UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

mr Nataša A. Babačev

FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA NA PROSTORIMA SA NEDETERMINISTIČKIM RASTOJANJEM

doktorska disertacija

Beograd, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

mr Nataša A. Babačev

FIXED POINTS OF MAPPINGS ON SPACES WITH NONDETERMINISTIC DISTANCES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

Mentor:

dr Miodrag M. Mateljević, redovan profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miodrag M. Mateljević, redovan profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Miroljub J. Jevtić, redovan profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Siniša N. Ješić, docent,
Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane:

FIKSNE TAČKE PRESLIKAVANJA NA PROSTORIMA
SA NEDETERMINISTIČKIM RASTOJANJEM

Rezime:

Osnovu sadržaja teze čine uslovi postojanja nepokretnih tačaka preslikavanja definisanih na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem i sastoji se iz četiri dela.

U prvoj glavi izložen je pregled osnovnih pojmova i rezultata, na metričkim prostorima, koji su inicirali istraživanja izložena u ovoj tezi.

U drugoj glavi izložene su definicije i poređenja prostora na kojima će preslikavanja biti razmatrana, kao i osnovni stavovi koji karakterišu ove prostore i njihove podskupove. Razmatraju se pitanja: metričke i topološke strukture prostora; neprekidnosti nedeterminističkih metrika; ograničenosti (semi-ograničenosti) i stroge ograničenosti skupova u prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem; navode se primeri prostora sa nedeterminističkim rastojanjem i osobine metrika na tim prostorima. Posebno, pažnja je posvećena razjašnjavanju odnosa pojmova kompletnosti i G-kompletnosti i njihovom značaju za rezultate u teoriji nepokretne tačke.

U trećoj glavi razmatraju se pitanja uopštenja pojma komutativnosti pojmovima R-slabe komutativnosti, kompatibilnosti i slabe kompatibilnosti funkcija. U ovoj glavi izložena su tri rezultata, jedan autorski i dva koautorska. Prvi rezultat se odnosi na postojanje zajedničke nepokretne tačke dva preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima koja ispunjavaju nelinearan kontraktivan uslov. Drugi rezultat se odnosi na postojanje zajedničke nepokretne tačke dva neekspanzivna preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa konveksnom strukturom. Treći, autorski rezultat odnosi se na postojanje nepokretne tačke preslikavanja definisanog na verovatnosnim Mengerovim prostorima koje ispunjava nelinearan kvazi-kontraktivan uslov određen alternirajućom Φ-funkcijom.

U poslednjoj, četvrtoj glavi, prikazana su tri rezultata, jedan autorski i dva koautorska, o postojanju zajedničke nepokretne tačke preslikavanja definisanih na verovatnosnim Mengerovim prostorima. Prvi od njih odnosi se na postojanje zajedničke nepokretne tačke familije preslikavanja koja su R-slabo komutativna sa nekim fiksiranim preslikavanjem, pri nelinearnom kontraktivnom uslovu. Drugi rezultat odnosi se na postojanje zajedničke nepokretne tačke dva para preslikavanja,

pri čemu je jedan od njih kompatibilan, a drugi od njih slabo kompatibilan, pri nelinearnom kontraktivnom uslovu. Ovaj rezultat, u izvesnom smislu, uopštava se u trećem, autorskom rezultatu ove glave, zamenom nelinearnog kontraktivnog uslova sa nelinearnim kontraktivnim uslovom određenim alternirajućom Φ-funkcijom.

Ključne reči: Verovatnosni metrički prostori, Fazi metrički prostori, Intuicionistički metrički prostori, $\mathscr{L}$-fazi metrički prostori, Fiksne tačke preslikavanja, R-slabo komutativna preslikavanja, Kompatibilnost preslikavanja, Konveksna struktura, Neekspanzivna preslikavanja, Nelinearni kontraktivni uslov

Naučna oblast: Matematička analiza

Uža naučna oblast: Nelinearna funkcionalna analiza

UDK broj: 517.988:[515.126.4:515.123/.124] (043.3)

FIXED POINTS OF MAPPINGS ON SPACES WITH NONDETERMINISTIC DISTANCES

Abstract: Basic contents of the thesis are conditions of existence of fixed points of mappings defined on spaces with nondeterministic distances and it consists of four parts.

In the first chapter an overview of basic definitions and results on metric spaces that have initiated the research in this thesis is given.

The second chapter presents definitions and comparison of spaces on which the mappings will be considered, as well as basic propositions that characterize these spaces and their subsets. The following matters are considered: metrical and topological structures of spaces; continuity of nondeterministic metrics; boundness (semi-boundness) and strong boundness of sets in spaces with nondeterministic distances; examples of spaces with nondeterministic distances and properties of metrics on these spaces are given. Special attention is paid to clarification of the relation between concepts of completeness and G-completeness and their significance for results in fixed point theory.

The third chapter considers generalizations of commutativity with terms of R-weakly commutativity, compatibility and weak compatibility of mappings. This chapter presents three results, one produced independently and two in cooperation. The first result relates to existence of common fixed point of two mappings defined on $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces that satisfy nonlinear contractive condition. The second result relates to existence of common fixed point of two nonexpansive mappings defined on $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces with convex structure. The third, independently produced result relates to existence of fixed point of mapping defined on Probabilistic Menger spaces that satisfies nonlinear quasi-contractive condition determined by alternating Φ-function.

The last, fourth chapter considers three results, one produced independently and two in cooperation, on existence of common fixed points of mappings defined on Probabilistic Menger spaces. The first result relates to existence of common fixed point of family of mappings which are R-weakly commutative with a fixed mapping with nonlinear contractive condition. The second result relates to existence of common fixed point of two pairs of mappings, with one pair being compatible and the other weakly compatible, with nonlinear contractive condition. In a certain sense this result is generalized in the third, independently produced result by replacement of nonlinear contractive condition with nonlinear contractive condition determined by alternating Φ-function.

Key words: Probabilistic Metric Spaces, Fuzzy Metric Spaces, Inuitionistic Fyzzi Metric Spaces, $\mathscr{L}$-fuzzy Metric Spaces, Fixed points of mappings, R-weakly commuting mappings, Compatibility of mappings, Convex structure, Nonexpansive mappings, Nonlinear contractive condition

Scientific field: Matematical analysis

Scientific subfield: Nonlinear functional analysis

UDK number: 517.988:[515.126.4:515.123/.124] (043.3)

Sadržaj

Predgovor

Teorija fiksnih tačaka, skoro jedan vek, bavi se ispitivanjem egzistencije tačke x iz domena funkcije f koja ima osobinu da je $f(x) = x$ i pleni matematičare širom sveta. Primenljivost ove teorije u raznim granama nauke osnovni je razlog zbog koga je došlo do pojave velikog broja matematičara koji su istraživali i još uvek istražuju ovu problematiku. Osim primene u matematici, u rešavanju jednačina i sistema jednačina, kako algebarskih, tako i diferencijalnih, diferencnih, funkcionalnih, logičkih; rešavanju problema vezanih za konvergenciju; rešavanju problema iz teorije igara i minimaks teorije; u formiranju novih numeričkih metoda; teoriji aproksimacija i simulacija i mnogim drugim delovima matematike; značajna je primena u fizici, a posebno u novije vreme u oblasti kvantne fizike čestica koja je u vezi sa string i ε^{∞} fizikom. Primena u ekonomiji je veoma značajna, gde se problem svodi na određivanje koincidentne tačke funkcija "ponude" i "potražnje" čime se postiže formiranje kvalitetnijih testova koji pomažu u odlučivanju za pokretanje nekog ekonomskog ili privrednog procesa. U svetu sigurno ima nekoliko hiljada matematičara koji ispituju ovu teoriju, a kod nas takođe postoji jedan broj matematičara koji su se bavili ili se bave ovom problematikom i to su: Đ. Kurepa, J. Karamata, D. Adamović, M. Tasković, O. Hadžić, Lj. Ćirić, S. Ješić, I. Aranđelović, M. Stojaković, Lj. Gajić, V. Rakočević, M. Mateljević i to raznim delovima i aspektima ove teorije.

Ovaj rad sastoji se od četiri glave. U prvoj glavi se navode osnovni pojmovi i rezultati koji su motivisali dalja istraživanja koja čine rezultate ove teze. U drugoj glavi se navode osnovne definicije i karakterizacije prostora na kojima će biti razmatrana preslikavanja koja imaju osobinu nepokretne ili zajedničke nepokretne tačke. Navode se definicije prostora sa nedeterminističkim rastojenjem, čija je struktura određena raznim oblicima linearne i nelinearne parametarske metrike, koji pritom svojom aksiomatikom obuhvataju metričke prostore, koje je početkom 20. veka uveo francuski matematičar M. Freše ([17]), uvodeći pojam rastojanja na proizvoljnom skupu. Generalizaciju metričkih prostora predstavljaju Verovatnosni (Mengerovi) metrički prostori ([51]), Fazi metrički prostori ([46]) čija je definicija modifikovana u radu ([34]), a u novije vreme, tačnije 2004. i 2006. godine, i Intuicionistički fazi metrički prostori ([60]) i $\mathscr{L}$-fazi metrički prostori ([66]) čija aksiomatika opisuje prostore i procese u fizici. U ovoj glavi posvećuje se pažnja upoređivanju pojmova kompletnosti i G-kompletnosti. U pokušaju da se postrožavanjem uslova kompletnosti dobiju rezultati za šire klase funkcija, u teoriji fiksne tačke pojavio se pojam G-kompletnosti. U trećoj i četvrtoj glavi izloženi su autorski i koautorski rezultati autora, koji su dovedeni u vezu sa postojećim rezultatima. Razmatranjem veze postojećih rezultata sa rezultatima izloženim u ovoj tezi ukazuje se na proširenje i nadgradnju postojećih rezultata u Teoriji nepokretne tačke.

Posebnu zahvalnost dugujem docentu dr Siniši Ješiću koji je od početka naše saradnje nesebično delio svoje veliko matematičko znanje i iskustvo sa mnom. U saradnji sa dr Sinišom Ješićem nastali su i mnogi rezultati. Zahvaljujem se članovima komisije prof. dr M. Mateljeviću, dekanu Matematičkog fakulteta u Beogradu i prof. dr M. Jevtiću, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta u Beogradu na korisnim savetima i podršci na izradi ove teze.

Glava 1

Pregled pojmova i rezultata

Početkom 20. veka francuski matematičar M. Fréchet ([17]) uveo je pojam rastojanja na proizvoljnom skupu čiji elementi ne moraju biti tačke u prostoru, kao što je to do tada bio slučaj u Euklidskom prostoru. Elementi apstraktnog metričkog prostora mogu biti najrazličitiji objekti: tačke, skupovi, funkcije, operatori... Fréchet je opisao osobine funkcije rastojanja i na taj način zasnovao aksiomatiku metričkih prostora koji su obeležili matematiku 20. veka. Ovim se pojmovi neprekidnosti i konvergencije sa Euklidskih prostora prenose na proizvoljne skupove. Funkcija rastojanja na metričkim prostorima paru elemenata metričkog prostora dodeljuje jedinstveni nenegativan broj koji pri tom ispunjava određene uslove. Međutim, činjenica da paru elemenata metričkog prostora dodeljujemo jedinstven broj često ne odgovara realnosti, već presdstavlja idealizaciju. Na primer, često rezultat merenja rastojanja dve tačke u Euklidskom prostoru zapravo predstavlja srednju vrednost više uzastopnih merenja rastojanja. Ovakav način određivanja rastojanja dve tačke je statističke prirode. U tom smislu, prvo uopštenje metričkih prostora dao je austrijski matematičar Karl Menger. On je 1942. godine definisao verovatnosne metričke prostore, a 1951. daje novu definiciju tih prostora u kojoj je otklonio neke nedostatke prvobitne definicije. Osnovna ideja verovatnosnih metričkih prostora je da se rastojanje posmatra kao verovatnoća da je rastojanje između dve tačke ograničeno nekim brojem, izraženim parametrom t. Umesto fiksiranog broja koji za svake dve tačke metričkog prostora određuje njihovo rastojanje, kod verovatnosnih metričkih prostora dvema tačkama prostora se dodeljuje odgovarajuća funkcija raspodele. Ovim su prvi put definisani prostori sa nedeterminističkim rastojanjem. Topologiju na verovatnosnim metričkim prostorima uvode Schweizer i Sklar 1960. godine ([69]) i pokazuju da je takva topologija Hausdorffova za široku klasu verovatnosnih metričkih prostora. Egbert 1968. ([16]) uvodi pojam dijametra i ograničenosti skupa na verovatnosnim metričkim prostorima, a Sherwood se bavio pitanjima kompletnosti verovatnosnih metričkih prostora 1971. godine ([74]).

Generalizacija metričkih prostora verovatnosnim metričkim prostorima nije jedina moguća. Naime, funkcija rastojanja ne mora biti zadata funkcijom raspodele, već fazi skupom. Kod ovakvog uopštavanja rastojanja na fazi metričkim prostorima menja se i interpretacija pojma rastojanja. Naime, sada funkcija rastojanja predstavlja stepen sigurnosti sa kojom se tačke x i y nalaze na rastojanju manjem od t. Najčešće se stepen sigurnosti u kontekstu fazi metrike naziva stepen bliskosti. Fazi metričke prostore prvi put uvode I. Kramosil i J. Michalek 1975. godine u radu [46], čime oslobađaju aksiomatiku fazi metričkih prostora zahteva da funkcija rastojanja ima supremum 1, u odnosu na aksiomatiku verovatnosnih metričkih prostora. Izmenjenu definiciju fazi metričkih prostora uvode A. George i P. Veeramani 1994. godine u radu [34], kojom oslobađaju aksiomatiku fazi metričkih prostora i záhteva da je infimum funkcije rastojanja 0, u odnosu na aksomatiku verovatnosnih prostora. Danas se izučavaju fazi metrički prostori u smislu obe definicije.

Dalja uopštavanje fazi metričkih prostora predstavljaju intuicionistički fazi metrički prostori koje je 2004. godine Jin Han Park definisao u radu [60]. Park je uveo Hausdorffovu topologiju tih prostora i dokazao nekoliko klasičnih teorema nelinearne funkcionalne analize na ovoj novoj strukturi. Intuicionistički fazi metrički prostori pored toga što dvema tačkama prostora dodeljuju fazi metriku koja predstavlja stepen bliskosti tačaka, dodeljuju im i funkciju koja označava njihov stepen udaljenosti. Naime, ako se dve tačke nalaze na sferi njihovu udaljenost možemo meriti po dva različita luka, i u opštem slučaju te dužine nisu uslovljene, odnosno njihov zbir nije konstantan.

Koristeći pojam $\mathscr{L}$-fazi skupova ([36]), R. Saadati, A. Razani i H. Adibi 2007. godine dalje uopštavaju pojam fazi i intuicionističkih fazi metričkih prostora aksiomatikom $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora i dvema tačkama prostora dodeljuju $\mathscr{L}$-fazi metriku koja uzima vrednosti na kompletnoj mreži $(L, \leq_L)$. Kako su fazi i intuicionistički fazi metrički specijalan slučaj $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora, sva tvrđenja u ovom radu koja se odnose na ove prostore biće dokazana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

U pokušaju da se postrožavanjem kompletnosti dobiju rezultati za šire klase funkcija, u teoriji fiksne tačke, pojavio se pojam G-kompletnosti. Pojmovi kompletnosti i G-kompletnosti nisu ekvivalentni i time su se bavili G. Song [78] i R. Vasuki i P. Veeramani [83].

Važnu ulogu u rezultatima koji dokazuju postojanje fiksne tačke preslikavanja na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem ima pojam stroge ograničenosti, koji relaksira uslove koji su u ranijim radovima zahtevani za postojanje fiksne tačke preslikavanja definisanih na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem. Takođe, veliki broj rezultata iz teorije fiksne tačke na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem odnosi se na preslikavanja koja ispunjavaju linearan kontraktivan uslov i t-normu T koja ispunjava uslov $T(a, a) \geq a$ za svako $a \in [0, 1]$. Jedina t-norma koja ispunjava ovaj uslov je $T = \min$, te je ovaj uslov prilično ograničavajući u odnosu na klasu prostora za koju važe ovi rezultati. Mi ćemo se, u najvećem broju rezultata, baviti rezultatima koji se odnose na prostore sa nedeterminističkim rastojanjem koji obihvataju t-normu koja ispunjava najviše uslov neprekidnosti.

Od posebnog značaja pri utvrđivanju postojanja zajedničkih nepokretnih tačaka preslikavanja je komutativnost tih preslikavanja. U cilju razmatranja klasa preslikavanja koje su šire od klase komutativnih preslikavanja uvode se razne generalizacije pojma komutativnosti preslikavanja. Na metričkim prostorima S. Sessa [72] je 1982. godine uveo pojam slabo komutativnih preslikavanja, a G. Jungck [31, 32] se bavio kompatibilnim preslikavanjima. R.P. Pant [58] uvodi pojam R-slabo komutativnih preslikavanja definisanih na metričkim prostorima. Na verovatnosnim metričkim prostorima S.N. Mishra [53] uvodi pojam kompatibilnih preslikavanja, a B. Singh i S. Jain [76] uopštavaju ovaj pojam definišući slabo kompatibilna preslikavanja na verovatnosnim metričkim prostorima kao najopštiji. Naime, svaki par R-slabo komutativnih preslikavanja je kompatibilan, i svaki par kompatibilnih preslikavanja je slabo kompatibilan, dok obrnuto ne važi.

Većina rezultata dokazanih u ovom radu odnosi se na preslikavanja koja ispunjavaju nelinearni uslov φ-kontrakcije, inicirane radovima [7] i [62], na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem. Dokazaćemo teoremu o fiksnoj tački za par R-slabo komutativnih preslikavanja na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima uz uslov stroge ograničenosti i nelinearnog φ-kontraktivnog uslova. Posledica ovog rezultata biće teorema koju je autor objavio u koautorskom radu [26] na intuicionističkim fazi metričkim prostorima.

Pored uslova kontraktivnog tipa bavićemo se i uslovima neekspanzivnosti preslikavanja. Ispostavlja se da je pojam konveksnosti značajan za postojanje nepokretnih tačaka neekspanzivnih preslikavanja. U tom smislu, na kompaktnom (ili slabo kompaktnom) skupu sa konveksnom strukturom neekspanzivna preslikavanja imaju nepokretnu tačku. Razmatraćemo neekspanzivna preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima, preuzimajći definiciju neekspanzivnih preslikavanja na intuicionističkim fazi metričkim prostorima koju je razmatrao S. Ješić u radu [25]. Ova definicija obuhvata široku klasu preslikavanja. W. Takahashi je u radu [79] definisao konveksnu i normalnu strukturu na metričkim prostorima. O. Hadžić 1988. godine u radu [21] uvela je pojam konveksne strukture i dokazala teoremu o fiksnoj tački za neekspanzivna preslikavanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa konveksnom strukturom. 2009. godine S. Ješić u radu [25] je definisao konveksnu, striktno konveksnu i normalnu strukturu u intuicionističkim fazi metričkim prostorima i dokazao teoremu o postojanju fiksne tačke za široku klasu neekspanzivnih preslikavanja u striktno konveksnim intuicionističkim fazi metričkim prostorima. Motivisani navedenim radovima, uvodimo konveksnu, striktno konveksnu i normalnu strukturu u $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore i proširujemo rezultat S. Ješića dokazanog u radu [25] za dva preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa striktnom konveksnom strukturom.

Lj. Ćirić [11] je 1975. godine uveo linearan kvazi-kontraktivan uslov (ili generalizovani uslov) kontraktivnosti za preslikavanja definisana na verovatnosnim metričkim prostorima i dokazao je teoremu o fiksnoj tački pri uslovu $T(a,a) \geq a$ za svako $a \in [0,1]$, za t-normu T i preslikavanje koje ispunjava linearan kvazi-kontraktivan uslov. Značajan broj autora bavio se postojanjem fiksne tačke za preslikavanja koja ispunjavaju linearan kvazi-kontraktivni uslov na metričkim i verovatnosnim metričkim prostorima ([10], [33], [61]).

Khan i ostali u radu [43] uvode koncept funkcija alternirajućih rastojanja, koje menjaju rastojanje između dve tačke u metričkim prostorima. Nedavno su B.S. Choudhury i K. Das u [9] uveli pojam funkcija alternirajućih rastojanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima i dokazali su teoremu o postojanju fiksne tačke preslikavanja definisanog na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa t-normom minimum, koja ispunjavaju nelinearan kontraktivni uslov koji obuhvata ovakve funkcije. D. Miheţ je u radu [52] proširio rezultat iz rada [9] na verovatnosne Mengerove prostore sa neprekidnom t-normom i t-normom tipa Hadžić, pri uslovu ograničenosti domena posmatrane funkcije. Dokazaćemo teoremu o fiksnoj tački za preslikavanje koje ispunjava nelinearan uslov kvazi-kontraktivnog tipa koji obuhvata funkcije alternirajućih rastojanja za preslikavanja definisana na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa neprekidnom t-normom T koja ispunjava uslov $T(a,a) \geq a$ za svako $a \in [0,1]$. Ovaj rezultat ne pretpostavlja uslov ograničenosti.

Dokazaćemo teoremu o postojanju zajedničke fiksne tačke familije R-slabo komutativnih preslikavanja koja ispunjavaju nelinearan φ-kontraktivni uslov na verovatnosnim Mengerovim prostorima, za neprekidnu t-normu, pretpostavljajući uslov ograničenosti u strogom smislu. Ovaj rezultat je objavljen u koautorskom radu autora [28]. Takođe, pokazaćemo da su dva rezultata koja su dokazali O'Regan i Saadati u radu [57] posledica teoreme koja je glavni rezultat ovog dela rada.

H. Adibi i ostali su u radu [1] dokazali teoremu o zajedničkoj fiksnoj tački za dva para kompatibilnih preslikavanja na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa linearnim kontraktivnom uslovom. Rezultat objavljen u koautorskom radu [27] odnosi se na postojanje zajedničke fiksne tačke za par kompatibilnih i par slabo kompatibilnih preslikavanja na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa neprekidnom t-normom, koja ispunjavaju nelinearan φ-kontraktivan uslov uz uslov stroge ograničenosti. Ovde ćemo dokazati analogni rezultat za preslikavanja definisana na verovatnosnim Mengerovim prostorima uz potrebne modifikacije dokaza koje su uslovljene strukturom prostora. Takođe, dokazaćemo teoremu o postojanju zajedničke fiksne tačke za par kompatibilnih i par slabo kompatibilnih preslikavanja sa nelinearnim kontraktivnim uslovom koji obuhvata funkcije alternirajućih rastojanja za preslikavanja definisana na verovatnosnim Mengerovim prostorima t-normom min.

1.1 Osnovne definicije i rezultati

Osnovnu ideju ovog rada čini određivanje nelinearnih uslova pod kojima su funkcija ili familija funkcija kontraktivnog tipa. Drugim rečima, ukoliko koeficijent $k \in (0,1)$ iz BANACHove teoreme o fiksnoj tački i drugim linearnim kontraktivnim uslovima zameni nelinearnom funkcijom ili familijom nelinearnih funkcija, tada takav kontraktivni uslov nazivamo nelinearnim kontraktivnim uslovom. Osnovni rezultati na kojima se zasniva istraživanje prezentovano u ovom radu su rezultati prezentovani u radovima D. W. Boyda i J. S. W. Wonga ([7]) i E. Rakotcha ([62]). Takođe, navodimo rezultat G. Jungcka ([30]) koji je inicirao ispitivanje postojanja zajedničke fiksne tačke preslikavanja. Jedan od ezultata ovog rada za motivaciju ima rezultat Lj. Ćirića [10] u kojem se uvodi pojam kvazi-kontrakcije na metričkim prostorima. Svi pomenuti rezultati iskazani su na metričkim prostorima i biće navedeni bez dokaza pošto će oni biti posledice glavnih rezultata ovog rada koji ih proširuju. Smatrajući da su pojmovi neprekidnosti, ograničenosti, konvergencije, kompletnosti i ostali pojmovi koji karakterišu metričke prostore opšte poznati, nećemo ih navoditi.

Teorema 1.1.1. [62] *Neka je (X,δ) kompletan metrički prostor, $g : X \to X$ i $\alpha : [0,\infty) \to [0,1)$ monotono nerastuće preslikavanje. Ako za sve $x,y \in X$ važi da je*

$$\delta(g(x), g(y)) \leq \alpha(\delta(x,y))\delta(x,y)$$

tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Definicija 1.1.1. Za preslikavanje $\psi : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ kažemo da je *gornje semineprekidno u tački* $c \in A$ ako važi da je

$$\limsup_{t \to c^+} \psi(t) \leq \psi(c).$$

Ako je preslikavanje gornje semineprekidno u svim tačkama skupa A nazivamo ga *gornje semineprekidnim* na tom skupu.

Teorema 1.1.2. [7] *Neka je (X,δ) kompletan metrički prostor, $g : X \to X$ i $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gornje semineprekidno preslikavanje koje ispunjava uslov*

$\psi(t) < t$ za svako $t > 0$. Ako važi da je za sve $x, y \in X$ ispunjeno

$$\delta(g(x), g(y)) \leq \psi(\delta(x, y))$$

tada funkcija f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Teorema 1.1.3. [30] *Neka je (X, δ) kompletan metrički prostor i neka su $f, g : X \to X$ komutativna preslikavanja od kojih je f neprekidno i za koja važi da je $g(X) \subseteq f(X)$. Ako postoji konstanta $k \in (0, 1)$ takva da za sve $x, y \in X$ važi da je*

$$\delta(g(x), g(y)) \leq k\delta(f(x), f(y))$$

tada preslikavanja f i g imaju zajedničku fiksnu tačku.

Ovaj rezultat predstavlja uopštenje rezultata E. Rakotcha ([62]) i prenošenje tog rezultata na širu klasu prostora.

Teorema 1.1.4. [10] *Neka je T kvazi-kontrakcija na metričkom prostoru M, tj. ako za preslikavanje $T : M \to M$ postoji $q, 0 \leq q < 1$, tako da*

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

važi za svako $x, y \in M$. Neka je M T-orbitalno kompletan. Tada

(a) T *ima jedinstvenu fiksnu tačku* $u \in M$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} T^n x = u$ *i*

(c) $d(T^n x, u) \leq \dfrac{q^n}{1 - q} d(x, Tx)$ *za svako* $x \in M$.

Glava 2

Osnovne definicije i rezultati

2.1 Verovatnosni metrički prostori

Četrdesetih godina prošlog veka pojavila se potreba da se pojam rastojanja uopšti. Prvo ovakvo uopštenje metričkih prostora dao je Karl Menger [51] 1942. godine uvodeći pojam verovatnosnih metričkih prostora. Osnovna ideja verovatnosnih metričkih prostora je da se rastojanje posmatra kao verovatnoća da je rastojanje između dve tačke ograničeno nekim brojem, parametrom t. Umesto fiksiranog broja koji za svake dve tačke metričkog prostora određuje njihovo rastojanje, kod verovatnosnih metričkih prostora dvema tačkama prostora se dodeljuje odgovarajuća funkcija raspodele. Najpre ćemo definisati Verovatnosne metričke prostore.

Definicija 2.1.1. (a) Funkciju $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ nazivamo *funkcijom raspodele* ako ispunjava sledeće uslove:

(R-1) Iz $t_1 \leq t_2$ sledi da je $f(t_1) \leq f(t_2)$, za sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

(R-2) $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$,

(R-3) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$,

(R-4) $\lim\limits_{x \to t^-} f(x) = f(t)$.

Naziv funkcija raspodele potiče iz teorije verovatnoće pošto su osobine (R-1) – (R-4) karakteristične za funkciju raspodele slučajnih promenljivih. Familiju funkcija raspodele definisanih u ovoj definiciji označimo sa $\mathcal{S}$.

(b) *Verovatnosni metrički prostor* je par $(X, \mathcal{F})$, gde je X neprazan skup, a $\mathcal{F} : X \times X \to \mathcal{S}$ preslikavanje koje tački $(x, y) \in X \times X$ pridružuje funkciju respodele, u oznaci $F_{x,y}$ koja ima sledeće osobine:

(V-1) $F_{x,y}(t) = 1$, za sve $t > 0$ ako i samo ako je $x = y$,
(V-2) $F_{x,y}(0) = 0$,
(V-3) $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$,
(V-4) Iz $F_{x,y}(t_1) = 1$ i $F_{y,z}(t_2) = 1$ sledi da je $F_{x,z}(t_1 + t_2) = 1$, za sve $x, y, z \in X$ i sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Vrednost $F_{x,y}(t)$ može se interpretirati kao verovatnoća da je rastojanje tačaka x i y manja od vrednosti t. Ovakva interpretacija je u skladu sa neprekidnošću sleva funkcije raspodele. Zbog (V-2) i osobina (R-1), (R-2) i (R-4) sledi da je za svako $t \leq 0$ ispunjeno da je $F_{x,y}(t) = 0$. Jasno je da je uslov (V-1) ekvivalentan uslovu: $x = y$ ako i samo ako je $F_{x,y} = H$, gde je H HEAVISIDEova funkcija definisana sa

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad t \leq 0 \\ 1, & \text{za} \quad t > 0 \end{cases} .$$

Svaki metrički prostor (X, d) može se posmatrati kao jedan verovatnosni metrički prostor, ako za proizvoljne dve tačke x i y skupa X definišemo funkciju raspodele pomoću $F_{x,y}(t) = H(t - d(x, y))$.

Uslov (V-4) je minimalna generalizacija nejednakosti trougla koja važi u metričkim prostorima i može da se interpretira na sledeći način: Ako je izvesno da je rastojanje tačaka x i y manje od t_1 i, takođe, izvesno da je rastojanje tačaka y i z manje od t_2, tada je izvesno da je reatojanje tačaka x i z manje od $t_1 + t_2$. Ovaj uslov je uvek ispunjen u metričkim prostorima kada se posmatra njegova redukcija na standardnu trougaonu nejednakost. Ipak, u Verovatnosnim metričkim prostorima u kojima $F_{x,y}(t) = 1, x \neq y$, nije ispunjeno ni za jedno konačno t, uslov (V-4) je isprazan. Stoga nam je od interesa da uvedemo stroži uslov u smislu generalizacije trougaone nejednakosti.

Definicija 2.1.2. (a) Funkcija $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ koja ispunjava uslove:

(T-1) $T(a, 1) = a$ i $T(0, 0) = 0$,
(T-2) $T(a, b) = T(b, a)$,

(T-3) $T(c,d) \geq T(a,b)$ za sve $c \geq a$ i $d \geq b$,

(T-4) $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$,

za sve $a,b,c,d \in [0,1]$ naziva se *t-norma*.

(b) Trojka $(X,\mathcal{F},T)$, gde je $(X,\mathcal{F})$ verovatnosni prostor, a T t-norma koja ispunjava Mengerovu nejednakost:

$$F_{x,y}(t_1+t_2) \geq T(F_{x,z}(t_1), F_{z,y}(t_2)),$$

za sve $x,y,z \in X$ i sve t_1, $t_2 \geq 0$, naziva se *Verovatnosni Mengerov prostor*.

Primer 2.1.1. Neki od primera t-normi su $T(a,b) = \min\{a,b\}$ i $T(a,b) = ab$.

