УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

М. РАДОЈЧИЋ и В. РАДОЈЧИЋ

НАЦРТНА ГЕОМЕТРИЈА

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

Научна књига

БЕОГРАД, 1963

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Решењем Ректора Универзитета у Београду бр. 1952/3 од 12. VII. 1960. год. а на основу закључка Комисије за универзитетске уџбенике од 8. VII. 1960. године штампано као стални уџбеник за студенте Природно-математичког факултета.

За издавача **Душан Ристић**, уредник **Гордана Николић**,
техн. уредник **Михаило Јозић**

Штампа: Скриптарница Саобраћајног факултета — Београд

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник, написан према течају нацртне геометрије који се одржава на Природно - математичком факултету Универзитета у Београду, намењен је пре свега слушаоцима тог течаја. Но верујем да ће по избору градива и начину излагања моћи користити и слушаоцима других високих школа и факултета, где се предаје нацртна геометрија.

Потреба за објављивањем овог уџбеника, после других добрих па и одличних домаћих уџбеника проистиче пре свега из распореда градива у споменутом течају. Искуство стечено држањем тог течаја кроз дужи низ година студентима Природно - математичког факултета (некад у саставу Философског факултета) навело ме је да напустим најраширенији и, донекле, силом традиције одржавани распоред излагања, по коме се одмах, или после кратког увода прелази на методу двеју нормалних пројекција и тој методи поклања, често, несразмерно више пажње и времена него другим методама нацртне геометрије. Супротно томе, у споменутом течају разрађује се прво нормална пројекција на једну раван. Тиме се, мислим, омогућује ђацима постепеније улажење у градиво и олакшава развијање способности претстављања просторних односа. Особито наши ђаци, који долазе из средњих школа често с врло неразвијеним претставама, могу тако, по свој прилици, успешније и брже постићи прву сврху: да цртајући „виде“ односе у простору. Истина је да се нацртна геометрија не може научити шаблонски, али у знању ученика има ипак често шаблонскога које делује штетно, а долази делом отуд што се ђак још није научио да у пројекцији „види простор“, а већ треба да гледа једновремено на две пројекције.

Затим, у једној пројекцији ученик може доћи пре до сликовитијих цртежа (као што су тела у општем положају, њихови пресеци и продори) него у двема пројекцијама, а и тиме се потстиче просторно претстављање. Дужим бављењем на једној пројекцији не сматрам пак да се губи време, јер ће се утолико брже моћи после прелазити други одељци. Сем тога, будућим средњошколским наставницима математике потребно је да на школској плочи знају претставити цртежом лако а тачно, у нормалној или косој пројекцији, просторне односе који су им на часу потребни — не само у стереометрији, већ уопште у математици, па и физици итд. И зато је потребно било више пажње посветити пројекцији на једну раван.

Сврха овог уџбеника је и та да на Природно - математичком факултету помогне изграђивању будућих наставника нацртне геометрије. Стога му је садржај морао бити богатији него што се у самом течају може изложити, који је још увек сувише кратак.

Пажња се обратила и практичној страни нацртне геометрије (будући наставници треба да знају и нешто из њених примена) и теоријској страни, али овој можда мање него што би се могло очекивати. То долази отуд што на истом факултету постоји засебан течај елементарне (еуклидске) геометрије и течај више геометрије, који обухвата пројективну геометрију, и што на тим течајима има доста прилике да се укаже на везе с нацртном геометријом. Затим, у тежњи да уџбеник буде доста елементаран и не преопширан, а да ђаци науче из њега пре свега графичко решавање задатака нацртне геометрије, образаца није више него што је најпотребније, нити су чињенице излагане у строжијем, рецимо дедуктивном облику, с теоремама на челу итд.

У одељку I даје се преглед најосновнијих појмова и метода, затим најпотребније о афинитету, колинеацији и геометријским ликовима. У одељку II обрађује се управна пројекција на само једну раван слике. Овде се извесни задаци (о пресецима, продорима, квадрикама итд.) обрађују на сасвим елементаран начин, а тиме се припрема њихово потпуније решавање у идућим одељцима. Да не би у целом том одељку изостало претстављање равних и просторних ликова одређена облика уведено је већ у почетку, на најпростији начин, обарање равни. Из таквих разлога није дакле ни подела извршена на положајне и метричке задатке. Тек у одељку III придолазе посматрању управне пројекције на једну раван, отстојања тачака од те равни. Сразмерно касно улажење у област потпуно одређених односа може педагошки користити, јер упућује ђака на извесну покретљивост просторног претстављања, а одлаже решавање сложенијих метричких односа, који су мање сликовити, више „геометријски". На крају тог одељка учлањује се природно тзв. котирана пројекција. У одељку IV долази на ред метода двеју нормалних пројекција. Одељак V доноси управну аксонометрију, VI косу пројекцију, VII перспективу.

Књигу смо написали заједно, Војна Радојчић, дипл. матем., и ја. Тешко да бих се одлучио сам да извршим тај, доста дуги рад. За време писања договарали смо се о свему. И слике су израђене заједнички. Због свега тога дугујем својој сарадници захвалност.

Обоје захваљујемо г. инж. Винку Ђуровићу, професору университета на драгоценим напоменама, саопштеним приликом љубазног прегледа рукописа ове књиге. Захваљујемо и на помоћи коју су нам при техничкој изради слика указали гг. арх. К. Карамата и дипл. мат. Б. Тодоровић.

При изради књиге помагали смо се разним уџбеницима нацртне геометрије, а понајвише следећим: *E. Müller*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, II; *В. Ђуровић*, Нацртна геометрија; *V. Niče*, Deskriptivna geometrija; *G. Scheffers*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, II; *C. Roubodi*, Traité de géométrie descriptive.

Терминолошке тешкоће, с којима се у геометрији мора борити сваки писац у нас, једва треба и спомињати, јер су познате. Неки називи, као напр. *површ* (surface) за разлику од *површине* (aire) употребљавају се већ неколико година на течајима елементарне, нацртне и више геометрије Природно-математичког факултета.

Стручњак из нацртне геометрије наћи ће шта се у овом уџбенику може сматрати мање-више новим. Наше настојање, свакако, није ишло у том правцу, нити се од уџбеника нацртне геометрије то очекује. Ако ипак има и знатнијих отступања од познатих дела, та отступања су произишла природно из намере да се методе и поступци објасне или прилагоде потребама поменутог течаја. Тако је напр. известан начелан значај добило разликовање „непосредног" и „посредног" пројектовања; мислимо да се тиме изражава начело које се може убројити у основна начела нацртне геометрије, а доста је елементарно да би се могло изнети у овом течају.

Напослетку, читаоцу који жели да из књиге научи нацртну геометрију треба нарочито нагласити да са̂мо гледање готових слика није довољно: потребно је да скоро сваку слику нацрта сам, да би је видео у њеном настајању и да решава задатке за вежбу.

У Београду, јуна 1953. Милош Радојчић

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Друго издање ове Нацртне геометрије излази неизмењено. Настојали смо само да исправимо низ цртачких, штампарских и других грешака, којих је било у првом издању.

Желимо да истакнѐмо своју захвалност Научној Књизи, која је и овом приликом учинила све да би ова књига изашла што пре у што бољем облику.

Аутори

САДРЖАЈ

ПРИСТУП

Део први

ОСНОВЕ

Глава I

Предмет и његова пројекција

Глава II

Афино и колинеарно пресликавање

Глава III

Линије и површи

Глава IV

Конусни пресеци

Део други

УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ЈЕДНУ РАВАН

Глава I

Тачка, права и раван. Криве линије

Глава II

Рогљасте површи и њихови равни пресеци

Глава III

Криве површи и њихови равни пресеци

Глава IV

Међусобни пресеци двеју површи (Продори тела кроз тело)

Глава V

Сенке

Део трећи

УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ЈЕДНУ РАВАН УЗ ПОСМАТРАЊЕ ОТСТОЈАЊА ОД ТЕ РАВНИ

Глава I

Равни ликови уз посматрање отстојања

Глава II

Просторни ликови уз посматрање отстојања

Глава III

Кровне површи

Глава IV

Котирана пројекција

УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ДВЕ И ВИШЕ РАВНИ

Глава I

Страна

Тачка и права

Глава II

Раван. Тела у најједноставнијим положајима

Глава III

Премештања

Глава IV

Пресеци рогљастих и других површи

Глава V

Сенке

Глава VI

Обртне и завојне површи

Део пети

УПРАВНА АКСОНОМЕТРИЈА

Глава I

Елементи управне аксонометрије

Глава II

Управна пројекција на једну раван слике уз једну посредну управну пројекцију

Део шести

КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

Глава I

Коса аксонометрија

Глава II

Метода отстојања и метода посредне пројекције

Страна

Део седми

СРЕДИШЊА ПРОЈЕКЦИЈА (ПЕРСПЕКТИВА)

Глава I

Основе. Метода продора

Глава II

Метода отстојања

Глава III

Метода посредне пројекције

Глава IV

Метода трагова и недогледа

Глава V

Неке примене перспективе

ПРИСТУП

1. ПРЕДМЕТ НАЦРТНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Нацртна геометрија учи како се *цртањем претстављају геометријски ликови и решавају геометријски задаци о тим ликовима.*

Под геометријским ликом подразумевамо при том какав било предмет у простору, посматран геометријски, тј. у односу на положај, облик и величину (тачку, линију, површ* или тело, или више тачака, линија итд.). Претстављање се врши редовно у равни, а само изузетно на некој кривој површи (као што напр. чини, на свој начин, сликар кад слика на облом своду неке дворане). Према томе можемо опште узевши рећи и да је нацртна геометрија грана геометрије у простору, која своје задатке решава цртањем у равни.

За разлику од сликарства, које тражи да у слици изрази уметнички доживљај и за разлику од фотографије, која настаје физичким и хемијским поступком, у нацртној геометрији конструишемо слике цртањем и тражимо да буду геометријски тачне и да се из њих могу одредити све потребне појединости о положају, облику и величини предмета у простору.

2. ЗНАЧАЈ НАЦРТНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Нацртна геометрија се развила из потреба праксе. Како не можемо цртати по простору, нити конструисати тачне моделе просторних ликова и њихових односа тако лако као што цртамо, морале су се развити графичке методе претстављања и решавања просторних односа у равни. Све до данас нацртна геометрија је пре свега практична наука. Потребна је особито техничким наукама, у цртању нацрта (планова), који пружају слике замишљених предмета ради свих потребних података на основу којих се ти предмети могу материјално саградити. Споменимо и примену у техничкој механици, за графичко решавање статичких и других задатака о просторним системима. Каже се да је цртање језик техничара. Ако је тако, нацртна геометрија је наука о том језику**. Од речи „нацрт" потиче бесумње и само име *нацртне геометрије*, Други, често употребљавани назив је *дескриптивна геометрија* или, краће, *дескриптива;* овај назив указује на тачно „описивање" предмета цртањем, које омогућује решавање задатих конструкција.

---

*) Како се под површином не може замишљати час геометријски лик, час величина (мера) тог лика, разликујемо *површ* (лик) од *површине* (мере). Површ се назива и плохом.

**) *E. Müller*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Bd. I стр. 6.

Али нацртна геометрија је потребна и у разним другим гранама науке и живота. Потребна је напр. у картографији ради израде географских карата, у сликарству ако се тражи да слика буде саобразна законима перспективе. У школама, напр. у средњошколској настави геометрије, извесно знање нацртне геометрије користи и наставнику и ђацима, да би се просторни односи лакше и тачније схватили и претстављали. Најзад нацртна геометрија има велику васпитну вредност. Њоме се одлично развија способност замишљања просторних односа, која је у много ком погледу потребна и којом се мање више одликује сваки образовани човек.

3. О ТЕХНИЦИ ЦРТАЊА

За увежбавање у градиво довољна је чиста бела хартија без линија, која допушта и јаче брисање гумом. Црта се заоштреном оловком која није сувише мека, да се линије не би отирале у току рада. Док се изводи конструкција треба линије извлачити танко, не притискујући, а тек на крају треба јаче извући оне црте које желимо.

Уз оловку и гуму за брисање потребан је безусловно шестар и два правоугла троугла од погодног материјала (напр. дрвета), један равнокрак, други с угловима од 30^0 и 60^0. Држећи један троугао непомично а други померајући тако да клиза уз први, цртамо паралелне праве, а прислањајући уз први троугао једну па другу катету другог троугла, цртамо управне (нормалне) праве. За мерење углова потребан је угломер, а за мерење дужи лењир с уцртаним подеоцима (мерни лењир, мерило).

За израђивање цртежа који су технички на висини нацртне геометрије и, уствари, претстављају конкретну и непосредну сврху те науке, потребна је чиста, бела, не много рапава хартија за цртање, која је издржљива према брисању не само гумом, већ и оштрим ножем (сечивом за бријање), да би се и тушем извучене појединости могле по потреби избрисати. Из практичних разлога погодна је и прозирна хартија за цртање (Paus-Papier).

Како хартија треба да претставља део равни, мора налегати потпуно на даску за цртање. Да не би мењала положај за време цртања, треба причврстити хартију за даску. Најпоузданије је затегнути је у влажном стању (да не би било ни неприметних набора) и дуж руба даске залепити. Пошто је цртање завршено, хартија се исече паралелно рубу, тако да залепљене траке отпадну.

Све се прво нацрта заоштреном тврдом оловком, а затим се превуку течним тушем оне линије које треба и како треба. Зато ваља имати прибор који се састоји бар из нацртног пера (немачки Reissfeder) с дршком и нацртног пера за уметање у шестар. Корисно је имати и нацртно перо спојено са справом за извлачење правилно испрекиданих линија и лењир за сенчење (на точкићима), којим се лако и правилно извлаче произвољно честе еквидистантне дужи (шрафирање). Најзад треба имати и велики лењир у облику слова Т, који клизи попречним делом по рубу даске за цртање, и кривуљаре, тј. лењире за цртање кривих линија.

4. ОЗНАКЕ

Тачке ћемо скоро увек обележавати великим латинским словима $A, B, C, \ldots$, праве, дужи и, уопште, црте (линије) малим латинским словима $a, b, c, \ldots$, углове, као и равни и, уопште, површи малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, тела великим грчким словима.

Поједини геометријски елементи и ликови настају често *спајањем* или *сечењем* других. Тако напр. спајамо две тачке A и B у праву и ову обележавамо знаком AB. Као што нам AB означава праву, тако ћемо ради краткоће обележавати одговарајућим словима друге врсте „спајања". Напр. писаћемо:

ABC за раван одређену тачкама A, B, C, (а не само за троугао коме су то темена и који ћемо обележавати такође знаком $\triangle ABC$)

Ma за раван одређену тачком M и правом a,

ab за раван одређену правим a и b (које нису мимоилазне).

Сечење ћемо обележавати знаком $\times$ између слова. Напр. писаћемо:

$a \times b$ за тачку пресека правих a и b (читати: a пресек b),

$a \times \mu$ за тачку пресека праве a и равни μ,

$\alpha \times \beta$ за праву пресека равни α и β.

$AB \times p$ за тачку пресека правих AB и p.

Употребљаваћемо при томе заграде у смислу који је непосредно разумљив, напр.

$(a \times b)\, P$ означава праву која спаја тачку $a \times b$ с тачком P (напротив, $a \times (bP)$ је тачка продора праве a и равни bP).

$AB\, (a \times \alpha)$ означава раван кроз A, B и тачку $a \times \alpha$.

Знак $\subset$ значи „припада" и употребљаваћемо га неки пут (као у теорији скупова) кад је неки геометријски лик део другога. Напр. писаћемо:

$a \subset p$ ако дуж a припада правој p.

$\triangle ABC \subset \alpha$ ако троугао ABC припада равни α.

Обрнути знак $\supset$ значи „садржи", тако да уместо $a \subset p$ можемо писати $p \supset a$ или уместо $\triangle ABC \subset \alpha$ можемо писати $\alpha \supset \triangle ABC$ и читати: права p садржи дуж a, раван α садржи троугао ABC.

Знак $\equiv$ значи „истоветно" или „идентично". Према томе, ако је напр. права AB исто што и права a, писаћемо $AB \equiv a$. Подударност се обележава знаком $\cong$, сличност знаком $\sim$. Подударност дужи и углова обележава се и једноставнијим знаком $=$; тим знаком ћемо, ако је искључена двосмислица, обележавати и истоветност.

Знак $\parallel$ значи „упоредно", знак $\perp$ „управно", $\#$ „упоредно и једнако", $\underline{\perp}$ „управно и једнако". Напр. писаћемо.

$a \parallel b$ ако је права a упоредна правој b,

$p \perp \tau$ ако је права p управна на равни τ,

$AB \# CD$ ако је дуж $AB \parallel CD$ и $AB = CD$,

$PQ \underline{\perp} PS$ ако је дуж $PQ \perp PS$ и $PQ = PS$.

Помоћу знака $\|$ и $\perp$ обележаваћемо и упоредне односно управне ликове, стављајући симболичне изразе у угласте заграде; тако напр.:

$[B \perp m]$ означава праву, или раван, постављену кроз тачку B управно на праву m,

$[p \perp \alpha]$ означава раван постављену правом p управно на раван α,

$[A \parallel a]$ означава праву или раван постављену кроз тачку A паралелно правој a,

$[A \parallel \alpha]$ означава праву, или раван, постављену кроз тачку A паралелно равни α.

Ради краћег писања служимо се често изразима као „права $a \parallel b$", „раван $\alpha \perp n$", „дуж $A'B' = AB$", са значењем: права a *која је* упоредна правој b, раван α *која је* управна на правој n, дуж $A'B'$ *која је* једнака дужи AB. Било би ближе овом значењу писати „права $a, \parallel b$" — тј. права a, упоредна правој b" — итд., али употреба запете није на тим местима уобичајена.

Знак $\therefore$ (који се у математици често употребљава) значи „дакле".

Угао (кут) обележавамо често знаком $\sphericalangle$ (напр. $\sphericalangle\, pq$, $\sphericalangle ABC$).

Знаком $\llcorner$ тј. тачком у правом углу обележавамо праве углове, како у сликама тако и у штиву. Напр. $\sphericalangle\, AOB = \llcorner$ значи да је угао AOB прав.

Дајемо списак грчких слова (алфабету):

Α	α	алфа	Ι	ι	јота	Ρ	ρ	ро
Β	β	бета	Κ	κ	капа	Σ	σ	сигма
Γ	γ	гама	Λ	λ	ламбда	Τ	τ	тау
Δ	δ	делта	Μ	μ	ми	Υ	υ	ипсилон
Ε	ε	епсилон	Ν	ν	ни	Φ	φ	фи
Ζ	ζ	зета	Ξ	ξ	кси	Χ	χ	хи
Η	η	ета	Ο	ο	омикрон	Ψ	ψ	пси
Θ	ϑ	тхета	Π	π	пи	Ω	ω	омега

ДЕО ПРВИ

О С Н О В Е

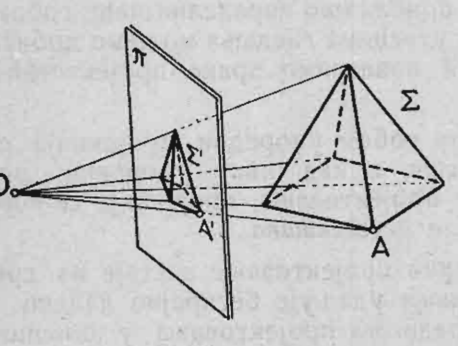
ГЛАВА I

ПРЕДМЕТ И ЊЕГОВА ПРОЈЕКЦИЈА

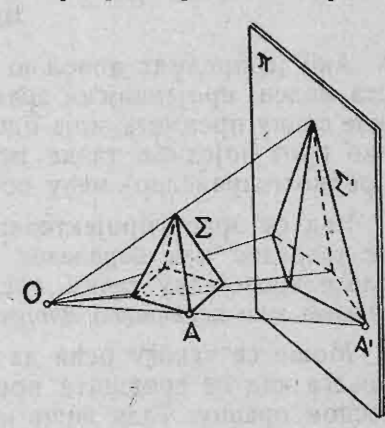
5. О ПОСТАНКУ СЛИКЕ

Слика настаје, геометријски посматрано, тиме што гледајући, рецимо, из тачке O (сл. 1) на *предмет* Σ (пирамиду) кроз раван π, замишљамо да је у тој равни уцртана свака тачка предмета Σ на месту где зрак светлости, који из те тачке допире у O, продире кроз раван π. Ма којој тачки A предмета Σ одговара на тај начин извесна тачка A' у равни π. Може се рећи да је из таквих тачака састављена слика Σ' предмета Σ. Можемо напр. замислити да је раван π прозорско окно и да на њему настаје слика на описани начин*). Раван π се назива *раван слике*. Ако је слика нацртана, то је уједно *раван цртежа*.

Али раван слике не мора бити између тачке из које гледамо и предмета. Можемо замислити да је иза предмета, тј. да је предмет Σ између тачке O и равни π (сл. 2). Такав је распоред кад предмет



Сл. 1



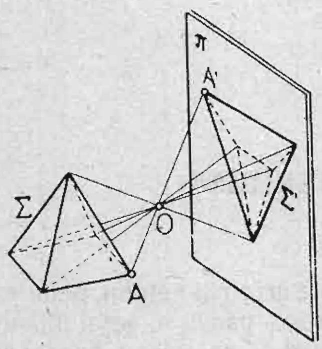
Сл. 2

обасјан из једне тачке баца сенку на неки зид, или кад настају пројекције на кинематографском платну. Тада тачка O претставља извор

*) В. Ђуровић, Нацртна геометрија, стр.

светлости, из кога полазе зраци и пројектују сенку предмета на одговарајућу раван.

Узајамни положај тачке *O*, предмета Σ и равни слике π може бити најзад и такав да тачка *O* дође између предмета Σ и равни π (сл. 3). Тада је слика „изврнута". Такав је положај при фотографисању. Тачка *O* је тада сочиво а π раван филма у фотографском апарату (мрачној комори). Слично се и на мрежњачи нашег ока отсликавају предмети који су изван нашег тела у простору.



Сл. 3

У нацртној геометрији се уопште каже да слика настаје *пројектовањем* или *пројицирањем* предмета на раван слике. Сама слика је *пројекција* предмета. Раван слике зове се према томе и *раван пројекције* или *пројекцијска раван*. Праве или зраци (зраке) који врше пројектовање зову се *зраци (зраке) пројектовања* или *гледања* (такође *пројекцијски* или *пројектујући зраци*), а тачка *O* у којој се састају зраци пројектовања, *средиште (центар) пројектовања*, *очна тачка* или, једноставно, *око*.

Према томе пројекција предмета Σ на раван слике π је лик који се добија у тој равни кад се из средишта пројектовања *O* повлаче зраци кроз поједине тачке предмета Σ и одређују тачке продора тих зрака кроз раван π.

6. УПОРЕДНА И СРЕДИШЊА ПРОЈЕКЦИЈА. УПРАВНА И КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

Ако је предмет довољно далек од равни пројекције или ако је доста мален, пројекцијски зраци су приближно паралелни међу собом. Дакле слику предмета, која одговара утисцима гледања можемо добити и ако кроз поједине тачке предмета повлачимо зраке пројектовања упоредно (паралелно) међу собом.

Кад су зраци пројектовања међу собом упоредни, пројекција се зове *упоредна* или *паралелна пројекција*, а кад нису упоредни, већ пролазе кроз једну тачку, средиште пројектовања, пројекција се зове *средишња* или *централна пројекција* или *перспектива*.

Може се такође рећи да упоредно пројектовање настаје из средишњега кад се средиште пројектовања удаљује бескрајно далеко у извесном правцу. Тада више нема средишта пројектовања у обичном смислу речи.

При паралелном пројектовању може раван слике бити управна на пројекцијским зрацима, а може с њима образовати неки кос угао. Ако су зраци пројектовања управни на равни слике, паралелна пројекција се зове *управна* или *нормална* или *ортогонална пројекција*. Ако је угао кос имамо *косу* или *клиногоналну пројекцију*.

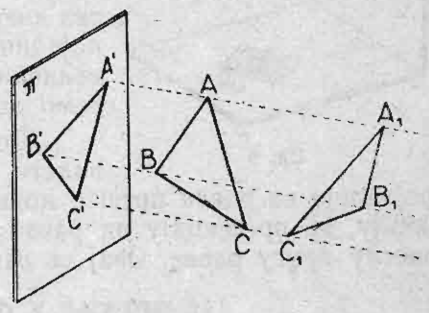
7. НЕПОСРЕДНА И ПОСРЕДНА ПРОЈЕКЦИЈА

Уз пројекцију неког предмета на раван цртања појављује се у нацртној геометрији често пројекција тог предмета на неку другу раван, која није раван цртања, па се и та пројекција пројектује на раван цртања. Ово пројектовање пројекције називамо *посредним пројектовањем* дотичног предмета, а пројектовање предмета непосредно на раван цртања *непосредним пројектовањем*. Према томе разликујемо и *посредну* од *непосредне пројекције*. Обе су у *равни цртежа*;

Слике 1, 2 и 3 садрже непосредне и посредне пројекције, јер сваку ту слику можемо сматрати паралелном пројекцијом извесних предмета: пирамиде Σ, правоугаоника који претставља раван слике π, на коју пада средишња пројекција пирамиде и, најзад, ока O и неких зрака гледања, који полазе из O. У тим сликама имамо дакле, сем непосредне пројекције пирамиде на раван цртања, пројекцију њене централне пројекције на раван π, тј. посредну пројекцију пирамиде. Посредне пројекције имају напр. основну улогу у *аксонометрији*.

8. НЕОДРЕЂЕНОСТ ПРЕДМЕТА КАД СЕ ЗНА САМО ЈЕДНА ЊЕГОВА ПРОЈЕКЦИЈА

Замислимо предмет и једну раван слике, која има спрам предмета одређен положај. Пројекција предмета на ту раван, рецимо управна пројекција, потпуно је одређена обликом предмета и његовим положајем према равни слике. Али обрнуто није тачно: из управне пројекције предмета не познајемо потпуно ни облик предмета ни његов положај. Претпоставимо да је предмет троугао ABC (сл. 4). Из његове пројекције $A'B'C'$ на раван π не знамо ни колико је троугао удаљен од равни π, нити који је од свих троуглова, различитих по облику, чија су темена где било на правим AA', BB', CC', управним на π; јер сви ти троугли имају исту пројекцију $A'B'C'$. Слично је са косом, па и са централном пројекцијом.



Сл. 4

9. УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ЈЕДНУ РАВАН, УЗ ПОДАТКЕ КОЈИ ЧИНЕ ПРЕДМЕТ ОДРЕЂЕНИМ

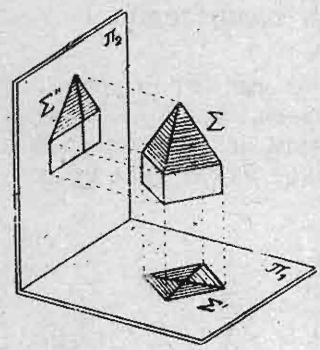
Ако хоћемо да из једне управне пројекције познајемо предмет потпуно, морамо имати још неке податке. Ти подаци могу се састојати у томе што за известан, довољан број тачака знамо сем њихових пројекција још и дужи које претстављају њихова отстојања од равни пројекције. Све те дужи можемо напр. пренети на једну праву, одатле их узимати према потреби и помоћу њих изводити конструкције.

Сем тога, чисто конструктивног начина употребљава се и тај да поред самих пројекција тачака запишемо у бројевима колика су им отстојања од равни пројекције. Ти се бројеви зову *коте*, а нормална пројекција снабдевена котама зове се *котирана пројекција*.

Најзад, саме речи које додајемо сликама, дају често оне податке који чине предмет претстављен пројекцијом одређеним. Тако напр. можемо тврдити да је троугао ABC, који је претстављен својом управном пројекцијом $A'B'C'$ на раван π (сл. 4) равностран троугао. Међу свим троуглима чија су темена на правим AA', BB', CC', управним на π има наиме и равностраних троуглова (§ 43). Ти равнострани троугли су сви међу собом подударни. Дакле тврдећи да је троугао ABC равностран, а познајући његову управну пројекцију $A'B'C'$ имамо већ у виду троугао ABC одређена облика и величине; само његов положај у простору остаје у извесној мери непознат. Оваквим одређивањем предмета, као и уношењем кота излазимо пак из оквира чисто графичких средстава нацртне геометрије.

10. ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ДВЕ РАВНИ

Предмет у простору потпуно је одређен и кад познајемо две његове непосредне пројекције на две одређене равни у простору. Обично се узимају две управне пројекције на две равни које су међу собом управне. Нека су π_1 и π_2 две међу собом управне равни, π_1 водоравна (хоризонтална), π_2 усправна (вертикална) и претпоставимо да смо добили управне пројекције извесног предмета Σ на те две равни (сл 5). На основу обих пројекција познајемо, очигледно, тачни положај сваке тачке предмета Σ у односу на равни π_1 и π_2. Моћи ћемо дакле из тих двеју пројекција наћи конструкцијом сваку појединост која нам затреба (дужине ивица, величине углова између ивица итд.) као што ћемо доцније видети.



Сл. 5

Додајмо да је предмет, као што ћемо видети, одређен и ако сем његове непосредне пројекције на раван цртања познајемо и једну његову посредну пројекцију, тј. пројекцију на раван цртања пројекције тог предмета на извесну другу раван. Овај се начин примењује напр. у аксонометрији.

11. ЦРТАЊЕ У ОДРЕЂЕНОЈ РАЗМЕРИ

У општа начела нацртне геометрије спада и смањивање, ређе увеличавање пројекција предмета. Кад се, наиме, у пројекцијама претстављају предмети одређене величине, често се не могу пројекције нацртати у правој величини, било зато што је предмет превелики, било зато што је тако мален да би слика била нејасна или технички неизводива. Зато се пројекције смањују, односно увеличавају у одређеној размери, напр. 1:100, 1:20, 10:1 и те се размере записују поред цртежа. Сем тога се често у цртежу записују поред појединих дужи (ивица, растојања) бројеви који означују њихове мере.

12. ОСНОВНА СВОЈСТВА ПРОЈЕКТОВАЊА

Да се у проучавању појединих метода пројектовања не бисмо враћали сваки пут на извесна најосновнија и очигледна својства која вреде за све посматране врсте пројектовања, навешћемо их одмах сада.

1. Пројекција тачке је тачка.

2. Ако тачка припада некој линији тада и пројекција те тачке припада пројекцији те линије.

3. Пројекција праве, која није истоветна с једним пројекцијским зраком, је права (у перспективи полуправа). Пројекција праве која је истоветна с једним пројекцијским зраком састоји се из само једне тачке.

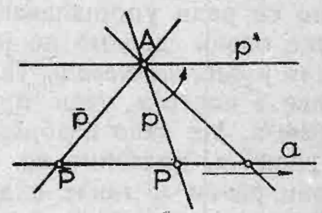
4. Ако пројекцијски зраци секу неку раван, пројекције тачака те равни покривају целу раван пројекције (у перспективи полураван). Ако пак нека раван садржи макар један пројекцијски зрак, она садржи бескрајно много тих зрака, па се пројекције свих тачака те равни налазе на једној правој.

Тачнија посматрања о пројекцијама тачака, правих и равни изнеће се у одељцима о појединим врстама пројектовања.

Проучаваћемо прво нормалну пројекцију на само једну раван. Тада ће нам предмет у простору, претстављен самом пројекцијом, остати у извесној мери неодређен, али се могу и тада решавати разни задаци (део II). Затим ћемо нормалној пројекцији додати отстојања тачака предмета од равни слике и посматрати тако настале, потпуно одређене односе (део III). После тога прећи ћемо на истовремено управно пројектовање на две или више равни (део IV), па на управну аксонометрију (део V) и затим на косу пројекцију (део VI). Напослетку ћемо се бавити централном пројекцијом (део VII).

13. БЕСКРАЈНО ДАЛЕКИ ЕЛЕМЕНТИ

Ради једноставнијег изражавања потребно је у нацртној геометрији (као и у пројективној геометрији) увести *бескрајно далеке тачке* и *праве*, и једну *бескрајно далеку раван.*



Сл. 6

Нека се у извесној равни права p обрће око једне своје тачке O у одређеном смеру (сл. 6, смер назначен стрелицом) и нека је a права у тој равни, која не пролази кроз O. Права p сече праву a у извесној тачки P; а кад се права p обрће око тачке O, тачка P се креће на правој a у одређеном смеру. Кад се права p приближује положају паралелном правој a, тачка P се удаљује неограничено на правој (у слици с лева на десно), а кад права p постане паралелна правој a (права p^*), пресека P нестане. Но чим се обртање праве p настави (у слици права $\bar{p}$) јавља се опет пресек с правом a (тачка $\bar{P}$), али сад са супротне стране, долазећи из бескрајности. Кад се права p врати у полазни положај и тачка P стиже, крећући се непрестано у истом смеру, у свој полазни положај.

Како тачка P постоји за сваки положај праве p, сем кад су праве a и p паралелне, требало би у геометрији, кад год се посматрају праве у разним положајима и које се секу са другим правим (као p и a) посебно говорити о случају кад су праве паралелне. Да се то не би морало, тј. да не би вазда било изузетака с упоредним правим, саглашавамо се у геометрији да тачкама сваке праве додамо по једну тобожну тачку, коју називамо *бесконачно* или *бескрајно далеком тачком* или *тачком у бескрајности*. Тада можемо рећи да при обртању прав, p око тачке O постоји увек пресечна тачка с правом a, само што је у случају паралелности тај пресек бескрајно далека тачка.

Наведимо главне околности које настају кад у посматрању правих уведемо бескрајно далеку тачку:

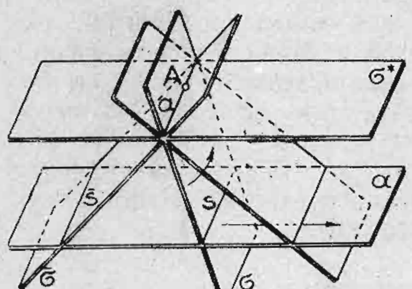
1. Свака права садржи једну и само једну бескрајно далеку тачку

2. Паралелне праве пролазе кроз исту бескрајно далеку тачку.

3. Две праве које су у једној равни секу се увек.

4. Праве које нису упоредне пролазе кроз разне бескрајно далеке тачке.

На сличан начин можемо доћи до бескрајно далеких правих. У очимо неку раван α, тачку A ван α, и кроз A ма коју праву a, упоредну равни α. Нека се раван σ, која садржи праву a, обрће око праве a у одређеном смеру (сл. 7). Равни α и σ секу се у правој s која је упоредна правој a. Кад се раван σ обрће и приближује положају упоредном равни α, права s се у равни α удаљује неограничено у извесном смеру, остајући упоредна себи самој. Кад раван σ постане упоредна са α (у слици раван σ^*) пресека s нестане, а кад се обртање настави пресек s опет се јавља у α, са супротне стране и приближује полазном положају.



Сл. 7

Према томе, као што смо увели бесконачно далеку тачку, сагласимо се ради упрошћавања и сажимања ставова геометрије, да правим сваке равни додамо по једну *бесконачно (бескрајно) далеку праву* или *праву у бесконачности*. Тада можемо рећи да при обртању равни σ око праве a постоји увек пресечна права, па и кад је раван σ упоредна спрам α. Ма како изабрали праву a која пролази кроз A и упоредна је равни α, долазимо на описани начин до исте равни σ^* упоредне спрам равни α, дакле и до исте бескрајно далеке праве. Имамо следеће околности:

1. *Свака раван садржи једну и само једну бескрајно далеку праву.*

2. *Упоредне равни пролазе кроз исту бескрајно далеку праву.*

3. *Две равни се увек секу.*

4. *Права упоредна некој равни сече се с бескрајно далеком правом те равни.*

5. *Свака права која не припада некој равни продире ту раван.*

6. *Две равни које нису упоредне имају две разне бескрајно далеке праве.*

7. *Сваке две бескрајно далеке праве секу се, и то у бескрајно далекој тачки оне обичне праве по којој се секу обе равни којима припадају те две бескрајно далеке праве.*

Исте особине узајамног сечења, које имају обичне праве у извесној равни, имају и бескрајно далеке праве. Стога смо (у смислу истог упрошћавања) наведени да све бескрајно далеке тачке и праве сматрамо садржаним у једној *бескрајно далекој равни.*

За упоредне праве кажемо да имају исти *правац*, а за упоредне равни да имају исти *став**. Правац је одређен једном бескрајно далеком тачком, а став једном бескрајно далеком равни.

14. ПОЛОЖАЈНИ И МЕТРИЧКИ ЗАДАЦИ

У разврставању градива нацртне геометрије корисно је разликовати две врсте задатака: *положајне задатке* и *мерне* или *метричке задатке*, саобразно општој подели геометрије на *геометрију положаја* — како се некипут назива *пројективна геометрија* — и на *мерну* или *метричку геометрију.*

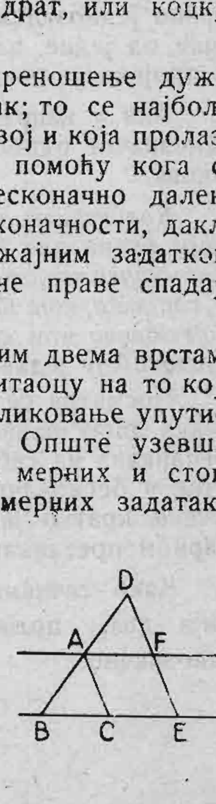
У *положајним* (такође и *пројективним*) задацима повлачимо праве, постављамо равни и одређујемо пресеке правих и равни, не узимајући у обзир величине дужи, углова и других ликова, дакле ни њихову подударност, као што се чини особито кад се мери, него саме међусобне положаје. Тако су напр. задаци: повући праву кроз две тачке, поставити раван кроз три тачке, одредити пресек двеју равни, положајни задаци.

