СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXV

ПРВИ РАЗРЕД

92

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

11

Н. САЛТИКОВ

Парцијалне једначине интеграбилне раздвајањем промењљивих количина

БЕОГРАД 1941

Цена 15 Динара

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXV

ПРВИ РАЗРЕД

92

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

11

Н. САЛТИКОВ

Парцијалне једначине интеграбилне раздвајањем промењљивих количина

БЕОГРАД 1941

Цена 15 Динара

Парцијалне једначине интеграбилне раздвајањем промењљивих количина

од

Н. САЛТИКОВА

ПАРЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ИНТЕГРАБИЛНЕ РАЗДВАЈАЊЕМ ПРОМЕНЉИВИХ КОЛИЧИНА

од

Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 21 октобра 1940)

Садржај

Нова метода изналажења парцијалних једначина интеграбилних раздвајањем променљивих количина. Једначине које се добијају као сингуларни и општи интеграли. Генералисање једначина Ж. Лиувила, П. Штекела, Т. Леви-Чивита. Општи проблем изналажења интеграбилних једначина. Двадесет четири облика интеграбилних једначина са три независно променљиве количине.

Увод

Проблем изналажења парцијалних једначина које би се интегралиле методом раздвајања променљивих количина потиче од г. Морера (1). После њега су се бавили овим питањем P. Stäckel, Г. T. Levi—Civita, Г. A. Dall' Acqua [2] и Н. Салтиков [3].

У новије време су г.г. Robertson [4] и L. P. Eisenhart [5] испитивали посматрани проблем за парцијалне једначине са више независно променљивих количина. Нарочито су се ови научници бавили Schrödinger-овом парцијалном једначином другог реда.

Решење постављеног проблема се своди на интегралење система парцијалних једначина са више непознатих функција, а таква теорија уопште не постоји. Зато писац мора да потражи неку непосредну и нарочито у ту сврху припремљену методу интеграљења одговарајућих једначина. Према природи ове методе добијају се решења мање или више општија. На тај начин успео сам 1928 године, у Comptes rendus Париске Академије [3] да генералишем једначине динамике са два параметра, које су пронашли P. Stäckel и Г. Т. Levi—Civita.

Част ми је, овом приликом, поднети Академији једну новију методу, коју сам пронашао за налажење тражених парцијалних једначина. Ова метода ми је дала могућност да одредим различите врсте једначина, које се добијају као сингуларна и општа решења постављених система једначина и да генералишем познату Лиувилову једначину.

Најзад, предност ове нове методе се састоји између осталог још и у томе, што се она може применити и на једначине са ма коликим бројем независно промењљивих количина.

Глава I

Метода изналажења интеграбилних једначина са две независно променљиве

Узмимо парцијалну једначину првог реда

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0 \tag{1}$$

где H означава ма коју функцију двеју независно променљивих количина x_1, x_2 и парцијалних извода првог реда

$$p^i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2) .$$

Гијацинто Морера је показао, да функција H мора задовољавати услов

$$\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x_1}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x_1}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}\right)=0 \tag{2}$$

да би се једначина (1) интегралила помоћу раздвајања променљивих количина.

Услов (2) може се друкчије написати у следећем облику:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x_2}}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x_2}}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}\right)=0 \tag{3}$$

Уведимо ознаку

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial x_1}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\varphi\,(x_1, x_2, p_1, p_2)\,,$$

која се може написати и овако:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}-\varphi\,\frac{\partial H}{\partial p_1}=0\,. \tag{4}$$

Према томе једнакост (2) постаје

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\,\frac{\partial H}{\partial x_2}-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,\frac{\partial H}{\partial p_2}=0 \tag{5}$$

Одавде излази, да се функција H одређује помоћу система од две једначине (4) и (5), које су линеарне по парцијалним изводима тражене карактеристичне функције H.

Што се тиче уведене помоћне функције φ, она се мора одредити из услова, да су једначине (4) и (5) сагласне.

Уведимо прво претпоставку:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}=0\,. \tag{6}$$

Пошто функција H мора да зависи експлицитно и од друге променљиве p, онда се добија из једначине (5) други услов за одређивање функције φ, и то:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0. \tag{7}$$

Према томе из услова (6) и (7) излази, да функција φ мора садржати само две променљиве количине x_1 и p_1. Осим тога, функција H се одређује једном јединим једначином (4). Одавде се добија општи облик карактеристичне функције H овако:

$$H = F[f(x_1, p_1), x_2, p_2], \tag{8}$$

где су обе функције F и f потпуно произвољне.

