DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN, MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE HAMBURG · M. BORN GÖTTINGEN · C. RUNGE† GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

GÖTTINGEN

BAND XIV

ELEMENTARMATHEMATIK I

VON

FELIX KLEIN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

FELIX KLEIN

ELEMENTARMATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

VIERTE AUFLAGE

ERSTER BAND

ARITHMETIK · ALGEBRA · ANALYSIS

AUSGEARBEITET VON

E. HELLINGER

FÜR DEN DRUCK FERTIG GEMACHT
UND MIT ZUSÄTZEN VERSEHEN VON

FR. SEYFARTH

NACHDRUCK
1968

MIT 125 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

Vorwort zur ersten Auflage.

Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „*über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*", speziell über „*die Organisation des mathematischen Unterrichts*" gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn *Schimmack* zusammen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen *Formen* der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den *Unterrichtsstoff selbst* schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer — oder auch dem reiferen Studenten — Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses nicht, wie etwa Weber-Wellstein tun, in Form einer systematisch geordneten Darstellung, sondern in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.

Auf das so bezeichnete Programm — das nachstehend nur erst für die Gebiete der *Arithmetik*, *Algebra* und *Analysis* durchgeführt wird — wurde schon in der Vorrede zu Klein-Schimmack (April 1907) hingewiesen; ich hatte damals gehofft, daß Herr *Schimmack* trotz mancher Hindernisse doch vielleicht die Zeit finden würde, die Bearbeitung meiner Vorträge für den Druck wieder übernehmen zu können. Aber ich habe ihn selbst sozusagen daran gehindert, indem ich seine Arbeitskraft für die uns gemeinsam interessierenden pädagogischen Fragen fortgesetzt nach anderen Seiten in Anspruch zu nehmen hatte. Jedenfalls zeigte sich bald, daß der Plan unausführbar war, falls anders die Arbeit in *kurzer* Zeit zu Ende geführt werden sollte, wie dies doch im Interesse einer tatsächlichen Einwirkung auf die heute im Vordergrunde stehenden Unterrichtsfragen erwünscht schien. Ich habe also wieder, wie in früheren Jahren, zu dem bequemeren Mittel der *Autographierung* meiner Vorträge gegriffen, zumal sich mein jetziger Assistent, Herr Dr. *Ernst Hellinger*, als eine hierfür ausgezeichnet qualifizierte Hilfskraft erwies. Man wolle dabei von der Arbeit, die Herr Dr. *Hellinger* zu erledigen hatte, nicht gering denken. Denn es ist auch so noch ein weiter Weg von der durch allerlei zufällige Umstände bedingten mündlichen Darlegung des Dozenten zu der schriftlichen, hinterher noch wesentlich abgeglichenen, lesbaren Darstellung. Nur daß die Genauigkeit der Ausführungen und die Gleichmäßigkeit der Auseinandersetzungen nicht so weit getrieben wird, als es nach unseren Gewohnheiten bei der Drucklegung unerläßlich erscheint.

Ich scheue etwas davor zurück, in bestimmte Aussicht zu stellen, daß nun noch weitere Fortsetzungen dieser Veröffentlichungen über den mathematischen Unterricht folgen sollen, jedenfalls für das Gebiet der *Geometrie;* — ich will vielmehr mit dem Wunsche schließen, daß sich die vorliegende Autographie als nützlich erweisen möge, indem sie manchen Lehrer an unseren höheren Schulen veranlaßt, über die zweckmäßige Darbietung des von ihm zu behandelnden Lehrstoffes in neuer Weise selbständig nachzudenken. *Nur eine solche Anregung will meine Schrift geben, keinen ausgeführten Lehrgang, dessen Festlegung ich vielmehr den an der Schule wirkenden Herren durchaus überlasse.* Es ist ein Mißverständnis, wenn man an einzelnen Stellen vorauszusetzen scheint, ich habe mich je in einem anderen Sinne betätigt. Insbesondere der Lehrplan der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (der sog. „Meraner" Lehrplan) ist nicht etwa von mir, sondern unter bloßer Mitwirkung meinerseits von hervorragenden Vertretern der Schulmathematik ausgearbeitet worden.

Was schließlich die Art der im folgenden eingehaltenen Darstellung betrifft, so genügt wohl, wenn ich hervorhebe, daß ich, wie bei früheren Gelegenheiten, auch hier bemüht war, überall geometrische Anschaulichkeit mit der durch die arithmetischen Formeln ermöglichten Präzision zu verbinden, und daß es mir besonderes Vergnügen gemacht hat, dem historischen Werdegang der Theorien nachzugehen, um von da aus die Besonderheiten der verschiedenartigen, im heutigen Unterricht unvermittelt nebeneinander herlaufenden Darstellungsweisen zu verstehen.

Göttingen, Ende Juni 1908.

Klein.

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage.

Ich habe die Vorrede zur ersten Ausgabe vorstehend wieder abgedruckt, weil sie über die Entstehung der ganzen Darstellung den klarsten Überblick gibt[1]). Die zweite, auch noch autographierte Ausgabe (1911) enthielt keine wesentlichen Änderungen, und die kleinen Zusätze, die ihr beigefügt wurden, konnten jetzt leicht in den Text eingearbeitet werden, worüber ein besonderer Nachweis überflüssig scheint. Auch bei der jetzigen Drucklegung ist der ursprüngliche Text mit den durch die Zeit seiner Entstehung bedingten Zufälligkeiten in der Hauptsache beibehalten worden[2]). Das ganze Gefüge der Darstellung hätte geändert werden müssen und die Homogenität verloren, wenn ich anders verfahren wäre. Aber in den sechzehn Jahren, die seit der ersten Veröffentlichung vergangen sind, ist die Wissenschaft natürlich nicht stehengeblieben, insbesondere aber haben in unserem Schulwesen die größten, bis jetzt noch keineswegs abgeschlossenen Veränderungen stattgefunden. Auf diese Verhältnisse beziehen sich die Zusätze, welche, nach wiederholter Rücksprache mit mir, Herr Studienrat Dr. *Seyfarth* (von der hiesigen Oberrealschule) abgefaßt hat. Herr *Seyfarth* hat auch in der Hauptsache die Drucklegung und die erforderliche stilistische Glättung des vorangehenden Textes, wie insbesondere die Wiedergabe der Abbildungen besorgt, so daß ich ihm zu aufrichtigem Danke verpflichtet bin. Übrigens sind ihm meine früheren Mitarbeiter, die Herren *Hellinger* und *Vermeil*, außerdem Herr *A. Walther*-Göttingen, beim Korrekturlesen durch mannigfache Vorschläge hilfreich zur Hand gegangen. Insbesondere bin ich Herrn *Vermeil* und Herrn Studienreferendar *C. Billig* für Anfertigung des Namen- und Sachregisters zu Dank verpflichtet. Die Verlagsbuchhandlung Julius Springer aber hat ihre Bereitwilligkeit, trotz aller aus den Zeitumständen folgenden Schwierigkeiten die Drucklegung mathematischer Werke ungehindert fortzusetzen, aufs neue glänzend bewährt.

Göttingen, Ostern 1924.

Klein.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die neue Auflage enthält gegenüber der vorigen nur geringfügige Änderungen, die sich auf Verbesserungen im einzelnen beschränken. In den am Ende des Buches stehenden Zusätzen ist viel gekürzt, einiges ergänzt, im ganzen jedoch der Text so abgeändert worden, daß der Leser von *Kleins* Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts und ihrer Weiterführung ein geschlossenes Bild erhält.

---

[1]) Mein dort erwähnter Mitarbeiter *R. Schimmack* starb 1912 im Alter von 31 Jahren, am Arbeitstische sitzend, plötzlich infolge eines Herzschlags.

[2]) Neu hinzugefügte Anmerkungen sind durch *eckige* Klammern kenntlich gemacht worden.

Seine hohe Bedeutung für den mathematischen Unterricht hat gerade der vorliegende erste Band der Elementarmathematik vom höheren Standpunkte seit seinem ersten Erscheinen vor 25 Jahren unverändert beibehalten. Wie hoch sein Wert für die Ausbildung von Mathematikern heute noch auch im Auslande eingeschätzt wird, mag man daraus ermessen, daß er erst vor kurzem ins Englische übertragen wurde. Eine spanische Übersetzung ist bereits 1927 erschienen.

Göttingen, Ostern 1933.

Fr. Seyfarth.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Teil: Arithmetik.

Zweiter Teil: Algebra.

Dritter Teil: Analysis.

Einleitung.

In den letzten Jahren[1] hat sich unter den Universitätslehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer ein weitgehendes Interesse an einer zweckmäßigen, allen Bedürfnissen gerecht werdenden *Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts* entwickelt. Diese Erscheinung ist erst recht neuen Datums; in einer langen Zeitperiode vorher trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, was der Schule nottat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen. Doch was ist die Folge einer solchen Praxis? Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.

Diese *doppelte Diskontinuität*, die gewiß weder der Schule noch der Universität jemals Nutzen gebracht hat, bemüht man sich neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen, der modernen Entwicklung der Wissenschaft und der allgemeinen Kultur angepaßten Ideen zu durchtränken sucht — wir werden noch vielfach darauf einzugehen haben —, andererseits aber durch geeignete Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht. Und da scheinen mir eines der wichtigsten Hilfsmittel solche *zusammenfassende Vorlesungen* zu sein, wie ich sie heute vor Ihnen beginne. Ich wende mich damit keinesfalls an den Anfänger, sondern setze voraus, daß Ihnen allen der Hauptinhalt der

[1] Es wird noch einmal darauf hingewiesen, daß der Text fast durchweg die ursprüngliche Fassung der 1908 autographierten Vorlesung wiedergibt und daß Bemerkungen, die sich auf spätere Jahre beziehen, in den Anmerkungen und im Zusatz berücksichtigt werden.]

wichtigsten mathematischen Disziplinen bereits bekannt ist. Ich werde vielfach von Problemen der Algebra, der Zahlentheorie, der Funktionentheorie usw. zu reden haben, ohne auf Einzelheiten eingehen zu können; Sie müssen diese Dinge also schon einigermaßen kennen, wenn Sie meinen Auseinandersetzungen folgen wollen. Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den *gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen* vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, sowie insbesondere ihre *Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik* zu betonen. Dadurch, so hoffe ich, wird es Ihnen erleichtert werden, sich diejenige Fähigkeit anzueignen, die ich doch als eigentliches Ziel Ihres akademischen Studiums bezeichnen möchte: *daß Sie dem großen Wissensstoff, der Ihnen hier zukommt, einst in reichem Maße lebendige Anregungen für Ihren eigenen Unterricht entnehmen können.*

Lassen Sie mich Ihnen nun einige Dokumente vorlegen, die, aus neuester Zeit stammend, das Interesse weiter Kreise an den Fragen der Lehrerausbildung bekunden und für uns wertvolles Material bieten. Da habe ich vor allem der Vorträge auf der letzten *Naturforscherversammlung in Dresden* am 16. September 1907 zu gedenken, der wir von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte aus „*Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften*" unterbreitet haben. Sie finden diese Vorschläge als letzten Abschnitt in dem *Gesamtbericht der Kommission*[1]), die seit 1904 den ganzen Komplex der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfragen behandelt und jetzt ihre Tätigkeit abgeschlossen hat; ich bitte Sie sehr, sowohl von diesen Vorschlägen, als auch von den anderen Teilen des genannten sehr interessanten Berichtes Kenntnis zu nehmen. — Kurz nach der Dresdener Versammlung fand eine ähnliche Debatte auf der *Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel* am 25. September statt, in welcher nun freilich die mathematisch-naturwissenschaftliche Reformbewegung nur mehr als ein Glied in der Kette der in philologischen Kreisen parallel laufenden Bewegungen zu Worte kam. Nach einem Referate von mir über unsere *mathematischen und naturwissenschaftlichen Reformbestrebungen* sprachen *P. Wendland* (Breslau) über die die *Altertumswissenschaften* betreffenden Fragen, *Al. Brandl* (Berlin) über *neuere Sprachen* und endlich *Ad. Harnack* (Berlin) über *Geschichte und Religion;* die vier Vorträge sind in einer Broschüre[2]) vereinigt erschienen, auf die ich Sie nachdrücklich hinweise. Ich halte das hiermit angebahnte gemeinsame Vorgehen unserer Wissenschaften

[1]) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, herausgegeben von A. Gutzmer. Leipzig und Berlin 1908.

[2]) *Universität und Schule.* Vorträge ... gehalten von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, Ad. Harnack. Leipzig 1907.

mit den Philologen für äußerst ersprießlich, da es freundliche Beziehungen und wechselseitiges Verstehen zwischen zwei einander sonst fremd, wenn nicht gar feindlich gegenüberstehenden Gruppen schafft. Ein solches gutes Verhältnis wollen wir stets zu fördern suchen, mag auch, wenn wir unter uns sind, gelegentlich einmal ein schärferes Wort über die Philologen fallen — wie das ja auch auf der Gegenseite wohl vorkommen soll. Bedenken Sie dabei stets über den Fachpartikularismus hinaus, daß gerade Sie dazu berufen sind, später an der Schule mit den Philologen zum Besten der Allgemeinheit zusammenzuwirken, und daß dazu notwendig gegenseitige Schätzung und gegenseitiges Verständnis gehören.

Neben diesen Zeugnissen von über die Grenzen unseres Faches hinausgreifenden Bestrebungen möchte ich Ihnen nun noch *einige Bücher* nennen, die sich in der gleichen Richtung insbesondere *auf mathematischem Gebiet* bewegen und die daher für unsere Vorlesung sehr wichtig sein werden. Ich habe zum ersten Male vor drei Jahren eine *Vorlesung mit ähnlichem Ziele* gehalten; mein damaliger Assistent, Herr *R. Schimmack*, hat den Gegenstand weiter durchgearbeitet, und kürzlich ist ein erster Teil jener Vorlesung[1]) im Druck erschienen. In diesem ist die Rede von den verschiedenen Arten der Schulen, einschließlich der Hochschulen, von dem allgemeinen Betriebe des mathematischen Unterrichts auf ihnen, von ihrem gegenseitigen Ineinandergreifen und dergleichen; ich werde im folgenden gelegentlich auf die dort niedergelegten Dinge verweisen, ohne sie zu wiederholen. Um so ausführlicher werde ich hier, gewissermaßen als Fortsetzung jener Auseinandersetzungen über die Organisation des mathematischen Unterrichts, den gesamten *mathematischen Stoff*, der für den Schulunterricht nur irgend in Betracht kommt, behandeln. Wenn ich mich dabei öfters auf den Unterrichtsbetrieb an der Schule beziehe, so liegen dem nicht nur unbestimmte Vorstellungen, wie die Sache etwa sein könnte, oder gar eigene, weit zurückliegende Schulerinnerungen zugrunde; vielmehr stehe ich ständig mit Herrn Schimmack in Verbindung, der jetzt am hiesigen Gymnasium wirkt und der mich über den gegenwärtigen, gegenüber früheren Jahren in der Tat wesentlich weiter entwickelten Stand des Unterrichts fortlaufend unterrichtet. In diesem Wintersemester werde ich „die drei großen A", das ist *Arithmetik, Algebra und Analysis*, behandeln, während die Geometrie einer Fortsetzung des Kollegs im nächsten Sommer vorbehalten bleibt. Ich bemerke hierzu, daß die auf höheren Schulen übliche Sprache jene drei Fächer unter dem einen Wort „*Arithmetik*" zusammenfaßt, wie wir denn überhaupt noch öfters Abweichungen des mathematischen Sprachgebrauches der Schulen von dem der Hoch-

[1]) *Klein, F.:* Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Bearbeitet von *R. Schimmack*. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. — Weiterhin zitiert als „Klein-Schimmack".

schulen finden werden. Nur lebendige Fühlungnahme, das sehen Sie an diesem kleinen Beispiele, kann da eine Verständigung herbeiführen!

An zweiter Stelle nenne ich Ihnen nun das Werk, das unter den Veröffentlichungen der letzten Jahre am meisten eine der meinen ähnliche Tendenz verfolgt, die dreibändige *„Enzyklopädie der Elementarmathematik"* von *H. Weber* und *J. Wellstein;* für dieses Semester kommt wesentlich der von *H. Weber* bearbeitete erste Band in Betracht: *„Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis"* [1]). Gewisse Unterschiede, die zwischen diesem Werke und dem Plane meiner Vorlesung obwalten, will ich sogleich näher bezeichnen. Bei Weber-Wellstein wird der gesamte Aufbau der Elementarmathematik systematisch und logisch entwickelt in der gereiften Sprache, die der fortgeschrittene Studierende aufnehmen kann; davon, wie diese Dinge im Schulunterricht wirklich vorkommen, ist nicht die Rede. Die *Darstellung auf der Schule* muß nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, *psychologisch, nicht systematisch* sein. Der Lehrer muß sozusagen ein wenig *Diplomat* sein, er muß auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen zu können, und das wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in *anschaulich faßbarer Form* darbietet. Erst auf den obersten Klassen ist auch eine abstraktere Darstellung möglich. Um ein Beispiel zu geben: das Kind kann es unmöglich verstehen, wenn man die Zahlen axiomatisch erklärt als Dinge ohne Bedeutung, mit denen man nach vereinbarten formalen Regeln operiert; vielmehr verbindet es mit den Zahlen stets durchaus *konkrete Vorstellungen;* sie sind nichts als Anzahlen von Nüssen, Äpfeln und ähnlichen guten Dingen, und nur in solcher greifbaren Form kann und wird sie ihm der Anfangsunterricht darbieten. Was aber hier selbstverständlich ist, sollte man — mutatis mutandis — auch sonst beherzigen: man sollte im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft halten mit allem, was den Menschen gemäß seinen sonstigen Interessen auf seiner jeweiligen Entwicklungsstufe bewegt und was nur irgend in Beziehung zur Mathematik sich bringen läßt. Das ist es ja, was die neueren Bestrebungen zur Hervorhebung der *angewandten Mathematik* auf der Universität vor allem auch bezwecken. Auf der Schule hatte man diese Forderung nie in so hohem Maße vernachlässigt wie auf der Universität. Gerade diese *„psychologischen Momente"* will ich in meiner Vorlesung mit besonderem Nachdruck stets zur Geltung zu bringen suchen.

Ein weiterer Gegensatz zwischen Weber-Wellstein und mir bezieht sich auf die *Abgrenzung des Inhalts der Schulmathematik:* Weber und Wellstein sind da *„konservativ"*, ich *„fortschrittlich"* gesinnt. Diese Dinge sind ausführlich im Klein-Schimmack behandelt. Wir, man nennt

---

[1]) 2. Auflage. Leipzig 1906. [4. von P. Epstein neubearbeitete Auflage 1922.] — Zitiert als „Weber-Wellstein I".

uns wohl die „*Reformer*", wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den *Funktionsbegriff* stellen, als denjenigen Begriff der Mathematik der letzten 200 Jahre, der überall, wo man mathematisches Denken braucht, eine zentrale Rolle spielt. Ihn wollen wir so früh als möglich im Unterricht herauszuarbeiten beginnen *unter steter Benutzung der graphischen Methode*, der Darstellung funktionaler Zusammenhänge im x-y-Systeme, die heute selbstverständlich bei jeder praktischen Verwendung der Mathematik benutzt wird. Um diese Neuerung zu ermöglichen, würden wir vieles aus dem herkömmlichen Unterrichtsstoff aufgeben, das an sich oft recht interessant sein mag, aber seiner allgemeinen Bedeutung nach im Zusammenhang mit der ganzen modernen Kultur weniger wesentlich erscheint. Vor allem wird *starke Ausbildung der Raumanschauung* stets eine Hauptsache bleiben müssen. Nach oben hin aber soll der Unterricht soweit in die *Anfänge der Infinitesimalrechnung* hineingehen, daß etwa der Naturwissenschaftler oder Versicherungsfachmann das mathematische Rüstzeug, das er auf alle Fälle braucht, bereits von der Schule mitbringt. Diesen verhältnismäßig neuen Ideen gegenüber hält Weber-Wellstein im wesentlichen an der alten Stoffbegrenzung fest; meine Absicht in dieser Vorlesung ist natürlich die, für die neue Auffassung einzutreten.

An dritter Stelle habe ich Ihnen noch ein sehr anregendes Buch des wie Weber und Wellstein in Straßburg wirkenden *Max Simon* zu nennen, das 1908 in zweiter Auflage erschienen ist: „*Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*"[1]). Simon befindet sich vielfach in Übereinstimmung mit unseren Tendenzen, es gibt aber auch viele Gegensätze, und da er eine ausgesprochen subjektive, temperamentvolle Persönlichkeit ist, kleidet er diese Gegensätze oft in sehr lebhafte Worte. Um ein Beispiel zu nennen: die Vorschläge der Unterrichtskommission des Naturforschertages verlangen schon auf Quinta eine Stunde geometrische Propädeutik, während man zur Zeit damit meist erst auf Quarta beginnt. Es ist nun eine seit langem erörterte Frage, welcher Vorschlag der bessere ist; auch die Ausführung auf der Schule hat öfters gewechselt. Aber Simon erklärt die Stellungnahme der Kommission, über die man also doch jedenfalls streiten kann, rundweg für „schlimmer als ein Verbrechen", ohne dieses Urteil auch nur im mindesten zu begründen. Solcher Stellen ließen sich noch manche finden. — Als Vorläufer des genannten Buches erwähne ich noch *Simons* „*Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis*"[2]).

Lassen Sie uns nach dieser kurzen Einleitung jetzt zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, den wir nach den drei bereits genannten Fächern gliedern wollen.

---

[1]) 2. Auflage. München 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. 1. Aufl. 1895.

[2]) Leipzig 1906. [Über neuere didaktische Literatur vgl. Zusatz 1 und 2 (S. 290—303).]

Erster Teil.

Arithmetik.

I. Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen.

Wir beginnen mit der *Grundlage aller Arithmetik*, dem *Rechnen mit positiven ganzen Zahlen.* Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, auf welche Weise man diese Dinge im Schulunterricht behandelt; dann wird die weitere Untersuchung fragen, was vom höheren Standpunkte aus betrachtet in ihnen alles enthalten ist.

1. Einführung der Zahlen auf der Schule.

Ich begnüge mich mit kurzen Andeutungen, und Sie werden sich an der Hand dieser wohl noch erinnern, wie Sie selbst einst rechnen lernten. Bei solchen Auseinandersetzungen kann natürlich meine Absicht keineswegs die sein, Sie in die Praxis des Unterrichts wirklich einzuführen, wie dies die Seminare an den höheren Schulen tun sollen; ich bringe vielmehr nur das Material heran, auf das wir unsere Kritik stützen wollen.

Die Aufgabe, die Eigenschaften der ganzen Zahlen und das Rechnen mit ihnen der Auffassung der Kinder nahezubringen und sie bis zur vollen Beherrschung des Stoffes zu führen, ist äußerst schwierig und erfordert die Arbeit mehrerer Jahre, von dem ersten Schuljahre an bis in die Sexta und Quinta des Gymnasiums hinein. Die *Art des Unterrichtsbetriebes*, wie er auf diesem Gebiete heute überall bei uns gehandhabt wird, kann ich vielleicht am besten durch die Stichworte *anschaulich* und *genetisch* kennzeichnen, d. h. das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten an aufgebaut; hierin liegt ein scharf ausgeprägter Gegensatz gegen den meist auf Hochschulen üblichen *logischen* und *systematischen* Unterrichtsbetrieb.

Den gesamten Unterrichtsstoff gliedert man etwa in folgender Weise, ohne daß diese Einteilung freilich genau und einheitlich feststeht: Das ganze *erste Jahr* wird durch das *Rechnen im Zahlenkreise von 1 bis 20* ausgefüllt, davon ungefähr das erste Halbjahr durch das Rechnen im Gebiet von 1 bis 10. Die Zahlen erscheinen zunächst als *Zahlbilder* *aus Punkten* oder als *Anzahlen* aller möglichen, den Kindern ohne weiteres geläufigen Gegenstände. Das Addieren und Multiplizieren wird alsdann anschauungsgemäß abgeleitet und eingeprägt. — Auf der *zweiten Stufe* wird der *Zahlenkreis von 1 bis 100* behandelt, und hier wird dann mit vollem Nachdruck die *Einführung der arabischen Ziffern mit Stellenwert* und das *dezimale System* geübt. Nebenbei sei bemerkt, daß die *Bezeichnung* „arabische Ziffern", wie so viele ähnliche in der Wissenschaft, historisch unrichtig ist: diese Schreibweise rührt in der Tat *von den Indern*, nicht von den Arabern her. Ein weiteres Hauptziel der zweiten Stufe ist auch die Kenntnis des *„Einmaleins"*. Was 5×7 oder 3×8 ist, muß man stets, sozusagen „im Schlafe", wissen; darum muß der Schüler bis zu diesem Grade sicheren Beherrschens das Einmaleins auswendig lernen, freilich erst, nachdem er es sich an realen Gegenständen anschaulich klargemacht hat. Dazu dient vorzugsweise die Ihnen allen wohlbekannte sogenannte *Rechenmaschine*, die man besser etwas weniger großartig *Rechenbrett* nennt; sie besteht aus 10 übereinander befestigten Drähten, auf denen je 10 Kugeln frei verschiebbar angebracht sind. Indem man diese Kugeln geeignet zusammenschiebt, liest man das Resultat der Multiplikation und auch seine dezimale Schreibweise sofort ab. — Die *dritte Stufe* endlich bringt das *Rechnen mit mehrstelligen Zahlen* auf Grund der bekannten einfachen Regeln, deren Allgemeingültigkeit dem Schüler einleuchtet oder doch einleuchten sollte. Freilich genügt diese Evidenz häufig wohl noch nicht, um dem Knaben die Regeln völlig zu eigen zu machen; recht oft wird ihr wohl noch mit dem bekannten autoritativen Mittel Nachdruck gegeben werden: „So ist es, und weißt Du das nicht, dann geht es Dir schlecht!"

Noch eine Seite dieses ganzen Unterrichts will ich hier hervorheben, die im Hochschulunterricht gerade meist vernachlässigt zu werden pflegt. Es werden nämlich von vornherein die *Anwendungen des Rechnens im praktischen Leben* aufs stärkste betont. Die Zahlen werden von Anfang an der Wirklichkeit entnommenen Beispielen vorgeführt, gar bald rechnet der Schüler mit *Münzen, Maßen, Gewichten*, und die im täglichen Leben so wichtige Frage *„was kostet das?"*, bildet den Angelpunkt eines großen Teiles des Unterrichtsstoffs. Diese Art und Weise steigert sich denn bald zu den sogenannten *eingekleideten Aufgaben*, bei denen zum Ansatz der Rechnung bereits eine selbständige Überlegung nötig ist; sie führt zu den Aufgaben der *Regeldetri*, der *Mischungsrechnung* usw. Zu den Worten *anschaulich* und *genetisch*, mit denen wir vorhin diesen Unterricht kennzeichneten, können wir als drittes charakteristisches Schlagwort mithin die *„Anwendungen"* stellen.

Sollen wir das *Ziel des Rechenunterrichtes* zum Schluß noch in kurzen Worten zusammenfassen, so würden wir sagen: *er erstrebt eine* *klare Sicherheit in der Handhabung der Rechenregeln auf Grund paralleler Entwicklung der verschiedenen in Betracht kommenden geistigen Qualitäten, ohne daß etwa dabei die logischen Zusammenhänge als solche besonders bloßgelegt werden.*

Ich mache Sie hier nebenbei gern auf einen Gegensatz aufmerksam, der auf der Schule häufig eine nicht zweckdienliche Rolle spielt, nämlich den *Gegensatz zwischen seminaristisch*[1]) *und akademisch gebildeten Lehrern.* In oder nach Quinta tritt im Rechenunterricht an die Stelle des seminaristisch vorgebildeten Lehrers der Akademiker, und infolgedessen macht sich häufig eine *bedauerliche Diskontinuität* geltend. Die armen Jungen müssen plötzlich vielfach mit ganz neuen Ausdrücken umgehen und die bisher gelernten sind nun streng verpönt. Ein kleines Beispiel sind die verschiedenen Multiplikationszeichen, das $\times$, das der Elementarlehrer, der Punkt, den der Akademiker mit Vorliebe gebraucht. Dieser Gegensatz ist nur dadurch zu überbrücken, daß die Akademiker sich mehr um den seminaristischen Kollegen kümmern und eine Verständigung mit ihm suchen. Das wird Ihnen leichter gelingen, wenn Sie bedenken, welche Achtung man vor den *Leistungen des Volksschullehrerstandes* haben muß. Stellen Sie sich nur vor, eine wie große *methodische Durchbildung* dazu gehört, um immer wieder Hunderttausenden dummer, durchaus unvorgebildeter Kinder die Lehren des Rechnens beizubringen! Versuchen Sie das mit Ihrer akademischen Bildung, Sie werden keine großen Erfolge erzielen!

Verfolgen wir nach dieser Abschweifung den Unterrichtsstoff weiter, so haben wir festzustellen, daß von Quarta an und besonders in der Tertia das Rechnen sich in das *vornehmere Gewand der Mathematik* zu kleiden beginnt, wofür zunächst der *Übergang zur Buchstabenrechnung* charakteristisch ist. Man bezeichnet mit a, b, c oder auch x, y, z irgendwelche, zunächst immer nur positive ganze Zahlen und vollzieht nun die Regeln und Operationen des Rechnens an diesen *durch Buchstaben symbolisierten Zahlen*, womit man vom konkreten anschaulichen Inhalt der Zahlen abgeht. Hierin ist ein so *großer Schritt der Abstraktion* getan, daß man wohl behaupten kann, *die eigentliche Mathematik setze mit dem Buchstabenrechnen ein.* Freilich darf sich dieser Übergang an der Schule durchaus nicht plötzlich vollziehen, sondern der Schüler muß allmählich an so starkes Abstrahieren gewöhnt werden.

Für diesen Unterricht erscheint es nun unbedingt nötig, daß der Lehrer die *logischen Gesetze und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der ganzen Zahlen* selbst genau kennt, wenn er sie natürlich auch dem Schüler keineswegs unmittelbar darbieten kann. Beschäftigen wir uns demgemäß weiterhin etwas näher mit ihnen.

---

[1]) Das bezieht sich auf die „Seminare" zur Ausbildung von Volksschullehrern, die mit den oben erwähnten „Seminaren an höheren Schulen" nicht das mindeste zu tun haben.

2. Die fundamentalen Gesetze des Rechnens.

Natürlich hat man lange richtig addiert und multipliziert, ohne sich über die Grundgesetze dieser Operationen Rechenschaft zu geben. Erst in den *zwanziger und dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts* haben vor allem *englische und französische Mathematiker* die Fundamentaleigenschaften jener Operationen herausgearbeitet, worüber ich nähere historische Notizen jedoch nicht mitteilen will; wollen Sie mehr darüber erfahren, so empfehle ich Ihnen, wie ich es noch oft werde tun können, die große *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*[1]), sowie die zum Teil den Charakter einer zweiten vervollständigten Auflage tragende französische Bearbeitung: *Encyclopédie des sciences mathematiques pures et appliquées*[2]). Wenn überhaupt ein mathematisches Buch, so sollte diese Enzyklopädie auf jeder Schulbibliothek vorhanden sein, weil der mathematische Lehrer durch sie in den Stand gesetzt wird, seine Arbeiten nach jeder ihn möglicherweise interessierenden Richtung hin vorzutreiben. Für uns kommt an dieser Stelle in Betracht der erste Artikel des ersten Bandes[3]) *H. Schubert: „Grundlagen der Arithmetik"*, dessen französische, sehr vervollständigte Bearbeitung von *Jules Tannery* und *Jules Molk* herrührt.

Ich will Ihnen nun, um zu unserm Thema zurückzukehren, die *fünf Grundgesetze* wirklich aufzählen, auf die sich die *Addition* zurückführen läßt:

1. *$a + b$ ist stets wieder eine Zahl, d. h. die Addition ist unbeschränkt ausführbar* (im Gegensatz zur Subtraktion, die es im Bereiche der positiven Zahlen nicht ist).

2. *$a + b$ ist eindeutig bestimmt.*

3. *Es gilt das Gesetz der Assoziativität:*
$$(a + b) + c = a + (b + c)\,,$$
so daß man die Klammern auch überhaupt fortlassen kann.

4. *Es gilt das Gesetz der Kommutativität:*
$$a + b = b + a\,.$$

5. *Es gilt das Gesetz der Monotonie:*
$$\text{aus } b > c \text{ folgt } a + b > a + c\,.$$

Diese Eigenschaften sind sämtlich ohne weiteres einleuchtend, wenn man den unmittelbar der Anschauung entnommenen Anzahlbegriff

[1]) Leipzig (B. G. Teubner) von 1898 an; Bd. I ist vollständig erschienen, Bd. II—VI gehen dem Abschluß entgegen.

[[2]) Paris (Gauthier-Villars) und Leipzig (Teubner) von 1904 an; das Unternehmen hat leider nach dem Tode seines Redakteurs J. Molk (1914) abgebrochen werden müssen.]

[3]) *Arithmetik und Algebra*, redigiert von W. Fr. Meyer (1896—1904); in der französischen Ausgabe redigiert von J. Molk.

vor Augen hat; sie müssen aber formal herausgeschält werden, um die spätere Entwicklung logisch stützen zu können.

Was ferner das *Multiplizieren* anlangt, so gelten zunächst *fünf genau analoge Gesetze:*

1. *$a \cdot b$ ist stets eine Zahl.*
2. *$a \cdot b$ ist e i n d e u t i g bestimmt.*
3. *Assoziativität:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$.
4. *Kommutativität:* $a \cdot b = b \cdot a$.
5. *Monotonie: Aus $b > c$ folgt $a \cdot b > a \cdot c$.*

Einen *Zusammenhang mit der Addition* gibt endlich ein weiteres Gesetz:

6. *das Gesetz der Distributivität:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

Daß das gesamte elementare Rechnen sich lediglich auf diesen 11 Gesetzen aufbaut, macht man sich leicht klar. Es mag genügen, wenn ich das nur an einem einfachen Beispiele zeige, etwa an der Multiplikation von 7 mit 12. Man hat nach dem Distributivitätsgesetz:

$$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10 + 2) = 70 + 14\,,$$

und wenn wir 14 in $10 + 4$ zerlegen (die „Zehnerübertragung" ausführen), mit Hilfe des assoziativen Gesetzes der Addition:

$$= 70 + (10 + 4) = (70 + 10) + 4 = 80 + 4 = 84\,.$$

Sie erkennen in dieser Überlegung genau die einzelnen Schritte des gewöhnlichen dekadischen Ziffernrechnens wieder. Mögen Sie verwickeltere Beispiele sich selbst überlegen! Wir wollen hier nur zusammenfassend aussprechen, *daß das gewöhnliche Ziffernrechnen in fortwährender Anwendung jener 11 Grundgesetze unter steter Benutzung der für die Einer (im Einsundeins und Einmaleins) gedächtnismäßig eingeprägten Resultate besteht.*

Wo gelangen nun aber die *Monotoniesätze* zur Anwendung? Im gewöhnlichen formalen Rechnen kommen sie freilich nicht vor, wohl aber bei etwas andersartigen Aufgaben. Ich erinnere hier vorerst an das, was man bei dezimaler Schreibweise *abgekürzte Multiplikation und Division* nennt[1]). Das ist eine Sache von größter praktischer Wichtigkeit, die nur leider auf der Schule sowie unter den Studierenden lange noch nicht hinlänglich bekannt ist, obwohl sie gelegentlich schon auf Quinta besprochen wird. Nehmen Sie an, um wieder nur ein Beispiel zu geben, Sie hätten $567 \cdot 134$ auszurechnen, und es seien in beiden Zahlen die Einer, durch physikalische Messungen etwa, nur sehr ungenau bekannt. Da wird es unnötige Arbeit sein, das Produkt *genau* zu bestimmen,

[1]) Die Monotoniegesetze kommen später noch in der Theorie der Irrationalzahlen zur Geltung.]

da Sie einen genauen Wert doch nicht garantieren können; wohl aber wird es wichtig sein, die *Größenordnung* des Produktes zu kennen, d. h. zu wissen, zwischen welchen Zehnern oder Hunderten sein genauer Wert liegt. Diese Abschätzung liefert Ihnen nun das Monotoniegesetz in der Tat unmittelbar; denn aus ihm folgt, daß die gesuchte Zahl zwischen $560 \cdot 134$ und $570 \cdot 134$ oder zwischen $560 \cdot 130$ und $570 \cdot 140$ liegt. Die weitere Durchführung dieser Überlegungen überlasse ich wieder Ihnen selbst; jedenfalls sehen Sie, *daß die Monotoniegesetze bei dem „abgekürzten Rechnen" fortgesetzt zur Geltung kommen.*

Im *wirklichen Schulunterricht* wird natürlich, wie schon betont, von einer systematischen Darlegung aller dieser Grundgesetze nicht die Rede sein können. Erst wenn die Schüler das Zahlenrechnen anschaulich erfaßt haben und sicher beherrschen, wird der Lehrer bei Gelegenheit des Überganges zum Buchstabenrechnen wenigstens die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität, Distributivität aus zahlreichen evidenten Zahlenbeispielen herausarbeiten und von diesen abgesondert aussprechen können.

3. Die logischen Grundlagen des Rechnens mit ganzen Zahlen.

Während der Schulunterricht zu schwierigeren Fragen natürlich noch viel weniger wird aufsteigen können, setzt die Fragestellung der *heutigen mathematischen Forschung* hier erst eigentlich ein: *Wie rechtfertigt man denn die angegebenen Grundgesetze, wie erklärt man den Zahlbegriff überhaupt?* Hierüber will ich Ihnen eine Orientierung zu geben suchen, getreu der Absicht dieser Vorlesung, die Dinge des Schulunterrichts durch Betrachtung von einem höheren Standpunkte aus in neue Beleuchtung zu setzen. Und ich tue dies um so lieber, als gerade diese modernen Gedanken auf Sie während Ihres akademischen Studiums ohnehin von allen Seiten eindringen, freilich ohne daß Ihnen über ihren psychologischen Wert stets auch das Nötige gesagt wird.

Was zunächst den *Zahlbegriff selbst* angeht, so ist seine Wurzel äußerst schwer aufzudecken. Am glücklichsten fühlt man sich vielleicht noch, wenn man sich entschließt, von diesen allerschwierigsten Dingen ganz die Hand zu lassen. Für nähere Angaben über diese von den Philosophen stets sehr lebhaft erörterten Fragen verweise ich wieder auf den bereits genannten Artikel der französischen Enzyklopädie und beschränke mich auf einige ganz kurze Bemerkungen. Eine sehr verbreitete Auffassung ist die, daß der Zahlbegriff eng mit dem *Zeitbegriff*, dem *zeitlichen Nacheinander* zusammenhängt; unter den Philosophen sei *Kant*, unter den Mathematikern *Hamilton* als ihr Vertreter genannt. Andere wieder meinen, daß die Zahl mehr mit der *Raumanschauung* zu tun habe, sie führen den Zahlbegriff auf die *gleichzeitige Anschauung verschiedener nebeneinander befindlicher Gegenstände* zurück. Eine dritte Richtung endlich sieht in den Zahlenvorstellungen die Äußerungen einer *besonderen Fähigkeit des Geistes,* die unabhängig neben oder gar über der Anschauung von Raum und Zeit steht. Ich glaube, daß diese Auffassung gut gekennzeichnet wird, wenn man mit *Minkowski* in der Anzeige seines Buches über „diophantische Approximationen" auf die Zahlen das Faustzitat anwendet:

„Göttinnen thronen hehr in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit." —

Während bei diesem Problem vorwiegend *Fragen der Erkenntnistheorie und Psychologie* in Betracht kommen, handelt es sich bei dem weiteren der *Begründung unserer 11 Gesetze,* wenigstens bei den neueren Untersuchungen über ihre Verträglichkeit, mehr um *Fragen der Logik.* Wir wollen hier 4 Auffassungen scheiden:

1. Für die erste, als deren Repräsentanten ich etwa Kant nennen will, sind die Rechenregeln unmittelbare notwendige Ergebnisse der Anschauung, wobei dieses Wort im weitesten Sinne als „innere Anschauung" oder Intuition aufzufassen ist; keineswegs wird hierunter verstanden, daß die Mathematik durchweg sich auf die experimentell kontrollierbaren Tatsachen der äußeren groben Erfahrung stützt. Um ein einfaches Beispiel zu nennen, wird das Kommutativitätsgesetz begründet durch Berufung auf die nebenstehende Abbildung, die aus zweimal je drei Punkten gebildet ist; man kann die sämtlichen Punkte offenbar auch zu drei Gruppen von je zweien zusammenfassen, d. h.: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Wendet man nun ein, daß bei einigermaßen großen Zahlen diese unmittelbare Anschauung zur Vermittlung der Erkenntnis nicht mehr ausreicht, so wird zur Ergänzung der *Satz von der vollständigen Induktion* hinzugenommen. *Gilt ein Satz für kleine Zahlen und folgt aus seiner Gültigkeit für eine Zahl n allemal auch die für n + 1, so ist er allgemein für jede Zahl richtig.* Dieser Satz, dessen Ursprung ich für echt intuitiv halte, hilft in der Tat gerade über die Schranke hinweg, an der die sinnliche Anschauung versagt. Das ist mehr oder minder auch der Standpunkt von *Poincaré* in seinen bekannten philosophischen Schriften.

Wenn wir uns die Bedeutung dieser Frage nach dem Grund der Gültigkeit unserer 11 Grundgesetze des Rechnens klar machen wollen, so müssen wir bedenken, daß mit der Arithmetik in letzter Linie auch die gesamte Mathematik auf ihnen beruht. Es ist also nicht zuviel behauptet, wenn man sagt, daß bei der auseinandergesetzten Auffassung der Rechenregeln *die Sicherheit des ganzen Lehrgebäudes der Mathematik schließlich auf der Anschauung, dieses Wort im allgemeinsten Sinne verstanden, beruht.*

2. An zweiter Stelle ist nun eine *Modifikation dieses ersten Standpunktes* zu nennen; sie besteht darin, daß man versucht, jene 11 Grundgesetze in eine *größere Zahl kleinerer Schritte* zu zerlegen, von denen

man dann nur die einfachsten direkt der Anschauung zu entnehmen braucht, während sich die andern aus ihnen logisch ohne weitere Hinzuziehung der Anschauung erschließen lassen. Während sonst die Möglichkeit rein logischen Operierens erst *nach* Aufstellung der 11 Gesetze beginnt, kann dieses hier schon früher, nach jenen einfacheren Sätzen, einsetzen: *Die Grenze zwischen Anschauung und Logik wird zugunsten der letzteren verschoben.* Bahnbrechend für dieses Vorgehen ist *Hermann Graßmann* in seinem *„Lehrbuch der Arithmetik"* [1]) *von 1861.* Als Beispiel daraus erwähne ich nur, daß das Gesetz der Kommutativität sich aus dem Assoziativitätsgesetz mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion ableiten läßt. — Neben dem Graßmannschen Buche ist wegen der Präzision seiner Darstellung insbesondere ein Buch des Italieners *Peano* zu nennen: *„Arithmetices principia nova methodo exposita"* [2]). Denken Sie aber nicht nach diesem Titel, daß das Buch lateinisch geschrieben ist! Es ist vielmehr im wesentlichen in einer eigenen symbolischen Sprache des Verfassers abgefaßt, die jeden einzelnen logischen Schritt des Beweises als solchen hervorheben und gesondert ausdrücken soll. Peano will so eine Garantie gewinnen, daß er auch wirklich nur die von ihm explizit aufgestellten Grundsätze verwendet und kein weiteres Material aus der Anschauung mehr heranbringt; er will die Gefahr vermeiden, die der Gebrauch der geläufigen Sprache durch das Hineinspielen zahlreicher unkontrollierbarer Ideenassoziationen und Erinnerungen an die Anschauung mit sich bringt. Nehmen Sie übrigens davon Kenntnis, daß Peano das *Haupt einer in Italien sehr ausgedehnten Schule* ist, die die Prämissen jedes einzelnen Zweiges der Mathematik ebenso in kleine Teile zerschneiden und mit dem Hilfsmittel einer „Begriffsschrift" exakt auf ihre logischen Zusammenhänge untersuchen will.

3. Wir kommen nun zu einer *modernen Weiterbildung dieser Ideen,* von der übrigens Peano bereits beeinflußt ist; ich meine diejenige Behandlung der Grundlagen der Zahlenlehre, die den *Mengenbegriff* voranstellt. Die allgemeine Idee der Menge — Sie werden sich von ihrem weiten Umfange eine Vorstellung machen können, wenn ich Ihnen sage, daß sowohl die Reihe aller ganzen Zahlen als auch der Inbegriff aller Punkte einer Strecke spezielle Beispiele von Mengen sind — diese allgemeine Idee hat bekanntlich zuerst *Georg Cantor* in Halle zum Gegenstande planmäßiger mathematischer Spekulation

---

[1]) Mit dem Zusatz „für höhere Lehranstalten" (Berlin 1861). — Die einschlägigen Kapitel sind abgedruckt in „H. Graßmanns gesammelten mathematischen und physikalischen Werken" (herausgegeben von F. Engel), Bd. II, 1, S. 295—349. Leipzig 1904.

[2]) Augustae Taurinorum. Torino 1889. [Eine umfassendere Darstellung findet man in Peanos „Formulaire de Mathématiques" (1892—99).]

gemacht, und die von ihm geschaffene *Mengenlehre* besitzt jetzt in hohem Maße das Interesse der jüngeren mathematischen Generation. Ich werde später noch versuchen, Ihnen einen ersten Einblick in die Mengenlehre zu verschaffen; für diesen Augenblick möge es genügen, wenn ich die Tendenz der auf ihrem Boden erwachsenen neuen Grundlegung der Zahlenlehre etwa mit folgenden wenigen Worten kennzeichne: *Es sollen die Eigenschaften der ganzen Zahlen und der auf sie bezüglichen Operationen auf allgemeine Eigenschaften der Mengen und der bei diesen statthabenden abstrakten Beziehungen zurückgeführt werden*, damit so eine eindringendere Begründung auf möglichst allgemeiner Grundlage entsteht. Als einer der Bahnbrecher auf diesem Wege sei hier noch *Richard Dedekind* genannt, der in seiner kleinen, aber inhaltsreichen Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*"[1]) eine solche Begründung der ganzen Zahlen versucht hat[2]). Wesentlich an diese Darstellung schließt *H. Weber* in dem 1. Abschnitt von Weber-Wellstein I (zitiert S. 4) an; freilich wird dabei die Ableitung recht abstrakt und bietet immer noch gewisse große Schwierigkeiten, so daß Weber in einem Anhange zum Bande III[3]) eine elementarere, nur endliche Mengen benutzende Darstellung gegeben hat, die auch in die späteren Auflagen von Band I eingearbeitet ist. Auf diese möchte ich jeden, den solche Fragen interessieren, ganz besonders hinweisen.

4. Zum Schluß endlich habe ich die *rein formale Theorie der Zahlen* anzuführen, die wohl bis auf *Leibniz* zurückgeht und neuerdings wieder besonders von *Hilbert* in den Vordergrund gebracht worden ist; für die Arithmetik kommt da sein Vortrag „*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*" auf dem Heidelberger Kongreß von 1904 in Betracht[4]). Die Grundauffassung ist dort diese: Hat man einmal die 11 Grundgesetze des Rechnens, so kann man mit den Buchstaben $a, b, c, \ldots$, die ja eigentlich beliebige ganze Zahlen vertreten, auch rechnen, ohne im Sinne zu behalten, daß sie eine reale Bedeutung als Zahlen haben, oder deutlicher gesagt: Es seien die $a, b, c, \ldots$ Dinge ohne jede Bedeutung oder Dinge, von deren Bedeutung wir nichts wissen; nur das sei ausgemacht, daß man sie gemäß jenen 11 Grundgesetzen miteinander verknüpfen darf, ohne daß jedoch diese Operationen eine uns bekannte reale Bedeutung zu haben brauchen; man kann dann offenbar genau ebenso mit den $a, b, c, \ldots$ operieren, wie man es gemeinhin mit den realen Zahlen tut. Dabei entsteht nur die Frage, *ob man bei diesem Operieren nicht auch einmal auf Widersprüche*

[1]) Braunschweig 1888; dritte Auflage 1911.

[[2]) Bahnbrechend auf diesem Gebiete waren außerdem *G. Frege*, *B. Russell* und *N. A. Whitehead*.]

[3]) Angewandte Elementarmathematik. Bearb. von H. Weber, J. Wellstein, R. H. Weber. Leipzig 1907.

[4]) Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg vom 8.—13. August 1904. Leipzig 1905.

kommen kann. Sagt man nun gewöhnlich, die Anschauung zeigt uns die Existenz von Zahlen, für welche die genannten Regeln gelten, in diesen Regeln können sich daher unmöglich Widersprüche finden, so ist jetzt, wo wir von der inhaltlichen Bedeutung der Zeichen absehen, eine solche Berufung auf Anschauliches nicht mehr zulässig. *Vielmehr entsteht das ganz neue Problem, logisch zu beweisen, daß man bei beliebigem Operieren mit unseren Zeichen auf Grund der 11 Grundgesetze niemals zu einem Widerspruche kommen kann, d. h. daß jene 11 Gesetze logisch verträglich, „kompatibel" sind.* Sagten wir also früher bei der Auseinandersetzung des ersten Standpunktes, daß die Sicherheit der Mathematik auf der Existenz anschaulicher Dinge beruht, für die ihre Sätze zutreffen, so wird der Anhänger dieses formalen Standpunktes die *Sicherheit der Mathematik darin begründet finden, daß ihre Grundgesetze rein formal und ohne Rücksicht auf ihren anschaulichen Inhalt betrachtet ein logisch widerspruchsfreies System bilden.*

Ich habe nun dieser Auseinandersetzung noch einige Bemerkungen anzufügen:

a) Hilbert hat in seinem Heidelberger Vortrag zwar alle diese Gesichtspunkte angedeutet, aber noch keineswegs vollständig durchgeführt. Nachher hat er sie nur noch in einer Vorlesung etwas weiter verfolgt, seitdem aber nicht mehr bearbeitet. Wir können also sagen, *daß hier erst ein Programm vorliegt*[1]).

b) Die Tendenz, die Anschauung vollkommen zurückzudrängen und wirklich *rein* logische Untersuchungen zu erhalten, scheint mir restlos doch nicht durchführbar. Ich meine, *man muß einen Rest, freilich ein Minimum, von Anschauung immer zurückbehalten;* muß man doch auch bei abstraktester Formulierung mit den Symbolen, mit denen man operiert, stets noch eine gewisse Anschauung verknüpfen, schon um sie nur immer wiedererkennen zu können, und sei es auch, daß man bloß an das Aussehen der Buchstaben denkt.

c) Nehmen wir aber selbst an, das gestellte Problem sei einwandfrei erledigt, die Widerspruchslosigkeit der 11 Grundgesetze rein logisch gezeigt. Dann greift doch noch eine Bemerkung Platz, auf die ich am meisten Wert legen möchte. Man muß sich nämlich *klar machen, daß durch Betrachtungen dieser Art die eigentliche Arithmetik, die Lehre von den wirklichen ganzen Zahlen, weder begründet wird noch überhaupt begründet werden kann.* Es ist unmöglich, auf rein logischem Wege zu zeigen, daß die Gesetze, deren Widerspruchslosigkeit da dargetan ist, wirklich für die uns anschaulich so wohlbekannten Zahlen gelten, daß die unbestimmten Dinge, von denen da die Rede ist, den realen Zahlen und die Verknüpfungen, die da vorkommen, den realen Prozessen

[1]) Diese Untersuchungen sind inzwischen von *Hilbert* und seinen Schülern in einer ganzen Reihe entscheidender Arbeiten weitergeführt worden.]

der Addition und Multiplikation in ihrer intuitiv klaren Bedeutung gleichgesetzt werden dürfen. Was geleistet ist, ist vielmehr, daß die gewaltige in ihrer Kompliziertheit unangreifbare *Aufgabe der Begründung der Arithmetik in zwei Teile gespalten* und daß der erste, das rein logische Problem der *Aufstellung unabhängiger Grundsätze oder Axiome und ihre Untersuchung auf Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit*, der Behandlung zugänglich gemacht wird. Der zweite, mehr erkenntnistheoretische Teil des Problems, der die Frage nach dem Grund der *Anwendbarkeit jener Grundsätze auf reale Verhältnisse* behandelt, ist damit noch nicht einmal in Angriff genommen, obwohl er natürlich zur wirklichen Durchführung einer Begründung der Arithmetik gleichfalls erledigt werden müßte. Dieser zweite Teil stellt ein *äußerst tiefliegendes Problem für sich* dar, dessen Schwierigkeiten auf allgemein erkenntnistheoretischem Boden liegen. Ich kann seine Stellung vielleicht am deutlichsten durch die etwas paradoxe Behauptung bezeichnen, daß jeder, der nur *rein logische* Untersuchungen als *reine* Mathematik gelten läßt, konsequenterweise diesen zweiten Teil des Problems der Begründung der Arithmetik und damit die Arithmetik selbst der angewandten Mathematik zurechnen müßte.

Ich muß das hier so deutlich ausführen, da gerade an dieser Stelle so häufig Mißverständnisse einsetzen, indem viele die Existenz des zweiten Problems einfach übersehen. Das ist bei Hilbert selbst keineswegs der Fall, und weder Zustimmungen noch Widersprüche, die von dieser Annahme ausgehen, können bestehen. *Thomae* in Jena hat auf die Leute, die sich ganz ausschließlich mit jenen abstrakt logischen Untersuchungen über Dinge, die nichts bedeuten, und Sätze, die nichts aussagen, beschäftigen und darüber nicht nur jenes zweite Problem, sondern oft auch die ganze weitere Mathematik vergessen, das hübsche Wort „*gedankenlose Denker*" geprägt. Natürlich kann sich dieses Scherzwort nicht auf Persönlichkeiten beziehen, die diese Untersuchungen neben so vielen andersartigen treiben.

Im Zusammenhang mit diesem kurzen Überblick über die Grundlegung der Arithmetik will ich noch *einige allgemeine Dinge* vorbringen. Man hat vielfach gemeint, daß man die *Mathematik durchaus deduktiv unterrichten* könne oder gar müsse, indem man eine bestimmte Zahl von Axiomen an die Spitze stellt und daraus alles rein logisch herleitet. Dies Verfahren, welches man so gern durch die Autorität des *Euklid* stützt, ist jedenfalls nicht dem geschichtlichen Werdegang der Mathematik selbst entsprechend. Tatsächlich hat sich die Mathematik entwickelt wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzeln beginnend lediglich nach oben wächst, der vielmehr erst in dem Maße, wie er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten zu seine Wurzeln tiefer und tiefer treibt. Genau so hat die Mathematik — um wieder ohne Bild zu sprechen — auf einem gewissen, etwa dem gesunden Menschenverstande entsprechenden Standpunkte ihre Entwicklung begonnen, und von da aus ist man je nach den Forderungen der Wissenschaft selbst und nach den gerade vorherrschenden Interessen bald nach der einen Seite zu neuen Erkenntnissen fortgeschritten, bald nach der andern in der Untersuchung der Prinzipien immer weiter gegangen. Beispielsweise stehen wir selbst hinsichtlich der Grundlagen heute auf einem anderen Standpunkte als die Forscher vor wenigen Jahrzehnten, und auch das, was wir heute als letzte Prinzipien ausgeben würden, wird man gewiß in einiger Zeit überholt haben, indem man die letzten Wahrheiten immer feiner zergliedert und auf immer Allgemeineres zurückführt. *Auch hinsichtlich der prinzipiellen Untersuchungen in der Mathematik gibt es also keinen letzten Abschluß und daher auch rückwärts keinen ersten Anfang, der dem Unterricht eine absolute Grundlage liefern könnte.*

Eine weitere Bemerkung möge noch das *Verhältnis zwischen logischem und anschaulichem Betriebe der Mathematik, zwischen reiner und angewandter Mathematik* betreffen. Ich habe bereits betont, daß auf der Schule die Anwendungen den Rechenunterricht von Anfang an begleiten, daß der Schüler die Regeln nicht nur verstehen, sondern auch wirklich etwas damit anzufangen lernt. So sollte es normalerweise auch stets im Betriebe der Mathematik bleiben! Gewiß müssen die rein logischen Zusammenhänge sozusagen das *feste Skelett im Organismus der Mathematik* bleiben, das ihr die eigentümliche Festigkeit und Sicherheit erteilt. Aber das Lebendige der Mathematik, die wichtigsten Anregungen, ihre Wirksamkeit nach außen hin beruhen durchaus auf den *Anwendungen*, d. h. auf den Wechselbeziehungen jener rein logischen Dinge zu allen andern Gebieten. Die Anwendungen aus der Mathematik verbannen wäre also ebenso, als wollte man das Wesen des lebenden Tieres im Knochengerüst allein finden, ohne Muskeln, Nerven und Gefäße, Triebe, überhaupt das Leben des Tieres zu betrachten.

Vielfach wird freilich bei der wissenschaftlichen *Forschung* eine *Arbeitsteilung* zwischen der reinen und angewandten Wissenschaft stattfinden, aber für die Aufrechterhaltung des Zusammenhanges muß dann doch anderweitig gesorgt werden, wenn unsere Verhältnisse gesund bleiben sollen. Und jedenfalls, und das sei hier besonders betont, *für die Schule ist eine solche Arbeitsteilung, eine weitgehende Spezialisierung des einzelnen Lehrers unmöglich.* Denken Sie sich, um die Sache kraß auszudrücken, an einer Schule etwa einen Lehrer angestellt, der Zahlen nur als bedeutungslose Symbole behandelt, einen zweiten, der es versteht, von diesen bedeutungslosen Symbolen den Übergang zu den wirklichen Zahlen zu vollziehen, einen dritten, vierten, fünften endlich, der die Anwendung dieser Zeichen in der Geometrie, der Mechanik, der Physik kennt; und nun werden diese verschiedenen Lehrer nebeneinander auf den Schüler losgelassen. Sie sehen, daß eine solche Unterrichtsorganisation unmöglich ist; weder könnten die Dinge so an das

Verständnis des Schülers herangebracht werden, noch würden sich die einzelnen Lehrer untereinander auch nur verstehen können. Die Bedürfnisse des Schulunterrichts selbst verlangen eben eine gewisse *Vielseitigkeit des einzelnen Lehrers*, eine umfangreiche Orientierung im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik im weitesten Sinne und schließen so ein *erwünschtes Gegenmittel gegen zu weitgehende Zersplitterung der Wissenschaft* ein.

Ich verweise hier noch einmal auf unsere oben genannten *Dresdener Vorschläge*, um den letzten Bemerkungen eine praktische Wendung zu geben. Da empfehlen wir geradezu die *angewandte Mathematik*, welche in die Lehramtsprüfung seit 1898 als besonderes Fach eingesetzt ist, *als notwendigen Bestandteil jeder normalen mathematischen Ausbildung*, so daß die Lehrbefähigungen für reine und angewandte Mathematik stets kombiniert erscheinen. Daneben aber sei erwähnt, daß in dem sogenannten *„Meraner Lehrplan"*[1]) von der Unterrichtskommission als *Ziel des mathematischen Unterrichts auf Oberprima* folgende 3 Aufgaben hingestellt werden:

1. ein wissenschaftlicher Überblick über den systematischen Aufbau der Mathematik;

2. eine gewisse Fertigkeit in der vollständigen numerischen und graphischen Behandlung von Einzelaufgaben;

3. eine Einsicht in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

Das sind alles Formulierungen, denen ich mich aus voller Überzeugung anschließe.

4. Praxis des Rechnens mit ganzen Zahlen.

Den letzten vorwiegend abstrakten Erörterungen will ich jetzt, meine Herren, konkretere Dinge folgen lassen, indem ich mich der *Ausführung des numerischen Rechnens* zuwende. Von der zur Orientierung geeigneten Literatur nenne ich vor allem wieder den einschlägigen *Enzyklopädieartikel*, den über *„Numerisches Rechnen"* von *R. Mehmcke*[2]). Einen allgemeinen Überblick über die hierher gehörigen Gegenstände werde ich Ihnen am besten verschaffen können, wenn ich in Kürze die Disposition dieses Artikels wiedergebe. Er zerfällt in zwei Teile, nämlich in A. *Die Lehre vom genauen Rechnen* und in B. *Die Lehre vom genäherten Rechnen*. Unter A. gehören alle Methoden, die das genaue Rechnen mit großen ganzen Zahlen erleichtern sollen, so *bequeme Rechenschemata, Produkt- und Quadrattafeln*, insbesondere aber die bald eingehender zu besprechenden *Rechenmaschinen*. Unter B. hingegen finden Sie die Hilfsmittel und Methoden alles Rechnens behandelt,

---

[1]) Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, überreicht der Versammlung der Naturforscher und Ärzte zu Meran. Leipzig 1905. — Vgl. auch den Abdruck im Gesamtbericht der Kommission, S. 93, sowie in Klein-Schimmack, S. 208.

[2]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, Teil II.

das nur die *Größenordnung des Resultats*, d. h. seine ersten geltenden Ziffern liefern soll, insbesondere *Logarithmentafeln und Verwandtes*, den *Rechenschieber*, der ja eigentlich nur eine graphische Logarithmentafel in besonders geeigneter Anordnung ist, endlich auch die zahlreichen wichtigen *graphischen Verfahren*. — Neben diesem Referat kann ich Ihnen noch das kleine Buch von *J. Lüroth*, „*Vorlesungen über numerisches Rechnen*“[1]) empfehlen, das, in angenehmer Darstellung von einem Kenner des Gebietes geschrieben, eine rasche Orientierung gibt.

Von allem, was sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen bezieht, will ich Ihnen nun genauer nur die *Rechenmaschine* vorführen, die Sie in sehr vielen verschiedenen sinnreichen Konstruktionen heute in jedem größeren Bankhause oder Bureau in Anwendung finden und die also für die Praxis in der Tat von größter Bedeutung ist. Wir besitzen in unserer mathematischen Sammlung eine der verbreitetsten Typen, die „*Brunsviga*“, die von den Brunsviga-Maschinenwerken Grimme, Natalis und Co. in Braunschweig vertrieben wird. Ihre Konstruktion stammt ursprünglich von dem schwedischen Ingenieur *Odhner*, ist aber inzwischen wesentlich verbessert und verändert worden. Diese Maschine will ich Ihnen hier als ein typisches Beispiel etwas näher erläutern, andere Konstruktionen finden Sie in den genannten Büchern beschrieben[2]). Meine Beschreibung kann Ihnen ein wirkliches Verständnis der Maschine freilich nur dann vermitteln, wenn Sie sie nachher genau in der Nähe betrachten und sich von ihrem Funktionieren durch eigene Benutzung überzeugen; die Maschine steht Ihnen dazu nach der Vorlesung stets zur Verfügung.

Was zunächst das *äußere Aussehen der* Brunsviga angeht, so zeigt sie schematisch (vgl. Abb. 1 S. 20) etwa folgendes Bild: An einem größeren festen Kasten, der „*Trommel*“, ist unten ein kleineres längliches Gehäuse angebracht, der „*Schlitten*“, der gegen die Trommel hin und her verschiebbar ist; an der rechten Seite ragt aus der Trommel eine Kurbel hervor, die mit der Hand gedreht wird. An der Trommel sind nebeneinander eine Reihe von Schlitzen angebracht, und an jedem stehen der Reihe nach von oben nach unten die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9; ein aus jedem Schlitz hervorragender Stift S kann nach Belieben auf eine dieser Ziffern eingestellt werden. Jedem dieser Schlitze entspricht auf dem Schlitten eine Öffnung, unter der eine Ziffer erscheinen kann. Die Abb. 3 und 3a S. 21 geben die äußere Ansicht neuerer Ausführungsarten der Maschine wieder.

Ich denke, daß die Einrichtung der Maschine Ihnen am besten klar werden wird, wenn ich Ihnen die Ausführung einer *bestimmten* Rechenoperation und die Art, wie die Maschine sie zustande bringt, beschreibe. Ich wähle dafür die *Multiplikation*.

[1]) Leipzig 1900.

[[2]) Über andere Rechenmaschinentypen vgl. etwa auch A. Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig 1912; außerdem W. Lind, Getriebe der Multipliziermaschinen, Zschr. Ver. dtsch. Ingenieure 1931 II, S. 985—990.]

Das Verfahren ist folgendes: *Zunächst stelle man vermöge der aus der Trommel hervorragenden Stifte den Multiplikandus ein,* d. h. man stelle von rechts beginnend den ersten Hebel auf die im Einer, den zweiten auf die im Zehner stehende Ziffer des Multiplikanden usw. Ist z. B. 12 der Multiplikand, so wird der erste Hebel auf 2, der zweite auf 1 zu stellen sein; alle anderen bleiben in der Nullstellung (vgl. Abb. 1).

Nunmehr drehe man die Kurbel einmal rechts herum. Dann erscheint unter den Löchern des Schlittens der Multiplikand — in unserm Falle also eine 2 im ersten Loche rechts, eine 1 im zweiten, während überall sonst Nullen stehen bleiben. Gleichzeitig aber läßt ein *Zählwerk*, dessen Ziffern in einer Reihe von Löchern links am Schlitten zum Vorschein kommen, eine 1 erscheinen, zum Zeichen, daß wir einmal die Kurbel gedreht haben (Abb. 2). *Hat man nun überhaupt einen einziffrigen Multiplikator, so drehe man die Kurbel so oft, als dieser angibt; es wird dann der Multiplikator links auf dem Schlitten angegeben, während das Produkt rechts am Schlitten in Erscheinung tritt.*

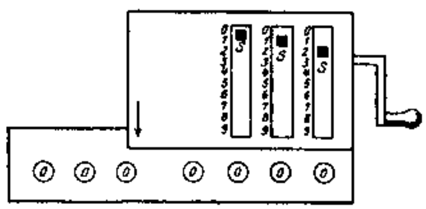


Abb. 1. Vor der ersten Kurbeldrehung.

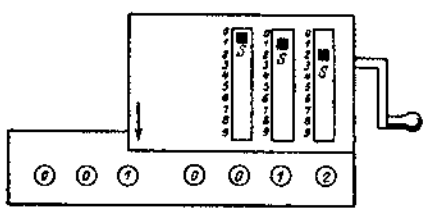


Abb. 2. Nach der ersten Kurbeldrehung.

Wie erzielt nun der Apparat dieses Resultat? Zunächst ist links auf dem Schlitten unter dem Loche des Zählwerkes ein *Zählrad* angebracht, dessen Umfang in gleichen Abständen die Ziffern 0, 1, 2, . . . , 9 trägt. Ein Zahngetriebe bewirkt, daß dieses Rad bei jeder Umdrehung der Kurbel um ein Zehntel seines Umfanges verschoben wird, so daß eine unter dem Loch des Schlittens jeweils sichtbare Ziffer in der Tat die Anzahl der Kurbeldrehungen, also den Multiplikator, angibt.

Was nun das *Zustandekommen des Produktes* anlangt, so befindet sich unter jedem Loche der rechten Seite des Schlittens ein analog gebautes Zählrad. Wie aber kommt es, daß jetzt bei ein und derselben Kurbeldrehung im obigen Falle das eine um 1 Einheit, das andere gleichzeitig um 2 Einheiten weiterspringt? Hier setzt die konstruktive Eigentümlichkeit der Brunsviga ein. Unter jedem Schlitze der Trommel befindet sich nämlich auf der Kurbelachse eine flache Radscheibe (*Triebrad*), auf der 9 in radialer Richtung verschiebbare Zähne angebracht sind (vgl. Abb. 4). Durch den nach außen ragenden Stift S, von dem oben die Rede war, läßt sich nun ein auf dem Umfang der Radscheibe aufgesetzter Ring R gegen diese drehen, und zwar so, daß je nach der

Marke, auf die man S außen am Schlitz einstellt, 0, 1, ... oder 9 der beweglichen Zähne nach außen springen (in Abb. 4 zwei Zähne). Diese Zähne greifen unmittelbar in die Zählräder unter den entsprechenden Öffnungen des Schlittens ein, und *bei einer Kurbeldrehung verschiebt daher jedes Triebrad das entsprechende Zählrad des Schlittens um so viele Einheiten, als bei ihm Zähne vorspringen, d. h. als man außen mittels des zugehörigen Stiftes S eingestellt hatte.* Demnach muß in der Tat bei dem obigen Beispiel, wenn wir von der Nullstellung ausgehen, nach einer Kurbeldrehung das Einerrad auf 2, das Zehnerrad auf 1 springen, also 12 hervorkommen. Durch eine zweite Kurbeldrehung wird das Einerrad wieder um 2, das Zehnerrad wieder um eine Einheit weitergeführt, so daß 24 erscheint, und ebenso finden wir nach 3 oder 4 Kurbeldrehungen richtig $3 \cdot 12 = 36$ bzw. $4 \cdot 12 = 48$.

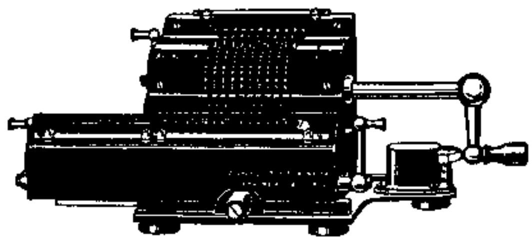


Abb. 3.

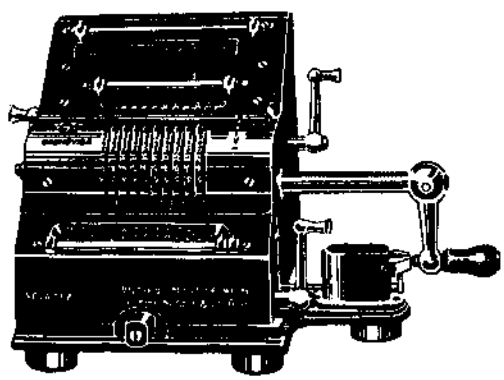


Abb. 3a.

Nun drehen wir aber ein fünftes Mal: Wieder muß nach der gegebenen Erklärung das Einerrad um 2 Einheiten weiter, also wieder zurück auf 0, das Zehnerrad um eins weiter auf 5 springen, und wir hätten das falsche Resultat 50, statt des richtigen $5 \cdot 12 = 60$. Drehen wir die Kurbel wirklich, so zeigt der Schlitten in der Tat kurz vor Vollendung der Drehung die Zahl 50; führen wir aber die Drehung ganz aus, so springt noch im letzten Augenblick die 5 in eine 6 über, so daß das richtige Ergebnis dasteht. Hier ist also etwas in Tätigkeit getreten, was wir bisher noch nicht beschrieben hatten und was bei den Rechen-

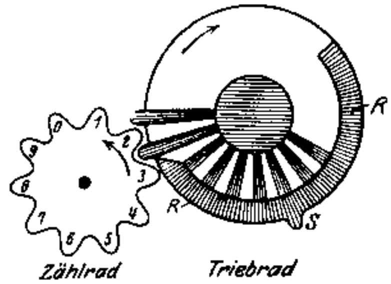


Abb. 4.

maschinen der eigentlich feinste Punkt aller Konstruktionen ist: die sogenannte *Zehnerübertragung.* Ihr Prinzip ist folgendes: *Geht eines der Zählräder des Schlittens* (wie im Beispiel das Einerrad) *durch Null, so drückt es einen sonst seitlich gestellten und unwirksamen Zahn des nächsten Triebrades (für die Zehner) in eine Stellung, in der er in sein zugehöriges Zählrad (Zehnerrad) eingreift, so daß dieses um eine Einheit mehr vorgeschoben wird, als es ohnehin geschehen wäre.* Die Einzelheiten dieser Konstruktion können Sie nur durch Betrachtung des Apparates selbst genau verstehen. Ich brauche hier um so weniger näher darauf einzugehen, als gerade die Zehnerübertragung bei den einzelnen Systemen auf die verschiedenste Weise durchgebildet ist, doch empfehle ich Ihnen sehr die genaue Betrachtung unserer Maschine als eines Beispieles einer äußerst sinnreichen Konstruktion. Unsere Sammlung enthält die wichtigsten Konstruktionsteile der Brunsviga — die bei der fertigen Maschine so gut wie unsichtbar sind — noch einmal in einzelnen Exemplaren, so daß Sie aus deren Betrachtung ein vollständiges Bild der Einrichtung gewinnen können.

Die Wirksamkeit der Maschine, soweit wir sie bisher kennen gelernt haben, können wir am besten mit dem Worte *Addiermaschine* charakterisieren, *da sie zu der rechts auf dem Schlitten bereits stehenden Zahl bei jeder Kurbeldrehung einmal die auf der Trommel eingestellte Zahl addiert.*

Endlich will ich noch im allgemeinen diejenige Einrichtung der Maschine schildern, die ein bequemes *Operieren auch mit mehrziffrigen Multiplikatoren* gestattet. Wollen wir etwa $15 \cdot 12$ rechnen, so müßten wir nach dem bisher auseinandergesetzten Verfahren 15 mal drehen, und außerdem müßte, falls man am linken Zählwerk des Schlittens den Multiplikator fixiert haben möchte, auch dort eine Zehnerübertragung angebracht sein. Beides wird durch folgende Einrichtung vermieden[1]): Wir führen zunächst die Multiplikation mit 5 aus, so daß auf dem Schlitten links 5, rechts 60 erscheint (vgl. Abb. 5). *Nun verschieben wir den Schlitten um eine Stelle nach rechts,* so daß, wie Abb. 5 andeutet, sein Einerzählrad ausgeschaltet wird, sein Zehnerzählrad aber unter den Einerschlitz, sein Hunderterzählrad unter den Zehnerschlitz usw. der Trommel rückt, während von dem am linken Ende befindlichen Zählwerk statt des Einerrades das Zehnerrad mit dem von der Kurbel ausgehenden Zahngetriebe in Verbindung kommt. Drehen wir jetzt die Kurbel einmal herum, so erscheint links eine 1 an der Zehner-

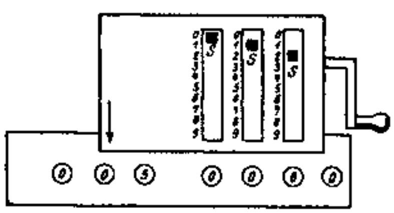


Abb. 5.

[[1]) Bei neueren Typen besitzt auch dieses Zählwerk durchgehende Zehnerübertragung.]

stelle, so daß wir nun 15 lesen; rechts aber wird nicht wie vorhin $\left\{\begin{matrix}60\\+12\end{matrix}\right.$ addiert, sondern $\left\{\begin{matrix}\cdot\,60\\+12\,\cdot\end{matrix}\right.$, oder mit andern Worten $60+120$, indem die 2 auf das Zehner-, die 1 auf das Hunderterzählrad übertragen wird. Wir erhalten also richtig $15 \cdot 12 = 180$. Das ist, wie Sie sehen, eigentlich *die genaue maschinelle Übersetzung des beim schriftlichen Multiplizieren üblichen Verfahrens*, bei dem man die Produkte der einzelnen Ziffern des Multiplikators in den Multiplikanden, jedes um eine Stelle gegen das vorangehende verschoben, untereinander schreibt und addiert. *Genau so multipliziert man hier ganz allgemein mit mehrstelligen Zahlen, indem man nach gewöhnlicher Multiplikation mit den Einern den Schlitten um 1, 2, ... Stellen nach rechts schiebt und die Kurbel jedesmal so oft dreht, wie durch die Zehner, Hunderter, ... des Multiplikators angegeben wird.*

Wie man andere Aufgaben mit der Maschine rechnet, mögen Sie sodann unmittelbar am Apparat sehen; hier genüge die Bemerkung, *daß die Subtraktion und Division auf Drehung der Kurbel entgegen dem bei der Addition verwendeten Sinne beruht.*

Lassen Sie mich zusammenfassend nur noch bemerken, *daß das theoretische Prinzip der Maschine ganz elementar ist und nur eine technische Realisation der Regeln darstellt, die man beim numerischen Rechnen ohnehin anwendet.* Daß die Maschine wirklich zuverlässig funktioniert, daß alle Teile unbedingt sicher ineinandergreifen, ohne daß Sperrungen eintreten, daß die Zählrädchen sich nicht weiter drehen als notwendig usw. — das ist freilich die große Leistung des Konstrukteurs und des ausführenden Mechanikers.

Sehen wir uns noch einen Augenblick die *allgemeine Bedeutung der Tatsache an, daß es solche Rechenmaschinen wirklich gibt,* die dem Mathematiker die rein mechanische Arbeit des numerischen Rechnens abnehmen und die es schneller und sogar in höherem Maße fehlerfrei, als er selbst vermöchte, ausführen — denn die Flüchtigkeitsfehler menschlichen Rechnens können der Maschine nicht unterlaufen. Wir werden in der Existenz einer solchen Maschine geradezu eine Bestätigung dafür erblicken können, *daß für das Rechnen nicht die Bedeutung der ganzen Zahlen in Betracht kommt, sondern allein die formalen Rechenregeln*; denn nur diese kann die Maschine befolgen — so ist sie eben eingerichtet —, eine intuitive Anschauung von der *Bedeutung* der Zahlen kann sie unmöglich haben. So werden wir es auch nicht als Zufall auffassen wollen, daß ein Mann wie *Leibniz*, der ebenso ein abstrakter Denker ersten Ranges wie ein Mann von hervorragendster praktischer Begabung war, wohl gleichzeitig der *Vater der rein formalen Mathematik* und der *Erfinder einer Rechenmaschine* ist; seine Maschine ist uns noch heute als eins der kostbarsten Besitztümer des Kästner-Museums in Hannover erhalten. Ist es auch historisch nicht beglaubigt, so möchte ich doch annehmen, daß Leibniz mit der Erfindung der Rechenmaschine nicht nur nützliche Zwecke verfolgte, sondern daß er damit auch geradezu den rein formalen Charakter des mathematischen Rechnens in helles Licht setzen wollte.

Gewiß aber hat Leibniz mit der Konstruktion der Rechenmaschine den *Wert des mathematischen Denkens* nicht herabsetzen wollen, und doch zieht man jetzt aus der Existenz der Rechenmaschine gelegentlich solche Schlüsse. Kann die Tätigkeit einer Wissenschaft, so sagt man wohl, auch durch eine Maschine geleistet werden, so kann an dieser Wissenschaft nicht sehr viel daran sein und ihr kommt nur eine ganz untergeordnete Stellung zu. Es genügt wohl aber, solchen Argumenten entgegenzuhalten, daß der Mathematiker, wenn er selbst mit Zahlen und Formeln operiert, keineswegs bloß ein minderwertiges Abbild der fehlerlosen Maschine ist, daß er keineswegs nur der „gedankenlose Denker" von Thomae ist; vielmehr stellt er sich selbst seine Probleme zu bestimmten interessanten und wertvollen Zwecken und führt sie in immer wieder neuer und eigenartiger Weise zur Lösung. Nur gewisse in gleicher Form stets wiederkehrenden Operationen läßt er sich von der Maschine abnehmen, und eben gerade der Mathematiker ist es — das darf man doch am wenigsten vergessen —, der sie sich zur Entlastung erfunden hat und der ihr zu seinen vernünftigen Zwecken die Aufgaben stellt, die sie lösen soll.

Lassen Sie mich diesen Abschnitt mit dem Wunsche abschließen, daß bei ihrer großen Bedeutung die Rechenmaschine auch in weiteren Kreisen, als das heute leider noch der Fall ist, genau bekannt würde. Vor allem sollte natürlich jeder Lehrer der Mathematik mit ihr vertraut sein, und es müßte sich gewiß auch ermöglichen lassen, *daß jedem Primaner unserer höheren Lehranstalten einmal eine solche Rechenmaschine vorgeführt wird!*

II. Die ersten Erweiterungen des Zahlbegriffes.

Mit diesem Abschnitt wollen wir das Rechnen mit ganzen Zahlen verlassen und in einem neuen Kapitel die *Erweiterung des Zahlbegriffes* behandeln. Auf der Schule pflegt man auf diesem Gebiete der Reihe nach die folgenden Schritte zu tun:

1. *Einführung der Brüche und Bruchrechnen.*

2. *Behandlung der negativen Zahlen*, im Anschluß an die Anfänge des Buchstabenrechnens.

3. *Mehr oder minder ausführliche Darlegung des Begriffes der Irrationalzahl an Beispielen bei verschiedenen Anlässen*, wobei dann allmählich die Vorstellung des Kontinuums aller reeller Zahlen entsteht.

Es bleibt der Willkür überlassen, in welcher Reihenfolge man die ersten beiden Punkte behandeln will; lassen Sie uns hier die negativen Zahlen vor den Brüchen erörtern.

I. Die negativen Zahlen.

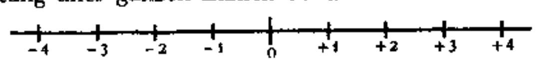
Eine auf die Terminologie bezügliche Bemerkung sei zunächst, daß man auf der Schule positive und negative Zahlen als *„relative Zahlen“* im Gegensatz zu den *„absoluten“* (positiven) zusammenfaßt, während auf der Universität dieser Sprachgebrauch nicht üblich ist. Übrigens sagt man auf der Schule neben relativen Zahlen auch „algebraische Zahlen“[1]), eine Bezeichnung, die wir auf der Hochschule bekanntlich in ganz anderem Sinne verwenden.

Was nun die Entstehung und Einführung der negativen Zahlen anlangt, so kann ich mich bei der Anführung von Tatsachenmaterial kurz fassen; diese Dinge sind Ihnen doch wohl geläufig, oder Sie werden sich zum mindesten an der Hand meiner Andeutungen leicht näher über sie orientieren können. Ausführlichere Darstellungen finden Sie beispielsweise außer im *Weber-Wellstein* auch in recht angenehmer Form in *H. Burkhardts „Algebraischer Analysis“* [2]); dieses Buch ist übrigens auch seines mäßigen Umfanges wegen zur Anschaffung geeignet.

Zur Entstehung der negativen Zahlen gibt bekanntlich die Forderung Anlaß, *die Subtraktion zu einer in allen Fällen ausführbaren Operation zu machen.* Ist $a < b$, so ist $a - b$ im Gebiete der natürlichen ganzen Zahlen ein Nonsens; wohl aber existiert eine Zahl $c = b - a$, und man setzt nun:

$$a - b = -c$$

und bezeichnet dies als *negative Zahl.* Damit verknüpft sich von Anfang an die Deutung aller ganzen Zahlen durch die *Skala*



der äquidistanten Punkte einer vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten ausgedehnten Geraden, der „*Abszissenachse*“. Dieses Bild darf man heute als Gemeingut aller Gebildeten betrachten, und man kann wohl annehmen, daß es seine Verbreitung hauptsächlich der allbekannten Thermometerskala dankt. Ein anschauliches und vielbenutztes Bild der negativen Zahlen bildet auch die *kaufmännische Bilanz* mit ihrem Rechnen in Besitz und Schulden.

Wir wollen uns hierbei aber doch sogleich auch ausdrücklich vergegenwärtigen, was für *ein prinzipiell außerordentlich schwieriger Schritt* auf der Schule mit dieser Einführung der negativen Zahlen getan wird. War der Schüler vorher stets gewöhnt, sich unter den Zahlen und weiterhin auch unter den Buchstaben, mit denen er operierte, konkrete Anzahlen vorzustellen und beim Addieren usw. die entsprechenden real mit Anzahlen ausführbaren Operationen vor Auge zu haben, so wird das jetzt ganz anders. Er bekommt es mit etwas neuem, den

---

[1]) Siehe etwa *Mehler*: Hauptsätze der Elementarmathematik. 19. Aufl. S. 77. Berlin 1895.

[2]) Leipzig 1903. [Dritte, durch G. Faber bearbeitete Auflage 1920.]

„negativen Zahlen", zu tun, die mit dem anschaulichen Bilde der Anzahl ohne weiteres nichts mehr zu schaffen haben, und soll doch ganz ähnlich wie mit Anzahlen mit ihnen operieren, obwohl die Operationen noch viel weniger die alte anschaulich klare Bedeutung haben. Man hat eben hier zum ersten Male den *Übergang von der inhaltlichen Mathematik zur formalen* vollzogen, zu dessen vollständiger Erfassung ein hoher Grad von Abstraktionsfähigkeit gehört.

Sehen wir nun im einzelnen zu, was aus den *Rechenoperationen* nach Einführung der negativen Zahlen wird. Zunächst ist klar, daß *Addition und Subtraktion wesentlich verschmelzen:* Die Addition einer positiven Zahl ist die Subtraktion der entgegengesetzt gleichen negativen. Max Simon macht hierzu die amüsante Bemerkung, daß gerade durch die Einführung der negativen Zahlen, die doch zum Zwecke der ausnahmslosen Durchführbarkeit der Substraktion geschieht, die Subtraktion als selbständige Operation zu existieren aufhört. Für diese neue, die Subtraktion mitumfassende Operation der Addition im Gebiete der positiven und negativen Zahlen gelten nun unverändert die *alten 5 formalen Gesetze,* die ich in Stichwörtern kurz wieder zusammenstelle (vgl. S. 9f.):

1. *Ausnahmslose Durchführbarkeit.*
2. *Eindeutigkeit.*
3. *Assoziativität.*
4. *Kommutativität.*
5. *Monotonie.*

Dabei ist zu 5. zu bemerken, daß $a < b$ jetzt, kurz gesagt, bedeutet, daß bei der geometrischen Darstellung a links von b liegt, so daß also z. B. $-2 < -1$, $-3 < +2$ ist.

Bei der *Multiplikation* der positiven und negativen Zahlen ist der Hauptpunkt die sogenannte *Vorzeichenregel,* daß $a \cdot (-c) = (-c) \cdot a = -(a \cdot c)$, und $(-c)(-c') = +(c \cdot c')$ ist; besonders die letzte Regel: „Minus mal minus gibt plus" bildet häufig einen gefährlichen Stein des Anstoßes. Auf das innere Wesen dieser Regel müssen wir sogleich noch zurückkommen; wir wollen sie hier nur in den einen Satz zusammenfassen, der das Produkt einer Reihe positiver und negativer Zahlen definiert: *Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkte der absolut genommenen Faktoren; sein Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl von Faktoren negativ ist.* Nach dieser Festsetzung hat die Multiplikation im Gebiete der positiven und negativen Zahlen wiederum die folgenden Eigenschaften:

1. *Ausnahmslose Durchführbarkeit.*
2. *Eindeutigkeit.*
3. *Assoziativität.*
4. *Kommutativität.*
5. *Distributivität in bezug auf die Addition.*

Nur beim *Gesetz der Monotonie* findet sich jetzt eine Abweichung; an seine Stelle tritt folgendes Gesetz:

6. *Ist* $a > b$, *so wird* $a \cdot c \gtreqless b \cdot c$, *je nachdem* $c \gtreqless 0$.

Fragen wir uns nun, ob diese Gesetze, wiederum rein formal betrachtet, *widerspruchslos* sind. Wir müssen zuerst sagen, daß ein Beweis der Widerspruchslosigkeit auf rein logischem Wege hier bisher noch viel weniger geführt werden konnte, als bei den ganzen Zahlen. Nur eine Zurückführung in dem Sinne ist gelungen, daß die vorliegenden Gesetze sicher dann widerspruchslos sind, wenn die Gesetze für die ganzen Zahlen keinen Widerspruch enthalten. Bis diese aber durch Führung eines logischen Widerspruchslosigkeitsbeweises für die ganzen Zahlen vervollständigt worden ist, wird man *die Widerspruchslosigkeit unserer Gesetze allein darin begründet* finden können, *daß es anschauliche Dinge mit anschaulichen Verknüpfungen gibt, die jene Gesetze erfüllen.* Wir nannten als solche eben schon die *Reihe der ganzzahligen Punkte der Abszissenachse* und haben nur nachzutragen, was die Rechenoperationen dort bedeuten: Die *Addition* $x' = x + a$ ordnet bei festem a jedem Punkte x einen andern Punkt x' so zu, *daß die unendliche Gerade einfach um ein Stück a in sich verschoben wird*, und zwar nach rechts oder links, je nachdem a positiv oder negativ ist. Analog stellt die *Multiplikation* $x' = a \cdot x$ eine *Ähnlichkeitstransformation der Geraden in sich* dar, und zwar *für $a > 0$ eine reine Dehnung*, für $a < 0$ *eine mit einer Umlegung um den Nullpunkt verbundene Dehnung.*

Ich möchte jetzt erörtern, *wie alle diese Dinge historisch entstanden sind.* Man darf nicht etwa denken, daß die negativen Zahlen die Erfindung eines klugen Mannes sind, der zugleich mit ihnen womöglich auch ihre Widerspruchslosigkeit etwa an der Hand der geometrischen Deutung herausgearbeitet hat; vielmehr hat sich in einer langdauernden Entwicklung die Benutzung der negativen Zahlen den Mathematikern gleichsam von selbst aufgedrängt, und erst als man schon lange mit ihnen operierte, im 19. Jahrhundert, traten jene Betrachtungen über ihre Widerspruchslosigkeit hinzu.

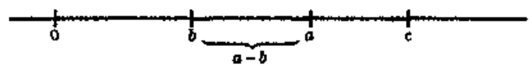
Lassen Sie mich der Geschichte der negativen Zahlen die Bemerkung vorausschicken, daß die alten *Griechen* sicher keine negativen Zahlen besaßen, so daß man ihnen hier einmal gewiß nicht die erste Stelle einräumen kann, wie das viele Leute sonst so gern tun. Hingegen muß man wohl die *Inder* als die ersten Erfinder ansprechen, wie sie ja auch unser Ziffernsystem und insbesondere die Null geschaffen haben. In Europa kamen die negativen Zahlen zur Zeit der Renaissance allmählich in Gebrauch, als man gerade den Übergang zur Buchstabenrechnung vollzogen hatte. Ich will hierbei nicht unerwähnt lassen, daß die Vollendung der Buchstabenrechnung zuerst erreicht worden sein soll von *Vieta* in seiner Schrift „*In artem analyticam isagoge*"[1]).

Man besitzt auf diesem Standpunkte die sogenannten *Klammerregeln* für die Rechnung mit positiven Zahlen, die natürlich in unseren früher

[1]) Tours 1591.

aufgezählten Grundformeln enthalten sind, wenn man noch die entsprechenden Gesetze für die Subtraktion hinzunimmt; ich gehe aber gern wenigstens an 2 Beispielen noch etwas näher auf sie ein, um vor allem die Möglichkeit äußerst *einfacher anschauungsmäßiger Beweise* für sie darzutun — Beweise, die eigentlich nur aus der Abbildung und aus dem Wörtchen „Siehe!" zu bestehen brauchten, wie das bei den alten Indern Sitte war:

1. *Es sei* $a > b$ *und* $c > a$, dabei a, b, c positiv. Dann ist $a - b$ eine positive Zahl und kleiner als c, also muß $c - (a - b)$ als positive Zahl existieren. Deuten wir die Zahlen auf der Abszissenachse und bemerken, daß die Strecke zwischen den Punkten b und a die Länge $a - b$



hat, so lehrt ein Blick auf die obige Abbildung: Zieht man von c die Strecke $a - b$ ab, so erhält man dasselbe, wie wenn man erst die ganze Strecke a abzieht und dann den Teil b wieder hinzufügt, d. h.:

(1) $$c - (a - b) = c - a + b.$$

2. *Es sei* $a > b$ *und* $c > d$; dann sind auch $a - b$ und $c - d$ positive Zahlen. Wir wollen das Produkt $(a - b) \cdot (c - d)$ untersuchen; dazu zeichnen wir uns das in Abb. 6 schräg schraffierte Rechteck mit den Seiten $a - b$ und $c - d$, dessen Inhalt die gesuchte Zahl $(a - b) \cdot (c - d)$ ist, als Teil des Rechtecks mit den Seiten a und c. Um aus diesem jenes erste zu erhalten, nehmen wir zunächst das obere horizontal schraffierte Rechteck $a \cdot d$, sodann das rechts gelegene, vertikal schraffierte $b \cdot c$ fort; dabei haben wir aber das kleine kreuzweis schraffierte Rechteck $b \cdot d$ einmal zu viel weggenommen, so daß wir es nachträglich noch einmal hinzufügen müssen. Darin ist aber bereits die bekannte Formel ausgesprochen:

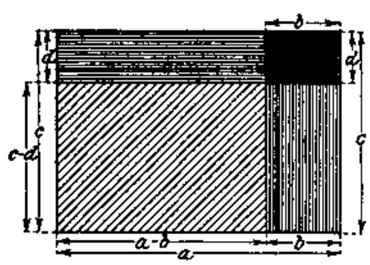


Abb. 6.

(2) $$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

Als wichtigstes psychologisches Moment, das auf dieser Basis der Buchstabenrechnung zur Einführung der negativen Zahlen Anlaß gab, kommt die allgemeine Eigentümlichkeit der menschlichen Natur in Betracht, *daß wir unwillkürlich geneigt sind, nach Regeln, die für spezielle Fälle abgeleitet und gültig sind, auch unter anderen allgemeineren Umständen zu verfahren.* Als „*Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze*" ist dies für die Arithmetik zuerst von *Hermann Hankel* in seiner „*Theorie der komplexen Zahlsysteme*"[1]) als leitender Gesichtspunkt klar in Anspruch genommen worden; dieses äußerst interessante Buch

[1]) Leipzig 1867.

kann ich Ihnen nur dringend zur Kenntnisnahme empfehlen. Das genannte Prinzip würde für den uns gerade vorliegenden Übergang zu negativen Zahlen aussagen, daß man wünscht, in Formeln wie (1) und (2) die ausdrücklichen Voraussetzungen über das Größenverhältnis der a, b vergessen zu dürfen und sie auch auf andere Fälle anzuwenden. Wendet man so (2) z. B. auf $a = c = 0$ an, wofür ja die Formel keineswegs bewiesen ist, so hat man $(-b) \cdot (-d) = +bd$, d. i. *die Zeichenregel der Multiplikation negativer Zahlen.* In dieser Weise kommt man in der Tat fast unbewußt auf alle die Regeln, die wir jetzt, der gleichen Überlegung folgend, als *nahezu notwendige Annahmen* bezeichnen müssen, *notwendig, insofern man für die neuen Begriffe die Gültigkeit der alten Regeln haben will.* Freilich war den alten Mathematikern bei diesen Begriffsbildungen recht unwohl zumute, und ihr schlechtes Gewissen trat in Namen wie *erdachte Zahlen, falsche Zahlen* usw. zutage, die sie den negativen Zahlen gelegentlich gaben. Aber trotz allen Bedenken finden die negativen Zahlen im 16. und 17. Jahrhundert wegen ihrer sich immer klarer zeigenden Anwendbarkeit mehr und mehr allgemeine Anerkennung; sehr viel dazu beigetragen hat ohne Zweifel die Entwicklung der analytischen Geometrie. Allerdings, die Bedenken blieben bestehen und mußten bestehen bleiben, so lange man im Grunde doch immer wieder nach einer Deutung innerhalb des Anzahlbegriffes suchte und die führende Rolle der formalen Gesetze bei den Neubildungen nicht klar erkannt hatte; im Zusammenhange damit standen die sich immer wiederholenden Versuche, die Vorzeichenregeln zu beweisen. Die einfache Aufklärung, die dann erst das 19. Jahrhundert brachte, ist die, *daß von logischer Notwendigkeit des ganzen Ansatzes, also von Beweisbarkeit der Zeichenregel nicht die Rede sein kann; es kann sich vielmehr nur darum handeln, die logische Zulässigkeit des Ansatzes zu erkennen,* während er im übrigen willkürlich ist und durch *Zweckmäßigkeitsgründe*, wie jenes Permanenzprinzip, reguliert wird.

Es ist bei dieser Betrachtung der auch sonst oft sich darbietende Gedanke nicht zu unterdrücken, *daß die Dinge manchmal vernünftiger zu sein scheinen als die Menschen.* Bedenken Sie nur, wie hier einer der größten Fortschritte in der Mathematik, die Einführung der negativen Zahlen und das Operieren mit ihnen, nicht durch bewußtes logisches Überlegen eines einzelnen geschaffen worden ist, sondern wie er durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst langsam organisch herangewachsen ist, wobei es fast aussieht, als ob die Menschen von den Buchstaben gelernt hätten. Die vernünftige Überlegung, daß man da wirklich etwas Richtiges mit der strengen Logik Verträgliches gemacht hat, tritt erst viel später ein. Überhaupt kann die reine Logik bei solchen neuen Begriffsbildungen immer nur *regulierend* einwirken und *nie das allein leitende Prinzip* abgeben, denn der einzigen von ihr gestellten

Anforderung der Widerspruchsfreiheit genügen natürlich stets noch eine große Menge von Begriffssystemen.

Wollen Sie nun noch *Literatur* über Fragen der Geschichte der negativen Zahlen finden, so empfehle ich *Tropfkes* „*Geschichte der Elementarmathematik*"[1]) als eine ausgezeichnete Materialsammlung, die sehr viele Einzelheiten über die Entwicklung der elementaren Begriffe, Anschauungen und Benennungen in übersichtlicher Darstellung enthält.

Sehen wir nun noch kritisch zu, wie man die *negativen Zahlen auf der Schule* tatsächlich darzustellen pflegt, so ist zunächst zu sagen, daß da *häufig Fehler* vorkommen, indem man entsprechend jenen bereits gekennzeichneten Bestrebungen der älteren Mathematiker immer wieder die logische Notwendigkeit der Zeichenregeln zu *beweisen* versucht. Besonders gern gibt man die heuristische Herleitung des $(-b)(-d) = +bd$ aus der Formel für $(a-b)(c-d)$ als *Beweis* aus, indem man völlig außer acht läßt, daß die Gültigkeit dieser Formel tatsächlich zunächst durchaus an die Ungleichungen $a > b$, $c > d$ geknüpft ist[2]). So wird denn der Beweis geradezu erschlichen, und das *psychologische Moment*, das uns vermöge des Permanenzprinzipes zum Ansatz hinleitet, mit einem *logisch beweisenden Moment* verwechselt. Natürlich kann das der Schüler, dem es so zum ersten Male dargeboten wird, unmöglich begreifen, aber glauben muß er es schließlich doch; und wenn, wie es wohl vielfach vorkommt, die Wiederholung auf der höheren Stufe nicht die nötige genauere Ergänzung gibt, dann mag sich bei manchem die Überzeugung festsetzen, daß die Sache etwas Mystisches, Unbegreifliches ist.

Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, *keinerlei Versuche zum Erschleichen unmöglicher Beweise* zu machen; man sollte vielmehr den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend den Schüler an *einfachen Beispielen* überzeugen oder womöglich es ihn selbst finden lassen, *daß gerade diese auf dem Permanenzprinzip beruhenden Festsetzungen geeignet sind, einen gleichförmig bequemen Algorithmus zu liefern, während jede andere Festsetzung bei allen Regeln immer zu zahlreichen Fallunterscheidungen zwingen würde.* Freilich darf man das keineswegs überstürzen, sondern muß dem Schüler zu der Revolution seines Denkens, die sich durch diese Erkenntnis in ihm vollzieht, Zeit lassen. Und während es leicht verständlich ist, daß andere Festsetzungen unzweckmäßig sind, sollte man doch das so sehr Wunderbare der Tatsache, daß eine allgemein zweckmäßige Festsetzung wirklich *existiert*, für den Schüler klar verständlich hervor-

[1]) 2 Bde. Leipzig 1902/03. [Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage, die 7 Bände umfaßt, die von 1921 bis 1924 erschienen sind.]

[2]) Vgl. z. B. Heis, E.: Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. S. 46, 106.—108. Aufl. Köln 1904.

heben; es sollte ihm deutlich werden, daß dies keineswegs von vornherein selbstverständlich ist.

Ich schließe damit meine Darlegungen über die Theorie der negativen Zahlen ab und lade Sie nunmehr zu ähnlichen Betrachtungen über die zweite Erweiterung des Anzahlbegriffes ein.

2. Die gebrochenen Zahlen.

Gehen wir von der *Behandlung der Brüche auf der Schule* aus. Hier hat der Bruch $\frac{a}{b}$ von Anfang an eine *durchaus konkrete Bedeutung;* nur daß gegenüber dem anschaulichen Bilde der ganzen Zahl ein *Wechsel des Substrates* eingetreten ist: Man ist nämlich von der *Anzahl* zum *Maß*, von der Betrachtung *zählbarer Dinge* zu derjenigen *meßbarer Dinge* übergegangen. Mit einer gewissen Einschränkung gibt das System der *Münzen* oder das der *Gewichte*, vollkommen das System aller *Längen* ein Beispiel *meßbarer Mannigfaltigkeiten.* Es sind dies die Beispiele, an denen auch jedem Schüler der Begriff des Bruches beigebracht wird: was $^1/_3$ Meter oder $^1/_2$ Pfund ist, das zu begreifen wird keinem große Schwierigkeiten machen. Die *Beziehungen* $=$, $>$, $<$ zwischen Brüchen lassen sich nun aus der nämlichen konkreten Anschauung heraus sofort entwickeln, ebenso die Operationen der *Addition* und *Subtraktion*, sowie der *Multiplikation* und *Division* eines Bruches *mit einer ganzen Zahl.* Danach läßt sich dann die *allgemeine Multiplikation* leicht verständlich machen. *Eine Zahl mit* $\frac{a}{b}$ *multiplizieren heißt sie mit der ganzen Zahl a multiplizieren und alsdann durch b dividieren*, oder auch: *das Produkt entsteht aus dem Multiplikanden gerade so, wie* $\frac{a}{b}$ *aus* 1. Die *Division* durch einen Bruch wird dann als *inverse Operation* der Multiplikation erklärt: *a dividiert durch* $\frac{3}{4}$ *ist die Zahl, die mit* $\frac{3}{4}$ *multipliziert a ergibt.* — Diese Begriffsbildungen der Bruchrechnung kombinieren sich nun noch mit der Einführung der negativen Zahlen, so daß man schließlich über den *Inbegriff aller „rationalen Zahlen"* verfügt. Ich kann auf die Einzelheiten dieses ganzen Aufbaues, der auf der Schule natürlich eine lange Zeit in Anspruch nimmt, hier nicht eingehen. *Wir wollen ihn lieber sogleich mit der in der modernen Mathematik ausgebildeten Darstellung vergleichen* und als Beispiele für diese die oben genannten Bücher von Weber-Wellstein und Burkhardt[1]) heranziehen.

Bei *Weber-Wellstein* treten vorwiegend die *formalen Gesichtspunkte*, die aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Deutungen das notwendig Gemeinsame herausarbeiten, in Erscheinung. *Der Bruch* $\frac{a}{b}$ *ist ein Symbol, ein „Zahlenpaar", mit dem nach gewissen*

[[1]) Dem folgenden liegen die ersten Auflagen der beiden Bücher zugrunde.]

Regeln gerechnet werden soll; diese Regeln, die in Wahrheit in der vorhin angedeuteten Weise naturgemäß aus der Bedeutung der Brüche entstanden sind, *haben hier den Charakter willkürlicher Verabredungen.* So erscheint z. B. das, was für den Schüler ein anschaulicher Satz über das *Erweitern bzw. Kürzen der Brüche* ist, hier in der Gestalt einer *Definition der Gleichheit: Zwei Brüche* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *heißen gleich, wenn* $a\,d = b\,c$ ist. Ähnlich wird das *Größer und Kleiner definiert,* ähnlich wird *festgesetzt,* daß als *Summe zweier Brüche* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *der Bruch* $\frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$ bezeichnet werden möge usw. Dann wird *bewiesen,* daß die so definierten Operationen in dem neu entstandenen Zahlenkreise formal genau die Eigenschaften der Addition und Multiplikation für ganze Zahlen besitzen, d. h. den mehrfach aufgezählten *11 Fundamentalgesetzen* genügen.

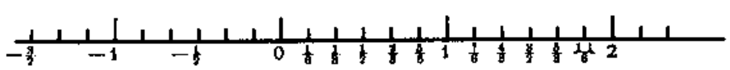
Nicht ganz so formal, wie diese hier natürlich nur in den wesentlichsten Grundzügen referierte Darstellung von Weber-Wellstein, geht *Burkhardt* vor. Er faßt den *Bruch* $\frac{a}{b}$ *als Aufeinanderfolge zweier Operationen im Gebiete der ganzen Zahlen auf: Einer Multiplikation mit a und einer Division durch b,* wobei ihm eine willkürlich angenommene ganze Zahl das Objekt darstellt, auf das diese Operationen anzuwenden sind. Nimmt man *zwei solche „Operationspaare"* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *nacheinander* vor, so soll das der *Multiplikation der Brüche* entsprechen, und man erkennt leicht, daß die so resultierende Operation nichts als Multiplikation mit $a \cdot c$ und Division durch $b \cdot d$ bedeutet, so daß man damit die *Regel* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ *der Bruchmultiplikation aus einer klaren Bedeutung der Brüche gewonnen,* nicht aber durch bloße willkürliche Verabredung festgesetzt hat. Ebenso kann man natürlich die *Division* deuten und behandeln. *Addition und Subtraktion* hingegen lassen aus diesen Vorstellungen keine so einfache Deutung zu; die Formel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$ bleibt also auch bei Burkhardt eine *Verabredung,* für die er *nur Plausibilitätsgründe* heranbringt.

Vergleichen wir nun die alte Schuldarstellung mit der so geschilderten modernen Auffassung. Bei letzterer bleiben wir — sowohl in der einen wie der anderen Ausführung — trotz der Erweiterung des Zahlbegriffs eigentlich *völlig auf dem Boden der ganzen Zahlen stehen:* Es wird nur vorausgesetzt, daß der Inbegriff der ganzen Zahlen anschaulich erfaßt oder daß die Regeln des Operierens mit ihnen bekannt sind; die neuen als Zahlenpaare bzw. Operationen mit ganzen Zahlen definierten Dinge fügen sich ganz diesem Rahmen ein. *Die Schuldarstellung hingegen be-*

ruft sich durchaus auf die neu hinzutretende Anschauung der meßbaren Größen, die ein unmittelbar intuitives Bild der Brüche liefert. Wir erfassen diesen Unterschied am besten, wenn wir uns ein Wesen vorstellen, das nur die Idee der ganzen Zahlen, aber keine Anschauung von meßbaren Größen besitzt: Die Schuldarstellung müßte ihm vollkommen unverständlich bleiben, während er die Betrachtungen von Weber-Wellstein oder Burkhardt wohl begreifen könnte.

Welche der beiden Auffassungen ist nun die bessere? Was leisten beide? Die Antwort hierauf wird ähnlich lauten wie neulich, als wir die analoge Frage für die verschiedenen Auffassungen über die ganzen Zahlen selbst stellten: *Sicher ist die moderne Darstellung reinlicher, aber andererseits ist sie auch ärmer.* Denn von dem, was der traditionelle Lehrgang *einheitlich* gibt, liefert sie eigentlich nur die *eine Hälfte: die abstrakte, in sich logisch vollständige Einführung gewisser arithmetischer Begriffe — „Brüche" genannt — und des Operierens mit ihnen.* Aber unerörtert bleibt dabei eine davon *gänzlich unabhängige und nicht minder wichtige Frage: Kann man die so abgeleitete theoretische Doktrin auf die uns vorkommenden anschaulichen meßbaren Größen auch wirklich anwenden?* Man könnte das wieder ein Problem der „angewandten Mathematik" nennen, das eine durchaus selbständige Behandlung zuläßt; freilich ist dabei recht fraglich, ob diese Trennung auch *pädagogisch* zweckmäßig ist. Bei Weber-Wellstein kommt diese Spaltung des Problems in zwei Teile übrigens sehr charakteristisch zum Ausdruck: nach der abstrakten Einführung der Bruchrechnung, auf die wir bisher allein Bezug nahmen, widmet er einen eigenen (den fünften) Abschnitt — „Verhältnisse" betitelt — der Frage, *wie man die rationalen Zahlen auf die Außenwelt wirklich anwendet;* dabei ist seine Darstellung freilich auch mehr begrifflich als anschaulich.

Ich schließe nunmehr diese Erörterungen über Brüche mit noch einer *allgemeinen Bemerkung über die Gesamtheit der rationalen Zahlen*, wobei ich mich der Anschaulichkeit halber der Darstellung auf der geraden Linie bediene. Auf dieser denken wir uns alle Punkte mit



rationalen Abszissen markiert; wir bezeichnen sie kurz als *rationale Punkte.* Man sagt dann, *daß die Gesamtheit dieser rationalen Punkte auf der Abszissenachse „überall dicht" liegt,* und meint damit, *daß in jedem noch so kleinen Intervalle noch unendlich viele rationale Punkte liegen.* Abstrakter kann man, um nichts dem Inbegriff der rationalen Punkte Fremdes hineinzubringen, diese Definition dahin fassen, *daß zwischen je zwei rationalen Punkten noch stets ein weiterer rationaler Punkt liegt.* Eine Folge davon ist, daß man aus der Gesamtheit der rationalen Punkte durchaus im Endlichen gelegene Teile ausscheiden kann, die weder ein kleinstes, noch ein größtes Element enthalten; ein Beispiel bildet die Gesamtheit aller rationalen Punkte zwischen 0 und 1, diese Punkte selbst nicht mit einbegriffen; denn in ihr gibt es zu jeder rationalen Zahl noch eine zwischen dieser und 0 gelegene, also *kleinere*, und ebenso eine zwischen ihr und 1 gelegene, also *größere* Zahl. Diese Begriffsbildungen gehören in ihrer systematischen Ausbildung bereits der *Cantorschen Mengenlehre* an; wir werden in der Tat später den Inbegriff der rationalen Zahlen mit den hier erwähnten Eigenschaften als wichtiges *Beispiel einer Menge* verwenden.

Ich gehe nunmehr zu der dritten Ausdehnung des Zahlbereiches über: zu den *Irrationalzahlen*.

3. Die irrationalen Zahlen.

Wir wollen uns hier nicht erst mit der Frage aufhalten, wie dieses Gebiet auf der Schule gewöhnlich behandelt wird, denn über einige Beispiele kommt man da meist nicht weit hinaus; wir gehen besser sogleich auf die *geschichtliche Entwicklung* ein. *Historisch liegt der Ursprung des Begriffes der irrationalen Zahlen jedenfalls in der geometrischen Anschauung und dem geometrischen Bedürfnis.* Denken wir uns die Abszissenachse, wie soeben erörtert, überall dicht mit der Menge der rationalen Punkte besetzt; *dann gibt es noch weitere Punkte*, wie das zuerst *Pythagoras* in etwa folgender Weise gezeigt haben soll: Hat man ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Katheten der Länge 1, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$, und das ist gewiß keine rationale Zahl; denn setzt man $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wo a und b teilerfremde ganze Zahlen sein mögen, so kommt man leicht mit bekannten Gesetzen der Teilbarkeit ganzer Zahlen in Widerspruch. *Trägt man nun die so geometrisch konstruierte Strecke auf der Abszissenachse von 0 an ab, so erhält man einen nichtrationalen, in jener überall dichten Bedeckung noch nicht enthaltenen Punkt.* Ferner aber war den Pythagoreern gewiß auch schon bekannt, daß ebenso in den meisten Fällen die Hypotenuse $\sqrt{m^2+n^2}$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den ganzzahligen Katheten m, n irrational ist; diese außerordentlich wesentliche Erkenntnis war wohl das Opfer von 100 Ochsen wert, durch das sie Pythagoras gefeiert haben soll und über das so gern schlechte Witze gemacht werden. Wir wissen auch, daß sich die Schule des Pythagoras mit Vorliebe mit der Aufsuchung aller jener speziellen Wertepaare m, n beschäftigte, für die sich rechtwinklige Dreiecke mit *drei kommensurablen Seiten* ergeben, deren Maßzahlen sich ja bei geeignet gewählter Einheit in ganzen Zahlen ausdrücken lassen (sog. *pythagoreische Zahlen*). Das einfachste Beispiel eines dieser Zahlentripel, auf die wir noch näher zurückkommen werden, ist 3, 4, 5.

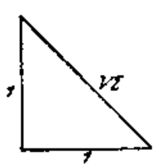


Abb. 7.

Die späteren griechischen Mathematiker studierten nun neben diesen einfachsten Irrationalitäten auch immer verwickeltere; so finden sich bei *Euklid* Typen wie $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ u. dgl. Allgemein kann man aber sagen, *daß sie sich im wesentlichen auf solche Irrationalitäten beschränkten, die man durch wiederholtes Quadratwurzelziehen gewinnt und demgemäß geometrisch mit Lineal und Zirkel konstruieren kann; die allgemeine Idee der Irrationalzahl besaßen sie aber wohl noch nicht.*

Ich muß diese Bemerkung jedoch noch etwas näher präzisieren, um Mißverständnisse zu vermeiden. Sie soll nur besagen, daß die Griechen kein Verfahren besaßen, das arithmetisch die allgemeine irrationale Zahl aus den rationalen herzustellen, zu definieren gestattet, so wie wir es als Erträgnis moderner Entwicklung sogleich kennen lernen werden. *Trotzdem aber war ihnen von einer anderen Seite her der Begriff der allgemeinen reellen, nicht notwendig rationalen Zahl geläufig,* nur hatte die Sache ein ganz anderes Aussehen als bei uns, da sie Buchstaben für allgemeine Zahlen nicht benutzten. Sie betrachteten nämlich — *Euklid* stellt das ja systematisch so dar — *Verhältnisse zweier beliebiger Strecken* und operierten mit ihnen eigentlich genau so, wie wir heute mit der beliebigen reellen Zahl umgehen; es finden sich da sogar Definitionen bei Euklid, die ganz an die moderne Theorie der Irrationalzahl anklingen. Übrigens ist im Namen noch immer ein Unterschied gegen die ganze natürliche Zahl; diese heißt ἀριθμός, während das Streckenverhältnis, die beliebige reelle Zahl, λόγος genannt wird.

Eine Bemerkung über das *Wort „irrational"* sei dem noch angefügt. Es ist jedenfalls die *Übersetzung des griechischen „ἄλογος"* ins Lateinische: Das griechische Wort aber sollte vermutlich *„nicht aussprechbar"* bedeuten und besagen, daß die neuen Zahlen bzw. Streckenverhältnisse nicht wie die rationalen durch ein *Verhältnis zweier ganzen Zahlen* angegeben werden können[1]); erst das Mißverständnis, daß das lateinische ratio nur in der Bedeutung „Vernunft" vorkomme, hat aus „irrational" das „unvernünftig" gemacht, das dem Namen der Irrationalzahl jetzt anzuhaften scheint.

