ИСТРАЖИВАЊА О ЈЕДНОЈ ВАЖНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ПРВОГА РЕДА

ТЕЗА

ДРАГОСЛАВА С. МИТРИНОВИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ
ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
12 ОКТОБРА 1933.

ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНЕ КОМИСИЈЕ:

Г. Др МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др НИКОЛЕ САЛТИКОВА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА,
ванредног професора Универзитета.

БЕОГРАД

Штампарија „Слово“ Немањина ул. бр. 20

ИСТРАЖИВАЊА О ЈЕДНОЈ ВАЖНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ I РЕДА

ТЕЗА

ДРАГОСЛАВА С. МИТРИНОВИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ
ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
12 ОКТОБРА 1933.

ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНЕ КОМИСИЈЕ:

Г. Др МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др НИКОЛЕ САЛТИКОВА,
редовног професора Универзитета.

Г. Др ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА,
ванредног професора Универзитета.

БЕОГРАД
1935

УВОД

Некоји општи проблеми Геометрије [1]) и Рационалне механике [2]) своде се на диференцијалну једначину првога реда, другога степена

$$(1) \qquad \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = F(X) \, ,$$

чији је општији облик

$$(2) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0,$$

где су a_0, a_1, a_2 ма какве функције променљиве x.

Због тога је постављено питање о могућности интеграбилитета једначине (1) помоћу квадратура. Уосталом ово питање интересантно је и само по себи.

Диференцијална једначина (1), када $F(X)$ има произвољан облик, припада типу диференцијалних једначина које се не могу интегралити помоћу квадратура. Стога се прибегло истраживању специјалних облика функције $F(X)$, за које ће бити могућно квадратурама интегралити једначину (1). Овим

---

[1]) *Изналажење кривих у равни, чији је лук дата функција поларног угла;*

Одредба асимптотских линија на извесној класи површина (О овоме питању појавиће се једна засебна пишчева расправа), итд.

[2]) Консултовати, на пример, расправе:

Elliot-a: *Mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vittesse* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 3-e série, t. X, p. 251; 1893) и

Turrière-a: *Sur le problème de l'éclaireur* (*L'Enseignement mathématique*, № 3—4; 1915).

питањем бавили су се досада М. Петровић[1]), Riveraeau[2]), Turrière[3]) и Т. Пејовић[4]), а оно ће бити предмет и овога рада у коме ће врло уска област познатих облика функције $F(X)$ бити знатно проширена новим.

Једначине (1) и (2) биле су предмет и других проучавања. Тако су М. Петровић[5]) и С. Марковић[6]) проучавали квалитативно интеграљење једначине (1), а Т. Пејовић[7]) инваријанте једначине (2).

У првом одељку овога рада изнете су трансформације и инваријанте с наменом да послуже образовању нових интеграбилних облика диференцијалних једначина (1) и (2).

У другом одељку изложена је једна метода за образовање интеграбилних алгебарских диференцијалних једначина облика

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0+a_1y+\ldots+a_my^m}{b_0+b_1y+\ldots+b_ny^n},$$

где су коефицијенти функције од x. Са становишта те методе образоване су две интеграбилне диференцијалне једначине које су омогућиле налажење нових интеграбилних случаја једначине (1).

Трећи одељак садржи нове интеграбилне случаје диференцијалне једначине (1). Полазна тачка за њихово изналажење била је примедба да је једначина (2), решена по y, за специјалан облик коефицијената a_0, a_1, a_2, Lagrange-ова диференцијална једначина

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

која се интеграли методом диференцијаљења.

---

[1]) *L'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. XI, p. 231; 1904.

[2]) *L'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. XI, p. 232; 1904.

[3]) *L'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. XVIII, p. 108, 1911.

[4]) *Нови случајеви интеграбилитета једне важне диференцијалне једначине првога реда* (докторска теза; *Глас Српске краљевске академије,* књига CIX, 1923);

О једној диференцијалној једначини првога реда (*Глас Српске краљевске академије,* књига CXI; 1924).

[5]) *L'Enseignement mathématique* № 3—4; 1916;

Intégrales premières à restrictions (*Éditions spéciales de l'Académie Royale Serbe,* t. LXXII, l. 19; 1929; Gauthiers-Villars, Paris).

[6]) *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti,* Zagreb; 1919.

[7]) *L'Enseignement mathématique,* № 3—4; 1923.

У четвртом одељку дати су такође нови случаји интеграбилитета диференцијалне једначине (1) чије је изналажење засновано на примедби: да се, за специјалан облик коефицијената a_0, a_1, a_2, једначина (2), L e g e n d r e-овом трансформацијом, своди на извесну интеграбилну диференцијалну једначину, а у једном случају на R i c c a t i-еву диференцијалну једначину.

У петом одељку, прегледности ради, дати су сви нови интеграбилни случаји о којима је било речи у претходним одељцима.

Напомињемо да су извесни резултати, садржани у овом раду, објављени већ у *Гласу Српске краљевске академије* [1]).

Април, 1933.
Београд

---

[1]) *Нови случаји интеграбилитета једне диференцијалне једначине првога реда* (*Глас Српске краљевске академије*, књига CLIV; 1933);
Нови интеграбилни облици једне значајне диференцијалне једначине првога реда (*Глас Српске краљевске академије*, књига CLXIII; 1934).

Одељак први

Трансформације и инваријанте

I. — У диференцијалној једначини

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a_2y^2+2a_1y\,\frac{dy}{dx}+a_0=0 \tag{2}$$

извршимо смену функције

$$y=U(x)Y,$$

и одредимо $U(x)$ под погодбом да нова једначина не садржи члан по $Y\,\dfrac{dy}{dx}$, што повлачи за собом

$$U(x)=e^{-\int a_1dx}.$$

Тада се једначина (2) своди на облик

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+(a_2-a_1{}^2)\;Y^2=-\;\frac{a_0}{U^2}\;.$$

Извршимо сада у овој диференцијалној једначини смену независно променљиве

$$\frac{dX}{dx}=M(x)\;,$$

и одредимо $M(x)$ тако да она постане облика

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+Y^2=F(X)\;. \tag{1}$$

На тај начин налазимо

$$M(x) = \pm\sqrt{a_2 - a_1{}^2},$$

$$F(X) = -\frac{a_0}{M^2U^2}.$$

Значајно је приметити да се диференцијална једначина

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y_1{}^2 = \pi F(X_1 + \omega)\,, \tag{3}$$

где су π и ω произвољне константе, своди на једначину (1) сменом

$$X_1 = X - \omega\,, \qquad Y_1 = \sqrt{\pi}\,Y. \tag{4}$$

II. — Т. Пејовић[1]), бавећи се инваријантама диференцијалне једначине (2), дошао је до закључака, који ће бити изнети у редовима што следују.

