

UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Slobodanka S. Boljanović

**NUMERIČKO MODELIRANJE PREOSTALE
ČVRSTOĆE STRUKTURALNIH ELEMENATA
U PRISUSTVU PRSLINE PRI CIKLIČNIM
OPTEREĆENJIMA**

doktorska disertacija

Beograd, 2012.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Слободанка С. Бољановић

**НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ПРЕОСТАЛЕ
ЧВРСТОЋЕ СТРУКТУРАЛНИХ ЕЛЕМЕНАТА
У ПРИСУСТВУ ПРСЛИНЕ ПРИ
ЦИКЛИЧНИМ ОПТЕРЕЋЕЊИМА**

докторска дисертација

Београд, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Slobodanka S. Boljanović

**NUMERICAL MODELING OF RESIDUAL
STRENGTH OF CRACKED STRUKTURAL
ELEMENTS UNDER CYCLIC LOADINGS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012.

Mentor: Prof. dr Boško Jovanović,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije: Prof. dr Desanka Radunović,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Prof. dr Stevan Maksimović,
Vojno-Tehnički Institut, Beograd

Prof. dr Vojkan Lučanin,
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Prof. dr Dubravka Mijuca
Univerzitet UNION – Nikola Tesla, Beograd

Datum odbrane: . X 2012. godine

Mami Dragici i tati Slobodanu

NUMERIČKO MODELIRANJE PREOSTALE ČVRSTOĆE STRUKTURALNIH ELEMENATA U PRISUSTVU PRSLINE PRI CIKLIČNIM OPTEREĆENJIMA

U toku eksploatacije na strukturalne elemente dejstvuju radna opterećenja koja su najčešće cikličnog karaktera. Kontinuirano dejstvo cikličnih opterećenja dovodi do složenog procesa koji se naziva zamor. Pošto ciklična priroda opterećenja ne može biti eliminisana, a može dovesti čak do loma komponenti, vrlo je značajno da se sa posebnom pažnjom istražuje proces kao što je zamor. Ukoliko se izučava kompletan proces zamora do pojave loma neophodno je razmatrati obe faze, fazu do pojave inicijalnog oštećenja i fazu širenja prsline. Sasvim je jasno da je lom najopasniji za elemente strukture prema tome neophodno je fokusirati se i analizirati mnogo pažljivije fazu širenja prsline. Lom je važna pojava, tako da se ova disertacija bavi analizom širenja prsline. U analizi koja se odnosi na ponašanje pri zamoru realnih elemenata strukture pri dejstvu cikličnih opterećenja, jedan od osnovnih ciljeva je razvoj pogodnih matematičkih modela/procedura za analizu preostalog veka. Ova disertacija prezentuje nekoliko kompletnih matematičkih modela za analizu širenja prsline. Kao spoljašnje opterećenje, u formulisanim modelima razmatrano je opterećenje konstantne i promenljive amplitude.

Matematički modeli za analizu preostalog veka moraju biti formulisani tako da uključe i analiziraju adekvatne fenomene koji se pojavljuju za vreme dejstva cikličnih opterećenja. U ovoj disertaciji istraživanja vezana za širenje prsline su bazirana na fizičkim konceptima koji razmatraju različite fenomene kao što su: koncept baziran na gustini energije deformacije, koncept gde se razmatra efekat zatvaranja oko vrha prsline usled plastifikacije i koncept u kome se analizira efekat pika nadopterećenja (kašnjenje prouzrokovano nadopterećenjem). Pošto su tri različita koncepta istraživana, razvijeno je nekoliko modela za numeričku simulaciju širenja prsline. U predloženim matematičkim modelima za analizu širenja prsline razmatrani su gradijent širenja prsline, broj ciklusa opterećenja i broj blokova do konačnog loma.

Model baziran na gustini energije deformacije je analiziran zbog jednostavnosti prilikom praktične primene pošto ne zahteva dodatno određivanje parametara koji se koriste u uslovima zamora (onih koji bi trebalo da budu posebno određeni za fazu širenja prsline). Kod modela baziranog na gustini energije deformacije upotrebljeni su parametri koji se uključuju pri malo cikličnom zamoru (parametri korišćeni za fazu do pojave inicijalnog oštećenja). Osim toga, u ovoj disertaciji su razvijena tri matematička modela bazirana na fenomenu zatvaranja oko vrha prsline usled plastifikacije. Formulisani modeli su korišćeni da bi se istražilo kako uključivanje fenomena zatvaranja oko vrha prsline usled plastifikacije utiče na broj ciklusa opterećenja do pojave loma. Matematički model baziran na trećem konceptu je formulisan da bi se razmatrao efekat pika nadopterećenja na proračun gradijenta širenja prsline kao i na proračun preostalog veka kod strukturalnih elemenata.

Proračun napona oko vrha prsline je vrlo važan da bi struktura bila sigurna. U mehanici loma analiza napona je bazirana na poznavanju faktora intanziteta napona oko vrha prsline. Analiza napona može biti razmatrana primenom analitičkih i/ili numeričkih

pristupa. Ova disertacija razmatra oba pristupa za izračunavanje faktora intenziteta napona kod strukturalnih elemenata. Kao numerički pristup korišćena je metoda konačnih elemenata. Ustvari, sa aspekta numeričkog pristupa razvijena je numerička procedura bazirana na 6-čvornim singularnim konačnim elementima za analizu širenja prsline.

Metoda konačnih elemenata je korišćena prilikom numeričke simulacije novih korektivnih funkcija za proračun faktora intenziteta napona (kada se razmatraju složene geometrije i/ili spoljašnja opterećenja). Analiza širenja prsline je numerički sprovedena uključivanjem efekta zatvaranja oko vrha prsline usled plastifikacije. Tri različita modela, u kojim se razmatra efekat zatvaranja prsline, su poboljšana pomoću novih korektivnih faktora za efektivne faktore intenziteta napona primenom analize koja je bazirana na konačnim elementima.

Osim toga, adekvatne metode su primenjene za razvoj novih polinomske relacija (tj. korektivnih funkcija) važnih prilikom izračunavanja faktora intenziteta napona. Pored prethodnog trebalo bi dodati da su u ovoj disertaciji odabrane, a zatim i primenjene pogodne numeričke metode za numeričku integraciju prilikom izračunavanja broja ciklusa i broja blokova opterećenja do pojave loma.

U ovoj disertaciji validnost prezetovanih modela za numeričku simulaciju širenja prsline je procenjena poređenjem sa eksperimentalnim rezultatima. Između numeričkih i eksperimentalnih rezultata dobijeno je veoma dobro slaganje. Prema tome, razvijeni matematički modeli za simulaciju širenja prsline mogu biti primenjeni kao sigurne i pouzdane proračunske procedure prilikom analize širenja prsline kod realnih strukturalnih elemenata.

Ključne reči: Zamor, širenje prsline, numerička simulacija, MKE, gustina energije deformacije, zatvaranje prsline, pik opterećenja.

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Numerička matematika i optimizacija

UDK broj: 519.876.5:531.2/.3(043.3)

NUMERICAL MODELING OF RESIDUAL STRENGTH OF CRACKED STRUKTURAL ELEMENTS UNDER CYCLIC LOADINGS

During exploitation structural elements are subjected by service loadings that are most often of cyclic type. Continued influence of cyclic loadings leads to complex process known as fatigue. Since cyclic nature of loadings cannot be eliminated, but it could lead to failure of components, it is important to carefully investigate process such as fatigue. If the total process of fatigue failure is tackled, it is necessary to consider both, crack initiation phase and crack growth phase. Obviously, failure is the most dangerous for structural elements so it is necessary to focus and analyze more carefully fatigue crack growth phase. Due to importance of failure, this dissertation deals with crack growth analysis of structural elements. In the analysis related to fatigue behavior of real structural elements under cyclic loading, one of the fundamental issues is the evaluation of appropriate mathematical models/procedures for the fatigue life analysis. This dissertation presents a few complete mathematical models for crack growth analysis. As external loading, in formulated models are considered constant and variable amplitude loading.

Mathematical models for fatigue life analysis must be formulated so that they include and analyze adequate phenomena which appear during cyclic loading process. In this dissertation, the crack growth investigations are based on physical concepts that consider different phenomena such as: concept based on strain energy density, concept where is considered the plasticity-induced crack closure effect, concept in which is tackled the single tensile overload effect (overload induced retardation). Due to the fact that three different concepts are investigated, a few models for numerical simulation of crack growth are developed. In proposed mathematical models for crack growth analysis are tackled crack growth rate, number of loading cycles and number of loading blocks up to failure.

Strain energy density model is analyzed due to the fact that it is easy for practical applications since it does not require any additional determination of fatigue parameters (those would need to be separately determined for fatigue crack propagation phase). In strain energy density model, low cyclic fatigue parameters (parameters which are used for crack initiation phase) are used. Furthermore, in this dissertation, three mathematical models based on plasticity-induced crack closure phenomenon are developed. Formulated models are used in order to investigate how introduction of plasticity-induced crack closure phenomenon react on number of loading cycles up to failure. The mathematical model based on the third concept is formulated in order to tackle the single tensile overload effect on crack growth rate and life calculation of structural elements.

For structural safety, the evaluation of stresses in the vicinity of cracks is very important. In fracture mechanics, the stress analysis is based on knowledge of the stress intensity factor at the tip of the crack. The stress analysis can be considered by performing analytical and/or numerical approaches. This dissertation tackled both approaches for stress intensity factor evaluation of the structural elements. As a

numerical approach, finite element method is used. Thus, from the aspect of numerical approach, a numerical procedure based on 6-nodels singular finite elements for crack growth analysis is developed.

In addition, finite element method is applied for numerical simulation of new corrective functions for stress intensity factor calculations (when complex geometry and/or external loadings are considered). Moreover, a crack growth analysis is numerically carried out by taking into account the plasticity-induced crack closure effect. Three different crack closure models are improved through new corrective factors for the effective stress intensity factors by performing finite element analysis.

Furthermore, adequate numerical methods are employed for the development/evaluation of a new polynomial expressions (i.e. corrective functions) important for stress intensity factor evaluations. Additionally, in this dissertation, favorable numerical methods are chosen, and then applied for numerical integration in order to calculate number of loading cycles and loading blocks up to failure.

In this dissertation, the validity of presented models for numerical simulation of crack growth is assessed through a comparison with experimental data. Very good correlation between numerical and experimental results is obtained. Thus, developed models for crack growth simulation could be applied as safety and reliable computational procedures for crack growth analysis of real structural elements.

Key words: Fatigue, crack growth, numerical simulation, FEM, strain energy density, crack closure, single overload.

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Numerical Mathematics and Optimisation

UDK number: 519.876.5:531.2/.3(043.3)

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. ANALIZA NAPONSKOG STANJA SA ASPEKTA MEHANIKE LOMA	5
2.1 Osnovne jednačine Teorije elastičnosti	5
2.2 Airy-eva funkcija napona (Biharmonijska jednačina)	7
2.3 Rešavanje biharmonijske jednačine za konfiguraciju oblika prsline	9
2.3.1 Williams-ova polinomna metoda	9
2.3.2 Eftis-Subramonian-Liebowitz-ova metoda bazirana na kompleksnim funkcijama	13
3. MATEMATIČKO MODELIRANJE ŠIRENJA PRSLINE PRI ZAMORU	23
3.1 Opšte	23
3.2 Definisane algoritma za opisivanje pojave širenja prsline kao fizičkog proces	26
3.3 Formulisanje pristupa za simulaciju širenja prsline pri zamoru	28
3.3.1 Pristup baziran na konceptu gustine energije deformacije	29
3.3.2 Pristup koji uključuje analizu napona oko vrha prsline i efekat zatvaranja prsline	34
3.3.3 Faktor intenziteta napona i efekat zatvaranja prsline	41
4. NUMERIČKA SIMULACIJA ŠIRENJA PRSLINE PRI DEJSTVU PIKA OPTEREĆENJA	45
4.1 Proces širenja prsline pri dejstvu nadopterećenja i podopterećenja	45
4.2 Matematičko modeliranje kašnjenja pri širenju prsline usled dejstva pika nadopterećenja	47
4.2.1 Izvodi razlomljenog reda i Gamma funkcija	51
4.3 Uspostavljanje funkcionalne zavisnosti za zakon širenja prsline u slučaju dejstva pika nadopterećenja	53
4.4 Definisane relacije za širenje prsline u uslovima dejstva nadopterećenja/podopterećenja	57
5. METODA KONAČNIH ELEMENATA I ANALIZA ELEMENATA STRUKTURA	60
5.1 Opšte	60
5.2 Inkrementalna formulacija osnovnih jednačina MKE	61
5.3 Diskretizacija kontinuuma konačnim elementima	65
5.4 Diskretizovane ravnotežne jednačine na bazi alternativne B formulacije	66
6. NUMERIČKI PRIMERI	74
6.1 Određivanje faktora intenziteta napona	74
6.1.1 Ploča sa jednom prslinom i faktor intenziteta napona	74
6.1.2 Analiza naponskog stanja i faktor intenziteta napona za ploču sa dva otvora i prslinom	75

6.1.3	Određivanje faktora intenziteta napona za ploču sa dva otvora i jednom prslinom u uslovima dejstva biaksijalnog opterećenja	77
6.1.4	Faktor intenziteta napona za CT uzorak	78
6.1.5	Uticaj debljine uzorka na faktor intenziteta napona	80
6.2	Određivanje efektivnog faktora intenziteta napona	82
6.2.1	Određivanje efektivnog faktora intenziteta napona pomoću analitičkog pristupa	82
6.2.2	Analiza efekta zatvaranja prsline primenom MKE	83
6.3	Određivanje broja ciklusa opterećenja do pojave loma primenom koncepta gustine energije deformacije	86
6.3.1	Verifikacija matematičkog modela za analizu širenja prsline baziranog na gustini energije deformacije	86
6.3.2	Proračun preostale čvrstoće ploče sa dva otvora i jednom prslinom	88
6.3.3	Procena veka ploče sa dva otvora i jednom prslinom opterećena biaksijalno	89
6.4	Procena preostale čvrstoće do loma primenom koncepta zatvaranja prsline	90
6.4.1	Verifikacija matematičkih modela baziranih na konceptu zatvaranja prsline	90
6.4.2	Određivanje gradjenata širenja prsline i efekat zatvaranja prsline	91
6.4.3	Poređenje procenjenog broja ciklusa do loma korišćenjem modela baziranog na Paris-ovoj empirijskoj relaciji i modela koji uključuju efekat zatvaranja prsline	93
6.4.4	Određivanje broja ciklusa do loma primenom modela za širenje prsline baziranih na zatvaranju prsline uz upotrebu analitičkog i numeričkog (MKE) pristupa prilikom određivanja faktora intenziteta napona	94
6.4.5	Simulacija preostalog veka primenom modela baziranog na analizi napona oko vrha prsline i uz uključivanje efekta zatvaranja prsline	96
6.5	Numerička simulacija procene veka pri dejstvu opšteg spektra opterećenja	98
6.5.1	Određivanje broja blokova opterećenja do loma primenom modela baziranog na konceptu zatvaranja prsline sa/bez korišćenja MKE	98
6.5.2	Predviđanje broja blokova opterećenja do pojave loma primenom različitih matematičkih modela za širenje prsline koji razmatraju efekat zatvaranja prsline	100
6.6	Analiza širenja prsline i stepen asimetrije ciklusa	101
6.6.1	Verifikacija matematičkog modela za procenu veka elemenata struktura koji uključuje stepen asimetrije ciklusa	101

6.6.2	Uticaj stepena asimetrije ciklusa na broj ciklusa do konačnog loma	103
6.7	Procena broja ciklusa do pojave loma pri dejstvu pika opterećenja	104
6.7.1	Uticaj pojave pika opterećenja na broj ciklusa do konačnog loma	104
6.7.2	Uticaj dužine prsline pri kojoj dejstvuje pik opterećenja na vek	107
6.7.3	Uticaj intenziteta pika opterećenja na broj ciklusa do pojave loma	108
6.7.4	Uticaj intenziteta opterećenja konstantne amplitude koje prethodi piku na broj ciklusa do konačnog loma	110
6.7.5	Uticaj debljine uzorka na broj ciklusa do konačnog loma pri dejstvu cikličnog opterećenja konstantne amplitude sa pikom	111
7.	ZAKLJUČAK	114
	LITERATURA	117

1. UVOD

Komponente i strukture su izložene dejstvu spoljašnjeg tj. radnog opterećenja u toku funkcionisanja. Radna opterećenja su najčešće periodičnog karaktera sa potpuno proizvoljnim redosledom nastupanja. Periodičan karakter opterećenja može lagano razarati element strukture od ciklusa do ciklusa. Razaranje nastalo kao posledica dejstva cikličnih opterećenja dovodi do pojave koja se naziva zamor.

Proces zamaranja, kod komponenata i struktura koje su opterećene promenljivim opterećenjima, je jedan od najtežih problema koji je potrebno rešavati prilikom analize čvrstoće. Dosadašnja iskustva pokazuju da je veliki procenat lomova struktura koji se dogodio prouzrokovan prisustvom zamora. Realni problemi nastali kao posledica zamora predstavljaju oblast koja je bila i koja će nastaviti da bude predmet istraživanja kako sa teorijskog tako i praktičnog aspekta.

Veliki napor se čini već 100 godina u cilju istraživanja prirode samog mehanizma oštećenja kao i razvitka proračunskih metoda koje će na adekvatan način opisivati pojave nastale usled zamora. Smatra se da bi pravilno shvatanje procesa zamora trebalo da obezbedi najefikasniji put kako kod uvođenja poboljšanja prilikom projektovanja elemenata struktura, tako i prilikom razvoja boljih metoda pomoću kojih je moguće pratiti i analizirati oštećenja nastala usled zamora.

Zamor, kao složen proces mora biti razmatran kroz dve faze: najpre fazu do pojave inicijalnog oštećenja, a zatim fazu širenja prsline. Prilikom analize bilo koje faze neophodno je definisati i koristiti adekvatne metode kao što su: eksperimentalne, analitičke i numeričke. U ovom radu je razmatrana faza širenje prsline, a kao metode su korišćene analitičke i numeričke. Analitičke i numeričke metode se upotrebljavaju za matematičko modeliranje širenja prsline i vrlo važno je da budu verifikovane sa odgovarajućim eksperimentalnim rezultatima (npr. dostupnim u literaturi).

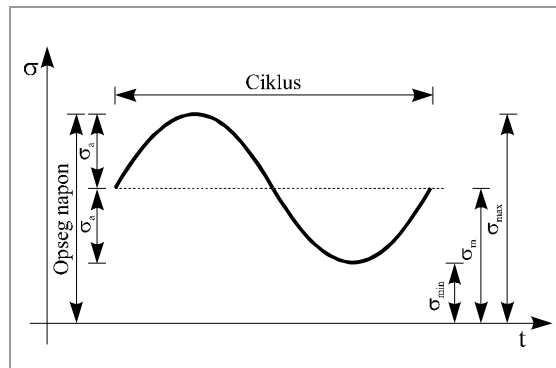
Spoljašnje opterećenje ukoliko je cikličnog kataraktera konstantne amplitude može biti definisano pomoću odgovarajuće relacije za napon u kojoj figuriše tri ili više fizičkih veličina i to: amplitudni napon σ_a , srednji napon σ_m i frekvencija ν . Veličina kao što je frekvencija nije neophodna prilikom opisivanja spoljašnjeg opterećenja, jer napon može biti definisan na sledeći način:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.1)$$

gde su:

σ_a - amplitudni napon (apsolutna vrednost aritmetičke sredine maksimalnog napona σ_{max} i minimalnog napona σ_{min});

- σ_m - srednji napon (algebarska vrednost aritmetičke sredine gornjeg (max) i donjeg (min) napona);
- σ_{max} - maksimalni napon (najveća algebarska vrednost napona u ciklusu napona, tako da je napon pozitivan ukoliko je reč o istezanju, odnosno negativan u slučaju dejstva pritiska);
- σ_{min} - minimalan napon (najmanja algebarska vrednost napona u ciklusu napona, pri čemu se istežući napon uzima kao pozitivan, a pritiskajući kao negativan).



Slika 1.1 Jedan ciklus opterećenja.

Prilikom definisanja napona pored relacije (1.1) u kojoj figurišu amplitudni napon σ_a i srednji napon σ_m , postoji mogućnost da se koriste i drugi parametri, npr. minimalni napon σ_{min} ili maksimalni napon σ_{max} , ali i uvođenje fizičke veličine poznate pod nazivom opseg napona. Opseg napona se definiše kao razlika maksimalnog i minimalnog napona odnosno, $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$.

Kombinacija bilo koja dva od gore spomenutih parametara omogućava kompletno definisanje opterećenja ili ciklusa. Prilikom analize širenja prsline pri zamoru, ciklus napona/opterećenja predstavlja najmanji deo funkcije napon - vreme koji se periodično ponavlja na isti način.

Pored prethodno spomenutih parametara vrlo često se može koristiti u slučaju dejstva cikličnih opterećenja parametar koji se naziva odnos napona ili stepen asimetrije ciklusa R . Stepenn asimetrije ciklusa se definiše kao količnik minimalne i maksimalne vrednosti napona, odnosno:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (1.2)$$

Postoji mogućnost da se gore spomenuti parametri izraze preko R prilikom definisanja spoljašnjeg opterećenja, odnosno ciklusa. Prema tome, pomoću bilo koje od sledećih kombinacija spoljašnje opterećenje može biti kompletno definisano: $\Delta\sigma$ i R , σ_{min} i R , σ_m i R ili σ_a i R . U slučaju kada je $R = 0$ onda je $\sigma_{min} = 0$, odnosno naponi počinju da rastu od nule i ponovo se vraćaju u nulu. Međutim ukoliko je $R = -1$ onda je reč o kompletno povratnom opterećenju tj. $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$.

U praksi je pogodno da se maksimalni napon σ_{max} izrazi u funkciji stepena asimetrije ciklusa R i to kao:

$$R = \frac{\sigma_{\max} - \Delta\sigma}{\sigma_{\max}} = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{\max}}, \quad (1.3)$$

odnosno:

$$\Delta\sigma = (1 - R)\sigma_{\max}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{(1 - R)}. \quad (1.5)$$

Funkcionalna zavisnost definisana jednačinom (1.5) predstavlja važnu relaciju jer uključuje stepen asimetrije ciklusa R koji ima značajan uticaj na vek elementa strukture do pojave loma.

Primarni cilj ovog rada je da se analizira proces širenja prsline i formulišu matematički modeli/procedure za procenu veka uključivanjem različitih efekata. Pošto proces širenja prsline može čak dovesti i do pojave loma, matematički modeli mogu biti od velike pomoći istraživačima i doprineti dobrom projektovanju u uslovima zamora kod elemenata struktura koje sadrže prslinu. Prilikom realizovanja prethodno iznetog cilja potrebno je razmatrati različite faktore uključivanjem važne činjenice da se u slučaju dejstva cikličnog opterećenja mora postići zahtevani vek elementa strukture tako da se mogućnost pojave loma svedena na minimum.

Glavni faktori prilikom analize širenja prsline kod elemenata struktura u uslovima zamora su: spektar opterećenja, lokalni naponi, svojstva materijala i spoljašnja okolina. Spektar opterećenja koji dejstvuje na element strukture mora biti ili određen (npr. eksperimentalno) ili unapred poznat ili pretpostavljen. Postoji izvestan broj elemenata struktura kao što su obrtni elementi, kod kojih je opterećenje u principu, konstantne amplitude izuzev u slučaju kada se radi o fazi startovanja i zaustavljanja. Za spomenute obrtne elementa i još neke elemente struktura kod kojih su opterećenja približno konstantna, proces širenja se analizira kao da dejstvuju opterećenja konstantne amplitude. Međutim, najveći broj elemenata struktura je podvrgnut dejstvu opterećenja promenljive amplitude. Kada je reč o takvim opterećenjima onda su ona periodičnog karaktera, tako da se prilikom analize zahteva uključivanje adekvatanih principa za zbrajanje odgovarajućih ciklusa. Uopšte, u praksi opterećenja će biti slučajna i ona mogu biti prikazana odgovarajućim histogramima.

Vrlo bitan aspekt prilikom analize širenja prsline je određivanje napona na mestima gde se pojavljuju odgovarajući diskontinuiteti (npr. otvori, zarezi, suženja, spojevi) koji su poznati kao oblasti u kojim dolazi do pojave lokalnih napona. Analiza lokalnih napona je važna jer mesta gde se pojavljuju različiti diskontinuiteti mogu prouzrokovati pojavu inicijalne prsline. Prilikom istraživanja lokalni naponi mogu biti razmatrani direktno ili indirektno. Analiza naponskog stanja elemenata struktura uz određivanje lokalnih napona omogućava pronalaženje, odnosno definisanje kritičnih napona za odgovarajuće faze koje se analiziraju u slučaju dejstva cikličnih opterećenja. Kritični naponi ukazuju na potencijalna mesta gde će se pojaviti inicijalna prslina (u slučaju faze do pojave inicijalnog oštećenja), odnosno gde bi moglo doći do pojave loma (za fazu širenja prsline).

U radu je takođe prikazano i diskutovano da se pomoću adekvatnih proračuna može izvršiti analiza napona i deformacija, ali i određivanje važnog parametra, u mehanici loma poznatog kao faktor intenziteta napona.

Pored prethodno rečenog trebalo bi dodati da se čvrstoća pri zamoru materijala kod uzorka odnosno elemenata struktura menja u zavisnosti od tipa legure. Prema tome, kao poseban faktor prilikom analize bi trebalo uključiti i tip materijala. Tako na primer, aluminijum i njegove legure raspoložive u današnje vreme mogu biti različitog hemijskog sastava, a samim tim različitih kako mehaničkih osobina tako i osobina pri dejstvu cikličnih opterećenja. Osim toga, različiti metalurško-tehnološki postupci (npr. kovanje, livenje) dopuštaju projektantu više slobode da izabere i primeni materijal koji je najadekvatniji da bi analizirani element strukture nosio odgovarajuće opterećenje i da bi se minimizirao broj zahtevanih delova.

Svi prethodno spomenuti faktori su analizirani u radu i upotrebljeni za formulisanje adekvatnih matematičkih modela za simulaciju širenja prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja kroz sedam poglavlja. Posle Uvoda u **Poglavlju 2** su analizirani naponi i deformacije sa aspekta mehanike loma tj. formulisane su odgovarajuće funkcionalne zavisnosti za polje napona i deformacija oko vrha prsline. Definisanje relacija za napone/deformacije je od velike važnosti za razumevanje procesa širenja prsline i pojavu loma. U **Poglavlju 3** su formulisani pristupi koji omogućavaju da se proces širenja prsline pri dejstvu cikličnih opterećenja matematički simulira. Jednačine formulisanih modela su bazirane na različitim pristupima kao što su: koncept gustine energije, koncept zatvaranja prsline, kao i pristup koji uključuje analizu napona oko vrha prsline. **Poglavlje 4** razmatra poseban fenomen koji se vrlo često može pojaviti u okviru realnog opterećenja, poznat kao pojava pika opterećenja. Pojava pika opterećenja značajno može uticati na čvrstoću elemenata strukture sa inicijalnom prsline, tako da je u okviru Poglavlja 4 formulisan poseban model/procedura za matematičku simulaciju širenja prsline u slučaju dejstva pika opterećenja. U **Poglavlju 5** je prezentovano kako se primenom numeričke metode tj. metode konačnih elemenata može izvršiti analiza naponskog stanja pri širenju prsline u slučaju dejstva cikličnih opterećenja. Osim toga u radu je metoda konačnih elemenata korišćena za određivanje važnog parametra mehanike loma koji je poznat kao faktor intenziteta napona. Zatim sledi **Poglavlje 6**, u kome je na izvesnom broju numeričkih primera proverena validnost formulisanih matematičkih modela za širenje prsline, poređenjem dobijenih rezultata sa podacima iz testova pri dejstvu cikličnih opterećenja. Nakon verifikacije modela za širenje prsline, izvršena je procena veka do loma za izabrane elemente strukture. Pored toga, u istom poglavlju analizirani su posebni efekti koji mogu uticati na vek elemenata strukture do pojave loma. U **Poglavlju 7** su sumirane sve činjenice i izvedeni zaključci do kojih se došlo tokom izrade ovog rada.

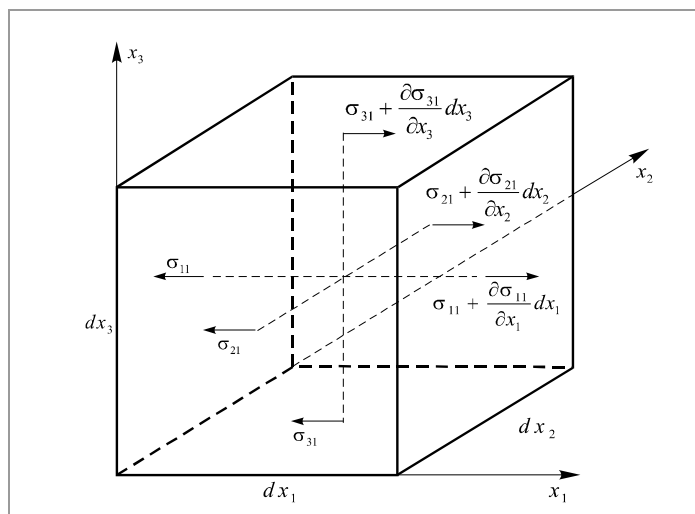
Prednost formulisanih novih matematičkih modela za simulaciju širenja prsline pri dejstvu cikličnih opterećenja konstantne amplitude, promenljive amplitude kao i opterećenja sa pikom, je što oni obezbeđuju dobru osnovu za realnu procenu veka pri zamoru.

2. ANALIZA NAPONSKOG STANJA SA ASPEKTA MEHANIKE LOMA

Osnovni principi mehanike krutog tela su izuzetno značajni prilikom izučavanja mehanike loma. U ovom poglavlju je opisano kako polje napona i polje deformacija koji se javljaju oko prsline kod linearno elastičnog kontinuuma mogu biti izvedeni i dovedeni u vezu sa fizičkim veličinama potrebnim prilikom analiza u mehanici loma.

2.1 Osnovne jednačine Teorije elastičnosti

Stanje napona elementarne zapremine tela nastalo usled dejstva spoljašnjeg opterećenja (sl. 2.1) može biti definisano kao funkcija 6 komponenti napona koje mogu biti izraženi kao tenzor σ_{ij} (gde je $i, j = 1, 2, 3$). Ukoliko je reč o Dekartovom koordinatnom sistemu onda su pravci x_1, x_2, x_3 ustvari koordinatne ose x, y, z . Definisane komponente napona $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ (odnosno $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) predstavljaju normalne napone, a komponente sa mešovitim indeksima $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ (odnosno $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$) se nazivaju smičući naponi. Prvi indeks pokazuje pravac normale ravni na koju napon deluje, a drugi indeks ukazuje na pravac u kom on kao komponenta deluje. Budući da napon koji deluje na element zapremine tela prouzrokuje pojavu deformacije onda je moguće definisati i 6 komponenti deformacija. Komponente deformacija slično komponentama napona mogu biti napisane u tenzorskom obliku kao ε_{ij} (gde je $i, j = 1, 2, 3$). Ukoliko se uvede Dekartov koordinatni sistem moguće je definisati komponente glavnih deformacija: $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ (odnosno $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$) i komponente smičućih deformacija: $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ (odnosno $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$).



Slika 2.1 Ravnoteža sila pri dejstvu napona u pravcu ose x (tj. $x_1=x$).

Za definisane napone i deformacije neophodno je uspostaviti odgovarajuće funkcionalne zavisnosti između odgovarajućih komponentata. Sa aspekta teorije elastičnosti, dva važna zahteva ukoliko su ispunjena omogućavaju formulisanje diferencijalnih odnosno parcijalnih jednačina koje definišu funkcionalnu zavisnost između napona i deformacija. Prvi uslov koji mora biti ispunjen je ravnoteža napona, a drugi je kompatibilnost deformacija. Ustvari da bi bio ispunjen prvi uslov telo kao celina mora biti u ravnoteži, odnosno lokalni naponi u telu moraju biti u ravnoteži. Ovo uslovljava uspostavljanje relacija između komponentata tenzora napona. Ispunjavanje uslova ravnoteže u odsustvu sila koje deluju na telo dovodi do definisanja jednačina u obliku:

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_{ii}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_{ik}} = 0 \quad (2.1.1)$$

gde je $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Drugi zahtev koji mora biti ispunjen je uslov kompatibilnosti. Ispunjavanje uslova kompatibilnosti dovodi do definisanja relacija između komponentata tenzora deformacija, odnosno:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (2.1.2)$$

kao i

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right] \quad (2.1.3)$$

gde je $i \neq j \neq k$, deformacije ε_{ij} predstavljaju funkcionalne zavisnosti od pomeranja u_i (samo u slučaju malih pomeranja) i definisane su u obliku:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.4)$$

$i, j = 1, 2, 3$.

Izvedene jednačine (2.1.1) i (2.1.2) definišu funkcionalnu zavisnost između komponentata napona, odnosno deformacija međutim potrebno je uspostaviti zavisnost između napona i deformacija. Relacija kojom se definiše zavisnost između napona i deformacija za elastično-izotropan materijal je poznata kao Hooke-ov zakon i ukoliko se uvede Dekartov koordinatni sistem mogu biti napisane u obliku:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad (2.1.5.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \quad (2.1.5.b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} \quad (2.1.5.c)$$

gde je E - Young-ov moduo elastičnosti i ν - Poisson-ov koeficijent.

Jednačine (2.1.4) takođe mogu biti napisane u alternativnom obliku kao:

$$\sigma_{xx} = \lambda^* e + 2\mu \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu^* \varepsilon_{xy} \quad (2.1.6.a)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda^* e + 2\mu \varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu^* \varepsilon_{yz} \quad (2.1.6.b)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda^* e + 2\mu \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zx} = 2\mu^* \varepsilon_{zx} \quad (2.1.6.c)$$

gde su: μ^* - moduo smicanja u teoriji elastičnosti ($\mu^* = E/(2(1 + \nu))$), λ^* - Lamé-ov koeficijent ($\lambda^* = 2\mu\nu/(1 - 2\nu)$), e - širenje po zapremini ($e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$). Zamenom jednačina (2.1.6) u (2.1.1) sa (2.1.4), moguće je dobiti sledeće relacije:

$$\mu^* \nabla^2 u_x + (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (2.1.7.a)$$

$$\mu^* \nabla^2 u_y + (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial e}{\partial y} = 0 \quad (2.1.7.b)$$

$$\mu^* \nabla^2 u_z + (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial e}{\partial z} = 0. \quad (2.1.7.c)$$

Relacije (2.1.7) predstavljaju jednačine ravnoteže u funkciji pomeranja koje su poznate kao Navier-ove jednačine.

Relacije izvedene u ovom poglavlju ukazuju da je moguće uspostaviti odgovarajuće funkcionalne zavisnosti između napona i deformacija, kao i između deformacija i pomeranja. Prema tome, ukoliko je jedna od fizičkih veličina (napon, deformacija, pomeranje) određena ili poznata omogućava određivanje one druge dve. Dejstvo spoljašnjih sila prouzrokuje nastajanje odgovarajućih napona, a samim tim i pojavu deformacija odnosno pomeranja, tako da je vrlo bitno formulisati relacije pomoću kojih je moguće analizirati naponsko stanje tela, odnosno strukture.

2.2 Airy-eva funkcija napona (Biharmonijska jednačina)

Definisana tri uslova kompatibilnosti u Dekartovom koordinatnom sistemu, jednačine (2.1.2), tj. funkcionalne zavisnosti od deformacija, moguće je izraziti kao funkcije od napona ukoliko se uvede relacija napon – deformacija tj. jednačina (2.1.5), odnosno:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \left[\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right] = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.2.1.a)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} - \nu \left[\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right] = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial xz} \quad (2.2.1.b)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} - \nu \left[\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right] = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z}. \quad (2.2.1.c)$$

Problem određivanja napona u telu je prema tome sveden na pronalaženje vrednosti σ_{ij} tako da one zadovolje jednačine kompatibilnosti (2.2.1) i jednačine ravnoteže (2.1.1), uz uključivanje odgovarajućih graničnih uslova. Ukoliko su naponi određeni, deformacije mogu biti dobijene korišćenjem relacija napon - deformacija, tj. jednačina (2.1.5). Jedan takav pristup je bio predložen od strane George Bidell Airy-a 1862. godine za dvodimenzionalne probleme [1], koji je nekoliko godina kasnije (1870. god.) proširio James Clerk Maxwell za trodimenzionalne probleme.

Airy-ev pristup je baziran na formulisanoj relaciji za komponente napona kao funkcionalne zavisnosti od tzv. funkcije napona ϕ . Funkcija napona ϕ je definisana tako da sledeće relacije budu zadovoljene, u slučaju kada nema dejstva spoljašnjih sila:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.2.2.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.2.2.b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2.2.2.c)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.2.2.d)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad (2.2.2.e)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \quad (2.2.2.f)$$

Definisane funkcionalne zavisnosti za napone (jed. 2.2.2) zatim mogu biti zamenjene u funkcionalnim zavisnostima dobijenim iz uslova ravnoteže i uslova kompatibilnosti. Ukoliko se jednačine (2.2.2) zamene u uslove ravnoteže (2.1.1) može se uočiti da relacije (2.2.2) zadovoljavaju uslove ravnoteža. Sa druge strane, zamenom jednačina (2.2.2) u uslove kompatibilnosti (2.2.1) dobija se izraz:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{2\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} = 0$$

odnosno:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0. \quad (2.2.3)$$

Jednačina (2.2.3) predstavlja potreban uslov koji bi trebalo da bude ispunjen pošto sledi iz uslova kompatibilnosti. Ustvari, raspodela napona je određena kompletno jednačinama (2.2.2), ukoliko je funkcija napona ϕ izabrana tako da zadovoljava jednačinu (2.2.3), kao i da biharmonijska jednačina i dati naponi, deformacije odnosno pomeranja zadovoljavaju granične uslove razmatranog problema.

Ukoliko se stanje napona analizira u cilindričnom koordinatnom sistemu, onda i komponente napona izražene pomoću funkcije napona ϕ mogu biti napisane u obliku:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.2.4.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.2.4.b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.2.4.c)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \quad (2.2.4.d)$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \quad (2.2.4.e)$$

$$\sigma_{\theta z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \quad (2.2.4.f)$$

zamenom jednačina (2.2.4) u uslove kompatibilnosti (2.2.1) biharmonijska jednačina može biti napisana kao:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \quad (2.2.5)$$

$$= \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0.$$

Biharmonijske jednačine (2.2.3) i (2.2.5) mogu biti korišćene prilikom analize različitih fizičkih problema. Ukoliko se biharmonijske jednačine koriste prilikom analize nekog problema neophodno je formulisati odgovarajuća rešenja tako da ona adekvatno opišu prirodu razmatranog problema.

2.3 Rešavanje biharmonijske jednačine za konfiguraciju oblika prsline

U ovom odeljku je analizirana priroda problema širenja prsline i formulisane su relacije pomoću kojih je moguće rešiti biharmonijske jednačine u slučaju konfiguracije prsline. Biharmonijska jednačina (2.2.5) pošto je formulisana u odnosu na cilindričan koordinatni sistem, zbog prirode problema širenja prsline, predstavlja adekvatnu relaciju koja se može koristiti prilikom analize stanja napona oko vrha prsline.

2.3.1 Williams-ova polinomna metoda

Formulisana biharmonijska jednačina (2.2.5) u odnosu na cilindričan koordinatni sistem je definisana za trodimenzionalne probleme, međutim pošto je rešavanje takve jednačine vrlo komplikovano, ona može biti pojednostavljena. U principu, analizu raspodele napona oko vrha prskotine moguće je razmatrati kao dvodimenzionalni problem (sl.2.2). Prilikom analize konfiguracije prsline kao dvodimenzionalnog problema uvodi se pretpostavka da je: $\sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0$, tako da biharmonijska jednačina (2.2.5) postaje:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \times \left[\frac{\partial \phi^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] = 0, \quad (2.3.1)$$

dok su komponente napona:

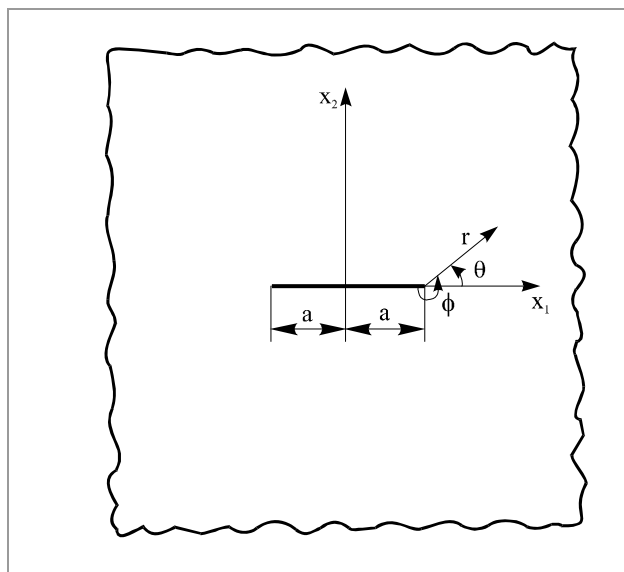
$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.3.2.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (2.3.2.b)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta}. \quad (2.3.2.c)$$

Pošto su komponente napona definisane jednačinama (2.3.2), neophodno je još formulisati relaciju koja definiše uslov koji mora ispuniti funkcija napona da bi konfiguracija prsline bila adekvatno matematički opisana.

Analiza konfiguracije prsline (sl. 2.2) za usvojeni cilindričan koordinatni sistem sa početkom na jednoj strani prsline, zahteva pronalaženje odnosno formulisanje pogodne funkcije ϕ koja bi zadovoljila jednačinu (2.3.1) i granične uslove $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$ za površinu prsline. Rešavanje ovog problema može biti pojednostavljeno uvođenjem pretpostavke da su promenljive unutar funkcije r , θ odnosno $\phi(r, \theta)$.



Slika 2.2 Konfiguracija prsline kao dvodimenzionalni problem ($x_1=x$, $x_2=y$).

Za konfiguraciju oblika V-zareza (sl. 2.2), Airy-eva funkcija napona može biti definisana u obliku [2]:

$$\phi(r, \theta) = r^{\mu+1} F(\theta) \quad (2.3.3)$$

gde je μ neki pozitivan broj.

Zamenom jednačine (2.3.3) u biharmonijsku jednačinu (2.3.1) dobija se:

$$\frac{d^4 F(\theta)}{d\theta^4} + ((\mu-1)^2 + (\mu+1)^2) \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + ((\mu-1)^2 (\mu+1)^2) F(\theta) = 0, \quad (2.3.4)$$

gde $F(\theta)$ kao rešenje diferencijalne jednačine (2.3.4) mora biti određeno.

Opšte rešenje za $F(\theta)$ koje zadovoljava jednačinu (2.3.4) definisano je u obliku:

$$F(\theta) = A \cos(\mu+1)\theta + B \sin(\mu+1)\theta + C \cos(\mu-1)\theta + D \sin(\mu-1)\theta \quad (2.3.5)$$

gde su A , B , C i D odgovarajuće konstante koje bi trebalo da budu određene iz graničnih uslova.

Zamenom jednačine (2.3.3) u jednačinu (2.2.4), odgovarajuće relacije za komponente napona dobijaju oblik:

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} \left(\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + (\mu+1)F(\theta) \right) \quad (2.3.6.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} (\mu(\mu+1)F(\theta)) \quad (2.3.6.b)$$

$$\sigma_{r\theta} = -r^{\lambda-1} \left(\mu \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right). \quad (2.3.6.c)$$

Određivanje rešenja može biti pojednostavljeno ukoliko je ugao θ zamenjen sa: $\psi = \pi + \theta$. Zbog uvedene smene osnovne jednačine (2.3.5) i (2.3.6), ostaju iste, ali granični uslovi moraju biti modifikovani, odnosno:

$$\sigma_{\psi\psi}(r,0) = \sigma_{\psi\psi}(r,2\pi) = 0, \quad \sigma_{r\psi}(r,0) = \sigma_{r\psi}(r,2\pi) = 0, \quad (2.3.7)$$

kao i

$$F(0) = F(2\pi) = 0, \quad F'(0) = F'(2\pi) = 0. \quad (2.3.8)$$

Definisani granični uslovi mogu biti zadovoljeni ukoliko je:

$$A = -C, \quad B = -\frac{(\mu-1)}{(\mu+1)}D \quad (2.3.9)$$

$$\sin(2\pi\lambda) = 0 \quad \text{tj.} \quad \mu = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zamenjivanjem ψ sa $(\pi + \theta)$, i to tako da je svaka vrednost μ , μ_n , u saglasnosti sa $\phi_n(r, \theta)$ zadovoljava biharmonijsku jednačinu i primenjene granične uslove. Najopštije rešenje može biti dobijeno ukoliko se uzme linearna kombinacija ovih rešenja, odnosno:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot F_n(\theta), \quad (2.3.10.a)$$

gde je:

$$F_n(\theta) = C_n \left(\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)(\theta+\pi) - \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)(\theta+\pi) \right) + \quad (2.3.10.b)$$

$$+ D_n \left(\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)(\theta+\pi) - \frac{(n-2)}{(n+2)} \sin\left(\frac{n}{2}+1\right)(\theta+\pi) \right).$$

Pošto je funkcija napona formulisana u obliku reda (2.3.10), onda odgovarajuće komponente napona mogu biti određene zamenom jednačina (2.3.10) u jednačine (2.3.6):

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot \left(F_n'(\theta) + \left(\frac{n}{2}+1\right)F_n(\theta) \right) \quad (2.3.11.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2}+1\right) F_n(\theta) \right) \quad (2.3.11.b)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n}{2} F'_n(\theta)\right). \quad (2.3.11.c)$$

U teoriji, konstante C_n i D_n , mogle bi sada biti određene sabiranjem izraza (tj. redova) za komponente napona (jed. (2.3.11)) uz zadovoljenje graničnih uslova koji su primenjeni na konfiguraciju oblika prsline. Ovo sumiranje je teško izvesti analitičkim putem, tako da je širenje prsline u principu analizirano samo u oblasti oko vrha prsline $0 < r < < 1$ da bi se dobio oblik raspodele napona u razmatranom regionu. Prilikom određivanja C_n i D_n korišćena je alternativna metoda za rešavanje biharmonijske jednačine, koja se zasniva na poznavanju oblika raspodele polja napona oko vrhe prsline.

Redovi dati u jednačinama (2.3.11) ukoliko se razviju do prva tri člana, dobija se:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = r^{-\frac{1}{2}} & \left(\left(\frac{C_1}{4} \right) \left(3 \sin \frac{3\theta}{2} - 5 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \left(\frac{D_1}{4} \right) \left(\cos \frac{3\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) \right) + \\ & + 4C_2 \cos^2 \theta + r^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{3C_3}{4} \right) \left(-5 \sin \frac{5\theta}{2} - 3 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \left(\frac{3D_3}{4} \right) \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.12.a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = r^{-\frac{1}{2}} & \left(\left(\frac{C_1}{4} \right) \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \left(\frac{D_1}{4} \right) \left(-3 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) + \\ & + 4C_2 \sin^2 \theta + r^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{15C_3}{4} \right) \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \left(\frac{3D_3}{4} \right) \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.12.b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = r^{-\frac{1}{2}} & \left(\left(\frac{C_1}{4} \right) \left(3 \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) + \left(\frac{D_1}{4} \right) \left(-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) - \\ & - 2C_2 \sin 2\theta + r^{\frac{1}{2}} \left(\left(3C_3 \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - 5 \cos \frac{5\theta}{2} \right) + \left(3D_3 \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.3.12.c)$$

Za oblast oko vrha prsline $0 < r < < 1$, ukoliko se prilikom razvijanja reda pojave članovi koji sadrže $r^{1/2}$ kao i njegove više stepene, oni mogu biti zanemareni. Prema tome, relacije za odgovarajuće komponente napona oko vrha prsline postaju:

$$\sigma_{rr} = f_{rr}(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + g_{rr}(\theta) \quad (2.3.13.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = f_{\theta\theta}(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + g_{\theta\theta}(\theta) \quad (2.3.13.b)$$

$$\sigma_{r\theta} = f_{r\theta}(\theta) \cdot r^{-\frac{1}{2}} + g_{r\theta}(\theta) \quad (2.3.13.c)$$

gde su odgovarajuće funkcije $f(\theta)$ i $g(\theta)$ date u jednačinama (2.3.12). Transformacijom iz cilindričnog koordinatnog sistema u Dekartov koordinatni sistem, relacije za komponente napona formulisane u jednačinama (2.3.13) postaju:

$$\sigma_{xx} = r^{-\frac{1}{2}} \left(-D_1 \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - C_1 \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) + C_2 \quad (2.3.14.a)$$

$$\sigma_{yy} = r^{-\frac{1}{2}} \left(-C_1 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - D_1 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right) \quad (2.3.14.b)$$

$$\sigma_{xy} = r^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - D_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) . \quad (2.3.14.c)$$

Relacije za komponente napona formulisane jednačinama (2.3.14) je prvi odredio Williams [2]. Williams je svojim rešenjem dao dobru osnovu za koaksijalnu graničnu metodu pomoću koje se određuju faktori intenziteta napona u slučaju kada se rešavaju problemi konačne geometrije, gde su granični uslovi primenjeni relativno lokalno oko vrha prsline.

2.3.2 Eftis-Subramonian-Liebowitz-ova metoda bazirana na kompleksnim funkcijama

Metoda koju je formulisao Airy, razmatrana u odeljku 2.3.1 može biti primenjena kod tela sa glatkim granicama i kao takva predstavlja specijalan slučaj. Ustvari, Muskhelishvili [3] je 1953. godine uveo opšte kompleksne funkcije napona tako da Airy-eva funkcija napona predstavlja specijalan slučaj. U svojim istraživanjima Muskhelishvili je predložio da se naponi za dvodimenzionalne probleme elastičnosti mogu definisati pomoću dve funkcije, tj. Airy-eve funkcije ϕ i funkcije χ , odnosno:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial y \partial x} \quad (2.3.15.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial y \partial x} \quad (2.3.15.b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial x^2} . \quad (2.3.15.c)$$

Funkcije $\phi(z)$ i $\chi(z)$ predstavljaju dve analitičke funkcije zavisne od kompleksne promenljive z (tj. $z = x + iy$), odnosno:

$$\phi(z) = \operatorname{Re} \left(\bar{z} \psi(z) + \varphi(z) \right) \quad (2.3.16.a)$$

$$\chi(z) = \operatorname{Im} \left(\bar{z} \psi(z) + \varphi(z) \right), \quad (2.3.16.b)$$

gde Re i Im predstavljaju realni odnosno imaginarni deo od $(\bar{z} \psi(z) + \varphi(z))$ i \bar{z} konjugovano kompleksnu promenljivu od z . Diferenciranjem jednačina (2.3.16) po x odnosno y i smenom u jednačine (2.3.15), relacije za napone u zavisnosti od kompleksnih funkcija mogu biti formulisane u obliku:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\psi'(z) + \overline{\psi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[\psi'(z) \right] \quad (2.3.17.a)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = 2 \left[\bar{z} \psi'(z) + \varphi'(z) \right] \quad (2.3.17.b)$$

ili

$$\sigma_{xx} + i \sigma_{xy} = 2 \operatorname{Re} \left[\psi'(z) \right] - z \overline{\psi''(z)} - \overline{\chi'(z)} \quad (2.3.17.c)$$

$$\sigma_{xx} - i \sigma_{xy} = 2 \operatorname{Re} \left[\psi'(z) \right] + z \overline{\psi''(z)} + \overline{\chi'(z)} . \quad (2.3.17.d)$$

Definisani naponi omogućavaju formulisanje jednačine za pomeranja kao funkcionalne zavisnosti od kompleksnih funkcija u obliku:

$$2\mu(u_x + u_y) = \kappa\psi(z) - z\overline{\psi'(z)} - \overline{\varphi(z)} \quad (2.3.18)$$

gde $'$ predstavlja diferencijal po z i $\bar{}$ konjugovano kompleksnu funkciju, dok je $\kappa=3-4\nu$ za ravno stanje napona i $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ za ravno stanje deformacije.

Prilikom analize stanja napona i deformacija kod tela koja sadrže prslinu Eftis, Subramonian, Liebowitz [4] su modifikovali jednačine (2.3.17). Odvajanjem realnog od imaginarnog dela u jednačini (2.3.17.b), zatim kombinovanjem sa jednačinom (2.3.17.c) dobijene su komponente napona σ_{xx} , σ_{yy} i σ_{xy} :

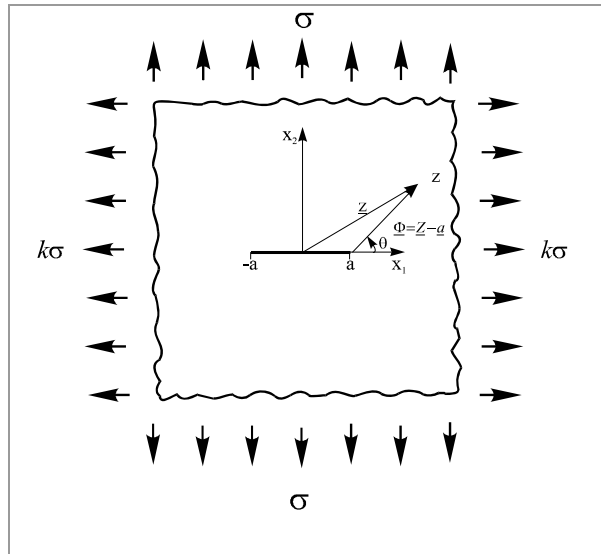
$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re}(2\psi'(z)) - \operatorname{Re}(\varphi'(z)) - x \operatorname{Re}(\psi''(z)) - y \operatorname{Im}(\psi''(z)) \quad (2.3.19.a)$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re}(2\psi'(z)) + \operatorname{Re}(\varphi'(z)) + x \operatorname{Re}(\psi''(z)) + y \operatorname{Im}(\psi''(z)) \quad (2.3.19.b)$$

$$\sigma_{xy} = -y \operatorname{Re}(\psi''(z)) + x \operatorname{Im}(\psi''(z)) + \operatorname{Im}(\varphi''(z)). \quad (2.3.19.c)$$

Ukoliko se razmatra konfiguracija prsline koja je prikazana na slici 2.3, u slučaju opšteg biaksijalnog opterećenja, sasvim je jasno da napon pri smicanju mora potpuno nestati duž y ose zbog simetrije koja se javlja u analiziranom problemu, onda pošto je $y = 0$ sledi:

$$\sigma_{xy} = 0 = x \operatorname{Im}(\psi''(z)) + \operatorname{Im}(\varphi''(z)) \quad (2.3.20)$$



Slika 2.3 Dvodimenzionalna konfiguracija prsline u kompleksnom prostoru ($x_1=x$, $x_2=y$).