Die allgemeine Idee der Irrationalzahl ist wohl erst am Ende des 16. Jahrhunderts im Gefolge der Einführung der Dezimalbrüche aufgetreten, deren Gebrauch sich damals in Verbindung mit dem Entstehen der Logarithmentafeln einbürgerte. Verwandelt man eine rationale Zahl in einen Dezimalbruch, so kann man neben endlichen auch *unendliche Dezimalbrüche* erhalten[2]), die jedoch unter allen Umständen *periodisch* werden; das einfachste Beispiel dafür ist $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, d. i. ein Dezimalbruch, dessen einziffrige Periode 3 sogleich hinter dem Komma beginnt. Nun hindert nichts, sich einen *aperiodischen Dezimal-*

[[1]) Siehe Tropfke, zweite Auflage, Bd. 2, S. 71.]

[2]) Wegen ausführlicherer Behandlung dieses Gegenstandes vgl. S. 44 f.

bruch zu denken, *dessen Ziffern nach sonst irgendeinem bestimmten Gesetz fortschreiten*, und jeder Mensch wird ihn unwillkürlich als *bestimmte und dann natürlich nicht rationale Zahl* betrachten. Damit ist aber der Allgemeinbegriff der Irrationalzahl bereits gegeben — gewissermaßen durch die Betrachtung der Dezimalbrüche von selbst eingeführt. Historisch ging es demgemäß auch hier in der Tat so, wie wir es früher bei den negativen Zahlen ausführlich geschildert haben: *Der Kalkül zwang zur Einführung der neuen Begriffe, und ohne daß man viel über deren Wesen und Begründung nachdachte, operierte man eben mit ihnen, zumal sie sich vielfach als äußerst nützlich erwiesen.*

Erst *in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts* brach sich das *Bedürfnis nach präziser arithmetischer Formulierung der Grundlagen der Irrationalzahlen* Bahn, und es waren die Vorlesungen von *Weierstraß* aus jenen Jahren, in denen das zuerst geschah. Eine allgemeine Grundlegung gab 1872 *G. Cantor* in Halle, der Begründer der Mengenlehre, und gleichzeitig unabhängig von ihm *R. Dedekind* in Braunschweig. Den Dedekindschen Standpunkt will ich hier in ein paar Worten erläutern. Wir denken uns im Besitze sämtlicher rationalen Zahlen, wollen aber jede Raumanschauung, die uns den Begriff der Kontinuität der Zahlenreihe ohne weiteres aufzwingt, ausschließen. Um von dieser Grundlage aus zu einer *rein arithmetischen Definition der Irrationalzahl* zu gelangen, bildet sich Dedekind den Begriff des *„Schnittes" im Gebiete der rationalen Zahlen.* Ist r irgendeine rationale Zahl, so teilt sie die Gesamtheit aller rationalen Zahlen in zwei Teile A, B, derart, *daß jede Zahl aus A kleiner als jede aus B ist und daß eine jede rationale Zahl zu einer von beiden Klassen gehört:* A ist die Gesamtheit aller rationalen Zahlen, die kleiner als r sind, B die aller größeren, wobei man r selbst ebensowohl zu A als zu B rechnen kann; es bleibt gleichgültig, welche dieser beiden Möglichkeiten man wählt. Neben diesen *„eigentlichen Schnitten"* gibt es nun noch *„uneigentliche Schnitte"*, das sind *Verteilungen aller rationalen Zahlen auf zwei Klassen derselben Eigenschaften, die nur nicht durch eine rationale Zahl hervorgerufen werden*, d. h. bei denen weder in A eine größte noch in B eine kleinste rationale Zahl enthalten ist. Ein *Beispiel* solch eines uneigentlichen Schnittes liefert uns etwa $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ Überhaupt gibt *jeder unendliche Dezimalbruch* zur Definition eines Schnittes Anlaß, wenn man zu B jede rationale Zahl rechnet, die größer als *alle* Näherungsbrüche des Dezimalbruchs ist; zu A jede andere, die also von mindestens einem Näherungsbruch (und damit von unendlich vielen) erreicht oder übertroffen wird; man kann sich überzeugen, daß dieser Schnitt eigentlich ist, wenn der Dezimalbruch periodisch, uneigentlich, wenn er nichtperiodisch ist.

Gemäß dieser Überlegung *definiert* nun Dedekind, was vom rein logischen Standpunkte natürlich als *„willkürliche Festsetzung"* angesehen werden muß: *Ein jeder Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen* *heiße eine rationale oder irrationale Zahl, je nachdem er eigentlich oder uneigentlich ist.* Daran schließt sich sofort eine *Definition der Gleichheit: zwei Zahlen heißen gleich, wenn sie im Gebiete der rationalen Zahlen denselben Schnitt hervorbringen.* Aus dieser Defintion kann man geradezu *beweisen,* daß z. B. $\frac{1}{3}$ dem unendlichen Dezimalbruch 0,333 ... gleich ist. Man wird, wenn man sich einmal auf diesen Boden stellt, in der Tat einen Beweis dafür, d. h. eine Zurückführung auf die angegebene Definition, verlangen müssen, obwohl das dem naiv an die Sache Herantretenden natürlich ganz unnötig scheint. Dieser Beweis ergibt sich übrigens leicht, indem man sich überlegt, daß jede rationale Zahl unterhalb $\frac{1}{3}$ von den Näherungsbrüchen des unendlichen Dezimalbruches schließlich überschritten wird, während sie stets unterhalb aller rationalen Zahlen bleiben, die größer als $\frac{1}{3}$ sind. Die entsprechende Definition in den *Weierstraß*schen Vorlesungen erscheint in folgender Form: *zwei Zahlen heißen gleich, wenn sie sich um weniger unterscheiden, als jede noch so kleine vorgegebene Größe;* man sieht leicht den Zusammenhang mit der vorigen Erklärung. Besonders anschaulich wird die letzte Definition, wenn man sich überlegt, warum 0,999 ... gleich 1 ist; der Unterschied ist eben sicher kleiner als 0,1, kleiner als 0,01 usw., also nach der Definition überhaupt gleich Null.

Fragt man sich nun, warum man die Irrationalzahlen ins System der gewöhnlichen Zahlen aufnehmen und unterschiedslos mit ihnen *rechnen* kann, so ist der Grund in der Gültigkeit der *Monotoniegesetze* der elementaren Rechnungsoperationen zu suchen. Das Prinzip ist folgendes: *Hat man Irrationalzahlen zu addieren, multiplizieren usw., so schließe man sie enger und immer enger zwischen rationale Grenzen ein und mache mit diesen Grenzen die in Betracht kommenden Operationen; dann wird eben wegen der Gültigkeit der Monotoniesätze gleichzeitig auch das Resultat in immer engere Grenzen eingeschlossen.*

Es ist wohl nicht nötig, daß ich auf diese Dinge hier näher eingehe, da Ihnen bequem lesbare Darstellungen in sehr vielen Lehrbüchern, besonders wiederum bei *Weber-Wellstein* und *Burkhardt,* leicht zugänglich sind. Dort mögen Sie auch über die Definition der Irrationalzahl Ausführlicheres nachlesen, als ich hier andeuten konnte.

Ich möchte lieber wiederum auf das zu sprechen kommen, was Sie in den Büchern meist nicht finden, auf die Frage nämlich, *wie man nach dieser Voranstellung der arithmetischen Theorie zu den Anwendungen in den anderen Gebieten übergehen kann;* insbesondere kommt hier die *analytische Geometrie* in Betracht, die der naiven Anschauung gerade umgekehrt als Quelle der Irrationalzahlen erscheint und es psychologisch genommen in der Tat auch ist. Betrachten wir die Abszissenachse, auf der der Nullpunkt und auch die rationalen Punkte wie oben schon festgelegt sein mögen, so lautet der *Vordersatz,* auf dem diese Anwendung beruht: *Zu jeder rationalen oder irrationalen Zahl gibt es* *einen Punkt, der sie als Abszisse hat, zu jedem Punkt der Geraden gehört umgekehrt als Abszisse eine rationale oder irrationale Zahl.* Einen solchen obersten Satz, der an der Spitze einer Disziplin steht, und aus dem alles folgende rein logisch entwickelt wird, während er selbst nicht logisch bewiesen werden kann, nennt man ein *Axiom.* Er muß je nach der Veranlagung dem einzelnen Mathematiker entweder als *intuitiv einleuchtend* erscheinen, oder als *mehr oder minder willkürliche Verabredung* hingenommen werden. Das vorliegende Axiom über das eindeutige Entsprechen der reellen Zahlen einerseits und der Punkte der Geraden andererseits wird gewöhnlich als das *Cantorsche Axiom* bezeichnet, da *G. Cantor* der erste war, der es ausdrücklich formuliert hat (in den Mathem. Ann. Bd. 5. 1872).

Es ist hier die Stelle, über die *Natur der Raumanschauung* ein Wort zu sagen. Man belegt eigentlich *zwei verschiedene Erkenntnisquellen* mit dieser Bezeichnung: einmal die *sinnlich unmittelbare, die empirische Anschauung* des Raumes, die wir durch Messen kontrollieren können, dann aber die davon verschiedene *idealisierende innere Raumanschauung,* man kann vielleicht sagen, die uns innewohnende *Idee des Raumes,* die über die Ungenauigkeit der sinnlichen Wahrnehmung hinausgeht. Einen analogen Unterschied deutete ich schon bei der Besprechung des Anzahlbegriffes an. Wir kennzeichnen ihn am besten so: Was eine kleine Zahl, wie 2 oder 5 oder auch noch 7, bedeutet, ist uns unmittelbar klar, während wir von größeren Zahlen, etwa 2503, keine so unmittelbare Anschauung mehr haben; hier ist vielmehr an ihre Stelle die *innere Anschauung der geordneten Zahlreihe,* die wir uns aus den ersten Zahlen durch vollständige Induktion bilden, getreten. Mit der Raumanschauung nun liegt es ähnlich: Betrachten wir z. B. den Abstand zweier Punkte, so können wir ihn nur mit einer gewissen *beschränkten Genauigkeit* abschätzen und messen, denn unser Auge kann Strecken, deren Unterschied unter einer gewissen Grenze liegt, nicht mehr als verschieden auffassen; das ist die *Tatsache der Schwelle,* die in der ganzen Psychologie eine so große Rolle spielt. Diese Erscheinung bleibt dem Wesen nach auch bestehen, wenn wir unser Auge durch die denkbar schärfsten Hilfsmittel unterstützen; denn es gibt physikalische Eigenschaften, die einen gewissen Genauigkeitsgrad zu überschreiten nicht gestatten. Die Optik lehrt nämlich, daß die Wellenlänge des Lichtes, die bekanntlich mit der Farbe variiert, von der Größenordnung $\frac{1}{1000}$ mm (= 1 Mikron) ist; sie zeigt ferner, daß Gegenstände, deren Dimensionen gegen diese Größe klein sind, auch mit den besten Mikroskopen nicht mehr deutlich gesehen werden können, weil dann nur noch Beugung des Lichtes eintritt und infolgedessen kein optisches Bild mit genauen Reproduktionen der Einzelheiten mehr entworfen wird. *Die Folge davon ist die Unmöglichkeit, auf direktem optischen Wege wesentlich feinere Längenmessungen vorzu-*

nehmen als mit einer Genauigkeit von 1 Mikron, so daß bei direkt gemessenen Längenangaben in Millimetern nur die ersten 3 Dezimalen eine gesicherte Bedeutung haben können. Ebenso werden wir bei allen physikalischen Beobachtungen und Messungen stets auf solche nicht zu überschreitende Schwellenwerte stoßen, welche bei derartig gemessenen und in Millimetern angegebenen Längen die äußerste Grenze der möglichen Genauigkeit bestimmen. Angaben jenseits dieser Grenze haben keinen Sinn mehr und sind ein Zeichen von Unwissenheit oder gar Schwindel. Solche übertrieben genaue Zahlen findet man, beiläufig gesagt, öfters in den Reklameschriften von Badeorten, wo der Salzgehalt der Quellen, der übrigens auch von der Zeit abhängt, auf eine Anzahl von Dezimalen angegeben ist, deren genaue Bestimmung durch Wägung einfach unmöglich ist.

Gegenüber dieser Eigenschaft der empirischen Raumanschauung, an eine beschränkte Genauigkeit geknüpft zu sein, *beansprucht die abstrakte oder ideale Raumanschauung eine unbegrenzte Genauigkeit und geht darin nach dem Cantorschen Axiom mit den arithmetischen Definitionen des Zahlbegriffes genau parallel.*

Gemäß dieser Einteilung unserer Anschauung wird es nahe liegen, auch die *Mathematik in zwei Teile* zu teilen, die man als *Approximations- und Präzisionsmathematik* bezeichnet hat. Wollen wir diesen Unterschied an der Deutung einer Gleichung $f(x) = 0$ erläutern, so handelt es sich in der Approximationsmathematik genau wie in unserer tatsächlichen empirischen Anschauung nicht darum, daß der Wert $f(x)$ *genau* gleich 0 ist, sondern nur darum, daß sein Betrag $|f(x)|$ *unter der erreichbaren Schwelle ε der Genauigkeit* bleibt; die Schreibweise $f(x) = 0$ soll also nur eine Abkürzung für die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ sein, mit der man es tatsächlich zu tun hat. Erst die Präzisionsmathematik hat die Gleichung $f(x) = 0$ wirklich genau zu erfüllen. Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, kann man, etwas kraß ausgedrückt, auch sagen, *daß man eigentlich nur diese Disziplin „braucht"*, während die Präzisionsmathematik bloß zum intellektuellen Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine wertvolle und wohl kaum entbehrliche Stütze abgibt.

Ich schließe hier, um wieder auf unser eigentliches Thema zurückzukommen, die Bemerkung an, *daß die Begriffsbildung der Irrationalzahl sicherlich nur in die Präzisionsmathematik gehört.* Denn die Behauptung, daß zwei Punkte um eine irrationale Zahl von Millimetern voneinander abstehen, kann unmöglich realen Sinn haben, da doch, wie wir sahen, bei unseren starren Maßstäben, wenn in Metern gemessen wird, alle Dezimalstellen hinter der sechsten keine reale Bedeutung mehr haben. *Für die Praxis kann man also irrationale Zahlen unbedenklich durch rationale ersetzen.* Dem scheint freilich zunächst zu widersprechen, daß man in der Kristallographie von dem Gesetze der rationalen Indizes spricht oder daß man in der Astronomie als wesentlich verschiedene Fälle unterscheidet, ob die Umlaufszeiten zweier Planeten rationales oder irrationales Verhältnis haben. In der Tat aber zeigt sich in dieser Ausdrucksweise nur wieder die Vieldeutigkeit unserer Sprache; denn man meint hier rational und irrational in einem ganz andern als dem bisher benutzten, nämlich in einem *approximationsmathematischen Sinne*. In dieser Bedeutung sagt man nämlich, daß zwei Größen ein rationales Verhältnis haben, wenn sie sich wie zwei *kleine* ganze Zahlen verhalten, etwa wie $\frac{3}{7}$, während man ein Verhältnis $\frac{2021}{7053}$ schon irrational nennen würde; wie groß Zähler und Nenner in diesem zweiten Falle sein müssen, läßt sich nicht allgemein sagen und ist von dem gerade behandelten Problem abhängig. Alle diese interessanten Beziehungen habe ich in einer *Vorlesung im Sommersemester* 1901 behandelt, die 1902 autographiert wurde und jetzt mit dem Untertitel „Präzisions- und Approximationsmathematik" den dritten Band des gegenwärtigen Werkes bildet.

Mit einem Worte will ich nun zum Schluß noch darauf eingehen, wie ich mir die *Behandlung dieser Dinge auf der Schule* wünsche. Hier ist eine genaue Theorie der Irrationalzahl dem Interesse und der Fassungskraft der meisten Schüler gemäß kaum am Platze. Der Knabe wird sich meist mit Angaben von beschränkter Genauigkeit gern zufrieden geben, eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ mm schon bewundernd anstaunen und gar nach unbeschränkter Genauigkeit gewiß kein Verlangen tragen; es genügt also für diesen Durchschnitt, wenn man die Irrationalzahl *an Beispielen nur im allgemeinen verdeutlicht*, und so geschieht es wohl auch meistens. Freilich werden einzelne besonders veranlagte Schüler wohl über dieses Maß hinaus eine nähere Einsicht verlangen, und hier ist es eine lohnende Aufgabe der pädagogischen Kunst des Lehrers, mit den erwünschten weiteren Andeutungen nicht zurückzuhalten, ohne die Interessen der Mehrheit zu verletzen.

III. Von den besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Wir beginnen jetzt ein neues Kapitel, das der *eigentlichen Lehre von den ganzen Zahlen*, der *Zahlentheorie* oder *Arithmetik in engerem Sinne*, gewidmet sein soll. Ich will zunächst tabellarisch an die einzelnen Fragen erinnern, mit denen diese Wissenschaft in den Schulunterricht eingreift:

1. Das erste Problem der Zahlentheorie ist das der *Teilbarkeit*: Ist eine Zahl durch eine andere teilbar oder nicht?

2. Man kann einfache Regeln angeben, die über die *Teilbarkeit einer beliebigen Zahl durch kleinere Zahlen*, wie 2, 3, 4, 5, 9, 11 usw., leicht entscheiden lassen.

3. Es gibt *unendlich viele Primzahlen*, das sind Zahlen, die *keinen eigentlichen Teiler* (außer 1 und sich selbst) haben: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

4. Man beherrscht die Teilbarkeitsverhältnisse beliebiger Zahlen, wenn man ihre *Zerlegung in Primfaktoren* kennt.

5. Bei der *Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche* spielt die Zahlentheorie eine Rolle; sie zeigt, warum der Dezimalbruch *periodisch* werden muß und wie groß seine Periode wird.

Während diese Fragen bereits auf Quinta und Quarta behandelt werden, tritt später die Zahlentheorie nur mehr an vereinzelten Stellen auf, und zwar kommt allenfalls folgendes in Betracht:

6. Nicht auf jeder Schule, aber doch gelegentlich, ist von *Kettenbrüchen* die Rede.

7. Mitunter treten im Unterricht auch *diophantische Gleichungen* auf, das sind Gleichungen mit mehreren auf ganzzahlige Werte beschränkten Unbekannten. Als Beispiel hebe ich die *pythagoreischen Zahlen* hervor, von denen schon einmal gelegentlich gesprochen wurde (vgl. S. 34); es handelt sich da um die *ganzzahligen Lösungstripel* der Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

8. In enger Beziehung zur Zahlentheorie steht das *Problem der Kreisteilung*, obwohl dieser Zusammenhang auf der Schule kaum jemals herausgearbeitet wird. Soll man den Kreis in n gleiche Teile teilen, natürlich immer unter *alleiniger Verwendung von Lineal und Zirkel*, so geht das ganz leicht für $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Für $n = 7$ gelingt es aber nicht mehr, und daher bleibt man auf der Schule achtungsvoll vor dieser Aufgabe stehen; freilich spricht man es wohl nicht immer scharf aus, daß diese Konstruktion für $n = 7$ wirklich unmöglich ist — eine Tatsache, deren Grund in etwas tiefergehenden zahlentheoretischen Überlegungen liegt. Um Mißverständnisse, wie sie leider sehr häufig sind, zu vermeiden, betone ich ausdrücklich, daß es sich hier wieder nur um ein *Problem der Präzisionsmathematik* handelt, das für praktische Anwendungen ohne jede Bedeutung ist. In der Praxis wird man auch selbst in solchen Fällen, in denen eine „exakte" Konstruktion möglich ist, diese meistens nicht benutzen; denn auf dem Boden der Approximationsmathematik kann man viel zweckmäßiger durch einfaches, geschickt angeordnetes Probieren den Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen, wobei man eine vorgeschriebene praktisch mögliche Genauigkeit bequem erreichen kann. In dieser Weise verfährt jeder Mechaniker, der Instrumente mit geteilten Kreisen zu bauen hat.

9. Noch an einer Stelle wird auf der Schule die höhere Zahlentheorie gestreift, nämlich bei der an die *Quadratur des Kreises* anschließenden *Berechnung von π*. Man pflegt da nach irgendeinem Verfahren die ersten Dezimalen von π zu bestimmen und erwähnt

beiläufig vielleicht den *modernen Beweis für die Transzendenz von π, der das alte Problem der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal in negativem Sinne erledigt.* Ich werde am Schluß der Vorlesung ausführlich auf diesen Beweis zurückkommen. An dieser Stelle formuliere ich nur die Behauptung exakt dahin, *daß die Zahl π keiner algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind*:

$$a\pi^n + b\pi^{n-1} + \ldots + k\pi + l = 0;$$

die *Ganzzahligkeit* der Koeffizienten ist besonders wesentlich, und gerade deshalb gehört das Problem auch der Zahlentheorie an. — Natürlich handelt es sich auch hier lediglich um eine *Aufgabe der Präzisionsmathematik*, denn nur für diese hat der zahlentheoretische Charakter von π Bedeutung; dem Approximationsmathematiker genügt die Bestimmung der ersten Dezimalen, die ihm die praktische Ausführung der Quadratur des Kreises mit jeder überhaupt in Betracht kommenden Genauigkeit gestattet.

Damit wäre die Stellung der Zahlentheorie auf der Schule geschildert; fragen wir weiter, wie es im *Universitätsunterricht* und in der *wissenschaftlichen Forschung* um sie steht. Ich möchte da die selbständig arbeitenden Mathematiker hinsichtlich ihres Verhaltens zur Zahlentheorie in zwei Klassen teilen, die ich vielleicht als *Enthusiasten* und *Indifferente* unterscheiden kann. Für jene gibt es keine Wissenschaft, die so schön und wichtig wäre, keine, die so klare und präzise Beweise und Theoreme von völlig einwandfreier Strenge enthielte, wie die Zahlentheorie; „wenn die Mathematik die Königin der Wissenschaften ist, so ist die Zahlentheorie die Königin der Mathematik", sagt *Gauß* einmal. Den Indifferenten andererseits liegt die Zahlentheorie ganz fern, sie kümmern sich wenig um ihre Entwicklungen und gehen ihr wohl gar aus dem Wege. Die Mehrzahl der Studierenden dürfte in ihrem Verhalten mit dieser zweiten Richtung übereinstimmen.

Den *Grund dieser merkwürdigen Spaltung* glaube ich in folgendem finden zu können: Einmal ist die Zahlentheorie jedenfalls *grundlegend für alle tiefer gehenden mathematischen Forschungen;* außerordentlich häufig stößt man, von ganz verschiedenen Gebieten ausgehend, zuletzt auf verhältnismäßig einfache arithmetische Tatsachen. Andererseits aber ist die *reine Zahlentheorie eine äußerst abstrakte Sache,* und die Gabe, so Abstraktes mit Genuß auffassen zu können, findet man nicht sehr häufig; die schon daraus folgende Teilnahmslosigkeit dürfte der Umstand noch vergrößern, daß die zahlentheoretischen Lehrbücher sich meist befleißigen, auch in der Darstellung so abstrakt zu sein, wie nur irgend möglich. Ich glaube, *daß die Zahlentheorie viel zugänglicher werden und viel mehr allgemeines Interesse finden würde, wenn man sie in Verbindung mit anschaulichen Elementen und geeigneten Figuren vortragen wollte;* wenn ihre Sätze auch logisch von diesen Hilfsmitteln unabhängig sind, so dürfte doch das Verständnis durch sie sehr erleichtert werden. Das habe ich in Vorlesungen aus den Jahren 1895/96[1]) versucht, und ähnliche Ziele verfolgt auch das Buch von *H. Minkowski* über „*Diophantische Approximationen*"[2]). Meine Vorlesung hat einen mehr elementaren einführenden Charakter, während Minkowski sehr bald speziellere Probleme in weitgehender Weise behandelt.

Was *zahlentheoretische Lehrbücher* anlangt, so werden Sie vielfach mit dem ausreichen, was Sie zwischendurch in den Lehrbüchern der Algebra finden. Unter der großen Zahl der eigentlichen zahlentheoretischen Bücher möchte ich besonders *Bachmanns* „*Grundlagen der neueren Zahlentheorie*"[3]) nennen.

Die *spezielleren zahlentheoretischen Erörterungen*, auf die ich hier eingehe, will ich an die oben aufgeführten einzelnen Punkte anschließen, und ich will besonders darauf sehen, die Untersuchung immer möglichst anschaulich zu gestalten; natürlich kommt dabei immer nur hervor, was *für den Lehrer wissenswert* ist, keineswegs aber in einer Form, in der er es unmittelbar den Schülern weitergeben kann. Ich berufe mich für die Notwendigkeit solcher Ausführungen besonders auf *Examenserfahrungen*, die mir zeigen, daß sich die zahlentheoretischen Kenntnisse der Lehramtskandidaten vielfach nur auf Schlagwörter beschränken, ohne daß ein eingehenderes Wissen damit verbunden ist. Daß π „transzendent" ist, kann mir jeder Kandidat sagen; was dieses Wort aber bedeutet, wissen sehr viele nicht, einmal erhielt ich sogar die Antwort, daß eine transzendente Zahl weder rational noch irrational ist. Ebenso finde ich recht häufig Kandidaten, die wohl wissen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, aber von dem Beweis dafür keine Ahnung haben, obgleich er doch so einfach ist.

Ich will nun unsere zahlentheoretischen Überlegungen mit diesem Beweise beginnen, indem ich bei Ihnen die Bekanntschaft mit den in den ersten beiden Punkten unserer Aufzählung enthaltenen ganz einfachen Dingen ohne weiteres voraussetze. Geschichtlich bemerke ich vorab, daß der Beweis uns von *Euklid* übermittelt worden ist, dessen „*Elemente*" (griechisch στοιχεῖα) ja nicht nur das System der Geometrie, sondern *in geometrischer Sprache auch algebraische und arithmetische Dinge* enthalten. Der uns von *Euklid* überlieferte *Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen* verläuft so: Wäre die Folge der Primzahlen endlich, so möge ihre Reihe $1, 2, 3, 5, \ldots p$ sein; dann ist die Zahl $N = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1$ sicher weder durch 2, noch durch $3, 5, \ldots$, noch schließlich durch p teilbar, denn stets bleibt bei der Division

[1]) Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (Autographierte Vorlesungen, ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler). Neuer (bereits vergriffener) Abdruck. Leipzig 1907.

[2]) Mit dem Zusatz: Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907.

[3]) Sammlung Schubert Nr. 53. Leipzig 1907. Zweite Auflage, herausgegeben von R. Haußner, 1921. [Ein neueres einführendes Werk ist L. E. Dickson, Einführung in die Zahlentheorie (deutsche Übersetzung von E. Bodewig, Leipzig 1931).]

der Rest 1 übrig; daher muß sie entweder selbst eine Primzahl sein, oder es gibt außer 2, 3, ... p noch andere größere Primzahlen. Beides widerspricht der Voraussetzung, womit auf indirektem Wege der Beweis geführt ist.

Was den *vierten Punkt*, die *Zerlegung in Primfaktoren*, anlangt, so will ich Ihnen noch eine der älteren *Primfaktorentafeln* vorlegen: *Chernac, Cribum arithmeticum*[1]), ein großes, sehr verdienstvolles Tabellenwerk, das historisch um so mehr Beachtung verdient, als es in hohem Maße zuverlässig ist. Der Name der Tafel knüpft an das aus dem Altertum überlieferte Sieb des *Eratosthenes* an; es liegt dabei die Vorstellung zugrunde, daß man aus der Reihe aller Zahlen nach und nach die „aussiebt", welche durch 2, 3, 5, ... teilbar sind, so daß schließlich nur die Primzahlen übrig bleiben. Chernac gibt nun von allen nicht durch 2, 3 oder 5 teilbaren Zahlen die Zerlegung in Primfaktoren an, und zwar bis 1020000; dabei sind alle Primzahlen durch einen horizontalen Strich gekennzeichnet. Im Chernacschen Werke sind wohl überhaupt zum ersten Male alle zwischen den angeführten Grenzen liegenden Primzahlen angegeben. Man hat übrigens im 19. Jahrhundert die Bestimmung aller Primzahlen noch viel weiter, bis zu neun Millionen, ausgedehnt.

Ich wende mich nun dem *fünften Punkte* zu, der *Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche.* Die eingehende Theorie finden Sie bei Weber-Wellstein, ich will hier nur das Prinzip der Sache an einem einfachen typischen Beispiel erörtern: wir betrachten den Bruch $\frac{1}{p}$, wobei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl ist, und werden zeigen, *daß* $\frac{1}{p}$ *gleich einem unendlichen periodischen Dezimalbruch wird und daß die Zifferanzahl* δ *seiner Periode der kleinste Exponent ist, für den* 10^δ *durch* p *geteilt den Rest* 1 *läßt*, oder daß — zahlentheoretisch gesprochen — δ *der kleinste Exponent ist, der der „Kongruenz" genügt:*

$$10^\delta \equiv 1 (\operatorname{mod} p).$$

Der Beweis erfordert zunächst die Erkenntnis, daß diese Kongruenz überhaupt stets lösbar ist, und die vermittelt uns der sogenannte *kleine Fermatsche Satz*, welcher aussagt, daß für jede natürliche Zahl a und für jede zu a teilerfremde Primzahl p:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$$

ist; auf den Beweis dieses fundamentalen Satzes, der zum ständigen Werkzeug eines jeden Mathematikers gehört, will ich hier nicht erst eingehen. Weiterhin müssen wir noch aus der Zahlentheorie den Satz entnehmen, daß der in Frage stehende kleinste Exponent δ *entweder* $p-1$ *selbst oder ein Teiler von* $p-1$ ist. Den Fermatschen Satz auf die Zahl 10 und die Primzahl p anwendend, die wir zu 10 teilerfremd

[1]) Deventer 1811.

voraussetzten, finden wir also, daß $\frac{10^\delta - 1}{p}$ eine ganze Zahl N ist, und mithin:

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Denken wir nun sowohl $\frac{1}{p}$, als auch $\frac{10^\delta}{p}$ in einen Dezimalbruch verwandelt, so müssen in beiden die entsprechenden Dezimalstellen übereinstimmen, da ihre Differenz eine ganze Zahl ist. Da aber $\frac{10^\delta}{p}$ aus $\frac{1}{p}$ entsteht, indem man das Komma um δ Stellen nach rechts rückt, ergibt sich, daß die Dezimalstellen von $\frac{1}{p}$ bei dieser Operation ungeändert bleiben, mit anderen Worten, *daß der Dezimalbruch $\frac{1}{p}$ durch fortgesetzte Wiederholung derselben „Periode" von δ Ziffern entsteht.*

Um nun zu erkennen, daß es *keine kleinere Periode von $\delta' < \delta$-Ziffern* gibt, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Ziffernanzahl δ' *jeder* Periode der Kongruenz $10^{\delta'} \equiv 1$ genügen muß; denn wir wissen ja, daß δ die *kleinste* Lösung dieser Kongruenz war. Dieser Beweis ergibt sich durch einfache Umkehrung des vorigen Gedankenganges: Aus der Annahme folgt, daß $\frac{1}{p}$ und $\frac{10^{\delta'}}{p}$ in den Dezimalstellen übereinstimmen, also ist $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ eine ganze Zahl N' und daher $10^{\delta'} - 1$ durch p teilbar, d. h. in der Tat $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$. Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Ich gebe Ihnen noch einige möglichst einfache instruktive *Beispiele* dazu an, aus denen Sie ersehen mögen, daß δ die verschiedensten Werte, kleiner und gleich $p - 1$, wirklich annehmen kann. Bemerken Sie zuerst, daß für:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}33\ldots$$

die Ziffernanzahl der Periode $\delta = 1$ ist, und in der Tat ist bereits $10^1 \equiv 1 \pmod 3$. Ferner finden Sie für:

$$\tfrac{1}{11} = 0{,}0909\ldots$$

$\delta = 2$, und entsprechend $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$. Der Höchstwert $\delta = p - 1$ tritt u. a. bei:

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ \ldots$$

auf ($\delta = 6$); in der Tat sind, modulo 7 genommen, $10^1 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$ und erst $10^6 \equiv 1$.

Ich will nun in ähnlicher Weise über den *sechsten Punkt* meiner Aufzählung, *die Kettenbrüche*, sprechen. Dabei werde ich aber nicht die übliche abstrakt arithmetische Darstellung geben, die Sie anderwärts, z. B. im Weber-Wellstein, bevorzugt finden, sondern ich will Ihnen gerade an diesem Beispiel zeigen, ein wie klares und leicht verständliches Aussehen zahlentheoretische Dinge durch eine *geometrisch-anschaulische Darstellung* erhalten. Übrigens lenken wir mit dieser Verwendung geometrischer Hilfsmittel in der Zahlentheorie eigentlich nur in die alten Bahnen von *Gauß* und *Dirichlet* wieder ein; erst die neueren Mathematiker haben, etwa von 1860 an, die geometrischen Methoden aus der Zahlentheorie verbannt. Natürlich kann ich hier nur die *wichtigsten Gedankengänge und Theoreme ohne Beweise* kurz angeben, wobei ich auch annehme, daß Sie der elementaren Theorie der Kettenbrüche nicht ganz fremd gegenüberstehen; eine eingehende Darstellung enthält übrigens meine autographierte zahlentheoretische Vorlesung[1]).

Sie wissen, wie die *Kettenbruchentwicklung einer gegebenen positiven Zahl* ω entsteht: Wir sondern die größte positive ganze in ω enthaltene Zahl n_0 ab, indem wir schreiben:

$$\omega = n_0 + r_0, \qquad \text{wobei} \qquad 0 \leqq r_0 < 1,$$

behandeln, falls $r_0 \neq 0$ ist, $\frac{1}{r_0}$ ebenso wie ω:

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1, \qquad \text{wobei} \qquad 0 \leqq r_1 < 1,$$

und gehen in derselben Weise weiter:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2, \qquad \text{wobei} \qquad 0 \leqq r_2 < 1,$$

$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3, \qquad \text{wobei} \qquad 0 \leqq r_3 < 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Der Algorithmus *bricht nach endlich vielen Schritten* ab, wenn ω *rational* ist, da dann notwendig einmal ein verschwindender Rest r_ν auftritt; andernfalls ist er *unbegrenzt fortsetzbar*. In jedem Falle schreiben wir kurz als „*Kettenbruchentwicklung*" von ω:

$$\omega = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}}$$

Als Beispiel führe ich die Kettenbruchentwicklung für π an:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

[1]) Vgl. auch Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 209—211. Berlin 1922.]

Bricht man den Kettenbruch nach dem 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Teilnenner ab, so erhält man rationale Brüche, die *Näherungsbrüche von* ω:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \qquad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots;$$

sie stellen *außerordentliche gute Näherungswerte für die Zahl* ω dar, und zwar gibt — genauer gesagt — jeder einzelne von ihnen die *beste Annäherung, die man mit irgendeinem rationalen Bruch von nicht größerem Nenner überhaupt erzielen kann.* Diese Eigenschaft macht die Kettenbruchtheorie überall da praktisch wichtig, wo es sich darum handelt, Irrationalzahlen oder Brüche mit sehr großen Nennern (etwa Dezimalbrüche mit vielen Stellen) durch Brüche mit möglichst kleinen Nennern so gut wie möglich zu approximieren. Wie gut die Annäherung tatsächlich wird, sehen Sie aus folgender *Umrechnung der ersten Näherungsbrüche von* π *in Dezimalbrüche,* wenn Sie sie mit der Dezimalentwicklung $\pi = 3{,}14159265\ldots$ vergleichen:

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots,$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots.$$

Sie bemerken übrigens in diesem Beispiele, daß die Näherungsbrüche immer abwechselnd kleiner und größer als π sind. Entsprechendes gilt bekanntlich allgemein, so *daß also durch die Kettenbruchentwicklung* ω *alternierend von unten und oben in immer engere Grenzen eingeschlossen wird.*

Wir wollen nun diese Überlegungen durch *geometrische Bilder* beleben. Wir denken uns dazu (vgl. Abb. 8) im positiven Quadranten der x-y-Ebene — wenn wir uns auf die Betrachtung positiver Zahlen beschränken wollen — *alle Punkte mit ganzzahligen Koordinatenwerten* markiert, die ein sogenanntes *Punktgitter* bilden. Betrachten wir dieses Gitter, ich möchte fast sagen diesen „Sternhimmel" von Punkten, einmal vom Koordinatenanfangspunkt 0 aus. Der Leitstrahl von 0 nach dem Punkte $(x = a,\ y = b)$ hin hat die Gleichung:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

und umgekehrt liegen auf jedem solchen Strahle $\frac{x}{y} = \lambda$ mit rationalem $\lambda = \frac{a}{b}$ unendlich viele ganzzahlige Punkte $(ma,\ mb)$, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Man sieht daher von 0 aus *in allen rationalen Richtungen und nur in diesen* Punkte unseres Gitters, das Gesichtsfeld ist überall dicht, aber doch nicht vollständig und kontinuierlich mit „Sternen" erfüllt; man mag geneigt sein, diesen Anblick mit dem der

Milchstraße zu vergleichen. — *Auf einem irrationalen Strahle* $\frac{x}{y} = \omega$, *wobei* ω *irrational ist, liegt also außer* 0 *selbst kein einziger ganzzahliger Punkt*, was an sich schon recht bemerkenswert ist. Offenbar macht eine solche Gerade, wie wir in Erinnerung an Dedekinds Definition der Irrationalzahl sagen können, einen *Schnitt im Gebiete aller ganzzahligen Punkte*, indem sie das Punktgitter *in einen links und einen rechts von ihr gelegenen Punkthaufen scheidet*. Fragen wir nun, wie diese beiden Punkthaufen sich gegen unsern Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ abgrenzen, so ergibt sich eine äußerst einfache Beziehung zur Kettenbruchentwicklung von ω. Markieren wir nämlich zu jedem der Näherungsbrüche $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ den Punkt $(x = p_\nu, y = q_\nu)$, so müssen die Strahlen nach diesen Punkten den Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ immer besser abwechselnd von links und rechts approximieren, in demselben Maße wie die Zahlen $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ den Wert ω approximieren. Darüber hinaus nun findet man folgendes Theorem, wenn man die bekannten zahlentheoretischen Eigenschaften der p_ν, q_ν benutzt: *Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt*, wie etwa bei dem sogenannten chinesischen Billard, *und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des* ω*-Strahles mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte* (p_ν, q_ν), *welche die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von* ω *zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die Näherungsbrüche mit geradem, zu dem rechten die mit ungeradem Index.* Damit hat man eine neue, und, wie man wohl sagen muß, äußerst anschauliche geometrische Definition der Kettenbruchentwicklung. Die in Figur 8 gegebene Abbildung entspricht dem Fall:

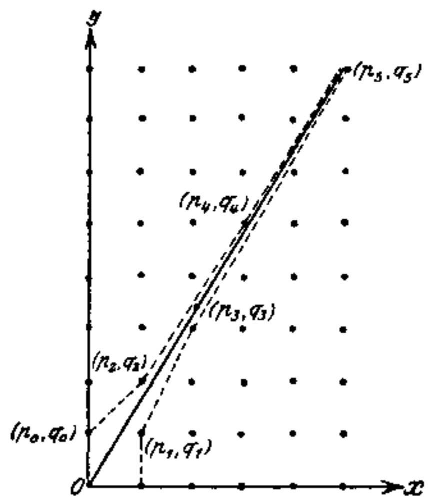


Abb. 8.

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

ist also für die Irrationalität des regulären Zehnecks entworfen; hier sind die ersten Ecken der beiden Polygone:

links: $p_0 = 0,\ q_0 = 1;\quad p_2 = 1,\ q_2 = 2;\quad p_4 = 3,\ q_4 = 5;\ \ldots$

rechts: $p_1 = 1,\ q_1 = 1;\quad p_3 = 2,\ q_3 = 3;\quad p_5 = 5,\ q_5 = 8;\ \ldots$

Für π wachsen die Werte p_ν, q_ν weit rascher, so daß man in concreto die Abbildung kaum wird zeichnen können. Den Beweis unseres Theorems, auf den ich hier nicht eingehen kann, finden Sie ganz ausführlich in meiner auf Seite 43 genannten autographierten Vorlesung dargestellt.

Ich gehe nun zur Behandlung des *siebenten Punktes*, der *pythagoreischen Zahlen*, über; hier werden wir die Raumanschauung in etwas anderer Form benutzen. Statt der Gleichung:

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = c^2,$$

deren ganzzahlige Lösungen gesucht werden, betrachten wir, indem wir:

$$(2) \qquad \frac{a}{c} = \xi, \qquad \frac{b}{c} = \eta$$

setzen, die Gleichung:

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1$$

und haben nun die Aufgabe, alle *rationalen Zahlenpaare* ξ, η zu bestimmen, die ihr genügen. Wir gehen demgemäß von der Vorstellung *aller rationalen Punkte* ξ, η (d. h. aller Punkte mit rationalen Koordinaten ξ und η) aus, welche die ξ-η-Ebene überall dicht erfüllen. Nun stellt $\xi^2 + \eta^2 = 1$ den *Einheitskreis* in dieser Ebene um den Nullpunkt dar, und unsere Aufgabe kommt auf die Frage hinaus, *wie sich dieser Kreis zwischen den überall dicht liegenden rationalen Punkten hindurchwindet, insbesondere welche dieser Punkte er enthält.* Einige solcher Punkte kennen wir von Haus aus, nämlich die Schnittpunkte mit den vier Halbachsen, von denen wir vorzugsweise den Punkt S ($\xi = -1$, $\eta = 0$) betrachten wollen (vgl. Abb. 9). Die sämtlichen Strahlen durch S lassen sich durch die Gleichung:

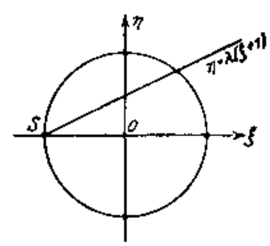


Abb. 9.

$$(4) \qquad \eta = \lambda(\xi + 1)$$

darstellen. Wir nennen den einzelnen Strahl *rational* oder *irrational*, je nachdem der Parameter λ rational ist oder nicht. Nun gilt der Doppelsatz, *daß jeder rationale Punkt des Kreises aus S durch einen rationalen Strahl projiziert wird und daß jeder rationale Strahl* (4) *den Kreis in einem rationalen Punkte schneidet.* Die erste Hälfte dieses Satzes ist wohl unmittelbar klar. Die zweite beweisen wir durch direkte Rechnung, indem wir (4) in (3) einsetzen; wir erhalten dann für die Abszisse des Schnittpunktes die Gleichung:

$$\xi^2 + \lambda^2 (\xi + 1)^2 = 1\,,$$

oder:

$$(1 + \lambda^2)\,\xi^2 + 2\lambda^2\,\xi + \lambda^2 - 1 = 0\,.$$

Eine Lösung $\xi = -1$ dieser Gleichung, die dem Schnitte S entsprechende, kennen wir von vornherein; für die andere ergibt sich durch eine kleine Rechnung:

$$\xi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}\,, \tag{5a}$$

und aus (4) folgt als zugehörige Ordinate:

$$\eta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}\,. \tag{5b}$$

Aus (5a) und (5b) folgt, daß der zweite Schnitt bei rationalem λ in der Tat ein rationaler Punkt ist.

Unser nunmehr vollständig bewiesener Doppelsatz läßt sich auch dahin aussprechen, *daß alle rationalen Punkte des Kreises durch die Formeln* (5) *bei beliebigem rationalen λ dargestellt sind.* Damit ist aber unsere Aufgabe gelöst, und wir haben nur noch den Übergang zu den ganzen Zahlen zu machen. Dazu setzen wir:

$$\lambda = \frac{n}{m}\,,$$

wobei n, m ganze Zahlen sein mögen, und erhalten aus (5):

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\,, \qquad \eta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

als Inbegriff aller rationalen Lösungen von (3). Sämtliche ganzzahligen Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1), d. h. *alle pythagoreischen Zahlen, sind also in der Form:*

$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn\,, \qquad c = m^2 + n^2$$

gegeben, und zwar erhält man bereits alle teilerfremden Lösungen, wenn m, n alle Paare von teilerfremden ganzen Zahlen durchlaufen. Wir haben damit eine sehr anschauliche Ableitung dieses sonst so abstrakt erscheinenden Resultates erhalten.

Im Anschluß hieran will ich noch auf den „*großen Fermatschen Satz*" zu sprechen kommen. Es liegt ganz im Sinne der alten Geometer, wenn man die Fragestellung der pythagoreischen Zahlen aus der Ebene in den Raum von 3 und mehr Dimensionen in folgender Weise überträgt: Ist es möglich, daß die Summe der Kuben zweier ganzer Zahlen wieder ein Kubus, oder daß die Summe zweier Biquadrate wieder ein Biquadrat ist usw., oder allgemein: *Ist für beliebiges ganzzahliges n die Gleichung:*

$$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen Zahlen lösbar? Diese Frage hat Fermat eben durch das nach ihm benannte Theorem verneinend beantwortet: *Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für keinen ganzzahligen Wert von n außer für $n = 1$ und $n = 2$ in ganzen Zahlen lösbar.* Gestatten Sie zunächst einige historische Notizen: Fermat lebte von 1601 bis 1665 und war in Toulouse Parlamentsrat, also Jurist. Er beschäftigte sich aber viel und in fruchtbarster Weise mit mathematischen Fragen, so daß man ihn mit zu den größten Mathematikern rechnen darf. Fermats Name verdient unter den Begründern der analytischen Geometrie, der Infinitesimalrechnung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung an hervorragender Stelle genannt zu werden; besonders bedeutend jedoch sind seine *zahlentheoretischen Leistungen.* Alle seine Resultate auf diesem Gebiet sind als Randbemerkungen zu seinem *Handexemplar des Diophant* hinterlassen, des großen antiken Zahlentheoretikers, der wahrscheinlich um 300 n. Chr., also etwa 600 Jahre

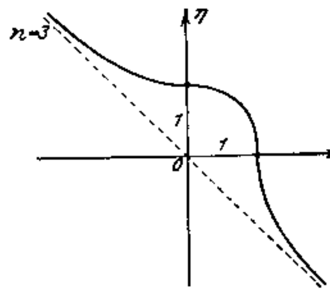


Abb. 10.

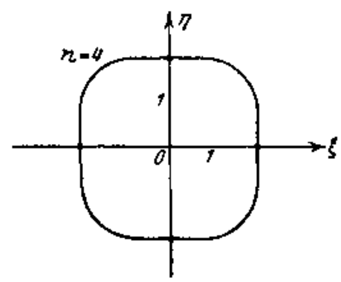


Abb. 11.

nach Euklid, in Alexandria lebte; sie wurden in dieser Gestalt erst 5 Jahre nach Fermats Tode von seinem Sohne veröffentlicht. Er selbst hat nichts publiziert, sondern seine Arbeiten nur zum Teil durch einen umfangreichen Briefwechsel mit den Bedeutendsten seiner Zeitgenossen bekannt gemacht. In jener Diophantausgabe steht nun auch der große Satz, der uns jetzt beschäftigt, und dazu schreibt Fermat, „er habe einen wirklich wunderbaren Beweis gefunden, doch sei der Rand zu eng, um ihn zu fassen"[1]). Es ist bis heute nicht gelungen, einen Beweis dieses Satzes zu finden!

Um uns über seinen Inhalt etwas näher zu orientieren, fragen wir, wie bei $n = 2$, zunächst nach den *rationalen* Lösungen der Gleichung:

$$\xi^n + \eta^n = 1\,,$$

d. h. nach der Lage der dadurch dargestellten Kurven zu der Gesamtheit der rationalen Punkte der ξ-η-Ebene. Für $n = 3$ und $n = 4$ haben die Kurven ungefähr das in den obenstehenden Abbildungen 10, 11 skizzierte Aussehen; sie enthalten jedenfalls die Punkte $\xi = 0$, $\eta = 1$ und $\xi = 1$,

[1]) Vgl. die Fermatausgabe der Pariser Akademie: Oeuvres de Fermat, T. I, S. 291. Paris 1891 und T. III, S. 241. Paris 1896.

$\eta = 0$ bzw. $\xi = 0$, $\eta = \pm 1$ und $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$. Die Fermatsche Behauptung besagt nun, daß diese Kurven — im Gegensatz zu dem vorhin betrachteten Kreise — sich durch die überall dicht liegende Menge der rationalen Punkte hindurchschlängeln, ohne sonst auch nur noch einen einzigen zu treffen.

Das Interesse dieses Satzes beruht vor allem darauf, *daß alle Anstrengungen, einen vollständigen Beweis für ihn zu finden, bisher vergeblich waren.* Was Beweisversuche anlangt, ist vor allem *Kummer* zu nennen, der das Problem sehr wesentlich förderte, *indem er es mit der Theorie der „algebraischen" Zahlen in Verbindung brachte,* insbesondere zunächst mit der *Theorie der „Kreisteilungszahlen"*. Unter Benutzung der n^{ten} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ kann man nämlich $z^n - y^n$ in n Linearfaktoren spalten und erhält für die Fermatsche Gleichung:

$$x^n = (z - y)(z - \varepsilon y)(z - \varepsilon^2 y) \cdots (z - \varepsilon^{n-1} y),$$

d. h. es soll die n^{te} Potenz der ganzen Zahl x in n Faktoren zerlegt werden, die aus zwei ganzen Zahlen y, z und der Zahl ε in der angedeuteten Weise aufgebaut sind. Für solche Zahlen entwickelte nun Kummer ganz ähnliche Theorien, wie sie für die gewöhnlichen ganzen Zahlen von altersher bekannt sind, die also auf den Begriffen der Teilbarkeit, der Faktorenzerlegung usw. beruhen. Man spricht demgemäß von *ganzen algebraischen Zahlen* und hier speziell von *Kreisteilungszahlen,* wegen der Beziehung der Zahl ε zur Kreisteilung. *Der Fermatsche Satz ist also für Kummer ein Theorem über die Faktorenzerlegung im Bereiche der algebraischen Kreisteilungszahlen,* und aus deren Theorie versucht er einen Beweis für ihn abzuleiten. *Das ist ihm nun in der Tat für eine sehr große Anzahl von Werten n geglückt,* insbesondere z. B. für alle Werte von n unter 100; unter den größeren Zahlen jedoch finden sich *Ausnahmewerte,* für die ihm und auch den neueren Mathematikern, die seine Untersuchungen fortführten, der Beweis bis jetzt nicht gelungen ist. Ich muß mich hier mit diesen Andeutungen begnügen, nähere Angaben über den Stand des Problems und über die Kummerschen Publikationen finden Sie in der mathematischen Enzyklopädie, Bd. I, 2, S. 714, am Ende des Referates von *Hilbert* über die *„Theorie der algebraischen Zahlkörper"*. Hilbert selbst gehört zu denen, die die Kummerschen Untersuchungen fortgesetzt und ausgedehnt haben[1]).

Daß freilich Fermats „wunderbarer Beweis" in dieser Richtung gelegen hat, kann kaum angenommen werden; denn es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß er mit algebraischen Zahlen operieren konnte zu einer Zeit, in der man noch nicht einmal sicher über das Imaginäre Bescheid wußte; auch war die Zahlentheorie damals noch recht unent-

---

[1]) Eine zusammenfassende Darstellung der elementaren, auf den Fermatschen Satz sich beziehenden Untersuchungen findet man bei *P. Bachmann:* Das Fermatproblem. Berlin 1919.]

wickelt und erhielt erst gerade durch Fermat weitgehende Anregungen. Andererseits ist nicht anzunehmen, daß ein Mathematiker vom Range Fermats einen Fehler in seinem Beweise begangen hat, wenngleich solche Fehler auch schon bei den größten Mathematikern vorgekommen sind. Wir müssen also wohl glauben, daß ihm der Beweis durch einen besonders glücklichen einfachen Gedanken gelungen ist. Da wir aber nicht den mindesten Anhalt für die Richtung haben, in der man diesen Gedanken suchen könnte, so *ist ein vollständiger Beweis des Fermatschen Satzes wahrscheinlich nur durch systematische Weiterführung der Arbeiten Kummers zu erwarten.*

Diese Fragen wurden besonders aktuell, als unserer Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ein *Preis von 100 000 Mark für die Erledigung des Fermatschen Satzes* zur Verfügung gestellt wurde. Er ist eine Stiftung des im Jahre 1906 verstorbenen Mathematikers *Wolfskehl in Darmstadt*, der sich wahrscheinlich sein Leben lang mit dem Fermatschen Satz beschäftigt und aus seinem großen Vermögen diese Stiftung hinterlassen hat für den Glücklichen, der entweder den Fermatschen Satz allgemein beweist oder ihn durch Angabe eines einzigen Gegenbeispieles widerlegt[1]). Freilich wäre auch eine solche Widerlegung keine ganz einfache Sache, da der Satz für Exponenten unter 100 ja schon bewiesen ist und man also mit ungemein großen Zahlen zu rechnen anfangen muß.

Wie der Mathematiker, der die ganze Sachlage und die Anstrengungen von Kummer und seinen Nachfolgern bei ihren Beweisversuchen kennt, über die Schwierigkeit der Gewinnung dieses Preises denken muß, geht aus meinen vorigen Erörterungen hervor. Das *große Publikum* ist freilich anderer Meinung. Seit im Spätsommer 1907 die Nachricht von dem Preise durch die Zeitungen ging — die übrigens nicht zur Veröffentlichung autorisiert waren — ist bei uns ein ungeheurer Stoß von „Beweisen" eingelaufen; Leute aller Berufsstände, Ingenieure, Volksschullehrer, Geistliche, ein Bankier, viele Damen usw. sind an diesen Einsendungen beteiligt. Allen gemeinsam ist nur das, daß sie *keine Ahnung von der ernsten mathematischen Bedeutung des Problems* haben, daß sie auch nicht den Versuch machen, sich darüber zu unterrichten, sondern daß sie durch einen plötzlichen Einfall die Lösung finden wollen, wobei natürlich ausnahmslos etwas ganz Falsches herauskommt. Was da an Verkehrtheiten zutage gefördert wird, kann man in den kritischen Besprechungen solcher Beweise sehen, die A. Fleck, der von Beruf praktischer Arzt ist, Ph. Maennchen und O. Perron im „Archiv für Mathematik und Physik"[2]) in größerer Anzahl bringen.

---

[1]) Die ausführlichen Bedingungen für die Bewerbung um den [nun längst entwerteten] Preis sind veröffentlicht in den Nachrichten d. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftl. Mitt. 1908, S. 103f. und in vielen math. Zeitschriften abgedruckt (vgl. z. B. Math. Ann. Bd. 66, S. 143; Journ. f. Math. Bd. 134, S. 313).

[2]) [Bd. XIV, XV, XVI, XVII, XVIII (1901—1911).]

Diese Massenabschlachtungen sind sehr amüsant zu lesen, so traurig es eigentlich ist, daß sie notwendig sind. Ein Beispiel möchte ich erwähnen, das zu unserer Behandlung des Falles $x^2 + y^2 = z^2$ in Beziehung steht. Man untersucht, ob sich für die Funktion $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$ eine rationale Parameterdarstellung gewinnen läßt und findet das aus der Theorie der algebraischen Funktionen schon längst bekannte Resultat, daß dies — im Gegensatz zu dem Falle $n = 2$ — nicht möglich ist. Nun beachtet man nicht, daß eine nicht rationale Funktion für einzelne rationale Werte des Arguments gar wohl rationalzahlige Werte annehmen kann, und glaubt den Fermat bewiesen zu haben.

Ich schließe damit die Erörterungen über den Fermatschen Satz und komme zum *achten Punkt* meiner Aufzählung, dem *Probleme der Kreisteilung*. Ich darf wohl hierbei das Operieren mit komplexen Zahlen $x + iy$ und ihre Darstellung in der komplexen x-y-Ebene als Ihnen allen bekannt benutzen, obwohl wir systematisch erst später darauf eingehen werden. Es handelt sich nun um *das Problem, den Kreis in n gleiche Teile zu teilen* oder *ein reguläres n-Eck zu konstruieren.* Wir identifizieren den Kreis mit dem Einheitskreis um den Nullpunkt der komplexen x-y-Ebene und nehmen $x + iy = 1$ als ersten der n Teilpunkte (vgl. Abb. 12, in der $n = 5$ gewählt ist); dann genügen die den n Ecken zugehörigen komplexen Zahlen:

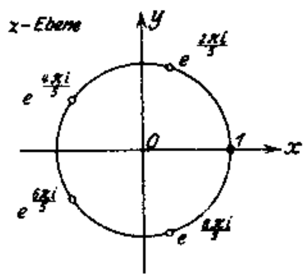


Abb. 12.

$$z = x + iy = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

nach dem Moivreschen Satze der Gleichung:

$$z^n = 1,$$

und damit ist *die Aufgabe der Kreisteilung auf die Lösung dieser einfachen algebraischen Gleichung zurückgeführt.* Da sie stets die rationale Wurzel $z = 1$ hat, ist $z^n - 1$ durch $z - 1$ teilbar, und für die übrigen $n - 1$ Wurzeln bleibt die sog. *Kreisteilungsgleichung*:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0,$$

eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei der alle Koeffizienten gleich $+1$ sind.

Aus dem Altertum stammt das Interesse für die Frage, *welche regulären Polygone man mit Lineal und Zirkel präzisionsgemäß konstruieren kann.* Es war auch im Altertum schon bekannt, daß diese Aufgabe für die Eckenanzahlen $n = 2^h, 3, 5$ (bei beliebigem ganzzahligen h) und ebenso für die zusammengesetzten Werte $n = 2^h \cdot 3$, $n = 2^h \cdot 5$, $n = 2^h \cdot 3 \cdot 5$ möglich ist. Auf diesem Punkte blieb das Problem bis zum Ende des 18. Jahrhunderts stehen, wo sich der junge *Gauß* mit ihm beschäftigte. Er fand, *daß für alle Primzahlen von der Form* $p = 2^{(2^\mu)} + 1$ *und für alle n von der Form* $n = 2^h p_1 p_2 \ldots p_k$, *wobei alle* p_i *voneinander verschieden sind, die Kreisteilung mit Lineal und Zirkel möglich ist, aber für keine anderen.* Für die ersten Werte $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ergibt $p = 2^{(2^\mu)} + 1$ in der Tat Primzahlen, und zwar:

$$3, 5, 17, 257, 65537;$$

davon waren die ersten beiden Fälle bereits bekannt, während die andern wesentlich Neues lieferten. Besonders berühmt ist das *reguläre Siebzehneck*, dessen Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal von Gauß zum erstenmal bewiesen ist. Übrigens ist nicht bekannt, für welche μ die obige Formel Primzahlen liefert. Man weiß aber z. B. seit *Euler*, daß sie für $\mu = 5$ eine zusammengesetzte Zahl gibt. Auf Einzelheiten will ich auch hier wieder nicht eingehen, sondern lieber die allgemeinen Verhältnisse und die Bedeutung dieser Entdeckung schildern. Genaueres über das reguläre Siebzehneck finden Sie bei Weber-Wellstein.

Ich möchte Sie hier besonders auf das im 57. Bande der mathematischen Annalen (1903) und in Band X, 1 (1917) von Gauß' Werken abgedruckte *Gaußsche Tagebuch* aufmerksam machen; das ist ein kleines unscheinbares Heft, das Gauß von 1796 an, kurz vor seinem 19. Geburtstage beginnend, geführt hat. Gerade die erste Eintragung bezieht sich auf die Möglichkeit der Konstruktion des Siebzehnecks (30. März 1796); mit dieser frühzeitigen bedeutenden Entdeckung reifte in Gauß erst der Entschluß, sich endgültig der Mathematik zu widmen. Die Durchsicht dieses Tagebuchs muß jeden Mathematiker aufs höchste interessieren, da es auch weiterhin die Entstehungsgeschichte der Gaußschen grundlegenden Entdeckungen im Gebiete der Zahlentheorie, der elliptischen Funktionen usw. genau verfolgen läßt.

Die Publikation jener ersten großen Entdeckung von Gauß erfolgte durch eine kurze Mitteilung in der „Jenaer Literaturzeitung“ vom 1. Juni 1796, veranlaßt von Gauß' Lehrer und Gönner, dem Hofrat *Zimmermann* zu Braunschweig, und von diesem mit einer kurzen persönlichen Note begleitet[1]). Den Beweis hat Gauß erst später in der grundlegenden zahlentheoretischen Schrift, den *„Disquisitiones arithmeticae“*[2]) von 1801, veröffentlicht; dort findet sich auch zum erstenmal der in jener Note noch fehlende negative Teil des Satzes, *daß für andere Primzahlen als die in der Form* $2^{2^\mu} + 1$ *enthaltenen, z. B. schon für 7, die Kreisteilung nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist.* Von diesem wichtigen *Unmöglichkeitsbeweise* will ich Ihnen hier einen Fall vorführen — um so lieber, als im großen Publikum so *wenig Verständnis für Beweise*

[1]) Abgedruckt gleichfalls in Math. Ann. Bd. 57, S. 6. 1903 [sowie in Gauß' Werken Bd. X, 1. 1917].

[2]) Abgedruckt Werke Bd. I.

dieser Art vorhanden ist. Die moderne Mathematik hat durch solche Unmöglichkeitsbeweise eine ganze Reihe berühmter Probleme erledigen können, um deren Lösung sich seit dem Altertum zahlreiche Mathematiker vergeblich bemüht haben; ich erinnere neben der Konstruktion des Siebenecks nur an die *Dreiteilung des Winkels* und die *Quadratur des Kreises* mit Zirkel und Lineal. Trotzdem gibt es erschreckend viel Leute, die sich immer wieder mit diesen Aufgaben beschäftigen, ohne von höherer Mathematik eine Ahnung zu haben und ohne die Problemstellung des Unmöglichkeitsbeweises auch nur zu kennen oder zu verstehen; ihren Kenntnissen gemäß, die sich meist auf Elementargeometrie beschränken, probieren sie es in der Regel mit dem Ziehen von Hilfslinien und Hilfskreisen und häufen diese schließlich so, daß kein Mensch sich mehr ohne ungebührlichen Zeitaufwand aus dem Gewirr herausfindet und dem Autor den Fehler seiner Konstruktion direkt nachweisen kann. Ein Hinweis auf den arithmetischen Unmöglichkeitsbeweis hilft diesen Leuten gegenüber meistens nichts, da sie höchstens einer direkten Berücksichtigung und Widerlegung ihres Beweises zugänglich sind. Jedes Jahr bringt jedem nur einigermaßen bekannten Mathematiker eine ganze Menge solcher Zusendungen, und auch an Sie werden einst, wenn Sie im Leben stehen, solche Beweise herantreten; es ist gut, wenn Sie von vornherein auf diese Erlebnisse vorbereitet sind und wissen, woran Sie sich zu halten haben. Vielleicht kann es Ihnen dann von Nutzen sein, wenn Sie einen bestimmten Unmöglichkeitsbeweis in möglichst einfacher Form beherrschen.

So möchte ich Ihnen denn jetzt den Beweis dafür ausführlich vortragen, *daß das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal im Sinne der Präzisionsgeometrie konstruiert werden kann.* Es ist bekannt, daß jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal ihr rechnerisches Äquivalent in einer Folge übereinander gestellter Quadratwurzeln findet und daß man umgekehrt jeden solchen Quadratwurzelausdruck durch Schneiden von Geraden und Kreisen geometrisch darstellen kann; Sie werden sich das leicht selbst überlegen können. Wir können unsere Behauptung also analytisch so formulieren, *daß die für das Siebeneck charakteristische Gleichung* 6^{ten} *Grades:*

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

nicht durch eine Folge von endlich vielen Quadratwurzeln gelöst werden kann. Dies ist nun eine sogenannte *reziproke Gleichung*, d. h. sie hat mit z gleichzeitig auch immer $\frac{1}{z}$ zur Wurzel; man sieht das deutlich, wenn man sie in der Form schreibt:

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0\,. \tag{1}$$

Eine solche Gleichung kann sofort auf eine Gleichung von der halben Gradzahl reduziert werden, wenn man:

$$z + \frac{1}{z} = x$$

als neue Unbekannte einführt; eine leichte Rechnung ergibt für x die kubische Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0, \tag{2}$$

und man sieht unmittelbar, daß die Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig durch Quadratwurzeln lösbar sind oder nicht. Übrigens kann x sofort in direkte geometrische Beziehung zur Konstruktion des Siebenecks gebracht werden. Man erkennt nämlich durch Betrachtung des Einheitskreises in der komplexen Ebene leicht folgendes: Bezeichnet man mit $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ den Zentriwinkel des regulären Siebenecks und berücksichtigt, daß $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ die $z = 1$ zunächst gelegenen Ecken des Siebenecks sind, so wird $x = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$ (vgl. Abb. 13); man kann daher nach Kenntnis von x das Siebeneck sofort konstruieren.

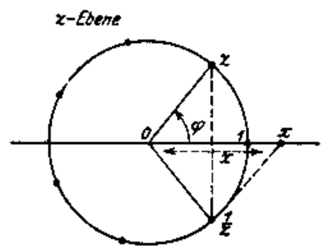


Abb. 13.

Wir haben nun zu zeigen, *daß die kubische Gleichung* (2) *nicht durch Quadratwurzeln auflösbar ist.* Dieser Beweis *zerfällt in einen arithmetischen und einen algebraischen Teil*, und wir beginnen mit dem ersteren, indem wir zeigen, daß die kubische Gleichung (2) *irreduzibel* ist, d. h. daß ihre linke Seite nicht in Faktoren mit rationalzahligen Koeffizienten gespalten werden kann. Nehmen wir zunächst an, daß unsere Gleichung reduzibel wäre. Dann müßte ihre linke Seite einen linearen Faktor mit rationalen Koeffizienten, also auch eine rationale Nullstelle besitzen. Diese kann keine ganze Zahl p sein, denn die Gleichung (2) liefert: $1 = p\,(p^2 + p - 2)$, also eine Gleichung, die ihrerseits nur erfüllbar wäre, wenn die Faktoren p und $p^2 + p - 2$ beide den Wert $+1$ oder beide den Wert -1 annehmen könnten. Dies ist aber nicht der Fall, bleibt mithin nur zu untersuchen, ob die Nullstelle eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist, wo p und q als teilerfremde ganze Zahlen angenommen werden können und $q \neq 1$ ist. Das hieße aber $p^3 + p^2 q - 2pq^2 - q^3 = 0$, und also wäre p^3 und mithin auch p selbst gegen die Annahme durch q teilbar. Ebenso folgt aber, daß q^3 und somit auch q durch p teilbar sein müßte. Daher würde sich $p = \pm q$ ergeben und die Gleichung (2) müßte die Wurzel $x = \pm 1$ besitzen. Durch unmittelbares Ausrechnen stellt man jedoch fest, daß dies nicht der Fall ist.

Der *zweite Teil des Beweises* wird jetzt darin bestehen, zu zeigen, *daß eine irreduzible kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten nicht* *durch Quadratwurzeln lösbar ist*; er ist wesentlich *algebraischer* Natur, doch wollen wir ihn des Zusammenhanges wegen gleich hier mit erledigen Wir wollen die Behauptung positiv so wenden: *Ist eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten* A, B, C:

$$f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{8}$$

durch Quadratwurzeln lösbar, so hat sie sicher eine rationale Wurzel, d. h. sie ist reduzibel; denn die Existenz einer rationalen Wurzel α ist gleichbedeutend mit der Existenz eines *rationalen* Faktors $x - \alpha$ von $f(x)$ und also mit der Reduzibilität.

Diesem Beweise muß (das ist der wichtigste Punkt) *eine Klassifikation aller durch Quadratwurzeln gebildeten Ausdrücke* vorangehen, genauer gesagt, *aller Ausdrücke, die aus endlich vielen Quadratwurzeln und rationalen Zahlen durch rationale Operationen aufgebaut sind*; ein konkretes Beispiel ist:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c}}{\sqrt{d + \sqrt{e + \sqrt{f}}}},$$

wobei a, b, ..., f rationale Zahlen sind. Natürlich reden wir immer nur von solchen Wurzeln, die sich nicht rational ausziehen lassen; alle anderen denken wir ein für allemal fortgeschafft.

Jeder solche Ausdruck ist eine rationale Funktion einer gewissen Anzahl von Quadratwurzeln, in unserm Beispiel von dreien, und wir wollen zunächst *eine einzige solche Quadratwurzel* betrachten, deren Radikand übrigens noch einen beliebig komplizierten Aufbau haben kann. *Unter ihrer „Ordnung" verstehen wir die größte in ihr auftretende Anzahl übereinander gestellter Wurzelzeichen.* So haben z. B. die im Zähler des vorstehenden α auftretenden Wurzeln die Ordnung 2 bzw. 1; die im Nenner befindliche hat die Ordnung 3.

Bei einem *allgemeinen Quadratwurzelausdruck* fassen wir nun die *Ordnungszahlen der verschiedenen „einfachen Quadratwurzelausdrücke" der eben betrachteten Art* auf, aus denen er sich rational aufbaut, und *bezeichnen die größte unter ihnen als Ordnung* μ *des vorgelegten Ausdruckes;* in unserm Beispiele ist also $\mu = 3$. Nun können aber mehrere „einfache Quadratwurzelausdrücke" der Ordnung μ in unserm Ausdruck auftreten, und *ihre Anzahl* n, *die „Gliederzahl", fassen wir als zweite charakteristische Anzahl auf;* sie ist so bestimmt gedacht, *daß sich keiner der* n *einfachen Ausdrücke* μ^{ter} *Ordnung mehr durch die andern mit Hilfe von Ausdrücken niederer Ordnung rational darstellen läßt.* Beispielsweise hat also der Ausdruck erster Ordnung:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

nicht 3 als Gliederzahl, sondern nur 2, da $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ist. Der oben angeführte Ausdruck α, der von der dritten Ordnung ist, hat die Gliederzahl 1.

Wir haben damit jedem Quadratwurzelausdruck zwei endliche Zahlen μ, n zugeordnet, die wir in dem *Symbol* (μ, n) *als „Charakteristik" oder „Rang" des Wurzelausdruckes* zusammenfassen. *Von zwei Wurzelausdrücken verschiedener Ordnung schreiben wir dem niederer Ordnung auch den niederen Rang zu, von zweien gleicher Ordnung aber dem geringerer Gliederzahl.* Die Ausdrücke niedersten Ranges sind demgemäß die der Ordnung Null, also die rationalen Zahlen.

Nun sei eine *Wurzel* x_1 der kubischen Gleichung (8) durch Quadratwurzeln darstellbar, und zwar durch einen *Ausdruck vom Range* (μ, n); indem wir *eines der* n *Glieder* μ^{ter} *Ordnung* $\sqrt{R}$ bevorzugen, schreiben wir ihn:

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\gamma + \delta\sqrt{R}},$$

wo α, β, γ, δ *höchstens noch* $n-1$ *Glieder* μ^{ter} *Ordnung* enthalten und R *die Ordnung* $\mu - 1$ besitzt. Hier ist $\gamma - \delta\sqrt{R}$ jedenfalls von Null verschieden; denn aus $\gamma - \delta\sqrt{R} = 0$ folgt entweder $\delta = \gamma = 0$, was offenbar unmöglich ist, oder $\sqrt{R} = \gamma : \delta$, d. h. $\sqrt{R}$ wäre durch die andern $(n-1)$ Glieder μ^{ter} Ordnung, die in x_1 auftreten, rational darstellbar und daher überflüssig. Wir können also mit $\gamma - \delta\sqrt{R}$ erweitern und finden:

$$x_1 = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{R})(\gamma - \delta\sqrt{R})}{\gamma^2 - \delta^2 \cdot R} = P + Q\sqrt{R},$$

wo P, Q *rationale Funktionen von* α, β, γ, δ, R sind, also höchstens $(n-1)$ Glieder μ^{ter} und sonst nur solche von höchstens $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten, d. h. *höchstens den Rang* $(\mu, n-1)$ besitzen. Setzen wir diesen Wert von x_1 in (8) ein, so ergibt sich:

$$f(x_1) = (P + Q\sqrt{R})^3 + A(P + Q\sqrt{R})^2 + B(P + Q\sqrt{R}) + C = 0,$$

und wenn wir die Potenzen ausführen, folgt eine Relation von der Gestalt:

$$f(x_1) = M + N\sqrt{R} = 0,$$

wo M, N Polynome in P, Q, R, also *rationale Funktionen von* α, β, γ, δ, R sind. Wäre $N \neq 0$, so folgte $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$, d. h. $\sqrt{R}$ ließe sich rational durch α, β, γ, δ und R darstellen, also durch die anderen $(n-1)$ Glieder μ^{ter} und weitere niederer Ordnung; das ist aber, wie oben schon bemerkt, nach Voraussetzung unmöglich. Also folgt notwendig:

$$N = 0 \quad \text{und daher auch:} \quad M = 0.$$

Daraus schließen wir aber weiter, *daß auch:*

$$x_2 = P - Q\sqrt{R}$$

eine Wurzel der kubischen Gleichung (8) *ist;* denn der Vergleich mit den letzten Gleichungen gibt sogleich:

$$f(x_2) = M - N\sqrt{R} = 0.$$

Nun geht der Beweis sehr einfach und überraschend zu Ende. *Ist x_3 die dritte Wurzel* unserer kubischen Gleichung, so ist bekanntlich:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A,$$

also ist:

$$x_3 = -A - (x_1 + x_2) = -A - 2P$$

von demselben Range wie P *und daher sicher von niedrigerem Range als* x_1.

Ist nun x_3 bereits rational, so ist unser Theorem bewiesen. Wenn das aber nicht der Fall ist, so können wir es zum Ausgangspunkt derselben Schlußreihe machen, und es ergibt sich, daß bei den andern Wurzeln der höhere Rang nur Schein gewesen sein muß, *daß insbesondere eine von ihnen in Wahrheit einen noch niederen Rang hat als* x_3. So gehen wir nun weiter unter den 3 Wurzeln immer hin und her und erkennen dabei jedesmal, daß ihr Rang tatsächlich eine Stufe geringer ist, als wir vorher geglaubt haben. Wir müssen daher notwendig schließlich auf eine Wurzel mit der Ordnung $\mu = 0$ kommen, *d. h. wir erkennen tatsächlich die Existenz einer rationalen Wurzel der kubischen Gleichung*. Dann können wir unsere Schlußweise in der Tat nicht fortsetzen; die beiden andern Wurzeln müssen übrigens entweder gleichfalls rational sein oder die Gestalt $P \pm Q\sqrt{R}$ haben, wo P, Q, R rationale Zahlen sind. Damit ist aber auch erwiesen, *daß $f(x)$ in einen quadratischen und einen linearen rationalen Faktor zerfällt und daher reduzibel ist. Jede irreduzible kubische Gleichung und insbesondere unsere Gleichung des regulären Siebenecks ist also durch Quadratwurzeln nicht lösbar*, und damit ist der Beweis vollendet, *daß sich das reguläre Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.*

Sie sehen, wie einfach und durchsichtig dieser Beweis verläuft, und wie wenig Kenntnisse er eigentlich voraussetzt; immerhin verlangen einige Überlegungen, besonders die Erörterungen über Klassifikation der Wurzelgrößen, doch ein gewisses Maß mathematischer Abstraktion. Ob der Beweis also einfach genug ist, um einen der früher charakterisierten mathematischen Laien von der Vergeblichkeit seiner Versuche einer elementargeometrischen Lösung zu überzeugen, das wage ich nicht zu entscheiden; immerhin sollte man doch versuchen, einem solchen Manne diesen Beweisgang langsam und klar auseinander zu setzen.

Zum Schluß will ich noch einige *Literatur über die Fragen der regulären Polygone* sowie überhaupt über die bei dieser Gelegenheit berührten allgemeinen Fragen der geometrischen Konstruierbarkeit nennen. Zunächst kommt da wiederum *Weber-Wellstein I* (Abschnitt 17 und 18 in der 4. Auflage), dann aber die kleine Festschrift „*Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*“[1]) in Betracht, die ich 1895 gelegentlich einer Oberlehrerversammlung in Göttingen herausgegeben habe.

[1]) Ausgearbeitet von *F. Tägert*. Leipzig 1895.

Als einen sehr viel ausführlicheren und umfangreicheren Ersatz dieser im Buchhandel vergriffenen Schrift kann ich den 1907 erschienenen Teil der deutschen Übersetzung des von *F. Enriques* in Bologna herausgegebenen Sammelwerkes „*Fragen der Elementargeometrie*"[1]) nennen, in dem Sie sich genau über alle einschlägigen Fragen orientieren mögen.

Ich verlasse damit die zahlentheoretischen Erörterungen, indem ich den letzten Punkt, die Transzendenz von π, für den Schluß der Vorlesung aufspare, um nunmehr im nächsten Kapitel über die letzten für uns in Betracht kommenden Erweiterungen des Zahlbegriffes systematisch zu sprechen.

IV. Die komplexen Zahlen.

1. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen.

Lassen Sie mich *einige wenige geschichtliche Daten* vorausschicken. Zum ersten Male sollen die imaginären Zahlen *1545* bei *Cardano*, allerdings mehr beiläufig, bei der Auflösung der kubischen Gleichung aufgetreten sein. Für die weitere Entwicklung können wir wieder die gleiche Bemerkung machen wie bei den negativen Zahlen, *daß sich nämlich die imaginären Zahlen ohne und selbst gegen den Willen des einzelnen Mathematikers beim Rechnen immer wieder von selbst einstellten und erst ganz allmählich in dem Maße, in dem sie sich als nützlich erwiesen, weitere Verbreitung fanden.* Freilich war den Mathematikern dabei recht wenig wohl zumute, die imaginären Zahlen behielten lange einen etwas *mystischen* Anstrich, so wie sie ihn heute noch für jeden Schüler haben, der zum ersten Male von jenem merkwürdigen $i = \sqrt{-1}$ hört. Ich erwähne als Beleg gern eine sehr bezeichnende Äußerung von *Leibniz* aus dem Jahre *1702*, die etwa so lautet: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein." Im *18. Jahrhundert* wird zwar das Begriffliche darin noch keineswegs aufgeklärt, dafür wird aber vor allem durch *Euler ihre grundlegende Bedeutung für die Funktionentheorie* erkannt; er stellt *1748* jene wunderbare Relation auf:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

durch welche die innerliche Verwandtschaft der in der elementaren Analysis auftretenden Funktionsarten erkannt wird. Das *19. Jahrhundert* endlich hat die *klare Erfassung des Wesens der komplexen Zahlen* gebracht. Da ist zunächst die *geometrische Interpretation* hervorzuheben, auf die mehrere Forscher um die Jahrhundertwende etwa gleichzeitig geführt wurden. Es genügt wohl, wenn ich unter ihnen denjenigen

[1]) Teil II: „Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit." Deutsch von *H. Fleischer*. Leipzig 1907. [2. Aufl. 1923.]

hervorhebe, der gewiß am tiefsten in das Wesen der Sache eingedrungen ist und der auch die nachhaltigste Wirkung auf das Publikum ausgeübt hat, nämlich unsern *Gauß;* er hat sich, wie das schon erwähnte Tagebuch unwiderleglich beweist, schon *1797* im vollen Besitz jener Interpretation befunden, freilich sie erst sehr viel später der Öffentlichkeit übergeben. Die zweite Errungenschaft des 19. Jahrhunderts ist die Schaffung einer *rein formalen Begründung* der komplexen Zahlen, die sie auf reelle Zahlen zurückführt; sie geht auf Arbeiten englischer Mathematiker in den dreißiger Jahren zurück, auf die ich hier nicht genauer eingehen kann; Näheres darüber finden Sie in dem schon (S. 28) zitierten Buche von *Hankel.*

Über *diese beiden heute noch herrschenden Begründungsarten* will ich nun einiges ausführen. Stellen wir uns zunächst auf den *rein formalen Standpunkt,* nach dem nicht die Bedeutung der Dinge, sondern die innere Widerspruchslosigkeit der Operationsregeln die Richtigkeit der Begriffsbildungen gewährleistet. Die Einführung der komplexen Zahlen gestaltet sich dann folgendermaßen, wobei jede Spur des Geheimnisvollen schwindet:

1. Die komplexe Zahl $x + iy$ ist die *Zusammenstellung zweier reeller Zahlen* x, y, also ein *„Zahlenpaar"*, über das die weiterhin aufzuführenden Festsetzungen getroffen werden.

2. Zwei komplexe Zahlen $x + iy$, $x' + iy'$ heißen *gleich,* wenn $x = x'$, $y = y'$ ist.

3. *Addition und Subtraktion* wird definiert durch:

$$(x + iy) \pm (x' + iy) = (x \pm x') + i(y \pm y').$$

Dann gelten *alle Regeln der Addition,* wie man leicht bestätigt; nur das *Monotoniegesetz* kann in der ursprünglichen Auffassung nicht mehr festgehalten werden, da die komplexen Zahlen von Haus aus nicht dieselbe einfache Anordnung besitzen, in der die natürlichen oder die reellen Zahlen ihrer Größe nach erscheinen; auf die modifizierte Fassung, die man dem Monotoniegesetz demgemäß geben muß, gehe ich der Kürze halber nicht ein.

4. Für die *Multiplikation* setzen wir fest, daß man wie mit gewöhnlichen Buchstaben rechnet, nur daß stets $i^2 = -1$ gesetzt wird; insbesondere wird also:

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Dann gelten gleichfalls, wie leicht zu sehen, *alle Gesetze der Multiplikation mit Ausnahme des nicht in Betracht kommenden Monotoniegesetzes.*

5. Die *Division* ist als *inverse Operation der Multiplikation* definiert; insbesondere wird, wie die Probe ergibt:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Diese Zahl existiert stets außer für $x = y = 0$, d. h. *es bleibt die schon im Gebiete der reellen Zahlen bestehende Ausnahmestellung der Division durch Null bestehen.*

Nach alledem folgt, *daß das Rechnen mit komplexen Zahlen unmöglich zu Widersprüchen führen kann, da es ja hier völlig auf die reellen Zahlen und die bekannten Operationen mit ihnen zurückgeführt ist* — und die wollen wir an der gegenwärtigen Stelle als widerspruchslos anerkennen.

Gewiß wird man auch neben dieser rein formalen Betrachtung noch eine *geometrische* oder sonst *anschauliche* Deutung der komplexen Zahlen und der Operationen mit ihnen wünschen, in der man eine *anschauliche Begründung ihrer Widerspruchslosigkeit* sehen kann. Das leistet jene Gaußsche Interpretation, die — wie Ihnen wohl allen geläufig ist, und wie wir auch schon erwähnten — den *Inbegriff der Punkte* (x, y) *der Ebene eines x-y-Koordinatensystems als Deutung der Gesamtheit der komplexen Zahlen* $z = x + iy$ auffaßt. Die Summe zweier Zahlen z, a folgt dann durch die bekannte *Parallelogrammkonstruktion* aus den entsprechenden beiden Punkten und dem Nullpunkt 0, während sich das Produkt $z \cdot a$ unter Hinzunahme des *Einheitspunktes* 1 $(x = 1, y = 0)$ durch Anlegen eines zu $a\,0\,1$ ähnlichen Dreiecks an die Strecke $0\,z$ ergibt (vgl. Abb. 14). Kurz gesagt, wird die *Addition* $z' = z + a$ *durch eine Parallelverschiebung der Ebene in sich*, die *Multiplikation* $z' = z \cdot a$ *durch eine Ähnlichkeitstransformation, d. h. Drehung und Streckung bei festem Nullpunkte dargestellt.*

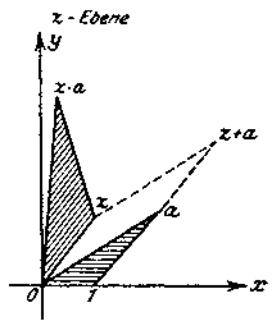


Abb. 14.

Aus der Anordnung der den Zahlen entsprechenden Punkte in der Ebene ergibt sich übrigens sofort auch, was hier an Stelle der Monotonieregeln der reellen Zahlen zu treten hat. Diese Andeutungen genügen wohl, um Ihnen die Sachlage vollständig ins Gedächtnis zurückzurufen.

Ich will hier nicht unterlassen, Sie auf die Stelle bei *Gauß* hinzuweisen, an der diese Begründung der komplexen Zahlen durch ihre geometrische Deutung mit vollem Nachdruck ausgesprochen wird, und durch welche die komplexen Zahlen zuerst zu allgemeiner Geltung gelangten. In einer Arbeit vom Jahre *1831* beschäftigt sich Gauß mit der Theorie besonders der *ganzen komplexen Zahlen* $a + ib$, wobei a, b ganze reelle Zahlen sind, und überträgt auf sie die Sätze der gewöhnlichen *Zahlentheorie* über Primfaktoren, quadratische und biquadratische Reste usw. Solche Verallgemeinerungen der Zahlentheorie haben wir früher schon gelegentlich im Anschluß an den großen Fermatschen Satz erwähnt. In der *Selbstanzeige*[1]) dieser Abhandlung äußert er sich

[1]) Siehe Werke Bd. II.

nun über das, was er die „*wahre Metaphysik der imaginären Zahlen*" nennt. Er begründet die Berechtigung des Operierens mit komplexen Zahlen durchaus damit, daß man ihnen und den Operationen mit ihnen jene anschauliche geometrische Deutung geben kann; er stellt sich also *keineswegs auf den formalen Standpunkt.* Im übrigen sind diese längeren, sehr schön geschriebenen Auseinandersetzungen von Gauß äußerst lesenswert. Ich erwähne hier nur noch, daß Gauß statt des Wortes „*imaginär*" das klarere „*komplex*" in Vorschlag bringt, das sich ja in der Tat auch eingebürgert hat.

2. Höhere komplexe Zahlen, insbesondere Quaternionen.

Kann man nun — diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe — nicht auch andere, höhere komplexe Zahlen mit mehreren neuen Einheiten als dem einen i bilden und mit ihnen vernünftig rechnen? In dieser Richtung haben zuerst um das Jahr *1840* unabhängig voneinander *H. Graßmann* in Stettin und *W. R. Hamilton* in Dublin positive Resultate gewonnen; besonders mit der Erfindung Hamiltons, der *Quaternionenrechnung*, wollen wir uns im folgenden etwas eingehender beschäftigen. Zunächst noch kurz die allgemeine Problemstellung!

Die gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ können wir auffassen als aus den zwei verschiedenen „*Einheiten*" 1 und i mittels der *reellen Parameter* x, y in der Form:

$$x \cdot 1 + y \cdot i$$

gebildete *lineare Kombinationen.* Ebenso betrachten wir jetzt beliebig viele, etwa n, voneinander verschiedene Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und bezeichnen als das aus ihnen gebildete „*höhere komplexe Zahlensystem*" die *Gesamtheit der mit n beliebigen reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildeten Kombinationen:*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n .$$

Es versteht sich ziemlich von selbst, daß man zwei solche komplexe Zahlen, etwa x und:

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

dann und nur dann g l e i c h *nennen wird, wenn die Koeffizienten der einzelnen Einheiten, die sog. „Komponenten" der Zahl, paarweise übereinstimmen:*

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n .$$

Ebenso naheliegend ist die *Definition der Addition und Subtraktion,* die diese Operationen einfach auf das *Addieren und Subtrahieren der Komponenten* zurückführt:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1)\, e_1 + (x_2 \pm y_2) e_2 + \cdots + (x_n \pm y_n)\, e_n .$$

Schwieriger und interessanter wird die Sache erst bei der *Multiplikation.* Wir werden zunächst nach den allgemeinen Regeln des Buchstabenrechnens verfahren, indem wir jeden i^{ten} Term von x mit jedem k^{ten} von y multiplizieren ($i, k, = 1, 2, \ldots, n$). Dadurch erhalten wir:

$$x \cdot y = \sum_{(i,\, k = 1, \ldots, n)} x_i y_k e_i e_k .$$

Damit dieser Ausdruck wiederum eine Zahl unseres Systems ist, muß eine Regel bekannt sein, die die *Produkte* $e_i \cdot e_k$ *wiederum als komplexe Zahlen des Systems*, d. h. als lineare Kombination der Einheiten darstellt; man muß also n^2 Gleichungen der Form:

$$e_i e_k = \sum_{(l = 1, \ldots, n)} c_{ikl} \cdot e_l \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

besitzen. Dann gehört:

$$x \cdot y = \sum_{(l = 1, \ldots, n)} \left\{ \sum_{(i,\, k = 1, \ldots, n)} x_i y_k c_{ikl} \right\} e_l$$

stets wiederum unserem komplexen Zahlensystem an. *In der Festlegung dieser Multiplikationsregel, d. h. des Schemas der Koeffizienten c_{ikl}, liegt das Charakteristische eines jeden besonderen komplexen Zahlensystems.*

Definiert man nun weiter die *Division als inverse Operation der Multiplikation*, so zeigt es sich, daß bei diesem allgemeinen Ansatze die Division *nicht immer eindeutig ausführbar* zu sein braucht, auch wenn der Divisor nicht verschwindet; denn die Bestimmung von y aus $x \cdot y = z$ geschieht durch Auflösung der n linearen Gleichungen $\sum_{i,k} x_i y_k c_{ikl} = z_l$ nach den n Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$ und diese haben, falls ihre Determinante verschwindet, entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen. Im gleichen Falle können auch alle $z_l = 0$ sein, ohne daß alle x_i oder alle y_k verschwinden müssen, d. h. *das Produkt zweier Zahlen kann verschwinden, ohne daß ein Faktor Null ist.* Nur durch geschickte spezielle Wahl der Größen c_{ikl} kann man hier Übereinstimmung mit dem Verhalten der gewöhnlichen Zahlen erzielen. Freilich ergibt die nähere Untersuchung, *daß man, falls $n > 2$ ist, dafür die Abweichung von einer der anderen Rechenregeln notwendig in Kauf nehmen muß;* als derartige nicht erfüllte Rechenregel wird man eine solche auswählen, die in dem in Betracht kommenden Zusammenhange weniger wichtig erscheint.

Alle diese allgemeinen Erörterungen verfolgen wir nun näher am Beispiele der *Quaternionen*, die wegen ihrer Anwendungen in der Physik und Mathematik wohl *das wichtigste höhere komplexe Zahlensystem* darstellen. Wie der Name zeigt, sind es *viergliedrige Zahlen* ($n = 4$); als Abart schließen sie die *dreigliedrigen Vektoren* ein, die heute wohl allgemein bekannt sind und von denen man auch gelegentlich auf der Schule spricht.

Als erste der 4 Einheiten, aus denen wir die Quaternionen zusammensetzen, verwenden wir (wie bei den gewöhnlichen komplexen Zahlen) die *reelle Einheit 1*. Die drei anderen Einheiten pflegt man nach *Hamilton* mit i, j, k zu bezeichnen, so daß die allgemeine Form der Quaternion ist:

$$p = d + ia + jb + kc,$$

wo a, b, c, d *reelle Parameter*, die *Koeffizienten der Quaternion*, sind. Man nennt die erste, mit 1 multiplizierte Komponente d, die dem reellen Teil der gemeinen komplexen Zahl entspricht, den „*skalaren Bestandteil*" *der Quaternion*, den Inbegriff $ai + bj + ck$ der drei anderen Glieder ihren *vektoriellen Bestandteil*.

Die *Addition der Quaternionen* folgt aus den obigen allgemeinen Erörterungen. Wir wollen noch eine naheliegende *geometrische Deutung* angeben, welche auf die Ihnen bekannte Deutung der Vektoren zurückgeht. Wir stellen uns nämlich die dem vektoriellen Bestandteil von p entsprechende *Strecke* mit den Projektionen a, b, c auf die Koordinatenachsen vor und denken sie noch mit einem dem skalaren Bestandteil d gleichen *Gewichte* behaftet. Dann vollzieht sich die Addition von p und $p' = d' + ia' + jb' + kc'$ in der Weise, daß man der nach dem bekannten Parallelogrammgesetz (vgl. Abb. 15) der Vektoraddition gebildeten Resultante der beiden Strecken die Summe der Gewichte zuordnet, denn das ist dann in der Tat der Repräsentant der Quaternion:

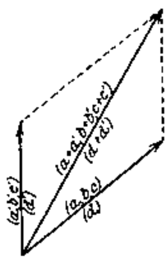


Abb. 15.

$$(1) \qquad p + p' = (d + d') + i(a + a') + j(b + b') + k(c + c').$$

Zu spezifischen Eigenschaften der Quaternionen kommen wir erst, wenn wir uns der *Multiplikation* zuwenden. Diese Eigenschaften müssen, wie wir allgemein sahen, in den *Festsetzungen über die Produkte der Einheiten* enthalten sein. Ich gebe Ihnen also zunächst an, welchen Quaternionen *Hamilton* die 16 Produkte von je 2 Einheiten gleich setzt. Das erste ist, daß wir, wie ja schon die Bezeichnung andeutet, mit der ersten Einheit 1 wie mit der reellen Zahl 1 rechnen wollen, also:

$$(2a) \qquad 1^2 = 1, \quad i \cdot 1 = 1 \cdot i = i, \quad j \cdot 1 = 1 \cdot j = j, \quad k \cdot 1 = 1 \cdot k = k.$$

Als wesentlich neu aber setzen wir für die Quadrate der anderen drei Einheiten fest:

$$(2b) \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

und für ihre binären Produkte:

$$(2c) \qquad j \cdot k = +i, \quad k \cdot i = +j, \quad i \cdot j = +k,$$

während bei umgekehrter Stellung der Faktoren gelten soll:

$$(2d) \qquad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \quad j \cdot i = -k.$$

Hierbei fällt sofort ins Auge, daß *das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht mehr erfüllt ist*, und diese Unannehmlichkeit ist es, die man eben bei den Quaternionen hinnehmen muß, um die Eindeutigkeit der Division bzw. den Satz, daß ein Produkt nur verschwinden kann, wenn ein Faktor verschwindet, zu retten. *Daß dieser Satz und obendrein alle anderen Gesetze der Addition und Multiplikation mit jener einen Ausnahme in der Tat erhalten bleiben, daß also jene einfachen Festsetzungen äußerst zweckmäßig sind, werden wir sogleich zeigen.*

Zunächst wollen wir das *Produkt zweier allgemeiner Quaternionen*

$$p = d + i\,a + j\,b + k\,c \quad \text{und} \quad q = w + i\,x + j\,y + k\,z$$

bilden. Wir gehen also aus von der Gleichung:

$$q' = p \cdot q = (d + i\,a + j\,b + k\,c) \cdot (w + i\,x + j\,y + k\,z);$$

in ihr multiplizieren wir Glied für Glied aus, indem wir bei den Einheiten i, j, k auf die Reihenfolge achten und für die Produkte aus den Komponenten a, b, c, d und solche aus Komponenten und einer Einheit aber das kommutative Gesetz zulassen, ersetzen die Produkte der Einheiten gemäß unserer Multiplikationstabelle und ziehen sodann die Glieder mit gleichen Einheiten wieder zusammen. So ergibt sich:

$$(3) \quad \left.\begin{aligned} q' = p\,q = w' + i\,x' + j\,y' + k\,z' = {} & (d\,w - a\,x - b\,y - c\,z) \\ & + i\,(a\,w + d\,x \underline{+ b\,z - c\,y}) \\ & + j\,(b\,w + d\,y \underline{+ c\,x - a\,z}) \\ & + k\,(c\,w + d\,z \underline{+ a\,y - b\,x}) \end{aligned}\right\}$$

Die Komponenten der Produktquaternion sind also bestimmte einfache *bilineare Kombinationen* der Komponenten der beiden Faktoren. Vertauscht man die Reihenfolge der Faktoren, so wechseln die sechs durch Unterstreichen hervorgehobenen Glieder ihr Vorzeichen, so daß $q \cdot p$ *im allgemeinen von* $p \cdot q$ *wesentlich verschieden* ist, und zwar nicht etwa bloß im Vorzeichen, wie das für die Produkte der einzelnen Einheiten gilt.

Während also die Kommutativität der Multiplikation nicht erfüllt ist, gelten das *distributive und assoziative Gesetz unverändert.* Denn bilden wir uns zunächst einmal $p\,(q + q_1)$, andererseits $p\,q + p\,q_1$ durch formales Ausmultiplizieren, ohne noch die Produkte der Einheiten zu ersetzen, so müssen wir notwendig Übereinstimmendes erhalten und daran kann sich nichts ändern, wenn wir auf beiden Seiten nachträglich die Multiplikationstabelle benutzen. Das assoziative Gesetz ferner muß, wie man leicht einsieht, allgemein gelten, wenn es nur für die Multiplikation der Einheiten in Kraft ist. Das wiederum entnimmt man unmittelbar der Multiplikationstabelle, wie ich nur an dem Beispiel:

$$(i\,j)\,k = i\,(j\,k)$$

zeigen will; in der Tat hat man:

$$(i\,j)\,k = k \cdot k = -1$$

und:

$$i\,(j\,k) = i \cdot i = -1\,.$$

Nun gehen wir zur *Division* über. Es wird da genügen, zu zeigen, *daß es zu jeder Quaternion* $p = d + i\,a + j\,b + k\,c$ *eine völlig bestimmte zweite* q *gibt, so daß:*

$$p \cdot q = 1$$

ist; den Ausdruck q werden wir zweckmäßig mit $\frac{1}{p}$ bezeichnen. Die allgemeine Division läßt sich leicht auf diesen speziellen Fall zurückführen, wie wir später zeigen werden. Um q zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung (3) die Größe:

$$q' = 1 = 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$$

ein und erhalten dann durch Gleichsetzen der Komponenten die folgenden vier Gleichungen für die vier unbekannten Komponenten x, y, z, w von q:

$$\begin{aligned} dw - ax - by - cz &= 1 \\ aw + dx - cy + bz &= 0 \\ bw + cx + dy - az &= 0 \\ cw - bx + ay + dz &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems hängt bekanntlich von seiner Determinante ab, und hier liegt speziell eine schiefsymmetrische Determinante vor, bei der symmetrisch zu der von links oben nach rechts unten gehenden Hauptdiagonale liegende Elemente entgegengesetzt gleich sind, während die Elemente der Hauptdiagonale sämtlich übereinstimmen. Die Determinantentheorie lehrt solche Determinanten besonders einfach zu berechnen; es ergibt sich nämlich:

$$\begin{vmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2\,;$$

von der Richtigkeit der Formel kann man sich auch durch direktes Ausrechnen überzeugen. Auf diesem Umstande, daß die Determinante gerade gleich einer Potenz der Quadratsumme der vier Komponenten von p wird, beruht die eigentliche *Feinheit der Hamiltonschen Festsetzungen;* denn nun folgt, daß *die Determinante immer von Null verschieden ist, außer wenn gleichzeitig* $a = b = c = d = 0$ ist. Mit dieser einzigen selbstverständlichen Ausnahme ($p = 0$) sind die Gleichungen *eindeutig auflösbar,* und die *reziproke Quaternion q ist eindeutig bestimmt.* Setzt man:

$$T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

(diese Größe spielt als „*Tensor vom p*" in der Theorie eine große Rolle), so bestätigt man leicht direkt, daß jene eindeutige Lösung durch:

$$x = -\frac{a}{T^2}, \qquad y = -\frac{b}{T^2}, \qquad z = -\frac{c}{T^2}, \qquad w = \frac{d}{T^2}$$

gegeben ist, so daß wir als Endresultat erhalten:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{d + ia + jb + kc} = \frac{d - ia - jb - kc}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\,.$$

Führt man analog wie bei gewöhnlichen komplexen Zahlen den *konjugierten Wert* von p:

$$\bar{p} = d - i a - j b - k c$$

ein, so können wir die letzte Formel auch schreiben:

$$\frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{T^2}$$

oder:

$$p \cdot \bar{p} = T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

Formeln, die als unmittelbare Verallgemeinerungen gewisser Eigenschaften der gemeinen komplexen Zahlen erscheinen. Da auch umgekehrt p die zu $\bar{p}$ konjugierte Zahl darstellt, gilt übrigens auch:

$$\bar{p} \cdot p = T^2,$$

so daß in diesem speziellen Falle Kommutativität herrscht.

Wir erkennen nun sofort auch die Lösung des allgemeinen Problems der Division. Aus:

$$p \cdot q = q'$$

folgt durch Multiplikation mit $\frac{1}{p}$:

$$q = \frac{1}{p} \cdot q' = \frac{\bar{p}}{T^2} \cdot q',$$

während die durch Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren entstehende Gleichung:

$$q \cdot p = q'$$

die von der vorigen im allgemeinen verschiedene Lösung:

$$q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \cdot \frac{\bar{p}}{T^2}$$

hat.

Wir haben uns nun die Frage vorzulegen, ob es eine *geometrische Deutung der Quaternionen* gibt, in der diese Operationen samt ihren Gesetzen als etwas Naturgemäßes erscheinen. Um auf sie zu kommen, beginnen wir mit dem besonderen Falle, in dem *beide Faktoren in einfache Vektoren übergehen*, in dem also die skalaren Teile $w = d = 0$ sind. Dann reduziert sich die allgemeine Multiplikationsformel (3) auf:

$$\begin{aligned} q' = p \cdot q &= (i a + j b + k c)(i x + j y + k z) \\ &= -(a x + b y + c z) + i (b z - c y) + j (c x - a z) + k (a y - b x), \end{aligned}$$

d. h. das Produkt zweier auf einen Vektor sich reduzierenden Quaternionen besteht aus einem skalaren und einem vektoriellen Anteil. Wir können diese Anteile nun leicht mit den verschiedenen Arten der bei uns in Deutschland üblichen *Vektormultiplikation* in Verbindung bringen. Die Begriffe der bei uns ungleich mehr als der Quaternionenkalkül verbreiteten Vektorrechnung gehen auf *Graßmann* zurück, wiewohl das Wort *Vektor* selbst englischen Ursprungs ist. Die beiden Arten des Vektorproduktes, mit denen man gewöhnlich operiert, bezeichnet man jetzt meist als *inneres* (*skalares*) *Produkt* $ax + by + cz$ (d. i. also bis aufs Vorzeichen der skalare Teil des obigen Quaternionenprodukts) und *äußeres* (*vektorielles*) *Produkt* $i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)$, (d. i. also der vektorielle Bestandteil desselben). So wollen wir denn auch jeden Teil für sich geometrisch deuten.

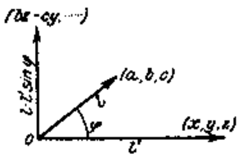


Abb. 16.

Wir tragen beide Vektoren (a, b, c) und (x, y, z) als Strecken vom Anfangspunkte 0 ab (vgl. Abb. 16); sie reichen dann bis zu den Punkten (a, b, c) bzw. (x, y, z) und haben die Längen $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ bzw. $l' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ist φ der Winkel zwischen beiden Strecken, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, auf die ich hier wohl nicht einzugehen brauche, das *innere Produkt* gleich:

$$ax + by + cz = l \cdot l' \cdot \cos\varphi;$$

das *äußere Produkt* hingegen ist selbst ein *Vektor*, der, wie man ebenso leicht einsieht, *auf der Ebene von l und l' senkrecht* steht und die *Länge* $l \cdot l' \cdot \sin\varphi$ hat.

Wesentlich ist nun noch die Entscheidung über den *Sinn des Produktvektors*, d. h. die Frage, nach welcher Seite der durch l, l' bestimmten Ebene hin dieser Vektor abzutragen ist. Dieser Sinn ist *verschieden, je nachdem Koordinatensystem*, das man zugrunde legt. Man kann nämlich, wie Sie wohl wissen, *zwei verschiedene nicht kongruente, d. h. nicht zur Deckung zu bringende rechtwinklige Koordinatensysteme* angeben, indem man die y- und z-Achse etwa beibehält, den Sinn der x-Achse aber umkehrt. Diese Systeme sind dann *spiegelbildlich symmetrisch zueinander*, so wie die *rechte und linke Hand* (vgl. Abb. 17), und in der Tat kann man sie demgemäß durch folgende einfache Gedächtnisregel auseinanderhalten: *x-, y- und z-Achse liegen bei dem einen System der Reihe nach so wie der ausgestreckte Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand, bei dem andern wie die gleichen Finger der linken Hand.* Diese zweierlei Systeme werden in der Literatur durcheinander gebraucht; in den verschiedenen Ländern, in verschiedenen Disziplinen und schließlich bei verschiedenen Autoren oder auch bei demselben Autor herrschen verschiedene Gewohnheiten. — Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, daß $p = i$, $q = j$ ist (das sind die auf der x- und

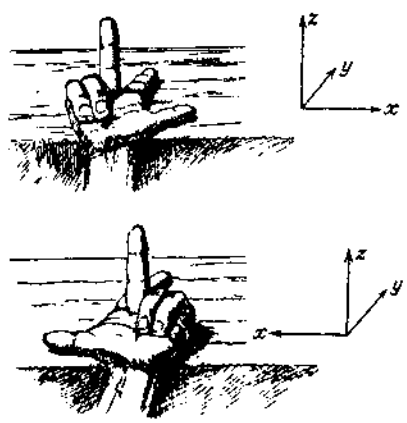


Abb. 17.

y-Achse abgetragenen Einheitsstrecken), so ist wegen $i \cdot j = k$ das äußere Vektorprodukt gleich der auf der z-Achse abgetragenen Einheitsstrecke (vgl. Abb. 18). Man kann nun weiter i, j in beliebige Vektoren p, q stetig so überführen, daß k in den Vektorbestandteil von $p \cdot q$ stetig übergeht, ohne dazwischen zu verschwinden, und daher müssen auch stets *der erste Faktor, der zweite Faktor und das Vektorprodukt zueinander liegen wie die x-, y- und z-Achse des Koordinatensystems, also rechtshändig* (wie in Abb. 18) *oder linkshändig* (wie in Abb. 16), *je nachdem man das Koordinatensystem einmal gewählt hat.* (In Deutschland ist jetzt das in Abb. 18 gewählte üblich.)

Abb. 18.

Diesen Überlegungen will ich noch einige Worte über die sehr strittige *Frage der Bezeichnungsweise in der Vektoranalysis* hinzufügen. Es werden nämlich nebeneinander eine große Menge verschiedener Zeichen für jede der Vektoroperationen gebraucht, und leider ist es bisher nicht gelungen, eine einzige allgemein verbindliche Bezeichnungsweise zu schaffen. Wir haben auf der Naturforscherversammlung zu Kassel (1903) eine Kommission zu diesem Zwecke eingesetzt; ihre Mitglieder konnten sich aber nicht einmal untereinander völlig einigen; da aber jeder doch den guten Willen hatte, von seinem ursprünglichen Standpunkte den andern einen Schritt entgegenzukommen, war der einzige Erfolg der, daß ungefähr drei neue Bezeichnungen entstanden! Eine wirkliche Einigung aller bei solchen Dingen in Betracht kommenden Kreise auf ein und dieselbe Sprech- und Schreibweise scheint mir nach diesen und ähnlichen Erfahrungen überhaupt nur möglich zu sein, wenn äußerst gewichtige materielle Interessen dahinter stehen. Nur unter einem solchen Drucke konnte 1881 in der Elektrotechnik das einheitliche Maßsystem nach Volt, Ampère, Ohm allgemeine Annahme finden und dann in der Folge durch staatliche Gesetzgebung festgelegt werden, indem die Industrie als Grundlage aller ihrer Berechnungen eine derartige Einheitlichkeit dringend brauchte. Hinter der Vektorrechnung stehen aber noch nicht so starke materielle Interessen, und daher wird man sich vorläufig wohl oder übel damit abfinden müssen, daß jeder einzelne Mathematiker bei der ihm gewohnten Bezeichnung bleibt, die er als bequemste oder gar — wenn er etwas dogmatisch veranlagt ist — als die allein richtige empfindet.

3. Quaternionenmultiplikation und Drehstreckungen des Raumes.

Bevor wir nun zur *geometrischen Deutung der Multiplikation allgemeiner Quaternionen* übergehen, schicken wir noch folgende Untersuchung voran: Ersetzen wir in dem Produkt $q' = p \cdot q$ die Quaternionen p und q durch ihre konjugierten $\bar{p}$, $\bar{q}$, d. h. geben wir a, b, c, x, y, z das entgegengesetzte Vorzeichen, so bleibt in der

S. 67 gegebenen Darstellung des Produktes der skalare Teil ungeändert und nur die *nicht* unterstrichenen Faktoren von i, j, k wechseln das Vorzeichen; vertauschen wir aber gleichzeitig noch die Reihenfolge der Faktoren, so wechseln auch die unterstrichenen Faktoren das Vorzeichen und demnach ergibt $\bar{q}\cdot\bar{p}$ gerade den konjugierten Wert $\bar{q}'$ zu $q'=p\cdot q$. Ist also:

$$q'=p\cdot q, \qquad \text{so ist:} \qquad \bar{q}'=\bar{q}\cdot\bar{p}.$$

Multiplizieren wir diese beiden Quaternionengleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$q'\cdot\bar{q}'=p\cdot q\cdot\bar{q}\cdot\bar{p}.$$

Dabei ist die Reihenfolge der Faktoren wesentlich, das Kommutativitätsgesetz gilt nicht; wohl aber können wir das Assoziativitätsgesetz anwenden und schreiben:

$$q'\cdot\bar{q}'=p\cdot(q\cdot\bar{q})\cdot\bar{p}.$$

Da nun, wie wir oben sahen (S. 66),

$$q\cdot\bar{q}=x^2+y^2+z^2+w^2$$

ist, ergibt sich:

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=p\,(w^2+x^2+y^2+z^2)\,\bar{p}.$$

Hier ist nun der mittlere Faktor der rechten Seite ein Skalar, und für die Multiplikation eines jeden Skalars M mit einer Quaternion gilt das kommutative Gesetz, da $M\cdot p=M\,d+i\,(M\,a)+j\,(M\,b)+k\,(M\,c)=p\,M$ ist. Also ist insbesondere:

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=p\,\bar{p}\,(w^2+x^2+y^2+z^2),$$

und da $p\cdot\bar{p}$ das Quadrat des Tensors von p ist:

(I) $\quad w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=(d^2+a^2+b^2+c^2)\,(w^2+x^2+y^2+z^2)$ [1]),

d. h. der Tensor eines Quaternionenproduktes ist gleich dem Produkt der Tensoren der Faktoren. Natürlich kann man diese Formel auch durch direkte Rechnung erhalten, wenn man die Ausdrücke für w', x', y', z' der Multiplikationsformel von S. 67 entnimmt.

Nunmehr wollen wir die *Quaternion q als die Strecke vom Nullpunkte eines vierdimensionalen Raumes zum Punkte* (x, y, z, w) *desselben deuten* — ganz analog zu der Deutung des Vektors im dreidimensionalen Raume. Man hat es heute nicht mehr nötig, sich zu entschuldigen, wenn man den vierdimensionalen Raum benutzt, wie man das zur Zeit, als ich studierte, stets tun mußte; Sie wissen alle, daß irgendeine metaphysische Meinung nicht dahinter steckt, sondern daß der mehrdimensionale Raum einfach ein unserer tatsächlichen Raumvorstellung analoges, bequemes Mittel mathematischer Ausdrucksweise ist. Halten wir nun den Faktor p, d. h. die Größen d, a, b, c fest, so stellt die Quaternionengleichung:

$$q'=p\cdot q$$

[1]) Diese Formel findet sich dem Wesen der Sache nach schon bei Lagrange.

eine gewisse *lineare Transformation* der Punkte (x, y, z, w) des vierdimensionalen Raumes in die Punkte (x', y', z', w') dar, indem sie jedem vierdimensionalen Vektor q einen anderen q' linear zuordnet; die expliziten Gleichungen der Transformation, d. h. die Ausdrücke für x', y', z', w', die ganze lineare Funktionen von x, y, z, w sind, ergeben sich durch Vergleichung der Koeffizienten aus der Produktdarstellung von S. 67. Aus der Tensorengleichung (I) sehen wir, daß dabei der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ eines jeden Punktes vom Nullpunkt mit ein und demselben konstanten Faktor $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ multipliziert wird, und ferner folgt nach S. 68, daß die Determinante der linearen Transformation sicher positiv ist.

Es ist nun aus der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes bekannt, daß eine lineare Transformation der x, y, z, die den Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2$ genau in sich selbst transformiert (d. h. die „*orthogonal*" ist) und obendrein noch eine positive Determinante besitzt, eine *Drehung des Raumes um den Koordinatenanfang* darstellt, und daß man umgekehrt *jede Drehung* auf diese Weise erhalten kann. Führt aber die lineare Transformation $x^2 + y^2 + z^2$ nur bis auf einen Faktor T^2 in sich über und ist die Determinante wiederum positiv, so wird durch sie eine *Drehung in Verbindung mit einer Streckung des ganzen Raumes auf das T-fache bei festem Koordinatenanfang*, also eine sog. *Drehstreckung* dargestellt.

Was nun dem dreidimensionalen Raume recht ist, ist dem vierdimensionalen billig: Wir werden sagen, daß unsere lineare Transformation in genau demselben Sinne eine *Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes bei festem Anfangspunkt* darstellt. Wir können aber leicht sehen, daß hier *nicht die allgemeinste mögliche Drehstreckung* vorliegt. Denn unsere Transformation enthält nur *4 willkürliche Parameter* in den Komponenten a, b, c, d von p, während, wie wir sogleich zeigen wollen, die *allgemeinste Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes R_4 sieben Parameter enthält.* Damit nämlich die allgemeine lineare Transformation eine Drehstreckung wird, muß die Identität bestehen:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = T^2 (x^2 + y^2 + z^2 + w^2);$$

wir erhalten daraus durch Koeffizientenvergleichung 10 Bedingungen, da die linke Seite nach Ersetzung der $x', \ldots, w'$ durch ganze lineare Funktionen der $x, \ldots, w$ in eine quadratische Form von 4 Variablen übergeht und daher $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ Terme enthält. Da aber T noch willkürlich ist, stellen diese Gleichungen nur $10 - 1 = 9$ Bedingungen für die 16 Koeffizienten der linearen Transformation dar, so daß in der Tat noch $16 - 9 = 7$ Parameter willkürlich bleiben.