Функције M и U су релативне, а X и $F(X)$ апсолутне инваријанте за сваку трансформацију облика

$$y = u\eta, \quad \frac{d\xi}{dx} = v\,,$$

где су u и v произвољне функције променљиве x.

Изводи $\frac{dF}{dX}, \frac{d^2F}{dX^2}, \ldots$ су апсолутне инваријанте, које се израчунавају из обрасца

$$\frac{d^n F}{dX^n} = -\frac{p_{2n+2}}{M^{2n+2}U^2}\,, \tag{5}$$

где су $p_4, p_6, \ldots, p_{2n+2}$ релативне инваријанте, које се налазе из рекурентне формуле

$$p_{2n+2} = M\frac{dp_{2n}}{dx} - 2p_{2n}\left(n\frac{dM}{dx} - a_1M\right).$$

Тако се налази за $n=1$

$$p_4 = Ma'_0 - 2a_0(M' - a_1M), \qquad (p_2 = a_0),$$

за $n = 2$

---

1) *L'Enseignement mathématique*, № 3—4; 1923.

$$p_6 = M^2(a_0'' + 4a_0'a_1 + 2a_0a_1' + 4a_0a_1^2) -$$
$$-5MM'(a_0' + 2a_0a_1) + 2a_0(4M'^2 - MM'').$$

Ако је дата извесна веза између F и X, одакле се диференцијаљењем добија веза између F и F', увек смо у стању да изразимо ту везу помоћу коефицијената a_0, a_1, a_2 и њихових извода по x, што ћемо сада показати.

Нека су F и F' везани једначином

$$\Phi(F, F') = 0, \tag{6}$$

из које се, после диференцијаљења, добија

$$\frac{\partial\Phi}{\partial F} F' + \frac{\partial\Phi}{\partial F'} F'' = 0 . \tag{7}$$

Из обрасца (5) се налази

$$\frac{F'}{F} = \frac{p_4}{a_0M^2} , \tag{8}$$

$$\frac{F''}{F'} = \frac{p_6}{p_4M^2} . \tag{9}$$

Елиминацијом F, F' и F'' из једначина (6), (7), (8) и (9) добија се извесна релација

$$\psi\left(\frac{p_4}{a_0M^2}, \frac{p_6}{p_4M^2}\right) = 0. \tag{10}$$

Ова једначина изражава потребан и довољан услов да би F и F' били везани једначином (6).

Стога је диференцијална једначина (2), чији коефицијенти a_0, a_1, a_2 задовољавају релацију (10), сводљива на канонички облик (1), где је F дато диференцијалном једначином (6).

III. — M. Петровић [1]) и W. Heymann [2]) показали су, сваки на свој начин, да се диференцијална једначина (1), извесном трансформацијом промењивих, своди на диференцијалну једначину облика

---

[1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXII, № 22; 1896.
[2]) *Journal für reine und angewandte Mathematik*; 1898.

$$\frac{dy}{dx}=y^3+f(x)\,.$$

Ову су једначину нарочито изучавали Roger Liouville [1]) и P. Appell [2]).

IV. — Уочимо диференцијалну једначину првога реда

$$\Phi(x, y, p)=0, \tag{11}$$

где је $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Legendre-ова трансформација

$$x=\frac{dz}{dp},\quad y=p\,\frac{dz}{dp}-z\,, \tag{12}$$

где је z нова функција, а p независно променљива, претвара једначину (11) у једначину

$$F\left(p,\, z,\, \frac{dz}{dp}\right)=0\,. \tag{13}$$

Ако је општи интеграл ове једначине

$$\psi(p, z, C)=0, \qquad (C=\text{const.}),$$

онда се општи интеграл једначине (11) добија елиминацијом параметра p из једначина

$$\Phi(x, y, p)=0,$$

$$\psi(p, px-y, C)=0.$$

Примена Legendre-ове трансформације (12) има у томе случају смисла, кад је једначина (13) интеграбилна. Усталом, циљ ма које трансформације је да створи нов облик каквој релацији, на основу кога је лакше вршити испитивања.

Legendre-ова трансформација је партикуларни случај тангенцијалних трансформација. Општу теорију тангенцијалних трансформација нарочито је обрађивао Sophus Lie.

---

[1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 sept. 1886 et 12 sept. 1887.

[2]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4-e série, t. V; 1889.

Одељак други

Једна метода за образовање интеграбилних диференцијалних једначина првога реда

P. Appell у својој расправи *Sur les invariants de quelques équations différentielles* [1]), тражећи интеграбилне случаје диференцијалне једначине

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 , \tag{14}$$

где су a_0, a_1, a_2, a_3 произвољне функције од x, послужио се методом, коју ћемо ниже изложити.

Уочимо диференцијалну једначину

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + B(x)\, t , \tag{15}$$

и сменимо променљиву t другом променљивом y везом

$$A + Bt = \frac{B}{y} , \tag{16}$$

одакле излази

$$dt = -\frac{dy}{y^2} - \left(\frac{A}{B}\right)' dx . \tag{17}$$

Једначина (15), обзиром на једначине (16) и (17), постаје

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B}\, y^3 - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2, \tag{18}$$

дакле, специјалан случај диференцијалне једначине (14), где је

---

[1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4-e série, t. V; 1889.

$$a_0=0, \quad a_1=0, \quad a_2=-\left(\frac{A}{B}\right)', \quad a_3=-\frac{1}{B}.$$

Значај ове трансформације је у томе, што сваком интеграбилном случају диференцијалне једначине (15) одговара по један интеграбилан случај диференцијалне једначине (18).

Поменута Appell-ова трансформација дала нам је идеју да поставимо методу за образовање интеграбилних диференцијалних једначина првога реда облика

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{19}$$

где је f рационална функција од y, чији су коефицијенти произвољне функције од x.

Посматрајмо диференцијалну једначину

$$\frac{dx}{dt}=R(t, x), \tag{20}$$

у којој је

$$R(t, x)=\frac{\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\alpha_p t^p}{\beta_0+\beta_1 t+\ldots+\beta_q t^q},$$

где су $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q$ ма какве функције од x; p и q цели позитивни бројеви.

