MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

III

2

BEOGRAD
1968.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. III, broj 2 (1968/69)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE

Beograd, p. p. 791, Knez Mihailova 35/IV

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

Dr E. Stipanić (Beograd)

MARIN GETALDIĆ I NJEGOVO DELO

Povodom 400-godišnjice njegova rođenja

Ove godine se navršilo 400 godina od rođenja dubrovačkog matematičara Marina Getaldića. Tim povodom u Dubrovniku je održan, od 29. IX do 3. X, međunarodni naučni skup pod nazivom „Geometrija i algebra početkom XVII stoljeća", na kome se istakla i osvetlila uloga Getaldića u razvitku matematike i nauke uopšte.

Getaldić je rođen u Dubrovniku 2. oktobra 1568. godine. Učio je školu u Dubrovniku od 1575. do 1588. godine. U to doba dubrovačka gimnazija bila je na zavidnoj visini kvalitetom svojih nastavnika, programima nastave i organizacijom rada. U njoj je Getaldić stekao solidno znanje iz klasičnih jezika i literature i temeljno je savladao potrebna znanja iz matematike, fizike i astronomije za studije na visokoj školi. Potrebno je posebno podvući da je već tada Dubrovnik imao jasno izrađenu fizionomiju svog kulturnog života, određenu visoko razvijenom književnošću na narodnom jeziku, kao i decenijama i stolećima negovanim ukusom i smislom za umetnička ostvarenja u arhitekturi, graditeljstvu, slikarstvu i zanatstvu i vanredno razvijenim interesovanjem za filozofiju, prirodne i matematičko-fizičke nauke i astronomiju. U takvoj dubrovačkoj sredini Getaldić je našao podsticaja i pomoći za svoj rad u matematici, fizici i astronomiji.

Krajem XVI i početkom XVII stoleća Getaldić je šest godina bio na studijskom putu po zemljama zapadne Evrope: Italiji, Francuskoj, Engleskoj, Belgiji, Holandiji i Nemačkoj. Stupio je tada u dodir i sprijateljio se sa nizom istaknutih matematičara, fizičara i astronoma. U Parizu se sprijateljio sa čuvenim francuskim matematičarem onog vremena. F. Vijetom, a u Padovi sa velikim italijanskim fizičarem G. Galilejem. Getaldić je, s jedne strane, duboko ovladao geometrijom starih Grka, a s druge, prihvatio nove Vijetove ideje u algebri (upotreba slova za označavanje brojeva i promenljivih veličina i upotreba posebnih oznaka za računske operacije koje su se do tada naznačavale rečima). Zahvaljujući tome, kao i svom poznavanju Galilejeve nauke — nove mehanike i astronomije — Getaldić je, vrativši se s puta u svoj rodni grad, u razdoblju od 1603. do 1626. godine napisao na latinskom jeziku (to je tada bio zvanični jezik nauke) sedam dela iz matematike i fizike, baveći se istovremeno i eksperimentalnim radom u astronomiji, a naročito u fizici.

U istoriju fizike Getaldić je ušao svojim delima *Neki stavovi o paraboli* i *Unapređeni Arhimed*, koja je objavio u Rimu 1603. godine. U prvom delu on je, zahvaljujući tome što je otkrio neka nova svojstva parobole*, pokazao svoj postupak izrade tzv. paraboličnih ogledala, potrebnih za astronomska posmatranja. (Jedna vrsta paraboličnih ogledala su, na primer, i ogledala u farovima automobila). U drugom delu Getaldić je, kako i naslov tog dela pokazuje, na osnovu dobro poznatog Arhimedovog zakona pokazao svoju originalnu metodu određivanja specifične težine čvrstih tela i tečnosti. U tri rasprave bavio se obnavljanjem nekih izgubljenih dela velikog grčkog matematičara Apolonija.

Marin Getaldić (1568—1626)

U vremenu od 1606. do 1613. godine Getaldić je u Veneciji objavio četiri dela iz matematike, a posle njegove smrti objavljeno je u Rimu 1630. godine njegovo najznačajnije delo *O matematičkoj analizi i sintezi*. U ovom delu su prvi put sistematski korišćena slova i drugi simboli (koje je, kao što je rečeno, uveo F. Vijet) u algebarskim operacijama i njihovim primenama u proučavanju geometrijskih problema, čime je on krčio put ka sintezi algebre i geometrije, odnosno ka koordinatnoj ili analitičkoj geometriji**, koju je veliki francuski matematičar i filozof Rene Dekart inicirao 1637. godine. Takva sistematska primena algebarskih simbola i algebarskih operacija***, koju su prvi započeli Vijet i Getaldić, stvorila je uslove za dalji snažan razvitak matematike.

U tome je neprolazan istorijski značaj tog dela, preko kojeg je Getaldić trajno ušao u istoriju matematike i zauzeo značajno mesto među evropskim matematičarima prve polovine XVII veka.

Getaldić je obavljao i mnoge dužnosti u državnoj službi Dubrovačke Republike, posebno u diplomatskoj, kao poslanik kod Porte u Carigradu; bio je neraskidivo vezan za svoj rodni Dubrovnik i njemu odan; nazivao ga je „domovinom, prvom hraniteljicom svoga tela i duha", razlikujući ga tako od „tuđih zemalja" u kojima je na svom putu po Evropi boravio. Umro je u Dubrovniku 7. ili 8. aprila 1626. godine.

O b j a š n j e n j a

* Zamislite kupu čije se izvodnice neograničeno produžuju preko osnove (baze) kupe; presecite sada takvu kupu jednom ravni paralelno bilo kojoj izvodnici; tako dobijena presečna kriva zove se p a r a b o l a.

** Uprošćeno rečeno, analitička geometrija je deo matematike koji svojstva geom. figura i druge geometrijske probleme tretira pomoću algebre.

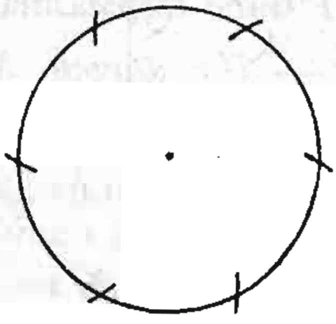
*** Neke od tih primena naučićete kasnije, u srednjoj školi, a neke znate već i sada; na primer, da bi se odredila presečna tačka dveju pravih, treba da se nađe rešenje sistema jednačina tih pravih.

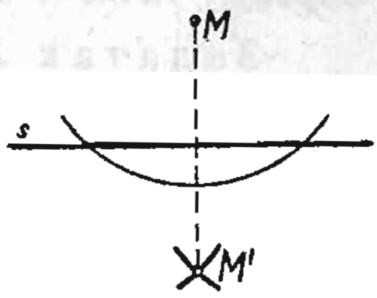
Д. Богдановић (Београд)
М. Космајац (Титоград)

РЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАТАКА САМО ПОМОЋУ ШЕСТАРА

У претходном броју »Математичког листа« (стр. 6—8) показали смо како се неки конструктивни задаци решавају само помоћу лењира.

Овде ћемо показати како се неки конструктивни задаци могу решити само употребом шестара. Иначе, таквих задатака има доста; штавише, знатан је број оних који се најједноставније решавају само помоћу шестара. Такви су, на пример, задаци: »*Поделити дату кружницу на 6 једнаких делова*« (чије вам је решење добро познато, сл. 1); »*Конструисати тачку M' симетричну датој тачки M у односу на дату праву s*«. (Из дате тачке M као центра опише се која било кружница која сече дату праву s — довољно је описати само лук кружнице — а затим истим полупречником из добијених пресечних тачака описати два кружна лука. Њихова пресечна тачка — различита од тачке M — биће тражена тачка M'; види сл. 2).

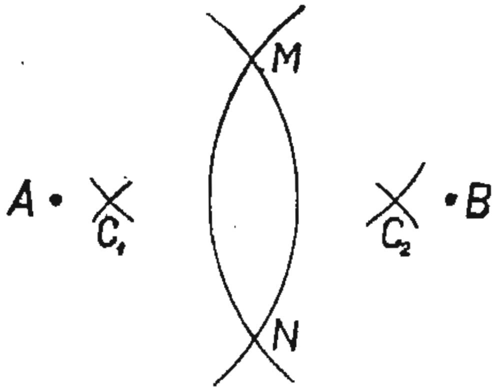

Сл. 1



Сл. 2

Израдићемо још неколико примера решавања конструктивних задатака искључиво помоћу шестара. При томе ћемо *праву сматрати конструисаном ако је познат положај двеју којих било њених тачака, јер ако су дате две тачке* A *и* B, *тада само помоћу шестара можемо конструисати колико год хоћемо (бесконачно много) тачака праве која пролази кроз* A *и* B.

Заиста, користећи се само шестаром, можемо најпре конструисати две тачке M и N које су симетричне у односу на праву AB, иако та права није повучена (у ту сврху из тачака A и B као из центара описујемо два лука тако да се секу, сл. 3). Затим из тачака M и N као из центара истим полупречником — али различитим од MB — описујемо лукове, који ће се сећи. Њихове пресечне тачке C_1 и C_2 припадају правој AB. (Докажите то!). Тај се поступак може поновити неограничено пута мењајући само отвор шестара.

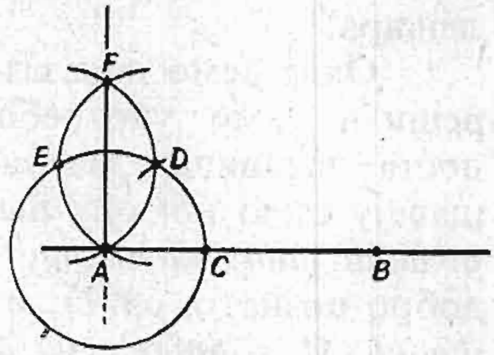


Сл. 3

Задатак 1. — *У датој тачки* A *која лежи на датој правој* AB *подићи нормалу на ту праву (само помоћу шестара).*

Решење. Потребно је конструисати још једну тачку која припада траженој нормали, јер једну већ имамо (тачку A), сл. 4.

Из тачке A као из центра описујемо кружницу произвољног полупречника AC; истим отвором шестара из тачке C описујемо лук тако да сече нацртану кружницу; добијамо тако тачку D. Из тачке D као из центра истим полупречником повлачимо лук AEF, а из тачке E као центра истим полупречником описујемо лук ADF. Права коју одређују тачке A и F биће нормална на AB. (Докажите то!).



Сл. 4

Задатак 2. — *Из тачке* M, *која је ван дате праве* s, *спустити нормалу на праву* s.

Решење. — Треба одредити још једну тачку нормале на s која пролази кроз M. Нека то буде тачка M' која је симетрична тачки M у односу на праву s. А то је добро позната конструкција на сл. 2.

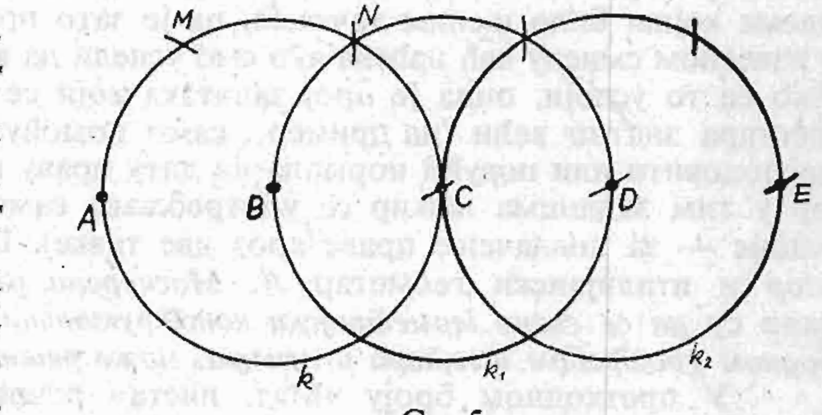
Задатак 3 — *Само помоћу шестара кроз дату тачку A повући праву паралелну датој правој, која је задана двема својим тачкама B и C, тј. конструисати тачку D такву да AD и BC леже на паралелним правим.*

Решење. — Из тачке C као из центра полупречником једнаким AB опишимо лук. Затим из тачке A као центра полупречником једнаким BC опишимо други лук (цртај слику). Пресечна тачка тих лукова биће тражена тачка D. Праве AD и BC паралелне су.

Задатак 4. — *Користећи се само шестаром увећати растојање између датих тачака четири пута.*

Решење. — Нека су A и B дате тачке. На правој AB треба наћи такву тачку E да буде $AE=4\cdot AB$.

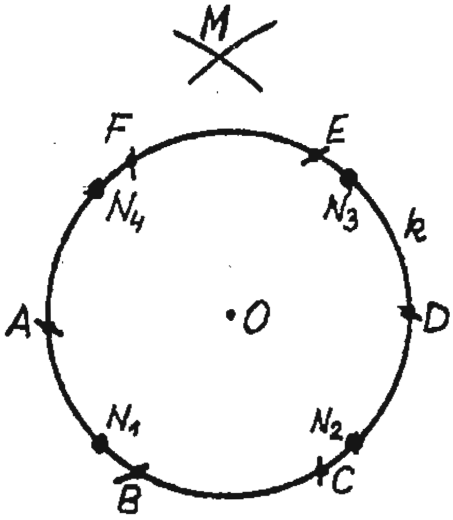
Око тачке B као центра опишимо кружницу k полупречником AB (сл. 5), а затим не мењајући отвор шестара пренесимо на ту кружницу почев од тачке A трипут узастопно тетиву једнаку AB, тј. $AM=MN=NC$. Пошто су тачке A, M, N и C четири узастопна темена правилног шестоугла уписаног у кружницу k, то је тачка C дијаметрално супротна тачки A, те је $AC=2\cdot AB$. Ако сада око тачке C опишемо кружницу k_1 полупречником BC, онда на исти начин можемо добити тачку D која је дијаметрално супротна тачки B, па је тада $AD=3\cdot AB$. Ако још једном поновимо исту конструкцију у односу на дуж CD, добићемо тачку E, такву да је растојање AE једнако четвороструком растојању AB. (Поступајући даље на исти начин може се растојање AB увећати 5, 6, 7, . . . пута).



Сл. 5

Задатак 5. — *Само помоћу шестара уписати квадрат у дату кружницу k.*

Решење. — Сматраћемо да је квадрат конструисан ако му знамо темена. Према томе, задатак се своди на то *да се дата кружница k подели на четири једнака дела*. Поделимо ту кружницу најпре на 6 једнаких делова (а то само помоћу шестара можемо учинити, сл. 1 и сл. 6). Нека су деоне тачке A, B, C, D, E и F. Тада је AD пречник кружнице k, а AC — страница једнакостраничког троугла уписаног у кружницу k. Тада је $AC = r\sqrt{3}$, где је r полупречник кружнице. (Покажите то сами!). Из тачака A и D опишимо кружне лукове полупречником једнаким AC. Нека је M њихова пресечна тачка. Троугао AOM је правоугли те је $MO^2 = AM^2 - AO^2 = AC^2 - AO^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$, одакле $MO = r\sqrt{2}$, тј. растојање MO једнако је страници квадрата уписаног у дату кружницу k. Сада остаје само да отвором шестара једнаким MO из неке тачке N_1 зарежемо кружницу k три пута да бисмо добили тачке N_2, N_3 и N_4, тј. остала три темена уписаног квадрата (сл. 6).



