MATEMATIČKA ČITANKA

U REDAKCIJI

Prof. MILENKA SEVDIĆA

ZAGREB 1947

ŠKOLSKA I PEDAGOŠKA IZDANJA NAKLADNOG ZAVODA HRVATSKE

Ovu je knjigu odobrilo
Ministarstvo prosvjete Narodne Republike Hrvatske kao pomoćnu školsku knjigu
rješenjem broj 4721/47 od 28. siječnja 1947.

Naklada 10.000

TISAK NAKLADNOG ZAVODA HRVATSKE U ZAGREBU

PREDGOVOR

Da bi se olakšala nastava u matematici, pokrenuto je sa strane Ministarstva prosvjete, a evo i omogućeno, izlaženje »Matematičke čitanke«. Izdavanje ove čitanke treba smatrati kao izraz opravdanog nastojanja i pokušaja, da se našoj srednjoškolskoj omladini dade u ruke jedan pomoćni udžbenik matematike. To je novost u našoj srednjoškolskoj matematičkoj literaturi; jer je činjenica, da naša ne samo srednjoškolska matematička literatura, nego i naša matematička literatura uopće oskudijeva u knjigama ove vrste.

Učenik u svim školskim predmetima, osim matematike, nije upućen samo na nastavnikova predavanja, nego može posegnuti i za drugim djelima i člancima(naročito onima u popularnom obliku), dok kao jedini izvori za matematiku preostaju učeniku udžbenici i nastavnikova predavanja, kojima je opseg propisan uglavnom nastavnim programom. Stoga je i razumljivo, da eventualni interes za matematiku nije mogao biti onako zadovoljen, kao što je to bilo moguće, recimo, kod drugih prirodnih nauka (astronomije, kemije, fizike i t. d.), koje su i kod nas već dosta popularizirane. Postoje mnogi članci i knjige naših popularizatora, koje su i prije olakšavale i doprinosile, a i danas to čine, širenju tih nauka u redove naše omladine. U popularizirañju matematike je međutim kod nas vrlo malo učinjeno. Osim onog neznatnog broja članaka, koje se razbacano moglo naći u nekim časopisima, za naše srednjoškolce izdano je samo još nekoliko zbirki formula i zadataka. Zato ova »Matematička čitanka« treba da pridonese barem donekle popunjavanju praznine u našoj domaćoj literaturi u ovom području, a i populariziranju ovog ne baš tako jako omiljenog predmeta.

Knjiga je namijenjena u prvom redu srednjoškolskoj omladini, ali će dobro doći i nastavnicima u njihovu radu, jer će baš za samostalni rad omladine u kružocima i seminarima moći nastavnik da dade potreban materijal, koji mnogi od njih do sada nije imao pri ruci. Ako je nastavnik htio što pružiti učenicima baš u pogledu gradiva, obrađenog u »Čitanci«, morao se služiti knjigama na stranim jezicima, koje su bile nepristupačne i mnogim nastavnicima, a pogotovu đacima.

Ovdje treba uočiti jednu važnu činjenicu. Matematika ne pruža većini učenika nikakav užitak, već upravo naprezanje i muku. Ali baš ovakav teži umni rad, kao što je u matematici, dovodi do odgajanja za rad i privikavanja na rad. Loše mišljenje o matematici dolazi zbog neshvaćanja i nerazumijevanja matematike, a i odatle, što bi mnogi htio da na lak i brz način dođe do matematičkih spoznaja. Onom istočnom vladaru, koji je od velikog Euklida tražio laki »kraljevski« put za spoznavanje matematičkih istina, odgovorio je Euklid, da ne postoji u matematici kraljevski put, nego samo jedan put, jednak i prav za sve.

Interes za matematiku i njeno shvaćanje sigurno će se ostvariti, ako se bude znalo što je matematika, u čemu je njen sadržaj i u čemu je njen značaj. Korist od matematike je u tome, što se učenjem matematike i rješavanjem postavljenih zadataka razvija um, razvija se logičko mišljenje. Time je matematika jedan od najvažnijih predmeta, koji djeluje i odgojno, u smislu odgajanja voljnih funkcija čovjeka.

Rekosmo, da rješavanje matematičkih zadataka razvija umne sposobnosti, a matematička pravila i poučci svojom vezom i proizlaženjem jednih iz drugih uče nas pravilnom logičkom mišljenju. No to sâmo još nije dovoljno, da nam objasni sadržaj matematičkih nauka, a još manje se iz toga može osjetiti sav onaj značaj, koji ima matematika u odgajanju, u životu i kulturi čovječanstva.

Matematika je usko vezana sa svakidašnjim životom i potrebna je za uspješno vođenje svakog posla. Kada u naše doba željeza, pare, elektriciteta i atomske energije bacimo pogled ma kuda, vidjet ćemo, da je matematika svagdje imala znatnog udjela. Kad na pr. sjedimo kod radioaparata i kad samo jednim okretom dugmeta možemo čuti daleku glazbu, slušati predavanja i najnovije vijesti iz najudaljenijih krajeva svijeta, i na taj način uživati blagodati te kulturne tekovine čovječanstva, tada obično i ne pomišljamo na onu ulogu, koju je odigrala matematika kao pomoćno sredstvo fizici i tehnici, da bi se stvorio radio.

Znamo, da je matematika s početka bila nauka o računanju i mjerenju i da je kao i sve druge nauke postala iz potreba svakidašnjeg života. Pojam broja i geometrijskog lika uzet je iz vanjskog svijeta, a nije ga stvorilo čisto mišljenje. Apstrakcijom iz čisto empirijskih podataka, odvajajući sadržinu kao beznačajnu, dobivamo čiste oblike i odnose, koji dolaze u matematici kao teoretskoj nauci.

Dakle ne smijemo pomišljati na to, da se u matematici razum bavi samo svojim vlastitim tvorevinama. »Kao i sve druge nauke, i matematika je nastala iz čovjekovih potreba;.. izvođenja matematičkih veličina jednih iz drugih nije dokaz za njihovo aprioristično porijeklo, već samo za njihovu racionalnu vezu«. (Engels).

Spomenuli smo, da je matematika nastala iz računanja i mjerenja. Kasnije je život postao složeniji, a kulturne potrebe sve veće. Time su se stavljali sve veći zadaci i zahtjevi na matematiku. Ti su zadaci bili uzrokom, da se matematičko znanje sve više razvijalo. Izvjesne se pojave podvrgavaju mjerenju i računu, a to drugim riječima znači, da se one izučavaju matematičkim putem. Matematika pomaže i sređivanju drugih nauka (astronomije, fizike, kemije, i t. d.). Često rezultati matematičkog proučavanja pojava dovode do izražavanja određenih i utvrđenih zavisnosti među veličinama. Na taj se način stvaraju za te pojave zakoni u matematičkom obliku. Tako i danas još najrazličitija pitanja života — prirode, čovjeka i društva — mogu da dadu materijal za matematičke nauke. To je bio razlog, da je radi rješavanja različitih pitanja i problema, koje je postavljao život, matematika bila prisiljena da neprestano usavršava svoje metode; obrnuto, tako usavršene metode matematike i rezultati njezina razvoja omogućivali su opet bolje i brže rješavanje nametnutih problema.

»Matematička čitanka« treba da pruži donekle sliku o matematici, njezinu razvoju, zadacima i značaju. Sadržaj pojedinih članaka ove čitanke treba da našim srednjoškolcima prikaže matematiku u svijetlu različitom od onog, na koji su navikli učenjem propisanog školskog gradiva. Čitanka treba da bude pomagač u radu, a istodobno da daje i pobude za rad. Ona sadrži lakših i težih stvari, tako da će biti zadovoljeni različiti interesi.

Jasno je, da se ova čitanka ne može smatrati potpunim i kompletnim djelom, koje bi odjednom davalo sve obilje materijala, koji može ući u knjigu ove vrste. Ovo je prvi pokušaj, pa će svaka objektivna kritika dobro doći. Bude li matematička čitanka naišla na odziv i budu li se svojim prilozima javili i novi saradnici, onda bi se eventualno pristupilo i izdavanju novog suplementa, gdje bi se usvojili stvarni prijedlozi kritike, a i želje samih učenika u svrhu poboljšanja same čitanke, kako u pogledu sadržaja, tako i u pogledu obrade materijala — sve u težnji, da »Matematička čitanka« bude što bolja, da bude na potrebnoj visini.

U Zagrebu, uoči 1. maja 1946.

I.

O MATEMATICI UOPĆE

KALINJIN O MATEMATICI

U govoru, koji je održao 17. aprila 1941. god. na skupu učenika osmog, devetog i desetog razreda srednjih škola Lenjinskog rajona grada Moskve, rekao je Kalinjin: »Živjeti velikim, idejnim životom — to znači živjeti za društvene interese najnaprednije i najprogresivnije klase svoga doba...« — »Ako biste me pitali kako treba praktično stupiti u taj život, ja bih odgovorio: zasada se od Vas ne zahtijeva veoma mnogo, ukoliko ste još u školskoj klupi. Za početak, za, da tako kažemo, postavljanje temelja, da biste postali stvaraoci velikog života, treba da ovladate trima predmetima vašeg školskog programa.« U ta tri predmeta računa Kalinjin: 1. izučavanje materinskog jezika, 2. matematiku i 3. fizkulturu.

Evo što kaže za matematiku:

— »Drugi predmet koji također smatram kao apsolutno neophodan za vas jest matematika.

Zašto ja tako ističem matematiku? Zašto je ja smatram tako važnom naukom baš u savremenim uslovima i baš za vas, za sovjetsku školsku omladinu?

Prvo, matematika disciplinira um, uči nas logičnom mišljenju. Ne kaže se uzalud da je matematika — gimnastika uma. Ja ne sumnjam da se u vašoj glavi roje misli, ali te misli treba usporediti, disciplinirati, dati im, ako se tako može reći, tok korisnog rada. A matematika će vam pomoći da izidete na kraj s tim zadatkom. Ali, ovi motivi više odgovaraju učenjacima negoli vama, i ja ne mislim da bi vas oni veoma jako potakli na izučavanje matematike.

Drugo, i to će vam, možda, biti bliže — obim praktične primjenjene matematike je ogroman. Proučavali vi bilo koju nauku, pošli vi na bilo koju višu školu, radili vi u bilo kojoj oblasti, ako želite da tamo ostavite nekakav trag, svuda je zato neophodno znanje matematike. A tko od vas sada ne sanja da postane mornar, avijatičar, artiljerac, kvalificirani radnik u raznim granama naše industrije, građevinar, metalac, bravar, strugar i t. d., iskusan agronom, trgovački radnik i t. d. Ali sva ta zanimanja zahtijevaju dobro znanje matematike. I zato, ako želite da učestvujete u velikom životu, punite svoju glavu matematikom, dok za to još ima mogućnosti. Ona će vam ukazati ogromnu pomoć u čitavom vašem radu.

Evo vam primjer: Jedan od najpoznatijih moskovskih očnih liječnika kazao mi je da je očni liječnik koji slabo zna fiziku — rđav liječnik. Ja ga nisam pitao o kome dijelu fizike govori, ali, očevidno, on je mislio na optiku. A optika se gotovo cijela sastoji iz matematičkih formula. Da li točno govorim? Približno točno. Vidite, matematika će biti potrebna i onome tko pođe na medicinu«.

(Iz knjige: M. I. Kalinjin, **O komunističkom odgoju**; str. 113.—114.)

RAZVITAK GEOMETRIJE

Ljudi koji stoje po strani nauke obično vjeruju da, ako nigdje, to u matematici nema mjesta prepirkama i sumnjama. Sami su matematičari, međutim, drugog mišljenja. Krajem 1938. skupili su se u Zürichu ugledni matematičari da zajednički pretresu osnovna pitanja, a rezultat je bio isti kao i kod gradnje kule Babilonske. Razišli su se na sve strane svijeta, govoreći svaki drugim jezikom. Predsjednik kongresa Gonseth ovako opisuje dojam koji je na njega ostavio ovaj ne baš skladni zbor: »Svaki od nas, rekao bih, igrajući svoj komad, smatrao je da igra točno. A ipak, orkestar je bio diskordan: nije bilo ni jedinstva ni sloge. Čovjek bi pomislio da je banuo u čas prije početka koncerta, prije nego je dirigent uspostavio tišinu poslije koje će se začuti prvi zvuci. Svaki instrument opetuje, a da se ne obazire na susjeda, ovo ili ono mjesto svoje partiture«.

Ovakav nesklad i podvojenost značajka su svih općih kongresa koje su priredili u posljednje vrijeme građanski učenjaci. Razumije se, matematičari nijesu bili u sumnji da je dva i dva četiri. Proturječja su izazvala opća pitanja odakle potječu osnovni pojmovi, što je bit misaonog zaključivanja. Nasumce uzimamo iz diskusije riječi dvaju matematičara o tako prostim geometrijskim pojmovima, kao što je kocka:

Frechet: »... radi se o tome da se mjesto kocaka u prirodi stavi pojednostavnjena slika«.

Enriques: »Ideja kocke postojala je već prije u duhu svakoga od nas. Jednom riječi: matematski objekti nijesu materijalni predmeti, nego idealni koji su se razvili u ljudskom duhu prema unutarnjim zakonima strukture tog duha. Pravo značenje matematike je u tome da studira bića koja ne pripadaju vanjskom svijetu, bića o kojima saznajemo u smislu Platonovu«.

Kongres matematičara u 1938. produžio je filozofsku debatu koja se već vodi oko 2.500 godina. U pitanju odakle naučni pojmovi i zaključivanje, učesnici su se podijelili u dva suprotna tabora: idealiste i materijaliste. Ovi potonji bili su, svakako, stidljiviji, kako to već priliči građanskim učenjacima. Prema mišljenju slavnog Lebesguea matematika je grana fizike, a matematski pojmovi uzeti su iz svakidašnjeg života. Krajnji idealizam zastupao je spomenuti Enriques, vrativši se na staru Platonovu filozofiju. Kako je Platon došao do toga da matematske pojmove, brojeve i likove smatra posebnim bićima?

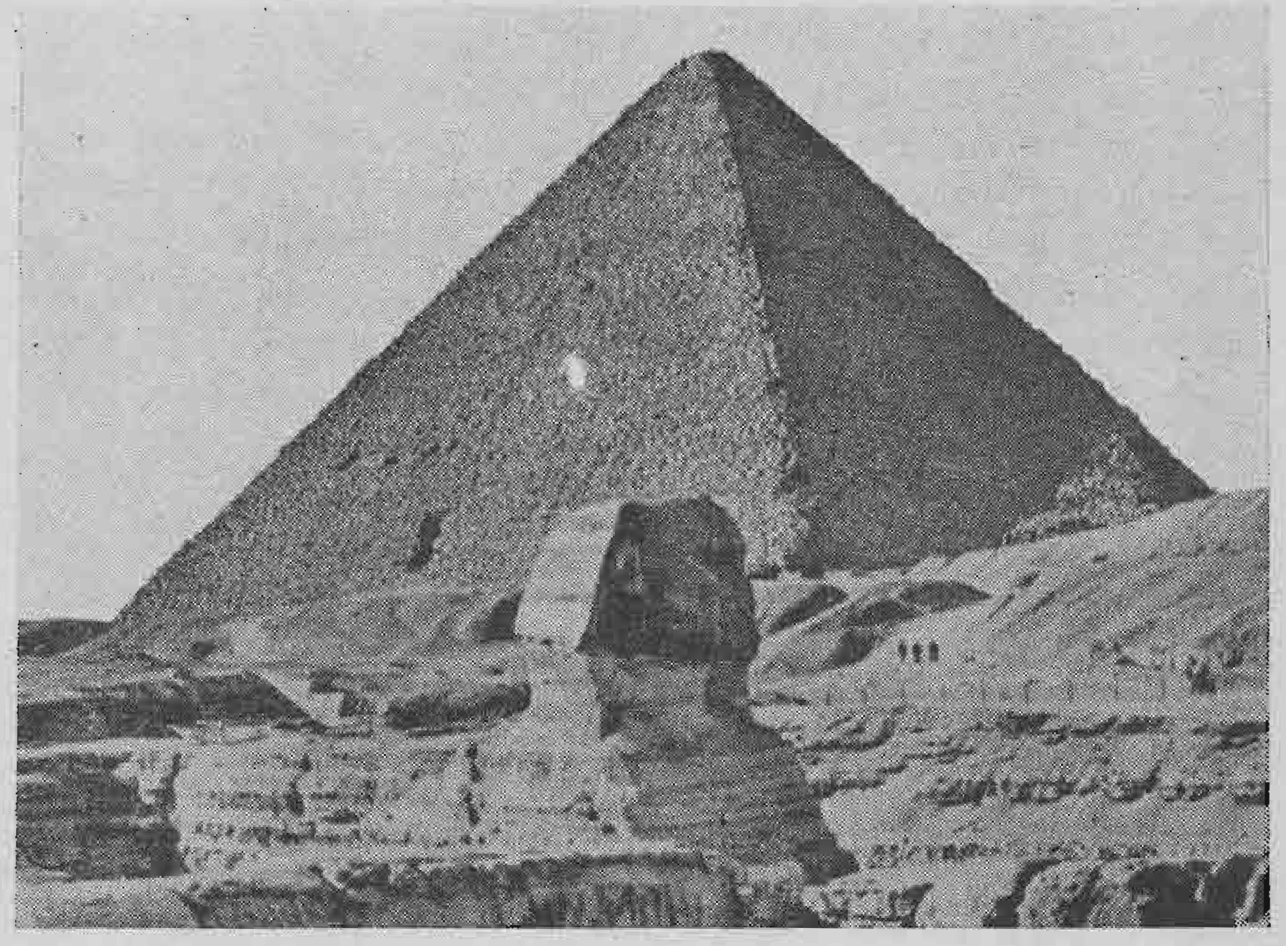
U njegovo doba razvio se naučni sistem geometrije. Geometrijski likovi i odnosi bili su utvrđeni jasnim i nedvojbenim definicijama. Odatle dali su se izvesti strogi zaključci. Platon je ukazao na razliku između naučnog zaključivanja i svakidašnjeg iskustva. Stvarne kuće nijesu nikada savršene kocke. Temelji kuća nijesu nikada savršeno paralelni ili okomiti. Oblici i odnosi svakidašnjih stvari vrlo su zamršeni, i o njima se dadu izreći samo približne, grube izjave. No u matematici imamo stroge istine. Kako smo do njih došli? Čuli smo mišljenje Frecheta da su matematski pojmovi pojednostavnjene slike stvari. Platon je tražio drugo rješenje problema postavljenog paradoksom da naučnim pojmovima nema savršenog uzora među stvarima. On je stajao pod utjecajem religije i svoju teoriju spoznaje utemeljio je na mitu o dušama i duhovima. U svojem slavnom dijalogu »Menonu« veli da je naša duša, prije nego smo se rodili, boravila u natprirodnom carstvu idealnih bića. U ta savršena bića — ideje — pripadaju i matematski brojevi i geometrijski likovi, kao i uzvišene vrline: lijepo, pravedno i dobro. Tada, poslije, u našem životu, duša uspoređuje stvari i postupke s onim savršenim idealnim bićima pa mi tako uviđamo: ona je kuća kocka, onaj čovjek dobar. Platon veli: »Naše je znanje sjećanje«. Platonova spoznajna teorija temelji se na predživotu duše.

Religijsko porijeklo idealističke filozofije nesumnjivo je. Čini se da je Platon učinio kasnije korak dalje i riješio se naivne priče. Ali suština se time nije izmijenila. Ideje su ostale realnost koja je iznad stvarnog svijeta. Platonu su uzor spoznaje bile ideje koje čovjek od početka ima u svojem umu. Na taj način, opstojnošću ideja, dala se isto tako spoznati kuća, kao i bog. Idealistička filozofija postala je organski nastavak stare religije koja nije više zadovoljavala bistri duh antičkih filozofa i matematičara.

Platonu, kao i njegovim sljedbenicima, bile su oči zatvorene za historijski razvitak. Njemu nije palo na pamet da su Egipćani dvije tisuće godina prije njega gradili piramide kad još nijesu imali jasnih geometrijskih pojmova, da je u arhitekturi čovjek stvorio sva ona tijela koja je kasnije geometrija naučno studirala. On nije vidio dugi razvitak koji je doveo do pravilnih geometrijskih oblika i odnosa. Platon je mislio da čovjek sve gradi prema idealnim uzorima koje već ima u glavi.

On se pita, na što gleda drvorezbar kad izrađuje čunak za tkanje: »A razbije li mu se čunak u izrađivanju, da li će opet drugi izraditi imajući pred očima razbiti lik ili onaj prema kojem je izradio i čunak što ga je razbio?« Prepustimo da historija odgovori Platonu što je prije bilo: predmeti ili idejni uzori.

Prve kuće pračovjeka, kao i današnjih primitivnih plemena, bile su gomile netesanog kamena ili šatori od šiba. Kako vidi-



Keopsova piramida, 2850. pr. n. e. Piramida je visoka 145 m.

mo u arheološkim nalazima, praljudi su sasvim nepravilno omeđili prostor za stanovanje. Takvi su i stari nađeni grobovi. Zid kuće čini nekoliko uspravnih kamena, a čitav taj prostor pokriven je plosnatim kamenom. Kod najprimitivnijih plemena čitava je kuća jedna kosa strana od šiba pod kojom se urođenici zgure. Upotrebljavajući tisućljećima takve stanove, naši su ih preci počeli usavršavati. Iskustvo je pokazalo da se dobije više prostora i da se više uštedi materijala kad se stan gradi kao kocka, piramida ili stožac. Najčvršći potporni stupovi dobivaju se iz najmanje materijala kad im se dade oblik valjka. Stari narodi nijesu znali matematskog poučka da među svima četverokutima kvadrat, a među svim crtama kružnica omeđuje najveću površinu. Ali oni su htjeli uštedjeti materijal i tako su iskustvom sami na to nadošli da svojim građevinama daju pravilne geometrijske oblike.

Nije bila samo odlučna štednja gradiva. Svaka građevina mora biti stabilna da se ne sruši. Nepregledan niz ruševina ostavili su stari narodi dok nijesu uvidjeli kako treba ostvariti ravnotežu. Iz ruku građevinara proizlazile su kao stabilne takve kuće koje su imale pravilnu geometrijsku strukturu. Kuća se neće srušiti na lijevo ili desno, naprijed ili natrag, ako sa sve četiri strane izgleda jednako. Takvu simetriju imaju antičke kuće kojima je temelj kvadrat ili pravokutnik, a krov istokračan trokut. Najstabilnije su građevine koje su simetrične u svim horizontalnim smjerovima. Nije stoga čudo da su kule — temelj kružnica, zid valjak, krov stožac — doista ostvarile tu simetriju. Baci li se samo letimičan pogled na sačuvane stare kuće, hramove, stupove, grobnice, piramide i ceste, vidi se odmah da su to pravilni geometrijski oblici. Još davno prije, nego je čovjek imao geometrijsku nauku, stvarao je on svojom rukom pravilne geometrijske likove i odnose.

Štednja gradiva i ostvarivanje stabilnosti nijesu se samo očitovali u arhitekturi. Oni su odlučno utjecali i na proizvodnju pokućstva, lonaca i oružja. Vrčevi su postali okrugli, jer kugla zatvara najveći prostor. Geometrijski likovi i tijela iskristalizirali su se iz cjelokupne ljudske djelatnosti.

Simetrična geometrijska tijela nijesu bila samo korisna. Ona su pobudila i estetsko zadovoljstvo. Pravilnost kvadrata, paralelograma, trokuta, kocaka, piramida, stožaca, kružnica i kugala mogao je ljudski um dokučiti. Mnoštvo sačuvanih predmeta, ukrašenih geometrijskim likovima i crtama, preostali su dokaz veselja što ga je pobudila prostorna simetrija. Velik je korak od nezgrapnih prvih zakloništa do egipatske ornamentike. Ali te dvije ljudske tvorevine ne razdvaja Platonova granica između svakidašnjih stvari i savršenih ideja. Iz najdublje nužde proistekla je i ljepota.

Samo ime geometrije, koje grčki znači mjerenje zemlje, pokazuje da je nastala iz praktičkih potreba. Mjerenje posjeda bilo je važno u društvu gdje se ljubomorno počeo čuvati privatni posjed. U starom Egiptu Nil se svake godine pobunio protiv posjedničkih međa. Egipćani su se stoga našli pred zadatkom da poslije poplave iznova odrede zemljište vlasnika. Oni su prvi stvorili geometrijsku metodu mjerenja površina. Zemljište su razdijelili na manje trokute. Za površinu trokuta našli su približne formule. Čitavu su površinu tada dobili zbrajanjem pojedinih trokuta. Kako je teško bilo spoznati opće zakone, vidi se odatle što Egipćani pored sve dugogodišnje prakse nijesu točno znali opće formule za površinu trokuta. Pronašli su je tek njihovi sljedbenici Grci.

Mjerenje površina i arhitektura bili su izvori geometrijske nauke. Euklidov sistem nastao je oko 300. pr. našeg vremena. U njegovim je djelima sistematizirano sve znanje starog svijeta o prostornim odnosima.

Epohalno značenje grčke geometrije nije osnovano samo mnoštvom novih činjenica, već prije svega pronalaskom naučne metode zaključivanja. Grci su spoznali da naše mišljenje sadrži zakonitost vanjskih odnosa i gibanja. Razvitkom nauke taj je odraz postao tako vjeran da misaonim zaključivanjem možemo iznalaziti veze koje odgovaraju odnosima u prirodi. Napeti konopac ili rub ravnala u našoj je glavi zastupan pojmom pravca kao jedine najkraće spojnice između dvije točke. Odnosi između zidova kuće daju se strogo izraziti definicijama koje vele kad su pravci paralelni, a kad okomiti. Tad se ne mora svaka prostorna činjenica pronaći tako da se napinju žice i ukrštavaju. Apstraktni pravci sa svojim utvrđenim svojstvima očituju pri uzajamnim odnosima istu zakonitost koja postoji u stvarnom svijetu. Naučno zaključivanje odrazuje u bitnom onaj isti postupak kad geometar šestarom i ravnalom crta i utvrđuje odnose između geometrijskih likova.

Strogost i nužnost naučnog zaključivanja proizlaze iz zakona prirode. Lenjin veli: »Svijet je zakonito kretanje materije, a naše mišljenje kao najviši proizvod materije samo je sposobno da odrazi ovu zakonitost«.

Kakav da damo odgovor na Platonovo pitanje da li majstor gradi čunak za tkanje prema starom čunku ili prema svojoj ideji u glavi? Pitanje je krivo postavljeno. U početku nije bilo niti čunka niti ideje. Iz skromnih tkalačkih oruđa nastali su dugom upotrebom savršeniji čunci. Naravno, sad ima drvorezbar u svojoj glavi konstrukciju prema kojoj može da načini novi čunak, a da i ne gleda stari. Čitava zabuna idealističke problematike potječe odatle, što oni stvari i pojmove ne gledaju u historijskom razvitku, nego u njihovom konačnom obliku.

Pristaše idealističke filozofije uvijek su, ukazujući na matematiku i geometriju, htjeli dokazati kako je nauka djelo ljudskog uma koji izvodi zakone iz sebe samog, ne služeći se iskustvom što ga daje vanjski svijet. Tim aprioristima Engels odlično odgovara:

»Ali u čistoj matematici razum se nipošto ne bavi samo svojim vlastitim tvorevinama i imaginacijama. Pojmovi broja i geometrijskog lika uzeti su iz stvarnog svijeta, a ne s neke druge strane. Deset prsta na kojima su se ljudi naučili brojiti, dakle, vršiti prvu aritmetičku operaciju, sve su drugo samo ne slobodna tvorevina razuma. Za brojenje nijesu potrebni samo predmeti koji se dadu brojiti, nego je potrebna već i sposobnost da se pri promatranju tih predmeta apstrahiraju sve njihove druge osobine osim njihova broja — a ta je sposobnost plod dugog historijskog, empiričkog razvitka. Kako pojam broja, tako je i pojam geometrijskog lika uzet isključivo iz vanjskog svijeta, a nije ga u glavi rodilo čisto mišljenje. Morale su postojati stvari koje su imale oblike i čije je oblike čovjek uspoređivao, prije nego što je došao do pojma geometrijskog lika. Predmet čiste matematike jesu prostorni oblici i količinski odnosi stvarnog svijeta, dakle, veoma realna materija... Ali ovdje, kao i u svim oblastima mišljenja, zakoni izvučeni iz stvarnog svijeta bivaju mu suprotstavljeni kao nešto samostalno, kao zakoni koji dolaze izvana, prema kojima svijet mora da se ravna. Tako je to išlo u društvu i u državi pa se tako, a ne drukčije, i čista matematika primjenjuje na svijet, premda je uzeta baš iz tog svijeta i premda predstavlja samo jedan dio oblika iz kojih je svijet sastavljen — pa se upravo samo zbog toga i može uopće na njega primjenjivati«.

(Iz »*Od antičke filozofije do moderne nauke*«)

Supek dr. Ivan

MATEMATIČKI SIMBOLI

Čovjek kao društveno biće ima težnju, da svoje osjećaje i misli saopći i drugim članovima svoje zajednice. U toj težnji za sporazumijevanjem i saopćivanjem razvio se uz mimiku i gestikulaciju govor, a zatim postepeno i ostala sredstva, koja su služila istoj svrsi. Među tim sredstvima osobitu ulogu igra pismo. Pomoću pisma pošlo je čovjeku za rukom, da svoju misao prenosi i prostorno i vremenski, da svoju misao tako reći konzervira za budućnost. U pismu možemo gledati jedno od najljepših područja simbolike primjenjene u čovječjem životu. Iznoseći u jednoj ljepšoj formi nijansirana duševna stanja čovjek je postepeno napredovao do simbolizma u poeziji. Poput pjesnika ostvaruju svoju zamisao i drugi umjetnici, samo su im druga izražajna sredstva. Zar crvena boja ne znači žarku ljubav? Zar i hladni kamen obrađen od umjetnika ne govori simbolično o ideji, koju treba da predstavlja? Zar nije najljepši primjer simboličkog izražavanja dat u muzici?

Vrlo lijep primjer primjene simbolike imamo u astrologiji i alkemiji. Samo tu su simboli poslužiti, da se nađeni fakti ljubomorno sačuvaju kao tajna tih nauka, ne bi li dobiveni rezultati poslužili samo izvjesnoj kasti ljudi, a ne na opću korist. Nije li stari astrolog, koji je proricao sudbinu ljudi iz položaja zvijezda, nastojao da svome aktu da neki čarobni tajanstveni oblik? Nije li u tome cilju obilježavao Sunce, Mjesec, planete i ostale zvijezde posebnim simbolima, koje nisu smjeli svi razumjeti? A nije li takvo skrivanje još više bilo poželjno u alkemiji, t. j. »crnoj nauci« o kamenu mudracu i životnom eliksiru? Zar nije alkemičar nastojao da svoje pokušaje, pa i uspjehe, sakrije od radoznalih očiju svijeta? I tako sve tamo od prvih alkemičara, pa do moderne kemije, imamo upotrebu simbola. I danas je za onoga tko nije upućen u kemiju nešto tajanstveno, kada vidi kemijsku formulu u čijim simbolima imamo jedan kratak, a precizan način izražavanja. Dok su ove formule i danas onima, koji ih ne znaju, nerazumljivi hijeroglifi, dotle one onima, koji ih razumiju, kazuju mnogo.

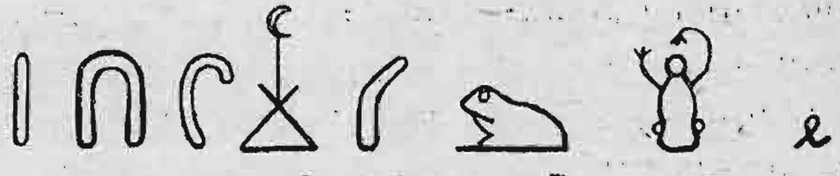
Danas imamo ne samo kemijsku, nego i drugu naučnu simboliku, pomoću koje se ne želi nešto sakriti kao tajna, nego baš obrnuto pomoću nje treba postići lakše shvaćanje dotičnih nauka. U koliko oni i danas nekome izgledaju kao tajni simboli, dolazi samo zbog nepoznavanja. Da li ćemo pak znati taj simbolički jezik, zavisi od nas samih. Svakome su otvorena vrata nauke i njene primjene, pa stoga i njene simbolike. Treba dakle samo htjeti naučiti, pa onda i razumjeti te simbole. Tako je i s matematičkim simbolima.

Matematiku karakterišu mnoga svojstva. Jedno od njih je upravo i njena savršena simbolika. Matematika je jedina od svih nauka, koja ima do krajnjih granica razvijenu simboliku, s kojom je u stanju da obuhvati sva pitanja i probleme svojih opširnih područja. Samo pri tome ne smijemo miješati njenu suštinu s njenim simbolima, jer simboli sami za sebe nisu matematika, nego matematiku sačinjavaju oni pojmovi i one operacije, koje ti simboli predočuju. U tom pogledu postoji sličnost između matematike i muzike. Ni note nisu muzika, iako su danas jedno neophodno sredstvo, da se muzička zamisao sačuva i drugima preda. Upoznavši note i svladavši muzičku tehniku u stanju smo, da izvedemo neko muzičko djelo muzičkih stvaralaca. Muzičar je u svojoj fantaziji stvarao kompoziciju, a note su mu poslužile, da tu muziku tako reći nacrta i da nam je na vizuelan način preda. Note po svom položaju na linijama daju visinu tona, a po načinu pisanja dužinu trajanja. Ali ima i drugih simbola, kojima se reguliraju ostali odnosi, druge finese u oblasti muzike. Ono što djeluje na naš slušni organ harmonično, uzvišeno, to je muzika. Tako imamo i suštinu matematike, njenu savršenu harmoniju, kako u odnosima brojeva, tako i u odnosima oblika, dok su simboli i formule samo onaj aparat, kojim se obrađuje matematički materijal; oni su sredstvo, ali ipak ne samo sredstvo.

Matematički simboli znače kristalizaciju odnosa među brojevima i među figurama, znače često cijele duge procese. Oni služe sažeto kao neka kondenzacija matematičkih pojmova s kojima ćemo dalje raditi, ali samo onda sigurno, ako smo shvatili svu njihovu sadržinu, ako smo se posve točno saživjeli sa sadržajem tih pojmova. Misaoni matematički procesi izražavaju svu savršenost logičkog mišljenja, i nalaze u simbolima svoje stenografsko ostvarenje. U tom slučaju simboli postaju samostalni, t. j. oni nisu samo isprazni simboli, nego su u sebi združili i samu suštinu i sam proces, samu operaciju. To je upravo odlika matematičkih simbola u poređenju sa simbolima drugih nauka. I kao što dirigent izvodi neku kompoziciju na osnovu partiture ispisane muzičkim simbolima, i na taj način izbjegava svaku neizvjesnost, tako i matematičari izbjegavaju svaku neizvjesnost upravo pomoću jednoznačno pridruženih termina i simbola. No moramo podvući da je to slučaj samo s potpuno razvijenim matematičkim pojmovima i pridruženim simbolima. Poznata je stvar, da su se kroz vijekove matematički pojmovi razvijali i usavršavali, a isto je slučaj bio i sa simbolima. Simboli s početka nemaju svoj vlastiti smisao, već im smisao tokom vremena daju ljudi, oni im tako reći udahnjuju život.

Našu ćemo misao objasniti jednim malim izletom u historiju cifara. Bila je oštra borba prije nego što su u matematiku bile uvedene indijsko-arapske cifre i slova kao opći brojevi. Moralo se stalno brusiti mnoge neravnine, koje su se pojavljivale, dok matematičari konačno nisu u rukama imali oštro oruđe, kojim su mogli poduzeti pobjednički napad na probleme, koji su im se postavljali. Polagano su ova pomoćna sredstva postajala čovjeku ono, što su mu danas. Novo osnivani matematički časopisi mnogo su doprinosili jedinstvenoj i općoj upotrebi zgodnih simbola. Zato kada danas napišemo na pr. cifru 5, onda taj simbol kod skoro svih kulturnih naroda izaziva isti pojam množine, iako je sama riječ za taj broj kod raznih naroda posve različita. Dakle matematički simboli imaju jednu karakteristiku, oni su internacionalni, oni kod svih nacija imaju isti sadržaj. Između cifara i riječi i slova postoji još jedna razlika. Cifre su naime same po sebi čisti pojmovni znaci, dok su slova prije svega ne simboli za pojmove, nego simboli za pojedine vokale i konzonante, iz kojih su istom kasnije u riječima stvoreni simboli za pojmove. Isto je tako nezavisno i o zemlji u kojoj je postavljen i izveden na pr. račun $5214 \cdot 6 = 31284$.

Danas nama razumljive cifre i naučeno računanje s njima nije uvijek bilo tako jednostavno i tako pristupačno. To će nam mnogo jasnije potvrditi primjer, ako navedemo ma i u najkraćim crtama, kako su Egipćani pisali brojeve. Kod Egipćana imamo kao što je poznato hieroglifsko pismo, koje je postalo u pradavna vremena. Prvobitno se za oznaku vidljivih predmeta upotrebljavaju same slike tih predmeta. Za apstraktne pojmove, glagole i t. d. upotrebljavane su slike konkretnih predmeta, koje su u bilo kakvoj vezi s apstraktnim pojmom. Kasnije su se apstraktne riječi obilježavale slikama konkretnih predmeta, koje doduše nemaju ništa zajedničkog s apstraktnim pojmovima, osim što u riječima za iste dolaze isti konzonanti. Na pr. slika mjeseca (re) značila je i konzonant r. U hijeroglifskom pismu imali su Egipćani ove cifre:



1 10 100 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7

Za jedan bio je hieroglif vertikalna crta, za 10 znak u obliku potkovice. U znaku za 100 može se vidjeti ili svinut palmin list ili svinuto uže za mjerenje, za 1000 lotosov cvijet, za 10 000 mali svinut prst. Za 100 000 služila je slika žabe, čime se izražavala onolika množina, koliko je bilo žaba u mulju poslije poplava rijeke Nila. Milijun je slika jednog kozmičkog božanstva, koje nosi nebo.

Već iz ovog jednostavnog primjera jasno vidimo, da je mnogo teže i nepreglednije moralo biti pisanje brojeva nego li pomoću naših cifara. Istom kada su uvedeni pravi simboli t. j. posebni znaci — cifre — postigla se sva savršenost i to ne samo u pisanju, nego što je najvažnije, dobio se time u ruke i sam postupak računskih operacija. Njih su u Evropu donijeli Arapi u 12. stoljeću. Od tada se rezultati računskih operacija nisu više dobijali na nespretnim abakusima,[1] nego se to postizalo, da tako kažemo, čarobnjačkim znacima, kojima su se sada i mnogo brže i sa nepogrešivom sigurnošću izvodili računi i s najvećim brojevima. Deset brojnih simbola su stvarno cijeli materijal s kojim se radi. Ako njima dodamo još nekoliko simbola, koji nam označuju četiri osnovne računske operacije, »plus«, »puta«, »minus« i »podijeljeno« i k tome još znak jednakosti, pa ako smo naučili postupak s njima, vladamo onda cijelim područjem računa.

Poslije cifara uzet ćemo kao primjer algebru, jer se nijedna nauka ne može pohvaliti tako moćnim pomoćnim sredstvom, kao što ga ima matematika u algebri, gdje upravo dolazi do upotrebe savršene simbolike. Pregledamo li u najkraćim potezima historiju algebarskog načina izražavanja, tada moramo u

[1] Računske table na kojima se računalo pomoću kamenčića.

suštini razlikovati tri stupnja razvoja: to su retorička, sinkopirana i simbolična algebra. U prvoj periodi vlada riječ. Već kod najstarijeg kulturnog naroda, Egipćana, dade se utvrditi upotreba matematičkih hijeroglifa, samo oni imaju značenje riječi, pa se može govoriti o jednoj »retoričkoj algebri«. Još dalje sve do 3000 godina prije n. e. sežu starobabilonski nalazi, pločice od ilovače, na kojima se mogu naslućivati znakovi za četiri računske operacije.

Prijelaz slijedećoj periodi bio je tako reći na dlanu. Često upotrebljavani izrazi se skraćuju u tekstu, ali se skraćenice ipak ne oslobađaju rečeničnog sklopa. Najznatniji zastupnik ovog razvojnog stupnja je grčki aritmetičar Diofant iz Aleksandrije koncem 3. stoljeća. Kod njega se naziru prvi počeci sinkopirane simbolike. Nažalost poslije nema vodećih matematičara, koji bi pošli njegovim stazama. Istom u 15. stoljeću kročilo se naprijed. Polagano su se uvodile pokrate, koje su sve više dolazile do upotrebe. To je konačno treći razvojni stupanj, kada se pojavljuju simboli. U tom stoljeću je dakle započela današnja forma algebarske simbolike. Velika je zasluga matematičara Viete, da je i u jednadžbe mjesto brojnih koeficijenata uveo slova, koja su onda omogućivala bitno sažimanje općih izvođenja. Bitne napretke algebarskog načina pisanja zahvaljujemo Harriotu i Oughtredu. Istom kod Descartesa, Leibniza, Newtona i Eulera izgleda da je postignut vrhunac. Stvorena je algebra, koja dopušta, da se i bez jedne riječi provede tok matematičkih misli, koji je razumljiv svakom stručnjaku. Stvorena je konačno matematička internacionalna stenografija, stvorena je simbolična algebra.

Geometrijske figure su kao pojmovno pismo još starije nego li cifre u opće. Ponajprije podsjećam na kulturno-historijsku ulogu, koju su igrale, a koju još i danas igraju, neke posve jednostavne geometrijske figure u životu naroda. Pored planimetrijskih slika imamo i upotrebu tijela u cilju simboličkog označivanja. Tako je stara mistika brojeva bila u vezi s naukom o pravilnim tijelima. Kod starih grčkih filozofa tetraedar je bio simbol vatre, oktaedar simbol uzduha, ikozaedar vode, a kocka zemlje. Posve je sigurno, da Pitagorini učenici nisu brojeve shvaćali samo kao simbole tijela, nego je obratno spoznaja brojnih odnosa u prostoru i muzici nametala brojeve kao simbole opće prirodne zakonitosti. Iako su dakle geometrijske figure kao simboli mnogo više dolazili u upotrebi kod širokih masa, ipak je nasuprot algebri mnogo manje izgrađen način izražavanja, kojim se služimo u geometriji. Ideal simboličke geometrije jedva se mogao postići. Algebra se pri svojim postupcima uvijek svodi na nekoliko osnovnih operacija, čija je primjena gotovo uvijek jasna iz samih postupaka. Kod kompliciranih operacija dovoljno je navesti upravo upotrebljenu formulu. Drugačije je u geometriji. Skupljanje mnogih zaključaka u jednu misao ili zornu predstavu, formuliranje teorema, stalno pozivanje na već dokazane teoreme, koji ne dolaze u jasnom obliku jedne formule, čine gotovo nemogućim, da se izađe na kraj bez objašnjenja riječima. Pridodani crteži mogu doduše da pridonesu skraćivanju dokaza, ali i oni potrebuju ponajviše jedno opisivanje, jer komplikovanije figure vrlo slabo mogu da pokažu tok poduzete konstrukcije. U poređenju s ovim još jasnije dolazi do izražaja upravo vanredna prednost algebarskih formula.

Još malo o sadržaju samih matematičkih simbola. Uzmimo primjer: $5+4=9$. Šta to znači, to svi znamo. Treba uzeti 5 jedinica i dalje brojiti još 4 jedinice. U stvari s početka se tako i radilo. Ali se tokom vremena nauči da se postupak brojenja može skratiti, ako se jednom za svagda nauči, da je pet više četiri uvijek devet. U znaku $+$ imamo kratak znak, koji nas upućuje ne samo, koju računsku radnju da izvršimo, nego nas podsjeća i onoga što smo naučili, kako treba da se radi. I kada smo izvršili tu naznačenu radnju, kako je propisano, dolazi znak jednakosti, koji nam kaže, koji je rezultat naše operacije. Tek kada smo u praksi stekli potpunu rutinu, istom tada za nas znak $+$ ima pravo značenje.

Često je jedan te isti simbol upotrebljavan za razne pojmove. Na pr. danas nam točka naznačuje množenje. Prije decimalnog zareza bila je decimalna točka. Točkom označujemo i periodične brojeve: $4,\dot{2}$. Kod Newtona je točka povrh varijable značila prvu derivaciju. Kod Bhaskare (1114—1185) u jednom njegovom djelu, gdje potpuno jasno uvodi negativne brojeve, dolazi točka povrh broja, da naznači da imamo posla s negativnim brojevima na pr. $\dot{2} = -2$.

Posve je razumljivo i shvatljivo, da označivanje nije prodrlo odjednom, nego postepeno već prema važnosti autora i prema značaju njegova djela.

Često su za jednu te istu stvar prvobitno predloženi simboli vrlo različiti, ali u životu, u praksi prevladavaju oni, koji se pokažu zgodniji i prikladniji. Tako su Newton (1642—1727) i Leibniz (1646—1716) pri otkriću diferencijalnog računa, stvorili i simbole za taj račun, ali znamo da je u praksi prevladao Leibnizov način pisanja.

Kazali smo da simboli u sebi kriju i cijele procese. Stoga možemo kazati da su matematički simboli kao neke opomene, kao neke zapovijesti, koje nas, kada na njih naiđemo, pozivaju da postupimo na jedan određeni način. U simbolu je upravo sadržana kratka komanda, koju s početka pojedinac ne može brzo da slijedi, nego tek onda, kada se svladaju sve poteškoće, t. j. kada se potpuno upozna značenje simbola, kada se postigla vještina u izvođenju pridružene operacije. Istom tada možemo osjetiti svu prednost takvih simbola. Razumjevši »komandu« možemo i da je dalje slijedimo. I svi drugi simboli su upravo takve komande, samo neke jednostavnije, neke čak i vrlo komplikovane.

Konačno da skupimo sve glavne karakteristike simbola. Matematički simboli moraju da se odlikuju slijedećim: 1. k r a t k o ć o m i j e d n o s t a v n o š ć u, 2. p r e g l e d n o š ć u i p r a k t i č n o š ć u, 3. k o n s t a n t n o š ć u i p r e c i z n o š ć u, 4. j e d n o z n a č n o š ć u, 5. d a s e m o g u p r oširiti od pojedinačnog na općenito i obrnuto.

Na koncu još par riječi. Iako nam danas simboli izgledaju kao nešto petrificirano, okamenjeno, ipak se matematika i danas razvija. Laici često na osnovu površnog poznavanja suštine simbola misle,da je matematika danas jedna mrtva nauka. Ovo je međutim potpuno kriva slika o situaciji koja stvarno postoji. Ima samo nekoliko drugih naučnih područja, koja se nalaze u fazi tako intenzivnog razvoja kao što je to slučaj kod matematike. Taj razvoj je vanredno mnogostruk. Matematika proširuje svoje područje u svim mogućim smjerovima: ona raste u visinu, razliva se u širinu, ponire u dubinu. Ona raste u visinu, jer pored njenih starih teorija, čiji je razvoj trajao stoljećima i stoljećima, stalno iskrsavaju novi problemi, stalno se postižu precizniji i potpuniji rezultati. Razliva se u širinu, jer njene metode prožimaju i druga naučna područja. U njen opseg istraživanja dolaze sve opširniji regioni pojava i stalno se sve nove i nove teorije uvode u veliki krug matematičkih disciplina. I konačno ona ponire u dubinu, jer se njeni temelji sve više učvršćuju, njezine metode, koje se primjenjuju pri njenoj izgradnji, sve su savršenije, a njeni principi dobijaju u svojoj trajnosti.

Milenko Sevdić

MATEMATIČKE NEMOGUĆNOSTI

Historija razvitka matematike u toku posljednjih nekoliko decenija pokazuje jednu odliku, koja će se uzalud tražiti u njenim ranijim stadijima i koja modernoj matematičkoj analizi daje naročitu oznaku. Dok se ranije držalo za očito, da svaki problem koji ima svoga smisla mora imati i svoje rješenje, tako da se na nemogućnosti u tome smislu nije ni pomišljalo, danas se o tome imaju sasvim drugi pogledi i drugo iskustvo. Danas se na stvar gleda sasvim drugačije i zastaje se ondje, gdje raniji matematičar nije ni pomišljao da zastane. Pokazalo se naime da ima matematičkih problema sa očitim smislom i kod kojih je teško doći na misao da problem ne može imati svoga rješenja, i za koje je zaista neshvatljivo iz kojih bi razloga mogla potjecati apsolutna nemogućnost njihovog rješenja. Prvi primjer takve vrste dao je problem rješavanja općih algebarskih jednadžbi. Poslije jednadžbi prvog i drugog stepena, čije je rješenje bilo poznato već starim matematičarima, zatim poslije Tartaglia-ova i Cardan-ova rješenja jednadžbi trećeg stepena i Ferrari-eva rješenja jednadžbe četvrtog stepena, bilo je na redu i sasvim prirodno i logično misliti na algebarsko rješenje općih jednadžbi petog i višeg stepena. Poslije bezbrojnih pokušaja u dugom nizu decenija da se problem riješi, poslije uzalud upotrebljene mase analitičkih dosjetki svake vrste, Ruffini i Abel su u početku prošlog stoljeća osjetili, da je rješenje problema apsolutno nemoguće, pa su uspjeli dubokom i detaljnom analizom problema, da tu nemogućnost potpuno i dokažu na veliko iznenađenje onih, koji su se silili da nađu rješenje, a na tu nemogućnost nisu ni pomišljali. To je jedna od onih nemogućnosti, koje su u samoj prirodi stvari. Nije dovoljno ono što se danas zna o algebarskim jednadžbama, nego takve operacije apsolutno ne postoje. Svaki pokušaj te vrste unaprijed je, i to za vječita vremena, osuđen na neuspjeh.

Problem kvadrature kruga (Vidi str. 155.) vjekovni je problem, koji je intenzivno zanimao generacije matematičara u toku desetina vijekova. Po tome, što je očito i bezuvjetno da mora postojati kvadrat ploštine jednake sa ploštinom datoga kruga, držalo se za očito i van svake sumnje, da se takav kvadrat može i odrediti geometrijskom konstrukcijom pomoću instrumenata za crtanje pravih linija i kružnih lukova. Bezbroj neuspjelih pokušaja u toku tolikog broja vijekova, da se problem kvadrature kruga u tome smislu riješi, nije slomio istraživače, zvane i nezvane, da o njemu misle. Problem je međutim ušao u sasvim drugu fazu odonda od kada se počelo tragati za tim, da se dokaže njegova apsolutna nemogućnost. To je konačno izvršio L i n d e m a n n dokazavši da je broj π čisto transcendentan broj. Sličnoj vrsti problema pripada i problem podjele kuta na neparan broj dijelova.

Redukcija beskrajnog broja transcendenata, na koje se postupno nailazilo u razvitku matematičke analize, daje nebrojene slučajeve takvih apsolutnih matematičkih nemogućnosti. Za prve transcendentne funkcije dokazano je odmah, da su nesvodljive na kombinacije algebarskih funkcija u konačnom broju, da su to samostalne matematičke jedinke, kojih je redukcija na još prostije računske elemente apsolutna matematička nemogućnost.

Integralni je račun bio neiscrpan izvor novih transendenata. Za mnoge od ovih je najposlije uspjelo da se izvrši redukcija. No za mnoge se od takvih transcendenata još odmah od početka pokazalo, da im je takva redukcija nemoguća i da se nikakvom transformacijom ne mogu svesti na kombinacije elementarnih funkcija.

Prostrano polje u matematičkoj analizi, na kome se pri svakom koraku nailazi na apsolutne matematičke nemogućnosti, čine problemi integracije diferencijalnih jednadžbi. Takvih dokazanih nemogućnosti ima danas veliki broj i u svim drugim oblastima teorijske matematike. Pravi razlog takvih nemogućnosti je u velikome broju slučajeva skriven vrlo duboko i njegovo nalaženje često pripada najtežim problemima matematičke analize. A o tome kakvih teškoća mogu zadati i najelementarniji problemi o matematičkim nemogućnostima, može se ocijeniti po najkurioznijem slučaju takve vrste, po klasičnom i univerzalno poznatom F e r m a t-ovom problemu u teoriji brojeva, a koji još i danas prkosi naporima najvećih matematičara (V. str. 167.).

Moderni kriticizam, jedna od glavnih oznaka matematičkih radova posljednjih decenija, posljedica je iskustva, koje se steklo o potrebi da se prije nego što se kakav problem uzme u rješavanje dobro i do dna sagleda, ima li on zaista rješenje, pa ma koliko se egzistencija rješenja činila očevidna. Tako je u ostalom i potrebno raditi, da bi se znalo što se radi. Koliko bi bila nesigurna opća teorija algebarskih jednadžbi, da Gauss nije dokazao da svaka algebarska jednadžba ima rješenje?

Pa i sami negativni rezultati, koji će se utvrditi pri dubljem ispitivanju nekoga problema, mogu iskazati važna analitička fakta, tako isto dragocjena kao što su i ona, što su sadržana u pozitivnim rezultatima.

Međutim u takve nemogućnosti nikako ne treba ubrajati i one koji se za takve drže samo s toga, što do danas nikome nije pošlo za rukom da protivno dokaže. Na takve se nedokazane ili nepotpuno dokazane nemogućnosti nailazi na svakome koraku i u svim područjima matematičke analize. O tome koliko one mogu biti štetne, kad se stvori neosnovano ili nedovoljno osnovano uvjerenje, da su to zaista apsolutne matematičke nemogućnosti, daje najljepši primjer historija problema triju tijela, koji je uspješno riješen u najnovije vrijeme (vidi str. 315.). Uvjerenje o nemogućnosti problema odbijalo je matematičare, da intenzivno tragaju za njegovim rješenjem i bilo je jedan od razloga, što je problem ostao neriješen sve do najnovijeg vremena.

Problemi pred kojima danas ostaju nemoćna sredstva matematičke analize, ne moraju uvijek takvi ostati; teškoće nesavladive za današnje matematičare, mogu biti igračka za sutrašnje. Ali od toga čine veliki izuzetak oni problemi za koje se moglo dokazati potpuno i rigorozno, da su nerješivi za vječita vremena nezavisno o prirodi upotrebljenih analitičkih sredstava i o budućim naprecima matematičkih nauka. Točno dokazivanje takvih apsolutnih matematičkih nemogućnosti jedna je od odlika moderne matematičke analize i posljedica je onoga potpuno opravdanog naučnog skepticizma, koji se u posljednje vrijeme u njoj tako jako razvio.

(Iz »*Apsolutne i restriktivne matematičke nemogućnosti*« Rad Jug. Akad. Zn., Zagreb, knj. 204, 131—140).

Dr. Mihajlo Petrović

KAKO SE I U MATEMATICI GRIJEŠI

Stara je poslovica: tko radi, taj i griješi. Zanimljivo je utvrditi činjenicu, da pogreške nalazimo ne samo kod slabijih intelektualnih radnika, nego čak i kod najvećih naučenjaka, pa i kod neospornih specijalista u određenim područjima znanosti. Donekle se još može razumjeti, ako pogriješi kakav veliki um, koji je u svojim zaključcima prešao u područje, koje ne spada u djelokrug njegovog stručnog rada, ali se mnogo teže može shvatiti, da griješe i oni, koji su prvaci u svojim strukama

Tako su se našle pojedine pogreške u matematičkom sadržaju i kod matematičara prvog ranga. Začudit ćemo se možda kad među njima nađemo i imena kao što su Newton, Fermat, Laplace, Descartes, Cauchy, Euler i mnogi, mnogi drugi.

Iako je tokom vremena utvrđeno, da je takvih učinjenih pogrešaka vrlo mnogo, (bila je čak i anketa o tome na osnovu koje je objavljen opsežan materijal u jednom matematičkom časopisu), ovdje će biti dovoljno, da navedemo samo nekoliko slučajeva.

Tako je Fermat, veliki teoretičar brojeva, slutio da su potencije 2^{2^n} uvećane za 1 uvijek prosti brojevi, ali je Euler našao da je na pr. $2^{32} + 1$ djeljivo sa 641. Isto je tako Euler tvrdio, da su brojevi $232 \cdot 57^2 + 1$ i $232 \cdot 117^2 + 1$ prosti, a u stvari oni su složeni. Prvi je djeljiv sa 179, a drugi sa 271.

Poznato je nadalje, da na pr. Eulerova Algebra vrvi pogreškama, pa su neki za nju kazali, da je ona zbirka pogrešaka.

Proučavajući gibanje planeta, Laplace je učinio jednu grubu pogrešku, koju je pronašao i objavio Poinsot. Abel je griješio baš u teoriji Abelovih funkcija, kako su to primijetili Sylow i Sophus Lie.

Hermite je učinio pogrešku pri ispitivanju realnosti korjena jedne jednadžbe, a pored toga i više pogrešaka u brojnim računima. To je utvrdio i ispravio E. Picard. Salmon je opet ispravio izvjesne netočnosti, što ih je počinio Sylv e s t e r (algebričar i teoretičar brojeva) u svojoj radnji o realnosti korjena jednadžbe petog stupnja.

Kod C h a s l e s a, velikog geometričara, koji je poznat i kao odličan historičar geometrije, nalazi se, da tako kažemo, jedna historijska pogreška. On je tvrdio za D i o c l e s a, da je živio jedno stoljeće poslije P a p u s a, neznajući da P a p u s citira Dioclesovu cisoidu.

Posve je razumljivo, da i učenici čine pogreške. Kod učenika ima pogrešaka, koje spadaju u grupu tzv. tipiziranih pogrešaka. Skoro se sto posto može tvrditi, da će slabiji, a ponekad i vrlo dobri učenici, na pr. ovako izvaditi korijen:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b,$$

a znamo, da je ispravno samo

$$\sqrt{a^2 + 2\,ab + b^2} = a + b$$

ili da će kod razlomaka izvršiti nedopušteno skraćivanje na pr.

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Često je slučaj i kod jednadžbi. Na pr. iz $5 \cdot x = 2$, vrlo se često događa, da đak napiše $x = \frac{5}{2}$ ili $x = 2-5$, a isto tako iz $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, da se napiše $c = a \sin\alpha$.

Ima i grupa s u g e r i r a n i h pogrešaka. Mi naime, sugestivnim pitanjima navodimo nekoga, da pogriješi. Na primjer: Pitamo koliko prstiju imamo na jednoj ruci. Pri tome pokažemo otvorenu šaku. Odgovor je: 5. Zatim pokažemo zajedno obje ruke i pitamo koliko je prstiju na dvije ruke. Odgovor je: 10. I sada ako spustimo obje šake onda su vizuelni razlozi, da ćemo na pitanje koliko je prstiju na 10 ruku dobiti odgovor: 100, jer se množi $10 \cdot 10$ mjesto $10 \cdot 5$.

Ili jedno drugo pitanje u obliku problema. U hotel su svratila tri putnika da prenoće. U jutro je svaki platio 100 dinara za prenoćište s primjedbom, da je to preskupo. Hotelier stoga vrati po sobaru od primljenih 300 *Din* 50 *Din.* Sobar međutim zadrži za sebe 20 dinara, a svakom putniku vrati po 10 dinara. I sada zaključujemo ovako: Svaki putnik platio je 90 dinara, što ukupno iznosi 90 *Din* · 3 = 270 *Din.* Kod sobara je 20 dinara. To je onda skupa 290 dinara. Gdje je onda onih 10 dinara, kojih nedostaje do 300 dinara. Šta je tu pogrešno? Mi smo sugestivno zbrojili onih 20 dinara sa 270 i ako te dvije sume ne spadaju skupa. Kako su putnici platili 270 *Din* to se onih 250 *Din* nalaze kod hoteliera, a 20 kod sobara.

Mnogi će se međutim začuditi, da može biti i ovakvih slučajeva: nešto je rađeno pogrešno, a rezultat je ipak točan ili je nešto točno, a izgleda pogrešno, ili je opet pogrešno, a izgleda točno.

Evo primjera.

I. Pogrešan postupak, a rezultat ipak točan.

Ima slučajeva, kada bi gledajući samo rezultat bilo sve u redu, ali do samog rezultata se došlo sasvim krivim postupkom.

Najjednostavniji primjer imamo kod logaritama, kada učenik napiše ovako:

$$\begin{aligned} \mathit{log}\,(x - 7) &= \log 3 \mid : \mathit{log} \\ x - 7 &= 3 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Dakle rezultat je točan. Međutim je učenik cijelu jednadžbu podijelio sa *log*. Ovo je u suštini posve krivo, jer *log* ovdje nije algebarski produkt i faktor u jednadžbi, nego samo simbol jedne operacije, jedna funkcija. Prema tome samo na osnovu definicije logaritma i njegovih svojstava treba kazati: kako su logaritmi (istih baza) jednaki, moraju biti jednaki i numerusi, pa tek onda napisati $x - 7 = 3$.

Nešto slično imamo i kod razlomka $\frac{26}{65}$.

Kad učenik skrati 6 u brojniku i nazivniku, pa napiše $\frac{2}{5}$, onda je takav postupak pogrešan, ali je rezultat posve ispravan, jer ako razlomak $\frac{26}{65}$ skratimo ispravno sa 13, dobijemo zaista rezultat $\frac{2}{5}$.

Isto to imamo i kod slijedećih razlomaka:

$$\frac{266}{665}=\frac{2}{5}=\frac{2666}{6665}=\ldots$$

ili

$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\ldots$$

II. Točno, a izgleda pogrešno.

Kad napišemo na pr.

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$$

$$\sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}}$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}} \qquad \sqrt[4]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[4]{\frac{4}{63}}$$

izgleda na prvi pogled da je nešto pogrešno, ali se lako uvjerimo, da je posve točno. Sve ove navedene slučajeve imamo sadržane u

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}$$

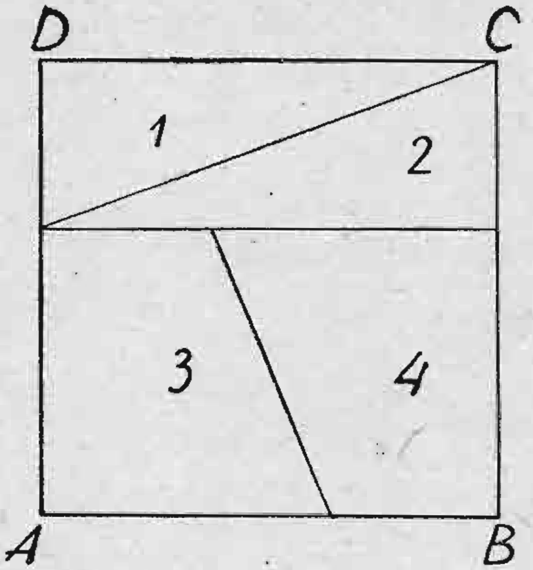
Ovaj izraz možemo dalje pisati

$$\sqrt[n]{\frac{a(a^n-1)+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}-a+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=$$

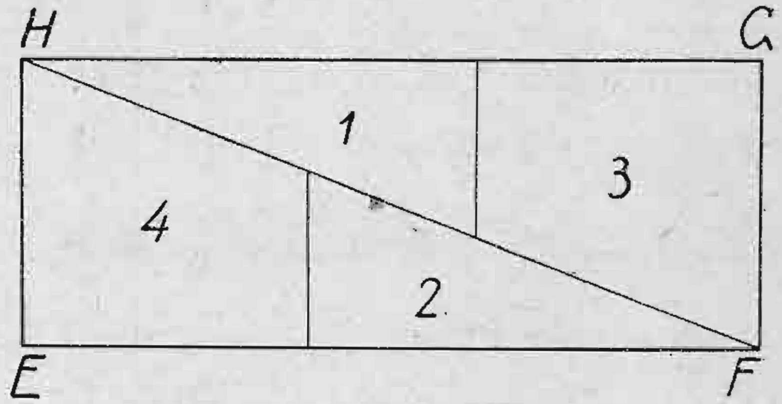
$$=\sqrt[n]{\frac{a^n\,.\,a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}.$$

III. Pogrešno, a čini se točno

1. Poznat je primjer geometrijskog dokaza da je $64=65$. Radi se ovako. Imamo kvadrat strane 8 *cm* i podijelimo ga kako je naznačeno u sl. 1. Iz ovih dijelova sastavimo pravokutnik na način predočen u sl. 2. Ova dva lika imaju istu ploštinu, jer su sastavljeni od istih dijelova. Ploština kvadrata je $8 \cdot 8 = 64$, a ploština pravokutnika je $5 \cdot 13 = 65$.



Sl. 1.



Sl. 2.

Dakle bi bilo $64 = 65$!

Gdje je pogreška?

[Uvjerite se da dijagonala *FH* (sl. 2) stvarno nije pravac (istražite trigonometrijski koliki su kutevi), nego između dijelova pravokutnika duž dijagonale *HF* imamo uski razmak u obliku jednog romboida, čija je ploština upravo 1 cm^2? Odatle upravo i dolazi do nastale razlike između 64 i 65].

2. Imamo ispravnu jednadžbu:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

Ako na lijevoj strani izlučimo *a*, a na desnoj strani rastavimo razliku kvadrata u njene faktore, imamo:

$$a\,(a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$$

Skratimo li sada lijevo i desno sa $(a - a)$ ostaje

$$a = a + a$$

ili

$$a = 2\,a.$$

dakle svaki broj jednak je dvostrukom istom broju.

Gdje je pogreška?

[**Odgovor:** U dijeljenju sa $(a - a)$, jer je to jednako nuli, a sa nulom se ne smije dijeliti].

3. Nešto slično imamo kod korjena. Ne vodeći računa o dvoznačnosti korijena, može se tobože pokazati da je $2 \cdot 2 = 5$.

Imamo:

$$16 - 36 = 25 - 45,$$

što je točno. Ako na lijevoj i desnoj strani dodamo isti broj $\frac{81}{4}$, jednadžba se neće promijeniti. Tako imamo

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$

Ovo možemo posve ispravno pisati ovako:

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

Izvadimo li drugi korjen na lievoj i desnoj strani dobit ćemo

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

ili

$$4 = 5$$

što je svakako pogrešno. Kako da se izbjegne pogreška i da ne dođe do paradoksa?

[**Odgovor:** Izbjeći ćemo na taj način, ako kod korjena uzmemo različite predznake na lijevoj i desnoj strani.

Dakle

$$\pm\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} = \mp\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2}$$

jer tada je zaista

$$4 - \frac{9}{2} = -\left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

ili

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Zatim

$$-\left(4-\frac{9}{2}\right)=5-\frac{9}{2}$$

ili

$$\left.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\right]$$

4. Kod zadaća koje rješavamo i dokazujemo pomoću geometrijskih konstrukcija možemo naići isto tako na jednu vrstu pogrešaka. Da smo zadaću sveli na jednadžbe, onda bi se takve pogreške već izbjegle samim ispravnim računskim i algebarskim operacijama. Kao što znamo tu se može dogoditi, da je rezultat točan sa gledišta algebre, no praktično on ne može biti moguć. Ako radimo konstrukcijom, pogotovo, ako se radi bez ravnala i šestara, t. j. pravimo samo shematičan crtež, pa ako ne obratimo dovoljno pažnje na nepotpunu zavisnost među datim veličinama, može doći do nemogućih zadaća, pa čak i do sasvim pogrešnih rezultata. Evo jednog primjera:

U raznostraničnom trokutu ABC ($AB>BC$) povučemo simetralu stranice AB i simetralu kuta kod C. Kako je trokut po pretpostavci raznostraničan, to se ove dvije simetrale sijeku u nekoj točki M. (Kad bi trokut bio istokračan, simetrale bi se poklapale). Iz točke M spustimo normale MD i ME na stranice CA i CD i spojimo M sa točkama A i B. Sada lako pokažemo da su trokuti MDA i MEB sukladni, pa je trokut CMD sukladan trokutu CME.

[1. Kut ADM = kutu MEB = 90^0. 2. $MD = ME$ (točka M leži na simetrali kuta). 3. $MA = MB$ (točka M leži na simetrali strane AB].

Prema tome je

$$AD = BE.$$

Dalje slijedi $CD = CE$.

Oduzmemo li od ove jednadžbe prethodnu dobijemo:

$$CD - AD = CE - BE$$

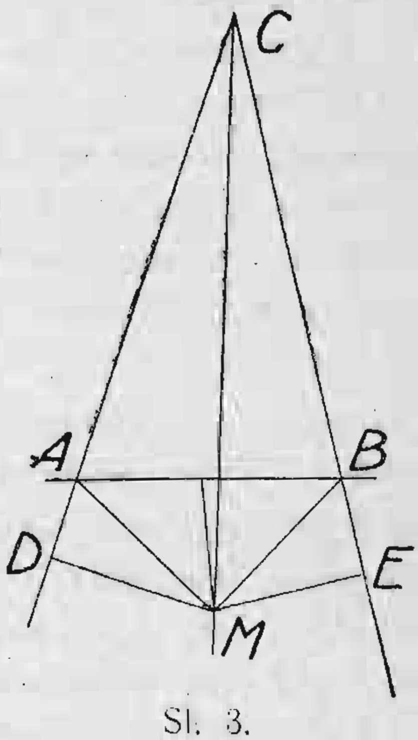
dakle

$$CA = CB$$

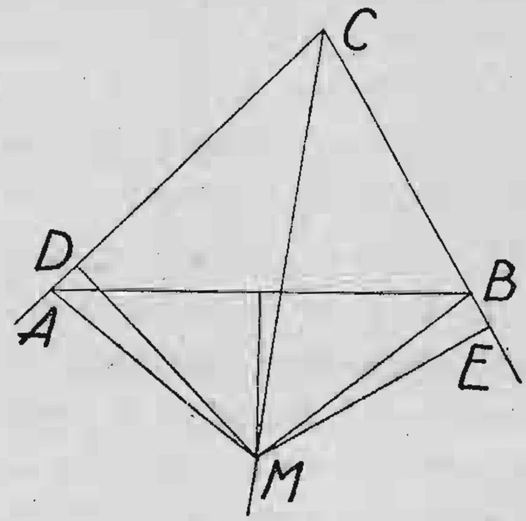
t. j. svaki trokut bio bi istokračan, a to se protivi našoj pretpostavci, po kojoj je $CA > CB$.

Gdje je pogreška?

[Iz $CD = CE$ i $AD = BE$ izveli smo, da je $CA = CB$, a to smo mogli, jer su se točke D i E (sl. 3.) obje nalazile na produženju strana CA i CB, pa smo stoga odbivši AD od CD dobili CA, a odbivši BE od CE dobili CB.



Sl. 3.



Sl. 4.

Na sl. 3., koja je crtana shematično, pogrešno leži točka D. Na točnom crtežu (sl. 4) vidjet ćemo, da točka D leži između točaka A i C, a točka E izvan točaka B i C. Prema tome je $CD = CE$, $AD = BE$, a dužina $2BE$ pokazuje, koliko je stranica CA duža od stranice CB.

Prema tome pogreška je došla odatle, što točka D, ako je $CA > CB$, mora da leži između točaka C i A, a ne izvan dužine AC. Ovo se u shematičnom crtežu nije moglo na prvi pogled odmah uočiti, pa ni primijeniti pri dokazivanju].

Milenko Sevdić

II.

O BROJEVIMA

KAKO SU NASTALI BROJEVI

Kad bismo htjeli saznati kako je nastao pojam broja, morali bismo se u mislima prenijeti mnogo, mnogo tisućlijeća unazad. No to nam je doba zastrto velom tajnosti, jer tada čovjek još nije znao pisati. Najstariji pisani matematički spomenik *»papiros Rind«,* koji su nam ostavili Egipćani, star je otprilike 37 stoljeća, ali tada su Egipćani već bili na visokom stupnju kulture i ne samo da su dobro znali brojiti, već su imali i veliko znanje o brojevima.

Iz raznih iskopina može se mnogo zaključiti o životu i kulturi ljudi u ona davna vremena, dok su još bili daleko od toga da bi znali pisati. Ipak o njihovom znanju o brojevima u to doba ne možemo iz iskopina ništa zaključiti.

Imade međutim načina, kako možemo prodrijeti i u tajnu postanka broja.

Dijete dosta rano nauči brojiti, pa i izvoditi neke najjednostavnije operacije s brojevima.

Ako dijete na izvjesnom stupnju razvoja zapitate, koliko je 3 prsta i 2 prsta, možemo biti skoro sasvim sigurni da će odgovoriti: 5 prstiju. Ako ga, pak, zapitate, koliko je 3 i 2, ono će se vrlo lako prevariti i reći: 4 ili 6 ili koji drugi broj. To znači, da dijete znade točno što je to 3 prsta, ali ne zna što je to 3. Pojam broja 3, kao nešto apstraktno, ono nema, ali znade što su to 3 prsta, 3 konja, 3 kuće i t. d. I treba da prođe dosta vremena, dok ono stekne pojam broja 3. 3 prsta, 3 konja i tako dalje zovemo i m e n o v a n i m b r o j e v i m a, a 3 neimenovanim brojem. U stvari su imenovani brojevi nešto konkretno, stvarno, dok su neimenovani brojevi apstrakcije, pojmovi dobiveni iz konkretnih primjera — iz imenovanih brojeva. To znadu dobro svi učitelji. Zato oni uče djecu računati sa štapićima, na ruskom računalu i t. d.

I kao što, dakle, dijete dolazi od konkretnog, od stvarnih predmeta do apstraktnog, t. j. do pojmova, tako je bilo i s čovječanstvom u njegovu razvoju.

Mnogi istraživači života i običaja naroda ispitivali su način brojenja kod primitivnih naroda Afrike, Azije, Australije i Amerike pa su došli do vanredno zanimljivih rezultata.

Abiponi (Paragvaj) ne znaju brojiti. Ali ako žele znati da li u njihovu čoporu pasa manjka koja pas, oni im bace jednu metu. Psi se skupe, i ona začas znadu, jesu li psi svi ili koji nedostaje, kao da su ih brzo prebrojili.

Za stanovnike otoka Murray u tjesnacu Torrès može se reći, da već znadu brojiti. Žele li oni prebrojiti neke predmete, onda kod prvog predmeta dotaknu mali prst lijeve ruke kažiprstom desne ruke i kažu: *netat* (=1). Kod drugog predmeta dotaknu slijedeći prst lijeve ruke i kažu *neis* (= 2), kod trećeg dotaknu srednji prst i kažu *neis netat,* kod četvrtog dotaknu kažiprst i kažu *neis neis,* i t. d. Kad svrše s prstima, prelaze na pojedine dijelove ruke po stalnom redu, a onda se po desnoj ruci vraćaju u obrnutom smjeru do malog prsta. Prema tome do kojeg dijela lijeve ili desne ruke dođu brojeći, znadu koliko imadu predmeta. Na taj način mogu brojiti do 31.

Još je zanimljiviji ovaj primjer: Izvjestan broj sela plemena Drajaka na Borneu pobunio se protiv svojih gospodara bijelaca, ali je pobuna bila ugušena. Za kaznu moralo je svako selo platiti određeni danak. Jedan urođenik dobio je zadatak da obiđe sva ta sela i da ih obavijesti koliko imadu platiti. Evo kako je on to učinio.

Donio je nekoliko hrpa suhog lišća i razdijelio ih u manje hrpe. Da bi mu bilo lakše, dobio je od bijelaca jednake komadiće papira, da ih upotrijebi mjesto lišća. Uzeo je jedan papirić i dotakao se jednog prsta, zatim je uzeo drugi papirić i dotakao se drugog prsta, i tako redom, dok nije načinio hrpu od 10 papirića. Potom je stavio nogu na stol i nastavio brojiti na isti način pomoću nožnih prstiju do slijedećih 10. Iza toga se opet vratio na ruku i t. d., dok na stolu nije ležalo raspoređeno 45 papirića. Prilikom brojenja dotičući se pojedinog listića spomenuo je ime jednog od pokorenih sela, ime njegovog poglavice, broj njegovih ratnika i svotu koju imade platiti. Zatim je zamolio da mu se ponovi naređenje, pri čem je još jednom prebrojio papiriće uz pomoć prstiju kao i prije. Završivši taj posao primijetio je: »Eto naših slova. Vi, bijelci čitate drugačije nego mi.« Nakon toga je izmiješao papiriće. Kasno na večer ponovno ih je prebrojio i rekao: »Ako mi tako uspije i sutra, bit će dobro.« Na to je opet skupio papiriće na jednu hrpu i otišao spavati. Ujutro je ponovio svoj posao i nije se ni malo prevario. Kroz mjesec dana obilazio je sela i potpuno izvršio svoj zadatak.

Naprednij je način brojenja, kod kojeg se prste ne dotiče, nego se jednostavno izdižu iz zatvorene šake, dok se prstima druge ruke dotiču predmeti koje se broji, tako da jedna ruka dodiruje predmete, a druga ih »*broji*«. Takav način brojenja otkriven je kod Bakaira u Središnjoj Braziliji. Ima li Bakairi prebrojiti zrna u hrpi kukuruza, on će to učiniti na slijedeći način. Najprije će razdijeliti kukuruz u hrpe od dva zrna. Zatim će dignuti mali prst lijeve ruke i reći *tokale* (1) dotičući desnom rukom prvo zrno, a onda će dignuti slijedeći prst i reći *ahage* (2) dotičući drugo zrno. Za tim će uz pomoć slijedećih dvaju prstiju prebrojiti slijedeću grupu ponavljajući kod trećeg zrna tokale, a kod četvrtog ahage. Kod treće grupe dolazi u akciju desna ruka. Poslije broja 6 Bakairi ne ponavlja više riječi tokale i ahage, nego kod svakog slijedećeg prsta kaže *mera,* t. j. ovaj. Poslije 10 upotrebljava prste noge, a poslije 20 povlači vlasi u raznim smjerovima.

Kod nekih naroda, koji su na nešto višem stupnju razvoja, dolaze već pravi brojevi, ali naziv njihov potsjeća na njihov postanak.

B u g i l a j i u Novoj Gvineji imaju slijedeće nazive za brojeve:

1 — *tarangesa* (mali prst lijeve ruke)
2 — *meta kina* (slijedeći prst)
3 — *gvigimeta kina* (srednji prst)
4 — *topea* (kažiprst)
5 — *manda* (palac)
6 — *gaben* (zapešće)
7 — *trankgimbe* (lakat)
8 — *podei* (rame)
9 — *ngama* (lijeva grud)
10 — *dala* (desna grud)

Z u n j i u Novom Meksiku broje na slijedeći način:

1 — *töpinte* (onaj kojim se počinje)
2 — *kvili* (uzdignuti s prethodnim)
3 — *ha'i* (prst koji dijeli jednako)
4 — *avite* (svi prsti uzdignuti osim jednoga) i t. d.

To »s j e ć a n j e« na postanak, iako već vrlo mutno, postoji u ovom zanimljivom načinu brojenja, kojim se služe stanovnici otoka N i k o b a r a:

1 — *hean*
2 — *a*
3 — *lue*
4 — *fuan*
5 — *tanein*
6 — *tafuel*
7 — *isat*
8 — *onfoan*
9 — *hean-hata*
10 — *som*
11 — *som hean* (10 + 1)
12 — *som a* (10 + 2)
20 — *hean umdjone* (1 čovjek)
21 — *hean umdjone hean* (20 + 1)

30 — *hean umdjone ruktei* (1 čovjek i pol)
40 — *a umdjone* (2 čovjeka)
50 — *a umdjome ruktei* (2 čovjeka i pol)
100 — *tanein umdjome* (5 ljudi)

Naziv za broj 20 potječe odatle što se taj narod nekada služio u brojenju prstima ruku i nogu, kojih zajedno imade 20 u jednog čovjeka

Iz ovih nekoliko primjera može se donekle objasniti kojim putem je čovječanstvo moralo proći, dok je došlo do pojma broja.

Niknuvši iz svakodnevnih životnih potreba taj se pojam razvio do toga stupnja, da je postao osnov jedne od najrazvijenijih i najdinamičnijih nauka — matematike, koja je mnogo doprinijela i doprinosi procvatu gotovo svih ostalih nauka, olakšava njihovu primjenu u svakidašnjem životu, te je moćan faktor u ekonomskom razvitku društva, a prema tome i u njegovom općem poretku.

Ignacije Smolec

PROSTI ILI PRIM BROJEVI

Mnogo je vremena proteklo, dok se čovjek toliko uzdigao, da promatra niz brojeva 1, 2, 3, i t. d., kao cjelinu. Ljudi su u tom nizu dosad našli mnogo pravilnosti, pa se čitava matematika s mnogobrojnim svojim primjenama može u krajnjoj mjeri svesti na svojstva toga niza brojeva. Zato je izučavanje i spoznavanje njegovo u neku ruku mjerilo za kulturu, civilizaciju i uspon čovjeka. Kad se kao djeca nadmudrivasmo pitanjem, koji je najveći broj, a na odgovor uzvraćali: dodaj svojem broju 1, pa ćeš dobiti još veći broj, ni ne slutismo pri tom, da upravo prstom opipavamo svojstvo brojeva koje je od osnovne važnosti možda sveukupne plodnosti matematike, naime svojstva, da je i $n + 1$ broj, ako je n broj.

Od davnih vremena razlikujemo **parne** brojeve 2, 4, 6 i t. d., od **neparnih** brojeva 1, 3, 5, i t. d. po tom, što su parni djeljivi sa 2 — možemo ih dakle raspoloviti — dok neparni nijesu djeljivi sa 2. Mnogo je dublja spoznaja tzv. **prostih ili prim** brojeva, kao što su 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, i t. d.; to su brojevi , koji su djeljivi samo s 1 i sa samim sobom, zato ih i ne možemo rastvoriti u jednake dijelove osim jedinice, za razliku od složenih brojeva 4, 6, 8, 9, 10 i t. d., koji se mogu razložiti na pr. $8 = 2 \cdot 4$.

Prim brojevi su osnovna građa, atomi brojeva, od kojih su računskim množenjem sazdani i svi ostali prirodni brojevi. Ali i zbrajanjem prim brojeva dobivaju se mnogi brojevi, pa se na pr. ljudi već 200 godina muče, kako bi dokazali Goldbachovu hipotezu, da je svaki parni broj suma od 2 prosta broja, a svaki neparni broj suma od 3 prosta broja, na pr. $6 = 1 + 5$, $14 = 3 + 11$, $9 = 1 + 3 + 5$ i t. d.; tek je 1937. godine Vinogradovu pošlo za rukom pokazati, da to pravilo općenito važi za neparne brojeve, eventualnih izuzetaka nema neizmjerno mnogo, pa je dakle počev od nekog broja prema gore svaki neparni broj suma triju prostih brojeva. Važan je i Schnirelmann-ov rezultat, da je svaki prirodni broj suma od najviše 64 prim broja.

Inače su već Grci znali, da ima beskrajno mnogo prim brojeva (Euklid, Eratostenovo sito), dakle da nema najvećeg prim broja. Ali sve do pred relativno kratko vrijeme nismo ništa znali, koji prosti broj dolazi neposredno iza nekog prim broja. Jedno je sigurno: osim za prim broj 2 dodavanjem jedinice ne ćemo doći ponovo do prim brojeva (nego ćemo dobiti izvjesne parne brojeve). A uvećavanjem prim broja za 2? Ne ćemo sigurno svaki put dobiti opet prim broj, ali još ne znamo, da li se na taj način može ipak dobiti beskonačno mnogo prim brojeva (to su t. zv. **susjedni prim brojevi,** kao što su susjedni na pr. brojevi 3, 5, ili 5, 7, ili 29, 31). No idući od ma kojega broja n do dvostrukog broja $2n$, sigurno ćemo, kao što danas prema Čebiševu znamo, naići na bar jedan prost broj; tako na pr. idući od 19 do 38 naići ćemo na prim brojeve 23, 29, 31 i 37.

Danas najveći poznati prim broj glasi:
170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727
a može se pisati i ovako: $2^{127} - 1$.

Po obliku su interesantni prim brojevi

1111111111111111111 odnosno
11111111111111111111111

(19 odn. 23 nanizanih 1), a dobiju se dijeleći sa 9 broj $10^{19} - 1$ odnosno broj $10^{23} - 1$.

Isto tako, ako ispred 91 nanižemo 8 puta odn. 14 odn. 19 puta broj 90, izaći će svaki put prost broj, a dobiju se diobom s 11 brojeva $10^{19} + 1$ odn. $10^{31} + 1$ odn. $10^{41} + 1$. Tako na pr. imamo ovaj prim broj

909090909090909090909090909091.

I tako, ma da ima neizmjerno mnogo prostih brojeva, danas ipak ne znamo da predstavimo, odnosno napišemo proizvoljno velik prim broj. A pitanje, da li je neki broj prost ili složen, daleko prelazi naše današnje mogućnosti. Treba sačekati, pa da čovjek izmisli kakove sprave, koje će nam na ovom području proširiti vidike slično, kao što su to u drugom pravcu učinili mikroskop, ili drugi aparati.

Ne zna se, koliko ima t. zv. Fermatovih prim brojeva, t. j. prostih brojeva oblika $2^{2^n} + 1$; za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i t. d. dobivamo brojeve 3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, pa nadalje 18446744073709551617 i t. d., ali dok su prvih pet brojeva prim, zadnja dva su složena, jer je predzadnji djeljiv sa 641, a zadnji sa 274177. Uopće se ne zna, postoji li još koji Fermatov prim broj osim tih pet navedenih. Napominjemo, da iz dva razloga gornji najveći poznati prim broj $2^{127} - 1$ nije Fermatov, prvo jer se eksponent 127 ne može napisati u obliku 2^n i drugo, jer se kod Fermatovih brojeva potenciji dodaje 1, a kod našeg gornjeg broja oduzima 1.

Fermatovi prosti brojevi odredili su sudbinu Gaussa. Gauss je kao mladić dokazao, da se pravilni poligon s prostim brojem stranica može pomoću lineala i šestara (to su najviše upotrebljavane sprave u geometriji) samo onda nacrtati, ako je taj prim broj baš Fermatov (zato se na pr. pravilni 7-kut ne može, a pravilni 17-kut može nacrtati linealom i šestarom, jer prim broj 7 nije Fermatov, dok prim broj 17 jest Fermatov). Taj vanredni uspjeh Gausov odlučio je, da on u nedoumici ne ode na studij filologije nego na studij matematike.

(Iz »Prirode« — God. XXXII, str. 129—130.)

Đ. K.