Сменимо у једначини (20) променљиву t обрасцем

$$t=R_1(x, y), \tag{21}$$

где је

$$R_1(x, y)=\frac{\gamma_0+\gamma_1 y+\ldots+\gamma_r y^r}{\delta_0+\delta_1 y+\ldots+\delta_s y^s}$$

($\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$; $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_s$ су ма какве функције од x; r и s цели позитивни бројеви).

Из обрасца (21) излази, после диференцијаљења,

$$dt=\frac{\partial R_1}{\partial x}\,dx+\frac{\partial R_1}{\partial y}\,dy. \tag{22}$$

Обзиром на једначине (21) и (22), једначина (20) постаје

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-R(R_1, x)\dfrac{\partial R_1}{\partial x}}{R(R_1, x)\dfrac{\partial R_1}{\partial y}}. \tag{23}$$

Добили смо, дакле, диференцијалну једначину чија је десна страна рационална функција од y, у којој су коефицијенти произвољне функције променљиве x.

Сваком интеграбилном случају диференцијалне једначине (20) одговараће по један интеграбилан случај диференцијалне једначине (23).

Тако нам је дата могућност да образујемо бескрајно много интеграбилних диференцијалних једначина типа (19).

О примени ове методе бавићемо се у једној засебној расправи. Сада ћемо изнети ова два важна партикуларна случаја:

1⁰ B e r n o u l l i-ева диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, x^2 + \frac{1}{\beta}\, xt \qquad (\alpha \text{ и } \beta \text{ су константе})$$

своди се, сменом

$$t = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, (y - \beta x),$$

на диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{xy} + \beta. \tag{24}$$

2⁰ B e r n o u l l i-ева диференцијална једначина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta}{2}\, x + \alpha\, \frac{t}{x} \qquad (\alpha \text{ и } \beta \text{ су константе})$$

своди се, сменом

$$\frac{\beta}{2}\, x + \alpha\, \frac{t}{x} = y,$$

на диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{xy} + \beta - \frac{y}{x}. \tag{25}$$

Интеграбилне диференцијалне једначине (24) и (25) употребићемо у четвртом одељку за добијање интеграбилних случаја диференцијалне једначине (1).

$$(34) \qquad y = -\frac{a_1}{a_2}\, p \pm \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_2} \sqrt{kp^2 - 1},$$

и припашће типу Lagrange-ове једначине ако се испуњени ови услови

$$(35) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \lambda x + \mu, \quad \frac{\sqrt{a\, a_2}}{a_2} = \nu x + \tau,$$

где су λ, μ, ν, τ ма какве константе.

Једначина (34) се своди на тип (31) у коме је

$$\varphi(p) = \pm\, \nu \sqrt{kp^2 - 1} - \lambda p\,,$$

$$\psi(p) = \pm\, \tau \sqrt{kp^2 - 1} - \mu p\,.$$

Решењем једначина (33) и (35) по a_0, a_1, a_2 налазимо

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{(\nu x + \tau)^2}{\Delta}, \\ a_1 &= \frac{\lambda x + \mu}{\Delta}, \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \right.$$

где је

$$\Delta = (\lambda^2 - k\nu^2)\, x^2 + 2\,(\lambda\mu - k\nu\tau)\, x + \mu^2 - k\tau^2.$$

Према томе, *једначина*

$$(37) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y^2}{\Delta} + \frac{2\,(\lambda x + \mu)}{\Delta}\, y\, \frac{dy}{dx} + \frac{(\nu x + \tau)^2}{\Delta} = 0$$

претставља нов интеграбилан облик једначине (2).

Из образаца (26) и (28) добија се

$$(38) \qquad F(X) = \frac{\Delta}{k}\, e^{2\int \frac{\lambda x + \mu}{\Delta}\, dx},$$

$$(39) \qquad X = \pm \sqrt{-k} \int \frac{\nu x + \tau}{\Delta}\, dx\,.$$

A) Када је $\lambda^2 - k\nu^2 \neq 0$, после извршених квадратура, имаћемо

$$(40)\qquad F(X)=\frac{\Delta}{k}\,[(\lambda+\nu\sqrt{k})x+\mu+\tau\sqrt{k}]^{s_1}\,[(\lambda-\nu\sqrt{k})x+\mu-\tau\sqrt{k}]^{s_2},$$

$$(41)\qquad e^{\mp 2iX}=\frac{[(\lambda+\nu\sqrt{k})x+\mu+\tau\sqrt{k}]^{s_1}}{[(\lambda-\nu\sqrt{k})x+\mu-\tau\sqrt{k}]^{s_2}},$$

где је i имагинарна јединица, а

$$s_1=\frac{1}{\lambda+\nu\sqrt{k}},$$

$$s_2=\frac{1}{\lambda-\nu\sqrt{k}}.$$

Једначине (40) и (41) дефинишу један нов облик функције $F(X)$, дат у параметарском облику, где је x параметар.

Из једначине (40) може се избацити параметар x помоћу једначине (41) само за специјалне вредности констананата λ, μ, ν, τ, k. Навешћемо неколико примера када је елиминација могућна.

1° Када је

$$s_1=s_2,$$

излази $\nu=0$, па је у овом случају

$$F(X)=\frac{(-\tau^2 k)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{k}(\sin\lambda X)^{-2-\frac{2}{\lambda}}.$$

Водећи рачуна о једначинама (3) и (4), *општије решење за $\nu=0$ има облик*

$$F(X)=a[\sin(\lambda X+b)]^{-2-\frac{2}{\lambda}},$$

или

$$(42)\qquad F(X)=(A\sin\lambda X+B\cos\lambda X)^{-2-\frac{2}{\lambda}},$$

где су a, b; A, B ма какве константе.