Ако пођемо од услова у облику (3), онда се функција H изражава овако:

$$H = \Psi[\psi(x_2, p_2), x_1, p_1], \tag{9}$$

где су обе функције Ψ и ψ произвољне.

Пошто смо увели претпоставку да се коефицијенти једначине (5) поништавају, онда је природно, да добијене обрасце (8) и (9) називамо *сингуларним решењима* система линеарних једначина (4) и (5).

Потражимо сада њихово опште решење, претпостављајући да је

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \lesseqgtr 0.$$

Уведимо ознаку

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2}} = \theta(x_1, x_2, p_1, p_2),$$

што се може написати и у другојачијем облику овако:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \theta \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = 0. \tag{10}$$

У исто време једначина (5) постаје:

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} - \theta \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0. \tag{11}$$

Сагласност једначина (4) и (11), које сада служе за одређивање тражене вредности карактеристичне функције H, изражава се инволуцијом посматраних обеју једначина (4) и (5). Овај се услов пише, помоћу заграда Поасона, у облику:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial p_1}\right) \frac{\partial H}{\partial p_2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \theta \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\right) \frac{\partial H}{\partial p_1} = 0.$$

Одавде се, према услову (10) и у претпоставци

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} \gtrless 0,$$

добија нова једначина за одређивање функције θ, и то:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial p_1} = 0. \tag{12}$$

Пошто је систем једначина (4) и (11) постао Јакобијев, то он допушта два различита решења, која ћемо означити са

$$f_1, \quad f_2. \tag{13}$$

Тражена карактеристична функција H изражава се онда у следећем облику

$$H = F(f_1, f_2),$$

где F означава произвољну функцију, а функције (13) задовољавају услове:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial f_i}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2} - \theta \frac{\partial f_i}{\partial p_2} = 0 \\ (i = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

при чему се коефицијенти φ и θ одређују једначинама (10) и (12) Међутим, једнакости (14) доводе до закључка, према коме функције f_1 и f_2 нису различите међу собом. Заиста елиминација функције φ из две једнакости прве колоне образаца (14) даје услов:

$$D\left(\frac{f_1,\ f_2}{p_1,\ x_1}\right) = 0.$$

На сличан начин једнакости друге колоне образаца (14) дају

$$D\left(\frac{f_1,\ f_2}{p_2,\ x_2}\right) = 0.$$

Обе добијене формуле показују да се једна од функција (13) изражава као произвољна функција друге.

Према томе, тражена карактеристична функција H претставља произвољну функцију само једног јединог аргумента. Ако га означимо са f, онда имамо:

$$H = F(f)$$

где је F произвољна функција, а f се одређује једначинама

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} - \theta \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0. \tag{15}$$

Глава II.

Примена сингуларних решења на једначине динамике

Узмимо карактеристичну функцију H у следећем облику

$$H = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 - U \tag{16}$$

где коефицијенти A, B, C и U обележавају функције независно променљивих количина x_1 и x_2.

Пошто је функција (16) другог степена по p_1 и p_2, то се она може претставити у облику (8) само у два случаја, који одговарају претпоставци да је функција $f(x_1, p_1)$ линеарна по p_1 или да је она другог степена по промењивој количини p_1.

Проучимо сада оба наведена облика функције f и њима одговарајућу карактеристичну функцију H.

У првој претпоставци морају постојати обрасци:

$$\left.\begin{aligned} f &\equiv X_1 p_1 + Y_1, \\ H &\equiv (X_1 p_1 + Y_1)^2 X_2 + L(X_1 p_1 + Y_1) + M, \\ L &\equiv 2(P_2 p_2 + Y_2), \\ M &\equiv Q_2 p_2^2 + 2 Z_2 p_2 + W_2, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где доњи индекси 1 и 2 код коефицијената X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2, W_2 означавају да су они функције независно промењивих количина x_1 односно x_2.

Међутим у другој претпоставци треба да буде:

$$\left.\begin{aligned} f &\equiv X_1 p_1^2 + 2 P_1 p_1 + U_1, \\ H &\equiv Y_2 (X_1 p_1^2 + 2 P_1 p_1 + U_1) + X_2 p_2^2 + 2 P_2 p_2 + U_2 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

где доњи индекси коефицијената имају пређашње значење.