S obzirom da je $z = \bar{z}$ pri $y = 0$, dobija se:

$$\operatorname{Im}(z\psi''(z) + \varphi''(z))_{y=0} = 0. \quad (2.3.21)$$

Jednačina (2.3.21) mora biti uopšte zadovoljena samo ukoliko je ispunjen uslov:

$$z\psi''(z) + \varphi''(z) + \beta = 0 \quad (2.3.22)$$

u svim tačkama na kompleksnoj z ravni. Konstanta β mora biti realna, njena vrednost je određena na osnovu primenjenih graničnih uslova. Jednačinu (2.3.22) je moguće svesti na oblik u kome će postojati realni i imaginarni deo (jer su i komponente napona izražene na taj način), odnosno:

$$x \operatorname{Re}(\psi''(z)) - y \operatorname{Im}(\psi''(z)) + \operatorname{Re}(\varphi(z)) + \beta = 0 \quad (2.3.23.a)$$

$$x \operatorname{Re}(\psi''(z)) + y \operatorname{Im}(\psi''(z)) + \operatorname{Im}(\varphi''(z)) = 0. \quad (2.3.23.b)$$

Zamenjivanjem izraza (2.3.23) u jednačine (2.45) dobija se:

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re}(2\psi'(z)) - y \operatorname{Im}(2\psi''(z)) + \beta \quad (2.3.24.a)$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re}(2\psi'(z)) + y \operatorname{Im}(2\psi''(z)) - \beta \quad (2.3.24.b)$$

$$\sigma_{xy} = -y \operatorname{Im}(2\psi''(z)). \quad (2.3.24.c)$$

Prema tome, simetričan problem je moguće redukovati na jednačinu u kojoj se pojavljuje jedna analitička funkcija $\psi(z)$. Za konfiguraciju prikazanu na slici 2.3 granični uslov na slobodnoj površini prsline je:

$$(\sigma_{yy})_{y=0, |x| < a} = 0 = (\operatorname{Re}(2\psi'(z)) + y \operatorname{Im}(2\psi''(z)) - \beta)_{y=0} \quad (2.3.25)$$

$$\text{tj. } \operatorname{Re}(\psi'(z)) = \beta/2 \text{ u slučaju da je } y = 0, |x| < a. \quad (2.3.26)$$

S obzirom da se analizira konfiguracija prikazana na slici 2.3, granični uslovi su:

$$\sigma_{xx} = k\sigma, \quad \sigma_{yy} = \sigma, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (2.3.27)$$

Prema tome, problem je nadalje redukovao na određivanje funkcije $\psi'(z)$, koja mora zadovoljiti jednačine (2.3.25) i (2.3.27). Uz napomenu, prilikom rešavanja jednačine (2.3.14), predviđeno je da će naponi oko prsline pokazivati singularna rešenja za funkciju $r^{-0.5}$.

Funkcija $\psi'(z)$ može biti svedena [5] i na oblik:

$$\psi'(z) = \frac{f(z)}{(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{2}, \quad (2.3.28)$$

međutim da bi bila zadovoljena jednačina (2.3.26), $f(z)$ mora biti:

$$\operatorname{Im}(f(z))_{y=0} = 0 \quad (2.3.29)$$

gde je $(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ imaginarno za $|x| < a$ i $y = 0$.

Kombinovanjem sa jednačinama (2.3.24), dobija se:

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2y \operatorname{Im}(2\psi''(z)) - 2\beta - 2iy \operatorname{Re}(2\psi''(z)). \quad (2.3.30)$$

Za udaljenu granicu, jednačinu (2.3.30) moguće je svesti na oblik:

$$(1-k)\sigma = -4iy\psi''(z) - 2\beta = 2(\bar{z} - z)\psi''(z) - 2\beta, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.3.31)$$

Pošto u jednačini (2.3.31) figuriše drugi izvod funkcije $\psi(z)$, onda posle diferenciranja jednačine (2.3.28) dobija se:

$$\psi''(z) = \frac{f'(z)}{(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z \cdot f(z)}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.3.32)$$

U slučaju kada $|z|$ teži beskonačnosti, $|z| \gg a$, jednačina (2.3.32) postaje:

$$\psi''(z) \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = \frac{f'(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2}, \quad (2.3.33)$$

drugi izvod funkcije $\psi(z)$ tj. jednačina (2.3.33) ukoliko se uvrsti u jednačinu (2.3.31) dobija se:

$$(1-k)\sigma = 2(\bar{z} - z) \cdot \left(\left(\frac{f'(z)}{z} \right) - \left(\frac{f(z)}{z^2} \right) \right) - 2\beta, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.3.34)$$

Rešenje jednačine (2.3.34) koje zadovoljava jednačinu (2.3.29) je:

$$f(z) = \frac{\sigma \cdot z}{2}, \quad \beta = -\frac{(1-k)\sigma}{2} \quad (2.3.35)$$

i zamenom relacija (2.3.35) u jednačinu (2.3.28) dobija se:

$$2\psi'(z) = \frac{\sigma \cdot z}{(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1-k)\sigma}{2}. \quad (2.3.36)$$

Integraljenjem diferencijalne jednačine (2.3.36) uz zanemarivanje konstanti integracije (koje predstavljaju pomeranje krutog tela), dobija se:

$$\psi(z) = \frac{\sigma \cdot (z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{(1-k)\sigma z}{4}. \quad (2.3.37)$$

Ukoliko je pažnja ograničena na oblast oko vrha prsline i promenljiva je zamenjena sa $\Phi = z - a = r e^{i\theta}$ (odnosno, $z = \Phi + a$), onda jednačina (2.3.36) postaje:

$$2\psi'(\Phi) = \frac{\left(1 + \frac{\Phi}{a}\right) \cdot \sigma}{\left(\left(1 + \frac{\Phi}{a}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1-k)\sigma}{2}$$

$$\text{tj. } 2\psi'(\Phi) = \left[\frac{\left(1 + \frac{\Phi}{a}\right)}{\left(\frac{2\Phi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{\Phi}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{(1-k)}{2} \right] \cdot \sigma. \quad (2.3.38)$$

Primenom binomnog razvoja na funkciju oblika:

$$\left(1 + \frac{\Phi}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

i nakon sređivanja dobija se:

$$2\psi'(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\Phi}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{(1-k)}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Phi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{32} \left(\frac{\Phi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right]. \quad (2.3.39)$$

Za oblast oko vrha prsline moguće je zanemariti član $\left(\frac{\Phi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ i njegove više stepene, tako da je:

$$2\psi'(\Phi) = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2\Phi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(1-k)\sigma}{2} \quad (2.3.40)$$

odnosno:

$$2\psi'(\Phi) = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(1-k)\sigma}{2}, \quad (2.3.41)$$

a ukoliko se jednačina (2.3.41) diferencira još jednom, dobija se:

$$2\psi''(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2\Phi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right). \quad (2.3.42)$$

Pošto su sada određeni diferencijali prvog i drugog reda funkcije $\psi(\Phi)$ moguće je odrediti potrebne komponente napona i to zamenom jednačina (3.3.41) i (2.3.42) u jednačinu (2.3.24), kao i dobijene vrednosti za β (jednačina (2.3.35)), tako da relacije za komponente napona mogu biti napisane u obliku:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - (1-k)\sigma = \\ &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - (1-k)\sigma\end{aligned}\quad (2.3.43.a)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \\ &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (2.3.43.b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} = \\ &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (2.3.43.c)$$

gde je :

$$K_I = \sigma(\pi a)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.44)$$

Fizička veličina K_I definisana u jednačini (2.3.44) predstavlja *Prvi moduo faktora intenziteta napona* za prslinu na koju deluje istezanje kao opterećenje i u slučaju kada je funkcija raspodele napona oblika $r^{-0.5}$ oko vrha prsline, kao što je zahtevano u jednačini (2.3.14).

Ovakvu analizu je prvi put izveo Westergaard [6] za ravnomerno aksijalno opterećenje. Kasnije je Sih-e [7] proširio analizu za uopšte biaksijalno opterećenje.

Upoređivanjem jednačina (2.3.43) sa jednačinama (2.3.14) određuje se da je:

$$D_1 = -\frac{K_I}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sigma a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad C_2 = -(1-k)\sigma. \quad (2.3.45)$$

Sličnom analizom, za smičuća opterećenja koja deluju kao spoljašnja opterećenja, dobija se:

$$C_1 = \frac{K_{II}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tau a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \quad (2.3.46)$$

gde $K_{II} = \tau (\pi a)^{0.5}$ predstavlja *Drugi moduo faktora intenziteta napona* kada kao opterećenje deluje smičući napon τ .

Prema tome, opšti izrazi za napone oko vrha prsline za dvodimenzioni slučaj sada mogu biti napisani u obliku jednačina:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + C_2 \quad (2.3.47.a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.3.47.b)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.3.47.c)$$

gde su $C_2 = -(1-k)\sigma$, $K_I = \sigma(\pi a)^{0.5}$ i $K_{II} = \tau(\pi a)^{0.5}$ za prslinu čija je dužina $2a$ i koja se nalazi na tankoj ploči na koju deluje spoljašnje opterećenje.

Formulisane relacije u ovom odeljku predstavljaju odgovarajuće funkcionalne zavisnosti za komponente napona koje se javljaju oko vrha prsline pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja. Pošto prisustvo napona oko vrha prsline prouzrokuje deformacije, odnosno pomeranja, onda je moguće formulisati i odgovarajuće funkcionalne zavisnosti za komponenta deformacija tj. pomaranja. Relacije za pomeranja oko vrha prsline mogu biti izvedene pomoću istih metoda kao što su one koje su korišćene prilikom formulisanja jednačina za komponente napone. Međutim, ukoliko je reč o dvodimenzionalnim problemima neophodno je razmatrati dva granična slučaja: ravno stanje napona i ravno stanje deformacije. U slučaju ravnog stanja napona, za napone normalne na površinu koja se posmatra pretpostavlja se da su jednaki nuli dok je deformacija u tom pravcu formulisana u obliku:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E}, \quad (2.3.48)$$

dok su σ_{33} , σ_{23} , σ_{13} , ε_{23} i ε_{13} svi jednaki nula.

Pretpostavka o ravnom stanju napona je najpribližnija aproksimacija za ponašanje tanke ploče na koju kao spoljašnje opterećenje u ravni deluje istezanje i smicanje. Kod malo debljih, ravnih/pljosnatih komponenti (najčešće uzorci za testiranje) se takođe pretpostavlja da je reč o slučaju ravnog stanja napona i to u oblastima neposredno uz površinu ploče. U slučaju da se materijal deformiše na taj način, dolazi do smanjenja napon po poprečnom preseku (odnosno debljini).

Kada je reč o ravnom stanju deformacije pretpostavljeno je da su deformacije normalne na posmatranu površinu nula, tako da relacija za napon u ovom pravcu može biti data u obliku:

$$\sigma_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.3.49)$$

dok su ε_{33} , ε_{23} , ε_{13} , σ_{23} i σ_{13} svi jednaki nuli. Pretpostavka o ravnom stanju deformacije je najbliža aproksimacija ponašanja materijala kod pljosnatih tela većih debljina.

Pošto su za određivanje komponenti napona korišćene kompleksne funkcije [4], iste funkcije mogu biti upotrebljene za formulisanje jednačina koje opisuju pomeranja. Konfiguracija prsline se razmatra kao dvodimenzionalni problem, tako da komponentne pomeranja moraju biti formulisane za dva granična slučaja. Upotrebom kompleksnih funkcija [4] jednačine za pomeranja kod dva granična slučaja mogu biti prikazana u obliku:

za slučaj ravnog stanja napona:

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \xi(z) - z \overline{\xi'(z)} - \overline{\psi'(z)} \right] \quad (2.3.50)$$

za slučaj ravnog stanja deformacije:

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[(3-4\nu) \xi(z) - z \overline{\xi'(z)} - \overline{\psi'(z)} \right]. \quad (2.3.51)$$

U slučaju kada je problem simetričan u odnosu na x osu, ovi izrazi mogu biti svedeni na izraze:

u slučaju ravnog stanja napona

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \xi(z) - \overline{\xi(z)} - (z-\bar{z}) \overline{\xi'(z)} + \beta \bar{z} \right] \quad (2.3.52)$$

tj.

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[(3-\nu)(1+\nu)^{-1} (\operatorname{Re}(\xi(z)) + \operatorname{Im}(\xi(z))) - (\operatorname{Re}(\xi(z)) - \operatorname{Im}(\xi(z))) - (x+iy) - (x-iy)(\operatorname{Re}(\xi'(z)) - \operatorname{Im}(\xi'(z))) + \beta(x-iy) \right]$$

a u slučaju ravnog stanja deformacije:

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[(3-4\nu) \xi(z) - \overline{\xi(z)} - (z-\bar{z}) \overline{\xi'(z)} + \beta \bar{z} \right]. \quad (2.3.53)$$

Pošto se i sa leve i sa desne strane jednačina (2.3.52) i (2.3.53) pojavljuju kompleksne funkcije moguće je razdvojiti realne i imaginarne članove. Na taj način je moguće dobiti odvojeno relacije za u_1 i u_2 . Prema tome, uvođenjem realnih i imaginarnih članova na desnoj strani jednačine (2.3.53) dobija se:

za slučaj ravnog stanja napona:

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{(3-\nu)-(1+\nu)}{(1+\nu)} (\operatorname{Re}(\xi(z))) + yi^2 \operatorname{Im}(2\xi'(z)) + \beta x \right] + \\ + i \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{(3-\nu)+(1+\nu)}{(1+\nu)} \operatorname{Im}(\xi(z)) - y \operatorname{Re}(2\xi'(z)) - \beta y \right]$$

a za slučaj ravnog stanja deformacije:

$$u_1 + iu_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[((3-4\nu)-1) (\operatorname{Re}(\xi(z))) + i^2 y \operatorname{Im}(2\xi'(z)) + \beta x \right] + \\ + i \frac{(1+\nu)}{E} \left[((3-4\nu)+1) \operatorname{Im}(\xi(z)) - y \operatorname{Re}(2\xi'(z)) - \beta y \right].$$

Pošto su u prethodne dve formulisane jednačine razdvojeni realni od imaginarnog dela kod kompleksne funkcije, moguće je odrediti izraze za pomeranja u_1 i u_2 :

u slučaju ravnog stanja napona:

$$u_1 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[2 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \operatorname{Re}(\xi(z)) - y \operatorname{Im}(2\xi'(z)) + \beta x \right] \quad (2.3.54)$$

$$u_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{4}{(1+\nu)} \operatorname{Im}(\xi(z)) - y \operatorname{Re}(2\xi'(z)) - \beta y \right] \quad (2.3.55)$$

u slučaju ravnog stanja deformacije:

$$u_1 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[2(1-2\nu) \operatorname{Re}(\xi(z)) - y \operatorname{Im}(2\xi'(z)) + \beta x \right] \quad (2.3.56)$$

$$u_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \left[4(1-\nu) \operatorname{Im}(\xi(z)) - y \operatorname{Re}(2\xi'(z)) - \beta y \right]. \quad (2.3.57)$$

Dobijeni izrazi za pomeranja u jednačinama (2.3.54), (2.3.55), (2.3.56) i (2.3.57) mogu biti prevedeni u izraze u kojim figurišu veličine kao što su: K_I , a , θ i to zamenom već definisanih jednačina za funkcije $\xi(z)$ i $\xi'(z)$ (jed. (2.3.37)-(2.3.42)), odnosno:

u slučaju ravnog stanja napona:

$$u_1 = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] - \frac{1-k}{E} \sigma (r \cos \theta + a) \quad (2.3.58)$$

$$u_2 = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{(1+\nu)} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{(1-k)\nu}{E} \sigma r \sin \theta \quad (2.3.59)$$

a u slučaju ravnog stanja deformacije:

$$u_1 = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] - \frac{1-k}{E} (1-\nu^2) \sigma (r \cos \theta + a) \quad (2.3.60)$$

$$u_2 = \frac{2(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1-\nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{1-k}{E} \nu(1+\nu) \sigma r \sin \theta \quad (2.3.61)$$

pri biaksijalnom opterećenju ploče (sl. 2.3). Za opšti slučaj dvodimenzionalne konfiguracije prsline, ovi izrazi postaju:

$$u_1 = \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{p-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{p+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{(1+\nu)}{4E} (1-k)(p+1) \sigma (r \cos \theta + a) \quad (2.3.62)$$

$$u_2 = \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{p+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-p}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{(1+\nu)}{4E} (1-k)(3-p) \sigma r \sin \theta \quad (2.3.63)$$

gde je: za slučaj ravnog stanja napona $p = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $\kappa = 3 - 4\nu$, a za slučaj ravnog stanja deformacije $p = (3 - 4\nu)$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Formulisane relacija u ovom poglavlju ukazuju da se kako komponente napona, tako i komponente pomeranja u slučaju konfiguracije oblika prsline mogu analizirati pomoću faktora intenziteta napona K_I , dužine prsline i ugla skretanja prsline θ . Osim toga, za praktičnu primenu bolje je koristiti za analizu širenja prsline jednačine pomoću kojih se određuju naponi, nego relacije za pomeranja, jer su naponi direktno proporcionalni spoljašnjem opterećenju.

3. MATEMATIČKO MODELIRANJE ŠIRENJA PRSLINE PRI ZAMORU

3.1 Opšte

Zamor kao posledica dejstva cikličnih opterećenja predstavlja složen proces i mora biti izuzetno pažljivo analiziran jer može dovesti do katastrofalnog loma elemenata struktura.

U praksi širenje prsline mora biti sprečeno na neki način, ustvari neophodno je da bude predviđeno kada će nastupiti i koliko će se prslina širiti usled dejstva cikličnih opterećenja, tj. širenje prsline mora biti kontrolisano. Definisane adekvatnih matematičkih modela za simulaciju širenja prsline je jedan od najvažnijih aspekata prilikom procene pouzdanosti komponenata i struktura. U ovom poglavlju su formulisani matematički modeli za simulaciju širenja prsline koji uključuju različite koncepte iz mehanike loma.

Kada je reč o analizi širenja prsline dve važne činjenice moraju biti ispunjene da bi se obezbedila otpornost materijala/strukture na proces širenje prsline pri zamoru. Prvo, gradijent širenja prsline bi trebalo da bude nizak i drugo, vidljive prsline bi trebalo da budu takve da one mogu biti pouzdano detektovane korišćenjem savremenih procedura/metoda sa visokim stepenom sigurnosti.

Analitički pristupi za opisivanje širenja prsline baziraju se na matematičkim modelima u kojim se uključuje zavisnost između gradijenta širenja prsline i dužine prsline, zatim veličina zone plastifikacije, odgovarajuće konstante materijala, napon i dimenzije uzorka/strukture. Relacije se primarno razlikuju po tipu i poziciji promenljive koju uključuju, kao i po uvedenim pretpostavkama. Neke od tih relacija će biti u ovom odeljku ukratko opisane da bi se pokazalo kakvog tipa mogu biti jednačine koje opisuju proces širenja prsline pri zamoru.

Jednu od prvih relacija za opisivanje širenja prsline predložio je Shanley [8,9] uočivši da se gradijent širenja prsline pri datom nivou napona/opterećenja može formulisati u opštem obliku:

$$\frac{da}{dN} = f_1(\sigma_a^n, a), \quad (3.1.1)$$

odnosno da je gradijent širenja prsline proporcionalan dužini prsline (što je bilo prilično proizvoljno i aproksimativno), ustvari relacija za gradijent širenja prsline može biti napisana u obliku funkcionalne zavisnosti:

$$\frac{da}{dN} = C_1 a \text{ ili } a = A e^{C_1 N}, \quad (3.1.2)$$

gde $C_1 = C_2 \sigma_a^n$, C_2 i n predstavljaju konstante određene eksperimentalnim putem, a N označava broj ciklusa do konačnog loma. Shanley je formulisanom relacijom pokazao da se gradijent širenja prsline može definisati kao stepena funkcija amplitudnog napona u kojoj stepen može biti bilo koji broj.

Međutim, proces širenja prsline je složen i prilikom analize širenja pri zamoru neophodno je uključiti pored amplitudnog napona i uslove oko vrha prsline. Orowan je definisao hipotezu o heterogenosti deformacije pri zamoru; heterogenost metala je po njemu prouzrokovana prisustvom ili oslabljenih oblasti ili metalurških ili mehaničkih defekata koji dovode do pojave lokalne koncentracije napona. Pojava lokalno deformacionog ojačanja je takva da onemogućava dalje deformisanje (i uslovljava nastajanje pada duktilnosti materijala), prouzrokujući da se prsline širi i posle izvesnog vremena može dovesti do loma.

Orowan-ov koncept o heterogenosti deformacije pri zamoru je upotrebio Head [10,11] prilikom formulisanja matematičkog modela za širenje prsline pri zamoru. U svom modelu Head je zanemario uticaj debljine, mikroskopske parametre, kao i Bauschinger-ov efekat. Pored toga, Head je pretpostavio sledeće: da je medium (telo) beskonačne širine, da je srednji napon nula kao i da je širenje zone plastifikacije oko vrha prsline nezavisno od dužine prsline (pretpostavka koja nije bila korekna). Na bazi definisanih pretpostavki Head je predložio relaciju za gradijent širenja prsline u kojoj su figurisale iste promenljive kao i u Shanley-ovoj jednačini, samo što zavisnost nije bila linearna funkcija od dužine prsline nego stepena (sa stepenom 3/2) ali i uz uvođenje novih parametara. Kao rezultat Head-ove analize procesa širenja prsline zakon širenja prsline može biti formulisan u obliku:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_3 \sigma_0^3 a^{3/2}}{(\sigma_y - \sigma_a)^2 a_0^{1/2}} \quad (3.1.3)$$

Osim toga, Head je pokazao da zavisnost između dužine prsline a i broja ciklusa opterećenja do loma N ima linearan karakter u slučaju da je reč o čelicima. U jednačini (3.1.3), σ_y predstavlja maksimalnu vrednost napona oko vrha prsline u zoni plastifikacije.

Sa druge strane, Weibull [12] je u isto vreme predložio matematički model za širenje prsline u kome se kao zavisno promenljiva u relaciji za gradijent širenja prsline pojavljuje fizička veličina neto napon, tako da funkcionalna zavisnost može u opštem obliku biti napisana kao:

$$\frac{da}{dN} = f_2(\sigma_{net}^n), \quad (3.1.4)$$

gde n predstavlja parametar koji se određuje eksperimentalnim pute i zavisi od tipa materijala.

Definisana zavisno promenljiva neto napon predstavlja vrednost napona po neto površini poprečnog preseka elementa strukture. Funkcionalna zavisnost između gradijenta širenja prsline i neto napona koju je formulisao Weibull definisana je jednačinom:

$$\frac{da}{dN} = C_3 \sigma_{net}^n \quad (3.1.5)$$

gde su C_3 i n konstante koje zavise od tipa materijala.

McEvilly i Illg [13] su razmatrali sasvim drugi oblik funkcionalne zavisnosti između napona oko vrha prsline i gradijenta širenja prsline. Njihova analiza je dovela do definisanja funkcionalne zavisnosti koja može biti napisana u opštem obliku:

$$\frac{da}{dN} = f_3(k_{teff}, \sigma_{net}^n, \sigma_e). \quad (3.1.6)$$

Iz opšte jednačine za gradijent širenja prsline (3.1.6) može se zaključiti da pored neto napona (što je bio slučaj kod Weibull-ovog matematičkog modela) figurišu kako efektivni faktor koncentracije k_{teff} tako i napon na granici izdržljivosti σ_e . Ustvari, McEvilly i Illg su formulisali jednačinu, na bazi rezultata dobijenih pri istraživanjima različitih slučajeva, u obliku funkcionalne zavisnosti:

$$\frac{da}{dN} = C_1 k_{teff} \sigma_{net} - C_2 - \frac{C_3}{k_{teff} \sigma_{net} - C_3}, \quad (3.1.7)$$

gde su C_1 , C_2 i C_3 konstante, a k_{teff} predstavlja efektivni faktor koncentracije napona. Uvođenjem efektivnog faktora koncentracije napona McEvilly i Illg su uključili u matematički model širenja prsline geometriju elementa strukture kao i prisustvo koncentracije koja značajno može uticati na pojavu loma pri zamoru.

U isto vreme kada su McEvilly i Illg predložili svoju relaciju Paris et al [14-18] su definisali relaciju za gradijent širenja prsline baziranu na linearno elastičnom modelu. Ova relacija može biti prikazana u opštem obliku, kao:

$$\frac{da}{dN} = f_4(K_I) = f_5(\sigma_a, a^{1/2}). \quad (3.1.8)$$

Ustvari, Paris et al. uvode kao zavisno promenljivu veličinu faktor intenziteta napona K_I . Tokom istraživanja Paris je uočio da relacija za gradijent širenja prsline može biti definisana kao funkcionalna zavisnost u kojoj kao zavisno promenljiva figuriše faktor intenziteta napona, odnosno:

$$\frac{da}{dN} = C_p \Delta K_I^{n_p} \quad (3.1.9)$$

gde su: ΔK_I - opseg faktora intenziteta napona, C_p i n_p - Paris-ove konstante za materijal koje se određuju eksperimentalnim putem.

Faktor intenziteta napona je uključen u analizu jer se na njega odražava uticaj kako spoljašnjeg opterećenja tako i konfiguracija oko vrha prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja/napona.

U današnje vreme relacija čiji je opšti oblik prikazan jednačinom (3.1.9) ima prednost prilikom primene u odnosu na sve ostale relacije zbog relativne jednostavnosti, ali i zbog činjenice da uključuje napon i dužinu prsline zahvaljujući uvođenju faktora intenziteta napona.

Paris-ova relacija u kojoj se kao zavisno promenljiva pojavljuje faktor intenziteta napona je do danas doživela različite modifikacije u zavisnosti od toga koji još dodatni pristupi se uvode. Paris je jednačinu za gradijent širenja prsline dobio eksperimentalnim putem tako da ona predstavlja relaciju koja je bazirana na empiriji. U mehanici loma postoji veliki broj funkcionalnih zavisnosti, dobijenih empirijskim putem, kojim se može opisati proces širenja prsline. Jedna takva jednačina je Foreman-ova [19] relacija definisana u obliku:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F (\Delta K_I)^{n_F}}{(1-R)K_{IC} - \Delta K_I}, \quad (3.1.10)$$

gde su: R - stepen asimetrije ciklusa, K_{IC} - lomna žilavost, a C_F i n_F - Foreman-ove konstante za materijal dobijene eksperimentalnim putem. Drugi primer je Pearson-ova [20] jednačina koja predstavlja funkcionalnu zavisnost oblika:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_{Pe} (\Delta K_I)^{n_{Pe}}}{[(1-R)K_{IC} - \Delta K_I]^{1/2}}. \quad (3.1.11)$$

gde su: C_{Pe} i n_{Pe} - Pearson-ove konstante materijala određene eksperimentalnim putem.

U ovom poglavlju su razvijeni matematički modeli za simulaciju širenja prsline bazirani na odgovarajućim relacijama za gradijent širenja prsline u kojim figurišu faktor intenziteta napona, dužina prsline i odgovarajuće konstante materijala. Prilikom definisanja modela analizirani su različiti koncepti, samim tim i uključeni različiti kriterijumi. kao Navier-ove jednačine.

3.2 Definisane algoritma za opisivanje pojave širenja prsline kao fizičkog proces

Matematički model za širenje prsline pri zamoru, razmatran u ovom poglavlju, zasniva se na principima mehanike loma. Prilikom razvijanja modela za širenje prsline moraju biti uvedene odgovarajuće fizičke veličine koje će omogućiti pogodno opisivanje matematičkim putem pojava nastalih usled dejstva cikličnih opterećenja. Pošto je reč o zamoru odnosno procesu koji nastaje i razvija se tokom vremena, a prouzrokovan je cikličnim opterećenjima, neophodno je prvo definisati ciklus pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja. Zamor kao proces, tokom vremena, je okarakterisan odgovarajućim brojem ciklusa koji mogu biti različitog nivoa. Prethodne činjenice uslovljavaju neophodnost uvođenja definicija kojim će se obezbediti adekvatno opisivanje prirode složenog procesa zamora.

Definicija 1

Pri zamoru k -ti ciklus je definisan u vremenskom intervalu:

$$\mathfrak{T}_k = \{ \tau \in R : \underline{\tau}_{k-1} < \tau \leq \underline{\tau}_k \} \text{ pri } \underline{\tau}_{k-1} < \bar{\tau}_k \leq \underline{\tau}_k, \quad (3.2.1)$$

gde $\underline{\tau}_k$ i $\bar{\tau}_k$ označavaju trenutke kada dolazi do dejstva minimalnog σ_{kmin} odnosno maksimalnog napona σ_{kmax} . k -ti ciklus pri zamoru je definisan odgovarajućim parom $(\sigma_{kmax}; \sigma_{kmin})$.

Primedba 1

Ciklus napona je određen maksimalnim naponom σ_{kmax} i minimalnim naponom σ_{kmin} . Frekvencija i oblik ciklusa napona nisu relevantni za širenje prsline kod duktilnih legura na sobnoj temperaturi [21]. Oblik funkcionalne zavisnosti opterećenja pri širenju prsline pretpostavljeno je da bude kompletno okarakterisan pikovima i dolinama primenjenog opterećenja/napona pri odgovarajućim temperaturama (npr. za Al legure obično je to

temperatura oko 30% manja od tačke topljenja, a kod gvožđa je ona jednaka sobnoj temperaturi).

Pre nego što se pristupi razvijanju matematičkog modela za širenje prsline pri zamoru, potrebno je dodati još jednu primedbu koja može biti od značaja kako prilikom formulisanja tako i za validnost modela:

Primedba 2

Trenutno širenje prsline prouzrokovano dejstvom spoljašnjeg cikličnog opterećenja na elementu strukture dovodi do promene gradijenta širenja prsline.

Sa aspekta mehanike loma [21,22] relacija za diferencijal da/dN (diferencijal dužine prsline po broju ciklusa tj. gradijent širenja prsline) koja se koristi za opisivanje dinamičkog ponašanja širenja prsline pri zamoru predstavlja vrlo važnu jednačinu prilikom uspostavljanja relacije između broja ciklusa i dužine prsline. Gradijent širenja prsline ustvari je definisan kao funkcionalna zavisnost od faktora intenziteta napona. Fizička veličina kao što je faktor intenziteta napona može biti određen samo ukoliko je definisan inkrement širenja prsline, tako da u toku k -tog ciklusa mogu biti formulisani:

$$\Delta a_k = a_k - a_{k-1} = h(\Delta K_k); \text{ gde je } h(0)=0 \quad (3.2.2)$$

$$\Delta K_k = Y(a_{k-1}, w) \Delta \sigma_k \sqrt{\pi a_{k-1}}, \quad (3.2.3)$$

gde a_{k-1} označava dužinu prsline, $\Delta \sigma_k$ predstavlja opseg spoljašnjeg primenjenog opterećenja ($\Delta \sigma_k = \sigma_{k \max} - \sigma_{k \min}$) za vreme k -tog ciklusa ukoliko je dužina prsline a_k ; $Y(a_{k-1}, w)$ je korektivni faktor kojim se uključuje uticaj oblika tj. geometrija elementa strukture koji sadrži prslinu. (Korektivni faktor predstavlja funkcionalnu zavisnost od npr. w - širine elementa strukture, a_k - dužine prsline itd.).

U dosadašnjim razmatranjima dužina širenja prsline Δa_k je veličina za koju se prslina produžila pri dejstvu k -tog ciklusa opterećenja. Ukoliko je potrebno odrediti koliko se prslina produžila pri ΔN ciklusa, srednja dužina za koju se produžila prslina po ciklusu bi trebalo da bude $\Delta a/\Delta N$ i predstavlja *gradijent širenja prskotine*. U slučaju kada $N \rightarrow 1$, gradijent širenja prsline može biti izražen kao diferencijal da/dN , tako da je u slučaju k -tog ciklusa:

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_k = g(\Delta K_k). \quad (3.2.4)$$

Jednačina za gradijent širenja prsline (3.2.4) je nelinearna diferencijalna jednačina prvog reda i opisuje zakon širenja prsline pri dejstvu maksimalnog $\sigma_{k \max}$ i minimalnog $\sigma_{k \min}$ opterećenja/napona na elementu strukture. Prema tome, u jednačini (3.2.4) i uključivanjem jednačine (3.2.3) dužina prsline a_k može se smatrati kao veličina stanja zbog fizičke prirode problema koji opisuje.

Prilikom formulisanja modela za širenje prsline u ovom radu veličine maksimalnog σ_{kmax} i minimalnog σ_{kmin} napona su uzete kao ulazne veličine. Obe veličine ustvari predstavljaju "pikove" i "doline" sinusne funkcije (sl. 1.1) kojom se opisuje spoljašnje opterećenje. Za dužinu prsline a_k se pretpostavlja da je merljiva i da se menja od ciklusa do ciklusa pri dejstvu spoljašnjeg cikličnog opterećenja. Ustvari, dužina prsline započinje širenje od inicijalne dužine a_0 i dalje se širi do neke tekuće dužine pri kojoj dolazi do loma elementa strukture. Osim toga, širjenje prsline i lom su prouzrokovani odgovarajućim brojem ciklusa spoljašnjeg opterećenja čiji karakter je sinusoidalno. Svaki opseg napona u spektru može biti smatran blokom opterećenja konstantne amplitude. Proračun prilikom analize širenja prsline bi trebalo realizovati na sledeći način:

1. Izabrati inicijalni blok sa $\Delta\sigma_k$;
2. Za inicijalnu dužinu prsline a_0 i datu geometriju, neophodno je proračunati ΔK_k ;
3. Uporediti ΔK_k sa faktorom praga zamora ΔK_{th} . Ukoliko je proračunati ΔK_k manji od praga zamora, nastaviti proračun sa drugim blokom spoljašnjeg cikličnog opterećenja. U slučaju da je primenjeni faktor intenziteta napona veći od praga zamora, nastaviti sa proračunima;
4. Proračunati inkrement dužine širenja prsline kao:

$$\Delta a_k = \frac{\Delta a}{\Delta N} * \text{dužina bloka}$$

gde su: Δa_k - inkrement dužine širenja prsline,
 $\Delta a/\Delta N$ - gradijent širenja prsline.

5. Izračunati nove dužine prsline prema relaciji:

$$a_{k+1} = a_k + \Delta a_k \tag{3.2.5}$$

gde je: a_k - tekuća dužina prsline,
 Δa_k - inkrement dužine prsline,
 a_{k+1} - nova dužina prsline.

6. Istu proceduru (od 1. do 5.) ponoviti za sledeći blok opterećenja. Posle prvog sprovođenja postupka od koraka 1. do 5., proračunati maksimalni faktor intenziteta napona K_{max} bi trebalo uporediti sa lomnom žilavošću materijala u koraku 3. Ukoliko je K_{max} veći od lomne žilavosti, proračun se prekida. Vrednost neto (čistog) napona dobijenog u odnosu na poprečni presek bi trebalo takođe izračunati i uporediti sa čvrstoćom pri razvlačenju (tj. zateznom čvrstoćom). U slučaju da je vrednost neto napona veća od čvrstoće pri razvlačenju, proračun se prekida. Broj ciklusa mora biti zatim sumiran za svaku razmatranu dužinu prsline.

3.3 Formulisanje pristupa za simulaciju širenja prsline pri zamoru

Zakoni širenja prsline u mehanici loma su razvijeni zahvaljujući primeni različitih kriterijumima, kod nekih je matematička interpretacija širenja prsline izvedena tako što je uvedena pretpostavka da je vrh prsline eliptičnog ili paraboličnog oblika. Kod drugih modela se gradijent širenja prsline razmatra kao funkcija različitih parametara koji se mogu najpre definisati, a onda i analizirati oko vrha prsline. Jedan takav parametar je na primer veličina zone plastifikacije. Pored prethodno spomenutih postoje kriterijumi koji razmatraju ciklična svojstva materijala oko vrha prsline prilikom definisanja zakona širenja prsline.

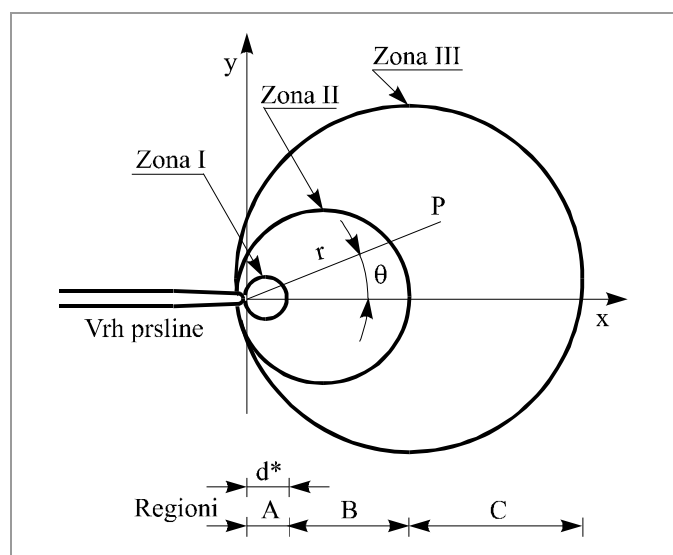
Uopšte za sve zakone u kojima se pomoću matematičkih modela simulira širenje prsline je zajedničko da se kao zavisno promenljiva uključuje faktor intenziteta napona. Zakone širenja prsline takvog tipa funkcionalne zavisnosti moguće je podeliti u nekoliko grupa: empirijski, zakoni bazirani na deformacijama oko vrha prsline, zakoni u kojim se razmatra geometrija oko vrha prsline, zakoni koji se baziraju na konceptu zatvaranja prsline, kao i zakoni u kojim je uključen koncept gustine energije derformacije.

U ovom radu je razvijeno više matematičkih modela za simulaciju širenja prsline u kojim su korišćeni različiti kriterijumi i koncepti sa aspekta mehanike loma. Formulirani modeli su zatim u Poglavlju 6 upoređeni, odnosno verifikovani pomoću odgovarajućih eksperimentalnih rezultata.

3.3.1 Pristup baziran na konceptu gustine energije derformacije

Matematički model za simulaciju širenja prsline koji je u ovom odeljku razvijen zahteva analizu stvarnog procesa širenja prsline. Sve fizičke pojave koje nastaju prilikom procesa širenja prsline moraju biti na neki način razdvojene i grupisane prema sličnosti pojave koja se događa. Samo na takav način se obezbeđuje adekvatna, a i lakša analiza vrlo složenog procesa širenja prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja.

Dosadašnja analiza procesa je pokazala da se sve fizičke pojave prilikom širenja događaju u malom području oko vrha prsline. Područje oko vrha prsline može biti podeljeno u tri oblasti u zavisnosti od toga kakve pojave se dešavaju u materijalu elementa strukture usled dejstva spoljašnjeg opterećenja. Na samom vrhu prsline nalazi se zona u kojoj dolazi do neproporcionalne plastifikacije i otvaranja vrha prsline, a nastala je kao posledica dejstva opterećenja i rasterećenja. Ova oblast oko vrha prsline je poznata kao tzv. zona procesa (sl. 3.1) [23-27].



Slika 3.1. Zone oko vrha prsline u kojim dolazi do oštećenja (zona I – zona procesa, zona II – ciklična zona plastifikacije, zona III – monotona zona plastifikacije).

Zona procesa obuhvata oblast u kojoj se odvija širenje prsline odnosno dolazi do akumulacije oštećenja, tako da je vrlo važno definisati prečnik zone procesa d^* . U literaturi po nekim autorima prečnik zone procesa d^* se smatra da je prilikom analize širenja prsline konstantna veličina [28,29], dok u nekim istraživanjima se razmatra kao promenljiva veličina koja zavisi od različitih parametara. U slučajevima kada je prečnik zone procesa promenljiv neophodno je definisati odgovarajuće funkcionalne zavisnosti, a kao primarni parametar se uključuje faktor intenziteta napona [25,30]. U ovom radu prilikom formulisanja matematičkog modela za simulaciju širenja prsline korišćena je relacija za prečnik zone procesa definisana u Ref. [30], odnosno:

$$d^* = \frac{\Delta K_I^2 - \Delta K_{th}^2}{\pi E \sigma_y'}, \quad (3.3.1)$$

gde su: σ_y' - napon pri razvlačenju, K_{th} - faktor intenziteta napona pri pragu zamora, E - Young-ov moduo elastičnosti.

Posle zone procesa oko vrha prsline definisana je oblast II koja se nalazi između ciklične zone plastifikacije i zone procesa (sl. 3.1). Osnovna karakteristika ove oblasti, sa aspekta mehanike loma, je da opsezi napona i deformacija mogu biti određeni pomoću HRR (Hutchinson, Rice, Rosengren) teorije o singularnosti polja napona [31,32]. Pored oblasti I i II oko vrha prsline, definisana je oblast III između ciklične zone plastifikacije i monotone zone plastifikacije (sl. 3.1). Prilikom formulisanja matematičkog modela za širenje prsline najvažnija, od spomenute tri oblasti oko vrha prsline, je zona procesa tako da će ona biti razmatrana. Nakon definisanja zone procesa tj. oblasti u kojoj dolazi do akumulacije oštećenja neophodno je analizirati sam proces širenja prsline sa fizičkog aspekta, a u cilju definisanja pogodnog koncepta.

Analiza realnog procesa širenja prsline pokazala je da se koncept neophodan za definisanje matematičkog modela, može zasnivati na činjenici da do širenja prsline za dužinu δa tokom jednog ciklusa opterećenja dolazi, kada je apsorbovana energije W_c u istom ciklusu dostigla vrednost energije rasipanja pri plastičnoj deformaciji u zoni procesa, odnosno:

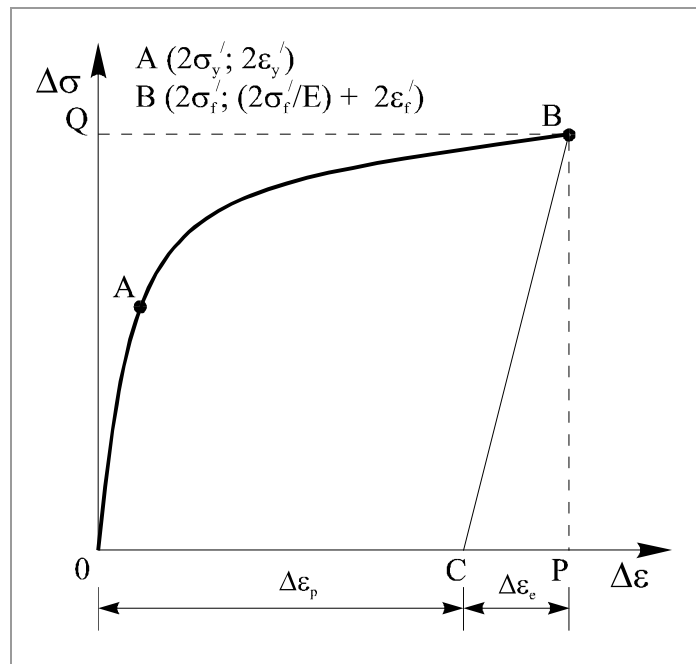
$$W_c \delta a = \omega_p, \quad (3.3.2)$$

gde je: W_c - apsorbovana energija do pojave loma, ω_p - energija rasipanja pri plastičnoj deformaciji po ciklusu i jedinici dužine. Da bi jednačina (3.3.2) bila kompletno definisana neophodno je formulirati relacije kako za apsorbovanu energiju do pojave loma W_c , tako i za energiju rasipanja pri plastičnoj deformaciji ω_p . Funkcionalne zavisnosti za W_c i ω_p zbog velike složenosti procesa širenja prsline moraju biti određene eksperimentalnim putem. Dosadašnja istraživanja koja se odnose na širenje prsline pri zamoru su pokazala da relacije za W_c i ω_p izuzetno dobro mogu biti definisane pomoću odgovarajućih parametara koji se obično koriste u slučaju analize nisko-cikličnog zamora.

Apsorbovana energija do pojave loma W_c može biti određena uz prethodno definisanje funkcionalne zavisnosti između napona i deformacije. Relacija kojom se može adekvatno opisati zavisnost između napona i deformacije je Ramberg-Osgood-ova jednačina, odnosno:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{k'}\right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (3.3.3)$$

gde je: E - Young-ov moduo elastičnosti, $\Delta\varepsilon$ - opseg deformacije, $\Delta\sigma$ - opseg napona, k' - koeficijent čvrstoće pri dejstvu cikličnog opterećenja; n' - eksponent deformacionog ojačanja pri cikličnom opterećenju. Konstante k' i n' predstavljaju parametre nisko-cikličnog zamora. Geometrijska interpretacija Ramberg-Osgood-ove jednačine u Dekartovom koordinatnom sistemu prikazana je na slici 3.2. Tačka A na slici 3.2 je definisana pomoću koordinata kao dvostruka vrednost napona i deformacije pri razvlačenju u slučaju dejstva cikličnog opterećenja tj. $(2\sigma_y', 2\varepsilon_y')$, dok je tačka B tačka koja odgovara opsegu napona $\Delta\sigma = 2\sigma_f'$ i opsegu deformacije $\Delta\varepsilon = ((2\sigma_f'/E) + 2\varepsilon_f')$ pri $2N_f=1$.



Slika 3.2. Ciklična kriva napon - deformacija.

Uspostavljena funkcionalna zavisnost između napona i deformacije omogućava određivanje apsorbovane energije do pojave loma W_c . Ustvari, površina definisana tačkama 0ABC0 (sl. 3.2) predstavlja apsorbovanu energiju do pojave loma W_c . Površina ispod krive 0AB tj. 0ABC0 može biti određena ukoliko se od površine 0ABC0 oduzme zbir površine 0ABQ0 kao i CBPC, odnosno:

$$W_c = 2\sigma_f' \left(\frac{2\sigma_f'}{E} + 2\varepsilon_f' \right) - \int_0^{2\sigma_f'} \Delta\varepsilon d(\Delta\sigma) - \frac{1}{2} \left(2\sigma_f' \frac{2\sigma_f'}{E} \right), \quad (3.3.4)$$

gde je: σ_f' - koeficijent čvrstoće pri zamoru, ε_f' - koeficijent duktilnosti pri zamoru. Posle integracije jednog od članova u jednačini (3.3.4), relacija za apsorbovanu energiju do pojave loma dobija oblik:

$$W_c = 2\sigma_f' \varepsilon_f' - \frac{4n'}{1+n'} \left(\frac{1}{k'} \right)^{1/n'} (\sigma_f')^{\frac{1+n'}{n'}} - \frac{2\sigma_f'}{E}. \quad (3.3.5)$$

U jednačini (3.3.5) poslednji član može biti zanemaren pošto je mnogo manji u odnosu na sve ostale članove. Osim toga, parametar ε'_f je moguće izraziti u funkciji od σ'_f tj.:

$$\varepsilon'_f = \left(\frac{\sigma'_f}{k'} \right)^{1/n'} , \quad (3.3.6)$$

tako da relacija za apsorbovanu energiju do pojave loma W_c može biti napisana u obliku:

$$W_c = \frac{4}{1+n'} \sigma'_f \varepsilon'_f . \quad (3.3.7)$$

Formulisana jednačina (3.3.7) predstavlja funkcionalnu zavisnost između apsorbovane energije do pojave loma W_c i odgovarajućih parametara koji se koriste prilikom analize problema u uslovima nisko-cikličnog zamora. Parametri nisko-cikličnog zamora (σ'_f , ε'_f , k' , n') su u principu poznate konstante koje se određuju eksperimentalnim putem za različite materijale.

Pored relacije za apsorbovanu energiju do pojave loma W_c neophodno je definisati i odgovarajuću funkcionalnu zavisnost za energiju rasipanja pri plastičnoj deformaciji po ciklusu i jedinici dužine, odnosno ω_p . Pre nego što se formuliše relacija ω_p neophodno je definisati polje napona oko vrha prsline.

Kao rezultat opsežnih teorijskih i eksperimentalnih analiza [33-35] napon u tački (r , θ) pri vrhu prsline može biti definisan pri $\theta = 0$ (sl. 3.1) pomoću sledeće jednačine:

$$\sigma_{hl} = \left(\frac{J k'^{1/n'}}{I_{n'} r} \right)^{n'} , \quad (3.3.8)$$

gde je: J - J integral (tj. integralna funkcija po konturi oko vrha prsline koja je proporcionalna kvadratu faktora intenziteta napona za odgovarajuću dužinu prsline. Na primer, u slučaju ravnog stanja deformacije funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona i J integrala ima oblik: $K_I = (JE/(1-\nu)^2)^{1/2}$, E - Young-ov moduo elastičnosti, ν - Poisson-ov koeficijent), $I_{n'}$ - konstanta koja zavisi od vrednosti n' , dok indksi h i l predstavljaju odgovarajuće komponente napona. Međutim pošto se u ovom odeljku razmatra Ramberg-Osgood-ova relacija (3.3.3) ukoliko se elastične deformacije zanemare u odnosu na plastične deformacije, naponi oko vrha prsline mogu biti određeni pomoću jednačine:

$$\sigma = k' e_p^{n'} , \quad (3.3.9)$$

gde je e_p - plastična deformacija. Uvođenjem relacije (3.3.9) pojednostavljeno je određivanje napona oko vrha prsline.

Definisano polje napona pomoću jednačine (3.3.8) omogućava određivanje lokalne gustine energije ω_p za različite vrednosti napona σ_{hl} . Do danas u literaturi je formulisan veliki broj relacija pomoću kojih je moguće odrediti lokalnu gustinu energije ω_p . Funkcionalne zavisnosti za lokalnu gustinu energije ω_p su u principu bazirane na HRR teoriji o singularnosti polja napona [33-35]. Ukoliko je gustina energije pri plastičnoj deformaciji definisana kao proizvod napona i deformacije onda relacija za lokalnu gustinu energije ω_p postaje:

$$\omega_p = \frac{1}{1+n'} \left(\frac{J}{I_{n'} r} \right) \psi, \quad (3.3.10)$$

gde je: ψ - konstanta zavisna od n' . Relacija za ω_p (3.3.10) može biti modifikovana i formulisana kao funkcionalna zavisnost od faktora intenziteta napona, odnosno:

$$\omega_p = \int_0^{d^*} \left(\frac{1-n'}{1+n'} \right) \frac{\Delta K_I^2 \psi}{E I_{n'}} dr. \quad (3.3.11)$$

U integralnoj jednačini (3.3.11) za lokalnu gustinu energije ω_p , granice određenog integrala moraju biti od 0 do d^* jer se širenje prsline događa u zoni procesa koja je definisana prečnikom d^* . Posle integracije jednačine (3.3.11), relacija za gustinu energije deformacije pri plastičnoj deformaciji može biti formulisana u obliku:

$$\omega_p = \left(\frac{1-n'}{1+n'} \right) \frac{\Delta K_I^2}{E I_{n'}} \psi. \quad (3.3.12)$$

Potrebne funkcionalne zavisnosti za gustinu energije deformacije ω_p i apsorbovanu energiju do pojave loma W_c su definisane jednačinama (3.3.7) i (3.3.12), tako da je moguće odrediti dužinu δa za koju se produžila prslina:

$$\delta a = \frac{da}{dN} = \frac{(1-n')\psi}{4 E I_{n'} \sigma_f' \varepsilon_f'} (K_{\max} - K_{th})^2. \quad (3.3.13)$$

Relacija (3.3.13) predstavlja jednačinu u slučaju kada dejstvuje opterećenje sa stepenom asimetrije $R = 0$. Spoljašnja opterećenja su obično različitog stepena asimetrije ciklusa tako da je neophodno uvesti dve korekcije za odgovarajuće faktore intenziteta napona odnosno: $K_{\max} = \Delta K$ i $K_{th} = \Delta K_{th}$ (jer je $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$, a u slučaju $R = 0$ onda mora biti $K_{\min} = 0$). Posle uvedenih korekcija funkcionalna zavisnost za δa postaje:

$$\delta a = \frac{da}{dN} = \frac{(1-n')\psi}{4 E I_{n'} \sigma_f' \varepsilon_f'} (\Delta K_I - \Delta K_{th})^2, \quad (3.3.14)$$

gde je ΔK_{th} - opseg faktora intenziteta pri pragu zamora i može biti određen pomoću relacije [36]:

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} (1-R)^\gamma, \quad (3.3.15)$$

gde je ΔK_{th0} - opseg faktora intenziteta pri pragu zamora kada je stepen asimetrije ciklusa $R = 0$, a γ - konstanta (za veliki broj materijala $\gamma = 0.71$ [37]).

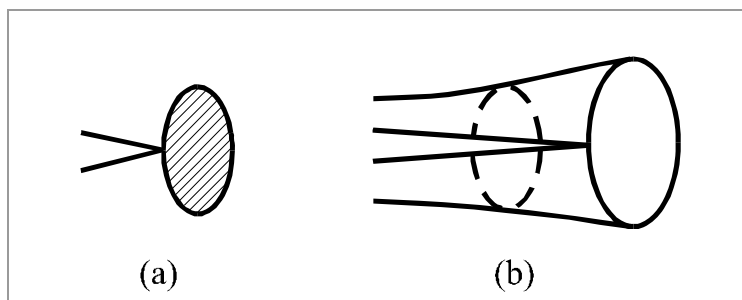
Relacija za gradijent širenja prsline definisana jednačinom (3.3.14) predstavlja funkcionalnu zavisnost između dužine prsline a , opsega faktora intenziteta napona ΔK_I i broja ciklusa N . Prilikom analize širenja prsline kod elementa strukture pomoću matematičke simulacije je moguće odrediti krajnju tj. kritičnu dužinu prsline kao i broj ciklusa pri kome nastupa lom. Prema tome, diferencijalna jednačina (3.3.14) mora biti integraljena odnosno:

$$N = \frac{4 E I_{n'} \sigma_f' \varepsilon_f'}{(1-n')\psi} \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{(\Delta K_I - \Delta K_{th})^2}, \quad (3.3.16)$$

gde je a_0 - inicijalna dužina prslina, a a_f - dužina prsline pri kojoj je nastupio lom usled dejstva cikličnog opterećenja. Podintegralna funkcija u jednačini (3.3.16) je složena tako da je prilikom određivanja broja ciklusa do pojave loma neophodno koristiti numeričke metode za rešavanje integralnih jednačina.