Овај нови облик функције $F(X)$ за $\lambda=-\dfrac{2}{3}$ своди се на познати облик

$$F(X)=-A\sin\frac{2}{3}X+B\cos\frac{2}{3}X.$$

Показаћемо сада поступак којим се долази до општег интеграла једначине

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = A\,(\sin \lambda X)^{-2-\frac{2}{\lambda}}, \tag{43}$$

где је

$$A = (-\tau^2)^{1+\frac{1}{\lambda}}.$$

Сменом променљивих

$$Y = y\,(\lambda^2 x^2 - \tau^2)^{\frac{1}{2\lambda}}, \tag{44}$$

$$X = \frac{i}{2\lambda}\log\frac{\lambda x + \tau}{\lambda x - \tau} \tag{45}$$

у једначини (43) добија се

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y^2}{\lambda^2 x^2 - \tau^2} + \frac{2\lambda x y}{\lambda^2 x^2 - \tau^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\tau^2}{\lambda^2 x^2 - \tau^2} = 0. \tag{46}$$

Ова се једначина, решењем по y, своди на Lagrange-ову диференцијалну једначину

$$y = -\lambda x p \pm \tau\sqrt{p^2 - 1},$$

чији је општи интеграл

$$x = p^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}}\left(C \pm \frac{\tau}{\lambda+1} I\right),$$

$$y = \pm\,\tau\sqrt{p^2 - 1} - \lambda p^{\frac{1}{\lambda+1}}\left(C \pm \frac{\tau}{\lambda+1} I\right),$$

где је C интеграциона константа, а

$$I = \int p^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}(p^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dp.$$

У ствари, овде имамо интеграљење биномног диференцијала. Он се може интегралити у коначном облику у ова два случаја

$$1^0 \quad \lambda = \frac{2\sigma - 1}{2(1-\sigma)},$$

$$2^0 \quad \lambda = \frac{2\sigma}{1-2\sigma},$$

где је σ ма какав цео број, позитиван или негативан.

Заменом нађених вредности за x и y у обрасцима (44) и (45), добија се општи интеграл једначине (43) у параметарском облику.

Користећи се теоријом инваријаната, долазимо у овом конкретном случају до услова (10) у облику

$$(47) \qquad (3\lambda+2)\, p_4^2 + 4\lambda\,(\lambda+1)^2\, a_0^2 M^4 - 2\,(\lambda+1)\, a_0 p_6 = 0$$

који изражава потребан и довољан услов између коефицијената a_0, a_1, a_2 и њихових извода по x, да би F било дефинисано обрасцем

$$F = A\,(\sin \lambda X)^{-2-\frac{2}{\lambda}}.$$

Стога је диференцијална једначина (2) *увек интеграбилна, када коефицијенти* a_0, a_1, a_2 *задовољавају услов* (47). Тако смо нашли општи интеграбилан облик једначине (2) своддљив на интеграбилну диференцијалну једначину (43).

2^0 За $\lambda = 0$ имамо

$$F(X) = \frac{1}{k}\, e^{\mp 2iX(\nu\sqrt{k}-1)} \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - e^{\mp 2i\nu\sqrt{k}X}}\right)^{-\frac{2}{\nu\sqrt{k}}}.$$

3^0 За $\mu = 0$, $\tau = 0$ добија се познати облик

$$F(X) = ae^{bX}.$$

4^0 Елиминација је могућна увек, кад се подесним избором констаната λ, μ, ν, τ, k у једначини (41) добије ма каква једначина, која се може решити по x.

Тако, на пример, када је

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = 1;$$

$$s_1=\frac{1}{2},\quad s_2=2;$$

$$s_1=1,\quad s_2=2;$$

$$s_1=1,\quad s_2=3,$$

можемо извршити елиминацију параметра x.

B) При условима

$$\lambda^2-k\nu^2=0,\quad \lambda\mu-k\nu\tau\neq 0,$$

налази се

$$F(X)=\frac{1}{\lambda^2}(\mu\nu-\lambda\tau)(2\lambda\nu x+\mu\nu+\lambda\tau)^{1+\frac{1}{2\lambda}}e^{\frac{\nu x}{\mu\nu-\lambda\tau}},$$

$$X=\pm\frac{i}{2}\left[\frac{\nu x}{\mu\nu-\lambda\tau}-\frac{1}{2\lambda}\log(2\lambda\nu x+\mu\nu+\lambda\tau)\right].$$

Ове две једначине одређују један нов облик функције $F(X)$.

C) Случај

$$\lambda^2-k\nu^2=0\quad \text{и}\quad \lambda\mu-k\nu\tau=0$$

повлачи за собом

$$\mu^2-k\tau^2=0,$$

а тиме и $\Delta=0$. Стога тај случај не можемо узети у обзир.

III. — $a_2=0$. У овом случају једначина (2), решена по y, је

$$y=-\frac{a_0}{2a_1}\frac{1}{p}-\frac{1}{2a_1}p. \tag{48}$$

Да би ова једначина претстављала Lagrange-ову диференцијалну једначину, потребни су и довољни ови услови

$$\frac{a_0}{2a_1}=\lambda x+\mu,\quad \frac{1}{2a_1}=\nu x+\tau, \tag{49}$$

где су λ, μ, ν, τ ма какве константе.

Из једначина (49) се налази

$$a_0=\frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\tau},\quad 2a_1=\frac{1}{\nu x+\tau}.$$

Једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{\nu x+\tau}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\tau}=0$$

претставља један нов интеграбилан облик једначине (2).

Према обрасцима (29) и (30) налазимо

$$1^0 \quad F(X)=(aX+b)\,e^{\mp 2iX},$$

када је $\nu=0$;

$$2^0 \quad F(X)=(ae^{\mp 2i\nu X}+b)e^{\mp 2i(1+\nu)X},$$

када је $\nu\neq 0$ (a и b су константе, а i имагинарна јединица).

Облик 1^0 је познати облик, *док облик* 2^0 *претставља један нов облик функције* $F(X)$.

IV. — Lagrange-ова диференцијална једначина није једина која се интеграли методом диференцијаљења. Raffy у својој расправи: *Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant* [1]) показао је, како се могу образовати диференцијалне једначине првога реда које ће се интегралити методом диференцијаљења.

Нека је дата диференцијална једначина првога реда

(50) $$y=\varphi(x, p),$$

одакле се диференцијаљењем налази

(51) $$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}.$$

Ако смо у стању да нађемо општи интеграл диференцијалне једначине (51)

(52) $$\Phi(x, p, C)=0,$$

где је C интеграциона константа, онда се општи интеграл једначине (50) добија елиминацијом параметра p из једначина (50) и (52).

Raffy је поставио и решио овај проблем: *у једначини (50) одредити функцију* $\varphi(x, p)$ *тако да се из изводне једна-*

---

[1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIII, p. 50.

чине (*51*) *добије за* $\frac{dp}{dx}$ *извесна аналитичка форма дата унапред.*

Из једначине (51) излази

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}. \tag{53}$$

Претпоставимо да је диференцијална једначина

$$\frac{dp}{dx}=\psi(x, p) \tag{54}$$

интеграбилна, и да је њен општи интеграл

$$\theta(x, p)=C, \tag{55}$$

где је C интеграциона константа.

