}_{E_1}(E_3) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}E_4 = -\frac{1}{2}E_4$. За $X = E_3$ и $Y = E_1$ формула (4.2) очигледно не пролази ни у једној тачки. Међутим, за сада нема видљивих разлога за преостала ограничења, што је добар разлог за увођење принципа јаке дуалности [3].

Дефиниција 4.2 *Нека је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$. Кажемо да за вредност λ важи јака дуалност ако за све X и Y из $\mathcal{V}$ важи*

$$\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y \Rightarrow \mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X,$$

са јединим ограничењем $\varepsilon_X \neq 0$. Уколико јака дуалност важи за све вредности λ кажемо да јака дуалност важи за R.

Наредна тврђења повезују принцип дуалности и јаке дуалности, а прате аргументе постављене у [1, 5]. Међусобна ортогоналност вектора X и Y се лако елиминише.

Лема 4.1 *Ако формула (4.2) важи за вредност λ за међусобно ортогоналне X и Y са $\varepsilon_X \neq 0$, онда она важи уз једину претпоставку $\varepsilon_X \neq 0$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ за $\varepsilon_X \neq 0$ уз $g(X,Y) \neq 0$. Можемо разложити $Y = \alpha X + Z$, где је $g(Z,X) = 0$, док услов $g(X,Y) \neq 0$ даје $\alpha \neq 0$. Како је слика од $\mathcal{J}_X$ ортогонална на X имамо

$$0 = g(\mathcal{J}_X(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda \alpha X, X) = \varepsilon_X^2 \alpha \lambda,$$

што због $\varepsilon_X \neq 0$ и $\alpha \neq 0$ повлачи $\lambda = 0$. Како је $\mathcal{J}_X(X) = 0$ имамо $\mathcal{J}_X(Z) = \mathcal{J}_X(\alpha X + Z) = \varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z) = 0$. Добијено $\mathcal{J}_X(Z) = 0$ уз услове $g(X,Z) = 0$ и $\varepsilon_X \neq 0$ по претпоставци леме даје $\mathcal{J}_Z(X) = 0$ и имамо

$$\mathcal{J}_Y(X) = \mathcal{J}_{\alpha X + Z}(X) = \alpha \mathcal{R}(X,Z)X + \mathcal{R}(X,Z)Z = -\alpha \mathcal{J}_X(Z) + \mathcal{J}_Z(X) = 0,$$

што доказује $\mathcal{J}_Y(X) = 0 = \varepsilon_Y \lambda X$. $\square$

По Леми 4.1, од принципа дуалности до јаке дуалности дели нас само омогућавање изотропности за вектор Y. То није проблем у случају дијагоналног R, што се види из наредне теореме.

Теорема 4.1 *Ако је R дијагоналан алгебарски тензор кривине онда су принцип дуалности и јака дуалност (за вредност λ) еквивалентни појмови.*

Доказ. Нека је $Y \neq 0$ изотропан сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$ за сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$ који је ортогоналан на дефинитан X, односно важи $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X\lambda Y$, $g(X,Y) = 0$ и $\varepsilon_Y = 0$. Дијагоналност тензора кривине даје недегенерисан сопствени потпростор $\mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\mathrm{Id})$ који садржи Y. По Леми 2.2 постоји растављање $Y = S + T$ са $S, T \in \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X\lambda\mathrm{Id})$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$, одакле је $g(S,T) = g(S,X) = g(T,X) = 0$ са

$$\mathcal{J}_X(S) = \varepsilon_X\lambda S,\ \mathcal{J}_X(T) = \varepsilon_X\lambda T,\ Y = S + T.$$

Како је $\varepsilon_{S+\theta T} = \varepsilon_S + \theta^2\varepsilon_T = (1-\theta^2)\varepsilon_S$, то су за $\theta^2 \neq 1$ вектори $S + \theta T$, S и T дефинитни, ортогонални на X, сопствени вектори оператора $\mathcal{J}_X$ за сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$ и ако важи принцип дуалности имамо

$$\mathcal{J}_{S+\theta T}(X) = \varepsilon_{S+\theta T}\lambda X,\ \mathcal{J}_S(X) = \varepsilon_S\lambda X,\ \mathcal{J}_T(X) = \varepsilon_T\lambda X.$$

Након замене у стандардан рачун

$$\mathcal{J}_{S+\theta T}(X) = \mathcal{J}_S(X) + \theta^2\mathcal{J}_T(X) + 2\theta\mathcal{J}(S,T)X, \tag{4.3}$$

добијамо $\varepsilon_{S+\theta T}\lambda X = \varepsilon_S\lambda X + \theta^2\varepsilon_T\lambda X + 2\theta\mathcal{J}(S,T)X$. За $\theta \notin \{-1,0,1\}$ је $\mathcal{J}(S,T)X = 0$ и једначина (4.3) постаје $\mathcal{J}_{S+\theta T}(X) = \mathcal{J}_S(X) + \theta^2\mathcal{J}_T(X)$. Посебно за $\theta = 1$ имамо

$$\mathcal{J}_Y(X) = \mathcal{J}_{S+T}(X) = \mathcal{J}_S(X) + \mathcal{J}_T(X) = \varepsilon_S\lambda X + \varepsilon_T\lambda X = 0 = \varepsilon_Y\lambda X,$$

што доказује формулу (4.2) за $X \perp Y$ и $\varepsilon_X \neq 0$. Доказ завршава Лема 4.1 која елиминише услов $X \perp Y$. $\square$

4.3 Дијагоналан Осерманов

Основна идеја ове секције је превести услов дуалности (4.2) на координатне компоненте тензоре кривине, а затим искористити неки од већ успостављених рачуна из Главе 3. Све резултате у овој секцији дајемо уз услов да је R дијагоналан алгебарски тензор кривине, а задржаћемо и претходне ознаке.

Теорема 4.2 *Нека је R дијагоналан алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$. Тада принцип дуалности важи за вредност λ ако и само ако за свако $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda}$ и $j > 1$ важи $R_{1uuj} = 0$ у свакој ортонормираној бази у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу.*

Доказ. Нека је R дијагоналан алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ и нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ ортонормирана база за $\mathcal{V}$, таква да у њој оператор $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу. За $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda} = \{t \mid \mu_t = \varepsilon_1\lambda\}$ је E_u сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_1$ који одговара вредности $\varepsilon_1\lambda$, односно важи $\mathcal{J}_1(E_u) = \varepsilon_1\lambda E_u$.

Ако принцип дуалности важи за вредност λ, онда за $u \in \Lambda_{\varepsilon_1\lambda}$ важи $\mathcal{J}_u(E_1) = \varepsilon_u\lambda E_1$, и за $j > 1$ је $R_{1uuj} = g(\mathcal{J}_u(E_1), E_j) = g(\varepsilon_u\lambda E_1, E_j) = 0$.

Докажимо обрат, те претпоставимо да је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X\lambda Y$ за јединичне међусобно ортогоналне X и Y. Поставимо $E_1 = X$ и $E_2 = Y$, те их допунимо до ортонормиране базе $(E_1, E_2, ..., E_n)$ за $\mathcal{V}$ у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу. Сада је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2(E_1) = \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j R_{122j} E_j = \varepsilon_1 R_{1221} E_1 &= \varepsilon_1 g(\mathcal{J}_1(E_2), E_2) E_1 \\ &= \varepsilon_1 g(\varepsilon_1\lambda E_2, E_2) E_1 = \varepsilon_2\lambda E_1,\end{aligned}$$

што даје $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y\lambda Y$ и принцип дуалности важи. □

Можемо приметити да је карактеризација принципа дуалности из Теореме 4.2 уједно и карактеризација принципа јаке дуалности, будући да на дијагоналан R можемо применити Лему 4.1. За крај секције послужићемо се Теоремом 4.2 за интерпретацију Теорема 3.6 и 3.7, односно формула (3.25) и (3.28).

Теорема 4.3 *Нека је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине, такав да карактеристичан полином Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ има једноструку нулу $\varepsilon_X\lambda$. Тада принцип дуалности важи за вредност λ.*

Доказ. Једнострука нула $\varepsilon_1\lambda$ карактеристичног полинома $\mathcal{J}_1$ даје једночлан скуп $\Lambda_{\varepsilon_1\lambda} = \{u\}$. R је дијагоналан Осерманов, те по Теореми 3.6 имамо $R_{1uuj} = R_{u1ju} = \sum_{p\in\Lambda_{\varepsilon_1\lambda}} \varepsilon_p R_{p1jp} = 0$. Како то важи у свакој ортонормираној бази у којој $\mathcal{J}_1$ има дијагоналну матрицу, то по Теореми 4.2 за вредност λ важи принцип дуалности. □

Последица 4.1 *Уколико је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине са свим различитим сопственим вредностима Јакобијевог оператора, онда за њега важи принцип дуалности.*

Теорема 4.4 *Ако је R дијагоналан Осерманов алгебарски тензор кривине, такав да за свако јединично X не постоји изотропан сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$, тада за R важи принцип дуалности.*

Доказ. Нека је R дијагоналан Осерманов агебарски тензор кривине, такав да за свако јединично X не постоји изотропан сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$. Изаберимо ортонормирану базу $(X = E_1, E_2, ..., E_n)$ у којој $\mathcal{J}_X$ има дијагоналну матрицу. Непостојање изотропног сопственог вектора значи да сви сопствени потпростори оператора $\mathcal{J}_X$ понаособ садрже само истородне векторе. Како Λ_a генерише сопствени потпростор за сопствену вредност a то је у нашем случају $\varepsilon_p = \varepsilon_q$ за свако $p, q \in \Lambda_a$. R је дијагоналан Осерманов, те по Теореми 3.7 имамо

$$\sum_{p,q\in\Lambda_a}(R_{qj1p} + R_{q1jp})^2 = \sum_{p,q\in\Lambda_a}\varepsilon_p\varepsilon_q(R_{qj1p} + R_{q1jp})^2 = 0.$$

Сума квадрата једнака је нули само ако су сви сабирци нуле, те за $p, q \in \Lambda_a$ имамо $R_{qj1p} + R_{q1jp} = 0$ и посебно за $q = p \in \Lambda_a$ важи $R_{1ppj} = 0$. Ово важи за сваку сопствену вредност a, те Теорема 4.2 комплетира доказ. $\square$

Последица 4.2 *За Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине важи принцип дуалности.*

Доказ. Риманов векторски простор нема изотропних вектора сем нуле, те онда наравно ни Јакобијев оператор нема сопствених изотропних вектора и тврђење следи из Теореме 4.4. $\square$

Напоменимо да је ову веома важну Последицу 4.2 први доказао Ракић [26, 27], а да је касније другачији доказ преложио Гилки [16]. Овај доказ овде је оригинално виђење аутора [1, 5] који је успео да по узору на Ракићев [27] доказ читаву причу спроведе у псеудо-Римановом случају.

4.4 Константна секциона кривина

Простор константне секционе кривине је најједноставнији пример Осермановe многострукости. У овој секцији изучићемо алгебарски тензор кривине R са константном секционом кривином. Ако је та константа $\kappa(\sigma) = \kappa$ за сваку недегенерисану раван σ, тада по Дефинцији 1.16 за свака два међусобно ортогонална дефинитна X и Y имамо

$$R(X, Y, Y, X) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \kappa \tag{4.4}$$

Нека су сада X, Y и Z сви међусобно ортогонални дефинитни. Тада за неко $\theta \neq 0$, за које је $Y + \theta Z$ дефинитан, имамо поларизацију

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X \varepsilon_{Y+\theta Z} \kappa &= R(X, Y + \theta Z, Y + \theta Z, X) \\
&= R(X, Y, Y, X) + \theta^2 R(X, Z, Z, X) + 2\theta R(X, Y, Z, X) \\
&= \varepsilon_X \varepsilon_Y \kappa + \theta^2 \varepsilon_X \varepsilon_Z \kappa + 2\theta R(X, Y, Z, X) \\
&= \varepsilon_X \varepsilon_{Y+\theta Z} \kappa + 2\theta R(X, Y, Z, X),
\end{aligned}$$

одакле је

$$R(X, Y, Z, X) = 0. \tag{4.5}$$

Нека су сада X, Y, Z и W сви међусобно ортогонални дефинитни. Тада за неко $\theta \neq 0$, за које је $X + \theta W$ дефинитан, имамо поларизацију

$$\begin{aligned}
0 &= R(X + \theta W, Y, Z, X + \theta W) \\
&= R(X, Y, Z, X) + \theta^2 R(W, Y, Z, W) + \theta \left(R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X)\right) \\
&= \theta(R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X))
\end{aligned}$$

и симетрије (1.27) и (1.30) дају $R(X, Y, Z, W) = R(X, Z, W, Y)$. Поновна примена ове једначине даје

$$R(X, Y, Z, W) = R(X, Z, W, Y) = R(X, W, Y, Z),$$

те после примене Бјанкијевог идентитета имамо

$$0 = R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 3R(X, Y, Z, W)$$

и коначно

$$R(X, Y, Z, W) = 0. \tag{4.6}$$

Сада је све спремно за експлицитну формулу за оператор кривине $\mathcal{R}$.

Лема 4.2 *Ако је R алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ са константном секционом кривином κ, тада је*

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

за свако X, Y, Z из $\mathcal{V}$.

Доказ. Нека је $(E_1, E_2, ..., E_n)$ ортонормирана база простора $\mathcal{V}$ и

$$X = \sum_i \alpha_i E_i,\ Y = \sum_j \beta_j E_j,\ Z = \sum_k \gamma_k E_k.$$

Пређимо на конкретан рачун.

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \sum_p \varepsilon_p g(\mathcal{R}(X,Y)Z, E_p)E_p = \sum_{p,i,j,k} \varepsilon_p \alpha_i \beta_j \gamma_k R_{ijkp} E_p$$

По изведеним формулама (4.4), (4.5) и (4.6) видимо да је $R_{ijkp} \neq 0$ само за $\{i,j\} = \{k,p\}$ и $i \neq j$. Даље је

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y)Z &= \sum_{i\neq j} \varepsilon_i \alpha_i \beta_j \gamma_j R_{ijji} E_i + \sum_{i\neq j} \varepsilon_j \alpha_i \beta_j \gamma_i R_{ijij} E_j \\
&= \sum_{i\neq j} \varepsilon_j (\varepsilon_j \varepsilon_i R_{ijji}) \alpha_i \beta_j \gamma_j E_i + \sum_{i\neq j} \varepsilon_i (-\varepsilon_i \varepsilon_j R_{ijji}) \alpha_i \beta_j \gamma_i E_j \\
&= \kappa \sum_j \varepsilon_j \beta_j \gamma_j \sum_{i\neq j} \alpha_i E_i - \kappa \sum_i \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i \sum_{j\neq i} \beta_j E_j \\
&= \kappa \sum_j \varepsilon_j \beta_j \gamma_j (X - \alpha_j E_j) - \kappa \sum_i \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i (Y - \beta_i E_i) \\
&= \kappa \left(\sum_j \varepsilon_j \beta_j \gamma_j X - \sum_j \varepsilon_j \alpha_j \beta_j \gamma_j E_j - \sum_i \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i Y + \sum_i \varepsilon_i \alpha_i \beta_i \gamma_i E_i \right) \\
&= \kappa \left(\left(\sum_j \varepsilon_j \beta_j \gamma_j \right) X - \left(\sum_i \varepsilon_i \alpha_i \gamma_i \right) Y \right) \\
&= \kappa \left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \right),
\end{aligned}$$

што доказује тврђење. □

Наравно за просторе константне секционе кривине важи принцип дуалности, штавише он важи и у јаком облику, што ћемо доказати у следећој теореми.