Све задатке који нису положајни називамо *мерним (метричким)* задацима, иако у њима није увек реч о мерењу и мерама, већ уопште о чињеницама које се темеље на подударности (конгруенцији). Тако су напр. задаци: повући кроз тачку нормалу на праву, конструисати троугао подударан датом троуглу, конструисати квадрат, или коцку, или лопту, мерни задаци.

Повлачење паралелних правих своди се на преношење дужи, дакле по начину конструкције то је метрички задатак; то се најбоље види кад се конструкција праве паралелне датој правој и која пролази кроз дату тачку изведе помоћу само једног лењира, помоћу кога се могу и дужи преносити**. Али како смо увели бесконачно далеке тачке, паралелне праве су праве које се секу у бесконачности, дакле повлачење паралелне праве треба сматрати положајним задатком, мада конструкција није те природе (нити паралелне праве спадају у пројективну геометрију).

Распоред градива није извршен строго према тим двема врстама задатака нацртне геометрије, али обраћамо пажњу читаоцу на то који су задаци положајни а који мерни, да би се у то разликовање упутио, јер ће му користити, особито у доцнијим одељцима. Опште узевши, решавање положајних задатака је једноставније него мерних и стога се положајни задаци проучавају, мање-више пре мерних задатака.

*) Немачки: правац = Richtung, став = Stellung.



**) Да би се кроз A конструисала на тај начин упоредна правој a, изаберу се B и C на a, налази D тако да буде $AD = BA$, и E тако да буде $CE = BC$, затим F на DE тако да буде $DF = AC$; тада је $AF \parallel a$.

ГЛАВА II

АФИНО И КОЛИНЕАРНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

15. ОПШТЕ КОЛИЕНАРНО И АФИНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ РАВНИХ ЛИКОВА

У геометрији се проучавају разни узајамни односи (кореспонденције) где тачкама једног лика одговарају тачке другог лика. Кажемо и да се један лик *пресликава* на други. Таква је напр. осна симетрија двају ликова једне равни: свакој тачки једног лика одговара тачка другог лика, симетрична првој у односу на извесну праву коју зовемо осом симетрије. Ако је узајамни однос такав да свакој тачки једног лика одговара само једна тачка другог лика, и обратно, однос називамо *обострано једнозначним*.

У нацртној геометрији проматрамо непрестано ликове у извесним узајамним односима. Већ кад је реч о неком предмету и његовој слици (пројекцији) посматра се узајаман однос у коме свакој тачки предмета одговара пројекција те тачке. Овај однос није опште узевши обострано једнозначан, јер појединим тачкама пројекције могу одговарати више од једне, па и бесконачно много тачака на предмету, будући да се пројекције разних тачака могу поклапати.

Али у нацртној геометрији срећемо на сваком кораку и обострано једнозначне односе; реч је пре свега о колинеарном односу равних ликова.

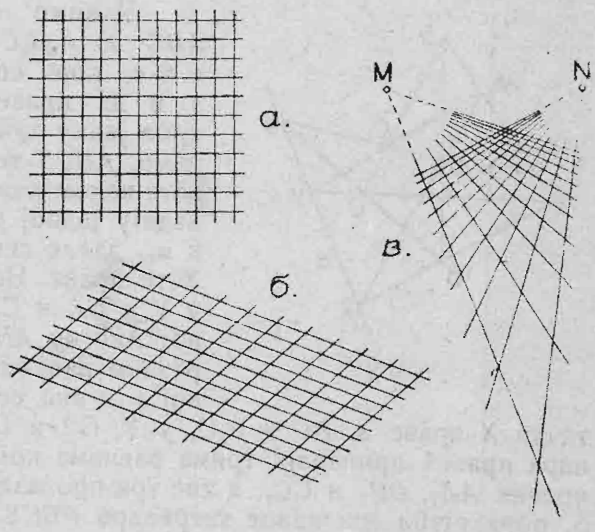
Колинеација или *пројективни (колинеарни) однос* међу ликовима двеју равни или једне исте равни је *обострано једнозначан однос у коме тачкама једног лика, које припадају једној правој, одговарају тачке другог лика, које такође припадају једној правој*. Каже се и да су оба лика *пројективно* или *колинеарно сродна* или да се *пројективно (колинеарно) пресликавају* један на други.

Посматра се и колинеација у којој се ликови састоје из свих тачака двеју равни, или једне исте равни (која се тада колинеарно пресликава на себе саму). Укупност тачака једне равни, укључивши тачке у бесконачности, назива се *равним системом тачака* или *пољем тачака*, кратко *пољем*, а раван *носиоцем* поља, и говори тада о колинеарном пресликавању двају поља једне или двеју разних равни.

Како тачкама на правој одговарају тачке на правој, у колинеацији двају поља тачака свакој правој одговара права обострано једнозначно.

Замислимо напр. у некој равни α квадратну мрежу (сл. 8а) и пресликајмо ту раван колинеарно на неку другу раван α'. Свакој правој равни α одговара права у α'. Упоредним правим квадратне мреже одговарају у α' праве које пролазе кроз неку коначно или бесконачно далеку тачку. Према томе, квадратној мрежи одговара у α' праволинијска четвороугаона мрежа коју образују два прамена правих што пролазе кроз два средишта M и N (сл. 8в). Права MN одговара бесконачно далекој правој равни α.

Ако у колинеарном односу двају поља тачака бескрајно далекој правој једног поља одговара бескрајно далека права другог поља, тај колинеарни однос је *афини однос* или *афиносш (афинишеш)*. Како бескрајно далеким тачкама тада одговарају бескрајно далеке тачке, паралелним правим одговарају паралелне праве. Може се дакле рећи и да је афини однос међу ликовима двеју равни или једне исте равни обострано једнозначни однос у коме тачкама једног лика, које припадају једној правој одговарају тачке другог лика, које такође припадају једној правој, *а шачкама йаралелних йравих шачке йаралелних йравих.*



Сл. 8

Према томе квадратној мрежи равни α одговара у афином пресликавању паралелограмска мрежа (сл. 8б) равни α'.

Сличносш, а према томе и *йодударносш* равних ликова можемо сматрати афиним односом, јер и у сличним ликовима одговарају обострано једнозначно тачкама тачке, правим праве, а упоредним правим упоредне праве.

Очигледно, ако су два лика колинеарна трећем, колинеарна су и међу собом. Исто тако, ако су два лика афина трећем, афина су и међу собом. Исто вреди, као што знамо, за сличне и за подударне ликове.

У геометрији се проучава колинеација и међу просторним ликовима. Према томе и просторни ликови могу бити афини, као што могу бити слични и подударни. Но у овом течају ограничавамо се на колинеацију равних ликова.

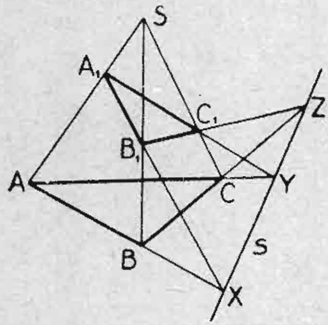
Напоменимо да постоје и неколинеарна пресликавања. Такво је напр. конформно пресликавање двеју равни и уопште двеју површи једне на другу (види § 195). Колинеарним пресликавањима бави се пак особито пројективна геометрија, која се и развила из нацртне првобитно као она грана геометрије, која проучава особине ликова, које се одржавају при пројектовању (тзв. пројективне особине).

16. ДЕЗАРГОВ СТАВ

У проучавању колинеације и уопште у геометрији особито је значајан следећи Дезаргов став, тако називан по Desargues-у, геометру 17-ог столећа:

Ако су два троугла, која припадају једној или двема равнима, у таквом узајамном положају и односу да праве које спајају одговарајућа темена пролазе кроз једну тачку, тада се одговарајуће стране тих троуглова или њихова продужења секу у тачкама једне праве.

И обратно: ако се одговарајуће стране двају троуглова или њихова продужења секу у тачкама једне праве, тада праве које спајају одговарајућа темена пролазе кроз једну тачку.



Сл. 9

Узмимо прво да су два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ у двема разним равнима α и α_1 које се секу по извесној правој s и да праве AA_1, BB_1 и CC_1 пролазе кроз једну тачку S (сл. 9), дакле да је рецимо, $ABCS$ тетраедар а $A_1B_1C_1$ пресек овога неком равни α_1. Праве AB и A_1B_1 припадају једној равни, ABS, но и равнима α и α_1, дакле секу се на s, у извесној тачки X те праве. Исто тако секу се BC и B_1C_1 у Y и CA и C_1A_1 у Z на правој s. И обратно: Ако су ABC и $A_1B_1C_1$ два троугла у разним равнима α и α_1 које се секу по правој s и ако се AB и A_1B_1 секу у извесној тачки X праве s, BC и B_1C_1 у Y, CA и C_1A_1 у Z на s, тада та три пара правих припадају трима равнима које се секу две и две дуж правих AA_1, BB_1 и CC_1, а све три пролазе кроз једну заједничку тачку S, образујући три ивице тетраедра $ABCS$.

Тиме су тврђења оба дела Дезаргова става доказана под претпоставком да је реч о два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ у двема разним равнима. Но слику 9, која претставља, рецимо, паралелну пројекцију тих двају троуглова на извесну раван, можемо сматрати и као слику двају троуглова ABC и A_1B_1C која су у р а в н и ц р т е ж а. Закључци остају исти: ако се праве AA_1, BB_1, CC_1 секу у S, парови одговарајућих страна тих троуглова или њихових продужења секу се у тачкама X, Y, Z праве s, и обратно. Тиме смо пак добили Дезаргов став.

17. НЕКЕ ОСОБИНЕ КОЛИНЕАЦИЈЕ И АФИНОСТИ

Дворазмера. Нека су A, B, C, D четири тачке на једној правој. Образујмо с њиховим растојањима количник двеју размера $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$ и обележимо га симболом $(ABCD)$. При томе сматрамо те размере позитивним ако C, одн. D није између A и B, а негативним ако је C, одн. D између A и B. Количник

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

има основан значај у колинеарном пресликавању и зове се *дворазмера* четири тачака A, B, C, D. Постоји следећи став:

I. Ако четири праве које пролазе кроз једну тачку S секу две праве P и P', прву у тачкама A, B, C, D, другу у одговарајућим тачкама A', B', C', D', дворазмера првих четири тачака једнака је дворазмери других четири тачака (сл. 10)

Заиста, ако је S тачка у бесконачности, имамо непосредно сразмере

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},\quad \frac{AD}{BD}=\frac{A'D'}{B'D'}$$

а отуд $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Ако је S у коначности, повуцимо кроз A упоредне правим SD и SC до пресека K и L правом SC одн. SD и слично кроз B до пресека M и N правим SC и SD (сл. 10). Имамо сразмере

$$\frac{AC}{BC}=\frac{LS}{NS},\quad \frac{AD}{BD}=\frac{KS}{MS},$$

$$\therefore\quad (ABCD)=\frac{LS}{NS}:\frac{KS}{MS},$$

$$\therefore\quad (ABCD)=\frac{LS}{KS}:\frac{NS}{MS}.$$

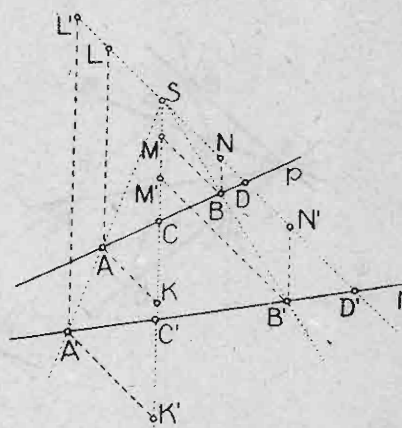
Исто тако

$$(A'B'C'D')=\frac{L'S}{K'S}:\frac{N'S}{M'S}.$$

Но

$$\frac{LS}{KS}=\frac{L'S}{K'S},\quad \frac{NS}{MS}=\frac{N'S}{M'S},$$

$$\therefore\quad (ABCD)=(A'B'C'D').$$



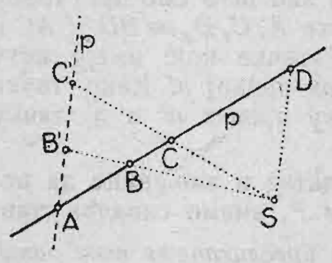
Сл. 10

Следећи став доносимо без доказа:

II. У колинеарном пресликавању равних ликова дворазмера ма којих четири тачака једне праве једног лика једнака је дворазмери одговарајућих тачака другог лика.

На основу става I можемо решити следећи задатак:

Задатак 1. *Кад су на правој p дате три тачке A, B, C, одредити четврту тачку D тако да дворазмера $(ABCD)$ има дату вредност k.*



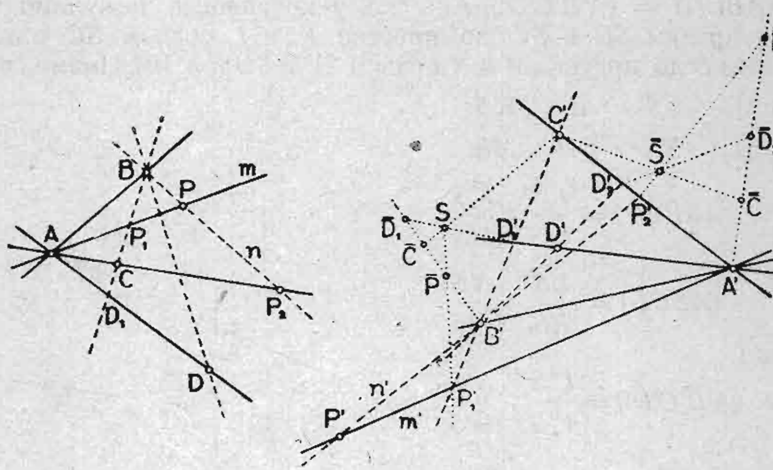
Сл. 11

Повуцимо кроз A неку другу праву p' и на њој изаберимо две тачке B' и C' тако да буде $AC'/B'C'=k$ (сл. 11). Нека је $BB' \times CC' \equiv S$. Права $[S \parallel p']$ сече праву p у траженој тачки D. Заиста, како је $SD \parallel p'$, тачка $SD \times p' \equiv D'$ је у бескрајности. Но како размера удаљености тачака A и B' од тачке која се на p' бескрајно удаљује, тежи, очигледно, јединици, имамо $AD'/B'D'=1$, дакле $(AB'C'D') = AC'/B'C' = k$. Али по ставу I $(ABCD) = (AB'C'D')$, дакле $(ABCD)=k$.

На основу става II може се решити следећи задатак:

Задатак 2. *У извесном колинеарном пресликавању двају поља тачкама A, B, C, D, од којих никоје три нису на једној правој, одговарају тачке A', B', C', D', од којих такође никоје три нису на једној правој. Наћи тачку P' која одговара ма којој тачки P.*

Повуцимо праве AB, AC, AD и $AP \equiv m$ (сл. 12). На правој BC имају тачке B, C, $D_1 \equiv AD \times BC$ и $P_1 \equiv m \times BC$ извесну дворазмеру. На одговарајућој правој $B'C'$ одредимо тачку P_1' тако да буде $(BCD_1P_1) = (B'C'D_1'P_1')$. То можемо учинити на основу става II овако: на некој



Сл. 12

правој кроз B' одредимо тачке $\overline{C}$, $\overline{D}_1$, $\overline{P}_1$ тако да буду поређане као тачке C, D_1, P_1 и да буде $BC = B'\overline{C}$, $B\overline{D}_1 = B'\overline{D}_1$, $BP = B'\overline{P}_1$. Нека је $C'\overline{C}_1 \times D_1'\overline{D}_1 \equiv \overline{S}$, затим $\overline{S}\overline{P}_1 \times B'C' \equiv P_1'$. Како сад имамо четири праве које пролазе кроз $\overline{S}$ и секу праве $B'\overline{C}$ и $B'C'$, имамо $(B'\overline{C}_1\overline{D}_1\overline{P}_1) = (B'C'D_1'P_1')$, па како је $(B'\overline{C}_1\overline{D}_1\overline{P}_1) = (BCD_1P_1)$, такође је $(BCD_1P_1) = (B'C'D_1'P_1')$. Дакле правој m одговара права $m' \equiv A'P_1'$.

Уочимо сад праве BA, BC, BD и $BP \equiv n$ као што смо претходно посматрали AB, AC, AD и m, дакле прво тачке A, C, $D_2 \equiv BD \times AC$ и $P_2 \equiv n \times AC$, затим на правој $A'C'$ одредимо тачке које имају исту дворазмеру и повуцимо праву n' која одговара правој n. Како тачки $m \times n$ одговара тачка $m' \times n'$, имамо у пресеку правих m' и n' тачку P' која у колинеацији одговара тачки P.

Као што се види из решљивости тог задатка и чињенице да постоји само једна тачка P' која одговара тачки P, имамо следећи став:

III. *Постоји једно и само једно колинеарно пресликавање неке равни на другу или на ту исту раван тако да групи датих четири тачака A, B, C, D од којих никоје три не припадају једној правој, одговара група ма којих четири тачака A', B', C', D' од којих такође никоје три не припадају једној правој.*

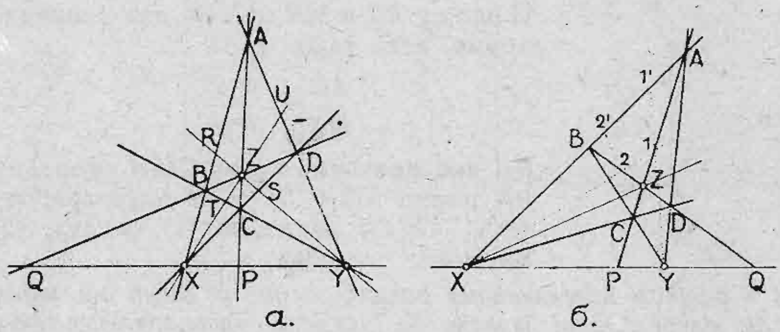
Хармонијске тачке. Ако за тачке A, B, C, D имамо $\dfrac{AC}{BC} = -\dfrac{AD}{BD}$, тј. $(ABCD) = -1$, тачке A, B, C, D су *хармонијске тачке.* Кажемо и да су п а р о в и т а ч а к а A, B и C, D *хармонијски спрегнути.* Очигледно, ако узајамно разменимо тачке A и B, или тачке C и D, или парове тачака A, B и C, D дворазмера остаје иста.

Из става I следује непосредно следећи став:

IV. *Ако четири праве које пролазе кроз једну тачку S секу две праве a и a', прву у тачкама A, B, C, D, другу у тачкама A', B', C', D', и ако су A, B, C, D четири хармонијске тачке, тада су и A', B', C', D' четири хармонијске тачке.*

Четири праве које пролазе кроз једну тачку и секу једну праву у четири хармонијске тачке зову се *хармонијске праве* или *хармонијски зраци.*

Четири тачке A, B, C, D, од којих никоје три не припадају једној правој образују *четворотеменик* коме су то *темена*, а п р а в е које спајају два по два темена су му *стране* (сл. 13а). Постоје још три



Сл. 13

тачке X, Y, Z у којима се стране секу; те тачке се зову *дијагоналне тачке,* а три праве XY, YZ, ZX *дијагонале.* Постоји следећи став:

V. *На свакој страни четворотеменика образују два темена и пресеци те стране дијагоналама четворотеменика два хармонијски спрегнута пара тачака.*

Докажимо напр. да су на страни AC четворотеменика $ABCD$ (сл. 13б) темена A и C и пресеци P и Z с дијагоналама XY, YZ, ZX два хармонијски спрегнута пара тачака. Ако наиме тачка Z не би била уз A, C и P четврта хармонијска тачка, била би то нека друга тачка 1. Тада би AX, CX, PX, $1X$ била четири хармонијска зрака, дакле по ставу IV права BD би секла те четири праве у четири хармонијске тачке B, D, Q и 2. Но тада би и AY, CY, PY и $1Y$, а исто тако и BY, DY, QY и $2Y$ била четири хармонијска зрака, дакле би на правој AB тачке A, B, X, $1'$ биле четири хармонијске тачке, а исто тако и B, A, X, $2'$, дакле $(ABX1') = (ABX2')$, а отуд следује да се тачке $1'$ и $2'$ поклапају, тј. и тачке 1 и 2 поклапају се са z.

Имамо и следећи став:

VI. *На свакој дијагонали четворотеменика образују две дијагоналне тачке и остала два пресека те дијагонале са странама четворотеменика хармонијски спрегнуте парове тачака.*

Докажимо напр. да су X, Y и P, Q хармонијски спрегнути парови тачака. По претходном ставу A, C и P, Z су хармонијски спрегнути парови тачака, дакле BA, BC, BP, BZ су четири хармонијска зрака, а отуд су тачке X, Y, P, Q на правој XY четири хармонијске тачке.

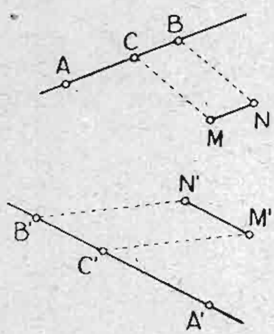
Афино пресликавање. Једнакост дворазмере четири тачака једне праве и одговарајућих тачака на одговарајућој правој добија у афином пресликавању једноставнији облик ако за једну од четири тачака узмемо бесконачно далеку тачку. Ако се, наиме, тачка D бескрајно удаљи у извесном смеру на правој AB (сл 14) размера AD/BD тежи јединици, дакле ако је D бесконачно далека тачка имамо $(ABCD) = AC/BC$ и према ставу II

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}. \tag{1}$$

И ако су AC и MN ма које две упоредне дужи имамо, исто тако,

$$\frac{AC}{MN} = \frac{A'C'}{M'N'}, \tag{2}$$

јер ако повучемо праву CM и упоредну праву BN имамо $MN = BC$ и за одговарајуће тачке $M'N' = B'C'$, дакле из (1) следује (2). Према томе:

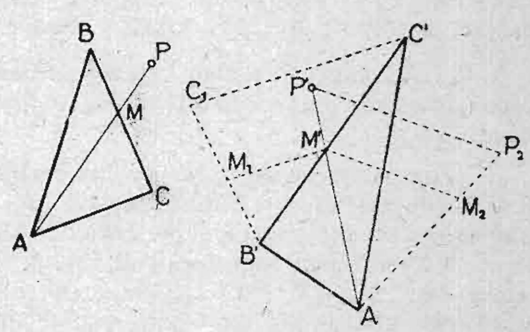


Сл. 14

VI. *У афином пресликавању равних ликова размера ма којих трију тачака на једној правој једнака је размери одговарајућих тачака на одговарајућој правој и, уопште, размера двеју дужи на једној правој или на двема упоредним правим једнака је размери одговарајућих двеју дужи.*

На основу тог става може се у датом колинеарном или афином пресликавању равних ликова конструисати ма за коју тачку одговарајућа тачка.

Задатак 3. *У извесном афином пресликавању двају поља одговара троуглу ABC троугао $A'B'C'$* (сл. 15). *Наћи тачку P' која одговара којој било тачки P.*



Сл. 15

Повуцимо праву кроз P и једно теме троугла ABC и одредимо њен пресек M с правом која спаја остала два темена. Одредимо затим тачку M' на основу сразмере

$$BM : BC = B'M : B'C'$$

(пренесемо дужи BM и BC на једну праву кроз B', тј. $BM = B'M$, $BC = B'C$ и повучемо $M_1M' \parallel C_1C'$). Исто тако налазимо P' на основу сразмере

$$AM : AP = A'M' : A'P'.$$

Из решљивости овог задатка и из чињенице да постоји само једно решење следује овај став:

VIII. *Постоји једно и само једно афино пресликавање једне равни на другу или исту раван тако да трима датим тачкама A, B, C које не припадају једној правој одговарају ма које три тачке које такође не припадају једној правој.*

Дакле, ма за која два троугла може се рећи да су афина.

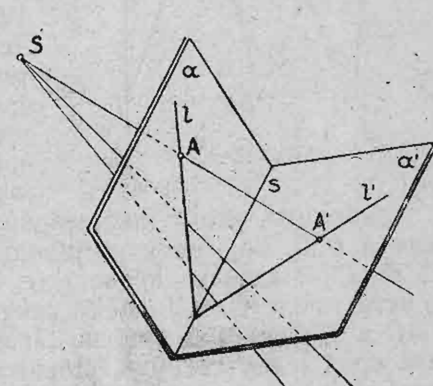
18. КОЛИНЕАРНИ ЛИКОВИ У ПЕРСПЕКТИВНОМ ПОЛОЖАЈУ

За два лика чије тачке стоје у извесном обострано једнозначном узајамном односу кажемо да су у *перспективном положају* или *перспективна* ако праве које спајају одговарајуће тачке пролазе кроз једну заједничку тачку или, другим речима, ако се један лик пројектује из једне тачке у други лик. Ова тачка се зове *средиште перспективе*, а те праве *зраци* (*зраке*) *перспективе*.

Може се изрећи следећи став:

IX. *Ако су два поља тачака у двема разним равнима перспективна, та два поља су и колинеарна.*

Заиста, ако су то равни α и α' а средиште перспективе S (изван тих равни, сл. 16) нека је l која било права равни α. Раван Sl сече раван α по извесној правој l'. Како је однос перспективан, свакој тачки A праве l одговара извесна тачка A' на l', дакле правој l одговара права l'. Како свакој тачки равни α одговара једна одређена тачка равни α', и обратно, а правим одговарају праве, однос је колинеаран. Приметимо да свакој тачки на пресечној правој s обих равни одговара та иста тачка.



Сл. 16

Опште посматрано, два перспективна лика не морају бити колинеарна. Пример неколинеарног перспективног пресликавања је стереографска пројекција, којом се лопта пресликава конформно на раван.

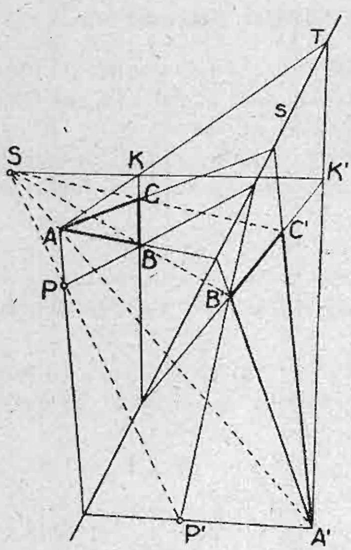
Пресликавање равних ликова које је уједно перспективно и колинеарно назива се *перспективно колинеарним* или *перспективно пројективним*. Каже се и да су о б а л и к а *перспективно колинеарна* или *колинеарна у перспективном положају*. Средиште перспективе зове се тада *средиште колинеације*, а зраци перспективе су *зраци колинеације*.

Очигледно, сваки раван лик и његова централна пројекција су два перспективно колинеарна лика, под условом да раван тога лика не садржи зраке пројектовања.

Видели смо да у перспективно колинеарном односу двају поља у двема разним равнима свакој тачки пресечне праве тих равни одговара та иста тачка. Ово вреди и за перспективно колинеарни однос двају поља једне равни. Постоји уопште следећи став:

X. *У перспективно колинеарном пресликавању двају поља тачака постоји права на којој свака тачка одговара себи самој, и обрнуто: ако у колинеарном пресликавању двају поља тачака постоји права у којој свака тачка одговара себи самој, то је перспективно колинеарно пресликавање.*

Заиста, ако је S средиште колинеације и ако су у једном пољу A, B, C ма које три тачке различите од S и које не припадају једној правој, а у другом пољу A', B', C' одговарајуће тачке (сл. 17) тада се по Дезаргову ставу тачке $AB \times A'B'$, $BC \times B'C'$, $CA \times C'A'$ секу на једној правој s. Докажимо да свакој тачки праве s одговара та иста тачка.



Сл. 17

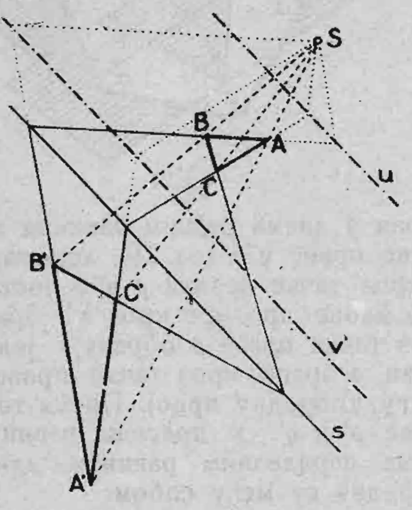
Ако s не пролази кроз S, свакој тачки T праве s одговара тачка $T' \equiv ST \times s$, тј. $T' = T$. Да би се укључио и случај кад s пролази кроз S приметимо да све три тачке не могу бити на s; нека је дакле A ван s. Уочимо тачку $K \equiv AT \times BC$. Одговара јој тачка $K' \equiv SK \times B'C'$. Како је бар једна од тачака B и C различита од K, нека је $B \neq K$. Тада су ABK и $A'B'K'$ два перспективна троугла и по Дезаргову ставу одговарајуће стране, по потреби продужене, секу се на једној правој. Та права је s, дакле AK и $A'K'$ секу се на s, у T. Како свакој тачки праве AK одговара тачка праве $A'K'$, тачки T одговара та иста тачка.

Обрнуто, ако у колинеарном пресликавању у коме извесним тачкама A, B, C, које нису на једној правој одговарају друге три тачке A', B', C', а тачкама праве s те исте тачке, тачки $AB \times s$ одговара та иста тачка, тј. AB и $A'B'$ секу се на s; исто тако секу се BC и $B'C'$ и AC и $A'C'$ на s. Дакле по Дезаргову ставу праве AA', BB', CC' пролазе кроз једну тачку S. Докажимо да права која спаја ма које две одговарајуће тачке P и P' пролази кроз S. Заиста, бар једна од правих AB, BC, CA не пролази кроз P, дакле нека је AB таква права. Тада су ABP и $A'B'P'$ два троугла чије стране се, продужене, секу на s, дакле по Дезаргову ставу праве AA', BB', PP' пролазе кроз једну тачку, па како AA' и BB' пролазе кроз S, и PP' пролази кроз S.

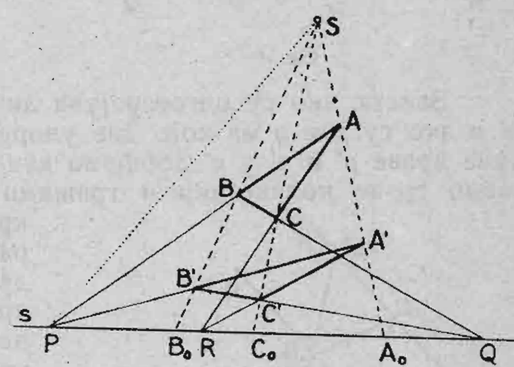
У колинеацији се права на којој свака тачка одговара себи самој зове *оса колинеације*. Претходни став може се дакле изрећи и овако:

Ако у колинеарном пресликавању равних ликова постоји средиште колинеације, тада постоји и оса колинеације, и обратно: ако постоји оса колинеације, постоји и средиште колинеације.

Како у колинеарном пресликавању двају поља тачака свакој правој одговара права, постоји у сваком пољу по једна права којој одговара у другом пољу бескрајно далека права. Тако у перспективно колинеарном пресликавању у коме троуглу ABC једног поља одговара троугао $A'B'C'$ другог поља (сл. 18) постоји у првом пољу права u којој одговара бескрајно далека права u'_∞ другог поља. Како се и праве u и u'_∞ секу на оси S, имамо $u \parallel s$.



Сл. 18



Сл. 19

Исто тако постоји у другом пољу права v' којој одговара бескрајно далека права v_∞ првог поља, и опет је $v' \parallel s$. (Ако су оба поља у једној равни, имамо $u'_\infty \equiv v_\infty$.) Праве u и v' зову се *против-осе колинеације*; u је против-оса првог, v' другог поља.

Ако у перспективно колинеарном односу у једној равни уочимо два ма која пара одговарајућих тачака A, A' и B, B' и тачку P на оси колинеације, у којој се секу AB и $A'B'$ (сл. 19), па повучемо праву кроз P и средиште колинеације S, имамо по ставу I $(AA'SA_0) = (BB'SB_0)$, тј.:

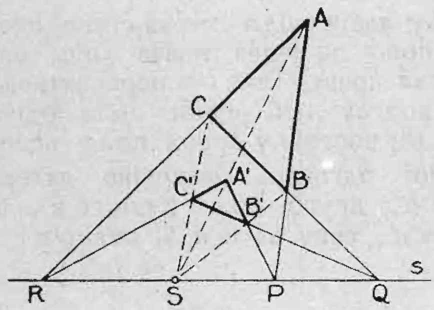
XI. *У перспективно колинеарном односу међу ликовима једне равни дворазмера $(AA'SA_0)$ ма којих одговарајућих двеју тачака A и A', средишта колинеације S и пресечне тачке A_0 зрака AA' с осом колинеације има сталну вредност.*

Та вредност је *карактеристична константа* тог перспективно колинеарног односа.

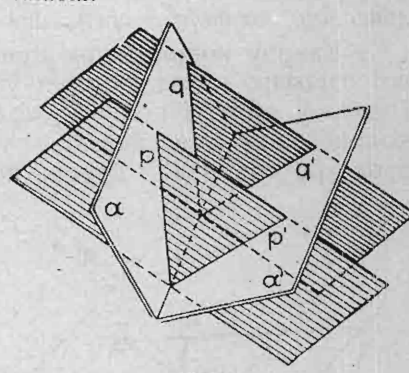
19. ПОЈЕДИНЕ ВРСТЕ ПЕРСПЕКТИВНО КОЛИНЕАРНОГ ПРЕСЛИКАВАЊА РАВНИХ ЛИКОВА

У перспективно колинеарном пресликавању може средиште колинеације S пасти на осу колинеације s (сл. 20). Особиту пажњу заслужује случај кад је средиште колинеације бескрајно далека тачка.

XII. *Ако су зраци колинеације међу собом упоредни, тј. ако је средиште колинеације бескрајно далека тачка, упоредним правим одговарају упоредне праве, дакле колинеација је афинитет.*

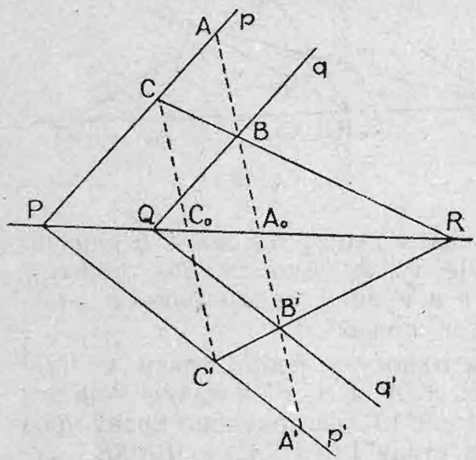


Сл. 20



Сл. 21

Заиста, ако су одговарајући ликови у двема разним равнима α и α' и ако су p и q ма које две упоредне праве у α (сл. 21), одговарајуће праве p' и q' у α' добијамо кад кроз тачке правих p и q постављамо зраке колинеације и тражимо њихове продоре кроз α'. Зраци кроз тачке праве p образују једну раван, а зраци кроз тачке праве q другу, упоредну првој. Према томе праве p' и q' су пресеци равни α' двема паралелним равнима, дакле упоредни су међу собом.



Сл. 22

Ако су пак оба лика у једној равни (сл. 22) повуцимо кроз коју било коначно далеку тачку A' праве p' зрак колинеације. Тај зрак сече праве p и q у две разне тачке A и B. Овим тачкама одговарају две разне тачке A' и B' на p' и q', дакле p' и q' се не секу ни у којој коначно далекој тачки, тј. упоредне су, а то значи да је дати однос афин.

Пресликавање равних ликова које је уједно перспективно и афино назива се *перспективно афиним пресликавањем* и каже се да су оба лика *перспективно афина* или *афина у перспективном положају*. Оса колинеације зове се тада *оса афиности*, а зраци колинеације су *зраци афиности*.

Ако су α и α' две разне равни, лик у равни α' може се схватити као паралелна пројекција равног лика садржаног у α, дакле:

Сваки раван лик и његова паралелна (управна или коса) пројекција су два перспективно афина лика, под условом да раван тог лика не садржи зраке пројектовања.

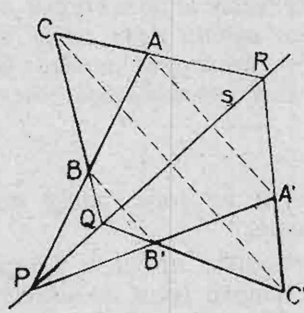
Претпоставимо да су оба перспективно афина лика у једној равни и да зраци афиности секу осу афиности s. Нека су A и B ма које две тачке једног лика на једном зраку афиности, A_0 пресек тог зрака с осом s (сл. 22). Нека су p и q ма које две упоредне праве које пролазе кроз A и B, а p' и q' одговарајуће праве кроз A' и B'. Праве p и p' секу се у извесној тачки P осе s, а q и q' исто тако у Q. Како је $p \parallel q$ и $p' \parallel q'$ имамо $\frac{AA_0}{BA_0} = \frac{PA_0}{QA_0} = \frac{A'A_0}{B'A_0}$, дакле $\frac{AA_0}{A'A_0} = \frac{BA_0}{B'A_0}$.

