СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXX

Први разред

83

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

6

Д-р Н. САЛТИКОВ

Примена тангенцијалних трансформација за интегралење парцијалних једначина

БЕОГРАД, 1936

Цена 6 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXX

Први разред

83

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

6

Д-р Н. САЛТИКОВ

Примена тангенцијалних трансформација за интеграљење парцијалних једначина

БЕОГРАД, 1936

ПРИМЕНА ТАНГЕНЦИЈАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА ЗА ИНТЕГРАЛЕЊЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА.

Од

Д-ра Н. САЛТИКОВА.

ПРИМЕНА ТАНГЕНЦИЈАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА ЗА ИНТЕГРАЛЕЊЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА.

Од

Др. Н. САЛТИКОВА.

(Приказано на скупу Академије природних наука 21 октобра 1935 г.).

Увод.

Тангенцијалне трансформације играју важну улогу за интегралење диференцијалних једначина, почев од Ајлера, Ампера и Лежандра.

Тангенцијалним трансформацијама се много бавио такође и С. Ли.

У овој се расправи говори о једној методи која потиче од професора В. П. Јермакова.

Њена карактеристична особина састоји се у томе да пружи истраживачу могућност да искористи у највећој мери своју интуицију за трансформацију дате диференцијалне једначине.

Наведена се метода корисно примењује на једначине које садрже произвољне функције од аргумената где улазе парцијални изводи. Први су били Лагранж и Шарпи који су интегралили овакве једначине најпростијег облика.

Овај рад има за циљ да примени Јермаковљеве идеје на интегралење парцијалних једначина другог реда с посредним интегралима. Сваки од њих садржи једну произвољну функцију; те због тога Г. Е. Гурса вели у својим предавањима[1]): „да није могуће уопште извршити интегралење овакве једначине пре него што дамо произвољној функцији једну партикуларну вредност". Према томе Ампер, а после њега и С. Ли, предлажу да се дата полазна парцијална једначина другог реда претвори у једну нову једначину помоћу тангенцијалне трансформације, која се одређује добијеним посредним интегралом, а затим да се претворена једначина другог реда поново интеграли. Што се тиче других научника, они су тражили неке вештачке начине за сваку партикуларну једначину засебно да би извршили њено интегралење.

Међутим, може се лако уверити да посредни интеграл сваке парцијалне једначине другог реда, иако садржи произвољну функцију од ма ког аргумента, ипак се доводи, на најпростији начин, помоћу трансформације Јермакова, на једну једначину, где фигурише само произвољна функција од независно променљиве количине, која, уопште, може се махом интегралити. То је особито интересантно на случајевима, где постоји по два посредна интеграла, јер тада аргументи њихових произвољних функција задовољавају услове инволуције.

Изложена теорија је, у ствари, генерализација оних партикуларних случајева интегралења једначина другог реда, чији посредни интеграли садрже, под знаком произвољне функције, аргуменат који претставља функцију само независно променљивих количина.

Најзад, горе наведена идеја Јермакова може се још искористити за интегралење ма каквих парцијалних једначина првог реда са више независно променљивих количина, ако будемо истовремено применили за њихово интегралење и проширену методу Коркина тако званих *сужених*[2]) (restreintes) тангенцијалних трансформација Н. Салтикова.

Лако се интеграле, на овакав начин, више компликованих једначина.

Например, лако је сад интегралити познату једначину

[1]) *E. Goursat*. — Leçons sur l'ntégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Paris A. Hermann 1896. T. I p. 59. n⁰ 32.

A. R. Forsyth. — Theory of Differential Equations Part. IV, vol. VI. Cambridge 1906, p. 217.

[2]) *N. Saltykow*. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris Gauthier Villars 1925, Chapitre XII.

Шлефлиа са три независно променљиве количине [3]), коју је он интегралио пре 70 година, на један веома компликован начин. Међутим, Шлефлијева једначина одмах се помоћу изложених истраживања, претвара у једначину са две независно променљиве количине, па затим непосредно се види да се добијена једначина претвара у једну најпростију једначину, с раздвојеним променљивим количинама, чије интегралење не чини никакве тешкоће.

---

[3]) Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 2, t. II. pp. 89—96.

Глава I

Интегралење парцијалних једначина другог реда с једним посредним интегралом.

Посматрајмо једну Монж-Амперову парцијалну једначину другог реда:

$$Ar+2Bs+Ct+D\,(rt-s^2)+E=0, \tag{1}$$

где променљиве количине

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t \tag{2}$$

значе парцијалне изводе првог, односно другог реда непознате функције z од две независно променљиве количине, x и y, на име:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

а коефицијенти A, B, C, D и E претстављају функције од x, y, z, p и q.

Према условима, које морају задовољавати ови коефицијенти, може се десити да једначина (1) има само један посредни интеграл, и то

$$u\,(x, y, z, p, q)=f\,[v\,(x, y, z, p, q)], \tag{3}$$

где је f произвољна функција аргумента v, а u и v се одређују по Монж-Амперовој теорији.

У интегралу (3) изједначимо функцију v са неком количином ξ. Посматрајући количину ξ као константу, интегралимо парцијалну једначину првог реда, на име:

$$v\,(x, y, z, p, q)=\xi. \tag{4}$$

Обележимо са η и ζ две произвољне константе, које улазе у потпуни интеграл једначине (4) и то:

$$z = V(x, y, \xi, \eta, \zeta). \tag{5}$$

Узимајући сад добијени потпуни интеграл (5) за основну формулу једне тангенцијалне трансформације, саставимо њена остала четири обрасца, сматрајући ζ као нову непознату функцију двеју нових независно променљивих количина ξ и η:

$$p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} p' = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} q' = 0, \tag{7}$$

где p' и q' значе парцијалне изводе $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ односно $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$.

Пет написаних формула (5), (6) и (7) одређују вредности старих променљивих количина као функције нових. Ово одређивање је увек могуће, ако узмемо у обзир правило за тражење потпуног интеграла парцијалне једначине првог реда (4).

Заиста, ако, например, претпоставимо да је

$$\frac{\partial v}{\partial p} \gtrless 0, \tag{8}$$

то, у одређеној области варијације посматраних променљивих количина, увек постоји за једначину (4), један потпуни интеграл (5), који задовољава услов:

$$D\left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial y}}{\eta, \zeta}\right) \gtrless 0. \tag{9}$$

Али, услед услова (8), пошто постоји једначина (4), систем једначина (5) и (6) мора се решити односно ξ, η и ζ. Према томе мора да постоји услов:

$$D\left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}}{\xi, \eta, \zeta}\right) \gtrless 0. \tag{10}$$

Сад је лако доказати да се једначине (7) могу решити по старим променљивим количинама x и y.

Заиста, функционална детерминанта

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}+\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}p'\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}+\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}p'\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \eta}+\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}q'\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \eta}+\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}q'\right) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

елиминацијом p' и q' помоћу једначина (7), постаје

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \xi} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \xi} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial \xi} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \eta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \eta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial \eta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \zeta} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial \zeta} \end{vmatrix} \equiv D\left(\frac{V,\ \dfrac{\partial V}{\partial x},\ \dfrac{\partial V}{\partial y}}{\xi,\ \eta,\ \zeta}\right),$$

која је, према услову (10), различита од нуле.