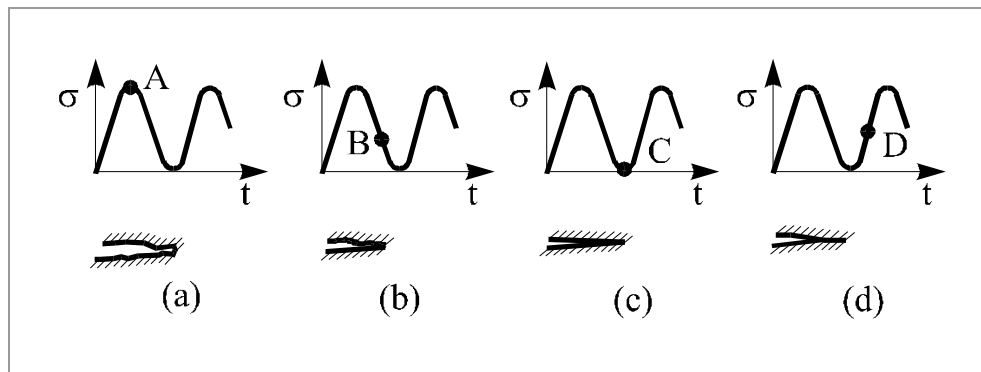
3.3.2 Pristup koji uključuje analizu napona oko vrha prsline i efekat zatvaranja prsline

U toku radnog veka na elemente strukture dejstvuju ciklična opterećenja i mogu inicirati prsline na mestima vrlo malih zareza (ogrebotina) ili mestima gde postoje drugi izvori koncentracije napona. Oko potencijalnih izvora koncentracije napona najpre dolazi do pojave razvlačenja, posle čega na istom mestu počinje širenje prsline. Oblast u blizini vrha prsline gde dolazi do pojave razvlačenja je definisana kao tzv. zona plastifikacije. Ciklična opterećenja zbog prirode dejstva mogu prouzrokovati u zoni plastifikacije pojavu koja je poznata kao zatvaranje prsline. Efekat zatvaranja prsline značajno može uticati na preostali vek elemenata strukture i ukoliko je moguće dobro je da se uključi u matematičke modele za simulaciju širenja prsline [38-43]. Oko inicirane prsline za plastično deformisani materijal može se definisati envelope u slučaju kada su spoljašnja opterećenja ciklična (sl. 3.3). Ova envelope sadrži zaostale pritiskajuće napone koji su prouzrokovani deformacijama nastalim usled dejstva zatezanja oko vrha prsline. Nastali zaostali pritiskajući naponi dovode do zatvaranja prsline, međutim oni će ipak biti savladani dejstvom spoljašnjih zatežućih opterećenja (tj. posle izvršenog kompletnog ciklusa) i usloviti otvaranje prsline (sl. 3.4).



Slika 3.3 Zona plastifikacije oko vrha prsline

(a) Zona plastifikacije oko vrha prsline, (b) Envelope zaostale plastične deformacije u iniciranoj prslini koja se širi.



Slika 3.4 Proces zatvaranja prsline

(a) Vrh prsline je otvoren, (b) Vrh prsline počinje da se zatvara, (c) Prslina se i dalje zatvara, (d) Vrh prsline počinje da se otvara.

Fenomen zatvaranja prslina je prvi istražio Elber [44] i došao do zaključka da intenzitet zatvaranja prslina zavisi od stepena asimetrije ciklusa R . Osim toga, Elber je uočio da ciklus opterećenja utiče na širenje prslina samo ukoliko je prslina potpuno otvorena. On je smatrao da ukoliko se prslina širi, zatvaranje prslina nastaje kao rezultat preostale plastifikacije deformisanog materijala duž putanje širenja prslina. Elber uvodi koncept zatvaranja prslina u kome se kao parametar mehanike loma razmatra efektivni faktor intenziteta napona. Ustvari, koncept zatvaranja prslina po Elber-u se bazira na Paris-ovom zakonu širenja prslina (3.1.9) samo što se umesto faktora intenziteta napona uvodi efektivni faktor intenziteta napona, tako da relacija za gradijent širenja prslina može biti definisana u obliku:

$$\frac{da}{dN} = C_e (\Delta K_{eff})^{n_e} \quad (3.3.17)$$

gde je: ΔK_{eff} - opseg efektivnog faktor intenziteta napona, C_e i n_e - parametri materijala dobijeni eksperimentalnim putem. Opseg efektivnog faktora intenziteta napona je parametar mehanike loma koji može biti definisan na različite načine kao funkcija od stepena asimetrije ciklusa R i opsega faktora intenziteta napona ΔK_I . Relacije za efektivni faktor intenziteta napona, koje će biti uključene prilikom matematičkog modeliranja širenja prslina su definisane u odeljku 3.3.3. U Poglavlju 6 je izvršeno upoređenje rezultata za broj ciklusa do konačnog loma dobijenih simulacijom, u slučaju primene različitih relacija za efektivni faktor intenziteta napona, sa eksperimentalnim rezultatima.

Zakon širenja prslina definisan diferencijalnom jednačinom (3.3.17) predstavlja relaciju koja je dobijena empirijskim putem. Međutim, u ovom radu je prilikom simulacije širenja prslina pored empirijskih relacija za zakon širenja prslina koje uključuju efekat zatvaranja prslina definisan matematički model baziran na analizi napona oko vrha prslina u toku dejstva cikličnog opterećenja. Sa aspekta mehanike loma raspodele napona i deformacija oko vrha prslina mogu biti razmatrane kao adekvatni parametri prilikom analize i opisivanja mehanizma širenja prslina. Oblast oko vrha prslina značajna za širenje prslina i koja mora biti analizirana je tzv. zona plastifikacije. Rice [45] je formulisao relacije pomoću kojih je moguće analizirati raspodelu napona i deformacija u blizini vrha prslina uz uključivanje efekta ojačanja. U ovom radu su korišćene relacije koje je definisao Rice prilikom formulisanja pristupa, tj. matematičkog modela, na bazi koga je moguće opisati mehanizam širenja prslina.

Relacije za određivanje deformacija i napona unutar zone plastifikacije u neposrednoj blizini vrha prslina mogu biti definisane u obliku:

$$\varepsilon = \varepsilon_y \left(\frac{K_I^2}{(1+n)\pi\sigma_y^2 x} \right)^{\frac{1}{(1+n)}}, \quad (3.3.18)$$

$$\sigma = \sigma_y \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right)^n, \quad (3.3.19)$$

gde je: σ_y - napon na granici plastičnog tečenja (popuštanja), ε_y - deformacija na granici plastičnog tečenja (popuštanja).

Formulisane relacije za određivanje deformacija i napona oko vrha prsline bi trebalo da budu izražene u funkciji veličine zone plastifikacije. Relacija koja definiše veličinu zone plastifikacije može biti data u obliku funkcionalne zavisnosti:

$$\omega = \frac{K_I^2}{(1+n)\pi\sigma_y^2}. \quad (3.3.20)$$

Jednačina za veličinu zone plastifikacije predstavlja funkcionalnu zavisnost u kojoj je pored faktora intenziteta napona K_I uključen i napon σ_y . Međutim, uslov za kompatibilnost deformacija zahteva da se umesto napona σ_y uvede deformacija ε_y . Relacija koja može biti korišćena kao funkcionalna zavisnost između napona i deformacije je:

$$\sigma_y = \varepsilon_y E.$$

Prema tome, relacija za veličinu zone plastifikacije može biti napisana u obliku:

$$\omega = \frac{K_I^2}{(1+n)\pi\varepsilon_y^2 E^2}. \quad (3.3.21)$$

Rešavanjem relacije za veličinu zone plastifikacije (3.3.21) po faktorom intenziteta napona i zamenom u jednačine (3.3.18) i (3.3.19) koje definišu raspodelu deformacije i napona oko vrha prsline dobija se:

$$\varepsilon = \varepsilon_y \left(\frac{\omega}{x} \right)^{\frac{1}{1+n}} \quad (3.3.22)$$

$$\sigma = \sigma_y \left(\frac{\omega}{x} \right)^{\frac{1}{1+n}}. \quad (3.3.23)$$

Prilikom formulisanja pristupa kojim se opisuje mehanizam širenja prsline pored relacija za raspodelu napona potrebno je definisati i funkcionalnu zavisnost za zakon širenja tj. gradijent širenja. Relacija za gradijent širenja prsline može biti razvijena uvođenje odgovarajućih pretpostavki. Pretpostavka od koje bi moglo da se poče prilikom definisanja zakona širenja je da do širenja prsline u elementu strukture dolazi, ukoliko apsorbovana energija po jedinici zapremine dostigne specifičnu odnosno kritičnu vrednost. Uvedena veličina predstavlja odgovarajuću karakteristiku za svaki materijal. Ova karakteristika materijala je definisana kao specifična energija pri lomu W_{pc} i može biti dobijena eksperimentalnim putem.

Eksperimentalna istraživanja Gillemot-a [46] su pokazala da bi prslina trebalo da se širi ukoliko je količina specifične energije (karakteristika testiranog materijala) W_{pc} , apsorbovana u zoni plastifikacije, prouzrokovala najpre da se prslina inicira prilikom dejstva cikličnog opterećenja. Prema tome, jednačina ravnoteže pri dejstvu monotonog opterećenja u slučaju da se prslina produžila za da , može biti formulisana na sledeći način:

Energija oslobođena prilikom širenja prsline je jednaka energiji apsorbovanoj u zoni plastifikacije, tj.

$W_{pc} da =$ Energija apsorbovana u monotonnoj zoni plastifikacije,
odnosno

$$W_{pc} da = \int_0^{\omega} \sigma \varepsilon dr, \quad (3.3.24)$$

gde je ω veličina monotone zone plastifikacije, dok su σ i ε vrednosti napona i deformacije u monotonoj zoni plastifikacije.

Veličina W_{pc} može biti određena kao površina ispod krive na $\sigma - \varepsilon$ dijagramu (sl.3.5) [47], koji je dobijen eksperimentalno pri dejstvu istezanja (površina OYFBO). Ukoliko se nivo napona smanji od F do O' dolazi do gubitka energije pri elastičnoj deformaciji.

Posle dejstva podopterećenja neto oslobođena energija W'_{pc} može biti određena kao:

$$W'_{pc} = \text{Površina OYFBO} - \text{Površina FB O'F} \quad (3.3.25)$$

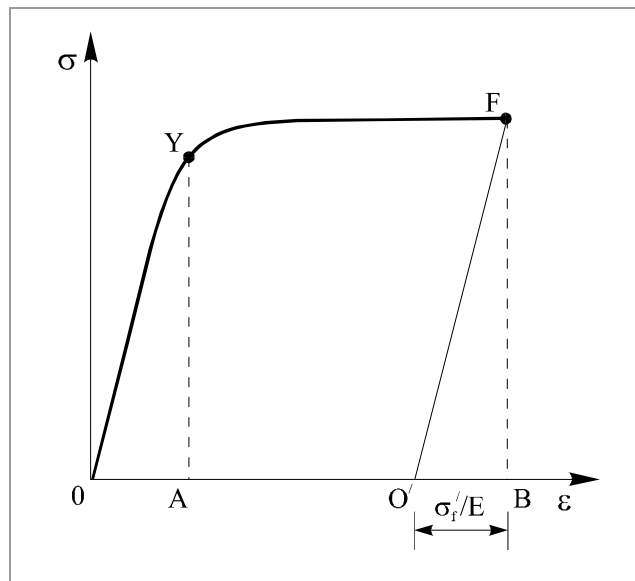
$$W'_{pc} = W_{pc} - \text{Površina FB O'F}. \quad (3.3.26)$$

Sa $\sigma - \varepsilon$ dijagrama se uočava da veličina W_c može biti izračunata kao zbir dve površine tj. površine ispod OY i YF, odnosno:

$$W_{pc} = \text{Površina OYAO} + \text{Površina AYFBA}. \quad (3.3.27)$$

Oslobođena energija W'_{pc} može biti izračunata ako se jednačina (3.3.27) zameni u jednačinu (3.3.26), tj.:

$$W'_{pc} = \text{Površina OYAO} + \text{Površina AYFBA} - \text{Površina FB O'F}. \quad (3.3.28)$$



Slika 3.5 Funkcionalna zavisnost između napona i deformacije.

Funkcionalna zavisnost koja opisuje ponašanje materijala (definisana $\sigma - \varepsilon$ dijagramom) za deo krive od Y do F, može biti formulisana u obliku:

$$\sigma = K^0 \varepsilon^n. \quad (3.3.29)$$

Upotrebom jednačine (3.3.29), oslobođena energija W'_{pc} može biti formulisana relacijom:

$$\begin{aligned}
W_{pc}^I &= \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_f} K^0 d\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma_f \left(\varepsilon_f - \frac{\sigma_f}{E} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{K^0 \varepsilon_f^{1+n}}{(1+n)} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_f} \right)^{1+n} \right) - \frac{1}{2} \sigma_f \left(\varepsilon_f - \frac{\sigma_f}{E} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Član $(\varepsilon_y/\varepsilon_f)^{1+n}$ je mnogo manji od jedinice (izraz u zagradi) tako da može biti zanemaren, odnosno:

$$W_{pc}^I = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{K^0 \varepsilon_f^{1+n}}{1+n} - \frac{1}{2} \sigma_f \left(\varepsilon_f - \frac{\sigma_f}{E} \right). \tag{3.3.31}$$

U jednačini (3.3.31) neophodno je izraziti K^0 u funkciji σ_y i ε_y , prema tome u tački razvlačenja i primenom jednačine (3.3.29) dobija se:

$$K^0 = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y^n},$$

zamenom izraza za K^0 u jednačinu (3.3.31), relacija za oslobođenu energiju W_{pc}^I postaje:

$$W_{pc}^I = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{\sigma_y \varepsilon_f}{(1+n)} \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} \right)^n - \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f + \frac{1}{2} \frac{\sigma_f^2}{E}. \tag{3.3.32}$$

Proračuni su pokazali da kod skoro svih materijala zbir prvog i poslednjeg člana u jednačini (3.3.32), iznosi 0.30÷4 % od ukupnog zbira svih članova. Prema tome, prvi i četvrti član mogu biti zanemareni, odnosno:

$$\begin{aligned}
W_{pc}^I &= \frac{\sigma_y \varepsilon_f}{(1+n)} \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} \right)^n - \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f = \\
&= \frac{\sigma_y \varepsilon_f}{2(1+n)} \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_y} \right)^n \left(2 - (1+n) \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_f} \right)^n \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

U slučaju dejstva cikličnog opterećenja, neto oslobođena energija po ciklusu W_{pc}^{II} može biti određena definisanjem odgovarajućih veličina. Pošto je reč o cikličnom tj. povratnom opterećenju, neophodno je koristiti $2\sigma_y$ umesto σ_y , $2\sigma_f$ umesto σ_f i $\varepsilon_y \approx 2\varepsilon_y$. Relacija za neto oslobođenu energija po ciklusu W_{pc}^{II} se može formulisati u obliku:

$$W_{pc}^{II} = \frac{\sigma_y \varepsilon_f}{2(1+n)} \left(\frac{\varepsilon_f}{2\varepsilon_y} \right)^n \left(2 - \frac{(1+n)\sigma_f}{\sigma_y} \left(\frac{2\varepsilon_y}{\varepsilon_f} \right)^n \right). \tag{3.3.34}$$

Osim toga, pri dejstvu cikličnih opterećenja jednačina ravnoteže (3.3.24) mora biti modifikovana na sledeći način:

$W_{pc}^{II} da$ = Energija apsorbovana u cikličnoj zoni plastifikacije,
odnosno

$$W_{pc}^{II} da = \int_0^{\Delta\omega} \Delta\sigma \Delta\varepsilon dr, \tag{3.3.35}$$

gde je $\Delta\omega$ veličina ciklične zone plastifikacije, a $\Delta\sigma$ i $\Delta\varepsilon$ predstavljaju opseg napona i deformacije u cikličnoj zoni plastifikacije. Integralna jednačina (3.3.35) može biti rešena ukoliko se opseg napona i opseg deformacije izraze u funkciji adekvatnih veličina, odnosno:

$$\Delta\sigma = 2\sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right), \quad (3.3.36)$$

$$\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_y \left(\frac{\Delta\omega}{r} \right)^{\frac{1}{1+n}}. \quad (3.3.37)$$

Zamenom relacija za opseg napona $\Delta\sigma$ (3.3.36) i opseg deformacija $\Delta\varepsilon$ (3.3.37), integralna jednačina za neto oslobođenu energiju po ciklusu W_{pc}^{II} može biti napisana u obliku:

$$W_{pc}^{II} da = \int_0^{\Delta\omega} 2\sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right) 2\varepsilon_y \left(\frac{\Delta\omega}{r} \right)^{\frac{1}{1+n}} dr. \quad (3.3.38)$$

Posle integracije jednačina (3.3.38) za neto oslobođenu energiju po ciklusu postaje:

$$W_{pc}^{II} da = \frac{4\sigma_y \varepsilon_y (1+n) \Delta\omega \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)}{n}. \quad (3.3.39)$$

Dužina za koju se produžila prslina može biti određena iz jednačine (3.3.39), tj.:

$$da = \frac{4\sigma_y \varepsilon_y (1+n) \Delta\omega \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)}{n W_{pc}^{II}}. \quad (3.3.40)$$

U jednačini (3.3.40) veličina ciklične zone plastifikacije $\Delta\omega$ bi trebalo da bude izražena na isti način kao što je već urađeno (u jednačini $\sigma_y = \varepsilon_y E$). Pošto je reč o cikličnom (povratnom) opterećenju onda se umesto σ_y uvodi $2\sigma_y$, σ_f se zamenjuje sa $2\sigma_f$ i $\varepsilon_y \approx 2\varepsilon_f$, a relacija pomoću koje je moguće odrediti veličinu ciklične zone plastifikacije postaje:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta K_I^2}{(1+n) \pi \varepsilon_y^2 E^2}. \quad (3.3.41)$$

gde je ΔK_I opseg faktora intenziteta napona.

Ukoliko se dobijena relacija za veličinu ciklične plastične zone (3.3.41) uvrsti u jednačinu (3.3.40) dobija se:

$$da = \frac{4\sigma_y \varepsilon_y (1+n) \Delta K_I^2 \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)}{4n(1+n) \pi \varepsilon_y^2 E^2 W_{pc}^{II}}, \quad (3.3.42)$$

odnosno

$$da = \frac{\Delta K_I^2 \sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)}{\pi n \varepsilon_y E^2 W_{pc}^{II}}. \quad (3.3.43)$$

U jednačini (3.3.43) neophodno je uvrstiti relaciju koja definiše neto oslobođenu energiju po ciklusu (3.3.34), tako da jednačina za dužinu inkrementa pri širenju prsline može biti napisana kao:

$$da = \frac{\Delta K_I^2 2^n (1+n) \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y}\right)}{\pi n \varepsilon_y^{1-n} E^2 \varepsilon_f^{1+n} \left[2 - \frac{(1+n)\sigma_f}{\sigma_y} \left(\frac{2\varepsilon_y}{\varepsilon_f}\right)^n\right]}. \quad (3.3.44)$$

U jednačini (3.3.44) figuriše veliki broj konstanti koje predstavljaju karakteristike materijala i zbog lakšeg računanja mogu biti grupisane u jednu konstantu koja je definisana kao količnik (A_1/A_2), gde su A_1 i A_2 konstante definisane izrazima:

$$A_1 = (1+n) \left(1 + \frac{\sigma_f}{\sigma_y}\right), \quad (3.3.45)$$

$$A_2 = 2 - \frac{(1+n)\sigma_f}{\sigma_y} \left(\frac{2\varepsilon_y}{\varepsilon_f}\right). \quad (3.3.46)$$

Konstante A_1 i A_2 mogu biti određene ukoliko su poznate karakteristike materijala kao što su: n , σ_f , σ_y , ε_f i ε_y (na primer [48], za Al leguru 2024 T3: $A_1 = 2.62$, $A_2 = 1.03$, $A_1/A_2 = 2.54$; za Al leguru 7075 T6: $A_1 = 2.34$, $A_2 = 1.01$, $A_1/A_2 = 2.32$; za čelik 4340: $A_1 = 2.46$, $A_2 = 1.13$, $A_1/A_2 = 2.17$). Analiza dobijenih vrednosti za količnik (A_1/A_2) pokazuje da su one za različite materijale vrlo bliske, tako da je moguće izračunati i koristiti srednju vrednost. Za razmatranih 12 različitih materijala [48] dobijena je srednja vrednost za $A_1/A_2 = 2.20$. Ukoliko se dobijena vrednost za A_1/A_2 uvrsti u relaciju koja definiše zakon širenja prsline, funkcionalna zavisnost za gradijent širenja prsline postaje:

$$\frac{da}{dN} = \frac{2.2 \Delta K_I^2 2^n}{\pi n \varepsilon_y^{1-n} E^2 \varepsilon_f^{1+n}}. \quad (3.3.47)$$

Gradijent širenja prsline formulisan relacijom (3.3.47) može biti modifikovan tako da zakon širenja prsline uključi efekat zatvaranja prsline. Efekat zatvaranja prsline je moguće uključiti u zakon širenja prsline ukoliko se umesto faktora intenziteta napona uvede efektivni faktor intenziteta napona, odnosno:

$$\frac{da}{dN} = \frac{2.2 \Delta K_{eff}^2 2^n}{\pi n \varepsilon_y^{1-n} E^2 \varepsilon_f^{1+n}}. \quad (3.3.48)$$

U jednačini (3.3.48) ako se uvede pretpostavka da je $n = 1$, onda relacija za gradijent širenja prsline dobija oblik:

$$\frac{da}{dN} = \frac{4.4 (\Delta K_{eff})^2}{\pi E^2 \varepsilon_f^2}. \quad (3.3.49)$$

Zakon širenja prsline definisan jednačinom (3.3.49) u koji je uključen efekat zatvaranja prsline može se koristiti za određivanje broja ciklusa do konačnog loma elementa strukture sa prslinom. Broj ciklusa do konačnog loma je moguće odrediti ukoliko se u relaciji za gradijent širenja prsline definiše adekvatna relacija za efektivni faktor intenziteta napona kao funkcionalna zavisnost od dužine prsline a . Dobijena diferencijalna jednačina za gradijent širenja prsline se zatim integriše tako da granice

određenog integrala idu od inicijalne dužine prsline a_0 do konačne dužine prsline a_f , prema tome broj ciklusa do konačnog loma može biti određen kao:

$$N = \frac{\pi E^2 \varepsilon_f^2}{4.4} \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{(\Delta K_{eff})^2}. \quad (3.3.50)$$

Relacije za efektivni faktor intenziteta napona su složene funkcije tako da integralna jednačina (3.3.50) za izabranu geometriju elementa strukture i definisano spoljašnje opterećenje mora biti rešena primenom Simpson-ove metode za numeričku integraciju.

3.3.3 Faktor intenziteta napona i efekat zatvaranja prsline

Širenje prsline kao složen proces ukoliko se razmatra sa aspekta mehanike loma mora uključiti važne parametre kao što su: geometrija elementa strukture sa prslinom, tip spoljašnjeg opterećenja i vrstu materijala. Kada je reč o zakonima širenja, fizička veličina poznata kao faktor intenziteta napona uključuje u razmatranje geometriju elementa strukture i tip spoljašnjeg opterećenja. Faktor intenziteta napona može biti određen primenom analitičkih i/ili numeričkih pristupa. Ukoliko se razmatraju elementi strukture jednostavnije geometrije koriste se analitički, a u slučaju složenih geometrija i/ili opterećenja koriste se adekvatni numerički pristupi. U ovom radu razmatrana su oba pristupa pri analizi širenja prsline.

Prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline, relacija za faktor intenziteta napona formulisana u mehanici loma [21], definisana je u obliku funkcionalne zavisnosti:

$$\Delta K_I = Y \Delta \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (3.3.51)$$

gde je: $\Delta \sigma$ - opseg nominalnog napon; Y - korektivna funkcija; a - dužina prsline. U matematičkim modelima za simulaciju širenja prsline vrlo je važno adekvatno formulisati korektivnu funkciju jer se pomoću nje uključuje geometrija elementa strukture. Korektivne funkcije u jednačini za faktor intenziteta napona mogu biti dobijene numeričkom interpolacijom odgovarajućih vrednosti datih u priručnicima (u obliku tabela ili dijagrama) ili primenom pogodnih numeričkih metoda kao što je npr. metoda konačnih elemenata.

Analitičke relacije za faktore intenziteta napona elementa strukture koji su analizirani u ovom rad (v. Poglavlje 6) date su u Tabeli 3.1. Osim toga u istom poglavlju razvijene su nove funkcionalne zavisnosti za faktore intenziteta napona u slučaju dejstva složenog spoljašnjeg opterećenja (kao što je biaksijalno) primenom metode konačnih elemenata.

Međutim, s obzirom na činjenicu da se u ovom radu razmatra širenje prsline uz uključivanje efekta zatvaranja prsline (v. odeljak 3.3.2) u matematičkom modelu za simulaciju neophodno je u zakon širenja uvesti i analizirati efektivni faktor intenziteta napona. Efektivni faktor intenziteta napona je definisan kao vrednost faktora intenziteta napona koja je umanjena za tzv. faktor intenziteta napona pri otvaranju prsline K_{op} (vrednost kada se prslina prvi put potpuno otvorila).

Uopšte, vrednost K_{op} je zavisna od stepena asimetrije ciklusa R . U matematičkim modelima za simulaciju širenja koji uključuju efekat zatvaranja prsline efektivni faktor intenziteta napona može biti napisan u opštem obliku:

$$\Delta K_{eff} = f(R, \dots) \Delta K_I, \quad (3.3.52)$$

gde je: $f(R, \dots) \leq 1.0$ - funkcija zavisna od stepena asimetrije ciklusa, materijala, geometrije itd.

Efekat zatvaranja prsline je prvi analizirao Elber [44] i u svojim istaživanjima je najpre utvrdio da nivo napona pri kome dolazi do otvaranja prsline zavisi od stepena asimetrije ciklusa R , zatim je definisao efektivni faktor intenziteta napona u funkciji stepena asimetrije ciklusa R i opsega faktora intenziteta napona ΔK_I , tj.:

$$\Delta K_{eff} = (0.5 + 0.4R) \Delta K_I. \quad (3.3.53)$$

Schjive [49] je na bazi izvedenih eksperimenata predložio funkcionalnu zavisnost za efektivni faktor intenziteta napona sličnog oblika, odnosno:

$$\Delta K_{eff} = (0.55 + 0.33R + 0.12R^2) \Delta K_I. \quad (3.3.54)$$

Efektivni faktor intenziteta napona pored toga što zavisi od stepena asimetrije ciklusa R i opsega faktora intenziteta napona ΔK_I može zavisiti i od npr. maksimalnog faktora intenziteta napona K_{max} . Jednu takvu relaciju za efektivni faktor intenziteta napona, baziranu na naponima oko vrha prsline, formulisali su Sehitoglu i Sun [50,51]. Ustvari, Sehitoglu i Sun su sugerisali da se tačka otvaranja prsline mora uzeti tamo gde na celu ravan prsline dejstvuje napon zatezanja. Oni su u istraživanjima odredili tačku gde napon oko vrha prsline postaje zatežući, K_{tt} (SS model). Pored toga, Sehitoglu i Sun su otkrili da oko vrha prsline faktor intenziteta napona zatezanja može predstavljati efektivni faktor intenziteta, tj.:

$$\Delta K_{eff} = \Delta K_{tt} = K_{max} - \frac{K_{ttop} + K_{ttcl}}{2} = \left(1 - 0.5 \left(\frac{K_{ttop}}{K_{max}} + \frac{K_{ttcl}}{K_{max}} \right) \right) K_{max} \quad (3.3.55)$$

gde je:

K_{ttop} - faktor intenziteta napona zatezanja pri otvaranju vrha prsline, tj.

$$\frac{K_{ttop}}{K_{max}} = 0.426 + 0.6058R - 0.7177R^2, \quad (3.3.56)$$

K_{ttcl} - faktor intenziteta napona zatezanja pri zatvaranju vrha prsline, odnosno

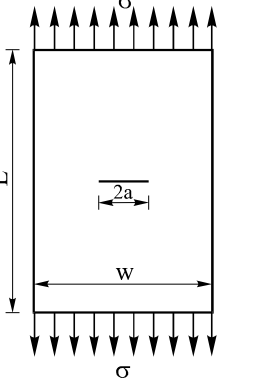
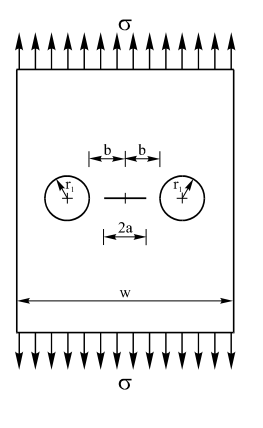
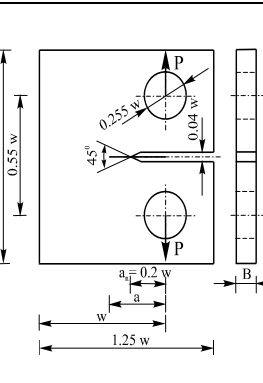
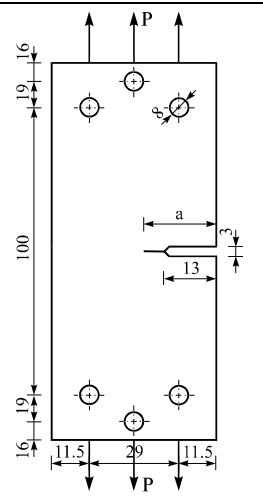
$$\frac{K_{ttcl}}{K_{max}} = 0.1146 - 0.0699R + 0.4279R^2. \quad (3.3.57)$$

Jednačine (3.3.55), (3.3.56) i (3.3.57) pokazuju da se faktor intenziteta napona zatezanja oko vrha prsline K_{tt} može izraziti u funkciji faktora intenziteta napona zatezanja pri otvaranju vrha prsline K_{ttop} , faktora intenziteta napona zatezanja pri zatvaranju vrha prsline K_{ttcl} , odnosno stepena asimetrije ciklusa R i maksimalnog faktora intenziteta napona K_{max} .

Definisane relacije za efektivni faktor intenziteta napona, u ovom odeljku, su korišćene prilikom formulisanja matematičkih modela za simulaciju širenja prsline u koje je uključen efekat zatvaranja prsline. Osim toga, zatvaranje prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja može biti adekvatno analizirano primenom numeričkih pristupa. Ustvari,

upotrebom npr. metode konačnih elemenata moguće je simulirati zatvaranje prsline pomoću diskretnog broja inkremenata dužine prsline [52-55]. Prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline pomoću metode konačnih elementa mogu biti korišćene različite promenljive kao što su: tip konačnog elementa, veličina mreže, određivanje nivoa za koji se otvorila prsina, konstitutivni model [54]. U ovom radu za simulaciju zatvaranja prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja korišćeni su Q-P singularni konačni elementi [55]. Numerički pristup baziran na metodi konačnih elemenata je korišćen radi modifikovanja relacija za efektivni faktor intenziteta napona koje su definisane u okviru ovog odeljka, a u cilju poboljšanja matematičkih modela za simulaciju širenja prsline. Poboljšanja za efektivni faktor intenziteta napona (samim tim i matematičkih modela za simulaciju širenja) dobijena primenom metode konačnih elemenata su prikazana u okviru numeričkih primera (v. Poglavlje 6).

Tabela 3.1 Faktori intenziteta napona za različite geometrije uzoraka.

<p>CC uzorak</p>		$\Delta K_I = \left(1 + 0.256 \left(\frac{a}{w} \right) - 1.152 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + 12.2 \left(\frac{a}{w} \right)^3 \right) \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$ <p>gde je: $\Delta \sigma$ – opseg nominalnog napona w – širina ploče a – dužina prsline</p>
<p>Tanka ploča sa dva otvora i jednom prslinom</p>		$\Delta K_I = \left(1.08899 + 0.04369 \left(\frac{a}{b} \right) - 1.77302 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 9.21212 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 15.8683 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 9.48718 \left(\frac{a}{b} \right)^5 \right) \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$ <p>gde je: $\Delta \sigma$ – opseg nominalnog napona b – rastojanje od otvora do sredine prsline a – dužina prsline</p>
<p>CT uzorak</p>		$\Delta K_I = \frac{\Delta P}{B \sqrt{w}} \left(29.6 \left(\frac{a}{w} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{w} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{w} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{w} \right)^{7/2} + 639 \left(\frac{a}{w} \right)^{9/2} \right) \sqrt{\pi a}$ <p>gde je: B – debljina CT uzorka ΔP – opseg spoljašnje sile w – širina CT uzorka a – dužina prsline</p>
<p>SEN uzorak</p>		$\Delta K_I = \frac{\Delta P}{B \sqrt{w}} \left(1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{w} \right) + 1055 \left(\frac{a}{w} \right)^2 - 2172 \left(\frac{a}{w} \right)^3 + 3039 \left(\frac{a}{w} \right)^4 \right) \sqrt{\pi a}$ <p>gde je: B – debljina SEN uzorka ΔP – opseg spoljašnje sile w – širina SEN uzorka a – dužina prsline</p>

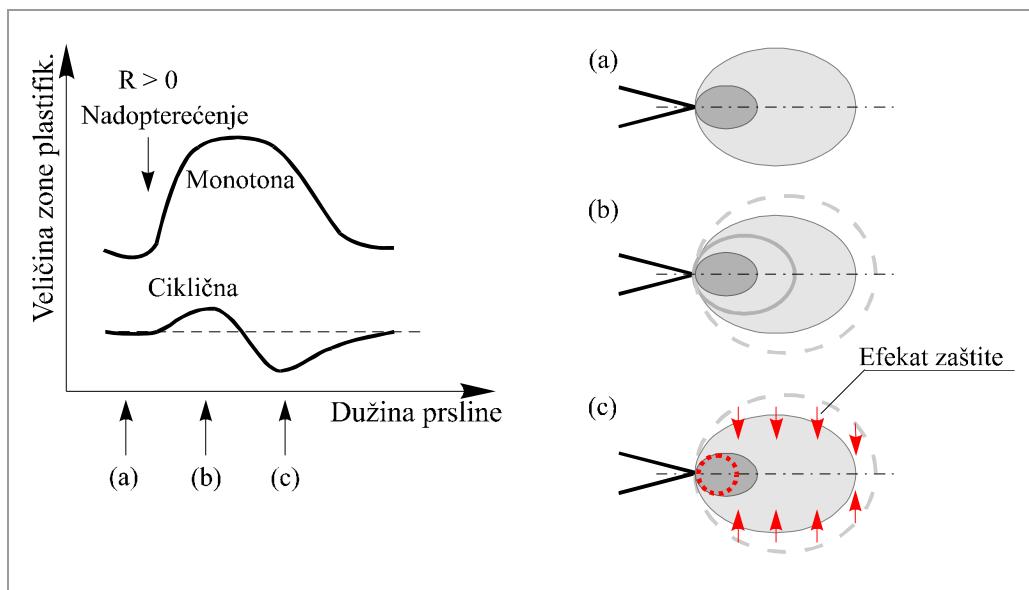
4. NUMERIČKA SIMULACIJA ŠIRENJA PRSLINE PRI DEJSTVU PIKA OPTEREĆENJA

Eksperimentalna istraživanja su pokazala da relacije definisane u prethodnom poglavlju adekvatno opisuju proces širenja prsline pri dejstvu opterećenja konstantne amplitude. Međutim, definisane relacije ne mogu biti korišćene prilikom razmatranja procesa širenja prsline u slučaju dejstva nadopterećenja, podopterećenja i sekvencijalnog opterećenja. Jednačine definisane u Poglavlju 3 ne mogu biti korišćene jer spoljašnja opterećenja kod kojih postoji pik opterećenja dovode do pojave kašnjenja tj. retardacije prilikom širenja prsline. U ovom poglavlju je razmatrano širenje prsline u prisustvu pika opterećenja i izvršeno je formulisanje matematičkih modela za simulaciju širenja prsline koji omogućavaju kvalitetnu analizu problema širenja.

4.1 Proces širenja prsline pri dejstvu nadopterećenja i podopterećenja

Pre nego što se pristupi definisanju matematičkog modela za simulaciju širenja prsline u uslovima nadopterećenja tj. podopterećenja neophodno je analizirati prirodu procesa tj. mehanizam širenja prsline pri takvim spoljašnjim uslovima. Ukoliko se kao spoljašnje opterećenje pojavi nadopterećenje odnosno podopterećenje dolazi do ubrzavanja širenja prsline. Ubrzavanje širenja prsline posle nadopterećenja može biti objašnjeno pomoću dva mehanizma, i to: efekat zaostalih napona i akumulacija oštećenja pri zamoru. Kod prvog mehanizma dejstvo oko vrha prsline zavisi od veličine monotone zone plastifikacije i monotonih svojstava materijala. Međutim, u slučaju razmatranja mehanizma koji se odnosi na akumulaciju oštećenja, neophodno je u analizu uključiti veličinu ciklične zone plastifikacije.

Istraživanja sa aspekta mehanike loma su pokazala da se oko vrha prsline mogu pojaviti dva efekta plastifikacije. Bathias [56] je izučavao efekat plastifikacije i otkrio, a zatim izmerio cikličnu (povratnu) zonu unutar monotone zone plastifikacije. Sa druge strane, Nicolletto [57] je, koristeći Moire-ova interferometrijska opažanja o veličinama zona plastifikacije, verifikovao da za vreme dejstva nadopterećenja dolazi do povećanja veličine monotone zone plastifikacije. On je takođe uočio da se povećava veličina ciklične zone plastifikacije u kratkom vremenskom periodu nakon čega se smanjuje, tako da njena veličina postaje manja od one koju je imala pre dejstva nadopterećenja. Prema tome, posle širenja prsline za odgovarajuću dužinu pojava nadopterećenja u okviru spoljašnjeg opterećenja uslovljava da obe i monotona i ciklična zona plastifikacije postaju slične onim veličinama koje su imale pre dejstva nadopterećenja. Proces širenja prsline u uslovima dejstva nadopterećenja je prikazan na slici 4.1.



Slika 4.1 Proces širenja prsline pri dejstvu nadopterećenja.

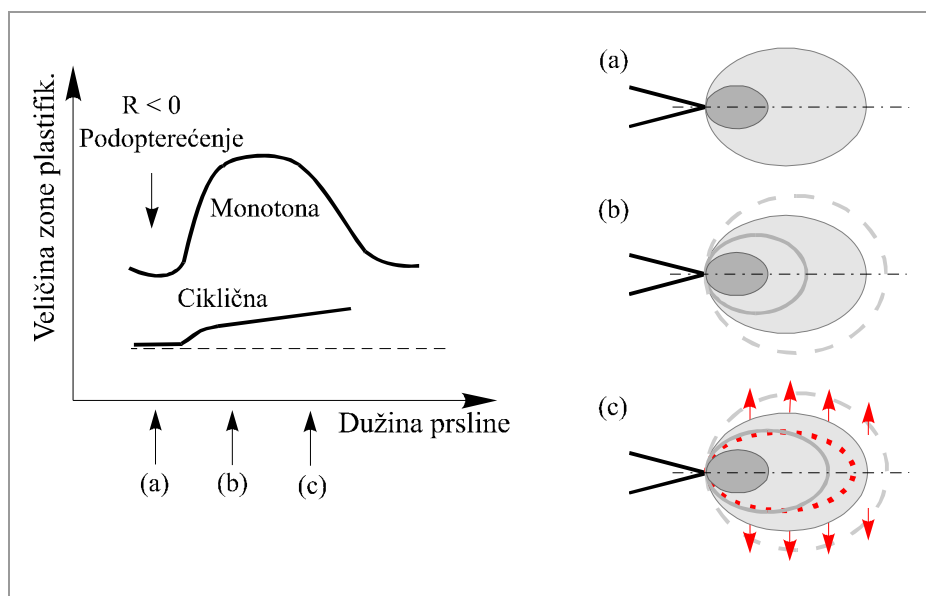
Širenje prsline pri dejstvu nadopterećenja se analizira kao proces koji se razvija u monotonj i cikličnoj zoni plastifikacije. U monotonj zoni plastifikacije dejstvo nadopterećenja prouzrokuje nastajanje tzv. efekta zaštite. Pojava efekta zaštite prouzrokovna je povećanjem izuzetno jakih zaostalih pritiskajućih napona unutar zone [58]. Sa druge strane, na samom vrhu prsline u okviru ciklične zone plastifikacije koja se nalazi unutar monotone zone, dolazi do akumulacije oštećenja [25,59-61].

Dejstvo nadopterećenja [57] uslovljava povećanje veličine monotone i ciklične zone plastifikacije. Veliko povećanje veličine monotone zone plastifikacije dovodi do nastajanja snažnog efekta zaštite koji ne dozvoljava širenje prsline. Međutim, dejstvo nadopterećenja dovodi do povećanja i veličine ciklične zone plastifikacije prouzrokujući akumulaciju oštećenja. Nastala akumulacija oštećenja brzo nestaje usled dejstva tzv. efekta zaštite koji se pojavio zahvaljujući pritisku u oformljenoj velikoj monotonj zoni plastifikacije.

Povećanje akumulacije oštećenja odmah posle dejstva nadopterećenja dovodi do trenutnog ubrzavanja širenja prsline. Ustvari, veća akumulacija oštećenja bi trebalo da prouzrokuje veći gradijent širenja prsline [62,63]. Međutim, izuzetno veliko polje pritiskajućih napona tj. pojava efekta zaštite oko ciklične zone uslovljava smanjenje veličine ciklične zone plastifikacije oko vrha prsline. Osim toga, gradijent širenja prsline počinje da se smanjuje do niže vrednosti (manja veličina od veličine ciklične zone), nego što je to bilo pre dejstva nadopterećenja. Opisane pojave prouzrokuju prilično kašnjenje širenja prsline posle dejstva nadopterećenja. Nakon prolaska prsline kroz oblast u kojoj postoji uticaj dejstva nadopterećenja, monotona i ciklična zona plastifikacije se vraćaju na svoje normalne veličine.

Priroda procesa širenja prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja sa podopterećenjem na sličan način može biti definisana kao i u slučaju dejstva nadopterećenja. Mehanizam širenja prsline pri dejstvu podopterećenja je prikazan na slici 4.2. Posle dejstva podopterećenja veličine monotone i ciklične zone plastifikacije se povećavaju. Kod

nastale velike monotone zone plastifikacije koja je deformisana ne postoji efekat zaštite od širenja prsline nego naprotiv širenje prsline je olakšano. U monotonoj zoni olakšano širenje prsline je prouzrokovalo pojavu polja zaostalih zatežućih napona. Polje zaostalih zatežućih napona omogućava da se ciklična zona plastifikacije poveća dok je ona unutar monotone zone u kojoj deluje podopterećenje. Prema tome, odmah posle dejstva podopterećenja dolazi do ubrzavanja, kao i u toku širenja prsline, unutar oblasti u kojoj postoji efekat prouzrokovan podopterećenjem. Osim toga, posle dejstva podopterećenja nije moguće da dođe do kašnjenja koje je praćeno ubrzavanjem širenja prsline, niti je moguće bilo kakvo kašnjenje. Ustvari, dejstvo podopterećenja u monotonoj (oblast dejstva zaostalih zatežućih napona) i cikličnoj (oblast akumulacije oštećenja) zoni prouzrokuju brže širenje prsline tj. veći gradijent širenja prsline.



Slika 4.2 Proces širenja prsline pri dejstvu podopterećenja.

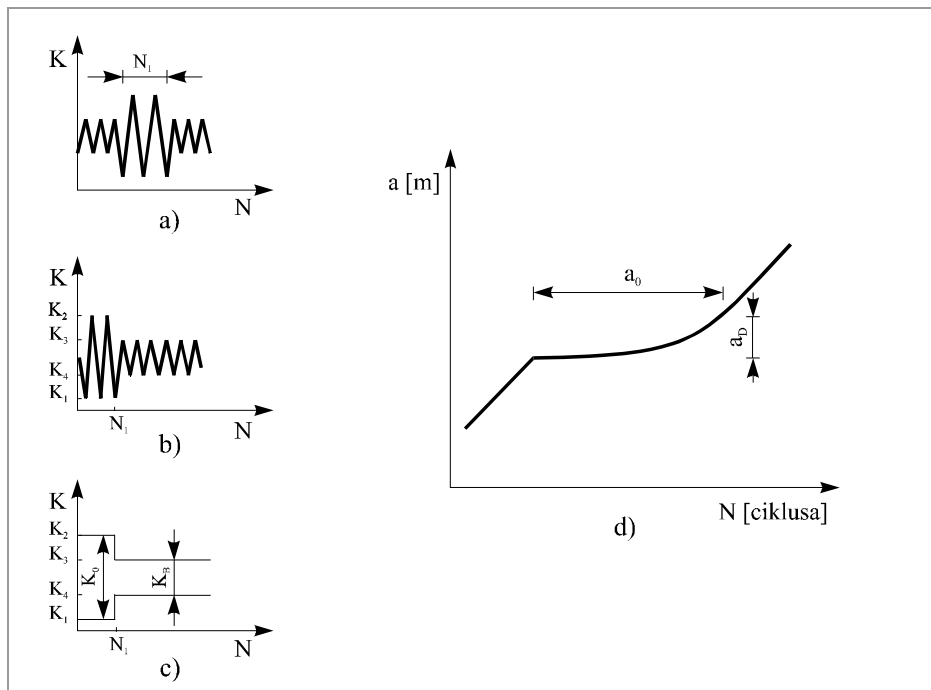
Pojave koje nastaju u elementima struktura pri dejstvu nadopterećenja odnosno podopterećenja značajno mogu uticati na proces širenja prsline ukoliko je spoljašnje opterećenje cikličnog karaktera. Zamor kao složena pojava ne može biti izbegnut tako da je vrlo važno razvijanje kvalitetnih matematičkih modela koji na adekvatan način uključuju i opisuju prirodu procesa širenja prsline u slučaju dejstva kako nadopterećenja tako i podopterećenja.

4.2 Matematičko modeliranje kašnjenja pri širenju prsline usled dejstva pika nadopterećenja

Ciklično opterećenje konstantne amplitude sa pikom tj. nadopterećenjem predstavlja specijalan slučaj opšteg oblika opterećenja koje je prikazano na slici 4.3. Prilikom definisanja matematičkog modela za širenje prsline neophodno je uvesti hipoteze tj. pretpostavke koje obezbeđuju adekvatno opisivanje ponašanja pri širenju prsline u uslovima dejstva opterećenja konstantne amplitude sa pikom nadopterećenja. U ovom odeljku prilikom formulisanja matematičkog modela za širenje prsline su korišćene sledeće hipoteze:

- Gradijent širenja prsline je smanjen i nastalo smanjenje zavisi od odnosa opterećenja pri dejstvu nadopterećenja;
- Opseg baznog faktora intenziteta napona pri cikličnom opterećenju ΔK_B je ne zavisan od dužine prsline u toku kašnjenja;
- Kašnjenje, N_D je definisano kao broj ciklusa zahtevan za širenje prsline, pri smanjenju gradijenta širenja prsline, kroz jedan inkrement u zoni plastifikacije (sl. 4.3).

Hipoteza (a) je implementirana zamenom klasičnog gradijenta da/dN širenja prsline gradijentom (izvodom) razlomljenog reda $d^\lambda a/dN^\lambda$, gde je $0 < \lambda \leq 1$. Uvođenje hipoteze (b) je opravdano jer su istraživanja pokazala da je širenje prsline za vreme kašnjenja minimalno, kao i da je ΔK_B nezavisno od dužine prsline. Hipoteza (c) predstavlja kriterijum za kašnjenje i obezbeđuje uvođenje zahteva da inkrement širenja prsline u regionu kašnjenja, a_D , bude jednak razlici radijusa monotone zone plastifikacije i ciklične zone plastifikacije baznog ciklusa opterećenja.



Slika 4.3 Definisavanje parametara širenja prsline pri kašnjenju u uslovima dejstva cikličnog opterećenja.

U prethodnim poglavljima već je definisana i analizirana relacija pomoću koje je moguće matematički simulirati širenje prsline pri dejstvu opterećenja konstantne amplitude, formulisanjem relacije za gradijent širenja prsline u obliku:

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m. \quad (4.2.1)$$

U slučaju dejstva pika opterećenja jednačina (4.2.1) mora biti modifikovana tako da se u matematički model uključi dejstvo prolaznog (kratkotrajnog) opterećenja tj. pika nadopterećenja, uvođenjem gradijenta (izvoda) razlomljenog reda [64,65]. Prema tome, jednačina (4.2.1) dobija oblik:

$$\frac{d^\lambda a}{dN^\lambda} = A(\Delta K)^m, \quad (4.2.2)$$

gde je: a - dužina prsline, N - broj ciklusa opterećenja, ΔK - opseg faktora intenziteta napona, m - empirijska konstanta, A - empirijska funkcija koja zavisi od stepena asimetrije ciklusa R ($R = K_{min}/K_{max}$), npr. za materijal Ti-6Al-4V ukoliko je $-5.0 \leq R \leq 0.9$ $A = 1.18 \cdot 10^{-9} (1.63 / (1.73 - R))^{3.1}$; $\lambda = K_j / K_{j+1}$, $0 < \lambda \leq 1.0$ (npr. $K_j = K_3$, sl.4.3).

Promenom stepena diferencijalne jednačine (4.2.1), tj. uvođenjem parametra λ u matematički model moguće je uključiti dejstvo pika nadopterećenja. Faktori intenziteta napona potrebni za određivanje parametra λ su prikazani na slici 4.3. Iz modifikovane jednačine za gradijent širenja prsline (jed. (4.2.2)) primenom pravila diferenciranja odnosno, integracije [64,65], funkcionalna zavisnost za određivanje dužine prsline postaje:

$$a = \frac{d^{-\lambda}}{dN^{-\lambda}} \left\{ A[\Delta K(N)]^m \right\} + C_1 N^{\lambda-1} + C_2 N^{\lambda-2} + \dots + C_m N^{\lambda-m} \quad (4.2.3)$$

ukoliko je $0 \leq \lambda \leq m < \lambda + 1$.

Jednačina (4.2.3) može biti pojednostavljena uvođenjem pretpostavke (bez gubljenja na opštosti jednačine) da je $a(0) = 0$ kao i $C_i = 0$. Pošto je $\lambda \leq 1$, mora biti $C_i = 0$ za $i = 2, 3, \dots$ tako da jednačina (4.2.3) za određivanje dužine prsline može biti redukovana na:

$$a = \frac{d^{-\lambda}}{dN^{-\lambda}} \left\{ A[\Delta K(N)]^m \right\}. \quad (4.2.4)$$

Zavisno promenljiva veličina u jednačini za gradijent širenja prsline (4.2.4), opseg faktora intenziteta napona, je odgovarajuća funkcija koja zavisi od dužine prsline i broja ciklusa opterećenja. Međutim, istraživanja su pokazala da u jednačini za faktor intenziteta napona pri dejstvu pika opterećenja, dužina prsline može biti zanemarena tj. $\Delta K(a, N) = \Delta K(N)$. Prema tome, jednačina za opseg faktora intenziteta napona (uključivanjem odgovarajućih parametara zamora koji su prikazani na sl. 4.3), može biti definisana u obliku:

$$\Delta K(N) = (\Delta K_0) \left\{ 1 + \left[\frac{\Delta K_B}{\Delta K_0} - 1 \right] H(N - N_1) \right\}, \quad (4.2.5)$$

gde je:

$$H(N - N_1) = \begin{cases} 0; & N < N_1 \\ 1; & N > N_1 \end{cases}$$

odnosno Heaviside-ova funkcija i N_1 broj ciklusa nadopterećenja.

Zamenom jednačine (4.2.5) za opseg faktora intenziteta napona u jednačinu (4.2.4), primenom integracije dobija se:

$$a(N) - a(N_1) = \frac{A(\Delta K_0)^m}{\Gamma(1 + \lambda)} \left\{ N^\lambda + \left[\left(\frac{\Delta K_B}{\Delta K_0} \right)^m - 1 \right] H(N - N_1) (N - N_1)^\lambda \right\}. \quad (4.2.6)$$

U jednačini (4.2.6), $\Gamma(l + \lambda)$ predstavlja Gamma funkciju za koju su neka svojstva data u Tabeli 4.1 (na kraju ovog odeljka). Pošto se analizira širenje prsline pri dejstvu pika opterećenja jednačina mora biti primenjena na region gde dolazi do kašnjenja. Broj ciklusa opterećenja N_D se događa pri inkrementu širenja prsline Δa , tako da je $\Delta a = a(N_D) - a(N_1) = a_D$ i ukoliko je $a(N_1) = 0$, jednačina (4.2.6) postaje:

$$a_D = \frac{A(\Delta K_0)^m}{\Gamma(1+\lambda)} \left\{ N^\lambda + \left[\left(\frac{\Delta K_B}{\Delta K_0} \right)^m - 1 \right] (N - N_1)^\lambda \right\} \quad (4.2.7)$$

Uočava se da je u slučaju dejstva pika opterećenja $N_D > N_1$, osim toga je $H(N_D - N_1) = 1$.