Сл. 6

* * *

У разматраним задацима тражене фигуре биле су тачке. Јасно је да ниједна конструкција где треба повући неку праву не може бити изведена искључиво помоћу шестара: тражена права не може се стварно и повући ако је допуштено употребити само шестар. Међутим, положај праве у равни одређен је двема којим било њеним тачкама, па је зато природно сматрати да је права у извесном смислу већ нађена ако смо успели да конструишемо две њене тачке. Ако се то усвоји, онда је број задатака који се могу решити само помоћу шестара знатно већи (на пример, само помоћу шестара може се дати угао располовити или повући нормала на дату праву која пролази кроз дату тачку, јер у тим задацима лењир се употребљава само за извођење последње операције — за повлачење праве кроз две тачке). Штавише, дански геометар *Г. Мор* и италијански геометар *Л. Маскерони* још крајем XVIII века доказали су *да се сваки геометријски конструктивни задатак који се решава слободном употребом шестара и лењира, може решити и само помоћу шестара.*

У претходном броју »Мат. листа« решили смо неколико задатака само помоћу лењира. Број задатака које на тај начин можемо решити није велики. На пример, само лењиром не може се наћи средиште дате дужи или повући права паралелна датој правој. Међутим, ови и многи други задаци могу се решити искључиво помоћу лењира ако је у равни дата нека помоћна фигура (на пример кружница којој је означен центар). Штавише, швајцарски математичар *Ј. Штајнер* је 1883. године установио да *се сваки конструктивни задатак решив помоћу шестара и лењира, може решити и само помоћу једног лењира ако је у равни конструисана нека кружница и означен њен центар* (а то значи, да се свака геометријска конструкција у равни, изводљива помоћу шестара и лењира, може извести тако да шестар употребимо највише једанпут).

Напомена. — Само помоћу шестара решите и задатке 388—389 из рубрике »Одабрани задаци« (стр. 50).

Dr M. Ilić-Dajović (Beograd)

O NIZOVIMA BROJEVA

II

1. U prvom delu ovog članka («Matem. list», III. 1) objasnili smo da se, u matematici, **nizom brojeva** ili, kratko, nizom naziva svako mnoštvo (svaki skup) brojeva koje ima to svojstvo da sve njegove članove možemo numerisati redom prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4, ... tako da svakom prirodnom broju odgovara na izvestan način po jedan od članova tog mnoštva. Brojeve sadržane u nizu nazivamo č l a n o v i m a n i z a.

Samim tim što članove niza možemo numerisati, znači da svaki član ima u nizu svoje određeno mesto. Zato je najprostije sve članove jednog niza obeležiti jednim istim slovom, a brojem pored tog slova (tzv. indeksom) naznačiti mesto na kojem se taj član nalazi; tako ćemo prvi član niza obeležiti sa a_1, drugi član sa a_2, treći sa a_3, ..., deseti sa a_{10}, a bilo koji član sa a_n (n je ovde prirodan broj). Na primer, u nizu

(1) $$1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 137$$

je $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=9$, ..., a poslednji član (zasad još ne znamo koji je on po redu) — to je broj 137 — obeležićemo sa a_n; dakle, $a_n=137$.

Dati niz ima svojstvo da mu je razlika između svaka dva uzastopna člana stalna i jednaka 4; usled toga, taj niz je *aritmetički* (*aritmetička progresija*), sa prvim članom $a_1=1$ i razlikom $d=4$. Bilo koji njegov član a_n dobija se, kao što smo videli u prvom delu ovog članka, tako što se prvom članu $(n-1)$ put doda razlika d; dakle:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\, d.}$$

U posmatranom primeru je

$$137 = 1 + (n-1) \cdot 4,$$

a odatle je $n=34$, što znači da je $137=a_{34}$ (trideset četvrti član niza).

2. Postavimo sada zadatak da nađemo zbir svih prirodnih brojeva od 1 do 100, drugim rečima, zbir svih članova niza

(2) $$1, 2, 3, 4, \ldots, 97, 98, 99, 100.$$

Tu je prvi član $a_1=1$, razlika je $d=1$, a poslednji (stoti) član je $a_{100}=100$.

Verovatno je mnogima od vas poznato kako se traženi zbir može brzo izračunati: napiše se najpre zbir od prve polovine članova niza (2), a zatim se ispod tog zbira napiše zbir od druge polovine članova, ali u obrnutom poretku:

$$\begin{aligned} &1+\ 2+\ 3+\ 4+\cdots+47+48+49+50+\\ &+100+99+98+97+\cdots+54+53+52+51 \end{aligned}$$

i sada se sabira vertikalno: $1+100=101$, $2+99=101$, zatim $3+98=101$, ..., $48+53=101$, $49+52=101$, $50+51=101$. Kad sve te zbirove saberemo, dobićemo traženi zbir:

$$50\cdot 101=5050.$$

Z a d a t a k. — Sabrati na isti način kao u prethodnom primeru: a) sve prirodne brojeve od 1 do 1000; b) sve prirodne brojeve od 1 do 9999.

3. Priznajmo da, posle tako brzog i lakog izračunavanja zbira $1+2+3+\ldots+99+100$, nismo daleko od pomisli da je taj postupak toliko lak jedino zato što je dati niz (sa razlikom 1) bio neobično prost.

Međutim, može se pokazati da se isti postupak koristi i za izračunavanje zbira uzastopnih članova bilo kojeg aritmetičkog niza. Uzećemo najpre još jedan primer:

Izračunati zbir S svih članova aritmetičkog niza

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots\ 95,\ 100,\ 105,\ 110. \tag{3}$$

Nije teško videti da taj niz ima 22 člana (kako ćete to najbrže utvrditi?); pri tom je $a_1=5$, $a_{22}=110$. Postupimo kao maločas:

$$\begin{array}{r} 5+\ 10+\ 15+\ \ldots\ +50\ +55+\\ +110+105+100+\ \ldots\ +65\ +60\\ \hline S=115+115+115+\ \ldots\ +115+115; \end{array}$$

pri tome se sabirak 115 ponavlja 11 puta; dakle, traženi zbir je

$$S=11\cdot 115=1265.$$

Mogli smo, međutim, najpre napisati

$$\begin{aligned} S&=\ \ 5+\ 10+\ 15+\ \ldots\ +100+105+110,\\ S&=110+105+100+\ \ldots\ +\ 15+\ 10+\ \ 5 \end{aligned}$$

(u drugom redu smo napisali isti zbir, ali obrnutim redom), pa zatim sabrati; dobili bismo:

$$2S=115+115+115+\ \ldots\ +115+115+115.$$

Na desnoj strani svaki sabirak 115 jednak je zbiru prvog i poslednjeg člana u zbiru: $5+110=115$; tih jednakih sabiraka ima onoliko koliko ima članova niza (to jest 22); stoga je:

$$2S=22\cdot(5+115), \qquad S=\frac{22}{2}(5+115).$$

Dakle, *zbir aritmetičkog niza od konačno mnogo članova izračunava se tako što se saberu prvi i poslednji član i dobijeni zbir najpre pomnoži brojem članova, a zatim taj proizvod podeli sa 2.*

Kako bismo, primenjujući prethodni postupak, našli čemu je jednak zbir brojeva

$$a_1+a_2+a_3 \dots +a_n,$$

gde brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ čine aritmetički niz?

Primenjujući navedeni postupak našli bismo da je

$$(*) \qquad \boldsymbol{S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

(a_1 je prvi član, a_n — poslednji član, n — broj članova).

Dobili smo **formulu** za izračunavanje zbira konačno mnogo uzastopnih članova arimetičkog niza; da bismo taj zbir mogli pomoću formule (*) izračunati, potrebno je da znamo prvi i poslednji član niza i broj članova koje treba sabrati.

P r i m e r. — Izračunati zbir svih neparnih brojeva od 1 do 99999.

R e š e n j e. — Treba najpre da utvrdimo koliko ima članova niza

$$(4) \qquad 1, 3, 5, 7, \dots, 99999,$$

to jest da odredimo koji je po redu član 99999. — Ranije smo videli da je, za niz neparnih brojeva,

$$a_n=2n-1,$$

tako da kad stavimo $2n-1=99999$, odmah dobijamo da je $n=50000$.

Sada je lako izračunati zbir S svih neparnih prirodnih brojeva od 1 do 99999:

$$S=\frac{50\,000}{2}(1+99999)=2500\,000\,000.$$

Pomislite koliko bi vremena trebalo da se redom saberu svi članovi niza (4)!

5. Polovinu zbira bilo koja dva broja nazivamo **aritmetičkom sredinom** tih brojeva. Na primer,

$$7=\frac{5+9}{2}$$

je aritmetička sredina brojeva 5 i 9; isto tako, broj 50 je aritmetička sredina brojeva 1 i 99, itd.

Aritmetički niz ima to karakteristično svojstvo da je, počev od drugog člana, svaki njegov član aritmetička sredina dva susedna ili dva od njega jednako udaljena člana.

Drugim rečima, ako je

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots$$

aritmetički niz, tada je

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2},\quad a_3=\frac{a_2+a_4}{2},\quad a_3=\frac{a_1+a_5}{2},\ \ldots$$

Evo kako ćemo to dokazati.

Znamo da je $a_2=a_1+d$; odatle je $a_1=a_2-d$. Ako napišemo: $a_3=a_2+d$, imaćemo:

$$a_1+a_3=a_2-d+a_2+d=2a_2,$$

tako da je zaista $a_2=(a_1+a_3)/2$.

Isto tako možemo pisati:

$$a_1=a_3-2d,\ a_5=a_3+2d$$

(objasni zašto), te je

$$a_1+a_5=a_3-2d+a_3+2d=2a_3,$$

a odatle je $a_3=(a_1+a_5)/2$.

6. Sada možemo brzo odgovoriti na sledeća pitanja:

1) Ako je treći član aritmetičkog niza $a_3=10$, koliki je zbir $a_1+a_3+a_5$?

2) Ako je deseti član nekog aritmetičkog niza $a_{10}=60$, koliki koliki je zbir $a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}$?

3) Koliki je zbir svih brojeva deljivih sa 10, počev od broja 10 do broja 10 000?

4) Koliki je zbir svih brojeva deljivih sa 11 počev od broja 11 do broja 3 630?

Б. Маринковић (Београд)

РЕШАВАЊЕ НЕКИХ ЈЕДНАЧИНА ПРИМЕНОМ СВОЈСТАВА АРИТМЕТИЧКИХ ОПЕРАЦИЈА

1. Једначине. — Можете ли да погодите за коју ће вредност слова x, односно y, бити тачна свака од следећих једнакости:

1) $x+15=45$, 2) $x-8=35$, 3) $17-y=9$, 4) $8\cdot x=24$, 5) $y:5=1{,}4$, 6) $18:x=3$?

У првом од наведених примера питање се може поставити и овако: „Којем броју треба додати 15 да би се добило 45?" или „Треба наћи број који сабран са 15 даје збир 45". Овако постављена питања олакшавају проналажење непознатог броја.

Поставите на сличан начин одговарајућа питања и за остале напред наведене једнакости (2—6).

Покушајте да нађете такву вредност за x за коју ће једнакост

$$4x-5=3x+1$$

бити тачна (ваљана).

Кад се између два броја или бројна израза стави знак једнакости, онда добијена једнакост може бити тачна или нетачна (уместо „тачна" каже се и „исправна", „ваљана" и сл.). Она је тачна ако обе њена стране, и лева и десна, представљају један исти број; она није тачна ако то није случај. На пример, једнакости $3+2=5$, $4:5=0{,}8$ и $2m+m=3m$ су тачне; једнакости, пак, $3+2=8$, $1/2+1/3=2/5$ нису тачне.

Претпоставимо да нека једнакост на једној својој страни (или на обе стране) садржи неко слово (променљиву) чија вредност није наведена. Таква једнакост може бити тачна за једну вредност слова а нетачна за другу. Поставимо ли као задатак да утврдимо за које вредности тог слова је једнакост тачна, онда такву једнакост називамо *једначином*, а дотично слово у том случају носи назив *непозната*. За оне бројне вредности непознате, за које једнакост постаје тачна, каже се да *задовољавају једначину*; свака таква вреднст назива се *решење* (*корен*) *једначине*. Тако, на пример, једначина $x+15=45$ за решење има број 30; једначина $5x=3x$ има решење 0. Међутим, свака једначина не мора имати решење; таква је, рецимо, једначина $1/x=0$: којим било бројем — целим или разломком-делили јединицу, увек ћемо добити број различит од нуле. Једначина $x+5=x+1$ такође нема решења (каже се и немогућа је): њена лева страна је већа од десне за 4 независно од вредности x—a. Шта мислите, може ли нека једначина да има и више од једног решења? Једначина $x+\frac{2}{x}=3$ има решење број 2, али исто тако и број 1. Уверите се сами! Једначина $2x-x=x$ има бесконачно много решења: и сами се можете уверити (путем замене) да сваки број задовољава ту једначину. Према томе, решити једначину значи одредити сва њена решења (или утврдити да их она нема). У основној школи се углавном изучавају једначине које имају једно решење.

Наћи решење једначине нагађањем није увек лако. То је чак и немогуће уколико се унапред не зна да ли решења постоје и колико их има. Зато је веома важно да се утврде правила за решавање једначина.

2. Примери решавања неких једначина на основу својстава аритметичких операција. — Утврђивање правила за решавање једначина је један од важних задатака алгебре. Нека од тих правила веома су проста*; најчешће се ту ради о једноставној примени познатих својстава рачунских операција (дефиниције и закони рачунских операција, зависност између компонената и резултата операције). Показаћемо то на примерима.

Пример 1. — *Наћи такву вредност за x да буде* $x-5=0$.

Разлика два броја једнака је нули само онда када су ти бројеви једнаки. Зато је $x=5$.

Пример 2. — *Наћи x тако да буде* $x+5=0$.

Збир два броја је једнак нули само ако су то супротни бројеви. Зато је $x=-5$.

Пример 3. — *Наћи x тако да буде* $x+15=45$.

У избору потребног правила нећемо погрешити ако задатак поставимо у облику питања, тј. онако како је то учињено у тачки 1. на почетку овог чланка. Тада је одмах јасно како ћемо наћи x: знајући збир и један од двају сабирака, други (непознати) сабирак одредићемо тако да од збира одузмемо познати сабирак:

$$x=45-14, \text{ јер}$$

непознати сабирак = дати збир — познати сабирак, па је

$$x=30.$$

Пример 4. — *Из* $x-8=35$ *имамо* $x=35+8$, јер

непознати умањеник = дата разлика + познати умањилац, тј.

$$x=43.$$

Пример 5. — *Решити једначину* $17-y=9$.

Из $17-y=9$ (односно $9+y=17$) имамо $y=17-9$, јер непознати умањилац добијамо када од познатог умањеника одузмемо познату разлику, тј. $y=8$.

Пример 6. — *Решити једначину* $8\cdot x=24$.

Другачије речено, тражи се број којим треба помножити 8 да се добије 24. Очигледно, да би се тај број одредио треба 24 поделити са 8, јер

непознати чинилац = производ : познати чинилац,

тј.

$$x=24:8,$$
$$x=3.$$

Пример 7. — *Наћи y ако је* $y:5=1{,}4$ (или $y/5=1{,}4$).

Непознат је дељеник, а он је једнак производу количника и делиоца:

$$y=1{,}4\cdot 5,$$
$$y=7.$$

Пример 8. — *Решити једначину* $18:x=3$ *или* $18/x=3$.

Питање је: којим бројем треба поделити 18 да би се добило 3? Или $3\cdot x=18$. Значи, $x=18:3$, тј. непознати делилац = дељеник : количник, па је $x=6$.