DA LI JE ISPRAVNO:

3 + 2 = 11 i 3 · 2 = 12?

Kad pročitate ovaj naslov, pomislit ćete da se radi o kakvoj šali, ili igrački, ili podvali; no znajte, radi se o ozbiljnom pitanju i odgovorit ćemo odmah u početku, da su ti računi **potpuno ispravni,** a u kojem smislu, vidjet ćete doskora.

Za razumijevanje stvari moramo se najprije pozabaviti načinom pisanja brojeva, osobito većih. Taj je način jedan od možda najvećih izuma ljudskog duha, a tako jednostavan po svojoj prirodi.

Uzmimo da imamo opisati množinu zrna pšenice u jednoj vreći. Kako se ta množina opisuje? Evo kako: Zrna se skupljaju najprije u hrpe po **deset** komada. Pri tom će nastati mnoštvo kupova po deset zrna, a preostat će još ili 0, ili 1, ili 2, ili... i t. d., 9 zrna. Deset ih ne može ostati, jer bi se iz njih mogao napraviti još jedan novi kup po deset zrna.

A zašto se uzelo kupove baš po deset zrna? Zato što svaki čovjek ima pred nosom na raspolaganju tu množinu pomoćnih predmeta — svoje prste na obim rukama — i s pomoću njih može svaku množinu bilo kojih predmeta opisati. Što zapravo znači brojiti? Kako će na pr. nepismen čovjek izbrojiti svoje, recimo, stado? Jednostavno ovako: Za svaku ovcu koja ulazi u tor, stavit će kod sebe na pr. kamečak; množina takvih kamečaka opisuje množinu njegovih ovaca. Drugog dana, kad budu ovce izlazile, za svaku će ovcu iz ovog kupa odstraniti po kamečak, i koliko kamečaka još preostane, znači, ili da ih je još toliko zaostalo, ili, recimo, da ih je netko ukrao. Ovi su dakle kamenčići pravo knjigovodstvo njegove imovine, i on s pomoću njihovom »vodi« iz dana u dan svoje »poslovanje« baš kao i banka ili trgovac o ušlom i izašlom novcu ili robi.

Te skupine kamenčića, koje opisuju stanje množine, ta oruđa ili sredstva zovu se **brojevi**, i dobivaju kao i svako oruđe: motika, lopata, sjekira, i svoje ime: **dva, pet, tri, jedan,** i t. d. ili kraće pisano znakovima 2, 5, 3, 1...

Brojevi su dakle **mehanička oruđa** (iz kamena, zrna i slično), koja moramo imati pri ruci, da možemo, na gore spomenuti način, opisivati bilo koje množine bilo kojih objekata o kojima vodimo računa, te povećavanje i njihovo umanjivanje.

Pa tako radi još i danas nepismen čovjek, koji na pr. za posuđene ili neplaćene predmete šara kredom po svojim vratima poteze, tako da svakom predmetu odgovara njegov potez. To su oni slavni **rovaši,** kojima su naši djedovi vodili knjigovodstvo svojih dugova i tražbina.

Sad nam je jasno, kako su baš naši prsti na obim rukama poslužili kao dragocjeno pomagalo pri opisivanju množina. Toj pomoćnoj skupini dali su Grci ime **deka** i zato ovakav način opisivanja s pomoću njihovom nosi ime **dekadski** način ili sistem.

Na sreću, svi ljudi imaju istu množinu prstiju na obim rukama, i zato danas skoro svi narodi opisuju množine na **isti** način. Svi imaju barem taj jezik opisivanja isti, i to je **jedini međunarodni** jezik, dok su svi obični jezici tako međusobno **različni.**

Vratimo se natrag onom opisivanju zrna pšenice. Kad su se stvorili kupovi po deset zrna, uzima se opet deset tih kupova, i s njima naprave novi kupovi (po 100); preostat će onih po deset: ili 0, ili 1, ili 2,... ili 9.

Opet se skupljaju 10 velikih kupova i naprave novi, po 1000 zrna; preostat će onih po 100 recimo ili 0, ili 1, ili 2,... ili 9. I taj se postupak nastavi dok ne izađu veliki kupovi iz kojih se radi pomanjkanja, već ne mogu napraviti novi sa 10 njih.

I tako će množina zrna, ovako s pomoću temeljne množine deset = deka opisana, izgledati na pr. 5427 zrna, što znači 5 kupova po 1000 i 4 kupa po 100 i 2 kupa po 10 i 7 zrna.

Računanje s takovim brojevima, zbrajanje, odbijanje, množenje, dijeljenje i t. d., stvar je pučke škole, a osniva se na dvjema najnižim operacijama i to samo: zbrajanje i množenje od 0 do 9; početak je 1 + 1, a konac 9 + 9. Slično i množenje 1 · 1 do 9 · 9. Svi ostali računi s brojevima su samo opetovanja ovih temeljnih.

Ne zaboravite, da pri tom treba samo deset oruđa ili znakova 0, 1,... i 9, a da za množinu **deset,** onu najvažniju kod brojenja **nema posebnog** znaka! Pa to je i razumljivo, jer kad se tu množinu želi opisati kaže se: **1 kup** po deset i **ništa** (0) više ne preostaje, što pisano glasi: 10.

A sad jedno pitanje: da ljudi imaju na obim rukama recimo samo 4 prsta, ili 7, i t. d...., kako bi onda opisivali bilo koje množine? Isto tako, kao danas kad ih imaju onoliko koliko ih imaju. Na pr. volovi bi odabrali temeljnu množinu 4, jer imaju 4 noge, matematika muhe imala bi temeljnu množinu za brojenje 6, jer ima 6 nogu i t. d.

Kušajmo opisati množinu s pomoću temeljne množine nogu kod vola (sistem 4). Stvarat će se kupovi po 4 zrna, a preostat će ili 0,ili 1, ili 2, ili 3. Četiri zrna ne će smjeti preostati, jer bi se iz njih napravio novi kup! Sam taj kup opisat će se ovako: 1 kup i ništa (0) više, t. j. 10 u tome sistemu. U tom sistemu će biti dakle samo četiri znaka: 0, 1, 2, 3 i s njima će se moći obavljati svi računi, baš kao što i mi radimo danas s naših deset znakova.

Iz novih kupova po 4 stvorit će se opet novi po 4 niža kupa i tako do kraja, dok se iscrpi sva množina zrna.

Recimo da smo svu množinu zrna tako opisali na ovaj način:

3 **najveća kupa**	po 64 zrna
2 **manja kupa**	po 16 zrna
0 **još manja kupa**	po 4 zrna
i 3 **preostala zrna**	po 1.

Broj kojim će se ta množina pisati u sistemu 4, glasit će: 3203 zrna. Ne zaboravite da se množina četiri piše 10, a množina šesnaest znakom 100, množina 64 znakom 1000 i t. d.

I zaista: 16 zrna znači 1 veliki kup, 0 manjih i ništa (0) više. U kratko — a to vrijedi i za svaki sistem po volji: temeljna množina se piše 10, njezin kvadrat sa 100, kubus sa 1000 i t. d.

Kako će se u ovom slučaju **izgovarati** znak 10 ili 100 i t. d. sasvim je sporedno, glavno je da znamo značenje tih znakova: množina četiri odnosno šesnaest, pa baš zato i njih možemo zvati i izgovarati riječju »deset« odnosno »sto«, ali u drugom značenju nego u današnjem našem deka-sistemu.

I tako se može jedna te ista množina pisati na razne načine, bilo s kojom temeljnom množinom, što dokazuje da su svi sistemi ravnopravni, a da naš sistem, s našim prstima, nije nikakvi jedini i ničim privilegiran, nego dogovorom odabran, jer imamo svi istu množinu prstiju na raspolaganju.

Interesantno je primijetiti, kad napišemo na pr. 2134 zrna t. j. $2 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1$ zapravo **ne znamo** koja je to prava množina, dok ne dodamo po kom sistemu je opisana; dakako mi danas i bez dodatka po nepisanom dogovoru, uzimamo sistem naših prstiju, i onda to znači 2134 zrna; no ovaj broj, 2134, sasvim isto pisan u sistemu prstiju samo jedne ruke značit će:

4 zrna po 1		=	4
3 · 10	znači	=	15
1 · 100	„	=	25
2 · 1000	„	=	250
	ukupno		294

dakle s tim brojem 2134 je zapravo bila opisana ona množina, koju mi danas označujemo sa 294.

Sad će vam biti jasno ono što piše u naslovu $3 + 2 = 11$ i $3 \cdot 2 = 12$. U brojenju se uzela temeljna množina četiri, tako da je zbroj u našem deka sistemu 5.

No ta će se množina opisati kao 1 kup temeljni po 4, i još 1 zrno što se piše 11.

Isto tako i 3 · 2; dobivena množina (koju mi pišemo 6) opisat će se kao 1 skupina po 4 i još 2 zrna, tako će cijela množina biti opisana znakovima 12.

Da su svi računi s množinama, opisanima u bilo kojem sistemu, na pr. 4, **ispravni,** pokazat ćemo na slijedećem primjeru:

U našem deka sistemu: 35 + 27 = 62.

No u sistemu 4 množina 35 će se pisati:

2 kupa po 16 + 0 kupa po 4 + 3 t. j. 203.

A 27 će biti 1 kup po 16, 2 kupa po 4 + 3 po 1 zrno.

Dakle: 123.

$$\text{Kad se zbroji}\quad \begin{array}{r} 203 \\ +\ 123 \\ \hline 332 \end{array}$$

t. j. 203 + 123 = 332.

Tumač zbrajanja: 3 + 3 = 6 u našem deka sistemu, no ta se množina opisuje u sistemu 4 ovako: 1 kup po 4 i 2 zrna t. j. 12.

Dakle 3 + 3 = 12; 2 se piše a 1 se zbraja dalje.

Dakle je zaista suma onih brojeva = 332.

Da je to **ispravno,** vidi se po tom što rezultat

$$\begin{array}{lrrlr} 332 \text{ znači:} & 2 \text{ po} & 1 & \text{zrno} = & 2 \\ & 3 \text{ po} & 4 & \text{zrna} = & 12 \\ & 3 \text{ po} & 16 & \text{zrna} = & 48 \\ \hline & & & \text{Ukupno} & 62 \end{array}$$

t. j. isto kao u našem sistemu deka

35 + 27 = **62.**

Drugi primjer: 23 . 32 u sistemu 4.

Počni s desnim 2; 2 . 3 = 12, 1 dalje 2 . 2 = 10 i 1 je 11. Prvo množenje glasi

$$\begin{array}{r} 23 . 32 \\ \hline 112 \end{array}$$

Množenje sa 3 daje 3 . 3 = 21, dakle 2 dalje 3 . 2 = 12 i ona 2 dalje je 20, jer 12 + 2 = 20.

Oba množenja daju:

$$\begin{array}{r} 23\,.\,32 \\ \hline 112 \\ 201 \\ \hline 2122 \end{array} \quad \text{i to je rezultat.}$$

Ispitivanje ispravnosti:

23 u sistemu 4 glasi u sistemu deka = 11
32 „ „ 4 „ „ „ „ = 14

Pomnoženo daje
2122 „ „ 4 „ „ „ „ = 154

što dokazuje ispravnost našeg računa da je zaista u sistemu 4 umnožak

23 . 32 *jednak* 2122.

Eto to bi bila u sistemu 4, takva volovska matematika, savršeno ispravna, što dokazuje *1.*) da naš sistem 10 nema nikakvog privilegija, *2.*) da se može temelj sistema uzeti po volji, jer su svi brojevi među sobom ravnopravni, *3.*) da nam je naš sistem, sistem naših deset prstiju u krv ušao samo dugim vježbanjem, navikom, suzama, a nekad i batinama, i da na njega kao tobože **jedinog mogućega** i **»svetoga«** nemamo nikakvo pravo prisizati, jer su svi sistemi **ravnopravni i ispravni i svi računi s njima ispravni.**

Nešto sličnoga imamo i u današnjem životu. Svi narodi mjere na **metre** osim Engleza koji mjere na **stope;** no nitko neće reći da su računi sa stopama neispravni, a jedini ispravni oni sa metrima.

Da ne bi možda sudili ovako:

budući da je 3 . 2 = 12 a 3 i 2 = 11 (u sistemu 4!) ne smiješ reći da se je matematika nekako **»protegnula«** jer kad bi na pr. uzeli za bazu sistema recimo sve prste na rukama i nogama, onda bi u tom sistemu bilo:

$$6 + 7 + 8 = 11$$

a $$6 . 8 = 28$$

i tad bi se matematika tobože **»stegnula«**

Na stvari je ovo:

ako se uzme baza manja od naše, onda je opisivanje iste množine dulje a kad se uzme veća od naše, onda je kraće.

Još jedno pitanje: kako se množina opisana u našem dekadskom sistemu opiše u nekom drugom sistemu brzo i sigurno:

Na pr. 2357 u deka opiši u sistemu 3.

Pripravi tablicu u sistemu 3.

t. j. 3, 9, 27, 81, 243 itd.

Podijeli **zadani broj 2357** sa 3, izlazi 785 i ostatak **2.** Znači može se napraviti 785 kupova po 3 zrna i ostatak 2.

Dalje: 785 : 3 = 261 i ostatak **2,** t. j. dobilo se 261 kup po 9 zrna i još ostatak **2 kupa** po 3 zrna.

Dalje :	261 : 3 = 87	i	ostatak	**0**
Dalje :	87 : 3 = 29	„	„	**0**
	29 : 3 = 9	„	„	2
	9 : 3 = 3	„	„	**0**
	3 : 3 = **1**	„	„	**0**

Cifre u novom sistemu su onaj zadnji 1, a ostale su redom oni ostaci: 0, 0, 2, 0, 0, 2, 2 t. j. u dekadskom sistemu množina: 2357 u sistemu tri glasi: 10020022.

Kako se broj iz sistema na pr. 6, napiše u deka sistemu? Ovaj skok je lakši, jer se napiše samo tablica tog sistema, 1, 6, 36, 216, 1296 i t. d. ... i onda postupa ovako:

Na pr. 2104 iz sistema 6 napiši u sistemu deka:

4	po	1 =	4
0	„	6 =	0
1	„	36 =	36
2	„	216 =	512

zbroj = **552** a to je traženi opis u sistemu deka.

Da ima u svakom, kao i u našem deka sistemu **decimalnih brojeva,** neka pokaže ovaj primjer:

U sistemu, na pr. 7, opisana duljina jednog štapa: 312, 5346 metara, znači 2 metra, 1 duljina od 7 metara, 3 duljine po 49 metara; zatim 5 duljina svaka po $\frac{1}{7}$ metra, 3 duljine po $\frac{1}{49}$ metra, 4 duljine po $\frac{1}{343}$ metra i 6 duljina po $\frac{1}{2401}$ metra; dakako da se u tom sistemu $\frac{1}{7}$ piše $\frac{1}{10}$, a $\frac{1}{49}$ kao $\frac{1}{100}$ a $\frac{1}{343}$ kao $\frac{1}{1000}$ i t. d.... pa radi ovakvog pisanja zaslužuju i tako opisane duljine ime decimalni brojevi. S njima se radi isto kao i s našim deka decimalnim brojevima.

Za zabavu i pouku:

1. Brojenje sistema 3 glasi: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100 i t. d.

2. Napiši u sistemu 5 tablicu $1 + 1$ i $1 \cdot 1$.

3. U sistemu 5 izvedi slijedeće račune i pokaži da su rezultati oni brojevi u zagradama:

$$341 + 212 + 43 = (1201)$$
$$10302 - 443 = (4304)$$
$$231 \cdot 334 = (144304)$$
$$211 : 12 = (13)$$
$$\sqrt{31} = (4) \quad 3^2 = (14)$$
$$\sqrt[3]{13} = (2) \quad 4^3 = (224)$$

Na koncu, ne zaboravite, da se **u bilo kojem sistemu** temeljne množine tog sistema pišu sa **10,** 100, 1000 i da je **u svim** sistemima:

$$10 \cdot 10 = 100$$
$$10 \cdot 100 = 1000, \ 100 \cdot 100 = 10000 \text{ i t. d.}$$

isto kao i u našem deka sistemu. I tu se vidi **ravnopravnost** svih **brojčanih sistema,** to je neke vrsti **invarianta** svih sistema t. j. račun koji za sve sisteme ostaje nepromijenjen ili invariantan.

Cilj je ovoga prikaza bio, da pokaže kako su svi sistemi potpuno iste naravi, ali ipak ne bi bilo zgodno tražiti da se naš sistem **deset** prstiju zamijeni s bilo kojim drugim sistemom. On će ostati u praksi, ali nikada neka svetinja »jedina i prava«.

Doduše, sistem s bazom 12 bio bi još zgodniji, jer je broj 12 zgodnije povezan s raznim podjelama u praktičnom životu (1 godina = 12 mj.; 1 dan = 2 · 12 dana i t. d.), ali danas je već toliko raznih tablica na pr. u astronomiji napisano u decimalnom sistemu, da bi trebalo učiniti golem posao da se svi ti podaci prevedu iz decimalnog u duodecimalni brojni sistem.

Babilonski sistem s bazom 60 još je teoretski opravdaniji — 60 ima toliko faktora! —, ali bi onda trebalo previše cifara: šezdeset mjesto naših deset! Zato je vrlo vjerojatno da će ipak naš decimalni sistem ostati trajna tekovina ljudske civilizacije.

Prof. Dragutin Šuljak

PRSTI I DIJADNI SISTEM

Dijadni brojni sistem ima za bazu broj 2, to znači da se svaki broj može predočiti kao polinom potencija baze 2. Za pisanje brojeva u dijadnom sistemu dovoljne su samo dvije cifre 0 i 1. Ako nam sada savijeni prst znači da nema dotične potencije, a ispruženi prst da imamo odgovarajuću potenciju, pošto smo prije toga svakom prstu pridružili jednu potenciju baze 2, onda ćemo pomoću savijenih i ispruženih prstiju moći predočiti svaki broj. Ako nam palac znači $1 = 2^0$, kažiprst $2 = 2^1$, srednji $4 = 2^2$, prstenjak $8 = 2^3$, mali $16 = 2^4$, onda ćemo odmah vidjeti da pomoću ispruženih prstiju, a zbrajanjem odgovarajućih brojeva možemo predočiti svaki broj do 31. Da smo uzeli i dalje potencije broja 2 i njih pridružili drugim prstima, mogli bismo predočiti i dalje brojeve.

Prema tome imamo:

palac	znači $1 = 2^0$
kažiprst	„ $2 = 2^1$
palac i kažiprst	„ $3 = 2 + 1 = 2^0 + 2^1$
srednji	„ $4 = 2^2$

srednji i palac	„	$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$
srednji i kažiprst	„	$6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1$
srednji, kažiprst i palac	„	$7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$
prstenjak	„	$8 = 2^3$
prstenjak i palac	„	$9 = 8 + 1 = 2^3 + 2^0$
prstenjak i kažiprst	„	$10 = 8 + 2 = 2^3 + 2^1$
prstenjak, palac i kažiprst	„	$11 = 8 + 2 + 1 = 2^3 + 2^1 + 2^0$
prstenjak i srednji	„	$12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2$

i t. d. Pokušaj produžiti sam dalje do 31.

TABLICA MNOŽENJA POMOĆU PRSTÂ

Da bi se izvršilo međusobno množenje brojeva od 1 do 9 dovoljno je znati međusobne produkte brojeva od 1 do 5. Kada znamo ove produkte, onda ćemo sve druge do 9.9 svesti na produkte od 1 do 5 i dobiti ih pomoću prstiju na obje ruke. Na pr. treba naći produkt $7 \cdot 9$, koji možemo pisati i ovako $(5 + 2)(5 + 4)$.

Na lijevoj ruci ispružimo 2 prsta, jer je sedam jednako pet više dva, a na desnoj ruci ispružimo 4 prsta, jer je devet jednako pet više četiri. Prema tome na lijevoj ruci je savijeno $5 - 2 = 3$ prsta, a na desnoj $5 - 4 = 1$.

Traženi produkt $7 \cdot 9$ dobit ćemo sada ovako: *Uzdignuti se prsti zbroje* (u našem slučaju $2 + 4 = 6$) *i oni naznačuju desetice,* dakle imamo 60; *tome se doda produkt savijenih prstiju,* t. j. $3 \cdot 1 = 3$, koji znači jedinice. Prema tome je $7 \cdot 9 = 60 + 3 = 63$.

Ovaj postupak, koji su poznavali i upotrebljavali neki narodi, protumačio je jedan matematičar XVII. stoljeća iz Sirije (B e d a-E d d i n) u knjizi *Khelasaṭ al hissab* na slijedeći način:

$$7 \cdot 9 = (5 + 2)(5 + 4) = 10(2 + 4) + (5 - 2)(5 - 4)$$
$$= 10 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 60 + 3 = 63.$$

Pokušajte i sami ovo izvesti i za produkte: 6 . 6, 6 . 7, 6 . 8, 6 . 9, 7 . 7, 7 . 8, 8 . 9, 9 . 9.

U općim brojevima izgledalo bi objašnjenje ovako:

$$a \cdot b = \underbrace{[(a-5) + (b-5)]}_{\text{uzdignuti prsti}} \cdot 10 + \underbrace{[5-(a-5)] \cdot [5-(b-5)]}_{\text{savijeni prsti}}.$$

NEKOLIKO ZANIMLJIVOSTI IZ ODNOSA BROJEVA I NUMERIČKOG RAČUNANJA

Ivica je polazio prvi razred gimnazije. Prije podne išao je u školu, a poslije podne čuvao je krave na paši. Dok su životinje bezbrižno pasle, njihov je pastir učio zadaću iz knjige koju bi sa sobom ponio.

Jednog jesenjeg dana kiša je pljuštala, kao da su se otvorili svi nebeski ventili. Ivica je pod kišobranom čitao iz svoje knjige, ali su se kapljice kiše probijale kroz razapeto platno i prštale po knjizi. A bilo je i prilično hladno. Što da se radi? Naš junak zaklopi knjigu i stavi je u njedra pod ruku. Tako je on često radio u sličnim prilikama. No ipak je bilo šteta gubiti vrijeme.

Toga dana prije podne vježbao je profesor matematike u prvom razredu sa svojim đacima množenje brojeva napamet. Prisjeti se Ivica toga, i eto ti posla! Sam si je zadavao razne brojeve i u glavi ih množio, da bi stekao što veću spretnost i brzinu u tom poslu. U takvom ga radu kiša zbilja nije mogla smetati.

Smišljajući tako različite brojeve počeo je redom množiti svaki broj sa sobom. On još nije znao što su to kvadrati brojeva, ali su mu se brojevi koje je dobio: 0, 1, 4, 9, 16, 25, i t. d. naročito svidjeli baš zato, što se do njih može doći na taj naročiti način. Da bi ih što bolje zapamtio, počeo je računati za koliko je svaki takav broj veći od prеđašnjeg. I, eto ti opet novog iznenađenja! Razlike među tim brojevima jednake su redom neparnim brojevima: $1 - 0 = 1$, $4 - 1 = 3$, $9 - 4 = 5$, $16 - 9 = 7$, i t. d.

Od toga dana Ivica se mnogo zanimao za brojeve i mnogo se njima bavio. Koliko li bijaše njegovo veselje, kad je u trećem razredu učio da su kod jednoliko ubrzanog gibanja tijela putovi prevaljeni nakon određenog broja jedinica vremena razmjerni **kvadratima** toga broja, dok se putovi u pojedinim jedinicama odnose kao **neparni brojevi.**

Sjetivši se svog otkrića u prvom razredu izgledalo mu je to nekako čudesno. Tek u sedmom razredu to mu je »čudo« bilo posve jasno i razumljivo, kad je saznao da svi neparni brojevi čine aritmetički niz, kojem je prvi član jednak 1, a razlika 2. Opći član mu je po poznatoj formuli: $a_n = a_1 + (n - 1)\,d = 1 + (n - 1)\,2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$, a suma: $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} =$

$$= \frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Dakle je zbroj od prva 2 neparna broja: $1 + 3 = 2^2$, zbroj od prva 3 neparna broja: $1 + 3 + 5 = 3^2$, i t. d. (Vidi str. 230).

Nekadašnji skromni i vrijedni seoski dječak danas je profesor matematike. On imade jednu bilježnicu u koju je zapisivao i još danas zapisuje zanimljive osobine brojeva, koje je ili sam otkrio ili ih negdje pročitao.

Evo nekih od njih:

1.
$1^3 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^2 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
i t. d.

2.

$1 \cdot 9 + 2 = 11$	$1 \cdot 8 + 1 = 9$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$	$12 \cdot 8 + 2 = 98$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$	$123 \cdot 8 + 3 = 987$
$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$	$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$
i t. d.	i t. d.

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$
i t. d.

$$11 \cdot 11 = 121$$
$$111 \cdot 111 = 12321$$
$$1111 \cdot 1111 = 1234321$$
$$11111 \cdot 11111 = 123454321$$
i t. d.

ili

$$9 \cdot 6 = 54$$
$$99 \cdot 66 = 6534$$
$$999 \cdot 666 = 665334$$
$$9999 \cdot 6666 = 66653334$$
i t. d.

No imade u njegovoj bilježnici i primjera kako se neka računska radnja može obaviti na razne načine.

Imamo li na pr. pomnožiti 12 · 34, onda to možemo učiniti i ovako:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & & \times \\ & 3 & 4 \\ \hline 4 & 0 & 8 \end{array}$$

Pomnožimo jedinice međusobno: 2 · 4 = 8 i potpišemo ih pod jedinice. Zatim pomnožimo desetice prvog faktora s jedinicama drugog (1 · 4 = 4) i jedinice prvog s deseticama drugog (3 · 2 = 6) i zbrojimo to: 4 + 6 = 10. 0 potpišemo pod desetice, a 1 pribrojimo k umnošku desetica obiju faktora: 1 · 3 = 3; 3 + 1 = 4. Tako dobijemo stotice. Dakle je 12 · 34 = 408.

Drugi primjer:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 6 \\ & & \times \\ & 3 & 7 \\ \hline 9 & 6 & 2 \end{array}$$

6 · 7 = 42; **2** su jedinice, a 4 desetice. 2 · 7 = 14; 3 · 6 = 18; 14 + 18 = 32. To su desetice. Svega imamo 32 + 4 = **36** desetica, t. j. **6** desetica i 3 stotice. 2 · 3 = 6. To su stotice. Zajedno 6 + 3 = **9** stotica. Dakle je 26 · 37 = 962.

Ove produkte mogli smo izračunati i na slijedeći način. Napišemo oba faktora jedan do drugog

12	34	Dijelimo 12 s 2 (ne uzimajući u obzir ostatak)
6	68	uzastopce, dok ne dođemo do 1., a 34 množimo s 2
3	**136**	onoliko puta, koliko smo puta dijelili 12 s 2. Zbrojimo
1	**272**	li u desnom stupcu one brojeve koji stoje u istom
	——	retku s neparnim brojevima u lijevom stupcu, dobit
	408	ćemo traženi produkt.

Uzmimo još jedan primjer:

327	**236**
163	**472**
81	**944**
40	1888
20	3776
10	7552
5	**15104**
2	30208
1	**60416**
	77172

Dakle: $372 \cdot 236 = 77172$.

Pravo je veselje izraditi zadatak na više načina, pa uvijek dobiti isti rezultat! Osim toga se time provjerava, jesmo li dobro radili i da li je rezultat točan. To je mnogo bolje nego dva puta izraditi zadatak na isti način, jer se pogreška, koju smo učinili prvi puta, može lako potkrasti i drugi puta.

U bilježnici našeg znanca imade i primjera kako se neka računska radnja može izvršiti i kraćim i jednostavnijim putem nego se to obično radi.

Uzmimo na pr. kvadriranje i kubiranje cijelih brojeva.

1. *a)* Svaki cijeli broj veći od 10 dade se pisati u obliku

$10\,a + b$. (Na pr. $\underline{28}|8 = 10 \cdot 28 + 8$). Kvadrirajmo to!

$$(10\,a + b)^2 = 10^2\,a^2 + 2.10\,a \cdot b + b^2 = 100\,a^2 + $$
$$+ 2\,ab \cdot 10 + b^2$$

Poredamo li članove dobivenog trinoma drugačije, imat ćemo:

$$(10\,a + b)^2 = 100\,a^2 + b^2 + 2\,ab \cdot 10.$$

Na pr.: $98^2 = 9^2 \cdot 100 + 8^2 + 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 = 8100 + 64 + 1140 = 81\,64 + 144\,0 = 9604.$

Ili kraće:

$$\begin{array}{rl} & \quad 98^2 \\ \hline 9^2 \leftarrow & \boxed{81}\ \boxed{6\ 4} \rightarrow 8 \\ 2.9.8 \leftarrow + & \boxed{14\ \ 4}\,\underline{0} \\ \hline & 96\ \ 0\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \quad 31^2 \\ \hline 3^2 \leftarrow & \boxed{9}\ \boxed{0\ 1} \rightarrow 1^2 \\ 2.3.1 \leftarrow + & \boxed{6}\,\underline{0} \\ \hline & 9\ 6\ 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \quad 298^2 \\ \hline 29^2 \leftarrow & \boxed{841}\ \boxed{6\ 4} \rightarrow 8^2 \\ 2.29.8 \leftarrow + & \boxed{46\ \ 4}\,\underline{0} \\ \hline & 888\ \ 0\ 4 \end{array}$$

b) Imademo li kvadrirati broj, koji na mjestu jedinica ima znamenku 5 (na pr. 65), možemo doći još brže do rezultata. Mi svaki takav broj možemo pisati u obliku $10\,a + 5$. $(10\,a + 5)^2 = 10^2\,a^2 + 2 \cdot 10\,a \cdot 5 + 5^2 = 100\,a^2 + 100\,a + 25 = 100\,a\,(a + 1) + 25.$

Na pr.: $65^2 = 100 \cdot 6\,(6 + 1) + 25 = 100 \cdot 6 \cdot 7 + 25 = $ **$= 4200 + 25 = 4225.$**

Ili kraće: $6 \cdot (6 + 1) = 6 \cdot 7 =$ **42.** Pripišemo **25,** pa dobijemo **4225.**

Drugi primjer

$$\begin{array}{l} 385^2 = ? \\ \hline 38 \cdot 39 = 1482 \\ 385^2 = 148225 \end{array}$$

2. Trebamo li kubirati neki broj, postupit ćemo ovako:

Označimo li naš broj s x, imamo: $x = 10\,a + b$.
$x^3 = (10\,a + b)^3$. Kubirajmo to po poznatom pravilu!

$x^3 = 10^3 a^3 + 3 \cdot 10^2 a^2 \cdot b + 3 \cdot 10\, a \cdot b^2 + b^3$ To možemo i ovako pisati:

$$x^3 = (1000\, a^3 + b^3) + 3 \cdot 10\, ab\, \underbrace{(10\, a + b)}_{\text{To je } x\text{, pa imamo:}}$$

$$x^3 = \underbrace{(1000\, a^3 + b^3)}_{I.} + \underbrace{3 \cdot a \cdot b \cdot x \cdot 10}_{II.}$$

I. se lako izračuna: kubu od *a* naprosto se pripiše kub jedinica. *II* se sastoji od trostrukog produkta od *a* i *b* pomnoženog sa zadanim brojem i sa 10.

Primjeri:

1.

$$\begin{array}{rr}
 & 78^3 \\
\hline
 & 7^3 = 343 \\
 & 8^3 = 512 \\
\hline
 & 34351\,2 \\
3.7.8.78 \leftarrow + & \boxed{13104}\,0 \\
\hline
 & 78^3 = 47455\,2
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl}
 & 61^3 & \\
\hline
6^3 \leftarrow & \boxed{216}\,\boxed{00\ 1} & \rightarrow 1^3 \\
3.6.1.61 \leftarrow + & \boxed{10\ \ 98}\,0 & \\
\hline
 & 63^3 = 2\,26\ 98\ 1 &
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl}
 & 365^3 & \\
\hline
36^3 \leftarrow & \boxed{46656}\,\boxed{12\ 5} & \rightarrow 5^3 \\
3.36.5.365 \leftarrow + & \boxed{1971\ \ 00}\,0 & \\
\hline
 & 365^3 = 48627\ \ 12\ 5 &
\end{array}$$

Ignacije Smolec

RAZGOVOR DVAJU BROJEVA

Sastao se jednom broj 12345679 s brojem 142857, i među njima se raspreo slijedeći razgovor:

12345679: Baš mi je drago da sam upoznao broj koji nastaje dijeljenjem 1 000 000 : 7.

142857: A meni je osobita čast biti u društvu s brojem koji ima toliko smisla za poredak. Šteta što ti još manjka 8.

12345679: Mene to ništa ne smeta. Ni ti se mnogo ne brineš za ostatak dijeljenja 1 000 000 : 7. Nego znaš što! Hajde da ti nešto pričam. Zamisli, imade još tako mnogo ljudi koji ne znaju, što se u meni sve krije! Eto na pr. Pomnoži me sa 36 (= 4 · 9), dobit ćeš 444 444 444 (znamenka 4 ponavlja se 9 puta). Pomnoži me sa 54 (= 6 · 9), dobit ćeš 666 666 666 (znamenka 6 ponavlja se 9 puta) i t. d.

142857: To nije ništa! Ja imam mnogo boljih svojstava. Meni ne može nitko ništa! Pomnoži me sa 2, 3, 4, 5, ili 6, pa ćeš uvijek dobiti broj koji se sastoji od svih mojih znamenaka u istom poretku samo što počinje svaki puta s drugom znamenkom:

142857 · 2 = 285714
142857 · 3 = 428571
142857 · 4 = 571428
142857 · 5 = 714285
142857 · 6 = 857142 (Prve znamenke su poredane po veličini!)

12345679: A pomnoži mene sa 5! Dobit ćeš 61728395, dakle sve moje znamenke, samo se namjesto 4 javlja 8.

142857: E pa dobro! Onda ću i ja tebi otkriti jednu svoju tajnu. Ako ti imaš mojih svojstava, imam i ja tvojih.

Ako mene pomnožiš sa 7, iznenadit ćeš se, jer ćeš dobiti 999 999.

12345679: Gle čuda! Ala mi je i to nešto! Nisi li ti kadgod pokušao izračunati produkt 12345679 · 78? Naravno da nisi! A znaš li što bi dobio, da si to učinio? 962 962 962!

142857: Zaista, mora ti se priznati da si momak od oka. No poslušaj ti sad ovo:

Ti, bez sumnje, misliš da nije lako pomnožiti dva šesteroznamenkasta broja. I nije baš lako! Ali ako sam jedan od tih upravo ja, onda..., eh, onda vidi pa sudi!

Uzmi na pr. 142857 · 367894.

Podijeli drugi faktor sa 7. Rezultatu dijeljenja 52556 pripiši moj produkt sa **2**, jer je kod dijeljenja sa 7 ostalo **2**. (Da je ostatak dijeljenja bio 3, uzeo bi moj produkt sa 3, i t. d.). Od tako dobivenog broja $52556\underbrace{285714}_{=142857 \cdot 2}$ oduzmi kvocijent 52556

pa ćeš dobiti da je 142857 · 367894 = 52556233158 = = 52556285714 — 52556.

12345679: Vidim da me nadmašuješ. Pa... oprosti, ako sam te svojom hvalisavošću štogod uvrijedio. Nego što misliš, kako bi bilo, da nas ljudi malo bolje upoznaju.

142857: To je dobra ideja! Zašto da je ne ostvarimo. Hajdemo do urednika pa da ga zamolimo da naš razgovor uvrsti u Matematičku čitanku.

I pođoše zagrljeni do urednika.

Ignacije Smolec

JOŠ NEKE ZANIMLJIVOSTI BROJEVA

1. Broj 45 može se rastaviti u sumu brojeva: 8, 12, 5, 20, t. j. 8 + 12 + 5 + 20 = 45, tako da je

$$
\begin{aligned}
8 + 2 &= 10 \\
12 - 2 &= 10 \\
5 \cdot 2 &= 10 \\
20 : 2 &= 10
\end{aligned}
$$

2. Broj 100 se da rastaviti u sumu četiri broja: 12, 20, 4 i 64, t. j. 12 + 20 + 4 + 64 = 100, tako da je

$$12 + 4 = 16$$
$$20 - 4 = 16$$
$$4 \cdot 4 = 16$$
$$64 : 4 = 16$$

3. Broj 100 se može napisati s 5 jednakih cifara

$$100 = 111 - 11$$
$$100 = 3 \cdot 33 + \tfrac{3}{3}$$
$$100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$$
$$100 = (5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$$

ili sa 4 ili sa 6 devetica

$$100 = 99\tfrac{9}{9}$$
$$100 = 99 + \tfrac{99}{99}$$

4. Broj 100 se može napisati na nekoliko načina s devet osnovnih cifara. Na pr.

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$$
$$100 = 74 + 25 + \tfrac{3}{6} + \tfrac{9}{18}$$
$$100 = 91\tfrac{5742}{638}$$
$$100 = 94\tfrac{1578}{263}$$
$$100 = 96\tfrac{1752}{438}$$

5. U slijedeća dva broja imamo isto

$$225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89$$
$$134498697 = 1 + 2^3 + 4^5 + 6^7 + 8^9$$

6. Koji se brojevi mogu napisati sa 3 trojke? Koji je od njih najveći?

Odgovor: $3 + 3 + 3 = 9$

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

333

$(3^3)^3 = 3^9 = 19683$

$3^{(3^3)} = 3^{27} = 7625597484987.$

7. U produktima

$41 \cdot 2 =$	82	$14 \cdot 2 =$	28
$32 \cdot 21 =$	672	$23 \cdot 12 =$	276
$312 \cdot 221 =$	68952	$213 \cdot 122 =$	25986

vidimo jedno svojstvo: Ako obrnemo red cifara u faktorima, onda dobijemo i u novom produktu obrnuti red cifara staroga produkta.

U istu grupu spadaju i ovi slučajevi:

8.	$12^2 =$	144	$21^2 =$	441
	$13^2 =$	169	$31^2 =$	961
9.	$102^2 =$	10404	$201^2 =$	40401
	$103^2 =$	10609	$301^2 =$	90601
	$112^2 =$	12544	$211^2 =$	44521
	$113^2 =$	12769	$311^2 =$	96721
	$122^2 =$	14884	$221^2 =$	48841

U slijedećim primjerima razabiremo pravilnosti već na prvi pogled

10. *a)*

$4^2 = 16$

$34^2 = 1156$

$334^2 = 111556$

$3334^2 = 11115556$

$33334^2 = 1111155556$ i t. d.

b)

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$ i t. d.

c)

$5^2 = 25$

$25^2 = 625$

$625^2 = 390625$

$90625^2 = 8212890625$

$890625^2 = 793212890625$

...... i t. d.

$$6^2 = 36$$
$$76^2 = 57776$$
$$376^2 = 141376$$
$$9376^2 = 87909376$$

...... i t. d.

11. I u slijedećim primjerima vidimo odmah o čemu se radi:

a) $(8 + 1)^2 = 81$
$(5 + 1 + 2)^3 = 512$
$(4 + 9 + 1 + 3)^3 = 4913$
$(5 + 8 + 3 + 2)^3 = 5832$
$(1 + 7 + 5 + 7 + 6)^3 = 17576$
$(1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3 = 19683$

b) $(2 + 4 + 0 + 1)^4 = 2401$
$(2 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6)^4 = 234256$
$(3 + 9 + 0 + 6 + 2 + 5)^4 = 390625$
$(6 + 1 + 4 + 6 + 5 + 6)^4 = 614656$
$(1 + 7 + 2 + 1 + 0 + 3 + 6 + 8)^5 = 17210368$
$(3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4)^6 = 34012224$
$(6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2)^7 = 612220032$

M. S.

DA LI SAM MOGAO BRŽE RAČUNATI?

I.

Da li sam to mogao brže izračunati — pitanje je, koje možda rijetko koji čovjek sebi postavlja, nakon što je nešto zbrojio, odbio, pomnožio ili podijelio. Obično nitko ne smatra to pitanje tako važnim, da bi ga sebi postavio, ili jednostavno ne smatra, da ima toliko vremena, da i tim problemom sebi tare glavu.

Za ljude, koji jednom u osam ili četrnaest dana dođu u priliku, da nešto računaju, i nije toliko važno, da ono što računaju, učine pomoću svih mogućih pravila za brzo računanje. Ali ima ljudi, koji vrlo često treba da računaju, a kod toga vrlo polagano i još pogrešno računaju.

Naše doba traži od nas brzinu u svemu — pa tako i u računanju. No nije dovoljno, da računanje bude i dovoljno **brzo**; ono treba biti uz to i **točno,** kao i **ekonomično.**

Govorimo li o **brzom** računanju, tada ne mislimo samo na brzo računanje u smislu brzog izvođenja računskih operacija, nego i u smislu upotrebljavanja nekih **pomoćnih operacija** u svrhu bržeg dolaženja do cilja. Cilj je ovog članka, da nas upozna s najobičnijim pomoćnim sredstvima računanja, do kojih dolazimo i samim razmišljanjem.

Točnost računanja bit će, kako će se vidjeti na primjerima, upravo uvjetovana **brzinom** računanja. Često kažemo: »p o l a g a n o, a l i s i g u r n o«... No ovdje ćemo upravo na jednom primjeru pokazati na interesantnu, možda i čudnu činjenicu: b r z o, z a t o t o č n i j e.

Ekonomičnost računanja znači ovo: ako imamo dva načina za izračunavanje jednog računskog zadatka tada ćemo odabrati uvijek onaj, koji sa što manje pisanja brojeva dolazi do rezultata. Što manje brojeva pišemo, manja je i mogućnost (uz ostale iste uvjete) da ćemo pogriješiti.

Za ilustraciju ovih tvrđenja uzet ćemo primjer: treba pomnožiti 4932 sa 25.

Ako obično računamo, postupamo ovako:

$$\begin{array}{r} 4932 \cdot 25 \\ \hline 9864 \\ 24660 \\ \hline 123300 \end{array}$$

Ovdje smo množili sa 2, onda sa 5, parcijalne smo produkte zbrojili. No sjetimo li se, da je $25 = 5 \cdot 5$, tada taj isti račun možemo izvesti u dvije etape: najprije ćemo množiti sa 5, a rezultat tog množenja ponovno sa 5. Dakle:

$$\begin{array}{l} \underline{4932} \cdot 25\ (= 5 \cdot 5) \\ \underline{24660} \\ 123300 \end{array}$$

Ovdje smo izveli dva množenja, a zbrajanja nije bilo. Manje posla, a i manja mogućnost, da ćemo se zabuniti u računanju.

Uzmemo li, da je 25 = 100 : 4, tada ćemo doći do rezultata i na taj način, da zadani broj pomnožimo sa 100 i taj produkt podijelimo sa 4:

$$\begin{array}{l} \underline{4932} \cdot 25\ (= 100 : 4) \\ 123300 \end{array}$$

Ovaj je postupak još brži od prеđašnjeg, jer smo množenje sa 100 izveli samim dodavanjem dviju nula; iza tog je slijedilo jednostavno dijeljenje brojem 4.

Treći je dakle postupak **najbrži.** On će biti od svih postupaka vjerojatno i **najtočniji,** jer se računalo s vrlo jednostavnim brojevima. No on će biti i **najekonomičniji,** jer je uz najmanju upotrebu računskog aparata doveo do rezultata. Vidimo, dakle, da smo postigli točnost uz veliko poboljšanje u brzini, a uz to smo proveli i ekonomiju računanja.

II.

Nastojat ćemo sada prijeći sve 4 osnovne vrste računanja, i pogledati, da li se kod tih vrsta računanja može izračunati nešto brže, točnije i ekonomičnije, nego što obično radimo. Uzmimo na pr. zbrajanje. Zbrojit ćemo na obični način ove brojeve:

$$\begin{array}{r} 2143,75 \\ 5780,50 \\ 3006,\text{—} \\ 18172,25 \\ \underline{425,50} \\ 29528,\text{—} \end{array}$$

Uzevši u obzir, da se zbroj ne mijenja, ako izmijenimo mjesta pojedinih pribrojnika (zakon komutacije!), možemo i ovdje izmijeniti unutar vertikalnih kolona pojedine pribrojnike, kako bi olakšali posao zbrajanja. To ćemo provesti nadopunjujući po mogućnosti svaki od pribrojnika drugim tako, da oni zajedno čine zbroj 10. Posao time postaje brži, jer se broju 10 najlakše pribrajaju drugi brojevi. Zbrajat ćemo dakle ovako: 5, 10, **1**; 8, 20, **2**; 4, 10, 15, 18, **1**; 10, 22, **2**; 10, 15, **1**; 9, 19, **1**; 2.

Imamo li zbrojiti dugačku kolonu na pr. od 30 brojeva, onda zbrajamo jednom odozdo prema gore, drugi puta, za kontrolu, odozgo prema dolje. Još je sigurnije, da tu dugačku kolonu razdijelimo na pr. u 3 grupe po 10 brojeva, zbrojimo svaku grupu posebno, a onda rezultate grupnih zbrajanja opet zbrojimo. Time ništa nismo izgubili na brzini: lakše je zbrojiti po 10 brojeva i još jednom zbrojiti ta tri rezultata, nego samo jednom jednu grupu od 30 brojeva. Rezultat je točniji i sigurniji.

Treba li da na pr. zbrojimo 4975 i 998, tada to zbrajamo najbrže i najtočnije tako, da se sjetimo, da je $998 = 1000 - 2$; treba dakle broju 4975 pribrojiti broj 1000, i od rezultata odbiti broj 2: $4975 + 998 = 4975 + 1000 - 2 = 5973$. Naravno, da taj cijeli postupak možemo sasma lako provesti i na pamet. Analogno radimo pri pribrajanju brojeva, koji su blizu bilo kojem broju, koji ima na kraju nulu. Broj 29 najlakše ću pribrojiti, ako pribrojim broj 30, a od rezultata odbijem broj 1. Na pr. $87 + 29 = 117 - 1 = 116$.

III.

Ako od nekog broja treba odbiti više brojeva, tada to najbolje činimo u isti mah, naime da u isti mah pribrajamo sve brojeve i odbijamo ih od zadanog broja. Kod toga upotrebljavamo onaj postupak dopunjanja do broja 10, koji smo već vidjeli kod zbrajanja. Na pr.:

$$\begin{array}{r} 24592{,}50 \\ -\ 638{,}25 \\ -\ 2413{,}- \\ -\ 782{,}25 \\ -\ 13397{,}- \\ \hline 7362{,}- \end{array}$$

(5, 10 i 0 je 10, **1**; 1, 3, 5 i 0 je 5; 7, 10, 20 i 2 je 22, **2**; 10, 20, 23 i 6 je 29, **2**; 2, 12, 22 i 3 je 25, **2**; 2, 5, 7 i 7 je 14, **1**; 1, 2 i 0 je 2.)

Slično kao i kod zbrajanja s brojevima, koji su blizu nekome broju s 0 na kraju, postupat ćemo i kod odbijanja. Na pr. 5698 — 199 = 5698 — 200 + 1 = 5499. Ako je suptrahend veći od okruglog broja, tada ne dobivamo mnogo na vremenu: 4972 — 3105 = 4972 — 3100 — 5 = 1867.

IV.

Kod množenja najčešće griješimo, množeći opširno na obični način, mjesto da kakovim skraćenim postupkom dođemo brzo do rezultata. To je razlog, zbog kojega ćemo ovdje biti malo opširniji.

Kako treba množiti sa 25, pokazali smo već na jednom primjeru. Sa 50 ćemo lako pomnožiti, uvaživši, da je 50 = 100 : 2. Dakle: množit ćemo sa 100 i dijeliti s 2. Tu ne dobivamo mnogo na vremenu, jer tamo moramo množiti s 5, a ovdje dijeliti s 2. Ipak će postupak dijeljenja s 2 biti nešto brži od množenja s 5. Na pr.

$$\begin{array}{r} 1923 \cdot 50 \\ \hline 96150 \end{array}$$

Množeći sa 75 moramo uvažiti, da je to 100 — 25, a 25 je opet $^1/_4$ od broja 100. Treba dakle pomnožiti sa 100 i od produkta odbiti njegovu jednu četvrtinu.

$$\begin{array}{r}
498 \cdot 75 \\
\hline
49800 \\
-\ 12450 \\
\hline
37350
\end{array}$$

(Mjesto ovog pripisivanja dviju nula može se na samom multiplikandu dodati dvije točke, koje imaju onda funkciju dviju nula na kraju).

Ako treba neki broj pomnožiti s 15, treba uzeti u obzir da je 15 = 10 + 5, dakle 10 + 1/2 od broja 10; množit ćemo tako, da broj pomnožimo s 10 (dodavanjem jedne nule ili stavljanjem točke), od toga uzmemo jednu polovinu, i ta dva broja zbrojimo.

$$\begin{array}{r}
8945 \cdot 15 \\
\hline
89450 \\
44725 \\
\hline
134175
\end{array}
\qquad \text{Bolje:} \qquad
\begin{array}{r}
8945 \cdot 15 \\
44725 \\
\hline
134175
\end{array}$$

Nekad se u srednjoj školi tražilo, da đaci osim t. zv. **»malog jedamputjedan«**, nama poznate **»tablice množenja«**, znadu i **»veliki jedamputjedan«**, t. j. tablicu množenja brojeva, gdje pojedini faktori idu do 20 (na pr. 14 · 17 = 238). Iako se sada to u školi možda ne traži, ipak često puta trebamo taj **»veliki jedamputjedan.** Da vidimo, kako bismo mogli izračunati taj **»veliki jedamputjedan«**, a da i ne upotrebimo papir

Uzmimo opet primjer 14 · 17! Treba upamtiti ovaj kratki postupak (koji se teoretski vrlo lako dokazuje): Zbrojit ćemo jedan faktor i znamenku na mjestu jedinica u drugom faktoru, pa sumu pomnožiti s 10, i tome pribrojiti produkt jedinica u faktorima. Konkretnije će biti, ako to napišemo:

$$\begin{array}{r} 14\\ +\ 7\\ \hline 21\\ \hline 210\\ +\ 28\\ \hline 238\end{array}$$

Taj računski postupak možemo i u mislima provesti i brzo izreći produkt. Na pr. 13 · 19 u mislima ćemo prelaziti ovako: 22, 220 i 27 je 247.

Svi se sjećamo, koliko smo okapanja imali još u pučkoj školi kod množenja brojevima 12, 13, . ., 19. Po običaju kod množenja povukli smo odmah ispod multiplikanda crtu. Učitelj bi odmah poviknuo: »S 1 već je pomnoženo!« . . ., i — drugi red! Danas to znamo. Na pr. brojem 13 množit ćemo ovako:

$$\begin{array}{r} 8972 \cdot 13\\ 26916\\ \hline 116636\end{array}$$

No još bolje i brže je ovako: budući da je sa 1 već pomnoženo, a produkt sa 3 pomaknut je za jedno mjesto na desno, to ćemo množiti samo sa 3, a svakom produktu sa 3 pribrojiti prvi desni broj multiplikanda. Kad svršimo množenje sa 3, onda još posljednji lijevi broj multiplikanda pomnožimo sa 1. Dakle:

$$\begin{array}{r} 8972 \cdot 13\\ \hline 116636\end{array}$$

($3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 7 = 21$ i 2 je 23, 2; $3 \cdot 9 = 27$ i 2 je 29 i $7 = 36$, 3; $3 \cdot 8 = 24$ i 3 je 27 i 9 je 36, 3; $1 \cdot 8 = 8$ i 3 je 11.)

Slično sa 12, 14, 16, 17, 18 i 19. Sa 15 smo već prije pokazali lakši postupak.

No najlakše je množiti s 11. Budući da sa 1 ne treba množiti, to treba samo zbrajati grupe od po 2 znamenke, uzevši kao da pred multiplikandom i iza njega stoji po jedna nula (točka). Na pr.:

$$\begin{array}{r} .6945. \cdot 11\\ \hline 76395\end{array}$$

(0 i 5 je 5, 5 i 4 je 9, 4 i 9 je 13, **1**; 1 i 9 je 10 i 6 je 16, **1**; 1 i 6 je 7 i 0 je 7.)

Kad izračunavamo postotak iz zadane glavnice, kamata i broja dana, tada radimo po obrascu:

$$p = \frac{36000 \cdot K}{G \cdot d}$$

U slučaju, da se broj 36000 ne da kratiti zgodno ni s kojim faktorom nazivnika, tada treba množiti s 36. No kako?

Uočivši, da je 36 = 40 — 4, treba zadani broj pomnožiti samo sa 40 i od toga odbiti produkt sa 4, koji je i onako već gotov, jer smo množili sa 40, a 4 je $\frac{1}{10}$ od 40. Uzmimo:

$$\begin{array}{r l} 593 \cdot & 36\ (= 40 - 4) \\ \hline 23720 & \\ -\ \ 2372 & \\ \hline 21348 & \end{array}$$

Slično ćemo množiti sa 27 (= 30 — 3), 45 (= 50 — 5), 54, 63, 72. Sa 81 ćemo lakše množiti tako, da množimo sa 8, a sa 1 je već pomnoženo, pa treba produkt sa 8 pomaknuti samo za jedno mjesto na lijevo.

Množimo li nekim dvoznamenkastim brojem, u kojem se znamenke multiplikatora nalaze u nekom jednostavnom međusobnom odnosu, možemo sebi i ovdje olakšati posao. Na pr. 5904 · 48. 8 je dva puta veće od 4; pomnožit ćemo, dakle, sa 4, a produkt sa 8 dobit ćemo tako, da produkt sa 4 množimo još sa 2 — množenje sa 2 je brže nego sa 8:

$$\begin{array}{l l} 5904 \cdot 48 & \\ \hline 23616 & \\ \ \ 47232 & \text{(množenjem 23616 sa 2)} \\ \hline 342792 & \end{array}$$

Slično bismo radili na pr. s troznamenkastim brojem **648**. Tu je 48 = 6 · 8; množit ćemo sa 6, dobiveni produkt sa **8**, pomaknuti ga za dva mjesta na desno i zbrojiti:

$$\begin{array}{r} 529 \cdot 648 \\ \hline 3174 \\ 25392 \\ \hline 342792 \end{array}$$

Normalno bismo množili ovako:

$$\begin{array}{r} 529 \cdot 648 \\ \hline 3174 \\ \left.\begin{array}{r} 2116 \\ 4232 \end{array}\right\} = 25392 \\ \hline 3427292 \end{array}$$

Koji puta, da olakšamo sebi posao, rastavimo multiplikator na dva ili više faktora. Tada množimo tim faktorima tako, da najprije pomnožimo prvim, dobiveni produkt drugim, i t. d., do zadnjega faktora. Na pr. sa 56 ćemo množiti tako, da pomnožimo najprije sa 8, a dobiveni produkt sa 7 (ili obratno); time dobivamo na vremenu u toliko. da ne moramo zbrajati, a na točnosti u toliko, što izvodimo jednu operaciju manje. Na pr.:

$$\begin{array}{r} 8098 \cdot 56\ (=8 \cdot 7) \\ \hline 64784 \\ \hline 453488 \end{array}$$

Slično ćemo množiti sa 28 (4 · 7), 66 (6 · 11), i t. d.

Ako je broj, kojim množimo, blizu nekog okruglog broja, ali manji od njega, tada množimo okruglim brojem, a razliku, koju smo uzeli previše, odbijamo: Množit ćemo na pr. sa 97 tako, da pomnožimo sa 100, a od dobivenog produkta odbijemo trostruki multiplikand.

$$\begin{array}{r} 7945.. \cdot 97\ (= 100 - 3) \\ - \quad 23835 \quad (= 3 \cdot 7945) \\ \hline 770665 \end{array}$$

Tako bismo množili i sa 98 (= 100 — 2), i slično. Najzgodnije je taj postupak primijeniti kod dvoznamenkastih brojeva, koji završavaju na deveticu, troznamenkastih, koji završavaju na dvije devetice, i t. d. Na pr:

$$\begin{array}{r} 653 \cdot 59\ (= 60 - 1) \\ \hline 39180 \\ -\ 653 \\ \hline 38527 \end{array}$$

V.

Prelazeći na dijeljenje, dakle najteže od svih dosada spomenutih operacija, treba spomenuti, da baš dijeljenje ima manje ovakovih pomoćnih postupaka (ili bar manje praktični) negoli množenje.

Uzmimo najprije dijeljenje sa 25, 50, 75.

Kako je 25 = 100 : 4, to ćemo dijeliti sa 25 tako, da dijelimo sa 100, a dobiveni rezultat pomnožimo sa 4. Na pr.:

$$\begin{array}{l} 8097 : 25\ (= 100 : 4) \\ \hline 323{,}88 \end{array}$$

Budući da je nadalje 50 = 100 : 2, to ćemo, dijeleći sa 50, dijeliti sa 100, a množiti sa 2:

$$\begin{array}{l} 1654 : 50\ (= 100 : 2) \\ \hline 33{,}08 \end{array}$$

Budući da je 75 tri četvrtine od 100, t. j. $\frac{300}{4}$ to ćemo, mjesto da dijelimo sa 75, množiti sa 4, a onda dijeliti sa 300.

$$\begin{array}{l} 16974 : 75\ (= 300 : 4) \\ \hline 678{,}96 \\ \hline 226{,}32 \end{array}$$

Druga olakšica kod dijeljenja je dijeljenje rastavljanjem na faktore, slično kao kod množenja. Na pr.:

$$\begin{array}{l} 6484 : 16\ (= 4 \cdot 4) \\ \hline 1621 \\ \hline 405{,}25 \end{array}$$

Tako ćemo dijeliti na pr. sa 22 (= 2 · 11), 56 (8 · 7), i t. d.

Često puta nam je teško pogoditi, koliko puta »*ide*« divizor u dividend. Praktično je pravilo: ako je druga znamenka divizora bliza broju 9, tada pogađamo tako, da pitamo, koliko puta »*ide*« prva znamenka divizora, uvećana za 1, u prvu ili prve dvije znamenke dividenda. Na pr.:

172921 :. 49 = 3529
259
142
441
0

(Govorimo: kao **5** u 17, kao **5** u 25, i t. d.)

VI.

Ne služimo se samo pomoćnim sredstvima običnog **računanja** da dođemo brže do rezultata. I upotrebom drugih pomoćnih sredstava (na pr. logaritamskih tablica, Crelleovih i Petersovih tablica množenja brojeva do 1000, Multi=Divi-sistema W. Wilkensona, logaritamskog računala, strojeva za računanje) olakšavamo znatno posao računanja. — No izlaganje upotrebe ovih pomoćnih sredstava odvelo bi nas predaleko i daleko bi premašilo cilj našeg izlaganja.

Jisarek Vladimir

KONTROLIRANJE SVIH RAČUNA

Često puta interesi prakse zahtjevaju da rezultati bilo kojih računa budu **uvjerljivo ispravni,** da se s njima mogu stvarati opet daljnji **ispravni zaključci.** No kako **svaki** čovjek, i najvještiji račundžija, može da tokom rada učini pogreške, one će se odraziti i u rezultatu. Za to je u kritičnim slučajevima bezuvjetno potrebna **kontrola** svih rezultata. Jedino računski strojevi rade bez pogrešaka, no kod čovjeka su pogreške moguće.

Kontrola bi se mogla provesti i **ponavljanjem** svih operacija, no to *1.)* zamara i troši dragocjeno vrijeme, a *2.)* onaj koji negdje učini pogrešku istu lako i previdi.

Dati trećem licu da provede račune nije uvijek lako, jer ono nije uvijek prisutno.

Na moru je provedena praksa da sa istim izmjerenim podacima više ljudi izračunavaju poziciju broda i kad svima izlazi **isti** rezultat, neovisno radeći jedan od drugoga, onda je taj rezultat s velikom vjerojatnošću ispravan, a i treba da takav bude, jer o njemu ovise ljudi, brod i teret.

No ovakove procedure nisu svagdje moguće, zato se mora priteći drugim mjerama sigurnosti rezultata.

Ni onaj školski način kontrole nije nikako pouzdan, na pr. kontrola diobe dvaju većih brojeva: k v o c i j e n t s e p o m n o ž i s d i v i z o r o m, p r i b r o j i o s t a t a k i m o r a s e d o b i t i d i v i d e n t.

Nevolja te kontrole leži u tom, što se baš tim množenjem mogu počiniti pogreške i krivo zaključiti da je rezultat pogrešan, a zapravo može biti ispravan. Obilazni putevi su dakle opasniji od direktnih i za ljubav ispravnosti mora ih se izbjegavati.

Princip kontrole zahtjeva *1.)* kontrola mora biti čim jednostavnija. *2.)* ne smije teći istim, nego drugim sasvim novim putem, pa ako se oba rezultata, i direktni i kontrolni slažu, onda rezultat ima veliku vjerojatnost ispravnosti.

Pokazat ćemo *dva* takva sredstva kontrole svih računa, najprije s njihove teoretske strane, a onda u praksi za sve računske operacije.

Uzmimo bilo koji broj, na pr. 5846.

On se može pisati:

$$5 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1$$

No 10 se može pisati kao $9 + 1$.
100 „ „ „ „ $99 + 1$
1000 „ „ „ „ $999 + 1$
i t. d.

Dakle se naš broj može pisati

5. (999 + 1) + 8. (99 + 1) + 4. (9 + 1) + 6.1 ili

kad se pomnoži

5.999 + 8.99 + 4.9 + (5.1 + 8.1 + 4.1 + 6.1)

Ovaj dio u zagradi nije ništa drugo nego **zbroj znamenaka zadanog broja.**

Sav prvi dio je sigurno djeljiv sa 9, jer svaki član sadrži ili 9, ili 99, ili 999 i t. d., što se uvijek dade dijeliti sa 9.

Zaključak: Svaki zadani broj kad se dijeli sa 9 ima ostatak jednak zbroju njegovih znamenaka.

No kako i takav zbroj znamenaka predstavlja opet sam za sebe jedan broj, opet se zbroje njegove znamenke i tako redom do kraja, dok izađe ostatak ili 0 ili 1 ili 2, ... ili 8 što predstavlja ostatak diobe tog broja sa 9.

Ovakvo zbrajanje znamenaka zvat ćemo **stezanje** zadanog broja, a rezultat tog zbrajanja **stegnuti broj** (zapravo ostatak diobe sa 9).

Pazi! Kod ovog stezanja ne zbrajaj 9 niti one cifre koje daju zajedno 9.

Na pr. Koji ostatak daje diobom sa 9 broj 413682?

Zbroj znamenaka je 6, t. j. 4 + 2, jer 3 i 6 kao i 1 i 8 otpadaju, jer daju 9, Stegnuti broj glasi : 6.

Kad smo s time na čistu možemo reći: svi računi s brojevima mogu se zapravo obaviti s brojevima, koji se mogu rastaviti u dvije partije, **1.)** jedna je djeljiva sa 9, a **2.) ostatak** diobe sa 9. Zato će **svi rezultati** biti složeni iz dvije partije: **1.)** jedna koja će biti djeljiva sa 9, a druga će biti ili **suma** ili **diferencija** ili **produkt,** ili **kvocijent** njihovih **ostataka** ili **stegnutih brojeva.**

Kontrola će se dakle sastojati u tome, da se odredi **ostatak svakog zadanog broja s kojim se radi,** t. j. **stegnuti broj,** a onda se provede **zadana operacija** s tim **ostacima** i rezultat **takve operacije mora dati ostatak rezultata** t. j. **stegnuti broj rezultata.**

Rečeno vrijedi i za **decimalne brojeve.**

Primjer: 1.) Neka se ispita zbrajanje:

1432,58	(5)
27104,263	(7)
28536,843	(3)

Kad se zbroje znamenke prvoga broja izlazi 23, a ponovno kad se sve zbroje izlazi 5. To je onaj broj desno u zagradi. Drugi daje 7. Treći daje 3.

Kontrola: (5) + (7) = (12), a kad se ovaj 12 stegne izlazi (3). Izlazi zaista stegnuti broj rezultata onaj u zagradi.

Upute za ostale račune:

2. Odbijanje:

842,3628	(6)
57,41873	(8)
784,94407	(7)

Kontrola: (7) + (8) = (15) = stegnuto (6) t. j. gornji stegnuti broj!

3. Množenje:

$$\frac{243{,}21\ .\ 0{,}0231}{= \quad 5{,}618151}$$

Kontrola: prvi broj stegnut daje (3), drugi daje (6), treći (9). Dakle: (3) . (6) = 18, a koji stegnut daje (9) t. j. kao i rezultat.

4.) Dioba:

52,41 : 832,12 = 0,062

i ostatak 81856.

Kontrola: *prvi* broj *stegnut* daje (3)

drugi	„	„	(7)
treći	„	„	(8)
ostatak	*stegnut*	„	(1)

(7) . (8) = 56 a 56 + 1 = 57 ovo stegnuto daje 12, a dalje stegnuto daje (3), što je upravo stegnuti prvi broj.

5.) Kvadriranje i kubiranje je zapravo m n o ž e n j e i ne treba daljeg razjašnjenja.

Primjer: $0{,}13^2 = 0{,}0169$

K o n t r o l a: *prvi stegnut* = (4)
rezultat „ = (7)

dakle : $4^2 = 16$, a ovo stegnuto = (7) t. j. kao u rezultatu.

$1{,}5^3 = 3{,}375$
1,5 stegnut = (6), rezultat stegnut = (9)
Dakle: $6^3 = 216$ = stegnuto (9) kao i rezultat.

6. $\sqrt{14{,}215} = 3{,}77$
ostatak 21

K o n t r o l a: broj pod korjenom stegnut = (4)
rezultat „ = (8)
ostatak = (3)

Postupak: $8^2 = 64$, a $64 + 3 = 67$, što stegnuto daje 13, a ovo još stegnuto daje (4), upravo kao i prvi stegnuti broj.

Upozorenje: Ni ova kontrola nije apsolutno sigurna, jer se može dogoditi, da stegnuti brojevi daju ispravne rezultate, a ipak rezultat operacija može biti neispravan.

Evo primjera:

138	(3)
247	(4)
376	(7)

Stegnuti brojevi daju ispravno (3) + (4) = (7), no ipak rezultat 376 nije ispravan, jer mora biti 385; u računu su se naime potkrale dvije pogreške: mjesto 5 izašlo je 6 t. j. za 1 više, a mjesto 8 izašlo je 7 — za 1 manje, što kod stezanja ovih brojeva vodi do **istoga** t. j. (7).

Zaključak: Ova metoda kontroliranja je samo **vrlo vjerojatna,** jer je **nevjerojatno** da će se u računima učiniti upravo **dvije ili više pogrešaka,** koje će se međusobno **poništavati** i time **maskirati neispravnost i same kontrole.**

Druga metoda kontrole počiva na sličnom postupku prikazanom u teoretskom dijelu, samo što se osniva na ostatku diobe svakog broja sa 11.

Na pr. 282467 dade se pisati

$$28.10000 + 24.100 + 67$$

ili $$28.\,(909.11 + 1) + 24\,(9.11 + 1) + 67$$

ili $$28.909.11 + 24.9.11 + (28 + 24 + 67)$$

Prva je skupina očito djeljiva sa 11, a druga skupina, ona u zagradi, predočuje ostatak te diobe; da se nju odredi, dakako uvijek ispod 11, postupat će se praktično ovako:

28 daje ostatak diobe sa 11 broj 6
24 „ „ „ „ „ „ 2
67 „ „ „ „ „ „ 1

Dakle prvi ostatak diobe broja sa 11 će biti 6 + 2 + 1 = 9 što ćemo opet zvati **stegnuti** broj zadanog broja.

Ako bi stegnuti bio veći od 11, na pr. 26, ovaj će se konačno stegnuti sa 4 t. j. ostatak diobe 26 sa 11.

Kontrola se provodi ovim stegnutim brojevima isto kao što je gore prikazano i primjerima razjašnjeno. Kod **decimalnih** brojeva se dvije po dvije cifre broje od dec. zareza **desno i lijevo.**

Primjeri: isti kao gore, samo sada:

1.) Stegnuti brojevi su: (5), (1), (6)
odakle (5) + (1) = (6) što potvrđuje ispravnost rezultata.

2.) Stegnuti su brojevi: (4), (6), (9)

K o n t r o l a : (9) + (6) = 15 a ovaj stegnut daje (4) t. j. prvi broj.

3. Stegnuti brojevi su: (0), (0), (0), što potvrđuje ispravnost.

4.) Stegnuti su: (5), (8), (4), a ostatak stegnut glasi (6).

K o n t r o l a : (8) . (4) = 32 a 32 + 6 = 38 ili (5) t. j. ispravno kao prvi stegnuti broj. I t. d.

Konačno još gornji primjer, gdje je jedna kontrola bila ispravna, a ipak rezultat računa neispravan.

Druga kontrola će otkriti pogrešku!

U našem gornjem primjeru bit će stegnuti brojevi redom:

138	(6)
247	(5)
376	(2)

a (6) + (5) nije = (2), dakle 376 nije ispravan makar bi po prvoj kontroli mogao biti.

Ispravan rezultat 385 daje sa 11 ostatak (0), pa je zaista (6) + (5) = (0).

Za zabavu i pouku.

Zadaj sam sebi ili drugom bilo koji račun i rezultat njegov, pa traži da se smjesta ispita **ispravnost** njegova rezultata. *Dragutin Šuljak*

III.

IZ GEOMETRIJE
I
GEOMETRIJSKIH KONSTRUKCIJA

POVRŠINA TROKUTA KAO FUNKCIJA TRIJU STRANA

Prvo izvođenje formule, koja daje površinu trokuta kao funkciju triju strana nalazimo kod *Herona* Aleksandrijskog (prvo stoljeće). Ovaj Grk izvodi ove formule u dva svoja djela: *Metrici* i *Diopteru.*

Jedno novo izvođenje, a koje je i bilo prvo za koje se znalo u Evropi, nalazi se u knjizi trojice Arapa: *Mohameda, Ahmeda* i *Alhasana* (9. stoljeće). Reproducirao ga je *Leonardo* iz Pize u svojoj knjizi: *Praktična geometrija* (1220), a zatim *Jordanus Nemorarius* (13. stoljeće) a i drugi geometri renesanse. Karakteristično je, da se kod Herona i kod spomenute braće Arapa, kao i kod svih autora naprijed spomenutih primjenjuje formula na trokut čije su stranice 13, 14 i 15, jer su to najmanji brojevi, koji daju racionalnu površinu: ovdje 84.

Poslije se nalaze i druga nova izvođenja. Tako kod *Newtona* u njegovoj *Općoj aritmetici* (1707), zatim kod *Eulera* u njegovim *Novim komentarima* (Tom. I, 1747—48). Posebno ćemo navesti i izvođenje našeg *Boškovića,* koje je dobio trigonometrijskim razmatranjem. (Vidi str. 86).

1. Heronovo izvođenje.

Produžimo AC za dužinu $CI = BE$ (sl. 1). Izlazi $AI = s$ i $AI \cdot OF = s \cdot r = P$. Uzdignimo sada u O normalu na AO i u C na AC. One se sijeku u L. Kut AOL i kut ACL jesu pravi, i četiri točke A, O, C, L leže na jednom te istom krugu, pa imamo

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle ALC = 2.90^0.$$

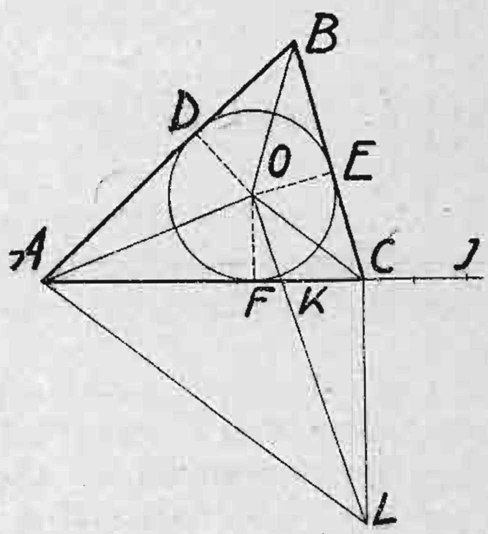
ali OA, OB, OC su raspolovnice kuteva DOF, DOE, EOF čija je suma 4.90^0, pa je

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOE = 2.90^0$$

i stoga

$$\sphericalangle ALC = \sphericalangle BOE.$$

I tako su dva pravokutna trokuta ALC i BEO slična i mi imamo



Sl. 1.

$$\frac{AC}{CL} = \frac{BE}{OE} = \frac{CI}{OF}$$

ili

$$\frac{AC}{CI} = \frac{CL}{OF} = \frac{CK}{KF}$$

Dodamo li 1 lijevo i desno slijedi

$$\frac{AC + CI}{CI} = \frac{CK + KF}{KF}$$

ili

$$\frac{AI}{CI} = \frac{CF}{KF}.$$

Prema tome, kako je trokut AOK pravokutan imamo

$$\frac{AI^2}{AI \cdot CI} = \frac{AF \cdot CF}{AF \cdot KF} = \frac{AF \cdot CF}{OF^2}$$

odakle slijedi

$$AI^2 \cdot OF^2 = AI \cdot AF \cdot CI \cdot CF$$

budući da je

$$AI^2 \cdot OF^2 = P^2,\ AI = s,\ AF = s - a,$$
$$CI = BE = s - b,\ CF = s - c$$

imamo

$$P^2 = s\,(s - a)\ (s - b)\ (s - c)$$

ili

$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

2. Izvođenje trojice braće Arapa.

Produžimo li BA za $AG = CF$ i BC za $CI = AF$ onda imamo $BG = BI = s$ (sl. 2.). Uzdignimo u G normalu, koja će sjeći u O' simetralu OB kuta ABC. $O'I$ je normala na BC i jednaka $O'G$, jer su dva trokuta BGO' i BIO' sukladna. Nanesemo li $AH = AG$ na AC' i povučemo li $O'A$, $O'H$, $O'C$, tada ćemo imati

$$O'C^2 = O'I^2 + IC^2$$
$$O'A^2 = O'G^2 + AG^2$$

ili

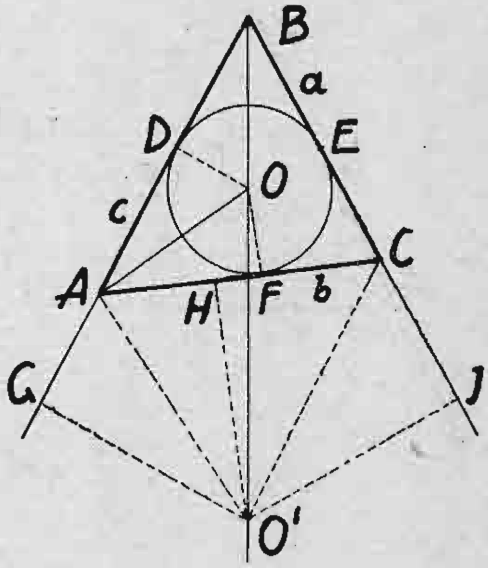
$$O'C^2 - O'A^2 = IC^2 - AG^2$$

Kako je

$$AH = AG = s\text{-}c$$
$$CH = b - AH = b - AG = s\text{-}a = IC$$

izlazi

$$O'C^2 - O'A^2 = CH^2 - AH^2.$$



Sl. 2.

Budući da ova relacija u trokutu $AO'C$ postoji samo onda, ako je H nožište normale spuštene iz O' na AC, onda su kutevi kod H pravi, a odatle izlazi, da je $O'A$ raspolovnica kuta $GO'H$.

S druge strane u četverokutu $GAHO'$ sa dva prava kuta, imamo

$$\sphericalangle GAH + \sphericalangle GO'H = 2.90^0,$$

a pošto je

$$\sphericalangle GAH + \sphericalangle BAH = 2.90^0$$

to slijedi

$$\sphericalangle GO'H = \sphericalangle BAH$$

a uzimajući polovine

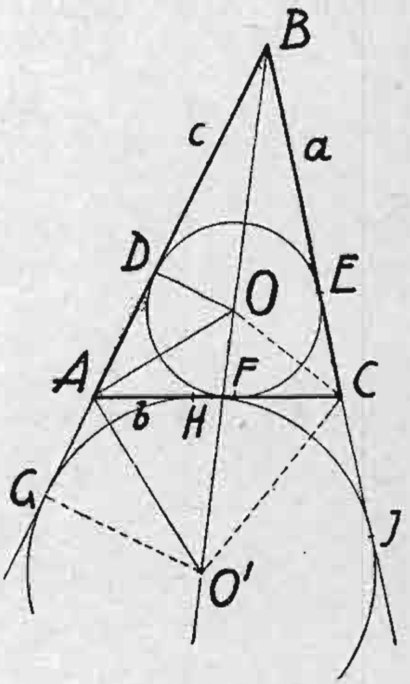
$$\sphericalangle GO'A = \sphericalangle DAO.$$

Prema tome su dva pravokutna trokuta AGO' i ADO slična i mi imamo

$$\frac{OD}{AG} = \frac{AD}{O'G}$$

ili

$$OD \cdot O'G = AD \cdot AG.$$



Sl. 3.

Kako je

$$\frac{OD}{O'G} = \frac{OD^2}{OD \cdot O'G} = \frac{OD^2}{AD \cdot AG},$$

i pošto je $OD \parallel O'G$ imamo

$$\frac{OD}{O'G} = \frac{BD}{BG}$$

ili

$$\frac{OD^2}{AD \cdot AG} = \frac{BD}{BG}$$

Odavde slijedi

$$OD^2 \cdot BG = AD \cdot BD \cdot AG$$

i

$$OD^2 \cdot BG^2 = BG \cdot AD \cdot BD \cdot AG.$$

Kako je $OD \cdot BG = P$, $BG = s$, $AD = s\text{-}a$, $BD = s\text{-}b$, $AG = s\text{-}c$ to imamo konačno

$$P = \sqrt{s\,(s\text{-}a)\,(s\text{-}b)\,(s\text{-}c)}$$

3. Klasično izvođenje.

Ovo se izvođenje osniva na prethodnom, samo je izlaganje jednostavnije. Upotrebljen je krug upisan trokutu izvana (sl. 3).

Neka bude r' polumjer i O' središte vanjskog kruga, koji odgovara kutu B. Neka su G, H i I dirališta ovoga kruga sa stranicama trokuta.

Imamo

$$P = s \cdot r \tag{1}$$

a uz to još

$$P = O'AB + O'CB - O'AC =$$

$$= (c + a - b)\,\frac{r'}{2} = (s - b) \cdot r' \tag{2}$$

Pomnožimo li (1) i (2) imalo

$$P^2 = s\,(s - b)\,rr'. \qquad (3)$$

I sada kao i u izvođenju trojice braće transformiramo produkt $r \cdot r'$ ili $OD \cdot O'G$ promatranjem sličnih trokuta AGO' i ADO, koji imaju okomite stranice. Tako dobijemo, da je

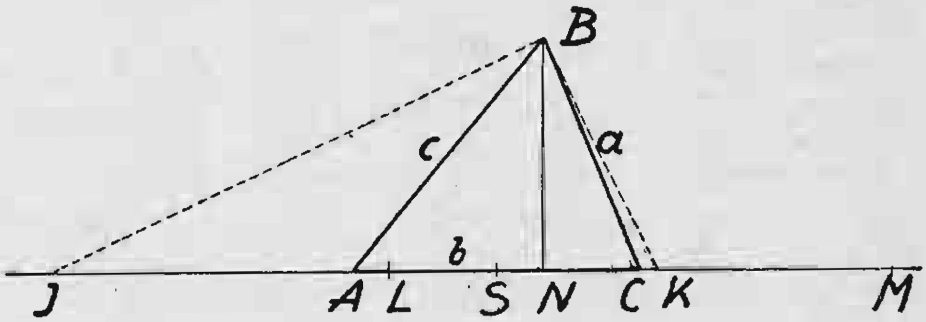
$$OD \cdot O'G = r \cdot r' = AD \cdot AG = (s\text{-}a)\,(s\text{-}c) \qquad (4)$$

Stavimo li ovu vrijednost (4) u (3) imamo

$$P^2 = s\,(s\text{-}a)\,(s\text{-}b)\,(s\text{-}c).$$

4. Izvođenje Newtonovo.

Na stranici AC neka S bude sredina (sl. 4.). Na lijevo i desno od A nanesemo $AI = AK = c$ na AC, a lijevo i desno



Sl. 4.

od C opet $CL = CM = a$. Povucimo BI i BK, i spustimo okomicu BN na AC. Imamo

$$AB^2 - CB^2 = AN^2 - CN^2 =$$
$$= (AN + CN)\,(AN - CN) = AC \cdot 2SN$$

ili

$$SN = \frac{AB^2 - CB^2}{2AC} = \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

Odbijemo li SN od $SK = c - \frac{b}{2}$ ostane

$$NK = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2b} =$$

$$= \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2b} = 2\,\frac{(s - c)\,(s - b)}{b}$$

Odbijemo li konačno NK od $IK = 2c$ dobijemo

$$IN = 2c - \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} = \frac{(b+a)^2 - a^2}{2b} =$$

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} = \frac{2s(s-a)}{b}.$$

Budući da je $AB = AI = AK$, to se trokut IBK dade upisati u polukrug, pa je prema tome kod B pravi kut. Stoga je

$$BN = \sqrt{IN \cdot NK} = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ili

$$P = \frac{b \cdot BN}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

5. Izvođenje Eulerovo.

Iz A spustit ćemo na CO okomicu AI, koja siječe FO u K. Imamo $\sphericalangle$ AOI = $\sphericalangle$ OAC + $\sphericalangle$ OCA = $\frac{1}{2}$ $\sphericalangle$ BAC + $\frac{1}{2}$ $\sphericalangle$ BCA, (jer je $\sphericalangle$ AOI vanjski kut trokuta AOC). (Sl. 5.).

Budući da je u trokutu ABC

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CBA = 180^0$$

to je

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA} + \tfrac{1}{2}\sphericalangle CBA = 90^0$$

t. j.
$$\sphericalangle AOI + \tfrac{1}{2}\sphericalangle CBA = 90^0$$

ili
$$\sphericalangle AOI = 90^0 - \tfrac{1}{2}\sphericalangle CBA = 90^0 - \sphericalangle OBD$$

Budući da je u pravokutnom trokutu ODB

$$\sphericalangle OBD + \sphericalangle DOB = 90^0 \text{ ili } \sphericalangle OBD = 90^0 - \sphericalangle DOB$$

to je

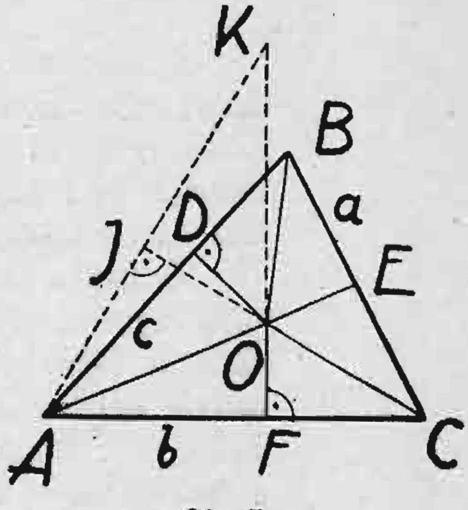
$$\sphericalangle AOI = 90^0 - (90^0 - \sphericalangle DOB) = \sphericalangle DOB$$

Prema tome su pravokutni trokuti AIO i BDO slični, pa izlazi

$$\frac{AI}{IO} = \frac{BD}{r} \qquad (1)$$

Isto tako su slični trokuti CIA, KFA, OIK, pa je

$$\frac{AI}{IO} = \frac{AC}{OK} \qquad (2)$$



Sl. 5.

Isporedimo li (1) i (2) dobijemo

$$\frac{BD}{r} = \frac{AC}{OK}$$

ili

$$BD \cdot OK = AC \cdot r \qquad (3)$$

No kako je $OK = FK - r$ to (3) pišemo ovako:

$$BD \cdot FK = BD \cdot r + AC \cdot r = (BD + AC) \cdot r \qquad (4)$$

Kako je

$$2s = AB + AC + BC = AD + DB + BE + EC + AF + FC$$

i kako je

$$AO = AF, \; CF = CE \text{ i } BE = BD$$

to je

$$2s = 2\,AF + 2\,CF + 2\,DB$$

ili

$$s = AF + CF + DB = AC + BD \qquad (5)$$

Stavimo li (5) u (4) imamo

$$BD \cdot FK = s \cdot r \qquad (6)$$

S druge strane slični trokuti CFO i KAF daju

$$\frac{FK}{AF} = \frac{CF}{r} \qquad \text{ili} \qquad FK \cdot r = AF \cdot CF \qquad (7)$$

a pomnoživši (7) sa BD dobijemo

$$BD \cdot FK \cdot r = AF \cdot BD \cdot CF \qquad (8)$$

Isporedimo li (6) i (8) vidimo da je

$$s \cdot r^2 = AF \cdot BD \cdot CF = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

a pomnoživši ovo sa s izlazi

$$s^2\, r^2 = P^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

Milenko Sevdić

BOŠKOVIĆEVO IZVOĐENJE HERONOVE FORMULE

Bošković se spočetka naročito bavio astronomijom. Stoga nije nikakvo čudo, da on u svojoj prvoj matematičkoj radnji raspravlja o sfernoj trigonometriji. Sferna trigonometrija je i nastala poradi astronomije, pa je u početku i bila samo odsječak njezin.

Bošković se konstruktivnim razrješavanjem sfernih trokuta bavi u dvije radnje: *Trigonometriae sphaericae constructio* (Rim — 1737) i *Construction plane de la Trigonometrie sphérique (Opera,* t. III, Bassan — 1785). God. 1745 izašla je u Rimu Boškovićeva radnja *Trigonometria sphaerica,* a Boškovićevo djelo *Elementorum universae matheseos,* t. I, donosi trigonometriju. Definicije goniometrijskih funkcija su onakve, kako ih je postavio Raeticus oko polovine 16. stoljeća. Ne pazi na razliku u predznaku. Relacije koje postoje između dijelova trokuta, ne izražava formulama, nego ih iskazuje riječima. No to su sve nedostaci njegova vremena. U vezi s naslovom treba nam spomenuti raspravicu *»Demonstrations simples de quelques beaux théorèmes appartenants aux triangles«,* uvrštenu u V. svesku djela izdanih u Bassanu god. 1785. Tu Bošković iz tri stranice trokuta određuje kutove, pa polumjer upisanog kruga i površinu trokuta. On drži, da je njegov način izvođenja jednostavniji od onih, koji se obično nalaze u knjigama, pa ga stoga preporučuje piscima elementarnih djela.