Prilikom dejstva opterećenja sa pikom nadopterećenja tj. pojave kašnjenja pri širenju prsline, inkrement širenja prsline a_D može biti definisan u funkciji odgovarajućih veličina zona plastifikacije oko vrha prsline. Istraživanja su pokazala da je prilikom kašnjenja širenje prsline manje nego što je širenje u monotonoj zoni plastifikacije baznog ciklusa opterećenja r_{mB} [66]. Kao posledica prethodne činjenice inkrement zone plastifikacije ρ_B je definisan kao razlika veličine radijusa monotone zone plastifikacije i ciklične zone plastifikacije baznog ciklusa r_{cB} . Prema tome, inkrement dužine prsline pri dejstvu pika opterećenja, tj. pojave kašnjenja, može biti određen kao:

$$a_D = \rho_B, \quad (4.2.8)$$

a inkrement zone plastifikacije ρ_B je definisan relacijom:

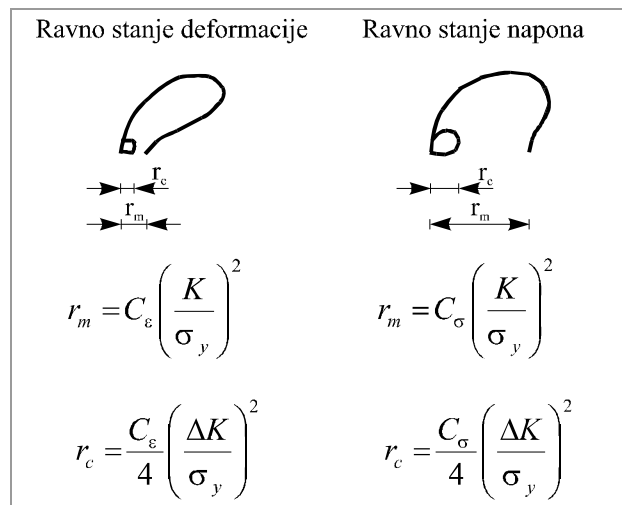
$$\rho_B = r_{mB} - r_{cB} \quad (4.2.9)$$

$$r_{mB} = C_{\varepsilon, \sigma} \left(\frac{K}{\sigma_y} \right)^2, \quad r_{mB} \geq r_{cB} \quad (4.2.10)$$

$$r_{cB} = \frac{C_{\varepsilon, \sigma}}{4} \left(\frac{\Delta K}{\sigma_y} \right)^2, \quad (4.2.11)$$

gde je: σ_y - čvrstoća materijala pri razvlačenju, $C_{\varepsilon, \sigma}$ - konstanta koja zavisi od parametra očvršćavanja materijala (tj. može biti ili C_ε ili C_σ u zavisnosti od toga da li je reč o uslovu ravnog stanja deformacije ili ravnog stanja napona oko vrha prsline) (sl.4.4), $K=K_3$ i $\Delta K=\Delta K_B$ (sl. 4.3).

$$1 = \frac{A(\Delta K_0)^m}{\rho_B \Gamma(1+\lambda)} \left\{ N_D^\lambda + \left[\left(\frac{\Delta K_B}{\Delta K_0} \right)^m - 1 \right] (N_D - N_1)^\lambda \right\}. \quad (4.2.12)$$



Slika 4.4 Ciklična i monotona zona oko vrha prsline pri dejstvu cikličnog opterećenja.

Broj ciklusa opterećenja za vreme dejstva pika nadopterećenja može biti određen ukoliko se u jednačinu (4.2.12) zameni jednačina (4.2.9)) za inkrement zone plastifikacije ρ_B , zajedno sa jednačinama (4.2.10) i (4.2.11).

Tako jednačina za određivanje broja ciklusa opterećenja u slučaju dejstva pika nadopterećenja ($N_I = 1$ i $N_D \gg N_I$) postaje:

$$N_D = \left\{ \frac{C(K_3^2 - 0.25(\Delta K_B)^2)\Gamma(1+\lambda)}{A\sigma_y^2(\Delta K_B)^m} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}. \quad (4.2.13)$$

Formulisana jednačina (4.2.13) predstavlja odgovarajuću funkcionalnu zavisnost između broja ciklusa do pojave loma i opsega faktora intenziteta napona. Osim toga u istoj jednačini su uključeni adekvatni parametri koji se odnose na tip materijala, kao i Gamma funkciju za rešavanje izvoda razlomljenog reda. Pošto se u analizi širenja prsline pojavljuju odgovarajući izvodi razlomljenog reda u odeljku koji sledi ukratko je opisan način njihovog rešavanja pomoću Gamma funkcije.

4.2.1 Izvodi razlomljenog reda i Gamma funkcija

U klasičnoj matematičkoj analizi razmatraju se izvodi i integrali celobrojnog reda. Ovu definiciju je moguće proširiti tako da obuhvati izvode i integrale čiji je red proizvoljan realan broj (pa čak i kompleksan broj) [64,65]. Opšti integro-diferencijalni operator se obeležava sa

$$\frac{d^\lambda}{[d(x-b)]^\lambda}, \quad (4.2.14)$$

gde b ima ulogu donje granice dok je λ realan broj. Ako je $b = 0$ i $\lambda > 0$, operator d^λ/dx^λ predstavlja izvod razlomljenog reda, a $d^\lambda/dx^{-\lambda}$ integral razlomljenog reda.

Kada je $\lambda = k$ - prirodan broj, integro-diferencijalni operator reda k se svodi na klasičan k -ti izvod:

$$\frac{d^k f}{[d(x-b)]^k}(x) \equiv \frac{d^k f}{dx^k}(x) \equiv f^{(k)}(x). \quad (4.2.15)$$

Međutim, ukoliko je $\lambda = -k$, integro-diferencijalni operator se svodi na k -ti ponovljeni integral sa promenljivom gornjom granicom, odnosno:

$$\frac{d^{-k} f}{[d(x-b)]^{-k}}(x) \equiv \int_b^x dx_{n-1} \int_b^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_b^{x_2} dx_1 \int_b^{x_1} f(y) dy. \quad (4.2.16)$$

Za veliku klasu funkcija, važe Riemann-Louiville-ove definicije opšteg integro-diferencijalnog operatora:

$$\frac{d^\lambda f}{[d(x-b)]^\lambda}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int_b^x \frac{f(y) dy}{(x-y)^{1+\lambda}}; \quad \lambda < 0 \quad (4.2.17)$$

$$\frac{d^\lambda f}{[d(x-b)]^\lambda}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{1}{\Gamma(k-\lambda)} \int_b^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{\lambda-k+1}} \right]; \quad \lambda \geq 0, \quad k-1 \leq \lambda < k. \quad (4.2.18)$$

Relacija (4.2.17) predstavlja razlomljeni integral reda λ , a relacija (4.2.18) - razlomljeni izvod reda λ .

Za izvode razlomljenog reda važe sledeća pravila komponovanja:

$$\frac{d^\lambda}{[d(x-b)]^\lambda} [f_1 + f_2] = \frac{d^\lambda f_1}{[d(x-b)]^\lambda} + \frac{d^\lambda f_2}{[d(x-b)]^\lambda}, \quad (4.2.19)$$

$$\frac{d^\lambda (cf)}{[d(x-b)]^\lambda} = c \frac{d^\lambda f}{[d(x-b)]^\lambda}, \quad (4.2.20)$$

$$\frac{d^\lambda}{[d(x-b)]^\lambda} (xf) = x \frac{d^\lambda f}{[d(x-b)]^\lambda} + \lambda \frac{d^{\lambda-1} f}{[d(x-b)]^{\lambda-1}}, \quad (4.2.21)$$

ukoliko su f , f_1 odnosno f_2 proizvoljne funkcije od x i c neka konstanta.

U slučaju ponovljenog diferenciranja važi pravilo:

$$\frac{d^\lambda}{[d(x-b)]^\lambda} \left(\frac{d^q f}{[d(x-b)]^q} \right) = \frac{d^{\lambda+q} f}{[d(x-b)]^{\lambda+q}}. \quad (4.2.22)$$

Pošto je u ovom odeljku u jednačinu koja opisuje širenje prsline uveden izvod razlomljenog reda, trebalo bi obratiti pažnju na razlomljeni izvod stepene funkcije [65]. Za funkciju $y = x^k$ važi:

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} x^{k-\lambda}. \quad (4.2.23)$$

Specijalno, za $\lambda = 0$ i $k = 3$ iz formule (4.2.23) se dobija:

$$\frac{d^0}{dx^0} x^3 = x^3. \quad (4.2.24)$$

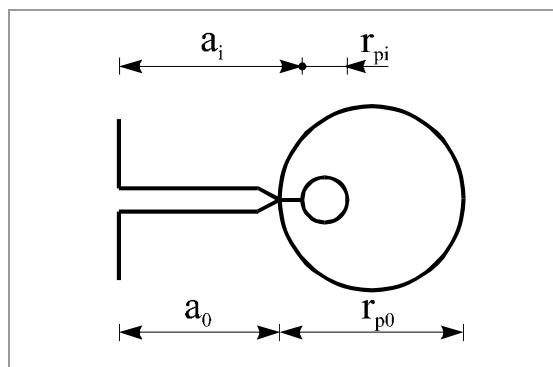
U Tabeli 4.1 je data lista izvoda razlomljenog reda nekih funkcija.

Tabela 4.1 Lista izvoda razlomljenog reda nekih funkcija.

$f(x)$	$\frac{d^\lambda f(x)}{[d(x-b)]^\lambda}$
C_0 (const.)	$\frac{C_0(x-b)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}$
$(x-b)$	$\frac{(x-b)^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}$
$(x-b)^Q$	$\frac{\Gamma(Q+1)(x-b)^{Q-\lambda}}{\Gamma(Q-\lambda+1)}$; $\lambda < 1$; $Q > 1$
$H(x-x_0) \equiv \begin{cases} 0; x < x_0 \\ 1; x > x_0 \end{cases}$	$\frac{(x-x_0)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}$; $x > x_0$
$f(x)H(x-x_0) \equiv \begin{cases} 0; x < x_0 \\ f; x > x_0 \end{cases}$	$H(x-x_0) \frac{d^\lambda f}{[d(x-b)]^\lambda}$
$(C_0 - gx)^Q$	$\frac{(C_0 - gb)^P (x-b)^{-\lambda}}{\Gamma(-Q)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-Q)}{\Gamma(j-\lambda+1)} \left[\frac{g(x-b)}{C_0 - gb} \right]^j$
$e^{(C_0 - gx)}$	$\frac{e^{(C_0 - gx)}}{(x-b)^\lambda} y^*(-\lambda, -g(x-b)),$ $y^*(-\lambda, -g(x-b)) = e^{g(x-b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-g(x-b))^j}{\Gamma(j+1-\lambda)}$

4.3 Uspostavljanje funkcionalne zavisnosti za zakon širenja prsline u slučaju dejstva pika nadopterećenja

Pojava kašnjenja usled dejstva nadopterećenja može biti uključena u analizu uvođenjem odgovarajućih korekcija koje se odnose na zonu razvlačenja oko vrha prsline [67,68]. Istraživanja su pokazala da je prilikom numeričke simulacije širenja prsline pri dejstvu pika nadopterećenja neophodno uvesti adekvatan korektivni faktor koji bi trebalo da figuriše na desnoj strani u već definisanim jednačinama za gradijent širenja prsline (npr. u jednačini (3.1.9)). Fizička priroda procesa širenja prsline koji nastaje usled dejstva nadopterećenja dovodi do smanjenja gradijenta širenja prsline, tako da se i od matematičkih modela zahteva isti trend. Ustvari, pojava nadopterećenja uslovljava povećanje zone plastifikacije oko vrha prsline i prouzrokuje pojavu kašnjenja (retardacije) prilikom širenja prsline.



Slika 4.5 Definisiranje parametara u zoni plastifikacije oko vrha prsline.

Efekat kašnjenja koji nastaje usled dejstva nadopterećenja je prilikom modeliranja širenja prsline uključen u analizu uvođenjem parametra kašnjenja ϕ_R u funkcionalnu zavisnost koja definiše gradijent širenja prsline, odnosno:

$$\frac{da}{dN} = \phi_R (C \Delta K^n) \quad (4.3.1)$$

$$\phi_R = \begin{cases} \left(\frac{r_{pi}}{a_{OL} + r_{p,OL} - a_i} \right)^{n_w} & ; a_i + r_{pi} < a_{OL} + r_{p,OL} \\ 1 & ; a_i + r_{pi} \geq a_{OL} + r_{p,OL} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

gde a_i predstavlja tekuću dužinu prsline na i -tom ciklusu opterećenja, r_{pi} predstavlja tekuću veličinu zone plastifikacije nastala usled dejstva i -tog ciklusa opterećenja, a_{OL} je dužina prsline pri kojoj je primenjeno nadopterećenje, $r_{p,OL}$ je parametar koji definiše veličinu zone plastifikacije nastala usled dejstva nadopterećenja i n_w je adekvatan Wheeler-ov eksponent oblika koji se određuje eksperimentalnim putem. Vrednost Wheeler-ovog eksponenta je najčešće u opsegu od 1 do 3.

Prema Wheeler-u [67], kašnjenje pri širenju prsline će se dogoditi onda kada tekuća zona plastifikacije leži unutar zone plastifikacije koja je kreirana dejstvom nadopterećenja. U trenutku kada granica tekuće zone plastifikacije dostigne granicu zone plastifikacije koja je nastala usled nadopterećenja, kašnjenje širenja prsline prestaje (odnosno parameter kašnjenja postaje $\phi_R = 1$).

Parametar veličine zone plastifikacije r_{pi} u jednačini (4.3.2) za različite dužine prslina može biti proračunat korišćenjem Irwin-ove metode [69]. Veličina zone plastifikacije pri dejstvu cikličnog opterećenja može biti određena pomoću sledeće relacije [70]:

$$r_{pi} = \alpha \left(\frac{K_{max i}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (4.3.3)$$

ili

$$r_{pi} = \alpha \left(\frac{\Delta K_i}{2 \sigma_y} \right)^2, \quad (4.3.4)$$

gde ΔK_i predstavlja opseg faktora intenziteta napona, a $\Delta K_{max i}$ je vrednost maksimalnog faktora intenziteta napona pri i -tom ciklusu opterećenja.

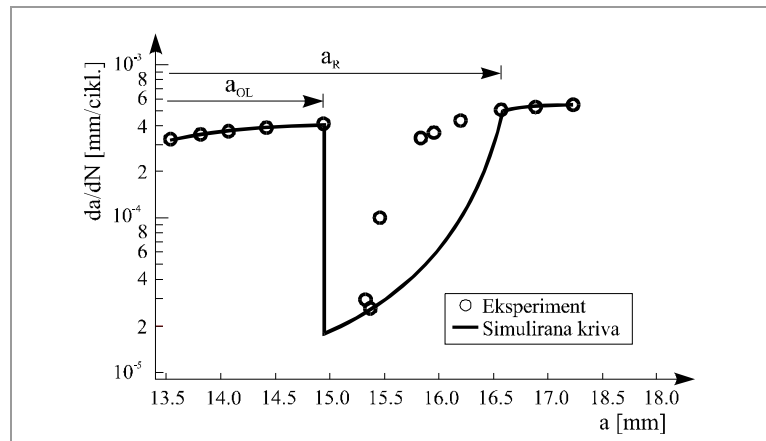
Osim parametra veličine zone plastifikacije r_{pi} u jednačini (4.3.2), neophodno je definisati i relaciju pomoću koje je moguće odrediti veličinu monotone zone plastifikacije pri dejstvu nadopterećenja. Relacija za određivanje veličine monotone zone plastifikacije, u obliku funkcionalne zavisnosti od faktora intenziteta napona pri dejstvu nadopterećenja, može biti definisana kao:

$$r_{p,OL} = \alpha \left(\frac{K_{\max}^{OL}}{\sigma_y} \right)^2, \quad (4.3.5)$$

odnosno

$$r_{p,OL} = \alpha \left(\frac{K_{OL}}{\sigma_y} \right)^2, \quad (4.3.6)$$

gde K_{\max}^{OL} predstavlja vrednost maksimalnog faktora intenziteta napona i K_{OL} je faktor intenziteta napona pri dejstvu nadopterećenja. σ_y označava napon pri razvlačenju za razmatrani materijal, a α definiše faktor veličine plastične zone koji će detaljnije biti razmatran malo kasnije.



Slika 4.6 Funkcionalna zavisnost između gradijenta širenja prsline i dužine prsline dobijena primenom Wheeler-ovog modela ($P_{OL} = 6 \text{ kN}$, $\Delta P/2 = 1.35 \text{ kN}$, $R = 0.1$).

Prema Wheeler-ovom modelu, gradijent širenja prsline opada posle dejstva nadopterećenja, sve dotle dok se ne dostigne minimalna vrednost, zatim lagano počinje da raste sve dok gradijent širenja prsline ne dostigne odgovarajuću vrednost koju je imao pre dejstva nadopterećenja (odnosno vrednost pri dejstvu samo opterećenja konstantne amplitude). Međutim, eksperimentalni rezultati pokazuju da nakon jednom dostignutog minimalnog gradijenta širenja prsline posle dejstva nadopterećenja, gradijent širenja prsline se povećava oštro i zatim asimptotski teži ka vrednosti gradijenta širenja prsline pri dejstvu opterećenja konstantne amplitude. Prema tome, u cilju dobijanja boljih predviđanja širenja prsline u zoni kašnjenja poželjno je uvesti adekvatne modifikacije Wheeler-ovog modela. Istraživanja su pokazala da je umesto definisanog parametra kašnjenja ϕ_R u Wheeler-ovom modelu (4.3.2) moguće koristiti jednačinu za parametar kašnjenja sledećeg oblika:

$$\phi_R = \left(\frac{r_{pi}}{r_{pmr}} \right)^{n_w}, \quad (4.3.7)$$

gde r_{pi} predstavlja tekuću veličinu zone plastifikacije, kao što je već rečeno i r_{pmr} označava veličinu efektivne zaostale zone plastifikacije, kojom se uključuje u razmatranje kombinacija nadopterećenja i proces širenja prsline. Uvođenjem r_{pmr} obezbeđeno je da će odmah posle dejstva nadopterećenja, r_{pmr} dostići svoju maksimalnu vrednost koja je nastala usled trenutnog uticaja nadopterećenja. Za vreme narednog širenja prsline, r_{pmr} se smanjuje naglo dok ponovo ne dobije (odnosno nadoknadi) vrednost tekuće veličine zone plastifikacije. Veličina efektivne zaostale zone plastifikacije r_{pmr} prilikom dejstva pika opterećenja bi trebalo da zadovolji sledeće uslove:

$$r_{pmr} = \begin{cases} r_{p,OL} & ; \quad a_i = a_{OL} \\ r_{pi} & ; \quad a_i = a_R \end{cases}$$

gde a_R predstavlja dužinu prsline pri kojoj gradijent širenja prsline ponovo ima vrednost stabilnog nivoa, odnosno vrednost koja bi se dobila pri dejstvu opterećenja konstantne amplitude. Analiza prelazne zone koja nastaje usled dejstva nadopterećenja uslovlila je formulisanje različitih funkcionalnih zavisnosti između različitih fizičkih veličina u cilju određivanja veličine efektivne zaostale zone plastifikacije r_{pmr} . Prema tome, veličina efektivne zaostale zone plastifikacije može biti određena pomoću jedne od sledeće dve relacije:

$$\left(\frac{a_i - a_{OL}}{a_R - a_{OL}} \right)^p + \left(\frac{r_{pmr} - r_{pi}}{r_{p,OL} - r_{pi}} \right)^p = 1, \quad (4.3.8)$$

$$r_{pmr} = r_{pi} + (r_{p,OL} - r_{pi}) \left[e^{\left(\frac{a_i - a_{OL}}{a_R - a_i} \right)^p} \right]^p. \quad (4.3.9)$$

Prilikom upotrebe jednačina (4.3.8) i (4.3.9) za određivanje veličine efektivne zaostale zone plastifikacije, dobijaju se vrednosti za r_{pmr} koje su vrlo slične tako da je sve jedno koja će jednačina biti korišćena. Uočava se da u obe jednačine figuriše dužina prsline a_R i ona može biti definisana sledećom funkcionalnom zavisnošću:

$$a_R = a_{OL} + r_{p,OL} - r_{pR}, \quad (4.3.10)$$

gde r_{pR} označava veličinu zone plastifikacije pri dužini prsline a_R i određuje se korišćenjem relacije:

$$r_{pR} = \alpha \left(\frac{\Delta K_R}{2\sigma_y} \right)^2, \quad (4.3.11)$$

dok je ΔK_R opseg faktora intenziteta napona pri dužini prsline a_R i može biti određen korišćenjem jednačina (4.3.9) i (4.3.10). Ustvar, pošto r_{pR} predstavlja funkcionalnu zavisnost od a_R onda se i ΔK_R može izraziti u funkciji od a_R . Prema tome, upotrebom iterativne metode, a_R može biti određeno korišćenjem jednačina (4.3.9), (4.3.10) i (4.3.11).

Nadopterećenje se vrlo često može pojaviti u okviru spoljašnjeg opterećenja kod elemenata struktura. Osim toga, pojava nadopterećenja uslovljava značajne promene koje se odražavaju na čvrstoću elemenata strukture, tako da je modeliranje širenja prsline pri dejstvu pika vrlo važan aspekt u mehanici loma. Matematički model formulisan u ovom odeljku korišćen je za simulaciju pojave kašnjenja pri širenju prsline

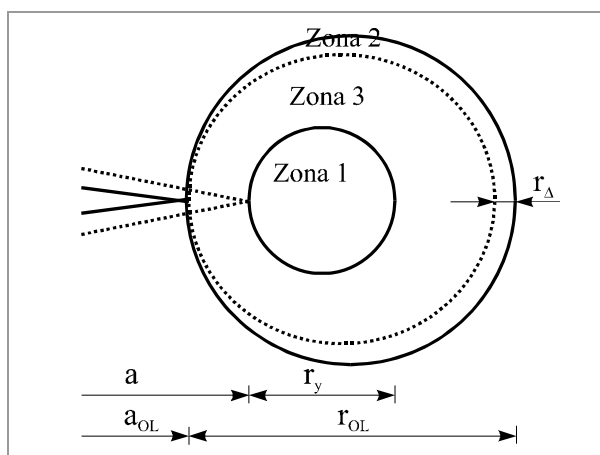
koje je prouzrokovano dejstvom pojedinačnih ili periodičnih nadopterećenja u okviru spektra opterećenja konstantne amplitude.

4.4 Definisane relacije za širenje prsline u uslovima dejstva nadopterećenja/podopterećenja

Matematički model koji uključuje nadopterećenje, formulisan u prethodnom odeljku, ne može dovoljno dobro opisati dejstvo podopterećenja, a još veće teškoće nastaju kada se u spektru pojave oba, i nadopterećenje i podopterećenje. Kada se za vreme dejstva spektra opterećenja konstantne amplitude pojavi podopterećenje, širenje prsline koje prati podopterećenje je veće nego ono koje se događa za vreme dejstva opterećenja konstantne amplitude. Period ubrzavanja širenja prsline je kratak i "normalan", gradijent širenja prsline pri opterećenju konstantne amplitude je brzo uspostavljen tj. nadoknađen. Ukoliko podopterećenje sledi odmah posle nadopterećenja, stepen kašnjenja (retardacije) prouzrokovan nadopterećenjem je redukovan, ali nije eliminisan. Dejstvo podopterećenja ukoliko sledi iza nadopterećenja, ima mali uticaj na stepen kašnjenja prilikom širenja prsline [71]. Prethodna činjenica upućuje na neophodnost uvođenja modifikacije kod matematičkih modela za simulaciju širenja prsline u kojim se razmatra uticaj nadopterećenja u cilju uključivanja dejstva podopterećenja.

Prilikom formulisanja pogodnih modifikacija kod matematičkog modela koji je definisan u prethodnom odeljku, uvedene su sledeće pretpostavke da bi se uključilo dejstvo podopterećenja:

1. Kašnjenje, a zatim i zaustavljanje koje je nastalo usled dejstva nadopterećenja je modelirano adekvatnim smanjenjem vrednosti opsega ekvivalentnog faktora intenziteta napona uz ispunjenje uslova: $da/dN=0$ kao i $\Delta K_{eq0} \leq \Delta K_{th0}$.
2. Ubrzavanje širenja prsline prouzrokovano podopterećenjem koje se dogodilo baš pre nadopterećenja je zanemareno.
3. Uticaj podopterećenja, koje sledi posle nadopterećenja, je određen oduzimanjem inkrementa veličine zone plastifikacije nastale usled dejstva podopterećenja od veličine zone plastifikacije prouzrokovane nadopterećenjem.



Slika 4.7 Definisane zone oko vrha prsline i parametara za formulisanje matematičkog modela u slučaju dejstva nadopterećenje/podopterećenje

(zona 1 - tekuća zona plastifikacije, zona 2 - zona plastifikacije pri dejstvu nadopterećenja, zona 3 - zona plastifikacije pri dejstvu nadopterećenja/podopterećenja).

Kao što je rečeno u prethodnom odeljku ukoliko dejstvuje nadopterećenje posle opterećenja konstantne amplitude dolazi do pojave kašnjenja prilikom širenja prsline, ali i formiranje odgovarajuće zone plastifikacije (zona 2). Međutim, u slučaju da se iza nadopterećenja pojavi podopterećenje, svojim prisustvom ono dovodi do smanjenja zone 2 i formiranja manje nove zone (zona 3). Relevantne promenljive veličine i zone u blizini vrha prsline su prikazane na slici 4.7 u slučaju dejstva podopterećenja posle nadopterećenja. Analiza mehanizma širenja prsline (sl. 4.7) ukazuje da je prilikom matematičke simulacije neophodno uključiti parametar pomoću koga je moguće obezbediti adekvatno smanjenje zone 2 usled dejstva podopterećenja, što će usloviti i modifikaciju relacije za gradijent širenja prsline koja je formulisana u slučaju dejstva pika nadopterećenja.

Modeliranje uticaja interakcije različitih sekvenci opterećenja je realizovano zamenom parametra kašnjenja ϕ_R parametrom M_p za opseg ekvivalentnog faktora intenziteta napona u jednačinu (4.3.1) i uključivanjem prethodno spomenutih pretpostavki. Korektivni parametar M_p je definisan funkcionalnom zavisnošću oblika:

$$M_p = \begin{cases} \left(\frac{r_{pi}}{a_{OL} + r_{p,OL} - a_i - r_{\Delta}} \right)^{n_{ou}} & ; a + r_{pi} < a_{OL} + r_{p,OL} - r_{\Delta} \\ 1 & ; a + r_{pi} \geq a_{OL} + r_{p,OL} - r_{\Delta} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

gde je n_{ou} eksponent oblika koji se određuje eksperimentalnim putem.

Budući da podopterećenje poništava (tj. vraća nazad) plastičnu deformaciju, a samim tim smanjuje rezultujuću zonu plastifikacije, inkrement veličine zone razvlačenja prouzrokovan podopterećenjem može biti adekvatno izračunat primenom relacija:

$$r_{\Delta} = \alpha \left(\frac{\Delta K_u}{\sigma_y^-} \right)^2. \quad (4.4.2)$$

Opseg faktora intenziteta napona, koji definiše za koliko se smanjila veličina zone plastifikacije usled dejstva podopterećenja posle nadopterećenja, može biti određen pomoću jednačine:

$$\Delta K_u = F \sqrt{\pi a} (\sigma_{\min}^{i-1} - \sigma_{\min}^i). \quad (4.4.3)$$

Vek odnosno broj ciklusa do pojave loma kod elementa strukture u slučaju dejstva podopterećenja posle nadopterećenja, može se odrediti primenom jednačina (4.4.2) i (4.4.3) zajedno sa jednačinom za gradijent širenja prsline (4.3.1) koju je neophodno integraliti.

Prilikom razmatranja uticaja interakcije različitih sekvenci opterećenja, vrlo je važno odrediti veličinu zone plastifikacije oko vrha prsline. Veličina zone plastifikacije zavisi od postojanja odgovarajućih ograničenja (tj. veza) oko vrha prsline. Prilikom izračunavanja veličine zone plastifikacije, u literaturi su predloženi različiti pristupi. Irwin [72] je sugerisao analitička rešenja po kojim faktor veličine zone plastifikacije iznosi $\alpha = 1/\pi$ (za ravno stanje napona), a $\alpha = 1/(3\pi)$ (za ravno stanje deformacije).

Guo [73] je definisao integralnu jednačinu za određivanje veličine zone plastifikacije, koja je bazirana na trodimenzionalnom tzv. "strip yield" modelu. U slučaju malog razvlačenja veličina zone plastifikacije može biti definisana u obliku:

$$r_y = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_{\max}}{\eta \sigma_y} \right) = \alpha \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2, \quad (4.4.4)$$

gde je $\alpha = \pi/8$ (za ravno stanje napona) i $\alpha = (1-2\mu)^2 \pi/8$ (za ravno stanje deformacije).

Voorwald et al. [74] su formulisali parametarsku funkciju za α , kojom se uključuju moguća ograničenja oko vrha prsline u zavisnosti od maksimalne vrednosti primenjenog napona, čvrstoća materijala pri razvlačenju i debljina uzorka:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}; & t \geq 2.5 \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2 \\ \frac{1}{\pi}; & t \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2 \\ \frac{1}{6\pi} + \frac{5}{6\pi} \left(\frac{2.5 - t \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2}{2.5 - \pi^{-1}} \right); & \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2 < t < 2.5 \left(\frac{K_{\max}}{\sigma_y} \right)^2 \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Složen proces koji nastaje u slučaju dejstva cikličnog opterećenja koje sadrži pik nadopterećenja/podopterećenja matematički je modeliran u ovom odeljku. Ustari, broj ciklusa do pojave loma može biti određen integraljenjem diferencijalne jednačine za gradijent širenja prsline (4.3.1), samo što se umesto ϕ_R koristi parametar M_p formulisan relacijom (4.4.1) zajedno sa jednačinama (4.4.2)-(4.4.4). Prilikom simulacije uključeni su svi bitni parametri sa aspekta širenja prsline, tako da formulisan matematički model omogućavaju adekvatnu analizu širenja prsline u uslovima dejstva cikličnog opterećenja sa nadopterećenjem/podopterećenjem.

5. METODA KONAČNIH ELEMENATA I ANALIZA ELEMENATA STRUKTURA

5.1 Opšte

Metoda konačnih elemenata predstavlja numeričku metodu koja obezbeđuje kvalitetnu strukturalnu analizu realnih elemenata složene geometrije. U ovom radu metoda konačnih elemenata (MKE) je uvedena za analizu naponskog stanja i pomeranja složenih strukturalnih elemenata. Prilikom strukturalne analize u radu je razmatrano linearno ponašanje, ali i geometrijska i materijalna nelinearnost materijala od kojih su napravljeni elementi struktura. Pošto uvođenje MKE predstavlja jedan od aspekata analiziran u ovom radu, zbog obimnosti, teorijska razmatranja vezana za ovu metodu detaljno mogu biti sagledana u referencama [75-78].

Proces širenja prsline sa aspekta mehanike loma zahteva kvalitetnu analizu naponskog stanja koju je moguće realizovati primenom MKE. Osim toga MKE, kao numerička metoda, može biti korišćena za određivanje faktora intenziteta napona, a samim tim i za procenu preostalog veka strukturalnih elemenata sa inicijalnim oštećenjima [79-85]. Prilikom analize širenja prsline, kada je reč o konkretnim primerima korišćeni su specijalni singularni konačni elementi.

U okviru ovog poglavlja definisane su adekvatne relacije za numeričku analizu nelinearnog kontinuuma u uslovima dejstva statičkog opterećenja. Prilikom formulisanja relacija razmatrani su problemi koji se odnose na geometrijsku nelinearnu analizu pri elastičnom ponašanju materijala. U proračunima čvrstoće strukturalnih elemenata sa aspekta linearne analize moguće je uvesti odgovarajuće pretpostavke i to: da su pomeranja infinitezimalna i da je materijal linearno elastičan. Pored toga, uvodi se pretpostavka da priroda graničnih uslova ostaje nepromenjena pri dejstvu spoljašnjeg opterećenja. Ukoliko se ove pretpostavke uključe one omogućavaju da se formulišu konvencionalne ravnotežne jednačine MKE neophodne za linearnu analizu u obliku:

$$KU = R^* \quad (5.1.1)$$

gde je K - matrica krutosti sistema, U - vektor pomeranja i R^* - vektor spoljašnjeg opterećenja. Kada je reč o linearnoj analizi odgovor elementa strukture usled dejstva spoljašnjeg opterećenja je uvek linearan. Međutim, vrlo često se događa da odgovor strukture nije linearan, tada je potrebno uključiti u razmatranje nelinearnu strukturalnu analizu (NSA). U praktičnim proračunima kod elemenata struktura, kada je reč o nelinearnoj strukturalnoj analizi, od primarnog značaja je geometrijska i materijalna nelinearnost. Geometrijska nelinearnost ukazuje da su pomeranja tolika velika da teoriju malih pomeranja, koja važi kod linearne analize, nije moguće primeniti. Sa druge strane, materijalna nelinearnost govori o ponašanju materijala koje nije ograničeno samo na

elastično područje. Prilikom formulisanja matematičkih relacija koje omogućavaju nelinearnu strukturalnu analizu, zbog složenosti, zahteva se primena inkrementalnih teorija.

Prilikom formulisanja inkrementalnih teorija vrlo je važno izvršiti pravilno raspoređivanje odnosno razdvajanje kretanja (deformacija) tela usled dejstva spoljašnjeg opterećenja, na adekvatan broj ravnotežnih stanja ${}^0C, {}^1C, \dots, {}^NC, {}^{(N+1)}C, \dots, {}^fC$, gde je 0C - početno stanje deformacije, fC - krajnje stanje deformacije, a NC - neko proizvoljno međustanje. Osim toga, kod inkrementalnih teorija neophodno je uvesti pretpostavku da su sve promenljive za svako stanje, kao što su naponi, deformacije i pomeranja zajedno sa istorijom opterećenja poznate sve do stanja ${}^{(N+1)}C$. Ustvari, inkrementalna teorija se formuliše za određivanje svih promenljivih u položaju (konfiguraciji) ${}^{(N+1)}C$, ali samo uz pretpostavku da je konfiguracija ${}^{(N+1)}C$ inkrementalno bliska stanju NC , kao i da se sve glavne jednačine mogu linearizovati u odnosu na inkrementalne veličine. Prilikom analize naponskog stanja elementa strukture važan aspekt je pratiti deformisanje nastalo usled dejstva spoljašnjeg opterećenja. U inkrementalnoj teoriji parametar koji omogućava opisivanje procesa deformisanja od stanja NC do ${}^{(N+1)}C$ je odgovarajući $(N+1)$ -vi korak.

5.2 Inkrementalna formulacija osnovnih jednačina MKE [75]

Osnovni problem koji bi trebalo da se razmatra u nelinearnoj analizi je određivanje stanja ravnoteže izabranog tela u različitim konfiguracijama kroz koje ono prolazi prilikom procesa deformisanja ukoliko na njega deluje spoljašnje opterećenje. Dejstvo opterećenja i nastalo kretanje tela moraju na neki način biti opisani, tako da je neophodno uvođenje tri konfiguracije kao što su: početna 0C , tekuća ili osnovna 1C i naredna tj. naknadna 2C , koja je na inkrementalno malom rastojanju od tekućeg položaja konfiguracije 1C .

Deformisanje kao proces, događa se u toku nekog vremenskog intervala i dovodi do pomeranja tj. kretanja, da bi se pratio proces deformisanja, kretanje tela bi trebalo da se posmatra u nepokretnom Dekartovom koordinatnom sistemu. Prilikom analize deformisanja neophodno je uvesti pretpostavku da telo može da se podvrgne velikim pomeranjima i rotacijama. Pored toga, ukoliko se umesto generalisanih pomeranja, za osnovne parametre u čvorovima usvoje inkrementi pomeranja, na način koji je uobičajen u MKE, dovodi do inkrementalne formulacije osnovnih jednačina. Vrlo je važno naglasiti, da su jednačine ravnoteže sa parametrima pomeranja kao nepoznatim veličinama nelinearne, dok su inkrementalne jednačine ravnoteže linearne i u njima su nepoznati inkrementi pomeranja. Ove jednačine predstavljaju uslove ravnoteže na kraju inkrementa. Prilikom rešavanja nelinearnog problema pretpostavlja se da je statičko-deformacijsko stanje na početku inkrementa poznato, rešavanje jednačina ravnoteže dovodi do određivanja uticaja na kraju inkrementa (koji je nastao usled dejstva spoljašnjeg opterećenja). Ustvari, kod razmatranog problema polazi se od početne (nedeformisane) konfiguracije koja je poznata, tako da se iz jednačine ravnoteže za prvi inkrement određuju inkrementi pomeranja, a pomoću njih zatim naponsko-deformacijsko stanje na kraju posmatranog inkrementa. Pošto je konfiguracija od koje se polazi potpuno određena, onda sa tako potpuno poznatim stanjem je moguće preći na drugi inkrement za koji se ponavlja prethodna procedura i analogno nastavlja kroz naredne korake redom dok se ne dođe do konačne konfiguracije.

U zavisnosti od izbora konfiguracije koja se uzima za referentnu, početna 0C ili tekuća 1C u odnosu na koju se mere sve geometrijske i fizičke veličine, postoje dve varijante Lagrange-ove formulacije: totalna (T.L.) i korigovana ili adaptivna (U.L.). Pošto se u radu koristi MKE na bazi pretpostavljenih pomeranja, onda za numerička rešenja može biti korišćen princip virtualnih pomeranja da bi se izrazili uslovi ravnoteže u konfiguraciji 2C . Bitno je napomenuti, da prilikom razmatranja gornji levi indeks predstavlja konfiguraciju (oblast) kojoj data fizička veličina pripada, dok donji indeks označava konfiguraciju u odnosu na koju se data veličina meri. S obzirom na činjenicu da između dve varijante Lagrange-ove formulacije ne postoje suštinske razlike, u ovom radu će biti detaljnije izložena T.L. formulacija. U T.L. inkrementalnoj analizi ravnoteža tela se izražava u konfiguraciji 2, upotrebom principa virtualnih pomeranja. Ukoliko se koristi princip virtualnih pomeranja uslovi ravnoteže mogu biti formulisani u sledećem obliku:

$$\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta({}^2e_{ij})^2 dV = {}^2R^*, \quad (5.2.1)$$

gde su:

${}^2\tau_{ij}$ - Dekartove komponente Košijevog tenzora napona u konfiguraciji 2C (Košijevi naponi se uvek odnose na konfiguraciju u kojoj se i javljaju, tako da je moguće napisati: ${}^2\tau \equiv {}^2\tau_{ij}$);

${}^2e_{ij}$ - Dekartove komponente infinitezimalnog tenzora deformacije pri promeni konfiguracije od 1C do 2C ;

δ - predstavlja varijaciju;

prema tome, virtualna varijacija deformacije može biti napisana kao:

$$\delta({}^2e_{ij}) = \delta \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.2.2)$$

gde su:

x_i - Dekartove koordinate u konfiguraciji 2C .

Odgovarajući virtualni rad spoljašnjeg opterećenja ${}^2R^*$ može biti prikazan relacijom:

$${}^2R^* = \int_{{}^2A} {}^2t_k \delta u_k dA + \int_{{}^2V} {}^2\rho {}^2f_k \delta u_k dV. \quad (5.2.3)$$

U jednačini (5.2.3), 2t_k i 2f_k označavaju komponente spoljašnjih površinskih odnosno zapreminskih sila, po redu, dok je δu_k k -ta komponenta vektora virtualnog pomeranja. U integralnoj jednačini (5.2.3) dA i dV predstavljaju elemente površine i zapremine odgovarajuće konfiguracije. Aproksimativna rešenja jednačine (5.2.1) mogu biti dobijena ukoliko se sve promenljive određuju u odnosu na prethodno izračunatu poznatu konfiguraciju i naravno linearizacijom ravnotežnih jednačina. Dobijeno rešenje bi zatim trebalo da bude poboljšano odgovarajućim iterativnim postupkom. Spoljašnje sile u jednačini (5.2.3) mogu biti određene primenom jednačina kao što su:

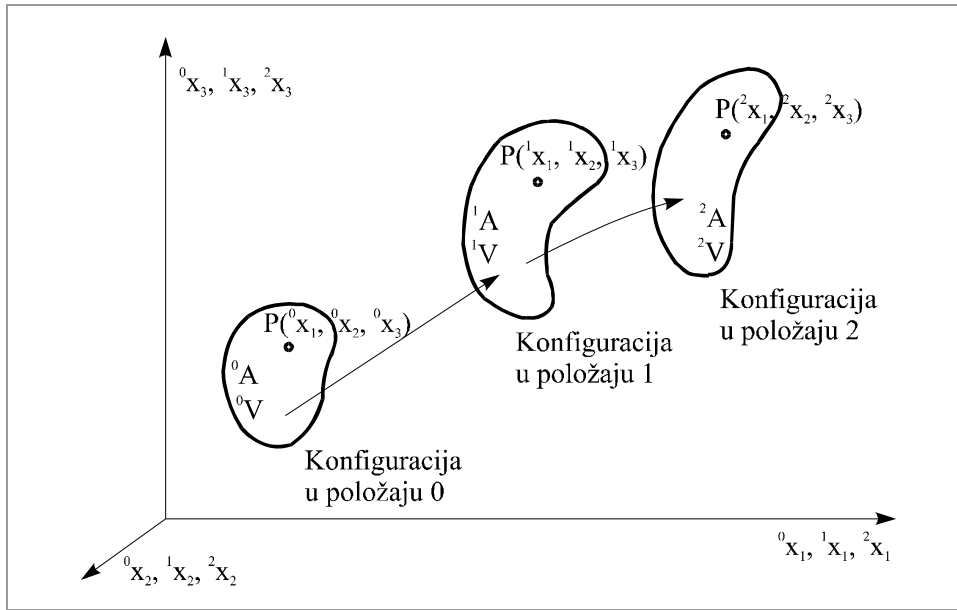
$$\begin{aligned} {}^2t_k {}^2(dA) &= {}^0t_k {}^0(dA) \\ {}^2\rho {}^2f_k {}^2(dV) &= {}^0\rho {}^0f_k {}^0(dV). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

U jednačini (5.2.2) zapreminski integral u kome figuriše proizvod Košijevog napona i diferencijal infinitezimalne deformacije moguće je transformisati na oblik:

$$\int_{^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} dV = \int_{^0V} {}^2S_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} dV, \quad (5.2.5)$$

gde su:

- ${}^2S_{ij}$ - Dekartove komponente Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste koji odgovara konfiguraciji 2C , koji se meri u konfiguraciji 0C ;
- ${}^2\varepsilon_{ij}$ - Dekartove komponente Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije u konfiguraciji 2C , meren u konfiguraciji 0C ;
- 2C_i - komponente vektora pomeranja od konfiguracije 0C do 2C .



Slika 5.1 Proces deformisanja u inkrementalnoj teoriji.

Prilikom analize procesa deformisanja sa aspekta inkrementalne teorije važno je formulisati odgovarajuće geometrijske zavisnosti. Prema tome, za geometrijske veličine prikazane na slici 5.1 mogu biti izvedene sledeće relacije:

$${}^1x_i = {}^0x_i + {}^1u_i \quad (5.2.6)$$

$${}^2x_i = {}^0x_i + {}^2u_i$$

ukoliko se 2x_i izrazi pomoću 1x_i moguće je dobiti relaciju oblika:

$${}^2x_i = {}^1x_i + u_i, \quad (5.2.7)$$

gde su u_i - komponente inkrementa pomeranja, ustvari one predstavljaju razlike pomeranja između konfiguracija 2C i 1C , tj.

$$u_i = {}^2u_i - {}^1u_i. \quad (5.2.8)$$

U jednačini (5.2.5), deformacija ${}^2\varepsilon_{ij}$ može biti formulisana u obliku:

$${}^2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^2u_{i,j} + {}^2u_{j,i} + {}^2u_{k,i} {}^2u_{k,j} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (5.2.9)$$

Pošto su u jednačini (5.2.5) komponente napona ${}^1S_{ij}$ i deformacija ${}^2\varepsilon_{ij}$ nepoznate, neophodno je koristiti inkrementalne dekompozicije oblika:

$${}^2S_{ij} = {}^1S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (5.2.10)$$

$${}^2\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \quad (5.2.11)$$

gde su ${}^1S_{ij}$ i ${}^1\varepsilon_{ij}$ poznati Piola-Kirchhoff-ovi naponi druge vrste i Green-Lagrange-ov tenzor deformacije u konfiguraciji 1C . Ukoliko se upotrebi izraz za Green-Lagrange-ov tenzor deformacije i relacija ${}^2u_i = {}^1u_i + u_i$, moguće je dobiti:

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij}, \quad (5.2.12)$$

gde su ${}_0e_{ij}$ i ${}_0\eta_{ij}$ linearni i nelinearni delovi inkrementalnih deformacija ${}_0\varepsilon_{ij}$,

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} u_{k,j}) \quad (5.2.13)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j}. \quad (5.2.14)$$

Osim toga, varijacija deformacije može biti data u obliku:

$$\delta({}^2\varepsilon_{ij}) = \delta {}^1\varepsilon_{ij} + \delta {}_0\varepsilon_{ij} \quad (5.2.15)$$

pošto je ${}^1\varepsilon_{ij}$ poznato, onda veza između inkremenata napona ${}_0S_{ij}$ i deformacija može se uspostaviti uvođenjem konstitutivnog tenzora ${}_0C_{ijrs}$, odnosno:

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0\varepsilon_{rs}. \quad (5.2.16)$$

Ukoliko se jednačine (5.2.4)-(5.2.16) uvrste u jednačine (5.2.2) odnosno (5.2.3) moguće je dobiti integralnu jednačinu oblika:

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0\varepsilon_{rs} \delta {}_0\varepsilon_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} {}^0dV = {}^2R - \int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV, \quad (5.2.17)$$

koja predstavlja nelinearnu jednačinu ravnoteže sa inkrementalnim pomeranjima u_i . Rešenja jednačine (5.2.17) ne mogu biti izračunata direktno pošto su ona nelinearna po inkrementima pomeranja. Aproksimativna rešenja se određuju uvođenjem pretpostavke da je ${}_0\varepsilon_{ij} \cong {}_0e_{ij}$ u jednačini (5.2.17). Ustvari, na ovaj način je izvršena linearizacija jednačine (5.2.17). Prema tome, ukoliko se uvede relacija $\delta {}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0e_{ij}$ automatski se uključuje korišćenje inkrementalne konstitutivne relacije oblika:

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}. \quad (5.2.18)$$

Zahvaljujući uvedenim pretpostavkama u T.L. formulaciji dobija se odgovarajuća aproksimirana jednačina oblika:

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} e_{rs} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} {}^0dV = {}^2R^* - \int_{0V} {}^1S_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV, \quad (5.2.19)$$

koja bi trebalo da bude rešena.

Jednačina (5.2.19) je ustvari osnovna jednačina T.L. inkrementalne formulacije. Formulirana linearna jednačina predstavlja polaznu osnovu koja je neophodna prilikom primene MKE u analizi geometrijski nelinearnih problema.

Kada je reč o korigovanoj Lagrange-ovoj formulaciji (U.L.), neophodno je ponoviti sličan postupak. U okviru U.L. formulacije neophodno je formulisati:

i. Jednačine ravnoteže

$$\int_{0V} ({}^1S_{ij} + {}^1S_{ij}) \delta {}^2\varepsilon_{ij} {}^1dV = {}^2R^* \quad (5.2.20)$$

gde je:

$$\delta {}^2\varepsilon_{ij} = \delta {}^1\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}^1u_{i,j} + {}^1u_{j,i} + {}^1u_{k,i} {}^1u_{k,j}),$$

kao i

ii. Linearizovane jednačine ravnoteže

$$\int_{1V} {}^1C_{ijrs} e_{rs} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1\eta_{ij} {}^1dV = {}^2R^* - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} {}^1dV, \quad (5.2.21)$$

ali uz uključivanje sledećih zavisnosti:

$${}^1S_{ij} = {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs}$$

$$\delta {}^1\varepsilon_{ij} \approx \delta {}^1e_{ij} \quad (5.2.22)$$

$${}^1S_{ij} \equiv {}^1\tau_{ij}$$

Pošto su izvedene odgovarajuće jednačine ravnoteže odnosno linearizovane jednačine ravnoteže sledeći aspekt je diskretizacija jednačina (5.2.19) i (5.2.21) konačnim elementima, pri čemu će ona biti ilustrovana za T.L. formulaciju, tj. za jednačinu (5.2.19).

5.3 Diskretizacija kontinuuma konačnim elementima

Jednačine izvedene u prethodnom odeljku formulisane su za kontinuum, prema tome podrazumevaju beskonačan broj stepeni slobode i trebalo bi da se razmatraju u slučaju realne strukture. Prilikom rešavanja ovih jednačina u opštem obliku, zbog složenosti, zahteva se korišćenje približnih metoda. Uvođenje približnih metoda podrazumeva prevođenje tačnih izraza, na oblik koji opisuje kontinuum preko konačnog broja diskretnih tačaka (čvorova) i odgovarajućih interpolacionih funkcija.

Uopšte, postupak izvođenja konačnih elemenata je praktično isti kao u linearnoj analizi. Osim toga on podrazumeva uvođenje interpolacionih funkcija za približno određivanje koordinata i pomeranja unutar konačnih elemenata. Zahvaljujući primeni principa virtualnih pomeranja za kontinuum, zatim adekvatnom diskretizacijom u konačne elemente, dobijaju se jednačine ravnoteže elemenata i strukture.

Linearizovane jednačine (5.2.19) i (5.2.21) Lagrange-ove inkrementalne formulacije (T.L. i U.L.) predstavljaju polaznu osnovu MKE prilikom analize geometrijski nelinearnih problema. Kao što je već rečeno za dobijanje odgovarajućih algebarskih jednačina primenjuje se standardna procedura MKE. Razvoj MKE se najčešće bazira na izoparametarskoj interpretaciji, tako da se koordinate pojedinih tačaka u elementu x_i i odgovarajuće komponente pomeranja 1u_i , odnosno inkremenata pomeranja u_i , prikazuju pomoću istih interpolacionih funkcija, odnosno:

$${}^0X_i = \sum_{k=1}^n N_k X_i^k, \quad x_i = \sum_{k=1}^n N_k x_i^k, \quad (5.3.1)$$

$${}^1u_i = \sum_{k=1}^n N_k {}^1u_i^k, \quad \Delta u_i = \sum_{k=1}^n N_k u_i^k$$

gde su ${}^1x_i^k$, ${}^1u_i^k$ i Δu_i koordinate, pomeranja i inkrementi pomeranja u čvoru k u pravcu i . Pored toga, N_k predstavlja interpolacione funkcije za čvor k , dok je n ukupan broj čvorova u elementu. Formulirane jednačine (5.3.1) mogu biti upotrebene za određivanje odgovarajućih izvoda koji se pojavljuju u integralima (5.2.19), tako da jednačina (5.2.19) dobija oblik:

$$({}^1K_L + {}^1K_{NL})\Delta u = {}^2R^* - {}^1F, \quad (5.3.2)$$

gde je Δu - vektor inkremenata pomeranja čvorova od 1C do 2C u elementu, dok su pojedine matrice elementa definisane [75] kao:

$${}^1_0[K_L] = \int_{{}^0V} {}^1_0[B_L]^T {}^1_0[C] {}^1_0[B_L] {}^0dV \quad (5.3.3)$$

$${}^1_0[K_{NL}] = \int_{{}^0V} {}^1_0[B_{NL}]^T {}^1_0[S] {}^1_0[B_{NL}] {}^0dV \quad (5.3.4)$$

$${}^1_0\{F\} = \int_{{}^0V} {}^1_0[B_L]^T {}^1_0\{\hat{S}\} {}^0dV. \quad (5.3.5)$$

U jednačinama (5.3.3)-(5.3.5), 1_0B_L i ${}^1_0B_{NL}$ su matrice koje opisuju linearnu i nelinearnu funkcionalnu zavisnost deformacija-pomeranja, ${}^1_0[C]$ označava matricu inkrementa σ - ε odnosno karakteristiku materijala, 1_0S je matrica drugih Piola-Kirhofovih komponenti napona, dok ${}^1_0\{\hat{S}\}$ predstavlja vektor ovih napona. Svi članovi matrica koji odgovaraju konfiguraciji 1C su definisani u odnosu na konfiguraciju 0C . Važno je naglasiti da jednačina (5.3.2) daje samo aproksimaciju stvarnog rešenja koje se dobija u svakom koraku opterećenja. U stvari, neophodno je koristiti iterativni postupak u svakom koraku, sve dok jednačina (5.2.1) ne bude zadovoljena za odgovarajuću toleranciju greške. Prilikom izračunavanja ravnotežnih rešenja u radu je korišćen Riksov iterativni algoritam [75].

5.4 Diskretizovane ravnotežne jednačine na bazi alternativne B formulacije [75,76]

Ako se umesto priraštaja (inkremenata) pomeranja, za osnovne parametre u čvorovima usvoje generalisana pomeranja, na način koji je uobičajen u MKE dolazi se do osnovnih (diskretizovanih) ravnotežnih jednačina. Najjednostavnija procedura za dobijanje diskretizovanog oblika ravnotežnih jednačina u opštem obliku zasniva se na korišćenju relacije za virtualni rad koja se može formulirati na sledeći način:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \rho \delta u^T q dV + \int_A \delta u^T p dA \quad (5.4.1)$$

gde su: δu - virtualna pomeranja, $\delta \varepsilon$ - virtualne deformacije, ρ - gustina, σ - napon, a V i A predstavljaju nedeformisanu zapreminu, odnosno površinu strukture na koju deluju zapreminske q odnosno površinske sile p , respektivno. Relacija za deformacije (5.4.1) može se napisati kao:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_e + \varepsilon_L, \quad (5.4.2)$$

gde je ε_e linearni deo, a ε_L predstavlja nelinearni deo deformacije.

Iz jednačine (5.4.2) nelinearni deo deformacije može biti izražen u obliku:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} S R^* \quad (5.4.3)$$

gde su :

$$S^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4.4)$$

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} \end{bmatrix} = G u. \quad (5.4.5)$$

Član G predstavlja matricu sa dve vrste i brojem kolona koji je jednak ukupnom broju čvornih promenljivih (stepeni slobode) u okviru konačnog elementa. Jednačina (5.4.3) ukoliko se uvrsti u jednačinu (5.4.2) dobija se:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \frac{1}{2} S G u, \quad (5.4.6)$$

odnosno :

$$\varepsilon = \left(B_e + \frac{1}{2} B_L(u) \right) u, \quad (5.4.7)$$

gde su:

$$\begin{aligned} B_e &= L N \\ B_L &= S G \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

dok L označava linearni operator, a N predstavlja matricu interpolacionih funkcija (tzv. funkcija oblika). Pošto B_e ne zavisi od pomeranja u , a B_L je linearna funkcija od u , varijacijom jednačine (5.4.7) dobija se:

$$\delta \varepsilon = B \delta u \quad (5.4.9)$$

gde je:

$$B = B_e + B_L(u). \quad (5.4.10)$$

Jednačina virtualnog rada (5.4.1) može se napisati u obliku:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \delta u^T Q = 0, \quad (5.4.11)$$

gde je Q vektor generalisanih sila u čvorovima. Zamenom jednačine (5.4.9) u jednačinu (5.4.11) moguće je dobiti jednačine ravnoteže u obliku:

$$\delta u^T \left[\int_V B^T \sigma dV - Q \right] = 0. \quad (5.4.12)$$

Pošto su virtualna pomeranja δu proizvoljna, nelinearne ravnotežne jednačine konačnih elemenata postaju:

$$\zeta(u) = \int_V B^T \sigma dV - Q = 0. \quad (5.4.13)$$

gde ζ predstavlja funkciju (vektor) rezidualnih sila.

