PUBLIKOVANI NAUČNI RADOVI SLAVIŠE PREŠIĆA

1960 – 1975

Priredili Žarko Mijajlović i Slaviša Milisavljević

Beograd, 2012

SADRŽAJ

UNIVERZITET U BEOGRADU

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA

№ 44 — № 48
(1960)

BEOGRAD

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

Adresser les échanges contre ces *Publications* et toute correspondance à: *Département mathématique, Faculté d'Électrotechnique, boîte postale 816, Belgrade, Yougoslavie*

(Suite à la page 3 de la couverture)

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA - SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 47 (1960)

SUR LE NOMBRE DE CERTAINES ALGÈBRES

Slaviša Prešić

(Reçu le 10 octobre 1960)

Soit G un groupoïde tel que

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_l) \tag{1}$$

pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_l \in G$, les ensembles d'éléments figurant aux deux membres de cette égalité étant les mêmes et $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ désignant les éléments de G obtenus d'une certaine manière au moyen des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Comme exemple d'un tel groupoïde on peut citer un groupoïde possédant la propriété que $a(bc) = (ab)c$ pour tous $a, b, c, \in G$, ou bien un groupoïde avec la propriété $a((ab)(cd)) = (da)(bc)$ pour tous $a, b, c, d, \in G$, ainsi que beaucoup d'exemples pareils. Un groupoïde dans lequel $(ab)(cd) = b(dc)$ pour tous $a, b, c, d \in G$ n'est pas l'exemple de tel groupoïde, l'élément a figurant au premier membre et ne se trouvant pas au second.

Supposons, dans ce qui suit, que G soit un groupoïde satisfaisant à une loi de la forme (1). Il existe de tels groupoïdes de tout ordre (l'ordre d'un groupoïde = le nombre de ses éléments). En effet, si nous prenons un élément a de l'ensemble G et posons $b \cdot c = a$ (b, c sont des éléments quelconques de G), alors G devient un groupoïde obéissant à toute loi de la forme (1).

Pour abréger, nous appelerons „groupoïde (1)" tout groupoïde qui obéit à une loi de la forme (1).

Désignons par $B(n)$ le nombre de groupoïdes (1) non-isomorphes d'ordre fini n. Nous allons démontrer le théoréme que voici:

Théorème 1. Si les nombres naturels $p_1, p_2, \ldots, p_l$ sont tous différents, alors

$$B\left(\sum_{i=1}^{l} p_i + 1\right) > \prod_{i=1}^{l} B(p_i). \tag{2}$$

Démonstration. Soient $G_1 = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{p_1}^1\}$, $G_2 = \{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{p_2}^2\}, \ldots,$ $G_l = \{a_1^l, a_2^l, \ldots, a_{p_l}^l\}$ $(G_i \cap G_j = \emptyset$ pour $i \neq j)$ des groupoïdes arbitraires satisfaisant à la loi (1). Considérons l'ensemble

$$L = \{a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1,\ a_1^2, \ldots, a_{p_2}^2, \ldots, a_1^l, \ldots, a_{p_l}^l,\ 0\},$$

où $0 \notin \bigcup_{i=1}^{l} G_i$ est un élément quelconque. Définissons une opération binaire $a \cdot b$ comme il suit

$$a \cdot b = \begin{cases} a_\nu^i a_\mu^i & \text{si } a = a_\nu^i,\ b = a_\mu^i\ (1 \leqslant \nu,\ \mu \leqslant p_i;\ 1 \leqslant i \leqslant l), \text{ c'est-à-dire si } a \text{ et } b \\ & \text{appartiennent au même groupoïde } G_i, \\ 0 & \text{si cette condition n'est pas remplie.} \end{cases}$$

On voit immédiatement que l'opération introduite satisfait à (1). En choisissant pour $G_1, G_2, \ldots, G_l$ des groupoïdes (1) différents, nous obtenons par le procédé que nous venons de décrire des groupoïdes (1) d'ordre $1 + \sum_{i=1}^{l} p_i$. Nous allons apprécier le nombre de groupoïdes non-isomorphes qui peuvent être obtenus de cette manière-là.

Désignons par $(G_1, G_2, \ldots, G_l)$ le groupoïde L obtenu par le procédé mentionné au moyen des groupoïdes $G_1, G_2, \ldots, G_l$. Soient G_i et G_i' deux groupoïdes (1) d'ordre p_i. On peut démontrer que de $(G_1, G_2, \ldots, G_l) \cong (G_1', G_2', \ldots, G_l')$ résulte $G_i \cong G_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. En effet, l'hypothèse precédente entraîne l'existence d'une application biunivoque φ de l'ensemble $L = O \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} G_i\right)$ sur l'ensemble $L' = O' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} G_i'\right)$, tel que de $a \cdot b = c$ $(a, b, c \in L)$ résulte $(\varphi a) \cdot (\varphi b) = \varphi c$ $(\varphi a, \varphi b, \varphi c \in L')$. Comme on a alors $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ pour tout $a \in L$, on a aussi, pour tout $a \in L$, $(\varphi a) \cdot (\varphi 0) = (\varphi 0) \cdot (\varphi a) = \varphi 0$. On peut conclure de là que $\varphi 0 = 0'$. Si $a_\nu^i \cdot a_\mu^i = a_\rho^i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l;\ 1 \leqslant \nu,\ \mu, \rho \leqslant p_i)$, on a $(\varphi a_\nu^i) \cdot (\varphi a_\mu^i) = \varphi a_\rho^i \neq 0'$ d'après la remarque précédente (tenant compte du fait que l'application φ est biunivoque). Donc, φ applique le groupoïde G_i sur le groupoïde G_i' $(i = 1, 2, \ldots, l)$, de sorte que $G_i \cong G_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Du fait que nous venons de démontrer résulte que si l'on remplace $G_1, G_2, \cdots, G_l$ par tous les groupoïdes (1) possibles d'ordres correspondents, on obtient $B(p_1)\, B(p_2) \cdots B(p_l)$ groupoïdes non-isomorphes. De plus, le nombre $B(1 + \sum_{i=1}^{l} p_i)$ est sûrement supérieur à ce produit, parce qu'on ne peut pas aboutir par le procédé cité au groupoïde $G = \{0, a, b, \cdots\}$ d'ordre $1 + \sum_{i=1}^{l} p_i$ où $a . b = 0$ pour tous $a, b \in G$. Notre théorème est donc complètement démontré.

Passons au cas où quelques uns des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_l$ sont égaux. Supposons, par exemple, que $p_1 = p_2$ et que les nombres $p_3, p_4, \cdots, p_l$ soient différents entre eux et de p_1. Dans ce cas on ne pourrait pas justifier l'assertion du théorème précédent au moyen du procédé exposé. Soient

$$G_{p_1}^1,\ G_{p_1}^2, \ldots,\ G_{p_1}^{B(p_1)};\quad G_{p_2}^1 = G_{p_1}^1,\ G_{p_2}^2 = G_{p_1}^2, \ldots,\ G_{p_1}^{B(p_l)};$$

$$G_{p_3}^1,\ G_{p_3}^2, \ldots,\ G_{p_3}^{B(p_3)}\ ; \ldots;\quad G_{p_l}^1,\ G_{p_l}^2, \ldots,\ G_{p_l}^{B(p_l)}$$

tous les groupoïdes respectivement d'ordres $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Les groupoïdes $(G^{i_1}_{p_1}, G^{i_2}_{p_2}, G^{i_3}_{p_3}, \ldots, G^{i_l}_{p_l})$ et $(G^{i_2}_{p_2}, G^{i_1}_{p_1}, G^{i_3}_{p_3}, \ldots, G^{i_l}_{p_l})$ sont isomorphes, d'où la conclusion que l'on obtient par le procédé cité les groupoïdes non-isomorphes suivants:

$$
\begin{array}{llll}
(G^1_{p_1}, G^1_{p_1}), & (G^2_{p_1}, G^2_{p_1}), & \ldots, & (G^{B(p_1)}_{p_1}, G^{B(p_1)}_{p_1}) \\
(G^1_{p_1}, G^2_{p_1}), & (G^2_{p_1}, G^3_{p_1}), & \ldots & \\
\vdots & & & \\
(G^1_{p_1}, G^{B(p_1)-1}_{p_1}), & (G^2_{p_1}, G^{B(p_1)}_{p_1}), & & \\
(G^1_{p_1}, G^{B(p_1)}_{p_1}), & & &
\end{array}
$$

où le symbole $(G^i_{p_1}, G^j_{p_1})$ désigne l'ensemble de tous les groupoïdes $(G^i_{p_1}, G^j_{p_2}, G^{i_3}_{p_3}, \ldots, G^{i_3}_{p_l})$, les symboles $G^{i_3}_{p_3}, G^{i_4}_{p_4}, \ldots, G^{i_l}_{p_l}$ épuisant tous les groupoïdes respectivement d'ordres $p_3, p_4, \ldots, p_l$. D'après ce qui précède, dans ce cas nous obtenons exactement

$$\binom{B_1(p_1)+1}{2} B(p_3) \ldots B(p_l)$$

groupoïdes non-isomorphes.

C'est par une considértion analogue que l'on peut justifier le

Théorème 2. Soient les nombres naturels $p_1, p_2, \ldots p_l$ différents et les nombres naturels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ arbitraires. On a alors

$$B\left(1+\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i\right) > \prod_{i=1}^{l} \binom{B(p_i)+\lambda_i-1}{\lambda_i}. \tag{3}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_l = 1$ le théorème 2 se ramène au théorème 1.

Soit enfin n un nombre naturel quelconque. Ce nombre (si $n > 1$) peut être représenté comme somme de nombres naturels de plusieurs façons différentes. Soient σ_1 et σ_2

$$\sigma_1\colon\ n = \underbrace{(p^1_1+p^1_1+\ldots+p^1_1)}_{\lambda^1_1 \text{ termes}} + \underbrace{(p^1_2+p^1_2+\ldots+p^1_2)}_{\lambda^1_2 \text{ termes}} + \ldots + \underbrace{(p^1_l+p^1_l+\ldots+p^1_l)}_{\lambda^1_l \text{ termes}},$$

$$\sigma_2\colon\ n = \underbrace{(p^2_1+p^2_1+\ldots+p^2_1)}_{\lambda^2_1 \text{ termes}} + \underbrace{(p^2_2+p^2_2+\ldots+p^2_2)}_{\lambda^2_2 \text{ termes}} + \ldots + \underbrace{(p^2_m+p^2_m+\ldots+p^2_m)}_{\lambda^2_m \text{ termes}}$$

deux telles représentations du nombre n. Si L_1 et L_2 sont deux groupoïdes (1), obtenus par le procédé mentionné, qui correspondent aux représentations différantes σ_1 et σ_2, ces deux groupoïdes sont non-isomorphes.

On déduit de ce fait et du théorème 2 pour tout n naturel l'inégalité

$$B(n+1) > \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{l} \binom{B(p^\sigma_i)+\lambda^\sigma_i-1}{\lambda^\sigma_i}, \tag{4}$$

où σ parcourt toutes les représentations différentes du nombre n comme somme de nombres naturels.

Toutes les considération précédentes peuvent être généralisés comme il suit.

Supposons que l' on ait defini dans l'ensemble S un ensemble d'opérations de longuers quelconques. Soient $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$ et $\psi_i\ (a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$ $(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S;\ i=1, 2, \ldots, q)$ les symboles désignant les éléments de S produits, d'après une certaine loi, des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$ au moyen des opérations introduites. Supposons encore qui si a_ν figure dans $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$, a_ν figure nécessairement dans $\psi_i\ (a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})\ (i=1,2, \ldots, q)$.

Appelons l'ensemble S „algèbre (1)" si les équations

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) = \psi_i\ (a_1, a_2 \ldots, a_{s_i}) \tag{5}$$

$$(i=1, 2, \ldots, q;\ q \text{ nombre naturel fixe})$$

sont satisfaites pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$.

Si $B(n)$ désigne le nombre de toutes les algèbres (1) non isomorphes d'ordre n, alors $B(n)$ satisfait à l'inegalité (4).

Citons un exemple d'algèbre (1). Soit f une opération binaire définie dans l'ensemble S et F une opération ternaire définie dans ce même ensemble $(f(a,b,)=c;\ a,b,c \in S;\ F(a,b,c)=d;\ a,b,c,d, \in S)$. Supposons que f et F possèdent les propriétés suivantes

$$f(F(a,b,c),c) = F(a,a,f(b,c)),$$

$$f(a,f(b,c)) = F(a,b,f(c,a)) \quad \text{pour tout } a,b,c \in S,$$

Dans ce cas (S, f, F) présente un exemple d'algèbre (1).

Rezime

O BROJU IZVESNIH ALGEBRI

Slaviša Prešić

Neka je u skupu S definisano izvesno mnoštvo operacija raznih dužina. Neka su

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) \text{ i } \psi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}) \quad (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{s_i} \in S;\ i=1, 2, \ldots, q)$$

skraćenice za elemente skupa S stvorene na izvestan način pomoću elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i}$ i pomoću definisanih operacija. Nazovimo skup S „algebra (1)', ako su jednakosti (5) ispunjene za sve $a_1, a_2, \ldots, a_{s_i} \in S$. Za svaku od jednakosti (5) pretpostavljamo da su takve da ako a_ν ulazi u $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$, onda a_ν nužno ulazi i u $\psi_i(a_1, a_2, \ldots, a_{s_i})$.

Ako je $B(n)$ broj svih neizomorfnih algebri (1) reda n, onda za $B(n)$ vredi nejednakost (4).

Za $B(n)$ su dobijene takođe i nejednakosti (2) i (3). Ovde su $p_1, p_2, \ldots, p_l$ međusobom različiti prirodni brojevi, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ proizvoljni prirodni brojevi.

Navodimo i jedan primer algebre (1). Neka su u S definisane binarna operacija f, $(f(a,b)=c;\ a,b,c\in S)$ i ternarna operacija F, $(F(a,b,c)=d;\ a,b,c,d\in S)$. Neka su f i F takve operacije da je

$$f(F(a,b,a),c)=F(a,a,f(b,c))$$

$$f(a,f(b,c))=F(a,b,f(c,a)) \text{ za sve } a,b,c,\in S.$$

U ovom slučaju je (S,f,F) jedan primer algebre (1).

Asocijativni grupoid je takođe primer algebre (1), dok grupa nije.

№ 20 (1958)
V. M. Vučić: A contribution to the problem of spontaneous accumulation of radioactive matters on the ground.

№ 21 (1958)
S. Milević: The measurements of some physical quantities by the change of a capacity

№ 22 (1958)
V. M. Vučić — G. Dimić: A type of ionisation chamber with electronic device for measuring very low radon concentrations in rooms.

№ 23 (1959)
D. S. Mitrinović: Sur les nombres de Stirling de première espèce et les polynômes de Stirling.

№ 24 (1959)
I. Bandić: Méthodes de résolution d'équations différentielles indéterminées qui apparaissent dans la théorie de l'élasticité, dans l'hydrodynamique et électronique.

№ 25 (1959)
D. S. Mitrinović: Sur une modification de MacMillan du procédé de Gauss-Chiò pour l'évaluation des déterminants.

№ 26 (1959)
S. V. Pavlović: Une proposition sur les déterminants circulants d'ordre pair

№ 27 (1959)
D. S. Mitrinović: Compléments au Traité de Kamke. Note VI.

№ 28 (1959)
D. R. Horvat: Integral theorems of electric network characteristics.

№ 29 (1959)
D. S. Mitrinović: Sur quelques inégalités.

№ 30 (1959)
S. V. Pavlović: Sur un théorème de Neuberg et son inversion.

№ 31 (1959)
N. Janković: Sur une formule sommatoire.

№ 32 (1959)
D. Ž. Đoković: Sur une série.

№ 33 (1960)
S. Ćetković Quelques contributions à la théorie des fonctions continues dans les points partout-densement disposés.

№ 34 (1960)
D. S. Mitrinović — R. S. Mitrinović Tableaux qui fournissent des polynômes de Stirling.

№ 35 (1960)
D. Đoković: Sur une généralisation de l'inégalité de Fejér—Jackson.

№ 36 (1960)
S. Pavlović: On kinematic interpretation of an important differential equation.

№ 37 (1960)
О. Э. Георгиу: Об одной системе функциональных уравнений обобщающей функциональное уравнение Д. С. Митриновича изученное также Я. Ацельем.

№ 38 (1960)
B. S Tomić: Sur une nouvelle classe de polynômes dans la théorie des fonctions spéciales.

№ 39 (1960)
S. Prešić: Sur le théorème de Cayley — Hamilton.

№ 40 (1960)
D. Ž. Đoković: Une proposition concernant la théorie des séries.

№ 41 (1960)
M. M. Milić: Electrical networks which exibit ideal — generator characteristics toward a branch.

№ 42 (1960)
L. Karadžić: Contribution à l'étude de la théorie des séries à termes positifs et à la théorie des fonctions analytiques uniformes à l'aide de la géométrie de Lobatchewsky.

(Suite à la page 4 qe la couverture)

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

S. PREŠIĆ – D. Ž. ĐOKOVIĆ, BEOGRAD

Extrait du Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, XIII Beograd, 1961

Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. XIII, 3—4 (1961), Beograd
Yougoslavie

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

par S. PREŠIĆ — D. Ž. ĐOKOVIĆ, BEOGRAD

Dans cet article nous considérons l'équation fonctionnelle suivante:

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} F_i(x_1+x_2+\cdots+x_m,\ x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_{m+n})=0, \tag{1}$$

où $F_i(x, y)$ sont des fonctions réelles et inconnues, les x_i des variables réelles indépendantes et C l'opérateur cyclique défini par l'égalité

$$C f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) \equiv f(x_2, x_3, \ldots, x_{m+n}, x_1) \qquad (f \text{ arbitraire}). \tag{2}$$

Théorème. La solution continue, générale, de l'équation fonctionnelle (1) est

$$\begin{aligned} F_i(x, y) &= (nx-my)\, f(x+y)+g_i(x+y) \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n-1), \\ F_{m+n}(x, y) &= (nx-my)\, f(x+y)-\sum_{i=1}^{m+n-1} g_i(x+y), \end{aligned} \tag{3}$$

où $f(x)$ et $g_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m+n-1)$ sont des fonctions continues arbitraires.

Démonstration. Si l'on pose

$$t_i \equiv x_i+x_{i+1}+\cdots+x_{i+m-1}-\frac{ms}{m+n} \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n-1)$$

$$\left(x_{m+n+i} \equiv x_i, \quad s \equiv \sum_{i=1}^{m+n} x_i\right).$$

l'équation (1) prend la forme suivante:

$$F_{m+n}\left(-t_1-t_2-\cdots-t_{m+n-1}+\frac{ms}{m+n},\ \frac{ns}{m+n}+t_1+t_2+\cdots+t_{m+n-1}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m+n-1} F_i\left(t_i+\frac{ms}{m+n},\ \frac{ns}{m+n}-t_i\right)=0.$$

Avec la notation

$$(4) \qquad G_i(x, y) \equiv F_i\left(x + \frac{my}{m+n}, \frac{ny}{m+n} - x\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n),$$

l'équation précédente devient

$$(5) \qquad G_{m+n}(-t_1 - t_2 - \cdots - t_{m+n-1}, s) + \sum_{i=1}^{m+n-1} G_i(t_i, s) = 0.$$

En y posant $t_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m+n-1)$, nous obtenons

$$(6) \qquad G_i(x, y) = \alpha_i(y) - G_{m+n}(-x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n-1),$$

où les α_i $(i = 1, 2, \ldots, m+n-1)$ sont les fonctions continues.

D'après l'égalité (6), l'équation (5) prend la forme

$$(7) \quad G_{m+n}(-t_1 - t_2 - \cdots - t_{m+n-1}, s) - \sum_{i=1}^{m+n-1} G_{m+n}(-t_i, s) + \sum_{i=1}^{m+n-1} \alpha_i(s) = 0.$$

La solution continue, générale, de cette équation est {voir [1]}

$$(8) \qquad G_{m+n}(x, y) = x\beta(y) + \frac{1}{m+n-2} \sum_{i=1}^{m+n-1} \alpha_i(y),$$

où β est une fonction continue arbitraire.

D'après (6) et (8) nous obtenons

$$(9) \qquad G_i(x, y) = x\beta(y) + g_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n-1),$$

$$G_{m+n}(x, y) = x\beta(y) - \sum_{i=1}^{m+n-1} g_i(y),$$

où nous avons posé

$$g_i(y) = \alpha_i(y) - \frac{1}{m+n-2} \sum_{i=1}^{m+n-1} \alpha_i(y).$$

De la relation (4) nous trouvons que

$$F_i(x, y) \equiv G_i\left(\frac{nx - my}{m+n}, x + y\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n),$$

et puis, moyennant (9) nous obtenons

$$F_i(x, y) = \frac{nx-my}{m+n}\beta(x+y) + g_i(x+y) \qquad (i=1, 2, \dots, m+n-1),$$

$$F_{m+n}(x, y) = \frac{nx-my}{m+n}\beta(x+y) - \sum_{i=1}^{m+n-1} g_i(x+y).$$

Si l'on y pose $\beta(x) \equiv (m+n) f(x)$, on trouve justement les formules (3).

Inversement, on vérifie, sans difficulté, que les fonctions (3) satisfont à l'équation (1).

Donc, le théorème est prouvé.

Exemple 1. Si $m=1$, $n=2$ l'équation (1) devient

$$F_1(x_1, x_2+x_3) + F_2(x_2, x_3+x_1) + F_3(x_3, x_1+x_2) = 0.$$

Sa solution continue est

$$F_1(x, y) = (2x-y) f(x+y) + g_1(x+y),$$

$$F_2(x, y) = (2x-y) f(x+y) + g_2(x+y),$$

$$F_3(x, y) = (2x-y) f(x+y) - g_1(x+y) - g_2(x+y),$$

où f, g_1, g_2 sont des fonctions continues arbitraires.

Exemple 2. Si $m=1$, n quelconque, on a l'équation fonctionnelle suivante

$$F_1(x_1, x_2+x_3+\cdots+x_n+x_{n+1}) + F_2(x_2, x_3+x_4+\cdots+x_{n+1}+x_1)$$
$$+\cdots+F_{n+1}(x_{n+1}, x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n) = 0,$$

dont la solution continue générale est

$$F_i(x, y) = (nx-y) f(x+y) + g_i(x+y) \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$F_{n+1}(x, y) = (nx-y) f(x+y) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x+y).$$

Remarque. Le théorème démontré précédemment représente une généralisation du résultat [2].

L'équation (1) est un cas particulier de l'équation considérée par D. S. Mitrinović et D. Đoković [3].

RÉFÉRENCES

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel 1961, p. 51—52.

[2] D. Đoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, Publications de la Faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade série: Mathématiques et physique, №. 63, 1961, p. 21—28.

[3] D. S. Mitrinović — D. Đoković, *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 252, 1961, p. 1090—1092.

О ЈЕДНОЈ ФУНКЦИОНАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

С. ПРЕШИЋ — Д. Ж. ЂОКОВИЋ, БЕОГРАД

Резиме

У овом чланку одређено је опште непрекидно решење функционалне једначине (1), где су $F_i(x, y)$ непознате функције а C циклични оператор дефинисан једнакошћу (2). За функције и независно променљиве се претпоставља да су реалне.

Решење је дато формулама (3).

У доказу је коришћена *Cauchy*-ева функционална једначина.

Графичко предузеће „Радиша Тимотић“ — Београд, Обилићев венац бр. 5, тел. 624.550

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, p. 2224-2226 (14 octobre 1963). Groupe 1.

ALGÈBRE. — *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires.* Note (*) de M. **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Maurice Fréchet.

1. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des applications biunivoques d'un ensemble donné E sur E lesquelles forment un groupe G de l'ordre n, où θ_1 représente l'application identique. Soient K un corps commutatif donné et F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans K.

Dans cette Note, nous allons indiquer une méthode de résolution de l'équation fonctionnelle suivante ([1]) :

$$(1)\quad a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \ldots + a_n(x) f(\theta_n x) = 0 \qquad [\theta_i x \equiv \theta_i(x)],$$

où $a_i\,(\in \mathrm{F})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions données et $f\,(\in \mathrm{F})$ une fonction inconnue.

Désignons par $\mathrm{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble de permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que la correspondance $i \leftrightarrow \theta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soit un isomorphisme du groupe des permutations P et du groupe G. Soit encore $\mathrm{M} = \{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n\}$ l'ensemble des matrices suivantes : $\mathrm{M}_\nu = \| a_{ij}^\nu \|$, avec $a_{ij}^\nu = 1$ pour $j = ip_\nu$ et $a_{ij}^\nu = 0$ pour $j \neq ip_\nu$.

2. Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$, dans l'équation (1), au lieu de x, on obtient un système d'équations qui, dans la forme matricielle, s'écrit

$$(2)\quad \mathrm{A}(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = 0, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{A}(x) = \| a_{ij}(x) \|, \qquad a_{ij}(x) = a_{jp_i^{-1}}(\theta_i x).$$

Les lemmes suivants sont valables :

Lemme 1. — *Il existe au moins une matrice carrée* R (x) *de l'ordre n dont les éléments sont* $b_{ij}(x)$, *avec* $b_{ij} \in \mathrm{F}$, *pour laquelle sont remplies les conditions que voici :*

(C_1) $\mathrm{A}(x)\,\mathrm{R}(x)\,\mathrm{A}(x) + \mathrm{A}(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$;

(C_2) *pour tout* $f\,(\in \mathrm{F})$ *l'égalité*

$$\begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} = \mathrm{R}(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (x \in \mathrm{E})$$

définit une fonction uniforme $g\,(\in \mathrm{F})$.

LEMME 2. — *Si* $R_0(x)$ *est une matrice remplissant la condition* (C_1) *du lemme* 1, *alors la matrice*

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} R_0(\theta_\nu x) M_\nu$$

remplit les conditions (C_1) *et* (C_2) *du lemme* 1.

A partir de ces lemmes, on peut prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $R(x)$ *une matrice pour laquelle sont valables les conditions* (C_1) *et* (C_2). *La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$(3)\qquad \left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = (R(x)\,A(x) + I) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \qquad (\text{I, matrice unité}),$$

où $g\ (\in F)$ *désigne une fonction quelconque.*

Vu le théorème énoncé et le lemme 2, la résolution de l'équation (1) se ramène à la détermination d'une matrice quelconque $R_0(x)$ pour laquelle est remplie la condition (C_1). Pour obtenir $R_0(x)$ il faut ramener la matrice $A(x)$, à l'aide des transformations élémentaires, à la forme

$$A(x) = P(x)\,D(x)\,Q(x),$$

où $P(x)$, $Q(x)$ sont des matrices régulières, $D(x)$ une matrice diagonale aux éléments 1 ou 0 de sorte que le nombre d'unités soit égal au rang de la matrice $A(x)$.

Dans certains cas, on détermine $R_0(x)$ au moyen du polynome minimal de la matrice $A(x)$.

Exemple 1. — Si dans le corps commutatif K n'est pas $nx = 0$ pour tout x, la solution générale de l'équation

$$f(x) + f(\theta_2 x) + \ldots + f(\theta_n x) = 0$$

est

$$f(x) = \frac{1}{n}\Big[(n-1)\,g(x) - g(\theta_2 x) - \ldots - g(\theta_n x)\Big],$$

où $g\ (\in F)$ est une fonction quelconque.

On arrive immédiatement à ce résultat à partir de (3), car, dans ce cas, on peut poser $R(x) = -(1/n)\,I$.

Exemple 2. — Dans ce qui suit il s'agit des fonctions réelles de variables réelles.

A l'équation fonctionnelle suivante :

$$(4)\qquad x_1 f(x_1, x_2, x_3) + x_2 f(x_2, x_3, x_1) - (x_1 + x_2) f(x_3, x_1, x_2) = 0$$

correspond la matrice A (x) :

$$\mathrm{A}(x) = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & -x_1 - x_2 \\ -x_2 - x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_1 - x_3 & x_3 \end{Vmatrix} \qquad [x = (x_1, x_2, x_3)].$$

Les conditions du lemme 1 sont remplies par la matrice R (x) suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(x) &= (x_1 + x_2 + x_3)^{-2}(\mathrm{A}(x) - (x_1 + x_2 + x_3)\,\mathrm{I}) \quad \text{si} \quad x_1 + x_2 + x_3 \neq 0, \\ &= -\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1} \| c_{ij} \|, \quad \text{si} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0, \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0, \end{aligned}$$

avec

$$c_{ij} = x_i \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Selon (3), la solution générale de l'équation (4) est donnée par

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3)^{-1}[x_3 g(x_1, x_2, x_3) + x_1 g(x_2, x_3, x_1) + x_2 g(x_3, x_1, x_2)] \\ &\qquad \text{si} \quad x_1 + x_2 + x_3 \neq 0, \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1}[(x_2^2 + x_3^2)\, g(x_1, x_2, x_3) \\ &\qquad - x_1 x_2 g(x_2, x_3, x_1) - x_1 x_3 g(x_3, x_1, x_2)] \\ &\qquad \text{si} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0, \\ &= g(0, 0, 0) \qquad \text{si} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0, \end{aligned}$$

où g est une fonction quelconque.

Les démonstrations et les développements des résultats énoncés dans cette Note seront publiés ailleurs.

(*) Séance du 30 septembre 1963.

(1) Dans la monographie : M. Ghermănescu, *Ecuatii funcţionale*, Bucarest, 1960, p. 430-407, est traité le cas dans lequel le groupe G est cyclique.

164.855. — Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 119 (1963)

MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES*

Slaviša B. Prešić

1. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les applications biunivoques de l'ensemble non vide E sur E qui forment un groupe G de l'ordre n, l'application θ_1 étant identique. Désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans un corps commutatif K donné.

Dans cet article nous allons exposer une méthode de résolution de l'équation fonctionnelle suivante

$$(1) \qquad a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \cdots + a_n(x) f(\theta_n x) = 0 \qquad (\theta_i x = \theta_i(x))$$

où les $a_i (\in F)$ sont des fonctions données et f une fonction inconnue. Cette méthode-là peut être qualifiée d'application du théoréme 1 de [1].

Désignons par $p_i (i = 1,2, \ldots, n)$ la permutation de l'ensemble $\{1,2, \ldots, n\}$ que l'on obtient de la permutation

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & \cdots & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

de G en y substituant aux symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les symboles $1,2, \ldots, n$ respectivement (les produits dans la seconde ligne étant au préalable remplacés par les éléments auxquels ils sont égaux) et posons $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Soit ensuite $M_\nu = \| a^{\nu}_{i,j} \|$ avec $a^{\nu}_{i,j} = 1$ pour $j = ip_\nu$ et $a^{\nu}_{i,j} = 0$ pour $j \neq ip_\nu$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, en désignant par ip_ν l'image de i dans l'application p_ν. Les groupes G, P et $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ sont isomorphes.

Nous notons que le passage précédent n'a pas été rédigé correctement dans [2], où les résultats principaux de cet article sont résumé's.

Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$ dans l'équation (1) au lieu de x, on obtient un systéme d'équations qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$(2) \qquad A(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = 0, \text{ avec } A(x) = \| a_{i,j}(x) \|, \quad a_{i,j}(x) = a_{j p_i^{-1}}(\theta_i x).$$

* Communiqué le 27 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

Nous allons chercher la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$\left\|\begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix}\right\| = B(x) \left\|\begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix}\right\|, \tag{3}$$

où la fonction $g\,(\in F)$ est arbitraire.

Pour une matrice carrée quelconque $B(x)$ de l'ordre n, dont les éléments sont $b_{ij}(x)$ $(b_{ij} \in F)$ l'équation (3) ne definit pas nécessairement la fonction f $(\in F)$ d'une maniére univoque.

Definition. — Nous disons que la fonction matricielle $B(x)$, ou plus brièvement la matrice $B(x)$, est *compatible* avec le groupe G si l'equation (3) définit la fonction $f\,(\in F)$ univoquement pour chaque $g\,(\in F)$.

Lemme 1. — *La condition*

$$B(\theta_i x) = M_i B(x) M_i^{-1} \qquad (x \in E;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

est suffisante pour la compatibilité de la matrice $B(x)$ avec le groupe G.

Démonstration. Soit $B(x) = \| b_{ij}(x) \|$ $(x \in E;\ b_{ij} \in F)$ et supposons la condition (4) remplie.

Pour une fonction $g\,(\in F)$ quelconque, l'égalité

$$\left\|\begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{matrix}\right\| = B(x) \left\|\begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix}\right\| \qquad (f_1 = f) \tag{5}$$

fournit

$$f(x) = b_{11}(x)\ g(x) + b_{12}(x)\ g(\theta_2 x) + \cdots + b_{1n}(x)\ g(\theta_n x). \tag{6}$$

Après multiplication à droite par M_i, l'égalité (5) devient

$$\left\|\begin{matrix} f_i(x) \\ \vdots \\ . \end{matrix}\right\| = M_i B(x)\ M_i^{-1}\ M_i \left\|\begin{matrix} g(x) \\ \vdots \\ . \end{matrix}\right\|,$$

d'où résulte, d'aprés (4), (5) et (7),

$$f_i(x) = f(\theta_i x) \quad (x \in E;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

$B(x)$ est donc compatible avec G.

On démontre sans difficulté les deux faits suivants:

1° Si les matrices $B(x)$ et $C(x)$ sont compatibles avec le groupe G, alors les matrices $\lambda B(x)$ (λ élément arbitraire de K), $B(x) + C(x)$ et $B(x) \cdot C(x)$ sont aussi compatibles avec G. Les matrices compatibles avec le groupe G forment donc une algèbre de matrices.

2° La matrice $A(x)$ définie par (2) remplit la condition (4).

Dans ce qui suit le rôle fondamental est joué par le

L e m m e 2. — Il *existe au moins une matrice carrée de l'ordre* n,

$$B(x) = \| b_{ij}(x) \| \quad (x \in E;\ b_{ij} \in F),$$

pour laquelle sont remplies les conditions que voici:

(C_1) $A(x)\,B(x)\,A(x) + A(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$;

(C_2) *la matrice* $B(x)$ *est compatible avec le groupe* G.

Démonstration. Désignons par $r(x)$ le rang de la matrice $A(x)$ $(x \in E)$. La matrice $A(x)$ peut être écrite sous la forme

$$A(x) = P(x)\ D(x)\ Q(x)$$

où les matrices $P(x)$ et $Q(x)$ sont régulières pour tout $x \in E$ et $D(x)$ est une matrice diagonales aux éléments 1 et 0 telle que le nombre d'unités est égal à $r(x)$. Cette représentation de $A(x)$ s'obtiendrait au moyen de transformations élémentaires effectuées pour tout $x \in E$. Alors la matrice

$$B_0(x) = -Q^{-1}(x)\,D(x)\,P^{-1}(x)$$

remplit la condition (C_1).