Изједначимо сада, прво, оба израза функције H, који су одређени обрасцима (16) и (17). На овај начин се добијају следеће једнакости

$$A \equiv X_1^2 X_2, \qquad B \equiv X_1 P_2, \qquad C = Q_2, \qquad X_1 (Y_1 X_2 + Y_2) = 0,$$

$$Y_1 P_2 + Z_2 = 0, \quad -U \equiv Y_1^2 X_2 + 2 Y_1 Y_2 + W_2 .$$

Пошто коефицијенат X_1, не сме бити нула, то једнакости друге врсте дају

$$Y_1 = -\frac{Y_2}{X_2} \equiv m, \qquad Z_2 = -m P_2,$$

где m мора бити једна константа, јер само под овим условом прва једнакост може постојати.

Због тога добијамо интеграл, који одговара дотичној вредности карактеристичне функције (16) у следећем облику:

$$X_2 X_1^2 p_1^2 + 2 P_2 X_1 p_1 p_2 + Q_2 p_2^2 = U_2 + h, \tag{19}$$

где је уведена ознака

$$U_2 \equiv -3 m^2 X_2 + W_2 ,$$

а h претставља произвољну константу.

Приступимо сада испитивању других услова (18). Одмах се види да, под овом претпоставком, морају постојати једнакости:

$$A \equiv X_1 Y_2 , \quad B \equiv 0 , \quad C \equiv X_2 ,$$
$$P_1 = P_2 \equiv 0 ,$$
$$-U \equiv U_1 Y_2 + U_2 .$$

Према томе, добија се одговарајући интеграл у облику:

$$X_1 Y_2 p_2^2 + X_2 p_2^2 = U_1 Y_2 + U_2 + h \tag{20}$$

где је h произвољна константа.

Нађени интеграл (20) претставља генералисање класичне Лиувилове једначине.

Заиста, она се добија из једначине (20) у специјалном случају, под претпоставком

$$Y_2 \equiv 1 .$$

Интеграљење једначине (20) врши се једноставно на следећи начин.

Стављајући

$$X_1 p_1^2 - U_1 = a ,$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{U_1 + a}{X_1}}\,,$$

где је a произвољна константа, из једначине (20) имамо:

$$p_2 = \sqrt{\frac{u_2 - a\,Y_2 + h}{X_2}}\,.$$

Пошто су променљиве раздвојене, добија се тражени интеграл помоћу квадратура

$$z = \int \sqrt{\frac{U_1 + a}{X_1}}\,d x_1 + \int \sqrt{\frac{U_2 - a\,Y_2 + h}{X_2}}\,d x_2 + b,$$

где b означава другу произвољну константу.

Ако се узме за полазну тачку други образац (9) карактеристичне функције H, налазе се други интеграли помоћу функције (16). Они се добијају из једначина (19) и (20) пермутацијом ознака у следећем облику:

$$P_1 p_1^2 + 2\,Q_1\,X_2\,p_1\,p_2 + X_1\,X_2^2\,p_2 = U_1 + h\,,$$

$$X_1 p_1^2 + Y_1\,X_2\,p_2^2 = U_1 + Y\,U_2 + h\,.$$

Проучимо сада нови облик карактеристичне функције H, на име:

$$H \equiv A\,p_1^2 + 2\,B\,p_1\,p_2 + C\,p_2^2 + 2\,D\,p_1 + 2\,E\,p_2 - U, \tag{21}$$

где су коефицијенти A, B, C, D, E и U функције независно променљивих количина x_1 и x_2.

Искористимо и у посматраном случају оба горе наведена обрасца (17) и (18) за карактеристичну функцију H.

Ако изједначимо обрасце (21) и (17) функције H, онда поред ранијих услова

$$A \equiv X_1^2\,X_2, \qquad B \equiv X_1\,P_2\,, \qquad C \equiv Q_2\,,$$

$$-\,U \equiv Y_1^2\,X_2 + 2\,Y_1\,Y_2 + W_2\,,$$

добијамо још два услова у новом облику, наиме:

$$X_1(Y_1 X_2 + Y_2) \equiv D,$$

$$Y_1 P_2 + Z_2 \equiv E.$$

Према томе, служећи се изразом (21) функције H, који одговара наведеним условима, долазимо до интеграла:

$$\left.\begin{aligned} X_2X_1^2 p_1^2 + 2P_2 X_1 p_1 p_2 + Q_2 p_2^2 + 2(Y_1 X_2 + Y_2) X_1 p_1 + \\ + 2(Y_1 P_2 + Z_2) p_2 + Y_1^2 X_2 + 2 Y_1 Y_2 + W_2 = h, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где је h произвољна константа.