Нека је C која било трећа тачка која није на истом зраку афиности; обележимо праву AC словом p. Како праве p, p', s пролазе кроз једну тачку P, а $AA' \parallel CC'$, имамо по једном познатом ставу $\frac{AA_0}{A'A_0} = \frac{CC_0}{C'C_0}$.

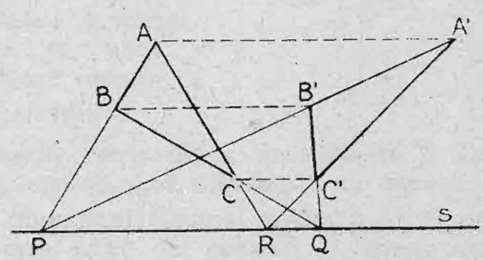
Према томе:

XIII. *У перспективно афином односу међу равним ликовима, размера* $AA_0/A'A_0$, *у којој су* A *и* A' *ма које две одговарајуће тачке а* A_0 *пресечна тачка зрака* AA' *с осом афиности, има сталну вредност.*

Та вредност је *карактеристична константа* овог перспективно афиног односа. Ако су A и A' с исте стране осе, константа је позитивна, ако су с разних страна, константа је негативна.



Сл. 23



Сл. 24

Ако је карактеристична константа афиности $+1$, оба лика се поклапају. Ако су зраци афиности управни на оси афиности, а константа афиности је -1, ликови су подударни и то *осно симетрични* у односу на осу s која је тада *оса симетрије*.

Забележимо да у перспективно афином пресликавању зраци афиности могу бити и упоредни оси афиности (сл. 24).

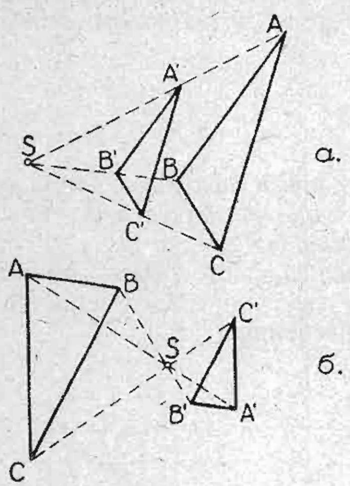
XIV. *Ако је оса колинеације бескрајно далека права, колинеација је сличност.*

И сад оба лика могу бити у једној или у двема равнима, које су тада упоредне. Како се одговарајуће праве, напр. AB и $A'B'$ (сл. 25) секу на оси колинеације, секу се у бескрајности, тј. *одговарајуће праве су упоредне*: $AB \parallel A'B'$. Ако су C и C' још две одговарајуће тачке, имамо и $AC \parallel A'C'$, дакле

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{и} \quad \frac{AS}{A'S} = \frac{CS}{C'S} = \frac{AC}{A'C'},$$

а отуд
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},$$
тј. *одговарајуће дужи су сразмерне*. То вреди и за дужи које немају заједничке тачке. Дакле *оба колинеарна лика су слична*.

За два *слична лика у перспективном положају (перспективно слична)* каже се и да су у *сличном положају* или да су *хомотетијска*. Перспективна сличност зове се и *хомотетија*. Средиште колинеације зове се тада *средиште сличности (хомотетије)*



Сл. 25

Ако средиште сличности S није између одговарајућих тачака (напр. ако није између A и A'), кажемо да је хомотетија *директна* или *непосредна* (сл. 25а); ако је S између одговарајућих тачака, кажемо да је *инверсна* или *обрнута* (сл. 25б).

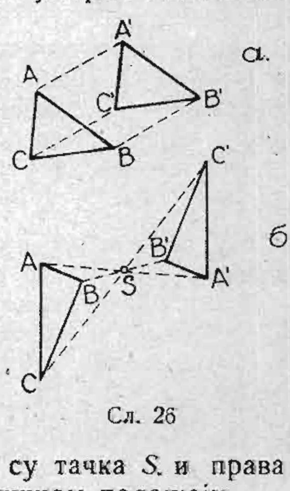
Приметимо још да упоредним правим једног лика одговарају упоредне праве другог лика, тј. два перспективно слична лика су и перспективно афина, дакле:

XV. *Перспективно колинеарни ликови су перспективно афини било да је средиште колинеације бескрајно далека тачка, било да је оса колинеације бескрајно далека права.*

Затим:

XVI. *У хомотетији је размера удаљености ма којих двеју одговарајућих тачака од средишта хомотетије стална.*

Ако је та размера једнака јединици, сличност прелази у *подударност (конгруенцију)*. Ликови су тада *перспективно* (или *хомотетијски*) *подударни* или *подударни у сличном положају*. Ако је при томе сличност непосредна, средиште сличности је бесконачно далека тачка, то је дакле случај кад су *и средиште и оса колинеације бесконачно далеко* (сл. 26а). Ако је сличност при хомотетијској подударности обрнута, средиште S колинеације је заједничко средиште свих дужи које спајају одговарајуће тачке и ликови су *централно* или *средишње симетрични* у односу на тачку S као *средиште симетрије* (сл. 26б).



Сл. 26

Поновимо укратко главне закључке. Ако су тачка S и права s у коначности, имамо перспективно колинеарне ликове; ако је тачка S у бесконачности а права s у коначности, имамо перспективно афине ликове; ако је тачка S у коначности а права s у бесконачности, имамо сличне ликове у сличном положају; ако су тачка S и права s у бесконачности, имамо подударне ликове у сличном положају.

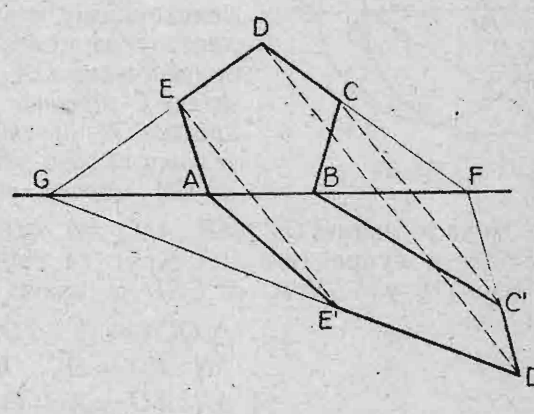
У следећим задацима посматра се афинитет и колинеација у једној равни.

Задатак 1. *У перспективно афином односу у једној равни дата је оса афиности a, троугао ABC и тачка A' која одговара тачки A. Конструисати троугао A'B'C' који је перспективно афин троуглу ABC.*

Праве AB и AC (сл. 23) секу осу афиности у тачкама P и R. Тачке B' и C' су на $A'P$ и $A'R$, а на зрацима упоредним зраку AA' кроз тачке B и C.

Задатак 2. *Конструисати петоугао перспективно афин према датом правилном петоуглу, ако оса афиности садржи једну страну датог петоугла, а задата је тачка која одговара извесном темену ван те осе.*

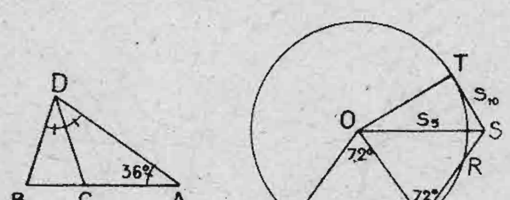
Нека је $ABCDE$ дати правилни петоугао (сл. 27), AB оса афиности и D' тачка која одговара темену D. Права DD' одређује правац свих зрака афиности. Продужимо CD и ED до пресека F и G с осом афиности. Спојимо F и G са D'. У пресеку тих правих са зрацима афиности кроз C и E налазе се одговарајуће тачке C' и E'. Приметимо да је $CE \parallel AB$, дакле и $C'E' \parallel AB$.



Сл. 27

Напомена. У нацртној геометрији бива чешће потребно конструисати правилан многоугао, дакле и петоугао. Зато потсећамо на конструкцију правилног петоугла уз потребна образложења.

Дуж AB је подељена по *златном пресеку* или *непрекидној сразмери* ако је њен већи отсечак AC геометријска средина између целе дужи и мањег отсечка BC, тј. $AB : AC = AC : BC$ (сл. 28).



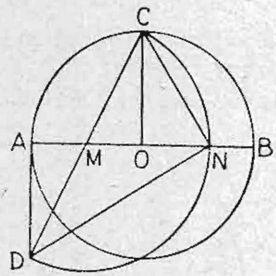
Сл. 28

1\. — *Страна правилног десетоугла уписаног у круг једнака је већем отсечку полупречника подељеног златним пресеком.*

Нека је наиме, BD страна правилног десетоугла уписаног у кругу са средиштем A. Како је $\sphericalangle BAD = 36°$, у равнокраком троуглу ABD је $\sphericalangle ADB = 72° = 2 \cdot \sphericalangle BAD$. Ако је CD располовница угла ADB имамо $AC = CD = BD$ и троугли ABD и DBC су слични, дакле $AD:BD = BD:BC$, па како је $AD = AB$, $BD = AC$ имамо $AB : AC = AC : BC$.

2. — *Ако је у правоуглом троуглу једна катета једнака полупречнику круга, друга катета страни уписаног правилног десетоугла, хипотенуза је једнака страни уписаног петоугла.*

Ако је, наиме, PQ страна правилног петоугла уписаног у круг чије је средиште O, нацртајмо паралелограм $OPQS$ (сл. 28). Његова страна OS сече круг у тачки R. Како је $\sphericalangle OQR = \sphericalangle POQ = 72^0$, QR је страна уписаног десетоугла, дакле тачком R дуж QS (једнака полупречнику) подељена је по златном пресеку па је $QR^2 = OS \cdot RS$. Но ако је T додирна тачка дирке повучене на круг из S, имамо по једном познатом ставу $QS \cdot RS = ST^2$, дакле $TS = QR$. Према томе правоугли троугао OST има тражене особине.



Сл. 29

3. — На основу тога имамо следећу конструкцију стране правилног петоугла или десетоугла уписаног у круг: *Из средишта M полупречника OA (сл. 29) опишимо кроз крајњу тачку C управног полупречника кружни лук до пресека N пречником AB; тада је дуж ON једнака страни уписаног правилног десетоугла, а CN страни уписаног правилног петоугла.*

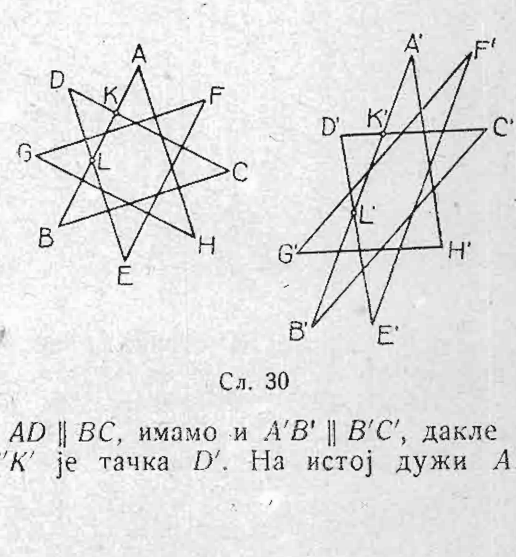
Нека је, наиме, $OC \perp AB$, $AD \perp AB$, $AD = OC$. Тада је $M \equiv AO \times CD$ средиште полупречника OA. Круг са средиштем M и са пречником CD сече OB у N. Угао $\sphericalangle CND$ је прав,

$$\therefore \triangle OCN \sim \triangle AND$$
$$\therefore AN : AD = OC : ON$$
$$\therefore AN : AO = AO : ON$$
$$\therefore AO : ON = (AN - AO) : (AO - ON)$$
$$\therefore OB : ON = ON : NB,$$

тј. дуж OB је подељена тачком N по златном пресеку. **Дакле** дуж ON једнака је страни уписаног правилног десетоугла, а CN **страни** уписаног правилног петоугла.

Задатак 3. *Дат је правилан звездасти осмоугао. Нацртати афино сродни звездасти осмоугао кад су ма како дате у равни три тачке које одговарају троима његовим теменима.*

Ово је пример афино сродних ликова ма у ком положају.



Сл. 30

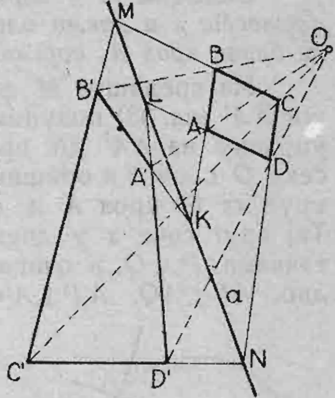
Нека је $ABCDEFGH$ дати звездасти осмоугао (сл. 30) и напр. A', B' и C' дате три одговарајуће тачке. Обележимо $AB \times CD \equiv K$ и на дужи $A'B'$ одредимо тачку K' тако да буде $AB : AK = A'B' : A'K'$. Како је $AD \parallel BC$, имамо и $A'B' \parallel B'C'$, дакле у пресеку правих $[A' \parallel B'C']$ и $C'K'$ је тачка D'. На истој дужи AB

можемо сад изабрати тачку $L \equiv AB \times DE$ и одредити L' тако да буде $AB : AL \doteq A'B' : A'L'$. Тада ћемо добити E' у пресеку праве $D'L'$ и $[B' \parallel C'D']$. Даље имамо из $E'F' \parallel A'B'$ и $A'F' \parallel C'D'$ тачку F', затим из $F'G' \parallel B'C'$ и $B'G' \parallel D'E'$ тачку G' и из $G'H' \parallel C'D'$ и $A'H' \parallel D'E'$ тачку H'.

Задатак 4. *У равни је дат паралелограм $ABCD$ (сл. 31), средиште колинеације O и оса колинеације a, и на зраку OA тачка A'. Нацртати перспективно колинеарни четвороугао $A'B'C'D'$.*

Нека је $K \equiv AB \times a$. Имамо $B' \equiv OB \times A'K$. Слично ћемо добити и остала два темена C' и D', напр:

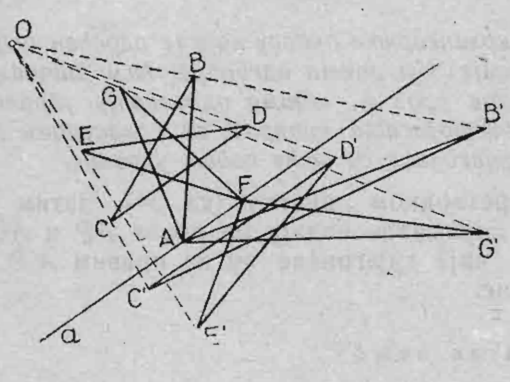
$$AD \times a \equiv L, \qquad LA' \times OD \equiv D'$$
$$BC \times a \equiv M, \qquad MB' \times OC \equiv C'.$$



Сл. 31

Задатак 5. — *Конструисати звездасти седмоугао који је перспективно колинеаран датом правилном звездастом седмоуглу. Оса колинеације пролази кроз два међу собом најближа темена. Сем тога је дато средиште колинеације и тачка која одговара неком трећем темену датог седмоугла.*

Нека је $ABCDEFG$ дати звездасти седмоугао (сл. 32), O средиште колинеације, AF оса колинеације и на зраку OG тачка G' која одговара тачки G. Тачке A и F су уједно и темена A' и F' одговарајућег седмоугла. Спојимо их са C'. Даље може конструкција тећи овим редом:



Сл. 32

$$CG \times a = K, \qquad KG \times OC = C',$$
$$CE \times a = L, \qquad LC \times OE = E',$$
$$DG \times a = M, \qquad M'G \times OD = D',$$
$$BD \times a = N. \qquad ND' \times OB = B'.$$

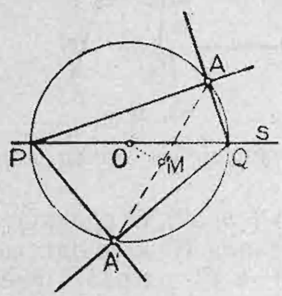
Тиме смо добили сва темена колинеарног седмоугла.

Напомена. Ради конструкције правилног седмоугла можемо на кругу који му је описан одредити два суседна темена помоћу угломера ($360^0 : 7 = 51^0\,43'$). Но може се извести и приближна конструкција без угломера, знајући да је страна уписаног седмоугла приближно једнака управној дужи спуштеној из средишта описаног круга на страну уписаног шестоугла.

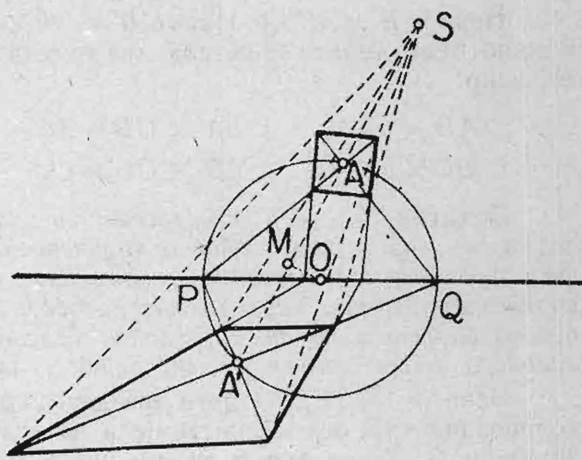
Перспективно афини однос одређен је осом s и двема одговарајућим тачкама A и A'. Ма којим двема правим које пролазе кроз A одговарају две праве које пролазе кроз A' и секу прве две на s, рецимо у тачкама P и Q (сл. 33). При томе је угао $\sphericalangle PAQ$ првих двеју правих уопште различит од угла $\sphericalangle PA'Q$ других двеју правих, дакле и ако је $\sphericalangle PAQ$ прав угао, $\sphericalangle PA'Q$ је уопште кос угао. Али, као што решења идућа два задатка показују, *постоји један пар управних правих AP и AQ којима одговара опет пар управних правих $A'P$ и $A'Q$.*

Задатак 6. *У перспективно афином односу који је одређен осом афиности s и двема одговарајућим тачкама A и A' конструисати управне праве кроз A, којима одговарају управне праве кроз A'.*

Из средишта M дужи AA' (сл. 33) повуцимо управну на AA' до пресека O осом s и опишимо круг из O кроз A и A'. Тај круг сече s у двема тачкама, P и Q, и очигледно, $AP \perp AQ$, $A'P \perp A'Q$.



Сл. 33



Сл. 34

Задатак 7. *У перспективно колинеарном односу који је одређен осом колинеације s, средиштем колинеације S и двема одговорајућим тачкама A и A', конструисати управне праве кроз A, којима одговарају управне праве кроз A'. На основу тога конструисати квадрат са средиштем A, коме одговара четвороугао чије дијагонале су међу собом управне.*

Решавање је исто као у претходном задатку (сл. 34). Затим је конструисан један квадрат чије дијагонале падају на праве AP и AQ, и њему колинеарни четвороугао, чије дијагонале су на правим $A'P$ и $A'Q$, дакле међу собом су управне.

Задаци за вежбу

1. Конструисати звездасти седмоугао који је у перспективно афиној сродности с датим правилним звездастим седмоуглом ако оса афиности пролази кроз два међу собом најближа темена и ако је дата тачка која одговара неком трећем темену седмоугла.

2. Конструисати седмоугао који је перспективно афин с датим правилним седмоуглом, ако је оса афиности произвољна права и ако је дата тачка која одговара неком његовом темену.

3. Исто као у задатку 2, кад је дат а) равнострани троугао, б) квадрат.

4. На три упоредне праве које пролазе кроз три темена A, B, D правилног звездастог петоугла $ABCDE$ дате су ма како три тачке A', B', D'. Одредити остала темена петоугла A' B' C' D' E' који је перспективно афин датом петоуглу.

Упутство: Одредити прво осу афиности

5. Конструисати звездасти седмоугао који је перспективно афин према датом правилном звездастом седмоуглу, ако је оса афиности бескрајно далека права и ако је дата тачка која одговара једном темену.

6. Дат је правилан шестоугао $ABCDEF$, средиште O и оса s колинеације. Одредити колинеарни шестоугао $A' B' C' D' E' F'$ кад се A' изабере на OA а) између O и A, б) тако да A буде између O и A', с) тако да O буде између A и A'.

7. Дата је оса колинеације и правилан петоугао, затим тачка која у перспективно колинеарном пресликавању одговара једном његовом темену. Конструисати колинеарни петоугао кад се изабере за средиште колинеације а) тачка изван датог петоугла, б) тачка у датом петоуглу, в) једно теме петоугла, г) бескрајно далека тачка на оси колинеације, д) нека друга бескрајно далека тачка.

8. Дато је средиште колинеације, правилни петоугао и тачка која у перспективно колинеарном пресликавању одговара једном његовом темену. Конструисати колинеарни петоугао кад се за осу колинеације изабере а) права која не сече дати петоугао, б) права која га сече, в) бескрајно далека права.

9. Дат је квадрат $ABCD$, средиште колинеације и на зрацима колинеације тачка A', B', C' које у тој колинеацији одговарају првим трима теменима. Наћи четврто теме D'.

10. Показати да у колинеацији паралелограму једног поља одговара четвороугао чије се наспрамне стране у продужењу секу на противоси другог поља.

11. У колинеацији с датом осом и средиштем одредити четвороугао коме одговара квадрат чије се дијагонале секу у средишту колинеације. Узети да квадрат а) сече противосу свога поља, б) да с њом има само једну заједничку тачку, в) да нема с њом заједничких тачака. Који део равни одговара унутрашњости квадрата?

12. У афином односу који је одређен осом афиности и паром одговарајућих тачака A и A', конструисати квадрат $ABCD$ дате величине и коме одговара правоугаоник $A'B'C'D'$.

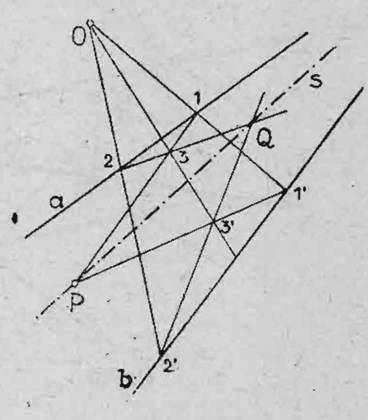
13. Показати да су сви квадрати у датом афином односу којима одговарају правоугаоници, у сличном положају и да су одговарајући правоугаоници сви међу собом слични и у сличном положају.

14. У колинеацији која је одређена средиштем, осом и паром одговарајућих тачака T и T', конструисати квадрат $ABCD$ дате величине, коме је средиште T и коме одговара четвороугао $A'B'C'D'$ чије се дијагонале секу под правим углом.

20. КОНСТРУКЦИЈА ПРАВЕ КРОЗ НЕДОСТИЖНУ ТАЧКУ

У нацртној геометрији јавља се често задатак да на цртежу спојимо неку тачку с извесном *недостижном тачком*, тј. тачком која пада изван цртежа, а одређена је пресеком двеју правих које су дате у цртежу али се секу изван њега. Тај задатак се лако решава на основу Дезаргова става.

Задатак 1. *Дате су праве a и b које се секу ван цртежа, и тачка P. Повући праву s кроз P и кроз пресек обих правих.*

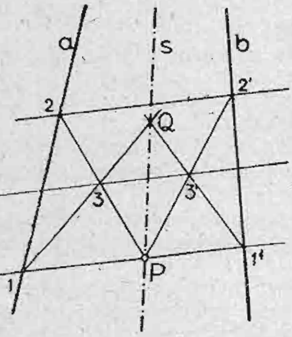


Сл. 35

Изаберимо тачку O ма где ван правих a и b (сл. 35) и повуцимо кроз O две праве које секу праву a у тачкама 1 и 2, а праву b у тачкама $1'$ и $2'$. Повуцимо затим праве $P1$ и $P1'$ и на $P1$ изаберимо тачку 3. Нека буде $3'$ тачка пресека правих $O3$ и $P1'$. Троугле 123 и $1'2'3'$ можемо сматрати перспективно колинеарним са средиштем колинеације у O. Дакле постоји оса колинеације на којој се секу парови одговарајућих страна тих троуглова, продужених према потреби. Један пар страна је 12 и $1'2'$, оса колинеације пролази кроз недостижну тачку пресека; други пар је 13 и $1'3'$, тј. оса колинеације пролази кроз P. Дакле права коју тражимо је права s. Трећи пар је 23 и $2'3'$, који се сече у некој тачки Q на s. Дакле конструкцијом тачке Q добијамо праву s.

Према томе, конструкција праве s састоји се, укратко, у следећем: пошто смо изабрали тачку O, повуцимо три зрака кроз O. Нека су 1 и $1'$ пресеци једног зрака са a и b, 2 и $2'$ пресеци другог зрака, а 3 и $3'$ пресеци трећег зрака са правим $P1$ и $P1'$. Одредимо пресек Q правих 23 и $2'3'$. Тада је $PQ \equiv s$.

Приметимо да је конструкција изводива помоћу само једног равнала (лењира). Може се наравно применити и афиност као засебан случај колинеације. Тада повлачимо (кроз бескрајно далеку тачку O) паралелне праве $11'$, $22'$, $33'$ (сл. 36).



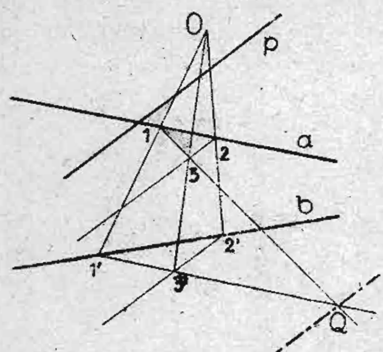
Сл. 36

У посматраном задатку може тачка P бити и бескрајно далека тачка, тј. задатак може гласити:

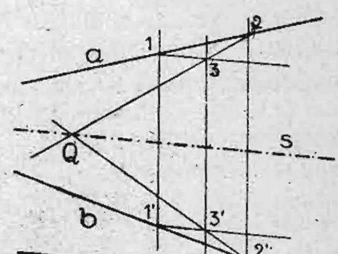
Задатак 2. *Кроз недостижни пресек двеју правих a и b повући праву упоредну с датом правом.*

Конструкција се сада може сматрати истом као претходно, уз једну разлику што с тачком P треба поступати као с бескрајно далеком тачком праве p, било да се употреби колинеација (сл. 37) или афиност (сл. 38).

Задатке 1 и 2 можемо решавати и помоћу сличности (посебан случај колинеације). При томе можемо сматрати a, b и тражену праву s зрацима сличности (сл. 39). Повуцимо наиме две праве које секу праве a и b у тачкама A, B и A', B' тако да P не буде на правој AB, тј. да добијемо троугао ABP.



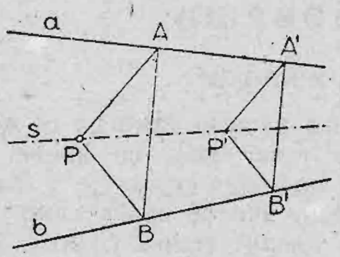
Сл. 37



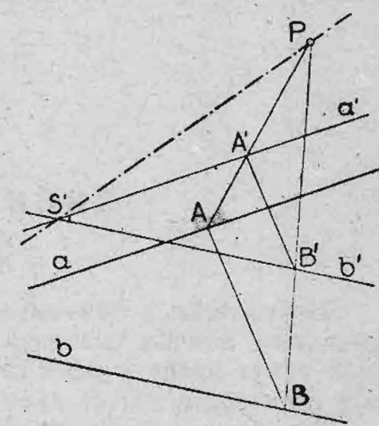
Сл. 38

Нека је P' треће теме сличног троугла $A'B'P'$ с паралелним странама ($AB \parallel A'B'$, $AP \parallel A'P'$, $BP \parallel B'P'$). Тада су a, b и PP' зраци сличности, дакле секу се у недостижној тачки пресека и према томе тражена права је $s \equiv PP'$.

Можемо и тачку P сматрати средиштем сличности (сл. 40). Повуцимо неку праву која сече a и b у тачкама A и B и паралелну праву која сече AP и BP у A' и B', затим кроз A' повуцимо праву $a' \parallel a$ и кроз B' праву $b' \parallel b$. Ако се тачка $a' \times b' \equiv S'$ може конструисати, права $s \equiv S'P$ пролази кроз недостижну тачку $a \times b \equiv S$. Заиста, сад су троугли ABS и $A'B'S'$ слични и у сличном положају а P средиште сличности.



Сл. 39

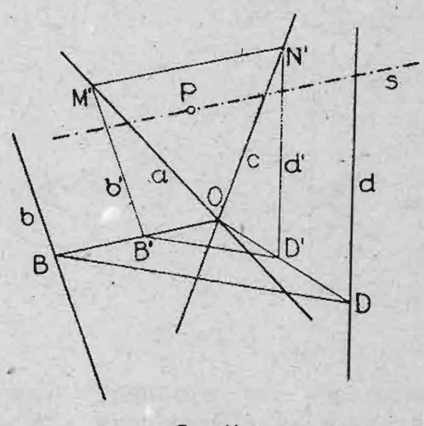


Сл 40

Додајмо још следећи задатак:

Задатак 3. *Кроз дату тачку P повући праву упоредну недостижној правој која пролази кроз недостижни пресек M датих правих a и b и недостижни пресек N датих правих c и d.*

Решење се лако налази, рецимо, помоћу сличности, узимајући напр. $O \equiv a \times c$ за средиште сличности (сл. 41). Повуцимо праву која сече b и d у B и D и одредимо пресеке B' и D' упоредне праве и зрака сличности BO и DO. Повуцимо кроз B' и D' праве $b' \parallel b$ и $d' \parallel d$ и нека је $M' \equiv a \times b'$, $N' \equiv c \times d'$. Тада је, очигледно, $M'N' \parallel MN$, дакле тражена права је права $s \parallel M'N'$.



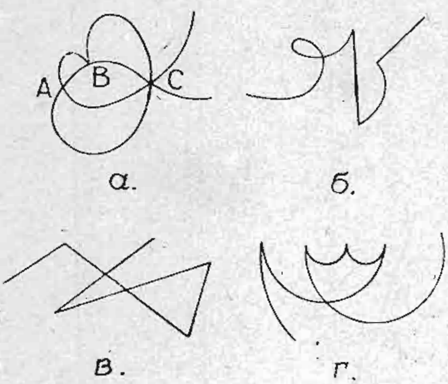
Сл. 41

ГЛАВА III

ЛИНИЈЕ И ПОВРШИ

21. О ЛИНИЈАМА УОПШТЕ*

Не улазећи у обимнија разматрања рецимо само да се *линија* или *цр̄та* може обично сматрати путањом тачке која се креће. Ако се тачка успут враћа у неки свој ранији положај, образује у том положају *вишес̄тр̄уку т̄ачку* линије: *двос̄тр̄уку* ако се враћа само једанпут (сл. 42а, тачке A и B), *т̄рос̄тр̄уку* ако двапут (тачка C) итд. Тачке на линији, које нису вишеструке, зовемо *једнос̄тр̄уким*. Ако се тачка напослетку враћа у полазни положај линија је *зат̄ворена*, ако не, линија је *от̄ворена*. Отворена линија има две крајње тачке.



Сл. 42

Узимамо ли у обзир и бескрајно далеке тачке, можемо разликовати *затворене линије у обичном смислу* (остале су отворене у обичном смислу) од затворених *у бесконачнос̄ти*, које дакле пролазе кроз бескрајно далеке тачке. Напр. права, хипербола и парабола су отворене линије у обичном смислу (хипербола се састоји штавише из две отворене линије), али су затворене у бесконачности (права и хипербола секу, а парабола додирује бескрајно далеку праву); експоненцијална крива (напр. која претставља функцију $y = e^x$) није затворена ни у бесконачности.

Линија која нема вишеструких тачака зове се *прос̄та линија*. Такви су напр. правилни многоугли, конусни пресеци, праве и дужи.

Црта може садржати делове који су *прави* и делове који су *криви (закривљени)* (сл. 42б). Прав део је дуж или полуправа. Ако је цела црта права, састоји се цела из једне дужи, полуправе или неограничене праве (коју, кратко, називамо *йравом* . Линија којој ниједан део

* Како се у нацртној геометрији бавимо разним врстама кривих линија и површи, износимо пре појединих метода нацртне геометрије ову главу о кривим линијама и површима, а затим главу о конусним пресецима. Читалац може при првом прелажењу ове књиге да прескочи те главе, а да се на њих враћа кад и у колико му буде при даљем раду потребно.

није прав је *крива линија*, краће, *крива* (у правом смислу речи, јер и праву треба неки пут сматрати нарочитим случајем криве). Део линије, који је крив називамо луком те линије.

Ако тачка која својим кретањем описује линију, мења смер кретања постепено, на непрекидан начин, линија има у свакој тачки одређену *дирку (тангенту)* и назива се *глатка крива*. Ако тачка која описује линију описује редом низ дужи, или простих, отворених глатких кривих, мењајући у њиховим крајњим тачкама, у којима се састају по две узастопне дужи или криве, смер кретања, линију називамо *изломљеном*. Те крајње тачке су *темена* или *врхови* изломљене линије. Изломљена линија је *праволинијска* ако се састоји из самих дужи (може се допустити да те „дужи" садрже и бескрајно далеке тачке), а *криволинијска* ако се састоји из глатких кривих (сл. 42 в и г). Обично се под изломљеним линијама подразумевају праволинијске изломљене линије. Према томе под троуглима, четвороуглима и уопште под многоуглима подразумевају се (сем изузетно) праволинијске затворене изломљене линије. Криволинијске изломљене линије убрајају се у криве. Темена криволинијских изломљених линија, као и вишеструке тачке кривих, припадају сингуларним тачкама кривих.

Линије које су садржане у једној равни називамо *равним линијама*, а остале *просторним линијама*. Тако напр. конусни пресеци су равне линије (равне криве), међусобни пресеци (продори) пирамидних површи су (уопште) просторне изломљене линије (просторни многоугли), међусобни пресеци конусних површи су (уопште) просторне криве.

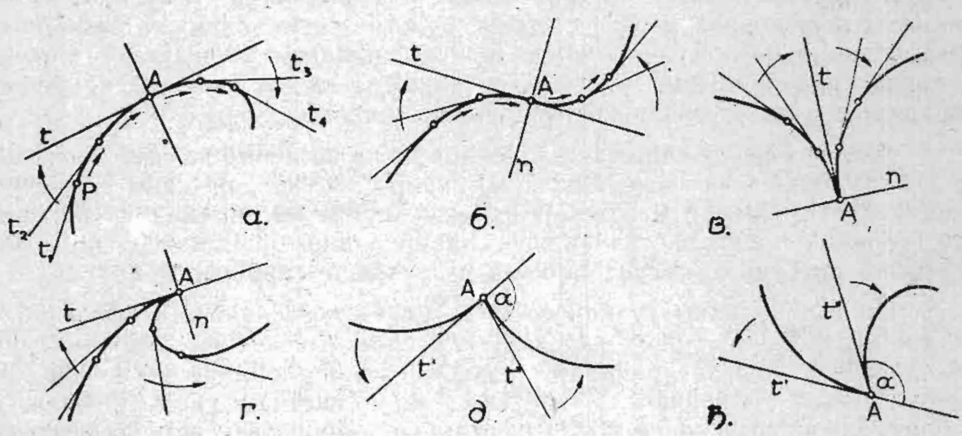
По начину како су криве дате можемо разликовати *графичке* и *закономерне криве*. Криву називамо *закономерном* кад је положај сваке њене тачке одређен правилом, законом, било у облику једначина између њених координата у извесном координатном систему било у облику правила како се крива конструише. Криву називамо *графичком* кад није дата закономерно, већ је непосредно нацртана. Таква је крива коју слободном руком нацртамо како било на листу хартије. Таква је и крива непознате законитости коју је забележила нека физичка справа или коју смо провукли кроз дати низ тачака, којим је крива била непотпуно одређена (емпиријске криве). Како једном пројекцијом ниједан лик није потпуно одређен, крива у простору графички је дата тек ако су дате графички њене пројекције на две равни. У котираној пројекцији криве су дате графички, пројекцијом на једну раван, и котама извесних тачака, тј. *графичко-нумерички*.

Међу закономерним кривим разликују се особито *алгебарске* и *трансцендентне*. Алгебарске криве су оне чије су праволинијске координате повезане алгебарским једначинама (у равни једначином облика $\Sigma a_{ik} x^i y^k = 0$); остале су трансцендентне (напр. синусоида). Степеном алгебарских једначина (највећом вредности збира $i+k$) одређен је *ред* алгебарске криве. Алгебарска крива првог реда је *права*, другог реда *конусни пресек*. Просторне алгебарске криве су трећег и вишег реда. Равну алгебарску криву n-тог реда може права те равни сећи највише у n тачака; из једне тачке у равни може се на криву повући највише n тангената.

22. РАВНА КРИВА У БЛИЗИНИ ЈЕДНЕ СВОЈЕ ТАЧКЕ

О понашању равне криве k у близини једне њене једноструке тачке A у којој се састају два њена глатка лука, можемо расудити ако посматрамо како дирке мењају правац кад се додирна тачка креће на кривој и пролази кроз уочену тачку A. Тачка P, описујући криву, може у тачки A задржати смер кретања (сл. 43, а и б), обрнути га (сл. 43, в и г) или га само променити за известан угао α (сл. 43, д и ђ). Дирка која на глатком луку мења свој правац постепено (непрекидно), може се при томе окретати у истом смеру (сл. 43, а и в) или у тачки A обрнути смер окретања, но мењајући свој правац и у тачки A постепено, (сл. 43, б и г) или у тачки A нагло променити правац (сл. 43, д и ђ).

Ако тачка P и дирка не мењају свој смер у тачки A, тачка A је *обична тачка* криве. Оба глатка лука која се састају у A образују ј е д а н гладак лук (сл. 43, а).