Definišemo t-normu $\mathscr{T}$ kao $(n+1)$-arnu operaciju, $n \in \mathbb{N}$, rekurzivno sa $T^1 = T$ i

$$T^n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = T\left(T^{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}), x_{n+1}\right),$$

za $n \geq 2$ i $x_1,\ldots,x_{n+1} \in [0,1]$.

Već smo uočili da je svaki metrički prostor jedan verovatnosni metrički prostor. Nije teško uočiti da je svaki metrički prostor i Mengerov prostor.

Primer 2.1.2. [71] Svaki metrički prostor je verovatnosni Mengerov prostor. Neka je (X,d) metrički prostor i $T(a,b) = \min\{a,b\}$ neprekidna t-norma. Definišimo funkciju raspodele $F_{x,y}(t) = H(t - d(x,y))$ za sve $x,y \in X$ i svako $t > 0$. Trojka $(X,\mathcal{F},T)$ je verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom d.

Definicija 2.1.3. Neka je $(X,\mathscr{F},T)$ verovatnosni Mengerov prostor.

(1) Za niz $\{x_n\}_n$ u X kažemo da konvergira ka tački $x \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je $F_{x_n,x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ za svako $n \geq N$. U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(2) Za niz $\{x_n\}_n$ u X kažemo da je CAUCHYev niz ako za svako $\varepsilon > 0$ i $\lambda > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je $F_{x_n,x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ za sve $n,m \geq N$.

(3) Verovatnosni Mengerov prostor nazivamo *kompletnim* ako svaki CAUCHYev niz konvergira ka nekoj tački tog prostora.

Topologiju (ε, λ) u verovatnosnim Mengerovim prostorima $(X, \mathcal{F}, T)$ uvode 1960. godine Schweizer i Sklar u radu [69] preko familije okolina $\mathcal{N}_x$ tačke $x \in X$ sa

$$\mathcal{N}_x = \{N_x(\varepsilon, \lambda) : \ \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)\},$$

gde je

$$N_x(\varepsilon, \lambda) = \{y \in X : \ F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

Ukoliko je za t-normu T ispunjeno $\sup_{a<1} T(a,a) = 1$, tada je topologija (ε, λ) metrizabilan topološki prostor ([70]).

Lema 2.1.1. [22] *Za t-normu T važi da je neprekidna ako i samo ako je neprekidna po prvoj koordinati, tj. ako je, za svako $y \in [0,1]$ funkcija jedne promenljive $T(\cdot, y) : [0,1] \to [0,1]$, neprekidna.*

Dokaz. Ukoliko je T neprekidna funkcije, onda je neprekidna po obe koordinate.

Obrnuto, neka je T neprekidna funkcija po prvoj koordinati. Neka su $\varepsilon > 0$ i $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$ proizvoljni. Tada postoje nizovi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $[0,1]$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Možemo da konstruišemo četiri monotona niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, takva da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \leq x_n \leq b_n$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \nearrow x_0$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \searrow x_0$, i $c_n \leq y_n \leq d_n$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \nearrow y_0$, $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \searrow y_0$.

Kako je T neprekidna po prvoj koordinati i simetrična, sledi da je i funkcija $T(x_0, \cdot)$ neprekidna. Iz prethodnog i činjenice da je T monotona funkcija sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi

$$T(x_0, y_0) - \varepsilon < T(x_0, c_{n_0}) \leq T(x_0, y_n) \leq T(x_0, d_{n_0}) < T(x_0, y_0) + \varepsilon$$

Kako su i funkcije $T(\cdot, c_{n_0})$ i $T(\cdot, d_{n_0})$ neprekidne, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m \geq m_0$ i svako $n \geq n_0$, imajući u vidu monotonost funkcije T, važi

$$T(x_0, c_{n_0}) - \varepsilon < T(a_{m_0}, c_{n_0}) \leq T(x_m, y_n) \leq T(b_{m_0}, d_{n_0}) < T(x_0, d_{n_0}) + \varepsilon.$$

Iz prethodnog, uzimajući da je $N = \max\{n_0, m_0\}$ imamo da za svako $n \geq N$ važi da je

$$T(x_0, y_0) - 2\varepsilon < T(x_n, y_n) < T(x_0, y_0) + 2\varepsilon,$$

odnosno funkcija T je neprekidna u tački (x_0, y_0). □

Analogno prethodnoj lemi dokazuje se da važi i naredna lema.

Lema 2.1.2. [22] *Za t-normu T važi da je neprekidna sleva (zdesna) ako i samo ako je neprekidna sleva (zdesna) po prvoj koordinati, tj. ako je, za svako $y \in [0,1]$ i svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $[0,1]$ važi da je*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, y) = T\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n, y\right) \qquad \left(\inf_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, y) = T\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n, y\right)\right).$$

Na osnovu Leme 2.1.2. zaključujemo da je t-norma za koju važi da je $\sup\limits_{a<1} T(a,a) = 1$ neprekidna sleva.

U terminologiji Hausdorffove topologije funkcija f je neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $x_n \to x_0$ važi da $f(x_n) \to f(x_0)$.

Proširujući rezultat Schweizera i Sklara [69] dokazećemo narednu lemu.

Lema 2.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor sa t-normom T koja je neprekidna sleva. Tada je funkcija $\mathcal{F}$ donje poluneprekidna za svako fiksirano $t > 0$, tj. za svako fiksirano $t > 0$ i svaka dva konvergentna niza $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ takva da je $x_n \to x, y_n \to y$ sledi da je*

$$\liminf_{n\to\infty} F_{x_n,y_n}(t) = F_{x,y}(t).$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Dokazaćemo da važi sledeća kvantifikatorska formula

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\; n \geq n_0 \Rightarrow F_{x_n,y_n}(t) > F_{x,y}(t) - \varepsilon;$$

odakle će slediti tvrđenje leme.

Neka je $t > 0$ fiksirano i $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Kako je $F_{x,y}(\cdot)$ neprekidna sleva u tački t, tada postoji ξ $(0 < 2\xi < t)$ tako da je

$$F_{x,y}(t) - F_{x,y}(t - 2\xi) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Označimo $F_{x,y}(t-2\xi) := a$. Kako je t-norma T neprekidna sleva i važi da je $T(a,1) = a$, iz Leme 2.1.2. sledi da postoji s $(0 < s < 1)$ tako da važi

$$T(a,s) > a - \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ i } \ T\left(a - \frac{\varepsilon}{3}, s\right) > a - \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Kako nizovi x_n i y_n konvergiraju ka x i y redom, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno

$$F_{x,x_n}(\xi) > s \quad \text{i} \quad F_{y,y_n}(\xi) > s.$$

Na osnovu Mengerove nejednakosti i činjenice da je funkcija raspodele neopadajuća, imamo da za svako $n \geq n_0$ važi

$$\begin{aligned} F_{x_n,y_n}(t) &\geq T(F_{x_n,y}(t-\xi), F_{y,y_n}(\xi)) \\ &\geq T^2\left(F_{x,y}(t-2\xi), F_{x,x_n}(\xi), F_{y,y_n}(\xi)\right) \\ &\geq T^2(a,s,s) \geq T\left(a - \frac{\varepsilon}{3}, s\right) > a - \frac{2\varepsilon}{3} \\ &> F_{x,y}(t) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Definicija 2.1.4. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor $A \subseteq X$. Zatvorenje skupa A je najmanji zatvoren skup koji sadrži A, u oznaci $\overline{A}$.

Zbog osobina HAUSDORFFove topologije i definicije konvergentnih nizova važi naredna napomena.

Napomena 2.1.1. $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $\{x_n\}$ u A tako da $x_n \to x$.

Koncept verovatnosne ograničenosti koji je uveo H. Sherwood u radu [74], ima važnu ulogu u teoriji fiksne tačke na verovatnosnim Mengerovim prostorima. Navodimo najpre definiciju verovatnosnog dijametra skupa.

Definicija 2.1.5. [16] Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor i $A \subseteq X$. *Verovatnosni dijametar skupa A* definišemo sa

$$\delta_A(t) = \inf_{x,y \in A} \sup_{\varepsilon < t} F_{x,y}(\varepsilon).$$

Dijametar skupa A definišemo sa

$$\delta_A = \sup_{t>0} \inf_{x,y\in A} \sup_{\varepsilon<t} F_{x,y}(\varepsilon).$$

Ako postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da je $\delta_A = 1-\lambda$, tada skup A nazivamo *verovatnosno semi-ograničenim.* Ako je $\delta_A = 1$, skup A nazivamo *verovatnosno ograničenim.*

Lema 2.1.4. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor. Skup $A \subseteq X$ je verovatnosno ograničen ako i samo ako za svako $\lambda \in (0,1)$ postoji $t > 0$ tako da je $F_{x,y}(t) > 1-\lambda$ za svako $x, y \in A$.*

Dokaz. Dokaz sledi iz definicija $\sup A$ i $\inf A$ nepraznih skupova. □

Svaki metrički ograničen skup je verovatnosno ograničen ako se razmatra u indukovanom verovatnosnom Mengerovom prostoru.

Primer 2.1.3. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom d na X iz Primera 2.1.2., tj. $F_{x,y}(t) = H(t - d(x,y))$ i $T(a,b) = \min\{a,b\}$. $A \subseteq X$ je metrički ograničen ako i samo ako je verovatnosno ograničen.

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ metrički ograničen, tj. $d(x,y) < k$ za neko $k \in \mathbb{R}_0^+$ i za svako $x, y \in A$. Neka je $r \in (0,1)$ proizvoljno. Tada za funkciju raspodele $F_{x,y}$ važi da je $F_{x,y}(t) = H(t-d(x,y)) > H(t-k)$ za svako $x, y \in A$. Imajući u vidu da je H HEAVISIDEova funkcija, sledi da će za $t > k$ biti ispunjeno $F_{x,y}(t) > 1-r$. To znači da je A verovatnosno ograničen. Obrnuto, ako je A verovatnosno ograničen skup tada za proizvoljno $r \in (0,1)$ postoji $t > 0$ tako da $F_{x,y}(t) = H(t-d(x,y)) > 1-r$ važi za svako $x, y \in A$. Iz ove nejednakosti sledi da je $d(x,y) < t$ za svako $x, y \in A$ tj. skup A je metrički ograničen. □

H. Sherwood je dokazao narednu teoremu.

Teorema 2.1.1. [74] *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom sleva t-normom T i $\{F_n\}$ niz umetnutih, nepraznih, zatvorenih podskupova u X tako da je $\delta_{F_n} \to H$ kad $n \to \infty$. Tada postoji tačno jedna tačka $x_0 \in F_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $\{x_n\}$ niz takav da je $x_n \in F_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka su $t > 0$ i $r \in (0,1)$ prozvoljno odabrani. Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takvo da je $\delta_{F_n}(t) > 1-r$, za svako $n \geq N$. Ako je $m \geq n \geq N$, tada važi da je $x_m \in F_m \subseteq F_n$ i $x_n \in F_n$. Stoga važi:

$$F_{x_n,x_m}(t) \geq \inf\{F_{x,y}(t) : \ x, y \in F_n\} = \delta_{F_n}(t) > 1 - r.$$

Kako su t i r proizvoljno odabrani, sledi da je $\{x_n\}$ CAUCHYev niz u kompletnom verovatnosnom Mengerovom prostoru, te postoji tačka $x_0 \in X$ takva da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Kako je $x_m \in F_n$ kad god je $m \geq n$ i F_n je zatvoren skup, sledi da $x_0 \in F_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da postoji još jedna tačka y_0 koja pripada F_n za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada za svako $t > 0$ važi

$$F_{x_0,y_0}(t) \geq \inf\{F_{x,y}(t) : \ x, y \in F_n\} \to H, \quad n \to \infty,$$

tj. $x_0 = y_0$. □

Iz prethodne teoreme sledi da važi tvrđenje naredne leme.

Lema 2.1.5. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom sleva t-normom T. Familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima* verovatnosni dijametar nula*, tj. za svako $r \in (0, 1)$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $F_{x,y}(t) > 1 - r$ za sve $x, y \in F_{n_0}$ ako i samo ako $\delta_{F_n} \to H$ kad $n \to \infty$.*

2.2 Fazi metrički prostori

Verovatnosni metrički prostori predstavljaju uopštavanje metričkih prostora u smislu da rastojanje tačaka prostora ne mora biti nenegativan broj, već se dvema tačkama prostora dodeljuje funkcija raspodele. Ovakva generalizacija metričkih prostora dozvoljava dalje uopštavanje. Naime, za funkciju rastojanja ne mora važiti da je $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1$.

Fazi metričke prostore prvi put uvode I. KRAMOSIL i J. MICHALEK 1975. godine u radu [46], uopštavajući verovatnosne metričke prostore u smislu da funkcija rastojanja ne mora biti zadata funkcijom raspodele.

Definicija 2.2.1. [69] Binarnu operaciju $* : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ nazivamo *neprekidnom t-normom* ako je $([0,1], *)$ topološki monoid sa jedinicom 1 tako da je $a*b \leq c*d$ za sve $a, b, c, d \in [0,1]$ za koje je $a \leq c$ i $b \leq d$.

Definicija 2.2.2. [84] Funkcija $A : X \to [0,1]$ naziva se fazi skup.

Definicija 2.2.3. [46] Trojku $(X, M, *)$ gde je X proizvoljan skup, $*$ neprekidna t-norma, a M fazi skup na $X^2 \times [0, \infty)$ koji ispunjavaju uslove:

(Fm-1k) $M(x, y, 0) = 0$;

(Fm-2k) $M(x, y, t) = 1$ za sve $t > 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(Fm-3k) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(Fm-4k) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ za sve $x, y, z \in X$ i $t, s > 0$;

(Fm-5k) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to [0,1]$ je neprekidna sa leve strane;

nazivamo *Fazi metričkim prostorom* u smislu Kramosila i Michaleka, a funkciju M nazivamo *fazi metrikom.*

Kod ovakvog uopštavanja rastojanja na fazi metričkim prostorima menja se i interpretacija pojma rastojanja. Naime, sada funkcija rastojanja predstavlja stepen sigurnosti sa kojom se tačke x i y nalaze na rastojanju manjem od t. Najčešće se stepen sigurnosti u kontekstu fazi metrike naziva *stepen bliskosti.* Neprekidnost s leve strane fazi metrike je upravo odabrana kako bi se potenciralo da je rastojanje tačaka x i y manje od t. Primetimo da Definicija 2.2.3. oslobađa aksiomatiku fazi metričkih prostora aksiome (R-3) u odnosu na aksiomatiku verovatnosnih Mengerovih prostora.

Za funkciju raspodele važi da je $F_{x,y}(0) = 0$, odnosno verovatnoća da su dve tačke na rastojanju manjem od 0 je 0. U intrepretaciji fazi metrike ovo ne mora da bude slučaj. U tom smislu, izmenu prethodne aksiomatike izvršili su A. George i P. Veeramani 1994. godine u radu [34], oslobađajući aksiomatiku aksiome (Fm-1k). U istom radu George i Veeramani definišu Hausdorffovu topologiju na fazi metričkim prostorima.

Definicija 2.2.4. [34] Trojku $(X, M, *)$ gde je X proizvoljan skup, $*$ neprekidna

t-norma, a M fazi skup na $X^2 \times [0, \infty)$ koji ispunjavaju uslove:

(Fm-1v) $M(x, y, t) > 0$;

(Fm-2v) $M(x, y, t) = 1$ za sve $t > 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(Fm-3v) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(Fm-4v) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ za sve $x, y, z \in X$ i $t, s > 0$;

(Fm-5v) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ je neprekidna;

nazivamo *Fazi metričkim prostorom* u smislu GEORGEa i VEERAMANIja, a funkciju M nazivamo *fazi metrikom.*

U smislu Definicije 2.2.4. interpretacija fazi metrike predstavlja stepen sigurnosti sa kojom se tačke x i y nalaze na rastojanju t. Neprekidnost fazi metrike je u tom smislu odabrana kako bi se potenciralo da je rastojanje tačaka x i y jednako t. Primetimo da Definicija 2.2.4. oslobađa aksiomatiku fazi metričkih prostora aksioma (R-2) i (R-3) u odnosu na aksiomatiku verovatnoskih Mengerovih prostora.

Danas se izučavaju fazi metrički prostori u smislu obe definicije.

Primer 2.2.1. [34] Svaki metrički prostor (X, d) je fazi metrički prostor u smislu obe definicije fazi metrike. Nije teško proveriti da funkcija

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$$

za $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ ispunjava sve uslove fazi metrike, pri čemu je t-norma definisana pomoću $a * b = ab$. Takav fazi metrički prostor nazivamo *fazi metrički prostor indukovan metrikom d.* Specijalno, u slučaju kada je $k = m = n = 1$ moguće je t-normu definisati pomoću $a * b = \min\{a, b\}$.

Primer 2.2.2. [34] Neka je $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$ i neka je $a * b = ab$. Tada je fazi metriku moguće definisati pomoću $M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$. Ovako definisana metrika ispunjava aksiome Definicije 2.2.4., ali ne i Definicije 2.2.3.

U radu [37] M. GRABIEC je dokazao sledeću lemu.

Lema 2.2.1. *Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor. Tada je $M(x, y, \cdot)$ neopadajuća funkcija za sve $x, y \in X$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje $t, s \in [0, 1]$ tako da je $t < s$ i da važi $M(x, y, t) > M(x, y, s)$. Tada, zbog (Fm-4k), odnosno (Fm-4v), i činjenice da je $M(y, y, s - t) = 1$ važi da je

$$M(x, y, t) > M(x, y, s) \geq M(x, y, t) * M(y, y, s - t) = M(x, y, t)$$

što je kontradikcija. Dakle, $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$. $\square$

Napomena 2.2.1. Nije teško uočiti da prethodna lema važi bez obzira o kojoj definiciji fazi metričkih prostora je reč, pošto se u dokazu koriste aksiome koje učestvuju u obe definicije.

Definicija 2.2.5. [34, 37] Za niz $\{x_n\}$ u fazi metričkom prostoru $(X, M, *)$ kažemo da konvergira ka tački $x \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$, odnosno ako je $\lim\limits_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$ za svako $t > 0$. U tom slučaju pišemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

U radu [34] George i Veeramani definišu Hausdorffovu topologiju na fazi metričkim prostorima. Takođe, ova topologija ispunjava prvu aksiomu prebrojivosti, tj. postoji prebrojiva baza okolina svake tačke fazi metričkog prostora.

Definicija 2.2.6. Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor. *Otvorenu kuglu* sa centrom u tački $x \in X$ poluprečnika $r \in (0, 1)$ u odnosu na parametar $t > 0$, u oznaci $B_M(x, r, t)$, definišemo sa

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X : \, M(x, y, t) > 1 - r\},$$

a *topologiju* definišemo okolinski sa

$$\tau_M = \{A \subset X;\, x \in A \text{ ako i samo ako postoje } t > 0 \text{ i } r \in (0, 1)$$

$$\text{tako da je } B(x, r, t) \subset A\}.$$

Ukoliko ne postoji mogućnost zabune, otvorenu kuglu $B_M(x, r, t)$ ćemo označavati sa $B(x, r, t)$.

Definicija 2.2.7. Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor. Funkcija $f : X \to X$ neprekidna je u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $x_n \to x_0$ kada $n \to \infty$ važi da $f(x_n) \to f(x_0)$ kada $n \to \infty$.

Nameće se pitanje neprekidnosti fazi metrike po prve dve koordinate. Neprekidnost zavisi od toga koju od navedenih definicija fazi metričkog prostora razmatramo. Prvenstveno zavisi od toga da li je fazi metrika neprekidna ili samo neprekidna sa leve strane funkcija po trećoj koordinati. Odgovor na ovo pitanje daju naredne tri leme.

Lema 2.2.2. *Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor, u smislu Definicije* 2.2.3. *ili Definicije* 2.2.4. *i neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada za svako $t > 0$ važi da je*

$$M(x, y, t-) \leq \liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \leq \limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \leq M(x, y, t+).$$

Dokaz. Za proizvoljno, dovoljno malo $\varepsilon > 0$ iz (Fm-4k) (ili (Fm-4v)) sledi da važe sledeće nejednakosti:

$$M(x_n, y_n, t) \geq M\left(x_n, x, \frac{\varepsilon}{2}\right) * M(x, y, t-\varepsilon) * M\left(y, y_n, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$M(x, y, t+\varepsilon) \geq M\left(x, x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right) * M(x_n, y_n, t) * M\left(y_n, y, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Uzimajući u prvoj od prethodnih nejednakosti $\liminf$ a u drugoj $\limsup$ kada $n \to \infty$ dobijamo da je

$$M(x, y, t-\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \leq \limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \leq M(x, y, t+\varepsilon).$$

Puštajući da $\varepsilon \to 0$ sledi tvrđenje leme. □

Lema 2.2.3. *Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor, u smislu Definicije* 2.2.4. *i neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada za svako fiksirano $t > 0$ važi da je*

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) = M(x, y, t),$$

odnosno funkcija $M(x, y, t)$ je neprekidna za svako fiksirano $t > 0$.

Dokaz. Tvrđenje leme sledi iz prethodne leme i činjenice da je funkcija $M(x, y, \cdot)$ neprekidna po trećoj koordinati ako se posmatra fazi metrički prostor u smislu Definicije 2.2.4. □

Lema 2.2.4. *Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor, u smislu Definicije* 2.2.3. *i neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada za proizvoljno fiksirano $t > 0$ važi da je*

$$\liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) = M(x, y, t),$$

odnosno funkcija $M(x,y,t)$ je donje semi-neprekidna funkcija za svako fiksirano $t>0$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Dokazaćemo da važi sledeća kvantifikatorska formula

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow M(x_n, y_n, t) > M(x,y,t) - \varepsilon;$$

odakle će slediti tvrđenje leme.

Neka je $t > 0$ fiksirano i $\varepsilon > 0$ dovoljno mali proizvoljan broj. Kako je $M(x,y,\cdot)$ neprekidna sa leve strane u tački t, tada postoji ξ $(0 < 2\xi < t)$ tako da je

$$M(x,y,t) - M(x,y,t-2\xi) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Označimo $M(x,y,t-2\xi) := a$. Kako je t-norma $*$ neprekidna funkcija i važi da je $a * 1 = a$ tada postoji s $(0 < s < 1)$ tako da važi

$$a * s > a - \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad \left(a - \frac{\varepsilon}{3}\right) * s > a - \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Kako nizovi x_n i y_n konvergiraju ka x i y redom tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno

$$M(x, x_n, \xi) > s \quad \text{i} \quad M(y, y_n, \xi) > s.$$

Na osnovu trougaone nejednakosti i činjenice da je fazi metrika neopadajuća funkcija imamo da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno

$$\begin{aligned} M(x_n, y_n, t) &\geq M(x_n, y, t-\xi) * M(y, y_n, \xi) \\ &\geq (M(x,y,t-2\xi) * M(x, x_n, \xi)) * M(y, y_n, \xi) \\ &\geq (a * s) * s \geq (a - \frac{\varepsilon}{3}) * s \geq a - \frac{2\varepsilon}{3} \\ &> M(x,y,t) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Postoje dva koncepta kompletnosti na fazi metričkim i intuicionističkim fazi i $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima, koje ćemo definisati u narednim poglavljima. U narednom delu teksta ćemo definisati ove koncepte kompletnosti i ukazati na njihove međusobne razlike na strukturi fazi metričkih prostora.

Definicija 2.2.8. [37] Za niz $\{x_n\}$ u fazi metričkom prostoru $(X, M, *)$ kažemo da je G-CAUCHY*ev* ako je $\lim\limits_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$, za svako $t > 0$ i svako $p \in \mathbb{N}$. Fazi metrički prostor nazivamo *G-kompletnim* ako svaki G-CAUCHYev niz tog prostora konvergira ka nekoj tački tog prostora.

Definicija 2.2.9. [34] Za niz $\{x_n\}$ u fazi metričkom prostoru $(X, M, *)$ kažemo da je CAUCHY*ev* ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ za sve $n, m \geq n_0$. Fazi metrički prostor nazivamo *kompletnim* ako svaki CAUCHYev niz tog prostora konvergira ka nekoj tački tog prostora.

Prethodne dve definicije su ekvivalentne u slučaju kada je skup X nad kojim definišemo fazi metriku najviše prebrojiv ili kada granična vrednost iz Defnicije 2.2.8. postoji uniformno po $p \in \mathbb{N}$, ([78, 83]). U suprotnom ove dve definicije nisu ekvivalentne. Naime, pošto je svaki CAUCHYev niz i G-CAUCHYev, ukoliko je prostor G-kompletan sledi da je i kompletan. Dakle, da bi prostor bio G-kompletan zahteva se da šira klasa nizova bude konvergentna. Da obrnuto ne važi pokazuje sledeći primer.

Primer 2.2.3. Neka je $M(x, y, t)$ fazi metrika indukovana standardnom metrikom $\delta(x, y) = |x - y|$ na skupu svih realnih brojeva $\mathbb{R}$, tj.

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}$ i svako $t > 0$ i neka je t-norma $a * b = \min\{a, b\}$. Lako se pokazuje da je prostor $(\mathbb{R}, M, *)$ kompletan. Sa druge strane uočimo niz $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, za koji znamo da nije konvergentan. Važi da je za svako fiksirano $p \in \mathbb{N}$ ispunjeno da

$$M(x_n, x_{n+p}, t) = \frac{t}{t + |x_{n+p} - x_n|} = \frac{t}{t + \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i}} \longrightarrow 1,$$

za svako $t > 0$ kada $n \to \infty$. Zaključujemo da je ovaj niz G-CAUCHYev, odakle sledi da $\mathbb{R}$ nije G-kompletan, pošto posmatrani niz ne konvergira.

M. GRABIEC je u radu [37] dodao sledeći uslov aksiomatici fazi metričkih prostora.

$$\lim_{t \to \infty} M(x, y, t) = 1 \quad \text{za sve} \quad x, y \in X. \tag{2.1}$$

Rezultati relevantni za teoriju fiksne tačke preslikavanja definisanih na fazi metričkim prostorima uključuju prethodni uslov u aksiomatiku fazi metričkih prostora

([8, 37, 73, 77]). Uvođenje ovakve aksiome je sasvim opravdano, s obzirom na tumačenje vrednosti $M(x, y, t)$. Zaista, kako $M(x, y, t)$ predstavlja stepen bliskosti tačaka x i y, tačke x i y će se nalaziti na rastojanju manjem od t, za dovoljno veliko rastojanje t.

2.3 $\mathscr{L}$-fazi i intuicionistički fazi metrički prostori

Jin Han Park je 2004. godine definisao intuicionističke fazi metričke prostore u radu [60]. Park je uveo Hausdorffovu topologiju tih prostora i dokazao nekoliko klasičnih teorema nelinearne funkcionalne analize na ovoj novoj strukturi. Takođe, Park definiše pojam ograničenog skupa, mada u formi slabe ograničenosti, definiše fazi dijametar opadajuće familije skupova i daje skupovnu karakterizaciju kompletnosti intuicionističkih fazi metričkih prostora.

Intuicionistički fazi metrički prostori predstavljaju uopštenje fazi metričkih prostora u smislu Definicije 2.2.4. Osim što se dvema tačkama x i y iz skupa X u odnosu na $t > 0$ dodeljuje fazi metrika $M(x, y, t)$ koja određuje njihov stepen bliskosti, dodeljuje im se i *stepen udaljenosti* u odnosu na t, zadat funkcijom $N(x, y, t)$. Pri tom, u teoriji fazi metričkih prostora podrazumeva se da stepen udaljenosti $N(x, y, t)$ uvek ima vrednost $1 - M(x, y, t)$. Intuicionistički fazi metrički prostori dopuštaju da stepen udaljenosti ne odgovara stepenu bliskosti x i y.

B. Schweizer i A. Sklar su u radu [69], pored t-norme definisali i t-konormu na $[0, 1]$.

Definicija 2.3.1. [69] Binarna operacija $\diamondsuit : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ je *neprekidna t-konorma* ako $\diamondsuit$ ispunjava sledeće uslove:

(a1) $\diamondsuit$ je komutativna i asocijativna;

(b1) $\diamondsuit$ je neprekidna;

(c1) $a \diamondsuit 0 = a$ za svako $a \in [0, 1]$;

(d1) $a \diamondsuit b \leq c \diamondsuit d$ za $a \leq c$ i $b \leq d$, i $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Primeri t-konormi su $a \diamondsuit b = \max\{a, b\}$ i $a \diamondsuit b = \min\{1, a + b\}$.

Koristeći rezultate Atanassova ([4]), Jin Han Park ([60]) je dao definiciju intuicionističkih fazi metričkih prostora kojom nadgrađuje strukturu fazi metričkih prostora, u smislu Definicije 2.2.4.

Definicija 2.3.2. [60] Petorka $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ se naziva *Intuicionistički fazi metrički prostor* ako je X proizvoljan skup, $*$ neprekidna t-norma, $\diamondsuit$ neprekidna t-konorma i M, N fazi skupovi na $X^2 \times (0, \infty)$ koji, za sve $x, y, z \in X$, $s, t > 0$, ispunjavaju sledeće uslove

(IFm-1) $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$;
(IFm-2) $M(x, y, t) > 0$;
(IFm-3) $M(x, y, t) = 1$ ako i samo ako je $x = y$;
(IFm-4) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
(IFm-5) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;
(IFm-6) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to (0, 1]$ je neprekidna;
(IFm-7) $N(x, y, t) > 0$;
(IFm-8) $N(x, y, t) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;
(IFm-9) $N(x, y, t) = N(y, x, t)$;
(IFm-10) $N(x, y, t) \diamondsuit N(y, z, s) \geq N(x, z, t + s)$;
(IFm-11) $N(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to (0, 1]$ je neprekidna.

Par (M, N) nazivamo *intuicionističkom fazi metrikom* na skupu X. Funkcije $M(x, y, t)$ i $N(x, y, t)$ označavaju stepen bliskosti i stepen udaljenosti tačaka x i y u odnosu na t, respektivno.

R. Saadati, S. Sedghi i N. Shobe 2006. godine u radu [67] dali su modifikovanu definiciju intuicionističkih fazi metričkih prostora kojom su objedinili zapis funkcija $M(x, y, t)$ i $N(x, y, t)$, koristeći neprekidni t-reprezent i notaciju $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora. $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore definisali su 2006. godine R. Saadati, A. Razani i H. Adibi u [66].

Definicija 2.3.3. [66] Neka je $\mathscr{L} = (L, \leq_L)$ kompletna mreža i U neprazan skup koji ćemo zvati *univerzumom.* $\mathscr{L}$-fazi skup $\mathscr{A}$ na U je preslikavanje $\mathscr{A} : U \to L$. Za svako $u \in U$ vrednost $\mathscr{A}(u)$ pretstavlja stepen (u L) do kog u ispunjava $\mathscr{A}$.

Definišemo $0_{\mathscr{L}} = \inf L$ i $1_{\mathscr{L}} = \sup L$.

Definicija t-norme može se direktno uopštiti na mrežu $(L, \leq_L)$.