Posons ensuite

$$B(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\,B_0(\theta_\nu x)\,M_\nu \qquad (x \in E).$$

On obtient

$$A(x)\ B(x)\ A(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x)\,M_\nu^{-1}\,B_0(\theta_\nu x)\,M_\nu\,A(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\,A(\theta_\nu x)\,B_0(\theta_\nu x)\,A(\theta_\nu x)\,M_\nu \qquad (x \in E).$$

la matrice $A(x)$ remplissant la condition (4). En mettant à profit ce fait-là de même que la condition (C_1), remplie par la matrice $B_0(x)$, on obtient

$$A(x)\,B(x)\,A(x) = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\,A(\theta_\nu x)\,M_\nu = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x) = -A(x).$$

$B(x)$ remplit donc la condition (C_1).

Nous avons aussi

$$B(\theta_i x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\,B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,M_i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_i\,(M_\nu M_i)^{-1}\,B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,(M_\nu M_i)\,M_i^{-1}$$

$$= M_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M_j^{-1}\,B_0(\theta_j x)\,M_j \right) M_i^{-1} = M_i\,B(x)\,M_i^{-1},$$

d'où la conclusion, d'après le lemme 1, que $B(x)$ est compatible avec G.

D'après la démonstration achevée, on a immédiatement le

Corollaire. — *Si $B_0(x)$ est une matrice qui remplit la condition (C_1) du lemme 2, alors la matrice*

$$(7) \qquad B(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x) M_\nu$$

remplit les conditions (C_1) et (C_2) du lemme 2.

Notons que c'est par la négligence de l'auteur que le facteur $\frac{1}{n}$ a été omis dans l'expression pour $B(x)$ dans [2] (c'est-à-dire dans l'expression pour $R(x)$, comme on avait désigné $B(x)$ dans [2]).

Partant des lemmes précedents nous allons démontrer le

Théorème 1. — *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les conditions (C_1) et (C_2). La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$(8) \qquad \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = (B(x)A(x)+I) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} \quad (I \textit{ matrice unité}),$$

où $g(\in F)$ désigne une fonction quelconque.

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème, $B(x)$ est compatible avec G. Comme les matrices $A(x)$ et I possèdent la même propriété, on peut conclure, en s'appyant sur la remarque 1°, que la matrice suivant $B(x)\cdot A(x)+I$ est aussi compatible aves ce groupe G. C'est pourquoi (8) définit, pour tout $g(\in F)$, la fonction $f(\in F)$ d'une manière univoque. En multipliant (8) à droite par $A(x)$ on obtient, d'après (C_1),

$$A(x)\begin{Vmatrix} f(x) \\ \vdots \end{Vmatrix}=0.$$

La fonction $f(\in F)$ satisfait donc à l'équation (1) pour tout $g(\in F)$.

D'autre part, si $f(\in F)$ est une solution de l'équation (1), cette fonction peut être obtenue de la formule (8) en y posant $g=f$.

Les deux faits que nous venons d'établir prouvent que la formule (8) détermine la solution générale de l'équation (1).

Nous remarquons que nous avons décrit, dans la démonstration du lemme 2, un procédé de formation de la matrice $B(x)$ qui remplit les conditions (C_1) et (C_2), ce qui veut dire que le théorème 1 fournit une méthode de consctruction de la solution générale de l'équation (1).

La détermination de la matrice $B(x)$ peut être effectuée après avoir décomposé au préalable l'ensemble E en sous-ensembles disjoints E_r ($r=0,1,2, \ldots, n$), E_r désignant la partie de E où le rang de la matrice $A(x)$ est r. On détermine alors $B(x)$ dans tout E_r séparément, de sorte que l'on résout l'équation (1) dans chaque E_r pris à part.

Ajoutons à cette instruction générale une remarque particulière: Si dans un E_r (on bien dans une partie V d'un ensemble E_r possédant la propriete que $x \in V \Rightarrow \theta_i x \in V, i = 1, 2, \ldots, n$) est remplie la condition

$$A^m(x) + \lambda_1(x) A^{m-1}(x) + \cdots + \lambda_{m-1}(x) A(x) = 0 \tag{9}$$

$$(\lambda_{m-1}(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in E_r, \quad \text{ou pour} \quad x \in V),$$

le polynôme en $A(x)$ au premier membre étant le polynôme minimale de la matrice $A(x)$, alors on peut prendre pour $B(x)$ dans E_r (dans V)

$$B(x) = \frac{1}{\lambda_{m-1}(x)} (A^{m-2}(x) + \lambda_1(x) A^{m-3}(x) + \cdots + \lambda_{m-2}(x) I). \tag{10}$$

En effet, après la multiplication de (11) à gauche par M_i et à droite par M_i^{-1}, on aboutit, d'après l'égalité

$$A(\theta_i x) = M_i A(x) M_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

à la conclusion que les matrices $A(x)$ et $A(\theta_i x)$ possèdent le même polynôme minimal. Il s'ensuit que $\lambda_j(\theta_i x) = \lambda_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $x \in E$, ou $x \in V$). D'après les dernières égalités, la matrice $B(x)$ déterminée par la formule (10) est compatible avec le groupe G pour $x \in E_r$ (ou pour $x \in V$). On deduit, d'autre part, de (9) qu'elle remplit aussi la condition (C_2).

2. Supposons maintenant que les symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ dans l'équation (1) désignent des applications de l'ensemble E dans E qui forment un demi-groupe de l'ordre n, θ_1 étant encore toujours l'application identique. Soit $A(x)$, comme ci-dessus, la matrice du systeme d'équations linéaires en $f(x)$, $f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)$ que l'on obtient en substituant dans (1) à x successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$.

Le théorème suivant se rapporte à la résolution de l'équation (1) dans ce cas-là.

Théorème 2. — *Si la matrice $A(x)$ remplit la condition*

$$A^m(x) + \lambda_1 A^{m-1}(x) + \cdots + \lambda_{m-1} A(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in E \tag{11}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \in K, \lambda_{m-1} \neq 0; \; \textit{m un nombre naturel} > 1),$$

alors la solution générale de l'équation (1):

$$a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \cdots + a_n(x) f(\theta_n x) = 0$$

est déterminée par la formule

$$\left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m-1}} (A^{m-1}(x) + \lambda_1 A^{m-2}(x) + \cdots + \lambda_{m-1} I) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

où g ($\in F$) désigne une fonction arbitraire.

Démonstration. On peut se convaincre sans difficulté que dans le cas que nous considérons à présent la matrice $A(x)$ est compatible avec le demi-groupe G, la notion de compatibilité d'une matrice avec un groupe pouvant être éténdue, d'une manière évidente, au cas de demi-groupe. On en déduit, d'après la remarque 1°, valable évidemment aussi dans ce cas, que l'égalité (12) définit d'une manière univoque la fonction f $(\in F)$ pour tout g $(\in F)$, puisque les coefficients du polynôme formant le premier membre de (11) sont constants. De (11) résulte alors que cette fonction f, pour tout g $(\in F)$, satisfait l'équation (1). Enfin, la formule (12) pour $g=f$ où f, est une solution de (1), se reduit a $f(x)=f(x)$. Cette formule détermine donc la solution générale dans le cas considére.

Citons, comme illustration du dernier résultat, l'équation fonctionnelle

$$2f(x_1, x_2, x_3)-3f(x_2, x_2, x_3)+f(x_3, x_3, x_3)=0 \tag{13}$$

$$(x_i \in R,\ f(x_i, x_j, x_k) \in R;\ R \text{ système de nombres réels}).$$

Nous avons ici: $E=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$ et $K=R$; le demi-groupe G est formé des applications suivantes:

$$\theta_1(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, x_3), \quad \theta_2(x_1, x_2, x_3)=(x_2, x_2, x_3), \quad \theta_3(x_1, x_2, x_3)=(x_3, x_3, x_3)$$

On obtient dans ce cas

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (x=(x_1, x_2, x_3)).$$

Cette matrice-là satisfait à l'équation

$$A^3(x)-A^2(x)-2A(x)=0.$$

D'après le théorème 2, la solution générale de (13) est donnée par la formule

$$\begin{Vmatrix} f(x_1, x_2, x_3) \\ f(x_2, x_2, x_3) \\ f(x_3, x_3, x_3) \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\left(A^2(x)-A(x)-2I\right) \begin{Vmatrix} g(x_1, x_2, x_3) \\ g(x_2, x_2, x_3) \\ g(x_3, x_3, x_3) \end{Vmatrix},$$

c'est-à-dire par la formule

$$f(x_1, x_2, x_3)=g(x_3, x_3, x_3) \equiv h(x_3)$$

où h désigne une fonction réelle arbitraire.

Considérons le cas plus général de l'équations fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)+a_2 f(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2)+\cdots+a_n f(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)=0 \tag{14}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m \in R;\quad a_2, \ldots, a_n \text{ éléments fixés de } R),$$

où x_i^j $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=2, 3, \ldots, n)$ sont les éléments déterminés de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et où f désigne la fonction inconnue („de m variables indépendantes réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$"). Si la matrice correspondante $A(x)$ (constante) possède le polynôme minimal da la forme

$$A^k(x)+\lambda_1 A^{k-1}(x)+\cdots+\lambda_{k-1}A(x),$$

avec $\lambda_{k-1} \neq 0$, alors la solution générale de l'équation (14) peut être exprimé par la formule (12), au moyen d'une seule fonction réelle arbitraire de m variables reelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Si l'on a $\lambda_{k-1}=0$, il peut ariver effectivement que la solution générale na soit pas exprimable au moyen d'une seule fonction arbitraire.

C'est par exemple le cas de l'équation

$$f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1)-2f(x_1, x_1)=0 \qquad (x_1, x_2 \in R, \; f(x_1, x_2)\in R). \tag{15}$$

Pour le demi-groupe correspondant G on peut predre le demi-groupe minimal engendré par les applications θ_1, θ_2, θ_3, définies comme il suit:

$$\theta_1(x_1, x_2)=(x_1, x_2), \quad \theta_2(x_1, x_2)=(x_2, x_1), \quad \theta_3(x_1, x_2)=(x_1, x_1).$$

On obtient

$$G=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \text{ où } \theta_4=\theta_3\theta_2,$$

avec la table de Cayley correspondante:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_2	θ_2	θ_1	θ_3	θ_4
θ_3	θ_3	θ_4	θ_3	θ_4
θ_4	θ_4	θ_3	θ_4	θ_4

L'équation (15) peut être écrite sous la forme

$$f(x)+f(\theta_2x)-2f(\theta_3x)+0\cdot f(\theta_4x)=0 \quad (x=(x_1, x_2)). \tag{16}$$

En substituant à x successivement x, θ_2x, θ_3x, θ_4x, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} f(x)+f(\theta_2x)-2f(\theta_3x)+0\cdot f(\theta_4x)&=0\\ f(x)+f(\theta_2x)+0\cdot f(\theta_3x)-2f(\theta_4x)&=0\\ 0&=0\\ 0&=0. \end{aligned}$$

On a donc

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (x=(x_1, x_2)).$$

Le polynôme minimal de cette matrice t^3-2t^2 ne contient pas la première puissance de t.

C'est pourquoi la solution gènèrale, de l'équation (15) ne pourrait être obtenne par l'application du théorème 2. Cette solution générale est cependant donnée par

$$f(x_1, x_2)=g(x_1, x_2)-g(x_2\, x_1)+h,$$

où la fonctions g (g: $R\times R\to R$) et la constante $h\,(\in R)$ sont arbitraires. Elle n'est pa exprèmable au moyen d'une seule fonction réelle $g(x_1, x_2)$. s

3. Citons enfin une conclusion, relative à la forme de la solution générale de l'équation fonctionnelle (1), que l'on tire immédiatement des théorémes 1 et 2:

Sous les conditions du théorème 1 *ou celles du théorème* 2, *la solution générale de* (1) *peut être écrite sous la forme*

$$f(x)=b_1(x)g(x)+b_2(x)g(\theta_2x)+\cdots+b_n(x)g(\theta_nx),$$

ou les $b_i\,(\in F)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions déterminées par les coefficients* $a_i(x)$ *de* (1) *et* $g\,(\in F)$ *désigne une fonction arbitraire.*

Dans ces deux cas-là, la solution générale de (1) peut donc être expimée au moyen d'une seule fonction arbitraire.

L'équation (1) est traitée dans la monographie [3], mais seulement dans le cas où G est un groupe cyclique.

C'est le professeur D. S. Mitrinović qui m'a signalé quelques problèmes liés à l'équation (1), lesquels m'on conduit à la méthode exposée dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić: *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x)=H(x,f(x),\ldots,f(\theta_n x))$. Ces Publications № 118,1963.

]2] S. B. Prešić: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéarires.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. t. 257, 1963, p. 2224—2226.

[3] M. Germănescu: *Ecuatii functionale,* Bucarest 1960, p. 403—407.

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 121 (1963)

CERTAINES ÉQUATIONS MATRICIELLES*

Slaviša B. Prešić

Soit K un corps commutatif et soit A une matrice carrée de l'ordre n aux éléments de K. Nous désignons par M l'ensemble de toutes les matrices dont les éléments appartiennent à K.

Au moyen de transformations élémentaires, on peut mettre A sous la forme $A = P_1 D P_2$, où P_1 et P_2 sont des matrices régulières et D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont 1 et 0 telle que le nombre des unités est égal au rang de A. La matrice $B = P_2^{-1} D P_1^{-1}$ satisfait alors à l'égalité $ABA = A$.

L'équation matricielle $AXA = A$ a ainsi au moins une solution X.

Si A satisfait à une égalité de la forme

$$A^k + l_1 A^{k-1} + \cdots + l_{k-1} A = 0 \quad (l_1, \ldots, l_{k-1} \in K,\ l_{k-1} \neq 0),$$

alors la matrice

$$X = -\frac{1}{l_{k-1}} (A^{k-2} + l_1 A^{k-3} + \cdots + l_{k-2} I) \quad (I \text{ matrice unité})$$

est aussi une solution de l'éqation $AXA = A$.

Théorème. — *Si B remplit la condition $ABA = A$ alors:*

1° $\quad AX = 0 \Leftrightarrow X = (I - BA)\, Q,\ Q \in M \quad$ (*X et Q sont $n \times m$ matrices*);

2° $\quad XA = 0 \Leftrightarrow X = Q\,(I - AB),\ Q \in M \quad$ (*X et Q sont $m \times n$ matrices*);

3° $\quad AXA = A \Leftrightarrow X = B + Q - BAQAB,\ Q \in M;$

4° $\quad AX = A \Leftrightarrow X = I + (I - BA)\, Q,\ Q \in M;$

5° $\quad XA = A \Leftrightarrow X = I + Q\,(I - AB),\ Q \in M.$

Démonstration. Nous n'allons démontrer que 3°, puisque les démonstration de 1°, 2°, 4° et 5°, sont analogues.

Soit $X = B + Q - BAQAB,\ Q \in M$. Alors

$$AXA = ABA + AQA - ABAQABA,\ ABA = A$$

$$\Rightarrow AXA = A + AQA - AQA \Rightarrow AXA = A.$$

---

* Communiqué le 30 octobre 1963 à la séance de la Section d'Algèbre de l'Institut mathématique de Belgrade.

Inversement, si l'on a, pour un $X \in M$, $AXA = A$, alors

$$B + (X - B) - BA(X - B)AB = X - BAXAB + BABAB = X - BAB + BAB = X.$$

Donc:

$$AXA = A \Rightarrow X = B + Q - BAQAB, \quad \text{avec } Q = (X - B) \in M.$$

On peut remarquer que le théorème démontré fournit toutes les solutions des équations 1°, 2°, 3°, 4° et 5° au moyen d'une solution quelconque B de l'équation $AXA = A$.

Si X est une $n \times l$ matrice, alors la formule contenue dans 1° *fournit toutes les solutions du système d'équations homogènes*

$$A \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = 0 \text{ sous la forme } \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = (I - BA) \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix},$$

où u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sont des éléments arbitraires de K.

Observons que le théorème, de même que sa démonstration, restent valables dans le cas général où A, B, Q, I, X sont des éléments d'un anneau quelconque M muni de l'élément unité I.

Ainsi, par exemple, d'après ce théorème plus général, si a est un élément de l'anneau M à l'élément unite I et si $\bar{a}$ est un élément de M tel que $a\bar{a}a = a$, alors toutes les solutions de l'équation $axa = a$ $(x \in M)$ sont déterminées par la formule

$$x = \bar{a} + q - \bar{a}aqa\bar{a},$$

où q $(\in M)$ désigne un élément quelconque.

Cette proposition-là reste en vigueur même si M n'a pas d'élément unité.

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 118 (1963)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x)=H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x))$ *

Slaviša B. Prešić

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des applications de l'ensemble non vide E_1 dans E_1, θ_1 étant la transformation identique de l'ensemble E_1. Désignons par G le demi-groupe minimal engendré par les applications θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Soient ensuite l'ensemble E_2 non vide et la fonction $H: E_1 \times E_2^n \to E_2$ donnés et désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions $f: E_1 \to E_2$.

Nous cosidérons dans cet article l'équation fonctionnelle

$$f(x)=H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)) \quad (f \in F;\ \theta_i x=\theta_i(x)) \tag{1}$$

où $f(\in F)$ désigne la fonction inconnue. La méthode de résolution qui nous fournira la solution générale dans certains cas est la généralisation de celle que nous avons exposée dans [1], laquelle s'applique à l'équation

$$f(x)=f[g(x)].$$

Nous allons introduire d'abord quelques notions liées à l'équation (1).

Définition 1. — Soient $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_m}$ m éléments du demigroupe G, m désignant un nombre naturel, et soit $\Phi_1: E_1 \times E_2^m \to E_2$ déterminée. On dit que l'équation

$$f(x)=\Phi_1(x, f(\theta_{i_1} x), \ldots, f(\theta_{i_m} x)) \quad (f \in F) \tag{2}$$

est une *conséquence* de l'équation (1) si l'on a

$$(1) \Rightarrow (2) \qquad (f \in F). \tag{3}$$

Par exemple, une des conséquences de l'équation $f(x)=f(\theta_2 x)$ est l'équation $f(x)=f(\theta_2^2 x)$. Une des conséquences de (1), dans le cas général, est

$$f(x)=H(x, H(x, f(x), \ldots, f(\theta_n x)), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)).$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons le second membre de l'équation (2) par $\Phi_1(x; f)$. En outre, au lieu de dire: „l'équation $f(x)=\Phi_1(x; f)$ est conséquence de l'équation (1)," nous dirons: „$\Phi_1(x; f)$ est conséquence de (1)".

* Communiqué le 26 septembre à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

Soit Λ un ensemble d'indices et désignons par

$$\Phi(x;f)=\{\Phi_\lambda(x;f)\mid\lambda\in\Lambda\}$$

un ensemble de conséquences de l'équation (1). Nous allons introduire la notion d'algèbre de conséquences de l'équation (1) par la définition suivante.

Définition 2. — Nous disons qu'un ensemble $\Phi(x;f)$ est une algèbre de conséquences de l'équations (1) si on a

$$H(x,\ \Phi(x;f),\ \Phi(\theta_2 x;f),\ \ldots,\ \Phi(\theta_n x;f))=\Phi(x;f)\quad(\text{pour tout } f\in F). \tag{4}$$

Le premier membre de la condition (4) est la désignation symbolique de l'ensemble

$$\{H(x;\ \Phi_{\lambda_1}(x;f),\ \Phi_{\lambda_2}(\theta_2 x;f),\ \ldots,\ \Phi_{\lambda_n}(\theta_n x;f))\mid\lambda_1,\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n\in\Lambda\}$$

(ici $\Phi_{\lambda_i}(x;f)$ désigne le second membre de l'équation $f(x)=\Phi_{\lambda_i}(x;f)$, qui est conséquence de (1) dans le sens de la définition 1).

Exemple. — Une algèbre de conséquences de l'équation réelle

$$f(x)+f(\theta x)+f(\theta^2 x)=0\quad(x=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ \theta x=(x_2,\ x_3,\ x_1)) \tag{5}$$

est donnée par

$$\Phi(x;f)=\{(\lambda+1)\ f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\mid\lambda\in R\},$$

où R désigne le système de nombres réels.

En effet, étant donné que l'équation peut être écrite sous la forme

$$f(x)=-f(\theta x)-f(\theta^2 x), \tag{6}$$

nous pouvons prendre dans ce cas $H(x,\ f(x),\ f(\theta x),\ f(\theta^2 x))=-f(\theta x)-f(\theta^2 x)$, c'est-à-dire $H(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)=-y_3-y_4$. Si l'on écrit

$$\Phi_\lambda(x;f)=(\lambda+1)\ f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\quad(\lambda\in R),$$

on conclut immédiatement que

$$f(x)=-f(\theta x)-f(\theta^2 x)\ \Rightarrow\ f(x)=(\lambda+1)\ f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x).$$

$\Phi_\lambda(x;f)$ est donc conséquence de l'équation (6) pour tout $\lambda\in R$.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
H(x,\ \Phi(x;f),\ \Phi(\theta x;f),\ \Phi(\theta^2 x;f))&=\{-\Phi_{\lambda_1}(\theta x;f)-\Phi_{\lambda_2}(\theta^2 x;f)\mid\lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&=\{-(\lambda_1+1)f(\theta x)-\lambda_1 f(\theta^2 x)-\lambda_1 f(x)-(\lambda_2+1)f(\theta^2 x)-\lambda_2 f(x)-\lambda_2(\theta x)\mid\lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&=\{(-\lambda_1-\lambda_2)f(x)+(-\lambda_1-\lambda_2-1)f(\theta x)+(-\lambda_1-\lambda_2-1)f(\theta^2 x)\mid\lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&=\{(\lambda+1)f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\mid\lambda\in R\}=\Phi(x;f).
\end{aligned}$$

Donc, la condition (4) est remplie. Nous avons démontré ainsi que l'ensemble $\Phi(x;f)$ est une algèbre de conséquences de (5).

Les résultats de cet article sont contenus dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. — *Si l'équation* (1) *possède une algèbre de conséquences* $\Phi(x;f)$ *qui ne contient qu'un seul élément* $\Phi_1(x;f)$, *alors la solution générale de* (1) *est donnée par*

$$f(x)=\Phi_1(x;g)\quad(g\in F) \tag{7}$$

avec la fonction arbitraire $g\ (\in F)$. *Ici* $\Phi_1(x;g)$ *désigne l'expression obtenue en substituant* g *à* f *dans* $\Phi_1(x;f)$.

Démonstration. — On déduit immédiatement, d'après la condition (4), que (7) est une solution de l'équation (1) pour chaque fonction $g\,(\in F)$. D'autre part, si f est une solution de (1) pour $g=f$ le second membre de la formule (7) devient $f(x)$, de sorte que toute solution de l'équation (1) est comprise dans (7). Le théorème est ainsi démontré.

Pour illustrer l'application du théorème 1, considérons l'équation

$$f(\theta_1 x)+f(\theta_2 x)+\cdots+f(\theta_n x)=0, \tag{8}$$

où les θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ forment un groupe de l'ordre n, supposant encore que le corps commutatif $(E_2, +, \cdot)$ possède la propriété qu'on n'a pas $nx=0$ pour tout $x \in E_2$.

On vérifie immédiatement qu'une algèbre de conséquences qui ne contient qu'un seul élément est celle dont l'unique élément est

$$\Phi_1(x;\, f)=\frac{1}{n}\,[(n-1)\,f(x)-f(\theta_2 x)-\cdots-f(\theta_n x)],$$

Donc, d'après le théorème 1, la solution générale de l'équation (8) est donnée par

$$f(x)=\frac{1}{n}\,[(n-1)\,g(x)-g(\theta_2 x)-\cdots-g(\theta_n x)],$$

où la fonction $g\,(\in F)$ est arbitraire.

Supposons qu'il existe au moins une application $M: P(E_2)\to E_2$ avec les propriétés:

$$\text{a) } MH(x, S_1, S_2, \ldots, S_n)=H(x, M(S_1), M(S_2), \ldots, M(S_n))$$

$$(\forall x \in E_1;\ \forall S_i \in P(E_2),\ i=1, 2, \ldots, n); \tag{9}$$

$$\text{b) } M\{x\}=x \quad (\forall x \in E_2).$$

Nous avons désigné ici par $H(x, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ l'ensemble

$$\{H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\mid y_i \in S_i,\ i=1, 2, \ldots, n)\}.$$

Sous cette hypothèse nous avons le

T h é o r è m e 2. — *Soit $\Phi(x;f)$ une algèbre de consequences de l'équation* (1) *et soit $M: P(E_2)\to E_2$ une application qui remplit les conditions* (9). *Alors la solution générale de l'équation* (1) *est donnée par la formule*

$$f(x)=M(\Phi(x;g)), \tag{10}$$

où $g\,(\in F)$ désigne une fonction arbitraire.

Démonstration. — Pour une fonction $g\,(\in F)$ choisie arbitrairement, la fonction f détérminée par la formule (10) est un élément de F et l'on a

$$H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x))=H(x, M\Phi(x;g), M\Phi(\theta_2 x;g), \ldots, M\Phi(\theta_n x;g))$$

$$=MH(x, \Phi(x;g), \Phi(\theta_2 x;g), \ldots, \Phi(\theta_n x;g))=M\Phi(x;g)=f(x),$$

d'après les conditions (9) et (4). Donc, la fonction f est alors la solution de l'équation (1).

D'autre part, pour $g=f$, où f est une solution de (1), le second membre de la formule (10) devient

$$M\Phi(x;f)=M\{f(x)\}=f(x) \quad (\forall x \in E_1)$$

puisque, d'après (3), $\Phi(x;f)=\{f(x)\}$.

La formule (1) détermine donc en effet la solution génerale de (1).

L'application $M: P(E_2) \rightarrow E_2$ est une généralisation de l'aplication M que nous avons introduit dans [1]. Cependant, tandis que cette application-là existait toujours (il suffisait de poser $M\{x\}=x$, $\forall x \in E_2$, $M(S)=x_0$, $\forall S \in E_2$, où l'élément x_0 de E_2 est fixé), nous ne pouvons pas être sûr que l'application M remplissant les condition (9) existe dans le cas général.

Les difficultés que contient la construction de l'application M peuvent être diminuées dans certains cas en affaiblisant l'exigence: $\forall S_i \in P(E)$ contenue dans a); par exemple, en la remplaçant par l'exigence:

$$\forall S_i \in P(T_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

où les ensembles T_i sont certaines parties de E_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Prešić: *Sur l'équation fonctionnelle $f(x)=f[g(x)]$*. Ces Publications, № 64, 1961

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260 p. 3828-3830 (5 avril 1965). Groupe 1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence des suites.*

Note (*) de M. **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Paul Montel.

Soient E, un espace métrique complet, k un nombre naturel fixé et $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des nombres non négatifs dont la somme est inférieure à 1. Désignons par $F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ l'ensemble de toutes les fonctions $f: E^k \to E$ possédant la propriété suivante :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ &\quad \leq q_1 d(u_1, u_2) + q_2 d(u_2, u_3) + \ldots + q_k d(u_k, u_{k+1}), \end{aligned}$$

pour tous $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in E$.

Dans le cas où $k = 1$, la condition (1) se réduit à la condition connue au moyen de laquelle on définit l'opérateur de contraction.

Théorème. — *Soit $f_n \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ une suite de fonctions qui remplit la condition suivante :*

Il existe une série convergente à termes positifs a_n telle qu'on ait

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

et que l'inégalité

$$(2)\qquad d(f_{n+1}(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)) \leq a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

soit valable pour $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$.

Soit ensuite $x_n (x_n \in E;\ n = 1, 2, \ldots)$ une suite dont les membres satisfont à la condition

$$(3)\qquad x_{n+k} = f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ étant choisis arbitrairement. Alors :

1° *La suite x_n converge dans E;*

2° *La suite f_n converge uniformément vers la fonction limite $f \in F[q_1, q_2, \ldots, q_k]$;*

3° *L'équation*

$$(4)\qquad x = f(x, x, \ldots, x)$$

possède dans E la solution unique

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Démonstration. — 1° En posant $\Delta_n = d(x_n, x_{n+1})$ on obtient, d'après (1), (2) et (3),

$$\Delta_{n+k} \leq a_n + q_1\Delta_n + q_2\Delta_{n+1} + \ldots + q_k\Delta_{n+k-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Désignons par b_n une suite qui remplit les conditions suivantes :

$b_n > 0 (n = 1, 2, \ldots)$; $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}/b_n = 1$; $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Une telle suite existe pour toute série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nous allons prouver maintenant l'existence de deux nombres positifs K et n_0 tels qu'on ait

(5) $$\Delta_n \leqq K a_n b_n \qquad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Soit q un nombre satisfaisant à la condition

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k < q < 1.$$

Étant donné que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1, \qquad \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

il existe, ce qui est facile à vérifier, un nombre naturel n_0 tel qu'on ait

$$\frac{1 + q_1 b_n + q_2 b_{n+1} + \ldots + q_k b_{n+k-1}}{b_{n+k}} < q \qquad (n \geqq n_0),$$

$$\frac{a_{n+k}}{\max(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})} > q \qquad (n \geqq n_0),$$

de manière qu'on aura pour $n \geqq n_0$

$$\frac{1 + q_1 b_n + q_2 b_{n+1} + \ldots + q_k b_{n+k-1}}{b_{n+k}} < \frac{a_{n+k}}{\max(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})}$$

ou

(6) $$a_n + q_1 a_n b_n + \ldots + q_k a_{n+k-1} b_{n+k-1} < a_{n+k} b_{n+k} \qquad (n \geqq n_0).$$

Si l'on pose

$$K = \max\left(\frac{\Delta_{n_0}}{\Delta_{n_0} b_{n_0}}, \frac{\Delta_{n_0+1}}{a_{n_0+1} b_{n_0+1}}, \ldots, \frac{\Delta_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-1} b_{n_0+k-1}}; 1\right),$$

on obtient, d'après (6),

$$a_n + q_1 K a_n b_n + q_2 K a_{n+1} b_{n+1} + \ldots + q_k K a_{n+k-1} b_{n+k-1} < K a_{n+k} b_{n+k} \qquad (n \geqq n_0).$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on démontre la validité de (5) par induction.

Il résulte cependant à partir de (5) que la suite x_n est une suite de Cauchy, donc convergente, l'espace E étant complet.

2° A partir de la condition (2) on conclut immédiatement que la suite f_n est convergente d'une manière uniforme. Posons

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \lim_{n \to \infty} f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

On déduit de l'inégalité

$$\begin{aligned} & d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ & \leqq d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)) \\ & \quad + d(f_n(u_1, u_2, \ldots, u_k), f_n(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \\ & \quad + d(f_n(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1}), f(u_2, u_3, \ldots, u_{k+1})) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

qu'on a $f \in \mathrm{F}[q_1, q_2, \ldots, q_k]$, puisque $f_n \in \mathrm{F}[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $f_n \to f (n \to \infty)$.

3° Mettant à profit l'inégalité

$$\begin{aligned}
&d(f(u_1, u_2, \ldots u_k), f(u, u, \ldots, u)) \\
&\quad \leqq d(f(u_1, u_2, \ldots, u_k), f(u_2, u_3, \ldots, u_k, u)) \\
&\quad\quad + d(f(u_2, u_3, \ldots, u_k, u), f(u_3, u_4, \ldots, u, u)) \\
&\quad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad\quad + d(f(u_k, u, \ldots, u), f(u, u, \ldots, u)) \qquad (u_i, u \in \mathrm{E}),
\end{aligned}$$

valable pour $f \in \mathrm{F}[q_1, q_2, \ldots, q_k]$, on déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ est une solution de l'équation (4). L'unicité de cette solution résulte du théorème de Banach sur le point fixe. En effet, la fonction $\bar{f} (\bar{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{E})$

$$\bar{f}(u) = f(u, u, \ldots, u) \qquad (u \in \mathrm{E})$$

remplit, d'après (1), la condition suivante :

$$d(\bar{f}(u), \bar{f}(v)) \leqq (q_1 + q_2 + \ldots + q_k)\, d(u, v) \qquad (u, v \in \mathrm{E});$$

f est donc un opérateur de contraction de l'espace métrique E.

(*) Séance du 29 mars 1965.

(*Institut mathématique,*
Knez Mihailova 35, *Belgrade, Yougoslavie.*)

168988. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 119 (1963)

MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES*

Slaviša B. Prešić

1. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les applications biunivoques de l'ensemble non vide E sur E qui forment un groupe G de l'ordre n, l'application θ_1 étant identique. Désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans un corps commutatif K donné.

Dans cet article nous allons exposer une méthode de résolution de l'équation fonctionnelle suivante

$$(1) \qquad a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \cdots + a_n(x) f(\theta_n x) = 0 \qquad (\theta_i x = \theta_i(x))$$

où les $a_i (\in F)$ sont des fonctions données et f une fonction inconnue. Cette méthode-là peut être qualifiée d'application du théoréme 1 de [1].

Désignons par $p_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ la permutation de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ que l'on obtient de la permutation

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & \cdots & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

de G en y substituant aux symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les symboles $1,2,\ldots,n$ respectivement (les produits dans la seconde ligne étant au préalable remplacés par les éléments auxquels ils sont égaux) et posons $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Soit ensuite $M_\nu = \| a_{i,j}^\nu \|$ avec $a_{i,j}^\nu = 1$ pour $j = ip_\nu$ et $a_{i,j}^\nu = 0$ pour $j \neq ip_\nu$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, en désignant par ip_ν l'image de i dans l'application p_ν. Les groupes G, P et $M=\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ sont isomorphes.

Nous notons que le passage précédent n'a pas été rédigé correctement dans [2], où les résultats principaux de cet article sont résumé's.

Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$ dans l'équation (1) au lieu de x, on obtient un systéme d'équations qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$(2) \qquad A(x) \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = 0, \text{ avec } A(x) = \| a_{i,j}(x) \|, \quad a_{i,j}(x) = a_{j p_i^{-1}}(\theta_i x).$$

---

* Communiqué le 27 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

Nous allons chercher la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$\text{(3)}\qquad \left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = B(x) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\|,$$

où la fonction $g\,(\in F)$ est arbitraire.

Pour une matrice carrée quelconque $B(x)$ de l'ordre n, dont les éléments sont $b_{ij}(x)$ $(b_{ij} \in F)$ l'équation (3) ne definit pas nécessairement la fonction f $(\in F)$ d'une maniére univoque.

Definition. — Nous disons que la fonction matricielle $B(x)$, ou plus brièvement la matrice $B(x)$, est *compatible* avec le groupe G si l'equation (3) définit la fonction $f\,(\in F)$ univoquement pour chaque $g\,(\in F)$.

Lemme 1. — *La condition*

$$\text{(4)}\qquad B(\theta_i x) = M_i B(x) M_i^{-1} \qquad (x \in E;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

est suffisante pour la compatibilité de la matrice $B(x)$ avec le groupe G.

Démonstration. Soit $B(x) = \| b_{ij}(x) \|$ $(x \in E;\ b_{ij} \in F)$ et supposons la condition (4) remplie.