Man kann aber trotzdem, und das ist das Merkwürdige, *durch Quaternionenmultiplikation auch die allgemeinste Drehstreckung* heraus-bringen. Ist nämlich $\pi = \delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$ eine weitere konstante Quaternion, so zeigt man genau wie vorhin, daß auch die Transformation $q' = q \cdot \pi$ (die sich von der früheren nur durch Vertauschung der Reihenfolge unterscheidet) eine Drehstreckung des R_4 ist, und daher ist auch die Zusammensetzung beider:

$$\text{(II)} \quad q' = p \cdot q \cdot \pi = (d + ia + jb + kc) \cdot q \cdot (\delta + i\alpha + j\beta + k\gamma)$$

eine solche. Diese Transformation enthält nur 7 — nicht 8 — willkürliche Parameter, da sie ungeändert bleibt, wenn man a, b, c, d mit derselben reellen Zahl multipliziert und gleichzeitig $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch sie dividiert. Es erscheint also plausibel, *daß sie die allgemeine Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes darstellt*, und dieser schöne Satz ist tatsächlich von *Cayley* bewiesen worden. Ich will das freilich hier nur historisch berichten, um mich nicht zu sehr in die Einzelheiten dieser Deutung zu verlieren. Die Formel findet sich in Cayleys Arbeit „*On the homographic transformation of a surface of the second ordre into itself*"[1]) von *1854* sowie in einigen anderen seiner Abhandlungen[2]).

Diese Cayleysche Formel hat nun auch den großen Vorzug, daß sie die *Zusammensetzung zweier Drehstreckungen* in äußerst einfacher Weise übersehen läßt. Wird nämlich eine zweite Drehstreckung durch die Gleichung:

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot q' \cdot \pi'$$

dargestellt, wo p', π' weitere gegebene Quaternionen sind, so erhalten wir, indem wir aus Formel (II) den Wert von q' eintragen:

$$q'' = p' \cdot (p \cdot q \cdot \pi) \cdot \pi',$$

und nach dem assoziativen Gesetze der Multiplikation:

$$q'' = (p' \cdot p) \cdot q \cdot (\pi \cdot \pi') \qquad \text{oder:}$$

$$q'' = r \cdot q \cdot \varrho, \qquad \text{wobei:} \qquad r = p' \cdot p, \qquad \varrho = \pi \cdot \pi'$$

bestimmte neue Quaternionen sind. Wir haben so den Ausdruck der Drehstreckung, die q in q'' überführt, genau in der alten Form erhalten, und zwar *entstehen vorderer und hinterer Multiplikator von q durch Quaternionenmultiplikation aus den beiden vorderen bzw. hinteren Multiplikatoren in den Darstellungen der zusammensetzenden Drehstreckungen*, wobei die Reihenfolge wesentlich ist.

Man wird nun vielleicht mit dieser vierdimensionalen Deutung unzufrieden sein und etwas Handgreiflicheres verlangen, das in die gewöhnliche *dreidimensionale* Raumanschauung hineinpaßt. Nun gut, aus den bisher angegebenen Formeln wollen wir *durch einfache Spezialisierung solche für die gleichen dreidimensionalen Operationen* erhalten. Auf diesen Formeln beruht gerade die große Bedeutung der Quaternionen-

[1]) Crelles Journal (1855). Abgedruckt in Cayley: Collected mathematical papers, Vol. II, S. 133. Cambridge 1889.

[2]) Vgl. z. B. „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches", l. c. S. 214.

multiplikation für die gewöhnliche Physik und Mechanik; ich sage hierbei ausdrücklich der *gewöhnlichen*, um einer Weiterentwicklung dieser Disziplinen, nach der auch die vorigen Deutungen direkt anwendbar sein werden, nicht vorzugreifen. Und diese ist vielleicht näher, als Sie denken mögen; neuere Untersuchungen der Elektrodynamik, wie sie in dem sogenannten *Prinzip der Relativität* zum Ausdruck kommen, sind eigentlich nichts als konsequente Benutzung der Drehstreckungen eines vierdimensionalen Raumes, und sie werden auch neuerdings von Prof. *Minkowski* geradezu in diesem Sinne dargestellt und ausgebaut[1]).

Aber bleiben wir nun bei drei Dimensionen. Da führt eine Drehstreckung einen Punkt (x, y, z) so in (x', y', z') über, daß:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = M^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

wird, wobei M die lineare Streckung einer jeden Länge bedeutet. Da die allgemeine lineare Transformation der x, y, z in die x', y', z' $3 \cdot 3 = 9$ Koeffizienten enthält und die linke Seite nach Einführung dieser Ausdrücke in eine quadratische Form von x, y, z mit $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Termen übergeht, so stellt bei willkürlichem M unsere Identität $6 - 1 = 5$ Bedingungen dar, und alle ihr genügenden linearen Substitutionen enthalten noch $9 - 5 = 4$ *willkürliche Parameter* (vgl. die analoge Überlegung S. 73). Hat eine dieser Substitutionen eine *positive Determinante*, so stellt sie, wie schon erwähnt (S. 73), eine *Drehung des Raumes um den Anfangspunkt, verbunden mit einer Streckung im Verhältnis 1 : M*, dar; ist aber die Determinante *negativ*, so entspricht die Substitution einer solchen *Drehstreckung, zusammengesetzt noch mit einer Spiegelung des Raumes*, wie sie beispielsweise durch $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ gegeben wird. Übrigens kann man leicht zeigen, daß die Determinante nur die beiden Werte $\pm M^3$ annehmen kann.

Um diese Verhältnisse durch Quaternionen darzustellen, reduzieren wir zunächst die Unbestimmten q, q' auf ihre *vektoriellen Bestandteile:*

$$q' = i x' + j y' + k z', \quad q = i x + j y + k z,$$

die wir als die dreidimensionalen Vektoren vom Koordinatenanfang nach den Lagen des Punktes vor bzw. nach Ausführung der Transformation ansehen. Wir behaupten nun, *daß die allgemeine Drehstreckung des dreidimensionalen Raumes entsteht, wenn wir in der früheren Formel p und π konjugiert nehmen, also setzen:*

$$(1) \quad \begin{cases} \qquad q' = p \cdot q \cdot \bar{p}, \qquad \text{oder ausgeschrieben:} \\ i x' + j y' + k z' \\ \quad = (d + i a + j b + k c)(i x + j y + k z)(d - i a - j b - k c). \end{cases}$$

[1]) Seit obiges geschrieben wurde, ist zahlreiche Literatur über die obengemeinte spezielle Relativitätstheorie erschienen. Es sei hier nur hingewiesen auf meinen Vortrag „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe" im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19, S. 299. 1910; abgedruckt in Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. I, S. 533.]

Um das zu beweisen, müssen wir vor allem zeigen, daß der skalare Teil des rechten Produktes verschwindet, daß also q' in der Tat ein *Vektor* ist. Dazu multiplizieren wir zunächst $p \cdot q$ nach den Quaternionenregeln aus und finden:

$$q' = [-ax - by - cz + i(dx + bz - cy) \\ + j(dy + cx - az) + k(dz + ay - bx)] \cdot [d - ia - jb - kc].$$

Nach abermaliger Quaternionenmultiplikation ergibt sich tatsächlich für den skalaren Teil von q' der Wert 0, während wir für die drei Vektorkomponenten die Ausdrücke erhalten:

$$(2)\quad \begin{cases} x' = (d^2 + a^2 - b^2 - c^2)x + 2(ab - cd)y + 2(ac + bd)z \\ y' = 2(ba + cd)x + (d^2 + b^2 - c^2 - a^2)y + 2(bc - ad)z \\ z' = 2(ca - bd)x + 2(cb + ad)y + (d^2 + c^2 - a^2 - b^2)z. \end{cases}$$

Daß diese Formeln in der Tat eine *Drehstreckung* darstellen, ergibt sich, wenn wir zu (1) die zugehörige Tensorengleichung bilden (vgl. S. 72):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)(d^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

oder:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = T^4 \cdot (x^2 + y^2 + z),$$

wobei $T = \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}$ den Tensor von p bedeutet. Danach ist (vgl. S. 75) unsere Transformation eine eigentliche Drehstreckung, falls ihre Determinante positiv ist — andernfalls ist sie noch mit einer Spiegelung verbunden; die lineare Streckung ist in jedem Falle $M = T^2$. Die Determinante kann, wie oben bemerkt, nur die beiden Werte $\pm M^3 = \pm T^6$ haben. Betrachten wir die Transformation für alle möglichen Parameterwerte a, b, c, d, die zu demselben — notwendig von 0 verschiedenen — Tensorwert T gehören, so muß die Determinante *stets* den Wert $+T^6$ haben, wenn sie ihn nur für *ein* spezielles Wertsystem der $a, \ldots, d$ hat; denn als stetige Funktion der a, b, c, d kann sie nicht sprungweis, ohne Zwischenwerte anzunehmen, in den Wert $-T^6$ übergehen. Ein solches spezielles Wertsystem ist aber $a = b = c = 0$, $d = T$, denn dafür läßt (2) sofort den Determinantenwert $\begin{vmatrix} d^2, & 0, & 0 \\ 0, & d^2, & 0 \\ 0, & 0, & d^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6$ erkennen. Also haben wir *immer* positives Zeichen, und daher ist (1) tatsächlich *stets eine eigentliche Drehung nebst Streckung*. Eine *mit Spiegelung verbundene Drehstreckung* ist nun ebenfalls einfach darzustellen. Man braucht nur die vorige Transformation mit der Spiegelung $x' = -x$; $y' = -y$; $z' = -z$ zusammenzusetzen und erhält $\bar{q}' = p \cdot q \cdot \bar{p}$.

Wollen wir nun erkennen, daß auch umgekehrt *jede* Drehstreckung in der Form (1) bzw. (2) enthalten ist, so haben wir zunächst zu bemerken, daß diese Formel in der Tat die nach der auf S. 75 angestellten Abzählung dazu nötigen *vier willkürlichen Parameter* a, b, c, d enthält. Daß man aber durch passende Bestimmung dieser Parameter wirklich jeden Wert linearer Streckung $M = T^2$ und jede *Lage der Drehachse* sowie jeden Wert des *Drehwinkels* erzielen kann, wird man sofort den folgenden Formeln entnehmen. Es seien ξ, η, ζ die Richtungskosinus der Drehungsachse, deren Quadratsumme bekanntlich:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{3}$$

ist, und ω sei der Drehwinkel (Amplitude der Drehung). Dann gelten — behaupte ich — die Relationen:

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} d = T \cdot \cos\dfrac{\omega}{2}\,; \\ a = T \cdot \xi \cdot \sin\dfrac{\omega}{2}\,, \qquad b = T \cdot \eta \cdot \sin\dfrac{\omega}{2}\,, \qquad c = T \cdot \zeta \cdot \sin\dfrac{\omega}{2}\,, \end{cases}$$

die wegen (3) von selbst die Bedingung:

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = T^2$$

befriedigen, und offenbar zu jedem beliebig gegebenen T; ξ, η, ζ; ω in der Tat passende a, b, c, d liefern.

Um nun die Gleichungen (4) zu *beweisen*, bemerken wir zuerst, daß sich aus ihnen bei bekannten a, b, c, d unmittelbar die vier Größen ω, ξ, η, ζ bestimmen, und zwar so, daß (3) erfüllt ist; denn durch Addition der Quadrate der Gleichungen (4) ergibt sich, da T der Tensor von $p = d + i a + j b + k c$ ist,

$$1 = \cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,,$$

und daraus folgt sofort das Bestehen der Beziehung (3). Für die Bestimmung von ξ, η, ζ genügen daher bereits die aus (4) folgenden Gleichungen:

$$a : b : c = \xi : \eta : \zeta\,, \tag{4'}$$

die aussagen, daß der Punkt (a, b, c) auf der Drehachse der Transformation liegt. Diese Tatsache läßt sich aber leicht bestätigen, indem wir in (2) $x = a$, $y = b$, $z = c$ einsetzen; wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} x' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,a = T^2 \cdot a\,, \\ y' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,b = T^2 \cdot b\,, \\ z' &= (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,c = T^2 \cdot c\,, \end{aligned}$$

d. h. der Punkt (a, b, c) bleibt auf derselben Verbindungsgeraden mit dem Anfangspunkt, und das gerade charakterisiert ihn als Punkt der Drehachse. — Es fehlt nun noch der *Nachweis, daß der in* (4) *definierte Winkel* ω *wirklich die Drehungsamplitude ist.* Dies erfordert jedoch umständlichere Betrachtungen, die ich hier einfach durch die Angabe ersparen kann, *daß unsere Transformationsformeln* (2) *für* $T = 1$

vermöge (4) *gerade in die Formeln übergehen, die Euler für die Drehung eines Koordinatensystems, welche die Achse* ξ, η, ζ *hat und vom Betrage* ω *ist, aufstellte.* Sie finden das beispielsweise näher ausgeführt in *Klein-Sommerfeld: „Theorie des Kreisels"*, Heft 1[1]), wo explizit auf die Quaternionentheorie Bezug genommen wird, oder in *Baltzers „Theorie und Anwendung der Determinanten"* [2]).

Wir wollen hier endlich noch den kurzen bequemen Ausdruck hinschreiben, den die Quaternionenrechnung für die *Drehung um die Achse* ξ, η, ζ *durch den Winkel* ω, *verbunden mit einer Streckung* um T^2 ergibt und den wir durch Eintragen der Formeln (4) in (1) erhalten:

$$(5)\left\{\begin{aligned} i x' + j y' + k z' = T^2 \left\{\cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\} \cdot \left\{i x + j y + k z\right\} \\ \cdot \left\{\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Damit sind die sämtlichen *Eulerschen Drehungsformeln in eine einzige Gleichung zusammengefaßt, die sich dem Gedächtnis leicht einprägt: Es ist der Vektor* $ix + jy + kz$ *vorn und hinten mit konjugierten Quaternionen vom Tensor 1, sog. Versoren (= „Dreher" im Gegensatz zu Tensor = „Strecker") zu multiplizieren, während noch als skalarer Faktor der Betrag der Streckung hinzutritt.*

Wir wollen uns noch überzeugen, daß diese Formel bei Reduktion auf *zwei Dimensionen* genau die *bekannte Darstellung einer Drehstreckung der x-y-Ebene durch die Multiplikation zweier komplexen Zahlen liefert* (vgl. S. 62). Dazu brauchen wir nur in (5) die Drehungsachse in die z-Achse zu legen ($\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$) und erhalten sodann für $z = z' = 0$:

$$i x' + j y' = T^2\left(\cos\frac{\omega}{2} + k\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(i x + j y\right)\left(\cos\frac{\omega}{2} - k\sin\frac{\omega}{2}\right),$$

und durch Ausmultiplizieren unter Beachtung der Multiplikationsregeln für die Einheiten:

$$\begin{aligned} ix' + jy' &= T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2}(ix+jy) + \sin\frac{\omega}{2}(jx - iy)\right\}\left\{\cos\frac{\omega}{2} - k\sin\frac{\omega}{2}\right\} \\ &= T^2\left\{\cos^2\frac{\omega}{2}(ix+jy) + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(jx - iy) - \sin^2\frac{\omega}{2}(ix+jy)\right\} \\ &= T^2\left\{(ix+jy)\cos\omega + (jx - iy)\sin\omega\right\} \\ &= T^2(\cos\omega + k\sin\omega)(ix+jy). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir noch beiderseits hinten mit $(-i)$, so erhalten wir:

$$x' + k y' = T^2(\cos\omega + k\sin\omega)(x + k y),$$

---

[1]) Leipzig 1897. [Zweiter Abdruck 1914.]

[2]) 5. Aufl. Leipzig 1881.

und das ist in der Tat genau die Multiplikationsformel zweier gemeiner komplexer Zahlen mit ihrer Deutung als Drehung um die Amplitude ω und Streckung um den Betrag T^2, nur daß an Stelle der sonst mit i bezeichneten imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ der Buchstabe k getreten ist.

Wir wollen nun noch, um wieder in den dreidimensionalen Raum zurückzukehren, die Formel (1) so modifizieren, daß sie eine *reine Drehung ohne Streckung* darstellt. Dazu müssen wir x', y', z' durch $x' \cdot T^2$, $y' \cdot T^2$, $z' \cdot T^2$, also q' durch $q' \cdot T^2$ ersetzen, und wenn wir bedenken, daß $p^{-1} = \frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{T^2}$ ist, so erhalten wir als Formel der reinen Drehung:

(6) $$i x' + j y' + k z' = p \cdot (i x + j y + k z) \cdot p^{-1}.$$

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man in diesem Ausdrucke p als Quaternion vom Tensor 1 annimmt:

$$p = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}\,(i\,\xi + j\,\eta + k\,\zeta), \quad \text{wobei} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,,$$

und daher entsteht die Formel (6) auch aus (5), indem man T gleich *1* setzt. In dieser Gestalt erscheint die Formel zuerst *1845* bei *Cayley*[1]). — Genau wie früher für den vierdimensionalen Raum gestaltet sich auch hier die *Zusammensetzung zweier Drehungen* äußerst einfach. Haben wir eine zweite Drehung:

$$i x'' + j y'' + k z'' = p' (i x' + j y' + k z')\, p'^{-1},$$

wo:
$$p' = \cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega'}{2}\,(i\,\xi' + j\,\eta' + k\,\zeta')$$

(Achse ξ', η', ζ' und Amplitude ω'), so folgt wiederum:

$$i x'' + j y'' + k z'' = p' \cdot p \cdot (i x + j y + k z) \cdot p^{-1} \cdot p'^{-1}$$

als Darstellung der resultierenden Drehung, so daß sich deren Achse und Drehwinkel ξ'', η'', ζ'' bzw. ω'' aus:

$$p'' = \cos\frac{\omega''}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}\,(i\,\xi'' + j\,\eta'' + k\,\zeta'') = p' \cdot p$$

ergeben. Damit haben wir einen *einfachen knappen Ausdruck der an sich ziemlich kompliziert aussehenden Formeln für die Zusammensetzung zweier Drehungen um 0 gewonnen.* Gleichzeitig aber haben wir, da wir jede Quaternion bis auf einen reellen Faktor (ihren Tensor) als Versor einer Drehung auffassen können, ein *einfaches geometrisches Äquivalent der Quaternionenmultiplikation in der Zusammensetzung der Drehungen gefunden; die Nichtkommutativität der Quaternionenmultiplikation entspricht alsdann dem bekannten Umstande, daß die Reihenfolge zweier Drehungen*

[1]) On certain results relating to quaternious. Collected mathematical papers, Vol. I, S. 123. 1889. Jedoch hat nach Cayleys eigener Angabe (Vol. 1, S. 586) *Hamilton* unabhängig von ihm die Formel gefunden.]

um einen Punkt im allgemeinen nicht vertauscht werden darf, ohne daß sich das Ergebnis ändert.

Wollen Sie Näheres über die *historische Entstehung* der hier behandelten Deutung und Anwendung der Quaternionen sowie der Theorie der Drehungen eines Koordinatensystems wissen, so verweise ich sie auf das eine der von *Cayley* selbst stammenden, außerordentlich wertvollen Referate über Dynamik: „*Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics*"[1]).

Ich schließe mit einigen *allgemeinen Betrachtungen über Wert und Verbreitung der Quaternionen.* Man muß dabei die eigentliche *Quaternionenmultiplikation* von dem *allgemeinen Quaternionenkalkül* unterscheiden. *Die erstere ist jedenfalls etwas äußerst Nützliches*, wie aus den vorangehenden Erörterungen zur Genüge hervorgeht. Der allgemeine Kalkül hingegen, wie ihn *Hamilton* in Aussicht nahm, betrachtet Additionen, Multiplikationen, Divisionen von Quaternionen in beliebiger Folge, d. h. er studiert die *Algebra der Quaternionen*, und indem er unendliche Prozesse hinzunimmt, kann er sogar zu einer *Funktionentheorie der Quaternionen* aufsteigen; natürlich wird hier wegen des Fehlens des kommutativen Gesetzes alles ganz anders, als in der Theorie der gewöhnlichen komplexen Variablen. Man darf aber wohl behaupten, *daß diese allgemeinen weitgehenden Ideen Hamiltons sich nicht bewährt haben*, d. h. daß sie mit anderen Disziplinen der Mathematik und ihrer Anwendungen nicht in Berührung und lebendigen Ideenaustausch getreten sind und daher auch weniger allgemeines Interesse gefunden haben.

Aber in der Mathematik geht es wie sonst im menschlichen Leben: neben der ruhigen objektiven Ansicht treten leidenschaftliche individuelle Überzeugungen auf. So haben auch die Quaternionen *enthusiastische Anhänger* und *leidenschaftliche Gegner*. Erstere, die man hauptsächlich in England und Amerika findet, haben zur Verbreitung ihrer Ideen im Jahre 1907 sogar das moderne Mittel der Begründung eines „*Weltbundes zur Beförderung der Quaternionenlehre*" ergriffen, der als durchaus internationale Institution von dem Japaner *Kimura*, der in Amerika studiert hatte, gegründet worden ist und dessen Präsident eine Zeitlang *Sir Robert Ball* war; sie versprechen sich von einem intensiven Betrieb der Quaternionen ganz besondere Förderung der Mathematik. Demgegenüber wollen die anderen wieder von den Quaternionen gar nichts hören, und lehnen damit auch die so nützliche Multiplikation ab; sie gehen von der Ansicht aus, daß alles Rechnen mit Quaternionen schließlich doch auf das Rechnen mit den vier Komponenten herauskommt, und daß die Einheiten und ihre Multiplikationstafel dabei überflüssiger Luxus sind. Dazwischen gibt es eine mittlere Richtung, welche Skalare und Vektoren immer auseinanderhalten will.

[1]) Report of the British Association for the Advancement of Science, 1862, abgedruckt in Cayleys Collected mathematical papers, Vol. IV, S. 552 ff. Cambridge 1891.

4. Die komplexen Zahlen im Unterricht.

Damit verlasse ich die Quaternionentheorie und schließe unser Kapitel mit einigen Bemerkungen über die Rolle, die diese Begriffe im *Schulunterricht* spielen. Quaternionen auf der Schule vorzubringen, fällt wohl keinem Menschen ein, wohl aber *wird auf die gemeinen komplexen Zahlen $x + iy$ immer die Rede kommen.* Es ist vielleicht nicht uninteressant, wenn ich Ihnen statt langer Erörterungen, wie man es macht und wie man es machen sollte, an der Hand von drei Büchern aus verschiedenen Zeitepochen einmal darlege, wie sich der *Unterricht historisch entwickelt* hat.

Ich lege Ihnen zunächst ein Buch von *Kästner* vor, der in der *zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts* in *Göttingen* eine führende Stellung einnahm. Damals trieb man auf der Universität noch diejenigen elementar-mathematischen Dinge, die dann später, in den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts, auf die Schule übergingen, und so hielt auch Kästner elementar-mathematische Vorlesungen, an denen auch Nichtmathematiker in großer Zahl teilnahmen. Sein Lehrbuch, das diesen Vorlesungen zugrunde lag, heißt „*mathematische Anfangsgründe*", und es kommt für uns hier die 2. Abteilung des 3. Teiles: „*Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*"[1]) in Betracht. Da beginnt auf S. 20 die Behandlung der imaginären Größen etwa mit den folgenden Worten: „Wer eine Wurzel geraden Exponentens aus einer ‚verneinten' Größe (so sagte man damals statt ‚negativ') zu ziehen fordert, der fordert etwas Unmögliches, denn es gibt keine verneinte Größe, die eine solche Potenz wäre." Das ist in der Tat ganz korrekt, aber nun geht es auf S. 34 weiter: „Solche Wurzeln *heißen* unmöglich oder imaginär," und ohne daß die Berechtigung der Sache viel untersucht wird, wird ganz ruhig wie mit gewöhnlichen Zahlen mit ihnen operiert, obwohl doch ihre Existenz noch eben bestritten wurde — gleichsam, als ob durch die Benennung das Unvernünftige plötzlich brauchbar geworden wäre. Sie erkennen hier noch einen Reflex des Leibnizschen Standpunktes, nach dem die imaginären Zahlen eigentlich etwas ganz Törichtes sind, aber doch unbegreiflicherweise zu brauchbaren Resultaten führen.

Kästner hat übrigens sehr anregend geschrieben, hat er sich doch auch als Epigrammatiker in der Literatur einen bekannten Namen erworben. So verbreitet er sich, um ein Beispiel für viele anzuführen, in der Einleitung des eben erwähnten Bandes über den *Ursprung des Wortes Algebra*, das ja, wie der Artikel „Al" anzeigt, aus dem Arabischen kommt. Ein Algebrist soll nach Kästner ein Mann sein, der Brüche „ganz macht", also etwa rationale Funktionen behandelt und auf einen Nenner bringt usw.; ursprünglich soll sich das auch auf die Tätigkeit eines Wundarztes bezogen haben, der gebrochene Knochen heilt. Kästner führt dafür den Don Quichote an, der zu einem Algebristen geht, um

[1]) 3. Aufl. Göttingen 1794.

sich seine Rippenbrüche wieder einrenken zu lassen; ob sich Cervantes freilich damit wirklich dem Sprachgebrauch anschließt oder ob nur eine Satire in der Stelle liegt, mag unentschieden bleiben.

Ein zweites Werk, das ich Ihnen vorlegen möchte, ist eine ganze Reihe von Jahren jünger und stammt von dem Berliner Professor *M. Ohm: „Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik"* [1]; es ist ein Buch ähnlicher Tendenz wie das Kästnersche und war einstmals sehr verbreitet. Ohm steht aber dem modernen Standpunkte schon viel näher, indem er das *Prinzip der Erweiterung des Zahlbereiches* deutlich ausspricht; gerade wie die negativen Zahlen, so sagt er etwa, muß auch $\sqrt{-1}$ als *neues Ding* den reellen Zahlen hinzugefügt werden. Die geometrische Deutung freilich besitzt auch er noch nicht, da sein Buch vor der entscheidenden Publikation von Gauß (1831) herausgekommen ist.

Endlich lege ich Ihnen noch eines aus der großen Reihe moderner Schulbücher vor, das sehr viel benutzt wird: *Bardeys Aufgabensammlung* [2]. Hier tritt zunächst das *Prinzip der Erweiterung* hervor, und in der Folge wird auch die *geometrische Deutung* auseinandergesetzt. Dies mag wohl heute in der Tat der allgemeine Standpunkt des Schulunterrichts sein, wenn auch an vereinzelten Stellen die Entwicklung vielleicht noch auf der früheren Stufe stehengeblieben ist. Der in diesem Buche eingenommene Standpunkt scheint mir auch die der Schule am meisten angemessene Behandlung zu sein: Ohne den Schüler durch systematische Darlegungen zu ermüden und ohne natürlich auf logisch abstrakte Erörterungen sich einzulassen, erläutere man die *komplexen Zahlen als Erweiterung des bekannten Zahlbegriffes* und vermeide dabei jeden mystischen Anstrich; vor allem aber gewöhne man den Schüler sogleich an die *geometrisch-anschauliche Deutung in der komplexen Ebene!*

Wir stehen damit, meine Herren, am Ende des ersten Hauptteils unserer Vorlesung, welcher der Arithmetik gewidmet war. Bevor ich mich zu ähnlichen Erörterungen über die Algebra und die Analysis wende, möchte ich einen längeren historischen Exkurs einfügen, der auch auf den allgemeinen gegenwärtigen Unterrichtsbetrieb sowie auf das, was wir an ihm bessern wollen, neues Licht fallen läßt.

Zwischenstück: Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt.

Lassen Sie mich von der Bemerkung ausgehen, daß wir *in der Entwicklungsgeschichte* der Mathematik bis in die Gegenwart sehr deut-

[1] 9 Bde. Berlin 1828. Bd. I: Arithmetik und Algebra, S. 276.

[[2] Vgl. auch die von W. Lietzmann und P. Zühlke bearbeitete Reformausgabe von Bardeys Aufgabensammlung, Oberstufe, Verlag Teubner, Leipzig.]

lich *zwei verschiedene Entwicklungsreihen* unterscheiden können, die sich bald gegenseitig ablösen, bald gleichzeitig unabhängig nebeneinander herlaufen, bald endlich auch sich wechselseitig durchdringen. Es ist schwer, den Unterschied, den ich hier im Sinne habe, in prägnante Worte zu fassen, da keine der geläufigen Einteilungen recht paßt. Sie werden ihn jedenfalls am besten an einem konkreten Beispiele verstehen, wenn ich Ihnen nämlich darlege, wie man im Sinne jeder der beiden Entwicklungsreihen die *elementaren Kapitel des Systems der Analysis* wirklich aufzubauen hätte.

Folgen wir der einen Entwicklungsreihe, die wir kurzweg als *Entwicklungsreihe A* bezeichnen wollen, so kommt folgendes System heraus, das heute an den Schulen sowie in den elementaren Lehrbüchern am meisten verbreitet ist:

1. An der Spitze steht die *formale Lehre von den Gleichungen*, also das *Operieren mit ganzen rationalen Funktionen* und die Behandlung der Fälle, in denen *algebraische Gleichungen durch Wurzelzeichen lösbar* sind.

2. Aus der *systematischen Verfolgung des Potenzbegriffes und seiner Umkehrungen* entstehen die *Logarithmen*, die sich beim numerischen Rechnen als sehr fruchtbringend erweisen.

3. Während die analytischen Entwicklungen bis hierhin ganz getrennt von der Geometrie gehalten wurden, macht man nun eine Anleihe bei dieser, welche die *Definitionen einer zweiten Art transzendenter Funktionen, der trigonometrischen*, liefert; deren weitere Theorie wird sodann als *neue gesonderte Disziplin* ausgebaut.

4. Es folgt sodann die sogenannte *„algebraische Analysis"*, welche die *Entwicklungen der einfachsten Funktionen in unendliche Reihen* lehrt; es kommen in Betracht das *allgemeine Binom*, der *Logarithmus* und seine Inverse, *die Exponentialfunktion*, sowie *die trigonometrischen Funktionen;* auch die *allgemeine Lehre von den unendlichen Reihen und dem Operieren mit ihnen* gehört hierher. Dabei ergeben sich die *überraschenden Zusammenhänge zwischen den genannten elementaren Transzendenten*, insbesondere die berühmte *Eulersche Formel:*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,.$$

Sie erscheinen um so wunderbarer, als die durch sie in Beziehung gesetzten Funktionen vorher von ganz verschiedenen Gebieten aus definiert worden sind.

5. Über die Schulmathematik hinaus schließt sich an diesen Aufbau als konsequente Fortsetzung die *Weierstraßsche Theorie der Funktionen komplexen Argumentes* an, die von den Eigenschaften der *Potenzreihen* ausgeht.

Stellen wir dem nun ebenso in kurzer Zusammenfassung das *Schema der zweiten Entwicklungsreihe B* entgegen; hier herrscht allgemein der *Gedanke der analytischen Geometrie*, der eine *Fusion der Zahl- und Raumanschauung* erzielen will. Demgemäß beginnt man

1. mit der *graphischen Darstellung der einfachsten Funktionen*, der Polynome und rationalen Funktionen einer Variablen. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Kurven mit der Abszissenachse setzen die *Nullstellen der Polynome* in Evidenz, und hieran schließt sich in natürlicher Weise die *Lehre von der numerischen Auflösung der Gleichungen durch Näherung an.*

2. Das *geometrische Kurvenbild* gibt die *naturgemäße anschauliche Quelle sowohl für die Idee des Differentialquotienten wie auch für die des Integrals;* zu ersterer führt die *Steigung der Kurve*, zu letzterer der *Flächeninhalt, den die Kurve mit der Abszissenachse begrenzt.*

3. In allen Fällen, in denen der *Integrationsprozeß* (oder Quadraturprozeß im eigentlichen Sinne des Wortes) mit rationalen und algebraischen Funktionen nicht explizit durchführbar ist, gibt er aus sich heraus zur *Entstehung neuer Funktionen* Anlaß, die so auf eine durchaus natürliche und einheitliche Art eingeführt werden. So definiert die *Quadratur der Hyperbel* den *Logarithmus:*

$$\int_1^x \frac{d\,t}{t} = \log x\,.$$

während die *Quadratur des Kreises* sich leicht auf das Integral:

$$\int_0^x \frac{d\,t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x\,,$$

also auf die *Inversen der trigonometrischen Funktionen* zurückführen läßt. Sie wissen, daß derselbe Gedankengang weiterhin zu neuen höheren Funktionsklassen, insbesondere den *elliptischen Funktionen*, führt.

4. Die *Entwicklung aller so gewonnenen Funktionen in unendliche Potenzreihen* geschieht wiederum nach einem *einheitlichen Prinzip*, dem *Taylorschen Lehrsatze.*

5. Als höhere Fortführung dieses Ansatzes erscheint dann die *Cauchy-Riemannsche Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments*, die sich auf den *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* und dem *Cauchyschen Integralsatze* aufbaut.

Versuchen wir nun, das *Resultat dieses Überblickes* in bestimmte Worte zu fassen, so können wir vielleicht sagen, *daß bei A eine mehr partikularistische Auffassung der Wissenschaft zugrunde liegt, die das Gesamtgebiet in eine Reihe gegeneinander wohl abgegrenzter Teile zerlegt und in einem jeden für sich mit einem Minimum von Hilfsmitteln unter möglichster Vermeidung von Anleihen in den Nachbargebieten auszukommen sucht;* das Ideal ist ein *auskristallisierter, logisch in sich geschlossener Aufbau jedes der einzelnen Gebiete.* Demgegenüber *legt der Anhänger von B gerade auf eine organische Verknüpfung der Einzelgebiete und auf* *die zahlreichen Anregungen, die sie sich gegenseitig gewähren, das Hauptgewicht, und er bevorzugt demgemäß die Methoden, die ihm das gleichzeitige Verständnis mehrerer Gebiete unter einheitlichem Gesichtspunkte erschließen;* sein Ideal ist die *Erfassung der gesamten mathematischen Wissenschaft als eines großen zusammenhängenden Ganzen.*

Man kann wohl nicht im Zweifel sein, welche der beiden Richtungen mehr Leben in sich hat, welche den Schüler — soweit er nicht spezifisch abstrakt mathematisch veranlagt ist — mehr packen kann. Betrachten Sie, um sich das recht zu vergegenwärtigen, nur das *Beispiel der Funktionen e^x und $\sin x$*, über die wir gerade in dieser Richtung später noch viel zu reden haben werden! Im System A — und leider schließt man sich diesem auf der Schule fast ausschließlich an — treten beide Funktionen ganz heterogen auf: e^x bzw. der *Logarithmus* erscheint als *bequemes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen*, $\sin x$ aber entsteht in der *Dreiecksgeometrie.* Wie soll man da verstehen, daß beide in so einfacher Weise zusammenhängen, und noch mehr, daß sie sich in den verschiedensten Gebieten, die weder mit der Technik des numerischen Rechnens noch mit der Geometrie das mindeste zu tun haben, immer wieder ganz von selbst als naturgemäßer Ausdruck der dort obwaltenden Gesetze darbieten? Wie weit diese Anwendungsmöglichkeiten gehen, zeigen die Namen „*Zinseszinsfunktion*" oder „*Gesetz des organischen Wachstums*", die man e^x wohl beigelegt hat, zeigt andrerseits die Tatsache, daß $\sin x$ überall da, wo von *Schwingungen* die Rede ist, eine zentrale Rolle spielt. *Im Systeme B aber erscheinen diese Zusammenhänge ganz verständlich und der von Anfang an hervorgehobenen Bedeutung der Funktionen durchaus angemessen:* Hier entstehen ja e^x und $\sin x$ aus derselben Quelle, der Quadratur einfacher Kurven, und man wird von da aus bald — wir werden das später noch sehen — auf die *Differentialgleichungen einfachsten Typs* $\left(\frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 \sin x}{d\,x^2} = -\sin x\right)$ geführt, die allen jenen Anwendungen naturgemäß zugrunde liegen.

Zum vollen Verständnis der Entwicklung der Mathematik müssen wir aber noch eines *dritten Momentes C* gedenken, das neben und innerhalb der Entwicklungsreihen A und B sehr häufig eine große Rolle spielt. Es handelt sich da um die Methode, die man mit einem durch Entstellung des Namens eines arabischen Mathematikers entstandenen Worte als *Algorithmus* bezeichnet; algorithmisch ist im Grunde schließlich *jedes geordnete formale Rechnen*, insbesondere das *Buchstabenrechnen.* Welch einen großen Anteil an der Entwicklung der Wissenschaft das algorithmische Verfahren als eine gewissermaßen *selbständig vorwärtstreibende, den Formeln innewohnende Kraft* unabhängig von der Absicht und Einsicht der jeweiligen Mathematiker und oft sogar ihr entgegen gehabt hat, das haben wir schon wiederholt betont; auch in den Anfängen der Infinitesimalrechnung hat, wie wir weiterhin sehen werden, der Algorithmus häufig zu neuen Begriffen und Operationen gedrängt, noch ehe man sich über ihre Zulässigkeit Rechenschaft geben konnte. Selbst auf höheren Stufen der Entwicklung können diese algorithmischen Momente Nützliches leisten und haben es tatsächlich getan, so daß man sie geradezu als den *Untergrund der mathematischen Entwicklung* bezeichnen kann; es heißt also unhistorisch denken, wenn man, wie es heute manchmal üblich ist, diese Umstände als bloß „formale" Entwicklungen geringschätzig beiseite schiebt.

Ich möchte nunmehr den Gegensatz dieser verschiedenen mathematischen Arbeitsrichtungen durch die Geschichte der Mathematik genauer verfolgen, wobei ich mich natürlich auf die Erwähnung der allerwichtigsten Züge der Entwicklung beschränken muß. Hierbei wird der *durchgreifende Unterschied zwischen A und B innerhalb des ganzen Gebietes der Mathematik* noch klarer werden als in der obigen auf die Analysis beschränkten Zusammenstellung.

Bei den *alten Griechen* finden wir eine *scharfe Trennung der reinen und angewandten Mathematik,* die auf Plato und Aristoteles zurückgeht. Zur reinen Mathematik gehörte vor allem der bekannte *Euklidische Aufbau der Geometrie;* in der angewandten wurde besonders das *numerische Rechnen,* die sogenannte *Logistik* ausgebildet (*λόγος* = allgemeine Zahl; vgl. S. 35). Freilich wurde die Logistik recht gering angesehen, und Sie wissen, daß sich dieses Vorurteil noch bis heute vielfach erhalten hat — allerdings meist nur bei Leuten, die selbst nicht numerisch rechnen können. Die geringere Geltung der Logistik mag besonders darauf zurückzuführen sein, daß sie im Anschluß an die *Trigonometrie* und die Bedürfnisse des *praktischen Vermessungswesens* entwickelt wurde, das nun einmal dem Menschen gewöhnlich nicht vornehm genug erscheint; trotzdem mag sie demgegenüber in der allgemeinen Wertschätzung etwas gehoben worden sein durch ihre Anwendung in der Astronomie, welche, obwohl der Geodäsie verwandt, doch im Gegensatz zu ihr immer für eine der vornehmsten Disziplinen gegolten hat. — Sie sehen bereits aus diesen wenigen Bemerkungen, daß der griechische Wissenschaftsbetrieb mit seiner strengen Scheidung der einzelnen Gebiete, deren jedes dann in dem bekannten starren logischen Gefüge dargestellt wurde, *ganz der Entwicklungsreihe A angehört. Trotzdem waren den Griechen auch Betrachtungen im Sinne von B nicht fremd,* und sie mögen bei ihnen zu heuristischen Zwecken und zur ersten Mitteilung ihrer Entdeckungen eine große Rolle gespielt haben, wenn ihnen auch für die endgültige Darstellung die Form *A* unentbehrlich zu sein schien; das zeigt ganz besonders die kürzlich entdeckte *Schrift des Archimedes*[1]), in der dieser

[1]) Vgl. *Heiberg und Zeuthen*: Eine neue Schrift des Archimedes. Leipzig 1907. Sonderabdruck aus Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. VIII.

seine Körperberechnungen unter Hinzunahme mechanischer Betrachtungen in durchaus modern anmutender Weise darlegt, die nichts mit dem starren euklidischen System zu tun hat.

Neben den Griechen spielen im Altertum mathematisch besonders noch die *Inder als Schöpfer unseres modernen Ziffernsystems* und später die *Araber als seine Überlieferer* eine Rolle; auch die *ersten Anfänge des Buchstabenrechnens* finden sich bei ihnen. Diese Fortschritte gehören offenbar der *algorithmischen Entwicklungsreihe C* an.

Gehen wir nun sogleich zur *Neuzeit* über, so können wir zunächst *von etwa 1500 an die mathematische Renaissance* datieren, die eine ganze *Reihe großer Entdeckungen* hervorgebracht hat. Ich nenne als Beispiel die *formale Auflösung der kubischen Gleichung* (Cardanische Formel), die in der *1545 in Nürnberg* erschienenen *„Ars magna" des Cardano* enthalten ist, einem höchst bedeutsamen Werke, das überhaupt die Keime der modernen, über das Schema der antiken Mathematik hinausführenden Algebra enthält; freilich ist dieses Werk nicht Cardanos persönliches Verdienst, denn er soll seine berühmte Formel ebenso wie anderes nicht selbst erfunden, sondern fremden Autoren entlehnt haben.

Von 1550 an steht dann das *trigonometrische Rechnen* im Vordergrund; getragen durch die Bedürfnisse der *Astronomie*, für die ich nur den Namen *Kopernikus* nennen will, erscheinen *die ersten großen trigonometrischen Tafelwerke. Von etwa 1600 an* schließt sich hieran unmittelbar die *Entwicklung der Logarithmen;* die ersten Logarithmentafeln, die der Schotte *Napier* (oder *Neper*) aufstellte (1614), enthalten geradezu nur die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Wir sehen in diesen 100 Jahren also genau den Entwicklungsgang, wie er dem *Schema A* entspricht.

Wir kommen nun zu der *eigentlichen Neuzeit*, dem weiteren Verlaufe des *siebzehnten Jahrhunderts*. Hier tritt durchaus die *Richtung B in den Vordergrund. 1637* erscheint die *analytische Geometrie des Descartes*, welche die für alles Folgende grundlegende Verbindung zwischen Zahl und Raum schafft; dies Werk ist im Neudruck[1]) bequem zugänglich. Im Anschluß hieran treten sogleich die *zwei großen Probleme des 17. Jahrhunderts*, das *Tangentenproblem* und das *Quadraturproblem*, also die *Probleme des Differenzierens und Integrierens*, auf. Zur Entwicklung der eigentlichen Differential- und Integralrechnung fehlt von hier an nur noch die Erkenntnis, daß beide Probleme ganz nahe zusammenhängen, *daß das eine die Umkehrung des andern ist.* Diese Einsicht scheint der *Kern des großen Fortschrittes* zu sein, der am Ende des Jahrhunderts gemacht wurde.

Vorher aber, im Laufe des Jahrhunderts, entsteht noch die *Lehre von den unendlichen Reihen, insbesondere den Potenzreihen*, und zwar nicht etwa als selbständige Disziplin im Sinne der heutigen algebraischen

[1]) Descartes, R.: La géométrie. Nouvelle édition. Paris 1886.

Analysis, sondern *in engster Verbindung mit dem Quadraturproblem. Nicolaus Mercator* (Latinisierung des deutschen Namens Kaufmann; 1620—1687), der übrigens nicht mit dem etwa 100 Jahre älteren Erfinder der Mercatorprojektion identisch ist, hat hier Bahn gebrochen; er hatte die kühne Idee, zur *Reihenentwicklung von* $\log(1+x)$ den Bruch $\frac{1}{1+x}$ auszudividieren und die entstehende Reihe *gliedweise zu integrieren:*

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - + \cdots)\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots$$

Das ist genau der Inhalt seiner Überlegung, wenn er auch natürlich nicht unsre einfachen Zeichen $\int$, dx, ... benutzte, sondern eine schwerfälligere Sprache redete. Seines Prozesses bemächtigte sich in den sechziger Jahren *J. Newton* (1643—1727), der sich die *Reihe für das allgemeine Binom* gebildet hatte; gewiß verfuhr er dabei *nur nach Analogieschlüssen,* die sich auf die bekannten einfachsten Fälle stützten, ohne einen strengen Beweis zu besitzen und ohne die Grenzen der Gültigkeit dieser Reihenentwicklung zu kennen. Wir beobachten hier also wiederum ein Eingreifen des *algorithmischen Moments C.* Indem er die Binominalreihe auf $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ anwendet, erhält er nach dem Mercatorschen Verfahren die *Reihe für* $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$. Durch sehr geschickte *Umkehrung dieser Reihe,* sowie derjenigen für $\log x$ findet er dann auch die *Reihen für* $\sin x$ *und* e^x. Den Abschluß dieser Kette von Entdeckungen verdanken wir endlich *Brook Taylor* (1685—1731), der 1715 sein *allgemeines Prinzip für die Potenzreihenentwicklung von Funktionen* veröffentlichte.

Die *Entstehung der eigentlichen Infinitesimalrechnung am Ende des 17. Jahrhunderts,* auf die schon kurz hingewiesen wurde, ist bekanntlich *G. W. Leibniz* (1646—1716) und *Newton* zu danken. Bei *Newton* ist die grundlegende Idee die *Vorstellung des Fließens;* beide Variable x, y werden als Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ der Zeit t aufgefaßt, und während die Zeit dahinfließt, „fließen" sie gleichfalls ständig. Demgemäß heißt die Variable bei Newton geradezu *fluens,* und was wir Differentialquotient nennen, bezeichnet er als *Fluxion* $\dot{x}$, $\dot{y}$. Sie sehen, wie hier *alles durchaus auf Anschauung begründet* ist.

Ähnliches gilt für die Darstellung von *Leibniz,* dessen erste Publikation 1684 erschien. Er bezeichnet selbst geradezu als seine größte Entdeckung das *Prinzip der Stetigkeit in allem Naturgeschehen,* den Satz: „*Natura non facit saltum*"; auf diese Auffassung stützt er seine mathematischen Entwicklungen, wiederum ein für das System *B* typischer Zug. Übrigens spielt daneben bei Leibniz *sehr stark der Einfluß des Algorithmus* (C) hinein; von ihm rühren die algorithmisch so wertvollen Bezeichnungen $\frac{dy}{dx}$ und $\int f(x)\,dx$ her.

Im ganzen aber ergibt sich als Resultat dieses Überblickes, *daß die großen Entdeckungen des 17. Jahrhunderts vorwiegend der Entwicklungsreihe B angehören.*

Im *18. Jahrhundert* nimmt diese Entdeckungsperiode ihren Fortgang zunächst *in derselben Richtung*; als glänzendste Namen sind *L. Euler* (1707—1783) und *J. L. Lagrange* (1736—1813) zu nennen. Es entwickelt sich so die *Lehre von den Differentialgleichungen im allgemeinsten Sinne, einschl. der Variationsrechnung; die analytische Geometrie und analytische Mechanik werden weiter ausgebaut.* Überall haben wir ein erfreuliches Fortschreiten, ganz wie in der Geographie nach der Entdeckung Amerikas die neuen Länder zuerst einmal nach allen Richtungen erforscht und durchquert wurden. Aber genau wie hier von exakten Vermessungen noch lange nicht die Rede war, wie man in der allerersten Zeit sogar über die allgemeine Lage des neuen Erdteils ganz falsche Vorstellungen hatte (glaubte doch Columbus zuerst, den Osten Asiens gefunden zu haben!), so war man auch in jenen der Mathematik im Erdteil des Infinitesimalkalküls neu eroberten Gebieten zunächst von einer zuverlässigen logischen Orientierung noch recht weit entfernt; ja sogar über ihre Beziehungen zu den alten wohlbekannten Disziplinen gab man sich mitunter Täuschungen hin, indem man die Infinitesimalrechnung für etwas *Mystisches* hielt, das überhaupt keine genaue logische Analyse gestatte.

Auf wie schwankendem Boden man hier stand, wurde erst recht deutlich, als man in Lehrbüchern die neuen Gebiete allgemeinverständlich darstellen wollte; da zeigte sich bald, daß die bisher allein herrschende Forschungsrichtung *B* nicht mehr weiter helfen konnte, und *Euler* war es, der sie zuerst verließ. Er hat zwar noch keine eigentlichen inneren Bedenken gegen die Infinitesimalrechnung, aber sie macht doch seiner Meinung nach dem Anfänger zu viele Schwierigkeiten und Skrupel; aus diesem pädagogischen Grunde hält er es für ratsam, ihr in einem besonderen Lehrbuche, seiner „*Introductio in analysin infinitorum*" von 1748, diejenige Disziplin voranzustellen, die wir heute *algebraische Analysis* nennen; dahin verweist er insbesondere die *Lehre von den unendlichen Reihen und sonstigen unendlichen Prozessen,* die er dann hinterher beim Aufbau der Infinitesimalrechnung als Fundament benutzt.

Einen viel radikaleren Weg schlägt, fast 50 Jahre später, *Lagrange* in seiner „*Théorie des fonctions analytiques*" *von 1797* ein; er kann seine Skrupel über die bisherige Begründung der Infinitesimalrechnung nur dadurch beseitigen, daß er sie als allgemeine Disziplin ganz verwirft und sie lediglich als Inbegriff formaler Regeln über gewisse spezielle

Funktionen bestehen läßt. Er betrachtet nämlich *ausschließlich solche Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

und diese nennt er *analytische Funktionen*, das soll heißen Funktionen, die in der Analysis vorkommen und mit denen man da wirklich etwas Vernünftiges anfangen kann. *Der Differentialquotient eines solchen $f(x)$ wird dann rein formal durch eine zweite Potenzreihe definiert*, wie wir später sehen werden. Mit diesem gegenseitigen Zusammenhang der Potenzreihen hat sich die Differential- und Integralrechnung zu beschäftigen. Durch diese Beschränkung auf formale Betrachtungen wurde für die damalige Zeit freilich eine Reihe von Schwierigkeiten beseitigt.

Man sieht, *daß schon jene Wendung von Euler und erst recht das ganze Vorgehen von Lagrange durchaus der Richtung A angehören, indem dadurch die anschauliche genetische Entwicklung durch einen streng in sich abgeschlossenen Gedankenkreis ersetzt wird.* Diese beiden Forscher haben *auf den Schulunterricht den größten Einfluß* gehabt, und wenn die Schule heute unendliche Reihen behandelt oder durch Potenzentwicklung nach der sogenannten *Methode der unbestimmten Koeffizienten* Gleichungen löst, die Aufnahme der eigentlichen Differential- und Integralrechnung aber ablehnt, so steht sie noch *ganz unter der Nachwirkung der Eulerschen „Indroductio" und des Lagrangeschen Werkes.*

Das *19. Jahrhundert*, zu dem wir jetzt kommen, beginnt vorwiegend mit einer *sicheren Begründung der höheren Analysis durch Konvergenzkriterien*, um die man sich vorher noch nicht gekümmert hatte; im 18. Jahrhundert herrscht noch der „paradiesische" Zustand, indem man gut und böse, konvergent und divergent nicht unterscheidet, und selbst in Eulers Introductio kommen konvergente und divergente Reihen friedlich nebeneinander vor. Aber am Anfang des neuen Jahrhunderts geben *Gauß* (1777—1855) und *Abel* (1802—1829) die ersten scharfen Konvergenzuntersuchungen, und *Cauchy* (1789—1857) entwickelt in den zwanziger Jahren in Vorlesungen und Büchern *in modernem Sinne* die *erste exakte Begründung der Infinitesimalrechnung*. Er gibt nicht nur die genaue *Definition des Differentialquotienten und Integrals als Grenzwert eines Quotienten zweier Differenzen bzw. einer Summe von Produkten*, wie man dies vorher auch gelegentlich schon getan hatte, sondern baut auf ihr unter Hervorhebung des *Mittelwertsatzes* zum ersten Male ein *in sich folgerichtiges Lehrgebäude der Infinitesimalrechnung* auf; wir werden später noch ausführlich darauf zurückkommen. Diese Theorien liegen wohl gleichfalls *im Sinne von Richtung A*, da sie das Gebiet systematisch logisch, isoliert von anderen Disziplinen, durcharbeiten; *sie haben indessen auf die Schule keinen Einfluß mehr gewonnen*, obgleich sie durchaus geeignet sind, die alten Vorurteile gegen die Differential- und Integralrechnung zu zerstören.

Aus der *weiteren Entwicklung des 19. Jahrhunderts* will ich nur ganz weniges hervorheben; zunächst nenne ich einige *in der Richtung B* liegende Fortschritte: *neuere Geometrie, mathematische Physik*, sowie *Funktionentheorie komplexer Veränderlicher nach Cauchy und Riemann.* Die Führer bei der ersten Bearbeitung dieser drei großen Gebiete waren *zunächst die Franzosen.* Es ist hier der Ort, auch über den *Stil der mathematischen Darstellung* ein Wort zu sagen. Bei Euklid finden Sie alles nach dem Schema „Voraussetzung, Behauptung, Beweis" gegliedert, wozu unter Umständen noch die „Determination" tritt (Abgrenzung des Gebietes, innerhalb dessen die Betrachtungen gelten); in weiten Kreisen können Sie die Meinung finden, daß die Mathematik sich immer in diesem Vierschritt bewegt. Aber gerade in der Periode, von der wir soeben reden, bildet sich besonders bei den Franzosen eine *neue Kunstform der mathematischen Darstellung* aus, die man als *künstlerisch gegliederte Deduktion* bezeichnen kann; die Werke von *Monge*, oder, um ein neueres Buch zu nennen, der *„Traité d'analyse" von Picard* lesen sich geradezu wie ein gut geschriebener spannender Roman. Das ist der *der Denkweise B angepaßte Stil*, während die *Euklidische Darstellung durchaus der Denkweise A wesensverwandt ist.*

Von Deutschen, die auf den genannten Gebieten Großes leisteten, nenne ich noch *Jacobi* (1804—1851) und *Riemann* (1826—1866) und füge aus neuerer Zeit *Clebsch* (1833—1872) und den Norweger *Lie* (1842—1899) hinzu. Sie alle gehören wesentlich der *Richtung B* an, nur ist gelegentlich *ein algorithmischer Einschlag* bei ihnen bemerkbar.

Mit *Weierstraß* (1815—1897) tritt von der Mitte des Jahrhunderts an — seine Lehrtätigkeit in Berlin beginnt 1856 —, die *Denkweise A* wieder mehr in den Vordergrund; die *Weierstraßsche Funktionentheorie* habe ich ja schon unter *A* aufgeführt. In gleicher Weise gehören die *neueren Untersuchungen über die Axiome der Geometrie* dem *Typus A* an; es handelt sich hier um Untersuchungen ganz in Euklidischer Richtung, die sich ihr auch in der Art der Darstellung wieder annähern.

Wir beenden damit diese kurze historische Übersicht; manche Gesichtspunkte, die ich hier nur kurz andeuten konnte, werden wir späterhin noch ausführlich zu besprechen haben. Als Ergebnis dürfen wir jedenfalls die Erkenntnis mitnehmen, *daß in den letzten Jahrhunderten mathematischer Geschichte unsere beiden hauptsächlichen Forschungsarten gleichmäßig zur Geltung kommen, daß eine jede von ihnen, und manchmal gerade ihre Aufeinanderfolge große Fortschritte der Wissenschaft zustande gebracht hat.* Die Mathematik wird sich gewiß nur dann gleichmäßig nach allen Seiten hin fortentwickeln können, wenn *keine der beiden Arten der Untersuchungen vernachlässigt* wird; möge jeder Mathematiker in der ihm zusagenden Richtung arbeiten!

Der *Schulunterricht* aber steht leider — ich deutete es bereits an — heute, wie schon seit langer Zeit *unter einseitiger Herrschaft der Rich-*

tung A; eine jede Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts muß also für *eine stärkere Hervorhebung der Richtung B* eintreten. Dabei denke ich vor allem an das Durchdringen der *genetischen Unterrichtsmethode*, an eine stärkere Betonung der *Raumanschauung* als solcher und besonders an die *Voranstellung des Funktionsbegriffs* unter *Fusion der Raum- und Zahlvorstellung!* In den Dienst dieser Tendenz stelle ich auch die gegenwärtige Vorlesung, und das um so mehr, als in den elementarmathematischen Werken, die wir sonst immer zu Rate ziehen, beispielsweise in *Weber-Wellstein*, *Tropfke*, *M. Simon*, fast ausschließlich die Richtung *A* vertreten ist; ich hatte dieses Gegensatzes ja auch bereits in der Einleitung der Vorlesung gedacht.

Und nun, meine Herren, genug von diesen Zwischenbetrachtungen; lassen Sie uns zum nächsten großen Abschnitt der Vorlesung übergehen!

Zweiter Teil.

Algebra.

Ich darf damit beginnen, daß ich Ihnen *einige Lehrbücher der Algebra* nenne, um Sie in die sehr umfangreiche vorhandene Literatur etwas einzuführen. Zunächst erwähne ich *Serrets* „*Cours d'algèbre*"[1]), der früher auch bei uns sehr viel benutzt wurde und große Verdienste hat. Heute besitzen wir jedoch zwei große, verbreitete deutsche Lehrbücher: *H. Webers* „*Lehrbuch der Algebra*"[2]) und *E. Nettos* „*Vorlesungen über Algebra*"[3]), jedes in 2 Bänden; beide behandeln außerordentlich weitgehend auch die schwierigsten Teile der Algebra und sind überhaupt eigentlich für ein *weitergehendes Spezialstudium* bestimmt; für das durchschnittliche Bedürfnis der Lehramtskandidaten scheinen sie mir inhaltlich zu umfangreich und auch zu teuer zu sein. Mehr dem letzteren Bedürfnis angepaßt sind wohl die recht bequem lesbaren „*Vorlesungen über Algebra*" von *G. Bauer*[4]), die kaum über das hinausgehen, was der Lehrer beherrschen sollte[5]). Nach der *praktischen Seite* hin, für die numerische Auflösung von Gleichungen, werden diese Vorlesungen durch das kleine Buch „*Praxis der Gleichungen*" von *C. Runge*[6]) ergänzt, das ich Ihnen nur sehr empfehlen kann.

Wenn ich mich nun zum engeren Thema wende, so bemerke ich vorab, daß ich im Rahmen dieser Vorlesung natürlich *keine systematische Darstellung der Algebra* geben kann; ich kann vielmehr *nur einen einseitigen Ausschnitt* geben, und da ist es das Zweckmäßigste, wenn ich solche Dinge hervorhebe, die anderswo unbillig vernachlässigt werden, und die doch gerade geeignet sind, den Schulunterricht in besonderer Beleuchtung erscheinen zu lassen. Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um *einen* Punkt gruppieren, nämlich um die *Anwendung der graphischen und überhaupt der geometrisch anschaulichen Methoden auf die Lösung von Gleichungen.* Damit ist

---

[1]) Troisième édition, Paris 1866; [sixième édition, 1910.]

[2]) Zweite Auflage. Braunschweig 1898/99. [Neubearbeitung von R. Fricke. Bd. I. 1924, Bd. II. 1926, Bd. III. 1928.]

[3]) Leipzig 1896/99. [[4]) In vierter vermehrter Auflage von L. Bieberbach herausgegeben, Leipzig 1928.]

[5]) Vgl. auch Netto, E.: Elementare Algebra, akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. [Zweite Auflage. Leipzig 1913 und H. Weber: Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande. 2. Abdruck. Braunschweig 1921.]

[[6]) Zweite Auflage. Leipzig 1921.]

ein äußerst umfassendes und beziehungsreiches Kapitel bezeichnet, aus dem ich natürlich auch wieder nur einige der wichtigsten und interessantesten Dinge herausgreifen kann; wir werden dabei mit den verschiedensten Gebieten in organische Verbindung treten, so daß wir so recht *Mathematik im Sinne unserer Entwicklungsreihe B* von vorhin treiben werden. Wir behandeln zunächst Gleichungen für reelle Größen, um dann später die Berücksichtigung der komplexen Größen folgen zu lassen.

I. Reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten.

1. Gleichungen mit einem Parameter.

Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Falle, welcher geometrischer Behandlung zugänglich ist, nämlich mit einer reellen algebraischen Gleichung für die Unbekannte x, in der noch ein Parameter λ auftritt:

$$f(x, \lambda) = 0 .$$

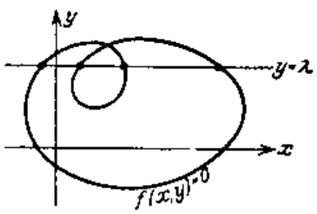


Abb. 19.

Wir deuten die Gleichung geometrisch am einfachsten, indem wir λ durch eine zweite Variable y ersetzen und:

$$f(x, y) = 0$$

als *Kurve in einer x-y-Ebene* auffassen (vgl. Abb. 19). *Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der zur Abszissenachse parallelen Geraden* $y = \lambda$ *geben die reellen Wurzeln der Gleichung* $f(x, \lambda) = 0$, und wenn wir uns die Kurve angenähert gezeichnet haben — was bei nicht allzu kompliziertem f leicht möglich ist —, übersehen wir durch Verschiebung der Parallelen, wie bei Variation von λ die Anzahl der reellen Wurzeln sich ändert. Besonders am Platze ist dieser Ansatz, wenn *f in λ linear* ist, also bei Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x) - \lambda \psi(x) = 0;$$

denn dann wird für rationale φ und ψ auch unsere Kurve $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rational und ihre Herstellung daher besonders einfach. In diesen Fällen kann man die Methode auch zur näherungsweisen numerischen Berechnung der Wurzeln vielfach mit Nutzen anwenden.

Betrachten wir *als Beispiel die quadratische Gleichung:*

$$x^2 + a x - \lambda = 0 .$$

Wir haben dann in der Kurve $y = x^2 + a x$ eine *Parabel* und übersehen sofort, für welche Werte von λ die Gleichung 2, 1, 0 reelle Wurzeln hat, entsprechend den Horizontalen, die die Parabel in 2, 1, 0 Punkten schneiden (vgl. Abb. 20). Die Vorführung einer solchen einfachen und anschaulichen Konstruktion scheint mir auch für die oberen Klassen der Schule sehr geeignet. — Als zweites Beispiel nenne ich die *kubische Gleichung:*

$$x^3 + a x^2 + b x - \lambda = 0 ,$$

bei der wir eine *kubische Parabel* $y = x^3 + a x^2 + b x$ zu betrachten haben; sie hat je nach den Werten a, b verschiedenes Aussehen. In der Abb. 21 ist angenommen, daß $x^2 + a x + b = 0$ zwei reelle

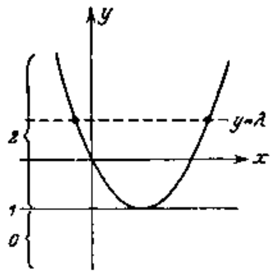


Abb. 20.

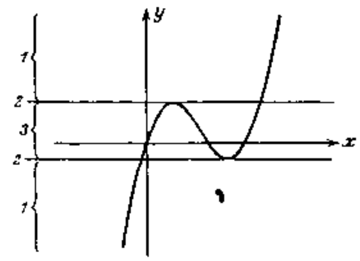


Abb. 21.

Wurzeln hat; man sieht zugleich, wie die Parallelen sich in solche gruppieren, die in einem, und solche, die in drei reellen Punkten schneiden. Außerdem können zwei Grenzlagen mit je einer Doppelwurzel eintreten.

2. Gleichungen mit zwei Parametern.

Treten nun in einer Gleichung mehrere, zunächst zwei Parameter auf, so ist zum graphischen Ansatz des Problems bereits mehr Kunst nötig; dafür ergeben sich aber auch weitergehende und interessantere Resultate. Wir beschränken uns hier von vornherein auf *lineares Auftreten der beiden Parameter* λ, μ und wollen für die Unbekannte der Gleichung t schreiben; es handelt sich also um die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichung:

(1) $\varphi(t) + \lambda \cdot \chi(t) + \mu \cdot \psi(t) = 0,$

wobei φ, χ, ψ Polynome in t sind.

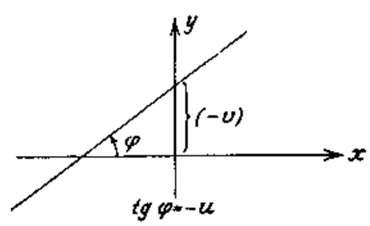


Abb. 22.

Sind x, y gewöhnliche rechtwinklige Punktkoordinaten, so wird jede (zur y-Achse nicht parallele) Gerade in der x-y-Ebene dargestellt durch eine Gleichung:

(2) $y + u x + v = 0,$

und wir können u, v *als Koordinaten der Geraden* bezeichnen: $(-u)$ ist die trigonometrische Tangente ihres Winkels φ gegen die x-Achse, $(-v)$ der Abschnitt, den sie auf der y-Achse ausschneidet (vgl. Abb. 22). Indem wir, was später besonders wichtig wird, Punkt und Gerade und entsprechend Punkt- und Geradenkoordinaten als gleichberechtigt ansehen, können wir kurz sagen, *die Gleichung* $y + u x + v = 0$ *bedeutet vereinigte Lage der Geraden* u, v *und des Punktes* x, y, d. h. der Punkt liegt auf der angegebenen Geraden, und die Gerade geht durch den angegebenen Punkt.

Um nun unsere Gleichung (1) geometrisch zu deuten, bringen wir sie mit (2) zur Übereinstimmung; das kann auf *zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen*, die wir nacheinander behandeln.

A. Wir setzen:

$$(3\text{a})\qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)},$$

$$(3\text{b})\qquad u = \lambda, \qquad v = \mu.$$

Die Gleichungen (3a) stellen bei variablem t eine *wohlbestimmte rationale Kurve der x-y-Ebene*, die sog. *„Normkurve" der Gleichung* (1) dar, und da jeder ihrer Punkte durch einen bestimmten Wert von t entsteht, ist auf ihr gleichzeitig eine gewisse *Skala von t-Werten* festgelegt. Aus (3a) können wir unmittelbar beliebig viele Punkte der Kurve berechnen und so die Normkurve mit ihrer Skala hinreichend genau etwa auf Millimeterpapier zeichnen. Für jedes bestimmte Parameterpaar λ, μ stellt ferner (3b) eine *Gerade* der Ebene dar, und (1) bedeutet nach dem oben Gesagten, daß der Punkt t der Normkurve auf dieser Geraden liegt; *wir erhalten also alle reellen Wurzeln von* (1), *indem wir alle reellen Schnitte der Normkurve mit dieser Geraden aufsuchen und ihre Parameterwerte auf der Skala der Kurve ablesen.* Dabei ist die Normkurve ein für allemal durch die Form der Gleichung (1) fest bestimmt, ohne Rücksicht auf die speziellen Werte, welche die Parameter λ, μ haben mögen. Zu jeder Gleichung mit bestimmten λ, μ gehört dann eine Gerade, die sie gewissermaßen repräsentiert, und zwar kommen dabei sämtliche Geraden der Ebene in Betracht, nicht wie früher (S. 94/95) nur die horizontalen.

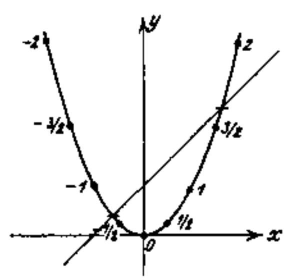


Abb. 23.

Zur näheren Erläuterung diene die *quadratische Gleichung*:

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0.$$

Die Normkurve ist hier durch:

$$y = t^2,\ x = t \quad \text{oder:} \quad y = x^2$$

dargestellt, d. h. sie ist die nebenstehend gezeichnete Parabel mit der angedeuteten Skala, an der man die reellen Wurzeln unserer Gleichung als Schnitte mit der Geraden $y + \lambda x + \mu = 0$ sofort ablesen kann. So ergibt die Abb. 23, daß die beiden Wurzeln von $t^2 - t - 1 = 0$ zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 bzw. $-\frac{1}{2}$ und -1 liegen. Der wesentliche Vorteil gegen die früher auf S. 94f. dargestellte Methode ist, daß wir jetzt *mit ein und derselben Parabel alle quadratischen Gleichungen* lösen können, wenn wir nur die sämtlichen Geraden der Ebene heranziehen. Hat man also viele verschiedene quadratische Gleichungen approximativ aufzulösen, so wird sich die Anwendung dieses Verfahrens als recht zweckmäßig erweisen.

Ähnlich kann man die sämtlichen *kubischen Gleichungen* behandeln, die man bekanntlich stets durch eine lineare Transformation auf die „*reduzierte Form*":

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

bringen kann; hier kommt als Normkurve die kubische Parabel:

$$y = t^3, \quad x = t \qquad \text{oder:} \qquad y = x^3$$

in Betracht, die in Abb. 24 skizziert ist. Auch diese Methode scheint mir auf der Schule wohl anwendbar; die Schüler haben am eigenen Zeichnen solcher Kurven gewiß die größte Freude.

B. Die *zweite Methode der Deutung von* (1) entsteht aus der ersten, indem wir das *Prinzip der Dualität* anwenden, d. h. Punkt und Linienkoordinaten vertauschen. Dazu schreiben wir die Glieder von Gleichung (2) in umgekehrter Reihenfolge:

$$v + x u + y = 0$$

und bringen sie in dieser Gestalt mit (1) zur Übereinstimmung, indem wir setzen:

(4a) $\quad v = \dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad u = \dfrac{\chi(t)}{\psi(t)},$

(4b) $\quad x = \lambda, \qquad y = \mu.$

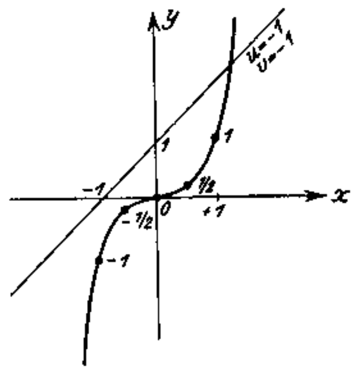


Abb. 24.

(4a) stellt bei variablem t eine Schar gerader Linien dar, die eine wohlbestimmte Kurve umhüllen, die „*Normkurve*" *von* (1) in der neuen Deutung; es ist eine *rationale Klassenkurve*, da sie in Geradenkoordinaten durch rationale Funktionen eines Parameters dargestellt ist. Jede Tangente und somit auch der zugehörige Berührungspunkt ist durch einen festen Wert von t bestimmt, so daß wir wiederum eine *Skala auf der Normkurve* erhalten. Indem wir hinreichend viele Tangenten gemäß (4a) zeichnen, bekommen wir Kurve und Skala mit jeder gewünschten Genauigkeit. Jedes Parameterpaar λ, μ bestimmt vermöge (4b) einen Punkt der x-y-Ebene, und die Gleichung (1) sagt nunmehr aus, daß die Tangente t der Normkurve (4a) durch diesen Punkt geht; *wir erhalten also alle reellen Wurzeln von* (1), *indem wir die Parameterwerte t ablesen, die zu allen durch den Punkt $x = \lambda$, $y = \mu$ gehenden Tangenten der Normkurve gehören.* Wiederum ist die Normkurve durch die *Form* der Gleichung (1) völlig bestimmt; jede derartig gestaltete Gleichung mit festen Werten der Parameter λ, μ wird durch einen gewissen Punkt der Ebene bzw. dessen Lage zur Kurve repräsentiert.

Wir betrachten zur Erläuterung wieder die gleichen Beispiele wie oben. Zur *quadratischen Gleichung:*

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

gehört als Normkurve die Umhüllungskurve der Geraden:

$$v = t^2, \qquad u = t,$$

und das ist wiederum eine *Parabel*, deren Scheitel im Nullpunkt liegt. Die Abbildung, die man sich natürlich auf Millimeterpapier entwerfen wird, zeigt sogleich die reellen Wurzeln der Gleichung $t^2 + \lambda t + \mu = 0$ als Parameter der Tangenten, die vom Punkte λ, μ aus an die Parabel gelegt werden (vgl. Abb. 25).

Für die *kubische Gleichung:*

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

wird die Normkurve: $\quad v = t^3, \qquad u = t$

eine *Kurve dritter Klasse*, die im Nullpunkte eine Spitze hat, wie das die Abb. 26 erkennen läßt.

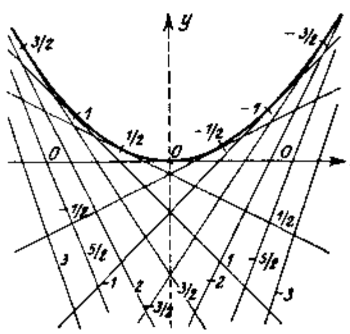


Abb. 25.

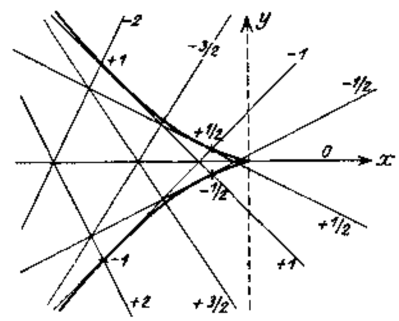


Abb. 26.

Wir können diese Methode noch etwas anders darstellen. Betrachten wir nur die sogenannte *trinomische Gleichung:*

$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0,$$

so haben wir das *Tangentensystem der Normkurve* durch die den Parameter t enthaltende Gleichung:

$$f(t) = t^m + x\,t^n + y = 0$$

darzustellen. Um nun die Gleichung der Normkurve in Punktkoordinaten zu finden, hat man bekanntlich die Gleichung des Tangentensystems mit der durch Differentiation nach dem Parameter t aus ihr entstehenden Gleichung:

$$f'(t) = m\,t^{m-1} + n\,x\,t^{n-1} = 0$$

zusammenzustellen und t zu eliminieren; denn die Normkurve wird als Enveloppe des Geradensystems durch die Schnitte je zweier aufeinander folgender Geraden (für t und $t + d\,t$) gebildet. Drücken wir, statt t zu eliminieren, aus beiden Gleichungen x, y als Funktionen von t aus, so folgt:

$$\text{(5a)} \qquad x = -\frac{m}{n}\,t^{m-n}, \qquad y = \frac{m-n}{n}\,t^m,$$

und das ist die *Punktgleichung unserer Normkurve.*

Für die Normkurven der als Beispiel behandelten quadratischen und kubischen Gleichung erhalten wir so:

$$x = -2t, \qquad y = t^2$$

bzw.

$$x = -3t^2, \qquad y = 2t^3.$$

Das sind in der Tat die in den Abb. 25 und 26 gezeichneten Kurven.

Ich weise ausdrücklich darauf hin, daß diese Methode von *C. Runge* in seinen Vorlesungen und Übungen praktisch gehandhabt wird, und daß sie sich als *besonders zweckmäßig für die wirkliche Lösung von Gleichungen* erweist. Auch im Schulunterricht dürfte sich die Berücksichtigung der einen oder anderen dieser Abbildungen gelegentlich empfehlen.

Vergleichen wir nun die beiden bisher entwickelten Methoden miteinander, so zeigt sich, daß für einen bestimmten, sehr wichtigen Zweck die *zweite einen wesentlichen Vorteil bietet* — dann nämlich, wenn man *eine anschauliche Vorstellung von allen Gleichungen eines bestimmten Typus erhalten will, die eine gegebene Anzahl reeller Wurzeln besitzen.* Solche Gesamtheiten werden nämlich bei der ersten Methode durch *Systeme von Geraden*, bei der zweiten aber durch *Gebiete von Punkten* repräsentiert. Diese letzteren können wir aber kraft der Eigenart unserer geometrischen Anschauung oder Gewöhnung wesentlich leichter auffassen als jene.

Was wir in dieser Richtung alles erreichen können, will ich sogleich am *Beispiele der quadratischen Gleichung* näher ausführen (vgl. Abb. 27); da gehen von allen Punkten innerhalb der Parabel keine, von allen außerhalb aber zwei reelle Tangenten an sie, *so daß diese Gebiete die Mannigfaltigkeiten aller Gleichungen mit 0 bzw. 2 Wurzeln darstellen.* Für *alle Punkte der Parabel* selbst gibt es nur eine einzige, doppelt zählende Tangente. *Die Normkurve selbst ist im allgemeinen Fall der Ort derjenigen Punkte, deren Koordination λ, μ Gleichungen mit zwei zusammenfallenden Wurzeln liefern,* so daß wir sie als *Diskriminantenkurve* bezeichnen können.

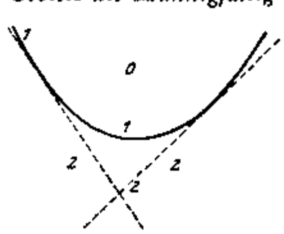


Abb. 27.

Bei der reduzierten *kubischen Gleichung* gehen von einem Punkte innerhalb des Hakens der Normkurve drei reelle Tangenten an sie; denn für einen Punkt der Mittellinie ist das aus Symmetriegründen klar, und die Anzahl kann sich nicht ändern, wenn man den Punkt variiert, ohne die Kurve zu überschreiten. Kommt dagegen der Punkt x, y auf die Kurve, so fallen zwei Tangenten zusammen, rückt er in das Gebiet außerhalb der Kurve, so werden diese beiden Tangenten imaginär, und es bleibt nur eine reelle Tangente übrig. *Demnach repräsentiert das Gebiet innerhalb des Kurvenhakens die sämtlichen kubischen Gleichungen* *mit drei verschiedenen reellen Wurzeln, das außerhalb die Gleichungen mit nur einer reellen Wurzel, und endlich entsprechen den Kurvenpunkten selbst die Gleichungen mit einer einfachen und einer doppelt zählenden reellen Wurzel.* Durch die *Spitze der Kurve* schließlich geht nur eine dreifach zählende Tangente; sie entspricht *der einzigen Gleichung $t^3 = 0$ mit einer einzigen dreifachen Wurzel.* Die Abb. 28 läßt diese Gruppierung mit einem Blicke übersehen.

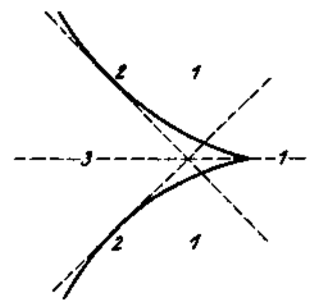


Abb. 28.

Die Abbildungen werden nun noch viel interessanter und liefern wesentlich mehr, wenn wir, wie das in der Algebra auch sonst üblich ist, *für die Wurzeln bestimmte Einschränkungen* einführen, insbesondere *nach allen reellen Wurzeln fragen, die in einem gegebenen Intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_2$ liegen.* Diese Frage wird bekanntlich allgemein durch den *Sturmschen Satz* beantwortet. Wir können nun unsere Zeichnungen leicht so vervollständigen, daß sie eine befriedigende, übersichtliche Lösung auch dieser allgemeinen Frage geben. Wir nehmen zu diesem Zwecke einfach *die den Parameterwerten t_1, t_2 entsprechenden Tangenten zu der Normkurve hinzu* und betrachten die durch diese Geraden entstehende Zerlegung der Ebene in Felder.

Wollen wir diese Überlegungen zunächst wieder für die quadratische Gleichung durchführen. so kommt es darauf an, die *Zahl der Tangenten festzustellen, die den Bogen der Parabel zwischen t_1 und t_2 berühren.* Durch jeden Punkt des Dreiecks (vgl. Abb. 29) zwischen diesem Parabelbogen und den beiden Tangenten gehen offenbar deren zwei; überschreitet der Punkt eine der Tangenten t_1, t_2, so berührt eine Tangente durch ihn die Parabel außerhalb des Bogens $(t_1 t_2)$ und geht also für unsere Zwecke verloren. Durch jeden Punkt in den sichelförmigen, sich ins Unendliche erstreckenden, von der Parabel und je einer Tangente begrenzten Streifen ferner geht keine den Bogen (t_1, t_2) berührende Tangente, und innerhalb der Parabel gibt es überhaupt keine reellen Tangenten. Die beiden Parabelbögen $t \leqq t_1$ und $t \geqq t_2$ sind also für die entstehende Teilung der Ebene unwesentlich; es bleiben nur die in der Abbildung ausgezogenen Linien, welche durch die ihnen zugerechneten Zahlen eine *genaue Übersicht über die Mannigfaltigkeiten der quadratischen Gleichungen vermitteln, die zwei, eine oder null reelle zwischen t_1 und t_2 gelegene Wurzeln besitzen.*

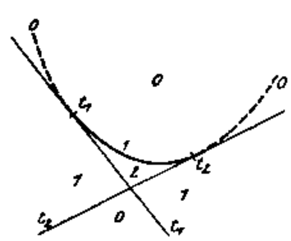


Abb. 29.

Genau so verfahren wir bei der *kubischen Gleichung* (vgl. Abb. 30): Nehmen wir etwa $t_1 > 0$, $t_2 < 0$. Wir ziehen wiederum die Tangenten mit diesen Parameterwerten und betrachten die Gebietseinteilung, die durch sie und das zwischen t_1 und t_2 gelegene Stück der Normkurve hervorgerufen wird. In dem viereckigen Gebiet an der Spitze gibt es dann für jeden Punkt drei den Bogen zwischen t_1 und t_2 berührende reelle Tangenten. Berücksichtigt man, daß beim Überschreiten jeder Tangente eine, beim Überschreiten der Normkurve zwei Tangenten dieser Art verloren gehen, wie unmittelbar ersichtlich ist, so entsteht das in Abb. 30 *skizzierte Bild der Gebiete, die Gleichungen mit drei, zwei, einer oder null reellen zwischen t_1 und t_2 gelegenen Wurzeln entsprechen.* Um den *großen Nutzen der graphischen Methode* einzusehen, brauchen Sie nur einmal zu versuchen, diese Einteilung der kubischen Gleichungen in abstracto zu schildern, ohne irgendwie an die Raumanschauung zu appellieren; das wird eine ganz unverhältnismäßig große Zeit erfordern. Auch der Beweis, der hier durch einen Blick auf die Abbildung klar ist, wird dann nicht ganz einfach sein.

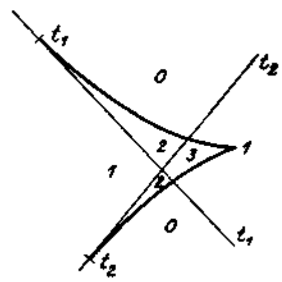


Abb. 30.

Was nun die *Beziehung dieser geometrischen Methode zu den bekannten algebraischen Kriterien von Sturm, Cartesius* und *Budan-Fourier* angeht, so will ich hier nur bemerken, daß für Gleichungen unserer Art die geometrische Methode sie alle umfaßt. Näher ausgeführt finden Sie diese Beziehungen in meiner Arbeit[1]) „*Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen*" in *W. Dycks Katalog mathematischer Modelle*[2]). Ich benutze gern die Gelegenheit, Sie auf diesen Katalog hinzuweisen, der, anläßlich der von der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1893 in München veranstalteten Ausstellung herausgegeben, noch heute als das beste Hilfsmittel zur Orientierung auf dem Gebiete mathematischer Modelle zu bezeichnen ist.

3. Gleichungen mit drei Parametern λ, μ, ν.

Ich will Ihnen nun endlich noch zeigen, daß sich ganz entsprechende Betrachtungen auch für Gleichungen mit drei Parametern anstellen lassen; nur müssen wir *statt der Ebene den dreidimensionalen Raum* heranziehen. Es mag genügen, wenn ich mich sogleich auf die *spezielle viergliedrige Gleichung:*

$$(1) \qquad t^p + \lambda t^m + \mu t^n + \nu = 0$$

beziehe; das Verfahren ist auf andere Gleichungsformen sofort übertragbar.

[[1]) Abgedruckt in Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 198—208.]

[2]) Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (München 1892), sowie Nachtrag dazu (München 1893).

Wir stellen neben diese Gleichung die Bedingung der Raumgeometrie, daß ein Punkt (x, y, z) und eine Ebene mit den Ebenenkoordinaten u, v, w sich „in vereinigten Lage" befinden (d. h. daß die Ebene u, v, w den Punkt x, y, z enthält). Diese Bedingung lautet:

(2) $$z + ux + vy + w = 0$$

(3) oder: $$w + xu + yv + z = 0.$$

Die Gleichung wollen wir nun in der einen oder andern Reihenfolge mit (1) identifizieren und erhalten dann genau wie vorhin zwei zueinander duale Deutungen.

Zunächst setzen wir also:

(2a) $$z = t^p, \qquad x = t^m, \qquad y = t^n;$$

dadurch ist eine gewisse *Raumkurve*, die *Normkurve der viergliedrigen Gleichung* (1), *versehen mit einer Skala der Werte t*, bestimmt. Ferner betrachten wir die durch die Koeffizienten λ, μ, ν von (1) bestimmte Ebene:

(2b) $$u = \lambda, \qquad v = \mu, \qquad w = \nu;$$

dann besagt die Gleichung (1), daß *die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung identisch sind mit den Parameterwerten t der reellen Schnitte der Normkurve* (2a) *mit der Ebene* (2b).

Gehen wir nun dualistisch vor, so haben wir den Ansatz:

(3a) $$w = t^p, \qquad u = t^m, \qquad v = t^n$$

zu machen. Diese Gleichungen stellen für variables t *einfach unendlich viele Ebenen dar*, die wir als *Schmiegungsebenen einer bestimmten wiederum mit einer Skala von Parameterwerten t versehenen Raumkurve* auffassen; und gemäß ihrer Definition durch Ebenenkoordinaten als „*Klassen-Normkurve*" der vorigen durch ihre Punkte festgelegten „*Ordnungs-Normkurve*" entgegenstellen können. Betrachten wir jetzt neben der ersten Kurve noch den Punkt:

(3b) $$x = \lambda, \qquad y = \mu, \qquad z = \nu,$$

so folgt, *daß die reellen Wurzeln von* (1) *identisch sind mit den Parameterwerten t derjenigen Schmiegungsebenen an die Klassennormkurve* (3a), *die durch den Punkt* (3b) *gehen.*

Es kommt nun darauf an, beide Deutungen an *konkreten Beispielen* näher durchzudenken; wir besitzen für beide in unserer Sammlung Modelle, die ich Ihnen jetzt vorführen will.

Die *erste Darstellung* hat *R. Mehmke* in Stuttgart zur *Konstruktion eines Apparates zur numerischen Auflösung von Gleichungen* benutzt. Es ist ein Messinggestell (vgl. Abb. 31), an dem Sie drei mit Skalen versehene vertikale Stäbe bemerken und in das wir die als Schablonen ausgeschnittenen Normkurven der auf vier Glieder reduzierten Gleichungen 3., 4. oder 5. Grades einsetzen können. Nur ist abweichend von unserer Auseinandersetzung kein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt, sondern *das Koordinatensystem ist so bestimmt, daß die zugehörigen Ebenenkoordinaten*, d. h. die Koeffizienten u, v, w der in der Form (2) angesetzten Ebenengleichung *gerade die Abschnitte sind, die die betreffende Ebene auf den Skalen der drei Vertikalstäbe hervorruft* und die man dort ablesen kann. Um nun eine Fixierung einer bestimmten Raumebene $u = \lambda$, $v = \mu$, $w = \nu$ zu ermöglichen, ist an dem vorderen w-Stabe ein Visier angebracht, das man auf die Stelle ν der Skala einstellt, während man die Stellen λ, μ der Skala des u- bzw. v-Stabes durch einen gespannten Faden verbindet. Die Visierstrahlen nach diesem Faden bilden dann unsere Ebene, und man kann *deren Schnitte mit der Normkurve als scheinbare Schnitte des Fadens mit der Schablone unmittelbar beobachten, während man durch das Visierloch blickt;* ihre Parameterwerte, das sind *die gesuchten Wurzeln der Gleichung, liest man gleichzeitig an der auf der Schablone angebrachten t-Skala der Normkurve ab.* Ob der so geschilderte Apparat wirklich praktisch brauchbar ist, hängt natürlich von seiner sorgfältigen mechanischen Ausführung ab, ist aber wohl wegen der beschränkten Akkomodationsfähigkeit des Auges sehr zweifelhaft.

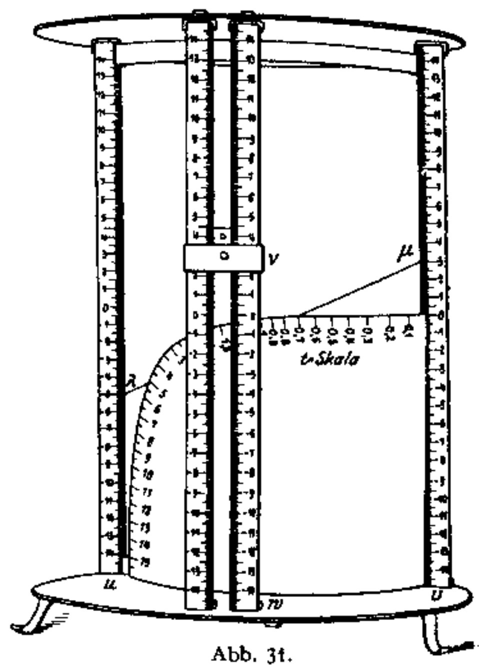


Abb. 31.

Für die *zweite Methode* haben wir ein von Herrn *Hartenstein* als Staatsexamensarbeit angefertigtes Modell. Es bezieht sich auf die sog. *reduzierte Form der Gleichung 4. Grades:*

$$t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0,$$

auf die man bekanntlich jede biquadratische Gleichung unmittelbar bringen kann. Ich will für sie jene Methode noch einmal in ein wenig veränderter Form darstellen, wie ich das für die zweiparametrige Gleichung oben bereits tat (S. 98): Wir haben in diesem Fall ein System von einfach unendlich vielen Ebenen zu betrachten, deren Ebenenkoordinaten in (3a) gegeben sind, und deren Punktgleichungen sich im vorliegenden Falle folgendermaßen schreiben würden:

$$f(t) \equiv t^4 + x\,t^2 + y\,t + z = 0. \tag{4}$$

Das *Umhüllungsgebilde* dieser Ebenen ist die Gesamtheit der Geraden, die jede Ebene $f(t) = 0$ mit der benachbarten $f(t + dt) = 0$ gemein hat, also die *abwickelbare Fläche, deren Gleichung man durch Elimination von t aus $f(t) = 0$ und $f'(t) = 0$ erhält.* Wir müssen nun aber, um die *Normkurve* zu erhalten, das *Schmiegungsgebilde der Ebenenschar* betrachten, d. h. den *Ort aller Punkte, in denen drei aufeinanderfolgende Ebenen sich schneiden;* dieser Ort ist bekanntlich die *Rückkehrkurve jener abwickelbaren Fläche, deren Koordinaten sich als Funktionen von t aus den drei Gleichungen $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$, $f''(t) = 0$ berechnen.* In unserem Falle lauten nun diese drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} t^4 + x t^2 + y t + z &= 0 \\ 4 t^3 + x \cdot 2 t + y &= 0 \\ 12 t^2 + x \cdot 2 &= 0, \end{aligned}$$

und man findet aus ihnen:

$$(5) \qquad x = -6 t^2, \qquad y = 8 t^3, \qquad z = -3 t^4.$$

Diese Ausdrücke stellen die *Punktgleichung der Klassennormkurve von* (4) dar, deren *Ebenengleichung* nach (3a) lautet:

$$(6) \qquad w = t^4, \qquad u = t^2, \qquad v = t.$$

Beide Darstellungen sind in t vom vierten Grade; *die Normkurve hat also sowohl die Ordnung als auch die Klasse 4.*

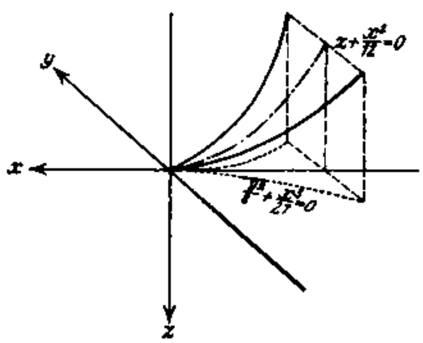


Abb. 32.

Um uns nun über sie näher zu unterrichten, betrachten wir *einige einfache Flächen,* die sich durch sie legen lassen. Zunächst genügen die Ausdrücke (5) identisch in t der Gleichung:

$$z + \frac{x^2}{12} = 0,$$

d. h. unsere Normkurve liegt auf dem durch diese Gleichung gegebenen *parabolischen Zylinder 2. Ordnung, dessen Erzeugende der y-Achse parallel* sind. Ebenso aber besteht die Beziehung:

$$\frac{y^2}{8} + \frac{x^3}{27} = 0,$$

so daß auch dieser *kubische Zylinder, dessen Erzeugende der z-Achse parallel sind,* durch unsere Normkurve geht; *sie ist übrigens der gesamte im Endlichen gelegene Schnitt beider Zylinder.* Man kann sich danach leicht ein ungefähres Bild des Verlaufes der Normkurve machen: *sie ist eine zur x-z-Ebene symmetrisch gelegene, doppelt gekrümmte Kurve mit einer Spitze im Nullpunkt* (vgl. Abb. 32).

Fernerhin geht noch folgende *Fläche 2. Grades:*

$$\frac{x \cdot z}{6} - \frac{3\,y^2}{64} = 0$$

durch unsere Normkurve, denn auch diese Gleichung wird durch (5) identisch in t befriedigt. Aus ihr und der Gleichung des kubischen Zylinders gewinnen wir noch die weitere lineare Kombination, die wiederum eine durch die Normkurve gehende besonders wichtige *Fläche 3. Grades* darstellt:

$$\frac{x\,z}{6} - \frac{y^3}{16} - \frac{x^3}{216} = 0\,.$$

Betrachten wir jetzt die *abwickelbare Fläche*, deren Rückkehrkurve die Normkurve ist, und die wir, von dieser ausgehend, als *Inbegriff aller Tangenten* der Normkurve definieren können. Für eine beliebige Raumkurve:

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,, \qquad z = \chi(t)$$

wird bekanntlich die Tangente im Punkte t durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(t) + \varrho\,\varphi'(t)\,, \qquad y = \psi(t) + \varrho \cdot \psi'(t)\,, \qquad z = \chi(t) + \varrho\,\chi'(t)$$

gegeben, wobei ϱ ein Parameter ist, denn die Richtungskosinus der Tangenten gegen die Achsen verhalten sich wie die Differentialquotienten der Koordinaten der Kurve nach t. Betrachten wir noch t als variabel, so haben wir in diesen Gleichungen mit den zwei Parametern t, ϱ die Darstellung der abwickelbaren Tangentenfläche; alles das sind bekannte Überlegungen der Raumgeometrie. Für unsere Kurve (5) speziell erhalten wir also die folgende *Darstellung der Tangentenfläche* [wenn wir die Koordinaten ihrer Punkte zum Unterschiede von den Kurvenkoordinaten mit X, Y, Z bezeichnen]:

$$(7) \qquad \begin{cases} X = -6\,(t^2 + 2\,\varrho\,t) \\ Y = 8\,(t^3 + 3\,\varrho\,t^2) \\ Z = -3\,(t^4 + 4\,\varrho\,t^3)\,. \end{cases}$$

Diese Fläche ist nun in dem genannten Modell des Herrn Hartenstein dargestellt, und zwar sind ihre geraden Linien als Fäden ausgespannt (vgl. Abb. 33, S. 107).

Die Parameterdarstellung der Fläche liefert bereits die besten Anhaltspunkte für ihre Behandlung und wirkliche Herstellung; wir folgen eigentlich nur einer alten Gewohnheit, wenn wir noch nach der *Gleichung der Fläche* selbst fragen. Wir erhalten sie, indem wir aus (7) t und ϱ eliminieren. Das einfachste Verfahren dazu will ich Ihnen hier angeben, ohne daß ich jedoch an dieser Stelle im einzelnen ausführen kann, wie man auf die einzelnen Schritte kommt, und was sie ihrem inneren Wesen nach bedeuten. Wir bilden aus den Formeln (7) die Kombinationen:

$$Z + \frac{X^2}{12} = 12\,\varrho^2\,t^2$$

$$\frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} = 8\,\varrho^3\,t^3,$$

die beide auf der Kurve selbst (für $\varrho = 0$) verschwinden und, gleich 0 gesetzt, zwei der oben angeführten, durch die Fläche gelegten speziellen Flächen darstellen. Aus diesen Gleichungen können wir leicht das Produkt ϱt eliminieren und finden als *Gleichung der abwickelbaren Fläche:*

$$\left(Z + \frac{X^2}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216}\right)^2 = 0;$$

sie ist also eine Fläche 6. Ordnung, die in die unendlich ferne Ebene und eine Fläche 5. Ordnung zerfällt.

Über die *Bedeutung dieser Formel* mache ich für die mit dem Gegenstande näher Vertrauten noch folgende Bemerkungen: Die in den beiden Klammern stehenden Ausdrücke sind die *Invarianten der in reduzierter Form zugrunde liegenden biquadratischen Gleichung:*

$$t^4 + X\,t^2 + Y t + Z = 0,$$

die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine so große Rolle spielen und die man dort allgemein mit g_2 und g_3 bezeichnet. Die linke Seite unserer Flächengleichung $\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2$ ist bekanntlich die *Diskriminante der biquadratischen Gleichung*, die durch ihr Verschwinden das Auftreten einer Doppelwurzel anzeigt. *Unsere abwickelbare Fläche ist also die Diskriminantenfläche der biquadratischen Gleichung*, d. h. die Gesamtheit der Punkte, für welche diese eine doppelte Wurzel hat.

Nach diesen theoretischen Erörterungen hat die Konstruktion eines Fadenmodells unsrer Fläche prinzipiell keine Schwierigkeit mehr: man bestimme aus der Parameterdarstellung (7) etwa die Punkte, an denen die darzustellenden Tangenten gewisse feste Ebenen durchstoßen, und spanne dann zwischen diese durch einen Holz- oder Pappkasten realisierten Ebenen passende Fäden ein. Daß das Modell dann aber auch wirklich schön und brauchbar wird, daß es den ganzen interessierenden Verlauf der Fläche und ihrer Rückkehrkurve übersichtlich darstellt, wie wir es hier vor uns sehen, das ist nur durch längere Versuche und große Geschicklichkeit erreichbar. Die auf S. 107 stehende Skizze (vgl. Abb. 33) gibt die Fläche mit ihren Geraden wieder; AOB ist die Rückkehrkurve [vgl. die Abb. S. 104[1])].

[1]) Das Hartensteinsche Fadenmodell ist im Verlage von M. Schilling in Leipzig erschienen. Zum Modell gehört eine Abhandlung von R. Hartenstein: Die Diskriminantenfläche der Gleichung vierten Grades." Leipzig, Schilling 1909.

Sie nehmen an dem Modell eine *Doppelkurve* (COD) wahr, *längs deren sich zwei Mäntel der Fläche durchsetzen;* diese Kurve ist einfach die folgende Parabel der X-Z-Ebene:

$$Y = 0 \quad Z - \frac{X^2}{4} = 0\,.$$

Von dieser Parabel erscheint aber *nur die eine Hälfte* (CO), und zwar die für $X < 0$, als *Durchdringung reeller Mäntel*, während *die andere isoliert* im Raume verläuft. Diese Erscheinung ist keineswegs überraschend für den, der gewohnt ist, die Theorie der algebraischen Flächen mit konkreten geometrischen Vorstellungen zu begleiten; da ist es ganz geläufig, daß *reelle Äste von Doppelkurven* sowohl als *Schnitte reeller Mäntel* auftreten, als auch *isoliert* im Raume verlaufen können, wo man sie dann als *reelle Schnitte imaginärer Mäntel* der Fläche aufzufassen hat; allgemeiner bekannt ist die entsprechende ebene Erscheinung, daß es neben den als Schnitte reeller Kurvenzweige auftretenden gewöhnlichen Doppelpunkten algebraischer Kurven auch die scheinbar isoliert liegenden Doppelpunkte gibt, die als Schnitte imaginärer Teile aufzufassen sind.

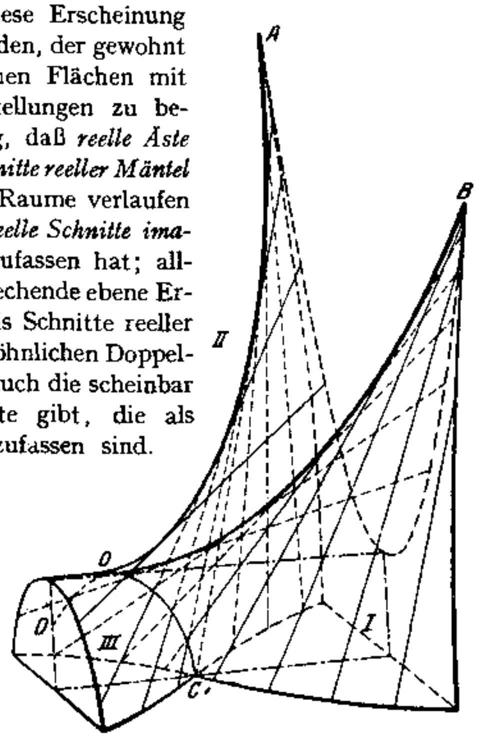


Abb. 33.

Vergegenwärtigen wir uns nun im einzelnen, was uns die so gewonnene Fläche mit ihrer Rückkehrkurve, der Normkurve, alles leisten kann. Wir denken uns die Normkurve mit ihrer Skala versehen, oder besser, wir schreiben an jede ausgespannte Tangente ihren Parameterwert t, der auch ihrem Berührungspunkt zugehört. *Gibt uns nun jemand eine biquadratische Gleichung mit bestimmten Koeffizienten x, y, z, so haben wir nur von dem zugehörigen Raumpunkte (x, y, z) an die Normkurve die Schmiegungsebenen, oder — was dasselbe ist — an die Diskriminantenfläche die Tangentialebenen zu legen, um in den Parameterwerten der Berührungspunkte mit der Kurve bzw. in den Parameterwerten der zugehörigen Tangenten die reellen Wurzeln zu haben.* Da die Schmiegungsebene die Kurve zugleich berührt und schneidet, so projiziert sich von (x, y, z) aus betrachtet jeder Berührungspunkt einer Schmiegungsebene als scheinbarer Wendepunkt der Kurve — und umgekehrt. *Die reellen Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind also* *schließlich die Parameterwerte der scheinbaren Wendepunkte der Normkurve bei Betrachtung vom Raumpunkte* (x, y, z) *aus.*

Nun ist es freilich für den in der Betrachtung räumlicher Kurven nicht sehr Geübten recht schwer, am Modell die Schmiegungsebenen bzw. scheinbaren Wendepunkte der Kurve wirklich zuverlässig zu erkennen. Mit unmittelbarer Deutlichkeit aber erläutert das Modell den nächsten wichtigen Punkt, *die Einteilung sämtlicher biquadratischer Gleichungen nach der Anzahl ihrer reellen Wurzeln.* Sehen wir zu, was wir da überhaupt für Fälle aus der abstrakten Betrachtung der Gleichungen erwarten dürfen. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Wurzeln der reellen biquadratischen Gleichung (4), so ist wegen des Verschwindens des Koeffizienten von t^3 notwendig $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Was die Realität dieser Wurzeln angeht, so sind offenbar folgende drei Hauptfälle möglich:

I. *4 reelle Wurzeln.*

II. *2 reelle, 2 konjugiert komplexe Wurzeln.*

III. *0 reelle, 2 Paare konjugiert komplexer Wurzeln.*

Liegen nun zwei Gleichungen der Art I mit den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ vor, so kann man jedenfalls $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch lauter reelle voneinander verschiedene Wertesysteme der Summe Null stetig der Reihe nach in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ überführen; entsprechend geht dann die eine Gleichung stetig durch lauter Gleichungen derselben Art in die zweite über, d. h. alle Gleichungen der Art I bilden ein zusammenhängendes Kontinuum, und dasselbe gilt auch für die andern beiden Arten. *An unserm Modell muß also der Raum in drei in sich zusammenhängende Teile zerfallen, deren Punkte den Gleichungen je einer Art entsprechen.*

Betrachten wir nun die *Übergangsfälle zwischen diesen drei Arten:* I geht in II über durch Gleichungen, die *zwei getrennte reelle und eine doppeltzählende reelle* (*d. h. zwei zusammenfallende*) *Wurzeln* haben, was wir symbolisch durch $2 + (2)$ andeuten wollen; ebenso haben wir zwischen II und III den Übergangsfall *einer reellen Doppelwurzel und zweier komplexer Wurzeln,* was (2) andeuten möge. *Beiden Arten müssen in unserm räumlichen Bilde Stücke der Diskriminantenfläche selbst entsprechen,* die ja alle Gleichungen mit zusammenfallenden Wurzeln wiedergibt, und zwar überlegt man ähnlich wie vorhin, *daß jedem ein in sich zusammenhängendes Stück der Fläche entsprechen muß.* Diese beiden Gruppen $2 + (2)$ und (2) gehen nun wiederum ineinander über durch Fälle mit *zwei reellen Doppelwurzeln,* symbolisch: $(2) + (2)$; die Punkte, für die so *zwei* Paare von Wurzeln zusammenrücken, müssen gleichzeitig *zwei* Mänteln der Diskriminantenfläche, also *dem nicht isolierten Ast der Doppelkurve,* angehören. *Demnach zerfällt die Diskriminantenfläche in zwei durch einen Ast der Doppelkurve voneinander getrennte Teile, deren einer* $2 + (2)$ *die Raumgebiete I und II trennt, während der andere* (2) *die Gebiete II, III scheidet.* Um nun zu sehen, wie die *Normkurve* dazu liegt, bemerken wir, daß wegen ihrer Eigenschaft als Rückkehrkurve für jeden ihrer Punkte *drei reelle Tangentialebenen in eine* (*die Schmiegungsebene*) zusammenfallen, so daß wir den Fall einer *dreifachen und einer einfachen reellen Wurzel:* $1 + (3)$ haben; dieser kann nur aus $2 + (2)$ entstehen, indem noch eine der einfachen Wurzeln der Doppelwurzel gleich wird, und so folgt, *daß die Rückkehrkurve ganz auf dem ersten Teile $2 + (2)$ der Fläche verlaufen muß.* Nur in der *Spitze* der Rückkehrkurve ($x = y = z = 0$) haben wir eine *vierfache reelle Wurzel*, die auch durch Zusammenrücken der beiden Doppelwurzeln aus dem Falle $(2) + (2)$ entstehen kann. *In der Tat liegt die Spitze 0 der Rückkehrkurve gleichzeitig auch auf der Doppelkurve.* Was endlich den *isolierten Ast der Doppelkurve* anlangt, so verläuft er gänzlich im Raumteil III und ist dadurch ausgezeichnet, daß *je zwei der dort vorhandenen komplexen Wurzeln zu einer komplexen Doppelwurzel zusammenfallen:* beide Doppelwurzeln sind natürlich einander konjugiert.

Sie können nun alle hier aufgezählten möglichen Fälle an unserm Modell genau erkennen. In der Skizze (Abb. 33, S. 107) bildet das Innere der Fläche rechts von der Doppelkurve den Raumteil I, links den Teil III, das Äußere aber den Teil II. Sie werden sich danach an der Hand des folgenden Schemas für die Zahl und Vielfachheit der reellen Wurzeln, die den Punkten der einzelnen Raum-, Flächen- und Kurventeile entsprechen, leicht völlig orientieren können; es bedeutet darin die nicht eingeklammerte Zahl die Anzahl der einfachen reellen Wurzeln, während jede vielfache Wurzel wie bisher durch ihre in Klammern geschlossene Vielfachheit angedeutet ist:

	I.		II.		III.
Raumteil:	4		2		0
Diskr.-Fläche:		2 + (2)		(2)	
Normkurve:	1 + (3)				
Doppelkurve:			(2) + (2)		(2 imag. Doppelw.).
Spitze:			(4)		

II. Gleichungen im Gebiete komplexer Größen.

Wir lassen nun die Beschränkung auf reelle Größen fallen und wollen weiterhin im Gebiete komplexer Größen operieren; natürlich kommt es uns dabei wieder nur auf die Hervorhebung solcher Dinge an, die sich mehr, als das sonst geschieht, geometrisch anschaulich darstellen lassen. Ich will sogleich mit dem wichtigsten Theorem der Algebra beginnen.

A. Der Fundamentalsatz der Algebra.

Das ist bekanntlich der Satz, *daß jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades im Komplexen im allgemeinen n Wurzeln hat, oder genauer gesagt, daß jedes Polynom $f(z)$ vom n^{ten} Grade sich in n Linearfaktoren zerlegen läßt.*

Im Grunde benutzen alle Beweise dieses Satzes *die geometrische Interpretation* der komplexen Größen $x + iy$ in der x-y-Ebene. Ich will Ihnen den *Gedankengang des ersten Gaußschen Beweises von 1799* angeben, der sich ganz anschaulich einkleiden läßt; freilich ist die ursprüngliche Darstellung bei Gauß anders als ich sie hier gebe. Liegt das Polynom:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

vor, so können wir schreiben:

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

wobei u, v reelle Polynome der beiden reellen Veränderlichen x, y sind. *Der Grundgedanke des Gaußschen Beweises besteht nun darin, die beiden Kurven:*

$$u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad v(x, y) = 0$$

in der x-y-Ebene zu betrachten und zu zeigen, daß sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben müssen; für diesen Schnitt (x, y) ist dann $f(x + iy) = 0$, womit die *Existenz einer ersten „Wurzel" der Gleichung $f = 0$ bewiesen* ist. Zu diesem Ende erweist es sich als genügend, den *Verlauf beider Kurven ins Unendliche hin*, d. h. in beliebig weiter Entfernung vom Nullpunkt zu untersuchen

Wird der absolute Betrag r von z sehr groß, so kann man in $f(z)$ die niederen Potenzen von z gegen z^n vernachlässigen. Führt man in der x-y-Ebene Polarkoordinaten r, φ ein, d. h. setzt man:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so wird nach der Moivreschen Formel:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Diesem Ausdrucke nähert sich also $f(z)$ asymptotisch mit wachsendem absoluten Werte von z. Dem entnehmen wir sofort, daß u und v sich asymptotisch den Funktionen:

$$r^n \cos n\varphi \quad \text{bzw.} \quad r^n \sin n\varphi$$

nähern, und *daher wird der schließliche Verlauf der Kurven $u = 0$, $v = 0$ im Unendlichen in erster Annäherung dargestellt durch:*

$$\cos n\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sin n\varphi = 0.$$

Nun wird die Kurve $\sin n\varphi = 0$ gebildet durch diejenigen n Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x-Achse die Winkel 0, $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$ bilden, während $\cos n\varphi = 0$ von den n Halbierungsgeraden der entstehenden Winkel gebildet wird (in Abb. 34 für $n = 3$ gezeichnet). Im zentralen Teil der Abbildung können die wahren Kurven $u = 0$, $v = 0$ von diesen Geraden natürlich wesentlich abweichen;

jedenfalls müssen sie sich nach außen ihnen asymptotisch nähern, und *wir können ihren Verlauf schematisch geradezu so darstellen, daß wir*

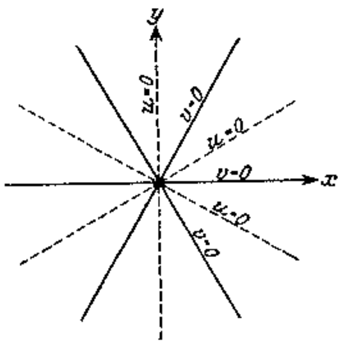


Abb. 34.

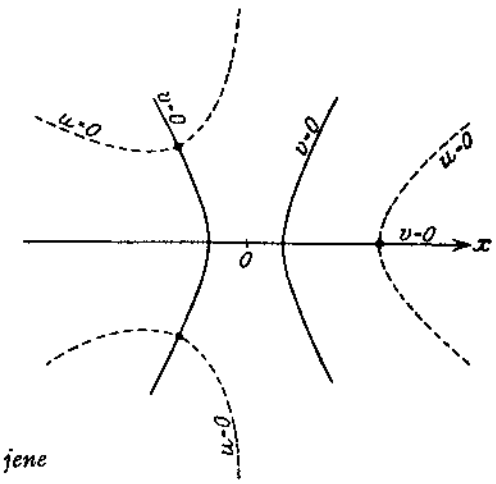


Abb. 35.

außerhalb eines großen Kreises jene Geraden beibehalten und sie innen irgendwie verbinden (vgl. Abb. 35). Ganz gleichgültig aber, wie dieser innere Verlauf sein mag, die sich ins Unendliche erstreckenden Äste u, v müssen jedenfalls, wenn man den Nullpunkt der Abbildung auf einem genügend großen Kreise umläuft, alternieren, und daraus ist *anschaulich ganz klar, daß sie sich innerhalb dieses Kreises mindestens einmal überkreuzen müssen*. In der Tat kann man diese Behauptung — und das ist der Inhalt des Gaußschen Beweises — mit Hilfe der Stetigkeitseigenschaften der Kurven exakt[1]) beweisen; der wesentliche

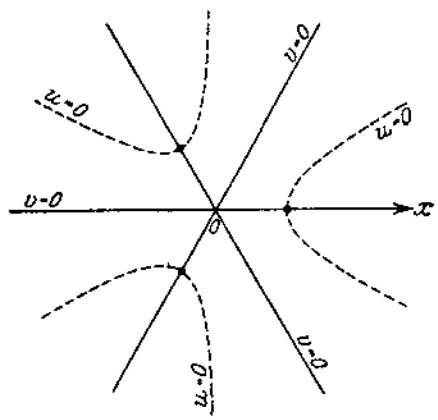


Abb. 36.

[[1]) Hierzu ist zu bemerken, daß *Gauß* nicht ganz ohne geometrische Überlegungen auskommt. Die von ihm selbst in seiner Dissertation in Aussicht gestellte Arithmetisierung des Beweises ist erst von *A. Ostrowski* (Göttinger Nachr. 1920 oder Heft VIII der Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, 1920) geliefert worden. Zur Geschichte des Fundamentalsatzes sei noch bemerkt, daß sein erster Beweis von *D'Alembert* stammt. Freilich findet sich auch im D'Alembertschen Beweise eine Lücke, auf die Gauß aufmerksam machte. D'Alembert beachtete nämlich nicht den Unterschied zwischen oberer Grenze und Maximum einer Funktion und benutzte die im allgemeinen Fall unrichtige Annahme, daß eine Funktion einer komplexen Veränderlichen ihre obere Grenze, falls sie eine solche besitzt, auch wirklich erreicht.]