Добијена једначина се интеграли на следећи начин. Пошто је једначина (22) другог степена по Y_1, то је решимо по Y_1 тако да имамо:

$$X_2 Y_1 = -(X_2 X_1 p_1 + P_2 p_2 + Y_2) \pm R_2,$$

где је:

$$R_2 \equiv \sqrt{S^2 - T X_2}$$

при чему су уведене ознаке:

$$S \equiv X_2 X_1 p_1 + P_2 p_2 + Y_2,$$

$$T \equiv X_2 X_1^2 p_1^2 + P_2 X_1 p_1 p_2 + Q_1 p_2^2 + 2 Y_2 X_1 p_1 + 2 Z_2 p_2 + W_2 - h.$$

Одавде добијамо

$$X_2 (X_1 p_1 + Y_1) = -(P_2 p_2 + Y_2) \pm R_2, \qquad (23)$$

где R_2 претставља стварно само функцију променљивих количина x_2, p_2 и то:

$$R_2 \equiv \sqrt{(P_2^2 - X_2 Q_2) p_2^2 + 2(P_2 Y_2 - X_2 Z_2) p_2 + Y_2^2 - X_2 (W_2 - h)}.$$

Стога се једначина (23) интеграли помоћу раздвајања променљивих количина, ако се стави

$$X_1 p_1 + Y_1 = a,$$

где је a произвољна константа. Тада једначина (23) даје за одређене вредности p_2 следећу квадратну једначину

$$(P_2 p_2 + a X_2 + Z_2)^2 = R_2^2,$$

или

$$M p_2^2 + 2 N p_2 + S = 0,$$

где су уведене ознаке

$$M \equiv Q_2 X_2,$$

$$N \equiv (a X_2 - Y_2 + Z_2) P_2 + X_2 Z_2,$$

$$S \equiv (a X_2 + Z_2)^2 - Y_2^2 + X_2 (W_2 - h).$$

Према томе се функција z одређује квадратуром

$$z = \int \frac{(a - Y_1)}{X_1} \, d x_1 + \int \frac{(N \pm \sqrt{N^2 - MS})}{M} \, d x_2 + b,$$

где b означава другу произвољну константу.

Ако сада узмемо за полазну тачку услове (18), онда по изједначењу образаца (21) и (18) за карактеристичну функцију H, налазимо, поред пређашњих услова:

$$A \equiv X_1 Y_2, \qquad B \equiv 0, \qquad C \equiv X_2,$$

$$- U = U_1 Y_2 + U_2,$$

још две следеће једнакости:

$$D \equiv P_1 Y_2, \qquad E \equiv P_2.$$

Према нађеним условима, добијамо помоћу одговарајућег обрасца карактеристичне функције (21) једначину:

$$Y_2 X_1 p_1^2 + X_2 p_2^2 + 2 Y_2 P_1 p_1 + 2 P_2 p_2 \equiv Y_2 U_1 + U_2 + h \qquad (24)$$

где је h произвољна константа. Ова се једначина лако интеграли методом раздвајања променљивих количина. Ставимо:

$$X_1 p_1^2 + 2 P_1 p_1 - U_1 = a,$$

где је a произвољна константа. Заиста, у том случају једначина (24) постаје:

$$X_2 p_2^2 + 2 P_2 p_2 + a Y_2 - U_2 = h.$$

Тога ради интеграл једначине (24) се одређује квадратуром:

$$z = \int \frac{\left[-P_1 \pm \sqrt{P_1^2 + X_1(U_1 + a)}\right]}{X_1} d x_1 + \\ + \int \frac{\left[-P_2 \pm \sqrt{P_2^2 + X_2(U_2 - a Y_2 + h)}\right]}{X_2} d x_2 + b,$$

где b означава другу произвољну константу.

Једначина (24) претставља другу генерализацију *Лиувилове* једначине.

Узмемо ли за полазну тачку други облик (9) карактеристичне функције H, онда, поред једначина (22) и (24), добијамо две друге једначине, које се интеграле раздвајањем променљивих количина. Дотичне једначине се добијају из (22) и (24) пермутацијом ознака у следећем облику:

$$Q_1 p_1^2 + 2 P_1 X_2 p_1 p_2 + X_1 X_2^2 p_2 + 2 (Y_2 P_1 + Z_1) p_1 + \\ + 2 (Y_2 X_1 + Y_1) X_2 p_2 + X_1 Y_2^2 + 2 Y_1 Y_2 + W_1 = h,$$

$$X_1 p_1^2 + Y_1 X_2 p_2 + 2 P_1 p_1 + 2 Y_1 P_2 p_2 = U_1 + Y_1 U_2 + h,$$

где су h произвољне константе.