Prvi poučak, što ga Bošković izvodi za ravni trokut (on to čini i za sferni), piše u obliku proporcije

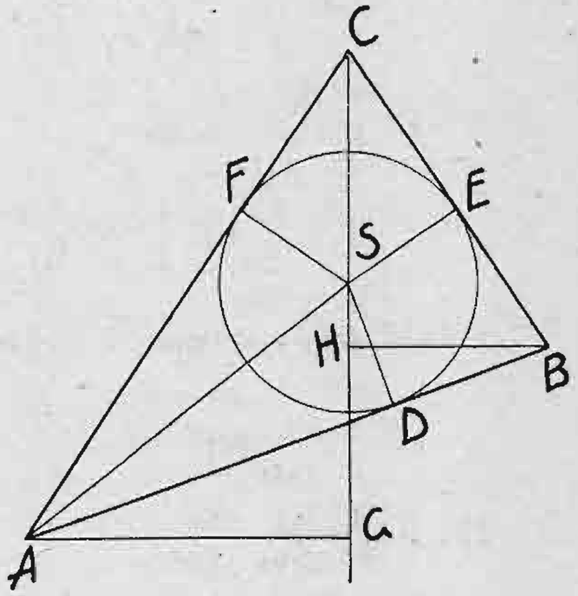
$$R^2 : sin^2 \frac{1}{A} : : AB \cdot AD : M \cdot N$$

R je sinus totus t. j. *sin* $90^0 = 1$; *AB i AD* dvije stranice u trokutu, a *M* i *N* je *(s—b)* i *(s—c)*. Taj poučak možemo u oznakama, koje su uobičajene danas u trigonometriji napisati ovako:

$$sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}$$

U trokutu *ABC* povučemo simetrale kuteva i odredimo središte *S* upisanog kruga. Iz središta *S* spustimo okomice na stranice trokuta. Povučemo još AG i BH okomito na simetralu kuta C. (sl. 1).

Oko središta S imamo tri para jednakih kuteva, a na opsegu trokuta tri para jednakih dužina.



Sl. 1.

Ako se iz svakog para dužina uzme po jedna dužina, dobije se polovina zbroja strana. Stoga je svaka od tih dužina, koja leži uz određeni kut trokuta, jednaka polovini zbroja strana, umanjena za stranicu, koja je tome kutu nasuprot. Tako je

$$AD = s - a,\ BD = s - b,\ CE = s - c, \qquad (1)$$

a svaki od kuteva, što su nasuprot jednoj takvoj dužini, suplementaran je sa sumom onih dvaju kuteva, koji su nasuprot drugim dvjema dužinama, t. j.

$$\sphericalangle BSD = 180^0 - \sphericalangle ASC = \sphericalangle ASG \qquad (2)$$

$$\sphericalangle ASD = 180^0 - \sphericalangle CSB = \sphericalangle SBG \qquad (3)$$

Uzmemo li sinuse ova dva kuta, dobit ćemo

$$\frac{BD}{BS} = \frac{AG}{AS}; \qquad \frac{AD}{AS} = \frac{BH}{BS}$$

ili

$$\frac{BD}{BS} \cdot \frac{AS}{AG} = 1, \qquad \frac{AD}{AS} \cdot \frac{BS}{BH} = 1$$

a odavde, pomnoživši lijeve i desne strane ovih jedn.

$$\frac{BD}{AG} \cdot \frac{AD}{BH} = 1$$

ili

$$AG \cdot BH = AD \cdot BD$$

Prema (1) možemo to pisati

$$AG \cdot BH = (s-a)\,(s-b)$$

Dalje je (iz sl. 1.)

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{AG}{AC} \quad \text{i} \quad \sin\frac{C}{2} = \frac{BH}{BC}$$

Dakle opet množeći lijeve i desne strane

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{AG}{AC}\cdot\frac{BH}{BC} = \frac{(s-a)\,(s-b)}{ab} \tag{4}$$

No kako je

$$a = (s-c) + (s-b),\; b = (s-c) + (s-a)$$

dobit ćemo

$$ab = s\,(s-c) + (s-a)\,(s-b)$$

pa stoga (4) možemo pisati ovako:

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c) + (s-a)\,(s-b)} \tag{5}$$

ali je isto tako

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{SE^2}{SC^2} = \frac{SE^2}{CE^2 + SE^2} \tag{6}$$

Uzmemo li sada recipročne vrijednosti desnih strana jedn. (5) i (6) i to izjednačimo, dobit ćemo

$$\frac{CE^2}{SE^2} = \frac{s\,(s-c)}{(s-a)\,(s-b)}$$

No $\quad CE = s-c,\; SE = r$

pa imamo

$$(s-c)^2 : r^2 = s\,(s-c) : (s-a)\,(s-b)$$

ili

$$(s-c) : r^2 = s : (s-a)\,(s-b).$$

Odavde imamo

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

ili množeći sa s i vadeći korijen

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Odakle dobijemo polumjer r upisanog kruga.

Pošto iz slike vidimo, da je površina trokuta

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{r}{2} \cdot 2s = r \cdot s \qquad (8)$$

to iz (7) i (8) izlazi da je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dakle smo dobili Heronovu formulu za površinu trokuta.

(Iz »*Matematički rad Boškovićev*«. Rad. J. A. knj. 181, str. 119—126).

Dr. Vladimir Varićak

MASCHERONIJEVE KONSTRUKCIJE U VEZI S PRAVILNIM MNOGOKUTIMA

Kod izvođenja geometrijskih konstrukcija služimo se obično ravnalom i šestilom. To je nastavak stare grčke tradicije.

Tokom razvitka matematike u nekoliko navrata su matematičari raznih naroda ispitivali mogućnost izvođenja geometrijskih konstrukcija ili samo pomoću ravnala s jednim uporabljivim bridom, ili samo pomoću šestila. S konstruktivnog gledišta je ovaj potonji slučaj vrlo interesantan, jer je šestilo savršenija sprava od ravnala. Mogućnost izvođenja geometrijskih konstrukcija samo pomoću ravnala s jednim bridom, ispitivao je među prvima švicarski matematičar Lambert. Istim problemom mnogo su se bavili i francuski matematičari Brianchon, Carnot i Poncelet. Naročito se mnogo bavio tim problemom švicarski matematičar Steiner.

Geometriju šestila, t. j. izvođenje geometrijskih konstrukcija samo pomoću šestila, razvio je i ispitivao među prvima talijanski matematičar M a s c h e r o r i, koji je svoja istraživanja izdao u knjizi: »*Geometria del compasso*« g. 1797. Njegov je najvažniji predmet istraživanja dijeljenje kružnice na jednake dijelove. On iznosi osim toga cijeli niz elegantnih rješenja zadaća iz raznih područja geometrije.

Poznato je, da je matematičar F. G a u s g. 1796. dokazao, da se svaki pravilan mnogokut sa 2^m. $(2^n + 1)$ stranica, gdje su m i n cijeli brojevi, a $2^n + 1$ prost broj, mogu konstruirati pomoću ravnala i šestila. Stranica takovog mnogokuta može se odrediti kao funkcija polumjera opisane kružnice, služeći se kod toga određivanja samo s četiri osnovne operacije i operacijom vađenja drugog korijena. Prema tome mogu se, prema navedenoj formuli, konstruirati pomoću ravnala i šestila slijedeći pravilni mnogokuti: trokut ($m = 0$, $n = 1$), kvadrat ($m = 1$, $n = 0$), peterokut ($m = 0$, $n = 2$), šesterokut ($m = 1$, $n = 1$), osmerokut ($m = 3$, $n = 0$), deseterokut ($m = 1$, $n = 2$), dvanaesterokut ($m = 2$, $n = 1$), i t. d., a ne mogu sedmerokut, deveterokut, jedanaesterokut, trinaesterokut i t .d., niti im se njihova stranica može na gore spomenuti način prikazati kao funkcija polumjera opisane kružnice.

Matematičar Mascheroni je pokazao, kako se mogu odrediti pravilni mnogokuti služeći se samo šestilom. Mi ćemo u ovome prikazu iznijeti Mascheronijeve konstrukcije, kojima se određuju vrhovi za neke pravilne mnogokute, ako im je zadan polumjer opisane kružnice, ili ako im je zadana stranica.

Radi boljeg razumijevanja Mascheronijevih konstrukcija donosimo tabelarni pregled, u kojem je prikazana stranica svakog od spomenutih pravilnih mnogokuta kao funkcija polumjera opisane kružnice, a polumjer opis. kružnice kao funkcija stranice. Zatim su prikazane dijagonale, poredane po veličini, kao funkcije polumjera opisane kružnice.

(S time u vezi usporedi Mihletić-Škarica: Nauk o prostoru 1927, strana 69, 70 i 73. Provjeri izraze unesene u tabelu!).

Pravilan mnogokut	Stranica izražena pomoću polumjera opis. kružnice	Polumjer opis. kružnice izražen pomoću stranice	Dijagonale, poredane po veličini, izražene pomoću polumjera opisane kružnice
Trokut	$r.\sqrt{3}$	$\frac{a.\sqrt{3}}{3}$	
Kvadrat	$r.\sqrt{2}$	$\frac{a.\sqrt{2}}{2}$	$2r$
Peterokut	$\frac{r}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{10}\cdot\sqrt{5.(10+2\sqrt{5})}$	$\frac{r}{2}\cdot(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{10-2.\sqrt{5}}=\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}+1)$
Šesterokut	r	a	$r.\sqrt{3}$; $2r$
Osmerokut	$r.\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2.(2+\sqrt{2})}$	$r.\sqrt{2}$; $r.\sqrt{2+\sqrt{2}}=a.(\sqrt{2}+1)$; $2r$
Deseterokut	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{5}+1)$	$\frac{r}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{r}{2}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}$; $\frac{r}{2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $2r$
Dvanaeste-rokut	$r.\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a\sqrt{2+\sqrt{3}}$	r ; $r\sqrt{2}$; $r\sqrt{3}$; $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2r$

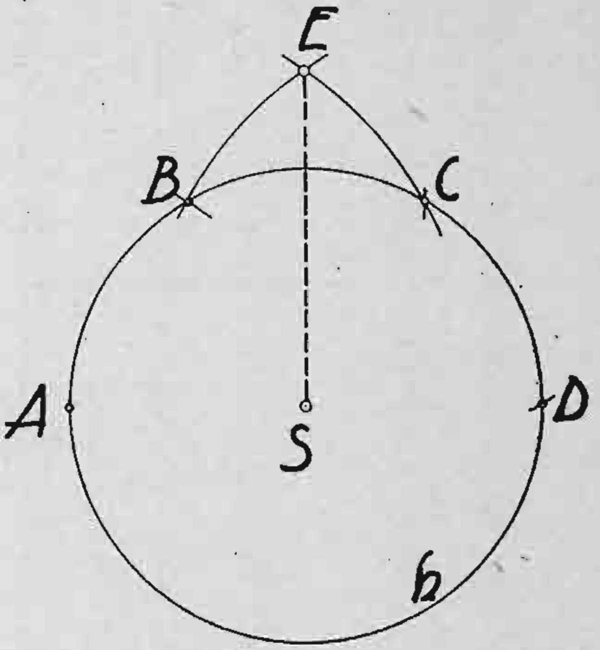
I. Istostrani trokut.

a) Zadano: $r = \overline{AS}$.

Istostrani trokut odredit ćemo tako, da kružnicu *k*, koja je opisana oko tačke *S* s polumjerom *r*, podijelimo šestilom na šest jednakih dijelova. Svako drugo od tako dobivenih djelišta predstavlja po jedan vrh traženog trokuta. *(Poznata konstrukcija)*.

b) Zadano: $a = \overline{AS}$

Istostrani trokut odredit ćemo tako, da treći vrh odredimo kao presjek lukova, koji su povučeni oko tačaka *A* i *S* s polumjerom a. (Poznata konstrukcija).



Sl. 1.

II. Kvadrat.

a) Zadano: $r = \overline{AS}$.

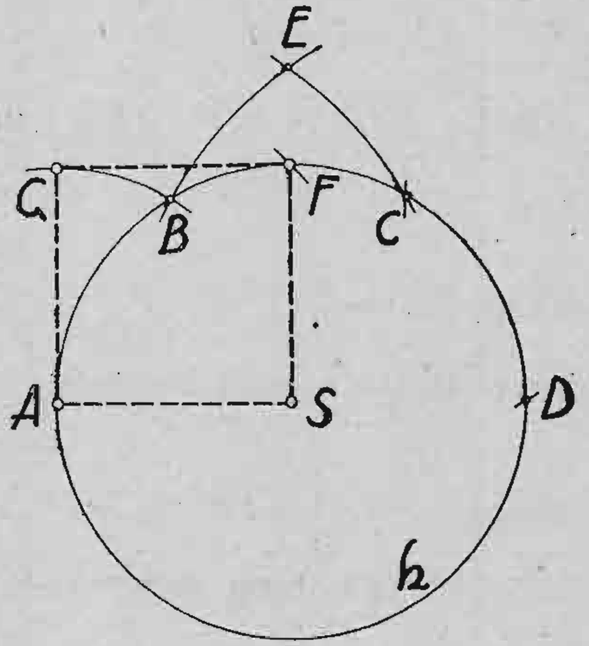
Nacrtat ćemo oko tačke *S* kružnicu *k* s polumjerom $r = \overline{AS}$. Prenesimo polumjer *r* počevši od tačke *A* tri puta po periferiji kružnice *k*. Dobit ćemo tako lukove *AB*, *BC* i *CD*. Zatim oko tačaka *A* i *B* opišimo lukove s polumjerom $\overline{AC}$, koji se sijeku u tački *E*. Tada dužina *SE* određuje stranicu traženog kvadrata. (Slika 1).

Dokaz:

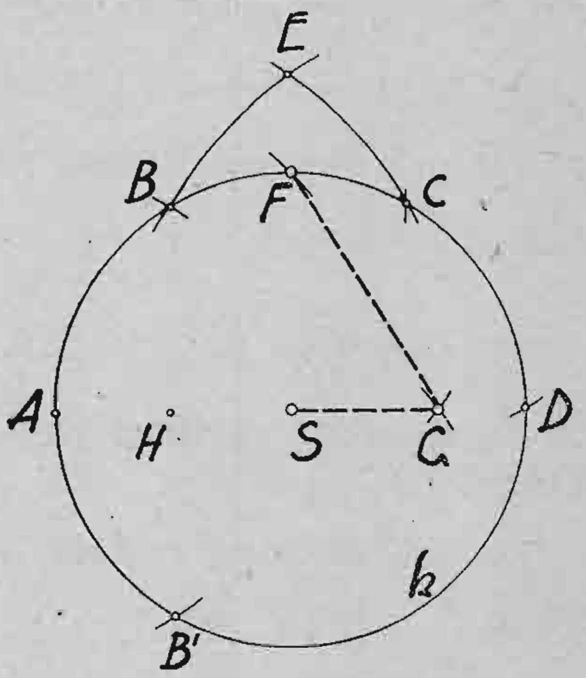
$\overline{AC}$ je stranica istostranog trokuta, koji je upisan u kružnicu *k*, dakle je $AC = r\sqrt{3}$. (Vidi tabelu) Iz pravokutnog trokuta *SDE* slijedi: $\overline{SE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DS}^2 = (r\sqrt{3})^2 - r^2$ ili $\overline{SE} = r\sqrt{2}$, a to je stranica kvadrata. (Vidi tabelu)

b) Zadano: $a = \overline{AS}$.

Opišimo oko tačke S kružnicu k, koja prolazi tačkom A. Odredimo onda tačku E kako je to bilo rečeno u II, *a)*. Oko tačke S opišimo luk kroz tačku E, koji će u tački G sjeći luk opisan oko tačke A s polumjerom $\overline{AS}$. Na koncu iz tačke A s polumjerom $\overline{SE}$ povučemo luk, koji siječe kružnicu k u tački F. Tada tačke A, S, F, G određuju traženi kvadrat. (Slika 2.)



Sl. 2.



Sl. 3.

Dokaz:

Znademo, da je prema II, *a)* $\overline{SE} = a\sqrt{2}$, dakle je isto tako $\overline{AF} = \overline{SG} = a\sqrt{2}$, a to znači da su AF i SG dijagonale traženog kvadrata.

III. Pravilan peterokut

a) Zadano $r = \overline{AS}$.

Oko tačke S opisat ćemo kružnicu k, koja prolazi tačkom A. Od tačke A prenijet ćemo polumjer r na obje strane i tako odrediti tačke B i B'. Tačku E odredit ćemo onako, kako je to učinjeno u II, *a)*. Tada ćemo opisati luk s polumjerom SE oko tačke B i tačke B', ta dva luka neka se sijeku u tački G. Onda ćemo iz tačke A opisati luk s polumjerom $\overline{SE}$ i odrediti na kružnici k tačku F. Tada je SG stranica pravilnog deseterokuta, a FG stranica pravilnog peterokuta, koji se mogu upisati u kružnicu k. (Slika 3.)

Dokaz:

Neka je H polovište dužine $\overline{AS}$, tada je $\overline{BH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Prema II, $a)$ je $\overline{SE} = \overline{BG} = r\sqrt{2}$.

Iz pravokutnog trokuta HGB slijedi: $\overline{HG}^2 = \overline{BG}^2 - \overline{BH}^2$ ili $HG = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$.

Prema tome je $\overline{SG} = \overline{HG} - \overline{HS}$ ili $\overline{SG} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; a to je stranica pravilnog deseterokuta, koji se može upisati u kružnicu k.

Iz pravokutnog trokuta SGF slijedi: $\overline{FG}^2 = \overline{FS}^2 + \overline{SG}^2$ ili $\overline{FG} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$, a to je stranica pravilnog peterokuta, koji se može upisati u kružnicu k.

$b)$ Zadano: $a = AS$.

Oko tačke S opišimo kružnicu k s polumjerom $\overline{AS}$. Odredit ćemo zatim tačku G kako smo to pokazali u III, $a)$. Iz tačaka A i S opišimo lukove l i l' s polumjerom $\overline{AG}$, koji neka se sijeku u tački N, a kod toga luk l siječe kružnicu k u tački M. Povučemo li luk m oko tačke A s polumjerom $\overline{AS}$, sjeći će luk l' u tački L. Tačke A, S. M, N, L određuju traženi pravilni peterokut. (Sl. 4.)

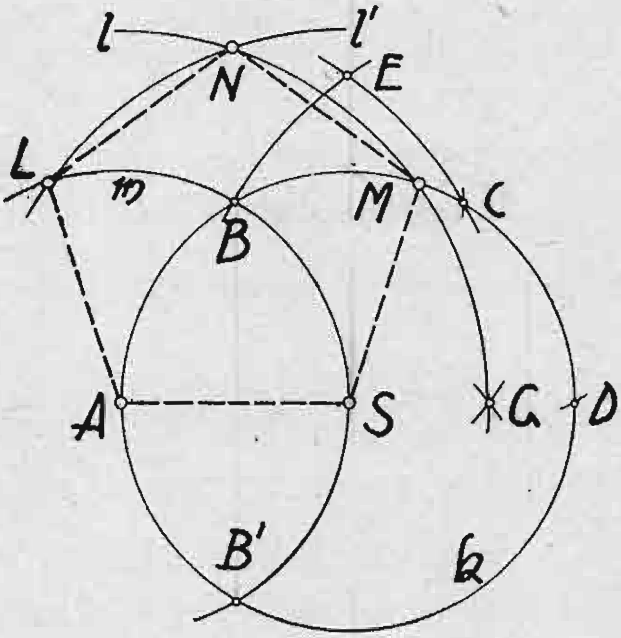
Dokaz:

Prema III, $a)$ je $SG = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$. Zato je $\overline{AG} = \overline{AS} + \overline{SG} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$, a to je dijagonala pravilnog poterokuta sa stranicom a. Budući da je $\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{SL} = \overline{SN} = \overline{AG}$, konstrukcija je ispravna.

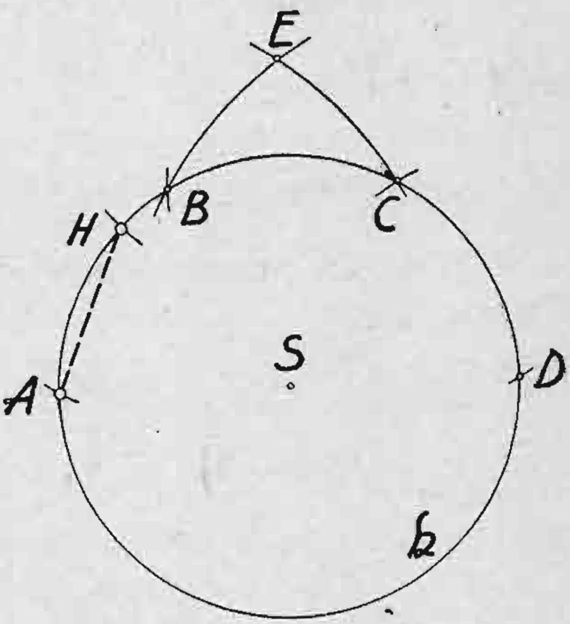
IV. Pravilan šesterokut.

a) Zadano: $r = \overline{AS}$.

Oko tačke S opišemo kružnicu s polumjerom r. Počevši od tačke A prenijet ćemo polumjer r šest puta po kružnici. Tako dobivene tačke su vrhovi traženog pravilnog šesterokuta. *(Poznata konstrukcija)*



Sl. 4.



Sl. 5.

b) Zadano: $a = \overline{AS}$.

Oko tačke A i S opišemo luk s polumjerom $\overline{AS}$, tada se ta dva luka sijeku u tački O, u središtu kružnice, koja se može opisati oko traženog prav. šesterokuta. Daljnji postupak kao pod *a)*. *(Poznata konstrukcija)*

V. Pravilan osmerokut.

a) Zadano: $r = \overline{AS}$.

Opišimo oko tačke S kružnicu k s polumjerom $\overline{AS}$. Odredimo onda tačku E kako je to pokazano u II, *a)*. Tada iz tačke E

opišimo luk polumjera r, koji neka siječe kružnicu k u tački H. Dužina $\overline{AH}$ je stranica traženog prav. osmerokuta. (Slika 5.)

Dokaz:

Budući da je $\overline{SE} = r\sqrt{2}$, $\overline{SH} = \overline{EH} = r$, to je trokut SEH istokračan i pravokutan. To znači da je kut $ESH = 45^0$, dakle i kut $ASH = 45^0$, a otuda slijedi da je s tačkama A i H određen luk, koji pripada stranici traženog pravilnog osmerokuta.

b) Zadano: $a = \overline{AS}$.

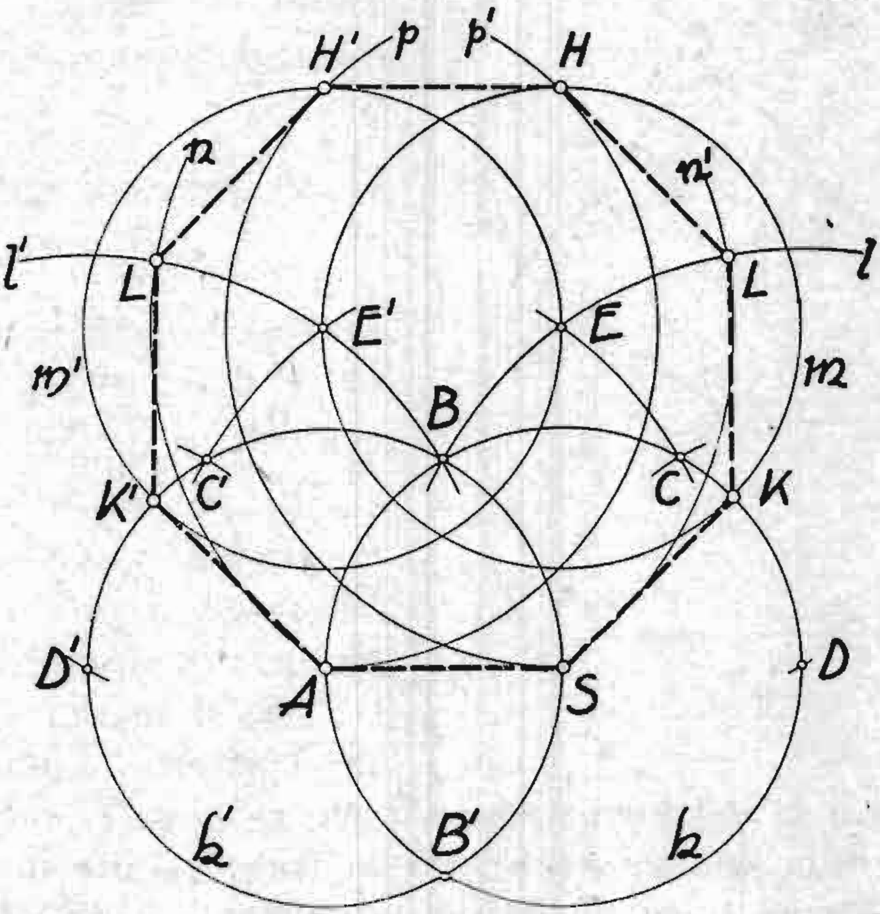
Oko tačaka A i S opišimo kružnice k i k' s polumjerom a, koje se sijeku u tačkama B i B'. Odredit ćemo zatim tačke E i E' s obzirom na kružnice k i k' kako je to pokazano u II, *a)*. Tačka E, odnosno E' leži na luku l, odnosno l', koji je opisan oko tačke D, odnosno D' s polumjerom $a\sqrt{3}$. Oko tačaka E i E' opišimo kružnice m i m' s polumjerom a. Presjek kružnice m s kružnicom k, a kružnice m' s kružnicom k' određuju dva od traženih vrhova, tačke K i K'. Nadalje ćemo oko tačaka E i E' opisati s polumjerom $a\sqrt{3}$ lukove n i n', koji prolaze tačkom A, odnosno tačkom S. Presjek luka n' s lukom l, te presjek luka n s lukom l' određuju tačke L i L', koje sačinjavaju još jedan par traženih vrhova. Napokon oko tačaka E i E' opisat ćemo s polumjerom $a\sqrt{2}$ lukove p i p', koji prolaze tačkom A, odnosno tačkom S. Presjek luka p' s kružnicom m, te presjek luka p s kružnicom m' određuju tačke H i H', koje sačinjavaju posljednji par traženih vrhova, a time je ujedno taj pravilni osmerokut potpuno određen. (Slika 6.)

Dokaz:

Budući da je $\overline{E'H} = a\sqrt{2}$, tačka H leži na pravcu SE. Zato je $\overline{SH} = \overline{SE} + \overline{EH} = a(\sqrt{2} + 1)$, a to znači da je SH dijagonala traženog mnogokuta. S istog razloga je AH' paralelna dijagonala. Prema tome su tačke H i H' vrhovi traženog mnogokuta.

Budući da je $\overline{SE} = a\sqrt{2}$, a $\overline{EK} = \overline{KS} = a$, to je trokut *EKS* istokračan i pravokutan, a to znači da je kut $ESK = 45^\circ$. Otuda slijedi, da je tačka *K* vrh traženog mnogokuta, a s istih razloga i tačka *K'*.

Još nam treba ispitati, dali su tačke *L* i *L'* vrhovi traženog mnogokuta. Označimo s *X* vrh traženog mnogokuta, koji sa tačkom *K* određuje stranicu *KX*. Neka produženje te stranice

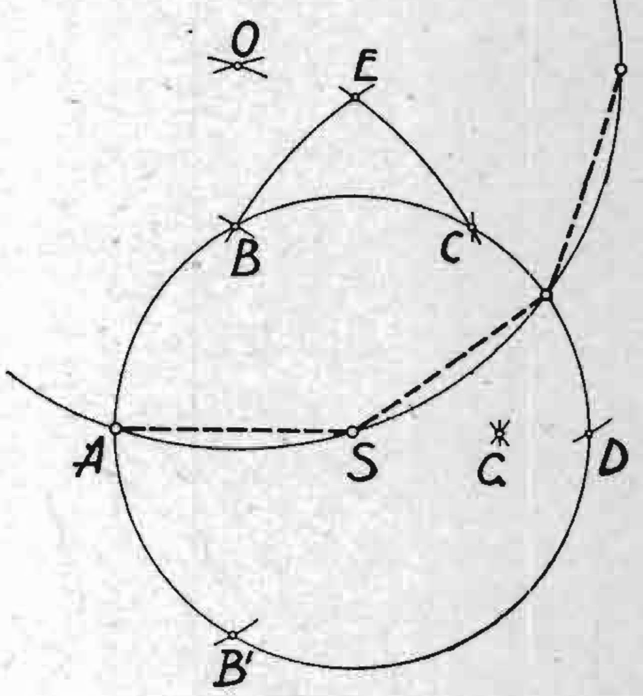


Sl. 6.

KX siječe produženje stranice *AS* u tački *X'*, a spojnica tačaka *E* i *E'* neka siječe stranicu *KX* u tački *X''*. Iz pravokutnog trokuta $\overline{DXX'}$ slijedi: $\overline{DX}^2 = \overline{DX'}^2 + \overline{X'X}^2 = \left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(a + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ ili $\overline{DX} = a\sqrt{3}$. Iz pravokutnog trokuta $E'X''X$

slijedi: $\overline{E'X}^2 = \overline{XX''}^2 + \overline{X''E'}^2 = \left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(a + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ili $\overline{E'X} = a\sqrt{3}$. Otuda slijedi da je $\overline{DX} = \overline{E'X} = a\sqrt{3}$. No iz konstrukcije tačke L slijedi, da je $\overline{DL} = \overline{E'L} = a\sqrt{3}$, a to je samo tako moguće, da je $X = L$, tj. tačka L je jedan od vrhova traženog mnogokuta. Analogno bismo dokazali da je tačka L' isto tako jedan od traženih vrhova, a time je iznesena konstrukcija potpuno dokazana.



Sl. 7.

VI. Pravilan deseterokut.

a) Zadano: $r = AS$.

Konstrukcija stranice pravilnog deseterokuta iznesena je u III, *a)*, (slika 3.)

b) Zadano: $a = AS$.

Opišimo oko tačke S kružnicu k s polumjerom a. Odredimo kao u III, *a)* tačku G. Zatim iz tačaka A i S opišimo lukove s polumjerom $\overline{AG}$, pa neka se ti lukovi sijeku u točki O, onda ta točka predstavlja središte opisane kružnice oko traženog pravilnog deseterokuta. Prema tome je daljnje određivanje njegovih vrhova omogućeno prenošenjem dužine a, po periferiji tog kruga. (Slika 7)

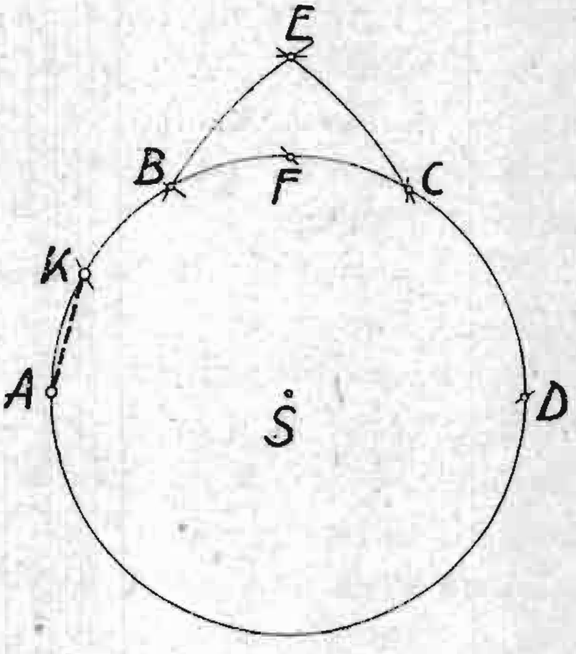
Dokaz:

Budući da je $\overline{AG} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$ prema III, *b)*, to je $\overline{AO} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$, a to je polumjer opisane kružnice pravil. deseterokutu.

VII. Pravilan dvanaesterokut.

a) Zadano: $r = \bar{AS}$.

Opišimo oko točke S kružnicu k s polumjerom r. Odredimo zatim tačku E kao u II, *a)*. Opišimo onda luk s polumjerom $\bar{SE}$ oko točke A, koji će sjeći kružnicu k u tački F. Oko tačke F opišimo luk s polumjerom r, koji će sjeći kružnicu k u tački K. Tada tačke A i K određuju stranicu traženog mnogokuta. (Slika 8)



Sl. 8.

Dokaz:

Budući da je $AF = a\sqrt{2}$ to je kut $ASF = 90^0$. Kut $FSK = 60^0$, dakle je kut $ASK = ASF - FSK = 30^0$, a to je baš središnji kut, koji pripada stranici pravilnog dvanaesterokuta.

Lav Rajčić

PROBLEM PARKETIRANJA

U špiljama, koje je prije mnogo desetaka tisuća godina nastavao pračovjek, može se često naići na crteže urezane u kamene stijene. Ti primitivni crteži pretstavljaju obično ili događaje iz svakidašnjeg života pračovjeka, ili neke životinje kao mamute, divlja goveda, medvjeda i slično. Već u ta pradavna vremena opaža se potreba čovjeka, da prostorije u kojima boravi budu ne samo udobne nego i lijepe. Dakako da se sa postepenim društvenim napretkom a time i razvojem čovječje kulture i ta potreba za lijepim sve više zapaža. Od primitivnih crteža urezanih u kamen iz davnih predhistorijskih vremena postepeno nastaju skladni crteži i lijepe slike, kojima je čovjek ukrašavao svoje nastambe i hramove svojih bogova. I sada ti crteži predočuju kadgod predmete ili događaje iz prirode. Ali kadgod se oni na neki način ritmički pojednostavnjuju, figure se periodički ponavljaju, poprimaju geometrijske oblike sa mnogo simetrija i pokazuju takvu pravilnost, kakvu u prirodi rijetko kada susrećemo. Tako je pomalo od slobodnih crteža nastao ornament. No stvaralac takvih ornamenata morao je sa estetskim ukusom da sjedini i stanovito makar i jednostavno geometrijsko znanje.

Kod starih kulturnih naroda ističu se osobito egipatske građevine bogatom ornamentikom. Od Egipćana su taj smisao za ornamente naslijedili Arapi, ali oni su ga još i dalje usavršili, o čemu nam svjedoče arabeske na divnim arapskim građevinama iz srednjeg vijeka. Sa propašću arapske države a zatim i kulture pada i važnost ornamenata kod ukrašivanja građevina, pa i današnji rijetki ornamenti u većini slučajeva su kopije onih iz starog i srednjeg vijeka.

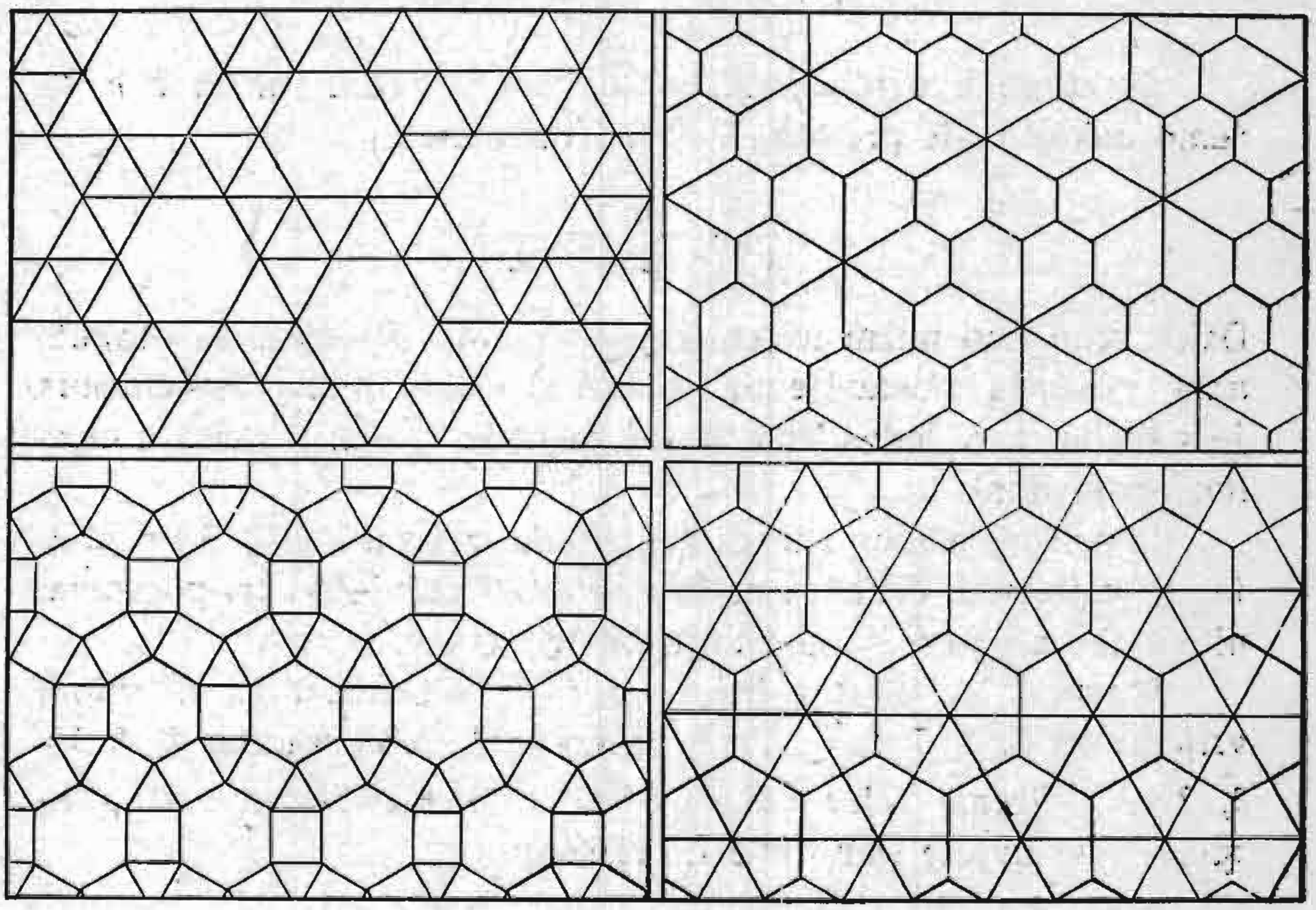
Težnja da se zidovi i podovi građevina pravilno ukrase geometrijskim figurama stvorila je i problem parketiranja, t. j. problem, kako se može ravnina razdijeliti na poligone, koji bi je potpuno i jednostruko prekrivali, ali uz neke određene uvjete, koji traže stanovite pravilnosti s obzirom na oblik, vrstu i poređaj poligona.

Dakako da možemo zamisliti vrlo različite geometrijske uvjete, kojima bi takvo »parketiranje« moralo zadovoljavati, pa će stoga tu biti zapravo mnogo različitih problema, a time očito i različitih rješenja.

Mi ćemo pokazati, kako se takav problem može postaviti i kako se na jednostavan način mogu naći moguća rješenja, koja zadovoljavaju postavljenim uvjetima.

U tu svrhu moramo najprije dati neke definicije: onu točku ravnine, u kojoj se kod neke razdiobe na poligone sastaju vrhovi susjednih poligona, zvat ćemo »čvorištem«. Ako su svi kutovi, koji se u jednom čvorištu sastaju, međusobno jednaki zvat ćemo to čvorište »pravilnim«. Osim toga ćemo reći da su dva čvorišta sukladna, ako je slijed kutova, koji se u njemu sastaju isti, t. j. ako su dva po dva kuta u oba čvorišta međusobno jednaka i ako su oni oko čvorišta poredani istim ili obrnutim redom.

Postavljamo sada zadatak: naći sve moguće razdiobe ravnine u pravilne poligone, koji mogu imati različiti broj stranica, no sve stranice neka su međusobno jednake, a sva čvorišta neka su međusobno sukladna. Na lijevoj polovici priložene slike predočene su dvije poligonske razdiobe ravnine, koje zadovoljavaju ovim uvjetima.



Da dođemo do svih mogućih rješenja postavljenog zadatka namiče nam se kao prvi uvjet — koji svakako mora kod moguće razdiobe ravnine biti ispunjen — taj, da zbroj svih kutova, koji se sastaju u jednom čvorištu, iznosi *360⁰*.

Znamo da zbroj kutova u trokutu iznosi *180°*. No svaki n-terokut možemo razdijeliti na $n-2$ trokuta i to tako, da iz jednog njegovog vrha povučemo sve dijagonale. Odatle odmah slijedi već poznata činjenica, da zbroj kutova u svakom n-terokutu iznosi $(n-2) \cdot 180^0$, pa će prema tome jedan kut pravilnog n-terokuta iznositi $\frac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$.

Uzmimo sada najprije slučaj našeg zadatka, gdje su svi poligoni jednakog broja stranica, pa neka se dakle u svakom čvorištu sastane po k n-terokuta, tada možemo gore postavljeni uvjet izraziti jednadžbom

$$k \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} = 360^0$$

Skratimo li ovu jednadžbu sa *180°*, a zatim još sa 2 k, to ćemo nakon male preinake dobiti jednadžbu

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Dakle smo kao nužni uvjet, koji mora biti ispunjen za mogućnost rješenja postavljenog zadatka, dobili jednu diofantsku* jednadžbu, t. j. jednadžbu, kojoj se traže rješenja samo u cijelim brojevima.

Iz prirode samog zadatka slijedi da mora biti $k \geqq 3$ i $n \geqq 3$, jer se u jednom čvorištu ne može sastati manje od tri poligona, niti može poligon imati manje od tri strane.

Stavimo li pokušavajući u gornju jednadžbu za n redom vrijednosti *3, 4, 5, 6, 7,. . .*, to ćemo za k dobiti redom *6, 4,* $3\frac{1}{3}$, *3,* $2\frac{1}{5}$ . . . Prema tome naša diofantska jednadžba ima uz gore spomenute uvjete samo ova tri rješenja:

n	3	4	6
k	6	4	3

* Diofant, grčki matematičar, živio u Aleksandriji u 3. st. n. e.

Ova nam rješenja kazuju već poznatu činjenicu, da se ravnina dade razdijeliti na istostrane trokute, na kvadrate i na pravilne šesterokute i to tako, da ih se u jednom čvorištu sastane po šest, po četiri odnosno po tri, ali da su to ujedno jedine mogućnosti razdiobe ravnine na istovrsne pravilne poligone. (Vidi stranu 147.).

Ovi slučajevi razdiobe ravnine bili su poznati već u školi Pitagorinoj.

Promotrimo sada slučaj našeg zadatka gdje dolazi više vrsta poligona. Budući da zbroj od po jednog kuta pravilnog trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta već iznosi *378⁰* — dakle premašuje *360⁰* — to je očito da u jednoj takvoj razdiobi ravnine ne može biti više od tri različite vrste poligona.

Uzmimo najprije slučaj gdje u razdiobi ravnine dolaze dvije različite vrste poligona, pa neka se dakle u svakom čvorištu sastane po k_1 n_1-terokuta i k_2 n_2-terokuta. Tada možemo zaključiti slično kao i prije, da mora vrijediti jednadžba:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2) \cdot 180^0}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^0}{n_2} = 360^0.$$

Skratimo li ovu jednadžbu sa 360^0, to dobivamo nakon malog pojednostavljenja

$$k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + k_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1.$$

Ova nam diofantska jednadžba daje nužni uvjet za mogućnost rješenja postavljenog zadatka u tom slučaju. Dakako da i sada možemo — slično kao i prije — zaključiti, da mora biti

$$k_1 + k_2 \geqq 3; \; n_1 \geqq 3; \; n_2 \geqq 3.$$

U slučaju da u razdiobi dolaze tri vrste poligona od kojih se u svakom čvorištu sastaje po k_1 n_1-terokuta, po k_2 n_2-terokuta i po k_3 n_3-terokuta, dobili bismo na isti način kao uvjetnu jednadžbu:

$$k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + k_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + k_3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_3}\right) = 1,$$

no pri tom mora i opet biti

$$k_1 + k_2 + k_3 \geqq 3;\ n_1 \geqq 3;\ n_2 \geqq 3;\ n_3 \geqq 3.$$

I sada možemo kao i prije do rješenja ovih diofantskih jednadžbi doći pokušavanjem. Samo moramo pri tom dobro paziti i postupati tako da ne previdimo ni jedno moguće rješenje, koje zadovoljava našim uvjetima. Uzmimo kada dolaze u razdiobi ravnine dvije vrste poligona. Tada možemo već unaprijed zaključiti da mora biti $k_1 + k_2 < 6$, jer bi šest pravilnih poligona moglo stati oko jednog čvorišta samo u slučaju kad bi svi bili trokuti. Prema tome za brojeve k_1 i k_2 postoji samo ovih devet mogućnosti:

k_1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
k_2	2	1	3	2	1	4	3	2	1

Za svaku od ovih mogućnosti moramo napose potražiti sva moguća rješenja naše jednadžbe. Uzmimo na pr. slučaj $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Uvrstimo li te vrijednosti u jednadžbu, pa ju još malo uredimo, to dobivamo

$$\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

Stavljamo li sada za n_2 redom vrijednosti $3, 4, 5, \ldots$, to ćemo dobiti ovaj niz rješenja

n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n_1	-6	∞	10	6	$\frac{14}{3}$	4	$\frac{18}{5}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{22}{7}$	3	...

Dakako vidimo i opet, da samo neka od tih rješenja zadovoljavaju našim uvjetima.

Na posve slični način možemo ispitati i preostalih osam mogućnosti, a onda analogno i u slučajevima gdje dolaze po tri vrste poligona. Sva rješenja, koja ujedno zadovoljavaju svima postavljenim uvjetima dana su u ovoj tablici:

n_1	k_1	n_2	k_2	n_3	k_3
3	6	.	.	.	.
4	4	.	.	.	.
6	3	.	.	.	.
3	1	12	2	.	.
4	1	8	2	.	.
5	2	10	1	.	.
3	2	6	2	.	.
3	4	6	1	.	.
3	3	4	2	.	.
3	1	7	1	42	1
3	1	8	1	24	1
3	1	9	1	18	1
3	1	10	1	15	1
4	1	6	1	12	1
4	1	5	1	20	1
3	2	4	1	12	1
3	1	4	2	6	1

Vidimo dakle, da nam naše diofantske jednadžbe, daju u svemu *17* rješenja. Ne možemo unaprijed očekivati, da će svako od tih rješenja dati jednu moguću razdiobu ravnine u pravilne poligone, jer su postavljeni nužni uvjeti tražili samo, da zbroj svih kutova oko jednog čvorišta iznosi *360*°. I doista, uzmemo li slijed poligona, načinjen prema kojemgod rješenju iz gornje tablice, to ćemo opaziti da te poligone možemo u ravnini poredati oko jedne točke — čvorišta — tako, da svi kutovi oko te točke ispunjaju puni kut. No pokušamo li sada, pošavši od tog početnog čvorišta, nastaviti popločivanje ravnine izgrađujući postepeno susjedna čvorišta, tako da budu sva međusobno sukladna, to ćemo u više slučajeva opaziti nakon par koraka da daljnje popločivanje ravnine nije moguće. Tako na pr. već šesto rješenje iz gornje tablice t. j. dva peterokuta i jedan desetorokut ili — kako ćemo kraće pisati slijed (*5, 5, 10*) ne daje moguće popločenje, jer se niti sva čvorišta oko jednog peterokuta ne daju na taj način izgraditi. Ipak ima u svemu *11* sljedova poligona, načinjenih prema rješenjima iz naše tablice, koji daju moguće ravnine, a to su ovi: (*3, 3, 3, 3, 3, 3*); (*4, 4, 4, 4*); (*6, 6, 6*); (*3, 12, 12*); (*4, 8, 8*); (*3, 6, 3, 6*); (*3, 3, 3, 3, 6*); (3, *3, 4, 3, 4*); (*3, 3, 3, 4, 4*); (*4, 6, 12*) i (*3, 4, 6, 4*). Crteži razdioba ravnine za sljedove (*3, 3, 3, 3, 6*) i (*3, 4, 6, 4*) nalaze se na lijevoj polovini priložene slike. Preostalih devet neka pokuša čitalac sam nacrtati.

Već smo prije istakli, da se problem parketiranja može na više načina postaviti stavljajući različite uvjete pravilnosti. Promotrit ćemo ovdje još jedan takav slučaj. U prvom smo slučaju stavili kao uvjet pravilnost svih poligona i sukladnost svih čvorište. Uzmimo sada obratno, i potražimo one razdiobe ravnine, kod kojih su sva čvorišta pravilna, ali ne moraju biti međusobno sukladna, dok za poligone nećemo tražiti pravilnosti, ali tražimo da budu svi međusobno sukladni i da im se kružnica dade upisati, t. j. da svi budu tangentni poligoni. Crteži razdioba ravnine, koje bi zadovoljavale ovim uvjetima nalaze se na desnoj polovici priložene slike. I za ovako postavljeni zadatak mogli bismo slično kao i u prošlom slučaju postaviti nužne uvjete u obliku diofantskih jednadžbi. No taj posao možemo sada pojednostavniti i konstruirati sva rješenja tako postavljenog zadatka iz slika prvog problema. Ucrtajmo u te slike okomice, koje su iz središta poligonu upisanih kružnica spuštene na sve njegove stranice. Učinimo li to za svaki poligon, to će sve tako konstruirane dužine činiti novu razdiobu ravnine, koja će zadovoljavati uvjetima drugoga problema. Izvedemo li s tom razdiobom ravnine i opet istu konstrukciju, to ćemo ponovno dobiti sliku razdiobe iz prvog problema od koje smo pošli.

Po dva takova crteža iz prvog i drugog problema nalaze se na priloženoj slici jedan pored drugoga.

Pokazali smo, kako se mogu lako uz primjenu posve jednostavnih matematskih sredstava riješiti dva najjednostavnija slučaja problema parketiranja, no to je tek maleni početak jednog dugog niza pitanja, koja bismo ovdje mogli postaviti. Dakako, kad bismo u suštinu samog problema u njegovoj općenitosti malo dublje zašli, tada to više ne bi bilo tako lako i ne bi se dalo rješiti onim sredstvima, kojima za sada raspolažemo.

Dr Stanko Bilinski

IV.

IZ ANALITIČKE GEOMETRIJE

GETALDIĆEVA KONSTRUKCIJA PARABOLE

U Getaldićevom djelu »*Nonnullae propositiones de parabola*« (Rim 1603.) glasi zadatak »Parabolam ad constructionem speculi ad propositum intervallum comburentis in plano describere« (*Probl.* II; *propos.* 7), dakle: nacrtati u ravnini parabolu za konstrukciju zrcala, koje upaljuje u zadanom intervalu. Ovdje ćemo iznijeti tu konstrukciju. Ako bismo u relaciji

$$AQ \, . \, AF = KF^2,$$

koju je dobio Getaldić, stavili

$$AQ = 2p; \; AF = x; \; KF = y.$$

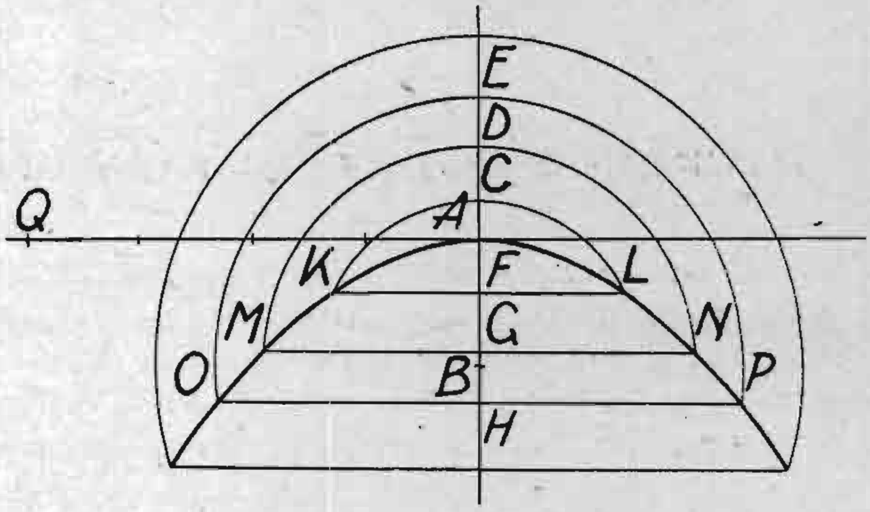
prešla bi ona u

$$y^2 = 2px,$$

a to je poznata jednadžba parabole. Upravo je čudo, da Getaldić nije opazio tu općenitu relaciju za sve parabole pisanu u analitičkom obliku, kada je i onako njegovo glavno nastojanje bilo, da geometrijske postupke proširi na sve parabole.

Ovdje treba naročito podvući, da je slijedeća Getaldićeva konstrukcija parabole izvedena bez direktrise, a sam dokaz je bez sumnje originalan.

Zadani interval neka bude *AB*, koji će se produžiti preko *A*, a prema potrebi i preko *B*. Nad *A* uzet će se koliko god točaka *C*, *D*, *E* (sl. 1); što ih je više i što su bliže jedna drugoj, to će točnija biti parabola. Isto će se toliko točaka *F*, *G*, *H* uzeti ispod *A*, tako da je $AF = AC$, $AG = AD$, $AH = AE$; kroz *F*, *G*, *H* povući će se na *AB* normale *KL*, *MN*, *OP*, a iz centra *B* s polumjerima BC, BD, BE opisati kružnice, koje će te normale sjeći u točkama K, L, M, N, O, P; kroz te će se točke povući linija, koja se proteže jednolično, a ne čini nigdje grbavosti ni kutova; ta savijena linija $OMKALNP$ jeste parabola, koja će, ako opisuje površinu konkavnog zrcala, sve sunčane zrake, koje



Sl. 1.

dolaze na zrcalo tako, da su ekvidistantne od osi, odraziti kroz B Prenese li se dakle AQ, t. j. četverostruka dužina od AB, pa se povuče KB, bit će poradi

$$BC = BK \text{ ujedno } BC^2 = BK^2$$

pa kako je

$$KB^2 = KF^2 + FB^2 \tag{1}$$

a ujedno (*Eucl. Elem.* II, 8):

$$4 \cdot AF \cdot AB + BF^2 = (AB + AF)^2 = BC^2,$$

imat ćemo iz (1)

$$4 \cdot AF \cdot AB = KF^2.$$

Kako je pak

$$AQ = 4 \cdot AB$$

bit će

$$AQ \cdot AF = 4 \cdot AB \cdot AF$$

a zato

$$AQ \cdot AF = KF^2.$$

Točkom K će dakle prolaziti parabola, kojoj je vrh A, os AB, a AQ l a t u s r e c t u m. Istim ćemo postupkom pokazati, da ta parabola prolazi i ostalim točkama O, M, L, N, P.

Ako dakle pomenuta parabola opisuje površinu konkavnog zrcala oko čvrste osi AB, odrazit će se sve sunčane zrake, koje upadaju u zrcalo, a svaka je ekvidistantna s osi, kroz točku B, kako se to dokazalo u pređašnjem teoremu, jer je

$$4 \cdot AB = AQ$$

za parabolu, koja opisuje zrcalo.

U ravnini je dakle opisana parabola za konstrukciju zrcala, koje upaljuje u zadanom intervalu AB, što se imalo pokazati.

(Iz »*Spis Marina Getaldića Dubrovčanina o paraboli i paraboličnim zrcalima*«. Rad J. A. Z., 223, 1920.).

Dr Juraj Majcen

DESCARTES-ovo IZVOĐENJE JEDNADŽBE HIPERBOLE

Pravim osnivačem analitičke geometrije smatra se danas *Rene Descartes* (ili latinsko ime *Renatus Cartesius)* koji je rođen 31. marta 1596. u La Hayeu u Tourainu u jednoj bretanjskoj porodici. On ne samo da je poznat kao matematičar nego i kao filozof (»o t a c f r a n c u s k e f i l o z o f i j e«). U jezuitskoj školi, gdje je bio odgajan, pokazivao je veliku samostalnost i oštroumlje. Nakon mnogih putovanja i učestvovanja u ratovima nastanio se u Holandiji, gdje se posvetio samo svome studiju filozofije, matematike i dr. nauka. Najposlije odlazi u Štokholm, ali doskora umire 11. II. 1650. Tijelo mu je poslije prenijeto u Francusku. Sam Descartes je svoje rezultate u području čiste filozofije pretpostavljao rezultatima dobivenim u matematici. Za nas je od važnosti njegova »*Géométrie*«, koja je izašla 1637. god. i u kojoj je on dao prve i osnovne pojmove analitičke geometrije u ravnini. U njoj je on pored toga nabacio i misao analitičke geometrije u prostoru. Ipak on ne daje sistematski analitičku geometriju onako, kako se to radi u današnjim udžbenicima. On ne polazi od pravca da bi preko kruga dospio sve do presjeka stošca, nego se više bavi samim bićem nove metode dajući njenu primjenu i na komplikovanim primjerima. Ovdje ćemo vidjeti, kako on izvodi analitički jednadžbu jednog geometrijskog mjesta, da bi na koncu kazao, da je to hiperbola.

Mogao bih ovdje dati više drugih sredstava da se nacrta i istraži beskonačni niz krivulja, koje postaju uvijek za jedan stepen složenije; ali da bi se mogle u izvjesne vrste razdijeliti sve one, koje uopće u prirodi dolaze, najbolje je, ako se istakne da nužno mora postojati odnos između točaka onih krivulja, koje valja označiti kao geometrijske, t. j. onih, koje su pristupačne točnoj i oštroj mjeri, i svih točaka jednog pravca. Ovaj se odnos dade potpuno predočiti jednom i samo jednom jednadžbom. Prvoj i najjednostavnijoj vrsti treba pribrojiti krivulju, ako ova jednadžba sadrži samo pravokutnik iz dviju neodređenih veličina ili kvadrat jedne iste[1] (k ovoj vrsti pripadaju samo krug, parabola, hiperbola i elipse). Drugoj vrsti pripada krivulja, ako se jednadžba u obim neodređenim veličinama (jer su potrebne dvije neodređene veličine, da se predoči odnos jedne točke prema jednoj drugoj), ili u jednoj od njih uspinje do treće ili četvrte dimenzije, trećoj, ako jednadžba sadrži petu ili šestu dimenziju, i t. d. sve do u beskonačnost.

Treba na pr. odrediti vrstu linije *EC* (sl. 1.) koju opisuje presjek ravnala *GL* sa pravocrtnim dijelom ravnine *CNKL*,[2] čija se stranica *KN* zamišlja produžena preko *C* do beskonačnosti, ako se ovaj dio ravnine tako u ravnini giba, da njegov rub *KL* uvijek ostaje na pravcu *BA*, koji je produžen na obje strane i time prouzrokuje, da ravnalo *GL*, koje je spojeno sa dijelom ravnine tako, da uvijek prolazi točkom *L*, opisuje kružno gibanje oko točke *G*.[3] U tu svrhu izabirem jedan pravac na pr. *AB*, da bih mogao dovesti u odnos njegove točke sa točkama kri-

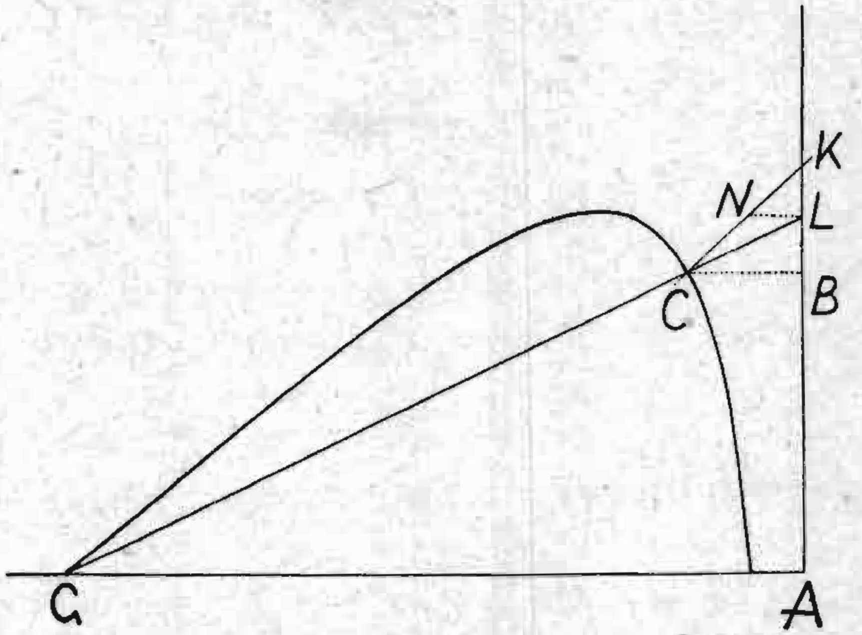
---

[1] Pod **»pravokutnikom dviju veličina«** razumije se ovdje njihov produkt. Misli se dakle na kvadratne jednadžbe.

[2] Pod »pravocrtnim dijelom ravnine **CNKL**« misli se ovdje ravni lik, što ga čini trokut **NKL** zajedno sa produženjem hipotenuze **NK**.

[3] T. j. pravac **GL** rotira oko čvrste točke **G** tako, da uvijek prolazi vrhom **L** pomičnog trokuta **NKL**.

vulje EC. Dalje izabirem točku A na AB, od koje kao početne točke treba računati. Kažem, da ovo oboje izabirem, jer je slobodno, da ih se posve po volji uzme. I ako se zgodnim izborom može postići, da jednadžba bude kraća i jednostavnija, to se ipak lako može pokazati, da se za liniju dobije uvijek ista vrsta, pa ma kakav bio izbor. Neka sada C bude po volji izabrana točka



Sl. 1.

krivulje, na koju zamišljamo da je namješten instrument. Iz C ćemo povući liniju CB paralelno prema GA i nazvat ćemo dvije neodređene i nepoznate veličine CB i BA, jednu y a drugu x. Da bih našao relaciju između ove dvije, promatram i poznate veličine koje određuju postanak krivulje, naime GA, koju ću naznačiti sa a, KL sa b i NL paralelno prema GA sa c. Tada se NL odnosi prema LK kao CB prema BK t. j.

$$c : b = y : BK$$

odakle je

$$BK = \frac{b}{c} y$$

i

$$BL = \frac{b}{c} y - b$$

$$AL = x + \frac{b}{c} y - b.$$

Dalje se CB odnosi prema LB kao AG prema LA, t. j.

$$y : \left(\frac{b}{c} y - b\right) = a : \left(x + \frac{b}{c} y - b\right)$$

odakle se množenjem drugog člana s trećim i prvoga s četvrtim dobije

$$\frac{ab}{c} y - ab = xy + \frac{b}{c} y^2 - by$$

ili

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$$

a to je tražena jednadžba, iz koje se vidi, da je linija EC prve vrste. U stvari to nije ništa drugo nego hiperbola.

O JEDNADŽBI PRAVCA I HIPERBOLE KOD FERMATA

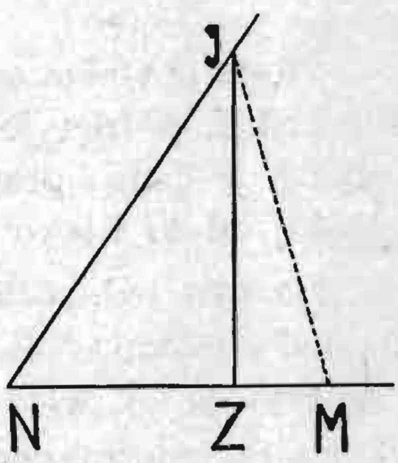
Još je jedno ime uz koje se veže otkriće analitičke geometrije. To je Francuz *Pierre de Fermat* (1601.—1665.), veliki teoretičar brojeva, koji je sasvim samostalno i nezavisno od Descartesa došao do osnovnih misli analitičke geometrije. Što više kod njega je ideja jasnije izražena, nego li kod Descartesa. Prioritet međutim pripada Descartesu, čija je »*Géométrie*« izašla prije, nego li je Fermat publicirao svoje radove, u kojima je, kako veli, već davno prije istraživao tu novu metodu analitičke geometrije. Slijedeći odjeljak potiče iz rada, koji je pisan na latinskom 1636., a štampan 1679. pod naslovom »*Ad locos planos et solidos Isagoge*«. Tu se radi o ravnim i prostornim geometrijskim mjestima. Pod prvim geometrijskim mjestima, o kojima se tu radi, treba razumjeti pravac i krug, a pod drugim presjeke stošca.

Čim u jednoj završnoj jednadžbi dolaze dvije nepoznate veličine, imamo jedno mjesto,[1] i krajnja točka jedne veličine

[1] Pod »mjesto« misli se »geometrijsko mjesto točaka« t. j. krivulju, kod koje sve točke zadovoljavaju jednom te istom određenom uvjetu,

opisuje pravac ili krivulju.[2] Ima samo jedna jedina i jednostavna prava linija, naprotiv beskonačno mnogo vrsta krivulja: krug, parabola, hiperbola, elipsa i t. d.

Ako krajnja točka nepoznate veličine,[2] koja opisuje mjesto, teče po pravcu ili krugu, tada nastaje ravno mjesto, a ako ona protiče parabolu, hiperbolu ili elipsu, radi se o jednom prostornom mjestu; ako ostale krivulje, to se mjesto zove linearno.[3]



Sl. 1.

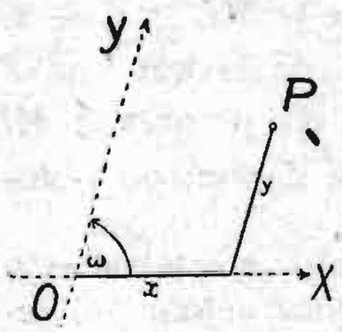
Jednadžba se može zgodno predočiti, ako se obje nepoznate veličine pod jednim danim kutem (koga obično uzimamo pravim) postave jedna na drugu i od jedne se da položaj i jedna krajnja točka.[4] Ako sada ni jedna od nepoznatih veličina ne prelazi drugu potenciju, bit će mjesto ravno ili prostorno[6], kao što će iz slijedećeg jasno izaći.

NZM neka bude pravac dan po položaju (sl. 1), a *N* čvrsta točka na njemu. *NZ* neka bude nepoznata veličina *x*, a dužina

---

[2] Ovo se u tekstu malo dalje potanje objašnjava.

[3] Ovom su rečenicom definirani pojmovi ravnog, prostornog i linearnog mjesta, koje je Fermat preuzeo od starih Grka. Danas ova podjela krivulja nema nikakvog smisla.



Sl. 3.

[4] Time Fermat uvodi općenite kosokutne paralelne kordinate i to pomoću »koordinatnog poteza *OQP*«, kako bismo danas rekli (sl. 3.) O koordinatnim osima nema ovdje još ni spomena. Od jedne nepoznate veličine t. j. apscise $x = OQ$ »dan je položaj i jedna krajnja točka« t. j. dana je os apscisa i na njoj čvrsta točka *O*, ishodište koordinata. U drugoj krajnjoj točki *Q* »postavljena« je druga nepoznata veličina t. j. ordinata $y + QP$ pod danim kutom $\pi - \omega$.

[5] T. j. linearne i kvadratne jednadžbe predočuju samo pravce i čunjosječice. Dokaz ovog poučka čini predmet cijele ove Fermatove rasprave

ZI, koja je na nju položena pod danim kutem NZI, neka bude druga nepoznata veličina y. Ako je sada

$$ax = by$$

tada točka I opisuje pravac dan po položaju.[6]

Naime postoji

$$b : a = x : y.$$

Stoga je stalan odnos između x i y, a kako je osim toga dan kut kod Z, poznat je oblik trokuta NIZ, a stoga i kut INZ. Ali točka N je dana i pravac NZ poznat po položaju. Dakle je zadan položaj od NI i lako je načiniti sintezu.[7]

Na ovu jednadžbu možemo svaku onu svesti, kod koje su članovi djelomice dani, a djelomice sadrže nepoznanice x i y i to bilo da su ove posljednje veličine pomnožene sa poznatim ili dolaze jednostavno.[8]

Neka bude

$$c - ax = by.$$

Stavimo li

$$c = ad$$

to će biti

$$b : a = (d - x) : y$$

Uzmimo $MN = d$, to je točka M dana, dakle je $MZ = d - x$. Stoga je poznat odnos MZ prema ZI, a budući da je kut kod Z zadan, znamo formu trokuta IZM, i konačno, da je pravac MI dan po položaju. Dakle točka I teče po pravcu danom po polo-

---

[6] Radi lakšeg razumijevanja poslužili smo se ovdje današnjim načinom pisanja jednadžbi i koordinata x, y. Fermat naime opisuje još jednadžbe riječima i ne služi se znakom jednakosti. Apscisu označuje slovom A, a ordinatu slovom E.

[7] T. j. obrnuto, ako je dan pravac, postaviti mu jednadžbu.

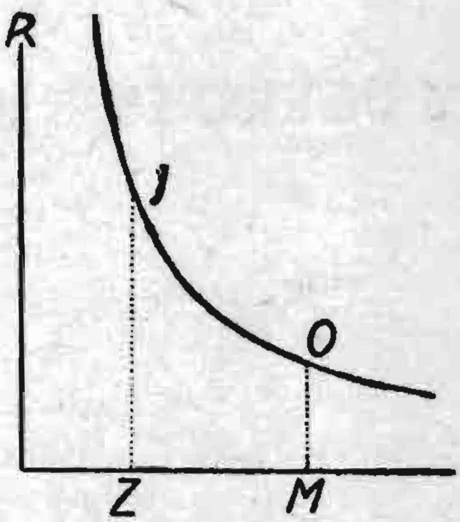
[8] Time se misli na općenitu linearnu jednadžbu sa konstantnim članom.

žaju.[9] Isto se dobije bez poteškoća za svaku jednadžbu, u kojoj dolaze članovi sa veličinama x ili y.[10]

Drugu vrstu takvih jednadžbi imamo, ako je

$$xy = a$$

U ovom slučaju opisuje točka *I* hiperbolu.



Sl. 2.

Povucimo $NR \parallel ZI$ (sl. 2). Na NZ uzmimo ma koju točku, na pr. M, i iz nje povucimo $MO \parallel ZI$. Tada pravokutnik NMO[11] učinimo jednak a. Sada će točkom O između pravaca NR i NM kao asimptota biti opisana hiperbola. Ona će biti dana po položaju i prolaziti točkom I, jer je upravo pravokutnik xy ili NZI[12] jednak pravokutniku NMO.

Dr. S. Bilinski

---

[9] Mogli bismo dakle reći da Fermat određuje položaj pravca »odsječkom na osi apscisa« $NM = d$ i »koeficijentom smjera« $tg\,\alpha = -\frac{a}{b}$.

[10] Misli se: u prvoj potenciji.

[11] T. j. pravokutnik osnovice NM i visine MO.

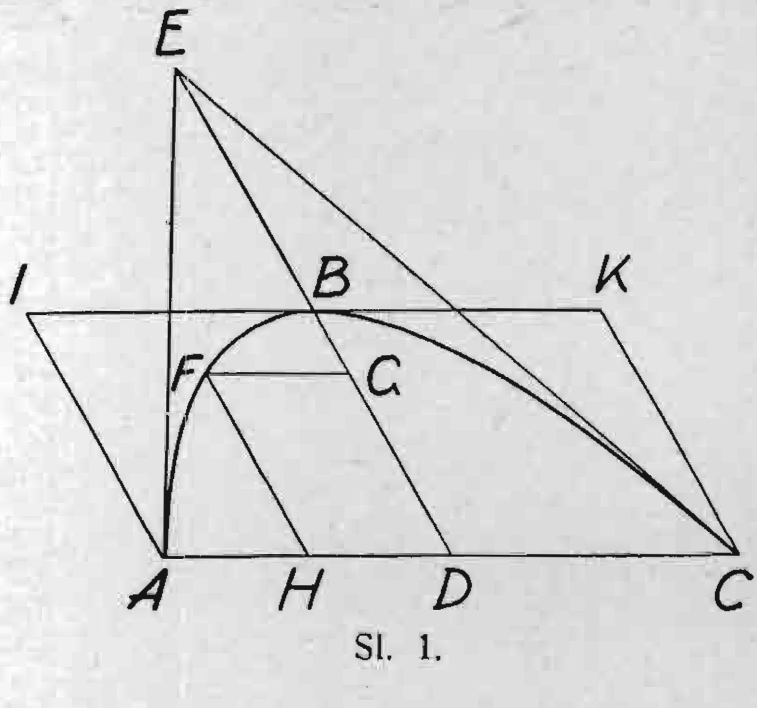
[12] Vidi 11.

V.

IZ DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA

ARHIMEDOVA KVADRATURA PARABOLE

Najbujniji procvat matematike u Grčkoj pada u 3. stolj. prije n. e. Najznatniji pretstavnik tog slavnog perioda je najveći matematičar antike *Arhimed*. Dvije tisuće godina prije otkrića integralnog računa pošlo je Arhimedu za rukom da nađe kvadraturu parabole služeći se t. zv. »*ekshaustionom metodom*«. Pod tom metodom treba razumjeti ono, što danas



Sl. 1.

označujemo riječju integracija i to ne u smislu inverzne operacije diferenciranja, nego kao granične vrijednosti jedne sume. Arhimed je problem ponajprije riješio pomoću nekih svojih poučaka iz mehanike, a zatim čisto geometrijskim postupkom. O tome riješenju piše Arhimed matematičaru *Dositeju* jedno pismo koje nam je potpuno sačuvano. Arhimed se na početku pisma poziva na nekoliko poučaka iz *Apolo-*

nijevih »presjeka stošca«, kojima će se kao poznatima poslužiti kod svoga dokaza. To su poučci:

1. Ako se kroz točku *B* na paraboli povuče pravac *BD* (sl. 1) paralelan sa osi i ako je tetiva *ADC* paralelna tangenti u točki *B*, onda je *AD* = *DC*. Obrnuto, ako je *AD* = *DC*, onda je tetiva *ADC* paralelna tangenti u *B*.

2. Ako je *CE* tangenta parabole u točki *C*, a *E* presjecište tangente i pravca *BD* paralelnog sa osi, onda je *EB* = *BD*.

3. Ako su *AD* i *FG* pravci paralelni tangenti u *B*, onda je

$$BD : BG = AD^2 : FG^2.$$

Poslije ovih poučaka Arhimed daje jednu definiciju, a dokaz provodi pomoću jednog niza poučaka. Iz tih poučaka, koji su u slijedećem navedeni vidjet ćemo, ne samo svu pronalazačku genijalnost Arhimedovu, nego i nedostiživu jasnoću izlaganja ne baš tako jednostavnih misli.

DEFINICIJA. U segmentima ograničenim tetivom i krivuljom nazivamo tetivu **bazom**, dok **visinom** zovemo najveću okomicu spuštenu sa krivulje na bazu, a točku iz koje spuštamo visinu na bazu zovemo **vrh.**

POUČAK 18. Ako središtem baze povučemo pravac paralelan dijametru (osi), to će njegovo presjecište s parabolom biti vrh segmenta.

Neka bude (sl. 1) *ABC* segment parabole. Iz središta *AC* povučemo paralelu prema dijametru. Kako je *BD* paralelno dijametru i *AD* = *CD*, to je jasno, da su paralelni *AC* i tangenta parabole u *B*. Odavde se dobije, da je između svih okomica spuštenih sa luka parabole na bazu najveća, ona, koja je spuštena iz *B*. Stoga je *B* vrh segmenta.

POUČAK 19. U paraboličnom segmentu paralela prema dijametru povučena kroz središte baze je za trećinu veća od paralele povučene prema dijametru središtem polubaze.

Neka bude (sl. 1) *ABC* segment parabole i neka bude pravac *HF* povučen kroz središte *H* dužine *AD* paralelan prema dijametru. Dalje neka je povučeno *FG* paralelno sa *AC*. Tada prema *3.)* izlazi, da je

$$BD : BG = AD^2 : FG^2 \qquad (1)$$

Dakle je jasno da vrijedi

$$BD = {}^4/_3\, HF.$$

Mi ćemo ovo zaista i izvesti. Relaciju (l) možemo pisati ovako:

$$\frac{BG}{BD} = \left(\frac{FG}{AD}\right)^2$$

ili

$$\frac{BD - HF}{BD} = \left(\frac{AD - AH}{AD}\right)^2$$

ili

$$1 - \frac{HF}{BD} = \left(1 - \frac{AH}{AD}\right)^2$$

Izaberemo li $AH = 1$, bit će $AD = 2 \,.\, AH = 2$. Tada je

$$1 - \frac{HF}{BD} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$$

ili

$$1 - \frac{HF}{BD} = \frac{1}{4}$$

Odavde je zaista

$$BD = \frac{4}{3} HF.$$

POUČAK 20. Upišemo li segmentu parabole trokut sa istom bazom i visinom kao kod segmenta, onda će ploština trokuta biti veća od polovine ploštine paraboličnog segmenta.

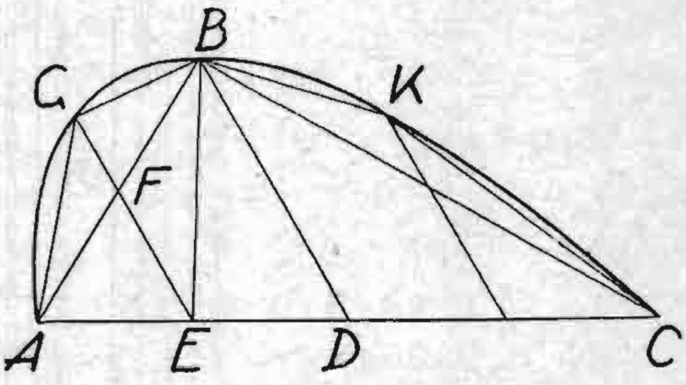
Neka bude (sl. 1) *ABC* segment parabole i neka je njemu upisan trokut *ABC*, koji ima istu bazu i visinu kao i segment. Budući da trokut sa segmentom ima istu bazu i visinu, to je nužno vrh *B* trokuta vrh paraboličnog segmenta. Stoga je *AC* paralelno tangenti u *B*. Povucimo kroz *B* paralelu sa *AC* i kroz

A i C paralele AI i CK prema dijametru. One leže izvan segmenta. Kako je sada trokut ABC polovina paralelograma AIKC, to je jasno da je on veći od polovine segmenta.

DODATAK. Iz ovog dokaza slijedi, da se segmentu parabole može upisati jedan poligon tako, da preostali segmenti budu manji od ma koje dane ploštine. Naime, ako mi sukcesivno odbijamo ploštinu, koja je prema 20. poučku veća od polovine segmenta, onda je jasno, da ćemo moći preostale ploštine pri ovom smanjivanju dovesti ispod jedne proizvoljne veličine (*Eucl., 10. knj; Prop. 1.).*

POUČAK 21. Ako u jedan segment parabole upišemo trokut iste baze i visine, a u preostale segmente opet trokute iste baze i visine, to će trokut upisan cijelom segmentu biti jednak osmini svakog trokuta, koji je upisan preostalim segmentima.

Neka bude (sl. 2.) ABC segment parabole, baza AC raspolovljena u D i BD paralelno povučeno s dijametrom. Stoga je B vrh segmenta. Dakle trokut ABC ima sa segmentom istu bazu i visinu. Raspolovit ćemo sada i dužinu AD u točki E i pravac EG povući paralelno dijametru. Ovaj pravac siječe pravac AB u F. Tada će G biti vrh segmenta AGB, a prema tome će trokut AGB imati istu bazu i visinu sa segmentom AGB. Treba dokazati da je trokut ABC osam puta veći od trokuta AGB.



Sl. 2.

Prema poučku 19. je $BD = {}^4/_3\, EG$ i $BD = 2EF$, stoga je $EF = 2\, FG$, a trokut AEF dvaputa veći od trokuta AFG i trokut FBE dva puta veći od trokuta GFB. Dakle je trokut ABC osam puta veći od trokuta AGB. Isto se dokazuje za trokut BKC.

POUČAK 22. Ako je dat jedan segment parabole i niz ploština od kojih je svaka četiri puta veća od slijedeće i ako je dalje najveća ploština jednaka trokutu, koji sa segmentom ima istu bazu i visinu, tada je suma svih ploština manja od ploštine segmenta.

Neka bude $AGBKC$ (sl. 2.) segment parabole, i neka su dane ploštine a, b, c, d, od kojih je svaka četiri puta veća od slijedeće, i da je najveća (a) jednaka trokutu, koji sa segmentom ima jednaku bazu i visinu. Tvrdim, da je segment veći od sume ploština $a + b + c + d$.

Neka bude B vrh segmenta, a G i K neka budu vrhovi segmenata, koji su preostali. Budući da je sada trokut ABC osam puta veći od svakog od ova dva trokuta AGB i BKC, to slijedi, da je on četiri puta veći od sume ova dva posljednja. Kako je dalje ploština trokuta ABC označena sa a, to je suma trokuta AGB i BKC jednaka b. Na isti se način da pokazati, da je suma trokuta, koji su upisani u četiri preostala sagmenta, jednaka c i suma trokuta, koji su upisani u tako preostale segmente d. Suma ploština a, b, c, d, je dakle jednaka poligonu, koji je upisan u segment, i stoga je manja od segmenta.

POUČAK 23. U jednom geometrijskom redu sa kvocijentom $\frac{1}{4}$ suma svih članova uvećana za trećinu posljednjeg člana jednaka je četiri trećine prvoga člana.

Neka budu a, b, c, d, e, članovi geometrijskog reda sa kvocijentom $\frac{1}{4}$, isto neka bude a najveći član t. j. $a = 4b$, $b = 4c$, $c = 4d$, $d = 4e$. Dalje neka bude

$$p = \frac{1}{3} b$$

$$q = \frac{1}{3} c$$

$$r = \frac{1}{3} d$$

$$s = \frac{1}{3} e$$

Budući da je $p = \frac{1}{3} b$ i $b = \frac{1}{4} a$, to je

$$\left.\begin{aligned} p + b &= \frac{1}{3} b + b = \frac{4}{3} b = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{3} a \\ &\text{Isto tako je} \\ q + c &= \frac{1}{3} b \\ r + d &= \frac{1}{3} c \\ s + e &= \frac{1}{3} d \end{aligned}\right\}$$

Suma veličina b, c, d, e, p, q, r, s je stoga jednaka trećini sume veličina a, b, c, d. Osim toga je suma veličina p, q, r jednaka trećini sume veličina b, c, d. Odatle slijedi, da je suma veličina b, c, d, e, s jednaka trećini od a. Dakle je jasno, da je suma veličina, a, b, c, d, e zajedno sa s, koje je trećina od e, jednaka četiri trećine od a.

POUČAK 24. Ploština paraboličnog segmenta jednaka je četiri trećine ploštine trokuta, koji s njim ima jednaku bazu i visinu.

Neka bude (sl. 2.) *AGBKE* segment parabole, *ABC* trokut, koji s njim ima istu bazu i visinu, i neka je k jednako četiri trećine ploštine ovoga trokuta. Moramo pokazati, da je k jednako ploštini segmenta parabole *AGBKC*.

Ako ne bi naime postojala jednakost, to bi ploština morala biti veća ili manja od k. Uzmemo ponajprije da je ploština veća od k. Na način već spomenut u poučku 21. upisani su trokuti *AGB* i *BKC*, a zatim u preostale segmente drugi trokuti sa istom bazom i visinom kao i njihovi segmenti, a zatim u preostale segmente opet trokuti, koji imaju iste baze i visine kao i njihovi segmenti. Preostali segmenti bit će konačno manji od onoga za koliko je segment veći od k po poučku 20. To bi upisani poligon, imao veću ploštinu od k, a to je nemoguće, jer mi dobijemo ipak ploštinu čije veličine čine geometrijski red s kvocijentom $\frac{1}{4}$, naime ponajprije trokut ACB, koji je četiri puta veći od oba trokuta AGC i BKC zajedno, zatim ova dva upravo spomenuta trokuta, koji su zajedno četiri puta veći od sume trokuta upisanih u slijedeće segmente i t. d. Tako je jasno, da je suma svih trokuta manja od $^4/_3$ najvećega ali i k je $^4/_3$ najvećega trokuta. Stoga segment nije veći od k.

Neka bude prema tome, ako je to moguće, ploština segmenta $AGBKC$ manja od k. Označit ćemo ploštinu trokuta ACB sa a, te četvrtinu od a sa b i tako dalje, dok ne dođemo do jedne veličine, koja je manja od onoga, za koliko je k veće od segmenta i neka ta veličina bude i.

Tada vrijedi

$$a + b + \ldots + i + \frac{1}{3} i = \frac{4}{3} a.$$

Ali i k je jednako $\frac{4}{3}$ a. Stoga se dobije

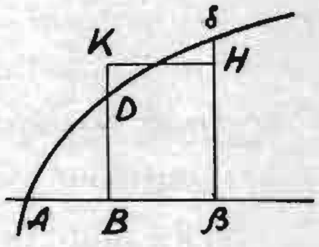
$$a + b + \ldots + i + \frac{1}{3} i = k.$$

Budući da sada k premaša sumu površina $a, b \ldots i$ za manje nego i, a segment za više nego i, to bi očito ploštine $a, b, \ldots i$, zajedno bile veće od segmenta, što je nemoguće, jer je u poučku 22. dokazano, da je suma ploština $a, b, \ldots$ manja od segmenta. Dakle segment $AGBKC$ nije manji od k.

A malo prije bilo je dokazano, da segment nije ni veći od k. Prema tome je on jednak k. Ali k je jednako trokuta ABC. Dakle je ploština segmenta parabole jednaka četiri trećine ploštine trokuta ABC.

POJAM INTEGRALA KOD NEWTONA

Neka bude (sl. 1.) apscisa, ma koje krivulje $AD\delta$, $AB = x$, ordinata $BD = y$ i površina $ADB = z$. Osim toga neka bude $B\beta = o$, $BK = v$, a pravokutnik $B\beta HK(ov)$ jednak površini $B\beta\delta D$. Sada je $A\beta = x + o$ i $A\delta\beta = z + ov$. Uzevši ovo odredit ću y iz odnosa između x i po volji uzetog z na slijedeći način: Neka bude na pr. $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ili $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Ako se sada $x + o$ $(A\beta)$ stavi mjesto x i $z + o\,v$ $(A\delta\beta)$ mjesto z, dobije se $\frac{4}{9}$ puta $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (prema vrsti krivulje) $= z^2 + 2zov + o^2v^2$. Pošto se oduzme isto $\left(\frac{4}{9}\ x^3 \text{ i } z^2\right)$, a preostalo podijeli sa o, ostane $\frac{4}{9}$ puta $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + + ov^2$. Ako mi sada pustimo, da se $B\beta$ neograničeno smanjuje i isčezne, dakle pustimo da o bude o nula, i bude li v i y jednako, a isčeznu članovi pomnoženi sa o, tako da preostane $\frac{4}{9}$ puta $3x^2 = 2zv$ ili $\frac{2}{3}\ x^2\ (= zy) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}y$ ili $x^{\frac{1}{2}}\left(\ \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$.