Међутим, узазстопном применом напред наведених зависности могу се решавати и много сложенији примери, па чак и неки од оних чије решавање познатим општим поступком не би било тако лако.

---

*Овде се нећемо задржавати на својствима једнакости и једначина, нити ћемо излагати општи поступак за решавање лин. једначина, јер сте то радили на часовима, а имате и у својим уџбеницима.

Ево неких примера.

П р и м е р 9. — *Решимо једначину* $17x+23=57$.

Питамо се: Којем броју треба додати 23 да би се добило 57? Када се зна збир и други сабирак, онда се први сабирак добија одузимањем: $57-23$, тј, 34. Дакле је: $17x=34$. Питање: Који број треба помножити са 17 да би се добило 34? Када се знају производ и један чинилац (фактор), други се чинилац одређује помоћу дељења: у нашем случају он је $34:17$, тј. 2. Дакле, $x=2$.

П р о б а. — Заиста је $17\cdot 2+23=34+22=57$.

П р и м е р. 10 — *Наћи x ако је* $[(3x+290)\cdot 12-60]:75=48$.

Последња операција у изразу на левој страни јесте дељење (Питање: Који број треба поделити са 75 да би се добило 48?). Израз у средњој загради, који садржи тражено x, представља дељеник. Он ће бити једнак производу датог количника и делиоца, тј.

$$(3x+290)\cdot 12-60=48\cdot 75 \text{ или}$$
$$(3x+290)\cdot 12-60=3600.$$

На левој страни сада као последњу операцију имамо одузимање (Питање: Од којег броја треба одузети 60 да би се добило 3600?). Непознат је умањеник, али га лако израчунавамо додајући познатој разлици познати умањилац. Дакле:

$$(3x+290)\cdot 12=3600+60,$$
$$(3x+290)\cdot 12=3660.$$

Питамо се: Који број треба помножити са 12 да би се добило 3660? Израз у загради представља непознати чинилац, који ћемо лако израчунати:

$$3x+290=3660:12,$$
$$3x+290=305.$$

Непознати сабирак ($3x$) лако ћемо добити када од збира (305) одузмемо други сабирак (290), тј.

$$3x=305-290,$$
$$3x=15.$$

Одавде x добијамо као непознати чинилац (фактор) кад знамо други чинилац и производ. (Који број треба помножити са 5 да би се добило 15?). Одговор је јасан: треба 15 поделити са 3, тј.

$$x=15:3,$$

па је коначно,

$$x=5.$$

Заменом у датој једначини лако се уверавамо да број 5 заиста представља њено решење, јер је $[(3\cdot 5+290)\cdot 12-60]:75$ једнако 48.

П р и м е р 11. — *Наћи x из* $0{,}24:\left[\dfrac{0{,}5\,x-1{,}8}{0{,}15}+1{,}2\right]=0{,}02$.

Имаћемо редом:

$$\frac{0{,}5\,x-1{,}8}{0{,}25}+1{,}2=0{,}24:0{,}02$$

(израчунавање непознатог делиоца),

$$\frac{0{,}5\,x-1{,}8}{0{,}25}+1{,}2=12,$$

$$\frac{0{,}5\,x-1{,}8}{0{,}25}=12-1{,}2$$

(израчунавање непознатог сабирка),

$$\frac{0{,}5\,x-1{,}8}{0{,}25}=10{,}8,$$

$$0.5x-1{,}8=10{,}8\cdot 0{,}25$$

(израчунавање непознатог дељеника),

$$0{,}5x-1{,}8=2{,}7$$
$$0{,}5x=2{,}7+1{,}8$$

(израчунаванье непознатог умањеника),

$$0{,}5x=4{,}5:0{,}5$$
$$x=4{,}5:0{,}5$$

(израчунавање непознатог чиниоца),

$$x=9.$$

Уверите се да добијена вредност за x заиста задовољава дату једначину.

Напомена. — Да нисмо поједине операције одмах обављали, већ само назначивали, решење би било дато следећим бројним изразом, који се на основу дате једначине, а с обзиром на редослед рачунскех операција, може одмах написати:

$$x=\{[(0{,}24:0{,}02)-1{,}2]\cdot 0{,}25+1{,}8\}:0{,}5 \text{ или,}$$

кад се обаве рачунања,

$$x=9.$$

Пример 12. — *Наћи такве вредности x за које ће бити исправна једнакост* $(x-2)(x-5)(x+4)=0$.

Производ је једнак нули тада и само тада када је бар један од чинилаца једнак нули, а остали чиниоци су било који бројеви. Зато ће дата једнакост бити исравна било да је $x-2=0$, било да је $x-5=0$ или, пак, кад је $x+4=0$, тј. једнакост ће бити исправна или за $x=2$, или за $x=5$ или, на крају, за $x=-4$. Ни за коју другу вредност за x дата једнакост неће бити ваљана.

Напомена. — На основу правила аритметике (дефиниције и особине рачунских операција) решите задатке 372—378. у рубрици „Одабрани задаци" (стр. 48).

ZADACI

Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole

Beograd, 14. VI 1968.

I grupa

1. Izračunati: $(2-0{,}25\cdot 0{,}8):(0{,}1+0{,}16\cdot 0{,}5)$. [10]

2. Izraz $3x-\frac{k+1}{2}$ ima vrednost 1,5 za $x=-0{,}5$.

Kolika je vrednost datog izraza za $x=-1$? [$k=-7$; 0]

3. Površina kopna na Zemlji iznosi 149 000 000 km², što čini 29,2% ukupne površine Zemlje. Kolika je površina Zemlje? [$\approx$ 510 000 000 km²]

4. Dat je jednakokraki trapez $ABCD$ čije su paralelne stranice 12 cm i 6 cm, a krak mu je 5 cm. Spojimo redom središta svih stranica tog trapeza. Kolika je površina nastalog četvorougla? U kojoj razmeri stoji površina tog četvorougla prema površini datog trapeza? [18 cm²; 1:2]

5. Limene kutije za konzerve imaju oblik valjka. Visina im je 12 cm, a prečnik 14 cm. Koliko kvadratnih metara lima treba da bi se izradilo 100 takvih kutija (zatvorenih), ako se na otpatke računa 10%? [$\approx$9,38 m²;]

II grupa

1. Izračunati: $(0{,}72-0{,}12:0{,}2):\left(0{,}02+\frac{1}{5}\right)$. [$6/11=0{,}\dot{5}\dot{4}$]

2. Izraz $4x-\frac{m-2}{3}$ ima vrednost -1 za $x=-\frac{1}{2}$.

Kolika je vrednost tog izraza za $x=-0{,}25$? [$m=-1$; 0]

3. Površina kopna na Zemlji odnosi se prema površini koju zauzima voda kao 5 : 12. Kopno zauzima približno 150 000 000 km². Koliku površinu zauzima voda? Izrazi to i u procentima u odnosu na ukupnu površinu Zemlje. [360 000 000 km²; $\approx$70,6%]

4. Dat je pravougaonik $ABCD$ čije su stranice 10 cm i 6 cm. Neka je tačka M središte stranice AB, a N — središte stranice DC. Spojimo M sa temenima C i D, a N — sa temenima A i B. Neka se MC i NB seku u tački P, a AN i DM — u tački Q.

Izračunati površinu dobijenog četvorougla $MPNQ$.

U kojoj razmeri stoje površina tog četvorougla i površina datog pravougaonika? [$P=15$ cm²; 1 : 4]

5. Otvoreni levak oblika kupe visine 8 cm i prečnika osnove 12 cm izrađen je od plastične mase. Koliko kvadratnih metara plastike je potrebno da bi se izradilo 1 000 takvih levkova, ako se na otpad računa 5%? [$\approx$ 31,6 m²]

Napomena. — Svaki je zadatak ocenjivan sa 0 do 5 bodova; za sasvim tačno izrađeni zadatak davano je 5 bodova, što znači da je maksimalni broj bodova 25.

Preporučujemo vam da samostalno rešite sve napred navedene zadatke. Da biste svoj rad mogli kontrolisati, za svaki zadatak smo naveli i rezultat.

Одабрани задаци

Ови задаци (а има их за сваки разред) треба да вам послуже за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати, упутства и решења нека вам служе за контролу.

Аритметика

У следећим задацима (364—368) израчунавања треба извршити на најједноставнији начин, чак и напамет. Потребно је само да примените одговарајућа својства (законе) рачунских операција или њихове последице.

364. $1720+863+280+137$ [3000]

365. $1016+704+250+884+296$ [3250]

366. $3654+2487+2561+(2346+7513+439)$ [19000]

Упутство. — Применом комутативног и асоцијативног закона сабирања може се извршити погодно груписање чланова:

$$(3654+2346)+(2487+7513)+(2561+439)=6000+10000+3000=19000.$$

367. $43\cdot 9{,}24+32\cdot 9{,}24+25\cdot 9{,}24$. [$100\cdot 9{,}24=924$]

368. Производ $240\cdot 23$ поделити са 48 (на два начина).

369. Дата су четири броја: 324, 54, 12 и 6.

Помоћу знакова аритметичких операција и заграда изразити сваки од следећих захтева и израчунати састављене бројне изразе:

a) Од суме прва два броја одузети суму друга два броја.

b) Суму прва два броја помножити сумом друга два.

c) Разлику првог и другог поделити сумом трећега и четвртог.

d) Производ прва два броја поделити разликом друга два.

370. Не сводећи на заједнички именилац, утврдити који је разломак већи: $\frac{95}{147}$ или $\frac{19}{29}$. [Већи је 19/29; проширите други разломак са 5]

371. На најједноставнији начин утврдити да су разломци $\frac{23}{99}, \frac{2323}{9999}, \frac{232323}{999999}$ једнаки међу собом.

Упутство. — Ако се први разломак прошири са 101, добиће се други разломак. Дакле?

На основу својстава рач. операција наћи x у задацима. 372—378:

372. a) $15036-x=7204$; b) $5\cdot(8+x)=55$ [3]

373. $[(x+2)\cdot 81-3530]\cdot 21=714$ [42] **374.** $0{,}2:(x+1)=0{,}1$ [1]

375. $\{[(8x-98):2+56]\cdot 36-268\}:500=4$ [14]

376. $4\left(\frac{3x+2}{5}-1\right)=32$ [11] **377.** $220:\left[112-\frac{100-3x}{23}\right]=2$ [18]

378. $66{,}6:\left(5+3{,}2:\frac{0{,}8-0{,}4x}{0{,}5}\right)-7{,}15=0{,}25$ [1]

379. Напишите следеће изразе тако што ћете уместо знака дељења „:" употребити разломачку црту:

1) $(a-b):(a-b)$; 2) $(a-b):a-b$; 3) $a+b:(a-b)$; 4) $a+b:a-b$;
5) $(a-b):c-(d-k)$; 6) $a-b:c-(d-k)$.

Овај је задатак поучан за разумевање улоге заграда и разломачке црте. Зато наводимо решење.

1) $\dfrac{a-b}{a-b}$; 2) $\dfrac{a-b}{a}-b$; 3) $a+\dfrac{b}{a-b}$; 4) $a+\dfrac{b}{a}-b$;

5) $\dfrac{a-b}{c}-(d-k)$; 6) $a-\dfrac{b}{c}-(d-k)$.

380. Број свих фудбалских утакмица за првенство Југославије, које се игра двокружно (свака два тима играју међусобно двапут: у јесен и у пролеће), може се наћи по формули $N=k(k-1)$, где је N-број свих утакмица, k-број клубова I савезне лиге. Попунити следећу таблицу:

k	10	12	14	16	18
N					

381. Разлика квадрата двају узастопних непарних бројева је 176. Који су то бројеви? [43 и 45]

Решење. — Сваки непарни број може се написати у облику $2m+1$, где је m какавгод цео број (нпр. за $m=0$ имамо 1, за $m=1$ имамо 3, за $m=2$ добијамо 5, итд.). Непарном броју $2m+1$ узастопни непарни број је $(2m+1)+2=2m+3$. Према услову задатка мора бити:

$$(2m+3)^2-(2m+1)^2=176.$$

На левој страни је разлика квадрата, те можемо даље писати:

$$(2m+3+2m+1)\cdot(2m+3-2m-1)=176 \text{ или}$$

$$(4m+4)\cdot 2=176 \text{ или } 8(m+1)=176, \text{ тј.}$$

$$m+1=22, \text{ одакле је } m=21.$$

Тражени бројеви су: $2\cdot 21+1=43$ и $2\cdot 21+3=45$ и заиста је $45^2-43^2=176$.

382. За које вредности x је израз $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ негативан?

Решење. — Израз x^2 је позитиван број за сваку вредност x (јер је квадрат сваког броја позитиван број), па је и читав именилац x^2+1 увек позитиван. Према томе, дати разломак ће бити негативан само кад је његов бројилац, тј. израз $x-1$, негативан број. Разлика $x-1$ биће негативна (то записујемо овако: $x-1<0$) када је умањеник (x) мањи од умањиоца (1), дакле за $x<1$ (читај: за све бројеве мање од 1).

Геометрија

383. Колико најмање правих треба да повучеш да би оне раван разложиле на 7 поља. Колико је ограничених, а колико неограничених поља?

Упутство. — Праве треба да образују један троугао.

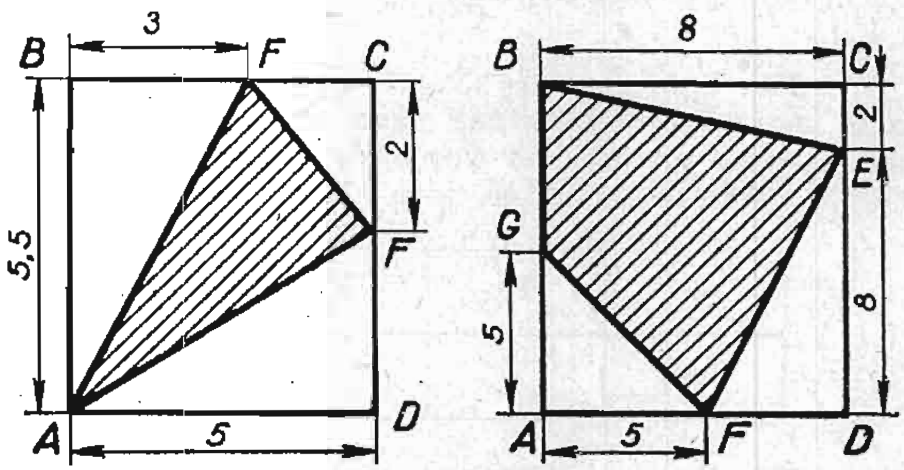
384. Могу ли узастопне странице четвороугла бити једнаке 2; 3; 4 и 9?

Одговор. — Не могу. Повлачећи у том четвороуглу дијагоналу, добијамо да је збир двеју страница троугла мањи од треће странице, што није могуће.

385. Конструиши једнакостранични троугао чији је обим $6\sqrt{2}$ cm.

Упутство. — Страница тог троугла једнака је дијагонали квадрата странице 2 cm. Значи, прво ћеш конструисати тај квадрат. Онда?

386. Израчунајте површине шрафириних фигура на овим цртежима и изразите их у процентима у односу на површине целих фигура. Потребни подаци су већ убележени.

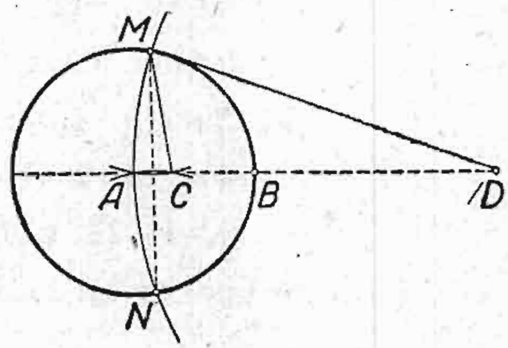


387. Паралелограм и правоугаоник имају једнаке обиме и једнаке основице. Која од тих фигура има већу површину?