Теорема 4.5 *За простор константне секционе кривине важи принцип јаке дуалности.*

Доказ. Нека су X и Y линеарно независни из $\mathcal{V}$ са $\varepsilon_X \neq 0$. Лема 4.2 даје

$$\mathcal{J}_X(Y) = \mathcal{R}(Y,X)X = \kappa(g(X,X)Y - g(Y,X)X) = \varepsilon_X \kappa Y - g(Y,X)\kappa X,$$

те за $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ из претходног имамо $\kappa = \lambda$ и $g(X,Y)\kappa = 0$. Симетрична веза нам даје $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \kappa X - g(X,Y)\kappa Y = \varepsilon_Y \lambda X$ и принцип јаке дуалности важи. □

За крај секције можемо направити малу екскурзију у глобалну причу о многострукостима и доказати знамениту Шурову теорему [28].

Теорема 4.6 *Нека је секциона кривина $\kappa(\sigma)$ константна у свакој тачки повезане псеудо-Риманове многострукости димензије $n \geq 3$, тада је та константа иста у свим тачкама.*

Доказ. По Леми 4.2 оператор кривине са константном секционом кривином κ је облика $\mathcal{R}(X,Y)Z = \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$, међутим за $\kappa = 1$ имамо специјалан случај $\mathcal{R}^0(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$ из Примера 1.1. Одатле је $\mathcal{R} = \kappa\mathcal{R}^0$, што ће важити и за њихове тензоре кривине $R = \kappa R^0$. Након праволинијског рачуна добијамо

$$\begin{aligned}(\nabla_V R^0)(X,Y,Z,W) &= \nabla_V(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &- (g(Y,Z)g(\nabla_X,W) - g(\nabla_X,Z)g(Y,W)) \\ &- (g(\nabla_Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(\nabla_Y,W)) \\ &- (g(Y,\nabla_Z)g(X,W) - g(X,\nabla_Z)g(Y,W)) \\ &- (g(Y,Z)g(X,\nabla_W) - g(X,Z)g(Y,\nabla_W)) = 0,\end{aligned}$$

што даје $\nabla_V R^0 = 0$ и R^0 је паралелно тензорско поље. Зато је

$$\nabla_V R = \nabla_V \kappa \cdot R^0 + \kappa \nabla_V R^0 = \nabla_V \kappa \cdot R^0,$$

те можемо расписати

$$\begin{aligned}(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) &= V(\kappa)(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)), \\ (\nabla_X R)(Y,V,Z,W) &= X(\kappa)(g(V,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(V,W)), \\ (\nabla_Y R)(V,X,Z,W) &= Y(\kappa)(g(X,Z)g(V,W) - g(V,Z)g(X,W)).\end{aligned}$$

Ако саберемо ове једначине, збир на левој страни биће нула по формули (1.18) и добијамо

$$\begin{aligned}0 &= (V(\kappa)g(Y,Z) - Y(\kappa)g(V,Z))g(X,W)\\ &\quad + (X(\kappa)g(V,Z) - V(\kappa)g(X,Z))g(Y,W)\\ &\quad + (Y(\kappa)g(X,Z) - X(\kappa)g(Y,Z))g(V,W).\end{aligned}$$

По претпоставци $n \geq 3$, те постоји три међусобно ортогонална дефинитна вектора, рецимо X, Y и Z. Поставимо ли $Z = X$ наша формула даје

$$0 = \varepsilon_X Y(\kappa)g(V,W) - \varepsilon_X V(\kappa)g(Y,W),$$

одакле за $W = Y$ добијамо $V(\kappa) = 0$, док за $W = V$ имамо $Y(\kappa) = 0$. Слично заменом $Z = Y$ и $W = V$ добијамо и преостало $X(\kappa) = 0$. Како бар један од вектора X, Y, V можемо бирати произвољно, то за свако X важи $X(\kappa) = 0$ и κ је локално константна. Многострукост је повезана одакле следи глобална константност што комплетира доказ. □

4.5 Четвородимензиони Осерманов

Решавање питања принципа дуалности за Осерманов алгебарски тензор кривине испоставља се као јако тежак посао. Аутору ових редова и даље није познато да ли постоји Осерманов алгебарски тензор кривине за који не важи принцип дуалности, а позитиван одговор смо у стању да дамо у неким једноставнијим случајевима. Олакшавајући услов може бити мала димензија за $\mathcal{V}$, где наше Ајнштајн и цвајштајн формуле долазе до изражаја. Случај димензије мање од 4 се лако решава, јер тада Ајнштајн тензор кривине мора бити константне секционе кривине, што се види из формуле (3.11). По Теореми 4.5 за просторе константне секционе кривине важи принцип јаке дуалности, те зато први нетривијалан случај срећемо у димензији $n = 4$.

Напоменимо да је читава ова секција базирана на оригиналном раду аутора [3], који прилично побољшава претходне рачуне [1, 5]. Нека је R четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине, а (E_1, E_2, E_3, E_4) произвољна ортонормирана база простора $\mathcal{V}$. По Теореми 3.4 важе Ајнштајн формуле (3.11) и (3.12), као и цвајштајн формуле (3.19), (3.20) и (3.21). Оне ће нам омогућити да уочимо везе између координатних компоненти тензора кривине за четвородимензиони случај.

Формула (3.11) $\sum_{1\le p\le 4}\varepsilon_i\varepsilon_p R_{piip} = C_1$, за $1\le i\le 4$ даје четири једначине

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114} &= C_1,\\
\varepsilon_2\varepsilon_1 R_{1221} + \varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= C_1,\\
\varepsilon_3\varepsilon_1 R_{1331} + \varepsilon_3\varepsilon_2 R_{2332} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= C_1,\\
\varepsilon_4\varepsilon_1 R_{1441} + \varepsilon_4\varepsilon_2 R_{2442} + \varepsilon_4\varepsilon_3 R_{3443} &= C_1,
\end{aligned}$$

из којих је

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} + \varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114},\\
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{2332} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114},\\
\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{2442} + \varepsilon_3\varepsilon_4 R_{3443} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113},
\end{aligned}$$

и после решавања система

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{3223} &= \varepsilon_1\varepsilon_4 R_{4114},\\
\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{4224} &= \varepsilon_1\varepsilon_3 R_{3113},\\
\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{4334} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2112}.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

Формула (3.12) $\sum_{1\le p\le 4}\varepsilon_p R_{pijp} = 0$, за $1\le i\ne j\le 4$ даје шест једначина

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 R_{1231} + \varepsilon_4 R_{4234} = 0, \quad \varepsilon_1 R_{1241} + \varepsilon_3 R_{3243} = 0, \quad \varepsilon_1 R_{1341} + \varepsilon_2 R_{2342} = 0,\\
&\varepsilon_3 R_{3123} + \varepsilon_4 R_{4124} = 0, \quad \varepsilon_2 R_{2132} + \varepsilon_4 R_{4134} = 0, \quad \varepsilon_2 R_{2142} + \varepsilon_3 R_{3143} = 0,
\end{aligned}$$

из којих је

$$\begin{aligned}
R_{2443} &= -\varepsilon_1\varepsilon_4 R_{2113}, \ R_{1442} = -\varepsilon_3\varepsilon_4 R_{1332},\\
R_{2334} &= -\varepsilon_1\varepsilon_3 R_{2114}, \ R_{1443} = -\varepsilon_2\varepsilon_4 R_{1223},\\
R_{3224} &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{3114}, \ R_{1334} = -\varepsilon_2\varepsilon_3 R_{1224}.
\end{aligned}\tag{4.8}$$

Формула (3.19) $\sum_{1\le p,q\le 4}\varepsilon_p\varepsilon_q R^2_{piiq} = C_2$ за $1\le i\le 4$ даје четири једначине.

$$\begin{aligned}
R^2_{2112} + R^2_{3113} + R^2_{4114} + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 R^2_{2113} + 2\varepsilon_2\varepsilon_4 R^2_{2114} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^2_{3114} &= C_2,\\
R^2_{1221} + R^2_{3223} + R^2_{4224} + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 R^2_{1223} + 2\varepsilon_1\varepsilon_4 R^2_{1224} + 2\varepsilon_3\varepsilon_4 R^2_{3224} &= C_2,\\
R^2_{1331} + R^2_{2332} + R^2_{4334} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R^2_{1332} + 2\varepsilon_1\varepsilon_4 R^2_{1334} + 2\varepsilon_2\varepsilon_4 R^2_{2334} &= C_2,\\
R^2_{1441} + R^2_{2442} + R^2_{3443} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 R^2_{1442} + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 R^2_{1443} + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 R^2_{2443} &= C_2.
\end{aligned}$$

Ако у њих укључимо (4.7) добијамо

$$\begin{aligned}\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2+\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3224}^2\\&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1334}^2+\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2334}^2\\&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1442}^2+\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1443}^2+\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2443}^2\end{aligned}$$

што после примене (4.8) постаје

$$\begin{aligned}\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2+\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2\\&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2+\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2\\&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2+\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2+\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2\end{aligned}$$

и отуда

$$\begin{aligned}\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2+\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2,\\\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2+\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2,\\\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2+\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2+\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2,\end{aligned}$$

до коначног решења система

$$\begin{aligned}\varepsilon_2\varepsilon_3R_{2113}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_4R_{1224}^2,\\\varepsilon_2\varepsilon_4R_{2114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_3R_{1223}^2,\\\varepsilon_3\varepsilon_4R_{3114}^2&=\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1332}^2.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Изведене формуле су довољне да се докаже принцип дуалности.

Лема 4.3 *За четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине важи принцип дуалности.*

Доказ. Нека за јединичне међусобно ортогоналне дефинитне X и Y из $\mathcal{V}$ важи $\mathcal{J}_X(Y)=\varepsilon_X\lambda Y$. Поставимо $E_1=X$ и $E_2=Y$ и допунимо их до ортонормиране базе (E_1,E_2,E_3,E_4). Почетна претпоставка је $\mathcal{J}_1(E_2)=\varepsilon_1\lambda E_2$ и она нам даје $R_{2112}=\varepsilon_1\varepsilon_2\lambda$, $R_{2113}=0$ и $R_{2114}=0$, што по (4.9) доводи до $R_{1224}=0$ и $R_{1223}=0$. Коначно је $\mathcal{J}_2(E_1)=\varepsilon_1R_{1221}E_1+\varepsilon_3R_{1223}E_3+\varepsilon_4R_{1224}E_4=\varepsilon_2\lambda E_1$, што доказује принцип дуалности. □

Штавише у четвородимезионом случају важи и принцип јаке дуалности. Извршимо дискусију по могућим сигнатурама простора $\mathcal{V}$. У

Римановом случају (сигнатура $(0,4)$ или $(4,0)$) знамо да је четвородимензион цвајштајн обавезно Осерманов [6, 19]. Такође, Риманов тензор кривине је увек дијагоналан, те је по Теореми 4.1 за јаку дуалност довољно показати принцип дуалности, а он следи из Последице 4.2. У Лоренцовом случају (сигнатура $(1,3)$ или $(3,1)$), по Теореми 3.5 тензор кривине мора бити константне секционе кривине и по Теореми 4.5 важи јака дуалност.

Претпоставимо зато да је $\mathcal{V}$ сигнатуре (2,2) и нека је, не умањујући општост, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$. Применимо формулу (3.20) за $i = 2, j = 3$ и за $i = 3, j = 2$.

$$\sum_{1 \leq p,q \leq 4} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{p22q} R_{p23q} = 0, \quad \sum_{1 \leq p,q \leq 4} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{p33q} R_{p32q} = 0.$$

Када ово распишемо добијамо

$$\begin{aligned} R_{1221}R_{1231} - R_{1224}R_{1234} - R_{3221}R_{3231} + R_{3224}R_{3234} \\ - R_{4221}R_{4231} + R_{4224}R_{4234} = 0, \\ R_{1331}R_{1321} - R_{1334}R_{1324} + R_{2331}R_{2321} - R_{2334}R_{2324} \\ - R_{4331}R_{4321} + R_{4334}R_{4324} = 0, \end{aligned}$$

што након сређивања уз помоћ формула (4.7) и (4.8) постаје

$$\begin{aligned} R_{2112}R_{2113} - R_{1224}R_{1234} + R_{1223}R_{1332} + R_{3114}R_{2114} \\ - R_{1224}R_{1324} + R_{3113}R_{2113} = 0, \\ R_{3113}R_{2113} - R_{1224}R_{1324} - R_{1332}R_{1223} - R_{2114}R_{3114} \\ - R_{1224}R_{1234} + R_{2112}R_{2113} = 0. \end{aligned}$$

Збир и разлика претходних једначина дају следеће формуле.

$$R_{2112}R_{2113} + R_{3113}R_{2113} - R_{1224}R_{1234} - R_{1224}R_{1324} = 0, \tag{4.10}$$

$$R_{1223}R_{1332} + R_{2114}R_{3114} = 0. \tag{4.11}$$

Применимо формулу (3.21) за $i = 2, j = 3$.

$$2 \sum_{1 \leq p,q \leq 4} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{p22q} R_{p33q} + 2 \sum_{1 \leq p,q \leq 4} \varepsilon_p \varepsilon_q R_{p11q}^2 + \sum_{1 \leq p,q \leq 4} \varepsilon_p \varepsilon_q (R_{p23q} + R_{p32q})^2 = 0$$

Након пажљиве замене добијамо

$$\begin{aligned}
&2(R_{1221}R_{1331} - 2R_{1224}R_{1334} + R_{4224}R_{4334})\\
&+ 2(R_{2112}^2 + R_{3113}^2 + R_{4114}^2 - 2R_{2113}^2 - 2R_{2114}^2 + 2R_{3114}^2) + (R_{1231} + R_{1321})^2\\
&+ R_{1232}^2 - R_{1323}^2 - (R_{1234} + R_{1324})^2 + R_{2321}^2 - R_{2323}^2 - R_{2324}^2 - R_{3231}^2 - R_{3232}^2\\
&+ R_{3234}^2 - (R_{4231} + R_{4321})^2 - R_{4232}^2 + R_{4323}^2 + (R_{4234} + R_{4324})^2 = 0,
\end{aligned}$$

што после примена формула (4.7), (4.8) и (4.9) постаје

$$\begin{aligned}
&2R_{2112}R_{3113} - 4R_{2113}^2 + 2R_{3113}R_{2112}\\
&+ 2R_{2112}^2 + 2R_{3113}^2 + 2R_{4114}^2 - 4R_{2113}^2 - 4R_{2114}^2 + 4R_{3114}^2 + 4R_{2113}^2\\
&+ R_{2114}^2 - R_{3114}^2 - (R_{1234} + R_{1324})^2 + R_{2114}^2 - R_{4114}^2 - R_{3114}^2 - R_{3114}^2 - R_{4114}^2\\
&+ R_{2114}^2 - (R_{1324} + R_{1234})^2 - R_{3114}^2 + R_{2114}^2 + 4R_{2113}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Сређивањем имамо

$$4R_{2112}R_{3113} + 2R_{2112}^2 + 2R_{3113}^2 - 2(R_{1234} + R_{1324})^2 = 0,$$

те коначно добијамо

$$(R_{2112} + R_{3113})^2 = (R_{1234} + R_{1324})^2. \tag{4.12}$$

Ове новоизведене формуле биће нам сасвим довољне.