Због тога, пет састављених образаца тангенцијалних трансформација (5), (6) и (7), при услову (9), увек одређују вредности старих променљивих количина као одређене функције нових променљивих количина. Према томе се парцијална једначина (3) претвара у једначину следећег облика:

$$w\,(\xi, \eta, \zeta, p', q') = f(\xi), \tag{12}$$

где w значи претворену функцију u, а произвољна функција f зависи само од једне нове независно променљиве количине ξ.

На овај се начин парцијална једначина (3) своди се на једначину (12), чије је интегралење, уопште, много лакше, у теоријском погледу, него ли интегралење полазне једначине (3). Најзад формирањем општег интеграла једначине (12) уводи се друга произвољна функција.

Као пример узмимо познату Амперову једначину [4]):

$$(r - pt)^2 = q^2 rt. \tag{13}$$

[4]) *E. Goursat.* — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Paris, A. Hermann, 1896, t. I. p. 161 n^0 76.

Ова једначина има следећи посредни интеграл:

$$2y+(q+R)\,x=f\,(q+R), \tag{14}$$

где је f произвољна функција, а R вреди:

$$R\equiv \pm\sqrt{4p+q^2}.$$

Кад ставимо ознаку:

$$q+R=\xi,$$

то ће формуле трансформација постати:

$$\left.\begin{aligned} &p=\frac{\xi^2-2\xi\eta}{4}, \quad q=\eta, \\ &z=\frac{\xi^2-2\xi\eta}{4}\,x+\eta y+\zeta, \\ &x=\frac{2p'}{\eta-\xi}, \quad y=\frac{\xi p'}{\eta-\xi}-q'. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Према томе једначина (14) добиће, у новим променљивим количинама, облик једне линеарне једначине

$$\frac{4\xi}{\eta-\xi}\,p'-2q'=f(\xi),$$

чији општи интеграл гласи:

$$\zeta=-\frac{1}{6}\int f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{4}\left(\eta\xi^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,\xi^{\frac{3}{2}}\right)\int \xi^{-\frac{3}{2}} f(\xi)\,d\xi+\varphi\left(\eta\xi^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,\xi^{\frac{3}{2}}\right),$$

где је φ друга произвољна функција, која мора улазити у тражени општи интеграл Амперове једначине.

Смењујући нађену вредност ζ у три последње формуле (15), добићемо тражени интеграл избацивањем вредности ξ и η из ових образаца.

Посматрана Амперова једначина спада у ред оних једчина, чији се посредни интеграл (14) може интегралити на различите начине. Пошто $q+R$ зависи само од p и q, то се на ову једначину може применити и Лежандрова трансформација.

За други пример уочимо једначину [5]):

$$x(r+s)-y(s+t)=p+q-xy, \tag{16}$$

која има следећи посредни интеграл:

$$x(p+q-xy)=f[y(p+q-xy)], \tag{17}$$

где је f произвољна функција.

Ако уведемо претпоставку

$$y(p+q-xy)=\xi,$$

онда ће формуле трансформације постати:

$$\left.\begin{aligned} & p=\frac{1}{2}y^2-\eta, \qquad q=\frac{\xi}{y}-\frac{1}{2}y^2+xy+\eta, \\ & z=\xi\lg y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}xy^2+\eta(y-x)+\zeta, \\ & \lg y+p'=0, \qquad y-x+q'=0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Према томе једначина (17) добиће облик:

$$e^{-p'}+q'=\frac{1}{\xi}f(\xi), \tag{19}$$

чији се потпуни интеграл изражава овако:

$$\zeta=\psi(\xi, C)+C\eta+C_1,$$

где су C и C_1 две произвољне константе, а функција $\psi(\xi, C)$ се одређује, помоћу произвољне функције $f(\xi)$, на следећи начин:

$$\frac{1}{\xi}f(\xi)-C\equiv e^{-\psi'(\xi, C)},$$

или

$$\psi(\xi, C)\equiv-\int\lg\left[\frac{1}{\xi}f(\xi)-C\right]d\xi.$$

Због тога се општи интеграл једначине (19) изражава као скуп двеју следећих формула:

[5]) *A. R. Forsyth.* — Theory of differentiel equations. Part. IV. Vol. VI. Cambridge 1906, p. 264.

$$\left.\begin{aligned} &\zeta=\psi(\xi,\ C)+C\eta+\varphi(C),\\ &\frac{\partial\psi}{\partial C}+\eta+\varphi'(C)=0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где је φ произвољна функција променљивог параметра C.

Најзад, општи интеграл парцијалне једначине другог реда (16) представља резултат елиминације променљивих количина ξ, η, ζ између три последње од једначина (18) и једначина (20).

Нађени општи интеграл садржи две произвољне функције f и φ и помоћни параметар C.

Наведимо још две једначине за које Г. Н. Piaggio у својој књизи: *An Elementary Treatise on Differential Equations and their Applications* (New Edition London 1929) не даје општи интеграл.

Посматрајмо, прво, једначину (p. 185):

$$rt=(s-1)^2, \tag{21}$$

која има следећи посредни интеграл (p. 186):

$$y-p=f(x-q), \tag{22}$$

где је f произвољна функција.

Ако ставимо

$$x-q=\eta, \tag{23}$$

онда сматрајући за константе η, па чак и x, наћи ћемо интеграл једначине (23) у следећем облику:

$$z=(x-\eta)\,y+\zeta, \tag{24}$$

где је ζ произвољна константа.

Узимајући добијени образац за основну формулу тангенцијалне трансформације, где је ζ нова непозната функција двеју независно променљивих количина, старе x и нове η, имаћемо, сем образаца (23) и (24), још следеће две формуле трансформације:

$$p=y+p', \qquad y=q', \tag{25}$$

где p' и q' означавају нове парцијалне изводе $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$ односно $\dfrac{\partial\zeta}{\partial\eta}$.

Услед ове трансформације посредни интеграл (22) постаће:

$$p'+f(\eta)=0,$$

а њен ће интеграл примити облик:

$$\zeta+f(\eta)\,x=\varphi(\eta), \tag{26}$$

где је φ нова произвољна функција.

Елиминисање нове функције ζ из формула, (24), друге (25) и (26), одређује тражени општи интеграл дате једначине (21) у облику двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned} z=(x-\eta)\,y-f(\eta)\,x+\varphi(\eta), \\ y+f'(\eta)\,x-\varphi'(\eta)=0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где η служи као помоћни параметар.

Добијени интеграл могао би се наћи још и на други начин овако:

Пошто се оба аргумента, $y-p$ и $x-q$ налазе у инволуцији, ставимо:

$$y-p=\xi, \qquad x-q=\eta, \tag{28}$$

а интеграл (22) постаће онда чисто функционална зависност:

$$\xi=f(\eta). \tag{29}$$

Ипак, узмимо потпуни интеграл система једначина (28), где се ξ и η сматрају као константе,

$$z=xy-\xi x-\eta y+\zeta \tag{30}$$

за основну формулу тангенцијалне трансформације с новом функцијом ζ двеју независно променљивих количина ξ и η. Полазећи од формула (29) и (30), а узимајући у обзир услов:

$$d\zeta=p'd\xi+q'd\eta,$$

одмах наћи ћемо пређашњи општи интеграл (27).