Одговор. — Површина правоугаоника је већа, јер је $h<b$ и зато је $a \cdot b > a \cdot h$.

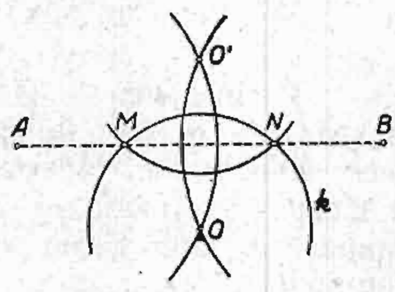
388. Дату дуж AB поделити на три једнака дела само помоћу шестара.

Конструкција је дата на слици: A и B — дате тачке, $AD = 3 \cdot AB$, M и N — пресечне тачке кружница описаних око A и D полупречницима AB односно DA; C — пресечна тачка кружних лукова описаних око M и N полупречникам MA односно NA. Дуж AC једнака је трећини дужи AB. Дајте образложење ове конструкције! Види чланак на стр. 35—38.



389. Дате су две тачке A и B и кружница k. Одредити пресечне тачке праве AB и кружнице k не повлачећи праву AB.

Решење. — Дато је на слици десно. Дајте образложење!



Konkursni zadaci*

55. U spisima jednog matematičara-zanesenjaka bila je nađena njegova autobiografija u kojoj on, između ostalog, piše sledeće:

„Završio sam fakultet kad sam imao 44 godine. Posle godinu dana, kao mladić od 100 godina oženio sam se 34-godišnjom devojkom. Neznatna razlika u godinama, svega 11 godina, doprinela je da smo živeli srećno i složno. Posle nekoliko godina imao sam već i malu porodicu od 10-oro dece. Plata mi je bila 13 000 n. dinara mesečno, ali sam od toga 1/10 davao sestri (na studijama), tako da mi je za izdržavanje porodice ostajalo samo 11 200 n. dinara mesečno..."

Neobična autobiografija, zar ne? Kako ćete objasniti očigledne „nelogičnosti" u toj autobiografiji? Kako ustvari navedeni odlomak iz autobiografije treba da glasi?

56. Sam lav može da pojede ovcu za 2 sata, vuk za 3 sata, a pas za 6 sati. Za koje vreme bi oni zajedno pojeli ovcu?

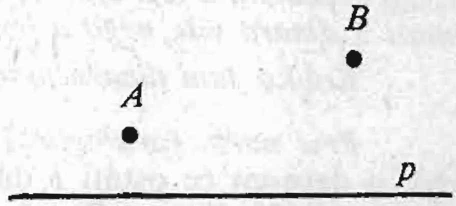
57. Neki čovek ide uz brdo iz A u B brzinom 2 km na sat, a zatim, ne zadržavajući se u B (na vrhu brda), vraća se (niz brdo) istim putem u A brzinom 6 km na sat.

Odrediti njegovu srednju brzinu na celom putu (tamo i nazad).

58. Naći sve razlomke s jednocifrenim imeniocem od kojih je svaki veći od 7/9 a manji od 8/9.

59. Izračunati uglove trougla ABC ako ugao između visine povučene iz temena C i simetrale ugla ACB iznosi 9°, a ugao između simetrala spoljašnjih uglova trougla kod temena A i B iznosi 61°.

60. Na datoj pravoj p (v. sliku!) naći tačku C takvu da zbir rastojanja od nje do datih tačaka A i B bude najmanji. Dati obrazloženje konstrukcije.



61. Koji celi brojevi postaju 14 puta manji kada im se izostavi (precrta) poslednja cifra?

N a p o m e n a. — Učenici V razreda mogu rešavati zadatke 55—57, učenici VI i VII razreda zadatke 55—60, a učenici VIII razreda — sve zadatke.

---

* Rešite ove zadatke i rešenja pošaljite uredništvu „Matematičkog lista". Najbolja rešenja, a takođe i imena svih učenika koji su sve zadatke ili neke od njih sasvim tačno rešili, objaviće se u listu.

Najboljim rešavateljima za svaki razred dodeliće se *nagrade* na kraju školske godine.

Fond za nagrade rešavateljima konkursnih zadataka ove godine je povećan.

Svako rešenje (s tekstom i rednim brojem zadatka) treba pisati na jednoj strani papira. Svako rešenje treba čitljivo potpisati punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu i mesto, na primer: *Ivan Radović*, uč. $VIII_3$ raz. Osnovne škole „Učitelj Tasa", Niš.

Zadatke rešavajte s a m o s t a l n o ne tražeći pomoć ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite o b r a z l o ž e n o i č i t k o. Neuredna, načitljiva rešenja i rešenja (rezultati, odgovori) bez obrazloženja neće se uopšte uzimati u obzir.

Rešenja zadataka iz ovog broja poslati najkasnije do 10. I 1969. godine.

Adresa: „Matematički list", Beograd, p.p. 728

Na koverti naznačiti: *Konkursni zadaci.*

Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista" III. 1

49. *Dva su ribara pošla zajedno u ribolov. Jedan je ulovio 5 riba, a drugi 3 ribe. Kada su počeli da ih peku, naiđe neki putnik i upita ih da li može da doručkuje s njima zajedno, pa će im za to platiti. Ribari su na to pristali, te sva trojica sedoše da doručkuju, podelivši ribu na tri jednake porcije. Posle doručka putnik dade ribarima 8 dinara. Kako će ribari međusobno (ali pravedno) da podele taj novac?*

Neki rešavatelji su jednostavno odmah odgovorili da će jedan ribar dobiti 5 dinara, a drugi 3 dinara, svodeći tako rešavanje zadatka na proporcionalnu podelu i ne misleći da bi ribari u tom odnosu mogli podeliti dobijeni novac jedino u slučaju da su svu ulovljenu ribu prodali putniku; međutim, oni su i sami u istoj meri učestvovali u doručku.

Trebalo je rasuđivati ovako. Putnik je platio 8 dinara za 1 porciju, tj. za jednog učesnika u jelu, pa je, znači, sva ulovljena riba (tj. sve tri porcije) vredela 8 din. $\cdot 3 = 24$ din. Odatle sledi da je vrednost jedne ribe bila 24 din. $: 8 = 3$ din.

Prema tome, ulov prvog ribara vredeo je 3 din. $\cdot 5 = 15$ din., ali kako je on sam takođe pojeo ribe za 8 dinara, to će on od tog novca dobiti 15 dinara $-$ 8 dinara $= 7$ dinara, pa je jasno da će drugi ribar dobiti 8 dinara $-$ 7 dinara $= 1$ dinar. Zaista, ulov drugog ribara vredeo je 3 dinara $\cdot 3 = 9$ dinara, ali kako je od toga i sam pojeo ribe za 8 dinara, to će moći da dobije samo 1 dinar.

Dakle, pravilan odgovor glasi: Jedan ribar će dobiti 7 dinara, a drugi 1 dinar!

Božidar Stamenković, V_1, OŠ „B. S." Guberevac kod Leskovca

50. *U levom i desnom džepu kaputa imam ukupno 35 dinara. Ako iz desnog džepa prebacim u levi onoliko dinara koliko ih je bilo u levom, onda ću u desnom džepu imati 3 dinara više nego u levom.*

Koliko sam dinara prvobitno imao u svakom džepu?

Prvi način (aritmetički). — Posle prebacivanja 3 dinara iz desnog džepa u levi, u desnom će ostati 3 dinara više nego što će ih biti u levom. U oba džepa je bilo svega 35 dinara. Poznato je: ako se jedan sabirak umanji za 3 jedinice onda će se i suma umanjiti za 3 jedinice. Znači, oduzevši »višak« od 3 dinara (u desnom džepu), ostaje u oba džepa 35 dinara -3 din. $=32$ dinara; dakle, u levom džepu posle prebacivanja dinara ima 32 dinara $:2 = 16$ dinara, a u desnom 16 dinara $+ 3$ dinara $= 19$ dinara.

Međutim, u levom džepu bilo je 16 dinara tek kad je u njega stavljeno onoliko dinara koliko je i do tada u njemu bilo. Odatle je onda lako saznati da je u levom džepu prvobitno bilo 16 dinara $:2 = 8$ dinara. Ostali novac bio je u desnom džepu.

Prema tome, prvobitno je u desnom džepu bilo 27 dinara, a u levom 8 dinara.

Milan Lazarević, VI OŠ „B. Perić", Rudna Glava

Drugi način (pomoću jednačine). — Neka je prvobitno u levom džepu bilo x dinara. Tada je u desnom džepu bilo $35-x$ dinara, jer je ukupno bilo 35 dinara. Kad se iz desnog džepa prebaci u levi onoliko dinara koliko ih je već tu bilo, tj. x, onda će u desnom džepu ostati $(35-x)-x$ dinara, a u levom će ih onda biti $x+x$ tj. $2x$. Imajući u vidu da je sada suma u desnom džepu veća za 3 dinara od one u levom, imaćemo:

$$2x = 35 - 2x - 3$$

Kada tu jednačinu rešimo, dobijamo da je $x=8$. Znači, u levom džepu prvobitno je bilo 8 dinara, a u desnom 35 din. —8 din. $=27$ dinara.

Može li se gornja jednačina postaviti i drugačije?

Siniša Vrećica, VIII, OŠ Generalski Stol

51. *Dešifrujte ovaj mozaik, tj. umesto slova stavite odgovarajuće cifre tako da budu tačne sve navedene operacije (i po horizontalama i po vertikalama). Pošto utvrdite brojnu vrednost svakog slova, poređajte ta slova prema njihovoj vrednosti (od 0 do 9). Treba da dobijete reč koja na srpskohrvatskom jeziku znači jedan poznati matematički termin.*

$$\begin{array}{ccc} ATU & + \; IAZ & = IITE \\ - & - & \cdot \\ NEH & : \; IOH & = \quad E \\ \hline PAU & - \; NZ & = PPA \end{array}$$

Odmah vidimo da oduzimanjem H jedinica od U jedinica u I stupcu opet dobijamo U jedinica. Znači, $H=0$. Posmatrajmo sabiranje $ATU+IAZ=IITE$. Pošto zbir dvaju trocifrenih brojeva ne može biti veći od $2\cdot 999=1998$, to je onda $I=1$; znači, $ATU+LAZ=11TE$. Pošto je $A<10$, a zbir desetica ne može dati za prenos u stotine više od 1, to je $A=9$.

Iz jednakosti $IITE:E=PPA$ (poslednji stubac) sledi da se proizvod $A\cdot E$ završava cifrom E. Kako je $A=9$, to jedino može biti $E=5$, pa imamo $11T5:5=PP9$. Kad se 11 stotina (stotica) podeli sa 5 dobija se 2 stotice, pa je $P=2$, a tada je $T=4$.

Iz jednakosti $94U—N50=29U$ (I kolona) odmah se dobija $N=6$, a iz $19U—1O0=6Z$ (II kolona) dobijamo da je $O=3$. Iz $PAU—NZ=PPA$ (poslednji red) sledi: $29U—6Z=229$, tj. $200+90+U—60—Z=200+20+9$, dakle je $Z—U=1$. Pošto još jedino nismo utvrdili mesta za cifre 7 i 8, to je, očigledno $Z=8$, $U=7$.

Zapišimo rezultate u tablicu:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
H	*I*	*P*	*O*	*T*	*E*	*N*	*U*	*Z*	*A*

Odatle se neposredno vidi da je reč o terminu »*HIPOTENUZA*«.

Zorica Milanović, V_2, OŠ „Ž. Apostolović, Trstenik

52. *U magacinu je bilo* 100 *kilograma jagoda. Izvršena analiza je pokazala da je jagode sadrže* 99% *vode. Posle izvesnog vremena analiza je ponovo izvršena i tada te utvrđeno da se sadržina vode u jagodama smanjila na* 98%. *Koliko su sada teške jagode? (Pod „jagodama" podrazumevamo jagode kao plod, dakle sve sastojke zajedno).*

Prvi način. — Količina „suve materije" u jagodama iznosi 1 kilogram; ona se stajanjem jagoda nije promenila. Kad se sadržina vode u jagodama smanjila na 98%, onda to znači da sadržina ostalih sastojaka („suve materije") sada čini 2%, a kako ovih 2% sada iznosi upravo 1 kilogram, to je onda jasno da težina jagoda sada (100%) iznosi 50 kilograma, tj. težina jagoda smanjila se dvaput.

Davor Šoštarić, $VIII_b$ OŠ „Bratov Polančičev", Maribor

Drugi način. — Neka je x nova (sadašnja) težina jagoda. Kad se ona umanji za težinu vode, tj. za 98% od x, mora se dobiti težina „suve materije" (koja se ne menja) koje ima 1 kilogram, znači:

$$x—\frac{98}{100}x=1, \text{ odakle je } x=50,$$

što znači da su jagode sada teške 50 kilograma. Jasno je da je najpre u 100 kg jagoda bilo 99 kg vode i 1 kg „suve materije".

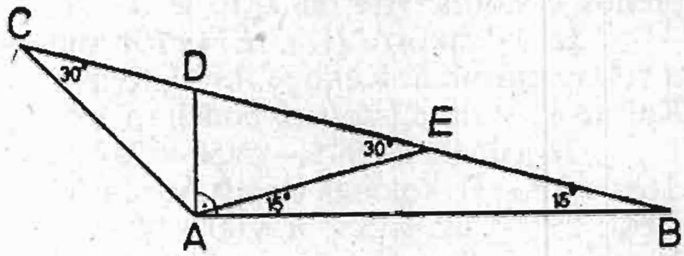
N a p o m e n a . — Jednačina se mogla postaviti i na sledeći način. Ako je x sadašnja težina jagoda, onda se ona sastoji iz onih istih 1 kg „suve materije" (koja se stajanjem nije promenila) i $0{,}98x$ vode, te imamo jednačinu

$$x = 1 + 0{,}98x, \text{ čije je rešenje } x = 50.$$

Prema tome, kad se procenat vode smanjio na 98%, ukupna težina jagoda smanjila se sa 100 na 50 kilograma. U tih 50 kilograma jasno je da ima onaj 1 kilogram „suve materije" i 49 kilograma vode.

Nenad Trifunović, VIII_2 OŠ Sv. Sava", Beograd

53. *Dat je trougao ABC s uglom od* 15° *kod temena B i uglom od* 30° *kod temena C. U tački A povučemo normalu (okomicu) na pravu AB. Ona seče BC u tački D. Dokazati da je* $BD = 2 \cdot AC$.