Sl. 1.

Odatle obrnuto slijedi, ako je $y = x^{\frac{1}{2}}$, da je $z = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$.

Ili uopće, ako je $z = \frac{n}{m+n}\,ax^{\frac{m+n}{n}}$ ili ako stavimo $\frac{na}{m+n} = = c$ i $m + n = p$, te ako je $cx^{\frac{p}{n}} = z$ ili $z^n = c^n x^p$, i ako sada stavimo $x + o$ mjesto x i $z + ov$ (ili što je isto $z + oy$) mjesto z, izlazi c^n puta $x^p + pox^{p-1}$ itd $= z^n + noyz^{n-1}$, ako se zanemare ostali članovi,, koji potom isčezavaju. Ako uklonimo sada jednake veličine $c^n x^p$ i z^n, a ostale podijelimo sa o ostaje $c^n px^{p-1} = nyz = \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$, a ako se podijeli sa $c^n x^p$

$$px^{-1} = \frac{ny}{cy^{\frac{p}{n}}} \text{ ili } pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny;$$

ili ako se opet stavi $\frac{na}{m+n}$ mjesto c, a $m + n$ mjesto p tj. m mjesto $p - n$ i an mjesto pc, imamo

$$y = ax^{\frac{m}{n}}.$$

Stoga obrnuto slijedi : ako je $ax^{\frac{m}{n}} = y$, to je

$$z = \frac{n}{m+n} \, ax^{\frac{m+n}{n}};$$

što je trebalo dokazati.

Iz »*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*« (1711.).

PROBLEM LOMA SVJETLOSTI PO FERMAT-U

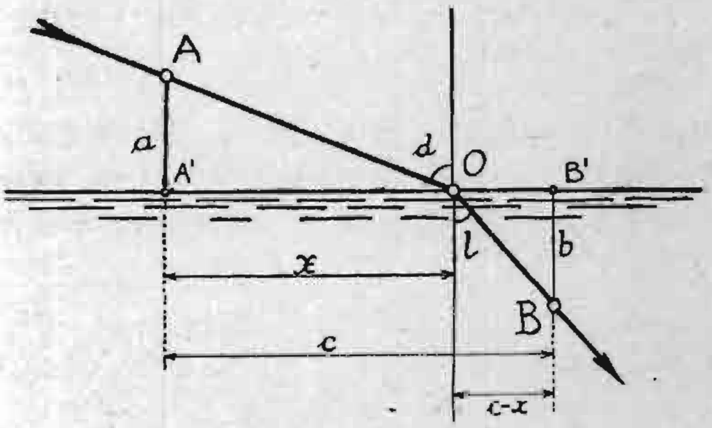
Tko se i malo interesira za diferencijalni račun, ne smije a da nezna za slavno ime fracuskog matematičara *Fermat*-a, koji se služio derivacijama mnogo ranije nego što je pronađen diferencijalni račun. To možda izgleda nevjerojatno, ali je razumljivo, jer svaka teorija nastaje sa željom da protumači neku primjenu i s njom zajedno čini jednu cjelinu. Tako se termodinamika razvila primjenom parnog i eksplozivnog stroja, a aerodinamika razvila se naglo primjenom i brzim razvojem avijacije. Na isti način razvio se diferencijalni račun na problemima maksimuma i minimuma, koji problemi ostaju i danas jedna od njegovih najljepših primjena. Činjenica jest, da je Fermat prvi riješio slijedeću zadaću: odredi one vrijednosti funkcije za koje se njena prva derivacija poništava! On na poseban način računa te derivacije, a služi se njima samo tamo gdje se one poništavaju i to zato, jer problemi, koje on tretira s time u vezi, takove su prirode, da drugih zahtjeva ne postavljaju.

Pierre Fermat rodio se 1601. godine u Beaumont de Lomagne, a živio je 64 godine. Svoja mnogostruka i dalekosežna istraživanja na području matematike za cijeloga svoga života nije objelodanio. Godine 1670. iza njegove smrti izdao mu je sin njegova djela na latinskome jeziku pod naslovom: *Varia opera mathematica.* Zatim je izdana njegova interesantna korespondencija sa Descartes-om, Wallis-om i Pascalo-om, najpoznatijim misliocima i matematičarima onoga vremena. Fermat se naročito mnogo bavio teorijom cijelih brojeva, a pored Pascal-a smatra se jednim od osnivača računa vjerojatnosti, a njegove metode računanja maksimuma i milimuma čine ga jednim od preteča diferencijalnog računa. Fermat-ova djela preveo je na francuski jezik matematičar P. Tannery (izdanje Gauthier-Villars, Paris), a ta su djela i danas veoma pristupačna i interesantna za svakoga, koji voli matematiku.

Problem loma svijetlosti riješen po Fermat-u, tumači ispravno Descartes-ov zakon loma svijetlosti: $\frac{\sin d}{\sin l} = K$, kojega je Descartes pogrešnim hipotezama dokazivao. Descartes je krivo pretpostavljao, da se svijetlo širi brže u gušćem nego u rjeđem sretstvu. Diskusija oko tog problema bila je veoma oštra, a interesantno je kod toga to, da su i Descartes i Fermat u svojim izvođenjima došli do istoga zakona, koji nekoji pogrešno pripisuju Snellius-u. Sam Fermat piše o tome u svojoj metodi maksimuma i minimuma ovako: »Da li je moguće stići bez paralogizama do jedne te iste istine duž dva apsolutno oprečna puta? To pitanje ostavljamo matematičarima, koji će biti dosta spremni da ga rigorozno riješe; mi ne ulazimo u uzaludne diskusije, i pošto smo u sigurnome posjedu prave istine, dostaje nam, da je prihvatimo i pretpostavimo dugom i uzaludnom natezanju nepotrebnih i iluzornih polemika.«

Pređimo sada na samo rješavanje problema, ali naglašavamo odmah, iako je gibanje po pravcu najkraće, ne mora biti ujedno i najbrže. Promatrajmo zraku svijetla, koja dolazi u smjeru $\overline{AO}$ do površine vode i koja onda kod točke O ulazi u vodu, lomeći se (kako se to može eksperimentom i dokazati) produžuje pravocrtno dalje prema točci *B*.

Pretpostavimo na čas ono što je nemoguće, to jest uzmimo, da zraka svijetla stigne od točke *A* do točke *B* bez loma, pravocrtno. Što bi se tada dogodilo? Svakako, u tome slučaju imala bi zraka svijetla da prođe manji komad puta kroz zrak, a veći komad puta kroz vodu. Ali u vodi širi se svijetlo polaganije nego u zraku, prema tome zraka svijetla slijedeći najkraći put, utrošila bi više vremena. Lomeći se, zraka svijetla stigne najbrže na cilj.



Sl. 1.

Označimo s *a* i s *b* udaljenost točaka *A* i *B* od razine vode. Neka je $c = A'B'$ udaljenost ortogonalnih projekcija točaka *A* i *B* na razinu vode, a $x = \overline{A'O}$ udaljenost ortogonalne projekcije točke *A* do mjesta loma, do tačke *O*. Kut doraza označen je slovom *d*, kut loma slovom *l*. Brzinu svijetlosti u zraku označit ćemo sa slovom *u*, u vodi sa slovom *v*.

Prema slici 1. vidimo da je

$$\overline{AO} = \sqrt{a^2 + x^2},\ \overline{OB} = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Budući da se svijetlo rasprostire jednolikom brzinom po pravcu, utrošeno vrijeme, koje je potrebno da zraka svijetla stigne od točke *A* do točke *O*, određeno je sa $\frac{\overline{AO}}{u} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}$, a potrebno vrijeme da zraka svijetla stigne od točke *O* do točke *B*, određeno je s $\frac{\overline{OB}}{v} = \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$. Zato je ukupno vrijeme, koje je potrebno, da zraka svijetla stigne od točke *A* preko *O* do točke *B*, određeno sa

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v} \qquad (1)$$

Na taj način Fermat je odredio funkciju, koja nam kazuje, kako ovisi vrijeme od puta, po kojem stiže zraka svijetla od točke A do točke B. Budući da priroda, kako je govorio Fermat, slijedi uvijek zakone minimuma, svijetlo odabire put od točke A do točke B tako, da ga može prevaliti u najkraće vrijeme. Želimo li odrediti matematičke uvjete, koji će tome zahtjevu udovoljiti, treba odrediti onu vrijednost veličine x, za koju će funkcija (1) imati minimum. To se postizava na taj način, da se prva derivacija funkcije (1) izjednači s nulom i iz tako dobivene jednadžbe odredi tražena vrijednost x.

U tu svrhu napisat ćemo funkciju (1) pomoću simbola potencije $T = \frac{1}{u} \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{v}, [b^2 + (c - x)^2]^{\frac{1}{2}}$, a onda odrediti prvu derivaciju po pravilima za potenciju, vodeći računa da je to ujedno složena funkcija.

Tako dobivamo

$$T' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2} \cdot [b^2 + (c - x^2)]^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot [-2 \cdot (c - x)] \qquad (2)$$

Skrativši i uredivši dobivamo

$$T' = \frac{x}{u \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v \cdot \sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \frac{x}{u \cdot \overline{AO}} -$$
$$- \frac{c - x}{v \cdot \overline{OB}} \qquad (3)$$

Izjednačivši dobivenu derivaciju s nulom, dobivamo da je

$$\frac{x}{u \cdot \overline{AO}} = \frac{c - x}{v \cdot \overline{OB}} \qquad (4)$$

Prema slici vidimo da je $x = \overline{AO} \cdot \sin d$, $c - x = \overline{OB} \cdot \sin l$. Zamijenimo li tako određene vrijednosti u relaciju (4), dobivamo

$$\frac{\overline{AO} \cdot \sin d}{u \cdot \overline{AO}} = \frac{\overline{OB} \cdot \sin l}{v \cdot \overline{OB}} \text{ ili } \frac{\sin d}{\sin l} = \frac{u}{v} = K \qquad (5)$$

a to je ranije spomenuti Descartes-ov zakon loma.

Na taj način pokazao je Fermat, da će svijetlo doći iz točke *A* do točke *B* u najkraćem vremenu samo onda, ako bude zadovoljen uslov (5), a eksperimenat pokazuje, da zraka svijetla taj zakon zbilja zadovoljava. Prema tome kod loma na granici dvaju sredstava opažamo da se svjetlost širi tako da je vrijeme potrebno za prevaljeni put svjetlosti od jedne do druge određene točke što kraće. Time je postavljeni problem potpuno riješen.

Lav Rajčić

PROBLEM KONZERVE

Stari zadatak u proširenom obliku

Često se i rado postavlja i rješava ovaj zadatak: **Treba načiniti valjkastu posudu sa dnom i poklopcem tako, da njezino oplošje, uz unaprijed propisani obujam, bude što je moguće manje.** U kom su tada odnosu njezin promjer i visina? — Možemo postaviti zadatak i tako, da bude naglašeno njegovo praktično značenje: **Kako treba napraviti valjkastu limenku** (dozu) **za konzerve uz unaprijed propisani obujam, da potrošak lima bude što manji?**

Označimo li zadani obujam sa **V**, promjer valjkove baze sa **d**, visinu sa **v**, tada je poznato rješenje zadatka:

$$d = v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \qquad 1)$$

To je lijep rezultat, koji upravo veseli čovjeka, ali se, izgleda, oni, koji proizvode limenke za konzerve, na nj ne obaziru, jer limenke, koje se najčešće nalaze na tržištu t. j. one od 1 **kg**, izgledaju drugačije: visina im je veća od promjera. Kritički raspoloženi učenici pitaju: zašto? Oni hoće da saznaju od učitelja, zašto se ne primjenjuje izračunati rezultat i kako upravo dolazi do stvarno uzetih protega. Uzrok je u tome, što se kod uobičajenog rješavanja toga zadatka želi postići jedino najmanja moguća površina posude t. j. najmanja moguća potrošnja lima. Veću potrošnju lima uvjetuju ove okolnosti:

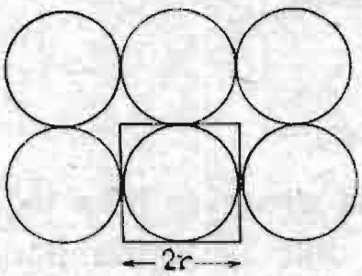
1. Okrugla dna posuda ne mogu se bez otpadaka izrezati iz pravokutnih limenih ploča, koje u tu svrhu dobiva proizvođač;

2. ne mogu se plašt i dno posude jednostavno sastaviti, nego mora biti na njihovu sastavu predviđen izvjesni rub za lemljenje i spajanje.

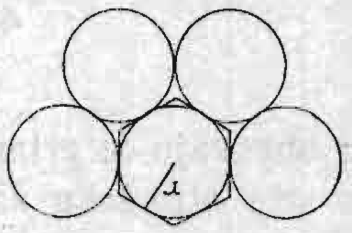
Pobliže objašnjenje dat će račun.

Uzmimo najprije dva sasma jednostavna slučaja, koji još ne odgovaraju stvarnosti.

Primjer *a)* — Neka bude površina plašta bez ikakova viška t. j. $d\pi v = 2r\pi v$. Okrugla se dna izrezuju prema slici 1. tako, da



Sl. 1.



Sl. 2.

se za svako dno utroši površina lima $(2r)^2$. Tada treba za svaku limenku ukupna površina lima:

$$P = 2r\pi v + 2 \cdot (2r)^2 \; ; \; v = \frac{V}{r^2\pi}$$

$$P = \frac{2V}{r} + 8r^2$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + 16r = o$$

$$r^3 = \frac{V}{8} \; ; \; d^3 = V$$

$$\frac{v}{d}=\frac{V}{\frac{d^2\pi}{4}\cdot d}=\frac{4V}{d^3\pi}=\frac{4V}{\pi V}=\frac{4}{\pi}$$

$$v : d = 4 : \pi \qquad 2)$$

Primjer *b)*: Isto kao pod *a)*, samo će se okrugla dna izrezati prema slici 2. tako, da se za svako dno utroši površina šesterokuta $2\sqrt{3}\,r^2$.

Tada je ukupna potrošnja lima za svaku limenku:

$$P = 2r\pi v + 2\cdot 2\sqrt{3}\,r^2 = \frac{2V}{r} + 4\sqrt{3}\,r^2$$

Prva derivacija, izjednačena sa *O*, daje

$$r^3=\frac{V}{4\sqrt{3}}\ ;\ d^3=\frac{2V}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{v}{d}=\frac{V}{\frac{d^2}{4}\cdot d}=\frac{4V}{d^3\pi}=\frac{4V\sqrt{3}}{2V\pi}$$

$$v : a = 2\sqrt{3} : \pi \qquad 3)$$

Iz obadvaju se primjera razabira, da promjer biva to manji, što je više otpadaka za okrugla dna, dok se visina istodobno nužno povećava u odgovarajućoj mjeri.

U primjeru *a)* je

$$\frac{v}{d}=\frac{4}{\pi}=\frac{(2r)^2}{r^2\pi}=\frac{\text{kvadrat}}{\text{krug}}$$

U primjeru *b)* je

$$\frac{v}{d}=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}=\frac{2\sqrt{3}\,r^2}{r^2\pi}=\frac{\text{šesterokut}}{\text{krug}}$$

Uvedemo li općeno za dno broj α tako, da je

$$\alpha = \frac{\textit{Ploha za izrezivanje}}{\textit{Upotrebljiva (korisna) okrugla ploha}}$$

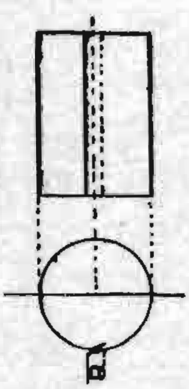
tada je: $$P = 2r\pi v + 2r^2\pi \cdot \alpha$$

i dalje: $$r^3 = \frac{V}{2\pi\alpha}\,;\; d^3 = \frac{4V}{\pi\alpha}$$

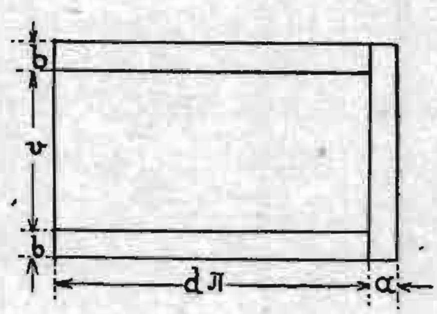
$$v : d = \alpha : 1 \qquad 4)$$

U tim se jednostavnim primjerima pretpostavlja, da je α konstanta. Uistini je pak i α funkcija od r, kako slijedi iz primjera *c)*.

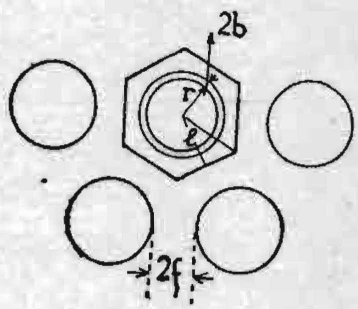
Primjer *c):* Kod praktične proizvodnje limenki zalemljuje se plašt uopće prema slici 3. sa preklopnicom u širini *a*.



Sl. 3.



Sl. 4.



Sl. 5.

Dno *D* i plašt *M* spoje se užljebljenjem. Za to se mora plaštu dodati gore i dolje neka širina *b* (slika 4.), dok dno dobiva rub za užljebljenje širok *2b* tako, da mu je ukupni promjer $d + 4b$ (sl. 5.). Nadalje se mora kod izrezivanja dna ostaviti razmak *2f* (sl. 5.). Budući da se dna izrezuju tako, troši se za svako dno šesterokut $2\sqrt{3}\, l^2$, gdje je prema sl. 5. $l = r + 2b + f$. Prema tome je ukupna potrošnja lima za svaku limenku:

$$P = (2r\pi + a)\,(v + 2b) + 2 \cdot 2\sqrt{3}\, l^2$$

ili poradi:

$$v = \frac{V}{r^2\pi} \text{ i } l = r + (2b + f),$$

$$P = \frac{2V}{r} + \frac{aV}{r\,\pi} + 4b\pi r + 8\sqrt{3}\,(2b + f) \cdot r + 4\sqrt{3}\, r^2 + const.$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2V}{r^2} - \frac{2aV}{r^3\pi} + 4b\pi + 8\sqrt{3}\,(2b+f) + 8\sqrt{3}\,r = o$$

Odavle izlazi odredbena jednadžba za r:

$$r^4 + \left(\frac{b\pi}{2\sqrt{3}} + 2b + f\right) \cdot r^3 - \frac{V}{4\sqrt{3}} \cdot r - \frac{aV}{4\pi\sqrt{3}} = o \quad 5)$$

Za konzervu od 1 *kg* imaju konstante otprilike ove vrijednosti:

$V = 1000\ cm^3,\ a = 0.4\ cm,\ b = 0.2\ cm,\ 2f = 0.5\ cm.$

Tada je odredbena jednadžba za r:

$$r^4 + 0{,}831\ r^3 - 144{,}3\ r - 18{,}4 - 0$$

Od 4 korijena te jednadžbe ima smisla i značenja samo onaj, koji se približava vrijednosti, koja izlazi iz jednadžbe (1):

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5{,}42$$

r	$r^4 + 0{,}831\ r^3 - 144{,}3\ r - 18{,}4$	$f(r)$
5	$625 + 103{,}9 \quad - 721{,}5 \quad - 18{,}4$	-11

Za primjenu Newtonove metode aproksimacije treba dati:

$$f'(r) = 4\ r^3 + 2{,}49\ r^2 - 144{,}3$$

Za vrijednost $r = 5$ izlazi: $f'(5) = 500 + 62{,}3 - 144{,}3 = 418$
Tada je popravak

$$k = -\frac{f(5)}{f'(5)} = \frac{11}{418} = 0{,}026$$

S tim popravkom već dosta točna vrijednost traženoga korijena je dakle:

$r = 5{,}026$. Za d 10,05 *cm*, $v = 12{,}6$ *cm*.

Ove izračunate vrijednosti slažu se prilično točno s faktičnim izmjerama limenki za konzerve od 1 *kg*.

Još bi nas zanimalo znati, kolika je uštednja na limu, ako primjenimo izmjere, koje rezultiraju iz primjera *c)* prema onima, izračunatim prema (1). Za obadva slučaja izlazi potrošak lima iz jednadžbe:

$$P = (d\pi + a)(v + 2b) + 4\sqrt{3}\,(r + 2b + f)^2$$

Treba staviti: prema jedn. (1):

$$d_1 = 10{,}84\ cm;\ v_1 = 10{,}84\ cm;\ r_1 = 5{,}42\ cm$$

prema pr. *c)*:

$$d_2 = 10{,}05\ cm;\ v_2 = 12{,}6\ cm;\ \ r = 5{,}026\ cm$$

i za obadva slučaja:

$$a = 0{,}4\ cm;\ 2b = 0{,}4\ cm,\ f = 0{,}25\ cm$$

Kao razlika obadviju površina izlazi uštednja od 3,8 cm^2 po limenki. Taj se iznos na prvi pogled pričinja neznatnim i nebitnim. Računamo li, da u nekoj većoj državi svaka osoba potroši svaki mjesec samo jednu konzervu, izlazi godišnja potrošnja od okruglo 1 milijarde konzervi i prema tome uštednja lima od $\frac{3{,}8 \cdot 10^9}{10^4} = 380.000\ cm^2$ ili: uz običnu debljinu lima od 0,3 *mm* i specifičnu težinu od 7,8, uštednja željeza od blizu 900 tona.

To je rezultat, koji zaslužuje pažnju u narodnoj privredi i proizvodnji, a učenici mogu iz toga lako uvidjeti, da je vrijedno i korisno i prividne sitnice podvrći matematičkoj obradi.

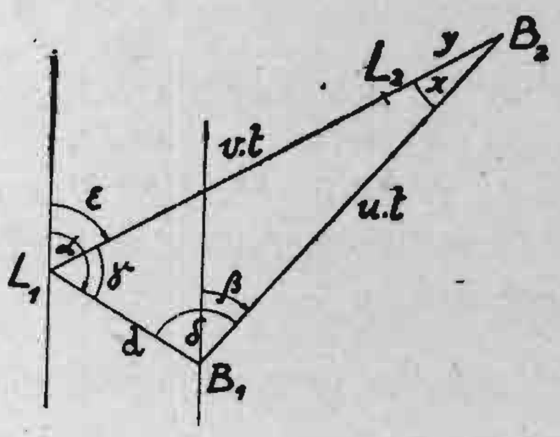
(Po Kohrs-u) *Orlić Vladimir*

JEDAN PRIMJER IZ POMORSKE TAKTIKE

Zadatak glasi: Brod **L**, koji ima najveću brzinu **v km** na sat, opazio je pod kutem α nadesno od pravca jug-sjever u daljini *d km* neprijateljski brod *B* poznate brzine *u*, koja je veća od *v*. Konfiguracija obale prisiljava neprijateljski brod, da stalno zadržava uzeti smjer pod kutem β prema pravcu sjever-jug. Koji kurs ε mora uzeti *L*, da bi dospio u najveću blizinu *y* bržemu neprijateljskom brodu *B*. Još se pita kolika je ta najmanja daljina i za koje će ona vrijeme biti postignuta?

Riješenje: U slici imamo: $L_1 L_2 = vt$

$B_1 B_2 = ut.$



Mjesto kursa ε zgodnije je da uvedemo kut γ odnosno x (kut između smjerova vožnje). Vidimo da je

$$\gamma = 180^0 - (x + \delta) \tag{1}$$

Uspostavit ćemo sada vezu između *y* i *x*, a odatle ćemo odrediti vrijednost *x*, za koju će *y* biti najmanje

Iz slike imamo

$$\frac{vt + v}{d} = \frac{\sin \delta}{\sin x} \tag{2}$$

i

$$\frac{ut}{d} = \frac{\sin \gamma}{\sin x} \tag{3}$$

Iz (2) nađemo

$$y = \frac{d \sin \delta}{\sin x} - vt \tag{4}$$

Ako iz (3) nađemo

$$t = \frac{d \sin \gamma}{u \sin x}$$

i uvrstimo u (4) dobijemo:

$$y = \frac{d \sin \delta}{\sin x} - v \cdot \frac{d}{u} \frac{\sin \gamma}{\sin x} = \frac{\sin \delta - \frac{v}{u} \sin \gamma}{\sin x} \cdot d \tag{5}$$

Uslijed (1) imamo

$$\sin \gamma = \sin [180^0 - (x + \delta)] = \sin (x + \delta)$$

pa stoga možemo (5) pisati ovako

$$y = \frac{\sin \delta - \frac{v}{u} \sin (x + \delta)}{\sin x} \cdot d \tag{6}$$

U ovoj relaciji imamo traženu vezu između y i x. Da nađemo ekstremnu vrijednost funkcije y, naći ćemo prvu derivaciju

$$y' = \frac{d}{\sin^2 x} \left\{ -\frac{v}{u} \cos (x + \delta) \sin x - \cos x \left[\sin \delta - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{v}{u} \sin (x + \delta) \right] \right\}$$

i kad sredimo

$$y' = \frac{d \sin \delta}{\sin^2 x} \left(\frac{v}{u} - \cos x \right) \tag{7}$$

Izjednačimo li ovu prvu derivaciju s nulom naći ćemo kao ekstremnu vrijednost

$$\cos x = \frac{v}{u} \tag{8}$$

Da vidimo da li je to maksimum ili minimum, naći ćemo drugu derivaciju t. j.

$$y'' = \frac{d \sin \delta}{\sin x}$$

odakle dobijemo, da je za (8) $y'' > 0$, a to znači, da za $\cos x = \frac{v}{u}$ imamo najmanju vrijednost y.

Drugačije rečeno, mora se uzeti $\cos x = \frac{v}{u}$, pa da se postigne najmanji razmak brodova.

Jednadžbu (5) možemo zbog (8) još ovako transformirati:

$$y = \frac{\sin \delta - \cos x \sin \gamma}{\sin x} \cdot d$$

a zbog (1) dalje

$$y = \frac{\sin \delta - \cos x (\cos x \sin \delta + \sin x \cos \delta)}{\sin x} \cdot d =$$

$$= (\sin \delta \sin x - \cos x \cos \delta) \cdot d = - d \cos (x + \delta) = d \cos \gamma$$

Prema tome za određivanje traženih veličina imamo ove 4 jednadžbe:

$$\cos x = \frac{v}{u}$$

$$\gamma = 180^0 - (x + \delta)$$

$$y = d \cos \gamma$$

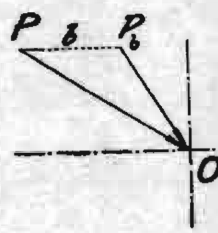
$$t = \frac{d}{u} \frac{\sin \gamma}{\sin x}$$

Uzmite sada sami podatke za d, δ, v i u pa izračunajte x, γ, y i t.

PROBLEM JEDRA

Kod današnjih jedrilica iskorištena je energija *»modrog ugljena«* iskorišćena je energija, koja leži u lahoru, vjetru. Ne čuje se lupa motora, ne plaća se skupim parama pogonski materijal (ugalj, nafta), a čovjek ipak juri velikim brzinama po pučini morskoj. Danas se i po više sati uzdrži u uzduhu na bezmotornom avionu jedreći po plavom oceanu. Odavna je čovjek pokušao iskoristiti tu silu lakokrilog zefira. Vijekovima leži neiskorišćena u uzduhu, koji nas okružuje. Pri iskorišćavanju te skrivene energije pomoću jedra, nameće nam se jedan matematički problem.

Provest ćemo teoretsku analizu vjetra i izračunati onu njegovu komponentu, koja uopće kod jedrenja pomoću običnog platnenog jedra dolazi u obzir za pogon jedrilice.



Sl. 1.

Pri promatranju učinka vjetra na jednu pomičnu plohu, u našem slučaju na obično jedro, treba uočiti činjenicu, da će se relativno promijeniti i jakost i smjer vjetra zbog pokretanja plohe. U tom slučaju ne dolazi u obzir *pravi* vjetar (po jakosti i smjeru) nego onaj vjetar, koji rezultira iz pravoga vjetra i gibanja jedra. Taj vjetar ćemo nazvati: *prividan* vjetar (sl. 1).

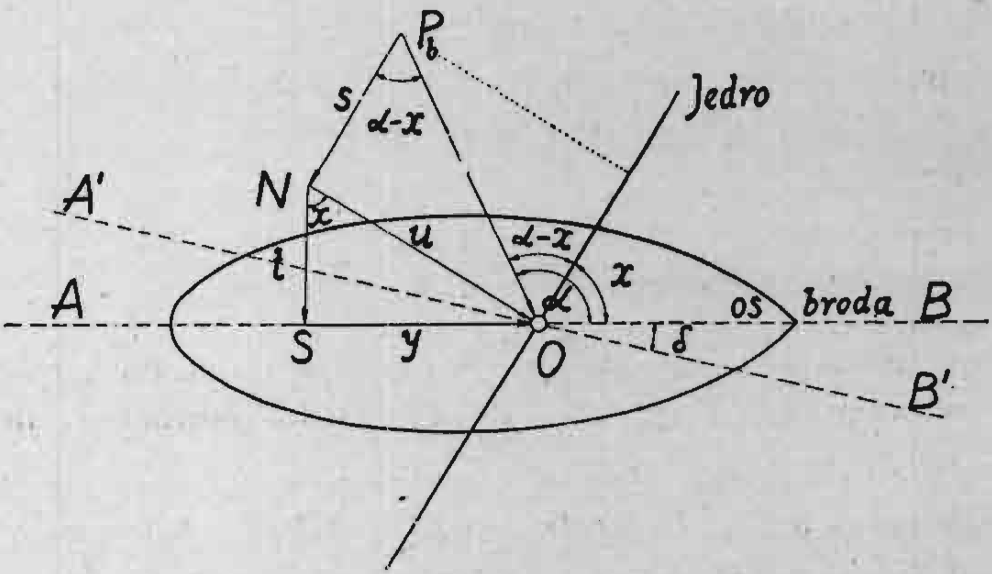
U slici je sa PO označena brzina pravoga vjetra, sa P_bO brzina prividnog vjetra, a $PP_b = b$ označuje brzinu jedra.

Problem je sada u ovome: kako ćemo jedrom najbolje iskoristiti onu silu, koja leži u vjetru t. j. kako moramo namjestiti jedro, pa da bude maksimalan učinak vjetra.

Neka je brzina prividnog vjetra (sl. 2.) predočena dužinom $\overline{P_bO} = v$. Od cijele te brzine vjetra tlači na jedro samo ona komponenta, koja je okomita na jedro, a to je $NO = u$, dok druga komponenta $P_bN = s$ pada paralelno s površinom jedra i ne dolazi u obzir.

Od spomenute komponente $NO = u$ pokreće brod u smjeru pramca i opet samo jedan njezin dio i to komponenta $SO = y$, koja pada u smjer osi broda AB, dok druga komponenta $NS = t$, koja djeluje okomito na os broda, prouzrokuje s jedne strane naginjanje broda, a s druge strane bočno pomicanje broda.

Zbog te komponente $NS = t$ bit će dakle brod prisiljen da plovi novim smjerom $A'B'$, koji sa osi broda AB zatvara neki kut odstupanja δ, koji kod dobro konstruiranih jedrenjaka ne premašuje 10°. — To bočno pomicanje broda valja kod jedrenja uzeti u obzir i pramac broda zakrenuti od smjera cilja za kut odstupanja δ na suprotnu stranu.



Sl. 2.

No jasno je, da će za neki određeni smjer vožnje i neki određeni smjer vjetra biti jedan jedini položaj jedra najpovoljniji, i da će taj položaj omogućiti najbolje iskorišćavanje energije vjetra. Taj će položaj izabrati manje ili više točno svaki pomorac iz iskustva ili po osjećaju, ali taj se položaj može matematički točnije odrediti.

Uzimamo dakle da je dan kut α, što ga zatvara smjer odakle puše vjetar sa smjerom osi broda AB, pa želimo odrediti kut x — što ga zatvara jedro, sa osi broda — tako, da komponenta $SO = y$ bude maksimalna. U tu svrhu valja najprije naći kako komponenta y ovisi o kutu x. Iz sl. 2. imamo:

$$u = v \sin(\alpha - x)$$
$$y = u \sin x$$

dakle je

$$y = v \sin(\alpha - x) \sin x \qquad ()1$$

Da y bude maksimalno, to mora prva derivacija biti jednaka nuli. Budući da je

$$y' = v\,[-\cos(\alpha - x)\sin x + \sin(\alpha - x)\cos x]$$

ili

$$y' = v\sin(\alpha - 2x)$$

to mora biti

$$v\sin(\alpha - 2x) = 0$$

odakle je

$$\alpha - 2x = 0$$

ili konačno

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Nije teško pokazati da ova vrijednost za x daje funkciji y doista maksimalnu vrijednost a ne možda minimalnu ili točku infleksije, pa neka to čitalac sam pokaže.

Našli smo dakle, da treba jedro namjestiti tako da raspolavlja kut, što ga čini smjer vjetra sa smjerom osi broda, ako želimo energiju vjetra najbolje iskoristiti.

Do istog smo rezultata mogli doći i elementarnim načinom bez upotrebe derivacije. Produkt sinusa u jednadžbi (1) možemo na poznati način pretvoriti u razliku kosinusa i pisati ovako:

$$y = v\sin(\alpha - x)\sin x = v \cdot \frac{1}{2}\,[\cos(2x - \alpha) - \cos\alpha].$$

Ovdje ovisi o x samo prvi član u uglatoj zagradi. Zato će y poprimiti maksimalnu vrijednost onda, kada taj prvi član bude maksimalan. Kako kosinus može imati kao najveću vrijednost *1*, to mora biti

$$\cos(2x - \alpha) = 1$$

a prema tome je

$$2x - \alpha = 0$$

odakle je i opet

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

No cijeli ovaj izvod nije posve točan i vrijedi samo u prvoj približnosti, a proveli smo ga zato na taj način, da bismo problem što više pojednostavnili, a pokazali ipak ono što je u samoj stvari bitno. U stvarnosti je problem mnogo zamršeniji. Tako smo na pr. tražeći maksimum funkcije y, dane relacijom (1), uzeli radi jednostavnosti kao da su brzina prividnog vjetra v i prikloni kut α konstante i o varijabli x neovisne veličine. No u stvari će se promjenom kuta x mijenjati sama brzina broda, a time ujedno i smjer i veličina prividnog vjetra. Kad bismo sve to uzeli u obzir i naš gornji izvod korigirali, došli bismo do točnjeg rezultata, ali taj se ne bi mnogo razlikovao od rezultata dobivenog na gornji pojednostavljeni način.

Sevdić-Bilinski

VI.

IZ RAČUNA VJEROJATNOSTI

BERTRANDOV PARADOKSON

Imamo li u nekoj žari 4 bijele i 2 crvene kuglice iz homogenog materijala iste težine i veličine i izvučemo li na sreću iz žare jednu kuglicu, jasno je, da ćemo morati računati više s mogućnošću, da će ta kuglica biti bijela, nego da će biti crvena — s jednostavnog razloga, što ima više bijelih kuglica u žari nego crvenih.

Budući da ima u žari dva puta više bijelih kuglica od crvenih, možemo smatrati, da ćemo iz žare izvući i dva puta više bijelih kuglica nego crvenih, ako ponavljamo uvijek isti pokus izvlačenja kuglica iz žare uz vraćanje izvučenih kuglica opet natrag u žaru. Od svih izvučenih kuglica bit će dakle po prilici $\frac{2}{3}$ bijelih, a $\frac{1}{3}$ crvenih kuglica.

Stupanj vjerojatnosti, da će se od svih **mogućih** (m) događaja zbiti samo neki izvjesni — **povoljni** (p) događaji, izražavamo matematički kvocijentom

$$v = \frac{p}{m},$$

koji nazivamo **matematičkom vjerojatnošću.**

Dakle: **Matematička je vjerojatnost za zbivanje nekog događaja kvocijent između svih povoljnih slučajeva za taj događaj i svih mogućih slučajeva za taj događaj.**

Tu ćemo matematičku vjerojatnost u daljnjem razmatranju nazivati jednostavno »vjerojatnošću«.

Vjerojatnost, da ćemo u našem primjeru izvući bijelu kuglicu bila bi dakle:

$$\nu_1 = \frac{4}{6} = \frac{3}{2},$$

a vjerojatnost, da ćemo izvući crvenu kuglicu bila bi

$$\nu_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

No da li to znači, da na svaka tri slučaja izvlačenja kuglice iz žare **nužno moramo** očekivati, da ćemo dva puta izvući bijelu, a jedamput crvenu? — Ne. Moguće je, da izvučemo 5 i 10 (ili i više puta) uzastopce (stavljajući uvijek izvučenu kuglicu opet natrag u žaru) samo kuglice jedne te iste boje, na pr. crvene, a da u svim pokusima koje učinimo, ni jednom ne izvučemo bijelu kuglicu.

Ipak, napravimo li vrlo velik broj pokusa, vidjet ćemo, da će **po prilici** u $\frac{2}{3}$ slučajeva biti izvučene bijele kuglice, a u $\frac{1}{3}$ slučajeva crvene; ujedno ćemo vidjeti slijedeće: što je veći broj izvlačenja, to će se točnije broj izvučenih bijelih kuglica odnositi prema broju crvenih kuglica kao 2 : 1. U tom smislu govori i »Zakon velikih brojeva« velikog matematičara Jakova Bernoullija (1654.—1705.).

Uzmimo još jedan primjer: Bacamo uvis dvije kocke, čije su plohe označene brojevima 1 do 6. Kolika je vjerojatnost, da ćemo baciti s te dvije kocke najviše sumu 4?

Broj mogućih slučajeva bit će $6 \cdot 6 = 36$ (budući da možemo svaku plohu jedne kocke kombinirati sa svakom plohom druge): Broj povoljnih slučajeva vidjet ćemo iz ove pregledne tabele kombinacija:

	I. II. kocka
Sumu 2 daje kombinacija	1,1
Sumu 3 daju kombinacije	1,2
	2,1
Sumu 4 daju kombinacije	1,3
	2,2
	3,1

Budući da je 4 najviša dopustiva suma prema uvjetima zadatka, bit će broj povoljnih slučajeva $1 + 2 + 3 = 6$, a vjerojatnost će biti

$$v = \frac{p}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Uzmimo ovaj zadatak: Kolika je vjerojatnost da ćemo prelomiti neki štap tako, da jedan dio bude bar dva puta veći od drugog? (ovdje pretpostavljamo da je otpor štapa prema lomljenju u svakoj njegovoj točki isti i da su vanjski uvjeti lomljenja za bilo koju točku štapa isti).

Ovaj nam zadatak izgleda u prvi mah nerješiv. Postoji naime bezbroj mnogo točaka na cijelom štapu, u kojima bi se štap mogao prelomiti tako, da točka preloma ispunjava uvjet zadatka. Prema tome bi matematička vjerojatnost bila izražena razlomkom, u kome bi i brojnik i nazivnik bio neizmjerno veliki broj: vrijednost tog razlomka ne bismo mogli odrediti.

U ovom primjeru nailazimo dakle na nešto novo. Kod dosadašnjih dvaju zadataka ulazio je u račun samo **konačan** broj svih mogućih slučajeva (dakle ujedno i konačan broj povoljnih slučajeva); ovdje nailazimo na **beskonačan** broj svih mogućih slučajeva i beskonačan broj svih povoljnih slučajeva. Velimo, da ovdje imamo posla s **kontinuiranom** vjerojatnošću, za razliku od dosadašnjih primjera **diskontinuirane** vjerojatnosti.

Time, za slučaj kontinuirane vjerojatnosti, treba nanovo definirati pojam vjerojatnosti s razloga što je, kako je već spomenuto, broj mogućih i povoljnih slučajeva beskonačno velik.

Ako definiramo vjerojatnost da se točka preloma nalazi baš na određenom segmentu štapa izrekom, da je ta vjerojatnost **proporcionalna s dužinom tog segmenta,** imamo zapravo već naš zadatak riješen. Na štapu AB postoje dva segmenta, čije bi točke mogle zadovoljiti uvjetu našeg zadatka (vidi crtež):

Sl. 1.

To su segmenti $\overline{AC}$ i $\overline{DB}$. Budući da ti segmenti čine $\frac{2}{3}$ ukupne dužine štapa, to je vjerojatnost, da ćemo štap prelomiti tako, da jedan dio bude bar dva puta duži od drugog, jednaka

$$v = \frac{2}{3}.$$

Zadaci iz područja kontinuirane vjerojatnosti najčešće dolaze u geometriji i mnogo su komplicíraniji za rješavanje (upravo zbog ulaženja pojma beskonačnog u problematiku samog zadatka) od zadataka diskontinuirane vjerojatnosti.

Ne treba onda smatrati čundovatim činjenicu da je bilo momenata, kada su i veliki matematičari koji put posumnjali u jednoznačnost rješenja matematičkih problema, bar u vezi sa zadacima iz područja kontinuirane vjerojatnosti.

Tako J. Bertrand u svom znamenitom djelu o računu vjerojatnosti (Calcul des Probabilités, 1889.) kritikuje teoriju kontinuirane vjerojatnosti; na temelju svojih netočnih dedukcija zaključuje, da su ti problemi obične matematičke igrarije bez ikakove realne podloge. U svom djelu navodi on primjer iz tog područja, koji je po njemu, a zbog svoja tri rješenja dobio i ime »Bertrandov paradokson«.

Problem glasi:

»U krugu polumjera **r** povučemo **po volji** tetivu.

Kolika je vjerojatnost, da će njena duljina biti veća od duljine stranice **a** u taj krug upisanog istostraničnog trokuta?«.

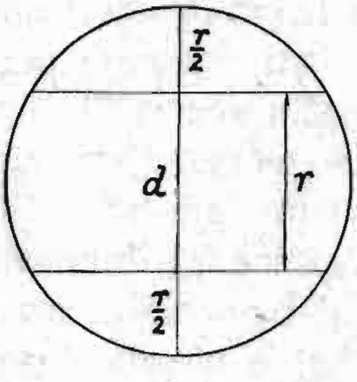
1. Prvo rješenje

Ako zadamo **smjer** tetive, tada će središta svih tetiva ležati na promjeru, okomitom na smjer tetive. Kako središte stranice **a** istostraničnog trokuta, upisanog u krug, leži u točki, koja raspolavlja polumjer kružnice, to će sve one tetive, čija središta leže bliže od te točke središtu kruga, biti veće od stranice **a**. Time se promjer raspada na 3 dijela: dva leže simetrično obzirom na središte kruga i svaki ima dužinu $\frac{r}{2}$; srednji dio kojim prolaze tetive veće od stranice **a** ima dužinu $r = \frac{d}{2}$ ako sa **d** označimo dužinu promjera; dakle će vjerojatnost biti:

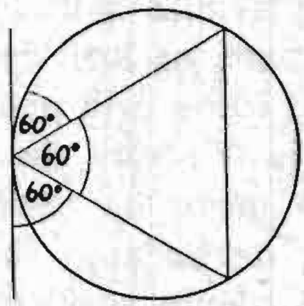
$$v = \frac{p}{m} = \frac{d}{2} : d = \frac{1}{2} = \underline{0.50}$$

2. Drugo rješenje

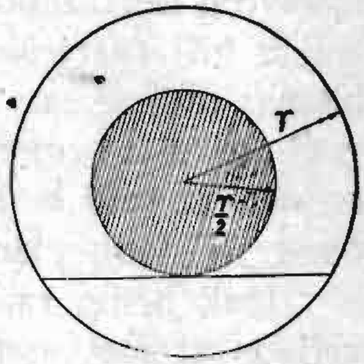
Ako zadamo **jednu krajnju točku** tetive na kružnici, tada tangenta u toj točki, s dvije stranice upisanog istostraničnog



Sl. 2.



Sl. 3.



Sl. 4.

trokuta čini 3 kuta od po 60^0; da bude tetiva veća od stranice **a**, mora prolaziti srednjim od ta tri kuta; vjerojatnost će dakle biti

$$v = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} = \underline{0{,}33.}$$

3. Treće rješenje

Ako zadamo **središte** tetive, tada je tim središtem veličina tetive potpuno određena. Padne li tada to središte unutar kruga, čiji je polumjer jednak polovici polumjera **r**, bit će tetiva veća od stranice **a** upisanog istostraničnog trokuta (jer stranice upisanog trokuta tangiraju kružnicu s polumjerom $= \frac{r}{2}\Big)$. Kako je površina manje kružnice jednaka $\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi$, a zadane $r^2\pi$, vjerojatnost će biti izražena omjerom između mjernog broja točaka u malom i velikom krugu. Bit će dakle:

$$v = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi : r^2\pi = \frac{1}{4} = \underline{0{,}25}$$

Bertrand dolazi do zaključka: Nijedno od rješenja nije neispravno, ali nijedno nije ni ispravno: pitanje je krivo postavljeno . . .

Do tog zaključka dolazi on upravo na osnovu činjenice, da taj po izgledu jednostavan problem dovodi do **tri** rješenja. No upravo u Bertrandovoj tvrdnji, da je »pitanje krivo postavljeno« leži u biti razrješenje prividne paradoksalnosti njegova problema: radi se samo o tome, **na koji** ćemo način »po volji« povući tetivu u krugu. Kao i kod svih problema geometrijske vjerojatnosti radi se i ovdje o tome, da se »uzimanje po volji« ovog ili onog elementa može na različite načine protumačiti.

Ipak nema razloga, da budemo skeptični i posumnjamo u vrijednost matematike i njenih rezultata. Ako je možda duhovita izreka jednog filozofa, da je matematika znanost »u kojoj svi govore o svačem, a na koncu se ipak ne zna o čemu se govori«, onda ona u isti mah i nije točna — niti obzirom na cijelu matematiku, a niti obzirom na njene pojedinačne probleme.

Obzirom na izloženi problem potrebno je utvrditi ovo: Svakako postoji neizmjerno velik broj tetiva, koje su manje od stranice istostraničnog trokuta, upisanog u kružnicu. Isto je tako neizmjerno velik broj tetiva, koje su opet veće. Prema tome bi bio rezultat u smislu definicije vjerojatnosti:

$$\frac{\infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Ovaj izraz imat će različite specijalne vrijednosti. Te će vrijednosti zavisiti samo o tome, u kojem ćemo smislu shvatiti uvećanje broja tetiva u odnosu prema njihovom neograničenom broju.

Vladimir Jirasek

VII.

MATEMATIKA U PRIRODI

PČELINO SAĆE KAO MATEMATIČKI PROBLEM

Kod pčele možemo osim slatkoga meda naći još i mnogo toga što nas svojom ljepotom zanosi, što nas može pobuditi na razmišljanje. Upravo do divnih rezultata došao je M. Maeterlinck proučavajući dugi niz godina pčelu u raznim njenim fazama i djelovanjima. Svoja opažanja iznio je u majstorskom djelu »*Život pčela*«.

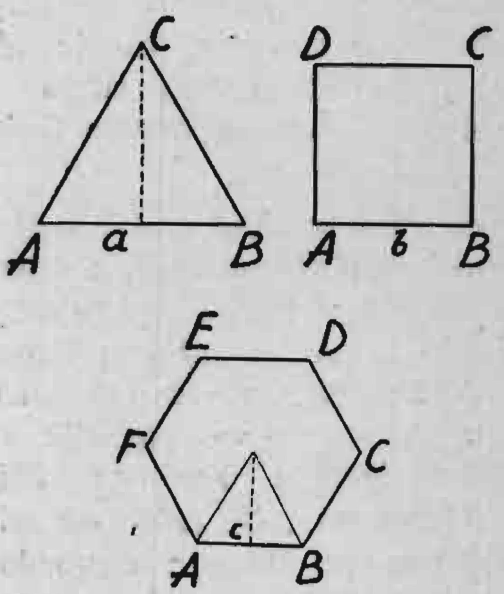
Već odavna je radoznalost ljudska kod pčela našla mnogo tog interesantnoga. Pjesnici su pčelu opjevali, a drugi je držali radi slatkog nektara. Ali uz te stvari sladokusaca, to čudesno lakokrilo biće privlačilo je svojim načinom života i mislioce i ljubitelje prirode. Veliki skup pčela u košnici, kao jedno potpuno socijalno uređeno društvo, upravlja se po izvjesnim zakonima. Svaka jedinka zna za svoj posao, koji je u košnici tako diferenciran. Ni jedna ne miruje. Pa ni one što izgledaju tako mirne; što vise u grozdovima, i one su pri poslu, i te kako važnom i napornom, jer one stvaraju vosak, koji će opet druge upotrebiti za izgradnju. Poput naših oblakodera »voštani dvori« ređaju se sa stotinama hiljada pretinaca i komorica. — S koliko točnosti, a koliko smjelosti izgrađuju te grdosije! Kako je samo čudesno to djelo marnih radilica, kako li se odlikuje geometrijskom pravilnošću! Radi te odlike stari su nazivali pčele geometrima.

Remek djelo naše pčele, koje je zanimalo tolike istraživače, to je šesterostrana stanica na kojoj je u svakom pogledu dostignuto savršenstvo. Zgodno veli Maeterlinck:

»Svi geniji zajedno ne bi mogli ništa u njoj da poprave. Ni jedno živo biće, ni sam čovjek nije stvorio toga u svojoj sferi, što su u svojoj stvorile pčele. Pa kad bi kakav um izvan zemaljske kugle pitao što li je na Zemlji najsavršenije stvorila životna logika, tada bi mu trebalo pokazati medeno saće«.

Oblik stanice i saća. Pčele za svoje potrebe grade četiri vrste stanica. Mi ćemo ovdje promatrati samo pravilne, t. j. trutovske i radiličke stanice, jer su njihove dimenzije tako stalne, a način izgradnje tako proračunat i precizan da nas baš stoga zanimaju sa stanovišta matematike.

Stanica je dio šesterostranog prizmatičnog prostora, gore omeđenog sa tri romba, (Vidi sliku) koji su takvog oblika da se zadani volumen obuhvati najmanjom površinom. I njen oblik pravilnog šesterokuta ima geometrijsko značenje. Već su Pitagorejci znali: ako hoćemo da ravninu potpuno pokrijemo kongruentnim pravilnim likovima, to je moguće samo ili istostraničnim trokutima, ili kvadratima ili pravilnim šesterokutima. (Vidi sl. 1). Ali još je jedna odlika šesterokuta, jer od ova tri lika istoga opsega zatvara šesterokut najveću površinu.



Sl. 1.

Da je površina šesterokuta veća od površine istostranog trokuta i kvadrata istog opsega pokazat ćemo slijedećim elementarnim razmatranjem. Uzmimo ova tri lika (sl. 1) koji imaju, isti opseg. Njihove stranice označit ćemo sa *a, b, c;* tada je opseg:

$$O_3 = 3a,\ O_4 = 4b,\ O_6 = 6c;$$

Kako opsezi moraju biti jednaki, to je

$$4b = 3a,\ 6c = 3a.$$

ili

$$b = \frac{3}{4}a,\ c = \frac{1}{2}a$$

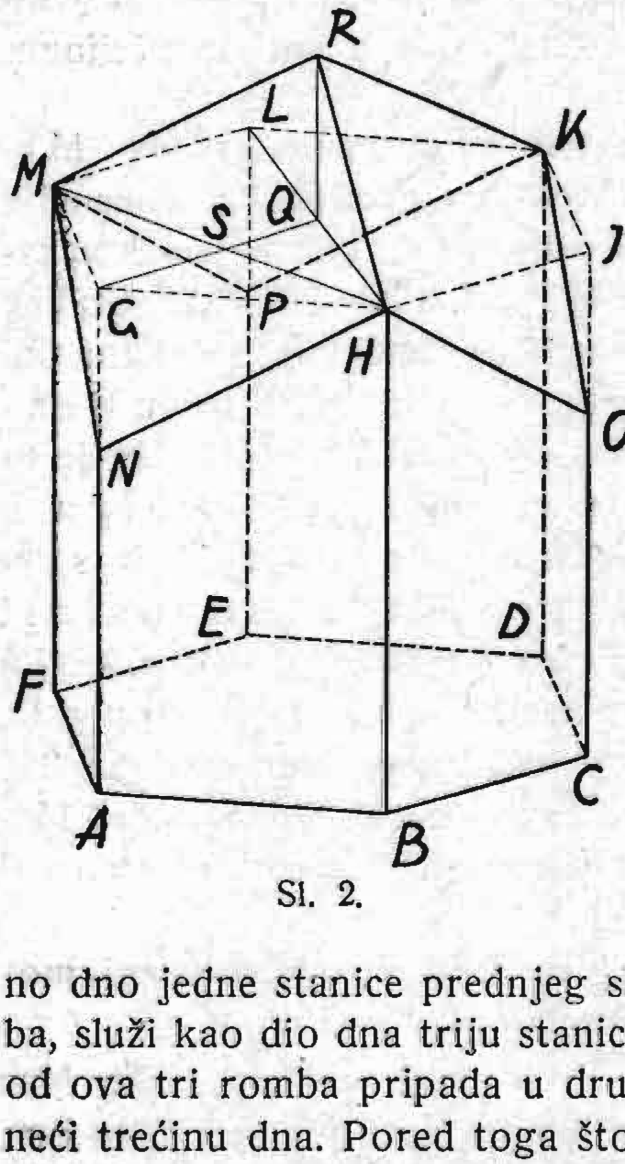
Potražimo površine tih likova. Imamo:

$$P_3=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3},\ P_4=b^2=\frac{9}{16}a^2=\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{81}{16}},$$

$$P_6=\frac{6}{4}c^2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{108}{16}}$$

Kako je $\sqrt{\frac{48}{16}}<\sqrt{\frac{81}{16}}<\sqrt{\frac{108}{16}}$, to vidimo da je površina šesterokuta najveća.

Stanica je kako rekosmo u stvari prizma. Otvor stanice je pravilan šesterokut. Kako je dno stanice završeno s tri romba, koji čine trostranu piramidu, imaju pobočne plohe oblik trapeza (vidi sl. 2).



Sl. 2.

Od osobite su važnosti veličine kuteva u rombima i trapezima, jer će o njima baš ovisiti, kao što ćemo vidjeti, da li će se uštediti voska pri izgradnji.

Spomenut ćemo još kako slažu iređaju u prostoru, t. j. kako tvore saće, jer i to ima svojih zanimljivosti. Sat je sagrađen iz dva sloja stanica, tako da se jedan sloj svojim osnovama naslanja na drugi i to po naročitom rasopredu. Piramidalno dno jedne stanice prednjeg sloja, koje se sastoji iz tri romba, služi kao dio dna triju stanica drugoga sloja; svaki pojedini od ova tri romba pripada u drugu stanicu suprotnog sloja, čineći trećinu dna. Pored toga što pčele uštede voska razmještajući stanice u saću tako da ne preostaje praznina, ovaj spomenuti raspored u slojevima ima još i prednost u pogledu čvrstoće gradnje. Naime, o vrh gdje se sastaju rombi jedne stanice upire se brid u kome se sijeku dvije pobočne plohe druge stanice. Tako saće dobiva u svojoj čvrstoći i jačini.

Nas zanima pitanje kakvi moraju biti kutevi pod kojima se priklanjaju ravnine u stanici i kakvi moraju biti kutevi u rombima, pa da se postigne najveća ušteda voska. To je problem više matematike, koga je riješilo nekoliko matematičara, a među prvima i naš Dubrovčanin Ruđer Bošković (Vidi: 255.).

Nešto iz povijesti problema. Oblik stanice potanko tumači Reaumur u svome djelu o insektima. On je čak predlagao, kada se uvodio decimalni sistem mjera, da se osnovnom jedinicom za mjerenje uzme ona, koja bi bila u vezi sa pčelinom stanicom.

Proučavanjem stanice pozabavili su se među prvima Maraldi i Cassini i našli s velikom preciznošću dimenzije romba. — Oni su, kako tvrdi Reaumur, mjerenjem konstatirali, da veći kut u rombu iznosi 109° 28′, a manji 70° 32′. Godine 1712 iznio je to Maraldi u Pariskoj akademiji. Pri tome oni nisu mislili na neki minimum, nego je na to došao istom Reaumur, i uočio da bi se tu moglo raditi o uštedi voska. On je tu svoju zamisao izložio znamenitom matematičaru Koenigu u obliku problema: »Između svih šesterostranih stanica s piramidnom osnovom, koja se sastoji od tri jednaka romba, neka se odredi ona, koja se može izgraditi s najmanje voska.« Koenig je, riješivši taj problem, našao da kutevi iznose 109° 26′ i 70° 34′. Ti se kutevi dakle razlikuju samo za 2′ od onih što ih je dao Maraldi. Problemom su se nadalje pozabavili Leo Lalaune i Mac Laurin.

Među matematičarima, koji su došli do rješenja, mi moramo naročito istaći našeg **Boškovića.**

Boškoviću je bilo poznato da je ovaj problem rješio Mac Laurin, samo on to rješenje nije nikako imao pri ruci. Zato i on sam daje analitičko rješenje, kao svoje drugo rješenje, dok je prvo bilo geometrijsko, a Bošković ovdje naročito ističe prednost geometrije.

Gleischer, koji je jako cijenio rad Boškovićev i o njemu samom se vrlo pohvalno izražavao, a koji se također pozabavio historijom istraživanja oblika stanice, ističe još jednu stvar, koju je Bošković opazio. Bošković je prvi primijetio važnu činjenicu, da se sve ravnine, od kojih je stanica izgrađena, sastaju pod kutom od 120^0. O tome nema spomena ni kod Maraldia ni kod Reaumura. Taj kut naročito naglašava Darwin, jer o njemu zavisi čvrstoća, koja je veća nego li da je taj kut pravi.

Pogledajmo sada činjenicu, koju nam pokazuje matematika, naime, da u stanici imamo minimum površine ili najveću uštedu voska.

Riješenje problema. Iz slike razabiremo slijedeće:

Spojnica *MH,* a koja je ujedno diagonala romba *NMRH,* dijelit će romb u dva sukladna trokuta *MHN* i *MHR.* Isto tako ona dijeli romb *GHQM* u dva trokuta *GMH* i *MNQ.* Ovo isto razmatranje bi vrijedilo i za ostala dva romba stanice. Držimo li dužinu *MH* stalnom, a kroz nju položeni romb *MHRM* okrećemo oko nje, točka *R* se pomiče na pravcu *QR,* a stoga isto i točka *N na pravcu AG, jer mora biti* $QR = GN$. Drugim riječima: dajemo li rombu različite položaje uz stalno *MH,* to vidimo iz slike (2), da trostrane piramide *MHNG* i *MHRQ* imaju za baze jednake trokute *MHG* i *MHQ,* i vrhove *R* i *N* jednako udaljene od baza; zato one imaju jednake volumene. Zaključujemo: volumen stanice, koja se u *R* završava s tri romba, bit će jednak volumenu stanice, koja bi se završavala šesterokutom *GHJKLM,* pa ma kakav bio položaj onih romba.

Treba dakle, kako je volumen uvijek stalan, tako odrediti položaj romba da bude minimum površine. Položaj romba zavisi od veličine njegova kuta, pa će se na taj način minimum površine izraziti, ako se nađu pripadni kutevi. Za izračunavanje bit će zgodnije, da u izraz za površinu stanice uvedemo dužinu *GH,* koju ćemo označiti sa x, a koja se mijenja, ako se mijenja položaj romba. Stoga ćemo tražiti kakvo mora biti x, da bi položaj romba davao traženi minimum.

Potražimo površinu stanice. Označimo $AB = GH = a$, $AG = b$, i $GN = x$. Površina trapeza $ABNH = \frac{1}{2}[b + (b-x)] \cdot a = = ba - \frac{ax}{2}$. Površinu sviju trapeza dobit ćemo, ako prednju uzmemo šesterostruku t. j. $p = 6ab - 3ax$. Da nađemo površinu romba $MNHR$, treba poznavati njegove dijagonale RN i MH, jer je površina $= \frac{RN \cdot MN}{2} = RN \cdot SH$; RN i MH kao dijagonale polove se i stoje međusobno okomito. Nadalje se RN i MH sijeku u točki S koja leži i na $GQ = a$, i to na sredini, pa je stoga $GS = \frac{a}{2}$. Kako su MH i GQ dijagonale romba $MGHQ$, to je i $SH = \frac{MH}{2}$ okomito na GQ; SH je dakle, visina u istostraničnom trokutu GHQ sa stranicama a, pa je stoga $SH = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{MH}{2}$ ili $MH = \sqrt{3a^2}$. Treba još naći SN. Iz pravokutnog trokuta NGS imamo $SN = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Tako je površina romba $MNHR = = MN \cdot SN = \sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}$. Kako imamo tri jednaka romba, njihova je površina $3\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}$. Zato je površina cijele stranice:

$$P = 6ab - 3ax + 3\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}.$$

Ovo je funkcija kojoj treba odrediti minimum. Moramo naći prvu dervaciju ove funkcije i izjednačiti je s nulom.. Imamo dakle:

$$P' = -3a + \frac{3 \cdot 6a^2x}{2\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}} = 0, \text{ a odavde je}$$

$$\frac{3ax}{\sqrt{3a^2x^2 + \frac{3a^4}{4}}} = 1, \text{ ili } 9a^2x^2 = 3a^2x^2 + 3\frac{a^4}{4}. \text{ Tako nalazimo da je}$$

$$x^2 = \frac{3a^4}{4 \cdot 6a^2} = \frac{a^2}{8} \text{ ili } x = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Da je to u istinu minimum, pokazali bismo na taj način, što bismo našli drugu derivaciju P'' i u nju stavili ovu vrijednost za x, pa bi izašla jedna pozitivna vrijednost, koja karakterizira minimum.

Stavimo li tu vrijednost za x u $SN = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$, imamo $SN^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{8}$. Kako je $SH^2 = \frac{3a^2}{4}$, dobivamo relaciju $SN^2 = \frac{1}{2} SH^2$, a kako je $2SN = NR$ i $2SH = MH$, prelazi ona u $NR^2 = \frac{1}{2} MH^2$, a to znači: kvadrat kraće diagonale u rombu jednak je polovini kvadrata duže diagonale. To je, dakle, uvjet kome moraju zadovoljavati diagonale romba.

Relaciju $SN^2 = \frac{1}{2} SH^2$ možemo pisati i ovako: $\frac{SH}{SN} = \sqrt{2}.$ Vidimo da je to upravo tangens polovine većega kuta u rombu. Dakle je tg $\sphericalangle SNH = \sqrt{2}$, odakle je $\log tg \sphericalangle SNH = \frac{1}{2} \log 2 = \frac{0{,}30103}{2} = 10{,}150515 - 10$, ili odatle sam kut

$$\sphericalangle SNH = 54^0\ 44'\ 8''.$$

Prema tome je veći kut u rombu $109^0\ 28'\ 16''$, a manji kao suplement $70^0\ 31'\ 44''$. A to su upravo one vrijednosti što su nađene kod pčeline stanice, a razlikuju se od Koenigovog rješenja samo za $2'\ 16''$.

*

Vidjeli smo, eto, kako nam račun pokazuje ono, što pčele već davno i davno izvode. Svakako da nećemo pripisivati pčelama izvođenje zamršenih računa na osnovu kojih bi onda gradile te čudne rezultate.

Jedna vrsta slična pčeli, t. j. osa, isto tako gradi saće sa šesterostranim stanicama, ali se ona nije dovinula do potpunog rješenja kao pčela. Ne vidi se kod nje proveden princip ekonomije, jer ona nema u svome saću dvostrukog sloja stanica. Nije, dakle, iskorišćeno jedno dno kao zajedničko, odakle bi dolazila i izvjesna čvrstoća, kao što smo vidjeli kod pčelinog saća. Ne iskorišćuje, eto, osa racionalno ni vrijeme, ni građu, ni prostor.

Kroz hiljade godina izvode pčele to svoje saće idealne pravilnosti, kome se ništa ne da ni dodati ni oduzeti, i gdje se pčela pokazuje savršenim geometrom i potpunim arhitektom. Zaista pčeli — toj živoj geometriji — treba da pođe čovjek, da se nauči kako radi svesilna priroda. U prirodi nalazi čovjek svu silu problema, pa je tako i matematičar mnogo puta našao u njoj potstreka za svoja čisto teoretska razmatranja. Mnoge zahtjeve stavljale su matematici dvije prirodne nauke: fizika i astronomija, a pogotovo u današnje vrijeme stavlja takve zahtjeve primjena prirodnih nauka, zastupljena u svim granama modernih tehničkih nauka.

Milenko Sevdić

VIII.

NEKI GLASOVITI PROBLEMI I POUČCI

KVADRATURA KRUGA

Stari su Grci bili veliki matematičari, naročito su se istakli u geometriji. Euklidovi osnovi geometrije toliko su savršeni, da su se sačuvali gotovo nepromijenjeni do današnjih dana. Visok stepen matematskog poimanja starih Grka zavređuje još više pažnje, ako se uvaži, kako su matematska pomagala bila tada još posve nedostatna.

Grci su nam dali velike umove, kao što su primjerice *Pitagora, Euklid, Eratosten, Arhimed, Apolonije, Ptolomej* i t. d. Među najraznovrsnijim problemima, kojima su se ti matematičari antike bavili, postala su glasovita tri problema, koja su proizašla iz potrebe praktičnog života.

To su problemi: *trisekcija kuta, podvostručenje kocke* i *kvadratura kruga.*

Problem trisekcije kuta sastoji se u tome, da se elementarnim geometrijskim putem t. j. pomoću ravnala i šestara razdijeli zadani kut na tri dijela. Taj problem potječe od *Hipije,* grčkog filozofa, koji je živio u četvrtom vijeku prije naše ere. Međutim zna se, da se tim problemom bavio i *Arhimed.*

Problem podvostručenja kocke nastao je prema predaji još u prastaro vrijeme. Priča se, da je kralj Minos odredio, da se sagradi grob za njegova sina Glauka. Grob je bio sagrađen u obliku kocke, ali mu se učinio premalen, pa je zatražio, da se načini grob u dvostrukoj veličini. Kralj je mislio, da bi se to moglo riješiti tako, da se bridovi kocke uzmu dva puta tako veliki, ali je to naravno bilo pogrješno, jer bi tada volumen postao osmerostruk, a ne dvostruk.

Po drugoj verziji Delijci su se obratili na proročište u Delfima, da im pomogne u nevolji, koja ih je zadesila. Proročište je odgovorilo, da se mržnja boga može samo tako smiriti, ako se podvostruči njegov oltar na Delu, koji je bio u obliku kocke. I tako je nastao problem: kako konstruirati takvu kocku?

Treći i upravo najglasovitiji od antiknih problema, bio je *problem kvadrature kruga.* Radi se o zadatku, da se nacrta kvadrat, koji će po svojoj ploštini biti jednak zadanom krugu. I taj problem je prastar. U *Papyrus Rhind,* koji je bio napisan oko *1700—1600* godina prije naše ere, već se kuša rješavati taj zadatak.

Ta su tri problema klasična u geometriji, a bavili su se njima matematičari svih vijekova, a da ih nisu uspjeli riješiti. Tek u najnovije vrijeme uspjelo je dokazati nerješivost tih problema. Da shvatimo u čemu je jezgra tih problema, moramo se malo pozabaviti rješavanjem geometrijskih zadataka uopće.

Geometrijski zadaci rješavaju se u načelu tako, da se svedu na osnovne zadatke.

Takvi osnovni zadaci su:

1. *Nacrtati pravac kroz 2 točke.*
2. *Odrediti sjecište dvaju pravaca.*
3. *Nacrtati kružnicu zadanog središta, koja prolazi zadanom točkom.*
4. *Odrediti zajedničke točke pravca s kružnicom.*
5. *Odrediti zajedničke točke dviju kružnica.*

Onaj geometrijski zadatak smatramo elementarnim, kojega se rješenje može svesti na jedan od naprijed navedenih osnovnih zadataka, odnosno na dotičnu konstrukciju. Kako se pak prednji zadaci mogu riješiti pomoću ravnala i šestara, to odatle slijedi, da je *elementarna ona geometrijska konstrukcija, koja se može izvesti pomoću ravnala i šestara.*

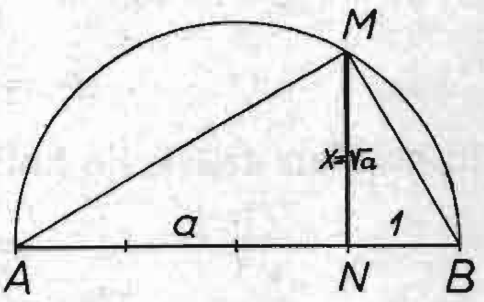
Kad se govori o mogućnosti rješavanja gore navedenih ili sličnih problema, onda se misli upravo na taj elementarni način rješavanja.

Pokazalo se, da je moguća elementarna konstrukcija svih onih geometrijskih problema, koji se mogu svesti na *racionalne operacije*, ili na *konačni broj kvadratnih korijena*. Pod racionalnom operacijom shvaćamo 4 osnovne računske operacije t. j. zbrajanje, odbijanje, množenje i dijeljenje, dok su sve ostale operacije iracionalne. Prema tome smo u mogućnosti primjerice zbrajati geometrijske dužine, jer je to operacija zbrajanja. U stanju smo geometrijskim putem razdijeliti dužinu na izvjestan broj dijelova, i to je racionalna operacija. Isto je tako naučno utvrđeno, da smo u mogućnosti riješiti pomoću šestara i ravnala i sve one iracionalne zadatke, koji se dadu predočiti kao korijeni kvadratne jednadžbe.

Na pr.

$$x = \sqrt{a}$$

Ta se konstrukcija može izvesti na slijedeći način: (Vidi sliku 1.) Na pravac se nanese najprije dužina $AN = a$, zatim $NB = 1$. Zatim se iznad čitave dužine AB položi kružnica, koja prolazi krajnim točkama te dužine, a središte joj je na toj dužini. U točki N se povuče okomica i gdje ta okomica siječe kružnicu, dobivamo točku M. Dužina MN je traženo x. Na analogni način može se konstruirati rješenje svake kvadratne jednadžbe i prema tome su svi geometrijski problemi, koji se dadu svesti na jednadžbu prvog ili drugog stepena, rješivi pomoću ravnala i šestara.



Sl. 1.

Problem trisekcije kuta i podvostručenja kocke svodi se zapravo na rješavanje kubne jednadžbe, pa je tek noviji razvoj matematike pokazao, da se ti zadaci ne mogu riješiti elementarnim putem. Jedno od najvećih otkrića u matematici upravo je to, da je uspjelo pokazati, da se samo oni geometrijski zadaci mogu riješiti pomoću ravnala i šestara, koji se mogu svesti na jednadžbu prvoga ili drugog stepena. To mogu uostalom biti i jednadžbe višega stepena, ako se mogu sukcesivno svesti na kvadratne ili linearne jednadžbe.

Na taj način riješeno je nakon više od *2000*-godišnjeg istraživanja pitanje konstrukcija ravnalom i šestarom. To je riješeno pomoću algebre i analitičke geometrije.

Čim se jedan geometrijski problem svodi na jednadžbu trećega i višega stepena, on se više ne da riješiti elementarnim putem.

Kako se problem trisekcije kuta i podvostručenja kocke svodi na jednadžbu trećeg stepena, to prema tome ti problemi nisu rješivi elementarnim geometrijskim operacijama. To ne znači da ti problemi ne bi bili rješivi; oni se mogu riješiti pomoću onih geometrijskih konstrukcija, koje se mogu svesti na jednadžbe trećeg stepena. Na taj način doduše samo rješavanje gubi na jednostavnosti, ali zadatak nije nerješiv. Svakako se ne može ni trisekcija kuta ni podvostručenje kocke riješiti pomoću ravnala i šestara.

Problem podvostručenja kocke svodi se naime na jednadžbu

$$x^3 = 2 \quad \text{t. j.} \quad x = \sqrt[3]{2}*$$

ili problem trisekcije kuta na jednadžbu

$$tg\,\varphi = \frac{3\,tg\frac{\varphi}{3} - tg^3\frac{\varphi}{3}}{1 - 3\,tg^2\frac{\varphi}{3}}$$

odnosno

$$tg^3\frac{\varphi}{3} - 3\,tg\,\varphi \cdot tg^2\frac{\varphi}{3} - 3\,tg\frac{\varphi}{3} + tg\,\varphi = o$$

Ako pišemo za $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = x$ a za $\operatorname{tg}\varphi = a$, dobivamo

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = O$$

---

* Ako naime imamo kocku s bridom I, njen volumen je V = 1. Pita se, koliki mora biti brid kocke koja ima dvostruki volumen. Taj brid naći ćemo iz jednadžbe $x^3 = 2$.

a ta se jednadžba ne može dalje reducirati t. j. nije moguće taj izraz rastaviti u produkt izraza drugog i prvog stepena.

U takvom slučaju problem se može riješiti samo tako, da se konstruira pomoćna krivulja na pr. parabola, konhoida, cisoida i t. d.

Nauka je dakle došla do ovoga rezultata:

Neka je

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n = o$$

jednadžba n-tog stepena. Može se pretpostaviti, da su koeficijenti te jednadžbe sami cijeli brojevi. Takva jednadžba zove se *algebarska jednadžba* i svako x, koje zadovoljava takvu jednadžbu, zove se *algebarski broj.*

Lako se može pokazati, da se svaka jednadžba, kojoj su koeficijenti racionalni brojevi t. j. pravi ili mješoviti razlomci, može uvijek pretvoriti u jednadžbu, kojoj su svi koeficijenti cijeli brojevi.

Rješenja algebarskih jednadžbi mogu se konstruirati geometrijskim metodama onoga stepena, koji odgovara toj jednadžbi. Ako je dakle jedna veličina rješenje algebarske jednadžbe stepena većega od 2, i ako se ta jednadžba ne može više reducirati, onda se ta veličina ne može konstruirati pomoću ravnala i šestara, već samo pomoću viših geometrijskih operacija.

Može se međutim dogoditi, da neka veličina nije korijen algebarske jednadžbe, onda takav broj nije više algebarski, već se zove *transcendentan.*

Brojeve možemo predočiti na brojnoj crti. Cijeli ili razlomljeni brojevi zovu se *racionalni*, svi drugi brojevi su *iracionalni*. Unutar svih tih racionalnih i iracionalnih brojeva ima i takvih, koji su korijeni jedne algebarske jednadžbe. To su *algebarski brojevi,* dok oni brojevi, koji se ne mogu predočiti kao korijeni algebarske jednadžbe zovu se *transcendentni.* Samo se po sebi razumije, da u grupu algebarskih brojeva ulaze i svi racionalni brojevi, jer se svaki racionalni broj može uvijek predočiti kao korijen jedne algebarske jednadžbe. Transcendentne brojeve otkrio je *1844.* francuski matematičar *Liouville.* Prije toga se za egzistenciju takvih brojeva nije uopće znalo.

Novija matematska istraživanja iz područja teorije skupova pokazala su, da na brojnoj crti ima daleko više tih transcendentnih brojeva nego algebarskih. Dok algebarski brojevi čine t. zv. *odbrojiv skup,* transcendentni brojevi čine *neodbrojiv skup.* Ako se za jedan broj može pokazati, da je transcendentan, onda to znači, da on nije korijen algebarske jednadžbe i prema tome je nemoguće konstruirati taj broj uz pomoć bilo koje algebarske krivulje.

S tim je pitanjem u vezi problem kvadrature kruga. Problem se sastoji u tome, da se nađe ona geometrijska konstrukcija, pomoću koje će se moći danoj kružnici konstruirati kvadrat iste ploštine.

Neka je zadan krug.

Taj krug ima ploštinu

$$\mathrm{P} = \mathrm{r}^2\pi$$

Ako narišemo trokut, koji ima osnovku, koja je jednaka opsegu kruga, a visina tog trokuta je jednaka polumjeru kruga, onda taj trokut ima ploštinu

$$P = \frac{1}{2} r \cdot 2r\pi = r^2\pi$$

Nije nikakva poteškoća pretvoriti taj trokut u kvadrat iste ploštine.

Vidimo dakle, da se problem kvadrature kruga svodi na to, da nađemo geometrijskim putem opseg kruga. Opseg kruga dobivamo, ako pomnožimo promjer kruga s brojem π.

Geometričari su se kroz tisućljeća mučili, da nađu geometrijsku konstrukciju, kojom bi dobili opseg kruga; drugim riječima trudili su se, da geometrijskim putem t. j. konstrukcijom nađu broj π.

Problem kvadrature kruga je prastari problem i *svodi se* dakle *na konstrukciju broja π.*

Već u najstarije vrijeme nađena su aproksimativna rješenja tog problema.

U *Papyrus Rhind*, koji smo već spomenuli, a koji je pronađen u Egiptu, spominje se, da je stranica kvadrata, koji je po ploštini jednak krugu, jednaka $\frac{8}{9}$ promjera. To znači da je

$$r^2\pi = \frac{1}{4} d^2\pi = \left(\frac{8}{9} d\right)^2$$

$$\frac{1}{4} d^2\pi = \frac{64}{81} d^2$$

$$\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16 \ldots.$$

Arhimed je već našao, da je

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

što znači da je

$$3{,}140\,845\,07 \ldots.. < \pi < 3{,}142\,857\,14 \ldots..$$

Ptolomej je u 2 stoljeću prije naše ere našao za π vrijednost 3,141 66 .....

Predaleko bi nas odvelo kad bismo htjeli ovdje navesti sve pokušaje, da se taj problem riješi i sve velike umove, koji su se s time bavili. Spomenut ćemo, da se i veliki talijanski učenjak i umjetnik *Leonardo da Vinci (1452—1519)* također bavio kvadraturom kruga. On je taj problem riješio mehanički, uzevši valjak, koji ima visinu jednaku polovici polumjera njegove osnovke. Plašt tog valjka ima ploštinu

$$P = \frac{1}{2} r \cdot 2r\pi = r^2\pi$$

t. j. ploština plašta valjka jednaka je ploštini kruga na osnovci. Prema tome, ako rastvorimo plašt toga valjka, dobit ćemo pravokutnik, koji je po ploštini jednak krugu. To je dakako mehanička metoda, s kojom naravno problem kvadrature kruga onako, kako je postavljen, nije riješen.

Ludolf van Ceulen našáo je *1596.* broj π na 35 decimala.

Metoda, kojom se služio *Ludolf van Ceulen* da nađe broj π, sastoji se u postupku, koji su već poznavali stari Grci, naročito *Arhimed,* naime da se potraži opseg upisanog i opisanog pravilnog mnogokuta i tako dobiju granice, unutar kojih leži opseg kruga.

Promatrajući mnogokute sa sve većim brojem stranica dobivamo sve točniji π. Dok je *Arhimed* dobio svoju vrijednost za π time, da je promatrao pravilni *96*-terokut, *Ludvig van Ceulen* služio se u istu svrhu 2^{62}-terokutom. Po njemu izračunati broj glasi

3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88.....

Kasnije su se za izračunavanje π našle i druge metode naročito pomoću beskonačnih redova.

Najznamenitija je u tom pogledu formula, koju je postavio *1706 Machin:*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \, arc\,tg \frac{1}{5} - arc\,tg \frac{1}{239}$$

Izračunavajući pomoću redova $arc\,tg\frac{1}{5}$ **i** $arc\,tg\frac{1}{239}$ **našao je**

Machin π na *100* decimala. Pomoću iste formule našao je engleski matematičar *Shanks 1874.* broj π na *707 mjesta.* Na Pariškoj svjetskoj izložbi *1937.* bio je poseban matematski paviljon. Unutar kupole tog paviljona bio je napisan broj π, na sav do tada poznat broj decimala.

Zanimljiva je jedna metoda, kako se može empirički ustanoviti vrijednost broja π. Zamislimo šahovsku ploču i jednu iglu koja je tako duga kao stranica jednog kvadrata na šahovskoj ploči. Ako bacimo iglu na ploču, ona će katkada pasti unutar kvadrata tako, da ne će sjeći stranice tog kvadrata. Izračunalo se, da je vjerojatnost *p* da se to dogodi

$$p = \pi - 3 = 0,14 = 14\%$$

t. j. u *100* pokusa otprilike *14* puta bi igla morala pasti unutar kvadrata. Pokusi, koji su izvršeni, potvrdili su ispravnost toga, što više kod *10000* pokusa našlo se, da je vjerojatnost, da će igla pasti unutar kvadrata

$$p = 0,142$$

a kako je

$$0,142 = \pi - 3$$

to odavde slijedi

$$\pi = 3,142 \ldots.$$

t. j. pomoću tih pokusa izračunat je π na *3* decimale točno.

Na gore spomenutoj pariškoj izložbi bio je izložen taj aparat i posjetioci su mogli tamo vršiti te pokuse iglom.

Kako iz svega dosadanjeg razabiremo, sve što je do sada u rješavanju tog problema uspjelo, je to, da su nađene aproksimativne metode za izračunavanje, odnosno konstrukciju broja π. Imade genijalnih konstrukcija, kao primjerice, iz srednjoškolskih udžbenika poznata, konstrukcija poljskog matematičara Adama *Kochanskoga* iz godine *1685.*, koja nam daje π na *4* decimale točno, ali sve su to samo aproksimacije, dok ono za čim se težilo, da se naime elementarnim putem izvede točna konstrukcija, to nije uspjelo.

Kroz tisućljeća vuče se taj problem te je postao najglasovitiji problem u matematici. Najveći umovi su se trudili da riješe taj problem, stvarno je on riješen tek godine *1882.*, kad je *Lindemann* dokazao, da je broj π *transcendentan broj.*

Predaleko bi nas odvelo, da ovdje prikažemo, kako je dokazana transcendentnost tog broja.

Spomenut ćemo samo slijedeće:

Viša analiza pozna jedan broj, koji se upotrebljava kao baza prirodnih logaritama. Taj se broj zove e. Do tog broja se dolazi, kad se načini granični prelaz izraza

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Kad se n približava neizmjernosti, izraz

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

približava se vrijednosti

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 46 \ldots\ldots\ldots$$

Taj se broj može izračunati i iz reda

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$$

Zašto je taj broj važan za višu analizu?
Razlog je ovaj:
Ako je

$$y = {}^a\!\log x$$

onda je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\!l \cdot g\ e}{x}$$

Ako uzmemo $a = e$ t. j. $y = \ln x$, dobivamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

pa tako u višoj analizi dobivamo stvarno najjednostavniju formulu za derivaciju logaritma, uzevši za bazu logaritma e t. j. pri primjeni t. zv. prirodnih logaritama.

Funkcija, u kojoj dolazi e kao osnovka, a x kao eksponent, dakle funkcija e^x zove se eksponencijalna funkcija. Ta funkcija vrlo je važna kod izvjesnih prirodnih pojava. Tako se primjerice neprekidno ukamaćivanje glavnice predočuje pomoću funkcije

$$f(p) = e^{\frac{p}{100}}$$

Neprekidno ukamaćivanje znači, da se kamati priklapaju glavnici bez prekida. Takvo ukamaćivanje stvarno se zbiva u Prirodi uvijek onda, kad se izvjesna tvar sama od sebe stalno povećava, i to, to više, što se više stvara te tvari. Po takvom zakonu ravna se primjerice rast drveća i t. d. To je eto razlog, da se logaritmi, koji imaju kao bazu broj e, zovu prirodni logaritmi.

Za broj e pokazao je *Hermite 1873.*, da je to transcendentan broj. Iz činjenice pak, da je e *transcendentan broj* slijedi, da je i π *transcendentan broj.*

Čudesna veza tih dvaju brojeva sadržana je u poznatoj formuli

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

gdje je

$$i = \sqrt{-1}$$

Ako u toj formuli uzmemo

$$x = \pi$$

dobit ćemo relaciju

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

ili

$$e^{i\pi} = -1$$

odnosno

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

Ovo je zapravo eksponencijalna jednadžba oblika

$$1 + e^{ix} = 0$$

Nastaje pitanje, da li može korijen te jednadžbe biti algebarski broj.

To se pitanje svodi na posve općenito pitanje, da li je moguća jednadžba

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} + \ldots + a_r e^{\alpha_r} = 0$$

ako su u toj jednadžbi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ algebarski brojevi, koji su svi međusobno različiti, dok su $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ povoljni algebarski brojevi. *Lindemann* je dokazao, da je ta jednadžba samo onda moguća, ako bi svi koeficijenti $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ bili jednaki nuli, a to drugim riječima znači, da takva jednadžba stvarno nije moguća.

Odavle pak slijedi, da i jednadžba oblika

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} = 0$$

gdje je

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \alpha_1 = i\pi,\ \alpha_2 = 0$$

t. j. jednadžba

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

nije moguća, ako pretpostavimo, da je $i\pi$ odnosno π algebarski broj. Ako pak π nije algebarski broj, on može da bude samo transcendentan. Time je eto dokazano, da je π transcendentan broj.

Tako je *1882*. t. j. one godine, kada je *Lindemann* dokazao, da je broj π *transcendentan*, ujedno definitivno riješen problem, kojim su se naučenjaci, ali i lajici mučili kroz tisućljeća.

Zanimljivo je i važno kod toga to, da smo pokazali, da se riješenje tog geometrijskog problema svelo na pitanje, da li je broj π algebarski ili transcendentan broj. Time je prvotno pitanje riješeno još mnogo šire, nego što je bilo svojedobno postavljeno. Danas možemo reći, da je kvadratura kruga nemoguća ne samo pomoću ravnala i šestara, već i onda kad uzmemo u pomoć i algebarske krivulje i plohe. Ako uzmemo nasuprot u pomoć transcendentne krivulje, onda se pomoću takvih krivulja može geometrijski riješiti kvadratura kruga t. j. na taj način može se konstruirati broj π.