Тада за изналажење функције φ имамо линеарну парцијалну једначину

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\psi(x, p)\frac{\partial\varphi}{\partial p}=p. \tag{56}$$

Да бисмо нашли општи интеграл ове парцијалне једначине, морамо формирати помоћни систем обичних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{1}=\frac{dp}{\psi(x, p)}=\frac{d\varphi}{p}. \tag{57}$$

Из првих двеју размера добијамо једначину (54) чији је општи интеграл претстављен једначином (55).

Стога је општи интеграл једначине (56)

$$\varphi(x, p)=F[\theta(x, p)]+\int p\,dx, \tag{58}$$

где p треба сменити помоћу обрасца $\theta(x, p)=C$, па после извршене квадратуре заменити C са $\theta(x, p)$; F претставља произвољну функцију аргумента $\theta(x, p)$.

Диференцијална једначина (50) има као општи интеграл

$$y = F(C) + \int p(x, C)\, dx,$$

где се p израчунава из обрасца $\theta(x, p) = C$.

Навешћемо неколико примера које ћемо употребити за изналажење нових интеграбилних случаја једначине (1).

1^0 *Диференцијаљење једначине*

(59) $$y = xp + \psi[xf(p)]$$

доводи до раздвајања променљивих између p и $xf(p)$.

2^0 *Све диференцијалне једначине, чије диференцијаљење доводи до хомогене једначине између x и p, садржане су у типу*

(60) $$y = F\left(\frac{\theta'}{p^2}\right) + p^2 \frac{(\theta t)'}{2\theta'}, \qquad \left(t = \frac{x}{p}\right),$$

где је θ произвољна функција од t, а F произвољна функција свога аргумента $\frac{\theta'}{p^2}$.

3^0 Диференцијална једначина

(61) $$y = \frac{x}{2}\, p + \varphi_m(x, p),$$

где је $\varphi_m(x, p)$ хомогена функција степена m по x и p, сменом $t = \frac{x}{p}$ постаје

$$y = \frac{t}{2}\, p^2 + p^m T(t).$$

Одавде се диференцијаљењем налази

$$\frac{m}{m-2}\, T \frac{d}{dt}\, p^{m-2} + T' p^{m-2} - \frac{1}{2} = 0,$$

тј. линеарна диференцијална једначина по p^{m-2}.

Стога можемо тврдити да је диференцијална једначина (61) интеграбилна.

V. — Диференцијална једначина

(62) $$y = xp + \psi(x\sqrt[n]{p}),$$

где је n ма каква константа различита од нуле, претставља партикуларни случај једначине (59), где је

$$f(p)=\sqrt[n]{p}\,.$$

Да би једначина (62) имала облик

$$y=-\frac{a_1}{a_2}p\pm\frac{1}{a_2}\sqrt{(a_1{}^2-a_2)\,p^2-a_0a_2},$$

мора бити

$$\psi(x\sqrt[n]{p})=\alpha x^n\,p\pm\sqrt{\beta x^{2n}p^2-\gamma},$$

где су α, β, γ ма какве константе.

Диференцијална једначина

$$y=xp+\alpha x^n\,p\pm\sqrt{\beta x^{2n}p^2-\gamma}$$

или

$$(63)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{(x+\alpha x^n)^2-\beta x^{2n}}-\frac{2\,(\,x+\alpha x^n\,)}{(\,x+\alpha x^n\,)^2-\beta x^{2n}}\,y\,\frac{dy}{dx}+$$

$$+\frac{\gamma}{(\,x+\alpha x^n\,)^2-\beta x^{2n}}=0$$

претставља нов интеграбилан облик једначине (2).

Да би се затим једначина (62) редуковала на облик

$$y=-\frac{1}{2a_1}p-\frac{a_0}{2a_1}\frac{1}{p}\,,$$

мора бити

$$\psi(x\sqrt[n]{p})=\alpha x^n\,p+\frac{\beta}{x^n\,p}\,,$$

где су α и β произвољне константе.

Диференцијална једначина

$$(64)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{y}{x+\alpha x^n}\frac{dy}{dx}+\frac{\beta}{x^n\,(x+\alpha x^n)}=0$$

је нов интеграбилан облик једначине (2).

VI. — Специјалан случај једначине (59) је

$$(65)\qquad y=xp+x^n\,\theta(p),$$

где је n произвољна константа.

Напоменимо да се ова диференцијална једначина, после диференцијаљења, своди на B e r n o u l l i-еву диференцијалну једначину по x.

Интеграбилна једначина (65) сводљива је на облик

$$y=-\frac{a_1}{a_2}\,p\pm\frac{\sqrt{a_0a_2}}{a_2}\sqrt{kp^2-1},$$

где је

$$a_1^{\,2}-a_2=ka_0a_2,$$

када је

$$\theta(p)=\pm\,\alpha\sqrt{kp^2-1}+\beta p\,,$$

(α и β су ма какве константе).

Диференцијална једначина

$$y=(x+\beta x^n)\,p\pm\alpha x^n\sqrt{kp^2-1}$$

или

$$(66)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{(x+\beta x^n)^2-k\alpha^2x^{2n}}-\frac{2(x+\beta x^n)}{(x+\beta x^n)^2-k\alpha^2x^{2n}}\,y\,\frac{dy}{dx}+$$

$$+\frac{\alpha^2x^{2n}}{(x+\beta x^n)^2-k\alpha^2x^{2n}}=0$$

претставља нов интеграбилан облик једначине (2).

Једначина (65) своди се на облик

$$y=-\frac{a_0}{2a_1}\,\frac{1}{p}-\frac{1}{2a_1}\,p,$$

када је

$$\theta(p)=\alpha p+\frac{\beta}{p}\,.$$

Стога је *диференцијална једначина*

$$(67)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{y}{x+\alpha x^n}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\beta x^n}{x+\alpha x^n}=0$$

нова интеграбилна једначина облика (2).