Jednačina (5.4.13) može biti primenjena kako na jedan konačni element tako i na celokupnu strukturu koja je modelirana konačnim elementima. Važno je napomenuti da ravnoteža (5.4.13) nije automatski zadovoljena, $\zeta(u_i) \neq 0$, tako da je za rešavanje ovog sistema nelinearnih jednačina potrebno koristiti neku od iterativno-inkrementalnih tehnika rešavanja. Ustvari, za vektor u_i koji predstavlja odgovarajuće početno rešenje pojavice se rezidualne (neuravnotežene) sile $\zeta(u_i) \neq 0$, samim tim trebalo bi poboljšati rešenje iterativnim putem. Jedna od mnogobrojnih tehnika koja može biti korišćenja je Newton-Rafhson-ova iterativna tehnika [75,78]. Prilikom upotrebe Newton-Rafhson-ove iterativne tehnike potrebno je uspostaviti funkcionalnu zavisnost između du i $d\zeta$. Diferenciranjem jednačine (5.4.13) po du dobija se:

$$d\zeta = \int_V dB^T \sigma dV - \int_V B^T d\sigma dV = K_T du, \quad (5.4.14)$$

gde K_T označava tangentnu matricu krutosti sistema odnosno:

$$K_T = \frac{d\zeta(u)}{du} = \int_V dB^T \sigma dV - \int_V B^T d\sigma dV. \quad (5.4.15)$$

Ukoliko se iskoristi konstitutivna zavisnost između napona i deformacije u obliku:

$$\sigma = D \varepsilon, \quad (5.4.16)$$

diferenciranjem jednačine (5.4.16) i upotrebom jednačine (5.4.10) dobija se:

$$\begin{aligned} d\sigma &= D d\varepsilon = D B du \\ dB &= dB_L, \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

i tada jednačina (5.4.14) može biti napisana u obliku:

$$d\zeta = \int_V dB_L^T \sigma dV + \bar{K} du \quad (5.4.18)$$

gde su:

$$\bar{K} = \int_V B^T D B dV = K_e + K_L \quad (5.4.19)$$

$$K_e = \int_V B_e^T D B_e dV \quad (5.4.20)$$

$$K_L = \int_V (B_e^T D B_L + B_L^T D B_L + B_L^T D B_e) dV. \quad (5.4.21)$$

U jednačinama (5.4.19)-(5.4.21), K_e predstavlja klasičnu linearnu (elastičnu) matricu krutosti, dok je matrica K_L vezana za velika pomeranja i naziva se *matrica velikih pomeranja*. Osim toga, prvi član u jednačini (5.4.18) može biti napisan u obliku:

$$K_\sigma du = \int_V dB_L^T \sigma dV, \quad (5.4.22)$$

odnosno

$$K_\sigma = \int_V \frac{dB_L^T}{du} \sigma dV, \quad (5.4.23)$$

gde K_σ predstavlja geometrijsku matricu krutosti i često se naziva *matrica inicijalnih napona*.

Konačno, sistem nelinearnih jednačina ravnoteže (5.4.13) može biti napisan kao:

$$d\zeta = K_T du, \quad (5.4.24)$$

gde je tangenta matrica krutosti definisana u obliku:

$$K_T = K_e + K_L + K_\sigma. \quad (5.4.25)$$

Nakon definisanja tangentne krutosti K_T može se pristupiti rešavanju nelinearnih jednačina ravnoteže (5.4.13).

Za slučaj bifurkacione nestabilnosti kada je reč o malim pomeranjima, onda matrica K_L može biti zanemarena. U tom slučaju jednačina (5.4.24) se svodi na standardan problem sopstvenih vrednosti ("eigen"- problem) odnosno:

$$[K_e + \nu K_\sigma] \varpi = 0, \quad (5.4.26)$$

gde je: ν - sopstvena vrednost, a ϖ - vektor sopstvenih oblika odnosno mod gubitka stabilnosti. Za rešavanje problema (5.4.26) moguće je koristiti više metoda [75,78]. Minimalna sopstvena vrednost ν_{min} predstavlja, ustvari, faktor kojim bi trebalo množiti vektor početnog opterećenja P da bi se dobilo kritično opterećenje P_{cr} tj.

$$P_{cr} = \nu_{min} P. \quad (5.4.27)$$

Jednačina (5.4.27) se upotrebljava za analizu gubitka elastične stabilnosti elemenata struktura. Međutim, pored analize gubitka elastične stabilnosti u okviru MKE mogu se vršiti analize oscilatornih ponašanja.

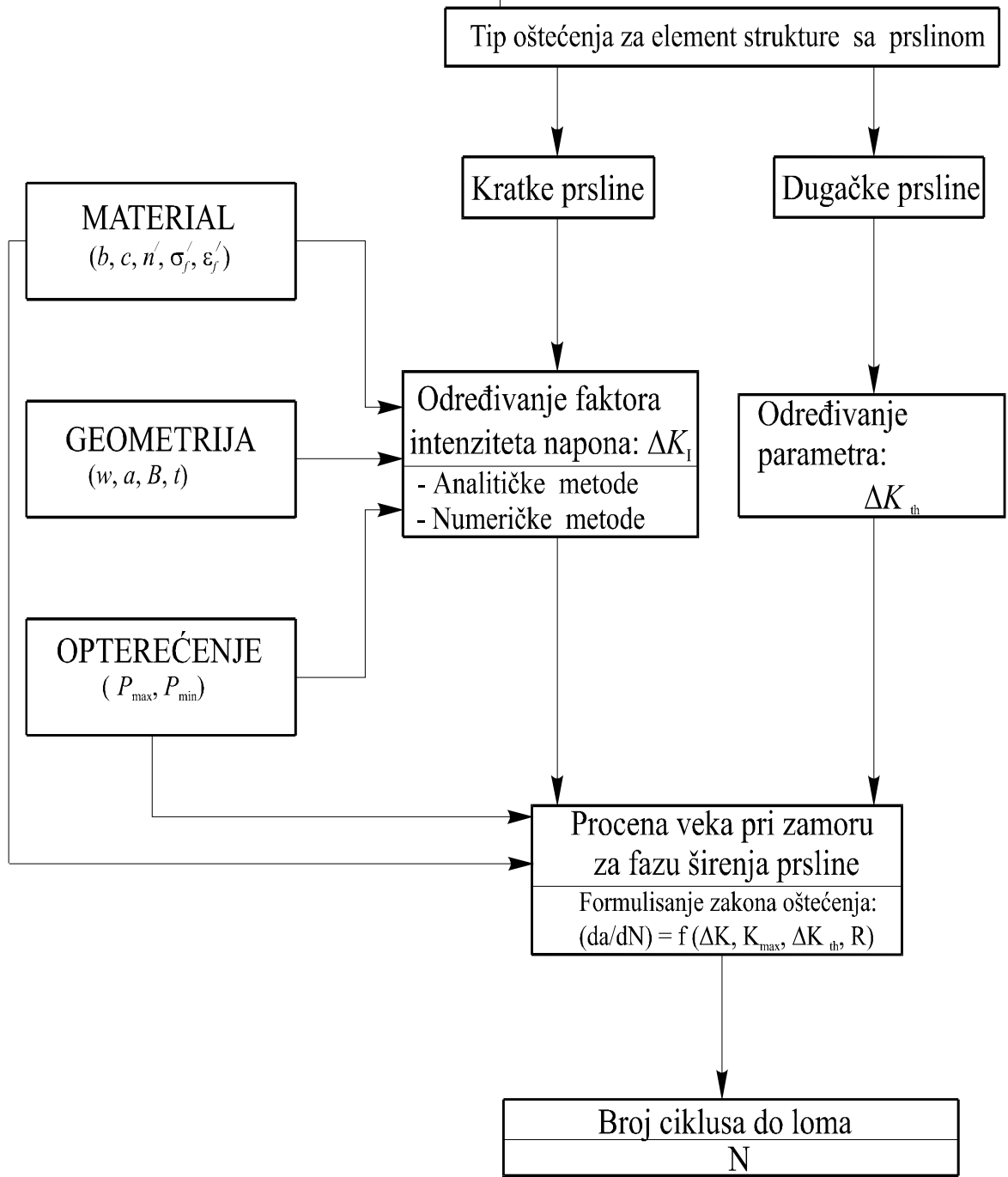
Prezentovane jednačine u ovom poglavlju prikazuju opštu formulaciju metode konačnih elemenata u domenima: linearne elastične analize struktura, kao i geometrijsko i materijalno nelinearno ponašanje. Formulacija MKE u ovom radu uključuje analizu i optimizaciju elemenata struktura kako od izotropnih, tako i od kompozitnih materijala [79-85].

Prilikom naponske analize realnih struktura korišćenje MKE automatski podrazumeva neverovatno veliki broj jednačina koje je potrebno rešiti. Razvojem kompjuterske

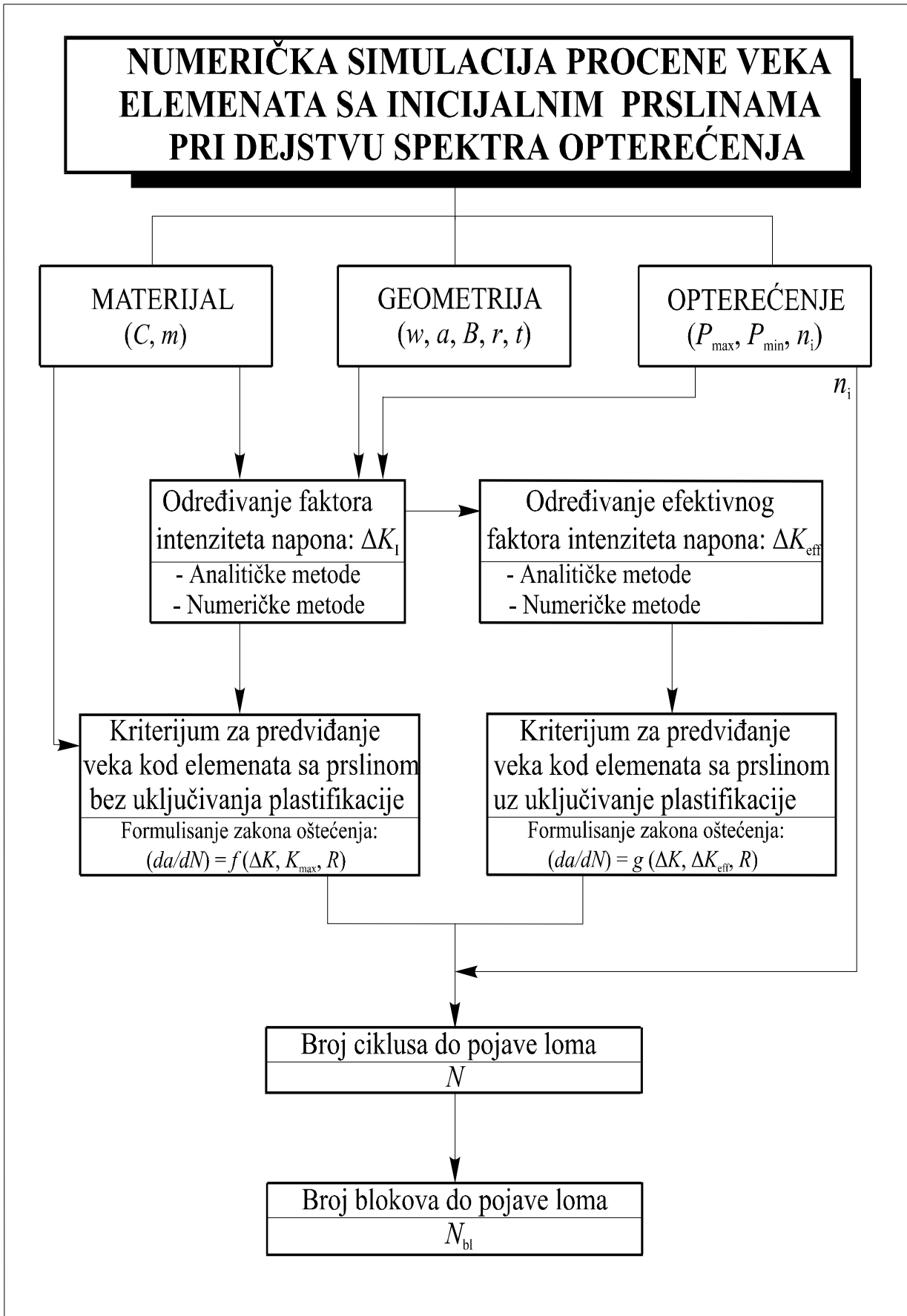
tehnologije omogućeno je da se na bazi adekvatnih algoritama izvrši razvoj i implementacija softverskih programa koji omogućavaju da se pomoću MKE realizuje kvalitetna analiza naponskog stanja struktura. Ustvari, MKE kao numerička metoda je ugrađena u odgovarajućim komercijalnim softverskim paketima kao što su: MSC/NASTRAN, ANSYS i ABAQUS.

U ovom radu je korišćen softverski paket MSC/NASTRAN za analizu parametara mehanike loma. MSC/NASTRAN kao softverski paket je razvijen tako da su prilikom analize naponskog stanja elemenata strukture uključene izotropne, ortotropne kao i anizotropne karakteristike materijala. Poglavlje 6 koje sledi sadrži numeričke primere u kojim je softverski paket MSC/NASTRAN primenjen za razvijene, u ovoj disertaciji, numeričke pristupe pri analizi različitih problema koji se odnose na širenje prsline u uslovima dejstva cikličnih opterećenja. Algoritmi razvijenih matematičkih modela u kojim su razmatrani kako numerički tako i analitički pristupi prilikom analize širenja prsline prikazani su na sl. 5.2, sl.5.3 i sl.5.4.

NUMERIČKA SIMULACIJA PROCENE VEKA PRI ZAMORU ELEMENATA STRUKTURA SA INICIJALNIM OŠTEĆENJEM

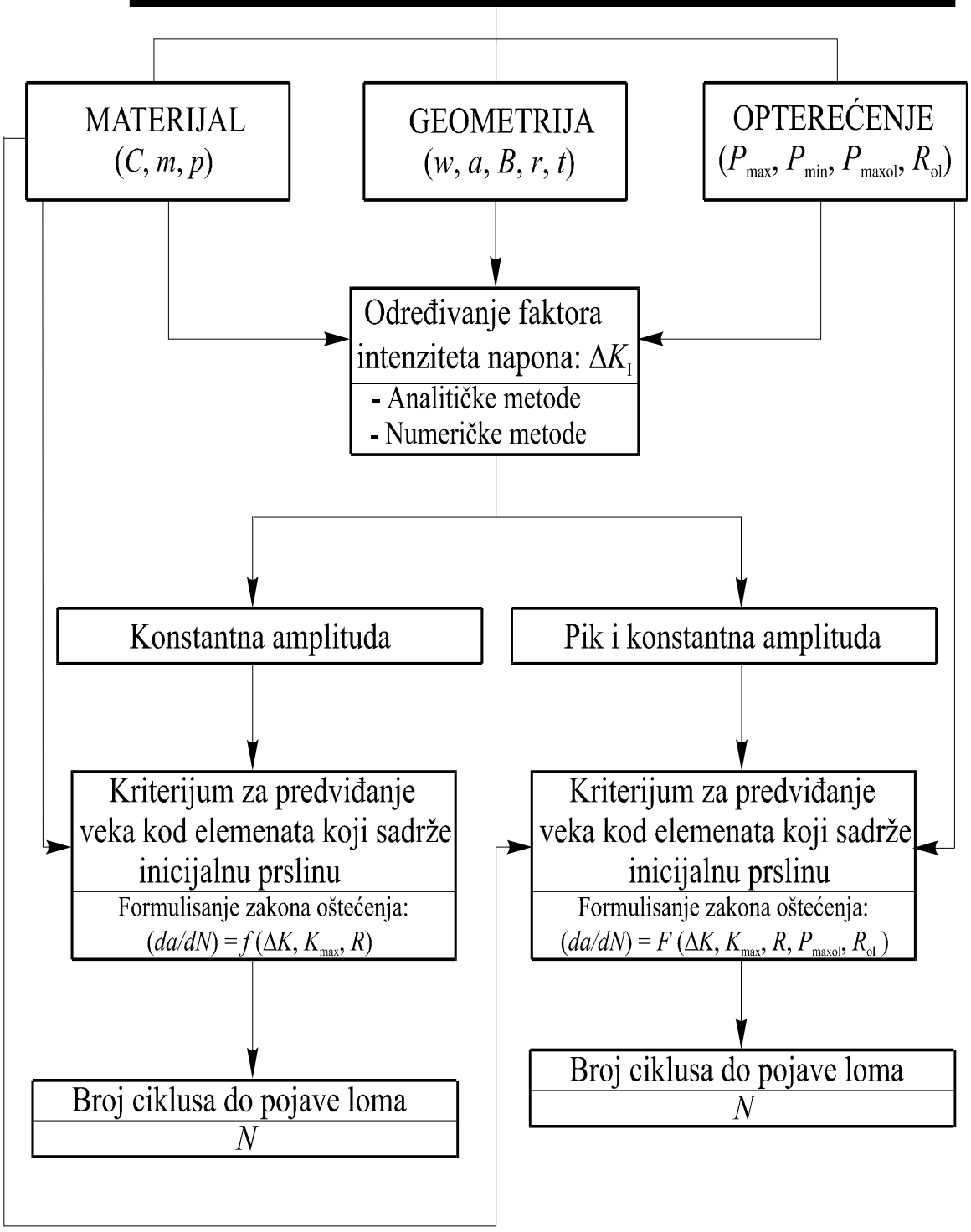


Slika 5.2 Algoritam matematičkog modela za analizu širenja prsline baziran na konceptu gustine energije deformacije.



Slika 5.3 Algoritam matematičkog modela za širenje prsline u kome se uključuje efekat zatvaranja prsline pri dejstvu opterećenja konstantne amplitude i spektra opterećenja.

NUMERIČKA SIMULACIJA PROCENE VEKA ELEMENATA STRUKTURE SA INICIJALNIM PRSLINAMA



Slika 5.4 Algoritam matematičkog modela za simulaciju širenja prsline u uslovima dejstva pika opterećenja.

6. NUMERIČKI PRIMERI

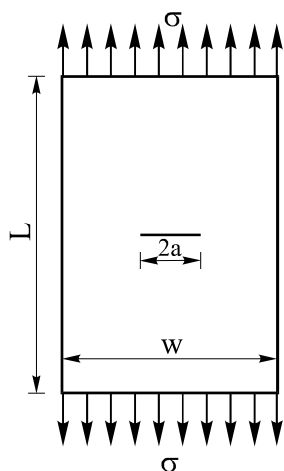
Formulisani matematički modeli iz prethodnih poglavlja za numeričku simulaciju procene veka elemenata struktura sa prslinama su verifikovani u ovom poglavlju kroz odgovarajući broj numeričkih primera. Verifikacije su izvršene upoređivanjem rezultata dobijenih numeričkom simulacijom i raspoloživih eksperimentalnih rezultata. Osim toga, u prezentovanim primerima je analiziran uticaj različitih parametara na procenu veka do pojave loma za izabrane elemente struktura.

6.1 Određivanje faktora intenziteta napona

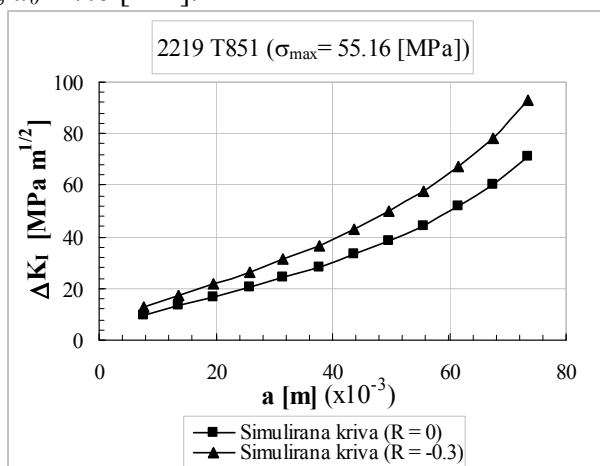
Prilikom analize širenja prsline osnovna veličina koja mora biti određena je faktor intenziteta napona. Kao što je već rečeno (v. Poglavlje 3), faktor intenziteta napona je parametar mehanike loma pomoću koga se u analizu širenja prsline uključuje geometrija elemenata strukture, kao i vrsta spoljašnjeg opterećenja. U primerima koji slede određeni su faktori intenziteta napona primenom analitičkih i/ili numeričkih pristupa.

6.1.1 Ploča sa jednom prslinom i faktor intenziteta napona

U ovom primeru je određen faktor intenziteta napona za ploču sa jednom centralnom prslinom tj. CC (Central Cracked) uzorak (sl. 6.1). Spoljašnje ciklično opterećenje je aksijalno ($\sigma_{max} = 55.16$ [MPa]). Za definisani maksimalni nominalni napon σ_{max} razmtrana su dva različita stepena asimetrije ciklusa ($R = 0$ i $R = -0.3$). Ploča je napravljena od Al legure 2219 T851. Geometrijske karakteristike ploče sa jednom centralnom prslinom su: $w = 152.4$ [mm], $a_0 = 7.6$ [mm].



Slika 6.1 Geometrija ploče sa prslinom.



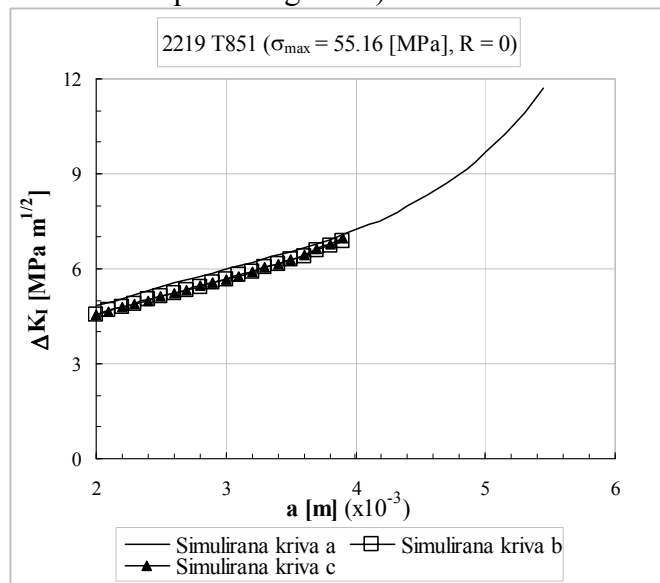
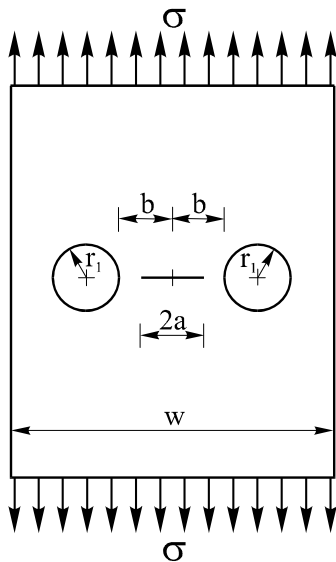
Slika 6.2 Funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona i dužine prsline.

Prilikom određivanja faktora intenziteta napona korišćena je analitička relacija za ploču sa jednom centralnom prslinom tj. CC uzorak (Tabela 3.1). Budući da su poznati parametri koji figurišu u jednačini za definisanu geometriju uzorka (Tabela 3.1) moguće je odrediti faktore intenziteta napona za svaki inkrement dužine prsline, ukoliko se pretpostavi da na ploči postoji inicijalna prslina dužine a_0 . Dobijeni rezultati za faktore intenziteta napona su prikazani na slici 6.2 za $R = 0$ i $R = -0.3$.

6.1.2 Analiza naponskog stanja i faktor intenziteta napona za ploču sa dva otvora i prslinom

Kao element strukture, u ovom primeru je analizirana ploča sa dva otvora i jednom prslinom (sl. 6.3). Geometrijske karakteristike ploče su: $r_l = 2$ [mm], $b = 6$ [mm], $w = 26$ [mm], $a_0 = 2$ [mm]. Spoljašnje ciklično opterećenje koje deluje na ploču je aksijalno ($\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = 0$). Ploča je napravljena od Al legure 2219 T851 i karakteristike materijala su: $\sigma_f' = 613$ [MPa], $\epsilon_f' = 0.35$, $n' = 0.121$, $k' = 710$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 334$ [MPa], $E = 7.1 \cdot 10^4$ [MPa], $K_{IC} = 120$ [MPa m^{1/2}].

Prilikom određivanja faktora intenziteta napona u ovom primeru korišćena su oba pristupa analitički i numerički. Analitički pristup je baziran na korišćenju jednačine za faktor intenziteta napona data u Tabeli 3.1 za definisanu geometriju. Jednačina za korektivnu funkciju u jednačini za faktor intenziteta napona (Tabela 3.1), je dobijena kao rezultat razvoja adekvatne polinomske funkcije zahvaljujući dostupnim u literaturi vrednostima za korektivne faktore (dati tabelarno ili pomoću grafika).

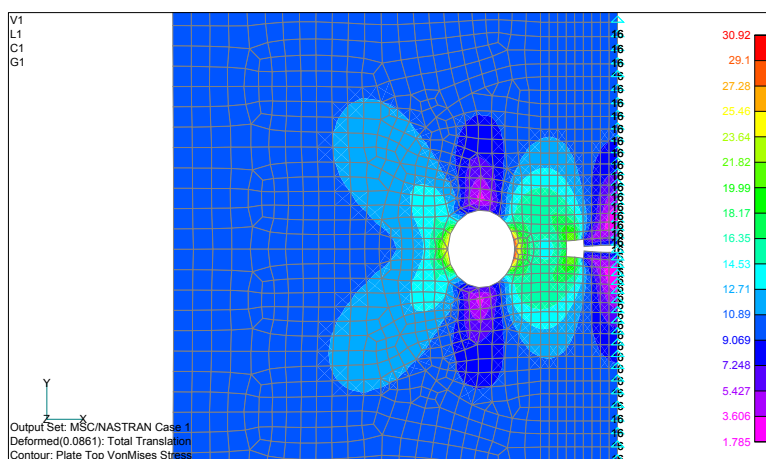


Slika 6.3 Geometrija ploče sa dva otvora i Slika 6.4 Funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona i dužine prsline.

Pored analitičkih relacija za korektivne funkcije u slučajevima kada je reč ili o složenoj geometriji ili o složenom tipu opterećenja neophodno je koristiti numeričke metode za određivanje korektivnih funkcija. Kao numerička metoda za tu svrhu može biti korišćena metoda konačnih elemenata. Pomoću metode konačnih elemenata najpre je neophodno odrediti faktore intenziteta napona, a zatim se definišu adekvatne korektivne

funkcije koje su neophodne prilikom analize širenja prsline, odnosno procene veka elemenata strukture.

Budući da je za slučaj ploče sa dva otvora i prslinom (sl. 6.3) formulisana analitička relacija za korektivnu funkciju faktora intenziteta napona, onda će u ovom primeru za istu geometriju biti definisana nova korektivna funkcija dobijena numeričkim putem. Razlog definisanja nove korektivne funkcije je ustvari verifikacija definisane procedure za numeričku simulaciju korektivne funkcije primenom metode konačnih elemenata. Procedura za numeričku simulaciju korektivne funkcije faktora intenziteta napona je bazirana na modeliranju mreža konačnih elemenata, a zatim sledi naponska analiza i određivanje faktora intenziteta napona za izabrane inkremente dužine prsline a . Prilikom određivanja faktora intenziteta napona u ovom radu je korišćen MKE-program paket MSC/NASTRAN. Jedan razvijeni model/mreža konačnih elemenata je prikazan na slici 6.5 za prslinu dužine $a = 2.5$ [mm]. Ostale proračunate vrednosti za faktore intenziteta napona (za definisanu geometriju, opterećenje i materijal), dobijene primenom MKE, prikazane su u Tabeli 6.1 (za različite inkremente dužine prsline a).



Slika 6.5 MKE model za ploču sa dva otvora i jednom prslinom ($a = 2.5$ [mm], $\sigma_{max} = 55.16$ [MPa]).

Tabela 6.1 Proračunate vrednosti faktora intenziteta napona primenom MKE.

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	ΔK_I^{MKE} [MPam ^{0.5}]
1	2.0	4.55
2	2.2	4.79
3	2.4	5.01
4	2.6	5.22
5	2.8	5.44
6	3.0	5.67
7	3.2	5.91
8	3.4	6.17
9	3.6	6.44
10	3.8	6.72

Posle određivanja vrednosti faktora intenziteta napona, neophodno je za svaki inkrement dužine prsline a odrediti korektivnu funkciju korišćenjem relacije za factor intenziteta

napona (3.3.51). Pošto su definisane vrednosti korektivne funkcije za svaki inkrement dužine prsline a , moguće je od dobijenih vrednosti (Tabela 6.1) formulisati funkcionalnu zavisnost $Y = f(a)$. Kao rezultat razvoja adekvatne korektivne funkcije, u ovom radu, su dobijena dva polinoma, jedan četvrtog stepena i drugi petog stepena, odnosno:

$$Y_4 = 0.152 + 1.2883a - 0.68483a^2 + 0.15667a^3 - 0.01267a^4 \quad (6.1.1)$$

$$Y_5 = 0.90288 + 0.09774a - 0.0058a^2 - 0.0053a^3 - 0.0007a^4 + 0.00047a^5. \quad (6.1.2)$$

Na slici 6.4 prikazane su dobijene funkcionalne zavisnosti između faktora intenziteta napona i dužine prsline upotrebom analitičkog i numeričkog pristupa. Na slici 6.4, simulirana kriva a je dobijena primenom razvijene analitičke relacije (Tabela 6.1), dok su kriva b, odnosno kriva c dobijene korišćenjem jednačine za faktor intenziteta napona (3.3.51) i jedne od jednačina za korektivnu funkciju koje su formulisane na bazi MKE (za krivu b - jednačina (6.1.1), a za krivu c - jednačina (6.1.2)). Kao što se sa slike 6.4 vidi da je dobijeno dobro slaganje za faktore intenziteta napona u slučaju korišćenja analitičkog i numeričkog pristupa.

Formulisani novi polinomi za korektivnu funkciju faktora intenziteta napona upotrebom numeričke simulacije tj. primenom MKE, mogu biti korišćeni prilikom procene veka do pojave loma za analiziranu geometriju, tip spoljašnjeg opterećenja i vrstu materijala razmatrane ploče.

U ovom primeru je prikazano da primena formulisanog numeričkog pristupa (MKE) prilikom određivanja faktora intenziteta napona daje korektne rezultate ukoliko se uporedi sa analitičkim relacijama dostupnim u literaturi. Samim tim ista procedura za numeričku simulaciju primenom MKE može biti korišćena i kod složenih elemenata struktura za koje ne postoje analitičke relacije za faktor intenziteta napona, a neophodne su prilikom analize širenja prsline.

6.1.3 Određivanje faktora intenziteta napona za ploču sa dva otvora i jednom prslinom u uslovima dejstva biaksijalnog opterećenja

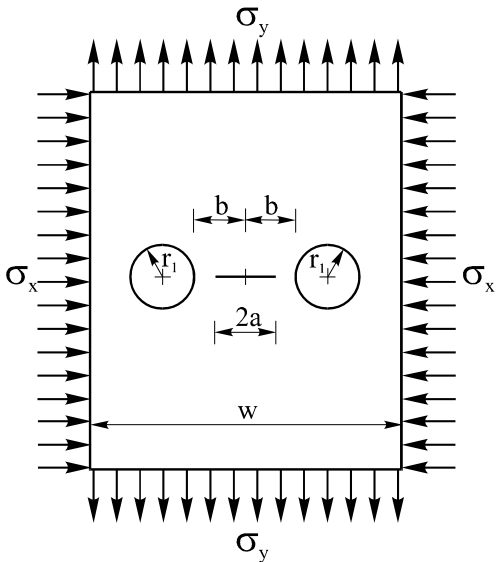
U prethodnom primeru verifikacija je pokazala da formulisana numerička procedura (MKE) za određivanje faktora intenziteta napona može biti korišćena, sada je ista procedura primenjena u slučaju kada je spoljašnje opterećenje biaksijalno. Analizirani element strukture je ploča sa dva otvora i jednom prslinom napravljena od Al legure 2219 T851. Za ploču sa dva otvora i jednom prslinom (sl. 6.6), geometrijske karakteristike su: $r_l = 2$ [mm], $b = 6$ [mm], $w = 26$ [mm], $a_0 = 2$ [mm], a karakteristike materijala kao što sledi: $\sigma_f = 613$ [MPa], $\varepsilon_f = 0.35$, $n' = 0.121$, $k' = 710$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 334$ [MPa], $E = 7.1 \cdot 10^4$ [MPa], $K_{IC} = 120$ [MPa m^{1/2}].

U ovom primeru je korišćena numerička simulacije za određivanje korektivne funkcije faktora intenziteta napona, jer ne postoje u priručnicima (literaturi) neophodni podaci da bi se razvile adekvatne polinomske funkcije pošto je spoljašnje opterećenje biaksijalno. Budući da su poznate karakteristike materijala i geometrija ploče, faktori intenziteta napona mogu biti određeni numeričkim putem tj. korišćenjem metode konačnih elemenata. Kao i u prethodnom primeru prvo su modelirane mreže konačnih elemenata za svaki inkrement dužine prsline a , zatim sledi analiza stanja napona i određivanje faktora intenziteta napona. Nakon definisanja faktora intenziteta napona za svaki

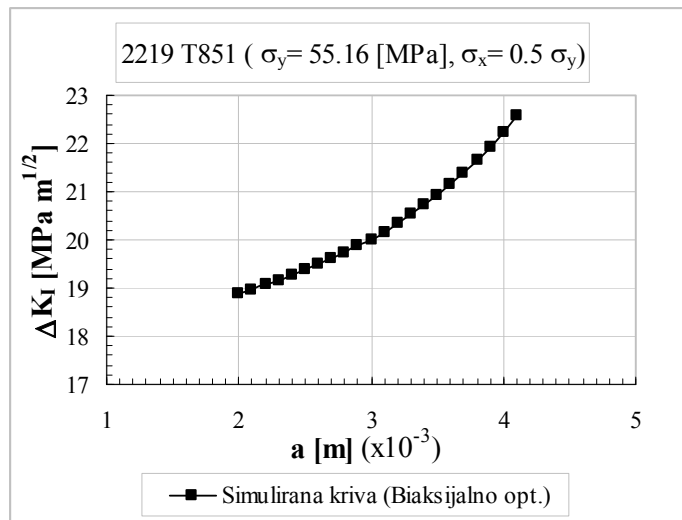
inkrement dužine prsline određeni su i korektivni faktori za faktore intenziteta napona. Dobijene vrednosti korektivnih faktora primenom MKE su posle toga korišćene za formulisanje aproksimirane polinomske funkcije. Formulirana nova polinomska funkcija tj. korektivna funkcija faktora intenziteta napona za ploču sa dva otvora i jednom prslinom u slučaju dejstva biaksijalnog cikličnog opterećenja može biti aproksimirana u obliku:

$$Y_4 = 2.50202 - 5.95245 \left(\frac{a}{b}\right) + 10.29208 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 9.38549 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 4.10202 \left(\frac{a}{b}\right)^4. \quad (6.1.3)$$

Razvijena korektivna funkcija za faktor intenziteta napona (6.1.3) u slučaju dejstva biaksijalnog opterećenja, ukoliko se zameni u jednačinu za faktor intenziteta napona (3.3.51) omogućava uspostavljanje funkcionalne zavisnosti između faktora intenziteta napona i dužine prsline. Dobijene vrednosti faktora intenziteta napona za različite dužine prsline u slučaju dejstva biaksijalnog opterećenja prikazane su na slici 6.7.



Slika 6.6 Geometrija ploče sa dva otvora i jednom prslinom.

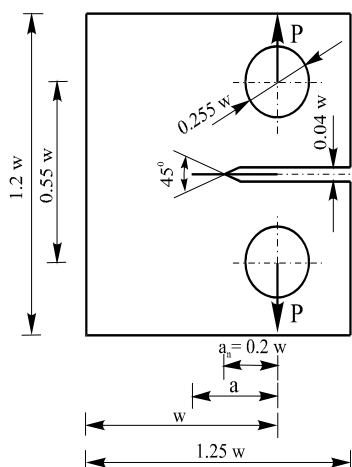


Slika 6.7 Funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona i dužine prsline.

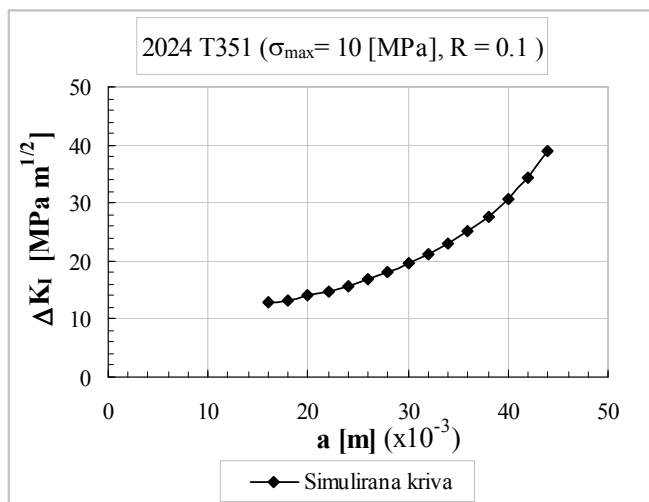
6.1.4 Faktor intenziteta napona za CT uzorak

U ovom primeru, kao i u prethodnim, analizirano je naponsko stanje i određen je faktor intenziteta napona za izabrane inkremente dužine prsline. Kao element strukture razmatran je CT (Compact Tension) uzorak (sl. 6.8) u uslovima dejstva cikličnog aksijalnog opterećenja ($\sigma_{max} = 10$ [MPa], $R = 0.1$). CT uzorak je napravljena od Al legure 2219 T851 sa sledećim karakteristikama materijala: $\sigma_f = 613$ [MPa], $\epsilon_f = 0.35$, $n' = 0.121$, $k' = 710$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 334$ [MPa], $E = 7.1 \cdot 10^4$ [MPa]. Geometrijske karakteristike CT uzorka su: $w = 70$ [mm], $a = 16$ [mm], $B = 7.5$ [mm].

Za definisane karakteristike materijala, geometriju CT uzorka i spoljašnje opterećenje, korišćenjem analitičke relacije koja je data u Tabeli 3.1, određeni su faktori intenziteta napona. Sve dobijene vrednosti za faktore intenziteta napona za različite inkremente dužine prsline su prikazane u Tabeli 6.2 i na slici 6.9.



Slika 6.8 Geometrija CT uzorka.



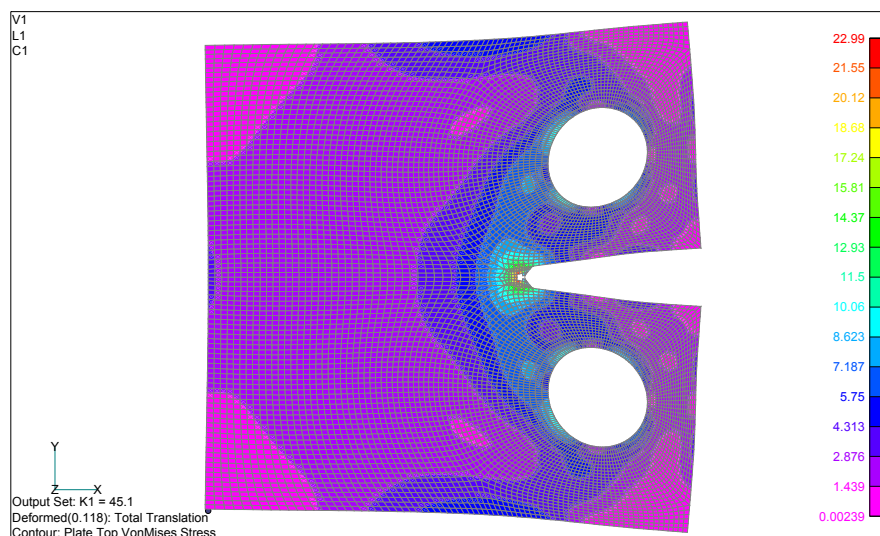
Slika 6.9 Funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona i dužine prsline.

Tabela 6.2 Proračun faktora intenziteta napona.

Br.	$a \cdot 10$ [m]	$Y(a/w)$	ΔK_I [M Pa m ^{1/2}]
1	16	6.153608	12.798874
2	18	6.048857	13.300488
3	20	6.046100	13.976628
4	22	6.122746	14.812475
5	24	6.261979	15.794253
6	26	6.452756	16.913930
7	28	6.689051	18.173137
8	30	6.973632	19.586521
9	32	7.310513	21.184698
10	34	7.712500	23.016890
11	36	8.197417	25.153321
12	38	8.788862	27.687414
13	40	9.516207	30.737835
14	42	10.414598	34.450397
15	44	11.524953	38.999441

Analitička relacija (jednačina data u Tabeli 3.1) za određivanje faktora intenziteta napona mora biti uključena prilikom analize širenja prsline, tako da je u ovom primeru izvršena i provera njene validnosti. Prilikom provere korišćena je numerička simulacija bazirana na primeni metode konačnih elemenata.

Kao i u prethodnim primerima prvo je modelirana mreža konačnih elemenata, zatim je izvršena analiza naponskog stanja. Mreža konačnih elemenata je modelirana pomoću singularnih konačnih elemenata. Kao rezultat analize dobijeni su faktori intenziteta za izabrane inkremente dužine prsline. Raspodela napona dobijena kao rezultat naponske analize u slučaju da je $P_{max} = 8658.6$ [daN], $a = 16$ [mm], data je na slici 6.10.



Slika 6.10 Raspodela naponskog stanja za CT uzorak dobijena primenom MKE ($P_{max}=8658.6$ [N], $a = 16$ [mm], $K_{max} = 14.26$ [MPam^{1/2}]).

Pored inkrementa dužine prsline $a = 16$ [mm], mreža je modelirana i za inkrement $a=26.25$ [mm]. Vrednosti za faktore intenziteta napona dobijene primenom numeričkog i analitičkog (Tabela 3.1) pristupa upoređene su u Tabeli 6.3.

Tabela 6.3 Poređenje proračunatih vrednosti faktora intenziteta napona dobijenih pomoću analitičkog i numeričkog pristupa za CT uzorak (2024 T351, $R = 0.1$).

$a \cdot 10^{-3}$ [m]	$P = 8658.6$ [N]		
	$\Delta K_{I max}^{Anal.}$ [MPam ^{1/2}]	$\Delta K_{I max}^{MKE.}$ [MPam ^{1/2}]	Δ [%]
16.00	14.0499	14.2619	2.25
26.25	17.8131	18.1831	2.04

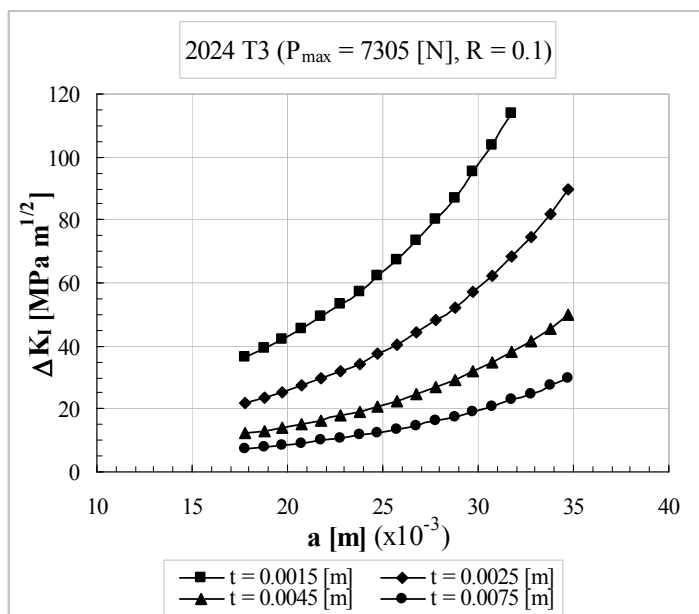
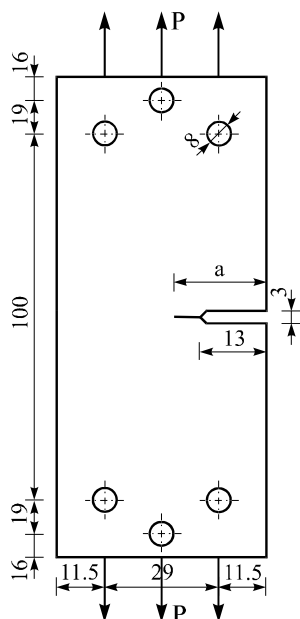
Tabela 6.3 pokazuje da se dobija dobro slaganje između rezultata dobijenih analitičkim putem i onih dobijenih numeričkim putem (MKE) za proračunate vrednosti faktora intenziteta napona pri različitim vrednostima dužine prsline, samim tim analitička relacija, data u Tabeli 3.1, može biti korišćena u matematičkim modelima za simulaciju širenja prsline.

6.1.5 Uticaj debljine uzorka na faktor intenziteta napona

U ovom primeru je razmatrano kako debljina uzorka utiče na faktor intenziteta napona. Prilikom analize korišćen je SEN (Single Edge Notched) uzorak (sl. 6.11) sa geometrijskim karakteristikama: $a_0 = 17.75$ [mm], $\Delta a = 1$ [mm], $w = 52$ [mm]. Spoljašnja maksimalna sila (cikličnog opterećenja konstantne amplitude) je $P_{max} = 7305$ [N] sa stepenom asimetrije ciklusa $R = 0.1$. SEN uzorak je napravljen od legure aluminijuma 2024 T3, tako da su neophodne karakteristike materijala: $\sigma_{0.2} = 324$ [MPa], $\nu = 0.33$, $E = 73100$ [MPa].

Prilikom određivanja faktora intenziteta napona razmatrane su četiri različite debljine SEN uzorka dok su ostale geometrijske karakteristike ostale iste. Faktori intenziteta napona su proračunati primenom relacije koja je data u Tabeli 3.1 za SEN uzorak.

Dobijene vrednosti za faktore intenziteta napona u slučaju različitih debljina uzorka su date na slici 6.12, kao i u Tabeli 6.4.



Slika 6.11 Geometrija SEN uzorka.

Slika 6.12 Uticaj debljine SEN uzorka t na faktor intenziteta napona ΔK_I .

Tabela 6.4 Određivanje faktora intenziteta napona za različite debljine SEN uzorka ($P_{max} = 7305 [N]$, $R = 0.1$).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	ΔK_I [MPa m ^{1/2}]			
		$t = 1.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 4.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 7.5 \cdot 10^{-3}$ [m]
1	17.75	$0.3637 \cdot 10^2$	$0.2182 \cdot 10^2$	$0.1212 \cdot 10^2$	$0.7274 \cdot 10^1$
2	18.75	$0.3915 \cdot 10^2$	$0.2347 \cdot 10^2$	$0.1305 \cdot 10^2$	$0.7831 \cdot 10^1$
3	19.75	$0.4218 \cdot 10^2$	$0.2531 \cdot 10^2$	$0.1406 \cdot 10^2$	$0.8436 \cdot 10^1$
4	20.75	$0.4548 \cdot 10^2$	$0.2729 \cdot 10^2$	$0.1516 \cdot 10^2$	$0.9096 \cdot 10^1$
5	21.75	$0.4909 \cdot 10^2$	$0.2946 \cdot 10^2$	$0.1636 \cdot 10^2$	$0.9819 \cdot 10^1$
6	22.75	$0.5306 \cdot 10^2$	$0.3184 \cdot 10^2$	$0.1769 \cdot 10^2$	$0.1061 \cdot 10^2$
7	23.75	$0.5743 \cdot 10^2$	$0.3446 \cdot 10^2$	$0.1914 \cdot 10^2$	$0.1159 \cdot 10^2$
8	24.75	$0.6225 \cdot 10^2$	$0.3735 \cdot 10^2$	$0.2075 \cdot 10^2$	$0.1245 \cdot 10^2$
9	25.75	$0.6757 \cdot 10^2$	$0.4054 \cdot 10^2$	$0.2252 \cdot 10^2$	$0.1351 \cdot 10^2$
10	26.75	$0.7346 \cdot 10^2$	$0.4408 \cdot 10^2$	$0.2449 \cdot 10^2$	$0.1469 \cdot 10^2$
11	27.75	$0.7998 \cdot 10^2$	$0.4799 \cdot 10^2$	$0.2666 \cdot 10^2$	$0.1600 \cdot 10^2$
12	28.75	$0.8719 \cdot 10^2$	$0.5232 \cdot 10^2$	$0.2906 \cdot 10^2$	$0.1744 \cdot 10^2$
13	29.75	$0.9518 \cdot 10^2$	$0.5711 \cdot 10^2$	$0.3173 \cdot 10^2$	$0.1904 \cdot 10^2$
14	30.75	$0.1040 \cdot 10^3$	$0.6242 \cdot 10^2$	$0.3468 \cdot 10^2$	$0.2081 \cdot 10^2$
15	31.75	$0.1138 \cdot 10^3$	$0.6828 \cdot 10^2$	$0.3793 \cdot 10^2$	$0.2276 \cdot 10^2$
16	32.75	$0.1246 \cdot 10^3$	$0.7477 \cdot 10^2$	$0.4154 \cdot 10^2$	$0.2492 \cdot 10^2$
17	33.75	$0.1365 \cdot 10^3$	$0.8193 \cdot 10^2$	$0.4552 \cdot 10^2$	$0.2731 \cdot 10^2$
18	34.75	$0.1497 \cdot 10^3$	$0.8982 \cdot 10^2$	$0.4990 \cdot 10^2$	$0.2994 \cdot 10^2$

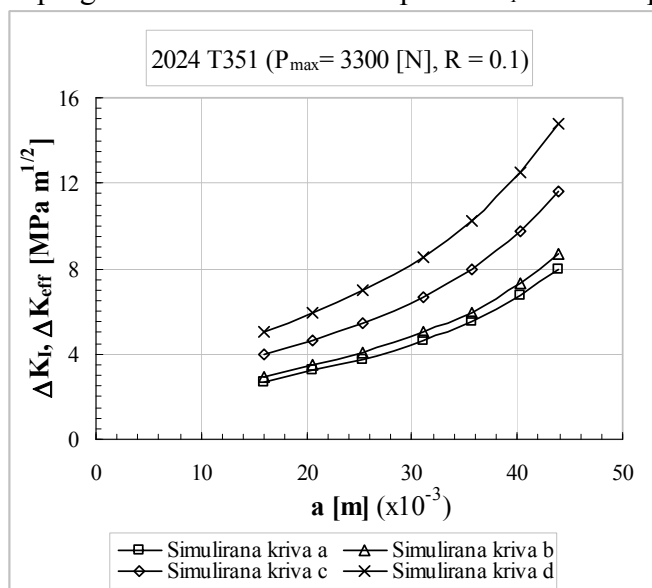
Analiza dobijenih rezultata, prikazanih u Tabeli 6.4 i na slici 6.12, navodi na zaključak da debljina uzorka značajno utiče na vrednost važnog parametra mehanike loma kao što je factor intenziteta napona. Na primer ukoliko je dužina prsline $a = 31.75$ [mm], faktor intenziteta napona pri $t = 1.5$ [mm] je za oko 1.6 puta veći u odnosu na vrednost za ΔK_I pri $t = 2.5$ [mm], 3 puta veći u odnosu na vrednost za ΔK_I pri $t = 4.5$ [mm], a oko 5 puta veći odnosu na vrednost za ΔK_I pri $t = 7.5$ [mm].

6.2 Određivanje efektivnog faktora intenziteta napona

6.2.1 Određivanje efektivnog faktora intenziteta napona pomoću analitičkog pristupa

Kod modela u kojim se uključuje fenomen zatvaranja prsline, pored faktora intenziteta napona, neophodno je odrediti efektivne faktore intenziteta napona. U ovom primeru razmatrane su neke od relacija pomoću kojih je moguće odrediti efektivne faktore intenziteta napona. Konfiguracija razmatranog CT uzorka je prikazana na slici 6.8. CT uzorak je napravljen od Al legure 2024 T351. Spoljašnje ciklično opterećenje je aksijalno sa konstantnom amplitudom ($P_{max} = 3300$ [N]), dok je stepen asimetrije ciklusa $R=0.1$. Potrebni parametri koji definišu geometriju CT uzorka su: $w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm].

Za poznate parametre geometrije i definisano spoljašnje opterećenje, efektivni faktori intenziteta napona mogu biti određeni upotrebom neke od jednačina (3.3.53), (3.3.54) ili jednačine (3.3.55) zajedno sa (3.3.56) i (3.3.57). Pošto u relacijama za određivanje efektivnog faktora intenziteta napona figuriše i faktor intenziteta napona korišćena je relacija data u Tabeli 3.1 za CT uzorak. Funkcionalne zavisnosti između opsega efektivnog faktora intenziteta napona i dužine prsline (kriva a - dobijena primenom jednačine (3.3.53), kriva b - korišćenjem jednačine (3.3.54), kriva c - upotrebom jednačina (3.3.55)-(3.3.57), date su na slici 6.13. Na istoj slici prikazana je funkcionalna zavisnost između opsega faktora intenziteta napona ΔK_I i dužine prsline a (simulirana kriva d).