Лако се види да четири последње добијене једначине претстављају генерализацију четири једначине које су горе нађене, ако ставимо у последње четири једначине:

$$Y_1 = Y_2 = Z_2 = 0\,, \qquad P_1 = P_2 = 0\,,$$

односно

$$Y_2 = Z_1 = Y_1 = 0\,, \qquad P_1 = P_2 = 0\,.$$

Глава III

Примена општег решења на једначине Динамике

Полазећи од резултата који је постављен у Глави I, према коме карактеристична функција H мора да претставља функцију само једног аргумента f, довољно је проучити само два случаја. Први случај претставља да је функција f линеарног облика:

$$f = \xi p_1 + \eta p_2 + \zeta\,, \tag{25}$$

где су коефицијенти ξ, η и ζ функције независно променљивих количина x_1 и x_2. Пошто образац (16) претставља функцију H као функцију другог степена по променљивим p_1 и p_2 то H мора имати облик:

$$H = a f^2 + 2 b f_1 + c\,, \tag{26}$$

где су a, b и c стални коефицијенти. Функција H нема чланова са p_1 и p_2 на првом степену. Стога се она доводи на следећи облик:

$$H = a(\xi^2 p_1^2 + 2\xi\eta p_1 p_2 + \eta^2 p_2^2 + c\,. \tag{27}$$

Други случај се појављује, када се функција f изражава овако:

$$f \equiv A' p_1^2 + 2B' p_1 p_2 + C' p_2^2 + U'\,, \tag{28}$$

при чему карактеристична функција H постаје

$$H \equiv mf + n, \tag{29}$$

где су коефицијенти A', B', C' и U' функције независно променљивих количина x_1 и x_2, а m и n су стални коефицијенти.

Образац (27) претставља само специјалан случај функције (29). Према томе ми ћемо се ограничити на проучавање најопштије вредности (28) функције f. Она мора сем тога испуњавати обе једнакости (15), где функције φ и θ задовољавају једначине (10) и (12). Тога ради функције φ и θ могу имати једино следећи облик:

$$\varphi = \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2, \qquad \theta = \alpha_2 p_2 + \beta_2 p_2 \tag{30}$$

где су коефицијенти уз чланове са p_1 и p_2 функције x_1 и x_2.

Ако изједначимо обрасце (16) и (29), узимајући у обзир једнакости (10), (12), (30) и обе једнакости (15) онда добијамо следеће једнакости:

$$A \equiv mA', \quad B \equiv mB', \quad C \equiv nC', \quad -U \equiv mU' + n, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} p_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} p_2 &= (\alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2)\beta_1 \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} p_1 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} p_2 &= (\alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2)\alpha_2, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A'}{\partial x_1} p_1^2 + 2\frac{\partial B'}{\partial x_1} p_1 p_2 + \frac{\partial C'}{\partial x_1} p_2^2 + \frac{\partial U'}{\partial x_1} = \\ &\qquad = 2(\alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2)(A'p_1 + B'p_2), \\ &\frac{\partial A'}{\partial x_2} p_1^2 + 2\frac{\partial B'}{\partial x_2} p_1 p_2 + \frac{\partial C'}{\partial x_2} p_2^2 + \frac{\partial U'}{\partial x_2} = \\ &\qquad = 2(\alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2)(B'p_1 + C'p_2). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Пошто једнакости (32) и (33) морају бити идентички испуњене, то се добијају нови услови:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \alpha_2 \beta_1, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} = \beta_2 \beta_1, \\
&\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = \alpha_1 \alpha_2, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} = \beta_1 \alpha_2,
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A'}{\partial x_1} = 2\alpha_1 A', \quad \frac{\partial B'}{\partial x_1} = \alpha_1 B' + \beta_1 A', \quad \frac{\partial C'}{\partial x_1} = 2\beta_1 B', \\
&\frac{\partial A'}{\partial x_2} = 2\alpha_2 B', \quad \frac{\partial B'}{\partial x_2} = \alpha_2 B' + \beta_2 C', \quad \frac{\partial C'}{\partial x_2} = 2\beta_2 C', \\
&\frac{\partial U'}{\partial x_1} = \frac{\partial U'}{\partial x_2} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Добијени системи једначина (34) и (35) интеграљени су у моме поменутом раду [3].