To je stvarno uspjelo *1889.* Rusu *Abdank-Abakanoviću,* koji je konstruirao posebni aparat zvan *Integraf,* pomoću kojega je moguće geometrijski konstruirati broj π, i to tako, da se mehaničkim putem konstruira transcendentna krivulja

$$y = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2}$$

Sjecište te krivulje s osi y daje nam točke

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

Pitanje kvadrature kruga je dakle riješeno. Međutim stvarno je rješenje tog pitanja bilo moguće tek pomoću pomagala moderne matematike. Laici to ne shvaćaju, i još danas ima mnogo matematički neškolovanih ljudi, koji se trude, da riješe taj problem, ne znajući ili ne hoteći znati, da je taj problem onako, kako ga oni hoće da riješe, neriješiv. Laik naime zna, da se četverokut vrlo jednostavno pretvara u trokut i obratno, zna osim toga da je to moguće i za pretvaranje svakog mnogokuta u trokut. Ništa dakle nije prirodnije nego pretpostaviti, da mora postojati jednostavna elementarna konstrukcija i za rješavanje kvadrature kruga, analogno kao što su se tražila elementarna rješenja i za ostale klasične probleme, ne samo u matematici, već i u drugim naukama.

Podsjećamo samo, kako se još danas mnogi ljudi, i visoko obrazovani, trude da riješe *perpetuum mobile* i ako je nauka to pitanje već davno definitivno riješila time, da *perpetuum mobile nije moguć.*

A tako je slično i sa svim drugim klasičnim problemima.

Ipak svi ti klasični problemi u matematici kao i uopće u znanosti, za koje je trebalo toliko tisućljeća, da se pokaže da nisu rješivi, nisu bili uzalud postavljeni, jer što dulje su se ljudi tim problemima bavili, to više su oni oplodili nauku. Bez pretjerivanja se može reći, da su upravo ta tri klasična problema geometrije, koja smo spominjali u ovom članku, sa svoje strane mnogo doprinjeli razvitku geometrije i matematike uopće. Ustanovilo se doduše, da su ta tri problema nerješiva, ali zato se na drugoj strani matematika obogatila novim tekovinama, koje su u cijelosti opravdale hiljadugodišnje napore uložene u rješenje tih problema.

Još na jednu okolnost htjeli bismo upozoriti. Često nam se pričinja, da su izvjesne matematske teorije posve apstraktne i bez ikakove veze s realnošću. Kad su naučenjaci počeli da se bave transcendentnim brojevima, izgledalo je to sve kao zanimiva igra bez ikakvog cilja. I bilo je tako, a eto jednog dana spustili smo se iz tog apstraktnog područja u posve realno i opipljivo područje, egzistencija transcendentnih brojeva dovela nas je do vrlo realnog zaključka, da kvadratura kruga nije moguća. Dokaz za to uspio je tek onda, kad se pokazalo, da postoje transcendentni brojevi i da je π takav broj.

I kada na taj način u matematici nakon toliko napora dolazimo do rješenja, pa makar ono bilo i negativno, onda shvaćamo i svu ljepotu i čar te nauke.

Dr. Vladimir Vranić

FERMATOV PROBLEM I NJEGOVI RJEŠAVATELJI

I. Pitagorini brojevi.

Iskustvena činjenica, da je svaki trokut, kojemu su stranice redom *3, 4, 5* jedinica dužine dugačke, po svom obliku *pravokutan,* bila je poznata već u davna vremena.

Nad svakom stranicom toga trokuta neka je nacrtan i pripadni kvadrat, a svaki taj kvadrat neka je razdijeljen na jedinice ploštine, na jedinične kvadrate.

Kvadrat nad katetom *a* ima *9* jedinica ploštine, kvadrat nad katetom *b* ima ih *16*, a kvadrat nad hipotenuzom *c* ima ih *25*.

Za ovaj pravokutni trokut izlazi:

$$9 + 16 = 25$$

ili

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Na isti se način za pravokutni trokut sa stranicama 5, 12, 13, dobiva

$$25 + 144 = 169$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Kod oba ova pravokutna trokuta ispunjen je poučak: *Broj jedinica ploštine u kvadratu nad hipotenuzom jednak je zbroju jedinica ploštine u ona dva kvadrata nad katetama.*

ili kraće:

Ploština kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju ploština onih kvadrata nad katetama.

Taj Pitagorin poučak, matematički napisan u obliku:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

vrijedi za svaki ravnocrtni pravokutni trokut u ravnini s katetama *a*, *b* i s hipotenuzom *c*.

U navedena dva posebna slučaja sva tri mjerna broja za duljine stranica kod pripadnoga pravokutnoga trokuta bili su prirodni brojevi. *Prirodni brojevi* su brojevi dobiveni brojenjem, t. j. brojevi *1, 2, 3, 4, 5,... i t. d.* Kod prvog su trokuta bili prirodni brojevi *3, 4, 5;* kod drugoga bili su *5, 12, 13.* No, ovo su samo *iznimni slučajevi.*

Ako su na primjer duljine dviju stranica u pravokutnom trokutu izražene prirodnim brojevima, ne stoji da će i treća biti takov broj.

Neka je zadan pravokutan trokut, u kojemu je $a = 4$, $b = 7$. Prema Pitagorinom je poučku

$$c^2 = 4^2 + 7^2$$

ili

$$c^2 = 16 + 49 = 65,$$

t. j.

$$c = \sqrt{65} = 8{\cdot}06\ldots.$$

Taj $\sqrt{65}$ nije prirodni broj, to je broj, koji se nalazi između 8 i 9; taj $\sqrt{65}$ nije ni običan razlomak, on je broj koji se može prikazati nepovratno beskonačnim decimalnim razlomkom.

Nastaje pitanje: *Mogu li se po kakvom matematičkom zakonu odrediti po tri prirodna broja*

$$x, y, z$$

tako, da zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Kod toga geometrijsko-aritmetički zadatak: *Neka se nađe pravokutni trokut, kojemu su duljine stranica izražene samim prirodnim brojevima,* prelazi u čisto aritmetički zadatak:

Kvadrat nekoga prirodnoga broj z ima biti suma dvaju brojeva, od kojih je svaki kvadrat prirodnoga broja.

Takva tri prirodna broja x, y, z, koji navedenu jednadžbu zadovoljavaju, zovu se *Pitagorini brojevi.*

Proklo spominje, da je Pitagora dao za te brojeve ovaj zakon:

$$z = 2\,a^2 + 2\,a + 1, \quad y = 2\,a^2 + 2\,a, \quad x = 2\,a + 1,$$

na primjer:

(I)	1. $a = 1;$	$x = 3,$	$y = 4,$	$z = 5$
	2. $a = 2;$	$x = 5,$	$y = 12,$	$z = 13$
	3. $a = 3;$	$x = 7,$	$y = 24,$	$z = 25$

Platon je dao ovako

$$x = 2\,a, \quad y = a^2 - 1, \quad z = a^2 + 1$$

na primjer:

(II)	1. $\alpha = 2;$	$x = 4,$	$y = 3,$	$z = 5,$
	2. $\alpha = 3;$	$x = 6,$	$y = 8,$	$z = 10,$
	3. $\alpha = 4;$	$x = 8,$	$y = 15,$	$z = 17,$
	4. $\alpha = 5;$	$x = 10,$	$y = 24,$	$z = 26,$
	5. $\alpha = 6;$	$x = 12,$	$y = 35,$	$z = 37.$

Indijci su oko 5. stoljeća prije naše ere poznavali rješenja (I) 1), 2) i (II) 3), 5).

Matematičar L. *Kronecker* u svojim predavanjima od 1901, god. dokazao je, da su *formulama*

$$x = 2pqt, \quad y = t(p^2 - q^2), \quad z = t(p^2 + q^2),$$

gdje za prirodne brojeve p, q, t vrijedi

$$t > 0, \quad p > q > 0,$$

dani svi slučajevi bez izuzetka i bez ponavljanja za rješenje jednadžbe

$$x^2 + y^2 = z^2$$

u prirodnim brojevima, te da su tim formulama dani svi Pitagorini brojevi.

II. Fermatov poučak.

Dio aritmetike, u kojemu se istražuju svojstva cijelih brojeva, zove se *teorija brojeva.* Ovakovi problemi iz teorije brojeva, u kojima se jedna jednadžba sa dvije ili više nepoznanica ima riješiti u prirodnim brojevima, pripadaju u *neodređenu ili Diofantovu analizu.*

Diofant iz*Aleksandrije* (otprilike od *250.* do *300.* naše ere) među grčkim matematičarima, kojih djela su nam se sačuvala, prvi je algebru sistematski obradio. On u svojem glavnom djelu Ἀριθμητικά, koje sadrži klicu za većinu problema moderne teorije brojeva, ne opisuje algebarski postupak riječima nego uvodi općenite znakove. To je možda baš i bio uzrok, da se za ta njegova istraživanja nije dugo znalo, i da se je mnogo toga od ovoga djela izgubilo. Istom u 15. vijeku spominje se jedan Diofantov rukopis; prvi spomena vrijedni prijevod u Europi bio je njemački u 16. vijeku, a tek godine 1621. izdao je Francuz Bachet de Méziriac vrlo lijepo grčko-latinsko izdanje Diofantovih djela.

U to je vrijeme, u 17. vijeku, živio Pierre Fermat (1601.—1665.) možda najveći francuski matematik, po zvanju jurista. Velika su Fermatova otkrića u raznim područjima matematike. On daje nove poglede u analitičkoj geometriji, preteča je infinitezimalnoga računa, a osobito je mnogo dao u teoriji brojeva. Njegovi arimetički poučci, od kojih je mnoge priopćio bez dokaza, i njegovi zadaci, koje je zadavao svojim savremenicima, dali su takav poticaj za istraživanje teorije brojeva, da se Fermat s pravom smatra osnivačem današnje više aritmetike.

Diofant, u Bachet-ovu izdanju, uvelike je utjecao na Fermata. Na svojem primjerku toga djela ostavio je Fermat mnoge bilješke i to kratko, na rubu stranice. U svakoj je od tih bilježaka sadržan kakov novo otkriveni važni poučak. Neki su dani bez dokaza, te su se kasniji matematici mnogo trudili, dok su ih dokazali. Sada su dokazani svi, — osim jednoga.

Kraj Diofantova zadatka: Neka se zadani kvadrat rastavi na dva kvadrata (misli se u cijelim brojevima, pa je to na današnji način rečeno: neka se jednadžba $z^2 = x^2 + y^2$ riješi u cijelim brojevima) stavio je *Fermat* ovu bilješku:

»Kubus pak na dva kubusa ili kvadratni kvadrat na dva kvadratna kvadrata i dalje općenito nikakva potencija, koja je veća od 2 ne da se rastaviti na dvije s njom istoimene potencije. Dokaz sam za to čudesan zaista otkrio. Uskoća ruba ne može ga prihvatiti.«

Fermatov poučak izražen formulom glasi:

Nemoguće je naći tri prirodna broja x, y, z, koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^n + y^n = z^n$$

za

$$n > 2.$$

To je taj *zadnji Fermatov teorem* ili *veliki Fermatov problem.* Izrekao ga je F e r m a t oko 1637.

Fermat navodi potpuno točno korak po korak, kako je dokaz izveo za $n = 4$. Izveo ga je dokazujući na drugom mjestu, isto na rubu Diofantova djela, svoju primjedbu: »*Ploština pravokutnoga trokuta u brojevima ne može biti kvadrat* kod čega je našao nemogućnost jednadžbe

$$m^4 - n^4 = r^2.$$

Ako ne postoji broj r, koji bi zadovoljio gornju jednadžbu, onda ne postoji ni takav r, koji je

$$r = \varrho^2,$$

i za koji bi bilo

$$m^4 - n^4 = (\varrho^2)^2$$

ili

$$m^4 - n^4 = \varrho^4$$

Ovaj dokaz spominje Fermat, kada govori o svojoj metodi za rješavanje problema iz teorije brojeva, te veli, da je tom »*metodom silaženja*« ali nešto izmijenjenom, dokazao i nemogućnost jednadžbe

$$z^3 = x^3 + y^3,$$

no ne opisuje točno, kako je to učinio. Kako je rješavao kod viših eksponenata, to ne spominje nigdje.

Neka je n složeni broj različan od broja 4. Na primjer neka je $n = 6$. Jednadžba

$$x^6 + y^6 = z^6$$

može se napisati u obliku

$$(x^2)^3 + (y^2)^3 = (z^2)^3$$

pa je dosta pokazati, da Fermat-ova jednadžba u ovom slučaju ne postoji za $n = 3$, a u općem slučaju, da ne postoji za neparni prim broj, koji je faktor onoga složenoga broja n. Osim toga za svaki $n > 1$ brojevi x, y moraju biti međusobno različni.

Veliki *Fermat*-ov problem postavlja se onda ovako:
Nemoguće je naći tri prirodna broja

$$x < y < z$$

tako da je ispunjeno

$$x^p + y^p = z^p$$

gdje je

p neparni prim broj.

Matematici, koji su taj Fermatov poučak kušali dokazati, pošli su naravno, od najnižih eksponenata. Prvi je osim za $n = 4$ dao dokaz i za $p = 3$ matematičar Euler (g. 1753.). Legendre je (g. 1823.) pojednostavio Eulerov dokaz i sam dokazao za $p = 5$, a uz to je dao skup općenitih formula, kojima je ograničio brojeve x, y, z. Abel je došao na te iste formule.

Dirichlet je dao dokaz za $n = 14$ (1832.) a Lamé za $n = 7$ (1839.), što je kasnije pojednostavio Lesbegues. I Gauss je nastojao da riješi Fermatov problem. On je kod toga stao na stanovište, da taj teorem kao izoliran poučak nije od velikog interesa, te se je nadao, ako mu uspije riješiti neke općenite probleme iz teorije brojeva, da će se taj teorem javiti kao neki nevažni korolar.

U svim navedenim dokazima nastoji se pronaći metodu, kojom je Fermat taj problem riješio.

Na posve novi način stao je to pitanje istraživati Kummer (1847.). Dokazao je, da je Fermat-ova jednadžba nerješiva u cijelim brojevima za stanovitu vrst prim brojeva. Kod toga još sam Kummer nije znao, ima li tih regularnih prim brojeva konačno ili beskonačno mnogo. Kronecker je zatim pokazao, da ih ima neizmjerno mnogo. Pitanje je sada, ima li osim ovih prim brojeva još konačan broj ili neizmjerna množina ostalih prim brojeva.

Kummerova istraživanja nastavili su kasnije razni matematičari, među kojima su u najnovije vrijeme najviše rezultata dobili Mirimanov, Wieferich, Frobenius, Maillet. Dickson je dao dokaz za sve neparne prim brojeve $p < 7000$ izuzevši možda za broj 6857. Landau je vrlo lijepo obradio rješavanje toga problema u svojoj knjizi o teoriji brojeva, koju je napisao za svoje kćeri, tadašnje studentice.

Od naših matematičara ovim istraživanjima iz više teorije brojeva dali su priloge Bohniček i Plemelj.

Opisivati same metode rješavanja, pa dati uvid u rješavanje problema, u poteškoće kod toga i u njihovo svladavanje, u postignuće rezultata i u uskrsle probleme, to se ne može iscrpivo u ovako popularnom prikazu, jer je za razumijevanje svega ovoga potrebno matematičko predznanje. Mora se spomenuti, da su se kod tih istraživanja događale i pogrješke i da je mnogi istraživač popravljao istraživanje drugoga. F. Lindemann, koji je riješio problem kvadrature kruga, dva puta se zaletio i dva puta dao pogrješne dokaze.

Laplace (1778.) je smatrao sramotnim za matematiku, da se ne može dokazati nešto, što je Fermat znao pred više od stotinu godina, te drži, da je Fermat upotrijebio metodu, koju drugi matematičari ne znaju. Kronecker je u svojoj tezi (1845.) nabacio misao, da taj teorem nije ni sam Fermat dokazao. U najnovije vrijeme javlja se nova struja, matematički intuicionisti, od kojih neki drže, da i ovaj Fermat-ov problem pripada među one matematičke probleme, za koje se uopće ne može dokazati, vrijede li ili ne.

Fermat je taj poučak izrekao i ustvrdio, da mu je našao i dokaz. Da je bio sam uvjeren, da je dokaz našao, o tome nema sumnje.

Za sve ostale poučke, za koje je Fermat naveo, da ima dokaz, uspjelo je dokaz naći, pa je velika vjerojatnost, da će se i za ovaj zadnji teorem otkriti.

Neki drže, da se Fermatova metoda silaženja podudara sa verižnim razlomcima, jer su se mnogi Fermatovi poučci pomoću verižnih razlomaka riješili. Svaki Fermatov poučak za koji on veli da ga je riješio svojom metodom silaženja, dade se bilo kako dovesti u vezu sa jednadžbom

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

za koju Fermat također veli da ju je riješio svojom metodom. Vjerojatno je, da će upravo ta jednadžba dovesti do onoga, što je Fermat pred više od trista godina znao.

Za matematičare je svakako taj teorem od interesa i u slučaju da je problem nerješiv. Da i prestanu tražiti dokaze za mogućnost ili nemogućnost Fermat-ove tvrdnje, svraćat će se ipak na nj, da dokažu zašto pripada među nerješive matematičke probleme.

III. Wolfskehlova zaklada

Godine 1907. umro je matematičar Wolfskehl, koji je i sam rješavao Fermatov problem i dao dokaz za neke kompleksne brojeve. On je ostavio znanstvenom društvu u Göttingenu zakladu od 100.000 maraka, da se njome nagradi onaj, koji u vremenu od 1907. do 2007. riješi Fermatov problem. Ne bi to bilo ništa neobično, u prošlom su vijeku i francuska i belgijska akademija bile raspisale svaka svoj natječaj za rješenje tog problema.

Wolfskehlova ostavština bila je malo prevelika i imala je učinak, na koji on zacijelo nije bio ni pomislio. Mjesto da poticanjem požuri matematičare na rješenje, ta je obećana nagrada izazvala smutnju među ljudima nematematičarima. U istraživanje matematike, među znanostima i umjetnostima možda jedine, koja je ostala pristupna samo svojim istraživačima, doprla je buka svjetine željne onih tisuća.

Bezbrojni po svom naslovu pravi dokazi Fermatova teorema napali su na göttingenško znanstveno društvo. Da se umanji navala, objavilo je to društvo, da će primati samo tiskane stvari, a to je onda izazvalo novu vrst literature, koja mjesto u matematiku pripada u psihijatriju.

Mala jednadžba, nikakve komplicirane formule, Fermat ju je riješio još prije tri stotine godina, pa kako da se ne bi takova malenkost u današnje vrijeme načinila! Kao pobjedni rješitelji nastupali su ljudi iz svih zvanja, bilo je filologa, oficira, kemičara, pastora, poštanskih činovnika, gimnazijalaca, direktora banaka, konobara, liječnika, knjigovođa, apotekara. U našoj sveučilišnoj knjižnici postoji već četvrto izdanje takvoga rješenja, kojemu je autor bio jedan nekadašnji rumunjski general; pogrješka je u tom dokazu takva, da bi je svaki petoškolac mogao opaziti. Ima tamo i još nekoliko sličnih dokaza. O takovim velikim otkrićima znale su donositi vijesti i strane i naše novine.

Koliko su smiješni ti dokazi, toliko je bolan bio više puta život, koji se iza toga sakrivao. Mnogi, kojima su već sve nade propale, hvatali su se za slamku, žrtvovali su sve, što su imali, samo da im se publicira njihovo rješenje. Trošili su na to svoju energiju, koju bi i kako lijepo i korisno bili mogli upotrijebiti u životu.

Više manje i na samim naslovima tih broširanih i krasno uvezanih knjiga vidjeli su se tragovi megalomanije. Ima žrtava toga Wolfskehlovog natječaja i u bolnicama za duševne bolesti.

Navala je ova sada prestala. Wolfskehlova zaklada bila je za vrijeme prošloga rata uložena u ratni zajam, te je potpuno propala.

Tako su se pokazale i sve zle strane ovakovoga nagradnoga natječaja.

Da je tolika svota bila uložena u kakov matematički zavod ili u kakvu matematičku knjižnicu, ili da je bila dana kao pomoć studentima matematike, možda bi ta zaklada bila štogod i doprinijela rješenju Fermatova problema.

Matematici *Fermatov problem* žele riješiti i rješavaju ga kao i druge matematičke probleme. Oni znadu, da je potrebno najprije upoznati i sve ono, što je *sam Fermat* u teoriji brojeva stvorio, i zatim sve ono što su *i svi drugi iza njega* u tom području načinili.

Može nastati pitanje, ima li uopće smisla baviti se tim problemima iz teorije brojeva. Matematičar to pitanje ne će postaviti. Može ga postaviti fizičar ili prirodoslovac. No ako zna matematiku, odmah će se sjetiti, kako se nazor o neprekidnosti u prirodnim pojavama upotpunjavao matematičkim rezultatima o neprekidnim funkcijama neprekidnih varijabla. Istraživanja u fizici molekula, iskustveni podaci o isprekidanosti u svijetu atoma i u biologiji, te na pripadnim znanstvenim opažanjima osnovane teorije o najmanjim nedjeljivim česticama materije, matematički se opisuju relacijama između cijelih brojeva. Atomistika je matematički svakako upućena i na rezultate iz teorije brojeva.

dr Mira Hercigonja

NEKOLIKO DOKAZA PITAGORINA POUČKA

Danas je gotovo jednodušno mišljenje, da *Pitagora* ovaj poučak nije pronašao (vidi: str. 167.). Jedni tvrde, da je Pitagora bio samo prvi, koji je dao opći dokaz za poučak, dok drugi i to negiraju. Jedni opet pripisuju Pitagori dokaz, koji se nalazi u Euklidovim elementima, dok P r o k l o s (5. stoljeće) tvrdi, da dokaz, koji dolazi u elementima, potječe od samog E u k l i d a.

Danas je poznato oko 1[illegible] raznih dokaza Pitagorina poučka. Između njih naveo bih nekoliko karakterističnih. Dva potječu od *Bhaskare (12. stolj.)*, jedan potječe *iz god. 1766.*, a ostalih sedam iz *19. stoljeća.*

1. Po Bhaskari.

(Vija Ganita — 12 stolj.)

Indijski autor je sastavio 4 jednaka trokuta ($\triangle ABC = \triangle CDZ = \triangle DEY = \triangle EBX$) prema sl. 1. Hipotenuze tih trokuta čine kvadrat *BCDE* strane *a*, dok duže katete tih trokuta daju unutrašnji hvadrat *AXYZ*, čija je strana $c - b$. Bhaskara sada u svrhu dokaza kaže samo: »G l e d a j!«

On implicitno upotrebljava formulu:

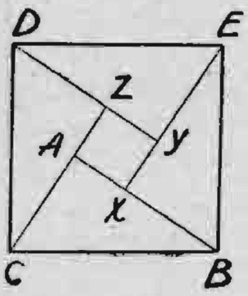
$$(c - b)^2 + 4\,\frac{bc}{2} = b^2 + c^2,$$

a slika pokazuje da je

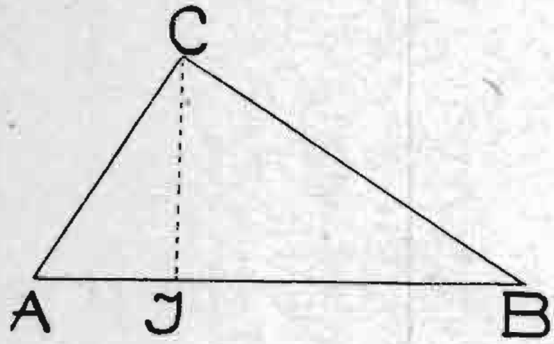
$$(c - b)^2 + \frac{4bc}{2} = a^2$$

pa je prema tome

$$b^2 + c^2 = a^2.$$



Sl. 1.



Sl. 2.

2. Po Bhaskari.

(Vija Ganita — 12. stolj.) Nalazi se i u udžbenicima.

Spustimo okomicu CI na AB. (Sl. 2.) Nastali trokuti IAC i IBC jesu slični međusobno a i s trokutom ABC. Iz njihove sličnosti izlazi:

$$\frac{AI}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ili} \quad AC^2 = AI \cdot AB \qquad (1)$$

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BC}{AB} \quad \text{ili} \quad BC^2 = BI \quad AB \qquad (2)$$

Uzmemo li zajedno (1) i (2) imamo

$$AC^2 + CB^2 = AI \cdot BA + BI \cdot BA = (AI + BI) \cdot BA =$$
$$= BA \cdot BA = BA^2$$

dakle

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

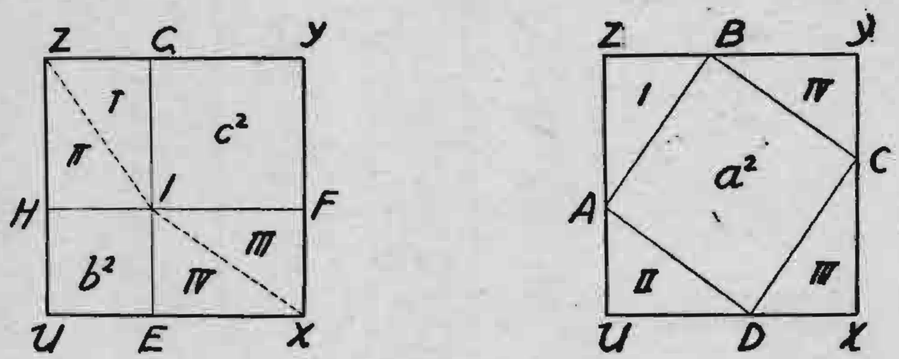
3. Po Simpson-u.

(Eléments de geométrie — Paris 1766).

Promatrat ćemo kvadrat konstruiran nad $b + c$ (sl. 3a). On premaša sumu b^2 i c^2 za dva pravokutnika od kojih svaki ima površinu bc. Od ova dva pravokutnika, podijeljena dijagonalom, dobijamo četiri jednaka trokuta, čija je površina

$$\frac{bc}{2}$$

Ova 4 trokuta, raspoređena kao na slici, čine sa svojim stranama kvadrat strane $b + c$, a sa svojim hipotenuzama drugi



Sl. 3.

kvadrat strane a (sl. 3b). Prema tome prvi kvadrat $XYZU$ premaša drugi $ABCD$ opet za 4 promatrana trokuta $\left(\text{površine } \frac{bc}{2}\right)$. Iz ove dvije slike izlazi onda, da je

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

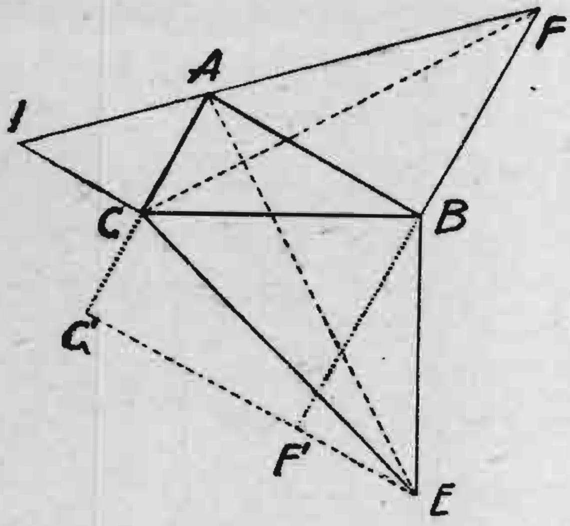
4. Po Hoffmannu.

(Der Pythagoräische Lehrsatz — Mayence, 1821.)

Uzdignimo tri normale: $BF = AB$ u B na BA, $CI = AC$ u C na CA, $BE = BC$ u B na BC (sl. 4.) — IAF je pravac. Dokazat ćemo, da je četverokut $IFBC$ ekvivalentan četverokutu $ABEC$. Svaki od njih, povlačenjem dijagonale CF i dijagonale AE, rastavimo u dva trokuta. Trokuti CBF i ABE jesu sukladni, jer imaju jednak kut kod B između jednakih strana. Dalje možemo pisati $\triangle\ JCF = \triangle\ ACE$, jer ova dva trokuta imaju jednake baze $IC = CA$ i jednake visine $BF + CA$ i $G'F' + F'E$. Stoga je

$$IFBC = ABEC$$

Ako od svakog od ova dva četverokuta odbijemo trokut ABC, dobit ćemo ekvivalentne ostatke, t. j.

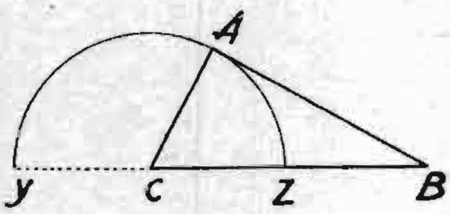


Sl. 4.

$$\frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot b^2 + \frac{1}{2} \cdot c^2$$

ili

$$a^2 = b^2 + c^2.$$



Sl. 5.

5. Po Hoffmann-u.

(Der Pyth. Lehrsatz — Mayence, 1821.)

Opišimo oko C (sl. 5.) s polumjerom CA polukružnicu koja siječe CB u Y i Z. Iz poznatog svojstva tangente AB na polukružnicu slijedi

$$AB^2 = BY \cdot BZ$$

ili

$$AB^2 = (BC + AC)\,(BC - AC)$$

dakle

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

ili

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

dakle

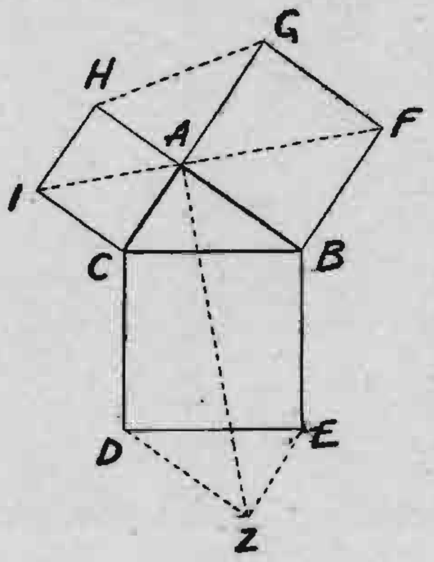
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

6. Po Terquem-u.

(*Nouveau manuel de géométrie* — Paris, 1838.)

Nad DE (sl. 6.) konstruiramo pravokutni trokut ZDE sukladan trokutu ABC, samo u obrnutom položaju. Povučemo zatim AZ, HG, AI i AF. Ove dvije dužine AI i AF leže na jednom pravcu jer suma kuteva kod A, a sa iste strane IAF, iznosi 180^0. S druge strane je $\triangle\, AGH \cong \triangle\, ABC$.

Šesterokuti $CIHGFB$ i $CABEZD$ jesu ekvivalentni, jer su načinjeni iz sukladnih četverokuta $IHGF$ i $ACDZ$, $ICBF$ i $ZEBA$. To jasno razabiremo iz sl. 6. Tako je na pr. četverokut $IHGF$ sukladan četverokutu $ACDZ$, jer je $IH = AC$, $HG = CD$, $GF = DZ$, $\sphericalangle IHC = \sphericalangle ACD$, $\sphericalangle HGF = \sphericalangle CDZ$.



Sl. 6.

Ako sada od svakog šesterokuta odbijemo dva puta trokut ABC dobit ćemo $b^2 + c^2$ odnosno a^2. — Dakle je

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

7. Po O. Werneru.

(*Arhiv. d. Math. u Phys.*, 1855.)

Nad CA nacrtamo kvadrat (sl. 7.). Povucimo IZ paralelno sa BC i uzdignimo normale CX i AY na BC. Pošto je $IC \parallel HB$ to su ekvivalentni i kvadrat $ICAH$ i četverokut $IZCB$, jer su nad istom bazom IC. Dakle je

$$b^2 = BC \cdot CX \qquad (1)$$

No kako je $IC = AC$, to su sukladni i trokuti ICX i CYA, pa izlazi $CX = CY$

dakle je

$$b^2 = BC \cdot CY \qquad (2)$$

Isto tako imamo

$$c^2 = BC \cdot BY \qquad (3)$$

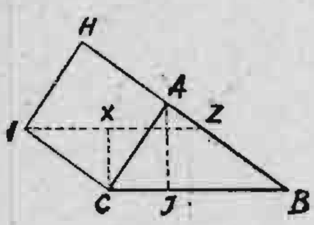
Zbrojimo li (2) i (3) dobijemo

$$b^2 + c^2 = BC \cdot CY + BC \cdot BY = BC\,(CY + BY) = BC \cdot BC = a^2.$$

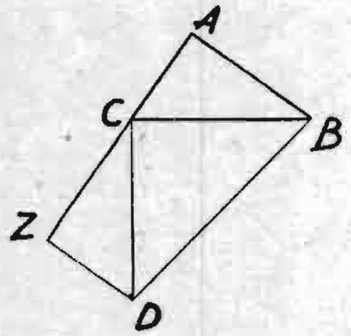
8. Po Garfield-u.

(Pretsjednik U. S. A. 1881. — *The mathematical Magazine*, 1882.)

Podignimo (sl. 8) $CD = CB$ okomito na CB i spustimo iz D okomicu DZ na produženje strane AC. Dva trokuta ABC i ZDC



Sl. 7.



Sl. 8.

imaju jednaku površinu $\frac{bc}{2}$, dok trokut BCD ima površinu $\frac{a^2}{2}$ Kao što vidimo ova tri trokuta čine trapez $ABDZ$, koji ima površinu $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$.

Dakle je

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{bc}{2}$$

ili

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

9. Po P. Fabre-u.

(*Journal de Math. elem.* — 1888.)

Kroz A povucimo AQ jednako i paralelno sa CD. (sl. 9.).

U paralelogramu $ABEQ$ visina BZ je jednaka bazi QE, jer su sukladna dva pravokutna trokuta QED i ZBE. Dakle je

$$c^2 = \textit{paralelogramu } ABEQ$$

a isto tako

$$b^2 = \textit{paralelogramu } ACDQ$$

ili

$b^2 + c^2 =$ peterokut $CBEQD$ + *trokut* ABC

$=$ *peterokut* $CBEQD$ + *trokut* QED

jer su sukladni trokuti ABC i QED.

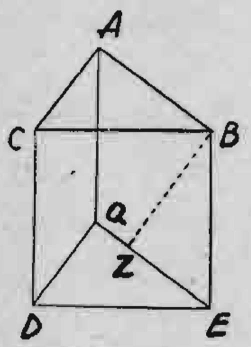
Konačno imamo :

$$b^2 + c^2 = paralelogramu\ CBDE = a^2.$$

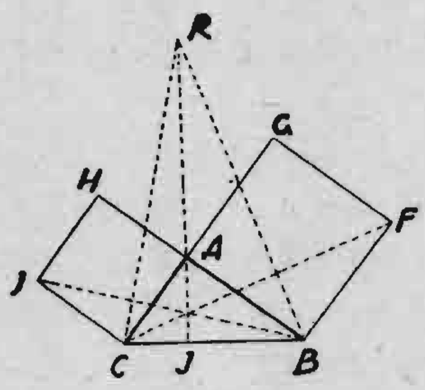
10. Po Renan-u.

(*Revue scientifique* — 1889.)

Povucimo IB i CF (sl. 10.) i spustimo iz C i B normale na IB i CF. Ove normale se sijeku u jednoj točki okomice AJ na CB.



Sl. 9.



Sl 10.

Zaista ako je R na pr. točka u kojoj normala iz C siječe AJ, vidi se da su sukladni trokuti ICB i CAR, jer imaju jednake kuteve i jer je $IC = AC$.

Prema tome je $AR = BC$.

Na isti način, ako je R' točka u kojoj normala iz B siječe AJ, onda su sukladni i trokuti FBC i BAR', a odatle i $AR' = BC$.

Dakle se dvije točke R i R' poklapaju.

Uzmemo li ovo u obzir, imat ćemo

$$\triangle\ CAR = \triangle\ ICB = \frac{1}{2} b^2$$

$$\triangle\ BAR = \triangle\ FBC = \frac{1}{2} c^2.$$

Dakle

$$\triangle\ CAR + \triangle\ BAR = \frac{1}{2} (b^2 + c^2) \qquad (1)$$

S druge strane je

$$\triangle CAR + \triangle BAR = \frac{AR}{2}(JC + JB) = \frac{BC}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} a^2 \quad (2)$$

Izjednačujući (1) i (2) imamo konačno

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Milenko Sevdić

KAKO DA ZAPAMTIM VRIJEDNOST BROJA π?

U svrhu lakšeg pamćenja vrijednosti nekih brojeva, osobito ako se radi o većem broju cifara, upotrebljavaju se razni stihovi. U takvim stihovima broj slova u pojedinim riječima znači cifru. Ovdje navodimo jedan naš i jedan francuski stih za prvih 30 decimala broja π:

1. Naš stih

(Iz kalendara »Bošković« — god. 1918.)

Nek i sada i vazda slavljeno
3 1 4 1 5 9
Na zemlji jeste ime onoga
2 6 5 3 5
Arhimeda, helenskog mudraca!
8 9 7
Domišljat bje on kao Prometej;
9 3 2 3 8
Svet plamen on podade nama tad,
4 6 2 6 4 3
Kad kružnicu baš on odredio
3 8 3 2 7
Računajuć. . . . .
9

2. Francuski stih

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimede, artiste ingénieur.
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

APOLONIJEV PROBLEM

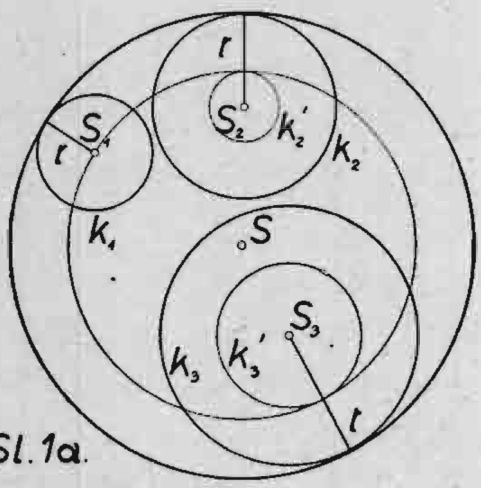
Apolonije iz Perge živio je oko godine 200 prije n. r. Studirao je u Aleksandriji s učenicima Euklidovim; drži se, da je oko 25 godina mlađi od Arhimeda. Bavio se geometrijom i to proučavanjem čunjosjeka.

Sam Apolonijev problem sastoji se u tome, da se konstruira kružnica, koja tangira tri zadane kružnice. Taj problem je posljednji od 10, gdje se traži ista konstrukcija, ako su zadane *a)* 3 točke, *b)* 2 točke i pravac, *c)* točka, pravac i kružnica i t. d. Dva od tih problema riješio je već *Euklid;* a ostale vjerojatno Apolonije. Sâmo njegovo djelo o tom problemu nije se sačuvalo, te ne znamo točno, kako ga je riješio. Jedino po tome, što Papo spominje to djelo, znamo da je postojalo. Tim problemom bavili su se mnogi matematičari; tako n. pr. u 16. stoljeću *Vieta,* a u 17. stoljeću veliki matematičar *Newton.* Danas poznajemo više metoda za rješavanje toga problema. Ovdje ćemo iznijeti samo jednu, koja je osnovana na elementarnim poučcima geometrije.

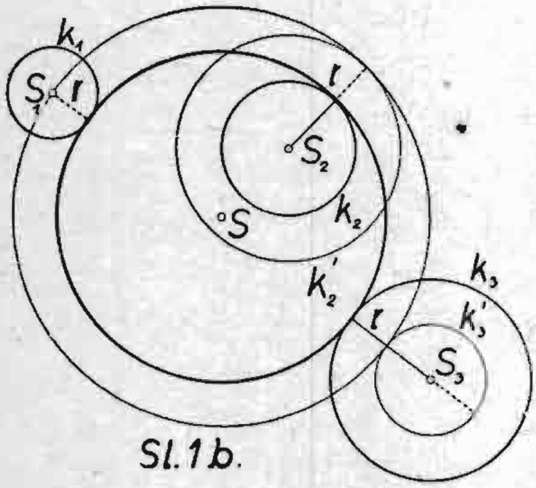
Ako pretpostavimo, da zadane kružnice leže jedna izvan druge, ima 8 mogućih rješenja i to, ako zadane kružnice označimo rednim brojevima I. II. III. mogu biti:

1. I II III unutar tražene kružnice
2. I II „ „ „ III izvan tražene kružnice
3. I III „ „ „ II „ „ „
4. II III „ „ „ I „ „ „
5. I „ „ „ II III „ „ „
6. II „ „ „ I III „ „ „
7. III „ „ „ I II „ „ „
8. I II III izvan tražene kružnice.

Da dođemo do tražene konstrukcije ujednostavnit ćemo prethodno naš zadatak u toliko, da tražimo onu kružnicu, koja prolazi zadanom točkom, a tangira 2 kružnice. Ako ovaj zadatak riješimo, možemo naime jednostavnom konstrukcijom (sl. 1*a* i *b*) riješiti problem u cijelosti. Stegnemo li najmanju od zadanih



Sl. 1a.



Sl. 1b.

kružnica na točku i smanjimo odnosno povećamo za njezin polumjer *r* polumjere ostalih zadanih kružnica, dobijemo taj jednostavniji problem. Rješenje njegovo je kružnica, kojoj se polumjer razlikuje od polumjera tražene kružnice za *r*.

Izvest ćemo nekoliko pomoćnih stavaka:

1. Potencija točke *T* s obzirom na kružnicu (sl. 2.)

$\alpha = \delta$ (obodni kutovi nad istim lukom)

$\delta = \beta$ (okomični kutovi)

dakle $\alpha = \beta$

dalje $\gamma = \gamma$.

znači da je $\triangle\ ATC \sim \triangle\ CTB$

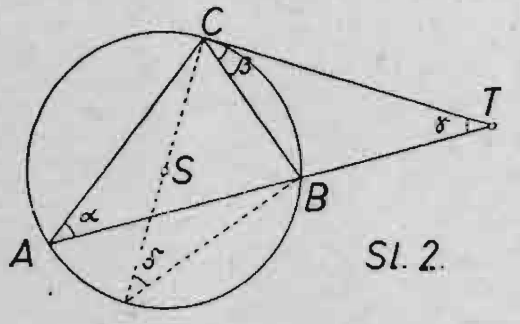
$$\overline{AT} : \overline{CT} = \overline{CT} : \overline{BT}$$

ili $\overline{AT} \cdot \overline{BT} = \overline{CT}^2$

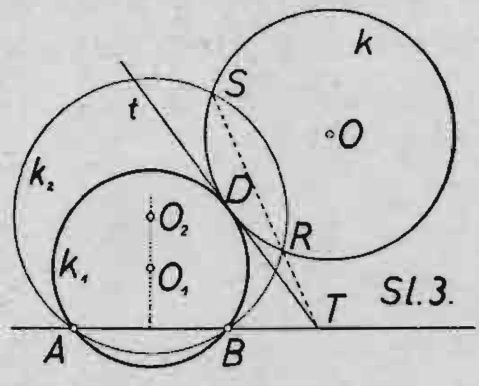
To znači da je za sve sekante iz točke T produkt odsječaka od točke T do sjecišta s kružnicom konstantan i jednak kvadratu dužine tangente od T do dirališta. Taj se produkt zove *potencija* točke T s obzirom na kružnicu.

Obrnuto iz $\overline{CT}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{BT}$ izlazi, da je C diralište kružnice i pravca koji prolazi točkama T i C.

2. Konstrukcija kružnice K_1 koja dira kružnicu K, a polazi točkama A i B (sl. 3.).



Sl. 2.

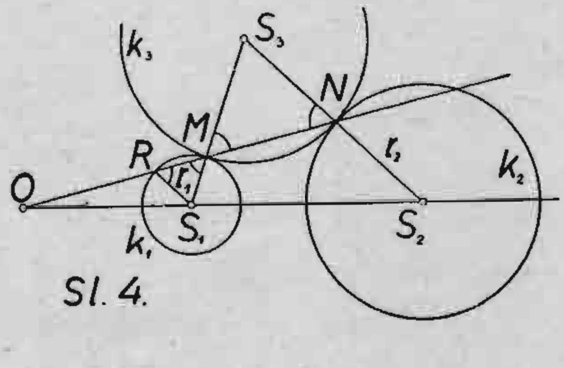


Sl. 3.

Položimo kroz točke A i B bilo kakovu kružnicu K_2, koja siječe kružnicu K u 2 točke R i S. Zajednička sekanta kroz R i S siječe pravac kroz zadane točke A i B u točki T. Konstruirajmo tangentu t iz točke T na kružnicu K. Ona mora biti ujedno i tangenta tražene kružnice K_1 i to zato; što je

$$\overline{AT} \cdot \overline{BT} = \overline{RT} \cdot \overline{ST} = DT^2$$

dakle D mora biti diralište tangente t i na kružnici, koja prolazi točkama A i B, pa je stoga tražena kružnica K_1.



Sl. 4.

3. Spojnica dirališta kružnice K_3, koja dira dvije kružnice K_1 i K_2 prolazi kroz središte sličnosti kružnicâ K_1 i K_2 (sl. 4.).

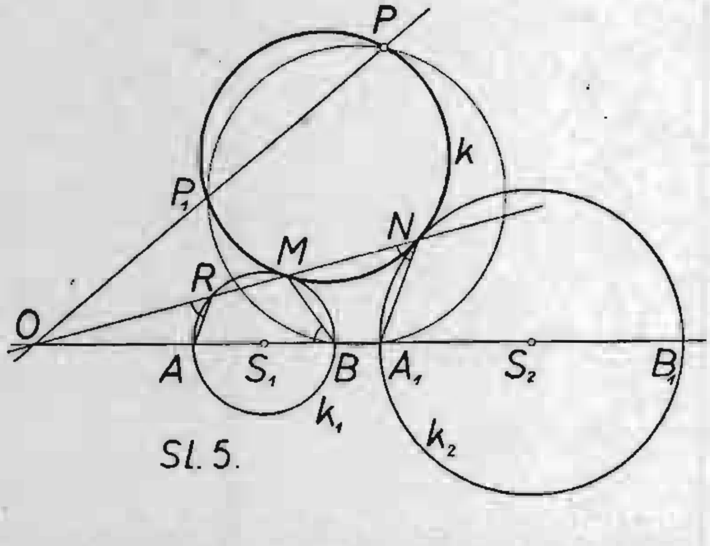
$\sphericalangle S_3NM = \sphericalangle S_3MN$ (kutovi na bazi istokračnog trokuta
$\sphericalangle S_3MN = \sphericalangle RMS_1$ (vršni kutovi)
$\sphericalangle RMS_1 = \sphericalangle MRS_1$ (kutovi na bazi istokračnog trokuta)
dakle: $\sphericalangle S_3NM = \sphericalangle MRS_1$; budući da im je krak NR zajednički

mora biti

$RS_1 \parallel S_3N$ odnosno i $RS_1 \parallel NS_2$, a iz toga pak slijedi da su trokuti $\triangle\ OS_1R$ i $\triangle\ OS_2N$ slični (homotetični položaj), pa su im homologne stranice razmjerne t. j.

$\overline{OS_1} : \overline{OS_2} = \overline{RS_1} : \overline{NS_2} = r_1 : r_2$ dakle je O zaista središte sličnosti.

4. Zadane su kružnice K_1 i K_2 i točka P. Tražimo sjecište P_1 pravca kroz točke O i P s kružnicom, koja prolazi kroz P, a dira K_1 i K_2 (sl. 5.).



Sl. 5.

Pri tom je O središte sličnosti, kroz koje prema 3. prolazi spojnica diralištâ MN.

Vidimo, da je:

$\sphericalangle\ ONA_1 = \sphericalangle\ ORA$

$\sphericalangle\ ORA$ i $\sphericalangle\ ARM$ su suplementni jer su sukuti

$\sphericalangle\ ARM$ i $\sphericalangle\ MBA$ su suplementni, jer su $A, B, M, R,$ konciklične t. j. točke iste kružnice, tako da su $ABMR$ vrhovi tetivnog četverokuta, za koje je poznato, da suma suprotivnih kutova iznosi 180^0. Izlazi $\sphericalangle\ ONA_1 = \sphericalangle\ MBA$ a to opet znači, da je BA_1MN tetivni četverokut, t. j. B, A_1, M, N su konciklične točke; dakle mora biti:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$$

Budući da su M, N, P, P_1 konciklične točke, vrijedi dalje:

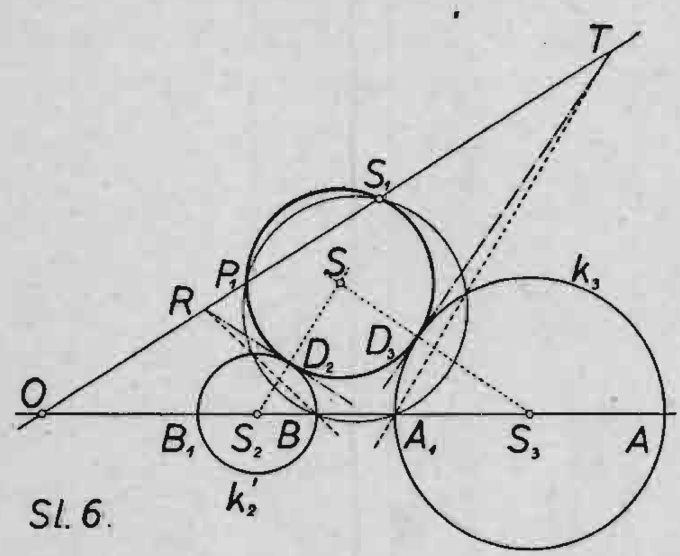
$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{OP_1} \cdot \overline{OP}$$

dakle i $\overline{OB} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OP_1} \cdot \overline{OP}$, a to znači da su i B, A_1, P, P_1 konciklične točke.

Točka P_1 se dakle dobije kao sjecište kružnice kroz BA_1PP_1 sa spojnicom OP.

Kružnica kroz P i P_1, koja dira K_1 (ili K_2) konstruira se onda prema 2). Ona će automatski dirati i drugu kružnicu, jer su, kako iz prethodnog vidimo P_1, P, M, N konciklične točke.

Konstrukcija se dakle izvodi ovako: (sl. 6.):



Sl. 6.

Zadane su kružnice K'_2 i K_3 i točka S_1 (usporedi sa sl. 1a i *b*). Želimo naći kružnicu kroz S_1, koja dira K'_2 i K'_3.

Sa dva paralelna polumjera kružnicâ K'_2 i K'_3 odredimo središte sličnosti O. Kroz S_1 B A_1 položimo kružnicu, koja siječe svaku od zadanih kružnica u 2 točke i za koju prema *4.)* znamo da prolazi još jednom točkom P_1 (na pravcu OS_1) tražene kružnice.

Da ovu nađemo poslužimo se dakle metodom pod 2. i položimo zajedničku sekantu (kordalu) kružnice (S_1BA_1) i kružnice

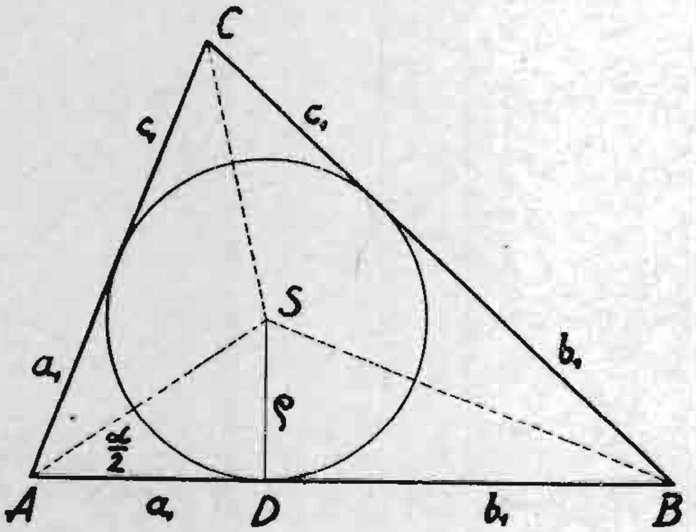
K'_3. Iz sjecišta T ove kordale s pravcem kroz OS_1 povučemo tangentu na K'_3 i dobijemo diralište D_3, u kojem tražena kružnica kroz S_1P_1 dira kružnicu K_3'.

Analogno dobijemo kordalom kružnice (S_1BA_1) i kružnice K'_2 točku R i diralište D_2 tangente povučene iz R na kružnicu K'_2. — D_2 i D_3 su dakle dirališta tražene kružnice kroz S_1, a sjecište spojnica S_2D_2 i S_3D_3 njezino središte S. Prema slici 1a i b treba još samo njezin polumjer povećati odnosno smanjiti za r, da se dobije rješenje Apolonijeva problema.

Mira Erega, prof.

MALFATTIJEV PROBLEM

Problem, da se u zadanom trokutu upišu tri kružnice, koje se međusobno dotiču, a svaka se dotiče dviju stranica trokuta, postavio je talijanski matematičar Malfatti (1731.—1807.).



Sl. 1.

Prije nego što izložimo način rješavanja samog problema izvest ćemo formulu $\rho^2 = \frac{a_1 \, b_1 \, c_1}{s}$, koja nam je zato potrebna.

Upišemo li trokutu ABC kružnicu, tada će a_1, b_1, c_1 biti dužine tangenata povučenih iz vrhova A, B, C na tu kružnicu (sl. 1). Njezino središte označimo sa S, a polumjer sa ϱ.

Iz slike 1. vidimo da je $a_1 + b_1 = c$, $b_1 + c_1 = a$, $a_1 + c_1 = b$. Iz toga slijedi

$$a_1 = s - a,\ b_1 = s - b,\ c_1 = s - c \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right) \tag{1}$$

Nadalje iz planimetrije znamo, da je površina trokuta, ako su mu poznate sve tri stranice a, b, c, dana Heronovom formulom t. j.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$

i da je još

$$P = s \cdot \varrho \tag{3}$$

gdje je ϱ polumjer upisane kružnice.

Iz (2) i (3) slijedi

$$s \cdot \rho = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{4}$$

Kvadriramo li obje strane imamo:

$$s^2\varrho^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{5}$$

što zbog (1) možemo pisati

$$s^2\varrho^2 = s \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \tag{6}$$

Odavde je

$$\rho^2 = \frac{s \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{s^2}$$

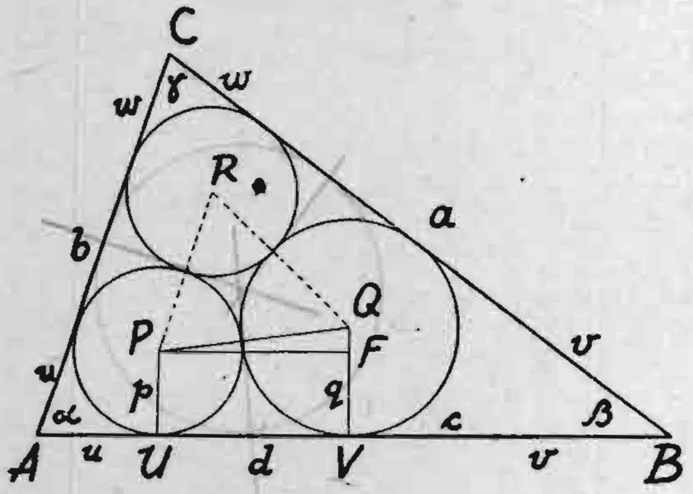
ili

$$\rho^2 = \frac{a_1 b_1 c_1}{s} \tag{7}$$

Sada ćemo preći na Malfatijev problem. Neka je ABC zadani trokut sa stranicama a, b, c, opsegom $2s$ i kutovima α, β, γ. Središta traženih kružnica su P, Q, R, a njihovi polumjeri p, q, r. Dužine tangenata povučenih na njih su u, v, w (Sl. 2.).

Središte trokutu upisane kružnice neka je S a polumjer ϱ. Dužine tangenata povučenih iz vrhova na tu kružnicu su a_1, b_1,

c_1. Budući da P i S leže na simetrali kuta α, to dobijemo po poučku za pramen zraka $p : \varrho = u : a_1$ ili



Sl. 2.

$$p = \frac{\varrho u}{a_1}$$

Istim bi načinom našli

$$q = \frac{\varrho v}{b_1} \qquad (8)$$

Označimo sada dirališta Malfatijevih kružnica sa stranicom c sa U i V i izračunajmo $UV = d$. Iz pravokutnog trokuta PQF slijedi: $PQ^2 = PF^2 + FQ^2$ ili $(p + q)^2 = d^2 + (p - q)^2$ a iz toga dobijemo $d = 2\sqrt{pq}$. Uvrstivši p i q iz 8) slijedi

$$d = 2\sqrt{\frac{\varrho^2 uv}{a_1 b_1}} \text{ ili } d = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{\varrho^2}{a_1 b_1}}$$

Pomoću izraza 7) dobijemo dalje

$$2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{a_1 b_1 c_1}{s a_1 b_1}} = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}}.$$

Prema tome je

$$c = u + v + 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}}$$

isto tako dobijemo

$$\left.\begin{aligned} a &= v + w + 2\sqrt{vw}\sqrt{\frac{a_1}{s}} \\ b &= u + w + 2\sqrt{uw}\sqrt{\frac{b_1}{s}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

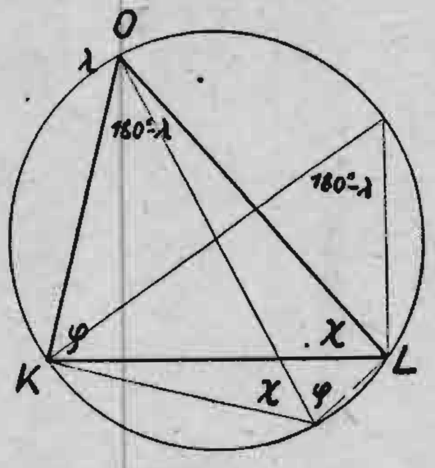
Uzmemo li polovicu opsega za jedinicu, dakle $s = 1$ to su veličine a, b, c, u, v, w pravi razlomci. Možemo ih dakle izraziti

kao kvadrate sinusa od šest pomoćnih kutova $\lambda, \mu, \nu, \varphi\ \psi, \chi$
$a = sin^2 \lambda,\ b = sin^2 \mu,\ c = sin^2 \nu,\ u = sin^2 \varphi\ \ v = sin^2 \psi,$
$w = sin^2 \chi$

Iz relacije 1) imamo $a_1 = s + a = 1 - a$. Prema tome je $cos^2\lambda = 1 - sin^2\lambda = 1 - a = a_1$, $cos^2\mu = b_1$, $cos^2\nu = c_1$ a jednadžbe 9) prelaze u

$$\left.\begin{aligned} sin^2 \varphi + sin^2 \chi + sin\ \varphi\ sin\ \chi\ cos\ \lambda &= sin^2 \lambda \\ sin^2 \psi + sin^2 \chi + 2sin\ \psi\ sin\ \chi\ cos\ \mu &= sin^2 \mu \\ sin^2 \psi + sin^2 \varphi + 2sin\ \psi\ sin\ \varphi\ cos\ \nu &= sin^2 \nu \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Što je značenje ovih jednadžbi? Nacrtajmo trokut (sl. 3) s nu-



Sl. 3.

tarnjim kutovima φ i χ a λ neka bude vanjski kut na trećem vrhu, dakle $\varphi + \chi = \lambda$.

Ako je promjer opisane kružnice toga trokuta $2r = 1$, to dobijemo (sl. 3.) da je stranica $\overline{KO} = sin\ \chi$, $\overline{OL} = sin\ \varphi$, $KL = sin\ (180 - \lambda) = sin\ \lambda$.

Primjenimo sada kosinusov poučak na taj trokut

$$\overline{KL}^2 = \overline{KO}^2 + \overline{LO}^2 - 2\ \overline{KO} \cdot \overline{LO} cos\ (180 - \lambda) \text{ ili}$$
$$sin^2 \lambda = sin^2 \chi + sin^2 \varphi + 2sin\ \chi\ sin\ \varphi\ cos\ \lambda$$

a to je prva jednadžba u (10). Prema tome jednadžbe (10) daju nam relacije: $\varphi + \chi = \lambda,\ \chi + \psi = \mu,\ \psi + \varphi = \nu$

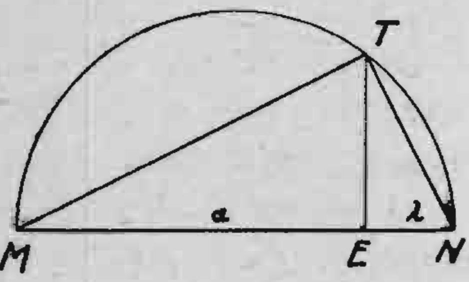
Ako uzmemo da je $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$ onda iz toga slijedi

$\varphi = \sigma - \mu, \psi = \sigma - \lambda, \chi = \sigma - \nu$

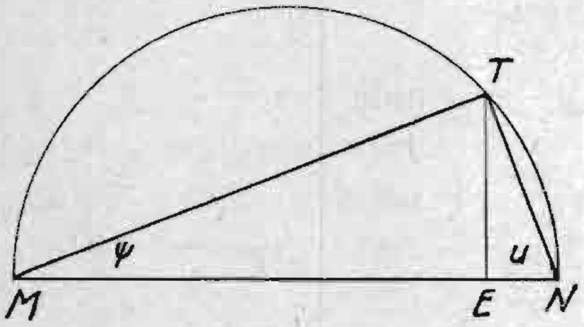
Pomoću naših razlaganja možemo dakle problem jednostavno konstruirati na slijedeći način:

Nacrtat ćemo tri kuta λ, μ, ν čiji su kvadrati sinusa jednaki stranicama zadanog trokuta (uz predpostavku da je $s = 1$). Kod toga ćemo postupati ovako:

Narišemo polukrug s promjerom $MN = s = 1$ i nanesemo dužinu $ME = a$. (sl. 4.). Okomica u E siječe kružnicu u T.



Sl. 4.



Sl. 5.

Onda je kut $MNT = \lambda$. Imamo naime $sin^2\lambda = \left(\frac{ET}{TN}\right)^2$ Po poučcima za razmjernost pravokutnog trokuta $sin^2\lambda = \frac{ME \cdot EN}{MN \cdot EN} =$ $= ME = a$, $sin^2\,\mu = b$, $sin^2\,\nu = c$. Konstruiramo dalje

$$\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}, \psi = \sigma - \lambda, \varphi = \sigma - \mu, \chi = \sigma - \nu$$

Sada možemo na isti način konstruirati $sin^2\,\psi = u$, $sin^2\,\varphi = v$, $sin^2\,\chi = w$ (sl. 5.).

Znamo li naime kut tada je

$$sin^2\psi = \left(\frac{ET}{MT}\right)^2 = \frac{ME \cdot EN}{MN \cdot ME} = EN,$$

dakle $EN = u$.

Dobili smo dakle tangente, koje su iz vrhova A, B, C povučene na Malfatijeve kružnice.

Ovaj problem riješilo je nekoliko matematičara, među ostalim i Jakob Steiner (1826.). Rješenje koje je ovdje izloženo objelodanio je Schellbach u 45. svesku *Crellovog žurnala.*

(Upotrebljena literatura: *H. Dörrie: Triumph der Mathematik; S. Škreblin: Trigonometrija).*

Varićak Milena

PROBLEM PARALELA

Geometrija je nastala iz praktičnih potreba. Izvorom geometrije bila su mjerenja posjeda i arhitektura i ona je u početku bila iskustvena nauka. Ljudi su u svakidašnjem životu nailazili na izvjesne činjenice i otkrivali svojstva geometrijskih likova. No u početku je to bilo samo pojedinačno znanje bez ikakve povezanosti i neke unutrašnje veze. Na tom stupnju razvoja ne možemo geometriju smatrati pravom naukom. Naukom ona postaje istom kod Grka. Euklidu *(oko 300 pr. n. e.)* polazi za rukom da takvo pojedinačno znanje dovede u jedinstven sustav i da u svojih 13 knjiga »*Elemenata*« geometriju postavi na čvrste temelje strogog logičkog zaključivanja. Puna 22 stoljeća služila je njegova geometrija za ugled kao sistematski izgrađeno djelo. Ali i u tim »*Elementima*« bilo je nedostataka. Euklid je izgrađujući svoje djelo pošao od 23 definicije, 5 postulata (zahtjeva) i 5 aksioma (očitih istina). Nas ovdje zanimaju samo postulati. Dok su prva četiri postulata[1] vrlo jednostavna, tako reći očigledna, dotle je peti postulat mnogo složeniji. Taj glasoviti peti postulat glasi: Ako pravac siječe dva pravca i s njima na istoj strani čini kutove,

[1] Prva četiri postulata glase: 1. da se od svake točke k svakoj točki može povući pravac; 2. da se svaki pravac može neprekidno produžavati; 3. da se oko svakog središta sa svakim polumjerom može opisati kružnica; 4. da su svi pravi kutevi jednaki među sobom.

koji su zajedno manji od dva pravca, pa ako ova dva pravca produžimo, onda oni treba da se sijeku na onoj strani, na kojoj leže oni kutovi.« To je u vezi s problemom paralela; naime, ako bi ta dva kuta iznosila upravo dva prava t. j. 180°, onda bi, kako kaže Euklid, ti pravci bili paralelni. Na osnovu tog postulata se onda dokazuje poučak, da se jednom točkom izvan pravca može povući samo jedna paralela ili da je zbroj kutova u trokutu 180° i t. d.

Taj peti postulat uspoređen s prva četiri izgleda kao kakav poučak, koji bi istom trebalo dokazati, da je ispravan. Već su prvi komentatori Euklidova djela smatrali, da taj postulat iskazan u ovakvom obliku čini »ljagu« u sjajnom djelu Euklidovu, a D'Alembert kaže, da je taj postulat, pored definicije pravca, kamen spoticanja i stijena sablazni. Tim problemom počeli su se baviti još u starom vijeku. Od preporoda nauka i u Evropi je taj problem isto tako na dnevnom redu. Početkom 17. stoljeća rješenju su se najviše približili Saccheri i Lambert, ali su i oni bili žrtve predrasuda svoga vremena. Autoritet Euklidov bio je tada još preveliki. I veliki matematički umovi, kao Laplace i Lagrange, bave se problemom paralela. Radi se i u Engleskoj, Italiji i Njemačkoj. Ali je sav posao uzaludan. Svi ti pokušaji ostaju bezuspješni. Baviti se problemom paralela bilo je isto, što i baviti se kvadraturom kruga. Konačno je ipak nakon 2200 godina riješen taj problem, a riješili su ga u isto doba neznajući jedan za drugoga Rus Nikola Ivanović Lobačevski i Mađar Janoš Bolyai. Lobačevskome pripada prvenstvo, jer je svoje djelo štampao prije Bolyai-a, a treba spomenuti još i to, da se kod Bolyia i poslije jednom javila sumnja, dok je Lobačevski od prvog časa bio ubijeđen u ispravnost svojih misli i u objektivno značenje neeuklidske geometrije.

Nikola Ivanović Lobačevski, koji je stvorio nove predodžbe o prostoru i koji je proširio naučni vidokrug čovječanstva, imao je smjelosti da prekine s tradicijom Euklidove geometrije, koja je stoljećima bila neprikosnovena. Njegov rad[2] znači najveću revoluciju ne samo u oblasti geometrije i matematike, nego i u oblasti čovječje misli i filozofije uopće. Od tada započinje nova epoha, koju karakterizira duboko prodiranje u osnove ove nauke.

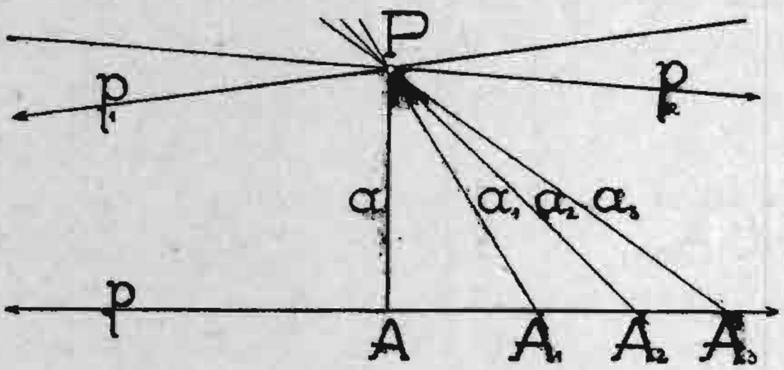
Arago je rekao, da je matematika u svim vremenima bila nepomirljiv neprijatelj svakoga romana u nauci. Ipak je takav roman napisan, a napisao ga je N. I. Lobačevski. Neeuklidska geometrija, koju je stvorio Lobačevski, slična je romanu, fantastičnom romanu, koga se radnja odigrava u granitnoj kuli matematičkih istina. U XVII. i XVIII. stoljeću bila je geometrija neosvojiva tvrđava idealista u borbi protiv onih, koji su i za osnove geometrije nalazili izvor u iskustvu. Razvitkom geometrije u XIX. stoljeću, koji je nastao na osnovi radova Lobačevskoga, ovaj se odnos posve izmijenio. Geometrija Lobačevskoga ne samo da je ravnopravna Euklidovoj po logičnoj izgradnji, nego se ona i u primjeni podudara s iskustvom. Možda da će u svakidašnjoj primjeni imati Euklidova geometrija i dalje prednost, jer je mnogo jednostavnija, ali je njeno prvobitno preimućstvo jednom zauvijek oboreno. A eto čovjek Slaven bio je taj, koji joj je zadao udarac.

U historiji nauke teško je naći tako korjenit preokret, koji bi se mogao isporediti s otkrićem neeuklidske geometrije. Zato matematičar Tannery sravnjuje Lobačevskoga s *Kolumbom,* a Sylvester ga opet naziva »*Kopernikom geometrije*«. Kopernik se u svome heliocentričkom sistemu zaustavio samo na tome, da predoči raspored i gibanja nebeskih tjelesa u prostoru, a Loba-

[2] Rukopis predavanja »*Kratko izlaganje principa geometrije*« nije sačuvan. Čitan je 24. veljače 1826. na sjednici fiz.-mat. odjela kazanjskog sveučilišta. O njemu znamo samo po izvatku štampanom. 1829./30. u »*Kazanjskom vjesniku*« pod naslovom »*O elementima geometrije*«. God. 1835. izlazi »*Imaginarna geometrija*«, 1836. »*Primjena imaginarne geometrije na nekoje integrale*«. Od 1835. do 1837. izlaze »*Novi elementi geometrije s potpunom teorijom paralelnih linija*«. God. 1840. štampao je u Berlinu djelo »*Geometrijska istraživanja*«, koje je imalo velikog utjecaja na razvoj geometrije. God. 1855. štampao je posljednju radnju »*Pangeometrija*«.

čevski u svome sistemu traži nove predodžbe o samom prostoru. Možemo kazati, da je Koperniku bilo lakše zaustaviti Sunce i pokrenuti Zemlju, negoli Lobačevskome, kada je u svojoj geometriji kazao, da treba »umanjiti zboj kutova u trokutu.«

Da bismo dobili barem blijedu sliku o tome, kako je Lobačevski riješio problem paralela, promotrimo sliku 1. — Imamo



Sl. 1.

pravac p i jednu točku P izvan toga pravca. Okomicu spuštenu iz P na pravac označit ćemo sa a. Kroz točku P povučemo pravac a_1. Ako sada taj pravac zakrećemo tako, da kut između njega i okomice a raste, onda taj pravac u položaju a_2 siječe pravac p u točki A_2, u položaju a_3 u točki A_3 i t. d. Točke A_1, A_2 A_3,. . . se sve više udaljuju od točke A po pravcu p. I ako sada, popularno rečeno, zamislimo pravac p_1 u momentu, kad otskoči od pravca p, onda je to pravac, koji više ne siječe pravac p. To je položaj p_1. Isto tako možemo promatrati i na lijevoj strani i doći do pravca p_2. Ta dva pravca čine kut, unutar koga povučeni pravci ne sijeku dani pravac p. Prema tome Lobačevski dijeli pravce kroz točku P u dvije grupe: u grupu pravaca, koji sijeku pravac p i grupu pravaca, koji ga ne sijeku. Pri prijelazu od pravaca prve grupe na pravce druge grupe, moramo naići na jedan granični pravac između tih dviju grupa pravaca i upravo taj pravac zove Lovačevski *paralelom.* Prema tome jednom točkom izvan pravca možemo povući dvije paralele prema tome pravcu. Pošavši od te pretpostavke izgradio je Lobačevski svoju geometriju. To je upravo bitna razlika prema Euklidovoj, geometriji, u kojoj se jednom točkom izvan pravca može povući samo jedna paralela. Nadalje, Lobačevski zove kut, što ga čini njegova paralela sa okomicom, *kutem paralelnosti* i obilježava ga sa $\pi(a)$ označavajući time, da taj kut zavisi od dužine okomice spuštene iz točke *P* na pravac *p*. Dok je kut paralelnosti kod Euklida stalan i iznosi 90°, dotle je taj kut kod Lobačevskoga promjenljiv i postaje manji, kad dužina okomice postaje veća. Posljedica toga bi bila, da je suma kutova u trokutu manja od 180°, a možemo spomenuti, da u ovoj geometriji postoje i trokuti, kod kojih je suma kutova jednaka nuli. Pored drugih imamo i ove dvije posljedice: postoji apsolutna jedinica i nema sličnih likova. Lobačevski pokazuje, da apsolutna jedinica dužine u njegovoj geometriji mora biti bar šest milijuna puta veća od udaljenosti Sunca i Zemlje. Odatle onda izlazi, da su sve dužine, s kojima radimo u praksi, premalene prema toj apsolutnoj jedinici i u tome se slučaju formule Lobačevskoga svode na Euklidove. Tako je Euklidova geometrija samo jedan granični slučaj geometriji. Naprotiv, likove, koji ne iščezavaju prema apsolutnoj likova vodi nas na to, da se svi likovi moraju crtati u pravoj veličini i da ih ne možemo predočiti manjim sličnim likovima, kako je to moguće u geometriji Euklidovoj. Lobačevski je pokazao, da na crtežima tako malih dimenzija, s kakvima mi radimo, ne može biti zamijećena razlika prema crtežima u Euklidovoj geometriji. Naprotiv, likove, koji ne isčezavaju prema apsolutnoj jedinici i na kojima se pokazuju sve osobine prostora Lobačevskoga, ne možemo zorno predočiti, jer sve dužine takvih likova leže izvan domašaja našeg iskustva. Zato se moraju davati samo shematični crteži, gdje je često sve deformirano. Stoga se još više moramo diviti snazi uma Lobačevskoga, kada je on, iako nije imao zorne slike za svoja istraživanja, ipak mogao izgraditi geometrijski sistem isto tako dosljedan i neprotivurječan kao i Euklidov. Za sav je matematički rad Lobačevskoga karakteristična strogost logičkog izvođenja. Ali rasprostranjenosti geometrije Lobačevskoga dugo je smetalo i to što smo mi od naših prvih iskustava navikavani na geometriju Euklidovu, pa stoga poučci i crteži u geometriji Lobačevskoga izgledaju čudnovati. Upravo crteži smetaju našoj fantaziji, da ih sebi lako predočimo. Istina, poslije su matematičari dali konkretna tumačenja, koja su osvijetlila mnogo mučno poimanje geometrije Lobačevskoga. Stoga nije čudo, što ti radovi nisu bili odmah, a ni dugo poslije, priznati od službene nauke. Šta više, matematičar onog vremena M. V. Ostrogradski dao je u Akademiji nauka oštru kritiku i negativan sud o radovima Lobačevskoga. A u »*Sinu domovine*« reakcionarni žurnalist Buraček, koji je nemilice napadao i Puškina, napisao je između ostalog i ove retke: »da bi pravi cilj, zašto je g. Lobačevski načinio i izdao svoju geometriju, bila prosta šala ili, još bolje, satira na učene matematičare...«

Izvan granica jedini je Gauss ocijenio rad »štroumnog ruskog matematičara.« Može se reći, da je Gauss zapravo spasio Lobačevskoga od zaborava. Oko god. 1860., kada se iz Gaussovih pisama saznalo, da je on ne samo cijenio Lobačevskoga, nego da je i sam radio na neeuklidskoj geometriji, onda su se i stručnjaci počeli interesirati za tu stvar.

U razmjeri prema ogromnoj množini knjiga i rasprava posvećenih novoj geometriji upravo je bijedno oskudna biografska literatura o tvorcu te nove geometrije.

Nikola Ivanović Lobačevski rodio se 20. studenog 1793. u guberniji Njižno-novogorodskoj. Bio je, dakle, savremenik historijskih zbivanja početkom XIX. stoljeća. U gimnaziju je stupio 5. XI. 1802. I o životu Lobačevskoga u gimnaziji znamo vrlo malo. Za vrijeme školovanja u gimnaziji bilo je đačkih »buntova«, ali se ne zna, da li je Lobačevski imao učešća u njima, a isto tako se ne zna, da li je učestvovao u literarnim stremljenjima. Teško je zamisliti, da je sve to prošlo mimo Lobačevskoga, ali je nesumnjivo, da su ideološki interesi kazanjske omladine obuhvaćali i nauku, a tu je Lobačevski bio prvi. Otvaranjem kazanjskog sveučilišta god. 1804., koje nije bilo samostalna ustanova, nego dodatak gimnaziji, bilo je Lobačevskome omogućeno dalje školovanje.

Prvi profesor matematike bio je Kartaševski, koji je vjerojatno pobudio kod Lobačevskoga smisao za strogu matematičku istinu i toliko široki interes za osnove matematike, da ga je on doveo do otkrića neeuklidske geometrije. Nakon skromnih početaka dolazi do poboljšanja u predavanjima matematike. U to vrijeme mnogi evropski učenjaci dolaze u Rusiju. Katedru matematike preuzeo je Martin Bartels (1769. do 1836.), koji je bio vrstan učitelj i čija su predavanja obuhvaćala vrlo široki krug matematičkih disciplina. Najbolji njegov učenik bio je Lobačevski. Za njega kaže Bartels: »Lobačevski je pokazao toliko uspjeha, da bi mogao biti odličan na svakom sveučilištu«. — Astronomija je bila isto tako na znatnoj visini i imala je ogromno značenje za izgradnju naučnog naziranja Lobačevskoga. Veliki utjecaj na socijalno-filozofske i etičke poglede Lobačevskoga imao je Brouner (1758.—1850.), koji je predavao fiziku. U spomenutim disciplinama Lobačevski je razvijao svoje sposobnosti. Inače je bio živahan, društven i oštrouman mladić, a ta svojstva dolazila su u sukob sa kasarnsko-policijskim propisima sveučilišta. Kaže se, da je 33 puta bio zapisan u knjigu zbog raznih prestupa. Prijetilo mu je i isključenje sa sveučilišta, a spasilo ga je jedino zauzimanje profesora zbog njegove nadarenosti za matematiku i fiziku.

God. 1811. Lobačevski je postao magister. Tada je došao u bliži dodir sa Bartelsom. Pod rukovodstvom Bartelsovim usavršavao se Lobačevski u višoj matematici i stekao neobičnu vještinu u rukovanju matematičkim računskim aparatom. Prilikom otvorenja potpunog sveučilišta 1813. bio je unaprijeđen od magistra za adjunkta uz dužnost da predaje aritmetiku i algebru. Doskora je postao vanredni profesor. Osim geometrije predavao je teoriju brojeva, diferencijalni i integralni račun. Uz čistu matematiku morao je predavati astronomiju i teoretsku fiziku i voditi opservatorij. God. 1822. postaje redovni profesor. To je za njega značilo samo primiti nove dužnosti. Poteškoća je imao i stoga, što je u profesorskom zboru bilo vrlo mnogo nesuglasica. Buržoaska revolucija, zatim oslobodilačka borba protiv Napoleona izazvala je znatan društveni uspon. No ondašnja reakcija Evrope ujedinila se za borbu protiv revolucionarnog pokreta i slobodne misli. Počela je borba protiv nauke. Magnicki, jedan od rukovodećih činovnika ministarstva, predlagao je, da se potpuno obustavi predavanje filozofije, jer ne samo, da se ona ne slaže s učenjem vjere, nego je i štetna. I tome Magnickome bilo je god. 1819. povjereno, da provede čišćenje kazanjskog sveučilišta. Cijeli zbor bio je optužen zbog nepouzdanosti. Stanje je bilo očajno. Magnickom nije baš bio po ćudi ni Lobačevski, za koga jednom piše, »da ne prođe ni godina, a da profesor Lopačevski ne počini kakvu svoju drzovitost, svojevoljnost i prekršaj datih instrukcija«. Razumljivo je, da je bilo profesora, a među njima i Lobačevski, koji su čuvajući glavu pred Magnickim, sačuvali i nezavisnost u nauci. Površnom promatraču bi izgledalo, da se rezultati društvenog uspona, poznavanje napredne nauke i idejna stremljenja nisu realizirala kod Lobačevskoga. Ali to ne stoji. Svi ti utjecaji pokazali su se u njegovom naučnom djelu. U duši Lobačevskoga bio je kutak, u koji nije prodirao utjecaj reakcije. On nikada nije prodao svoje naučne savjesti.

God. 1827. bude Lobačevski izabran i za rektora. Rad njegov u svojstvu rektora svodio se u glavnom na uspostavljanje novih ustanova na sveučilištu. Pored toga bio je predsjednik »strojiteljnog komiteta« od 1833. do 1844., a god. 1825. bio je izabran i za sveučilišnog bibliotekara vršeći tu dužnost punih 10 godina. O njegovim administrativnim sposobnostima govori cijeli niz dokumenata. I ako je bio zauzet administrativnim poslovima, ipak nije prestao s predavanjima. Osim kurseva matematike održavao je Lobačevski i javne lekcije iz fizike, koje su privukle u slušaonicu mnogobrojnu publiku. Godine 1845. bio je po šesti put izabran za rektora, ali u to doba dolazi po ondašnjim pravilima do njegovog penzioniranja. I tako se on sa 53 godine morao rastati sa sveučilištem. To je za njega bio veliki udarac, jer su mu tada bila zatvorena vrata toga sveučilišta, kome je on služio tako iskreno i predano. Nova dužnost (1846. pomoćnik popečitelja) lišila ga je potpuno katedre, t. j. lične veze sa studentskom omladinom, za koju je Lobačevski imao uvijek najljepše riječi i osjećaje. Ali uskoro su stigli i novi udarci. Iste godine (1846.) umire mu od tuberkuloze najstariji sin, koji je bio ljubimac očev. Iza dva udarca došao je treći još strašniji. Počeo ga je izdavati vid, da bi konačno sljepoća obiakom tame posve zastrla njegov svijetli i duboki pogled.

Karakteristična crta Lobačevskoga u njegovoj mladosti bio je dobrodušni humor. Uživao je u kartama, odlazio je u klub i njegov se život nije ničim razlikovao od života ostalih činovnika u Kazanju. »Svi koji su ga poznavali kao čovjeka, ljubili su ga i cijenili iskreno. No za ljude, koji su se malo poznavali s njim, bio je on učeni original, koji je i u samoj matematici živio u nekim sferama. O njegovoj »*Imaginarnoj geometriji*« govorilo se s potsmjehom, sa žaljenjem prema učenome čudaku.«

Naučne zasluge Lobačevskoga nisu znali cijeniti, a i sve njegove ogromne zasluge za sveučilište padale su pomalo u zaborav. Tako je konačno tiho i neprimjetno umro u Kazanju 24. veljače 1856. tvorac nove geometrije Lobačevski, čiji će život zauvijek ostati primjerom i uzorom same biti nauke, t. j. smjele borbe protiv predrasuda. Stoga Lobačevski pripada ne samo prošlosti i sadašnjosti, nego i budućnosti. Ime Lobačevskog ostat će zapisano neizbrisivim slovima ne samo u nauci ruskog naroda, nego i u nauci uopće, jer je njegovo djelo općeg svjetskog značaja.

(Vidi »Priroda« — 1946., br. 5.)

Milenko Sevdić

IX.

IZ ASTRONOMIJE

KEPLEROVI ZAKONI

Klaudije Ptolomej, koji je živio u drugom stoljeću u Aleksandriji, bio je odlučan pristaša geocentričkog sistema. U svom znamenitom djelu »*Megale Syntaxix*« sakupio je sveukupno astronomsko znanje staroga vijeka i na temelju radova Pitagore, Apolonija, Hiparha i dr. izradio je svoj geocentrički sustav, kojim je mogao objasniti opažana kretanja planeta. Taj se Ptolomejev sustav održao u nauci sve do 16. stoljeća.

Prvi, koji se usudio da digne svoj glas protiv stoljećima posvećenog Ptolomejevog gledišta, bio je Nikola Kopernik (1473.—1543.). On je to učinio u svojem remek djelu »*De revolutionibus orbium caelestium*«. Njegova je oštroumnost našla jednostavno rješenje. Ako se zemlja okreće oko Sunca, nestaju poteškoće Ptolomejevog sustava. Čudnovata periodska retrogradna gibanja planeta nisu ništa drugo nego refleksi zemaljskog gibanja. Jednostavnim pomakom koordinatnog sustava riješio je dakle problem, koji je kroz više tisuća godina ljudima bio zagonetka.

Ali Kopernik se nije zadovoljio da samo postavi novu hipotezu. On ju je izgrađivao punih trideset i pet godina, a tek godinu dana prije smrti odlučio se da štampa djelo, koje je bilo plod toga intenzivnog rada.

Fundamentalni principi njegove nauke leže u slijedećim tvrdnjama.

1. Dnevna vrtnja nebeske sfere samo je prividna, a u istinu rotira zemlja oko osi, koja ide kroz njeno središte.

2. Zemlja je planet i kruži oko Sunca koje miruje.

Koperniku bez sumnje pripada slava, da je prvi objavio pravu bit kozmičkog gibanja i njegova je zasluga, da je učinjen prvi korak protiv Aristotelove nauke. Ali svakako je i Kopernik još pod utjecajem starih filozofa. Čitajući njegovu knjigu dobivamo utisak, da je on kao i Ptolomej htio naći samo postupak za točnije određivanje mjesta planeta. Čini se, da je on gibanje planeta poput Aristotela sveo na prirodno gibanje po kružnicama.