Најзад, посредни интеграл (22) је такође подесан и за Лежандрову трансформацију, где се стари извод q узима за нову независно променљиву количину Y, а нова функција Z одређује се обрасцем:

$$Z=z-yq.$$

Онда ће једначина (22) постати линеарна:

$$P+Q=f(Y-x),$$

где су P и Q парцијални изводи Z по x односно Y. Општи интеграл написане једначине гласи:

$$Z=f(Y-x)\,x+\psi(Y-x),$$

где је ψ нова произвољна функција.

Према томе општи интеграл полазне једначине (21) примиће облик:

$$z=Yy+f(Y-x)\,x+\psi(Y-x),$$

$$y+f'(Y-x)\,x+\psi'(Y-x)=0,$$

па се разликује од пређашњег обрасца интеграла (27) само ознаком помоћног параметра Y.

Друга једначина Г. Н. Piaggio (стр. 188):

$$2r+qs+xt-x\,(rt-s^2)=2 \tag{31}$$

има посредни интеграл који ћемо написати овако:

$$qx-2y=f(p-x). \tag{32}$$

Ставимо:

$$p-x=\xi, \tag{33}$$

па узмимо интеграл ове једначине, где је ξ константа:

$$z=\frac{1}{2}\,x^2+\xi x+\zeta, \tag{34}$$

за основну формулу тангенцијалне трансформације с новом функцијом ζ од независно промењивих количина ξ и y.

Онда, сем образаца (33) и (34), добијамо још две формуле трансформације:

$$x=-p',\qquad q=q', \tag{35}$$

где p' и q' значе парцијалне изводе ζ по ξ односно y.

Према томе једначина (32) постаће:

$$p'q'+2y+f(\xi)=0,$$

чији се општи интеграл изражава као скуп двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=-\int\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{C-4\xi}}+y\sqrt{C-4\xi}+\varphi(C),\\&\int\frac{f(\xi)\,d\xi}{2\,(C-4\xi)^{3/2}}+\frac{y}{2\sqrt{C-4\xi}}+\varphi'(C)=0,\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где је φ произвољна функција променљивог параметра C.

Елиминација ζ и ξ из једначина (34), прве (35) и (36) одређује општи интеграл дате једначине (31) у облику трију следећих једначина:

$$z=\frac{1}{2}\,x^2+\,\xi x-\int\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{C-4\xi}}\,y+y\sqrt{C-4\xi}+\varphi(C),$$

$$x=\frac{f(\xi)+2y}{\sqrt{C-4\xi}}\,,$$

$$\int\frac{f(\xi)\,d\xi}{2\,(C-4\xi)^{3/2}}+\frac{y}{2\sqrt{C-4\xi}}+\varphi'(C)=0,$$

где су ξ и C два помоћна параматра.

Глава II

Парцијалне једначине другог реда са два посредна интеграла.

Општи облик посматраних једначина проучавали су Г. Дарбу и С. Ли [6]).

Овај проблем дао је прилику С. Ли да на њега примени своју општу теорију група трансформација, чим је он знатно компликовао решење посматраног задатка. Сем тога, 1924 године, Harendranath Datta [7]) je доказао да метода С. Ли даје довољне услове за решење проблема, који додуше нису потребни.

Међутим се метода, изложена у претходној глави за једначине са једним посредним интегралом, проширује такође на случај двају посредних интеграла. Она има преимућство над Дарбуевом методом бар у томе погледу што тражи операције интегралења чији је ред, са теоријског гледишта, мањи но код Дарбуа. Све док код њега ред интегралења јесте три, у овде посматраној теорији највећи ред интегралења износи јединицу; па чак се понекад ова теорија задовољава и квадратуром.

Најзад изложена метода одређује, помоћу алгебарских

---

[6]) *G. Darboux.* — Théorie des intégrales singulières. Paris. 1880. Quatrième Partie. § 39, p. 216.

S. Lie. — Neue Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichung. Gesammelte Abhandlungen. Bd. III. Erste Abteilung Leipzig, 1922, p. 287.

S. Lie. — Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie. Berichte ü. die Verhandlungen d. k. S. Gesel. d. Wis. zu Leipzig. Math.-Physishe klasse. Bd. 47. Leipzig 1895, p. 494.

A. R. Forsyth. — Theory of dif. equations Bd. VI s. 295.

[7]) On a theorem of S. Lie relating to the intrmediete integrals of partial differential equations of the second order (Calcutta Math. Soc. Bul. 15, 79—82).

елиминација, општи интеграл парцијалних једначина другог реда, чија се оба система карактеристика поклапају.

Посматрајмо Монж-Амперову једначину (1) поменуту у Глави I (стр. 117):

$$Ar+2Bs+Ct+D(rt-s^2)+E=0. \tag{1}$$

Претпоставимо да једначина (1) има два следећа посредна интеграла:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z, p, q)&=\varphi[v(x, y, z, p, q)], \\ u_1(x, y, z, p, q)&=\psi[v(x, y, z, p, q)], \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где су φ и ψ две произвољне функције, које зависе респективно од аргумената v и v_1; а функције u, v, u_1 и v_1 се одређују помоћу Монж-Амперове теорије.

Посматрајући ξ и η као две константе, саставимо две једначине:

$$\left.\begin{aligned} v(x, y, z, p, q)&=\xi, \\ v_1(x, y, z, p, q)&=\eta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Пошто су по Монж-Амперовој теорији обе функције v и v_1 у инволуцији, то систем једначина (3) одређује потпуни интеграл, и то:

$$z=V(x, y, \xi, \eta, \zeta), \tag{4}$$

где су ξ, η и ζ три произвољне константе.

Ако узмемо једнакост (4) за основни образац тангенцијалне трансформације, сматрајући ζ као нову функцију двеју нових независно променљивих количина ξ и η, то ћемо на исти начин, као и у претходној Глави I, према истим формулама, претворити једнакости (2) у систем двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned} w(\xi, \eta, \zeta, p', q')&=\varphi(\xi), \\ w_1(\xi, \eta, \zeta, p', q')&=\psi(\eta), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где w и w_1 значе резултат изведене трансформације u односно u_1.

Пошто се према Монж-Амперовој теорији, обе једначине (2) налазе у инволуцији, то према законима тангенцијалних трансформација, претворене једначине (5), задовољавају услове инволуције.

Решимо једначине (5) по p' и q', па интегралимо одговарајућу једначину у тоталним диференцијалима, при чему можемо слободно изоставити произвољну константу, која би морала улазити због извршеног интеграљења.

А то је због тога, што у добијени интеграл већ улазе две произвољне функције φ и ψ.

Обрнута трансформација нових промењљивих у пређашње — старе претвара добијени интеграл у тражени општи интеграл дате полазне парцијалне једначине (1).

Најзад, треба приметити, да према облику једначина (3), основна формула тангенцијалних трансформација може се такође одредити помоћу две једначине, уместо једне једначине (4).