Теорема 4.7 *За четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине важи јака дуалност.*

Доказ. Како принцип дуалности важи по Леми 4.3, то је имајући у виду Лему 4.1 довољно испитати импликацију за $X \perp Y$ са $\varepsilon_X^2 = 1$ и $\varepsilon_Y = 0$. Можемо поставити $E_1 = X$, а онда Y по Последици 2.1 раставити са $Y = E_2 + E_3$, при чему су E_2 и E_3 међусобно ортогонални, јединични, ортогонални на X, тако да је $\varepsilon_{E_1} = \varepsilon_{E_2} = -\varepsilon_{E_3}$. Допунимо их јединичним E_4 до ортонормиране базе (E_1, E_2, E_3, E_4), те како је по претходној дискусији довољно посматрати само сигнатуру $(2,2)$, имаћемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$ и можемо користити све формуле са почетка секције. Желимо да докажемо импликацију

$$\mathcal{J}_1(E_2 + E_3) = \varepsilon_1\lambda(E_2 + E_3) \Rightarrow \mathcal{J}_{E_2+E_3}E_1 = 0.$$

Претпоставка је

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1\lambda(E_2+E_3)=\mathcal{J}_1(E_2+E_3)\\&\quad=\varepsilon_2(R_{2112}+R_{3112})E_2+\varepsilon_3(R_{2113}+R_{3113})E_3+\varepsilon_4(R_{2114}+R_{3114})E_4,\end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\varepsilon_2(R_{2112}+R_{3112})=\varepsilon_1\lambda=\varepsilon_3(R_{2113}+R_{3113}),\ \ \varepsilon_4(R_{2114}+R_{3114})=0,$$

и коначно

$$R_{2112}+R_{3113}+2R_{2113}=0, \tag{4.13}$$

$$R_{2114}+R_{3114}=0. \tag{4.14}$$

Из (4.14) је $R_{3114}=-R_{2114}$, што заменом у (4.11) даје

$$R_{1223}R_{1332}=-R_{2114}R_{3114}=R_{2114}^2=R_{1223}^2.$$

Сада је $R_{1223}=0$ или $R_{1332}=R_{1223}$, међутим из (4.9) и (4.14)

$$R_{1223}=0\Rightarrow R_{2114}=0\Rightarrow R_{3114}=0\Rightarrow R_{1332}=0$$

и свеједно важи

$$R_{1332}=R_{1223}. \tag{4.15}$$

Заменом (4.13) у формулу (4.10) добијамо

$$(R_{1234}+R_{1324})R_{1224}=(R_{2112}+R_{3113})R_{2113}=-2R_{2113}^2=-2R_{1224}^2.$$

Одавде је $R_{1224}=0$ или $R_{1234}+R_{1324}=-2R_{1224}$. Слично претходном примењујемо (4.9), (4.13) и (4.12) за

$$R_{1224}=0\Rightarrow R_{2113}=0\Rightarrow R_{2112}+R_{3113}=0\Rightarrow R_{1234}+R_{1324}=0$$

и свакако

$$R_{1234}+R_{1324}=-2R_{1224}=-(R_{1224}+R_{1334}). \tag{4.16}$$

Вратимо се сада на $\mathcal{J}_{E_2+E_3}E_1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{E_2+E_3}E_1&=\sum_p\varepsilon_p(R_{122p}+R_{123p}+R_{132p}+R_{133p})E_p\\&=\varepsilon_1(R_{2112}+R_{3113}+2R_{2113})E_1+\varepsilon_2(R_{1332}-R_{1223})E_2\\&\quad+\varepsilon_3(R_{1223}-R_{1332})E_3+\varepsilon_4(R_{1224}+R_{1334}+R_{1234}+R_{1324})E_4\end{aligned}$$

Коначно формуле (4.13), (4.15) и (4.16) дају $\mathcal{J}_{E_2+E_3}E_1 = 0$, што комплетира доказ. $\square$

Како Осерманов алгебарски тензор мора бити цвајштајн, то завршни резултат ове секције видимо у наредној последици.

Последица 4.3 *За четвородимензиони Осерманов алгебарски тензор кривине важи јака дуалност.*

ГЛАВА 5

СПЕЦИЈАЛАН ОСЕРМАНОВ

Ова глава мотивисана је специјалним Осермановим многострукостима, појмом који су увели Гарсија-Рио и Васкез-Лоренцо. Поред стандардних тешких услова, они су наметнули и принцип дуалности да би извршили комплетну класификацију. Основни циљ ове главе је испитати да ли је принцип дуалности нужна последица оригиналних услова. У Секцији 5.1 поред увода у проблематику дајемо и дефиницију дволисно Осермановог тензора кривине. Секција 5.2 тиче се глобалних проблема и ту доказујемо да нам претпоставка да је многострукост глобално Осерманова не може помоћи даље од алгебарских резултата. У Секцији 5.3 изучавамо дволисно Осерманов тензор кривине, те доказујемо Лему о две инстанце. Додатни услов у Секцији 5.4 дефинише квази-специјалан Осерманов тензор кривине. Ту доказујемо Лему о слабој дуалности и дајемо неке резултате у вези са потенцијалним пресеком $\mathcal{U}$ простора. Затим користимо све претходне резултате и постепено се приближавамо коначном доказу. Секција 5.5 доказује да скоро-специјалан Осерманов тензор кривине мора бити специјалан Осерманов. Завршна Секција 5.6 објашњава класификацију специјалних Осермановых многострукости коју су дали Гарсија-Рио и Васкез-Лоренцо.

5.1 Увод

Природни циљ овог рада је доказ да принцип дуалности за Осерманове тензоре кривине важи у општем случају, односно конструкција контрапримера уколико то није тачно. Нажалост, испоставља се да је у питању поприлично тежак залогај и за сада смо у стању да дамо резултате само под неким специфичним додатним условима. Прва олакшавајућа околност била је мали индекс ν псеудо-Риманове многострукости, односно скаларног производа. У случају $\nu = 0$ (Риманов случај) проблем смо решили у Последици 4.2. Штавише, како је тај случај дијагоналан то по Теореми 4.1 важи принцип јаке дуалности. У случају $\nu = 1$ (Лоренцов случај) кључна је Теорема 3.5 по којој је Осерманов тензор (као цвајштајн) константне секционе кривине, а онда по Теореми 4.5 важи принцип јаке дуалности. Друга олакшавајућа околност била је мала димензија. Димензија мања од 4 се решава једноставно, док нам Теорема 4.7 гарантује јаку дуалност у четвородимензионом случају.

Последња специфичност, а коју уводимо у овој глави, је мали број сопствених вредности редукованог Јакобијевог оператора. Дијагоналност је природан услов, на пример као последица Жордан-Осермановог тензора кривине у сигнатурама које нису неутралне, а у складу са [18]. Дијагоналност и само једна сопствена вредност редукованог Јакобијевог оператора даје константну секциону кривину, а за њу важи принцип јаке дуалности. Први нетривијалан случај је зато дволисно Осерманов тензор кривине који дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 5.1 *Нека је R алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ сигнатуре $(\nu, n-\nu)$. Ако је R дијагоналан Осерманов такав да за сваки јединичан $X \in \mathcal{V}$, редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda$ и $\varepsilon_X \mu$, онда кажемо да је R дволисно Осерманов.*

У овој глави испитујемо принцип дуалности за дволисно Осерманов тензор кривине. Међутим, испоставља се да наметнути услови нису довољно јаки да би доказали принцип дуалности. Постепено ћемо уводити додатне услове како би нас усмерили ка принципу дуалности, а наравно услови ће бити природни, у смислу да се могу видети на најпознатијим примерима дволисних Осерманових тензора кривине.

5.2 Шурови проблеми

У овој секцији враћамо се глобалној причи и приказујемо резултате у вези са проблемима Шуровог типа, по узору на Теорему 4.6. Овога пута наши проблеми повезани су са k-штајн условом из Секције 3. За псеудо-Риманову многострукост (M,g) кажемо да је k-штајн, ако је одговарајући алгебарски тензор кривине у свакој тачки многострукости управо k-штајн. По Теореми 3.1 свака тачка по тачка Осерманова многострукост мора бити k-штајн за свако природно k и зато постоје глатка пресликавања $C_j \in \mathcal{F}(M)$ таква да је

$$\mathrm{Tr}({\mathcal{J}_X}^j) = (\varepsilon_X)^j C_j(p) \tag{5.1}$$

у свакој тачки $p \in M$, за свако $X \in T_pM$ и свако $1 \leq j \leq k$. Основни задатак овде је испитати да ли пресликавања C_j из једначине (5.1) морају бити константна, а сам проблем се у литератури среће под именом Шурови проблеми [16].

На почетку дефинишемо појмове који ће важити кроз читаву секцију. Нека је (M,g) псеудо-Риманова многострукост сигнатуре $(\nu, n-\nu)$ и нека је $(E_1,...,E_n)$ ортонормиран репер за $\mathcal{X}(M)$.

Наредне две леме чине основне резултате у овим разматрањима, а неке њихове варијанте (углавном рестриковане на Риманов случај) могу се пронаћи у литератури [6], [19], [16] и [15].

Лема 5.1 *Ако је (M,g) Ајнштајн и $n \neq 2$ тада је C_1 константна.*

Доказ. Пођимо од скаларне кривине

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j R(E_i,E_j,E_j,E_i),$$

где је $(E_1,...,E_n)$ ортонормирана база за $\mathcal{X}(M)$. Како је (M,g) Ајнштајн то имамо

$$\nabla_{E_k}\mathrm{Sc} = \nabla_{E_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathrm{Ric}(E_i,E_i)\right) = \nabla_{E_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i C_1 g(E_i,E_i)\right) = n\nabla_{E_k}C_1.$$

Са друге стране примена другог Бјанкијевог идентитета, односно формуле (1.22), уз малу помоћ (1.19) и (1.20) даје

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_k}\mathrm{Sc} &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j R(E_i,E_j,E_j,E_i;E_k) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \left(-R(E_j,E_k,E_j,E_i;E_i) - R(E_k,E_i,E_j,E_i;E_j)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j R(E_j,E_k,E_i,E_j;E_i) + \sum_{j,i=1}^{n} \varepsilon_j\varepsilon_i R(E_i,E_k,E_j,E_i;E_j) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i\varepsilon_j \nabla_{E_i} R(E_j,E_k,E_i,E_j) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\mathrm{Ric}(E_k,E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}(C_1 g(E_k,E_i)) = 2\nabla_{E_k}C_1.
\end{aligned}$$

Ако објединимо резултате добијамо $\nabla_{E_k}\mathrm{Sc} = n\nabla_{E_k}C_1 = 2\nabla_{E_k}C_1$, те за $n \neq 2$ имамо $\nabla_{E_k}C_1 = 0$ за свако $1 \leq k \leq n$. C_1 је константна по свим правцима и самим тим је константна. □

Лема 5.2 *Ако је (M,g) цвајштајн и $n \notin \{2,4\}$ тада је C_2 константна.*

Доказ. Како је (M,g) цвајштајн, по Теореми 3.4 за ортонормирану базу $(E_1,...,E_n)$ и $1 \leq i \neq j \leq n$ важи (3.21)

$$2\sum_{1\leq p,q\leq n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq}R_{pjjq} - 2\varepsilon_i\varepsilon_j C_2 + \sum_{1\leq p,q\leq n} \varepsilon_p\varepsilon_q (R_{pijq}+R_{pjiq})^2 = 0.$$

Уз мало сређивања уз симетрију $\sum_{p,q}\varepsilon_p\varepsilon_q(R_{pijq})^2 = \sum_{q,p}\varepsilon_q\varepsilon_p(R_{pjiq})^2$, цвајштајн једначина постаје

$$\varepsilon_i\varepsilon_j C_2 = \sum_{1\leq p,q\leq n} \varepsilon_p\varepsilon_q \left(R_{piiq}R_{pjjq} + (R_{pijq})^2 + R_{pijq}R_{pjiq}\right).$$

Ову једначину множимо са ε_j и сумирамо по j за све $j \neq i$. На десној страни додајемо и случај $j = i$, те га посебно одузимамо, при чему користимо (3.19) $\sum_{p,q}(R_{piiq})^2 = C_2$.

$$\sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} \varepsilon_i C_2 = -3\varepsilon_i C_2 + \sum_{1\leq j,p,q\leq n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q \left(R_{piiq}R_{pjjq} + (R_{pijq})^2 + R_{pijq}R_{pjiq}\right)$$

$$(n+2)\varepsilon_i C_2 = \sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q \left(R_{piiq}R_{pjjq} + (R_{pijq})^2 + R_{pijq}R_{pjiq}\right)$$

Сабирке на десној страни посебно дискутујемо. За први сабирак искористимо Ајнштајн формуле (3.11) и (3.12)

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq}R_{pjjq}\\
&\qquad= \sum_{1\le p\ne q\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q R_{piiq} \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j R_{pjjq} + \sum_{1\le p\le n} R_{piip} \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j R_{pjjp}\\
&\qquad= \sum_{1\le p\le n} R_{piip}\cdot \varepsilon_p C_1 = \varepsilon_i C_1^2.
\end{aligned}$$

Због другог сабирка дефинишемо форму $\Omega : \mathcal{X}(M)^2 \to \mathcal{F}(M)$ са

$$\Omega(X,Y) = \sum_{1\le i,j,k\le n} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k R(X,E_i,E_j,E_k)R(Y,E_i,E_j,E_k),$$

што даје

$$\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q (R_{pijq})^2 = \Omega(E_i,E_i).$$

За последњи сабирак искористимо први Бјанкијев идентитет

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q R_{pijq}R_{pjiq} &= \sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q R_{ipqj}R_{iqpj}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q (R_{ipqj}R_{iqpj} + R_{ipjq}R_{ijpq})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q (R_{ipqj}(-R_{ipjq} - R_{ijqp}) + R_{ipqj}R_{ijqp})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le j,p,q\le n} \varepsilon_j\varepsilon_p\varepsilon_q R_{ipqj}R_{ipqj} = \frac{1}{2}\Omega(E_i,E_i).
\end{aligned}$$

Објединимо претходне резултате за

$$(n+2)\varepsilon_i C_2 = \varepsilon_i C_1^2 + \Omega(E_i,E_i) + \frac{1}{2}\Omega(E_i,E_i),$$

односно

$$\Omega(E_i,E_i) = \frac{2}{3}\varepsilon_i((n+2)C_2 - C_1^2).$$

Посматрајмо $\|R\|^2 = \sum_{1\le i,j,k,l\le n} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l (R_{ijkl})^2$ и приметимо да важи

$$\|R\|^2 = \sum_{1\le i,j,k,l\le n} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l (R_{ijkl})^2 = \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \Omega(E_i,E_i) = \frac{2}{3} n((n+2)C_2 - C_1^2).$$

По Леми 5.1 C_1 је константно, те да би C_2 било константно довољно је показати константност $\|R\|^2$. Како је $\Omega(E_i,E_i) = \frac{1}{n}\|R\|^2\varepsilon_i$, то поларизација на симетричној билинеарној форми Ω даје

$$\begin{aligned}\Omega(E_i,E_j) &= \frac{1}{2}(\Omega(E_i+E_j,E_i+E_j) - \Omega(E_i,E_i) - \Omega(E_j,E_j))\\ &= \frac{1}{n}\|R\|^2\frac{1}{2}(\varepsilon_{E_i+E_j} - \varepsilon_i - \varepsilon_j) = \frac{1}{n}\|R\|^2 g(E_i,E_j).\end{aligned}$$

Посматрајмо $\sum_i \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i)$. Са једне стране је

$$\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i) = \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\frac{1}{n}\|R\|^2 g(E_k,E_i) = \frac{1}{n}\nabla_{E_k}\|R\|^2,$$

док са друге стране имамо компликованији рачун.