Према томе, тражена парцијална једначина постаје:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Q_1'\,(a\,Q_2^2 + 2\,b\,Q_2 + d)}{P_1\,(Q_1 + Q_2)^2}\,p_1^2 + \\
&+ \frac{2\sqrt{P_2\,Q_1'\,Q_2'}\,[a\,Q_1\,Q_2 + b(Q_1 - Q_2) - d]}{\sqrt{P_1}\,(Q_1 + Q_2)^2}\,p_1 p_2 + \\
&+ \frac{P_2\,Q_2'\,(a\,Q_2^2 - 2\,b\,Q_1 + d)}{(Q_1 + Q_2)^2}\,p_2^2 = U_0 + h,
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

где Q_1, Q_2, P_1 и P_2 претстављају произвољне функције једне од независно промењљивих количина, која има исти индекс са наведеном функцијом; коефицијенти a, b, d и U_0 су константе, при чему је:

$$U_0 \equiv -\,m U' - n\,.$$

Добијена једначина (36) се интеграли, као што је то већ објашњено у поменутом раду.

Глава VI

Општи проблем изналажења интеграбилних једначина

Посматрајмо парцијалну једначину првог реда

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h \qquad (37)$$

где је h произвољна константа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независно променљиве количине, при чему су уведене ознаке за парцијалне изводе:

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Г. Т. Леви Чивита [2] је пронашао услове интеграбилности дате једначине (37). Међутим неопходно је прецизирати их, јер примедбе, које ћемо истаћи, играју за нас одсудну улогу. Заиста, потпуни интеграл дате једначине мора се, према услову, изражавати у следећем облику:

$$z = \sum_{s=1}^{n} V_s(x_s, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) + C_n \qquad (38)$$

тако да постоји:

$$p_k = \frac{\partial V_k}{\partial x_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Према томе, сваки извод p_k само је функција коњуговане независно променљиве количине x_k.

Тога ради добијамо обрасце:

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n).$$

Са друге стране, диференцијаљењем по x_k идентичности, која се добија из дате једначине (37) по смени интеграла (38) у њој самој, долазимо до једнакости:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_k} = 0\cdot$$

Одавде се добијају обрасци

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_k} = - \frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_k}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

Ако диференцијалимо сада написани образац (39) по x_i, у претпоставци да је

$$i \gtreqless k,$$

онда ћемо добити:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_k}}\right) + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_k}}\right)\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Међутим, према обрасцима (39) једнакост (40) постаје:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_k}}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_k}}\right) = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Број дотичних услова је $n-1$. Дајући индексу k различите вредности од 1 до n, добијамо n система услова за одговарајуће вредности тог индекса k. Г. Т. Леви-Чивита вели да је број различитих услова једнак $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Збиља, сваки од посматраних услова (41), за ма коју вредност индекса k, може се одмах претворити груписањем чланова у следеће услове:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}}\right) = 0.$$

Ограничимо се сада на проучавање једначине са три независно променљиве количине, наиме:

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = h. \tag{42}$$

Према горе наведеном можемо написати све могуће услове интеграбилности дате једначине (42) у следећем облику:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}\right)=0,\\
&\frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}\right)=0,\\
&\frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_3}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_3}}\right)=0,\\
&\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_3}}\right)-\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_3}}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Две једначине (43) и друга једначина (44) сачињавају први систем услова за интеграбилност дате једначине (42). Други систем услова дају једначине (44) и прва (45). Најзад, трећи систем услова интеграбилности чине једначине (45) и прва једначина (44).

Уведимо сада ознаке

$$\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3),$$

$$\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3),$$

које се своде на једначине следећег облика:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0. \tag{46}$$

Тада једначине (43) и друга једначина (44) постају,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3}\frac{\partial H}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3}\frac{\partial H}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Према томе за одређивање функције H служи систем једначина (46)—(47). Зваћемо *сингуларним* она решења посматраног система диференцијалних једначина (46)—(47), која се добијају за нулте вредности коефицијената једначина (47).

Када се све једначине (47) задовољавају идентички, наиме под претпоставком:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = 0, \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (48)
$$

назваћемо одговарајуће решење система једначина (46)—(47) његовим *сингуларним интегралом треће класе.*

Ако се само две од једначина (47) задовољавају идентички, зваћемо одговарајуће решење система једначина (46) – (47) његовим *сингуларним интегралом друге класе*. Очевидно је да посматрани систем допушта три различита сингуларна интеграла друге класе.