Definicija 2.3.4. [66] *Trougaona norma* $\mathscr{T}$ na $\mathscr{L}$ je preslikavanje $\mathscr{T} : (L)^2 \to L$ koje ispunjava sledeće uslove za svako $a, b, c, a_1, b_1 \in L$:

(i) $\mathscr{T}(a, 1_{\mathscr{L}}) = a$,

(ii) $\mathscr{T}(a, b) = \mathscr{T}(b, a)$,

(iii) $\mathscr{T}(a, \mathscr{T}(b, c)) = \mathscr{T}(\mathscr{T}(a, b), c)$,

(iv) $a \leq_L a_1$ i $b \leq_L b_1 \Rightarrow \mathscr{T}(a, b) \leq_L \mathscr{T}(a_1, b_1)$.

Definišemo trougaonu normu $\mathscr{T}$ kao $(n+1)$-arnu operaciju, $n \in \mathbb{N}$, rekurzivno sa $\mathscr{T}^1 = \mathscr{T}$ i

$$\mathscr{T}^n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mathscr{T}\left(\mathscr{T}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_{n+1}\right),$$

za $n \geq 2$ i $x_1, \ldots, x_{n+1} \in L$.

Definicija 2.3.5. [66] Trojku $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ gde je X proizvoljan (neprazan) skup, $\mathscr{T}$ neprekidna trougaona norma na $\mathscr{L}$ i $\mathscr{M}$ je $\mathscr{L}$-fazi skup na $X^2 \times (0, \infty)$ koji, za sve $x, y, z \in X$ i $t, s \in (0, \infty)$, ispunjvaju sledeće uslove :

($\mathscr{L}$F-1) $\mathscr{M}(x, y, t) >_L 0_{\mathscr{L}}$;

($\mathscr{L}$F-2) $\mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ za svako $t > 0$ ako i samo ako $x = y$;

($\mathscr{L}$F-3) $\mathscr{M}(x, y, t) = \mathscr{M}(y, x, t)$;

($\mathscr{L}$F-4) $\mathscr{T}(\mathscr{M}(x, y, t), \mathscr{M}(y, z, s)) \leq_L \mathscr{M}(x, z, t + s)$;

($\mathscr{L}$F-5) $\mathscr{M}(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to L$ je neprekidna,

nazivamo $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorom, a funkciju $\mathscr{M}$ nazivamo $\mathscr{L}$-fazi metrikom.

Definicija 2.3.6. [66] *Negacija* na $\mathscr{L}$ je svaka opadajuća funkcija $\mathscr{N} : L \to L$ koja ispunjava uslove $\mathscr{N}(0_{\mathscr{L}}) = 1_{\mathscr{L}}$ i $\mathscr{N}(1_{\mathscr{L}}) = 0_{\mathscr{L}}$. Ako je $\mathscr{N}(\mathscr{N}(x)) = x$, za sve $x \in L$, tada $\mathscr{N}$ nazivamo *involutivnom negacijom.* Negacija N_s na $([0, 1], \leq)$ definisana sa $N_s(x) = 1 - x$ za svako $x \in [0, 1]$, naziva se standardnom negacijom na $([0, 1], \leq)$.

Definicija 2.3.7. [66] Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor. Za proizvoljno

$t > 0$ definišemo *otvorenu kuglu* $B(x, r, t)$ sa centrom u $x \in X$ poluprečnika $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ sa

$$B(x, r, t) = \{y \in X : \mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)\}.$$

Podskup $A \subseteq X$ nazivamo *otvorenim* ukoliko za svako $x \in A$ postoji $t > 0$ i $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ tako da je $B(x, r, t) \subseteq A$. Tada je familija $\tau_{\mathscr{M}}$ svih otvorenih podskupova od X *topologija indukovana $\mathscr{L}$-fazi metrikom $\mathscr{M}$*.

Nije teško uočiti da primeri koji ilustruju fazi metričke prostore ilustruju i $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore. Takođe, analogne leme koje odgovaraju lemama 2.2.1. i 2.2.3. važe i na ovim prostorima, pri čemu definicije konvergencije, Cauchyevih nizova i kompletnosti dobijamo zamenom u odgovarajućim definicijama funkcije M sa $\mathscr{M}$ i izraza $1 - \varepsilon$ sa negacijom $\mathscr{N}(\varepsilon)$.

Definicija 2.3.8. [66] Kažemo da niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira* ka $x \in X$ u $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ ako $\mathscr{M}(x_n, x, t) \to 1_{\mathscr{L}}$ kad god $n \to \infty$ za svako $t > 0$.

Za niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ kažemo da je Cauchy-*ev niz* ako za svako $\varepsilon \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m \geq n \geq n_0$ ($n \geq m \geq n_0$) važi da je

$$\mathscr{M}(x_m, x_n, t) >_L \mathscr{N}(\varepsilon).$$

$\mathscr{L}$-fazi metrički prostor se naziva *kompletnim* ako svaki Cauchyev niz u njemu konvergira.

Jasno je da definicija konvergencije i Cauchyevih nizova zavisi od izbora negacije $\mathscr{N}$. Stoga je potrebno naglasiti da pretpostavljamo da je prostor $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ kompletan u odnosu na negaciju $\mathscr{N}$.

Dalje u radu ćemo razmatrati $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore koji ispunjavaju uslov

$$\mathscr{M}(x, y, 0) = 0_{\mathscr{L}} \quad \text{za } x \neq y. \tag{2.2}$$

Lema 2.3.1. *U $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru X, $\mathscr{M}(x, y, \cdot)$ je neopadajuća funkcija* *za svako* $x, y \in X$ *u* $(L, \leq_L)$.

Lema 2.3.2. *Ako je* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-fazi metrički prostor i neka je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(x_n, y_n, t) = \mathscr{M}(x, y, t).$$

Dokaz. Imamo da je

$$\mathscr{M}(x, y, t+\varepsilon) \geq_L \mathscr{T}^2(\mathscr{M}(x, x_n, \frac{\varepsilon}{2}), \mathscr{M}(x_n, y_n, t), \mathscr{M}(y, y_n, \frac{\varepsilon}{2}))$$

$$\mathscr{M}(x_n, y_n, t) \geq_L \mathscr{T}^2(\mathscr{M}(x, x_n, \frac{\varepsilon}{2}), \mathscr{M}(x, y, t-\varepsilon), \mathscr{M}(y, y_n, \frac{\varepsilon}{2}))$$

Uzimajući limes kad $n \to \infty$ dobijamo

$$\mathscr{M}(x, y, t-\varepsilon) \leq_L \lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(x_n, y_n, t) \leq_L \mathscr{M}(x, y, t+\varepsilon).$$

Pošto je $\mathscr{M}(x, y, \cdot)$ neprekidna po trećoj koordinati, sledi tvrđenje. $\square$

Topologija $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora je HAUSDORFFova. U ovoj topologiji funkcija f je neprekidna u $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $x_n \to x_0$ važi $f(x_n) \to f(x_0)$.

Definicija 2.3.9. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i $A \subseteq X$. *Zatvorenje skupa* A je najmanji zatvoreni skup koji sadrži A, u oznaci $\overline{A}$.

Definicija 2.3.10. [26] Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor. Kažemo da kolekcija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima *$\mathscr{L}$-fazi dijametar nula* ako za svako $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$ za svako $x, y \in F_{n_0}$.

Teorema 2.3.1. *Ako je* $\mathscr{L}$*-fazi metrički prostor* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ *kompletan u odnosu na negaciju* $\mathscr{N}$ *tada svaki opadajući niz* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nepraznih zatvorenih skupova sa* $\mathscr{L}$*-fazi dijametrom nula ima neprazan presek. Pri tom element* $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *je jedinstven.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ kompletan u odnosu na negaciju $\mathscr{N}$ i $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kolekcija opadajćih nepraznih zatvorenih skupova sa $\mathscr{L}$-fazi dijametrom nula. Neka je $x_n \in F_n$ proizvoljno za svako $n \in \mathbb{N}$. Pokazaćemo da je niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev. Neka su

$r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i $t > 0$ proizvoljni. Kako $\{F_n\}$ ima $\mathscr{L}$-fazi dijametar nula, sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$ za svako $x, y \in X$. Pošto su F_n opadajući skupovi, sledi da je $\mathscr{M}(x_n, x_m, t) >_L \mathscr{N}(r)$ za svako $n, m \geq n_0$. Dakle, niz $\{x_n\}$ je CAUCHYjev. Iz kompletnosti prostora sledi da $x_n \to x$ za neko $x \in X$. Stoga je $x \in F_n$ za svako n, pa i $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Pokažimo da je element $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ jedinstven. Pretpostavimo da postoji još jedan element $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Kako $\{F_n\}$ ima $\mathscr{L}$-fazi dijametar nula, to za proizvoljno $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i $t > 0$ važi $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$. Kada $r \to 0_{\mathscr{L}}$ imamo da $\mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$, tj. $x = y$. □

Lema 2.3.3. [14] *Neka su skup L^* i operacija $\leq_{L^*}$ definisani sa*

$$L^* = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \ \text{ i } \ x_1 + x_2 \leq 1\}$$

i $(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2)$ ako i samo ako je $x_1 \leq y_1$ i $x_2 \geq y_2$ za svako $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^*$. Tada je $(L^*, \leq_{L^*})$ kompletna mreža.

Definicija 2.3.11. [4] Intuicionistički fazi skup $\mathscr{A}_{\zeta,\eta}$ na univerzumu U je objekat $\mathscr{A}_{\zeta,\eta} = \{(\zeta_{\mathscr{A}}(u), \eta_{\mathscr{A}}(u)) : u \in U\}$, gde, za svako $u \in U$, $\zeta_{\mathscr{A}}(u)$, $\eta_{\mathscr{A}}(u) \in [0,1]$ nazivamo stepen pripadnosti i stepen ne-pripadnosti, respektivno, u intuicionističkom fazi metričkom skupu $\mathscr{A}_{\zeta,\eta}$, i ispunjavaju $\zeta_{\mathscr{A}}(u) + \eta_{\mathscr{A}}(u) \leq 1$.

G. Deschrijver i ostali su u [14, 15] definisali t-reprezent na kompletnoj mreži L^*.

Definicija 2.3.12. [14, 15] Trougaonu normu $\mathscr{T}$ na L^* nazivamo *t-reprezentom* ako postoje t-norma $*$ i t-konorma $\diamondsuit$ na $[0,1]$ takve da je

$$\mathscr{T}(x, y) = (x_1 * y_1, x_2 \diamondsuit y_2)$$

za svako $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in L^*$.

Definicija 2.3.13. [66] Neka su $M, N : X^2 \times (0,\infty) \to [0,1]$ fazi skupovi takvi da je $M(x,y,t) + N(x,y,t) \leq 1$ za svako $x, y \in X$ i svako $t > 0$. Trojka $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ gde je X proizvoljan (neprazan) skup, $\mathscr{T}$ neprekidan t-reprezent i $\mathscr{M}_{M,N} : X^2 \times (0,\infty) \to L^*$ intuicionistički fazi skup koji, za sve $x, y, z \in X$ i $t, s \in (0,\infty)$, ispunjvaju sledeće uslove :

($\mathscr{I}$F-1) $\mathscr{M}_{M,N}(x, y, t) >_{L^*} 0_{L^*}$;

($\mathscr{I}$F-2) $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = 1_{L^*}$ za svako $t > 0$ ako i samo ako $x = y$;

($\mathscr{I}$F-3) $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = \mathscr{M}_{M,N}(y,x,t)$;

($\mathscr{I}$F-4) $\mathscr{T}(\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t), \mathscr{M}_{M,N}(y,z,s)) \leq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x,z,t+s)$;

($\mathscr{I}$F-5) $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to L^*$ je neprekidna,

nazivamo intuicionističkim fazi metričkim prostorom, a funkciju $\mathscr{M}_{M,N}$ nazivamo intuicionističkom fazi metrikom.

Intuicionistički fazi metrički prostori predstavljaju specijalan slučaj $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora kada je $\mathscr{L} = (L^*, \leq_{L^*})$ na $X^2 \times (0,\infty)$ i trougaona norma $\mathscr{T}$ t-reprezent. Pri tome je $\mathscr{M}_{M,N} = (M(x,y,t), N(x,y,t)), 0_{L^*} = (0,1)$ i $1_{L^*} = (1,0)$, a negacija $\mathscr{N}(r) = (N_s(r), r)$. Topologiju na intuicionističkim fazi metričkom prostorima uvodimo pomoću otvorenih kugli $B_{M,N}(x,r,t)$ sa centrom u $x \in X$ poluprečnika $r \in (0,1)$ za proizvoljno $t > 0$ definisanih sa

$$B_{M,N}(x,r,t) = \{y \in X : \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) >_{L^*} (N_s(r), r)\}.$$

Podskup $A \subseteq X$ nazivamo *otvorenim* ukoliko za svako $x \in A$ postoji $t > 0$ i $r \in (0,1)\}$ tako da je $B_{M,N}(x,r,t) \subseteq A$. Tada je familija $\tau_{M,N}$ svih otvorenih podskupova od X *topologija indukovana intuicionističkom fazi metrikom* $\mathscr{M}$. Ukoliko ne postoji mogućnost zabune, otvorenu kuglu $B_{M,N}(x,r,t)$ ćemo označavati sa $B(x,r,t)$.

Dalje u radu ćemo koristiti modifikovanu definiciju intuicionističkih fazi metričkih prostora.

V. Gregori, S. Romaguera i P. Veereamani su u [39] pokazali da je topologija intuicionističkih fazi metričkih prostora $\tau_{M,N}$ ekvivalentna topologiji fazi metričkih prostora τ_M.

Stav 2.3.1. [39] Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ intuicionistički fazi metrički prostor. Tada je za svako $x \in X$, za svako $r \in (0,1)$ i za sve $t > 0$ važi da je $B_M(x,r,t) = B_{M,N}(x,r,t)$.

Dokaz. Iz definicija otvorenih kugli trivijalno sledi da je $B_{M,N}(x,r,t) \subseteq B_M(x,r,t)$.

Obrnuto, pretpostavimo da $y \in B_M(x,r,t)$. Tada je $M(x,y,t) > 1-r$, pa iz uslova Definicije 2.3.13. da je $M(x,y,t) + N(x,y,t) \leq 1$ za svako $x, y \in X$ i svako

$t > 0$ sledi da važi

$$1 \geq M(x, y, t) + N(x, y, t) > 1 - r + N(x, y, t),$$

tj. važi da je $N(x, y, t) < r$, i stoga je $y \in B_{M,N}(x, r, t)$. $\square$

Dakle, fazi metrički i intuicionistički fazi metrički prostori imaju ista topološka svojstva.

C. Alaca i ostali su u radu [2] definisali intuicionističke fazi metričke prostore u smislu promene dela aksioma. Ta promena odgovara definiciji fazi metričkih prostora koje su postavili I. Kramosil i J. Michalek ([46]). U ovoj definicji su aksiome ($\mathscr{I}$F-1) i ($\mathscr{I}$F-5) zamenjene redom aksiomama:

($\mathscr{I}$F-1a) $\mathscr{M}_{M,N}(x, y, 0) = 0_{L^*}$;
($\mathscr{I}$F-5a) $\mathscr{M}_{M,N}(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to L^*$ je neprekidna sleva.

Uz to, C. Alaca, D. Turkoglu i C. Yildiz u radu [2] dodali su sledeći uslov aksiomatici intuicionističkih fazi metričkih prostora:

($\mathscr{I}$F-6a) $\lim_{t\to\infty} \mathscr{M}_{M,N}(x, y, t) = 1_{L^*}$ za svako $x, y \in X$.

Takođe, Alaca i ostali razmatraju slabiju definiciju kompletnosti i Cauchyevih nizova. Njihov rezultat obuhvata sledeću definiciju:

Definicija 2.3.14. [2] Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ kompletan intuicionistički fazi metrički prostor. Tada niz $\{x_n\} \in X$ nazivamo Cauchyevim nizom ako za svako $t > 0$ i $p > 0$ ($p \in \mathbb{N}$),

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}_{M,N}(x_{n+p}, x_n, t) = 1.$$

Ovu definiciju nazivaćemo *definicjom intuicionističkih fazi metričkih prostora u smislu Alace i ostalih.*

Primer 2.3.1. Svaki fazi metrički prostor $(X, M, *)$ je i intuicionistički fazi metrički prostor oblika $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ gde je $\mathscr{T}$ neprekidan t-reprezent sa pridruženom t-normom $*$ i t-konormom $\diamondsuit$, tj. $x \diamondsuit y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$ za svako $x, y \in X$.

Primer 2.3.2. [60] Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $a * b = \min\{a, b\}$ i

$a \diamondsuit b = \max\{a, b\}$ za svako $a, b \in [0, 1]$. Neka je

$$\mathscr{M}_{M,N}(x, y, t) = \left(\frac{t}{t + d(x, y)}, \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)} \right)$$

za svako $x, y \in X$ i $t > 0$. Tada je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ *intuicionistički fazi metrički prostor indukovan metrikom d*. Očigledno je $N(x, y, t) = 1 - M(x, y, t)$.

Dalje u radu ćemo razmatrati intuicionističke fazi metričke prostore koji ispunjavaju uslov

$$\mathscr{M}_{M,N}(x, y, 0) = 0_{L^*} \quad \text{za } x \neq y. \tag{2.3}$$

Primetimo da intuicionistički fazi metrički prostor iz Primera 2.2.2. ispunjava uslov (2.3).

Definicija 2.3.15. [60] Za niz $\{x_n\}$ u intuicionističkom fazi metričkom prostoru $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ kažemo da *konvergira* ka tački $x \in X$ ako $\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}_{M,N}(x_n, x, t) = 1_{L^*}$ za svako $t > 0$.

Definicija 2.3.16. [60] Niz $\{x_n\}$ u intuicionističkom fazi metričkom prostoru $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ se naziva CAUCHY*evim* ako za svako $\varepsilon \in (0, 1)$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $\mathscr{M}_{M,N}(x_n, x_m, t) >_{L^*} (N_s(\varepsilon), \varepsilon)$. $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ se naziva *kompletnim* ako je svaki CAUCHYev niz konvergentan.

U intuicionističkim fazi metričkim prostorima važe analogoni Leme 2.3.1., Leme 2.1.3. i Definicije 2.3.10., kada je $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{M,N}$ intuicionistička fazi metrika.

Razmatraćemo trougaonu normu $\mathscr{T}$ koja ispunjava sledeći uslov:

Za svako $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ možemo naći $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ tako da važi da je

$$\mathscr{T}^{n-1}(\mathscr{N}(\lambda), \ldots \mathscr{N}(\lambda)) >_L \mathscr{N}(\mu), \tag{2.4}$$

za $n \geq 2$, gde je $\mathscr{N}$ involutivna negacija na $\mathscr{L}$.

Uslov (2.4) neće biti obavezno ispunjen za proizvoljnu mrežu $\mathscr{L}$. Navodimo primere t-normi i mreža za koje je uslov (2.4) ispunjen.

Primer 2.3.3. [66] Za neprekidnu t-normu T i za svaku involutivnu negaciju N na

$([0,1], \leq)$ ovaj uslov će biti ispunjen.

Primer 2.3.4. [66] Uslov (2.4) je ispunjen za svaki neprekidni t-reprezent $\mathscr{T}$ i involutivnu negaciju $\mathscr{N}$ na $(L^*, \leq_{L^*})$.

Dokaz. Kako je $\mathscr{T}$ t-reprezent, to postoje t-norma $*$ i t-konorma $\diamondsuit$ tako da je $\mathscr{T}(x,y) = (x_1 * y_1, x_2 \diamondsuit y_2)$ za svako $x, y \in L^*$. Iz neprekidnosti t-reprezenta $\mathscr{T}$ sledi da su $*$ i $\diamondsuit$ neprekidne. Neka je $\mu \in (0,1)$ proizvoljno. Tada je $x = (x_1, x_2) = \mathscr{N}(\mu)$ takođe element iz $L^* \setminus \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$, pa je $x_1 < 1$. Kako su $*$ i $\diamondsuit$ neprekidne, sledi da postoji $y_1 \in (0,1)$ tako da je $y_1 * y_1 > x_1$. Čak i u slučaju da je $x_2 = 0$ imamo da važi $0 \diamondsuit 0 \leq x_2$. Neka je $y = (y_1, 0)$, tada važi

$$\mathscr{T}(y,y) = (y_1 * y_1, 0 \diamondsuit 0) >_{L^*} x.$$

Za $\lambda = \mathscr{N}(y)$, iz involutivnosti negacije $\mathscr{N}$, sledi uslov (2.4) za $n = 2$. □

Napomena 2.3.1. Iz prethodnog primera sledi da svaki intuicionistički fazi metrički prostor ispunjava uslov (2.4).

Naredna teorema i definicija koje je iskazao i dokazao Jin Han Park u [60] imaju važnu ulogu u dokazu glavnih rezultata iskazanih na intuicionističkim fazi metričkim prostorima.

Definicija 2.3.17. [60] Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ intuicionistički fazi metrički prostor. Kažemo da kolekcija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima *intuicionistički fazi dijametar nula* ako za svako $r \in (0,1)$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) >_{L^*} (N_s(r), r)$ za svako $x, y \in F_{n_0}$.

Teorema 2.3.2. [60] *Intuicionistički fazi metrički prostor $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ je kompletan ako i samo ako svaki opadajući niz $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih zatvorenih skupova sa intuicionističkim fazi dijametrom nula ima neprazan presek. Pri tom element $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ je jedinstven.*

Dokaz. Najpre pretpostavimo da je ispunjen dati uslov. Pokazaćemo da je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ je kompletan. Neka je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz u X. Neka je $B_n = \{x_k : x \geq n\}$ i $F_n = \overline{B_n}$, tada $\{F_n\}$ ima intuicionistički fazi dijametar nula. Zaista, za proizvoljno $s \in (0,1)$ i $t > 0$, iz Napomene 2.3.1. sledi da postoji $r \in (0,1)$ tako da je $\mathscr{T}^2((N_s(r),r),(N_s(r),r),(N_s(r),r)) \geq_{L^*} (N_s(s),s)$. Kako je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathscr{M}_{M,N}(x_n, x_m, \frac{t}{3}) >_{L^*} (N_s(r),r)$ za svako $m,n \geq n_0$. Stoga je $\mathscr{M}_{M,N}(x_n, x_m, \frac{t}{3}) >_{L^*} (N_s(r),r)$ za svako $x,y \in B_{n_0}$.

Neka je $x,y \in F_{n_0}$. Tada postoje nizovi $\{x'_n\}$ i $\{y'_n\}$ u B_{n_0} tako da $x'_n \to x$ i $y'_n \to y$ kad $n \to \infty$. Sledi da $x'_n \in B(x,r,\frac{t}{3})$ i $y'_n \in B(y,r,\frac{t}{3})$ za dovoljno veliko n. Sada imamo da važi

$$\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) \geq_{L^*} \mathscr{T}^2\left(\mathscr{M}_{M,N}(x,x'_n,\frac{t}{3}), \mathscr{M}_{M,N}(x'_n,y'_n,\frac{t}{3}), \mathscr{M}_{M,N}(y'_n,y,\frac{t}{3})\right)$$

$$\geq_{L^*} \mathscr{T}^2((N_s(r),r),(N_s(r),r),(N_s(r),r)) \geq_{L^*} (N_s(s),s),$$

t.j. $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) >_{L^*} (N_s(s),s))$ za svako $x,y \in F_{n_0}$. Dakle, $\{F_n\}$ ima intuicionistički fazi dijametar nula pa prema uslovu teoreme sledi da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan.

Neka je $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Tada za svako $r \in (0,1)$ i $t > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathscr{M}_{M,N}(x_n,x,t) >_{L^*} (N_s(r),r))$ za svako $n \geq n_1$, pa $\mathscr{M}_{M,N}(x_n,x,t) \to 1_{\mathscr{L}}$ za svako $t > 0$ kad $n \to \infty$ odakle sledi da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Prema tome $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ je kompletan.

U obrnutom smeru dokaz je analogan dokazu Teoreme 2.3.1., kao i dokaz jedinstvenosti elementa $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. $\square$

Definiciju IF-ograničenih skupova (u formi slabe ograničenosti) na Intuicionističkim fazi metričkim prostorima uveo je Jin-Han Park [60].

Definicija 2.3.18. [60] Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ intuicionistički fazi metrički prostor. Podskup A u X se naziva *IF-ograničenim* skupom ako postoje $t > 0$ i $r \in (0,1)$ tako da $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) > (N_s(r),r)$ za svako $x,y \in A$.

Ovde navodimo definiciju $\mathscr{L}$F-ograničenih skupova na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

Definicija 2.3.19. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor. Podskup A od X se naziva $\mathscr{L}$F-ograničeni skup ako postoji $t > 0$ i $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ tako da je $\mathscr{M}(x,y,t) >_L \mathscr{N}(r)$ za svako $x,y \in A$.

Nije teško uočiti da je podskup $\mathscr{L}$F-ograničenog skupa A takođe $\mathscr{L}$F-ograničen.

U radu [26] autor uvodi pojam $\mathscr{L}$F-strogo ograničenih skupova.

Definicija 2.3.20. [26] Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i $A \subseteq X$. $\mathscr{L}$-fazi dijametar skupa A je definisan sa

$$\delta_A = \sup_{t>0} \inf_{x,y \in A} \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x, y, \varepsilon).$$

Ako je $\delta_A = 1_{\mathscr{L}}$ tada kažemo da je skup A $\mathscr{L}$F-strogo ograničen.

Lema 2.3.4. [26] *Skup $A \subseteq X$ je $\mathscr{L}$F-strogo ograničen ako i samo ako za proizvoljnu negaciju $\mathscr{N}(\lambda)$ koja ispunjava uslov* (2.4) *i svako $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ postoji $t > 0$ tako da $\mathscr{M}(x, y, t) > \mathscr{N}(\lambda)$ za svako $x, y \in A$.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ $\mathscr{L}$F-strogo ograničen skup. Tvrđenje sledi trivijalno za proizvoljnu negaciju $\mathscr{N}(\lambda) \in [0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}]$, iz definicije inf i sup skupa.

Obrnuto, neka za negaciju $\mathscr{N}(\lambda)$ i za svako $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ postoji $t > 0$ tako da je $\mathscr{M}(x, y, t) > \mathscr{N}(\lambda)$ za svako $x, y \in A$. Kako je $\mathscr{N}(\lambda)$ negacija koja ispunjava uslov (2.4), tada za svako $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ postoji $\mu = \mathscr{N}(\lambda)$ tako da $\mathscr{N}(\mu) = \lambda$. To znači da je $\sup_{\mu \in L} \mathscr{N}(\mu) = \sup_{\lambda \in L} \lambda = 1_{\mathscr{L}}$ odakle sledi tvrđenje u ovom smeru. $\square$

Iz poslednje leme jasno se vidi da je podskup B $\mathscr{L}$F-strogo ograničenog skupa A takođe $\mathscr{L}$F-strogo ograničen.

Primer 2.3.5. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ *$\mathscr{L}$-fazi metrički prostor indukovan metrikom d na X,* tj. $\mathscr{M}(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, $\mathscr{T}(a, b) = \min\{a, b\}$ sa standardnom negacijom $\mathscr{N}(r) = 1 - r$. $A \subseteq X$ je metrički ograničen ako i samo ako je $\mathscr{L}$F-strogo ograničen.

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ metrički ograničen, tj. $d(x, y) < k$ za neko $k \in \mathbb{R}$ i za svako $x, y \in A$. Neka je $r \in (0, 1)$ proizvoljno. Tada za $\mathscr{L}$-fazi metriku $\mathscr{M}$ važi da je $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \frac{t}{t+k}$ za svako $x, y \in A$. Iz $\frac{t}{t+k} > 1 - r$ sledi da možemo odabrati t tako da bude ispunjeno $t > \frac{k(1-r)}{r}$. Za takvo t važiće $\mathscr{M}(x, y, t) > 1 - r$. To znači da je A $\mathscr{L}$F-strogo ograničen. Obrnuto, ako je A $\mathscr{L}$F-strogo ograničen skup tada za proizvoljno $r \in (0, 1)$ postoji $t > 0$ tako da $\mathscr{M}(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)} > 1 - r$ važi za svako $x, y \in A$. Iz ove nejednakosti sledi da je $d(x, y) < \frac{rt}{1-r}$ za svako $x, y \in A$ tj.

skup A je metrički ograničen. $\square$

Koncept ograničenih skupova u verovatnosnim metričkim prostorima je vrlo blizak konceptu ograničenosti u intuicionističkim i $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima. U verovatnosnim metričkim prostorima ograničeni skupovi su definisani u skladu sa uslovom za $\mathscr{L}$F-strogu ograničenost u smislu Definicije 2.3.20. Ograničenost u smislu Definicije 2.3.19. u verovatnosnim metričkim prostorima se naziva semi-ograničenost.

Ograničenost skupova u smislu stroge ograničenosti igra veoma važnu ulogu u dokazu većine teorema koje će biti iskazane i dokazane u nastavku rada, od strane autora, kako na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima, tako i na verovatnosnim Mengerovim prostorima.

Kako su Intuicionistički fazi metrički prostori specijalan slučaj $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora, dalje u radu ćemo davati iskaze i dokaze teorema o postojanju fiksne tačke za preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima. Direktna posledica ovih teorema biće iskazi odgovarajućih teorema o postojanju fiksne tačke za preslikavanja definisana na intuicionističkim fazi metričkim prostorima.

Glava 3

Fiksne tačke preslikavanja

3.1 Fiksne tačke preslikavanja definisanih na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima

U narednom delu teksta biće dokazan jedan od rezultata autora, koji se odnosi na zajedničku fiksnu tačku dva R-slabo komutativna preslikavanja definisanih na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima. Koncept R-slabo komutativnih preslikavanja u metričkim prostorima je definisao R. P. Pant u radu ([58]). Teoreme o zajedničkoj fiksnoj tački za R-slabo komutativna preslikavanja na prostorima sa nedeterminističkim rastojanjem su iskazane i dokazane u radovima [13], [26], [82].

Definišemo pojam R-slabo komutativnih preslikavanja definisanih na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

Definicija 3.1.1. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i neka su f i g preslikavanja na skupu $A \subseteq X$. Preslikavanja f i g nazivamo R-slabo komutativnim ako postoji pozitivan realan broj R takav da je

$$\mathscr{M}(f(g(x)), g(f(x)), Rt) \geq_L \mathscr{M}(f(x), g(x), t) \tag{3.1}$$

za svako $t > 0$ i svako $x \in A$.

Primetimo da je svaki par komutativnih preslikavanja i R-slabo komutativan, dok obrnuto ne važi. Sledeći primer to ilustruje.

Primer 3.1.1. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor indukovan metrikom d na X iz Primera 2.3.5.

a) Preslikavanja $f(x) = x^2$ i $g(x) = nx - (n-1)$ za $n > 2$ nisu komutativna, ali su R-slabo komutativna na skupu $[0, n-1]$. Zaista, važi da je $|f(g(x)) - g(f(x))| = n(n-1)(x-1)^2$, $|f(x) - g(x)| = |x^2 - nx + (n-1)|$. Kako je $(x-1)^2 \leq |x^2 - nx + (n-1)|$ za svako $x \in [0, n-1]$, uzimajući da je $R = n(n-1)$, dobijamo da je $\mathscr{M}(f(g(x)), g(f(x)), n(n-1)t) \geq_L \mathscr{M}(f(x), g(x), t)$.

b) Preslikavanja $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x - 1$ su R-slabo komutativna za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $|f(g(x)) - g(f(x))| = 2(x-1)^2$, $|f(x) - g(x)| = (x-1)^2$, uzimajući $R = 2$ sledi tvrđenje.

