СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXIX

ДРУГИ РАЗРЕД

ФИЛОСОФСКО-ФИЛОЛОШКЕ, ДРУШТВЕНЕ
И ИСТОРИСКЕ НАУКЕ

91

2

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

Логичке примедбе о четвртој директној аритметичкој операцији

БЕОГРАД 1938

Цена 4 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXIX

ДРУГИ РАЗРЕД

ФИЛОСОФСКО-ФИЛОЛОШКЕ, ДРУШТВЕНЕ
И ИСТОРИСКЕ НАУКЕ

91

2

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

Логичке примедбе о четвртој директној аритметичкој операцији

БЕОГРАД 1938

Цена 4 дин.

Логичке примедбе о четвртој директној аритметичкој операцији

ОД
Др-а БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

(Приказано на скупу Академије филозовских наука 3 јуна 1938)

Сабирање, множење и степеновање три су прве директне аритметичке операције. Свака од њих да се дефинисати како индепендентно тако и рекурентно. Обе дефиниције воде код множења и степеновања истом крајњем резултату (који се у обичној Аритметици идентифицира са самом дефиницијом).

Индепендентна дефиниција множења гласи:

$$a \cdot b = a \cdot (\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{b}) = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b \text{ пута}},$$

а рекурентна:

$$a \cdot b = a\,(n + 1) = a \cdot n + a = \cdots = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b \text{ пута}}.$$

Индепендентна дефиниција степеновања гласи:

$$a^b = a^{\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{b}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \quad a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ пута}},$$

а рекурентна:

$$a^b = a^{n+1} = a^n \cdot a = \cdots = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ пута}}.$$

За множење важе закони дистрибуције:

$$a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,,\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,,$$
$$a\,(b + c) = a\,(c + b)\,,$$

а за степеновање закони дистрибуције:

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \quad \text{и} \quad a^{b+c} = a^{c+b}\,.$$

На основу трећег закона дистрибуције за множење и другог за степеновање следује (види даље ниже), да ће за одређене вредности од a и b, $a \cdot b$ и a^b имати само по једну вредност.

Четврта директна операција била би престављена изразом:

$${}^{b}a = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{b\ \text{пута}}\,,$$

и значила би поновљено степеновање истим бројем. Али док изрази $a \cdot b$ и a^b имају само по једну вредност, дотле израз ${}^{b}a$ има већ за $a = 3$ и $b = 3$ две разне вредности, према томе да ли је ${}^{3}3 = 3^{3^3} = (3^3)^3$ или $= 3^{(3^3)}$. Код четврте директне операције (коју ћемо назвати *првим вишим степеновањем)* мора се према томе разликовати *општа* операција (3^{3^3}) од *посебних,* пошто очевидно свака појединачна вредност указује на једну посебну операцију.

Општа четврта директна операција фиксирана је овим двема дефиницијама:

$${}^{b}a = {}^{\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{b}}a = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{b\ \text{пута}}$$

$${}^{n+m}a = \overbrace{\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n\ \text{пута}}{}^{\underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{m\ \text{пута}}}}^{(n+m)\ \text{пута}} = \left({}^{n}a\right)^{\left({}^{m}a\right)},$$

при чему се у другој дефиницији $n + m$ несме схватити као изведена већ само као задата сума.

Друга дефиниција одговара првоме зикону дистрибуције ранијих двеју директних операција, док аналогон трећег одн. другог закона дистрибуције ових последњих за четврту операцију не важи, тј.

$$^{n+m}a \neq {}^{m+n}a\,,$$

што се да показати на следећи начин.