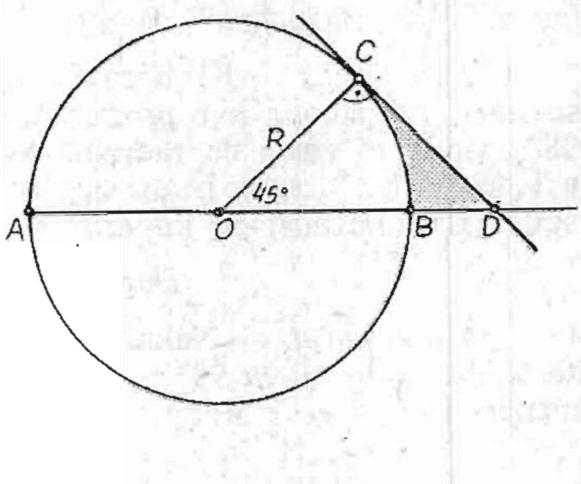
Neka je E središte duži BD. Pošto je $\sphericalangle BAD = 90°$, to je $\triangle ABD$ pravougli, pa je AE težišna linija koja odgovara hipotenuzi. No E je istovremeno i središte opisane kružnice oko $\triangle ABD$ (zašto?); tada je: $2 \cdot AE = BD$. Kako je s druge strane $\sphericalangle AEC$ spoljašnji ugao $\triangle ABE$, to imamo:

$\sphericalangle AEC = 15° + 15° = 30° = \sphericalangle ACE$, što znači da je $\triangle AEC$ jednakokraki, tj. $AC = AE$, pa je $BD = 2 \cdot AE = 2 \cdot AC$, što je i trebalo dokazati.

Novak Davor, VIII_a OŠ „Bratstvo-Jedinstvo", Križevci

54. *Dat je prečnik kruga* $AB = 2R$. *Poluprečnik OC čini sa poluprečnikom OB ugao od* 45° *(O je centar kruga). Tangenta na krug u tački C seče pravu AB u tački D. Izračunati: a) površinu trougla ODC; b) površinu i obim figure (lika) BDC koja je omeđena tangentom CD, duži BD i lukom BC.*

a) Pošto je $\sphericalangle ODC = 45°$ i $\sphericalangle OCD = 90°$, to je $\triangle ODC$ jednakokrako-pravougli, te je $CD = OC = R$. Njegova površina je $R^2/2$ (tj. jednaka površini polovine kvadrata stranice R).



b) Površinu osenčene figure dobićemo kada od površine $\triangle ODC$ oduzmemo površinu kružnog isečka OBC koji odgovara centralnom uglu od 45° u krugu poluprečnika R (a površina tog isečka jednaka je 1/8 površine kruga), tj.

$$P = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2\pi}{8} = \frac{R^2}{8}(4 - \pi); \quad P \approx 0{,}1073\, R^2$$

ili, kad zaokruglimo na jednu decimalu, $P \approx 0{,}1\, R^2$.

Obim osenčene figure ima dužinu:

$$O = \overset{\frown}{CB} + \overline{BD} + \overline{DC} = \overset{\frown}{CB} + \overline{OD} - \overline{OB} + \overline{DC}, \text{ tj.}$$

$$O=\frac{R\pi}{4}+R\sqrt{2}-R+R=\frac{R\pi}{4}+R\sqrt{2}=R\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\right);\ O\approx 2{,}1996\,R \text{ ili,}$$

kad se zaokrugli na 1 decimalu, $O \approx 2{,}2\,R$.

Božidar Vujičić, VIII r. OŠ Viča kod Čačka

Rešili konkursne zadatke iz „Matematičkog lista“ III. 1

Aćimović Dragan, VI_a r. OŠ »A. Šantić« Sečanj, 50; *Alajbeg Mladen*, VII_b r. OŠ Lovran; 50; *Aleksov Jagoda*, $VIII_3$ r. OŠ »R. Vukićević« Niš, **49**, 50; *Andrić Slavica*, VII_2 r. OŠ »A. Šantić« Sečanj, **49**, 50; *Andrić Vladan*, V r. OŠ »M. Jeličić« Šabac, 50; *Anđelković Grujica*, OŠ »Đ. J.« Konarevo kod Kraljeva, 50; *Arsenijević Dragan*, VII_4 r. OŠ »V. V. Savić« Lazarevac, 50; *Aškanić Zoran*, V_3 r. OŠ »25. maj« N. Beograd, 50; *Bajović Vera*, $VIII_a$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, **49**, 50; *Bakić Zorica*, Popinci, 49; *Balaban Ljiljana*, VII_2 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 50; *Benedičić Zorko*, $VIII_a$ r. OŠ »Heroja Bračiča« Tržič, 50; *Bertran Cica*, V_5 r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50; *Bežanov Danica*, V_1 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, **49**, 50; *Blagojević Milkica*, VI_1 r. OŠ »B. J.« Železnik, 50; *Blagojević Svetlana*, $VIII_3$ r. OŠ »Karađorđe« Topola, **50**; *Blesić Branislava*, VI_2 r. »V. Milićević« Grocka, 50; *Bogdanović Đurđevka*, $VIII_1$ r. OŠ »V. M« Grocka, **49, 50, 53**, 54; *Bogić Lada*, $VIII_2$ r. OŠ »J. J. Zmaj« Pančevo, 49, 50, 54; *Bogunović Sofija*, VII OŠ »M. Tomić« Dobrinci, 49, 50; *Božić Snežana*, VII_2 r. OŠ »V. Karadžić« Ripanj, 50; *Božinović Radmila*, VI_1 r. OŠ »Braća Ribar« Beograd, 50; *Bojović Rada*, VI_1 r. OŠ »Dr D. Mišović« Čačak, **49**; *Bokalović Gordana*, VII_1 r. OŠ »V. M.« Grocka, 49, 50, 51, 53; *Bošković Mirjana*, $VIII_3$ r. OŠ »Maršal Tito« Medveđa kod Trstenika, 50, 54; *Branislav Zoran*, VI_2 r. OŠ »G. Delčev« Zemun, 49, 50, **53**; *Branković Petar*, $VIII_a$ r. OŠ »M. Dujić« Čelinac, 49, 50; *Bubanja Radovanka*, $VIII_3$ r. OŠ »Čib. partizani« Kraljevo, 50; *Bugarski Snežana*, VI_5 r. OŠ »Dr D. Mišović« Čačak, **49, 50**; *Bugarčić Milka*, OŠ »Dr D. M.« Čačak, 49, 50; *Cerović Uroš*, VI_4 r. OŠ »N. Jeličić« Šabac, 49,50, **51**; *Colić Vladimir*, VI_1 r. OŠ »V. Pelagić« Leskovac, 50; *Cvejić Ljiljana*, OŠ Pećinci, 49; *Cvetković Slobodanka*, $VIII_2$ r. OŠ »V. M.« Grocka, 49, **50, 52**, 53; *Čampar Rade*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka, **49**, 50, **54**; *Čerčuković Dragiša* i *Dajić Miloš*, VII_1 r. OŠ »B. R.« Mihajlovac (Krajina), 49, 50, **51**, 53; *Černalagar Zora*, $VIII_a$ r. OŠ »J. M.« Idrija, 50, 54; *Čkonjević Gordana*, VI_1 r. OŠ »Dr. D. M.« Čačak, **49, 50**: *Ćesarević Aleksandar*, $VIII_1$ r. OŠ »D. Davidović« Smederevo, **49**, 50, 54; *Ćirković Radovan*, $VIII_2$ r. OŠ »M. B.« Natalinci, 50, 51; *Ćosić Ankica*, $VIII_3$ r. OŠ »S. Jovanović« Pančevo, 50, 54; *Dalaš Ilonka*, VIII r. OŠ »V. Karadžić« Vršac, 50, **53**: *Davor Novak*, $VIII_a$ r. OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Križevci, **49, 50, 51, 52, 53**, 54 (del.); *Denić Zoran*, VI_3 r. OŠ »V. M.« Grocka, **49**, 50, **51**: *Dević Božica*, VII r. OŠ »M. T.« Dobrinci, 49, 50; *Dragić Žika*, VII r. OŠ »S. Mihajlović« Brza Palanka, 50; *Drobnjak Milutin*, $VIII_2$ r. OŠ »Đ. Jakšić« Konarevo kod Kraljeva, 49, **50, 51**, 52, 53, **54**: *Dušković Ljiljana*, VI_2 r. OŠ »V. M.« Grocka, 50; *Đokić Vlastimir*, $VIII_1$ r. OŠ »M. Pavlović« Čačak, 49, 50, 54; *Đurica Milan*, $VIII_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Đurica Perica*, VI_a r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Đurđević Mirjana*, V_1 OŠ »V. M. «Grocka, 50; *Dželebdžić Danica*, VII_4 r. OŠ »V. Perić-Valter« Sarajevo, 49, 50; *Džigal Mustafa* i *Džigal Osman*, $VIII_5$ r. OŠ »S. M.« Sjenica, **49, 50, 51**, 54; *Džinić Milivoj*, VII_1 r. OŠ »M. P.« Sredska kod Prizrena, 50; *Elez Mirjana*, $VIII_b$ r. OŠ »I. L. R.« Briješće kod Sarajeva, 54; *Eržen Andrej*, VII_b r. OŠ Cerkno, Slovenija, 49, 50; *Fanuko Mario*, V r. OŠ »Voltino« Zagreb, 50; *Filipović Dragana*, VI_3 r. OŠ »B. Stanković« Vučje, 50; *Fišer Miroslav*, VII_2 r. OŠ »M. Stanojlović« Kragujevac, 49, 50, **52**: *Gavrić Branko*, $VIII_4$ r. OŠ »IV kralj. bataljon« Kraljevo, 50; *Gavrilović Savo* V_a r. II OŠ Trebinje, 49; *Glišić Milena*, VI_1 r. OŠ »Dr. D. M.« Čačak, **49**: *Golob Bojana*, $VIII_a$ r. OŠ Cerkno, 50; *Grebović Dragoje*, $VIII_5$ r. OŠ »S. M.« Sjenica, 50; *Grivičić Anka*, VI_b r. OŠ »Centar« Rijeka, 50; *Hasanbegović Jasminka*, VII_3 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50, 53; *Hrklan Slavica*, VI_4 r. OŠ »O. Petrov—Radišić« Vršac, **49, 50**: *Ibrajter Mihajlo*, V_1 r. OŠ »J. Marinković« Novi Bečej, 49; *Ilić Ljubica*, VIII r. OŠ »Ž. M.« Donje Crnjelovo, 50; *Ilić Mikica*, VII_1 r. OŠ Grocka, **49**, 50, 51, 52, **53**: *Ilić Mira*, $VIII_2$ r. OŠ »V. K.« Žitni Potok kod Prokuplja, 50; *Ivanović Slobodan*, VI_2 r. OŠ »V. M.« Grocka, **49**, 50, **51, 52, 53**: *Ivković Milojka*, VI_5 r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Jager Ksenija*, VII_1 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, **49, 50**: *Janković Đorđe*, OŠ »S. B. P.« Pećinci, 49, 50; *Janjić Milanka*, V_5 r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50; *Jergić Marija*, $VIII_a$ r. OŠ »Zlata Dupko« Nova Kapela, 50; *Jokanović Dušan*, $VIII_2$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd, 49, 50, 51. 52, 53, 54; *Jorgačević Momčilo*, OŠ »B. S.« u Vučju, 49, 50; *Jovanović Jovica*, V_3 r. OŠ »I. G. K« Niška Banja, 50; *Jovanić Nebojša*, VI_3 r. OŠ »M. Kosovac« Šabac, **49**, 50; *Jovanović Miroslav*, VII_1 r. OŠ »Sv. Sava« Beograd, **50, 53**, 54 (del.); *Jovanović Dragica*, $VIII_2$ r. OŠ Medveđa kod Trstenika, 50, 54 (del.); *Jovičić Goran*, $VIII_1$ r. OŠ Selevac, **49, 50**, 54; *Jovičić Joka*, VI_2 r. OŠ »V. M.« Grocka, 49, **50**: *Kalan Mira*, $VIII_a$ r. OŠ Cerkno, 49, 50; *Kaldesić Lenka*, V_1 r. OŠ Grocka, 50; *Kaldesić Rade*, VII_2 r. OŠ Grocka, 50; *Kamenjašević Anto*, VIII r. OŠ »M. Pijade« Tramošnica Donja kod Gradačca, **49**, 50; *Karić Dragoljub*, $VIII_3$ r. OŠ »D. Vukasović« Nova Pazova, 50; *Katanić Svetlana*, VI_1 r. OŠ Grocka, **49**, 50; *Kikelj Danijel*, VIII r. OŠ »F. Prešeren« Kranj, 49, 50, 54; *Knežević Vladimir*, VI_1 r. OŠ Grocka, 49, 50, 51; *Kokotović Miodrag*, VII_b r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 49, **51**: *Kokošar Majda*, VII r. OŠ »J. M.« Idrija, 50; *Komnenović Mirana*, V r. OŠ »J. M.« u Miloševu kod Bagrdana, 49; *Kosanić Verica*, VI_2 r. OŠ »P. D.« Karlovčić,