Pomenimo da preslikavanja iz a) i b) imaju jedinstvenu fiksnu tačku $x = 1$.

Naredne dve leme imaju važnu ulogu u dokazima teorema koje predstavljaju glavne rezultate ovog rada.

Lema 3.1.1. *Neka je $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$. Tada, za svako $t > 0$ važi da je $\lim_{n \to \infty} \varphi^n(t) = 0$, gde $\varphi^n(t)$ označava n-tu iteraciju od φ.*

Dokaz. Za proizvoljno $t > 0$, pošto je $\varphi(t) < t$ i φ je neopadajuća funkcija, indukcijom sledi $\varphi^n(t) < \varphi^{n-1}(t)$ i $\varphi^n(t) < t$ za svako $n \in \mathbb{N}$. To znači da je niz $\{\varphi^n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotono nerastući. Pošto je ograničen, sledi da postoji $c \geq 0$ tako da je $\lim_{n \to \infty} \varphi^n(t) = c$. Tvrdimo da je $c = 0$. Pretpostavimo da je $c > 0$. Iz neprekidnosti φ imamo

$$c = \lim_{n \to \infty} \varphi^{n+1}(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\varphi^n(t)) = \varphi(c) < c,$$

što je kontradikcija. □

Lema 3.1.2. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor koji ispunjava uslov (2.2). Neka je $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava*

$\varphi(t) < t$ *za svako* $t > 0$. *Tada važi tvrđenje:*

Ako za $x, y \in X$ *važi* $\mathscr{M}(x, y, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t)$ *za svako* $t > 0$ *tada je* $x = y$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}(x, y, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t)$ i $x \neq y$. Iz ovog uslova, indukcijom sledi da je $\mathscr{M}(x, y, \varphi^n(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t)$. Uzimajući limes kad $n \to \infty$, dobijamo $\mathscr{M}(x, y, t) = 0_L$ za svako $t > 0$, što je kontradikcija sa ($\mathscr{L}$F-2) tj. $x = y$. □

Navodimo iskaz prethodne leme u terminologiji intuicionističkih fazi metričkih prostora.

Lema 3.1.3. *Neka je* $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ *intuicionistički fazi metrički prostor koji ispunjava uslov* (2.3). *Neka je* $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava* $\varphi(t) < t$ *za svako* $t > 0$. *Tada važi tvrđenje:*

Ako za $x, y \in X$ *važi* $\mathscr{M}_{M,N}(x, y, \varphi(t)) \geq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x, y, t)$ *za svako* $t > 0$ *tada je* $x = y$.

Naredni rezultat autor je objavio u koautorskom radu [26].

Teorema 3.1.1. [26] *Neka je* $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ *kompletan intuicionistički fazi metrički prostor koji ispunjava uslov* (2.3) *i neka su* f *i* g *R-slabo komutativna preslikavanja iz* X *u* X, g *neprekidna funkcija,* $g(X)$ *IF-strogo ograničen skup i* $g(X) \subseteq f(X)$, *tako da važe uslovi*

$$\mathscr{M}_{M,N}(g(x), g(y), \varphi(t)) \geq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(f(x), f(y), t) \tag{3.2}$$

za neku neprekidnu, neopadajuću funkciju $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *koja ispunjava* $\varphi(t) < t$ *za svako* $t > 0$. *Tada* f *i* g *imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Ovde dajemo iskaz i dokaz prethodne teoreme na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima, uz određene modifikacije koje su uslovljene strukturom prostora. Kako su intuicionistički fazi metrički prostori specijalan slučaj $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora, tvrđenje prethodne teoreme biće direktna posledica.

Teorema 3.1.2. *Neka je* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-fazi metrički prostor, koji je kompletan u odnosu na negaciju* $\mathscr{N}$ *koja ispunjava uslov* (2.4), *i ispunjava uslov* (2.2) *i neka su* f *i* g *R-slabo komutativna preslikavanja iz* X *u* X, g *neprekidna funkcija,* $g(X)$

$\mathscr{L}F$-strogo ograničen skup i $g(X) \subseteq f(X)$, tako da važi uslov

$$\mathscr{M}(g(x), g(y), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(f(x), f(y), t) \tag{3.3}$$

za neku neprekidnu, neopadajuću funkciju $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, koja ispunjava $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$. Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Kako je $g(X) \subseteq f(X)$, to postoji $x_1 \in X$ tako da $g(x_0) = f(x_1)$. Indukcijom, možemo odabrati niz $\{x_n\}$ tako da je $g(x_n) = f(x_{n+1})$.

Razmotrimo opadajući niz nepraznih zatvorenih skupova definisanih sa

$$F_n = \overline{\{gx_n, gx_{n+1}, \ldots\}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dokazaćemo da familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima $\mathscr{L}$-fazi dijametar nula.

U tom smislu, neka su $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i $t > 0$ proizvoljni. Iz $F_k \subseteq \overline{g(X)}$ sledi da je F_k $\mathscr{L}$F-strogo ograničen skup za svako $k \in \mathbb{N}$, odakle sledi da postoji $t_0 > 0$ tako da je

$$\mathscr{M}(x, y, t_0) >_L \mathscr{N}(r) \quad \text{za sve} \quad x, y \in F_k. \tag{3.4}$$

Takođe, uočimo da iz $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(t_0) = 0$ sledi da postoji $m \in \mathbb{N}$ za koje važi $\varphi^m(t_0) < t$. Neka su $n = m+k$ i $x, y \in F_n$ proizvoljni. Postoje nizovi $\{gx_{n(i)}\}$, $\{gx_{n(j)}\}$ u F_n takvi da je $\lim\limits_{i\to\infty} gx_{n(i)} = x$ i $\lim\limits_{j\to\infty} gx_{n(j)} = y$.
Iz uslova (3.1) sledi da je

$$\mathscr{M}(gx_{n(i)}, gx_{n(j)}, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(fx_{n(i)}, fx_{n(j)}, t) = \mathscr{M}(gx_{n(i)-1}, gx_{n(j)-1}, t).$$

Indukcijom zaključujemo da važi naredna nejednakost:

$$\mathscr{M}(gx_{n(i)}, gx_{n(j)}, \varphi^m(t)) \geq_L \mathscr{M}(gx_{n(i)-m}, gx_{n(j)-m}, t).$$

Kako je $\varphi^m(t_0) < t$ i $\mathscr{M}(x, y, \cdot)$ je neopadajuća funkcija, iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(gx_{n(i)}, gx_{n(j)}, t) &\geq_L \mathscr{M}(gx_{n(i)}, gx_{n(j)}, \varphi^m(t_0)) \\ &\geq_L \mathscr{M}(gx_{n(i)-m}, gx_{n(j)-m}, t_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kako su $\{gx_{n(i)-m}\}$, $\{gx_{n(j)-m}\}$ nizovi u F_k, iz (3.4) sledi da je

$$\mathscr{M}(gx_{n(i)-m}, gx_{n(j)-m}, t_0) >_L \mathscr{N}(r) \tag{3.6}$$

za svako $i, j \in \mathbb{N}$.

Konačno, iz (3.5) i (3.6) zaključujemo da je

$$\mathscr{M}(gx_{n(i)}, gx_{n(j)}, t) >_L \mathscr{N}(r).$$

Uzimajući granične vrednosti kada $i, j \to \infty$ i primenjujući Lemu 2.3.2., zaključujemo da je $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$ za sve $x, y \in F_n$, odnosno da familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima $\mathscr{L}$-fazi dijametar nula.

Primenjujući Teoremu 2.3.1. zaključujemo da ova familija ima neprazan presek, koji se sastoji iz tačno jedne tačke z. Kako familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima $\mathscr{L}$-fazi dijametar nula i $z \in F_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ tada za svako $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi

$$\mathscr{M}(gx_n, z, t) >_L \mathscr{N}(r).$$

Iz poslednjeg sledi da za svako $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(gx_n, z, t) >_L \mathscr{N}(r).$$

Uzimajući limes kad $r \to 0_{\mathscr{L}}$ dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(gx_n, z, t) = 1_{\mathscr{L}},$$

odakle zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} gx_n = z$. Iz definicije niza $\{fx_n\}$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} fx_n = z$.

Pokažimo da je z zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g. Iz uslova (3.1) imamo da važi

$$\mathscr{M}(f(g(x_n)), g(f(x_n)), Rt) \geq_L \mathscr{M}(f(x_n), g(x_n), t)$$

za svako $t > 0$. Puštajući da $n \to \infty$ dobijamo da

$$\mathscr{M}(\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)), g(z), Rt) \geq_L \mathscr{M}(z, z, t) = 1_{\mathscr{L}},$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = g(z).$$

Iz nejednakosti

$$\mathscr{M}(g(x_n), g(g(x_n)), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(f(x_n), f(g(x_n)), t),$$

puštajući da $n \to \infty$, dobijamo da

$$\mathscr{M}(z, g(z), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(z, g(z), t)$$

važi za svako $t > 0$. Primenjujući Lemu 3.1.2., dobijamo da je $g(z) = z$.

Kako je $g(X) \subseteq f(X)$, postoji $z_1 \in X$ tako da $f(z_1) = g(z) = z$. Iz uslova (3.3) sledi da važi

$$\mathscr{M}(g(g(x_n)), g(z_1), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(f(g(x_n)), f(z_1), t).$$

Puštajući da $n \to \infty$, dobijamo

$$\mathscr{M}(z, g(z_1), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(z, z, t) = 1_{\mathscr{L}}$$

za svako t odakle sledi da je $g(z_1) = z$.

Za proizvoljno $t > 0$ postoji $t_1 > 0$ tako da je $t = Rt_1$. Iz $f(z_1) = z$, $g(z_1) = z$ dobijamo

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(g(z), f(z), t) &= \mathscr{M}(g(z), f(z), Rt_1) = \mathscr{M}(g(f(z_1)), f(g(z_1)), Rt_1)\\ &\geq_L \mathscr{M}(f(z_1), g(z_1), t_1) = \mathscr{M}(z, z, t_1) = 1_{\mathscr{L}}\end{aligned}$$

odakle sledi da je $f(z) = g(z) = z$.

Dokažimo da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka. U tu svrhu pretpostavimo da postoji još jedna zajednička fiksna tačka, označimo je sa u. Iz uslova (3.3) sledi da je

$$\mathscr{M}(g(z), g(u), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(f(z), f(u), t)$$

za svako $t > 0$. Stoga dobijamo da je

$$\mathscr{M}(z, u, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(z, u, t)$$

za svako $t > 0$. Konačno, primenjujući Lemu 3.1.2. sledi da je $z = u$. $\square$

Primer 3.1.2. [26] Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ kompletan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na skupu $X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, sa trougaonom normom $\mathscr{T}(a, b) = \min\{a, b\}$ za svako $a, b \in [0, 1]$, standardnom negacijom $\mathscr{N}(r) = 1 - r$ i

$$\mathscr{M}(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

za svako $x, y \in X$ i $t > 0$. Neka je

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = \frac{x}{1+x}, \quad g(X) = [0,1) \subset X = f(X)$$

i

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/(1+t), & 0 < t \leq 1 \\ t/2, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Pokazaćemo da su svi uslovi Teoreme ispunjeni. Kako je $g(f(x)) = \frac{2x}{1+2x}$ i $f(g(x)) = \frac{2x}{1+x}$ zaključujemo da preslikavanja $f(x)$ i $g(x)$ nisu komutativna, ali su R-slabo komutativna za $R = 1$, pošto važi:

$$\mathscr{M}(f(g(x)), g(f(x)), t) = \frac{t}{t + \frac{2x^2}{(1+x)(1+2x)}} \quad \text{i} \quad \mathscr{M}(f(x), g(x), t) = \frac{t}{t + \frac{x+2x^2}{1+x}}.$$

Kako je $\frac{2x^2}{(1+x)(1+2x)} \leq \frac{x+2x^2}{1+x}$ ispunjeno za svako $x \geq 0$, dobijamo da je uslov (3.1) ispunjen.

Dokazaćemo da je uslov (3.3) takođe ispunjen. U tom cilju, uočimo da je za sve $x, y \in X$ ispunjeno $\frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq 1$. Razmotrimo dve mogućnosti.

Ako je $0 < t \leq 1$ imamo da je $1 + t \leq 2$ odakle dobijamo da je

$$\mathscr{M}(g(x), g(y), t/(1+t)) = \frac{t}{t + (1+t)\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}} \geq \frac{t}{t + 2|x-y|} = \mathscr{M}(f(x), f(y), t).$$

Ako je $t \geq 1$ dobijamo da je

$$\mathscr{M}(g(x), g(y), t/2) = \frac{t}{t + 2\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}} \geq \frac{t}{t + 2|x-y|} = \mathscr{M}(f(x), f(y), t).$$

Iz poslednjih nejednakosti sledi da je uslov (3.3) ispunjen. Kako $\varphi(t)$ ispunjava sve uslove teoreme zaključujemo da $f(x)$ i $g(x)$ imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku i to je tačka $x = 0$.

Uzimajući u Teoremi 3.1.2. da je $f = I$ identičko preslikavanje dobijamo rezultat koji predstavlja uopštenje Teoreme Boyda i Wonga [7] na $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore.

Teorema 3.1.3. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor koji je kompletan u odnosu na negaciju $\mathscr{N}$ i ispunjava uslov (2.2) i neka je g neprekidno preslikavanja* *iz X u X, $g(X)$ $\mathscr{L}F$-strogo ograničen skup, tako da važi uslov*

$$\mathscr{M}(g(x), g(y), \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t) \tag{3.7}$$

za neku neprekidnu, neopadajuću funkciju $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, koja ispunjava $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$. Tada g ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Uzimajući u Teoremi 3.1.1. da je $f = I$ identičko preslikavanje i $\varphi(t) = kt$ za neko $k \in (0, 1)$, dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 3.1.4. (Intuicionistička fazi BANACHova teorema) *Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ kompletan intuicionistički fazi metrički prostor koji ispunjava uslov* (2.3). *Neka je g neprekidno preslikavanje iz X u X, za koje je $g(X)$ IF-strogo ograničen skup i ispunjava uslove*

$$\mathscr{M}_{M,N}(g(x), g(y), kt) \geq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x, y, t) \tag{3.8}$$

za neko fiksirano $k \in (0, 1)$. Tada g ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Pretpostavka prethodne teoreme da je $g(X)$ IF-strogo ograničen skup može se zameniti sledećom: Postoji tačka $x_0 \in X$ takva da je orbita tačke x_0 definisana sa $\mathscr{O}(x_0, g) = \{x_0, gx_0, g^2x_0, \ldots\}$ IF-strogo ograničen skup. Ovo tvrđenje sledi iz činjenice da je polazni niz u dokazu Teoreme 3.1.1. za $f = I$ niz PICARDovih iteracija definisan sa $x_{n+1} = gx_n$.

ALACA i ostali u radu [2] su dokazali intuicionističku fazi BANACHovu teoremu bez pretpostavke da je $g(X)$ ili orbita $\mathscr{O}(x_0, g)$ IF-strogo ograničen skup. Razlog za ovu razliku jeste to što su ALACA i ostali razmatrali definiciju intuicionističkih fazi metričkih prostora u smislu ALACE i ostalih koja pretpostavlja slabiju definiciju kompletnosti i CAUCHYevih nizova, kao i uslov ($\mathscr{I}$F-6a) koji obezbeđuje IF-strogu ograničenost celog prostora X.

Primetimo da uslov (2.3) ima ulogu u dokazu teorema 3.1.1. i 3.1.4. samo u smislu zaključaka Leme 3.1.3. Dokazaćemo da uslovi Leme 3.1.3. mogu biti zamenjeni u glavnim rezultatima sa uslovom označenim sa ($\mathscr{I}$F-6a), pošto sledeća lema važi.

Lema 3.1.4. *Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ intuicionistički fazi metrički prostor koji is-*

punjava ($\mathscr{I}$F-6a) *i neka je* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava uslov* $\varphi(t) < t$ *za svako* $t > 0$. *Tada važi zaključak Leme* 3.1.2.

Dokaz. Kako je $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\cdot)$ neprekidna i ograničena, to postoji

$$\lim_{t\to 0+} \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = c,$$

gde je $c \in L^*$. Uzmimo $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,0) := c$. Jasno je da je $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\cdot)$ neprekidna s desna u $t = 0$. Pretpostavimo da je $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\varphi(t)) \geq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t)$ za svako $t > 0$. Pošto je $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\varphi(t)) \leq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t)$, primenjujući indukciju dobijamo da važi $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,\varphi^n(t)) = \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t)$ za svako $t > 0$. Uzimajući limes kad $n \to \infty$ imamo da je $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = c$ za svako $t > 0$ i $\lim_{t\to\infty} \mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = c$. Iz ($\mathscr{I}$F-6a) sledi da je $c = 1_{L^*}$ tj. $\mathscr{M}_{M,N}(x,y,t) = 1_{L^*}$ za svako $t > 0$. To znači da je $x = y$. $\square$

R. Saadati i ostali u radu [66] dokazuju teoremu o zajedničkoj fiksnoj tački za par komutativnih preslikavanja sa linearnim kontraktivnim uslovom na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima. Ovaj rezultat proširuje rezultat G. Jungcka dat u radu [30]. Dokazujući glavni rezultat, oni su ispustili jednu pretpostavku koja obezbeđuje egzistenciju elemenata koji u dokazu učestvuju. U narednom delu teksta navodi se taj rezultat i ukazuje se na pretpostavku koja je ispuštena, a neophodna je u dokazu tvrđenja.

Sledeći uslov ima veoma važnu ulogu u narednim rezultatima:

(3.9) Ako je ispunjeno $\mathscr{M}(x,y,t) = C$ za svako $t > 0$ tada je $C = 1_{\mathscr{L}}$.

Teorema 3.1.5. [66] *Neka je* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-fazi metrički prostor koji je kompletan u odnosu na negaciju* $\mathscr{N}$ *i ispunjava uslov* (3.9) *i neka su* $f, g : X \to X$ *preslikavanja koja ispunjavaju uslove*

(a) $g(X) \subseteq f(X)$;

(b) f *je neprekidna;*

(c)$\mathscr{M}(g(x), g(y), kt) \geq_L \mathscr{M}(f(x), f(y), t)$ *za svako* $x, y \in X$ *i* $0 < k < 1$.

Ako su f *i* g *komutativna preslikavanja tada ona imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

U dokazu prethodne teoreme Saadati i ostali su razmatrali trougaonu normu

$\mathscr{T}$ koja ispunjava uslov (2.4)(označenu u [66] kao osobina (1.1)). Takođe, Saadati i ostali su koristili sledeću lemu u dokazu Teoreme 3.1.5.

Lema 3.1.5. [66] *Neka je* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-fazi metrički prostor. Definišemo* $E_{\lambda,\mathscr{M}} : X^2 \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ *pomoću*

$$E_{\lambda,\mathscr{M}}(x, y) = \inf\{t > 0 : \mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(\lambda)\} \tag{3.10}$$

za svako $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ *i* $x, y \in X$. *Tada važi*

(i) Ako $\mathscr{T}$ *ispunjava* (2.4), *za proizvoljno* $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ *tada postoji* $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ *tako da*

$$E_{\mu,\mathscr{M}}(x_1, x_n) \leq E_{\lambda,\mathscr{M}}(x_1, x_2) + E_{\lambda,\mathscr{M}}(x_2, x_3) + \ldots + E_{\lambda,\mathscr{M}}(x_{n-1}, x_n)$$

za svako $x_1, \ldots, x_n \in X$,

(ii) Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je konvergentan u odnosu na* $\mathscr{L}$*-fazi metriku* $\mathscr{M}$ *ako i samo ako* $E_{\lambda,\mathscr{M}}(x_n, x) \to 0$. *Takođe, niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je Cauchy-jev u odnosu na* $\mathscr{L}$*-fazi metriku* $\mathscr{M}$ *ako i samo ako je Cauchy-jev sa* $E_{\lambda,\mathscr{M}}$.

Sledeći primer pokazuje da postoji kompletan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor u kome $E_{\lambda,\mathscr{M}}(x, y)$ ne mogu biti definisani, odnosno da njihovom rezultatu treba pridodati uslove koji obezbeđuju postojanje skupova definisanih u prethodnoj lemi.

Primer 3.1.3. Neka je $X = [1, 2]$, $\mathscr{T}(a, b) = ab$, i $\mathscr{M}(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$ za svako $x, y \in X$ i $t > 0$. Tada je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ kompletan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor. Uzmimo $x = \frac{3}{2}, y = \frac{8}{5}$. Tada je $\mathscr{M}(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, t) = \frac{15}{16}$, za svako $t > 0$. Za negaciju $\mathscr{N}(\lambda) = 1 - \lambda$ i $\lambda = \frac{1}{17}$ imamo da je $\mathscr{M}(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, t) = \frac{15}{16} < 1 - \frac{1}{17}$ za svako $t > 0$ tj. skup $\{t : \mathscr{M}(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, t) > 1 - \frac{1}{17}\}$ je prazan. Stoga, $E_{\frac{1}{17},\mathscr{M}}(\frac{3}{2}, \frac{8}{5})$ ne može biti definisano.

Pokazaćemo da je glavni rezultat prema Saadatiju i ostalima dat u [66] posledica rezultata iskazanog i dokazanog u Teoremi 3.1.2. i ispravićemo formulaciju njihove teoreme, s obzirom na prethodno dat komentar. Preciznije, iskazu njihove teoreme pridodaćemo jedan uslov koji obezbeđuje postojanje vrednosti $E_{\lambda,\mathscr{M}}(x, y)$ definisane u jednakosti (3.10), koje imaju veoma važnu ulogu u dokazu njihovog rezultata. Bez obzira na ispravku koja će biti predložena, značaj njihovog rezultata nije umanjen. Takođe, biće pokazano da je proširenje njihove teoreme, koje će biti ovde prikazano, suštinsko u odnosu na klasu preslikavanja koja imaju zajedničku fiksnu tačku, i biće ilustrovano jednim primerom.

Napomena 3.1.1. Dokaz Teoreme 3.1.5. je baziran na uslovu da $E_{\mu,\mathscr{M}}(fx_n, fx_m) \to 0$, prema tome $E_{\mu,\mathscr{M}}(fx_n, fx_m)$ mora postojati za svako $m, n \in \mathbb{N}$ (pošto u dokazu teoreme iterativni niz počinje sa proizvoljnom tačkom) i za svako $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$. Iz Leme 2.3.4. sledi da ako uključimo uslov "skup $f(X)$ je $\mathscr{L}$F-strogo ograničen" u iskazu Teoreme 3.1.5., tada možemo definisati $E_{\lambda,\mathscr{M}}(x, y)$ za svako $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ i $x, y \in X$. Takođe, osobina da je $\lim_{t\to\infty} \mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ za sve $x, y \in X$ obezbeđuje postojanje elemenata $E_{\mu,\mathscr{M}}(x, y)$ za sve $x, y \in X$.

Primetimo da uslov ($\mathscr{I}$F-6a) ima svoj analogon u $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima:

($\mathscr{L}$F-6a) $\lim\limits_{t\to\infty} \mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ za svako $x, y \in X$.

Takođe, važi analogon Leme 3.1.4. u $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

Napomena 3.1.2. Očigledno, možemo videti da uslov (3.9) igra ulogu u dokazu Teoreme 3.1.5. u smislu zaključka Leme 3.1.2. (ili analogona Leme 3.1.4. u $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima). Prema tome, ovaj uslov možemo zameniti sa (2.2) (ili ($\mathscr{L}$F-6a)).

Napomena 3.1.3. Teorema 3.1.5. (i posledično rezultat prema Jungcku ([30])) sa uslovom da je $f(X)$ $\mathscr{L}$F-strogo ograničen (ili $\lim\limits_{t\to\infty} \mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ važi za svako $x, y \in X$) je posledica Teoreme 3.1.2.

Dokaz. Kako je $f(X)$ $\mathscr{L}$F-strogo ograničen i $g(X) \subseteq f(X)$, to je i $g(X)$ $\mathscr{L}$F-strogo ograničen. Iz neprekidnosti funkcije f sledi da je funkcija g neprekidna. Zaista, neka je $x_n \to x$. Kako je f neprekidna imamo da $\mathscr{M}(fx_n, fx, t) \to 1_{\mathscr{L}}$ za svako $t > 0$. Kako je $\mathscr{M}$ neopadajuća, iz uslova $\varphi(t) < t$ i (3.3) sledi da

$$\mathscr{M}(gx_n, gx, t) \geq_L \mathscr{M}(gx_n, gx, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(fx_n, fx, t) \to 1_{\mathscr{L}}$$

odakle sledi da je g neprekidna funkcija. Kako su komutativna preslikavanja R-slabo komutativna, uzimajući da je $\varphi(t) = kt,\ k \in (0, 1)$ sledi tvrđenje napomene. □

Na kraju, primetimo da nije potrebno da uključimo pretpostavku o ograničenosti u iskaze sličnih rezultata na metričkim prostorima. To možemo videti u Jungckovom radu ([30]). Razlog za ovo je činjenica da svaki metrički prostor može biti posmatran kao $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa indukovanom $\mathscr{L}$-fazi metrikom koja ispunjava uslov $\lim_{t\to\infty}\mathscr{M}(x,y,t) = 1_{\mathscr{L}}$ za sve $x, y \in X$, pošto je $\mathscr{M}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$.

Navodimo jedan primer koji ilustruje da je rezultat dokazan u Teoremi 3.1.2. proširenje rezultata dokazanog u Teoremi 3.1.5.

Primer 3.1.4. Primetimo da za funkcije $f(x) = 2x$ i $g(x) = \frac{x}{1+x}$, iz Primera 3.1.2. primenom Teoreme 3.1.5. ne možemo zaključiti da postoji zajednička fiksna tačka. Postoje dva razloga za to. Prvi je da navedene funkcije nisu komutativne. Drugi je činjenica da preslikavanja $f(x)$ i $g(x)$ ne ispunjavaju uslov (c) iz Teoreme 3.1.5., odnosno preslikavanja $f(x)$ i $g(x)$ ne ispunjavaju linearan kontraktivan uslov. Zaista, pretpostavimo da postoji konstanta k takva da je ispunjeno $\mathscr{M}(g(x), g(y), kt) \geq_L \mathscr{M}(f(x), f(y), t)$ za sve $x, y \in X$ i $t \geq 0$. Iz $\mathscr{M}(x,y,t) = \frac{t}{t+|x-y|}$ sledi da je za sve $x, y, t \geq 0$ ispunjeno da je

$$\frac{kt}{kt + |\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}|} \geq \frac{t}{t+2|x-y|} \Leftrightarrow \frac{t}{t + \frac{1}{k}\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}} \geq \frac{t}{t+2|x-y|}.$$

Iz poslednjeg sledi da je

$$k \geq \frac{2}{(1+x)(1+y)} \quad \text{za svako} \quad x, y \geq 0 \quad \text{tj.} \quad k \geq 2.$$

3.2 Konveksna struktura na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima

U ovom delu rada bavićemo se pitanjem egzistencije fiksne tačke ukoliko preslakavanja ne ispunjavaju uslov kontraktivnog tipa. Naime, postavlja se pitanje kako se menjaju odgovarajući rezultati ukoliko se uzme da je $\varphi(t) = t$. Pokazaće se da je pojam konveksnosti značajan za obezbeđivanje postojanja fiksne tačke preslikavanja neekspanzivnog tipa.

W. Takahashi je u radu [79] definisao konveksnu i normalnu strukturu na metričkim prostorima. O. Hadžić 1988. godine u radu [21] uvela je pojam konveksne strukture i dokazala teoremu o fiksnoj tački za neekspanzivna preslikavanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa konveksnom strukturom. Nedavno je S.

Ješić u [25] definisao konveksnu, striktno konveksnu i normalnu strukturu u intuicionističkim fazi metričkim prostorima i dokazao teoremu o postojanju fiksne tačke za široku klasu neekspanzivnih preslikavanja u striktno konveksnim intuicionističkim fazi metričkim prostorima. Motivisani navedenim radovima, u ovom delu rada uvodimo konveksnu, striktno konveksnu i normalnu strukturu u $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore i proširujemo rezultat S. Ješića dokazanog u radu [25] za dva preslikavanja definisana na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa striktnom konveksnom strukturom.

Najpre uvedimo potrebne definicije i leme.

Definicija 3.2.1. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$, $t > 0$ i $x \in X$. Skup $B[x, r, t] = \{y \in X : \mathscr{M}(x, y, t) \geq_L \mathscr{N}(r)\}$ naziva se zatvorena kugla sa centrom u x poluprečnika r u odnosu na t.

Definicija 3.2.2. Podskup K u $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ nazivamo kompaktnim ako je naredno tvrđenje ispunjeno:

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \quad \Longrightarrow \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \quad \text{za neko} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$$

za svaku familiju $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ otvorenih skupova $U_\alpha \subset X$.

Lema 3.2.1. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i neka je $K \subseteq X$. Tada, K je kompaktan ako i samo ako za svaku familiju zatvorenih skupova $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ takvih da je $F_\alpha \subseteq K$ važi da je*

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset \quad \text{za neko} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda.$$

Dokaz. Dokaz sledi iz Definicije 3.2.2. i De-Morganovih zakona. □

Napomena 3.2.1. Kako je svaki $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor HAUSDORFFov topološki prostor, iz kompaktnosti skupova sledi i njihova zatvorenost. Takođe, lako se pokazuje da je svaki zatvoren podskup kompaktnog skupa u $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru kompaktan.

J.H. Park je u radu [60] dokazao da je u intuicionističkim fazi metričkim prostorima svaki kompaktan skup IF-ograničen. Ovo tvrđenje će važiti i na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima sa trougaonom normom $\mathscr{T}$ koja ispunjava uslov (2.4).

Teorema 3.2.1. *Svaki kompaktan podskup A $\mathscr{L}$-fazi metričkog prostora sa trougaonom normom $\mathscr{T}$ koja ispunjava uslov* (2.4) *je $\mathscr{L}$F-ograničen.*

Dokaz. Neka je A kompaktan podskup $\mathscr{L}$-fazi metričkog prostora sa trougaonom normom $\mathscr{T}$ koja ispunjava uslov (2.4). Neka su $t > 0$ i $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ proizvoljno odabrani. Posmatrajmo otvoren pokrivač $\{B(x, r, t) : x \in A\}$ skupa A. Kako je A kompaktan, postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ tako da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x, r, t)$. Neka su $x, y \in A$. Tada postoje $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da $x \in B(x_i, r, t)$ i $y \in B(x_j, r, t)$, odnosno važi da je $\mathscr{M}(x, x_i, t) \geq_L \mathscr{N}(r)$ i $\mathscr{M}(y, x_j, t) \geq_L \mathscr{N}(r)$. Označimo sa $\alpha = \min\{\mathscr{M}(x_i, x_j, t) : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Tada je $\alpha > 0_{\mathscr{L}}$. Iz uslova (2.4) sledi da važi

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(x, y, 3t) &\geq_L \mathscr{T}^2(\mathscr{M}(x, x_i, t), \mathscr{M}(x_i, x_j, t), \mathscr{M}(x_j, y, t)) \\ &\geq_L \mathscr{T}^2(\mathscr{N}(r), \alpha, \mathscr{N}(r)) > \mathscr{N}(s) \end{aligned}$$

za neko $s \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$, odnosno skup A je $\mathscr{L}$F-ograničen. $\square$

Definišimo uslov pod kojim je tačka dijametralna i uvodimo pojam konveksne strukture na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

Definicija 3.2.3. Tačka $x \in A$ se naziva dijametralnom ako važi da je

$$\inf_{y \in A} \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x, y, \varepsilon) = \delta_A(t)$$

za svako $t > 0$.