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i)\\ &\quad= \sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r \nabla_{E_i}(R(E_k,E_p,E_q,E_r)R(E_i,E_p,E_q,E_r))\\ &\quad= \sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_k,E_p,E_q,E_r;E_i)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\ &\quad+ \sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_k,E_p,E_q,E_r)R(E_i,E_p,E_q,E_r;E_i)\end{aligned}$$

Како други Бјанкијев идентитет даје

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i R(E_i,E_p,E_q,E_r;E_i)\\ &\quad= \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i(-R(E_i,E_p,E_i,E_q;E_r) - R(E_i,E_p,E_r,E_i;E_q))\\ &\quad= \nabla_{E_r}\left(\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i R(E_i,E_p,E_q,E_i)\right) - \nabla_{E_q}\left(\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i R(E_i,E_p,E_r,E_i)\right)\\ &\quad= \nabla_{E_r}\mathrm{Ric}(E_p,E_q) - \nabla_{E_q}\mathrm{Ric}(E_p,E_r)\\ &\quad= C_1\nabla_{E_r} g(E_p,E_q) - C_1\nabla_{E_q} g(E_p,E_r) = 0,\end{aligned}$$

то на десној страни једначине имамо

$$\sum_{1\le p,q,r\le n} \varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_k,E_p,E_q,E_r) \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i R(E_i,E_p,E_q,E_r;E_i) = 0.$$

Поново ћемо применити сличне трикове да би довршили рачун.

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i)\\
&\quad= \sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_k,E_p,E_q,E_r;E_i)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\
&\quad= -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_p,E_i,E_q,E_r;E_k)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_i,E_k,E_q,E_r;E_p)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_k,E_p,E_q,E_r;E_i)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\
&\quad= \frac{1}{2}\sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r R(E_i,E_p,E_q,E_r;E_k)R(E_i,E_p,E_q,E_r)\\
&\quad= \frac{1}{4}\nabla_{E_k}\left(\sum_{1\le i,p,q,r\le n} \varepsilon_i\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_r (R(E_i,E_p,E_q,E_r))^2\right) = \frac{1}{4}\nabla_{E_k}\|R\|^2
\end{aligned}$$

Ако објединимо резултате биће

$$\sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i \nabla_{E_i}\Omega(E_k,E_i) = \frac{1}{n}\nabla_{E_k}\|R\|^2 = \frac{1}{4}\nabla_{E_k}\|R\|^2,$$

те како је $n \neq 4$ имамо $\nabla_{E_k}\|R\|^2 = 0$ за свако $1 \le k \le n$ и коначно је $\|R\|$ константно, а самим тим и C_2. $\square$

Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M,g) дволисно Осерманова, ако је такав њен одговарајући алгебарски тензор кривине у свакој тачки многострукости. Претходне две леме повлаче наредни резултат.

Теорема 5.1 *Свака дволисно Осерманова многострукост димензије $n \geq 5$ мора бити глобално Осерманова.*

Доказ. Нека је (M, g) дволисно Осерманова многострукост таква да за $X \in \mathcal{X}(M)$ редуковани Јакобијев оператор има тачно две различите реалне сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda(p)$ и $\varepsilon_X \mu(p)$ са вишеструкостима $\sigma(p)$ и $\tau(p)$. Како смо условом $n \geq 5$ искључили непожељне случајеве, то можемо применити Лему 5.1 и Лему 5.2 по којима су C_1 и C_2 из (5.1) константне. Међутим, за свако j имамо

$$(\varepsilon_X)^j C_j(p) = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^j) = (\varepsilon_X)^j (\sigma(p)\lambda(p)^j + \tau(p)\mu(p)^j).$$

Ако поставимо $C_0 = n - 1$ имамо систем једначина

$$\begin{gathered}\sigma(p) + \tau(p) = C_0, \\ \sigma(p)\lambda(p) + \tau(p)\mu(p) = C_1, \\ \sigma(p)\lambda(p)^2 + \tau(p)\mu(p)^2 = C_2.\end{gathered}$$

Пажљивим решавањем из прве две једначине добијамо

$$\sigma = \frac{C_1 - C_0\mu}{\lambda - \mu}, \quad \tau = \frac{C_1 - C_0\lambda}{\mu - \lambda},$$

што заменом у трећу једначину постаје

$$C_1(\lambda + \mu) - C_0\lambda\mu = C_2.$$

Како је $\tau \geq 1$ то је $C_1 - C_0\lambda \neq 0$ и из претходне једначине је

$$\mu = \frac{C_2 - C_1\lambda}{C_1 - C_0\lambda}.$$

Сада можемо и преостала пресликавања изразити преко λ

$$\sigma = \frac{C_0C_2 - C_1^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}, \quad \tau = \frac{(C_1 - C_0\lambda)^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}.$$

У варијанти ове теореме у [15] захтевало се да су вишеструкости $\sigma(p)$ и $\tau(p)$ константне, међутим као што ћемо видети, то није неопходно. Основни аргумент овог оригиналног резултата је да σ може узимати само целе вредности $1 \leq \sigma \leq n - 2$, а претходно изведена веза између σ и λ каже да конкретној вредности за σ могу одговарати највише две вредности за λ које су заправо решења одговарајуће квадратне једначине. То значи да λ може имати највише $2(n-2)$ конкретних вредности. Како је $C_j(p) = \sigma(p)\lambda(p)^j + \tau(p)\mu(p)^j$, то по гореизведеним формулама $C_j(p)$ за $j > 2$ може узети највише $2(n+2)$ конкретних вредности. $C_j(p)$ је глатка, те и непрекидна, самим тим она може узети тачно једну вредност и сва пресликавања C_j морају бити константна. Сада је очигледно да су сва пресликавања (σ, τ, λ и μ) константна и многострукост је глобално Осерманова. $\square$

Напоменимо да дијагоналност у претходном доказу није неопходан услов. Заправо једна комплексна нула $\alpha(p) + i\beta(p)$ редукованог Јакобијевог оператора мора повући и њој конјуговану $\alpha(p) - i\beta(p)$ и то са једнаким вишеструкостима од $\frac{n-1}{2}$. На пример, можемо приметити да је n непарно, те сигнатура не може бити неутрална и ако је у питању Жордан Осерманова многострукост, по [18] ипак имамо дијагоналан случај. Наравно ово можемо решити и без позивања на тешке теореме, јер имамо константне $C_1 = (n-1)\alpha(p)$ и $C_2 = (n-1)(\alpha(p)^2 - \beta(p)^2)$, одакле су такве и $\alpha(p)$ и $\beta(p)$, а самим тим многострукост је глобално Осерманова.

Како смо у Последици 4.3 принцип дуалности решили за тачка по тачка Осерманове многострукости димензије $n \leq 4$, то нам Теорема 5.1 говори да нам у случају дволисно Осерманове многострукости не може помоћи услов да је многострукост глобално Осерманова. То је основни разлог зашто смо читав проблем поставили као чист алгебарски концепт са Осермановим алгебарским тензором кривине, уместо рада са глобално Осермановом многострукости и њеним тангентним раслојењем. Дакле, довољно је да се сконцентришемо на једну тачку многострукости, односно да посматрамо дволисно Осерманов алгебарски тензор кривине, што ћемо и учинити у наредним секцијама.

5.3 Дволисно Осерманов

Наредни резултати ове главе заснивају се на самосталном оригиналном раду аутора [2], а посвећени су дволисно Осермановим тензорима кривине. Напоменимо да ће ознаке које ћемо лагано уводити кроз текст важити кроз читаву главу.

Нека је R дволисно Осерманов алгебарски тензор кривине на векторском простору $\mathcal{V}$ сигнатуре $(\nu, n-\nu)$. Дијагоналност и тачно две сопствене вредности за сваки дефинитан X омогућавају нам ортогоналну декомпозицију векторског простора $\mathcal{V}$ са

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} \oplus \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu \mathrm{Id}).$$

Веома важни објекти ове главе биће потпростори $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{M}(X)$ и $\mathcal{U}(X)$ и њихове димензије које дефинишемо на следећи начин.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &= \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathrm{Id}), & \dim \mathcal{L}(X) &= \tau \\ \mathcal{M}(X) &= \mathrm{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu \mathrm{Id}), & \dim \mathcal{M}(X) &= \sigma \\ \mathcal{U}(X) &= \mathrm{Span}\{X\} \oplus \mathcal{L}(X), & \dim \mathcal{U}(X) &= \tau + 1 = n - \sigma \end{aligned}$$

Претходна декомпозиција може се сада записати са

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{X\} \oplus \mathcal{L}(X) \oplus \mathcal{M}(X) = \mathcal{U}(X) \oplus \mathcal{M}(X)$$

и произвољно $Y \in \mathcal{V}$ можемо раставити са

$$Y = \xi X + Y_L + Y_M, \quad Y_L \in \mathcal{L}(X), \; Y_M \in \mathcal{M}(X),$$

где су X, Y_L и Y_M међусобно ортогонални, јер су такви сопствени потпростори који одговарају различитим сопственим вредностима ($\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{M}(X)$). Одговарајуће пројекције можемо означити са

$$\Pi_{\mathcal{L}}(X,Y) = Y_L, \; \Pi_{\mathcal{M}}(X,Y) = Y_M, \; \Pi_{\mathcal{U}}(X,Y) = \xi X + Y_L.$$

Ево једне леме која важи за произвољан Јакобијев оператор.

Лема 5.3 *За ненула скаларе $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ важи*

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \mathcal{J}_{\gamma X + \delta Y} + \frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\delta} \mathcal{J}_X + \frac{\beta(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma} \mathcal{J}_Y.$$

Доказ. Ово је једноставан рачун по дефиницији.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y} &= \mathcal{R}(\;\cdot\;, \alpha X + \beta Y)(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathcal{J}_X + \beta^2 \mathcal{J}_Y + 2\alpha\beta \mathcal{J}(X,Y) \\ \mathcal{J}_{\gamma X + \delta Y} &= \mathcal{R}(\;\cdot\;, \gamma X + \delta Y)(\gamma X + \delta Y) = \gamma^2 \mathcal{J}_X + \delta^2 \mathcal{J}_Y + 2\gamma\delta \mathcal{J}(X,Y) \end{aligned}$$

Ако изједначимо $2\mathcal{J}(X,Y)$ из претходне две једначине имамо

$$\frac{1}{\alpha\beta}\left(\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y} - \alpha^2 \mathcal{J}_X - \beta^2 \mathcal{J}_Y\right) = \frac{1}{\gamma\delta}\left(\mathcal{J}_{\gamma X + \delta Y} - \gamma^2 \mathcal{J}_X - \delta^2 \mathcal{J}_Y\right),$$

одакле је

$$\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\mathcal{J}_{\gamma X+\delta Y} + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}\right)\mathcal{J}_X + \left(\beta^2 - \frac{\alpha\beta\delta}{\gamma}\right)\mathcal{J}_Y,$$

што доказује тврђење. □

Лема 5.4 *(О три инстанце) Нека је R дволисно Осерманов. Ако за ненула скаларе γ и δ и дефинитне X, Y и $\gamma X+\delta Y$ важи $Z \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(\gamma X+\delta Y)$, онда $Z \in \mathcal{M}(\alpha X+\beta Y)$ за све α и β за које је $\alpha X+\beta Y$ дефинитно. Ако за ненула скаларе γ и δ и дефинитне X, Y и $\gamma X+\delta Y$ важи $Z \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(\gamma X+\delta Y)$, онда $Z \in \mathcal{L}(\alpha X+\beta Y)$ за свако α и β за које је $\alpha X+\beta Y$ дефинитно.*

Доказ. Тврђење је очигледно за $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, док за $\alpha, \beta \neq 0$ можемо применити Лему 5.3. Нека је $Z \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(\gamma X+\delta Y)$.

$$\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\mathcal{J}_{\gamma X+\delta Y}(Z) + \frac{\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\delta}\mathcal{J}_X(Z) + \frac{\beta(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma}\mathcal{J}_Y(Z)$$
$$\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma X+\delta Y}\mu Z + \frac{\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\delta}\varepsilon_X\mu Z + \frac{\beta(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma}\varepsilon_Y\mu Z$$

$$= \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\big(\gamma^2\varepsilon_X + \delta^2\varepsilon_Y + 2\gamma\delta g(X,Y)\big) + \frac{\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\delta}\varepsilon_X + \frac{\beta(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma}\varepsilon_Y\right)\mu Z$$
$$\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z) = \big(\alpha^2\varepsilon_X + \beta^2\varepsilon_Y + 2\alpha\beta g(X,Y)\big)\mu Z = \varepsilon_{\alpha X+\beta Y}\mu Z$$

Како $Z \perp X$ и $Z \perp Y$ дају $Z \perp \alpha X+\beta Y$, то је $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha X+\beta Y}(Z) = \varepsilon_{\alpha X+\beta Y}\mu Z$ и $Z \in \mathcal{M}(\alpha X+\beta Y)$, чиме је доказан први део леме. Сасвим слично доказујемо и други део тврђења, јер још увек не правимо разлику између вредности λ и μ. □

Лема 5.5 *(О две инстанце) Нека је R дволисно Осерманов и нека за дефинитне A и B важи $Z \in \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B)$. Тада за свако α и β за које је $\alpha A+\beta B$ дефинитно важи $Z \in \mathcal{M}(\alpha A+\beta B)$, или постоји $N \neq 0$ такво да за свако α и β за које је $\alpha A+\beta B$ дефинитно важи $N \in \mathcal{L}(\alpha A+\beta B)$.*

Доказ. Нека $Z \in \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B)$ за дефинитне A и B, и нека су $\alpha, \beta \neq 0$ такви да је $\alpha A+\beta B$ дефинитан. Како је $Z \perp A$ (због $Z \in \mathcal{M}(A)$) и $Z \perp B$ (због $Z \in \mathcal{M}(B)$), то је $Z \perp \alpha A+\beta B$, те се Z може раставити са $Z = L_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$, где је $L_{\alpha\beta} = \Pi_{\mathcal{L}}(\alpha A + \beta B, Z) \in \mathcal{L}(\alpha A + \beta B)$ и $M_{\alpha\beta} = \Pi_{\mathcal{M}}(\alpha A + \beta B, Z) \in \mathcal{M}(\alpha A + \beta B)$. Сада је

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha A+\beta B}(Z) &= \mathcal{J}_{\alpha A+\beta B}(L_{\alpha\beta}) + \mathcal{J}_{\alpha A+\beta B}(M_{\alpha\beta}), \\ \mathcal{R}(Z, \alpha A + \beta B)(\alpha A + \beta B) &= \varepsilon_{\alpha A+\beta B}\lambda L_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha A+\beta B}\mu M_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

и након малог намештања добијамо

$$\begin{aligned} &\alpha^2\mathcal{J}_A(Z) + \beta^2\mathcal{J}_B(Z) + 2\alpha\beta\mathcal{J}(A,B)(Z) \\ &\qquad = \varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu)L_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha A+\beta B}\mu(L_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}), \\ &\alpha^2\varepsilon_A\mu Z + \beta^2\varepsilon_B\mu Z + 2\alpha\beta\mathcal{J}(A,B)(Z) \\ &\qquad = \varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu)L_{\alpha\beta} + \left(\alpha^2\varepsilon_A + \beta^2\varepsilon_B + 2\alpha\beta g(A,B)\right)\mu Z, \end{aligned}$$

што после сређивања постаје

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta\mathcal{J}(A,B)(Z) &= \varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu)L_{\alpha\beta} + 2\alpha\beta g(A,B)\mu Z, \\ \frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu)L_{\alpha\beta} &= 2\mathcal{J}(A,B)(Z) - 2g(A,B)\mu Z. \end{aligned}$$

Десна страна последње једначине

$$N = 2\mathcal{J}(A,B)(Z) - 2g(A,B)\mu Z$$

не зависи од избора α и β, одакле је

$$\frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu)L_{\alpha\beta} = N. \tag{5.2}$$

Ако је $L_{\alpha\beta} = 0$ за неке $\alpha, \beta \neq 0$, онда је $Z = M_{\alpha\beta}$, те $Z \in \mathcal{M}(\alpha A + \beta B)$. Сви услови Леме 5.4 су испуњени и зато $Z \in \mathcal{M}(\alpha A + \beta B)$ за свако α, β за које је $\alpha A + \beta B$ дефинитно.