50; *Koprivica Ljiljana*, VI$_a$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Kostić Dragan*, VII$_1$ r. OŠ »B. R.« Mihajlovac,
49, 50, 53 (del.); *Kovačević Mirjana*, V$_4$ r. OŠ »A. Savčić« Valjevo, 50; *Kovačević Stevan*, VII$_b$ r. OŠ
»S. B. P.« Pećinci, 50; *Kovačević Vladan*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka, **49, 50, 51, 54**: *Kovačević Željko*,
VII$_1$ r. OŠ »Zmaj J. J.« Ruma, 50; *Krantić Olivera*, V$_1$ r. OŠ »M. C.« Vrčin kod Beograda, 50; *Krminac
Marinko*, VIII$_b$ r. OŠ »M. D.« Čelinac, 49, 50, 54; *Kujović Novica*, VII$_2$ r. OŠ »Čibuk, partiz.« Kraljevo,
50; *Kurbalija Radojka*, VIII$_2$ r. OŠ »D. Vukasović« Nova Pazova, **49 50**; *Kuručev Ljiljana*, VIII$_1$ r. OŠ
»M. Kosovac« Šabac, 49, 50, **51**: *Lazarević Milan*, VI r. OŠ »B. Perić« Rudna Glava, **49, 50**: *Lazić
Deska*, V$_4$ r. OŠ »V. Radosavljević« Negotin, 49; *Lazović Božo*, V$_1$ r. OŠ »F. Prešern« Beograd, 50;
Lale Milenko, VI$_2$ r. OŠ »D. V.« Nova Pazova, 50; *Lazić Ivica*, V$_a$ r. OŠ »S. B.P.« Pećinci, 43, 50; *Lešiga
Ana*, VII$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50; *Likar Boris*, VIII$_a$ r. OŠ »J. M.« Idrija, 50, 54; *Lukić
Jelica*, VI$_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50« *Luković Ljiljana*, VII r. OŠ »Čibukovački partizani« Kraljevo,
49, 50; *Luković Milan*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka, 49, 50, **54**: *Majstorović Utjeha*, VII$_4$ r. OŠ »25. maj«
N. Beograd, 50; *Maksimović Vojislav*, VIII$_3$ r. OŠ »S. Nikolajević« Beograd, 49, 50; *Mandić Miro-
slav*, VII$_3$ r. OŠ »V. Perić-Valter« Sarajevo, 49, 50, 53; *Manić Dragan*, VI$_1$ r. OŠ »V. Karadžić«
Pirot, 50; *Manojlović Dobrila*, VIII r. OŠ »M. T.« Dobrinci, **49, 50, 53, 54**; *Marić Jovica*, VII$_2$ r.
OŠ »Vučko Milčević« Grocka, 49, 50, 53; *Marinović Budimir*, VIII$_3$ r. OŠ »Vučko Milićević« Grocka,
49, 60, 52, **53**: *Maričić Ivan*, V. r. OŠ Sremski Mihaljevci, 50; *Matematička sekcija* VII$_2$ r. OŠ »Vuk
Karadžić« Čačak, 49, 50, **52**, 53; *Matić Luca*, VI r. OŠ »Moša Pijade« Tramošnica Donja kod Gra-
dačca, 50; *Matović Milenko*, VI$_a$ r. OŠ »S. V. Č.« Vitkovići kod Goražda, 50; *Matvejev Ivan*, V$_3$ r.
OŠ »25. maj« N. Beograd, 50; *Mićunović Branko* VII$_5$ r. OŠ »25. maj« N. Beograd, 49, 50; *Mihajlović
Vesna*, VI$_1$ r. OŠ »Dr D. M.« Čačak, **49**: *Mijailović Radmila*, VII$_2$ r. OŠ »V. M.« Grocka, 49, 50, 53;
Milić Vera, VII$_a$ r. OŠ Pećinci, 50; *Mijović Vesna*, VI$_1$ r. OŠ »M. Pavlović« Čačak, 49; *Milanović Zorica*,
V$_2$ r. OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik, 49, 50, **51**: *Milenkov Boris*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš, 49, 50; *Milić
Biljana*, VIII$_3$ r. OŠ »M. T.« Medveđa kod Trstenika, 50, 53, **54**: *Milićević Radica*, VI r. OŠ »J. M.«
u Miloševu kod Bagrdana, 49; *Milivojević Jasminka*, VII$_4$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50, 53;
Milojević Mirjana, V$_4$ r. OŠ »D. Jerković« Ruma, 49, 50; *Milojević Zoran*, VII$_3$ r. OŠ »Đ. Jakšić« Ćuprija,
49, 50; *Milinković Dragana*, VII$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, **50**, 53; *Miloradović Mila*, VIII$_3$
r. OŠ »Đ. J.« Konarevo kod Kraljeva, 50; *Milošević Miroslav*, V$_a$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 49, 50; *Milo-
savljević Dobrica*, VIII$_2$ r. OŠ »V. M.« Grocka, 49, 50; *Milosavljević Miroslavka*, VIII$_3$ r. OŠ Grocka,
49, 50, 52; *Milošević Dobrila*, VI$_4$ r. OŠ »B. S.« Vučje, 50; *Milošević Vidoje*, VIII$_2$ r. OŠ »M. B.« Lučani
kod Čačka, 50; *Miletić Ivan*, VI r. OŠ »J. Pančić« Beograd, 49, 50; *Miljević Bojana*, VII$_1$ r. OŠ »V. Du-
gošević« Beograd, 49, 50, 53; *Mitić Branko*, V$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 50; *Mitić Slobodan*,
VI$_3$ r. OŠ »B. S.« Vučje, **49**: *Mirčetić Dragan*, VII$_1$ r. OŠ »Dr D. M.« Čačak, **49**, 50; *Mitrović Mila*,
V$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, **49**, 50; *Mitrović Slavica*, VII$_5$ r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50;
Momčilović Dragana, VI$_3$ r. OŠ »V. Dugošević« Požarevac, 49, 50, 52; *Mozetić Siniša*, VII$_4$ r. OŠ »N.
Jeličić« Šabac, 50, 51, **52**, 53; *Mrkonjić Božo*, VII$_2$ r. OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo, 50; *Mutavdžić Nadica*,
V$_1$ r. OŠ »M. T.« Medveđa k/T, 50; *Nenadov Zorica*, VII$_b$ r. OŠ »S. M.« Padej, 50; *Nestorović Dušan*,
VII$_1$ r. OŠ »V. K.« Ripanj, 50; *Nikitović Jasminka*, VII$_1$ r. OŠ »Dr Dragiša Mišović« Čačak, 49, 50;
Nikolić Miodrag, V$_1$ r. OŠ »Vasa Pelagić« Leskovac, **50**: *Nikolić Miroslava*, V$_a$ r. OŠ »Aleksa
Šantić« Sečanj, 49, 50; *Nikolić Predrag* VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš, 49, **50, 52, 53, 54**; *Nikolić
Vesna*, OŠ »25. maj« N. Beograd, 50; *Novakov Zorica*, VI$_4$ r. OŠ »O. Petrov-Radišić« Vršac, **49**, 50;
Novković Petar, VII$_2$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50; *Obid Miran*, VII$_b$ r. OŠ Cerkno, 50; *Obra-
dović Zorica*, VIII$_3$ r. OŠ »Ž. Zrenjanin« Vršac, 49, **50**: *Pagon Dušan*, VIII$_b$ r. OŠ Cerkno, Slovenija
49, 50, 51, 52, 53, 54; *Pajić Vojkan*, VI$_a$ OŠ Boka, Banat, 50; *Panić Dragan*, VI$_2$ r. OŠ Grocka, 50; *Panić
Ljiljana*, VI$_1$ r. OŠ Grocka, **49**, 50; *Pantić Nenad*, VIII$_2$ r. OŠ »17. oktobar« Svetozarevo, 50, **51**: *Papić
Branislav*, VI$_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Patak Zvonko*, V$_a$ r. OŠ »Voltino« Zagreb, 50; *Paunić Milica*,
VII$_1$ r. OŠ Grocka, 49, 50, 53; *Paunić Pavle*, VI OŠ Grocka, 49, 50; *Pavlović Dragoljub*, V r. OŠ Grocka,
49, 50; *Pavlović Marija*, VII$_4$ r. OŠ »D. T. Kaplar« Knjaževac, 50; *Pavlović Julija*, VIII$_3$ r. OŠ »M.
Pijade« Erdevik, 49, 50 (dva načina), 51, 54 (pribl.); *Petrušić Zoran*, VIII$_1$ r. OŠ »21. maj« Niš, 50, 54;
Pešić Nikola, VI r. OŠ »25. maj« Vel. Trnjane kod Leskovca, 49; *Pintar Vesna*, VII$_1$ r. OŠ »V. Dugo-
šević« Beograd, 49, 50; *Plećaš Rade*, VIII r. OŠ Mikleuš, **49, 50, 51, 53**, 54 (del.); *Poljanec Sonja*, VIII$_a$
r. OŠ »J. Mihevca« Idrija, 50, **54**: *Popović Gordana* V$_1$ r. OŠ »J. Marinković« Novi Bečej, 49, 50; *Popović
Jela*, OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Popović Milena*, VI$_2$ r. OŠ »J. Marinković« Novi Bečej, **53**: *Popović Nenad*,
VII$_4$ r. OŠ »25. maj« N. Beograd, 50; *Popara Dragan*, VI$_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50: *Pop-Lazić Jelica*,
V$_1$ r. OŠ Kumodraž, 49, **50**: *Prlić Ivica*, VIII$_b$ r. OŠ »Braća Horvat« Zagreb, 50; *Prlja Danica*, VII$_1$ r.
OŠ »J. Ćetković« Beograd, 50; *Prokić Svetlana*, VI$_1$ r. OŠ Grocka, **49**, 50; *Protić Vesna*, V$_1$ r. OŠ Grocka,
49; *Prvulović Radomir*, VII r. OŠ »S. M.« Brza Palanka, 50; *Puzović Nataša*, VI$_1$ r. OŠ »Dr D. Mišović«
Čačak, 49; *Radaković Živko*, V$_1$ r. OŠ »Vojv. S. Stepanović« Kumodraž, 50; *Radovac Ljiljana*, VIII
r. OŠ »Mitar Tomić« Dobrinci, 49, 50, 53, **54**; *Radenović Slavko*, VIII$_1$ r. OŠ »Boris Kidrič«
Lovćenac, 49; *Radović Ivan*, VIII$_3$ r. OŠ »Učitelj Tasa« Niš, 49, 50, 54; *Rajčić Gorica*, VII r. OŠ
»Moša Pijade« Velika Plana, **49, 50**: *Rajčić Zorica*, VIII$_1$ r. OŠ »Moša Pijade« Vel. Plana, 49, 50, 54
(del.); *Rajc Jože*, VII$_b$ r. OŠ Cerkno, 49, 50, **51**: *Ratković Tatjana*, VIII$_3$ r. OŠ »V. V. Savić« Lazarevac,
50; *Rašković Mirjana*, V$_1$ r. OŠ »M. T.« Medveđa, 50; *Bogdanović Zoran*, V$_3$ r. OŠ »Čib. part.« Kraljevo,
50; *Rogović Milić*, VI$_3$ r. OŠ »7. okt.« Čačak, 50; *Rosandić Ružica*, VIII$_a$ r. OŠ Donji Andrijevci; 50;
Sajić Milivoje, VIII$_1$ r. OŠ »S. Nikolajević« Beograd, 50; *Samardžić Miroslav*, VI$_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj,
49, 50: *Savić Miloš*, VII$_2$ r. OŠ Grocka, 50, 51; *Savić Nebojša*, VI$_1$ r. OŠ »V. S. S.« Kumodraž, 50;
Sedej Andrej, VIII r. OŠ Cerkno, 50; *Sedmak Aleksandar*, VIII$_1$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd, 49, 50;
Simić Jasmina, VIII$_3$ r. OŠ »Veljko Dugošević« Beograd, 50, 52, 53 54; *Slović Anica*, VII$_2$ r. OŠ

»Žarko Zrenjanin« Boka—Banat, 49, 50; *Spahić Miodrag*, VIII$_3$ r. OŠ »Nata Jeličić« Šabac, 49, 50, 51, 54; *Sredojević Dejan*, VIII$_1$ r. OŠ »Sveti Sava« Beograd, 49, 50, **51, 52**: *Stamenković Božidar*, V$_1$ r. OŠ »B. S.« Guberevac kod Leskovca, **49**, 50; *Stamenković Verica*, VI$_1$ r. OŠ »25. maj« Vel. Trnjane, 49, 50; *Stanković Snežana*, V$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50; *Stevanović Slobodan*, VIII$_1$ r. OŠ »T. Rajić« Čačak, 49, 50, 54 (del.); *Stojanović Dušan*, V$_2$ r. OŠ »J. Kursula« Varvarin, 49; *Stojanović Miroslav*, VII$_2$ r. OŠ Grocka, 50; *Stojanović Snežana*, VII$_5$ r. OŠ »Vožd Karađorđe« Niš, 49, 50; *Strnjanac Ružica*, VI$_2$ r. OŠ »M. T.« Medveđa k/T, **49, 50**: *Šarić Dobrila*, VIII$_b$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50, 53; *Šipetić Dragan*, VI$_3$ r. OŠ »7. okt.« Čačak, 50; *Šimšić Nada*, VI$_1$ r. OŠ »7. okt.« Čačak, **49, 50**: *Šoštarić Davor*, VIII$_b$ r. OŠ »bratov Polančičev« Maribor, **49, 50**, 51, **52, 54**: *Štavljanin Zorica*, VIII$_2$ r. OŠ »IV kralj. bataljon« Kraljevo, 49, 54; *Štravs Silvij*, VIII$_a$ r. OŠ »J. M.« Idrija, 50, 54; *Štrbević, Vesna* V$_1$ r. OŠ »V. Dugošević« Beograd, 49, 50; *Štucin Jožek*, VII$_b$ r. OŠ Cerkno, 50; *Tanasijević Olivera*, V$_1$ r. OŠ Grocka, **49**, 50; *Tanović Kerim*, VIII r. OŠ »29. nov.« Sarajevo, 50, 52, 54 (?); *Tešić Borivoje*, VIII$_a$ r. OŠ »M. D.« Čelinac, 49, 54; *Tešić Slavko*, VIII$_b$ r. OŠ »M. D.« Čelinac, 49, 50; *Tirnanić Dušanka*, VII$_3$ r. OŠ »M. K.« Krnjevo kod Smedereva, 50; *Todić Ljuban*, VIII$_3$ r. OŠ »Karađorđe« Topola, 49, 50; *Tomić Mirjana*, V$_3$ r. OŠ Grocka, 49, 50, **51**: *Tomić Zoran*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Đ.« Jarkovac, 49, 50; *Topalović Ljiljana*, V$_2$ r. OŠ Grocka, 50; *Topalović Ruža*, VII r. OŠ Grocka, 49, 50; *Trifunović Nenad*, VIII$_2$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd, **49**, 50, **51, 52**: *Urošević Mira*, OŠ »T. Rajić« Čačak, 53; *Uzelac Olgica*, OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50; *Vasić Svetislav*, V$_1$ r. OŠ Kumodraž, 50; *Vasić Dragan*, V$_3$ r. OŠ »Dr D. M.« Čačak, **49**, *Virijević Bojan*, OŠ Miloševo kod Bagrdana, 49, 50; *Vasić Jelka*, V$_b$ r. OŠ Pećinci, 49; *Virovac Darko*, V$_1$ r. OŠ Kumodraž, 50; *Vojinović Zorica*, V$_5$ r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50; *Veličković Rajko*, VII$_1$ r. OŠ »S. M.« Sjenica, 50; *Višnjić Ružica*, VI$_1$ r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50; *Vrećica Siniša*, VIII r. OŠ Generalski Stol, 49, 50, **51, 52, 53, 54**: *Vujičić Božidar*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka, **49, 50**, 54; *Vukoje Mira*, VI$_a$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Vukoje Radoslava*, VII$_a$ r. OŠ »A. Š.« Sečanj, 50; *Vukmanović Jelica*, OŠ »Ž. Popović« Loznica, 50; *Vukotić Mirjana*, V$_2$ r. OŠ »M. S.« Umčari, 50; *Vulović Zorica*, VII$_5$ r. OŠ »Braća Jerković« Železnik, 50, 53; *Zelenović Dragan*, VII$_2$ r. OŠ »M. Kosovac« Šabac, 50, 53; *Zobenica Nebojša*, VIII$_2$ r. OŠ »IV kralj. bat.« Kraljevo, 50; *Živanović Vladimir*, VI$_4$ r. OŠ »M. Kosovac« Šabac, 49, 50; *Živković Dobrivoje*, VII r. OŠ Bagrdan (odelj. u Miloševu), 49, 50; *Živković Milan*, VI$_4$ r. OŠ »V. Pelagić« Leskovac, **49**, 50; *Živković Svetlana*, VIII$_1$ r. OŠ Grocka, 49, 50; *Živković Zorica*, VI r. OŠ »J. M.« Bagrdan, 49, 50.

Napomena. — Redni brojevi zadataka čija su rešenja kod pojedinih učenika naročito uspela štampani su masno. Neki učenici nisu svoje radove potpisali te njihova imena nismo mogli objaviti (mada su im rešenja tačna). Komisija za pregled konkursnih zadataka nije priznavala neobrazložene odgovore i rezultate. Na primer, skoro svi rešavatelji su dali tačan odgovor u 51. zadatku, ali su uzeti u obzir samo oni koji su bili obrazloženi (a takvih je bilo malo).

Molimo rešavatelje konkursnih zadataka da se u svemu pridržavaju uputstva koje je navedeno ispod tekstova konkursnih zadataka (str. 51). Rešenja šaljite običnom poštom kako se ne bi ste izlagali nepotrebnim troškovima.

ЈЕДАН ЛОГИЧКИ ЗАДАТАК

У једној основној школи има три одељења VIII разреда: VIII$_1$, VIII$_2$ и VIII$_3$. Наставник математике је разредни старешина у VIII$_1$, наставник физике у VIII$_2$, а наставник хемије у VIII$_3$. У руководство математичке секције VIII разреда изабрано је по два ученика из сваког одељења. Имена тих ученика су: *Славиша*, *Љиљана*, *Нада*, *Милан*, *Сшанимир* и *Јадранка*. Осим тога знамо и следеће: 1) Станимир је играо у ногометној екипи против одељења у којем је раз. старешина наставник хемије; 2) Јадранкин раз. старешина не предаје ни у Станимировом ни Милановом одељењу; 3)Јадранка не познаје никога из VIII$_1$; 4) Надин раз. старешина је математичар, а хемију јој предаје Љиљанин разредни старешина. На основу свега тога утврдите из којег одељења је сваки од поменутих ученика?