Pour une fonction $g\,(\in F)$ quelconque, l'égalité

$$\text{(5)}\qquad \left\| \begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{matrix} \right\| = B(x) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \qquad (f_1 = f)$$

fournit

$$\text{(6)}\qquad f(x) = b_{11}(x)\ g(x) + b_{12}(x)\ g(\theta_2 x) + \cdots + b_{1n}(x)\ g(\theta_n x).$$

Après multiplication à droite par M_i, l'égalité (5) devient

$$\left\| \begin{matrix} f_i(x) \\ \vdots \\ . \end{matrix} \right\| = M_i B(x)\ M_i^{-1}\ M_i \left\| \begin{matrix} g(x) \\ \vdots \\ . \end{matrix} \right\|,$$

d'où résulte, d'aprés (4), (5) et (7),

$$f_i(x) = f(\theta_i x) \quad (x \in E;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

$B(x)$ est donc compatible avec G.

On démontre sans difficulté les deux faits suivants:

1° Si les matrices $B(x)$ et $C(x)$ sont compatibles avec le groupe G, alors les matrices $\lambda B(x)$ (λ élément arbitraire de K), $B(x) + C(x)$ et $B(x) \cdot C(x)$ sont aussi compatibles avec G. Les matrices compatibles avec le groupe G forment donc une algèbre de matrices.

2° La matrice $A(x)$ définie par (2) remplit la condition (4).

Dans ce qui suit le rôle fondamental est joué par le

Lemme 2. — *Il existe au moins une matrice carrée de l'ordre* n,

$$B(x) = \| b_{ij}(x) \| \quad (x \in E;\ b_{ij} \in F),$$

pour laquelle sont remplies les conditions que voici:

(C_1) $A(x)\,B(x)\,A(x) + A(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$;

(C_2) *la matrice* $B(x)$ *est compatible avec le groupe* G.

Démonstration. Désignons par $r(x)$ le rang de la matrice $A(x)$ $(x \in E)$. La matrice $A(x)$ peut être écrite sous la forme

$$A(x) = P(x)\ D(x)\ Q(x)$$

où les matrices $P(x)$ et $Q(x)$ sont régulières pour tout $x \in E$ et $D(x)$ est une matrice diagonales aux éléments 1 et 0 telle que le nombre d'unités est égal à $r(x)$. Cette représentation de $A(x)$ s'obtiendrait au moyen de transformations élémentaires effectuées pour tout $x \in E$. Alors la matrice

$$B_0(x) = -Q^{-1}(x)\,D(x)\,P^{-1}(x)$$

remplit la condition (C_1).

Posons ensuite

$$B(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\, B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu \qquad (x \in E).$$

On obtient

$$A(x)\ B(x)\ A(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x)\, M_\nu^{-1}\, B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu\, A(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\, A(\theta_\nu x)\, B_0(\theta_\nu x)\, A(\theta_\nu x)\, M_\nu \qquad (x \in E).$$

la matrice $A(x)$ remplissant la condition (4). En mettant à profit ce fait-là de même que la condition (C_1), remplie par la matrice $B_0(x)$, on obtient

$$A(x)\,B(x)\,A(x) = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\, A(\theta_\nu x)\, M_\nu = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x) = -A(x).$$

$B(x)$ remplit donc la condition (C_1).

Nous avons aussi

$$B(\theta_i x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1}\, B_0(\theta_\nu \theta_i x)\, M_i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_i\,(M_\nu M_i)^{-1}\, B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,(M_\nu M_i)\, M_i^{-1}$$

$$= M_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M_j^{-1}\, B_0(\theta_j x)\, M_j \right) M_i^{-1} = M_i\, B(x)\, M_i^{-1},$$

d'où la conclusion, d'après le lemme 1, que $B(x)$ est compatible avec G.

D'après la démonstration achevée, on a immédiatement le

C o r o l l a i r e. — *Si* $B_0(x)$ *est une matrice qui remplit la condition* (C_1) *du lemme* 2, *alors la matrice*

$$(7) \qquad B(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x) M_\nu$$

remplit les conditions (C_1) *et* (C_2) *du lemme* 2.

Notons que c'est par la négligence de l'auteur que le facteur $\frac{1}{n}$ a été omis dans l'expression pour $B(x)$ dans [2] (c'est-à-dire dans l'expression pour $R(x)$, comme on avait désigné $B(x)$ dans [2]).

Partant des lemmes précedents nous allons démontrer le

T h é o r è m e 1. — *Soit* $B(x)$ *une matrice pour laquelle sont valables les conditions* (C_1) *et* (C_2). *La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = (B(x)\,A(x)+I) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \quad (I \text{ matrice unité}),$$

où $g\,(\in F)$ *désigne une fonction quelconque.*

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème, $B(x)$ est compatible avec G. Comme les matrices $A(x)$ et I possèdent la même propriété, on peut conclure, en s'appuyant sur la remarque 1°, que la matrice suivant $B(x)\cdot A(x)+I$ est aussi compatible aves ce groupe G. C'est pourquoi (8) définit, pour tout $g\,(\in F)$, la fonction $f\,(\in F)$ d'une manière univoque. En multipliant (8) à droite par $A(x)$ on obtient, d'après (C_1),

$$A(x) \left\| \begin{matrix} f(x) \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\| = 0.$$

La fonction $f\,(\in F)$ satisfait donc à l'équation (1) pour tout $g\,(\in F)$.

D'autre part, si $f\,(\in F)$ est une solution de l'équation (1), cette fonction peut être obtenue de la formule (8) en y posant $g=f$.

Les deux faits que nous venons d'établir prouvent que la formule (8) détermine la solution générale de l'équation (1).

Nous remarquons que nous avons décrit, dans la démonstration du lemme 2, un procédé de formation de la matrice $B(x)$ qui remplit les conditions (C_1) et (C_2), ce qui veut dire que le théorème 1 fournit une méthode de consctruction de la solution générale de l'équation (1).

La détermination de la matrice $B(x)$ peut être effectuée après avoir décomposé au préalable l'ensemble E en sous-ensembles disjoints E_r $(r=0,1,2,\ \ldots\ ,n)$, E_r désignant la partie de E où le rang de la matrice $A(x)$ est r. On détermine alors $B(x)$ dans tout E_r séparément, de sorte que l'on résout l'équation (1) dans chaque E_r pris à part.

Ajoutons à cette instruction générale une remarque particulière: Si dans un E_r (on bien dans une partie V d'un ensemble E_r possédant la propriete que $x \in V \Rightarrow \theta_i x \in V, i=1, 2, \ldots, n$) est remplie la condition

$$A^m(x)+\lambda_1(x)A^{m-1}(x)+\cdots+\lambda_{m-1}(x)A(x)=0 \tag{9}$$

$$(\lambda_{m-1}(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in E_r, \text{ ou pour } x \in V),$$

le polynôme en $A(x)$ au premier membre étant le polynôme minimale de la matrice $A(x)$, alors on peut prendre pour $B(x)$ dans E_r (dans V)

$$B(x)=\frac{1}{\lambda_{m-1}(x)}(A^{m-2}(x)+\lambda_1(x)A^{m-3}(x)+\cdots+\lambda_{m-2}(x)I). \tag{10}$$

En effet, après la multiplication de (11) à gauche par M_i et à droite par M_i^{-1}, on aboutit, d'après l'égalité

$$A(\theta_i x)=M_i A(x) M_i^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

à la conclusion que les matrices $A(x)$ et $A(\theta_i x)$ possèdent le même polynôme minimal. Il s'ensuit que $\lambda_j(\theta_i x)=\lambda_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, m-1;\ i=1, 2, \ldots, n;\ x \in E$, ou $x \in V)$. D'après les dernières égalités, la matrice $B(x)$ déterminée par la formule (10) est compatible avec le groupe G pour $x \in E_r$ (ou pour $x \in V$). On deduit, d'autre part, de (9) qu'elle remplit aussi la condition (C_2).

2. Supposons maintenant que les symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ dans l'équation (1) désignent des applications de l'ensemble E dans E qui forment un demi-groupe de l'ordre n, θ_1 étant encore toujours l'application identique. Soit $A(x)$, comme ci-dessus, la matrice du systeme d'équations linéaires en $f(x)$, $f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)$ que l'on obtient en substituant dans (1) à x successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$.

Le théorème suivant se rapporte à la résolution de l'équation (1) dans ce cas-là.

Théorème 2. — *Si la matrice $A(x)$ remplit la condition*

$$A^m(x)+\lambda_1 A^{m-1}(x)+\cdots+\lambda_{m-1}A(x)=0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in E \tag{11}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \in K, \lambda_{m-1} \neq 0;\ m \textit{ un nombre naturel} > 1),$$

alors la solution générale de l'équation (1):

$$a_1(x)f(\theta_1 x)+a_2(x)f(\theta_2 x)+\cdots+a_n(x)f(\theta_n x)=0$$

est détérminée par la formule

$$\left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m-1}}(A^{m-1}(x)+\lambda_1 A^{m-2}(x)+\cdots+\lambda_{m-1}I) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

où g $(\in F)$ désigne une fonction arbitraire.

Démonstration. On peut se convaincre sans difficulté que dans le cas que nous considérons à présent la matrice $A(x)$ est compatible avec le demi-groupe G, la notion de compatibilité d'une matrice avec un groupe pouvant être étendue, d'une manière évidente, au cas de demi-groupe. On en déduit, d'après la remarque 1°, valable évidemment aussi dans ce cas, que l'égalité (12) définit d'une manière univoque la fonction f $(\in F)$ pour tout g $(\in F)$, puisque les coefficients du polynôme formant le premier membre de (11) sont constants. De (11) résulte alors que cette fonction f, pour tout g $(\in F)$, satisfait l'équation (1). Enfin, la formule (12) pour $g=f$ où f, est une solution de (1), se reduit a $f(x)=f(x)$. Cette formule détermine donc la solution générale dans le cas considére.

Citons, comme illustration du dernier résultat, l'équation fonctionnelle

$$2f(x_1, x_2, x_3)-3f(x_2, x_2, x_3)+f(x_3, x_3, x_3)=0 \tag{13}$$

$$(x_i \in R,\ f(x_i, x_j, x_k) \in R;\ R \text{ système de nombres réels}).$$

Nous avons ici: $E=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$ et $K=R$; le demi-groupe G est formé des applications suivantes:

$$\theta_1(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, x_3),\quad \theta_2(x_1, x_2, x_3)=(x_2, x_2, x_3),\quad \theta_3(x_1, x_2, x_3)=(x_3, x_3, x_3)$$

On obtient dans ce cas

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (x=(x_1, x_2, x_3)).$$

Cette matrice-là satisfait à l'équation

$$A^3(x)-A^2(x)-2A(x)=0.$$

D'après le théorème 2, la solution générale de (13) est donnée par la formule

$$\begin{Vmatrix} f(x_1, x_2, x_3) \\ f(x_2, x_2, x_3) \\ f(x_3, x_3, x_3) \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}(A^2(x)-A(x)-2I)\begin{Vmatrix} g(x_1, x_2, x_3) \\ g(x_2, x_2, x_3) \\ g(x_3, x_3, x_3) \end{Vmatrix},$$

c'est-à-dire par la formule

$$f(x_1, x_2, x_3)=g(x_3, x_3, x_3)\equiv h(x_3)$$

où h désigne une fonction réelle arbitraire.

Considérons le cas plus général de l'équations fonctionnelle

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)+a_2 f\left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2\right)+\cdots+a_n f\left(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n\right)=0 \tag{14}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m \in R;\quad a_2, \ldots, a_n \text{ éléments fixés de } R),$$

où x_i^j $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=2, 3, \ldots, n)$ sont les éléments déterminés de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et où f désigne la fonction inconnue („de m variables indépendantes réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$"). Si la matrice correspondante $A(x)$ (constante) possède le polynôme minimal da la forme

$$A^k(x)+\lambda_1 A^{k-1}(x)+\cdots+\lambda_{k-1}A(x),$$

avec $\lambda_{k-1}\neq 0$, alors la solution générale de l'équation (14) peut être exprimé par la formule (12), au moyen d'une seule fonction réelle arbitraire de m variables reelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Si l'on a $\lambda_{k-1}=0$, il peut ariver effectivement que la solution générale na soit pas exprimable au moyen d'une seule fonction arbitraire.

C'est par exemple le cas de l'équation

(15) $$f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1)-2f(x_1, x_1)=0 \qquad (x_1, x_2 \in R, \ f(x_1, x_2) \in R).$$

Pour le demi-groupe correspondant G on peut predre le demi-groupe minimal engendré par les applications θ_1, θ_2, θ_3, définies comme il suit:

$$\theta_1(x_1, x_2)=(x_1, x_2), \quad \theta_2(x_1, x_2)=(x_2, x_1), \quad \theta_3(x_1, x_2)=(x_1, x_1).$$

On obtient

$$G=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \text{ où } \theta_4=\theta_3\theta_2,$$

avec la table de Cayley correspondante:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_2	θ_2	θ_1	θ_3	θ_4
θ_3	θ_3	θ_4	θ_3	θ_4
θ_4	θ_4	θ_3	θ_4	θ_4

L'équation (15) peut être écrite sous la forme

(16) $$f(x)+f(\theta_2 x)-2f(\theta_3 x)+0\cdot f(\theta_4 x)=0 \quad (x=(x_1, x_2)).$$

En substituant à x successivement x, $\theta_2 x$, $\theta_3 x$, $\theta_4 x$, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} f(x)+f(\theta_2 x)-2f(\theta_3 x)+0\cdot f(\theta_4 x)&=0\\ f(x)+f(\theta_2 x)+0\cdot f(\theta_3 x)-2f(\theta_4 x)&=0\\ 0&=0\\ 0&=0. \end{aligned}$$

On a donc

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (x=(x_1, x_2)).$$

Le polynôme minimal de cette matrice t^3-2t^2 ne contient pas la première puissance de t.

C'est pourquoi la solution gènèrale, de l'équation (15) ne pourrait être obtenne par l'application du théorème 2. Cette solution générale est cependant donnée par

$$f(x_1, x_2)=g(x_1, x_2)-g(x_2 \ x_1)+h,$$

où la fonctions g (g: $R\times R\to R$) et la constante h ($\in R$) sont arbitraires. Elle n'est pa exprèmable au moyen d'une seule fonction réelle $g(x_1, x_2)$. s

3. Citons enfin une conclusion, relative à la forme de la solution générale de l'équation fonctionnelle (1), que l'on tire immédiatement des théorémes 1 et 2:

Sous les conditions du théorème 1 *ou celles du théorème* 2, *la solution générale de* (1) *peut être écrite sous la forme*

$$f(x)=b_1(x)g(x)+b_2(x)g(\theta_2 x)+\cdots+b_n(x)g(\theta_n x),$$

ou les b_i ($\in F$) ($i=1, 2, \ldots, n$) *sont des fonctions déterminées par les coefficients* $a_i(x)$ *de* (1) *et* g ($\in F$) *désigne une fonction arbitraire.*

Dans ces deux cas-là, la solution générale de (1) peut donc être expimée au moyen d'une seule fonction arbitraire.

L'équation (1) est traitée dans la monographie [3], mais seulement dans le cas où G est un groupe cyclique.

C'est le professeur D. S. Mitrinović qui m'a signalé quelques problèmes liés à l'équation (1), lesquels m'on conduit à la méthode exposée dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić: *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x)=H(x,f(x),\ldots,f(\theta_n x))$. Ces Publications № 118,1963.

]2] S. B. Prešić: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéarires.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. t. 257, 1963, p. 2224—2226.

[3] M. Germănescu: *Ecuatii functionale*, Bucarest 1960, p. 403—407.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 5 (19), 1965, p. 75–78.

SUR UNE CLASSE D' INÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES ET SUR LA CONVERGENCE DE CERTAINES SUITES

Slaviša B. Prešić

(Communiqué le 17 avril 1964).

Dans cet article nous allons considérer une classe d'inéquations aux différences finies et, en s'appuyant sur les résultats obtenus, nous démontrerons ensuite deux théorèmes sur la convergence de certaines suites.

1. Nous commençons par le lemme suivant fondamental:

L e m m e 1. *Soit k un nombre natural fixé et soient x_n et X_n deux suites de nombres non négatifs satisfaisant aux conditions*:

$$x_{n+k} \leqslant a_1(n)\, x_n + a_2(n)\, x_{n+1} \cdots + a_k(n)\, x_{n+k-1}, \tag{1}$$

$$X_{n+k} \geqslant a_1(n)\, X_n + a_2(n)\, X_{n+1} \cdots + a_k(n)\, X_{n+k-1}$$

$$(n = 1, 2, \cdots;\ X_1, \cdots, X_k > 0)$$

les coefficientes $a_1(n), \cdots, a_k(n)$ étant tous non négatifs.

Il existe alors un nombre non négatif L tel que l'on a

$$x_n \leqslant L\, X_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Démonstration. On vérifie immédiatement l'assertion du lemme en posant

$$L = \max\left(\frac{x_1}{X_1}, \frac{x_2}{X_2}, \cdots, \frac{x_k}{X_k}\right)$$

et en appliquant ensuite l'induction mathématique.

On peut compléter le lemme démontré par l'énoncé suivant: Si dans (1), l'on a $x_1, \cdots, x_k > 0$, alors il existe un $l (\geqslant 0)$ tel que l'on a

$$X_n \leqslant l x_n\, (n = 1, 2, \cdots).$$

La démonstration est semblable à celle du lemme 1.

L e m m e 2. *Soit x_n une suite de nombres non négatifs qui remplit la condition*

$$x_{n+k} \leqslant a_1 x_n + a_2 x_{n+1} + \cdots + a_k x_{n+k-1}$$

$$(n = 1, 2, \cdots;\ k \textit{ nombre naturel fixé}),$$

les constants $a_1, a_2, \cdots, a_k$ étant non négatifs. Alors ils existent les nombres positifs L et θ tels que l'on a

$$x_n \leqslant L\theta^n \ (n=1, 2, \cdots).$$

Démonstration. Soit θ un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$\theta^k \geqslant a_1 + a_2\theta + \cdots + a_k\theta^{k-1}.$$

Alors, la suite positive $X_n = \theta^n$ remplit la condition

$$X_{n+k} \geqslant a_1 X_n + a_2 X_{n+1} + \cdots + a_k X_{n+k-1} \ (n=1, 2, \cdots),$$

de manière que, d'après le lemme 1, il existe un L ($\geqslant 0$) tel que l'on a

$$x_n \leq L X_n, \text{ c'est-à-dire } x_n \leq L\theta^n (n = 1, 2, \cdots)$$

Le lemme 1 peut être étendu aux paires d'inéquations à différences finies de la forme

$$x_n \leq a_0(n) + a_1(n) x_1 + \cdots + a_{n-1}(n) x_{n-1},$$

$$X_n > a_0(n) + a_1(n) X_1 + \cdots + a_{n-n}(n) X_{n-1},$$

avec $a_1(n), a_2(n), \cdots, a_{n-1}(n) \geqslant 0$, ou bien aux paires de systèmes d'inéquations de ce type.

Par exemple, pour le cas du système de deux inéquations à différences finies, on a le

Lemme 3. *Soient x_n, y_n, X_n, Y_n deux suites de nombres positifs satisfaisant aux conditions*

$$x_n \leq a(n) + a_1(n) x_1 + \cdots + a_{n-1}(n) x_{n-1} + b_1(n) y_1 + \cdots + b_{n-1}(n) y_{n-1},$$

$$y_n \leqq c(n) + c_1(n) x_1 + \cdots + c_{n-1}(n) x_{n-1} + d_1(n) y_1 + \cdots + d_{n-1}(n) y_{n-1},$$

$$X_n \geqslant a(n) + a_1(n) X_1 + \cdots + a_{n-1}(n) X_{n-1} + b_1(n) Y_1 + \cdots + b_{n-1}(n) Y_{n-1},$$

$$Y_n \geqslant c(n) + c_1(n) X_1 + \cdots + c_{n-1}(n) X_{n-1} + d_1(n) Y_1 + \cdots + d_{n-1}(n) Y_{n-1},$$

$$(n=2, 3, \cdots; \ a_i(n), b_i(n), c_i(n), d_i(n) \geqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, n-1)$$

Il existent alors deux nombres positifs L_1 et L_2 tels que l'on a

$$x_n \leq L_1 X_n, \ y_n \leq L_2 Y_n \ (n = 1, 2, \cdots).$$

Nous omettons la démonstration, celle-là étant tout-à-fait semblable à celle du lemme 1.

2. Soit E un espace métrique complet, k un nombre naturel donné et $f: E^k \rightarrow E$ une fonction donnée remplissant la condition

$$(2) \qquad d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k), f(u_2, u_3, \cdots, u_{k+1})) \leqq a_1 d(u_1, u_2) + a_2 d(u_2, u_3) + \\ + \cdots + a_k d(u_k, u_{k+1}) \quad (u_1, \cdots, u_{k+1} \in E),$$

où les nombres a_i sont non négatifs et soumis à la condition

$$(3) \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_k < 1.$$

On peut noter que dans le cas $k = 1$ les conditions (2) et (3) se réduisent aux conditions au moyen desquelles on introduit l'opérateur de contraction.

Théorème **1. A.** *Toute suite x_n ($n = 1, 2, \cdots; x_n \in E$) satisfaisant à la condition*

$$(4) \qquad x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

les éléments $x_1, x_2, \cdots, x_k \in E$ *étant arbitraires et la fonction* f *satisfaisant aux conditions précédentes, est convergente.*

B. La limite $\lim_{n \to \infty} x_n$ *satisfait à l'équation*

$$x = f(x, x, \cdots, x) \tag{5}$$

et représente l'unique solution de (5).

Démonstration. **A.** Posons $\Delta_n = d(x_n, x_{n+1})$. Nous avons alors, d'après (2),

$$\Delta_{n+k} \leqslant a_1 \Delta_n + a_2 \Delta_{n+1} + \cdots + a_k \Delta_{n+k-1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

D'après le lemme 2 il existent deux nombres positifs L et θ tel que l'on a

$$\Delta_n \leq L\theta^n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

le nombre θ étant, n'importe quelle solution positive de l'inéquation

$$\theta^k \geqslant a_1 + a_2\theta + \cdots + a_k\theta^{k-1}. \tag{7}$$

Or, l'inégalité (3) entraîne l'existence d'une solution θ de (7) pour laquelle on a $0 < \theta < 1$. Pour ce nombre θ on aura, d'après (6),

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqq L \frac{\theta^n}{1-\theta} \quad (n, p = 1, 2, \cdots),$$

d'où la conclusion que x_n est une suite de Cauchy. Elle est par conséquent convergente, l'espace métrique E étant complet.

B. Après avoir observé que l'on a, sous les hypothèses admises sur f,

$$\begin{aligned} d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k), f(u, u, \cdots, u)) \leq{} & d(f(u_1, u_2, \cdots, u_k),\ f(u_2, u_3, \cdots, u_k, u)) \\ & + d(f(u_2, u_3, \cdots, u_k, u) f(u_3, u_4, \cdots, u_k, u, u)) \\ & + \cdots \\ & + d(f(u_k, u, \cdots, u), f(u, u, \cdots, u)), \\ d(f(u, u, \cdots, u), f(v, v, \cdots, v)) \leq{} & (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\, d(u, v) \\ & (u_1, u_2, \cdots, u_k, u, v \in E), \end{aligned}$$

on démontre l'assertion que $\lim_{n \to \infty} x_n$ est la solution de (5) de la même manière que l'on procède dans la partie correspondante de la démonstration du théorème connu de Banach sur le point fixe, et la seconde assertion, que $\lim_{n \to \infty} x_n$ est l'unique solution de (5), résulte du théorème de Banach mentionné si l'on l'applique à la fonction $F: E \to E$ définie par

$$F(x) = f(x, x, \cdots, x) \quad (x \in E).$$

Le théorème 1 peut être appliqué aux suites réelles, ainsi que aux suites liées à la solution des équations: linéaires algébriques, différentielles, intégrale et autres.

Par exemple, nous allons déduire du théorème **1** le théorème suivant relatif à la convergence de suites réelles.

Théorème **2.** *Soit E un intervalle fermé de la droite réelle (fini ou infini) et soit $f(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ $(u_i, f(u_1, u_2, \cdots, u_k) \in E)$ une fonction dont les dérivées partielles existent et satisfont à la condition*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| \leqslant a_i \quad (u_i \in E, i = 1, 2, \cdots, k), \tag{8}$$

où la somme des constantes a_i est inférieure à 1.
Alors, la suite $x_n (n = 1, 2, \cdots; x_n \in E)$ dont les termes satisfont à la condition

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

converge et sa limite est l'unique solution dans E de l'équation

$$x = f(x, x, \cdots, x)$$

Démonstration. On a, d'après (8) et d'après le théorème sur la valeur moyenne,

$$\begin{aligned} |f(u_1, u_2, \cdots, u_k) - f(u_2, u_3, \cdots, u_{k+1})| \leqslant a_1 |u_1, -u_2| + \\ + a_2 |u_2 - u_3| + \cdots + a_k |u_k - u_{k+1}| \\ (u_1, u_2, \cdots, \in E), \end{aligned}$$

de manière que f remplit toutes les conditions du théorème 1 si l'on pose

$$d(u, v) = |u - v|.$$

Nous allons illustrer le théorème 2 par l'exemple suivant.

La suite x_n pour laquelle

$$\frac{8}{3} x_{n+2} = \frac{1}{1 + x_n} + \frac{1}{1 + x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots; x_1, x_2, \geqslant 0$$

converge vers $\frac{1}{2}$.

En effet, la fonction

$$f(u_1, u_2) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{1 + u_1} + \frac{1}{1 + u_2}\right)$$

remplit toutes les conditions du théorème 2 dans $E = \{x \mid x \geqslant 0\}$.

M. Kuczma a bien voulu lire un résumé de cet article pour ce qui nous lui exprimons nos vifs reconnaissances.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 862-863 (13 avril 1966). **Série A**

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes.* Note (*) de M. **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Paul Montel.

Soit $P = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ un polynome sur le corps commutatif des nombres complexes dont les racines sont toutes différentes. Si la somme des nombres naturels $a, b, \ldots, l$ est n, alors, d'après le théorème fondamental de l'algèbre, existent les polynomes A, B, ..., L aux degrés $a, b, \ldots, l$ respectivement tels qu'on a $P = AB \ldots L$. Dans cette Note nous donnons un procédé pour déterminer, sous certaines hypothèses, les suites de polynomes $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ telles que $\lim_{k\to\infty} A(k) = A$, $\lim_{k\to\infty} B(k) = B$, ..., $\lim_{k\to\infty} L(k) = L$.

Soit K le corps commutatif des nombres complexes sur lequel on considère le polynome

$$P = P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 \tag{1}$$

dont toutes les racines sont différentes.

Désignons par $n = a + b + \ldots + l$ une décomposition du nombre n en somme de $s + 1$ nombres naturels et soient

$$\begin{cases} A = x^a + \alpha_{a-1}x^{a-1} + \ldots + \alpha_0, \qquad B = x^b + \beta_{b-1}x^{b-1} + \ldots + \beta_0, \qquad \ldots, \\ \qquad\qquad L = x^l + \lambda_{l-1}x^{l-1} + \ldots + \lambda_0, \end{cases} \tag{2}$$

les facteurs du polynome (1) tels qu'on a $P = AB \ldots L$. Soient enfin

$$\begin{cases} A(k) = x^a + \alpha_{a-1}(k)x^{a-1} + \ldots + \alpha_0(k), \\ B(k) = x^b + \beta_{b-1}(k)x^{b-1} + \ldots + \beta_0(k), \qquad \ldots, \\ L(k) = x^l + \lambda_{l-1}(k)x^{l-1} + \ldots + \lambda_0(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{3}$$

les suites de polynomes déterminées par les conditions

$$\begin{cases} A(k+1)B(k)\ldots L(k) + A(k)B(k+1)\ldots L(k) + \ldots \\ \quad + A(k)B(k)\ldots L(k+1) - sA(k)B(k)\ldots L(k) = P \qquad (k = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{4}$$

qui signifient en réalité que l'équation

$$P = 0 \tag{5}$$

est équivalente à chacune des équations

$$\begin{cases} E_k: \quad A(k+1)B(k)\ldots L(k) + A(k)B(k+1)\ldots L(k) + \ldots \\ \qquad\qquad + A(k)B(k)\ldots L(k+1) - sA(k)B(k)\ldots L(k) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Les égalités (4) définissent les coefficients $\alpha_{a-1}(k+1), \ldots, \alpha_0(k+1)$, $\beta_{b-1}(k+1), \ldots, \beta_0(k+1), \ldots, \lambda_{l-1}(k+1), \ldots, \lambda_0(k+1)$ en fonction des coefficients $\alpha_{a-1}(k), \ldots, \alpha_0(k), \beta_{b-1}(k), \ldots, \beta_0(k), \ldots, \lambda_{l-1}(k), \ldots, \lambda_0(k)$ et des coefficients du polynome (1). Pour décrire convenablement cette dépendance-là, nous introduisons l'espace vectoriel K^n. Posons

$$p = (\alpha_{a-1}, \ldots, \alpha_0, \beta_{b-1}, \ldots, \beta_0, \ldots, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_0),$$
$$p(k) = (\alpha_{a-1}(k), \ldots, \alpha_0(k), \beta_{b-1}(k), \ldots, \beta_0(k), \ldots, \lambda_{l-1}(k), \ldots, \lambda_0(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

On obtient alors de (4)

$$p(k+1) = F(p(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

où

$$v = F(u) \qquad [u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), u, v \in K^n],$$

est une fonction vectorielle.

La fonction F a les propriétés suivantes :

1° $$F(p) = p,$$

2° $$\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{u=p} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est partant des propriétés (1) et (2) et de (4) qu'on démontre les deux résultats que voici :

Proposition 1. — *Si la suite* $p(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *converge, alors* $\lim\limits_{k\to\infty} A(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} L(k)$ *sont des facteurs du polynome* P *et l'on a*

$$P = \lim_{k\to\infty} A(k) . \lim_{k\to\infty} B(k) \ldots \lim_{k\to\infty} L(k).$$

Proposition 2. — *Il existe un voisinage* V *du vecteur* p *tel que* $p(1) \in V$ *entraîne la convergence de la suite* $p(k)$ *et cela à la vitesse carrée* (*c'est-à-dire, on a*

$$\| p(k+1) - p \| = O(\| p(k) - p \|^2), \; p(k) \to p).$$

Dans le cas de la décomposition

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1,$$

nous allons préciser la fonction F comme suit.

En désignant les polynomes $A(k)$, $B(k)$, $\ldots$, $L(k)$ respectivement par $x - a_1(k)$, $x - a_2(k)$, $\ldots$, $x - a_n(k)$, on peut obtenir de l'égalité (4)

$$a_i(k+1) = a_i(k) - \frac{P(a_i(k))}{Q'(a_i(k))} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\; k = 1, 2, \ldots)$$

avec $Q(x) = (x - a_1(k))(x - a_2(k)) \ldots (x - a_n(k))$.

On remarque certaine analogie avec les formules connues de Newton.

Les démonstrations plus détaillées, de même que plusieurs exemples, seront contenus dans l'article qui paraîtra ailleurs.

(*) Séance du 4 Avril 1966.

(*Institut Mathématique,*
Knez Mihailova 35, Belgrade, Yougoslavie.)

171906. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 143—148.

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS MATRICIELLES ET L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f^2=f$

Slaviša B. Prešić

(Présenté le 6 décembre 1967)

1. Soit S un ensemble non vide et f une application de S dans S. Il existe alors entre les équations

$$f(f(x))=f(x) \quad \text{et} \quad x=f(x)$$

la connexion caractéristique suivante.

Proposition 1. *Soit l'application f telle que l'on ait $f(f(x))=f(x)$ pour tout $x \in S$. Alors:*

1° *Si Π est un élément arbitraire de S, $x=f(\Pi)$ est une solution de l'équation $x=f(x)$ en x.*

2° *Si x est une solution de l'équation $x=f(x)$ en x, il existe dans S un élément Π tel que $x=f(\Pi)$.*

Cette assertion-là résulte immédiatement de

$$(\forall x)\,(f(f(x))=f(x)) \wedge (x=f(\Pi)) \;\Rightarrow\; x=f(x);$$

$$x=f(x) \;\Rightarrow\; (\exists y)\,(x=f(y)).$$

On peut s'exprimer aussi de la manière suivante:

En supposant la condition $f^2=f$ remplie, la solution générale de l'équation $x=f(x)$ est donnée par la formule

$$x=f(\Pi) \qquad (\Pi \in S).$$

Sous la condition $f^2=f$, appelons l'équation $x=f(x)$ reproductive (Löwenheim [1]).

Dans ce qui suit, nous allons citer quelques exemples des applications de la proposition précédente.

Nous allons établir tout d'abord une connexion entre les équations $x=f(x)$ et $x=g(x)$, avec une application $g: S \to S$.

Disons que les équations $x=f(x)$ et $x=g(x)$ sont *équivalentes* si les ensembles de leurs solutions sont égaux, c'est-à-dire si

$$x=f(x) \Leftrightarrow x=g(x)$$

pour tout $x \in S$.

Proposition 2. *Pour toute équation*

$$x = g(x) \qquad (g : S \to S)$$

qui admet au moins une solution, il existe au moins une équation reproductive $x = f(x)$ équivalente à $x = g(x)$.

Démonstration. Désignons par R l'ensemble de toutes les solutions de $x = g(x)$. On a, donc,

$$\emptyset \neq R \subseteq S \quad \text{et} \quad x \in R \Leftrightarrow x = g(x).$$

Soit h: $S \setminus R \to R$ une application arbitraire et définissons l'applications $f : S \to S$ comme il suit:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x), \quad \text{si} \quad x \in S \setminus R, \\ &= x, \qquad\ \text{si} \quad x \in R. \end{aligned}$$

On conclut immédiatement que l'on a

1° $f^2 = f$,

2° $x = f(x) \Leftrightarrow x = g(x)$.

La proposition démontrée donne l'idée de la possibilité de l'application des équations reproductives à la résolution des équations quelconques.

Les équations que nous allons traiter dans ce qui suit possèdent des propriétés supplémentaires; elle sont linéaries, booliennes. Les méthodes des solutions de ces classes d'équations sont semblables puisque pour chacune d'elle est valable la proposition prouvée, sous forme correspondante.

2. Soit donnée une matrice carrée A d'ordre n sur le corps commutatif F. Il existe alors une matrice carrée B telle que l'on a $ABA = A$, ce qui résulte immédiatement du fait suivant: Si r est le rang de la matrice A, il existent deux matrices réguliers P et Q telles que $A = PDQ$, la matrice D étant diagonale et avec r éléments égaux à 1 et tous les autres égaux à 0.

Evidemment, les équations en X

$$AX = 0, \qquad X = (I - BA)X$$

(I matrice unité) sont alors équivalentes.

D'autre part, la seconde équation est reproductive, puisque

$$(I - BA)^2 = I - BA$$

Donc, on a:

Proposition 3. *La solution générale de l'équation $AX = 0$ est donnée par la formule*

$$X = (I - BA)\Pi,$$

où Π est une matrice carrée d'ordre n sur F arbitraire.

C'est en profitant du résultat précédent que l'on a obtenu la méthode exposée dans [4], où la matrice B, satisfait aussi à la condition de *compatibilité* avec un certain groupe G. Dans le présent article le même résultat sera utilisé pour aboutir à la solution générale d'une équation matricielle.