Definicija 3.2.4. $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ poseduje konveksnu strukturu ako postoji funkcija $S : X \times X \times [0, 1] \to X$, za koju je ispunjeno $S(x, y, 0) = y$, $S(x, y, 1) = x$ i

$$\mathscr{M}(S(x, y, \lambda), z, 2t) \geq_L \mathscr{T}\left(\mathscr{M}\left(x, z, \frac{t}{\lambda}\right), \mathscr{M}\left(y, z, \frac{t}{1-\lambda}\right)\right) \tag{3.11}$$

za svako $x, y, z \in X, \lambda \in (0, 1)$ i $t > 0$. $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ sa konveksnom strukturom naziva se konveksni $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor.

O. Hadžić je u radu [21] definisala konveksnu strukturu na verovatnosnim Mengerovim prostorima u smislu prethodne definicije.

Primer 3.2.1. [25] Svaki normiran linearni prostor $(X, \|\cdot\|)$ može se posmatrati kao konveksni $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor indukovan normom $\|\cdot\|$ iz Primera 2.3.5. sa konveksnom strukturom $S(x,y,\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$. Kako je $(X,d), d(x,y) = \|x-y\|$, metrički prostor, to je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor indukovan metrikom d. Pokazaćemo da nejednakost

$$\mathscr{M}(S(x,y,\lambda), z, 2t) \geq \mathscr{T}\left(\mathscr{M}(x,z,\frac{t}{\lambda}), \mathscr{M}(y,z,\frac{t}{1-\lambda})\right)$$

važi za svako $\lambda \in (0,1)$. Neka je $t > 0$ proizvoljno. Imamo da je

$$\mathscr{M}\left(x,z,\frac{t}{\lambda}\right) = \frac{t}{t+\lambda\|z-x\|} \quad \text{i} \quad \mathscr{M}\left(y,z,\frac{t}{1-\lambda}\right) = \frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|}.$$

Takođe,

$$\mathscr{T}\left(\mathscr{M}\left(x,z,\frac{t}{\lambda}\right), \mathscr{M}\left(y,z,\frac{t}{1-\lambda}\right)\right) = \min\left\{\frac{t}{t+\lambda\|z-x\|}, \frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|}\right\}.$$

Pretpostavimo da je

$$\frac{t}{t+\lambda\|z-x\|} = \min\left\{\frac{t}{t+\lambda\|z-x\|}, \frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|}\right\},$$

dobijamo da je

$$\frac{t}{t+\lambda\|z-x\|} \leq \frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|} \quad \text{tj.} \quad (1-\lambda)\|z-y\| \leq \lambda\|z-x\|.$$

Takođe, primetimo da je $\|z-(\lambda x+(1-\lambda)y)\| \leq \lambda\|z-x\| + (1-\lambda)\|z-y\|$. Konačno, imamo da važe naredne nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(S(x,y,\lambda), z, 2t) &= \frac{2t}{2t + \|z-(\lambda x + (1-\lambda)y)\|} \\
&\geq \frac{2t}{2t + \lambda\|z-x\| + (1-\lambda)\|z-y\|} \\
&\geq \frac{2t}{2t + \lambda\|z-x\| + \lambda\|z-x\|} \\
&= \frac{2t}{2t + 2\lambda\|z-x\|} = \frac{\frac{t}{\lambda}}{\frac{t}{\lambda} + \|z-x\|}
\end{aligned}$$

$$= \mathscr{M}(x,z,\frac{t}{\lambda}) = \mathscr{T}\left(\mathscr{M}(x,z,\frac{t}{\lambda}),1\right)$$
$$\geq \mathscr{T}\left(\mathscr{M}\left(x,z,\frac{t}{\lambda}\right),\mathscr{M}\left(y,z,\frac{t}{1-\lambda}\right)\right).$$

U slučaju kada je $\frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|} = \min\left\{\frac{t}{t+\lambda\|z-x\|},\frac{t}{t+(1-\lambda)\|z-y\|}\right\}$ dokaz je sličan.
Iz poslednje nejednakosti sledi da je uslov (3.11) ispunjen. Za $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$ uslovi iz definicije 3.2.4. su trivijalno ispunjeni.

Definicija 3.2.5. Neka je $(X,\mathscr{M},\mathscr{T})$ konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x,y,\lambda)$. Podskup $A \subseteq X$ se naziva konveksan skup ako za svako $x,y \in A$ i $\lambda \in (0,1)$ sledi da je $S(x,y,\lambda) \in A$.

Lema 3.2.2. *Neka je $(X,\mathscr{M},\mathscr{T})$ konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i $\{K_\alpha\}$ za $\alpha \in \Delta$ familija konveksnih podskupova od X. Tada je presek $K = \cap_{\alpha\in\Delta} K_\alpha$ konveksan skup.*

Dokaz. Ako $x,y \in K$ tada $x,y \in K_\alpha$ za svako $\alpha \in \Delta$. Sledi da $S(x,y,\lambda) \in K_\alpha$ za svako $\alpha \in \Delta$, tj. $S(x,y,\lambda) \in K$, što znači da je skup K konveksan. □

Uvođenje konveksne strukture na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima motivisano je narednom definicijom konveksnih struktura na metričkim prostorima koju je uveo W. Takahashi u radu [79].

Definicija 3.2.6. [79] Neka je (X,d) metrički prostor. Kažemo da metrički prostor poseduje TAKAHASHIevu konveksnu strukturu ako postoji funkcija $W : X \times X \times [0,1] \to X$ koja ispunjava uslov

$$d(z,W(x,y,\lambda)) \leq \lambda d(z,x) + (1-\lambda)d(z,y),$$

za svako $x,y,z \in X$ i proizvoljno $\lambda \in [0,1]$. Metrički prostor (X,d) sa TAKAHASHIevom konveksnom strukturom naziva se konveksan metrički prostor.

Primer 3.2.2. Neka je (X,d) metrički prostor sa TAKAHASHIevom konveksnom strukturom $W(x,y,\lambda)$. Uzimajući da je $S(x,y,\lambda) = W(x,y,\lambda)$ zaključujemo da $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(X,\mathscr{M},\mathscr{T})$ indukovan metrikom d iz Primera 2.3.5. poseduje konveksnu strukturu u smislu Definicije 3.2.4.

Definicija 3.2.7. Konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(X,\mathscr{M},\mathscr{T})$ sa konveksnom strukturom $S : X \times X \times [0,1] \to X$ naziva se striktno konveksnim ako je, za proizvoljno $x, y \in X$ i $\lambda \in (0,1)$, element $z = S(x, y, \lambda)$ jedinstveni element za koji je ispunjen uslov:

$$\mathscr{M}\left(x, y, \frac{t}{\lambda}\right) = \mathscr{M}(z, y, t) \quad \text{i} \quad \mathscr{M}\left(x, y, \frac{t}{1-\lambda}\right) = \mathscr{M}(x, z, t) \tag{3.12}$$

za svako $t > 0$.

Lema 3.2.3. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$. Neka za svako $\lambda \in (0,1)$, $t > 0$ i $x, y, z \in X$ važi*

$$\mathscr{M}(S(x, y, \lambda), z, t) >_L \min\{\mathscr{M}(z, x, t), \mathscr{M}(z, y, t)\}. \tag{3.13}$$

Ako postoji $z \in X$ tako da je

$$\mathscr{M}(S(x, y, \lambda), z, t) = \min\{\mathscr{M}(z, x, t), \mathscr{M}(z, y, t)\} \tag{3.14}$$

ispunjeno za svako $t > 0$, tada $S(x, y, \lambda) \in \{x, y\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je uslov (3.14) ispunjen za neko $z \in X$ i za svako $t > 0$. Ako (3.13) važi, sledi da je $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$, a odatle imamo da je $S(x, y, 0) = y$ ili $S(x, y, 1) = x$, što dokazuje tvrđenje leme. □

Primer 3.2.3. Indukovani $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ iz Primera 2.3.5. gde je $\mathscr{L}$-fazi metrika indukovana standardnom Euklidskom metrikom $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ i konveksna struktura definisana sa $S(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ je striktno konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor koji ispunjava (3.13). Zaista, kako Euklidska metrika ispunjava $d_E(\lambda x + (1 - \lambda)y, z) < \max\{d_E(x, z), d_E(y, z)\}$ za svako $\lambda \in (0,1)$ sledi da (3.13) važi.

Lema 3.2.4. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ striktno konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$. Tada za proizvoljno $x, y \in X, x \neq y$ postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da $S(x, y, \lambda) \notin \{x, y\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svako $\lambda \in [0,1]$ važi da je $S(x, y, \lambda) \in \{x, y\}$. Iz (3.12) sledi da je $\mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ za svako $t > 0$ što znači da je $x = y$. □

Definicija 3.2.8. $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ poseduje normalnu strukturu ako za svaki zatvoreni, $\mathscr{L}$F-ograničeni i konveksan skup $Y \subset X$, koji se sastoji od najmanje dve različite tačke, postoji nedijametralna tačka $x \in Y$, tj. postoji $t_0 > 0$ tako da važi:

$$\inf_{y \in A} \sup_{\varepsilon < t_0} \mathscr{M}(x, y, \varepsilon) >_L \delta_A(t_0).$$

Kompaktni i konveksni skupovi u konveksnom metričkom prostoru poseduju normalnu strukturu [79].

Definicija 3.2.9. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i $Y \subseteq X$. Zatvoren konveksni omotač skupa Y, u oznaci $conv(Y)$, je presek svih zatvorenih konveksnih skupova koji sadrže Y.

Kako X pripada familiji zatvorenih konveksnih skupova, jasno je da skup $conv(Y)$ postoji. Iz Leme 3.2.2. sledi da je ovaj presek konveksan skup. Takođe, ovaj presek je zatvoren kao presek zatvorenih skupova.

3.2.1 Fiksne tačke neekspanzivnog preslikavanja na konveksnom $\mathscr{L}$-fazi metričkom prostoru

S. Ješić je u radu [25] definisao neekspanzivnih preslikavanja na intuicionističkim fazi metričkim prostorima.

Definicija 3.2.10. [25] Neka je $(X, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ intuicionistički fazi metrički prostor i f preslikavanje iz X u X. Kažemo da je f neekspanzivno preslikavanje ako

$$\mathscr{M}_{M,N}(fx, fy, t) \geq_{L^*} \mathscr{M}_{M,N}(x, y, t) \tag{3.15}$$

važi za svako $x, y \in X$ i $t > 0$.

Pojmom neekspanzivnih preslikavanja na intuicionističkim fazi metričkim prostorima bavili su se i A. Razani u radu [63] i Ćirić, Ješić i Ume u radu [12]. Međutim, u oba rada pojam neekspanzivnih preslikavanja je strože definisan. U radu [63] nejednakost u uslovu (3.15) je stroga nejednakost za koju se zahteva da je ispunjena za sve $t > 0$ i $x \neq y$. U radu [12] zahteva se da za proizvoljne $x \neq y$ postoji $t > 0$ tako da je ispunjena stroga nejednakost u uslovu (3.15). Klasa neekspanzivnih preslikavanja definisanih u Definiciji 3.2.10. obuhvata preslikavanja koja su neekspanzivna u smislu definicija datih u radovima [63] i [12]. Preslikavanje $f(x) = -x$ definisano na intuicionističkom fazi metričkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{M,N}, \mathscr{T})$ indukovanom metrikom

$|x-y|$, razmatranom u Primeru 2.3.2. ne ispunjava ni jednu od definicija koje su razmatrane u pomenutim radovima. Ipak, možemo zaključiti da preslikavanje $f(x)$ ima jedinstvenu fiksnu tačku $x=0$ i ispunjava uslov (3.15).

Prateći rad S. Ješića ([25]), uvodimo pojam neekspanzivnih preslikavanja na $\mathscr{L}$-fazi metričke prostore.

Definicija 3.2.11. Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor i f preslikavanje iz X u X. Kažemo da je f neekspanzivno preslikavanje ako

$$\mathscr{M}(fx, fy, t) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t) \tag{3.16}$$

važi za svako $x, y \in X$ i $t > 0$.

Lema 3.2.5. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ striktno konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$ za koju važi* (3.13) *i neka je $K \subseteq X$ neprazan, konveksan i kompaktan podskup od X. Tada K poseduje normalnu strukturu.*

Dokaz. Pretpostavimo da K ne poseduje normalnu strukturu. Tada postoji zatvoren, $\mathscr{L}$F-ograničen i konveksan podskup $Y \subset K$, koji sadrži najmanje dve različite tačke i ne sadrži nedijametralnu tačku, tj.

$$\inf_{y \in Y} \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x, y, \varepsilon) = \delta_Y(t)$$

za svako $x \in Y$. Kako je X striktno konveksan i uslov (3.13) je ispunjen, tada tvrđenja Leme 3.2.3. i Leme 3.2.4. važe. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz Y. Iz tvrđenja Leme 3.2.4. sledi da postoji $\lambda_0 \in (0,1)$ tako da je $S(x_1, x_2, \lambda_0) \notin \{x_1, x_2\}$. Kako je Y konveksan skup, sledi da je $S(x_1, x_2, \lambda_0) \in Y$. Y je zatvoren podskup kompaktnog skupa K, pa je Y takođe kompaktan. Kako je $\delta_Y(t) = \inf_{y \in Y} \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(y, S(x_1, x_2, \lambda), t)$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu Y za proizvoljno $t > 0$ postoji $x_3 \in Y$ tako da $\sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x_3, S(x_1, x_2, \lambda_0), \varepsilon) = \delta_Y(t)$ važi. Iz Leme 3.2.3. činjenice da je $\mathscr{M}(x, y, \cdot)$ neopadajuća neprekidna funkcija sledi da važi:

$$\begin{aligned} \delta_Y(t) &= \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x_3, S(x_1, x_2, \lambda_0), \varepsilon) = \mathscr{M}(x_3, S(x_1, x_2, \lambda_0), t) \\ &> \min \{\mathscr{M}(x_3, x_1, t), \mathscr{M}(x_3, x_2, t)\} \\ &= \min \{\sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x_3, x_1, \varepsilon), \sup_{\varepsilon < t} \mathscr{M}(x_3, x_2, \varepsilon)\} \geq \delta_Y(t) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Iz prethodnog sledi da je $\delta_Y(t) > \delta_Y(t)$, što je kontradikcija. □

Lema 3.2.6. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$ za koju važi* (3.13). *Tada su zatvorene lopte $B[x, r, t]$ konveksni skupovi.*

Dokaz. Neka su $a, b \in B[x, r, t]$ proizvoljne tačke. Odavde sledi da $\mathscr{M}(a, x, t) \geq_L \mathscr{N}(r)$ i $\mathscr{M}(b, r, t) \geq_L \mathscr{N}(r)$ za svako $t > 0$. Dokazaćemo da $\mathscr{M}(S(a, b, \lambda), x, t) \geq_L \mathscr{N}(r)$ za svako $t > 0$, tj. $S(a, b, \lambda) \in B[x, r, t]$. Zaista, za $\lambda \in (0, 1)$, iz (3.13) imamo da važi

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(S(a, b, \lambda), x, t) &>_L \min\left\{\mathscr{M}\left(a, x, t\right), \mathscr{M}\left(b, x, t\right)\right\}\\ &\geq_L \min\left\{\mathscr{N}(r), \mathscr{N}(r)\right\} = \mathscr{N}(r)\end{aligned}$$

Za $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$ sledi da $S(a, b, 0) = b$ i $S(a, b, 1) = a$ pripadaju $B[x, r, t]$. □

Lema 3.2.7. [ZORNova lema.] *Neka je X neprazan parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima donje (gornje) ograničenje. Tada X ima minimalni (maksimalni) element.*

Ovde dajemo iskaz i dokaz teoreme o postojanju zajedničke fiksne tačke dva preslikavanja definisanih na striktno konveksnim $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima.

Teorema 3.2.2. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ striktno konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa trougaonom normom $\mathscr{T}$ za koju važi* (2.4), *sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$ za koju važi* (3.13) *i neka je $K \subseteq X$ neprazan, konveksan i kompaktan podskup od X. Naka su f i g preslikavanja iz K u K, $g(K) \cap f(K) \subseteq K$, takvi da je za sve $x, y \in K$, $x \neq y$ i svako $t > 0$ ispunjen uslov*

$$\mathscr{M}(f(x), g(y), t) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t), \tag{3.18}$$

Tada preslikavanja f i g imaju najmanje jednu zajedničku fiksnu tačku na K.

Dokaz. Posmatrajmo familiju Υ svih nepraznih, zatvorenih, konveksnih skupova $K_\alpha \subseteq K$ takvih da je $g(K_\alpha) \cap f(K_\alpha) \subseteq K_\alpha$. Ova familija je neprazna, pošto $K \subseteq \Upsilon$ Zaista, K je zatvoren zato što je K kompaktan skup u HAUSDORFFovom prostoru i važi da je $g(K) \cap f(K) \subseteq K$. Ako uvedemo uređenje ove familije inkluzijom, tada je $(\Upsilon, \subseteq)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\{K_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ proizvoljan lanac ove familije. Tada je skup $\cap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$ neprazan, zatvoren, konveksan podskup od K, i donje je ograničenje ovog lanca. Zaista, pretpostavimo da je $\cap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha = \emptyset$. Tada iz Leme 3.2.1. sledi da postoji konačna podfamilija $K_{\alpha_1} \supseteq \ldots \supseteq K_{\alpha_n}$ lanca $\{K_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ koja ima neprazan presek, što nije moguće pošto je ovaj presek $K_{\alpha_n} \neq \emptyset$. Iz ZORNove leme 3.2.7. sledi da postoji minimalni element K_0 familije Υ za koji važi da je $g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq K_0$ Dokazaćemo da K_0 sadrži jednu tačku a kako je $g \cap f : K_0 \to K_0$, to će značiti da f i g imaju zajedničku fiksnu tačku.

Pretpostavimo da K_0 sadrži najmanje dve različite tačke. Iz Leme 3.2.5. sledi da K poseduje normalnu strukturu. Iz Teoreme 3.2.1. sledi da je K_0 $\mathscr{L}$F-ograničen skup. Kako je K_0 zatvoren i konveksan skup sledi da postoji nedijametralna tačka $x_0 \in K_0$, tj. postoji $t_0 > 0$ tako da važi

$$\inf_{y\in K_0} \sup_{\varepsilon< t_0} \mathscr{M}(x_0, y, \varepsilon) >_L \delta_{K_0}(t_0). \tag{3.19}$$

Označimo sa $\mathscr{N}(\xi) := \inf\limits_{y\in K_0} \sup\limits_{\varepsilon< t_0} \mathscr{M}(x_0, y, \varepsilon)$.

Označimo sa K_1 zatvoreni konveksni omotač skupa $g(K_0) \cap f(K_0)$. Kako je $g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq K_0$, važi da je $K_1 = conv(g(K_0) \cap f(K_0)) = \overline{conv(g(K_0) \cap f(K_0))}$ $\subseteq \overline{conv(K_0)} = \overline{K_0} = K_0$. Dakle $K_1 \subseteq K_0$ i sledi da je $g(K_1) \cap f(K_1) \subseteq g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq \overline{conv(g(K_0) \cap f(K_0))} = K_1$, tj. $g(K_1) \cap f(K_1) \subseteq K_1$. To znači da $K_1 \in \Upsilon$, a kako je K_0 minimalni element imamo da je $K_1 = K_0$.

Kako važi (3.19), tj. $\mathscr{N}(\xi) >_L \delta_{K_0}(t_0)$, definišimo skupove

$$C := \Big(\bigcap_{y\in K_0} B[y, \xi, t_0] \Big) \bigcap K_0$$

i

$$C_1 := \Big(\bigcap_{y\in g(K_0)\cap f(K_0)} B[y, \xi, t] \Big) \bigcap K_0.$$

Skup C je neprazan pošto $x_0 \in C$. Zaista, iz nejednakosti (3.19) sledi da $\mathscr{M}(x_0, y, t_0) \geq_L \mathscr{N}(\xi)$. Iz prethodnog zaključujemo da x_0 pripada $B[y, \xi, t_0]$ za svako $y \in K_0$. Imamo da x_0 pripada C. Pokazaćemo da je $C = C_1$. Kako je $g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq K_0$, važi da je $C_1 \supseteq C$.

Neka je $z \in C_1$. Dokazaćemo da $z \in C$. Kako je $z \in C_1$, za proizvoljno $y \in g(K_0) \cap f(K_0)$ važi da $\mathscr{M}(y, z, t_0) \geq_L \mathscr{N}(\xi)$, tj. $y \in B[z, \xi, t_0]$. Kako je y proizvoljna tačka iz $g(K_0) \cap f(K_0)$, sledi da je $g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq B[z, \xi, t_0]$. Kako je $B[z, \xi, t_0]$ zatvoren konveksan skup koji sadrži $g(K_0) \cap f(K_0)$, zaključujemo da

$$K_1 = \overline{conv(g(K_0) \cap f(K_0))} \subseteq B[z, \xi, t_0]$$

važi. Kako je $K_0 = K_1$ sledi da $K_0 \subseteq B[z, \xi, t_0]$. Iz prethodnog sledi da za svako $y \in K_0$ važi da $z \in B[y, \xi, t_0]$, što znači da je $C_1 \subseteq C$, tj. $C = C_1$.

Pokazaćemo da je $C \in \Upsilon$. Skup C je zatvoren kao presek zatvorenih skupova. Iz lema 3.2.2. i 3.2.6. sledi da je C konveksan skup. Dokažimo da $g(C) \cap f(C) \subseteq C$. Neka $z \in C$ i $y \in g(K_0) \cap f(K_0)$. Tada postoje tačke $x_1, x_2 \in K_0$ tako da je $y = f(x_1)$ i $y = g(x_2)$. Iz uslova (3.18) sledi da je

$$\mathscr{M}(f(z), y, t_0) = \mathscr{M}(f(z), g(x_2), t_0) \geq_L \mathscr{M}(z, x_2, t_0) \geq_L \mathscr{N}(\xi),$$

što znači da $f(z) \in C_1$, a kako je $C_1 = C$, imamo da je $f(C) \subseteq C$. S druge strane imamo da važi

$$\mathscr{M}(g(z), y, t_0) = \mathscr{M}(g(z), f(x_1), t_0) \geq_L \mathscr{M}(z, x_1, t_0) \geq_L \mathscr{N}(\xi).$$

Ovo znači da $g(z) \in C_1$. Kako je z proizvoljna tačka iz C, imamo da je $g(C) \subseteq C_1$ i kako je $C_1 = C$, imamo da je $g(C) \subseteq C$. Dakle, imamo da je $g(C) \cap f(C) \subseteq C$.

Kako je $C \subseteq K_0$ i K_0 minimalni element familije Υ sledi da je $C = K_0$. Dakle, imamo da je $\delta_C(t_0) \geq_L \mathscr{N}(\xi) >_L \delta_{K_0}(t_0)$. Ovo je kontradikcija sa $C = K_0$, tj. pretpostavka da K_0 sadrži najmanje dve različite tačke je pogrešna, što znači da K_0 sadrži samo jednu tačku koja je zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g. $\square$

Uzimajući u Teoremi 3.2.2. da je $g = f$ dobijamo da je f neekspanzivno preslikavanje definisano na kompaktnom skupu $\mathscr{L}$-fazi metričkog prostora, te važi naredna teorema.

Teorema 3.2.3. *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ striktno konveksan $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom $S(x, y, \lambda)$ za koju važi* (3.13) *i neka je $K \subseteq X$ neprazan, konveksan i kompaktan podskup od X. Neka je f neekspanzivno preslikavanje iz K u K. Tada f ima najmanje jednu fiksnu tačku na K.*

Ovde dajemo iskaz teoreme koja predstavlja direktnu posledicu Teoreme 3.2.3. na intuicionističkim fazi metričkim prostorima, koju je dokazao S. Ješić u radu [25].

Teorema 3.2.4. [25] *Neka je $(X, M, N, *, \diamondsuit)$ striktno konveksan intuicionistički* *fazi metrički prostor sa konveksnom strukturom* $S(x, y, \lambda)$, *koji ispunjava uslov*

$$\mathscr{M}_{M,N}(S(x, y, \lambda), z, t) >_{L^*} \min\{\mathscr{M}_{M,N}(z, x, t), \mathscr{M}_{M,N}(z, y, t)\}.$$

Neka je $K \subseteq X$ *neprazan, konveksan i kompaktan podskup od* X. *Tada svako neekspanzivno preslikavanje* $f : K \to K$ *ima bar jednu fiksnu tačku na skupu* K.

3.3 Fiksna tačka preslikavanja na Verovatnosnim Mengerovim prostorima sa nelinearnim kvazi-kontraktivnim uslovom

Motivacija za ovaj deo rada došla je iz rada [11] u kome je Lj. Ćirić uveo linearan kvazi-kontraktivan uslov na verovatnosne Mengerove prostore i dokazao teoremu o fiksnoj tački za preslikavanje f koje ispunjava takav linearan kvazi-kontraktivan uslov, definisano na f-orbitalno kompletnim verovatnosnim Mengerovim prostorima sa neprekidnom t-normom T koja ispunjava uslov $T(a, a) \geq a$ za svako $a \in [0, 1]$. Značajan broj autora bavio se postojanjem fiksne tačke za preslikavanja koja ispunjavaju linearan kvazi-kontraktivni uslov na metričkim i verovatnosnim metričkim prostorima ([10, 33, 61]).

Khan, Swaleh i Sessa u radu [43] uvode koncept funkcija alternirajućih rastojanja, koje menjaju rastojanje između dve tačke u metričkim prostorima. Objavljeno je nekoliko radova koji su se bavili postojanjem fiksne tačke preslikavanja definisanih na metričkim prostorima koja ispunjavaju uslove koji obuhvataju funkcije alternirajućih rastojanja ([56, 68]).

Nedavno su B.S. Choudhury i K. Das u [9] uveli pojam funkcija alternirajućih rastojanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima i dokazali su teoremu o postojanju fiksne tačke preslikavanja definisanog na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa t-normom minimum, koja ispunjavaju nelinearan kontraktivni uslov koji obuhvata ovakve funkcije. D. Miheţ je u radu [52] proširio rezultat iz rada [9] na verovatnosne Mengerove prostore sa neprekidnom t-normom i t-normom tipa Hadžić.

U ovom delu rada uvodimo nelinearan uslov kvazi-kontraktivnog tipa koji obuhvata funkcije alternirajućih rastojanja za preslikavanja definisana na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa neprekidnom t-normom T koja ispunjava uslov $T(a,a) \geq a$ za svako $a \in [0,1]$, i dokazujemo teoremu o postojanju fiksne tačke za preslikavanja koje ispunjavaju takav nelinearan kvazi-kontraktivan uslov. Rezultate prikazane u ovom delu rada autor je objavio u radu [5].

Definicija 3.3.1. [43] Funkcija $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je funkcija alternirajućeg rastojanja ako važi:

(i) h je monotono rastuća i neprekidna funkcja i

(ii) $h(t) = 0$ ako i samo ako $t = 0$.

Choudhury i Das su u radu [9] 2008. godine proširili ovaj koncept na verovatnosne Mengerove prostore.

Definicija 3.3.2. [9] Funkcija $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ se naziva Φ-funkcija ako su ispunjeni naredni uslovi:

(i) $\phi(t) = 0$ ako i samo ako $t = 0$;

(ii) ϕ je strogo rastuća i $\phi(t) \to \infty$ kad $t \to \infty$;

(iii) ϕ je neprekidna s leve strane na $(0,\infty)$;

(iv) ϕ je neprekidna u 0.

Klasu svih Φ-funkcija ćemo označavati sa Φ.

Primer 3.3.1. [52] Svaka funkcija alternirajućeg rastojanja h koja ispunjava uslov $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$ generiše Φ-funkciju ϕ sa $\phi(0) = 0$ i $\phi(t) = \sup\{s : \ h(s) < t\}$ za $t > 0$.

Naredna lema imaće važnu ulogu u dokazu teoreme koja je glavni rezultat ovog dela rada.

Lema 3.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom sleva t-normom T. Neka je $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ Φ-funkcija. Tada važi naredno tvrđenje:*

Ako za $x, y \in X, 0 < c < 1,$ važi $F_{x,y}(\phi(t)) \geq F_{x,y}(\phi(t/c))$ za svako $t > 0$

tada je $x = y$.

Dokaz. Iz činjenice da je ϕ strogo rastuća, a kako je $0 < c < 1$, indukcijom dobijamo da je $F_{x,y}(\phi(t)) \geq F_{x,y}(\phi(t/c)) \geq \cdots \geq F_{x,y}(\phi(t/c^n))$. Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo da je $F_{x,y}(\phi(t)) \geq 1$, tj. $x = y$. □

Lema 3.3.2. *Neka je* $(X, \mathcal{F}, T)$ *kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-norm* T *koja isunjava uslov* $T(a, a) \geq a$ *za svako* $a \in [0, 1]$. *Tada za sve* $x, y, z \in X$ *i svako* $t > 0$ *važi*

$$F_{x,y}(2t) \geq \min\{F_{x,z}(t), F_{y,z}(t)\}. \tag{3.20}$$

Dokaz. Za svaku t-normu T koja ispunjava uslov $T(a, a) \geq a$, za svako $a, b \in [0, 1]$

važi da je $T(a, b) \geq T(\min\{a, b\}, \min\{a, b\}) \geq \min\{a, b\}$. Iz prethodnog, osobine (V-3) i činjenice da je T neopadajuća funkcija zaključujemo da za sve $x, y, z \in X$ i za svako $t > 0$ važi $F_{x,y}(2t) \geq \min\{F_{x,z}(t), F_{y,z}(t)\}$. □

Teorema 3.3.1. [5] *Neka je* $(X, \mathcal{F}, T)$ *kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom* T *koja ispunjava uslov* $T(a, a) \geq a$ *za svako* $a \in [0, 1]$. *Neka je* ϕ Φ*-funkcija i* f *preslikavanje iz* X *u* X *tako da za sve* $x, y \in X$, *svako* $t > 0$ *i neko* $0 < c < 1$ *važi uslov*

$$\begin{aligned} F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq \min\{&F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)) \\ &F_{x,fy}(2\phi(t/c)), F_{y,fx}(2\phi(t/c))\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Tada f *ima jedinstvenu fiksnu tačku u* X.