Упутство. — Направите овакву таблицу. Ако, према условима задатка, ученик није из назначеног одељења, онда у одговарајуће поље таблице ставите минус (—), а ако јесте – плус (+). Имајте у виду: а) да поред имена сваког ученика може бити само један плус, јер исти ученик не може бити у више одељења; в) да су из сваког одељења по два ученика. [Из VIII$_1$ су: Нада и Станимир, из VIII$_2$: Славиша и Јадранка, итд.].

	VIII$_1$ (мат.)	VIII$_2$ (физ.)	VIII$_3$ (хем.)
Славиша			
Љиљана			
Нада			
Милан			
Станимир			
Јадранка			

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

Zadaci za izlučno takmičenje iz matenatike učenika osnovnih škola u SR Hrvatskoj, 7. IV 1968.

VII razred

1. Izračunati: $\dfrac{\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{3}{8}\right)\cdot 3}{\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4}}+\dfrac{3\dfrac{1}{3}-5\cdot\dfrac{2}{3}}{7\dfrac{3}{11}+9\dfrac{5}{12}}$ $\left[1\dfrac{1}{2}\right]$

2. U kvadrat kojemu je stranica $a=6$ cm upiši trokut na taj način da polovišta dviju susjednih stranica kvadrata spojiš sa suprotnim vrhom kvadrata. Kolika je površina tog trokuta? (Izrazi tu površinu i općenito!) $\left[\dfrac{3}{8}a^2;\ 13{,}5\ \mathrm{cm}^2\right]$

3. Konstruiraj romboid kojemu su zadane dijagonale $AC=9$ cm, $BD=5$ cm i kut među tim dijagonalama (kut DSC) 105°. Iz sjecišta dijagonala S povuci zraku koja je okomita na dijagonalu BD i siječe stranicu AB u tački N. Odredi kut ASN (bez upotrebe kutomjera)! [15°]

4. Zadana su dva izraza: $7x-3(3x+y)$ i $11x-5(3x-2y)$. Koji se izraz mora oduzeti od drugog izraza da se dobije razlika koja je od prvog izraza manja za $x+y$? $[-x+14y]$

5. Njiva zasijana pšenicom ima oblik pravokutnika koji je dug 144 m, a širok $\dfrac{2}{3}$ njegove duljine. Koliko će se pšenice dobiti s cijele njive, ako se s $\dfrac{3}{8}$ površine dobije 18 q? Koliki je prosječni prinos po hektaru na toj njivi? (Izračunaj na 1 decimalu). Nacrtaj njivu i mjerilu 1 : 3000! [$\approx$34,7 q po 1 ha]

VIII razred

1. Naći x iz razmjera:

$$\left(5\frac{7}{18}-5\frac{3}{20}\right):\left(1{,}62\cdot 1\frac{1}{9}\right)=x:[3{,}2+0{,}8\cdot(5{,}5-3{,}25)] \qquad \left[\frac{215}{324}\right]$$

2. Nacrtaj tri jednake kružnice s polumjerom $r=3$ cm koje se dodiruju izvana. Spojnice njihovih središta zatvaraju jednakostraničan trokut. Izračunaj površinu dijela ravnine koji se nalazi između tih kružnica na 2 decimale! Naznači traženu površinu kao funkciju zadanog polumjera! $[P=r^2(\sqrt{3}-0{,}5\pi);\ P\approx 1{,}45\ \mathrm{cm}^2]$

3. Za izvršeni posao dva su radnika međusobno podijelila svotu od 1 632 nova dinara. Kada je prvi potrošio tri petine svoga dijela, a drugi od svoga dijela tri sedmine, onda su imali jednake svote. Koliko je dobio svaki radnik? [960; 672]

4. Prostorna dijagonala kocke jednaka je prostornoj dijagonali kvadra i duga je $5\sqrt{3}$ cm.

Izračunaj:

a) oplošje (površinu) te kocke!

b) dimenzije kvadra, ako je duljina kvadra jednaka osnovnom bridu (ivici) kocke, a širina kvadra je pet puta manja od duljine!

c) Nacrtaj tri različita dijagonalna presjeka zadanog kvadra!

[a) $P = 150\text{ cm}^2$, b) 5 cm, 1 cm, 7 cm,]

5. U trokutu ABC (gdje je $AC = BC$) težišnica povučena iz vrha A jednaka je 3 cm i čini kut (ugao) od 30° s bazom AB tog trokuta.

Odredi:

a) visinu trokuta ABC povučenu iz vrha C (visina CF)!

b) opseg i površinu trokuta ABC! [$h = 3$ cm, $0 = 4\sqrt{3}$ cm, $P = 3\sqrt{3}$ cm]

Задаци на општинским такмичењима у СР Србији, 21. IV 1968.

VI разред

1. Реконструисати следеће дељење, тј. уместо звездица ставити цифре које недостају: $3**:*3 = 3*$. Поступак објаснити!

2. Данас, у недељу 21. IV 1968. године, испловила су из једне луке три брода. Кроз колико дана ће сва три брода поново испловити у недељу, ако се зна да први брод исплови сваки трећи дан, други исплови сваки четврти дан, док трећи брод исплови сваки шести дан? Који ће датум тада бити?

3. Израчунати: $$\left[\frac{2\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{13}{36} + \frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}} - \frac{1}{2{,}5}\right] : \frac{1}{1\frac{1}{2}}$$

4. Дужина сваке странице једног троугла (у cm) изражена је природним бројем. Једна страница износи 14 cm, а друга 1 cm. Колики је обим тог троугла? Какав је тај троугао?

5. Ако се страница квадрата продужи за 2 cm, онда му се површина повећа за 24 cm^2. Израчунај колико износе површине првобитног и новонасталог квадрата?

Резултати и упутства. — **1.** Прва цифра делиоца може бити само 1, јер би већ $23 \cdot 3$ било веће од 3. У количнику 3* цифра јединица може бити само 0, јер већ $31 \cdot 13 = 403 > 3{*}{*}$. Значи, дељеник је $31 \cdot 30 = 390$. После дешифровања имамо: $390 : 13 = 30$. **2.** После NZS (3; 4; 6; 7) $= 84$ дана, тј. у недељу 14. VII 1968. год. **3.** $I = \left(1 - \frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{10}$. **4.** Дужина треће странице мора бити већа од разлике прве две (тј. од 13), а мања од њиховог збира (тј. од 15). Та страница је, значи, 14 cm. Обим је $14 + 14 + 1 = 29$ (cm). Троугао је једнакокраки. **5.** 25 cm^2 и 49 cm^2. Упутство. — Цртај слику: квадрат $ABCD$, продужи му странице AB и AD за дужи $BE = 2$ cm и $DG = 2$ cm; тако добијаш већи квадрат $AEFG$. Дата ти је разлика површина та два квадрата; да је боље уочиш — осенчи је! Продужи BC до пресека K са GF и DC до пресека L са EF. Квадратић $CLFK$ има површину 4 cm^2. Површина сваког од правоугаоника $DCKG$ и $BELC$ износи $(24\text{cm}^2 - 4\text{cm}^2) : 2 = 20\text{ cm}^2 : 2 = 10\text{ cm}^2$; дакле, $2\text{ cm}\cdot BC = 10\text{ cm}^2$, тј. $BC = 5$ cm (страница квадрата $ABCD$). Тада је $AE = EF = 5\text{ cm} + 2\text{ cm} = 7$ cm (страница квадрата $AEFG$). Површине тих квадрата заиста се разликују за 24 cm^2, тј. $49\text{ cm}^2 - 25\text{ cm}^2 = 24\text{ cm}^2$.

VII разред

1. Израчунај на најједноставнији начин:

$$\frac{133\frac{1}{3}\cdot(-0{,}002)\cdot(-3)\cdot(-5000)}{-10\frac{33}{80}+\left[-\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right):0{,}8\right]:(-2)}$$

2. За коју вредност промењљиве x израз $5-(x-3)^2$ има највећу вредност? Колика је та највећа вредност? Образложи!

3. За колико процената ће се повећати површина квадрата, ако му се страница повећа за 30%? Шта ће при томе бити са обимом квадрата?

4. Конструиши троугао чији је обим једнак дужи од 80 mm, а дужине страница му се односе као 6:5:5. Какав је тај троугао? Одреди му дужине страница.

5. Дат је правоугаоник $ABCD$ чији су странице $AB=2a$ и $BC=a$. Нека је тачка M средиште странице AB, а тачка N средиште странице DC. Полупречником $r=a$ описан је из тачке B кружни лук MC, а из тачке M — кружни лук AN. Тако је добијена криволинијска фигура $AMCNA$ (цртај!). Колика је њена површина? Који део површи правоугаоника она заузима?

Резултати и упутства. — 1. Бројилац је једнак $(-400)\cdot 10=-4\,000$, а именилац је једнак -10. Зато је дати израз једнак 400. 2. У датом изразу умањеник је сталан, а променљив је умањилац, па ће израз бити највећи када умањилац постане најмањи, а то ће бити када је он једнак 0. Мањи од нуле, тј. негативан, бити не може, јер квадрат од 0 је 0, а квадрат сваког другог броја је позитиван. Али $(x-3)$ ће бити једнако 0 само кад је $x=3$. Дакле, за $x=3$ дати израз има највећу вредност која износи $5-0=5$. 3. Површина квадрата странице a је a^2. Кад се страница квадрата повећа за 30%, њена ће дужина постати $a+0{,}30\,a=1{,}3\,a$, па је површина овог увећаног квадрата $1{,}3\,a\cdot 1{,}3\,a=1{,}69\,a^2$. Значи, површина је повећана 1,69 пута тј. већа је од првобитне за 69%. 4. Дуж 80 mm подели на познати начин конструктивно у односу 6 : 5 : 5, па од добијених делова конструиши троугао. Троугао је једнакокраки (следи из $AC:AB=5:5$). Дужине страница су пропорционалне бројевима 6, 5, 5. Када 80 поделимо у односу 6 : 5 : 5, добићемо да су странице: $a=6\cdot 5$ mm $=30$ mm, $b=c=5\cdot 5$ mm $=25$ mm, јер је 80 mm: $(6+5+5)=5$ mm. 5. Нацртај слику! *I начин*: $AMCNA=AMNA+MCNM$, $AMNA=MBCM$ и $MCNM=ANDA$, па је $P_{AMCNA}=P_{ABCD}:2=2a^2:2=a^2$. *II начин*: $P_{AMNA}=\frac{1}{4}\,a^2\pi$ (1/4 круга) и $P_{MCNM}=a^2-\frac{1}{4}\,a^2\,\pi$; онда је тражена површина $P=P_{AMNA}+P_{MCNM}=a^2=\frac{1}{4}\,P_{ABCD}$.

VIII разред

1. a) Одредити најмању природан број који при дељењу сваким од бројева 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 даје остатак 1.

b) Напиши бар још два броја који имају наведену особину.

2. 1) Напиши двоцифрени број коме је цифра десетица a, а цифра јединица b.

2) Докажи да је збир тог броја и броја с обрнутим редоследом цифара дељив са 11 и са збиром цифара, тј. са $a-b$.

3) Докажи да је разлика та два броја (двоцфреног броја и броја који из њега настаје заменом реда цифара) дељива са 9, а такође и са разликом цифара.

3. Обим предњег точка кола је 2,8 m, а задњег 3,5 m. Колики пут треба да пређу кола па да предњи точак начини 1 000 окрета више од задњег точка?

4. Дрвена коцка запремине 1 m обојена је споља црвено, па је онда разрезана на кубне дециметре.

а) Колико ових мањих коцки имају; 1) три стране обојене црвено, 2) две стране обојене црвено, 3) једну страну обојену црвено, 4) ниједну страну обојену црвено?

b) Колика је укупна површина свих мањих коцки које су добијене разрезивањем велике коцке (изрази у m^2)?

5. Унутрашњи пречник лонца од алуминијума је 20 cm, дубина му је 15 cm, а зид лонца има дебљину 2 mm. Спец. тежина алуминијума је 2,7 p/cm^3. а) Колико литара садржи тај лонац? б) Колика је тежина празног лонца?

Резултати и упутства. — **1.** а) $NZS(4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2\,520$. Тражени је број за 1 већи, тј. он је 2 521. b) $2\,520 \cdot k + 1$, k-прир. број. **2.** 1) $10a + b$; 2) $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$, одакле следи истинитост тврђења; 3) $(10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$, итд. **3.** Док предњи точак начини 1 окрет, задњи начини $2,8 : 3,5 = 4/5$ окрета; док предњи точак начини x окрета, задњи ће учинити $(4/5)x$. Мора бити: $x = (4/5)x + 1\,000$, одакле $x = 5\,000$. Предњи точак ће учинити 5 000 окрета на путу $2,8\text{ m} \cdot 5\,000 = 14\,000\text{ m} = 14\text{ km}$. **4.** а) 1) 8, 2) $8 \cdot 12 = 96$, 3) $64 \cdot 6 = 384$, 4) 512; b) $6\,000\text{ dm}^2 = 60\text{ m}^2$. **5.** а) $V \approx 4{,}712$ литара, b) $O \approx 690{,}528$ p. (В. зад. 306 у рубрици »Одабрани задаци« у »МЛ« II—4.).

MATEMATIČKA RAZONODA

ZANIMLJIVOSTI O BROJEVIMA

Ima li još takvih brojeva?

U „Matematičkom listu" II. 2 (str. 62) naveli smo tri desetocifrena broja (**4 938 271 605, 2 165 904 378 i 2 934 815 607**) u kojima se pojavljuje svih deset cifara i koji pri deljenju sa 9 daju simetričan količnik tj. broj koji se jednako čita i sleva i sdesna. U „Mat. listu" II. 5 (str.156) objavili smo da je *Vera Mićanović*, uč. VI_3 r. OŠ „25. maj" u Krupnju pronašla da i broj **1 965 274 308** ima navedenu osobinu. Zaista, kad se taj broj podeli sa 9 dobija se simetričan količnik 218 363 812.

Međutim, naši čitaoci su pokazali da ima još dosta takvih brojeva. Evo, uverite se sami! Po još jedan takav broj pronašli su: *Anton Sinakijević*, V_3 r. OŠ. „M. Dudić" Valjevo (**3 012 546 897**); *Ferida Lamut*, VII_1 r. OŠ „N. Jeličić" Šabac (**2 016 543 798**); *Duško Joksimović*, VII_3 r. OŠ „Lj. Nenadović" u Žarkovu (**2 839 450 617**); *Vlado Kutnjak*, VII r. OŠ Selnica kod Čakovca (**3 942 817 506**). *Zoran Petrušić*, $VIII_1$ r. OŠ „21. maj" u Nišu pronašao je 8 takvih brojeva. To su: **2 416 093 758, 2 835 094 617, 2 943 186 507, 3 825 094 716, 3 924 815 706, 3 948 271 506, 4 923 186 705 u 6 915 274 803.** Naš čitalac *Dragan Đorić*, uč. VII_1 r.OŠ. „M. Pijade" u Vraniću kod Beograda, pronašao je čak 18 takvih brojeva. Evo ih: **1 926 453 808, 1 926 543 708, 2 164 905 378, 2 934 185 607, 3 241 908 567, 3 248 901 567, 3 708 451 916, 3 708 541 926, 3 784 905 216, 3 785 904 216, 4 321 908 756, 5 607 182 934, 5 607 812 934, 5 671 908 324, 5 678 901 324, 7 561 908 432, 7 568 901 432.**

Prema tome, do sada znamo 34 broja koji imaju navedeno svojstvo. Ima li ih možda još? Na koji način ih dobijate?