Трећи закон дистрибуције множења

$$a\,(b+c) = a\,(c+b)$$

важи само зато што за сабирање важи закон комутације. Јер из

$$a\,(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$
$$\text{и}\quad a\,(c+b) = a\cdot c + a\cdot b$$

ледује (пошто је $a\cdot b + a\cdot c = a\cdot c + a\cdot b$) и

$$a\,(b+c) = a\,(c+b)\,.$$

Исто тако из

$$a^{b+c} = a^b\cdot a^c$$
$$\text{и}\quad a^{c+b} = a^c\cdot a^b$$

следује (пошто је $a^b\cdot a^c = a^c\cdot a^b$) и

$$a^{b+c} = a^{c+b}.$$

Али како је према другој дефиницији

$$^{n+m}a = ({}^{n}a)^{({}^{m}a)} \quad \text{и} \quad {}^{m+n}a = ({}^{m}a)^{({}^{n}a)},$$

а $\quad ({}^{n}a)^{({}^{m}a)}$ није $= ({}^{m}a)^{({}^{n}a)}$, пошто за степеновање не важи закон комутације, то није ни ${}^{n+m}a = {}^{m+n}a$.

На основу друге дефиниције и неважења овога закона дистрибуције дају се у четвртој општој операцији разликовати следеће три основне специјалне операције:

$$(1)\quad {}^{n+1}a = ({}^{n}a)^{a} = \underbrace{((a^{a})^{a}\cdots)^{a}}_{n\text{-пута}} = a^{(a^{n})};$$

$$(2)\quad {}^{2^{n}}a = \left\{\left[(a^{a})^{(a^{a})}\right]^{\left[(a^{a})^{(a^{a})}\right]}\right\}^{\{\cdots\}};$$

$$(3)\quad {}^{1+n}a = a^{({}^{n}a)} = a^{\left\{a^{\left[a^{\cdot^{\cdot^{\cdot(a^{a})}}}\right]}\right\}} = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n\text{-пута}}.$$

Егзистенција прве основне операције следује из низа

$$\begin{aligned}
{}^{1}a &= a\\
{}^{2}a &= {}^{1+1}a = ({}^{1}a)^{({}^{1}a)} = a^{a},\\
{}^{3}a &= {}^{2+1}a = ({}^{2}a)^{({}^{1}a)} = (a^{a})^{a} = a^{(a^{2})}\\
{}^{4}a &= {}^{3+1}a = ({}^{3}a)^{({}^{1}a)} = ((a^{a})^{a})^{a} = a^{(a^{3})}\\
&\ldots\\
{}^{n+1}a &= ({}^{n}a)^{({}^{1}a)} = \underbrace{((a^{a})^{a}\cdots)^{a}}_{n\text{-пута}} = a^{(a^{n})},
\end{aligned}$$

егзистенција друге из низа:

$$^{2}a = a^{a},$$

$$^{(2^2)}a = {}^{4}a = {}^{2+2}a = \left({}^{2}a\right)^{\left({}^{2}a\right)} = \left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)},$$

$$^{(2^3)}a = {}^{8}a = {}^{4+4}a = \left({}^{4}a\right)^{\left({}^{4}a\right)} = \left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]^{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]}$$

$$^{(2^4)}a = {}^{16}a = {}^{8+8}a = \left({}^{8}a\right)^{\left({}^{8}a\right)} = \left\{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]^{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]}\right\}^{\left\{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]^{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]}\right\}}$$

— — — — — — — — — —

$$^{(2^n)}a = \left\{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]^{\left[\left(a^{a}\right)^{\left(a^{a}\right)}\right]}\right\}^{\cdots\cdots}$$

а егзистенција треће из низа:

$$
\begin{aligned}
{}^{2}a &= {}^{1+1}a = ({}^{1}a)^{({}^{1}a)} = a^{a}, \\
{}^{3}a &= {}^{1+2}a = ({}^{1}a)^{({}^{2}a)} = a^{(a^{a})} \\
{}^{4}a &= {}^{1+3}a = ({}^{1}a)^{({}^{3}a)} = a^{\left[a^{(a^{a})}\right]} \\
{}^{5}a &= {}^{1+4}a = ({}^{1}a)^{({}^{4}a)} = a^{\left\{a^{\left[a^{(a^{a})}\right]}\right\}}, \\
&\text{— — — — — — — — — — —} \\
{}^{1+n}a &= ({}^{1}a)^{({}^{n}a)} = \underbrace{a^{(a^{(a^{\cdots^{(a}}}}_{n\text{-пута}},
\end{aligned}
$$

чиме је свака од њих дефинисана рекурентно.[1]) Као што се лако да увидети, ове се операције почињу да разликују једна од друге за $n > 1$.