За први пример узмимо једначину

$$x^2r-y^2t=0,$$

на коју Г. Е. Goursat примењује Амперову трансформацију (*Leçons sur l'intégration des éq. aux d. p. du second ordre.* T. I. p. 137), полазећи од два посредна интеграла:

$$p-\frac{y}{x}\,q=f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z-xp-yq=\varphi(xy).$$

Међутим, довољно је решити обе ове једначине односно p и q; после чега интеграљењем одговарајуће једначине у тоталним диференцијалима:

$$dz=\left[z+xf\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi(xy)\right]\frac{dx}{2x}+\left[z-xf\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi(xy)\right]\frac{dy}{2y},$$

одмах добијамо тражени општи интеграл дате једначине у облику:

$$z=xF\left(\frac{y}{x}\right)+\Phi(xy),$$

где су F и Φ две произвољне функције, које се изражавају помоћу f и φ овако:

$$F\left(\frac{y}{x}\right)\equiv-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\int\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi(xy) \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{xy}\int\frac{\varphi(xy)\,d(xy)}{(xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Као други пример уочимо добро познату једначину механичке теорије топлоте:

$$rt-s^2+a^2=0, \tag{6}$$

са сталним коефицијентом a, која обично служи за демонстрацију примене Монж-Амперовој методи [8]).

Посматрана једначина (6) има два посредна интеграла:

$$\left.\begin{aligned} q+ax&=f(p-ay),\\ p+ay&=\varphi(q-ax), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где су f и φ произвољне функције.

Ако сад ставимо:

$$p-ay=\xi, \qquad q-ax=\eta, \tag{8}$$

онда помоћу интегралења овог система двеју једначина (8), под претпоставком да су ξ и η сталне количине, добијамо њихов потпуни интеграл:

$$z=axy+\xi x+\eta y+\zeta, \tag{9}$$

где је ζ трећа произвољна константа.

Узмимо сад за основну формулу тангенцијалних трансформација образац (9) сматрајући ζ као нову непознату функцију од две независно променљиве количине ξ и η.

Затим осим трију образаца (8) и (9) саставимо још две недостајуће једначине:

$$x+p'=0, \qquad y+q'=0. \tag{10}$$

Због тога се интеграли (7) претварају у једначине:

$$2ap'=\eta-f(\xi),$$
$$2aq'=\xi-\varphi(\eta),$$

[8]) *E. Goursat.* — Leçons sur l'intégration des éq. aux d. p. du 2 ordre. Paris A. Hermann 1896, t. I. p. 154 n⁰ 72.

G. Darboux. — Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III, Paris. Gauthier-Villars 1894, p. 273 n⁰ 716.

чији потпуни интеграл гласи:

$$\zeta=\frac{1}{2a}\,[\xi\eta-F(\xi)-\Phi(\eta)] \tag{11}$$

и где се може произвољна константа изоставити, услед две произвољне функције F и Φ, које већ фигуришу у обрасцу па се изражавају помоћу f и φ овако:

$$F(\xi)\equiv\int f(\xi)\,d\xi, \qquad \Phi(\eta)\equiv\int\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Сменом нађеног обрасца (11) у формулама (9) и (10) налазимо тражени општи интеграл једначине (6) у облику три следеће једначине:

$$z=axy+\frac{1}{2a}\,[F'(\xi)\,.\,\Phi'(\eta)-F(\xi)-\Phi(\eta)],$$

$$2ax+\eta=F'(\xi), \qquad 2ay+\xi=\Phi'(\eta),$$

где ξ и η играју улогу помоћних параметара.

Уместо облика (7) двају посредних интеграла, они се могу написати такође и овако:

$$\left.\begin{aligned} p+ay&=\varphi(q-ax),\\ p-ay&=\psi(q+ax),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где су φ и ψ две произвољне функције.

Ставимо сад

$$q-ax=\xi, \qquad q+ax=\eta, \tag{13}$$

па помоћу елиминације q у једначинама (13) добијамо функционалну везу:

$$x=\frac{1}{2a}\,(\eta-\xi). \tag{14}$$

Интегралимо сад прву једначину (13) као једну обичну диференцијалну једначину, где је $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, а ξ па чак се и x сматрају као сталне количине. Добићемо:

$$z=(ax+\xi)\,y+\zeta, \tag{15}$$

где је ζ произвољна константа.

Узмимо затим једначине (14) и (15) за две основне формуле тангенцијалних трансформација.

Онда поред трију формула трансформација, прве (13), (14) и (15), добијамо још две следеће:

$$p+ay=-2ap', \qquad p-ay=2aq'. \tag{16}$$

Због тога претворени интеграли (12) постају:

$$2ap'=-\varphi(\xi), \qquad 2aq'=\psi(\eta).$$

Потпуни интеграл ове две једначине гласи:

$$\zeta=\frac{1}{2a}\,[\Psi(\eta)-\Phi(\xi)],$$

где су уведене ознаке:

$$\Psi(\eta)\equiv\int\psi(\eta)\;d\eta, \qquad \Phi(\xi)\equiv\int\varphi(\xi)\;d\xi.$$

Према томе, сменом нађене вредности ζ у обрасце (15) и (16) налазимо, помоћу елиминисања количине p на основу формуле (14), тражени општи интеграл једначине (6) у облику трију једначина:

$$\left.\begin{aligned} z&=(ax+\xi)\,y+\frac{1}{2a}\,[\Psi(\eta)-\Phi(\xi)],\\ 2ay&=\Phi'(\xi)-\Psi'(\eta), \qquad 2ax=\eta-\xi, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где ξ и η играју улогу помоћних параметара.

Најзад, интеграли (12), помоћу Лежандрове трансформације, могу се још друкчије претворити. За то би само требало уместо промењљиве q узети за нову независну промењљиву количину Y; онда ће се мора сматрати y као нови извод $-Q$ од нове уведене функције Z, која се одређује формулом:

$$Z=z-yq.$$

Тада једначине (12) постају:

$$P-aQ=\varphi(Y-ax),$$

$$P+aQ=\psi(Y+ax),$$

где P означава парцијални извод првог реда од нове функције Z по старој независно промењљивој количини x.

Одавде се, помоћу квадратуре, одређује вредност нове непознате функције у облику:

$$Z=\frac{1}{2a}\left[\Psi(Y+ax)-\Phi(Y-ax)\right],$$

где су уведене ознаке:

$$\Psi(Y+ax)\equiv\int\psi(Y+ax)\,d\,(Y+ax),$$

$$\Phi(Y+ax)\equiv\int\varphi(Y-ax)\,d\,(Y-ax).$$

Према томе се тражени општи интеграл дате једначине (6) изражава помоћу скупа двеју једначина:

$$z=y\,Y+\frac{1}{2a}\left[\Psi(Y+ax)-\Phi(Y-ax)\right],$$

$$2ay=\Phi'(Y-ax)-\Psi'(Y+ax),$$

где су Φ и Ψ две произвољне функције.

Лако је приметити да се интеграл (17) може свести само на две једначине, ако елиминишемо једну од количина ξ или η, између две прве једначине (17), помоћу треће једначине (17).