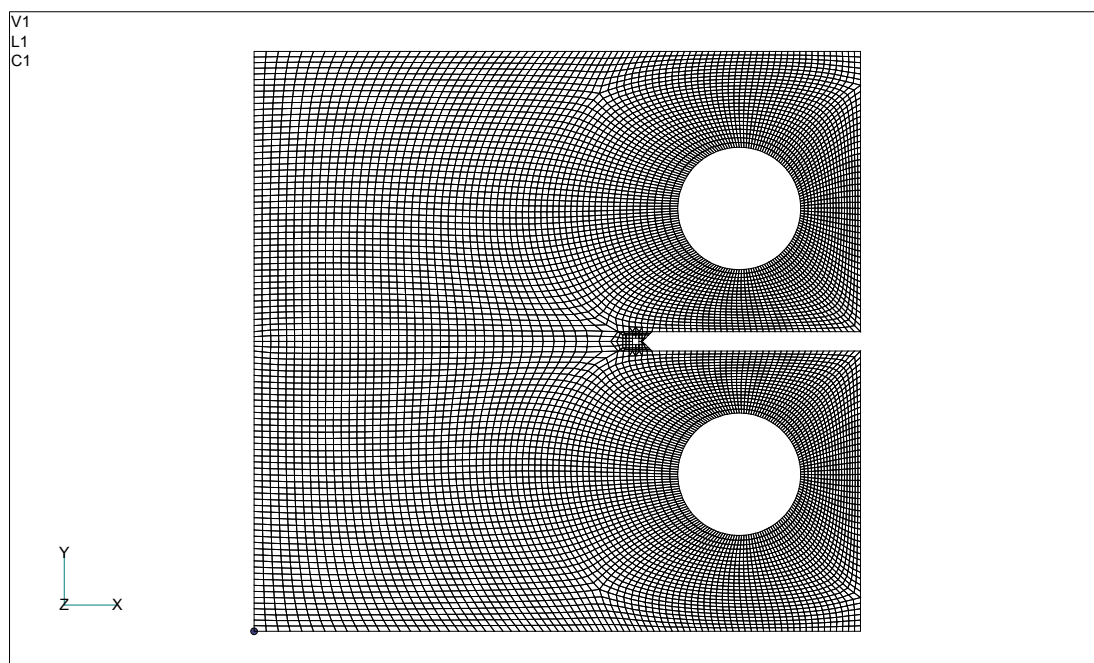
Slika 6.13 Funkcionalna zavisnost između opsega efektivnog faktora intenziteta napona ΔK_{eff} , odnosno opsega faktora intenziteta napona ΔK_I i dužine prsline a .

Kao što se sa slike 6.13 može uočiti uključivanje u analizu fenomena zatvaranja prsline dovodi do toga da su vrednosti opsega efektivnih faktora intenziteta napona znatno manje od vrednosti opsega faktora intenziteta napona (Tabela 3.1) pri istoj dužini prsline. Osim toga, najveće vrednosti efektivnog faktora intenziteta napona dobijaju se u slučaju upotrebe jednačina (3.3.55)-(3.3.57), a najniže kada se primenjuje jednačine (3.3.53).

6.2.2 Analiza efekta zatvaranja prsline primenom MKE

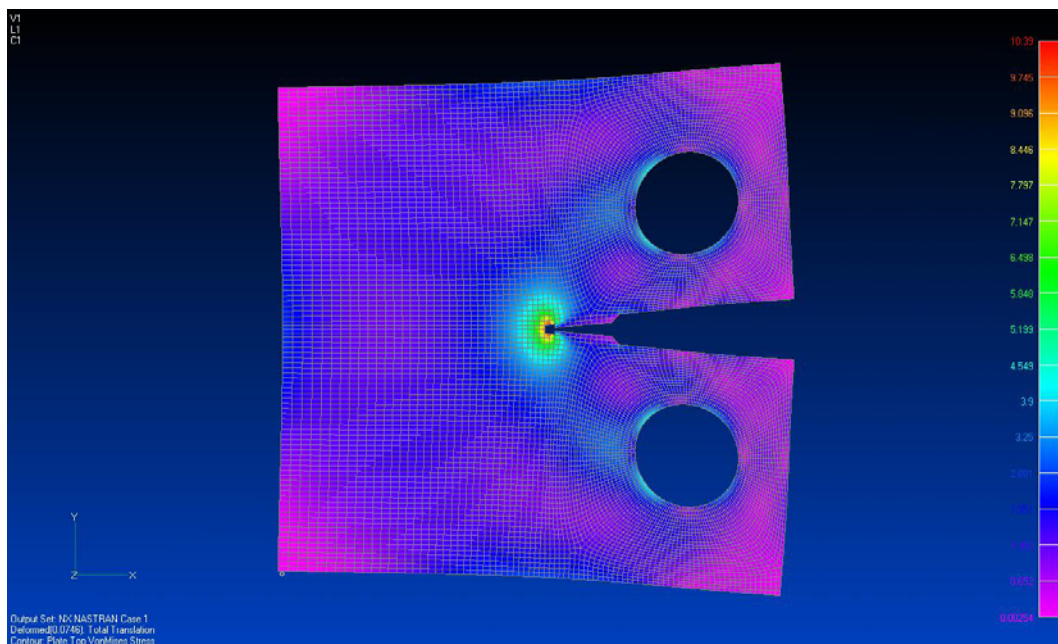
Efektivni faktor intenziteta napona je moguće definisani onda kada se uključuje fenomen zatvaranja prsline, kao što je već razmatano u Poglavlju 3. S obzirom da efekat zatvaranja prsline može biti adekvatno simuliran pomoću metode konačnih elemenata u ovom primeru je analiziran taj fenomen. Ustvari, pomoću metode konačnih elemenata simuliran je fenomen zatvaranja prsline da bi se odredili odgovarajući korektivni faktori pomoću kojih se koriguju efektivni faktori intenziteta napona.

Numerička simulacija je izvedena na CT uzorku (sl. 6.8) u uslovima dejstva cikličnog aksijalnog opterećenja konstantne amplitude. Prilikom simulacije efekta zatvaranja prsline neophodno je modelirati više mreža konačnih elemenata u opsegu sila od 3000 [N] do 15000 [N]. U ovom primeru je u okviru izabranog opsega definisano pet različitih vrednosti za intenzitete sila, odnosno spoljašnje opterećenje. Jedna od modeliranih mreža konačnih elemenata je prikazana na slici 6.14. Pomoću definisanih mreža konačnih elemenata moguće je izvršiti analizu naponskog stanja za izabranu geometriju CT uzorka i spoljašnje opterećenje.



Slika 6.14 Mreža konačnih elemenata za razmatrani CT uzorak ($w = 75$ [mm], $a_0 = 16$ [mm], $B = 10$ [mm]).

Kao rezultat analize naponskog stanja dobijena je raspodela napona prikazana na slici 6.15, za CT uzorak ($w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a_0 = 16$ [mm]), u slučaju da je $P_{max}=3300$ [N], $R = 0.1$, $a = 26.25$ [mm]).



Slika 6.15 Analiza naponskog stanja za CT uzorak pomoću MKE ($w = 75$ [mm], $a = 26.25$ [mm], $B = 10$ [mm], $P_{max} = 3300$ [N], $R = 0.1$).

Numerička simulacija bazirana na metodi konačnih elemenata, omogućava da se kao rezultat analize naponskog stanja odrede novi korektivni faktori pomoću kojih se koriguju vrednosti za efektivne faktore intenziteta napona. U ovom primeru su razmatrane tri različite relacije ((3.3.53), (3.3.54) i (3.3.55)-(3.3.57)) i formulisan je numerički pristup baziran na MKE koji uključuje efekat zatvaranja prsline. Ustvari, primenom MKE dobijeni su novi korektivni faktori za efektivne faktore intenziteta napona za svaku od razmatrane tri relacije. Definisani korektivni faktori pomoću MKE su dati u Tabeli 6.5, za CT uzorak prikazan na slici 6.8 ($w = 75$ [mm] i $B = 10$ [mm]).

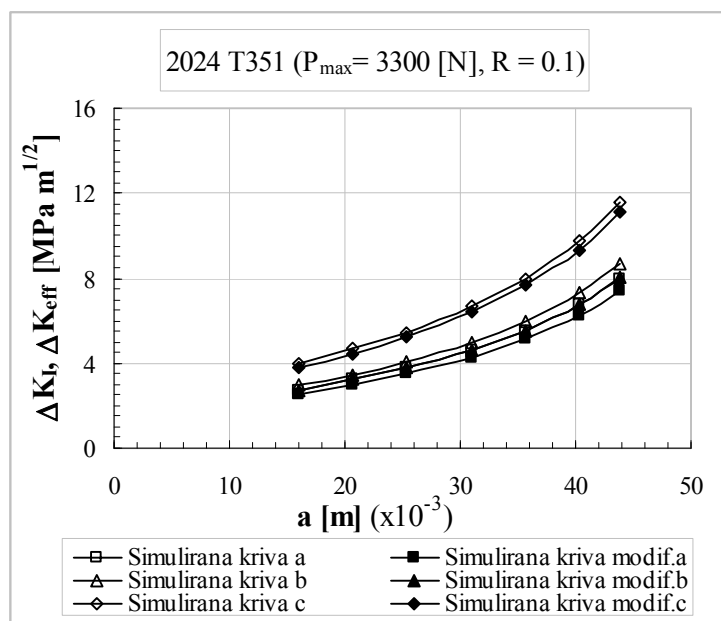
Tabela 6.5 Korektivni faktori za korigovanje efektivnih faktora intenziteta napona.

Efektivni factor intenziteta napona	Korektivni factor
$\Delta K_{eff} = (0.5 + 0.4 R) \Delta K$	0.925
$\Delta K_{eff} = (0.55 + 0.33 R + 0.12 R^2) \Delta K$	0.927
$\Delta K_{eff} = \left(1 - 0.5 \left(\frac{K_{top}}{K_{max}} + \frac{K_{tcl}}{K_{max}} \right) \right) K_{max}$	0.9574

Svi dobijeni novi korektivni faktori za efektivne faktore intenziteta napona će biti korišćeni, u numeričkim primerima koji slede, za analizu širenja prsline. U okviru analize poseban značaj će biti dat poređenju vrednosti za broj ciklusa opterećenja do

pojave loma, dobijene primenom analitičkih (empirijskih) relacija kojima se uključuje fenomen zatvaranja prsline i novih modifikovanih relacija koje su dobijene kao rezultat analize istog fenomena pomoću MKE.

Najpre je u okviru ovog primera analizirano kako definisani korektivni faktori dobijeni pomoću MKE utiču na efektivne faktore intenziteta napona dobijene primenom analitičkih relacija. Proračunate vrednosti za efektivne faktore intenziteta napona primenom analitičkih i modifikovanih relacija su prikazane na slici 6.16.



Slika 6.16 Funkcionalna zavisnost između efektivnog faktora intenziteta napona ΔK_{eff} i dužine prsline a .

Prilikom proračuna efektivnih faktora intenziteta napona, za već definisanu geometriju CT uzorka i spoljašnje opterećenje ($P_{max} = 3300$ [N], $R = 0.1$), korišćene su jednačine (3.3.53), (3.3.54) ili jednačine (3.3.55) zajedno sa (3.3.56) i (3.3.57) i korektivni faktori dati u Tabeli 6.5 (kriva a - bazirana na jednačini (3.3.53), kriva b - bazirana na jednačini (3.3.54), kriva c - bazirana na jednačinama (3.3.55)-(3.3.57), dok je kriva modif.a - dobijena uvođenjem adekvatnog korektivnog faktora iz Tabele 6.5 i primenom jednačine (3.3.53), kriva modif.b - uključivanjem korektivnog faktora iz Tabele 6.5 i jednačine (3.3.54) i kriva modif.c - uvođenjem odgovarajućeg korektivnog faktora iz Tabele 6.5 i jednačina (3.3.55)-(3.3.57)).

Sa slike 6.16 se može videti da su dobijene vrednosti za efektivne faktore intenziteta napona najveće u slučaju korišćenja analitičkih jednačina (3.3.55)-(3.3.57), a najniže vrednosti se dobijaju primenom modifikovane jednačine (3.3.53). Osim toga, uvedene korekcije primenom MKE kod razmatranih analitičkih relacija ((3.3.53), (3.3.54) i (3.3.55)-(3.3.57)) koje uključuju efekat zatvaranja prsline dovode do smanjenja vrednosti efektivnih faktora intenziteta napona.

6.3 Određivanje broja ciklusa opterećenja do pojave loma primenom koncepta gustine energije deformacije

6.3.1 Verifikacija matematičkog modela za analizu širenja prsline baziranog na gustini energije deformacije

U ovom primeru izvršena je verifikacija formulisane procedure za numeričku simulaciju koja je bazirana na konceptu gustine energije deformacije. Kao element strukture razmatrana je ploča sa otvorom i prslinom u centru (sl. 6.1) tj. ista ploča analizirana u primeru 6.1.1. Ploča je napravljena od Al legure 2219 T851. Spoljašnje ciklično opterećenje je aksijalno konstantne amplitude. Potrebne karakteristike analizirane Al legure pri dejstvu cikličnih opterećenje su: $\sigma_f' = 613$ [MPa], $\varepsilon_f' = 0.35$, $n' = 0.121$, $k' = 710$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 334$ [MPa], $E = 7.1 \cdot 10^4$ [MPa], $K_{IC} = 120$ [MPa m^{1/2}], $I_n' = 3.067$, $\psi = 0.95152$ i $\Delta K_{th0} = 8$ [MPa m^{1/2}]. Geometrijske karakteristike ploče sa otvorom su: $w = 152.4$ [mm], $a_0 = 7.6$ [mm].

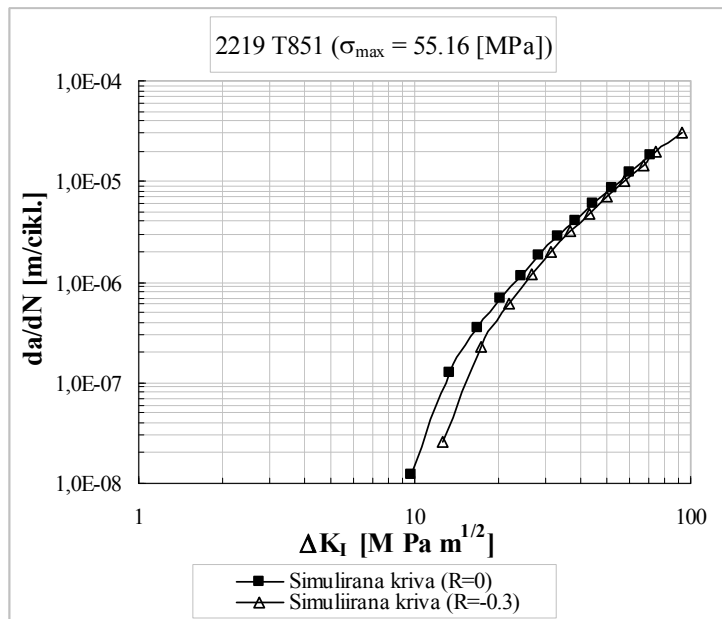
Prilikom određivanja broja ciklusa opterećenja do pojave loma razmatrane ploče sa prslinom u centru, prvo su izračunati faktori inteziteta napona, zatim primenom jednačine (3.3.14) su određeni gradijenti širenja prsline za izabrane inkremente dužine prsline. Prilikom određivanja gradijenata širenja prsline korišćena je relacija za faktor inteziteta napona data u Tabeli 3.1. Dobijene vrednosti putem proračuna za gradijente širenja prsline, u slučaju da je spoljašnje ciklično opterećenje konstantne amplitude ($\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = 0$ i $R = -0.3$), prikazane su u Tabeli 6.6 i na slici 6.17.

Tabela 6.6 Gradijenti širenja prsline dobijeni korišćenjem matematičkog modela baziranog na konceptu gustine energije deformacije.

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	$\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = 0$		$\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = -0.3$	
		ΔK_I [MPam ^{0.5}]	da/dN [m/cikl.]	ΔK_I [MPam ^{0.5}]	da/dN [m/cikl.]
1	7.6	9.651643571	1.220896429 10^{-8}	12.54713664	2.552996137 10^{-8}
2	13.6	13.34446905	12.78366243 10^{-8}	17.34780977	23.13069054 10^{-8}
3	19.6	16.80703835	34.71410203 10^{-8}	21.84914985	61.16411456 10^{-8}
4	25.8	20.44362823	69.30111398 10^{-8}	26.57671669	120.6380017 10^{-8}
5	31.6	24.17147719	117.0430273 10^{-8}	31.42292035	202.3682866 10^{-8}
6	37.6	28.34661464	185.2808270 10^{-8}	36.85059903	318.8621786 10^{-8}
7	43.6	33.01682151	280.0982664 10^{-8}	42.92186796	280.0982664 10^{-8}
8	49.6	38.34278994	412.0568916 10^{-8}	49.84562692	704.9197726 10^{-8}
9	55.6	44.53433621	597.3771454 10^{-8}	57.89463707	1019.849042 10^{-8}
10	61.6	51.86196942	861.0381944 10^{-8}	67.42056024	1467.493168 10^{-8}
11	67.6	60.15786873	1217.547281 10^{-8}	74.88618421	2002.253227 10^{-8}
12	73.6	71.36574206	1797.02952 10^{-8}	92.77546468	3054.793448 10^{-8}

Nakon određivanja gradijenata širenja prsline za izabrane inkremente dužine prsline tj. upotrebom integralne jednačine (3.3.16) moguće je proceniti vek odnosno odrediti broj ciklusa opterećenja do pojave loma za ploču sa jednom prslinom u centru. Pošto je podintegralna funkcija u jednačini (3.3.16) složenog oblika prilikom određivanja broja ciklusa opterećenja do pojave loma neophodno je koristiti odgovarajuće metode za

numeričku integraciju. U ovom primeru je za numeričku integraciju upotrebljena Simpson-ova metoda.



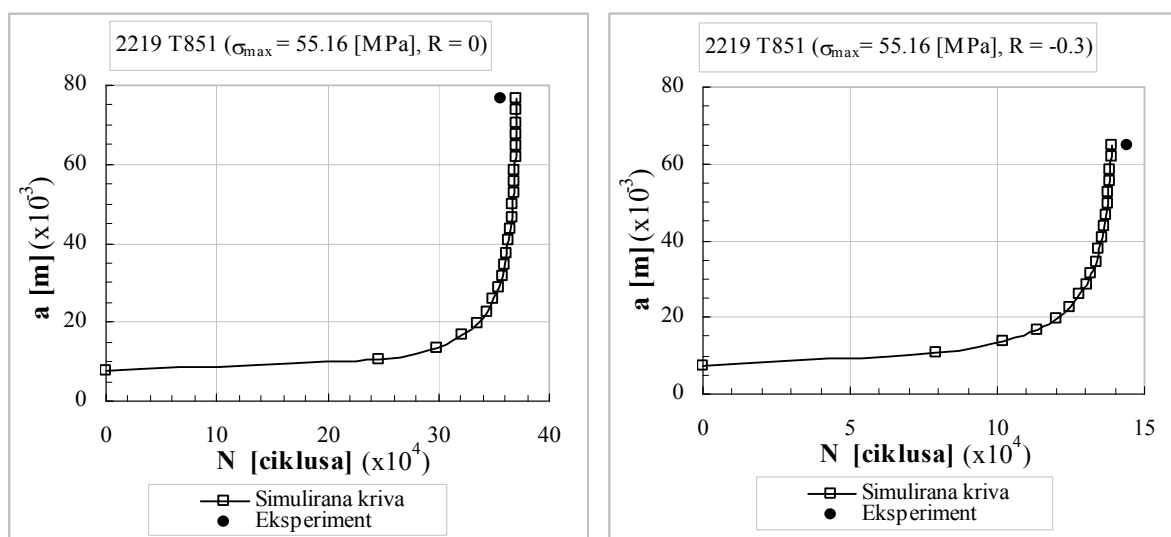
Slika 6.17 Funkcionalna zavisnost između gradijenta širenja prsline da/dN i faktora intenziteta napona ΔK_I .

Predviđeni broj ciklusa opterećenja do pojave loma dobijen numeričkom simulacijom dat je u Tabeli 6.7 i na slici 6.18.a, odnosno 6.18.b. Pored toga, na istim slikama gde su prikazane simulirane krive predviđenog veka ploče sa prslinom date su eksperimentalno dobijene tačke koje prikazuju broj ciklusa opterećenja pri kome je došlo do loma kao i veličinu krajnje dužine prsline.

Tabela 6.7 Broj ciklusa do loma dobijen numeričkom simulacijom koja je bazirana na konceptu gustine energije deformacije.

Br.	a [m]	$Y(a/w)$	N [ciklusa]	
			$\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = 0$	$\sigma_{max} = 55.16$ [MPa], $R = -0.3$
1	0.0076	1.13238807	0	0
2	0.0136	1.17039552	$0.29853380631 \cdot 10^6$	$0.10225156416 \cdot 10^6$
3	0.0196	1.22790272	$0.33538327588 \cdot 10^6$	$0.12028208210 \cdot 10^6$
4	0.0258	1.30181397	$0.35003359513 \cdot 10^6$	$0.12796868168 \cdot 10^6$
5	0.0316	1.39078647	$0.35772901710 \cdot 10^6$	$0.13214072195 \cdot 10^6$
6	0.0376	1.49523028	$0.36231455187 \cdot 10^6$	$0.13467633633 \cdot 10^6$
7	0.0436	1.61730833	$0.36524483963 \cdot 10^6$	$0.13631862481 \cdot 10^6$
8	0.0496	1.76093643	$0.36719673207 \cdot 10^6$	$0.13742344545 \cdot 10^6$
9	0.0556	1.93178324	$0.36852872921 \cdot 10^6$	$0.13818318686 \cdot 10^6$
10	0.0616	2.13727032	$0.36944910211 \cdot 10^6$	$0.13871138779 \cdot 10^6$
11	0.0676	2.36657297	$0.37008778251 \cdot 10^6$	-
12	0.0736	2.69061578	$0.37053043633 \cdot 10^6$	-

Prilikom eksperimentalnog istraživanja ploča sa prslinom je podvrgnuta dejstvu cikličnog aksialnog opterećenja konstantne amplitude (sa dva različita stepena asimetrije ciklusa $R = 0$ i $R = -0.3$), na MTS mašini i pri sobnoj temperaturi.



(a)

(b)

Slika 6.18 Funkcionalna zavisnost između dužine prsline a i broja ciklusa do pojave loma N .

Sa slike 6.18.a i slike 6.18.b se može zaključiti da je formulisan matematički model tj. procedura za simulaciju širenja prsline i određivanje broja ciklusa opterećenja do loma u dobroj saglasnosti sa eksperimentom i kao takva može biti korišćena za procenu veka elemenata struktura.

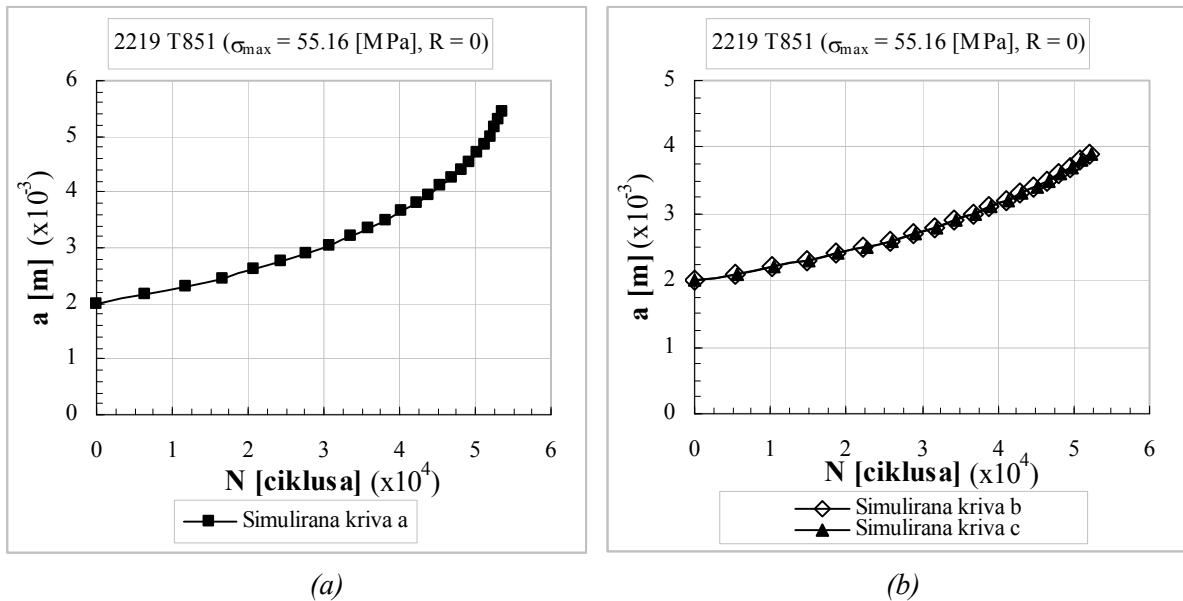
6.3.2 Proračun preostale čvrstoće ploče sa dva otvora i jednom prslinom

U prethodnom primeru verifikacija pomoću eksperimentalnih rezultata je pokazala da formulisani matematički model baziran na konceptu gustine energije deformacije može biti korišćen tako da ovaj primer razmatra određivanje broja ciklusa opterećenja do loma za ploču sa dva otvora i jednom prslinom na sredini (sl. 6.3), primenom istog modela. Spoljašnje opterećenje je ciklično konstantne amplitude. Materijal korišćen prilikom simulacije širenja prsline tj. određivanje broja ciklusa opterećenja do pojave loma je 2219 T851 Al legura sa sledećim karakteristikama: $\sigma_f' = 613$ [MPa], $\varepsilon_f' = 0.35$, $n' = 0.121$, $k' = 710$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 334$ [MPa], $E = 7.1 \cdot 10^4$ [MPa], $K_{IC} = 120$ [MPa $m^{1/2}$], $I_n' = 3.067$, $\psi = 0.95152$, $\Delta K_{th0} = 8$ [MPa $m^{1/2}$]. Potrebne geometrijske karakteristike ploče sa dva otvora i jednom prslinom su: $r_1 = 2$ [mm], $b = 6$ [mm], $w = 26$ [mm], $a_0 = 2$ [mm].

Prilikom određivanja broja ciklusa opterećenja do loma neophodno je bilo odrediti faktore intenziteta napona što je učinjeno u primeru 6.1.2. Budući da je reč o složenom elementu strukture prilikom analize napona tj. određivanja faktora intenziteta napona korišćena je metoda konačnih elemenata (primer 6.1.2). Nakon dobijenih vrednosti za faktore intenziteta napona pomoću MKE, za različite vrednosti dužine prsline, definisane su nove relacije za faktor intenziteta napona kao funkcije koje zavise od količnika dužine prsline a i dužine b (jed. (6.1.1) i (6.1.2)).

Pošto su formulisane adekvatne relacije koje su neophodne za numeričku simulaciju širenja prsline tj. predviđanje broja ciklusa opterećenja do pojave loma za element strukture sa prslinom (sl. 6.3), moguće je odrediti krive koje definišu funkcionalnu

zavisnost između dužine prsline a i broja ciklusa do pojave loma N , primenom jednačine (3.3.51) i jednačine (3.3.16). U slučaju kada je nominalni napon $\sigma_{max} = 55.16$ [MPa] i $R = 0$ upotrebom jednačine (3.3.16) kao i jednačine za faktor intenziteta napona koja je data u Tabeli 3.1 određen je broj ciklusa opterećenja do pojave loma (kriva a na sl. 6.19.a). Pored toga, primenom jednačine (3.3.16) zajedno sa jednačinom (3.3.51) i jednom od relacija za korektivnu funkciju (6.1.1), odnosno (6.1.2) dobijene su simulirane krive za broj ciklusa opterećenja do loma (prikazane krivom b, odnosno krivom c na sl. 6.19.b, po redu).



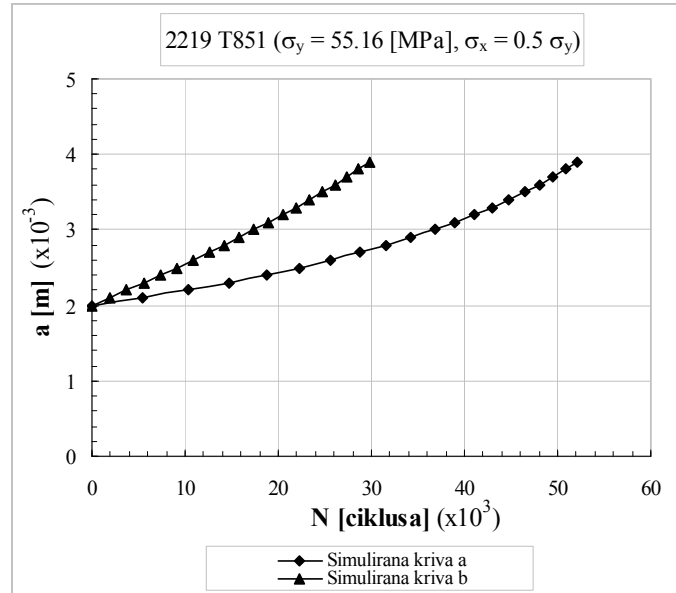
(a) (b)
Slika 6.19 Funkcionalna zavisnost između broja ciklusa N do loma i dužine prsline a (kriva a - bazirana na jednačini (3.3.16) i analitičkoj relaciji (Tabela 3.1), kriva b - bazirana na jednačinama (3.3.16), (3.3.51) i (6.1.1), kriva c - bazirana na jednačinama (3.3.16), (3.3.51) i (6.1.2)).

6.3.3 Procena veka ploče sa dva otvora i jednom prslinom opterećena biaksijalno

Pored aksijalnog opterećenja elementi struktura mogu biti opterećeni i složenim cikličnim opterećenjima. U praksi se vrlo često kao složeno opterećenje može pojaviti biaksijalno opterećenje [86,87]. Ovaj primer razmatra kako biaksijalno ciklično opterećenje utiče na broj ciklusa do pojave loma i koliko je smanjen vek elementa strukture u poređujući sa slučajem kada dejstvuje samo aksijalno ciklično opterećenje. Kao element strukture razmatrana je ploča sa dva otvora i jednom prslinom iste geometrije, kao u primeru 6.3.2 ($r_l = 2$ [mm], $b = 6$ [mm], $w = 26$ [mm], $a_0 = 2$ [mm]). Na ploču deluje biaksijalno ciklično opterećenje konstantne amplitude, tako da su nominalni naponi: $\sigma_y = 55.16$ [MPa] i $\sigma_x = 0.5 \sigma_y$ (sl. 6.6).

Pošto su u primeru 6.1.2 i primeru 6.1.3 formulisane nove korektivne funkcije za faktore intenziteta napona pomoću MKE, primenom jednačine za faktor intenziteta napona (3.3.51) kao i formulisane jednačine bazirane na gustini energije deformacije (3.3.16) moguće je odrediti broj ciklusa opterećenja do pojave loma za ploču sa dva otvora i jednom prslinom.

Kao korektivna funkcija za faktor intenziteta napona, u slučaju dejstva biaksijalnog opterećenja, korišćena je nova jednačina (6.1.3) formulisana na bazi MKE. Osim toga, u slučaju dejstva aksijalnog opterećenja uvedena je jednačina (6.1.1) kao korektivna funkcija prilikom određivanja faktora intenziteta napona. Dobijeni rezultati prikazani su na slici 6.20 za oba tipa opterećenja (biaksijalno i aksijalno).



Slika 6.20 Analiza širenja prsline za ploču sa dva otvora i jednom prslinom (kriva a - aksijalno opterećenje, kriva b - biaksijalno opterećenje).

Simulirane krive dobijene u slučaju dejstva aksijalnog i biaksijalnog opterećenja su prikazane na istoj slici da bi se izvršilo poređenje dobijenih rezultata za broj ciklusa do pojave loma. Analiza dobijenih rezultata prikazanih na slici 6.20 ukazuje da biaksijalno opterećenje značajno može smanjiti vek elementa structure čak i do 40 %.

6.4 Procena preostale čvrstoće do loma primenom koncepta zatvaranja prsline

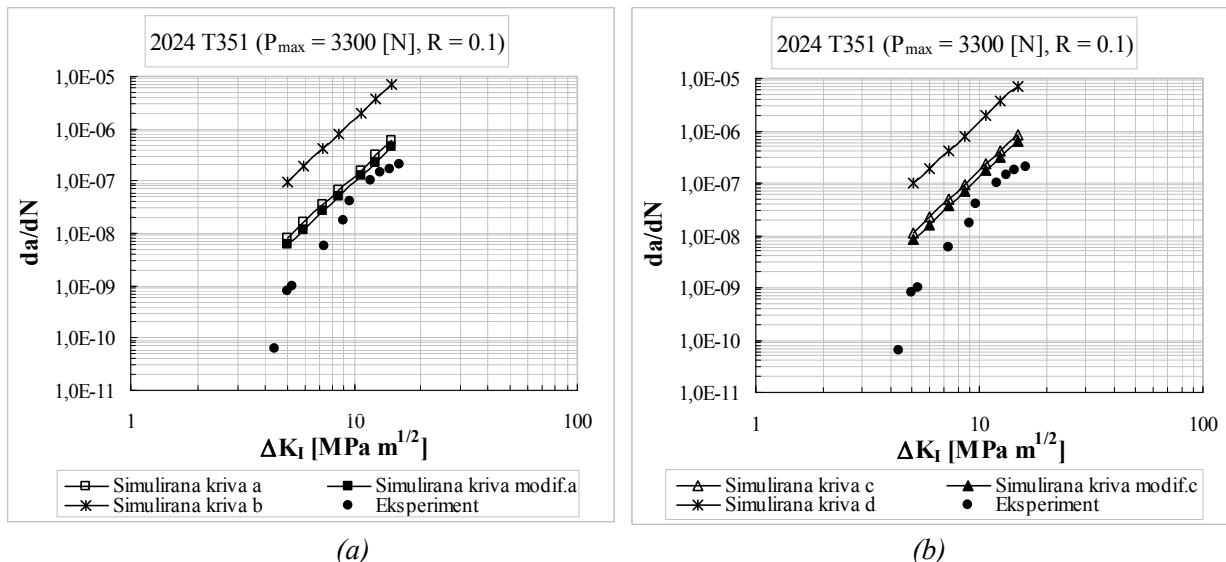
6.4.1 Verifikacija matematičkih modela baziranih na konceptu zatvaranja prsline

U Poglavlju 3 prilikom analize širenja prsline u razmatranje je uključen uticaj zatvaranja prsline, tako da je u okviru ovog primera izvršeno verifikovanje formulisanih matematičkih modela u kojim se analizira fenomen zatvaranja prsline.

Budući da je u primeru 6.1.4 za CT uzorak (sl. 6.8) određena funkcionalna zavisnost faktora intenziteta napona od dužine prsline, ista geometrija uzorka je razmatrana i u ovom primeru ($w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm]). Spoljašnje ciklično opterećenje je aksijalno konstantne amplitude ($P_{max} = 3300$ N, $R = 0.1$). CT uzorak je napravljena od Al legure 2024 T351, a potrebni parametri materijala u uslovima zamora neophodni za analizu širenja prsline su: $C_e = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = 4$.

Pošto su poznate karakteristike materijala, geometrija kao i tip opterećenja, upotrebom jednačine (3.3.53), odnosno (3.3.54) tj. relacija u kojim se uključuje efekat zatvaranja prsline, zatim relacije za gradijent širenja prsline (3.3.17) kao i korektivnih faktora za

efektivne faktore intenziteta napona (formulisani u ovom radu (Tabela 6.5)), moguće je odrediti gradijente širenja prsline. U relacijama za efektivni faktor intenziteta napona korišćena je jednačina za faktor intenziteta data u Tabeli 3.1. Simulirane krive za gradijent širenja prsline su prikazane na sl. 6.21. Na istoj slici dati su i eksperimentalni rezultati za gradijent širenja prsline dobijeni od strane Ranganathan-a [88].



Slika 6.21 Funkcionalna zavisnost između gradijenta širenja prsline i faktora intenziteta napona

((a) kriva a - bazirana na jed. (3.3.53), kriva modif.a - bazirana na jed. (3.3.53) i korektivnom faktoru (Tabela 6.5), kriva b - bazirana na jed. (3.1.9); (b) kriva c - bazirana na jed. (3.3.54), kriva modif.c - jed. (3.3.54) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva d - jed. (3.1.9)).

Dobijene (simulirane) krive (sl. 6.21) za funkcionalnu zavisnost gradijenta širenja prsline da/dN od opsega faktora intenziteta napona ΔK_I , ukazuju na činjenicu da uključivanje fenomena zatvaranja prsline značajno može da popravi (tj. simulirane vrednosti su bliže eksperimentalnim) predviđanje gradijenta širenja prsline, a samim tim i obezbeđuje bolju procenu veka elemenata strukture. Pored toga, uključivanjem efekta zatvaranja prsline predviđanja su manje konzervativna ukoliko se uporede sa predviđanjima dobijenim primenom konvencionalne Paris-ove relacije (jednačina (3.1.9)). Osim toga, određivanje i uključivanje novih korektivnih faktora za faktore intenziteta napona takođe dovodi do poboljšanja prilikom predviđanja gradijenta širenja prsline.

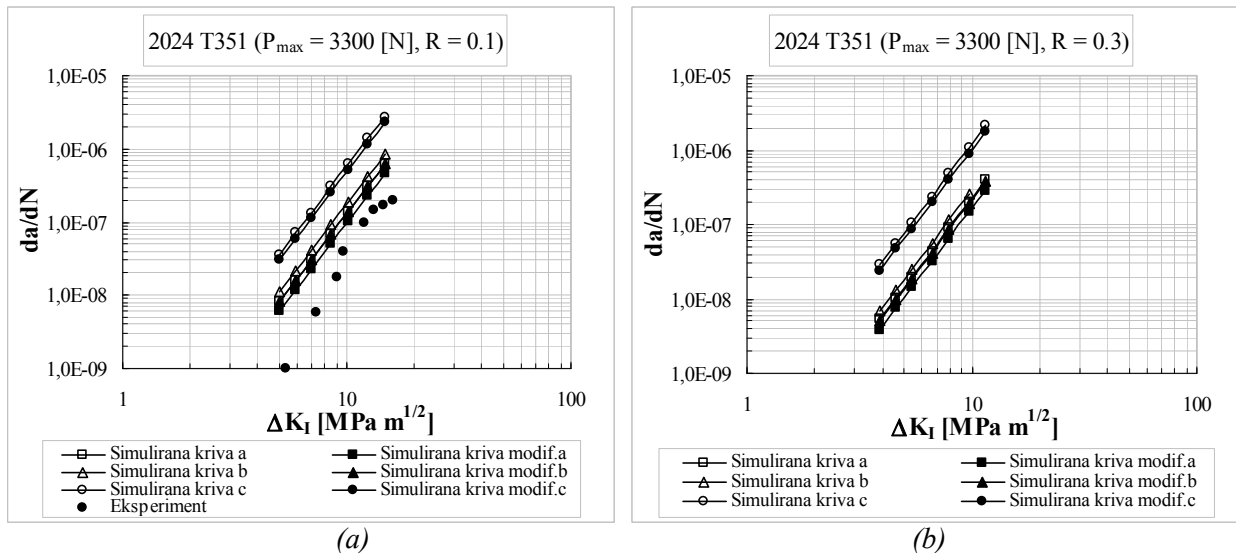
6.4.2 Određivanje gradijenata širenja prsline i efekat zatvaranja prsline

Rezultati dobijeni simulacijom za gradijent širenja prsline u prethodnom primeru pokazali su da uključivanje efekta zatvaranja prsline značajno poboljšava kvalitet proračuna, tako da se opet analizira isti efekat. U ovom primeru razmatrani su modeli za simulaciju širenja prsline koji uključuju efekat zatvaranja prsline (Poglavlje 3) i analizirano je koji od matematičkih modela daje najbolje slaganje sa eksperimentom. Pored toga, formulisani matematički modeli za širenje prsline koji uključuju empirijske relacije za opisivanje fenomena zatvaranja prsline su upoređeni sa modifikovanim modelima baziranim na primeni metode konačnih elemenata. Ustvari, odgovarajuće nove korekcije za efektivne faktore intenziteta napona formulisane u primeru 6.2.2

primenom metode konačnih elemenata, korišćene su u slučaju formulisana tri matematička modela za simulaciju širenja prsline. Analizirani element strukture je isti kao i u primeru 6.4.1 tj. CT uzorak ($w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm]). Spoljašnje ciklično opterećenje je konstantne amplitude ($P_{max} = 3300$ [N]) sa dva različita stepena asimetrije ciklusa $R = 0.1$ i $R = 0.3$. Neophodni parametri zamora prilikom analize širenja prsline, odnosno karakteristike razmatranog materijala (Al legure 2024 T351) su: $C_e = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = 4$.

Gradijenti širenja prsline (3.3.17) su proračunati korišćenjem jednačina za različite matematičke modele u kojima je uključen efekat zatvaranja prsline ((3.3.53), (3.3.54), (3.3.55) zajedno sa (3.3.56) i (3.3.57)), kao i odgovarajućih korektivnih faktora dobijenih pomoću metode konačnih elemenata (Tabela 6.5). U formulisanim matematičkim modelima koji uključuju efekat zatvaranja prsline korišćena je relacija za faktor intenziteta napona data u Tabeli 3.1.

Predviđene vrednosti gradijenata širenja prsline dobijene korišćenjem formulisanih matematičkih modela baziranih na empirijskim relacijama ((3.3.53), (3.3.54), (3.3.55)-(3.3.57)), kao i na modifikovanim relacijama dobijenim primenom MKE (modif.a, modif.b, modif.c), prikazane su na sl. 6.22.



Slika 6.22 Funkcionalna zavisnost između gradijenta širenja prsline da/dN i opsega faktora intenziteta napona ΔK_I (kriva a - bazirana na jed. (3.3.53), kriva modif.a - bazirana na jed. (3.3.53) i korektivnom faktoru (Tabela 6.5), kriva b - bazirana na jed. (3.3.54), kriva modif.b - jed. (3.3.54) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva c - jed. (3.3.55)-(3.3.57), kriva modif.c - jed. (3.3.55)-(3.3.57) i korektivni faktor (Tabela 6.5)).

Poređenje rezultata dobijenih putem proračuna i eksperimenta [88] (sl. 6.22) ukazuje da najbolje slaganje sa eksperimentom ima matematički model baziran na modifikovanoj jednačini (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktoru (Tabela 6.5), a najlošije slaganje rezultata je u slučaju korišćenja jednačina (3.3.55)-(3.3.57). Ustvari, modeli za simulaciju širenja prsline bazirani na jednačinama (3.3.55)-(3.3.57), odnosno jednačinama (3.3.55)-(3.3.57) i odgovarajućem korektivnom faktoru su konzervativniji u odnosu na matematičke modele u kojim su korišćene jednačina (3.3.53) i jednačina (3.3.54). Pored toga, analiza dobijenih rezultata ukazuje da su i predviđene vrednosti za gradijente širenja prsline poboljšane kada su razmatrane jednačine ((3.3.53), (3.3.54) i (3.3.55)-(3.3.57)) modifikovane zahvaljujući primeni MKE. Poboljšanje dobijeno kod

modifikovanih modela primenom metode konačnih elemenata najbolje može biti analizirano ukoliko se izvrši predviđanje veka odnosno broja ciklusa do pojave loma, što je i učinjeno u primeru koji sledi.

6.4.3 Poređenje procenjenog broja ciklusa do loma korišćenjem modela baziranog na Paris-ovoj empirijskoj relaciji i modela koji uključuju efekat zatvaranja prsline

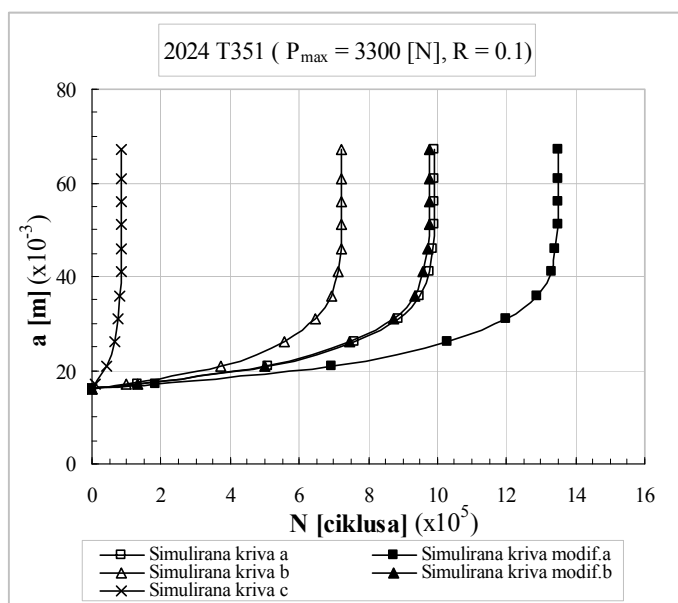
Ovaj primer razmatra određivanje broja ciklusa opterećenja do pojave loma CT uzorka (sl. 6.8), iste geometrije kao u primeru 6.4.2. Ciklično opterećenje je aksijalno i konstantne amplitude ($P_{max} = 3300$ [N]) sa koeficijentom asimetrije ciklusa $R = 0.1$. Prilikom određivanja broja ciklusa analizirani su matematički modeli (bazirani na jed. (3.3.53), odnosno jed. (3.3.54), sa i bez uključivanja odgovarajućih modifikacija dobijenih primenom MKE) za simulaciju širenja prsline koji razmatraju efekat zatvaranja prsline. Broj ciklusa opterećenja za svaki od razvijenih modela može biti dobijen integracijom jednačina za gradijent širenja prsline da/dN kao funkcije dužine prsline a (3.3.17). Ustvari, upotrebom jedne od jednačina (3.3.53), (3.3.54) i jednačine za faktor intenziteta napona koja je data u Tabeli 3.1, određen je broj ciklusa opterećenja do pojave loma.

Predviđeni broj ciklusa opterećenja do pojave loma upotrebom formulisanih matematičke modele u kojim se uključuje efekat zatvaranja prsline, ali i u slučaju primene konvencionalne Paris-ove relacije (3.1.9) dati su u Tabeli 6.8 za izabrane inkremente dužine prsline, kao i na slici 6.23.

Tabela 6.8 Procenjeni broj ciklusa do loma za CT uzorak ($P_{max} = 3300$ [N], $R = 0.1$).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	N [ciklusa]				
		Bazirano na jed. (3.1.9)	Bazirano na jed.(3.3.53)	Modif. jed. (3.3.53)	Bazirano na jed.(3.3.54)	Modif. jed.(3.3.54)
1	16	0	0	0	0	0
2	21	$4.33 \cdot 10^4$	$5.09 \cdot 10^5$	$6.92 \cdot 10^5$	$3.72 \cdot 10^5$	$5.01 \cdot 10^5$
3	26	$6.46 \cdot 10^4$	$7.60 \cdot 10^5$	$1.03 \cdot 10^6$	$5.55 \cdot 10^5$	$7.48 \cdot 10^5$
4	31	$7.53 \cdot 10^4$	$8.86 \cdot 10^5$	$1.20 \cdot 10^6$	$6.47 \cdot 10^5$	$8.72 \cdot 10^5$
5	36	$8.06 \cdot 10^4$	$9.47 \cdot 10^5$	$1.29 \cdot 10^6$	$6.92 \cdot 10^5$	$9.33 \cdot 10^5$
6	41	$8.29 \cdot 10^4$	$9.76 \cdot 10^5$	$1.33 \cdot 10^6$	$7.12 \cdot 10^5$	$9.60 \cdot 10^5$
7	46	$8.39 \cdot 10^4$	$9.87 \cdot 10^5$	$1.34 \cdot 10^6$	$7.20 \cdot 10^5$	$9.71 \cdot 10^5$
8	51	$8.42 \cdot 10^4$	$9.91 \cdot 10^5$	$1.35 \cdot 10^6$	$7.23 \cdot 10^5$	$9.75 \cdot 10^5$
9	56	$8.43 \cdot 10^4$	$9.92 \cdot 10^5$	$1.35 \cdot 10^6$	$7.24 \cdot 10^5$	$9.76 \cdot 10^5$
10	61	$8.44 \cdot 10^4$	$9.92 \cdot 10^5$	$1.35 \cdot 10^6$	$7.24 \cdot 10^5$	$9.76 \cdot 10^5$
11	66	$8.44 \cdot 10^4$	$9.92 \cdot 10^5$	$1.35 \cdot 10^6$	$7.24 \cdot 10^5$	$9.76 \cdot 10^5$

Analiza dobijenih rezultata u Tabeli 6.8 i na slici 6.23 ukazuje da uvedena poboljšanja dobijena primenom metode konačnih elemenata mnogo više utiču na procenjeni broj ciklusa opterećenja do pojave loma, nego što je to bio slučaj prilikom proračuna gradjenata širenja prsline.



Slika 6.23 Analiza širenja prsline za CT uzorak korišćenjem različitih relacija za efektivni factor intenziteta napona (kriva a - jed. (3.3.53), kriva modif.a - jed. (3.3.53) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva b - jed. (3.3.54), kriva modif.b - jed. (3.3.54) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva c - jed. (3.1.9)).

Proračunate vrednosti za broj ciklusa do pojave loma navode na zaključak da bi kad god je to moguće trebalo razvijati i koristiti matematičke modele u kojim je uključen efekat zatvaranja prsline. Upotrebom takvih modela za simulaciju širenja prsline predviđeni broj ciklusa opterećenja do pojave loma, a posebno ako se primenjuje MKE, znatno je kvalitetnije određen nego u slučaju korišćenja konvencionalnog modela.

6.4.4 Određivanje broja ciklusa do loma primenom modela za širenje prsline baziranih na zatvaranju prsline uz upotrebu analitičkog i numeričkog (MKE) pristupa prilikom određivanja faktora intenziteta napona

U ovom primeru je simulirano širenje prsline korišćenjem formulisanih matematičkih modela koji uključuju fenomen zatvaranja prsline tj. uspostavljena je funkcionalna zavisnost broja ciklusa opterećenja do pojave loma N od dužine prsline a . Osnovni razlog analize je da se utvrdi koliko se razlikuju proračunate odnosno predviđene vrednosti broja ciklusa do pojave loma prilikom primene različitih modela (ustvari razmatrani su modeli bazirani na empirijskim relacijama kao i modifikovani dobijeni primenom MKE) koji uključuju fenomen zatvaranja prsline. Element strukture (isti kao i u primeru 6.4.3) je CT uzorak (sl. 6.8) aksijalno opterećen ($P_{max} = 3300$ [N] i $R = 0.3$). Geometrijske karakteristike CT uzorka i karakteristike Al legure 2024 T351 su: $w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm], $C_e = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = 4$.

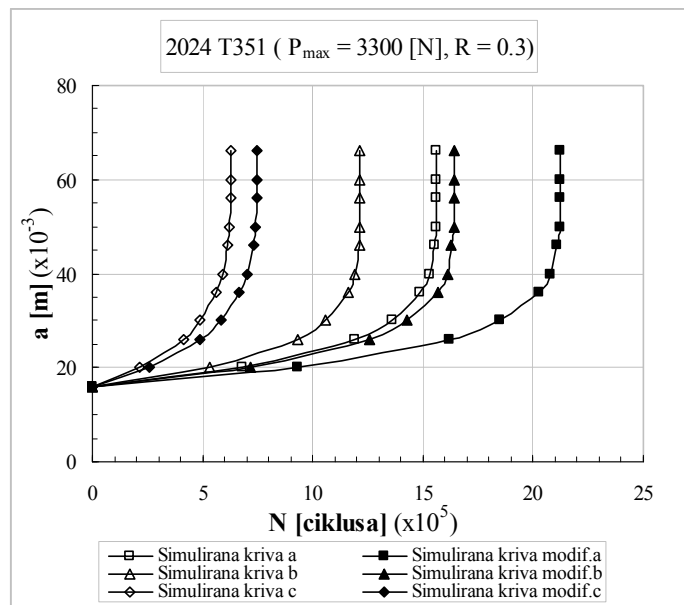
Upotrebom parametara koji definišu geometriju, tip opterećenja i material, zatim jednačine za gradijent širenja prsline koju je neophodno integaliti (3.3.17), (3.3.53), (3.3.54), odnosno (3.3.55) zajedno sa (3.3.56), (3.3.57) kao i relacije za faktor intenziteta napona koja je data u Tabeli 3.1, određen je broj ciklusa opterećenja do pojave loma. Prilikom predviđanja širenja prsline primenom modifikovanih matematičkih modela uključeni su u analizu korektivni faktori (Tabela 6.5). Proračunate vrednosti za broj ciklusa do pojave loma date su u Tabeli 6.9, dok su simulirane krive u

obliku funkcionalne zavisnosti između broja ciklusa opterećenja i dužine prsline prikazane na slici 6.24.

Tabela 6.9 Procenjeni broj ciklusa do loma za CT uzorak ($P_{max} = 3300 [N]$, $R = 0.3$).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	N [ciklusa]					
		Bazirano na jed.(3.3.53)	Modif. jed.(3.3.53)	Bazirano na jed.(3.3.54)	Modif. jed.(3.3.54)	Bazirano na jed.(3.3.55)	Modif. jed.(3.3.55)
1	16	0	0	0	0	0	0
2	20	$6.83 \cdot 10^5$	$9.29 \cdot 10^5$	$5.33 \cdot 10^5$	$7.18 \cdot 10^5$	$2.17 \cdot 10^5$	$2.58 \cdot 10^5$
3	26	$1.19 \cdot 10^6$	$1.62 \cdot 10^6$	$9.31 \cdot 10^5$	$1.26 \cdot 10^6$	$4.10 \cdot 10^5$	$4.88 \cdot 10^5$
4	30	$1.36 \cdot 10^6$	$1.85 \cdot 10^6$	$1.06 \cdot 10^6$	$1.43 \cdot 10^6$	$4.89 \cdot 10^5$	$5.82 \cdot 10^5$
5	36	$1.49 \cdot 10^6$	$2.03 \cdot 10^6$	$1.16 \cdot 10^6$	$1.57 \cdot 10^6$	$5.62 \cdot 10^5$	$6.69 \cdot 10^5$
6	40	$1.53 \cdot 10^6$	$2.08 \cdot 10^6$	$1.19 \cdot 10^6$	$1.61 \cdot 10^6$	$5.91 \cdot 10^5$	$7.03 \cdot 10^5$
7	46	$1.55 \cdot 10^6$	$2.11 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$	$1.63 \cdot 10^6$	$6.15 \cdot 10^5$	$7.31 \cdot 10^5$
8	50	$1.56 \cdot 10^6$	$2.12 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$	$1.64 \cdot 10^6$	$6.22 \cdot 10^5$	$7.40 \cdot 10^5$
9	56	$1.56 \cdot 10^6$	$2.12 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$	$1.64 \cdot 10^6$	$6.27 \cdot 10^5$	$7.46 \cdot 10^5$
10	60	$1.56 \cdot 10^6$	$2.12 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$	$1.64 \cdot 10^6$	$6.28 \cdot 10^5$	$7.47 \cdot 10^5$
11	66	$1.56 \cdot 10^6$	$2.12 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^6$	$1.64 \cdot 10^6$	$6.28 \cdot 10^5$	$7.48 \cdot 10^5$

Analiza simuliranih krivih (sl. 6.24) tj. funkcionalnih zavisnosti broja ciklusa opterećenja do pojave loma od dužine prsline, pokazuju da su matematički modeli bazirani na jednačinama (3.3.55)-(3.3.57) odnosno modifikovanim jednačinama (3.3.55)-(3.3.57) uvođenjem korektivnog faktora mnogo konzervativniji od modela u kojima je korišćenja jednačina (3.3.54) odnosno jednačina (3.3.53). Pored toga, dobijeni rezultati prikazani na slici 6.24 ukazuje da uvedena poboljšanja zahvaljujući primeni metode konačnih elemenata značajno dovode do povećanja broj ciklusa opterećenja do pojave loma, što može biti vrlo bitno prilikom praktične primene.