Ако је $L_{\alpha\beta} \neq 0$ за све $\alpha, \beta \neq 0$, тада је $\frac{1}{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha A+\beta B}(\lambda-\mu) \neq 0$ и једначина (5.2) показује да су $L_{\alpha\beta}$ и N колинеарни са $0 \neq N \in \mathcal{L}(\alpha A + \beta B)$. Лема 5.4 нам омогућава да домен продужимо и на $\alpha = 0$ и на $\beta = 0$, те зато $N \in \mathcal{L}(A)$ и $N \in \mathcal{L}(B)$, што комплетира доказ. □

5.4 Квази-специјалан Осерманов

Најпознатији познати примери дволисно Осермановик алгебарских тензора кривине имају нешто заједничко, што нас мотивише да уведемо додатне заједничке услове.

Дефиниција 5.2 *За R кажемо да је квази-специјалан Осерманов ако је дволисно Осерманов и за свака два дефинитна $X, Y \in \mathcal{V}$ важи*

$$Y \in \mathcal{U}(X) \Rightarrow \mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(Y). \tag{5.3}$$

Дефиниција 5.3 *За R кажемо да је специјалан Осерманов ако је квази-специјалан Осерманов и за све дефинитне $X, Z \in \mathcal{V}$ важи*

$$Z \in \mathcal{M}(X) \Rightarrow X \in \mathcal{M}(Z). \tag{5.4}$$

Гарсија-Рио и Васкез-Лоренцо су поставили концепт специјалних Осермановских многострукости [10, 15]. Њихова оригинална дефиниција може се у нашој терминологији препознати као Дефиниција 5.3, што суштински значи дволисно Осерманов тензор кривине уз претпоставке (5.3) и (5.4). Они су уједно и успели да дају комплетну класификацију, о чему ће бити речи у Секцији 5.6.

На први поглед делује да дефиниција специјалног Осермановог тензора кривине садржи превише услова, међутим, овај рад је први озбиљан покушај да се искључи услов (5.4). Ако пажљиво гледамо можемо приметити да је услов (5.4) уско повезан са принципом дуалности. Заправо, додатни услов који од квази-специјалног Осермановог прави специјалан Осерманов управо је принцип дуалности за вредност μ. Напоменимо да сада потпростори $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{M}(X)$ играју различите улоге, док је принцип дуалности за вредност λ укључен у квази-специјалан Осерманов захваљујући веома јаком услову (5.3).

Циљ нашег рада је испитати да ли квази-специјалан Осерманов тензор кривине мора бити специјалан Осерманов. Можемо ли доказати да јаки услови за квази-специјалан Осерманов R повлаче принцип дуалности? Нажалост наш рад не пружа коначан одговор, али свакако даје добар темељ за будућа истраживања.

Напоменимо да специјални Осерманови нису једини примери дволисно Осермановых тензора кривине. На пример, можемо посматрати векторски простор $\mathcal{V}$ са скаларним производом g и кватернионском структуром, тако да је $\{J_1, J_2, J_3 = J_1 J_2\}$ канонска база те кватернионске структуре. Дефинишимо оператор кривине са $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{J_1} + \mathcal{R}^{J_2}$, где су $\mathcal{R}^{J_1}$ и $\mathcal{R}^{J_2}$ основни примери Осермановых оператора кривине које смо дефинисали у Примеру 1.2. Придружени тензор кривине тако дефинисаном $\mathcal{R}$ је дијагоналан Осерманов, чији редукован Јакобијев оператор има тачно две различите сопствене вредности: $\lambda = -3$

(вишеструкости $\tau = 2$) и $\mu = 0$. Зато је он дволисно Осерманов, међутим како за сваки јединичан X важи

$$\mathcal{U}(X) = \mathrm{Span}\{X, J_1X, J_2X\} \neq \mathrm{Span}\{X, J_1X, J_3X\} = \mathcal{U}(J_1X),$$

то он није квази-специјалан Осерманов.

Наредна лема има велики утицај на нашу теорију квази-специјалних Осерманових тензора кривине.

Лема 5.6 *(О слабој дуалности) Нека је R квази-специјалан Осерманов и нека су $A, B \in \mathcal{V}$ дефинитни. Тада је*

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{L}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{L}}(A,B)}}{\varepsilon_B}, \quad \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,B)}}{\varepsilon_B}, \quad \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(A,B)}}{\varepsilon_B}.$$

Доказ. Нека су $A = \xi_1 B + A_L + A_M$ и $B = \xi_2 A + B_L + B_M$ природна растављања са $A_L = \Pi_{\mathcal{L}}(B,A) \in \mathcal{L}(B)$, $A_M = \Pi_{\mathcal{M}}(B,A) \in \mathcal{M}(B)$, $B_L = \Pi_{\mathcal{L}}(A,B) \in \mathcal{L}(A)$ и $B_M = \Pi_{\mathcal{M}}(A,B) \in \mathcal{M}(A)$. Симетричност Јакобијевог оператора даје наредне једначине

$$\begin{gathered}
g(\mathcal{J}_A(B), B) = R(B,A,A,B) = R(A,B,B,A) = g(\mathcal{J}_B(A), A),\\
g(\mathcal{J}_A(\xi_2 A) + \mathcal{J}_A B_L + \mathcal{J}_A B_M, B) = g(\mathcal{J}_B(\xi_1 B) + \mathcal{J}_B A_L + \mathcal{J}_B A_M, A),\\
g(\varepsilon_A \lambda B_L + \varepsilon_A \mu B_M, \xi_2 A + B_L + B_M) = g(\varepsilon_B \lambda A_L + \varepsilon_B \mu A_M, \xi_1 B + A_L + A_M),\\
g(\varepsilon_A \lambda B_L, B_L) + g(\varepsilon_A \mu B_M, B_M) = g(\varepsilon_B \lambda A_L, A_L) + g(\varepsilon_B \mu A_M, A_M),\\
\varepsilon_A \varepsilon_{B_L} \lambda + \varepsilon_A \varepsilon_{B_M} \mu = \varepsilon_B \varepsilon_{A_L} \lambda + \varepsilon_B \varepsilon_{A_M} \mu,
\end{gathered}$$

и добијамо

$$(\varepsilon_A \varepsilon_{B_L} - \varepsilon_B \varepsilon_{A_L})\lambda = (\varepsilon_B \varepsilon_{A_M} - \varepsilon_A \varepsilon_{B_M})\mu. \tag{5.5}$$

Са друге стране, једначине $A = \xi_1 B + A_L + A_M$ и $B = \xi_2 A + B_L + B_M$ нам омогућавају следеће скаларне производе

$$\begin{gathered}
\varepsilon_A = \xi_1^2 \varepsilon_B + \varepsilon_{A_L} + \varepsilon_{A_M}, \;\; \varepsilon_B = \xi_2^2 \varepsilon_A + \varepsilon_{B_L} + \varepsilon_{B_M},\\
g(A,B) = \xi_1 \varepsilon_B, \;\; g(B,A) = \xi_2 \varepsilon_A.
\end{gathered}$$

Одавде је $\varepsilon_A \varepsilon_B = \xi_1^2 \varepsilon_B^2 + \varepsilon_B \varepsilon_{A_L} + \varepsilon_B \varepsilon_{A_M}$, $\varepsilon_B \varepsilon_A = \xi_2^2 \varepsilon_A^2 + \varepsilon_A \varepsilon_{B_L} + \varepsilon_A \varepsilon_{B_M}$ и $\xi_1^2 \varepsilon_B^2 = (g(A,B))^2 = \xi_2^2 \varepsilon_A^2$, а кад их објединимо добијамо

$$\varepsilon_B \varepsilon_{A_L} + \varepsilon_B \varepsilon_{A_M} = \varepsilon_A \varepsilon_B - (g(A,B))^2 = \varepsilon_A \varepsilon_{B_L} + \varepsilon_A \varepsilon_{B_M},$$

што даје

$$\varepsilon_A \varepsilon_{B_L} - \varepsilon_B \varepsilon_{A_L} = \varepsilon_B \varepsilon_{A_M} - \varepsilon_A \varepsilon_{B_M}. \tag{5.6}$$

Како је $\lambda \neq \mu$, то из једначина (5.5) и (5.6) мора бити

$$\varepsilon_A \varepsilon_{B_L} - \varepsilon_B \varepsilon_{A_L} = 0 = \varepsilon_B \varepsilon_{A_M} - \varepsilon_A \varepsilon_{B_M}$$

и одатле $\frac{\varepsilon_{A_L}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{B_L}}{\varepsilon_B}$ и $\frac{\varepsilon_{A_M}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{B_M}}{\varepsilon_B}$, што су једначине $\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{L}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{L}}(A,B)}}{\varepsilon_B}$ и $\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,B)}}{\varepsilon_B}$. На крају добијамо

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,B)}}{\varepsilon_B} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(A,B)}}{\varepsilon_B},$$

што комплетира доказ. □

Лема о слабој дуалности има важне последице, посебно у специјалним случајевима.

Последица 5.1 *Нека је R квази-специјалан Осерманов и нека су $A, B \in \mathcal{V}$ дефинитни. Тада $B \in \mathcal{L}(A) \Rightarrow \varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)} = 0$ и $B \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow \varepsilon_{\Pi_{\mathcal{L}}(B,A)} = 0$.*

Доказ. Ако $B \in \mathcal{L}(A)$, то је $\Pi_{\mathcal{M}}(A, B) = 0$ и наравно $\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,B)} = 0$. Сада по Леми 5.6 важи $\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)} = 0$, што доказује прву импликацију, а сасвим слично се доказује и друга импликација. □

Принцип дуалности за вредност λ из $B \in \mathcal{L}(A)$ повлачи $A \in \mathcal{L}(B)$, односно $A_M = 0$, док Последица 5.1 даје само $\varepsilon_{A_M} = 0$. Симетрично, принцип дуалности за вредност μ из $B \in \mathcal{M}(A)$ повлачи $A \in \mathcal{M}(B)$, односно $A_L = 0$, а Последица 5.1 даје само $\varepsilon_{A_L} = 0$. Управо то је разлог што Лему 5.6 зовемо Лема о слабој дуалности.

Једно од кључних питања у теорији квази-специјалних Осермановых тензора кривине је могуће постојање нетривијалног пресека за $\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{U}(B)$. Следеће тврђење даје нека корисна ограничења у том правцу.

Лема 5.7 *Нека је R квази-специјалан Осерманов тензор кривине. Ако за дефинитне $A, B \in \mathcal{V}$ важи $\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B) \neq 0$, тада је $\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,A)} = 0$.*

Доказ. Претпоставимо да постоји $0 \neq N \in \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B)$. Ако је N дефинитан, одмах је $A \in \mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(B)$ и важи $\Pi_{\mathcal{M}}(B, A) = 0$, те претпоставимо да је N изотропан. Изотропан $N \in \mathcal{U}(B)$ се по Леми 2.2 може раставити са $N = S + T$, где $S, T \in \mathcal{U}(B)$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Применимо Лему 5.6 на векторе S и A, а затим на векторе T и A

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,S)}}{\varepsilon_S} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(S,A)}}{\varepsilon_A}, \quad \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(A,T)}}{\varepsilon_T} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(T,A)}}{\varepsilon_A}.$$

Дефинитни $S, T \in \mathcal{U}(B)$ дају $\mathcal{U}(S) = \mathcal{U}(B) = \mathcal{U}(T)$, те и $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(T) = \mathcal{U}(B)^\perp$. Зато је $\Pi_\mathcal{M}(S, A) = \Pi_\mathcal{M}(B, A) = \Pi_\mathcal{M}(T, A)$ и

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,S)}}{\varepsilon_S} = \frac{\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,T)}}{\varepsilon_T}.$$

Како је $S = \Pi_\mathcal{U}(A, S) + \Pi_\mathcal{M}(A, S)$, то је

$$T = N - S = (N - \Pi_\mathcal{U}(A, S)) + (-\Pi_\mathcal{M}(A, S)),$$

где $N - \Pi_\mathcal{U}(A, S) \in \mathcal{U}(A)$ и $-\Pi_\mathcal{M}(A, S) \in \mathcal{M}(A)$, те $\Pi_\mathcal{M}(A, T) = -\Pi_\mathcal{M}(A, S)$. Како знак не утиче на норму $\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,T)} = \varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,S)}$, што нас доводи до

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,S)}}{\varepsilon_S} = \frac{\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,S)}}{\varepsilon_T},$$

али $\varepsilon_S = -\varepsilon_T$ даје $\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,S)} = 0$, и коначно $\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(B,A)} = 0$. $\square$

Пошто смо припремили потребне леме, сада смо спремни за предстојећи рачун. Нека је R квази-специјалан Осерманов алгебарски тензор кривине и нека су A и B произвољни дефинитни такви да $B \in \mathcal{M}(A)$. Основна идеја за коначан доказ је показати $\mathcal{U}(B) \leq \mathcal{M}(A)$, јер би то повукло $A \perp \mathcal{M}(A) \geq \mathcal{U}(B)$, са завршним $A \in \mathcal{U}(B)^\perp = \mathcal{M}(B)$ и R је специјалан Осерманов.

Започнимо причу важним потпростором $\mathcal{P}$ који дефинишемо са

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B).$$

Његову димензију можемо проценити са $\mathcal{V} \geq \mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)$, одакле је

$$\dim \mathcal{V} \geq \dim(\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B)) = \dim \mathcal{M}(A) + \dim \mathcal{M}(B) - \dim \mathcal{P}.$$

Добијамо $\dim \mathcal{P} \geq n - 2(\tau + 1)$, те је $\dim \mathcal{P}^\perp = n - \dim \mathcal{P} \leq 2(\tau + 1)$. Како $\mathcal{U}(A) \perp \mathcal{M}(A) \geq \mathcal{P}$ и $\mathcal{U}(B) \perp \mathcal{M}(B) \geq \mathcal{P}$ дају $\mathcal{U}(A) + \mathcal{U}(B) \perp \mathcal{P}$, добијамо и $\mathcal{U}(A) + \mathcal{U}(B) \leq \mathcal{P}^\perp$.