Као трећи пример, уочимо парцијалну једначину:

$$qr+(x+p)\,s+yt+y\,(rt-s^2)+q=0, \tag{18}$$

којом се детално бавио В. Г. Имшенецки [9]) и која има два следећа посредна интеграла:

$$\left.\begin{aligned}x\,(x+p)-yq&=f\,(x+p),\\ \frac{x+p}{y}&=\varphi(yq).\end{aligned}\right| \tag{19}$$

Ако сад ставимо:

[9]) *V. G. Imschenetsky.* — Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. Traduit du russe par J. Houel. Paris. Greisswald 1872, p. 122 n⁰ 125.

$$x+p=\xi, \qquad yq=\eta,$$

онда одавде потиче основна формула тангенцијалних трансформација

$$z=\xi x-\frac{1}{2}x^2+\eta \lg y+\zeta,$$

а поред обрасца (8), имаћемо две следеће недостајуће формуле:

$$x+p'=0, \qquad \lg y+q'=0.$$

Претворене једначине (19) постаће:

$$\xi p'+\eta+f(\xi)=0, \qquad q'=\lg\frac{\varphi(\eta)}{\xi}.$$

Према томе добићемо, помоћу једне квадратуре, да је

$$\zeta=-\eta\lg\xi-F(\xi)+\Phi(\eta),$$

где су уведене ознаке:

$$F(\xi)\equiv\int\frac{f(\xi)}{\xi}d\eta, \qquad \Phi(\eta)\equiv\int\lg\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Онда се тражени општи интеграл дате једначине (18) изражава скупом трију једначина, наиме:

$$z=\xi x-\frac{x^2}{2}+\eta\lg\frac{y}{\xi}-F(\xi)+\Phi(\eta),$$

$$\xi x=\eta+\xi F'(\xi), \qquad \xi=ye^{\Phi'(\eta)},$$

где ξ и η играју улогу променљивих параметара, а F и Φ јесу две произвољне функције.

Узмимо сад Монж-Амперову једначину (1) чије су *коефицијенти* A, B, C, D, E *сталне количине.*

Посматрана једначина има два различита посредна интеграла, и то:

$$\left.\begin{aligned} p+\frac{C}{D}x-\frac{\mu_2}{D}y&=\varphi\left(q-\frac{\mu_1}{D}x-\frac{A}{D}y\right),\\ q-\frac{\mu_2}{D}x+\frac{A}{D}y&=\psi\left(p+\frac{C}{D}x-\frac{\mu_1}{D}y\right),\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где φ и ψ означавају две произвољне функције, а су различите вредности обају корена μ_1 и μ_2 квадратне једначине

$$u^2-2Bu+AC-ED=0,$$

на име:

$$\mu_1=B\pm\sqrt{G},\quad \mu_2=B\mp\sqrt{G},$$

$$G\equiv B^2+DE-AC\gtrless 0.$$

Ако ставимо:

$$q-\frac{\mu_1}{D}x+\frac{A}{D}y=\xi,\quad p+\frac{C}{D}x-\frac{\mu_1}{D}y=\eta, \tag{22}$$

онда ће основна формула тангенцијалних трансформација добити облик:

$$z=\eta x+\xi y-\frac{1}{2D}(Cx^2+Ay^2)+\frac{\mu_1}{D}xy+\zeta. \tag{23}$$

Према томе, поред обрасца (22), два друга обрасца трансформације постаће:

$$y+p'=0,\qquad x+q'=0. \tag{24}$$

Претворене једначине (23) по обрасцима (22), (23) и (24), постаће:

$$\eta\mp\frac{2\sqrt{G}}{D}p'=\varphi(\xi),\qquad \xi\mp\frac{2\sqrt{G}}{D}q'=\psi(\eta).$$

Одавде ћемо помоћу квадратуре добити:

$$\zeta=\pm\frac{D}{2\sqrt{G}}[\xi\eta-\Phi(\xi)-\Psi(\eta)],$$

где су уведене ознаке:

$$\Phi(\xi)\equiv\int\varphi(\xi)\,d\xi,\qquad \Psi(\eta)\equiv\int\psi(\eta)\,d\eta.$$

Због тога тражени општи интеграл посматране једначине (1), са сталним коефицијентима, претставља резултат избацивања помоћних параметара ξ и η из скупа трију једначина:

$$z=\eta x+\xi y-\frac{1}{2D}(Cx^2+Ay^2)+\frac{\mu_1}{D}xy+$$

$$\pm\frac{D}{2\sqrt{G}}[\xi\eta-\Phi(\xi)-\Psi(\eta)],$$

$$x\pm\frac{D}{2\sqrt{G}}[\xi-\Psi'(\eta)]=0, \qquad y\pm\frac{D}{2\sqrt{G}}[\eta-\Phi'(\xi)]=0.$$

Бул [10]) је интегралио посматрану једначину на један леп вештачки начин, наиме, он је искористио партикуларни облик аргумената интеграла (21).

Тако је исто и Лакроа [11]) вештачки интегралио једначину

$$(1+pq+q^2)\,r+(q^2-p^2)\,s-(1+pq+p^2)\,t=0,$$

са два посредна интеграла:

$$y+x+(p+q)\,z=\varphi(p+q),$$

$$x-y=\psi\left[\frac{p-q}{\sqrt{2+(p+q)^2}}\right].$$

Међутим изложена теорија лако се примењује такође и на ову једначину, кад се стави:

$$p+q=\xi, \qquad p-q=\eta\sqrt{2+(p+q)^2}.$$

Најзад, уочимо С. Ли-еву једначину:

$$rt-s^2+\left(\frac{z-px-qy+pq}{z-xy}\right)^2=0 \tag{25}$$

за два посредна интеграла, наиме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y(z-px-qy)+pz}{x-q}&=\varphi\left(\frac{z-qy}{x-q}\right),\\ \frac{x(z-px-qy)+qz}{y-p}&=\psi\left(\frac{z-px}{y-p}\right).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где су φ и ψ две произвољне функције.

Наведени интеграли имају специјалан облик којим се

[10]) G. *Boole* — Treatise on Differential Equations. Supplementary Volume. Cambridge and London. 1865 p. 164.

[11]) *Lacroix* — Traité d'Analyse. t. II seconde édition p. 586, n⁰ 755.

бавио С. Ли у своме раду: *Beiträge zur allgemeinen Transformationsthéorie* [12]). Али овде изложена теорија може се применити и на ове једначине, независно од Ли-еве теорије група трансформација.