Да поред наведене три основне постоје и друге специјалне операције израза ${}^{b}a$, најлакше се да показати на специјалном примеру ${}^{n}3$.

${}^{1}3 = 3$ има само једну вредност;

---

[1]) Као што рекурентна дефиниција степеновања $a^{n+1} = a^{n} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot a}_{n \text{ пута}} \cdot a$ следује из низа:

$$
\begin{aligned}
a^{2} &= a^{1+1} = a^{1} \cdot a^{1} = a \cdot a \\
a^{3} &= a^{2+1} = a^{2} \cdot a^{1} = a^{(1+1)} \cdot a^{1} = (a \cdot a) \cdot a \\
a^{4} &= a^{3+1} = a^{3} \cdot a^{1} = a^{(2+1)} \cdot a^{1} = (a \cdot a \cdot a) \cdot a \\
&\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
a^{n+1} &= a^{n} \cdot a^{1} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ пута}} \cdot a .
\end{aligned}
$$

${}^{2}3 = 3^3$ има такође само једну вредност;

${}^{3}3 = 3^{3^3}$ има две вредности, и то:

$${}^{3}3 = {}^{2+1}3 = ({}^{2}3)^3 = (3^3)^3 = 3^9 \text{ и}$$

$${}^{3}3 = {}^{1+2}3 = 3^{(3^3)} = 3^{27};$$

${}^{4}3 = 3^{3^{3^3}}$ има пет вредности, и то:

$${}^{4}3 = {}^{3+1}3 = {}^{(2+1)+1}3 = \left((3^3)^3\right)^3 = (3^9)^3 = 3^{27},$$

$${}^{4}3 = {}^{3+1}3 = {}^{(1+2)+1}3 = \left[3^{(3^3)}\right]^3 = 3^{27\cdot 3},$$

$${}^{4}3 = {}^{2+2}3 = (3^3)^{(3^3)} = 27^{27},$$

$${}^{4}3 = {}^{1+3}3 = 3^{1+(2+1)} = 3^{\left[(3^3)^3\right]} = 3^{(3^9)}$$

$${}^{4}3 = {}^{1+3}3 = 3^{1+(1+2)} = 3^{\left[3^{(3^3)}\right]} = 3^{(3^{27})};$$

${}^{5}3$ има четрнаест вредности и то:

1. за $5 = 4 + 1 = (3 + 1) + 1 = [(2 + 1) + 1] + 1$,
2. „ $5 = 4 + 1 = (3 + 1) + 1 = [(1 + 2) + 1] + 1$,
3. „ $5 = 4 + 1 = (2 + 2) + 1$,
4. „ $5 = 4 + 1 = (1 + 3) + 1 = [1 + (2 + 1)] + 1$,
5. „ $5 = 4 + 1 = (1 + 3) + 1 = [1 + (1 + 2)] + 1$,
6. „ $5 = 3 + 2 = (2 + 1) + 2$,
7. „ $5 = 3 + 2 = (1 + 2) + 2$,
8. „ $5 = 2 + 3 = 2 + (2 + 1)$,

9. „ $5 = 2 + 3 = 2 + (1 + 2)$,

10. „ $5 = 1 + 4 = 1 + (3 + 1) = 1 + [(2 + 1) + 1]$,

11. „ $5 = 1 + 4 = 1 + (3 + 1) = 1 + [(1 + 2) + 1]$,

12. „ $5 = 1 + 4 = 1 + (2 + 2)$,

13. „ $5 = 1 + 4 = 1 + (1 + 3) = 1 + [1 + (2 + 1)]$, и

14. „ $5 = 1 + 4 = 1 + (1 + 3) = 1 + [1 + (1 + 2)]$;

и т. д. и т. д.