Најзад, систем једначина (46)—(47) има и три сингуларна интеграла прве класе, који се добијају под претпоставком, да се једна од једначина (47) задовољава идентички.

Проучимо сада сингуларно решење треће класе посматраног система под претпоставком (48). Ово се решење одређује помоћу две једначине (46) чији се услов инволуције изражава једном једнакошћу

$$
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} = 0 . \tag{49}
$$

Општи интеграл прве једначине (46) постаје

$$
H = \Phi \left[f_1 (x_1, p_1), \; x_2, x_3, p_2, p_3 \right],
$$

где је Φ произвољна функција исто као и функција $f_1(x_1, p_1)$, која претставља леву страну интеграла обичне диференцијалне једначине

$$
\frac{d p_1}{d x_1} = \varphi_1 (x_1, p_1)
$$

са произвољном вредношћу функције φ_1.

Према томе и општи интеграл једначина (49) гласи, на основу једнакости друге врсте услова (48),

$$
\varphi_2 = \theta \left[f_1 (x_1, p_1), \; x_2, p_2 \right], \tag{50}
$$

где је θ произвољна функција.

Смењујући нађену вредност H у другој једначини (46), добијамо за одређивање функције Φ услов

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0,$$

где је према обрасцу (50) φ_2 произвољна функција x_2 и p_2 при чему f_1 игра улогу сталног параметра. Одавде излази да је

$$\Phi = F\{f_1(x_1, p_1), f_2[f_1(x_1, p_1), x_2, p_2], x_3, p_3\}$$

где су F и f_2 две произвољне функције. Према томе тражена функција H добија облик

$$H = F\{f_1(x_1, p_1), f_2[f_1(x_1, p_1), x_2, p_2], x_3, p_3\}$$

са три произвољне функције F, f_1 и f_2.

Лако је увидети да се парцијалне једначине нађеног општег облика заиста непосредно интеграле помоћу раздвајања променљивих количина.

Пређимо сада на проучавање сингуларних интеграла друге класе за систем једначина (46)—(47). Овде се појављују два различита случаја према томе, да ли се задовољавају идентички обе последње једначине (47), или прва једначина (47) и једна од двеју последњих једначина (47).

Уведимо прву претпоставку

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0. \tag{51}$$

Пошто друга једначина (46) и прва (47) морају бити истоветне то добијамо услов

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = 0. \tag{52}$$

Услови (49) и (52), доказују да се једначине (46) налазе у инволуцији, па према томе ће имати два различита интеграла облика

$$f_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \qquad (i = 1, 2).$$

Ови интеграли задовољавају идентичности

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_i}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial f_i}{\partial p_2} = 0,$$

$$(i = 1, 2).$$

Али из четири добијене једнакости непосредно излази да једна од обе количине f_1 и f_2 претставља произвољну функцију друге. Ако ставимо да је

$$f_2 = \psi(f_1, x_3, p_3),$$

где је ψ произвољна функција, онда се тражена функција H изражава овако

$$H = F\{f_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \psi[f_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), x_3, p_3], x_3, p_3\}$$

где су F и ψ произвољне функције. Међутим функција f_1 се одређује парцијалним једначинама

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} = 0,$$

при чему коефицијенти φ_1 и φ_2 задовољавају услове (49), (51) и (52).

Пређимо проучавању другог сингуларног решења друге класе, које одговара претпоставци да је

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = 0. \tag{53}$$

Тада трећа једначина (47) постаје

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} - \varphi_3 \frac{\partial H}{\partial p_3} = 0\,, \tag{54}$$

где је уведен услов:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = 0\,, \tag{55}$$

при чему ψ_3 означава једну функцију количина x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3. Сада услови инволуције једначина (46) и (54), поред једнакости (49) и (53), дају још две једначине:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_2} = 0\,. \tag{56}$$

Систем трију једначина (46) и (54) у инволуцији има три различита интеграла

$$f_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

који задовољавају услове

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_i}{\partial p_1} = 0\,, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial f_i}{\partial p_2} = 0\,, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_3} - \varphi_3 \frac{\partial f_i}{\partial p_3} = 0\,,$$
$$(i = 1, 2, 3)\,.$$

Одавде се одмах види да су два од интеграла f_1, f_2 и f_3 произвољне функције трећег. Стога функција H има следећи облик

$$H = F(f_1)$$

где је F произвољна функција, а f_1 задовољава три услова

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \varphi_3 \frac{\partial f_1}{\partial p_3} = 0\,;$$

функције φ_1, φ_2 и φ_3 се одређују једначинама (49), (53), (55) и (56).