Gedankengang aber ist im vorigen dargelegt. — Hat man so *eine* Wurzel gewonnen, so kann man von $f(z)$ einen Linearfaktor abspalten, und den Schluß für das entstehende Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades wiederholen. So fortschreitend *findet man schließlich in der Tat die Möglichkeit der Zerspaltung von $f(z)$ in n Linearfaktoren bzw. die Existenz von n Nullstellen.*

Das Schlußverfahren wird Ihnen viel deutlicher werden, wenn Sie sich *spezielle Beispiele wirklich durchkonstruieren.* Ein einfaches Beispiel wäre:

$$f(z) = z^3 - 1 = 0;$$

in diesem Falle wird offenbar:

$$u = r^3 \cos 3\varphi - 1, \qquad v = r^3 \sin 3\varphi,$$

so daß $v = 0$ einfach aus drei Geraden besteht, während $u = 0$ drei hyperbelartige Äste besitzt. Sie sehen an der Abb. 36, S. 111 in der Tat die drei Schnitte der beiden Kurven, welche die drei Wurzeln unserer Gleichung geben. Ich kann Ihnen die Durchführung weiterer komplizierterer Beispiele nur sehr anempfehlen.

Diese kurzen Andeutungen über den Fundamentalsatz mögen hier, wo ich ja keine Vorlesung über Algebra halte, genügen. Lassen Sie mich mit dem Hinweis schließen, daß die *Bedeutung der Zulassung komplexer Zahlen in der Algebra* gerade darin besteht, daß sie den allgemeinen ausnahmelosen Ausspruch des Fundamentalsatzes gestattet; bei Beschränkung auf reelle Größen könnte man nur sagen, daß die Gleichung n^{ten} Grades entweder n Wurzeln hat oder weniger oder auch gar keine.

B. Gleichungen mit einem komplexen Parameter.

Den Rest der Zeit, der uns noch für die Algebra bleibt, wollen wir dazu verwenden, die *sämtlichen (auch die komplexen) Lösungen komplexer Gleichungen in anschaulicher Weise zu diskutieren,* so wie wir das früher für die reellen Lösungen reeller Gleichungen taten. Dabei wollen wir uns aber auf *Gleichungen mit einem komplexen Parameter* beschränken und obendrein noch annehmen, daß dieser *nur linear* auftritt; dann wird das *Studium einer einfachen konformen Abbildung* alles ergeben, was wir wünschen.

Es sei $z = x + iy$ *die Unbekannte,* $w = u + iv$ *der Parameter.* Dann hat also der Typus der zu betrachtenden Gleichung die Form:

$$\varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0 \tag{1}$$

an, wobei φ, ψ Polynome in z sind; der Exponent der höchsten in ihnen auftretenden Potenz von z sei n. Nach dem Fundamentalsatz hat diese Gleichung für jeden bestimmten Wert von w genau n im allgemeinen verschiedene Wurzeln z. Umgekehrt aber folgt aus (1):

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{2}$$

d. h. *w ist eine eindeutige rationale Funktion von z*, die — wie man sagt — *vom Grade n* ist. Wollten wir nun als geometrisches Äquivalent der Gleichung (1) einfach die durch diese Funktion entstehende konforme Abbildung zwischen der komplexen z- und w-Ebene verwenden, so würde die Vieldeutigkeit des z als Funktion von w die Übersicht stören; wir helfen uns also, wie es stets in der Funktionentheorie üblich ist: *Wir denken uns die w-Ebene in n übereinandergelegten Exemplaren (Blättern) vorhanden und verbinden diese n Blätter in geeigneter Weise durch Verzweigungsschnitte zu einer n-blättrigen Riemannschen Fläche*, wie Ihnen das aus den Anfängen der Lehre von den algebraischen Funktionen allen bekannt ist. *Dann vermittelt unsere Funktion eine eineindeutige, im allgemeinen konforme Beziehung zwischen den Punkten der Riemannschen Fläche über der w-Ebene einerseits und der schlichten z-Ebene andererseits.*

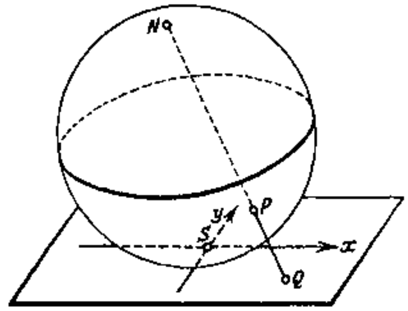


Abb. 37.

Bevor wir nun zum genauen Studium dieser Abbildung übergehen, ist es zweckmäßig, einige Maßnahmen zu treffen, welche die gar nicht im Wesen der Sache begründete *Ausnahmestellung unendlich großer Werte* von w und z beseitigen und das bequeme Aussprechen ausnahmelos geltender Sätze ermöglichen sollen. Da diese Verabredungen nicht so allgemein benutzt werden, wie es wohl wünschenswert wäre, so sei ein Wort mehr über sie gestattet, als es sonst geschieht. Es kann uns nämlich hier nicht genügen, daß man einfach symbolisch von *einem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene* spricht, da diese Auffassung gänzlich die konkrete Vorstellung vermissen läßt und man obendrein immer erst durch besondere Überlegungen oder Verabredungen herausbekommen kann, was einer bestimmten Eigenschaft eines endlichen Punktes beim unendlich fernen analog ist. *Wir erhalten aber alles, was wir wünschen, wenn wir ein für allemal die Gaußsche Ebene als Trägerin der komplexen Zahlen durch die „Riemannsche Kugel" ersetzen.* Wir denken uns dazu einfach (vgl. Abb. 37) auf den Nullpunkt der Zahlenebene eine berührende Kugel vom Durchmesser 1 mit ihrem Südpol S aufgesetzt und durch *stereographische Projektion* von dem gegenüberliegenden Nordpol N auf die Ebene bezogen. Jedem Punkt $Q \equiv (x, y)$ der Ebene entspricht dabei eindeutig der zweite Schnitt P des Strahles NQ mit der Kugel, und umgekehrt entspricht jedem Punkte P der Kugel — mit Ausnahme von N selbst — eindeutig ein Punkt Q mit bestimmten Koordinaten x, y; *wir können daher P als Repräsentanten der Zahl $x + iy$ ansehen.* Rückt nun aber P irgendwie in den Nordpol N, so entfernt sich Q stets ins Unendliche; umgekehrt, wie auch immer Q ins Unendliche der Ebene sich entfernen mag, der entsprechende Punkt P nähert sich auf jeden Fall dem einen bestimmten Punkte N. Es *erscheint also naturgemäß, diesen Punkt N*, dem keine endliche komplexe Zahl zugeordnet ist, *als einzigen Repräsentanten aller unendlich großen $x + iy$, d. h. als konkretes Abbild des sonst nur symbolisch eingeführten, unendlich fernen Punktes der Zahlenebene anzusehen und ihm schlechtweg die Marke ∞ zuzuordnen.* Hierdurch ist im geometrischen Bilde *völlige Gleichberechtigung aller endlichen und des unendlich fernen Punktes* erzielt.

Wir wollen nun, um zur geometrischen Deutung unserer algebraischen Beziehung (1) zurückzukehren, *auch die w-Ebene durch eine w-Kugel ersetzen.* Dann wird unsere Funktion durch eine *Abbildung der z-Kugel auf die w-Kugel* dargestellt, und diese ist, genau wie die Abbildung der beiden Ebenen, *konform*, da nach einem bekannten Satze auch die stereographische Abbildung der Ebene auf die Kugel konform ist. Dabei werden einer einzigen Stelle der w-Kugel im allgemeinen n verschiedene Stellen der z-Kugel entsprechen; um eine *eineindeutige* Beziehung zu erreichen, denken wir uns daher wiederum n Exemplare der w-Kugel übereinander bzw. ineinander gelegt und verbinden sie durch Verzweigungsschnitte in geeigneter Weise zu einer *n-blättrigen Riemannschen Fläche über der w-Kugel.* Diese Vorstellung hat keine größere Schwierigkeit, als die einer Riemannschen Fläche über der Ebene. *Damit ist endlich die algebraische Gleichung* (1) *geometrisch gedeutet als eineindeutige im allgemeinen konforme Beziehung der Riemannschen Fläche über der w-Kugel einerseits und der schlichten z-Kugel andererseits;* in diese Deutung sind offenbar auch unendliche Werte von z und w, die einander oder endlichen Werten entsprechen, mit einbezogen.

Um nun diese neu eingeführten geometrischen Hilfsmittel voll ausnutzen zu können, müssen wir auch *in der Algebra einen entsprechenden Schritt* tun, um die Ausnahmestellung des Unendlichen in den Formeln zu beseitigen, und dieser Schritt ist die *Einführung der homogenen Variablen.* Wir setzen nämlich:

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

und betrachten *z_1 und z_2 als zwei voneinander unabhängige komplexe Veränderliche, die nur beide endlich bleiben und niemals gleichzeitig verschwinden sollen.* Jeder bestimmte Wert von z wird dann von unendlich vielen Wertsystemen (cz_1, cz_2) geliefert, wobei c ein willkürlicher konstanter Faktor ist; alle Wertsysteme (cz_1, cz_2), die sich nur um einen solchen Faktor unterscheiden, werden wir daher als ein und dieselbe *„Stelle" im Gebiet der beiden homogenen Variablen* ansehen. Dann gehört auch umgekehrt jeder solchen Stelle ein bestimmter

Wert z zu, mit einer Ausnahme: der Stelle (z_1 beliebig, $z_2 = 0$) entspricht kein endliches z; nähert man sich ihr aber von andern Stellen aus, so wird das entsprechende z selbst unendlich groß. *Diese eine Stelle wird also als arithmetisches Äquivalent des einen unendlich fernen Punktes der z-Ebene bzw. z-Kugel mit der Marke $z = \infty$ anzusehen sein.*

In derselben Weise setzen wir natürlich auch $w = \frac{w_1}{w_2}$. Wir werden nun die *„homogene" Gleichung zwischen den „homogenen" Variablen z_1, z_2 und w_1, w_2* aufstellen, die der Gleichung (2) entspricht; sie lautet, wenn wir den Bruch in (2) mit z_2^n erweitern:

$$(3) \qquad \frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2^n \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{\varphi}(z_1, z_2)}{\bar{\psi}(z_1, z_2)}.$$

Hierin sind $\bar{\varphi}(z_1, z_2)$, $\bar{\psi}(z_1, z_2)$ *ganze rationale Funktionen von z_1 und z_2*, da $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ das $z = \frac{z_1}{z_2}$ höchstens in der n^{ten} Potenz enthalten. Obendrein sind es sogar *homogene Polynome (Formen) der Dimension n;* denn jeder Term z^i von $\bar{\varphi}(z)$ oder $\psi(z)$ wird durch das Erweitern in den Term $z_2^n \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^i = z_2^{n-i} z_1^i$ der Dimension n verwandelt.

Wir kommen jetzt dazu, unter konsequenter Verwendung der beiden eingeführten Hilfsmittel — der Darstellung auf der komplexen Kugel und der homogenen Variablen — *die funktionale Abhängigkeit, die durch unsere Gleichung* (1) *bzw.* (3) *zwischen z und w festgelegt wird, in allen ihren Einzelheiten zu studieren.* Wir werden diese Aufgabe gelöst haben, wenn wir uns eine vollkommene Vorstellung der konformen Abbildung zwischen der z-Kugel und der Riemannschen Fläche über der w-Kugel machen können.

Da haben wir nun vor allem nach der *Art und der Lage der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche* zu fragen. Ich erinnere hier zunächst daran, daß ein μ-facher *Verzweigungspunkt* ein solcher ist, an dem $\mu + 1$ Blätter zusammenhängen. Da w eine eindeutige Funktion von z ist, kennen wir die Verzweigungspunkte, wenn wir die ihnen entsprechenden Punkte der z-Kugel kennen, die ich schlechtweg *merkwürdige oder bemerkenswerte Punkte der z-Kugel* zu nennen pflege. Auch ihnen entspricht eine gewisse *Multiplizität*, gleich der Vielfachheit des zugehörigen Verzweigungspunktes. Ich will nun die Sätze, welche die Bestimmung dieser Punkte ermöglichen, ohne ausführlichen Beweis angeben; ich nehme dabei an, daß die hier in Betracht kommenden recht einfachen funktionentheoretischen Tatsachen Ihnen im allgemeinen geläufig sind, wenn auch nicht gerade in der homogenen Darstellung, die ich bevorzuge. Die abstrakten Dinge, die ich Ihnen hierbei zunächst werde vorzutragen haben, werden später an einer Reihe von Beispielen konkrete anschauliche Gestalt gewinnen.

Zunächst eine kleine Rechnung, die uns das *Analogon des Differentialquotienten* $\frac{dw}{dz}$ *in homogenen Koordinaten* liefern soll! Durch Differentiation erhalten wir aus der Gleichung (3), wenn wir die Striche über φ und ψ wieder fortlassen:

$$(3') \qquad \frac{w_2\,dw_1 - w_1\,dw_2}{w_2^2} = \frac{\psi\,d\varphi - \varphi\,d\psi}{\psi^2}.$$

Nun ist:

$$d\varphi = \varphi_1\,dz_1 + \varphi_2\,dz_2,$$
$$d\psi = \psi_1\,dz_1 + \psi_2\,dz_2,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_2},$$
$$\psi_1 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \qquad \psi_2 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

Andererseits ist nach dem *Eulerschen Theorem* für homogene Funktionen vom Grade n:

$$\varphi_1 \cdot z_1 + \varphi_2 \cdot z_2 = n \cdot \varphi$$
$$\psi_1 \cdot z_1 + \psi_2 \cdot z_2 = n \cdot \psi\,;$$

daher wird auf der rechten Seite von (3′):

$$\psi\,d\varphi - \varphi\,d\psi = \begin{vmatrix} d\varphi, & d\psi \\ \varphi, & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\begin{vmatrix} \varphi_1\,dz_1 + \varphi_2\,dz_2, & \psi_1\,dz_1 + \psi_2\,dz_2 \\ \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2, & \psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$= \frac{1}{n}\begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \psi_1, & \psi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dz_1, & dz_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix}.$$

Also geht (3′) über in:

$$\frac{w_2\,dw_1 - w_1\,dw_2}{w_2^2} = \frac{z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2}{n \cdot \psi^2}(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2).$$

Damit haben wir die *Grundformel der homogenen Theorie unserer Gleichung* gewonnen, wobei als *maßgebender Ausdruck* für alles folgende die *Funktionaldeterminante* $\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2$ *der Formen* φ, ψ auftritt. Bis auf diese und den Faktor $\frac{z_2^2}{n\psi^2}$ steht rechts das Differential von $z = \frac{z_1}{z_2}$, links das von $w = \frac{w_1}{w_2}$, und da für endliche z und w die merkwürdigen Punkte bekanntlich aus $\frac{dw}{dz} = 0$ sich ergeben, erscheint folgender Satz plausibel, auf dessen genauen Beweis ich hier allerdings nicht eingehe: *Jede μ-fache Nullstelle der Funktionaldeterminante ist ein merkwürdiger*

Punkt der Multiplizität μ, d. h. ihm entspricht ein μ-facher Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche über der w-Kugel. Der Hauptvorzug dieser Regel vor denen, die sonst gegeben werden, besteht darin, daß sie endliche und unendliche Werte von z und w in eine Aussage zusammenfaßt. — Auch über die *Anzahl der merkwürdigen Punkte* gestattet sie eine präzise Angabe: Es sind nämlich die vier Ableitungen Formen der Dimension $n-1$, und daher ist die Funktionaldeterminante eine Form der Dimension $2n-2$. Ein solches Polynom hat unter Berücksichtigung der Vielfachheit immer genau $2n-2$ Nullstellen. *Sind also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ die merkwürdigen Punkte der z-Kugel (d. h. $\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2 = 0$ für $z_1 : z_2 = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$) und sind bezüglich $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ ihre Multiplizitäten, so ist deren Summe:*

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = 2n - 2 .$$

Diesen Punkten entsprechen vermöge der konformen Abbildung die ν *Verzweigungspunkte:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu$$

der Riemannschen Fläche über der w-Kugel, die auf der Fläche notwendig getrennt liegen müssen und um die herum bzw. $\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \mu_3 + 1, \ldots, \mu_\nu + 1$, Blätter im Zyklus zusammenhängen. Es ist aber zu bemerken, daß möglicherweise verschiedene dieser Verzweigungspunkte über derselben Stelle der w-Kugel liegen können, da sich unter Umständen aus $w = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ für $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ verschiedene Male derselbe Wert von w ergeben kann. Über einem solchen Punkte verlaufen dann verschiedene von einander getrennte Serien von Blättern, deren jede in sich zusammenhängt. Jede solche Stelle der w-Kugel nennen wir eine *Verzweigungsstelle*, und bezeichnen sie fortlaufend mit $A, B, C, \ldots$, wobei die Anzahl dieser Verzweigungsstellen kleiner sein kann als ν.

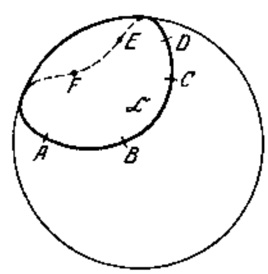


Abb. 38.

Wir wollen nun *die Riemannsche Fläche*, von der wir nach den bisherigen Angaben nur sehr verschwommene Vorstellungen haben können, *so aufbauen, daß sie eine übersichtlichere Gestalt* annimmt. *Dazu legen wir durch die Verzweigungsstellen $A, B, C, \ldots$ auf der w-Kugel irgendeine in sich zurücklaufende, sich nicht durchdringende Kurve $\mathfrak{C}$ von möglichst einfacher Gestalt, und unterscheiden die beiden durch sie entstehenden Kugelkalotten als obere und untere* (vgl. Abb. 38). In allen später von uns zu behandelnden Beispielen werden die $A, B, C, \ldots$ sämtlich reell sein, wir werden dann natürlich *als Kurve $\mathfrak{C}$ den Meridiankreis der reellen Zahlen* nehmen, so daß jedes unserer beiden Teilgebiete eine Halbkugel ist.

Nun durchdringen sich — um weiter vom allgemeinen Fall zu reden — je zwei zusammenhängende Blätter der Riemannschen Fläche längs eines zwei Verzweigungspunkte verbindenden *Verzweigungsschnittes;* bekanntlich bleibt die Riemannsche Fläche ihrem Wesen nach ungeändert, wenn man diese Schnitte beliebig auf ihr verschiebt und nur ihre Endpunkte festhält, d. h. dieselben Blätter längs andrer dieselben Verzweigungspunkte verbindender Kurven miteinander zusammenhängen läßt. In dieser Variabilität liegt die große Allgemeinheit, aber zugleich auch die große Schwierigkeit der Idee der Riemannschen Fläche. Um nun unserer Fläche eine bestimmte, der konkreten Vorstellung leicht zugängliche Gestalt zu geben, *verschieben wir alle Verzweigungsschnitte so, daß sie sämtlich über jene oben festgelegte Kurve $\mathfrak{C}$ zu liegen kommen, die durch sämtliche Verzweigungspunkte geht;* dabei können gern über demselben Teile von $\mathfrak{C}$ mehrere Verzweigungsschnitte verlaufen, über andern brauchen auch gar keine Schnitte zu liegen.

Nunmehr schneiden wir den ganzen Blätterkomplex, d. h. jedes einzelne Blatt längs dieser Kurve $\mathfrak{C}$ auf; da wir alle Verzweigungsschnitte vorher über $\mathfrak{C}$ verlegt haben und sie damit sämtlich durchschneiden, *zerfällt unsere Riemannsche Fläche in je n von Verzweigungen ganz freie, über jeder der beiden durch $\mathfrak{C}$ geschiedenen Kugelkalotten ausgebreitete „Halbblätter“.* Denken wir uns die der oberen Kugelkalotte entsprechenden Halbblätter schraffiert, die der unteren entsprechenden nicht schraffiert, so können wir kurz *n schraffierte und n nichtschraffierte Halbblätter* unterscheiden. Jetzt läßt sich der *Aufbau der ursprünglichen Riemannschen Fläche* so beschreiben: *Jedes schraffierte Halbblatt war auf ihr von lauter nichtschraffierten Halbblättern umgeben, mit denen es längs der über AB, BC, ... gelegenen Stücke von $\mathfrak{C}$ zusammenhing, und ebenso war jedes nichtschraffierte Halbblatt längs solcher Kurvenstücke von lauter schraffierten umgeben. Mehr als zwei Halbblätter aber können nur an einem Verzweigungspunkte zusammenstoßen, und zwar liegen um einen μ-fachen Verzweigungspunkt genau $\mu + 1$ schraffierte und $\mu + 1$ nichtschraffierte Halbblätter alternierend herum.*

Da die z-Kugel mittels unserer Funktion $w(z)$ eineindeutig auf die Riemannsche Fläche über der w-Kugel abgebildet ist, können wir diese Zusammenhangsverhältnisse sofort auf sie übertragen: Wegen der Stetigkeit entsprechen den $2n$ Halbblättern der Riemannschen Fläche $2n$ zusammenhängende z-Bereiche, die wir als schraffierte bzw. nichtschraffierte Halbbereiche bezeichnen; sie werden voneinander getrennt durch die n Bilder, welche die n-deutige Funktion $z(w)$ von jedem der Stücke AB, BC.... der Kurve $\mathfrak{C}$ auf der z-Kugel entwirft. *Jeder schraffierte Halbbereich stößt längs solcher Bildkurven an lauter nichtschraffierte, jeder nichtschraffierte an lauter schraffierte an; nur in einem μ-fachen merkwürdigen Punkte stoßen mehr als zwei Halbbereiche, und zwar je $\mu + 1$ schraffierte und nichtschraffierte zusammen.*

Diese Gebietseinteilung der z-Kugel soll uns nun dazu dienen, den Verlauf der Funktion $z(w)$ für einige *einfache und charakteristische Beispiele* bis in alle Einzelheiten zu verfolgen. Ich beginne mit einem möglichst einfachen Beispiele.

1. Die „reine" Gleichung.

Mit diesem Namen bezeichnen wir die allgemein bekannte Gleichung:

$$z^n = w, \tag{1}$$

deren Lösung man formal durch Einführung des *Wurzelzeichens* angibt: $z = \sqrt[n]{w}$, ohne daß damit natürlich für die Erkenntnis des funktionalen Zusammenhangs von z und w etwas gewonnen ist. Wir verfahren nun ganz nach der allgemeinen Vorschrift. Wir führen homogene Variable ein:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^n}{z_2^n},$$

und bilden die Funktionaldeterminante des Zählers und Nenners der rechten Seite:

$$\begin{vmatrix} n\,z_1^{n-1}, & 0 \\ 0, & n\,z_2^{n-1} \end{vmatrix} = n^2\,z_1^{n-1}\cdot z_2^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck hat ersichtlich $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, oder (— inhomogen geschrieben —) $z = 0$ *und* $z = \infty$ *je zur* $(n-1)$*-fachen Nullstelle*, womit bereits sämtliche merkwürdigen Punkte (von der Gesamtmultiplizität $2n-2$) bekannt sind. Nach unserm allgemeinen Theorem liegen daher an den Stellen $w = 0$ *und* $w = \infty$, die vermöge der Gleichung $w = z^n$ den beiden Punkten $z = 0$ und $z = \infty$ zugeordnet sind, *die einzigen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche über der w-Kugel*. Diese beiden Punkte besitzen dabei je die *Multiplizität* $n-1$, so daß an jedem alle n Blätter im Zyklus zusammenhängen. Wir markieren uns nun weiter auf der w-Kugel den *Meridian der reellen Zahlen als Kurve* $\mathfrak{C}$ und schneiden nach entsprechender Verschiebung der Verzweigungsschnitte alle Blätter der Riemannschen Fläche längs dieses Meridians auf; wir denken uns von den $2n$ Halbkugeln, in welche die Fläche so zerfällt, jedesmal die über der *hinteren* Hälfte der w-Kugel gelegenen, die also w-Werten mit *positiv imaginären Teilen* entsprechen, schraffiert. Auf dem Meridianschnitt selbst wollen wir noch stets den *Halbmeridian der positiven reellen Zahlen* (in der Abb. 39 *ausgezogen*) und den der *negativen* (*gestrichelt*) unterscheiden.

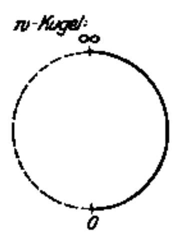


Abb. 39.

Nunmehr haben wir die *Bilder dieser Meridiankurve* $\mathfrak{C}$ *auf der z-Kugel* zu untersuchen, die dort die charakteristische Teilung in Halbbereiche hervorrufen. Auf dem positiven Halbmeridian ist $w = r$, wobei r reell und positiv von 0 bis ∞ läuft; für diese Werte wird nach einer bekannten Formel der komplexen Zahlen:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \quad \text{wo} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dieser Ausdruck durchläuft für die verschiedenen Werte von k diejenigen *n Halbmeridiane der z-Kugel, die mit dem Halbmeridian der positiven reellen Zahlen die Winkel* $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ *bilden.* Diese Kurven entsprechen also der ausgezogenen Hälfte von $\mathfrak{C}$. Analog haben wir auf dem negativen Halbmeridian der w-Kugel zu setzen: $w = -r = r \cdot e^{i\pi}$, wobei wiederum $0 \leqq r \leqq \infty$. Dies ergibt:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right), \quad \text{wo} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

dem entsprechen aber die *n Halbmeridiane der z-Kugel mit den „geographischen Längen"* $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$, *die also die Winkel der vorigen halbieren. Demnach wird die z-Kugel in $2n$ vom Nordpol nach dem Südpol reichende kongruente Zweiecke zerlegt* — etwa wie man eine Apfelsine zu zerschneiden pflegt. Diese Teilung genügt genau der allgemeinen Theorie; insbesondere stoßen nur in den merkwürdigen Punkten, nämlich den beiden Polen, mehr als zwei Halbbereiche, und zwar jedesmal $2 \cdot n$ entsprechend der Multiplizität $n - 1$ zusammen.

Was nun die *Schraffierung der Bereiche* angeht, so brauchen wir sie nur für *einen* Bereich festzulegen; die übrigen sind dann alternierend zu schraffieren und freizulassen. Nun bemerken wir, wenn wir die schraffierte Hälfte der w-Kugel (die Hinterseite also) vom Punkte $w = 0$ aus betrachten, daß das ausgezogene Stück der Begrenzung zur Linken, das gestrichelte zur Rechten liegt; da es sich um eine konforme Abbildung ohne Winkelumlegung handelt, *muß jedes schraffierte Gebiet der z-Kugel, vom entsprechenden Punkte $z = 0$ aus betrachtet, dieselbe Lageneigenschaft haben, daß nämlich ein ausgezogenes Begrenzungsstück links, ein gestricheltes rechts liegt.* Wir beherrschen danach die Gebietseinteilung der z-Kugel vollkommen. Übrigens ist noch ein charakteristischer Unterschied der Verteilung der Gebiete auf beide z-Halbkugeln zu bemerken, je nachdem n gerade oder ungerade ist, wie das aus den beiden Abbildungen 40 und 41 auf S. 121 für die ersten Fälle $n = 3, 4$ klar zu sehen ist. — Ich weise hier noch ausdrücklich darauf hin, wie notwendig der Übergang zur komplexen *Kugel* für das volle Verständnis der Sachlage ist; in der komplexen *z-Ebene* hätte man eine Einteilung in geradlinig begrenzte, vom Nullpunkt ausstrahlende Sektoren, und es wäre keineswegs so anschaulich, daß $z = \infty$ als merkwürdiger Punkt bzw. $w = \infty$ als Verzweigungspunkt die gleiche Bedeutung hat wie $z = 0$ bzw. $w = 0$.

Damit ist die Grundlage für die genaue Kenntnis des funktionalen Zusammenhanges zwischen z und w geschaffen; wir hätten jetzt nur noch die *konforme Abbildung eines jeden der $2n$ Kugelzweiecke auf die eine oder die andere w-Halbkugel zu studieren.* Darauf will ich jedoch hier nicht näher eingehen; jedem, der sich überhaupt mit konformer Abbildung beschäftigt hat, ist ja dieser Fall als eines der einfachsten äußerst anschaulichen Beispiele durchaus geläufig. Wie man dann von hier aus Methoden zur numerischen Berechnung von z gewinnen kann, werden wir später noch zu erörtern haben (vgl. S. 141).

Hier wollen wir nur noch die wichtige Frage nach der gegenseitigen Beziehung *der einzelnen gleichartigen Gebiete der z-Kugel* erledigen. Genauer gesagt: $w = z^n$ nimmt den gleichen Wert an je einer Stelle jedes der n schraffierten Gebiete an. Lassen sich die zugehörigen Werte z

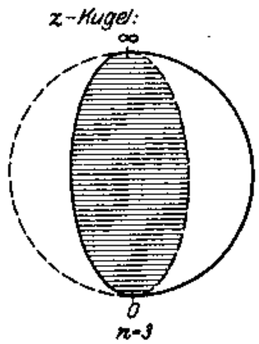


Abb. 40.

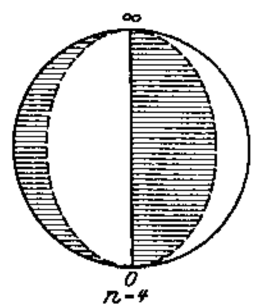


Abb. 41.

nicht einfach durcheinander ausdrücken? In der Tat bemerken wir sofort, daß für $z' = z \cdot \varepsilon$, wobei ε eine beliebige n^{te} Einheitswurzel ist, $z'^n = z^n$ wird, d. h. $w = z^n$ *nimmt an allen n Stellen;*

$$(2) \qquad z' = \varepsilon^\nu \cdot z = e^{\frac{2\nu i\pi}{n}} \cdot z \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

den gleichen Wert an. Diese n Stellen z' müssen sich also gerade auf *alle n* schraffierten Bereiche verteilen, wenn z in *einem* der schraffierten Bereiche angenommen ist, und sie müssen gleichzeitig je einen dieser Bereiche durchlaufen, wenn z seinen Bereich durchläuft; und dasselbe gilt von den nichtschraffierten Bereichen. Nun bedeutet jede der Substitutionen (2) geometrisch *eine Drehung der z-Kugel um die vertikale Achse $0, \infty$ durch einen Winkel $\nu \cdot \frac{2\pi}{n}$*, da in der komplexen Ebene bekanntlich Multiplikation mit $e^{\frac{2\nu i\pi}{n}}$ eine Drehung um den Nullpunkt durch jenen Winkel darstellt. *Also gehen entsprechende Punkte unserer Kugelgebiete, wie diese Gebiete selbst, durch jene n Drehungen um die vertikale Achse ineinander über.*

Hätten wir also von vornherein nur ein schraffiertes Teilgebiet der Kugel bestimmt, so würde uns diese Bemerkung *alle gleichartigen Teilgebiete* liefern. Dabei ist lediglich die Eigenschaft der Substitutionen (2) benutzt, *daß sie die Gleichung* (1) *in sich selbst* (*d. h.* $z^n = w$ *in* $z'^n = w$) *überführen und daß ihre Anzahl mit der Gradzahl übereinstimmt.* In den folgenden Beispielen werden wir stets von vornherein solche lineare Substitutionen angeben und dadurch die Bestimmung der Gebietsteilung wesentlich vereinfachen können.

Wir wollen uns nun noch an dem vorliegenden Beispiele *einen wichtigen allgemeinen Begriff* klar machen, nämlich den *Begriff der Irreduzibilität für Gleichungen, die einen Parameter w rational enthalten;* von der Irreduzibilität von Gleichungen mit rationalen *Zahlen*koeffizienten hatten wir schon früher gelegentlich der Konstruktion des regulären Siebenecks gesprochen (S. 55ff.). *Eine Gleichung* $f(z, w) = 0$ (etwa unser Beispiel $z^n - w = 0$), *wobei* $f(z, w)$ *ein Polynom in z ist, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von w sind, heißt reduzibel in bezug auf den Parameter w, wenn sich f in ein Produkt zweier Polynome derselben Art zerlegen läßt, in denen beide Male z wirklich vorkommt:*

$$f(z, w) = f_1(z, w) \cdot f_2(z, w);$$

andernfalls heißt die Gleichung irreduzibel in bezug auf w. Die ganze Verallgemeinerung gegen den früheren Begriff besteht hierbei darin, daß wir als „*Rationalitätsbereich*", in dem wir operieren und dem wir die Koeffizienten der zuzulassenden Polynome entnehmen wollen, *statt der Gesamtheit der rationalen Zahlen die Gesamtheit der rationalen Funktionen des Parameters w zugrunde legen* — daß wir also von einer rein zahlentheoretischen zu einer funktionentheoretischen Auffassung übergehen

Veranschaulichen wir uns jede Gleichung $f(z, w) = 0$ durch ihre Riemannsche Fläche, so können wir *ein einfaches Kriterium für die Reduzibilität in diesem neuen Sinne* aufstellen. Ist nämlich die Gleichung reduzibel, so muß jedes ihr genügende Wertsystem z, w entweder $f_1(z, w) = 0$ oder $f_2(z, w) = 0$ genügen; nun werden die Lösungen von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ durch deren Riemannsche Flächen dargestellt, die miteinander nichts zu tun haben und insbesondere nicht zusammenhängen können. *Also muß die zu einer reduziblen Gleichung* $f(z, w) = 0$ *gehörige Riemannsche Fläche in mindestens zwei getrennte Stücke zerfallen.*

Danach können wir jetzt sofort behaupten, *daß die Gleichung* $z^n - w = 0$ *gewiß irreduzibel im funktionentheoretischen Sinne ist.* Denn bei ihrer Riemannschen Fläche, die wir genau kennen, hängen ja an jedem Verzweigungspunkte alle n Blätter im Zyklus zusammen, und obendrein ist die ganze Fläche auf die zusammenhängende unzerschnittene z-Kugel abgebildet; von einem Zerfallen kann also nicht die Rede sein.

Im Anschluß hieran können wir eines der schon früher (*S. 56*) *berührten populären Probleme der Mathematik erledigen, nämlich das* *der Teilung eines beliebigen Winkels φ in n gleiche Teile, insbesondere — für $n = 3$ — das der Trisektion des Winkels.* Mit diesem Namen bezeichnet man die Aufgabe, eine exakte Konstruktion *mit Zirkel und Lineal* anzugeben, die *für jeden beliebigen Winkel* φ die Dreiteilung leistet (für eine Reihe *spezieller* Werte φ lassen sich ja solche Konstruktionen leicht angeben). Ich will Ihnen hier noch den Gedankengang des Beweises für die Unmöglichkeit der Winkeltrisektion im bezeichneten Sinne vortragen und bitte Sie dabei, sich des Unmöglichkeitsbeweises für die Konstruktion des regulären Siebenecks mit Zirkel und Lineal zu erinnern (vgl. S. 56ff.). Genau wie damals werden wir nämlich auch hier das Problem auf eine *irreduzible kubische Gleichung* zurückführen und dann schließen, daß diese nicht durch eine Folge von Quadratwurzeln lösbar ist; nur wird jetzt in die Gleichung *ein Parameter* — der Winkel φ — eingehen, während früher die Koeffizienten ganze Zahlen waren. Demgemäß muß die *funktionentheoretische Irreduzibilität an Stelle der zahlentheoretischen* treten.

Um die Gleichung des Problems anzusetzen, denken wir uns (vgl. Abb. 42) in der w-Ebene den Winkel φ an die positive reelle Halbachse angetragen; dann schneidet sein freier Schenkel den Einheitskreis in dem Punkte:

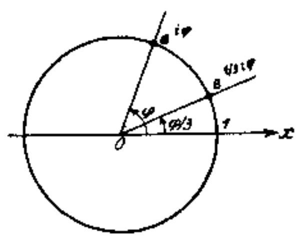


Abb. 42.

$$w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Unsere Aufgabe kommt darauf hinaus, eine von dem speziellen Werte des Parameters φ unabhängige, aus einer endlichen Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals bestehende Konstruktion zu finden, die jedesmal den Schnitt des Einheitskreises mit dem Schenkel des Winkels $\frac{\varphi}{3}$ liefert, d. h. den Punkt:

$$z = e^{\frac{i\varphi}{3}} = \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} .$$

Dieses z genügt der Gleichung:

$$(3) \qquad z^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

und das analytische Äquivalent unserer geometrischen Aufgabe besteht also darin (vgl. S. 56), *diese Gleichung durch eine endliche Anzahl übereinander geschalteter Quadratwurzeln aus rationalen Funktionen von* $\cos\varphi$ *und* $\sin\varphi$ *zu lösen* — denn diese Größen sind die Koordinaten des Punktes w, von dem wir bei unserer Konstruktion ausgehen.

Wir haben nun zuerst zu zeigen, *daß die Gleichung* (3) *irreduzibel im funktionentheoretischen Sinne ist.* Freilich hat diese Gleichung nicht genau die oben bei der Begriffserklärung angenommene Form, denn statt des rational eingehenden *komplexen* Parameters w treten die beiden Funktionen cos, sin eines *reellen* Parameters φ ihrerseits rational auf. Wir werden in naturgemäßer Fortbildung unseres Begriffes hier *das Polynom* $z^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *reduzibel nennen, wenn es sich in Polynome von z zerspalten läßt, deren Koeffizienten gleichfalls rationale Funktionen von* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ *sind*, und dafür können wir ein ganz ähnliches Kriterium wie vorhin angeben. Lassen wir nämlich φ in (3) alle reellen Werte durchlaufen, so durchläuft $w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ den Einheitskreis der w-Ebene, dem vermöge der stereographischen Projektion auf der w-Kugel der Äquator entspricht; die Kurve, welche über diesem auf der Riemannschen Fläche der Gleichung $z^3 = w$ liegt und in einem Zuge alle drei Blätter durchläuft, wird durch Gleichung (3) auf den Einheitskreis der z-Kugel eineindeutig abgebildet und kann daher gewissermaßen als ihr „*eindimensionales Riemannsches Bild*" angesprochen werden. Ebenso können wir offenbar jeder Gleichung der Form $f(z, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$ ein solches Riemannsches Bild zuordnen, indem wir so viele Exemplare des Einheitskreises mit der Bogenlänge φ nehmen, als die Gleichung Wurzeln hat, und sie entsprechend dem Zusammenhange der Wurzeln aneinanderheften. Nun folgt weiter genau wie früher, *daß die Gleichung* (3) *nur dann reduzibel sein kann, wenn ihr eindimensionales Riemannsches Bild in getrennte Teile zerfällt*, und das ist offenbar nicht der Fall. *Damit ist die funktionentheoretische Irreduzibilität unserer Gleichung* (3) *bewiesen.*

Nunmehr läßt sich aber der frühere Beweis für den Satz, daß eine durch eine Folge von Quadratwurzeln lösbare kubische Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten reduzibel ist, wörtlich auf den vorliegenden Fall der funktionentheoretisch irreduziblen Gleichung (3) übertragen (vgl. S. 57ff.); man braucht nur dort statt „rationaler Zahlen" stets „rationale Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$" zu setzen. *Damit ist unsere Behauptung, daß die Dreiteilung des Winkels für willkürliches* φ *nicht durch eine endliche Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals ausführbar ist, vollständig bewiesen:* die Bemühungen der Winkeldreiteilungsleute müssen also immer vergeblich bleiben!

Ich komme nunmehr zur Behandlung eines ein wenig komplizierteren Beispiels:

2. Die Diëdergleichung.

Diese Gleichung, deren Name später zu erklären sein wird, lautet:

$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right). \tag{1}$$

Ihr Grad ist, wie sich nach Multiplikation mit z^n ergibt, $2n$. Durch Einführung homogener Variabler erhalten wir:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n \cdot z_2^n},$$

wobei in der Tat Formen $2n^{\text{ter}}$ Dimensionen in Zähler und Nenner auftreten. Die Funktionaldeterminante dieser Formen ist:

$$\begin{vmatrix} 2n z_1^{2n-1}, & 2n z_2^{2n-1} \\ 2n z_1^{n-1} z_2^n, & 2n z_1^n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = 4n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1} (z_1^{2n} - z_2^{2n}).$$

Sie hat zunächst $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ je zur $(n-1)$-fachen Nullstelle; die übrigen $2n$ Nullstellen ergeben sich aus:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \pm 1\,.$$

Führen wir neben der früher bereits benutzten n^{ten} Einheitswurzel:

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

noch die folgende n^{te} Wurzel aus -1 ein:

$$\varepsilon' = e^{\frac{i\pi}{n}},$$

so werden die letzten $2n$ Nullstellen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^\nu \qquad \text{und:} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu \; (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Die zu ihnen gehörenden Werte $z = \frac{z_1}{z_2}$ haben also sämtlich den Betrag 1 und liegen daher auf dem (dem Einheitskreise der z-Ebene entsprechenden) *Äquator* der z-Kugel, und zwar um gleiche Winkelabstände $\frac{\pi}{n}$ voneinander entfernt. Wir haben daher *als merkwürdige Punkte auf der z-Kugel:*

den Südpol $z = 0$ und den Nordpol $z = \infty$ je mit der Multiplizität $n - 1$;

die $2n$ Äquatorialpunkte $z = \varepsilon^\nu$, $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ je mit der Multiplizität 1.

Die Summe aller Multiplizitäten ist $2 \cdot (n-1) + 2n \cdot 1 = 4n - 2$, wie es das allgemeine Theorem von S. 117 für den Grad $2n$ auch verlangt. Vermöge der Gleichung (1) entspricht den merkwürdigen Punkten $z = 0, \infty$ der z-Kugel auf der w-Kugel die Stelle $w = \infty$, ferner allen Punkten $z = \varepsilon^\nu$ die Stelle $w = +1$ und endlich allen $z = \varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ die Stelle $w = -1$. Es gibt demnach *nur drei Verzweigungsstellen* $\infty, +1, -1$ auf der w-Kugel, aber es liegen über:

$w = \infty$ *zwei Verzweigungspunkte der Multiplizität $n - 1$;*

$w = +1$ n *Verzweigungspunkte der Multiplizität 1;*

$w = -1$ n *Verzweigungspunkte der Multiplizität 1.*

Die $2n$ Blätter der Riemannschen Fläche gruppieren sich daher über dem Punkte $w = \infty$ in zwei getrennte Serien von je n im Zyklus zusammenhängenden Blättern, über $w = +1$ und $w = -1$ in n getrennte

Serien von je zwei Blättern. Im einzelnen wird der Verlauf dieser Blätter anschaulich klar werden, wenn wir die *entsprechende Einteilung der z-Kugel* in Halbbereiche studieren.

Dazu ist es, wie oben bemerkt, gut, *die linearen Substitutionen zu kennen, die unsere Gleichung* (1) *in sich überführen.* Zunächst bleibt sie, genau wie die reine Gleichung, ungeändert bei den n Substitutionen:

$$(2\text{a}) \qquad z' = \varepsilon^\nu \cdot z \; (\nu = 0, 1, \ldots, n-1), \quad \text{wo} \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

da für diese bereits $z'^n = z^n$ ist. Ebenso werden sie aber auch durch die weiteren n Substitutionen:

$$(2\text{b}) \qquad z' = \frac{\varepsilon^\nu}{z} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

in sich übergeführt, da durch sie lediglich z^n und $\frac{1}{z^n}$ vertauscht werden.

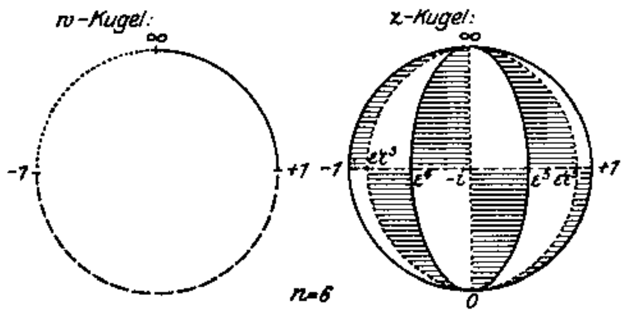


Abb. 43.

Wir kennen damit $2n$ lineare Substitutionen der Gleichung (1) in sich, genau *so viele mithin, als ihr Grad beträgt.* Kennt man für irgendeinen Wert w_0 von w also *eine* Wurzel z_0 der Gleichung, so kennt man ohne weiteres $2n$ im allgemeinen verschiedene Werte $\varepsilon^\nu \cdot z_0$ und $\frac{\varepsilon^\nu}{z_0}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), für die (1) denselben Wert $w = w_0$ liefert, d. h. man kennt *alle* Wurzeln der Gleichung, wenn man nur einmal die n^{te} Einheitswurzel ε sich verschafft hat.

Nun gehen wir an die Untersuchung der Einteilung der z-Kugel heran, wie sie einer Zerschneidung der Riemannschen Fläche über der w-Kugel längs des reellen Meridians entspricht; wir unterscheiden dabei auf dem reellen Meridian der w-Kugel (vgl. Abb. 43) ähnlich wie im vorigen Beispiel die durch die drei Verzweigungsstellen hervorgerufenen Segmente von $+1$ bis ∞ (ausgezogen), von ∞ bis -1 (punktiert) und von -1 bis $+1$ (gestrichelt). *Jedem dieser drei Segmente entsprechen auf der z-Kugel 2n verschiedene Kurvenstücke, die aus einem von ihnen durch die 2n linearen Substitutionen* (2) *hervorgehen;* es genügt daher immer eines von ihnen aufzufinden. Übrigens müssen alle diese Kurvenstücke die merkwürdigen Punkte $z = 0, \infty, \varepsilon^\nu, \varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ verbinden, die wir uns zunächst auf der z-Kugel markieren; ihr Bild hat genau wie im früheren Falle bei geradem n einen etwas anderen Typus als bei ungeradem n. Es mag hier genügen, wenn wir uns einen bestimmten Fall, etwa $n = 6$, vor Augen stellen; die Abb. 43 stellt in orthogonaler Projektion die Vorderseite der z-Kugel dar, und es sind von den auf dem Äquator in Abständen von je 60° äquidistant liegenden Punkten ε^ν von links an $\varepsilon^3 = -1$, ε^4, ε^5, $\varepsilon^6 = 1$, von den in der Mitte zwischen ihnen liegenden $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ aber $\varepsilon' \cdot \varepsilon^3$, $\varepsilon' \cdot \varepsilon^4 = -i$ und $\varepsilon' \cdot \varepsilon^5$ sichtbar.

Ich behaupte nun, daß der Quadrant $+1 < z < \infty$ *des Meridians der reellen* z *dem ausgezogenen Teile* $+1 < w < +\infty$ *des reellen* w-*Meridians entspricht.* In der Tat, setzen wir $z = r$ und lassen r reell von 1 bis ∞ laufen, so läuft $w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)$ ebenfalls reell und ständig wachsend von 1 bis ∞. Aus dieser einen entstehen n weitere ausgezogene Kurven der z-Kugel durch die n linearen Substitutionen (2a). Letztere bedeuten aber, wie wir aus dem vorigen Beispiele wissen, die Kugeldrehungen um die vertikale Achse $(0, \infty)$ durch die Winkel $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$; *wir erhalten so die* n *Viertelmeridiane vom Nordpol* ∞ *nach den Punkten* ε^ν *des Äquators.* Eine weitere ausgezogene Kurve erhalten wir, wenn wir etwa die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ anwenden, und zwar geht dadurch der Meridianquadrant von $+1$ nach ∞ in den unteren reellen Meridianquadranten von $+1$ nach 0 über. Unterwerfen wir auch diesen allen n Drehungen (2a) — die Zusammensetzung dieser mit $z' = \frac{1}{z}$ gibt alle Substitutionen (2b) — so treten noch *die* n *den Südpol mit den Äquatorialpunkten* ε^ν *verbindenden Viertelmeridiane* hinzu, womit wir in der Tat die gewünschten $2n$ ausgezogenen dem ausgezogenen w-Meridianquadranten entsprechenden Kurven haben. Für $n = 6$ speziell erfüllen sie die drei ganzen Meridiane, die aus dem reellen Meridian durch die Drehungen um 0°, 60°, 120° hervorgehen.

Nun können wir weiter einsehen, daß die Gesamtheit der Werte $z = \varepsilon' \cdot r$, wobei r wieder reell von $+1$ bis ∞ läuft, dem punktierten Teile des reellen w-Meridians entspricht; denn die Gleichung (1) liefert dafür:

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^n r^n + \frac{1}{\varepsilon'^n r^n}\right) = -\frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right),$$

und dieser Ausdruck läuft wirklich stets abnehmend von -1 bis $-\infty$. $z = \varepsilon' \cdot r$ stellt aber *den Meridianquadranten von* ∞ *nach dem Äquatorialpunkt* ε' dar; wenn wir auf ihn wiederum die Substitutionen (2a), (2b) anwenden, so ergibt sich genau wie vorhin, *daß dem punktierten Teile des reellen w-Meridians die sämtlichen Meridianquadranten von den Polen nach den Äquatorialpunkten $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ entsprechen, die also die Winkel der vorhin erhaltenen Meridianquadranten halbieren.* Für $n = 6$ insbesondere setzen sie gerade die 3 ganzen Meridiane zusammen, die aus dem der reellen Zahlen durch Drehung um 30°, 90°, 150° hervorgehen.

Es bleiben noch *die dem gestrichelten Halbmeridian* $-1 < w < +1$ *entsprechenden* $2n$ *Kurvenstücke* zu suchen; ich beweise, daß es *die von den Punkten* ε^ν *und* $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ *auf dem Äquator der z-Kugel hervorgerufenen Abschnitte* sind. In der Tat repräsentiert der Äquator die Punkte vom absoluten Betrage 1 und wird daher durch $z = e^{i\varphi}$ dargestellt, wobei φ reell ist und von 0 bis 2π läuft. Daher ist das zugehörige:

$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{n i \varphi} + e^{-n i \varphi}\right) = \cos(n\varphi);$$

dieser Ausdruck bleibt in der Tat stets reell und absolut $\leqq 1$, und zwar nimmt er genau einmal alle Werte zwischen $+1$ und -1 an, wenn φ von einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{n}$ bis zum nächsten läuft, d. h, wenn z einen der Abschnitte durchwandert von denen wir sprechen.

Die so bestimmten Kurven zerlegen die z-Kugel in $2 \cdot 2n$ — übrigens dreiecksförmige — Halbbereiche, die von je einer Kurve der drei Arten begrenzt werden und je einem Halbblatt der Riemannschen Fläche entsprechen; nur an einem merkwürdigen Punkte stoßen mehrere Bereiche zusammen, und zwar, wie es nach der Tabelle der Vielfachheiten (S. 125) sein muß, *an Nord- und Südpol je $2 \cdot n$, an jedem Punkte ε^ν und $\varepsilon' \cdot \varepsilon^\nu$ je $2 \cdot 2$.* Um festzustellen, welche von diesen Bereichen zu schraffieren sind, bemerken wir, daß man die hintere w-Halbkugel zur Linken hat, wenn man der Reihe nach den ausgezogenen, den gestrichelten und den punktierten Teil ihrer Begrenzung durchläuft. Weil die Abbildung konform ist, ohne die Winkel umzulegen, haben wir daher alle Halbbereiche, bei denen die drei Teile der Begrenzung im selben Sinne aufeinander folgen, zu schraffieren, alle andern freizulassen.

Damit haben wir das vollständige geometrische Bild der durch unsere Gleichung repräsentierten Abhängigkeit zwischen z und w erhalten; man kann es noch weiter ausführen, indem man die konforme Abbildung des einzelnen Dreiecksbereichs auf die w-Halbkugel näher untersucht, was wir uns hier indessen wieder sparen wollen. *Ich beschreibe nur noch zusammenfassend den vorzugsweise berücksichtigten Fall $n = 6$:* Die Kugel ist da in zwölf schraffierte und zwölf nichtschraffierte Dreiecke geteilt, von denen in unserer Abbildung (vgl. Abb. 44) je sechs zu sehen sind. An jedem Pole stoßen je sechs von jeder Art, an zwölf äquidistanten Punkten des Äquators je zwei zusammen; jeder Bereich ist auf ein gleichartiges Halbblatt der Riemannschen Fläche konform abgebildet, die entsprechend der Gruppierung der Halbbereiche zu je sechs von jeder Art über der Verzweigungsstelle ∞ und zu je zwei von jeder Art über den Verzweigungsstellen ± 1 zusammenhängen.

Ein bequem zu handhabendes und wegen der Analogie mit dem folgenden besonders wertvolles *Bild* der Kugelteilung erreicht man so: Man verbindet geradlinig immer zwei benachbarte um $\frac{2\pi}{n}$ voneinander abstehende Teilpunkte auf dem Äquator (etwa alle ε^ν), und ferner jeden von ihnen mit jedem der beiden Pole. So entsteht *eine der Kugel eingeschriebene Doppelpyramide mit n* (in der Abbildung 44 sechs) *Seitenflächen auf jedem Mantel:* Projiziert man die Kugelteilung von Zentrum aus auf sie, so erscheint jedes Seitendreieck durch seine vom Pol gefällte Höhe in eine schraffierte und eine nichtschraffierte Hälfte

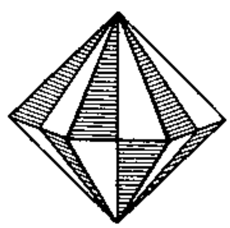


Abb. 44.

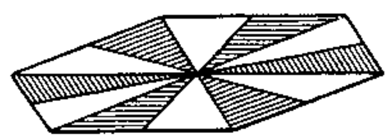


Abb. 45.

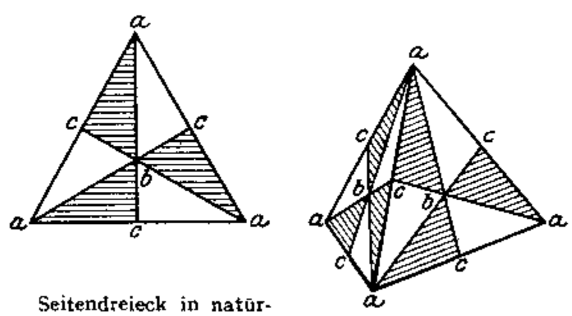
geteilt. Repräsentieren wir durch diese Doppelpyramide die Kugelteilung und damit unsere Funktion, so leistet sie uns ganz ähnliche Dienste, wie es in den folgenden Beispielen die *regulären Polyeder* tun werden. Wir erreichen *vollständige Analogie mit diesen, wenn wir uns die Doppelpyramide in ihre Grundfläche zusammengedrückt denken*, und das entstehende *doppelt bedeckte reguläre n-Eck* (Sechseck) betrachten, dessen beide Seitenflächen durch die Verbindungslinien ihres Mittelpunktes mit den Ecken und Mitten der Kanten in je $2n$ Dreiecke geteilt sind (vgl. Abb. 45). *Ich habe dieses Gebilde immer gern als Diëder den fünf regulären Polyedern, mit denen man sich seit Plato beschäftigt, angereiht.* Es erfüllt nämlich alle Bedingungen, durch die man ein reguläres Polyeder gewöhnlich definiert, indem es kongruente reguläre Polygone (die beiden Seiten des n-Ecks) zu Flächen hat, ferner lauter kongruente Kanten (die Kanten des n-Ecks) und lauter kongruente Ecken (seine Ecken) besitzt — der einzige Unterschied ist, daß es keinen eigentlichen Körper begrenzt, sondern den Rauminhalt 0 umschließt. So ist also der Platonische Satz, daß es nur fünf reguläre Polyeder gibt, nur dann richtig, wenn man die im Beweise natürlich stets stillschweigend benutzte Forderung eines *eigentlichen* Körpers auch in die Definition aufnimmt.

Vom Dieder ausgehend erhält man offenbar unsere Kugelteilung, indem man außer seinen Ecken auch die Mittelpunkte seiner Kanten und Seitenflächen auf die Kugel projiziert, wobei zu beachten ist, daß die Projektionsstrahlen auf der Dieder-Ebene senkrecht stehen müssen. *So kann das Dieder gleichfalls als Repräsentant der durch unsere Gleichung gegebenen Funktionsbeziehung zwischen w und z angesehen* werden und daher der kurze, schon anfangs gebrauchte Name „Diëdergleichung".

Im Anschluß hieran behandeln wir nun die Gleichungen, die — wie bereits angedeutet — in engster Beziehung zu den platonischen regulären Körpern stehen:

3. Die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergleichung.

Wir werden sehen, daß wir die beiden letzten mit dem gleichen Rechte auch als *Würfel- und Dodekaedergleichung* bezeichnen könnten, so daß in der Tat alle fünf Körper untergebracht sind. Wir wollen hier den umgekehrten Weg einschlagen wie im vorigen Beispiele: *Wir leiten zuerst, von dem regulären Körper ausgehend, eine Gebietseinteilung der Kugel her und stellen alsdann die zugehörige algebraische Gleichung auf, die in jener Abbildung ihre geometrische Veranschaulichung findet.* Ich werde mich dabei aber vielfach auf Andeutungen beschränken müssen und verweise deshalb gleich zu Anfang auf mein Buch: „*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*"[1], in dem Sie die ganze umfangreiche Theorie mit ihren zahlreichen Beziehungen zu Nachbargebieten systematisch dargestellt finden.



Seitendreieck in natürlicher Größe. Tetraeder.
Abb. 46.

Ich will übrigens alle drei Fälle parallel behandeln und beginne mit der *Herleitung der Feldereinteilung der Kugel für das Tetraeder.*

1. *Das Tetraeder* (vgl. Abb. 46). Wir teilen jedes der vier gleichseitigen Seitendreiecke des Tetraeders durch die drei Höhen in *sechs Teildreiecke,* von denen je drei einander kongruent sind, während je zwei nicht kongruente spiegelbildlich symmetrisch sind. Wir erhalten so eine *Einteilung der ganzen Tetraederoberfläche in 24 Dreiecke, die sich in zwei Gruppen von je zwölf untereinander kongruenten Dreiecken gliedern,*

[1]) Leipzig 1884; weiterhin zitiert als „Ikosaeder".

derart, daß zwei Dreiecke verschiedener Gruppen spiegelbildlich symmetrisch sind; die eine Gruppe von Dreiecken mögen wir durch Schraffierung auszeichnen. Was die Ecken dieser 24 Dreiecke angeht, so können wir *drei Arten* unterscheiden, so daß jedes Dreieck je eine Ecke jeder Art hat:

a) *die vier Ecken des Ausgangstetraeders, an denen je drei schraffierte und drei nichtschraffierte Dreiecke zusammenstoßen;*

b) *die vier Mittelpunkte der Seitenflächen,* die wiederum ein reguläres Tetraeder (*das Gegentetraeder*) bilden; *an ihnen stoßen gleichfalls je drei Dreiecke jeder Art zusammen;*

c) *die sechs Halbierungspunkte der Kanten,* die ein *reguläres Oktaeder* bilden; *an ihnen stoßen je zwei Dreiecke jeder Art zusammen.*

Projizieren wir diese Dreiecksteilung vom Mittelpunkt des Tetraeders aus auf die umgeschriebene Kugel, so wird diese in $2 \cdot 12$ *von Bögen größter Kreise begrenzte Dreiecke* geteilt, *die wechselweise kongruent bzw. symmetrisch* sind. Um jede Ecke der Art a), b), c) liegen bezüglich 6, 6, 4 gleiche Winkel herum, und da die Summe der Winkel um einen Punkt herum auf der Kugeloberfläche 2π beträgt, *hat jedes unserer sphärischen Dreiecke den Winkel* $\frac{\pi}{3}$ *an einer Ecke a und b, sowie* $\frac{\pi}{2}$ *an einer Ecke c.*

Eine *charakteristische Eigenschaft dieser Kugelteilung* ist, *daß sie — ebenso wie das Tetraeder selbst — durch eine Anzahl von Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt in sich selbst übergeführt wird.* Sie können sich dies an einem Modelle des Tetraeders mit seiner Teilung, wie ich es Ihnen aus unsrer Sammlung hier vorführe, leicht im einzelnen klar machen; für den Vortrag mag es genügen, wenn ich die *Anzahl der möglichen Drehungen* abzähle (wobei die Ruhe als „*identische Drehung*") mitgerechnet wird. Fassen wir eine bestimmte Ecke des Ausgangstetraeders ins Auge, so können wir sie durch eine Drehung in jede Tetraederecke (auch in sich selbst) überführen, was vier Möglichkeiten ergibt; halten wir sie aber in einer dieser Lagen fest, so können wir das Tetraeder noch auf drei verschiedene Arten mit sich selbst zur Deckung bringen, indem wir nämlich um die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit jener festen Ecke als Achse durch einen Winkel von 0°, 120° oder 240° drehen. Das gibt *im ganzen* $4 \cdot 3 = 12$ *Drehungen,* die das Tetraeder oder die entsprechende Dreiecksteilung der umschriebenen Kugel in sich überführen. Durch diese Drehungen kann man ein einmal vorgegebenes schraffiertes (oder nichtschraffiertes) Dreieck in jedes andere schraffierte (bzw. nichtschraffierte) Dreieck überführen, und die einzelne Drehung ist bestimmt, wenn man auch dieses letztere gibt. — *Diese zwölf Drehungen bilden* offenbar das, was man *eine Gruppe* G_{12} von zwölf Operationen nennt, d. h. wenn man zwei von ihnen nacheinander vornimmt, resultiert wiederum eine der zwölf Drehungen.

Jede dieser zwölf Drehungen wird, wenn wir die Kugel als z-Kugel auffassen, durch eine *lineare Transformation* der z dargestellt, *und die so entstehenden zwölf linearen Transformationen werden die dem Tetraeder zugehörige Gleichung in sich überführen*. Ich bemerke zum Vergleich, daß man, wie Sie sich überzeugen mögen, die *$2n$ linearen Substitutionen der Diëdergleichung als Gesamtheit der Drehungen des Diëders in sich deuten kann*.

2. Wir wollen jetzt *das Oktaeder* (vgl. Abb. 47) ähnlich behandeln und können uns dabei etwas kürzer fassen. Wir teilen jedes der acht Seitendreiecke genau wie vorhin in *sechs Teildreiecke* und erhalten *eine Teilung der ganzen Oktaederoberfläche in 24 einander kongruente schraffierte und 24 wiederum untereinander kongruente, den ersteren aber spiegelbildlich symmetrische nicht schraffierte Dreiecke*. Wiederum können wir *drei Arten von Ecken* unterscheiden:

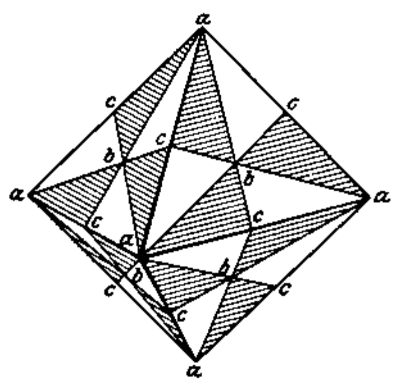


Abb. 47.

a) *die sechs Oktaederecken, an denen je vier Dreiecke jeder Art zusammenstoßen;*

b) *die acht Mittelpunkte der Seitenflächen*, die die *Ecken eines Würfels* bilden; *an ihnen stoßen je drei Dreiecke jeder Art zusammen;*

c) *die zwölf Mittelpunkte der Kanten, an denen je zwei Dreiecke jeder Art liegen.*

Gehen wir durch zentrale Projektion *auf die umschriebene Kugel* über, so erhalten wir eine *Einteilung in $2 \cdot 24$ kongruente bzw. symmetrische sphärische Dreiecke, deren jedes die Winkel $\frac{\pi}{4}$ an der Ecke a, $\frac{\pi}{3}$ an der Ecke b und $\frac{\pi}{2}$ an der Ecke c besitzt.* Da die Ecken b einen Würfel bilden, überzeugt man sich leicht, *daß man genau dieselbe Einteilung erhalten würde, wenn man von einem Würfel ausgegangen wäre und seine Ecken, Seiten- und Kantenmitten auf die Kugel projizierte;* wir brauchen also den Würfel in der Tat nicht besonders zu berücksichtigen.

Genau wie vorhin macht man sich nun klar, *daß das Oktaeder sowohl, wie diese Gebietseinteilung der Kugel, durch 24 Drehungen in sich übergeführt wird, die eine Gruppe G_{24} bilden;* jede einzelne Drehung ist wieder dadurch bestimmt, daß sie ein vorgegebenes schraffiertes Dreieck in ein bestimmtes anderes schraffiertes überführt.

3. Wir kommen endlich zum *Ikosaeder* (vgl. Abb. 48). Auch hier haben wir dieselbe Einteilung jedes der 20 Seitendreiecke zugrunde zu legen und erhalten *im ganzen 60 schraffierte und 60 nichtschraffierte Teildreiecke*. Die *drei Arten von Ecken* sind:

a) *die zwölf Ikosaederecken, an denen je fünf Dreiecke jeder Art liegen.*

b) *die zwanzig Seitenflächenmittelpunkte*, die die *Ecken eines regulären Pentagondodekaeders* bilden; *an ihnen liegen je drei Dreiecke jeder Art;*

c) *die dreißig Kantenmittelpunkte, wo je zwei Dreiecke jeder Art zusammenstoßen.*

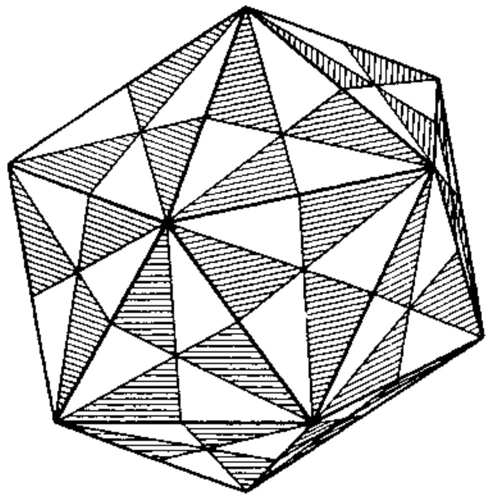


Abb. 48.

Auf die Kugel übertragen erhält daher jedes Dreieck an den Ecken a, b, c bzw. die Winkel $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Aus der Eigenschaft der Ecken b kann man wieder schließen, *daß dieselbe Kugeleinteilung aus dem regulären Dodekaeder hervorgehen würde.*

Endlich wird kas Ikosaeder und die zugehörige Kugelteilung durch eine Gruppe G_{60} von 60 Drehungen der Kugel um den Mittelpunkt in sich übergeführt. Auch diese Drehungen, wie die des Oktaeders, mögen Sie sich an einem Modelle recht klar machen.

Ich stelle noch einmal, meine Herren, *die Winkel der sphärischen Dreiecke* zusammen, die sich in den drei betrachteten Fällen ergeben haben, und füge auch das Dieder ($n \geqq 3$) hinzu:

$$\begin{array}{rlll} \text{Dieder:} & \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{n}, & \frac{\pi}{2}; \\[1ex] \text{Tetraeder:} & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{2}; \\[1ex] \text{Oktaeder:} & \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{2}; \\[1ex] \text{Ikosaeder:} & \frac{\pi}{5}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Der Naturwissenschaftler — ich variiere hier ein bekanntes Scherzwort von Kummer — würde danach sogleich schließen, daß es auch weiterhin Kugelteilungen analoger Eigenschaften mit Winkeln wie $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ gäbe. Der Mathematiker darf natürlich solche Analogieschlüsse nicht anwenden, und seine Vorsicht erweist sich hier als berechtigt, denn in der Tat *bricht die Reihe der möglichen Kugelteilungen* *unserer Art mit den aufgezählten ab.* Natürlich hängt diese Tatsache genau damit zusammen, *daß es keine weiteren regulären Polyeder gibt.* Wir können ihren letzten Grund in *einer Eigenschaft der ganzen Zahlen* angeben, die eine Reduktion auf einfachere Gründe nicht mehr gestattet. Es zeigt sich nämlich, daß die Winkel eines jeden unserer Dreiecke ganzzahlige Teile von π sein müssen, etwa $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{r}$, derart, daß die Nenner der Ungleichung:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} > 1$$

genügen. Diese Ungleichung hat nun die Eigenschaft, daß für sie nur die oben angegebenen ganzzahligen Lösungen existieren. Wir können sie übrigens leicht verstehen, denn sie drückt nur aus, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer ist als π.

Ich möchte hier übrigens noch erwähnen, wie gewiß manchen von Ihnen bekannt ist, daß eine *sinngemäße Verallgemeinerung* der Theorie über diesen scheinbar zu engen Rahmen hinausführt: *Die Theorie der automorphen Funktionen* zieht Einteilungen der Kugel in *unendlich viele Dreiecke* mit einer Winkelsumme kleiner als π bzw. auch gleich π in Betracht.

4. Fortsetzung: Aufstellung der Normalgleichungen.

Wir kommen jetzt zum zweiten Teil unserer Aufgabe, *diejenige Gleichung der Form:*

$$(1) \qquad \varphi(z) - w\,\psi(z) = 0 \qquad \text{oder:} \qquad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

aufzustellen, die zu einer bestimmten unserer drei Kugelteilungen gehört, die also die beiden Halbkugeln der w-Kugel auf die $2 \cdot 12$ bzw. $2 \cdot 24$ bzw. $2 \cdot 60$ Teildreiecke der z-Kugel abbildet. Jedem Werte w sollen mithin im allgemeinen 12 bzw. 24 bzw. 60 Werte z — je einer in einem Teildreieck der zugehörigen Art — entsprechen, und daher muß die gesuchte Gleichung in den drei Fällen die *Grade 12, 24, 60* haben, für die wir allgemein N schreiben wollen. Nun stößt jeder Teilbereich an drei merkwürdige Punkte; daher muß es in jedem Falle *drei Verzweigungsstellen auf der w-Kugel* geben. Diese legen wir, wie es üblich ist, nach $w = 0, 1, \infty$; als *Schnittkurve* $\mathfrak{C}$ durch diese drei Punkte, deren drei Segmente den Grenzlinien der z-Dreiecke entsprechen sollen, verwenden wir wieder den *Meridian der reellen Zahlen.*

Wir setzen ferner fest (vgl. Abb. 49), daß in jedem der drei Fälle *dem Punkte $w = 0$ die Mittelpunkte der Seitenflächen* (Ecken b in der früheren Bezeichnung), *dem Punkte $w = 1$ die Kantenhalbierungspunkte* (Ecken c) und *dem Punkte $w = \infty$ die Polyederecken* (Ecken a) *entsprechen.* Dann entsprechen die Dreiecksseiten in der durch die Linien der Abbildung angedeuteten Weise den drei Segmenten des w-Meridians, und die schraffierten Dreiecke entsprechen der hinteren, die nicht schraffierten der vorderen w-Halbkugel. Durch die Gleichung (1) soll also nun gemäß diesen Zuordnungen die z-Kugel auf eine über der w-Kugel ausgebreitete N-blättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten bei $0, 1, \infty$ eindeutig abgebildet werden.

Man könnte die Existenz dieser Gleichung aus allgemeinen funktionentheoretischen Theoremen leicht a priori deduzieren; ich will jedoch hier die Kenntnisse, welche dieser Beweisgang erfordert, nicht voraussetzen und ihm einen *mehr empirischen Aufbau* der einzelnen Gleichungen vorziehen. Ein solcher verschafft uns vielleicht auch eine lebhaftere Anschauung des Einzelfalles.

Wir denken uns die Gleichung (1) in homogenen Variablen geschrieben:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\Phi_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

wobei Φ_N, Ψ_N homogene Polygome von der Dimension N in z_1, z_2 sind ($N = 12, 24$ oder 60). Bei dieser Form der Gleichung erscheinen die Stellen $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ (d. i. $w = 0, \infty$) der w-Kugel gegenüber der dritten Verzweigungsstelle $w = 1$ (homogen: $w_1 - w_2 = 0$) bevorzugt. Da jedoch für unsere Betrachtung die drei Verzweigungsstellen stets gleichwertig sind, erweist es sich als zweckmäßig, auch die folgende Gestalt der Gleichung explizit zu berücksichtigen:

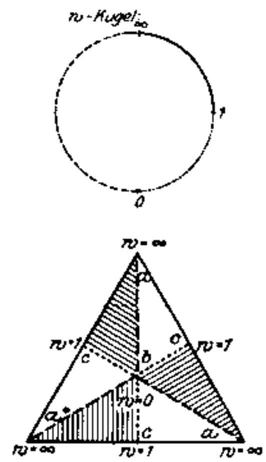


Abb. 49.

$$\frac{w_1 - w_2}{w_2} = \frac{X_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

wobei $X_N = \Phi_N - \Psi_N$ gleichfalls eine Form N^{ter} Dimension ist. Beide Gestalten fasse ich gern in die fortlaufende Proportion zusammen:

(2) $$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \Phi_N(z_1, z_2) : X_N(z_1, z_2) : \Psi_N(z_1, z_2).$$

Wir haben darin eine die drei Verzweigungspunkte durchaus gleichmäßig berücksichtigende, völlig homogene Schreibweise der Gleichung (1).

Unsere Aufgabe ist jetzt, *die Formen Φ_N, X_N, Ψ_N zu bilden*, und zu diesem Ende wollen wir sie sogleich in Beziehung zu unserer z-Kugelteilung setzen. Wir entnehmen aus Gleichung (2) sofort, daß für $w_1 = 0$ die Form $\Phi_N(z_1, z_2) = 0$ wird, d. h. *daß der Stelle $w = 0$ auf der z-Kugel die N Nullstellen von Φ_N entsprechen*. Andererseits sollen nach unseren Festsetzungen der Verzweigungsstelle $w = 0$ *die Mittelpunkte der Polyederflächen* (Ecken b der Teilung) entsprechen, deren es in jedem Falle $\frac{N}{3}$ gibt. In jedem von ihnen stoßen aber je drei, auf die einzelnen Halbkugeln einfach abgebildete, schraffierte und nicht schraffierte Dreiecke zusammen, so daß er als Wurzel unserer Gleichung *dreifach zu rechnen* ist. *Also liefern diese Punkte, jeder mit der Vielfachheit 3, die sämtlichen $w = 0$ entsprechenden Stellen und damit die sämtlichen Nullstellen von Φ_N;* Φ_N hat mithin lauter dreifache Nullstellen und muß infolgedessen die *dritte Potenz einer Form* $\varphi\ (z_1, z_2)$ des Grades $\frac{N}{3}$ sein:

$$\Phi_N = [\varphi_{N/3}(z_1, z_2)]^3.$$

Genau ebenso folgt nun weiterhin, daß der Stelle $w = 1$ bzw. $w_1 - w_2 = 0$ die Nullstellen von $X_N = 0$ entsprechen und, daß diese identisch sind mit den doppelt gezählten $\frac{N}{2}$ Kantenmittelpunkten des Polyeders (Ecken c unserer Teilung). Infolgedessen muß X_N ein volles Quadrat einer Form der Dimension $\frac{N}{2}$ sein:

$$X_N = [\chi_{N/2}(z_1, z_2)]^2.$$

Endlich sind dem Punkte $w = \infty$ die Nullstellen von Ψ_N zuzuordnen, und daher müssen diese mit den Ecken des Ausgangspolyeders (Ecken a der Teilung) identisch sein; an diesen aber stoßen in den einzelnen Fällen 3, 4 oder 5 Dreiecke zusammen, so daß wir erhalten:

$$\Psi_N = [\psi_{N/\nu}(z_1, z_2)]^\nu, \quad \text{wo:} \quad \nu = 3,\ 4 \text{ oder } 5.$$

Unsere Gleichung (2) *muß also notwendig die Form haben:*

$$(3) \qquad w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi\,(z_1, z_2)^3 : \chi\,(z_1, z_2)^2 : \psi\,(z_1, z_2)^\nu,$$

wobei die Gradzahlen und Exponenten von φ, χ, ψ *und die Werte des Grades* N *der Gleichung aus der folgenden kleinen Tabelle hervorgehen:*

Tetraeder:	φ_4^3,	χ_6^2,	ψ_4^3;	$N = 12$.
Oktaeder:	φ_8^3,	χ_{12}^2,	ψ_6^4;	$N = 24$.
Ikosaeder:	φ_{20}^3,	χ_{30}^2,	ψ_{12}^5;	$N = 60$.

Nun will ich noch kurz zeigen, *daß sich auch die früher behandelte Diëdergleichung diesem Schema* (3) *einreihen läßt.* Wir brauchen uns nur daran zu erinnern, daß wir damals auf der w-Kugel die drei Verzweigungsstellen nach -1, $+1$, ∞ statt, wie zuletzt, nach 0, $+1$, ∞ gelegt hatten. Wirkliche Analogie mit (3) werden wir daher erst erreichen, wenn wir die Diedergleichung in die Form:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 = \Phi : X : \Psi$$

zu setzen versuchen. Nun erhalten wir aber aus der früher benutzten Diëdergleichung (S. 124):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2 \cdot z_1^n z_2^n}$$

durch eine einfache Umrechnung:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 = (z_1^{2n} + z_2^{2n} + 2\,z_1^n z_2^n) : (z_1^{2n} + z_2^{2n} - 2\,z_1^n z_2^n) : (2\,z_1^n z_2^n)$$
$$= (z_1^n + z_2^n)^2 : (z_1^n - z_2^n)^2 : 2\,(z_1 z_2)^n.$$

Wir können also in der Tat der obigen Tabelle hinzufügen:

$$\text{Dieder:}\quad \varphi_n^2, \quad \chi_n^2, \quad \psi_2^n; \quad N = 2n.$$

Die aus dieser Form der Gleichung sofort abzulesenden merkwürdigen Punkte samt ihren Vielfachheiten stimmen mit den früher festgestellten (vgl. S. 125) überein.

Wir kommen nun dazu, *die Formen φ, χ, ψ in den drei neuen Fällen wirklich zu bilden. Ich will dabei nur auf das Oktaeder näher eingehen*, bei dem sich die Verhältnisse am einfachsten gestalten. Aber auch hier werde ich, um im Rahmen eines kurzen Überblickes zu bleiben, manches nur andeuten und in Resultaten mitteilen können; jedem, der mehr darüber erfahren will, ist ja eine ausführliche Darstellung in meinem Buche über das Ikosaeder leicht zugänglich. Wir denken uns der Einfachheit halber das Oktaeder so der z-Kugel eingeschrieben, *daß die sechs Ecken nach*

$$z = 0,\ \infty,\ +1,\ +i,\ -1,\ -i$$

fallen (vgl. Abb. 50). Dann lassen sich die *24 linearen Substitutionen* von z, welche die Drehungen des Oktaeders darstellen, d. h. die genannten sechs Punkte miteinander vertauschen, recht einfach angeben. Wir beginnen mit den vier Drehungen, bei denen die Ecken 0 und ∞ fest bleiben:

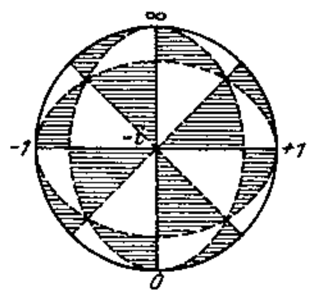


Abb. 50.

$$z' = i^k \cdot z \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{4a}$$

Weiter können wir, etwa durch die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ (d. i. eine Drehung von 180° um die horizontale Achse $(+1, -1)$, die jeden Oktaedereckpunkt wieder in einen solchen überführt) den Punkt 0 nach ∞ bringen. Wenden wir jetzt noch die vier Drehungen (4a) an, so erhalten wir die vier neuen Substitutionen:

$$z' = \frac{i^k}{z} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{4b}$$

Ebenso werfen wir nun der Reihe nach jeden der weiteren vier Eckpunkte $z = 1,\ i,\ -1,\ -i$ durch die Substitutionen $z' = \frac{z+1}{z-1}$, $\frac{z+i}{z-i}$, $\frac{z-1}{z+1}$, $\frac{z-i}{z+i}$, die ersichtlich gleichfalls die sechs Oktaederecken ineinander überführen, nach ∞ und erhalten, wenn wir wieder jedesmal die vier Drehungen (4a) hinzufügen, weitere $4 \cdot 4 = 16$ Substitutionen des Oktaeders:

$$\left\{\begin{aligned} z' &= i^k \frac{z+1}{z-1}, \qquad & z' &= i^k \frac{z-1}{z+1}, \\ z' &= i^k \frac{z+i}{z-i}, \qquad & z' &= i^k \frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}\right. \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{4c}$$

Damit haben wir die gesuchten 24 Substitutionen sämtlich gefunden, und man kann nun auch unmittelbar durch Rechnung bestätigen, ***daß sie wirklich die sechs Oktaederecken in sich überführen und daß sie außerdem eine Gruppe G_{24} bilden***, d. h. daß die Aufeinanderfolge zweier beliebiger von ihnen wieder eine der Substitutionen (4) ergibt.

Ich will nun *zunächst die Form* ψ_6 bilden, die in den sechs Oktaederecken einfach verschwindet: der Punkt $z = 0$ gibt den Faktor z_1, der Punkt $z = \infty$ den Faktor z_2; an den vier Punkten ± 1 und $\pm i$ hat die Form $z_1^4 - z_2^4$ eine einfache Nullstelle, so daß wir schließlich erhalten:

$$\psi_6 = z_1 \cdot z_2 (z_1^4 - z_2^4) \,. \tag{5a}$$

Schwieriger ist die Bildung der Formen φ_8 und χ_{12}, welche die Mitten der Seitenflächen bzw. die Kantenhalbierungspunkte zu einfachen Nullstellen haben; ich gebe sie hier ohne Ableitung an[1]):

$$\begin{cases} \varphi_8 = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8 \,, \\ \chi_{12} = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} \,. \end{cases} \tag{5b}$$

Übrigens bleibt selbstverständlich in allen diesen drei Formen ein konstanter Multiplikator unbestimmt. Bedeuten φ_8, ψ_6, χ_{12} die Formen in der Normierung (5), so müssen wir daher in die Oktaedergleichung (3) noch unbestimmte Konstante c_1, c_2 hineinnehmen und sie schreiben:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8^3 : c_1 \chi_{12}^2 : c_2 \psi_6^4 \,.$$

Die Konstanten c sind noch so zu bestimmen, daß diese zwei Gleichungen tatsächlich nur *eine* Gleichung zwischen z und w darstellen. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn:

$$\varphi_8^3 - c_2 \psi_6^4 = c_1 \chi_{12}^2$$

identisch in z_1, z_2 gilt. Nun läßt sich diese Relation in der Tat durch bestimmte Konstante c_1, c_2 erfüllen. Es besteht nämlich, wie man durch Ausrechnen bestätigen kann, die Identität:

$$\varphi_8^3 - 108 \psi_6^4 = \chi_{12}^2 \,,$$

so daß die Oktaedergleichung (3) lautet:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8^3 : \chi_{12}^2 : 108 \psi_6^4 \,. \tag{6}$$

Diese Gleichung bildet gewiß *die Punkte $w = 0, 1, \infty$ bezüglich auf die Seitenmitten, Kantenmitten, Ecken des Oktaeders mit der richtigen Vielfachheit ab*, da ja die Formen φ, χ, ψ dementsprechend gestaltet sind; ferner wird sie durch die 24 Oktaedersubstitutionen (4) in sich übergeführt; denn diese transformieren die Nullstellen jeder der Formen φ, χ, ψ in sich und ändern die Formen mithin nur je um einen multiplikativen Faktor. Die Rechnung ergibt, daß diese Faktoren sich bei der Quotientenbildung gerade wegheben.

---

[1]) Vgl. Ikosaeder, S. 54.

Zu zeigen bleibt nur noch, daß die Gleichung (6) wirklich *jedes schraffierte oder nicht schraffierte Dreieck der z-Kugel konform auf die hintere oder vordere w-Halbkugel* abbildet. Wir wissen bereits, daß den drei Ecken eines jeden Dreiecks die Punkte $0, 1, \infty$ des reellen w-Meridians entsprechen; ferner aber hat die Gleichung für jeden Wert von w 24 Wurzeln z. Da diese sich auf 24 gleichartige Dreiecke verteilen müssen, kann w innerhalb eines Dreiecks einen und denselben Wert höchstens einmal annehmen. Würden wir nun noch zeigen können, *daß w längs der drei Dreiecksseiten überhaupt reell bleibt*, so könnten wir leicht weiter schließen, daß jede Seite auf ein Segment des reellen w-Meridians eineindeutig abgebildet wird, und *daß außerdem das ganze Dreiecksinnere konform ohne Umlegung der Winkel und eineindeutig auf die zugehörige Halbkugel bezogen ist*. Sie werden sich diese Schlußkette, bei der die Stetigkeit und analytische Charakter der abbildenden Funktion $w(z)$ benutzt wird, selbst ausführen können. Ich will hier nur auf den einzigen bemerkenswerten Schritt des Beweises, den Nachweis der Realität von w auf den Dreieckseiten, eingehen.

Es ist bequemer, die Behauptung sogleich in der Form zu beweisen, *daß w auf allen, die Oktaederteilung hervorrufenden größten Kreisen reell ist*. Das sind nun erstens die drei aufeinander senkrechten Kreise durch je vier der sechs Oktaederecken, die den Oktaederkanten entsprechen (*Hauptkreise;* in der Abb. 50, S. 137 ausgezogen), und ferner die sechs den Höhen der Seitendreiecke entsprechenden Kreise, die die Winkel der Hauptkreise halbieren (*Nebenkreise;* in der Abbildung gestrichelt). Durch die Oktaedersubstitutionen läßt sich jeder Hauptkreis in jeden andern und ebenso jeder Nebenkreis in jeden andern überführen; es genügt also, zu zeigen, *daß die Funktion w auf einem Hauptkreise und einem Nebenkreise durchweg reell ist*, da sie auf den andern dann genau dieselben Werte annehmen muß. — Nun befindet sich unter den Hauptkreisen der Meridian der reellen Zahlen z, und auf diesem ist selbstverständlich der aus (6) zu entnehmende Wert:

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\varphi_8^3}{108\,\psi_6^4}$$

reell, da φ und ψ reelle Polynome in z_1 und z_2 sind. Von den Nebenkreisen bevorzugen wir den einen durch 0 und ∞ gehenden, der mit dem reellen Meridian den Winkel 45° bildet und auf dem also z die Werte $z = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot r$ annimmt, wobei r reell ist uud von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; auf ihm ist jedenfalls $z^4 = e^{i\pi} \cdot r^4 = -r^4$ reell, und da nach (5) in φ_8 selbst und in die vierte Potenz von ψ_6 nur die vierten Potenzen von z_1 und z_2 eingehen, so ist nach der zuletzt benutzten Formel wiederum w reell.

Wir stehen damit am Ende unseres Beweisganges: *Die Gleichung* (6) *bildet in der Tat die Halbebenen der w-Kugel bzw. einer über ihr ausge-*

breiteten Riemannschen Fläche konform auf die zum Oktaeder gehörige Dreiecksteilung der z-Kugel ab, und wir beherrschen daher umgekehrt die durch diese Gleichung gegebene Abhängigkeit zwischen z und w geometrisch so vollkommen wie in den früheren Beispielen.

Die *Behandlung des Tetraeders und Ikosaeders* geht nach genau dem gleichen Gedankengange vor sich; ich gebe hier nur die *Resultate* an, die sich wiederum bei möglichst einfacher Lage der Teilung auf der z-Kugel ergeben. Man erhält als *Tetraedergleichung*[1]):

$$\begin{aligned} w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = & \left\{z_1^4 - 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4\right\}^3 \\ & : -12\sqrt{-3}\left\{z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)\right\}^2 \\ & : \left\{z_1^4 + 2\sqrt{-3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4\right\}^3 \end{aligned}$$

und als *Ikosaedergleichung*[2]):

$$\begin{aligned} w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = & \left\{-(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228\,(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494\, z_1^{10} z_2^{10}\right\}^3 \\ & : -\left\{(z_1^{30} + z_2^{30}) + 522\,(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005\,(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})\right\}^2 \\ & : 1728\left\{z_1 z_2 (z_1^{10} + 11\, z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})\right\}^5, \end{aligned}$$

d. h. diese Gleichungen bilden die w-Halbkugeln auf die schraffierten und nicht schraffierten Dreiecke der zum Tetraeder bzw. Ikosaeder gehörigen Einteilung der z-Kugel konform ab.

5. Über die Auflösung der Normalgleichungen.

Wir wollen nun noch etwas von den *gemeinsamen Eigenschaften der Gleichungen* sprechen, die wir bisher als Beispiele der vorab entwickelten allgemeinen Theorie diskutiert hatten und die wir unter dem Namen *Normalgleichungen* zusammenfassen wollen. Natürlich kann ich auch hier die Sachlage immer nur an den einfachsten Fällen auseinandersetzen. Für alles Weitergehende verweise ich auf mein Ikosaederbuch.

Zunächst bemerke ich, daß die *äußerst einfache Natur aller unserer Normalgleichungen* darin begründet ist, daß sie *genau so viele lineare Substitutionen in sich besitzen, als ihr Grad beträgt,* d. h. daß *alle ihre Wurzeln lineare Funktionen einer einzigen von ihnen sind und daß wir ferner in den Kugelteilungen ein äußerst anschauliches geometrisches Bild aller in Betracht kommenden Verhältnisse haben.* Wie einfach sich dadurch vieles, was sonst bei Gleichungen so hohen Grades äußerst verwickelt liegt, gestaltet, will ich hier an einer bestimmten, von der Ikosaedergleichung ausgehenden Fragestellung zeigen.

Es sei ein *reeller Wert* w_0 gegeben, etwa auf dem Segment $(1, \infty)$ des reellen w-Meridians (vgl. Abb. 51); *wir fragen nach den 60 Wurzeln z der Ikosaedergleichung für* $w = w_0$. Unsere Theorie der Abbildung

[1]) Vgl. Ikosaeder, S. 51, 60. [2]) l. c. S. 56, 60.

ergibt sofort, daß *je eine von ihnen auf einer der 60 zum Ikosaeder gehörigen* (in der Abb. 49 von S. 135 ausgezogenen) *Dreiecksseiten der z-Kugelteilung* liegen muß. Damit ist bereits das erledigt, was man in der Gleichungstheorie *Separation der Wurzeln* nennt, meist eine sehr mühevolle Arbeit, die der numerischen Berechnung der Wurzeln vorangehen muß: *die Aufgabe nämlich, getrennte Intervalle anzugeben, in denen sicher immer nur eine Wurzel liegt.* — Wir können aber auch sofort angeben, *wieviel der Wurzeln reell sind.* Berücksichtigen wir nämlich, daß bei der oben angegebenen Form der Ikosaedergleichung das Ikosaeder so in die z-Kugel gelegt gedacht ist[1]), *daß der reelle Meridian über je vier Ecken jeder Art a, b, c läuft,* so zeigt sich (vgl. Abb. 48, S. 133 und Abb. 49, S. 135), daß vier ausgezogene Dreiecksseiten in den reellen Meridian fallen, *so daß es gerade vier reelle Wurzeln gibt.* Dasselbe gilt, wenn w in eines der andern beiden Segmente des reellen w-Meridians fällt, *so daß überhaupt für jedes reelle von* 0, 1, ∞ *verschiedene* w *die Ikosaedergleichung vier reelle und 56 imaginäre Wurzeln hat; für* $w = 0, 1, \infty$ *sind gleichfalls vier verschiedene reelle, aber mehrfach zählende Wurzeln vorhanden.*

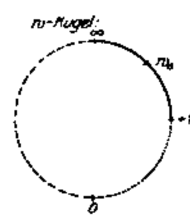


Abb. 51.

Ich will jetzt *einiges über die wirkliche numerische Berechnung der Wurzeln unserer Normalgleichungen* sagen. Vor allem kommt uns da wieder zugute, daß wir *immer nur eine Wurzel der Gleichung zu berechnen* brauchen, während die andern durch die linearen Substitutionen folgen. Übrigens mache ich darauf aufmerksam, *daß die numerische Berechnung einer Wurzel eigentlich ein Problem der Analysis, nicht der Algebra ist,* da sie notwendig die Anwendung unendlicher Prozesse erheischt, wenn man die im allgemeinen irrationalen Wurzelwerte mit beliebiger Annäherung darstellen will.

Ausführlicheres will ich hier nur über *das allereinfachste Beispiel,* die *reine Gleichung:*

$$w = z^n$$

sagen, wobei ich wieder *in unmittelbare Berührung mit der Schulmathematik* komme; denn auch da wird diese Frage — die *Berechnung von* $\sqrt[n]{w}$ — wenigstens für die ersten Werte von n und für positive reelle Werte $w = r$ behandelt. Die Methode zur Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzel, wie sie Ihnen allen von der Schule her geläufig ist, beruht im Grunde auf folgendem: Man untersucht, welchen Platz in der Reihe der Quadrate bzw. Kuben der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... der Radikand $w = r$ hat, macht dann im Anschluß an die dezimale Schreibweise dieselbe Probe mit den Zehnteln des betreffenden Intervalles, dann mit den Hunderteln und fährt so fort. Dabei kann man natürlich eine beliebige Genauigkeit erreichen.

[1]) Vgl. Ikosaeder, S. 55.

Wir wollen *hier ein rationelleres Verfahren* anwenden, bei dem wir außer beliebigem ganzzahligen n auch *beliebige komplexe Werte von* w zulassen. Da wir nur *eine* Lösung der Gleichung zu bestimmen brauchen, wollen wir insbesondere den Wert $z = \sqrt[n]{w}$ aufsuchen, der *innerhalb des an die reelle Achse angetragenen Winkelraumes* $\frac{2\pi}{n}$ liegt. Wir beginnen — zunächst in Verallgemeinerung der vorhin angedeuteten elementaren Methode — damit, daß wir diesen Winkelraum in etwa ν gleiche Teile teilen (in der Abb. 52 $\nu = 5$) und die Teilungsgeraden mit den Kreisen schneiden, die den Nullpunkt zum Zentrum haben und deren Radien durch ganze Zahlen $r = 1, 2, 3 \ldots$ gemessen werden. So werden bei einmal fest gewähltem ν innerhalb des Winkelraumes alle Punkte:

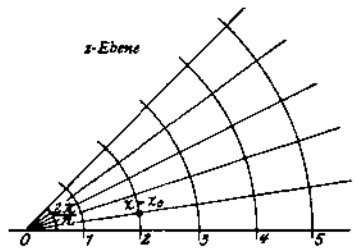


Abb. 52.

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{k}{\nu}} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1 \\ r = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

markiert, zu denen wir die entsprechenden w-Werte:

$$w = z^n = r^n \cdot e^{2i\pi \frac{k}{\nu}}$$

sofort in die w-Ebene eintragen können. Sie bilden dort (vgl. Abb. 53) die Ecken eines entsprechenden, aber die *ganze* w-Ebene bedeckenden Netzes, das aus den Kreisen mit den Radien $1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ sowie den gegen die reelle Achse um $0, \frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu}, \ldots, \frac{(\nu-1)2\pi}{\nu}$ geneigten Strahlen besteht. Der gegebene Wert w muß nun im Innern oder auf der Kontur irgendeiner Masche dieses Netzes liegen; es sei w_0 die ihm zunächst liegende Ecke dieser Masche. Einen Wert z_0 von $\sqrt[n]{w_0}$ kennen wir als eine Ecke des Ausgangsnetzes in der z-Ebene; dann ist der gesuchte Wurzelwert:

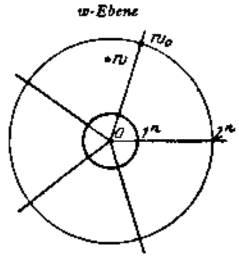


Abb. 53.

$$Z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{w_0 + (w - w_0)} = \sqrt[n]{w_0}\sqrt[n]{1 + \frac{w - w_0}{w_0}} = z_0\left(1 + \frac{w - w_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Die rechte Seite entwickeln wir nun nach dem *binomischen Satze*, den wir ruhig als bekannt ansehen dürfen, da wir uns ja ohnehin im Grunde im Gebiet der Analysis befinden:

$$Z = z_0\left\{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{w - w_0}{w_0} + \frac{1 - n}{2n^2}\left(\frac{w - w_0}{w_0}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Über die Konvergenz dieser Reihe können wir sofort entscheiden, wenn wir sie als *Taylorsche Entwicklung der analytischen Funktion* $\sqrt[n]{w}$ betrachten und den Satz anwenden, daß diese innerhalb des Kreises konvergiert, der w_0 als Mittelpunkt hat und durch den nächsten singulären Punkt geht. Da $\sqrt[n]{w}$ nur 0 und ∞ zu singulären Punkten hat, *ist also unsere Entwicklung dann und nur dann konvergent, wenn w innerhalb des durch den Nullpunkt gehenden Kreises um w_0 liegt,* und das können wir jedenfalls erreichen, indem wir unter Umständen in der z-Ebene von einem gleichartigen Netze mit engeren Maschen ausgehen. *Damit aber die Konvergenz auch wirklich gut, d. h. die Reihe zur numerischen Berechnung brauchbar sei, muß noch obendrein* $\frac{w - w_0}{w_0}$ *klein genug sein,* Das kann man durch weitere Verengerung des Netzes gewiß bewirken. — Dieses Verfahren empfiehlt sich in der Tat sehr zur wirklichen Ausführung der numerischen Wurzelberechnung.

Nun ist das Bemerkenswerte, daß sich die numerische Auflösung der übrigen Normalgleichungen der regulären Körper durchaus nicht wesentlich schwieriger gestaltet, wie ich freilich hier nur als Tatsache berichten will. Wendet man nämlich das soeben auseinandergesetzte Verfahren auf unsere Normalgleichungen an, indem man von der Abbildung zweier benachbarter Dreiecke auf die w-Kugel ausgeht, so treten an Stelle der binomischen Reihe andere Reihen auf, die jedoch in der Analysis gleichfalls wohlbekannt und dem praktischen Gebrauche leicht zugänglich sind: *die hypergeometrischen Reihen.* Ich habe im Jahre 1877 in einer Arbeit in Bd. XII der mathematischen Annalen („*Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder*") die hier in Betracht kommenden Reihen numerisch aufgestellt[1]).

6. Uniformisierung der Normalirrationalitäten durch transzendente Funktionen.

Ich will nun noch auf *eine andere Methode zur Lösung unserer Normalgleichungen* eingehen, die durch das *systematische Hineinziehen transzendenter Funktionen* gekennzeichnet ist. Man versucht nämlich, statt in jedem Einzelfalle mit Reihenentwicklungen in der Umgebung einer bekannten Lösung vorzugehen, *sämtliche der Gleichung genügende Wertepaare w, z ein für allemal als eindeutige analytische Funktionen einer Hilfsveränderlichen darzustellen, oder — wie man sagt — die durch die Gleichung definierten Irrationalitäten zu uniformisieren.* Gelingt es nun, dabei Funktionen zu verwenden, die man leicht tabellieren kann, oder von denen man gar schon numerische Tafeln besitzt, so kann man die *numerische Lösung der Gleichung ohne neue Rechenarbeit* erhalten. Ich gehe auf dieses Eingreifen der transzendenten Funktionen um so lieber

[[1]) Vgl. auch Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen II, S. 331 ff.]

ein, als es in einigen Fällen in den *Schulunterricht* hineinspielt und dort häufig noch einen unklaren, fast mysteriösen Anstrich behält; der Grund dafür liegt darin, daß man noch immer an altüberlieferten, unvollkommenen Auffassungen auch da haftet, wo die moderne Funktionentheorie komplexer Variabler längst Klarheit geschaffen hat.

Ich will diese allgemeinen Andeutungen zunächst an der *reinen Gleichung* näher ausführen. *Schon auf der Schule berechnet man die positive Lösung von $z^n = r$ für positives reelles r stets logarithmisch,* indem man sie in der Gestalt $z = e^{\frac{\log r}{n}}$ schreibt, dabei unter $\log r$ den positiven Hauptwert verstehend; die Logarithmentafel ergibt zuerst $\log r$, dann in umgekehrter Richtung z als „Numerus" zu $\frac{\log r}{n}$. Übrigens benutzt man statt e gewöhnlich 10 als Basis. Diese Lösung läßt sich sofort auch auf komplexe Werte übertragen. Man befriedigt die Gleichung:

$$z^n = w,$$

indem man x gleich dem allgemeinen komplexen Logarithmus $\log w$ setzt, und dann tatsächlich w und z als eindeutige analytische Funktionen von x erhält:

$$w = e^x, \qquad z = e^{\frac{x}{n}}.$$

Hierbei kommen in Anbetracht der Vieldeutigkeit von $x = \log w$ — wir werden später noch genauer von dieser Funktion zu reden haben — für dasselbe w in der Tat genau n Werte z heraus. *x nennt man die uniformisierende Variable.*

Nun enthalten unsere Tafeln aber nur die *reellen Logarithmen reeller Zahlen,* so daß die angegebene Lösung scheinbar sich nicht unmittelbar numerisch verwerten läßt. Man kann aber mit Hilfe einiger einfacher Eigenschaften des Logarithmus *die Berechnung auf die Benutzung der jedem zugänglichen trigonometrischen Tafeln reduzieren.* Setzt man nämlich:

$$w = u + iv = \left|\sqrt{u^2+v^2}\right| \left(\frac{u}{\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} + i\,\frac{v}{\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|}\right),$$

so hat der erste Faktor als positive reelle Zahl einen reellen, der zweite als Größe vom absoluten Betrage 1 einen *rein imaginären Logarithmus* $i\varphi$ (d. h. der zweite Faktor ist gleich $e^{i\varphi}$), und zwar ergibt sich φ aus:

$$\text{(a)} \qquad \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \sin\varphi.$$

Wir erhalten $x = \log w = \log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right| + i\varphi$, und daher wird die Wurzel der Gleichung:

$$z = e^{\frac{x}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} \cdot e^{\frac{1}{n}i\varphi},$$

d. h. es ist:

$$\text{(b)} \qquad z = \sqrt[n]{u+iv} = e^{\frac{1}{n}\log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Da φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, liefert diese Formel auch sämtliche n Wurzelwerte. Man kann jetzt mit Hilfe der gewöhnlichen logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zunächst φ aus (a) und sodann nach (b) das z bestimmen. Wir haben diese *„trigonometrische Lösung"* hier *auf ganz natürlichem Wege von den Logarithmen komplexer Zahlen aus* erhalten; steht man aber auf dem Standpunkte, daß man diese nicht kennt, und will doch diese trigonometrische Lösung ableiten — auf der Schule schlägt man diesen Weg ein —, so muß sie als etwas durchaus Fremdartiges und Unverständliches erscheinen.

Nun ergibt sich besonders an einer Stelle des Schulunterrichts die Notwendigkeit, Wurzeln aus nicht reellen Zahlen zu ziehen, und zwar bei der sogenannten *Cardanischen Lösung der Gleichung dritten Grades;* darüber schalte ich hier einige Bemerkungen ein. Ist die kubische Gleichung in der reduzierten Form vorgelegt:

$$x^3 + px - q = 0, \tag{1}$$

so sagt die Formel des Cardanus bekanntlich aus, daß ihre drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 in folgendem Ausdruck enthalten sind:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,. \tag{2}$$

Da jede Kubikwurzel dreiwertig ist, hat dieser Ausdruck an sich neun im allgemeinen verschiedene Werte; darunter sind x_1, x_2, x_3 dadurch bestimmt, *daß das Produkt der beiden in ihnen verwendeten Kubikwurzeln* $-\frac{p}{3}$ *ist.* Ersetzt man die Gleichungskoeffizienten p, q in bekannter Weise durch ihre Ausdrücke als symmetrische Funktionen von x_1, x_2, x_3 und berücksichtigt, daß der Koeffizient von x^2 verschwindet, d. h. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist, so erhält man:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2}{108},$$

d. h. der Radikand der Quadratwurzel ist bis auf einen negativen Faktor gleich der Diskriminante der Gleichung. Hieraus ergibt sich sofort, daß er *negativ ist, wenn alle drei Wurzeln reell sind, positiv jedoch, wenn eine Wurzel reell und die beiden andern konjugiert komplex sind.* Gerade in dem anscheinend einfachsten Falle einer kubischen Gleichung mit durchweg reellen Wurzeln verlangt die Cardanische Formel mithin das Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl und sodann einer Kubikwurzel aus einer komplexen Größe.

Dieser Durchgang durch das Komplexe mußte den alten Algebristen zu einer Zeit, wo man noch weit von einer Theorie der komplexen Zahlen entfernt war — 250 Jahre bevor Gauß die Deutung in der Zahlenebene lehrte! — als etwas ganz Unmögliches erscheinen.

Man sprach vom „*Casus irreducibilis*" der kubischen Gleichung und sagte, daß hier eben die Cardanische Formel keine vernünftige brauchbare Lösung mehr gebe. Als man später entdeckte, daß man *gerade in diesem Falle die kubische Gleichung in einen einfachen Zusammenhang mit der Winkeldreiteilung bringen könne* und so als Ersatz für die „versagende" Cardanische Formel eine ganz im Reellen verlaufende „*trigonometrische Lösung*" erhielt, da glaubte man etwas ganz Neues, gar nicht mit der alten Formel Zusammenhängendes gefunden zu haben. Auf diesem Standpunkte steht leider heute noch mitunter der elementare Unterricht!

Demgegenüber möchte ich hier nachdrücklich betonen, *daß diese trigonometrische Lösung nichts ist als die Anwendung des vorhin auseinandergesetzten allgemeinen algorithmischen Verfahrens zur Berechnung der Wurzeln aus komplexen Radikanden.* Sie ergibt sich daher in naturgemäßester Weise, wenn man die Cardanische Formel bei komplexem Radikanden der Kubikwurzel zur numerischen Rechnung ebenso bequem umformt, wie man es bei reellen Radikanden auch auf der Schule stets tut. Im einzelnen gestaltet sich das so: Wir nehmen an:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

wozu bei reellem q insbesondere $p < 0$ nötig ist. Schreiben wir dann die erste in (2) eingehende Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|},$$

so bemerken wir, daß ihr absoluter Betrag $\left(\text{als positive Kubikwurzel aus dem Betrage } \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \text{ des Radikanden}\right)$ gleich $\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right|$ ist; da aber ihr Produkt mit der zweiten Kubikwurzel gerade gleich $-\frac{p}{3}$ sein soll, so muß *diese ihr konjugiert komplexer Wert* sein, und beider Summe — die Lösung der kubischen Gleichung — ist daher einfach gleich ihrem doppelten reellen Teil:

$$x_1, x_2, x_3 = 2\Re\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|}\right).$$

Nun wenden wir genau das allgemeine Verfahren von S. 144 an. Wir schreiben den Radikanden der Kubikwurzel unter Abtrennung des absoluten Betrages:

$$\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right| \left\{ \frac{\frac{q}{2}}{\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|} + i\,\frac{\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|}{\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|} \right\}$$

und bestimmen einen Winkel φ aus den Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right|}{\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|};$$

dann wird die Kubikwurzel, da die positive dritte Wurzel aus $\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|$ gleich $\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right|$ ist:

$$\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right| \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

und wir erhalten daher, wenn wir noch berücksichtigen, daß φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist:

$$x_k = 2\left|\sqrt{-\frac{p}{3}}\right| \cdot \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Das ist aber die übliche Form der trigonometrischen Lösung.

Gestatten Sie bei dieser Gelegenheit noch eine Bemerkung über den Ausdruck „*Casus irreducibilis*". Hier ist „irreduzibel" in ganz anderem Sinne gebraucht, als es heute üblich ist und als wir es in dieser Vorlesung schon öfters gebraucht haben; es soll besagen, daß die Lösung der kubischen Gleichung nicht auf Kubikwurzeln *reeller* Zahlen zurückführbar ist. Mit der modernen Bedeutung des Wortes hat das nicht das mindeste zu tun. Sie sehen, wie gerade auf diesem Gebiete durch die unglückselige Bezeichnung sowohl wie durch die allgemeine Furcht vor den komplexen Zahlen für eine Menge von Mißverständnissen zum mindesten die Möglichkeit geschaffen wird. Mögen meine Worte dazu beitragen, diese wenigstens in Ihren Kreisen zu verhüten!

Unterrichten wir uns nun noch in aller Kürze darüber, *wie sich die Uniformisierung durch transzendente Funktionen bei den übrigen Normalirratonalitäten gestaltet.* Zunächst die Diëdergleichung:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Hier haben wir einfach zu setzen:

$$w = \cos\varphi,$$

damit die Gleichung — wie sich sofort aus der Moivreschen Formel ergibt — identisch befriedigt wird durch:

$$z = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Da alle Werte $\varphi + 2k\pi$ und $2k\pi - \varphi$ denselben Wert w ergeben, liefert diese Formel zu jedem w in der Tat $2n$ Wurzeln z, die wir auch schreiben können:

$$z = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) .$$

Bei den Gleichungen des Oktaeders, Tetraeders, Ikosaeders endlich reicht man mit diesen „elementaren" transzendenten Funktionen nicht mehr aus, wohl aber *läßt sich eine entsprechende Lösung durch elliptische Modulfunktionen geben.* Obgleich man diese Lösung nicht mehr zur elementaren Mathematik rechnen kann, will ich doch wenigstens die sich auf das *Ikosaeder* beziehenden Formeln angeben[1]). Sie stehen nämlich *in engster Beziehung zu der Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch elliptische Funktionen*, von der in den Lehrbüchern immer andeutungsweise die Rede ist und über die ich späterhin noch einige aufklärende Worte sagen will. Die Ikosaedergleichung hatte die Form (vgl. S. 136 und 140):

$$w = \frac{\varphi_{20}(z)^3}{\psi_{12}(z)^5} .$$

Wir identifizieren nun w mit der *absoluten Invariante J aus der Theorie der elliptischen Funktionen* und fassen diese *als Funktion des Periodenquotienten* $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ $\left(\text{in Jacobischer Bezeichnung } \frac{iK'}{K}\right)$ auf, d. h. wir setzen:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} ,$$

wobei g_2 und Δ gewisse, eine große Rolle spielende, transzendente Formen $(-4)^{\text{ter}}$ bzw. $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension in ω_1 und ω_2 sind. Führen wir noch die allgemein benutzte Abkürzung Jacobis:

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

ein, so werden die Wurzeln z der Ikosaedergleichung durch folgenden Quotienten von ϑ-Funktionen dargestellt:

$$z = -q^{\frac{2}{5}} \frac{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}{\vartheta_1(\pi\omega, q^5)} .$$

Berücksichtigt man die Unendlichvieldeutigkeit der aus der ersten Gleichung sich ergebenden Funktionen $\omega(w)$, so zeigt sich, daß diese Formel zu ein und demselben w in der Tat gerade alle 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung liefert.

7. Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen.

Eine Frage in der Theorie der Normalgleichungen habe ich bisher noch nicht berührt. *Bringen unsere Normalgleichungen denn überhaupt algebraisch etwas wesentlich Neues, und lassen sie sich nicht aufeinander*

[[1]) Vgl. Math. Annalen Bd. XIV, S. 111 ff. 1878/79 oder Klein, F.: Gesammelte Abhandlungen Bd. III, S. 13 ff. 1923; außerdem Ikosaeder, S. 131.]

oder insbesondere auf eine Folge reiner Gleichungen zurückführen? Mit anderen Worten: *Kann man die Lösung z der Gleichungen aus w etwa durch eine endliche Anzahl übereinander gestellter Wurzelzeichen aufbauen?*

Was nun zunächst die *Gleichungen des Dieders, Tetraeders, Oktaeders* anlangt, so läßt die algebraische Theorie in der Tat leicht erkennen, *daß man sie auf reine Gleichungen reduzieren kann.* Es mag genügen, wenn ich das hier nur für die *Diedergleichung* ausführe:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Setzt man nämlich:

$$z^n = \zeta,$$

so geht die Gleichung über in:

$$\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0;$$

hieraus folgt:

$$\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1},$$

und daher:

$$z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2 - 1}},$$

womit die gewünschte Lösung durch Wurzelzeichen gelungen ist.

Demgegenüber ist für die Ikosaedergleichung eine solche Auflösung durch Wurzelzeichen nicht möglich, so daß durch sie also eine wesentlich neue algebraische Funktion definiert wird. Ich will Ihnen dafür einen *besonders anschaulichen Beweis* vortragen, den ich neuerdings in Bd. 61 (1905) der Mathem. Annalen angegeben habe[1]) und der auf der Betrachtung des uns ja wohlbekannten funktionentheoretischen Aufbaues der Ikosaederfunktion $z(w)$ beruht. Ich brauche dabei aus der Algebra nur folgenden *Hilfssatz von Abel* vorauszusetzen, dessen Beweis Sie in jedem Lehrbuche der Algebra nachlesen können: *Läßt sich eine algebraische Gleichung durch eine Folge von Wurzelzeichen auflösen, so kann man erreichen, daß jede auftretende Wurzelgröße als rationale Funktion der n Wurzeln der Ausgangsgleichung darstellbar ist.*

Wenden wir diesen Satz nun insbesondere auf die Ikosaedergleichung an! *Angenommen, ihre Wurzel z sei durch eine Folge von Wurzelzeichen aus rationalen Funktionen der Gleichungskoeffizienten, d. h. aus rationalen Funktionen von w darstellbar* — wir wollen zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt — *so ist also jede auftretende Wurzelgröße gleich einer rationalen Funktion der 60 Wurzeln:*

$$R(z_1, z_2, \ldots, z_{60}).$$

Für diesen Ausdruck können wir, da alle Wurzeln der Ikosaedergleichung aus einer beliebigen z von ihnen durch lineare Substitutionen hervorgehen, auch einfach eine *rationale Funktion $R(z)$ von z allein setzen.* Betrachten wir nun dieses $R(z)$ als Funktion von w, indem wir für z die

[1]) S. 369—371: „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen." [Vgl. auch Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. II, S. 385.]