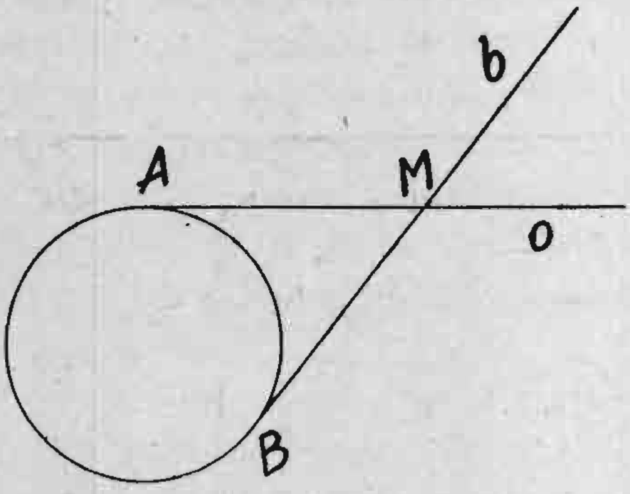
Kopernikova je nauka naišla na jaki otpor. Bila je pobijana raznim argumentima. Među ostalim prigovorili su mu, da bi zvijezda morala mijenjati prividno svoj položaj, ako se zemlja zaista okreće oko sunca. Kopernik je ispravno odgovorio na to, da su zvijezde odviše daleke, da bi se one male promjene mogle i vidjeti. I zaista je to tadašnjim pomagalima bilo nemoguće utvrditi. Prvu paralaksu zvijezda našao je tek 300 godina kasnije astronom Bessel.

I danski astronom Tycho de Brahe je iza uzaludnog traženja tog pomaka zvijezda zabacio heliocentričnu teoriju. Tycho je bio dvorski astrolog kod danskog kralja Fridrika, a poslije kod cara Rudolfa u Pragu. Njegova dužnost je bila među ostalim i to, da točno promatra gibanje planeta. Na temelju tih dugogodišnjih opažanja postavio je novu teoriju, po kojoj se sunce i mjesec okreću oko zemlje, ali ostali planeti oko sunca.

Tychova hipoteza nije važna u razvoju astronomije, ali dugogodišnji niz njegovih opažanja bio je znatan prilog za upoznavanje planetskog sistema i ta su opažanja postala u rukama njegovog genijalnog učenika i nasljednika Keplera oruđe, kojim je izvojštio konačnu pobjedu u ovoj dugoj borbi.

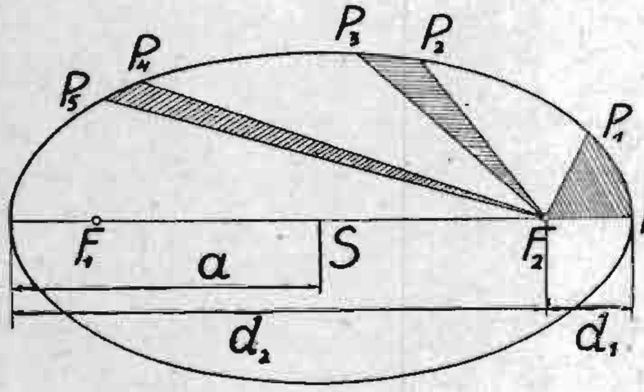
Johan Kepler (1571.—1630) bio je rodom iz Württenberga. Već kao studenta upoznao ga je njegov učitelj

Maestlin s Kopernikovom naukom. No dok se Maestlin oprezno skrivao pred javnosti, da je pristaša heliocentričnog sustava, to se mladi Kepler odmah otvoreno i smjelo izjasnio za tu ideju. I on je uviđao nedostatke nove nauke, ali nije ju zato odbacio, nego uvidjevši ispravnost njene temeljne ideje stavio je sebi zadatak, da dokaže zakonima i formulama njenu valjanost. Kad je Kepler postao asistentom kod Tycha, zapala mu je zadaća, da ispita gibanje planeta Marsa. A i kasnije kao njegov nasljednik bavio se dalje tim problemom. Pronašao je duhoviti način da ispita valjanost Aristotelova aksioma o jednolikom gibanju planeta po kružnicama.



Sl. 1.

Prvo je izračunao vrijeme između dvije opozicije planeta (sinodično vrijeme) i našao, da je to 1,881 godine. Poslije 1,881 godine nalazi se dakle Mars opet u istoj točki, ali zemlja ne, jer je u tom vremenu prevalila $1^8/_{10}$ svoga puta. Kad se naprimjer zemlja nalazi u točki *A*, vidi se Mars u smjeru *Aa* (slika 1.). Poslije 1,881 godine zemlja je u *B*, a Mars se onda vidi u smjeru *Bb*. Sjecište pravaca *Aa* i *Bb* daje nam položaj Marsa. Na ovaj je način Kepler dobio niz točaka za putanju planeta Marsa. Našao je da ove točke ne leže na kružnici i da je brzina planeta u blizini sunca veća. Stari Aristotelov aksiom je bio pobijen — ali je trebalo naći novi! Pokušao je s raznim krivuljama, dok napokon ne primijeti, da elipsa daje najbolje rezul-



Sl. 2.

tate. Kad je ponovio račune za poziciju Marsa sa predpostavkom, da je zemljina putanja elipsa (sl. 2.), došao je konačno do željenog rezultata. Primijenivši svoju teoriju i na sve ostale planete postavio je svoja prva dva zakona.

Kepler je našao, da je sunce u jednom fokosu elipse. Kako planet putuje iz P u P_1 P_2 P_3 i t. d., to radiji vektori postaju veći, ali brzina planeta manja. I u tom gibanju je Keplerova genijalnost našla neku zakonitost. Promatrao je gibanje planeta u istim vremenskim razmacima i našao, da njihovi radiji vektori onda opisuju iste plohe. Dakle ploština $F_2\, P_2\, P_3 =$ $= F_2\, P_4\, P_5 = F_2\, P\, P_1$ i t. d.

Keplerova prva dva zakona glase:

1. Svi se planeti gibaju po elipsama, a sunce je u jednom žarištu te elipse.

2. Radiji vektori planeta prijeđu u jednakim vremenima jednake površine.

Kepler je te zakone objelodanio u svojoj znamenitoj knjizi: »*Astronomia nova seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae martis*« koja je štampana 1609. godine u Pragu. U posveti te knjige caru Rudolfu opisao je Kepler na duhoviti način teškoće svojih radova. Taj humoristični opis njegove borbe s neprijateljem Marsom daje nam i jasnu sliku Keplerova karaktera. Njegov je cijeli život bio niz nesreća. Trebalo je jakog karaktera ne samo genijalnog duha, da u tim teškim prilikama dovrši svoje veliko djelo. Živio je u vrijeme vjerskih progona i građanskog rata. Kako mu njegova plaća nije bila redovito plaćana, bio je prinuđen da se bavi izdavanjem kalendara i astroloških horoskopa, da prehrani sebe i svoju obitelj. Kakav gorak kruh za čovjeka, koji je godinama osuđivao to praznovjerje; Ali Kepler nije smalaksao. Borio se protiv ljudske zlobe i podlosti, i uspjelo mu je da dovrši svoje djelo.

Treći Keplerov zakon izašao je tek deset godina kasnije u njegovoj knjizi: »*Harmonices mundi*«, koja je štampana u Linzu. Već u svojem prvom astronomskom djelu »*Prodromus*« bavio se on udaljenostima planeta. Otkrivši prva dva zakona opet se vraća na taj problem, ali sada traži vezu između udaljenosti i drugih svojstava planetskih putanja. Sjetivši se slučajno da isporedi kvadrate ophodnih vremena s kubima srednjih udaljenosti od sunca dolazi do poznatog razmjera, koji označujemo kao treći Keplerov zakon:

3. Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubi njihovih srednjih udaljenosti od sunca. Srednja udaljenost znači aritmetičku sredinu između najmanje i najveće udaljenosti, a označujemo je sa *a*.

Dakle možemo to napisati u obliku: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$ Budući da poznajemo vrijeme ophodnje pojedinih planeta oko sunca, imamo u tom zakonu važno sredstvo, da nađemo omjer njihovih udaljenosti. A poznajemo li samo jednu udaljenost, možemo izračunati sve ostale. Kepler je uzeo udaljenost od Sunca do Zemlje kao jedinicu i dobija vrijednosti, koje nam pokazuje slijedeća tabela.

Planeti	Sr. udaljenost	Oph. vrijeme	Kubi sr. udalj.	Kvadrati oph. vr.
Merkur	0,387	0,241	0,058	0,058
Venera	0,723	0,615	0,378	0,378
Zemlja	1,000	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881	3,540	3,538
Jupiter	5,205	11,86	140,8	140,66
Saturn	9,539	29,46	868,0	867,9

Pomoću trećeg Keplerovog zakona možemo odrediti srednju brzinu planeta. Uzmemo li da je put planeta kružnica s polumjerom *a*, onda su srednje brzine dvaju planeta

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{T_1}, \quad v_2 = \frac{2\pi a_2}{T_2} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 T_2}{a_2 T_1}$$

Iz trećeg Keplerovog zakona slijedi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad \text{dakle} \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

Prema tome je $v_1 = v_2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$. Uzmemo li da je drugi planet zemlja, dakle $a_2 = 1$, $v_2 = 30$ km/sec onda je $v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{a_1}}$

Brzina planeta je dakle to manja, što je veća udaljenost od Sunca. Planet Pluto kojemu je $a = 40$ ima srednju brzinu $v = 4\frac{3}{4}$ km/sec.

Keplerova djela spadaju sigurno među remek djela prirodnih znanosti. Njegova »*Astronomia nova*« prva je moderna knjiga o nebeskoj mehanici. Kepler je već znao, da Sunce nije samo geometrijsko već fizikalno središte gibanja planeta. To jest da je ono sjedište sila, koje su uzrok tom gibanju. Mjesto formalnog geometrijskog sustava donio je dinamički sustav. Time je konačno oborio Aristotelovu nauku o prirodnom gibanju planeta po kružnicama. Kepler je prvi uvidio usku povezanost fizike i astronomije, i možemo ga zato zvati utemeljiteljem nebeske mehanike.

Kepler je svoje zakone našao posve empiričkim putem. Genijalnom pronicljivošću nazreo je zakonitost, koja se nalazila skrivena u golemom mnoštvu podataka. Ali uzrok te zakonitosti nije našao — premda nije bio daleko od toga.

Trebao se roditi još jedan veliki um, da bi se dovršilo veliko Keplerovo djelo, i taj se rodio — to je bio Isaac Newton.

Newton je pronašao da sila teža ne djeluje samo na zemlji. Planeti kruže oko Sunca zbog privlačne sile Sunca, ali i planet privlači Sunce. Do Newtonovog zakona možemo doći jednostavnim računom iz trećeg Keplerovog zakona pomoću formule za centrifugalnu silu. A to gibanje Kepler još nije poznavao. Zakon gravitacije nam kaže, da je privlačna sila između dva tijela upravno razmjerna produktu njihovih masa, a obrnuto razmjerna kvadratu njihovih udaljenosti.

$$P = k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

K je konstanta i iznosi 6,65 · 10^{-8} *dina*, to je sila između dvije mase od 1 *grama* u udaljenosti od 1 *cm*.

Međutim ni Newtonovim zakonom nije gibanje nebeskih tjelesa potpuno rješno. Da oko Sunca kruži samo jedan planet, Keplerovi i Newtonovi zakoni dali bi nam mogućnost za točno određivanje položaja toga planeta. No znamo da oko sunca kruži devet planeta sa svojim satelitima, planetoidi, kometi i t. d. A sva ta tjelesa djeluju i jedno na drugo. Uzmemo li međutim u obzir da je Sunčeva masa ogromna prema masi svih ostalih planeta zajedno, to možemo reći da su putanja svih planeta u glavnom Keplerove elipse. Smetnje koje nastaju zbog međusobnog djelovanja planeta, tako zvane perturbacije mogu se pomoću — doduše dosta kompliciranih — računa točno odrediti.

Iz kozmičkog gibanja nestalo je dakle svake tajanstvenosti! Ljudskom je duhu uspjelo, da čarobno gibanje planeta izrazi jednostavno i skladno — matematskim formulama!

(Literatura: E. Strömgren: *Lehrbuch der Astronomie;* Newcomb-Engelmann: *Populare Astronomie;* S. Bokšan: *Materija i Energija;* M. Caspar: *Kopernikus und Kepler;* K. Stumpff: *Das Uhrwerk des Himmels;* Rosenberger: *Geschichte der Physik;* Dr. J. Goldberg: *Kosmografija.* Dr. V. Mišković: *Kosmografija;* J. Jastrow: *Povijest ljudskih zabluda;* O. Saile: *Kepler).*

Varićak Milena

X.

RAZNI ČLANCI

BOŠKOVIĆEVO MIŠLJENJE O NEKIM OSNOVNIM PITANJIMA O DEFINICIJI PRAVCA

Teškoćama, koje su u pojmu pravca, bavi se **Bošković** u dodacima prvom svesku Stayevu, a naročito u prvom dijelu rasprave **»De lumine«.**

Optici i astronomi obično tvrde, da se svjetlost u homogenom mediju prostire i na velike daljine u pravim crtama. Za kraće razmake drži se da je to dokazano svakidašnjim iskustvom, jer se misli, da predmete vidimo u onom smjeru, u kome doista postoje. No tko stvar pomnjivije promotri, kaže Bošković, uvjerit će se da nema ni jednoga pozitivnoga dokaza ni pokusa, kojim bi se uvjerili o pravocrtnom rasprostiranju svjetlosti, pa bilo i u homogenu mediju. Redovno se tu počinja ovaj circulus vitiosus: o pravocrtnosti ostalih objekata sudimo iz pravocrtnosti zraka svjetlosti, a pravocrtnost zraka izvodimo iz pravocrtnosti ostalih objekata.

U dokaz rasprostiranja svjetlosti u pravim crtama navodi se ovaj pokus: Kroz malu rupicu pušta se svjetlost sunčana u pomračenu sobu. Svjetli trak u sobi privida se da se je prostro smjerom pravca, koji ide od rupice k suncu; svjetlost se dakle prostire u pravim crtama.

No kako smijemo zaključivati, da se onaj pravocrtni trak svjetlosti u sobi prostro u smjeru prave crte, koja ide od rupice do sunca? Zar stoga, što se sunce vidi, kad se iz sobe gleda kroz rupicu? Ta ono bi se vidjelo i onda, kad bi zraka od sunca do rupice došla po ma kako svinutoj crti.

U ostalom odatle, što nam se u sobi trak svjetlosti od nekoliko stopa dužine pričinja ravnim, ne smijemo izvoditi, da se svjetlost i u neizmjernim daljinama, na pr. od zvijezda nekretnica do Zemlje, prostire pravocrtno. Mali lukovi golemih krivulja imadu tako neznatnu zakrivljenost, da je opaziti ne možemo.

Ali ako i dopustimo, da je prema učinjenom pokusu put svjetlosti u tamnoj sobi ravnocrtan, zar smo sigurni, da je ravnocrtan i s obzirom na beskrajni nepomični prostor? Dalje moramo uzeti u obzir i to, da li zemlja miruje, pa s njom i tamna soba, ili se giba? A ako se giba, kojom se brzinom giba i kojim smjerom ? Koji je snošaj brzine motriočeve prama brzini svjetlosti?

Dobro je poznato, da kretanje, koje je pravocrtno s obzirom na neki prostor u kretanju, može biti ma kako zakrivljeno s obzirom na beskonačni nepomični prostor. Ako na pr. s vrha jarbola u lađi, koju vjetar jednoliko goni, spustimo kamen, on će doduše pasti k podini jarbola opisavši pravac s obzirom na lađu, koja se kreće, no s obzirom na zemlju, koja miruje, opisao je parabolu; s obzirom pak na nepomični prostor, u kojem se zemlja kreće svojim dnevnim i godišnjim kretanjem, opisat će krivulju mnogo zamršeniju.

Poradi toga mnogostrukoga kretanja neće put svjetlosti u mračnoj sobi biti pravocrtan, premda se taj neznatni luk malo razlikuje od prave crte poradi velike brzine svjetlosti. Sve se to još bolje razbira, kad ogledamo pojam prave crte.

P l a t o n definira pravac za takvu crtu, kod koje krajevi zasjenjuju (pokrivaju) sve točke među njima. Prema tome i sudimo o pravocrtnosti. Jedan kraj na pr. lineala prinesemo oku i gledamo, da li najedanput sav iščezne, t. j. da li se svojim bližim krajem prekrije. Kod toga se upravo i suponira, da se svjetlost širi u ravnoj crti, jer sjena samo je nestašica svjetlosti; stoga se i širi u istom smjeru, kojim bi se širila i svjetlost, koju ona prekida. Poradi toga ta definicija ne tumači prirodu ravnocrtnosti, pa ako se radi o smjeru same svjetlosti, ne može se ta definicija primijeniti, a da se ne počini onaj circulus vitiosus.

Ako lineal na pol zaronimo koso u vodu, pričinit će se, da je slomljen, premda je posve ravan, te prva točka neće zasjeniti čitave crte. Tako isto kad zrake u nekom mediju ne bi išle istim pravcem, najravniji bi se lineal prikazivao kao slomljen ili kao zakrivljen. Ako bi pak neka crta imala istu zakrivljenost, koju u tom mediju imadu zrake svjetlosti, onda bi njena krajnja točka mogla zasjeniti cijelu tu crtu.

Arhimed je pravac definirao za crtu najkraću od svih, što se mogu povući između dvije točke. Tom se definicijom ističe jedno svojstvo pravca, ali se ne obrazlaže sama njegova priroda. Pojam pravocrtnosti drugačiji je od pojma kratkoće; — no to ne spada na naše pitanje. U ostalom, ima puno izvora pogrješaka, kad bismo napetim koncem išli ispitivati pravocrtnost lineala.

Euklid kaže, da je pravac ona crta, koja jednako leži prema svojim točkama. Šta ovdje znači jednako, doista je tamnije nego li sama pravocrtnost, koja se tim hoće da protumači. Ako li znači, da se crta ni s koje strane ne izbočuje, onda to već samo po sebi sadržava pojam pravca. Ali kako bilo s tom nejasnoćom u toj definiciji, nemamo nikakove pomoći od nje, kad hoćemo da sudimo o pravocrtnosti ma koje crte.

Ako pravac neodređeno produžimo, podudarat će se sam sobom, ili još bolje, s mjestom, što ga je prije zauzimao. To nam daje valjan pojam prave crte, kojim se jedino i služimo u cijeloj geometriji i po kom sve ostalo dokazujemo. Pravac može kod toga zauzeti ma koji položaj, samo treba da dvije njegove točke panu u pređašnje dvije mjesne točke. Samo pravcu pripada to svojstvo. Iz toga se dalje izvodi, da se ma koji odsječak jednoga pravca mora sav podudarati s kojimgod odsječkom drugoga pravca, ako se samo po dvije njihove krajnje točke podudare.

Po tom podudaranju zaključujemo na jednakost i kongruenciju uzevši na pomoć još i načelo, da oduzimajući ili dodavajući jednakim jednako dobijemo jednako. Kod toga možemo ponajviše izaći s konačnom geometrijom, bar u onim problemima, koji sami po sebi ne sadržavaju nešto beskonačno. No kad treba uspoređivati zakrivljene crte ili površine, onda moramo okolišati primjenjujući ili staru metodu ekshaustije ili modernu infinitezimalnu.

Taj pojam prave crte primjenjujemo, kad ispitujemo lineal, povukavši njime pravac i okrenuvši ga, da vidimo hoće li se podudarati. A i ovdje sudimo prema tome, što očima vidimo; da se pak kod toga ne može proći bez one pogrješke u zaključivanju, već je spomenuto. Isto bi se dogodilo kad bismo upotrijebili lineal, da njime odredimo smjer svjetloga traga, koji se u tamnoj sobi kroz prašinu širi, od rupice do suprotnoga zida.

Bez te bi se pogreške prošlo, kad bismo, veli Bošković, uzeli dva lineala, za koje opipavajući ih saznajemo da se posve podudaraju, kad ih položimo jedan na drugi. Ako ih okrenemo pa se onda opet opipom uvjerimo, da se podudaraju, onda smo se doista uvjerili o pravocrtnosti lineala bez pomoći očiju t. j. bez pretpostavke o pravocrtnom širenju svjetlosti. Samo bismo kod toga morali biti sigurni, da se lineal kod okretanja nije zavinuo.

(Iz »Matematički rad Boškovićev«
Rad J. A. knj. 181, str. 101—106.)

Dr. Vladimir Varićak

KAKO SU POSTALI LOGARITMI

Znamo, da zbrajanju i množenju odgovaraju inverzne operacije odbijanje i dijelenje. Ovo ide i dalje, jer i potenciranju odgovara inverzna operacija radiciranje. Ali vidjet ćemo još nešto. Naime u

$$a^b = c$$

mogu biti sadržani ovi slučajevi:

1. poznato je a i b traži se c
2. „ „ b i c „ „ a
3. „ „ a i c „ „ b

U prvom slučaju imamo

$$a^b = x$$

i tu operaciju zovemo *potenciranje;* u drugom slučaju imamo radiciranje. Iz $x^b = c$ slijedi $x = \sqrt[b]{c}$. Sad se pitamo, a što je s trećim slučajem

$$a^x = c$$

To bi u neku ruku značilo da se radi o nekoj vrsti potenciranja, samo sad nije nepoznata baza, nego je nepoznat eksponent. Ali kako ćemo izračunati ovaj eksponent? Da se nađe taj eksponent bit će potrebno uvesti jednu novu operaciju, koju ćemo zvati logaritmiranje. Prema tome logaritmirati znači naći eksponent, kojim treba potencirati bazu da se dobije zadani broj (numerus).

Kao što vidimo operaciji potenciranja odgovaraju dvije inverzne operacije: radiciranje i logaritmiranje. Uzrok je u tome, što kod zbrajanja i množenja vrijedi zakon komutacije, pa prema tome oba broja, koja ulaze u operaciju imaju ravnopravan položaj, t. j. svejedno je koji je sumand prvi ili drugi, ili koji je faktor multiplikand ili multiplikator. Rezultat je neovisan o njihovu poređaju. Kod potenciranja zakon komutacije ne vrijedi, pa je prema tome uloga baze i eksponenta bitno različita.

Međutim se ovako sistematskim postupkom nije došlo do logaritama.

Otkriće logaritama pada u 16. i 17. stoljeće i čini proširenje algebre u jedno novo područje prikladno za praksu. Njihovo je otkriće u vezi sa potrebama onoga doba. Potreba se osjećala u astronomiji, osobito u geodeziji i nautici, jer se u njima znatno isticala računska strana. Astronomska opažanja bila su usavršena, geodezija je pristupila većim pothvatima, nautika se silno razvila. Sve to tražilo je usavršavanje metoda dotičnih predmeta. Kao rezultati raznih opažanja i praktičnih mjerenja dobijani su višecifreni brojevi, s kojima je trebalo izvoditi mnoge duge račune. Bila je to posljedica točnosti, s kojom su radile spomenute nauke. Prije svega bile su zamorne računske radnje množenja i dijelenja, a uz to se radilo i o znatnom gubljenju vremena. To je navodilo na misao, ne bi li se taj posao olakšao i ne bi li se na neki način doskočilo poteškoćama kod računanja Ne bi li se na pr. množenje dalo svesti na zbrajanje. I zaista Johanes Werner (1468.—1528.) dolazi do jedne metode, koja je nazvana »prostaferesis«, a koja je bila osnovana na primjeni trigonometrijskih funkcija, koje su u to doba već bile poznate. Tako se na pr. množenje svodilo na zbrajanje i odbijanje pomoću slijedećih formula

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

No ipak prostaferesis nije davao one praktičnosti, koja je bila potrebna. Pogotovo jer se nije mogao primijeniti na ostale više operacije. Taj postupak pada brzo u zaborav, jer ga je potisnula jedna druga daleko praktičnija metoda, koja je tada bila pronađena. Bili su to upravo logaritmi.

Pravim osnivačem logaritama smatra se danas Napier, ali i prije njegova rada postojali su nekoji pokušaji ili barem postupci, koji se mogu smatrati predradnjama do konačnog pronalaska logaritama. Autori tih postupaka bili su na pravom putu, ali nisu vidjeli dalekosežnosti svojih prvih zamisli, nego su na njima ostali, pa stoga ostali daleko i od konačnog riješenja toga pitanja. Na nekoliko mjesta nailazimo na tragove postupka, u kome je sadržana sama suština logaritama ili barem izvjesna njihova svojstva, pa i ako je taj pojam nejasno izražen, ipak su to prvi koraci, da se dođe do logaritama.

Najstariji trag možemo slijediti sve tamo do velikog grčkog matematičara Arhimeda (287.—212.), koji je u svome »*Pješčanom računu*« dao takav postupak, koji se sastoji u pridruživanju članova niza prirodnih brojeva (aritmetički niz) i članova jednog geometrijskog niza. Ako ispod pojedinih brojeva iz prirodnog niza potpišemo članove geometrijskog niza s kvocijentom 2, imat ćemo onda ovakvu shemu:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	.....
		│			‖		‖		
1	2	4	8	16	32	64	128	256	.....

Odatle vidimo, da je na pr. broju 2 prvoga niza pridružen broj 4 drugoga niza, a broju 5 broj 32. Ako treba izvesti na pr. množenje $4 \cdot 32 = 128$, to se taj produkt nalazi ispod broja 7, koji se dobije zbrajanjem 2 i 5 iz prvoga reda. Na taj način, da izmnožimo dva člana donjega niza, dovoljno je zbrojiti dva pripadna člana gornjega niza, pa će pod zbrojem tih dvaju članova ležati traženi produkt. Ali Arhimed se zadovoljio samo tim rezultatom i ne naslućujući, da je tu i nesvjesno primijenio pravilo za logaritam produkta.

Nakon jednog dužeg vremenskog intervala naići ćemo istom 1484. godine kod Nicolausa Chuqueta, liječnika i apotekara iz Liona, u njegovom djelu «*Le triparty en la science des nombres*« na ovako pridruživanje dvaju nizova. Kod njega je taj postupak samo nešto općiji, kao što razabiremo iz slijedećih napisanih redova:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots n \\ a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \ldots\ldots a_n \end{array}$$

Tu je dakle množenje potencija svedeno na zbrajanje eksponenata. Ali ni Chuqnet nije slutio, da se tu krije klica logaritama. Do uopćavanja se nije odmah došlo u glavnom zbog još nepoznatog algebarskog načina pisanja.

Zakone ovoga pridruživanja izgleda da je najbolje shvatio istom Michael Stiefel (1487.—1567.), koji je bio svećenik i propovijedajući Luterovu nauku lutao od mjesta do mjesta. U slobodnim časovima bavio se matematikom zanimajući se naročito tajnovitošću brojeva u Apokalipsi. Na osnovu svojih fantastičnih istraživanja tih brojeva prorekao je propast svijeta za

1533. S tim proročanstvom se obrukao, ali je zato uspio u proširenju Arhimedove i Chuquetove ideje, jer je upotrebio i negativne eksponente, a za osnovu potencije uzeo je poseban broj 2. Njegovi redovi izgledali su ovako:

$$\ldots -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8},\ 2^{-2} = \frac{1}{4},\ 2^{-1} = \frac{1}{2},\ 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$$

U današnjem obliku mi bi dakle mogli to pisati pomoću logaritama s bazom 2 ovako:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3\,, \quad \log_2 \frac{1}{4} = -2\,, \quad \log_2 4 = 2, \ldots$$

Da je Stiefel već duboko prodro u suštinu logaritama možemo zaključiti i po tome što kod njega nalazimo već pravila, koja bi odgovarala današnjim pravilima za logaritmiranje kvocijenta, potencije i korjena. Uza sve to on ipak nije dao potpuno dovršene cjeline i ako naslućuje, da se tu krije jedno *»čudesno svojstvo brojeva, o kojima bi se mogla napisati cijela knjiga.« Spoznaju* Stiefelovu preuzeli su kasnije algebričari, da bi na tome putu dospjeli dalje.

Dalji napredak u usavršavanju logaritama bio je u vezi s otkrićem decimalnih brojeva (oko 1600.). Brojeve u Stiefelovoj tabeli trebalo je na neki način zbiti, da bi mogli praktično poslužiti u računanju t. j. u geometrijskom nizu trebalo je između brojeva umetnuti njih još više, a to se moglo postići, ako bi se za kvocijent reda uzeo zgodno odabran broj. To su postigli nekako istodobno Napier i Bürgi, ali prioritet pripada Napieru, koji je svoje tabele izdao 1614, dok je Bürgi svoje istom 1620. Kepler kaže za Bürgia, da je on *»dijete svoga duha ostavio na cjedilu mjesto da ga je odgojio za javnost«,* i da to nije stoga učinio, što je bio *»cunctator« (oklijevalo)* i jedan *»secretorum suorum custos« (čuvar svojih vlastitih tajni).*

J o s t B ü r g i (1552.—1632.) bio je po rođenju Švicarac. a živio je u Kaselu, odakle je kasnije kao dvorski urar otišao u Prag. Bio je spretan mehaničar za izvođenje astronomskih sprava, bio je talentiran matematičar, ali uz to tvrdoglav i ćudljiv. Za njega se zna, da je ideje za svoje tablice crpio iz jednog spisa S i m o n a J a k o b a. U svojim *»Progres-Tabuln«* (tablice redova) članove aritmetičkog reda zove *»crvenim brojevima«*, jer su bili štampani u tabelama crveno. Ostali se brojevi zovu *»crni brojevi.«* Danas bi mi crvene brojeve zvali logaritmima, a crne numerusima. Kvocijent geometrijskog reda bio je $1{,}0001 = 1 + \frac{1}{10^4}$, pa su prema Stiefelovim njegovi brojevi bili zbijeniji.

Prvi koji je svijetu dao logaritamske tablice, koje su se mogle upotrebiti, bio je J o h n N a p i e r o f M e r c h i s t o n. Rodio se 1550. god. Po ondašnjem običaju već sa 13 godina polazi na sveučilište, gdje je ostao samo kratko vrijeme. Od god. 1571. uzima učešća u javnome životu sudjelujući u borbi protestanata protiv katolika. I on se poput Stiefela bavio Apokalipsom (1593.), ali je isto doživio neuspjeh svojim proročanstvom o propasti svijeta. Konstruirao je i neke ratne mašine, a bavio se mišlju i o podmornici. Slavu su mu donijeli logaritmi. Njegovo ime nose i poznate relacije u trigonometriji (N e p e r o v e a n a l o g i j e).

Na logaritmima počeo je raditi 1594., ali je moralo proteći 20 godina, dok je usavršio svoje djelo. To djelo (izdano 1614.) nosilo je naslov *»Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.«* Drugo djelo o logaritmima je *»Constructio«* (1619). Ovo djelo je izdao poslije njegove smrti njegov sin. N a p i e r je umro 1617. u Edinburgu.

N a p i e r operira isto tako sa dva niza samo je dobio dovoljno zbijene nizove. Prvi niz činio je niz prirodnih brojeva, dakle aritmetički red s diferencijom 1. Drugi niz, čiji je prvi član bio 10^7, bio je opadajući geometrijski red s kvocijentom

$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ Članove aritmetičkog reda nazvao je logaritmima (naziv od grčke riječi λόγων ἄριθμος, što bi imalo da znači broj odnosa). Još možemo spomenuti da je njegova baza $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ približno jednaka recipročnoj vrijednosti broja e.

Napierovi logaritmi odmah su uhvatili korjena. Naročito su ih prihvatili svi oni, koji su imali posla sa numeričkim računima. U Engleskoj se za njih osobito zainteresirao matematičar i astronom, oksfordski profesor Henry Briggs (1556.—1630.) koji je ujedno uvidio i nepraktičnost Napierovih logaritama, pa je predložio Napieru, da tabele preudesi na taj način, što bi za osnovu uzeo $\frac{1}{10}$. Napier je prihvatio opravdanost prigovora, ali je za osnovu predlagao 10, a ne $\frac{1}{10}$. Time se zaista imala postići željena praktičnost. Radilo se samo o izradi tabela. Toga se posla prihvatio Briggs, i 1617. god. dao je nove tabele na 8 pa i na 14 decimala. Potaknut tim tabelama izradio je knjižar i oduševljeni diletant matematičar Holandez Adriaen Vlacq (1628.) logaritamske tabele na deset decimala za brojeve od 1 do 100 000. Te su tablice konačno u praksi potisle i Briggsove i Napierove. Od daljih velikih tablica, koje su postale čuvene, jesu Vegine tablice. Vega je bio rodom Slovenac.

Kod Napiera i Briggsa prevladavala je praktična strana s ciljem primjene i olakšanja u numeričkim računima. Produbljivanjem samog pojma oni se nisu toliko bavili, pa i izračunavanje samih logaritama vršili su posve nezgodnim postupkom. Istom kasnija otkrića u višoj matematici daju jednostavna sredstva, kojima se to postizalo. Osobito je u 18. stoljeću pored drugih zaslužan Euler (1707.—83.), koji je logaritmima dao teoretsku podlogu. Od tada oni dobijaju svoje pravo tumačenje.

Pronalazak logaritama bio je od velike važnosti kako za samu matematiku, tako i za sve nauke u kojima se matematika primjenjuje. Od pomoćnog sredstva za olakšavanje numeričkih računa logaritmi su postali znatni i u teoriji.

O logaritmima je raspravljao i naš Ruđer Bošković (1767.). U jednoj raspravi tumači on kako treba postupati u računu s logaritmima veličina manjih od jedinice, što je tada još bila dosta nova stvar. U drugoj radnji dotakao se on i pitanja o logaritmima negativnih veličina. Postojala je naime raspra između Leibniza i J. Bernoulli-a. Leibniz je učio da su ti logaritmi imaginarni te da logaritamska krivulja ima samo jednu granu, dok je Beroulli tvrdio da su realni i da postoje dvije grane. Bošković u svojoj radnji navodi i druge, koji su sudjelovali u toj diskusiji (D'Alembert, Euler) i pokazuje, gdje bi imao da bude čvor i izvor svih protivurječja u tom pitanju.

Milenko Sevdić

IZRAČUNAVANJE LOGARITAMA

1. Logaritmi brojeva od 1 do 10.

a) Potražit ćemo *log* 2. Stavimo li da je $\log 2 = x$, tada je po definiciji $10^x = 2$

Budući je $10^1 = 10$ dakle $\log 10 = 1$
i kako je $10^0 = 1$ dakle $\log 1 = 0$,
to x leži između 0 i 1.

Da bismo našli *log* 2 moramo potražiti jednu potenciju od 2, koja je što bliže potenciji od 10.
Tako imamo

$$2^{10} = 1024 \doteq 1000 = 10^3$$

ili

$$2^{10} \doteq 10^3$$

odakle je

$$2 \doteq \sqrt[10]{10^3} = 10^{\frac{3}{10}} = 10^{0,3}$$

Tako smo 2 izrazili kao potenciju baze 10, pa kako logaritmirati upravo znači tražiti eksponent, kojim treba potencirati bazu 10, da se dobije 2, to je onda

$$log\ 2 \doteq 0{,}3$$

b) Kada znamo *log* 2, onda po pravilima za logaritmiranje možemo naći i logaritme svih potencija baze 2.

Na pr. $4 = 2^2 = (10^{0,3})^2 = 10^{2.0,3} = 10^{0,6}$ dakle je $log\,4 \doteq 0{,}6$

$8 = 2^3 = (10^{0.3})^3 = 10^{3.0,3} = 10^{0,9}$ dakle je $log\,8 \doteq 0{,}9$

U opće je

$$2^n = (10^{0,3})^n = 10^{n.0,3} \text{ dakle je } log\,2^n = n\,0{,}3$$

c) Pomoću *log* 2 možemo naći vrlo lako i *log* 5.
Budući da je

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10^1}{10^{0,3}} = 10^{1-0,3} = 10^{0,7} \text{ imamo } log\,5 \doteq 0{,}7.$$

Pomoću ove vrijednosti lako nađemo i logaritme potencija baze 5. Na pr.

$$log\ 25 = log\ 5^2 = 2\ log\ 5 = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4.$$

d) Kad znamo *log* 2 i *log* 5 znamo onda izračunati i logaritme svih brojeva u kojima dolaze samo faktori 2 i 5.

Na pr.

$$80 = 8.10 = 10^{0,9} \cdot 10^1 = 10^{1.9}$$

pa je tako

$$log\ 80 \doteq 1{,}9.$$

e) Izračunavanje drugih logaritama možemo opet zgodno svesti na *log* 2.

Na pr.

$$9^2 = 81 \doteq 80 = 10^{1,9}$$

odatle imamo

$$9 = \sqrt{10^{1,9}} = 10^{\frac{1,9}{2}} = 10^{0.95}$$

tako je

$$log\ 9 \doteq 0{,}95$$

Kako je

$$3 = \sqrt{9} = 10^{\frac{0,95}{2}} = 10^{0,475}$$

to je

$$log\ 3 \doteq 0,475.$$

Mislim da sada nije potrebno posebno isticati, da se mogu izračunati logaritmi svih potencija baze 3.

f) Kako je

$$6 = 2.3 = 10^{0,3} \cdot 10^{0,475} = 10^{0,775}$$

to je

$$log\ 6 \doteq 0,775$$

Prema tome smo u stanju, da izračunamo i logaritme svih brojeva, koji se daju rastaviti u proste faktore 2,3 i 5.

g) Ostaje nam dakle da nađemo još vrijednost *log* 7. Nju ćemo dobiti ovako:

kako je

$$7 = \frac{63}{9} \doteq \frac{64}{9} = \frac{10^{1,8}}{10^{0,95}} = 10^{1,8-0,95} = 10^{0,85}$$

to je

$$log\ 7 \doteq 0,85.$$

Ove približne vrijednosti logaritama brojeva od 1 do 10 možemo skupiti u jednu »*logaritmičku tablicu*«, koja glasi:

Numerus	Logaritam	Vrijednost točna na 5 decimala
1	0	0
2	0,300	0,30103
3	0,475	0,47712
4	0,600	0,60206
5	0,700	0,69897
6	0,775	0,77815
7	0,850	0,84510
8	0,900	0,90309
9	0,950	0,95424
10	1,000	1,00000

Da bismo na pr. lako zapamtili, da je log 2 = 0,30103 uzmimo da je uho 3 (jer je slično), oko 0, a nos 1, pa onda po redu imamo: *uho, oko, nos, oko, uho!*

2. Izračunavanje nekih logaritama vađenjem korjena.

Da se što bolje upoznamo s logaritmima, pokazat ćemo jedan drugi postupak za približno izračunavanje logaritama. Ovdje se radi pomoću vađenja korjena.

Budući da je

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162, \text{ to je } log\ 3{,}16\ldots = \frac{1}{2}$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{3{,}16}\ldots = 1{,}778\ldots \text{ to je } log\ 1{,}778\ldots = \frac{1}{4}$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{1{,}77}\ldots = 1{,}333\ldots \text{ to je } log\ 1.333\ldots = \frac{1}{8}$$

$$10^{\frac{1}{16}} = \sqrt[16]{10} = \sqrt{1{,}33}\ldots = 1{,}1548\ldots \text{ to je } log\ 1{,}15\ldots = \frac{1}{16}$$

Množenjem ovih vrijednosti mogu se izračunati i sve potencije od $10^{\frac{1}{16}}$. Na pr.

$$10^{\frac{3}{16}} = 10^{\frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{16}} = 1{,}33\ldots \cdot 1{,}15\ldots = 1{,}539926$$

$$10^{\frac{5}{16}} = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{16}} = 1{,}77\ldots \cdot 1{,}15\ldots = 2{,}053525 \text{ i t. d.}$$

Tako se dobije slijedeća tablica:

a	$x = 10^{\frac{a}{16}}$	$y = log\ x = \frac{a}{16}$
1	1,1548	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$
2	1,3335	$\frac{2}{16} = 0{,}125$
3	1,5399	$\frac{3}{16} = 0{,}1825$
4	1,7783	$\frac{4}{16} = 0{,}25$
5	2,0535	$\frac{5}{16} = 0{,}3125$
6	2,3714	$\frac{6}{16} = 0{,}375$
7	2,7384	$\frac{7}{16} = 0{,}4375$
8	3,1623	$\frac{8}{16} = 0{,}5$
9	3,6517	$\frac{9}{16} = 0{,}5625$
10	4,2170	$\frac{10}{16} = 0{,}625$
11	4,8697	$\frac{11}{16} = 0{,}6875$
12	5,6234	$\frac{12}{16} = 0{,}75$
13	6,4938	$\frac{13}{16} = 0{,}8125$
14	7,4984	$\frac{14}{16} = 0{,}875$
15	8,6596	$\frac{15}{16} = 0{,}9275$
16	10	$\frac{16}{16} = 1{,}000$

3. *Točnije određivanje mantise.*

U točki 1. i 2. iznijeli smo postupak za izračunavanje logaritama nekih brojeva. Dobivene vrijednosti bile su samo vrlo malo točne. One su bile, kako kažemo, točne na jednu ili najviše dvije decimale. U praksi je međutim potrebna ponajčešće veća točnost. Zato moramo poseći za postupcima, koji će dati vrijednosti logaritama točne na više decimala. Ovdje ćemo pokazati jedan način određivanja mantise, koji uza sve to, što daje logaritme točne na više decimala, ipak za praksu nije podesan, jer je praktično prilično komplikovan. Za stvarno izračunavanje logaritama s potrebnim brojem decimala postoji među više matematike, o kojoj ćemo govoriti samo u najkraćim crtama u slijedećoj točki.

Evo kako se može na elementaran način izračunati B r i g g s-ov logaritam za numerus 2.

Ako stavimo da je *log* 2 = x onda je po definiciji

$$10^x = 2 \qquad (1)$$

Budući da je

$$10^0 < 2 < 10^1$$

to je zbog (1)

$$0 < x < 1$$

dakle je x *(logaritam)* pravi razlomak. Stavit ćemo prema tome da je njegova vrijednost

$$x = \frac{1}{y} \qquad (2)$$

Stavimo li to u (1) imamo

$$10^{\frac{1}{y}} = 2$$

ili kad potenciramo cijelu jednadžbu sa y

$$2^y = 10 \qquad (3)$$

Odavde odmah razabiremo, budući da je

$$2^3 < 10 < 2^4$$

da je

$$3 < y < 4$$

Prema tome možemo staviti da je

$$y = 3 + \frac{1}{z} \text{ (gdje je } z > 1) \tag{4}$$

Supstituiramo li ovu vrijednost u (3) imamo:

$$2^{3+\frac{1}{z}} = 10$$

ili

$$2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}} = 10$$

dakle

$$2^{\frac{1}{z}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

ili

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^z \tag{5}$$

Iz ove jednadžbe (5), kako je

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

vidimo da je

$$3 < z < 4$$

dakle opet možemo staviti, da je

$$z = 3 + \frac{1}{n} \text{ (gdje je } \frac{1}{n} \text{ pravi razlomak)} \tag{6}$$

Supstituiramo li ovaj izraz u (3), dobijamo:

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{n}}$$

ili

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{128}{125} \tag{7}$$

ili

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^n$$

Odavde opet zaključujemo uzimajući za n vrijednost od 1 do 10, da n mora biti u granicama

$$9 < n < 10$$

Tako bismo sada mogli postupiti dalje.

Uzmemo li da je $n = 9$, onda iz (6) izlazi

$$z = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$$

Ovo opet supstituiramo u (4), pa je

$$y = 3 + \frac{1}{z} = 3 + \frac{9}{28} = \frac{93}{28}$$

a konačno stavljeno y u (2) imamo

$$x = \frac{1}{y} = \frac{28}{93} = 0{,}30107$$

Dakle je

$$x = \log 2 = 0{,}30107$$

dok u tablicama nalazimo, da je $\log 2 = 0{,}30103$. Prema tome ovdje nađena vrijednost 0,30107 točna je na 4 decimale.

Posve sličnim postupkom mogli bismo izračunati i logaritme svih ostalih prostih brojeva, ali to nije potrebno. Ovdje smo samo htjeli naznačiti i pokazati, da se i elementarno mogu izračunati logaritmi. Mi danas ne treba da obavljamo ni ovaj posao, jer su logaritmi brojeva prirodnog niza jednom izračunati i unijeti u logaritmičke tablice i mi danas ništa drugo ne treba da radimo, nego da naučimo spretno rukovati s tablicama.

Mogu još spomenuti da za široku praksu tehničara i drugih postoji i jedan čisto praktičan instrument, pomoću koga se vrši računanje. Taj instrument bazira na logaritmičkoj podjeli, pa se stoga i zove *logaritmar* ili *logaritmičko računalo*. Ono se upotrebljava tamo, gdje baš nije potrebna vrlo velika točnost, jer se na njemu mogu čitati vrijednosti do dvije decimale točno. Bez njega danas ne možemo zamisliti jednog tehničara, inžinjera i drugog praktičara, koji imaju posla sa računom. Oni su se sa logaritmarom toliko saživjeli, da se na račun toga pravi šala, da je jedan čak na pitanje koliko je $3 \cdot 4$ pogledao na logaritmar i očitao vrijednost 11,99.

4. Metoda više matematike.

Ovdje ćemo samo u najkraćim crtama opisati metodu više matematike, kojom se mogu izračunati logaritmi sa vrlo velikom točnošću t. j. na onaj broj decimala, koji želimo. Natuknut ćemo samo da se tu radi o razvijanju logaritamske funkcije u konvergentne beskonačne redove. Prednost ove metode nije samo u tome, što se daleko brže izračunavaju tražene vrijednosti, nego se može odrediti i granica pogreške.

Prema tome je ovo jedna opća metoda, koja ima sva svojstva dobroga postupka, koji se da s uspjehom primjeniti u praksi.

Od svih vrijednosti, koje se mogu izabrati za bazu logaritama upotrebljavaju se samo dvije, to su brojevi 10 i $e = 2{,}7182818\ldots$ Kao što je poznato, logaritmi sa bazom 10 zovu se obično *Briggsovi* logaritmi, a logaritmi s bazom e zovu *prirodni logaritmi*. Obični se logaritmi upotrebljavaju kod numeričkih računa, a prirodni se upotrebljavaju u cijeloj višoj matematici, jer mnoge formule poprimaju mnogo jednostavniji oblik.

Između dva različita logaritamska sistema postoje izvjesne relacije. Tako između običnih i prirodnih logaritama postoji relacija

$$\log x = \log e \cdot \ln x$$

(gdje je *log* e — *modul dekadskih logaritama* — označen sa $M = 0{,}43429448$).

Do predhodne relacije dolazimo ovako:

Iz

$$y = \log x \text{ slijedi } 10^y = x$$

$$z = \ln x \quad ,, \quad e^z = x$$

odatle

$$10^y = e^z$$

Logaritmiramo li ovu jednadžbu, dobijemo

$$y \log 10 = z \log e$$

Budući da je

$$log\ 10 = 1 \text{ i } ln\ e^z = z = ln\ x$$

to imamo

$$y = log\ x = log\ e \cdot ln\ x$$

Prema tome vidimo da ćemo vrijednosti običnih logaritama dobiti, ako vrijednosti prirodnih logaritama pomnožimo sa modulom $M = log\ e = 0{,}4342\ldots$ Ovo je bilo potrebno istaći, jer ćemo u daljem raditi sa prirodnim logaritmima s kojima upravo radi viša matematika.

Postupak je slijedeći: Treba funkciji $y = ln\ x$ razviti u beskonačan red. Mi ćemo ovdje koristiti samo rezultate. Tako se primjenom t. zv. Mac-Laurin-ovog reda dobije, da je

$$ln\ (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + R$$

gdje je R ostatak, koji postaje po volji malen, ako uzmemo dovoljno veliku vrijednost od n. Ovaj se razvoj može primjeniti i za $x = 1$, pa se dobije

$$ln\ 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Ali ovaj red nije još zgodan za numeričko izračunavanje logaritama, jer on, kako kažemo, sporo konvergira t. j. da se dobije dovoljna točnost, treba uzeti vrlo veliki broj članova. Stoga se upotrebljavaju drugi razvoji sa boljom konvergencijom. Takav je razvoj:

$$ln\ (x + 1) = ln\ x + 2\left[\frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{3(2x + 1)^3} + \frac{1}{5(2x + 1)^5} + \ldots\right] \quad (8)$$

Stavimo li $x = 1$ imamo

$$ln\ 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right)$$

Nadalje nađemo:

$$\frac{1}{3} = 0\ 333333$$

$$\frac{1}{3\ 3^3} = 0{,}012346$$

$$\frac{1}{5 \cdot 3^5} = 0{,}000823$$

$$\frac{1}{7\ 3^7} = 0{,}000065$$

$$\frac{1}{9 \cdot 2^9} = 0{,}000005$$

Zbrojimo li ovih pet članova dobijemo 0,346572 (točno na 5 decimala), pa je prema tome

$ln\ 2 = 2 \cdot 0,346572 = 0,693144$ (točno na 5 decimala); ali kako tražimo $log\ 2$ onda je

$$\begin{aligned} log\ 2 = M \cdot ln\ 2 &= 0,434294 \cdot 0,693144 \\ &= 0,30103 \end{aligned}$$

I tako dalje.

Veća bi se točnost postigla ako bismo u razvoju uzeli veći broj članova izračunatih na veći broj decimala.

Stavimo li u jednadžbu (8) $x = 2$, dobijemo

$$\begin{aligned} ln\ 3 = ln\ 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \ldots\right) \\ = 1,098612 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} log\ 3 = M \cdot ln\ 3 &= 0,434294 \cdot 1,098612 \\ &= 0,477121 \end{aligned}$$

Ovaj se postupak može produžiti dalje na ostale proste brojeve, a pomoću ovih se mogu onda izračunati i vrijednosti ostalih složenih brojeva.

Milenko Sevdić

SUMIRANJE NEKIH REDOVA

I. Sumiranje n prvih brojeva.

Promatrajmo sliku (sl. 1) $AEFB$, koja je kako vidimo načinjena iz pravokutnika sastavljenih po redu iz 1, 2, 3, ... n kvadrata.

Prema tome ta nam slika predočuje sumu

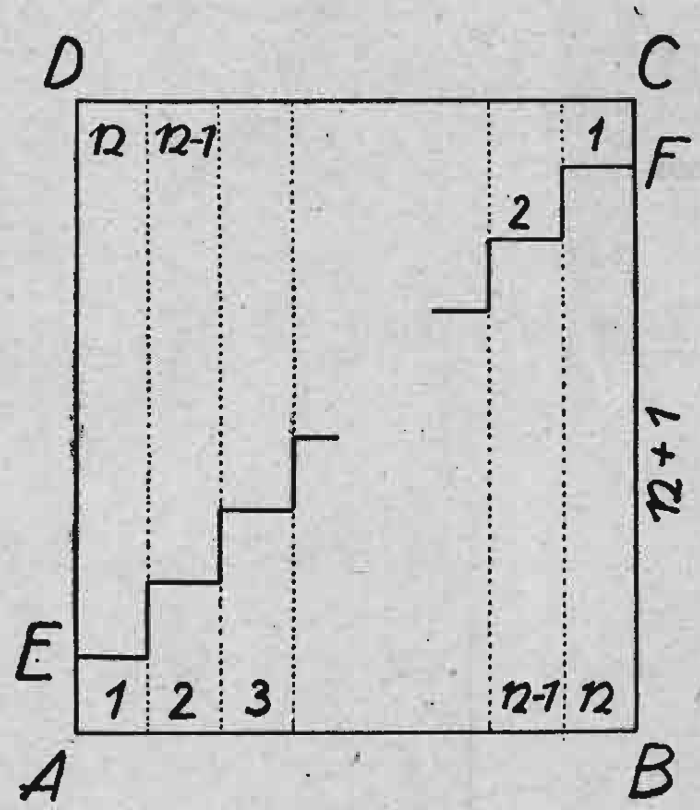
$$S = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Ako ovoj figuri $AEFB$ dodamo posve jednaku figuru $DEFC$ dobit ćemo pravokutnik $ABCD$, koji sadrži $n \cdot (n + 1)$ kvadrat. Taj pravokutnik $ABCD$ nije dakle ništa drugo nego dvostruka površina S. Stoga je

$$2S = n \cdot (n + 1)$$

ili

$$S = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$



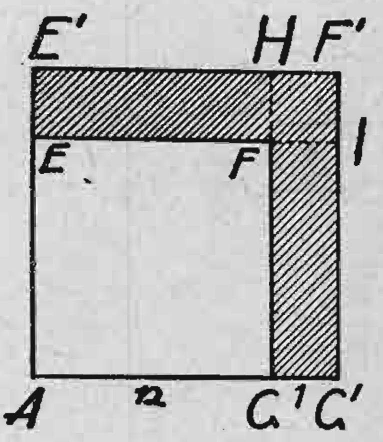
Sl. 1.

II. Sumiranje n prvih neparnih brojeva.

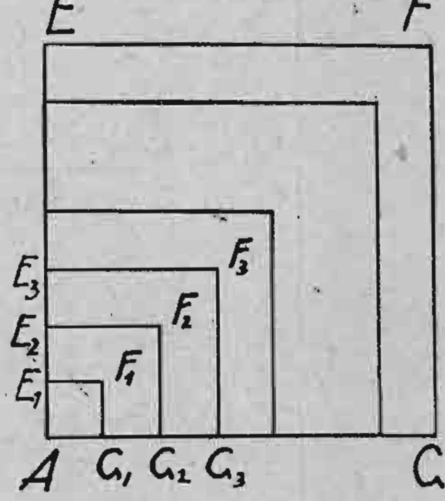
Ovaj geometrijski postupak sumiranja n prvih neparnih brojeva potiče od Pitagorejaca, kao što tvrdi Aristotel u svojoj fizici.

Promatrat ćemo kvadrat $AEFG$ i kvadrat $AE'F'G'$. Vidimo da prvi ima stranicu od n jedinica, a drugi od $(n+1)$ jedinica. Razlika između ova dva kvadrata je naznačena iscrtkanim dijelom slike. Ova se figura kod Grka nazivala *gnomon,* a sastoji se kao što vidimo iz jednog kvadrata površine 1 i dva pravokutnika $EE'HF$ i $GG'IF$, koji zajedno imaju površinu $2n$. Prema tome ćemo od kvadrata n^2 dobiti kvadrat $(n+1)^2$, ako prvom kvadratu dodamo jedan gnomon, koji pretstavlja neparan broj $2n+1$. (Sl. 2.).

I tako ćemo sada kvadratu $AE_1F_1G_1$ (sl. 3), koji ima vrijednost 1 dodati gnomon, čija je vrijednost prema gornjoj



Sl. 2.



Sl. 3.

formuli $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Dobit ćemo dakle kvadrat $AE_2F_2G_2$ čija je vrijednost

$$1 + 3 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4.$$

Ovome kvadratu $AE_2F_2G_2$ dodat ćemo gnomon, čija je vrijednost $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Time dobijemo kvadrat $AE_3F_3G_3$, koji ima vrijednost

$$1 + 3 + 5 = (2 + 1)^2 = 3^2$$

Dakle je suma prvih n gnomona ili što je isto suma n prvih neparnih brojeva pretstavljena kvadratom, koji ima stranicu n, i prema tome površinu n^2. Tako je suma n prvih neparnih brojeva jednaka kvadratu njihovog broja.

III. Naći sumu reda $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$.

Ako sa S označimo traženu sumu, imamo

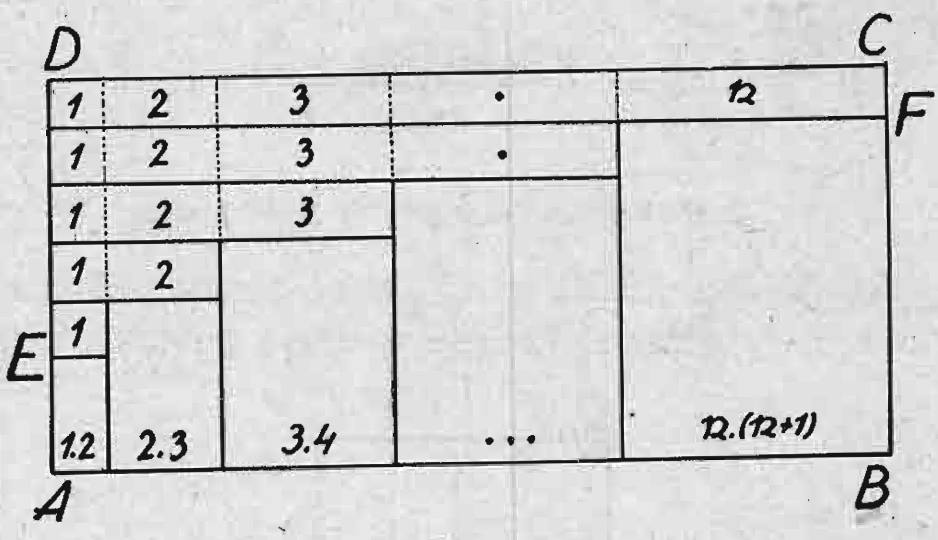
$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) \qquad (2)$$

ili

$$\frac{S}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$$

Ovu relaciju možemo opet prema I (1) pisati ovako:

$$\frac{S}{2} = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots +$$
$$+ (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \tag{3}$$



Sl. 4.

Načinimo pravokutnik $ABCD$ (sl. 4). Strana AB ima, kako što vidimo iz slike,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

jedinica, dok strana AD ima $n + 2$ jedinice. Prema tome je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2} \tag{4}$$

No kako izlomljena crta EF dijeli ovaj pravokutnik $ABCD$ u dva dijela t. j. u lik $AEFB$ i lik $DEFC$, od kojih prvi svojom površinom pretstavlja upravo

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$$

a drugi (pogledaj vodoravne retke) daje (3) t. j.

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots +$$
$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{S}{2}$$

Prema tome (2) i (3) zajedno daju (4). I mi imamo

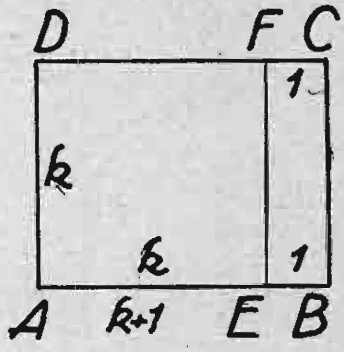
$$S + \frac{S}{2} = \frac{3S}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

odakle se odmah dobije

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

IV. Suma kvadrata prvih n brojeva.

U pravokutniku $ABCD$ (sl. 5) neka strana AD iznosi k, a strana AB $k+1$ jedinicu. Tada je njegova površina $k(k+1)$.



Sl. 5.

Nadalje kvadrat $AEFD$ ima površinu k^2, dok je k površina pravokutnika $EFCB$. Stoga je:

$$k^2 = k(k+1) - k$$

Uzmemo li je ovdje za k po redu 1, 2, .. n imat ćemo

$$1^2 = 1(1+1) - 1 = 1 \cdot 2 - 1$$
$$2^2 = 2(2+1) - 2 = 2 \cdot 3 - 2$$
$$3^2 = 3(3+1) - 3 = 3 \cdot 4 - 3$$
$$\dots\dots$$
$$n^2 = n(n+1) - n = n(n+1) - n$$

Zbrojimo li lijeve i desne strane i označimo li sa S traženu sumu dobijemo

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots +$$
$$+ n(n+1)] - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

zbog (5) u III. i (1) u I. možemo to pisati ovako

$$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

ili

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

V. Naći $S = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Ovu ćemo sumu izvesti na način, kako je to učinio Alkharkhi arapski algebričar početkom 11. stoljeća.

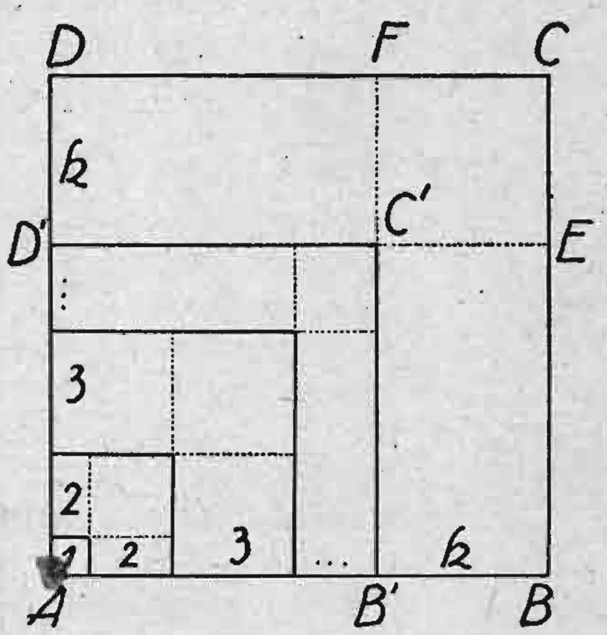
On promatra kvadrat $ABCD$ sa stranom $1 + 2 + 3 + + \ldots + k$. U njemu je konstruirao druge kvadrate, koji imaju vrh u A, a strane im padaju na stranu AB i AD (sl. 6). Strane ovih kvadrata jesu po redu

$$1,\ 1 + 2,\ 1 + 2 + 3, \ldots.$$

Ma koji gnomon $BCDD'C'B'$ ima površinu:

2 pravokut. $DD'CE$ — *kvad.* $CFC'E = 2 \cdot k \cdot AD - k^2$.

No kako je prema I (1)



Sl. 6.

$$AD = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

to je površina gnomona

$$2 \cdot k \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k^2 = k^2(k+1) - k^2 = k^3.$$

Dakle, promatrani gnomon širine k, ima površinu k^3. Prema tome gnomoni u našoj slici imaju po redu površine

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3, \ldots, n^3,$$

a suma svih tih gnomona pretstavljena je kvadratom čija je strana $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Prema tome dobijemo relaciju

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

M. Sevdić

KAKO JE TALES IZMJERIO VISINU KEOPSOVE PIRAMIDE

S Talesom, započinje grčka nauka. Rođen je oko 624 prije n. e. od oca Feničanina i majke Grkinje. Kako se bavio trgovinom ulja i soli, sastajali su se u njegovoj kući trgovci, ali i ljudi, koji su se interesirali naukom. Od njih je saznavao mnoge vijesti, naročito o astronomiji i matematici. Ove Talesov interes za astronomijom i znanjem imao je praktičnu pozadinu. Kao pomorac i trgovac morao je dobro vladati ovim predmetima. Još kao mladić pokazivao je bistrinu uma i veliko znanje. To ga nije zadovoljavalo, jer je čuo, da postoji neko dublje, starije i jasnije znanje, čiji izvori potječu tamo iz Egipta. Kako su u Delti Nila bile grčke naseobine to je i on pošao u taj kraj. Ova svoja trgovačka putovanja iskoristio je, da dođe u vezu i sa učenim ljudima onoga doba. U Egiptu su ga poučavali egipatski svećenici; poučavali su ga, kako se mjere i izračunavaju jednostavne stvari, ali ga nikako nisu upućivali u tajne svoje kaste. Svećenici su bili uzurpirali znanje kao privilegij svoje klase, dok široke mase nisu o tome smjele ništa znati. Međutim Talesov um počinje da radi, počinje da samostalno razmišlja i da tako stvara zaključke. Naročito se pročuo u širokim masama svoga rodnog grada Mileta, kada je prorekao jednu pomrčinu Sunca 585. godine prije n. e. To mu je pribavilo nadimak *»Mudrac iz Mileta«*, te je on upravo jedan od poznatih sedam mudraca sa istoka. Od njega su nam ostali i neki geometrijski poučci, a poznato je, da je izračunao i udaljenost lađe od obale u aleksandrijskoj luci. U slijedećem izvatku iz Colerusove knjige *»Od Pitagore do Hilberta«* rekonstruiran je momenat izmjere visine Keopsove piramide.

*

— Tako on stoji u pustinjskom pijesku podno velike piramide. Jedan od svećenika ga smješeći se zapita, koliko je visoka piramida kralja Chufu (Keops). Tales malo razmišlja pa odgovara, da on ne će visinu cijeniti od oka, nego će je izmjeriti i to bez ikakvog naročitog pribora, bez svakog pomoćnog sredstva. Legao je u pijesak i odmjerio vlastitu dužinu tijela.

»Što li to namjerava?« — pitaju se svećenici. — »Stat ću jednostavno, — objašnjava on, — na jedan kraj ove izmjerene dužine svoga tijela i čekat ću, dok moja sjena ne bude točno onoliko dugačka, kolika je i dužina moga tijela. U istom trenutku mora i dužina sjene piramide vašega faraona Chufu iznositi točno onoliko koraka, koliko je i piramida visoka«.

Dok je svećenik zabezeknut nevjerojatnom jednostavnošću rješenja još razmišljao, da tu nije možda pogrešan zaključak, da se tu možda ne krije kakva smicalica, Tales već dalje govori:

— »A ako hoćete, da vam ovu visinu izmjerim u ma koje doba dana, tada ću zabosti ovaj štap u pijesak. Gle! — njegova sjena iznosi upravo polovinu štapa. Prema tome mora sada i sjena piramide da iznosi polovinu njene visine. Vi ste inače sposobni, da mjerenja izvodite vrlo točno. Treba samo dužinu štapa isporediti sa dužinom sjene, pa onda — da dobijete visinu piramide — pomnožite duljinu sjene piramide s dobivenim brojem«.

Na ovaj je način Tales iz Mileta iznenadio i zadivio Egipćane. Egipatski svećenici se nisu toliko čudili rezultatima Talesovih otkrića, koliko onoj čudnoj snazi promatranja, koja je bila njima strana, a kojom je Grk poopćio i riješio postavljenu zadaću.

PRAVCI I GEODETSKE LINIJE

Motrimo površinu promjenljive zakrivljenosti, na pr. površinu kojega kraja u Francuskoj, s njegovim brežuljcima, brdima i dolinama. Prolazeći tim krajem uzduž i poprijeko moći ćemo ići pravcem dotle, dok smo na ravnome. Pravac se na neprekinutoj ravnici odlikuje time, što je on najkraći put među dvjema točkama. U njega je i ta osobina, da je među dvjema točkama jedini svoje vrste i jedini svoje dužine, a drugih je linija, krivih, dužih od te ravne, moguće povući veoma mnogo, da spajaju obje točke i da su jednako dugačke.

Ali eto stigosmo do brežuljaka. Da dođemo s jednoga mjesta na drugo, koje je preko brda, ne možemo više ići pravcem. Kakogod pošli, put će nam biti zakrivljen. Ali od svih mogućih različitih putova, koji po brežuljku vode od jedne točke do druge, ima jedan i to uopće samo jedan kraći od svih drugih, kao što se možemo osvjedočiti konopom. Taj najkraći put, jedini svoje vrste, zove se *geodetska linija* površine, po kojoj idemo.

Tako isto ne može ni jedna lađa ploviti u ravnoj crti od Lisabona do Newyorka. Svakoj mora da je put zakrivljen, poradi toga, što je Zemlja okrugla. Ali među mogućima zakrivljenim stazama ima jedna tu prednost, da je kraća od svih drugih, a to je ona, koja ide smjerom glavnog zemaljskoga kruga. Lisabon i Newyork leže gotovo na istoj paraleli, pa ipak brodovi dobro paze, da iz Lisabona ne pođu prema Newyorku ravno na Zapad držeći se paralele, već zaplove malo na Sjevero-Zapad tako, da u Newyork stižu sa Sjevero-Istoka držeći se otprilike glavnog zemaljskog kruga. Na našem je globu kao i na svim kuglama geodetska linija, najkraći put od jedne točke do druge, luk onoga glavnoga kruga, koji tim točkama prolazi.

I tako se na svakoj krivoj površini može povući od jedne točke do druge jedna linija s tom prednosti, da je najkraća, to jest može se povući geodetska linija, koja je na krivoj površini ono, što je u ravnini pravac.

. . . . . .

Gdje je Svemir zakrivljen, ondje je geodetska linija kriva. Gdje je malone euklidski, ondje je ravna.

. . . . . .

Geodetske linije, linije najmanje daljine, otkrit će nam jasno vezu između ustrajnosti i teže, koja se u euklidskom svijetu klasične nauke nije pokazala. Radi toga je i nastao newtonovski distinguo između principa ustrajnosti i sile teže.

Nama relativistima nije sad više potreban taj distinguo. Daleko od svakog polja gravitacije giblju se tvarne mase kao i svjetlost u pravcu, a kraj masa s gravitacijom giblju se u krivuljama. U Svemiru ne može slobodna tvarna točka poći drugim putem do geodetskom linijom poradi simetrije.

Ako dakle uzmemo na um, da sile teže, koju je dozvao Newton, nema — a takvo je djelovanje u daljinu i veoma hipotetično — ako uzmemo na um, da su u praznu prostoru sva tjelesa slobodno prepuštena sama sebi, ne možemo odoljeti, da ne izrečemo ono, što veoma jednostavno ujedinjuje te nekoć rastavljene sestre, ustrajnost i težu. S v a k o t i j e l o s l o b o d n o p r e p u š t e n o s a m o s e b i o p i s u j e u S v e m i r u g e o d e t s k u l i n i j u.

Daleko od zvjezdanih masa ta je geodetska linija ravna, jer je Svemir ondje gotovo euklidski. Ona je blizu zvijezda kriva, jer Svemir ondje više nije euklidski.

Divota, kako ovo shvaćanje pod jedinim pravilom ujedinjuje princip ustrajnosti i zakon teže! Pred snažnom sintezom mehanike i gravitacije iščezava kobni razdor, koji tim naukama nije dao, da se približe.

U toj smionoj i prostoj teoriji gravitacija nije više nikakova sila. Planeti opisuju krivulje radi toga, što je Svemir blizu Sunca zakrivljen kao svagdje, gdje je nagomilano tvari. Najkraći put od jedne točke do druge jest linija, koja se nama bijednim patuljcima samo zato čini ravnom, što je mjerimo premalenim mjerilom i na neznatne daljine. Kad bismo je mogli pratiti milijune kilometara daleko i dovoljno dugo, našli bismo, da je svinuta.

Ukratko, ako dopustite, da iznesem sliku, analogiju, opisuju planeti krivulje zbog toga, što prolaze putovima u zakrivljenom Svemiru najprohodnijima, kao što na trkalištu koturaši, kad dođu do zaoketa, ne treba da upravljaju kotačem, već samo tjeraju naprijed, budući da im savinuta kosina sama od sebe skreće put uokrug. Na trkalištu je kao i u sunčanom sustavu zakrivljenost, što bliže nutarnjem rubu trkališta, sve izrazitija.

Sad treba samo da Svemiru, prostor-vremenu, u različitim njegovim točkama pridijelimo takvu zakrivljenost, da geodetske linije budu baš putovi planeta i putovi, kojima tjelesa padaju, uzimajući, da zakrivljenost u svakoj točki Svemira potječe od tvarnih masa, koje su ondje ili u blizini.

Kod toga treba držati na umu, da »Interval«, to jest dio geodetske linije među dvjema veoma blizim točkama, mora biti invarijanta za svakog opažača. Desit će se dakle, da će jedna te ista geodetska linija biti pijancu, koji tetura, zakrivljena, a možda i vijugava, a opažaču na miru ravna. Dužina te linije uvijek je ista, bila linija ravna ili zakrivljena.

Uzevši u obzir sve to i matematičku vještinu, koja čudesa stvara u poslu, o kome je bilo dosta govora, dobio je Einstein zakon gravitacije u savršeno invarijantnom obliku«.

(Iz *»Einstein i svemir«)*

Charles Nordmann

PUPINOV KALEM

»Tokom prve polovine ljeta 1894., moja supruga i ja stanovali smo u jednom malom hotelu na jezeru Veneuse, u Švicarskoj. Pripremao sam svoja predavanja iz matematičke teorije o zvuku. Problem na koji sam prvi put naišao u sjajnoj Lagrangeovoj raspravi..... bio je hipotetičan, odnosio se ne na stvarnu fizičku pojavu već na pojavu, koja se može u mašti stvoriti.

Rastegne se između dvije utvrđene točke konac bez težine. Na jednako razdaljenim točkama na tom koncu privežu se jednaki utezi. U pitanju je ovo: Kako će tako opterećeni konac treperiti kada ga nešto zadrma. Lagrange je našao jedno lijepo rješenje toga historijskog problema, i to rješenje bilježi jedno razdoblje u historiji matematike primjenjene na fiziku. Ovo rješenje mu je pomgolo da ispita treperenje žica na violini. To je bio jedan od čuvenih matematičkih problema 18. stoljeća. A ja se usudih da pristupim jednom smjelom pokušaju: da riješim jedan više opći, a manje hipotetični oblik ovoga problema. Moja pretpostavka je bila: da i konac ima svoju težinu, pa da i on, kao i mali tegovi na njemu, treperi u jednom medijumu, koji daje otpor usljed trenja. Rješenje sam naslućivao i držao da bi ono bilo od vrlo velikog naučnog značaja. Na kraju, nađoh i jedno sasvim opće matematičko rješenje za ovaj problem i u ovako općenom obliku. A ljepota tog rješenja sastojala se u tome, što se ono moglo izraziti na vrlo prost način.

... Dok sam tako pješačio osamljen, stalno bih razmišljao o ovom svom rješenju tog Lagrangeovog problema u ovako uopćenom obliku. Jednoga dana dok smo se penjali uz klanac Furka, na pamet mi dođoše ove misli: pošto kretanje elektriciteta kroz neku žicu nailazi na sile otpora slične onima, koje se opiru kretanju materijalnih točaka u zategnutoj žici, ovo moje ovako uopćeno rješenje gore spomenutog problema moglo bi se primijeniti i na kretanje elektriciteta. Tog istog časa, bio sam svjestan da sam došao do jednog vrlo značajnog pronalaska.

... Kada se oporavih od teške bolesti 1896., ponovno se vratih ovom svom napuštenom problemu«.

Ispoređujući pojave prenošenja zvuka sa prenošenjem elektriciteta kroz provodnik došao sam do zaključka — »da indukcija žice treba da je što moguće veća, a njen kapacitet što je moguće manji. To se vidjelo potpuno jasno i iz radova Tomsona i Kirhofova dvadeset godina prije nego što su Vaši i Hevisajd počeli da razrađuju matematičku teoriju o telefonskom prenosu.

... Ako, dakle, indukcija povećava u telefonskoj prenosnoj žici njenu sposobnost za prenos električne struje, čovjeku se sama od sebe nameće pomisao: da pojača indukciju te žice. To će učiniti na taj način, što će na telefonskoj žici staviti veći broj kalema od žice, pa onda ispitivati način toga svog metka na sreću. Vaši je to pokušao, ali mu nije pošlo za rukom. To isto pokušao je, ali također bez uspjeha, i Pikernel, glavni elektrotehničar u telefonskom odjelenju Amerikanske Telefon. i Telegraf. Kompanije. Kao što je to Hevisajd rekao, svakome je već trebalo da bude jasno, da se od takvih pokušaja ne može ništa očekivati. Nu ja ipak pokušah i nađoh da u tom pokusu ima vrlo mnogo izgleda, da se indukcija baš na taj način uvede. Uspio sam, ali zbog toga što nisam radio na sreću: vodio sam računa o matematičkom rješenju uopćenog Lagrangeovog problema.

... Da se napravi indukcioni kalem potrebno je bilo toliko isto matematičke analize, koliko je potrebno i dinamičke teorije o ovom izumu; a i način da se sve to okuša bio je također nova stvar za elektrotehničare«.

Taj kalem je sada poznat širom svijeta pod imenom »Pupinov kalem«, a vidimo da je Pupin do rješenja problema došao samo pomoću matematike.

(Iz knjige »*Sa pašnjaka do naučenjaka*«)

Mihajlo Pupin

OPTIČKE OBMANE

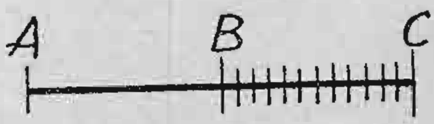
Da bismo pokazali što su to »optičke obmane« uzmimo kao primjer željezničke tračnice. One su objektivno potpuno paralelne, no subjektivno izgleda da se one sijeku. I čovjek zaključuje: to je nemoguće, to je obmana, jer mi znamo da se tračnice ne sijeku. Prema tome to što nam izgleda da se sijeku, samo je »*obmana*« našega oka. Smatralo se, da od dva protivurječna suda, jedan mora biti pogrešan, a drugi točan. Ali to je posve netočno. Tzv. »optičke obmane« nisu nikakve obmane, već su to potpuno realni, prirodni i subjektivno istiniti fenomeni. Zbog čega se onda nazivaju »obmanama«? Uzrok leži u ispoređivanju tih subjektivnih fenomena sa objektivnim svijetom stvari. Međutim su ta dva svijeta različita, a ispoređivati se mogu samo slične stvari. Dakle za jedan te isti predmet možemo imati dva apsolutno istinita suda, svaki sa svog stanovišta. Tako nam jedan te isti polukrug izgleda i konkavan i konveksan već prema tome s koje ga strane gledamo. I nama izgleda da se željezničke tračnice sijeku. To je sasvim normalan fenomen našega ćutila vida, jer štogod se te tračnice više udaljuju od naših očiju, to je sve manji vidni kut. Daleko ubjedljiviji bi bio slijedeći primjer. Jedan uteg od 10 *kg* ostaje objektvno uvijek isti, jer nam to pokazuje vaga. Ako počnemo dizati taj teret, on će nam izgledati sve teži, štogod ga više puta budemo dizali. I ovaj je fenomen potpuno istinit, a ne obmana. On se objašnjava zamorom naših mišića t. j. on je sasvim prirodan samo subjektivan fenomen. Oba su fenomena točna i istinita svaki sa drugog stanovišta.

Zato bismo mogli kazati, da subjektivni fenomeni naših ćutila nisu obmane. Što se tiče ćutila vida, treba znati, da mi njime ništa ne vidimo onako, kako je to objektivno. Tako mi sve vidimo perspektivno. Iste veličine izgledaju nam manje ako su dalje.

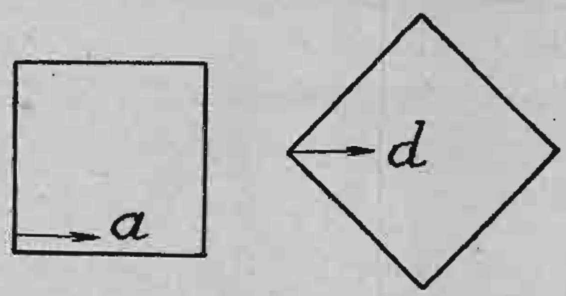
Što se tiče »optičkih obmana« one su do nedavna bile samo konstatovane, ali ne i protumačene. Nauka počinje konstatacijom nekog fenomena, ali je njen krajnji cilj njegovo tumačenje. Stoga je nauka samo onda nauka ako može da nam objasni zašto je nešto takvo kakvo je. To isto važi i za t. zv. optičke obmane. I sada ćemo prijeći na tumačenje ovih potpuno realnih subjektivnih fenomena. Njihov je broj veoma veliki i mi ćemo se ograničiti samo na najvažnije i najinteresantnije.

Ako jednu dužinu (sl. 1) objektivno raspolovimo, pa desni dio podijelimo nizom crtica, onda će nam podijeljeni dio izgledati veći od nepodijeljenoga. Tumačenje ovog pojava je u čisto subjektivnim uzrocima i leži u tome što je naše gledanje sukcesivno. Oči sukcesivno gledaju neiscrtkani dio od *A* do *B* klizeći po njemu bez prepreke i prijeđu ga za izvjesno vrijeme, dok na dijelu *BC* oči nalaze na niz prepreka i one se na neki način zadržavaju. Zbog tih prepreka na dijelu *BC* je pokret diskontinuiran, dok je on na dijelu *AB* kontinuiran. Kako su kontinuirani pokreti kraći nego diskontinuirani, to je vrijeme za vidnu percepciju veće na dijelu *BC*.

Slično je i u primjeru, ako promatramo jedan podijeljeni kut (na pr. na 4 dijela) i jedan isto veliki kut ali ne podijeljen. Podijeljeni kut nam izgleda veći, jer oči pri promatranju istoga



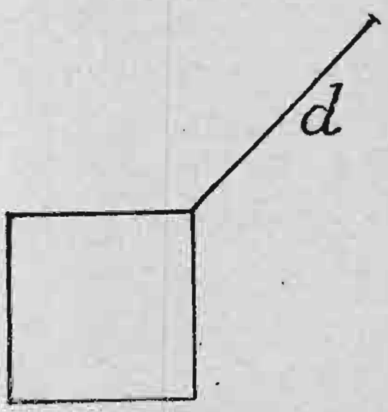
Sl. 1.



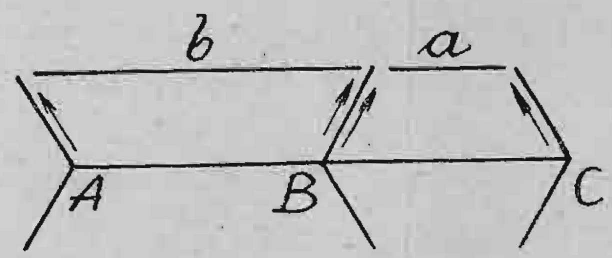
Sl. 2.

imaju niz senzacija, dok nepodijeljeni kut oči prelaze bez zadržavanja od jednog do drugog kraka.

Jasan dokaz da je naše gledanje sukcesivno i da mi prostor gledamo vremenski imamo u sl. 2. Lijevi kvadrat nam izgleda manji od desnog. To dolazi odatle što lijevi kvadrat gledamo duž strane *a*, a desni duž dijagonale *d*. Kako je dijagonala veća od strane, to je vrijeme gledanja dijagonale veće od vremena gledanja strane.



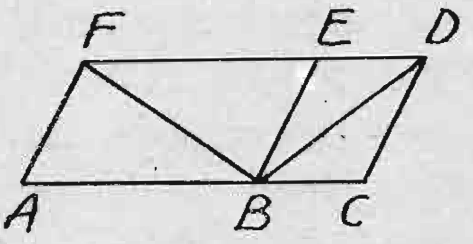
Sl. 3.



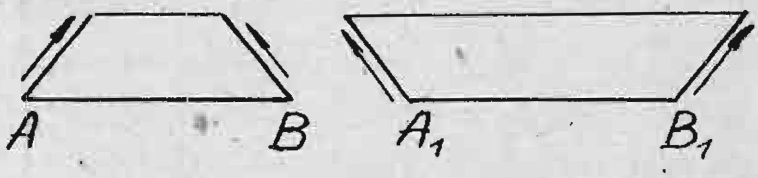
Sl. 4.

Još bolje se to vidi u sl. 3, gdje nam se pričinja da je dužina *d* veća od dijagonale i ako je ona jednaka dijagonali.

U sl. 4 imamo čuvenu M ü l l e r-L y e r o v u obmanu. Lijeva dužina *AB* izgleda nam veća od desne dužine *BC*. Tumačenje ovog fenomena nalazi se također u sukcesivnom gledanju, odn. u konvergentnom i divergentnom pokretu očiju. Desna nam

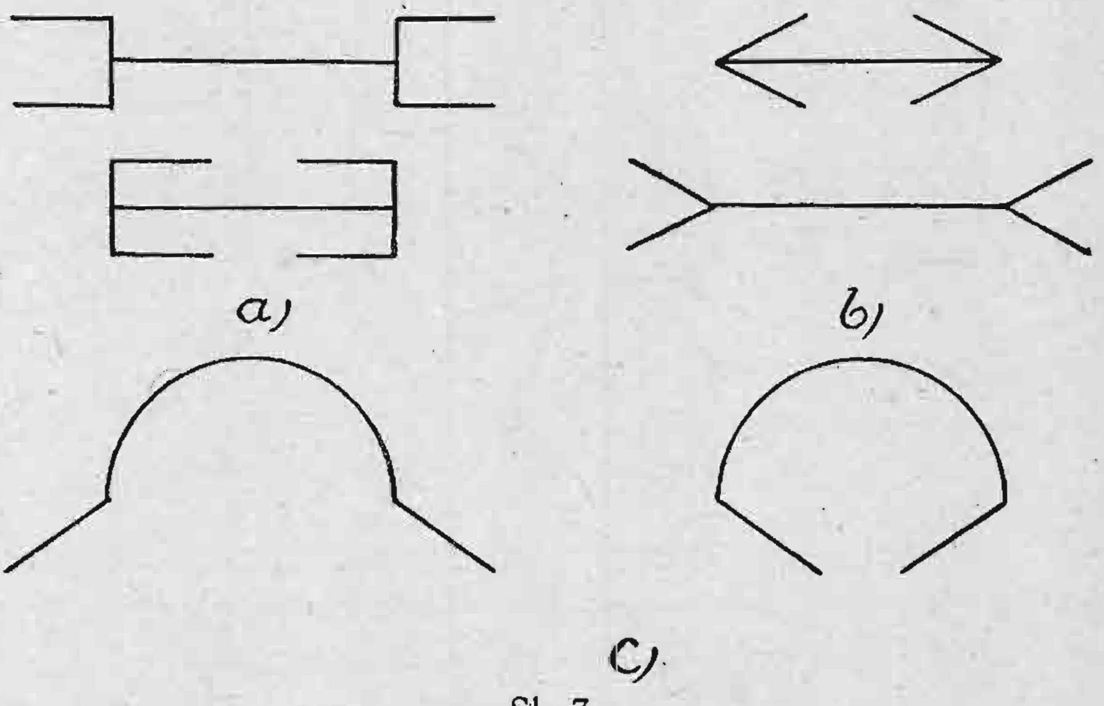


Sl. 5.



Sl. 6.

dužina izgleda kraća, jer mi konvergiramo od točaka *B* i *C* prema gore i prema dolje i utisak koji nam ostaje to je dužina *a* između konvergentnih strjelica. Tu se pokret očiju na neki način sužava, dok se on proširuje kada gledamo lijevu dužinu. Promatrajući dužinu *AB* naše oči idu od *A* i *B* divergirajući i



Sl. 7.