Најзад трећи сингуларни интеграл друге класе одговара условима

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = 0 . \tag{57}$$

Тада се друга једначина (47) доводи на облик

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} - \varphi_4 \frac{\partial H}{\partial p_4} = 0 \tag{58}$$

при чему је уведен услов

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = 0 . \tag{69}$$

Услови инволуције једначина (46) и (58) се изражавају једнакостима (49) и (59) и још помоћу две следеће које су сличне са (56), наиме:

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_4}{\partial p_1} = 0 . \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial p_2} = 0 . \tag{60}$$

Слично претходном случају, функција H постаје

$$H = F(f_1) ,$$

где је F произвољна функција, а f_1 задовољава услове

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = 0 , \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial f_1}{\partial p_2} = 0 , \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \varphi_4 \frac{\partial f_1}{\partial p_3} = 0 ;$$

што се тиче функција φ_1, φ_2 и φ_4, ове се одређују једначинама (49), (57), (59) и (60).

Проучимо сада три сингуларна интеграла прве класе једначина (46)—(47).

Уведимо, најпре, претпоставку да је прва једначина (47) идентички задовољена, и то:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0. \tag{61}$$

Обе друге једначине (47) се своде на једну једначину

$$\frac{\partial H}{\partial x_3} - \varphi_3' \frac{\partial H}{\partial p_3} = 0, \tag{62}$$

где су уведени услови:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_3' \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \varphi_3' \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = 0. \tag{63}$$

Услови инволуције једначина (46) и (62) се изражавају, поред једначине (49), такође новим једначинама

$$\frac{\partial \varphi_3'}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_3'}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_3'}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3'}{\partial p_3} = 0,$$

сличним једначинама (60), које одређују функцију φ_4 у претходном случају. Али треба подвући да се разлика између оба наведена случаја састоји у условима (57) и (61), а такође и у другом услову (63).

Испитивање два друга сингуларна интеграла прве класе врши се слично претходном случају, али се разликује само обликом полазних услова (61). Заиста, уместо последњих — за други сингуларни интеграл постоје једнакости:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = 0.$$

У случају трећег сингуларног интеграла прве класе узму се полазне једнакости:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_3} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = 0.$$

Проучимо најзад општи интеграл система (46)—(47). Сада ни једна од једначина (47) не сме да се поништи идентички.

Међутим у посматраном случају прва једначина (47) постаје истоветна са другом једначином (46), а обе се друге једначине (47) своде на једну једначину.

Применимо ли изложена расуђивања на друге услове интеграбилности, који се добијају груписањем образаца (43), (44) и (45), онда долазимо до нових шеснаест типова једначина интеграбилних раздвајањем променљивих количина. Али се овде једначине добијају пермутацијом променљивих количина у претходно нађеним једначинама.

Сваки од проучених случајева може да одреди неколико интеграбилних једначина Динамике, које ћемо доцније испитивати.

Најзад изложена теорија проширује се такође и на једначине са већим бројем променљивих количина.

БИБЛИОГРАФСКИ ПОДАЦИ

1. Giacinto Morera. — Giornale Della Società di Letture e conversazioni Scientificho di Genova. Anno X - 2º Semestre Fasc. VIII—IX. Ag.—Sat. 1887 Genova 1888 p. 469—473.

2. P. Stäckel. — Über die Integration der Hamilton Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln. Math. Annalen Bd 42 (1893) p. 537.

T. Levi-Civita. — Math. Annalen Bd 59 (1904) p. 383.

F. A. Dall' Acqua. — Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton—Jacobi per separazione di variabili. Math. Annalen. Bd 66 (1909).

3. N. Saltykow. — Comptes rendus des Séances de l' Ac. des Sciences à Paris, 12 mars 1928.

Н. Н. Салтыковъ. — Уравненія съ частными производными интегрируемыя при помощи раздѣленія перемѣнныхъ. Труды IV Съѣзда Русскихъ Академическихъ Организацій. Изданіе Рус. Научнаго Института. Бѣлградъ 1929 г. Часть II, стр. 13.

4. N. P. Robertson. — Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik, Math. Annalen Bd 98 p. 749.

5. L. P. Eisenhart. — Separable systeme of Stäckel. Annals of Math. 35. p. 284.

L. P. Eisenhart. — Stäckel systems in conformal euclidian space. Annals of Math. (2) 36 p. 57.