60-wertige Ikosaederfunktion $z(w)$ eingesetzt denken! Da jeder Umlauf in der w-Ebene, der z zu seinem Ausgangswert zurückführt, notwendig auch $R(z)$ wieder in seinen Ausgangswert überführt, kann $+R[z(w)]$ nur an den Stellen $w = 0, 1, \infty$ verzweigt sein (an denen $z(w)$ es ist), und die Anzahl der an jeder dieser Stellen jedesmal im Zyklus zusammenhängenden Blätter der Riemannschen Fläche von $R[z(w)]$ muß ein Teiler der entsprechenden zu $z(w)$ gehörenden Anzahl sein, die, wie wir wissen, an den drei Stellen bezüglich gleich 3, 2, 5 ist. *Jede rationale Funktion $R(z)$ einer Ikosaederwurzel und damit jede in der angenommenen Auflösung auftretende Wurzelgröße kann daher, als Funktion von w betrachtet, wenn überhaupt, so nur an den Punkten $w = 0$, $w = 1$, $w = \infty$ verzweigt sein, und zwar müssen in diesem Falle bei 0 jeweils 3 Blätter, bei 1 immer 2 und bei ∞ stets 5 Blätter ihrer Riemannschen Fläche zusammenhängen*, da 3, 2, 5 außer 1 keine anderen Teiler haben.

Gegen diesen Satz wollen wir nun einen Widerspruch herleiten, indem wir die *innerste Wurzelgröße* betrachten, die in dem für $z(w)$ hypothetisch angenommenen Ausdruck auftritt. Sie muß jedenfalls eine rationale Funktion $\mathsf{P}(w)$ zum Radikanden haben. Ihren *Exponenten* aber *können wir als Primzahl p* voraussetzen, da wir jede andere Wurzelgröße sofort aus solchen mit Primzahlexponenten aufbauen können. Überdies darf $\mathsf{P}(w)$ *keine p^{te} Potenz* einer rationalen Funktion $\varrho(w)$ von w sein, denn sonst wäre unsere Wurzelgröße überhaupt überflüssig, und wir könnten unsere Betrachtungen auf das nächste wirklich notwendige Wurzelzeichen beziehen.

Wir wollen nun zusehen, was für *Verzweigungen die Funktion* $\sqrt[p]{\mathsf{P}(w)}$ besitzen kann; dazu ist es am bequemsten, sie *homogen* zu schreiben:

$$\mathsf{P}(w) = \frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

wobei g, h Formen gleicher Dimension der homogenen Variablen w_1, w_2 $\left(w = \frac{w_1}{w_2}\right)$ sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir g und h in Linearfaktoren spalten und finden etwa:

$$\mathsf{P}(w) = \frac{l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot n^{\gamma} \dots}{l'^{\alpha'} \cdot m'^{\beta'} \cdot n'^{\gamma'} \dots},$$

wobei wegen der Gleichheit der Dimensionen von Zähler und Nenner:

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots$$

ist. Nun können sicher nicht *alle* Exponenten $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ durch p teilbar sein, da sonst P eine volle p^{te} Potenz wäre; da ferner das Aggregat $\alpha + \beta + \cdots - \alpha' - \beta' - \cdots$ gleich Null und daher durch p teilbar ist, kann nicht bloß *eine* dieser Zahlen nicht durch p teilbar sein, sondern *mindestens zwei* müssen diese Eigenschaft haben. *Die*

Nullstellen der entsprechenden Linearfaktoren müssen also sicherlich beide Male solche Verzweigungsstellen von $\sqrt[p]{P(w)}$ *sein, an denen immer je p Blätter im Zyklus zusammenhängen. Damit ist aber der Widerspruch mit dem zuerst ausgesprochenen Satze gewonnen,* der ja für $\sqrt[p]{P(w)}$ gleichfalls gelten muß. Denn dort haben wir alle möglichen Verzweigungsstellen aufgezählt, und unter ihnen sind nicht zwei mit der gleichen Anzahl zusammenhängender Blätter enthalten. Also war unsere Annahme falsch, *und die Ikosaedergleichung ist jedenfalls durch Wurzelzeichen nicht lösbar.*

Dieser Beweis beruht wesentlich darauf, *daß die für das Ikosaeder charakteristischen Zahlen 3, 2, 5 keine gemeinsamen Teiler haben.* Sowie nämlich ein solcher gemeinsamer Teiler auftritt, wie etwa bei den Zahlen 3, 2, 4 des Oktaeders, sind sofort rationale Funktionen $R[z(w)]$ möglich, die an zwei Stellen gleichartige Verzweigung aufweisen, z. B. eine solche mit je zwei zusammenhängenden Blättern bei 1 und ∞, und diese sind dann wirklich als Wurzeln aus einer rationalen Funktion $P(w)$ darstellbar. *So kommt beim Oktaeder und ebenso beim Tetraeder* (mit den Zahlen *3, 2, 3*) *und beim Dieder* (*2, 2, n*) *die Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen zustande.*

Ich möchte hier allgemein darauf hinweisen, wie wenig der in weiten mathematischen Kreisen herrschende Sprachgebrauch mit den Fortschritten der Erkenntnis Schritt hält. Man gebraucht heute *das Wort „Wurzel"* fast allgemein in zweierlei Sinne: einmal für die Lösung jeder algebraischen Gleichung und dann insbesondere für die Lösung einer reinen Gleichung. Der letztere Gebrauch des Wortes stammt natürlich noch aus einer Zeit, in der man sich nur mit reinen Gleichungen beschäftigte; heute ist er, wenn nicht geradezu schädlich, so doch zum mindesten recht unbequem; nehmen Sie nur die Formulierung, daß die „Wurzeln" einer Gleichung nicht durch „Wurzelzeichen" darstellbar sind. Wesentlich mehr zu Mißverständnissen Anlaß gibt eine andere aus den Anfängen der Algebra noch zurückgebliebene Bezeichnung, *daß man nämlich algebraische Gleichungen, die nicht durch Wurzelzeichen lösbar, d. h. nicht auf reine Gleichungen reduzierbar sind, „nicht algebraisch lösbar" nennt.* Das steht zu der modernen Bedeutung des Wortes „algebraisch" in unmittelbarem Widerspruche. Heute muß man *algebraisch lösbar eine Gleichung dann nennen, wenn man sie auf eine Kette möglichst einfacher algebraischer Gleichungen zurückführen kann, bei denen man die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern, den Zusammenhang der verschiedenen Wurzelwerte untereinander usw. so vollständig beherrscht, wie man das von alters her bei der reinen Gleichung tut; reine Gleichungen aber brauchen das durchaus nicht zu sein.* In diesem Sinne werden wir die *Ikosaedergleichung als durchaus algebraisch lösbar* bezeichnen können, denn unsere Darlegungen zeigten deutlich, daß wir ihre Theorie in einer allen Ansprüchen genügenden Weise ausbauen können. Daß sie mit Wurzelzeichen nicht lösbar ist, verleiht ihr vielmehr ein ganz besonderes Interesse, da sie so *als geeignete Normalgleichung erscheint, auf die man weitere gleichfalls im alten Sinne nicht algebraisch lösbare Gleichungen zurückzuführen versuchen wird,* um so auch deren Lösung vollständig zu beherrschen.

Diese letzte Bemerkung führt uns nun zu dem letzten Abschnitt dieses Kapitels, in dem wir einen Überblick über solche Zurückführungen gewinnen wollen.

δ. Zurückführung allgemeiner Gleichungen auf die Normalgleichungen.

Es zeigt sich nämlich, daß man die allgemeinste Gleichung:
dritten Grades auf die Diëdergleichung für $n = 3$,
vierten Grades auf die Tetraeder- oder Oktaedergleichung,
fünften Grades auf die Ikosaedergleichung
zurückführen kann. Dies Resultat ist der *neueste Triumph der regulären Körper,* die ja seit dem Beginn der mathematischen Geschichte immer wieder eine wichtige Rolle gespielt haben und in die verschiedensten Gebiete der modernen Mathematik maßgebend eingreifen.

Um Ihnen den Sinn meiner allgemeinen Behauptungen näherzubringen, will ich sie *für die Gleichung dritten Grades* etwas eingehender ausführen, ohne indessen die Formeln vollständig zu beweisen. Wir setzen die kubische Gleichung wieder in der reduzierten Form voraus:

$$x^3 + px - q = 0 . \tag{1}$$

Sind x_1, x_2, x_3 ihre Lösungen, so suchen wir eine rationale Funktion z von ihnen zu bilden, die bei den sechs Vertauschungen dieser drei Größen gerade die sechs linearen Substitutionen des Diëders für $n = 3$ erleidet, d. h. die Werte:

$$z,\ \varepsilon z,\ \varepsilon^2 z,\ \frac{1}{z},\ \frac{\varepsilon}{z},\ \frac{\varepsilon^2}{z} \left(\text{wo } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

annimmt; man sieht leicht, daß:

$$z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3} \tag{2}$$

diesen Bedingungen genügt. Die Diëderfunktion $z^3 + \frac{1}{z^3}$ dieser Größe muß also bei *allen* Vertauschungen der x_k ungeändert bleiben, da die sechs linearen Substitutionen des z sie ungeändert lassen; sie ist also einem bekannten Satze der Algebra zufolge als rationale Funktion der Koeffizienten von (1) darstellbar, und zwar ergibt die Rechnung:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -27\frac{q^2}{p^3} - 2 . \tag{3}$$

Hat man nun aber umgekehrt diese Diëdergleichung gelöst und ist z eine ihrer Wurzeln, so kann man aus (2) mit Hilfe der bekannten Relationen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = p, \qquad x_1 x_2 x_3 = q$$

die drei Werte x_1, x_2, x_3 rational durch z, p, q ausdrücken und erhält:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3q}{p} \cdot \dfrac{z(1+z)}{1+z^3}, \\ x_2 = -\dfrac{3q}{p} \cdot \dfrac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3}, \\ x_3 = -\dfrac{3q}{p} \cdot \dfrac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3} \end{cases}$$

Sowie man also die Diëdergleichungen (3) *gelöst hat, geben diese Formeln unmittelbar die Lösung der kubischen Gleichung* (1).

Ganz ähnlich läßt sich nun die Reduktion der allgemeinen Gleichung vierten und fünften Grades gestalten. Die Gleichungen werden natürlich etwas länger, aber prinzipiell nicht schwieriger; neu ist nur, daß der Parameter w der Normalgleichung, der soeben sich rational durch die Gleichungskoeffizienten ausdrückte $\left(2w = -27\dfrac{q^2}{p^3} - 2\right)$, noch *Quadratwurzeln* enthält. Sie finden diese Theorie für die Gleichung fünften Grades bzw. das Ikosaeder ganz ausführlich im zweiten Teile meiner Vorlesungen über das Ikosaeder dargestellt, und zwar so, daß nicht etwa bloß die Formeln berechnet, sondern immer die inneren Gründe für das Zustandekommen der Gleichungen deutlich hervorgekehrt werden.

Lassen Sie mich endlich noch ein Wort über die *Stellung dieser Entwicklungen zu der gewöhnlichen Darstellung der Theorie der Gleichungen dritten, vierten, fünften Grades sagen.* Was zunächst die üblichen Lösungen der kubischen und biquadratischen Gleichung angeht, so kann man sie aus unsern Formeln durch geeignete Umrechnungen erhalten, wenn man die Lösung der Gleichungen des Diëders, Oktaeders, Tetraeders durch Wurzelzeichen benutzt. Bei den *Gleichungen fünften Grades* aber beschränkt man sich in den Lehrbüchern leider meist auf die Feststellung des negativen Resultates, daß man sie durch eine Folge von *Wurzelzeichen* nicht lösen kann, und dazu kommt dann allenfalls noch die dunkle Andeutung, daß die Lösung durch *elliptische Funktionen* — genau müßte es heißen: „elliptische Modulfunktionen" — möglich wird. Ich möchte an dieser Darstellung tadeln, daß sie eine ganz schiefe Gegenüberstellung gibt und das wahre Verständnis der Sachlage eher hindert als fördert. In der Tat muß es, wie wir auf Grund des jetzt gewonnenen Überblickes zusammenfassend sagen können, so heißen, wenn wir einen algebraischen und analytischen Teil unterscheiden:

1. *Die allgemeine Gleichung fünften Grades läßt sich zwar nicht auf reine Gleichungen zurückführen, wohl aber gelingt* — und das ist das eigentliche Problem der algebraischen Lösung — *ihre Reduktion auf die Ikosaedergleichung als einfachste Normalgleichung.*

2. *Die Ikosaedergleichung ihrerseits läßt sich durch elliptische Modulfunktionen lösen,* und das ist das zur numerischen Berechnung verwendbare völlige *Analogon der Lösung reiner Gleichungen durch Logarithmen.*

Damit ist die vollständige Lösung des Problems der Gleichung fünften Grades gegeben. Man darf eben nur, wenn etwas auf dem gewöhnlichen Wege nicht geht, nicht gleich resignieren und bei der Feststellung der Unmöglichkeit bleiben, sondern man muß nur das richtige Ende finden, an dem sich die Sache anfassen und weiter fördern läßt. Der mathematische Gedanke als solcher hat nie ein Ende, und sagt Ihnen jemand, meine Herren, daß an einer Stelle das mathematische Verständnis aufhört, so seien Sie überzeugt, daß da die eigentlich interessante Fragestellung erst einsetzen muß.

Und so möge zum Schluß noch angedeutet werden, daß diese Theorien mit der Gleichung fünften Grades nicht etwa aufhören; *man kann vielmehr auch für Gleichungen sechsten und höheren Grades ganz analoge Entwicklungen aufstellen,* wenn man nur *die höherdimensionalen Analoga der regulären Körper* heranzieht. Wollen Sie darüber sich näher orientieren, so mögen Sie zunächst meine Arbeit „*Über die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften und sechsten Grades*" einsehen[1]). Im Zusammenhang mit dieser Arbeit wurde das Problem von *P. Gordan*[2]) und *A. B. Coble*[3]) erfolgreich angegriffen. In der Abhandlung des letzteren finden Sie die Untersuchung noch vereinfacht[4]).

---

[1]) Journal für reine und angewandte Mathemathik Bd. 129, S. 151 ff. 1905 und Mathematische Annalen Bd. 61, S. 50 ff. 1905.

[2]) Math. Ann. Bd. 61, S. 50. 1905 u. Bd. 68, S. 1. 1910.

[3]) Math. Ann. Bd. 70, S. 337. 1911.

[[4]) Vgl. auch Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. II, S. 502/03.]

Dritter Teil.

Analysis.

Wir wollen uns nun in der zweiten Hälfte des Semesters damit beschäftigen, *einzelne von unserm Standpunkte aus wichtige Kapitel der Analysis* ähnlich zu behandeln, wie im vorhergehenden die Arithmetik und Algebra. Das Wichtigste wird sein, daß wir *von den elementaren transzendenten Funktionen* reden, die ja im Schulunterricht eine große Rolle spielen: *der Exponentialfunktion bzw. dem Logarithmus und den trigonometrischen Funktionen*. Beginnen wir mit den ersten!

I. Logarithmus und Exponentialfunktion.

Zunächst möchte ich kurz an den Ihnen allen bekannten Gang der Schule und seine Fortsetzung erinnern, der sich die sogenannte *algebraische Analysis* anschließt:

1. Systematik der algebraischen Analysis.

Man geht von der *Potenz* $a = b^c$ aus und nimmt die bekannte schrittweise Ausdehnung dieses Begriffs *von ganzzahlig positivem Exponenten* c *zu ganzzahlig negativem, dann zu gebrochenem und unter Umständen schließlich zu irrationalem* c vor; damit ist auch der *Begriff der Wurzel* dem allgemeinen Potenzbegriff eingeordnet. Ohne auf das Potenzieren näher einzugehen, will ich nur die *Multiplikationsregel* hervorheben:

$$b^c \cdot b^{c'} = b^{c+c'},$$

die die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition der Exponenten zurückführt. Die Möglichkeit einer solchen Reduktion, die bekanntlich für das *logarithmische Rechnen* grundlegend ist, ist formal darin begründet, daß die Grundgesetze der Multiplikation und Addition weitgehend übereinstimmen, daß nämlich beide Operationen sowohl kommutativ als auch assoziativ sind.

Die Umkehrung der Operationen des Potenzierens liefert den Logarithmus: *Man nennt* c *den Logarithmus von* a *zur Basis* b:

$$c = \log_{(b)} a .$$

Hierbei ergeben sich aber bereits eine Reihe *innerer Schwierigkeiten*, über die man meistens hinweggeht, ohne sie recht aufzuklären;

sie wollen wir uns gerade deshalb besonders deutlich machen. Der Bequemlichkeit halber führen wir für a und c, deren gegenseitige Abhängigkeit wir studieren wollen, die für Variable geläufigen Bezeichnungen x, y ein, so daß unsere Grundgleichungen sind:

$$x = b^y, \qquad y = \log_{(b)} x.$$

Vor allem ist nun darauf aufmerksam zu machen, daß man die Basis b *stets positiv* annimmt; bei negativem b würde nämlich x für ganzzahliges y abwechselnd positiv und negativ werden, für gebrochenes y aber gar mitunter imaginär, und *die Gesamtheit dieser Wertepaare x, y würde keinen stetigen Kurvenzug bilden können*. Aber auch für $b > 0$ kann man *nicht ohne anscheinend ganz willkürliche Festsetzungen* auskommen. Denn für rationales $y = \frac{m}{n}$ (wobei m, n teilerfremde ganze Zahlen seien) ist bekanntlich $x = b^{\frac{m}{n}}$ als $\sqrt[n]{b^m}$ definiert und hat daher *n Werte*, von denen selbst dann, wenn wir uns auf *reelle* Zahlen beschränken, für gerades n noch *zwei Werte* in Betracht kommen. Man trifft nun die Festsetzung, *daß x stets gleich dem positiven Wurzelwert, dem sogenannten Hauptwert, sein soll.*

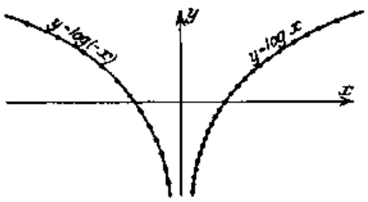


Abb. 54.

Lassen Sie uns einmal an der Hand des bekannten Bildes der Logarithmenkurve $y = \log x$, das ich für den Moment der größeren Deutlichkeit halber hier (vgl. Abb. 54) wohl bereits benutzen darf, überlegen, daß diese Festsetzung und ihre Zweckmäßigkeit durchaus nichts Selbstverständliches sind. Durchläuft y die überall dicht liegende Menge der rationalen Zahlen, so bilden die zugehörigen Punkte mit den positiven Hauptwerten $x = b^y$ als Abszissen eine überall dichte Menge auf unserer Kurve. Würden wir nun bei geradem Nenner n von y jedes Mal auch die den negativen x-Werten entsprechenden Punkte markieren, so entstünde eine, man möchte sagen „*halb so dichte*", aber immer noch „*überall dichte*" Punktmenge auf dem Spiegelbilde unserer Kurve in bezug auf die y-Achse [$y = \log(-x)$]. Es ist nun durchaus nicht ohne weiteres zu begreifen, warum, wenn man sämtliche reellen, auch irrationalen Werte y zuläßt, sich gerade die Hauptwerte rechts zu einer kontinuierlichen, durchaus regulär verlaufenden Kurve ergänzen lassen und ob oder warum nicht auch die negativen links markierten Werte eine ähnliche Vervollständigung gestatten. Wir werden später sehen, daß wir das nur mit tieferen funktionentheoretischen Hilfsmitteln voll werden begreifen können, mit Hilfsmitteln, die der Schule nicht zu Gebote stehen. Und darum verzichtet man dort eben auf das innere Verständnis der Sachlage und begnügt sich meist mit der für den Schüler freilich auch recht überzeugenden *autoritativen Festsetzung, daß man nun einmal $b > 0$ und für y die positiven Hauptwerte nehmen muß und daß alles andere unerlaubt ist;* hierauf stützt sich dann der Satz, daß der *Logarithmus eine eindeutige, nur für positive Argumente definierte Funktion* ist.

Hat man die Theorie so weit gefördert, so bekommt der Schüler die *Logarithmentafel* in die Hand und muß jetzt die Logarithmen zum *praktischen Rechnen* gebrauchen lernen. Dabei mag es auch heute noch einzelne Schulen geben — in meiner Schulzeit war das die Regel —, an denen nicht viel davon gesagt wird, wie eine solche Tafel berechnet wird. Das war ein schnöder Utilitarismus, der jedem höheren Unterrichtsprinzipe Hohn spricht und den wir selbstverständlich aufs schärfste verurteilen müssen. Gewiß wird man heute doch schon in den meisten Fällen von der *Berechnung der Logarithmen* sprechen und an vielen Schulen zu diesem Zwecke auch wohl die *Lehre von den natürlichen Logarithmen* und der *Reihenentwicklung* heranziehen.

Was erstere angeht, so ist bekanntlich die *Basis des natürlichen Logarithmensystems* die Zahl:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots\ .$$

Diese Definition von e wird meistens, im wesentlichen nach französischem Muster, in den großen Lehrbüchern der Analysis unvermittelt an die Spitze gestellt, wobei dann freilich gerade das eigentlich wertvolle und erst das Verständnis vermittelnde Element fehlt: *eine Erklärung, warum man gerade diesen merkwürdigen Grenzwert als Basis verwendet und die entstehenden Logarithmen* n a t ü r l i c h e *nennt.* Ebenso tritt die Reihenentwicklung vielfach ganz unvermittelt auf; man setzt einfach formal an:

$$\log(1 + x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

berechnet die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ aus den bekannten Eigenschaften des Logarithmus und zeigt allenfalls noch die Konvergenz für $-1 < x \leqq 1$ Unerörtert bleibt dabei aber wiederum, *wie man überhaupt dazu kommt, bei einer Funktion und gar noch bei einer so willkürlich zusammengestückelten, wie es der Logarithmus nach der Schuldefinition ist, die Möglichkeit einer Potenzreihenentwicklung auch nur zu vermuten.*

2. Die historische Entwicklung der Theorie.

Wollen wir nun *alle die inneren Zusammenhänge* finden, die wir hier vermissen, und die tieferen Gründe kennen lernen, warum jene anscheinend willkürlichen Festsetzungen zu einem vernünftigen Resultate führen müssen — kurz, *wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir ihren historischen Werdegang einmal in großen Zügen verfolgen.* Sie werden sehen, daß er keineswegs jener oben geschilderten

Schulpraxis entspricht, sondern daß diese sich zu ihm wie eine von recht ungünstigem Standpunkte aus genommene Projektion verhält.

Wir haben da zunächst aus dem *16. Jahrhundert* einen deutschen Mathematiker, den Schwaben *Michael Stifel*, zu nennen, der *1544 in Nürnberg* seine *Arithmetica integra* erscheinen ließ; das ist also in der Zeit des ersten Beginns der heutigen Algebra, ein Jahr, bevor das früher schon genannte Werk des *Cardanus* gleichfalls in Nürnberg herauskam. Ich kann Ihnen dieses Buch, wie auch die meisten der weiterhin zu erwähnenden, aus unserer sehr reichhaltigen Universitätsbibliothek hier vorlegen. Sie finden dort zum ersten Male das *Rechnen mit Potenzen von beliebigen rationalen Exponenten* und besonders auch die *Multiplikationsregel* betont; ja Stifel gibt sogar (S. 250) gewissermaßen die *erste numerische Logarithmentafel*, die überhaupt existiert und die freilich sehr *rudimentär* ist: sie enthält lediglich die ganzen Zahlen von -3 bis 6 als Exponenten neben die zugehörigen Potenzen $\frac{1}{8}$ bis 64 von 2 gestellt. Stifel scheint eine Vorstellung von der Bedeutung der hiermit beginnenden Entwicklung gehabt zu haben; er bemerkt nämlich, daß man über diese merkwürdigen Zahlenbeziehungen ein ganzes eigenes Buch schreiben könne.

Um aber die Logarithmen im *praktischen Rechnen* wirklich zur Geltung zu bringen, dazu fehlte Stifel noch ein wichtiges Hilfsmittel: *die Dezimalbrüche*, und erst, als man diese besaß — *nach 1600* —, war die *Möglichkeit zur Ausbildung wirklicher Logarithmentafeln* gegeben. Die erste Tafel rührt von dem Schotten *John Napier* (oder *Neper*) her, der 1550—1617 lebte; sie erschien *1614 zu Edinburgh* unter dem Titel „*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*", und welche Begeisterung sie erregte, sehen Sie aus den umfangreichen, ihr vorgedruckten Versen, in denen verschiedene Autoren die Vortrefflichkeit der Logarithmen besingen. Übrigens wurde Nepers Verfahren zur Berechnung der Logarithmen erst nach seinem Tode 1619 als „*Mirifici logarithmorum canonis constructio*"[1]) publiziert.

Unabhängig von Neper hatte der Schweizer *Jobst Bürgi* (1552 bis 1632) eine Tafel berechnet, die er aber erst *1620 zu Prag* unter dem Titel „*Arithmetische und geometrische Progreßtabuln*" erscheinen ließ. Wir Göttinger müssen an Bürgi ein besonderes landsmännisches Interesse nehmen, da er lange in *Cassel* gelebt hat; überhaupt ist Cassel und speziell die alte Sternwarte daselbst für die Entwicklung der Arithmetik, Astronomie, Optik vor Erfindung der Infinitesimalrechnung eine äußerst wichtige Stätte, so wie dann später Hannover als Wohnort von Leibniz wichtig wird. Wir haben also hier in unserer Nähe schon lange vor Gründung der Universität für unsere Wissenschaft historisch bedeutsamen Boden.

[1]) Lugduni 1620. Eine spätere Ausgabe liegt im phototypischen Neudruck (Paris 1895) vor.

Es ist nun sehr lehrreich, den *Gedankengang von Neper und Bürgi* sich näher anzusehen. Beide gehen von den Werten $x = b^y$ *für ganzzahlige* y aus und wollen es nur so einrichten, daß die Zahlen x möglichst dicht liegen, um so dem schließlichen Ziele — jeder Zahl x einen Logarithmus zuzuordnen — möglichst nahe zu kommen; das erreicht man heute auf der Schule durch den Übergang zu gebrochenen Werten y, von dem vorhin die Rede war. Neper und Bürgi vermeiden aber alle jene Schwierigkeiten, die sich auf diesem Wege ergeben, indem sie mit der Intuition des Genies die Sache gleich am richtigen Ende anfassen. *Sie haben nämlich den einfachen und glücklichen Gedanken, die Basis b sehr nahe an der Einheit zu wählen, denn dann rücken in der Tat auch bereits die sukzessiven ganzzahligen Potenzen von b sehr nahe aneinander.* Bürgi nimmt:

$$b = 1{,}0001\,,$$

während *Neper* einen Wert *unterhalb* 1 verwendet:

$$b = 1 - 0{,}0000001 = 0{,}9999999\,,$$

also noch näher an die 1 herangeht. Der Grund für diese Abweichung Nepers vom heutigen Gebrauch ist der, daß er *von vornherein die Anwendung auf trigonometrische Rechnungen* im Auge hat; da handelt es sich ja vor allem um die *Logarithmen echter Brüche* (Sinus und Cosinus), die für $b > 1$ negativ, für $b < 1$ aber positiv werden. Beiden Forschern gemeinsam aber ist die Hauptsache, *daß sie nur ganzzahlige Potenzen dieses b verwenden und damit um die Vieldeutigkeit, die uns vorhin in Verlegenheit brachte, vollständig herumkommen.*

Berechnen wir nun im *Bürgischen Systeme* die Potenzen für zwei benachbarte Exponenten y und $y + 1$:

$$x = (1{,}0001)^y, \qquad x + \Delta x = (1{,}0001)^{y+1},$$

dann folgt durch Subtraktion:

$$\Delta x = (1{,}0001)^y\,(1{,}0001 - 1) = \frac{x}{10^4}$$

oder, wenn wir an Stelle der Differenzen 1 der beiden Exponentenwerte allgemein Δy schreiben:

$$\text{(1a)} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}.$$

Wir haben so eine *Differenzengleichung für die Bürgischen Logarithmen*, die Bürgi selbst bei der Berechnung seiner Tafel direkt anwendet: *Hat er den zu einem y gehörigen Wert x bestimmt, so erhält er den jeweils folgenden zu* $y + 1$ *gehörigen durch Addition von* $\frac{x}{10^4}$. — Ebenso ergibt sich, *daß die Neperschen Logarithmen der Differenzengleichung:*

$$\text{(1b)} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x}$$

genügen.

Um die nahe Verwandtschaft beider Systeme zu erkennen, haben wir nur das eine Mal statt der Zahlen y die Zahlen $\frac{y}{10^4}$, das andere Mal die

Zahlen $\frac{y}{10^7}$ zu betrachten (d. h. das Dezimalkomma der Logarithmen zu versetzen); bezeichnen wir die neuen Zahlen dann wieder schlechtweg mit y, *so ergibt sich jedesmal eine der gleichen Differenzengleichung:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \tag{2}$$

genügende Zahlenreihe, in der die y einmal in Stufen von 0,0001, das andere Mal in solchen von $-0{,}0000001$ fortschreiten.

Wollen wir uns der Bequemlichkeit halber bereits erlauben, das Bild der stetigen Exponentialkurve zu benutzen — eigentlich sollen wir es ja durch unsere Erörterungen erst gewinnen —, so können wir uns die jener Neperschen bzw. Bürgischen Zahlenreihe entsprechenden Punkte (x, y) anschaulich vor Augen stellen als die *Eckpunkte einer in die Exponentialkurve:*

$$x = (1{,}0001)^{10000\,y} \quad \text{bzw.} \quad x = (0{,}9999999)^{10\,000\,000\,y} \tag{3}$$

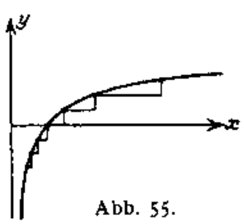


Abb. 55.

eingezeichneten Treppe der konstanten Stufenhöhe $\Delta y = 0{,}0001$ *bzw.* $\Delta y = 0{,}0000001$ — wie dies in der Abb. 55 angedeutet ist.[1]).

Eine *andere geometrische Deutung*, bei der wir die Exponentialkurve noch nicht vorauszusetzen brauchen, die uns vielmehr den naturgemäßen Weg zu ihr zeigen wird, erhalten wir, *wenn wir die Differenzengleichung* (2) *durch folgende Summengleichung ersetzen* (gewissermaßen sie „integrieren"):

$$\eta = \sum \frac{\Delta \xi}{\xi}; \tag{4}$$

dabei wächst ξ während der Summation diskontinuierlich von 1 an, um solche Stufen, daß das zugehörige $\Delta \eta = \frac{\Delta \xi}{\xi}$ stets konstant gleich 10^{-4} bzw. -10^{-7} ist, so daß also $\Delta \xi = \frac{\xi}{10^4}$ bzw. $-\frac{\xi}{10^7}$ wird; x ist der Wert, den ξ nach dem letzten Schritt erreicht. Dieses Verfahren kann man nun in der Tat sehr leicht geometrisch aussprechen: *Man zeichne* (vgl. Abb. 56) *in einer ξ-η-Ebene die Hyperbel $\eta = \frac{1}{\xi}$ und*

[[1]) Nach der Darstellung Kleins liegt der Bürgischen und Neperschen Logarithmenberechnung der gleiche Gedankengang zu Grunde. Das ist in Wahrheit nicht der Fall. Nur in dem *ersten* Stadium seiner Überlegungen stimmt Neper mit Bürgi überein. Um die Logarithmen in einer erträglich langen Zeitspanne mit der Genauigkeit berechnen zu können, die Neper anstrebte, waren gegenüber Bürgi neue und wesentlich tiefer liegende Gedanken notwendig. Man vergleiche darüber 1) Conrad Müller: John Napier, Laird of Merchiston und die Entdeckungsgeschichte seiner Logarithmen, Naturwissenschaften 1914, Heft 28 und 2) Lord Moulton: The invention of logarithms, its genesis and growth (in dem „Napier Memoria Volume", London 1915).]

konstruiere auf der ξ-Achse vom Punkte $\xi = 1$ an beginnend alle Punkte, die man nach dem Fortschreitungsgesetz $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ (um etwa bei der Bürgischen Formulierung zu bleiben) *sukzessive erreicht. Über jedem der so entstehenden Intervalle zeichne man das Rechteck mit der Höhe* $\frac{1}{\xi}$, das den über ξ liegenden Hyperbelpunkt zur Ecke hat und den konstanten Inhalt $\Delta\xi \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{10^4}$ besitzt. *Der Bürgische Logarithmus von x ist sodann nach* (4) *gerade die 10^4-fache Summe aller dieser zwischen 1 und x gelegenen, der Hyperbel eingeschriebenen Rechtecke.* Entsprechendes gilt für den Neperschen Logarithmus.

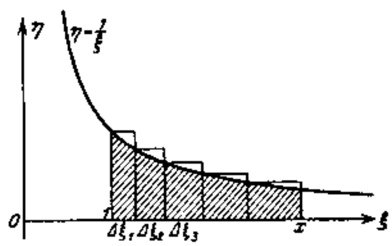


Abb. 56.

Von dieser letzten Deutung aus wird man nun unmittelbar zum natürlichen Logarithmus geführt, indem man statt der Rechtecksumme unmittelbar den von der Hyperbel selbst zwischen den Ordinaten $\xi = 1$, $\xi = x$ umschlossenen Flächeninhalt verwendet (in der Abbildung schraffiert); in der Formel drückt sich das bekanntlich so aus:

$$\log \operatorname{nat} x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}\,.$$

Das war nun in der Tat auch der *historische Weg*, und zwar tat man den entscheidenden Schritt definitiv *um 1650*, als die analytische Geometrie bereits Gemeingut der Mathematiker war und die Infinitesimalrechnung mit den Bestrebungen zur Quadratur der bekannten Kurven einsetzte.

Natürlich müssen wir, wenn wir diese Definition des natürlichen Logarithmus zugrunde legen wollen, uns vor allem überzeugen, *daß er auch wirklich die Fundamentaleigenschaft besitzt, die Multiplikation der Numeri durch die Addition der Logarithmen zu ersetzen* — oder, modern gesprochen, wir müssen nachweisen, daß die durch den Hyperbelinhalt definierte Funktion:

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$$

das einfache *Additionstheorem* besitzt:

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)\,.$$

In der Tat sind bei Variation von x_1, x_2 die Zuwüchse beider Seiten nach der Integraldefinition $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ bzw. $\frac{d(x_1 \cdot x_2)}{x_1 \cdot x_2}$, also einander gleich; daher können sich $f(x_1) + f(x_2)$ und $f(x_1 \cdot x_2)$ nur um eine Konstante C unterscheiden, und diese ergibt sich gleich 0, wenn wir $x_1 = 1$ setzen (da ja $f(1) = 0$ ist).

Wollen wir nun endlich die „*Basis*" *der so gewonnenen Logarithmen* erkennen, so brauchen wir nur zu bemerken, daß der Übergang von der Rechtecksreihe zum Hyperbelinhalt sich so vollziehen läßt, daß man auf der Abszissenachse immer um $\Delta\xi = \frac{\xi}{n}$ statt um $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ vorwärts geht und beliebig groß werden läßt; das heißt aber nichts anderes, als daß man zunächst die Bürgische Wertefolge $x = (1{,}0001)^{10000y}$ durch $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}$ ersetzt, wobei ny alle ganzen Zahlen durchläuft. Nach der allgemeinen Potenzdefinition kann man das auch so aussprechen, daß x die y^{te} Potenz von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist. Demgemäß erscheint es plausibel, *daß nach Ausführung des Grenzüberganges* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *die Basis wird*, also gerade der Grenzwert, den man gemeinhin als Definition von e an die Spitze stellt. Übrigens ist es interessant, zu bemerken, daß die Bürgische Basis $(1{,}0001)^{10000} = 2{,}718146\ldots$ mit e bereits auf drei Dezimalen übereinstimmt[1].

Lassen Sie uns jetzt noch zusehen, wie die *historische Entwicklung der Theorie des Logarithmus nach Neper und Bürgi* weiterging! Ich habe da an erster Stelle zu erwähnen, daß

1. der schon früher (S. 88) genannte *Mercator* sich als einer der ersten prinzipiell der *Definition des natürlichen Logarithmus durch den Hyperbelinhalt* bedient; in seinem Buche „*Logarithmotechnica*" von 1668, sowie in einigen Abhandlungen in den *Philosophical Transactions der Londoner Royal Society von 1667 und 1668* zeigt er eigentlich von demselben Gedankengange aus, den ich soeben in moderner Sprache dargestellt habe, *daß* $f(x) = \int\limits_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ *sich von den gewöhnlichen Logarithmen mit der Basis 10* — wie man sie damals bereits zum Rechnen gebrauchte — *nur um einen konstanten Faktor unterscheidet*, den sogenannten *Modul des Logarithmensystems*. Übrigens hat er auch die Bezeichnung „*natürlicher Logarithmus*" oder auch „*hyperbolischer Logarithmus*" bereits selbst eingeführt[2]. Die *größte Leistung Mercators* aber ist die *Aufstellung der Potenzreihe für den Logarithmus*, die er — dem Sinne nach — *aus*

---

[1] Ausführlichere Betrachtungen über die Basis der Bürgischen und der Neperschen Logarithmen findet man bei *O. Mautz*, Zur Basisbestimmung der Napierschen und Bürgischen Logarithmen, Jahresbericht des Gymnasiums, Basel 1919 und *O. Mautz*, Zur Stellung des Dezimalkommas in der Bürgischen Logarithmentafel, Basel 1921.

[2] Philosophical Transactions of the Royal Society of London III, S. 761. 1668.

der Integraldarstellung durch Ausdividieren und gliedweise Integration erhält; ich habe das ja schon früher (S. 88) als bahnbrechenden Fortschritt der Mathematik anführen können.

2. In jenem Zusammenhange habe ich gleichfalls berichtet, daß *Newton* diese Ideen Mercators aufgriff und durch zwei neue äußerst wertvolle Ansätze bereicherte: *den allgemeinen binomischen Satz und die Methode der Reihenumkehrung.* Diese letztere findet sich bereits in einer Jugendarbeit Newtons „*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*", die erst spät gedruckt wurde, aber von 1669 an schon handschriftlich verbreitet war[1]). Dort[2]) leitet Newton aus der Mercatorschen Reihe für $y = \log \operatorname{nat} x$ zum ersten Male *durch Umkehr die Exponentialreihe* ab:

$$x = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

Als Zahl, deren natürlicher Logarithmus $y = 1$ ist, ergibt sich hieraus:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

und nun kann man mit Hilfe der Funktionalgleichung des Logarithmus leicht schließen, *daß für jedes reelle rationale y im Sinne der gewöhnlichen Potenzdefinition x einer der Werte von e^y ist, und zwar der positive,* wie wir das später noch näher auszuführen haben werden. *Die Funktion $y = \log \operatorname{nat} x$ ist also in der Tat das, was man nach der gewöhnlichen Definition den Logarithmus von x zur Basis e nennen würde,* wobei hier e durch die Reihe, nicht als $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist.

3. Einen *bequemeren Weg zur Ableitung der Exponentialreihe* konnte *Brook Taylor* einschlagen, nachdem er in seinem Werke „*Methodus incrementorum*"[3]) die nach ihm benannte *allgemeine Reihenentwicklung* aufgestellt hatte, von der wir später noch viel zu sprechen haben werden. Er brauchte dann nur aus der in der Integraldefinition des Logarithmus enthaltenen Relation:

$$\frac{d \log x}{d x} = \frac{1}{x}$$

für die inverse Funktion zu schließen:

$$\frac{d e^y}{d y} = e^y$$

und konnte als Spezialfall seiner allgemeinen Reihe die Exponentialreihe sofort hinschreiben.

Wir haben früher (S. 89) gesehen, wie auf diese *produktive Epoche* die *kritische,* fast möchte ich sagen die Periode des moralischen Jammers

---

[1]) *Newton, J.:* Opuscula. Tome I, op. 1. Lausanne 1744. — Zuerst erschienen 1711.

[2]) l. c. S. 20.

[3]) London 1715.

folgte, in der man vor allem die neu gewonnenen Resultate sicher zu fundieren und das möglicherweise Falsche abzutrennen suchte. Wir müssen nun näher zusehen, wie sich die in diese neue Richtung weisenden Lehrbücher von *Euler* und *Lagrange* zu der Exponentialfunktion und dem Logarithmus verhalten haben.

Beginnen wir mit *Eulers „Introductio in analysin infinitorum"* [1]. Lassen Sie mich vorab die *außerordentliche, bewunderungswürdige analytische Geschicklichkeit Eulers* in allen seinen Entwicklungen rühmen, dabei aber bemerken, daß er noch *keine Spur der Strenge* besitzt, die man heute zu verlangen gewöhnt ist.

Euler stellt *an die Spitze seiner Entwicklungen den binomischen Satz:*

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1}k + \frac{l(l-1)}{1\cdot 2}k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3 + \cdots$$

für ganzzahligen Exponenten l; für nicht ganzzahlige Exponenten betrachtet Euler diesen Satz in der Introductio überhaupt nicht. Diese Entwicklung spezialisiert er für den Ausdruck:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny},$$

wobei ny ganzzahlig ist; läßt er dann n — unter Aufrechterhaltung dieser Bedingung — zur Grenze ∞ übergehen und nimmt in der Reihenentwicklung *diesen Grenzprozeß in jedem einzelnen Gliede vor*, so erhält er die *Exponentialreihe:*

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots,$$

wobei e durch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist. Ob freilich die einzelnen Schritte dieses Verfahrens auch im heutigen Sinne *streng* sind, ob z. B. die Summe der Grenzwerte der Reihenglieder wirklich den Grenzwert der Reihensumme liefert, darüber macht sich Euler weiter keine Sorge. Diese Ableitung der Exponentialreihe ist, wie Ihnen bekannt ist, für zahlreiche Lehrbücher der Infinitesimalrechnung in ihrem Gedankengange vorbildlich geblieben, wobei man allerdings je länger je mehr die einzelnen Schritte für sich herausgearbeitet und auf den Nachweis ihrer exakten Gültigkeit Gewicht gelegt hat. Wie sehr bestimmend übrigens Eulers Schrift für die ganze Entwicklung dieser Dinge geworden ist, sehen Sie daraus, daß der Gebrauch des Buchstabens e für jene ausgezeichnete Zahl von ihm ausgeht: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 . . . constanter litteram e . . ." heißt es auf S. 90.

Ich darf hier vielleicht sogleich erwähnen, daß eine *ganz analoge Ableitung der Sinus- und Cosinusreihe* von Euler unmittelbar im An-

[1] Lausanne 1748. Caput VII, p. 85ff. Übersetzung von Maser, Berlin 1885, S. 70. [Vgl. auch Bd. VIII (1923) der von F. Rudio, A. Krazer und P. Stäckel besorgten Ausgabe der Eulerschen Werke.]

schluß hieran gegeben wird. Er geht zu diesem Ende von der Entwicklung von $\sin\varphi$ nach Potenzen von $\sin\frac{\varphi}{n}$ aus und läßt n gegen ∞ konvergieren. Daß das in der Tat nichts als Grenzübergang vom binomischen Satz aus ist, sieht man, wenn man die fragliche Potenzentwicklung der „*Moivreschen Formel*":

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{\varphi}{n}\right)^n \cdot \left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

entnimmt.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung des *Lagrangeschen Werkes*, der „*Théorie des fonctions analytiques*" [1]. Wiederum ist zuerst zu betonen, daß Konvergenzfragen hier höchstens ganz beiläufig behandelt werden. Ich berichtete bereits (S. 90), daß Lagrange *nur solche Funktionen in Betracht zieht, die durch Potenzreihen gegeben sind*, und ihre Differentialquotienten rein formal durch abgeleitete Potenzreihen definiert. Daher ist *für ihn die Taylorsche Reihe:*

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

einfach das Resultat einer formalen Umordnung der ursprünglich nach Potenzen von $x + h$ fortschreitenden Reihe $f(x+h)$; will man sie dann freilich auf eine bestimmte Funktion wirklich anwenden, so müßte man genau genommen immer vorher zeigen, daß diese Funktion zu den „analytischen" gehört, d. h. daß sie sich überhaupt in eine Potenzreihe entwickeln läßt.

Nun beginnt Lagrange mit der Untersuchung der *Funktion* $f(x) = x^n$ *für rationales* n und bestimmt $f'(x)$ als Koeffizienten von h^1 in der Entwicklung von $(x+h)^n$, indem er die ersten beiden Glieder wirklich ausgerechnet denkt; nach demselben Gesetz erhält er sofort auch $f''(x), f'''(x), \ldots$, und die *binomische Entwicklung von* $(x+h)^n$ ergibt sich *als Spezialfall der Taylorschen Reihe für* $f(x+h)$. Übrigens bemerke ich ausdrücklich, daß Lagrange den Fall irrationaler Exponenten n nicht weiter behandelt, sondern ihn als selbstverständlich mit erledigt ansieht, wenn er alle rationalen Werte berücksichtigt hat; es ist interessant, sich das zu vergegenwärtigen, da man doch heute auf die genaue Herausarbeitung solcher Übergänge das größte Gewicht legt.

Diese Resultate verwendet Lagrange zu einer ähnlichen Behandlung der *Funktion* $f(x) = (1+b)^x$. Indem er die Binomialreihe für $(1+b)^{x+h}$ umordnet, findet er nämlich $f'(x)$ als Koeffizienten von h, bestimmt sodann nach demselben Gesetz $f''(x), f'''(x), \ldots$ und setzt damit endlich die Taylorsche Reihe für $f(x+h) = (1+b)^{x+h}$ an; für $x = 0$ ist er damit im Besitz der *gewünschten Exponentialreihe*.

[1] Paris 1797. — Abgedruckt in *Lagrange:* Oeuvres. T. IV. Paris 1881; vergleiche besonders Kapitel III, p. 34ff.

Ich möchte nun, meine Herren, diesen historischen Überblick, in dem ich natürlich immer nur die Namen allerersten Ranges nennen konnte, dadurch abschließen, daß ich noch kurz aufführe, *was im 19. Jahrhundert an wesentlich neuen Wendungen hinzukam*. Da habe ich an erster Stelle

1. *die genauen Begriffsbildungen über die Konvergenz unendlicher Reihen und anderer unendlicher Prozesse* zu nennen. Allen voran geht da *Gauß* mit seiner *Abhandlung über die hypergeometrische Reihe von 1812* („Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \cdots$")[1] ihm folgt *Abels Arbeit über die binomische Reihe von 1826* („Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \cdots$")[2], während *Cauchy* in den zwanziger Jahren *in seinem „Cours d'analyse"*[3] *zum ersten Male allgemeine Betrachtungen über Reihenkonvergenz* anstellt. Das Resultat dieser Arbeiten für die hier in Betracht kommenden Reihen ist, *daß alle früheren Entwicklungen jeweils im Konvergenzbereiche richtig sind, wobei die genauen Beweise freilich sehr kompliziert werden*. Für die nähere Ausführung solcher Beweise in moderner Gestalt verweise ich wiederum auf Burkhardts algebraische Analysis oder auch auf Weber-Wellstein.

2. Obwohl wir später erst ausführlich davon zu reden haben werden, muß ich hier schon die *endgültige Begründung der Infinitesimalrechnung durch Cauchy* erwähnen; *durch sie wird nämlich jener oben besprochenen Theorie des Logarithmus, die im 17. Jahrhundert von Bürgi und Neper ausgeht, volle mathematische Exaktheit verliehen.*

3. Endlich ist noch die Entstehung derjenigen Theorie aufzuführen, die allein erst zum vollen Verständnis der Logarithmus- und Exponentialfunktion verhilft, der *Theorie der Funktionen komplexen Arguments*, kurzweg häufig *„Funktionentheorie"* genannt. Zuerst vollkommen überblickt hat die Grundzüge dieser Theorie wiederum *Gauß*, wenn er auch wenig oder gar nichts darüber veröffentlicht hat. Für uns interessant ist vor allem ein *Brief vom 18. Dezember 1811 an Bessel*, der freilich erst viel später veröffentlicht wurde[4]; hier wird nämlich mit wunderbarer Klarheit die *Bedeutung des Integrals* $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ *in der komplexen*

---

[1] Commentationes societatis regiae Gottingiensis recentiores Vol. II. 1813, Nr. 1, S. 1—46 = Werke Bd. III, S. 123—162. Deutsche Übersetzung von Simon, Berlin 1888.

[2] Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 1 (1826), S. 311—339 = Ostwalds Klassiker Nr. 71.

[3] Première Partie, Analyse algébrique. Paris 1821 = Oeuvres, Série II, Tome III. Paris 1897. Deutsche Übersetzung von Itzigsohn, Berlin 1885.

[4] Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, herausgegeben von Auwers, Berlin 1880 oder Gauß Werke, Bd. VIII, 1900, S. 90.

Ebene geschildert und erklärt, inwiefern es *eine unendlichvieldeutige Funktion* darstellt. — Der Ruhm, die komplexe Funktionentheorie gleichfalls selbständig geschaffen und sie dann auch bekannt gemacht zu haben, gebührt übrigens wiederum *Cauchy*.

Das aus dieser zu Beginn des 19. Jahrhunderts sich vollziehenden Entwicklung für unseren besonderen Gegenstand herausspringende Erträgnis wäre etwa dahin zusammenzufassen, *daß die von der Hyperbelquadratur ausgehende Einführung des Logarithmus genau die gleiche Strenge besitzt wie jede andere Methode, während sie obendrein, wie wir bereits sahen, an Einfachheit und Anschaulichkeit allen voransteht.*

3. Einiges über den Schulbetrieb der Logarithmenlehre.

Freilich ist diese *moderne Entwicklung merkwürdigerweise an dem Betriebe des Schulunterrichts in der Hauptsache spurlos vorbeigegangen*, worauf ich ja schon öfters hinwies. Man hilft sich heute immer noch trotz allen Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten mit umständlicher *algebraischer Analysis* und *vermeidet jeden glatten Infinitesimalkalkül*, obwohl doch eben die Scheu des 18. Jahrhunderts vor diesem längst gegenstandslos geworden ist. Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, daß der *mathematische Schulbetrieb und die vorwärtsgehende Forschung vom Beginn des 19. Jahrhunderts an gänzlich außer Kontakt* gerieten. Das ist eigentlich um so merkwürdiger, als überhaupt erst in den ersten Jahrzehnten eben dieses Jahrhunderts die Ausbildung spezifisch mathematischer Lehramtskandidaten beginnt. Ich habe ja auf diese *Diskontinuität*, die hier lange bestand und jede Reform der Schultradition hinderte, schon in der Einleitung hingewiesen: Man kümmerte sich auf der Schule immer recht wenig darum, wie die Hochschule die gegebenen Ansätze etwa weiter ausbauen konnte, und begnügte sich daher vielfach mit Definitionen, die vorläufig vielleicht ausreichten, weitergehenden Ansprüchen gegenüber aber versagten. Mit andern Worten: Euler blieb maßgebend für die höhere Schule. Und umgekehrt gibt sich die Hochschule wieder häufig keine besondere Mühe, genau an das auf der Schule Gegebene anzuschließen, sondern sie baut ihr eigenes System auf, und nur einzelnes wird mit dem nicht immer zutreffenden Hinweis: „Das haben Sie auf der Schule schon gehabt" abgetan.

Demgegenüber ist die Bemerkung interessant, daß solche Hochschullehrer, die für weitere Kreise — Naturwissenschaftler und Techniker — Vorlesungen zu halten haben, von sich aus bei ihrer *Praxis zu einer ganz ähnlichen Einführung des Logarithmus gekommen sind, wie ich sie hier empfehle*. Ich will Ihnen da besonders *Scheffers* „*Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik*" [1]) nennen; dort finden Sie im 6. und 7. Kapitel eine sehr ausführ-

[1]) Leipzig 1905. — [7. Aufl. 1932.]

liche Theorie des Logarithmus und der Exponentialfunktion, die ganz mit unserm Aufbau übereinstimmt und der sich im 8. Kapitel eine ähnliche Theorie der trigonometrischen Funktionen anschließt. Ich empfehle Ihnen sehr, von diesem Buche Kenntnis zu nehmen; es ist für den Leserkreis, an den es sich wendet, äußerst geeignet, indem es den Stoff in sehr ausführlicher, bequem lesbarer und auch dem weniger Begabten leicht zugänglicher Weise darbietet. Beachten Sie die große *pädagogische Geschicklichkeit*, die Scheffers besitzt, wenn er etwa — um ein Beispiel herauszugreifen — immer wieder darauf hinweist, wie wenig an neuen Formeln man in der ganzen Logarithmenlehre auswendig zu lernen braucht, wenn man alles andere nur einmal *verstanden* hat, um es dann, wenn man es braucht, bequem nachschlagen zu können; dadurch ermuntert er seinen Leser immer aufs neue auch bei der anscheinend so großen Fülle des neuen Stoffes zum Ausharren. Für unsern gegenwärtigen Zusammenhang sei übrigens noch darauf hingewiesen, daß Scheffers überall die Darstellung der Schule zwar als gegeben vorliegend annimmt, jedoch völlig unabhängig von ihr seine Entwicklungen ausführt, indem er voraussetzt, daß ein großer Teil der Schulkenntnisse doch schon wieder vergessen ist. Es liegt ihm jedoch in dem angeführten Buche ganz ferne, Vorschläge zur Reform des Schulunterrichts selbst zu machen, wie ich das tue.

Ich möchte nun hier noch einmal ganz kurz zusammenfassen, wie ich mir die *Einführung des Logarithmus auf der Schule auf jenem einfachen und natürlichen Wege* etwa denken würde: Der *oberste Grundsatz* ist, daß *die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven* ist. Das entspricht, wie ich zeigte, einmal dem *historischen Sachverhalt*, ebenso aber auch dem *Vorgehen in den höheren Teilen der Mathematik* (vgl. z. B. die elliptischen Funktionen). Im Verfolg dieses allgemeinen Prinzips geht man nun von der *Hyperbel* $\eta = \frac{1}{\xi}$ aus (vgl. Abb. 57) und bezeichnet den *Flächeninhalt des unter ihr gelegenen, von der Ordinate $\xi = 1$ bis zu der Ordinate $\xi = x$ reichenden Flächenstückes als Logarithmus von x.* Indem man die Endordinate sich bewegen läßt, kann man aus der geometrischen Anschauung heraus die Änderung des Inhalts mit ξ qualitativ leicht übersehen und daher die Kurve $\eta = \log \xi$ ihrem ungefähren Verlaufe nach zeichnen.

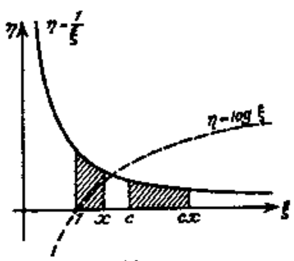


Abb. 57.

Um nun die *Funktionalgleichung* des Logarithmus möglichst einfach zu gewinnen, kann man etwa davon ausgehen, daß:

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi}$$

ist, wie sich durch die Transformation $c\xi = \xi'$ der Integrationsvariablen ergibt; d. h. *der Flächeninhalt zwischen den Ordinaten 1 und x ist derselbe, wie zwischen den um das c-fache vom Nullpunkt entfernten Ordinaten c und cx.* Diese Tatsache kann man aber leicht geometrisch sehr anschaulich machen, indem man sagt, *daß die Größe des Flächenstücks erhalten bleibt, wenn man es unter der Hyperbel entlang schiebt und dabei nur in dem Maße ausdehnt, wie die Höhe verringert wird.* Nach diesem Satze ergibt sich sofort das Additionstheorem:

$$\int_1^{x_1}\frac{d\xi}{\xi}+\int_1^{x_2}\frac{d\xi}{\xi}=\int_1^{x_1}\frac{d\xi}{\xi}+\int_{x_1}^{x_1\cdot x_2}\frac{d\xi}{\xi}=\int_1^{x_1\cdot x_2}\frac{d\xi}{\xi}.$$

Ich würde sehr wünschen, daß man diesen Weg recht bald einmal im Schulunterricht praktisch erproben möchte; wie sich dabei die Durchführung im einzelnen zu gestalten hat, das muß natürlich der erfahrene Schulmann entscheiden. Im Meraner Lehrplan haben wir übrigens noch nicht gewagt, diesen Weg als Norm vorzuschlagen.

4. Der Standpunkt der Funktionentheorie.

Wir wollen uns nun endlich noch darüber orientieren, wie die moderne Funktionentheorie komplexer Variabler den Logarithmus behandelt; erst hier werden wir volle Aufklärung über alle die früher berührten Schwierigkeiten erhalten. Wir führen fortan statt y und x *komplexe Variable $w = u + iv$ und $z = x + iy$* ein; dann wird:

1. *der Logarithmus definiert durch das Integral:*

$$w=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1}$$

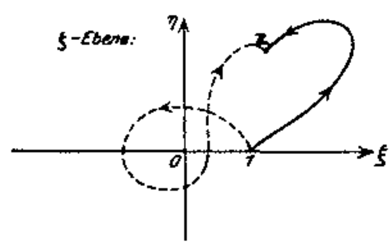


Abb. 58.

wobei der Integrationsweg (vgl. Abb. 58) irgendeine von $\zeta = 1$ nach $\zeta = z$ führende Kurve der komplexen ζ-Ebene ist.

2. Je nachdem der Integrationsweg den Punkt $\zeta = 0$ keinmal, einmal, zweimal, ... umläuft, nimmt das Integral *unendlich viele verschiedene Werte* an, so daß $\log z$ *eine unendlich vieldeutige Funktion* wird. Ein bestimmter Wert, der *Hauptwert* $[\log z]$, wird festgelegt, *wenn wir die Ebene etwa längs der negativen reellen Achse aufschneiden* und dem Integrationswege das Überschreiten dieses Querschnittes verbieten; willkürlich bleibt dabei nur, ob man die *negativ reellen Werte* selbst von oben oder unten erreichen lassen will, und je nach der Entscheidung darüber erhält ihr Logarithmus den imaginären Bestandteil

$+\pi i$ oder $-\pi i$. *Aus dem Hauptwert ergibt sich der allgemeine Wert des Logarithmus durch Addition eines beliebigen Vielfachen von $2i\pi$:*

$$\log z = [\log z] + 2k\pi i. \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

3. Aus der Integraldefinition von $w = \log z$ folgt, *daß die Umkehrfunktion $z = f(w)$ der Differentialgleichung*:

$$\frac{df}{dw} = f \tag{3}$$

genügt; hieraus läßt sich dann die *Potenzreihenentwicklung von f* sofort herstellen:

$$z = f(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots .$$

Da diese Reihe für jedes endliche w konvergiert, kann man weiterhin schließen, *daß die Umkehrfunktion eine eindeutige Funktion ist, die nur für $w = \infty$ singulär wird,* also eine *„ganze" transzendente Funktion* ist.

4. Genau wie im Reellen kann man aus der Integraldefinition das *Additionstheorem des Logarithmus* herleiten. Aus diesem folgt für die Inverse die Gleichung:

$$f(w_1) \cdot f(w_2) = f(w_1 + w_2). \tag{4}$$

Ebenso ergibt sich aus (2):

$$f(w + 2k\pi i) = f(w), \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{5}$$

d. h. $f(w)$ ist eine einfach periodische Funktion mit der Periode $2\pi i$.

5. Es sei $f(1) = e$. Dann folgt aus (3), daß *für jeden rationalen Wert $w = \frac{m}{n}$ die Funktion $f(w)$ einem der n in gewöhnlicher Weise definierten Werte $\sqrt[n]{e^m}$ gleich ist:* $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}$.

Es ist nun üblich — und diesem Gebrauch wollen wir uns anschließen — *mit $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ schlechtweg stets diesen einen Wert $f(w)$ zu bezeichnen,* so daß dann e^w *eine wohl bestimmte eindeutige Funktion,* eben die durch Gleichung (3) definierte, darstellt.

6. Was für eine Funktion werden wir nun *im allgemeinsten Sinne unter der Potenz b^w mit von Null verschiedener, aber sonst beliebiger Basis b* zu verstehen haben? Die Festsetzungen werden natürlich so zu treffen sein, daß die formalen Potenzregeln erhalten bleiben. Setzen wir also, um b^w auf das soeben definierte e^w zurückzuführen, b gleich $e^{\log b}$, wobei $\log b$ die unendlich vielen Werte:

$$\log b = [\log b] + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

hat, so wird notwendig:

$$b^w = (e^{\log b})^w = e^{w \cdot \log b} = e^{w[\log b]} \cdot e^{2k\pi i w}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und dieser Ausdruck stellt für *voneinander* verschiedene Werte von k *voneinander verschiedene durchaus unzusammenhängende Funktionen* dar. Wir haben so das merkwürdige Ergebnis, *daß die Werte des allgemeinen Exponentialausdrucks b^w, so wie sie sich durch die Prozesse des Potenzierens und Radizierens ergeben, gar nicht einer einheitlichen analytischen Funktion angehören, sondern unendlich vielen verschiedenen Funktionen von w, deren jede durchaus eindeutig ist.*

Die Werte dieser Funktionen stehen freilich in mancherlei Beziehung zueinander. Insbesondere sind sie alle *gleich, sowie w eine ganze Zahl* ist, und es gibt *nur endlich viele (und zwar n) verschiedene unter ihnen, wenn w eine rationale Zahl der Form* $\frac{m}{n}$ ist (wobei m und n teilerfremde ganze Zahlen sind); diese Werte sind $e^{\frac{m}{n}[\log b]} \cdot e^{2k\pi i\frac{m}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, also, wie es ja auch sein muß, die n Werte von $\sqrt[n]{b^m}$.

7. Nun erst können wir recht einsehen, *wie unzweckmäßig die herkömmliche Systematik ist*, die vom Potenzieren und Radizieren aus zur eindeutigen Exponentialfunktion aufsteigen will; sie begibt sich geradezu in ein *Labyrinth*, in dem sie sich mit ihren sogenannten „elementaren" Hilfsmitteln unmöglich zurechtfinden kann, zumal sie sich immer an reelle Größen gebunden hält. Sie werden das deutlich erkennen, wenn Sie auf Grund der jetzt gewonnenen allgemeinen Einsicht einmal die Verhältnisse bei *negativem b* durchdenken. An dieser Stelle will ich nur noch darauf hinweisen, daß wir erst jetzt die Zweckmäßigkeit der früher willkürlich erscheinenden *Definition des Hauptwertes* ($b > 0$ und $b^{\frac{m}{n}} > 0$; vgl. S. 156) wirklich verstehen können: sie liefert lauter Werte der *einen unserer unendlich vielen Funktionen, nämlich der Funktion:*

$$[b^w] = e^{w[\log b]}.$$

Hingegen gehören die gleichfalls überall dicht liegenden negativen reellen Werte $b^{\frac{m}{n}}$ bei geradem n ganz *verschiedenen von unseren unendlich vielen Funktionen* an; sie können sich daher unmöglich zu einer stetigen analytischen Kurve zusammenschließen.

Ich möchte nun noch einige tiefergehende *Bemerkungen über die funktionentheoretische Natur des Logarithmus* anfügen. Da $w = \log z$ bei jedem Umlauf um $z = 0$ einen additiven Zuwachs um $2\pi i$ erfährt, hat die zugehörige unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche daselbst einen *Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung*, derart, daß man bei jedem Umlauf aus einem Blatte in das nächste kommt; man kann durch Übergang zur Riemannschen Kugel leicht erkennen, daß $z = \infty$ *ein zweiter Verzweigungspunkt genau derselben Art* der Fläche ist — andere gibt es nicht. Wir können uns nunmehr das anschaulich klar machen, was man die *uniformisierende Kraft des Logarithmus* nennt und wovon wir schon gelegentlich der Lösung gewisser algebraischer Gleichungen sprachen

(S. 143 f.). Hat man nämlich, um die Ideen zu fixieren, eine *rationale Potenz* $z^{\frac{m}{n}}$, so wird sie wegen:

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z}$$

eine *eindeutige Funktion von* $w = \log z$, *sie wird — wie man sagt — durch den Logarithmus uniformisiert*. Um dies zu verstehen, denken wir uns über der z-Ebene außer der Riemannschen Fläche des Logarithmus auch diejenige von $z^{\frac{m}{n}}$ ausgebreitet: es wird eine *n-blättrige Fläche*, deren Verzweigungsstellen gleichfalls bei $z = 0$ und $z = \infty$ liegen, wobei jeweils alle n Blätter im Zyklus zusammenhängen. Fassen wir nun irgendeinen geschlossenen Weg in der z-Ebene auf (vgl. Abb. 59), auf dem der Logarithmus wieder zu seinem Ausgangswert zurückkehrt, der also auch auf dessen unendlichblättriger Fläche geschlossen ist, so sieht man leicht, daß er jedenfalls auch geschlossen bleiben muß, wenn man ihn auf die n-blättrige Fläche von $z^{\frac{m}{n}}$ überträgt. Aus dieser geometrischen Betrachtung entnehmen wir sofort, daß $z^{\frac{m}{n}}$ allemal dann zum Ausgangswert zurückkehrt, wenn $\log z$ es tut, und somit eine eindeutige Funktion von $\log z$ ist. Ich mache diese kurzen Andeutungen um so lieber, als wir hier den einfachsten Fall des in der modernen Funktionentheorie eine so große Rolle spielenden *Uniformisierungsprinzips* vor uns haben.

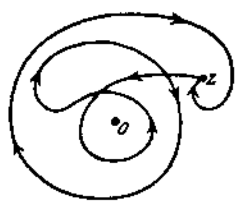


Abb. 59.

Wir wollen uns nun die *Natur des Funktionsverhältnisses* $w = \log z$ *durch die Betrachtung der konformen Abbildung der z-Ebene (bzw. Riemannschen Fläche) auf die w-Ebene noch klarer machen;* um nicht zu weit ausholen zu müssen, wollen wir hier auf die an sich natürlich vorzuziehende Betrachtung der entsprechenden Kugeln verzichten. Wir zerlegen, wie früher, die z-Ebene durch die Achse der reellen Zahlen in eine *schraffierte* (obere) und eine *nicht schraffierte* (untere) Halbebene. Eine jede muß in der w-Ebene *unendlich viele Bilder* haben, da $\log z$ unendlich vieldeutig ist, und alle diese Bilder müssen sich *schlicht nebeneinanderlegen*, da die Umkehrfunktion $z = e^w$ eindeutig ist. Im einzelnen entsteht so eine *Einteilung der w-Ebene in Parallelstreifen von der Breite* π, die durch Parallelen zur reellen Achse hervorgerufen wird (vgl. Abb. 60); diese Streifen sind abwechselnd zu schraffieren und frei zu lassen (der erste oberhalb der reellen Achse ist schraffiert) und stellen demgemäß abwechselnd konforme Abbilder der oberen und unteren Halbebene z dar, während die Grenzparallelen den Teilen der reellen z-Achse entsprechen. Was die Zuordnung im einzelnen angeht, so bemerke ich hier nur, daß *z allemal nach 0* geht, *wenn w* innerhalb eines Streifens *nach links hin ins Unendliche* konvergiert, während es *nach* ∞ strebt, *wenn w nach rechts hin ins Unendliche* rückt; bei $w = \infty$ ist eine *wesentlich singuläre Stelle der Umkehrfunktion* e^w.

Ich möchte hier nicht unterlassen, auf die Beziehung dieser Darlegungen zum *Picardschen Satze* hinzuweisen, der ja einer der interessantesten Sätze in der neueren Funktionentheorie ist. Es sei $z(w)$ eine *ganze transzendente* Funktion, d. h. eine Funktion, die nur eine in $w = \infty$ gelegene wesentlich singuläre Stelle besitzt (wie z. B. e^w). Die Frage ist, ob und wieviele Werte z es geben kann, die an keiner endlichen Stelle w angenommen werden, denen sich $z(w)$ vielmehr nur *nähert*, wenn w in geeigneter Weise nach ∞ läuft. Der *Picardsche Satz* sagt nun aus, daß eine Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle höchstens zwei verschiedene Werte nicht annehmen kann, daß also eine ganze Transzendente außer dem Wert $z = \infty$, den sie ja notwendig ausläßt, *höchstens noch einen Wert nicht annehmen darf.* e^w ist ein Beispiel einer Funktion, die wirklich außer ∞ noch einen Wert, nämlich $z = 0$, ausläßt: in einem jeden Parallelstreifen unserer Teilung nähert sich zwar e^w bei den angegebenen Grenzübergängen jenen beiden Werten, wird ihnen aber an keiner endlichen Stelle gleich. Eine Funktion, die außer $z = \infty$ keinen Wert ausläßt, ist $\sin w$.

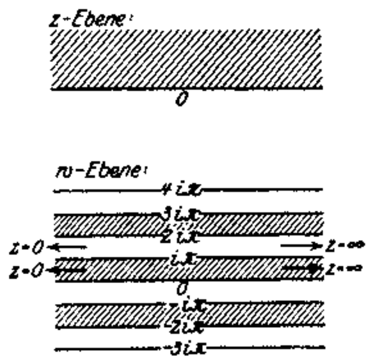


Abb. 60.

Zum Schlusse dieser Auseinandersetzungen will ich noch einen schon wiederholt berührten Punkt unter Verwendung dieser geometrischen Hilfsmittel erörtern, nämlich *den Grenzübergang von der Potenz zur Exponentialfunktion, der an die Formel:*

$$e^w = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nw}$$

anknüpfte, welche, wenn wir $n \cdot w = \nu$ setzen, die Gestalt annimmt:

$$e^w = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu}.$$

Betrachten wir dazu die Funktion vor dem Grenzübergange:

$$f_\nu(w) = \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu},$$

deren funktionentheoretisches Verhalten als Potenz uns wohl bekannt ist. Sie hat zu *„merkwürdigen Punkten"* die Punkte $w = -\nu$ und $w = \infty$, an denen die Basis 0 bzw. ∞ wird, und bildet die f_ν-Halbebenen konform ab auf Sektoren der w-Ebene mit dem Punkte $w = -\nu$

als Scheitel und einer Winkelöffnung von je $\frac{\pi}{\nu}$ (vgl. Abb. 61); ist ν keine ganze Zahl, so kann die Folge dieser Sektoren die w-Ebene endlichoft — oder gar unendlich oft überdecken, entsprechend der dann auftretenden Vieldeutigkeit von f_ν. Konvergiert nun ν gegen Unendlich, so rückt der Scheitelpunkt $-\nu$ der Sektorenteilung unbegrenzt nach links, und es ist durchaus anschaulich, *wie die rechts von $-\nu$ gelegenen Sektoren in die der Grenzfunktion e^w entsprechenden Parallelstreifen der w-Ebene übergehen.* Damit ist jene Limesdefinition von e^w geometrisch erläutert. Man kann durch eine leichte Rechnung bestätigen, daß die Breite der Sektoren am Punkte $w = 0$ in die Streifenbreite π der Parallelteilung übergeht.

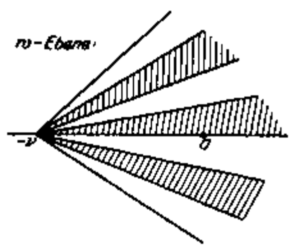


Abb. 61.

Nun stellt sich aber sofort ein Skrupel ein: Lassen wir ν stetig ins Unendliche laufen, so durchläuft es nicht nur ganzzahlige, sondern auch rationale und irrationale Werte, für die f_ν *mehrdeutig* wird und denen daher *mehrblättrige Flächen* entsprechen; *wie können diese in die zur eindeutigen Funktion e^w gehörige schlichte Ebene übergehen?* Läßt man z. B. ν durch lauter gebrochene Werte mit dem Nenner n gegen ∞ konvergieren, so hat jedes $f_\nu(w)$ eine n-blättrige Riemannsche Fläche. Wir wollen, um diesen Grenzprozeß zu verfolgen, für einen Moment die *w-Kugel* betrachten; sie ist für jedes der $f_\nu(w)$ mit n Blättern überdeckt, die an den Verzweigungspunkten $-\nu$ und ∞ zusammenhängen; der Verzweigungsschnitt sei, wie in der Abb. 62 angedeutet, längs des kleineren Meridianstückes zwischen ihnen gelegt. Geht nun ν gegen ∞, so rücken die Verzweigungspunkte zusammen und *der Verzweigungsschnitt verschwindet; damit wird die Brücke, über welche die n Blätter zusammenhängen, abgebrochen*, und es kommen *n getrennt liegende Blätter* und entsprechend *n verschiedene eindeutige Funktionen* heraus, von denen nur die eine unser e^w ist. — Lassen wir nun ν *alle reellen Werte* durchlaufen, so treten im allgemeinen *unendlichblättrige Flächen* auf, deren Zusammenhang in der Grenze gelöst wird; *die Werte auf je einem Blatte dieser Flächen konvergieren gegen das eindeutige e^w, das auf der schlichten Kugel ausgebreitet ist, während die Wertfolgen auf den andern Blättern im allgemeinen gar keine Grenzwerte haben.* Damit ist der gewiß recht komplizierte und wunderbare Grenzübergang von der vieldeutigen Potenz zur eindeutigen Exponentialfunktion erst völlig geklärt.

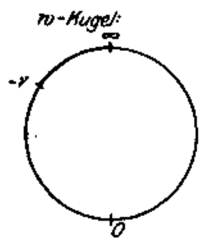


Abb. 62.

Als allgemeine Moral aller dieser letzten Betrachtungen können wir vielleicht noch aussprechen, *daß ein vollständiges inneres Verständnis* *solcher Probleme nur beim Übergang ins komplexe Gebiet möglich ist.* Wäre das nicht Grund genug, auch auf der Schule komplexe Funktionentheorie zu treiben? Max Simon z. B. hat in der Tat ähnliche Forderungen befürwortet. Ich glaube aber nicht, daß man den Durchschnitt der Schüler selbst in Prima so weit führen kann und meine schon deshalb, *man sollte die in solche Betrachtungen auslaufende Methodik der algebraischen Analysis im Unterricht überhaupt zugunsten des oben entwickelten einfachen und naturgemäßen Weges aufgeben.* Freilich wünsche ich um so mehr, *daß der Lehrer alle in Betracht kommenden funktionentheoretischen Zusammenhänge völlig beherrscht; denn er muß hinreichend über dem Stoff stehen, den er vorzutragen hat, und muß die Klippen und Untiefen genau kennen, an denen er seine Schüler vorbeiführt.*

Nach diesen ausführlichen Betrachtungen werden wir uns vielfach kürzer fassen können, wenn wir nunmehr in entsprechender Weise von den goniometrischen Funktionen sprechen.

II. Die goniometrischen Funktionen.

Bemerken wir vorweg, daß wir diesen Namen dem vielfach üblichen „trigonometrische Funktionen" vorziehen, weil die *Dreieckslehre nur eine besondere Anwendung dieser in der gesamten Mathematik höchst wichtigen Funktionen* ist; ihre inversen Funktionen, die genau dem Logarithmus entsprechen (während sie selbst der Exponentialfunktion analog sind) werden wir *zyklometrische Funktionen* nennen.

1. Theorie der goniometrischen Funktionen.

Wir knüpfen die theoretischen Betrachtungen an die Frage an, wie man die goniometrischen Funktionen auf der Schule am naturgemäßesten wird einführen können. Ich denke, daß man am besten auch da unser *allgemeines Prinzip, von der Flächenquadratur auszugehen,* anwenden wird; das übliche Verfahren, das mit der *Bogenmessung* beginnt, scheint mir nicht so unmittelbar anschaulich zu sein und hat vor allem nicht den Vorzug, daß man höhere und niedere Gebiete gleich einfach und einheitlich damit beherrschen kann.

Erlauben Sie mir, mich sogleich wieder der *analytischen Geometrie* zu bedienen; ich gehe dann aus:

1. von dem *Einheitskreise*

$$x^2 + y^2 = 1$$

und betrachte den *Sektor*, der von den von 0 auslaufenden Radienvektoren nach den Punkten A ($x = 1, y = 0$) und P (x, y) gebildet wird (vgl. Abb. 63 auf S. 176). Um mit den üblichen Bezeichnungen in Übereinstimmung zu kommen, *bezeichne ich seinen Flächeninhalt mit* $\frac{\varphi}{2}$ (denn dann ist der Bogen AP im üblichen Bogenmaß gleich φ).

2. *Unter den goniometrischen Funktionen Cosinus und Sinus von φ verstehen wir nun die Längen der Koordinaten x und y des Grenzpunktes P unseres Sektors $\frac{\varphi}{2}$;*

$$x = \cos\varphi\,, \qquad y = \sin\varphi\,.$$

Der Ursprung dieser Bezeichnung wird dabei freilich nicht klar, doch den kennt man überhaupt nicht recht; wahrscheinlich ist das Wort „Sinus" durch eine mißverständliche Übersetzung eines arabischen Wortes ins Lateinische entstanden. Da wir nicht vom Bogenmaß ausgingen, können wir die inversen Funktionen — d. h. den doppelten Sektor als Funktion der Koordinaten — nicht gut, wie bei uns üblich, als „*Arcus*" bezeichnen; wohl aber liegt es nahe, analog dieser Wortbildung $\frac{\varphi}{2}$ die „*Area*" des Sinus bzw. Cosinus, d. h. eben die zu ihm gehörige Fläche, zu nennen und zu schreiben:

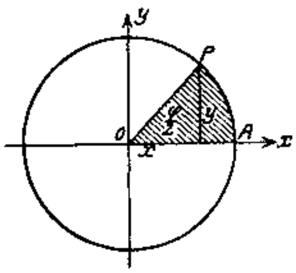


Abb. 63.

$$\varphi = 2\,\text{area}\sin y = \text{arc}\sin y\,, \qquad \varphi = 2\,\text{area}\cos x = \text{arc}\cos x\,.$$

Man kann indessen auch die gleichfalls recht zweckmäßige, in England übliche Schreibweise:

$$\varphi = \cos^{-1}x\,, \qquad \varphi = \sin^{-1}y\,.$$

verwenden.

3. Die *weiteren goniometrischen Funktionen:*

$$\text{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,, \quad \text{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,,$$

in der älteren Trigonometrie auch sec und cosec, werden als einfache rationale Verbindungen jener beiden Grundfunktionen definiert. Ihre Einführung geschieht nur mit Rücksicht auf die Kürze der für das praktische Rechnen zu verwendenden Formeln; theoretische Bedeutung haben sie für uns nicht.

4. Verfolgen wir die Koordinaten von P mit wachsendem φ, *so können wir uns qualitativ sofort die* cos- *und* sin-*Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.* Wir erhalten die bekannten *Wellenlinien*, die eine *gewisse Periode* 2π haben (vgl. Abb. 64); dabei ist *die Zahl* π *definiert als Inhalt des ganzen Einheitskreises* (nicht, wie sonst, als Länge des Halbkreises).

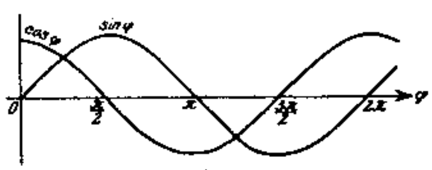


Abb. 64.

Mit diesen Definitionen wollen wir nun noch einmal genau unsere *Einführung des Logarithmus bzw. der Exponentialfunktion vergleichen.* Da legten wir zugrunde

1. *eine gleichseitige Hyperbel, bezogen auf das Koordinatensystem* ξ, η *ihrer Asymptoten*:
$$\xi \cdot \eta = 1\,;$$
die Halbachse dieser Hyperbel ist $OA = \sqrt{2}$, während vorhin der Kreis den Radius 1 hatte. Wir betrachten nun (vgl. Abb. 65) *den Inhalt des Streifens zwischen der festen zu* $\xi = 1$ *gehörigen Ordinate* AA' *und der beweglichen Ordinate* PP'; *heißt er* Φ, so setzten wir $\Phi = \log \xi$, und daher drücken sich die Koordinaten von P durch Φ folgendermaßen aus:
$$\xi = e^{\Phi}, \qquad \eta = e^{-\Phi}.$$

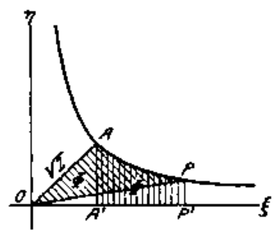


Abb. 65.

Sie bemerken eine *gewisse Analogie mit dem Obigen*, die vorläufig allerdings durch eine *zweifache Unstimmigkeit* gestört wird: Einmal ist Φ jetzt *kein Sektor*, wie vorhin, dann aber drücken sich jetzt beide Koordinaten rational durch die *eine* Funktion e^{Φ} aus, während wir beim Kreise *zwei* Funktionen sin, cos einführen mußten. Wir werden nun aber sehen, daß diese Abweichungen leicht zu beseitigen sind.

2. Zunächst bemerken wir, daß das Dreieck $OP'P$ den von der speziellen Lage von P unabhängigen Inhalt $\frac{1}{2} \cdot OP' \cdot P'P = \frac{1}{2}\xi \cdot \eta = \frac{1}{2}$ hat; insbesondere ist es also gleich dem Dreieck $OA'A$, und wenn wir dieses zu Φ hinzunehmen, jenes aber abziehen, so erkennen wir, *daß* Φ *als Inhalt eines Hyperbelsektors* OAP *zwischen den Radienvektoren nach dem Scheitel* A *und nach einem beweglichen Hyperbelpunkte* P *definiert werden kann* — genau wie vorhin beim Kreise. Den im Vorzeichen noch bestehenden Unterschied (von O aus gesehen, lief der Bogen AP vorhin nach links, jetzt läuft er nach rechts) beseitigen wir, *indem wir die Hyperbel an* OA *spiegeln*, d. h. ξ und η vertauschen; dann erhalten wir also als Koordinaten von P:
$$\xi = e^{-\Phi}, \qquad \eta = e^{\Phi}.$$

3. Endlich führen wir *statt der Asymptoten die Hauptachsen der Hyperbel als Koordinatenachsen* ein, indem wir die an OA gespiegelte Abb. 65 um 45° drehen (vgl. Abb. 66). Nennen wir die neuen Koordinaten X, Y, so sind die Gleichungen dieser Transformation:
$$X = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}}.$$
Dadurch geht die Hyperbelgleichung über in:
$$X^2 - Y^2 = 2,$$

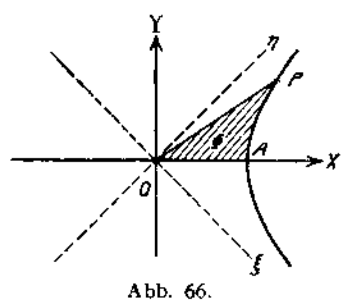


Abb. 66.

und der Sektor Φ erhält genau dieselbe Lage wie vorhin der Sektor $\frac{\varphi}{2}$ beim Kreise. Die neuen Koordinaten von P sind folgende Funktionen von Φ:

$$X = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4. Es bleibt nur noch übrig, die ganze Figur im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ zu verkleinern, damit die *Halbachse der Hyperbel gleich 1* statt gleich $\sqrt{2}$ wird, genau wie vorhin 1 der Kreisradius war. *Dann hat in völliger Übereinstimmung mit dem Vorigen der fragliche Sektor den Inhalt $\frac{1}{2}\Phi$, und wenn wir die neuen Koordinaten einfach wieder x, y nennen, werden sie gleich folgende Funktionen von Φ:*

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \qquad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$

die der Relation (Hyperbelgleichung) genügen:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Diese Funktionen nennt man *hyperbolischen Cosinus und Sinus* und schreibt sie:

$$x = \mathfrak{Cof}\,\Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \qquad y = \mathfrak{Sin}\,\Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Behandelt man also — das ist das Resultat — *Kreis und gleichseitige Hyperbel von der Halbachse 1 in wörtlich der gleichen Weise, so wird man das eine Mal auf die gewöhnlichen goniometrischen, das andere Mal auf die hyperbolischen Funktionen geführt, die einander also völlig entsprechen.*

Es ist Ihnen bekannt, daß man sich dieser Funktionen $\mathfrak{Cof}$ und $\mathfrak{Sin}$ in vielen Fällen mit Vorteil bedient. Trotzdem aber haben wir hier, was die Behandlung der Hyperbel angeht, *im Grunde einen Rückschritt* gemacht: *während wir zuerst die Koordinaten ξ, η durch eine einzige Funktion e^{Φ} rational darstellen konnten, brauchen wir jetzt deren zwei,* die durch eine algebraische Relation (die Hyperbelgleichung) verbunden sind. Es wird daher der Versuch naheliegen, lieber einmal umgekehrt die goniometrischen Funktionen ganz entsprechend den ursprünglichen Entwicklungen für die Hyperbel zu behandeln. Das geht in der Tat ganz leicht, wenn man nur den Durchgang durchs Komplexe nicht scheut, und es führt zur *Aufstellung einer einzigen fundamentalen Funktion, durch die sich* $\cos\varphi$ *und* $\sin\varphi$ *ähnlich rational ausdrücken, wie* $\mathfrak{Cof}\,\Phi$ *und* $\mathfrak{Sin}\,\Phi$ *durch* e^{Φ}, *und die daher in der Theorie der goniometrischen Funktionen eigentlich die zentrale Rolle zu spielen berufen ist.*

1. Wir führen dazu zunächst *in der Kreisgleichung* $x^2 + y^2 = 1$ (wo $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$) *die neuen Koordinaten:*

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = \eta$$

ein; dann geht sie über in:

$$\xi \cdot \eta = 1.$$

2. *Die gewünschte zentrale Funktion ist nun,* genau wie oben unter 2. bei der Hyperbel, *die zweite Koordinate η;* bezeichnen wir sie mit $f(\varphi)$, so ist wegen der Transformationsgleichungen:

$$\eta = f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \xi = \frac{1}{f(\varphi)} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

3. Aus den letzten Gleichungen ergibt sich sofort:

$$\cos\varphi = \frac{\xi+\eta}{2} = \frac{f(\varphi)+[f(\varphi)]^{-1}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-\xi+\eta}{2i} = \frac{f(\varphi)-[f(\varphi)]^{-1}}{2i},$$

wodurch wir *völlige Analogie mit den früheren Beziehungen zwischen* $\mathfrak{Cof}\,\Phi$, $\mathfrak{Sin}\,\Phi$, e^{Φ} erreicht haben. Kehrt man so von vornherein die Analogie der Kreis- und Hyperbelfunktionen hervor, so verliert die große Eulersche Entdeckung, daß $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ ist, das Überraschende, das sie sonst an sich hat.

Ist nun *nicht eine ähnliche Reduktion von* $\cos w$ *und* $\sin w$ *auf eine Fundamentalfunktion auch möglich, wenn man im reellen Gebiet bleibt?* Man gelangt in der Tat dazu, wenn man unsere Abbildungen mit den Augen der *projektiven Geometrie* betrachtet. Wir können nämlich bei der Hyperbel die Koordinate η, die uns die Fundamentalfunktion lieferte, definieren als *Parameter in einem Büschel* von Parallelen $\eta =$ konst., das, vom projektiven Standpunkte aus in seiner Beziehung zur Hyperbel betrachtet, nichts ist als ein *Strahlenbüschel mit einem* (hier speziell einem der unendlich fernen) *Hyperbelpunkte als Scheitel. Indem wir nun beim Kreise oder der Hyperbel allgemein den Parameter irgendeines solchen Büschels als Funktion des Flächeninhalts auffassen, werden wir ebenfalls zu einer Fundamentalfunktion kommen* — jetzt auf rellem Wege.

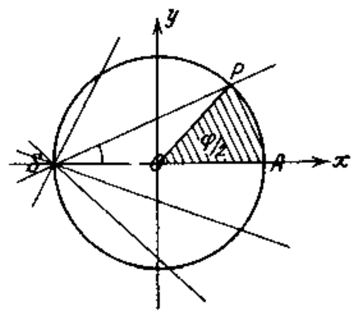


Abb. 67.

Wir betrachten dazu (vgl. Abb. 67) beim *Kreise* das Büschel durch den Punkt $S(-1, 0)$:

$$y = \lambda(x+1),$$

wobei λ der Parameter ist; wir hatten schon bei anderer Gelegenheit (S. 50) für die Koordinaten des Schnittes P des zu λ gehörigen Strahles mit dem Kreise ausgerechnet:

$$x = \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \qquad y = \sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

so daß:

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

tatsächlich eine geeignete reelle Fundamentalfunktion ist. Da übrigens $\sphericalangle PSO = \frac{1}{2} POA$, und $POA = \varphi$ ist, folgt sofort, daß $\lambda = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ ist; *diese von hier aus resultierende eindeutige Darstellung von* $\cos\varphi$ *und* $\sin\varphi$ *durch* $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ *wird bei trigonometrischen Rechnungen vielfach gebraucht.*

Der Zusammenhang von λ mit der früheren Fundamentalfunktion $f(\varphi)$ folgt aus der letzten Formel sofort in der Gestalt:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{1}{i}\,\frac{f - f^{-1}}{f + f^{-1} + 2} = \frac{1}{i}\,\frac{f^2 - 1}{f^2 + 1 + 2f} = \frac{1}{i}\,\frac{f(\varphi) - 1}{f(\varphi) + 1},$$

oder umgekehrt:

$$f(\varphi) = x + iy = \frac{1 - \lambda^2 + 2i\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}.$$

Die Einführung von λ kommt also schließlich einfach auf die Bestimmung einer linear gebrochenen Funktion von $f(\varphi)$ heraus, die längs der reellen Kreisperipherie reell ist; dadurch werden die Formeln zwar reell, aber doch etwas verwickelter als bei unmittelbarer Verwendung von $f(\varphi)$.

Ob man freilich den Vorteil der Realität gegen diesen Nachteil eintauschen will, das hängt davon ab, wie weit der einzelne mit komplexen Größen umzugehen versteht. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur, daß die Physiker jetzt schon lange zum Gebrauch komplexer Größen übergegangen sind, besonders z. B. in der Optik, sowie sie mit Schwingungsgleichungen zu tun haben. Aber auch die Techniker, vor allem die Elektrotechniker mit ihren Vektordiagrammen, bedienen sich neuerdings mit Vorteil der komplexen Größen. Man darf also wohl sagen, daß sich die Benutzung komplexer Größen in weiteren Kreisen endlich einzubürgern beginnt, wenn auch freilich zur Zeit noch die große Masse an der Beschränkung auf das Reelle festhält. —

Wenn wir nunmehr, meine Herren, kurz *den weiteren Aufbau der Theorie der goniometrischen Funktionen* überblicken sollen, so haben wir zuerst zu nennen:

1. *das Additionstheorem:*

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$$

und eine entsprechende Formel für $\cos(\varphi + \psi)$. Daß diese Formeln verhältnismäßig schwieriger aussehen als bei der Exponentialfunktion, ist natürlich nur darin begründet, daß wir hier eben nicht die wahre Elementarfunktion vor uns haben; für diese, unser $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, ergibt sich genau die für e^{φ} geltende höchst einfache Formel:

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi)\cdot f(\psi).$$

2. Von hier aus gelangt man zu den Ausdrücken der *Funktionen der Vielfachen und Teile eines Winkels*, von denen ich nur die beiden Formeln:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}, \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

hervorhebe, die bei der Berechnung der ersten trigonometrischen Tafeln von großer Bedeutung gewesen sind. Die eleganteste Zusammenfassung der hierhin gehörigen Beziehungen ist gegeben in der „*Moivreschen Formel*":

$$f(n \cdot \varphi) = [f(\varphi)]^n, \quad \text{wobei} \quad f(\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

ist. *Moivre*, der ein Franzose war, aber in London in der Umgebung Newtons lebte, hat diese Formel 1730 in seinem Buche „*Miscellanea analytica*" publiziert.

3. Von unserer ursprünglichen Definition von $y = \sin\varphi$ aus kann man natürlich leicht eine *Integraldarstellung der Inversen* $\varphi = \sin^{-1} y$ ableiten. Das aus dem Sektor $\frac{\varphi}{2}$ (AOP) des Einheitskreises (vgl. Abb. 68) und dem horizontal schraffierten Dreieck $OP'P$ zusammengesetzte Flächenstück wird von Abszissenachse, der Parallelen im Abstande y zu ihr und der Kurve $x = \sqrt{1-y^2}$ begrenzt und hat daher den Inhalt $\int\limits_0^y \sqrt{1-z^2}\,dz$; da jenes Dreieck den Inhalt $\frac{1}{2}\, OP' \cdot P'P$ $= \frac{1}{2}\, y\sqrt{1-y^2}$ hat, ist also:

$$\int\limits_0^y \sqrt{1-z^2}\,dz = \tfrac{1}{2}\, y\sqrt{1-y^2} + \tfrac{1}{2}\,\varphi .$$

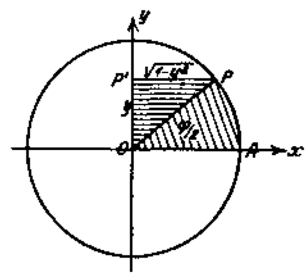


Abb. 68.

Hieraus folgt durch einfache Umformung:

$$\varphi = \sin^{-1} y = \int\limits_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} .$$

Nun kann man, ganz wie beim Logarithmus, indem man den Integranden nach dem binomischen Satze entwickelt und dann nach *Mercators* Gedanken gliedweise integriert, die *Potenzreihe für* $\sin^{-1} y$ ableiten und daraus *durch die Methode der Reihenumkehr die Sinusreihe* selbst erhalten; ähnlich ist auch — ich sprach ja schon davon (s. S. 88) — *Newton* selbst vorgegangen.

4. Ich möchte hier lieber einmal den kürzeren Weg einschlagen, den Taylors große Entdeckung eröffnet hat. Da schließt man zunächst aus der genannten Integralformel für den Differentialquotienten des Sinus selbst:

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{1-y^2} = \cos\varphi ,$$

und ganz analog folgt:

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi .$$

Nun ergibt sich sofort aus dem *Taylorschen Satze:*

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \cdots ,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \cdots .$$

Man sieht leicht, *daß diese Reihen für jedes endliche, auch komplexe* φ *konvergieren und dementsprechend* $\sin\varphi$ *und* $\cos\varphi$ *im ganzen komplexen Gebiete als eindeutige, ganze transzendente Funktionen definiert sind.*

5. Vergleichen wir diese Reihen mit der *Reihe für* e^{φ}, so ergibt sich unmittelbar, daß die Fundamentalfunktion:

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

ist; dieser Schluß wird unzweideutig erst durch die Erkenntnis möglich, daß $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ebenso wie e^{φ} eindeutige ganze Funktionen sind.

6. Wir haben nun noch den *Verlauf der komplexen Funktionen* $\sin w$, $\cos w$ zu beschreiben. Dazu bemerke ich zuerst, *daß die inversen Funktionen* $w = \sin^{-1} z$ *und* $w = \cos^{-1} z$ *je eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche mit den Verzweigungsstellen* -1, $+1$, ∞ *liefern*, und zwar liegen über $z = \pm 1$ je *unendlich viele* Verzweigungspunkte *erster*, über $z = \infty$ aber *zwei solche unendlich hoher Ordnung*. Um den Verlauf der Blätter im einzelnen besser zu verfolgen, betrachten wir wieder *die Einteilung der w-Ebene in Gebiete, die der (schraffierten) oberen und der (unschraffierten) unteren z-Halbebene entsprechen.* Für $z = \cos w$ entsteht sie durch die reelle Achse und die durch die Punkte $w = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ gelegten Parallelen zur imaginären Achse, wobei — wie aus der Abb. 69 ersichtlich — die entstehenden Dreiecksgebiete, die sämtlich ins Unendliche reichen, abwechselnd zu schraffieren und freizulassen sind.

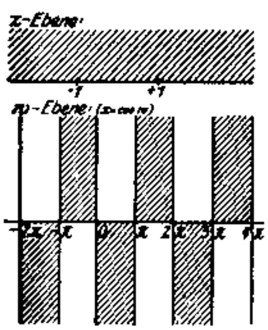


Abb. 69.

An den Punkten $w = 0$, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ (die $z = +1$ entsprechen) und den Punkten $w = \pm\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$ (die $z = -1$ entsprechen) stoßen immer vier Dreiecke zusammen, entsprechend den vier Halbblättern der Riemannschen Fläche, die an jedem der entsprechenden, über den Stellen $z = \pm 1$ liegenden Verzweigungspunkte zusammenhängen. Geht man innerhalb eines Dreiecks nach oben oder unten ins Unendliche, so nähert sich $\cos w$ beliebig dem Werte $z = \infty$; daß zwei getrennte Scharen von je unendlich vielen Dreiecken ins Unendliche reichen, entspricht also genau dem Umstande, daß auf der Riemannschen Fläche bei $z = \infty$ zwei getrennte Scharen von unendlich vielen Blättern untereinander zusammenhängen. — Für $z = \sin w$ gilt ganz Entsprechendes, nur ist die Abbildung in der w-Ebene um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben zu denken. — In den Abbildungen bestätigen sich auch unsere früheren Angaben über die Natur des wesentlich singulären Punktes bei $w = \infty$, wie wir sie gelegentlich der Erwähnung des Picardschen Satzes machten (S. 173).

2. Trigonometrische Tafelwerke.

Ich beende damit den kurzen Überblick über die Theorie der goniometrischen Funktionen und komme auf das zu sprechen, was für die *Praxis* die Hauptsache ist, nämlich auf die *trigonometrischen Tafeln;* ich will dabei auch gleichzeitig über die *Logarithmentafeln* sprechen, die ich bis hierhin zurückgestellt habe, da die Tabulierung der Logarithmen von Anfang an bis heute mit der der trigonometrischen Zahlen Hand in Hand gegangen ist. Wie die Logarithmentafeln in ihrer heutigen Form zustande gekommen sind, das ist eine gerade auch für den Schulmathematiker gewiß außerordentlich wichtige und interessante Frage. Ich kann nun natürlich an dieser Stelle Ihnen die äußerst langwierige Entwicklungsgeschichte der Tafelwerke nicht vollständig vorführen, sondern ich will nur einige wenige der markantesten Erscheinungen herausgreifen, um Ihnen einen ungefähren historischen Überblick zu vermitteln. Über die andern, gleichfalls vielfach sehr wichtigen Werke, die das Bild ergänzen, mögen Sie sich etwa bei *Tropfke* oder, was Logarithmentafeln angeht, in dem sehr ausführlichen Nachweis in *Mehmkes* Enzyklopädie-Referat über „*numerisches Rechnen*" (Enzykl. I. F.) sowie in der von *D'Ocagne* herrührenden französischen Bearbeitung dieses Referates[1]) orientieren.

An erster Stelle habe ich die Gruppe von

A. Rein trigonometrischen Tafeln

zu nennen, wie sie sich *vor Erfindung der Logarithmen* entwickelt haben. Man besaß solche Tafeln schon im Altertum, und zwar ist uns als erste

1. *die Sehnentafel des Ptolemäus* überliefert, die er für astronomische Zwecke *ums Jahr 150 n. Chr.* zusammengestellt hat. Sie befindet sich in seinem Werke „*Megale syntaxis*", in dem er auch das nach ihm genannte Weltsystem entwickelt und das ich Ihnen im Neudruck[2]) hier vorlege. Auf dem Umwege über die Araber ist uns dieses Werk unter dem vielgebrauchten Titel „*Almagest*" überkommen, der eine mit dem arabischen Artikel „al" versehene Entstellung des griechischen Titels sein mag. Die Tafel schreitet *von 30 zu 30 Minuten* fort und gibt *nicht direkt den Sinus des Winkels α, sondern die zu seinem Bogen gehörige Sehne* $\left(\text{also } 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Die Werte der Sehnen sind *in dreistelligen Sexagesimalbrüchen* angegeben, also in der Form $\frac{a}{60}+\frac{b}{3600}+\frac{c}{216000}$, wobei a, b, c ganze Zahlen zwischen Null und 59 sind; für uns das Schwierigste ist aber, daß diese a, b, c natürlich *in griechischen Zahlzeichen*, das sind Zusammensetzungen von griechischen Buchstaben, ge-

[1]) Encyclopédie des Sciences Mathématiques, édition française, I 23.
[2]) Herausgegeben von Heiberg. Leipzig 1898/1903.

schrieben sind. Weiterhin finden sich noch die *Werte der Differenzen*, die eine *Interpolation für die Minuten erlauben*. — Was die *Berechnung* dieser Tafel angeht, so hat Ptolemäus vor allem das ihm in der Gestalt des Satzes vom Sehnenviereck (des „ptolemäischen" Satzes) bekannte *Additionstheorem* der trigonometrischen Funktionen, insbesondere auch die oben angegebene *Formel für* $\sin\frac{\alpha}{2}$, benutzt (also außer rationalen Operationen die Operation des *Quadratwurzelziehens*), und er hat dazu noch ein *Interpolationsverfahren* angewendet.

2. Wir gehen nun über 1000 Jahre weiter bis zu der Zeit, wo im Abendland trigonometrische Tabellen das erste Mal berechnet werden. Da ist vor allem zu nennen *Regiomontanus* (1436—1476), der eigentlich *Johannes Müller* hieß und seinen lateinischen Namen nach seinem Geburtsort Königsberg in Oberfranken annahm. Er hat verschiedene trigonometrische Tafeln berechnet, in denen sich deutlich der *Übergang von den Resten des Sexagesimalsystems zum reinen Dezimalsystem* zeigt. Man gab damals nicht, wie heute, die trigonometrischen Linien als Brüche für den Radius 1 an, sondern berechnete sie für Kreise von sehr großen Radien; so daß sie dann — bei Innehaltung der gleichen Genauigkeit — als *ganze Zahlen* erschienen; diese großen Zahlen selbst freilich schrieb man damals schon dezimal, aber in der Wahl des Radius fanden sich noch lange Anklänge an das Sexagesimalsystem: In der ersten Tafel des Regiomontan ist der Radius gleich 6 000 000 angenommen und erst in der zweiten zum ersten Male gleich einer *rein dezimalen Zahl* 10 000 000, womit der vollständige Anschluß an das Dezimalsystem gewonnen ist; durch einfaches Einfügen eines Kommas erscheinen die Zahlen dieser Tafeln im heutigen Sinne als Dezimalbrüche. Diese Tafeln des Regiomontan sind erst lange nach seinem Tode gedruckt worden, und zwar in dem Werke seines Lehrers *G. Peurbach: „Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis"*[1]. Beachten Sie übrigens, daß auch dieses Werk, wie so viele andere grundlegende mathematische Werke — Cardanus und Stifel hatten wir schon kennen gelernt und weitere werden uns sogleich begegnen — in den vierziger Jahren des 16. Jahrhunderts in Nürnberg gedruckt wurde. Übrigens hat Regiomontan selbst auch meistens in Nürnberg gelebt.

3. Ich lege Ihnen weiter ein Werk von größter allgemeiner Bedeutung vor: *Nic. Koppernikus: „De revolutionibus orbium coelestium"*[2], das Buch, in dem das „Koppernikanische Weltsystem" entwickelt wird. Koppernikus lebte 1473—1543 in *Thorn*, dieses sein Hauptwerk erscheint aber wiederum in Nürnberg nur zwei Jahre nach der Veröffentlichung von Regiomontans Tafeln, die übrigens Koppernikus noch nicht zur

---

[1]) Norimbergae, 1541. [2]) Norimbergae, 1543.

Hand hatte; daher mußte er sich zur Durchführung seiner Theorie selbst die kleine Sinustafel berechnen, die Sie in seinem Werke finden.

4. Doch diese Tafeln genügten dem Bedürfnis der Astronomen noch keineswegs, und so sehen wir einen Schüler und Freund des Koppernikus bald an ein viel größer angelegtes Werk herangehen. Es ist *Rhäticus*, was wiederum ein künstlich latinisierter, diesmal nach dem Heimatlande (Vorarlberg) gewählter Name ist; er lebte 1514—1576 und war Professor zu *Wittenberg*. Sie müssen das alles immer auch auf den Hintergrund der allgemeinen Geschichte beziehen; so sind wir hier im Zeitalter der Reformation und wissen ja, daß damals Wittenberg und ebenso auch die freie Reichsstadt Nürnberg Hauptzentren des geistigen Lebens geworden waren. Doch allmählich verschiebt sich während der Reformationskämpfe der Schwerpunkt des politischen und geistigen Lebens immer mehr von den Städten nach den Fürstenhöfen hin; und während bisher alles in Nürnberg gedruckt wurde, erscheint das gewaltige Tafelwerk des Rhäticus unter pekuniärer Unterstützung des Kurfürsten von der Pfalz und trägt danach seinen Namen „*Opus palatinum*"[1]; es kam erst kurz nach dem Tode des Rhäticus heraus. Diese Tafel ist sehr viel vollständiger als die vorigen; sie enthält die Werte der trigonometrischen Linien *zehnstellig von 10 zu 10 Minuten;* freilich finden sich in ihr noch recht viele Fehler.

5. Eine sehr vervollkommnete Neuausgabe dieser Tafel gibt weiterhin *Pitiscus* aus Grünberg in Schlesien (1561—1613), Kaplan des pfälzischen Kurfürsten, heraus; es ist der wieder mit fürstlichem Gelde gedruckte *Thesaurus mathematicus*[2], der die trigonometrischen Zahlen *in Intervallen von 10 Minuten* und *fünfzehnstellig* enthält. Das Werk ist wesentlich fehlerfreier und auch kompendiöser gedruckt als das des Rhäticus.

Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß alle diese Tafeln im wesentlichen immer nur mit der Halbierungsformel und durch Interpolation berechnet sind, da man damals noch nicht die unendlichen Reihen für sin und cos besaß; dann bekommen wir erst eine richtige Vorstellung von dem ungeheuren Fleiß und der Arbeit, die in diesen gewaltigen Werken steckt.

Unmittelbar hieran schließt die Entwicklung der zweiten Gruppe, der

B. Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln,

und es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, eine Ironie der Geschichte gewissermaßen: *Ein Jahr, nachdem mit Pitiscus die Tafeln der trigonometrischen Linien eine gewisse Vollendung erreicht haben, erscheinen die ersten Logarithmen und machen jene eigentlich überflüssig*, indem fortan jeder statt der Sinus und Cosinus selbst sogleich ihre Logarithmen

[1] Heidelbergae 1596. [2] Francofurtii 1613.

benutzt. Die erste Logarithmentafel habe ich schon genannt, es ist die

1. *„Mirifici logarithmorum canonis descriptio" Nepers* aus dem Jahre 1614. Neper hatte damit in allererster Linie die *Erleichterung des trigonometrischen Rechnens* im Auge, so sehr, daß er gar nicht erst die Logarithmen der natürlichen Zahlen angab, sondern von vornherein die *siebenstelligen Logarithmen der trigonometrischen Linien in Intervallen von je einer Minute.*

2. Die wirkliche Ausgestaltung der Logarithmentafeln zu der heute üblichen Form knüpft an den Engländer *Henry Briggs* (1556 bis 1630) an, der mit Neper in Verbindung stand. Er hat *den großen Vorteil erkannt, den Logarithmen mit der Basis 10 für das praktische Rechnen haben,* indem sie sich unserer dezimalen Schreibweise besser anpassen, und führt bereits 1617 in seiner „Logarithmorum chilias prima" diese Basis an Stelle der Neperschen ein; das gibt dann die *„künstlichen Logarithmen"*, die man auch wohl nach Briggs selbst nennt. Zur Berechnung dieser Logarithmen hat Briggs eine Reihe interessanter Methoden ausgebildet, die die Bestimmung jedes einzelnen Logarithmus mit beliebiger Genauigkeit gestatten. Briggs' zweites größeres Werk führt den Titel *„Arithmetica logarithmica"*[1]; in ihm sind übrigens die *Logarithmen der natürlichen Zahlen selbst* zusammengestellt, nicht mehr wie bei Neper die der Winkelfunktionen. Freilich ist Briggs mit seinen Rechnungen nicht durchgekommen; er gibt nur die *Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20 000 und 90 000 bis 100 000* an, diese aber *auf 14 Stellen.* Merkwürdigerweise enthalten nämlich gerade die ältesten Tafeln die meisten Stellen, während man sich in der Neuzeit für die meisten Zwecke mit sehr wenigen Stellen begnügt; ich komme darauf noch zurück. Briggs hat weiterhin noch die *künstlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien* berechnet und *zehnstellig in Intervallen von 10 Minuten* in seiner *„Trigonometria britannica"*[2]) erscheinen lassen

3. Die Lücke in Briggs' Tafel hat zuerst der Holländer *Adrian Vlacq* ergänzt, der in *Gouda bei Leyden* lebte und Mathematiker, Buchdrucker und Buchhändler war. Er gibt eine *zweite Auflage des Briggsschen Werkes*[3]) heraus, die nun die *Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100 000 auf nur noch 10 Stellen* enthält. In ihr haben wir die Stammtafel aller unserer heutigen Tafeln für die Logarithmen der ganzen Zahlen zu sehen.

Was nun die weitere Entwicklung der Tafeln angeht, so kann ich hier nur noch ganz allgemein die Punkte angeben, in denen in der Folgezeit der *Fortschritt* gegen die genannten ersten Anfänge besteht:

---

[1]) Londini 1624. [2]) Goudae 1633.

[3]) Briggs, H., Arithmetica logarithmica. Editio secunda aucta per Adr. Vlacq. Goudae 1628.

a) Zuerst greift da ein *Fortschritt der Theorie* wesentlich ein, indem man *in den logarithmischen Reihen ein äußerst brauchbares neues Hilfsmittel zur Berechnung der Logarithmen* erhielt. Davon wußten die Berechner jener ersten Tafeln noch nichts. Neper hatte, wie wir früher sahen, seine Logarithmen durch Verwendung der *Differenzengleichung*, also durch *sukzessive Addition von* $\frac{\Delta x}{x}$ berechnet und daneben sich auch der *Interpolation* bedient. Bei *Briggs* tritt als wichtigstes Hilfsmittel das *Quadratwurzelziehen* auf; er benutzt den übrigens auch schon in Nepers „constructio" (zitiert auf S. 158) angegebenen Gedanken, daß man gleichzeitig mit den Logarithmen von a und b jedesmal auch den $\log \sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ kennt; so hat wohl auch *Vlacq* gerechnet.

b) Wesentliche Fortschritte werden auch in einer *zweckmäßigeren Druckanordnung* der Tafeln erzielt, die es ermöglicht, *mehr Material in übersichtlicher Form auf engerem Raume zu vereinigen.*

c) Vor allem wird die *Korrektheit der Tafeln* beträchtlich gesteigert, indem die in den älteren Tafeln, besonders in den letzten Ziffern, noch vielfach enthaltenen Fehler durch sorgfältige Nachprüfung ausgemerzt werden.

Unter der großen Menge der Tafeln, die so entstanden, brauche ich wohl nur die allerberühmteste zu nennen,

4. den *„Thesaurus logarithmorum completus"* (*Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln*), den der österreichische Artillerieoffizier *Vega 1794 in Leipzig* erscheinen ließ. Das Original ist selten geworden, es erschien jedoch 1896 in *Florenz* ein *phototypischer Abdruck.* Der Thesaurus enthält die *zehnstelligen Logarithmen der natürlichen Zahlen und der trigonometrischen Linien* in einer Anordnung, die seitdem typisch geworden ist; so sehen Sie z. B. schon die kleinen, zur Erleichterung des Interpolierens bestimmten Differenzentäfelchen.

Wenn wir uns nun zum *19. Jahrhundert* wenden, so bemerken wir eine weitgehende *Popularisierung der Logarithmen*, die einmal damit zusammenhängt, daß *in den zwanziger Jahren die Logarithmen auf der Schule eingeführt* werden, dann damit, daß sie mehr und mehr *Anwendung in der physikalischen und technischen Praxis* finden. Dabei mußten sie sich freilich eine *beträchtliche Kürzung ihrer Stellenzahl* gefallen lassen, denn sowohl das Bedürfnis der Schule als auch der Praxis drängte auf den Gebrauch nicht allzu voluminöser Tafeln hin, zumal drei oder vier Stellen für die bei den meisten praktischen Zwecken nötige Genauigkeit vollkommen ausreichen. Freilich hatten wir zu meiner Schulzeit noch siebenstellige Tafeln, und man verteidigte diese Stellenzahl wohl damit, daß der Schüler so einen Eindruck von der „Majestät der Zahlen" bekommen müsse. Heute ist man allgemein utilitaristischer gesinnt und *benutzt durchweg drei- oder vier-, höchstens fünfstellige Tafeln.* Drei beliebig herausgegriffene *moderne Tafeln* lege ich Ihnen heute noch vor. Eines ist eine kleine handliche Tafel von *Schubert*[1]), die *vierstellig* ist; Sie finden da allerhand Hilfsmittel, wie zweifarbigen Druck, Wiederholung der Überschriften oben und unten an jeder Seite u. dgl. angewandt, um Mißverständnisse bei der Benutzung möglichst auszuschließen. Noch viel raffinierter eingerichtet ist eine moderne amerikanische Tafel von *Huntington*[2]), wo z. B. die Blätter mit verschiedenen Vorsprüngen und Ausschnitten versehen sind, die ein sofortiges Aufschlagen der gewünschten Seite ermöglichen sollen. Endlich führe ich Ihnen hier noch einen *Rechenschieber* vor, der ja bekanntlich nichts als eine *dreistellige Logarithmentafel* in der allerbequemsten Gestalt eines mechanischen Rechenapparates darstellt; Sie kennen gewiß alle dieses Instrument, das ja heutzutage jeder Ingenieur für seine Rechnungen ständig bei sich führt.

Wir sind nun aber noch nicht am Ende der Entwicklung angelangt, sondern können ziemlich klar übersehen, wie sie weiter gehen wird. Neuerdings breitet sich nämlich die Benutzung der *Rechenmaschine*, von der wir schon oben (vgl. S. 19f.) sprachen, mehr und mehr aus, und sie macht die Logarithmentafel überflüssig, da sie ein viel rascheres und sichereres direktes Multiplizieren gestattet. Freilich ist die Maschine heute noch so teuer, daß nur große Rechenbüros sie sich anschaffen können; aber wenn sie erst einmal wesentlich verbilligt sein wird, wird eine *neue Phase des numerischen Rechnens* beginnen. Was die Goniometrie angeht, *werden dann die alten Tafeln von Pitiscus*, die bei ihrer Geburt so bald unmodern wurden, *erst recht zu Ehren kommen:* sie liefern direkt die trigonometrischen Werte, mit denen die Rechenmaschine unter Vermeidung des Umweges über die Logarithmen unmittelbar bequem zu rechnen gestattet.

3. Anwendungen der goniometrischen Funktionen.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, uns einen Überblick über die Anwendung der goniometrischen Funktionen zu verschaffen; wir ziehen da drei Gebiete in Betracht:

A. *die Trigonometrie*, die ja überhaupt den Anlaß zur Erfindung der goniometrischen Funktionen gab;

B. *die Mechanik*, wo insbesondere die *Lehre von den kleinen Schwingungen* ein weites Anwendungsgebiet darstellt;

C. *die Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen*, die bekanntlich bei den verschiedensten Fragen eine sehr wichtige Rolle spielt.