Са друге стране $B \in \mathcal{M}(A)$ значи $\Pi_\mathcal{M}(A, B) = B$, те Лема 5.6 даје

$$\varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(B,A)} = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} \cdot \varepsilon_{\Pi_\mathcal{M}(A,B)} = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} \cdot \varepsilon_B = \varepsilon_A \neq 0,$$

и по Леми 5.7 важи

$$\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B) = 0.$$

Сада је $\mathcal{U}(A)+\mathcal{U}(B)$ директна сума и зато је $\dim(\mathcal{U}(A)+\mathcal{U}(B)) = 2(\tau+1)$. Упоређујући овај са претходним резултатима ($\mathcal{U}(A)+\mathcal{U}(B) \leq \mathcal{P}^{\perp}$ са $\dim \mathcal{P}^{\perp} \leq 2(\tau+1)$) лако закључујемо $\dim \mathcal{P}^{\perp} = 2(\tau+1)$ и коначно

$$\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{U}(A) \oplus \mathcal{U}(B).$$

Ако је $X \in \mathcal{U}(B)$ дефинитан, тада је $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(B)$, а како $B \in \mathcal{M}(A)$ даје $\Pi_{\mathcal{U}}(A,B) = 0$, то по Леми 5.6 примењеној на A и X, па на A и B важи

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(A,X)}}{\varepsilon_X} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(X,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(B,A)}}{\varepsilon_A} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(A,B)}}{\varepsilon_B} = 0.$$

Дакле, $\Pi_{\mathcal{U}}(A,X)$ је изотропан за сваки дефинитан $X \in \mathcal{U}(B)$. Пројекција $\Xi : \mathcal{U}(B) \to \mathcal{U}(A)$ задата са $\Xi(Y) = \Pi_{\mathcal{U}}(A,Y)$ је линеарна и испуњава све услове Леме 2.6, те је $\Pi_{\mathcal{U}}(A,X)$ изотропан за свако $X \in \mathcal{U}(B)$, што можемо записати са

$$X = \Pi_{\mathcal{U}}(A,X) + \Pi_{\mathcal{M}}(A,X), \ \varepsilon_{\Pi_{\mathcal{U}}(A,X)} = 0. \tag{5.7}$$

Све је спремно за дефиницију важних потпротора $\mathcal{S}$ и $\mathcal{F}$ путем

$$\mathcal{S} = \{\Pi_{\mathcal{U}}(A,X) : X \in \mathcal{U}(B)\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{U}(B).$$

$\mathcal{S}$ је, као пројекција, векторски потпростор од $\mathcal{V}$. Штавише, због (5.7), $\mathcal{S}$ је скроз изотропан потпростор од $\mathcal{U}(A)$, те по Последици 2.2 важи $\dim \mathcal{S} \leq \frac{\tau+1}{2}$. Није тешко приметити да су $\mathcal{S}$ и $\mathcal{F}$ спрегнути са

$$\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{U}(B) = \tau + 1,$$

из чега важи $\dim \mathcal{F} \geq \frac{\tau+1}{2}$. Наравно, ми желимо да покажемо да је $\dim \mathcal{F} = \tau + 1$, јер онда важи $\mathcal{U}(B) \leq \mathcal{M}(A)$ што у потпуности решава постављен проблем. Претпоставимо зато да постоји неко $D \in \mathcal{U}(B)$, такво да је

$$\Pi_{\mathcal{U}}(A,D) \neq 0.$$

Лако је наћи дефинитан D са истим својством, јер ако је D изотропан, можемо га заменити са $D' = D + \theta B \in \mathcal{U}(B)$, за неко $\theta \neq 0$ за које је $\theta \neq \frac{-2g(D,B)}{\varepsilon_B}$. Тада би имали

$$\varepsilon_{D'} = \varepsilon_D + 2\theta g(D,B) + \theta^2 \varepsilon_B = \theta(2g(D,B) + \theta\varepsilon_B) \neq 0,$$

те је $D' \in \mathcal{U}(B)$ дефинитан и $\Pi_{\mathcal{U}}(A,D') = \Pi_{\mathcal{U}}(A, D + \theta B) = \Pi_{\mathcal{U}}(A,D) \neq 0$.

Сада знамо да постоји дефинитан $D = E + C \in \mathcal{U}(B)$ за који је $E = \Pi_{\mathcal{U}}(A, D) \neq 0$ и $C = \Pi_{\mathcal{M}}(A, D)$. Како је $E \in \mathcal{S}$ изотропан, то је $\varepsilon_C = \varepsilon_D$ и C мора бити дефинитан. Како је E ортогонално и на E и на C, то је $E \perp E + C = D$, те можемо применити Лему 2.3 на изотропан $0 \neq E \in \mathcal{U}(A)$ у односу на дефинитан $D \perp E$. Она нам даје растављање $E = S + T$, са $S, T \in \mathcal{U}(A)$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$, где је $D - S$ или $D - T$ дефинитан, те не умањујући општост можемо претпоставити да је, рецимо, $D - S$ дефинитан.

Како су $S \in \mathcal{U}(A)$ и $D \in \mathcal{U}(B)$ дефинитни то је

$$\mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(D) \leq \mathcal{U}(S) \cap \mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B) = 0$$

и очигледно не постоји $N \neq 0$, такво да за свако α и β за које је $\alpha D + \beta S$ дефинитно важи $N \in \mathcal{L}(\alpha D + \beta S)$, јер тврђење пада за $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$. Овим смо показали да друга варијанта Леме 5.5 није могућа, те нам примена леме за $Z \in \mathcal{P} = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(S) \cap \mathcal{M}(D)$ даје $Z \in \mathcal{M}(\alpha D + \beta S)$ за свако α и β за које је $\alpha D + \beta S$ дефинитно. Специјално за $\alpha = 1$ и $\beta = -1$, имамо по претпоставци дефинитно $D - S$ и $Z \in \mathcal{M}(D - S)$, што доказује

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{M}(D - S).$$

Ову процедуру ћемо поновити још једанпут да би дошли до жељеног резултата. Како је $\Pi_{\mathcal{M}}(T, D - S) = \Pi_{\mathcal{M}}(A, D - S) = \Pi_{\mathcal{M}}(A, D) = C$, то је $\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(T, D-S)} = \varepsilon_C \neq 0$, те по Леми 5.7 имамо $\mathcal{U}(D - S) \cap \mathcal{U}(T) = 0$. Овај резултат, као малопре, обара другу варијанту Леме 5.5 коју овога пута примењујемо на $Z \in \mathcal{P} \leq \mathcal{M}(D - S) \cap \mathcal{M}(T)$ за коначно

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{M}(D - S - T) = \mathcal{M}(C).$$

Овим смо показали $\mathcal{P} \leq \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(C)$, а како $C \in \mathcal{M}(A)$, то Лема 5.7 даје $\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(C) = 0$, те сличном техником са почетка приче добијамо

$$\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{U}(A) \oplus \mathcal{U}(C).$$

Вратимо се сада на скроз изотропан $\mathcal{S}$, где $\mathcal{S} \perp \mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \perp \mathcal{M}(A)$ дају $\mathcal{S} \perp \mathcal{S} + \mathcal{M}(A) \geq \mathcal{U}(B)$. Одавде је $\mathcal{S} \perp \mathcal{U}(B)$, те $\mathcal{S} \leq \mathcal{U}(B)^{\perp} = \mathcal{M}(B)$ за коначно $\mathcal{S} \leq \mathcal{M}(B) \cap \mathcal{P}^{\perp}$. Како је $E \in \mathcal{S}$, то је $C = D - E$ растављање са $D \in \mathcal{U}(B)$ и $-E \in \mathcal{M}(B)$. Одавде је $\Pi_{\mathcal{M}}(B, C) = \Pi_{\mathcal{M}}(B, D - E) = -E \in \mathcal{S}$ и добијамо

$$\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,C)} = 0.$$

Изотропност за $\Pi_{\mathcal{M}}(B,C)$ ће нам за свако дефинитно $X \in \mathcal{U}(B)$ и свако дефинитно $Y \in \mathcal{U}(C)$ дати изотропност и за $\Pi_{\mathcal{M}}(X,Y)$ и $\Pi_{\mathcal{M}}(Y,X)$, јер Лема о слабој дуалности (Лема 5.6) даје

$$\frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(X,Y)}}{\varepsilon_Y} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(Y,X)}}{\varepsilon_X} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(C,X)}}{\varepsilon_X} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(X,C)}}{\varepsilon_C} = \frac{\varepsilon_{\Pi_{\mathcal{M}}(B,C)}}{\varepsilon_C} = 0.$$

Дефинишимо сада потпросторе $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Z}$ са

$$\mathcal{H} = \{\Pi_{\mathcal{M}}(B,X) : X \in \mathcal{U}(C)\}, \quad \mathcal{Z} = \mathcal{U}(B) \cap \mathcal{U}(C).$$

По претходним разматрањима $\Pi_{\mathcal{M}}(B,X)$ је изотропан за све дефинитне $X \in \mathcal{U}(C)$, и линеарно $\Xi : \mathcal{U}(C) \to \mathcal{M}(B)$ задато са $\Xi(X) = \Pi_{\mathcal{M}}(B,X)$ нам по Леми 2.6 даје скроз изотропан $\mathcal{H} = \Xi(\mathcal{U}(C))$. Како је $\mathcal{U}(B) \neq \mathcal{U}(C)$, то $\mathcal{U}(B) \cap \mathcal{U}(C)$ нема дефинитних вектора и зато је и простор $\mathcal{Z}$ скроз изотропан.

Вратимо се сада на $\mathcal{P}^{\perp}$ и покажимо да је он недегенерисан. Нека је $(B_0, B_1, ..., B_\tau)$ ортонормирана база недегенерисаног простора $\mathcal{U}(B)$. Раставимо ове базне векторе помоћу $\mathcal{V} = \mathcal{U}(A) \oplus \mathcal{M}(A)$ са

$$B_i = A_i + D_i, \ A_i = \Pi_{\mathcal{U}}(A, B_i) \in \mathcal{S}, \ D_i = \Pi_{\mathcal{M}}(A, B_i) \in \mathcal{M}(A),$$

за свако $0 \leq i \leq \tau$. Добијамо

$$g(B_i, B_j) = g(A_i + D_i, A_j + D_j) = g(A_i, A_j) + g(D_i, D_j) = g(D_i, D_j),$$

одакле је $(D_0, D_1, ..., D_\tau)$ ортонормирана база простора $\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{P}^{\perp}$ и коначно је $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{U}(A) \oplus (\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{P}^{\perp})$ недегенерисан као ортогонална сума недегенерисаних простора.

$\mathcal{P}^{\perp} \geq \mathcal{U}(A)$ је недегенерисан, те је $\mathcal{M}(B) \cap \mathcal{P}^{\perp}$ недегенерисан простор димензије $\tau + 1$. Како су и $\mathcal{H} \leq \mathcal{M}(B) \cap \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}(B)$ скроз изотропни потпростори недегенерисаних простора димензије $\tau + 1$, то по Последици 2.2 важи $\dim \mathcal{Z} \leq \frac{\tau+1}{2}$ и $\dim \mathcal{H} \leq \frac{\tau+1}{2}$. Приметимо да су простори $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{H}$ спрегнути са $\dim \mathcal{Z} + \dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{U}(C) = \tau + 1$, што нас коначно доводи до

$$\dim \mathcal{Z} = \frac{\tau+1}{2} = \dim \mathcal{H}. \tag{5.8}$$

Овај резултат делује прилично чудно, тако да претпостављам да може послужити као основа за будућу контрадикцију и коначни доказ. Он решава огроман број случајева у старту. На пример, ако је τ парно $\frac{\tau+1}{2}$ није цео број и (5.8) одмах доказује наше тврђење.

5.5 Скоро-специјалан Осерманов

Како у претходној секцији нисмо успели да решимо постављени проблем, уводимо нови појам за који можемо дати потпуни резултат.

Дефиниција 5.4 *За R кажемо да је скоро-специјалан Осерманов ако је дволисно Осерманов, такав да за све дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$ важи*

$$\mathcal{U}(X) \cap \mathcal{U}(Y) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{U}(X) = \mathcal{U}(Y).$$

На основу претходних дефиниција лако је увидети да специјалан Осерманов R мора бити скоро-специјалан Осерманов, као и да скоро-специјалан Осерманов R мора бити квази-специјалан Осерманов.

Теорема 5.2 *Скоро-специјалан Осерманов алгебарски тензор кривине је специјалан Осерманов.*

Доказ. Скоро-специјалан Осерманов тензор кривине не дозвољава нетривијалне пресеке $\mathcal{U}$ простора, те мора бити $\dim \mathcal{Z} = 0$, што је у супротности са једначином (5.8) по којој уколико тензор кривине није специјалан Осерманов мора бити $\dim \mathcal{Z} = \frac{\tau+1}{2}$. □

5.6 Специјалан Осерманов

Последња секција ове главе даје приказ комплетне класификације специјалних Осермановых многострукости, односно тензора кривине, коју су урадили Гарсија-Рио и Васкез-Лоренцо [10, 15]. Доказ класификације је прилично компликован и зато га нећемо наводити.

Теорема 5.3 *Комплетна и просто повезана специјална Осерманова многострукост мора бити изоморфна једном од следећих случајева:*
1) комплексна просторна форма сигнатуре $(2p, 2q)$, $p, q \geq 0$;
2) паракомплексна просторна форма сигнатуре (p, p);
3) кватернионска просторна форма сигнатуре $(4p, 4q)$, $p, q \geq 0$;
4) паракватернионска просторна форма сигнатуре $(2p, 2p)$;
5) Кејлијева[1] раван над октанионима са дефинитном или недефинитном метриком или Кејлијева раван над анти-октанионима са сигнатуром $(8, 8)$.

[1] Arthur Cayley (1821–1895)

За крај главе описаћемо све могуће алгебарске тензоре кривине из претходне теореме. Већина тих могућности је заправо линеарна комбинација тензора из Примера 1.1 и 1.2. Да се подсетимо, у питању су оператори кривине $\mathcal{R}^0$ и $\mathcal{R}^J$ који су дефинисани са

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y,\\ \mathcal{R}^J(X,Y)Z &= g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ.\end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{R}^J(X,Y)Z$ се користи како у случају да је J комплексна структура, тако и у случају да је паракомплексна структура.

1) Комплексна просторна форма захтева егзистенцију комплексне ермитске структуре J, а оператор кривине је тада

$$\mathcal{R} = \mu\mathcal{R}^0 - \frac{\lambda-\mu}{3}\mathcal{R}^J,$$

при чему је вишеструкост вредности λ једнака $\tau = 1$.

2) Паракомплексна просторна форма захтева пара-ермитску паракомплексну структуру J ($J^2 = \mathrm{Id}$, $\dim\mathcal{V}^+ = \dim\mathcal{V}^-$, $g(X,JY)+g(JX,Y) = 0$), а оператор кривине је

$$\mathcal{R} = \mu\mathcal{R}^0 + \frac{\lambda-\mu}{3}\mathcal{R}^J,$$

при чему је $\tau = 1$, а сигнатура нужно неутрална.

3) Кватернионска просторна форма захтева кватернионску структуру са канонском базом $\{J_1, J_2, J_3\}$, а оператор кривине је тада

$$\mathcal{R} = \mu\mathcal{R}^0 - \frac{\lambda-\mu}{3}\left(\mathcal{R}^{J_1} + \mathcal{R}^{J_2} + \mathcal{R}^{J_3}\right),$$

док је $\tau = 3$.