Сл. 43

Дирке у појединим тачкама криве су у близини тих тачака обично с једне стране криве. Тада лук називамо *испупченим* или *конвексним* спрам оне његове стране с које су дирке, а *удубљеним* или *конкавним* спрам супротне стране. Тако је у свим обичним тачкама.

Ако тачка P не мења смер кретања у тачки A, но дирка мења смер, тачка A је *превојна тачка* (сл. 43, б). И сад оба глатка лука која се састају у A образују ј е д а н гладак лук. Ако се тада уочени део криве посматра с једне, које било његове стране, налази се да је с те стране један од два лука што се састају у A испупчен, други удубљен

Ако тачка P обрће смер кретања у тачки A, тачка A' је *повратна тачка*, и то: ако дирка не мења смер обртања A је *повратна тачка прве врсте* или *шиљак* (сл. 43, в), ако пак и дирка мења смер, A је *повратна тачка друге врсте* или *кљунаста тачка* (сл. 43, г).

У сва четири претходна лучаја постоји у A једна одређена тангента t и нормала n.

Ако тачка P мења смер кретања у A за известан удубљен (или испупчен) угао, тачка A је *угаона тачка криве*. И тада можемо разликовати два случаја као за повратну тачку (сл. 43, д и ђ). У тачки A постоје тада две разне тангенте t' и t'' и према томе две разне нормале.

Ако постоје повратне и угаоне тачке, можемо криву сматрати изломљеном линијом, а те тачке њеним теменима.

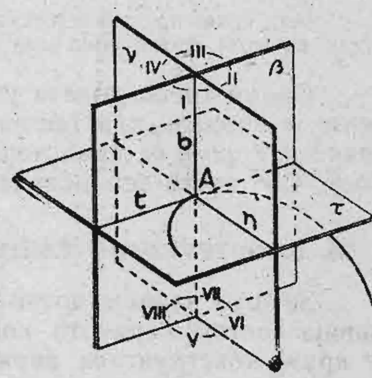
Превојне, повратне и угаоне тачке, као и вишеструке тачке спадају у *сингуларне тачке* кривих.

Напоменимо да се ово посматрање може пренети и на бескрајно далеке тачке кривих. Дирка у бесконачно далекој тачки је *асимптота*, а свака права паралелна асимптоти сече криву у бесконачности.

23. ПРОСТОРНА КРИВА У БЛИЗИНИ ЈЕДНЕ СВОЈЕ ТАЧКЕ

Свака раван која садржи неку дирку t криве k зове се *додирна* или *тангентна раван*. Тачка додира A дирке је и тачка додира те равни с кривом. Може се удесити да та додирна раван пролази кроз ма коју оближњу тачку P криве, дакле да садржи сем двеју бесконачно блиских тачака криве у A, још и тачку P. Ако се P приближује с једне или друге стране тачки A, та додирна раван се обрће око дирке t и кад се P поклопи с A постаје *оскулациона раван (раван припијања)*, која садржи у A три бесконачно блиске тачке криве, дакле припаја се уз криву више од свих осталих додирних равни (сл. 44, раван τ).

Раван управна на дирку t у тачки A је *управна* или *нормална раван* ν. Све праве у ν, које пролазе кроз A управне су на кривој k у A. Нормала $\nu \times \tau = n$, тј. она која је у оскулационој равни τ, зове се *главна нормала*, а нормала b, која је управна на n, зове се *бинормала*. Додирна раван која садржи бинормалу, тј. раван $bt = \beta$ зове се *ректификациона раван*. Равни τ, ν и β су међу собом управне, а тако исто и праве t, n и b и граде такозвани *основни* или *природни триједар* криве k у тачки A.



Сл. 44

Као што смо о природи равне криве у близини једне њене тачке закључили на основу кретања тачке на кривој и дирке у тој тачки, тако можемо и сад, но како се и положај оскулационе равни мења од тачке до тачке, треба узети у обзир и ту раван. Положај те равни је одређен бинормалом. Према томе замислићемо тачку P која се креће на кривој и у тачки A обрће или пак не обрће смер кретања, затим дирку у P, којој се смер окретања у A обрће или не, и још бинормалу у P, којој се такође смер окретања у A обрће или не.

Ако се ниједан од та три смера не обрне у A, већ мења на непрекидан начин, тачка A је *обична тачка*. Тада крива пролази у A с једне на другу страну равни τ (у сл. 44 прелази с горње на доњу страну) и сече раван ν, али остаје с исте (предње) стране равни β.

Ако се смер окретања бинормале обрне у A, крива остаје с исте стране равни τ. Тада крива има с том равни четири заједничке бесконачно блиске, тачке и τ називамо *суперoскулационом равни*, а исто тако можемо назвати тачку A. Ако се смер окретања тангенте обрне у A, крива прелази с једне на другу страну равни β и A је *превојна тачка*. Ако само тачка P обрне у A смер кретања, имамо *повратну тачку*. Тачнији преглед могућих случајева имамо кад узмемо у обзир осам октаната на које основни триједар дели простор. Октанти су нумерисани као што је на слици назначено, бројевима I до VIII, а у следећој схеми је обележено кроз која два октанта пролази крива у близини тачке A, претпоставивши да полази из квадранта I.

	ν	β	τ	врсте тачака	октанти
1	+	—	+	обична	I, VI
2	+	—	—	суперoскулациона	I, II
3	+	+	+	превојна	I, VII
4	+	+	—	превојно супероск.	I, III
5	—	+	+	повратна	I, VIII
6	—	+	—	повратна	I, IV
7	—	—	+	повратна (кљунаста)	I, V
8	+	—	—	повратна (кљунаста)	I, I

(Ако крива прелази с једне на другу страну равни ν, τ или β, стоји знак +, ако остаје на истој страни стоји знак —)

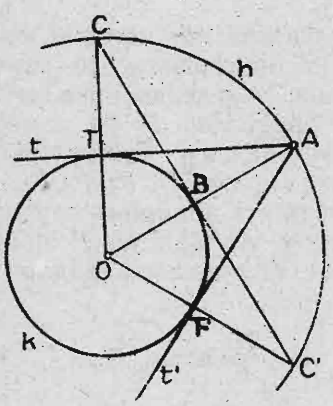
Овоме треба додати *угаоне тачке*, које настају када се у A тангенти и нормали или тангенти и бинормали нагло промени смер, и тачке у којима се само нормали или само бинормали нагло промени смер. Све тачке сем обичних називају се *сингуларне тачке*.

24. КОНСТРУКЦИЈА ТАНГЕНТЕ И НОРМАЛЕ НА НАЦРТАНУ КРИВУ

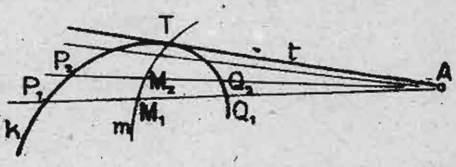
За што тачније цртање тангената и нормала нарочитих кривих линија постоје нарочите конструкције. Да би се напр. у некој тачки P круга конструисала дирка на тај круг, повуче се кроз P управна на полупречник који се завршава у P; та управна је дирка. Да би се из неке тачке A ван круга k конструисала нормала на круг, спаја се та тачка са средиштем O круга (сл. 45). Да би се конструисала дирка из A на k и одредила њена додирна тачка, довољно је нацртати дирку непосредно, а затим кроз O повући управну на дирку; ова сече дирку у њеној додирној тачки. Али може се и овако поступити: Из средишта O круга k опише се кроз тачку A круг h, затим кроз тачку $B = OA \times k$ повуче се управна на OA и одреде се њени пресеци C и C' са h. Пресечне тачке $OC \times k$ и $OC' \times k$ су додирне тачке T и T' тангената из A на круг k. Спајањем тих тачака с A добијамо тражене тангенте. Постоје нарочите конструкције и за неке друге криве линије.

О повлачењу тангенте ма на коју нацртану криву, у некој њеној обичној тачки напомињемо ово: Конструкција може бити довољно тачна само ако је крива извучена довољно танко. Тада можемо дирку датог правца повући непосредно. Да би се пак одредила што тачније тачка додира, треба да се оном месту где очекујемо да је та тачка приближимо лењиром с удубљене стране криве, тако да ивица лењира сече криву непрестано у две тачке, које се узајамно приближују. У колико су ближе утолико тачније је тачка додира једнако удаљена од њих. Кад се не би тако поступило могло би се догодити да тачка додира, па и извучена дирка буду врло нетачне.

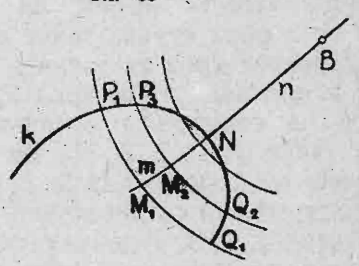
Ако дирку треба повући на нацртану криву из дате тачке A, поступа се слично. Могу се штавише повући кроз A сечице $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3, \ldots$ блиске дирци. Тачка додира T тражене дирке AT је између тачака P и тачака Q (сл. 46), дакле ако су, рецимо, P_3 и Q_3



Сл. 45



Сл. 46



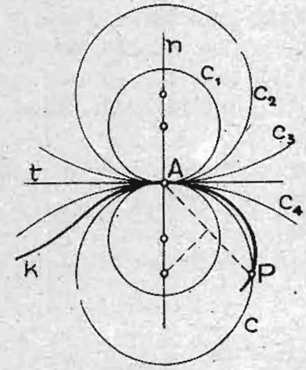
Сл. 47

довољно блиске међу собом можемо за T узети средиште лука $P_3 Q_3$. Тачније је ако се одреде средишта M_1, M_2, $M_3, \ldots$ дужи $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3\ Q_3, \ldots$ и кроз њих провуче што правилнија *средишња крива m*. Где крива m сече дату криву k налази се додирна тачка T, кроз коју пролази тражена тангента.

Да би се из тачке B конструисала нормала на криву, могу се из B описати кружни лукови који секу криву близу тачке где очекујемо да је подножје N тражене нормалне BN. Крива отсеца на тим круговима лукове P_1Q_1, P_2Q_2, $P_3Q_3, \ldots$ (сл. 47) Провуцимо кроз средишта M_1, M_2, M_3, $\ldots$ тих лукова што правилнију средишњу криву m. Где крива m сече дату криву k имамо подножје N нормале спуштене из B на криву.

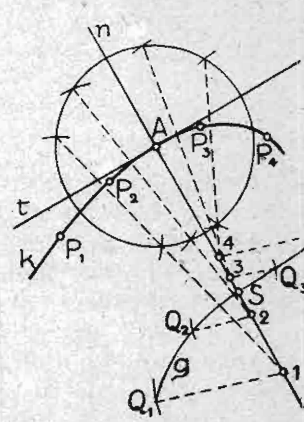
25. КОНСТРУКЦИЈА КРУГА КРИВИНЕ

Сви кругови који додирују дату криву k у једној њеној тачки A, имају с кривом у тој тачки заједничку дирку t (сл. 48, напр. кругови c_1, c_2, итд.). Дакле средишта тих кругова су на управној n повученој на криву у тачки A. Кроз сваку оближњу тачку P криве пролази по један такав круг, рецимо *c*. Његово средиште је на пресеку управне *n* и симетрале дужи *AP*. Тај круг пролази, како се каже, кроз две бесконачно блиске тачке на кривој *k* у *A* и кроз тачку *P*. Ако се тачка *P* приближује (с једне или друге стране) тачки *A*, креће се и средиште додирног круга на управној *n*, а кад се *P* поклопи с *A* имамо круг који у *A* додирује криву приснијe од свих других додирних кругова, јер за тај круг може се рећи да пролази кроз три њене бесконачно блиске тачке. Тај круг најприснијег додира с кривом, који се дакле у *A* највише припија уз криву, је *круг кривине* или *оскулације, оскулациони круг* у тачки *A*. Његово средиште је *средиште кривине*. Додир се пак зове тада *оскулација* (може се рећи и *припијање*).



Сл. 48

Средиште *S* круга кривине можемо наћи овлаш на нормали *n* описивањем додирних кругова који су, једни, очигледно премалени, други превелики. Средиште *S* је између средишта једних и средишта других кругова. Тачнију конструкцију можемо извести овако: За неколико тачака криве $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ које су с обих страна тачке *A*, одредимо средишта додирних кругова који пролазе кроз те тачке и додирују криву у *A*. Кад се *P* креће на *k* и пролази редом кроз P_1, P_2, P_3, P_4, креће се средиште додирног круга на нормали *n* и пролази редом кроз тачке *1*, *2*, *3*, *4*. Да би се добио положај средишта кад је *P* у *A*, може се конструисати следећа *крива грешака g*: из тачака *1*, *2*, *3*, *4* повуку се упоредне и на њих се пренесу отстојања тачака $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ од *A*, на једну или другу страну, па се кроз добијене тачке Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 провуче што правилнија крива *g*. Где се *g* сече с *n* имамо средиште кривине, *S* (сл. 49).



Сл. 49

У изузетним тачкама криве може круг кривине имати с кривом четири заједничке бесконачно блиске тачке. Тај се додир с кривом зове *суперoскулација*, а круг кривине *суперoскулациони круг*. То бива онда када додирни кругови у таквој тачки *A*, који се мало разликују од круга кривине, секу криву у по једној тачки са сваке стране тачке *A*, рецимо у *P'* и *P''*, па кад се *P'* приближује тачки *A*, приближује се и *P''*. Таква тачка криве назива се њеним *теменом* (напр. елипса има четири темена, хипербола два, парабола једно).

26. О ПОВРШИМА УОПШТЕ И О ТЕЛИМА

До потребних појмова о површима (или плохама) доћи ћемо најједноставније ако пођемо од њихових *елементарних области (дводимензионих ћелија* у топологији), подразумевајући тиме свако мноштво тачака у простору, које се обострано једнозначно и непрекидно може пресликати на део равни ограничен простом затвореном линијом (напр. кругом). Укупност тачака које при томе одговарају тој затвореној линији (и које образују просторну затворену линију) је *руб* елементарне области, а свака тачка која није на рубу је *унутарња тачка* те области. Према томе свака равна површ ограничена простом затвореном линијом је и сама једна елементарна област. Но елементарна област је и део сфере отсечен једном равни, или омотач пирамиде или купе итд.

Две елементарне области називамо *суседним* ако њихови рубови имају заједничку линију (лук или дуж). За мноштво елементарних области рећи ћемо да је *повезано* ако ма за које две елементарне области ε и ε' тог мноштва постоји коначан низ елементарних области истог мноштва, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, при чему је $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$, $\varepsilon_n \equiv \varepsilon'$, тако да су два узастопна члана тог низа суседне елементарне области.

Сад можемо рећи укратко да је *површ свако повезано мноштво елементарних области.* Тим мноштвом површ је пак подељена на елементарне области. Очигледно, једна површ се на бескрајно много разних начина може поделити на елементарне области.

Сваку елементарну област једне површи, која садржи извесну тачку те површи као унутарњу тачку, називамо *околином* те тачке. Свака тачка површи, која има околину је унутарња тачка површи; остале, ако постоје, образују *руб површи.* Површ која има руб је *отворена*, а која га нема, *затворена.* Ако узмемо у обзир и бескрајно далеке тачке, можемо разликовати површи затворене у обичном смислу и затворене у бесконачности. Ове последње додирују, секу или делимично садрже на неки други начин, бескрајно далеку раван (напр. обе врсте хиперболоида и параболоида).

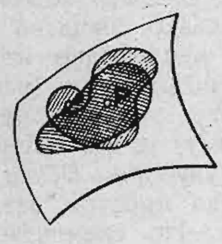
Ако на површи заједнички део сваких двеју околина једне тачке P (у сл. 50 обе, у разним правцима процртане области) садржи целу једну околину тачке P (двоструко процртана област), P је *једнострука тачка.* Ако постоје две околине тачке P, чији заједнички део не садржи никакву елементарну област, али не постоје три околине тачке P тако да заједнички део двеју не садржи никакву околину тачке P, то је *двострука тачка* површи (сл. 51). Слично се могу дефинисати *тростструке* и уопште *вишеструке тачке.*

Постоје „разгранате" површи, као напр површ претстављена у слици 52, која се „грана" дуж криве s, и „неразгранате" површи. Ограничавамо се отсад на неразгранате површи.

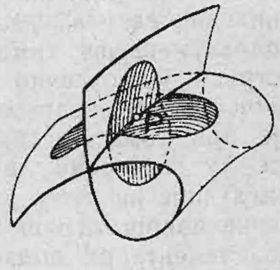
Ако су све тачке површи једноструке, површ је *проста.* Вишеструке тачке могу бити *усамљене* (напр. двострука тачка S у слици 53) или сачињавати *линије* (сл. 51).

Површ може садржати делове који су *равни* и делове који су *криви.* Површ која је цела равна назива се *равна површ,* а која је

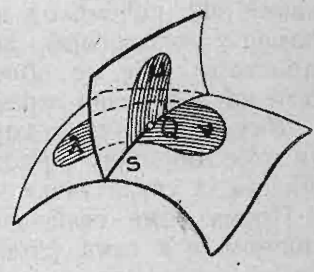
цела крива, *крива површ*. Ако површ није равна, али се може поделити на равне површи, то је *рогљаста површ* у обичном смислу речи.



Сл. 50

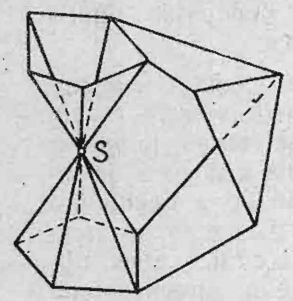


Сл. 51



Сл. 52

Раван која има с кривом површи три заједничке тачке A, A', A'', сече ту површ дуж неке линије. Ако та раван тежи одређеном граничном положају ма како да се тачке A' и A'' у разним правцима приближују тачки A, раван у том граничном положају је *додирна* или *тангентна раван*, а тачка A њена *тачка додира*. Ако у свакој тачки површи постоји једна одређена додирна раван, рећи ћемо да је површ *обла* (напр. лопта). Вишеструке тачке и тачке у којима површ није ни равна ни обла јесу *сингуларне тачке* површи.



Сл. 53

Обично се површи састоје из равних или облих делова, а сингуларне тачке су им или усамљене тачке: *конусне тачке*, или образују линије: *ивице*, дуж којих се граниче ти равни или обли делови, а ови се тада зову *стране*, *пљосни* или *пљошти* (у ширем смислу). Тачке у којима се састају три или више ивица су *врхови* или *темена*. Тако је напр. кружна купа проста затворена површ која има једну усамљену сингуларну тачку (врх купе) и једну затворену сингуларну линију (ивични круг при основи), кружни ваљак има две сингуларне линије.

Можемо дакле говорити и о рогљастим површима у ширем смислу, као површима које се могу поделити на равне или обле делове (пљосни), и разликовати *обичне рогљасте површи* (равно опљоштене), којима су све стране равне, *обле рогљасте површи* (обле површи у ширем смислу), којима су све стране обле (напр. обли тетраедар) и *мешовите*, које имају и облих и равних страна (напр. ваљак). Затворена рогљаста површ зове се и *полиједар*.

Део простора, ограничен једном, двема или већим бројем затворених површи је *тело*. За површ која ограничава неко тело кажемо да је *површ тога тела*. Тачке тела које нису на његовој површи су његове *унутарње тачке*. Тело може бити коначно или бесконачно према томе да ли у унутрашњости или на својој површи нема или има бесконачно далеких тачака. Разликујемо *обла тела*, чије површи су обле, и *рогљаста тела*, чије површи су рогљасте површи, и то *обична* (равно опљоштена), *обла* и *мешовита*.

Под **полиједром** се често подразумева и тело ограничено истоименом површи. Исто тако сматра се често и пирамида, призма, купа итд. телом. У овом течају називаћемо тим именима првенствено површи, а само изузетно, ради краћег изражавања назваћемо тако тела (уместо да кажемо: тело пирамиде, тело призме итд.).

По начину како су површи дате можемо разликовати опет *графичке* и *закономерне површи*. Површ називамо *закономерном* кад је положај сваке њене тачке одређен извесним законом (правилом) било у облику једначина између њених координата у извесном координатном систему, било у облику правила како се површ конструише (непосредно у простору или у пројекцији). Таква је напр. лопта, или каква било површ другог реда. Површ називамо *графичком* кад је дата графички, а то значи — будући да се могу цртати само линије — да је графички дат известан, довољно густ низ линија на тој површи; те линије могу образовати и мрежу. Од густине тих линија зависи степен тачности којом је графичка површ дата. У котираној пројекцији површи су дате графичко-нумерички (пројекцијом изохипса и њиховим котама).

Међу закономерним површима истичу се *алгебарске* и *трансцендентне*. Ако праволинијске координате тачака неке површи задовољавају алгебарску једначину, површ је алгебарска. Остале површи су трансцендентне.

Степеном алгебарске једначине одређен је *ред алгебарске површи*. Алгебарска површ првог реда је раван. Алгебарске површи другог реда су: 1. *елипсоид*, 2. *елипсни параболоид*, 3. *двокрилни хиперболоид*, 4. *једнокрилни хиперболоид*, 5. *хиперболни параболоид*, 6. *елипсна купаста површ*, 7. *елипсна ваљкаста површ*, 8. *параболна ваљкаста површ*, 9. *хиперболна ваљкаста површ* не узимајући у обзир имагинарне површи другог реда и дегенерисане. Лопта је посебан случај елипсоида, а у 6 и 7 треба круг сматрати посебним случајем елипсе.

Алгебарску површ n-тог реда сече раван у алгебарској кривој n-тог реда, а права у највише n тачака. Из једне тачке која је ван површи може се на површ повући највише n тангентних равни.

27. РОГЉАСТЕ ПОВРШИ

Задржимо се још на обичним (равно опљоштеним) рогљастим површима. Свака пљосан такве површи ограничена је једним или више него једним многоуглом. Ако је рогљаста површ отворена постоје на појединим пљоснима слободни рубови, дуж којих се не састају по две суседне пљосни и који сачињавају руб те површи. Ако је површ затворена састају се дуж сваке ивице по две суседне пљосни. Кад је рогљаста површ проста једине заједничке тачке њених пљосни су на ивицама дуж којих се састају по две суседне пљосни, и врхови у којима се састају три или више пљосни.

Ако узмемо у обзир и бескрајно далеке тачке, пљосан може бити и равна површ ограничена двема полуправим или двема упоредним правим; прву називамо *углом*, другу *пругом*. Ако се рогљаста површ састоји из углова којима је теме заједничко и ако је сваки крак једног угла уједно крак суседног угла, рогљаста површ је *рогаљ*. Заједничко теме је *врх* или *теме* рогља. Рогаљ је отворена рогљаста површ чији руб је у бескрајно далекој равни. Ако се рогљаста површ састоји из пруга, и ако је свака ивица једне пруге уједно ивица суседне пруге, све ивице су међу собом упоредне и рогљасту површ називамо *призмастом површи.*

У сваком темену ма које пљосни затворене рогљасте површи (полиједра) састају се три или више пљосни те површи. Ако ивице које се у једном темену састају продужимо у полуправе, добићемо ивице једног рогља, који називамо *рогљем* т е р о г љ а с т е п о в р ш и, а његов врх *врхом* или *теменом* т е п о в р ш и. Пљосни које се састају у једном врху, садржане су на пљоснима одговарајућег рогља.

Најмањи број пљосни полиједра је четири. Према броју пљосни разликујемо *тетраедар* (4), *хексаедар* (6), *октаедар* (8), *додекаедар* (12), *икосаедар* (20) и уопште *n*-*тоедар* (или *n*-*топљосник*).

Ако раван која садржи ма коју пљосан полиједра не пресеца полиједар, тај полиједар се зове *испупчен (конвексан)*; у противном зове се *удубљен* (*конкаван*).

Проста затворена рогљаста површ, која настаје кад се рогаљ пресече једном равни која сече све ивице рогља, зове се *пирамида*; проста затворена рогљаста површ која настаје кад се призмаста површ пресече двема упоредним равнима зове се *призма.* Пљосни пирамиде или призме, које припадају поменутом рогљу одн. призмастој површи су *бочне пљосни*, а оне које припадају пресечним равнима су *основе.*

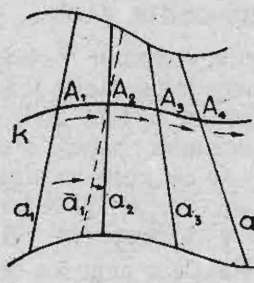
Проста затворена рогљаста површ која настаје кад се рогаљ пресече двема упоредним равнима које секу све његове ивице је *зарубљена пирамида.* Проста затворена рогљаста површ којој су две пљосни паралелне, а руб сваке друге пљосни има заједничких тачака с рубовима првих двеју пљосни, је или призма или *призматоид.*

28. ПРАВОЛИНИЈСКЕ ПОВРШИ

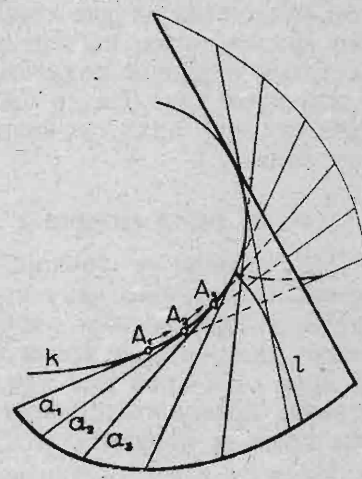
Широк разред кривих површи, значајних у разним наукама и техничкој делатности, сачињавају *кинематичке површи*, а то су површи које се могу произвести кретањем једне линије. Површ која настаје кретањем праве називамо *праволинијском* или *правастом површи.* Транслацијом (паралелним померањем) неке линије настаје *транслациона површ*, обртањем (ротацијом) неке линије око извесне сталне праве настаје *обртна (ротациона) површ*, а завојним кретањем неке линије, тј. обртањем око извесне праве уз транслацију дуж те праве, *завојна површ.* Размотримо изближе правасте површи.

Како се праваста површ производи кретањем праве, кроз сваку тачку те површи пролази бар једна права коју та површ садржи. Те праве називамо *изводницама* правасте површи. Ако познајемо три линије које права у кретању стално сече, то кретање је потпуно одређено, јер кроз сваку тачку једне од тих линија може се поставити бесконачно много правих које секу и другу линију, али само једна права, или макар само коначно много њих, које истовремено секу обе друге линије. Према томе, праваста површ је одређена трима линијама у простору. Зовемо их *водиљама* правасте површи. Водиље су, опште узевши, просторне линије. Једнокрилни хиперболоид и хиперболни параболоид су правасте површи чије водиље су три међу собом мимоилазне праве. Како се на свакој правастој површи могу конструисати три линије које секу изводнице а узајамно се не секу, може се свака праваста површ произвести кретањем праве дуж три водиље.

Како се свако кретање може разложити на транслацију и ротацију, можемо замислити и да праваста површ настаје тиме што се права a обрће на известан начин око једне своје тачке A и у исто време помера паралелно, тако да тачка A описује извесну линију k. Док A дође из A_1 у A_2 (сл. 54), права a би самом транслацијом прешла из a_1 у $\bar{a}_1$ ($a_1 \parallel \bar{a}_1$), но како се обавља и одговарајуће обртање око A, које би праву a превело из $\bar{a}_1$ у a_2, права a прелази у ствари из a_1 у a_2,



Сл. 54



Сл. 55

описујући траку правасте површи између a_1 и a_2. Кретање се на тај начин наставља до a_3 итд.

Збива ли се ово кретање тако да се права a обрће око једне **своје тачке** A и у исто време помера паралелно у правцу саме те **праве, или никако,** праваста површ је *развојна површ.* Дакле, док A **дође из** A_1 у A_2 (сл. 55), крећући се у правцу саме праве a (приближно **праве** a_1), обрне се права a за известан угао, приближно у **извесној равни** (раван a_1a_2), прелазећи из a_1 у a_2. Према томе, за две **бесконачно блиске** изводнице a_1 и a_2 може се сад рећи да се секу, **јер тачка додира,** A_2 дирке a_2 на криву k налази се на дирци a_1. Дакле **развојна површ** се може *развити* у једну раван, не растежући је нити **стварајући** наборе. Можемо замислити да у раван постављамо прво **равни** део између двеју бесконачно блиских изводница a_1 и a_2, па део између a_2 и a_3 итд.

Неразвојне праволинијске површи називају се *витоперним површима.* Такав је једнокрилни хиперболоид и хиперболни параболоид. Витопере површи се не могу развити у раван.

Крива коју додирују изводнице развојне површи је сингуларна **линија површи,** и зове се *повратна линија* или *гребен.* Та крива је **обвојница свих изводница.** У свакој њеној тачки постоји одређена додирна раван површи, која садржи две бесконачно блиске изводнице.

тј. додирује развојну површ дуж целе једне изводнице и уједно је оскулациона раван гребена у посматраној тачки. Свака раван која сече гребен, сече и развојну површ, и то по кривој која у тачки гребена има повратну тачку (крива l у сл. 55). Дирке ма на коју просторну глатку криву образују развојну површ којој је та крива гребен.

Развојна површ је гребеном раздељена на два своја *крила*, која се дуж гребена састају и додирују.

Ако се тачка A не креће, већ је одређена тачка у коначности, развојна површ је *купаста површ*, тачка A њен *врх*. Купаста површ је врхом раздељена на два своја крила. Ако је врх, тј. тачка A бесконачно далека тачка, настаје *ваљкаста површ*. Купаста површ је одређена врхом и једном водиљом за коју се може претпоставити да не пролази кроз врх. (На то би се свеле три споменуте водиље кад би се две секле у врху, припадајући напр. једној равни која не сече трећу водиљу.)

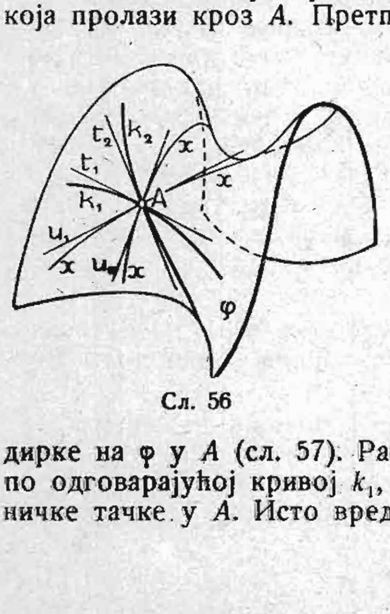
29. ОБЛА ПОВРШ У БЛИЗИНИ ЈЕДНЕ СВОЈЕ ТАЧКЕ

Не улазећи у тачније разматрање сингуларних тачака облих површи, посматрајмо неку површ φ у близини једне њене једноструке тачке A у којој постоји одређена додирна раван τ. Као што рекосмо, додирна раван у A је гранични положај пресечних равни σ које пролазе кроз A и кроз још две тачке A' и A'' на φ, које ма како, но у два разна правца теже тачки A. То значи да се A' и A'' крећу на двема глатким кривим k' и k'' на φ, које се у A секу (сл. 56).

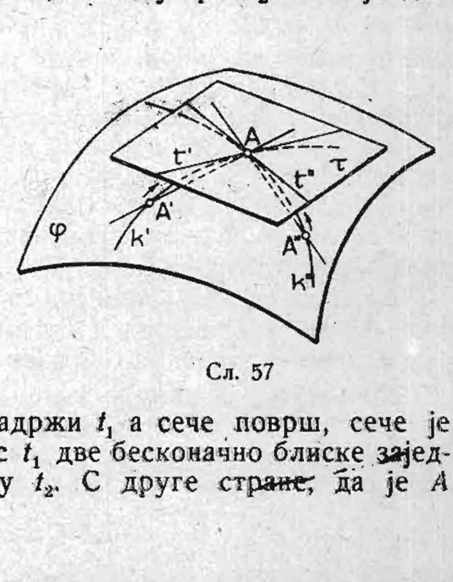
Нека су t' и t'' дирке на k' и k'' у A. Раван σ садржи сечице AA' и AA'', а кад σ прелази у τ те сечице прелазе у дирке t' и t''. Како су k' и k'' ма које криве на φ, глатке у A, додирна раван τ садржи дирку у A на сваку глатку криву која пролази кроз A.

Свака раван која сече површ φ у A, сече је по извесној кривој, а раван τ по правој која ту криву, па и саму површ додирује у A.

И сама додирна раван τ може сећи површ по извесној кривој x која пролази кроз A. Претпоставивши то, нека су t_1 и t_2 ма које две



Сл. 56



Сл. 57

дирке на φ у A (сл. 57). Раван која садржи t_1 а сече површ, сече је по одговарајућој кривој k_1, која има с t_1 две бесконачно блиске заједничке тачке у A. Исто вреди за дирку t_2. С друге стране, да је A

једнострука тачка криве x, то би могло вредети само за једну од тих двеју дирки (та би додиривала криву x). Дакле, x има у A двоструку тачку, у којој се секу два њена лука. Дирке u_1 и u_2 на кривој x у A јесу *главне дирке* површи у A.

Обе дирке на x у A могу се и поклопити. Тада је A тачка самододиривања криве x, или се обе гране те криве поклапају.

Кад постоји крива x по којој додирна раван у A сече површ φ и ако се у A секу две гране те криве, тачка A је *хиперболна тачка* површи. Ако се обе гране криве x и A додирују или се, штавише, обе гране поклапају, тачка A је *параболна тачка*. Ако додирна раван уопште не сече нити додирује површ дуж криве која пролази кроз A, тачка A је *елипсна тачка*. Напр. све тачке на лопти, на елипсоиду, елипсном параболоиду и двокрилном хиперболоиду су елипсне тачке; све тачке на једнокрилном хиперболоиду, хиперболном параболоиду и уопште на витоперним површима су хиперболне; све тачке на купастој површи, сем врха, дакле и на ваљкастој, и уопште на развојним површима су параболне тачке. Поједине површи могу имати и све три врсте тачака (напр. торус).

Права која пролази кроз тачку површи управно на додирну раван у тој тачки је *управна (нормала)* површи у тој тачки. Управне на површ у тачкама неке криве на површи образују праву површ. Кад је та праваста површ развојна, крива на датој површи је њена *линија кривине*. Крива на површи чија оскулациона раван садржи у свакој тачки управну на површ, је *геодезијска линија*. Крива на површи, чије дирке су главне дирке површи, је *асимптотска линија*. Ове појмове само наводимо. У опширнијем течају нацртне геометрије потребни су и ти појмови.

ГЛАВА IV

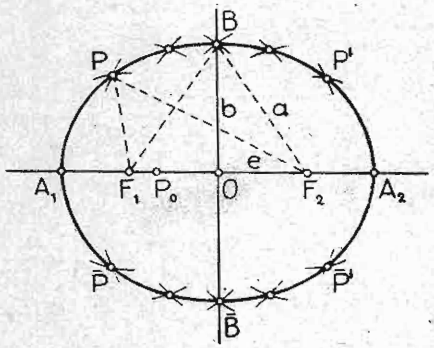
КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

30. КОНСТРУКЦИЈА КОНУСНИХ ПРЕСЕКА ПОМОЋУ ЖИЖА

После општих разматрања у претходној глави, о кривим линијама, па и линијама уопште, пређимо на конусне пресеке.

Потсећамо да криве линије које се зову *конусни пресеци, купни пресеци* или *конике* можемо конструисати већ на основу познатих дефиниција према којима је *елипса* геометријско место тачака за које је збир отстојања од двеју датих тачака (жижа) сталан, *парабола* геометријско место тачака једнако удаљених од дате тачке (жиже параболе) и дате праве (водиље), а *хипербола* геометријско место тачака за које је разлика отстојања од двеју датих тачака (жижа) стална.

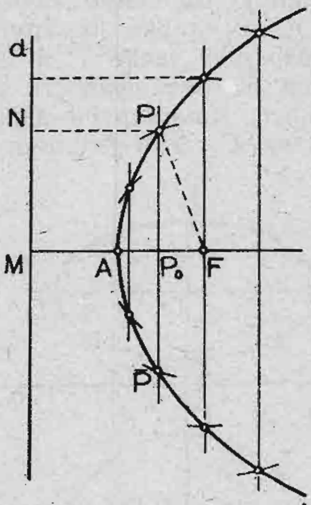
Елипса. Нека су дате жиже F_1 и F_2 и на правој F_1F_2 у продужењу дужи F_1F_2, темена A_1 и A_2 елипсе (сл. 58). Из поменуте дефиниције следује да је за сваку тачку P елипсе $PF_1+PF_2=A_1A_2$. Ако дакле узмемо коју било тачку P^0 између A_1 и A_2 и опишемо из F_1 круг полупречником A_1P_0 и из F_2 круг полупречником A_2P_0, у пресеку тих кругова добијамо две тачке P и $\overline{P}$ елипсе. Ако из F_1 опишемо круг првим полупречником, а из F_2 другим, добијамо још две тачке P' и $\overline{P}'$, симетричне спрам првих двеју у односу на малу осу елипсе. На тај начин, мењајући положај тачке P можемо конструисати онолико тачака колико нам је потребно да бисмо кроз њих могли довољно тачно провући елипсу. Дуж A_1A_2 је *велика оса* елипсе. Симетрала велике осе сече елипсу у крајевима *мале осе* $B\overline{B}$. Ако ставимо $OA_1=OA_2=a$, $OB=O\overline{B}=b$, $OF_1=OF_2=c$, имамо из правоуглог троугла OBF $c^2=a^2-b^2$.