Ако ставимо

$$\frac{z-yq}{x-q}=\xi, \quad \frac{z-xp}{y-p}=\eta, \tag{27}$$

онда се једначине (26) напишу на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned} y\xi+\frac{p(z-xy)}{x-q}&=\varphi(\xi), \\ x\eta+\frac{q(z-xy)}{y-p}&=\psi(\eta). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

С друге стране, интегралењем система једначина (27) налазимо, помоћу једне једначине у тоталним диференцијалама, основну формулу трансформације:

$$z=x\xi+\eta\,(y-\xi)+(x-\eta)\,(\xi-y)\,\zeta. \tag{29}$$

Према томе две недостајуће формуле тангенцијалне трансформације постаће:

$$1+\zeta+(\xi-y)\,p'=0, \qquad 1+\zeta+(\eta-x)\,q'=0. \tag{30}$$

Да би смо изразили старе променљиве количине помоћу нових, одредимо из обрасца (30) вредности x и y:

$$x=\eta+\frac{1+\zeta}{q'}, \quad y=\xi+\frac{1+\zeta}{p'}. \tag{31}$$

Према томе образац (29) даје:

$$z=\xi\eta+\left(\frac{\xi}{q'}+\frac{\eta}{p'}\right)(1+\zeta)-\frac{(1+\zeta)^2\,\zeta}{p'q'}. \tag{32}$$

Најзад, одавде налазимо следеће вредности:

[12]) Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Geselschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematische-Physische Classe Bd. 47. 1895, p. 494.

$$\left.\begin{aligned} z-y\eta &= \frac{(q+\zeta)}{q'}\left[\xi - \frac{(1+\zeta)\,\zeta}{p'}\right], \\ z-x\xi &= \frac{1+\zeta}{p'}\left[\eta - \frac{(1+\zeta)\,\zeta}{q'}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Због тога се из формула (27) добијају вредности:

$$p = \frac{z-y\eta}{x-\eta}, \qquad q = \frac{z-x\xi}{y-\xi},$$

или, услед (31) и (33), имаћемо:

$$p = \xi - \frac{(1+\zeta)\,\zeta}{p'}, \quad q = \eta - \frac{(1+\zeta)\,\zeta}{q'}. \tag{34}$$

Саставимо још изразе, који улазе у једначине (28), наиме:

$$z-xy = -\frac{(1+\zeta)^3}{p'q'},$$

$$x-q = \frac{(1+\zeta)^2}{q'},$$

$$y-p = \frac{(1+\zeta)^2}{p'}.$$

Сад је лако заменом нађених вредности претворити посредне интеграле (28) у следећи облик:

$$\frac{p'}{(1+\zeta)\sqrt{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)-\xi^2}},$$

$$\frac{q'}{(1+\zeta)\sqrt{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\psi(\eta)-\eta^2}}.$$

Одавде се помоћу квадратуре добија интеграл последњег система:

$$\int\frac{d\zeta}{(1+\zeta)\sqrt{\zeta}} = \int\frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-\xi^2}} + \int\frac{d\eta}{\sqrt{\psi(\eta)-\eta^2}}. \tag{35}$$

Према томе обрасци (31) постају:

$$x = \eta + \frac{\sqrt{\psi(\eta)-\eta^2}}{\sqrt{\zeta}}, \quad y = \xi + \frac{\sqrt{\varphi(\xi)-\xi^2}}{\sqrt{\zeta}}; \tag{36}$$

и резултат избацивања помоћних количина ξ, η и ζ из четири једначине (29), (35) и (36) одређује тражени општи интеграл Ли-еве једначине (25).

За последњи пример узмимо проблем Јоахимштал-евих површина, чија парцијална једначина другог реда има два посредна интеграла [13]):

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+(xp+yq)^2&=\varphi(z-xp-yq), \\ \frac{yp-xq}{y\sqrt{1+p^2+q^2}}&=\psi\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где φ и ψ означавају две произвољне функције.

Ставимо сад:

$$z-xp-yq=\xi. \quad \frac{y}{x}=\eta. \tag{38}$$

У овоме случају довољно је наћи само једно партикуларно решење прве једначине (38) са једном произвољном константом, посматрајући ξ исто као константу, наиме:

$$z=\zeta x+\xi, \tag{39}$$

где је ζ нова произвољна константа.

Узимајући други образац (38) и образац (39) за две основне формуле тангенцијалне трансформације, посматрајући у њима ζ као непознату функцију независно променљивих количина ξ и η, саставимо недостајуће три формуле [14]):

$$\zeta=p+\eta q, \quad p'=-\frac{1}{x}, \quad q'=q.$$

Оба интеграла (37) добивају одмах у новим променљивим количинама, следећи облик:

$$p'=\theta(\xi)\,.\,R, \quad q'=\frac{\eta\zeta}{1+\eta^2}+\Phi(\eta)\,.\,R, \tag{40}$$

где су уведене ознаке:

---

[13]) *E. Goursat* — Leçons sur l'intégration des éq. aux der. part. du p. ordre, t. 1. Paris A. Hermann 1896, p. 124, n⁰ 60.

[14]) *N. Saltykow* — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris Gauthier-Villars 1925, Chap. XI, p. 149.

$$\theta(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)}}, \qquad R \equiv \pm \sqrt{1+\eta^2+\zeta^2},$$

$$\Phi(\eta) \equiv \frac{\eta\psi(\eta)}{(1+\eta^2)\sqrt{1+\eta^2+[\psi(\eta)]^2}}.$$

Интегралење једначине у тоталним диференцијалима, која одговара обрасцима (40), одмах се своди на једну квадратуру, и одређује тражене површине формулом:

$$\zeta + R = \theta_1(\xi)\,.\,\Phi_1(\eta), \tag{41}$$

где θ_1 и Φ_1 означавају произвољне функције од ξ односно η, које се изражавају помоћу пређашњих функција овако:

$$\theta_1 \equiv e^{\int \theta(\xi) d\xi}, \qquad \Phi_1(\eta) \equiv \sqrt{1+\eta^2}\, e^{\int \Phi(\eta) d\eta}.$$

Ако уврстимо у интеграл (41) старе променљиве количине, то ће се тражене површине одређивати помоћу две следеће једначине:

$$z = \left(\theta_1 \Phi_1 - \frac{1+\eta^2}{\theta_1 \Phi_1}\right) x + \xi,$$

$$x = -\frac{\theta_1{}^2 \Phi_1}{\theta_1'(1+\eta^2+\theta_1{}^2\Phi_1{}^2)},$$

где ξ игра улогу једног помоћног параметра, а η означава количник $\frac{y}{x}$.

Најзад, завршавајући испитивање проблема интегралења једначина са два посредна интеграла, посматрајмо још случај, кад ови интеграли имају облик:

$$u = f(w), \qquad v = \varphi(w), \tag{42}$$

где су f и φ две произвољне функције, а аргументи u, v и w зависе од свију променљивих количина x, y, z, p и q.

Из оваквих посредних интеграла (42) општи интеграл полазне једначине (1) добија се на најпростији начин само помоћу алгебарских трансформација.

Заиста, како је то добро познато, посредни интеграли у облику (42) постоју за парцијалне једначине другог реда

(1), чија се оба система карактеристика поклапају. Према томе се функције u, v и w налазе по две у инволуцији.

Ставимо сад једначине:

$$w=\xi, \quad u=\eta, \quad v=\zeta, \tag{43}$$

па ћемо посматрати ζ као нову непознату функцију двеју нових независно промењљивих количина ξ и η.