---

[1]) [Jetzt Schubert-Haußner: Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. Sammlung Göschen. Leipzig 1917.]

[2]) Huntington, C. V.: Four place tables. Abrigded edition, Cambridge, Massachussets 1907.

Wenden wir uns sogleich dem ersten Gegenstand zu:

A. Trigonometrie, insbesondere sphärische Trigonometrie.

Wir haben hier eine *uralte Wissenschaft* vor uns, die schon in Ägypten in hoher Blüte stand, gefördert durch die Anforderungen zweier wichtiger Wissenschaften: der *Geodäsie*, welche die Lehre vom ebenen, und der *Astronomie*, die diejenige vom sphärischen Dreieck brauchte. Für die *Geschichte der Trigonometrie* haben wir eine reichhaltige *Monographie* in *A. v. Braunmühls* „*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*" [1]). Über die *praktische* Seite der Trigonometrie informiert man sich am besten in *E. Hammers* „*Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*" [2]), über die theoretische in dem *zweiten Bande* der oftgenannten „*Enzyklopädie der Elementarmathematik*" *von Weber-Wellstein.*

Ich kann im Rahmen dieser Vorlesung natürlich *nicht die ganze Trigonometrie systematisch entwickeln*, das ist Sache spezieller Studien; übrigens wird ja hier in Göttingen die praktische Trigonometrie in den regelmäßigen Vorlesungen über Geodäsie und sphärische Astronomie ausgiebig berücksichtigt. Vielmehr möchte ich lediglich über *ein sehr interessantes Kapitel der theoretischen Trigonometrie zu Ihnen sprechen, das trotz seines hohen Alters noch heute nicht als abgeschlossen gelten kann, sondern noch immer viele unbearbeitete Fragen und Probleme verhältnismäßig elementaren Charakters enthält*, deren Bearbeitung mir nicht unlohnend erscheint: ich meine *die sphärische Trigonometrie.* Sie finden diesen Gegenstand gerade auch in *Weber-Wellstein* sehr ausführlich behandelt, und zwar kommen dort namentlich die Gedanken zur Geltung, die *Study* in seiner fundamentalen Arbeit „*Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen*" [3]) entwickelt hat. Ich will Ihnen im folgenden einen Überblick über alle hierher gehörigen Theorien zu geben versuchen und insbesondere auch auf die noch offenen Fragestellungen hinweisen.

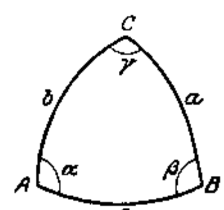


Abb. 70.

Die *elementare Auffassung eines sphärischen Dreiecks* bedarf kaum der näheren Erläuterung; *drei Punkte der Kugel bestimmen* (wenn nicht gerade zwei von ihnen diametral entgegengesetzt liegen) *genau ein Dreieck, in dem jeder der drei Winkel und jede Seite zwischen* 0 *und* π *liegt* (vgl. Abb. 70). Es erweist sich aber bei weitergehenden Untersuchungen bald als zweckmäßig, die *Seiten und Winkel als unbeschränkt veränderliche*

---

[1]) 2 Bde. Leipzig 1900 u. 1903. [2]) Stuttgart 1906. [5. Aufl. 1923.]

[3]) Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 20, Nr. II. Leipzig 1893.

Größen anzunehmen, die auch größer als π oder 2π oder Vielfache davon werden können; man hat dann von *Seiten, die sich überschlagen*, und *Winkeln, die sich mehrfach um ihren Scheitel winden*, zu reden. Dabei wird es nötig, über die *Vorzeichen* dieser Größen bzw. den *Sinn*, in dem man sie zu messen hat, bestimmte Verabredungen zu treffen. Es ist nun das Verdienst des großen Leipziger Geometers *Möbius*, wie überhaupt in der Geometrie, so auch in der sphärischen Trigonometrie das *Prinzip der Vorzeichen konsequent zur Geltung gebracht* zu haben, womit erst den allgemeinen Untersuchungen mit unbeschränkt veränderlichen Größen Bahn gebrochen war; besonders kommt hier die Arbeit „*Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit*"[1]) in Betracht.

Diese Vorzeichenbestimmungen beginnen damit, daß man *einen bestimmten Drehungssinn* festlegt, *in dem man um jeden Punkt A der Kugel den Winkel positiv messen will* (vgl. Abb. 71); ist das für einen beliebigen Kugelpunkt geschehen, so überträgt sich derselbe Sinn nach der Stetigkeit sofort auch auf alle andern Kugelpunkte. Wir mögen etwa, wie es üblich ist, den bei Betrachtung von der Außenseite *der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Umlaufssinn als positiv* nehmen. Ebenso müssen wir zweitens *jedem größten Kreise der Kugel einen Durchlaufungssinn* zuordnen; nur können wir hier nicht mit Festsetzung für einen Kreis und stetigem Übergang zu allen andern auskommen, da man jeden Kreis mit jedem andern auf zwei wesentlich verschiedene Arten zur Deckung bringen kann. Wir werden daher *jedem in Betracht kommenden Kreise einzeln* einen Sinn zuordnen und auch einen und denselben Kreis gewissermaßen als zwei verschiedene Gebilde betrachten, je nachdem wir ihm den einen oder andern Sinn beigelegt haben. *Nach diesen Festsetzungen läßt sich jedem mit einem Durchlaufungssinn versehenen größten Kreise a eindeutig ein Pol P zuordnen, nämlich derjenige seiner beiden Pole im elementaren Sinne, von dem aus sein Durchlaufungssinn als positiv erscheint; ebenso gehört umgekehrt jedem Punkte eindeutig ein „Polkreis" mit bestimmtem Durchlaufungssinne zu.* Damit ist der in der Trigonometrie so wichtige „*Polarisierungsprozeß*" *eindeutig festgelegt.*

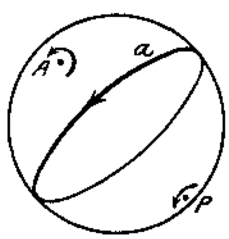


Abb. 71.

Sind nun drei Punkte A, B, C auf der Kugel gegeben, so sind noch einige Angaben nötig, ehe ein sphärisches Dreieck mit diesen Ecken *eindeutig* bestimmt ist. Zunächst muß *auf jedem der drei größten Kreise durch A, B, C ein Sinn* festgelegt sein und angegeben werden, *wie oft man auf ihm in diesem Sinne herumlaufen muß*, ehe man von

[1]) Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse Bd. 12. 1860. Abgedruckt in Möbius, F.: Gesammelte Werke Bd. II, S. 71ff. Leipzig 1886.

B nach C, von C nach A, von A nach B gelangt. Die so bestimmten Längen a, b, c, die *beliebige* reelle Größen sein können, heißen *Seiten des sphärischen Dreiecks;* natürlich sind sie auf die Kugel vom *Radius 1* bezogen gedacht. Die *Winkel* werden dann so definiert: *α entsteht durch diejenige Drehung in positivem Sinne, welche den in A einmündenden positiven Sinn CA in den von ihm ausgehenden positiven Sinn AB überführt*, wobei noch additiv hinzutretende Vielfache von $\pm 2\pi$ willkürlich gegeben werden dürfen. Analoges gilt für die andern Winkel. Betrachten wir ein gewöhnliches *Elementardreieck*, wie es die untenstehende Abb. 72 andeutet, und legen die Richtungen der Seiten so fest, daß a, b, c kleiner als π werden, so werden, wie man sieht, die Winkel α, β, γ nach unserer neuen Definition die *Außenwinkel* des Dreiecks, nicht, wie bei der elementaren Festsetzung, seine *Innenwinkel*.

Daß hierbei, also bei Ersetzung der gewöhnlich gemessenen Dreieckswinkel durch ihre Supplemente, die *Formeln der sphärischen Trigonometrie* sich *symmetrischer und übersichtlicher* gestalten, ist eine altbekannte Erscheinung. Den tieferen Grund dafür können wir in folgendem erblicken: Der oben erörterte Polarisationsprozeß gibt zu jedem auf Grund der Möbiusschen Verabredungen festgelegten Dreiecke völlig eindeutig ein anderes Dreieck, das „*Polardreieck*" des ersten, und man sieht leicht ein, daß dieses bei Zugrundelegung unserer neuen Definitionen einfach *die Winkel des Ausgangsdreiecks zu Seiten und dessen Seiten zu Winkeln hat. Demgemäß muß jede auf Grund dieser Bezeichnung ausgesprochene Formel der sphärischen Trigonometrie auch gelten, wenn wir in ihr a, b, c bzw. α, β, γ vertauschen*, so daß stets eine *einfache Symmetrie* vorhanden sein muß. Bei der elementaren Winkel- und Seitenmessung hingegen besteht diese einfache Symmetrie nicht, sondern die Beziehung zwischen Dreieck und Polardreieck hängt davon ab, wie man im einzelnen Falle Winkel und Seiten annimmt und über die Doppeldeutigkeit des Poles eines ohne Durchlaufungssinn gegebenen Kreises entscheidet.

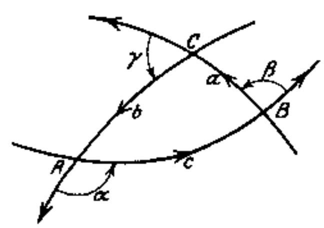


Abb. 72.

Es ist nun klar, *daß von den so definierten sechs Bestimmungsstücken des sphärischen Dreiecks nur drei unabhängig voneinander kontinuierlich variabel sein können:* etwa zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie stellen eine Anzahl von Relationen zwischen ihnen, oder — genauer gesagt — von algebraischen Relationen zwischen ihren zwölf Cosinus und Sinus dar, durch die nur drei dieser zwölf Größen willkürlich variabel gelassen werden können, während die andern neun algebraisch von ihnen abhängen; indem wir zu den cos und sin übergehen, leisten wir natürlich auf die Festlegung der additiv hinzutretenden Vielfachen von 2π

Verzicht. Fassen wir die *Trigonometrie überhaupt als Inbegriff aller möglichen solchen algebraischen Relationen* auf, so werden wir moderner Denkweise entsprechend ihre Aufgabe auch so fassen können: Wir deuten die Größen:

$$x_1 = \cos a\,,\ \ x_2 = \cos b\,,\ \ x_3 = \cos c\,,\ \ x_4 = \cos\alpha\,,\ \ x_5 = \cos\beta\,,\ \ x_6 = \cos\gamma\,,$$

$$y_1 = \sin a\,,\ \ y_2 = \sin b\,,\ \ y_3 = \sin c\,,\ \ y_4 = \sin\alpha\,,\ \ y_5 = \sin\beta\,,\ \ y_6 = \sin\gamma$$

als Koordinaten eines zwölfdimensionalen Raumes R_{12}; *die Gesamtheit aller derjenigen seiner Punkte, die wirklich möglichen sphärischen Dreiecken $a, \ldots, \gamma$ entsprechen, stellt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_3 dieses R_{12} dar, und diese M_3 im R_{12} soll studiert werden.* Damit ist die *sphärische Trigonometrie der allgemeinen analytischen Geometrie mehrdimensionaler Räume eingeordnet.*

Diese M_3 muß nun verschiedene *einfache Symmetrien* besitzen. So hatte der Polarisierungsprozeß ergeben, daß man durch Vertauschung von a, b, c mit α, β, γ stets wieder ein sphärisches Dreieck erhält; in unsere neue Sprechweise übertragen heißt das, daß man aus jedem Punkte der M_3 einen weiteren ihr angehörigen erhält, indem man $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ bzw. mit $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$ vertauscht. Weiterhin existieren zu jedem Dreieck, entsprechend der Zerlegung des Raumes in acht Oktanten durch die Ebenen der drei größten Kreise, *sieben Nebendreiecke*, deren Stücke aus denen des ursprünglichen durch Vorzeichenwechsel und Addition von π hervorgehen; das gibt zu jedem Punkte der M_3 sieben weitere Punkte, deren Koordinaten $x_1, \ldots x_6$ durch Vorzeichenwechsel entstehen. Die Gesamtheit dieser Symmetrien führt schließlich zu einer gewissen *Gruppe von Vertauschungen und Vorzeichenwechseln der Koordinaten des R_{12}, welche die M_3 in sich transformiert.*

Die wichtigste Frage ist nun die nach den *algebraischen Gleichungen, denen die Koordinaten der Punkte von M_3 genügen und welche die Gesamtheit der trigonometrischen Formeln bilden.* Da immer $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$ ist, haben wir zunächst einmal die *sechs quadratischen Relationen:*

$$x_i^2 + y_i^2 = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{1}$$

die — geometrisch gesprochen — *sechs Zylinderflächen zweiter Ordnung* $F^{(2)}$ durch die M_3 darstellen.

Weitere sechs Formeln gibt der *Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie,* der in unserer Bezeichnung heißt:

$$\cos a = \cos b\, \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha,$$

woraus durch Polarisation entsteht:

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma \cos a.$$

Diese Gleichungen nebst vier weiteren durch zyklische Vertauschung von a, b, c und α, β, γ entstehenden Formeln bestimmen im ganzen *sechs kubische Flächen* $F^{(3)}$ durch die M_3:

$$(2)\quad x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 x_4, \quad x_2 = x_3 x_1 - y_3 y_1 x_5, \quad x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2 x_6,$$

$$(3)\quad x_4 = x_5 x_6 - y_5 y_6 x_1, \quad x_5 = x_6 x_4 - y_6 y_4 x_2, \quad x_6 = x_4 x_5 - y_4 y_5 x_3.$$

Endlich können wir noch den *Sinussatz* heranziehen, der sich durch das Verschwinden der Unterdeterminanten folgender Matrix ausdrückt:

$$\begin{vmatrix} \sin a, & \sin b, & \sin c \\ \sin\alpha, & \sin\beta, & \sin\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{vmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$(4)\qquad y_2 y_6 - y_3 y_5 = y_3 y_4 - y_1 y_6 = y_1 y_5 - y_2 y_4 = 0.$$

Diese Ausdrücke stellen *drei quadratische* $F^{(2)}$ dar, von denen allerdings nur zwei unabhängig sind. *So haben wir im ganzen 15 Gleichungen für unsere M_3 im R_{12} aufgestellt.*

Nun reichen zur Festlegung eines dreidimensionalen algebraischen Gebildes im R_{12} im allgemeinen keineswegs $12 - 3 = 9$ Gleichungen aus, da schon in der gewöhnlichen Geometrie des R_3 bekanntlich durchaus nicht jede Raumkurve als voller Schnitt zweier algebraischer Flächen darstellbar zu sein braucht; das einfachste Beispiel ist die Raumkurve dritter Ordnung, zu deren Festlegung mindestens drei Gleichungen notwendig sind. Man sieht auch in unserem Falle leicht, daß die neun Gleichungen (1) und (2) die M_3 noch nicht festlegen; es kann nämlich bekanntlich *aus dem Cosinussatz der Sinussatz nur bis auf ein Vorzeichen* hergeleitet werden, das man dann durch geometrische Überlegungen zu bestimmen pflegt. *Man wird nun zu wissen wünschen, welche und wieviel der trigonometrischen Gleichungen denn eigentlich unsere M_3 vollkommen bestimmen.* Überhaupt möchte ich hier *vier bestimmte Fragen* formulieren, auf welche die bisherige Literatur keine präzise Antwort zu geben scheint; es könnte sich wohl lohnen, sie eingehend zu untersuchen, und das dürfte auch nicht einmal besonders schwer sein, wenn man sich nur eine gewisse Geschicklichkeit in der Handhabung der Formeln der sphärischen Trigonometrie angeeignet hat. Meine Fragen sind:

1. Was ist die *Ordnung der M_3*?

2. Welches sind die *niedersten Gleichungen, durch die sich die M_3 rein darstellen läßt?*

3. Welches ist das *volle System der linear unabhängigen, die M_3 darstellenden Gleichungen*, d. h. der Gleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$, aus denen die Gleichung jeder andern durch M_3 gehenden Fläche mit ganzen rationalen Faktoren $m_1, \ldots, m_n$ linear in der Form $m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n = 0$ zusammengesetzt werden kann? Hierzu können mehr Gleichungen nötig sein, als unter 2. verlangt wird.

4. Welche *algebraischen Identitäten* (*sogenannte Syzygien*) bestehen zwischen diesen n Formeln $f_1, \ldots, f_n$?

Man kann sich über diese Dinge an Untersuchungen orientieren, die in genau derselben Richtung, von nur wenig verschiedener Fragestellung ausgehend, bereits vorliegen. Sie sind in der Göttinger *Dissertation von Frl. Chisholm*[1]) (der jetzigen *Frau Young*) von *1894* enthalten, die übrigens die erste Dame ist, welche in Preußen ein normales Doktorexamen bestand. Von den verschiedenen Ansätzen von Frl. Chisholm ist namentlich der bemerkenswert, daß sie *als unabhängige Koordinaten die Cotangenten der halben Winkel und Seiten* verwendet; denn da $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{und ebenso natürlich } \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$ eine Fundamentalfunktion ist, durch die sich $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ eindeutig ausdrücken, lassen sich die sämtlichen *trigonometrischen Gleichungen als algebraische Relationen zwischen* $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}, \ldots, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ *schreiben. Die sphärischen Dreiecke bilden daher jetzt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_3 in dem sechsdimensionalen Raume R_6*, der $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}, \ldots, \operatorname{ctg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \ldots, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ zu Koordinaten hat. Von dieser M_3 zeigt Frl. Chisholm, daß sie von der *Ordnung 8* und als *voller Schnitt dreier Flächen zweiten Grades* (quadratischer Gleichungen) des R_6 darstellbar ist, und sie untersucht auch die weiteren Fragen, die sich hier im Sinne der oben angegebenen Gesichtspunkte anschließen.

In meiner Vorlesung über die hypergeometrische Funktion[2]) habe ich die Gruppe von Formeln der sphärischen Trigonometrie, über die ich bisher sprach und die die Sinus und Cosinus der Seiten und Winkel verknüpfen, *Formeln erster Stufe* genannt und ihnen eine wesentlich verschiedene Formelgruppe als *Formeln zweiter Stufe* entgegengestellt. Das sind *algebraische Gleichungen zwischen den trigonometrischen Funktionen der halben Winkel und Seiten*, und man wird daher bei ihrem Studium am besten die zwölf Größen:

$$\cos\frac{a}{2}, \quad \sin\frac{a}{2}, \ldots; \ \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}, \ldots$$

als Koordinaten eines neuen *zwölfdimensionalen Raumes* R'_{12} betrachten, in dem die sphärischen Dreiecke wiederum eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M'_3 bilden. Vor allem kommen hier jene eleganten Formeln in Betracht, die am Anfang des vorigen Jahrhunderts fast gleichzeitig unabhängig voneinander von *Delambre* (1807), von *Mollweide* (1808) und endlich von *Gauß* 1809 [in der „*Theoria motus*

[1]) Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1895.

[2]) W.-S. 1893/94. Ausgearbeitet von E. Ritter. — Neudruck Leipzig 1906.

corporum coelestium", Nr. 54[1])] publiziert worden sind. Es sind zwölf *Formeln*, die durch zyklische Vertauschung aus:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \pm\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \mp\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \mp\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

entstehen. Das Wesentliche und Neue an ihnen den Formeln erster Stufe gegenüber ist nun das *doppelte Vorzeichen*, mit dem es sich so verhält: ***Für ein und dasselbe Dreieck gelten in sämtlichen zwölf Formeln gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen, und es gibt Dreiecke sowohl der einen als der andern Art. Die M_3' der sphärischen Dreiecke in dem vorhin definierten R_{12}' genügt also zwei ganz verschiedenen Systemen von je zwölf kubischen Gleichungen und zerfällt daher in zwei getrennte algebraische Mannigfaltigkeiten: $\overline{M}_3$***, für die das eine, und $\overline{\overline{M}}_3$, für die das andere Vorzeichen gilt. Durch diese merkwürdige Erscheinung erhalten jene Formeln die größte Bedeutung für die Theorie der sphärischen Dreiecke und werden viel mehr als bloße Umformungen der alten Gleichungen, die höchstens zur Erleichterung der trigonometrischen Rechnung dienen. Delambre und Mollweide betrachteten die Formeln nur von diesem praktischen Standpunkte aus, erst *Gauß* hatte eine tiefere Einsicht, denn er weist ausdrücklich auf die Möglichkeit eines Vorzeichenwechsels hin, „wenn man die Idee des sphärischen Dreiecks in größter Allgemeinheit auffaßt"; es scheint mir darum wohl berechtigt die Formeln nach Gauß zu nennen, wenn er die Priorität der Veröffentlichung auch nicht besitzt.

Die ganze Tragweite dieser Erscheinung hat aber erst *Study* erkannt und in seiner auf S. 189 zitierten Arbeit von 1893 entwickelt. Sein Hauptresultat läßt sich am bequemsten aussprechen, wenn man den sechsdimensionalen Raum R_6 betrachtet, der die Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ selbst, als unbeschränkte Variable aufgefaßt, zu Koordinaten hat; wir nennen sie ***transzendente Bestimmungsstücke*** des Dreiecks im Gegensatz zu den ***algebraischen*** Bestimmungsstücken $\cos a, \ldots$ oder $\cos\frac{a}{2}, \ldots$, da jene transzendente, diese aber algebraische Funktionen der gewöhnlichen räumlichen Koordinaten der Dreiecksecken sind. In diesem R_6 zeichnet sich die Gesamtheit aller sphärischen Dreiecke als die „***transzendente Mannigfaltigkeit***" $M_3^{(t)}$ ab, deren Bild im R_{12}' die vorhin

[1]) Abgedruckt Werke, Bd. VII, S. 67. Leipzig 1906.

betrachtete algebraische M'_3 war. Da diese aber in zwei Stücke zerfiel und die abbildenden Funktionen $\cos\frac{a}{2}, \ldots$ eindeutige stetige Funktionen der transzendenten Koordinaten sind, muß auch die transzendente $M_3^{(t)}$ mindestens in zwei getrennte Stücke zerfallen. *Der Studysche Satz lautet nun: Die transzendente $M_3^{(t)}$ der überhaupt bei einem sphärischen Dreieck allgemeinster Art auftretenden Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zerfällt entsprechend dem doppelten Vorzeichen in den Gaußschen Formeln freilich in zwei voneinander getrennte Stücke, von denen jedoch jedes ein in sich zusammenhängendes Kontinuum darstellt.* Das Wesentliche dabei ist das *Ausschließen jedes weiteren Zerfallens*; man kann also nicht etwa durch weiteres Verfolgen der trigonometrischen Formeln zu ähnlichen, ebenso tiefgreifenden Einteilungen der sphärischen Dreiecke gelangen. Man nennt nun die Dreiecke des ersten, dem oberen Zeichen der Gaußschen Formeln entsprechenden Stückes *eigentliche Dreiecke*, die des andern *uneigentliche* und kann alsdann den Studyschen Satz auch kurz so aussprechen, *daß die Gesamtheit aller sphärischen Dreiecke in ein Kontinuum der eigentlichen und eines der uneigentlichen Dreiecke zerfällt.* Sie finden übrigens nähere Ausführungen dazu und einen Beweis des Satzes im Weber-Wellstein[1]; ich gebe hier nur in möglichst übersichtlicher Weise die Resultate an.

Ich muß da Näheres über den *Unterschied beider Dreiecksarten* sagen: Geben wir irgendein sphärisches Dreieck, d. h. ein „zulässiges Wertesystem" der $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, deren cos und sin den Formeln erster Stufe genügen, und die daher einen Punkt der $M_3^{(t)}$ darstellen! *Wie können wir entscheiden, ob es sich um ein eigentliches oder uneigentliches Dreieck handelt?* Wir bilden, um diese Frage zu beantworten, zunächst die kleinsten positiven Reste $a_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ der gegebenen Zahlen in bezug auf den Modul 2π:

$$a_0 \equiv a \pmod{2\pi}, \ldots, \quad \alpha_0 \equiv \alpha \pmod{2\pi}, \ldots.$$
$$0 \leqq a_0 < 2\pi, \ldots \qquad 0 \leqq \alpha_0 < 2\pi, \ldots.$$

Ihre cos und sin stimmen mit denen von $a, \ldots \alpha, \ldots$ überein, so daß sie wiederum ein sphärisches Dreieck darstellen, welches wir das dem ursprünglichen zugehörige *reduzierte* oder *Moebiussche Dreieck* nennen wollen, da Moebius selbst auf Veränderlichkeit der Stücke über 2π hinaus noch nicht einging. Nun wollen wir zunächst durch eine kleine Tabelle entscheiden, *wann ein Moebiussches Dreieck eigentlich und uneigentlich ist;* Sie finden diese in etwas weniger übersichtlicher Form in Weber-Wellstein (S. 352, 379, 380), der auch (S. 348, 349) Abbildungen für die Typen eigentlicher und uneigentlicher Dreiecke gibt. Wir nennen, wie das üblich ist, einen Winkel *überstumpf*, wenn er

[1] Bd. II, 2. Aufl. (1907), S. 385 ff. (§ 47).

zwischen π und 2π liegt, und wenden diese Bezeichnung der Kürze halber auch auf die Seiten des sphärischen Dreiecks an. Dann haben wir im ganzen je vier typische Fälle beider Arten aufzuzählen:

I. *Eigentliche Moebiussche Dreiecke:*

1. 0 Seiten überstumpf; 0 Winkel überstumpf.
2. 1 Seite überstumpf; 2 anliegende Winkel überstumpf.
3. 2 Seiten überstumpf; 1 eingeschlossener Winkel überstumpf.
4. 3 Seiten überstumpf; 3 Winkel überstumpf.

II. *Uneigentliche Moebiussche Dreiecke:*

1. 0 Seiten überstumpf; 3 Winkel überstumpf.
2. 1 Seite überstumpf; 1 gegenüberliegender Winkel überstumpf.
3. 2 Seiten überstumpf; 2 gegenüberliegende Winkel überstumpf.
4. 3 Seiten überstumpf; 0 Winkel überstumpf.

Andere als die hier aufgezählten Fälle gibt es nicht, so daß damit in der Tat über die Art jedes Moebiusschen Dreiecks entschieden ist.

Der *Übergang zum allgemeinen Dreieck $a, \ldots \alpha, \ldots$* vom zugehörigen reduzierten aus wird nach dem oben Gesagten vermittelt durch Formeln von der Art:

$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi,$$
$$\alpha = \alpha_0 + \nu_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + \nu_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + \nu_3 \cdot 2\pi,$$

und es gilt nun der Satz: *Je nachdem die Summe der sechs ganzen Zahlen $n_1 + n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ gerade oder ungerade ist, behält das allgemeine Dreieck den Charakter des reduzierten Dreiecks als eigentliches oder uneigentliches, oder es wechselt ihn.* Danach ist die Art eines jeden Dreiecks bestimmt.

Ich schließe diesen Abschnitt mit *einigen Erörterungen über den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke.* Davon ist in den Studyschen Untersuchungen und auch in der Darstellung von Weber-Wellstein gar nicht die Rede; wohl aber kommt dieser Begriff in meinen *älteren funktionentheoretischen Untersuchungen über Kreisbogendreiecke* zur Geltung. Während bisher das Dreieck nichts als der Inbegriff dreier, nur den Cosinus- und Sinus-Sätzen genügenden Winkel und Seiten war, handelt es sich da um *bestimmte, von diesen Seiten begrenzte Flächenstücke,* gewissermaßen um *Membrane,* die zwischen den drei Seiten mit passenden Winkeln eingespannt sind.

Freilich wird es dabei nicht mehr angebracht sein, die *„Außenwinkel"* α, β, γ des Dreiecks in Betracht zu ziehen, wie wir das bisher aus Symmetriegründen taten, sondern wir werden von *denjenigen Winkeln reden, welche die Membran selbst an den Eckpunkten bildet* und die wir kurzweg *Innenwinkel* des Dreiecks nennen wollen. Ich bezeichne sie, wie ich es gewohnt bin, mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ (vgl. Abb. 73). Auch diese Winkel können unmittelbar als *unbeschränkt variable, nur positive Größen* angesehen werden, da wir Windungspunkte in den Ecken der Membran nicht ausschließen wollen. Entsprechend seien die absoluten Längen der Seiten mit $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ bezeichnet, die gleichfalls *unbeschränkt positiv variable Größen* sind. Aber jetzt dürfen nicht mehr, wie früher, alle Seiten und Winkel unabhängig voneinander sich beliebig oft „überschlagen", d. h. beliebige additive Vielfache von 2π enthalten, sondern *die Tatsache, daß eine einzige zusammenhängende Membran mit diesen Seiten und Winkeln existiert, drückt sich in gewissen Relationen zwischen den Überschlagungszahlen* aus, die ich in meiner Arbeit *„Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe"*[1]) *Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie* genannt habe. Sie lauten, wenn $E(x)$ die größte von x übertroffene *positive ganze* Zahl bezeichnet, $[E(x) < x]$:

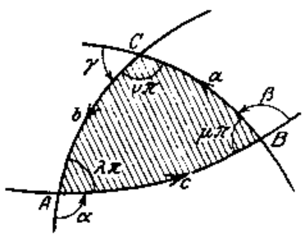


Abb. 73.

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right),$$

$$E\left(\frac{m}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda + \mu - \nu + 1}{2}\right),$$

$$E\left(\frac{n}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda - \mu + \nu + 1}{2}\right),$$

und da $E\left(\frac{l}{2}\right)$ z. B. die in der Seite $l\pi$ enthaltenen Vielfachen von 2π angibt, *so bestimmen diese Relationen gerade die fraglichen Überschlagungszahlen der Seiten $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, wenn man die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ einschließlich ihrer Überschlagungszahlen kennt.* Man sieht insbesondere leicht ein, daß bei positiven λ, μ, ν höchstens *eine* der drei Zahlen $\lambda - \mu - \nu$, $-\lambda + \mu - \nu$, $-\lambda - \mu + \nu$ positiv sein kann; also kann auch nur eines der drei Argumente der rechten Seiten größer als 1 sein, und da $E(x) = 0$ für $x \leqq 1$, ist nur eine der drei Seitenüberschlagungszahlen möglicherweise von Null verschieden. *Es kann sich also bei einer Dreiecksmembran höchstens eine Seite, und zwar die dem größten Winkel gegenüberliegende, überschlagen* ($> 2\pi$ sein).

Was den Beweis dieser Ergänzungsrelationen angeht, so verweise ich auf meine freilich seit einigen Jahren vergriffene autographierte Vorlesung „Über die hypergeometrische Funktion" (S. 384ff.)[2]); da ist übrigens, ebenso wie in der Arbeit in Annalen Bd. 37, der Ansatz wesentlich weiter gefaßt, als ich es hier angebe, indem auch solche „sphärischen Dreiecke" betrachtet werden, die von beliebigen, nicht notwendig *größten* Kreisen begrenzt werden. Ich will hier nur mit einigen Worten den *Ge-*

---

[1]) Mathematische Annalen Band 37, 1888. [Abgedruckt in Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen Band II, S. 550. 1921.]

[2]) Die Vorlesung wurde bereits zitiert auf S. 194.

dankengang des Beweises charakterisieren. Man geht von einem elementaren Dreieck aus, in das sich sicher eine Membran einspannen läßt, und gewinnt aus ihm nach und nach die allgemeinsten zulässigen Membrangestalten, indem man in geeigneter Weise wiederholt *kreisförmige Membranscheiben an den Seiten anhängt oder mit Verzweigungspunkten an den Ecken einhängt.* Die Abb. 74 zeigt als Beispiel — in stereographischer Projektion gedacht — ein Dreieck ABC, das aus einem elementaren, durch Einhängung der einen vom größten Kreise AB begrenzten Halbkugel entsteht, wodurch sowohl die Seite AB als der Winkel bei C sich einmal überschlägt. Man sieht, daß bei diesem Prozeß die Ergänzungsrelationen erhalten bleiben, und findet schließlich ebenso, daß sie auch für die allgemeinste, durch solche Prozesse aufzubauende Dreiecksmembran gelten.

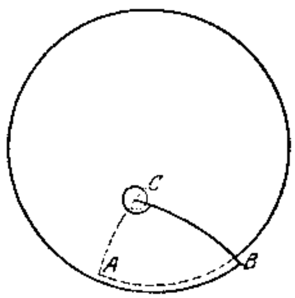


Abb. 74.

Wir müssen nun noch genau zusehen, *wie sich diese Dreiecke, die der Ergänzungsrelation genügen, in die vorher besprochene allgemeine Theorie einordnen.* Sie sind offenbar nur *Spezialfälle*, da doch im allgemeinen die Überschlagungszahlen der Seiten und Winkel ganz beliebig sind, *Spezialfälle, die eben durch die Möglichkeit des Einspannens einer Membran charakterisiert sind.* Man kann freilich hier zunächst stutzig werden: Wir haben ja gesehen, daß alle eigentlichen Dreiecke — die auch keineswegs sämtlich den Ergänzungsrelationen zu genügen brauchen — ein Kontinuum bilden, und daß man daher jedes von ihnen durch kontinuierlichen Übergang aus einem Elementardreieck herleiten kann; man sollte doch meinen, daß die in das Elementardreieck einzuspannende Membran dabei unmöglich verloren geht. Die Aufklärung dieser Schwierigkeit ergibt sich erst, wenn man *das Moebiussche Prinzip der Vorzeichenbestimmung auch auf Flächeninhalte ausdehnt; danach ist dann eine Fläche positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem man sie in positivem (entgegen dem Uhrzeiger) oder negativem Sinne umläuft.* Begrenzt ein sich selbst durchdringender Kurvenzug mehrere Flächenstücke, so ist als ganze, von ihm begrenzte Fläche demgemäß die *algebraische Summe der mit dem richtigen Vorzeichen genommenen einzelnen umlaufenen Teile* zu rechnen, in Abb. 75 z. B. die Differenz, in Abb. 76 die Summe von den durch verschiedene Schraffierung unterschiedenen Teilen. Diese Festsetzungen sind natürlich lediglich der geometrische Ausdruck von

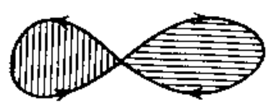


Abb. 75.

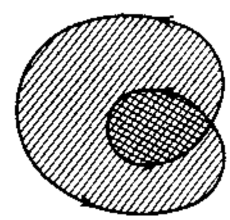


Abb. 76.

dem, was die analytische Definition des Flächeninhalts von selbst liefert.

Wenden wir dies speziell auf Kreisbogendreiecke an, so zeigt sich in der Tat, *daß man einem jeden eigentlichen Dreieck einen Flächeninhalt auf der Kugel zuordnen kann, dessen einzelne Teile bei einmaliger Durchlaufung des Dreiecksumfanges teils positiv, teils negativ umlaufen werden und daher auch mit verschiedenen Vorzeichen in Rechnung zu stellen sind. Die Dreiecke, für welche die Ergänzungsrelation gilt, haben alsdann nur das Besondere, daß ihr Flächeninhalt aus einem einzigen, in positivem Sinne umlaufenen Membranstück besteht;* diese Eigenschaft verleiht ihnen gerade für die funktionentheoretischen Zwecke, zu denen ich sie in meinen früheren Arbeiten brauchte, ihre große Bedeutung.

Ich will diese Sachlage nun noch an einem *Beispiele* näher erläutern. Wir betrachten das in der Abb. 77 in stereographischer Projektion dargestellte Dreieck ABC, wobei A der von dem Bogen BC entferntere Schnittpunkt der größten Kreise BA, CA ist, deren zweiter Schnitt A' heiße. Überträgt man die allgemeinen Definitionen der Außenwinkel (S. 191) auf ihre Supplemente, die Innenwinkel, so findet man, daß $\mu\pi$ und $\nu\pi$ die Drehung der Dreiecksseite BC in BA bzw. von CA in CB messen und daher in unserm Falle *positiv* sind; ebenso mißt $\lambda\pi$ die Drehung von AB in AC und ist daher *negativ;* wir setzen $\lambda = -\lambda'$, $\lambda' > 0$. Das Dreieck $A'BC$ bildet dann offenbar ein Elementardreieck mit den Winkeln $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, die sämtlich positiv sind.

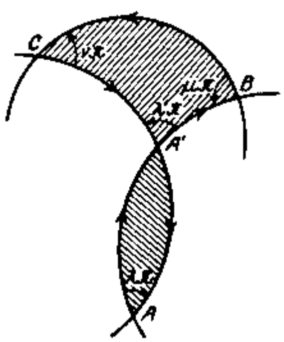


Abb. 77.

Umlaufen wir nun den Dreiecksumfang ABC im angegebenen Sinne, so wird das Elementardreieck $A'BC$ in positivem, das Kugelzweieck AA' aber in negativem Sinne umlaufen, und wir werden als Flächeninhalt des Dreiecks ABC nach den Moebiusschen Festsetzungen die *Differenz dieser beiden Flächenstücke* zu rechnen haben. Diese Zerspaltung der Dreiecksmembran in einen positiven und einen negativen Teil kann man sich gemäß dem Umlaufssinn der Begrenzung anschaulich vielleicht so vorstellen, daß die Membran bei A' tordiert ist, so daß in dem unteren Zweieck die negativ zu rechnende Rückseite zum Vorschein kommt. Es ist leicht, sich hiernach kompliziertere Beispiele zu bilden.

Ich will nun endlich an demselben Beispiele noch zeigen, *daß bei dieser allgemeinen Auffassung des Flächeninhalts die elementare Inhaltsformel der sphärischen Trigonometrie bestehen bleibt.* Bekanntlich wird der Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ auf der Kugel vom Radius 1 angegeben durch den sogenannten „*sphärischen Exzeß*“ $(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi$, wofern $\lambda, \mu, \nu > 0$ ist. Wir wollen nun uns klar machen, daß diese Formel auch für unser Dreieck ABC richtig bleibt. Zunächst ist nämlich der Inhalt des Elementardreiecks $A'BC$ sicherlich $(\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi$; davon haben wir abzuziehen den Inhalt des Kugelzweiecks AA' von der Winkelöffnung $\lambda'\pi$, der gleich $2\lambda'\pi$ ist (da der Inhalt eines Kugelzweiecks proportional seinem Winkel ist und für den Winkel 2π — die Vollkugel — den Wert 4π erhält). Wir erhalten daher als Inhalt von ABC in der Tat:

$$(\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi - 2\lambda'\pi = (-\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi = (\lambda + \mu + \nu - 1)\pi.$$

In ähnlicher Weise würde sich nun wahrscheinlich, wenn man in ein allgemeines eigentliches Dreieck mit beliebigen Winkeln und Seiten passend eine mehrteilige Membran einzuspannen versucht und auf Grund der Vorzeichenregel den Inhalt als algebraische Summe der einzelnen Teile bestimmt, die allgemeine Gültigkeit der Inhaltsformel $(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi$ *ergeben, wobei natürlich* $\lambda\pi, \ldots$ *als wirkliche Winkel der Membran, nicht etwa wie früher als Außenwinkel anzusehen sind.* Die hiermit verlangte Untersuchung ist nun freilich noch nicht ausgeführt, sie bietet aber gewiß keine sehr großen Schwierigkeiten, und ich würde sehr wünschen, daß sie angestellt würde. Besonders wichtig wäre es dabei, unter dem voliegenden Gesichtspunkt die *Rolle der uneigentlichen Dreiecke* zu klären.

Damit verlasse ich die Trigonometrie und wende mich der zweiten wichtigen Anwendung der goniometrischen Funktionen zu, die auch in den Bereich der Schule fällt.

B. Lehre von den kleinen Schwingungen, insbesondere Pendelschwingungen.

Ich erinnere zunächst in Kürze an die *Ableitung des Pendelgesetzes*, die wir auf der Universität *unter Benutzung* der Infinitesimalrechnung zu geben pflegen. Ein Pendel (vgl. Abb. 78) von der Masse m hänge an einem Faden von der Länge l, sein Ausschlagswinkel aus der Gleichgewichtslage sei φ. Da die vertikal abwärts gerichtete Schwerkraft mg wirkt, so schließt man aus den Grundgleichungen der Mechanik leicht, daß die Bewegung des Pendels durch die Gleichung:

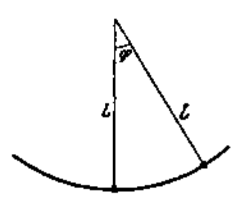


Abb. 78.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1}$$

bestimmt wird. Für kleine Ausschläge können wir mit hinreichender Annäherung $\sin\varphi$ durch φ ersetzen und erhalten dann für die sogenannten *unendlich kleinen Pendelschwingungen*:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi. \tag{2}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird nun bekanntlich durch goniometrische Funktionen gegeben, die hier also, wie früher schon betont, gerade vermöge ihrer Differentialeigenschaften hineinspielen, und zwar ist das allgemeine Integral:

$$\varphi = A \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\,,$$

wo A, B willkürliche Konstante sind, oder unter Einführung geeigneter neuer Konstanten C, t_0:

$$\varphi = C \cdot \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\,, \tag{3}$$

wo C die *Amplitude*, t_0 die *Phase* der Schwingung heißt; für *die Dauer einer ganzen Schwingung folgt hieraus der Wert* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ganz anders aber als bei diesen einfachen und klaren Betrachtungen, die sich bei näherem Eingehen auf die Sache natürlich auch durchaus anschaulich gestalten lassen, sieht eine verbreitete *Behandlung des Pendelgesetzes im Schulunterricht* aus, die man die „*elementare*" nennt. Da will man ja die konsequente Infinitesimalrechnung unter allen Umständen vermeiden, während die Physik gerade hier durch die innerste Natur ihrer Probleme die Verwendung von Infinitesimalmethoden gebieterisch fordert; also verwendet man *ad hoc erfundene Verfahren*, die Infinitesimalgedanken enthalten, ohne sie beim richtigen Namen zu nennen. Natürlich wird ein solcher Aufbau äußerst kompliziert, wenn er wirklich exakt sein soll; daher trägt man ihn denn tatsächlich vielfach so lückenhaft vor, daß von einem *Beweise* des Pendelgesetzes kaum mehr die Rede sein kann. So entsteht dann die kuriose Erscheinung, daß ein und derselbe Lehrer in der einen Stunde — der Mathematik — an die logische Exaktheit der Schlüsse die allerhöchsten Anforderungen stellt, denen nach seiner noch von der Tradition des 18. Jahrhunderts abhängigen Meinung die Infinitesimalrechnung nicht genügt, in der nächsten Stunde aber — der Physik — zu den anfechtbarsten Schlüssen, zur kühnsten Verwendung des Unendlichkleinen greift.

Lassen Sie mich zur näheren Erläuterung kurz den Gedankengang einer solchen *elementaren Ableitung des Pendelgesetzes* darstellen, die in der Tat in Lehrbüchern und im Unterricht verwendet wird. Man geht hier aus von dem *konischen Pendel*, das ist ein *räumliches* Pendel, dessen Spitze sich speziell *mit gleichförmiger Geschwindigkeit v auf einem Kreise um die Vertikale als Achse* bewegt, so daß der Pendelfaden einen Kreiskegel beschreibt (vgl. Abb. 79); das ist die Bewegung, die die Mechanik als *reguläre Präzession* bezeichnet. Die Möglichkeit einer solchen Bewegung nimmt man auf der Schule natürlich als durch das Experiment gegeben an und fragt nur noch nach der bei ihr obwaltenden *Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und dem konstanten*

Pendelausschlage $\varphi = \alpha$ (Öffnungswinkel des vom Faden beschriebenen Kegels).

Dabei bemerkt man zunächst, daß die Pendelspitze einen Kreis vom Radius $r = l \sin\alpha$ beschreibt, wofür man $r = l \cdot \alpha$ setzen kann, wenn α hinreichend klein genommen wird. Nun spricht man von der *Zentrifugalkraft* und leitet die Formel her, daß dieser mit der Geschwindigkeit v umlaufende Punkt die Zentrifugalkraft:

$$m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{l\cdot\alpha}$$

ausübt, der zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine gleich große, nach dem Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtete *Zentripetalkraft* entgegenwirken muß. Diese erhält man aber, wenn man die Schwerkraft nach dem Kräfteparallelogramm in eine in der Fadenrichtung wirkende und eine in der Kreisebene gelegene zweite Komponente von der Größe $m \cdot g \cdot \operatorname{tg}\alpha$ zerlegt (vgl. Abb. 79). Dafür kann man $m g \cdot \alpha$ setzen, wenn α genügend klein ist; wir erhalten also die gewünschte Beziehung in der Gestalt:

$$m \cdot \frac{v^2}{l\alpha} = m g \cdot \alpha\,,$$

oder:

$$v = \alpha\sqrt{g \cdot l}\,.$$

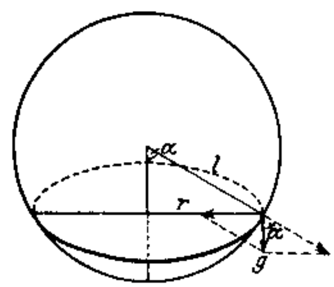


Abb. 79.

Die Schwingungsdauer T des Pendels, das ist die Zeit, in der die ganze Kreisperipherie $2\pi r = 2\pi l\alpha$ durchlaufen wird, ergibt sich daher als:

$$T = \frac{2\pi l\alpha}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

d. h. das konische Pendel führt — bei hinreichend kleinem Ausschlage α — eine reguläre Präzession von dieser bestimmten von α unabhängigen Dauer aus.

Wollen wir bereits diesen Teil der Ableitung kurz kritisieren, so können wir zunächst die Zulässigkeit der Ersetzung von $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ durch α selbst zugestehen, die wir ja auch in unserer exakten Ableitung (S. 201) brauchten; denn sie bewirkt gerade den *Übergang von „endlichen" zu „unendlich kleinen" Schwingungen.* Hingegen ist darauf hinzuweisen, daß die für die Zentrifugalkraft benutzte Formel „elementar" nur durch allerlei Vernachlässigungen abgeleitet werden kann, deren Berechtigung exakt eben in der Differentialrechnung begründet liegt. Die *Definition der Zentrifugalkraft* erfordert nämlich im Grunde sogar den Begriff des *zweiten Differentialquotienten*, und so muß denn die elementare Ableitung auch diesen einschmuggeln; dabei entstehen, indem man nicht klar und präzis aussprechen kann, um was es sich handelt, dem Verständnis die größten Schwierigkeiten, die bei Benutzung der Differentialrechnung gar nicht vorhanden sind. Ich brauche hier um so weniger ins einzelne zu gehen, als ich Sie auf einige sehr lesenswerte Programmschriften des verstorbenen Realgymnasialdirektors *H. Seeger*[1]) in Güstrow und eine sehr interessante Studie von *H. E. Timerding: „Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern"*[2]) verweisen kann. Bei *Seeger* werden u. a. gerade die Herleitungen der Formel für die Zentrifugalkraft in einer unserm Standpunkte durchaus entsprechenden Weise eingehend kritisiert. Bei *Timerding* finden sich überhaupt ausführliche Untersuchungen der im Physikunterricht traditionell zur Geltung kommenden mathematischen Methoden. Ich fahre mit der Behandlung der Pendelschwingungen fort.

Wir haben mit der oben angestellten Überlegung erst die *Möglichkeit einer gleichförmigen Bewegung auf einem Kreise* erhalten; legen wir in die Ebene dieses Kreises (d. i. bei unsern Vernachlässigungen die Tangentialebene der Kugel) ein x-y-Koordinatensystem (vgl. Abb. 80), so wird diese Bewegung in der Sprache der analytischen Mechanik dargestellt durch die Gleichungen:

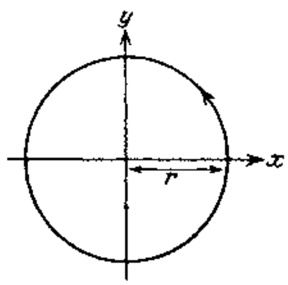


Abb. 80.

$$(4)\qquad \begin{cases} x = l \cdot \alpha \cdot \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\,, \\ y = l \cdot \alpha \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\,. \end{cases}$$

Wir wollen aber die *ebenen Schwingungen* des Pendels erhalten, d. h. der Pendelpunkt in unserer x-y-Ebene soll sich auf einer Geraden — der x-Achse — bewegen, und seine Bewegungsgleichung muß lauten:

$$(5)\qquad x = l \cdot C \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\,, \qquad y = 0,$$

damit für den Ausschlagswinkel $\varphi = \frac{x}{l}$ die richtige Gleichung (3) herauskommt. Wir müssen also von den Gleichungen (4) zu (5) gelangen — wohlgemerkt, *ohne von den dynamischen Differentialgleichungen Gebrauch machen zu können.* Das macht man nun möglich, indem man

[1]) Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Güstrow 1891, Schulprogr. Nr. 649). — Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu dem Erlaß des preußischen Unterrichtsministeriums von 1892 (1893, Nr. 653). — Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung (1894, Nr. 658).

[2]) Bd. III, Heft 2 der „Abhandlungen des deutschen Unterausschusses der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission". Leipzig u. Berlin 1910.

das *Prinzip der Überlagerung kleiner Schwingungen* aufstellt, *nach dem mit zwei Bewegungen* x, y *und* x_1, y_1 *auch die Bewegung* $x + x_1, y + y_1$ *möglich ist.* Man kann nämlich die links herum laufende Pendelbewegung (4) mit einer rechts herum laufenden:

$$x_1 = l \cdot \alpha \cdot \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\,, \qquad y_1 = -l \cdot \alpha \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)$$

kombinieren; *dann ist die Bewegung* $x + x_1, y + y_1$, wenn man $\alpha = \frac{C}{2}$ wählt, in der Tat gerade die oszillierende Pendelbewegung (5), die wir ableiten wollten.

Bei einer Kritik dieser Betrachtungen kommt es natürlich vor allem darauf an, wie man das *Superpositionsprinzip ohne Differentialrechnung* begründen oder doch wenigstens plausibel machen will. Besonders bleibt auch immer der Skrupel bei diesen elementaren Darstellungen, ob die verschiedenen, der Reihe nach vorgenommenen Vernachlässigungen sich nicht schließlich zu einem merkbaren Fehler häufen können, selbst wenn jede einzeln zulässig ist. Näher brauche ich das alles wohl nicht auszuführen, denn diese Fragen sind ja durchweg so elementar, daß sie jeder von Ihnen allein wird durchdenken können, nachdem sie nur einmal angeregt sind. Lassen Sie mich zum Schluß nur noch ausdrücklich betonen, daß es sich bei dieser ganzen Besprechung um einen ganz *zentralen Punkt der Unterrichtsprobleme* handelt: Einmal tritt hier das *Bedürfnis der Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung* klar zutage, dann aber auch die *Notwendigkeit einer allgemeinen, von der speziellen Dreiecksgeometrie unabhängigen Einführung der goniometrischen Funktionen*, die solche allgemeine Anwendungen vorbereitet.

Ich komme nun endlich zur *letzten Anwendung der goniometrischen Funktionen*, von der ich hier sprechen will.

C. Darstellung periodischer Funktionen durch Reihen goniometrischer Funktionen (trigonometrische Reihen).

Bekanntlich hat man in der Astronomie, in der mathematischen Physik usw. immer wieder Gelegenheit, periodische Funktionen zu betrachten und der Rechnung zu unterwerfen, und da bildet die in der Überschrift genannte Darstellung das hauptsächliche, ständig gebrauchte Hilfsmittel. Wir denken uns der Bequemlichkeit halber die Einheit so gewählt, daß die gegebene periodische Funktion $y = f(x)$ die *Periode* 2π hat (vgl. Abb. 81). Die Frage ist dann, *ob man ein solches* $f(x)$ *durch ein Aggregat der Cosinus und Sinus*

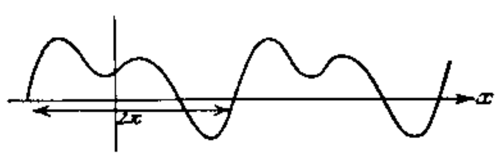


Abb. 81.

der ganzzahligen Vielfachen von x bis zum ersten, zweiten, ..., allgemein zum n^{ten} hin mit passend gewählten konstanten Faktoren approximieren kann, d. h. ob man $f(x)$ mit einem hinreichend kleinen Fehler durch einen Ausdruck der Form:

$$(1)\quad \begin{cases} S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos n x \\ \qquad\qquad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin n x \end{cases}$$

ersetzen darf. Den Faktor $\frac{1}{2}$ fügt man dem konstanten Gliede hinzu, um den später abzuleitenden Ausdruck für die Koeffizienten allgemein gültig zu machen.

Ich muß zunächst wieder Klage über die gewöhnliche Darstellung der *Lehrbücher*, dieses Mal der Differential- und Integralrechnung, führen. Anstatt nämlich das soeben gestellte elementare Problem in den Vordergrund zu stellen, scheint ihnen vielfach die daran anschließende *theoretische Frage, ob man nicht durch eine unendliche Reihe $f(x)$ genau darstellen kann*, das einzige zu sein, was überhaupt Interesse verdient. Eine rühmliche Ausnahme macht z. B. *Runge* in seiner „*Theorie und Praxis der Reihen*"[1]). Und doch ist jene theoretische Fragestellung an sich *für die Praxis durchaus uninteressant*, weil man dort selbstverständlich immer nur endlich viele und nicht einmal allzuviel Glieder summieren kann; darüber hinaus gestattet sie aber nicht einmal einen *Rückschluß* auf die praktische Verwendbarkeit: Man darf aus der Konvergenz einer Reihe keineswegs schließen, daß ihre ersten Glieder die Summe auch nur mit einiger Annäherung darstellen, ebenso wie auch umgekehrt die ersten paar Glieder divergenter Reihenentwicklungen unter Umständen zur praktischen Darstellung einer Funktion bereits gut brauchbar sein können. Ich muß das besonders hervorheben, weil derjenige, der nur die übliche Darstellung kennt und dann etwa im physikalischen Praktikum endliche trigonometrische Reihen wirklich anwenden muß, sich in der Regel schließlich mit solchen ungenügenden Schlüssen selbst täuscht.

Noch merkwürdiger erscheint die übliche Übergehung der endlichen trigonometrischen Reihen, wenn man bedenkt, daß sie schon seit langer Zeit vollständig behandelt sind; die *maßgebenden Ansätze* hat bereits der Astronom *Bessel* 1815 gemacht. Näheres über Geschichte und Literatur dieser Fragen finden Sie in dem Enzyklopädiereferat von *Burkhardt* über „*Trigonometrische Interpolation*" (Enz. II A 9, S. 642ff.). Übrigens stimmen die *Formeln*, um die es sich hier handelt, im wesentlichen mit den bei den üblichen Konvergenzbeweisen auftretenden überein; nur die Gedanken, die wir an sie anschließen, haben eine andere Färbung und sind geeignet, die Sache mehr in den Besitz des Praktikers zu bringen.

---

[1]) Sammlung Schubert Nr. 32. Leipzig 1904.

Ich wende mich nun zur *näheren Behandlung unseres Ansatzes* und habe zunächst über die *zweckmäßigste Bestimmung der Koeffizienten a, b bei vorgegebener Gliederzahl n* zu sprechen. Hierfür hat *Bessel* eine Idee herausgearbeitet, die an die *Methode der kleinsten Quadrate* anschließt. Der Fehler, den man macht, indem man $f(x)$ an der Stelle x durch die Summe $S_n(x)$ der $2n+1$ ersten Glieder der trigonometrischen Reihe ersetzt, ist $f(x) - S_n(x)$, und *ein Maß für die Güte der Darstellung im ganzen Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ einer Periodenlänge des $f(x)$ wird die Summe aller Fehlerquadrate, also das Integral:*

$$J = \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

sein. Die zweckmäßigste Approximation von $f(x)$ wird danach diejenige Summe $S_n(x)$ liefern, für welche dieses Integral J ein Minimum wird; aus dieser Forderung hat Bessel die $2n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ bestimmt. *Notwendige Bedingungen* für das Eintreten des Minimums sind aber, da wir J als Funktion der $2n+1$ Größen $a_0, \ldots, b_n$ aufzufassen haben:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} = 0, & \dfrac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \ldots \dfrac{\partial J}{\partial a_n} = 0, \\ & \dfrac{\partial J}{\partial b_1} = 0, \ldots \dfrac{\partial J}{\partial b_n} = 0. \end{cases}$$

Da J eine *quadratische wesentliche positive Funktion* von $a_0, \ldots, b_n$ ist, sieht man hinterher leicht ein, *daß die aus diesen $2n+1$ Gleichungen bestimmten Werte der Variablen ein wirkliches Minimum von J liefern.*

Differenzieren wir unter dem Integralzeichen, so gehen die Gleichungen (2) über in:

$$(2') \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]\, dx = 0, \\ \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)] \cos x\, dx = 0, \ldots, \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)] \cos nx\, dx = 0, \\ \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)] \sin x\, dx = 0, \ldots, \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)] \sin nx\, dx = 0. \end{cases}$$

Nun ziehen sich aber die Integrale der Produkte von $S(x)$ mit einem cos oder sin sehr zusammen. Man hat nämlich für $\nu = 0, 1, \ldots, n$:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos \nu x\, dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos \nu x\, dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \cos \nu x\, dx + \cdots + a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos \nu x\, dx$$
$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin x \cos \nu x\, dx + \cdots + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cos \nu x\, dx.$$

Nach den bekannten elementaren Integraleigenschaften der goniometrischen Funktionen verschwinden rechts alle Glieder bis auf das Cosinusglied mit dem Index ν, und dieses selbst nimmt den Wert $a_\nu \cdot \pi$ an, so daß:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos\nu x \, dx = a_\nu \cdot \pi \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

wird. Daß dies auch für $\nu = 0$ gilt, haben wir der Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{2}$ zu a_0 zu danken. Ganz analog ergibt sich weiter:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \sin\nu x \, dx = b_\nu \cdot \pi. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Aus diesen einfachen Relationen folgt, daß jede der Gleichungen (2') nur noch eine der $2n + 1$ Unbekannten enthält; wir können ihre Lösung daher sofort hinschreiben:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos\nu x \, dx, & (\nu = 0, 1, \ldots, n) \\[2ex] b_\nu = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin\nu x \, dx. & (\nu = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Verwenden wir, wie wir es von jetzt an tun wollen, diese Werte der Koeffizienten in $S_n(x)$, so wird J in der Tat ein Minimum, und als dessen Wert ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\}.$$

Eine wichtige Bemerkung ist, *daß die nach unserem Ansatze erhaltenen Koeffizientenwerte von der speziell angenommenen Anzahl n der Reihenglieder gänzlich unabhängig sind, und daß darüber hinaus sogar der zu einem Gliede $\cos\nu x$ oder $\sin\nu x$ gehörige Koeffizient genau denselben Wert behält, wenn man dieses Glied allein oder zusammen mit beliebigen anderen zur Approximation von $f(x)$ nach demselben Prinzip verwendet.* Versucht man z. B. $f(x)$ durch ein einziges Cosinusglied $a_\nu \cos\nu x$ so gut als möglich anzunähern, d. h. so, daß:

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - a_\nu \cos\nu x]^2 \, dx = \text{Minimum}$$

wird, so erhält man gleichfalls gerade den oben angegebenen Wert von a_ν. Das macht dieses Annäherungsverfahren für die Praxis besonders bequem; denn will man eine Funktion, deren Verlauf etwa dem Sinus selbst ähnelt, zuerst durch ein Vielfaches von $\sin x$ approximieren und stellt sich hinterher heraus, daß diese Annäherung noch nicht genau genug wird, so kann man noch weitere Glieder additiv hinzufügen — immer nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates —, ohne das erste ändern zu müssen.

Ich habe nun darzulegen, *wie die auf diese Weise bestimmten Summen* $S_n(x)$ *die gegebene Funktion* $f(x)$ *im einzelnen annähern.* Für solche Untersuchungen scheint mir das Voranstellen einer gewissermaßen experimentellen, naturwissenschaftlichen Methode sehr zweckmäßig, daß man sich nämlich zunächst einmal für einige konkrete Fälle richtige *Figuren der Näherungskurven* $S_n(x)$ entwirft. Das gibt eine lebendige Vorstellung der Sache und wird auch bei einem nicht besonders mathematisch veranlagten Menschen Interesse erwecken und das Bedürfnis nach mathematischer Aufklärung entstehen lassen.

In einer früheren Vorlesung (W.-S. 1903/04), in der ich diese Dinge ausführlicher behandelt habe, hat *Schimmack*, damals mein Assistent, solche Zeichnungen hergestellt, von denen ich Ihnen einige im Original und in Projektionsbildern hier vorführen will:

1. Einfache und lehrreiche Beispiele der gewünschten Art erhalten wir, wenn wir *Kurven aus geradlinigen Stücken* zusammensetzen. Es gehe z. B. die Kurve $y = f(x)$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geradlinig unter dem Winkel 45° in die Höhe, dann bis $x = \frac{3\pi}{2}$ unter dem gleichen Winkel herunter, und endlich bis $x = 2\pi$ wieder unter 45° hinauf, und sie werde über dieses Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt. Berechnen wir hier die Koeffizienten, so werden alle $a_\nu = 0$, da $f(x)$ eine ungerade Funktion ist; es bleiben nur Sinusglieder übrig, und zwar wird, wie ich hier nur angebe:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - + \cdots\right).$$

In der Abb. 82 ist der Verlauf der ersten und zweiten Teilsumme skizziert. Die Teilsummen schließen sich der gegebenen Kurve $y = f(x)$

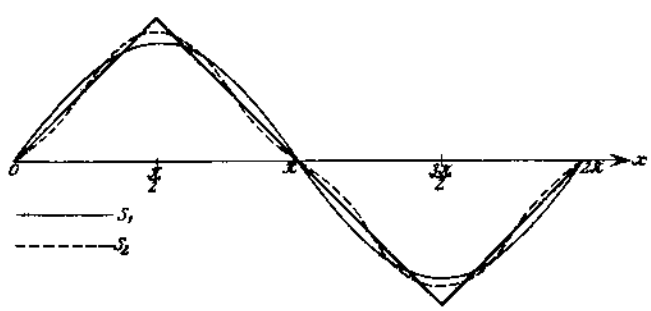


Abb. 82.

mehr und mehr an, indem die Anzahl ihrer Schnitte mit ihr ständig wächst. Besonders bemerkenswert ist, wie die Näherungskurven sich mehr und mehr in die *Ecken* der Kurve bei $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ hineinpressen, obwohl sie selbst als analytische Funktionen keine Ecke bilden können.

2. Es gehe die Kurve $f(x)$ von 0 an bis $x = \pi$ geradlinig unter 45° aufwärts, springe dann unstetig bis auf $-\pi$ und gehe von da wiederum unter 45° bis $x = 2\pi$ aufwärts; sie bestehe also aus lauter parallelen, durch die Punkte $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ der x-Achse gelegten Strecken. Schalten wir an den Unstetigkeitsstellen die vertikalen, die Enden jener Strecken verbindenden Stücke ein, so wird die unstetige Funktion durch einen stetigen Linienzug repräsentiert (vgl. Abb. 83); er sieht aus wie die m-Striche, die Sie wohl alle noch am Anfange Ihres Schreibunterrichtes geübt haben. Wiederum ist die Funktion ungerade, so daß die Cosinusglieder fortfallen, und die Reihenentwicklung lautet:

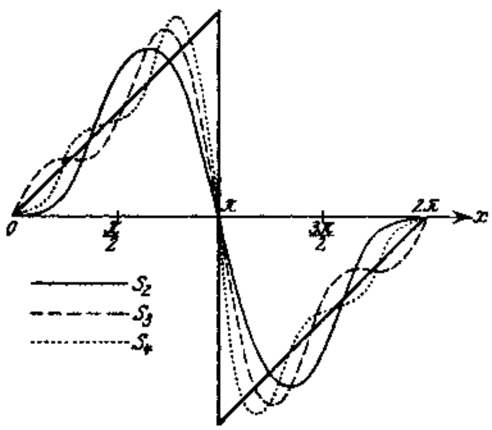


Abb. 83.

$$S(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \cdots\right).$$

Die Abb. 83 stellt die Summen der ersten zwei, drei, vier Glieder dar; auch hier ist besonders interessant, wie sie die Unstetigkeiten von $f(x)$ nachzumachen bestrebt sind, indem sie bei $x = \pi$ z. B. mit immer steilerem Abfall durch Null hindurchgehen.

3. Das letzte Beispiel (vgl. Abb. 84) sei eine Kurve, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gleich $\frac{\pi}{2}$, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gleich 0, endlich zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und 2π gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist und weiterhin periodisch fortgesetzt wird. Schalten wir an den Unstetigkeitsstellen wieder vertikale Stücke ein, so erhalten wir einen

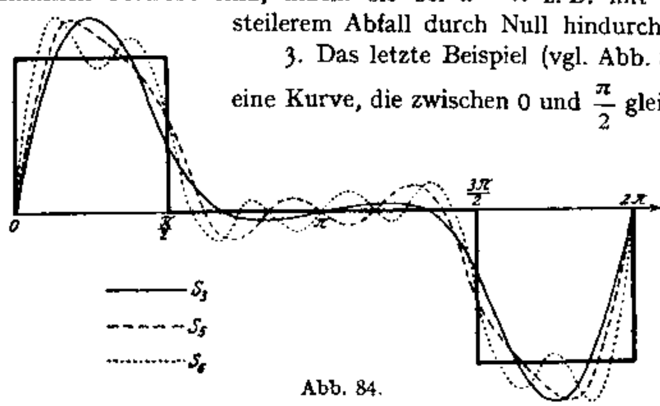


Abb. 84.

hakenförmigen Zug. Wiederum sind nur die Sinuskoeffizienten von Null verschieden, da eine ungerade Funktion vorliegt, und zwar wird:

$$S(x) = \sin x + 2\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + 2\cdot\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots .$$

Hier ist das Gesetz der Koeffizienten nicht mehr so einfach wie bisher, und demgemäß sind die aufeinanderfolgenden Näherungskurven, von denen die 3., 5. und 6. gezeichnet sind, nicht mehr so übersichtlich vergleichbar wie in den vorhergehenden Fällen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie groß allgemein der Fehler an einer bestimmten Stelle x ist, den wir bei Ersetzung von $f(x)$ durch die Summe $S_n(x)$ machen; bisher haben wir uns nur mit dem *Integral* dieses Fehlers über das ganze Intervall beschäftigt. Wir wollen jetzt die Integrationsvariable in den Integralen (3) (S. 208) für die Koeffizienten a_ν, b_ν mit ξ zum Unterschiede von der als fest betrachteten Stelle x bezeichnen. Dann können wir unsere endliche Reihensumme (1) schreiben:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi\cdot f(\xi)\cdot[\tfrac{1}{2} + \cos x\cos\xi + \cos 2x\cos 2\xi + \cdots + \cos nx\cos n\xi + \sin x\sin\xi + \sin 2x\sin 2\xi + \cdots + \sin nx\sin n\xi],$$

oder, wenn wir je zwei übereinander stehende Summanden zusammenziehen:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi\cdot f(\xi)\,[\tfrac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \cdots + \cos n(x-\xi)].$$

Die in der Klammer stehende Reihe kann man nun leicht summieren am bequemsten vielleicht durch Übergang zur komplexen Exponentialfunktion; wir erhalten so — auf Einzelheiten kann ich hier nicht eingehen —, wenn wir noch den Gedanken benutzen, daß wir wegen der Periodizität des Integranden die Integration auch von $-\pi$ bis $+\pi$ erstrecken können:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi\cdot f(\xi)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi-x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}.$$

Um über den Wert dieses Integrales ein Urteil zu gewinnen, zeichnen wir uns zunächst die Kurven:

$$\zeta = \pm\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\xi-x)}$$

über dem Intervalle $x - \pi \leqq \xi \leqq x + \pi$ der ξ-Achse; sie haben daselbst offenbar einen hyperbelähnlichen Verlauf (vgl. Abb. 85). Zwischen diesen Kurvenästen oszilliert nun die Kurve:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)} = \zeta \cdot \sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)$$

hin und her, und zwar um so öfter, je größer n ist; bei $\xi = x$ nimmt sie einen zugleich mit n wachsenden Wert $\left(\eta = \frac{2n+1}{2\pi}\right)$ an. Denken wir uns der Einfachheit halber $f(\xi) = 1$, so wird $S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \eta \cdot d\xi$ einfach den Flächeninhalt darstellen, den die η-Kurve mit der ξ-Achse

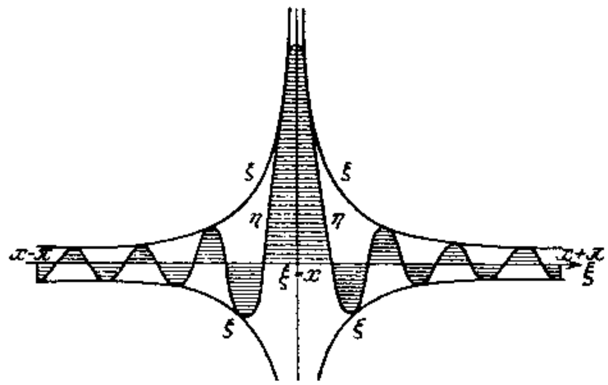


Abb. 85.

einschließt (in der Abbildung schraffiert). Man sieht unmittelbar, wenn man einiges Gefühl für Kontinuität hat, *daß bei hinreichend großem n die Beiträge der Oszillationen rechts sowohl wie links, die abwechselnd positiv und negativ sind, sich kompensieren werden, und daß allein der Beitrag des sehr hohen schmalen Mittelstückes übrig bleibt;* dieser aber geht, wie man sich leicht klar macht, mit wachsendem n richtig in den Wert $f(x) = 1$ über. Genau ebenso liegen allgemein die Dinge, wenn $f(x)$ bei $x = \xi$ keine zu starke Schwankung aufweist.

Eben diese Überlegungen liegen nun, zu präzisen Abschätzungen ausgestaltet, dem Konvergenzbeweise für die unendliche trigonometrische Reihe, wie ihn Dirichlet angegeben hat, zugrunde.

Diesen Beweis hat *Dirichlet* zum erstenmal in Bd. 4 des Crelleschen Journals von 1829 publiziert[1]); später (1837) hat er eine populärere Darstellung in dem *Repertorium der Physik von Dove und Moser* gegeben[2]). Man findet den Beweis heutzutage in den meisten Lehrbüchern,

[1]) Abgedruckt in Dirichlets Werken Bd. I, S. 117. Berlin 1889.

[2]) „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen." Abgedruckt Werke Bd. I, S. 133—160 und Ostwalds Klassiker Nr. 116. Leipzig 1900.

und ich brauche daher hier nicht näher auf ihn einzugehen. Nur gewisse ***hinreichende Bedingungen, denen die Funktion $f(x)$ genügen muß, um durch eine unendliche trigonometrische Reihe darstellbar zu sein,*** muß ich noch nennen. $f(x)$ sei wieder im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gegeben und darüber hinaus periodisch fortgesetzt. Dirichlet macht dann folgende beiden Annahmen, die man heute schlechtweg als *Dirichletsche Bedingungen* bezeichnet:

a) *$f(x)$ ist abteilungsweise stetig,* d. h. es weist im Intervalle $(0, 2\pi)$ nur eine endliche Anzahl von Sprüngen auf und ist sonst durchweg auch bis an die Sprungstellen heran stetig.

b) *$f(x)$ ist abteilungsweise monoton,* d. h. man kann das Intervall $(0, 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen teilen, in deren jedem $f(x)$ entweder nicht wächst oder nicht abnimmt — mit andern Worten, *$f(x)$ besitzt nur endlich viele Maxima und Minima* (dadurch sind beispielsweise Funktionen vom Typus $\sin\frac{1}{x}$, bei denen sich unendlich viele Extrema an der Stelle $x = 0$ häufen, ausgeschlossen).

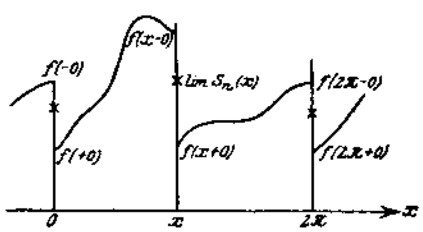


Abb. 86.

Unter diesen Bedingungen stellt dann, das beweist Dirichlet, *die unendliche Reihe an jeder Stetigkeitsstelle x genau den Wert $f(x)$ dar:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Dirichlet zeigt aber noch weiter, *daß auch an einer Sprungstelle x die Reihe konvergiert, und zwar gegen das arithmetische Mittel der beiden Werte, in die $f(x)$ übergeht, wenn man sich von rechts oder links der Sprungstelle nähert;* oder, wie man gewöhnlich schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

In der Abb. 86 sind solche Sprungstellen und die in Frage kommenden Werte markiert.

Diese Dirichletschen Bedingungen für $f(x)$ sind ***nur ausreichend, keineswegs aber notwendig,*** damit $f(x)$ durch die Reihe $S(x)$ dargestellt werde; es genügt aber andererseits nicht, bloß Stetigkeit von $f(x)$ zu fordern, vielmehr kann man sich Beispiele stetiger Funktionen konstruieren, bei denen sich unendlich viele Oszillationen so stark häufen, daß die Reihe $S(x)$ divergiert.

Nach diesen mehr theoretischen Erörterungen will ich wieder von der ***praktischen Seite der trigonometrischen Reihen*** sprechen und verweise da zunächst für die eingehendere Behandlung der Fragen, die sich hier anknüpfen, auf das schon oben (S. 206) hervorgehobene Buch von

Runge. Sie finden dort die Frage der *numerischen Berechnung der Reihenkoeffizienten* ausführlich behandelt, d. h. die Frage, wie man für eine gegebene Funktion die Integrale für a_ν, b_ν am zweckmäßigsten rasch ausrechnet.

Man hat auch besondere *mechanische Apparate zur Berechnung dieser Koeffizienten* konstruiert, die man *harmonische Analysatoren* nennt. Dieser Name geht auf die Beziehung zurück, die die Entwicklung einer Funktion $y = f(x)$ in eine trigonometrische Reihe zur *Akustik* besitzt: sie entspricht ja genau der *Zerlegung eines beliebigen Tones* $y = f(x)$ (wobei x die Zeit, y die Amplitude der Tonschwingung ist) *in „reine Töne"*, d. h. reine Cosinus- und Sinusschwingungen. Unsere Sammlung besitzt einen von *Coradi* in Zürich gebauten Analysator, welcher die Koeffizienten von je sechs Sinus- und Cosinusgliedern ($\nu = 1, \ldots, 6$) zu bestimmen gestattet, im ganzen also zwölf Koeffizienten; der Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ muß noch durch ein Planimeter gesondert bestimmt werden. *Michelson* und *Stratton* haben einen Apparat konstruiert, mit dem man gar 160 Koeffizienten ($\nu = 1, 2, \ldots, 80$) bestimmen kann; er ist in dem Rungeschen Buche beschrieben. Der Apparat kann auch umgekehrt eine gegebene trigonometrische Reihe von 160 Gliedern summieren, d. h. aus den gegebenen Koeffizienten a_ν, b_ν die Funktion $f(x)$ herstellen; diese Aufgabe ist natürlich gleichfalls praktisch von höchster Bedeutung.

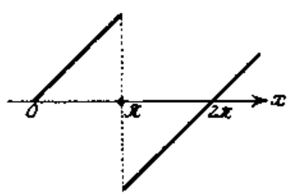


Abb. 87.

Der Michelson-Strattonsche Apparat hat nun erneut die Aufmerksamkeit auf ein sehr interessantes und schon früher[1]) beachtetes Phänomen gelenkt, das merkwürdigerweise im Laufe der Jahrzehnte in Vergessenheit geraten war. *Gibbs* hat es *1899* von neuem in der *„Nature"*[2]) zur Sprache gebracht, und man nennt es daher das *Gibbssche Phänomen*. Lassen Sie mich darüber noch einiges sagen! Der Dirichletsche Satz gibt den Wert der unendlichen trigonometrischen Reihe *bei festgehaltenem x als* $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ an; in dem oben an zweiter Stelle behandelten Beispiele — um einen konkreten Fall ins Auge zu fassen —, stellt also die so definierte Reihensumme die in Abb. 87 angedeutete Funktion in den isolierten Punkten bei $\pi, 3\pi, \ldots$ dar.

Nun hatten wir uns aber die trigonometrische Approximation bereits in anderer Weise verdeutlicht, als es dieses Dirichletsche Verfahren tut, das x festhält und n ins Unendliche wachsen läßt: *Wir hatten gerade n festgehalten*, $S_n(x)$ *bei variablem x betrachtet* und so der Reihe

[1]) Nach Enzyklopädie II, 12 (Trigonometrische Reihen und Integrale) S. 1049 hat *H. Wilbraham* bereits das im folgenden besprochene Phänomen gekannt und rechnerisch behandelt.

[2]) Bd. 59, S. 200. 1898/99 = Scientific papers II, S. 158. New York 1906.

nach die sukzessiven Annäherungskurven $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, ... gezeichnet. Man wird jetzt fragen, was aus diesen Kurven wird, wenn n ins Unendliche läuft oder, arithmetisch gesprochen: *Gegen welche Werte häufen sich die Werte $S_n(x)$, wenn man n bei variablem x ins Unendliche wachsen läßt.* Es ist anschaulich klar, daß jetzt die Grenzfunktion *nicht*, wie vorhin, *isolierte Punkte* aufweisen kann, sondern einen *zusammenhängenden Kurvenzug* darstellen muß. Man wird es nun zunächst für wahrscheinlich halten, daß dieser Kurvenzug gerade aus den stetigen Ästen von $y = f(x)$ zuzüglich der die Stellen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ an den Unstetigkeitsstellen verbindenden vertikalen Stücke bestehen wird, in unserm Beispiele also die m-förmige Kurve, die wir früher in Abb. 83, S. 210 zeichneten. In der Tat aber zeigt sich, *daß das vertikale Stück der Grenzkurve noch stets um ein endliches Stück über bzw. unter $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hinausgeht*, so daß die Grenzkurve das in Abb. 88 skizzierte merkwürdige Aussehen hat.

Diese aufgesetzten Türmchen hat man eben an den vom Michelsonschen Apparat gezeichneten Kurven, also geradezu *experimentell*, beobachtet; man hat sie anfänglich wohl auf Ungenauigkeiten des Apparates zurückgeführt, bis endlich *Gibbs* sie als notwendig erkannte. Ist allgemein $D = |f(x+0) - f(x-0)|$ die Größe des Sprunges, so hat Gibbs gezeigt, daß die aufgesetzte Verlängerung gleich:

$$-\frac{D}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi \approx \frac{1}{\pi}\,0{,}28\,D \approx 0{,}09\,D$$

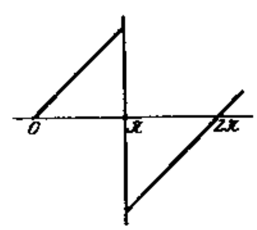


Abb. 88.

ist. Was die Begründung dieser Aussage anlangt, so genügt es, sie für eine einzige unstetige Funktion, etwa die des Beispiels, nachzuweisen, da alle andern Funktionen mit gleichem Sprunge aus ihr durch Addition stetiger Funktionen hervorgehen müssen; dieser Beweis ist aber nicht sehr schwierig, er ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Integralformel für $S_n(x)$ (S. 211). Übrigens kann man an einer Skizze hinreichend vieler Annäherungskurven ganz deutlich verfolgen, wie die Gibbssche Spitze entsteht.

Auf die vielen weiteren sehr interessanten Feinheiten im Verhalten der Annäherungskurven einzugehen, würde mich hier zu weit führen; ich verweise aber gern auf die inhaltreiche und gut lesbare Arbeit von *Fejér* in Band 64 (1907) der Mathematischen Annalen.

Ich möchte damit die speziellen Erörterungen über trigonometrische Reihen abbrechen, um einen sachlich und historisch naheliegenden Exkurs anzuschließen.

Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff.

Wir müssen uns in dieser Vorlesung um so eher mit dem Funktionsbegriff beschäftigen, als unsere Schulreform ja ganz wesentlich unter dem

Zeichen der Hervorkehrung dieses so wichtigen Begriffes im Unterricht steht.

Folgen wir wiederum der historischen Entwicklung, so haben wir zunächst zu bemerken, daß sich bei den älteren Autoren, wie *Leibniz* und den *Bernoullis*, der *Funktionsbegriff immer nur in einzelnen Beispielen*, wie Potenzen, trigonometrischen Funktionen und dergleichen, findet. Allgemeinen Formulierungen begegnen wir zuerst im 18. Jahrhundert.

1. *Bei Euler, ums Jahr 1750* — um nur runde Zahlen zu nennen — finden sich *zwei verschiedene Erklärungen des Wortes Funktion:*

a) *In seiner „Introductio" definiert er als Funktion y von x jeden „analytischen Ausdruck" in x*, d. h. jeden Ausdruck, der aus Potenzen, Logarithmen, trigonometrischen Funktionen u. dgl. zusammengesetzt ist; genau umschreibt Euler die hier zugelassenen Kombinationen nicht. Im übrigen hat er bereits die geläufige Einteilung in algebraische und transzendente Funktionen.

b) Daneben wird aber bei ihm eine *Funktion* $y(x)$ (vgl. Abb. 89) *auch dadurch definiert, daß in einem x-y-Koordinatensystem eine Kurve beliebig, „libero manus ductu", gezeichnet ist.* Einen Zusammenhang beider Definitionen stellt Euler nicht her.

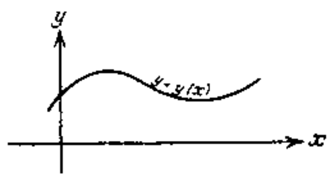


Abb. 89.

2. *Lagrange* schränkt *um 1800* in seiner *„Théorie des fonctions analytiques"* den Funktionsbegriff diesem zweiten Eulerschen Ansatz gegenüber stark ein auf sogenannte *„analytische Funktionen", die durch eine Potenzreihe in x definiert sind.* Der moderne Sprachgebrauch hat das Wort „analytische Funktionen" in dieser Bedeutung beibehalten, wobei man sich freilich bewußt sein muß, daß es sich hier nur um eine spezielle Klasse der in der Analysis wirklich vorkommenden Funktionen handelt. Nun ist durch eine Potenzreihe:

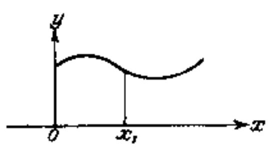


Abb. 90.

$$y = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine Funktion zunächst nur *innerhalb des Konvergenzbereiches*, also in einer gewissen Umgebung von $x = 0$, definiert. Man hat aber bald eine Methode gefunden, den Definitionsbereich der Funktion darüber hinaus auszudehnen: liegt etwa x_1 (vgl. Abb. 90) noch im Konvergenzgebiete von $\mathfrak{P}$, und setzt man $\mathfrak{P}(x)$ in eine nach Potenzen von $(x - x_1)$ fortschreitende Potenzreihe um:

$$y = \mathfrak{P}_1(x - x_1),$$

so kann diese möglicherweise über jenen ersten Bereich hinaus konvergieren und so y in einem ausgedehnteren Gebiete definieren, das man durch Wiederholung dieses Verfahrens unter Umständen noch mehr erweitern kann. Dieser Prozeß der *„analytischen Fortsetzung"* ist ja jedem, der sich etwas mit komplexer Funktionentheorie beschäftigt hat, wohl bekannt.

Bemerken Sie übrigens besonders, daß jeder einzelne Koeffizient der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ und damit *die ganze Funktion y bestimmt ist, wenn man den Verlauf der Funktion y längs eines beliebig kleinen Stückes der x-Achse, etwa in der Umgebung von $x = 0$, kennt*; denn damit kennt man die Werte aller Ableitungen von y für $x = 0$ und hat dann bekanntlich:

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \quad y''(0) = 2\,a_2, \ldots .$$

Eine analytische Funktion im Sinne von Lagrange ist also durch ihren Verlauf in einem kleinsten Stück nach ihrem Gesamtverlauf völlig bestimmt. Diese Eigenschaft steht durchaus im Gegensatz zum Verhalten einer Funktion im Sinne der zweiten Eulerschen Definition: da läßt jedes Stück einer Funktion sich noch nach freier Willkür fortsetzen.

3. Die Fortbildung des Funktionsbegriffes knüpft weiterhin an *J. J. Fourier* an, einen der zahlreichen bedeutenden Mathematiker, die am Anfange des 19. Jahrhunderts in Paris wirkten. Sein Hauptwerk ist die „*Théorie analytique de la chaleur*“[1], die *1822* erschien; die erste Mitteilung über die hier entwickelten Theorien hat Fourier übrigens bereits 1807 der Pariser Akademie vorgelegt. Dieses Werk ist die Quelle der weitreichenden und viel angewandten Methode der heutigen mathematischen Physik, die man kurz als Zurückführung aller Probleme auf die Integration partieller Differentialgleichungen bei vorgegebenen Randwerten, auf eine sogenannte „*Randwertaufgabe*“, charakterisieren kann. Fourier behandelt insbesondere das *Problem der Wärmeleitung*, das in einem einfachen Falle etwa so lautet: Der Rand einer ebenen kreisförmigen Platte wird dauernd auf einem gegebenen Temperaturzustande erhalten, der eine Teil beispielsweise auf dem Gefrierpunkt, der andere auf dem Siedepunkt (vgl. Abb. 91); *welcher stationäre Temperaturzustand bildet sich durch den eintretenden Wärmeleitungsprozeß schließlich aus?* Hier werden also Randwerte eingeführt, die in den einzelnen Teilen des Randes unabhängig voneinander willkürlich gegeben werden können, und daher tritt naturgemäß gegenüber Lagrange wieder die *zweite Eulersche Definition des Funktionsbegriffes* in den Vordergrund.

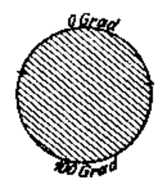


Abb. 91.

4. Diese Definition bleibt auch bei *Dirichlet* in den S. 212 erwähnten Arbeiten im Grunde bestehen, nur wird sie in die Sprache der Analysis übersetzt oder — um ein modernes Wort zu gebrauchen — *arithmetisiert.* Und das ist in der Tat nötig; denn natürlich kann eine Kurve, wie fein man sie auch zeichnet, nie völlig exakt eine Zuordnung der Werte

[1] Abgedruckt in Fourier: Oeuvres, T. 1. Paris 1888. Ins Deutsche von Weinstein übersetzt. Berlin 1884.

x und y definieren. Der Strich muß ja immer eine gewisse Dicke haben, und dadurch ist bedingt, daß man die einander entsprechenden Längen x, y nur auf eine beschränkte Anzahl von Dezimalstellen genau messen kann.

Dirichlet formuliert nun den arithmetischen Inhalt der Eulerschen Definition folgendermaßen: *Ist in einem Intervalle jedem einzelnen Werte x durch irgendwelche Mittel ein bestimmter Wert y zugeordnet, dann soll y eine Funktion von x heißen.* Hat er damit auch schon *diesen ganz allgemeinen Funktionsbegriff*, so denkt er doch in allererster Linie immer an *stetige oder nicht allzu unstetige Funktionen*, wie man dies damals allgemein tat. Man hielt komplizierte gehäufte Unstetigkeiten wohl für denkbar, glaubte aber kaum, daß sie irgend Interesse verdienen könnten. Dieser Standpunkt kommt schon darin zum Ausdruck, daß Dirichlet immer von der Reihenentwicklung „*ganz willkürlicher Funktionen*" spricht (genau wie Fourier „*fonctions entièrement arbitraires*" gesagt hatte), wenn er auch seine „*Dirichletschen Bedingungen*", denen die von ihm betrachteten Funktionen genügen müssen, sehr präzis formulierte (vgl. S. 213).

5. Wir müssen nun berücksichtigen, daß in dieser Zeit, etwa *um 1830*, die *selbständige Entwicklung der Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes* einsetzt und ungefähr in den nächsten drei Dezennien allmählich Gemeingut der Mathematiker wird. Diese Entwicklung knüpft vor allem an die Namen *Cauchy*, *Riemann* und *Weierstraß* an; die ersten beiden gehen bekanntlich von den nach ihnen benannten *partiellen Differentialgleichungen* aus, denen reeller und imaginärer Teil u, v der komplexen Funktion:

$$f(x + i\,y) = u + i\,v$$

genügen, während Weierstraß die Funktion durch eine *Potenzreihe und den Inbegriff ihrer analytischen Fortsetzungen* definiert und damit gewissermaßen wieder an Lagrange anknüpft.

Nun ist aber das Merkwürdige, daß dieser Übergang ins Komplexe einen *Ausgleich und Zusammenhang zwischen den beiden oben betrachteten Arten des Funktionsbegriffes* schafft; ich will das hier noch kurz skizzieren.

Wir setzen $z = x + i\,y$ und betrachten die Potenzreihe:

$$f(z) = u + i\,v = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \tag{1}$$

die für kleine $|z|$ konvergieren möge und dann in Weierstraßscher Terminologie ein *Element einer analytischen Funktion* definiert. Wir betrachten ihre Werte auf einem hinreichend kleinen Kreise mit dem Radius r um $z = 0$, der ganz im Konvergenzbereiche gelegen sei (vgl. Abb. 92), d. h. wir setzen $z = x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in die Potenzreihe ein und erhalten:

$$f(z) = c_0 + c_1\,r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) + c_2\,r^2\,(\cos 2\,\varphi + i\sin 2\,\varphi) + \cdots.$$

Spalten wir nun die Koeffizienten in reellen und imaginären Teil:

$$c_0 = \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{2}, \quad c_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad c_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \ldots.$$

Dann ergibt sich für den reellen Teil von f:

$$(2) \qquad \begin{cases} u = u(\varphi) = \dfrac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 r \cos\varphi + \alpha_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad + \beta_1 r \sin\varphi + \beta_2 r^2 \sin 2\varphi + \cdots; \end{cases}$$

das negative Vorzeichen der imaginären Teile in den c war gewählt, damit wir hier durchweg positive Zeichen erhalten. *Die Potenzreihe für $f(z)$ liefert also für die Werte des reellen Teiles u auf unserm Kreise, aufgefaßt als Funktion des Winkels φ, unmittelbar eine trigonometrische Reihendarstellung genau der früheren Art,* deren Koeffizienten α_0, $r^\nu \alpha_\nu$, $r^\nu \beta_\nu$ sind.

Natürlich werden diese Werte u durchaus analytisch im Sinne von Lagrange von φ abhängen, solange der Kreis (r) gänzlich innerhalb des Konvergenzbereiches der Potenzreihe (1) verläuft. Läßt man ihn aber mit dem „Konvergenzkreis" der Reihe (1), der ihr gesamtes Konvergenzgebiet begrenzt, zusammenfallen, so wird die Reihe (1) und daher auch die Reihe (2) auf ihm nicht mehr notwendig konvergieren müssen. Indessen kann es vorkommen, daß die Reihe (2) auch dann noch konvergiert, und in diesem Falle können die Randwerte $u(\varphi)$ nicht analytische Funktionen in Dirichlets Sinne werden.

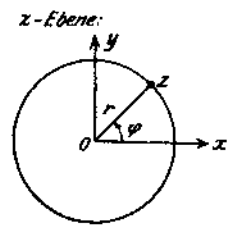


Abb. 92.

Gibt man nämlich umgekehrt auf dem Kreise (r) irgendeine *„willkürliche" Werteverteilung $u(\varphi)$*, die nur den „Dirichletschen Bedingungen" genügt, so läßt sie sich in eine trigonometrische Reihe der Gestalt (2) entwickeln, und damit sind die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ und daher auch $\left(\text{bis auf die willkürliche additive Konstante } -\frac{i\beta_0}{2}\right)$ die Koeffizienten der Potenzreihe (1) bestimmt. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Potenzreihe innerhalb des Kreises (r) auch wirklich konvergiert, und daß *der Realteil der durch sie bestimmten analytischen Funktion die Werte $u(\varphi)$ zu Randwerten auf dem Kreise (r) hat,* genauer gesagt daß er sich bei Annähernng an eine Stetigkeitsstelle φ von $u(\varphi)$ dem Werte $u(\varphi)$ nähert.

Die Beweise für diese Tatsachen sind in den Untersuchungen über das Verhalten von Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreise enthalten, auf die ich hier natürlich nicht eingehen kann. Wohl aber mögen diese Bemerkungen genügen, um zu zeigen, *wie auf diesem Wege der Fourier-Dirichletsche und der Lagrangesche Funktionsbegriff gewissermaßen zur Deckung kommen,* indem die Willkür, die für den Verlauf der trigonometrischen Reihe $u(\varphi)$ längs des ganzen Kreises besteht, durch die Potenzreihe in die nächste Umgebung des Nullpunktes konzentriert wird.

6. Nun ist aber die moderne Wissenschaft bei diesen Begriffsbildungen natürlich nicht stehen geblieben; denn die Wissenschaft als solche ruht nie, wenn auch der einzelne Forscher ermüden mag. Man hat sich da im Gegensatz zu dem, was ich oben als Dirichlets Standpunkt charakterisiert habe, beim *Studium der reellen Funktionen* in den letzten drei Dezennien gerade auf *möglichst unstetige Funktionen* geworfen, die insbesondere die Dirichletschen Bedingungen nicht mehr erfüllen; da hat man dann die merkwürdigsten Funktionstypen gefunden, welche die unangenehmsten Singularitäten „zu scheußlichen Klumpen geballt" enthalten. Es handelt sich hier vor allem darum, zu untersuchen, wieweit die für „vernünftige" Funktionen geltenden Sätze bei solchen Abnormitäten noch erhalten bleiben.

7. Endlich knüpft hier eine *noch weitergehende ganz moderne Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes* an. Bisher war eine Funktion stets an jeder Stelle des Kontinuums aller reellen oder komplexen Werte x definiert oder doch wenigstens an jeder Stelle eines ganzen Intervalles bzw. Bereiches. Seitdem aber der von *G. Cantor* geschaffene *Mengenbegriff* mehr und mehr in den Vordergrund getreten ist, wobei das Kontinuum aller x nur als ein naheliegendes Beispiel einer „Menge" von Punkten gilt, zieht man in größerem Maßstab auch Funktionen heran, die nur mehr für die Stellen x irgendeiner *beliebigen Menge* definiert zu sein brauchen, und nennt überhaupt allgemein *y eine Funktion von x, wenn jedem Elemente einer Menge von Dingen (Zahlen oder Punkten) x ein Element einer Menge y zugeordnet ist.*

Einen Unterschied dieser neuesten Entwicklung der älteren gegenüber will ich hier sogleich hervorheben: Die unter 1. bis 5. aufgezählten Begriffsbildungen sind überwiegend in Hinblick auf Anwendungen in der Natur entstanden und ausgebaut worden; man denke nur an den Titel des Fourierschen Werkes! Die neueren, unter 6. und 7. erwähnten Untersuchungen sind aber Produkte rein mathematischen Forschungstriebes, der nicht auf die Bedürfnisse der Naturerklärung bedacht ist, und sie haben bisher auch wohl noch keine direkte Anwendung gefunden. Ein Optimist wird natürlich meinen, daß zweifellos einmal die Zeit für solche Anwendung kommen wird.

Stellen wir endlich wieder unsere gewohnte Frage, *was die Schule von allen diesen Dingen aufnehmen soll*, was der Lehrer und was der Schüler wissen sollte.

Ich möchte da zuerst aussprechen, daß es nicht nur zu entschuldigen, sondern ganz in der Ordnung ist, wenn die Schule gegenüber den neuesten Fortschritten unserer Wissenschaft immer eine Spanne Zeit, gewiß einige Dezennien, zurückbleibt, wenn also, wie man vielleicht sagen kann, eine gewisse Hysteresis stattfindet. Die bestehende Hysteresis ist aber zur Zeit in mancher Hinsicht leider viel bedeutender, sie umfaßt mehr als ein Jahrhundert, indem die Schule meist die ganze Entwicklung von Euler an ignoriert; es bleibt also für die Reformarbeit noch ein genügend großes Feld. Und was wir an Reformen verlangen, das ist wirklich recht bescheiden, wenn Sie es mit dem heutigen Stande der Wissenschaft vergleichen: *Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.* Für den *Lehrer der Mathematik* freilich scheint darüber hinaus noch zum mindesten die *Kenntnis der Elemente der komplexen Funktionentheorie* wünschenswert, und wenn ich das gleiche Verlangen auch hinsichtlich der neuesten mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht stellen möchte, so scheint es doch zweckmäßig, daß es unter den vielen Lehrern immer wenigstens eine kleine Zahl solcher gibt, die selbständig arbeitend sich auch mit diesen Dingen beschäftigen!

Diesen letzten Erörterungen möchte ich nun noch einige Worte anfügen über die wichtige *Rolle, die die Lehre von den trigonometrischen Reihen in dieser ganzen Entwicklung gespielt hat.* Ausführliche literarische Angaben hierüber finden Sie in *Burkhardts* „*Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*" (besonders im 2., 3., 7. Abschnitt), jenem „Riesenbericht", wie wir ihn im engeren Kreise wohl nennen, der seit 1901 in einzelnen Lieferungen in *Bd. X des Jahresberichtes der deutschen Mathematikervereinigung*[1]) erscheint; er vereinigt in mehr als 9000 Zitaten eine solche Menge einschlägiger Literatur, wie sie wohl nirgends anders zu finden ist.

Der erste, der auf die *Darstellung allgemeiner Funktionen durch trigonometrische Reihen* kam, war *Daniel Bernoulli*, der Sohn von Johann Bernoulli. Er bemerkte *um 1750* beim akustischen Problem der schwingenden Saite, daß sich die allgemeine Saitenschwingung durch Überlagerung der dem Grundton und den reinen Obertönen entsprechenden Sinusschwingungen darstellen läßt; das involviert gerade die Entwicklung der die Saitenform darstellenden Funktion in eine trigonometrische Reihe.

Obwohl man in der Kenntnis dieser Reihen bald Fortschritte machte, wollte doch niemand so recht glauben, daß man durch sie graphisch willkürlich gegebene Funktionen darstellen könne. Dem

---

[1]) Abgeschlossen als Heft 2 dieses Bandes in 2 Halbbänden. Leipzig 1908. [Ein kürzerer Auszug findet sich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II. Burkhardts Bericht geht bis 1850. Die Entwicklung von 1850 an wird in dem Enzyklopädieartikel II C 10 von *Hilb* und *Riesz* geschildert.]

lag wohl eine unbestimmte Vorstellung von Überlegungen zugrunde, wie sie uns heute in der *Mengenlehre* durchaus geläufig sind. Man mag von vornherein angenommen haben — ohne es natürlich präzis aussprechen zu können —, daß die „Menge" aller willkürlichen Funktionen, selbst wenn man Sprungstellen ausschließt, größer sei als die „Menge" aller möglichen Systeme von Zahlwerten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, die die Gesamtheit aller trigonometrischen Reihen repräsentiert.

Erst die präzisen Begriffsbildungen der modernen Mengenlehre haben hier Klarheit geschaffen und gezeigt, daß jenes Vorurteil falsch war. Lassen Sie mich diesen wichtigen Punkt schon an dieser Stelle etwas näher ausführen. Man kann leicht erkennen, *daß man den gesamten Verlauf einer etwa in dem Intervalle* $0 \ldots 2\pi$ *ganz willkürlich definierten stetigen Funktion bereits kennt, wenn man nur ihre Werte an allen rationalen Stellen dieses Intervalles kennt* (vgl. Abb. 93); denn da diese das Intervall überall dicht erfüllen, können wir jede irrationale Stelle x durch rationale Stellen beliebig approximieren, und wegen der Stetigkeit der Funktion muß sich dabei der Wert $f(x)$ als Limes der Funktionswerte an den approximierenden Stellen ergeben. Dazu kommt weiterhin, *daß die Menge aller rationalen Zahlen „abzählbar"* (vgl. Anhang II, S. 273) *ist*, d. h. daß man sie sämtlich in eine Reihe bringen kann, in der auf ein bestimmtes erstes ein bestimmtes zweites, drittes, ... Element folgt. Daraus ergibt sich aber, daß eine willkürliche stetige Funktion geben nichts anderes bedeutet, als eine geeignete abzählbare Reihe von Konstanten — die Funktionswerte an den so geordneten rationalen Stellen — vorschreiben. Genau in der gleichen Weise, nämlich durch die abzählbare Reihe der Konstanten $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, wird aber eine bestimmte trigonometrische Reihe gegeben, *so daß jenes Bedenken, die Menge der stetigen Funktionen sei von Natur wesentlich größer als die der Reihen, gegenstandslos geworden ist.* Ganz analoge Überlegungen gelten auch für die unstetigen, aber den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktionen. Wir werden später noch in vollständigerer Weise diese Erörterungen wieder aufnehmen.

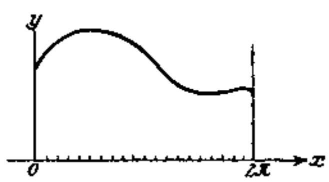


Abb. 93.

Der Mann, der alle solche Bedenken zuerst kurzweg beiseite geschoben hat, war *Fourier*, und darin liegt seine *große Bedeutung in der Geschichte der trigonometrischen Reihen*. Er hat zwar natürlich nicht diese mengentheoretische Aufklärung gegeben, aber er hatte als erster den Mut, an die allgemeine darstellende Kraft der Reihen zu *glauben* und, auf diesen Glauben gestützt, hat er diese durch wirkliche Ausrechnung einiger charakteristischer Beispiele unstetiger Funktionen, so wie wir sie neulich etwa betrachteten, dargetan. Die eigentlichen allgemeinen Konvergenzbeweise gab, wie schon erwähnt, erst später *Dirichlet*, der übrigens ein Schüler Fouriers war. Das Auftreten Fouriers aber hat wie eine Revolution gewirkt: Daß man durch Reihen analytischer Funktionen solche willkürliche, in verschiedenen Teilintervallen verschiedenen analytischen Gesetzen gehorchende Funktionen darstellen könne, das war den Mathematikern damals etwas ganz Neues und Unerwartetes. Zum Dank für die Eröffnung dieser Erkenntnis hat man dann den in Betracht kommenden trigonometrischen Reihen geradezu Fouriers Namen gegeben, der ja auch heute noch sehr allgemein Anwendung findet. Freilich enthält jede solche Personalbenennung eine starke Einseitigkeit, wenn nicht gar Ungerechtigkeit.

Eine *zweite Leistung Fouriers* muß ich hier zum Schluß noch kurz erwähnen. Er betrachtete nämlich auch den *Grenzfall der trigonometrischen Reihen*, der eintritt, wenn man die *Periode der dargestellten Funktion unendlich groß* werden läßt. Da eine Funktion von unendlich großer Periode einfach eine nicht periodische, längs der ganzen x-Achse willkürliche Funktion ist, so gibt dieser Grenzfall ein *Mittel, um auch nicht periodische Funktionen darzustellen.* Der Übergang vollzieht sich nun so, daß man zunächst durch eine lineare Transformation des Argumentes der Reihe auch Funktionen mit beliebiger Periode l statt der bestimmten 2π darstellt und dann l unendlich werden läßt. Dabei geht dann die Reihe in das sogenannten *Fouriersche Integral* über:

$$f(x) = \int_0^\infty [\varphi(\nu) \cos \nu x + \psi(\nu) \sin \nu x] \, d\nu ,$$

wobei $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ sich in bestimmter Weise als *Integrale von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *über die Funktion* $f(x)$ ausdrücken. Das Neue ist also, daß der Index ν kontinuierlich *alle* Werte von 0 bis ∞, nicht nur die Werte 0, 1, 2, ... durchläuft und daß entsprechend die $\varphi(\nu)d\nu$ und $\psi(\nu)d\nu$ an Stelle der Koeffizienten a_ν, b_ν treten.

Wir können nunmehr die elementaren transzendenten Funktionen verlassen, die uns bisher in unsern Betrachtungen über die Analysis beschäftigt haben, und wollen zu einem neuen letzten Kapitel übergehen.

III. Von der eigentlichen Infinitesimalrechnung.

Natürlich setze ich voraus, daß Sie alle differenzieren und integrieren können und beides schon vielfach angewandt haben. Hier sollen uns lediglich allgemeinere Fragen, wie die der *logischen* und *psychologischen Begründung*, des *Unterrichts* und dergleichen beschäftigen.

1. Allgemeine Ausführungen zur Infinitesimalrechnung.

Eine *allgemeine Bemerkung über den Umfang der Mathematik* will ich vorausschicken. Sie können von Nichtmathematikern, besonders auch von Philosophen, oft hören, *die Mathematik habe lediglich Folgerungen* *aus klar gegebenen Prämissen zu ziehen;* dabei sei es sogar ganz gleich, was diese Prämissen bedeuten, ob sie richtig oder falsch sind — wenn sie sich nur nicht widersprechen. Ganz anders aber wird jeder, der selbst produktiv mathematisch arbeitet, reden. In der Tat urteilen jene Leute nur nach der auskristallisierten Form, in der man fertige mathematische Theorien zur Darstellung bringt. Der *Forscher* selbst jedoch arbeitet in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft durchaus nicht in dieser streng deduktiven Weise, sondern er *benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt, vor.* Man kann äußerst zahlreiche Beispiele dafür anführen, daß große Mathematiker die wichtigsten Sätze gefunden haben, ohne sie exakt beweisen zu können. Soll man die große Leistung, die hierin liegt, nicht in Anschlag bringen, soll man jener Definition zuliebe sagen, daß das keine Mathematik ist und daß nur die Nachfolger, die schließlich geglättete Beweise der Sätze finden, Mathematik treiben? Schließlich ist es ja willkürlich, wie man das Wort gebrauchen will, aber ein Werturteil kann nur dahin lauten, daß die *induktive Arbeit dessen, der den Satz zum ersten Male aufstellt, mindestens so viel wiegt, wie die deduktive dessen, der ihn zuerst beweist;* denn beides ist gleich notwendig, und die Entdeckung ist die Voraussetzung des späteren Abschlusses.

Gerade bei der Erfindung und Ausbildung der Infinitesimalrechnung hat nun dieses induktive, nicht auf bündige logische Schlüsse gestützte Vorgehen eine große Rolle gespielt, und *das wirksamste, heuristische Hilfsmittel war hier sehr häufig die sinnliche Anschauung* — ich meine die *unmittelbare* sinnliche Anschauung mit allen ihren Ungenauigkeiten, für die beispielsweise die Kurve ein hingezeichneter Strich bestimmter Dicke ist, *nicht* die *abstrakte* Anschauung, die den Grenzübergang zur exakten eindimensionalen Linie schon als vollzogen postuliert. Ich möchte diese Behauptung bestätigen, indem ich Ihnen kurz darlege, wie die Ideen der Infinitesimalrechnung sich historisch ausgebildet haben.

Betrachten wir zunächst den *Integralbegriff*, so ist zu bemerken, daß er historisch mit dem *Problem der Ausmessung von Flächen- und Körperinhalten* (*Quadratur und Kubatur*) beginnt. Die abstrakt logische Definition bestimmt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, d. h. den Flächeninhalt, der von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, bekanntlich als *Limes der Summe von lauter dieser Fläche eingezeichneten schmalen Rechtecken*, wenn man deren Zahl unter gleichzeitiger unbegrenzter Verkleinerung ihrer Breite unbegrenzt wachsen läßt. Von der sinnlichen Anschauung aus aber liegt es nahe, den in Rede stehenden Flächeninhalt nicht so als scharfen Limes, sondern einfach als *Summe von sehr vielen ziemlich schmalen Rechtecken* zu definieren; wird doch einer weiteren Verkleinerung der Rechtecke ohnehin durch die notwendige Ungenauigkeit der Zeichnung stets ein Ende gesetzt sein (vgl. Abb. 94).

Diese naive Denkweise findet sich nun in der Tat in der Entstehungsperiode der Infinitesimalrechnung bei den allerbedeutendsten Forschern. Da nenne ich zuerst *Kepler*, der in seiner „*Nova stereometria doliorum vinariorum*"[1]) sich mit der Körpermessung beschäftigt. Sein Hauptinteresse richtet sich hierbei auf die Ausmessung von Fässern und ihre zweckmäßigste Gestaltung. Dabei stellt er sich ganz auf den soeben angedeuteten naiven Standpunkt: Er denkt sich den Inhalt des Fasses wie jedes anderen Körpers (vgl. Abb. 95) in geeigneter Weise aus *zahlreichen dünnen Blättern*, aus Papier etwa, aufgeschichtet und setzt ihn der Summe der Inhalte dieser Blätter, deren jedes einen Zylinder bildet, gleich. In ähnlicher Weise verfährt er bei der Berechnung der *einfachen geometrischen Körper*, so z. B. der *Kugel*. Er denkt sie sich aus sehr vielen *kleinen Pyramiden* mit der Spitze im Zentrum zusammengesetzt (vgl. Abb. 96): dann ist der Rauminhalt nach der bekannten Pyramidenformel gleich $\frac{r}{3}$ mal

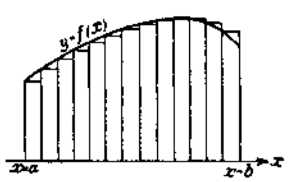


Abb. 94.


Abb. 95.

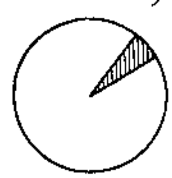


Abb. 96.

der Summe aller Grundflächen der kleinen Pyramiden, und indem er für die von diesen gebildete Fazettenfläche einfach die Kugeloberfläche $4\pi r^2$ einsetzt, erhält er die richtige Volumenformel $\frac{4\pi r^3}{3}$. Übrigens betont Kepler ausdrücklich auch den praktischen, heuristischen Wert solcher Betrachtungen, und verweist, was *strenge* mathematische Beweise angeht, auf die sogenannte *Exhaustionsmethode*. Diese Methode, die schon vor Archimedes angewandt wurde, führt z. B. die Bestimmung des Kreisinhalts aus, indem sie die Approximation der Kreisfläche durch die Flächen ein- und umbeschriebener Polygone von wachsender Seitenzahl genau verfolgt. Der wesentliche Unterschied gegen die moderne Auffassung besteht darin, daß die Existenz einer Inhaltszahl des Kreises als etwas ganz Selbstverständliches stillschweigend hingenommen wird, während die moderne Infinitesimalrechnung auf diese anschauliche Evidenz verzichtet und vielmehr auf Grund des abstrakten Grenzbegriffs die Inhaltszahl als Grenzwert der Maßzahlen eingeschriebener Polygone definiert. Gibt man

[1]) Linz an der Donau, 1615. — Deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 165. Leipzig 1908.

aber einmal die Existenz der Inhaltszahl zu, so ist das Exhaustionsverfahren ein auch modernen Ansprüchen genügendes, völlig exaktes Verfahren zur Approximation der Inhaltszahl durch bekannte Inhaltszahlen geradliniger Abbildungen. Dieses Verfahren erweist sich jedoch in vielen Fällen als außerordentlich schwerfällig und zur *Auffindung* von Flächen- und Körperinhalten durchaus ungeeignet. Eine von H. Heiberg 1906 entdeckte Schrift[1]) des Archimedes zeigt nun in der Tat, daß dieser bei seiner Forschung das Exhaustionsverfahren gar nicht anwandte. Erst nachdem er seine Resultate anderweitig gefunden hatte, bildete er hinterher, um den damaligen Anforderungen der Strenge zu genügen, den Exhaustionsbeweis aus. Zur Entdeckung seiner Sätze benutzte er jedoch eine Methode, die Schwerpunktbetrachtungen, den Hebelsatz und Vorstellungen zu Hilfe nahm wie die, daß Dreiecke und Parabelsegmente aus Reihen paralleler Sehnen bestehen oder Zylinder, Kugel und Kegel durch Reihen paralleler Kreisscheiben ausgefüllt werden.

Kehren wir jetzt wieder in das 17. Jahrhundert zurück, so finden wir den Keplerschen ähnliche Überlegungen auch in dem Buche des Jesuiten *Bonaventura Cavalieri*: *„Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota"*[2]), wo er das heute allgemein nach ihm genannte Prinzip aufstellt: ***Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Flächen ergeben.*** Von diesem *Cavalierischen Prinzip* ist bekanntlich auf unsern Schulen sehr viel die Rede; man glaubt dadurch die Integralrechnung vermeiden zu können, während es doch tatsächlich ganz ihr angehört. — Die Begründung bei Cavalieri kommt genau darauf hinaus, daß er sich beide Körper aus dünnen übereinandergeschichteten Blättern aufgebaut denkt, die dann nach der Annahme paarweise kongruent sind, d. h. der eine Körper entsteht aus dem andern durch Verschiebung der einzelnen Blätter des Haufens gegeneinander (vgl. Abb. 97), dabei kann sich der Rauminhalt nicht ändern, da er sich nach wie vor aus den gleichen Summanden aufbaut.

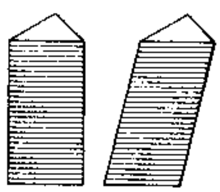


Abb. 97.

Ganz ähnlich führt die naive Anschauung auf den *Differentialquotienten einer Funktion*, d. h. die Kurventangente. Man ersetzt da — und so hat man es tatsächlich gemacht — die Kurve durch einen geradlinigen Polygonzug (vgl. Abb. 98), der hinreichend viele auf der Kurve ziemlich dicht gelegene Punkte zu Ecken hat. Nach der Natur unserer sinnlichen Anschauung kann man dann bei Betrachtung aus einiger Entfernung die Kurve kaum mehr von dem aus diesen Punkten gebildeten Haufen

Abb. 98.