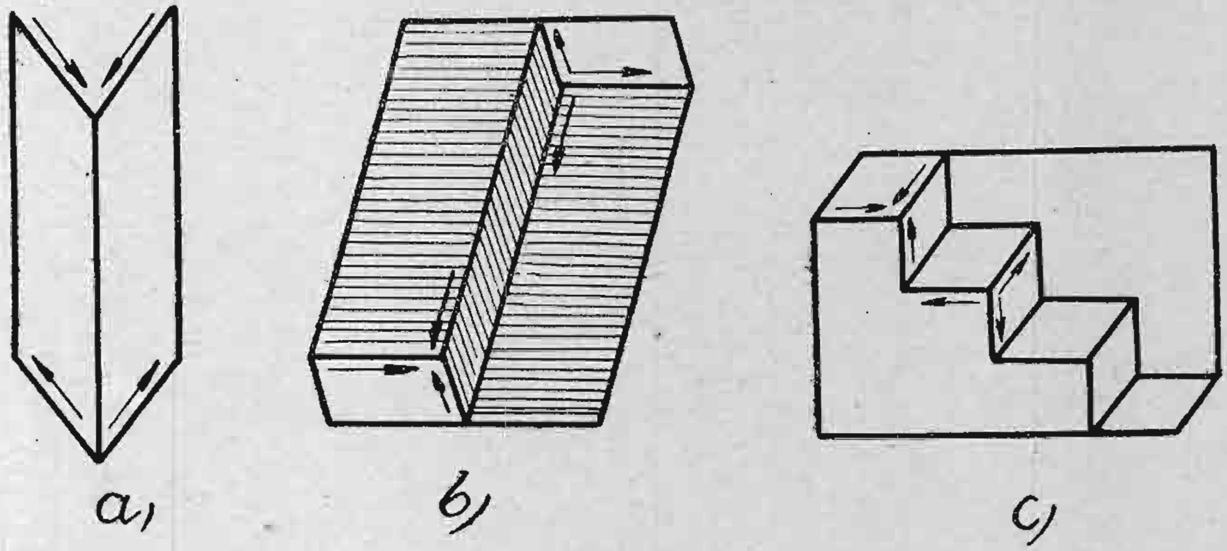
utisak, koji nam ostaje između divergentnih strijelica, je dužina *b* koja je veća od *a*. Očito je da će nam desni trapez ne samo izgledati manji nego je on i stvarno manji od lijevoga trapeza pa nam se stoga i pričinja sve manje u manjem trapezu.

Slično imamo i u fenomenu prikazanom u sl. 5. I ovdje dijagonala *BD* izgleda manja od dijagonale *BF* zbog toga što prva pripada manjem trokutu *BCD*, a druga većem trokutu *BFA*. Ovdje mi ne gledamo same dijagonale, jer onda ne bi bilo »obmane«, nego gledamo trokute od kojih je lijevi veći nego desni, pa imamo utisak da većem i pripada veće.

To imamo i u sl. 6, gdje su dva trapeza i za naše oči (subjektivno) a i objektivno različiti. Lijevi je manji od desnog, pa nam stoga u manjem i izgleda sve manje.

Isto to imamo i u sl. *7a), 7b)* i *7c)*.

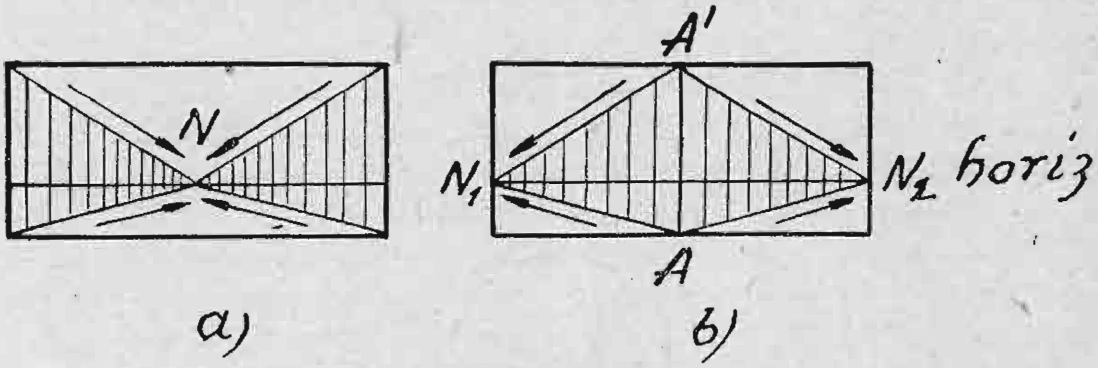
Završit ćemo sada sa najinteresantnijim i najvažnijim fenomenima. To su konkavkonveksni fenomeni. Na sl. 8 *(a, b, c)*



Sl. 8.

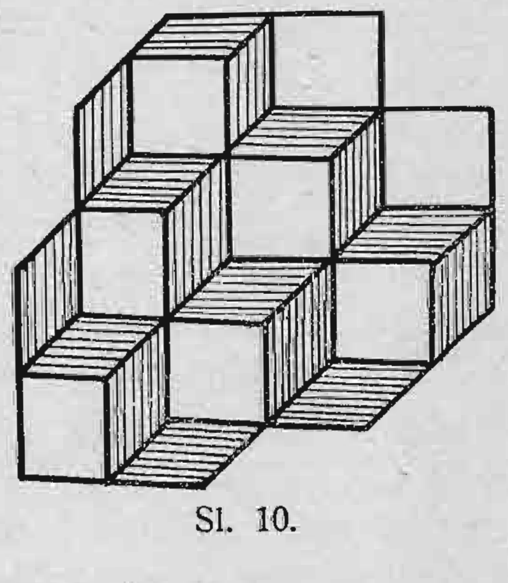
vidimo, da nam jedna te ista slika izgleda čas konveksna čas konkavna. Ovi su fenomeni najjači dokaz da je gledanje sukcesivno. Svi ovi fenomeni se tumače pokretima očiju. Tako ako se oči kreću od jednoga kuta konvergentno imat ćemo utisak udubljenog, a ako se kreću divergentno imat ćemo utisak ispupčenog. I danas kada znamo za uzrok tih fenomena mi ih možemo proizvoditi po svojoj volji. To u stvari i jeste cilj nauke, naime moći predvidjeti jedan fenomen. Ovo je pak moguće samo onda, ako se zna njegov uzrok. Ovi fenomeni nisu ništa drugo nego imitiranje prirodnog gledanja stvarno konkavnih i konveksnih tijela.

Uzmimo dvije perspektivne slike telegrafskih stupova. U prirodi (sl. 9 *a*) ti stupovi izgledaju sve manji u koliko se više udaljuju od naših očiju, jer je tada vidni kut sve manji. Što važi za vertikale važi i za horizontale. I one postaju sve uže što god se više udaljuju od očiju, dakle štogod je manji kut gledanja. Ova slika imitira prirodni fenomen pa zato i sliči njemu.



Sl. 9.

I u sl. 9 *b*) imamo imitiranje prirodnog fenomena. Iz ovih dviju slika vidimo da konkavnost dobijamo ako pogled konvergira prema nedogledu *N*, a konveksnost ako od srednje linije *AA'* idemo desno i lijevo t. j. ako nam pogled divergira. Ovaj princip se koristi kod tumačenja optičke obmane konkavkonveksnih fenomena predočenih u sl. 8 *(a, b, c)* i u naročito poznatom primjeru predočenom u sl. 10, gdje čas vidimo sedam čas šest kocki, već prema tome kako spajamo plohe u prvu kocku ili drugim riječima, da li pogledom konvergiramo ili divergiramo nekom vrhu.



Sl. 10.

Po Dr. M. Borisavljeviću

XI.

DVA STARA MATEMATIČARA DUBROVČANINA

MARIN GETALDIĆ

Dok naša stara kultura ima na nekim poljima ljudskog djelovanja dosta znatnih pretstavnika, dotle ih je u nauci malo, a u matematici bilo je tek dva glasovita matematička talenta. Njihov su značaj i veličinu priznali i drugi narodi i to prije nego mi sami. U novijoj našoj matematici već je stvar krenula na bolje. Polet je daleko snažniji, uspjeh je daleko veći, a rezultati takvi i toliki da se mogu staviti uz bok onima prvoga reda.

Marin Getaldić — znameniti matematičar — jedan je od onih rijetkih muževa, koji su u doba naše renesanse gajili matematiku s pravom ljubavi, pa je zaslužio da sačuvamo uspomenu na njega. Stekao je svjetsko priznanje i danas zauzima dostojno mjesto i u poznatim stranim historijama matematike.

Marin Getaldić rodio se 1566. god. Otac Matija nastojao je, da mu sin dobije što bolji odgoj. Marin se upoznavao s grčkim i latinskim klasicima i u tome pokazao veliki uspjeh. Stalan studij i solidno poznavanje klasičnih djela dali su kasnije njegovom stilu klasičnu ljepotu i jasnoću. Još od mladosti zavolio je naročito matematiku, dok filozofiju nije baš mario. U matematiku su ga uveli dubrovački učitelji matematike, kojih je bilo znatnih tu u to doba. Zapazivši njegov matematički talenat dali su mu mogućnosti da se razvija i radi. Nenadmašna djela Euklidova i dr. pokazivala su svu snagu svoje veličine pred njegovim očima. Kako je imao vrlo mnogo matematičkog smisla, bilo je odlučeno da pođe u Rim na dalji studij. Darovit i željan znanja, iako veoma mlad, našao je tu pogodne uvjete za rad.

Tu je slušao znamenitoga matematičara Kristofa Klavija (1537.—1612.), s kojim se poslije i sprijateljio. Ovaj ga je uveo u pravu matematičku nauku onoga vremena. Tu se već jasno opažalo, da će se Getaldić razviti u neumornog naučnog radnika.

U cilju da bi obogatio i proširio svoje matematičko znanje, u želji da lično upozna znamenite matematičare onoga doba, polazi na dugi put po Evropi. Punih 6 godina krstari on Evropom s prijateljem Gučetićem, koga je opet vodila želja da upozna narode i njihove običaje. Ne zna se točno, kada je započeo ta putovanja, ali se zna da je bio u Njemačkoj, Engleskoj i da se dugo zadržao u Francuskoj i Italiji. Jedino je sigurno, da je 1600. god. bio u Parizu, jer te godine izdaje jedno matematičko djelo Viete. Vieta (1540.—1603.), jedan od prvih francuskih naučenjaka, počeo je izučavati geometriju Apolonija i aritmetička istraživanja starih Grka. Plod ovih radova bilo je stvaranje nove matem. discipline — algebre. Iznašašćem algebre postao je centralna ličnost matematičkog svijeta. Stoga nije čudo da je i Getaldić kao izraziti matematičar postao oduševljeni sljedbenik Vietin. Od učenika postaje saradnik i prijatelj. Kako je cijenio Vietu možemo vidjeti i po ovim riječima: »Vieta, čovjek doista vrlo zaslužan za matematiku, kome ne samo naš, nego i prošli vijek možda ne će naći nikoga ravna po zasluzi oko ove znanosti, a kamoli boljeg«. U tako pogodnoj sredini, još više zainteresiran za matematiku, prevazilazi Getaldić u upotrebi algebre domala i svoga učitelja. I kod svih drugih, s kojima se sastajao, svojim mat. znanjem pobuđivao je divljenje. U Levenu (u Brabantu), gdje je bilo najglasovitije evropsko sveučilište htjeli su ga izabrati za profesora matematike, ali se on nije htio primiti te dužnosti. U odbijanju ponuđenog mu mjesta profesora matematike u Levenu možemo gledati ne samo izraz njegove skromnosti nego i izraz njegova principa, da je *»volio više učiti nego poučavati«*. Za vrijeme svoga putovanja sabrao je i upoznao tadašnje matem. znanje i s tako proširenim horizontom dobio je pobuda za samostalna istraživanja. Tek tada je mogao razviti svu svoju grandioznu matematičku sposobnost i pristupiti izdavanju svojih originalnih djela. I tako on u vremenu 1603. do 1607. pristupa izdavanju svojih pet matematičkih djela, koja su mu uopće izišla za života, jer njegovo najveće djelo, koje mu je pribavilo slavu jednog od najvećih matematičara, izašlo je istom poslije njegove smrti. Kada se povratio u Italiju, stekao je široki krug prijatelja. Bio je u intimnom prijateljstvu sa Sarpijem (1552.—1623.), znamenitim historičarem i publicistom. Na jednom mjestu u biografiji Sarpijevoj spominje se Getaldić i njegovo savršeno znanje u matematici. (»Da mu ili nema para ili ih je malo koji bi mu bili jednaki«). Između ostalog naročito je važna ova karakteristika o njemu: »kao anđeo po ćudi i životu svome, a demon u matematici«. Bio je čovjek vanredno meke i pitome duše, kao i vanredne širine uma i krotkog srca.

God. 1607. prestaje s izdavanjem djela. Tada se sigurno povratio u Dubrovnik, gdje se posvetio daljem naučnom istraživanju, a i službi Republike. Ipak u unutrašnjem životu Dubrovnika nije ostavio dubljeg traga i ako se govori o jednoj diplomatskoj misiji u Carigrad (1609. god.). Njegov matematički rad je svakako važniji od njegove političke akcije. U Dubrovniku je Getaldić živio dosta povučeno radeći ozbiljno. U ljupkoj tišini dubrovačke okoline razvio je svoju rijetko živu i inteligentnu radljivost posvećujući svo slobodno vrijeme matematičkim istraživanjima. Radio je na najvećem svom djelu. U posljednjim godinama pored rada na tom djelu bavio se i fizikalnim istraživanjima u jednoj špilji. Proučavao je konstrukciju sfernih i paraboličnih zrcala i kako je izvodio razne eksperimente s tim zrcalima o njihovom toplotnom učinku, to mu je kod laika i neukog puka taj rad pribavio ime čarobnjaka. Evo kako Cerva veli o njemu: »U zvijezdama je čitao budućnost, vladao je nad elementima i zapaljivao bi nekim određenim kretanjem svojih paklenih mašina sve vrste brodova, stoga se ni jedna ribarska barka ne usuđuje ni blizu onom nesretnom žalu.« Umro je u 58. godini života 1626.

Getaldić je u matematičkom poslu bio spreman i spretan; vidi se kod njega ne samo rijetka pronicljivost nego i solidna učenost. Zbog svojih sposobnosti, o kojima se izražavaju s najvećom pohvalom, bio je među svojim savremenicima poznat kao jedan od najboljih. Evo samo jedan primjer kako naš Bošković u svom djelu (»*De solis*...« London 1760.) slavi Getaldića »inter geometras celebrem illo ipso tempore quo nobilissima facultas a paucis admodum excelebatur.« Pored svog jakog talenta i solidne škole imao je još jedno blago od neocjenjive vrijednosti. Radio je veoma savjesno i ne vidi se nigdje tragova površnosti. Svestrano obrazovan, dobar na peru kao matematički pisac, ne samo da je originalan, nego je jedan od prvih naših ljudi, koji su svoj duh disciplinirali za matematička rezonovanja. Da bi nam jasniji izišao njegov karakter možemo navesti njegovu polemiku, koju je vodio sa Kirijakom (1570.—1642.) i Kristmanom (1554.—1630.). Pa i tu u odbijanju napada opaža se sva njegova čednost, učenost, ali i odlučnost. U polemici je taktičan. U polemici sa Kirijakom, koji je prigovorio rješenju nekih problema, kojima su se bavili Vieta i Getaldić, evo kako odbija prigovore; »Ali budući da nije riješio ono što obećava, mogao sam smatrati shodnim razložiti prvo da se ono dokazivanje, i ako je u njemu propušteno, što Kirijak spominje, zato nije moglo nazvati netačnim, a po tom da Kirijak uopće ništa nije nadopunio, premda je uzeo na sebe dužnost da nadopuni.« Dalje navodi kako ima štošta propušteno i kod Euklida, Apolonija i dr. pa »pošto se niko nije usudio kazati da ovi dokazi nisu točni, nevidim, što bi bio uzrok, zašto je Kirijak ovaj moj dokaz nazvao netočnim.« Tu odbija i to vrlo odrješito i prigovor Jakova Kristmana, koji veli da je Getaldićeva konstrukcija klimava. »U svom istraživanju zaista je mogao uzeti račundžija abaka, sasvim nevješt u geometrijskim dokazivanjima, brojeve nezgodne za konstrukciju problema, jer nije znao, da je problem određen i da se zato ne može iz makakvih podataka konstruirati; stoga se ne čudim, ako mu se učinilo, da je on zaveden svojim računom slabim zbog abaka, primijetio moju slabu konstrukciju.« U ovoj raspri brani od Kirijaka i determinaciju, koju je dao Vieta. Tu se ističu sva njegova prijateljska osjećanja prema Vieti. — »Ali, jer sam i sam teško podnosio, što se Kirijak usudio slavu takvog čovjeka ne bez neke nepromišljene primjedbe, da najblaže kažem, umanjiti; ne mogu da ne pokažem kako je sud Kirijakov daleko od istine u svojim prikorima. Ovo zaista od mene zahtjeva neka naročita ljubav prema Vieti, k tome poštovanje i vrlo tijesna veza prijateljstva, koja je bila između mene i njega u Parizu, a koja je pojačana uzajamnim uslugama. K tomu dolazi, što bih, kad je Kirjak u jednoj i istoj knjizi Vietu i mene korio zbog netačnog dokazivanja, bio neuslužan, kad bih napustivši stvar prijateljevu, samo svoju branio.«

Prelazeći na naučni rad Getaldićev možemo istaknuti da je Getaldić u prvom redu geometričar. Kada je Vieta uveo uopće brojeve i izveo čitav preokret u matematici, Getaldić je odmah shvatio važnost ovoga djela za dalji razvoj matematike. Evo kako O. Kučera veli: »On izražava prostorne veličine općim brojevima, računa s njima po novoj metodi Viete, uči kako se ovakvim načinom dobiveni izrazi imaju konstruirati. A da je prvi koji je općenitost ove metode shvatio i u svojim djelima konsekventno i metodički upotrebio, u tome je najveća njegova zasluga za matematičku nauku. Ovo spajanje opće aritmetike s geometrijom moralo je bezuvjetno dovesti s jedne strane do otkrića analitičke geometrije, a s druge do otkrića infinitezimalnog računa.«

Prva njegova štampana radnja je s područja fizike. »*Promotus Archimedes*« (Rim — 1603.). U njoj raspravlja ponajprije o poznatoj Hieronovoj zadaći o kruni. Tu je odredio specifičnu težinu 12 tijela. Po ovim eksperimentalno određenim spec. težinama, koje su veoma dobre za ono doba, ušao je i u historiju fizike.

1603. g. izlazi i drugo Getaldićevo djelo »*Nonnullae propositiones de parabola*« (Rim). — J. Majcen je *(Rad Jug. Akad. knj. 223)* pokazao da taj spis nije djelo optičkog sadržaja, nego samo u jednom svom dijelu aplikacija čiste geometrije na jedno svojstvo paraboličnog zrcala. Iz predgovora se razabire ovo: Plutarh, Vitelio, i Oroncije tvrde, da se za zrcala kojima se mogu upaliti materije, upotrebljavaju parabole, koje se dobiju presjekom uspravnog pravokutnog stošca, a Getaldić dokazuje, da se to može postići sa svim parabolama, koje postaju i iz oštrokutnog, tupokutnog i kosog stošca. Kod izvođenja konstrukcije parabole *(Probl. II. prop. 7,* vidi str. 107) u svom postupku bio je Getaldić posve blizu određenja jednadžbe parabole.

Istom 1607. g. izlaze tri dalja njegova djela. Da bi nam bila razumljiva prva dva od ovih dijela t. j. »*Apollonius redivivus*« i »*Supplementum Apollonii Galli*«, moramo znati ovo: Od Apolonija Pergejskog (250.—200.) sačuvala su se neka djela, dok su se druga izgubila, ali su kod kasnijih pisaca sačuvani ponekad samo naslovi. O njihovom se sadržaju moglo zaključiti po nekim primjedbama kod drugih pisaca. Zato su se najbolji matematičari 16. i 17. stoljeća odlučili da restauriraju izgubljene spise. Među onima koji su se s uspjehom prihvatili toga posla stoji u prvom redu naš Getaldić. Oba njegova djela potaknuta su Vietinim djelom »*Apollonius Gallus*« (1600.). Vieta je u tom uspio, ali nije uspostavio svih problema, pa je tako Getaldić u »*Supplementum-u*« — nadopunio Vietu. Djelo »*Apollonius redivivus*« posvema je samostalna radnja i znatan je napredak u geometriji onoga doba. Ono je već za života Getaldiću pribavilo najveću slavu. Koliko su cijenjena ova djela može se vidjeti po tome, što su ušla u najznamenitije priručne matematičke knjige. koje su služile za podlogu predavanjima.

God. 1607. izlazi i treće djelo »*Variorum problematum collectio*«. Tu je on po običaju ondašnjeg vremena, da su prvaci matematičari jedan drugome zadavali teže probleme na rješavanje, skupio 41 problem riješen geometrijskim postupkom. U njima se pokazuju originalna njegova rješenja.

Poslije 1607 izgleda da se Getaldić bavio optikom i astronomijom i spominju se neke radnje o tome, ali se nažalost do danas nisu našle. — Pored ovoga radio je on ipak i na polju matematike, jer istom četiri godine poslije smrti izdaju njegovo djelo njegove tri kćeri i brat mu Jakov. To je kruna njegovog matematičkog stvaranja: »*De resolutione mathematica*« *(Rim* — 1630.). O ovom djelu Kučera veli: »Proučavajući ovo djelo pričinja ti se često, da gledaš veliki duh matematički, koji je suveren gospodar u svojoj nauci gdje baca svoje poglede u budućnost nauke. Više stanovište Getaldićevo je u ovome: spoj algebre i geometrije u jednu nauku i posmatranje geom. problema pod utjecajem algebarske metode. U njemu je prvi put sasma općenito i konsekventno provedena metoda algebarskog rješavanja problema niže geometrije. Radi velike vrijednosti ovoga djela širili su se o njemu u matematičkoj literaturi u kasnije doba pretjerani nazori. Bilo ih je, koji su isticali, da je Getaldić otkrio analitičku geometriju i time pretekao Dekarta. Kod jednoga problema u V. knjizi imamo i analizu i konstrukciju rješenja, koja je dovela Getaldića posve blizu Dekartovom shvaćanju krivulja. Taj problem mogao je vrlo lako dovesti Getaldića do jednadžbe hiperbole«.

Zato i ako ga ne ćemo smatrati začetnikom analitičke geometrije, svakako ga moramo držati jednim od najzaslužnijih prethodnika. Da završimo riječima Majcenovim: »Vrijednost se Getaldićeva sastoji upravo u pripravljanju naučnih temelja za ona otkrića, koja su se porodila gotovo neposredno iza njegove smrti; to nam otkrivaju široki pogledi u njegovim djelima i putevi u njegovim nastojanjima«.

Milenko Sevdić

RUĐER BOŠKOVIĆ

U prilično pustoj vasioni naše nauke Bošković je jedna od najkrupnijih zvijezda. I ako bi nas ovdje najviše zanimao Boškovićev matematički rad, ipak treba kazati i o Boškoviću kao čovjeku. Ta on je pjesnik, diplomata, putnik, jezuita u dobrom i lošem smislu, dobar Dubrovčanin. U diplomatskim sporovima Dubrovnika stavlja se sav u službu domovine. Na D'Alembertove riječi »*Vous etes donc un Italien?*«, odgovorio je Bošković »*Non, Monsieur, je suis un Ragusain*«. —

On daje jedan sistem filozofije, organizira znamenitu astronomsku opservatoriju u Breri, ne samo da mjeri dva stupnja u Italiji, već daje incijativu i za internacionalno premjeravanje Zemlje. U teoriji instrumenata, u koju unosi metodu obrađivanja pomoću diferencijalne trigonometrije, neke od tih formula nose i danas Boškovićevo ime. On je prethodnik Besselu; u fizikalnoj geodeziji precizira sve glavne probleme o geoidu; U optici se sav angažuje u radu oko ispitivanja ahromatskih leća i on prvi konstruira cirkularni mikrometar. U teoriji određivanja staza kometa i planeta daje niz rasprava i neprekidno pomaže svoje učenike milanske astronome. Nuzgred se bavi arheologijom i raznim problemima geofizike.

Između mnogih karakteristika o Boškoviću, da navedem samo jednu. U petoj svesci Lalande-ova djela »*Voyage en Italie*« (1790.) nalaze se ove riječi: »*Le plus grand mathematicien que j'ai connu à Rome est M. Boscovich.*«

I. Biografija

Ruđer se rodio 18. svibnja 1711. godine kao osmo dijete između devetero djece Nikole Boškovića i Pave rođene Betera. Hercegovac starinom po ocu, a po majci Talijan. Djed njegov nosio je opanke. Ognjište Ruđerovo bio je skroman dom dubrovačkih pučana.

Prvi odgoj dobio je u roditeljskoj kući i školama Dubrovnika. Mladi Bošković učio je latinske škole, u kojima je udario temelj svojoj obrazovanosti.

Svršivši nauke u dubrovačkom kolegiju, stupi mladić jedva 15 godina star u družbu sv. Ignacija. Na taj korak je ponukan čeznućem za naukom, kojemu je u toj družbi za one prilike mogao najlakše i najpotpunije zadovoljiti. God. 1725. poslan je u Rim, gdje stupa u jezuitski red. Tu dobija solidnu spremu. Ubrzo izbija Boškovićev talent, oštroumlje, brzo i lako pamćenje. Osobito su dva učitelja utjecala na umni razvitak mladoga Durbovčana, naime Nocetti i Borgondio. Oba su se bavila matematikom i fizikom. Bijahu prijatelji nauke, elegancije i dikcije. Obojica su ljubili darovitog Ruđera, poticali ga na rad, sokolili ga i proricali buduću njegovu slavu. Matematika, fizika i filozofija postadoše mu mila zabava. I on kao nesvršeni bogoslov postaje profesor matematike u svom koležu. Tu je i prvi njegov književni pokušaj. Bijaše to rasprava »*De solis ac lunae defectibus*« (1735.). Od godine 1736. ređaju se neprekidno njegove naučne rasprave. Ne prođe od tada ni jedna godina, a da nije barem po jednu raspravu objavio. Te radnje tiču se matematike, fizike, astronomije, meterologije, i uopće prirodnih nauka.. Bile su mu povjeravane i druge teoretsko-praktične zadaće. U komisijama za ispitivanje čvrstoće monumentalnih građevina daje on svoje stručno mišljenje, a isto tako sarađuje mnogo na velikim hidrotehničkim radovima u Italiji.

Položivši 1740. doktorat teologije, Bošković stupa u javni život ne kao svećenik nego kao čovjek nauke. U sporu između Luke i Toskane ide kao posrednik (1756.) u Beč. Ovo poslanstvo daje Ruđeru priliku, da se upozna u Beču sa učenim krugovima. Nemalo vremena oduzimalo je Boškoviću i dopisivanje s domaćim i stranim učenjacima i drugovima.

Radnjama do 1759. bio je Bošković stekao odličan glas ne samo u Italiji nego i daleko preko granica njenih u Francuskoj Engleskoj, Njemačkoj i svagdje, gdje su se gajile i obrađivale matematičko, fizikalne i filozofske struke. Bošković je poduzimao kraća ili dulja putovanja po Italiji. Putujući po Italiji njegovo se ime pročulo.

God. 1747. posjetio je svoj rodni zavičaj i proboravio u njemu od lipnja do studenog.

Tek god. 1759. napušta Rim. Sada počinju njegova duža putovanja po svijetu i njegov naučni rad izvan Rima i izvan Italije. Šta je moglo potaknuti Boškovića na ta putovanja? Nema sumnje, želio je u naučne svrhe proširiti krug svojih poznanstva izvan Rima u učenom svijetu i raširiti svoj znanstveni vidik, ali i iznijeti tu svoje nazore o učenim pitanjima, o kojima se tada raspravljalo. Bošković je mnogo boravio u tuđini. Prošao je osim Italije, Francusku, Austriju, bio je u Holandiji, Belgiji, Njemačkoj, u Londonu, Carigradu, proputovao je Balkan i Poljsku.

Početkom 1760. Bošković je u Parizu, kao isusovac našao zrak pun oluje. Protiv isusovaca u Francuskoj skočili su Jansenisti i enciklopedisti, koje su predvodili Voltaire i D'Alembert. Boškovića su doduše priznali kao učenjaka i s te strane mogao je dakle biti miran. Ali on nije kanio da se nastani u Parizu, te se stoga 1760. sin Balkana, sada čovjek velikog imena, uputi preko Brisla u Englesku. U engleskim učenim krugovima bio je gostoljubivo i prijazno dočekan i primljen tim više, što je bio poznat kao gorljivi pristalica i štovalac Isaca Newtona i poznavalac netom preminulog (1742.) astronoma E. Halley-a. Osokoljen lijepim dočekom u Londonu — postao je član njihovog najvišeg učenog društva — odluči se Bošković, da izda svoje djelo »*De solis*...« Ovo djelo je u učenom svijetu dobro primljeno koliko zbog bogate sadržine, toliko i zbog elegantne forme.

Učeno društvo je Boškoviću namijenilo i časnu naučnu zadaću. Radilo se o promatranju prolaza Merkura i Venere ispred Sunca. Htjeli su ga poslati u Kaliforniju, ali kako se ustezao, poslaše ga u Carigrad. Bošković nije postigao svrhu radi koje je poslan na istok. On je zakasnio na određeno motrilište.

U Carigradu dobi Bošković groznicu. Pošto je ozdravio, prolazi (1762.) kroz Bugarsku, Moldavsku i Poljsku. Htio je vidjeti i istočne i sjeverne krajeve Evrope, htio je krenuti i u

Rusiju. Pošto mu se bolest nogu ponovila, morao je na granici Poljske odustati od te namjere. Oporavivši se donekle, otišao je u Varšavu, gdje je bio lijepo primljen. Uputi se zatim u Krakov te odavde preko Austrije u Italiju. 1763. (kolovoz) je u Mlecima.

To svoje putovanje zabilježio je u »*Putopis od Carigrada u Poljsku*«. Došavši u Bugarsku, razgovara sa seljacima. Interesira se za njihov život, opisuje njihove kućice bez prozora, s vratima kroz koja je mogao jedva proći, zapisuje koliko se jaja može dobiti za jednu paru, koliko svećenik naplaćuje za krštenje, sahranu i vjenčanje, opisuje dalje igre seljaka, spominje raju, janičare i dr. U opisu putovanja po istoku ističe se kao oštar promatrač i njegovi su podaci dragocjeni za upoznavanje političke, socijalne i psihičke strukture tadanjeg Balkana.

God. 1763. vraća se u Rim, a 1764. dobija nastavničko mjesto na univerzitetu u Paviji. Ali u Paviji ne ostaje dugo. Dobio je zadaću da u Breri osnuje astronomski opservatorij. Tu je u Milanu dobio i stolicu za optiku i astronomiju. U svome radu Bošković je naišao na prepreke, koje nije predviđao. Došao je u sukobe, koji su napokon bili uzrokom njegovom odlasku iz Milana. U Milanu doživio je Bošković jednu od najvećih neprijatnosti u svom životu. Pošto je uredio zvjezdarnicu — uložio je u nju i znanja i truda i novaca — došao je u konflikt s jezuitima. Oni su svim silama radili, da na njegovo mjesto stave svog čovjeka. Denuncijacije i intrige ovih jezuita vrlo su karakteristične. Bošković je postao žrtvom tih intriga. Konačno je bio riješen položaja, koga je tako reći sam stvorio, kojim je on upravljao 3 godine glavom, a 9 godina duhom. Poslije, kada je s nadležnog mjesta pokušano stvar popraviti, Bošković se ipak nije dao nagovoriti, da se vrati u Milano.

U razdoblju 1746.—73. bio je toliko zabavljen predavanjem, te osnivanjem i uređivanjem zvjezdarnice, da je manje mogao misliti na književni rad.

Tada bez mjesta bio je nakanio poći u Dubrovnik, ali u to doba dolazi u Evropi do progonstva isusovaca, koje je započelo 1757. u Portugaliji. Kada je ukinut red isusovački, Bošković se nalazio u Mlecima. I on odluči otputovati u Pariz, gdje je imao dosta štovatelja i prijatelja. God. 1773. on je u Parizu. U državnim krugovima nisu u njemu gledali jezuitu, nego samo učenjaka. Jedva što je došao u Pariz ponudi mu vojvoda Toskanski stolicu na sveučilištu u Pizi, ali se i vlada francuska otimala o Boškovića. Ponuđeno mu je mjesto ravnatelja optike za pomorstvo. Time je bio Boškoviću obezbjeđen položaj. Materijalno osiguran mogao je nastaviti svoje naučno zanimanje. Ali u učenim krugovima nije bio Bošković niti jednakom susretljivošću primljen, niti su mu djela jednako bila priznata. Kako već rekosmo, među Boškovićevim protivnicima nalazili su se D'Alembert i Voltaire. I tu u Parizu ne osta pošteđen. Ako novi napadi nisu bili upereni protiv njegova položaja u državi, oni su jače vrijeđali njegov osjećaj, jer su bili upereni protiv njega kao učenjaka. Odnosilo se to na pitanje njegovog mikrometra i njegove metode astronomskog izračunavanja kod repatica. Ali što savremenici ne priznadoše, priznade mu kasnije nauka.

Veliki dio godine živio bi Bošković radi zdravlja izvan Pariza. Zaredale bolesti (groznica i želudac) i broj godina potsjetiše Boškovića da mu se približava konac života. God. 1782. namjerava ići u Milano. Nije mislio ostati u Italiji, već se opet vratiti u Pariz, čim dovrši štampanje svojih djela. Ali Francuske nije više vidio. Zimu provede u Pescii sređujući svoje rukopise. Namjeravao je svoje nove matematičke radnje izdati u četiri sveska. God. 1783. je u Bassanu. Ovdje je proveo dvije godine do konca maja 1785. U Bassanu je doštampao svoje najveće djelo u pet debelih svezaka. Djelo se sastoji iz samih naučnih rasprava. God. 1786. poduzima putovanja po Italiji. Posjećuje Milano, Rim, Firencu i opet Milano, gdje proboravi zimu. Kako mu je isticao rok dopusta, trebao se vratiti u Pariz. Međutim stao je pobolijevati i zatraži produženje dopusta i dobije novi dopust na dvije godine. S dobijenom penzijom i dvogodišnjim dopustom Bošković se nastanio u vili Bosia u Milanu. Ali ovoga dopusta nije preživio. Bolest je kretala na gore. Leži na samrti u tuđem mjestu sav oronuo. Osamljen je, napušten od svakoga osim sekretara Tamanjina. Poznata je Boškovićeva strašna smrt. Razočaran u svemu, izgubivši vjeru u svoj rad, pada u ludilo. Taj um je utrnuo u strašnoj nedoumici nisu li sva njegova naprezanja bila bez svrhe. Um mu je pomračen i u ludilu ponavlja kako će umrijeti siromašan i neslavan. Pred samu smrt vraća mu se um, ali smrt je tu.

Preminuo je 13. veljače u 11 sati prije podne 1787. god. Toga dana ugasnula je na obzorju učenog svijeta jedna zvijezda prve veličine, jedan od najslavnijih pobornika na poprištu nauke 18. stoljeća, jedan od najumnijih sinova našega Dubrovnika.

Bošković je bio vrlo lijepo razvijen, ali nježnog zdravlja, crne kose i vrlo živog oka. Bio je vrlo duhovit, okretan, zabavan, vrlo bistar, divnog oštroumlja, odličnog pamćenja, živahne ćudi i mašte, a ponešto lukav. Navukao je groznice, koje su ga ponekad toliko stezale, da je bio gotovo na samrti. Dobio je tuberkulozu, patio je od nogu, a naročito od tumora. Umro je sa osušenim nogama.

Život Boškovićev ispunjen tolikim i tako raznovrsnim radom, nije bio ni miran i sređen. Bošković je bio nesretna naprasita priroda. Njime je vladala želja za velikom slavom i priznanjima. Bošković je u granicama svoga svećeničkog zvanja bio čovjek društven i svjetskih manira. Bošković nije samo bio učenjak za sobu, nego i svestrano naobražen čovjek, koji se za sve zanimao. Putovanja su raširila njegove poglede. Uz naravnu fantaziju i živahnu ćud govor Boškovića bijaše pun vatre. Uz krepko tijelo pun života, spreman na svaki pothvat; baš živahna ćud ga je lako navela na različite predmete. Zato se nećemo čuditi, što je i njegov naučni rad bio tako raznovrstan. Astronomiju, matematiku, fiziku, geodeziju, meteorologiju i filozofiju, kojima se bavio velikom ljubavlju, unapredio je Bošković dotle nepoznatim stvarima, koje su mu donijele glas velikog učenjaka. Iako su mnogi njegovi radovi zastarjeli zbog naglog razvoja nauka, ipak to ne umanjuje njegovu slavu, a osobito onda kad se uzmu u obzir njegovi radovi iz filozofije i geodezije koji i danas poslije dva stoljeća imaju još uvijek veliku vrijednost.

II. Bošković kao učenjak.

1. Veliki astronom. Ideje Kopernika i Keplera, koje su stavile Zemlju u pokret, prodrle su dosta brzo i pored spaljivanja učenjaka, koji su pošli putem Kopernika. Naš Bošković sa usađenom slobodom i humanizmom, koji mu je dao Balkan mnogo napadan i omalovažavan, iako član jezuitskog reda, bio je jedan od prvih duhovnika pristalica novih ideja. Raspravlja o *sunčanim pjegama* (1736.), o *prolazu Merkura ispred Sunca* (1737.), o *geometrijskoj konstrukciji sferne trigonometrije* (1737.), o *sjevernoj zori* (1738.), o *novoj upotrebi teleskopa* (1739.), o *obliku Zemlje* (1739.), o *gibanju tjelesa u prostoru bez zapreke* (1740.) i t. d.

U svom radu o »*kometama*«, da ne bi bio stavljen na indeks, kaže »Zemlja je u središtu svijeta«, a zatim odmah dodaje: »No da bismo bolje razumjeli samu stvar, uzet ćemo da je Sunce u središtu svijeta i da oko njega kruži Zemlja«. Ovaj Boškovićev zaključak bio je najbolji dokaz, da se pokrenuta Zemlja, i pored svih postupaka inkvizicije, da spasi čovječanstvo od slobode misli i istina, nije mogla više zaustaviti. O kometama, za razliku od dotadašnjih astronoma, Bošković je imao nazor, koji se najviše približava današnjem shvaćanju.

Bošković bijaše ne samo učen pisac i učitelj, nego u isto vrijeme i pomnjiv motrilac. 1749. god. nastao je veliki vihor u Rimu. Bošković je ovaj pojav u atmosferi znanstveno razjasnio raspravom »*Sopra il turbine*«. Opažao je već spomenuti prolaz Merkura (1753.). Prolaz planeta Merkura i Venere zanimao je veoma astronome, a osobito otkada je slavni astronom Halley istaknuo, da ti prolazi daju najtočnije i najlakše sredstvo za izmjeru paralakse Sunca t. j. njegove daljine od Zemlje izmjerene polumjerom zemaljske kugle.

2. Odličan optičar i inženjer. Da je Bošković bio odličan optičar najbolji je dokaz, što ga je Francuska postavila za direktora pomorstva za optiku. Radovi iz optike donijeli su mu vrlo mnogo nepravde. Tako je zbog mikrometra došao u sukob sa Rošanom, također konstruktorom sličnog mikrometra, čiji je mikrometar priznala Francuska akademija odbacivši Boškovićev megametar kao plagijat. Međutim stvar po pitanju megametra stoji obrunto i kao sigurno se može smatrati Bošković kao njegov konstruktor.

Bošković je bio odličan hidrauličar i kao takav dobijao je razne zadatke, kod kojih je valjalo uzeti za podlogu hidraulične teoreme i primijenjenu matematiku. Sve ove zadaće rješavao je Bošković pismeno. Radio je na isušivanju talijanskih močvara, a naročito pontijskih.

3. Geodetski radovi. Danas jasno vidimo da je Bošković bio jedan genijalan geodeta, čije se pojedine ideje tek sada provode u djelo. Bošković je bio preteča Besselu, kako u pitanju formula pasažnog instrumenta, tako isto i po pitanju njihala. Bošković je prvi iznio misao da su skretanja okomila od normale izazvane morima i kontinentima i da zbog toga moraju imati sistematski karakter. Ne manje dično i po znanost korisno, riješio je Bošković još jednu zadaću, koja mu je također povjerena u Rimu. Poznato je da se od preporoda znanosti svijet zanimao pitanjem o obliku naše zemlje. Izmjera luka na meridijanu bijaše jedan od načina u nauci, koji su već stari upotrebili da se oblik Zemlje točnije ustanovi. Portugalski kralj Ivan V. odlučio je poslati ekspediciju u Braziliju i tu zadaću bijaše namijenio Boškoviću. Našeg mladog matematičara je ovo pitanje zanimalo, ali u Rimu nisu htjeli da Bošković pođe drugamo. Papa je želio da se izmjeri stupanj meridijana u Vatikanskoj državi. God. 1750. započe taj posao. Mjerilo se između Rima i Riminija. Ovaj je rad u stranom učenom svijetu pobudio takvu pozornost, da je izišao i u francuskom prevodu

(1873.). Bošković ne samo da je izumio posebne sprave (1757.), nego je bio prvi, koji je iz više meridijanskih stupanja izveo najpovoljnije vrijednosti za spljoštenost zemlje.

Uz ove naučne ekspedicije Bošković se nije ni časak prestao baviti naukom. Između 1743.—1755. izašle su na svijetlo rasprave, koje je Bošković čitao u kolegiju »*De motus corporis*« (Rim 1743.) »*Nova methodus adhibendi phasium aberrationes*« (1744.), »*De viribus vivis*« (1745.), i t. d. I strana učena društva izvan Italije stala su primati učene radnje našega Boškovića.

4. *Dobar nastavnik i filozof prirode.* I kao nastavnik pobrinuo se Bošković za svoje slušatelje, da ih podigne na visinu savremene nauke. U tu svrhu izradio je i u Rimu objavio 1752. u tri sveska »*Elementa matheseos*«. Prva sadrži geometriju i trigonometriju, druga algebru, treća presjeke stošca.

Uz ovo sistematsko matematičko djelo radio je Bošković neumorno na drugom važnom djelu, kojim je u jasnom pregledu obuhvatio Newtonov sistem. To je djelo »*Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium*« koje je objelodanjeno 1758. g. u Beču.

Newtonov otvoren problem gravitacije i diskontinuiranosti materije tek je uspješno riješio Bošković u svojoj naprijed navedenoj »*Teoriji prirodne filozofije*«. Po Boškoviću se djelići materije ne dodiruju međusobno, i oni su neprotežne i nedjeljive točke iz kojih se rađa sila. Ova misao našega Boškovića, po kojoj je svaki atom središte sile, svakako spada u najveće istine, koje je mogao iskazati jedan um. Dok po Newtonu sila opada sa udaljenošću, dotle je po Boškoviću pad sile isključen. Isto tako za razliku od Newtona Boškovićeva gravitaciona sila u najmanjoj udaljenosti od svog središta je odbojna i postaje u beskonačno maloj udaljenosti beskonačno velika.

5. *Preteča Einsteina.* Isto tako Bošković ne priznaje apsolutni prostor, te prema tome, ne može egzistirati ni apsolutno gibanje, već samo relativno. Bošković protivurječi Newtonu i njegovom zakonu inercije. Kako se ovaj zakon oslanja na

apsolutni prostor i apsolutno vrijeme, to ga Bošković pobija govoreći, da možemo jedino rezonovati o relativnom gibanju tijela prema drugom.

Bošković kaže: ako bi se cijela vasiona jednog dana proširila ili suzila, a i mi zajedno s njom, onda mi te promjene ne bismo mogli primjetiti. Jasno je, dakle, da je Bošković potpuno bio na čisto sa relativnošću.

6. *Savršen matematičar.* Ma da je Bošković bio profesor matematike u Rimu i Paviji, i u matematici ostavio jedan odličan udžbenik i mnoge radove, ipak se Bošković bavio samo onoliko matematikom, koliko mu je bilo potrebno radi njegovih radova u astronomiji i geodeziji.

Bio je veliki geometar i nešto slabiji analitičar kome je nedostajalo, kako sam kaže, znanje tek rođenog infinitezimalnog računa. Pa ipak Bošković je matematiku mnogo zadužio. Prije svega on je prvi riješio problem tijela maksimalne atrakcije, zatim je bio prvi, koji je dao metodu za iznalaženje svih rasporeda brojeva u jednom pitanju kombinatorike. Bošković je među prvima uspješno obradio matematičko pitanje izgradnje stanice pčelinog saća.

Možda je potrebno spomenuti, da je njegova geometrijska metoda, kojom matematički tretira sva moguća pitanja, za naše vrijeme jedna nepodnosiva muka. Stvari koje bi se formulama dale zbiti u tri četiri retka on razvuče na čitavu stranicu.

Na koncu bih naveo, kako o Boškoviću kao matematičaru govori prof. V. Varićak, koji se naročito bavio proučavanjem Boškovićevog matematičkog rada: »I ako je on na pr. u filozofiji um, koji se uzdiže visoko nad prividne pojave, što ih osjetilima zapažamo, u matematici nije on prijatelj spekulacija. Ne izmišlja sam apstraktnih problema i ne gradi matematičkih kula na tankoj grani od oblaka, već se ponajviše trudi oko pitanja, koja su mu se sama i posve prirodno nametnula kod njegovih astronomskih i geodetskih poslova ili kod razmišljanja o fizikalnim problemima. Tako su poradi astronomskih specijalnih zadaća nastala njegova istraživanja o sfernoj trigonometriji; a u tome je zacijelo razlog, što se mnogo bavio i oko teorije konusnih presjeka. Geodezija ga je dovela do prvog pokušaja o računu izravnavanja, što je igda učinjen. Pošto je već prije mnogo razmišljao o utjecaju gorskih masa na njihalo, rado se na prijedlog Montignijev zabavio oko problema tijela maksimalne atrakcije, i prvi ga riješio. Svojstva sinusoide ispituje sintetički stoga, što mu je ona trebala kod određivanja pojavljivanja i iščezavanja Saturnova prstena; na teškoće u pojmu pravca upozoruje raspravljajući o pravocrtnom širenju svjetlosti i t. d.

Dade se potanko dokumentirati, da se Bošković gotovo nikada ne bavi oko matematike zaradi matematike same; ona je njemu samo snažno pomoćno oruđe za ispitivanje u drugim područjima, pa je stoga nastojao oko njena usavršavanja.

S tim ne stoji ni malo u protivurječju ni to, što u matematičkim radovima više puta nabacuje pitanje o postojanju ili nepostojanju neizmjerno velikoga; to su samo odbljesci njegovih filozofskih nazora«.

M. Sevdić

XII.

ŽENA U MATEMATICI

SONJA KOVALEVSKA

Prije nego počnem govoriti o poznatoj ruskoj matematičarki Sonji Kovalevskoj, želim se u kratko osvrnuti na teškoće, koje je žena imala od najstarijeg vremena do najnovijeg doba, da dođe do nauke.

Proučavajući dodir žene s naukom kroz vijekove vidimo, da se žene nisu uvijek mogle kao danas baviti onim čim su htjele. Morale su postojati neke naročite okolnosti, da bi one mogle postići višu naobrazbu i da se kao takove istaknu u svojoj okolini.

U najstarijoj historiji ističe se Grkinja Hypatia, kćerka matematičara Theona, koja predaje matematiku u Aleksandriji. (Kamenovana 415. g.).

U Rimu nam nije ponzata ni jedna matematičarka, što nije ni čudo uzevši u obzir nemogućnosti obrazovanja žena kod njih. Poznato je, da su Rimljani govorili o umjetnosti i nauci samo svojim ljubimicama, dok se za naobrazbu ostalih žena (pa ni onih iz viših društvenih slojeva) nisu brinuli. Učeni Grci-robovi podučavali su samo mušku djecu.

U srednjem vijeku nauku u rukama drži svećenstvo. Obrazovati se mogu samo vladari i plemići, dok žene uopće nemaju prilike da se upoznaju s naukom. Od žena se obrazuju samo vladarice i plemkinje, koje polaze samostane, koji su tada bili nosioci kulture.

U novom vijeku mijenja se odnos čovječanstva prema nauci. Crkva više nema monopol na nauku. Nauka prelazi u građanske ruke, a žena nije više toliko zapostavljena kao prije. Naučenjaci više ne poriču ženama sposobnost da se bave naukom. Mnoge od njih su poznate kao saradnice svojih muževa i svoje braće. Tako na pr. Marie Margarethe Kirch sarađuje sa svojim mužem, a Carolina Herschel sa svojim bratom astronomom. Prva radi na kalendarima i otkriva 1702. jedan komet, a druga otkriva 8 kometa.

Što dalje idemo kroz historiju vidimo da žena prodire i na univerzitete kao predavač. To je bilo mnogo, kada se sjetimo, da su u zapadnoj Evropi postojali univerziteti na kojima žena još uvijek nije bila ravnopravna sa muškarcima. Postojala su razna ograničenja za upis žene na sveučilište, a i razna otežanja kod polaganja ispita. Uprkos tome Maria Gaetana Agnesi predaje infinitezimalni račun, a Laura Bassi osim matematike i fiziku na sveučilištu u Bologni. Poznatija matematičarka svog vremena bila je Sophie Germain, koja živi dosta povučeno u Parizu od 1770.—1831. god. Ona je dobila i nagradu za svoj rad na polju fizike. S njom se dopisivao Gauss, a sarađivali su Legendre i Poisson.

Dok je takovo stanje u južnoj i zapadnoj Evropi, dotle na Istoku u carskoj Rusiji, žena živi u skučenim prilikama. Njoj nije moguće, da studira na domaćim univerzitetima, jer do dolaska socijalizma na vlast žena Rusije ima pristup samo na visoku pedagošku školu. Zbog toga ženska omladina odilazi u inozemstvo na studije, da se tamo usavrši. I tome stavlja zapreke zastarjeli duh, koji se protivi samostalnosti žena. Carski apsolutizam teško daje putnice studentima, pogotovo neudatim studenticama, a sve u strahu da oni ne bi donijeli novi slobodarski duh u Rusiju. Omladina, da zaobiđe sve zapreke, sklapa prividne brakove i odilazi u inostranstvo. Tako je došla u Njemačku na studije i Sonja kći artiljerijskog generala Korvin-Krukovskog. Ona sklapa fiktivan brak s mladim učenjakom-geologom Valdemarom Kovalevskim i odlazi s njime u Njemačku u Heidelberg. Na studijama se Sonja već od prvog dana ističe svojom bistrinom. Nakon dva semestra studija u Heidelbergu ona odlazi u Berlin, gdje postaje privatna učenica profesora Weierstrassa. Ona vanredno mnogo radi i 1879. god. postaje u Göttingenu doktor filozofije pošto je obradila značajnu temu »*O teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi*«. Završivši tako studije ona se vraća u Rusiju. Jedno vrijeme prestaje da se bavi matematikom. U njoj se stalno vodi borba između naučenjaka i žene. U Petrogradu se kreće u literarnom društvu i piše roman »*Privatni docent*«. Njen muž se počinje baviti spekulacijama i ona ga u početku nastoji odvratiti od toga na taj način, što počinje i sama proučavati geologiju u želji, da ga predobije natrag za nauku. On međutim nastavlja sa spekulacijama i na njima propada. Sonjine materijalne prilike su poslije Valdemarove smrti, koji je počinio samoubojstvo, prilično teške i njoj kao spasenje dolazi poziv profesora Mittag-Lefflera, da postane docent na sveučilištu u Stockholmu. Ona 1883. prihvaća taj poziv, nakon što je bila u Njemačkoj kod Weierstrassa, da se usavrši. U Stockholmu predaje teoriju Abelovih funkcija. Tu dobija i naslov profesorice. Ona se sada mnogo bavi matematikom i 1889. god. dobiva kao jedina žena među drugim natjecateljima nagradu pariške akademije »*Prix Bordin*« na osnovu radnje »*O problemu rotacije čvrstog tijela oko jedne čvrste točke*«. Osim matematikom, bavila se Sonja, kako spomenusmo, i literarnim radom. U zajednici sa sestrom profesora Mittag-Lefflera piše roman »*Vae victis*« i biografiju svoju i svoje sestre Anjute u »*Sestre Rajevski*«. Ali njen nemirni duh se ne zaustavlja na tome, već ona mnogo putuje. Svake godine za vrijeme ferija Sonja napušta Stockholm i putuje po Evropi. Kada se 1891. god. vraćala iz Španije, u Kopenhagenu je vladala epidemija malih boginja, i ona da ih izbjegne, putuje preko danskih ostrva, ali se putem prehladi. Uza sve to ona i dalje drži svoja predavanja ne obraćajući dovoljno brige svojoj bolesti. Konačno ju je bolest i shrvala, te ona umire iste godine u 41. godini života.

Nabacivši tako u najkraćim potezima životopis Sonjin vidimo u jednom licu čitavu historiju probijanja žene naprijed.

Danas još uvijek ima ljudi koji poriču sposobnost ženama, da mogu dati nešto od sebe, a ima isto tako i država. Tako je na pr. oko 1940. jedna napredna azijska država ukinula baš matematiku na ženskim srednjim školama.

Ali novo vrijeme donosi svoje. Danas naša žena može da se izobrazi na kojem god polju hoće, a tu slobodu donosi novo stanje nastalo poslije naše borbe. Dok u svijetu postoji još uvijek neko čudno držanje prema ženama, dotle toga na pr. u novoj socijalističkoj državi SSSR nema. Žena je ravnopravna. Omogućeno joj je da se bavi i naukom, da sudjeluje aktivno u politici, pa da sjedi ne samo za sveučilišnom katedrom nego i na ministarskoj stolici.

Bakarić Zora

XIII.

ZANIMLJIVOSTI, ZABAVA, ŠALA I DR.

ŠAHOVSKE FIGURE I ZLATNI REZ

Poznato je da simetrija djeluje ugodno za oko, jer daje utisak harmonije i cjelovitosti. Ovaj estetski učinak simetrije je neposredan i jasan te potvrđen svakodnevnim iskustvom. Međutim simetrija nije jedini geometrijski odnos, koji stvara takav utisak. Ona je možda samo najjednostavniji i najshvatljiviji odnos. Zato je u tom smislu i najneposrednija. Dioba točkom, koja dijeli dužinu na dva jednaka dijela, djeluje ugodno; pomaknuta iz sredine stvara utisak nečega nepotpunog, nečega što smeta, što narušava harmoniju. Isto tako mnogo ugodnije djeluje pravilan, simetričan geometrijski lik, nego bilo kakav nepravilan, nesimetričan.

Ali i u nesimetriji ima odnosa, koji predstavljeni geometrijski, ili na koji drugi način, mogu izvanredno harmonično i ugodno djelovati, premda nisu tako jednostavni kao simetrija. Poznato je u teoriji umjetnosti, da od pravokutnika najljepše djeluju oni, kojima se manja stranica odnosi prema većoj, kao veća prema polovini opsega, t. j. prema zbroju tih dviju stranica. Kad nacrtamo križ s dvije dužine — vertikalnom i horizontalnom — najljepši će biti onaj, kod kojega horizontalna dijeli vertikalnu na dva dijela tako, da se manji odnosi prema većem kao veći prema cijeloj vertikalnoj dužini. Utisak je još harmoničniji, ako se horizontalna dužina odnosi prema vertikalnoj kao ova prema zbroju obiju dužina. Također, kad stavimo sliku u okvir, za harmoničan utisak nije svejedno, koliko će okvir biti širok u odnosu na sliku. I u ovom slučaju će naše oko najviše zadovoljiti odnos: širina okvira prema širini slike kao širina slike prema širini slike zajedno s okvirom. Daroviti slikari i kipari, još u starim vremenima, kad nisu svijesno znali za ovaj odnos, slijedili su svoj umjetnički instinkt, da pri predstavljanju ljudskih glava postave visinu očiju tako, da su oči dijelile čitavo lice u spomenutom odnosu. Takvih primjera mogli bismo navesti bezbroj.

Taj geometrijski odnos kojim je dužina razdijeljena na dva nejednaka dijela tako, da se manji dio odnosi prema većem kao veći prema cijeloj dužini zove se »*zlatni rez*«.

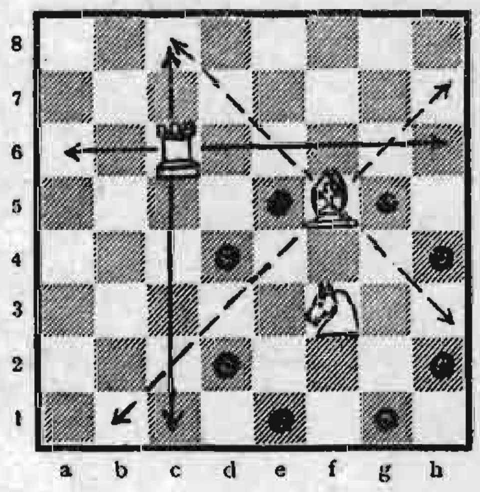
Matematički bismo mogli ovako izraziti: Ako je $a : b = b : c$ i ako je osim toga još $a + b = c$, onda su ove tri veličine a, b i c vezane zlatnim rezom.

Da pravilni peterokut, a time i peterokraka zvijezda djeluju harmonički i cjelovito, možemo osim subjektivnog utiska navesti i objektivnu činjenicu, da je njihova geometrijska konstrukcija osnovana baš na zlatnom rezu.

Od primjera za zlatni rez, koji nisu poznati i kod kojih bi se taj odnos jedva mogao očekivati, jeste šah sa svojom kvadratnom pločom i figurama. O tome ćemo sada reći nekoliko riječi.

U šahu se figurama nazivaju dama, top, lovac i skakač. Zakoni njihova gibanja na šahovskoj ploči općenito su poznati. Top se giba na praznoj ploči slobodno po horizontalnim i vertikalnim linijama, lovac po dijagonalnim, a dama u svim smjerovima, ujedinjujući u sebi gibanja i lovca i topa. Najzamršeniji je zakon po kojem se giba skakač (konj). Dok spomenute tri figure djeluju linearno, skakač djeluje punktualno, skačući s polja na polje tako, da pri skoku promijeni boju polja, ali uvijek na drugo susjedno polje.

Zakone gibanja šahovskih figura najbolje će nam rastumačiti slijedeći dijagram:



Izvučena linija prikazuje gibanje topa, crtkana gibanje lovca, dok točkice označuju polja na koje može skočiti skakač. Za damu smo već rekli, da se giba po volji, kao lovac ili kao top.

Snaga pojedinih figura direktno zavisi o gibljivosti dotične figure po šahovskoj ploči. Dama je na pr. zato najjača figura, jer može sa svakog polja učiniti više različitih poteza, nego i jedna druga figura. Da dobijemo numerički izraz za snagu pojedine figure na praznoj ploči možemo postupati ovako:

Postavimo jednu od tih figura na bilo koje polje šahovske ploče i izbrojimo koliko poteza može učiniti s tog polja. Kad smo to učinili, numeriramo to polje brojem, koji smo dobili spomenutim brojenjem. Ako to učinimo sa svakim poljem i sa svakom figurom, dobit ćemo slijedeće dijagrame.

8	21	21	21	21	21	21	21	21
7	21	23	23	23	23	23	23	21
6	21	23	25	25	25	25	23	21
5	21	23	25	27	27	25	23	21
4	21	23	25	27	27	25	23	21
3	21	23	25	25	25	25	23	21
2	21	23	23	23	23	23	23	21
1	21	21	21	21	21	21	21	21
	a	b	c	d	e	f	g	h

D

8	14	14	14	14	14	14	14	14
7	14	14	14	14	14	14	14	14
6	14	14	14	14	14	14	14	14
5	14	14	14	14	14	14	14	14
4	14	14	14	14	14	14	14	14
3	14	14	14	14	14	14	14	14
2	14	14	14	14	14	14	14	14
1	14	14	14	14	14	14	14	14
	a	b	c	d	e	f	g	h

T

8	7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	9	9	9	9	9	9	7
6	7	9	11	11	11	11	9	7
5	7	9	11	13	13	11	9	7
4	7	9	11	13	13	11	9	7
3	7	9	11	11	11	11	9	7
2	7	9	9	9	9	9	9	7
1	7	7	7	7	7	7	7	7
	a	b	c	d	e	f	g	h

L

8	2	3	4	4	4	4	3	2
7	3	4	6	6	6	6	4	3
6	4	6	8	8	8	8	6	4
5	4	6	8	8	8	8	6	4
4	4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	8	8	8	8	6	4
2	3	4	6	6	6	6	4	3
1	2	3	4	4	4	4	3	2
	a	b	c	d	e	f	g	h

M

Slova D, T, L i S znače redom damu, topa, lovca i skakača. Na pr. na skakačevu dijagramu (onome, označenom slovom S) polja označena brojkom 8 znače, da sa tih polja može skakač načiniti svega 8 različitih poteza. Vidi se također, da s polja na rubovima ploče može načiniti svega 3 ili 4 poteza, a iz polja u uglovima samo 2 poteza. Isti smisao imaju brojke za druge figure. Ako zbrojimo sve brojeve na dijagramu D, dobit ćemo $D = 1456$ i taj broj nam je mjerilo za snagu dame. Za topa, koji sa svih polja može načiniti 14 poteza, imamo $T = 64 \cdot 14 = 896$. Za lovca dobivamo na isti način $L = 560$, a za skakača $S = 336$. Svaki od ovih brojeva $D = 1456$, $T = 896$, $L = 560$, $S = 336$ je mjerilo za snagu odnosne figure.

Sad ćemo ove brojeve vezati na različite načine. Da nam izlazi $D = T + L$ nije nimalo neobično, jer dama veže u sebi gibanja obiju ovih figura, ali je tim neobičnije da je $T = L + S$, jer je skakač figura, koja ima bitno različit način gibanja od topa i lovca. To bismo možda mogli nazvati slučajem. Ali kako bismo onda nazvali slijedeće relacije: $D : T = T : L$ ili $T : L = L : S$, koje dobivaju osobito značenje, kad uzmemo u obzir da je $D = T + L$ i $T = L + S$. Vidimo naime, da su D, T, L i T, L, S veličine, koje su vezane zlatnim rezom. Doista $1456 : 896 = 1{,}6\ldots$, $896 : 560 = 1{,}6$, $560 : 336 = 1{,}6\ldots$ Sva tri odnosa podudaraju se točno na jednu decimalu, što je potpuno dovoljno, da možemo zaključiti, da je izbor šahovskih figura izvršen na genijalni način. Harmoničnu cjelinu, koju ove figure čine, naslućivao je i osjećao svaki šahist, a sad vidimo, da je i matematika potvrđuje.

Branko Pavlović

BACHETOV PROBLEM UTEGA

U ovom problemu imamo postavljeno jedno praktično pitanje, koje se nalazi već u Bachetovoj knjizi »*Problémes plaisans et delectables*« (1612.), a koje glasi: Koji su utezi potrebni, da bi se s njima mogla izvagati svaka težina do 40 grama uz uvjet da bude što manje tih utega?

Uz pretpostavku da se može za utege upotrebiti samo jedna zdjelica našlo se, da brojevi koji predočuju težine pojedinih utega mora da budu potencije broja 2, jer se tada svaki broj može predstaviti kao suma tih potencija. (Vidi: Prsti i dijadni sistem).

Ako se dopusti, da se na obje zdjelice mogu stavljati utezi, naći će se, da je u potencijama broja 3 ostvareno rješenje. Potrebna su samo četiri utega, koji imaju $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ i $27 = 3^3$ grama, jer se tada pomoću zbrajanja i odbijanja zaista može izraziti svaki broj od 1 do 40. Mogućnost tih kombinacija vidimo u slijedećoj tabeli:

$1 = 1 = 3^0$
$2 = 3 - 1 = 3^1 - 3^0$
$3 = 3 = 3^1$
$4 = 3 + 1 = 3^1 + 3^0$
$5 = 9 - 3 - 1 = 3^2 - 3^1 - 3^0$
$6 = 9 - 3 = 3^2 - 3^1$
$7 = 9 - 3 + 1 = 3^2 - 3^1 + 3^0$
$8 = 9 - 1 = 3^2 - 3^0$
$9 = 9 = 3^2$
$10 = 9 + 1 = 3^2 + 3^0$
$11 = 9 + 3 - 1 = 3^2 + 3^1 - 3^0$
$12 = 9 + 3 = 3^2 + 3^1$
$13 = 9 + 3 + 1 = 3^2 + 3^1 + 3^0$
$14 = 27 - 9 - 3 - 1 = 3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0$
$15 = 27 - 9 - 3 = 3^3 - 3^2 - 3^1$
$16 = 27 - 9 - 3 + 1 = 3^3 - 3^2 - 3^1 + 3^0$

$17 = 27 - 9 - 1 = 3^3 - 3^2 - 3^0$
$18 = 27 - 9 = 3^3 - 3^2$
$19 = 27 - 9 + 1 = 3^3 - 3^2 + 3^0$
$20 = 27 - 9 + 3 - 1 = 3^3 - 3^2 + 3^1 - 3^0$
$21 = 27 - 9 + 3 = 3^3 - 3^2 + 3^1$
$22 = 27 - 9 + 3 + 1 = 3^3 - 3^2 + 3^1 + 3^0$
$23 = 27 - 3 - 1 = 3^3 - 3^1 - 3^0$
$24 = 27 - 3 = 3^3 - 3^1$
$25 = 27 - 3 + 1 = 3^3 - 3^1 + 3^0$
$26 = 27 - 1 = 3^3 - 3^0$
$27 = 27 = 3^3$
$28 = 27 + 1 = 3^3 + 3^0$
$29 = 27 + 3 - 1 = 3^3 + 3^1 - 3^0$
$30 = 27 + 3 = 3^3 + 3^1$
$31 = 27 + 3 + 1 = 3^3 + 3^1 + 3^0$
$32 = 27 + 9 - 3 - 1 = 3^3 + 3^2 - 3^1 - 3^0$
$33 = 27 + 9 - 3 = 3^3 + 3^2 - 3^1$
$34 = 27 + 9 - 3 + 1 = 3^3 + 3^2 - 3^1 + 3^0$
$35 = 27 + 9 - 1 = 3^3 + 3^2 - 3^0$
$36 = 27 + 9 = 3^3 + 3^2$
$37 = 27 + 9 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3^0$
$38 = 27 + 9 + 3 - 1 = 3^3 + 3^2 + 3^1 - 3^0$
$39 = 27 + 9 + 3 = 3^3 + 3^2 + 3^1$
$40 = 27 + 9 + 3 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$

Dalo bi se pokazati, da se uopće zbrajanjem i odbijanjem potencija broja 3 t. j. 1, 3, 9, 27, 81, ... 3^n mogu prikazati svi brojevi od 1 do $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$. U našem slučaju kada je $n = 3$ dobijamo $\frac{1}{2}(3^{3+1} - 1) = \frac{1}{2}(81 - 1) = 40$. —

Dalje poopćenje izveo je Macmahon u svojoj radnji »*Certain special partitions of numbers*« (u *Quarterly Journal of Mathematics*, 1886.). On je postavio zadaću malo općenitije, pitajući se na koje se sve načine mogu izvagati težine od 1 do *n* grama, ako se dopusti da utezi budu jednaki ili različiti po težini. Tako se iz njegovih formula za $n = 40$ dobije ovih osam mogućnosti:

1. 40 utega po 1 gram,
2. 1 uteg od 1 grama i 13 utega od 3 grama,
3. 4 utega od 1 grama i 4 utega od 9 grama,
4. 1 uteg od 1 grama, 1 od 3 i 4 od 9 grama,
5. 13 utega od 1 grama i 1 od 27 grama,
6. 1 uteg od 1 grama, 4 od 3 grama i 1 od 27,
7. 4 utega od 1 grama, 1 od 9 grama i 1 od 27,
8. 1 uteg od 1, 1 od 3, 1 od 9 i 1 od 27 grama.

Kao što vidimo osma mogućnost je upravo rješenje Bachetovog problema. U tom slučaju je postignuto, da je najmanji broj utega i da su svi utezi različiti.

POGAĐANJE BROJEVA

Onome tko nezna o čemu se radi, izgledaju ova pogađanja brojeva tajnovita, pa onoga tko pogađa može da smatra velikim vještakom, a u stvari se tu radi o vrlo jednostavnim svojstvima brojeva ili o jednostavnim postupcima. Navodim ovdje nekoliko primjera.

I. Pogoditi izbrisanu cifru u rezultatu

Kažeš nekome da zamisli jedan broj; tome zamišljenom broju neka pripiše nulu, od toga neka oduzme zamišljeni broj i onda doda 54 (ili bilo koji višekratnik od 9). Zatim, pošto u rezultatu izbriše jednu cifru, neka ti kaže preostale cifre.

Neka je zamišljeni broj 265; onda dalje po redu dobijamo: 2650, 2385, 2439. U ovom se rezultatu sad izbriše jedna cifra na pr. 4. Izgovorene preostale cifre 2, 3, 9 treba zbrojiti, dakle $2 + 3 + 9 = 14$, i sada koliko od ove sume treba do prvog višekratnika od 9 (u našem slučaju do 18), t. j. 4, to je upravo izbrisana cifra. Da je na pr. izbrisana cifra 2, onda bi zbrojili preostale $4 + 3 + 9 = 16$, prema tome do 18 treba 2, a to je izbrisana cifra.

II. Unaprijed pogoditi rezultat

1. Zamisli jedan broj, dodaj mu 11, rezultat pomnoži s 2, od produkta oduzmi 20. Što izađe pomnoži sa 5 i oduzmi konačno 10 puta zamišljeni broj. Uvijek ćeš na koncu dobiti 10. Tvoja će se vještina sastojati u tome, što znaš da na koncu treba da izađe 10.

Na pr. 12, 23, 46 26, 130, 10.

Zašto je tako razabiremo iz slijedećeg: Ako smo sa x označili zamišljni broj, onda imamo: $[(x + 11) \cdot 2 - 20] \cdot 5 - 10x = (2x + 22 - 20) \cdot 5 - 10x = (2x + 2) \cdot 5 - 10x = 10x + 10 - 10x = 10$.

2. Kaži nekome da zamisli tri različite cifre, zatim da načini od njih 6 različitih dvocifrenih brojeva i da ih zbroji, rezultat da podijeli sumom triju cifara, tada će rezultat biti uvijek 22, a ti, ako to znaš, lako ćeš ga pogoditi.

Neka su na pr. zamišljene cifre 3, 4, 8. Načinimo brojeve: 34, 38, 43, 48, 83, 84. Njihova je suma 330. Nju podijelimo sa sumom cifara t. j. $3 + 4 + 8 = 15$, pa imamo $330 : 15 = 22$.

Tu ćemo opet, ako su x, y, z cifre, općenito imati:
$10x + y + 10x + z + 10y + x + 10y + z + 10z + x + 10z + y = 22x + 22y + 22z = 22 (x + y + z)$, a ako to podijelimo sumom cifara $x + y + z$, zaista uvijek dobijemo 22.

3. Kažeš nekome da napiše jedan četverocifreni broj i on napiše na pr. 4372, ti ispod toga napiši isto tako četverocifreni broj (ako samo prva cifra u naprijed napisanom broju nije 9), i to tako, da uvijek ispod gornje cifre nadopuniš do 9, to znači ti bi ispod 4372 napisao 5627. Zatim opet drug napiše jedan broj, a ti ispod njega pišeš novi broj, čije cifre dopunjuju cifre prethodnog broja do 9. I konačno drug napiše još jedan broj. Ti sada možeš odmah kazati koliki će biti rezultat. Taj se dobije iz ovog posljednjeg napisanog broja ovako: ako je bio na pr. broj 6423, onda se od posljednje cifre (u našem slučaju 3) odbije 2, i to se 2 stavi ispred cijelog broja. Znači dobit će se rezultat 26421.

Uzmimo primjer: drug napiše : 2758
ti pišeš : 7241
drug piše : 5083
ti pišeš : 4916
konačno drug napiše : 8427

onda će se rezultat dobiti, ako od 7 odbiješ 2 i to 2 napišeš ispred toga broja, dakle 28425. Ako sada zbrojite gornjih pet brojeva uvjerit ćete se da je to zaista rezultat.

III. Pogađanje zamišljenog broja

1. Kažeš nekome: Zamisli broj, uzmi ga još jednom, dodaj tome 4, podieli sa 2, pribroj 7 i sve pomnoži sa 8, oduzmi 12, što izađe podijeli sa 4 i od toga oduzmi 11.

Kada ti kaže, koliki je rezultat dobio, treba od tog rezultata da odbiješ 4, a što dobiješ da podijeliš s 2, pa si dobio zamišljeni broj.

Na pr. 5, 10, 14, 7, 14, 112, 100, 25, 14. Kada znamo, da je rezultat 14, onda treba od njega oduzeti 4, dobijemo 10, a ovo kad podijelimo s 2 dobijemo zamišljeni broj 5.

Općenito, ako je zamišljeni broj x, imamo:

$$\left[\left(\frac{2x+4}{2}+7\right)\cdot 8-12\right]:4-11=[(x+2+7)\cdot 8-12]:$$
$$:4-11=(8x+72-12):4-11=2x+15-11=2x+4.$$

Kao što vidimo, da dobijemo samo x, treba oduzeti 4 i podijeliti **sa 2.**

2. Kažeš: zamisli broj, pomnoži ga sa 2, dodaj 1, pomnoži sa 5 i dodaj 3. Kada ti kaže rezultat, odbi zadnju cifru i preostao ti je zamišljeni broj.

Na pr. 23, 46, 47, 235, 238; vidimo, ako u rezultatu odbijemo posljednju cifru 8, da dobijemo zamišljeni broj 23.

To ćemo razabrati iz ovoga: $(2x+1)\,5+3=10x+8$

3. Ovo je posve sličan postupak. Kažeš : zamisli broj, dodaj 2, pomnoži sa 3, odbi 4, pomnoži sa 3, dodaj prvobitni broj.

Ako od konačnog rezultata ispustiš zadnju cifru, dobit ćeš zamišljeni broj.

Neka je na pr. zamišljeni broj 23, onda imamo po redu 25, 75, 71, 213, 236. Ako u ovom rezultatu ispustimo zadnju cifru 6, ostat će zamišljeni broj 23.

Uopće: $[(x + 2) \cdot 3 - 4] \cdot 3 + x = 10x + 6$. Odavde jasno vidimo zašto ćemo dobiti zamišljeni broj, ako ispustimo zadnju cifru.

4. Zamišljeni broj povećaj sa 3, sumu pomnoži sa 6, produkt umanji za 3, a od toga oduzmi zamišljeni broj, konačno dobiveni broj podijeli sa 5.

Od dobivenog rezultata oduzmi 3 pa si dobio zamišljeni broj.

Na pr. 21, 24, 144, 141, 120, 24. Oduzmemo li od dobijenog rezultata 24 broj 3 dobit ćemo zamišljeni broj. Zašto je to vidimo iz ovoga: $[(x + 3) \cdot 6 - 3 - x] : 5 = x + 3$.

IV. Pogađanje dvaju brojeva

1. Kažeš nekome: »Uzmi povolji jedno domine, pa ću ti pogoditi brojeve, koji stoje na njemu.« — Neka je on na pr. uzeo sa 3 i 4. Sada mu kažeš: pomnoži prvi broj sa 5, dodaj 3, podvostruči to i dodaj drugi broj. U našem slučaju: 15, 18, 36, 40. Kada saznaš, da je rezultat 40, oduzet ćeš 6 i u preostalom broju 34 imaš u prvoj cifri prvi broj 3 a u drugoj drugi broj 4.

To tumačimo ovako: Ako su x i y brojevi, onda imamo:

$$(5x + 3)\, 2 + y = 10x + 6 + y;$$

oduzmemo li 6 ostane $10x + y$, u kome broju imamo na mjestu jedinica jedan, od brojeva na dominu, a na mjestu desetica drugi.

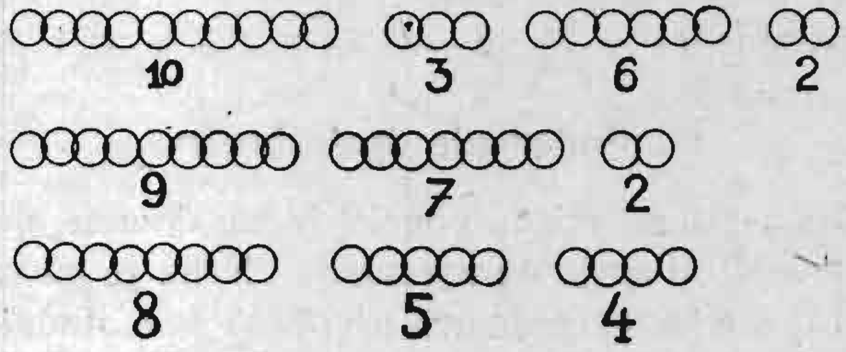
2. Da pogodiš koliko netko ima novaca, a uz to, a da to i ne pitaš, ujedno da saznaš i koliko mu je godina, radiš ovako: Koliko ima dinara neka pomnoži sa 4, tome doda 4 i to sve pomnoži sa 25, zatim doda 1846 (to je broj za 100 manji od godine koja je) od toga neka oduzme godinu svoga rođenja, onda

kada kaže, rezultat, zadnje dvije cifre kažu koliko mu je godina, a prednje cifre, koliko ima dinara. Recimo da neko ima 58 dinara, a da je rođen 1904, onda dobija: 232, 236, 5900, 7746, 5842. U ovom rezultatu posljednje dvije cifre t. j. 42 kažu koliko ima godina, a 58 koliko ima dinara.

Protumači sam zašto je to tako!

RASKINUT LANAC

Lanac, koji je bio sastavljen od okruglih alkica, raskinuo se, tako da je u 10 komada raskinutog lanca bilo alkica, kako pokazuje slika. Dakle svega skupa 56 alki.



Ove komade je trebalo sastaviti. Kovač, kome su odnijeti ovi dijelovi, kazao je, da bi on mogao dati u zamjenu lanac iste vrste sa 56 alkica uz naplatu od 7,25 dinara. Ali kako se zahtjevalo, da se lanac sastavi iz gornjih dijelova, tražio je da mu se za svako otvaranje jedne alke plati 0,25 dinara, a za svako zatvaranje 0,50 dinara.

Da vidimo sada koje mogućnosti postoje.

Prvo, da se u svakom komadu otvori po jedna alka i onda zatvori. Trebalo bi dakle, jer je 10 komada, platiti $10 \cdot 0{,}75 = 7{,}50$ dinara. Prema tome skuplje, nego da se uzme ponuđeni lanac od kovača, jer bi se tada platilo 7,25 *Din.*

Druga je mogućnost da se otvore alkice prvog komada, koji sadrži 10 alki i da se s njima spoje dva i dva lančića. Ostali bi na istom. Ako uzmemo komad od 9 alki, pa ih rastavimo, onda će oni upravo dostajati, da se spoje ostali komadi. U tom bi slučaju imali platiti 9 · 0,75 = 6,75. Kao što vidimo već povoljniji slučaj.

Ali ako rezonujemo, da dva komada od 4 i 5 alkica imaju istu dužinu kao i od 9, onda bi izgledalo da je riješenje bolje, jer u tom slučaju imamo spajati još jedan komad manje, ali se lako uvjerimo, da je potrebno spajati osam komada, a imamo otvorenih 9 alkica.

Ako pak uzmemo komade od 5 i 3, pa ih otvorimo, onda ćemo upravo moći spojiti preostale dijelove. Dakle 8.0,75 = = 6,00 *Din*. Kao što vidimo još ekonomičnije.

No ako bismo otvorili alkice triju komada, onda bi trebalo spajati samo 7 preostalih komada. Treba dakle otvoriti tri komada, koji zajedno imaju 7 alkica, a to su komadi u kojima je 2, 2, i 3 alke. U tom bi slučaju trebalo platiti samo 7.0,75 = = 5,25 *Din*.

Kao što vidimo i kod ovako jednostavnog primjera trebalo je prije razmisliti, koji je slučaj najekonomičniji, pa tek onda pristupiti poslu.

NEKOLIKO ZANIMLJIVIH PRIMJERA

1. Neki čovjek pozove svoja tri sina i reče im: »Imate ovdje 150 jaja, koja ćete prodati.« I dade prvom 15 komada, drugome 50, a trećem 85. — »Treba da prodajete po istoj cijeni, ali želim da svaki za svoja jaja donese kući isti sumu novaca.«

Iako ovo zvuči nemoguće, ipak su sinovi ispunili želju, te prodavali po istoj cijeni i donijeli kući svaki istu sumu.

Kada su u jutro došli na trg, počeli su prodavati po švercerskoj cijeni jedno jaje po 30 dinara i to prvi nekako proda 3 jajeta i dobije 90 dinara, a ostane mu 12 komada ili 1 tuce, drugi proda 2 jajeta i dobije 60 dinara, a ostane mu 48 jaja ili

4 tuceta, dok treća proda samo jedno jaje i dobije 30 dinara, a ostane mu 84 komada. U to dođe milicija i prisili ih da prodaju preostala jaja 1 tuce za 10 dinara. Prema tome prvi, koji je još imao 1 tuce dobio je 10 dinara, a to s onih 90 dinara čini 100 dinara. Drugi, koji je imao 4 tuceta, dobio je 40 dinara, što sa onih predjašnjih 60 čini opet 100 dinara. Isto je bilo i s trećim. Prodavši svojih 7 tuceta dobio je 70 dinara, a s onih 30 otprije imao je 100 dinara. I tako su zaista prodajući u isto vrijeme po istoj cijeni donijeli ipak kući svaki istu sumu novaca.

2. Jedan Arap umirući ostavi 17 deva trojici svojih sinova. Oni su trebali podijeliti te deve tako, da najstariji dobije polovinu, srednji trećinu, a najmlađi devetinu.

Kada su pokušali dijeliti nisu znali, kako bi to učinili, jer bi prvi dobio 8 deva i 1 polovinu deve i t. d. Zaista teška zadaća. I što će? Odoše kadiji, da im on presudi. Kadija se malo zamisli i reče, da mu se dovede jedna njegova deva; tako je sada bilo 18 deva. Prema tome najstariji je dobio polovinu, t. j. 9 deva, srednji trećinu, t. j. 6, a najmlađi devetinu, t. j. 2. To je upravo činilo 17 deva, jer je $9 + 6 + 2 = 17$. Prema tome kadiji ostade njegova deva, a sinovi odoše zadovoljni.

3. Djevojka je ponijela na trg 60 jabuka, da ih proda i to 3 komada po 2 dinara. Trebala je dakle dobiti 40 dinara. Njena susjeda je zamoli da proda i njenih 60 jabuka, ali pošto su bile bolje vrste, tražila je, da ih prodaje 2 komada za 2 dinara. Znači trebala je dobiti 60 dinara. Kada je djevojka došla na trg računala je ovako. Ako mojih 3 komada stoji 2 dinara, a susjedinih 2 komada 2 dinara, onda mogu prodavati 5 komada po 4 dinara. I ona je tako i prodavala. Kada se vratila kući računala je, da njoj pripada 40 dinara, jer je imala 60 jabuka, 3 komada za 2 dinara. Međutim kada je susjedi htjela dati 60 dinara, jer joj je toliko pripadalo, utvrdila je da ima samo 56 dinara. Naime ona je prodavajući 5 komada po 4 dinara, jer je svega imala 120 komada, stvarno mogla dobiti 96 dinara, pošto se 5 nalazi u 120 24 puta, a 24 puta 4 je 96. Kako je došlo do toga da joj je nedostajalo 4 dinara?

(O d g o v o r: Ona nije mogla spariti isti broj puta bolje i lošije jabuke u 5 komada. Načinimo li od lošijih jabuka grupe od po 3 jabuke dobit ćemo 20 grupa, a ako načinimo od boljih grupe po 2 jabuke, dobit ćemo 30 grupa. Prema tome s prvih 20 grupa moći ćemo spojiti samo 20 grupa druge vrste, a preostaje još 10 grupa od po 2 jabuke, što znači, da je ona od ovih boljih jabuka prodavala 5 jabuka po 4 dinara, a trebala ih je prodavati 4 komada za 4 dinara. Odatle je došlo do one razlike).

4. Na kakve se sve slučajnosti može doći neka pokaže i ovaj primjer. Američke države Kolumbija i Venezuela imaju svaka svoj dolar. Ti dolari su imali istu vrijednost. Ali jednog dana odredi vlada Kolumbije, da će venezuelski dolar vrijediti u Kolumbiji samo 90 centi. Slijedećeg dana donese istu odluku i vlada Venezuele za kolumbijski dolar.

Evo kako se sada tim odlukama koristio jedan čovjek, koji je uočio njihove pogreške. On je u Kolumbiji kupio robe za 10 centi i dao 1 kol. dolar. Dobio je natrag 90 centi u 1 venezuelskom dolaru. S ovim venezuelskim dolarom pređe u Venezuelu i kupi opet robe za 10 centi, da 1 venezuelski dolar i dobije natrag 90 centi u 1 kolumbijskom dolaru. Dakle kada se vratio kući imao je opet 1 dolar, kao i na početku, ali i robe za 20 centi. Tako je mogao produžiti dalje.

RAZLIČITI ZADACI

1. Na drvetu visokom 60 stopa nalazi se miš. Na zemlji je mačka. Miš se svakoga dana spusti $\frac{1}{2}$ stope, a noću se popne za $\frac{1}{6}$ stope. Drvo raste svakoga dana $\frac{1}{4}$ stope, a u noći se skrati za $\frac{1}{8}$ stope. Mačka se popne svakoga dana 1 stopu, a u noći se spusti $\frac{1}{4}$ stope. Kada će mačka uhvatiti miša i koliko će visoko postati drvo?

(O d g o v o r: u 63 dana, a drvo je visoko 68 stopa).

2. Flaša s čepom košta 11 dinara. Sama flaša košta 10 dinara više nego čep. Koliko košta čep, a koliko flaša?

(Odgovor: Flaša košta 10,50 *Din*, a čep 0,50 *Din*).

3. Kruh teži 1 *kg* i pola kruha. Koliko teži kruh?

(Odgovor: 2 *kg*).

4. Marija je stara 24 godine. Ona ima dva put toliko godina, koliko je imala Ana, kada je Marija imala toliko godina, koliko Ana ima sada. Koliko je stara Ana?

(Odgovor: Ana je stara 18 godina; prije 6 godina Marija je imala 18 godina, a Ana 12).

5.Poznat vam je zadatak o prevoženju koze, kupusa i vuka. Slične zadatke imate i sa težinom. Na pr. otac i mati imaju svako po 80 *kg*, a dvoje djece svako po 40 *kg*. Oni su došli do rijeke i treba da se prevezu, ali čamac može da nosi samo 80 *kg*. Kako će se oni prevesti?

(Odgovor: Najprije se prevezu oba djeteta, pa će se jedno dijete vratiti, zatim se preveze sam otac, a vrati se dijete, zatim opet oba djeteta, pa se jedno vrati po majku, prelazi majka i na koncu pređu djeca).