Slika 6.24 Numerička simulacija broja ciklusa opterećenja do pojave loma (kriva a - jed. (3.3.53), kriva modif.a - jed. (3.3.53) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva b - jed. (3.3.54), kriva modif.b - jed. (3.3.54) i korektivni faktor (Tabela 6.5), kriva c - jed. (3.3.55), kriva modif.c - jed. (3.3.55) i korektivni faktor (Tabela 6.5)).

Pored toga, radi bolje analize u Tabeli 6.10 je dat konačan broj ciklusa opterećenja do pojave loma dobijen putem numeričke simulacije za sve razmatrane matematičke modele u kojim je uključen efekat zatvaranja prsline.

Tabela 6.10 Poređenje predviđenog broj ciklusa do loma ($a_0 = 16$ [mm]).

Model baziran na relaciji za ΔK_{eff}	Broj ciklusa do pojave loma (za krajnju dužinu prsline $a_f = 66$ [mm])	Δ [%]
jed. (3.3.53)	$1.56 \cdot 10^6$	26.415
jed. (3.3.53) i korektivni faktor	$2.12 \cdot 10^6$	
jed. (3.3.54)	$1.22 \cdot 10^6$	25.610
jed. (3.3.54) i korektivni faktor	$1.64 \cdot 10^6$	
jed. (3.3.55)-(3.3.57)	$6.28 \cdot 10^5$	16.043
jed. (3.3.55) i korektivni faktor	$7.48 \cdot 10^5$	

Poređenje dobijenih rezultata za konačan broj ciklusa opterećenja do pojave loma (Tabela 6.10) ukazuje da razmatrani matematički modeli mogu biti poboljšani u opsegu (16÷26) % uvođenjem novih korektivnih faktora za efektivne faktore intenziteta napona. Osim toga, kao što je već rečeno (sl. 6.24) model baziran na modifikovanoj jednačini (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora daje najbolje rešenje za broj ciklusa opterećenja do pojave loma, a najlošije model kod koga se koriste jednačine (3.3.55)-(3.3.57) prilikom numeričke simulacije širenja prsline uključivanjem efekta zatvaranja prsline. Ustvari, predviđeni broj ciklusa do pojave loma u slučaju modela kod koga se upotrebljava modifikovana jednačina (3.3.53) je veći za 35.9 % ukoliko se uporedi sa modelom koji je baziran na jednačini (3.3.53), za 29.3 % veći u odnosu na model kada je uključena modifikovana jednačina (3.3.54) i veći za 73.8 % u slučaju poređenja sa modelom za simulaciju širenja prsline u kome figuriše jednačina (3.3.54).

6.4.5 Simulacija preostalog veka primenom modela baziranog na analizi napona oko vrha prsline i uz uključivanje efekta zatvaranja prsline

U prethodnim primerima ovog odeljka širenje prsline je analizirano pomoću formulisanih matematičkih modela u kojim se uključuje efekat zatvaranja prsline ((3.3.53), (3.3.54), odnosno (3.3.55)-(3.3.57)) zatim su oni modifikovani pomoću MKE. Ustvari, širenje prsline je simulirano korišćenjem relacije (3.3.17) u kojoj je uključen efekat zatvaranja prsline uvođenjem efektivnog faktor intenziteta napona. Osim toga u ovom radu je razvijen još jedan model za simulaciju širenja prsline koji razmatra isti efekat zatvaranja prsline, međutim umesto jednačine (3.3.17) upotrebljena je jednačina (3.3.49).

Pošto u jednačini (3.3.49) odnosno (3.3.50) kao zavisno promenljiva figuriše efektivni faktor intenziteta napona u ovom primeru su razmatrane dve relacije za efektivni faktor intenziteta napona ((3.3.53), odnosno (3.3.54)). Za određivanje faktora intenziteta napona je korišćena relacija data u Tabeli 3.1. Širenje prsline je istraživano kod CT uzorka ($w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm]). Spoljašnje ciklično opterećenje je konstantne amplitude ($P_{max} = 3000$ [N]) sa stepenom asimetrije ciklusa $R = 0.1$. Neophodni parametri zamora prilikom analize širenja prsline, odnosno karakteristike Al legure (2024 T351) su: $E = 74000$ MPa, $\varepsilon_f = 0.17$, $C_e = C_p = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = n_p = 4$.

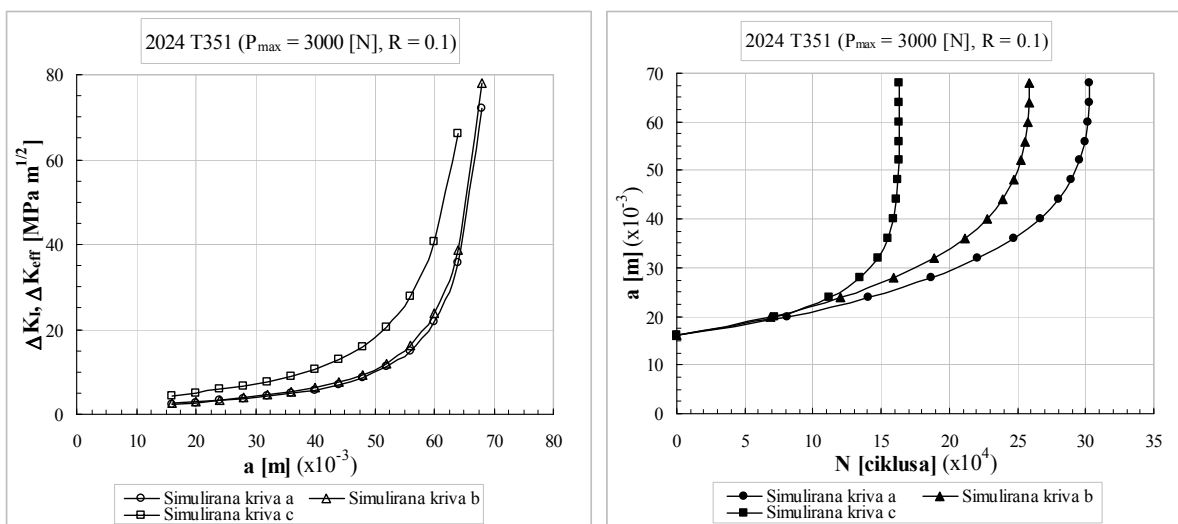
Za analizu širenje prsline najpre je neophodno odrediti faktore intenziteta napona za formulisane ulazne parametre materijala, opterećenja i geometrije CT uzorka (sl. 6.8). U ovom primeru su proračunati opsezi faktora intenziteta napona, a zatim i opsezi efektivnih faktora intenziteta napona, jer je prilikom simulacije širenja prsline uključen efekat zatvaranja prsline. Primenom relacije (3.3.50) kao i jedne od relacija koja uključuje efekat zatvaranja prsline ((3.3.53) odnosno (3.3.54)) određeni su efektivni faktori intenziteta napona za različite inkremente dužine prsline. Predviđene vrednosti za faktore intenziteta napona su prikazane na slici 6.25.a.

Posle određivanja faktora intenziteta napona, moguće je odrediti gradijent širenja prsline kao i broj ciklusa opterećenja do konačnog loma primenom relacije (3.3.50) za definisane parametre materijala. Vrednosti dobijene pomoću formulisano matematičkog modela za širenje prsline date su u Tabeli 6.11 i na slici 6.25.b kao funkcionalna zavisnost između dužine prsline i broja ciklusa opterećenja. Osim toga na istoj slici 6.25.b prikazana je kriva koja je dobijena primenom konvencionalnog pristupa tj. upotrebom jednačine (3.1.9) i relacije za faktor intenziteta napona date u Tabeli 3.1.

Tabela 6.11 Procenjeni broj ciklusa opterećenja do loma za CT uzorak
($P_{max} = 3000 [N]$, $R = 0.1$).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	ΔK_I [MPa m ^{1/2}]	N [ciklusa]		
			Bazirano na jed. (3.3.53)	Bazirano na jed. (3.3.54)	Bazirano na jed. (3.1.9)
1	16	$0.4382 \cdot 10^1$	0	0	0
2	20	$0.5078 \cdot 10^1$	$8.074 \cdot 10^4$	$6.898 \cdot 10^4$	$7.188 \cdot 10^4$
3	24	$0.5835 \cdot 10^1$	$1.409 \cdot 10^5$	$1.203 \cdot 10^5$	$1.117 \cdot 10^5$
4	28	$0.6693 \cdot 10^1$	$1.864 \cdot 10^5$	$1.592 \cdot 10^5$	$1.346 \cdot 10^5$
5	32	$0.7708 \cdot 10^1$	$2.210 \cdot 10^5$	$1.888 \cdot 10^5$	$1.478 \cdot 10^5$
6	36	$0.8965 \cdot 10^1$	$2.471 \cdot 10^5$	$2.111 \cdot 10^5$	$1.553 \cdot 10^5$
7	40	$0.1059 \cdot 10^2$	$2.664 \cdot 10^5$	$2.276 \cdot 10^5$	$1.594 \cdot 10^5$
8	44	$0.1279 \cdot 10^2$	$2.802 \cdot 10^5$	$2.394 \cdot 10^5$	$1.615 \cdot 10^5$
9	48	$0.1589 \cdot 10^2$	$2.897 \cdot 10^5$	$2.475 \cdot 10^5$	$1.625 \cdot 10^5$
10	52	$0.2051 \cdot 10^2$	$2.958 \cdot 10^5$	$2.527 \cdot 10^5$	$1.629 \cdot 10^5$
11	56	$0.2785 \cdot 10^2$	$2.995 \cdot 10^5$	$2.559 \cdot 10^5$	$1.630 \cdot 10^5$
12	60	$0.4062 \cdot 10^2$	$3.015 \cdot 10^5$	$2.576 \cdot 10^5$	$1.631 \cdot 10^5$
13	64	$0.6628 \cdot 10^2$	$3.024 \cdot 10^5$	$2.584 \cdot 10^5$	$1.631 \cdot 10^5$
14	68	$0.1337 \cdot 10^3$	$3.028 \cdot 10^5$	$2.587 \cdot 10^5$	-

Na istoj slici 6.25.b izvršeno je upoređivanje krive a i krive b koje uključuju efekat zatvaranja prsline kao i krive kod koje nije uključen efektivni faktor intenziteta napona (kriva c). Funkcionalna zavisnost data krivom c dobijena je primenom matematičkog modela u kome se ne uključuje efekat zatvaranja prsline (jed. (3.1.9)). Analiza dobijenih simuliranih krivih na slici 6.25.b ukazuje da je formulisano matematički model razmatran u ovom primeru manje konzervativan od matematičkog modela koji ne uključuje efekat zatvaranja prsline. Dobijeni trend rezultata je dobar, jer su prethodni primeri u ovom odeljku pokazali da je model u kome se upotrebljava jednačina (3.1.9) poprilično konzervativan u odnosu na rezultate dobijene eksperimentalnim putem.



(a)

(b)

Slika 6.25 Numerička simulacija širenja prsline do pojave loma

(a) Funkcionalna zavisnost opsega faktora intenziteta napona i dužine prsline,

(b) Funkcionalna zavisnost između dužine prsline i broja ciklusa opterećenja

(kriva a - bazirana na ΔK_{eff} (jed.(3.3.53 i (3.3.50))), kriva b - bazirana na ΔK_{eff} (jed.(3.3.54) i (3.3.50)), kriva c - bazirana na ΔK_I (Tabela 3.1) i jed. (3.1.9)).

6.5 Numerička simulacija procene veka pri dejstvu opšteg spektra opterećenja

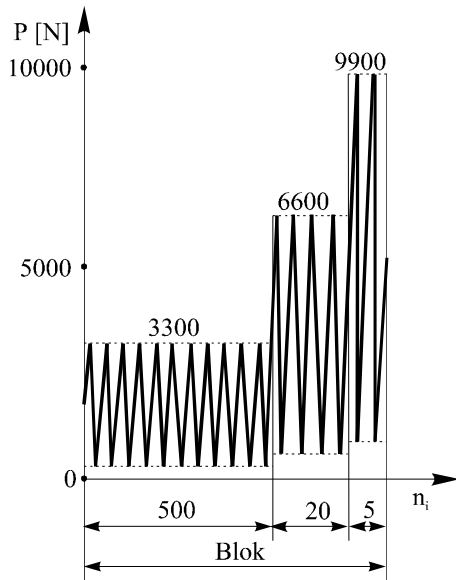
U toku radnog veka elementi strukture najčešće su opterećeni sa više sekvenci opterećenja konstantne amplitude. Opterećenje koje se sastoji od više sekvenci predstavlja tzv. spektar opterećenja odnosno blok opterećenja (sl. 6.26). U slučaju da se kao spoljašnje opterećenje pojavi spektar opterećenja prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline zahteva se uspostavljanje procedure za određivanje broja blokova opterećenja do konačnog loma. Numerički primeri u kojima je simulirano širenje prsline (razmatrani u okviru ovog poglavlja) ukazuju da efekat zatvaranja prsline značajano utiče na predviđanje veka elemenata strukture, tako da će isti efekat biti uključen prilikom procene broja blokova do konačnog loma u primerima koji slede.

6.5.1 Određivanje broja blokova opterećenja do loma primenom modela baziranog na konceptu zatvaranja prsline sa/bez korišćenja MKE

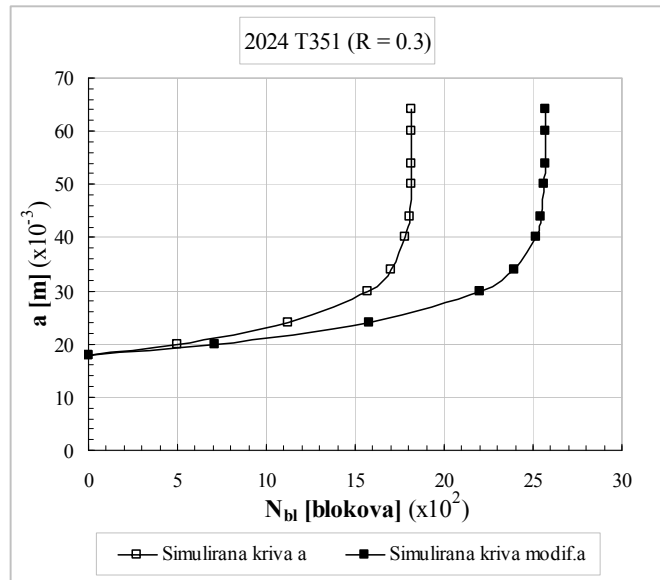
U ovom primeru je analizirano kako uvedeni novi korektivni faktori za efektivne faktore intenziteta napona utiču na određivanje broja blokova do pojave loma. Kao element strukture razmatran je CT uzorak (sl. 6.8), iste geometrije kao u primeru 6.4.1. Spoljašnje ciklično opterećenje je aksijalno sa definisanim spektrom koji je prikazan na slici 6.26 ($P_{max1} = 3300$ [N], $P_{max2} = 6600$ [N], $P_{max3} = 9900$ [N], $R = 0.1$ i brojem radnih ciklusa: $n_1 = 500$, $n_2 = 20$, $n_3 = 5$). Potrebni parametri geometrije i materijala su: $w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm], $C_e = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = 4$.

Budući da je analiza u primeru 6.4.2 pokazala da su matematički modeli bazirani na jednačini (3.3.53) odnosno modifikovanoj jednačini (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora najadekvatniji za proračun (najbolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima), u ovom primeru su oni korišćeni prilikom određivanja broja blokova opterećenja do konačnog loma. Za poznate parametre geometrije, materijala, definisano opterećenje i upotrebom formulisanih matematičkih modela u kojima figuriše jednačina (3.3.53)

odnosno modifikovana jednačina (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora (Tabela 6.5), zatim jednačina (3.3.17), simulirane su funkcionalne zavisnosti između broja blokova opterećenja do pojave loma i dužine prsline a (sl. 6.27). Faktori intenziteta napona za odgovarajuće inkremente dužine prsline su određeni primenom jednačine date u Tabeli 3.1.



Slika 6.26 Spektar opterećenja ($R = 0.1$).



Slika 6.27 Analiza širenja prsline CT uzorka pri dejstvu spektra opterećenja.

Simulirane krive prikazane kao funkcionalne zavisnosti između broja blokova do pojave loma i dužine prsline (sl. 6.26) ukazuju da definisani, u ovom radu, novi korektivni faktori za efektivne faktore intenziteta napona značajno utiču na konačan broj blokova do loma pri dejstvu cikličnog opterećenja.

Radi bolje analize rezultata dobijenih matematičkim modeliranjem, za spektar opterećenja prikazan da slici 6.26, broj blokova opterećenja do konačnog loma u slučaju modela baziranog na jednačini (3.3.53) odnosno modifikovanoj jednačini (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora, dat je u Tabeli 6.12.

Tabela 6.12 Poređenje broja blokova do pojave loma za CT uzorak ($a_0 = 18$ [mm], $R = 0.1$).

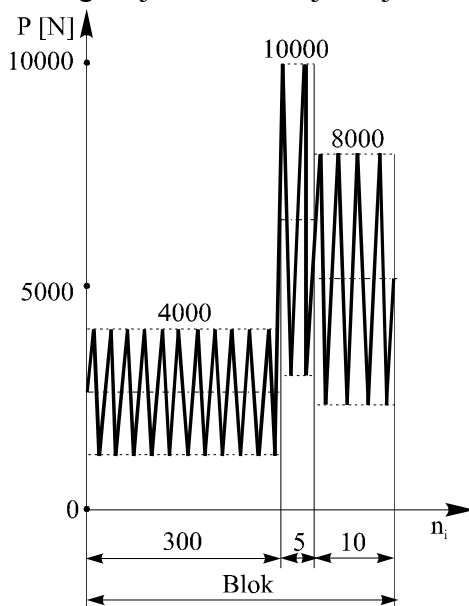
Model	Broj blokova do pojave loma (za krajnju dužinu prsline $a_f = 63$ [mm])	Δ [%]
Simulirana kriva a (jed. 3.3.53)	1704	28.16
Simulirana kriva modif.a	2372	

Poređenje rezultata za broj blokova opterećenja do konačnog loma (Tabela 6.12), pokazuje da je dobro analizirati i uključiti fenomen zatvaranja prsline prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline pri dejstvu spektra opterećenja, npr. korišćenjem metode konačnih elemenata, jer se na taj način dobijaju znatna poboljšanja prilikom proračuna (u razmatranom slučaju oko 28%).

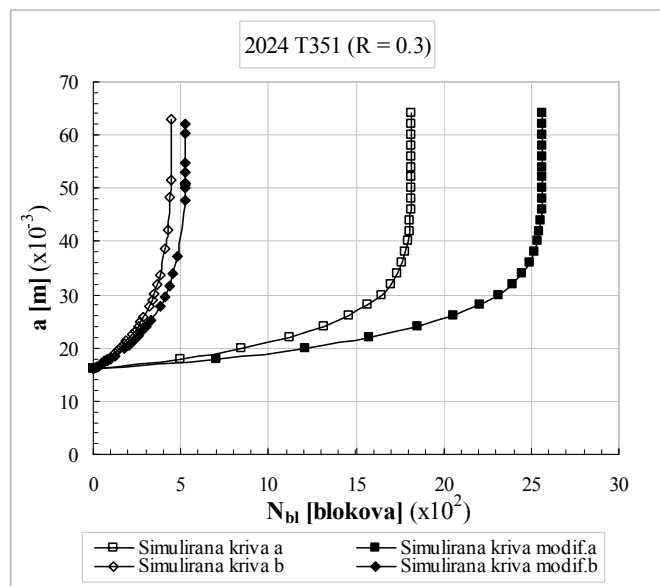
6.5.2 Predviđanje broja blokova opterećenja do pojave loma primenom različitih matematičkih modela za širenje prsline koji razmatraju efekat zatvaranja prsline

Ovaj primer razmatra predviđanje broja blokova opterećenja do konačnog loma korišćenjem različitih matematičkih modela za simulaciju širenja prsline u koje su uključene relacije za efektivni faktor intenziteta napona, a samim tim i fenomen zatvaranja prsline (jednačina (3.3.53) odnosno modifikovana jednačina (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora i jednačina (3.3.55) odnosno modifikovana jednačina (3.3.55) uvođenjem korektivnog faktora). Kao i u prethodnom primeru CT uzorak (sl.6.8) je ciklično opterećen spektrom opterećenja koji je prikazan na slici 6.28 ($P_{max1}=4000$ [N], $P_{max2} = 10000$ [N], $P_{max3} = 8000$ [N] i brojem radnih ciklusa: $n_1 = 300$, $n_2 = 5$, $n_3 = 10$). Stepen asimetrije ciklusa je $R = 0.3$ za sve nivoe cikličnog opterećenja u spektru. Parametri geometrije i materijala su: $w = 75$ [mm], $B = 10$ [mm], $a = 16$ [mm], $C_e = 1.51 \cdot 10^{-10}$, $n_e = 4$.

Prilikom određivanja broja blokova opterećenja do loma korišćen je matematički model u kome figuriše jednačina (3.3.53) odnosno jednačina (3.3.55) za efektivni faktor intenziteta napona, relacija za faktor intenziteta napona data u Tabeli 3.1 i formulisani novi korektivni faktori (Tabela 6.5). Broj ciklusa do pojave loma je određen integracijom diferencijalne jednačine za gradijent širenja prsline (3.3.17).



Slika 6.28 Spektar opterećenja ($R = 0.3$).



Slika 6.29 Analiza širenja prsline ($a_0 = 16$ [mm]).

Simulirane krive definisane kao funkcionalne zavisnosti između broja blokova opterećenja do konačnog loma i dužine prsline, u slučaju upotrebe različitih matematičkih modela, prikazane su na slici 6.29. Budući da su u ovom primeru razmatrani matematički modeli bazirani na jednačini (3.3.53) odnosno modifikovanoj jednačini (3.3.53) uvođenjem korektivnog faktora koji su u najboljoj saglasnosti sa eksperimentom (sl. 6.22) i najkonzervativniji (od razmatranih modela koji uključuju efekat zatvaranja prsline) modeli bazirani na jednačini (3.3.55) odnosno modifikovanoj jednačini (3.3.55) uvođenjem korektivnog faktora, radi bolje analize dobijenih rezultata, konačan broj blokova do loma za analizirane modele je prikazan u Tabeli 6.13.

Tabela 6.13 Poređenje broja blokova do pojave loma ($a_0 = 18$ [mm], $R = 0.3$).

Model	Broj blokova do pojave loma (za krajnju dužinu prsline $a_f = 63$ [mm])	Δ [%]
Simulirana kriva a (jed. 3.3.53)	$1.819 \cdot 10^3$	29.167
Simulirana kriva modif.a	$2.568 \cdot 10^3$	
Simulirana kriva b (jed. 3.3.55)	$0.445 \cdot 10^3$	15.556
Simulirana kriva modif.b	$0.527 \cdot 10^3$	

Dobijeni rezultati za konačan broj blokova opterećenja do pojave loma (Tabela 6.13) ukazuju da su poboljšanja dobijena zahvaljujući uvođenju novih korektivnih faktora za efektivne faktore intenziteta napona bolja prilikom primene matematičkog modela u kome figuriše jednačina (3.3.53), nego kod konzervativnijeg modela kod koga se koristi jednačina (3.3.55). Osim toga, uočava se da izražena konzervativnost matematičkog modela u kome figuriše jednačina (3.3.55) ne može biti značajno popravljena uključivanjem u analizu novih korektivnih faktora za efektivne faktore intenziteta napona.

6.6 Analiza širenja prsline i stepen asimetrije ciklusa

Ciklična opterećenja koja dejstvuju na elemente strukture po svom intenzitetu su uvek različita. Parametar kojim je moguće definisati ponašanje cikličnog opterećenja (tj. funkcionalnu zavisnost između maksimalne i minimalne vrednosti sile odnosno napona) je poznat kao stepen asimetrije ciklusa. U mehanici loma postoje različiti teorijski pristupi pomoću kojih je u analizu širenja prsline moguće uključiti stepen asimetrije ciklusa. Na bazi teorijskih razmatranja mehanike loma u ovom radu je razvijen matematički model za simulaciju širenja prsline koji uključuje stepen asimetrije ciklusa. Formulisan matematički model je verifikovan u okviru ovog odeljka, a nakon toga je analiziran uticaj stepena asimetrije ciklusa na broj ciklusa opterećenja do pojave loma.

6.6.1 Verifikacija matematičkog modela za procenu veka elemenata struktura koji uključuje stepen asimetrije ciklusa

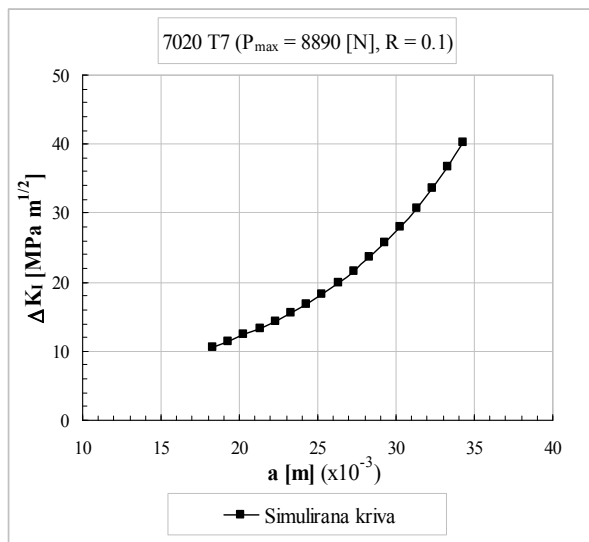
U ovom primeru je verifikovan matematički model za numeričku simulaciju preostalog broja ciklusa opterećenja do loma koji uključuje stepen asimetrije ciklusa. Kao element strukture analiziran je SEN uzorak (sl. 6.11) napravljen od legure aluminijuma 7020 T7. Karakteristike materijala i geometrije uzorka su: $E = 70000$ [MPa], $\nu = 0.33$, $\sigma_{0.2} = 314.7$ [MPa], $K_{IC} = 236.8$ [MPam^{1/2}], $c_f = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $n_f = 3.2472$, $a_0 = 18.30$ [m], $\Delta a = 1$ [mm], $w = 52$ [mm], $t = 6.5$ [mm]. Na SEN uzorak deluje spoljašnje ciklično opterećenje konstantne amplitude ($P_{max} = 8890$ [N], $P_{min} = 889$ [N]).

Prilikom određivanja broja ciklusa do konačnog loma, najpre su za definisane parametre materijala, geometrije i opterećenja određene korektivne funkcije kao i faktori intenziteta napona za izabrane inkremente dužine prsline a primenom relacije koja je data u Tabeli 3.1. Zatim, upotrebom jednačine (3.1.10) kao i relacije za faktor intenziteta napona (Tabela 3.1), određeni su gradijenti širenja prsline, a zatim primenom numeričke metode za integraciju diferencijalne jednačine (3.1.10) proračunat je broj

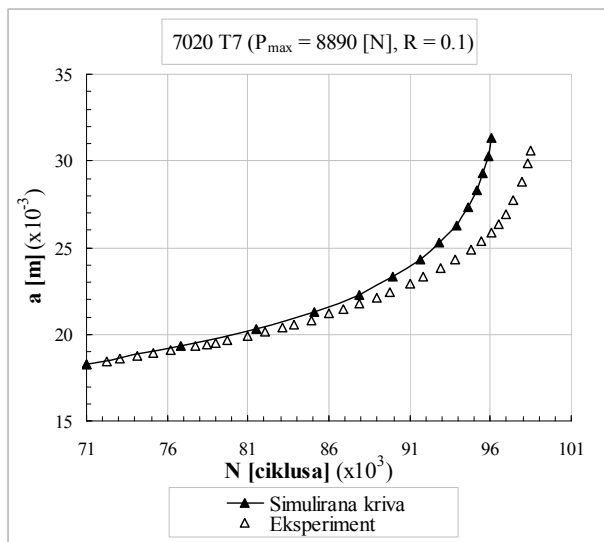
ciklusa opterećenja do pojave loma. Predviđeni rezultati dobijeni putem matematičkog modeliranja za faktore intenziteta napona, gradijente širenja prsline i broj ciklusa opterećenja do pojave loma su prikazani u Tabeli 6.14.

Tabela 6.14 Proračunate vrednosti za faktore intenziteta napona, gradijente širenja prsline i broj ciklusa opterećenja do pojave loma.

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	$Y(a/b)$	ΔK_I [MPa $m^{1/2}$]	da/dN [m/cikl.]	N [ciklusa]
1	18.30	1.873991	$0.1064 \cdot 10^2$	$1.508 \cdot 10^{-7}$	$7.100000 \cdot 10^4$
2	19.30	1.965154	$0.1145 \cdot 10^2$	$1.926 \cdot 10^{-7}$	$7.688265 \cdot 10^4$
3	20.30	2.065186	$0.1235 \cdot 10^2$	$2.468 \cdot 10^{-7}$	$8.148224 \cdot 10^4$
4	21.30	2.175175	$0.1332 \cdot 10^2$	$3.173 \cdot 10^{-7}$	$8.506651 \cdot 10^4$
5	22.30	2.296309	$0.1439 \cdot 10^2$	$4.098 \cdot 10^{-7}$	$8.784822 \cdot 10^4$
6	23.30	2.429880	$0.1556 \cdot 10^2$	$5.319 \cdot 10^{-7}$	$8.999705 \cdot 10^4$
7	24.30	2.577279	$0.1686 \cdot 10^2$	$6.940 \cdot 10^{-7}$	$9.164854 \cdot 10^4$
8	25.30	2.740002	$0.1829 \cdot 10^2$	$9.106 \cdot 10^{-7}$	$9.291093 \cdot 10^4$
9	26.30	2.919643	$0.1987 \cdot 10^2$	$1.202 \cdot 10^{-6}$	$9.387047 \cdot 10^4$
10	27.30	3.117901	$0.2161 \cdot 10^2$	$1.595 \cdot 10^{-6}$	$9.459566 \cdot 10^4$
11	28.30	3.336574	$0.2355 \cdot 10^2$	$2.128 \cdot 10^{-6}$	$9.514062 \cdot 10^4$
12	29.30	3.577564	$0.2569 \cdot 10^2$	$2.856 \cdot 10^{-6}$	$9.554786 \cdot 10^4$
13	30.30	3.842874	$0.2807 \cdot 10^2$	$3.854 \cdot 10^{-6}$	$9.585053 \cdot 10^4$
14	31.30	4.134609	$0.3069 \cdot 10^2$	$5.226 \cdot 10^{-6}$	$9.607431 \cdot 10^4$
15	32.30	4.454973	$0.3359 \cdot 10^2$	$7.121 \cdot 10^{-6}$	$9.623895 \cdot 10^4$
16	33.30	4.806276	$0.3680 \cdot 10^2$	$9.748 \cdot 10^{-6}$	$9.635951 \cdot 10^4$
17	34.30	5.190927	$0.4034 \cdot 10^2$	$1.340 \cdot 10^{-5}$	$9.644740 \cdot 10^4$



(a)



(b)

Slika 6.30 Analiza širenja prsline

(a) Funkcionalna zavisnost opsega faktora intenziteta napona od dužine prsline,

(b) Funkcionalna zavisnost između dužine prsline i broja ciklusa.

Vrednosti za izračunate faktore intenziteta napona prikazane su dijagramski u funkciji dužine prsline na slici 6.30.a, dok je funkcionalna zavisnost dužine prsline i broja ciklusa opterećenja do pojave loma prikazana na slici 6.30.b. Pored toga, na slici 6.30.b

su prezentovane eksperimentalno dobijene vrednosti za broj ciklusa opterećenja i odgovarajuće dužine prsline da bi se proverila validnost matematičkog modela. Upoređivanje rezultata dobijenih primenom formulisanog modela za analizu širenja prsline i eksperimentalnih rezultata ukazuje na vrlo dobro slaganje. Ustvari, putem matematičkog modeliranja dobijen je nešto manji broj ciklusa opterećenja do pojave loma u odnosu na eksperiment, ali takav trend rezultata se i očekuje kod pouzdanih matematičkih procedura.

6.6.2 Uticaj stepena asimetrije ciklusa na broj ciklusa do konačnog loma

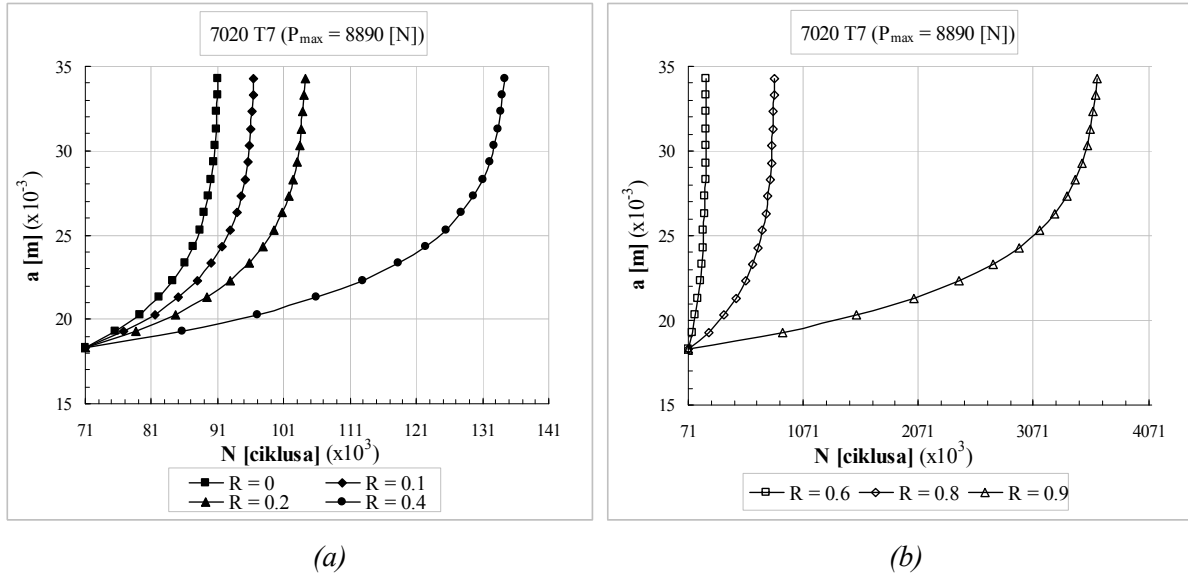
U ovom primeru je analiziran uticaj stepena asimetrije ciklusa R na broj ciklusa do loma za izabrani element strukture. Kao element strukture je razmatran SEN uzorak (sl. 6.11), napravljen od legure aluminijuma 7020 T7. Parametri geometrije i materijala za SEN uzorak su isti kao i u primeru 6.6.1. Spoljašnje ciklično opterećenje koje deluje na uzorak je konstantne amplitude sa maksimalnom silom $P_{max} = 8890$ [N] i različitim stepenima asimetrije ciklusa R ($R = P_{min}/P_{max}$).

Za definisane karakteristike materijala, geometrije i opterećenja primenom matematičkog modela koji je baziran na jednačini za faktor intenziteta napona koja je data u Tabeli 3.1, zatim na relaciji za gradijent širenja prsline (3.1.10), moguće je odrediti faktore intenziteta napona, gradijente širenja prsline za definisane inkremente dužine prsline i različite stepene asimetrije ciklusa R . Osim toga, broj ciklusa do pojave loma je procenjen za različite stepene asimetrije ciklusa R primenom Simpson-ove numeričke metode za integraciju jednačine (3.1.10). Predviđene vrednosti dobijene matematičkim modeliranjem, za broj ciklusa opterećenja do pojave loma pri različitim stepenima asimetrije ciklusa, date su u Tabeli 6.15.

Tabela 6.15 Numerički simuliran broj ciklusa opterećenja do pojave loma za različite vrednosti stepena asimetrije ciklusa ($P_{max} = 8890$ [N]).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	N [ciklusa]					
		$R = 0$	$R = 0.2$	$R = 0.4$	$R = 0.6$	$R = 0.8$	$R = 0.9$
1	18.30	$7.1000 \cdot 10^4$	$7.1000 \cdot 10^4$	$7.1000 \cdot 10^4$	$7.1000 \cdot 10^4$	$7.1000 \cdot 10^4$	$7.1000 \cdot 10^4$
2	19.30	$7.5642 \cdot 10^4$	$7.8665 \cdot 10^4$	$8.5631 \cdot 10^4$	$1.0739 \cdot 10^5$	$2.4377 \cdot 10^5$	$8.9125 \cdot 10^6$
3	20.30	$7.9272 \cdot 10^4$	$8.4658 \cdot 10^4$	$9.7072 \cdot 10^4$	$1.3584 \cdot 10^5$	$3.7886 \cdot 10^5$	$1.5326 \cdot 10^6$
4	21.30	$8.2101 \cdot 10^4$	$8.9329 \cdot 10^4$	$1.0599 \cdot 10^5$	$1.5802 \cdot 10^5$	$4.8413 \cdot 10^5$	$2.0324 \cdot 10^6$
5	22.30	$8.4296 \cdot 10^4$	$9.2954 \cdot 10^4$	$1.1290 \cdot 10^5$	$1.7523 \cdot 10^5$	$5.6583 \cdot 10^5$	$2.4202 \cdot 10^6$
6	23.30	$8.5992 \cdot 10^4$	$9.5753 \cdot 10^4$	$1.1825 \cdot 10^5$	$1.8852 \cdot 10^5$	$6.2894 \cdot 10^5$	$2.3199 \cdot 10^6$
7	24.30	$8.7295 \cdot 10^4$	$9.7905 \cdot 10^4$	$1.2237 \cdot 10^5$	$1.9874 \cdot 10^5$	$6.7744 \cdot 10^5$	$2.9501 \cdot 10^6$
8	25.30	$8.8292 \cdot 10^4$	$9.9550 \cdot 10^4$	$1.2550 \cdot 10^5$	$2.0654 \cdot 10^5$	$7.1452 \cdot 10^5$	$3.1262 \cdot 10^6$
9	26.30	$8.9049 \cdot 10^4$	$1.0080 \cdot 10^5$	$1.2788 \cdot 10^5$	$2.1248 \cdot 10^5$	$7.4270 \cdot 10^5$	$3.2600 \cdot 10^6$
10	27.30	$8.9621 \cdot 10^4$	$1.0174 \cdot 10^5$	$1.2969 \cdot 10^5$	$2.1697 \cdot 10^5$	$7.6400 \cdot 10^5$	$3.3611 \cdot 10^6$
11	28.30	$9.0051 \cdot 10^4$	$1.0245 \cdot 10^5$	$1.3104 \cdot 10^5$	$2.2034 \cdot 10^5$	$7.8000 \cdot 10^5$	$3.4371 \cdot 10^6$
12	29.30	$9.0372 \cdot 10^4$	$1.0299 \cdot 10^5$	$1.3206 \cdot 10^5$	$2.2286 \cdot 10^5$	$7.9196 \cdot 10^5$	$3.4938 \cdot 10^6$
13	30.30	$9.0644 \cdot 10^4$	$1.0338 \cdot 10^5$	$1.3281 \cdot 10^5$	$2.2473 \cdot 10^5$	$8.0085 \cdot 10^5$	$3.5360 \cdot 10^6$
14	31.30	$9.0788 \cdot 10^4$	$1.0367 \cdot 10^5$	$1.3336 \cdot 10^5$	$2.2611 \cdot 10^5$	$8.0742 \cdot 10^5$	$3.5672 \cdot 10^6$
15	32.30	$9.0918 \cdot 10^4$	$1.0389 \cdot 10^5$	$1.3377 \cdot 10^5$	$2.2713 \cdot 10^5$	$8.1226 \cdot 10^5$	$3.5902 \cdot 10^6$
16	33.30	$9.1013 \cdot 10^4$	$1.0404 \cdot 10^5$	$1.3407 \cdot 10^5$	$2.2787 \cdot 10^5$	$8.1580 \cdot 10^5$	$3.6070 \cdot 10^6$
17	34.30	$9.1082 \cdot 10^4$	$1.0416 \cdot 10^5$	$1.3429 \cdot 10^5$	$2.2842 \cdot 10^5$	$8.1882 \cdot 10^5$	$3.6193 \cdot 10^6$

Prilikom analize uticaja stepena asimetrije ciklusa na broj ciklusa do pojave loma najbolje je sve numerički simulirane vrednosti prikazati grafički. Na sl. 6.31 su date funkcionalne zavisnosti između dužine prsline a i broja ciklusa do pojave loma N za različite stepene asimetrije ciklusa R .



Slika 6.31 Funkcionalna zavisnost između dužine prsline a i broja ciklusa do pojave loma N .

Dobijene vrednosti za broj ciklusa opterećenja pri različitim vrednostima stepena asimetrije ciklusa R pokazuju da je pri nižim vrednostima R i broj ciklusa opterećenja do pojave loma manji. Osim toga, ukoliko je R u opsegu $(0 \div 0.5)$ broj ciklusa do loma se razlikuje za oko 40 %, a u slučaju da je R u opsegu $(0.5 \div 0.9)$ broj ciklusa opterećenja je povećan za 15 puta (npr. pri $R = 0.6$, $N = 2.2842 \cdot 10^5$, dok je pri $R = 0.9$, $N = 36.193 \cdot 10^5$).

6.7 Procena broja ciklusa do pojave loma pri dejstvu pika opterećenja

U realnim situacijama vrlo često se može pojaviti iznenadno naglo povećanje opterećenja tzv. pik u okviru spoljašnjeg cikličnog opterećenja, tako da je značajno razmatrati kako pojava pika utiče na preostali vek elementa strukture. Pojava pika opterećenja predstavlja poseban aspekt kod analize širenja prsline tako da je u ovoj disertaciji formulisana matematički model za širenje prsline pri dejstvu pika. Prezentovan matematički model je korišćen prilikom analize uticaja različitih parametara na broj ciklusa opterećenja do pojave loma u primerima koji slede.

6.7.1 Uticaj pojave pika opterećenja na broj ciklusa do konačnog loma

Ovaj primer razmatra kako pojava pika opterećenja utiče na gradijent širenja prsline i broj ciklusa opterećenja do pojave loma. Analiza širenja prsline je ispitana u slučaju SEN uzorka (sl. 6.11) kod koga su geometrijske karakteristike: $a_0 = 17.75$ [mm], $\Delta a = 1$ [mm], $w = 52$ [mm], $t = 6.5$ [mm], a konačna dužina prsline pri kojoj nastupa lom je $a_f = 33.75$ [mm]. Intenzitet spoljašnje sile konstantne amplitude je $P_{\max} = 7305$ [N] sa stepenom asimetrije ciklusa $R = 0.1$, dok je intenzitet pika opterećenja, tj. maksimalne

sile pika $P_{\max ol} = 15341$ [N] i $R_{ol} = 2.1$. SEN uzorak (sl. 6.11) je napravljen od legure aluminijuma 2024 T3 sa karakteristikama: $E = 73100$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 324$ [MPa], $\nu = 0.33$, $K_{IC} = 95.31$ [MPam^{1/2}], $c_p = 5.0227 \cdot 10^{-11}$, $n_p = 3.3736$.

Prilikom određivanja broja ciklusa korišćen je matematički model pomoću koga su najpre određeni faktori intenziteta napona za definisane karakteristike materijala, opterećenja i geometrije upotrebom jednačine koja je data u Tabeli 3.1. Nakon definisanih faktora intenziteta određeni su gradijeni širenja prsline i broj ciklusa opterećenja do konačnog loma primenom relacije (3.1.9) za slučaj cikličnog opterećenja konstantne amplitude i jednačina (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.6) za ciklično opterećenje konstantne amplitude sa pikom. Broj ciklusa opterećenja je, u okviru formulisanog modela, određen primenom Simpson-ove metode za numeričku integraciju složenih funkcija. Proračunate vrednosti gradijenata širenja prsline i broja ciklusa do pojave loma, za slučaj opterećenja konstantne amplitude bez i sa pikom, prikazane su u Tabeli 6.16 za različite dužine prsline.

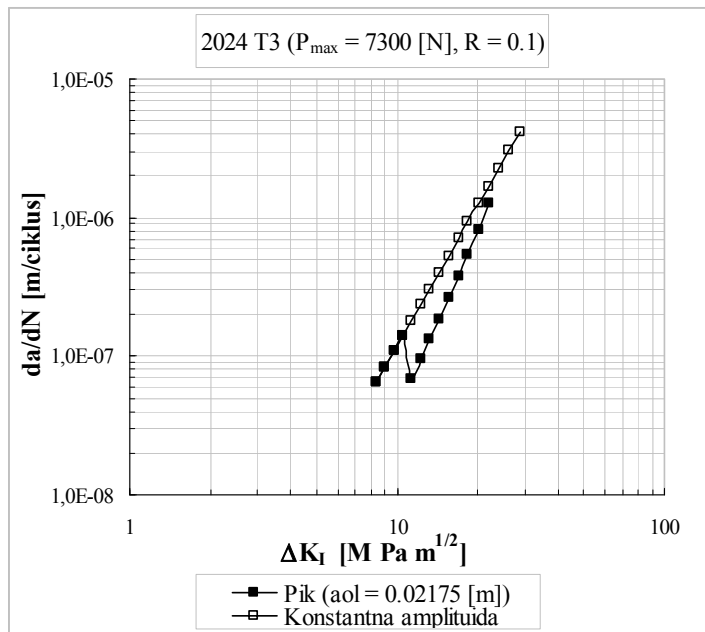
Tabela 6.16 Određivanje broja ciklusa do konačnog loma pri dejstvu cikličnog opterećenja konstantne amplitude i opterećenja konstantne amplitude sa pikom ($a_{ol} = 21.75$ [mm]).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	Konstantna amplituda (bez pika opterećenja)		Pik ($P_{\max ol} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$)	
		da/dN [m/cikl.]	N [ciklusa]	da/dN [m/cikl.]	N [ciklusa]
1	17.75	$6.575 \cdot 10^{-8}$	$5.500 \cdot 10^4$	$6.575 \cdot 10^{-8}$	$5.500 \cdot 10^4$
2	18.75	$8.433 \cdot 10^{-8}$	$6.847 \cdot 10^4$	$8.433 \cdot 10^{-8}$	$6.847 \cdot 10^4$
3	19.75	$1.084 \cdot 10^{-7}$	$7.896 \cdot 10^4$	$1.084 \cdot 10^{-7}$	$7.896 \cdot 10^4$
4	20.75	$1.390 \cdot 10^{-7}$	$8.710 \cdot 10^4$	$1.398 \cdot 10^{-7}$	$8.710 \cdot 10^4$
5	21.75	$1.809 \cdot 10^{-7}$	$9.341 \cdot 10^4$	$6.936 \cdot 10^{-7}$	$9.341 \cdot 10^4$
6	22.75	$2.351 \cdot 10^{-7}$	$9.828 \cdot 10^4$	$9.538 \cdot 10^{-8}$	$1.058 \cdot 10^5$
7	23.75	$3.070 \cdot 10^{-7}$	$1.020 \cdot 10^5$	$1.323 \cdot 10^{-7}$	$1.147 \cdot 10^5$
8	24.75	$4.029 \cdot 10^{-7}$	$1.049 \cdot 10^5$	$1.852 \cdot 10^{-7}$	$1.211 \cdot 10^5$
9	25.75	$5.315 \cdot 10^{-7}$	$1.070 \cdot 10^5$	$2.620 \cdot 10^{-7}$	$1.257 \cdot 10^5$
10	26.75	$7.045 \cdot 10^{-7}$	$1.087 \cdot 10^5$	$3.758 \cdot 10^{-7}$	$1.289 \cdot 10^5$
11	27.75	$9.385 \cdot 10^{-7}$	$1.100 \cdot 10^5$	$5.480 \cdot 10^{-7}$	$1.311 \cdot 10^5$
12	28.75	$1.256 \cdot 10^{-6}$	$1.108 \cdot 10^5$	$8.194 \cdot 10^{-7}$	$1.326 \cdot 10^5$
13	29.75	$1.688 \cdot 10^{-6}$	$1.115 \cdot 10^5$	$1.284 \cdot 10^{-6}$	$1.336 \cdot 10^5$
14	30.75	$2.278 \cdot 10^{-6}$	$1.120 \cdot 10^5$	$2.278 \cdot 10^{-6}$	$1.342 \cdot 10^5$
15	31.75	$3.085 \cdot 10^{-6}$	$1.124 \cdot 10^5$	$3.085 \cdot 10^{-6}$	$1.346 \cdot 10^5$
16	32.75	$4.189 \cdot 10^{-6}$	$1.127 \cdot 10^5$	$4.189 \cdot 10^{-6}$	$1.349 \cdot 10^5$
17	33.75	$5.783 \cdot 10^{-6}$	$1.129 \cdot 10^5$	$5.703 \cdot 10^{-6}$	$1.407 \cdot 10^5$

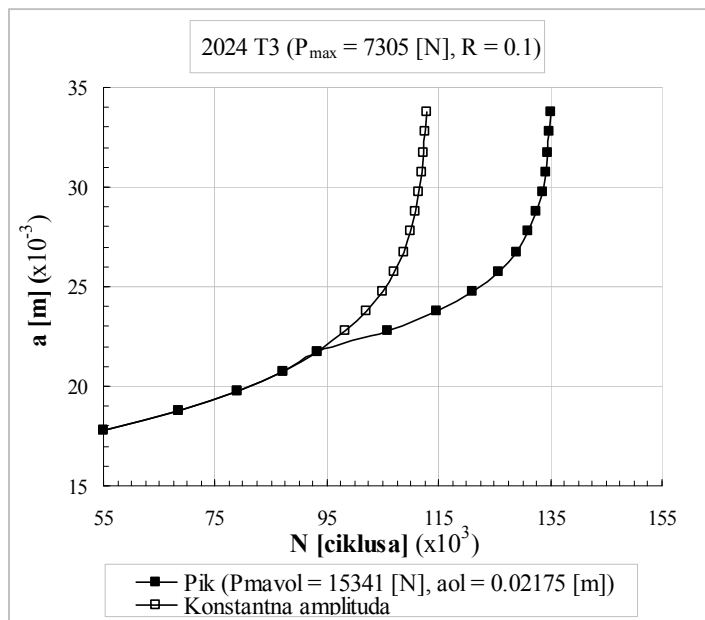
S obzirom da se razlika za gradijente širenja prsline kao i broj ciklusa do konačnog loma u slučaju opterećenja konstantne amplitude i opterećenja konstantne amplitude sa pikom najbolje može analizirati pomoću dijagrama, na slici 6.32 je prikazana funkcionalna zaviznost između gradijenta širenja prsline i faktora intenziteta napona, a na slici 6.33 je data zavisnost dužine prsline od broja ciklusa opterećenja do pojave loma.

Slika 6.32 pokazuje da se u slučaju opterećenja konstantne amplitude gradijent širenja prsline linearno povećava sa povećanjem faktora intenziteta napona, dok u slučaju pojave pika opterećenja, na mestu dejstva (pri određenoj dužini prsline a_{ol}) gradijent širenja prsline naglo opadne, a zatim linearno raste (u logaritamskom koordinatnom

sistemu). Sa druge strane, funkcionalna zavisnost dužine prsline a i broja ciklusa do loma N , prikazana na slici 6.33, navodi na zaključak da pojava pika opterećenja dovodi do povećanja broja ciklusa opterećenja do konačnog loma.



Slika 6.32 Funkcionalna zavisnost između faktora intenziteta napona ΔK_I i gradijenta širenja prsline da/dN u slučaju opterećenja konstantne amplitude bez i sa pikom ($P_{maxol} = 15341$ [N], $a_{ol} = 21.75$ [mm]).



Slika 6.33 Funkcionalna zavisnost između broja ciklusa opterećenja do pojave loma N i dužine prsline a u slučaju opterećenja konstantne amplitude bez i sa pikom ($P_{maxol} = 1534$ [N], $a_{ol} = 21.75$ [mm]).

Rezultati za broj ciklusa do konačnog loma ($a_f = 33.75$ [mm]) sa i bez pika opterećenja, prikazani u Tabeli 6.16 i na slici 6.33, ukazuju da je broj ciklusa opterećenja do loma

povećan za oko 24.6% u slučaju dejstva pika opterećenja za analiziranu geometriju SEN uzorka i tip materijala.