[1]) Bereits zitiert auf S. 86. [2]) Bononiae 1635, 1. Aufl. 1653.

und noch weniger von dem Polygonzug selbst unterscheiden. Die *Tangente* der Kurve wird nun kurzweg als *Verbindungslinie zweier aufeinander folgender solcher Punkte*, also als Verlängerung einer der Polygonseiten, definiert. Für den abstrakt logischen Standpunkt bleibt diese Gerade, wenn die Punkte auch noch so dicht gewählt sind, natürlich immer nur eine *Sekante* der Kurve, und die *Tangente ist erst die Grenzlage, der sie sich bei Verkleinerung des Abstandes der beiden Punkte unbegrenzt nähert.* Analog wird man auf diesem naiven Standpunkte als *Krümmungskreis* der Kurve *den Kreis* auffassen, *der durch drei aufeinander folgende Polygonecken* geht, während, exakt genommen, der Krümmungskreis erst die *Grenzlage dieses Kreises bei unbegrenzter Annäherung der drei Punkte ist.*

Die *überzeugende Kraft*, die solchen naiven hodegetischen Betrachtungen innewohnt, ist für verschiedene Individuen natürlich sehr verschieden. Manche — und dazu rechne ich mich selbst — fühlen sich durch sie außerordentlich befriedigt; andere wieder, die einseitig nach der rein logischen Seite veranlagt sind, finden sie durchaus nichtssagend und können sich nicht denken, wie man sie überhaupt als Grundlage mathematischer Betrachtungen auffassen kann. Und doch haben Überlegungen dieser Art historisch oft den Anfang neuer und fruchtbarer Betrachtungsweisen gebildet.

Übrigens kommen diese naiven Betrachtungsweisen auch heute noch stets dann unwillkürlich zur Geltung, wenn man in der *mathematischen Physik*, der *Mechanik*, der *Differentialgeometrie* irgendeinen mathematischen Ansatz zustande bringen will. Sie alle wissen, daß sie überall da äußerst zweckmäßig sind. Freilich spottet der reine Mathematiker gern über eine solche Darstellung; als ich studierte, sagte man, daß für den Physiker das Differential ein Stück Messing sei, mit dem er wie mit seinen Apparaten umgehe.

In diesem Zusammenhange möchte ich gleich die *Leibnizsche Schreibweise* rühmen, die ja heute die herrschende ist, denn sie vereinigt mit einem *zweckmäßigen Anklang an die naive Anschauung* doch auch einen gewissen Hinweis auf den in Wahrheit in den Begriffen enthaltenen abstrakten *Grenzprozeß*. So erinnert die Leibnizsche Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ des Differentialquotienten zunächst daran, daß er aus einem *Quotienten* entsteht, aber das d im Gegensatz zu dem für endliche Differenzen üblichen Δ zeigt an, daß auch etwas Neues, nämlich der *Grenzübergang*, hinzugekommen ist. Und ebenso deutet das Integralsymbol $\int y\,dx$ auf die Entstehung des Integrals aus einer *Summe* kleiner Größen hin; dabei ist aber nicht das gewöhnliche Summenzeichen Σ, sondern ein stilisiertes S (es ist merkwürdigerweise nicht überall bekannt, daß das $\int$ diese Bedeutung hat) verwendet, das anzeigt, daß hier doch noch ein neuer Prozeß zur Summation hinzugetreten ist.

Wir müssen nun endlich auf die *logische Begründung der Differential- und Integralrechnung* näher eingehen und wollen sie sogleich in ihrer *historischen Entwicklung* betrachten.

1. Die *Hauptidee* ist da, wie es ja heute an der Hochschule allgemein gelehrt wird und wie ich Ihnen also wohl nur kurz in Erinnerung zu bringen brauche, daß die *Infinitesimalrechnung lediglich eine Anwendung des allgemeinen Grenzbegriffes* ist: *Der Differentialquotient ist definiert als Grenzwert des Quotienten entsprechender endlicher Zuwächse von Variablen und Funktion:*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \; \Delta x \neq 0$$

— vorausgesetzt, daß dieser Limes existiert —, und *keineswegs ist er ein Quotient*, in dem dy und dx selbständige Bedeutung haben. *Ebenso ist das Integral definiert als Grenzwert einer Summe:*

$$\int_a^b y\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{(i)} y_i \cdot \Delta x_i,$$

wo die Δx_i endliche Teile des Intervalles $a \leqq x \leqq b$, die y_i beliebige zugehörige Funktionswerte in ihnen bedeuten und alle Δx_i gleichzeitig gegen Null zu konvergieren haben; *keineswegs aber hat $y\,dx$ etwa als Summand einer Summe reale Bedeutung*. Diese Bezeichnungen werden nur aus den soeben erörterten Zweckmäßigkeitsgründen beibehalten.

2. Die so gekennzeichnete Auffassung findet sich bereits in recht präziser Form bei *Newton* selbst ausgesprochen. Ich verweise da auf eine Stelle in seinem Hauptwerk, den „*Philosophiae naturalis principia mathematica*"[1]) von 1687: „Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum." Übrigens vermeidet Newton in diesem Werke den Infinitesimalkalkul als solchen in der Darstellung durchaus, obgleich er ihn gewiß zur Ableitung seiner Resultate benutzt hat. Denn die grundlegende Schrift, in der er seine Methode der Infinitesimalrechnung entwickelt, hatte er bereits 1671 verfaßt, obwohl sie erst 1736 erschien; sie trägt den Titel: „*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*"[2]).

In ihr entwickelt Newton, ohne weiter auf prinzipielle Erörterungen einzugehen, den neuen Kalkul an *zahlreichen Beispielen*. Er knüpft dabei an eine *Vorstellung des täglichen Lebens* an, die den Grenzübergang sehr nahe legt; hat man nämlich eine *Bewegung* $x = f(t)$ auf der x-Achse

[1]) Neuausgabe von W. Thomson und H. Blackburn, S. 38. Glasgow 1871.

[2]) J. Newtoni Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Tome I S. 29. Lausannae 1744.

in der Zeit t, so hat jedermann eine bestimmte Anschauung davon, was die *Geschwindigkeit* einer solchen Bewegung ist, und wenn man dem nachgeht, so sieht man, daß im Grunde der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ damit gemeint ist. *Diese Geschwindigkeit, mit der sich die Variable x in der Zeit ändert, macht Newton als ihre „Fluxion $\dot{x}$" zur Grundlage seiner Betrachtungen.* Er denkt sich alle Variablen x, y von dieser einen *Urvariablen t*, der *Zeit*, abhängig; der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint demgemäß als *Quotient zweier Fluxionen* $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, den wir heute ausführlicher $\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right)$ schreiben würden.

3. An diese Newtonsche Ideenbildung schließt eine große Reihe von *Mathematikern des 18. Jahrhunderts* an, welche die Infinitesimalrechnung mit mehr oder weniger Präzision auf dem Grenzbegriff aufbauen. Lassen Sie mich da nur einige Namen herausgreifen: *C. Maclaurin* in seinem „*Treatise of fluxions*"[1]), das als Lehrbuch jedenfalls einen breiten Wirkungskreis hatte, ferner *d'Alembert* in der großen französischen *Encyclopédie méthodique*, endlich *Kästner* in Göttingen in seinen Vorlesungen und Büchern[2]). Schließlich gehört wohl auch *Euler* vorwiegend in diese Entwicklungsreihe, wiewohl bei ihm daneben auch andere Tendenzen zum Vorschein kommen.

4. Eine ganz wesentliche Lücke blieb bei allen diesen Darstellungen noch auszufüllen, ehe von einem *konsequenten System der Infinitesimalrechnung* die Rede sein konnte: Wohl hatte man die Definition des Differentialquotienten als Grenzwert, aber es fehlte ein Mittel, mit dem man umgekehrt aus seinem Werte den *Zuwachs der Funktion in einem endlichen Intervalle* abschätzen konnte. Das gestattet erst der sogenannte *Mittelwertsatz*, und es ist das große Verdienst *Cauchys*, dessen zentrale Stellung voll erkannt und demgemäß ihn *an die Spitze der Differentialrechnung* gestellt zu haben; es ist nicht zuviel gesagt, wenn man Cauchy deshalb als *Begründer der exakten Infinitesimalrechnung* im modernen Sinne feiert. Als grundlegende Werke kommen hier, auf seinen Pariser Vorlesungen beruhend, in Betracht: „*Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*"[3]) sowie dessen zweite Auflage, von der nur der erste Teil „*Leçons sur le calcul différentiel*"[4]) erschienen ist.

Der *Mittelwertsatz lautet* bekanntlich: *Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, die an allen Stellen des betrachteten Intervalls einen Differentialquotienten $f'(x)$ besitzt, so gibt es zwischen x und $x+h$ stets eine Stelle $x+\vartheta h$, so daß:*

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

---

[1]) Edinburgh 1742.

[2]) Kästner, A. G.: Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. Göttingen 1760.

[3]) Paris 1823 = Oeuvres complètes. Sér. II, T. IV. Paris 1899.

[4]) Paris 1829 = Oeuvres complètes. Sér. II, T. IV. Paris 1899.

wird. Hier tritt dieses den Mittelwertsätzen eigentümliche ϑ auf, das dem Anfänger zuerst häufig so wunderbar erscheint. Geometrisch ist der Satz durchaus anschaulich; er besagt nur, *daß es zwischen den Punkten x und $x + h$ der Kurve einen Punkt $x + \vartheta h$ gibt, in welchem die Kurventangente parallel der die Punkte x und $x + h$ verbindenden Sekante ist* (vgl. Abb. 99).

5. Wie beweist man nun *den Mittelwertsatz exakt arithmetisch*, ohne an die geometrische Anschauung zu appellieren? Ein solcher Beweis hat natürlich nur den Sinn, den Satz auf die vorher abstrakt in präzisester Form aufzustellenden arithmetischen Definitionen von Variabler, Funktion, Stetigkeit usw. zurückzuführen. Daher ist ein strenger Beweis erst durch *Weierstraß und seine Nachfolger* propagiert worden, denen wir überhaupt die Verbreitung der modernen arithmetischen Auffassung des Zahlenkontinuums verdanken. Ich will hier nur die charakteristischen Momente der Betrachtung hervorheben:

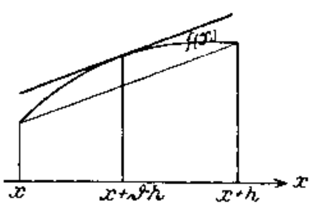


Abb. 99.

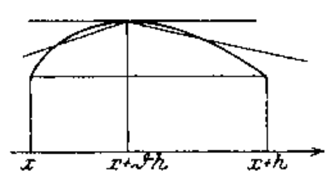


Abb. 100.

Zunächst kann man den Satz leicht auf den Fall zurückführen, daß die unsern Bogen begrenzende Sekante *horizontal*, d. h. $f(x) = f(x + h)$ ist (vgl. Abb. 100); es ist dann die *Existenz einer Stelle mit horizontaler Tangente* zu zeigen. Dazu kann der *Weierstraßsche Satz* angewandt werden, *daß jede in einem abgeschlossenen Intervalle durchweg stetige Funktion daselbst an mindestens einer Stelle das Maximum und das Minimum ihrer Werte wirklich annimmt.* Unter unserer Voraussetzung muß einer dieser Extremwerte unserer Funktion sicher im *Innern* des Intervalles $(x, x + h)$ liegen, falls nicht der triviale Fall einer Konstanten vorliegt; es sei dies etwa ein Maximum (der Fall des Minimums erledigt sich genau ebenso), und es befinde sich an der Stelle $x + \vartheta h$. Dann besitzt $f(x)$ weder rechts noch links davon größere Werte, d. h. der Differenzenquotient ist nach rechts hin negativ oder Null, nach links hin positiv oder Null. Der Differentialquotient, der ja nach Voraussetzung an jeder Stelle existieren soll, kann also an der Stelle $x + \vartheta h$ sowohl als Grenze lauter nicht positiver Werte, als auch lauter nicht negativer Werte dargestellt werden, je nachdem man ihn als Grenze eines nach rechts oder links hin genommenen Differenzenquotienten auffaßt. Er kann daher *nur Null* sein, womit die behauptete Existenz der horizontalen Tangente und damit der Mittelwertsatz bewiesen ist.

Parallel mit der bisher geschilderten Entwicklungsreihe, auf der sich also die heutige wissenschaftliche Mathematik aufbaut, hat sich eine *wesentlich verschiedene Auffassung der Infinitesimalrechnung* durch die Jahrhunderte fortgepflanzt. Sie geht zurück:

1. auf *alte metaphysische Spekulationen über den Aufbau des Kontinuums* aus nicht mehr weiter zerlegbaren, letzten „unendlich kleinen" Bestandteilen. Schon im *Altertum* finden sich Anklänge an solche Vorstellungen, und von den *Scholastikern* und weiterhin den *jesuitischen Philosophen* wurden sie sehr gepflegt. Als charakteristischen Beleg nenne ich den Titel des schon auf S. 226 erwähnten Buches *Cavalieris* „Geometria indivisibilibus continuorum promota", der seine wahre Grundauffassung andeutet; in der Tat kommen approximationsmathematische Anschauungen nur nebenbei bei ihm vor; tatsächlich betrachtet er den Raum als aus unteilbaren letzten Bestandteilen, den „*Indivisibilia*", zusammengesetzt. Überhaupt wäre es für diesen Zusammenhang wichtig und interessant, die verschiedenen Zergliederungen zu kennen, die der Begriff des Kontinuums im Laufe der Jahrhunderte (und Jahrtausende) erfahren hat.

2. *Leibniz*, der sich ja mit Newton in den Ruhm der Erfindung der Infinitesimalrechnung teilt, schließt ebenfalls an solche Ideenbildungen an. Für ihn ist also *nicht der Differentialquotient als Grenzwert* das Primäre, sondern das *Differential dx der Variabelen x hat reale Existenz als letzter, indivisibler Bestandteil der Abszissenachse*, als eine Größe, die kleiner als jede endliche Größe und doch nicht Null ist („*aktual*" *unendlich kleine Größe*). Ähnlich werden weiterhin die *Differentiale höherer Ordnung* d^2x, d^3x, ... definiert als unendlich kleine Größen 2^{ter}, 3^{ter}, ... Ordnung, deren jede „gegen die vorangehenden unendlich klein" ist; man hat so eine Reihe qualitativ verschiedener Größensysteme. Der von der Kurve $y = y(x)$ über der Abszissenachse begrenzte Flächeninhalt ist nach der *Indivisibelnlehre* direkt die Summe aller einzelnen Ordinaten y; es ist eine Konsequenz dieser Ansicht, wenn Leibniz in seinem ersten Manuskript über Integralrechnung (1675) $\int y$ schreibt und nicht $\int y\,dx$.

Diese Auffassung ist jedoch keineswegs die bei Leibniz allein herrschende, vielmehr kommen gelegentlich auch *approximationsmathematische* Anschauungen vor; danach wäre das *Differential dx eine endliche, aber so kleine Strecke, daß längs ihr die Kurve nicht wahrnehmbar von der Tangente abweicht.* Jene metaphysischen Spekulationen sind ja gewiß nur Idealisierungen der einfachen hierin enthaltenen psychologischen Tatsache.

Ganz besonders findet sich bei Leibniz aber noch eine dritte Ideenrichtung vertreten, die wohl vorzugsweise für ihn charakteristisch ist, *die formale Auffassung;* ich hatte ja schon öfters Gelegenheit, zu betonen, daß wir in *Leibniz* den *Begründer der formalen Mathematik* zu sehen haben. Hier ist der Gedanke der: Ganz gleichgültig, was für eine reale Bedeutung die Differentiale haben und ob sie überhaupt eine haben; wenn man nur in geeigneter Weise Rechenregeln für sie definiert und diese richtig handhabt, so muß jedenfalls etwas Vernünftiges, Richtiges herauskommen. Leibniz verweist da immer auf die Analogie mit den komplexen Zahlen, über die er ganz entsprechende Vorstellungen hat. Bei diesen *Rechenregeln für Differentiale* handelt es sich nun hauptsächlich um die Formel:

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx.$$

Der Mittelwertsatz zeigt, daß sie nur richtig ist, wenn man $f'(x + \vartheta \cdot dx)$ statt $f'(x)$ schreibt, aber der Fehler, den man hier macht, indem man schlechtweg $f'(x)$ schreibt, ist *unendlich klein von höherer (zweiter) Ordnung, und solche Größen soll man* — das ist die hauptsächlichste formale Regel — *beim Rechnen mit Differentialen vernachlässigen.*

Die wichtigsten *Publikationen von Leibniz* sind in den *Acta eruditorum*, jener berühmten ersten wissenschaftlichen Zeitschrift, aus den Jahren *1684*, *1695* und *1712* enthalten[1]. Im ersten Bande finden Sie unter dem Titel „*Nova methodus pro maximis et minimis*" (S. 467ff.) überhaupt die erste Veröffentlichung über Differentialrechnung, und zwar entwickelt Leibniz dort lediglich die Regeln des Differenzierens. Die späteren Arbeiten geben auch *prinzipielle Erörterungen*, in denen vorzugsweise der *formale Standpunkt* zum Ausdruck kommt. Besonders charakteristisch ist da die kurze Arbeit aus dem Jahre 1712[2], also aus seinen letzten Lebensjahren; in dieser spricht er geradezu von Sätzen und Definitionen, die nur „*toleranter vera*" oder französisch „passables" sind: „Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universalesque conceptus valent". Das bezieht er sowohl auf die komplexen Zahlen als auf das Unendliche; sprechen wir etwa vom Unendlichkleinen, so „commoditati expressionis seu breviloquio mentalis inservimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur".

3. Von Leibniz aus verbreitet sich der neue Kalkül rasch auf dem Kontinent, und wir finden da jede seiner drei Anschauungen vertreten. Ich muß hier zunächst das *erste Lehrbuch der Differentialrechnung* nennen, das überhaupt erschien, die „*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes*"[3] vom *Marquis de l'Hospital*, einem Schüler *Johann Bernoullis*, der seinerseits die neuen Ideen sich überraschend schnell von Leibniz angeeignet hatte und selbst das *erste Lehrbuch der*

[1] Zum Teil übersetzt in Ostwalds Klassikern Nr. 162. Herausgegeben von G. Kowalewski. Leipzig 1908. Außerdem in Leibniz: Mathematische Schriften. Herausgegeben von K. J. Gerhardt, von 1849 an.

[2] Observatio ...; et de vero sensu Methodi infinitesimalis, S. 167—169.

[3] Paris 1696; 2. édit. 1715.

Integralrechnung[1]) herausgab. In beiden Büchern wird die *approximationsmathematische Anschauung* vertreten, insbesondere z. B. eine Kurve als Polygon von sehr kleinen Seiten, die Tangente als Verlängerung einer solchen Seite aufgefaßt. — In Deutschland wurde die Leibnizsche Differentialrechnung besonders verbreitet durch *Christian Wolff* in *Halle*, der den Inhalt seiner Vorlesungen in den „*Elementa matheseos universal*"[2]) niedergelegt hat. Er führt die Leibnizschen Differentiale sofort am Anfang der Differentialrechnung ein, betont jedoch ausdrücklich, daß sie *keinerlei reales Äquivalent* haben. Vielmehr entwickelt er über das für unsere Wahrnehmung unendlich Kleine, wiederum durchaus approximationsmathematische Ansichten; so führt er als Beispiel an, daß die Höhe eines Berges für die praktische Messung nicht merklich geändert wird, wenn man ein Stäubchen wegnimmt oder hinzutut.

4. Vielfach findet sich auch die *metaphysische Ansicht* vertreten, die den Differentialen eine reale Existenz zuschreibt; sie hat besonders auf *philosophischer Seite*, aber auch unter den *mathematischen Physikern* stets Anhänger gehabt. Hier nenne ich als einen der hervorragendsten *Poisson*, der sich in der Vorrede seines berühmten „*Traité de mécanique*"[3]) in sehr krasser Weise dahin äußert, daß die unendlich kleinen Größen nicht bloß ein Mittel zur Forschung sind, sondern durchaus wirklich existieren.

5. Wahrscheinlich durch die philosophische Tradition ist diese Auffassung in die *populäre Lehrbuchliteratur* übergegangen und spielt dort noch heute eine große Rolle. Als Beispiel erwähne ich gern das zuerst 1855 erschienene Lehrbuch von *Lübsen*: „*Einleitung in die Infinitesimalrechnung*"[4]), das lange Zeit hindurch einen außerordentlichen Einfluß auf breite Schichten des Publikums besaß; zu meiner Zeit hat gewiß jeder einmal als Schüler oder später das Lübsensche Buch zur Hand genommen, und mancher hat daraus die erste Anregung zu weiteren mathematischen Studien geschöpft. Lübsen definiert zunächst den Differentialquotienten durch den Grenzbegriff, daneben aber stellt er seit der 2. Auflage das, was er für die *wahre Infinitesimalrechnung* hält — ein *mystisches Operieren mit den unendlich kleinen Größen;* die betreffenden Kapitel sind mit einem Stern versehen, zum Zeichen, daß sie an Resultaten nichts Neues bringen. Hier werden die Differentiale eingeführt als letzte Teile, die etwa beim fortgesetzten Halbieren einer endlichen Größe in unendlicher, nicht

---

[1]) [In deutscher Übersetzung herausgegeben von *G. Kowalewski*, Ostwalds Klassiker Nr. 194. Von *P. Schafheitlin* wurde vor kurzem auch Joh. Bernoullis Differentialrechnung entdeckt und besprochen. Verhandlungen der Naturforscher-Gesellschaft in Basel Bd. 32. 1921.]

[2]) Zuerst erschienen 1710. — Editio nova Hallae, Magdeburgiae 1742, S. 545

[3]) Partie I, 2. Aufl., S. 14. Paris 1833.

[4]) 8. Aufl. Leipzig 1899.

angebbarer Anzahl entstehen, und deren jeder, „obwohl von der absoluten Null verschieden, doch auch nicht mehr angebbar, sondern eine Infinitesimalgröße, ein Hauch, ein Augenblick ist" — und dann folgt ein englisches Zitat: „Das Infinitesimale ist der Geist einer abgeschiedenen Größe" (S. 59/60). Und weiter heißt es an einer anderen Stelle (S. 76): „Die Infinitesimalmethode ist, wie man sieht, sehr subtil, aber richtig. Sollte dies aus dem Bisherigen und dem noch Folgenden nicht einleuchten, so liegt dies nur an unserer mangelhaften Darstellung derselben." Es ist gewiß sehr interessant, von diesen Erörterungen näher Kenntnis zu nehmen!

Als Gegenstück dazu lege ich Ihnen noch die sechste Auflage des verbreiteten *Lehrbuchs der Experimentalphysik* von *Wüllner*[1]) vor, in dem im ersten Bande eine kurze Darstellung der Infinitesimalrechnung mit der Absicht vorausgeschickt wird, den Naturwissenschaftlern oder Medizinern die auf dem Gymnasium nicht erworbene und für die Physik doch unbedingt notwendige Kenntnis der Infinitesimalrechnung zu vermitteln. Dabei beginnt Wüllner (S. 31) mit der Erklärung, was eine unendlich kleine Größe dx ist, später folgt dann die natürlich schwierigere Erklärung für das zweite Differential d^2x. Lesen Sie einmal diese Einleitung mit dem Auge des Mathematikers, und bedenken Sie dann, welch ein Widersinn darin liegt, daß auf der Schule die Infinitesimalrechnung als zu schwer unterdrückt wird, daß sie aber dann nach einer solchen nicht nur durchaus unbefriedigenden, sondern auch äußerst schwer verständlichen Darstellung von jedem ersten Semester auf zehn Seiten begriffen werden soll!

Der Grund, warum solche Betrachtungen neben der mathematisch exakten Grenzmethode sich vielfach so lange erhalten konnten, ist wohl in einem weitverbreiteten Bedürfnis zu suchen, sich über die abstrakt logischen Formulierungen der Grenzmethode hinaus tiefer *in das innerste Wesen der stetigen Größen hineinzufühlen* und sich auch bestimmtere Vorstellungen davon zu bilden, als es durch bloßes Betonen der psychologischen den Grenzbegriff bestimmenden Momente geschieht. Charakteristisch dafür ist eine Formulierung, die, soviel ich weiß, von dem Philosophen *Hegel* herrührt und die früher vielfach in Büchern und Vorlesungen vorgebracht wurde. Sie besagt, daß die *Funktion* $y = f(x)$ *das Sein der Dinge*, der *Differentialquotient* $\frac{dy}{dx}$ *aber das Werden der Dinge* darstellt. Sicher liegt etwas Ansprechendes darin, nur muß man sich darüber klar sein, daß ein solches Wort die ferneren mathematischen Entwicklungen durchaus nicht fördert, da diese auf präzisen Begriffen aufgebaut werden müssen.

In der neuesten Mathematik sind die „*aktual*" *unendlich kleinen Größen* in ganz anderem Zusammenhange wieder zu Ehren gekommen, nämlich *in den geometrischen Untersuchungen Veroneses* und dann in

[1]) Leipzig 1907.

Hilberts „Grundlagen der Geometrie" [1]). Die leitende Idee dieser Untersuchungen kann man in aller Kürze so aussprechen: Man betrachtet eine Geometrie, in der durch eine Angabe $x = a$, wobei a eine gewöhnliche reelle Zahl ist, nicht nur *ein* Punkt der x-Achse, sondern unendlich viele bestimmt werden, deren Abszissen sich um endliche Vielfache unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnung $\eta, \zeta, \ldots$ unterscheiden; *ein Punkt ist also erst bestimmt, wenn man*

$$x = a + b\eta + c\zeta + \cdots$$

gibt, wo a, b, c, ... gewöhnliche reelle Zahlen, die η, ζ, ... aktual unendlich kleine Größen abnehmender Ordnung sind. Bei Hilbert wird nun diese Leitidee so gewendet, daß durch geeignete axiomatische Festlegungen über diese so eingeführten Größen *evident* wird, *daß man widerspruchsfrei mit ihnen operieren kann.* Dabei kommt es hauptsächlich darauf an, die Größenbeziehung von x zu einer zweiten Größe $x_1 = a_1 + b_1\eta + c_1\zeta + \cdots$ geeignet zu bestimmen. Man setzt dazu zunächst fest, *daß $x >$ oder $< x_1$, wenn $a >$ oder $< a_1$; ist aber $a = a_1$, so soll der zweite Koeffizient über das Größenverhältnis entscheiden derart, daß $x \gtrless x_1$, je nachdem $b \gtrless b_1$, und wenn auch $b = b_1$ ist, so sollen die c entscheiden usw.* Sie werden diese Festsetzung am klarsten auffassen, wenn Sie mit den hingeschriebenen Buchstaben keinerlei Vorstellung weiter zu verbinden versuchen.

Es ergibt sich nun, daß man mit den so eingeführten Größen nach diesen und den weiter hinzuzufügenden Regeln ganz analog operieren kann, wie mit endlichen Zahlen; nur ein wesentlicher Satz fällt fort, der im System der gewöhnlichen reellen Zahlen gilt, *daß man nämlich zu zwei positiven Zahlen e, a stets eine endliche ganze Zahl n so bestimmen kann, daß $n \cdot e > a$, wie klein auch e und wie groß a sei.* In der Tat ergeben hier die angeführten Definitionen unmittelbar, *daß ein beliebiges endliches Vielfaches $n \cdot \eta$ von η immer noch kleiner ist als jede positive endliche Zahl a bleibt*, und diese Eigenschaft ist es eben, die η als „unendlich kleine Größe" charakterisiert. Ebenso ist stets $n \cdot \zeta < \eta$, d. h. *ζ ist eine unendliche kleine Größe höherer Ordnung als η.*

Man nennt nun dieses Zahlensystem ein *Nichtarchimedisches*. Man bezeichnet nämlich jenes Theorem über endliche Zahlen als *Archimedisches Axiom*, weil Archimedes es als nicht beweisbare bzw. nicht weiter zu beweisende grundlegende Annahme über die von ihm benutzten Zahlen hervorhebt; daß die Gültigkeit dieses Axioms aufhört, ist *charakteristisch für das Auftreten aktual unendlich kleiner Größen.* Übrigens ist der Name Archimedisches Axiom wie die meisten Personalbezeichnungen historisch ungenau; das Axiom ist, mehr als ein halbes Jahrhundert vor Archimedes, bereits von *Euklid* hervorgehoben worden, und auch der soll es nicht gefunden, sondern, wie sehr viele seiner

[1]) 7. Aufl. Leipzig 1930.]

Sätze, von *Eudoxus von Knidos* übernommen haben. — Das Studium der nichtarchimedischen Größen[1]), die man besonders als Koordinaten zum Aufbau einer „*nichtarchimedischen Geometrie*" verwendet hat, verfolgt den Zweck einer tiefern Erkenntnis der Aussagen über Stetigkeit und gehört zu der großen Gruppe der Untersuchungen über die logische Abhängigkeit der verschiedenen Axiome der gewöhnlichen Geometrie und Arithmetik; man konstruiert dazu stets solche künstliche Zahlsysteme, für die nur ein Teil aller Axiome gilt und schließt dann auf die logische Unabhängigkeit der andern Axiome von diesen.

Es liegt nun natürlich die Frage nahe, *ob man auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben*, d. h. gewissermaßen auch eine *nichtarchimedische Analysis* aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe dieser Analysis wäre, den Mittelwertsatz:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \vartheta h)$$

aus den hier vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen; bisher ist aber jedenfalls von keinem der vielen Forscher, die sich mit aktual unendlich kleinen Größen beschäftigen, dazu etwas Positives geleistet worden.

Zu Ihrer Orientierung bemerke ich noch, daß das Wort „*unendlich klein*" seit *Cauchy* in den modernen Lehrbüchern in einem andern Sinne gebraucht wird. Man sagt dann nämlich nie, daß eine Größe unendlich klein *ist*, sondern nur, daß sie unendlich klein *wird*, und führt damit nur eine bequeme Ausdrucksweise dafür ein, daß sie unbegrenzt gegen Null abnimmt.

Ich muß nun noch der *Reaktion* gedenken, die der Gebrauch unendlich kleiner Größen in der Infinitesimalrechnung hervorgerufen hat. Man empfand bald das Mystische, Unbewiesene in diesen Vorstellungen, und daher entstand vielfach das *Vorurteil*, als sei die Differentialrechnung ein *besonderes philosophisches System*, das man nicht beweisen, nur glauben könne, oder geradezu, grob gesagt — Schwindel. Einer der schärfsten Kritiker in diesem Sinne war der Philosoph und Bischof *Berkeley*, der in dem kleinen Buche „The analyst"[2]) die in der Mathematik seiner Zeit herrschenden Unklarheiten in sehr amüsanter Darstellung angriff. Er geht davon aus, daß man sich gegenüber den Prinzipien und Methoden der Mathematik dieselbe Freiheit der Kritik bewahren müsse, „welche die Mathematiker hinsichtlich der Geheim-

[[1]) Nichtarchimedische Größen sind z. B. die sog. hornförmigen Winkel, die wohl Euklid schon kannte. Vgl. hierüber den im zweiten Bande dieses Werkes im Anschluß an die Kritik von Euklids „Elementen" gegebenen Exkurs.]

[2]) London 1734.

nisse der Religion anwenden", und greift dann alle Methoden der neuen Analysis, den Fluxionskalkul sowie das Operieren mit Differentialen aufs heftigste an; er kommt zu dem Schlusse, daß der gesamte Aufbau der Analysis unklar und durchaus unverständlich ist.

Ähnliche Anschauungen haben sich gerade auch auf philosophischer Seite vielfach bis in die Gegenwart erhalten; da kennt man eben immer nur das Operieren mit Differentialen und hat die neuerdings zu völliger Strenge ausgebildete Grenzmethode nicht mehr aufgenommen. Als Beispiel lassen Sie mich nur eine Stelle aus *Baumanns* „*Raum, Zeit und Mathematik*"[1]) aus den sechziger Jahren zitieren: „so verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, die Leibniz dem Kalkul gegeben hat, aber diesen Kalkul selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht zu konstruieren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergibt er sich nicht ...".

Aus dieser Reaktion gegen die Differentiale ist auch der schon mehrfach erwähnte Versuch von *Lagrange* in seiner „*Théorie des fonctions analytiques*" von 1797 zu erklären, der uns damit wieder in neuer Beleuchtung erscheint. Lagrange will da nicht nur die unendlich kleinen Größen, sondern auch jeden Grenzübergang aus der Theorie entfernen, indem er sich auf solche Funktionen beschränkt, die durch Potenzreihen definiert sind:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

und für diese die „*abgeleitete Funktion* $f'(x)$" — charakteristischerweise vermeidet er das Wort Differentialquotient und das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ — durch eine neue Potenzreihe:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots$$

rein formal erklärt. Konsequent spricht er dann auch nicht von Differentialrechnung, sondern von einem „*Derivationskalkul*".

Dauernd befriedigen freilich konnte diese Darstellung nicht. Denn einmal ist der hier verwendete Funktionsbegriff, wie wir ja kürzlich erst ausführlicher darlegten, viel zu eng; vor allem aber machen solche durchaus formale Definitionen eine tiefere Erfassung des Wesens des Differentialquotienten oder Integrals unmöglich und tragen dem, was wir *psychologische Momente* nannten, gar keine Rechnung: warum man sich gerade mit so eigentümlich abgeleiteten Reihen beschäftigt, lassen sie gänzlich unerörtert. Endlich aber kommt man ohne Grenzbetrachtungen nur dann aus, wenn man die *Konvergenz dieser Potenzreihen*

[1]) Bd. 2, S. 55. Berlin 1869.

und die Frage, innerhalb welcher Fehlergrenzen man sie durch endliche Teilsummen ersetzen kann, vollkommen außer acht läßt; sowie man diese Probleme berücksichtigen will — und das wird zur wirklichen Verwendung der Reihen natürlich nötig —, muß man doch wieder *eben denselben Grenzbegriff heranziehen*, zu dessen Vermeidung eigentlich das ganze System ersonnen ist.

Es sind in diesem Zusammenhang vielleicht noch einige allgemeine Worte zu den Meinungsverschiedenheiten über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung am Platze, die man auch heute noch vielfach findet, sowie man über den engen Kreis der Fachmathematiker hinausgeht. Ich glaube, man kann hier oft die Vorbedingungen einer Verständigung in ganz ähnlichen Betrachtungen finden, wie wir sie früher hinsichtlich der Grundlegung der Arithmetik (S. 15ff.) anstellten. Man muß in jeder mathematischen Disziplin die Frage der inneren logischen Folgerichtigkeit ihres Aufbaues streng scheiden von derjenigen nach der Berechtigung irgendwelcher Anwendungen ihrer „axiomatisch" und sozusagen „willkürlich" hergestellten Begriffe und Sätze auf Dinge unserer äußeren oder inneren Wahrnehmung. *Georg Cantor* unterscheidet einmal[1]) in Hinblick auf die ganzen Zahlen die *immanente Realität*, die ihnen auf Grund ihrer logischen Definierbarkeit zukommt, von der *transienten Realität*, die sie vermöge ihrer Anwendbarkeit auf wirkliche Dinge haben. Bei der Infinitesimalrechnung wird das erste Problem vollständig erledigt durch die auf dem Grenzbegriff basierten Theorien, wie sie die mathematische Wissenschaft ja jetzt in logisch geschlossener Weise entwickelt hat; die zweite Fragestellung gehört ganz der Erkenntnistheorie an, und der Mathematiker trägt nur zu ihrer präzisen Formulierung bei, indem er den ersten Teil abtrennt und erledigt — zu ihrer Lösung können rein mathematische Arbeiten ihrer Natur nach keinen unmittelbaren Beitrag liefern (vgl. die analogen Ausführungen zur Arithmetik S. 15ff.). Alle Streitigkeiten über die Begründung der Infinitesimalrechnung leiden nun darunter, daß diese beiden ganz getrennten Teile des Problems gerade bei dieser Disziplin nicht scharf genug geschieden werden; in Wahrheit ist der erste rein mathematische Teil hier gerade so fundiert wie in allen anderen Disziplinen der Mathematik, und die Schwierigkeiten liegen hier so gut wie dort im zweiten philosophischen Teil. Der Wert von Untersuchungen, die in dieser zweiten Richtung vordringen, tritt natürlich durch solche Überlegungen besonders hervor; nur erscheint es geboten, sie auf eine genaue Kenntnis der Resultate der rein mathematischen Arbeit über das erste Problem zu stützen.

Ich schließe mit diesem Exkurs unsere kurze historische Skizze der Entwicklung der Infinitesimalrechnung ab. Naturgemäß mußte ich mich

---

[1]) Mathematische Annalen Bd. 21, S. 562. 1883.

darauf beschränken, nur immer die bedeutendsten leitenden Ideen hervorzuheben. Gewiß müßte sie eigentlich durch ein eingehendes Studium der ganzen Literatur jener Periode vertieft werden. Viele interessante Hinweise können Sie in dem Vortrage von *Max Simon* auf der Frankfurter Naturforscherversammlung von 1896: „Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung" finden.

Wenn wir nun zum Schluß noch kurz einen Blick auf die Stellung des Schulunterrichts zu der Infinitesimalrechnung werfen, so sehen wir jenen ganzen historischen Entwicklungsgang sich dort gewissermaßen widerspiegeln. Wo man früher an der Schule Infinitesimalrechnung trieb, da hatte man — das tritt wenigstens in den Lehrbüchern klar zutage und mag wohl im Unterricht nicht anders gewesen sein — *keineswegs eine deutliche Vorstellung des exakten wissenschaftlichen Aufbaus mit Hilfe der Grenzmethode;* diese trat höchstens mehr oder weniger verschwommen auf, während das Operieren mit unendlich kleinen Größen und manchmal auch eine Derivationsrechnung im Sinne von Lagrange im Vordergrunde stand. Natürlich entbehrte dieser Unterricht nicht nur der Strenge, sondern auch der Verständlichkeit, und man kann es wohl begreifen, wenn sich allmählich eine sehr starke Abneignung gegen die Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule verbreitete. Sie gipfelte in den siebziger und achtziger Jahren geradezu in einem behördlichen Verbot dieses Unterrichts, selbst auf den Realanstalten.

Freilich hat das nicht gehindert, wie ich ja schon früher gelegentlich andeutete, daß die *Grenzmethode* auf der Schule *doch dort gehandhabt* wurde, wo man sie notwendig brauchte; nur vermied man den Namen, oder glaubte wohl gar gelegentlich auch, daß man etwas anderes treibe. Ich hebe da nur *drei Beispiele* hervor, deren Sie sich wohl auch meist von Ihrer Schulzeit her erinnern werden:

a) Die bekannte *Berechnung des Kreisumfanges und Inhalts* durch Approximation des Kreises mittels ein- und umgeschriebener regulärer Polygone ist offenbar nichts als eine *Integration*. Sie stammt bekanntlich bereits aus dem Altertum, ist besonders von *Archimedes* angewandt worden und diesem klassischen Alter hat sie es auch zu verdanken, daß sie sich auf der Schule erhalten hat.

b) Der physikalische, speziell der mechanische Unterricht braucht notwendig die Begriffe der *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* und ihre Anwendung bis hin zu den *Fallgesetzen*. Deren Ableitung ist aber dem Wesen nach genau identisch mit der *Integration der Differentialgleichung* $z'' = g$ durch die Funktion $z = \frac{1}{2} g t^2 + a t + b$, wobei a, b Integrationskonstanten sind. Dieses Problem *muß* die Schule unter dem Druck der Anforderungen der Physik lösen, und die Methoden, die sie anwendet, sind natürlich nur verkleidete, mehr oder weniger exakte Integrationsmethoden.

c) An vielen norddeutschen Schulen wurde *Theorie der Maxima und Minima* getrieben nach einem Verfahren, das man nach *Schellbach* benennt, jenem hervorragenden mathematischen Pädagogen, von dem Sie alle wohl schon gehört haben. Es besteht darin, daß man

$$\lim_{x \to x_1} \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right) = 0$$

setzt, um die Extrema der Funktion $y = f(x)$ zu erhalten — das ist genau die Methode der Differentialrechnung, nur daß das Wort Differentialquotient nicht gebraucht wird. Schellbach selbst hat diese Einkleidung gewiß nur gebraucht, weil die Differentialrechnung auf der Schule verboten war und er diese Ideen doch nicht missen wollte; seine Schüler aber übernahmen die Sache unverändert, benannten sie nach ihm, und so wurden den Schülern Methoden, die Fermat, Leibniz und Newton besessen haben, unter dem Namen Schellbach vorgeführt!

Lassen Sie mich nun endlich noch charakterisieren, wie sich unsere *Reformtendenzen* zu diesen Dingen stellen, die ja jetzt in Deutschland wie auch anderswo, besonders in Frankreich, mehr und mehr an Boden gewinnen und hoffentlich den mathematischen Unterricht der nächsten Jahrzehnte beherrschen werden. *Wir wollen, daß die Begriffe, die durch die Symbole* $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$ *umschrieben werden, mit diesen Bezeichnungen den Schülern geläufig gemacht werden, und zwar nicht als eine neue abstrakte Disziplin, sondern im organischen Aufbau innerhalb des Gesamtunterrichts, wobei man von den allereinfachsten Beispielen an langsam aufsteigen möge.* So beginne man auf Obertertia und Untersekunda etwa die Funktionen $y = ax + b$ (für bestimmte Zahlwerte a, b) und $y = x^2$ ausführlich zu betrachten, auf *Millimeterpapier* zu zeichnen und lasse daran langsam die Begriffe der Steigung und des Flächeninhalts entstehen. Man bleibe aber bei konkreten Beispielen. Auf der Oberstufe mag man dann die so gewonnenen Kenntnisse zusammenfassen, wobei sich von selbst ergibt, *daß man die Anfänge der Infinitesimalrechnung vollständig besitzt.* Wesentlich dabei ist, dem Schüler klar zu machen, daß hier durchaus nichts Mystisches vorliegt, sondern einfache Dinge, die ein jeder verstehen kann.

Die unabweisbare Notwendigkeit solcher Reformen liegt darin begründet, daß sie diejenigen mathematischen *Begriffsbildungen betreffen, die heutzutage die Anwendungen der Mathematik auf alle möglichen Gebiete durchaus beherrschen* und ohne die alle Studien an der Hochschule, schon die einfachsten Studien über Experimentalphysik, gänzlich in der Luft schweben. Ich kann mich hier mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, zumal dieser Gegenstand gerade im Klein-Schimmack (zitiert S. 3) ausführliche Berücksichtigung gefunden hat.

Um diese allgemeinen Betrachtungen nun wieder durch etwas Konkretes zu ergänzen, will ich jetzt noch einen besonders wichtigen Gegenstand der Infinitesimalrechnung eingehender behandeln.

2. Der Taylorsche Lehrsatz.

Ich werde dabei in ähnlichem Sinne wie früher bei den trigonometrischen Reihen von der gebräuchlichen Behandlung in den Lehrbüchern abweichen, indem ich die für die Praxis wichtige *endliche Reihe* und die *anschauliche Erfassung der Sachlage durch Abbildungen* in den Vordergrund stelle. So bekommt alles ein ganz elementares, leicht faßliches Aussehen.

Wir gehen von der Frage aus, *ob man den Verlauf einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ nicht auf ein Stück hin durch möglichst einfache Kurven zweckmäßig approximieren kann.* Das Nächstliegende ist, in der Umgegend eines Punktes $x = a$ die Kurve durch ihre *geradlinige Tangente:*

$$y = A + Bx$$

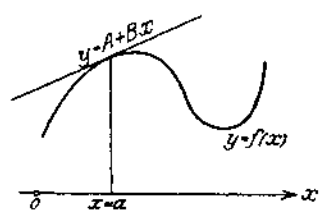


Abb. 101.

zu ersetzen, wie man das in der Physik und in anderen Anwendungen tut, so oft man bei einer Reihenentwicklung die höheren Potenzen der unabhängigen Variablen „wegwirft" (vgl. Abb. 101). Man kann nun in ähnlicher Weise noch *bessere Approximationen* erreichen, wenn man *Parabeln* 2^{ter}, 3^{ter}, ... *Ordnung:*

$$y = A + Bx + Cx^2, \qquad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \ldots$$

oder — analytisch gesprochen — *Polynome höheren Grades* verwendet; Polynome sind besonders zweckmäßig, da sie sich am bequemsten berechnen lassen. Wir werden diese Kurven speziell so legen, *daß sie sich an der Stelle $x = a$ möglichst eng an die gegebene Kurve anschmiegen, d. h. daß sie Schmiegungsparabeln vorstellen.* Die quadratische Parabel z. B. wird also nicht nur in der Ordinate, sondern auch in 1^{ter} und 2^{ter} Ableitung mit $y = f(x)$ übereinstimmen (d. h. „oskulieren") müssen, die kubische Parabel auch in der dritten Ableitung usw. Eine einfache Rechnung ergibt dann als analytischen Ausdruck der n^{ten} *Schmiegungsparabel:*

$$y = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdots n}(x-a)^n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und das sind gerade die *ersten $n+1$ Glieder der Taylorschen Reihe.*

Die Untersuchung, *ob und wieweit diese Polynome brauchbare Näherungskurven* darstellen, leiten wir wieder wie bei den trigonometrischen Reihen (S. 209) durch eine *mehr experimentelle Betrachtung* ein; ich kann Ihnen einige *Zeichnungen der ersten Schmiegungsparabeln* einfacher Kurven projizieren, die Herr *Schimmack* entworfen hat[1]).

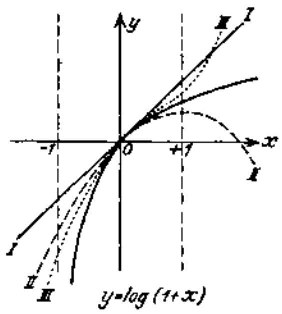


Abb. 102.

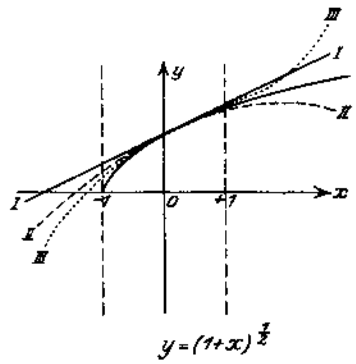


Abb. 103.

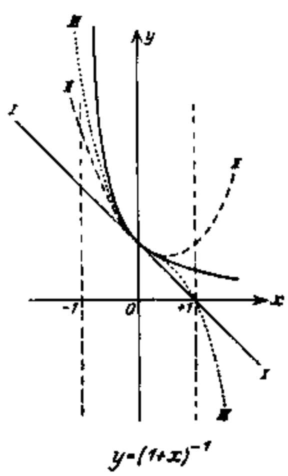


Abb. 104.

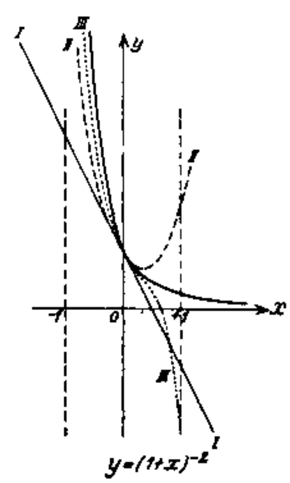


Abb. 105.

Es sind da zunächst *folgende vier Funktionen*, die bei $x = -1$ sämtlich singulär sind, mit ihren Schmiegungsparabeln an der Stelle 0 dargestellt (vgl. Abb. 102, 103, 104, 105):

[1]) Vier von diesen Abbildungen hat Herr Schimmack seinem Bericht über den Göttinger Ferienkursus Ostern 1908 beigegeben: „Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen." Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Bd. 39, S. 513ff. 1908; auch separat, Leipzig 1908.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \log(1+x) & \approx \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots, \\
2. & (1+x)^{\frac{1}{2}} & \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - + \cdots, \\
3. & (1+x)^{-1} & \approx 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots, \\
4. & (1+x)^{-2} & \approx 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \cdots.
\end{array}
$$

Die sukzessiven Schmiegungsparabeln nähern sich im Intervall $(-1, +1)$ der Originalkurve mit steigender Ordnung immer mehr, biegen aber auffälligerweise rechts von $x = +1$ in demselben Maße stärker, abwechselnd nach oben und unten, von ihr ab.

Am singulären Punkte $x = -1$ nehmen in den Fällen 1, 3, 4, in denen die Originalfunktion unendlich groß wird, die Ordinaten der sukzessiven Schmiegungsparabeln *immer größere Werte* an; im Falle 2, wo der dargestellte Ast der Originalfunktion bei $x = -1$ mit einer vertikalen Tangente abbricht, greifen alle Parabeln noch über diesen Punkt hinaus, nähern sich aber doch auch bei -1 noch mehr und mehr der Originalkurve, indem sie dort immer steiler verlaufen. An der zu $x = -1$ symmetrisch gelegenen *Stelle* $x = +1$ kommen in den ersten beiden Fällen die Schmiegungsparabeln der Originalkurve noch näher und näher; im Fall 3 sind ihre Ordinaten abwechselnd gleich 1 und 0, während die Ordinate der Originalkurve den Wert $^1/_2$ annimmt, und im Falle 4 endlich haben sie mit steigender Ordnung unbegrenzt wachsende, abwechselnd positive und negative Werte.

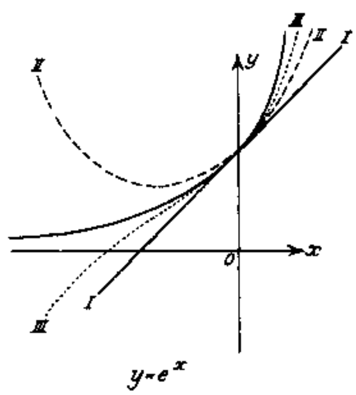


Abb. 106.

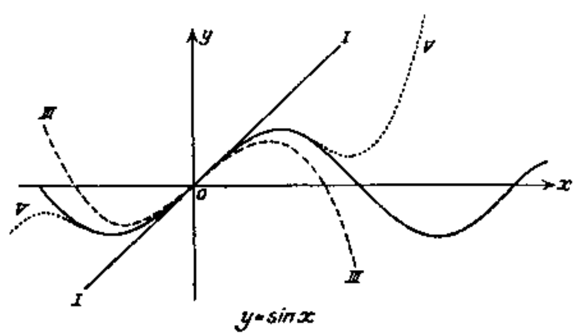


Abb. 107.

Fernerhin habe ich hier noch Skizzen der Schmiegungsparabeln von *zwei ganzen transzendenten Funktionen* (vgl. Abb. 106, 107):

$$
5. \qquad e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,
$$

$$
6. \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.
$$

Sie bemerken, daß die Schmiegungsparabeln mit wachsender Ordnung auf ein immer größeres Stück hin brauchbare Annäherungen an die Originalkurve darstellen. Besonders anschaulich sehen Sie bei $\sin x$, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.

Ich weise besonders darauf hin, daß das Zeichnen solcher Kurven in ganz einfachen Fällen vielleicht auch für die Schule geeigneten Stoff darstellt.

Nachdem wir so Erfahrungsmaterial gesammelt haben, müssen wir an die *mathematische Betrachtung* gehen. Wir haben da zunächst die praktisch äußerst wichtige Frage nach der *Genauigkeit, mit der allgemein die* n^{te} *Schmiegungsparabel die Originalkurve darstellt* (*Restabschätzung der Ordinatenwerte*), und daran schließt sich naturgemäß der Übergang zu unendlichem n an: ***Kann man durch eine unendliche Potenzreihe die gegebene Kurve wenigstens ein Stück genau darstellen?***

Es wird hier genügen, wenn ich nur den geläufigsten Satz über den Rest:

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\}$$

angebe; seine Ableitung finden Sie in allen Büchern, und ich komme überdies späterhin noch von allgemeinerem Standpunkte darauf zurück: *Es gibt zwischen a und x einen Zwischenwert ξ, so daß R_n darstellbar ist als:*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi). \qquad (a < \xi < x)$$

Die Frage nach der Berechtigung des Überganges zur unendlichen Reihe ist nun unmittelbar darauf zurückgeführt, ob dieses $R_n(x)$ bei unendlich wachsendem n den Limes 0 hat oder nicht.

Für unsere Beispiele entnimmt man hieraus, wie Sie gleichfalls überall nachlesen können, daß zunächst bei 5 und 6 die unendliche Reihe für alle x konvergiert. Bei 1 bis 4 ergibt sich, daß die unendliche Reihe *zwischen* -1 *und* $+1$ gegen die Originalfunktion *konvergiert, außerhalb* dieses Intervalles aber *divergiert*. Für $x = -1$ haben wir im Falle 2 Konvergenz gegen den Funktionswert, bei 1, 3, 4, wird der Grenzwert der Reihe unendlich ebenso wie der Funktionswert, so daß man eigentlich auch von Konvergenz reden könnte; es ist aber nicht üblich, dieses Wort bei Reihen mit bestimmt unendlichem Grenzwerte zu gebrauchen. Für $x = +1$ endlich haben wir Konvergenz in den ersten beiden, Divergenz in den letzten beiden Beispielen. All das steht in schönster Übereinstimmung mit den Ergebnissen unserer Abbildungen.

Wir können nun aber, wie schon bei den trigonometrischen Reihen, auch nach den *Grenzwerten fragen, denen die Annäherungsparabeln, als Kurven aufgefaßt, zustreben;* diese können ja bei $x = \pm 1$

nicht so plötzlich abbrechen. Für $\log(1+x)$ skizziere ich Ihnen diese Grenzkurve hier (vgl. Abb. 108), und zwar haben die geraden und ungeraden Parabeln für sich verschiedene, in der Abbildung durch Strichelung und Punktierung unterschiedene Grenzlagen, die aus der Logarithmuskurve zwischen -1 und $+1$ und dem bei $x=+1$ ansetzenden unteren bzw. oberen Stücke der Vertikalen $x=+1$ bestehen. Ähnlich ist es in den anderen drei Fällen.

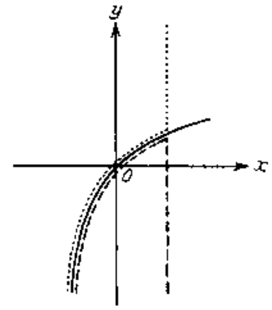


Abb. 108.

Die theoretische Betrachtung der Taylorschen Reihe findet ihre Vollendung erst beim *Übergang zu komplexen Variablen*; denn nur dann kann man das plötzliche *Aufhören der Konvergenz der Potenzreihen* an ganz regulären Stellen der Funktion verstehen. In unseren vier Beispielen freilich mag man diese Erscheinung an der Stelle $x=+1$ hinreichend damit erklärt finden, daß man sagt, eine Reihe kann nach rechts hin nicht weiter konvergieren als nach links, und links muß an der Stelle $x=-1$ die Konvergenz wegen der Singularität aufhören. Diese Überlegung kann aber bereits in folgendem Falle nicht mehr Platz greifen. Die Taylorsche Entwicklung des für alle reellen x regulär verlaufenden Astes von $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$$

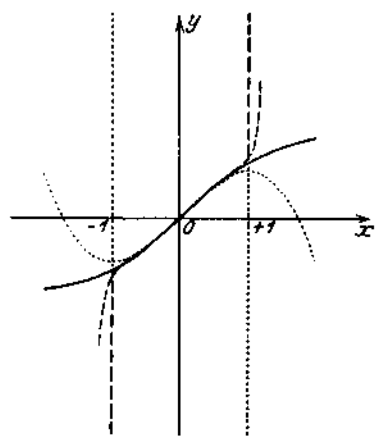


Abb. 109.

konvergiert nur im Intervalle $(-1, +1)$, und die Schmiegungsparabeln konvergieren alternierend gegen zwei verschiedene Grenzlagen (vgl. Abbildung 109). Die erste besteht aus den in der Abbildung stark gestrichelten Stücken der zu den Punkten $x=+1$ und $x=-1$ der Abszissenachse gehörenden Vertikalen und dem zwischen diesen verlaufenden Teil der Arcustangenslinie. Die zweite Grenzlage erhalten wir aus der ersten, in dem wir statt der gestrichelten die punktierten Vertikalenstücke nehmen. Gegen die erste konvergieren die durch eine ungerade Anzahl von Termen der Reihenentwicklung entstehenden Schmiegungsparabeln, der zweiten streben die zu einer geraden Anzahl von Termen gehörenden Näherungskurven zu. In der Abbildung stellt die gestrichelte Kurve $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, die punktierte

$y = x - \frac{x^3}{3}$ dar. Das plötzliche Aufhören der Konvergenz an den durchaus regulären Stellen $x = \pm 1$ ist bei Beschränkung auf reelle Variable, sofern man den Verlauf der Funktion ins Auge faßt, durchaus nicht mehr zu verstehen. Die Aufklärung ist erst in dem großen Theoreme vom *Konvergenzkreis* enthalten, das die schönste funktionentheoretische Leistung *Cauchys* ist und dem wir folgende Fassung geben: *Markiert man sich alle singulären Stellen der analytischen Funktion $f(x)$ in der komplexen x-Ebene, wenn $f(x)$ eindeutig ist, bzw. auf der zu $f(x)$ gehörigen Riemannschen Fläche, falls $f(x)$ mehrdeutig ist, so konvergiert die zu einer regulären Stelle $x = a$ gehörige Taylorsche Reihe im Innern des größten Kreises, den man auf dem betreffenden Blatte der Riemannschen Fläche um a so legen kann, daß kein singulärer Punkt in seinem Innern liegt* (so daß also mindestens ein singulärer Punkt auf seiner Peripherie liegt); *die Reihe konvergiert ferner für keine Stelle außerhalb des Kreises* (vgl. Abb. 110).

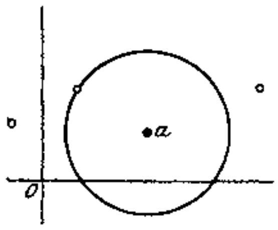


Abb. 110.

Unser Beispiel $\operatorname{arctg} x$ hat nun bekanntlich $x = \pm i$ zu singulären Stellen, und der Konvergenzkreis der Entwicklung nach Potenzen von x ist daher der Einheitskreis um $x = 0$; die Konvergenz muß also bei $x = \pm 1$ aufhören, da die reelle Achse an diesen Stellen den Konvergenzkreis verläßt (vgl. Abb. 111).

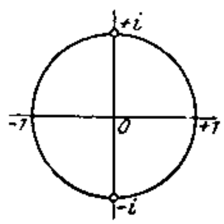


Abb. 111

Was endlich die *Konvergenz der Reihe auf dem Einheitskreise selbst* angeht, so muß ich mich hier mit einem Hinweis begnügen, der an den früher angedeuteten *Zusammenhang von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen* anknüpft; sie hängt davon ab, ob der reelle und der imaginäre Teil der Funktion auf dem Konvergenzkreise mit den Singularitäten, die er daselbst notwendig besitzt, in eine konvergente trigonometrische Reihe entwickelt werden kann oder nicht.

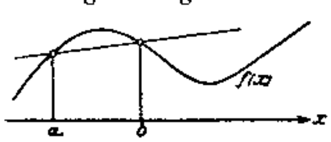


Abb. 112.

Ich möchte nun die Erörterungen über den Taylorschen Satz dadurch beleben, daß ich seine *Beziehungen zu den Problemen der Interpolations- und Differenzenrechnung* auseinandersetze. Auch dort betrachtet man nämlich die *Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Parabel zu approximieren;* statt sich ihr aber in *einem* Punkte möglichst gut anzuschmiegen, *soll sie sie in einer Anzahl von vornherein gegebener Punkte schneiden,* und die Frage ist wieder, wie weit diese „*Interpolationsparabel*" eine leidliche Annäherung gibt. Im einfachsten Falle heißt das also, daß man die Kurve nicht mehr durch ihre Tangente, sondern durch eine *Sekante* ersetzt (vgl. Abb. 112); analog wird man weiterhin die durch drei Punkte der gegebenen Kurve gehende quadratische Parabel, dann die durch vier ihrer Punkte gehende kubische Parabel diskutieren und so fort.

Diese Fragestellung der Interpolation ist durchaus naturgemäß und wird ungeheuer oft von jedermann angewandt, z. B. bei der Benutzung numerischer Logarithmentafeln. Da nimmt man nämlich gerade an, daß die Logarithmuskurve zwischen zwei der in der Tafel angegebenen Werte geradlinig verläuft und interpoliert „linear" in der bekannten durch die Einrichtung der „Differenzentäfelchen" erleichterten Weise; wird diese Annäherung nicht scharf genug, so wendet man wohl auch quadratische Interpolation an.

Von der so umschriebenen allgemeinen Aufgabe ergibt sich nun die Bestimmung der Schmiegungsparabeln beim Taylorschen Satz als spezieller Fall, wenn man einfach die Schnitte der Interpolationsparabeln in einen Punkt zusammenrücken läßt. Freilich ist bei der Ersetzung der Kurve durch diese Schmiegungsparabeln das Wort „Interpolation" im eigentlichen Sinne nicht mehr am Platze, aber man wird ja auch stets das „*Extrapolieren*" in die Aufgabe der *Interpolation* mit einschließen; man wird z. B. die Sekante nicht nur *zwischen* ihren Schnitten, sondern auch *außerhalb* derselben mit der Kurve vergleichen. Daher erscheint für das ganze Verfahren das umfassende Wort *Approximation* wohl zweckmäßiger.

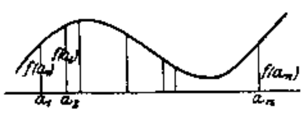


Abb. 113.

Ich will nun die *wichtigsten Interpolationsformeln* angeben. Wir wollen zunächst die Parabeln $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen, welche die Funktion in n willkürlich angenommenen Punkten $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ schneidet, d. h. deren Ordinaten in diesen Punkten gleich $f(a_1), f(a_2), \ldots$ $f(a_n)$ sind (vgl. Abb. 113). Diese Aufgabe wird bekanntlich durch die *Lagrangesche Interpolationsformel* gelöst:

$$(1)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}\cdot f(a_1) \\[2ex] \quad + \dfrac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}\cdot f(a_2) \\[2ex] \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{cases}$$

es treten so im ganzen n Glieder mit den Faktoren $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ auf, und im Zähler fehlen der Reihe nach die Faktoren $(x-a_1)$, $(x-a_2), \ldots, (x-a_n)$. Die Richtigkeit dieser Formel kann man sofort bestätigen: Einmal ist jeder Summand von y und daher y selbst ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x, und dann verschwinden beispielsweise für $x = a_1$ alle Brüche vom zweiten an, während der erste gleich 1 wird, so daß wir $y = f(a_1)$ erhalten; ebenso wird $y = f(a_2)$ für $x = a_2$ usw.

Aus dieser Formel kann man durch Spezialisierung die vielfach als *Newtonsche* bezeichnete *Formel* ableiten. Sie bezieht sich auf den

Fall, daß *die gegebenen Abszissen* $a_1, \ldots, a_n$ *äquidistant* sind (vgl. Abb. 114). Hier ist dann die *Bezeichnungsweise der Differenzenrechnung* sehr von Vorteil, und wir wollen diese daher zunächst einführen.

Δx sei irgendein Zuwachs von x und $\Delta f(x)$ der entsprechende Zuwachs von $f(x)$, so daß:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$$

wird. Nun ist $\Delta f(x)$ wiederum eine Funktion von x, die bei Veränderung von x um Δx eine bestimmte Differenz besitzen wird, die „zweite Differenz" $\Delta^2 f(x)$:

$$\Delta f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + \Delta^2 f(x),$$

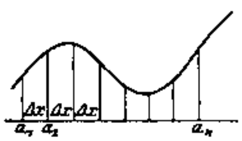


Abb. 114.

und ebenso setzen wir weiterhin:

$$\Delta^2 f(x + \Delta x) = \Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x), \quad \text{usw.}$$

Diese Bezeichnungen sind genau denen der Differentialrechnung analog, nur daß es sich hier um bestimmte endliche Größen handelt und von Grenzprozessen nicht die Rede ist.

Aus den angeschriebenen Definitionen der Differenzen folgt nun unmittelbar für die *Werte von f an den sukzessiven äquidistanten Stellen:*

$$(2)\quad \begin{cases} f(x + \Delta x) \;\; = f(x) + \Delta f(x), \\ f(x + 2\Delta x) = f(x + \Delta x) + \Delta f(x + \Delta x) \\ \qquad\qquad\quad = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x), \\ f(x + 3\Delta x) = f(x + 2\Delta x) + \Delta f(\Delta x + 2\Delta x) \\ \qquad\qquad\quad = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x), \\ f(x + 4\Delta x) = f(x) + 4\Delta f(x) + 6\Delta^2 f(x) + 4\Delta^3 f(x) + \Delta^4 f(x). \end{cases}$$

In dieser einfachen Weise drücken sich auch weiter die Werte an äquidistanten Stellen durch die sukzessiven Differenzen an der ersten Stelle x aus, wobei die *Binomialkoeffizienten* als Faktoren eingehen.

Nun lautet die *Newtonsche Formel für die zu den n äquidistanten Punkten der Abszissenachse:*

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + \Delta x, \ldots, a_n = a + (n-1)\Delta x$$

gehörige Interpolationsparabel $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung,* die also an diesen n Stellen mit $f(x)$ gleiche Ordinaten hat:

$$(3)\quad \begin{cases} y = f(a) + \dfrac{(x-a)}{1!}\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \dfrac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\dfrac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} + \cdots \\ \qquad + \dfrac{(x-a)(x-a-\Delta x)\cdots(x-a-(n-2)\Delta x)}{(n-1)!}\dfrac{\Delta^{n-1} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}}. \end{cases}$$

In der Tat ist das einmal ein Polynom $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in x; weiter aber reduziert sich y für $x = a$ auf $f(a)$, für $x = a + \Delta x$ fallen alle Glieder vom dritten an weg, und es bleibt $y = f(a) + \Delta f(a)$, ein Ausdruck, der nach (2) gerade $f(a + \Delta x)$ ist, und so geht das fort:

Die Tabelle (2) *ergibt, daß das Polynom an allen n Stellen gerade die richtigen Werte annimmt.*

Wollen wir eine dieser Interpolationsformeln nun aber wirklich mit Vorteil anwenden, so müssen wir etwas über die Genauigkeit wissen, mit der sie $f(x)$ darstellt, d. h. wir müssen eine *Restabschätzung* kennen. Die hat nun *Cauchy* 1840 gegeben[1]), und ich möchte sie hier noch ableiten. Es sei x irgendein Wert zwischen den Werten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (wir legen die *allgemeinere Lagrangesche Formel* zugrunde) oder außerhalb von ihnen (Inter- oder Extrapolation); wir bezeichnen mit $P(x)$ die Ordinate der durch die Formel gegebenen Interpolationsparabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit $R(x)$ den Rest:

$$f(x) = P(x) + R(x). \tag{4}$$

Nach der Definition von $P(x)$ verschwindet R sicher für $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$, und wir setzen demgemäß:

$$R(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{n!}\,\psi(x).$$

Das Herausziehen des Faktors $n!$ erweist sich als bequem; es zeigt sich dann nämlich, daß in völliger Analogie mit dem Restgliede der Taylorschen Reihe $\psi(x)$ *gleich dem Werte der* n^{ten} *Ableitung von* $f(x)$ *an einer gewissen zwischen den* $n+1$ *Punkten* $a_1, a_2, \ldots a_n, x$ *gelegenen Stelle* ξ *ist.* Diese Behauptung, daß die Abweichung des $f(x)$ vom Polynom $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von dem Gesamtverlauf der Funktion $f^{(n)}(x)$ abhängt, wird ganz plausibel, wenn man bedenkt, daß $f(x)$ im Falle identisch verschwindenden $f^{(n)}(x)$ gleich jenem Polynom wird.

Was den *Beweis der Restformel* betrifft, so gelingt er durch folgenden Kunstgriff: Man bilde als Funktion einer neuen Variablen z:

$$F(z) = f(z) - P(z) - \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}{n!}\,\psi(x),$$

wobei man also in $\psi(x)$ die Variable x als Parameter stehen läßt. Nun ist $F(a_1) = F(a_2) = \cdots = F(a_n) = 0$, da nach Definition $P(a_1) = f(a_1)$, $P(a_2) = f(a_2), \ldots, P(a_n) = f(a_n)$ ist. Ferner ist auch $F(x) = 0$, da für $z = x$ der letzte Summand in $R(x)$ übergeht und also die rechte Seite wegen (4) verschwindet. Wir kennen mithin $n+1$ Nullstellen $z = a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ von $F(z)$. Nun wenden wir eine *erweiterte Form des Mittelwertsatzes an,* die sich durch wiederholte Anwendung des gewöhnlichen Theorems (S. 230) ergibt: *Verschwindet eine samt ihren ersten n Differentialquotienten stetige Funktion an* $n+1$ *Stellen, so verschwindet ihr* n^{ter} *Differentialquotient an mindestens einer Stelle des alle Nullstellen enthaltenden Intervalles.* Also gibt es, sofern $f(z)$, und daher auch $F(z)$,

[1]) Comptes rendus Bd. 11, S. 775–789 = Oeuvres, Série I, Tome V, S. 409–424. Paris 1885.

n stetige Ableitungen hat, eine Stelle ξ zwischen den äußersten der Werte $a_1, \ldots, a_n, x$, an der:

$$F^{(n)}(\xi) = 0$$

wird. Nun ist aber:

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - \psi(x),$$

da das Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $P(z)$ die n^{te} Ableitung 0 hat und von dem letzten Summanden nur das höchste Glied $\frac{1}{n!} z^n \cdot \psi(x)$ eine nicht verschwindende n^{te} Ableitung liefert. Also haben wir schließlich:

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \psi(x) = 0, \quad \text{oder:} \quad \psi(x) = f^{(n)}(\xi),$$

und das gerade war die Behauptung.

Ich gebe nun speziell die *Newtonsche Interpolationsformel mit ihrem Restglied* ausdrücklich an:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{x-a}{1!} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!} \frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} + \cdots \\ &+ \frac{(x-a)\cdots[x-a-(n-2)\Delta x]}{(n-1)!} \frac{\Delta^{(n-1)} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}} \\ &+ \frac{(x-a)\cdots[x-a-(n-1)\Delta x]}{n!} f^{(n)}(\xi), \end{aligned} \right.$$

wo ξ ein Zwischenwert in dem die $n+1$ Punkte $a, a+\Delta x, a+\Delta 2x, \ldots a+(n-1)\Delta x, x$ enthaltenden Intervalle ist. Die Formel (5) ist in der Tat für die Anwendungen geradezu unentbehrlich. Ich habe auf die *lineare Interpolation bei Benutzung der Logarithmentafel* schon hingewiesen; für $f(x) = \log x$ und $n = 2$ ergibt (5):

$$\log x = \log a + \frac{x-a}{1!} \frac{\Delta \log a}{\Delta x} - \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!} \frac{M}{\xi^2},$$

$\left(\text{denn es ist } \frac{d^2 \log x}{d x^2} = -\frac{M}{x^2}\text{, wobei } M \text{ der Modulus des Logarithmensystems ist}\right)$, und wir haben so einen Ausdruck für den Fehler, den wir bei linearer Interpolation zwischen den beiden der Tafel zu entnehmenden Logarithmen von a und $a + \Delta x$ machen. Speziell hat dieser Fehler verschiedenes Zeichen, je nachdem x zwischen a und $a + \Delta a$ oder außerhalb liegt. Diese Formel sollte eigentlich jeder kennen, der mit Logarithmentafeln zu tun hat!

Ich will hier auf die Anwendungen nicht mehr weiter eingehen, vielmehr auf die *große Analogie zwischen der Newtonschen Interpolationsformel und der Taylorschen Formel Ihre Aufmerksamkeit lenken.* Diese Analogie hat einen tatsächlichen Untergrund: *Man kann aus der Newtonschen Formel den Taylorschen Satz mit Restglied in einfachster Weise durchaus exakt ableiten,* ganz entsprechend dem Grenzübergange von Interpolations- zu Schmiegungsparabeln. Läßt man nämlich Δx bei festem x, a und n, gegen Null konvergieren, so gehen, da ja $f(x)$ n-mal differenzierbar sein sollte, die in (5) auftretenden $n-1$ Differenzenquotienten in die entsprechenden Differentialquotienten über:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} = f''(a), \ldots .$$

In das letzte Glied von (5) können mit abnehmendem Δx andere und andere Werte ξ eingehen; da aber alle andern Glieder rechts bestimmte Grenzwerte haben und die linke Seite während des ganzen Grenzprozesses den festen Wert $f(x)$ beibehält, müssen auch diese Werte $f^{(n)}(\xi)$ gegen einen bestimmten Wert konvergieren, der obendrein wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ wiederum ein Wert dieser Funktion an einer zwischen a und x gelegenen Stelle ist; bezeichnen wir diese wieder mit ξ, so erhalten wir also:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$
$$(a < \xi < x).$$

Damit haben wir den *Taylorschen Satz mit Restglied vollständig bewiesen und ihn zugleich der allgemeinen Lehre von der Interpolation in schönster Weise eingeordnet.*

Mir scheint diese Ableitung des Taylorschen Satzes, die ihn in einen größeren Zusammenhang sehr einfacher Fragen bringt und den Grenzübergang äußerst glatt erledigt, wohl die *beste überhaupt mögliche* zu sein. Aber nicht alle Mathematiker, denen diese Betrachtungen geläufig sind — merkwürdigerweise sind sie aber vielfach und vielleicht sogar bei den Verfassern von Lehrbüchern unbekannt — denken so; sie sind gewohnt, einem jeden Grenzübergang nur mit dem ernstesten Gesicht gegenüberzutreten und würden daher einen direkten Beweis des Taylorschen Satzes dieser Verknüpfung mit der Differenzenrechnung vorziehen.

Ich muß hier aber hervorheben, daß die *geschichtliche Quelle der Entdeckung des Taylorschen Satzes tatsächlich die Differenzenrechnung* ist. Ich erwähnte schon, daß ihn *Brook Taylor* in seinem „*Methodus incrementorum*“[1]) zuerst aufgestellt hat; er leitet dort zunächst die Newtonsche Formel her, natürlich ohne Restglied, und läßt in ihr dann gleichzeitig $\Delta x \to 0$ und $n \to \infty$ gehen, dann erhält er richtig aus ihren ersten Gliedern die ersten Glieder seiner neuen Reihe:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \frac{d f(a)}{d a} + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 f(a)}{d a^2} + \cdots,$$

deren Fortsetzung nach demselben Gesetz ins Unendliche ihm nun selbstverständlich ist, — ohne daß er im mindesten auf ein Restglied oder auf Konvergenzbetrachtungen eingeht. Hierin liegt nun tatsächlich ein *Grenzübergang von unerhörter Kühnheit.* In den ersten Gliedern,

[1]) Londini 1715, p. 21—23.

in denen $x - a - \Delta x$, $x - a - 2\Delta x, \ldots$ vorkommt, ist ja allerdings keine Schwierigkeit weiter, da mit $\lim \Delta x = 0$ diese endlichen Vielfachen von Δx natürlich auch verschwinden. Aber weiterhin kommen mit wachsendem n noch Glieder in immer wachsender Anzahl, die immer mehr Faktoren $x - a - k\Delta x$ mit immer wachsenden Werten k enthalten, und man hat ohne weiteres gar kein Recht, sie alle ebenso zu behandeln wie die ersten, und gar zu schließen, daß sie in eine konvergente Reihe übergehen.

Hier operiert also Taylor im Grunde mit unendlich kleinen Größen (Differentialen) ebenso unbedenklich wie es die Leibnizianer taten; es ist interessant, sich zu vergegenwärtigen, daß er als ganz junger Mann von 29 Jahren noch unter den Augen Newtons von dessen Grenzmethode abwich. Freilich gelang ihm dadurch auch diese Entdeckung allerersten Ranges.

Eine ausgezeichnete kritische Darstellung der ganzen Entwicklung des Taylorschen Theorems finden Sie übrigens in *Alfred Pringheims* Arbeit: „*Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes*"[1]). Ich möchte hier noch über die *übliche Unterscheidung der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe* sprechen. Bekanntlich wird in manchen Lehrbüchern der für $a = 0$ entstehende Spezialfall der Taylorschen Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

selbständig als *Maclaurinsche Reihe* aufgeführt, und manch einer mag denken, daß die präzise Unterscheidung beider Reihen etwas sehr Wichtiges sei. Daß mathematisch nichts hinter dieser Unterscheidung steckt, sieht jeder, der nur etwas von der Sache versteht, sofort; weniger bekannt ist, daß sie auch *historisch ein vollkommener Unsinn* ist. Da hat nämlich die *zweifellose* Priorität *Taylor* mit seinem allgemeinen Satze in der soeben angedeuteten Herleitung. Obendrein hebt er aber noch ausdrücklich an einer späteren Stelle seines Buches (S. 27) die spezielle Gestalt der Reihe für $a = 0$ hervor und bemerkt, daß man sie mit Hilfe der heute sogenannten Methode der unbestimmten Koeffizienten auch direkt aufstellen könne. Diese Ableitung hat nun *Maclaurin* 1742 in seinen schon früher (S. 229) genannten „*Treatise of fluxions*" übernommen[2]), indem er aber ausdrücklich Taylor zitiert und nicht den mindesten Anspruch erhebt, etwas Neues zu bringen. Aber das Zitat hat man wahrscheinlich nicht beachtet und den Verfasser des Lehrbuches auch für den Urheber des Satzes gehalten; so entstehen ja sehr häufig Irrtümer. Erst später ging man wieder auf Taylor zurück und benannte nun wenigstens die allgemeine Form des Theorems nach ihm. Es ist schwer, wenn nicht gar unmöglich, gegen solche einmal fest eingenistete Absur-

[1]) Bibliotheca mathematica 3. Folge, Bd. I, S. 433—479. 1900.

[2]) Edinburgh 1742, Vol. II, S. 610.

ditäten anzukämpfen; man kann immer nur in dem kleinen Kreis derer, die historische Interessen besitzen, Aufklärung verbreiten.

Ich knüpfe an diese Auseinandersetzungen gern noch einige Bemerkungen allgemeinen Inhalts an, die unsere Erörterungen über die Infinitesimalrechnung beenden mögen.

3. Historische und pädagogische Betrachtungen.

Ich möchte zuerst darauf hinweisen, daß das von Taylor zwischen Differenzen- und Differentialrechnung geknüpfte Band noch lange Zeit gehalten hat: Noch in den analytischen Entwicklungen *Eulers* gehen beide Disziplinen stets Hand in Hand, und die Formeln der Differentialrechnung erscheinen als Grenzfälle ganz elementarer Beziehungen, die in der Differenzenrechnung statthaben. Diese so naturgemäße Verbindung wurde erst durch die wiederholt erwähnten formalen Definitionen des *Lagrange*schen Derivationskalküls aufgehoben. Ich möchte Ihnen hier ein Sammelwerk aus dem Ende des 18. Jahrhunderts vorlegen, das ganz auf Lagrangeschem Boden stehend alle damals bekannten Tatsachen der Infinitesimalrechnung zusammenfaßt, den „*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*" von *Lacroix*[1]). Als charakteristische Probe aus diesem Werke gebe ich die *Definition des Differentialquotienten* (Bd. I, S. 145): Eine Funktion $f(x)$ ist definiert durch eine Potenzreihe; durch Umordnung mit Hilfe des binomischen Satzes gewinnt man:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(x) + \cdots .$$

Nun bezeichnet Lacroix einfach das in h lineare Glied dieser Reihe mit $df(x)$, und indem er für h selbst dx schreibt, hat er für den Differentialquotienten, oder — wie er auch sagt — *Differentialkoeffizienten:*

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) .$$

So ist diese Formel auf eine vollständig veräußerlichte, allerdings nicht angreifbare Weise herausgebracht. In diesen Gedankenkreisen konnte Lacroix natürlich die *Differenzenrechnung* als Ausgangspunkt nicht mehr benutzen; sie erscheint ihm aber doch für die Praxis zu wichtig, als daß er sie weglassen wollte, und so ergreift er denn den Ausweg, sie in ganz selbständiger, übrigens sehr ausführlicher Darstellung hinterher im dritten Bande zu bringen, ohne daß gedankliche Brücken von ihr zur Differentialrechnung führen.

Dieser „*große Lacroix*" ist historisch besonders bedeutsam als eigentliches *Quellenwerk der vielen im 19. Jahrhundert entstandenen*

[1]) 3 Bde. Paris 1797—1800 mit vielen weiteren Auflagen.

Lehrbücher der Infinitesimalrechnung; in erster Linie ist hier Lacroix' eigentliches Lehrbuch, der sog. „*kleine Lacroix*"[1]), zu nennen.

Seit den zwanziger Jahren des Jahrhunderts sind diese Lehrbücher natürlich neben Lacroix auch durch die in *Cauchys* Werken wieder zu Ehren gekommene Grenzmethode stark beeinflußt. Es kommen da zunächst die vielen *französischen Lehrbücher* in Betracht, die meist als *Cours d'analyse de l'école polytechnique* auf den direkten Hochschulunterricht zugeschnitten waren. Von ihnen hängen auch unmittelbar oder mittelbar die *deutschen Lehrbücher*, mit alleiniger Ausnahme vielleicht desjenigen von *Schlömilch*, ab. Ich will aus dieser Menge von Büchern hier nur *Serrets* „*Cours de calcul différentiel et intégral*" hervorheben, der zuerst *1869* in Paris erschien; er wurde *1884* von *Axel Harnack ins Deutsche übersetzt* und gehört seitdem auch bei uns zu den verbreitetsten Lehrbüchern. Durch die Aufeinanderfolge verschiedener Bearbeiter waren manche Ungleichmäßigkeiten hineingekommen; die seit 1906 erschienenen Auflagen[2]) sind aber von *G. Scheffers* in Charlottenburg einer durchgreifenden Neubearbeitung unterzogen und wieder zu einem einheitlichen Werke abgeglichen worden. Ich nenne gern noch ein ganz neues französisches Buch, den dreibändigen „*Cours d'analyse mathématique*" von *Goursat*[3]), der nach vielen Richtungen reichhaltiger als Serret ist und insbesondere auch eine große Reihe ganz moderner Entwicklungen enthält; dabei ist er recht lesbar geschrieben.

In allen diesen neuen Lehrbüchern werden der Differentialquotient und das Integral durchaus wieder auf den *Grenzbegriff* zurückgeführt, von *Differenzenrechnung und Interpolation ist aber überhaupt nicht mehr die Rede;* so mag man dann freilich die Dinge schärfer sehen, aber man tauscht dafür — wie beim Mikroskop — eine beträchtliche Verengung des Gesichtskreises ein. So überläßt man jetzt überhaupt die Differenzenrechnung ganz den *praktischen Rechnern*, die sie anwenden müssen, insbesondere den Astronomen, und der Mathematiker erfährt nichts von ihr. Man darf hoffen, daß künftig hierin eine Wandlung eintritt[4]).

---

[1]) Traité élémentaire du calcul différentiel et intégral. 2 Bde. Paris 1797.

[2]) Seit 1906: Serret, J.-A., u. G. Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Bd. I, 6. Aufl. Leipzig 1915; Bd. II, 6/7. Aufl. 1921; Bd. III, 5. Aufl. 1914.

[3]) Paris 1902—1907. Bd. I, 3. Aufl. 1917; Bd. II, 3. Aufl. 1918; Bd. III, 2. Aufl. 1915. [Von den neuesten deutschen Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung seien hier genannt 1) die zwei Bände umfassenden „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung" von *R. Courant* (2. Aufl. 1930/31). 2) Die „Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen" von *A. Walther* (1928). Beide Werke sind unter dem Einfluß der pädagogischen Gedanken F. Kleins geschrieben.]

[[4]) Um hier einzugreifen, hat Klein seinerzeit die Herren Friesendorff und Prümm zu einer deutschen Übersetzung von *Markoffs* Differenzenrechnung veranlaßt (Leipzig 1896). Es folgen eine Reihe Artikel in der mathematischen

Im Anschluß hieran möchte ich als Abschluß meiner Darlegungen über Infinitesimalrechnung nun noch einmal *vier Punkte aufführen, durch deren Hervorhebung meine Ausführungen sich von den üblichen Darstellungen der Lehrbücher besonders unterscheiden:*

1. *Veranschaulichung abstrakter Betrachtungen durch Abbildungen* (Näherungskurven bei Fourierschen und Taylorschen Reihen).

2. *Betonung der Verbindung mit den Nachbargebieten,* wie der Differenzen- und Interpolationsrechnung, und schließlich mit philosophischen Untersuchungen.

3. *Hervorhebung des geschichtlichen Werdeganges.*

4. *Vorführung einiger Proben der populären Literatur zur Kennzeichnung der Abweichung der hiervon beeinflußten Anschauungen des großen Publikums von denen der Fachmathematiker.*

Mir scheint es äußerst wichtig, daß gerade die Lehramtskandidaten von all dem Kenntnis haben. So wie Sie in die Praxis treten, kommt die populäre Auffassung an Sie heran, und wenn Sie da nicht orientiert sind, wenn Sie nicht über die anschaulichen Elemente der Mathematik, sowie über ihre lebendigen Beziehungen zu allen Nachbargebieten Bescheid wissen, wenn Sie vor allen Dingen nicht die historische Entwicklung kennen, so verlieren Sie allen Boden unter Ihren Füßen; Sie ziehen sich dann entweder auf den Boden der modernsten reinen Mathematik zurück und werden an der Schule nicht verstanden, oder aber Sie unterliegen dem Ansturm, geben das auf, was Sie auf der Hochschule gelernt haben, und fallen auch in Ihrem Unterricht der überlieferten Routine anheim. Auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung gerade ist die Diskontinuität zwischen Schule und Universität, von der ich schon öfters sprach, am größten; ich hoffe, daß meine Darlegungen zu ihrer Beseitigung beitragen und Ihnen für Ihre spätere Lehrpraxis ein nützliches Rüstzeug an die Hand geben.

Damit verlasse ich die eigentliche herkömmliche Analysis und will nun anhangsweise noch einige *Theorien der modernen Mathematik* besprechen, auf die schon früher gelegentlich Bezug genommen wurde und über die, wie ich glaube, der Lehrer auch einigermaßen orientiert sein sollte.

Enzyklopädie. 1924 erschien ein Werk über Differenzenrechnung von *E. Nörlund* (bei Julius Spinger, Berlin) welches dem Gegenstande neue interessante Seiten abgewinnt. Auf dem Göttinger math.-phys. Ferienkurs von 1926 trug *A. Walther*, der an dem Nörlundschen Werke mitgearbeitet hat, über solche Fragen der Differenzenrechnung vor, die für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung von Bedeutung sind. Dieser Vortrag ist bis heute leider noch nicht gedruckt worden. Ein zweiter Vortrag, der von *A. Walther* auf demselben Kurs gehalten wurde, behandelte „Begriff und Anwendungen des Differentials". Es wurde als Beiheft 14 (Berlin 1929, B. G. Teubner) der Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht veröffentlicht. Die in diesem Vortrag niedergelegten Ausführungen ergänzen das in dem vorliegenden Werk auf Seite 223—255 Gesagte in wertvoller Weise.]

Anhang.

I. Transzendenz der Zahlen e und π.

An erster Stelle möchte ich von den Zahlen e und π sprechen, und insbesondere den Beweis geben, daß sie transzendente Zahlen sind.

Das Interesse für die Zahl π — in geometrischer Form — stammt bereits aus dem *Altertum*, und zwar war schon damals der Unterschied zwischen der Aufgabe ihrer *approximativen Berechnung* und derjenigen ihrer exakten *theoretischen Konstruktion* durchaus geläufig; man besaß auch bereits gewisse Grundlagen für die Lösung beider Aufgaben. Die erste hat bekanntlich *Archimedes* durch ein Verfahren der *Approximation des Kreises durch ein- und umgeschriebene Polygone* wesentlich gefördert, die zweite spitzte sich bald auf die Frage zu, ob man π *mit Zirkel und Lineal konstruieren könne*, und das versuchte man auf alle möglichen Arten, ohne den Grund des ständigen Mißlingens — die Unlösbarkeit der Aufgabe — zu erkennen; was von den ersten dieser Versuche erhalten ist, hat *Rudio*[1]) veröffentlicht. Die „*Quadratur des Zirkels*" gehört aber noch heute zu den populärsten Aufgaben, und viele — ich sprach ja schon früher davon — versuchen ihr Heil damit, ohne zu wissen oder zu glauben, daß die Frage durch die moderne Wissenschaft längst erledigt ist.

In der Tat sind *heute diese alten Probleme vollständig gelöst.* Man bezweifelt oft, ob die menschliche Erkenntnis überhaupt fortschreiten kann, und es mag wirklich auf manchem Gebiete zweifelhaft sein. In der Mathematik aber gibt es sicherlich Fortschritte, und hier haben wir ein Beispiel davon.

Die *Grundlagen*, auf denen die moderne Lösung dieser Probleme fußt, stammen bereits aus der Zeit von Newton bis Euler. Für die numerisch-approximative Bestimmung von π lieferten die *unendlichen Reihen* ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, das eine allen Ansprüchen genügende Genauigkeit möglich macht. Das weitestgehende Resultat hat da ein Engländer, namens *Shanks*, erreicht, der π auf 700 Dezimalen berechnete[2]); dabei liegt wohl nur ein sozusagen sportsmäßiges Interesse an

[1]) Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates. Leipzig 1908.

[2]) Vgl. Weber-Epstein I. S. 523.

einer Rekordleistung vor, denn für die Anwendungen wird man eine solche Genauigkeit nie brauchen.

Was nun die *theoretische Seite* angeht, so greift in derselben Periode die *Zahl e*, die *Basis der natürlichen Logarithmen*, zuerst in die Untersuchungen ein. Man entdeckt die wunderbare *Relation* $e^{i\pi} = -1$, und man entwickelt in der *Integralrechnung* ein Hilfsmittel, das, wie wir sehen werden, auch für die endgültige Lösung der Frage nach der Quadratur des Kreises wichtig ist. Den entscheidenden Schritt zur Erledigung der Aufgabe hat *Hermite*[1]) getan, indem er *1873 die Transzendenz von e bewies*. Es gelang ihm aber nicht, auch für π den Transzendenzbeweis zu erbringen; das glückte erst *Lindemann*[2]) im Jahre *1882*.

Dabei tritt nun zugleich eine *wesentliche Verallgemeinerung der klassischen Problemstellung* auf. Dort handelte es sich nur darum, *π mit Zirkel und Lineal zu konstruieren*, und das kommt, wie wir wissen (vgl. S. 56) analytisch darauf hinaus, *π durch eine endliche Folge von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen darzustellen*. Nun wird aber nicht nur die Unmöglichkeit dieser Darstellung behauptet, sondern noch darüber hinaus, *daß π und ebenso e transzendent, d. h. überhaupt durch keine irgendwie geartete algebraische Relation mit ganzen Zahlen verknüpft sind*. Mit andern Worten, *e oder π kann unmöglich Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

sein, wie groß auch die ganzen Zahlen $a_0, \ldots a_n$ und der Grad n sein mögen. *Ganze rationale Koeffizienten*, das ist dabei die Hauptsache; es genügt auch zu sagen: *rationale*, da man sie stets durch Multiplikation mit dem Generalnenner auf ganzzahlige zurückführen kann.

Ich gehe nun sogleich zu dem

Beweise der Transzendenz von e

über, und schließe mich dabei der wesentlich vereinfachten Darstellung an, die *Hilbert* in Band 43 der Mathem. Annalen (1893) gegeben hat.

Es ist zu zeigen, daß die Annahme einer Gleichung:

$$(1)\qquad a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \quad \text{wo} \quad a_0 \neq 0$$

mit ganzzahligen $a_0, \ldots, a_n$ zu einem Widerspruch führt; dieser wird sich in den *einfachsten Eigenschaften der ganzen Zahlen zeigen*. Wir werden dabei aus der Zahlenlehre nur die elementarsten Teilbarkeitsgesetze voraussetzen, insbesondere, *daß jede positive ganze Zahl auf eindeutige Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann*, und *daß es unendlich viele Primzahlen gibt*.

[1]) Comptes rendus, Bd. 77 (1873), S. 18—24, 74—79, 226—233, 285—293 = Werke III (1912), S. 150 ff.

[2]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, S. 679, und Math. Annalen, Bd. 20 (1882), S. 213 f.

Der *Plan unseres Beweisganges* ist dieser: Wir werden ein Verfahren angeben, e und seine Potenzen durch rationale Zahlen ganz besonders gut anzunähern, derart, daß:

$$e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \quad \ldots, \quad e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M} \tag{2}$$

wird, wobei $M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ ganze Zahlen und $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ außerordentlich kleine positive Brüche sind. Dann geht die angenommene Gleichung (1) nach Multiplikation mit M über in:

$$[a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \cdots + a_n M_n] + [a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n] = 0. \tag{3}$$

Die *erste Klammer* der linken Seite ist *eine ganze Zahl*, und wir werden nachweisen, daß sie *sicher nicht Null* ist; den *zweiten Summanden* aber werden wir dadurch, daß wir $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ hinreichend verkleinern, jedenfalls *zu einem positiven echten Bruch* machen können. Dann haben wir den offenbaren *Widerspruch, daß nach unserem Ansatz eine ganze, von Null verschiedene Zahl $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$, vermehrt um einen von 1 verschiedenen echten Bruch $a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$ Null ergeben soll; daraus folgt die Unmöglichkeit der Gleichung* (1).

Eine wichtige Anwendung wird dabei der Schluß finden, *daß eine ganze Zahl, die durch irgendeine bestimmte Zahl nicht teilbar ist, von Null verschieden ist* (denn Null ist durch jede Zahl teilbar). Wir werden nämlich zeigen, *daß $M_1, \ldots, M_n$ durch eine gewisse Primzahl p teilbar* sind, *$a_0 M$ aber sicherlich nicht;* also ist $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$ *nicht durch p teilbar und daher von Null verschieden.*

Das Haupthilfsmittel zur Durchführung der so angedeuteten Beweisidee ist die *Benutzung eines gewissen bestimmten Integrals*, das von Hermite in diese Betrachtungen eingeführt wurde, und das wir daher als *Hermitesches Integral* bezeichnen können; in seiner Bauart liegt der Schlüssel zum ganzen Beweise. Es ist das folgende Integral, das, wie wir sehen werden, tatsächlich einen ganzzahligen Wert hat und durch das wir M definieren werden:

$$M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!} dz, \tag{4}$$

wobei n der Grad unserer angenommenen Gleichung (1), p aber eine später noch näher zu bestimmende ungerade Primzahl ist. Aus ihm werden wir auch die gewünschte Approximation (2) der Potenzen e^ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) erhalten, indem wir das Integrationsintervall des Integrals $M \cdot e^\nu$ durch den Punkt ν zerlegen und demgemäß setzen:

$$M_\nu = e^\nu \int_\nu^\infty \frac{z^{p-1}[(z-1)\ldots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!} dz, \tag{4a}$$

$$\varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1}[(z-1)\ldots(z-n)]^p e^{-z}}{(p-1)!} dz. \tag{4b}$$

Treten wir nun an die *wirkliche Ausführung des Beweises* heran!

1. Ich gehe aus von der aus den Anfängen der Theorie der Γ-Funktion wohlbekannten Formel:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = \Gamma(\varrho)\,.$$

die wir hier nur *für ganzzahliges* ϱ brauchen, wobei $\Gamma(\varrho) = (\varrho - 1)!$ ist und die ich in dieser Beschränkung hier auch ableiten will. Man findet durch Integration nach Teilen für $\varrho > 1$:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = \left[-z^{\varrho-1} e^{-z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\varrho - 1) z^{\varrho-2} e^{-z} dz$$
$$= (\varrho - 1)\int_0^\infty z^{\varrho-2} e^{-z} dz\,.$$

Rechts steht nun wieder ein Integral genau derselben Form wie links, nur daß der Exponent von z verkleinert ist; wendet man diese Formel also wiederholt an, so muß man bei ganzzahligem ϱ schließlich auf z^0 kommen, und da $\int_0^\infty e^{-z} dz = 1$ ist, folgt schließlich:

$$(5) \qquad \int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = (\varrho - 1)(\varrho - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (\varrho - 1)!$$

Das Integral ist also bei ganzzahligem ϱ eine ganze Zahl, die mit wachsendem ϱ außerordentlich rasch wächst.

Um uns dies Resultat auch *geometrisch anschaulich* zu machen, zeichnen wir uns über einer z-Achse den Verlauf der Funktion $z^{\varrho-1} e^{-z}$ für verschiedene Werte ϱ; dann wird der Integralwert durch den bis ins Unendliche hin unter der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt dargestellt (vgl. Abb. 115). Je mehr ϱ wächst, desto enger schließt sich die Kurve bei $z = 0$ der Abszissenachse an, desto rascher aber steigt sie auch von $z = 1$ an empor; ihr Maximum erreicht sie für jedes einzelne ϱ bei $z = \varrho - 1$, also mit wachsendem ϱ immer weiter rechts, und auch der Wert des Maximums selbst wächst mit wachsendem ϱ. Rechts vom Maximum überwiegt der Faktor e^{-z}, und die Kurve fällt ab, um sich schließlich aufs innigste der z-Achse wieder anzuschmiegen. So ist es verständlich, daß der Inhalt — unser Integral — zwar immer endlich bleibt, aber doch mit wachsendem ϱ stark zunimmt.

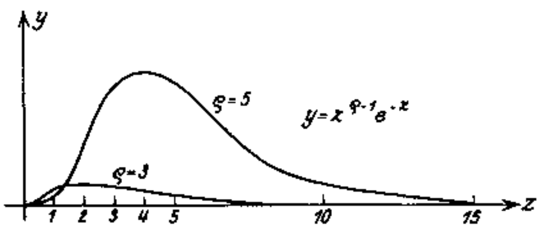


Abb. 115.

2. Mit dieser Formel können wir nun unser Hermitesches Integral (4) leicht auswerten. Entwickeln wir seinen Integranden nach dem polynomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}[(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^p &= [z^n + - \cdots + (-1)^n n!]^p \\ &= z^{np} + - \cdots + (-1)^n (n!)^p,\end{aligned}$$

[wobei immer nur das höchste und niederste (d. h. von z freie) Glied in z hingeschrieben wird], so geht das Integral über in:

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz + \sum_{\varrho=p+1}^{np+p} \frac{C_\varrho}{(p-1)!}\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz.$$

Die C_ϱ sind *ganzzahlige* Konstante, die sich aus dem oben angewandten polynomischen Satze ergeben. Nun können wir auf jedes dieser Integrale die Formel (5) anwenden und erhalten:

$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\varrho=p+1}^{np+p} C_\varrho \frac{(\varrho-1)!}{(p-1)!}.$$

Der Summationsindex ϱ ist *stets größer als* p, und daher ist $\frac{(\varrho-1)!}{(p-1)!}$ eine ganze Zahl, die noch obendrein p als Faktor enthält, und wir können diesen Faktor aus der ganzen Summe herausziehen:

$$M = (-1)^n (n!)^p + p[C_{p+1} + C_{p+2}(p+1) + C_{p+3}(p+1)(p+2) + \cdots].$$

Nun muß sich M hinsichtlich seiner Teilbarkeit durch p genau so verhalten wie der erste Summand $(-1)^n (n!)^p$. Da p aber Primzahl ist, wird dieser sicher dann nicht durch p teilbar sein, wenn p in keinem einzelnen seiner Faktoren $1, 2, \dots n$ enthalten ist, und das ist gewiß der Fall, wenn $p > n$ ist. Dieser Bedingung können wir, weil es unendlich viele Primzahlen gibt, tatsächlich noch auf unendlich viele Arten genügen, und wir haben dann erreicht, daß $(-1)^n (n!)^p$ und daher auch *M sicher nicht durch p teilbar ist.*

Da ferner $a_0 \neq 0$ war, können wir gleichzeitig auch erreichen, daß *a_0 nicht durch p teilbar* ist, indem wir nur p gleichzeitig größer als $|a_0|$ wählen; das ist nach dem soeben Gesagten ohne weiteres möglich. *Dann ist auch das Produkt $a_0 \cdot M$ nicht durch p teilbar,* und das strebten wir ja zunächst an.

3. Wir haben nun die in (4a) (S. 258) definierten Zahlen M_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ zu untersuchen. Nehmen wir den Faktor e^ν unter das Integralzeichen und führen die neue Integrationsvariable $\zeta = z - \nu$ ein, die von 0 bis ∞ läuft, wenn z von ν bis ∞ variiert, so wird:

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{(\zeta+\nu)^{p-1}[(\zeta+\nu-1)(\zeta+\nu-2)\cdots\zeta\cdots(\zeta+\nu-n)]^p e^{-\zeta}}{(p-1)!} d\zeta.$$

Dieser Ausdruck hat nun eine ganz analoge Form wie der vorhin betrachtete für M, und wir können ihn ganz analog behandeln. Multiplizieren wir die Faktoren des Integranden aus, so ergibt sich ein Aggregat von Potenzen mit ganzzahligen Koeffizienten, unter denen die niederste ζ^p ist. Das Integral des Zählers ist also eine ganzzahlige Kombination der Integrale:

$$\int_0^\infty \zeta^p e^{-\zeta} d\zeta, \quad \int_0^\infty \zeta^{p+1} e^{-\zeta} d\zeta, \quad \ldots, \quad \int_0^\infty \zeta^{(n+1)p-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

und da diese nach (5) bzw. gleich $p!$, $(p+1)!$, ... sind, so ist es gleich $p!$ multipliziert mit einer ganzen Zahl A_ν; *also ist jedes:*

$$M_\nu = \frac{p!\,A_\nu}{(p-1)!} = p \cdot A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

tatsächlich eine ganze durch p teilbare Zahl.

Damit im Verein mit dem Resultat von Nr. 2 sind die Grundlagen für den oben (S. 258f.) angegebenen Schluß gegeben: $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$ *ist gewiß nicht durch p teilbar und daher von Null verschieden.*

4. Der zweite Teil des Beweises bezieht sich auf die Summe $a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$, wobei nach (4b):

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\nu \frac{z^{p-1}[(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!}\,dz$$

ist; wir haben zu zeigen, daß diese ε_ν bei geeigneter Wahl von p *hinreichend klein* werden; zu dem Zwecke machen wir Gebrauch davon, daß wir *p beliebig groß* werden lassen können; denn die einzigen Bedingungen, denen die Primzahl p bisher unterworfen wurde ($p > n$, $p > |a_0|$), lassen sich noch durch beliebig große Primzahlen befriedigen.

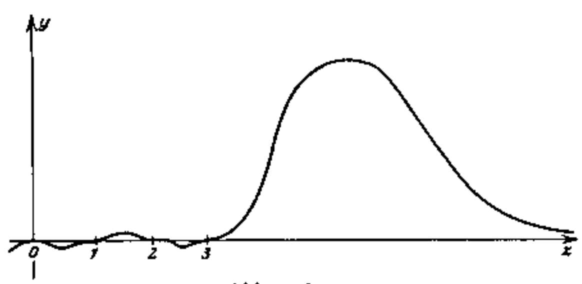


Abb. 116.

Machen wir uns zunächst ein *geometrisches Bild vom Verlaufe des Integranden;* er wird bei $z = 0$ die z-Achse berühren, bei $z = 1, 2, \ldots, n$ (in Abb. 116 ist $n = 3$) sie aber immer berühren und schneiden (da p ungerade). Wie wir bald näher sehen werden, erhebt sich im ganzen Intervalle $(0, n)$ die Kurve wegen des Nenners $(p-1)!$ nur wenig über die z-Achse, wenn wir nur p hinreichend groß nehmen, und es ist also plausibel, daß die Integrale ε_ν sehr klein werden. Für $z > n$ wächst der Integrand übrigens wieder beträchtlich und verläuft asymptotisch wie die früher betrachtete

Kurve $z^{\varrho-1}e^{-z}$ [für $\varrho=(n+1)p$], er nähert sich also schließlich unbegrenzt der z-Achse; so kommt der mit p außerordentlich rasch wachsende Wert M des ganzen von 0 bis ∞ erstreckten Integrals zustande.

Bei der tatsächlichen Abschätzung können wir uns nun mit einem ganz rohen Verfahren begnügen. Es seien G und g_ν die Maxima der absoluten Beträge der Funktionen $z(z-1)\cdots(z-n)$ und $(z-1)(z-2)\cdots(z-n)e^{-z+\nu}$ im Intervalle $(0,n)$:

$$\left.\begin{array}{l} |z(z-1)\cdots(z-n)|\leqq G \\ |(z-1)(z-2)\cdots(z-n)e^{-z+\nu}|\leqq g_\nu \end{array}\right\} \text{ für } 0\leqq z\leqq n\,.$$

Da das Integral einer jeden Funktion absolut nie größer ist als das Integral ihres Betrages, folgt für jedes ε_ν:

$$(6) \qquad |\varepsilon_\nu|\leqq\left\{\int\limits_0^\nu \frac{G^{p-1}g_\nu}{(p-1)!}\,dz=\frac{G^{p-1}g_\nu\cdot\nu}{(p-1)!}\right\}$$

Nun sind G, g_ν und ν von p unabhängige feste Zahlen, die im Nenner stehende Fakultät $(p-1)!$ wächst aber bekanntlich schließlich rascher als die Potenz G^{p-1}, oder genauer: für hinreichend große p wird $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ kleiner als jede vorgegebene noch so kleine Zahl. Wir können wegen (6) also, wenn wir nur p genügend groß wählen, tatsächlich auch jede der n Größen ε_ν *beliebig klein* machen.

Daraus folgt unmittelbar, daß man auch die Summe von n Termen $a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$ beliebig klein machen kann. Tatsächlich haben wir:

$$|a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n|\leqq|a_1||\varepsilon_1|+|a_2||\varepsilon_2|+\cdots+|a_n||\varepsilon_n|$$

und nach (6):

$$\leqq(|a_1|\cdot 1\cdot g_1+|a_2|\cdot 2g_2+\cdots+|a_n|\cdot n\cdot g_n)\cdot\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}\,;$$

da die Klammer einen festen von p unabhängigen Wert hat, so können wir vermöge des Faktors $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ die ganze rechte Seite und *damit auch* $|a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n|$ *so klein machen als wir wollen, insbesondere auch kleiner als* 1.

Damit haben wir aber den oben (S. 258) in Aussicht gestellten Widerspruch gegen das Bestehen der Gleichung (3):

$$[a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n]+[a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n]=0$$

abgeleitet, daß nämlich nach ihr eine nicht verschwindende ganze Zahl, vermehrt um einen echten Bruch, Null ergeben müßte. ***Also kann diese Gleichung nicht bestehen, und die Transzendenz von e ist bewiesen.***

Wenden wir uns nun dem

Beweise der Transzendenz von π

zu, der zwar etwas schwieriger als der vorhergehende Beweis, aber doch immer noch recht einfach ist. Man muß eben nur — und das ist die Kunst der mathematischen Erfindung — die Sache am richtigen Ende anfassen.

Die Problemstellung *Lindemanns* war folgende: Bisher ist gezeigt, daß eine Gleichung $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^\nu = 0$ nicht bestehen kann, wenn die Koeffizienten a_ν und die Exponenten ν von e gewöhnliche ganze rationale Zahlen sind; sollte man ähnliches nicht auch für beliebige *algebraische* a_ν und ν zeigen können? Das gelang ihm nun in der Tat, und zwar lautet der *allgemeinste Lindemannsche Satz über die Exponentialfunktion: Eine Gleichung $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{b_\nu} = 0$ kann nicht bestehen, wenn die a_ν beliebige, die b_ν lauter voneinander verschiedene algebraische Zahlen sind.* Die *Transzendenz von π ist dann nur ein Korollar dazu;* denn es besteht bekanntlich die Gleichung $1 + e^{i\pi} = 0$, und wäre π eine algebraische Zahl, so wäre es auch $i\pi$, und das Bestehen dieser Gleichung würde jenem Lindemannschen Satze widersprechen.

Ich will hier ausführlich nur einen *gewissen Spezialfall des Lindemannschen Satzes* beweisen, *der die Transzendenz von π bereits umfaßt.* Ich folge dabei wiederum im Wesen der Sache *Hilberts* Beweisführung in Band 43 der Mathematischen Annalen, die gegenüber Lindemann wesentlich vereinfacht und eine *genaue Verallgemeinerung der vorhergehenden Betrachtungen* für e ist.

Den Ausgangspunkt bildet die Relation:

$$1 + e^{i\pi} = 0. \tag{1}$$

Genügt nun π irgendeiner algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffzienten, so genügt auch $i\pi$ einer solchen Gleichung. Es seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die *sämtlichen* Wurzeln dieser letzten Gleichung, $i\pi$ selbst mit einbegriffen, dann ist wegen (1) jedenfalls auch:

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_n}) = 0.$$

Indem wir ausmultiplizieren, erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} &1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \cdots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) \\ &\qquad + \cdots + (e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nun könnten einige der hier auftretenden Exponenten zufällig Null sein; jedesmal, wenn das eintritt, enthält die linke Summe einen positiven Summanden 1, und alle diese fassen wir mit der bereits auftretenden 1 zu einer ganzen positiven, von Null sicher verschiedenen Zahl a_0 zusammen; die übrigbleibenden, von Null bestimmt verschiedenen Exponenten bezeichnen wir kurz mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ und schreiben demgemäß statt (2):

$$(3) \qquad a_0 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = 0, \quad \text{wo} \quad a_0 > 0.$$

Nun sind aber die $\beta_1, \ldots, \beta_N$ *Wurzeln einer ganzzahligen algebraischen Gleichung*. Denn aus der Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kann man in bekannter Weise eine ebensolche Gleichung für die sämtlichen zweigliedrigen Summen $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \ldots$ herleiten, ebenso eine solche für die dreigliedrigen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \ldots$ und so fort, und schließlich ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ selbst rational, genügt also einer linearen ganzzahligen Gleichung. Durch Multiplikation aller dieser Gleichungen erhalten wir wiederum eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, die vielleicht einige Wurzeln Null hat und deren übrige Wurzeln die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ sind. Indem wir die den ersteren entsprechende Potenz der Unbekannten weglassen, bekommen wir *für die N Größen β* eine *ganzzahlige algebraische Gleichung genau N^{ten} Grades* mit von 0 verschiedenem konstanten Term:

$$(4) \qquad b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N = 0, \quad \text{wo:} \quad b_0, b_N \neq 0.$$

Was wir nun beweisen wollen und was nach dem vorangehenden die Transzendenz von π umfaßt, ist dieser spezielle Fall des Lindemannschen Satzes: *Eine Gleichung der Form* (3) *mit ganzzahligem, nichtverschwindendem a_0 kann nicht bestehen, wenn die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ die N Wurzeln einer algebraischen Gleichung* (4) *vom N^{ten} Grade mit ganzen rationalen Koeffizienten sind.*

Der Beweis gliedert sich genau so, wie der frühere Beweis der Transzendenz von e. Wie wir dort die ganzzahligen Potenzen $e^1, e^2, \ldots, e^n$ besonders gut durch rationale Zahlen annähern konnten, wird es sich hier um eine *möglichst gute Approximation der in* (3) *auftretenden Potenzen von e* handeln, und wir werden in genau der alten Bezeichnung schreiben:

$$(5) \qquad e^{\beta_1} = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^{\beta_2} = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \quad \ldots, \quad e^{\beta_N} = \frac{M_N + \varepsilon_N}{M};$$

dabei wird der Nenner M *wieder eine gewöhnliche ganze rationale Zahl*, aber die $M_1, \ldots, M_N$ *werden nicht mehr ganze r a t i o n a l e, sondern ganze a l g e b r a i s c h e Zahlen sein, und die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$, die im allgemeinen jetzt gleichfalls komplexe Zahlen sein können, werden wenigstens ihren absoluten Beträgen nach sehr klein sein;* darin liegt die gegen früher auftretende Komplikation. Die *Summe aller $M_1, \ldots, M_N$ wird aber wiederum eine ganze rationale Zahl* darstellen, und zwar werden wir es so einrichten können, daß der *erste Summand* der Gleichung:

$$(6) \qquad [a_0 M + M_1 + M_2 + \cdots + M_N] + [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_N] = 0,$$

in die (3) vermöge (5) nach Multiplikation mit M übergeht, eine *nicht verschwindende ganze rationale Zahl* wird, während der *zweite Summand* jedenfalls absolut genommen *kleiner als 1* ist; *das ist der Art nach genau der früher benutzte Widerspruch, und damit ist die Unmöglichkeit von* (6) *und* (3) *gezeigt und unser Beweis geführt.* Im einzelnen wird wieder abgeleitet, daß $M_1 + M_2 + \cdots + M_N$ durch eine gewisse Primzahl p teilbar ist, $a_0 \cdot M$ aber nicht, woraus dann in alter Weise das Nichtverschwinden des ersten Summanden in (6) folgt; weiter wird dann p so groß gewählt, daß der zweite Summand in (6) beliebig klein wird.

1. Es wird sich nun zunächst darum handeln, M durch eine *geeignete Verallgemeinerung des Hermiteschen Integrals* zu definieren. Sie beruht auf der Bemerkung, daß der Faktor $(z-1)\cdots(z-n)$ des Hermiteschen Integrals gerade die Exponenten der Potenzen von e in der hypothetischen algebraischen Gleichung zu Nullstellen hat; demgemäß ersetzen wir ihn jetzt durch das mit den Exponenten von (3), d. h. den Lösungen von (4) gebildete Produkt:

$$(7) \qquad (z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_N) = \frac{1}{b_N}[b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N].$$

Als wesentlich wird sich aber nun erweisen, *daß wir noch eine geeignete Potenz von b_N als Faktor hinzufügen,* was sich früher erübrigte, da $(z-1)\ldots(z-n)$ ohnehin ganzzahlig war; wir setzen jetzt also schließlich:

$$(8) \qquad M = \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!}[b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N]^p \, b_N^{(N-1)p-1}.$$

2. Entwickeln wir nun, genau wie früher, den Integranden von M nach steigenden Potenzen von z, so liefert das niederste Glied, das zu z^{p-1} gehört:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} b_0^p \, b_N^{(N-1)p-1} = b_0^p \, b_N^{(N-1)p-1},$$

wo das Integral nach der schon oben stets benutzten Γ-Formel (S. 259) ausgewertet ist. Alle weiteren Summanden haben aber im Integranden z^p oder noch höhere Potenzen stehen; sie enthalten daher sämtlich den Faktor $\dfrac{p!}{(p-1!)}$ mit ganzen Zahlen multipliziert und sind also durch p teilbar. *Daher ist M selbst sicherlich eine durch p nicht teilbare ganze Zahl, wenn jener erste Summand $b_0^p \cdot b_N^{(N-1)p-1}$ nicht durch p teilbar ist,* d. h. sofern die Primzahl p weder Teiler von b_0 noch von b_N ist. Wegen $b_0 \neq 0$, $b_N \neq 0$ kann man p gemäß dieser Bedingung bestimmen, am einfachsten, indem man annimmt:

$$p > |b_0| \text{ und gleichzeitig: } p > |b_N|.$$

Da nun $a_0 > 0$ ist, kann man es sofort auch erreichen, daß $a_0 \cdot M$ *nicht durch p teilbar ist*, indem man etwa, wie früher, noch außerdem

$$p > a_0$$

bestimmt. Weil es unendlich viele Primzahlen gibt, kann allen diesen Bedingungen noch auf unendlich mannigfache Art genügt werden.