6. Nešto slično imamo i sa presipavanjem.

a) Imamo na pr. posudu od 8 litara i treba da podijelimo na pola, a imamo samo posude od 5 *l* i 3 *l*.

Slijedeće sheme pokazuju kako se to radi.

I. Rješenje:	I (8)	II (5)	III (3)
	8	0	0
	3	5	0
	3	2	3
	6	2	0
	6	0	2
	1	5	2
	1	4	3
	4	4	0

II Rješenje:	I (8)	II (5)	III (3)
	8	0	0
	5	0	3
	5	3	0
	2	3	3
	2	5	1
	7	0	1
	7	1	0
	4	1	3
	4	4	0

b) 24 litre treba podijeliti na 3 dijela pomoću posuda od 13 *l*, 11 *l*, i 5 *l*.

Rješenje:	I (24)	II (13)	III (11)	IV (5)
	24	0	0	0
	13	0	11	0
	8	0	11	5
	0	8	11	5
	11	8	0	5
	16	8	0	0
	16	0	8	0
	3	13	8	0
	3	8	8	5
	8	8	8	0

7. Sa šibicama:

a) Postavi tri šibice. Treba dodati još dvije, pa da rezultat bude osam.

(Odgovor: VIII).

b) Iz VII premještanjem jedne šibice dobiti jedan.

(Odgovor: $\mathrm{V}\overline{\mathrm{I}}$).

c) Od šest šibica načiniti 4 istostranična trokuta.

(Odgovor: Postaviti šibice da budu bridovi tetraedra).

8. Uzmi sto i jedan i rastavi ih s pedeset, tome dodaj 0 i dobio si jednu muzu.

(Odgovor: *CI*, *CLI*, *CLIO* = *Klio*).

XIV.

DODATAK

O PERIODSKIM DECIMALNIM RAZLOMCIMA

Periodski decimalni razlomci pripadaju »Teoriji brojeva«. To je najljepša, ali i najteža grana matematike, a proučava osobine beskonačnog niza prirodnih brojeva: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Davno smo taj niz razlučili u dva niza: u niz brojeva, koji su djeljivi sa 2, a zovu se parni ili taki brojevi: 2, 4, 6, 8, 10, ..., i u niz neparnih ili lihih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ... Znatnija je razdioba prirodnih brojeva u proste i složene; prosti su djeljivi samo sa 1 i sami sobom; osim 2 svi su neparni, a ima ih beskonačno mnogo. Prvi su prosti brojevi redom: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Složeni broj možemo prikazati kao produkt prostih brojeva; to su njegovi prosti faktori; na pr. $63 = 3^2 \cdot 7$; 3 i 7 su prosti faktori broja 63. Svaka je viša dekadska jedinica složena, ali samo od prostih faktora 2 i 5, i oba ta faktora dolaze u jednakom broju. Ako je n prirodni broj, viša dekadska jedinica ima oblik $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Prema tome viša dekadska jedinica nije djeljiva ni jednim prostim brojem različitim od 2 i 5.

Da shvatimo postanak i osobine periodskih decimalnih razlomaka, dokazat ćemo poučak: Ako je N neparni broj različit od 5, onda ima povolji mnogo brojeva oblika $(10^m - 1)$, koji su višekratnici broja N. Ako je $(10^n - 1)$ najmanji od tih višekratnika, onda ćemo reći, da eksponent n pripada broju N. Tako brojevima 3 i 9 pripada eksponent 1, brojevima 11, 33, 99 eksponent 2, brojevima 27, 37, 111, 333, 999 eksponent 3 i t. d.

Neka je p prosti broj različit od 2 i 5! Ako potencije: $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^{p-1}$ razdijelimo brojem p, izaći će nam svaki put kao ostatak dijeljenja jedan od brojeva: $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$, jer je ostatak dijeljenja manji od divizora. Ako izađu ostaci različiti među sobom, jedna od potencija, recimo 10^n, daje ostatak 1, i stoga je razlika $(10^n - 1)$ djeljiva sa p. Daju li dvije potencije, na pr. 10^m i 10^k, jednak ostatak, pa je $m > k$, onda je razlika $10^m - 10^k = (10^{m-k} - 1) \cdot 10^k$ djeljiva sa p. Kako potencija 10^k nije djeljiva sa p, to mora broj $(10^{m-k} - 1)$ biti višekratnik od p. Svaki dakle prosti broj p ima višekratnik oblika $(10^n - 1)$, a ima ih i povolji mnogo, jer su brojevi $(10^{2n} - 1)$, $(10^{3n} - 1)$ i t. d. višekratnici od $(10^n - 1)$, dakle i od p.

Dokazat ćemo, da je i $(10^{p-1} - 1)$ višekratnik od p. Razdijelimo sa p produkte: $10 \cdot 1, 10 \cdot 2, 10 \cdot 3, \ldots, 10\,(p-1)$! Nijedan od tih produkata nije djeljiv sa p, i svi će ostaci dijeljenja biti različiti od 0. Ali će svi ti ostaci biti različiti i među sobom, jer dva produkta $10r$ i $10s$ ne mogu dati jednake ostatke; kad bi dali, bila bi razlika $10r - 10s = 10\,(r-s)$ djeljiva sa p, a to ne može biti, jer 10 nije djeljiv sa p, a nije ni razlika $(r - s)$, jer je $< p$. Svaki će dakle od brojeva: $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ izaći kao ostatak dijeljenja jedamput. Označimo li produkt $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p-1)$ sa A, onda je produkt $(10 \cdot 1) \times (10 \cdot 2) \times (10 \cdot 3) \times \ldots \times [10(p-1)] = 10^{p-1} \cdot A$. Ako broj A i produkt $10^{p-1} \cdot A$ razdijelimo sa p, mora nam izaći isti ostatak, a evo, zašto. Neka su a i b prirodni brojevi i neka nijesu djeljivi sa p! Ako a, razdijeljeno sa p, daje kvocijent q_1, i ostatak r_1, a b kvocijent q_2 i ostatak r_2, možemo pisati: $a = q_1 p + r_1$, $b = q_2 p + r_2$, gdje su r_1 i r_2 veći od 0 i $< p$. Produkt je $ab = (q_1 q_2 p + q_1 r_2 + q_2 r_1)p + r_1 r_2$, t. j. razdijeljen sa p daje isti ostatak kao i produkt ostataka $r_1 r_2$. Jednako to vrijedi i za produkt

$abc = (ab)c$ i uopće za produkt od kolikogod prirodnih brojeva, koji nijesu djeljivi sa p. Prema tome je razlika $10^{p-1} \cdot A - A = A(10^{p-1} - 1)$ djeljiva sa p; kako A nije djeljivo sa p, mora biti $(10^{p-1} - 1)$ višekratnik od p.

Ako eksponent n pripada prostom broju p, dokazat ćemo još, da je $(p-1)$ višekratnik od n. Razdijelimo $(p-1)$ sa n! Izaći će nam $(p-1) = qn + r$, gdje je $r < n$. Prema tome je $(10^{p-1} - 1) = 10^{qn+r} - 1 = 10^{qn} \cdot 10^r - 1 + 10^r - 10^r = (10^{qn} - 1) \cdot 10^r + (10^r - 1)$, t. j. $(10^{p-1} - 1) - 10^r (10^{qn} - 1) = 10^r - 1$. Kako su minuend i suptrahend na lijevoj strani djeljivi sa p, to je $(10^r - 1)$ višekratnik broja p. Ali je $r < n$, što se ne protivi pretpostavci samo u slučaju, kad je $r = 0$, t. j. kad je $(p - 1) = qn$.

Valja li nam dakle naći najmanji višekratnik prostog broja p oblika $(10^r - 1)$, ispitat ćemo redom samo one eksponente n, koji su mjere broja $(p - 1)$. Na pr. $p = 79$; $(p - 1) = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Mjere su broja 78 : 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78. Nalazimo: potencije: 10^1, 10^2, 10^3, 10^6, 10^{13}, ... daju redom ostatke: 10, 21, 52, 18, 1, ..., kad ih razdijelimo sa 79. Broju 79 pripada dakle eksponent n = 13, što znači, da je najmanji višekratnik broja 79 oblika $(10^n - 1)$ broj $(10^{13} - 1)$. Ima tablica, gdje je uz svaki prosti broj zabilježen i njemu pripadni broj n. Evo takove male tablice:

p	n	p	n	p	n	p	n	p	n	p	n	p	n
3	1	13	6	23	22	37	3	47	46	61	60	73	8
7	6	17	16	29	28	41	5	53	13	67	33	79	13
11	2	19	18	31	15	43	21	59	58	71	35	83	41

Kako smo dokazali za broj 10, tako bi dokazali i za svaki prirodni broj a, koji nije djeljiv prostim brojem p, da ima najmanji broj oblika $(a^n - 1)$ djeljiv sa p, i da je n mjera broja $(p - 1)$. Taj se poučak teorije brojeva zove »mali Fermat-ov stavak«, jer ima drugi poučak teorije brojeva, koji se zove »veliki Fermatov stavak.« Pierre Fermat (1601.—1665.), veliki francuski matematičar, nije bio matematičar po zanatu, nego pravnik, a bavio se matematikom za razonodu.

Kad odredimo sami ili nađemo u tablici, da eksponent n pripada prostom broju p, kako ćemo naći, koji eksponent pripada broju p^2? Broju 3 pripada eksponent 1, a broju $9 = 3^2$ opet 1, jer je $(10 - 1) = 9$. Ali ako $(10^n - 1)$ nije višekratnik od p^2, onda broju p^2 pripada prema pređašnjemu neki eksponent kn, gdje je k prirodni broj > 1. Da nađemo broj k, pisat ćemo:

$$(10^n)^k - 1 = (10^n - 1)\,[10^{n(k-1)} + 10^{n(k-2)} + \ldots + 10^n + 1]$$
$$(10^n)^k - 1 = (10^n - 1)\,[(10^{n(k-1)} - 1) + (10^{n(k-2)} - 1) + \ldots + (10^n - 1) + k].$$

Kako je prvi faktor produkta na desnoj strani djeljiv sa p, a nije sa p^2, mora drugi faktor biti djeljiv sa p. Da to bude, mora broj k biti djeljiv sa p, jer su svi ostali pribrojnici u zagradi djeljivi sa p. Osim toga mora prema našem zadatku broj k biti najmanji broj djeljiv sa p, t. j. $k = p$. Na pr. Broju $7^2 = 49$ pripada eksponent $6 \cdot 7 = 42$, broju $13^2 = 169$ eksponent $6 \cdot 13 = 78$, i t. d.

Na posve bi jednak način našli, da broju p^m pripada uopće eksponent $n\,p^{m-1}$. Broju $3^3 = 27$ pripada eksponent $3 \cdot 1 = 3$, jer je $(10 - 1) = 9$; broju $11^3 = 1331$ pripada eksponent $n = 2 \cdot 11^2 = 242$, i t. d.

Da nađemo eksponent, koji pripada broju N, složenom od prostih faktora različitih od 2 i 5, prikazat ćemo broj N kao produkt potencija prostih brojeva; traženi je eksponent prema pređašnjemu najmanji zajednički višekratnik eksponenata, koji pripadaju pojedinim potencijama prostih brojeva sadržanim u N. Na pr. broju $33 = 3 \cdot 11$ pripada eksponent 2, broju $707 = 7 \cdot 101$ pripada eksponent $v(6,4) = 12$, i t. d.

Decimalni razlomak ima oblik $\frac{A}{10^n}$, gdje su A i n prirodni brojevi. Decimalni se razlomci najčešće pišu s pomoću decimalnog zareza pa se onda zovu i decimalni brojevi; na pr. $\frac{27}{10^2} = 0{,}27$. Razlomci, koji nijesu decimalni, zovu se obični, na pr.: $\frac{2}{3}, \frac{9}{22}, \frac{45}{31}$. S običnim se razlomcima u praksi vrlo rijetko računa, pa nam otud potreba, da ih pretvaramo u decimalne.

Što znači zadani razlomak pretvoriti u drugi? Znači naći razlomak, koji je jednak zadanome. To se može načiniti tako, da zadani razlomak ili proširimo ili skratimo, t. j. da mu brojnik i nazivnik jednakim brojem pomnožimo ili razdijelimo. Na pr. $\frac{4}{9} = \frac{8}{18} = \frac{12}{27} = \ldots;\ \frac{30}{105} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$. Ima prema tome beskonačno mnogo razlomaka, koji su jednaki zadanome. Prije nego odgovorimo na pitanje, ima li među njima bar jedan decimalni, dokazat ćemo, da je samo jedan od njih reduciran. Tako zovemo razlomak, koji se ne da skratiti, a to biva onda, kad su brojnik i nazivnik razlomka relativno prosti brojevi, t. j. kad nemaju zajedničke mjere veće od 1; na pr. $\frac{2}{7}, \frac{15}{28}$. Našu ćemo tvrdnju dokazati, ako dokažemo, da među jednakim razlomcima dva ne mogu biti reducirani.

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi, neka je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i neka je i prvi i drugi razlomak reduciran! Pomnožimo obadva nazivnikom d! Izlazi $\frac{ad}{b} = c$. Kako je c prirodni broj, razlomak $\frac{ad}{b}$ je prividan, t. j. brojnik ad je višekratnik nazivnika b. Budući da su a i b relativno prosti brojevi, mora d biti višekratnik od b, t. j. $d = mb$, gdje je m prirodni broj. Stoga je $\frac{ad}{b} = \frac{amb}{b} = am = c$, i prema tome je $\frac{c}{d} = \frac{ma}{mb}$. Ako je $m > 1$, onda razlomak $\frac{c}{d}$ nije reduciran, a ako je $m = 1$, onda je

$c = a, d = b$, t. j. razlomak $\frac{c}{d}$ je istovetan s razlomkom $\frac{a}{b}$. Svaki je dakle nereduciran razlomak jednak posve određenom reduciranom razlomku, ili drugim riječima: svi među sobom jednaki razlomci nastali su proširivanjem istog reduciranog razlomka.

Obični razlomak možemo prema tome pretvoriti u decimalni, da njemu jednaki reducirani razlomak proširimo u decimalni. Kako je nazivnik decimalnog razlomka oblika $10^n = 2^n \cdot 5^n$, opazit ćemo odmah, da se reducirani razlomak može pretvoriti u decimalni samo onda, ako mu nazivnik nema drugih prostih faktora osim 2 i 5. Tako je

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0{,}375, \text{ a } \frac{17}{20} = \frac{17}{2^2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{17 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{85}{10^2} = 0{,}85, \text{ dok se na pr. razlomak } \frac{5}{12} = \frac{5}{2^2 \cdot 3}$$

ne može pretvoriti u decimalan.

Za razlomke, koji se ne daju pretvoriti u decimalne, valja nam poći drugim putem. Možemo uzeti, da su pravi, jer je svaki nepravi razlomak jednak zbroju prirodnog broja i pravog razlomka. Zasad ćemo još pretpostaviti, da su prosti faktori nazivnika zadanog pravog razlomka različiti od 2 i 5. Prema prednjašnjemu možemo svaki takav razlomak proširiti u razlomak, komu je nazivnik oblika $(10^n - 1)$; radi lakšeg računa uzet ćemo još, da je n eksponent, koji pripada nazivniku zadanoga razlomka, a sam postupak objasnit ćemo na primjeru $\frac{6}{11}$.

Znamenke broja $(10^n - 1)$ su same devetice, a ima ih n. Prema priloženoj tablici broju 11 pripada eksponent $n = 2$, pa je $10^2 - 1 = 99 = 9 \cdot 11$, i prema tome je $\frac{6}{11} = \frac{6 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{54}{99}$

Možemo pisati:

$$\frac{54}{99}=\frac{0{,}54\cdot 99+0{,}54}{99}=0{,}54+\frac{0{,}54}{99}=0{,}54+$$

$$+\frac{0{,}0054\cdot 99+0{,}0054}{99}\ \text{ili}$$

$$\frac{6}{11}=0{,}5454+\frac{0{,}0054}{99}=0{,}545454+\frac{0{,}000054}{99}=\dots$$

Mogli bi tako nastaviti u beskonačnost, ali nam je zaključak već jasan. Razlomak $\frac{6}{11}$ jednak je zbroju decimalnog i običnog razlomka; obični pada po vrijednosti i granica mu je 0, a decimalni ima sve više decimala i raste prema granici $\frac{6}{11}$. U decimalnom se razlomku grupa decimala 54 neprestano ponavlja, pa se zbog toga zove periodski, a broj 54 mu je period. Ako granicu toga razlomka označimo simbolički sa 0,(54) (čitaj: 0 cijelih, 54 se ponavlja), možemo pisati $\frac{6}{11}$ = 0,(54). Na posve bi jednak način našli, da je $\frac{3}{7}=0{,}(428571)$, $\frac{19}{37}=0{,}(513)$, $\frac{25}{33}=0{,}(60)$. U svim tim primjerima period počinje odmah iza decimalnog zareza, pa se takvi razlomci zovu čisto periodski.

Ako nazivnik pravog razlomka $\frac{B}{N}$ nema prostih faktora 2 i 5, onda iz jednakosti

$$\frac{B}{N}=\frac{P}{10^n-1}=\frac{P}{10^n}+\frac{P}{10^{2n}}+\frac{P}{10^{2n}}\cdot\frac{1}{10^n-1}=0{,}(P)$$

čitamo:

1. period P ima toliko znamenaka, koliko jedinica ima eksponent n, koji pripada nazivniku N;

2. budući da razlomak $\frac{P}{10^n}$ ima n decimala, period počinje odmah iza decimalnog zareza;

3. čisto periodski decimalni razlomak jednak je običnom razlomku, komu je brojnik period P, a nazivnik broj, komu su sve znamenke devetice, a ima ih toliko, koliko period ima znamenaka.

Prema točki 3. ne može period biti jednak 9, ali možemo pisati $0,(9) = \frac{9}{9} = 1$.

Sadržava li nazivnik N pravog reduciranog razlomka $\frac{B}{N}$ uz druge proste faktore, različite od 2 i 5, i proste faktore 2 ili 5 ili 2 i 5, uvijek ćemo moći pisati

$$\frac{B}{N} = \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{P}{10^n - 1} = \frac{(A \cdot 10^n + P) - A}{10^m (10^n - 1)},$$

gdje je $10^m > A \geqq 0$.

Na pr. $\frac{93}{148} = \frac{93}{2^2 \cdot 37} = \frac{93 \cdot 5^2}{10^2 \cdot 37} = \frac{62}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{837}{999} =$

$$= 0{,}62837 + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{0{,}837}{999} = 0{,}62837837 + \frac{1}{10^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{0{,}000837}{999} = \ldots,$$

ili $\frac{93}{148} = 0{,}62(837)$. U tom je događaju decimalni razlomak mješovito periodski, jer period ne počinje odmah iza decimalnog zareza. Broj 837 je period P, a broj 62 zove se antiperiod. Iz gornje opće formule čitamo:

1. antiperiod A ima m znamenaka, a period n; mjesna vrijednost posljednje znamenke antiperioda je 10^{-m}, a perioda $10^{-(m+n)}$;

2. ako nazivnik N sadržava produkt $2^\alpha \cdot 5^\beta$, onda je eksponent m jednak većemu od eksponenta α i β;

3. mješovito periodski decimalni razlomak jednak je običnom razlomku, komu se brojnik dobije tako, da se od broja, što ga čine antiperiod i period, odbije antiperiod, a nazivnik mu

je broj s toliko devetica, koliko period ima znamenaka, i s toliko nula na desnom kraju, koliko znamenaka ima antiperiod.

U našem je primjeru

$$0{,}62(837) = \frac{62}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{837}{999} = \frac{(62 \cdot 10^3 + 837) - 62}{99900} =$$

$$= \frac{62837 - 62}{99900}.$$

Prema pravilima o pretvaranju periodskih razlomaka u decimalne možemo svaki čisto periodski razlomak smatrati čisto periodskim s dvostrukim, trostrukim i t. d. periodom, a možemo ga smatrati i mješovito periodskim, komu antiperiod ima po volji mnogo znamenaka. Na pr.

$$0{,}135) = 0{,}(135135) = 0{,}(135135135) = \ldots;$$

$$0{,}(135) = 0{,}1(351) = 0{,}13(513) = 0{,}135(135) = \ldots.$$

Došli smo do vrlo važnog zaključka: Svaki se racionalni broj može prikazati kao decimalni, a taj je ili svršeni ili je periodski; svaki periodski decimalni razlomak jednak je posve određenom običnom razlomku.

*

* *

Periodi nekih razlomaka pokazuju zanimljive osobine. Da ih protumačimo, valja nam se prije upoznati s t. zv. pravilima o djeljivosti. Ima bar jedno pravilo o djeljivosti broja B ma kojim brojem N. Ako broju N pripada eksponent n, onda potencije 10^n, 10^{2n}, $10^{3n}, \ldots$, razdijeljene brojem N, daju ostatak 1. Razdijelimo li dakle broj B, počevši zdesna u grupe po n znamenaka, pa te grupe kao brojeve označimo sa a, b, c, d, ..., možemo pisati

$$B = a + b \cdot 10^n + c \cdot 10^{2n} + d \cdot 10^{3n} + \ldots,$$

pa vidimo: ako broj B razdijelimo sa N, izaći će nam ostatak, koji bismo dobili, kad bismo sumu $a + b + c + d + \ldots$

razdijelili sa N. Tako nalazimo, da je broj 5384731 djeljiv sa 11, jer je suma $31 + 47 + 38 + 05 = 121$ djeljiva sa 11.

Ako broju N pripada parni eksponent $2n$, onda je razlika $10^{2n} - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$ djeljiva sa N. Ako $(10^n - 1)$ nije djeljiv nijednim faktorom broja N, onda je $(10^n + 1)$ djeljivo brojem N. U tome događaju mi kažemo, da potencija 10^n, razdijeljena sa N, daje ostatak (-1). Taj isti ostatak daju i potencije 10^{3n}, 10^{5n}, $10^{7n}, \ldots$, dok potencije 10^{2n}, 10^{4n}, 10^{6n}, ... daju ostatak 1. Razdijelimo li broj B u grupe po n znamenaka: $a, b, c, d, \ldots$, počevši zdesna, možemo pisati

$$B = a + b \cdot 10^n + c \cdot 10^{2n} + d \cdot 10^{3n} + \ldots$$

pa zaključujemo, da B razdijeljeno sa N daje isti ostatak kao razlika $(a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$. Na pr. $N = 77$; $2n = 6$; $(10^3 - 1)$ nije djeljivo ni sa 7 ni sa 11; $B = 3351656$; $656 + 3 = 659$; $659 - 351 = 308 = 4 \cdot 77$; B je djeljiv sa 77.

Period razlomka $\frac{1}{7}$ je $P = (10^6 - 1) : 7 = 142857$; broju P pripada eksponent 6. Kako je $P \cdot 10 = 1428570$ djeljivo sa P, mora po pravilu o djeljivosti brojem P biti i suma $428570 + 1 = 428571$ djeljiva sa P; doista je $428571 = 142857 \times 3$. Množeći tako P brojevima 10^2, 10^3, 10^4 i 10^5 nalazimo, da je $285714 = 2P$, $857142 = 6P$, $571428 = 4P$, a $714285 = 5P$. Množimo li dakle broj P redom brojevima 3, 2, 6, 4, 5, dobivamo ne samo brojeve, koji imaju iste znamenke kao broj P, nego te znamenke idu i istim redoslijedom kao u broju P. Brojevi P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, $6P$ nijesu ništa drugo nego redom periodi razlomaka

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}.$$

Kako je $7P = 999999 = 999 \cdot 1001 = 999 \cdot 143 \cdot 7$, to je svih 6 spomenutih perioda djeljivo sa $999 = 10^3 - 1$. Razdijelimo li dakle svaki od tih perioda potezom u sredini u dva broja s po 3 znamenke, mora zbroj tih dvaju brojeva biti djeljiv sa 999; kako znamenke perioda ne mogu biti sve devetice, mora nam izaći upravo broj 999. Doista je 142 + 857 = = 999, 428 + 571 = 999 i t. d. Iz toga rezultata zaključujemo, da se znamenke prvog pribrojnika moraju sa znamenkama drugog pribrojnika popunjati redom na 9; doista je 1 + 8 = 9, 4 + 5 = 9, 2 + 7 = 9. Ako bi dakle period razlomka sa nazivnikom 7 određivali dijeleći brojnik nazivnikom, kako se obično radi, onda nam je dovoljno odrediti prve tri znamenke perioda, jer su nam prema pređašnjemu ostale tri poznate.

Lako ćemo sad odgonetnuti, zašto je u periodu 142857 zbroj dvoznamenkastih brojeva (57 + 28 + 14) djeljiv sa 99 (a to vrijedi i za ostalih 5), i zašto je zbroj znamenaka tih perioda djeljiv sa 9.

Slične osobine pokazuju i periodi drugih razlomaka; ako period 0588235294117647 razlomka $\frac{1}{17}$ množimo redom brojevima 2 do 16, dobit ćemo još 15 brojeva sa znamenkama toga perioda u istom redoslijedu. Kad pravi razlomak s nazivnikom 17 pretvaramo u decimalni, dosta nam je naći prvih 8 znamenaka perioda, jer se drugih 8 popunjuje s prvima redom na 9.

U periodu razlomka $\frac{11}{21} = 0,(523809)$ prve se tri znamenke ne popunjuju s druge tri na 9, jer taj period nije djeljiv sa 999, dok to vrijedi za period razlomka $\frac{54}{77} = 0,(701298)$.

Periodi razlomaka s nazivnikom 31 imaju 15 znamenaka; kad odredimo prvih 10, ostalih 5 nađemo odbijanjem. Uvjerimo se! $\frac{25}{31} = 0,(806451612903225)$; 80645 + 16129 = 96774; 99999 — 96774 = 03225; to je zato, što je period tih razlomaka djeljiv brojem 99999.

Lijepa je teorija brojeva, i tko ima osjećaja za tu vrst ljepote, eto mu na pretek duševnog odmora i razonode!

Stjepan Škarica

NEŠTO MALO O TROKUTU

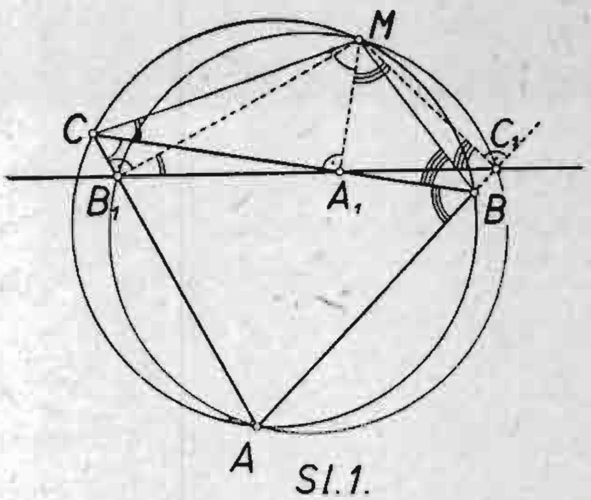
Najjednostavnija sastavljena geometrijska tvorevina je bez sumnje trokut. Samo je dužina jednostavnija od njega, jer je sastavljena i određena s dvije točke, dok je trokut zadan i određen s tri točke, a sastavljen iz tri dužine. Usprkos svojoj velikoj jednostavnosti zadaje on dovoljno posla učenicima srednjih škola, bilo sam, bilo u vezi s ostalim tvorevinama i njihovim međusobnim odnosima u geometriji. Međutim sve ono što se uči u srednjoj školi, samo je mali dio onoga što se znade o trokutu. Dok se neke njegove osebine mogu vidjeti i otkriti vrlo lako, dotle postoje i takove, do kojih se dolazi nešto teže. Ovakove katkada upravo začuđuju čovjeka, obzirom na jednostavnost trokutova oblika i njegovih varijanata, ali zato pobuđuju sve veću radoznalost i interes za apstraktne prirodne istine, koje u sebi krije posve običan trokut. Veliko je pitanje, jesu li do danas sve te istine otkrivene. Mislim, da s priličnom sigurnošću smijemo ustvrditi da nisu, i ako za trokut znade čovječanstvo već tisućljeća, a isto tako dugo ga primjenjuje i u svagdanjem praktičnom životu.

Neke najzanimljivije osebine običnog trokuta iznijet ćemo Vam u ovo nekoliko redaka. Vi ćete odlučiti jesu li zanimljive, a mene će veoma veseliti, ako se nađe takovih čitalaca, koje će ovih nekoliko redaka pobuditi na življi interes za geometrijsku nauku, koja uz ostale dijelove matematike traži najživlju djelatnost ljudskoga uma.

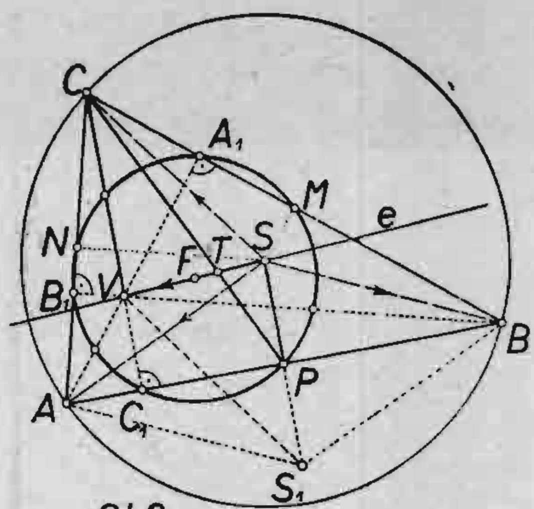
Za neke donesene osebine izvest ćemo i dokaz, ako je jednostavan. Ako takav dokaz ili izvod nije jednostavan, zadovoljit ćemo se samim opisom.

Među najjednostavnije osebine trokuta spada ova: Opišemo li trokutu *ABC* kružnicu (sl. 1.), pa iz bilo koje točke *M* te kružnice spustimo okomice na stranice toga trokuta, onda nožišta tih okomica leže uvijek na nekom pravcu. Taj se pravac zove *Simsonov* (1687.—1768.) ili *Wallaceov* (oko 1800.)

pravac. Ne zna se naime sigurno, koji je od njih dvojice našao taj pravac. Spomenuta nožišta na stranicama BC, AC, AB označimo s A_1, B_1, C_1. Radi $MB_1 \perp AC$, $MA_1 \perp CB$ i $MC_1 \perp AB$ je $\sphericalangle B_1 MA_1 = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle C_1 MA_1 = \sphericalangle ABC$. Nadalje iz istih razloga leže točke C, B_1, A_1, M na jednoj, a točke B, C_1, M, A_1 na drugoj kružnici, na temelju kojih onda izlazi da je $\sphericalangle A_1 B_1 M = \sphericalangle A_1 CM$ i $\sphericalangle A_1 C_1 M = \sphericalangle A_1 BM$. Budući da je $\sphericalangle ACM + \sphericalangle ABM = 180^0$ lako se vidi, da je radi $\sphericalangle MA_1 B_1 = 180^0 - (\sphericalangle A_1 MB_1 + \sphericalangle A_1B_1M = \sphericalangle ACM)$ i $\sphericalangle MA_1 C_1 = 180^0 - (\sphericalangle A_1 MC_1 + \sphericalangle A_1 C_1 M = \sphericalangle ABM)$



Sl.1.



Sl.2.

zbroj kutova $\sphericalangle MA_1 C_1 + \sphericalangle MA_1 B_1 = 180^0$ (spruženi kut). Jer je $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ spruženi kut, slijedi da se točka A_1 nalazi na spojnici točaka $B_1 C_1$. Vidimo dakle, da je gornja tvrdnja ispravna.

Uzmimo opet po volji neki trokut ABC. Neka je S središte opisane kružnice tome trokutu. Polovište P stranice AB spojimo s vrhom C i na njemu uzmimo težište T toga trokuta. Tu mora biti, kao što znademo, $CT = 2\, TP$. (Sl. 2.). Spojimo sada pravcem e točke S, T i prenesimo dva puta dužinu ST, od točke T na suprotnu stranu, do točke V. Radi sličnosti trokuta TSP i TVC bit će $CV \parallel SP$, dakle se točka V nalazi na okomici spuštenoj iz točke C na stranicu AB. Uzmemo li mjesto točke P polovište M ili N stranice BC, odnosno CA, dobit ćemo točku

V kao sjecište svih triju visina trokuta *ABC*. Vidimo dakle, da se središte opisane kružnice (*S*), težište (*T*) i sjecište visina (*V*) nekog trokuta nalaze na nekom pravcu (e). Taj je pravac otkrio glasoviti matematičar *L. Euler* (1707.—1783.), pa je po njemu dobio i svoje ime.

Poznati engleski matematičar i pravnik *J. Sylvester* (1814. do 1897.) postavio je slijedeću zadaću: Neka se odredi rezultanta triju jednakih sila *SA, SB, SC,* ako one izlaze iz središta *S* opisane kružnice trokutu *ABC*. (Sl. 2.). Produžimo li okomicu *SP* stranice *AB* do točke S_1 tako, da je $SP = PS_1$, onda je SS_1 rezultanta sila *SA, SB.* Budući da je $SS_1 \# CV$, tada je i $CS \# VS_1$, dakle je *SV* tražena rezultanta zadanih triju sila. Vidimo dakle, da smo našim gornjim dokazom za Eulerov pravac riješili istodobno i Sylvesterovu zadaću, koja je doduše vrlo jednostavna, ali ima bez sumnje zanimljivo rješenje.

U vezi sa svakim trokutom postoji vrlo zanimljiva kružnica, za koju je znao već spomenuti matematičar *Euler,* ali ju je ponovno otkrio *K. Feuerbach* (1800.—1834.), pa je po ovome dobila ime *Feuerbachova kružnica.* Označimo nožišta visina trokuta *ABC* (sl. 2.) na stranicama *BC, CA, AB* s A_1, B_1, C_1, te opišemo trokutu $A_1 B_1 C_1$ kružnicu. Ovo je to spomenuta kružnica, a ona siječe stranice trokuta *ABC* osim u spomenutim nožištima još i u njihovim polovištima *P, M, N.* Osim toga raspolavlja ta kružnica udaljenosti sjecišta visina *V* do vrhova *A, B, C,* toga trokuta. Radi navedenoga zovu je i *kružnicom trokutovih devet točaka,* premda ona prolazi još i mnogim drugim zanimljivim točkama toga trokuta. Središte te kružnice je na Eulerovu pravcu i to u polovištu *F* dužine *SV,* a polumjer joj je jednak polovici polumjera opisane kužnice.

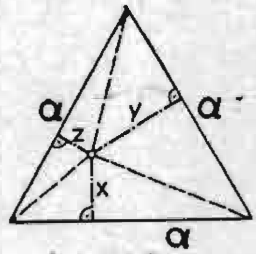
U trapezu C^1PMN stranice su *PM* i NC^1 jednake, jer je $PM = {}^1/_2\, AC$, a isto tako je i $NC = {}^1/_2\, AC$ radi pravoga kuta AC^1C. (Opisana kružnica promjeru *AC* prolazi i točkom C^1). Isto su tako u trapezima A^1MPN i B^1MPN jednake stranice

A^1N, MP i B^1P NM. Oko svakog istokračnog trapeza možemo opisati kružnicu, a u slučaju naših trije trapeza je to ista kružnica, dakle se šest navedenih točaka u istinu nalazi na jednoj kružnici. Promatrajmo sada na našoj slici samo trokut AVB. Nožišta visina ovoga trokuta opet su točke A_1, B_1 C_1. Ovim točkama povučena Feuerbachova kružnica sjeći će, kao što smo malo prije vidjeli, stranice toga trokuta u njihovim polovištima. Jer je to ista Feurebachova kružnica, dobili smo time daljnje njene dvije točke na spojnim dužinama vrhova A, B sa sjecištem V visina trokuta ABC. Uzmemo li sada mjesto trokuta AVB trokut BVC, ili CVA, dobit ćemo na isti način i preostalu devetu točku te kružnice u polovištu dužine VC, jer sva ova tri trokuta imaju istu Feuerbachovu kružnicu s trokutom ABC. Dokazali smo dakle, da u istinu spomenutih devet točaka leži na Feuerbachovoj kružnici.

Budući da je središte Feuerbachove kružnice sjecište simetrala malo prije spomenutih istokračnih trapeza, dakle i njihovih kraćih baza na stranicama trokuta, tada je očito, da se to središte mora nalaziti u polovištu dužine SV na Eulerovom pravcu. Trokut MNP je sličan trokutu ABC, ali je od njega za polovinu manji. Polumjer trokuta MNP opisane Feuerbachove kružnice mora prema tome biti jednak polovici polumjera opisane kružnice trokuta ABC, a time smo dokazali sve naše tvrdnje o toj kružnici.

Govoreći o Feuerbachovoj kružnici spomenuli smo više puta trokut $A_1B_1C_1$, koji je određen nožištima visina zadanog trokuta ABC. U vezi s ovim trokutom sjetit ćemo se znamenite zadaće, postavljene od *I. F. Fagnana* (oko 1740.), u kojoj se traži trokut najmanjeg opsega, upisan nekom šiljastokutnom trokutu. Zadaća je riješena na više raznih načina, a rezultat je ovaj: Trokut najmanjeg opsega upisan u neki šiljastokutan trokut je onaj, koji je određen nožištima njegovih visina na njegovim stranicama. Dakle našem trokutu ABC upisan trokut $A_1B_1C_1$ je njemu upisani trokut najmanjeg opsega.

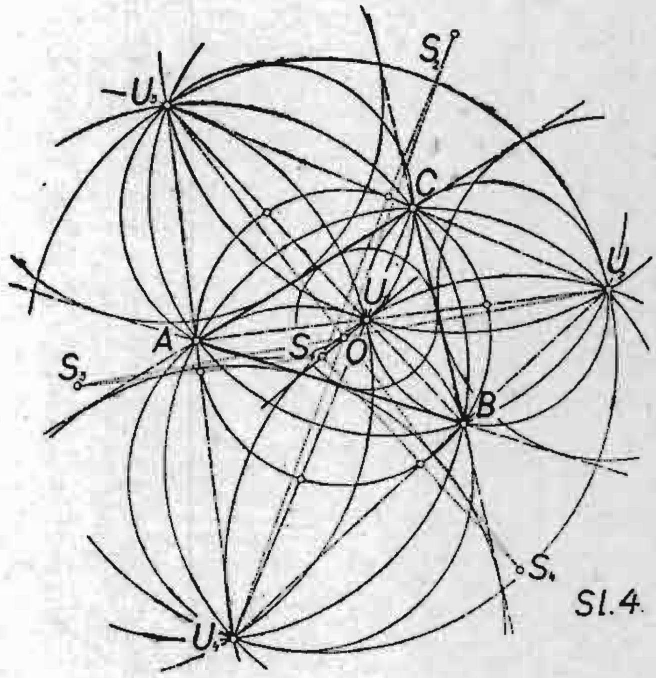
Kada već govorimo o zadaćama u vezi s trokutom, spomenut ćemo i poznatu zadaću, koju je francuski matematičar *Fermat* (1601.—1665.) postavio talijanskom fizičaru *Torricelliu* (1608.—1647.), učeniku znamenitog Galileja. Zadaća glasi: Neka se odredi točka, koja će imati najmanji zbroj udaljenosti od vrhova nekog zadanog trokuta. Torricelli je riješio tu zadaću na više načina, a najjednostavnije rješenje postignuto je pomoću stavka za istostrani trokut, koji je dao njegov i Galilejev učenik *Viviani* (1622.—17033.), također poznati talijanski matematičar i fizičar. Taj stavak glasi ovako: Zbroj udaljenosti neke točke u istostranom trokutu od njegovih stranica neovisan je o mjestu te točke i jednak visini toga trokuta. Neka su x, y, z udaljenosti neke točke od stranica istostranog trokuta dužine a (sl. 3.). Ploština toga trokuta neka je P. Spojimo li zadanu točku s vrhovima trokuta, razdijelili smo time taj trokut u tri trokuta, kojih će ploštine zbrojene dati ploštinu P. Dakle je $\frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} ay + \frac{1}{2} az = P$, ili $x + y + z = 2P/a$. Ako je v visina toga istostranog trokuta, onda je $P = \frac{1}{2} av$, ili $v = 2P/a$. Vidimo dakle, da je $x + y + z = v$, t. j. Vivianijev stavak odgovara istini. Udaljenost točke od stranice (i produžene) računa se pozitivno ili negativno prema tome, da li se nalaze ta točka i trokut s iste strane te stranice ili ne.



Sl. 3.

Rješenja same Fermatove zadaće su nešto zamršenija, pa ih ne ćemo ovdje donijeti, a rezultat im glasi: Opišemo li kružnice istostranim trokutima, postavljenim iznad svake stranice nekog trokuta ABC s izvanje strane, tada se te tri kružnice sijeku u točki T, kojoj je zbroj udaljenosti od vrhova trokuta ABC najmanji.

Uzmimo opet po volji neki trokut ABC te mu opišimo i upišimo kružnice, čija središta označimo s O i U_1 (sl. 4.). Poznato je, da središte O dobivamo kao sjeciste simetrala stranica, a središte U_1 kao sjecište simetrala kutova toga trokuta. Nacrtamo li sada osim ovih simetrala kutova još i simetrale njihovih suplementnih kutova, a sve stranice zamislimo produžene na obje strane, tada u sjecištima tih novih simetrala dobivamo središta U_2, U_3, U_4 triju novih upisanih kružnica našem proširenom trokutu s izvanje strane. U svakom ovom novom središtu opet se sijeku po tri simetrale. Budući da su obje simetrale u svakom vrhu trokuta jedna na drugoj okomite, vidi se odmah, da je trokut ABC trokut nožišta visina trokutu $U_2\ U_3\ U_4$, koji je određen središtima vani upisanih kružnica trokutu ABC. Trokutu ABC opisana kružnica središta O je prema tome Feuerbachova kružnica trokuta $U_2\ U_3\ U_4$. Isto tako i iz istih razloga je ovo Feuerbachova kružnica *c za trokute* $U_1\ U_2\ U_3$, $U_1\ U_3\ U_4$ i $U_1\ U_4\ U_2$. Znademo iz svojstava Feuerbachove kružnice, da ona naša kružnica mora prema tome raspolavljati sve dužine, koje možemo dobiti spajanjem bilo kojih dviju između točaka U_1, U_2, U_3, U_4. Na temelju ovoga, kao i na temelju okomitosti obiju simetrala u svakom vrhu trokuta ABC, slijedi ova daljnja osebina svakog trokuta: P o v u č e m o l i s v a k i m p a r o m v r h o v a n e k o g t r o k u t a o b j e k r u ž n i c e, k o j i m a s u s r e d i š t a n a o p i s a n o j k r u ž n i c i t o m e t r o k u t u, o n d a s e p o t r i t a k o v e k r u ž n i c e s i j e k u u s v a k o m s r e d i š t u o d č e t i r i j u u p i s a n i h k r u ž n i c a t o m e t r o k u t u.



Sl. 4

Znademo, da je spojnica $U_1\ O$ Eulerov pravac trokuta $U_2\ U_3\ U_4$. Središte S_1 opisane kružnice trokutu $U_2\ U_3\ U_4$ bit će prema tome smješteno na tom pravcu tako, da bude $S_1 O = OU_1$ (osebina središta O Feuerbachove kružnice). Polumjer ove kružnice jednak je promjeru opisane kružnice trokutu ABC. Posvema isto vrijedi za opisane kružnice trokutima $U_1 U_2 U_3$, $U_1 U_3 U_4$, $U_1 U_4 U_2$ i njihova središta $S_2 S_3$, S_4, jer je opisana kružnica trokutu ABC Feuerbachova kružnica za svaki ovaj trokut. Jer su polumjeri tih kružnica jednaki (dvostruki polumjer Feuerbachove kružnice), to će središta S_2, S_3 S_4 tih kružnica ležati simetrično prema središtu S_1 s obzirom na stranice trokuta $U_2 U_3 U_4$. Posljednje tri kružnice bit će dakle zrcalne (simetrične) slike opisane kružnice trokutu $U_2 U_3 U_4$ s obzirom na njegove stranice, a prolazit će točkom U_1 kao zajedničkim vrhom onih triju spomenutih trokuta. Vidimo dakle, da za svaki trokut vrijedi i ova osebina: Zrcalimo li opisanu kružnicu nekog trokuta na njegovim stranicama, tada tri na taj način dobivene kružnice prolaze sjecištem visina toga trokuta.

Središta ovih triju kružnica dobit ćemo naravski tako, da središte S_1 prebacimo simetrično na drugu stranu svake stranice.

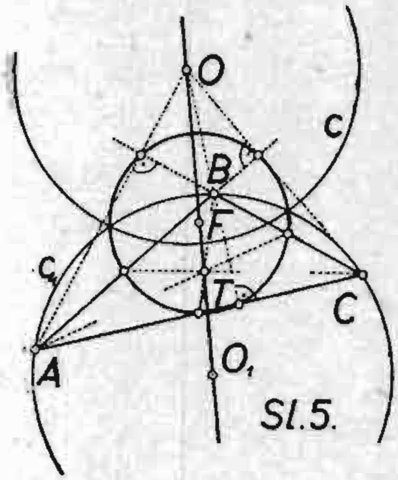
U do sada spomenutim osebinama trokuta skrivena je zapravo i ova: Prebacimo li sjecište visina nekog trokuta simetrično na drugu stranu svake stranice, tada se te tri dobivene točke nalaze na opisanoj kružnici toga trokuta.

Kada već toliko spominjemo upisane kružnice nekom trokutu i njegovu Feuerbachovu kružnicu, tada ćemo usput spomenuti i to, da Feuerbachova kružnica nekog trokuta dira sve četiri njegove upisane kružnice. Dokaz za to ne ćemo izvoditi, jer nije dovoljno jednostavan.

Govoreći o trokutu učinili bismo krivo, kada se ne bi osvrnuli i na polarne trokute čunjosječnica (krivulja 2. reda), i to barem toliko, koliko su u vezi s Eulerovim pravcem i Feuerbachovom kružnicom. Mi ćemo se ovdje međutim zabaviti samo s polarnim trokutima kružnice. Što je pol i polara to znademo!

Povučemo li iz neke točke (pola) tangente na kružnicu, onda se spojnica dirališta tih tangenata zove polara te točke kao pola. Imamo li uz neku kružnicu zadan i neki trokut tako, da je svaki vrh toga trokuta pol nasuprotne stranice kao polare, onda je taj trokut polarni obzirom na tu kružnicu. Kod polarnog trokuta kružnice prolaze produženja svih triju visina središtem te kružnice, radi njene simetričnosti.

Uzmimo takovu kružnicu *c*, kojoj je središte *O* i jedan njen polarni trokut *ABC*, kojemu je opisana kružnica c_1 sa središtem O_1 (sl. 5.). Poznata je činjenica, koju ovdje ne dokazujemo, da se u kružnicu c_1 može upisati osim trokuta *ABC* još neizmjerno mnogo drugih polarnih trokuta kružnice *c*. Svi ti polarni trokuti imaju zajedničko središte O_1 opisane kružnice i zajedničko sjecište *O* njihovih visina, dakle svi ti trokuti imaju i zajednički Eulerov pravac. Znademo iz razmatranja o Eulerovom pravcu i Feuerbachovoj kružnici, da se težište trokuta nalazi u prvoj trećini dužine O_1 *O* do točke O_1, a središte *F* Feuerbachove kružnice u polovici te dužine. Polumjer Feuerbachove kružnice jednak je polovici polumjera kružnice c_1, dakle za sve spomenute upisane trokute u kružnici c_1, postoji isto težište, te isto središte i polumjer Feuerbachove kružnice Dobili smo prema tome i ovu zanimivu činjenicu: Opišemo li kružnicu c_1 jednom polarnom trokutu neke kružnice *c*, tada se u kružnici c_1 nalazi neizmjerno mnogo upisanih polarnih trokuta kružnice *c*, a svi ti polarni trokuti imaju zajednički *Eulerov pravac*, težište i *Feuerbachovu kružnicu.*



Sl.5.

Naša razmatranja o trokutu mogli bismo nastaviti sve do obujma debele knjige, ali nam nažalost stoji na raspolaganju samo ograničeni prostor. Budući da su odnosi između opisane i upisanih kružnica također vrlo zanimivi, spomenut ćemo nešto i o tome. Oko god. 1790. našao je francuski matematičar *Lhuilier,* da je zbroj polumjera vanjskih triju upisanih kružnica nekom trokutu jednak zbroju polumjera unutarnje upisane kružnice i četverostrukog polumjera opisane kružnice. Zanimiv je i stavak poznatog francuskog političara i matematičara iz vremena francuske revolucije *L. Carnota,* koji glasi: Zbroj polumjera opisane i upisane (nutarnje) kružnice nekog trokuta jednak je zbroju udaljenosti središta opisane kružnice od stranica toga trokuta.

Sve ove do sada nabrojene važnije osebine trokuta otkrivene su već prije mnogo godina, kao što se vidi iz navedenih godina uz spomenute matematičare. Međutim krivo bi bilo mišljenje, da su istraživanja na trokutu, i u vezi s njim, završena. Kao noviji dokaz za to može nam poslužiti radnja od *A. F. Maslova, O teoremu Carnot,* koja je izašla u Naučnim zapiscima fiziko-matematskog fakulteta u Moskvi, sv. 1, god. 1940., u kojoj se na bazi Carnotovog stavka istražuju daljnje osebine trokuta u vezi s udaljenostima bilo koje točke od njegovih stranica.

Kada bismo prolistali popise naučnih radova u prošlih desetak godina, najbolje bismo se uvjerili o tome, koliko se ljudi bavi problemima trokuta i u novije vrijeme. Ali listajući te popise opazili bismo već radi analogije i to, koliko se ljudi bavi i problemima tetraedra, kao najjednostavnije prostorne geometrijske tvorevine. Koliko zanimivih osebina i skrivenih istina može biti na takovoj prostornoj geometrijskoj tvorevini možete si lako predočiti i sami, kada već toliko toga ima na najjednostavnijoj ravninskoj geometrijskoj tvorevini — na posve običnom trokutu. No to više ne spada pod ovaj naslov i na ovo mjesto.

Dr. Vilko Niče

PRINCIP TOTALNE INDUKCIJE U MATEMATICI

Princip totalne indukcije nadaje nam put kako da uočimo skup svih prirodnih brojeva.

1. Sam niz prirodnih brojeva

$$1, , 3, \ldots, n, n + 1, \ldots.$$

čini osnov čitave matematike; već iz načina kako smo ga napisali naime najprije broj 1, pa slijedeći broj 2, pa slijedeći broj 3, uopće da poslije ma kojeg broja n dolazi baš slijedeći cijeli broj $n + 1$, proizlazi glavno svojstvo niza prirodnih brojeva, svojstvo poznato pod imenom *principa totalne indukcije,* a kojega zorno možemo ovako izreći:

Ako tokom nekog promatranja

a) precrtamo broj 1

b) precrtavši broj n, precrtamo i broj n + 1 onda ćemo precrtati svaki prirodni broj.

Stvarno precrtavši 1 — a to smo učinili prema svojstvu *a)* — precrtamo prema svojstvu *b)* i broj 2, a onda prema istom svojstvu i broj 3, pa broj 4 i t. d. *Svaki će prirodni broj biti precrtan.* Kad bi naime bio bar jedan neprecrtan broj, postojao bi i *najmanji neprecrtan* broj, nazovimo ga k. Kako je $k > 1$, postoji broj $k - 1$ koji je precrtan, jer bi inače $k - 1$ bio neprecrtan broj manji od najmanjeg neprecrtanog broja k; no time što je $k - 1$ precrtan, bio bi prema svojstvu *b)* precrtan i broj k.

Dakle je zbilja svaki prirodni broj precrtan.

2. Princip totalne indukcije možemo i ovako izreći:

a') precrtamo li broj 1,

b') precrtavši sve brojeve $< n$, precrtamo li i sam prirodni broj n, onda ćemo precrtati svaki prirodni broj.

Očito je da se ta dva oblika principa totalne indukcije svode neposredno jedan na drugi. No ipak svojstvo *b')* se bitno razlikuje od svojstva *b)* u tome što nam svojstvo *b')* kazuje kako iz razmatranja skupa svih prirodnih brojeva $< n$ zaključujemo na vladanje *šireg* skupa brojeva $< n + 1$.

3. Za svaki član x nekog skupa brojeva ili uopće kakvog skupa za čije je članove određen neki poredaj, potpuno je određen skup svih članova skupa smještenih *lijevo* ili *ispred x*; svaki takav dio skupa kao i sam skup zvat ćemo *početnim intervalom* skupa. Tako na pr. skup brojeva 1, 2, 4 nije početni interval niza svih prirodnih brojeva, ali jest početni interval skupa 1, 2, 4, 5. Skup svih negativnih brojeva jedan je početni interval skupa svih običnih brojeva baš zato što je sastavljen od svih brojeva < 0. Skup svih konačnih decimalnih razlomaka $< \pi$ ne čini početni interval skupa svih konačnih decimalnih razlomaka, jer sam broj π nije konačan decimalan razlomak.

Kad smo tako razbistrili pojmove možemo izreći: *Princip indukcije za tačke na pravcu* ili *za skup svih običnih brojeva:*

Ako *A) precrtamo jedan početni interval skupa*

B) precrtavši početni interval skupa, precrtamo širi početni interval skupa,

onda ćemo precrtati čitavi skup.

Dokaz je posve jednak dokazu običnog principa totalne indukcije, a težina dokaza leži na tome da kad bi postojao jedan neprecrtani broj, da bi postojao i *najmanji* neprecrtani broj, a time i najveći precrtani početni interval, što prema svojstvu *B)* nije moguće, osim kad je taj interval sam zadani skup.

Ako s pravca uklonimo makar i jednu tačku gornji princip indukcije ne mora da važi za preostali, krnji skup, jer uklonimo li na pr. s pravca tačku *0*, može se dogoditi, da se skup precrtanih tačaka sastoji baš iz skupa svih tačaka pravca lijevo od *0*, a taj skup nije početni interval toga krnjega pravca — ne dostaje nam tačka *0* — pa tako nemamo uporišta da prevalimo *prazninu 0* i prijeđemo na tačke desno od *0*.

Tako dakle vidimo da ma kakvim iscrpljivanjem skupa pomoću proizvoljnih njegovih početnih *intervala* ne ćemo vazda iscrpsti čitavi i svaki skup.

4. Opći princip indukcije. Ako i ne ćemo proizvoljnim prelaženjem s jednog početnog *intervala* na širi početni *interval* vazda iscrpsti zadani skup, ima ipak jedan način kako ćemo uočiti svaku tačku ma kojeg uređenog skupa: prelazeći od početnog *komada* skupa na širi *početni komad* skupa. Pod početnim komadom (razlikuj *komad* od *intervala!*) skupa razumijevamo sam skup kao i svaki njegov dio koji ima svojstvo da sadrži i sve brojeve skupa *lijevo* od x, čim sadrži tačku x skupa.

Tad imamo ovaj opći princip indukcije:

Ako α) *precrtamo kakav početni komad skupa,*

β) *precrtavši jedan početni komad skupa, precrtavamo i širi komad skupa*

onda ćemo precrtati čitav skup.

Specijalno taj princip možemo primijeniti na pr. na skup svih konačnih decimalnih razlomaka, na koji vazda ne možemo primijeniti princip indukcije iz čl. 3, a još manje princip totalne indukcije.

5. Primjene principa totalne indukcije kao i principa indukcije iz čl. 3. vanredno su brojne i raznovrsne. Mi ćemo se ovdje poslužiti principom totalne indukcije, da izvedemo sumu geometrijske progresije i beskonačnog geometrijskog reda.

I. Stavimo li

$$s_n \equiv 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$

treba dokazati da je

$$s^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{1}$$

za ma koji prirodni broj $n > 1$.

Najprije je jasno da je formula (1) istinita za $n = 2$; dokažemo li, da je ona istinita i za $n = k + 1$, čim je istinita za $n = k$, bit će njena valjanost, prema principu totalne indukcije, dokazana uopće.

No

$$s_{k+1} = s_k + q^k = \frac{q^k - 1}{q - 1} + q^k = \frac{(q^k - 1) + (q - 1)\,q^k}{q - 1} =$$

$$=\frac{q^{k+1}-1}{q-1},$$

a to znači da je zbilja (1) istinito i za $n = k + 1$.

II. Ako je $q > 1$, onda q^n raste preko svake granice, jer ćemo odmah dokazati da je

$$q^n > 1 + n(q-1) \qquad (2)$$

za svaki $q > 1$ i svaki prirodni broj $n > 1$.

Najprije

$$q^2 = [1 + (q-1)]^2 = 1 + 2(q-1) + (q-1)^2 >$$
$$> 1 + 2(q-1)$$

što znači da je formula (2) istinita za $n = 2$. Dokažimo, da je (2) istinito za $n = k + 1$, ako je samo (2) istinito za $n = k$. Kako je dakle prema hipotezi

$$q^n > 1 + n(q-1),$$

izlazi, množeći tu nejednakost s q, ova ispravna nejednakost

$$q^{n+1} > [1 + n(q-1)]\, q = [1 + n(q-1)]$$
$$[1 + (q-1)] = 1 + (n+1)(q-1) + (q-1)^2$$
$$> 1 + (n+1)(q-1)$$

dakle

$$q^{n+1} > 1 + (n+1)(q-1)$$

što prema principu totalne indukcije znači, da je formula (2) istinita za svaki prirodni broj $n > 1$ i svaki broj $q > 1$.

III. Ako je $0 < q < 1$, onda je q^n proizvoljno maleno za velik eksponent n. U istinu, bit će $\frac{1}{q} > 1$, dakle $\left(\frac{1}{q}\right)^n$ proizvoljno veliko, a po tome recipročna vrijednost q^n proizvoljno malena.

Isto tako, ako je q neki broj < 0 a > -1 može se q^n učiniti proizvoljno maleno — treba samo uzeti n vrlo veliko — pa tako dobijamo rezultat, da se za svaki broj q za koji je $|q| < 1$ broj q^n proizvoljno tačno približuje broju 0 što se piše $q^n \to 0$, kad $n \to \infty$.

IV. Ako je dakle $|q| < 1$, može se za vrlo visoke n broj q^n zanemariti: pogreška je tim manja, što je n veće, pa će se zato i izraz s_n prema formuli (1) proizvoljno približiti broju $\frac{0-1}{q-1}$ t. j. broju $\frac{1}{1-q}$. No, kad n poraste preko svake granice, onda geometrijska progresija $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ prelazi u t. zv. *beskonačni geometrijski red*

$$1 + q + q^2 + \ldots .$$

a suma $\frac{q^n-1}{q-1}$ progresije u izraz $\frac{1}{1-q}$, tako da se može pisati

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Đuro Kurepa

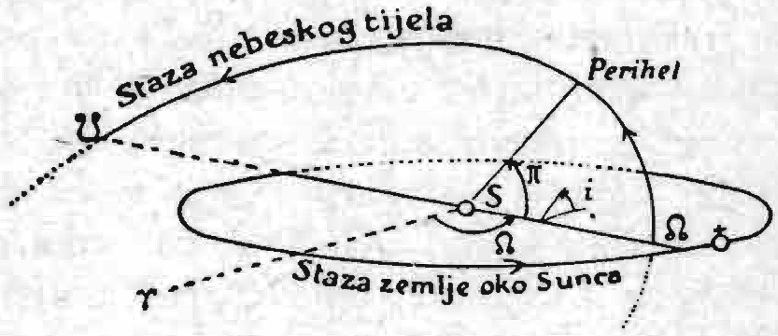
PROBLEM TRIJU TIJELA

Kada je god. 1687. Isaac Newton (Njutn), profesor na Trinity Collegeu u Cambridgeu, izdao djelo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematička načela prirodne filozofije) kao rezultat dugogodišnjih svojih razmišljanja i računanja, bilo je jasno svima, koji su mogli to djelo prosuditi, da se njime započinje novo doba u izučavanju prirode. Mjesto dotadanjih više ili manje samovoljnih spekulacija o prirodnim pojavima postavljen je u tom djelu kao ishodišna točka osnovni zahtjev, da se prirodni pojavi svedu na matematičke zakone. A kako je Newton još prije izradio i nove, dalekosežne matematičke metode za izučavanje pojava, koje se zbivaju u neprekidnoj promjeni, i time postavio temelje infinitezimalnoga računa (što je u drugom obliku i nezavisno od njega učinio i G. W. Leibniz), mogao je on primjenom tih metoda pokazati, kako su one snažno oruđe u izučavanju prirode, osobito u rukama onako pronicava, stroga i ustrajna uma, kakov je bio njegov. Zadatak, koji Newton sebi postavlja u toj novoj »prirodnoj filozofiji« jest, da polazeći od pojava g i b a n j a istražuje s i l e, koje ih izvode, i zatim, da polazeći od tih s i l a protumači i mnoštvo d r u g i h p o j a v a. Stoga on u prve dvije knjige svoga djela, pošto je utvrdio znamenite svoje zakone gibanja, tako opširno ispituje svojstva gibanja materijalnih točaka i tijela, slobodnih i vezanih, bez otpora i s otporom, uključujući u svoja razmatranja i ravnotežu i gibanje tekućina te širenje gibanja u tekućinama. Napokon u trećoj knjizi posvećenoj »svemirskom sustavu« izriče Newton poznati svoj z a k o n g r a v i t a c i j e, prema kome se dvije materijalne čestice privlače silom, koja je upravno razmjerna s njihovim masama, a obrnuto s kvadratom njihove daljine; taj zakon primjenjuje on tada na privlačenje tijela u Sunčevu sustavu i izvodi na temelju teorema prvih dviju knjiga svojstva gibanja planeta, mjeseca, kometa te tumači i plimu i osjeku mora.

Zakoni, po kojima se gibaju planeti oko Sunca, bili su već poznati prije. Nakon godina mučna računanja i mnogih pokušaja našao je J. Kepler iz opažanja planeta Marsa prva svoja dva zakona; prema prvom gibaju se planeti oko Sunca u elipsama, kojih jedno žarište pada u središte Sunca, a prema drugom zakonu to je gibanje takovo, da ploštine, što ih opisuje pri tome radij-vektor planeta, rastu razmjerno s vremenom, u kome su opisane. Kasnije je Kepler našao i treći zakon, da se naime kvadrati ophodnih vremena dvaju planeta, dakle vremena, što ih oni trebaju da obađu jednom svoju elipsu, odnose kao treće potencije velikih osi njihovih elipsa. Jedna od najljepših primjena novih matematičkih metoda dokaz je Newtonov da se polazeći od zakona privlačenja, kako ga je on formulirao, mogu čisto matematičkim putem izvesti Keplerovi zakoni uz uvjet, da se gibanje svakoga planeta oko središnjeg tijela promatra za se bez obzira na druga tijela. Iz Newtonove je teorije izlazilo još i mnogo više, da se naime po istim zakonima gibaju i mjeseci oko svojih središnjih tijela te da su moguća i gibanja u parabolama i hiperbolama.

Ovako se dakle gibaju nebeska tijela oko Sunca, kada se uz Sunce promatra još samo jedno tijelo, kada se dakle radi o problemu dvaju tijela. No pridođe li i treće tijelo, prilike se gibanja sasvim mijenjaju. Ne giba se više planet oko Sunca po jednostavnim Keplerovim zakonima, jer u svaki čas na nj djeluje privlačna sila trećega tijela i smeta harmoniju zakona nađenu u problemu dvaju tijela; planet se ne giba više za sva vremena u istoj elipsi, radij vektor ne opisuje ploštine razmjerne s vremenom, a ne vrijedi ni treći Keplerov zakon. Svako od triju tijela privlači ostala dva po Newtonovu zakonu, pa radi neprekidnog međusobnog privlačenja tih tijela nastaju zamršene prilike u njihovim gibanjima. Nov problem, koji tako nastaje, problem triju tijela, sastoji se dakle u tome, da se odredi gibanje triju točaka zadanih masa, koje se privlače po zakonu Newtonovu, ako se u neki zadani čas zadaju njihovi položaji i početne brzine. Newton je već uočio u svome djelu taj problem u geometrijskom obliku i počeo ispitivati djelovanje trećega tijela na gibanje prvih dvaju; napose je lijepe rezultate postigao u tumačenju gibanja Mjeseca oko Zemlje našavši uzroke nekih već davno poznatih nepravilnosti u Mječevu gibanju u djelovanju privlačne sile Sunca na sustav sastavljen od Zemlje i Mjeseca. Neka općenita svojstva gibanja u problemu triju tijela dobro su poznata; tako nije teško pokazati, da se težište sustava triju tijela giba u svemiru jednoliko po pravcu, da je zbroj kinetičke i potencijalne energije sustava konstantan i napokon da i u tom slučaju vrijedi zakon za ploštine, što ih opisuju radiji vektori, samo zamršeniji od onoga u problemu dvaju tijela. No dalje je proučavanje problema triju tijela pokazalo veliku njegovu teškoću; nepregledna, zamršena raznoličnost staza gibanja, što se mogu u njemu javiti, teškoće, da se i najsavršenijim sredstvima više analize taj problem sasvim riješi i opišu gibanja triju tijela, činile su, da je taj problem ostao na dnevnom redu mehanike neba sve do danas. Uočimo li osim toga prilike u Sunčevu sustavu, problem je još teži, jer se ne radi o problemu triju tijela nego više tijela.

Da vidimo, kojim su načinom astronomi ipak svladali teškoće u onoj mjeri, kolika je njima trebala, valja još nešto reći o određivanju eliptičkoga gibanja u problemu dvaju tijela. Elipsa, u kojoj se planet giba oko Sunca, određuje se u astronomiji sa šest veličina, koje se zovu elementi eliptičke staze. Od tih elemenata određuju dva položaj one ravnine u prostoru, u kojoj leži elipsa; dalja dva daju oblik i veličinu elipse; peti elemenat utvrđuje smještaj elipse u njenoj ravnini, a šesti označuje obično čas, kada je tijelo bilo najbliže Suncu (čas perihela), a može biti i drugo koje određeno vrijeme. Osnovna ravnina, prema kojoj se određuje položaj svake druge ravnine u prostoru, ravnina je ekliptike u neki čas, t. j. ravnina staze Zemlje oko Sunca u taj čas; u njoj leži i ekvinokcijalni pravac, što spaja središte Sunca s proljetnom točkom γ (vidi sl. 1.). Čvorovi staze nebeskog tijela točke su, u kojima ona

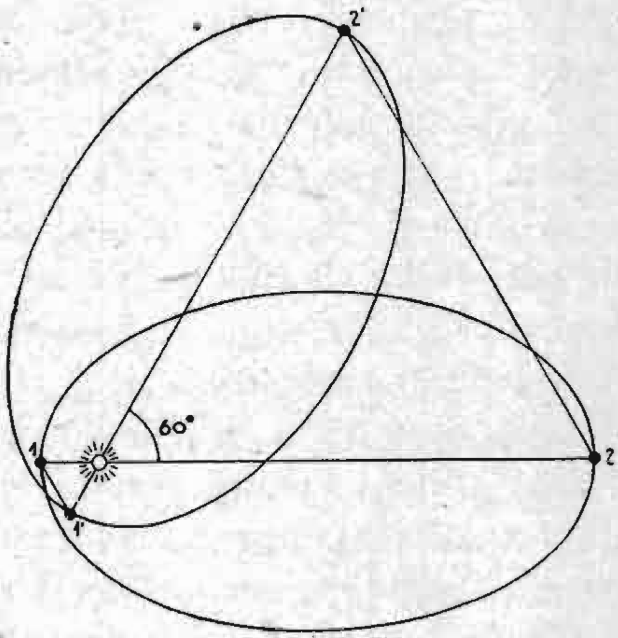


Sl. 1.

siječe ravninu ekliptike, napose je uzlazni čvor onaj, u kome se tijelo nalazi prelazeći iz dijela prostora ispod ekliptike u prostor iznad nje. Položaj ravnine staze u prostoru određuju: 1. duljina uzlaznog čvora Ω, t. j. kut, što ga tvori spojnica obiju čvorova s ekvinokcijalnim pravcem (sl. 1.), 2. kut priklona i ravnine staze spram ravnine ekliptike. Oblik i veličinu elipse određuje 3. polovina velike osi a i 4. ekscentriciteta ε, t. j. omjer daljine žarišta (Sunce) od središta elipse i velike poluosi. Smještaj staze u ravnini gibanja određuje 5. duljina perihela ω, koja je zbroj od dva kuta: od duljine uzlaznoga čvora Ω, brojene u ravnini ekliptike, i kuta π (vidi sl. 1.), što ga čini velika os s pravcem, što spaja oba čvora, brojena u ravnini staze gibanja. Dolazi još napokon kao šesti elemenat čas prolaza perihelom.

Ima ipak jedna okolnost, koja u Sunčevu sustavu unosi olakšicu u izučavanje gibanja planeta oko Sunca, a to je, da su njihove mase malene ispoređene s masom Sunca, jer je masa i Jupitera, koji je najveći od sviju planeta, manja od 1/1000 mase Sunca; osim toga su daljine među članovima Sunčeva sustava velike a one ulaze u izraz za privlačnu silu u nazivniku, i to kao kvadrati; privlačne sile, što djeluju među planetima, bit će dakle općeno uzevši malene, ako se isporede s privlačnom silom Sunca na svaki od njih, pa će i učinci njihovi na gibanje planeta, ako se ne promatraju u prevelikim vremenskim razmacima, biti maleni. Napokon će se radi velikih daljina svaki planet u svom gibanju oko Sunca moći smatrati materijalnom točkom, čime se opet uvodi važno ujednostavljanje problema. Na tim se okolnostima osniva klasična metoda francuskog matematika L. Lagrangea za izračunavanje planetskih staza, koja je omogućila Laplaceu, osnivaču mehanike neba kao posebne grane mehanike, da izradi teoriju gibanja velikih planeta, s pomoću koje se mogu njihova gibanja slijediti i u budućnosti i njihovi se položaji na nebeskoj kugli izračunati za znatan broj godina unaprijed s točnošću, koja je dovoljna za potrebe praktične astronomije. Iz mehanike je poznato, da je gibanje materijalne točke određeno, zada li se čas, u kome se počinje promatranje gibanja i koji se zove početni čas, njen položaj u prostoru i brzina, dakle početno stanje gibanja. U drugu se ruku zna i to, da odluka o tome, da li će staza te točke u njenu gibanju oko privlačnog središta biti elipsa ili možda parabola ili hiperbola, zavisi samo o iznosu brzine u početni čas, a ne i o smjeru. Uzmimo dakle, da se je neki planet u zadani čas počeo gibati iz zadane točke u prostoru sa zadanom brzinom; ako je brzina takova, da vodi do gibanja u elipsi, i ako nema drugih nebeskih tijela, koja bi to gibanje smetala, gibat će se taj planet oko Sunca za sva vremena po istoj elipsi u skladu s Keplerovima zakonima te će svih šest elemenata njegova gibanja imati za sva vremena iste vrijednosti. Ali uzmimo, da se oko Sunca giba i drugi jedan planet, t. j. da se radi o problemu triju tijela, i promotrimo njegovo djelovanje u jedan čas, koji dolazi vrlo blizu poslije početnoga; privlačna će sila njegova promijeniti stanje gibanja prvoga planeta u taj čas; planet ne će imati ni onaj položaj ni onu brzinu, koje bi imao, da se gibao u prvotnoj elipsi bez utjecaja trećeg tijela. Tako nastali nov položaj zajedno s novom brzinom određuju novu jednu elipsu, po kojoj bi se tijelo dalje gibalo, kada ne bi bilo više smetnja trećega tijela. No djelovanje trećega tijela postoji u svaki čas; elipsa, određena položajem i brzinom u svaki čas, mijenja se dakle neprestano s vremenom, a gibanje zadanog planeta pod utjecajem privlačne sile trećega tijela može se shvatiti da je takovo, da se planet u svaki čas nalazi na jednoj elipsi, ali šest elemenata te elipse da nisu konstantni nego da se mijenjaju s vremenom, da su funkcije vremena. Problem gibanja planeta svodi se dakle u toj metodi na to, da se odredi tih šest funkcija u njihovoj zavisnosti o vremenu. Uspije li to i uvrste li se dobiveni izrazi za elemente elipse u formule eliptičkoga gibanja, bit će sve formule i sada građene isto kao u problemu dvaju tijela, samo će u njima mjesto konstanata Ω, i, a, ... stajati njihovi izrazi kao funkcije vremena. Jer se dakle promatraju elipse s promjenljivim elementima, zove se taj postupak metoda varijacije konstanata, gdje se pod konstantama misli onih šest elemenata. Ona elipsa, za koju se u toj metodi uzima da se na njoj nalazi planet u neki čas, zove se elipsa oskulacije u taj čas, a njenih šest elemenata elementi oskulacije u taj čas. U njoj bi se dakle planet gibao dalje po Keplerovim zakonima, kada bi prestalo djelovanje trećega tijela. To su oni elementi, koji se obično zadaju u neki točno određeni čas, na pr. u srednju ponoć g. 1850. ili 1900., kao karakteristični za neki planet i počevši od kojih se tada dalje prati njihovo gibanje metodama više analize. Gibanje planeta u stazi, kakova je uistinu, zove se poremećeno ili perturbirano gibanje za razliku od gibanja, što bi ga imalo, da nema trećeg tijela. Matematički izrazi, kojima su predočeni ti promjenljivi elementi gibanja u svaki čas, građeni su tako da imaju oblik zbroja, u kome je prvi pribrojnik numerička vrijednost onoga oskulacionog elementa, o kome se radi, na pr. velike poluosi *a*, u početni čas i koja se dobiva iz opažanja; drugi je pribrojnik skup članova, koji imaju svi kao faktor prvu potenciju mase onoga tijela, koje smeta gibanje zadanog planeta i koji čine perturbacije prvoga reda tog elementa (na pr. velike poluosi); treći je pribrojnik skup članova, koji imaju kao faktor kvadrate masa i koji daju perturbacije drugoga reda i t. d. Slično su građeni i izrazi, što izlaze za elemente, promatra li se gibanje *n* tijela mjesto triju. Vrijednost nekog elementa u čas *t* određuje se dakle približno ili aproksimativno, i to s tim većom približnošću, što veći broj članova uzimamo u obzir u njegovu izrazu. Sami izrazi za perturbacije, na pr. prvoga reda, sastoje se iz članova bitno različita karaktera; jedni su dani u obliku periodičkih funkcija sinus ili kosinus pa njima odgovaraju periodičke perturbacije elementa, kojih se učinci vraćaju nakon kraćeg ili duljeg vremena (perioda) na iste vrijednosti; drugi su predočeni potencijama vremena *t*, mijenjaju se dakle uvijek u istom smislu pa stoga mogu znatno promijeniti prilike u Sunčevu sustavu; to su sekularni članovi; napokon ima i mješovitih članova, u kojima je funkcija sinus ili kosinus pomnožena s potencijama vremena. Na taj su način izrađene metode, koje su imale svrhu ne da potpuno i pregledno i za sva vremena odrede gibanja nebeskih tijela, nego da za budućnost, koja nije predaleka, izračunaju položaje planeta s onolikom točnošću, koliku je trebala astronomska praksa.

Kada se uzmu u obzir teoretske teškoće i zamršeni računi, do kojih vodi problem triju tijela, još se više moramo diviti velikom matematiku Lagrangeu, koji je i u tom problemu otkrio putove, što vode do čistina, našavši da ima osobitih početnih uvjeta, koji vode do posebnih, sasvim jednostavnih i preglednih vrsta gibanja. Istražujući, kako se u toku vremena mijenjaju stranice trokuta, što ga tvore tri tijela, našao je, da ima takovih početnih uvjeta, da tri tijela stavljena u gibanje u skladu s njima tvore uvijek istostraničan trokut, pa se oba planeta gibaju oko središnjeg tijela u jednakim elipsama, kojih velike osi tvore kut od 60° (vidi sl. 2). Drugo je osobito gibanje ono, pri kome tri tijela ostaju uvijek na istom pravcu, a dva tijela opisuju oko trećeg elipse slične i slično položene (homotetične), kojima je u žarištu treće tijelo. Napose se mogu oba tijela gibati oko središnjeg i u kružnicama jednolikim gibanjem.



Sl. 2.

Lagrange je već naslućivao, da bi ta osobina gibanja mogla biti od važnosti za dalji napredak u problemu triju tijela, što se mnogo kasnije i potvrdilo; a ima i jedna skupina malih planeta, t. zv. Jupiterova grupa, koji se približno gibaju u Lagrangeovim stazama. Jer se u tim gibanjima sva tri tijela nalaze nakon nekoga vremena u istom međusobnom položaju i tada nanovo započinju isto gibanje, Lagrangeova su rješenja prvi primjer periodičkih rješenja u problemu triju tijela. Sve do devedesetih godina 19. vijeka bili su to i jedini primjeri periodičkih staza. Tada je jedan od najvećih matematika 19. vijeka H. Poincaré, udarajući novim putovima u mehanici neba, uveo nove metode i u istraživanja o problemu triju tijela. On je dokazao u slučaju, da je treće tijelo tako maleno, da se može uzeti da njegova privlačna sila ne utječe na gibanje ostalih dvaju tijela, da ima beskonačno mnogo početnih položaja i početnih brzina, koji vode do gibanja, u kojima su stranice trokuta, što ga tvore tri tijela, periodičke funkcije vremena, tako da se po izmaku jednoga perioda tri tijela nalaze opet u istom međusobnom položaju, dok se je cio sustav zakrenuo za neki kut. Traženje tih periodičkih rješenja u jednostavnijem obliku problema triju tijela, što ga promatra Poincaré, nije samo važno radi toga, jer možemo u tim slučajevima pregledati gibanje sustava za sva vremena, nego i zato, što ta jednostavna rješenja služe i kao ishodište za proučavanje i vrstanje onih gibanja, koja se ne udaljuju mnogo od njih, a mogu biti ili periodička ili takova, da se asimptotički približuju periodičkim gibanjima; stoga je Poincaré i označio periodička gibanja kao jedinu raspuklinu, kojom se može prodrijeti u tvrđavu dotada neosvojivu. No kolikagod bila korist teorije periodičkih rješenja, najpotpuniji rezultati u tom pogledu nisu ipak postignuti analitičkim predočivanjem koordinata tijela ili njihovih oskulacionih elemenata kao funkcija vremena ili drugih veličina, nego numeričkim putem; za određene vrijednosti vremena *t* određuju se najprije sile, koje djeluju na tijela, a iz njih se tada korak po korak izračunavaju položaji tijela t. zv. numeričkom integracijom. Veliki taj posao obavila je zvjezdarnica u Kopenhagenu pod vodstvom E. Strömgrena počevši od g. 1913. Istražene su i pregledno svrstane u glavnom jednostavne periodičke staze te staze, koje im se asimptotički primiču; po srodnosti njihova vladanja svrstane su one u familije, a za te je familije utvrđen postanak njihov i dalji razvoj, pri čemu se moglo pokazati, da se staze jedne familije ili napokon vraćaju na početne staze, tako da se familija vraća u sebe sâmu, ili da imaju prirodni početak i završetak u određenima točkama konačnosti ili u beskonačnosti. Kada se uoči sve ono mnoštvo različitih staza, pa okolnosti, koje odlučuju o njihovu vrstanju u skupine, vidi se, kako su današnje analitičke metode još daleko od toga da bi mogle predočiti gibanja triju tijela.

Ipak je i analitičkim putem izvršen velik napredak; finski astronom K. Sundman iznenadio je matematike i astronome svojim istraživanjima (od 1910. dalje) o općem problemu triju tijela pokazavši, da se koordinate tih tijela mogu predočiti konvergentnim beskonačnim redovima, koji predočuju gibanja tijelâ za sva vremena, ako u toku gibanja ne dođe do sukoba svih triju tijela, a taj je slučaj označen jednostavnim početnim uvjetom. Kolikagod bila matematička važnost rezultata Sundmanovih, koji uistinu s čisto analitičkog gledišta rješava problem triju tijela, ipak smo daleko od toga da bismo mogli reći, da je problem time riješen u tom smislu, da imamo pregled tipova staza, osnov za neku njihovu klasifikaciju ili da bi iz njih mogli izaći teoremi o postanku i završetku familije staza, bez obzira na neprikladnost Sundmanovih redova za numeričko računanje staza. Veliko je još polje rada otvoreno u problemu triju tijela, a napredovanje ne će biti lako ni jednostavno, kako su pokazali među drugima i noviji radovi američkog matematika G. D. Birkhoffa, koji je najdalje nastavio rad u tom problemu u duhu Poincaréovu. Stari problem triju tijela privlači raznolikošću svojih izgleda, koji se tek danas počinju jasno ukazivati, matematike i astronome našega vremena kao što je zaokupljao i preteče njihove pred dvjesta godina.

Dr. Ž. Marković

S A D R Ž A J

Strana

Predgovor 3

I. O MATEMATICI UOPĆE

Kalinjin o matematici 7

Razvitak geometrije — *Dr. Ivan Supek* 8

Matematički simboli — *Milenko Sevdić* 15

Matematičke nemogućnosti — *Dr. Mihailo Petrović* 23

Kako se i u matematici griješi — *Milenko Sevdić* 27

II. O BROJEVIMA

Kako su nastali brojevi — *Ignacije Smolec* 35

Prosti ili prim brojevi — *Đ. K.* 39

Da li je ispravno 3 + 2 = 11 i 3 · 2 = 12? — *Dragutin Šuljak* . 42

Prsti i dijadni sistem 50

Tablica množenja pomoću prstâ 51

Nekoliko zanimljivosti iz odnosa brojeva i numeričkog računanja — *Ignacije Smolec* 52

Razgovor dvaju brojeva — *Ignacije Smolec* 58

Još neke zanimljivosti brojeva — *M. S.* 59

Jesam li mogao brže računati? — *Vladimir Jirasek* 62

Kontroliranje svih računa — *Dragutin Šuljak* 72

III. IZ GEOMETRIJE I GEOMETRIJSKIH KONSTRUKCIJA

Površina trokuta kao funkcija triju strana — *Milenko Sevdić* 78

Boćkovićevo izvođenje Heronove formule — *Dr. V. Varićak* . 86

Mascheronijeve konstrukcije u vezi s pravilnim mnogkutima — *Lav Rajčić* 89

Problem parketiranja — *Dr. Stanko Bilinski* 99

IV. IZ ANALITIČKE GEOMETRIJE

Getaldićeva konstrukcija parabole — *Dr. Juraj Majcen* . . . 107

Descartes-ovo izvođenje jednadžbe hiperbole 109

O jednadžbi pravca i hiperbole kod Fermata — *Dr. Stanko Bilinski* 112

Strana

V. IZ DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA
Arhimedova kvadratura parabole 116
Pojam integrala kod Newtona 123
Problem loma svjetlosti po Fermatu — *Lav Rajčić* 124
Problem konzerve — *Vladimir Orlić* 128
Jedan primjer iz pomorske taktike 134
Problem jedra — *Sevdić-Bilinski* 136

VI. IZ RAČUNA VJEROJATNOSTI
Bertrandov paradokson — *Vladimir Jirasek* 141

VII. MATEMATIKA U PRIRODI
Pčelino saće kao matematički problem — *Milenko Sevdić* . . 147

VIII. NEKI GLASOVITI PROBLEMI I POUČCI
Kvadratura kruga — *Dr. Vladimir Vranić* 155
Fermatov problem i njegovi rješavatelji — *Dr. Mira Hercigonja* 167
Nekoliko dokaza Pitagorina poučka — *Milenko Sevdić* . . . 177
Kako da zapamtim vrijednost broja Π? 184
Apolonijev problem — *Mira Erega* 185
Malfattijev problem — *Milena Varićak* 190
Problem paralela — *Milenko Sevdić* 195

IX. IZ ASTRONOMIJE
Keplerovi zakoni — *Milena Varićak* 204

X. RAZNI ČLANCI
Boškovićevo mišljenje o nekim osnovnim pitanjima. O definiciji pravca — *Dr. Vladimir Varićak* 211
Kako su postali logaritmi — *Milenko Sevdić* 214
Izračunavanje logaritama — *Milenko Sevdić* 221
Sumiranje nekih redova — *Milenko Sevdić* 230
Kako je Tales izmjerio visinu Keopsove piramide 236
Pravci i geodetske linije — *Ch. Nordmann* 237
Pupinov kalem — *Mihajlo Pupin* 240
Optičke obmane — *Po Dr. Borisavljeviću* 242

XI. DVA STARA MATEMATIČARA — DUBROVČANINA
Marin Getaldić — *Milenko Sevdić* 248
Ruđer Bošković — *Milenko Svedić* 255

XII. ŽENA U MATEMATICI
Sonja Kovalevska — *Zora Bakarić* 266

Strana

XIII. ZANIMLJIVOSTI, ZABAVA, ŠALA I T. D.

Šahovske figure i zlatni rez — *Branko Pavlović* 270
Bachetov problem utega 274
Pogađanje brojeva . . . . , 276
Raskinut lanac 280
Nekoliko zanimljivih primjera 281
Različiti zadaci 283

XIV. DODATAK

O periodskim decimalnim razlomcima — *Stjepan Škarica* . . 286
Nešto malo o trokutu — *Dr. Vilko Niče* 297
Princip totalne indukcije — *Dr. Đuro Kurepa* 306
Problem triju tijela — *Dr. Željko Marković* 316

ISPRAVCI:

str. 22. 4. red odozgo mjesto 4,2 treba $4,\dot{2}$

„ 22. 8. „ „ „ $2=-2$ treba $\dot{2}=-2$

„ 113. u sl. 3 nedostaje Q na osi x u podnožju ordinate y.

„ 123. 8. red odozdo mjesto $y=x^2$ treba $y=x^{\frac{1}{2}}$

„ 123. 1. „ „ treba znak = između $\frac{nyz^n}{z}$ i $\frac{nyc^u x^u}{cx^{\frac{p}{n}}}$

„ 200. 15. red odozgo mjesto »štroumnog . . .«
treba »oštroumnog . . .«

„ 217. 11. red odozdo mjesto a_u treba a^n

„ 226. 3. „ odozgo treba $y = 3 + \frac{1}{z}$

„ 226. 7. „ „ „ $2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}} = 10$

„ 226. 4. „ odozdo mjesto (3) treba (5)

„ 226. 3. „ „ „ $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{n}}$

„ 229. 12. „ odozgo u formuli mjesto $\frac{x_n}{n}$ treba $\frac{x^n}{n}$

„ 253. 12 „ odozdo treba »Apollonius redivivus«.