VII. — У интеграбилној диференцијалној једначини (60)

$$y=F\left(\frac{\theta'}{p^2}\right)+p^2\,\frac{(\theta t)'}{2\theta'}\,,\qquad \left(t=\frac{x}{p}\right),$$

нека је
$$\theta(t)=t^k,$$
где је k ма каква константа. Тада једначина (60) постаје
$$y=F\left(k\,\frac{x^{k-1}}{p^{k+1}}\right)+\frac{k+1}{2k}\,xp.$$

Да би ова једначина имала облик
$$y=-\frac{a_1}{a_2}p\pm\frac{1}{a_2}\sqrt{(a_1{}^2-a_2)\,p^2-a_0a_2},$$
мора да буде
$$F\left(k\,\frac{x^{k-1}}{p^{k+1}}\right)=a[kx^{k-1}p^{-(k+1)}]^{-\frac{1}{k+1}}\pm\sqrt{b\,[kx^{k-1}\,p^{-(k+1)}]^{-\frac{2}{k+1}}-\gamma}$$
или
$$F=\alpha x^n\,p\pm\sqrt{\beta x^{2n}p^2-\gamma},$$
где су α, β, γ произвољне константе, а
$$n=\frac{1-k}{1+k}.$$

Диференцијална једначина
$$(68)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{\left(\frac{x}{1-n}+\alpha x^n\right)^2-\beta x^{2n}}-\frac{2\left(\frac{x}{1-n}+\alpha x^n\right)}{\left(\frac{x}{1-n}+\alpha x^n\right)^2-\beta x^{2n}}\,y\,\frac{dy}{dx}+$$
$$+\frac{\gamma}{\left(\frac{x}{1-n}+\alpha x^n\right)^2-\beta x^{2n}}=0$$
изражава један нов интеграбилан облик једначине (2).

Лако се налази да је диференцијална једначина
$$(69)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{y}{\frac{x}{1-n}+\alpha x^n}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\beta}{x^n\left(\frac{x}{1-n}+\alpha x^n\right)}=0$$
типа (60), *и она претставља нов интеграбилан облик једначине* (2).

VIII. — У интеграбилној диференцијалној једначини (61)

$$y=\frac{x}{2}\,p+\varphi_m(x,\,p)$$

нека је

$$\varphi_m(x,\,p)=f(x)\,p\pm\sqrt{\psi(x)\,p^2-\theta(x)},$$

где ћемо f, ψ, θ одредити тако, да би $\varphi_m(x, p)$ била хомогена функција по x и p димензије m.

Из тога се услова налази

$$f(x)=\alpha x^{m-1},$$

$$\psi(x)=\beta x^{2m-2},$$

$$\theta(x)=\gamma x^{2m},$$

где су α, β, γ ма какве константе.

Диференцијална једначина

$$y=\frac{x}{2}\,p+\alpha x^{m-1}p\pm\sqrt{\beta x^{2m-2}\,p^2-\gamma x^{2m}}$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{\left(\frac{x}{2}+\alpha x^{m-1}\right)^2-\beta x^{2m-2}}-\tag{70}$$

$$-\frac{2\left(\frac{x}{2}+\alpha x^{m-1}\right)}{\left(\frac{x}{2}+\alpha x^{m-1}\right)^2-\beta x^{2m-2}}\,y\,\frac{dy}{dx}+\frac{\gamma x^{2m}}{\left(\frac{x}{2}+\alpha x^{m-1}\right)^2-\beta x^{2m}}=0$$

даје нов интеграбилан облик једначине (*2*).

Лако се налази да је једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{y}{\frac{x}{2}+\beta x^{m-1}}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha x^{m+1}}{\frac{x}{2}+\beta x^{m-1}}=0\tag{71}$$

типа (61), *и она је нова интеграбилна једначина облика* (*2*).

IX. — *Диференцијалне једначине* (*63*), (*64*), (*66*), (*67*), (*68*), (*69*), (*70*) *и* (*71*) *своде се на канонички облик* (*1*) *тако да* $F(X)$ *има један од облика* grange-ову, која је већ искоришћена у трећем одељку овога рада.

II. — За $m=2$ и

$$\theta(y')=\alpha y'^2+\beta,$$

$$\varphi(y')=\gamma y'^2+\delta,$$

$$\psi(y')=2\varepsilon y',$$

$$f(y')=1,$$

где су α, β, γ, δ, ε ма какве константе, једначина (72) је облика (2)

$$(74)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{x^2+\gamma x+\alpha}+\frac{2\,(\varepsilon-x)}{x^2+\gamma x+\alpha}\,y\,\frac{dy}{dx}+\frac{\beta+\delta x}{x^2+\gamma x+\alpha}=0\,,$$

и своди се, Legendre-овом трансформацијом, на Riccati-еву једначину

$$(75)\quad \frac{dz}{dp}+\frac{z^2}{(\gamma+2\varepsilon)\,p^2+\delta}-\frac{2\varepsilon pz}{(\gamma+2\varepsilon)\,p^2+\delta}+\frac{\alpha p^2+\beta}{(\gamma+2\varepsilon)\,p^2+\delta}=0.$$

У овом конкретном случају добијамо

$$(76)\quad \begin{cases} F(X)=-\dfrac{(\beta+\delta x)\,(x^2+\gamma x+\alpha)}{(\gamma+2\varepsilon)\,x+\alpha-\varepsilon^2}\,e^{2\int\frac{(\varepsilon-x)\,dx}{x^2+\gamma x+\alpha}}, \\[2ex] X=\pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{(\gamma+2\varepsilon)\,x+\alpha-\varepsilon^2}}{x^2+\gamma x+\alpha}\,dx. \end{cases}$$

Ове две једначине дефинишу један нов облик функције $F(X)$, карактеристичан по томе, што је диференцијална једначина

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+Y^2=F(X)$$

у томе случају сводљива на једну Riccati-еву диференцијалну једначину.

Према познатој теореми, кадгод се зна један партикуларан интеграл Riccati-еве једначине, њено се интеграљење своди на интеграљење линеарне диференцијалне једначине првога реда. Стога је од особитог значаја наћи један партикуларан интеграл једначине (75) за ма какве вредности констаната α, β, γ, δ, ε, или бар један њен партикуларан интеграл, специјализирајући вредности тих констаната.

1⁰ Тако се налази, на пример, да су партикуларни интеграли једначине (75)

$$z_1 = \pm\sqrt{-\beta},$$

при услову $\alpha = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Стога је диференцијална једначина

$$\frac{dz}{dp} + \frac{z^2}{\gamma p^2 + \delta} + \frac{\beta}{\gamma p^2 + \delta} = 0$$

интеграбилна и *повлачи за собом интеграбилну диференцијалну једначину облика* (2)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y^2}{x(x+\gamma)} - \frac{2y}{x+\gamma}\frac{dy}{dx} + \frac{\beta + \delta x}{x(x+\gamma)} = 0,$$

а тиме и нов интеграбилан облик једначине (1)

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = -\frac{1}{\gamma^2}\left(\beta \sin^2\frac{X}{2} + \delta\gamma \cos^2\frac{X}{2}\right).$$

2⁰ Када је

$$\alpha = \frac{\beta(\gamma\delta - \beta)}{\delta^2}, \tag{77}$$

онда је партикуларни интеграл једначине (75)

$$z_1 = -\frac{\beta}{\delta}p.$$

Стога је једначина (74) интеграбилна, када α има вредност дефинисану обрасцем (77).