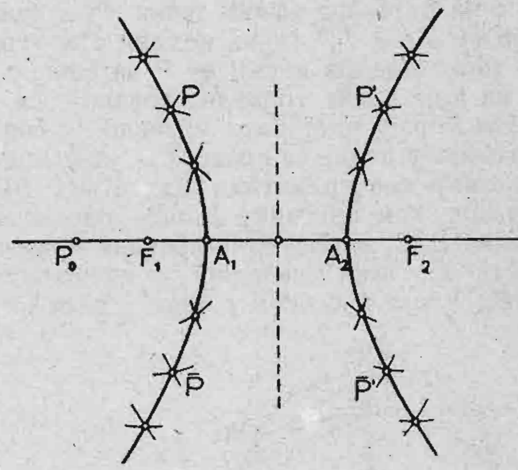
Сл. 58

Парабола. Нека је дато теме A параболе и жижа F. Полуправа AF с почетном тачком A је оса параболе. Тада је водиља d параболе права кроз тачку M, управна на AF, при чему је A средиште дужи MF (сл. 59). За сваку тачку P параболе је по дефиницији $PF+PN=MF$, где је N подножје нормале спуштене из P на d. Ако дакле узмемо ма коју тачку P_0 на оси параболе, такву да је $MP_0 > MA$ и кроз ту тачку повучемо упоредну водиљи, а полупречником MP_0 опишемо круг из жиже F добићемо у пресеку праве и круга две тачке параболе, P и $\overline{P}$. Мењајући положај тачке P_0 на оси MF можемо добити колико хоћемо тачака и кроз њих провући параболу.

Хипербола. Нека су дате жиже F_1 и F_2 и на дужи F_1F_2 темена A_1 и A_2 хиперболе (сл. 60). Из дефиниције следује да је за сваку тачку P хиперболе $PF_1 - PF_2 = A_1A_2$ или $P'F_2 - P'F_1 = A_1A_2$. Ако



Сл. 59



Сл. 60

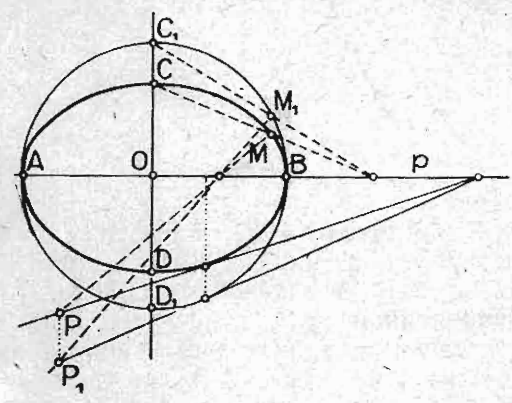
дакле узмемо коју било тачку P_0 на правој F_1F_2, али изван дужи F_1F_2, и из F_1 опишемо круг с полупречником A_1P_0 а из F_2 круг полупречником A_2P_0, њихови пресеци дају две тачке хиперболе. Ако затим из F_2 опишемо круг полупречником A_1P_0 а из F_1 круг полупречником A_2P_0 добијамо још две тачке хиперболе, симетричне првим двема у односу на симетралу дужи A_1A_2. Дуж A_1A_2 је *реална оса* хиперболе. Кругови описани из A_1 или A_2, полупречником који је једнак дужи OF_1 (или OF_2) секу симетралу дужи A_1A_2 у крајевима *имагинарне осе* $B\overline{B}$. С ранијим ознакама имамо сад $c^2 = a^2 + b^2$.

31. НЕКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ЕЛИПСЕ

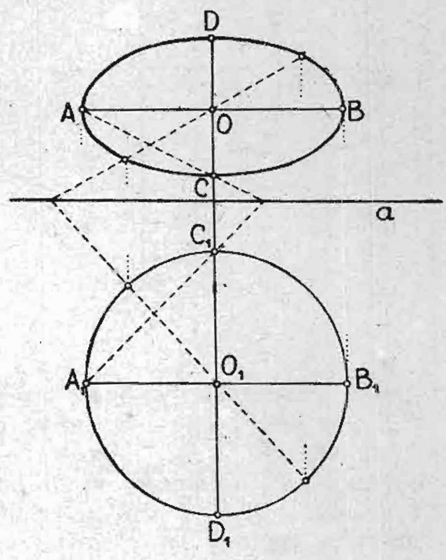
Конструкција помоћу афиности. Свака елипса је афина слика неког круга. То тврђење биће основано кад у посматрању паралелне пројекције круга покажемо да је то елипса, а већ знамо да је паралелна пројекција неког лика спрам тог лика перспективно афина. Према томе, помоћу афиности можемо конструисати елипсу, тачку по тачку, служећи се кругом. Нагласимо да је перспективно афини лик круга увек елипса (укључивши круг), ма где била оса афиности и ма који правац имали зраци афиности.

Задатак 1. *Конструисати елипсу којој знамо осе и повући дирке на елипсу ма из које тачке (ван елипсе).*

Нека су AB и CD осе елипсе k, O средиште. Најбоље је изабрати једну **осу** елипсе за осу афиности a, напр. велику осу AB (сл. 61). **Опишимо** круг k_1 над осом AB као пречником. Како је дирка на елипсу у C паралелна оси a, одговара јој паралелна дирка на круг, дакле тачки C одговара крај C_1 управног пречника круга. Према томе зраци афиности су управни на оси афиности a. Поједине тачке елипсе добијамо из тачака круга, као што се уопште конструишу одговарајуће тачке перспективно афиних кругова. Исто вреди за дирке. Да би се из неке тачке P конструисале дирке на елипсу, одредимо тачку P_1 која одговара афино тачки P и повуцимо из P_1 дирке на круг. Ако су T_1' и T_1'' тачке додира с кругом, одговарајуће тачке T' и T'' су тачке додира дирки из P на елипсу. У слици 62 оса афиности p је ма која права упоредна великој оси AB елипсе. Како зраци афиности морају опет бити управни на оси p, тачкама C, D и O елипсе одговарају тачке на правој CD, које лако налазимо ако приметимо да тетиви BC и упоредном пречнику елипсе одговара тетива B_1C_1 и упоредни пречник афиног круга k_1, који заклапају с пречником A_1B_1, дакле и с осом p угао једнак 45°



Сл. 61



Сл 62

Ако дакле повучемо праву кроз тачку $BC \times p$, која такав угао заклапа с p, у њеном пресеку с CD имамо C_1, а слично D_1, O итд.

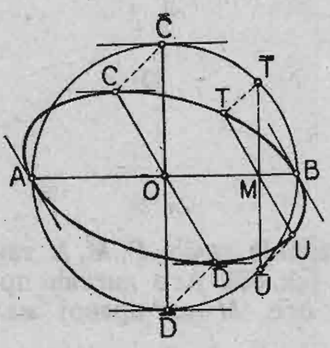
Потсетимо да средишта тетива паралелних једном пречнику елипсе припадају другом једном пречнику, који називамо *спрегнутим* или *конјугованим* пречником у односу на први пречник. И осе елипсе су два спрегнута пречника. Дирке у крајевима једног пречника су упоредне спрегнутом пречнику. Спрегнути пречници круга су међу собом управни.

Задатак 2. *Конструисати елипсу којој знамо два спрегнута пречника.*

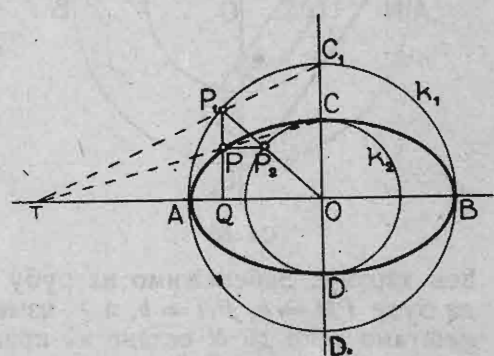
Нека је O средиште елипсе, AB и CD два њена спрегнута пречника (сл. 63). Узмимо да елипси одговара круг коме је средиште O а пречник AB. Како су тангенте на крајевима једног пречника елипсе паралелне спрегнутом пречнику, тангента у C је паралелна спрам AB.

Према томе на кругу тачки C одговара тачка у којој је тангента паралелна спрам AB, а то је тачка $\bar{C}$ на пречнику управном на AB. Права $C\bar{C}$ одређује правац зрака афиности. Даље тачке елипсе добијамо знајући да свакој правој управној на AB одговара права упоредна правој CD и која се с њом сече на оси AB (напр. T добијамо помоћу правих MT, $M\bar{T}$ и зрака афиности $T\bar{T}$).

Конструкција помоћу два концентрична круга. — Из конструкције елипсе помоћу афиности може се извести следећа, претпостављајући да знамо осе елипсе. Опишимо круг k_1 над великом осом AB и круг k_2 над малом осом CD (сл. 64) и узмимо AB за осу афиности. Тада су



Сл. 63



Сл. 64

зраци афиности управни на AB. Нека је P ма која тачка елипсе, P_1 одговарајућа тачка круга k_1, тј. $PP_1 \perp AB$ и нека је Q подножје те управне. Како се праве PC и P_1C_1 секу у некој тачки T на оси афиности, постоји сразмера

$$PQ : P_1Q = CO : C_1O,$$

а отуд, ако је P_2 пресек дужи OP_1 кругом k_2,

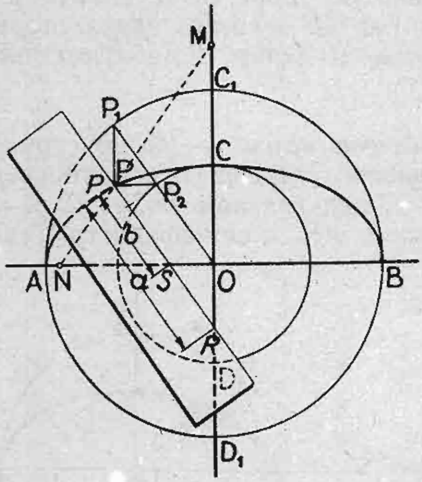
$$PQ : P_1Q = P_2O : P_1O.$$

Из ове сразмере следује, по једном елементарном ставу геометрије, $PP_2 \parallel AB$.

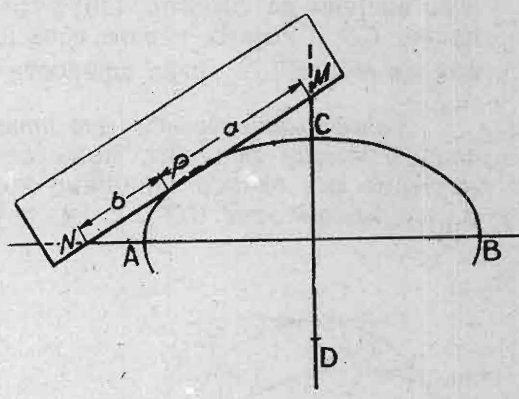
Према томе тачку P можемо добити и на овај начин: Повуцимо ма коју праву кроз O. Нека су P_1 и P_2 њени пресеци с круговима k_1 и k_2. Повуцимо праве $[P_1 \parallel CD]$ и $[P_2 \parallel AB]$. У њихову пресеку је тачка P елипсе.

Конструкција елипсе листићем хартије. — Ако у слици 65 повучемо праву $[P \parallel P_1P_2]$, имамо паралелограме OP_1PR и OP_2PS, дакле дуж PR једнака је великој полуоси a, PS малој полуоси b елипсе. Отуд произлази следећа конструкција елипсе: Забележимо на рубу листића хартије три тачке P, R, S тако да буде $PR = a$, $PS = b$, а S између P и R. Ако премештамо листић тако да S остане на великој оси, R на правој мале осе елипсе, тачка P описује елипсу.

Повуцимо кроз P праву MN тако да буде $\sphericalangle P_2PS = \sphericalangle P_2PN$ и нека су M и N пресеци те праве с OC и OA. Тада је $PM = PR = a$, $PN = PS = b$. Отуд следује још једна конструкција елипсе листи-



Сл. 65

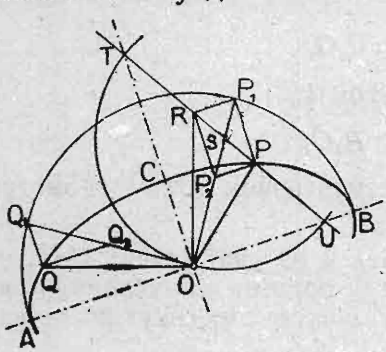


Сл. 66

ћем хартије. Забележимо на рубу листића хартије тачке P, M, N тако да буде $PM = a$, $PN = b$, а P између M и N (сл. 66). Ако листић премештамо тако да N остане на правој велике осе, M на правој мале осе елипсе, тачка P описује елипсу.

32. ИЗНАЛАЖЕЊЕ ОСА ЕЛИПСЕ ИЗ ДВА СПРЕГНУТА ПРЕЧНИКА

У перспективно афином пресликавању круга на елипсу, пару међусобно управних пречника круга одговара пар спрегнутих пречника елипсе. Ако су дакле OP и OQ спрегнути полупречници, њима у претходној конструкцији елипсе (где смо употребили два концентрична круга k_1 и k_2) одговарају два управна полупречника OP_1 и OQ_1 круга k_1 (сл. 67). Та конструкција даје P из P_1 и P_2 а Q из Q_1 и Q_2. Правоугли троугли PP_1P_2 и QQ_1Q_2 су подударни, јер је $P_1P_2 \perp Q_1Q_2$, $PP_1 \perp QQ_2$, $PP_2 \perp QQ_1$. Ако дакле обрнемо троугао QQ_1Q_2 око тачке O за прав угао, страна Q_1Q_2 ће се поклопити са страном P_1P_2, тачка Q_1 пашће у R, а $PP_1 RP_2$ биће правоугаоник. Сем тога је $RO \perp QO$.

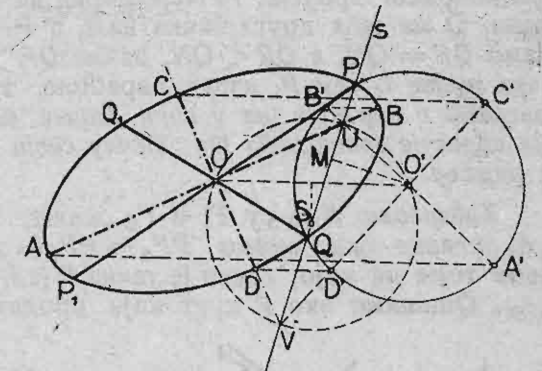


Сл. 67

Повуцимо праву PR до пресека T с OC и пресека U с OB. Имамо $PU = P_2O$, $PT = P_1O$, дакле дуж PT једнака је великој оси а PU малој оси елипсе. Ако је S тачка у којој се секу дијагонале правоугаоника PP_1RP_2, имамо $ST = SO = SU$. Дакле тачке O, T, U су на кругу који је описан из средишта S.

Из ових података произлази једноставна конструкција оса елипсе кад су јој дата два конјугована пречника. Обрнимо један од оба конјугована полупречника, рецимо OQ, око O за прав угао, у близину полупречника OP. Нека је R тачка у коју долази Q. Нађимо средиште S дужи PR и опишимо из S круг који пролази кроз O. Нека су T и U тачке где тај круг сече праву PR. Тада су праве OT и OU осне праве елипсе, а дужи PT и PU једнаке су полуосама: PT је велика полуоса и треба је пренети на OU, а PU је мала полуоса и треба је пренети на OT из тачке O.

Осе елипсе можемо добити из спрегнутих пречника и непосредно на основу афиности, налажењем управних правих којима у перспективно афином пресликавању одговарају опет управне праве.

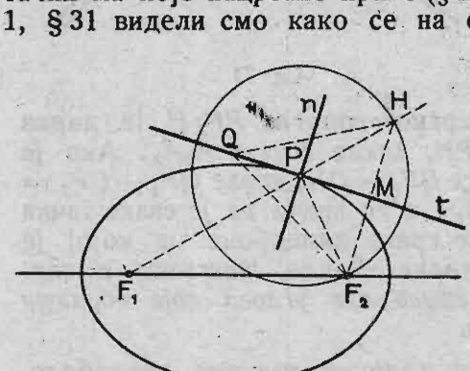


Сл. 68

Узмимо да су дати спрегнути пречници PP_1 и QQ_1 (сл. 68). Изаберимо напр. PQ за осу афиности и на кругу коме је PQ пречник изаберимо тачку O' која одговара средишту O елипсе. Тада је $O'P \perp O'Q$ као што треба да буде за полупречнике афиног круга, који одговарају спрегнутим пречницима елипсе. Нађимо затим на PQ тачке U и V тако да буде $OU \perp OV$ и $O'U \perp O'V$ (задатак 6, § 19). Осе елипсе су на правим OU и OV, а њихове крајеве добијамо на зрацима афиности.

33. КОНСТРУКЦИЈЕ ТАНГЕНАТА У ТАЧКАМА КОНУСНИХ ПРЕСЕКА

За конусне пресеке постоје, сем опште конструкције тангенте у тачки ма које нацртане криве (§ 24), нарочите конструкције. У примеру 1, § 31 видели смо како се на основу афиности могу конструисати тачно тангенте на елипсу и тачке додира. Изнећемо сада један начин конструкције за све три врсте конусних пресека.

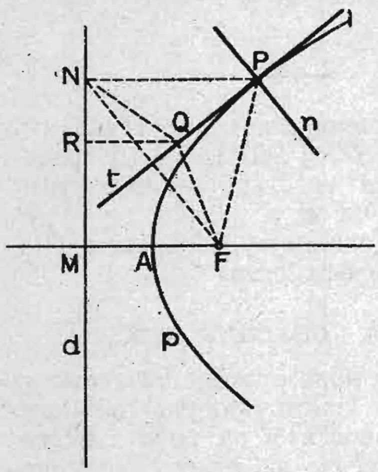


Сл. 69

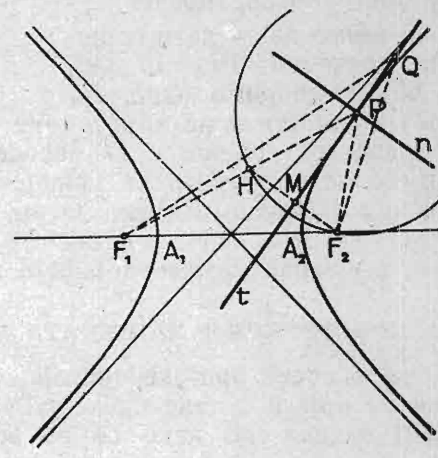
Елипса. Ако су F_1 и F_2 жиже, P ма која тачка елипсе, A_1A_2 велика оса, имамо (сл. 69) $PF_1 + PF_2 = A_1A_2$. Опишимо око P круг који пролази кроз F_2 и нека дуж PF_1, продужена преко тачке P, сече тај круг у H. Симетрала t равнокраког троугла PF_2H је дирка на елипсу у тачки P. Имамо, наиме, $PF_2 = PH$, дакле $F_1H = A_1A_2$. Ако је Q ма која друга тачка на симетрали t, имамо $QF_2 = QH$, дакле $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QH > F_1H$, тј. $QF_1 + QF_2 > A_1A_2$. То значи да је свака тачка Q праве t, сем P, изван елипсе, дакле t је дирка. Како је t симетрала угла $\sphericalangle F_2PH$, нормала n на елипсу у P је симетрала угла $\sphericalangle F_1PF_2$. Дакле, *тангента и нормала ма у којој тачки елипсе су симетрале углова које образују праве што ту тачку спајају са жижама.*

Парабола. Нека је A теме, F жижа, d водиља, P ма која тачка параболе, N подножје управне из P на d. Имамо $PF = PN$. Симетрала t равнокраког троугла PFN је дирка на параболу у P (сл. 70). Ако је, наиме, Q ма која друга тачка на t, а P подножје управне из Q на d, имамо $QF = QN$, а $QR < QN$, дакле $QF > QR$. То значи да је свака тачка праве t, сем P, изван параболе, тј. да је дирка. Према томе *тангента и нормала ма у којој тачки параболе су симетрале углова које образује права што ту тачку спаја са жижом и управна из тачке на водиљу.*

Хипербола. Ако су F_1 и F_2 жиже, P ма која тачка хиперболе, A_1A_2 реална оса, имамо $PF_2 - PF_1 = A_1A_2$ или $PF_1 - PF_2 = A_1A_2$, према томе на којој грани је тачка P (сл. 71). Рецимо да је $PF_1 - PF_2 = A_1A_2$. Опишимо око P круг који пролази кроз F_2 и нека дуж PP_1



Сл. 70



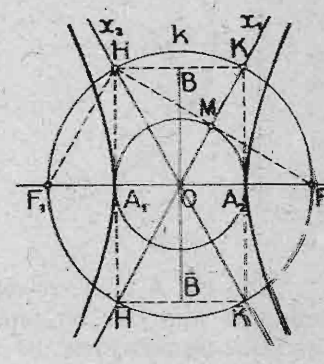
Сл. 71

сече тај круг у H. Симетрала t равнокраког троугла PF_2H је дирка хиперболе у P. Имамо, наиме, $PF_2 = PH$, дакле $F_1H = A_1A_2$. Ако је Q ма која друга тачка на t, имамо такође $QF_2 = QH$, дакле $QF_1 - QF_2 = QF_1 - OH < F_1H$, тј. $QF_1 - QF_2 < A_1A_2$, а то значи да је свака тачка праве t, сем P, с једне исте стране оне гране хиперболе на којој је P, и то „између" обих грана, тј. t је дирка. Дакле, *тангента и нормала ма у којој тачки хиперболе су симетрале углова које образују праве што ту тачку спајају с жижама.*

Асимптоте су дирке у бескрајно далеким тачкама хиперболе. Ако се тачка P удаљује бесконачно у извесном смеру на кривој, углови с теменом у F_2 и H равнокраког троугла PF_2H приближују се правим угловима а његови краци F_1P и F_2P паралелним према дирци t, која остаје симетрала дужи F_2H. Дакле кад t пређе у асимптоту x, имамо $F_1H \parallel x_1$, $F_2H \perp x_1$ и $MF_2 = MH$, где је $M = x_1 \times F_2H$. Дакле, H

је на кругу k коме је пречник F_1F_2 и може се одредити отуд што је $F_1H = A_1A_2$. Асимптота x_1 је пак симетрала тетиве F_2H тог круга, тј. права кроз средиште O хиперболе, упоредна спрам праве F_1H. Исто тако добијамо другу асимптоту x_2, симетричну спрам прве, као што је и сама хипербола у односу на осе.

Како је $HM = MF_2$ и $F_1O = F_2O$ имамо $F_1H \parallel OM$, дакле $OM = \frac{1}{2} F_1H = OA$, тј. тачка M је на кругу коме је пречник A_1A_2. Према томе, ако је X_1 пресек асимптоте x_1 с дирком у темену A_2 ($\perp A_1A_2$), троугли OA_2X_1 и ONF_2 су подударни, јер је $OA_2 = ON$ а угао A_2ON им је заједнички; дакле $OF_1 = OX_1$, тј. X_1 је на кругу k. Исто тако су и остале тачке $\bar{X}_1$, X_2, $\bar{X}_2$, у којима се асимптоте секу с диркама у теменима A_1 и A_2 хиперболе, на кругу k. Тако можемо добити *асимптоте као праве које пролазе кроз тачке у којима дирке у теменима хиперболе секу круг коме је пречник дуж која спаја жиже.* Правоугаоник $HK\bar{K}\bar{H}$ коме су темена те пресечне тачке називамо *осним правоугаоником.*

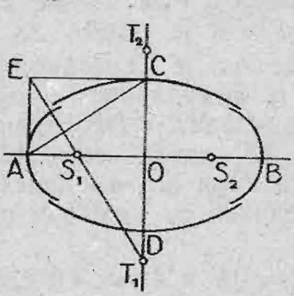


Сл. 72

Ако је $B\bar{B}$ имагинарна оса хиперболе, имамо $OB^2 = OF_1^2 - OA_1^2$, па како је $OF_1 = OH$, у правоуглом троуглу OA_1H је $A_1H = OB$. Дакле *стране осног правоугаоника једнаке су осама хиперболе.* Отуд, ако знамо обе осе хиперболе, добијамо *асимптоте као оне праве које садрже дијагонале осног правоугаоника.*

34. КРУГОВИ КРИВИНЕ У ТЕМЕНИМА КОНУСНИХ ПРЕСЕКА

При цртању коника може користити познавање кругова кривине у њиховим теменима, јер лук неке криве се у толико мање разликује од лука круга кривине уколико се посматра мањи лук криве око додирне тачке. Следеће конструкције доносимо без доказа*).



Сл. 73

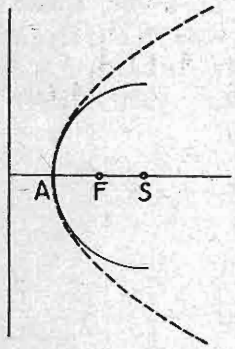
Нека је O средиште, AB велика, CD мала оса и нека је E четврто теме правоугаоника коме су три темена A, O и C (сл. 73). Повуцимо из E нормалу на дијагоналу AC правоугаоника и нека она сече праву AB у S_1 и праву CD у T_1. Тада је S_1 средиште кривине, тј. средиште круга кривине у темену A, а T_1 средиште кривине у темену C. Дакле кружни лукови описани из S_1 кроз A и из T_1 кроз C дају, приближно, делове елипсе у близини тих темена. Исто тако, кружни лукови описани из одговарајућих тачака S_2 и T_2 дају приближно делове елипсе кроз B и D.

Кад имамо нацртана та четири лука није тешко извући целу елипсу.

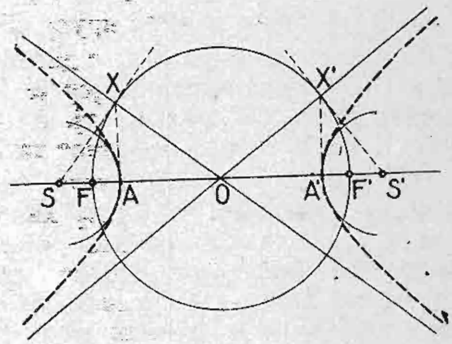
*) Читалац их може лако проверити на основу образаца за средиште кривине, познатих из математичке анализе.

И при цртању параболе и хиперболе корисно је одредити кругове кривине у теменима.

Ако је A теме, F жижа, а S средиште круга кривине у темену параболе, имамо $AF = SF$ (сл. 74), тј. жижа параболе је средиште дужи од темена параболе до средишта кривине.



Сл. 74

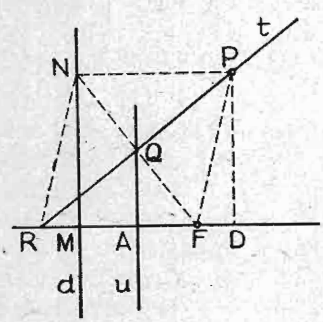


Сл. 75

Ако су A и A' темена хиперболе (сл. 75), F и F' жиже, а S и S' средишта кругова кривине у A и A', X и X' пресеци асимптота с управним подигнутим из A и A' на осу AA', S је тачка у којој управна из X' на асимптоту OX' сече праву AA'; исто тако S' је тачка у којој управна из X на OX сече праву AA'.

35. ОДРЕЂИВАЊЕ ЕЛЕМЕНАТА ПАРАБОЛЕ И ХИПЕРБОЛЕ

Парабола. Као што смо видели у § 33, ако је a оса, P ма која тачка параболе p, F жижа, N подножје управне спуштене из P на водиљу d параболе, дирка t у P је симетрала равнокраког троугла FNP. Дакле, ако је $Q = t \times FN$, имамо $QF = QN$ (сл. 76). Нека је $R = a \times t$. Како је $NP \parallel a$, троугли FQR и NQP су подударни, дакле $FPNR$ је ромб.



Сл. 76

Отуд следује, ако је D подножје управне из P на a, подударност троуглова FDP и RMN, дакле $MR = DF$. Но ако је A теме, $AM = AF$, дакле $AR = AD$, тј. пројекција тачке P на осу a и пресек дирке у P осом једнако су удаљени од темена параболе.

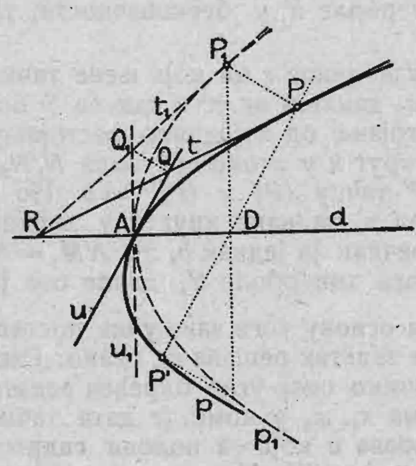
Затим, из $QF = QN$ и $AF = AM$ следује $AQ \parallel MN$, тј. права AQ је дирка у темену A. Дакле подножје управне спуштене из жиже на дирку t ма у којој тачки P параболе налази се на дирци u у темену.

Нека је d ма који пречник једне параболе p (сл. 77), који полази ма из које њене тачке A, u дирка у A, PP' ма која конјугована тетива, D њен пресек с d. Конструишимо афину параболу p с осом афиности d тако да правој DP одговара управна DP_0 на d. Тада дирци u одговара дирка u_1 параболе p_1, тј. d је оса параболе p_1. Дакле, према претходноме, $AR = AD$. Исто тако $QR = QP$. Отуд имамо следећу конструкцију дирке ма у којој тачки P параболе: повуцимо ма коју тетиву PP' кроз P, затим њој спрегнути пречник кроз средиште D тетиве и одмеримо на пречнику $AR = AD$. Кроз R пролази дирка у тачки P.

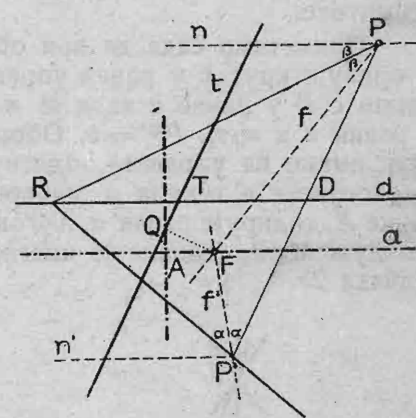
Сад можемо решити следећи задатак:

Задатак 1. *Дат је један пречник d, њему спрегнута дирка t и још једна тачка P параболе. Одредити жижу и теме параболе.*

Повуцимо спрегнуту тетиву $PP' \parallel t$ (сл. 78). Ако је $T = t \times d$ и $D = PP' \times d$, одредимо R тако да буде $TR = TD$; RP и RP' су дирке у тачкама P и P'. Повуцимо кроз P и P' праве $n \parallel n' \parallel d$. Како је дирка



Сл. 77



Сл. 78

PR симетрала угла коме је један крак n а други пролази кроз жижу F (према слици 76), конструишимо кроз P и P' праве f и f' симетричне с n и n' у односу на дирке PR и $P'R$. У пресеку $f \times f'$ је жижа. Повуцимо сад осу $a = [F \parallel d]$. Из подножја Q управне из F на t спустимо управну на осу; тиме имамо теме A.

Хипербола. Како се црта хипербола којој су дата темена A_1, A_2 и жиже F_1, F_2 речено је у §30. Како асимптоте пролазе кроз тачке у којима круг над пречником F_1F_2 сече управне подигнуте у A_1 и A_2 на A_1A_2, могу се конструисати и асимптоте. Треба увек настојати да се добију асимптоте, јер без њих се ток хиперболе не може сматрати познатим.

Обратно, ако су дате асимптоте и темена, налазимо жиже помоћу истог круга. Но хипербола се може конструисати и не тражећи јој жиже. Таква ће се конструкција дати на крају §46, на основу асимптота и једне тачке хиперболе. При томе је често потребно да јој одредимо темена. Постављамо дакле следећи задатак:

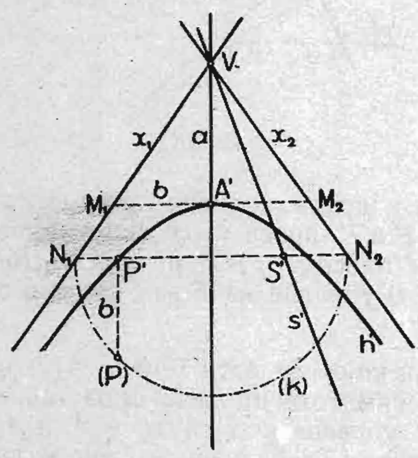
Задатак 2. *Даше су асимшоше и једна шачка хиперболе; одредиши јој шемена.*

Доносимо две конструкције*.

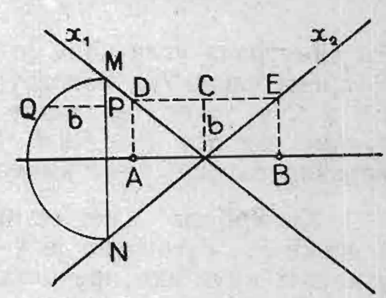
I. Пођимо од купасте (конусне) површи која настаје кад се нека права s обрће око друге праве a, коју сече у тачки V. Тачка V је врх купасте површи, а права a оса. Пресек површи једном равни α упоредном према оси a, је извесна хипербола h. Ако се раван упоредна с α узме за раван слике π, хипербола се пројектује управно на π као подударна хипербола h' (сл. 79). Раван π сече купасту површ по двема изводницама x_1 и x_2, а h' пада у два унакрсна угла образована тим изводницама. Нека је P ма која тачка хиперболе h. Ако се P бесконачно удаљује на једној грани хиперболе, изводница VP се приближује изводници x_1 или x_2. Према томе и у равни π, ако се P' бесконачно удаљује на хиперболи h', њена сечица $V'P'$ прелази у x_1' или x_2'. Дакле праве x_1' и x_2' су дирке хиперболе h' у бесконачности, тј. асимптоте.

Приметимо сада да при обртању изводнице s ма која њена тачка S описује круг k у равни управној на a, дакле и на π, а кад се S поклопи с P у равни α тада је њено отстојање од π једнако растојању b равни α и π, тј. $PP' = b$. Оборимо ли круг k у π око пречника N_1N_2, тада имамо на управној подигнутој у P' тачку (P) и $(P)P' = b$. Но b је отстојање и темена A хиперболе h од π, па како круг k у висини тачке A додирује раван α, његов полупречник је једнак b, тј. $A'M_1 = b$. Но дуж M_1M_2 једнака је имагинарној оси хиперболе h', дакле ова је једнака $2b$.

На основу тога закључка постављени задатак решава се овако: Располовимо онај угао одређен асимптотама x_1, x_2 у коме је дата тачка P. Права a која га полови садржи темена (сл. 80). Нека управна на a



Сл. 79



Сл. 80

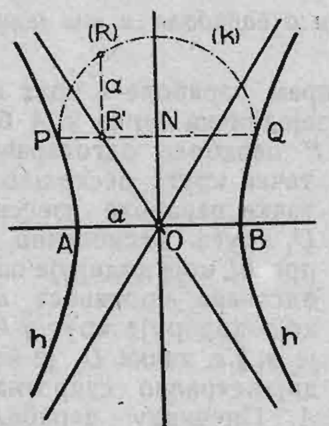
кроз P сече асимптоте у M и N. Опишимо над MN полукруг и нека је O пресек праве $[P \parallel MN]$ полукругом. Дуж PQ пренесемо од O управно на a до C и повучемо $[C \parallel a]$ до пресека D и E с x_1 и x_2. Подножја управних из D и E на a су темена A и B хиперболе.

*) Читаоцу се препоручује да их проучи тек пошто стекне потребно знање у идућим главама ове књиге.

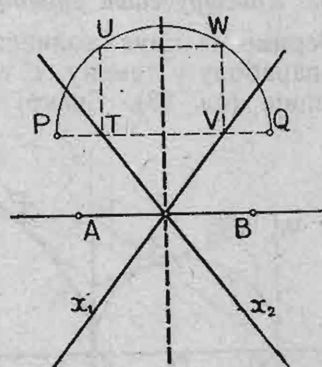
II. До друге конструкције можемо доћи ако пођемо од сличног посматрања обртног једнокрилног хиперболоида. Ако обртни хиперболоид, коме најмањи (стрикциони) круг има полупречник a (сл. 81), пресечемо једном равни τ која га додирује у тачки M тога круга, та раван га додирује и уједно сече по двема правим x_1 и x_2 (изводницама хиперболоида). Ако хиперболоид пројектујемо управно на раван π која је упоредна спрам равни τ и садржи осу o хиперболоида, праве x_1' и x_2' су упоредне с правим x_1 и x_2 и секу се у средишту O хиперболоида. Раван π сече хиперболоид по хиперболи h, а асимптотну купу по правим x_1' и x_2'. Дакле x_1' и x_2' су асимптоте хиперболе h.

Приметимо још да је удаљеност сваке тачке R на x_1 или x_2 од π, једнака растојању равни π и τ, а ово је једнако полупречнику a поменутог најмањег круга; дакле $RR'=a$. Ако дакле оборимо круг k у коме раван кроз R, управна на осу o, сече хиперболоид, R долази у (R) и имамо $(R)R'=a$. Обарање се врши око пречника PQ круга k.

На основу тога задатак се решава овако: Повуцимо кроз дату тачку P хиперболе и симетричну тачку Q упоредну реалној оси AB хиперболе (коју смо добили као располовницу угла међу асимптотама) и опишимо полукруг над пречником PQ. Затим на PQ одредимо



Сл. 81



Сл. 82

тачку T пресека с асимптотом x_1 и у T подигнимо управну на PQ до пресека U с полукругом (сл. 82). Дуж TU једнака је половини реалне осе; пренесимо је дакле од средишта O хиперболе до A и B. Ово су темена хиперболе.

Задатак 3. *Дата су темена и још једна тачка хиперболе. Одредити јој асимптоте.*

Задатак можемо решити на начин II претходног задатка. Конструишимо симетралу осе AB и тачку Q симетричну спрам P. Затим опишимо над пречником PQ полукруг и одредимо на њему тачке U и W удаљене од PQ колико темена A и B од средишта O хиперболе. Нека су T и V подножја управних из U и W на PQ. Тада су OU и OV асимптоте.