Елиминација p и q између једначина (43) одређује основну формулу тангенцијалне трансформације

$$V(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0, \tag{44}$$

па, поред ове формуле и две (макоје) формуле од (43), две недостајуће јесу:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \zeta} p'=0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{\partial V}{\partial \zeta} q'=0. \tag{45}$$

Сад претворене једначине (42) постају:

$$\eta=f(\xi), \qquad \zeta=\varphi(\xi). \tag{46}$$

Ипак, да би смо нашли тражени потпуни интеграл дате једначине (1), морали би још, у том случају, задовољити услов:

$$d\zeta=p'd\xi+q'd\eta,$$

који услед формула (46), даје једначину:

$$\varphi'(\xi)=p'+q'f'(\xi). \tag{47}$$

На основу образаца (45), добивена једнакост (47) постаће:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \eta} f'(\xi)+\frac{\partial V}{\partial \zeta} \varphi'(\xi)=0. \tag{48}$$

Према томе резултат елиминације нових промењљивих количина ξ, η и ζ из образаца (44), (46) и (48) одређује тражени општи интеграл дате једначине (1). Овај се интеграл пише помоћу две следеће добро познате једначине:

$$\left.\begin{aligned} &V[x, y, z, \xi, f(\xi), \varphi(\xi)]=0, \\ &\frac{\partial V}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial f} f'(\xi)+\frac{\partial V}{\partial \varphi} \varphi'(\xi)=0, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где је ξ један помоћни параметар.

Уочимо, например, једначину

$$rt=\left(s-\frac{p-q}{y-x}\right)^2, \tag{50}$$

која има два следећа посредна интеграла:

$$\frac{yq-xp}{y-x}=f\left(\frac{p-q}{y-x}\right), \qquad z+\frac{x^2p-y^2q}{y-x}=\varphi\left(\frac{p-q}{y-x}\right), \tag{51}$$

где су f и φ две произвољне функције.

Ставимо:

$$\frac{p-q}{y-x}=\xi, \qquad \frac{yq-xp}{y-x}=\eta, \qquad z+\frac{x^2p-y^2q}{y-x}=\zeta. \tag{52}$$

Резултат елиминације p и q из трију последних једначина (52) јесте:

$$z=\xi xy+(x+y)\,\eta+\zeta.$$

Према томе добијамо општи интеграл једначине (50), помоћу формула (49), у облику двеју једначина:

$$z=\xi xy+(x+y)\,f(\xi)+\varphi(\xi),$$

$$xy+(x+y)\,f'(\xi)+\varphi'(\xi)=0,$$

где ξ игра улогу помоћног параметра.

Вратимо се сад једначини Г. Н. Piaggio која се налази у Глави I овог рада, под бројем (21):

$$rt=(s-1)^2. \tag{53}$$

Сем горе наведеног посредног интеграла (22), наиме:

$$y-p=f(x-q), \tag{54}$$

посматрана једначина (53) има још и други посредни интеграл који гласи:

$$z-xp-yq+xy=\varphi(x-q), \tag{55}$$

где је φ произвољна функција.

Према томе општи интеграл једначине (53) добија се такође, на други начин, помоћу чисто алгебарских операција елиминисања које су тек горе објашњене.

Заиста, ако ставимо:

$$\left.\begin{aligned} y-p&=\xi, \quad x-q=\eta, \\ z\quad xp-yq+xy&=\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

онда ће посредни интеграли (54) и (55) постати чисто алгебарске једначине:

$$\xi=f(\eta), \quad \zeta=\varphi(\eta).$$

Најзад резултат елиминације промењивих количина p и q из једначина (56) одређује функционалну зависност:

$$z=(x-\eta)\, y-\xi x+\zeta.$$

Одавде излази, према горе указаним обрасцима (49), општи интеграл посматране једначине (53) у пређашњем горе изведеном облику као скуп двеју једначина (Глава I, формуле (27)), наиме:

$$z=(x-\eta)\, y-xf(\eta)+\varphi(\eta),$$

$$y+xf'(\eta)-\varphi'(\eta)=0.$$

Глава III

Интегралење парцијалних једначина првог реда.

По себи се разуме, да се наведене методе интегралења у I-ој и II-ој Глави, могу увек применити такође на сваку једначину, која не садржи произвољне функције, ако би посматрана трансформација била погодна за интегралење претворене једначине.

Уочимо, например, Монж-еву једначину са сталним коефицијентом a:

$$(ap-q)^2+ax\,(ap+q)+a^2z=0, \tag{1}$$

која има један очигледан интеграл карактеристика:

$$\frac{ap+q}{q^2}=C, \tag{2}$$

где је C произвољна константа.

Заједничко решење двеју једначина (1) и (2) по p и q доводи до једне алгебарске једначине четвртог степена. Да би смо избегли њено решавање, можемо најпре трансформисати дату једначину (1) полазећи од формула:

$$ap-q=\xi, \qquad ap+q=\eta, \tag{3}$$

где су ξ и η две константе.

По овој се претпоставци обе једначине (3) налазе у инволуцији, па имају потпуни интеграл:

$$2az=\xi\,(x-ay)+\eta\,(x+ay)+\zeta, \tag{4}$$

где је ζ произвољна константа.

Узимајући сад образац (4) за основну формулу тангенцијалних трансформација, имамо поред образаца (3) и (4) још два следећа:

$$x-ay=-2ap', \quad x+ay=-2aq' \tag{5}$$

Према томе добијају се формуле, које изражавају вредности старих промењљивих количина помоћу нових:

$$p=\frac{1}{2a}(\xi+\eta), \quad q=\frac{1}{2}(\eta-\xi),$$

$$x=-a(p'+q'), \quad y=p'-q',$$

$$z=-\xi p'-\eta q'+\zeta.$$

Због тога дата једначина (1) постаје линеарна:

$$a^2(\xi+\eta)\,p'+2a^2\eta q'=\xi^2+a^2\zeta,$$

чији потпуни интеграл гласи:

$$\zeta=\frac{1}{3a^2}\,\frac{\xi^3}{\eta}+C'(\xi-\eta)+C''\sqrt{\eta}, \tag{6}$$

где су C' и C'' две произвољне константе.

Заменом вредности (6) функције ζ и њених извода p' q' у обрасце (4) и (5) добијамо потпуни интеграл полазне еднaчине (1) у облику трију једначина:

$$z=\frac{1}{2a}\left[\xi\,(x-ay+C')+\eta\,(x+ay-C')\right]+\frac{1}{3a^2}\,\frac{\xi^3}{\eta}+C''\sqrt{\eta}, \tag{7}$$

$$x-ay+C'=-\frac{2\xi^2}{a\eta}, \tag{8}$$

$$x+ay-C'=\frac{2\xi^3}{3a\eta^2}-\frac{aC''}{\sqrt{\eta}}, \tag{9}$$

где ξ и η играју улогу помоћних параметара.

Да би смо извршили њихову елиминацију, написаћемо једначине (8) и (9) у следећем облику:

$$\frac{\xi^2}{\eta}=m, \quad \frac{\xi^3}{\eta^2}=\frac{k}{\sqrt{\eta}}+n,$$

где су уведене ознаке:

$$m \equiv \frac{a}{2}(ay - x - C_1), \quad k \equiv \frac{3a^2C''}{2},$$

$$n \equiv \frac{3a}{2}(ay + x - C_1), \quad C_1 \equiv 2aC',$$

Одавде добијамо:

$$\sqrt{\eta} = \frac{m^{3/2} - k}{n}, \quad \xi = \frac{m^{1/2}(m^{3/2} - k)}{n}.$$

Према томе елиминација нађених вредности ξ и η из формуле (7) даје тражени интеграл у облику само једне једначине, наиме:

$$z = -\frac{[(ay - x - C_1)^{3/2} - C_2]^2}{36\,(ay + x - C_1)},$$

где је

$$C_2 \equiv 3\sqrt{2}aC''.$$

Може се још друкчије интегралити једначина (1), полазећи од потпуног интеграла једначине (2):

$$z = \frac{(C\alpha - 1)\,\alpha x}{a} + \alpha y + \beta,$$

где су α и β две произвољне константе.