Dokaz. Najpre primetimo da za sve $x, y \in X$, svako $t > 0$ i neko $0 < c < 1$, iz osobine t-norme, Leme 3.3.2. i uslova (3.21) sledi da važe naredne nejednakosti.

$$\begin{aligned} &F_{fx,fy}(\phi(t)) \\ &\geq \min\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)), F_{x,fy}(2\phi(t/c)), F_{y,fx}(2\phi(t/c))\} \\ &\geq \min\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)), \\ &\qquad T(F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{fx,fy}(\phi(t/c))), T(F_{y,fy}(\phi(t/c)), F_{fy,fx}(\phi(t/c)))\} \end{aligned}$$

$$\geq \min\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)),$$
$$\min\{F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{fx,fy}(\phi(t/c))\}, \min\{F_{y,fy}(\phi(t/c)), F_{fy,fx}(\phi(t/c))\}\}$$

Iz prethodnog sledi da važi

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq \min\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)), F_{fx,fy}(\phi(t/c))\} \tag{3.22}$$

za sve $x, y \in X$, svako $t > 0$ i neko $0 < c < 1$.

Dokazaćemo da važi

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq \min\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c))\} \tag{3.23}$$

za sve $x, y \in X$, svako $t > 0$ i neko $0 < c < 1$.

Ako pretpostavimo da je element $F_{fx,fy}(\phi(t/c))$ minimum skupa sa desne strane nejednakosti (3.22), tada važi da je $F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq F_{fx,fy}(\phi(t/c))$. Iz Leme 3.3.1. sledi da je $fx = fy$, tj. $F_{fx,fy}(t) = 1$ za svako $t > 0$, pa nejednakost (3.23) trivijalno važi.

Ako pretpostavimo da element $F_{fx,fy}(\phi(t/c))$ nije minimum skupa sa desne strane nejednakosti (3.22), tada unutar skupu ostaju preostala tri elementa, tj. važi nejednakost (3.23).

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Definišimo niz $x_n = fx_{n-1}$. Pokazaćemo da je $\{x_n\}$ CAUCHYev niz.

Neka su $t > 0, \varepsilon \in (0,1)$ i $0 < c < 1$ prozvoljno fiksirani. Iz osobina (i) i (iv) Φ-funkcija sledi da postoji $r > 0$ tako da je $t > \phi(r)$. Tada za $n \in \mathbb{N}$ imamo da važi:

$$\begin{aligned}
F_{x_n,x_{n+1}}(t) \geq F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r)) &= F_{fx_{n-1},fx_n}(\phi(r)) \\
&\geq \min\{F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c)), F_{x_{n-1},fx_{n-1}}(\phi(r/c)), F_{x_n,fx_n}(\phi(r/c))\} \\
&\geq \min\{F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c)), F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r/c))\}.
\end{aligned}$$

Pokazaćemo da važi da je

$$F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r)) \geq F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c)). \tag{3.24}$$

Ako pretpostavimo da je $F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r/c))$ minimum skupa sa desne strane nejednakosti (3.24), tada iz Leme 3.3.1. sledi da je $F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r)) = 1$ i prethodna nejednakost trivijalno važi.

Ako pretpostavimo da element $F_{x_n,x_{n+1}}(\phi(r/c))$ nije minimum skupa sa desne strane nejednakosti (3.24), tada je minimum element $F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c))$, te važi nejednakost (3.24)

Kako je ϕ strogo rastuća, imamo da važi:

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t) \geq F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c) \geq \cdots \geq F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n)),$$

tj.

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t) \geq F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n)) \tag{3.25}$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $m, n \in \mathbb{N}$, možemo pretpostaviti da je $m \geq n$ bez umanjenja opštosti. Primenjujući Lemu 3.3.2., indukcijom dobijamo da je

$$F_{x_n,x_m}((m-n)t) \geq \min\{F_{x_n,x_{n+1}}(t), \ldots F_{x_{m-1},x_m}(t)\}.$$

Iz prethodnog i (3.25) dobijamo da je

$$F_{x_n,x_m}((m-n)t) \geq \min\{F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n)), \ldots, F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^{m-1})).$$

Iz činjenice da je F_{x_0,x_1} neopadajuća i da je Φ-funkcija strogo rastuća, minimum desne strane nejednakosti je $F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n))$, tj.

$$F_{x_n,x_m}((m-n)t) \geq F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n)).$$

Kako je ϕ strogo rastuća i $\liminf\limits_{n\to\infty} \phi(t) = \infty$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $F_{x_0,x_1}(\phi(r/c^n)) > 1 - \varepsilon$, za svako $n \geq n_0$. Iz prethodnog sledi da za svako $m \geq n \geq n_0$ važi

$$F_{x_n,x_m}((m-n)t) \geq 1 - \varepsilon. \tag{3.26}$$

Kako su $t > 0$ i $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljni, imamo da je $\{x_n\}$ CAUCHYev niz u kompletnom verovatnosnom MENGERovom prostoru, pa postoji tačka $z \in X$ takva da je $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Pokazaćemo da je z fiksna tačka preslikavanja f.

Iz osobina t-norme T i Φ-funkcije ϕ imamo da za sve $x, y \in X, 0 < c < 1$ i svako $t > 0$ postoji $r > 0$ za koje važi $t > \phi(r)$ i

$$\begin{aligned} F_{fz,z}(t) &\geq T\left(F_{fz,x_n}(\phi(r)), F_{x_n,z}(t - \phi(r))\right) \\ &\geq \min\{F_{fz,x_n}(\phi(r)), F_{x_n,z}(t - \phi(r))\}. \end{aligned}$$

Kako je $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, za proizvoljno $\varepsilon \in (0,1)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi

$$F_{x_n,z}(t - \phi(r)) > 1 - \varepsilon.$$

Otuda sledi da je

$$F_{fz,z}(t) \geq \min\{F_{fz,x_n}(\phi(r)), 1 - \varepsilon\}.$$

Kako je $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno, imamo da je

$$F_{fz,z}(t) \geq F_{fz,x_n}(\phi(r)).$$

Iz definicije niza $\{x_n\}$, (3.22) i (3.26) imamo da važi

$$\begin{aligned}
F_{fz,z}(t) \geq F_{fz,x_n}(\phi(r)) &= F_{fz,fx_{n-1}}(\phi(r)) \\
&\geq \min\{F_{z,x_{n-1}}(\phi(r/c)), F_{z,fz}(\phi(r/c)), F_{x_{n-1},fx_{n-1}}(\phi(r/c))\} \\
&= \min\{F_{z,x_{n-1}}(\phi(r/c)), F_{z,fz}(\phi(r/c)), F_{x_{n-1},x_n}(\phi(r/c))\} \\
&\geq \min\{1-\varepsilon, F_{z,fz}(\phi(r/c)), 1-\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno, imamo da važi:

$$F_{fz,x_n}(\phi(r)) \geq F_{z,fz}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ dobijamo da je

$$F_{fz,z}(\phi(r)) \geq F_{z,fz}(\phi(r/c)),$$

i primenjujući Lemu 3.3.1. imamo da je $z = fz$, tj. z je fiksna tačka preslikavanja f.

Dokažimo da je z jedinstvena fiksna tačka od f. Neka je $y \in X$ druga fiksna tačka od f, tj. $f(y) = y$. Za svako $t > 0$ postoji $r > 0$ tako da je $t > \phi(r)$ i iz (3.22) sledi da za $0 < c < 1$ važi

$$\begin{aligned}
F_{z,y}(t) \geq F_{z,y}(\phi(r)) &= F_{fz,fy}(\phi(r)) \\
&\geq \min\{F_{z,y}(\phi(r/c)), F_{z,fz}(\phi(r/c)), F_{y,fy}(\phi(r/c))\} \\
&= \min\{F_{z,y}(\phi(r/c)), F_{z,z}(\phi(r/c)), F_{y,y}(\phi(r/c))\} \\
&= \min\{F_{z,y}(\phi(r/c)), 1, 1\} = F_{z,y}(\phi(r/c)).
\end{aligned}$$

Primenjujući Lemu 3.3.1. dobijamo da je $y = z$, tj. z je jedinstvena fiksna tačka preslikavanja f. $\square$

Kao posledicu dobijamo naredni rezultat koji su dokazali Choudhury i Das u radu [9].

Posledica 3.3.1. [9] *Neka je $(X, \mathcal{F}, T_M)$ kompletan verovatnosni* Menger*ov prostor sa neprekidnom t-normom T_M datom sa $T_M(a,b) = \min\{a,b\}$ i neka je f neprekidno preslikavanje iz X u X tako da za svako $x, y \in X$, i svako $t > 0$ važi uslov*

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq F_{x,y}(\phi(t/c)) \tag{3.27}$$

gde je ϕ Φ-funkcija i $0 < c < 1$. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Dokaz. Jasno je da t-norma T_M ispunjava uslov $T(a,a) \geq a$ za svako $a \in [0,1]$. Iz uslova (3.27) sledi da za sve $x, y \in X, 0 < c < 1$ i svako $t > 0$ važi

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) \geq F_{x,y}(\phi(t/c))$$

$$\geq \min\left\{F_{x,y}(\phi(t/c)), F_{x,fx}(\phi(t/c)), F_{y,fy}(\phi(t/c)), F_{x,fy}(2\phi(t/c)), F_{y,fx}(2\phi(t/c))\right\}.$$

Stoga zaključujemo da su svi uslovi Teoreme 3.3.1. ispunjeni. $\square$

Primer 3.3.2. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Menger ov prostor indukovan metrikom $d(x,y) = |x - y|$ na $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ iz Primera 2.1.2.. Neka je $\phi(t) = t$ za svako $t > 0$, $c = \frac{1}{2}$ i

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \\[2ex] 0, & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Primetimo da je ϕ Φ-funkcija. Dokazaćemo da je uslov (3.21) Teoreme 3.3.1. ispunjen. Razmatraćemo tri mogućnosti.

Ako je $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ imamo da je

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) = \varepsilon_0\left(t - \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right|\right) = \varepsilon_0(4t - |x-y|) \geq \varepsilon_0(2t - |x-y|) = F_{x,y}(\phi(2t)),$$

pa je uslov (3.21) ispunjen.

Ako je $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ i $y = \frac{1}{2}$ imamo da je

$$\begin{aligned} F_{fx,fy}(\phi(t)) &= \varepsilon_0\left(t - \left|\frac{x}{4} - 0\right|\right) = \varepsilon_0(4t - x) \\ &\geq \varepsilon_0(4t-1) = \varepsilon_0\left(2t - \left|\frac{1}{2} - 0\right|\right) = \varepsilon_0(2t - |y - fy|) = F_{y,fy}(\phi(2t)), \end{aligned}$$

pa je uslov (3.21) takođe, ispunjen.

Ako je $x = y = \frac{1}{2}$ imamo da je

$$F_{fx,fy}(\phi(t)) = \varepsilon_0(t - |0-0|) = \varepsilon_0\left(2t - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|\right) = F_{x,y}(\phi(2t)),$$

pa je uslov (3.21) ispunjen i u ovo slučaju.

Iz prethodnog zaključujemo da je uslov (3.21) Teoreme 3.3.1. ispunjen, pa funkcija $f(x)$ ima jedinstvenu fiksnu tačku. Lako se uočava da je ova tačka $x = 0$.

Primetimo da za funkciju $f(x)$ Posledica 3.3.1. nije odlučiva za slučaj kada je $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ i $y = \frac{1}{2}$.

Na osnovu prethodnog primera možemo da zaključimo da je rezultat prikazan u Teoremi 3.3.1. proširenje rezultata prikazanog u Posledici 3.3.1.

Glava 4

Zajedničke fiksne tačke preslikavanja

4.1 Zajedničke fiksne tačke preslikavanja definisanih na verovatnosnim Mengerovim prostorima

U ovom delu rada dokazaćemo teoremu o postojanju zajedničke fiksne tačke familije R-slabo komutativnih preslikavanja koja ispunjavaju nelinearan kontraktivni uslov na verovatnosnim Mengerovim prostorima. Takođe, pokazaćemo da su dva rezultata koja su dokazali O'Regan i Saadati u radu [57] posledica teoreme koja je glavni rezultat ovog dela rada. Rezultate prikazane u ovom delu rada autor je objavio u koautorskom radu [28].

Najpre dajemo definiciju R-slabo komutativnih preslikavanja u verovatnosnim Mengerovim prostorima.

Definicija 4.1.1. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor i neka su f i g preslikavanja na skupu $A \subseteq X$. Preslikavanja f i g nazivamo R-slabo komutativnim ako postoji pozitivan realan broj R takav da je

$$F_{f(g(x)),g(f(x))}(Rt) \geq F_{f(x),g(x)}(t) \tag{4.1}$$

za svako $t > 0$ i svako $x \in A$.

Lema 4.1.1. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom sleva t-normom T. Neka je $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ neprekidna, neopadajuća funkcija koja ispunjava $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$. Tada važi naredno tvrđenje:*

Ako za $x, y \in X$ važi $F_{x,y}(\varphi(t)) \geq F_{x,y}(t)$ za svako $t > 0$ tada je $x = y$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $F_{x,y}(\varphi(t)) \geq F_{x,y}(t)$ i $x \neq y$. Iz ovog uslova, indukcijom sledi da je $F_{x,y}(\varphi^n(t)) \geq F_{x,y}(t)$. Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$, dobijamo $F_{x,y}(t) = 0$ za svako $t > 0$, što je kontradikcija sa (V-1) tj. $x = y$. $\square$

Teorema 4.1.1. [28] *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T. Neka su $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i f preslikavanja iz X u X, f neprekidna funkcija, $g_n(X) \subseteq f(X)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i neka su sva preslikavanja g_n R-slabo komutativna sa f. Neka je $\varphi_{i,j} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ familija preslikavanja takva da je za svaka dva preslikavanja g_i i g_j ispunjen uslov*

$$F_{g_i^{m_i}(x), g_j^{m_j}(y)}(\varphi_{i,j}(t)) \geq F_{f(x), f(y)}(t) \tag{4.2}$$

za neko $m_i \in \mathbb{N}$, za svako $x, y \in X$ i svako $t > 0$, gde $g_i^{m_i}$ predstavlja m_i-tu iteraciju funkcije g_i. Neka je $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ neopadajuća neprekidna funkcija takva da je $\varphi_{i,j}(t) < \varphi(t) < t$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$ i za svako $t > 0$. Ako postoji tačka $u_0 \in X$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takva da je skup

$$S = \{g_{n_0}^{m_{n_0}}(u_{n_0-1}), g_{n_0+1}^{m_{n_0+1}}(u_{n_0}), \ldots\}, \tag{4.3}$$

gde je $f(u_i) = g_i^{m_i}(u_{i-1})$, verovatnosno ograničen, tada sva preslikavanja $\{g_i^{m_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ i f imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u X. Takođe,

a) ako je preslikavanje f neekspanzivno, tj. $F_{fx,fy}(t) \geq F_{x,y}(t)$ za svako $t > 0$ i za sve $x, y \in X$, tada jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja $g_i^{m_i}$ i f je i jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f, g_i i $g_i^{m_i}$ za svako $i \in \mathbb{N}$;

b) ako je $m_i = 1$ za svako $i \in \mathbb{N}$, tada pretpostavka da je f neekspanzivno preslikavanja nije potrebna, tj. tada sva preslikavanja f i $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ imaju jedinstvanu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz. Najpre primetimo da su sva preslikavanja $g_i^{m_i}$ neprekidna. Ova činjenica sledi iz (4.2) i neprekidnosti funkcije f. Zaista, pretpostavimo da $y_n \to y$. Kako je f

neprekidna, sledi da $f(y_n) \to f(y)$ tj. $F_{f(y_n),f(y)}(t) \to 1$ kad $n \to \infty$. Primenjujući (4.2) dobijamo da je $F_{g_i^{m_i}(y_n),g_i^{m_i}(y)}(t) \geq F_{g_i^{m_i}(y_n),g_i^{m_i}(y)}(\varphi_{i,i}(t)) \geq F_{f(y_n),f(y)}(t) \to 1$, tj. $g_i^{m_i}$ je neprekidno preslikavanja za svako $i \in \mathbb{N}$.

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Kako je $g_n(X) \subseteq f(X)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da postoji tačka $x_1 \in X$ takva da je $g_1^{m_1}(x_0) = f(x_1)$. Indukcijom možemo odabrati niz $\{x_n\}$ tako da je $g_n^{m_n}(x_{n-1}) = f(x_n)$.

Razmotrimo tačku $u_0 \in X$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ za koje znamo da je skup

$$S = \{g_{n_0}^{m_{n_0}}(u_{n_0-1}), g_{n_0+1}^{m_{n_0+1}}(u_{n_0}), \ldots\},$$

gde je $f(u_i) = g_i^{m_i}(u_{i-1})$, verovatnosno ograničen.

Takođe, razmotrimo niz umetnutih nepraznih zatvorenih skupova definisanih sa

$$F_n = \overline{\{g_n^{m_n}(u_{n-1}), g_{n+1}^{m_{n+1}}(u_n), \ldots\}} \left(= \overline{\{f(u_n), f(u_{n+1}), \ldots\}}\right), \; n \geq n_0.$$

Dokazaćemo da familija $\{F_n\}_{n \geq n_0}$ ima verovatnosni dijametar nula.

U tom smislu, neka su $r \in (0,1)$ i $t > 0$ proizvoljni. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $k \geq n_0$. Iz $F_k \subseteq \overline{S}$ sledi da je F_k verovatnosno ograničen skup, tj. postoji $t_0 > 0$ tako da važi

$$F_{x,y}(t_0) > 1 - r \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad x, y \in F_k. \tag{4.4}$$

Primenjujući Lemu 3.1.1. sledi da postoji $l \in \mathbb{N}$ tako da važi $\varphi^l(t_0) < t$. Neka je $n = l + k$ i $x, y \in F_n$ proizvoljno. Tada postoje nizovi $\left\{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1})\right\}$, $\left\{g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})\right\}$ u F_n $(n(i), n(j) \geq n, \; i, j \in \mathbb{N})$ tako da je $\lim\limits_{i \to \infty} g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}) = x$ i $\lim\limits_{j \to \infty} g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1}) = y$.

Primenjujući (4.2) dobijamo

$$\begin{aligned} F_{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}), g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})}(\varphi(t)) &\geq F_{f(u_{n(i)-1}), f(u_{n(j)-1})}(t) \\ &= F_{g_{n(i)-1}^{m_{n(i)-1}}(u_{n(i)-2}), g_{n(j)-1}^{m_{n(j)-1}}(u_{n(j)-2})}(t). \end{aligned}$$

Indukcijom zaključujemo da važi naredna nejednakost.

$$F_{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}), g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})}(\varphi^l(t)) \geq F_{g_{n(i)-l}^{m_{n(i)-l}}(u_{n(i)-l-1}), g_{n(j)-l}^{m_{n(j)-l}}(u_{n(j)-l-1})}(t).$$

Kako je $\varphi^l(t_0) < t$ i funkcija $F_{x,y}(\cdot)$ je neopadajuća, iz prethodnog sledi da je

$$
\begin{aligned}
F_{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}),g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})}(t) &\geq F_{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}),g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})}(\varphi^l(t_0)) \\
&\geq F_{g_{n(i)-l}^{m_{n(i)-l}}(u_{n(i)-l-1}),g_{n(j)-l}^{m_{n(j)-l}}(u_{n(j)-l-1})}(t_0).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Kako su $\{g_{n(i)-l}^{m_{n(i)-l}}(u_{n(i)-l-1})\}$, $\{g_{n(j)-l}^{m_{n(j)-l}}(u_{n(j)-l-1})\}$ nizovi u F_k iz (4.4) i (4.5) sledi da, za svako $i,j\in\mathbb{N}$, važi

$$F_{g_{n(i)}^{m_{n(i)}}(u_{n(i)-1}),g_{n(j)}^{m_{n(j)}}(u_{n(j)-1})}(t) > 1-r.$$

Uzimajući $\liminf$ kad $i,j\to\infty$, i primenjujući Lemu 2.1.3. dobijamo da je $F_{x,y}(t) > 1-r$ za svako $x,y\in F_n$ tj. familija $\{F_n\}_{n\geq n_0}$ ima verovatnosni dijametar nula.

Primenjujući Lemu 2.1.5. i Teoremu 2.1.1. zaključujemo da ova familija ima neprazan presek koji se sastoji od ta'čno jedno tačke z. Kako familija $\{F_n\}_{n\geq n_0}$ ima verovatnosni dijametar nula i $z\in F_n$ za svako $n\geq n_0$ tada za svako $r\in(0,1)$ i svako $t>0$ postoji $k_0\geq n_0$ tako da za svako $n\geq k_0$ važi

$$F_{g_n^{m_n}(u_{n-1}),z}(t) > 1-r.$$

Iz prethodnog sledi da za svako $r\in(0,1)$ važi

$$\liminf_{n\to\infty} F_{g_n^{m_n}(u_{n-1}),z}(t) > 1-r.$$

Uzimajući limes kad $r\to 0$ dobijamo da važi

$$\liminf_{n\to\infty} F_{g_n^{m_n}(u_{n-1}),z}(t) = 1$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{m_n}(u_{n-1}) = z$. Iz definicije $\{f(u_n)\}$ imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = z$.

Iz (4.2) i činjenice da je $F_{x,y}(\cdot)$ neopadajuća za svako $x,y\in X$ i $\varphi_{i,j}\leq\varphi$ sledi da za svako $t>0$ i proizvoljno $i\in\mathbb{N}$, važi

$$
\begin{aligned}
F_{g_i^{m_i}(u_n),g_n^{m_n}(u_{n-1})}(\varphi(t)) &\geq F_{g_i^{m_i}(u_n),g_n^{m_n}(u_{n-1})}(\varphi_{i,n}(t)) \\
&\geq F_{f(u_n),f(u_{n-1})}(t).
\end{aligned}
$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n\to\infty$, kako je $g_i^{m_i}$ $(i\in\mathbb{N})$ neprekidna, imamo da je

$$F_{\lim\limits_{n\to\infty} g_i^{m_i}(u_n),z}(\varphi(t)) \geq F_{z,z}(t) = 1,$$

odakle sledi da za svako $i\in\mathbb{N}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} g_i^{m_i}(u_n) = z. \tag{4.6}$$

Kako su f i $g_i^{m_i}$ R-slabo komutativne, imamo da važi

$$F_{f(g_i^{m_i}(u_n)),g_i^{m_i}(f(u_n))}(t) \geq F_{f(u_n),g_i^{m_i}(u_n)}\left(\frac{t}{R}\right).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ iz (4.6) i prethodne nejednakosti sledi da važi

$$F_{f(z),g_i^{m_i}(z)}(t) \geq F_{z,z}\left(\frac{t}{R}\right) = 1$$

tj. za svako $i \in \mathbb{N}$ ispunjeno je

$$g_i^{m_i}(z) = f(z). \tag{4.7}$$

Dokazaćemo da je $f(z) = z$. Iz (4.2) sledi da je

$$\begin{aligned} F_{g_i^{m_i}(f(u_n)),g_i^{m_i}(u_n)}(\varphi(t)) &\geq F_{g_i^{m_i}(f(u_n)),g_i^{m_i}(u_n)}(\varphi_{i,i}(t)) \\ &\geq F_{f(f(u_n)),f(u_n)}(t). \end{aligned}$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo da važi

$$F_{f(z),z}(\varphi(t)) \geq F_{f(z),z}(t).$$

Primenjujući Lemu 4.1.1. dobijamo da je $f(z) = z$, tj. z je fiksna tačka preslikavanja f. Iz (4.7) sledi da je $g_i^{m_i}(z) = z$ tj. z je zajednička fiksna tačka preslikavanja f i $g_i^{m_i}$ za svako $i \in \mathbb{N}$.

Pokazaćemo da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f i $g_i^{m_i}$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Neka je y druga zajednička fiksna tačka preslikavanja f i $g_i^{m_i}$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Za svako $t > 0$ imamo da važi

$$\begin{aligned} F_{z,y}(\varphi(t)) = F_{g_i^{m_i}(z),g_i^{m_i}(y)}(\varphi(t)) &\geq F_{g_i^{m_i}(z),g_i^{m_i}(y)}(\varphi_{i,i}(t)) \\ &\geq F_{f(z),f(y)}(t) = F_{z,y}(t). \end{aligned}$$

Primenjujući Lemu 4.1.1. dobijamo da je $z = y$, tj. preslikavanja f i $g_i^{m_i}$, za svako $i \in \mathbb{N}$, imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

a) Pretpostavimo sada da je funkcija f neekspanzivna, tj. $F_{fx,fy}(t) \geq F_{x,y}(t)$ za svako $t > 0$ i sve $x, y \in X$.

Primetimo da je

$$g_i(z) = g_i(g_i^{m_i}(z)) = g_i^{m_i}(g_i(z)).$$

Dokazaćemo da je $g_i(z) = z$. Iz (4.2) i neekspanzivnost funkcije f sledi da je

$$\begin{aligned} F_{g_i(z),z}(\varphi(t)) &= F_{g_i^{m_i}(g_i(z)),g_i^{m_i}(z)}(\varphi(t)) \\ &\geq F_{g_i^{m_i}(g_i(z)),g_i^{m_i}(z)}(\varphi_{i,i}(t)) \\ &\geq F_{f(g_i(z)),f(z)}(t) \geq F_{g_i(z),z}(t). \end{aligned}$$

Primenjujući Lemu 4.1.1. dobijamo da je $g_i(z) = z$, tj. z je zajednička fiksna tačka preslikavanja $f, g_i^{m_i}$ i g_i za svako $i \in \mathbb{N}$.

Pokažimo sada da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja $\{g_i^{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i f. Dovoljno je da pokažemo da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g_i za svako $i \in \mathbb{N}$. Neka je y druga zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g_i za svako $i \in \mathbb{N}$. Za svako $t > 0$ imamo da važi

$$\begin{aligned} F_{z,y}(\varphi(t)) &= F_{g_i(z),g_i(y)}(\varphi(t)) \\ &= F_{g_i^{m_i}(g_i(z)),g_i^{m_i}(g_i(y))}(\varphi(t)) \\ &\geq F_{g_i^{m_i}(g_i(z)),g_i^{m_i}(g_i(y))}(\varphi_{i,i}(t)) \\ &\geq F_{f(g_i(z)),f(g_i(y))}(t) = F_{z,y}(t). \end{aligned}$$

Primenjujući Lemu 4.1.1. dobijamo da je $z = y$ jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f i g_i za svako $i \in \mathbb{N}$, a već smo pokazali da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka preslikavanja f i $g_i^{m_i}$, za svako $i \in \mathbb{N}$.

b) Za $m_i = 1$ za svako $i \in \mathbb{N}$ imamo da je $g_i^{m_i} = g_i$. Tada ovo tvrđenje sledi direktno iz prvog dela Teoreme. Primetimo, da bismo dokazali da preslikavanja $\{g_i^{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ i f imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku nismo koristili pretpostavku da je f neekspanzivna funkcija. □

O'Regan i Saadati su 2008. godine u radu [28] dokazali dve teoreme o postojanju zajedničke fiksne tačke preslikavanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima koja ispunjavaju nelineani kontraktivni uslov. Pokazaćemo da su ova dva tvrđenja posledica Teoreme 4.1.1.

Lema 4.1.2. [22] *Neka funkcija ϕ ispunjava uslov*

(ϕ) $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *je neopadajuća i* $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^n(t) < \infty$ *za svako* $t > 0$,

gde $\phi^n(t)$ *označava* n*-tu iteraciju funkcije* $\phi(t)$.

Tada je $\phi(t) < t$ za svako $t > 0$.

Posledica 4.1.1. [57] *Neka je $\{A_n\}$ niz preslikavanja A_i u kompletnom verovatnosnom Mengerovom prostoru $(X, \mathcal{F}, T)$ sa neprekidnom t-normom T na isti prostor, tako da je za svaka dva preslikavanja A_i, A_j uspunjen uslov*

$$F_{A_i^m(x), A_j^m(y)}(\phi_{i,j}(t)) \geq F_{x,y}(t)$$

za neko m i $x, y \in X$, za svako $t > 0$; ovde su $\phi_{i,j} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ funkcije takve da je $\phi_{i,j}(t) \leq \phi(t)$ za $i, j = 1, 2, \ldots$ i $t > 0$ i funkcija $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ je "na", strogo rastuća i ispunjava uslov (ϕ). Takođe, pretpostavimo da postoji $x_0 \in X$ tako da je

$$E_F(x_0, A_1^m x_0) = \sup\{E_{\gamma,F}(x_0, A_1^m x_0) : \gamma \in (0, 1)\} < \infty, \tag{4.8}$$

gde je $E_{\gamma,F}(x, y) = \inf\{t > 0 : F_{x,y}(t) > 1 - \gamma\}$. Tada niz preslikavanja $\{A_n\}$ ima jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku u X.

Dokaz. Kako su sve strogo rastuće i "na" funkcije neprekidne, uzimajući da je $\varphi = \phi$ iz Leme 4.1.2. vidimo da su svi uslovi Teoreme 4.1.1. za preslikavanje φ ispunjeni. Takođe, uzimajući da je $f = id$ identičko preslikavanje koje je neekspanzivno, imamo da su g_i^m (za $m_i = m$ za svako $i \in \mathbb{N}$) R-slabo komutativni sa f, pošto su komutativni sa f i sva komutativna preslikavanja su i R-slabo komutativna. Još ostaje da pokažemo da je skup S verovatnosno ograničen. Uzimajući da je $g_i = A_i$, i $u_0 = x_0$, iz (4.8) sledi da postoji $t_0 > 0$ tako da je

$$F_{g_1^m(u_0), u_0}(t_0) > 1 - \mu \quad \text{for all } \mu \in (0, 1). \tag{4.9}$$

Dokazaćemo da je uslov Leme 2.1.4. ispunjen, tj. da za proizvoljno $\lambda_0 \in (0, 1)$ postoji $t_0 > 0$ tako da je

$$F_{p,q}(t_0) > 1 - \lambda_0 \quad \text{for all } p, q \in S. \tag{4.10}$$

Neka je $\lambda_0 \in (0, 1)$ proizvoljno.

Iz (4.2) i (4.9) sledi da važe naredne nejednakosti:

$$\begin{aligned} F_{g_i^m(u_{i-1}), g_{i-1}^m(u_{i-2})}(t_0) &\geq F_{g_i^m(u_{i-1}), g_{i-1}^m(u_{i-2})}(\varphi(t_0)) \\ &\geq F_{g_i^m(u_{i-1}), g_{i-1}^m(u_{i-2})}(\varphi_{i,i-1}(t_0)) \geq F_{u_{i-1}, u_{i-2}}(t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= F_{g_{i-1}^m(u_{i-2}),g_{i-2}^m(u_{i-3})}(t_0) \geq \ldots \geq F_{g_2^m(u_1),g_1^m(u_0)}(t_0)\\ &\geq F_{g_2^m(u_1),g_1^m(u_0)}(\varphi(t_0)) \geq F_{g_2^m(u_1),g_1^m(u_0)}(\varphi_{2,1}(t_0))\\ &\geq F_{g_1^m(u_0),u_0}(t_0) > 1-\mu,\end{aligned}$$

za svako $\mu \in (0,1)$. Pokazali smo da za t_0 iz (4.9) i za svako $\mu \in (0,1)$ važi

$$F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}(t_0) > 1-\mu. \tag{4.11}$$

Pretpostavimo sada da je $i > j$ bez umanjenja opštosti. Za proizvoljno $\mu \in (0,1)$ i proizvoljno $i \in \mathbb{N}$, iz (4.11), a kako je funkcija raspodele $F_{p,q}$ neprekidna sleva, postoji $\varepsilon > 0$ tako da je

$$F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}(t_0-\varepsilon) \geq 1-\mu.$$

Kako funkcija φ ispunjava uslov (ϕ), iz Leme 4.1.2. sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $i > j \geq n_0$ važi $\sum_{k=j}^{i-1}\varphi^k(t_0) < \sum_{k=j}^{\infty}\varphi^k(t_0) < \varepsilon$. Sledi da

$$F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}\left(t_0 - \sum_{k=j}^{i-1}\varphi^k(t_0)\right) \geq F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}(t_0-\varepsilon) \geq 1-\mu \tag{4.12}$$

važi za svako $i > j \geq n_0$ i svako $\mu \in (0,1)$.