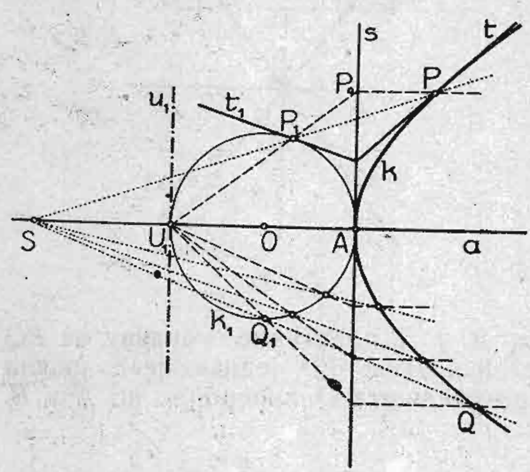
36. КОНСТРУКЦИЈА ПАРАБОЛЕ И ХИПЕРБОЛЕ ПОМОЋУ КОЛИНЕАЦИЈЕ

Ако круг k пројектујемо из средишта S изван равни α у којој је круг, на неку другу раван π, зраци пројектовања образују кружно купасту површ. Пројекција k' круга на ту раван π јавља се као пресек купасте површи том равни, а то је конусни пресек (или.коника), јер се пројектовањем одржава ред алгебарске криве*.

С друге стране, централним пројектовањем тачака једне равни на другу раван настају перспективни ликови, који су, као што смо видели, колинеарни (§ 18). Дакле, сваку елипсу, параболу и хиперболу можемо сматрати перспективно колинеарном сликом круга. Нека је β једна или друга раван симетрије равни α и π, тј. раван која располовљује један од диједара који образују равни α и π. Ако средиште S и круг k пројектујемо на раван π зрацима управним на β, круг k се, очигледно, пројектује у круг k_1, S у тачку S_1. Тачка S_1 је средиште колинеације у којој су k и k_1 колинеарне криве. Применимо ову чињеницу, кратко образложену претходним речима, на конструкције параболе и хиперболе.

Задатак 1. *Дато је теме A на оси a параболе и још једна тачка P параболе. Конструисати параболу.*

Изаберимо за круг колинеаран спрам параболе k круг k_1, који додирује параболу у темену, с тим да заједничка дирка у A буде оса s колинеације (сл. 83). Свакој тачки P параболе одговараће једна тачка круга, бескрајно далекој тачки параболе извесна тачка U_1 круга. Бесконачно далекој правој, која додирује параболу, одговара противоса u_1 (§ 18) која додирује круг у U_1. Како је $u_1 \parallel s$, тачка U_1 је на кругу дијаметрално супротна тачки A. Пречнику параболе који спаја тачку P с бескрајно далеком тачком параболе одговара права која пролази кроз U_1 и сече се с правом пречника у тачки P_0 на оси s. Отуд добијамо $P_1 = U_1 P_0 \times k_1$, дакле PR је зрак колинеације, а $S = PP_1 \times a$ средиште колинеације.



Сл. 83

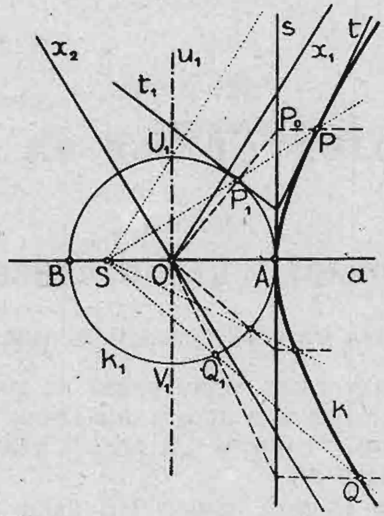
Друге тачке параболе добијамо истом конструкцијом, но полазећи од тачака на кругу. Тангенте на круг и на параболу у одговарајућим тачкама секу се такође на оси.

---

*) Ако би читаоцу овај параграф чинио тешкоће, нека га прескочи, а проради тек пошто упозна одговарајуће главе ове књиге.

Задатак 2. *Конструисати хиперболу кад су дата њена темена A, B и асимптоте* x_1, x_2.

Конструкција је у свему слична претходној с том разликом што хипербола k сече бескрајно далеку праву *и*, према томе, противоса u_1 сече колинеарни круг k_1 у две тачке U_1, V_1 (сл. 84). За средиште



Сл. 84

круга k_1 можемо изабрати средиште O хиперболе, а за противосу u_1 праву кроз O управну на AB. Како бескрајно далеким тачкама хиперболе одговарају на кругу тачке U_1 и V_1, права кроз U_1, упоредна асимптоти x_1, је један зрак колинеације. Дакле пресек S тог зрака с AB је средиште колинеације. Да бисмо добили неку тачку хиперболе, пођимо од неке тачке P_1 на k_1. Правој P_1U_1 одговара права упоредна асимптоти x_1 и која пролази кроз тражену тачку P, а с P_1U_1 сече се на s. Тачка P је у пресеку те праве са зраком SP_1.

ДЕО ДРУГИ

УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ЈЕДНУ РАВАН

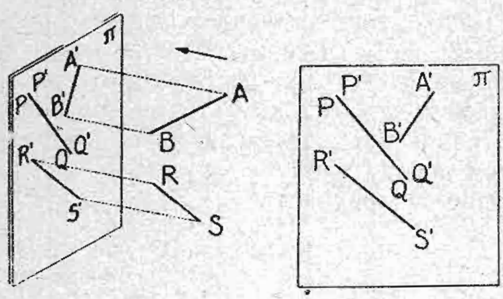
ГЛАВА I

ТАЧКА, ПРАВА И РАВАН. КРИВЕ ЛИНИЈЕ

37. ПРОЈЕКЦИЈА ТАЧКЕ, ДУЖИ И ПРАВЕ. ТРАГ ПРАВЕ

Док имамо у виду само једну раван на коју пројектујемо, обележавамо ту раван словом π, а пројекције тачака, правих итд. цртицом уз слово, тако да напр. A' (читај: „А прво") означава пројекцију тачке A, а p' пројекцију праве p.

Пројекција тачке је увек тачка. Но како положај тачке у простору није одређен самом пројекцијом на једну раван (§ 8), управном пројекцијом неке тачке A одређен је само положај зрака који пројектује тачку A, тј. права управна на π у тачки A'. Сама тачка A може на том зраку бити с једне или друге стране равни π, на разним отстојањима, или у самој тој равни. Дакле, пројекције разних тачака могу се и поклапати.



Сл. 85

Према томе цели овај одељак, у коме разматрамо само управну пројекцију на једну раван,*) карактерише извесна неодређеност. Тек у идућем одељку узећемо у обзир и отстојања тачака од њихових пројекција и тај начин одређивати положај, облик и величину сваког предмета у простору.

Пројекција дужи је дуж, пројекција праве права; сем ако је дуж или права управна на равни слике, јер тада се пројекција састоји само из једне тачке. У слици 85 $A'B'$ је пројекција дужи AB, док је пројекција дужи MN, која је управна на π, само тачка.

Ако је дуж или права садржана у равни слике, поклапа се са својом пројекцијом ($PQ \equiv P'Q'$).

---

*) Изузетак чини обарање равни косих према равни слике, које уводимо већ у гл. I да би се градиво приступачно овом одељку унеколико проширило.

Дуж која претставља управну пројекцију неке дужи, краћа је од те дужи, сем ако је дата дуж упоредна равни пројекције или у самој тој равни, јер је тада пројекција једнака датој дужи (напр. $RS \# R'S'$).

Права управна на равни π пројектује се у једну тачку. Ако права није управна на равни π, пројектујући зраци што пролазе кроз њене тачке образују једну раван, *пројектујућу раван* те праве.

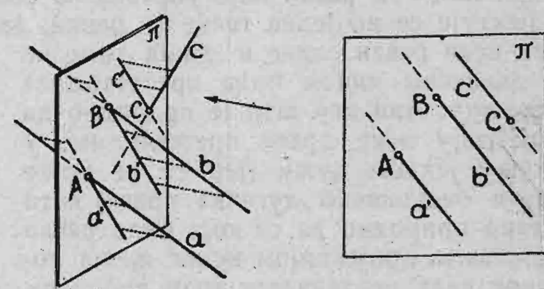
Кад год права није упоредна равни слике, она кроз њу продире у једној тачки која се зове *траг праве (тражна тачка)*. Траг праве је дакле заједничка тачка дате праве и њене пројекције. Ако је права упоредна равни слике, трага нема, а можемо рећи и да је траг тада бескрајно далека тачка те праве.

Ако је права обележена малим латинским словом, њен траг ћемо обележавати обично истим великим словом (напр. A је траг праве a).

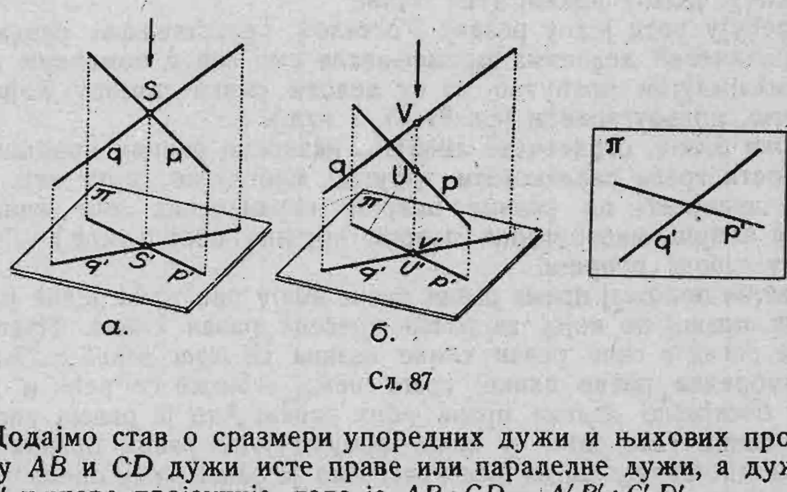
38. ДВЕ ПРАВЕ

Праве или дужи, које су паралелне међу собом а чије се пројекције не поклапају, имају паралелне пројекције. Али обратно, ако су пројекције двеју правих паралелне, те две праве могу бити и мимоилазне (сл. 86).

Праве које се секу, а чије се пројекције не поклапају, секу се и у пројекцији (сл. 87а). Али ако се пројекције двеју правих секу, могу се те праве у простору мимоилазити (сл. 87б). Из саме пројекције на једну раван не види се да ли се две праве p и q секу или не.



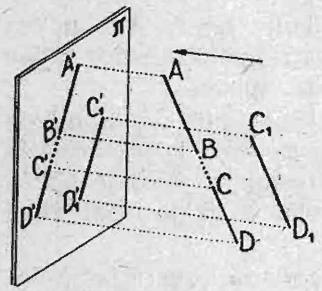
Сл. 86



Сл. 87

Додајмо став о сразмери упоредних дужи и њихових пројекција: Ако су AB и CD дужи исте праве или паралелне дужи, а дужи $A'B'$ и $C'D'$ њихове пројекције, тада је $AB : CD = A'B' : C'D'$.

Ово следује из паралелности пројектујућих зрака AA', BB', CC', DD' (сл. 88), јер паралелне праве отсецају на двема правим сразмерне дужи.

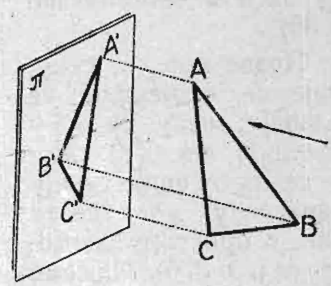


Сл. 88

У сликама 85, 86 и 87 дате су, сем пројекција на раван π (десно) слике у којима се виде уједно посматрани ликови и њихове пројекције (лево). У тим сликама стрелица назначује смер управан на раван слике, у коме замишљамо да гледамо предмет. Нагласимо да су ово само помоћне слике, којима је сврха да се читаоцу олакша схватање. Предмет нашег проучавања није цртање таквих, помоћних сличица, него самих управних пројекција на једну раван.

39. РАВАН. ТРАГ РАВНИ. ГЛАВНЕ ЛИНИЈЕ И ЛИНИЈЕ ПАДА

Ако је нека раван управна на пројекцијској равни π, све њене тачке се пројектују на једну праву, тј. њена управна пројекција је права. Кад год раван није управна на равни π, у сваку тачку равни π пројектује се по једна тачка те равни, дакле пројекција равни је тада увек цела раван слике и према томе не би никаквим ликом била претстављена у цртежу. Али као што је природно да пројекцију неке праве претстављамо у цртежу једном дужи (јер се не може цртати бесконачно дугачка права) исто је тако природно да се која било раван претставља пројекцијом неког њеног коначног дела, ограниченог напр. троуглом (сл. 89) или паралелограмом. Но раван је претстављена и двема својим правим, или шта више само трима тачкама које не припадају једној правој (три такве тачке одређују увек једну раван). Уосталом, претстављање равни њиховим ограниченим деловима примењивали смо већ у помоћним цртежима, замишљајући прећутно да су делови равни помоћу којих их приказујемо, правоугаоници (сл. 1 — 5, 7 итд.).



Сл. 89

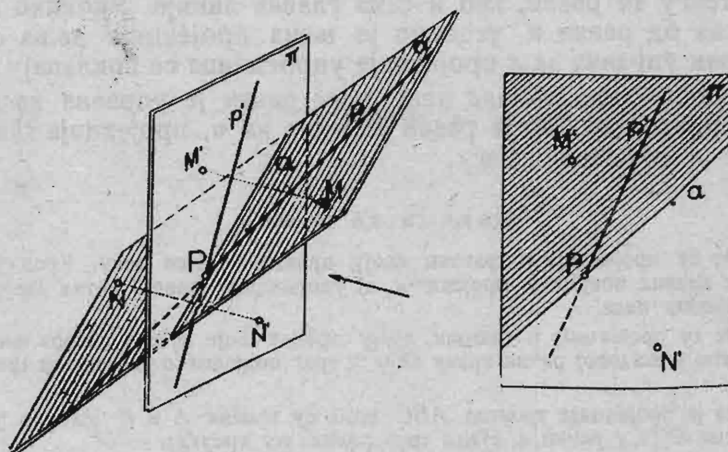
Делови равни, ограничене линијама називамо равним површима*). Ради јасности треба разликовати троугао, многоугао, круг итд., које сматрамо линијама, од равних површи ограничених тим линијама (троугаона површ, многоугаона површ, кружна површ итд.). Линије сачињавају *рубове* површи.

Изузетан положај према равни слике имају оне тачке једне равни, које су на правој по којој та раван пресеца раван слике. Права по којој нека раван α сече раван слике назива се *траг равни* α. Ако је раван α упоредна равни слике, трага нема, а може се рећи и да је тада траг бескрајно далека права обих равни. Ако је раван управна на равни слике (као што су напр. пројектујуће равни правих) све њене тачке пројектују се на њен траг. Ако је раван коса према равни

*) Види напомену на стр. 1.

слике, пројекције њених тачака падају с обих страна њеног трага (тачке M' и N' у сл. 90).

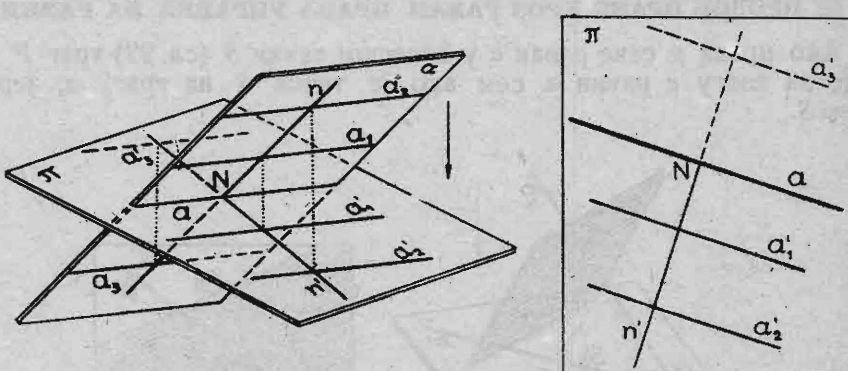
Траг равни која је обележена неким грчким словом, обележићемо обично одговарајућим малим словом латинице (напр. m је траг равни μ).



Сл. 90

Ако је p права ма у којој равни α, траг P те праве је на трагу a те равни (сл. 90).

Као што смо видели у § 19, сваки раван лик и његова паралелна пројекција су два перспективно афина лика, под условом да раван тог лика не садржи зраке пројектовања. Према томе, ма који лик у равни косој према равни слике и управна пројекција тог лика на раван слике су два перспективно афина лика; траг косе равни је оса афиности, зраци пројектовања су зраци афиности.



Сл. 91

Особити значај имају оне праве у некој равни, које су или упоредне трагу те равни или управне на траг. Прве ћемо називати *главним линијама* или *упоредницама* те равни, а називају се и *сутражницама* (праве a_1, a_2, a_3 у сл. 91). Ако је пројекцијска раван хоризонтална, главне линије се називају *висинским линијама*. Праве у равни, управне на траг називају се *линијама највећег пада* или само *линијама пада* (n у сл. 91).

Пројекција главне линије неке равни која је коса према π упоредна је трагу те равни, као и сама главна линија. Уколико је главна линија даља од равни π утолико је њена пројекција даља од трага. Ако је раван управна на π пројекције упоредница се поклапају с трагом.

Пројекција линије пада неке косе равни је управна на траг, као и сама линија пада. Ако је раван управна на π, пројекција такве праве је, разуме се, тачка на трагу.

Задаци за вежбу

1. Дате су пројекције и трагови двеју правих које се секу. Кроз једну тачку једне од тих правих повући у пројекцији а) упоредницу равни датих двеју правих и б) линију највећег пада.

2. Дате су пројекције и трагови двеју правих које се секу. Кроз њихову тачку пресека повући у њиховој равни праву чији је траг подједнако удаљен од трагова датих правих.

3. Дата је пројекција троугла ABC коме су темена A и B једнако удаљена од равни π а теме C је у равни π. Наћи траг равни тог троугла.

4. Дата је пројекција праве p и њен траг. Нацртати трагове оних равни које садрже праву p а имају највећи или најмањи нагиб према равни слике.

5. Дат је траг равни ρ и пројекција праве a која се налази у тој равни. Који положај имају пројекције правих равни ρ, које имају исти нагиб према π као права a?

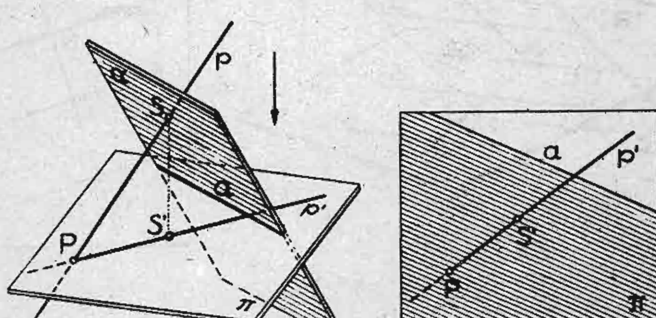
6. Дата је пројекција и траг једне линије пада извесне равни и пројекција једне праве у тој равни. Наћи траг ове праве.

7. Дата је пројекција једне линије пада извесне равни. Нацртати пројекцију ма каквог правоугаоника те равни, коме су две стране паралелне трагу те равни.

8. Дате су пројекције трију правих a, b, c које су у једној равни и дати су трагови правих a и b. Наћи траг праве c.

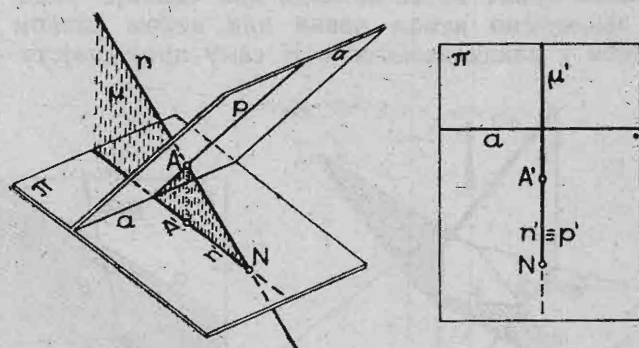
40. ПРОДОР ПРАВЕ КРОЗ РАВАН. ПРАВА УПРАВНА НА РАВНИ

Ако права p сече раван α у извесној тачки S (сл. 92) траг P праве p није на трагу a равни α, сем ако је тачка S на трагу a, јер тада је $P \equiv S$.



Сл. 92

Ако је n права управна на равни α, свака раван која садржи праву n управна је на равни α. Једна од таквих равни је пројектујућа раван μ праве n, која је управна и на равни слике π (сл. 93). Како је раван μ управна на обим равнима α и π, управна је и на њиховом пресеку, тј. на трагу a равни α и пројектује се цела у извесну праву

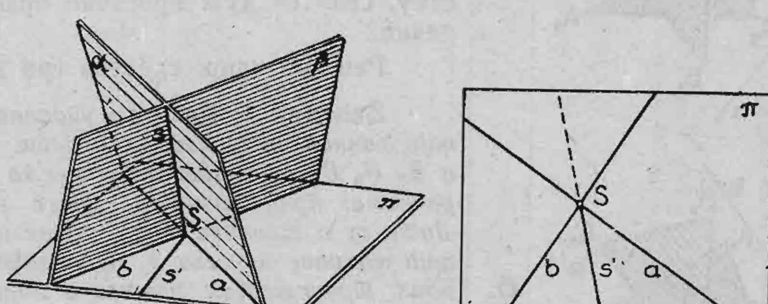


Сл. 93

управну на a. Но раван μ је пројектујућа раван праве n, дакле пројекција праве управне на некој равни управна је на трагу те равни: $n' \perp a$.

41. ДВЕ ИЛИ ВИШЕ РАВНИ. ВИДЉИВОСТ

Посматрајмо две равни α и β које се секу по правој s Ако су обе равни косе према равни слике, права s се пројектује у извесну праву s' различиту од трагова a и b обих равни (сл. 94). Права s' може, очигледно, имати ма какав положај у равни π (што видимо напр. кад задржимо положај равни α, а нагиб равни β спрам π мењамо). Једини

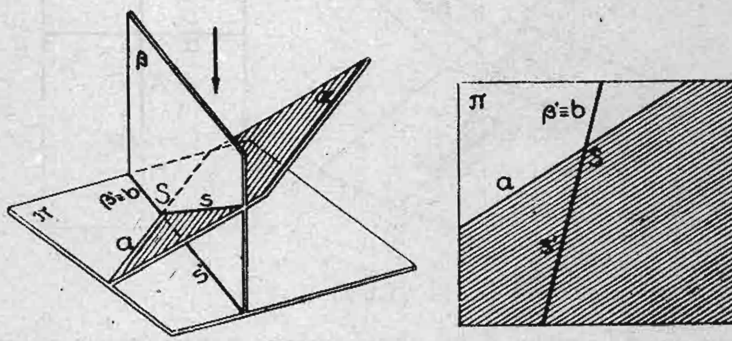


Сл. 94

услов за пресек s и његову пројекцију s' је да пролазе кроз пресек трагова a и b, тј. траг S праве s је у пресеку правих a и b. Ако равни α и β имају исти нагиб спрам π, права s располовљује један пар унакрсних углова између правих a и b.

Ово је тачно и кад је $a \parallel b$, јер тада је s бескрајно далека права, S бескрајно далека тачка и $s \parallel s' \parallel a \parallel b$. (Нека читалац нацрта обе слике 94 за тај случај!) Ако је једна од обих равни, рецимо раван β, управна на π, све тачке равни β пројектују се у њен траг b, па и права s, тј. $s' \equiv \beta'$ (сл. 95). Ако је тада још и $b \perp a$, такође је и $\beta \perp \alpha$ (упореди са сл. 92).

Посматрајући равне површи јавља се и питање видљивости. Претпостављамо наиме да се не види или слабије види оно што је посматрачу заклоњено неком равни или неком равном површи. Ту околност треба у слици назначити. И саму пројекцијску раван π мо-



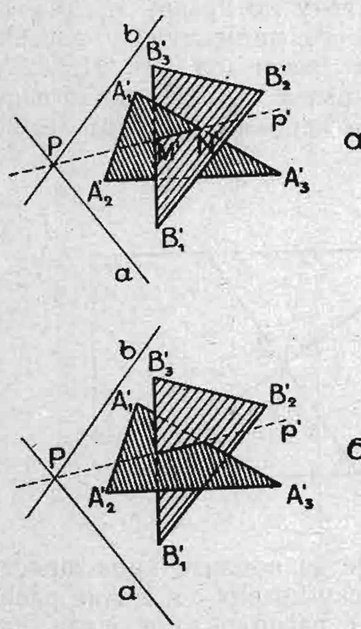
Сл. 95

жемо, ако хоћемо, сматрати непотпуно провидном и напр цртајући пројекције правих, извући слабије или цртkано део праве који је иза равни π. Тако смо поступили у сликама 86, 90, 91 итд. У слици 90 види се онај део равни α, који је испред равни π; то је назначено и у десној слици, процртавањем (шрафирањем).

Ако се ма какве две равне површи, које припадају двема разним равнима, секу, секу се дуж пресечне праве обих равни.

Решимо напр. следећа три задатка:

Задатак 1. *Даше су уйравне йројекције равних шроуīласших йоврши $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$ које йрийадају двема разним равнима: йрва равни α, друīа равни β. Даши су и шраīови обих равни и йројекција њиховоī йресека p. Одредиши йресек обих шроуīласших йоврши и који се делови виде а који не.*



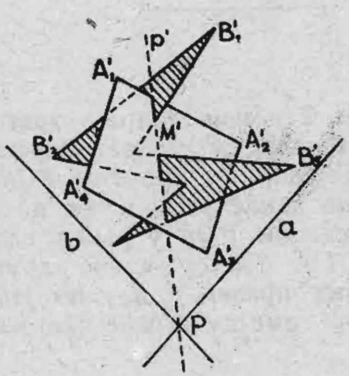
Сл. 96

Ако се троуглн $A_1' A_2' A_3'$ и $B_1' B_2' B_3'$ налазе у равни π један изван другог, тада се, очигледно, троугласте површи $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$ у простору не секу. Само ако постоји област у равни π, коју покривају обе области $A_1' A_2' A_3'$ и $B_1' B_2' B_3'$ (сл. 96) могуће је да се троугласте површи у простору секу, а пресек је тада садржан у тој области. Како тај пресек мора припадати правој p, биће то онај део праве p чија пројекција је садржана у пројекцијама обих троуглова. Тај део је извесна дуж MN, а код сложенијих ликова може се састојати из више дужи (као у задатку 2). Потражићемо дакле у равни слике дуж $M'N'$, део праве p', који је садржан у оба троугла.

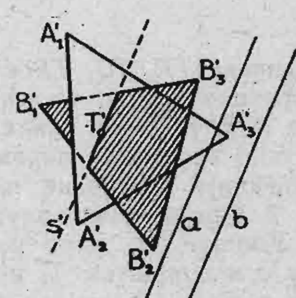
Да бисмо одредили шта се на троугластим површима види а шта не види, морамо нешто додати претпоставкама задатка о положају равни α и β. Посматрајмо њихов пресек p. Тачком P, која је у равни π, права p је подељена на део који је испред π (тј. нама ближе) и на део који је иза π (нама даље). Претпоставимо напр. да је испред равни π онај део праве p на коме је дуж MN. Тада, очигледно, с оне стране праве p' с које су пројекције темена A_1, B_2 и B_3, површ $A_1 A_2 A_3$ заклања део површи $B_1 B_2 B_3$, а са супротне стране праве p' површ $B_1 B_2 B_3$ заклања део површи $A_1 A_2 A_3$. Тиме је одређено шта се од обе троугласте површи види а шта не види, као што је и приказано на слици 96а.

Ако је, напротив, део праве p на коме је дуж MN, иза равни π, иста пројекција двеју троугластих површи добија супротан изглед (сл. 96б).

Задатак 2. *Даше су две равне површи, једна у равни α, ограничена чешвороуглом $A_1 A_2 A_3 A_4$, друга у равни β, ограничена ликом $B_1 B_2 \ldots B_6$* (сл. 97): *Пређсшавиши пресек обих површи ако су даши шрагови обих*



Сл. 97



Сл. 98

равни и пројекција M' једне шачке шог пресека. Прешпосшавља се да је шачка M исйред равни π.

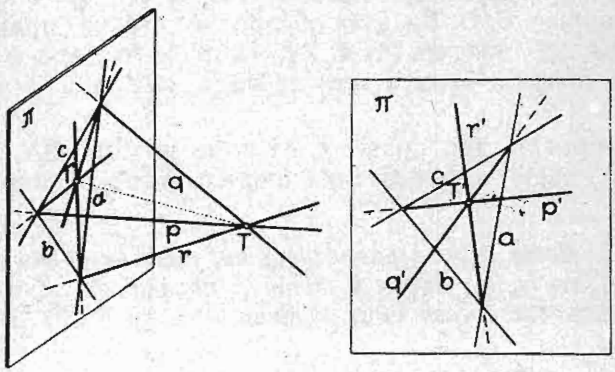
Нека су a и b трагови равни α и β. Пресек датих површи биће на пресеку p равни α и β, па како имамо тачке $P = a \times b$ и M, имамо $p' = M'P$, а тражени пресек обих површи састоји се из три дужи, као што показује слика. Знајући да је M испред равни π лако је одредити шта је на ликовима видљиво.

Задатак 3 *Даше су пројекције двеју шроугласших површи $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$, које припадају двема равнима α и β с паралелним шраговима Даша је пројекција једне шачке T на пресеку и прешпосшавља се да су обе површи исйред равни π. Одредиши њихов пресек.*

Пресек s равни α и β је упоредан траговима a и b тих равни. Дакле повуцимо s' кроз A', паралелно трагу a (и b) (сл. 98).

Три равни. Три равни α, β, γ секу се у три праве, рецимо $\alpha \times \beta = r$, $\beta \times \gamma = p$, $\gamma \times \alpha = q$ (сл. 99), а ове се секу у извесној тачки T, заједничкој тачки свих трију равни. Према томе, ако познајемо трагове a, b, c трију датих равни и пројекције двеју пресечних правих, рецимо p' и q', пројекција треће пресечне праве, r', је одређена: она мора пролазити кроз T' и кроз пресек трагова a и b.

Ако све три равни пресечемо неком равни која је паралелна према равни π, имамо три праве паралелне траговима и које се секу на правим p, q, r.



Сл. 99

Полуправе TP, TQ, TR с исходиштем T и које садрже трагове P, Q, R правило p, q, r, су ивице триједра коме су стране садржане у равнима α, β, γ. Раван слике сече тај триједар по троуглу PQR и одређује тако тространу пирамиду. Можемо дакле рећи и да посматрамо пројекцију тростране пирамиде с основом PQR у равни слике и врхом T. Продужења полуправих TP, TQ, TR су ивице другог триједра. **Уопште, ма како** узели на трима правим p, q, r по једну **полуправу с исходиштем** T, имамо триједар коме су стране садржане у равнима α, β, γ.

42. ОБАРАЊЕ РАВНИ

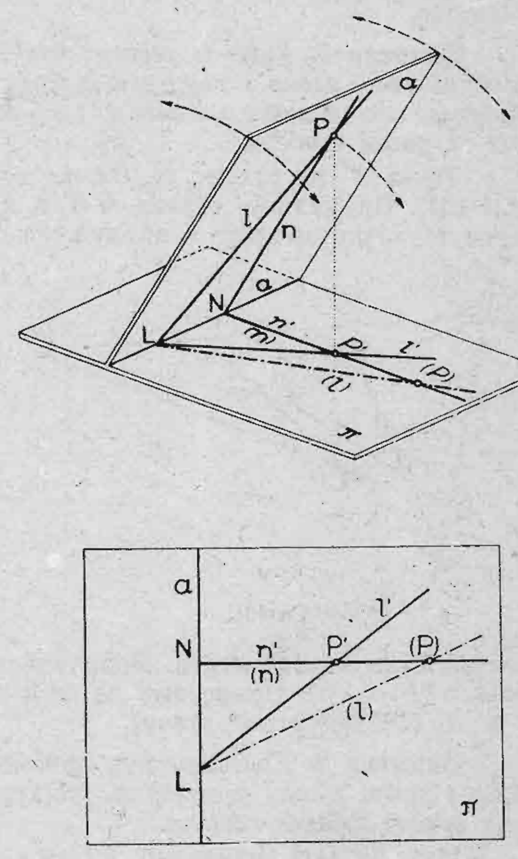
Ако неку раван α обрћемо око њеног трага a све док се та раван не поклопи са равни слике, кажемо да раван α *обарамо* у раван слике. Обарање можемо извршити, очигледно, обртањем у два смера, тако да нека тачка равни α падне с једне или друге стране трага a. У овом одељку претпостављамо увек да је раван коју обарамо коса према равни слике.

Свака тачка P равни α (сл. 100) описује при обарању лук извесног круга који је садржан у равни управној на трагу a, са средиштем на a. Та управна раван је управна на α и на π, дакле је пројектујућа раван оне линије пада n равни α, која пролази кроз P. Средиште круга по коме се креће тачка P је траг N праве n.

Тачке и линије у обореном положају обележаваћемо стављањем дотичних слова у заграде; напр. (P), (n), $[T]$.

Пошто се раван α обори у раван π, тачка P пада у извесну тачку (P) која се, очигледно, налази на пројекцији n' праве n, тј. *на правој повученој кроз P' управно на траг a.* Како је увек $PN > P'N$ (јер PN је хипотенуза правоуглог троугла NPP'), такође је $(P)N > P'N$, тј. *отстојање оборене тачке од трага равни веће је од отстојања њене пројекције P' од трага.*

Нека је l ма која друга права у равни α, која није управна на трагу a и која, рецимо, пролази кроз P. Траг L праве l је, као што знамо, на трагу a равни α. При обарању равни α траг L не мења свој положај, јер се обарање врши око праве a, па свака тачка која је на правој a остаје на своме месту. Дакле, праве l' и (l) секу се на трагу a.



Сл. 100

Као што се из слике види имамо $\sphericalangle NL(P) > \sphericalangle NLP'$ и $\sphericalangle L(P)N < \sphericalangle LP'N$, а самим тим и у простору $\sphericalangle NLP > \sphericalangle NLP'$ и $\sphericalangle LPN < \sphericalangle LP'N$, што се и без обарања могло утврдити. Дакле, *оштри угао што ма која права равни α, коса према трагу, заклапа с трагом, већи је од своје пројекције, а оштри угао што та права заклапа с линијом пада равни α, мањи је од своје пројекције.*

Како се пројекције тачака равни α и те исте тачке у обореном положају налазе две и две на правим управним на a, дакле упоредним међу собом, а на правој a одговара свака тачка себи самој, *пројекција ма ког лика садржаног у равни α и тај лик у обореном положају равни јесу два перспективно афина лика. Оса афиности је траг a, а зраци афиности су управни на тој оси.*

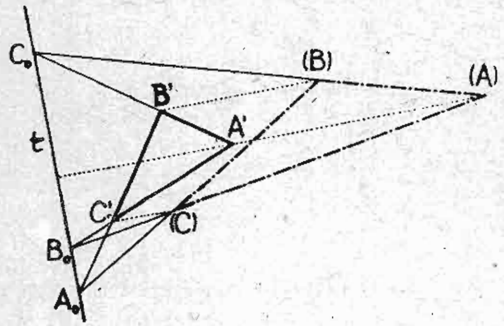
Како се обарањем добија сваки лик у правом облику и величини, моћи ћемо помоћу њега решавати два начелно разна задатка: *из задате пројекције неког лика налазити прави облик и величину тог лика* и обрнуто: *из задатог правог облика и величине налазити његову пројекцију.* Обарањем можемо тако добити и праву величину неке дужи или неког угла, датих у пројекцији, под условом да знамо бар за једну тачку дате равни пројекцију и положај у обореној равни.

Напоменимо да се из отстојања пројекције A' од трага $(A'N)$ и отстојања оборене тачке (A) од трага $((A)N)$ може одредити и отстојање тачке A од равни слике (AA'), наиме $A'N$ је катета, $(A)N$ хипотенуза правоуглог троугла ANA'. Али тек у идућем одељку узимаћемо у обзир отстојања од равни слике.

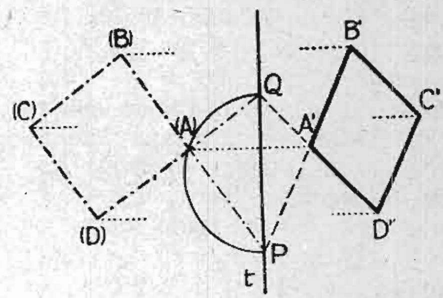
Знајући да су пројекција лика садржаног у косој равни и тај лик у обореној равни два перспективно афина лика, можемо решавати низ задатака.

Задатак 1. *Дата је управна пројекција $A'B'C'$ троугла ABC, који припада косој равни α којој знамо траг t Одредити праву величину тог троугла, ако је дата и тачка (A) у равни слике, у коју пада тачка A кад се раван α обори.*

Тачка A' је, разуме се, ближа трагу t од тачке (A) и $A'(A) \perp t$ (сл. 101). Продужимо стране $A'B'$ и $A'C'$ до пресека C_0 и B_0 с трагом Кроз те тачке пролазе и продужене стране $(A)(B)$ и $(A)(C)$, које да-



Сл. 101



Сл. 102

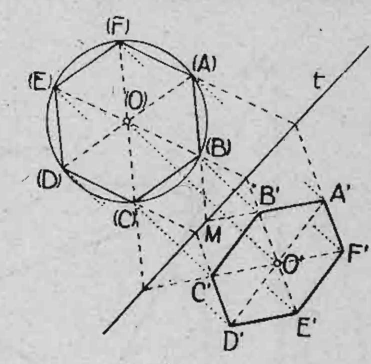
кле можемо конструисати. Повлачењем из B' и C' управних на t добијамо (B) и (C). Приметимо да се и праве $B'C'$ и $(B)(C)$ секу на трагу t, у A_0 (по Дезаргову ставу).