3. Soit P et Q deux matrices carrées d'ordre n données et soient $\alpha_{ij}\,(0\leqslant i\leqslant p-1;\ 0\leqslant j\leqslant q-1)$ les scalaires donnés. Nous allons déterminer, sous certaines conditions, la solution générale de l'équation matricielle

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}P^iXQ^j=0. \tag{1}$$

Désignons par

$$\mu(P)=x^p-\alpha_{p-1}x^{p-1}-\cdots-\alpha_0,$$

$$\mu(Q)=x^q-\beta_{q-1}x^{q-1}-\cdots-\beta_0$$

les polynômes minimaux des matrices P et Q, respectivement. En multipliant l'équation (1) par $P^\rho\,(0\leqslant\rho\leqslant p-1)$ de droite et par $Q^\sigma\,(0\leqslant\sigma\leqslant q-1)$ de gauche et profitant des égalités

$$P^p=\alpha_{p-1}P^{p-1}+\cdots+\alpha_0 I,$$

$$Q^q=\beta_{q-1}Q^{q-1}+\cdots+\beta_0 I,$$

on obtient un système linéaire $\mathcal{S}$ en P^iXQ^j, où $0\leqslant i\leqslant p-1$, $0\leqslant j\leqslant q-1$.

Soit, par example, $\mu(P)=x^2-x$, $\mu(Q)=x^2-x$, les matrices P et Q étant réelles et d'ordre n, et soit (2) l'équation

$$PX-XQ=0.$$

Le système $\mathcal{S}$ est alors

$$\begin{array}{lllr@{\qquad}l} PX & -XQ & & =0 & P^0;\ Q^0\\ PX & & -PXQ & =0 & P^1;\ Q^0\\ & -XQ & +PXQ & =0 & P^0;\ Q^1\\ & & & 0=0 & P^1;\ Q^1. \end{array}$$

Désignons par $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ les „*companion-matrices*" [3] des polynômes $\mu(P)$ et $\mu(Q)$ respectivement, c'est-à-dire

$$\bar{P}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad \bar{Q}=\bar{P}.$$

La multiplication de Kronecker [2] étant désignée par $\times$. La matrice du système $\mathcal{S}$ est

$$I\times\bar{P}-\bar{Q}\times I.$$

Considérons de nouveau le système $\mathcal{S}$ dans le cas général. C'est un système $P^0XQ^0,\ \ldots.\ P^{p-1}XQ^0,\ P^0XQ^1,\ldots,P^{p-1}XQ^1,\ldots,P^0XQ^{q-1},\ldots,P^{p-1}XQ^{q-1}$. Désignons par $P^\rho;\ Q^\sigma$, où $0\leqslant\rho\leqslant p-1$, $0\leqslant\sigma\leqslant q-1$, l'équation que l'on obtient de l'équation (1) en la multipliant par P^ρ de droite et par Q^σ de gauche.

Supposons que les équations dans le système $\mathcal{S}$ soient données dans l'ordre suivant

$$\begin{array}{llll} P^0;\ Q^0, & P^1;\ Q^0, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^0\\ P^0;\ Q^1, & P^1;\ Q^1, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^1\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ P^0;\ Q^{q-1}, & P^1;\ Q^{q-1}, & \ldots, & P^{p-1};\ Q^{q-1}, \end{array}$$

La matrice A du système $\mathcal{S}$ est alors

$$A=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}\,\overline{Q}^{j}\times\overline{P}^{i}, \tag{2}$$

les matrices $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ étant „companion-matrices" des polynômes $\mu(P)$ et $\mu(Q)$, c'est-à-dire

$$\overline{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ . & . & . \cdots . \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_{p-1} \end{pmatrix} \qquad \overline{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ . & . & \vdots \cdots . \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \cdots \beta_{q-1} \end{pmatrix}$$

le symbõle X désignant la multiplication de Kronecker.

Remarque. On démontre la formule (2) par un calcul facile pour les équations de la forme

$$P^i X Q^j=0.$$

Elle est aussi valable pour l'équation (1), étant donné que l'addition et la multiplication par scalaire conservent la validité de (2).

Étendons l'ensemble de toutes les matrices sur le corps commutatif considéré en introduisant les „matrices" possédant une colonne et pq lignes et dont les éléments sont des matrices d'ordre n. Appelons telles „matrices"— *matrices matricielles.* Introduisons ensuite le produit d'une matrice arbitraire d'ordre pq avec une matrice matricielle d'après la règle ligne-colonne (de la manière „habituelle"). Le résultat est aussi une matrice matricielle.

Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M \\ L+N \\ L+M \end{pmatrix}$$

aves les matrices L, M, N arbitraires sur le corps commutatif F.

La matrice matricielle de la forme

$$\left\| \begin{matrix} \Pi \\ P\Pi \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi \\ \Pi Q \\ P\Pi Q \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q \\ \vdots \\ \Pi Q^{q-1} \\ P\Pi Q^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q^{q-1} \end{matrix} \right\|$$

où Π est une matrice quelconque d'ordre n, sera appelée *matrice exceptionnelle.* Disons que la matrice C d'ordre pq est *stable* si le produit de C et une matrice exceptionnelle est toujours une matrice exceptionnelle.

Exemple. La matrice A du système $\mathcal{S}$ est une matrice stable.

On établit immédiatement que la somme et le produit des matrices stables, de même que le produit d'un scalaire et une matrice stable, sont matrices stables.

Désignons par

$$\mu(A)=x^m+\gamma_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\gamma_0$$

le polynôme minimal de la matrice A. Définissons la matrice B comme il suit:

1° Si $\gamma_0\neq 0$, alors $B=-\gamma_0^{-1}(A^{m-1}+\gamma_{m-1}A^{m-2}+\cdots+\gamma_1 I)$.

2° Si $\gamma_0=0$, $\gamma_1\neq 0$, alors $B=-\gamma_1^{-1}(A^{m-2}+\gamma_{m-1}A^{m-3}+\cdots+\gamma_2 I)$.

La matrice B satisfait aux conditions:

1° $ABA=A$.

2° B est une matrice stable.

En s'appuyant sur ce fait-là et sur la proposition 3 on obtient le théorème suivant:

Théorème. *La solution générale en X de l'équation*

$$\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}P^iXQ^j=0$$

est donnée par la formule

$$\left|\begin{matrix} X \\ PX \\ \vdots \\ P^{p-1}X \\ XQ \\ PXQ \\ \vdots \\ P^{p-1}XQ \\ \vdots \\ XQ^{q-1} \\ PXQ^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}XQ^{q-1} \end{matrix}\right| = (I-BA)\left|\begin{matrix} \Pi \\ P\Pi \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi \\ \Pi Q \\ P\Pi Q \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q \\ \vdots \\ \Pi Q^{q-1} \\ P\Pi Q^{q-1} \\ \vdots \\ P^{p-1}\Pi Q^{q-1} \end{matrix}\right|, \tag{3}$$

où Π est une matrice arbitraire d'ordre n sur le corps commutatif F sous l'hypothèse suivante:

$$\gamma_0\neq 0 \quad \text{ou } \gamma_0=0,\quad \gamma_1\neq 0.$$

Corollaire. Si $\gamma_0\neq 0$, alors l'équation (1) n'admet que la solution triviale $X=O$.

Exemple. Pour l'équation $PX=QX$, avec $\mu(P)=x^2-x$, $\mu(Q)=x^2-x$, nous avons

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mu(A)=x^3-x,\ B=A.$$

La formule (3) conduit à la solution générale de l'équation considérée sous la forme

$$X = \Pi - P\Pi - \Pi Q + 2P\Pi Q$$

avec une matrice Π arbitraire.

3. L'équation fonctionnelle $f^2 = f$, c'est-à-dire la proposition 1 peut être appliquée à la résolution des équations booliennes.

Nous citons ici un exemple pour illustrer ce point-là.

Soient $\cup$, $\cap$ les opérations de l'algèbre de Boole B, et soit $\mathscr{E}$ le système suivant d'équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \cap (x_2 \cup x_3 \cup \ldots \cup x_n) \\ x_2 &= x_2 \cap (x_3 \cup x_4 \cup \ldots \cup x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n \cap (x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n-1}). \end{aligned}$$

En introdusant les désignations

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ F(X) = \\ = (x_1 \cap (x_2 \cup x_3 \cup \ldots \cup x_n), \ldots, x_n \cap (x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n-1}))$$

on remplace $\mathscr{E}$ par

$$X = F(X). \tag{4}$$

L'équation (4) est reproductive, ce qui est aisé à vérifier, et par suite la solution générale du système $\mathscr{E}$ est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cap (\xi_2 \cup \xi_3 \cup \ldots \cup \xi_n) \\ x_2 &= \xi_2 \cap (\xi_3 \cup \xi_4 \cup \ldots \cup \xi_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \xi_n \cap (\xi_1 \cup \xi_2 \cup \ldots \cup \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

(ξ_i éléments arbitraires de B).

On a les résultats analogues dans le cas d'une treille distributive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Löwenheim L. *Über die Auflösungen von Gleichungen im logischen Gebietskalkul*, Math. Ann. 68, 169—207, 1919.

[2] Mac Duffee C. C., *The theory of matrices*, New York, 1946.

[3] Perlis S., *Theory of matrices*, Addison Wesley, Cambridge, Mass. 1952.

[4] Prešić S. B., *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires* Publ. Elek. Fak. Univ. u Beogradu, 119, p. 21—28, 1963.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
5 (20) 1968, стр. 205—216

Славиша Б. Прешић

ЈЕДАН ИТЕРАТИВНИ ПОСТУПАК ЗА ФАКТОРИЗАЦИЈУ ПОЛИНОМА

(Саопштено 13. децембра 1967.)

1. У овом чланку се доказују и проширују резултати који су кратко изложени у [2]. Осим тога наводи се и више примера. На поступак који излажем инспирисали су ме резултати Д. Марковића [1].

2. Нека је

$$P = x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \tag{1}$$

полином на пољу комплексних бројева чији су корени $x_1, x_2, \ldots, x_n$ међусобно различити. Тада је

$$P = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \tag{2}$$

Нека су $a, b, \ldots, l$ ($a \leqslant b \leqslant \cdots \leqslant l$) природни бројеви такви да је $n = a + b + \cdots + l$. Постоје полиноми $A, B, \ldots, L$ чији су степени редом $a, b, \ldots, l$ тако да је

$$P = AB \cdots L. \tag{3}$$

Једнакост (3) зовемо $a - b - \cdots - l$ факторизација полинома P. Тако, (2) је $1 - 1 - \cdots - 1$ факторизација. Ако је, на пример, P полином четвртог степена онда он има једну $1 - 1 - 1 - 1$ факторизацију, шест $1 - 1 - 2$ факторизација, четири $1 - 3$ факторизације, три $2 - 2$ факторизације.

Претпоставимо да у једнакости $n = a + b + \cdots + l$ има $s + 1$ сабирака. Дефинисаћемо низове полинома $A(k), B(k), \ldots, L(k)$, где је $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
A(k) &= x^a + \alpha_{a-1}(k)\, x^{a-1} + \cdots + \alpha_0(k),\\
B(k) &= x^b + \beta_{b-1}(k)\, x^{b-1} + \cdots + \beta_0(k),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L(k) &= x^l + \lambda_{l-1}(k)\, x^{l-1} + \cdots + \lambda_0(k),
\end{aligned}$$

који ће под извесним условима конвергирати ка $A, B, \ldots, L$.

За полиноме $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ постављамо следеће услове

$$\begin{aligned}
&A(k+1)\, B(k) \cdots L(k) + A(k)\, B(k+1) \cdots L(k) + \cdots\\
&+ A(k)\, B(k) \cdots L(k+1) - s\, A(k)\, B(k) \cdots L(k) = P,
\end{aligned} \tag{C_k}$$

где је $k = 0, 1, 2, \ldots$

Сваки од тих услова представља систем n једначина у којима учествују коефицијенти полинома P, $A(k)$, $A(k+1)$, $B(k)$, $B(k+1)$, $\ldots$, $L(k)$, $L(k+1)$; односно, под извесним условима, свака од једначина (C_k) се може свести на еквивалентан систем диференцијских једначина облика:

$$
(J_k)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_{a-1}(k+1)=\\
&=F_{a-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_0(k+1)=\\
&=F_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\beta_{b-1}(k+1)=\\
&=G_{b-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_0(k+1)=\\
&=G_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_{l-1}(k+1)=\\
&=H_{l-1}(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_0(k+1)=\\
&=H_0(\alpha_{a-1}(k),\ldots,\alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ldots,\beta_0(k),\ldots,\lambda_{l-1}(k),\ldots,\lambda_0(k)),\\
&\qquad\qquad\qquad(k=0,\,1,\,2,\ldots),
\end{aligned}
$$

где су $F_{a-1},\ldots,F_0,\ G_{b-1},\ldots,G_0,\ldots,H_{\lambda-1},\ldots,H_0$ извесне рационалне функције. То је узроковано и чињеницом што су услови (C_k) линеарни по $\alpha_{a-1}(k+1),\ldots,\ \alpha_0(k+1),\ \beta_{b-1}(k+1),\ldots,\ \beta_0(k+1),\ldots,\ \lambda_{l-1}(k+1),\ \ldots,$ $\lambda_0(k+1)$.

Итеративни поступак који излажемо је дефинисан једнакостима (J_k).

3. Претходно наводимо једнакости (J_k) у случају $1-1-\cdots-1$ факторизације. У овом случају полиноме $A(k)$, $B(k)$, $\ldots$, $L(k)$ означавамо редом $x-a_1(k)$, $x-a_2(k)$, $\ldots$, $x-a_n(k)$. Услов (C_k) гласи:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&(x-a_1(k+1))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))\\
&+(x-a_1(k))(x-a_2(k+1))\cdots(x-a_n(k))\\
&+\cdots+(x-a_1(k))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k+1))\\
&-(n-1)(x-a_1(k))(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))=P.
\end{aligned}
$$

Претпоставимо да су $a_1(k)$, $a_2(k)$, $\ldots$, $a_n(k)$ међусобно различити. Претходна једнакост, за $x=a_1(k)$, даје

$$(a_1(k)-a_1(k+1))(a_1(k)-a_2(k))\cdots(a_1(k)-a_n(k))=P\,|_{x=a_1(k)},$$

одакле је

$$a_1(k+1)=a_1(k)-\frac{P\,|_{x=a_1(k)}}{(a_1(k)-a_2(k))\cdots(a_1(k)-a_n(k))}.$$

Уопште, ако ставимо $Q(x)=(x-a_1(k))\,(x-a_2(k))\cdots(x-a_n(k))$ имамо

$$(5)\qquad a_i(k+1)=a_i(k)-\frac{P(a_i(k))}{Q'(a_i(k))},\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где Q' значи извод полинома Q и где $P(a_i(k))$, $Q'(a_i(k))$ стоје редом уместо $P\,|_{x=a_i(k)}$, $Q'\,|_{x=a_i(k)}$. Добијене формуле одређују $a_1(k+1)$, $a_2(k+1)$, $\ldots$, $a_n(k+1)$ који задовољавају једнакост (4) из разлога што су обе стране једнакости (4) полиноми степена n чији је члан уз највећи степен једнак 1 и који имају једнаке вредности за n различитих вредности $a_i(k)$ слова x.

Добијене формуле одређују све чланове низова $a_1(k)$, $a_2(k)$, $\ldots$, $a_n(k)$ помоћу првих чланова $a_1(0)$, $a_2(0)$, $\ldots$, $a_n(0)$. Примећујемо сличност формула (5) са познатим Њутновим формулама:

$$a_i(k+1)=a_i(k)-\frac{P(a_i(k))}{P'(a_i(k))}$$

Основна је разлика у томе што су низови $a_1(k), a_2(k), \ldots, a_n(k)$ међусобно независни у случају Њутнових формула.

4. Разматрамо, сада, услове (C_k) у општем случају. Ради простијег излагања уводимо следеће n-торке, које даље зовемо *вектори*

$$\boldsymbol{p}\overset{\text{def}}{=}(\alpha_{a-1},\ \ldots,\ \alpha_0,\ \beta_{b-1},\ \ldots,\ \beta_0,\ \ldots,\ \gamma_{l-1},\ \ldots,\ \gamma_0),$$

$$\boldsymbol{p}(k)\overset{\text{def}}{=}(\alpha_{a-1}(k),\ \ldots,\ \alpha_0(k),\ \beta_{b-1}(k),\ \ldots,\ \beta_0(k),\ \ldots,\ \gamma_{l-1}(k),\ \ldots,\ \gamma_0(k)),$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Услови (C_k) одређују зависност између координата вектора $\boldsymbol{p}(k)$ и $\boldsymbol{p}(k+1)$.

Нека је $\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}$, односно $A(0)=A$, $B(0)=B, \ldots, L(0)=L$. Услов (C_0) даје

$$(6)\quad A(1)B\cdots L+AB(1)\cdots L+\cdots+AB\cdots L(1)-sAB\cdots L=AB\cdots L.$$

Пошто је

$$AB\cdots L+AB\cdots L+\cdots+AB\cdots L-sAB\cdots L=AB\cdots L,$$

закључујемо да једначина (6) има бар једно решење по $(A(1), B(1), \ldots, L(1))$ које је једнако $(A, B, \ldots, L)$. Доказујемо да је то, и једино решење. Услов (6) (полиномна једнакост) за $x=x_A$, где је x_A било који корен полинома A даје

$$\overline{A}(1)=\frac{\overline{P}}{\overline{B}\cdots\overline{L}}$$

где — значи вредност односног полинома за $x=x_A$. Међутим,

$$\overline{P}=\overline{A}\,\overline{B}\cdots\overline{L},$$

па је

$$\overline{A}(1)=\overline{A}=0.$$

Полиноми A и $A(1)$ имају све заједничке корене. Како су то полиноми са чланом уз највећи степен једнаким 1, то важи једнакост $A = A(1)$. Слично $B(1) = B, \ldots, L(1) = L$.

Услов (6) представља систем n линеарних једначина чије су непознате коефицијенти полинома $A(1), B(1), \ldots, L(1)$. Према доказаном, тај систем има јединствено решење. Отуда је његова детерминанта различита од 0. Детерминанта система је различита од 0 и у извесној околини V вектора $\boldsymbol{p}$.

Дакле, *у извесној околини V вектора $\boldsymbol{p}$ важе једнакости облика (J_k) (уз услов $\boldsymbol{p}(k) \in V$) где су $F_{a-1}, \ldots, F_0, G_{b-1}, \ldots, G_0, \ldots, H_{l-1}, \ldots, H_0$ одређене рационалне функције.*

Уведимо ознаке:

$$\boldsymbol{r} = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n),$$

$$F_{a-1}(\boldsymbol{r}) = F_{a-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_0(\boldsymbol{r}) = F_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$G_{b-1}(\boldsymbol{r}) = G_{b-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_0(\boldsymbol{r}) = G_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_{l-1}(\boldsymbol{r}) = H_{l-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$H_0(\boldsymbol{r}) = H_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n);$$

$$F(\boldsymbol{r}) = (F_{a-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, F_0(\boldsymbol{r}), G_{b-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, G_0(\boldsymbol{r}), \ldots, H_{l-1}(\boldsymbol{r}), \ldots, H_0(\boldsymbol{r})).$$

Тада једнакости (J_k) дају

$$\boldsymbol{p}(k+1) = F(\boldsymbol{p}(k)), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \boldsymbol{p}(k) \in V). \tag{7}$$

Функција F је дефинисана у околини V и у њој има парцијалне изводе по координатама било код реда. Потражићемо парцијалне изводе првог реда када је $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$.

Диференцирањем једнакости (C_k) по $\mu(k)$ где је $\mu(k)$ било која координата вектора $\boldsymbol{p}(k)$ добијамо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A(k+1)}{\partial \mu(k)} B(k) \cdots L(k) + A(k+1) \frac{\partial}{\partial \mu(k)} (B(k) \cdots L(k)) \\ &+ \frac{\partial A(k)}{\partial \mu(k)} \left(\frac{B(k+1)}{B(k)} + \cdots + \frac{L(k+1)}{L(k)} - s \right) B(k) \cdots L(k) \\ &+ A(k) \frac{\partial}{\partial \mu(k)} \left(\left(\frac{B(k+1)}{B(k)} + \cdots + \frac{L(k+1)}{L(k)} - s \right) B(k) \cdots L(k) \right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Нека је $A(k) = A, B(k) = B, \ldots, L(k) = L$. Тада је $A(k+1) = A, B(k+1) = B, \ldots, L(k+1) = L$. Једнакост (8) за $x = x_A$, где је x_A било који корен полинома A, даје $\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(A(k+1))=0$. Дакле, полином $\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(A(k+1))$ има a корена. Он је нула-полином јер је његов степен једнак $a-1$. Слично

$$\frac{\partial}{\partial \mu(k)}(B(k+1))=0, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mu(k)}(L(k+1))=0.$$

Према томе *функција* $F(\boldsymbol{r})$ *има за* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}$ *све парцијалне изводе првог реда једнаке* 0.

Према *Тајлоровој* формули имамо

$$F(\boldsymbol{r})=F(\boldsymbol{p})+O(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}\|^2) \quad (\boldsymbol{r} \in V)$$

тј.

$$F(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}+O(\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}\|^2); \quad (\boldsymbol{r} \in V).$$

На основу једнакости (7) имамо

$$\boldsymbol{p}(k+1)-\boldsymbol{p}=O(\|\boldsymbol{p}(k)-\boldsymbol{p}\|^2) \quad (\boldsymbol{p}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{p}(k))$$

Користећи ту једнакост и једнакости (C_k) непосредно закључујемо:

I *Ако постоје* $\lim\limits_{k\to\infty} A(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} L(k)$, *онда*

$$P=\lim_{k\to\infty} A(k)\cdot\lim_{k\to\infty} B(k)\cdots\lim_{k\to\infty} L(k),$$

односно $\lim\limits_{k\to\infty} A(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} B(k), \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} L(k)$ *су фактори полинома* P.

II. *Постоји извесна околина* V *вектора* $\boldsymbol{p}$ *таква да низ* $\boldsymbol{p}(k)$ *одређен условом* $\boldsymbol{p}(k+1)=F(\boldsymbol{p}(k))$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ *конвергира ка* $\boldsymbol{p}$ *уколико је* $\boldsymbol{p}(0)\in V$. *У том случају конвергенција је квадратна.*

5. Наводимо обрасце (J_k) за случај полинома

$$x^6+p_5x^5+p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$$

и његове факторизације 2—2—2. Полиноме $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ означавамо редом

$$x^2+a_nx+b_n,\ x^2+c_nx+d_n,\ x^2+e_nx+f_n.$$

Обрасци гласе:

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=a_n+\frac{A_n}{\Delta_n},\ b_{n+1}=b_n+\frac{B_n}{\Delta_n},\\ c_{n+1}&=c_n+\frac{C_n}{\Delta_n},\ d_{n+1}=d_n+\frac{D_n}{\Delta_n},\\ e_{n+1}&=e_n+\frac{E_n}{\Delta_n},\ f_{n+1}=f_n+\frac{F_n}{\Delta_n},\end{aligned} \tag{9}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где су Δ_n, A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n следеће детерминанте:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n\,c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n\,c_n+e_n & c_n+a_n \\ c_n\,f_n+d_n\,e_n & f_n+e_n\,c_n+d_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n & b_n+a_n\,c_n+d_n \\ d_n\,f_n & c_n\,f_n+d_n\,e_n & b_n\,f_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & d_n\,b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n \\ 0 & d_n\,f_n & 0 & b_n\,f_n & 0 & d_n\,b_n \end{vmatrix}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} \alpha_n & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_n & 1 & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ \gamma_n & c_n+e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n\,c_n+d_n & c_n+a_n \\ \delta_n & f_n+e_n\,c_n+d_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n & b_n+a_n\,c_n+d_n \\ \varepsilon_n & c_n\,f_n+d_n\,e_n & b_n\,f_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & d_n\,b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n \\ \varphi_n & d_n\,f_n & 0 & b_n\,f_n & 0 & d_n\,b_n \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_n & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & \beta_n & a_n+e_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n\,c_n+d_n & \gamma_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & a_n+e_n & b_n+a_n\,c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n\,f_n+d_n\,e_n & \delta_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n & b_n+a_n\,c_n+d_n \\ d_n\,f_n & \varepsilon_n & b_n\,f_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & d_n\,b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n \\ 0 & \varphi_n & 0 & b_n\,f_n & 0 & d_n\,b_n \end{vmatrix}$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_n & 0 & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & \beta_n & 1 & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n\,c_n+d_n & c_n+e_n & \gamma_n & a_n+e_n & b_n+a_n\,c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n\,f_n+d_n\,e_n & f_n+e_n\,c_n+d_n & \delta_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n & b_n+a_n\,c_n+d_n \\ d_n\,f_n & c_n\,f_n+d_n\,e_n & \varepsilon_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & d_n\,b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n \\ 0 & d_n\,f_n & \varphi_n & b_n\,f_n & 0 & d_n\,b_n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha_n & 1 & 0 \\ c_n+e_n & 1 & a_n+e_n & \beta_n & c_n+a_n & 1 \\ f_n+e_n\,c_n+d_n & c_n+e_n & f_n+e_n\,a_n+b_n & \gamma_n & b_n+a_n\,c_n+d_n & c_n+a_n \\ c_n\,f_n+d_n\,e_n & f_n+e_n\,c_n+d_n & a_n\,f_n+b_n\,e_n & \delta_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n & b_n+a_n\,c_n+d_n \\ d_n\,f_n & c_n\,f_n+d_n\,e_n & b_n\,f_n & \varepsilon_n & d_n\,b_n & c_n\,b_n+d_n\,a_n \\ 0 & d_n\,f_n & 0 & \varphi_n & 0 & d_n\,b_n \end{vmatrix}$$

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha_n & 0 \\ c_n + a_n & 1 & a_n + e_n & 1 & \beta_n & 1 \\ f_n + e_n c_n + d_n & c_n + e_n & f_n + e_n a_n + b_n & a_n + e_n & \gamma_n & c_n + a_n \\ c_n f_n + d_n e_n & f_n + e_n c_n + d_n & a_n f_n + b_n e_n & f_n + e_n a_n + b_n & \delta_n & b_n + a_n c_n + d_n \\ d_n f_n & c_n f_n + d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n + b_n e_n & \varepsilon_n & c_n b_n + d_n a_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & b_n f_n & \varphi_n & d_n b_n \end{vmatrix}$$

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha_n \\ c_n + a_n & 1 & a_n + e_n & 1 & c_n + a_n & \beta_n \\ f_n + e_n c_n + d_n & c_n + e_n & f_n + e_n a_n + b_n & a_n + e_n & b_n + a_n c_n + d_n & \gamma_n \\ c_n f_n + d_n e_n & f_n + e_n c_n + d_n & a_n f_n + b_n e_n & f_n + e_n a_n + b_n & c_n b_n + d_n a_n & \delta_n \\ d_n f_n & c_n f_n + d_n e_n & b_n f_n & a_n f_n + b_n e_n & d_n b_n & \varepsilon_n \\ 0 & d_n f_n & 0 & b_n f_n & 0 & \varphi_n \end{vmatrix}$$

У тим детерминантама α_n, β_n, γ_n, δ_n, ε_n, φ_n одређени су обрасцима:

$$\alpha_n = p_5 - (e_n + a_n + c_n);\ \beta_n = p_4 - (f_n + d_n + b_n + a_n c_n + (a_n + c_n) e_n),$$

$$\gamma_n = p_3 - ((a_n + c_n) f_n + (d_n + a_n c_n + b_n) e_n + a_n d_n + b_n c_n),$$

$$\delta_n = p_2 - ((d_n + a_n c_n + b_n) f_n + (a_n d_n + b_n c_n) e_n + b_n d_n),$$

$$\varepsilon_n = p_1 - ((a_n d_n + b_n c_n) f_n + b_n d_n e_n),\ \varphi_n = p_0 - b_n d_n f_n,$$

6. На крају дајемо примере. Коришћена је машина Elliott 803 Југословенског института за економска истраживања у Београду. Захваљујем се Томиславу Ракићу на предусретљивости и помоћи коју ми је пружио.

Пример I. Нека је P следећи полином

$$P = x^4 - 18x^3 + 104x^2 - 222x + 135$$

Његови корени су 1, 3, 5, 9. У ,,таблицама" које наводимо прве врсте одређују прве чланове низова који имају граничне вредности наведене корене. У првом случају већ у петом кораку се постиже тражена тачност, а у другом случају то се дешава у шестом кораку.

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,5	2,6	4,2	8,1
1	1,309668	3,131948	4,838669	8,719715
2	0,997929	2,954510	5,041347	9,006184
3	1,000025	2,999006	5,000985	8,999984
4	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000
5	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	1,8	7	11
1	0,974026	2,056856	6,340659	8,628459
2	1,012253	2,725047	5,131259	9,131442
3	0,998709	2,981489	5,018484	9,001317
4	1,000006	2,999816	5,000180	8,999998
5	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000
6	1,000000	3,000000	5,000000	9,000000

Пример II. Нека је P следећи полином

$$P = x^6 + 5x^5 + 11x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 10x + 4$$

Он има следеће факторе

$$x^2 + 1, \quad x^2 + 3x + 2, \quad x^2 + 2x + 2$$

чији је производ једнак P. „Таблице" које наводимо показују у шест посматраних случајева како низови a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n дефинисани формулама (9) конвергирају ка одговарајућим коефицијентима наведених фактора.

(1)

0	−1.00000	0.000000	4.00000	3.00000	1.50000	2.50000
1	−0.033333	0.533333	3.40476	2.40476	1.62857	2.15714
2	−0.106743	0.926656	3.08758	2.08758	1.80567	1.81248
3	−0.012071	1.00465	3.00330	2.00330	2.00877	1.98837
4	−0.000005	1.00008	2.99997	1.99997	2.00003	1.99981
5	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
5	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

(2)

0	1.00000	2.00000	2.50000	3.00000	2.00000	4.00000
1	0.750000	3.25000	3.25000	4.62500	1.00000	−4.00000
2	0.583564	2.32360	2.97042	3.49920	1.44601	−1.84774
3	0.531463	1.57767	2.64851	2.65236	1.82003	−0.548375
4	0.426826	1.01104	2.26244	1.98728	2.31073	0.621438
5	−0.009334	0.697997	1.87046	1.68502	3.13887	2.27775
6	−0.012971	1.01734	2.06442	2.02660	2.94856	1.89711
7	0.000407	1.00046	1.99858	1.99408	3.00101	2.00203
8	0.000000	0.999999	2.00000	2.00000	3.00000	1.99999
9	0.000000	1.00000	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000
10	0.000000	1.00000	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000

(3)

0	−1.00000	2.00000	4.00000	1.00000	2.50000	4.00000
1	−0.456216	1.29466	3.05463	1.00892	2.40159	3.37523
2	−0.117973	1.06004	2.83400	1.30755	2.28398	2.67495
3	−0.011794	1.01058	2.88255	1.71505	2.12924	2.17704
4	0.000117	1.00065	2.98721	1.97552	2.01267	1.99863
5	0.000006	0.999998	3.00018	2.00034	1.99982	1.99966
6	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
7	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

(4)

0	1.00000	1.200000	2.90000	2.10000	3.00000	2.50000
1	0.442549	1.04732	5.72494	4.25408	—1.16749	—0.658990
2	0.570634	0.976762	4.08971	2.97103	0.339653	0.654645
3	1.65513	—0.049701	3.32874	2.32011	0.016134	2.20975
4	1.81037	0.751021	2.81380	1.80276	0.375826	1.40498
5	1.78223	1.93600	2.94941	1.72109	0.268358	0.801234
6	2.02214	1.98008	3.03840	2.08046	—0.060538	1.01492
7	2.00183	2.00081	2.99972	1.99942	—0.001553	0.999907
8	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	—0.000001	1.00000
9	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000
10	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000

(5)

0	1.00000	—3.00000	6.00000	5.00000	1.00000	7.00000
1	1.30000	—2.50000	3.11111	2.11111	0.588889	4.94444
2	0.901300	—0.473003	3.32196	2.32196	0.776742	2.75723
3	1.10256	0.359004	3.00662	2.00662	0.890826	1.58237
4	1.17397	1.50171	2.99855	1.99855	0.827480	0.522267
5	1.55496	0.471967	3.00015	2.00015	0.444888	1.69048
6	1.54560	1.40619	2.99992	1.99992	0.454478	0.891279
7	2.31422	2.24693	3.00001	2.00001	—0.314225	0.889419
8	2.03883	2.02561	3.00000	2.00000	—0.038828	0.977710
9	2.00072	2.00052	3.00000	2.00000	—0.000719	0.999467
10	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	—0.000000	1.00000
11	2.00000	2.00000	3.00000	2.00000	0.000000	1.00000

(6)

0	—1.00000	—2.00000	—3.00000	—4.00000	—5.00000	—1.00000
1	15.5016	35.9847	131.494	11.1543	44.8011	—26.1659
2	15.0694	34.7574	—86.2266	—7.32941	76.1572	—44.2417
3	15.3060	35.4290	—44.9431	—3.82560	34.6371	—20.3104
4	16.5279	38.8983	—23.9270	—2.04415	12.3991	—7.49852
5	—63.8935	—189·705	—12.7910	—1.10626	81.6845	—47.5591
6	—25.3332	—80.0983	—13.3102	—1.15054	43.6434	—25.5559
7	—2.29443	—14.6138	—16.7956	—1.44847	24.0900	—14.2322
8	—2.99014	—16.6077	—5.16425	—0.436684	13.1544	—7.81064
9	25.7917	65.2235	—28.1236	—2.32494	7.33188	—4.16017
10	11.7309	25.2198	—14.7423	—1.23283	8.01143	—4.53213
11	—53.6645	—160.239	—7.65488	—0.669335	66.3193	—35.5282
12	—22.2332	—71.1078	—7.83992	—0.684831	35.0731	—18.9024
13	—5.35827	—23.2621	—8.79886	—0.765553	19.1571	—10.4085
14	—46.0139	—138.680	40.3059	3.47719	10.7080	—5.81675
15	—23.0149	—73.3709	16.6453	1.43516	11.3696	—6.16358
16	—11.0384	—39.3281	—3.17293	—0.276179	19.2113	—10.2475
17	—1.89853	—13.4819	—3.54046	—0.300216	10.4390	—5.47441
18	9.46202	18.6902	—10.2930	—0.821057	5.83095	—2.57796
19	—22.1539	—70.2743	—5.15739	—0.474943	32.3113	—13.6183
20	—6.96781	—27.5594	—5.49016	—0.502225	17.4580	—7.37553
21	3.67273	2.36009	—8.41996	—0.752602	9.74723	—4.04118
22	3.71217	2.38848	—3.52027	—0.640674	4.80810	—2.80438

23	3.93332	2.55229	−0.674674	−0.555883	1.75135	−2.79279
24	0.258700	−0.614594	11.2805	4.78801	−6.53916	−33.1327
25	0.225710	−0.643857	5.81449	2.45844	−1.04020	−15.9022
26	0.078165	−0.774745	2.25337	0.983443	2.66847	−8.83523
27	−1.01432	−1.71693	2.37400	1.24594	3.64032	7.85202
28	0.182710	−1.12180	2.18295	0.840324	2.63334	3.40872
29	0.904940	0.238444	2.14697	0.301569	1.94809	2.07544
30	−5.77768	−4.10875	8.81605	13.6545	1.96163	1.91336
31	−2.41870	−1.87112	5.45492	6.89896	1.96378	1.91354
32	−0.713584	−0.621895	3.73995	3.47644	1.97363	1.91697
33	0.081129	0.315547	2.90294	1.80533	2.01593	1.96095
34	−0.092749	1.05782	3.07916	2.15848	2.01359	2.02524
35	−0.006630	0.998930	3.00615	2.01232	2.00048	2.00175
36	−0.000020	0.999972	3.00002	2.00005	2.00000	2.00000
37	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000
38	0.000000	1.00000	3.00000	2.00000	2.00000	2.00000

Пример III. Нека је P полином

$$x^6 + 2\,x^5 + 4\,x^3 + 6\,x^3 + 5\,x^2 + 4\,x + 2$$

чији су фактори $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, $(x+1)^2$. Овај пример је сличан претходном. Основна је разлика у томе што овај полином нема четири различита корена (-1 је двоструки корен)

Вероватно и у општем случају за изложени поступак није нужно претпоставити да су сви корени $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ међусобно различити већ (?) да су тражени фактори $A, B, \ldots, L$ међусобно различити.