Označavanje brojeva

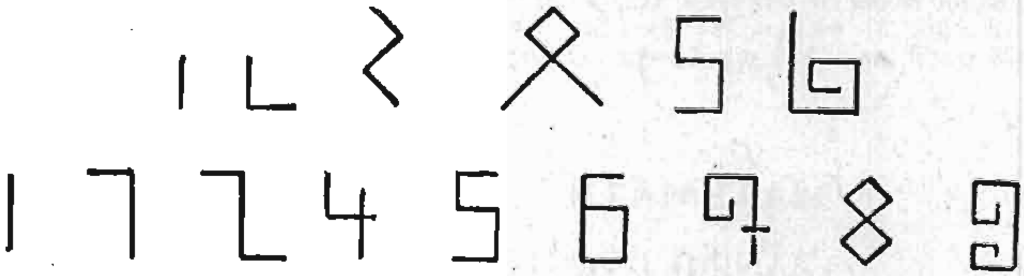
Od davnina je bilo više pokušaja da se dâ prosto tumačenje oblika arapskih cifara (kojima se danas uglavnom služimo). Jedan francuski matematičar iz druge polovine XIX v. (F. Lucas) navodi staru legendu o tome da je na dragom kamenu u prstenu cara Solomona (u istočnjačkim legendama poznatog po svojoj mudrosti; X v. pre n.e.) bio urezan znak od kojeg su mogle biti obrazovane cifre. On navodi da je u figuri na sl. 1 sadržano svih deset arapskih cifara. Evo, pogledajte (sl. 2):

Sl. 1

Sl. 2

Oštroumno jeste, zar ne! A da li je i istinito?

Drugi autori daju druga tumačenja, na primer, da cifru 1 čini jedna crtica, cifru 2 — dve crtice, cifru 3 — tri crtice, itd. Evo dva takva pokušaja:



Bilo je pokušaja da se u ovu svrhu koriste ne cifre već tačke. O tome ste verovatno čuli ili čitali. Možda i vi imate neki predlog?

MATEMATIČKE IGRE

Aritmetičke domine

Slično opštepoznatoj igri domine, može se organizovati i igra *artimetičke domine*. Cilj igre je razvijanje kulture usmenog računanja.

Od kartona, celuloida, neke mekše plastične mase i sl., napravite 28 pločica (dužine po 4 cm i širine 1,5 do 2 cm) i na njima lepo ispišite brojeve i računske operacije kao što sledi:

= 238	30·7	= 210	35 + 47	= 82	240:6	= 40	71 − 24
= 47	17·40	= 680	460 + 470	= 930	400:26	= 16	650 − 370
= 280	40·24	= 960	130 · 4	= 520	420:3	= 140	900 : 30
= 30	25·9·4	= 900	205 · 4	= 820	490:7	= 70	760 : 40
= 19	50·19	= 950	80 + 45	= 125	850:50	= 17	135 − 50
= 85	92·7	= 644	200 — 35	= 165	548:8	= 81	7 + 3 · 2
= 13	48 — 8:4	= 46	100 — 36	= 64	820:4	= 205	270 − 32

Pravila igre slična su kao i kod običnih domina. Mogu igrati: a) dva igrača jedan protiv drugog, b) tri igrača svaki za sebe, c) četiri igrača, svaki za sebe ili dva protiv dva. Svi igrači uzimaju nasumice (dok su pločice na stolu prevrnute) po 7 pločica; ako ima manje od četiri igrača onda ostale pločice ostaju u „radnji". Igru započinje onaj igrač koji ima pločicu sa najvećim brojem na levoj strani, tj. $\boxed{=960 \mid 130\cdot4}$. Naravno možete se dogovoriti i drugačije. Igrač koji je na redu (npr. levi — ako je tako dogovoreno) do stavljene pločice stavlja svoju pločicu sleva ili sdesna — prema svojoj želji (zavisno od toga koju pločicu ima). Na primer, do pločice $\boxed{=520 \mid 420:3}$ može staviti sdesna pločicu $\boxed{=140 \mid 900:30}$, ali takođe bi mogao staviti sleva pločicu $\boxed{=280 \mid 40\cdot24}$ itd., pri čemu se niz pločica može produžavati na obe strane. Ako na stolu stoji $\boxed{=210 \mid 40\cdot24}$ $\boxed{=960 \mid 130\cdot4}$ $\boxed{=520 \mid 420:3}$ onda igrač koji je na redu može staviti sdesna pločicu $\boxed{=140 \mid 900:30}$ ili pak sleva pločicu $\boxed{=238 \mid 30\cdot7}$ itd. Ako igrač, koji je na redu, nema potrebnu pločicu, on je „kupuje" u „radnji". Ako ni „kupljena" pločica ne odgovara (ili ako u „radnji" više nema pločica), onda taj igrač „ne ide" već to čini sledeći itd. (Mogu se igrači dogovriti da se „kupuje" sve dok se ne dobije pogodna pločica, odnosno dok se „radnja" ne isprazni).

Pobednik je onaj igrač koji prvi postavi sve svoje pločice. Da bi se odredio redosled ostalih igrača, oni igru mogu nastaviti na isti način. Druga varijanta je da se igra smatra završenom kada jedan od igrača stavi sve svoje pločice ili kad nijedan od igrača nije u mogućnosti da stavi pločicu. U tom slučaju se plasman igrača određuje prema broju preostalih pločica (ili prema ukupnom zbiru brojeva na njihovoj levoj strani). Prednost ima igrač kod kojeg je taj broj manji. Igrač koji pogrešno stavi pločicu gubi pravo na sledeći hod, a to mu se takođe uzima u obzir pri određivanju plasmana na kraju igre.

ЗРНЦА

За досетљиве

1. Трећина ипо од 100, колико је то?

2. Гусеница се пење уз телеграфски стуб висок 12 m. Дању се попне за 4 m, а ноћу се спусти за 3 m. За колико ће дана стићи на врх стуба?

3. Сваки од 7 браће има сестру. Колико у тој породици има деце?

4. Три друга су ишла из Београда у Обреновац. Свакоме је за пут потребно 4 часа. Колико је времена потребно да пређу тај пут сви заједно?

5. Петорици људи треба поделити пет јабука, али тако да једна јабука остане у корпи. Како се то може учинити?

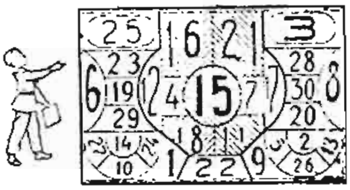
6. Како се број 666 може повећати за 50%, а да се с њим не врше никакве аритметичке операције?

7. (Шала). Горело је 5 свећа. Две су угасили. Колико ће свећа остати?

8. Знате ли пропорције?. Наравно да знате. Један ћуран тежи 5 килограма; а два таква ћурана? „Десет килограма". Тачно.

Петао стојећи на једној нози тежи 3 килограма. Колико ће тежити ако би стајао на две ноге? Одговорите брзо!

9. Постави 12 палидрваца из шибице тако да добијеш 5 квадрата!



Тренинг пажње

Пронађи на овој слици што брже *редом све бројеве* од 1 до 30. Ако си то постигао за мање од 2 минута, онда се мора признати да си врло пажљив и да имаш „око соколово".

И то се дешава...

— *Павле, израчунај количник бројева 83 и 25,* — каже наставник. Павле не ради. — *Шта чекаш, Павле? — Друже наставниче, јасно ми је шта се тражи, само не знам шта да радим са овим* **и** *између 83 и 25!*

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА ИЗ РУБРИКЕ „ЗРНЦА" У „МАТЕМАТИЧКОМ ЛИСТУ" II.5

Брзо одговорите. — **1.** 12111. **2.** IV, IX, XL, XC и сл. **3.** 6/9.

NAGRADNI ZADATAK BR. 7

(Specijalni novogodišnji)

Rekonstruisati sledeće deljenje, tj. umesto zvezdica staviti odgovarajuće cifre. Postupak detaljno obrazložiti.

```
**7*******:****7*=**7**
******
------
*****7*
*******
-------
  *7****
  *7****
  ------
  *******
  ****7**
  -------
     ******
     ******
     ------
          0
```

Biće nagrađeni **svi naši čitaoci — pretplatnici** koji pošalju pravilno rešenje ovog zadatka. Nagradni fond za ovaj zadatak iznosi 1000 n. dinara (100 000 starih dinara). Žreb neće odlučivati. Neobrazložena rešenja neće se uzeti u obzir.

Rešenje treba poslati najkasnije **do 10. I 1969. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p. p 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred (za učenike), školu i mesto (za manja mesta i poštu). Molimo da ne navodite svoje kućne adrese. Na koverti obavezno naznačite: „Nagradni zadatak br. 7". Rešenje i imena nagrađenih objavićemo u ML III. 3.

Kao što vidite, sve je u znaku broja 7!

Želimo vam dobar novogodišnji lov!

Svim saradnicima i čitaocima mnogo uspeha u Novoj 1969. godini želi Uredništvo „Matematičkog lista"

NAGRADNI ZADATAK BR. 8

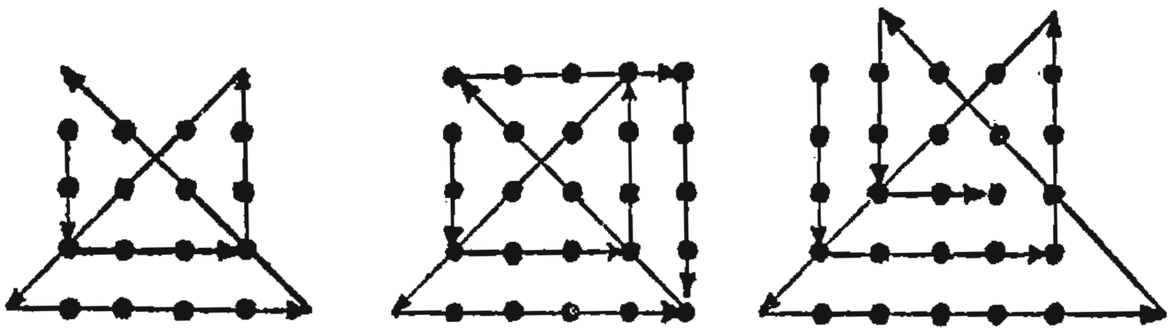
Nacrtajte pravougaonik sa stranicama 16 cm i 9 cm pa ga podelite (razrežite) na dva dela tako da se od njih može sastaviti kvadrat. (Biće dovoljno da na ctrežu prikažete kako ste dati pravougaonik razrezali i od tih delova sastavili kvadrat iste površine).

Za pravilno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 20 učenika. Po potrebi odlučiće žreb. Rešenje treba poslati najkasnije **do 10. I 1969. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p. p. 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred, školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti obavezno naznačite: „Nagradni zadatak br. 8". Rešenja i imena nagrađenih objavićemo u „Matematičkom listu" III, 3.

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 6

Zadatak je bio: *Ne odvajajući olovku od hartije i ne prelazeći istom linijom dvaput, precrtati (povezati): a) 16 tačaka povlačeći 6 duži i b) 25 tačaka povlačeći 8 duži.*

Od više mogućih varijanti rešenja, na sledećoj slici navodimo jednu za slučaj a) i dve za slučaj b).



Primljeno je 408 rešenja, od toga 319 tačnih.

Žrebom je odlučeno da se između onih koji su poslali tačna rešenja nagrade sa *po 20 n. dinara* sledeći učenici:

1. *Adanalić Nedreta*, V_3 r. OŠ „Braća Lazić", Janja kod Bijeljine
2. *Grujičić Radojica*, VI_1 r. OŠ „Vuk Karadžić", Ripanj
3. *Jovanović Biljana*, VII_4 r. OŠ „Mirko Filipović", Bijeljina
4. *Milivojev Ilinka*, V_2 r. OŠ „Josif Marinković", Novi Bečej
5. *Miljanović Biljana*, V_3 r. OŠ „Josif Pančić", Beograd
6. *Milićević Krešimir*, VI_a r. EOŠ „Bratstvo-jedinstvo", Sisak
7. *Nikolić Vladeta*, V_a r. OŠ „Jelena-Lela Subić", Seča Reka
8. *Panić Živoslava*, VIII r. OŠ „B. Radičević", Sedlare kod Svilajnca
9. *Pešić Zlatko*, VI r. OŠ „Miloš Mitrović", Veliko Orašje
10. *Rajc Jože*, VII_b r. OŠ Cerkno, Slovenija
11. *Rašković Mirjana*, V_1 r. „Maršal Tito", Međveđa kod Trstenika
12. *Štatkić Duško*, $VIII_1$ r. OŠ „17. novembar", Prizren.
13. *Štrbević Vesna*, V_1 r. OŠ „V. Dugošević", Beograd
14. *Usiljanin Živorad*, VII_2 r. OŠ „Đ. Jakšić", Konarevo kod Kraljeva
15. *Vasiljević Todor*, VIII r. OŠ „Studenica" u Studenici

Nagrade su poslate poštom.

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. ,,Matematički list" izlazi 5 puta u toku školske godine i to u: oktobru, decembru, februaru, martu i maju. List je namenjen *svim učenicima* V-VIII razreda osnovne škole.

3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 6 n. dinara. Van pretplate prodajna cena lista je 1,50 n. dinara po primerku. Obračun po pretplatnoj ceni vrši se samo kad su naručeni *svi brojevi lista* (1—5). Isto važi i za naknadne narudžbe (u toku godine). Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun ,,Matematičkog lista" broj 608-8-1433-10** sa naznakom na šta se narudžba odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i koliko primeraka od svakog broja). Obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba slati. Plaćanje se može vršiti i u ratama, ali tako da za svaki primljeni broj dug bude odmah izmiren.

4. Raspolažemo još izvesnim količinama svih brojeva lista iz školske 1967/68. godine (brojevi II. 1—5), tako da ih možete naknadno naručiti. Isporučujemo ih pod istim uslovima.

5. Molimo poverenike „Mat. lista" iz školske 1967/68. godine da odmah izmire sva zaostala dugovanja.

6. „Matematički list" će i ove godine dodeliti *nagrade školama* koje budu imale procentualno najviše pretplatnika (u odnosu na ukupan broj učenika V—VIII razreda). Detaljna obaveštenja o tome (i uopšte o „Mat. listu") data su u našim raspisima koji su svim školama dostavljeni u septembru 1968. godine.

7. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Beograd, p.p. 728.

S A D R Ž A J

1. *Dr E. Stipanić:* Marin Getaldić i njegovo delo 33
2. *Д. Бојгановић и М. Космајац:* Решавање конструктивних задатака само помоћу шестара 35
3. *Dr M. Ilić-Dajović:* O nizovima brojeva, II 39
4. *Б. Маринковић:* Решавање неких једначина применом својстава аритметичких операција 43
5. Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole 47
6. Одабрани задаци .... [illegible]
7. Konkursni zadaci 51
8. Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista" III. 1 52
9. Rešili konkursne zadatke iz „Mat. lista" III. 1 55
10. Један логички задатак 57
11. Matematička takmičenja učenika osnovnih škola (zadaci) 58
12. Matematička razonoda (Zanimljivosti o brojevima. Igre. Zrnca) 61
13. Nagradni zadatak br. 7 (specijalni novogodišnji) 64
14. Nagradni zadatak br. 8 .... 3. str. korica
15. Rezultat konkursa za nagradni zadatak br. 6 .... 3. str. korica