Dokažimo da važi $F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}(\varphi^{i-1}(t_0)) \geq F_{u_0,u_1}(t_0)$. Zaista, iz (4.2) sledi da naredne nejednakosti važe za svako $t > 0$:

$$F_{g_1^m(u_0),g_2^m(u_1)}(\varphi(t)) \geq F_{g_1^m(u_0),g_2^m(u_1)}(\varphi_{1,2}(t)) \geq F_{u_0,u_1}(t)$$

i

$$F_{g_2^m(u_1),g_3^m(u_2)}(\varphi^2(t)) \geq F_{g_2^m(u_1),g_3^m(u_2)}(\varphi_{2,3}(\varphi(t))) \geq F_{u_1,u_2}(\varphi(t)) \geq F_{u_0,u_1}(t).$$

Indukcijom dobijamo da važi

$$F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}(\varphi^{i-1}(t)) \geq F_{u_0,g_1^m(u_0)}(t)$$

za svako $t > 0$. Iz prethodne nejednakosti, (4.9) i (4.12) sledi da naredne nejednakosti važe za svako $i > j \geq n_0$ i svako $\mu \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}&F_{g_i^m(u_{i-1}),g_j^m(u_{j-1})}(t_0)\\ &\geq T\left(F_{g_i^m(u_{i-1}),g_{i-1}^m(u_{i-2})}\left(\varphi^{i-1}(t_0)\right), F_{g_{i-1}^m(u_{i-2}),g_j^m(u_{j-1})}\left(t_0-\varphi^{i-1}(t_0)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\geq T^2 \Big(F_{u_0, g_1^m(u_0)}(t_0), F_{g_{i-1}^m(u_{i-2}), g_{i-2}^m(u_{i-3})} \left(\varphi^{i-2}(t_0)\right),$$

$$F_{g_{i-2}^m(u_{i-3}), g_j^m(u_{j-1})} \left(t_0 - \varphi^{i-1}(t_0) - \varphi^{i-2}(t_0)\right)\Big)$$

$$\geq \ldots \geq T^{i-j} \left(1-\mu, \ldots, 1-\mu, F_{g_{j-1}^m(u_{j-2}), g_j^m(u_{j-1})} \left(t_0 - \sum_{k=j}^{i-1} \varphi^k(t_0)\right)\right)$$

$$\geq T^{i-j} \Big(1-\mu, \ldots, 1-\mu, F_{g_{j-1}^m(u_{j-2}), g_j^m(u_{j-1})} \left(t_0 - \varepsilon\right)\Big) \geq T^{i-j} \left(1-\mu, \ldots, 1-\mu\right).$$

Dokazali smo da za t_0 iz (4.9), za svako $\mu \in (0,1)$ i svako $i, j \in \mathbb{N},\ i > j \geq n_0$ važi

$$F_{g_i^m(u_{i-1}), g_j^m(u_{j-1})}(t_0) \geq T^{i-j} \left(1-\mu, \ldots, 1-\mu\right). \tag{4.13}$$

Zbog neprekidnosti t-norme T sledi da za prozvoljno $\lambda_0 \in (0,1)$ i proizvoljno $n = i - j \in \mathbb{N}$ postoji $\mu \in (0,1)$ tako da važi

$$T^n(\underbrace{1-\mu, \ldots, 1-\mu}_{n+1}) > 1 - \lambda_0.$$

Konačno, kako nejednakost (4.13) važi za svako $\mu \in (0,1)$ imamo da važi

$$F_{g_i^m(u_{i-1}), g_j^m(u_{j-1})}(t_0) > 1 - \lambda_0.$$

Dakle, dokazali smo da je uslov Leme 2.1.4. ispunjen, tj. skup S je verovatnosno ograničen. $\square$

Posledica 4.1.2. [57] *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T i neka su $f, g : X \to X$ preslikavanja koja ispunjavaju uslove:*

(a) $g(X) \subseteq f(X)$;

(b) f je neprekidna;

(c) $F_{g(x), g(y)}(\phi(t)) \geq F_{f(x), f(y)}(t)$ za svako $x, y \in X$ gde je funkcija $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ "na", strogo rastuća, i ispunjava uslov (ϕ). Uz to, pretpostavimo da postoji tačka $x_0 \in X$ za koju je ispunjeno

$$E_F(f(x_0), g(x_0)) = \sup\{E_{\gamma, F}(f(x_0), g(x_0)) : \gamma \in (0,1)\} < \infty. \tag{4.14}$$

Tada preslikavanja f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku ukoliko f i g komutiraju.

Dokaz. Uzmimo u Teoremi 4.1.1. da je $m_i = 1$, $g_i = g$, $\varphi = \varphi_{i,j} = \phi$ za svako $i, j \in \mathbb{N}$ i $u_0 = x_0$. Kao u prethodnoj posledici zaključujemoda su svi uslovi Teoreme 4.1.1. ispunjeni. Ostaje da pokažemo da je skup definisan u (4.3) verovatnosno ograničen. U ovom slučaju skup $S = \{g(u_0), g(u_1), \ldots, g(u_n), \ldots\} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots\}$. Iz (4.14) sledi da postoji $t_0 > 0$ tako da važi

$$F_{f(u_0),f(u_1)}(t_0) > 1 - \lambda \quad \text{za svako } \lambda \in (0, 1)$$

i nastavljamo dokaz kao u dokazu prethodne posledice. $\square$

Primer 4.1.1. [28] Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na $X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ datom u Primeru 2.1.2. Neka je

$$f(x) = 2x, \qquad g_n(x) = \frac{x}{n+x}, \qquad g_n(X) = [0, 1) \subset X = f(X)$$

i

$$\varphi_{n,k}(t) = \varphi(t) = \begin{cases} t/(1+t), & 0 < t \leq 1, \\ t/2, & t \geq 1. \end{cases}$$

Dokazaćemo da su za $m_i = 1$ $(i \in \mathbb{N})$ svi uslovi Teoreme 4.1.1. ispunjeni. Kako je $g_n(f(x)) = \frac{2x}{n+2x}$ i $f(g_n(x)) = \frac{2x}{n+x}$ zaključujemo da funkcije $f(x)$ i $g_n(x)$ nisu komutativne, već su R-slabo komutativne za $R = 1$.

Zaista, kako je $\frac{2x^2}{(n+x)(n+2x)} \leq \frac{2nx+2x^2-x}{n+x}$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \geq 0$ imamo da je

$$\begin{aligned} F_{f(g_n(x)),g_n(f(x))}(t) &= \varepsilon_0\left(t - \frac{2x^2}{(n+x)(n+2x)}\right) \\ &\geq \varepsilon_0\left(t - \frac{2nx+2x^2-x}{n+x}\right) = F_{f(x),g_n(x)}(t) \end{aligned}$$

tj. za $R = 1$ uslov (4.1) je ispunjen.

Pokazaćemo da je uslov (4.2) takođe ispunjen. Primetimo da je $\frac{kx-ny}{(n+x)(k+y)} \leq |x - y|$, za svako $n, k \in \mathbb{N}$ i $x, y \geq 0$. Razmotrićemo dve mogućnosti.

Ako je $0 < t \leq 1$ iz $1 + t \leq 2$ imamo da važi

$$F_{g_n(x),g_k(y)}\left(\frac{t}{1+t}\right) = \varepsilon_0\left(\frac{t}{1+t} - \frac{kx-ny}{(n+x)(k+y)}\right)$$

$$\geq \varepsilon_0 \left(\frac{t}{2} - |x-y|\right) = \varepsilon_0 \left(t - 2|x-y|\right) = F_{f(x),f(y)}(t).$$

Ako je $t \geq 1$ imamo da važi

$$F_{g_n(x),g_k(y)}\left(\frac{t}{2}\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{2} - \frac{kx-ny}{(n+x)(k+y)}\right)$$
$$\geq \varepsilon_0 \left(\frac{t}{2} - |x-y|\right) = \varepsilon_0 \left(t - 2|x-y|\right) = F_{f(x),f(y)}(t).$$

Kako $\varphi_{n,k} = \varphi$ ispunjava sve uslove Teoreme 4.1.1. imamo da preslikavanja $f(x)$ i $g_n(x), n \in \mathbb{N}$ imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. Jasno je da je ova tačka $x = 0$.

Razmotrimo još jednu, direktnu, posledicu Teoreme 4.1.1.

Posledica 4.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T i neka su f i g R-slabo komutativna preslikavanja iz X u X, f neprekidna funkcija, $g(X)$ verovatnosno ograničen skup i $g(X) \subseteq f(X)$, tako da je ispunjen uslov*

$$F_{g(x),g(y)}(\varphi(t)) \geq F_{f(x),f(y)}(t) \tag{4.15}$$

za neku neprekidnu, neopadajuću funkciju $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, za koju važi da je $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$. Tada f i g imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz. Uzmimo u Teoremi 4.1.1. da je $m_i = 1, g = g_n$ i $\varphi_{i,j} = \varphi$ za svako $i, j, n \in \mathbb{N}$. Iz verovatnosne ograničenosti $g(X)$ sledi da je skup S iz (4.3) verovatnosno ograničen za svako $u_0 \in X$. Dakle, ispunjeni su svi uslovi Teoreme 4.1.1. □

Tvrđenje Teoreme 3.1.1. koja je objavljena u koautorskom radu [26] na intuicionističkim fazi metričkim prostorima, iskazaćemo na verovatnosnim Mengerovim prostorima. Dokaz narednog tvrđenja je sličan dokazu Teoreme 3.1.2. uz izvesne modifikacije određene strukturom verovatnosnih Mengerovih prostora.

Teorema 4.1.2. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T i neka su f i g R-slabo komutativna preslikavanja iz X u X, g neprekidna funkcija, $g(X)$ verovatnosno ograničen skup i $g(X) \subseteq f(X)$, tako da je ispunjen uslov*

$$F_{g(x),g(y)}(\varphi(t)) \geq F_{f(x),f(y)}(t) \tag{4.16}$$

za neku neprekidnu, neopadajuću funkciju $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$*, za koju važi* $\varphi(t) < t$ *za svako* $t > 0$*. Tada* f *i* g *imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.*

Napomena 4.1.1. Tvrđenje Posledice 4.1.3. Teoreme 4.1.1. takođe možemo dobiti i kao posledicu Teoreme 4.1.2. Naime, iz neprekidnosti funkcije f i uslova (4.15) sledi neprekidnost funkcije g.

Primer 4.1.2. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na $X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ dat u Primeru 2.1.2. Jasno je da funkcije $f(x) = 2x, g(x) = g_1(x) = \frac{x}{1+x}$ i $\varphi(t)$ iz Primera 4.1.1. ispunjavaju sve uslove Teoreme 4.1.2.

4.2 Zajedničke fiksne tačke četiri preslikavanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima

Koncept kompatibilnih preslikavanja na metričkim prostorima, koji uopštava komutativnost, uveo je G. Jungck 1986. godine u radu [31]. Na verovatnosnim Mengerovim prostorima ovaj koncept je preneo S.N. Mishra 1991. godine u radu [53]. B. Singh i S. Jain 2005. godine u radu [76] uvode klasu slabo kompatibilnih preslikavanja na verovatnosnim Mengerovim prostorima, koja je šira od klase kompatibilnih preslikavanja.

Definicija 4.2.1. [53] Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor i S i R preslikavanja iz X u X. Kažemo da su preslikavanja S i R kompatibilna ako je

$$\liminf_{n\to\infty} F_{SRx_n, RSx_n}(t) = 1 \quad \text{za svako} \quad t > 0, \tag{4.17}$$

ispunjeno za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X za koji važi: $\lim\limits_{n\to\infty} Sx_n = \lim\limits_{n\to\infty} Rx_n = z \in X$.

Definicija 4.2.2. [76] Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor i S i R preslikavanja iz X u X. Kažemo da su preslikavanja S i R slabo kompatiblna ako je ispunjeno $SRz = RSz$ kad god je $z \in X$ takvo da je $Sz = Rz$.

Jasno je da je klasa kompatibilnih preslikavanja šira od klase komutativnih preslikavanja. Zaista, svaki par komutativnih preslikavanja je takođe kompatibilan, dok obrnuto nije tačno. Takođe, važi i naredno tvrđenje.

Lema 4.2.1. [76] *Svaki par kompatibilnih preslikavanja na verovatnosnom Mengerovom prostoru $(X, \mathcal{F}, T)$ je slabo kompatibilan.*

Dokaz. Pretpostavimo da su preslikavanja S i R kompatibilna na X. Neka je $Sz = Rz$, za neko $z \in X$. Razmotrimo konstantan niz $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = z$. Važi da je $\lim_{n\to\infty} Sz_n = Sz$ i $\lim_{n\to\infty} Rz_n = Rz$. Kako su S i R kompatibilna preslikavanja imamo da važi $F_{SRz,RSz}(t) = 1$ za svako $t > 0$, odnosno $SRz = RSz$, što znači da su preslikavanja S i R slabo kompatibilna. $\square$

Da obrnuto ne važi pokazuje naredni primer.

Primer 4.2.1. [76] Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na $X = [0, 2]$ iz Primera 2.1.2. Neka su

$$Ax = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}, \qquad Sx = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Za niz $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ imamo da je $\liminf_{n\to\infty} F_{Ax_n,1}(t) = H(t) = 1$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 1$. Na sličan način dobijamo da je $\lim_{n\to\infty} Sx_n = 1$. Takođe, imamo da važi $\liminf_{n\to\infty} F_{ASx_n,SAx_n}(t) = H(t-1) \neq 1$, za svako $t > 0$, te preslikavanja A i S nisu kompatibilna.

S druge strane, skup tačaka koincidencije je $[1, 2]$, tj. za svako $x \in [1, 2]$ imamo da je $Ax = Sx = 2$ i $ASX = A(2) = 2 = S(2) = SAx$. Dakle, preslikavanja A i S su slabo kompatibilna.

Napomena 4.2.1. Neka su S i R kompatibilna preslikavanja na verovatnosnom Mengerovom prostoru $(X, \mathcal{F}, T)$. Tada važi:

Ako za neko $z \in X$ važi $Sz = Rz$ tada $SRz = RSz$.

Dokaz. Ovo sledi direktno iz Definicije 4.2.1. uzimajući da je $x_n = z$ za svako $n \in \mathbb{N}$ za neku tačku $z \in X$. $\square$

Lema 4.2.2. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T. Neka su S i R kompatibilna preslikavanja na X i neka Sx_n i Rx_n konvergiraju ka nekoj tački $z \in X$ za niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u X. Ako je S neprekidno pres-*

likavanje, tada je

$$\lim_{n\to\infty} RSx_n = Sz.$$

Dokaz. Neka su $\mu \in (0,1)$ i $t > 0$ proizvoljni. Kako je T neprekidna t-norma, za svako $\mu \in (0,1)$ postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da važi da je

$$T(1-\lambda, 1-\lambda) > 1-\mu.$$

Kako su S i R kompatibilni, dobijamo sa važi $F_{RSx_n,SRx_n}\left(\frac{t}{2}\right) > 1-\lambda$. Takođe, Sx_n i Rx_n konvergiraju ka z, te je $F_{Rx_n,z}\left(\frac{t}{2}\right) > 1-\lambda$ i $F_{Sx_n,z}\left(\frac{t}{2}\right) > 1-\lambda$. Iz neprekidnosti preslikavanja S sledi da važi

$$\begin{aligned} F_{RSx_n,Sz}(t) &\geq T\left(F_{RSx_n,SRx_n}\left(\frac{t}{2}\right), F_{SRx_n,Sz}\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &\geq T(1-\lambda, 1-\lambda) > 1-\mu. \end{aligned}$$

Uzimajući da $\mu \to 0$ dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} F_{RSx_n,Sz}(t) = 1,$$

tj. $\lim_{n\to\infty} RSx_n = Sz.$ □

Naredna teorema o zajedničkoj fiksnoj tački za kompatibilna preslikavanja sa nelinearnim kontraktivnim uslovom na $\mathscr{L}$-fazi metričkim prostorima dokazana je od strane autora u koautorskom radu objavljenom 2009. godine.

Teorema 4.2.1. [27] *Neka je $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-fazi metrički prostor kompletan u odnosu na negaciju $\mathscr{N}$ koji ispunjava (2.2) sa neprekidnom trougaonom normom $\mathscr{T}$. Neka su A, B, S i R preslikavanja iz X u X takva da su $A(X)$ i $B(X)$ $\mathscr{L}F$-strogo ograničeni skupovi i neka su ispunjeni uslovi:*

(a) $A(X) \subseteq R(X), B(X) \subseteq S(X)$,
(b) Jedno od preslikavanja A, B, S i R je neprekidno,
(c) Par $\{A, S\}$ je kompatibilan i par $\{B, R\}$ je slabo kompatibilan,
(d) Postoji neprekidna, neopadajuća funkcija $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, koja ispunjava $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$ i

$$\mathscr{M}(Ax, By, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(Sx, Ry, t), \quad \text{za svako } t > 0 \text{ i } x, y \in X. \tag{4.18}$$

Tada A, B, S i R imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Ovde će biti iskazano i dokazano analogno tvrđenje postojanju zajedničke fiksne tačke za dva para kompatibilnih preslikavanja sa nelinearnim kontraktivnim uslovom na verovatnosnim Mengerovim prostorima. Dokaz prethodne teoreme je sličan dokazu narednog tvrđenja sa odgovarajućim modifikacijama koje zahteva struktura $\mathscr{L}$-fazi metričkih prostora.

Teorema 4.2.2. *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-normom T. Neka su A, B, S i R preslikavanja iz X u X takva da su $A(X)$ i $B(X)$ verovatnosno ograničeni skupovi i neka su ispunjeni uslovi:*

(a) $A(X) \subseteq R(X), B(X) \subseteq S(X)$,
(b) Jedno od preslikavanja A, B, S i R je neprekidno,
(c) Par $\{A, S\}$ je kompatibilan i par $\{B, R\}$ je slabo kompatibilan,
(d) Postoji neprekidna, neopadajuća funkcija $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, za koju važi $\varphi(t) < t$ za svako $t > 0$ i

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) \geq F_{Sx,Ry}(t), \quad \text{za svako } \ t > 0 \text{ i } x, y \in X. \tag{4.19}$$

Tada A, B, S i R imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Iz *(a)* sledi da postoji $x_1 \in X$ tako da je $A(x_0) = R(x_1)$ i za ovakvu tačku x_1 postoji $x_2 \in X$ tako da je $B(x_1) = S(x_2)$. Indukcijom možemo da konstruišemo niz $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na sledeći način:

$$\begin{cases} z_{2n-1} = Rx_{2n-1} = Ax_{2n-2} \\ z_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n-1} \end{cases} \tag{4.20}$$

Posmatrajmo niz nepraznih, zatvorenih, umetnutih skupova definisanih sa

$$F_n = \overline{\{z_n, z_{n+1}, \ldots\}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pokazaćemo da familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni fazi dijametar nula.

U tom smislu, neka su $\mu \in (0,1)$ i $t > 0$ proizvoljni. Iz $F_k \subseteq \overline{A(X)} \cup \overline{B(X)}$ sledi da je F_k verovatnosno ograničen skup za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$. To znači da postoji $t_0 > 0$ tako da je

$$F_{x,y}(t_0) > 1 - \mu \ \text{ za svako } x, y \in F_k. \tag{4.21}$$

Iz $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t_0)=0$ sledi da postoji $m\in\mathbb{N}$ tako da je $\varphi^m(t_0)<t$. Neka je $n=m+k$ i neka su $x,y\in F_n$ proizvoljni. Postoje nizovi $\{z_{n(i)}\}$, $\{z_{n(j)}\}$ iz $F_n \quad (n(i),n(j)\geq n \quad i,j\in\mathbb{N})$ tako da je $\lim_{i\to\infty}z_{n(i)}=x$ i $\lim_{j\to\infty}z_{n(j)}=y$.

I slučaj. Pretpostavimo da je $n(i)\in 2\mathbb{N}-1$ i $n(j)\in 2\mathbb{N}$ ili obrnuto za dovoljno velike $i,j\in\mathbb{N}$ tj. $z_{n(i)}=Ax_{n(i)-1}$ i $z_{n(j)}=Bx_{n(j)-1}$.

Iz (4.19) imamo da je

$$\begin{aligned}F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(\varphi(t)) &= F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(j)-1}}(\varphi(t))\\ &\geq F_{Sx_{n(i)-1},Rx_{n(j)-1}}(t)=F_{Ax_{n(i)-2},Bx_{n(j)-2}}(t)\\ &= F_{z_{n(i)-1},z_{n(j)-1}}(t).\end{aligned}$$

Dakle, indukcijom imamo da je

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(\varphi^m(t))\geq F_{z_{n(i)-m},z_{n(j)-m}}(t). \tag{4.22}$$

Kako je $\varphi^m(t_0)<t$ i $F_{x,y}(\cdot)$ je neopadajuća funkcija, iz poslednjih nejednakosti sledi da je

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t)\geq F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(\varphi^m(t_0))\geq F_{z_{n(i)-m},z_{n(j)-m}}(t_0).$$

Kako su $\{z_{n(i)-m}\}$, $\{z_{n(j)-m}\}$ nizovi iz F_k, iz (4.21) sledi da je

$$F_{z_{n(i)-m},z_{n(j)-m}}(t_0)>1-\mu \quad \text{za svako} \quad i,j\in\mathbb{N}, \tag{4.23}$$

odnosno, važi

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t)\geq 1-\mu, \quad \text{za } n(i)\in 2\mathbb{N}-1, n(j)\in 2\mathbb{N}, \text{ ili obrnuto.} \tag{4.24}$$

II slučaj. Neka su oba $n(i)$ i $n(j)$ iz skupa $2\mathbb{N}-1$ i neka je $n(l)\geq n$ proizvoljan prirodan broj i $n(l)\in 2\mathbb{N}$. Kako je t-norme T neprekidna, to postoji $\lambda\in(0,1)$ tako da je

$$T(1-\lambda,1-\lambda)>1-\mu. \tag{4.25}$$

Tada iz (4.24) sledi da važi

$$F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t)>1-\lambda.$$

Kako je funkcija raspodele neprekidna sleva, postoji $\varepsilon>0$ tako da važi

$$F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t-\varepsilon)\geq 1-\lambda.$$

Iz $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t_0) = 0$ sledi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\varphi^{m_0}(t_0) < \varepsilon$. Neka je $n_1 = \max\{m, m_0\}$. Tada važi

$$F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t - \varphi^{n_1}(t_0)) \geq F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t - \varepsilon).$$

Takođe, iz (4.24), $\varphi^{n_1}(t_0) \leq t$ i zbog činjenice da je $F_{x,y}(\cdot)$ neopadajuća funkcija sledi da važi

$$F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(l)-1}}(t) \geq F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(l)-1}}(\varphi^{n_1}(t_0)) \geq 1 - \lambda.$$

Iz prethodnog i iz (4.25) zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) &= F_{Ax_{n(i)-1},Ax_{n(j)-1}}(t) \\ &\geq T\left(F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(l)-1}}(\varphi^{n_1}(t_0)), F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t - \varphi^{n_1}(t_0))\right) \\ &\geq T\left(1-\lambda, 1-\lambda\right) > 1 - \mu, \end{aligned}$$

odnosno, važi

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq 1 - \mu, \quad \text{za } n(i), n(j) \in 2\mathbb{N} - 1. \tag{4.26}$$

Analogno dokazujemo nejednakost (4.26) u slučaju kada $n(i), n(j) \in 2\mathbb{N}$.

Konačno, iz (4.24) i (4.26) zaključujemo da je ispunjeno

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq 1 - \mu$$

za svako $i, j \in \mathbb{N}$. Uzimajući $\liminf$ kad $i, j \to \infty$, i primenjujući Lemu 2.1.3. dobijamo da je $F_{x,y}(t) > 1 - \mu$ za svako $x, y \in F_n$ tj. familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni dijametar nula.

Primenjujući Teoremu 2.1.1. zaključujemo da ova familija ima neprazan presek, koji se sastoji od tačno jedne tačke z. Pošto familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni dijametar nula i $z \in F_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ tada za svako $\mu \in (0,1)$ i svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi da je $F_{z_n,z}(t) > 1 - \mu$. Odavde sledi da za svako $\mu \in (0,1)$ važi

$$\liminf_{n\to\infty} F_{z_n,z}(t) > 1 - \mu.$$

Uzimajući $\mu \to 0$ dobijamo da je

$$\liminf_{n\to\infty} F_{z_n,z}(t) = 1$$

tj. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Iz definicije nizova $\{Ax_{2n-2}\}, \{Sx_{2n}\}, \{Bx_{2n-1}\}$ i $\{R_{2n-1}\}$ sledi da svaki od ovih nizova konvergira ka z.

Dokažimo da je z zajednička fiksna tačka preslikavanja A, B, S i R. U tu svrhu pretpostavimo da je S neprekidna. Tada važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} SSx_{2n} = Sz$. Iz kompatibilnosti para $\{A, S\}$ i Leme 4.2.2. sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_{2n} = Sz$. Koristeći uslov (4.19) dobijamo da važi sledeća nejednakost:

$$F_{ASx_{2n},Bx_{2n-1}}(\varphi(t)) \geq F_{SSx_{2n},Rx_{2n-1}}(t).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ dobijamo

$$F_{Sz,z}(\varphi(t)) \geq F_{Sz,z}(t).$$

Iz Leme 4.1.1. sledi da je $Sz = z$. Koristeći uslov (4.19) ponovo dobijamo da je

$$F_{Az,Bx_{2n-1}}(\varphi(t)) \geq F_{Sz,Rx_{2n-1}}(t)$$

i uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo

$$F_{Az,z}(\varphi(t)) \geq F_{Sz,z}(t) = F_{z,z}(t) = 1,$$

odnosno $Az = z$. Kako je $A(X) \subseteq R(X)$, to postoji tačka $u \in X$ takva da je $z = Az = Ru$ i važi

$$F_{z,Bu}(\varphi(t)) = F_{Az,Bu}(\varphi(t)) \geq F_{Sz,Ru}(t) = F_{z,z}(t) = 1,$$

što znači da je $Bu = z$. Iz slabe kompatibilnosti para $\{B, R\}$ sledi da je $Rz = RBu = BRu = Bz$. Takođe, iz (4.19) sledi da je

$$F_{Ax_{2n},Bz}(\varphi(t)) \geq F_{Sx_{2n},Rz}(t).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ i primenjujući Lemu 4.1.1., dobijamo da je $Bz = z$. Stoga, z je zajednička fiksna tačka preslikavanja A, B, S i R. Ako je R neprekidna funkcija tada je dokaz analogan prethodnom.

Sada pretpostavimo da je A neprekidna funkcija. Tada važi $F_{AAx_{2n},Az}(t) > 1-\mu$. Iz kompatibilnosti $\{A, S\}$ i Leme 4.2.2. sledi da je $F_{SAx_{2n},Az}(t) > 1 - \mu$. Koristeći uslov (4.19) imamo da je

$$F_{AAx_{2n},Bx_{2n-1}}(\varphi(t)) \geq F_{SAx_{2n},Rx_{2n-1}}(t).$$

Uzimajući lim inf kad $n \to \infty$ dobijamo da je

$$F_{Az,z}(\varphi(t)) \geq F_{Az,z}(t).$$

Primenjujući Lemu 4.1.1. dobijamo da je $Az = z$. Kako je $A(X) \subseteq R(X)$, to postoji tačka $v \in X$ takva da je $z = Az = Rv$. Iz $F_{Az,Bv}(\varphi(t))$ sledi da važi

$$F_{AAx_{2n},Bv}(\varphi(t)) \geq F_{SAx_{2n},Rv}(t).$$

Uzimajući lim inf kad $n \to \infty$ dobijamo

$$F_{z,Bv}(\varphi(t)) = F_{Az,Bv}(\varphi(t)) \geq F_{Az,Rv}(t) = F_{z,z}(t) = 1,$$

što znači da je $z = Bv$. Kako su $\{B, R\}$ slabo kompatibilni, dobijamo da je $Rz = RBv = BRv = Bz$. Takođe, koristeći (4.19) dobijamo da je

$$F_{Ax_{2n},Bz}(\varphi(t)) \geq F_{Sx_{2n},Rz}(t).$$

Uzimajući lim inf kad $n \to \infty$ dobijamo

$$F_{z,Bz}(\varphi(t) \geq F_{z,Rz}(t) = F_{z,Bz}(t),$$

odnosno, $z = Bz = Rz$. Kako je $B(X) \subseteq S(X)$, to postoji tačka $w \in X$ takva da je $z = Bz = Sw$. Iz (4.19) dobijamo

$$F_{Aw,z}(\varphi(t)) = F_{Aw,Bz}(\varphi(t)) \geq F_{Sw,Rz}(t) = F_{Sw,Bz}(t) = F_{z,z}(t) = 1,$$

što znači da je $Aw = z$. Pošto su $\{A, S\}$ kompatibilni i $z = Aw = Sw$, iz Napomene 4.2.1. imamo da je $Az = ASw = SAw = Sz$. Stoga, z je zajednička fiksna tačka za preslikavanja A, B, S i R. Ako je B neprekidna funkcija tada je dokaz analogan prethodnom.

Pokažimo da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka. U tom cilju pretpostavimo da postoji još jedna zajednička fiksna tačka y. Iz (4.19) sledi da je

$$F_{z,y}(\varphi(t)) = F_{Az,By}(\varphi(t)) \geq F_{Sz,Ry}(t) = F_{z,y}(t).$$

Konačno, iz Leme 4.1.1. sledi da je $z = y$. □

Primer 4.2.2. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na $X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ dat u primeru 2.1.2., tj. $F_{x,y}(t) = H(t - |x - y|)$. Neka je

$$Ax = \frac{x}{1+x}, \qquad Sx = 2x,$$

$$Bx = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \qquad Tx = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

i

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/(1+t), & t \in (0,1] \\ t/2, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Pokazaćemo da su ispunjeni svi uslovi Teoreme 4.2.2. Najpre primetimo da je $A(X) = [0,1) \subset [0,2] = R(X)$ i $B(X) = [0,\frac{1}{2}) \subset [0,+\infty) = S(X)$. Skupovi $A(X)$ i $B(X)$ su metrički ograničeni, pa su i verovatnosno ograničeni kao podskupovi verovatnosnog Mengerovog prostora. Kako je $ASx = \frac{2x}{1+2x}$ i $SAx = \frac{2x}{1+x}$ zaključujemo da A i S nisu komutativni.