(1)

0	0.100000	1.20000	1.90000	1.30000	0.400000	1.50000
1	0.233290	0.785739	2.02365	0.845885	−0.256935	2.32386
2	0.058887	0.946129	2.01580	1.03039	−0.074686	2.02788
3	0.007018	1.00217	1.99916	0.998813	−0.006182	1.99356
4	−0.000060	1.00003	2.00000	1.00000	0.000058	1.99993
5	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	−0.000000	2.00000
6	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	.000000	2.00000

(2)

0	1.00000	−0.500000	3.00000	1.20000	0.100000	1.50000
1	1.89881	0.282413	−0.035383	−0.840020	0.136560	1.56393
2	0.452845	−1.10407	1.44679	0.455104	0.100368	1.65865
3	1.21833	0.946750	0.707805	−0.273400	0.073865	1.75565
4	0.079435	−0.333149	1.85281	0.855429	0.067751	1.89555
5	−0.664030	1.53610	2.62372	1.61202	0.040307	1.94122
6	−0.177133	1.05949	2.17872	1.17534	−0.001587	1.93583
7	−0.006232	0.990321	2.01497	1.01469	−0.008741	1.99707
8	0.000120	0.999856	2.00001	1.00001	−0.000131	1.99998
9	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	−0.000000	2.00000
10	0.000000	1.00000	2.00000	1.00000	0.000000	2.00000

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марковић Д., *О приближној факторизацији полинома*, Весник Друш. Мат. Физ. НРС 8, No 1/2, 1955, 53—58.

[2] Prešić S. B., *Un procédé iteratif pour la factorisation des polynomes*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 862—863.

ONE ITERATIVE METHOD OF POLYNOMIAL FACTORIZATION

Slaviša B. Prešić

Summary

Let

(I) $$P = x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

be a polynomial in x, whose coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ are complex numbers having roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$ which are different from one another.

Let $a, b, \ldots, l$ be natural numbers such that $n = a + b + \cdots + l$.

If

(II) $$P = AB \cdots L$$

where $A, B, \ldots, L$ are polynomials of degree $a, b, \ldots, l$ respectively, we say that (II) is an $a—b—\cdots—l$ factorization of P. Thus

$$P = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

is an $1—1—\cdots—1$ factorization of P.

In this paper we give one iterative method for obtaining $a—b—\cdots—l$ factorizations.

This method, in short, is contained in what follows.

We begin with $A(0), B(0), \ldots, L(0)$ of degree $a, b, \ldots, l$ respectively (approximative factors) whereas the polynomials $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ are determined by the polynomial equality

$$A(k+1) B(k) \cdots L(k) + A(k) B(k+1) \cdots L(k) + \cdots + A(k) B(k) \cdots L(k+1)$$

$$- s A(k) B(k) \cdots L(k) = P \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(where $s+1$ is the number of numbers $a, b, \ldots, l$).

In the case of an $1—1—\cdots—1$ factorization we have the following formulas:

$$a_i(k+1) = a_i(k) - \frac{P \,|\, \text{for } x = a_i(k)}{(a_i(k) - a_1(k)) \cdots (a_i(k) - a_{i-1}(k)) (a_i(k) - a_{i+1}(k)) \cdots (a_i(k) - a_n(k))}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

(polynomials $A(k), B(k), \ldots, L(k)$ are denoted by $x - a_1(k),\ x - a_2(k), \ldots, x - a_n(k)$ respectively).

In the case of $P = x^6 + p_5 x^5 + p_4 x^4 + p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$ and a 2—2—2 factorization, the polynomials $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ are denoted by $x^2 + a_n x + b_n$ $x^2 + c_n x + d_n$, $x^2 + c_n x + f_n$. The sequences a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n are determined by formulas (9) in the Serbo-Croatian text.

The main result for the general $a—b—\cdots l$ factorization:

If $\lim\limits_{k \to 8} A(k)$, $\lim\limits_{k \to \infty} B(k)$, $\ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} L(k)$ *exist then they are the factors of* P *and their product is equal to* P. *The convergence is quadratic* (*i. e. the condition* $p(k+1) - p = O(\|p(k) - p\|^2)$; $p = \lim\limits_{k \to \infty} p(k)$ *is valid where* $p(k)$ *is* n*-dimensional vector having the coefficients of* $A(k)$, $B(k)$, $\ldots$, $L(k)$, *respectively, for coordinates*).

Some exemples are given (**Пример I, Пример II, Пример III,** in Serbo-Croatian text).

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
5 (20) 1968, стр. 375–377

Slaviša B. Prešić

A METHOD FOR SOLVING A CLASS OF CYCLIC FUNCTIONAL EQUATIONS

(Communicated June 28, 1968)

1. There exist different results on cyclic functional equations ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]). We give a method for solving a very general class of those equations.

2. Let S_1, S_2, S_3, be nonempty sets and $L, D: S_2^n \to S_3$ given functions (n-fixed natural number). Consider the following cyclic functional equation:

$$L(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_2, x_3, \ldots, x_1), \ldots, f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})) \tag{1}$$
$$= D(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_2, x_3, \ldots, x_1), \ldots, f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})),$$

where $f: S_1^n \to S_2$ is unknown function.

We denote this equation as follows:

$$E(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_2, x_3, \ldots, x_1), \ldots, f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}))$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n \in S_1; f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_2).$$

Obviously, *the equation* (1) *is possible if and only if the following condition holds:*

$$(\exists u)\,(u \in S_2 \wedge E(u, u, \ldots, u)), \tag{2}$$

Let S denote a subset of the set S_2^n such that:

$$(u_1, u_2, \ldots u_n) \in S \overset{def}{\Leftrightarrow} (E(u_1, u_2, \ldots, u_n) \wedge E(u_2, u_3, \ldots, u_1) \wedge \ldots \wedge E(u_n, u_1, \ldots, u_{n-1})).$$

If the equation (1) is possible then S is a nonempty set, because:

$$E(u, u, \ldots, u) \Rightarrow (u, u, \ldots, u) \in S.$$

Next, we prove the following fundamental lemma.

Lemma. *If condition* (2) *holds then there exists a function* $F: S_2^n \to S_2$ *such that:*

1° $E(F(u_1, u_2, \ldots, u_n), F(u_2, u_3, \ldots, u_1), \ldots, F(u_n, u_1, \ldots, u_{n-1}))$ (*for all* $u_i \in S_2$);

2° $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in S \Rightarrow F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1,$

Proof. Let u_0 be an element of S such that $E(u_0, u_0, \ldots, u_0)$. The function F:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in S \Rightarrow F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \overset{\text{def}}{=} u_1;\ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \notin S \Rightarrow F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \overset{\text{def}}{=} u_0$$

satisfies the conditions 1° and 2°.

By the lemma we prove the following theorem which solves the problem of determining the general solution of the equation (1).

Theorem. *Let* $F: S_2^n \to S_2$ *be a function satisfying the conditions* 1° *and* 2°. *Then by the formula*

$$(3)\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \Pi(x_2, x_3, \ldots, x_1), \ldots, \Pi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}))$$
$$(\Pi : S_1^n \to S_2 \text{ an arbitrary function})$$

is determined the general solution of the equation (1).

Proof. If $\Pi : S_1^n \to S_2$ then the function f defined by (3) satisfies (1). (This follows from the condition 1°).

Taking f (f is the solution of (1)) instead of Π in (3) we conclude (by 2°):

$$F(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_2, x_3, \ldots, x_1), \ldots, f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Accordingly, (3) determines the general solution of the equation (1).

3. We give some examples.

$$(\mathrm{I})\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_2, x_3, \ldots, x_1) + \cdots + f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ real numbers}).$$

In this case, one function F is:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) \overset{\text{def}}{=} \frac{-(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + n\, u_1}{n}$$

and the general solution of (I) is

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{1}{n}(\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$\Pi(x_2, x_3, \ldots, x_1) + \cdots + \Pi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}))\ (\Pi\text{ -an arbitrary real function}).$$

Similarly, in the case of the general linear cyclic functional equation, there exists the *linear function* F [9].

The equation, [7]:

$$(\mathrm{II})\quad A f^2(x, y) + B f(x, y) f(y, x) + C f^2(y, x) + D f(x, y) + E f(y, x) + F = 0,$$
$$(A, B, C, D, E, F; x, y; f, (x, y) \text{ real numbers}).$$

Let S be the set of all (u, v) such that:

$$A u^2 + B u v + C v^2 + D u + E v + F = 0$$
$$A v^2 + B u v + C u^2 + D v + E u + F = 0 \quad (u, v \text{ real numbers}).$$

Determine, for example, the function F in the following way:

$$(u, v) \in S \Rightarrow F(u, v) = u; \quad (u, v) \notin S \Rightarrow F(u, v) = u_0$$

where u_0 is a real number such that:

$$(A + B + C) u_0^2 + (D + E) u_0 + F = 0.$$

Then

$$f(x, y) = F(\Pi(x, y), \Pi(y, x)) \quad (\Pi - \text{an arbitrary function})$$

is the general solution of the equation (II).

The equation (II) is possible if and only if

$$(\exists u)(u \text{ a real number} \wedge (A+B+C)u^2+(D+E)u+F=0).$$

The equation:

$$\text{(III)} \qquad f^3(x, y)-3f(y, x)+2=0 \quad (x, y, f(x, y) \text{ real numbers}).$$

In this case only (1,1) and $(-2, -2)$ are elements of the set S. One function F is

$$F(-2, -2)\stackrel{\text{def}}{=}-2; \quad F(u, v)\stackrel{\text{def}}{=}1, \quad \text{otherwise.}$$

The general solution of (III) is:

$$f(x, y)=F(\Pi(x, y), \Pi(y, x)) \quad (\Pi\text{—an arbitrary function}).$$

Remark. *The set S_3 may be $\{t, f\}$ (t—„true", f—„false"). Then $E(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ is a relation of the set S_2.*

Example. Determine all reall functions $f(x, y)$ which satisfy the condition

$$\text{(IV)} \qquad f(x, y)+f(y, x) \leqslant 0.$$

Solution. The function $F(u, v)$ is determined, for example, by

$$u+v \leqslant 0 \Rightarrow F(u, v)\stackrel{\text{def}}{=}u; \quad u+v>0 \Rightarrow F(u, v)\stackrel{\text{def}}{=}0.$$

$$\text{(For instance, } F(u, v)=u\left(1-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(u+v)+\operatorname{sgn}|u+v|)\right)).$$

Then the formula

$$f(x, y)=F(\Pi(x, y), \Pi(y, x)) \quad (\Pi\text{—an arbitrary real function}),$$

gives all functions $f(x, y)$.

REFERENCES

[1] J. Aczél, M. Ghermanescu, M. Hosszú, *On cyclic equations*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc., 5 (1960), 215—221.

[2] D. Ž. Djoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beograd, Mat. i fiz., №61—№64 (1961), 21—28.

[3] D. Ž. Djoković, *Rešenje jedne ciklične funkcionalne jednačine*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, vol 13, (1961), 185—198.

[4] M. Ghermanescu, *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires*, Bull. Soc. Math. France, 68 (1940), 109—128.

[5] M. Hosszú, *A lineáris függvényegyenletek egy osztályárol*, Magy. Tudom. Akad. Közlem. 11 (1961), 249—261.

[6] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković, *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 252, (1961), p. 1090—1092.

[7] D. S. Mitrinović — P. M. Vasić, *O jednoj kvadratnoj funkcionalnoj jednačini*, Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beograd, Mat. i fiz., №210 (1968), 1—9.

[8] D. S. Mitrinović, *Équations fonctionnelles cycliques généralisée*, C. R. Acad Sci. Paris, t. 261 (1963), 2951—2952.

[9] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'équation fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 257, (1963) p. 2224—2226.

[10] P. M. Vasić — R. Ž. Đorđević, *Sur l'équation fonctionnelle généralisée*, Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beograd, Mat. i i fiz., № 132—№142 (1965), 33—38.

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

257. MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES*

Slaviša B. Prešić

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les applications biunivoques de l'ensemble non vide E sur E qui forment un groupe G de l'ordre n, l'application θ_1 étant identique. Désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans un corps commutatif K donné.**

Dans cet article nous allons exposer une méthode de résolution de l' équation fonctionnelle suivante

$$(1) \qquad a_1(x)f(\theta_1 x)+\cdots+a_n(x)f(\theta_n x)=g(x) \qquad (\theta_i x=\theta_i(x)),$$

où les a_i et $g\,(\in F)$ sont des fonctions données et f une fonction inconnue.

C'est dans l'article [**1**] que nous avons exposé une méthode de résolution de l'équation (1) dans le cas où $g(x)=0$ $(x\in E)$. Dans ce cas-là nous disons que l'équation (1) est homogène.

Désignons par $p_i\,(i=1,\ldots,n)$ la permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ que l'on obtient de la permutation

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & \cdots & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

de G en y substituant aux symboles $\theta_1, \ldots, \theta_n$ les symboles $1, \ldots, n$ respectivement (les produits dans la seconde ligne étant au préalable remplacés par les éléments auxquels ils sont égaux) et posons $P=\{p_1,\ldots,p_n\}$. Soit ensuite $M_\nu=\|a^{\nu}_{i,j}\|$ avec $a^{\nu}_{i,j}=1$ pour $j=ip_\nu$ et $a^{\nu}_{i,j}=0$ pour $j\neq ip_\nu$ $(i,j=1,\ldots,n)$, en désignant par ip_ν l'image de i dans l'application p_ν. Les groupes G, P et $M=\{M_1,\ldots M_n\}$ sont isomorphes.

Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$ dans l'équation (1) au lieu de x, on obtient un système d'équations qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$(2) \qquad A(x)\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x)\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x)\end{Vmatrix}, \quad A(x)=\|a_{ij}(x)\|, \quad a_{ij}(x)=a_{jp_{i}-1}\theta_i(x).$$

---

* Présenté le 13 janvier 1969 par D. S. Mitrinović.

** Nous supposons que la caractéristique de K ne soit pas un facteur de n.

Soient h et f les éléments de F et soit $B(x)$ une matrice carrée de l'ordre n dont les éléments sont $b_{ij}(x)\,(b_{ij}\in F)$. Alors, l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

pour une matrice carrée quelconque $B(x)$, ne definit pas nécessairement la fonction $f\,(\in F)$ d'une maniére univoque.

Définition. — *Nous disons que la fonction matricielle $B(x)$, ou plus brièvement la matrice $B(x)$, est compatible avec le groupe G si l'équation* (3) *définit la fonction $f\,(\in F)$ univoquement pour chaque $h\,(\in F)$.*

Lemme 1. — *La condition*

$$B(\theta_i x) = M_i B(x) M_i^{-1} \qquad (x\in E;\ i=1,\ldots,n) \tag{4}$$

est suffisante pour la compatibilité de la matrice $B(x)$ avec le groupe G.

Démonstration. Soit $B(x)=\|b_{ij}(x)\|$ $(x\in E;\ b_{ij}\in F)$ et supposons la condition (4) remplie.

Pour une fonction $h\,(\in F)$, quelconque, l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (f_1=f) \tag{5}$$

fournit

$$f(x)=b_{11}(x)\,h(x)+b_{12}(x)\,h(\theta_2 x)+\cdots+b_{1n}(x)\,h(\theta_n x). \tag{6}$$

Après multiplication à droite par M_i, l'égalité (5) devient

$$\begin{Vmatrix} f_i(x) \\ \vdots \\ \cdot \end{Vmatrix} = M_i B(x) M_i^{-1} M_i \begin{Vmatrix} h(x) \\ \vdots \\ \cdot \end{Vmatrix},$$

d'où résulte, d'après (4), (5) et (7),

$$f_i(x)=f(\theta_i x) \qquad (x\in E;\ i=1,\ \ldots,\ n).$$

$B(x)$ est donc compatible avec G.

On démontre sans difficulté les deux faits suivants:

1° Si les matrices $B(x)$ et $C(x)$ sont compatibles avec le groupe G, alors les matrices $\lambda B(x)$ (λ élément arbitraire de K), $B(x)+C(x)$ et $B(x)\cdot C(x)$ sont aussi compatibles avec G. Les matrices compatibles avec le groupe G forment donc une algèbre de matrices.

2° La matrice $A(x)$ définie par (2) remplit la condition (4).

Dans ce qui suit le rôle fondamental est joué par le

Lemme 2. — *Il existe au moins une matrice carrée de l'ordre n,*

$$B(x) = \| b_{ij}(x) \| \qquad (x \in E;\ b_{ij} \in F)$$

pour laquelle sont remplies les conditions que voici:

(C_1) $A(x)B(x)A(x) + A(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$;

(C_2) *la matrice* $B(x)$ *est compatible avec la groupe* G.

Démonstration. Désignons par $r(x)$ le rang de la matrice $A(x)$ $(x \in E)$. La matrice $A(x)$ peut être écrite sous la forme

$$A(x) = P(x)\,D(x)\,Q(x)$$

où les matrices $P(x)$ et $Q(x)$ sont régulières pour tout $x \in E$ et où $D(x)$ est une matrice diagonale aux éléments 1 et 0 telle que le nombre d'unités est égal à $r(x)$. Cette représentation de $A(x)$ s'obtiendrait au moyen de transformations élémentaires effectuées pour tout $x \in E$. Alors la matrice

$$B_0(x) = -Q^{-1}(x)\,D(x)\,P^{-1}(x)$$

remplit la condition (C_1).

Posons ensuite

$$B(x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\,M_\nu \quad (x \in E).$$

On obtient

$$A(x)B(x)A(x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A(x)\,M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\,M_\nu A(x)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\,B_0(\theta_\nu x)\,A(\theta_\nu x)\,M_\nu \quad (x \in E)$$

la matrice $A(x)$ remplissant la condition (4). En mettant à profit ce fait-là de même que la condition (C_1), remplie par la matrice $B_0(x)$, on obtient

$$A(x)B(x)A(x) = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\,M_\nu = -\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A(x) = -A(x).$$

$B(x)$ remplit donc la condition (C_1).

Nous avons aussi

$$B(\theta_i x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,M_i = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_i\,(M_\nu M_i)^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,(M_\nu M_i)\,M_i^{-1}$$

$$= M_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^{-1} B_0(\theta_j(x))\,M_j\right) M_i^{-1} = M_i\,B(x)\,M_i^{-1},$$

d'où la conclusion, d'après le lemme 1, que $B(x)$ est compatible avec G.

D'après la démonstration achevée, on a immédiatement le:

Corollaire. — *Si* $B_0(x)$ *est une matrice qui remplit la condition* (C_1) *du lemme 2, alors la matrice*

$$B(x) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\,M_\nu \tag{7}$$

remplit les conditions (C_1) *et* (C_2) *du lemme 2.*

Partant des lemmes précédents, nous allons démontrer le

Théorème 1. — *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les conditions (C_1) et (C_2). La solution générale de l'équation homogène* (1) *est donnée par*

$$\left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = (B(x)A(x)+I) \left\| \begin{matrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{matrix} \right\| \qquad (I \text{ matrice unité}), \tag{8}$$

où $h(\in F)$ désigne une fonction quelconque.

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème, $B(x)$ est compatible avec G. Comme les matrices $A(x)$ et I possèdent la même propriété, on peut conclure, en s'appuyant sur la remarque 1°, que la matrice suivante $B(x)A(x)+I$ est aussi compatible avec ce groupe G. C'est pourquoi (8) définit, pour tout $h(\in F)$, la fonction $f(\in F)$ d'une manière univoque. En multipliant (8) à droite par $A(x)$ on obtient, d'après (C_1),

$$A(x) \left\| \begin{matrix} f(x) \\ \vdots \\ \cdot \end{matrix} \right\| = 0.$$

La fonction $f(\in F)$ satisfait donc à l'équation (1) pour tout $h(\in F)$.

D'autre part, si $f(\in F)$ est une solution de l'équation (1), cette fonction peut être obtenue de la formule (8) en y posant $h=f$.

Les deux faits que nous venons d'établir prouvent que la formule (8) détermine la solution générale de l'équation (1).

Nous remarquons que nous avons décrit, dans la démonstration du lemme 2, un procédé de formation de la matrice $B(x)$ qui remplit les conditions (C_1) et (C_2) ce qui veut dire que le théorème 1 fournit une méthode de construction de la solution générale de l'équation (1).

La détermination de la matrice $B(x)$ peut être effectuée après avoir décomposé au préalable l'ensemble E en sous-ensembles disjoints E_r $(r=0, 1, 2, \ldots, n)$, E_r désignant la partie de E où le rang de la matrice $A(x)$ est r. On détermine alors $B(x)$ dans tout E_r séparément, de sorte que l'on résout l'équation (1) dans chaque E_r pris à part.

Ajoutons à cette instruction générale une remarque particulière: Si dans un E_r (où bien dans une partie V d'un ensemble E_r possédant la propriété que $x \in V \Rightarrow \theta_i x \in V$ $(i=1, \ldots, n)$) est remplie, la condition suivante

$$A^m(x)+\lambda_1(x)A^{m-1}(x)+\cdots+\lambda_{m-1}(x)A(x)=0 \tag{9}$$

$$(\lambda_{m-1}(x) \neq 0 \text{ pour } x \in E_r, \text{ ou pour } x \in V)$$

le polynome en $A(x)$ au premier membre étant le polynome minimal de la matrice $A(x)$, alors on peut prendre pour $B(x)$ dans E_r (dans V)

$$B(x) = \frac{1}{\lambda_{m-1}(x)} \left(A^{m-2}(x)+\lambda_1 A^{m-3}(x)+\cdots+\lambda_{m-2}(x) I\right). \tag{10}$$

En effet, après la multiplication de (11) à gauche par M_i et à droite par M_i^{-1}, on aboutit, d'après l'égalité

$$A(\theta_i x) = M_i A(x) M_i^{-1} \qquad (i=1, \ldots, n),$$

à la conclusion que matrices $A(x)$ et $A(\theta_i x)$ possédent le même polynome minimal. Il s'ensuit que $\lambda_j(\theta_i x) = \lambda_j(x)$ ($j=1, \ldots, m-1$; $i=1, \ldots, n$; $x \in E$, ou $x \in V$). D'après les dernières égalités, la matrice $B(x)$ déterminée par la formule (10) est compatible avec le groupe G pour $x \in E_r$ (ou pour $x \in V$) On déduit, d'autre part, de (9) qu'elle remplit aussi la condition (C_2).

Remarque. — Les lemmes 1 et 2, de même que le théorème 1, ont été démontrés dans [**1**].

Pour les fonctions a_i et g données l'équation (1) peut ne pas avoir de solution par rapport à la fonction f. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3. *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les condition (C_1) et (C_2). L'équation* (1) *est possible si et seulement si la condition*

$$(C_3) \qquad (A(x)B(x)+I)\begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} = 0$$

est remplie.

Démonstration. Si l'équation (1) est possible, alors on obtient (C_3) immédiatement en multipliant (2) à gauche par $A(x)B(x)+I$.

Si la condition (C_3) est remplie, alors l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = -B(x)\begin{Vmatrix} (x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix}$$

détermine une solution particulière de l'équation (1).

Le théorème suivant (résultat principal de cet article) découle immédiatement du lemme 3 et du théorème 1.

Théorème 2. *Soit $B(x)$ une matrice satisfaisant aux conditions (C_1) et (C_2). L'équation* (1) *est possible si et seulement si la condition*

$$(C_3) \qquad (A(x)B(x)+I)\begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} = 0$$

est remplie.

Si la condition (C_3) *est remplie, alors la solution générale de l'équation* (1) *est déterminée par la formule*

$$(11)\quad \begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = -B(x) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} + (B(x)A(x)+I) \begin{Vmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x) \end{Vmatrix} \quad (I \text{ matrice unité}),$$

où $h(\in F)$ *est une fonction arbitraire.*

Remarque. Le second terme du second membre de la formule (11) détermine la solution générale de l'équation homogène corespondante (celle où $g=0$).

RÉFÉRENCE

[1] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, Ces Publications, № 115 — № **121** (1963), 21—28.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
7 (22) 1970. стр. 317—320

Славиша Б. Прешић

ОПШТА ГРУПНА ФУНКЦИОНАЛНА ЈЕДНАЧИНА

(Саопштено 17. децембра 1969)

1. Нека су E_1 и E_2 непразни скупови и n дати природан број. Означимо са E скуп свих $n+1$ —торки $(x, u_1, \ldots, u_n)$, где $x \in E_1$ и $u_i \in E_2$.

Претпоставимо да су $g_1, g_2, \ldots, g_n$ пресликавања скупа E_1 у исти скуп која чине групу G реда n. Уз то, нека је g_1 идентичко пресликавање скупа E_1. Нека је, даље J извесно пресликавање скупа E у скуп $\{\top, \bot\}$, тј. релација скупа E.

У овом раду разматрамо следећу функционалну једначину

$$J(x, \varphi(x), \varphi(g_2 x), \ldots, \varphi(g_n x)) = T \qquad (g_i x \overset{\mathrm{def}}{=} g_i(x)) \tag{1}$$

са непознатом функцијом $\varphi : E_1 \to E_2$. Ту једначину зовемо *ойшта груйна функционална једначина*.

До сада су испитивани разни специјални случајеви једначине (1) ([1]—[5]). У овом раду описујемо сва решења опште групне једначине.

2. Ако у једначини (1) x, по реду, заменимо са $g_1 x$, $g_2 x, \ldots, g_n x$, а затим образујемо конјункцију тих једначина добијамо

$$J(x, \varphi(x), \ldots, \varphi(g_n x)) = T \wedge \cdots \wedge J(g_n x, \varphi(g_n x), \ldots, \varphi(g_n g_n x)) = T \tag{2}$$

где $g_i g_j x \overset{\mathrm{def}}{=} g_i(g_j(x))$.
У даљем излагању конјункцију (2) означавамо $\mathcal{E}(x, \varphi(x), \ldots, \varphi(g_n x))$.

Потпуно је очигледно да су једначина (1) и конјункција (2) еквивалентне. Отуда разматрамо проблем решавања конјункције (2) (система једначина).

Претпоставимо да је $\varphi : E_1 \to E_2$ једно решење конјункције (2). Тада за било који x из скупа E_1 је испуњено

$$\mathcal{E}(x, \varphi(x), \varphi(g_2 x), \ldots, \varphi(g_n x))$$

Одатле закључујемо: *сваком x из скуйа E одговарају елеменши $u_1, \ldots, u_n$ скуйа E_2 шакви да важи $\mathcal{E}(x, u_1, \ldots, u_n)$.*

Значи, ово својство мора да има свака могућа једначина. Као што ћемо даље доказати то је својство *карактеристично* за могуће једначине.

Ради једноставнијег излагања користићемо елементе $x, g_2 x, \ldots, g_n x$ скупа E_1 као индексе за извесне елементе скупа E_2. На пример, у претходном тексту уместо $u_1, \ldots, u_n$ писаћемо $u_x, \ldots, u_{g_n x}$.

Важи следећа лема.

Лема. *Потребан и довољан услов да је једначина* (1) *могућа јесте следећи услов*

$$(\forall x)\,(\exists\, u_x)\,(\exists\, u_{g_2 x})\cdots(\exists\, u_{g_n x})\ \mathcal{E}\,(x,\, u_x,\, u_{g_2 x}\,,\ldots,\, u_{g_n x})$$

$$(x \in E_1;\ u_x,\, u_{g_2 x}\,,\ldots,\, u_{g_n x} \in E_2). \tag{3}$$

Доказ. Већ смо доказали да је услов (3) потребан.

Претпоставимо, сада, да је услов (3) испуњен. Нека E_G означава скуп свих елемената облика $(x, u_x, u_{g_2 x}\,, \ldots, u_{g_n x})$, где $x \in E_1$, $u_x, u_{g_2 x}\,, \ldots, u_{g_n x} \in E_2$. Овај скуп је подскуп скупа E. На пример, уколико сва пресликавања g_i имају заједничку фиксну тачку x, онда том x, одговарају следећи елементи скупа E_G: $(x, u_x\,, \ldots, u_x)$ где је u_x *произвољан* елемент скупа E_2.

У скупу E_G дефинишимо следећу бинарну релацију

$$(x,\, u_x,\, u_{g_2 x}\,, \ldots,\, u_{g_n x}) \sim (y,\, u_y,\, u_{g_2 y}\,, \ldots,\, u_{g_n y}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, g_i)\ (g_i \in G \wedge y = g_i\, x)$$

Ова релација је релација еквиваленције, а њене класе еквиваленције имају следећи облик

$$\{(x,\, u_x,\, u_{g_2 x}\,, \ldots,\, u_{g_n x}),\, (g_2\, x,\, u_{g_2 x},\, u_{g_2\, g_2 x}\,, \ldots,\, u_{g_n\, g_2 x})\,, \ldots,$$
$$(g_n\, x,\, u_{g_n x}\,, \ldots,\, u_{g_n\, g_n x})\}.$$

Према аксиоми избора постоји бар један избор по тачно једног елемента (*представника*) сваке класе. Означимо са $(\mathbf{x}, u_{\mathbf{x}}\,, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}})$ представника наведене класе. Елементи x и $\mathbf{x}$ не морају бити једнаки.

Означимо са P пресликавање скупа E_G у скуп E_2 одређено на следећи начин

$$P\,(\mathbf{x},\, u_{g_1 \mathbf{x}}\,, \ldots,\, u_{g_n \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}$$

$$P\,(g_2\, \mathbf{x},\, u_{g_2 \mathbf{x}}\,, \ldots,\, u_{g_n\, g_2 \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{g_2 \mathbf{x}}$$

$$\cdots$$

$$P\,(g_n\, \mathbf{x},\, u_{g_n \mathbf{x}}\,, \ldots,\, u_{g_n\, g_n \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}}$$

где су $\mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}\,, \ldots, \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}}$ било који елементи скупа E_2 такви да важи $\mathcal{E}\,(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}\,, \ldots, \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}})$.

На основу услова (3) и аксиоме избора постоји бар једно пресликавање α за које оригиналу $(\mathbf{x}, u_{g_1 \mathbf{x}}\,, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}})$ одговара слика $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}})$. Сваком одређеном пресликавању α претходном дефиницијом одговара тачно једно пресликавање P.

Претпоставимо, сада, да је ψ било које пресликавање скупа E_1 у скуп E_2 и уочимо функцију $\varphi: E_1 \to E_2$, одређену на следећи начин

$$\varphi\,(x) \overset{\text{def}}{=} P\,(x,\, \psi\,(x),\, \psi\,(g_2\, x)\,, \ldots,\, \psi\,(g_n\, x)) \quad (x \in E_1)$$

Ова дефиниција је *коректна* јер је, без обзира на функцију ψ, $(x,\, \psi(x)\,, \ldots,\, \psi\,(g_n\, x))$ елемент скупа E_G.

На основу дефиниције функције P непосредно произлази да важи

$$\mathcal{E}(x, P(x, \psi(x), \ldots, \psi(g_n x)), P(g_2 x, \psi(g_2 x), \ldots, \psi(g_n g_2 x)), \ldots, P(g_n x, \psi(g_n x), \ldots, \psi(g_n g_n x) \quad (x \in E_1)$$

односно да је φ решење једначине (1). Доказ леме је завршен.

3. Претпостављајући да је услов (3) испуњен одређујемо опште решење једначине (1).

Означимо са R подскуп скупа E_G одређен на следећи начин

$$(x, u_x, u_{g_2 x}, \ldots, u_{g_n x}) \in R \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{E}(x, u_x, u_{g_2 x}, \ldots, u_{g_n x}).$$

Тај скуп има ово својство

$$(x, u_x, u_{g_2 x}, \ldots, u_{g_n x}) \in R \Leftrightarrow (g_i x, u_{g_i x}, u_{g_2 g_i x}, \ldots, u_{g_n g_i x}) \in R$$

(g_i је било који елемент скупа G)

Ово произлази из познатих својстава било које коњункције као и једнакости $G_{g_i} = G$.

Опште решење једначине (1) одређујемо помоћу једног пресликавања A скупа E_G у скуп E_2. Дефиниција тог пресликавања је следећа:

Прво. Ако $(\mathbf{x}, u_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}}) \in R$, онда

$$A(\mathbf{x}, u_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} u_{g_1 \mathbf{x}}$$

$$A(g_2 \mathbf{x}, u_{g_2 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n g_2 \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} u_{g_2 \mathbf{x}}$$

$$\cdots$$

$$A(g_n \mathbf{x}, u_{g_n \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n g_n \mathbf{x}}) \overset{\text{def}}{=} u_{g_n \mathbf{x}}$$

Друго. Ако $(\mathbf{x}, u_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}}) \notin R$, онда

$$A(\mathbf{x}, u_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n \mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}$$

$$A(g_2 \mathbf{x}, u_{g_2 \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n g_2 \mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{g_2 \mathbf{x}}$$

$$\cdots$$

$$A(g_n \mathbf{x}, u_{g_n \mathbf{x}}, \ldots, u_{g_n g_n \mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}}$$

где су $\mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}}$ било који елементи скупа E_2 такви да је

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{g_1 \mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{u}_{g_n \mathbf{x}}).$$

Пресликавање **A** зовемо *решавајуће пресликавање* (једначине (1)).

Важи следећа теорема.

Теорема. *Опште решење функционалне једначине* (1) *одређено је једнакошћу*

(4) $$\varphi(x) = A(x, \Pi(x), \Pi(g_2 x), \ldots, \Pi(g_n x))$$

где је $\Pi : E_1 \to E_2$ *произвољно пресликавање.*

Доказ. Ако је П произвољна функција онда, на основу леме, функција φ одређена једнакошћу (4) задовољава једначину (1), јер је A извесна специјална функција P (из доказа леме).