Као што се види, $^{3}3$ има две вредности зато што је 3 или $= 2 + 1$ или $= 1 + 2$; $^{4}3$ има пет вредности зато што је 4 или $= 3 + 1$ или $= 1 + 3$, а 3 (у $3 + 1$ и $1 + 3$) или $= 2 + 1$ или $1 + 2$, и што је 4 још и $= 2 + 2$; $^{5}3$ има четрнаест вредности зато што је 5 или $= 4 + 1$ или $= 1 + 4$ (а 4 има и у једном и у другом од ова два случаја по пет вредности) и што је 5 осим тога још $= 3 + 2$ и $= 2 + 3$ (што даје нове четири вредности). Даље се лако да увидети, да ће $^{6}3$ имати четрдесет и две вредности, од којих ће првих четрнаест одговарати случају кад је $6 = 5 + 1$, других четрнаест случају кад је $6 = 1 + 5$, а трећих четрнаест случајевима кад је $6 = 4 + 2$ (пет вредности), $6 = 3 + 3$ [четири вредности, наиме за $(2 + 1) + (2 + 1)$, $(2 + 1) + (1 + 2)$, $(1 + 2) + (2 + 1)$ и $(1 + 2) + (1 + 2)$] и $6 = 2 + 4$ (пет вредности); и т. д.

Даље се види, да две вредности израза $^{3}3$ одговарају двема екстремним основним операцијама (операцијама првој и трећој); да се у изразу $^{4}3$ јавља и друга основна операција; да у изразу $^{5}2$ постоје поред двеју основних екстремних оцерација и операције помешане из све три основне (први и четрнаести случај претстављају основне екстремне операције, а у трећем и дванаестом случају јавља се друга основна операција као саставни део), док чисте друге основне операције нема; ње нема ни у изразу $^{6}3$ (она се јавља поново тек у изразу $^{8}3$), у коме случајеви $3 + 3 = (2 + 1) + (2 + 1)$ и $3 + 3 = (1 + 2) + (1 + 2)$ претстављају прве почетке двеју помешаних операција типа $3 \cdot 2^{n}$ (где је n редом $= 1, 2, 3 \ldots$); и т. д.

Слично четвртој и пета директна операција дâ се фиксирати следећим двема дефиницијама:

$$ {}^{b_1}a = \overbrace{a \ldots\ldots a\, a\, a}^{b\text{-пута}} \quad \text{и} $$

$$ {}^{n_1+m_1}a = \overbrace{\underbrace{a\, a \ldots a}_{m\text{-пута}}\ \underbrace{a \ldots a\, a\, a}_{n\text{-пута}}}^{n+m\text{-пута}} = \left({}^{m_1}a\right)\left({}^{n_1}a\right), $$

при чему се, као и раније, $n_1 + m_1$ има схватити не као изведена већ као задата сума.

Слично ознаци ${}^{b_1}a$ ознака ${}^{b_2}a$ обележавала би шесту, ознака ${}^{b_3}a$ седму, ознака ${}^{b_n}a$ n-ту директну операцију. И ове више операције дале би се фиксирати, као и четврта и пета, сличним двема дефиницијама, али би се оне тешко дале претставити и дефинисати у равни.

Од мало опсежне литературе о четвртој и вишим операцијама писцу је изближе позната само расправа Х. Герлаха из 1882-е године.[1]) *Герлах* не разликује општу од специјалних операција, а од ових познате су му (као и ранијим писцима) само прва и трећа основна операција. Како је прва од ових, као што смо видели, сводљива на степеновање, то *Герлах*, као и други писци[2]), сматра само нашу трећу основну операцију за праву нову четврту операцију и обележава је (н. н. м. страна 424) ознаком ${}^{b}a$ (којом ми обележавамо општу операцију). Он даље (н. и. м. стр. 425) уводи и обе њене инверзне операције.

---

[1]) *Dr. H. Gerlach,* Zur vierten Rechnungsstufe, расправа штампана у „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" Jahrgang 13, 1882 (S. 423—436). У уводу расправе *Герлах* помиње неколике раније писце.

[2]) Упор. напр. *E. Schroeder,* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Bd. I, 1873, s. 111 f.