Према томе, *једначине* (76), *у којима је*

$$\alpha = \frac{\beta(\gamma\delta - \beta)}{\delta^2},$$

претстављају један нов облик функције $F(X)$ *за који ће једначина* (1) *бити интеграбилна.*

3^0 Константе a, b, c, d, e, f у функцији

$$z_1 = \frac{ap^2+bp+c}{dp^2+ep+f}$$

можемо одредити тако да ова функција претставља партикуларни интеграл једначине (75) у којој појединим константама α, β, γ, δ, ε морамо дати специјалне вредности.

На тај начин добили бисмо неколико нових интеграбилних случаја једначина (1) *и* (2).

III. — Када је $\alpha=0$, $\beta=0$, Riccati-ева једначина (75) своди се на Bernoulli-еву једначину.

Стога је *диференцијална једначина*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y^2}{x(x+\gamma)} + \frac{2(\varepsilon-x)}{x(x+\gamma)}\, y\, \frac{dy}{dx} + \frac{\delta}{x+\gamma} = 0$$

нов интеграбилан облик једначине (2).

Овом новом интеграбилном случају једначине (2) *одговара нов облик функције* $F(X)$ *дефинисан на следећи начин:*

$$F(X) = \delta \frac{x^{2\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma}} (x+\gamma)^{-\frac{\gamma+2\varepsilon}{\gamma}}}{\varepsilon^2-(\gamma+2\varepsilon)\, x},$$

$$X = \pm \int \frac{\sqrt{(\gamma+2\varepsilon)\, x-\varepsilon^2}}{x(x+\gamma)}\, dx.$$

IV. — Нека је у једначини (72) $\theta(y')=0$. Тада се за $m=-1$ добија

$$[x\varphi(y')+y\psi(y')]\,(xy'-y)+f(y')=0.$$

Да би ова једначина имала облик (2), морају бити испуњени услови

$$\varphi(y') = \alpha y',$$

$$\psi(y') = \beta,$$

$$f(y') = \gamma y'^2 + 1,$$

где су α, β, γ ма какве константе.

Према томе, *једначина*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\beta y^2}{\alpha x^2+\gamma} + \frac{(\beta-\alpha)\,x}{\alpha x^2+\gamma}\,y\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\alpha x^2+\gamma} = 0$$

је једна нова интеграбилна једначина облика (2).

Ова једначина повлачи за собом такође нов интеграбилан облик једначине (*1*), *где је*

$$F(X) = \frac{4(\alpha x^2+\gamma)^{\frac{\beta-\gamma}{2\alpha}+1}}{(\alpha+\beta)^2\,x^2+4\beta\gamma},$$

$$X = \pm\int\frac{\sqrt{-(\alpha+\beta)^2\,x^2-4\beta\gamma}}{2\,(\alpha x^2+\gamma)}\,dx.$$

V. — Када је $m=-1$, једначина (72) постаје

$$(xy'-y)\,[\theta(y')+x\varphi(y')+y\psi(y')]+f(y')=0.$$

Са функцијама

$$\theta(y') = \alpha y',$$

$$\varphi(y') = \beta y',$$

$$\psi(y') = \gamma,$$

$$f(y') = 1,$$

где су α, β, γ произвољне константе, једначина (72) припада облику (2) који се, L e g e n d r e-овом трансформацијом, своди на облик

(78) $$\frac{dz}{dp} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\,\frac{z}{p} - \frac{1}{\beta+\gamma}\,\frac{1}{pz}.$$

Разликоваћемо два случаја:

1° Показали смо да је једначина

(79) $$\frac{dz}{dp} = \frac{a}{pz} + b - \frac{z}{p}$$

интеграбилна. Упоређењем једначина (78) и (79) видимо, да је једначина (78) интеграбилна, када α, β, γ имају следеће вредности

$$\alpha = -\frac{b}{a}, \quad \beta = \frac{2}{a}, \quad \gamma = -\frac{1}{a}.$$

Диференцијална једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y^2}{x(2x-b)}+\frac{b-3x}{x(2x-b)}\,y\,\frac{dy}{dx}-\frac{a}{x(2x-b)}=0$$

изражава један нов интеграбилан облик једначине (2), одакле се добија нов интеграбилан облик једначине (1), где је

$$F(X)=\frac{4ax\,(b-2x)}{(x-b)^2}\,e^{\int\frac{b-3x}{x\,(2x-b)}dx},$$

$$X=\pm\, i\int\frac{(x-b)\,dx}{2x\,(2x-b)}.$$

Кад извршимо овде назначене квадратуре, имамо

$$(80)\qquad F(X)=\frac{-4a\sqrt{2x-b}}{(x-b)^2},$$

$$(81)\qquad X=\pm\, i\log\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{2x-b}}.$$

Из (81) се налази

$$x=e^{\mp 2iX}\left(e^{\mp 2iX}\pm\sqrt{e^{\mp 4iX}-b}\,\right),$$

што треба сменити у обрасцу (80).

2° Када је $\gamma=0$, горњи резултат нема смисла. Тада једначина (78) постаје

$$(82)\qquad \frac{dz}{dp}=-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\beta}\frac{1}{pz},$$

дакле интеграбилна диференцијална једначина облика

$$(83)\qquad \frac{dz}{dp}=\frac{a}{pz}+b,$$

чију смо интеграбилност показали у другом одељку овога рада.

Упоређењем једначина (82) и (83) налази се

$$\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \beta = -\frac{1}{a}.$$

Диференцијална једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{a}{b\,(b-x)} = 0$$

је једна нова интеграбилна једначина облика (2).

За $F(X)$ налазимо

$$F(X) = \frac{4a}{b - e^{\pm 2iX}},$$

што претставља један нов облик функције $F(X)$.