Нака је, сада, φ извесно решење једначине (1). Да ли се и оно може добити помоћу једнакости (4)? Довољно је уместо П узети φ јер важи једнакост

$$A(x, \varphi(x), \ldots, \varphi(g_n x)) = \varphi(x),$$

на основу првог дела дефиниције пресликавања A. Доказ је завршен.

4. На крају приметимо да слични резултати важе и у случају када G *није* коначна група. На пример, у случају једначине

$$J(x, \varphi(x), \ldots, \varphi(g_n x)) = T$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ генеришу бесконачну групу G скуп E је скуп свих низова чији је први елемент из скупа E_1, а сви остали су из E_2.

Дакле, *опште решење било које групне функционалне једначине изражава се помоћу једне произвољне функције* П.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Aczél, M. Ghermănescu, M. Hosszú, *On cyclic equations*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl., A Sorozat, 5, (1960), 215—221.

[2] D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, *Цикличне функционалне једначине*, Математичка библиотека, 22, (1962), 5—23.

[3] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 257 (1963), 2224—2226.

[4] S. B. Prešić, *A method for solving a class of cyclic functional equations*, Mat. Vesnik, N. Ser. 5 (20), Beograd, (1968), 375—377.

]5] S. B. Prešić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionelles linéaires non homogènes*, Univ. Beograd, Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 257 (1969).

A GENERAL GROUP FUNCTIONAL EQUATION

S. B. Prešić

Summary

Let E_1, E_2 be given sets and $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_2$ ($n+1$ factors, n is a fixed number), Further, let $J: E \to \{t, f\}$ be a given function (i. e. relation). In this paper is determined a general solution of the functional equation

$$J(x, \varphi(x), \varphi(g_2(x)), \ldots, \varphi(g_n(x))) = t$$

($\varphi: E_1 \to E_2$) is an unknown function; $g_i: E_1 \to E_2$ are given functions which form a group of order n, $g_1(x) = x$).

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 10 (24), 1970, pp. 51—52

SUR UN THÉORÈME DE S. ZERVOS

Slaviša B. Prešić

(Présenté le 13. juin 1969)

Dans sa Thèse [Paris, 1960, pp. 342—343] S. Zervos a démontré le théorème suivant:

Théorème. *Soient $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des ensembles d'indices et $\theta_{i_j}\ (\geqslant 0)$ des nombres réels satisfaisant à la condition*

$$\sum_{i_j \in I_j} \theta_{i_j} = j - t \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

où $t\ (0 < t \leqslant 1)$ est un nombre fixe.

Alors, la racine positive ξ de l'équation

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad \left(a_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i > 0\right)$$

satisfait à l'inégalité

$$\xi \leqslant \max \left\{M, \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i_j \in I_j} M_{i_j}^{\theta_{i_j}}}\right)^{1/t}\right\} \qquad (M \overset{\text{def}}{=} \max\{M_{i_j}\})$$

où M_{i_j} sont des nombres positifs quelconques.

Par l'application de ce théorème-là, en donnant des valeurs particulières aux paramètres t, θ_{i_j}, M_{i_j} S. Zervos a déduit dans sa Thèse, entre autres, plusieurs résultats connus relatifs aux limites des modules des zéros des polynomes lesquels sont dus à Cauchy, Landau, Montel, Jensen, Birkhoff, Marković, Carmichael, Walsh, Kojima, etc.

Dans cette Note, nous allons donner une démonstration simple du théorème cité de S. Zervos, en le déduisant du lemme suivant.

Lemme. *Soient: E un ensemble non vide et totalement ordonné par la relation d'ordre $\leqslant$, $a \in E$ et $J(x)$ une équation en x possédant au moins une solution ξ telle que $\xi > a$.*

Soit, ensuite, $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ une fonction $(\lambda_i > a;\ g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in E)$ avec les propriétés:

(a) *$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ est une fonction strictement croissante de chacune des variables $\lambda_i\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ pour $\lambda_i > a\ (i = 1, 2, \ldots, k)$.*

(b) *Si* $x > a$, *les équations* $J(x)$ *et* $x = g(x, \dots, x)$ *sont équivalentes, c'est-à-dire*

$$x > a \Rightarrow (J(x) \Leftrightarrow x = g(x, x, \dots, x)).$$

Alors pour toute solution ξ *de* $J(x)$ *on a*

$$\xi \leqslant \max \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)\} \tag{1}$$

$(i = 1,2, \dots, k)$ *étant des éléments arbitraires de* E *satisfaisant à* $\lambda_i > a$ $(i = 1,2, \dots, k)$.

Démonstration. Soit $\lambda_i > a$ $(i = 1,2, \dots, k)$ et posons $\lambda = \max \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. Les deux cas suivants sont possibles:

I $\lambda \geqslant \xi$. Alors on a évidemment (1).

II $\lambda < \xi$. Alors $\lambda_i < \xi$ $(i = 1,2, \dots, k)$ et par suite, d'après (a) et (b),

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \geqslant g(\xi, \xi, \dots, \xi) = \xi$$

de manière que l'inégalité (1) est de nouveau valable.

On déduit le théorème de S. Zervos du lemme démontré en y faisant les spécifications suivantes:

E est l'ensemble de tous les nombres réels,

a est le nombre 0.

La fonction g est déterminé par $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\prod_{i_j \in I_j} \lambda_{i_j}^{\theta_{i_j}}} \right)^{1/t}$

où les conditions du théorème de S. Zervos sont remplies par t, θ_{i_j}.

Le lemme précédent peut être appliqué aux systèmes d'équations algébriques, de même qu'à d'autres équations de différents types.

Un lemme semblable est valable dans le cas $k = \infty$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots$ est une suite infinie).

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 446-449 (13 septembre 1971) Série A

ALGÈBRE. — *Un procédé itératif pour déterminer k zéros d'un polynome.* Note (*) de **Mme Marica D. Prešić**, transmise par M. Henri Villat.

Dans cet article, nous allons exposer un procédé itératif du second ordre [donné par ([2])] pour la détermination simultanée de k zéros simples du polynome

$$(1)\qquad \mathrm{P}(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$$

sur le corps commutatif C des nombres complexes. Ce procédé se réduit dans le cas $k = 1$ à celui de Newton et dans le cas $k = n$ au procédé exposé dans ([2]).

C'est S. B. Prešić qui nous a signalé la possibilité du procédé que nous exposons ici.

Définitions et désignations. — Nous désignons par $\mathbf{x}$ le vecteur dont les coordonnées consécutives sont $x_1, \ldots, x_k$ ($x_i \in \mathrm{C}$). Par exemple, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}(\mathbf{i})$ sont les désignations de $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(a_1(i), \ldots, a_k(i))$, respectivement.

Le *quotient* de la division du polynome $f(x)$ par $(x - x_1)\ldots(x - x_k)$ sera désigné par $f_{\mathbf{x}}(x)$.

Nous allons utiliser l'opérateur de *différence finie* $[x, x_1, \ldots, x_m]$ défini par les égalités suivantes :

$$[x, x_1]f(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad [x, x_1, \ldots, x_m]f(x) = [x, x_1, \ldots, x_{m-1}][x, x_m]f(x)$$

($x, x_1, \ldots, x_m$, nombres différents deux à deux).

Définissons maintenant les suites des nombres complexes $a_\nu(i)$ ($\nu = 1, \ldots, k$) de manière que les identités suivantes soient valables :

$$(\mathrm{I}_\nu)\qquad \mathrm{P}(x) = (x - a_1(i))\ldots(x - a_\nu(i+1))\ldots(x - a_k(i))\,\mathrm{P}_{\mathbf{a}(\mathbf{i})}(x) + \sum_{\sigma \neq \nu}^{k} \mathrm{P}(a_\sigma(i)) \prod_{\rho \neq \sigma}^{k} \frac{x - a_\rho(i)}{a_\sigma(i) - a_\rho(i)} \quad (\nu = 1, \ldots, k).$$

En remplaçant dans les égalités (I_ν) x par $a_\nu(i)$ et en résolvant en $a_\nu(i+1)$ ($\nu = 1, \ldots, k$) les équations obtenues ainsi, on aboutit aux formules

$$(2)\qquad a_\nu(i+1) = a_\nu(i) - \frac{\mathrm{P}\, a_\nu(i))}{\prod_{\rho \neq \nu}^{k} (a_\nu(i) - a_\rho(i))\,\mathrm{P}_{\mathbf{a}(\mathbf{i})}(a_\nu(i))} \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Nous définissons notre procédé itératif par les égalités (2).

Pour faciliter l'exposé de ce qui suit, nous introduisons les fonctions vectorielles suivantes :

$$\mathrm{A}_\nu(\mathbf{x}) = x_\nu - \frac{\mathrm{P}(x_\nu)}{\prod\limits_{\rho \neq \nu}^{k} (x_\nu - x_\rho)\, \mathrm{P}_{\mathbf{x}}(x_\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots, k),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathrm{A}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathrm{A}_k(\mathbf{x}))$$

Proposition. — *On suppose l'existence des suites infinies* (2). *Alors :*

1° *Si les limites*

$$\lim_{i \to \infty} a_1(i), \quad \ldots, \quad \lim_{i \to \infty} a_k(i) \qquad \left[\lim_{i \to \infty} a_\nu(i) \neq \lim_{i \to \infty} a_\mu(i)\,;\ \nu \neq \mu\right]$$

existent, ces limites sont des zéros du polynome (1).

2° *Soient*

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_k$$

les zéros simples du polynome (1). *Il existe alors dans* C^k *un voisinage* V *du vecteur* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *tel que la suite* $\mathbf{a}(\mathbf{i})$ *déterminée par la condition* $\mathbf{a}(\mathbf{i}+\mathbf{1}) = \mathbf{A}(\mathbf{a}(\mathbf{i}))$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *converge vers* $\mathbf{a}$ *si* $\mathbf{a}(\mathbf{0}) \in \mathrm{V}$. *La convergence dans ce cas-là est carrée.*

Démonstration. — L'assertion 1° s'obtient immédiatement de (2) si l'on y passe à la limite.

D'après les théorèmes connus, contenu dans [1], pour démontrer 2° il suffit d'établir que toutes les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ s'annulent pour $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

Dans le voisinage V du point $\mathbf{a}$ la fonction $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est définie et possède les dérivées partielles de tout ordre. On obtient les expressions suivantes pour les dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial \mathrm{A}_\nu(\mathbf{x})}{\partial x_\mu} = -\mathrm{P}(x_\nu) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{1}{\prod\limits_{\rho \neq \nu} (x_\nu - x_\rho)\, \mathrm{P}_{\mathbf{x}}(x_\nu)} \right]$$

$$= 1 - \mathrm{P}(x_\nu) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{\prod\limits_{\rho \neq \nu} (x_\nu - x_\rho)\, \mathrm{P}_{\mathbf{x}}(x_\nu)} - \frac{\mathrm{P}'(x_\nu)}{\prod\limits_{\rho \neq \nu} (x_\nu - x_\rho)\, \mathrm{P}_{\mathbf{x}}(x_\nu)} \qquad (\mu \neq \nu).$$

D'autre part, d'après l'identité

$$\mathrm{P}(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_k)\, \mathrm{P}_{\mathbf{a}}(x),$$

on a

$$\mathrm{P}'(x) = \sum_{\sigma=1}^{k} \prod_{\rho \neq \sigma} (x - a_\rho)\, \mathrm{P}_{\mathbf{a}}(x) + \prod_{\rho=1}^{k} (x - a_\rho)\, \mathrm{P}'_{\mathbf{a}}(x),$$

c'est-à-dire, pour $x = a_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, k$) :

$$P'(a_\nu) = \prod_{\rho \neq \nu} (a_\nu - a_\rho)\, P_{\mathbf{a}}(a_\nu).$$

Mettant à profit la dernière égalité, on établit immédiatement que toutes les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ s'annulent au point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, ce qui termine notre démonstration.

Enfin, nous allons trouver une formule pour le polynome $P_{\mathbf{x}}(x)$. A cet effet, nous utilisons l'opérateur de différence finie et ses propriétés fondamentales. On conclut immédiatement qu'on a l'identité

$$(3) \qquad P_{\mathbf{x}}(x) = [x, x_1, \ldots, x_k]\, P(x).$$

L'application de l'opérateur $[x, x_1, \ldots, x_k]$ à la fonction x^m ($m = 0, 1, \ldots$) donne

$$(4) \qquad [x_1, \ldots, x_k]\, x^m = \sum_{i+i_1+\ldots+i_k=m-k} x^i x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} \quad \text{pour} \quad m \geqq k$$
$$= 0 \quad \text{pour} \quad m < k$$

D'après (3) et (4) on a la formule suivante pour $P_x(x)$

$$P_{\mathbf{x}}(x) = \sum_{i+i_1+\ldots+i_k=n-k} x^i x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} + p_{n-1} \sum_{i+i_1+\ldots+i_k=n-k-1} x^i x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} + \ldots$$
$$+ p_{k+1}(x + x_1 + \ldots + x_k) + p_k.$$

Exemple numérique. — Polynome :

$$6x^7 - 107x^6 + 553x^5 - 88x^4 - 5764x^3 + 10\,929x^2 + 2\,709x - 13\,230.$$

Ses racines sont :

$$-3, \quad -1, \quad 2, \quad \frac{7}{3}, \quad 3, \quad 7, \quad \frac{15}{2}.$$

1° Valeurs initiales :

$$a_1(0) = 1; \qquad a_2(0) = 2{,}5; \qquad a_3(0) = 2{,}9.$$

Itération $i^{\text{ième}}$	$a_1(i)$	$a_2(i)$	$a_3(i)$
1	2,553 480 8	2,416 168 4	2,977 640 1
2	1,637 692 9	2,669 928 7	3,037 049 2
3	1,881 940 5	2,468 328 2	2,982 928 0
4	1,974 653 3	2,356 445 5	3,002 251 9
5	1,998 439 2	2,334 920 7	2,999 973 4
6	1,999 992 6	2,333 341 2	2,999 998 9
7	2,000 000 0	2,333 334 1	2,999 999 1

2° Valeurs initiales :

$$a_1(0) = 1{,}23; \qquad a_2(0) = 1{,}91; \qquad a_3(0) = 4.$$

Itération $i^{\text{ième}}$	$a_1(i)$	$a_2(i)$	$a^3(i)$
1..................	2,304 236 6	1,873 014 0	3,296 904 7
2..................	2,318 904 2	1,981 766 9	3,025 327 6
3..................	2,332 103 6	2,000 381 0	3,000 890 1
4..................	2,333 333 3	1,999 998 7	3,000 000 1
5..................	2,333 334 1	2,000 000 0	2,999 998 9

(*) Séance du 6 septembre 1971.

(1) A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York and London, 1960.

(2) S. B. Prešić, *Comptes rendus*, 262, 1963, p. 862.

Matematički Institut,
Knez Mihailova 35, 11000 *Belgrade,*
Yougoslavie.

184430. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 654-657 (8 mars 1971). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une méthode de résolution des équations dont toutes les solutions appartiennent à un ensemble fini donné.* Note (*) de M. Slaviša B. Prešić, présentée par M. Henri Villat.

Soit $S = \{s_1, \ldots, s_g\}$ un ensemble fini donné à g éléments, E un ensemble dont un élément est désigné par o et $J : S \to E$ une application de S dans E.

Nous posons le problème de résoudre en x l'équation

$$J(x) = 0. \tag{1}$$

A ce type d'équations appartiennent : les équations de Boole, les équations pseudo-booléennes, les équations dans n'importe quelle structure algébrique finie.

Faisons correspondre à tout élément q de l'ensemble S un cycle α_q de S.

La méthode de résolution que nous exposons dépend des cycles choisis $\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_g}$, et aussi de la fonction A, que nous définissons comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{ll} A(q, 0, U_2, \ldots, U_{g-1}) & = q, \\ A(q, u_1, 0, U_3, \ldots, U_{g-1}) & = \alpha_q(q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A(q, u_1, \ldots, u_i, 0, U_{i+2}, \ldots, U_{g-1}) & = \alpha_q^i(q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A(q, u_1, \ldots, u_{g-2}, 0) & = \alpha_q^{g-2}(q), \\ A(q, u_1, \ldots, u_{g-1}) & = \alpha_q^{g-1}(q) \\ \quad \left[\alpha_2^2(q) \overset{\text{def}}{=} \alpha_q(\alpha_q(q)),\ \alpha_2^3(q) \overset{\text{def}}{=} \alpha_q(\alpha_2^2(q)), \ldots\right], & \end{array}\right. \tag{2}$$

où $u_1, \ldots, u_{g-1}, U_2, \ldots, U_{g-1} \in E$; $u_1 \neq 0, \ldots, u_{g-1} \neq 0$; $q \in S$.

On conclut immédiatement que la fonction $A (A : S \times E^{g-1} \to S)$ est univoquement déterminée par la définition précédente.

Nous appelons A *fonction résolvante* [de l'équation (1)].

On a le lemme suivant, d'importance fondamentale :

Lemme. — *Si l'équation* (1) *est possible, sa solution générale est donnée par l'égalité*

$$x = A(q, J(q), J(\alpha_q(q)), \ldots, J(\alpha_q^{g-2}(q))), \tag{3}$$

où q est un élément arbitraire de S.

Démonstration. — Nous démontrons d'abord que, pour un élément q quelconque de S, x déterminé par (3) est une solution de (1). L'équation (1) étant possible, au moins un des éléments

$$J(q), \quad J(\alpha_q(q)), \quad \ldots, \quad J(\alpha_q^{g-1}(q)) \tag{4}$$

est égal à o. Soit $J(\alpha_q^i(q))$ le premier terme de la suite (4) qui remplit cette condition. D'après (2), on a

$$A(q,\ J(q),\ \ldots,\ J(\alpha_q^{g-2}(q))) = \alpha_q^i(q).$$

Donc, $x = A(q,\ J(q),\ \ldots)$ est une solution de (1).

Soit, d'autre part, x une solution de l'équation (1). Si l'on remplace dans (3) q par x, on obtient, d'après (2) : $A(x,\ 0,\ \ldots) = x$.

La démonstration est achevée.

Dans les applications, il importe d'avoir pour la fonction A une formule simple.

Une telle formule peut être obtenue comme il suit.

Soit $T \overset{\text{def}}{=} S \cup E$ et soient $+$ et $.$ deux opérations binaires sur l'ensemble T possèdent les propriétés suivantes :

$$0.e = e.0 = 0.0 = 0; \quad e.e = e; \quad 0.q = 0,$$
$$e.q = q; \quad q + 0 = 0 + q = q, \quad 0 + 0 = 0$$

($q \in S$; e, élément fixé de l'ensemble E différent de o).

Soient $'$ et $^-$ les applications de E dans E définies par

$$(5)\qquad \begin{cases} x' = 0 \quad \text{si } x = 0, & \bar{x} = e \quad \text{si } x = 0, \\ \bar{x} = e \quad \text{si } x \neq 0, & \bar{x} = 0 \quad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

On peut vérifier immédiatement l'identité

$$(6)\quad A(q,\ U_1,\ \ldots,\ U_{g-1}) = \overline{U}_1.q + U'_1.\overline{U}_2.\alpha_q(q) + \ldots + U'_1.U'_2.\ \ldots\ .U'_{g-2}.\overline{U}_{g-1}.\alpha_q^{g-2}(q)$$
$$+ U'_1.U'_2.\ \ldots\ .U'_{g-1}.\alpha_q^{g-1}(q) \qquad (q \in S;\ U_i \in E)$$
$$\Big[\text{ici } U + V + W + \ldots + R \overset{\text{def}}{=} (\ldots((U+V)+W)+\ldots+R),$$
$$U.V.W.\ \ldots\ .R \overset{\text{def}}{=} (\ldots((U.V).W)\ldots R)\Big].$$

Nous donnons quelques exemples des applications.

Exemple 1. — Soit $S = E = \{0, 1\}$ et $+$ et $.$ les opérations *max* et *min* respectivement. L'équation (de *Boole*) :

$$(7)\qquad ax + b\bar{x} = 0 \qquad (a,\ b,\ x \in \{0,\ 1\})$$

est possible si et seulement si $ab = 0$.

Dans ce cas : $e = 1$, $x' = x$; $\bar{x}$ est *négation* de x. Posons $\alpha_0(x) = \alpha_1(x) = \bar{x}$. On conclut d'après (3) et (6) que la solution générale de (7) est donnée par

$$x = \overline{J(q)}\,q + J(q)\,\bar{q} \qquad [J(q) = aq + b\bar{q}],$$

c'est-à-dire par

$$x = \bar{a}q + b\bar{q} \qquad (q \in E \text{ est arbitraire}).$$

Exemple 2. — Soit $\mathrm{S} = \mathrm{E} = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $+$ et $.$ les opérations *max* et *min* respectivement. L'équation (de *Post*) :

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = 0 \qquad \left(a_i,\ x \in \mathrm{E};\ x^i \overset{\text{def}}{=} n \text{ si } x = i,\ x^i \overset{\text{def}}{=} 0 \text{ si } x \neq i\right) \tag{8}$$

est possible si et seulement si $a_0 . a_1 \ldots a_n = 0$.

Dans ce cas-là nous posons

$$e = n; \qquad \bar{x} = x^0, \qquad x' = x^1 + x^2 + \ldots + x^n;$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après (3) et (6), la solution générale de l'équation (8) est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} x = {} & \mathrm{J}^0(q).q + \mathrm{J}'(q).\mathrm{J}^0(\alpha_q(q)).\alpha_q(q) + \ldots \\ & + \mathrm{J}'(q).\mathrm{J}'(\alpha_q(q))\ldots \mathrm{J}'(\alpha_q^{n-2}(q)).\mathrm{J}^0(\alpha_q^{n-1}(q)).\alpha_q^{n-1}(q) \\ & + \mathrm{J}'(q).\mathrm{J}'(\alpha_q(q))\ldots \mathrm{J}'(\alpha_q^{n-1}(q)).\alpha_q^n(q) \qquad (q \in \mathrm{E}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire par

$$\left\{ \begin{aligned} x = {} & \sum_{i=1}^{n} i a_i^0 q^i + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (i \oplus j) a_i' a_{i\oplus 1}' \ldots a_{i\oplus j \ominus 1}' a_{i\oplus j}^0 \right) q^i \\ & + \sum_{i=0}^{n} (n \oplus i) a_i' a_{i\oplus 1}' \ldots a_{i\oplus n \ominus 1}' q^i \\ & (\oplus \text{ et } \ominus \text{ sont addition et soustraction } \mathit{mod}\, n+1). \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Ici nous avons utilisé

$$\mathrm{J}(q) = \sum_{i=0}^{n} a_i q^i, \qquad \mathrm{J}'(q) = \sum_{i=0}^{n} a_i' q^i, \qquad \mathrm{J}^0(q) = \sum_{i=0}^{n} a_i^0 q^i, \qquad q = \sum_{i=1}^{n} i q^i, \qquad (\alpha^i q)^j = q^{j \ominus i}.$$

Exemple 3. — Soit semblablement à l'exemple 1,

$$\mathrm{J}(x_1, x_2) = 0 \qquad (x_1,\ x_2 \in \{0, 1\}) \tag{10}$$

une équation de Boole en x_1 et x_2. Dans ce cas :

$$\mathrm{S} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \qquad \mathrm{E} = \{0, 1\}.$$

Nous choisissons les cycles α_{s_i} de la manière suivante :

$$\alpha_{(u, v)} = \begin{pmatrix} (u, v) & (\bar{u}, v) & (u, \bar{v}) & (\bar{u}, \bar{v}) \\ (\bar{u}, v) & (u, \bar{v}) & (\bar{u}, \bar{v}) & (u, v) \end{pmatrix} \qquad (u,\ v \in \{0, 1\}).$$

Pour $+$ et $.$ nous prenons les opérations partielles suivantes (sur l'ensemble $\mathrm{S} \cup \mathrm{E}$) :

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + (u, v) = (u, v) + 0 = (u, v),$$

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2,\ v_1 + v_2),$$

$$0.0 = 0.1 = 1.0 = 0, \qquad 1.1 = 1, \qquad 0.(u, v) = 0, \qquad 1.(u, v) = (u, v).$$

L'équation (10) est possible si et seulement si

$$J(0, 0).J(0, 1).J(1, 0).J(1, 1) = 0$$

et dans ce cas-là sa solution générale est donnée par la formule

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) = {} & \bar{J}(q_1, q_2)(q_1, q_2) + J(q_1, q_2)\,\bar{J}(\bar{q}_1, q_2)(\bar{q}_1, q_2) \\ & + J(q_1, q_2)\,J(\bar{q}_1, q_2)\,\bar{J}(q_1, \bar{q}_2)(q_1, \bar{q}_2) + J(q_1, q_2)\,J(\bar{q}_1, q_2)\,J(q_1, \bar{q}_2)(\bar{q}_1, \bar{q}_2)\end{aligned}$$

c'est-à-dire par

$$\begin{aligned}x_1 &= q_1\big(\bar{J}(q_1, q_2) + J(\bar{q}_1, q_2)\,\bar{J}(q_1, \bar{q}_2)\big) + \bar{q}_1\,J(q_1, q_2)\big(\bar{J}(\bar{q}_1, q_2) + J(q_1, \bar{q}_2)\big), \\ x_2 &= q_2\big(\bar{J}(q_1, q_2) + \bar{J}(\bar{q}_1, q_2)\big) + \bar{q}_2\,J(q_1, q_2)\,J(\bar{q}_1, q_2) \qquad (q_1, q_2 \in \{0, 1\}).\end{aligned}$$

Remarquons enfin que l'application de la méthode exposée conduit à une formule connue pour la résolution des équations pseudo-booléennes.

(*) Séance du 22 février 1971.

(*Matematički Institut,*
Knez Mihailova,
35, *Belgrade,*
Yougoslavie.)

183556. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire.* Note (*) de MM. **Dragoslav S. Mitrinović** et **Slaviša B. Prešić**, présentée par M. Maurice Fréchet.

On donne la solution générale d'une équation fonctionnelle cyclique d'une forme assez générale et qui se rencontre en géométrie.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + \mathrm{F}(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \ldots \\ &\qquad + \mathrm{F}(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0 \end{aligned}$$

qui est cyclique en variables $x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$. Sa solution est connue.

Toutes les fonctions qu'on considère dans cette Note sont des fonctions réelles des variables réelles.

L'équation (1), où

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\ &\quad = \{ f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \ldots + f(x_{2k-1}, x_{2k}) \} \\ &\quad\quad \times \{ f(x_{2k+1}, x_{2k+2}) + f(x_{2k+3}, x_{2k+4}) + \ldots + f(x_{2n-1}, x_{2n}) \} \end{aligned}$$

sera nommée, dans ce qui suit, *équation* (F).

Théorème. — *La solution générale de l'équation* (F) *est la fonction suivante :*

$$(3)\qquad \begin{cases} f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) & \text{pour } n = 2, \\ f(u, v) = h(v) - h(u) & \text{pour } n > 2, \end{cases}$$

où $g(u)$ *et* $h(u)$ *sont des fonctions réelles quelconques de la variable réelle* u.

La démonstration n'utilise pas la solution de (1).

Démonstration. — La fonction (3) est vraiment une solution de l'équation (F).

Inversement, nous allons prouver que toute solution de l'équation (F) a la forme (3).

Si l'on remplace dans l'équation (F) chaque variable par u, on trouve $f(u, u) = 0$ pour tout u.

La solution triviale $f(u, v) = 0$ de l'équation (F) est comprise dans (3). Dans ce qui suit, nous allons chercher les solutions non triviales $f(u, v)$ de l'équation (F). Pour chacune de ces solutions il existe au moins un couple (a, b) des nombres réels différents tels que $f(a, b) \neq 0$.

En remplaçant, dans l'équation (F), x_{2k+2} par x_2 et toutes les autres variables (sauf x_2 et x_{2k+2}) par x_1, il vient

$$(4)\qquad p f^2(x_1, x_2) + q f(x_1, x_2)\, f(x_2, x_1) + r f^2(x_2, x_1) = 0,$$

avec $p\ (> 0)$, $r\ (\geqq 0)$, q nombres entiers.

La fonction $f(u, v) = h(v) - h(u)$ doit satisfaire à l'équation (4) pour toute fonction $h(u)$, ce qui conduit à $q = p + r$. Puisque l'équation (4) est vraie pour tous x_1 et x_2, on a aussi

$$pf^2(x_2, x_1) + qf(x_2, x_1)f(x_1, x_2) + rf^2(x_1, x_2) = 0. \tag{5}$$

Par addition des égalités (4) et (5), avec $q = p + r$, on obtient

$$f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) = 0. \tag{6}$$

Si $n = 2$ l'équation (F) a la forme suivante :

$$f(x_1, x_2)f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)f(x_2, x_3) = 0. \tag{7}$$

Chaque solution non triviale de l'équation (7) est

$$f(x_3, x_4) = -\frac{f(a, x_3)}{f(a, b)}f(x_4, b) - \frac{f(a, x_4)}{f(a, b)}f(b, x_3). \tag{8}$$

En posant $f(a, x)/f(a, b) = g(x)$ et $f(b, x) = h(x)$, et mettant à profit la propriété (6), l'équation (8) devient

$$f(x_3, x_4) = g(x_3)h(x_4) - g(x_4)h(x_3),$$

ce qui démontre le théorème énoncé pour $n = 2$.

Considérons maintenant le cas où $k = 1$ et $n > 2$. Si l'on pose

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_{2n-2} = x_1, \qquad x_{2n-1} = u, \qquad x_{2n} = v, \tag{9}$$

l'équation (F) prend la forme que voici :

$$f(x_1, x_2)f(u, v) + f(x_1, u)f(v, x_2) + f(x_1, v)f(x_2, x_1) + f(x_1, v)f(x_1, u) = 0.$$

Si l'on pose $x_1 = a$, $x_2 = b$ $[f(a, b) \neq 0]$ et applique la propriété (6), on trouve de la dernière équation

$$f(u, v) = \frac{f(a, u)}{f(a, b)}\{f(b, v) - f(a, v)\} + f(a, v). \tag{10}$$

Pour $v = b$ cette équation donne l'égalité

$$f(b, u) - f(a, u) = -f(a, b) \tag{11}$$

qui est valable pour tout u.

Grâce à (11) l'égalité (10) devient

$$f(u, v) = f(a, v) - f(a, u) = h(v) - h(u),$$

ce qui démontre le théorème pour $k = 1$ et $n > 2$.

Dans le cas où $k > 1$, l'équation (F) au moyen des substitutions (9) prend la forme

$$f(x_1, u)f(v, x_2) + f(x_1, v)f(x_1, u) + f(x_2, x_1)f(x_1, u) = 0.$$

Pour $x_1 = a$ et $u = b$, la dernière équation devient

$$f(v, x_2) = f(a, x_2) - f(a, v),$$

c'est-à-dire

$$f(u, v) = h(v) - h(u),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. — On démontre dans la monographie de Ghermanescu (1) que la solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$(12) \qquad f(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_4, x_5) + f(x_1, x_3, x_4) f(x_1, x_2, x_5) + f(x_1, x_4, x_2) f(x_1, x_3, x_5) = 0$$

est la fonction

$$(13) \qquad f(u, v, w) = \mathrm{H}(u, v)\,\mathrm{G}(u, w) - \mathrm{H}(u, w)\,\mathrm{G}(u, v),$$

où $\mathrm{H}(u, v)$ et $\mathrm{G}(u, v)$ sont des fonctions continues quelconques.

Comme conséquence du théorème démontré (cas $n = 2$) il suit que la fonction (13), où $\mathrm{H}(u, v)$ et $\mathrm{G}(u, v)$ sont des fonctions arbitraires, est la solution générale de l'équation (12).

Remarque 2. — Dans une étude qui paraîtra ailleurs, nous pensons développer les résultats de cette Note et faire des extensions diverses.

Ainsi, par exemple, on démontre que l'équation (1), où $n = 2p$ et

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_{4p-1}, x_{4p}) \\ &\quad = f(x_1, x_2) \{ f(x_{2p-2k+1}, x_{2p-2k+2}) \\ &\qquad + f(x_{2p+2k+1}, x_{2p+2k+2}) \} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1), \end{aligned}$$

admet comme solution générale $f(u, v) = h(v) - h(u)$.

(*) Séance du 15 janvier 1962.

(1) M. Ghermanescu, *Ecuaţii funcţionale*, Bucarest, 1960, p. 428-430.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 254, p. 611-613, séance du 22 janvier 1962.

GAUTHIER-VILLARS & Cie.
55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e),
Éditeur-Imprimeur-Libraire.
160850

Imprimé en France.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 12 (26), 1971. pp. 85—94

AN ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF A 2×2 SYSTEM OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Jovan J. Petrić and *Slaviša B. Prešić*

(Communicated April 12, 1971)

Summary

This paper treats the problem of simultaneous determination of all solutions of the system of algebraic equations

$$J_1(x, y) \equiv A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

$$J_2(x, y) \equiv A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0,$$

on the assumption that they are different. The algorithm is based on the use of basic ideas of an iterative procedure for factorisation of polynomials given in papers [1] and [2]. This analysis would be preliminarily made and its analogy of treatment would be transferred to the construction of algorithm for the solution of given problem. For treatment of this kind of problem immediate cause was conditionned by practical needs.

Introduction and statement of the problem

In papers [1] and [2] an iterative procedure for simultaneous determination of all roots of an algebraic polynomial was given, under the assumption that they differ one from another.

For example, in the case of an algebraic equation

$$P(x) \equiv x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = 0, \tag{1}$$

whose roots are a, b, c, it was demonstrated that they represent limit values of a series a_n, b_n, c_n defined as follows

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_n - \frac{P(a_n)}{(a_n - b_n)(a_n - c_n)}, \\ b_{n+1} &= b_n - \frac{P(b_n)}{(b_n - a_n)(b_n - c_n)}, \\ c_{n+1} &= c_n - \frac{P(c_n)}{(c_n - a_n)(c_n - b_n)}. \end{aligned} \tag{2}$$

For starting data a_0, b_0, c_0, approximative values of roots a, b, c are selected.