Задатак 2. *Конструисати пројекцију квадрата $ABCD$ када су дати: траг t равни у којој је квадрат, пројекција једне његове стране и пројекција правца суседне стране.*

Нека је дата пројекција $A'B'$ (сл. 102) стране AB и нека је полуправом q' задат правац пројекције суседне стране AD. Продужимо праве $A'B'$ и q' до пресека са трагом t; нека су пресеци P и Q. Изнад дужи PQ опишемо полукруг с једне или друге стране трага t. Пресек тог полукруга с правом управном на траг спуштеном из A' даје тачку (A) у коју пада тачка A кад се раван обори. (Ова конструкција је извршена зато што праве $(A)P$ и $(A)Q$ треба да се секу под правим углом да би $ABCD$ био квадрат). Пресек нормале из B' на траг t с правом $(A)P$ је тачка (B). Дуж $(A)(B)$ је страна AB квадрата у обореној равни. Сад можемо конструисати цео квадрат у обореној равни. Прво, рецимо, страну $(A)(D)$. Спуштањем нормале из (D) на t до пресека са q' добијамо тачку D', а затим, знајући да је $A'B'C'D'$ паралелограм, добијамо и четврто теме C' повлачењем паралелних линија.

Задатак 3. *Дата је пројекција једне стране правилног шестоугла, траг t равни у којој се налази и положај једног темена на тој страни кад се раван обори. Наћи пројекцију тог шестоугла.*

Нека је $A'B'$ пројекција једне стране (сл. 103), t траг те равни и (A) тачка A у обореном положају. (Разуме се, тачка A' је ближа трагу него (A)). Нека је M пресек продужења стране $A'B$ са t. У пресеку правих $(A)M$ и управне на t из B' добијамо тачку (B). Тиме имамо оборену страницу $(A)(B)$. Како знамо да је полупречник круга описаног око правилног шестоугла једнак страници шестоугла, конструкцијом равностраног троугла $(A)(B)(O)$ добијамо средиште (O) тога круга у обореној равни и даљом конструкцијом цели правилни шестоугао у обореном положају. Отуд помоћу афиности добијамо тражену пројекцију $A'B'C'D'E'F'$



Сл. 103

Задаци за вежбу.

1. Образложити на основу реченога у овом параграфу **а)** зашто је пројекција дужи садржане у косој равни, а која није упоредна трагу те равни, мања од те дужи; б) зашто је оштри угао неке праве у косој равни спрам трага те равни у пројекцији мањи.

2. Дати су траг равни α, пројекције двеју тачака A и B те равни и једна од њих у обореном положају равни. Наћи оборени положај друге тачке а) кад је права AB коса према трагу a; б) кад је упоредна трагу и в) кад је управна на трагу.

3. Дата је пројекција дужи AB, траг косе равни у којој је та дуж садржана и положај тачке A кад се та раван обори. Наћи праву величину дужи AB.

4. Дате су пројекције двеју правих које се секу и њихови трагови и тачка у коју пада тачка њихова пресека пошто се њихова раван обори. Наћи праву величину углова што те праве образују.

5. Дат је квадрат $ABCD$ у обореној равни, траг равни квадрата и пројекција A' тачке A. Наћи пројекцију тог квадрата.

6 Дата је пројекција неправилног полигона у косој равни (нека га читалац произвољно нацрта!), траг те равни и једно његово теме у обореном положају. Наћи прави облик тог полигона.

7. Дата је пројекција ма каквог троугла садржаног у косој равни којој знамо траг и дато је једно теме троугла у обореној равни. Одредити а) пресечну тачку његових висина, б) средиште круга уписаног у троугао, в) средиште описаног круга — у пројекцији.

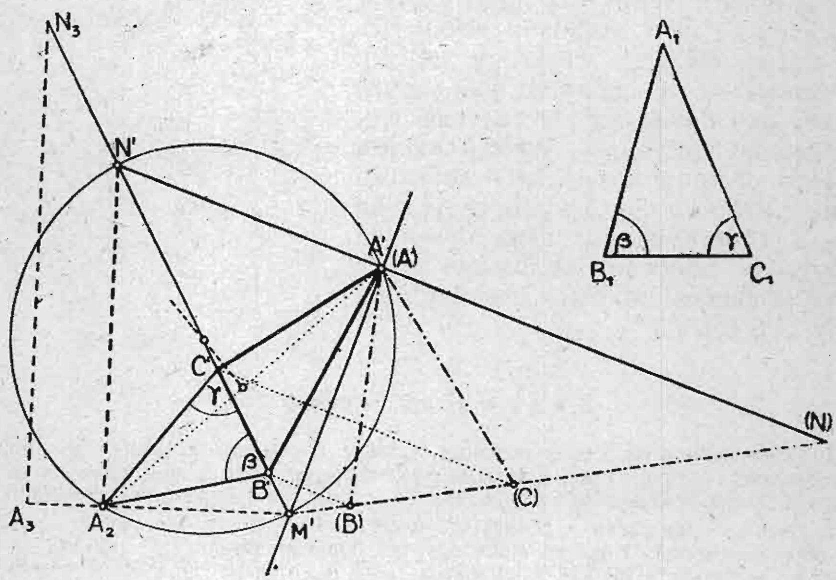
43. ТРОУГАО КАО УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА ТРОУГЛА ДАТОГ ОБЛИКА И ПАРАЛЕЛОГРАМ КАО УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА КВАДРАТА

Сваки троугао $A'B'C'$ у пројекцијској равни може се сматрати управном пројекцијом троугла датог облика. Решићемо наиме следећи задатак:

Задатак 1. *Дата је управна пројекција $A'B'C'$ троугла ABC који је сличан датом троуглу $A_1B_1C_1$ (сл. 104). Одредити правац главних линија равни троугла ABC и оборити га око једне главне линије у раван упоредну равни слике.*

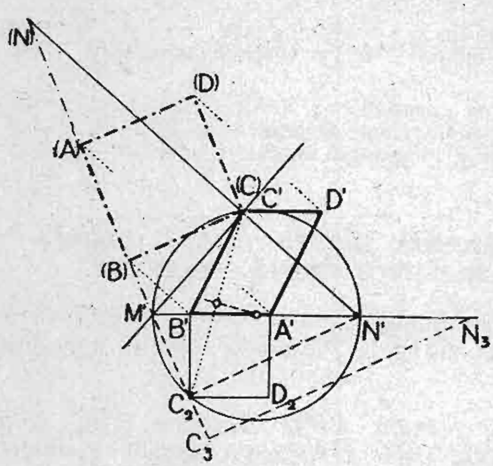
Конструишимо троугао $A_2B'C'$ сличан троуглу $A_1B_1C_1$. Троугли ABC и $A'B'C'$ су афини; исто тако троугли ABC и $A_2B'C'$, јер слични троугли су афини. Дакле и троугли $A'B'C'$ и $A_2B'C'$ су афини, јер два

лика која су афина трећем лику, афина су и међу собом. При томе је $B'C'$, оса афиности. Конструишимо парове узајамно управних правих у том перспективно афином односу одређену троуглима $A'B'C'$ и $A_2B'C'$



Сл. 104

(§ 19). Описивањем круга са средиштем на симетрали дужи $A'A_2$ налазимо на оси $B'C'$ тачке M' и N' кроз које пролазе управне праве: $A'M' \perp A'N'$, $A_2M' \perp A_2N'$. Дакле је и $AM \perp AN$. Но као што знамо, кад пару управних правих одговара у пројекцији пар управних правих, једна од тих правих је главна линија те равни, а друга је линија пада. С друге стране, ако уочимо коју било праву те равни, која сече главну линију под оштрим углом, тај угао је већи од његове пројекције (§ 42). На основу тога можемо одредити која од правих AM и AN је главна линија равни ABC, а која је линија пада. Како је $\sphericalangle A'M'N' < \sphericalangle A_2M'N'$ а $\sphericalangle A'N'M' > \sphericalangle A_2N'M'$ $A'M'$ је пројекција главне линије, а $A'N'$ линије пада.



Сл. 105

Као што је троугао $A_2B'C'$ сличан троуглу ABC, тако је троугао $A_2M'N'$ сличан троуглу AMN. Но како је AM главна линија, дуж AM једнака је својој пројекцији, дакле ако на правој A_2M' одмеримо дуж $A_3M' = A'M'$ и повучемо

$A_3N_3 \parallel A_2N'$ имамо троугао $A_3M'N_3$ који је подударан троуглу AMN у простору.

Дакле, да бисмо конструисали троугао ABC, оборен око главне линије AM у раван паралелну равни слике, приметимо да је $(A) \equiv A'$, и $(M) \equiv M'$, да је тачка (N) на правој $A'N'$ управној на $A'M'$ и да је $(A)(N) = AN = A_3N_3$. Тако добијамо тачку (N), а затим на $M'(N)$ тачке (B) и (C). Тиме је задатак решен.

Задатак 2. ***Дата је управна пројекција $A'B'C'D'$ квадрата $ABCD$. Одредити правац главних линија равни тог квадрата и оборити га око једне главне линије у раван упоредну равни слике.***

Задатак се своди на претходни с том разликом што се тражи да троугао $A'B'C'$, дат паралелограмом $A'B'C'D'$, буде управна пројекција једног равнокраког правоуглог троугла. Конструкција се види из слике 105.

Задаци за вежбу

1. Дата је пројекција равностраног троугла ABC. Одредити правац главних линија његове равни.

2. Дата је управна пројекција четвороугла $ABCD$. Одредити правац главних линија његове равни, ако је четвороугао а) ромб, б) правоугаоник датог облика.

3. Дате су пројекције три темена правилног шестоугла. Одредити правац главних линија његове равни и нацртати његову пројекцију.

Напомена. Задатак има више решења, која зависе и од тога која темена шестоугла одговарају датим трима тачкама.

44. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА КРИВЕ

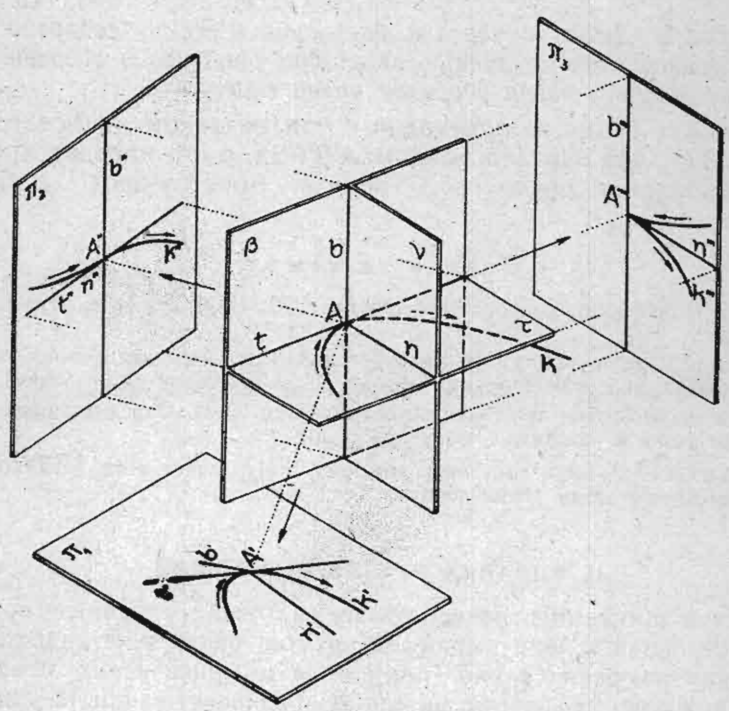
Управна пројекција равне криве, садржане у равни управној на раван слике, пада у једну праву. Кад год раван која садржи криву није управна на равни слике, пројекција је крива истих особина као дата крива. Пројекција дирке на криву у извесној тачки је тада дирка на пројекцију криве у одговарајућој тачки, и свака тачка криве задржава у пројекцији своју природу: пројекција обичне тачке је обична тачка, превојне тачке превојна, повратне повратна, двоструке двострука итд. Пројекција равне алгебарске криве је алгебарска крива истог реда.

Управна пројекција просторне криве (чији лукови нису равне криве) је увек нека равна крива. При пројектовању се неке особине одржавају (напр. пројекција вишеструке тачке је вишеструка тачка истог реда) а неке не. Обичној тачки просторне криве може у пројекцији одговарати сингуларна тачка и сингуларној обична.

Задржимо се само на обичним тачкама просторне криве. Разликујемо три случаја:

1. Ако зраци пројектовања на неку раван π_1 (сл. 106) нису паралелни оскулационој равни τ која припада некој тачки A криве k, тачка A' на пројекцији k' криве је такође обична тачка (сл. 106 а). Као што, наиме, тачка P, која се креће на k, не обрће у A смер свога кретања, тако ни тачка P' на k', и као што дирка на криву не мења смер обртања у A, тако ни њена пројекција у A'.

2. Ако су зраци пројектовања на неку раван π_2 паралелни оскулационој равни, но тако да нису паралелни дирци у A, обележимо у слици пројекције двема цртицама. Тачка A'' је тада превојна тачка криве k''. Крива k пролази наиме у A кроз раван τ, а τ се пројектује тада у праву t', дакле k' је у близини тачке A' с обих страна праве t', као што бива у превојним тачкама.



Сл. 106

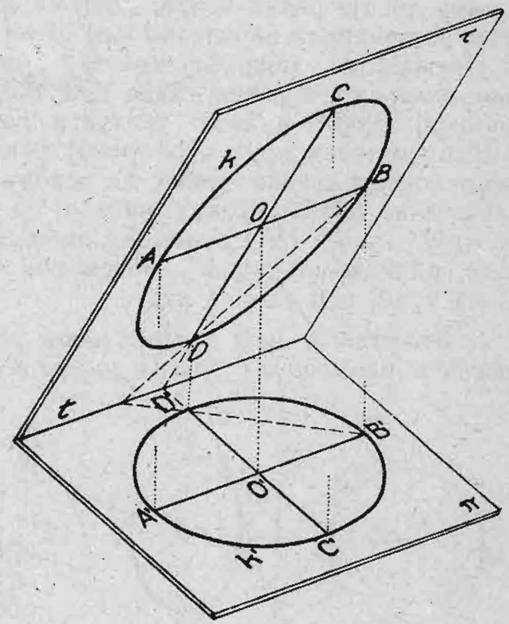
3. Ако су зраци пројектовања на извесну раван π_3 паралелни дирци t у тачки A, обележимо пројекције трима цртицама. Ректификациона раван β пројектује се у праву b' (сл. 106 в), па како крива k остаје с једне стране равни β, остаје крива k' с једне стране праве b', дакле тачка P' мења смер кретања у A', тј. A' је повратна тачка.

Ово посматрање вреди и за косу пројекцију. Штавише, вреди и за централну пројекцију ако у првом случају претпоставимо да је центар пројекције изван оскулационе равни, у другом случају да је у тој равни, но ван дирке t, а у трећем случају да је на t.

45. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА КРУГА

Ако је раван круга упоредна спрам равни слике, његова управна пројекција је круг подударан датом кругу. Ако је раван круга коса према равни слике, управна пројекција је елипса. То можемо закључити једноставно отуд што је круг алгебарска крива другог реда а што се пројектовањем одржава ред алгебарске криве; дакле, пројекција круга је крива другог реда, тј. конусни пресек, па како је садржана у коначном делу равни (затворена крива) може бити само елипса.

Нека је k' пројекција круга k који је садржан у равни косој према равни слике и чији траг је t (сл. 107). Средиште O круга пројектује се у средиште O' елипсе. Пречник круга AB, који је упоредан трагу t, упоредан је спрам равни π, дакле пројектује се у једнак и упоредан пречник елипсе $A'B'$. Сваки други пречник круга бива у пројекцији скраћен, дакле $A'B'$ је велика оса. Највише је скраћен пречник CD, који је управан на AB. Тај пречник је управан на трагу t и пројектује се у малу осу $C'D'$ елипсе, која је такође управна на t.



Сл. 107

Ако се у једној равни косој према равни слике налазе два круга, подударна или разне величине, њихове управне пројекције су елипсе међу собом подударне или сличне, тј. размера мале осе према великој, $C'D'/A'B'$, иста је за обе елипсе. Дакле пројекције свих кругова садржаних у једној равни јесу подударне или сличне елипсе. Исто вреди кад су кругови у разним равнима које су међу собом упоредне: њихове пројекције су подударне или сличне елипсе

Како је сваки раван лик спрам своје управне пројекције перспективно афин (§ 19), круг k и елипса k' су перспективно афини. Ако косу раван у којој је круг оборимо, добијамо у самој равни слике круг и његову пројекцију као два перспективно афина лика (сл. 107) То нам омогућава решавање низа задатака, као што показују следећи примери.

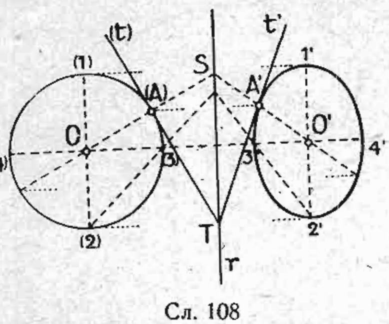
Задатак 1. *Конструисати управну пројекцију круга садржаног косој равни којој је дат траг t; ако знамо пројекцију средишта круга величину полупречника и оборени положај средишта.*

Ослањамо се о слику 107. Дат је траг t равни, пројекција O' средишта и његов оборени положај (O). Знајући величину полупречника, описујемо круг из (O). Велику осу $A'B'$ елипсе можемо конструисати одмах, јер је упоредна трагу и пројекција је пречника AB који је упоредан трагу. Мала оса $C'D'$ је пројекција пречника CD управног на трагу и можемо је одредити на основу афиности, напр помоћу праве (B) (D). Даље тачке можемо добити повлачењем прави кроз средиште (O).

Задатак 2. *Конструисати пројекцију круга који је садржан у извесној косој равни, кад је дата пројекција оног пречника круга, који је упоредан трагу равни и кад је дата пројекција једне тачке круга.*

Нека је права p она главна линија равни, на којој је пречник AB, који је дат пројекцијом $A'B'$ (сл. 61). Дата је дакле и пројекција O' средишта. Нека је M' дата пројекција тачке M на кругу. Како је p главна линија равни круга, можемо претпоставити да смо раван пројекције померили паралелно њој самој тако да је траг дошао на праву p. Према томе, обарање можемо извршити и око праве p исто као око самог трага равни. Тада при обарању пречник AB не мења свој положај. Дакле можемо сматрати да је круг описан над пречником $A'B'$ посматрани круг у обореној равни и помоћу њега одредити колико хоћемо тачака елипсе на основу афиности. Датој тачки M' одговара тачка (M) на правој управној на p. Затим можемо напр. изабрати на кругу тачку (M_1) и помоћу правих $M'M_1$ и $(M)(M_1)$, које се секу на p, одредити тачку M'_1, затим помоћу правих $(M_1)(C)$ и M_1C', тачку C' на малој оси елипсе итд.

Задатак 3. *Дат је траг равни којој припада круг коме знамо средиште и једна дирка с тачком додира. Конструисати пројекцију тога круга.*



Сл. 108

Нека је траг r, средиште круга O, дирка t, тачка додира A. Дато је t', O', A' и a' (сл. 108). Нека су S и T трагови правих OA и t. Како је дирка на круг управна на полупречнику у тачки додира, угао $\sphericalangle SAT$ је прав угао, дакле и у обореном положају угао $\sphericalangle S(A)T$ је прав. То нам омогућава да конструишемо тачку (A) (в. задатак 2, § 42, бирајући, ради веће прегледности слике, положај с оне стране трага r с које не пада пројекција круга. Отуда добијамо на правој $S(A)$ тачку (O), опишемо круг и помоћу афине сродности добијамо остале податке потребне за конструкцију елипсе, пројекције круга.

46. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА ЕЛИПСЕ, ПАРАБОЛЕ И ХИПЕРБОЛЕ

Сматрајући круг посебним обликом **елипсе**, може се рећи да је управна (а исто тако и коса) пројекција **елипсе** елипса, хиперболе хипербола, а параболе парабола (сл. 109). То се може закључити на сличан начин као што смо на почетку § 45 закључили да је управна пројекција круга елипса.

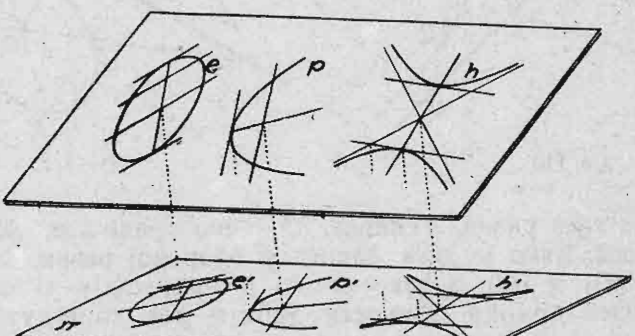
Како су дирке у крајевима једног пречника елипсе упоредне спрегнутом пречнику, а у упоредној пројекцији паралелним правим одговарају паралелне праве, постоји иста околност и у пројекцији, тј. пројекције спрегнутих пречника елипсе су спрегнути пречници њене пројекције. И обрнуто: спрегнутим пречницима пројекције одговарају спрегнути пречници елипсе у простору. Осама елипсе у простору не одговарају осе њене пројекције, сем ако је једна од оса упоредна трагу равни елипсе.

Слична посматрања вреде за параболу и хиперболу.

Оса параболе и свака полуправа упоредна оси, истог смера и с исходиштем у једној тачки параболе зове се *пречник*. Средишта свих тетива параболе упоредних међу собом припадају једном пречнику параболе. Крајња тачка тих пречника је тачка додира упоредне дирке. За ту дирку и те тетиве кажемо да су *спрегнуте (конјуговане)* с тим пречником параболе. Слично се каже и кад је реч о елипси или хиперболи. Оса параболе је онај њен пречник, чије спретнуте тетиве су на њему управне.

Пројекција пречника параболе је пречник њене пројекције.

Свака дуж која пролази кроз средиште хиперболе и спаја њене две тачке је један њен *реалан пречник*. Дуж која спаја две тачке на једној грани хиперболе је *тетива* хиперболе. Средиште свих међу собом упоредних тетива припадају продужењима једног њеног пречника. У крајевима тог пречника дирке на хиперболу су упоредне тим тетивама.



Сл 109

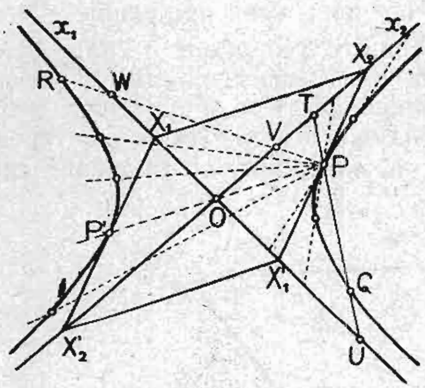
Пројекција пречника хиперболе је пречник њене пројекције, а пројекције тетива спрегнутих с пречником хиперболе јесу тетиве спрегнуте с пројекцијом тог пречника. Као што знамо, дирке у теменима хиперболе секу асимптоте у врховима осног правоугаоника (сл. 110), а реалној оси и диркама у теменима хиперболе h одговара у пројекцији какав било пречник и дирке у његовим крајевима. Отуд следује да на свакој хиперболи дирке у крајевима ког било реалног пречника секу асимптоте у врховима једног паралелограма, а дуж која спаја средишта двеју његових упоредних страна X_1X_2' и X_2X_1' је један реалан пречник. Дуж која спаја средишта других двеју његових упоредних страна зове се имагинаран пречник хиперболе. Оба ова пречника називају се спрегнутим или конјугованим пречницима хиперболе.

Ако хиперболи h, у простору, повучемо сечице и дирке управне на реалну или имагинарну осу, из симетричности хиперболе и њених асимптота следује да и асимптоте отсецају на тим сечицама парове једнаких дужи.

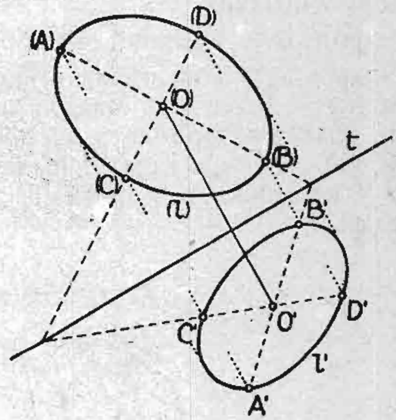
Како иста околност постоји и у пројекцији, следује одатле да свака хипербола и њене асимптоте отсецају на свакој сечици хиперболе две једнаке дужи, тј. $CN = \overline{CN}$ и $AY = A\overline{Y}$.

Отуд произлази конструкција хиперболе, ако су дате њене асимптоте и једна њена тачка (сл. 110).

Задатак 1. *У равни косој спрам равни слике постоји елипса. Дат је траг те равни, затим елипса у обореном положају и пројекција њеног средишта. Наћи пројекцију елипсе.*



Сл. 110



Сл. 111

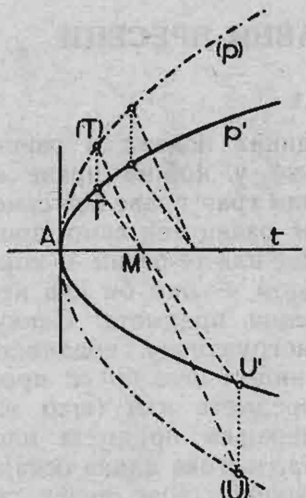
Нека је t траг равни, l елипса, O њено средиште, AB и CD велика и мала оса. Како је дата елипса у обореној равни, знамо тачке (A), (B), (C), (D) и (O), а како знамо и пројекцију O' средишта O (сл. 111), можемо помоћу афиности добити два спрегнута пречника $A'B'$ и $C'D'$ елипсе l'. Елипсу l' можемо конструисати налажењем већег броја њених тачака, а можемо из њена два спрегнута пречника одредити и њене осе.

Задатак 2. *Дат је траг t косе равни у којој је парабола p, затим парабола у обореном положају и пројекција T' једне њене тачке. Наћи управну пројекцију параболе претпостављајући да се траг t поклапа с осом параболе.*

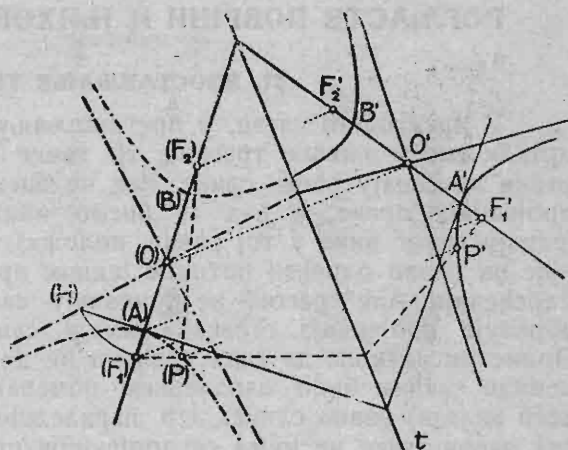
Тачки T' (сл. 112) одговара на обореној параболи тачка (T) $((T') \perp t)$. Помоћу тачака (T) и T' можемо наћи прво колико хоћемо тачака помоћу афиности. Повуцимо напр. кроз ма коју тачку M на оси t праву $(T)M$ која сече параболу у још једној тачки U. Како је U' на MT', (U) на $M(T)$, а $U'(U) \perp t$, можемо из (U) наћи U', као што слика показује. Мењајући затим положај тачке M и повлачећи одговарајуће парове правих, упоредних спрам $M(T)$ и MT' добијамо колико хоћемо даљих тачака параболе с обих страна осе.

Задатак 3. *Дате су у пројекцији жиже и једна тачка хиперболе, затим траг равни хиперболе и та иста тачка у обореном положају. Нацртати хиперболу у управној пројекцији и у обореном положају.*

Нека су F_1 и F_2 жиже, P тачка дата у пројекцији и у обореној равни и t траг равни (сл. 113). Помоћу афиности добијамо из F_1' и F_2' тачке (F_1) и (F_2). Знајући сад жиже и једну тачку хиперболе у обореној равни, прелазимо прво на конструкцију хиперболе у обореној равни. Можемо одредити прво велику осу, затим помоћу осног правоугаоника асимптоте. На основу оборене хиперболе добијамо помоћу афиности њену пројекцију.



Сл. 112



Сл. 113

Задаци за вежбу

1. Конструисати управну пројекцију круга који пролази кроз три тачке кад су дати: траг равни у којој је круг, пројекције тих трију тачака, а једна од њих и у обореној равни.

2. Конструисати управну пројекцију круга кад су дате две његове тачке у пројекцији и у обореној равни ρ круга и пројекција једне праве која је у равни ρ и пролази кроз средиште круга.

3. Дата је управна пројекција круга и једног његовог пречника. Нацртати пројекцију пречника који је управан на првом (не обарајући круг).

4. Конструисати осе елипсе кад су дата два спрегнута пречника једнаке величине а која се секу под косим углом.

5. Проучити како се мењају правци и величине оса елипсе кад се мења величина једног од два задата спрегнута полупречника, а угао међу њима не мења.

6. Проучити како се мењају правци и величине оса елипсе кад се мења угао између задата два спрегнута пречника.

7. Дате су управне пројекције оса елипсе, траг њене равни и једна њена тачка у обореном положају. Нацртати ту елипсу у пројекцији и у обореном положају.

8. Дата је парабола у обореном положају, управна пројекција њеног темена и траг равни параболе, који није упоредан оси параболе. Наћи пројекцију параболе.

9. Дата су у пројекцији два темена и једна жижа хиперболе, траг равни у којој се налази хипербола и једно теме у обореној равни. Наћи пројекцију хиперболе и њен прави облик.

ГЛАВА II

РОГЉАСТЕ ПОВРШИ И ЊИХОВИ РАВНИ ПРЕСЕЦИ

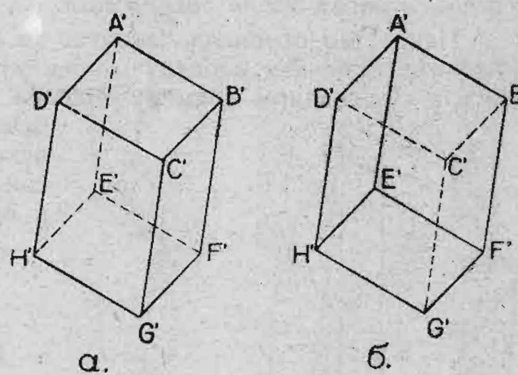
47. ИЗОСТАВЉАЊЕ ТРАГОВА

У претходној глави, у претстављању појединих правих и равни цртали смо и њихове трагове, тј. тачке и праве у којима праве и равни пресецају раван слике. Кад не бисмо имали траг праве већ само пројекцију праве, и кад не бисмо имали траг равни већ само пројекцију неког лика у тој равни, положај те праве или те равни — који није ни онако одређен потпуно једном пројекцијом — био би још неодређенији. Али трагови не припадају самој слици предмета. Слику образује пројекција. Трагови имају само конструктивну вредност. Приметимо такође да тада у слици не постоји ништа што би се променило каквим било паралелним померањем предмета или (што на исто излази) равни слике. Јер паралелним померањем предмета или пак равни слике не мења се пројекција предмета: његова слика остаје иста. Мења се само положај трагова у тој пројекцији: траг праве се креће дуж њене пројекције, а траг равни се помера упоредно себи самом.

Задаци којима сад прилазимо тичу се прво рогљастих, потом облих површи и тела. Конструисаћемо њихове пресеке равнима, продоре правим и њихове узајамне продоре а затим још и сенке при најједноставнијим осветљењима. Но све су то првенствено положајни задаци, а као што ћемо видети, особито у положајним задацима (где постављамо праве и равни кроз дате тачке и праве и вршимо међусобна сечења) долазе у обзир само пројекције, а не трагови. Познавање тачног положаја предмета према равни слике није ту потребан — па ни трагови правих и равни, који спадају по својој природи у одређивање тачног положаја, нису потребни. Највише што ће нам требати то је да у задацима о правилним пирамидама и купама, о правим призмама и ваљцима итд познајемо траг равни основе, или макар само праву упоредну трагу, да бисмо могли на основу потребних података оборити ту раван у раван слике или у неку упоредну раван и конструисати тако пројекцију основе (правилног многоугла или круга); или да бисмо знали у ком правцу се пројектују бочне ивице призме или висина пирамиде итд. Уосталом, изостављањем трагова кад год нам не буду потребни упростиће се слика и ослободити „несликовитих“ елемената, будући да само пројекција предмета даје његову „слику“.

48. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА ПРИЗМЕ И ПИРАМИДЕ

Посматрајмо прво паралелепипед коме ни једна страна није управна на равни слике Како је управна пројекција паралелограма, који није у равни управној на равни слике, опет паралелограм, у пројекцији паралелепипеда свакој његовој страни одговара по један паралелограм (сл. 114). Али од шест страна виде се само три, дакле од шест ивица чије пројекције падају у унутрашњост контуре, три ће се видети а три се неће видети и треба их слабије извући или само назначити цртканим линијама. Избор ивица које се не виде може се извршити на два начина, као што показују слике 114а и б. Обе слике су подударне, али тела која су њима претстављена друкчије су окренута према равни слике и не морају, разуме се, претстављати подударне паралелопипеде. То могу бити два паралелопипеда симетрична у односу на раван слике, а таква два паралелепипеда не могу се, опште узевши довести до поклапања.



Сл. 114

У слици сваког полиједра треба, пре свега, разликовати руб или контуру слике (у сл. 114а и б шестоугао $A'B'F'G'H'D'$) од њене унутрашњости. Тај руб потиче од ивица које се виде. Ако је рогљаста површ испупчена, у сваку унутрашњу тачку слике пројектују се две тачке те површи; једна нам је ближа, друга даља (напр. у сл. 114а тачка C је ближа од оне тачке на пљосни $ABFE$, која се такође пројектује у C').

Ако се једно теме полиједра види, виде се све ивице које из тог темена полазе; ако се теме не види, не виде се ни ивице које из њега полазе (у сл. 114а тачка C се види, па се виде и ивице CB, CD, CG). Ако је пројекција неког темена на контури пројекције полиједра, ивице које из тог темена полазе могу се све видети, или неке од њих видети а неке не видети. Ако се пројекције двеју ивица секу, једна се види, друга не види (напр. у сл. 114б ивице CG и EF и ивице AE и CD).

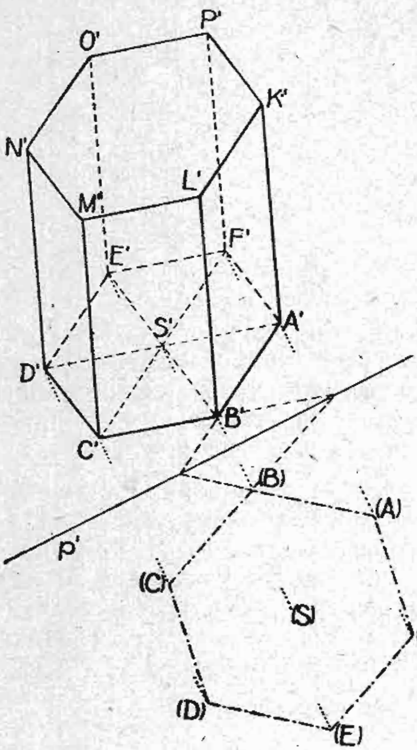
Посматрајмо ради примера следећа два задатка.

Задатак 1. *Конструисати управну пројекцију косе призме у општем положају према равни слике, чије су основе правилни шестоугли*

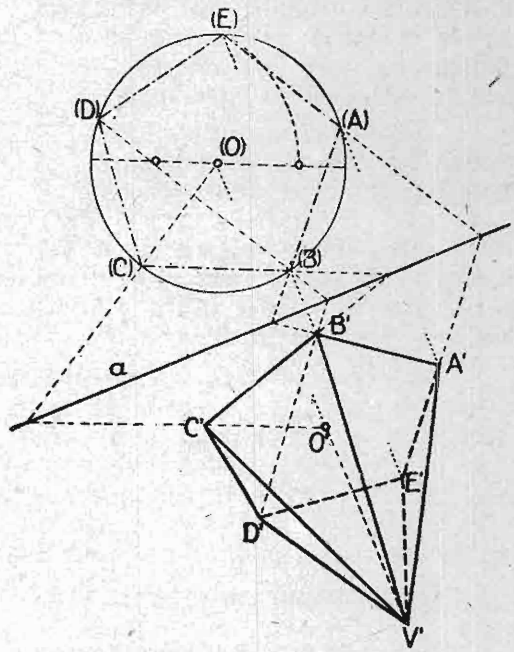
Нацртајмо прво правилан шестоугао $(A)(B)(C)(D)(E)(F)$, који претставља основу оборену у раван паралелну спрам равни слике π, око трага или око неке главне линије p (сл. 115). Конструишимо затим један афин шестоугао $A'B'C'D'E'F'$ са зрацима афиности управним на p' и који може претстављати управну пројекцију правилног шестоугла. Из шест темена тог шестоугла повуцимо у извесном правцу шест паралелних и једнаких дужи. Кад би требало претставити *п р а в у* призму бочне ивице би морале бити управне на основи, дакле њихове пројекције управне на правој p' Ако дакле повучемо пројекције тих ивица косо према p', слика претставља свакако *к о с у* призму. Конструкцијом бочних ивица одређена је и пројекција $K'L'M'N'O'P'$ друге основе призме. При коначном извлачењу ивица у слици треба водити рачуна о видљивости ивица. У нашој слици је изабрана од две могућности она у којој се види „горња" основа $KLMNOP$. Ако је p траг равни основе, цела призма је, очигледно, испред пројекцијске равни (тј. нама ближе).