Одељак пети

Преглед наведених нових интеграбилних случаја

I. — Диференцијална једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 \tag{2}$$

може се интегралити квадратурама, када има један од следећих облика:

1⁰ $$[(\lambda^2 - k\nu^2)\, x^2 + 2\,(\lambda\mu - k\nu\tau)\, x + \mu^2 - k\tau^2] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \\ + y^2 + 2\,(\lambda x + \mu)\, y \frac{dy}{dx} + (\nu x + \tau)^2 = 0,$$

2⁰ $$(\nu x + \tau) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{dy}{dx} + \lambda x + \mu = 0,$$

3⁰ $$[(x + \alpha x^n)^2 - \beta x^{2n}] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 2\,(x + \alpha x^n)\, y \frac{dy}{dx} + \gamma = 0,$$

4⁰ $$x^n\,(x + \alpha x^n) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^n y \frac{dy}{dx} + \beta = 0,$$

5⁰ $$[(x + \beta x^n)^2 - k\alpha^2 x^{2n}] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 2(x + \beta x^n)\, y \frac{dy}{dx} + \alpha^2 x^{2n} = 0,$$

6⁰ $$(x + \alpha x^n) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y \frac{dy}{dx} + \beta x^n = 0,$$

7⁰ $$\left[\left(\alpha x^n + \frac{x}{1-n}\right)^2 - \beta x^{2n}\right] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - \\ - 2\left(\alpha x^n + \frac{x}{1-n}\right) y \frac{dy}{dx} + \gamma = 0,$$

$8^0 \quad x^n\left(\alpha x^n + \frac{x}{1-n}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^n y\frac{dy}{dx} + \beta = 0,$

$9^0 \quad \left[\left(\frac{x}{2} + \alpha x^n\right)^2 - \beta x^{2n}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{x}{2} + \alpha x^n\right) y\frac{dy}{dx} + \gamma x^{2n+2} = 0,$

$10^0 \quad \left(\frac{x}{2} + \beta x^{n-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + \alpha x^{n+1} = 0,$

$11^0 \quad x(x+\gamma)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + 2(\varepsilon - x) y\frac{dy}{dx} + \delta x = 0,$

$12^0 \quad (\alpha x^2 + \gamma)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \beta y^2 + (\beta - \alpha) xy\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$

$13^0 \quad x(2x - b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + (b - 3x) y\frac{dy}{dx} - a = 0,$

$14^0 \quad x(b - x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (b - x) y\frac{dy}{dx} + a = 0.$

II. — Диференцијална једначина

$15^0 \quad (x^2 + \gamma x + \alpha)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + 2(\varepsilon - x) y\frac{dy}{dx} + \beta + \delta x = 0,$

која је специјалан случај једначине (2), своди се на једну Riccati-еву једначину.

III. — Диференцијална једначина

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = F(X) \tag{1}$$

може се интегралити квадратурама, када $F(X)$ има један од ових облика:

1^0

$$F(X) = \frac{1}{k}\left[(\lambda + \nu\sqrt{k})\, x + \mu + \tau\sqrt{k}\right]^{s_1+1}\left[(\lambda - \nu\sqrt{k})\, x + \mu - \tau\sqrt{k}\right]^{s_2+1},$$

$$e^{\mp 2iX} = \frac{\left[(\lambda + \nu\sqrt{k})\, x + \mu + \tau\sqrt{k}\right]^{s_1}}{\left[(\lambda - \nu\sqrt{k})\, x + \mu - \tau\sqrt{k}\right]^{s_2}},$$

$$\left(s_1=\frac{1}{\lambda+\nu\sqrt{k}},\quad s_2=\frac{1}{\lambda-\nu\sqrt{k}},\quad \lambda^2-k\nu^2\neq 0\right);$$

2⁰
$$\begin{cases} F(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}(\mu\nu-\lambda\tau)(2\lambda\nu x+\mu\nu+\lambda\tau)^{1+\frac{1}{2\lambda}}\, e^{\frac{\nu x}{\mu\nu-\lambda\tau}}, \\[2ex] X=\pm\dfrac{i}{2}\left[\dfrac{\nu x}{\mu\nu-\lambda\tau}-\dfrac{1}{2\lambda}\log(2\lambda\nu x+\mu\nu+\lambda\tau)\right], \end{cases}$$

$$(\lambda^2-k\nu^2=0,\quad \lambda\mu-k\nu\tau\neq 0);$$

3⁰
$$F(X)=\left(ae^{\mp 2i\nu X}+b\right)e^{\mp 2i(1+\nu)X},\quad \nu\neq 0;$$

4⁰
$$\begin{cases} F(X)=\dfrac{4(\alpha x^2+\gamma)^{\frac{\beta-\gamma}{2\alpha}+1}}{(\alpha+\beta)^2x^2+4\beta\gamma}, \\[2ex] X=\pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{-(\alpha+\beta)^2x^2-4\beta\gamma}}{2(\alpha x^2+\gamma)}\,dx; \end{cases}$$

5⁰
$$\begin{cases} F(X)=-4a\dfrac{\sqrt{2x-b}}{(x-b)^2}, \\[2ex] x=e^{\mp 2iX}\left(e^{\mp 2iX}\pm\sqrt{e^{\mp 4iX}-b}\right); \end{cases}$$

6⁰
$$F(X)=\frac{4a}{b-e^{\pm 2iX}};$$

7⁰
$$\begin{cases} F(X)=\delta\,\dfrac{x^{2\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma}}(x+\gamma)^{-\frac{\gamma+2\varepsilon}{\gamma}}}{\varepsilon^2-(\gamma+2\varepsilon)x}, \\[2ex] X=\pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{(\gamma+2\varepsilon)x-\varepsilon^2}}{x(x+\gamma)}\,dx. \end{cases}$$

IV. — Диференцијална једначина (1), када је функција $F(X)$ одређена обрасцима

8⁰
$$\begin{cases} F(X)=-\dfrac{(\beta+\delta x)(x^2+\gamma x+\alpha)}{(\gamma+2\varepsilon)x+\alpha-\varepsilon^2}\, e^{2\int\frac{(\varepsilon-x)\,dx}{x^2+\gamma x+\alpha}}, \\[2ex] X=\pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{(\gamma+2\varepsilon)x+\alpha-\varepsilon^2}}{x^2+\gamma x+\alpha}\,dx, \end{cases}$$

своди се на једну Riccati-еву диференцијалну једначину.

Примедбе: Користећи се теоријом инваријаната (одељак други), можемо образовати најопштији облик једначине (2) такав да је своддьив на једначину (1), где је $F(X)$ дато ма којим од поменутих облика.

Сви горњи облици функције $F(X)$ могу се уопштити стављајући место X израз $X+\omega$, место F израз πF, где су ω и π ма какве константе.