Otherwise, formulae (2) are derived from following polynomial identity

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(x-a_{n+1})(x-b_n)(x-c_n)+(x-a_n)(x-b_{n+1})(x-c_n)+\\&+(x-a_n)(x-b_n)(x-c_{n+1})-2(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)=P(x),\end{aligned}$$

that may be written in this way

$$(4)\qquad \begin{aligned}&(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-(a_{n+1}-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-\\&-(b_{n+1}-b_n)(x-c_n)(x-a_n)-(c_{n+1}-c_n)(x-a_n)(x-b_n)=P(x).\end{aligned}$$

Now, let's observe the set of all polynomial expressions of a_n, b_n, c_n. Various constants, as well as a variable x, may take part here. For example such is the case for

$$a_n+b_n,\ a_nb_n+3c_n,\ x-a_n,\ (x-a_n)(x-b_n)(x-c_n),\ \text{etc.}$$

In this set we define the operator δ in following way

$$\delta a_n \overset{\text{def}}{=} a_{n+1}-a_n,\ \delta b_n \overset{\text{def}}{=} b_{n+1}-b_n,\ \delta c_n \overset{\text{def}}{=} c_{n+1}-c_n,$$

(5) $\delta u \overset{\text{def}}{=} 0$, ($u$ is an expression which does not include index n)

$\delta(u+v) \overset{\text{def}}{=} \delta u+\delta v$, $\delta(uv) \overset{\text{def}}{=} v\delta u+u\delta v$ (u and v are the expressions whatsoever); it means that for the operator δ similar formulae are valable as for the differentiation. For example:

$$\begin{aligned}&\delta(a_n+b_n)=\delta a_n+\delta b_n=a_{n+1}-a_n+b_{n+1}-b_n,\\&\delta(x-a_n)=\delta x-\delta a_n=0-(a_{n+1}-a_n)=a_n-a_{n+1},\\&\delta[(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)]=(x-b_n)(x-c_n)\delta(x-a_n)+\\&+(x-a_n)(x-c_n)\delta(x-b_n)+(x-a_n)(x-b_n)\delta(x-c_n)=\\&=(x-b_n)(x-c_n)(a_n-a_{n+1})+(x-a_n)(x-c_n)(b_n-b_{n+1})+\\&+(x-a_n)(x-b_n)(c_n-c_{n+1}).\end{aligned}$$

On the basis of last equality (from above mentionned examples) the formula (4) may be written in this way

$$(6)\qquad (x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)+\delta[(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)]-P(x)=0.$$

Introducing the designation

$$Q_n=(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-P(x),$$

the equality (6) may be presented in the from

$$(7)\qquad Q_n+\delta Q_n=0,$$

as we have

$$\begin{aligned}Q_n+\delta Q_n&=(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-P(x)+\delta[(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-\\&-P(x)]=(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)-P(x)+\\&+\delta[(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)]-\delta P(x)=(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)+\\&+\delta[(x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)]-P(x),\quad (\delta P(x)=0).\end{aligned}$$

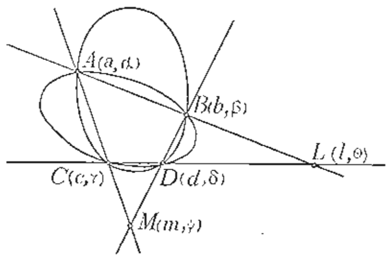
Basic method

Let's now consider the system of equations

$$(8)\qquad \begin{aligned} J_1(x, y) &\equiv A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,\\ J_2(x, y) &\equiv A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0, \end{aligned}$$

supposing that its solutions are (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ).

Following schema for further treatment may be useful



The system of equations (8) is equivalent to the system of equations

$$(9)\qquad \begin{aligned} AB \cdot CD &= 0,\\ AC \cdot BD &= 0, \end{aligned}$$

where $AB, \ldots, BD$ denote following expressions

$$AB \overset{\text{def}}{=} (\beta - \alpha)(x - a) - (b - a)(y - \alpha),$$

— — — — — — — — — —

$$BD \overset{\text{def}}{=} (\delta - \beta)(x - b) - (d - b)(y - \beta).$$

Naturally, $AB = 0, \ldots, BD = 0$ are the equations of straight lines through the points A and $B, \ldots,$ or B and D respectively.

Equations of the system (9) are certain linear combinations equation of system (8); in other words there exists certain constantes λ, μ, ρ, φ so that following equalities are valable

$$(10)\qquad \begin{aligned} AB \cdot CD + \lambda J_1(x, y) + \mu J_2(x, y) &= 0,\\ AC \cdot BD + \rho J_1(x, y) + \varphi J_2(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Basic idea of algorithm given in this paper is this: iterative procedure of the system of equations (8) in the limit shall result in the form (10). Pursuant this point, preliminarily we introduce the designations

$$R_n = A_nB_n \cdot C_nD_n + \lambda_n J_1(x, y) + \mu_n J_2(x, y),$$

$$S_n = A_nC_n \cdot B_nD_n + \rho_n J_1(x, y) + \varphi_n J_2(x, y).$$

where $A_nB_n, \ldots, B_nD_n$ are following expressions

$$A_nB_n=(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-(b_n-a_n)(y-\alpha_n),$$

$$C_nD_n=(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-(d_n-c_n)(y-\gamma_n),$$

$$A_nC_n=(\gamma_n-\alpha_n)(x-a_n)-(c_n-a_n)(y-\alpha_n),$$

$$B_nD_n=(\delta_n-\beta_n)(x-b_n)-(d_n-b_n)(y-\beta_n).$$

In expression for R_n and S_n, 12 series are participating

$$a_n,\ \alpha_n,\ b_n,\ \beta_n,\ c_n,\ \gamma_n,\ d_n,\ \delta_n,\ \lambda_n,\ \mu_n,\ \rho_n,\ \varphi_n.$$

Our aim is to define these series so that

$$a_n\to a,\quad \alpha_n\to\alpha,\ \ldots,\quad \rho_n\to\rho,\quad \varphi_n\to\varphi,$$

when $n\to\infty$.

Conformably to equation (7) which refer to algebraic polynomials, for R_n and S_n following conditions are posed

$$\begin{aligned} &R_n+\delta R_n=0,\\ &S_n+\delta S_n=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Now, operator δ refers to polynomial expressions for

$$a_n,\ \alpha_n,\ b_n,\ \beta_n,\ \ldots,\ \rho_n,\ \varphi_n$$

and is introduced with equalities similar to equalities (5).

On the basis of the definition of operator δ we have

$$\begin{aligned}
\delta R_n &= \delta\,[A_nB_n\cdot C_nD_n+\lambda_nJ_1(x,y)+\mu_nJ_2(x,y)]=C_nD_n\,\delta A_nB_n+\\
&+A_nB_n\,\delta C_nD_n+J_1(x,y)\,\delta\lambda_n+J_2(x,y)\,\delta\mu_n=\\
&=[(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-(d_n-c_n)(y-\gamma_n)]\cdot\delta\,[(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(b_n-a_n)(y-\alpha_n)]+[(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(b_n-a_n)(y-\alpha_n)]\cdot\delta\,[(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-(d_n-c_n)(y-\gamma_n)]+\\
&+J_1(x,y)\,\delta\lambda_n+J_2(x,y)\,\delta\mu_n=[(\beta_{n+1}-\beta_n-\alpha_{n+1}+\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(\beta_n-\alpha_n)(a_{n+1}-a_n)-(b_{n+1}-b_n)-(a_{n+1}+a_n)(y-\alpha_n)+\\
&+(b_n-a_n)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)]\cdot[(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-(d_n-c_n)(y-\gamma_n)]+\\
&+[(\delta_{n+1}-\delta_n-\gamma_{n+1}\gamma_n)(x-c_n)-(\delta_n-\gamma_n)(c_{n+1}-c_n)-\\
&-(d_{n+1}-d-c_{n+1}+c_n)(y-\gamma_n)+(d_n-c_n)(\gamma_{n+1}-\gamma_n)]\cdot[(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(b_n-a_n)(y-\alpha_n)]+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)J_1(x,y)+(\mu_{n+1}-\mu_n)J_2(x,y).
\end{aligned}$$

Similar procedure lead us to the expression for δS_n, too. Using derived expressions for δR_n and δS_n equalities (11) become

$$\begin{aligned}
(12)\qquad & [(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-(b_n-a_n)(y-\alpha_n)]\cdot[(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-(d_n-c_n)(y-\gamma_n)]+\\
&+[(\beta_{n+1}-\beta_n-\alpha_{n+1}+\alpha_n)(x-a_n)-(\beta_n-\alpha_n)(a_{n+1}-a_n)-\\
&-(b_{n+1}-b_n-a_{n+1}+a_n)(y-\alpha_n)+(b_n-a_n)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)]\cdot[(\delta_n-\gamma_n)(x-c_n)-\\
&-(d_n-c_n)(y-\gamma_n)]+[(\delta_{n+1}-\delta_n-\gamma_{n+1}+\gamma_n)(x-c_n)-\\
&-(d_{n+1}-d_n-c_{n+1}+c_n)(y-\gamma_n)+(d_n-c_n)(\gamma_{n+1}-\gamma_n)]\cdot[(\beta_n-\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(b_n-a_n)(y-\alpha_n)]+\lambda_{n+1}J_1(x,y)+\mu_{n+1}J_2(x,y)=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(13)\qquad & [(\gamma_n-\alpha_n)(x-a_n)-(c_n-a_n)(y-\alpha_n)]\cdot[(\delta_n-\beta_n)(x-b_n)-\\
&-(d_n-b_n)(y-\beta_n)]+[(\gamma_{n+1}-\gamma_n-\alpha_{n+1}+\alpha_n)(x-a_n)-\\
&-(\gamma_n-\alpha_n)(a_{n+1}-a_n)-(c_{n+1}-c_n-a_{n+1}+a_n)(y-\alpha_n)+\\
&+(c_n-a_n)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)]\cdot[(\delta_n-\beta_n)(x-b_n)-(d_n-b_n)(y-\beta_n)]+\\
&+[(\delta_{n+1}-\delta_n-\beta_{n+1}+\beta_n)(x-b_n)-(\delta_n-\beta_n)(b_{n+1}-b_n)-\\
&-(d_{n+1}-d_n-b_{n+1}+b_n)(y-\beta_n)+\\
&+(d_n-b_n)(\beta_{n+1}-\beta_n)]\cdot[(\gamma_n-\beta_n)(x-a_n)-\\
&-(c_n-a_n)(y-\alpha_n)]+\rho_{n+1}J_1(x,y)+\varphi_{n+1}J_2(x,y)=0.
\end{aligned}$$

Equalities (12) and (13) represent polynomial identities. These identities facilitate to determine

$$a_{n+1},\quad \alpha_{n+1},\quad b_{n+1},\quad \beta_{n+1},\ \ldots,\ \lambda_{n+1},\quad \mu_{n+1},\quad \rho_{n+1},\quad \varphi_{n+1}$$

as the functions of

$$a_n,\quad \alpha_n,\quad b_n,\quad \beta_n,\quad c_n,\quad \gamma_n,\quad d_n,\quad \delta_n.$$

This determination shall be accomplished in such a way that in equalities (12) and (13) instead of (x, y) we replace (a_n, α_n), (b_n, β_n), (c_n, γ_n), (d_n, δ_n), after that, following eight equations are obtained

$$(14)\qquad (\alpha_n-\beta_n)a_{n+1}+(b_n-a_n)\alpha_{n+1}+\frac{J_1(a_n,\alpha_n)\lambda_{n+1}+J_2(a_n,\alpha_n)\mu_{n+1}}{(\delta_n-\gamma_n)(a_n-c_n)-(d_n-c_n)(\alpha_n-\gamma_n)}=$$
$$=a_n(\alpha_n-\beta_n)+\alpha_n(b_n-a_n),$$

$$(15)\qquad (\alpha_n-\gamma_n)a_{n+1}+(c_n-a_n)\alpha_{n+1}+\frac{J_1(a_n,\alpha_n)\rho_{n+1}+J_2(a_n,\alpha_n)\varphi_{n+1}}{(\delta_n-\beta_n)(a_n-b_n)-(d_n-b_n)(\alpha_n-\beta_n)}=$$
$$=a_n(\alpha_n-\gamma_n)+\alpha_n(c_n-a_n),$$

$$(16)\qquad (\alpha_n-\beta_n)b_{n+1}+(b_n-a_n)\beta_{n+1}+\frac{J_1(b_n,\beta_n)\lambda_{n+1}+J_2(b_n,\beta_n)\mu_{n+1}}{(\delta_n-\gamma_n)(b_n-c_n)-(d_n-c_n)(\beta_n-\gamma_n)}=$$
$$=b_n(\alpha_n-\beta_n)+\beta_n(b_n-a_n),$$

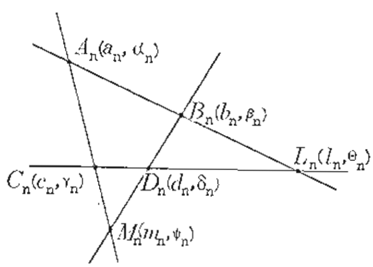
$$(17)\qquad (\beta_n-\delta_n)b_{n+1}+(d_n-b_n)\beta_{n+1}+\frac{J_1(b_n,\beta_n)\rho_{n+1}+J_2(b_n,\beta_n)\varphi_{n+1}}{(\gamma_n-\alpha_n)(b_n-a_n)-(c_n-a_n)(\beta_n-\alpha_n)}=$$
$$=b_n(\beta_n-\delta_n)+\beta_n(d_n-b_n),$$

$$(18)\qquad (\gamma_n-\delta_n)\,c_{n+1}+(d_n-c_n)\,\gamma_{n+1}+\frac{J_1(c_n,\gamma_n)\,\lambda_{n+1}+J_2(c_n,\gamma_n)\,\mu_{n+1}}{(\beta_n-\alpha_n)(c_n-a_n)-(b_n-a_n)(\gamma_n-\alpha_n)}=$$
$$=c_n(\gamma_n-\delta_n)+\gamma_n(d_n-c_n),$$

$$(19)\qquad (\alpha_n-\gamma_n)\,c_{n+1}+(c_n-a_n)\,\gamma_{n+1}+\frac{J_1(c_n,\gamma_n)\,\rho_{n+1}+J_2(c_n,\gamma_n)\,\varphi_{n+1}}{(\delta_n-\beta_n)(c_n-b_n)-(d_n-b_n)(\gamma_n-\beta_n)}=$$
$$=c_n(\alpha_n-\gamma_n)+\gamma_n(c_n-a_n),$$

$$(20)\qquad (\gamma_n-\delta_n)\,d_{n+1}+(d_n-c_n)\,\delta_{n+1}+\frac{J_1(d_n,\delta_n)\,\lambda_{n+1}+J_2(d_n,\delta_n)\,\mu_{n+1}}{(\beta_n-\alpha_n)(d_n-a_n)-(b_n-a_n)(\delta_n-\alpha_n)}=$$
$$=d_n(\gamma_n-\delta_n)+\delta_n(d_n-c_n),$$

$$(21)\qquad (\beta_n-\delta_n)\,d_{n+1}+(d_n-b_n)\,\delta_{n+1}+\frac{J_1(d_n,\delta_n)\,\rho_{n+1}+J_2(d_n,\delta_n)\,\varphi_{n+1}}{(\gamma_n-\alpha_n)(d_n-a_n)-(c_n-a_n)(\delta_n-\alpha_n)}=$$
$$=d_n(\beta_n-\delta_n)+\delta_n(d_n-b_n).$$



If we designate, further, on the basis of given schema, with L_n and M_n average points of straight lines A_nB_n and C_nD_n, and A_nC_n and B_nD_n respectively, coordinates of these points are given by formulae

$$l_n=\frac{(d_n-c_n)\,[(\alpha_n-\gamma_n)(b_n-a_n)-a_n(\beta_n-\alpha_n)]+c_n(\delta_n-\gamma_n)(b_n-a_n)}{(b_n-a_n)(\delta_n-\gamma_n)-(d_n-c_n)(\beta_n-\alpha_n)},$$

$$\theta_n=\frac{(\beta_n-\alpha_n)\,[(c_n(\delta_n-\gamma_n)-\gamma_n(d_n-c_n)]+(\delta_n-\gamma_n)\,[\alpha_n(b_n-a_n)-a_n(\beta_n-\alpha_n)]}{(b_n-a_n)(\delta_n-\gamma_n)-(d_n-c_n)(\beta_n-\alpha_n)},$$

$$m_n=\frac{(d_n-b_n)\,[(\alpha_n-\beta_n)(c_n-a_n)-a_n(\gamma_n-\alpha_n)]+b_n(\delta_n-\beta_n)(c_n-a_n)}{(c_n-a_n)(\delta_n-\beta_n)-(d_n-b_n)(\gamma_n-\alpha_n)},$$

$$\psi_n=\frac{(\gamma_n-\alpha_n)\,[b_n(\delta_n-\beta_n)-\beta_n(d_n-b_n)]+(\delta_n-\beta_n)\,[\alpha_n(c_n-a_n)-a_n(\gamma_n-\alpha_n)]}{(c_n-a_n)(\delta_n-\beta_n)-(d_n-b_n)(\gamma_n-\alpha_n)}.$$

Substituting in basic formulae (12) and (13) values for (x, y) with calculated values (l_n, θ) and (m_n, ψ_n) we obtain similarly to equations (14)—(21), four equations more

$$(22)\qquad J_1(l_n,\theta_n)\,\lambda_{n+1}+J_2(l_n,\theta_n)\,\mu_{n+1}=0,$$

(because the point $L_n(\gamma_n, \theta)$ lays in the intersection of straight lines A_nB_n and C_nD_n).

$$\begin{aligned}
&[(\theta_n-\gamma_n)\,a_{n+1}+(c_n-l_n)\,\alpha_{n+1}+(\alpha_n-\theta_n)\,c_{n+1}+\\
&\quad+(l_n-a_n)\,\gamma_{n+1})]\cdot[(\delta_n-\beta_n)\,(l_n-b_n)-(d_n-b_n)\,(\theta_n-\beta_n)]+\\
&\quad+[(\theta_n-\delta_n)\,b_{n+1}+(d_n-l_n)\,\beta_{n+1}+(\beta_n-\theta_n)\,d_{n+1}+\\
&\quad+(l_n-b_n)\,\delta_{n+1}]\cdot[(\gamma_n-\alpha_n)\,(l_n-a_n)-(c_n-a_n)\,(\theta_n-\alpha_n)]+\\
&\quad+J_1\,(l_n,\,\theta_n)\,\rho_{n+1}+J_2\,(l_n,\,\theta_n)\,\varphi_{n+1}=[(\gamma_n-\alpha_n)\,(l_n-a_n)-\\
&\quad-(c_n-a_n)\,(\theta_n-\alpha_n)]\cdot[(d_n-b_n)\,(\theta_n-\beta_n)-(\delta_n-\beta_n)\,(l_n-b_n)_1]+\\
&\quad+[a_n\,(\theta_n-\gamma_n)+\alpha_n\,(c_n-l_n)+c_n\,(\alpha_n-\theta_n)+\\
&\quad+\gamma_n\,(l_n-a_n)]\cdot[(\delta_n-\beta_n)\,(l_n-b_n)-(d_n-b_n)\,(\theta_n-\beta_n)]+\\
&\quad+[b_n\,(\theta_n-\delta_n)+\beta_n\,(d_n-l_n)+d_n\,(\beta_n-\theta_n)+\delta_n\,(l_n-b_n)]\times\\
&\quad\times[(\gamma_n-\alpha_n)\,(l_n-a_n)-(c_n-a_n)\,(\theta_n-\alpha_n)],
\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&[(\psi_n-\beta_n)\,a_{n+1}+(b_n-m_n)\,\alpha_{n+1}+(\alpha_n-\psi_n)\,b_{n+1}+\\
&\quad+(m_n-a_n)\,\beta_{n+1}]\cdot[(\delta_n-\gamma_n)\,(m_n-c_n)-(d_n-c_n)\,(\psi_n-\gamma_n)]+\\
&\quad+[(\psi_n-\delta_n)\,c_{n+1}+(d_n-m_n)\,\gamma_{n+1}+(\gamma_n-\psi_n)\,d_{n+1}+\\
&\quad+(m_n-c_n)\,\delta_{n+1})]\cdot[(\beta_n-\alpha_n)\,(m_n-a_n)-(b_n-a_n)\,(\psi_n-\alpha_n)]+\\
&\quad+J_1\,(m_n,\,\psi_n)\,\lambda_{n+1}+J_2\,(m_n,\,\psi_n)\,\mu_{n+1}=\\
&\quad=[(\beta_n-\alpha_n)\,(m_n-a_n)-(b_n-a_n)\,(\psi_n-\alpha_n)]\cdot[(d_n-c_n)\,(\psi_n-\gamma_n)-\\
&\quad-(\delta_n-\gamma_n)\,(m_n-c_n)]+[a_n\,(\psi_n-\beta_n)+\alpha_n\,(b_n-m_n+b_n\,(\alpha_n-\psi_n)+\\
&\quad+\beta_n\,(m_n-a_n)]\cdot[(\delta_n-\gamma_n)\,(m_n-c_n)-(d_n-c_n)\,(\psi_n-\gamma_n)]+\\
&\quad+[c_n\,(\psi_n-\delta_n)+\gamma_n\,(d_n-m_n)+d_n\,(\gamma_n-\psi_n)+\\
&\quad+\delta_n\,(m_n-c_n]\cdot[(\beta_n-\alpha_n)\,(m_n-a_n)-(b_n-a_n)\,(\psi_n-\alpha_n)],
\end{aligned}\tag{24}$$

$$J_1\,(m_n,\,\psi_n)\,\rho_{n+1}+J_2\,(m_n,\,\psi_n)\,\varphi_{n+1}=0,\tag{25}$$

(because the point $M_n(m_n, \psi_n)$ lays in the intersection of straight lines A_nC_n and B_nD_n).

System of equations (14) — (25) represents a system of linear algebraic equations which aids the determination of series

$$a_{n+1},\ \alpha_{n+1},\ b_{n+1},\ \beta_{n+1},\ \ldots,\ \lambda_{n+1},\ \mu_{n+1},\ \rho_{n+1},\ \varphi_{n+1}$$

in function of series

$$a_n,\ \alpha_n,\ a_n,\ \beta_n,\ c_n,\ \gamma_n,\ d_n,\ \delta_n.$$

In relation to these series following assertion is valable:

If the series a_n, α_n, b_n, β_n, c_n, γ_n, d_n, δ_n, λ_n, μ_n, ρ_n, φ_n converges one after another towards a, α, b, β, c, γ, d, δ, λ, μ, ρ, φ and if $\lambda\varphi-\rho\mu\neq 0$, then the points $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$, $C(c, \gamma)$, $D(d, \delta)$ determine all solutions of system (8).

P r o o f.

Equalities (12) and (13) in limit case give

$$[(\beta-\alpha)(x-a)-(b-a)(y-\alpha)]\cdot[(\delta-\gamma)(x-c)-(d-c)(y-\gamma)]+$$
$$+\lambda J_1(x, y)+\mu J_2(x, y)=0,$$
$$[(\gamma-\alpha)(x-a)-(c-a)(y-\alpha)]\cdot[(\delta-\beta)(x-b)-(d-b)(y-\beta)]+$$
$$+\rho J_1(x, y)+\varphi J_2(x, y)=0.$$

On the basis of previous equalities taking into account the assumption that $\lambda\varphi-\rho\mu\neq 0$, it may be concluded that the system $J_1(x, y)=0$, $J_2(x, y)=0$ is equivalent to the system

$$[(\beta-\alpha)(x-a)-(b-a)(y-\alpha)]\cdot[(\delta-\gamma)(x-c)-(d-c)(y-\gamma)]=0,$$
$$[(\gamma-\alpha)(x-a)-(c-a)(y-\alpha)]\cdot[(\delta-\beta)(x-b)-(d-b)(y-\beta)]=0.$$

The proof is finished, as all solutions of that system are the points $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$, $C(c, \gamma)$, $D(d, \delta)$.

N o t e. On the basis of investigations with are not completely finished it may be assumed that the convergence is *quadratic*.

Application

Progressivity of application of exposed algorithm may be seen from the following: On the basis of given starting data

$$(a_0, \alpha_0),\ (b_0, \beta_0),\ (c_0, \gamma_0),\ (d_0, \delta_0)$$

by use of formula for l, θ, m, ψ, we first calculate the values (l_0, θ_0), (m_0, ψ_0). In this way a complete group of data is formed, necessary for calculation — on the basis of the system of linear algebraic equations (14)—(25) of values (a_1, α_1), (b_1, β_1), (c_1, γ_1), (d_1, δ_1), $\lambda_1, \mu_1, \rho_1, \varphi_1$ and they, after calculations by using formulae for l, θ, m, ψ of values (l_1, θ), (m_1, θ_1), represent first corrections of initial conditions. Further procedure continue in the same way, by calculating (a_2, α_2), (b_2, β_2), (c_2, γ_2), (d_2, δ_2), λ_2, μ_2, ρ_2, φ_2, until results of desired precisions are obtained.

This procedure will be illustrated by following example.

A system of equations is given

$$J_1(x, y)\equiv x^2-4xy+2y^2-x-2y=0,$$
$$J_2(x, y)\equiv 3x^2-14xy+2y^2-3x+8y=0,$$

its solutions are known

$$A(a; \alpha)=A(1; 3),\quad B(b; \beta)=B(5; 1),$$
$$C(c; \gamma)=C(0; 0),\quad D(d; \delta)=D(1; 0).$$

By the application of exposed algorithm it is necessary to determine solutions of the given system, under assumption that they are unkown, starting with following initial conditions

$$A_0(a_0; \alpha_0)=A_0(2; 4),\qquad B_0(b_0; \beta_0)=B_0(3; 2),$$
$$C_0(c_0; \gamma_0)=C_0(-1; -1),\qquad D_0(d_0; \delta_0)=D_0(0{,}5; -1).$$

unknown \ i-th step	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	1,206949	0,875619	1,005097	1,000024	1,000000	1,000000	0,999999	1,000000
α_i	4	3,070373	3,071830	3,000608	2,999955	3,000000	3,000000	3, 00000	3,000000
b_i	3	3,056078	5,030799	5,037009	4,999879	5,000013	5,000012	5,000001	5,000001
β_i	2	1,337529	1,105335	1,010320	0,999981	1,000002	1,000003	1,000001	1,000001
c_i	−1	−0,375857	−0,021557	0,007307	0,000019	−0,000000	0,000000	−0,000000	0,000000
γ_i	−1	−0,122115	0,097986	0,002978	0,000009	−0,000000	−0,000000	−0,000000	−0,000000
d_i	0,5	0,964449	0,993457	0,999251	0,999987	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
δ_i	−1	−0,033672	0,029587	0,001278	0,000000	0,000000	−0,000000	0,000000	−0,000000
λ_i	—	−2,048944	−3,676849	−2,994956	−2,999973	−3,000009	−3,000008	−3,000003	−3,000001
μ_i	—	0,741944	1,192996	0,996661	0,999979	1,000003	1,000002	1,000001	1,000000
ρ_i	—	−1,332192	−2,149933	−1,508434	−1,500044	−1,500004	−1,500004	−1,000001	−1,500001
φ_i	—	−0,033785	−0,328192	−0,505963	−0,499956	−0,500001	−0,500002	−0,500001	−0,500001

Results of calculations obtained on digital computer CII 10070 are given in following table.

As may be seen from the data indicated in the table using these iterative approximations, solutions with precision on fifth digit are obtained, with total working time of CII 10070 computer of 1,79 min.

The same example was solved with other initial conditions

$$A_0(a_0;\alpha_0)=A_0(0;\ 12),\qquad B_0(b_0,\beta_0)=B_0(3;\ 10)$$

$$C_0(c_0;\gamma_0)=C_0(-4;\ -2),\qquad D_0(d_0;\delta_0)=D_0(0{,}1;\ -3)$$

and the same solutions were obtained after twelve iterations, total computer working time being 1,92 min.

Results of these calculations were obtained in the Laboratory for Applied Mathematics of the MTI, Beograd. We thank S. Stamatović and M. Jovanović for complaisance and help they extended to us.

REFERENCES

[1] Prešić S., *Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262., pp. 862—863, (avril, 1966.)

[2] Prešić S., *Jedan interativni postupak za faktorizaciju polinoma*, Beograd, Matematički vesnik, 5 (20) Sv. 2, 1968.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 14 (28), 1972. pp. 133–136

EIN SATZ ÜBER REPRODUKTIVE LÖSUNGEN

Slaviša B. Prešić

(Eingegangen am 15 April 1972)

S. Rudeanu hat in der Arbeit [4] das Problem der Bestimmung aller reproduktiven Lösungen gegebener Booleschen Gleichung betrachtet.

In dieser Arbeit wird, allgemeiner, das ähnliche Problem fur irgendeine Relationsgleichung

$$r(x)=1 \tag{1}$$

betrachtet werden. Dazu ist r eine Relation der gegebenen Menge S, d. h. eine Abbildung von S in die Menge $\{0, 1\}$ (0, 1 sind zwei verschiedene Objekte — „Wahrheitswerte").

Es sei

$$x=F(t) \qquad (t \text{ ist Parameter, } t\in S)$$

eine *allgemeine Lösung* von (1). Das heißt:

$$(\forall\, t\in S)\ \big(r(F(t))=1\big), \qquad \text{und} \tag{i}$$

$$(\forall\, x\in S)\ \Big(r(x)=1\ \Rightarrow\ (\exists\, t\in S)\ \big(x=F(t)\big)\Big) \tag{ii}$$

Die Konjunktion (i) $\wedge$ (ii) ist mit der folgenden Formel (Bedingung)

$$(\forall\, x\in S)\ \Big(r(x)=1\ \Leftrightarrow\ (\exists\, t\in S)\ \big(x=F(t)\big)\Big) \tag{2}$$

äquivalent.

B e w e i s. Die Implikation

$$(\forall\, x\in S)\ \Big(r(x)=1\ \Rightarrow\ (\exists\, t\in S)\ \big(x=F(t)\big)\Big),$$

die „ein Teil" von (2) ist, ist gleich (ii).

Weiter

$$(\forall\, x\in S)\ \Big((\exists\, t\in S)\,\big(x=F(t)\big)\ \Rightarrow\ r(x)=1\Big)$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\, x\in S)\ \Big(\neg\,(\exists\, t\in S)\ \big(x=F(t)\big)\vee r(x)=1\Big)$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall\, x\in S)\ \Big((\forall\, t\in S)\,\neg\,\big(x=F(t)\big)\vee r(x)=1\Big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)\, (\forall t \in S) \left(\neg\left(x = F(t)\right) \vee r(x) = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)\, (\forall t \in S)\, \left(x = F(t) \;\Rightarrow\; r(x) = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S) \left(r\left(F(t)\right) = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (i)$$

Also: (2) $\Leftrightarrow$ $(i) \wedge (ii)$.

Die allgemeine Lösung von (1) nennt man *reproduktiv*, wenn die Bedingung

$$r(x) = 1 \;\Rightarrow\; F(x) = x \tag{3}$$

gilt $\left([1], [3], [4]\right)$

Unser Hauptproblem lautet:

Alle reproduktiven Lösungen der Gleichung $r(x) = 1$ zu bestimmen, unter Voraussetzung daß

$$x = F(t) \qquad (t \text{ ist Parameter, } t \in S)$$

eine gegebene allgemeine Lösung ist.

Zuerst, beweisen wir das folgende Lemma.

L e m m a. *Die Formel*

$$x = F(t) \qquad (t \textit{ ist Parameter, } t \in S)$$

ist eine reproduktive Lösung der Gleichung $r(x) = 1$ *genau dann, wenn die Bedingungen*

$$(\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right) \tag{j}$$

$$(\forall x \in S)\, \left(r(x) = 0 \;\Rightarrow\; r\left(F(x)\right) = 1\right) \tag{jj}$$

gelten.

B e w e i s.

$x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1)

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\, r\left(F(t)\right) = 1 \wedge (\forall x \in S) \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; (\exists t \in S)\, \left(x = F(t)\right)\right)$$
$$\wedge\, (\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right)$$
$$\left(\text{nach } \;(i), (ii), (3)\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S)\, r\left(F(t)\right) = 1 \wedge (\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall t \in S) \left(r(t) \neq 1 \;\Rightarrow\; r\left(F(t)\right) = 1\right) \wedge (\forall t \in S) \left(r(t) = 1 \;\Rightarrow\; r\left(F(t)\right) = 1\right)$$
$$\wedge\, (\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right)$$
$$\left(\text{Tautologie } q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q); \quad p \text{ ist } r(x) = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S) \left(r(x) = 0 \;\Rightarrow\; r\left(F(x)\right) = 1\right) \wedge (\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right)$$

$$\left(\text{denn } (\forall x \in S)\, \left(r(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = F(x)\right) \;\Rightarrow\; (\forall t \in S)\, \left(r(t) = 1 \;\Rightarrow\; r\left(F(t)\right) = 1\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow (j) \wedge (jj)$$

Also: $x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1) $\Leftrightarrow$ $(j) \wedge (jj)$.

Es seien

$$+ : (S \cup \{0, 1\})^2 \to S, \quad \cdot : (S \cup \{0, 1\})^2 \to S \cup \{0, 1\}, \quad ' : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$$

beliebige Abbildungen (Verknüpfungen), die die Gesetze

(4) $\quad 0 + x = x, \quad x + 0 = x, \quad 0 \cdot x = 0, \; 1 \cdot x = x, \quad 0' = 1, \quad 1' = 0 \qquad (x \in S)$

erfüllen.

Weiter, sei R die Lösungsmenge von $r(x) = 1$, d. h.

$$x \in R \Leftrightarrow r(x) = 1$$

und $x = A(t)$ (Parameter $t \in S$) sei eine allgemeine Lösung von $r(x) = 1$.

Es gilt der folgende Satz.

Satz. *Die Formel*

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} r(x) \cdot x + r'(x) \cdot A(f(x))$$

mit dem Parameter $f: S \to S$ beschreibt alle Funktionen $F: S \to S$, für die

$$x = F(t) \qquad (t \textit{ ist Parameter, } t \in S)$$

eine reproduktive Lösung der Gleichung $r(x) = 1$ ist.

Beweis.

$x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von $r(x) = 1$

$\Leftrightarrow \; (\forall x \in R) \big(F(x) = x\big) \wedge (\forall x \in S \setminus R) \big(F(x) \in R\big)$

(Lemma)

$\Leftrightarrow \; (\forall x \in R) \big(F(x) = x\big) \wedge (\forall x \in S \setminus R) (\exists t \in S) \big(F(x) = A(t)\big)$

$\big(x = A(t)$ ist eine allgemeine Lösung von $r(x) = 1\big)$

$\Leftrightarrow \; (\forall x \in R) \big(F(x) = x\big) \; (\exists \bar{f} : S \setminus R \to S) \; (\forall x \in S \setminus R) \; \big(F(x) = A(\bar{f}(x)\big)$

(Auswahlaxiom, [2])

$\Leftrightarrow \; (\exists f : S \to S) \; (\forall x \in S) \; \Big(F(x) = r(x) \cdot x + r'(x) \cdot A\big(f(x)\big)\Big)$

(Die Gesetze (4). Ist $\bar{f}$ gegeben, dann f ist eine beliebige Extension von $\bar{f}$. Ist f gegeben, dann $\bar{f}$ ist die Restriktion von f).

Also:

$x = F(t)$ ist eine reproduktive Lösung von (1)

$\Leftrightarrow \; (\exists f : S \to S) \; (\forall x \in S) \; \Big(F(x) = r(x) \cdot x + r'(x) \cdot A\big(f(x)\big)\Big)$

Beispiel. Für Boolesche Gleichung

(5) $\qquad r(x_1, \ldots, x_n) = 1 \qquad \big(x_i \in \{0, 1\}\big)$

sind alle reproduktive Lösungen beispielweise durch Formeln

$$x_1 = x_1 r(x_1, \ldots, x_n) + r'(x_1, \ldots, x_n)\,[x_{10} r'(X_1, \ldots, X_n) + X_1 r(X_1, \ldots, X_n)]$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n r(x_1, \ldots, x_n) + (r' x_1, \ldots, x_n)\,[x_{n0} r'(X_1, \ldots, X_n) + X_n r(X_1, \ldots, X_n)]$$

($(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ ist eine Lösung von (5); $x_i : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ sind Parameter) bestimmt.