6.7.2 Uticaj dužine prsline pri kojoj dejstvuje pik opterećenja na vek

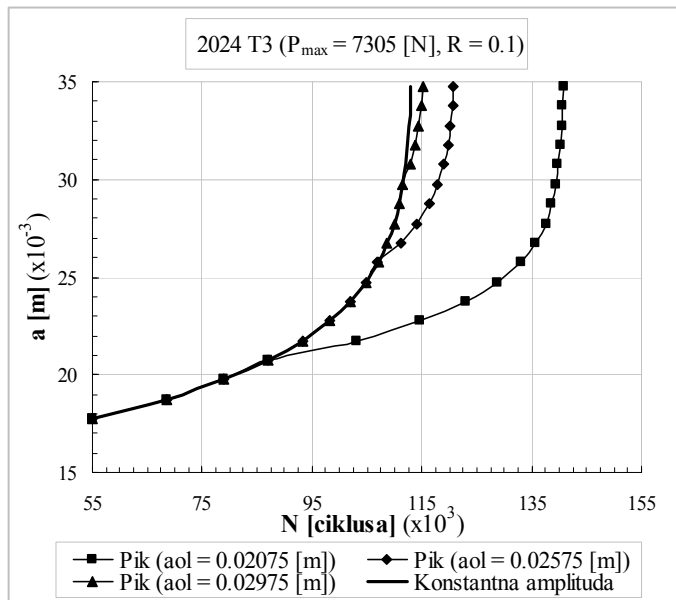
Pik opterećenja se može naći na različitim pozicijama tj. dužinama prsline od inicijalne a_0 do konačne dužine pri kojoj nastupa lom a_f . U ovom primeru je analizirano kakav efekat na broj ciklusa opterećenja do pojave loma ima promena dužine prsline pri kojoj dejstvuje pik opterećenja (u odnosu na inicijalnu dužinu prsline). Kao i u primeru 6.7.1 isti SEN uzorak (sl. 6.11) je razmatran. Karakteristike materijala i geometrije su: $E=73100$ [MPa], $\sigma_{0.2} = 324$ [MPa], $\nu = 0.33$, $K_{IC} = 95.31$ [MPam^{1/2}], $c_p = 5.0227 \cdot 10^{-11}$, $n_p = 3.3736$, $a_0 = 17.75$ [mm], $a_f = 33.75$ [mm], $\Delta a = 1$ [mm], $w = 52$ [mm], $t = 6.5$ [mm]. Spoljašnja maksimalna sila (cikličnog opterećenja konstantne amplitude) je $P_{max} = 7305$ [N] sa stepenom asimetrije ciklusa $R = 0.1$, a za pik maksimalna sila je $P_{maxol} = 15341$ [N] i $R_{ol} = 2.1$.

Prilikom određivanja broja ciklusa do konačnog loma razmatrane su tri različite dužine prsline (od inicijalne do konačne) pri kojim dejstvuje pik opterećenja i to: 25%, 50% i 75% od ukupne dužine, tj. 20.75 [mm], 25.75 [mm] i 29.75 [mm]. Najpre su određeni faktori intenziteta napona (relacija koja se odnosi na SEN uzorak i data je u Tabeli 3.1) za izabrane inkremente dužine prsline, zatim gradijenti širenja prsline (3.1.9), odnosno (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.6), kao i broj ciklusa opterećenja do pojave loma primenom odgovarajuće metode za numeričku integraciju formulisanih relacija za gradijent širenja prsline. Dobijeni rezultati za faktore intenziteta napona i broj ciklusa opterećenja do pojave loma dati su u Tabeli 6.17.

Tabela 6.17 Numerički simuliran broj ciklusa do loma za različite dužine prsline pri kojim dejstvuje pik opterećenja
($P_{max} = 7305$ [N], $R = 0.1$, $P_{maxol} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	ΔK_I [MPam ^{1/2}]	N [ciklusa]		
			$a_{ol} = 20.75 \cdot 10^{-3}$ [m]	$a_{ol} = 25.75 \cdot 10^{-3}$ [m]	$a_{ol} = 29.75 \cdot 10^{-3}$ [m]
1	17.75	$0.8393 \cdot 10^1$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$
2	18.75	$0.9036 \cdot 10^1$	$6.847 \cdot 10^4$	$6.847 \cdot 10^4$	$6.847 \cdot 10^4$
3	19.75	$0.9736 \cdot 10^1$	$7.896 \cdot 10^4$	$7.896 \cdot 10^4$	$7.896 \cdot 10^4$
4	20.75	$0.1050 \cdot 10^2$	$8.710 \cdot 10^4$	$8.710 \cdot 10^4$	$8.710 \cdot 10^4$
5	21.75	$0.1133 \cdot 10^2$	$1.031 \cdot 10^5$	$9.341 \cdot 10^4$	$9.341 \cdot 10^4$
6	22.75	$0.1225 \cdot 10^2$	$1.147 \cdot 10^5$	$9.828 \cdot 10^4$	$9.828 \cdot 10^4$
7	23.75	$0.1325 \cdot 10^2$	$1.230 \cdot 10^5$	$1.020 \cdot 10^5$	$1.020 \cdot 10^5$
8	24.75	$0.1437 \cdot 10^2$	$1.289 \cdot 10^5$	$1.049 \cdot 10^5$	$1.049 \cdot 10^5$
9	25.75	$0.1559 \cdot 10^2$	$1.330 \cdot 10^5$	$1.070 \cdot 10^5$	$1.070 \cdot 10^5$
10	26.75	$0.1695 \cdot 10^2$	$1.358 \cdot 10^5$	$1.112 \cdot 10^5$	$1.087 \cdot 10^5$
11	27.75	$0.1846 \cdot 10^2$	$1.376 \cdot 10^5$	$1.142 \cdot 10^5$	$1.099 \cdot 10^5$
12	28.75	$0.2012 \cdot 10^2$	$1.386 \cdot 10^5$	$1.164 \cdot 10^5$	$1.108 \cdot 10^5$
13	29.75	$0.2197 \cdot 10^2$	$1.393 \cdot 10^5$	$1.179 \cdot 10^5$	$1.115 \cdot 10^5$
14	30.75	$0.2401 \cdot 10^2$	$1.398 \cdot 10^5$	$1.189 \cdot 10^5$	$1.128 \cdot 10^5$
15	31.75	$0.2626 \cdot 10^2$	$1.402 \cdot 10^5$	$1.197 \cdot 10^5$	$1.138 \cdot 10^5$
16	32.75	$0.2876 \cdot 10^2$	$1.405 \cdot 10^5$	$1.202 \cdot 10^5$	$1.144 \cdot 10^5$
17	33.75	$0.3151 \cdot 10^2$	$1.407 \cdot 10^5$	$1.206 \cdot 10^5$	$1.149 \cdot 10^5$

Funkcionalna zavisnost između dužine prsline a i broja ciklusa do pojave loma N u slučaju različitih dužina prsline pri kojim se pojavljuje pik opterećenja su prikazane na slici 6.34. Analiza dobijenih funkcionalnih zavisnosti (sl. 6.34) ukazuje da je sa povećanjem dužine prsline pri kojoj dolazi do pojave pika opterećenja, uticaj pika na broj ciklusa opterećenja do konačnog loma sve manji.



Slika 6.34 Uticaj dužine prsline pri kojoj dejstvuje pik opterećenja a_{ol} na broj ciklusa do konačnog loma N .

U slučaju kada je dužina prsline pri kojoj se pojavljuje pik $a_{ol} = 25.75$ [mm] (50% od ukupne dužine prsline) broj ciklusa je smanjen za 16.66 %, tj. 22.25%, kada je $a_{ol} = 29.75$ [mm] (75% od ukupne dužine prsline) ukoliko se uporedi sa brojem ciklusa pri $a_{ol} = 20.75$ [mm] (25% od ukupne dužine prsline). Sa druge strane, broj ciklusa do pojave loma je povećan za 24.6% u slučaju $a_{ol} = 20.75$ [mm], za 6.8 % ako je $a_{ol} = 25.75$ [mm] i za 1.8 % pri $a_{ol} = 29.75$ [mm] u odnosu na broj ciklusa kada se ne pojavljuje pik u okviru cikličnog opterećenja.

6.7.3 Uticaj intenziteta pika opterećenja na broj ciklusa do pojave loma

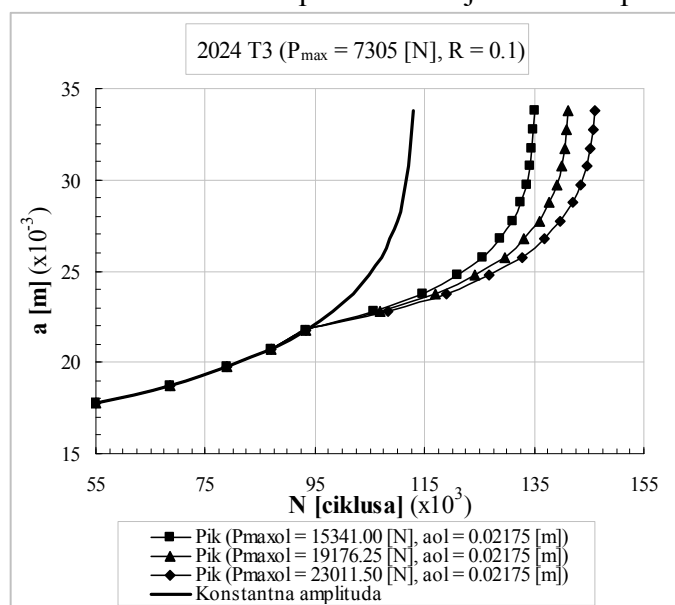
U ovom primeru je analizirano koliko nivo pika opterećenja utiče na broj ciklusa do pojave loma. Kao element strukture razmatran je SEN uzorak (sl. 6.11) iste geometrije, napravljen od istog materijala, kao i u prethodnom primeru (primer 6.7.2). Spoljašnje opterećenje konstantne amplitude je $P_{\max} = 7305$ [N], $R = 0.1$. U slučaju pika opterećenja u ovom primeru su razmatrana tri intenziteta maksimalnih sila $P_{\max ol}$ i to: 15341 [N], zatim za 25% uvećana prvobitna vrednost sile tj. 19176.25 [N], kao i za 50% uvećana prvobitno definisana sila tj. 23011.5 [N]. Pik opterećenja se pojavljuje pri dužini prsline $a_{ol} = 21.75$ [mm], a stepen asimetrije ciklusa je $R_{ol} = 2.1$.

Za definisanu geometriju, tip materijala i spoljašnje opterećenje konstantne amplitude sa pikom primenom jednačina (3.1.9), odnosno (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.6) i primenom numeričke metode za integraciju je određen broj ciklusa opterećenja do konačnog loma. Predviđeni broj ciklusa opterećenja je prikazan u Tabeli 6.18, za odgovarajuće inkremente dužine prsline ukoliko je konačna dužina prsline $a_f = 33.75$ [mm].

Tabela 6.18 Broj ciklusa do pojave loma određen primenom numeričke simulacije
 ($P_{max} = 7305$ [N] , $R = 0.1$, $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 21.75$ [mm]).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	ΔK_I [MPam ^{1/2}]	N [ciklusa]		
			$P_{maxol} = 15341$ [N]	$P_{maxol} = 19176.25$ [N]	$P_{maxol} = 23011.5$ [N]
1	17.75	$0.8393 \cdot 10^1$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$
2	18.75	$0.9036 \cdot 10^1$	$6.847 \cdot 10^4$	$6.847 \cdot 10^4$	$6.847 \cdot 10^4$
3	19.75	$0.9736 \cdot 10^1$	$7.896 \cdot 10^4$	$7.896 \cdot 10^4$	$7.896 \cdot 10^4$
4	20.75	$0.1050 \cdot 10^2$	$8.710 \cdot 10^4$	$8.710 \cdot 10^4$	$8.710 \cdot 10^4$
5	21.75	$0.1133 \cdot 10^2$	$9.341 \cdot 10^4$	$9.341 \cdot 10^4$	$9.341 \cdot 10^4$
6	22.75	$0.1225 \cdot 10^2$	$1.058 \cdot 10^5$	$1.070 \cdot 10^5$	$1.082 \cdot 10^5$
7	23.75	$0.1325 \cdot 10^2$	$1.147 \cdot 10^5$	$1.170 \cdot 10^5$	$1.190 \cdot 10^5$
8	24.75	$0.1437 \cdot 10^2$	$1.211 \cdot 10^5$	$1.242 \cdot 10^5$	$1.269 \cdot 10^5$
9	25.75	$0.1559 \cdot 10^2$	$1.257 \cdot 10^5$	$1.295 \cdot 10^5$	$1.327 \cdot 10^5$
10	26.75	$0.1695 \cdot 10^2$	$1.289 \cdot 10^5$	$1.332 \cdot 10^5$	$1.368 \cdot 10^5$
11	27.75	$0.1846 \cdot 10^2$	$1.311 \cdot 10^5$	$1.359 \cdot 10^5$	$1.398 \cdot 10^5$
12	28.75	$0.2012 \cdot 10^2$	$1.326 \cdot 10^5$	$1.377 \cdot 10^5$	$1.419 \cdot 10^5$
13	29.75	$0.2197 \cdot 10^2$	$1.336 \cdot 10^5$	$1.391 \cdot 10^5$	$1.434 \cdot 10^5$
14	30.75	$0.2401 \cdot 10^2$	$1.342 \cdot 10^5$	$1.400 \cdot 10^5$	$1.445 \cdot 10^5$
15	31.75	$0.2626 \cdot 10^2$	$1.346 \cdot 10^5$	$1.406 \cdot 10^5$	$1.452 \cdot 10^5$
16	32.75	$0.2876 \cdot 10^2$	$1.349 \cdot 10^5$	$1.410 \cdot 10^5$	$1.457 \cdot 10^5$
17	33.75	$0.3151 \cdot 10^2$	$1.407 \cdot 10^5$	$1.413 \cdot 10^5$	$1.461 \cdot 10^5$

Predviđene vrednosti za broj ciklusa do konačnog loma u zavisnosti od dužine prsline su prikazane i u obliku grafika, na slici 6.35, radi lakše analize. Dobijeni rezultati ukazuju da ako se intenzitet pika poveća za 25% ($P_{maxol} = 19176.25$ [N]), broj ciklusa do loma se povećava za oko 0.5%, a sa povećanjem od 50% ($P_{maxol} = 23011.50$ [N]), broj ciklusa je povećan za 3.8% ukoliko se upoređi sa brojem ciklusa pri $P_{maxol} = 15341$ [N].



Slika 6.35 Uticaj veličine pika opterećenja tj. intenziteta maksimalne sile pika P_{maxol} na broj ciklusa do konačnog loma N.

6.7.4 Uticaj intenziteta opterećenja konstantne amplitude koje prethodi piku na broj ciklusa do konačnog loma

U primeru 6.7.3 je analiziran uticaj nivoa pika opterećenja, a u ovom je razmatran uticaj nivoa cikličnog opterećenja konstantne amplitude koji prethodi piku. SEN uzorak (sl.6.11) ima istu geometriju i napravljen je od istog materijala kao u primeru 6.7.3. Podaci koji definišu dejstvo pika opterećenja su: $P_{\max_{ol}} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 21.75$ [mm]. Dužina prsline pri kojoj nastupa lom kod SEN uzorka je $a_f = 33.75$ [mm]. Tri različita nivoa opterećenja konstantne amplitude P_{\max} su uključena u analizu: 7305.00 [N], zatim sa 25% povećanjem prethodno definisane sile tj. 9131.25 [N], kao i sa 50% povećanjem tj. 10957.50 [N].

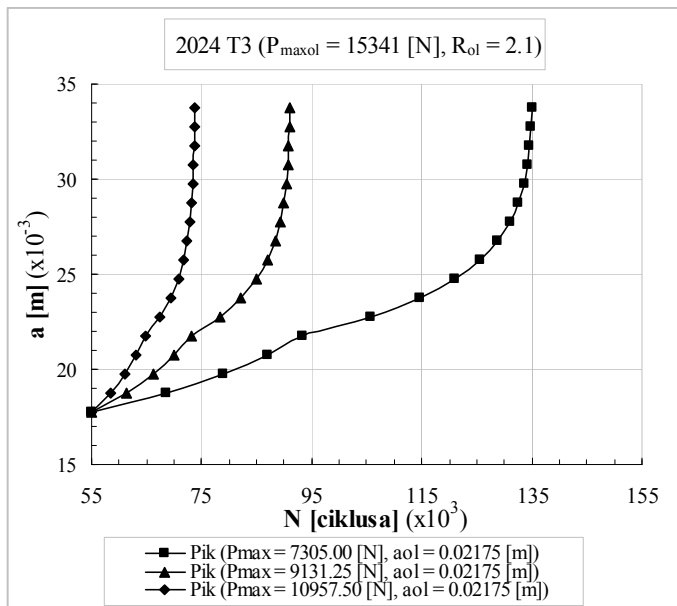
Pošto su poznati parametri neophodni za definisanje geometrije, materijala i opterećenja, moguće je odrediti faktore intenziteta napona za odgovarajuće inkremente dužine prsline, zatim gradijente širenja prsline, kao i broj ciklusa opterećenja do pojave loma primenom matematičkog modela koji je baziran na jednačinama (3.1.9), odnosno (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.6). Dobijeni rezultati za broj ciklusa do pojave loma analiziranog SEN uzorka pri dejstvu cikličnog opterećenja sa tri različita nivoa cikličnog opterećenja konstantne amplitude su dati u Tabeli 6.19, kao i na slici 6.36. Intenziteti tri nivoa opterećenja koji prethode piku ($P_{\max_{ol}} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 21.75$ [mm]), analizirani prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline, dati su u Tabeli 6.19 kao i na slici 6.36.

Tabela 6.19 Proračun broja ciklusa do konačnog loma pri različitim nivoima opterećenja konstantne amplitude i uz dejstvo pika ($R = 0.1$, $P_{\max_{ol}} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 21.75$ [mm]).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	N [ciklusa]		
		$P_{\max} = 7305.00$ [N]	$P_{\max} = 9131.25$ [N]	$P_{\max} = 10957.50$ [N]
1	17.75	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$
2	18.75	$6.847 \cdot 10^4$	$6.134 \cdot 10^4$	$5.843 \cdot 10^4$
3	19.75	$7.896 \cdot 10^4$	$6.628 \cdot 10^4$	$6.110 \cdot 10^4$
4	20.75	$8.710 \cdot 10^4$	$7.012 \cdot 10^4$	$6.318 \cdot 10^4$
5	21.75	$9.341 \cdot 10^4$	$7.309 \cdot 10^4$	$6.478 \cdot 10^4$
6	22.75	$1.058 \cdot 10^5$	$7.839 \cdot 10^4$	$6.744 \cdot 10^4$
7	23.75	$1.147 \cdot 10^5$	$8.223 \cdot 10^4$	$6.936 \cdot 10^4$
8	24.75	$1.211 \cdot 10^5$	$8.499 \cdot 10^4$	$7.074 \cdot 10^4$
9	25.75	$1.257 \cdot 10^5$	$8.695 \cdot 10^4$	$7.172 \cdot 10^4$
10	26.75	$1.289 \cdot 10^5$	$8.832 \cdot 10^4$	$7.241 \cdot 10^4$
11	27.75	$1.311 \cdot 10^5$	$8.928 \cdot 10^4$	$7.288 \cdot 10^4$
12	28.75	$1.326 \cdot 10^5$	$8.992 \cdot 10^4$	$7.321 \cdot 10^4$
13	29.75	$1.336 \cdot 10^5$	$9.035 \cdot 10^4$	$7.342 \cdot 10^4$
14	30.75	$1.342 \cdot 10^5$	$9.060 \cdot 10^4$	$7.355 \cdot 10^4$
15	31.75	$1.346 \cdot 10^5$	$9.078 \cdot 10^4$	$7.364 \cdot 10^4$
16	32.75	$1.349 \cdot 10^5$	$9.091 \cdot 10^4$	$7.372 \cdot 10^4$
17	33.75	$1.407 \cdot 10^5$	$9.101 \cdot 10^4$	$7.377 \cdot 10^4$

Predviđeni broj ciklusa do pojave loma (Tabela 6.19 i sl. 6.36), dobijen numeričkom simulacijom koja je definisana u Poglavlju 4, ukazuje da se sa povećanjem nivoa

opterećenja konstantne amplitude za 25% tj. sa 7305.00 [N] na 9131.25 [N] broj ciklusa do konačnog loma smanjio za oko 35%. U slučaju povećanja nivoa opterećenja od 50% tj. sa 7305.00 [N] na 10957.50 [N], broj ciklusa do konačnog loma se smanjio za oko 47%.



Slika 6.36 Uticaj intenziteta opterećenja konstantne amplitude tj. maksimalne sile P_{\max} na broj ciklusa do konačnog loma N .

Pošto je u ovom primeru, ali i u prethodnom (primer 6.7.3), analiziran uticaj nivoa opterećenja kod oba i pika i opterećenja konstantne amplitude, dobijeni rezultati ukazuju da je mnogo važniji uticaj povećanja nivoa opterećenja konstantne amplitude jer značajno mogu redukovati broj ciklusa do loma. Sa druge strane, povećanje nivoa pika opterećenja dovodi do povećanja broja ciklusa do loma (ali je to povećanje mnogo manje).

6.7.5 Uticaj debljine uzorka na broj ciklusa do konačnog loma pri dejstvu cikličnog opterećenja konstantne amplitude sa pikom

Ovaj primer razmatra kako debljina uzorka utiče na broj ciklusa opterećenja do pojave loma. Prilikom analize korišćen je SEN uzorak koji je prikazan na slici 6.11, sa geometrijskim karakteristikama: $a_0 = 17.75$ [mm], $\Delta a = 1$ [mm], $w = 52$ [mm]. Spoljašnje ciklično opterećenje je konstantne amplitude ($P_{\max} = 7305$ [N], $R = 0.1$), ali postoji dejstvo pika opterećenja ($P_{\max ol} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 20.75$ [mm]). Karakteristike materijala (2024 T3) SEN uzoraka su: $\sigma_{0.2} = 324$ [MPa], $\nu = 0.33$, $E = 73100$ [MPa], $K_{IC} = 95.31$ [MPa $m^{1/2}$], $c_p = 5.0227 \cdot 10^{-11}$, $n_p = 3.3736$.

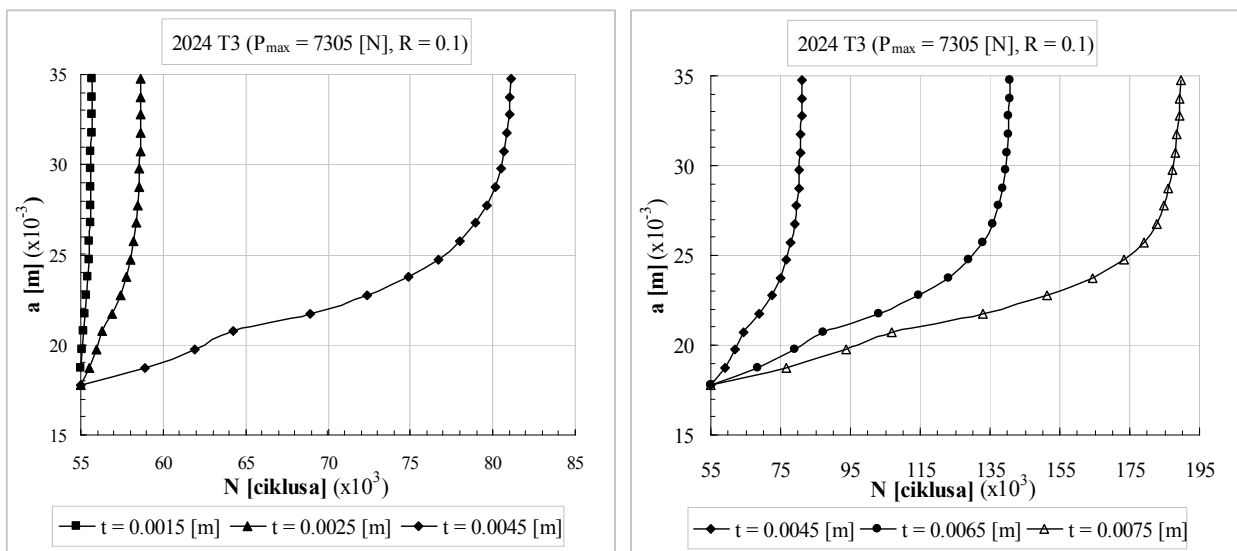
S obzirom da se analizira uticaj debljine uzorka na broj ciklusa do pojave loma uz poznate parametre geometrije, opterećenja i materijala, primenom matematičkog modela u kome figurišu jednačine (3.1.9), odnosno (4.3.1), (4.3.2), (4.3.4) i (4.3.6), najpre su određeni faktori intenziteta napona (jednačina data u Tabeli 3.1), kao i gradijent širenja prsline, a zatim i broj ciklusa do pojave loma. Rezultati dobijeni putem

numeričke simulacije za broj ciklusa do pojave loma prikazani su u slučaju različitih debljina SEN uzorka u Tabeli 6.20 i na slici 6.37.

Tabela 6.20 Određivanje broja ciklusa opterećenja do konačnog loma N pri različitim vrednostima debljine t u slučaju SEN uzorka

($P_{max} = 7305$ [N], $R = 0.1$, $P_{maxol} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 20.75$ [mm]).

Br.	$a \cdot 10^{-3}$ [m]	N [ciklusa]			
		$t = 1.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 4.5 \cdot 10^{-3}$ [m]	$t = 7.5 \cdot 10^{-3}$ [m]
1	17.75	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$	$5.500 \cdot 10^4$
2	18.75	$5.510 \cdot 10^4$	$5.554 \cdot 10^4$	$5.889 \cdot 10^4$	$7.682 \cdot 10^4$
3	19,75	$5.517 \cdot 10^4$	$5.595 \cdot 10^4$	$6.193 \cdot 10^4$	$9.382 \cdot 10^4$
4	20.75	$5.523 \cdot 10^4$	$5.628 \cdot 10^4$	$6.429 \cdot 10^4$	$1.070 \cdot 10^5$
5	21.75	$5.534 \cdot 10^4$	$5.692 \cdot 10^4$	$6.894 \cdot 10^4$	$1.328 \cdot 10^5$
6	22.75	$5.543 \cdot 10^4$	$5.740 \cdot 10^4$	$7.238 \cdot 10^4$	$1.513 \cdot 10^5$
7	23.75	$5.549 \cdot 10^4$	$5.776 \cdot 10^4$	$7.489 \cdot 10^4$	$1.643 \cdot 10^5$
8	24.75	$5.554 \cdot 10^4$	$5.802 \cdot 10^4$	$7.672 \cdot 10^4$	$1.733 \cdot 10^5$
9	25.75	$5.557 \cdot 10^4$	$5.821 \cdot 10^4$	$7.804 \cdot 10^4$	$1.792 \cdot 10^5$
10	26.75	$5.560 \cdot 10^4$	$5.835 \cdot 10^4$	$7.899 \cdot 10^4$	$1.826 \cdot 10^5$
11	27.75	$5.562 \cdot 10^4$	$5.845 \cdot 10^4$	$7.966 \cdot 10^4$	$1.846 \cdot 10^5$
12	28.75	$5.563 \cdot 10^4$	$5.852 \cdot 10^4$	$8.014 \cdot 10^4$	$1.861 \cdot 10^5$
13	29.75	$5.564 \cdot 10^4$	$5.857 \cdot 10^4$	$8.047 \cdot 10^4$	$1.872 \cdot 10^5$
14	30.75	$5.565 \cdot 10^4$	$5.861 \cdot 10^4$	$8.071 \cdot 10^4$	$1.880 \cdot 10^5$
15	31.75	$5.565 \cdot 10^4$	$5.863 \cdot 10^4$	$8.087 \cdot 10^4$	$1.886 \cdot 10^5$
16	32.75	-	$5.865 \cdot 10^4$	$8.098 \cdot 10^4$	$1.891 \cdot 10^5$
17	33.75	-	$5.866 \cdot 10^4$	$8.105 \cdot 10^4$	$1.894 \cdot 10^5$
18	34.75	-	$5.867 \cdot 10^4$	$8.110 \cdot 10^4$	$1.896 \cdot 10^5$



(a)

(b)

Slika 6.37 Uticaj debljine t na broj ciklusa do konačnog loma N kod SEN uzorka ($P_{maxol} = 15341$ [N], $R_{ol} = 2.1$, $a_{ol} = 20.75$ [mm]).

Numerički simulirani rezultati za broj ciklusa do pojave loma (Tabela 6.20, sl. 6.37.a, kao i sl. 6.37.b) ukazuju da se na primer pri dužini prsline $a = 31.75$ [mm], a u odnosu na broj ciklusa pri $t = 1.5$ [mm], broj ciklusa opterećenja do pojave loma povećao za oko 5% (u slučaju $t = 2.5$ [mm]), za oko 45% (u slučaju $t = 4.5$ [mm]), oko 2.4 puta (u slučaju $t = 6.5$ [mm]) i oko 3.4 puta (u slučaju $t = 7.5$ [mm]).

7. ZAKLJUČAK

Disertacija prezentuje nekoliko kompletno formulisanih procedura/modela za simulaciju širenja prslina pri dejstvu cikličnih opterećenja. Matematički modeli su bazirani na adekvatnim fizičkim konceptima i obuhvataju uticaj različitih efekata koji su bitni za proces širenja prslina. U matematičkim modelima prilikom simulacije su korišćeni koncept gustine energije deformacije, koncept zatvaranja prslina kao i koncept koji uključuje uticaj pika opterećenja.

Promenljive fizičke veličine stanja kod formulisanih matematičkih modela, dužina prslina i faktor intenziteta napona su rekurzivno generisani odgovarajućim algebarskim relacijama tj. funkcionalnim zavisnostima u kojim figurišu maksimalni i minimalni napon, parametri geometrije i odgovarajući parametri vezani za tip materijala.

U slučaju kada su elementi strukture složenog oblika i/ili je spoljašnje opterećenje složenog tipa, u ovom radu je predložen pristup za određivanje korektivnih funkcija primenom numeričkih metoda (MKE). Zahvaljujući MKE, u radu, su razvijene nove relacije za korektivne funkcije. Korektivne funkcije potrebne za procenu preostalog veka, dobijene upotrebom MKE, daju predviđanja za broj ciklusa do pojave loma koja su u dobroj saglasnosti sa eksperimentima i/ili postojećim analitičkim relacijama.

Spoljašnje opterećenje, koje je analizirano u radu kao složeno, je biaksijalno opterećenje. Predviđeni rezultati za fazu širenja prslina u slučaju dejstva biaksijalnog opterećenja su upoređeni sa rezultatima dobijenim pri dejstvu aksijalnog opterećenja. Poređenje odgovarajućih simuliranih krivih za biaksijalno i aksijalno opterećenje pokazuje da dejstvo biaksijalnog opterećenja značajno može smanjiti preostali broj ciklusa do pojave loma ukoliko deluje na element strukture.

Metoda konačnih elemenata je korišćena takođe prilikom modeliranja efekta zatvaranja prslina u slučaju dejstva cikličnog opterećenja. Zahvaljujući numeričkoj simulaciji pomoću MKE u radu su poboljšani neki od razvijenih matematičkih modela koji uključuju efekat zatvaranja prslina.

Validnost rezultata dobijenih pomoću formulisanih matematičkih modela za simulaciju širenja prslina je verifikovana upoređivanjem sa odgovarajućim eksperimentalnim rezultatima koji su dobijeni pri dejstvu cikličnih opterećenja.

S obzirom da su u ovom radu razmatrani različiti efekti koji se mogu pojaviti prilikom dejstva cikličnog opterećenja na elemente strukture sa prslinom, i pošto je formulisano

više matematičkih modela za simulaciju širenja prsline, neophodno je da za svaki od ovih modela odvojeno budu izvedeni zaključci.

Na osnovu analize rezultata za predviđeni vek do pojave loma, koji su dobijeni primenom koncepta baziranog na gustini energije deformacije, mogu biti izvedeni sledeći zaključci:

- korišćenje formulisanog matematičkog modela baziranog na konceptu gustine energije deformacije je efikasno prilikom procene veka elemenata struktura koje su oštećene usled dejstva cikličnih opterećenja;
- matematički model baziran na gustini energije deformacije je jednostavan i prikladan za praktičnu primenu jer ne zahteva dodatno određivanje neophodnih parametara pri uslovima zamora (što je u principu kod drugih modela neophodno). Ustvari, kod ovog modela se koriste isti parametri koji se koriste prilikom predviđanja veka elemenata struktura za fazu do pojave inicijalnog oštećenja;
- upotreba koncepta gustine energije prilikom matematičkog modeliranja širenja prsline je vrlo značajna jer se na taj način u simulaciju uključuje ciklično ponašanje materijala;
- svi rezultati dobijeni primenom formulisanog matematičkog modela pokazuju da predloženi pristup baziran na gustini energije deformacije može biti korišćen prilikom procene veka elemenata struktura do pojave loma.

Prilikom analize širenja prsline u radu je razmatran i efekat zatvaranja prsline. Efekat zatvaranja prsline je matematički modeliran primenom analitičkih i numeričkih pristupa. Tri različita modela u kojima se uključuje efekat zatvaranja prsline su razvijena. U okviru formulisanih modela efekat zatvaranja prsline je uveden upotrebom tri različite relacije za efektivni faktor intenziteta napona (Elber, Schjive, Sehitoglu-Sun). Sva tri modela su zatim poboljšana uvođenjem novih korektivnih faktora za efektivni faktor intenziteta napona. Poboljšanja kod matematičkih modela su dobijena zahvaljujući primeni metode konačnih elemenata. U okviru numeričkih primera svi poboljšani matematički modeli su upoređivani između sebe, kao i sa formulisanim nepoboljšanim modelima. Efekat zatvaranja prsline je matematički modeliran kako za spoljašnje opterećenje konstantne amplitude, tako i za spektar opterećenja.

Rezultati dobijeni putem proračuna u slučaju analize fenomena zatvaranja prsline ukazuju na sledeće:

- uključivanje efekta zatvaranja prsline prilikom analize širenja prsline obezbeđuje realniju tj kvalitetniju procenu veka do pojave loma (ustvari razmatrani matematički modeli su mnogo manje konzervativni od konvencionalnog Paris-ovog model);
- od razmatranih matematičkih modela koji uključuju efekat zatvaranja prsline najbolje slaganje sa eksperimentom se dobija u slučaju korišćenja modifikovanog modela koji je baziran na Elber-ovoj relaciji za efektivni faktor

intenziteta napona, a najlošije u slučaju matematičkog modela u kome je korišćena Sehitoglu-Sun-ovih relacija za određivanje efektivnog faktora intenziteta napona;

- metoda konačnih elemenata se pokazala kao vrlo pogodna i korisna prilikom analize fenomena zatvaranja prsline;
- efekat zatvaranja prsline (analiziran sa novim korektivnim faktorima, formulisanim u ovom radu) ima veći uticaj na predviđanje broja blokova do konačnog loma, nego na broj ciklusa do pojave loma;
- izuzetno se dobija visok kvalitet procene veka uvođenjem fenomena zatvaranja prsline prilikom analize širenja prsline.

Pored efekta zatvaranja prsline u radu je formulisan matematički model za širenje prsline koji uključuje efekat pojave pika u okviru spoljašnjeg opterećenja. Ukoliko se kao pik pojavi nadopterećenje, takav tip opterećenja može prouzrokovati da se vek elementa strukture do pojave loma značajno produži zbog pojave tzv. plastifikacije oko vrha prsline.

Za spoljašnje opterećenje sa pikom opterećenja koje vrlo često može dejstvovati na elemente struktura, u okviru numeričkih primera razmatrani su uticaji različitih parametara na vek elementa strukture do pojave loma. Analiza dobijenih simuliranih rezultata u ovom radu ukazuje na sledeće činjenice:

- povećanje dužine prsline pri kojoj bi trebalo da se javi pik nadopterećenja značajno može smanjiti vek elementa strukture do pojave loma;
- intenzitet pika nadopterećenja takođe može uticati na vek do pojave loma kod elementa struktura, tako da veći nivoi pika opterećenja dovode do smanjenja broja ciklusa do konačnog loma kao i obrnuto;
- nivo opterećenja konstantne amplitude koji prethodi piku nadopterećenja ukoliko je veći po intenzitetu uslovljava takođe smanjenje veka elementa strukture i obrnuto;
- debljina uzorka odnosno elementa strukture takođe može značajno uticati na preostali vek, ustvari što je veća debljina veći je broj ciklusa do konačnog loma i obrnuto.

Svi formulisani, u ovom radu, matematički modeli za simulaciju širenja prsline bazirani na različitim konceptima predstavljaju efikasne procedure za predviđanje preostalog veka (odnosno broja ciklusa do pojave loma) elemenata struktura pri dejstvu cikličnih opterećenja. Ustvari, primena formulisanih i verifikovanih matematičkih modela omogućava da se na vreme predvide mogući lomovi elemenata struktura koji obavljaju odgovarajuće funkcije, ali i da se utvrdi koliko element strukture koji se stavlja u eksploataciju može efikasno raditi tj. funkcionisati. Osim toga, razvijeni matematički modeli pružaju mogućnost otkrivanja kritičnih zona u elementima strukture i redukuju na minimum veoma skupa eksperimentalna istraživanja.

LITERATURA

- [1] Airy G.B. *On the strains in the interior of beams*. 32nd Meeting of Brit. Assoc. For Advance. Sci. Report, 1862.
- [2] Williams M.L. *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*. Trans ASME, J. Appl. Mech. 19, 1952, pp.526.
- [3] Muskhelishvili N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 3rd Edn., Noordhoof, Groningen, 1963.
- [4] Eftis J., Subramonian N., Liebowits H. *Crack border stress and displacement equations revisited*. Eng. Fract. Mech. 9, 1977, pp.189.
- [5] Westergaard H.M. *Theory of elasticity and plasticity*. Harvard University Press, 1952.
- [6] Westergaard, H.M. *Bearing pressures and cracks*, Trans ASME, J. Appl. Mech. 6, 1939, pp.49.
- [7] Sih G.C. *On the Westergaard method of crack analyses*. J. Fract. Mech. 2, 1966, pp.628.
- [8] Shanley F.R. *A theory of fatigue based on unbonding during reversed slip*. Rsnid Corp. Report No. P350 (November 1952). Also supplement (May 1963).
- [9] Shanley F.R. *A proposed mechanism of fatigue failure*. Colloquium on Fatigue held in Stockholm, Sweden, May, 1955 (edited by Weibull W. and Odqvist F.), International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1956, pp.251-259.
- [10] Head A.K. *The growth of fatigue cracks*. Phil. Mag. 44 Ser.7.925, 1953.
- [11] Head A.K. *The propagation of fatigue cracks*. J Appl. Mech. 23, 1956, pp.407.
- [12] Weibull W. *The propagation of fatigue cracks in light alloy plates*. SAAB Aircraft Co. Linkoping, Sweden, 1954.
- [13] McEvily Jr. A.J., Illng W. *The rate of fatigue crack propagation in two aluminum alloys*. NACA TN 4394, 1958.
- [14] Paris P.C. *The growth of fatigue cracks due to variations in load*. Ph. D. Dissertation, Lehgh University, 1962.
- [15] Paris P.C. *Crack propagation caused by fluctuating loads*. ASME Paper No.62 - Met 3.
- [16] Paris P.C., Erdogan F. *A critical analysis of crack propagation laws*. J Basic Engng. Trans. ASME Ser.D. 85.(4), 1963, pp.528-534.
- [17] Paris P.C. *The fracture mechanics approach to fatigue*. Fatigue-An Interdisciplinary Approach, Proceedings of the Tenth Sagamore Army Materials Research Conference, Syracuse University Press, 1964, pp.107-132.
- [18] Liu H.W. *Crack propagation in thin sheet metal under repeated loading*. J Basic Engng. Trans. ASME Ser.D.83, 1961.

- [19] Foreman R.G. Kearney V.E., Engle R.M. *Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures*. J Basic Engng. Trans. ASME Series D.89, 1967, pp.459-464.
- [20] Peterson S. *Effect of mean stress in 12.6 min aluminium alloys of high and low fracture toughness*. Engng. Fract. Mech. 4(9), 1972.
- [21] Anderson T.L. *Fracture Mechanics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [22] Suresh S. *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.
- [23] Glinka G., Robin C., Pluvinage G., Chehimi C.A. *Cumulative model of fatigue crack growth and the crack closure effect*. Int. J Fatigue 6(1), 1984, pp.37-47.
- [24] Sih G.C. *The state of affairs near the crack tip*. In: Modelling problems in crack tip mechanics, CFC10, University of Waterloo, 24-26 August 1983, pp.65-85.
- [25] Antonovich S.D., Saxena A., Chanani G.R. *A model for fatigue crack propagation*. Engng. Fract. Mech. 7, 1975, pp.649-652.
- [26] Boljanović S., Maksimović S., Belić I. *Fatigue life Prediction of structural components based on local strain and an energy crack growth models*. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics 1(2), 2006, pp. 196-203.
- [27] Boljanović S., Maksimović S., Djurić M. *Analysis of crack propagation using the strain energy density method*. Scientific Technical Review, Vol. LIX, No.2, 2009, pp. 12-17.
- [28] Kujawaski D., Ellyin F.A. *Fatigue crack propagation model*. Engng. Fract. Mech. 20(5-6), 1984, pp.695-704.
- [29] Glinka G. *A cumulative model of fatigue crack growth*. Int. J Fatigue 4(2), 1982, pp.59-67.
- [30] Li D.M., Nam W.I., Lee C.S. *An improvement on prediction of fatigue crack growth from low cycle fatigue properties*. Engng. Fract. Mech. 60(4), 1998, pp.397-406.
- [31] Ellyin F. *Fatigue damage, crack growth and life prediction*. Fracture Mech. 48(1), 1997, Chapman & Hall, pp.9-15.
- [32] Hutchinson J.W. *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*. J. Phys. Solids 16, 1968, pp.13-31.
- [33] Ikeda S., Izumi Y., Fine M.E. *Plastic work during fatigue crack propagation in a high strength low alloy steel and in 7050 Al-alloy*. Engng. Fract. Mech. 9, 1977, pp.123-135.
- [34] Chakrabarti A.K. *An energy balance approach to the problem of fatigue crack growth*. Engng. Fract. Mech. 10, 1978, pp.469-483.
- [35] Izumi Y., Fine M.E. *Role of plastic work in fatigue crack propagation in metals*. Engng. Fract. Mech. 11, 1979, pp.791-804.
- [36] Radhakrishnan V. M. *Endurance diagram*. Int. J Fatigue 12 (6), 1990, pp.513-517.
- [37] Chand S., Gard S.B.L. *Crack propagation under constant amplitude loading*. Engng. Fract. Mech. 21 (1), 1985, pp.1-30.
- [38] Paris P.C., Lados D., Tada H. *Reflections on identifying the real ΔK_{eff} in the threshold region and beyond*. Engng. Fract. Mech. 75(3-4), 2008, pp.299-305.
- [39] de Matos P.F.P., Nowell D. *Experimental and numerical investigation of thickness effects in plasticity induced fatigue crack closure*. Int. J Fatigue 31(11-12), 2009, pp.1795-1804.
- [40] Boljanović S., Maksimović S. *Fatigue life analysis of cracked structural components using closure effects*. In: Proceedings of the 2nd South – East European Conference on Computational Mechanics, Rhodes, Greece, June 22-24, 2009.

- [41] Boljanović S., Maksimović S., Carpinteri A. *An analysis of crack propagation and a plasticity-induced closure effect*. Scientific Technical Review 60(2), 2010, pp. 14-19.
- [42] Lugo M., Daniewicz S.R., Newman Jr. J.C. A mechanics based study of *crack closure measurement techniques under constant amplitude loading*. Int. J Fatigue 33(2), 2011, pp.186-193.
- [43] Carroli J., Efstathiou C., Lamros J., Sehitoglu H., Hauber B., Spottswood S., Chona R. *Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments*. Engng. Fract. Mech. 76(15), 2009, pp.2384-2398.
- [44] Elber W. *Fatigue crack closure under cyclic tension*. Engng. Fract. Mech. 2, 1970, pp.37-44.
- [45] Liehowitz H. *Fracture*. Vol. II. Academic Press, New York, 1968.
- [46] Gillemot F. *Effect of material properties on fatigue crack growth at ambient and elevated temperatures*. Int. Conf. on Creep and Fatigue in Elevated Temperature Applications. Sheffield 1974, 236.1, Philadelphia 1973.
- [47] Gillemot F. *Criterion of crack initiation and spreading*. Engng. Fract. Mech. 8, 1976, pp.239-253.
- [48] Schwalbe K.H. *Comparison of several fatigue crack propagation laws with experimental results*. Engng. Fract. Mech. 6, 1974, pp.235-240.
- [49] Schjive J. *Some formulas for the crack opening stress level*. Engng. Fract. Mech. 14, 1981, pp.461-465.
- [50] Sehitoglu H, Sun W. *Modeling of plane strain fatigue crack closure*. ASME J Engng. Mater. Technol. 15(113), 1991, pp.31-41.
- [51] Sun W., Sehitoglu H. *Residual stress fields during fatigue crack growth*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 15, 1992, pp.115-128.
- [52] Lucht T. *Finite element analysis of three dimensional crack growth by the use of a boundary element sub model*. Engng. Fract. Mech. 76(14), 2009, pp.2148-2162.
- [53] Zapatero J., Moreno L., Gonzalez-Herrera A. *Fatigue crack closure determination by means of finite element analysis*. Engng. Fract. Mech. 75(1), 2008, pp.41-57.
- [54] Skinner J.D., Doniewicz S.R. *Simulation of plasticity-induced fatigue crack closure in part-through cracked geometries using finite element analysis*. Engng. Fract. Mech. 69(1), 2002, pp.1-11.
- [55] Barsoum R.S. *Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements*. Int. J. Numer. Meth. Engng. 11, 1977, pp.85-98.
- [56] Bathias C., Pelloux R.M. *Fatigue crack propagation in martensitic and austenitic steels*. Metall. Trans. 4, 1973, pp.97-105.
- [57] Nicolleto G. *Plastic zone sizes about fatigue cracks in metals*. IJF 1989, 11(2), pp.107-115.
- [58] Sadananda K., Holtz R.L., Vasudevan A.K. *On the fatigue crack tip driving force role of crack tip plasticity*. In: International Conference of Fracture (ICF-387), Hawaii, 2001.
- [59] McClintock F.A. *On the plasticity of the growth of fatigue cracks*. In: Fracture of solids (editor Drucker D.C.), Dew York, Interscience Publishers, 1963, pp.65-102.
- [60] Schalbe K.H. *Approximate calculation of fatigue crack growth*. Int. J of Fracture 9(4), 1973, pp.381-395.
- [61] Chalant G., Reny L. *Model of fatigue crack propagation by damage accumulation at the crack tip*. Engng. Fract. Mech. 1983, 18, pp.539-552.

- [62] Colombo C., Vergani L. *A numerical and experimental study of crack tip shielding in presence of overloads*. Engng. Fract. Mech. 77(11), 2011, pp.1644-1655.
- [63] Kermanidis A.T., Pantelakis Sp.G. *Prediction of crack growth following a single overload in aluminum alloy with sheet and plate microstructure*. Engng. Fract. Mech. 78(11), 2011, pp.2325-2337.
- [64] Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York 1974.
- [65] Ross B. *The Development of the Gamma Function and A Profile of Fractional Calculus*. Chap. 5, pp. 142-210, New York University Dissertation 1974.
- [66] Trebules V.W., Roberts R., Hertzberg R.W. *The Effect of Multiple Overloads on Fatigue Crack Propagation in 2024-T3 Aluminum Alloy*. The 6th National Symp. On Fracture Mechanics, 28-30 August 1972.
- [67] Wheeler O.E. *Spectrum loading and crack growth*. J Basic Engng. Trans. ASME, Ser. D. 94(1), 1972, pp.181-186.
- [68] Willenborg J.D., Engle Jr R.M., Wood H. *A crack growth retardation model using effective stress concept*. AFDL-TM-71-1-FBR. January 1971.
- [69] Irwin G.R. *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Trans. ASME J Appl. Mech. 1957, E24:361.
- [70] Antunes F.V., Borrego L.F.P., Costa J.D., Ferreira J.M. *A numerical study of fatigue crack closure induced by plasticity*. Fatigue Fract. Engng. Struct. 27, 2004, pp.825-835.
- [71] Taheri F., Trask D., Pegg N. *Experimental and analytical investigation of fatigue characteristics of 350WT steel under constant and variable amplitude loading*. Mar. Struct. 6, 2003, pp.69-91.
- [72] Irwin G.R. *Linear fracture mechanics, fracture transition and fracture control*. Engng. Fract. Mech. 1, 1968, pp.241-257.
- [73] Guo W. *Three-dimensional analysis of plastic constraint for through-thickness cracked bodies*. Engng. Fract. Mech. 62, 1999, pp.383-407.
- [74] Voorwald H.J.C., Torres M.A.S. *Modeling of fatigue crack growth following overloads*. Int. J Fatigue 13(5), 1991, pp.423-427.
- [75] Bathe J.B. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [76] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. *Finite Element Method*. Vol.1, ISBN-13: 9780750650496, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.
- [77] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. *Finite Element Method*. Vol. 2, ISBN-13: 9780750650557, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.
- [78] Liu G.R. *Finite Element Method: A Practical Course*, ISBN-10:0750658665, ISBN-13:9780750658669, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2003, pp.365.
- [79] Boljanović S., Maksimović S. *Analysis of the crack growth propagation process under mixed-mode loading*. Engng. Fract. Mech. 78(8), 2011, pp. 1565-1576.
- [80] Boljanović S. *Fatigue strength analysis of semi-elliptical surface crack*. Scientific Technical Review 62(1), 2012, pp. 10-16.
- [81] Boljanović S., Maksimović S., Posavljak S. *Fatigue life estimation of cracked structural components*. In: Proceedings of International Conference DEMI 2011, Banja Luka, Republic of Srpska, May 26-28, 2011, pp.165-172.
- [82] Maksimović S., Posavljak S., Maksimović K., Nikolić-Stanojević V., Djurković V. *Total fatigue life estimation of notched structural components using low-cycle Fatigue Properties*. J. Strain, 2010, DOI: 10.1111/j.1475-1305.2010.00775.x

- [83] Boljanović S., Maksimović S., Carpinteri A. *Numerical modelling of semi elliptical crack growth under cyclic loading*. In: Proceedings of International Conference ICoSSM 2011, Vlasina Lake, Serbia, July 05-08, 2011.
- [84] Boljanović S., Maksimović S., Carpinteri A. *Residual life estimation of quarter-elliptical corner crack growth*. In: Proceedings of International Conference OTEH 2011, Belgrade, Serbia, October 06-07, 2011, pp. 628-633.
- [85] Boljanović S., Maksimović S. *Fatigue crack analysis under mixed mode loading*. In: Proceedings of the 9th International Conference on Multiaxial Fatigue & Fracture (ICMFF9), Parma, Italy, June 7-9, 2010, pp. 541-549.
- [86] Lee B.U., Taylor R.E. *Fatigue behavior of aluminum alloy under biaxial loading*. Engng. Fract. Mech. 78(8), 2011, pp.1555-1564.
- [87] Shanyavskiy A. *Fatigue cracking simulation based on crack closure effects in Al-based sheet materials subjected to biaxial cyclic loads*. Engng. Fract. Mech. 78(8), 2011, pp.1516-1528.
- [88] Ranganathan, N. *Certain aspects of variable amplitude fatigue*. IFC-8-Fatigue 2002, Stocholm, 3–7 june 2002, pp.613 - 623.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а: Слободанка С. Бољановић

број уписа:

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом:

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ПРЕОСТАЛЕ ЧВРСТОЋЕ СТРУКТУРАЛНИХ
ЕЛЕМЕНАТА У ПРИСУСТВУ ПРСЛИНЕ ПРИ ЦИКЛИЧНИМ ОПТЕРЕЋЕЊИМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанта

У Београду, 29.08.2012. године



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Слободанка С. Бољановић

Број уписа:

Студијски програм:

Наслов рада: НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ПРЕОСТАЛЕ ЧВРСТОЋЕ
СТРУКТУРАЛНИХ ЕЛЕМЕНАТА У ПРИСУСТВУ ПРСЛИНЕ ПРИ ЦИКЛИЧНИМ
ОПТЕРЕЂЕЊИМА

Ментор: Проф. др Бошко Јовановић

Потписани-а: Слободанка С. Бољановић

Изјављујем

да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 29.08.2012. године

Потпис докторанта



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ПРЕОСТАЛЕ ЧВРСТОЋЕ СТРУКТУРАЛНИХ ЕЛЕМЕНАТА У ПРИСУСТВУ ПРСЛИНЕ ПРИ ЦИКЛИЧНИМ ОПТЕРЕЂЕЊИМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

У Београду, 29.08.2012. године

Потпис докторанта



BIOGRAFSKI PODACI O AUTORU DISERTACIJE

Slobodanka S. Boljanović je rođena u Beogradu, gde je završila osnovnu školu “Đuro Đaković”, sada “Skadarlija” i Prvu beogradsku gimnaziju. Posle završene gimnazije upisuje Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu i diplomu mašinskog inženjera stiče 1991. godine na katedri za Vazduhoplovstvo. U toku studija na Mašinskom fakultetu, 1990. godine Slobodanka S. Boljanović upisuje Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, grupa za Mehaniku. Diplomski rad sa temom pod nazivom

ANALIZA VISKO-ELASTIČNIH MATERIJALA PRI SLOŽENOJ ZAVISNOSTI IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJE

odbranila je 1994. godine.

Nakon diplomiranja na Mašinskom fakultetu, 1991. godine, Slobodanka S. Boljanović upisuje i posle diplomске studije na katedri za Vazduhoplovstvo gde je magistrarsku tezu pod nazivom

PRORAČUNSKA ANALIZA ČVRSTOĆE NA ZAMOR ELEMENATA VAZDUHOPLOVNIH KONSTRUKCIJA PRI CIKLIČNIM OPTEREĆENJIMA

odbranila u septembru 1997. godine.

Slobodanka S. Boljanović od 2002. godine je zaposlena u Visokoj inženjerskoj školi strukovnih studija u Beogradu i obavlja predavanja iz predmeta: mehanika fluida, statika, tehnička mehanika. Osim toga, Slobodanka S. Boljanović od 2003. godine saraduje sa TU Delft u Holandiji. Na poziv TU Delft održala je i predavanja iz oblasti proračuna preostale čvrstoće pri zamoru elemenata struktura.

Autor ove disertacije se intenzivno bavi istraživačkim radom iz oblasti proračuna čvrstoće elemenata struktura od 1994. godine. Ova istraživanja je do sada obavljala, a i dalje obavlja u Vojno-Tehničkom Institutu u Beogradu i saraduje sa kompetentnim stručnjacima. U toku svog usavršavanja Slobodanka S. Boljanović je objavila niz naučnih radova iz oblasti proračuna (numeričkog modeliranja) preostale čvrstoće pri zamoru kod elemenata struktura. Oblasti koje su uključene u dosadašnjim naučnim istraživanjima Slobodanke S. Boljanović obuhataju naponsku analizu, modeliranje preostalog veka do pojave inicijalnog oštećenja, kao i numeričko simuliranje procesa širenja prsline kod elemenata struktura.