4) Паракватернионска просторна форма захтева паракватернонску структуру са канонском базом $\{J_1, J_2, J_3\}$, где је $J_i = \omega_i\mathrm{Id}$ уз постојање две варијанте $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -1$ и $\omega_1 = -\omega_2 = -\omega_3 = -1$. Оператор кривине је тада

$$\mathcal{R} = \mu\mathcal{R}^0 + \frac{\lambda-\mu}{3}\left(\omega_1\mathcal{R}^{J_1} + \omega_2\mathcal{R}^{J_2} + \omega_3\mathcal{R}^{J_3}\right),$$

док је $\tau = 3$, а сигнатура неутрална.

5) Кејлијева раван је последња могућност, а у том случају је $\tau = 7$ и $n = 16$. У питању су хомогени простори: $F_4/SO(9)$, $F_4^2/SO(9)$, $F_4/SO^1(9)$ и $F_4^1/SO^4(9)$.

ГЛАВА 6

ОБРАТАН ПРОБЛЕМ

Мотивисани претходним резултатима стичемо утисак да су Осерманов услов и принцип дуалности у веома блиској вези, те се природно поставља следеће питање. Мора ли алгебарски тензор кривине за који важи принцип дуалности бити Осерманов? Увод у ово питање, којим се бави читава глава, налази се у Секцији 6.1. Потврдан одговор у случају димензије $n = 3$ дајемо у Секцији 6.2. У Секцији 6.3 користимо Фидлерове[1] резултате по којима се сваки алгебарски тензор кривине може расписати као линеарна комбинација тензора кривине који су генерисани косо симетричном билинеарном формом. У односу на Фидлеров распис дајемо еквивалентан услов принципу дуалности. У случају да су сви Фидлерови чланови константног знака доказујемо да за дијагоналан Осерманов тензор кривине важи принцип дуалности. У Секцији 6.4 посматрамо случај само једног Фидлеровог члана и ту доказујемо да су принцип дуалности и Осерманов услов еквивалентни.

6.1 Увод

Основни проблем којим смо се до сада бавили било је испитивање принципа дуалности за Осерманов алгебарски тензор кривине.

[1] Bernd Fiedler

На почетни услов да је тензор кривине Осерманов, постављали смо додатне услове како би барем за неке парцијалне случајеве решили следећу хипотезу.

Хипотеза 6.1 *Осерманов тензор кривине задовољава принцип дуалности.*

Као што смо до сада видели у питању је веома тежак проблем. Штавише, чак и ако појачамо тврђење (на пример захтевамо да R задовољава принцип јаке дуалности) и ослабимо претпоставку (на пример захтевамо да је R дијагоналан Осерманов) и даље смо далеко од пристојног одговора, а и не располажемо одговарајућим контрапримером. Како за сада делује да су Осерманов услов и принцип дуалности у блиској вези, у овој глави ћемо изучавати обратан проблем.

Хипотеза 6.2 *Ако за тензор кривине важи принцип дуалности онда је он Осерманов.*

Ова хипотеза била је предмет најновијег самосталног рада аутора [4] на коме је базирана читава ова глава. Наравно и приликом решавања овог питања можемо захтевати додатне услове. На пример, можемо претпоставити да је тензор кривине дијагоналан или да за њега важи принцип јаке дуалности. Да би се што боље искористила претпоставка, потребно је пронаћи што више сопствених вектора за Јакобијев оператор, на које би даље применили принцип дуалности, односно једначину (4.2). Управо то ради наредна лема која може играти велику улогу у нашем истраживању.

Лема 6.1 *Ако за* $X \perp Y$ *важи* $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ *и* $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$, *тада за све* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *важи* $\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) = \varepsilon_{\alpha X+\beta Y} \lambda(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y)$.

Доказ. Ова лема је директна последица праволинијског рачуна.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) \\
&\qquad = \mathcal{R}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y, \alpha X + \beta Y)(\alpha X + \beta Y) \\
&\qquad = \mathcal{R}(\varepsilon_Y \beta X, \beta Y)(\alpha X + \beta Y) + \mathcal{R}(-\varepsilon_X \alpha Y, \alpha X)(\alpha X + \beta Y) \\
&\qquad = -\varepsilon_Y \alpha \beta^2 \mathcal{J}_X(Y) + \varepsilon_Y \beta^3 \mathcal{J}_Y(X) - \varepsilon_X \alpha^3 \mathcal{J}_X(Y) + \varepsilon_X \alpha^2 \beta \mathcal{J}_Y(X) \\
&\qquad = \beta(\varepsilon_X \alpha^2 + \varepsilon_Y \beta^2)\mathcal{J}_Y(X) - \alpha(\varepsilon_X \alpha^2 + \varepsilon_Y \beta^2)\mathcal{J}_X(Y) \\
&\qquad = (\varepsilon_X \alpha^2 + \varepsilon_Y \beta^2)(\beta \varepsilon_Y \lambda X - \alpha \varepsilon_X \lambda Y) \\
&\qquad = \varepsilon_{\alpha X+\beta Y} \lambda(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y)
\end{aligned}$$

□

6.2 Тродимензиони случај

У овој секцији посматраћемо најједноставнији случај Хипотезе 6.2, случај димензије $n = 3$. Из Теореме 3.3, заправо из једначина (3.11), лако се види да тродимензиони Ајнштајн тензор кривине мора бити константне секционе кривине. Наравно такав мора бити и тродимензиони Осерманов тензор кривине, због чега ћемо наредну теорему формулисати на следећи начин.

Теорема 6.1 *Тродимензиони тензор кривине за који важи принцип дуалности је константне секционе кривине.*

Доказ. За примену принципа дуалности, потребан нам је пар међусобно ортогоналних јединичних вектора (X, Y), тако да је Y сопствени вектор за $\mathcal{J}_X$. Нека је (E_1, E_2, E_3) произвољна ортонормирана база за $\mathcal{V}$, за коју је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Матрица Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_{E_3}$ може се записати са

$$\mathcal{J}_{E_3} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 R_{1331} & \varepsilon_1 R_{2331} & 0 \\ \varepsilon_2 R_{1332} & \varepsilon_2 R_{2332} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

те редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_{E_3}$ има карактеристичан полином

$$\omega(x) = x^2 - (\varepsilon_1 R_{1331} + \varepsilon_2 R_{2332})x + \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1331} R_{2332} - \varepsilon_1\varepsilon_2 R_{2331} R_{1332}.$$

Дискриминанта квадратне једначине $\omega(x) = 0$ је

$$D = (\varepsilon_1 R_{1331} + \varepsilon_2 R_{2332})^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2 R_{1331} R_{2332} + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 (R_{1332})^2,$$

одакле због $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, имамо $\varepsilon_1\varepsilon_2 = (\varepsilon_1)^2 = 1$, и коначно

$$D = (\varepsilon_1 R_{1331} - \varepsilon_2 R_{2332})^2 + 4(R_{1332})^2 \geq 0.$$

За $D > 0$ квадратна једначина има два реална решења, а то су две различите сопствене вредности оператора $\tilde{\mathcal{J}}_{E_3}$, те зато постоје два (недегенерисана) једнодимензиона сопствена потпростора. У супротном је $D = 0$, што даје $\varepsilon_1 R_{1331} = \varepsilon_2 R_{2332}$ и $R_{1332} = 0$, а тада је $\tilde{\mathcal{J}}_{E_3}$ дијагоналан са двоструком нулом којој одговара дводимензиони сопствени потпростор.

У сваком случају претходна дискусија доказује постојање орнормиране базе (X, Y, Z), такве да су Y и Z сопствени вектори оператора $\mathcal{J}_X$. Валидност принципа дуалности повлачи да је X сопствени вектор за оператор $\mathcal{J}_Y$, чиме су испуњени услови Леме 6.1 и зато је $\varepsilon_Y\beta X-\varepsilon_X\alpha Y$ сопствени вектор за $\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}$. Штавише, за свако $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ уз услов $\alpha^2\varepsilon_X+\beta^2\varepsilon_Y\neq 0$, вектори $\alpha X+\beta Y$ и $\varepsilon_Y\beta X-\varepsilon_X\alpha Y$ су дефинитни и међусобно ортогонални. Симетричност Јакобијевог оператора даје

$$g(\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z),\varepsilon_Y\beta X-\varepsilon_X\alpha Y)=g(Z,\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(\varepsilon_Y\beta X-\varepsilon_X\alpha Y))=0,$$

те је $\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z)$ ортогонално и на $\varepsilon_Y\beta X-\varepsilon_X\alpha Y$ и на $\alpha X+\beta Y$, што даје $\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}(Z)\perp\operatorname{Span}\{X,Y\}=\operatorname{Span}\{Z\}^\perp$ и коначно Z је сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_{\alpha X+\beta Y}$. Принцип дуалности повлачи да је $\alpha X+\beta Y$ сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_Z$, а то је могуће само ако је $\operatorname{Span}\{X,Y\}$ дводимензиони сопствени потпростор за $\tilde{\mathcal{J}}_Z$. Слично можемо показати и да је $\operatorname{Span}\{X,Z\}$ дводимензиони сопствени потпростор за $\tilde{\mathcal{J}}_Y$. Овако смо дошли до једначина

$$\frac{R(X,Y,Y,X)}{\varepsilon_X\varepsilon_Y}=\frac{R(Y,Z,Z,Y)}{\varepsilon_Y\varepsilon_Z}=\frac{R(X,Z,Z,X)}{\varepsilon_X\varepsilon_Z}=\kappa,$$

и $R(Y,X,X,Z)=R(X,Y,Y,Z)=R(X,Z,Z,Y)=0$, које у потпуности описују R, те зато R мора бити константне секционе кривине κ. $\square$

6.3 Фидлерови тензори

У овој секцији покушаћемо да опишемо како изгледа R за које важи принцип дуалности. Нека је $(E_1,...,E_n)$ произвољна ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$, сигнатуре $(\nu,n-\nu)$. Започнимо левом страном једначине (4.2) која дефинише принцип дуалности,

$$\mathcal{J}_X(Y)=\varepsilon_X\lambda Y. \tag{6.1}$$

Дакле, Y је сопствени вектор оператора $\mathcal{J}_X$ за сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$. Јакобијев оператор можемо изразити преко тензора кривине на следећи начин,

$$\mathcal{J}_X(Y)=\mathcal{R}(Y,X)X=\sum_l\varepsilon_l R(Y,X,X,E_l)E_l.$$

Поставимо ли дефинитне $X=\sum_i\alpha_iE_i$ и $Y=\sum_i\beta_iE_i$, једначина (6.1) постаје

$$\sum_{i,j,k,l}\varepsilon_l\beta_i\alpha_j\alpha_kR_{ijkl}E_l=\varepsilon_X\lambda\sum_l\beta_lE_l,$$

одакле

$$(\forall l)\ \sum_{i,j,k} \varepsilon_l \beta_i \alpha_j \alpha_k R_{ijkl} = \varepsilon_X \lambda \beta_l.$$

У складу са радом Фидлера [14] и каснијим побољшањем од стране Гилкија [14, 16], сваки алгебарски тензор кривине R може се записати као линеарна комбинација алгебарских тензора кривине облика

$$R^{\Omega}(A,B,C,D) = 2\Omega(A,B)\Omega(C,D) + \Omega(A,C)\Omega(B,D) - \Omega(A,D)\Omega(B,C),$$

где је Ω косо симетрична билинерна форма, односно тензор реда 2 за који важи $\Omega(A,B) = -\Omega(B,A)$. Ако пређемо на координате, сваки алгебарски тензор кривине R можемо записати као коначну суму

$$R_{ijkl} = \sum_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} \frac{1}{3} \left(2\Omega_{ij}\Omega_{kl} + \Omega_{ik}\Omega_{jl} - \Omega_{il}\Omega_{jk} \right),$$

где $\varepsilon_{\Omega} \in \{-1, 1\}$. Користећи ову чињеницу, (6.1) постаје

$$(\forall l)\ \sum_{\Omega} \sum_{i,j,k} \frac{1}{3} \varepsilon_{\Omega} \varepsilon_l \beta_i \alpha_j \alpha_k \left(2\Omega_{ij}\Omega_{kl} + \Omega_{ik}\Omega_{jl} - \Omega_{il}\Omega_{jk} \right) = \varepsilon_X \lambda \beta_l.$$

Претходну формулу можемо упростити симетријама између j и k,

$$\sum_{i,j,k} \beta_i \alpha_j \alpha_k \Omega_{ik} \Omega_{jl} = \sum_{i,k,j} \beta_i \alpha_k \alpha_j \Omega_{ij} \Omega_{kl} = \sum_{i,j,k} \beta_i \alpha_j \alpha_k \Omega_{ij} \Omega_{kl},$$

$$\sum_{i,j,k} \beta_i \alpha_j \alpha_k \Omega_{il} \Omega_{jk} = \sum_{i,k,j} \beta_i \alpha_k \alpha_j \Omega_{il} \Omega_{kj} = -\sum_{i,j,k} \beta_i \alpha_j \alpha_k \Omega_{il} \Omega_{jk} = 0,$$

после чега добијамо

$$(\forall l)\ \sum_{\Omega} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{\Omega} \varepsilon_l \beta_i \alpha_j \alpha_k \Omega_{ij} \Omega_{kl} = \varepsilon_X \lambda \beta_l.$$

Суме на левој страни можемо раздвојити

$$(\forall l)\ \sum_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} \varepsilon_l \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \Omega_{ij} \sum_{k} \alpha_k \Omega_{kl} = -\varepsilon_X \lambda \beta_l,$$

што се након увођења краћих ознака

$$\Theta^{\Omega}_{PQ} = \sum_{i,j} \mu_i \nu_j \Omega_{ij},$$

за $P = \sum_i \mu_i E_i$ и $Q = \sum_j \nu_j E_j$, може записати као

$$(\forall l)\ \sum_{\Omega} \varepsilon_\Omega \Theta^\Omega_{XY} \Theta^\Omega_{XE_l} = -\varepsilon_l \varepsilon_X \lambda \beta_l. \tag{6.2}$$

Користећи (6.1) $\Leftrightarrow$ (6.2) и $\Theta^\Omega_{YX} = -\Theta^\Omega_{XY}$, добијамо еквивалентну форму за услов принципа дуалности (4.2)

$$(\forall l)\ \sum_{\Omega} \varepsilon_\Omega \Theta^\Omega_{XY} \Theta^\Omega_{XE_l} = -\varepsilon_l \varepsilon_X \lambda \beta_l \ \Rightarrow\ (\forall l)\ \sum_{\Omega} \varepsilon_\Omega \Theta^\Omega_{XY} \Theta^\Omega_{YE_l} = \varepsilon_l \varepsilon_Y \lambda \alpha_l. \tag{6.3}$$

Симпатичан резултат можемо добити ако просумирамо свих n једначина $(1 \leq l \leq n)$ из (6.2) претходно умножених са β_l. Тада добијамо

$$\sum_l \beta_l \sum_\Omega \varepsilon_\Omega \Theta^\Omega_{XY} \Theta^\Omega_{XE_l} = -\sum_l \beta_l \varepsilon_l \varepsilon_X \lambda \beta_l,$$

што након замена $\sum_l \beta_l \Theta^\Omega_{XE_l} = \Theta^\Omega_{XY}$ и $\sum_l \varepsilon_l \beta_l^2 = \varepsilon_Y$ постаје

$$\sum_\Omega \varepsilon_\Omega (\Theta^\Omega_{XY})^2 = -\varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda. \tag{6.4}$$

Зауставимо се овде да би показали интересантно тврђење у случају да су Фидлерови чланови константног знака, односно у случају када је $\varepsilon_\Omega = \mathrm{Const}$.