Pokazaćemo da su A i S kompatibilna preslikavanja. Primetimo da važi

$$F_{ASx,SAx}(t) = \varepsilon_0\left(t - \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}\right) \quad \text{i} \quad F_{Ax,Sx}(t) = \varepsilon_0\left(t - \frac{2x^2+x}{1+x}\right)$$

Kako $\frac{2x^2}{(1+x)(1+2x)} \leq \frac{x+2x^2}{1+x}$ važi za svako $x \geq 0$ imamo da je

$$F_{ASx,SAx}(t) \geq F_{Sx,Ax}(t)$$

za sve $x, t \geq 0$. Za niz $\{x_n\}$ u $[0,+\infty)$ takav da je $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z$, iz prethodne nejednakosti sledi da je $\liminf_{n\to\infty} F_{ASx_n,SAx_n}(t) = 1$.

Pokažimo sada da su preslikavanja B i R slabo kompatibilna. Ako je $Bz = Rz$ tada je $z = 0$ ili $z > 1$. U slučaju da je $z = 0$ imamo da je $RB(0) = BR(0) = 0$. S druge strane, ako je $z > 1$ tada je $RB(z) = R(0) = 0$ i $BR(z) = B(0) = 0$, tj. uslov $RBz = BRz$ iz Definicije 4.2.2. je ispunjen.

Dokažimo sada da je ispunjen i uslov (4.19). Primetimo da za sve $x, y \in X$ važi da je $\frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq 1$. Razmotrićemo dva slučaja.

I slučaj. Neka je $0 < t \leq 1$ i primetimo da je $1 + t \leq 2$.

a) Za $x, y \in [0,1]$ imamo da je

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) = H\left(\frac{t}{1+t} - \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}\right) \geq H\left(\frac{t}{2} - |x-y|\right)$$
$$\geq H(t - 2|x-y|) = F_{Sx,Ry}(t).$$

b) Za $x > 1$ i $y > 1$ imamo da je

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) = H\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{(1+x)}\right) \geq H\left(\frac{t}{2} - x\right)$$
$$\geq H(t - 2x) = F_{Sx,Ry}(t).$$

c) Ako je $x \in [0, 1]$ i $y > 1$ dokaz se svodi na slučaj pod b). Ako je $x > 1$ i $y \in [0, 1]$ dokaz se svodi na slučaj pod a).

II slučaj. Neka je $t \geq 1$.

d) Za $x, y \in [0, 1]$ imamo da je

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) = H\left(\frac{t}{2} - \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}\right) \geq H\left(\frac{t}{2} - |x-y|\right)$$
$$\geq H(t - 2|x-y|) = F_{Sx,Ry}(t).$$

e) Za $x > 1$ i $y > 1$ imamo da je

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) = H\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{(1+x)}\right) \geq H\left(\frac{t}{2} - x\right)$$
$$\geq H(t - 2x) = F_{Sx,Ry}(t).$$

f) Ako je $x \in [0, 1]$ i $y > 1$ dokaz se svodi na slučja pod e). Ako je $x > 1$ i $y \in [0, 1]$ dokaz se svodi na slučaj pod d).

Iz prethodnog zaključujemo da je uslov (4.19) ispunjen. Kako $\varphi(t)$ ispunjava sve uslove Teoreme 4.2.2. imamo da sva četiri preslikavanja imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. Nije teško videti da je to tačka $x = 0$.

Dokazaćemo teoremu o postojanju fiksne tačke za dva para kompatibilnih preslikavanja sa nelinearnim kontraktivnim uslovom koji obuhvata Φ-funkcije na verovatnosnim Mengerovim prostorima sa t-normom min. Ovaj rezultat je samostalni rad autora objavljen u [6].

Teorema 4.2.3. [6] *Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor sa neprekidnom t-norm T koja isunjava uslov $T(a, a) \geq a$ za svako $a \in [0, 1]$, neka su A, B, S i R preslikavanja iz X u X i postoji $x_0 \in X$ tako da su orbite*

$\mathcal{O}(A, x_0) = \{A^n x_0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ i $\mathcal{O}(B, x_0) = \{B^n x_0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ verovatnosno ograničeni skupovi. Neka su ispunjeni naredni uslovi:

(a) $A(X) \subseteq R(X), B(X) \subseteq S(X)$,

(b) Jedno od preslikavanja A i S je neprekidno,

(c) Par $\{A, S\}$ je kompatibilan, $\{B, R\}$ je slabo kompatibilan,

(d) Postoji Φ-funkcija ϕ takva da je ispunjeno

$$F_{Ax,By}(\phi(t)) \geq F_{Sx,Ry}(\phi(t/c)), \tag{4.27}$$

za svako $t > 0$ i $x, y \in X$, i za neko $c \in (0, 1)$. Tada preslikavanja A, B, S i R imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku.

Dokaz. Iz (a) sledi da za svako x_0 postoji $x_1 \in X$ tako da je $A(x_0) = R(x_1)$ i za takvu tačku x_1 postoji $x_2 \in X$ tako da je $B(x_1) = S(x_2)$. Indukcijom možemo konstruisati niz $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} z_{2n-1} = Rx_{2n-1} = Ax_{2n-2} \\ z_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n-1} \end{cases}. \tag{4.28}$$

Razmotrimo niz umetnutih, nepraznih, zatvorenih skupova definisanih sa

$$F_n = \overline{\{z_n, z_{n+1}, \ldots\}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokazaćemo da familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni dijametar nula.

Neka su $\lambda \in (0, 1)$ i $t > 0$ proizvoljni. Iz $F_k \subseteq \overline{\mathcal{O}(A, x_0)} \cup \overline{\mathcal{O}(B, x_0)}$, sledi da je F_k verovatnosno ograničen skup za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$.

Neka su $x, y \in F_k$ proizvoljni. Tada postoje nizovi $\{z_{n(i)}\}$, $\{z_{n(j)}\}$ u F_k ($n(i), n(j) \geq n$, $i, j \in \mathbb{N}$) takvi da je $\lim\limits_{i\to\infty} z_{n(i)} = x$ i $\lim\limits_{j\to\infty} z_{n(j)} = y$.

I slučaj. Pretpostavimo da je $n(i) \in 2\mathbb{N} - 1$ i $n(j) \in 2\mathbb{N}$ ili obrnuto, za dovoljno velike $i, j \in \mathbb{N}$, tj. $z_{n(i)} = Ax_{n(i)-1}$ i $z_{n(j)} = Bx_{n(j)-1}$.

Kako je $\phi(0) = 0$ i ϕ je neprekidna u 0, postoji $r > 0$ tako da je $t > \phi(r) > 0$. Iz (4.27) i činjenice da je F neopadajuća sledi da važi

$$\begin{aligned} F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) &= F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(j)-1}}(t) \geq F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(j)-1}}(\phi(r)) \\ &\geq F_{Sx_{n(i)-1},Rx_{n(j)-1}}(\phi(r/c)) = F_{Ax_{n(j)-2},Bx_{n(i)-2}}(\phi(r/c)) \\ &= F_{z_{n(i)-1},z_{n(j)-1}}(\phi(r/c)). \end{aligned}$$

Indukcijom, za $m \in \mathbb{N}$, $(m \leq n(i), m \leq n(j))$ dobijamo da važi

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq F_{z_{n(i)-m},z_{n(j)-m}}(\phi(r/c^m)).$$

Kako su $\{z_{n(i)-m}\}, \{z_{n(j)-m}\}$ nizovi u F_k imamo da

$$F_{z_{n(i)-m},z_{n(j)-m}}(\phi(r/c^m)) \geq \delta_{F_k}(\phi(r/c^m))$$

važi. Kako je F_k verovatnosno ograničen i ϕ je Φ-funkcija, puštajući da $m \to \infty$ dobijamo

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq \delta_{F_k}(\phi(r/c^m)) \to 1.$$

Sledi da je

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) > 1 - \lambda, \quad \text{za } n(i) \in 2\mathbb{N} - 1, n(j) \in 2\mathbb{N}, \text{ ili obrnuto.} \tag{4.29}$$

II slučaj. Pretpostavimo da su i $n(i)$ i $n(j)$ iz skupa $2\mathbb{N}-1$ i neka je $n(l) \geq k, n(l) \in \mathbb{N}$ proizvoljan takav da je $n(l) \in 2\mathbb{N}$.

Analogno I slučaju, zamenjujući t sa $\frac{t}{2}$, možemo pokazati da važi

$$F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t/2) > 1 - \lambda \ \text{ i } \ F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(l)-1}}(t/2) > 1 - \lambda.$$

Iz Leme 3.3.2. i prethodnog zaključujemo da

$$\begin{aligned} F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) &= F_{Ax_{n(i)-1},Ax_{n(j)-1}}(t) \\ &\geq \min\left\{F_{Ax_{n(i)-1},Bx_{n(l)-1}}(t/2), F_{Ax_{n(j)-1},Bx_{n(l)-1}}(t/2)\right\} \\ &\geq \min\{1-\lambda, 1-\lambda\} = 1 - \lambda \end{aligned}$$

važi, tj.

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq 1 - \lambda, \qquad \text{for } n(i), n(j) \in 2\mathbb{N} - 1. \tag{4.30}$$

Slično možemo da pokažemo da (4.30) važi za $n(i), n(j) \in 2\mathbb{N}$.

Konačno, iz (4.29) i (4.30) zaključujemo da

$$F_{z_{n(i)},z_{n(j)}}(t) \geq 1 - \lambda$$

važi za svako $i, j \in \mathbb{N}$. Uzimajući $\liminf$ kada $i, j \to \infty$ i primenjujući Lemu 2.1.3. imamo da je $F_{x,y}(t) > 1-\lambda$ za sve $x, y \in F_k$. Iz Leme 2.1.5. sledi da familija skupova $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni dijametar nula.

Primenjujući Teoremu 2.1.1. zaključujemo da ova familija ima neprazan presek koji se sastoji iz tačno jedne tačke z. Kako familija $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima verovatnosni dijametar nula i $z \in F_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada za svako $\lambda \in (0,1)$ i za svako $t > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ imamo da je $F_{z_n,z}(t) > 1-\lambda$. Odavde sledi da za svako $\lambda \in (0,1)$ važi da je $\liminf\limits_{n\to\infty} F_{z_n,z}(t) > 1-\lambda$. Uzimajući da $\lambda \to 0$ dobijamo da važi

$$\liminf_{n\to\infty} F_{z_n,z}(t) = 1$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Iz definicije nizova $\{Ax_{2n-2}\}, \{Sx_{2n}\}, \{Bx_{2n-1}\}$ i $\{R_{2n-1}\}$ sledi da svaki od ovih nizova konvergira ka z.

Pokazaćemo da je z zajednička fiksna tačka preslikavanja A, B, S i R. Najpre pretpostavimo da je S neprekidna funkcija. Tada imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} SSx_{2n} = Sz$. Iz kompatibilnosti para $\{A, S\}$ i iz Leme 4.2.2. sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_{2n} = Sz$.

Iz osobina funkcije ϕ sledi da postoji $r > 0$ takvo da je $t > \phi(r) > 0$. Iz uslova (4.27) dobijamo da važe naredne nejednakosti:

$$F_{ASx_{2n},Bx_{2n-1}}(t) \geq F_{ASx_{2n},Bx_{2n-1}}(\phi(r)) \geq F_{SSx_{2n},Rx_{2n-1}}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo da važi

$$F_{Sz,z}(\phi(r)) \geq F_{Sz,z}(\phi(r/c)).$$

Iz Leme 3.3.1. sledi da je $Sz = z$. Primenjujući ponovo uslov (4.27) dobijamo da važi

$$F_{Az,Bx_{2n-1}}(t) \geq F_{Az,Bx_{2n-1}}(\phi(r)) \geq F_{Sz,Rx_{2n-1}}(\phi(r/c))$$

i uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ dobijamo

$$F_{Az,z}(t) \geq F_{Sz,z}(\phi(r/c)) = F_{z,z}(\phi(r/c)) = 1.$$

Ovo znači da je $Az = z$. Kako je $A(X) \subseteq R(X)$, postoji tačka $u \in X$ takva da je $z = Az = Ru$ i imamo da je

$$F_{z,Bu}(t) \geq F_{z,Bu}(\phi(r)) = F_{Az,Bu}(\phi(r)) \geq F_{Sz,Ru}(\phi(r/c)) = F_{z,z}(\phi(r/c)) = 1,$$

što znači da je $Bu = z$. Iz slabe kompatibilnosti para $\{B, R\}$ sledi da je $Rz = RBu = BRu = Bz$. Takođe, iz (4.27) sledi da važi

$$F_{Ax_{2n},Bz}(t) \geq F_{Ax_{2n},Bz}(\phi(r)) \geq F_{Sx_{2n},Rz}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kada $n \to \infty$ i iz Leme 3.3.1. imamo da je $Bz = z$. Dakle, z je zajednička fiksna tačka preslikavanja A, B, S i R.

Pretpostavimo sada da je A neprekidno preslikavanja. Tada imamo da važi $\lim_{n\to\infty} AAx_{2n} = Az$. Iz kompatibilnosti para $\{A, S\}$ i Leme 4.2.2. sledi da važi da je $\lim_{n\to\infty} SAx_{2n} = Az$. Iz uslova (4.27) dobijamo da je

$$F_{AAx_{2n},Bx_{2n-1}}(t) \geq F_{AAx_{2n},Bx_{2n-1}}(\phi(r)) \geq F_{SAx_{2n},Rx_{2n-1}}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ dobijamo da važi

$$F_{Az,z}(\phi(r)) \geq F_{Az,z}(\phi(r/c)).$$

Iz Leme 3.3.1. sledi da je $Az = z$. Kako je $A(X) \subseteq R(X)$, postoji tačka $v \in X$ takva da je $z = Az = Rv$. Iz (4.27) imamo da je

$$F_{AAx_{2n},Bv}(t) \geq F_{AAx_{2n},Bv}(\phi(r)) \geq F_{SAx_{2n},Rv}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo da je

$$F_{Az,Bv}(t) \geq F_{Az,Rv}(\phi(r/c)) = F_{z,z}(\phi(r/c)) = 1,$$

što znači da je $z = Bv$. Kako je par $\{B, R\}$ slabo kompatibilan imamo da je $Rz = RBv = BRv = Bz$. Takođe, koristeći uslov (4.27) dobijamo

$$F_{Ax_{2n},Bz}(t) \geq F_{Ax_{2n},Bz}(\phi(r)) \geq F_{Sx_{2n},Rz}(\phi(r/c)).$$

Uzimajući $\liminf$ kad $n \to \infty$ imamo da važi

$$F_{z,Bz}(\phi(r)) \geq F_{z,Rz}(\phi(r/c)) = F_{z,Bz}(\phi(r/c)).$$

Ovo znači da je $z = Bz = Rz$. Kako je $B(X) \subseteq S(X)$, postoji tačka $w \in X$ takva da je $z = Bz = Sw$. Iz (4.27) sledi da je

$$F_{Aw,z}(t) \geq F_{Aw,z}(\phi(r)) = F_{Aw,Bz}\phi(r)) \geq F_{Sw,Rz}(\phi(r/c)) = F_{z,z}(\phi(r/c)) = 1,$$

tj. $Aw = z$. Kakoje par $\{A, S\}$ kompatibilan i $z = Aw = Sw$, iz Napomene 4.2.1. imamo da je $Az = ASw = SAw = Sz$. Dakle, z je zajednička fiksna taǩa preslikavanja A, B, S i R.

Dokažimo da je z jedinstvena zajednička fiksna tačka. Pretpostavimo da postoji druga zajednička fiksna tačka y. Iz uslova (4.27) sledi da važi

$$F_{z,y}(t) \geq F_{z,y}(\phi(r)) = F_{Az,By}(\phi(r)) \geq F_{Sz,Ry}(\phi(r/c)) = F_{z,y}(\phi(r/c)).$$

Konačno, iz Leme 3.3.1. sledi da je $z = y$. $\square$

Primer 4.2.3. Neka je $(X, \mathcal{F}, T)$ kompletan verovatnosni Mengerov prostor indukovan metrikom $d(x, y) = |x - y|$ na $X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ i preslikavanja A, B, S i R preslikavanja data u Primeru dat u primeru 4.2.2. Neka je $\phi(t) = t$, $t > 0$, $c = \frac{1}{2}$. Primetimo da je ϕ Φ-funkcija.

Kako smo u Primeru 4.2.2. već pokazali da su preslikavanja A i S kompatibilna, a B i R slabo kompatibilna, ostaje još da pokažemo da je ispunjen uslov (4.27).

Primetimo da je za sve $x, y \in X$ ispunjeno da je $\frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq 1$.

a) Ako je $x, y \in [0, 1]$ imamo da važi

$$F_{Ax,By}(t) = H\left(t - \frac{|x - y|}{(1 + x)(1 + y)}\right) \geq H(2t - 2|x - y|) = F_{Sx,Ry}(2t).$$

b) Ako je $x > 1$ i $y > 1$ imamo da važi

$$F_{Ax,By}(t) = H\left(t - \frac{x}{1 + x}\right) \geq H(2t - 2x) = F_{Sx,Ry}(2t).$$

c) Ako je $x \in [0, 1]$ i $y > 1$ dokaz se svodi na slučaj pod b). Ako je $x > 1$ i $y \in [0, 1]$ dokaz se svodi na slučaj pod a).

Iz prethodnog zaključujemo da je uslov (4.27) ispunjen. Na osnovu Teoreme 4.2.3. imamo da sva četiri preslikavanja imaju jedinstvenu zajedničku fiksnu tačku. Nije teško videti da je to tačka $x = 0$.

Literatura

[1] H. Adibi, Y.J. Cho, D. ORegan, R. Saadati, Common fixed point theorems in L-fuzzy metric spaces. *Appl Math Comput* **182** (2006) 820-828.

[2] C. Alaca, D. Turkoglu i C. Yildiz, Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **29** (2006) 1073-1078.

[3] M. Arsenović, M. Dostanić i D. Jocić, Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, 1. izd. Beograd, Matematički fakultet Univerziteta, 1998, Studio plus, VI, 325 str.

[4] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets Syst.* **20** (1986) 87-96.

[5] N.A. Babačev, Fixed point theorem on probabilistic metric spaces with nonlinear generalized contractive type condition, *Appl. Anal. Discrete Math.*, DOI:10.2298/AADM120526012B

[6] N.A. Babačev, Common fixed point theorem for four mappings defined on Menger PM-spaces with nonlinear contractive type condition, *Novi Sad Journal of Mathematics*, u štampi.

[7] D. W. Boyd i J. S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969) 458–464.

[8] Y.J. Cho, H.K. Pathak, S.M. Kang i J.S.Jung, Common fixed points of compatible maps of type (β) on fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **93** (1998) 99–111.

[9] B.S. Choudhury i K. Das, A new contraction principle in Menger spaces, *Acta Mathematica Sinica* **24** (2008) 1379–1386.

[10] L.B. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974) 267–273.

[11] L.B. Ćirić, On fixed point of generalized contractions on probabilistic metric spaces, *Publ. Inst.* **18(32)** (1975) 71–78.

[12] L. B. Ćirić, S. N. Ješić i J. S. Ume, The existence theorems for fixed and periodic points of nonexpansive mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals*, **37** (2008) 781–791.

[13] L.B. Ćirić, M.M. Milovanović-Arandjelović, Common fixed point theorem for R-weak commuting mappings in Menger spaces, *J Indian Acad Math* **22** (2000) 199–210.

[14] G. Deschrijver i E.E. Kerre, On the relationship between some extensions of fuzzy set theory, *Fuzzy Sets Syst.* **133** (2003) 227–235.

[15] G. Deschrijver, C. Cornelis i E.E. Kerre, On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms, *IEEE Trans Fuzzy Syst* **12** (2004) 45–61.

[16] Egbert R.J., Products and quotients of probabilistic metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* **24** (1968) 437–55.

[17] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo* **22** (1906) 1–74.

[18] G. Iovane, Wave guiding and mirroring effects in stochastic self-similar and Cantorian E-infinity universe, *Chaos, Solitons & Fractals* **23** (2005) 691–700.

[19] O. Hadžić, Fixed point theory in probabilistic metric spaces, *Serbian Academy of Science and Arts, Branch in Novi Sad, University of Novi Sad, Institute of Mathematics* 1995 129 strana.

[20] O. Hadžić, Fixed point theory in topological vector spaces, *University of Novi Sad, Instutute of Mathematics,* (1984), 337 strana.

[21] O. Hadžić, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces with a convex structure, *Zb. rad. Prirod.-Mat.Fak., ser. Mat.* **18**(1988) 165–178.

[22] O. Hadžić, E. Pap, Fixed Point Theory in PM Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[23] S. N. Ješić, A common fixed point on transversal probabilistic spaces, *Math. Moravica* **6** (2002), 71–76.

[24] S. N. Ješić, Transverzalni prostori i fiksne tacke, doktorska disertacija, 103 str, Matematicki fakultet Beograd (2006).

[25] S. N. Ješić, Convex structure, normal structure and a fixed point theorem in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **41** (2009) 292–301.

[26] S. N. Ješić, N. A. Babačev, Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces and $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive condition, *Chaos, Solitons & Fractals*, **37** (2008) 675–687.

[27] S.N. Ješić, N.A. Babačev, D. O'Regan, R.M. Nikolić, Common fixed point theorems for four mappings defined on $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type condition, *Fixed Point Theory*, **10** (2009), 259–274.

[28] S. N. Ješić, D. O'Regan, N. A. Babačev, A Common Fixed Point Theorem for R-weakly commuting mappings in Probabilistic Spaces with Nonlinear Contractive Conditions, *Appl. Math. Comput.* **201** (2008) 272–281.

[29] S. N. Ješić, M. R. Tasković, N. A. Babačev, Transversal spaces and fixed point theorems, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* **1** (2007) 340–352.

[30] G. Jungck, Commuting maps and fixed points, *Am. Math. Mon.* **83** (1976) 261–263.

[31] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **9** (1986) 771–779.

[32] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points (2), *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **11** (1988) 285–288.

[33] Lj. Gajić, V. Rakočević, Pair of non self mappings and common fixed points, Appl. Math. Comput. 187 (2007) 999–1006.

[34] A. George i P. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **64** (1994) 395–399.

[35] A. George i P. Veeramani, On some analysis for fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **90** (1997) 365–368.

[36] J. Goguen, $\mathscr{L}$-fuzzy sets, *Jour. Math. Anal. Appl.* **18** (1967) 145–174.

[37] M. Grabiec, Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **27** (1988) 385–389.

[38] V. Gregori i S. Romaguera, Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.* **115** (2000) 485–489.

[39] V. Gregori, S. Romaguera i P. Veereamani, A note on intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals* **28** (2006) 902–905.

[40] V. Gregori i A. Sapena, On fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **125** (2002) 245–253.

[41] A.A. Ivanov, Isledovanii po topologii-II, *Zapiski naučnih seminarov lomi, Lenjingrad,* **66** (1976).

[42] O. Kaleva and S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **12** (1984) 215–229.

[43] M.S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, Fixed point theorems by altering distances between the points, *Bull. Austral. Math. Soc.* **30** (1984) 1–9.

[44] Y. Kijima i W. Takahashi, A fixed point theorem for nonexpansive mappings in metric spaces, *Kodai Math. Sem. Rep.* **21**(1969) 326–330.

[45] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly* **72**(1965) 1004–1006.

[46] I. Kramosil i J. Michalek, Fuzzy metric and statistical metrical spaces, *Kybernetica* **11** (1975) 326–334.

[47] I. B. Lacković, Teorija realnih konveksnih funkcija, Monografije Univer. u Beogradu, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 2007.

[48] Z. Lučić, Geometrija – euklidska i hiperbolička, 2. izd. Beograd, Total Design i Matematički fakultet, 1997, VII, 312 strana.

[49] M. Mateljević, Holomorphic fixed point theorem on Riemannian surfaces, *Math. Balk.* (New series) **12** (1-2) (1998) 1–4.

[50] R.D. Mauldin i C. Williams, Random recursive constructions, *T.A.M.S* **295** (1986) 325–346.

[51] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **28** (1942) 535–537.

[52] D. Miheţ, Altering distances in probabilistic Menger spaces, *Nonlinear Analysis* **71** (2009) 2734–2738.

[53] S. N. Mishra, Common fixed points of compatibile mappings in PM-spaces, *Math. Japon.* **36** (1991) 283–289.

[54] S. N. Mishra, N. Sharma, S. L. Singh, Common fixed points of maps on fuzzy metric spaces, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **17** (1994) 253–258.

[55] A. Mohamad, Fixed-point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **34** (2007) 1689–1695.

[56] S.V.R. Naidu, Some fixed point theorems in Metric Spaces by altering distances, Czech. Math. J. 53 (2003) 205-212.

[57] O'Regan D., Saadati R., Nonlinear contraction theorems in probabilistic spaces *Appl. Math. Comput.* **195** (2008) 86–93.

[58] R. P. Pant, Common Fixed Points of Noncommuting Mappings, *Jour. Math. Anal. Appl.* **188** (1994) 436–440.

[59] R. P. Pant and V. Pant, Common Fixed Points under Strict Contractive Conditions, *Jour. Math. Anal. Appl.* **248** (2000) 327–332.

[60] J. H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **22** (2004) 1039-1046.

[61] V. Rakočević, Quasi contraction nonself mappingss on Banach spaces and common fixed point theorems, *Publ. Math. Debrecen* **58** (3) (2001) 451–460.

[62] E. Rakotch, A note on contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962) 459–465.

[63] A. Razani, Existence of fixed point for the nonexpansive mapping of intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitions & Fractals* **30** (2006) 367–373.

[64] R. Saadati, Note to the paper "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces" and its generalization to $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitions & Fractals* **35** (2008) 176–180.

[65] R. Saadati, On the $\mathscr{L}$-fuzzy topological spaces, *Chaos, Solitions & Fractals* **37** (2008) 1419–1426.

[66] R. Saadati, A. Razani i H. Adibi, A common fixed point theorem in $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitions & Fractals* **33** (2007) 358–363.

[67] R. Saadati, S. Sedghi i N. Shobe, Modified intuitionistic fuzzy metric spaces and some fixed point theorems, *Chaos, Solitons & Fractals* **38** (2008) 36–47.

[68] K.P.R. Sastry, G.V.R. Babu, Some fixed point theorems by altering distances between the points, Ind. J. Pure. Appl. Math 30 (1999) 641-647.

[69] B. Schweizer i A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* **10** (1960) 415–417.

[70] B. Schweizer, A. Sklar, E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* **10** (1960) 673–675.

[71] V.M. Sehgal i A.T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings in PM-spaces, *Math. System Theory* **6** (1972) 97–102.

[72] S. Sessa, On a weak comutativity condition of mappings in fixed point considerations, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **27 (46)** (1982) 149–153.

[73] S. Sharma, Common fixed point in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **127** (2002) 345–352.

[74] H. Sherwood, Complete probabilistic metric spaces, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **20** (1971) 117–128.

[75] B.G. Sidharth, The new cosmos, *Chaos, Solitons & Fractals* **18** (2003) 197201.

[76] B. Singh i S. Jain, A fixed point theorem in Menger space through weak compatibility, *J. Math. Anal. Appl.* **301** (2005) 439-448.

[77] Bijendra Singh i M.S. Chauhan, Common fixed points of compatible maps in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **115** (2000) 471–475.

[78] G. Song, Comments on "A common fixed point theorem in a fuzzy metric space", *Fuzzy Sets Syst.* **135** (2003) 409–413.

[79] W. Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I *Kodai Math. Sem. Rep.* **22** (1970) 142–149.

[80] Y. Tanaka, Spacetime symmetry violation, configuration mixing model and E-infinity theory, *Chaos, Solitons & Fractals*, (2007) doi:10.1016/j.chaos.2007.05.001

[81] M. R. Tasković, Transversal spaces, *Math. Moravica* **2** (1998), 133–142.

[82] R. Vasuki, Common fixed points for R-weakly commuting maps in fuzzy metric spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* **30** (1999) 419–423.

[83] R. Vasuki i P. Veeramani, Fixed point theorems and Cauchy sequences in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst.* **135** (2003) 314–334.

[84] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. and Control* **89** (1965) 338–353.

Biografija kandidata

Mr Nataša Babačev rođena je 12.02.1978. godine u Beogradu. Osnovnu školu je završila 1992. godine u Beogradu, a 1996. godine III Beogradsku Gimnaziju, prirodno-matematički smer. Diplomirala je januara 2004. godine, na Matematičkom fakultetu, smer Numerička matematika i optimizacija.

Tokom studija učestvovala je u radu Letnje akademije septembra 2001. godine u Petrovcu u okviru kursa "Numeričke metode u inženjerstvu" održanom u organizaciji Univerziteta Erlangen - Nirnberg, Nemačka i Pakta za stabilnost Jugoistočne Evrope. Od maja do jula 2002. godine boravila je na Univerzitetu u Študgartu u grupi profesora H.J. Bungartz-a radeći na problemima paralelnog programiranja numeričkih simulacija u dinamici fluida.

Oktobra 2004. godine upisala je poslediplomske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, smer Matematičke metode u elektrotehnici i računarstvu. Magistarski rad "Nelinearna preslikavanja na fazi strukturama i prostiranja u beskonačno ε okruženju" odbranila je 9. aprila 2008. godine, pod mentorskim rukovodstvom dr Siniše Ješića.

Oktobra 2006. godine upisala je doktorske studije na Matematičkom fakultetu, smer Analiza.

Od marta 2005. godine radi na Katedri za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Februara 2006. godine izabrana je u zvanje asistenta-pripravnika, decembra 2008. u zvanje asistenta, pri istoj katedri. Na Elektrotehničkom fakulteta drži vežbe iz predmeta: Matematika 3, Matematika 4, Matematika 5, Numerička analiza i diskretna matematika, Praktikum iz računarskih alata u matematici, Matematika 2 i Praktikum iz matematike 1A.

U koautorstvu je objavila u međunarodnim časopisima jedan rad u kategoriji M21, dva rada u kategoriji M22 i jedan u domaćem časopisu. Objavila je jedan samostalan autorski rad u međunarodnom časopisu iz kategorije M22 i jedan u domaćem časopisu. Učestvovala je na devet konferencija, sedam međunarodnih i dve domaće, i neprekidno, od 2005. godine učestvuje na naučno-istraživačkim projektima Ministarstva prosvete i nauke Republike Srbije.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Наташа А. Бабачев

број индекса ______________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Фиксне тачке пресликавања на просторима са недетерминистичким растојањем

* резултат сопственог истраживачког рада,
* да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
* да су резултати коректно наведени и
* да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.

Nataša Babačev

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Наташа А. Бабачев

Број индекса

Студијски програм

Наслов рада Фиксне тачке пресликавања на просторима са недетерминистичким растојањем

Ментор др Миодраг Матељевић, редован професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

Потписана Наташа А. Бабачев

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.

Natasa Babačev

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Фиксне тачке пресликавања на просторима са недетерминистичким растојањем

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.

Nataša Babačev

Наташа А. Бабачев

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.