3. Nun müssen wir an die *Bildung von M_ν und ε_ν* herantreten. Hierbei tritt eine *Modifikation gegen das Frühere ein*, da die an die Stelle der ν tretenden *β_ν komplex* sein können, ja eines sicher gleich $i\pi$ ist. Wollen wir also eine dem früheren analoge Zerlegung des Integrals M vornehmen, so müssen wir uns erst über den *Integrationsweg durch das Komplexe* verständigen. Da ist nun glücklicherweise der *Integrand* unseres Integrals eine *im Endlichen überall eindeutige reguläre analytische Funktion* der Integrationsvariablen z, die nur bei $z = \infty$ eine singuläre (und zwar eine *wesentlich singuläre*) Stelle hat. Statt reell von 0 nach ∞ zu integrieren, können wir also auch irgendeinen andern von 0 nach ∞ gehenden Integrationsweg benutzen, wenn er nur schließlich wenigstens asymptotisch parallel der reellen positiven Halbachse ins Unendliche einläuft; letzteres ist nötig, damit das Integral bei dem Verhalten von e^{-z} im Komplexen überhaupt einen Sinn behält.

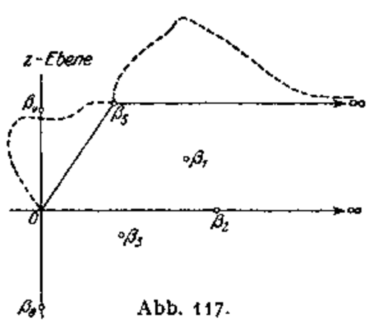


Abb. 117.

Wir denken uns nun die N-Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ markiert und bemerken insbesondere, daß wir M auch erhalten, wenn wir erst geradlinig von 0 nach einem der Punkte β_ν, dann geradlinig auf einer Parallelen zur reellen Achse ins Unendliche integrieren (vgl. Abb. 117). Auf diesem Wege können wir nun M in die beiden charakteristischen Teile zerlegen: *Der geradlinige Weg von 0 nach β_ν wird das mit wachsendem p beliebig klein werdende ε_ν liefern, die Parallele von β_ν nach ∞ aber die ganze algebraische Zahl M_ν:*

$$\text{(8a)} \quad \varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu} \int_0^{\beta_\nu} \frac{e^{-z} z^{p-1}\, dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N]^p\, b_N^{(N-1)p-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\text{(8b)} \quad M_\nu = e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1}\, dz}{(p-1)!} [b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N]^p\, b_N^{(N-1)p-1}.$$

Durch diesen Ansatz ist (5) in der Tat befriedigt. Daß wir dabei speziell *geradlinige Wege* benutzen, geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten; ein beliebiger krummer Weg von 0 nach β_ν muß natürlich genau denselben Wert ε_ν liefern, nur kann man aus dem geradlinigen Wege die beste Abschätzung dieses Wertes herleiten. Ebenso können wir statt der Horizontalen von β_ν nach ∞ auch eine beliebige, sich nur asymptotisch einer Horizontalen nähernde Kurve verwenden; aber auch das wäre nur unnötig unbequem.

4. Ich stelle die *Abschätzung der* ε_ν voran, bei der sich nichts gegen früher ändert, wenn man nur den Gedanken benutzt, daß der Betrag eines komplexen Integrals nie größer ist als das Maximum des absoluten Betrages des Integranden, multipliziert mit der Länge des Integrationsweges, die in unserm Falle $|\beta_\nu|$ ausmacht. Die so entstehende obere Grenze von ε_ν ist dann gleich dem Produkt einiger von p unabhängiger Faktoren in $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$, wobei G das Maximum von $|z(b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N)\,b_N^{N-1}|$ in einem Gebiete bezeichnet, das alle vom Nullpunkt nach den Punkten β_ν führenden Strecken enthält; daraus schließt man, wie oben (S. 262), *daß man durch Vergrößerung von p jedes ε_ν und daher auch $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_N$ dem Betrage nach beliebig klein, insbesondere auch kleiner als* 1 *machen kann.*

5. Erst bei der *Untersuchung der* M_ν werden wesentlich neue Überlegungen nötig, die freilich auch durchaus Verallgemeinerungen der früheren sind und nur dem Umstande Rechnung tragen, daß *statt rationaler jetzt algebraische ganze Zahlen* auftreten. Wir wollen gleich die ganze Summe:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} e^{\beta_\nu}\int\limits_{\beta_\nu}^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}\,[b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N]^p\, b_N^{(N-1)p-1}$$

in Betracht ziehen. Ersetzen wir hier in jedem Summanden vermöge (7) (S. 265) das Polynom in z durch das Produkt der Faktoren $(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_N)$ und führen die neue Integrationsvariable $\zeta=z-\beta_\nu$ ein, die wegen des für z angenommenen Integrationsweges reell von 0 nach ∞ läuft, so erhalten wir:

$$(9)\quad \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\zeta}\,d\zeta}{(p-1)!}(\zeta+\beta_\nu)^{p-1}(\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p\cdots\zeta^p\cdots(\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p\, b_N^{Np-1}$$

oder, wie wir schreiben können:

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\zeta}\,d\zeta}{(p-1)!}\,\zeta^p\cdot\Phi(\zeta),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned}\Phi(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{N} b_N^{Np-1}(\zeta+\beta_\nu)^{p-1}(\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p\cdots\\ (\zeta+\beta_\nu-\beta_{\nu-1})^p(\zeta+\beta_\nu-\beta_{\nu+1})^p\cdots(\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p.\end{aligned}\right.$$

Diese Summe $\Phi(\zeta)$ ist, wie jeder ihrer N Summanden, ein Polynom in ζ. In jedem der Summanden ist offenbar eine der N Größen $\beta_1,\ldots,\beta_N$ ausgezeichnet; in der Summe $\Phi(\zeta)$ aber, bzw. wenn wir sie als Polynom in ζ ausgerechnet denken, in den Koeffizienten der einzelnen ζ-Potenzen dieses Polynoms, treten diese N Größen wieder gleichberechtigt auf, d. h. jeder dieser Koeffizienten ist *eine symmetrische Funktion von $\beta_1, \ldots, \beta_N$*. Das Ausmultiplizieren der einzelnen Faktoren auf Grund des polynomischen Lehrsatzes läßt aber weiterhin erkennen, daß diese Funktionen *ganze rationale Funktionen von $\beta_1, \ldots, \beta_N$, und zwar mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten* sind. Nach einem bekannten Satze der Algebra *sind aber rationale symmetrische Funktionen mit rationalen Koeffizienten der sämtlichen Wurzeln einer rationalzahligen Gleichung stets rationale Zahlen*, und da die $\beta_1, \ldots, \beta_N$ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (4) sind, sind *die Koeffizienten von $\Phi(\zeta)$ tatsächlich rationale Zahlen.*

Wir brauchen aber noch darüber hinaus *ganze rationale Zahlen*, und die liefert uns die noch als Faktor von $\Phi(\zeta)$ auftretende *Potenz von b_N*. Wir können diese nämlich gerade auf alle auftretenden linearen Faktoren verteilen und schreiben:

$$(9'')\begin{cases} \Phi(\zeta) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} (b_N\zeta + b_N\beta_\nu)^{p-1}(b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_1)^p \cdots (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_{\nu-1})^p \\ \qquad (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_{\nu+1})^p \cdots (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_N)^p. \end{cases}$$

Analog wie vorhin sind die Koeffizienten von ζ, wenn wir dies Polynom ausgerechnet denken, *ganze rationale symmetrische Funktionen der Produkte $b_N\beta_1, b_N\beta_2, \ldots, b_N\beta_N$ mit ganzen rationalen Koeffizienten.* Nun sind aber diese N Produkte Wurzeln derjenigen Gleichung, die aus (4) hervorgeht, wenn wir z durch $\dfrac{z}{b_N}$ ersetzen:

$$b_0 + b_1\frac{z}{b_N} + \cdots + b_{N-1}\left(\frac{z}{b_N}\right)^{N-1} + b_N\left(\frac{z}{b_N}\right)^N = 0\,;$$

durch Multiplikation mit b_N^{N-1} geht diese Gleichung über in:

$$(10)\quad b_0 b_N^{N-1} + b_1 b_N^{N-2}\cdot z + \cdots + b_{N-2} b_N z^{N-2} + b_{N-1} z^{N-1} + z^N = 0\,,$$

d. i. *eine Gleichung, die durchweg ganzzahlige Koeffizienten und dabei 1 als höchsten Koeffizienten hat.* Man nennt solche algebraische Zahlen, die einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1 genügen, *ganze algebraische Zahlen*, und es besteht folgende Verschärfung des oben genannten Satzes: *Rationale ganze symmetrische Funktionen mit ganzen rationalen Koeffizienten der sämtlichen Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1 (also ganzer algebraischer Zahlen) sind selbst ganze rationale Zahlen.* Sie finden auch diesen Satz in den Lehrbüchern der Algebra, und wenn er vielleicht nicht überall in dieser präzisen Fassung angegeben ist, so werden Sie sich doch durch Verfolgung der Beweise leicht von seiner Richtigkeit überzeugen können.

Nun genügten die Koeffizienten des Polynoms $\Phi(\zeta)$ tatsächlich den Voraussetzungen dieses Satzes, und also sind sie *ganze rationale Zahlen*, die wir mit $A_0, A_1, \ldots, A_{Np-1}$ bezeichnen mögen; wir haben also nach (9):

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^p\,d\zeta}{(p-1)!}\,(A_0 + A_1\zeta + \cdots + A_{Np-1}\zeta^{Np-1}).$$

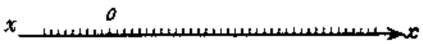
Damit sind wir aber wesentlich am Ziele. Denn führen wir die Integrationen im Zähler auf Grund unserer Γ-Formel (S. 259) aus, so ergeben sich Faktoren $p!$, $(p+1)!$, $(p+2)!, \ldots$, da jedes Glied die p^{te} oder eine höhere Potenz von ζ als Faktor enthält, und nach Division durch $(p-1)!$ *bleibt überall gewiß noch ein Faktor p stehen*, während die andern Faktoren ganze *rationale* Zahlen (die A_0, A_1, $A_2, \ldots$) sind; *also ist $\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$ eine durch p sicherlich teilbare ganze rationale Zahl.*

Nun war aber (S. 266) $a_0 \cdot M$ nicht durch p teilbar, also *ist $a_0 M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu$ notwendig eine durch p nicht teilbare ganze rationale Zahl und daher insbesondere sicherlich von Null verschieden.* Also kann auch tatsächlich die Gleichung (6):

$$\left\{a_0 M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu\right\} + \left\{\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu\right\} = 0$$

nicht bestehen, denn eine nicht verschwindende ganze Zahl kann sich mit der nach Nr. 4 (S. 267) sicher absolut kleiner als 1 bleibenden $\sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu$ nicht zu Null ergänzen. *Damit ist aber der oben (S. 264) ausgesprochene Spezialfall des Lindemannschen Satzes und die in ihm enthaltene Transzendenz von π bewiesen.* —

Ich will nun hier nur noch einen *weiteren interessanten Spezialfall des allgemeinen Lindemannschen Satzes* hervorheben, *daß nämlich in der Gleichung $e^\beta = b$ die Zahlen b und β nicht gleichzeitig algebraisch sein können, mit der einzigen trivialen Ausnahme $\beta = 0$, $b = 1$*; mit anderen Worten, *die Exponentialfunktion eines algebraischen Argumentes β sowie der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl b sind mit jener einzigen Ausnahme stets transzendent.* In dieser Aussage ist für $\beta = 1$ die Transzendenz von e, für $b = -1$ die von π (wegen $e^{i\pi} = -1$) mit enthalten. Der Beweis dieses Theorems läßt sich durch genaue Verallgemeinerung der letzten Betrachtungen führen, indem man von $b - e^\beta$ statt wie zuletzt von $1 + e^\alpha$ ausgeht; man hat dann nur neben sämtlichen Wurzeln der algebraischen Gleichung für β auch alle Wurzeln der Gleichung für b zu berücksichtigen, um zu einer zu (3) analogen Gleichung zu kommen, und deshalb braucht man mehr Bezeichnungen, und der Beweis wird scheinbar unübersichtlicher; wesentlich neue Gedanken werden aber nicht nötig. Ganz analog läßt sich auch der *Beweis des allgemeinsten Lindemannschen Satzes* führen.

Ich will auf diese Beweise hier nicht mehr eingehen, sondern möchte Ihnen lieber die Bedeutung *des letzten Theorems über die Exponentialfunktion* möglichst anschaulich machen. Denken wir uns auf einer Abszissenachse alle Punkte mit algebraischen Abszissen x 

markiert. Wir wissen, daß schon die rationalen und erst recht alle algebraischen Zahlen die Abszissenachse *überall dicht* erfüllen, und man könnte zunächst meinen, daß wenigstens die algebraischen Zahlen alle reellen Punkte x erschöpfen. Und nun ergibt eben unser Satz, daß das nicht der Fall ist, *daß auf der x-Achse zwischen den algebraischen Zahlen noch unbegrenzt viele andere transzendente Zahlen Platz finden,* von denen wir in $e^{\text{algebr. Zahl}}$ sowie $\log$ (*algebr. Zahl*) sowie in jeder algebraischen Funktion dieser transzendenten Zahlen unbegrenzt viele Beispiele besitzen. — Vielleicht noch sinnfälliger wird die Sache, wenn wir unsere Gleichung in der Bezeichnung $y = e^x$ schreiben und in einer x-y-Ebene als *Kurve* deuten (vgl. Abb. 118). Markieren wir nun auf der x-Achse sowohl als auf der y-Achse alle algebraischen Zahlen und fassen alle Punkte x, y der Ebene auf, die sowohl algebraisches x als auch algebraisches y haben, so wird die ganze x-y-Ebene mit diesen „*algebraischen* Punkten" überall dicht bedeckt. *Trotz dieser dichten Verteilung enthält die Exponentialkurve $y = e^x$ keinen einzigen algebraischen Punkt außer dem einen $x = 0$, $y = 1$,* ist doch sonst nach unserem Satze in $y = e^x$ mindestens eine der Größen x, y transzendent. Dieser Verlauf der Exponentialkurve ist gewiß eine höchst merkwürdige Tatsache!

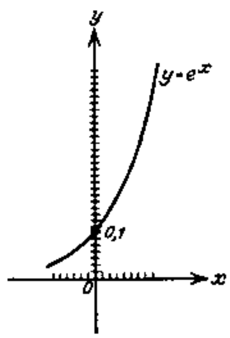


Abb. 118.

Die gedankliche Bedeutung dieser Sätze, die die Existenz einer großen Menge nicht nur nicht rationaler, sondern nicht einmal durch algebraische Operationen aus ganzen Zahlen darstellbarer Zahlen enthüllen, für unsere *Vorstellungen über das Zahlenkontinuum* ist ungeheuer. Wie hätte wohl Pythagoras eine solche Entdeckung gefeiert, wenn ihm das Irrationale schon eine Hekatombe wert schien!

Merkwürdig ist nur, wie wenig diese Fragen der Transzendenz im allgemeinen aufgefaßt und assimiliert werden, obgleich sie so einfach sind, wenn man sie nur einmal durchgedacht hat. Immer wieder muß man beim Examen die Erfahrung machen, daß der Kandidat nicht einmal den Begriff „Transzendenz" erklären kann; häufig wird einfach gesagt, eine transzendente Zahl genüge keiner algebraischen Gleichung — und das ist natürlich ganz falsch, wie das Beispiel $x - e = 0$

zeigt. Die Hauptsache, daß die Gleichungskoeffizienten rational sein müssen, ist eben weggelassen!

Wenn Sie nun unsere Transzendenzbeweise noch einmal durchdenken, so müssen Sie eigentlich diese *einfachen elementaren Schlüsse* als Ganzes bequem auffassen und sich dauernd zu eigen machen können. Gedächtnismäßig braucht man sich nur das Hermitesche Integral zu merken; dann wickelt sich alles durchaus naturgemäß ab. Ich möchte hier noch besonders betonen, daß wir bei diesen Beweisen im Sinne unserer ganzen Grundideen ruhig den *Integralbegriff* — geometrisch zu reden den *Flächeninhalt* — als seinem Wesen nach durchaus elmentar gebraucht haben, und ich glaube, daß das wesentlich zur übersichtlichen Gestaltung des Beweises beigetragen hat. Vergleichen Sie etwa die Darstellung in Band I von Weber-Wellstein, oder auch in meiner eigenen kleinen Schrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ [1]), wo im Sinne der älteren Schulbücher das Integralzeichen vermieden und sein Gebrauch durch Abschätzung von Reihenentwicklungen ersetzt wird. Sie werden dann zugeben, daß dort der Beweisgang bei weitem nicht so anschaulich und leicht aufzufassen ist.

Die letzten Erörterungen über die Verteilung der algebraischen Zahlen innerhalb der reellen Zahlen führen uns naturgemäß zu dem *zweiten modernen Gebiete*, auf das ich schon wiederholt im Laufe der Vorlesung hinzuweisen hatte, und über das nun einige eingehendere Darlegungen folgen mögen:

II. Die Mengenlehre.

Die Untersuchungen des Begründers dieser Theorie, *Georg Cantor*, gehen gerade von Betrachtungen über die Existenz transzendenter Zahlen aus[2]); sie lassen diese Tatsache in einem ganz anderen Lichte erscheinen, als wir sie bisher sahen.

Wenn der kurze Überblick über die Mengenlehre, den ich Ihnen hier geben will, etwas Besonderes hat, so soll es das sein, daß die *Behandlung konkreter Beispiele* mehr in den Vordergrund tritt als die ganz allgemeinen abstrakten Betrachtungen, durch welche die Mengenlehre sonst vielfach eine schwer faßliche oder gar abschreckende Form erhalten mag.

1. Die Mächtigkeit von Mengen.

Demgemäß erinnere ich zunächst daran, daß wir in unseren Entwicklungen wiederholt mit *verschiedenen charakteristischen Gesamtheiten von Zahlen* zu tun gehabt haben, die wir jetzt kurzweg *Zahlen-*

[1]) Zitiert S. 135.

[2]) Vgl. Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 77, S. 258. 1873.

mengen nennen werden. Wenn ich mich nur auf reelle Zahlen beschränke, so waren es:

1. *die positiven ganzen Zahlen;*
2. *die rationalen Zahlen;*
3. *die algebraischen Zahlen;*
4. *die sämtlichen reellen Zahlen.*

Jede dieser Mengen enthält *unendlich viele Zahlen.* Wir fragen nun zunächst, ob man nicht trotzdem in bestimmtem Sinne die *Größe oder den Umfang dieser Mengen vergleichen kann,* d. h. ob man nicht *das „Unendlich" der einen größer, gleich oder kleiner als das der andern nennen kann.* Fs ist das große Verdienst von Cantor, diese zunächst ganz unbestimmte Frage durch Aufstellung präziser Begriffe geklärt und beantwortet zu haben, und zwar kommt hier vor allem sein Begriff *„Mächtigkeit"* oder *„Kardinalzahl"* in Betracht: *Zwei Mengen haben „gleiche Mächtigkeit" (sind „äquivalent"), wenn sich ihre Elemente eineindeutig einander zuordnen lassen, d. h. wenn man die eine Menge so auf die andere abbilden kann, daß jedem ihrer Elemente umkehrbar eindeutig ein Element der anderen entspricht.* Ist eine solche Abbildung nicht möglich, so haben die Mengen *„verschiedene Mächtigkeit"*; dabei zeigt sich, daß, wie man auch die Elemente einander zuzuordnen versucht, immer noch Elemente einer und derselben von beiden Mengen übrig bleiben, die dann *„die größere Mächtigkeit"* hat.

Das wollen wir sofort an den vier aufgeführten Beispielen erläutern. Es liegt vielleicht zunächst die Annahme nahe, daß die Mächtigkeit der ganzen Zahlen kleiner sei als die der rationalen, diese kleiner als die der algebraischen und diese wiederum kleiner als die aller reellen Zahlen — denn jede dieser Mengen entsteht ja aus der vorangehenden durch Hinzufügung neuer Elemente. Aber dieser Schluß wäre voreilig, denn wenn auch *jede endliche Menge stets mächtiger ist als irgendein Teil von ihr,* so darf man diesen Satz doch *keineswegs auf unendliche Mengen* übertragen. Schließlich ist eine solche Abweichung auch nicht einmal so wunderbar, da man ja eben auf ein ganz neues Gebiet übergegangen ist. Wir wollen uns sogleich an einem möglichst einfachen *Beispiel* klar machen, *daß ein Teil einer unendlichen Menge mit ihr tatsächlich gleiche Mächtigkeit haben kann,* indem wir die Menge aller positiven ganzen Zahlen neben die aller geraden Zahlen stellen:

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots, \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \ldots.
\end{array}$$

Dann ist die durch die Doppelpfeile angedeutete Zuordnung offenbar von der oben geschilderten Art, daß jedem Element der einen Menge ein und nur ein Element der andern zugehört; *nach Cantors Definition* *hat daher die Menge der positiven ganzen Zahlen die gleiche Mächtigkeit wie ihre Teilmenge der geraden Zahlen.*

Die Untersuchung der Mächtigkeiten unserer vier Mengen ist also nicht so einfach abgetan; um so wunderbarer ist das einfache Resultat, Cantors große Entdeckung von 1873: *Die drei Mengen der ganzen positiven, der rationalen und der algebraischen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit, die Menge aller reellen Zahlen aber hat eine davon verschiedene größere Mächtigkeit.* Man nennt eine Menge, deren Elemente man der Reihe der ganzen positiven Zahlen eineindeutig zuordnen kann (die also mit dieser gleiche Mächtigkeit hat), *abzählbar;* jener Satz lautet also: *Die Menge der rationalen sowie die der algebraischen Zahlen ist abzählbar, die Gesamtheit aller reellen Zahlen aber ist nicht abzählbar.*

Führen wir zunächst den *Beweis für die rationalen Zahlen,* der gewiß vielen von Ihnen bekannt ist. Jede rationale Zahl — wir wollen die negativen gleich mit hinzunehmen — ist eindeutig in der Form $\frac{p}{q}$ darstellbar, wo p und q teilerfremde ganze Zahlen sind und q etwa stets positiv sei (während p auch Null oder negativ sein kann). Um alle diese Brüche $\frac{p}{q}$ in eine Reihe zu bringen, denken wir uns in einer p-q-Ebene *alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten* p, q markiert und bringen zunächst einmal diese in eine abzählbare Reihe, wie es der spiralartige Weg in obenstehender Abbildung andeutet. Danach können wir *alle diese Wertepaare* (p, q) *numerieren,* so daß jedem nur eine Zahl zukommt und alle ganzen Zahlen erschöpft werden (vgl. Abb. 119). Lassen wir jetzt aus dieser Reihenfolge alle die Wertepaare fort, die nicht den oben ausgesprochenen Bedingungen (Teilerfremdheit von p und q und $q > 0$) genügen, und numerieren nur alle übrig bleibenden (in der Abbildung durch starke Punkte markierten) für sich, so erhalten wir eine Reihe, die so beginnt:

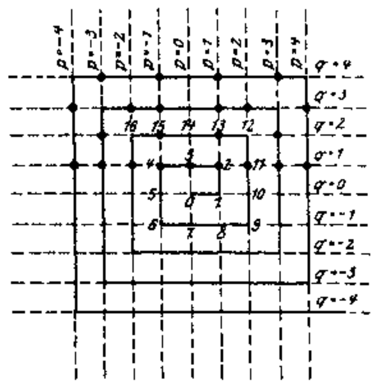


Abb. 119.

$$\underset{1}{\underbrace{1}}\quad \underset{0}{\underbrace{2}}\quad \underset{-1}{\underbrace{3}}\quad \underset{2}{\underbrace{4}}\quad \underset{\frac{1}{2}}{\underbrace{5}}\quad \underset{-\frac{1}{2}}{\underbrace{6}}\quad \underset{-2}{\underbrace{7}}\quad \underset{3}{\underbrace{8}}\quad \underset{\frac{3}{2}}{\underbrace{9}}\quad \underset{\frac{2}{3}}{\underbrace{10}}\quad \underset{\frac{1}{3}}{\underbrace{11}}\quad \ldots,$$

und die jeder rationalen Zahl genau eine ganze positive, jeder ganzen positiven Zahl genau eine rationale zuordnet; damit ist die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen. Übrigens wird durch diese Anordnung der rationalen Zahlen in eine abzählbare Reihe ihre natürliche Rangordnung nach der Größe von Grund auf zerstört; das zeigt untenstehende Skizze

(Abb. 120), in der an die rationalen Punkte der Abszissenachse ihre Ordnungsnummern in jener künstlichen Reihenfolge angeschrieben sind. —

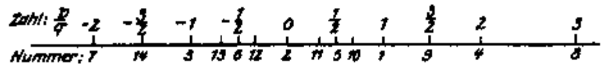


Abb. 120.

Wir kommen jetzt zweitens zu den *algebraischen Zahlen*, und auch hier will ich mich auf die *reellen* beschränken, obwohl die Betrachtung der komplexen nicht wesentlich schwieriger wäre. Jede reelle algebraische Zahl ω genügt einer reellen ganzzahligen Gleichung:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

die wir *irreduzibel* annehmen wollen, d. h. wir lassen alle etwa abtrennbaren rationalen Faktoren und auch etwaige gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ fort; wir setzen noch fest, daß a_0 *stets positiv* sein möge. *Dann genügt bekanntlich jedes algebraische ω nur einer einzigen so normierten irreduziblen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, und umgekehrt gehören zu jeder solchen Gleichung als Wurzeln höchstens n reelle algebraische Zahlen, vielleicht aber weniger oder gar keine.* Würden wir nun alle *diese algebraischen Gleichungen in eine abzählbare Reihe* bringen können, so wären damit auch offenbar ihre Wurzeln und daher auch alle reellen algebraischen Zahlen abgezählt.

Das ist nun Cantor dadurch gelungen, daß er jeder Gleichung eine bestimmte positive Zahl, ihre „*Höhe*"

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

zuordnet, und die *Gleichungen in eine abzählbare Folge von Klassen teilte, je nachdem die Höhe $N = 1, 2, 3, \ldots$ ist.* In jeder einzelnen dieser Klassen kann nach der Definition von N sowohl die Gradzahl n als auch jeder der Koeffizienten seinem absoluten Betrage nach höchstens gleich der endlichen Grenze N werden, *so daß jeder Klasse überhaupt nur endlich viele Gleichungen und daher insbesondere auch nur endlich viele irreduzible Gleichungen angehören können;* die Koeffizienten kann man durch Ausprobieren aller möglichen Lösungen der Gleichung für N leicht ermitteln, und man kann den Anfang der Reihe der Gleichungen für die niedersten N in der Tat sofort hinschreiben.

Nun denken wir uns für jeden Wert der Höhe N die reellen Wurzeln der endlich vielen zugehörigen irreduziblen Gleichungen bestimmt, deren es nur eine endliche Anzahl geben kann, und ordnen sie ihrer natürlichen Größe nach; dann nehmen wir zuerst die so geordneten Zahlen der Höhe 1, dann die der Höhe 2 und so fort und numerieren sie in dieser Reihenfolge. *Damit ist in der Tat die Menge aller reellen algebraischen Zahlen abgezählt,* denn wir kommen so zu jeder reellen algebraischen Zahl und brauchen andrerseits auch sämtliche positiven ganzen Zahlen als Nummern. In der Tat kann man mit genügender Geduld etwa die

7563^{te} Zahl des angegebenen Schemas ermitteln oder zu einer noch so komplizierten vorgegebenen algebraischen Zahl die zugehörige Nummer bestimmen.

Auch hier wird durch die Abzählung wieder die ***natürliche Rangordnung durchaus zerstört***, wenn sie auch innerhalb der Zahlen gleicher Höhe erhalten bleibt; z. B. haben zwei einander so nahe liegende Zahlen wie $\frac{2}{5}$ und $\frac{2001}{5000}$ die weit auseinander liegenden Höhen 7 bzw. 7001, während $\sqrt{5}$ als Wurzel von $x^2 - 5 = 0$ dieselbe Höhe 7 hat, wie $\frac{2}{5}$. —

Bevor wir nun zu dem letzten Beispiele übergehen, schalte ich gern einen kleinen *Hilfssatz* ein, der uns noch weitere ***abzählbare Mengen*** liefert und uns gleichzeitig mit einem auch später zu benutzenden Beweisverfahren bekannt macht. Sind zunächst *zwei* abzählbare Mengen gegeben:

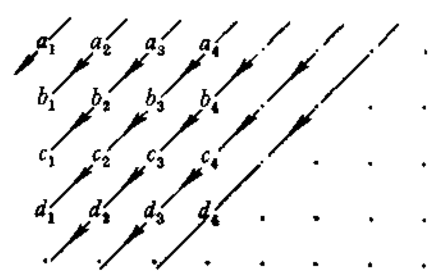
$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad \text{und} \quad b_1\, b_2, b_3, \ldots,$$

so ist die aus ihnen durch Verschmelzung entstehende Menge aller a und aller b offenbar wieder abzählbar; denn man kann sie in dieser Reihenfolge schreiben:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3, \ldots$$

und damit sofort der Reihe der ganzen Zahlen eineindeutig zuordnen. *Ebenso geben natürlich auch 3, 4, ..., überhaupt endlich viele abzählbare Mengen vereinigt wiederum eine abzählbare Menge.*

Nicht ganz so selbstverständlich aber erscheint — und diese Tatsache soll unsern Hilfssatz ausmachen —, *daß auch die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbarer Mengen wiederum eine abzählbare Menge liefert.* Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Elemente der ersten, mit $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die der zweiten, mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die der dritten Menge und so fort und denken uns diese einzelnen Mengen untereinander geschrieben; dann brauchen wir nur die sämtlichen Elemente in der Reihenfolge aufzufassen, die die sukzessiven Querlinien im folgenden Schema andeuten:



Die so entstehende Anordnung:

$$\underbrace{1}_{a_1}\ \ \underbrace{2}_{a_2}\ \ \underbrace{3}_{b_1}\ \ \underbrace{4}_{a_3}\ \ \underbrace{5}_{b_2}\ \ \underbrace{6}_{c_1}\ \ \underbrace{7}_{a_4}\ \ \underbrace{8}_{b_3}\ \ \underbrace{9}_{c_2}\ \ \underbrace{10}_{d_1}\ \ \underbrace{11}_{a_5}\ \ \ldots$$

dringt schließlich zu jeder der Zahlen $a, b, c, \ldots$ vor und ordnet ihr eine und nur eine bestimmte Nummer zu, womit die Behauptung bewiesen ist. Man könnte das, an jenes Schema anküpfend, eine „*Abzählung nach Querlinien*" nennen.

Die große Mannigfaltigkeit abzählbarer Mengen, die wir so kennen gelernt haben, könnte zunächst die Meinung hervorrufen, daß überhaupt alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Demgegenüber beweisen wir nun den *zweiten Teil des Cantorschen Satzes, daß das Kontinuum aller reellen Zahlen gewiß nicht abzählbar ist;* wir bezeichnen es kurz mit $\mathfrak{C}_1$, da wir später noch von mehrdimensionalen Kontinuen zu reden haben werden.

$\mathfrak{C}_1$ ist definiert als *Gesamtheit aller endlichen reellen Werte* x, wobei wir uns x etwa als Abszisse auf einer Achse vorstellen mögen. Wir wollen nun zuerst zeigen, *daß die Menge aller inneren Punkte der Einheitsstrecke* $0 < x < 1$ *genau die gleiche Mächtigkeit hat wie* $\mathfrak{C}_1$. Deuten wir nämlich die erste Menge auf einer x-Achse, die zweite auf einer dazu senkrechten y-Achse, so wird eine eineindeutige Abbildung zwischen ihnen vermittelt durch eine monoton ansteigende Kurve der in Abb. 121 skizzierten Art, die nach links $y = 0$, nach rechts $y = 1$ zur Asymptote hat $\left(\text{etwa ein Ast von } y = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} x\right)$.

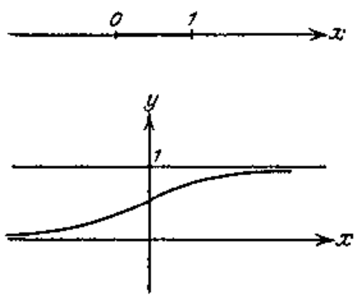


Abb. 121.

Wir werden also für $\mathfrak{C}_1$ *die Menge aller Zahlen zwischen* 0 *und* 1 setzen dürfen, was fortan geschehen soll.

Ich will nun *für die Nichtabzählbarkeit von* $\mathfrak{C}_1$ *den Beweis vortragen, den Cantor 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle gegeben hat;* er ist übersichtlicher und verallgemeinerungsfähiger als der ursprünglich 1873 publizierte. *Die Hauptsache dabei ist ein höchst einfaches Verfahren, das sogenannte „Diagonalverfahren", das zu jeder angenommenen abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen eine in ihr sicher* n i c h t *enthaltene reelle Zahl liefert;* das ist ein *Widerspruch*, und daher kann das $\mathfrak{C}_1$ nicht abzählbar sein.

Wir schreiben alle unsere Zahlen $0 < x < 1$ des $\mathfrak{C}_1$ als Dezimalbrüche; sie seien sämtlich in eine abzählbare Reihe gebracht:

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 = 0, & a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_2 = 0, & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_3 = 0, & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

wo die a, b, c Ziffern 0, 1, ..., 9 in jeder möglichen Auswahl und Reihenfolge sind. Man muß sich nun zunächst darüber klar werden, daß die *Dezimalbruchschreibweise nicht völlig eindeutig bestimmt* ist, da ja z. B. nach der Definition der Gleichheit $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ ist und da man überhaupt jeden abbrechenden Dezimalbruch auch als einen mit lauter Neunen abschließenden schreiben kann; das ist ja eine der ersten Voraussetzungen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen (vgl. S. 37). Um nun hier eine *eindeutige Bezeichnung* zu erreichen, setzen wie ein für allemal fest, *daß wir nur unendliche, nicht abbrechende Dezimalbrüche verwenden*, also statt abbrechender stets solche einführen, die mit lauter Neunen schließen. Solche Brüche mögen die oben in dem abzählbaren Schema stehenden alle bereits sein.

Um nun *einen von allen Zahlen des Schemas verschiedenen Dezimalbruch x'* zu bilden, heben wir *die in der Diagonale (daher der Name des Verfahrens) stehenden Ziffern* $a_1, b_2, c_3, \ldots$ hervor und setzen an die erste Stelle von x' eine von a_1 sicher verschiedene Ziffer a_1' an die zweite eine von b_2 verschiedene b_2', an die dritte eine von c_3 verschiedene c_3' und so fort:

$$x' = 0,\ a_1'\ b_2'\ c_3'\ldots.$$

Diese Bedingungen für $a_1', b_2', c_3', \ldots$ lassen uns aber offenbar noch genügend Freiheit, dafür zu sorgen, *daß x' wirklich ein echter Dezimalbruch, nicht etwa gleich $0{,}999\ldots = 1$ wird, und daß er nicht etwa hinter einer endlichen Stelle abbricht;* wir können sogar $a_1', b_2', c_3', \ldots$ durchweg von 9 und 0 verschieden annehmen. Dann ist aber *x' sicherlich von x_1 verschieden,* da die ersten Ziffern nicht übereinstimmen und zwei nicht abbrechende Dezimalbrüche nur dann gleich sein können, wenn *alle* Ziffern übereinstimmen; ebenso ist $x' \neq x_2$ wegen der zweiten, $x' \neq x_3$ wegen der dritten Ziffer, und *so ist überhaupt x', das doch ein ganz vernünftiger Dezimalbruch ist, von allen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des abzählbaren Schemas verschieden.* Also ist der gewünschte Widerspruch erreicht und die *Nichtabzählbarkeit des Kontinuums $\mathfrak{C}_1$ beweisen.*

Durch diesen Satz ist nun *a priori die Existenz transzendenter Zahlen gesichert,* denn die Gesamtheit der algebraischen Zahlen war abzählbar und kann daher das nichtabzählbare Kontinuum aller reellen Zahlen nicht erschöpfen. Während alle früheren Erörterungen uns aber immer nur *abzählbar unendlich viele transzendente Zahlen* kennen lehrten, folgt hier, daß *ihre Mächtigkeit tatsächlich größer* ist, so daß wir erst jetzt die richtige allgemeine Einsicht bekommen; freilich beleben jene speziellen Beispiele ihrerseits wieder das hier etwas abstrakte Bild [1]).

[1]) Die Existenz transzendenter Zahlen hat als erster *Liouville* bewiesen. Er gibt in einer 1851 im 16. Bande der 1. Reihe des Journal des mathématiques pures et appliquées erschienenen Abhandlung ganz elementare Verfahren zur Konstruktion solcher Zahlen an.]

Nachdem wir so das eindimensionale Kontinuum erledigt haben, wird die Untersuchung des ***zweidimensionalen*** nahe liegen; da hatte gewiß jedermann geglaubt, daß die Ebene mehr Punkte enthielte als die Gerade, und daher erregte es das größte Aufsehen, als Cantor zeigte[1]) *daß die Mächtigkeit des zweidimensionalen Kontinuums $\mathfrak{C}_2$ genau gleich der des eindimensionalen $\mathfrak{C}_1$ sei.* Nehmen wir für das $\mathfrak{C}_2$ das *Quadrat von der Seitenlänge* 1, sowie für $\mathfrak{C}_1$ die *Einheitsstrecke* (vgl. Abb. 122), so sollen also die Punkte beider eineindeutig aufeinander bezogen werden können. Daß diese Behauptung so paradox aussieht, liegt wohl daran, daß man sich zunächst von der Vorstellung einer gewissen *Stetigkeit der Zuordnung* nicht freimachen kann; aber in der Tat ist die Beziehung, die wir herstellen wollen, *so unstetig*, ja — wenn Sie wollen — *so unorganisch wie nur möglich;* sie zerstört eben alles, was für das ebene bzw. lineare Gebilde als solches charakteristisch ist, mit Ausnahme der „*Mächtigkeit*", etwa so, als ob man alle Punkte des Quadrates in einen Sack tut und aufs gründlichste durcheinanderrüttelt.

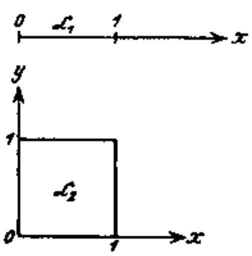


Abb. 122.

Die Menge der Quadratpunkte stimmt überein mit der *Menge aller Dezimalbruchpaare:*

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

die wir wieder *sämtlich als nicht abbrechend* annehmen wollen; wir schließen dabei also die Randpunkte, für die eine der Koordinaten x, y verschwindet, d. h. die beiden an 0 anstoßenden Seiten, aus, während die andern mit berücksichtigt werden; man kann sich leicht nachträglich überlegen, daß dies an der Mächtigkeit nichts ändert. Die *Grundidee des Cantorschen Beweises* ist jetzt, *diese beiden Dezimalbrüche zu einem neuen Dezimalbruch z zu verschmelzen, aus dem man rückwärts x, y eindeutig herstellen kann und der genau einmal alle Werte $0 < z \leqq 1$ durchläuft, wenn der Punkt x, y einmal das Quadrat durchläuft;* deutet man z als Abszisse, so hat man damit tatsächlich die gewünschte eineindeutige Beziehung des Quadrates $\mathfrak{C}_2$ und der Einheitsstrecke $\mathfrak{C}_1$, wobei entsprechend der Festsetzung über jenes Quadrat auch bei dieser Strecke nur der Endpunkt $z = 1$ mitgerechnet wird.

Man wird diese Verschmelzung zuerst so versuchen, daß man setzt:

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots,$$

woraus in der Tat durch Abtrennen der geraden und ungeraden Dezimalstellen eindeutig x und y zu erhalten ist. Doch da erhebt sich ein *Einwand aus der zweideutigen Schreibweise der Dezimalbrüche:* Dieses z durchläuft nämlich durchaus nicht das *ganze* $\mathfrak{C}_1$, wenn wir für x, y

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 84. 1878, S. 242f.

alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche, also alle Punkte des $\mathfrak{C}_2$ nehmen; denn z ist dann zwar stets nicht abbrechend, aber es gibt nicht abbrechende Werte z, wie z. B.:

$$z = 0,\ c_1\ c_2\ 0\ c_4\ 0\ c_6\ 0\ c_8\ldots,$$

die man nur aus einem abbrechenden x oder y erhält, im Beispiel

$$x = 0, c_1\,000\ldots, \qquad y = 0, c_2\,c_4\,c_6\,c_8\ldots.$$

Diese Schwierigkeit kann man am besten durch einen von *J. König* in Budapest vorgeschlagenen Kunstgriff beseitigen. Er versteht nämlich unter den a, b, c nicht schlechtweg die Ziffern, sondern gewisse *Ziffernkomplexe*, man könnte vielleicht sagen *„Moleküle" des Dezimalbruches*, zu denen er unter Hervorhebung der Rolle der Nullen *jede geltende von 0 verschiedene Ziffer des Dezimalbruches mit allen ihr direkt vorangehenden Nullen zusammenfaßt;* dann muß jeder nicht abbrechende Dezimalbruch auch *unendlich viele Moleküle* haben, da immer wieder von Null verschiedene Ziffern kommen, und umgekehrt. Beispielsweise sind in:

$$x = 0,\ 320\,8007\,000\,302\,405\ldots$$

als Moleküle zu nehmen: $a_1 = [3]$, $a_2 = [2]$, $a_3 = [08]$, $a_4 = [007]$, $a_5 = [0003]$, $a_6 = [02]$, $a_7 = [4], \ldots$

Nun mögen in der obigen Regel für den Zusammenhang von x, y mit z die a, b, c *in der Tat solche Moleküle* bedeuten. Dann gehört jedem Paare x, y wiederum ein nicht abbrechendes z eindeutig zu, das seinerseits rückwärts x und y bestimmt. Jetzt zerfällt aber jedes z rückwärts in ein x und y mit je unendlich vielen „Molekülen", und entsteht daher genau einmal, wenn wir x, y alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche durchlaufen lassen. Damit sind aber tatsächlich *Strecke und Quadrat eineindeutig aufeinander abgebildet, d. h. sie haben dieselbe Mächtigkeit.*

Natürlich kann man in ganz ähnlicher Weise zeigen, *daß auch das Kontinuum von 3, 4, ... Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt wie das eindimensionale.* Merkwürdiger ist aber, *daß auch das Kontinuum $\mathfrak{C}_\infty$ von unendlich vielen, soll heißen von abzählbar unendlich vielen Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt.* Dieser unendlichdimensionale Raum ist definiert als Gesamtheit der Wertesysteme, die abzählbar unendlich viele Veränderliche:

$$x_1,\ x_2, \ldots\ x_n, \ldots$$

annehmen können, wenn eine jede für sich alle reellen Werte durchläuft. Dies ist eigentlich nur eine neue Ausdrucksweise für eine in der Mathematik längst gebräuchliche Begriffsbildung; man hat ja immer die Gesamtheit aller Potenzreihen oder trigonometrischen Reihen betrachtet, bei denen die abzählbar unendlich vielen Koeffizienten eigentlich doch nichts als ebenso viele unabhängige Veränderliche sind, die freilich stets noch für die rechnerischen Anwendungen an gewisse Konvergenzbedingungen geknüpft erscheinen.

Wir wollen uns wiederum auf den „*Einheitswürfel*" *des* $\mathfrak{C}_\infty$ beschränken, d. h. auf die Gesamtheit aller an die Bedingung $0 < x_n \leqq 1$ geknüpften Punkte, und wollen nachweisen, daß man sie eineindeutig den Punkten der Einheitsstrecke $0 < z \leqq 1$ des $\mathfrak{C}_1$ zuordnen kann. (Dabei sind der Bequemlichkeit halber wieder alle Randpunkte, für die eine der Koordinaten x_n verschwindet, bzw. der Randpunkt $x = 0$ weggelassen, die andern mitgerechnet.) Wir gehen, wie oben, von der Dezimalbruchdarstellung der Koordinaten im $\mathfrak{C}_\infty$ aus:

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 = 0, & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & . \\
x_2 = 0, & b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . & . \\
x_3 = 0, & c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . & . \\
. \quad . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

wobei diese Dezimalbrüche einmal sämtlich in der *nichtabbrechenden Gestalt* geschrieben seien, und weiterhin die $a, b, c \ldots$ „*Dezimalbruchmoleküle*" im oben festgelegten Sinne bedeuten sollen, d. h. Ziffern*komplexe*, die mit einer von Null verschiedenen Ziffer endigen und vorher nur Nullen enthalten. Nun müssen wir alle diese unendlich vielen Dezimalbrüche zu einem neuen zusammenfassen, der rückwärts seine Bestandteile wieder erkennen läßt, oder, um im chemischen Bilde zu bleiben: wir haben eine so lose Legierung aller dieser Molekularaggregate zu bilden, daß wir leicht wieder aus ihr die Komponenten abtrennen können. Das gelingt nun sofort durch das schon früher (S. 275 f) angewandte „*Querlinienverfahren*"; wir schreiben in der durch die sukzessiven Linien in obigem Schema bereits angedeuteten Reihenfolge:

$$z = 0, a_1\, a_2\, b_1\, a_3\, b_2\, c_1\, a_4\, b_3\, c_2\, d_1\, a_5 \ldots,$$

womit jedem Punkt des $\mathfrak{C}_\infty$ eindeutig ein Punkt des $\mathfrak{C}_1$ zugeordnet ist. Umgekehrt erhalten wir so *jeden* Punkt z des $\mathfrak{C}_1$, denn wir können aus seiner nicht abbrechend geschriebenen Dezimalbruchdarstellung nach dem angegebenen Schema in eindeutiger Weise unendlich viele nicht abbrechende Dezimalbrüche $x_1, x_2, x_3, \ldots$ herleiten, aus denen er durch das angegebene Verfahren entsteht. *Es ist so in der Tat die eineindeutige Abbildung des Einheitswürfels im* $\mathfrak{C}_\infty$ *auf die Einheitsstrecke des* $\mathfrak{C}_1$ *gelungen.*

Unser bisheriges Resultat ist, daß es *jedenfalls zweierlei voneinander verschiedene Mächtigkeiten gibt:*

1. *die der abzählbaren Mächtigkeiten,*
2. *die aller Kontinua* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots,$ *einschließlich* $\mathfrak{C}_\infty$.

Es erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob es nicht auch noch *größere Mächtigkeiten* gibt, und da kann man nun in der Tat nicht nur durch abstrakte Betrachtungen, sondern durchaus innerhalb des Rahmens der Begriffe, die man in der Mathematik ohnehin stets gebraucht, eine weitere größere Mächtigkeit aufweisen, nämlich

3. *die aller möglichen reellen Funktionen $f(x)$ eines reellen x.*

Es genügt dabei, die Variable auf das Intervall $0 < x < 1$ zu beschränken. Zunächst wird man natürlich an die Menge der *stetigen Funktionen* $f(x)$ denken, aber es gilt gerade noch der bemerkenswerte Satz, *daß die Gesamtheit aller stetigen Funktionen noch die Mächtigkeit des Kontinuums hat, also der Gruppe 2 zugehört.* Zu einer neuen größeren Mächtigkeit kommen wir erst, wenn wir auch durchaus unstetige Funktionen der denkbar allgemeinsten Art zulassen, d. h. jeder Stelle x den Funktionswert ganz beliebig und ohne jede Rücksicht auf die Nachbarwerte zuordnen.

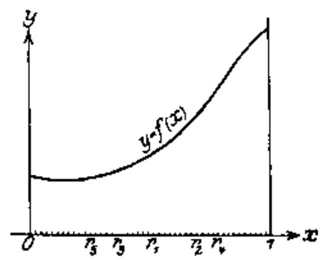


Abb. 123.

Ich will zunächst die *zweite Behauptung über die Menge der stetigen Funktionen* beweisen; das wird auf eine Wiederholung und Verschärfung von Überlegungen herauskommen, die wir schon früher (S. 222) anstellten, um die Entwickelbarkeit „willkürlicher" Funktionen nach trigonometrischen Reihen plausibel zu machen. Da hatte ich bereits bemerkt, daß

a) eine *stetige Funktion $f(x)$ bestimmt ist, wenn man nur die Werte $f(r)$ an allen rationalen Stellen r kennt.*

b) Wir wissen jetzt, daß man *alle rationalen Werte r in eine abzählbare Reihe $r_1, r_2, r_3, \ldots$* bringen kann.

c) Daher ist $f(x)$ bestimmt, wenn man die abzählbar unendlich vielen Größen $f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots$ kennt. Übrigens können diese Werte natürlich keineswegs beliebig angenommen werden, wenn wir eine eindeutige stetige Funktion erhalten wollen; *die Menge aller möglichen Wertsysteme der $f(r_1), f(r_2), \ldots$ enthält aber jedenfalls eine Teilmenge, die von gleicher Mächtigkeit mit der Menge aller stetigen Funktionen ist* (vgl. Abb. 123).

d) Nun können die Größen $f_1 = f_1(r_1), f_2 = f(r_2), \ldots$ als Koordinaten eines $\mathfrak{C}_\infty$ aufgefaßt werden, da sie ja abzählbar unendlich viele kontinuierlich veränderliche Größen darstellen; nach dem vorhin bewiesenen Satze ist also die *Gesamtheit ihrer möglichen Wertsysteme von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

e) Als Teilmenge dieser auf das Kontinuum eineindeutig abbildbaren Menge ist daher *die Menge aller stetigen Funktionen eineindeutig abbildbar auf eine Teilmenge des Kontinuums.*

f) *Wir können aber leicht einsehen, daß auch umgekehrt das gesamte Kontinuum eineindeutig abbildbar ist auf eine Teilmenge der* *stetigen Funktionen.* Dazu brauchen wir nur die durch $f(x) = k = \text{Const.}$ definierten Funktionen zu betrachten, wo k ein reeller Parameter ist; durchläuft k das Kontinuum $\mathfrak{C}_1$, so durchläuft $f(x) = k$ in der Tat eine auf $\mathfrak{C}_1$ eineindeutig abgebildete Teilmenge aller stetigen Funktionen.

g) Nun müssen wir ein wichtiges allgemeines Theorem der Mengenlehre benutzen, den sogenannten *Äquivalenzsatz,* der von *F. Bernstein*[1]) bewiesen worden ist: *Ist von zwei Mengen jede einem Teile der andern äquivalent, so sind diese beiden Mengen auch einander äquivalent.* Dieser Satz ist äußerst plausibel; der ausführliche Beweis würde uns hier zu weit führen.

h) Das Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ und die Menge der stetigen Funktionen stehen nun nach e) und f) gerade in der im Äquivalenzsatz vorausgesetzten Beziehung; *also sind sie von gleicher Mächtigkeit, und damit ist unser Satz bewiesen.*

Gehen wir nunmehr zu dem Beweise für unsere erste Behauptung über, *daß die Menge aller möglichen, wirklich „ganz willkürlichen" Funktionen eine größere Mächtigkeit besitzt als das Kontinuum;* er ist eine genaue Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens:

a) Angenommen, unsere *Behauptung sei falsch,* d. h. die Menge aller Funktionen sei eineindeutig auf das Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ abbildbar; es möge bei dieser Abbildung *jeder Stelle $x = \nu$ aus $\mathfrak{C}_1$ die Funktion $f(x,\nu)$ von x entsprechen,* so daß, während ν das Kontinuum durchläuft, $f(x,\nu)$ alle möglichen Funktionen von x darstellt. Wir wollen diese Annahme dadurch ad absurdum führen, daß wir *eine von sämtlichen Funktionen $f(x,\nu)$ sicherlich verschiedene Funktion $F(x)$* tatsächlich konstruieren.

b) Dazu bilden wir uns die *„Diagonalfunktion"* des Schemas der $f(x,\nu)$, d. i. die Funktion, die an jeder Stelle $x = x_0$ den Wert hat, welchen die dem gleichen Parameterwerte $\nu = x_0$ zugeordnete Funktion $f(x, x_0)$ an der Stelle $x = x_0$ annimmt, also den Wert $f(x_0, x_0)$. Als Funktion von x geschrieben ist das daher einfach die *Funktion $f(x,x)$.*

c) Nun bilden wir eine *Funktion $F(x)$, die an jeder Stelle x von diesem $f(x,x)$ verschieden ist:*

$$F(x) \neq f(x,x) \textit{ für jedes einzelne } x.$$

Das können wir auf äußerst mannigfaltige Weise tun, da wir ja durchaus unstetige Funktionen zulassen, deren Wert an jeder Stelle ganz willkürlich bestimmt werden kann; ein *Beispiel* wäre etwa

$$F(x) = f(x,x) + 1\,.$$

d) *Dieses $F(x)$ ist nun in der Tat von jeder einzelnen der Funktionen $f(x,\nu)$ verschieden;* denn wäre $F(x) = f(x,\nu_0)$ für irgendein bestimmtes $\nu = \nu_0$, so müßte die Übereinstimmung speziell auch an

[1]) Zuerst veröffentlicht in Borels Leçons sur la théorie des fonctions, S. 103 ff. Paris 1898.

der Stelle $x = \nu_0$ stattfinden, also $F(\nu_0) = f(\nu_0, \nu_0)$ sein. Das widerspricht aber gerade der Annahme c) über $F(x)$.

Damit ist die Annahme a) widerlegt, daß die Funktionen $f(x, \nu)$ alle Funktionen erschöpfen könnten, und *unsere Behauptung ist bewiesen.*

Es ist interessant, diesen Beweis mit dem ganz analogen für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums zu vergleichen. Wie wir dort die Dezimalbrüche alle in einem abzählbaren Schema angeordnet annahmen, so betrachten wir hier das Funktionsschema $f(x, \nu)$; dem Hervorheben der Diagonalelemente dort entspricht hier die Herstellung der Diagonalfunktion $f(x, x)$, und beides findet die gleiche Verwendung zur Bildung eines neuen in dem Schema noch nicht enthaltenen Dezimalbruches bzw. einer neuen Funktion.

Sie werden sich nun leicht vorstellen können, daß man *durch ähnliche Betrachtungen zu unendlichen Mengen immer höherer Mächtigkeit* aufsteigen kann, noch über die drei bisher gewonnenen verschiedenen Mächtigkeiten hinaus. Das Bemerkenswerteste an diesen ganzen Resultaten ist eigentlich doch das, *daß es überhaupt bleibende Unterschiede und Abstufungen in den verschiedenen unendlichen Mengen gibt,* obwohl wir sie doch mit den denkbar schärfsten Mitteln behandelten, die alle ihre Besonderheiten, wie Anordnung u. dgl., zerstörten und nur ihre Einzelelemente, ihre Atome gewissermaßen, als ganz unabhängig voneinander existierende, beliebig durcheinander zu würfelnde Dinge bestehen ließen; und wichtig ist auch, daß wir *drei dieser Abstufungen schon innerhalb der in der Mathematik auch sonst geläufigen Dinge,* der ganzen Zahlen, Kontinua und Funktionen, feststellen konnten.

Ich schließe damit den ersten Teil meiner mengentheoretischen Erörterungen, in dem ich über den Mächtigkeitsbegriff sprach. In ähnlicher konkreter Weise, nur etwas kürzer noch, will ich Ihnen jetzt einiges aus einem *weiteren Abschnitt der Mengenlehre* mitteilen.

2. Anordnung der Elemente einer Menge.

Hier tritt nun gerade das in den Vordergrund, was wir bisher prinzipiell vernachlässigten, die Frage nämlich, *wie sich die einzelnen Mengen der gleichen Mächtigkeit* durch die gegenseitigen Anordnungsbeziehungen, die ihre Elemente von Haus aus besitzen, *voneinander unterscheiden;* die allgemeinsten bisher zugelassenen eineindeutigen Abbildungen zerstörten ja alle diese Beziehungen — denken Sie nur an die Abbildung des Quadrates auf die Strecke! Ich möchte die *Bedeutung gerade dieses Abschnittes der Mengenlehre* besonders betonen; kann es doch unmöglich der Zweck der Mengenlehre sein, die in der Mathematik von altersher geläufigen Unterschiede durch Einführung neuer Begriffsbildungen von größter Allgemeinheit aufzuheben, vielmehr kann und soll sie dazu beitragen, jene Unterschiede durch Hervorhebung ihrer von allgemeinerem Standpunkt aus gesehenen Eigenschaften in ihrem tiefsten Wesen zu erfassen.

Wir wollen uns hier die *verschiedenen möglichen Anordnungen* lediglich an bestimmten, allbekannten Beispielen klar machen. Beginnen wir mit den *abzählbaren Mengen*, so kennen wir *drei grundverschieden angeordnete Erscheinungsformen*, so verschieden, daß die Übereinstimmung ihrer Mächtigkeit, wie wir sahen, ein besonderes und keineswegs selbstverständliches Theorem bildete; es sind dies

1. *die Menge der positiven Zahlen;*
2. *die Menge aller (negativen und positiven) ganzen Zahlen;*
3. *die Menge aller rationalen Zahlen und die aller algebraischen Zahlen.*

Alle diese Mengen haben in der Anordnung ihrer Elemente zunächst die eine gemeinsame Eigenschaft, der zufolge man sie als *einfach geordnet* bezeichnet: *Es ist von je zwei Elementen stets entschieden, welches dem andern vorangeht*, d. h. — algebraisch gesprochen — welches das kleinere und welches das größere ist; und *ferner geht von drei Elementen a, b, c, wenn a dem b und b dem c vorangeht, auch stets a dem c voran (wenn $a < b$ und $b < c$, so auch $a < c$).*

Doch nun die *charakteristischen Unterschiede:* Bei 1. existiert *ein erstes Element* (die Eins), das allen andern vorangeht, aber *kein letztes*, das auf alle andern folgt, bei 2. existiert *weder ein erstes noch ein letztes;* beiden gemein ist aber, *daß auf jedes Element ein bestimmtes anderes folgt, und daß ebenso jedem Element* (mit Ausnahme des ersten bei 1) *ein bestimmtes anderes vorangeht.* Im Gegensatz dazu liegen, wie wir schon früher gelegentlich sahen (S. 33), bei 3. *zwischen je zwei Elementen immer noch unendlich viele andere* (wir sagten, die Elemente liegen „*überall dicht*"), so daß es insbesondere *unter allen zwischen a, b gelegenen rationalen oder algebraischen Zahlen* (wenn man a, b selbst nicht hinzurechnet) *weder eine kleinste noch eine größte gibt.* Die Arten der Anordnung dieser drei Beispiele, ihre *Anordnungstypen* (das Cantorsche Wort *Ordnungstypen* scheint mir nicht so bezeichnend) sind also sämtlich verschieden, obwohl ihre Mächtigkeit die gleiche ist; man könnte hieran, und das tun die Mengentheoretiker tatsächlich, die *Frage nach den sämtlichen überhaupt möglichen Anordnungstypen der abzählbaren Mengen* knüpfen. —

Gehen wir nun zur Betrachtung der *Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums* über, so kennen wir eine *einfach geordnete Menge im Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ aller reellen Zahlen*, daneben haben wir aber in den zwei- und mehrdimensionalen Typen $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... *Beispiele einer anderen als der einfachen Ordnung;* beim $\mathfrak{C}_2$ beispielsweise sind nicht mehr eine, sondern zwei Relationen nötig, um die gegenseitige Lage zweier Punkte zu bestimmen.

Die Hauptsache wird nun hier sein, den *Begriff der Stetigkeit des eindimensionalen Kontinuums* zu analysieren; die Erkenntnis, daß er tatsächlich nur in einfachen Eigenschaften der dem C_1 eigentümlichen Anordnung beruht, ist die erste große Leistung der Mengenlehre für die Aufklärung der herkömmlichen mathematischen Begriffe. Man findet nämlich *alle Stetigkeitseigenschaften des gewöhnlich gebrauchten Kontinuums darin begründet, daß es eine einfach geordnete Menge mit folgenden beiden Eigenschaften ist:*

1. *Teilen wir die Menge in irgend zwei Teile A, B derart, daß jedes Element zu einem der beiden Teile gehört und alle Elemente aus A allen aus B vorangehen, so hat entweder A ein letztes oder B ein erstes Element.* Erinnern wir uns an die Dedekindsche Definition der Irrationalzahlen (vgl. S. 36ff.), so können wir das auch kurz so aussprechen, daß jeder „Schnitt" in unserer Menge tatsächlich durch ein Element von ihr hervorgerufen wird.

2. *Zwischen zwei beliebigen Elementen der Menge liegen immer noch unendlich viele andere.*

Diese zweite Eigenschaft hat das Kontinuum mit der abzählbaren Menge aller rationalen Zahlen gemein, die erste aber macht den wesentlichen Unterschied beider aus. Alle einfach geordneten Mengen, die diese beiden Eigenschaften besitzen, nennt man in der Mengenlehre *stetig*, denn man kann tatsächlich alle Sätze für sie beweisen, die für das Kontinuum vermöge seiner Stetigkeit gelten.

Ich deute gern noch an, daß man diese Stetigkeitseigenschaften noch etwas anders formulieren kann, indem man die *Cantorschen Fundamentalreihen* an die Spitze stellt. Eine Fundamentalreihe ist eine einfach geordnete abzählbare Reihe solcher Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Menge, von denen in der Menge jedes dem folgenden vorangeht oder auch jedes dem nächsten nachfolgt:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \qquad \text{oder} \qquad a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

Ein Element a der Menge heißt nun *Grenzelement der Fundamentalreihe, wenn — bei der ersten Art — zwar jedes vor a gelegene Element schließlich von Elementen der Fundamentalreihe überschritten wird, aber kein hinter a gelegenes Element;* analog ist es bei der zweiten Art. Hat nun in einer Menge jede Fundamentalreihe ein Grenzelement, so heißt sie *abgeschlossen;* ist umgekehrt jedes Element Grenzelement einer Fundamentalreihe, so heißt sie *in sich dicht.* Die Stetigkeit bei Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums besteht nun im wesentlichen in der Vereinigung dieser beiden Eigenschaften.

Ich erinnere hier beiläufig daran, daß wir bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung auch von einem andern, dem *„Veroneseschen" Kontinuum* gesprochen hatten, das aus dem gewöhnlichen durch Hinzunahme der aktual unendlich kleinen Größen entsteht; dieses bildet zwar auch eine einfach geordnete Menge, insofern über die Aufeinanderfolge je zweier Elemente bestimmt entschieden ist, aber es besitzt natürlich einen *ganz andern Anordnungstypus als das gewöhnliche* $\mathfrak{C}_1$*;* schon der Satz, daß jede Fundamentalreihe ein Grenzelement hat, besteht da nicht mehr. —

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage, *welche Abbildungen denn den Unterschied der verschieden dimensionalen Kontinua* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ *erhalten;* wir wissen ja, daß die allgemeinste eineindeutige Abbildung hier jeden Unterschied verwischt. Da besteht der wichtige Satz, *daß die Dimensionenzahl des Kontinuums invariant ist gegenüber allen eineindeutigen und stetigen Abbildungen, d. h. daß es unmöglich ist, ein* $\mathfrak{C}_m$ *und* $\mathfrak{C}_n$ *für* $m \neq n$ *eineindeutig und stetig aufeinander abzubilden.* Man würde geneigt sein, diesen Satz ohne weiteres als selbstverständlich hinzunehmen, aber wir müssen uns erinnern, daß die naive Anschauung auch die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung des $\mathfrak{C}_2$ auf das $\mathfrak{C}_1$ überhaupt auszuschließen schien und sehen uns so zur Vorsicht gegenüber ihren Aussagen veranlaßt.

Ich will hier nur den einfachsten Fall[1]) näher behandeln, wo es sich um die Beziehung des ein- und zweidimensionalen Kontinuums handelt, und werde dann nur kurz andeuten, welche Schwierigkeiten der Ausdehnung dieses Beweises auf den allgemeinsten Fall entgegenstehen. *Wir beweisen also, daß eine eineindeutige, stetige Beziehung zwischen dem* $\mathfrak{C}_1$ *und dem* $\mathfrak{C}_2$ *nicht möglich ist;* dabei ist jedes Wort wesentlich: daß wir die Stetigkeit nicht weglassen dürfen, wissen wir ja, aber daß auch die Eineindeutigkeit nicht wegbleiben darf, lehrt das Beispiel der manchem von Ihnen gewiß bekannten „Peanokurve".

Zunächst ein *Hilfssatz:* Zwei eindimensionale Kontinua $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1'$ mögen stetig aufeinander abgebildet sein, derart, daß *jedem Elemente von* $\mathfrak{C}_1'$ *sicher ein und nur ein Element von* $\mathfrak{C}_1$ und *jedem Elemente von* $\mathfrak{C}_1$ *höchstens ein Element von* $\mathfrak{C}_1'$ entspricht; *sind dann* a, b *zwei Elemente auf* $\mathfrak{C}_1$, *denen in* $\mathfrak{C}_1'$ *tatsächlich zwei Elemente* a', b' *bzw. entsprechen, so entspricht auch jedem zwischen* a, b *gelegenen Elemente* c *von* $\mathfrak{C}_1$ *wirklich ein Element* c' *von* $\mathfrak{C}_1'$, *das zwischen* a', b' *liegt* (vgl. Abb. 124). Diese Behauptung entspricht dem bekannten Satze, daß eine stetige Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = a', b'$ zwei Werte a, b annimmt, auch jeden zwischen a und b gelegenen Wert c an einer Stelle c' zwischen a' und b' annimmt; sie kann tatsächlich in genauer Verallgemeinerung dieses Satzes allein aus dem oben definierten Stetigkeitsbegriff bewiesen werden, wenn man auch noch die Stetigkeit einer Abbildung stetiger Mengen durchaus analog zur bekannten Defi-

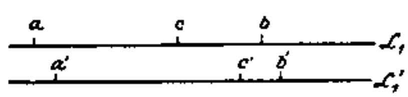


Abb. 124.

[1]) Einen Beweis für den allgemeinen Fall hat *L. E. J. Brouwer*, 1911 im Bd. 70, S. 161 der Mathematischen Annalen gegeben.

nition der Stetigkeit einer Funktion erklärt, was allein auf Grund des Anordnungsbegriffes gelingt. Es ist hier nicht der Ort, diese Andeutungen weiter auszuführen.

Nun führen wir *unsern Beweis so:* Es seien die eindimensionale Strecke $\mathfrak{C}_1$ und das Quadrat $\mathfrak{C}_2$ eineindeutig und stetig aufeinander bezogen (vgl. Abb. 125). Zwei Elementen a, b auf $\mathfrak{C}_1$ mögen dabei die Elemente A, B von $\mathfrak{C}_2$ entsprechen. Wir können nun diese A, B innerhalb der Menge $\mathfrak{C}_2$ durch zwei voneinander verschiedene Wege verbinden, z. B. die gezeichneten Treppenwege $\mathfrak{C}_1'$, $\overline{\mathfrak{C}}_1'$. Dabei brauchen wir keinerlei spezielle Eigenschaften des $\mathfrak{C}_2$, wie eine Koordinatenbestimmung u. dgl. vorauszusetzen, sondern haben lediglich den Begriff der doppelten Ordnung des $\mathfrak{C}_2$ zu benutzen. Dann wird aber jedenfalls sowohl $\mathfrak{C}_1'$ als $\overline{\mathfrak{C}}_1'$ ein einfach geordnetes eindimensionales Kontinuum genau wie $\mathfrak{C}_1$, und infolge der vorausgesetzten eineindeutigen stetigen Beziehung zwischen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ muß jedem Elemente von $\mathfrak{C}_1'$ oder $\overline{\mathfrak{C}}_1'$ genau ein Punkt auf $\mathfrak{C}_1$, jedem Elemente von $\mathfrak{C}_1$ aber höchstens einer auf $\mathfrak{C}_1'$ oder $\overline{\mathfrak{C}}_1'$ entsprechen. Also sind gerade die Voraussetzungen unseres Lemma gegeben, und es folgt, *daß jedem Punkte c in $\mathfrak{C}_1$ zwischen a und b sowohl ein Punkt c' auf $\mathfrak{C}_1'$, als auch ein Punkt $\bar{c}'$ auf $\overline{\mathfrak{C}}_1'$ entsprechen muß* — das aber widerspricht der vorausgesetzten Eineindeutigkeit der zwischen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestehenden Abbildung. *Also kann diese Abbildung nicht möglich sein, und der Beweis ist geführt.*

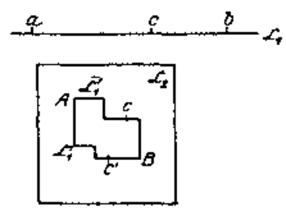


Abb. 125.

Will man nun diesen Gedankengang auf zwei beliebige Kontinua $\mathfrak{C}_m$, $\mathfrak{C}_n$ übertragen, so muß man vorher wissen, wie denn die einer $\mathfrak{C}_m$ eingelagerten Kontinua von $1, 2, 3, \ldots, m-1$ Dimensionen allgemeinster Natur beschaffen sein können; sowie m und $n \geqq 2$ sind, kommt man da nicht mehr mit der Verwendung des Begriffes „zwischen" aus, wie soeben im einfachsten Falle. Vielmehr wird man auf äußerst schwierige Untersuchungen geführt, die noch als erste Fälle die schon sehr schweren, erst in neuester Zeit etwas geklärten, *für die Geometrie fundamentalen Fragen nach den allgemeinsten stetigen eindimensionalen Punktmengen in der Ebene* umfassen — insbesondere die Frage, wann man eine solche Punktmenge als *Kurve* ansprechen kann. —

Ich schließe damit die speziellen Erörterungen über Mengenlehre, um noch *einige allgemeine Bemerkungen* anzufügen. Zunächst ein Wort darüber, welche allgemeinen Ideen sich Cantor über die *Stellung der Mengenlehre zur Geometrie und Analysis* gebildet hat; durch sie erscheint die Bedeutung der Mengenlehre in besonderem Lichte. Durch die ganze Geschichte der Mathematik wie auch durch alle philosophischen Spekulationen über ihr Wesen zieht sich bekanntlich der Unterschied zwischen der *diskreten Größe der Arithmetik* und der *kontinuierlichen, stetigen der*

Geometrie. Neuerdings ist die diskrete Größe als am einfachsten begreiflich besonders in den Vordergrund gerückt worden, indem man die ganzen natürlichen Zahlen als gegebene einfachste Begriffe ansah, von ihnen aus in bekannter Weise die rationalen und irrationalen Zahlen herleitete und so schließlich den ganzen Apparat zur Beherrschung der Geometrie durch die Analysis, die analytische Geometrie, gewann; man kann die Tendenz dieser modernen Entwicklung als die einer *Arithmetisierung der Geometrie* bezeichnen: *die geometrische Stetigkeitsidee wird auf die Idee der ganzen Zahlen zurückgeführt.* So haben wir es auch in dieser Vorlesung in der Hauptsache gehalten.

Dieser einseitigen Bevorzugung der ganzen Zahlen gegenüber will nun Cantor — wie er mir selbst gelegentlich bei der Naturforscherversammlung in Cassel 1903 sagte — geradezu die *„wahre Fusion von Arithmetik und Geometrie" in der Mengenlehre* erreichen, d. h. die Lehre von den ganzen Zahlen einerseits ebenso wie die Theorie der verschiedenen Punktkontinua andererseits und noch vieles andere zu nebeneinander stehenden gleichberechtigten Kapiteln einer allgemeinen Lehre von den Mengen machen. —

Noch einiges Allgemeine über die *Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie* will ich hier anfügen. Wir hatten in der Mengenlehre betrachtet:

1. Die *Mächtigkeit der Mengen* als das, was bei jeder eineindeutigen Abbildung erhalten bleibt.

2. Die *Anordnungstypen der Mengen,* die die Ordnungsbeziehungen der Elemente berücksichtigen. Hier konnten wir den *Stetigkeitsbegriff,* die verschiedenen mehrfachen Anordnungen oder *verschiedendimensionalen Kontinua* u. dgl. charakterisieren, und so gehören hier schließlich überhaupt die *Invarianten stetiger Abbildungen* hin. Auf die Geometrie übertragen gibt das aber die seit Riemann *Analysis situs* genannte Disziplin, jenes abstrakteste Kapitel der Geometrie, das nur die bei den allgemeinsten stetigen eineindeutigen Abbildungen invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde behandelt. Übrigens hat schon Riemann das Wort *Mannigfaltigkeit* in einem sehr allgemeinen Sinne gebraucht; dies Wort benutzt auch Cantor zuerst und ersetzte es erst später durch das kürzere und daher bequemere Wort „Menge", das ja auf denselben Sprachstamm zurückgeht. Heute ist das Wort „Menge" so eingebürgert, daß jeder für unmodern gilt, der noch „Mannigfaltigkeit" sagt.

3. Wollen wir nun weiter zur *konkreten Geometrie* übergehen, so kommen Unterschiede wie zwischen *metrischer und projektiver Geometrie* herein. Hier genügt es nicht, zu wissen, daß etwa die Gerade eindimensional, die Ebene zweidimensional ist, sondern man wird *Figuren konstruieren oder vergleichen* wollen, wobei man etwa über einen festen *Maßstab* verfügen oder doch wenigstens *Gerade in der Ebene, Ebenen*

im Raume legen will. Für jedes dieser konkreten Gebiete wird natürlich eine *spezielle Axiomatik zu den allgemeinen Anordnungseigenschaften hinzutreten* müssen. Das bedeutet also eine weitere Entwicklung der Lehre von den einfach, zweifach, . . . geordneten kontinuierlichen Mengen.

Zum Schluß dieser Betrachtungen über Mengenlehre haben wir nun wieder die Frage zu stellen, mit der wir unser ganzes Kolleg begleiteten: *Was kann man davon auf der Schule gebrauchen*? Wir müssen natürlich von unserem mathematisch-pädagogischen Standpunkt dagegen Einspruch erheben, daß man dem Schüler mit derart abstrakten und schwierigen Dingen zu früh kommt. Ich möchte, um meine Ansicht über diesen Punkt zu präzisieren, *das biogenetische Grundgesetz* heranziehen, nach welchem das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft; solche Gedanken sind ja heute nachgerade Bestandteile der allgemeinen Bildung eines jeden geworden. Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht, wie jeder Unterricht überhaupt, wenigstens im allgemeinen befolgen: *Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat.* Es ist nötig, diese Forderung immer wieder zu stellen, denn immer wieder gibt es Leute, die nach Art der mittelalterlichen Scholastiker ihren Unterricht mit den allgemeinsten Ideen beginnen und diese Methode als die „allein wissenschaftliche" rechtfertigen wollen. Und doch ist diese Begründung nicht einmal wahr: *Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber, ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen.*

Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der *Mangel an historischen Kenntnissen*, der sich so vielfach geltend macht. Um ihn zu bekämpfen, habe ich besonders gern zahlreiche *historische Momente* in meine Darstellung verflochten. Lernen Sie daraus, wie langsam alle mathematischen Ideen erst entstanden sind, wie sie fast stets in mehr divinatorischer Gestalt auftauchten und erst in langer Entwicklung die starre und auskristallisierte Form der systematischen Darstellung annahmen! Möge diese Erkenntnis einst — mit diesem Wunsche möchte ich meine Vorlesung schließen — nachhaltigen Einfluß auf die Gestaltung Ihres eigenen Unterrichts an der Schule gewinnen!

Zusatz 1.

Über die Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts.

Mehr als zwei Jahrzehnte sind vergangen, seit das vorliegende Werk seine im wesentlichen endgültige Gestalt erhielt. Die pädagogischen Ideen, für die es Partei ergreift, haben im Verlauf dieser Zeit die Entstehung einer umfangreichen Literatur über Organisation des Schulwesens und Methodik des mathematischen Unterrichts veranlaßt und auf den öffentlichen Unterricht in vieler Hinsicht neugestaltend eingewirkt. Man faßt die auf die praktische Verwirklichung jener Ideen hinzielenden Bestrebungen unter der Bezeichnung „mathematische Unterrichtsreform" zusammen. Die Vorgeschichte dieser Reformbewegung, ihr allmähliches Ingangkommen nach vereinzelten Anregungen, ihre schließliche organisatorische Zusammenfassung und die dann kräftiger einsetzende Entwicklung findet man unter Berücksichtigung etwa noch des Jahres 1910 ausführlich in der Imuk-Abhandlung[1]) von *R. Schimmack* dargestellt: „Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland"[2]). Eine zweite Imuk-Abhandlung von *H. Weinreich* gibt einen Überblick über die Fortschritte während der Jahre 1911—1913[3]); über den Verlauf während der späteren Jahre fehlen noch entsprechende Darstellungen. Es sollen hier in Kürze die Hauptlinien der Entwicklung der Reformbewegung bis heute dargelegt werden.

In der Einleitung der gegenwärtigen Vorlesungen wurde bereits auf die Unterrichtskommission hingewiesen, welche die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 1904 auf ihrer Tagung in Breslau zusammenstellte. Sie wird kurz die „*Breslauer Kommission*" genannt. Ihr Zustandekommen bedeutete die Vereinigung von zwei mächtigen Strömungen, die beide eine Reform des höheren Unterrichts zum Ziel hatten. Die eine ging von mathematischer, die andere von biologischer

---

[1]) „Imuk" ist die Abkürzung für Internationale mathematische Unterrichtskommission. Vgl. S. 293.

[2]) Heft 1 des III. Bandes der Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission. Leipzig 1911.

[3]) Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform seit 1910. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale mathematische Unterrichts-Kommission, Heft 10. Leipzig 1915.

Seite aus. Die mathematische wurde von dem *Verein deutscher Ingenieure*, dem *Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* und den unter *F. Kleins* Führung stehenden *Hochschulkreisen* getragen. Diese drei Gruppen arbeiteten bis etwa 1895 getrennt, von da ab aber immer mehr aufeinander Bezug nehmend und sich gegenseitig unterstützend an einer Neugestaltung des mathematischen Unterrichts in dem Sinne, daß in ihm die Anwendungen und die dem großen Fortschritt der Mathematik im 18. und 19. Jahrhundert zugrunde liegenden Ideen zu einer ihrer kulturellen Bedeutung entsprechenden Geltung kommen sollten. Die biologische Bewegung setzte mit großem Nachdruck im Jahre 1901 auf der Tagung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg ein, nachdem 21 Jahre lang der biologische Unterricht für die Oberstufe der höheren Schulen Preußens verboten war. Damals faßten die Biologen ihre Forderungen in einer Reihe von Thesen zusammen, die auch während der folgenden Versammlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher den Gegenstand lebhafter Erörterungen bildeten.

Auf der 1903 in Kassel abgehaltenen Tagung machte nun *F. Klein* den Vorschlag, die biologischen und mathematischen Bestrebungen zum Gegenstand einer zusammenfassenden Beratung zu machen. Dies geschah 1904 in Breslau und führte zur Gründung der Breslauer Kommission. Ihr wurde die Aufgabe gestellt, für die Neugestaltung des Unterrichts in der Mathematik, den exakten und den beschreibenden Naturwissenschaften praktisch durchführbare und hinreichend ins einzelne gehende Vorschläge auszuarbeiten. Dabei wurde ausdrücklich verlangt, daß die vielfach einander widerstreitenden Interessen der einzelnen Fachvertreter innerhalb der Kommission zum Ausgleich gebracht würden. Einer späteren Versammlung sollten, wie es hieß, „abgeglichene Vorschläge zu möglichst allseitiger Annahme vorgelegt werden".

Der intensiv arbeitenden Kommission gelang es, den auf sie gesetzten Erwartungen weitgehend und rasch gerecht zu werden. Der Naturforscherversammlung in Meran (1905) unterbreitete sie, wie wir schon wissen, Lehrplanvorschläge für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. 1906 in Stuttgart folgten solche für die sechsklassigen Realschulen und die Reformschulen, 1907 endlich konnte in Dresden über das Kernproblem jeder Unterrichtsreform, die Frage der Lehrerausbildung, berichtet werden. Freilich beschränkte die Kommission in dieser Frage, wie überhaupt auch sonst, ihre Vorschläge auf das höhere Schulwesen. Besonders die *Meraner Lehrpläne* nehmen in der Reformbewegung eine bedeutsame Stellung ein. Sie sind schon lange Zeit die Norm, nach welcher das Vorankommen der Reformbewegungen bei allen im höheren Unterrichtswesen eintretenden Änderungen beurteilt wird. Ihre Hauptforderungen sind, wie schon gelegentlich ausgeführt wurde, psychologisch richtige Unterrichtsweise, Durchdringung des gesamten Lehrstoffes mit dem geometrisch gefaßten Funktionsbegriff und Berücksichtigung der Anwendungen. In organisatorischer Hinsicht verlangen sie für die Gymnasien durch alle Klassen hindurch 4 Mathematikstunden. Das bedeutete für die preußischen Gymnasien eine Mehrforderung von zwei Stunden, die den Tertien zugute kommen sollten. Für diese Klassen war seit 1892 die Zahl der Mathematikstunden zugunsten des Griechischen von 4 auf 3 herabgesetzt worden. Die Beseitigung dieser Einschnürung des Mathematikunterrichts in den Tertien, in denen gerade der Geometrie- und Arithmetikunterricht in hinreichender Breite gegeben werden muß, wenn er nicht zu schwer werden und viele Schüler dann für immer der Mathematik entfremden soll, ist von jeher ein wichtiges Ziel der Reformbewegung. In vieler Hinsicht können und wollen die Meraner Lehrpläne jedoch bloß als vorläufige und ergänzungsbedürftige Vorschläge angesehen werden. Einen voll ausgeführten Lehrplan enthalten sie nur für das Gymnasium. Über das Lehrziel der Oberrealschulen, deren Entwicklung damals gerade noch im vollen Gange war, konnte die Kommission nicht zu einer einheitlichen Auffassung gelangen. Für das Realgymnasium schlug man, was die Mathematik angeht, Gleichstellung mit dem Gymnasium und damit eine Einschränkung seines mathematischen Unterrichts als vorläufige Maßnahme vor, um für die Naturwissenschaften breiteren Raum zu gewinnen. Auch hinsichtlich der Frage, ob die Infinitesimalrechnung in den Lehrstoff der Gymnasien einzubeziehen sei, konnte eine Übereinstimmung nicht erzielt werden. Man ließ diese Frage schließlich offen, indem man sich auf die in gewissem Grade beliebig auslegbare Formulierung einigte, daß der Unterricht „bis zur Schwelle der Infinitesimalrechnung vordringen solle".

Mit der Ausarbeitung der Dresdner Vorschläge, die übrigens bereits auf S. 2 angeführt wurden, durfte die Breslauer Kommission ihre Aufgabe im wesentlichen als erledigt ansehen und daher ihre Auflösung beantragen. Ein vollständiger Bericht über ihre Tätigkeit und eine Zusammenstellung ihrer Gutachten hat, wie ebenfalls schon auf S. 2 erwähnt wurde, ihr Vorsitzender *A. Gutzmer* herausgegeben. Ihrer Arbeit war es zu danken, daß eine große Anzahl von Verbänden, die an der Vervollkommnung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts interessiert waren, für ein gemeinschaftliches Vorgehen gewonnen wurden. An Stelle der Breslauer Kommission wurde auf viel breiterer Grundlage der *Deutsche Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* gebildet. Er sollte einzelne Unterrichtsfragen, deren Behandlung noch ausstand, theoretisch klären, vor allem aber die Reformvorschläge im öffentlichen Schulwesen zur tatsächlichen Geltung bringen. Hinter diesem neuen, kurz *Damnu* genannten Ausschuß, stehen 16 Verbände, mathematische, physikalische, zoologische, botanische, chemische, medizinische und technische

Vereinigungen. Seine konstituierende Sitzung hatte der Damnu 1908 in Köln. Er beschränkt seine Tätigkeit nicht auf die höheren Schulen, sondern widmet sich ganz besonders auch dem ausgedehnten und wichtigen Gebiet des Volksschulwesens. Von Anfang an richtet er sein Augenmerk vorzüglich auf die Frage der Heranbildung geeigneter Lehrkräfte. Über seine Tätigkeit während der Jahre 1908—1913 ist ein umfangreicher, wieder von *A. Gutzmer* redigierter Bericht erschienen: „Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908 bis 1913", herausgegeben von *A. Gutzmer*, Leipzig 1914. Im übrigen findet man regelmäßige Mitteilungen über den Damnu in den vom *Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* herausgegebenen *Unterrichtsblättern*, in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* und den *Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung*. 1922 trat der Damnu mit einer bedeutungsvollen Veröffentlichung hervor. Es sind das die im Verlag von Teubner erschienenen „*Neuen Lehrpläne*" für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten, in denen wir eine aus den obengenannten und anderen, in der Schrift angeführten Gründen notwendig gewordene Revision und Ergänzung der Meraner Vorschläge vor uns haben. Dem Damnu parallel steht eine weitere Organisation, welche unter der Führung des *Vereins deutscher Ingenieure* ebenfalls um 1908 zustande kam und hauptsächlich das technische Schulwesen zum Gegenstand ihrer Tätigkeit machte. Es ist dies der *Deutsche Ausschuß für technisches Schulwesen* (*Datsch*). Zwischen beiden Ausschüssen herrschte das beste Einvernehmen; ihr einheitliches Vorgehen war schon dadurch gewährleistet, daß ein Teil der Mitglieder des einen auch dem anderen angehörte.

Was den mathematischen Unterricht angeht, ist das Jahr 1908 noch in anderer Hinsicht von außerordentlicher Bedeutung. Es brachte den Beschluß des internationalen Mathematikerkongresses zu Rom, eine *Internationale mathematische Unterrichtskommission* (*Imuk*) zu gründen. Diesem Beschluß, dessen Anregung dem amerikanischen Mathematiker *D. E. Smith* zu danken ist, liegt die Tatsache zugrunde, daß zu jener Zeit bereits in allen Kulturländern, außer in Deutschland namentlich auch in Frankreich, England, Italien und den Vereinigten Staaten von Nordamerika, Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts im Gange waren. Eine vergleichende Betrachtung all dieser Bestrebungen, sowie ein systematisches Studium des tatsächlichen Zustandes, in welchem der mathematische Unterricht der einzelnen Länder sich befand, mußte deren Unterrichtswesen kräftige und wertvolle Anregungen geben. Ein aus drei Mitgliedern bestehender Hauptausschuß, zu dessen Vorsitzenden *F. Klein* gewählt wurde und dem *G. Greenhill*-London als zweiter Vorsitzender, *H. Fehr*-Genf als Generalsekretär angehörten, wurde mit der Bildung der Kommission und der Organisierung ihrer Arbeit beauftragt. Für *F. Kleins* Wahl waren seine mit dem Jahr 1893 für die Reform des mathematischen Unterrichts einsetzende Tätigkeit und seine in engem Zusammenhang mit dieser stehenden zahlreichen Veröffentlichungen, insbesondere die in dem gegenwärtigen Werke auf S. 3 als „Klein-Schimmack I" zitierte, ausschlaggebend. Ursprünglich sollten nur Unterrichtsfragen, welche das höhere Schulwesen betreffen, das Arbeitsfeld der Imuk ausmachen. Da aber die Organisation des öffentlichen Unterrichts von Land zu Land die größten Unterschiede aufweist, stellte es sich bald als notwendig heraus, den mathematischen Unterricht auch an allen übrigen Schultypen zu studieren. Es mußte das Gesamtgebiet des mathematischen Unterrichts vom Anfangsunterricht im Kindergarten bis zum Hochschulunterricht bearbeitet werden. Die Berichte, um welche der Hauptausschuß die Delegierten der einzelnen Länder zunächst bat, hatten die Beantwortung der folgenden Fragen zum Ziel:

1. Welches ist der gegenwärtige Zustand des mathematischen Unterrichts hinsichtlich seiner Organisation, seines Zieles und seiner Methode?
2. Welche modernen Tendenzen machen sich in ihm geltend?

Um diese Fragen zu bearbeiten, wurde den Imuk-Mitgliedern anheimgestellt, in ihrem Lande Unterkommissionen zu gründen. Dem unter *F. Kleins* Führung arbeitenden deutschen Unterausschuß gelang es durch achtjährige angestrengteste Arbeit, in einer langen Reihe von Abhandlungen für das deutsche Schulwesen eine Gesamtübersicht über die Organisation und die Methode des mathematischen Unterrichts zu geben, wie es niemals zuvor und bis heute nicht für andere Unterrichtsfächer geschah. Diese Abhandlungen sind in 5 Bände eingeordnet, die ihrerseits in 9 umfangreiche Teilbände zerfallen, und werden bezeichnet als „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission". Ein weiterer, von *W. Lietzmann* herausgegebener Band trägt den Titel „Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission". In letzterem findet man u. a. eine Reihe von Rundschreiben des Hauptausschusses abgedruckt, außerdem ausführliche Berichte über die Kongresse, welche die Imuk 1910 in Brüssel, 1911 in Mailand, 1912 in Cambridge, 1914 in Paris veranstaltete, und zwei Einzelabhandlungen, auf die wir noch zurückkommen werden. Die ersten drei Bände der Abhandlungen des deutschen Unterausschusses geben einen Überblick über den mathematischen Unterricht der höheren Schulen Deutschlands und die wissenschaftliche Ausbildung ihrer Lehrer. Der erste Band ist Norddeutschland, der zweite Süddeutschland gewidmet. Im dritten Band werden eine Reihe von Einzelfragen studiert. Man findet dort u. a. die bereits auf S. 204 angeführte Schrift *H. E. Timerdings* über die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern, ferner Abhandlungen über den Unterricht im Linearzeichnen sowie über die Stellung der Himmelskunde, des kaufmännischen Rechnens, der Geschichte der Mathematik und der philosophischen Propädeutik im mathematischen Unterricht. Die psychologischen Grundlagen des mathematischen Unterrichts werden in einer Monographie von *D. Katz* behandelt, die den Titel „Psychologie und mathematischer Unterricht" trägt. In der letzten Hälfte des dritten Bandes der Abhandlungen stellt *W. Lorey* die Geschichte des mathematischen Universitätsunterrichtes seit Beginn des 19. Jahrhunderts dar. Der vierte Band berichtet über die technischen Schulen, der fünfte über den mathematischen Elementarunterricht an den Volksschulen und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten. Ein ausführliches Gesamtregister der Schriften des deutschen Unterausschusses wurde von *E. und K. Körner* fertiggestellt und ist in dem Bande „Berichte und Mitteilungen" zu finden.

Außer der Darstellung des deutschen Schulwesens nahm der deutsche Unterausschuß noch eine zweite umfassende Aufgabe in Angriff. Es zeigte sich bald, daß die auswärtigen Imuk-Abhandlungen wegen der großen Verwickeltheit und Fremdartigkeit des Schulwesens, über welches sie berichteten, uns Deutsche einen klaren Einblick in jenes oft nicht gewinnen ließen. Sie mußten, um für uns anregend zu werden, eine Ergänzung durch Berichte erfahren, welche das fremde Schulwesen unter dem Gesichtswinkel deutscher Verhältnisse betrachten. Für diese Darstellungen waren Studienreisen ins Ausland erforderlich. Leider haben des Krieges wegen bis jetzt nur zwei solcher Berichte erscheinen können, einer von *A. Rohrberg* über Dänemark und ein sehr eingehender, 207 Seiten umfassender von *G. Wolff* über England[1]). Der Krieg setzte dieser Arbeit ein Ende. Ihm, der die meisten internationalen Organisationen, soweit sie wissenschaftlichen und kulturellen Zwecken dienten, aufs schwerste erschütterte, schien auch die Imuk schließlich zum Opfer fallen zu sollen. Im Jahre 1920 erklärte der Hauptausschuß die Kommission für aufgelöst. Den nationalen Unterkommissionen blieb es natürlich überlassen, bestehen zu bleiben und sich auch weiterhin ihren Aufgaben zu widmen. *H. Fehr* stellte die von ihm geleitete Zeitschrift „*L'Enseignement mathématique*", welche bis dahin das offizielle Imuk-Organ war, für die Arbeiten der Unterkommissionen auch in der Folge zur Verfügung. Er selbst veröffentlichte 1920 in ihr einen Schlußbericht über die Imuk und eine vollständige Liste der von dieser und den Unterkommissionen verfaßten Schriften. Aus diesem Bericht er-

[1]) *Rohrberg, A.:* Der mathematische Unterricht in Dänemark. Leipzig 1915. — *Wolff, G.:* Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen Englands. Beide Abhandlungen sind im Band „Mitteilungen und Berichte" erschienen, aber auch einzeln erhältlich. Leipzig 1915.

fahren wir, daß bis dahin insgesamt 294 Abhandlungen zustande gekommen waren. Davon entfielen 53 auf die deutsche Unterkommission.

Erfreulicherweise wurde 1928 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Bologna der Beschluß von 1920 rückgängig gemacht und der Fortbestand der Imuk beschlossen. Auf der Imuk-Tagung, die 1932 im Rahmen des Internationalen Mathematikerkongresses in Zürich stattfand, erstattete *G. Loria* (Italien) einen Gesamtbericht über die Ausbildung der Mathematiklehrer in 14 verschiedenen Ländern. Dem Bericht, der im „Enseignement mathématique" erscheinen wird, lagen die Auskünfte auf einen Fragebogen zugrunde, der bereits 1914 von *F. Klein*, *H. Fehr* und *G. Loria* ausgearbeitet worden war. Für die nächste Tagung wurde als Thema der Verhandlung die Entwicklung gewählt, die der mathematische Unterricht in der Nachkriegszeit in den einzelnen Ländern durchgemacht hat.

Von den deutschen Ländern begannen Württemberg, Baden und Bayern schon vor dem Kriege mit der Reform ihres mathematischen Unterrichts, Preußen folgte 1923 bei der Regelung seines Mädchenschulwesens und 1925 im Zusammenhang mit einer tiefgreifenden Reform seines Knabenschulwesens, die ihrerseits auf fast alle deutschen Länder zurückwirkte. Zusammenfassend kann man sagen, daß das, was die Meraner Vorschläge an methodischen und stofflichen Forderungen enthalten, heute für den mathematischen Unterricht aller höheren Schulen Deutschlands verbindlich ist. Gewiß ein schöner Erfolg der Kleinschen Bestrebungen. Der Kampf um die Geltung der Mathematik im Ganzen des Erziehungswesens ist jedoch damit nicht beendet. Im Gegenteil, er ist notwendiger denn je. Von starken Kräften getragene, der Mathematik feindliche Erziehungstendenzen sind in von Jahr zu Jahr steigendem Maße am Werke und bestätigen die Auffassung Kleins, daß es der deutschen Gesellschaft versagt zu sein scheint, eine einheitliche Kulturstimmung herauszubilden, die das exakt wissenschaftliche Element als einen eigenartigen und selbstverständlichen Bestandteil mit umfaßt. Immer dringlicher wird es, daß die Mathematiker sich der Aufgabe widmen, die Klein in einem Vortrag über die Ausbildung von Lehramtskandidaten[1]) in folgende Worte faßte: „Wir sollen daran arbeiten, *zwischen der theoretischen Wissenschaft und allem, was das moderne Leben bewegt, eine wirkliche positive Beziehung herzustellen.* In dieser Hinsicht nun scheint mir, fällt dem Mathematiker eine besonders wichtige Aufgabe zu. Unsere Wissenschaft ist, im Gegensatze zu anderen, nicht auf eine einzelne Periode der menschlichen Geschichte gegründet, sondern

[1]) Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten. Vortrag, gehalten im Hannoverschen mathematischen Verein am 20. April 1896. Abgedruckt in F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. (Teubner, Leipzig 1900.) S. 222—228.

sie hat die Entwicklung der Kultur auf allen ihren Stufen begleitet. Die Mathematik ist mit der griechischen Bildung ebenso verwachsen wie mit den modernsten Aufgaben des Ingenieurbetriebes. Sie reicht nicht nur den vorwärtsschreitenden Naturwissenschaften die Hand, sondern sie partizipiert gleichzeitig an den abstrakten Untersuchungen der Logiker und Philosophen. Unsere besondere Aufgabe dürfte hiernach sein, in unserer Umgebung die *Überzeugung von der Solidarität aller höheren geistigen Interessen* zur Geltung zu bringen." (S.)

Zusatz 2.

Ergänzungen zur mathematischen und didaktischen Literatur.

Wir wollen jetzt einen gedrängten Überblick über die im Text noch nicht erwähnte Literatur geben, welcher den pädagogischen Tendenzen des vorliegenden Buches entspricht. Vollständigkeit ist dabei in keiner Hinsicht beabsichtigt, vielmehr soll vorzüglich auf solche Bücher hingewiesen werden, die ihrerseits dem Leser in größerem Umfange Literatur erschließen.

Das umfangreichste und am weitesten ausholende Werk, welches etwa bis zum Jahre 1800 die *geschichtliche* Entwicklung der mathematischen Wissenschaft in ihrer ganzen Ausdehnung zur Darstellung bringt, ist die vier Bände umfassende „Geschichte der Mathematik"[1]) von *Moritz Cantor*. Die fortschreitende historische Forschung, vor allen Dingen die kritischen Untersuchungen des schwedischen Historikers und Mathematikers *G. Eneström*, deren Ergebnisse man in der Zeitschrift „Bibliotheca Mathematica" niedergelegt findet, hat freilich gezeigt, daß die Cantorschen Ausführungen in vielen Einzelheiten richtggestellt werden müssen. Die „Bibliotheca Mathematica" war eine mathematisch-historische Zeitschrift. Sie wurde von G. Eneström 1884 gegründet und ist bis zu ihrem durch den Krieg bedingten Ende von ihm geleitet worden[2]). Volle Berücksichtigung hat die kritische Arbeit Eneströms in der zweiten Auflage der „Geschichte der Elementarmathematik" von *J. Tropfke*[3]) gefunden, auf die ja im Text oft Bezug genommen wurde. Unter Elementarmathematik wird bei Tropfke allerdings nur der althergebrachte mathematische Lehrstoff der höheren Schulen verstanden; auf die historische Entwicklung der Ideen, mit welchen die Reformbewegung diesen Lehrstoff durchdringt, wird bei ihm nicht eingegangen. Mehr den großen Zug der Entwicklung und den Zusammenhang der Mathematik mit der allgemeinen Kultur betont *Max Simon* in seiner „Geschichte der Mathematik des Altertums in Verbindung mit antiker

[1]) Bd. I, 3. Aufl., 1907; Bd. II, 2. Aufl., neuer Abdruck 1913; Bd. III, 2. Aufl., 1901; Bd. IV, anastatischer Neudruck 1924. Leipzig: Teubner.

[2]) Seit 1929 erscheint im Verlage Springer eine neue Zeitschrift, die sich die Pflege der Geschichte der Mathematik zur Aufgabe stellt, die von *O. Neugebauer*, *J. Stenzel* und *O. Toeplitz* herausgegebenen „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik".

[3]) Dritte Aufl. seit 1930 im Erscheinen begriffen.

Kulturgeschichte" (Berlin: B. Cassirer 1909). Als eine der zuverlässigsten Darstellungen dieser Art ist die in dem Sammelwerk „Kultur der Gegenwart" (Leipzig: Teubner) 1912 erschienene Geschichte der „Mathematik im Altertum und im Mittelalter" von *H. G. Zeuthen* anzusehen, von welchem außerdem noch über denselben Gegenstand zahlreiche Monographien sowie selbständige Publikationen vorliegen. Für das 16. bis 18. Jahrhundert sollte in demselben Sammelwerk *P. Stäckel* die Geschichte der Mathematik schreiben. Dieser starb jedoch leider zu früh. Ein Ersatz für ihn ließ sich nicht finden. Die entsprechende Darstellung für das 19. Jahrhundert bereitete *F. Klein* in Vorlesungen vor, die er während der Kriegsjahre in engem Kreis hielt. Diese Vorlesungen wurden von *R. Courant, O. Neugebauer* und *St. Cohn-Vossen* nach Kleins Tode herausgegeben[1]). — Mehr mathematisch-philosophischen Interessen suchen die Schriften von *A. Voss*: „Über das Wesen der Mathematik" (3. Auflage, Leipzig 1923), und „Über die mathematische Erkenntnis" (Leipzig 1914) gerecht zu werden. Die letztere ist ebenfalls in der „Kultur der Gegenwart" erschienen. In weiteren Kreisen das Verständnis für die Stellung zu wecken, welche die Mathematik in den Grundlagen unserer Kultur einnimmt, beabsichtigen zwei weitere Darstellungen dieses Sammelwerks, von denen die eine wiederum von *A. Voss* herrührt und die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur behandelt und die andere eine Studie *H. E. Timerdings* über die Geschichte des mathematischen Bildungswesens ist[2]).

Eine reiche Quelle für die Geschichte, insbesondere der Mathematik des 19. Jahrhunderts, ist die „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", deren Artikel seit 1898 (Leipzig: Teubner) erscheinen. Die Idee zu diesem großartigen und bedeutsamen Unternehmen wurde von *F. Klein, H. Weber* und *F. Meyer* 1894 gelegentlich einer Harzwanderung gefaßt. Seine Durchführung wurde möglich, als die Unterstützung der deutschen Akademien gewonnen war. In sieben Gesamtbänden, die ihrerseits in viele Teilbände zerfallen, sollte die Enzyklopädie in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften und ihrer Anwendungen geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachweisen. Allgemeines über den Werdegang des Unternehmens findet man in dem einleitenden Bericht, den *v. Dyck* dem

[1]) *Klein, F.:* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2 Bände, Berlin 1926 und 1927.

[2]) *Voss, A.:* Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart; *Timerding, H. E.:* Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung, Leipzig 1914.

ersten Band (1904) der Enzyklopädie vorausschickt. Die in den gegenwärtigen Vorlesungen besprochenen Gebiete Algebra, Arithmetik und Analysis werden in den ersten beiden Bänden behandelt. Auf verschiedene Artikel dieser Bände ist im Text des öfteren Bezug genommen worden. Nochmals sei daran erinnert, daß es zweckmäßig ist, neben der deutschen Ausgabe der Enzyklopädie auch die französische zu Rate zu ziehen, da deren Berichte zum Teil beträchtliche Zeit nach den deutschen zum Abschluß kamen und daher gelegentlich vollständiger sind als diese. Der siebente Band der Enzyklopädie sollte der Geschichte, Philosophie und Didaktik der mathematischen Wissenschaften gewidmet sein. Sein Erscheinen ist durch die Ungunst der Zeitverhältnisse unmöglich gemacht worden.

Während die Elementargeometrie in drei Artikeln von *Sommer, Zacharias* und *Berkhan* in Band III der Enzyklopädie eine besondere Darstellung gefunden hat, ist etwas Entsprechendes für die drei großen „A" nicht vorhanden. Sie werden in dem ersten Bande der Enzyklopädie der Elementarmathematik von *Weber-Wellstein*, auf die im Text wiederholt hingewiesen wurde, behandelt. Von diesem Band ist 1922 die vierte Auflage erschienen. Sie ist von *P. Epstein* besorgt und gegenüber den früheren Auflagen in vieler Hinsicht umgearbeitet und ergänzt worden. Ihrem Charakter nach weicht die neue Auflage vielleicht noch mehr als die früheren von den vorliegenden Vorlesungen ab. Sie gibt einen systematischen Aufbau der Elementarmathematik unter ausführlicher Erörterung der grundlegenden Begriffe. Epsteins Begriff der Elementarmathematik deckt sich jedoch nicht mit dem, was man in der Schule darunter versteht. Elementar bedeutet für ihn nicht einfach und leicht verständlich, sondern für die höhere Mathematik grundlegend. So finden wir in seinem Buche ausführliche und abstrakte Erörterungen über Zahlbegriff, Grenzbegriff, zahlentheoretische Dinge usw., während die Anfänge der Infinitesimalrechnung, für deren Behandlung auf der Schule der Autor sich übrigens selbst einsetzt, unberücksichtigt bleiben.

Wenden wir uns nun zu den Werken, welche die Elementarmathematik vom *didaktischen* Standpunkte aus bearbeiten, so haben wir vor allem als *„Enzyklopädie des mathematischen Unterrichts"* die Gesamtheit der Abhandlungen der Imuk und ihrer nationalen Unterkommissionen zu nennen. In den Imuk-Schriften ist ein ungeheurer Bestand an pädagogischer Erfahrung und didaktischer Erkenntnis niedergelegt. In den 10 Teilbänden, welche die Abhandlungen und Mitteilungen des deutschen Unterausschusses enthalten, ist eine rasche und sichere Orientierung durch das bereits oben erwähnte, von E. und K. Körner herrührende Gesamtregister ermöglicht worden. Der schon im vorliegenden Text auf S. 5 genannten pädagogischen Schrift von *Simon* haben wir dann noch die „Didaktik" von *A. Höfler* (Leipzig 1910) und die umfassendste unter den neueren Methodiken, die „Methodik des mathematischen Unterrichts" von *W. Lietzmann* (Bd. I, 2. Aufl 1926; Bd. II, 2. Aufl. 1923; Bd. III, 1924) hinzuzufügen. In der Lietzmannschen Methodik findet bereits die gesamte Imuk- und Damnu-Arbeit ihren Niederschlag. Der erste Band behandelt die Organisation und Technik, der zweite die Didaktik des mathematischen Unterrichts, im dritten Band werden die angewandte Mathematik und die philosophische Seite methodisch bearbeitet. Über die zahlreichen, für den Mathematikunterricht der höheren Schulen bestimmten Lehrbücher, welche die Ideen der Reformbewegung aufgenommen haben, geben der erste Band des Lietzmannschen Werkes und die jüngeren Jahrgänge der Fachzeitschriften genügend Auskunft.

In diesem Zusatz über die sehr umfangreiche Literatur zu berichten, die in den letzten Jahrzehnten und vor allem seit Beginn der preußischen Unterrichtsreform über didaktische Einzelfragen aus dem Gebiete der drei großen „A" erschien, ist nicht beabsichtigt. Der Leser möge darüber die Fachzeitschriften zu Rate ziehen. Wohl aber sei auf eine *grundsätzliche* Frage eingegangen, deren richtige Beantwortung *Klein* immer ganz besonders am Herzen lag, nämlich die Frage der Strenge im mathematischen Unterricht. Den Kern der Kleinschen Bestrebungen bildet die Forderung, daß der Unterricht psychologisch in Ordnung sei. Die Frage der Strenge entsteht daraus, daß neben diese psychologische Forderung als zweite die der sachlichen Wahrhaftigkeit des Unterrichts ebenso unabweisbar wie jene tritt. Beide Forderungen erscheinen oft schwer vereinbar. Aber hier muß man sich vor allem vor der Verwechslung von Erkenntnis und wissenschaftlicher Form der Erkenntnis hüten. Wir wollen in der Schule gewiß zu wahren Erkenntnissen kommen. Darüber sollte vollkommene Einmütigkeit herrschen. Eine ganz andere Frage ist es jedoch, wie weit wir in der systematischen Verknüpfung der Erkenntnisse, in der Reduktion der Begriffe auf Grundbegriffe, der Relationen auf Grundrelationen vordringen. Es ist kein Widerspruch, daß ein Unterricht sachlich richtig ist und doch in der Annäherung an das Ideal der systematischen Strenge, das uns aufgibt, mit möglichst wenig Grundbegriffen und Axiomen zu arbeiten, auf den einzelnen in Betracht kommenden Gebieten nur so weit geht, als es der Fassungskraft der Schüler entspricht. Die Gefahren, die der „strenge" Unterricht für den Schüler mit sich bringt, sind oft genug beschrieben worden. Der Schüler, an den die verfeinerten mathematischen Begriffsbildungen unvermittelt herangebracht werden, faßt den Inhalt dieser Begriffe nicht auf, verbindet keinen Gedanken mit dem Wort, das den Begriff bezeichnet. Die Folge eines solchen Unterrichts wird das Gegenteil von dem sein, was wir als Ziel des mathematischen Unterrichts bezeichnen müssen. Der mathematische Unterricht stellt kraft der Eigenart der mathematischen Erkenntnis bei richtiger Handhabung ein in seinem Erfolg schwer übertreffbares Mittel zur Reifung des Geistes dar. Aber wir können auch gerade mit der Mathematik, und zwar, wenn wir sie in strenger Weise unterrichten, alles tun, um das Selbstvertrauen des Schülers zu zerstören, jene Menschen hervorzubringen, von denen *Mach* sagt: „Ich kenne nichts Schrecklicheres als sie. Statt des gesunden kräftigen Urteils, welches sich vielleicht eingestellt hätte, wenn sie nichts gelernt hätten, schleichen ihre Gedanken ängstlich und hypnotisch einigen Worten, Sätzen und Formeln nach, immer auf denselben Wegen."

An Werken, die den pädagogischen Logizismus bekämpfen, welcher den mathematischen Unterricht systematisch gestalten will, vielmehr die psychologische Einstellung des Lehrers begründen und charakterisieren, seien genannt:

1. Die bereits erwähnte Imuk-Abhandlung von *D. Katz:* „Psychologie und mathematischer Unterricht".
2. *B. Branford:* „Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität" (deutsche Übersetzung von *R. Schimmack* und *H. Weinreich.* Leipzig 1913).
3. *G. Rose:* „Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht". Leipzig 1928.
4. *G. Rose:* „Rechnen und Raumlehre". Frankfurt 1932.

Hinsichtlich der Geometrie wurde die Frage der Strenge auf dem Imuk-Kongreß in Mailand 1911 umfassend behandelt. Für das Gebiet der Infinitesimalrechnung wurde sie 1914 auf dem Pariser Imuk-Kongreß erörtert. Berichte über diese Kongresse sind zu finden im Enseignement mathématique [13. (1911) und 16. (1914) Jahrgang, beachtenswert im letzteren Jahrgang der Bericht von *M. E. Beke:* „Sur les résultats obtenus par l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire"] und in dem auf S. 294 zitierten Bande „Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale Unterrichtskommission".

Beherzigenswert ist noch heute, was *Study*, der sich zunächst als starker Gegner der Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule bekannte, zu dieser Frage schließlich äußerte (vgl. Z. math. nat. Unterr. 1909, S. 68f.): „. . . Muß ich hiernach zu der Ansicht kommen, daß die guten Erfahrungen, die man allgemein mit dem fraglichen Unterricht gemacht haben will, auf einer Selbsttäuschung nicht hinreichend kritischer Lehrer beruhen, und muß ich damit einen systematischen Unterricht in Differential- und Integralrechnung ablehnen, so ist damit nicht gesagt, daß von solchen Dingen überhaupt nicht die Rede sein soll. Die Reformbestrebungen scheinen ja einen ganz gesunden Kern zu haben, und sie würden durchaus mit Freuden zu begrüßen sein, wenn sie nicht, wie wohl immer in Fällen der Art, weit über das Ziel hinausgingen. Die Schule ist ja nicht in erster Linie eine Vorbildungsanstalt für Fachlehrer, und die Schüler haben ein gutes Recht darauf, von den wichtigsten Ergebnissen und Anwendungen unserer Wissenschaft so viel zu erfahren, als bei ihrem Fassungsvermögen und der dem mathematischen Unterricht zugebilligten Zeit ihnen mitgeteilt werden kann. Wenn etwa in der analytischen Geometrie, bei Vortrag der Fallgesetze und sonst an möglichst einfachen und konkreten Beispielen und unter Ausschluß unrichtiger oder dem Schüler nicht faßlicher Verallgemeinerungen die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung nebst der zugehörigen Zeichensprache in sorgfältiger korrekter Darstellung erläutert werden, wo immer im sonstigen Unterricht eine passende Gelegenheit dazu sich bietet, so wird damit meines Erachtens der Universität nicht in unzweckmäßiger Weise vorgegriffen. Im Gegenteil wird das Interesse der Lernenden auf wirksame Art auf diese wichtigen Begriffsbildungen hingelenkt. Viel und praktisch Brauchbares wird besonders an graphischen Darstellungen funktioneller Abhängigkeiten zu lernen sein."

In neuerer Zeit sind von Schulmännern wie von Hochschulprofessoren zahlreiche Bemühungen um eine psychologisch und didaktisch gesunde Darstellung der Infinitesimalrechnung gemacht worden. Wir weisen u. a. auf die bereits (S. 254f.) genannten Veröffentlichungen von *R. Courant* und *A. Walther* hin und erwähnen noch die Vorträge, die *O. Toeplitz* auf den Naturforschertagungen in Düsseldorf (1926) und Hamburg (1928) gehalten hat[1]). In diesen Vorträgen kennzeichnet *O. Toeplitz* eindringlich die Gefahren, die auf der einen Seite ein Unterricht im Gefolge hat, der aus der Infinitesimalrechnung nur den bloßen Kalkul herauszuholen vermag, andererseits die Tendenz mit sich bringt, den strengen Unterricht der Universität auf die Schule zu übertragen. Das biogenetische Grundgesetz als Leitstern nehmend, schlägt er vor, durch historische Analysen den Weg aufzuspüren, auf dem die mathematische Menschheit zu den Einsichten gekommen ist, die wir in ihrer Gesamtheit als Infinitesimalrechnung bezeichnen, und so einen hinreichend fein abgestuften Lehrgang für das Individuum zu gewinnen. (S.)

---

[1]) „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen" (Jahresber. d. deutschen Math. Ver. Bd. 36, 1926) und der erste der Vorträge in „Spannung zwischen den Aufgaben und Zielen des Hochschulunterrichts und des Unterrichts an höheren Schulen in der Mathematik und den Naturwissenschaften" (Schriften des Damnu II. Folge, Heft 10. Leipzig 1929). Diese Schrift des Damnu enthält 6 Vorträge, die auf der Hamburger Naturforschertagung zu dem im Titel genannten Thema gehalten wurden. Außer O. Toeplitz trugen vor die Herren *Lony*, *Konen*, *Hillers*, *Häckel* und *Mannheimer*.

Namenverzeichnis.

Sachverzeichnis.