Hier werden Löwenheimsche Formeln

$$x_1 = x_{10} r'(t_1, \ldots, t_n) + x_1 r(t_1, \ldots, t_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n0} r'(t_1, \ldots, t_n) + x_n r(t_1, \ldots, t_n)$$

angewendet.

LITERATUR

[1] L. Löwenheim, *Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul*, Sitzungsber. Berl. Math. Gesellschaft, 7, 1908, 89—94.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Fasc. résultats, Paris, 1958.

[3] S. Prešić, *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2 = f$*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 8 (22), 1968, 143—148.

[4] S. Rudeanu, *On reproductive solutions of Boolean equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 10 (24), 1970, 71—78.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26, (40), 1979, pp, 249—254

A COMPLETENESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PROPOSITIONAL CALCULI

Slaviša B. Prešić

(Received Febryary 19, 1970)

Let $L=\{p_i \mid i \in I\}$ be *a* given set of so called *propositional letters* and $O=\{o_j \mid j \in J\}$ another set of *operation symbols*. Associated with each operation symbol o_j there is a non-negative integer $l(o_j)$ called *the length of* o_j. We denote by C the set of all operation symbols having the length zero. The elements of C we call *constant symbols*, and the other elements of O are called *connective symbols*. For the sets L and O we suppose:

$$L \cap O = \varnothing, \qquad L \cup C \neq \varnothing, \qquad O \setminus C \neq \varnothing .$$

Thus, the set L can be the empty set. From the elements of the sets L and O we define *formulae* in the usual way. Namely, the set $\mathcal{F}$ of all formulae is the smallest set (a subset of the set of all strings built up from the members of $L \cup O$) which satisfies the following conditions

(1) (i) $L \subseteq \mathcal{F}$

(ii) $C \subseteq \mathcal{F}$

(iii) *If* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ and $l(o_j)=n$, then $o_j \varphi_1 \cdots \varphi_n \in \mathcal{F}$

The signs $P_1, P_2, P_3, \ldots$ are used to denote arbitrary formulae (i.e. as variables for formulae). From these symbols and the elements of O *formula schemes* are built up. Namely, if in the above definition of formulae the part (i) is replaced by $\{P_1, P_2, \ldots\} \subseteq \mathcal{F}$, we obtain the definition of the set all formula schemes. Further, let Ax be a nonempty set of formula schemes, and R a set of certain rule-schemes of inference, each of the form

$$(2) \qquad \frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Psi} \qquad (n \geqslant 1)$$

where $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ are formula schemes.

By the sets Ax and R is defined, a so called *propositional calculus*. More precisely a propositional calculus may be defined as the ordered pair (Ax, R). Let

(3) $$\varphi(P_1, P_2, \ldots, P_k)$$

be any element of Ax, where all the elements of the set $\{P_1, P_2, \ldots\}$ occurring in (3) are among $P_1, P_2, \ldots, P_k$. If $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ are any formulae, then the string

(4) $$\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$$

is a formula as well. The formulae as (4), for which we also say that they are of the form (3), we call *axioms* (of the calculus (Ax, R). By Ax we denote the set of all axioms. According to the given definition of the sets of formulae and formula schemes the following statement is true:

(5) *In any axiom its propositional letters may by replaced by any formulae. In such a way from an axiom we again obtain an axiom.*

Let $\mathcal{P}$ i.e. (Ax, R) be a propositional calculus. By Th $(\mathcal{P})$ we denote the set of all its *theorems*, and by $\underset{\mathcal{P}}{\vdash} F$ we denote the fact that the formula F is a theorem (of $\mathcal{P}$).

Now we define *a model for* $\mathcal{P}$. It is a usual definition. Namely, let M be a nonempty set, and let 1 denote one of its elements. Further, with each o_j we associate an object $\bar{o}_j$ in the following way:

If $o_j \in C$, then $\bar{o}_j$ is a certain chosen element of M.

If $o_j \in O \setminus C$, and $l(o_j) = n$, then $\bar{o}_j$ is an n-ary operation of M.

By the set M and the operations[2] $\bar{o}_j$ an *algebra* M is determined. The set M is its *domain*. On certain conditions we say that an algebra M is a model for a propositional calculus. Namely, that is exactly in the case when:

(6) Each axiom f is valid in the algebra M, i.e. the equality $\bar{f} = 1$ is satisfied for all possible substitutions of the elements of M for the letters p_i (occurring in the formula f). By $\bar{f}$ we denote the string obtained from f by replacing: o_j by $\bar{o}_j$.

(7) The rule schemes of $\mathcal{P}$ are satisfied by M in the sense that validity is preserved by them; i.e. if (2) is any rule schema then the implication

$$\text{If } \bar{\Phi}_1 = 1, \ldots, \bar{\Phi}_n = 1, \text{ then } \bar{\Psi} = 1$$

is true for all $P_1, P_2, \ldots \in M$.

From the conditions (6), (7), it is immediate that each member of the set $Th(\mathcal{P})$, i.e. any theorem of $\mathcal{P}$, is also valid in the model M. It may happen that for a certain algebra M we have (*Completeness theorem*):

---

[1] Therefore the propositional letters may be called *variables*.

[2] If $l(o_j) = 0$, then $\bar{o}_j$ is called a operation of the length zero. The element 1 is a operation of such kind.

(8) *Any formula f of the propositional calculus $\mathcal{P}$ is a theorem if and only if f is valid in the algebra M.*

In such a case we say that the algebra M is an *adequate model* for $\mathcal{P}$.

In this paper we give a necessary and sufficient condition for $\mathcal{P}$ to have an edequate model.

In order to express this condition, we define a new formal theory $\mathcal{P}(=, 1)$ in the following way.

Denote by O_1 the set $O \cup \{1\}$ and let by definition 1 be C_0 (provided $C_0 \notin O$). By definition (1) we obtain the so called *terms* of $\mathcal{P}(=, 1)$.

The *formulae* of $\mathcal{P}(=, 1)$ are strings of the form $t_1 = t_2$, where t_1, t_2 are terms.

The *formula schemes* of $\mathcal{P}(=, 1)$ are, shortly, strings which can be obtained from the formulae of $\mathcal{P}(=, 1)$ by all posible replacements of elements of the set L by elements of the set $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$.

The *axiom schemes* of $\mathcal{P}(=, 1)$ are:

(9) all formula schemes of the form $f = 1$, where f is any axiom schema of $\mathcal{P}$ (provided that 1 is included as a member of C)

(10) all formula schemes of the form $t = t$.

The *rule schemes* of $\mathcal{P}(=, 1)$ are:

(11) $\dfrac{\varphi_1 = 1, \ldots, \varphi_n = 1}{\psi = 1}$, whenever $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ is a rule schema of $\mathcal{P}$.

(12) $\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$, $\dfrac{t_1 = t_2,\ t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$, $\dfrac{t_1 = t_1', \ldots, t_n = t_n'}{o_j t_1 \cdots t_n = o_j t_1' \cdots t_n'}$

where t_1, t_2, ... are any terms, o_j any n-ary operation symbol.

We also note that:

(13) In the case of the theory $\mathcal{P}(=, 1)$ it is supposed that P_1, P_2, ... may be replaced by any terms. In such a way, for example, from axiom-schemes of $\mathcal{P}(=, 1)$ we get the axioms of $\mathcal{P}(=, 1)$.

There is an interesting connection betveen the theories $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(=, 1)$:

(14) An algebra is a model for the calculus $\mathcal{P}$ if and only if M is a model[3] for the theory $\mathcal{P}(=, 1)$.

This immediately follows from the definitions of models for $\mathcal{P}(=, 1)$, and from (10), (12).

Further, we note that the theory $\mathcal{P}(=, 1)$ always has at least one adequate algebra. Namely, these are the so called *free algebras*. One of such algebras Φ can be described in the following way.

---

[3] As a matter of fact, its *normal* model, i.e. a model in which $=$ is interpreted as the equality,

Let T be the set of all terms. On the set T define the relation $\sim$ as follows:

(15) $$t_1 \sim t_2 \text{ if and only if } \underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} t_1 = t_2$$

i.e. $t_1 \sim t_2$ if and only if t_2 can be obtained from t_1 using the axioms of the forms (9), (10) and the rules (11), (12). The relation $\sim$ is an equivalence relation. This follows from the axiom of the form $t = t$, and the rules

$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}, \qquad \frac{t_1 = t_2,\ t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$$

The members of $T/\sim$ i.e. of the quotient set will be denoted by C_t, where $t \in T$. These classes are the only elements of the algebra Φ. Its operations $\bar{o}_j$ are defined as follows:

If $l(o_j) = 0$, then $\bar{o} \overset{\text{def}}{=} C_{oj}$. So $\bar{1} = C_1$.

If $l(o_j) = n$ (>0), then $\bar{o}_j$ is the n-ary

operation determined by

(16) $$\bar{o}_j (C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}) = C_{o_j t_1 \ldots t_n}$$

In the definition (16) the result, i.e. $\bar{o}_j (C_{t_1}, \ldots, C_{t_n})$ is defined by $t_1, \ldots, t_n$, i.e. by certain membars of the classes $C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}$ respectively. Logical correctness of this definition follows from the rule schema

$$\frac{t_1 = t_1', \ldots, t_n = t_n'}{o_j t_1 \cdots t_n = o_j t_1' \cdots t_n'}$$

The set $T/\sim$ and the operation $\bar{o}_j$ determine the algebra Φ.

The equality (16) can be generalized in the following way.

By

$$t(a_1, \ldots, a_n, o_{j_1}, \ldots, o_{jm})$$

denote a term, where $a_1, \ldots, a_n$ as well as $o_{j_1}, \ldots, o_{jm}$ are all elements of the set L i.e. of the set O_1, occurring in the term. Then by induction on m the following equality may easily be proved

(17) $$t(C_{a_1}, \ldots, C_{a_n}, \bar{o}_{j_1}, \ldots, \bar{o}_{jm}) = C_{t(a_1, \ldots, a_n, o_{j_1}, \ldots, o_{jm})}$$

We now give a proof that the algebra Φ is an adequate model of the theory $\mathcal{P}(=, 1)$:

The formula

$$t_1(a_1, \ldots, a_n, o_{j_1}, \ldots, o_{jm_1}) = t_2(b_1, \ldots b_{n_2}, o_{k_1}, o_{k_2}, \ldots o_{km_2})$$

$$(a_1, \ldots, b_1, \ldots \in L;\ o_{j_1}, o_{jk_1}, \ldots \in O_1)$$

is vallid in Φ.

if and only if the equality

$$t_1(C_{x_1}, \dots, C_{x_{n_1}}, \bar{o}_{j_1}, \dots, \bar{o}_{j_{m_1}}) = t_2(C_{y_1}, \dots, C_{y_{n_2}}, \bar{o}_{k_1}, \dots, \bar{o}_{k_{m_2}})$$

holds in Φ for all $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots y_{n_2} \in T$.

if and only if the equality

$$C_{t_1(x_1, \dots, x_{n_1}, o_{j_1}, \dots, o_{j_{m_1}})} = C_{t_2(y_1, \dots, y_{n_2}, o_{k_1}, \dots, o_{k_{m_2}})}$$

holds in Φ for all $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2} \in T$.

if and only if

$$t_1(x_1, \dots, x_{n_1}, o_{j_1}, \dots, o_{j_{m_1}}) \sim t_2(y_1, \dots, y_{n_2}, o_{k_1}, \dots, o_{k_{m_2}})$$

for all $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2} \in T$.

if and only if

$$\underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} t_1(x_1, \dots, x_{n_1}, o_{j_1}, \dots, o_{j_{m_1}}) = t_2(y_1, \dots, y_{n_2}, o_{k_1}, \dots, o_{k_{m_2}})$$

for all $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2} \in T$.

if and only if

$$\underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} t_1(a_1, \dots, a_{n_1}, o_{j_1}, \dots, o_{j_{m_1}}) = t_2(b_1, \dots, b_{n_2}, o_{k_1}, \dots, o_{k_{m_2}})$$

The last step in the proof is based on the fact that in any theorem of $\mathcal{P}(=, 1)$, say $\varphi(a_1, a_2, \dots)$, where $a_1, a_2, \dots \in L$, the propositional letters $a_1, a_2, \dots$ may be replaced by any terms (see (13)).

Now we proye our main result.

Theorem. *For a propositional calculus $\mathcal{P}$ there is an adequate algebra if and only if the theory $\mathcal{P}(=, 1)$ is not a creative extension of $\mathcal{P}$, i.e. for every formula f of $\mathcal{P}$ the equivalence*[4] *is true*

(18) $$\underset{\mathcal{P}}{\vdash} f \text{ if and only if } \underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} f = 1$$

---

[4] The implication

$$\text{If } \underset{\mathcal{P}}{\vdash} f, \text{ then } \underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} f = 1$$

is true. Therefore the equivalence (18) may be reduced to the following condition

There is no formula f of $\mathcal{P}$ such that

$$\underset{\mathcal{P}(=,1)}{\vdash} f = 1, \text{ but not } \underset{\mathcal{P}}{\vdash} f$$

Proof. First, suppose that $\mathcal{P}(=, 1)$ is a creative extension of $\mathcal{P}$. Then there is a formula f of $\mathcal{P}$ such that:

$$\underset{\mathcal{P}(=,\ 1)}{\vdash} f=1 \text{ and not } \underset{\mathcal{P}}{\vdash} f$$

Let us also suppose that the calculus $\mathcal{P}$ has an adequate algebra, say M. This algebra is a model of the theory $\mathcal{P}(=, 1)$ as well. Therefore, it follows:

$$f=1 \text{ is valid in } M$$

Hence, we infer that $\underset{\mathcal{P}}{\vdash} f$. But from $\underset{\mathcal{P}}{\vdash} f$ and not $\underset{\mathcal{P}}{\vdash} f$ we conclude that the implication

$\mathcal{P}$ has an adequate model

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}(=, 1)$ *is not a creative extension of* $\mathcal{P}$

is true.

Second, suppose that $\mathcal{P}(=, 1)$ is not a creative extension of. According to the given proof there is an algebra Φ being an adequate algebra of $\mathcal{P}(=1)$. But this algebra is adequate for $\mathcal{P}$ as well, which follows from the proof:

Let $f(a_1, \ldots, o_{j_1}, \ldots)$ be any formula of $\mathcal{P}$. Then:

$$f(a_1, \ldots, o_{j_1}, \ldots) \text{ is valid in } \Phi$$

if and only if the equality

$$f(C_{x_1}, \ldots, \bar{o}_{j_1}, \ldots) = C_1$$

holds in Φ for all $x_1, \ldots \in T$

if and only if the equality

$$C_{f(x_1, \ldots, o_{j_1}, \ldots)} = C_1$$

holds in Φ for all $x_1, \ldots \in T$

if and only if

$$\underset{\mathcal{P}(=,\ 1)}{\vdash} f(x_1, \ldots, o_{j_1}, \ldots) = 1$$

hold in Φ for all $x_1, \ldots \in T$

if and only if

$$\underset{\mathcal{P}(=.\ 1)}{\vdash} f(a, \ldots, o_{j_1}, \ldots) = 1$$

if and only if

$$\underset{\mathcal{P}}{\vdash} f(a_1, \ldots, o_{j_1}, \ldots)$$

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 19 (33), 1975, pp. 131—138

EQUATIONAL REFORMULATION OF FORMAL THEORIES

Slaviša B. Prešić

(Communicated March 28, 1975)

1. There are many important instances of formal theories (cf., for example, [4]), as propositional calculi, predicate calculi, formal arithmetics, axiomatic set theories and so on. Within the theory of universal algebras the concept of variety is of particular interest (cf. for example [2]). Every variety, with appropriate precision introduced, becomes a formal theory. Formal theories of this kind contain formulae of the form $t_1 = t_2$, where t_1 and t_2 are terms (constructed out of some primitive symbols, constants, individual variables and operation symbols; cf. [2]). Axioms are some formulae given in advance, as formulae of the form $t = t$, where t is any term. The rules of inference are (in agreement with elementary properties of equality):

$$\text{(1)} \qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \qquad \frac{t_1 = t_2,\ t_2 = t_3}{t_1 = t_3} \qquad \frac{t_1 = t_1',\ \ldots,\ t_n = t_n'}{\omega\, t_1 \ldots t_n = \omega\, t_1' \ldots t_n'}$$

(where t_i is any term and ω an operation symbol of length n).

A formal theory of this kind we shall call *equational formal theory*. One of our aims is to investigate the connection between equational and other formal theories.

2. Let $\mathcal{T}$ be a formal theory with axioms A_i ($i \in I$; I is a given set of indexes). By $\mathcal{T}(\sim)$ we denote the equational theory defined as follows:

1° The formulae of $\mathcal{T}$ play the role of individual variables of $\mathcal{T}(\sim)$; the symbol $\&$ is an operation symbol[1)] of length 2.

2° The axioms of $\mathcal{T}(\sim)$ are formulae of the form

(2) (a) $A_i \sim \top$ ($\top$ is an arbitrarily chosen axiom of $\mathcal{T}$; $i \in I$),

(b) $A \sim A$, $\& AB \sim \& BA$, $\&\& ABC \sim \& A \& BC$ and $\& A \top \sim A$ (A, B and C are terms of $\mathcal{T}(\sim)$).

[1)] The terms of $\mathcal{T}(\sim)$ satisfy the following definition: (i) formulae of $\mathcal{T}$ are terms of $\mathcal{T}(\sim)$; (ii) if A and B are terms, then $\& AB$ is a term; (iii) every term is obtained by a finite number of applications of (i) and (ii).

The formulae of $\mathcal{T}(\sim)$ are of the form $A \sim B$, where A and B are terms and $\sim$ and $\&$ are not among the symbols of $\mathcal{T}$.

(c) Let

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k}{\Phi}$$

be any rule on inference of $\mathcal{T}$; then the formula

$$\& \ldots \& \Phi_1 \ldots \Phi_k \sim \&\& \ldots \& \Phi_1 \ldots \Phi_k \Phi$$

is an axiom of $\mathcal{T}(\sim)$.

3° The rule of inference of $\mathcal{T}(\sim)$ are

$$\frac{A \sim B}{B \sim A}, \quad \frac{A \sim B,\ B \sim C}{A \sim C}, \quad \frac{A_1 \sim B_1,\ A_2 \sim B_2}{\& A_1 A_2 \sim \& B_1 B_2}$$

(A, $B, \ldots$ are terms of $\mathcal{G}(\sim)$).

Note. In the sequel we shall write $A \& B$, $A \& B \& C$ etc., instead of $\& AB$, $\& A \& BC$ etc., respectively. The axiom (b) prevents us from possible confusion. For example, in this case axiom (c) becomes: $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \sim \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \& \Phi$.

As we shall see soon, the symbol $\&$ is related to the metatheoretic *and* while the symbol $\sim$ is, so to say, a formalization of the relation that we call *equiconsequence*. In fact, we prove

Theorem 1. Let $P_1, \ldots, P_r$, $Q_1, \ldots, Q_s$ be formulae of $\mathcal{G}$; then

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} P_1 \& \ldots \& P_r \sim Q_1 \& \ldots \& Q_s \quad \text{iff} \quad P_1, \ldots, P_r \underset{\mathcal{T}}{\vdash} Q_1, \ldots, Q_s \text{ and}$$

$$Q_1, \ldots, Q_s \underset{\mathcal{T}}{\vdash} P_1, \ldots, P_r.$$

We shall prove two lemmata first.

Lemma 1. If $P_1, \ldots, P_r \underset{\mathcal{T}}{\vdash} Q$, then $\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q$ where P_i and Q are formulae of $\mathcal{T}$.

Proof. We use induction on the length n of the shortest proof of $P_1, \ldots, P_r \underset{\mathcal{T}}{\vdash} Q$.

Case $n=1$. Q is either P_i (for some $1 \leqslant i \leqslant r$) or A_j (for some $j \in I$). In both cases we have

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q$$

(for we have

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& P_i$$

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& \top, \quad \underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} A_j \sim \top).$$

Case $n>1$. The following subcases are possible:

(i) Q is P_i (for some $1 \leqslant i \leqslant r$);

(ii) Q is A_j (for some $j \in I$);

(iii) Q is a consequence of some preceding formulae by a rule

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k}{\Phi}$$

In both (i) and (ii) we proceed as in Case $n=1$. In (iii) by induction hypothesis we have

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& \Phi_1$$

$$\vdots$$

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& \Phi_k.$$

Therefrom we derive immediately

(3) $$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k$$

i.e.,

(4) $$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots P_r \& \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \& \Phi$$

[for $$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \sim \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \& \Phi]$$

From (3) and (4) we derive

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& \Phi$$

i.e.

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q \quad \text{(for } Q \text{ is } \Phi).$$

Lemma 2. If $P_1, \ldots, P_r \vdash_{\mathcal{T}} Q_1, \ldots, Q_s$, then

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q_1 \& \ldots \& Q_s.$$

This lemma is an immediate consequence of *Lemma* 1. Indeed, from $P_1, \ldots, P_r \vdash_{\mathcal{T}} Q_1, \ldots, Q_s$, by *Lemma* 1, it follows that

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q_1$$

$$\vdots$$

$$\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q_s$$

are theorems; hence, $\vdash_{\mathcal{T}(\sim)} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q_1 \& \ldots \& Q_s$.

Now, we shall prove *Theorem* 1.

The "if" part. Suppose that $P_1, \ldots, P_r \underset{\mathcal{T}}{\vdash} Q_1, \ldots, Q_s$ and $Q_1, \ldots, Q_s \underset{\mathcal{T}}{\vdash} P_1, \ldots, P_r$. Therefrom, by *Lemma* 2,

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash\!\!-} P_1 \& \ldots \& P_r \sim P_1 \& \ldots \& P_r \& Q_1 \& \ldots \& Q_s$$

and

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash\!\!-} Q_1 \& \ldots \& Q_s \sim Q_1 \& \ldots \& Q_s \& P_1 \& \ldots \& P_r$$

and hence

$$\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash\!\!-} P_1 \& \ldots \& P_r \sim Q_1 \& \ldots \& Q_s .$$

The „only if" part. Suppose that $\vdash P_1 \& \ldots \& P_r \sim Q_1 \& \ldots \& Q_s$ and let $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ be arbitrary formulae of $\mathcal{T}$. Let us associate the sequents

$$A_1, \ldots, A_p \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B_1, \ldots, B_q \text{ and } B_1, \ldots, B_q \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A_1, \ldots, A_p$$

to the formula

$$A_1 \& \ldots \& A_p \sim B_1 \& \ldots \& B_q$$

and let Ψ denote this association.

Applying the mapping Ψ to the axioms of $\mathcal{T}(\sim)$ we obtain proofs from hypotheses in $\mathcal{T}$. For example, such proofs from hypotheses are $A_i \underset{\mathcal{T}}{\vdash} \top$, $\top \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A_i$; $A, \top \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \underset{\mathcal{T}}{\vdash} \Phi_1, \ldots, \Phi_k, \Phi$ and so on.

Moreover, the mapping Ψ is in accordance with rules of $\mathcal{T}(\sim)$ — in fact, the rules of $\mathcal{T}(\sim)$ are translated into true statements about proofs from hypotheses in $\mathcal{T}$. For example, to the rule

$$\frac{A \sim B,\ B \sim C}{A \sim C}$$

there corresponds the statement

$$\text{If } A \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B,\quad B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A,\quad B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} C,\quad C \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B, \quad \text{then} \quad A \underset{\mathcal{T}}{\vdash} C,\quad C \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A.$$

In accordance with consideration, if we apply Ψ to the supposed theorem

$$P_1 \& \ldots \& P_r \sim Q_1 \& \ldots \& Q_s$$

we obtain proofs from hypotheses

$$P_1, \ldots, P_r \underset{\mathcal{T}}{\vdash} Q_1, \ldots, Q_s \quad \text{and} \quad Q_1, \ldots, Q_s \underset{\mathcal{T}}{\vdash} P_1, \ldots, P_r .$$

This completes the proof of the theorem.

According to *Theorem* 1, just proved, we can say that in a sense $\mathcal{T}(\sim)$ is a formalization of deduction relation of $\mathcal{T}$. In particular, by *Theorem* 1 it follows that

$$A \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B,\quad B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \quad \text{iff} \quad \underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash\!\!-} A \sim B.$$

3. By the next theorem a connection is established between the theorems of $\mathcal{T}$ and some theorems of $\mathcal{T}(\sim)$.

Lemma 3. Let A be any formula of $\mathcal{T}$; then

$$\underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \quad \text{iff} \quad \underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} A \sim \top$$

Proof. $\vdash A$ iff $A \vdash \top, \ \top \vdash A$ (by definition of $\vdash$)

iff $\vdash A \sim \top$ (by *Theorem* 1)

Hence, $\vdash A$ iff $\vdash A \sim \top$.

Let f denote a mapping of the set *For* $(\mathcal{T})$ (the set of formulae of $\mathcal{T}$) into the set *For* $(\mathcal{T}(\sim))$, defined by equality

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} A \sim \top.$$

According to *Lemma* 3, by the injective mapping f *the set of theorems of* $\mathcal{T}$ *is mapped into the set of theorems of* $\mathcal{T}(\sim)$. Moreover, the mapping "translates" the proofs of $\mathcal{T}$ into (incomplete, but completable) proofs of $\mathcal{T}(\sim)$. In fact:

(i) if A_i is an axiom of $\mathcal{T}$, then $f(A_i)$, i.e. $A_i \sim \top$ is a theorem of $\mathcal{T}$;

(ii) if

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k}{\Phi}$$

is a rule of $\mathcal{T}$, then in $\mathcal{T}(\sim)$ it is the case that[2)]

$$f(\Phi_1), \ldots, f(\Phi_k) \vdash f(\Phi)$$

i.e.

$$\Phi_1 \sim \top, \ldots, \Phi_k \sim \top \vdash \Phi \sim \top$$

Having in mind the properties of the map f (it is $1-1$, it translates theorems and proofs of $\mathcal{T}$ into theorems and proofs of $\mathcal{T}(\sim)$) we can say:

$\mathcal{T}$ *is isomorphically embedded in* $\mathcal{T}(\sim)$ *by the mapping* f.

In this way we conclude that the following theorem is valid.

Theorem 2. Any formal theory can be isomorphically embedded in an equational formal theory.

4. Let $\mathcal{T}$ be a formulation of the classical propositional calculus, say P_2 of [1]. The axioms (inessentially modified) are formulas of the form[3)]

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A), \ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)), \ (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

(A, B, C are propositional formulas),

[2)] Indeed, let $\Phi_1 \sim \top, \ldots, \Phi_k \sim \top$ be hypotheses. Using them we obtain $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \sim \top \& \ldots \& \top$, i.e. $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \sim \top$. But we have $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \sim \Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \& \Phi$ and hence $\Phi_1 \& \ldots \& \Phi_k \& \Phi \sim \top$. Therefore, $\top \& \Phi \sim \top$ and finally, $\Phi \sim \top$.

[3)] The primitive connectives are $\Rightarrow$ and $\neg$. The connectives $\wedge$, $\vee$ and $\Leftrightarrow$ are defined in terms of the primitive ones: for example, $A \vee B$ stand for $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, etc.

The only rule is modus ponens:

$$\frac{A,\ A\Rightarrow B}{B}.$$

We prove

Theorem 3. Let $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ be any formulas of P_2, then

$$\underset{P_2(\sim)}{\vdash\!\!-\!\!-} A_1 \& \ldots \& A_p \sim B_1 \& \ldots \& B_q \quad \textbf{iff} \quad \underset{P_2}{\vdash} A_1 \wedge \cdots \wedge A_p \Leftrightarrow B_1 \wedge \cdots \wedge B_q.$$

Proof. $\underset{P_2(\sim)}{\vdash\!\!-\!\!-} A_1 \& \ldots \& A_p \sim B_1 \& \ldots \& B_q$ **iff**

$$A_1, \ldots, A_p \underset{P_2}{\vdash} B_1, \ldots, B_q \quad \text{and} \quad B_1, \ldots, B_q \underset{P_2}{\vdash} A_1, \ldots, A_p$$

(by *Theorem* 1); but this is the case **iff**

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_p \underset{P_2}{\vdash} B_1 \wedge \cdots \wedge B_q \quad \text{and} \quad B_1 \wedge \cdots \wedge B_q \underset{P_2}{\vdash} A_1 \wedge \cdots \wedge A_p$$

(this is provable in P_2); again, this is the case **iff**

$$\underset{P_2}{\vdash} A_1 \wedge \cdots \wedge A_p \Rightarrow B_1 \wedge \cdots \wedge B_q \quad \text{and} \quad \underset{P_2}{\vdash} B_1 \wedge \cdots \wedge B_q \Rightarrow A_1 \wedge \cdots \wedge A_p$$

(by *deduction theorem*); by definition of $\Leftrightarrow$, this is the case **iff**

$$\underset{P_2}{\vdash} A_1 \wedge \cdots \wedge A_p \Leftrightarrow B_1 \wedge \cdots \wedge B_q.$$

Let us note that the preceding proof relies on the fact that in $\mathcal{T}$ viz. P_2 the following conditions are satisfied:

Condition 1. There is an operation in $\mathcal{T}$, in symbols $\wedge$, such that $A, B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \wedge B$ and $A \wedge B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A, B$ (A, B are formulas of $\mathcal{T}$).

Condition 2. There is an operation in $\mathcal{T}$, in symbols $\Rightarrow$, such that $A \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B$ iff $\vdash A \Rightarrow B$ (A, B are formulas of $\mathcal{T}$).

According to *Theorem* 3. to any theorem

$$A_1 \& \ldots \& A_p \sim B_1 \& \ldots \& B_q$$

of $P_2(\sim)$ there corresponds the theorem

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_p \Leftrightarrow B_1 \wedge \cdots \wedge B_q$$

of P_2. In other words, by substituting $\wedge$ and $\Leftrightarrow$ for & and $\sim$, respectively, the formulas of $P_2(\sim)$ are translated in to formulas of P_2, and, moreover, theorems are translated into theorems. Also, (this is proved easily), by this injective mapping the proofs of $P_2(\sim)$ are translated into (completable) proofs of P_2. On the other hand, the converse is also true in a sense; for example, to any theorem A of P_2 there corresponds (by *Lemma* 3) the theorem $A \sim \top$ of $P_2(\sim)$. Therefore, $P_2(\sim)$ is isomorphically embedded in P_2. The calculus $P_2(\sim)$ we shall also call an equational reformulation of P_2.

Remark. Let us note that the axioms of $P_2(\sim)$ can be transformed into axioms of Boolean algebra (cf. for example, [3], p. 5)

$$A \wedge \top \sim A \quad A \vee \neg \top \sim A$$

$$A \wedge \neg A \sim \neg \top, \quad A \vee \neg A \sim \top$$

$$(\mathcal{B}) \qquad A \wedge B \sim B \wedge A, \quad A \vee B \sim B \vee A$$

$$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

and, in addition[4])

$$(5) \qquad A \,\&\, B \sim A \wedge B$$

(A, B, C are any formulas of P_2; $\top$ is, say, $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$).

Proof. Using axioms and rules of $P_2(\sim)$, we prove easily ($\mathcal{B}$), (5), (6).

The formula (5) can be proved as follows. We have

$$A, B \underset{P_2}{\vdash} A \wedge B, \quad A \wedge B \underset{P_2}{\vdash} A, B$$

and, hence, by *Theorem* 1

$$\underset{P_2(\sim)}{\vdash\!\!-} A \,\&\, B \sim A \wedge B.$$

Furthermore, the proof of, say

$$\frac{A \sim B}{\neg A \sim \neg B}$$

is as follows. Suppose that $\underset{P_2(\sim)}{\vdash\!\!-} A \sim B$; then according to *Theorem* 3,

$$\underset{P_2}{\vdash} A \Leftrightarrow B.$$

Hence, using the well-known properties of P_2, we conclude that

$$\underset{P_2}{\vdash} \neg A \Leftrightarrow \neg B,$$

and hence, again by Theorem 3, we obtain $\underset{P_2(\sim)}{\vdash\!\!-} \neg A \Leftrightarrow \neg B$.

Let us assume now that ($\mathcal{B}$), (5), and (6) hold and let us prove the axioms and rules of $P_2(\sim)$. Using ($\mathcal{B}$), (5), and (6) we can prove various facts about Boolean algebra, such as

$$\neg \neg A \sim A, \quad \neg (A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B, \quad A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B \quad \text{etc.}$$

---

[4]) Besides the axioms given above, we assume a number of properties of equality ($\sim$ stands for $=$):

$$(6) \qquad A \sim A, \quad \frac{A \sim B}{B \sim A}, \quad \frac{A \sim B,\ B \sim C}{A \sim C} \quad \frac{A \sim B}{\neg A \sim \neg B} \quad \frac{A \approx B,\ C \sim D}{A \wedge C \sim B \wedge D} \quad \frac{A \sim B,\ C \sim D}{A \vee C \sim B \vee D}$$

$$\frac{A \sim B,\ C \sim D}{A \,\&\, C \sim B \,\&\, D}$$

Using the last formula, we easily prove formulas

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \sim \top, \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \sim \top,$$
$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \sim \top$$

i.e. a number of axioms of $P_2(\sim)$. These axioms are of the form (2) (a). The axioms of the form (2) (b) are proved easily, using (5). In a similar way we prove axioms of the form (3) (c), i.e. the formula $A \,\&\, (A \Rightarrow B) \sim A \,\&\, (A \Rightarrow B) \,\&\, B$.

Let $\mathcal{T}$ be a formal theory satisfying conditions 1. and 2. This means that the symbols $\wedge$, $\Rightarrow$ are either primitive in $\mathcal{T}$ or defined[5] such that we have 1. and 2. viz.

$$A, B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \wedge B \quad \text{and} \quad A \wedge B \underset{\mathcal{T}}{\vdash} A, B$$

$$A \underset{\mathcal{T}}{\vdash} B \quad \textbf{iff} \quad \vdash A \Rightarrow B$$

Then we have the following theorem which is proved almost in the same way as in the case of P_2.

Theorem 4.

1° $\underset{\mathcal{T}}{\vdash} A$ **iff** $\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} A \sim \top$

2° $\underset{\mathcal{T}}{\vdash} A \Leftrightarrow B$ **iff** $\underset{\mathcal{T}(\sim)}{\vdash} A \sim B.$

In other words, if the conditions 1. and 2. are satisfied, $\mathcal{T}(\sim)$ is an equational reformulation of $\mathcal{T}$.

Finally, let us note that there are various formal theories satisfying conditions 1. and 2. — for example, the classical propositional calculus, the intuitionistic propositional calculus and many others.

REFERENCES

[1] A. Church, *Introduction to mathematical logic*, tome 1, Princeton, 1956.

[2] P. Cohn, *Universal algebra*, Harper international student reprint, 1965.

[3] P. Halmos, *Lectures on Boolean algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[4] E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, Van Nostrand, Princeton, 1964.

[5] Then, for example, $A \wedge B$ stand for a formula constructed in some way out of subformulas of A and B.