Теорема 6.2 *Ако је R тензор кривине са $\varepsilon_\Omega = \mathrm{Const}$, тада за њега важи принцип дуалности за вредност 0.*

Доказ. Ако је ε_Ω константног знака за све косо симетричне тензоре Ω у Фидлеровом смислу, тада једначина (6.4) даје

$$0 \leq \sum_\Omega (\Theta^\Omega_{XY})^2 = -\varepsilon_\Omega \varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda.$$

Вредност $\lambda = 0$ даје $\sum_\Omega (\Theta^\Omega_{XY})^2 = 0$, одакле је $\Theta^\Omega_{XY} = 0$ за све Ω. Формула (6.3) је очигледно задовољена, те принцип дуалности важи за вредност 0. $\square$

Теорема 6.3 *Дијагоналан Осерманов тензор кривине R са $\varepsilon_\Omega = \mathrm{Const}$ задовољава принцип дуалности.*

Доказ. Као и у претходном доказу, једначина (6.4) са $\varepsilon_\Omega = \mathrm{Const}$ даје $0 \leq -\varepsilon_\Omega\varepsilon_X\varepsilon_Y\lambda$. Како по Теореми 6.2, R задовољава принцип дуалности за вредност 0, поставимо $\lambda \neq 0$. Тада је $\varepsilon_\Omega\varepsilon_X\varepsilon_Y\lambda < 0$, што повлачи константност знака од ε_Y и доказује да сопствени потпростор оператора $\mathcal{J}_X$ за сопствену вредност $\varepsilon_X\lambda$ садржи само векторе истог типа. Дакле у сопственом потпростору оператора $\mathcal{J}_X$ нема ненула изотропних вектора и по Теореми 4.4 принцип дуалности важи. □

6.4 Једночлан Фидлер

Фидлеров запис има велику предност и пружа нам могућност да конструишемо разне алгебарске тензоре кривине. Наиме, произвољна поставка коначног броја n-димензионих косо симетричних матрица, које ће одговарати тензору Ω у координатама, генерише нам алгебарски тензор кривине. Са друге стране, у претходној секцији смо доказали да је формула (6.3) еквивалентна принципу дуалности, те се она може искористити за погодно подешавање у циљу конструисања евентуалног контрапримера за Хипотезу 6.2.

Како се рачун компликује кад се број Фидлерових чланова повећава, у овој секцији посматраћемо случај кад се Фидлерова сума састоји од само једног члана. Како овај случај очигледно потпада под Теорему 6.3, то за дијагоналан Осерманов тензор кривине важи принцип дуалности. Преостаје нам само да истражимо под којим ћемо условима евентуално моћи да конструишемо контрапример Хипотезе 6.2, односно да пронађемо тензор кривине који није Осерманов, али за који важи принцип дуалности.

Претпоставимо ли да се Фидлерова сума састоји од само једног члана добијамо значајна упрошћења. Елементе матрице $\mathcal{J}_X$ можемо видети као

$$[\mathcal{J}_X]_{pq} = \varepsilon_p R(E_q, X, X, E_p) = -\varepsilon_\Omega\varepsilon_p\Omega(X, E_p)\Omega(X, E_q),$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^k) &= \sum_{i_1,\dots,i_k} (-\varepsilon_\Omega)^k \varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_k}(\Omega(X,E_{i_1}))^2\cdots(\Omega(X,E_{i_k}))^2 \\
&= \left(\sum_i \left(-\varepsilon_\Omega\varepsilon_i(\Omega(X,E_i))^2\right)\right)^k = (\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X))^k.
\end{aligned}$$

Доказано својство $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X{}^k) = (\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X))^k$ има велики утицај на сопствену структуру Јакобијевог оператора. Наиме, ако је $\omega_X(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + ... + \sigma_{n-1}x + \sigma_n$ карактеристичан полином од $\mathcal{J}_X$, то ће по Леми 3.1 за његове коефицијенте важити једначина (3.2), те се лако проверава да у нашем случају важи $\sigma_1 = -\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$, као и $\sigma_2 = \sigma_3 = ... = \sigma_n = 0$. Претходна дискусија показује да карактеристичан полином Јакобијевог оператора мора бити

$$\omega_X(x) = x^{n-1}\left(x - \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)\right).$$

Дакле, $\mathcal{J}_X$ може имати само једну сопствену вредност различиту од нуле, она је једнострука и износи $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$.

Вратимо се на принцип дуалности, односно формулу (6.3), која у случају једног Фидлеровог члана постаје

$$(\forall l)\ \Theta_{XY}\Theta_{XE_l} = -\varepsilon_\Omega\varepsilon_l\varepsilon_X\lambda\beta_l \ \Rightarrow\ (\forall l)\ \Theta_{XY}\Theta_{YE_l} = \varepsilon_\Omega\varepsilon_l\varepsilon_Y\lambda\alpha_l, \tag{6.5}$$

док се једначина (6.4) може записати са

$$(\Theta_{XY})^2 = -\varepsilon_\Omega\varepsilon_X\varepsilon_Y\lambda. \tag{6.6}$$

Сада на располагању имамо и леву и десну страну формуле (6.5). Лева страна формуле (6.5) одређује коефицијенте β_l, самим тим и сопствени вектор Y оператора $\mathcal{J}_X$ који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X\lambda = \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) \neq 0$. Ако на то додамо (6.6) за свако $1 \le l \le n$ добијамо

$$\Theta_{XY}\beta_l = \frac{(\Theta_{XY})^2\Theta_{XE_l}}{-\varepsilon_\Omega\varepsilon_l\varepsilon_X\lambda} = \frac{-\varepsilon_\Omega\varepsilon_X\varepsilon_Y\lambda\Theta_{XE_l}}{-\varepsilon_\Omega\varepsilon_l\varepsilon_X\lambda} = \varepsilon_l\varepsilon_Y\Theta_{XE_l}.$$

Сада ћемо искористити и десну страну формуле (6.5)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\Omega\varepsilon_l\varepsilon_Y\lambda\alpha_l = \Theta_{XY}\Theta_{YE_l} &= \sum_u \Theta_{XY}\beta_u\Omega_{ul} \\
&= \sum_u \varepsilon_u\varepsilon_Y\Theta_{XE_u}\Omega_{ul} = \sum_{u,v}\varepsilon_u\varepsilon_Y\alpha_v\Omega_{vu}\Omega_{ul},
\end{aligned}$$

што после дељења са ε_Y и множења са ε_l постаје

$$\sum_{u,v} \varepsilon_u \Omega_{vu} \varepsilon_l \Omega_{ul} \alpha_v = \varepsilon_\Omega \lambda \alpha_l. \tag{6.7}$$

Како једначина (6.7) важи за свако $1 \leq l \leq n$, то се она може лакше записати у матричном формату. Ако са Ψ означимо матрицу која за елементе има $[\Psi]_{pq} = \varepsilon_q \Omega_{pq}$, а са A колону са коефицијентима $[A]_p = \alpha_p$, добијамо

$$\varepsilon_\Omega \lambda [A]_l = \sum_{u,v} [\Psi]_{vu} [\Psi]_{ul} [A]_v = \sum_v [\Psi^2]_{vl} [A]_v = [\Psi^2 A]_l,$$

што даје матрични запис

$$\Psi^2 A = \varepsilon_\Omega \lambda A. \tag{6.8}$$

Матрица Ψ^2 у потпуности је одређена матрицом Ω, док једначина (6.8) казује да она има сопствену вредност $\varepsilon_\Omega \lambda$, односно $\varepsilon_\Omega \frac{1}{\varepsilon_X} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$.

Уколико $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$ на јединичним псеудосферама узима само једну вредност, карактеристичан полином ω_X је константан и R је Осерманов. У супротном, $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$ на некој јединичној псеудосфери узима бар две различите вредности, али због непрекидности трага он узима и све вредности између, односно $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)$ на некој јединичној псеудосфери узима бесконачно много вредности. Међутим, уколико важи принцип дуалности, Ψ^2 има бесконачно много сопствених вредности, што је немогуће. Дакле, евентуалне контрапримере Хипотезе 6.2 неопходно је тражити међу Фидлеровим сумама које имају бар два члана.

ЗАКЉУЧАК

Основна тематика овог рада је испитивање принципа дуалности и јаке дуалности за Осерманов алгебарски тензор кривине, односно Осерманову многострукост. Можемо ли доказати принцип дуалности у општем случају или евентуално конструисати контрапример у којем она не важи? Овај проблем испоставља се као јако тежак и парцијалне резултате смо успели да дамо уз специфичне олакшавајуће околности. Најпре да сумирамо шта смо успели да урадимо.

Прво ограничење које смо поставили био је мали индекс ν псеудо-Риманове многострукости, односно скаларног производа. У Римановом случају ($\nu = 0$) принцип дуалности смо решили у Последици 4.2. Како је тај случај нужно дијагоналан то по Теореми 4.1 важи принцип јаке дуалности. Лоренцов случај ($\nu = 1$) базирали смо на Теореми 3.5 по којој је Осерманов тензор (као цвајштајн) константне секционе кривине, а за њега по Теореми 4.5 важи принцип јаке дуалности.

Наредни олакшавајући услов био је мала димензија. Димензија мања од 4 је или Риманова или Лоренцова, што смо већ испитали. Први нетривијални случај зато је димензија 4, односно сигнатура $(2, 2)$, где смо у Теореми 4.7 показали да важи јака дуалност. Нажалост већ у димензији 5 имамо силних потешкоћа и велики број непознатих (координатних тензора кривине) у односу на број једначина (из k-штајн услова) којима располажемо.

Последња специфичност са којом смо радили био је мали број сопствених вредности редукованог Јакобијевог оператора. Овде смо наметнули и услов дијагоналности, који је прилично природан јер по [18] Жордан-Осерманов тензор кривине мора бити дијагоналан, осим у случајевима са неутралном сигнатуром. Дијагоналност и само једна сопствена вредност нужно одређује простор константне секционе кривине и поново по Теореми 4.5 важи јака дуалност. Први нетривијалан случај је дијагоналност са две сопствене вредности који смо назвали дволисно-Осерманов. Овакав тензор кривине и даље је био далеко од решења па смо увели и додатни услов о инваријантности $\mathcal{U}$ простора који се уочава на најпознатијим примерима дволисно-Осермановиx тензора кривине и такав тензор смо назвали квази-специјалан Осерманов.

Са каквим тешким проблемима смо се ухватили у коштац демонстрира и то да чак ни под силним наметнутим условима за квази-специјалан Осерманов тензор кривине нисмо успели да у потпуности покажемо валидност принципа дуалности. Шта тек онда можемо очекивати од општег случаја? Тек са мало јачим условом који смо назвали скоро-специјалан Осерманов доказали смо принцип дуалности и самим тим показали да он мора бити специјалан Осерманов.

Наредни резултати могу се очекивати у наставку приче о квази-специјалним Осермановим тензорима кривине, јер резултати које смо дали нису уско везани са скоро-специјалим Осермановим већ решавају мноштво могућих случајева. Такође, можда би се неки резултати о принципу дуланости могли добити у сигнатури $(2, 3)$. У сваком случају аутору ових редова и даље није познат ни један контрапример Осермановог тензора кривине за који не важи принцип дуалности, па чак ни принцип јаке дуалности.

Наведени резултати навели су нас на помисао да је принцип дуалности природно својство везано за Осерманове многострукости, те смо поставили и обратну претпоставку. Ако принцип дуалности (или јаке дуалности) важи за алгебарски тензор кривине, мора ли он бити Осерманов? Потврдан одговор дали смо у димензији $n = 3$ кроз Теорему 6.1. Даљи покушај решавања ове хипотезе био је преко Фидлерових сума, где смо добили потврдан одговор у случају кад Фидлерова сума има само један члан. Наравно и овде остаје пуно нерешених питања, те за почетак можемо посматрати хипотезу у Римановом случају.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Андрејић : *Прилог теорији псеудо-Риманових Осермановиx многострукости*, магистарски рад, Београд, 2006.

[2] V. Andrejić : *Quasi-special Osserman manifolds*, Preprint (2008).

[3] V. Andrejić : *Strong duality principle for four-dimensional Osserman manifolds*, Preprint (2009).

[4] V. Andrejić : *On certain classes of algebraic curvature tensors*, SFIN XXII A1 (2009), 43–50.

[5] V. Andrejić, Z. Rakić : *On the duality principle in pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2158–2166.

[6] A. Besse : *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[7] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey : *A Note on Osserman Lorentzian manifolds*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 227–230.

[8] N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić : *Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2)*, J. Austral. Math. Soc. **71** (2001), 367–395.

[9] N. Blažić, S. Vukmirović : *Examples of self-dual, Einstein metrics of (2,2)-signature* , Math. Scand. **94** (2004), 63–74.

[10] A. Bonome, P. Castro, E. Garcia-Río, L. Hervella, R. Vázquez-Lorenzo : *Pseudo-Riemannian manifolds with simple Jacobi operators* , J. Math. Soc. Japan **54**, No.4 (2002), 847–875.

[11] Manfredo Perdigão do Carmo : *Riemannian geometry*, Boston, 1992.

[12] P. Carpenter, A. Gray, T. Willmore : *The Curvature of Einstein Symmetric Spaces*, Quart. J. Math. Oxford **33** (1982), 45–64.

[13] Q. Chi : *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 187–202.

[14] B. Fiedler : *Determination of the structure of algebraic curvature tensors by means of Young symmetrizers*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire B48d (2003).

[15] E. Garcia-Río, D. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo : *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2002.

[16] P. Gilkey : *Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor*, World Scientific, 2001.

[17] P. Gilkey : *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Imperial College Press, 2007.

[18] P. Gilkey, R. Ivanova : *Spacelike Jordan Osserman algebraic curvature tensors in the higher signature setting*, Differential Geometry, Valencia 2001, World Scientific (2002), 179–186.

[19] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke : *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacoby operator*, Quart. J. Math. Oxford **46** (1995), 299–320.

[20] A. Gray : *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1998.

[21] Y. Nikolayevsky : *Osserman manifolds of dimension 8*, Manuscripta Math. **115** (2004), 31–53.

[22] Y. Nikolayevsky : *Osserman conjecture in dimension $n \neq 8, 16$*, Math. Ann. **331** (2005), 505–522.

[23] Y. Nikolayevsky : *On Osserman manifolds of dimension 16*, Contemporary Geometry and Related Topics, Proc. Conference, Belgrade (2006), 379–398.

[24] R. Osserman : *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 731–756.

[25] R. Osserman, P. Sarnak : *A new curvature ivariant and entropy of geodesic flows*, Invent. Math. **77** (1984), 455–462.

[26] Z. Rakić : *Osserman-ove mnogostrukosti*, doktorska disertacija, Beograd, 1998.

[27] Z. Rakić : *On duality principle in Osserman manifolds*, Linear Algebra Appl. **296** (1999), 183–189.

[28] F. Schur : *Üeber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen* , Math. Annalen **27** (1886), 537–567.

[29] A. Walker : *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math. Oxford **1** (1950), 69–79.