Сматрајући β као функцију од α, узмимо овај интеграл за основну формулу *сужених тангенцијалних трансформација*. Тада се једначина (1) претвара у једну обичну диференцијалну једначину, која ће постати:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{(C\alpha - 2)^2}{a^2}.$$

Општи интеграл ове једначине гласи:

$$\beta = \frac{(C\alpha - 2)^3\,\alpha}{3a^2C} + C_1\alpha,$$

где је C_1 нова произвољна константа.

Према томе добијамо, помоћу обрнуте трансформације променљивих количина, потпуни интеграл Монже-ове једначине (1) у облику двеју једначина:

$$z = -\frac{\alpha^2}{a^2}\,[Ca x + (C\alpha - 2)^2],$$

$$ay - x + aC_1 = -2C\alpha x - \frac{2}{3Ca}\,(C\alpha - 2)^2\,(2C\alpha - 1),$$

где је α помоћни параметар.

Прелазимо сад на Шлефли-еву једначину [15])

$$a_1(x_2p_3 - x_3p_2)^2 + a_2\,(x_3p_1 - x_1p_3)^2 + a_3\,(x_1p_2 - x_2p_1)^2 = 1, \quad (10)$$

са три независно променљивим количинама x_1, x_2 и x_3, где p_1, p_2 и p_3 означавају парцијалне изводе непознате функције z по независно променљивим количинама x_1 односно x_2 и x_3, а a_1, a_2 и a_3 означавају три стална коефицијента.

Диференцијалне једначине карактеристика дате једначине (10) имају потпуну функционалну групу интеграла, па према томе ова се једначина интеграли помоћу једне квадратуре [16]). Али извршење ове квадратуре задаје велике тешкоће, због решавања алгебарских једначина. Шлефли је интегралио своју једначину помоћу општег интеграла карактеристика, али на основу компликованих трансформација.

Сад ћемо показати да се проблем интегралења може много олакшати помоћу увођења *сужених тангенцијалних трансформација*. За то је довољно узети само један од интеграла карактеристика, например:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = C_1, \quad (11)$$

где је C_1 произвољна константа.

Узмимо потпуни интеграл ове једначине

$$z = \xi x_1 + \eta x_2 + \sqrt{C_1 - \xi^2 - \eta^2}\,.\,x_3 + \zeta, \quad (12)$$

где су ξ, η и ζ три произвољне константе, за основну формулу тангенцијалних трансформација, под претпоставком да

[15]) Annali di Matematica pura ed applicata. Ser. 2 t. II, pp. 89—96.
Mansion — Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Herausgegeben V. H. Maser. Berlin. 1892, p. 94.

[16]) *N. Saltykow* — Etude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris Gauthier-Villars 1935, p. 25.
N. Saltykow — Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Paris. Gauthier-Villars 1935. Chapitre I.

је ζ нова функција само од две независно променљиве количине ξ и η (уместо старе три x_1, x_2 и x_5) [17]).

Онда, сем формуле (12), имаћемо још пет формула, и то:

$$p_1=\xi, \quad p_2=\eta, \quad p_3=\sqrt{C_1-\xi^2-\eta^2}$$

$$x_1=\frac{\xi x_3}{\sqrt{C_1-\xi^2-\eta^2}}+p'=0, \quad x_2-\frac{\eta x_3}{\sqrt{C_1-\xi^2-\eta^2}}+q'=0. \qquad (13)$$

Што се тиче претворене једначине (10), она ће постати:

$$(C_1-\xi^2-\eta^2)\,(a_2p'^2+a_1q'^2)+a_3\,(\xi q'-\eta p')^2=1, \qquad (14)$$

где p' и q' значе парцијалне изводе првог реда нове непознате функције ζ по ξ односно η.

Лако се види одмах да је згодно сад извршити још другу тангенцијалну трансформацију на следећи начин.

Ставимо:

$$p'=r\cos\theta, \quad q'=r\sin\theta. \qquad (15)$$

Посматрајући r и θ као сталне количине, добијамо помоћу квадратуре:

$$\zeta=r\,(\xi\cos\theta+\eta\sin\theta)+U, \qquad (16)$$

где U означава произвољну константу.

Сматрајмо сад U као нову непознату функцију двеју нових независно променљивих r и θ; па узмимо једнакост (16) за основну формулу тангенцијалних трансформација, које се одређују помоћу образаца (15), (16) па још два недостајућа:

$$\xi\cos\theta+\eta\sin\theta=-\frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\xi\sin\theta-\eta\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

Одавде налазимо вредности старих променљивих количина:

[17]) *N. Saltykow* — Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris. Gauthier-Villars 1925. Chapitre XII, p. 163.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} - \cos\theta\,\frac{\partial U}{\partial r},\\ -\eta &= \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Према томе једначина (14) постаће:

$$r^2k(\theta)\left[C_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\right] + [a_3 - k(\theta)]\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)^2 = 1,$$

где је уведена ознака:

$$k(\theta) \equiv a_1\sin^2\theta + a_2\cos^2\theta.$$

Добијена једначина раздваја променљиве количине. Због тога, ако ставимо сад:

$$r^2\left[C_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\right] = C_2, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{1 - C_2k(\theta)}{a_3 - k(\theta)},$$

где је C_2 произвољна константа, онда се функција U одређује квадратуром:

$$U = \int\sqrt{C_1 - \frac{C_2}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{\frac{m - C_2\sin^2\theta}{n - \sin^2\theta}}\,d\theta + C_3,\tag{18}$$

где коефицијенти m и n имају вредности

$$m \equiv \frac{1 - a_2C_2}{a_1 - a_2}, \qquad n \equiv \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2},$$

а C_3 је трећа произвољна константа.

Али је лако, користећи се формулама (13), (15) и (16), одмах извршити елиминацију количина ξ, η, ζ p' и q', па изразити тражени интеграл Шлефли-еве једначине (10) са три формуле.

Ради тога означимо вредност функције U одређене обрасцем (18) овако:

$$U = V(r, \theta, C_1, C_2) + C_3.\tag{19}$$

Да бисмо се вратили полазним променљивим количинама, треба сад елиминисати из образаца (19), (17), (16), (13) и (12) помоћне променљиве количине U, r, θ, ξ, η и ζ, при чему морамо да се служимо и формулама (15).

Резултат елиминације количина U, ζ, ξ, η, p' и q' даје три следеће једнакости:

$$z=[x_1^2+x_2^2+x_3^2+2r(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)+r^2]\frac{R}{x_3}+V(r,\theta,C_1,C_2)+C_3,$$

$$x_1+r\cos\theta=\frac{x_3}{R}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

$$x_2+r\sin\theta=-\frac{x_3}{R}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

где је R има следећу ознаку:

$$R\equiv\sqrt{C_1^2-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2}.$$

Добијене три једначине одређују тражени потпуни интеграл једначине (10), под претпоставком да су r и θ два помоћна параметра.