Задатак 2. *Конструисати пројекцију правилне петостране пирамиде с основом косом према равни слике.*

Нацртајмо правилан петоугао (в. § 19), затим афини петоугао који може претстављати управну пројекцију правилног петоугла (сл. 116) као и у претходном примеру. Висина пирамиде је управна на равни основе и подиже се из средишта O основе. Према томе пројекција висине је управна на оси афиности a и полази из O'. Дакле на правој



Сл. 115



Сл. 116

$(O)\,O'$, управној на a изаберимо с једне или друге стране тачке O' пројекцију V' врха пирамиде.

Најзад бирамо који део пирамиде желимо да буде видљив. На слици смо узели да се основа пирамиде не види. Услед тога се ивице EA, ED, EV не виде. Ако сматрамо да је раван слике хоризонтална, можемо рећи да је пирамида окренута основом доле а врхом горе.

Задаци за вежбу

1. Нацртати управну пројекцију октаедра у косом положају према равни слике и који је састављен из две правилне четворостране пирамиде.

2. Нацртати пројекцију правилне пирамиде чија је основа правилна шестокрака звезда паралелна равни π.

3. Нацртати пројекцију правилне зарубљене пирамиде чија је основа правилна осмокрака звезда у равни косој према равни π

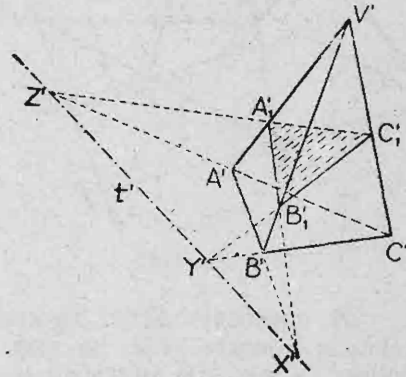
4 Нацртати пројекцију а) призме, б) пирамиде ако је основа управна на π.

5 Нацртати пројекцију косе тростране пирамиде.

49. ПРЕСЕК ПИРАМИДЕ ЈЕДНОМ РАВНИ

Посматрајмо прво ма какву тространу пирамиду (тетраедар) $ABCV$ и нека извесна раван α пресеца њене три ивице AV, BV, CV у тачкама A_1, B_1, C_1. Пресек је дакле троугао $A_1 B_1 C_1$.

Нека се у пројекцији $A' B' C' V'$ те пирамиде (сл. 117) види напр. ивица BV, која пада у контуру слике, а према томе ивица AC не види. Изаберимо на $A'V'$, $B'V'$, $C'V'$ тачке $A_1' B_1' C_1'$ како било, и спојмо их дужима. На ивицама AV, BV, CV одређене су тиме три тачке A_1, B_1, C_1 које не припадају једној правој, дакле одређују раван α и троугао $A_1 B_1 C_1$ по коме α сече пирамиду. Ако раван пресека није управна на равни слике, пројекција $A_1' B_1' C_1'$ троугла $A_1 B_1 C_1$ је троугао.



Сл. 117

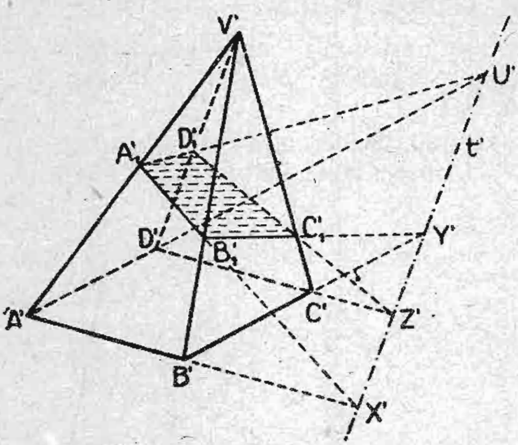
Посматрајмо троугле ABC и $A_1 B_1 C_1$. Како су њихове стране AB и $A_1 B_1$ на пљосни ABV, дакле у истој равни, те стране се у својим продужењима секу у извесној тачки X (која може бити и једна бескрајно далека тачка равни ABV). Исто тако, праве BC и $B_1 C_1$ секу се у некој тачки Y, а CA и $C_1 A_1$ у некој тачки Z. Све три тачке X, Y, Z припадају равни основе ABC и равни троугла $A_1 B_1 C_1$, тј. једној правој: пресечној правој t равни ABC и α.

До те очигледне чињенице просторног разматрања могло се доћи и непосредним посматрањем слике, на основу Дезаргова става, јер како се праве $A' V'$, $B' V'$ и $C' V'$ секу у тачки V', троугли $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ су перспективно колинеарни, дакле парови одговарајућих страна секу се непосредно или у продужењима, на једној правој. Али наше просторно разматрање вреди, очигледно, и за вишестране пирамиде. Код сваког пресека пирамиде једном равни имамо два перспективно колинеарна многоугла. Врх пирамиде је средиште колинеације, а пресек равни основе и пресечне равни је оса колинеације. На основу тога може се одредити пресек ма какве пирамиде којом било косом равни.

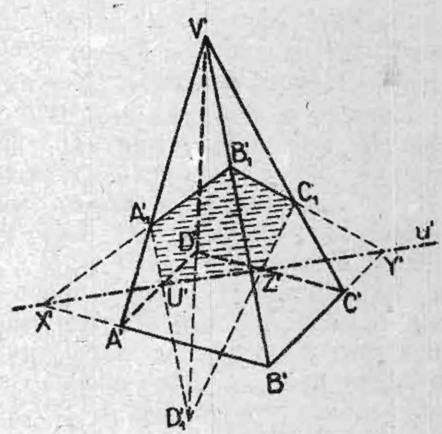
Посматрајмо следеће примере.

Задатак 1. *Дата је пројекција четворостране косе пирамиде којој је основа оивичена паралелограмом $ABCD$ а врх V. Наћи пресек те пирамиде неком равни косом према равни слике, кад су дате тачке пресека трију ивица пирамиде том равни.*

Нека је $A'B'C'D'V'$ пројекција пирамиде (сл. 118) и A_1', B_1', C_1' пројекције трију датих пресечних тачака. Три тачке које нису на једној правој одређују раван. Зато ће и сад, и у даљим задацима, пресек бити одређен трима тачкама које можемо изабрати по вољи. Конструишимо у пројекцији $AB \times A_1B_1 = X$, $BC \times B_1C_1 = Y$. Тада је XY оса колинеације. Затим $CD \times t = Z$, $ZC_1 \times DV = D_1$. Тиме је пресек $A_1B_1C_1D_1$ у пројекцији конструисан. Разуме се, и $AD \times A_1D_1 = U$ је на t.



Сл. 118

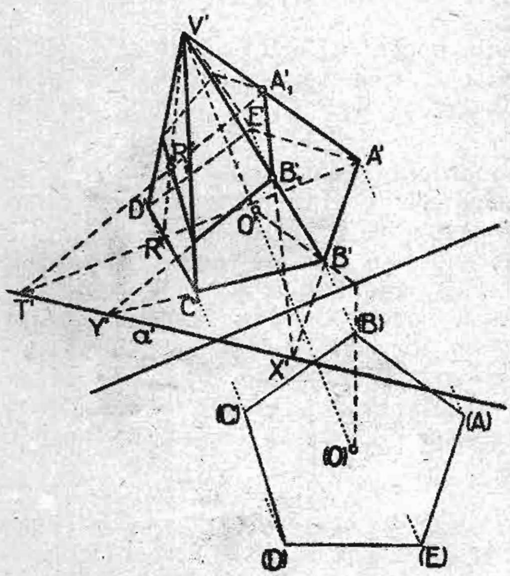


Сл. 119

Од положаја датих тачака A_1, B_1, C_1 зависи какав ће облик имати пресек и уопште које ће још ивице сећи раван задату тим трима тачкама. У сл. 119 приказан је случај кад раван $A_1 B\ C_1$ пресека сече и основу пирамиде. Услед тога она не сече ивицу DV, али је у продужењу, наравно, сече, у D_1. Пресек пирамиде је тада петоугао $A_1B_1C_1ZU$. Још би пресек могао бити троугао.

Задатак 2. *Дата је правилна петострана пирамида и три тачке пресека неком равни α, и то пресеци A_1 и B_1 двеју ивица AV и BV и једна тачка R_1 која не припада ивицама али је на пресеку бочне стране CDV и равни α. Наћи цели пресек.*

Нека је $A'B'C'D'E'V'$ пројекција дате пирамиде (сл. 120). Како тачка R_1 припада страни CDV, права VR_1 је у равни те стране, дакле сече ивицу CD у извесној тачки R. Замислимо тространу пирамиду с основом ABR и врхом V. Раван α је сече у троуглу $A_1B_1R_1$. Дакле можемо конструисати осу колинеације a перспективно колинеарних



Сл. 120

троуглова ABR и $A_1B_1R_1$. Оса a претставља пресек равни α и равни основе. Помоћу ње можемо наћи остале тачке пресека дате петостране пирамиде, као што показује слика.

Задаци за вежбу

1. Дата је у пројекцији тространа пирамида и три тачке пресека неком равни, од којих су две на бочним ивицама а трећа на ивици основе. Конструисати пресек.

2. Дата је у пројекцији каква било седмострана пирамида $ABCDEFGV$ и пресек њених трију ивица AV, BV и CV неком равни α. Нацртати цели пресек.

3. Дата је у пројекцији правилна шестострана пирамида $ABCDEFV$, затим пресек двеју ивица AV и CV неком равни α и једна тачка за коју се зна да је заједничка равни основе и равни α. Нацртати пресек.

4. Исто, претпостављајући да је основа пирамиде у равни π.

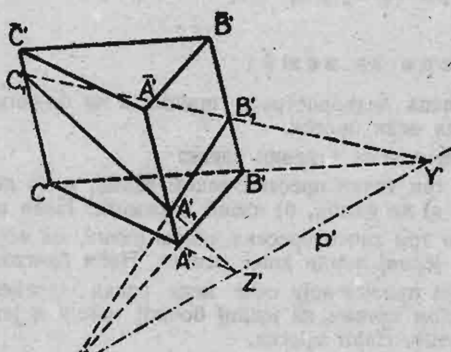
5. Дата је правилна четворострана пирамида $ABCDV$. Постављена је раван кроз средишта двеју суседних ивица при основи пирамиде и то тако да две стране пресечног полигона буду упоредне. Нацртати тај пресек.

6. Претставити пресеке четворостране пирамиде равнима а) паралелним основи, б) које садрже једну бочну ивицу, в) које садрже једну ивицу основе, г) које су упоредне једној бочној страни.

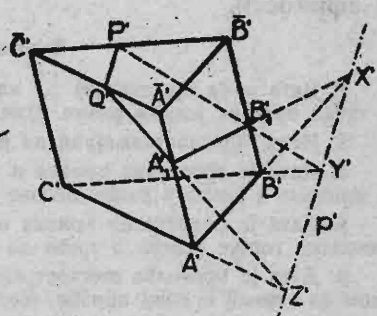
50. ПРЕСЕК ПРИЗМЕ ЈЕДНОМ РАВНИ

Како призму можемо замислити и као пирамиду чији врх је извесна бескрајно далека тачка, можемо претходно посматрање пренети на решавање задатака о равном пресеку призме. Као што је врх пирамиде био средиште колинеације, тако је сад средиште колинеације та бесконачно далека тачка, дакле колинеација прелази у афиност у којој су бочне ивице зраци афиности.

Задатак 1. *Дата је пројекција тростране призме $ABC\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ која је пресечена једном равни, косом према равни основе. Дат је у пројекцији и пресек p те равни и равни основе и тачка пресека на ивици $A\bar{A}$. Наћи цели пресек.*



Сл. 121

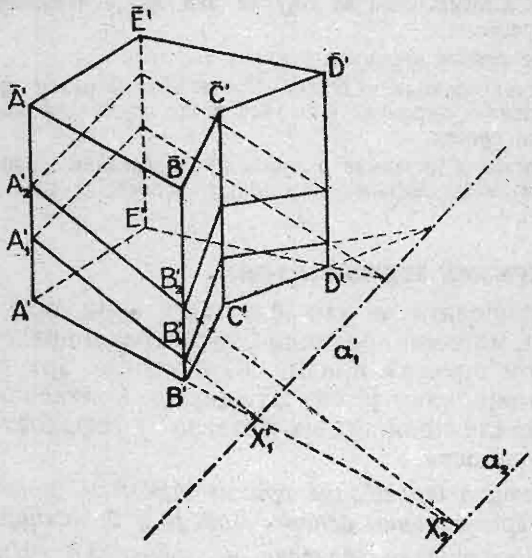


Сл. 122

Нека је A_1 тачка пресека на ивици $A\bar{A}$ (сл. 121). Конструкцију можемо у пројекцији извести следећим редом: $AB \times p = X$, $A_1X \times B\bar{B} = B_1$, $BC \times p = Y$, $B_1Y \times C\bar{C} = C_1$. Ако су тачке B_1 и C_1 на одговарајућим ивицама, а не на њиховим продужењима, пресек призме је троугао $A_1B_1C_1$.

Напоменимо да су троугли $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ перспективно афини ликови, p' оса афиности, $A'\bar{A}'$ и њој упоредне праве зраци афиности.

Може се догодити да напр. тачка C_1 није између C и $\bar{C}$ (сл. 122). Тада пресечна раван сече основу $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ призме. Како су равни обих основа упоредне, пресек основом $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ је упоредан пресеку основом ABC. Према томе треба изменити назначену конструкцију утолико што нам је сада потребан пресек $B_1Y \times \bar{B}\,\bar{C} = P$. Затим повуцимо $P'Q' \parallel p'$. Тада је тражени пресек призме четвороугао $A_1B_1C_1Q_1$.



Сл. 123

Задатак 2. *Дата је пројекција призме. Одредити пројекцију оне призме која настаје кад се дата призма пресече двема упоредним равнима које пресецају све бочне ивице дате призме.*

Да би једна од две пресечне равни имала одређен положај спрам призме, треба поћи од три пресечне тачке, напр. од A_1, B_1, C_1 (сл. 123), тј. изаберимо A_1', B_1', C_1' на одговарајућим ивицама. Тада можемо одредити осу афиности a_1' и конструисати пројекцију целог пресека $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ призме том равни. Пресек паралелном равни је перспективно подударан полигон. Та раван сече раван ABC по правој $a_2 \parallel a_1$. Права a_2 је одговарајућа оса афиности.

Задаци за вежбу

1. Дата је (у пројекцији) ма каква четворострана призма и на бочним ивицама три тачке пресека једном равни. Наћи цели пресек.

2. Исто, претпостављајући да је основа у равни слике.

3. Дата је тространа призма и три тачке пресека неком равни, и то две на бочним ивицама а трећа у равни основе а) на ивици, б) изван пирамиде. Наћи пресек.

4. Дата је петострана призма и три тачке пресека неком равни, од којих су две на ивицама горње основе а трећа на једној ивици доње основе. Наћи пресек.

5. Дата је правилна шестострана призма коју сече нека раван одређена једном тачком на горњој основи призме, једном тачком на једној бочној ивици и једном тачком у равни доње основе, изван призме. Наћи пресек.

6. Претставити пресеке какве било призме равнима а) које су паралелне њеним основама и деле бочне ивице на неколико једнаких делова, б) које садрже бочну ивицу, в) које су паралелне једној бочној страни.

51. ПРОДОР ПИРАМИДЕ ИЛИ ПРИЗМЕ ПРАВОМ ЛИНИЈОМ ИЛИ РАВНОМ ПОВРШИ

Конструкција продора (или пресека) неког тела или површи равним ликом своди се на пресек оном равни којој тај лик припада.

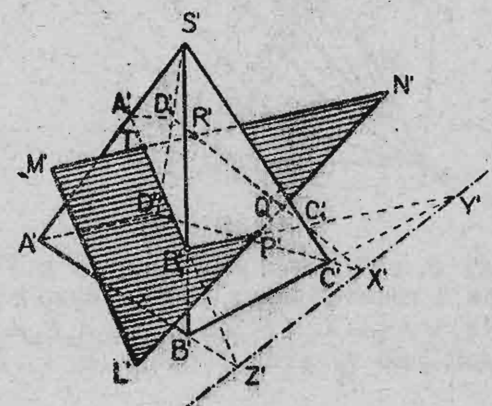
Задатак 1. *Дата је управна пројекција ма какве четворостране пирамиде $ABCDS$ и троугла LMN, затим трију тачака пресека обих површи, рецимо: B_1 где ивица BS продире троугласту површ, и Q и R где стране LN и MN троугла продиру пљосан CDS. Нацртати продор троугла и пирамиде.*

Три тачке B_1, Q, R (сл. 124) одређују пресек пирамиде и равни троугла. Тај пресек, тј. четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ добићемо као у § 49: $CD \times PQ = X$, $PQ \times CS = C_1$, $PQ \times DS = D_1$, $BC \times B_1C_1 = Y$ итд. Онај део троугла LMN који пада у четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ садржан је у унутрашњости пирамиде. Остала два дела су изван пирамиде. Постоје две линије продора: PB_1T и QR.

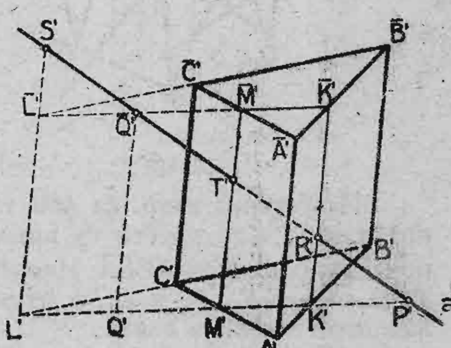
Ради конструкције продора неког тела или површи правом треба познавати једну раван која садржи ту праву и одредити прво пресек том равни. Где дата права сече линију тог пресека имамо тачке у којима она продире тело или површ. У одређивању продора пирамиде једном правом обично постављамо такву помоћну раван кроз врх пирамиде и ту праву. У случају продора призме неком правом можемо поставити раван кроз дату праву и која је паралелна бочним ивицама.

Задатак 2. *Одредити продор тростране призме једном правом, кад су дате тачке продора кроз равни обих основа.*

Нека је $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$ пројекција ма какве тростране призме и a' пројекција праве која продире призму (сл. 125). Да би задатак био одређен морамо утврдити некако положај праве a према призми. Зато



Сл. 124



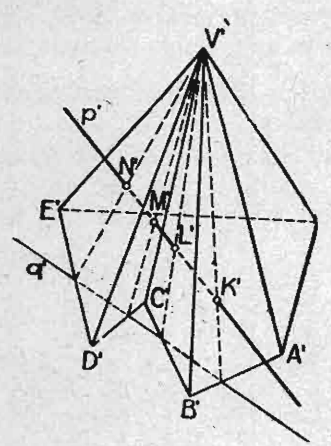
Сл. 125

претпостављамо да су у пројекцији дате тачке P и $\bar{Q}$ у којима права a продире равни обих основа призме: P у равни доње основе, $\bar{Q}$ у равни горње основе. Тада можемо тражити тачке у којима та права продире равни осталих страна призме. Поставимо кроз праву a раван α упоредну бочним ивицама. Она садржи праву $Q\bar{Q} \parallel A\bar{A}$ и која продире раван доње основе ABC у Q. Очигледно, $Q'\bar{Q}' \# A'\bar{A}'$, дакле равни α и ABC секу се дуж праве PQ. Даље вршимо у пројекцији ово: $PQ \times AB = K$, $K\bar{K} \parallel A\bar{A}$, $K\bar{K} \times a = R$, а то је продор праве a кроз страну $AB\bar{B}\bar{A}$. Исто тако $PQ \times BC = L$. $L\bar{L} \parallel A\bar{A}$, $L\bar{L} \times a = S$, а то је продор кроз раван $BC\overline{C}\overline{B}$, који пада ван призме. Исто тако добијамо тачку T продора праве a трећом бочном страном. Део праве a од R до T је у телу и не види се.

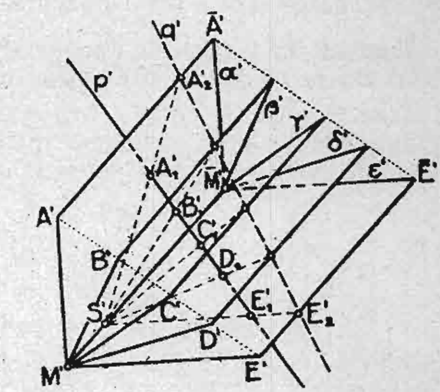
Задатак 3. *Посматрајмо продор пирамиде $ABCDEFV$, којој је основа неправилан полигон* (сл. 126), *правом p. Нека су дате две тачке продора, напр. L и N, где права p продире стране BCV односно DEV.*

Поставимо раван кроз врх V и праву p и потражимо као у претходном задатку пресек q те равни и равни основе. Праве VL и VN у пресеку ивицама BC и DE, дају две тачке пресека q. Из тачака у којима q сече ивице AB и CD повлачимо праве до врха; на њима су остале две тачке продора, K и M, пирамиде правом p.

Задатак 4. *Тространа призма $AME\overline{A}\overline{M}\overline{E}$ је расечена трима равнима које садрже бочну ивицу $M\overline{M}$* (сл. 127). *Наћи продор праве p кроз те три равни кад су (у пројекцији) дати продори A_1 и E_1 кроз стране $AM\overline{M}\overline{A}$ и $EM\overline{M}\overline{E}$ призме.*



Сл. 126



Сл. 127

Изаберимо напр. на $M\overline{M}$ тачку S, поставимо раван кроз p и S и потражимо њен пресек са призмом и трима равнима. Нађимо прво њен пресек q равнином $AE\overline{E}\overline{A}$. Имамо $SA_1 \times A\overline{A} = A_2$, $SE_1 \times E\overline{E} = E_2$, $A_2E_2 = q$. Тада имамо B_2, C_2 и D_2, а отуд добијамо тражене продоре B_1, C_1, D_1 као што показује слика.

Задаци за вежбу

1. Дата је тространа пирамида и три тачке H, K и F продора неким паралелограмом $ABCD$: тачке H и K су на једној бочној страни продори с AB и CD, а F је на супротној бочној ивици. Одредити пројекцију продора.

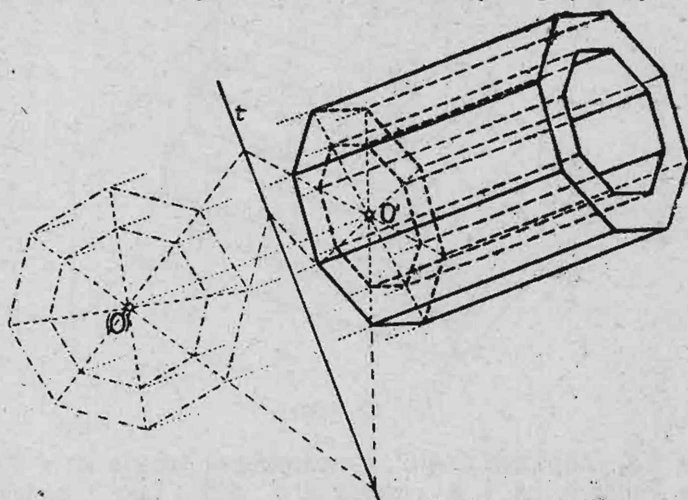
2. Дата је четворострана призма и права a која продире призму. Положај праве a спрам призме одређен је двема тачкама M и N у којима она продире горњу основу и једну бочну страну. Наћи тачке продора равнима осталих страна призме.

52. ПРОЈЕКЦИЈЕ И ПРЕСЕЦИ СЛОЖЕНИЈИХ РОГЉАСТИХ ПОВРШИ

На начин изложен у претходним разматрањима можемо поступати и у задацима који се односе на сложенија рогљаста тела. Овде износимо три таква задатка.

Задатак 1. *Нацртати управну пројекцију прстенастог тела које настаје кад се правилној осмострaној призми одузме иста таква мања призма с истом осом и висином, тако да су при основама тела стране мањег осмоугла упоредне странама већег и да стоје у размери 2 : 3*

Конструишимо прво правилан осмоугао и поделимо дуж од његова средишта до једног темена по размери 2 : 3 и из тако одређене тачке опишимо повлачењем упоредних страницама првог осмоугла мањи, унутарњи осмоугао (сл. 128). Лик који тако добијамо можемо сматрати основом задатог тела у обореном положају. Пројекције те основе у



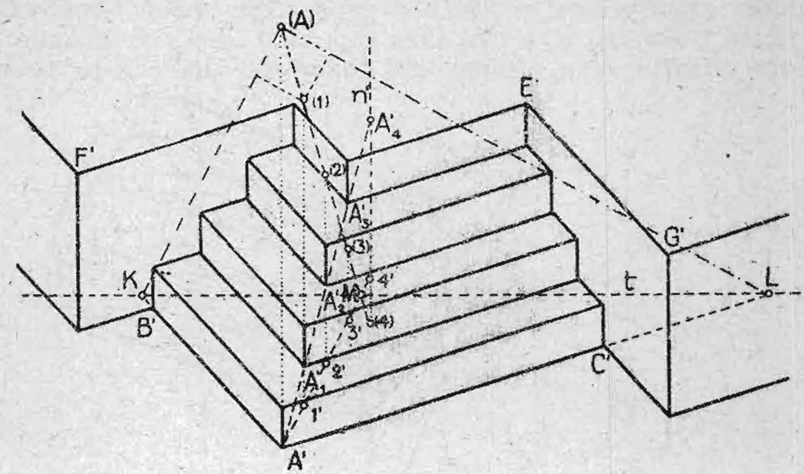
Сл. 128

косом положају према равни слике добијамо затим на већ познати начин. При извлачењу видљивих ивица треба имати на уму да је тело прстенасто и да се, према томе, код основе која нам је ближа виде и делови унутарњих бочних ивица, као што показује слика.

Задатак 2. *Претставити степенице на које се пење у два смера под правим углом, као што показује слика* 129. *Треба да буду четири степеника, једнако дубока у оба смера пењања.*

Ако степенице пројектујемо управно на хоризонталну раван ABC, с које оне воде навише, тачке A_1, A_2, A_3 на заједничким ивицама обих страна степеница пројектују се на располовницу правог угла $\sphericalangle BAC$, у извесне тачке *1*, *2*, *3*. Дакле, да бисмо добили управну пројекцију тог угла и његове располовнице, оборимо раван ABC у раван слике. Повуцимо дакле прво траг t равни ABC и конструишимо прав угао $\sphericalangle K(A)L$ и његову располовницу $(A)M$. Затим, изабравши дубину степеника (хоризонтална димензија), одредимо на $(A)M$ тачке (*1*), (*2*), (*3*), (*4*), једнако удаљене међу собом. Тада изаберимо A', повуцимо $A'K$, $A'L$, $A'M$ и одредимо $1'$, $2'$, $3'$, $4'$. На пројекцији вертикалне праве n која пролази кроз тачку *4* ($n' \perp t$) изаберимо тачку A_4' и дуж $A_4'4'$ поделимо на четири једнака дела, саобразно висинама степеника. На вертикалним правим постављеним кроз *1*, *2*, *3*, *4* налазимо тада у пресеку са $A'A_4'$ тачке A_1', A_2', A_3'. Повуцимо затим из A' и из ових група тачака прво пројекције вертикалних ивица четири степеника:

дужи управне на t и једнаке четвртини дужи $A'4'$, затим пројекције хоризонталних ивица, упоредних ивици $A'K$ и ивици $A'L$. Изаберимо затим на AK тачку B и на AL тачку C. Замишљамо да кроз B и C пролазе вертикални зидови управни на AK и AL, који ограничавају степенице. Изломљена линија која полази из B' има стране наизменце



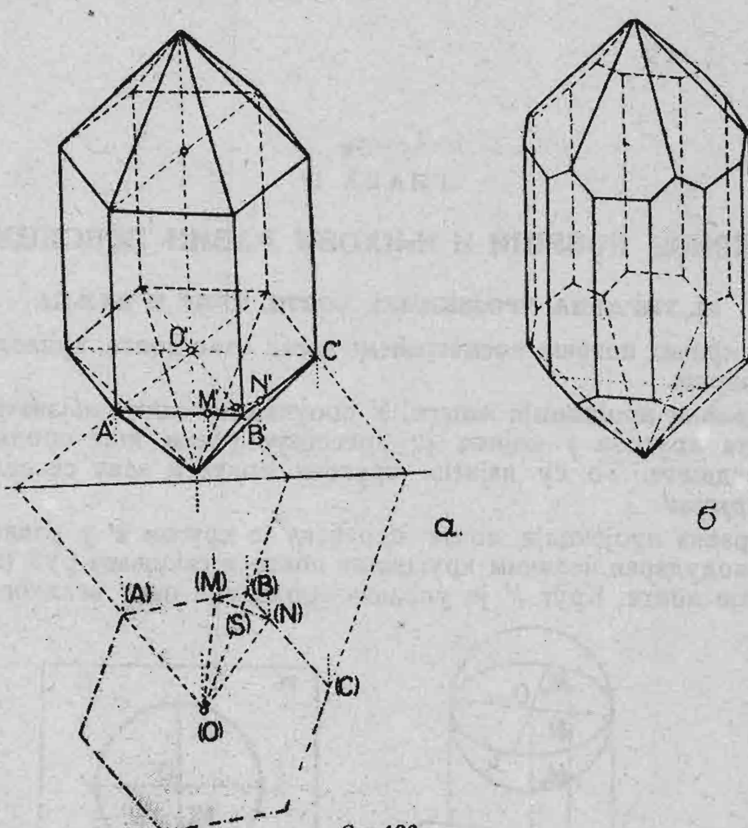
Сл. 129

управне на t и упоредне с $A'C'$, а изломљена линија која полази из C' има стране управне на t и упоредне с $A'B'$. Тако долазимо до E' На слици су нацртане још неке ивице.

Задатак 3. *Конструисати управну пројекцију полиједра (тела) који се састоји из правилне шестостране призме којој су додате на обим основама две подударне правилне шестостране пирамиде. Затим отсећи од тог полиједра делове дуж бочних ивица призме, тако да пресечне равни буду паралелне тим ивицама и да од шестоугла основе остане правилан дванестоугао.*

Пројекцију правилне шестостране призме а затим обих пирамида добијамо као досад, пошавши од основе у обореном положају, $(A)(B)(C)(D)(E)(F)$ (сл. 130а).

Друго тело можемо добити ако на већ обореној основи конструишемо правилан дванаестоугао. У ту сврху треба напр. с краком $(O)(B)$ конструисати угао $\sphericalangle(B)(O)(M)$ који је четвртина угла $\sphericalangle(A)(O)(B)$, и тако исто $\sphericalangle(B)(O)(N) = \frac{1}{4}\sphericalangle(B)(O)(C)$. Нека су при томе (M) и (N) на странама $(A)(B)$ односно $(B)(C)$ шестоугла. Обележимо $MN \times OB = S$. Тада је $(M)(N)$ страна траженог дванаестоугла. Помоћу ње је лако конструисати цели дванестоугао. Кроз MN треба поставити раван упоредну оси призме. Та раван сече призму дуж правих $M\overline{M}$ и $N\overline{N}$ упоредних оси призме. Она сече и обе пирамиде у извесним тачкама P и Q чије пројекције добијамо кад из S' повлачимо упоредну оси призме (сл. 130 а и б). Кад једном имамо P' и Q' добићемо лако одговарајуће тачке на осталим бочним ивицама обих пирамида, знајући да равни упоредне основама и постављене кроз P и Q секу бочне ивице обих пирамида у тим тачкама. На тај начин добијамо слику 130б (која претставља врсту кристала).



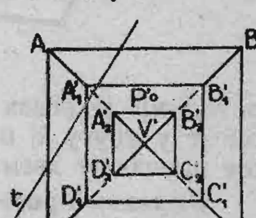
Сл. 130

Задаци за вежбу

1. Две правилне четворостране пирамиде са заједничком основом сачињавају известан (неправилан) октаедар. Претставити његов пресек ма каквом равни.

2. Претставити звездасто тело коме су дванаест темена средишта ивица октаедра посматраног у задатку 1, а даљих шест темена су правилно распоређена на продужењима оних дужи које спајају супротна темена октаедра.

3. На хоризонталној равни, коју сматрамо равнином пројекције, стоји зарубљена правилна четворострана пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а на овој правилна пирамида $A_2B_2C_2D_2V$ (сл. 131). Коса раван τ одређена је трагом t и тачком P која је на горњој основи зарубљене пирамиде. Одредити пресек тог сложеног тела том косом равни.



Сл. 131

ГЛАВА III

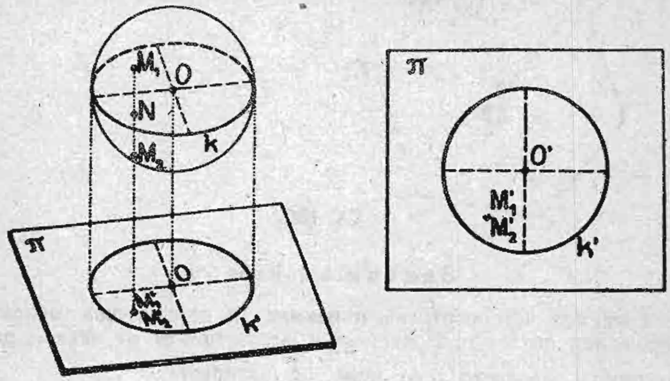
КРИВЕ ПОВРШИ И ЊИХОВИ РАВНИ ПРЕСЕЦИ

53. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА ЛОПТЕ, КУПЕ И ВАЉКА

Од кривих површи посматраћемо засад само лопте, купасте и ваљкасте површи.

Управна пројекција лопте. У проучавању лопте најзначајнији су они њени кругови у којима је пресецају равни које пролазе кроз њено средиште. То су највећи кругови лопте и зову се *велики* или *главни кругови*

Управна пројекција лопте одређена је кругом k' у равни слике, који је подударан великим круговима лопте и сачињава руб (контуру) пројекције лопте. Круг k' је управна пројекција оног великог круга k

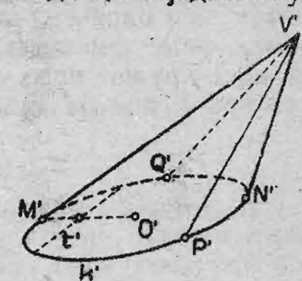


Сл. 132

лопте, чија је раван паралелна равни слике (сл. 132). У сваку тачку која је у кругу k' пада пројекција двеју тачака лопте, напр. M_1 и M_2, које припадају двема полулоптама које су омеђене кругом k,

Управна пројекција кружне купе. Купасту површ којој је водиља круг зовемо *кружно купастом површи*. Ако висина пролази кроз средиште круга водиље, имамо *праву кружно купасту површ*, краће *обртну купасту површ*, јер спада у обртне површи. Слично називамо и купе, бирајући за водиљу круг основе.

Пројекција кружне купе која је у општем положају према равни слике одређена је пројекцијом круга k њене основе, пројекцијом њеног врха V и двема диркама повученим из V' на елипсу k' (сл. 133). Те дирке су пројекције двеју изводница VM и VN. Руб пројекције купе састоји се дакле из пројекција тих двеју изводница и једног лука елипсе k'. Свака изводница купе пројектује се као дуж која спаја V' с неком тачком на k', а $V'M'$ и $V'N'$ су две крајње дужи. Тачке M и N деле круг k на два лука која се оба виде или, као у слици 133, један се види, други не види. Ако је P тачка на једном луку, Q на другом, једна од двеју изводница VP и VQ се види, друга не види. Ако се лук MQN не види, не види се ни изводница VQ; кад би се тај лук видео, не би се видела изводница VP.

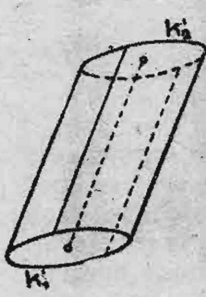


Сл. 133

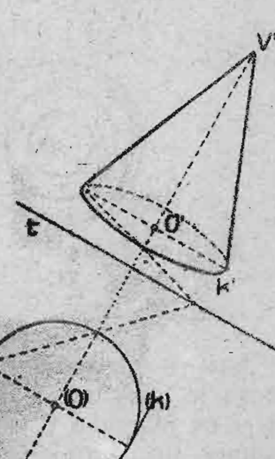
Напомена. Почетнику треба нагласити да тачке M' и N' нису и не могу бити крајње тачке неког пречника елипсе, напр. велике осе. Ради одређивања тих тачака, рецимо тачке M', треба имати на уму да пречник елипсе кроз тачке O' и M' полови све тетиве упоредне спрегнутом пречнику. Повуцимо дакле тетиву $t' \parallel V'M'$ тачка M' је на правој која пролази кроз O' и кроз средиште те тетиве.

Управна пројекција кружног ваљка. Пројекција кружног ваљка, тј. коме је руб основе круг, одређена је пројекцијом подударних кругова k_1 и k_2 његових обих основа, дакле ако је ваљак у општем положају, двема подударним елипсама k_1 и k_2 и пројекцијом двеју заједничких и упоредних дирки тих елипса (сл. 134). Све изводнице ваљка пројектују се као упоредне дужи. Контура пројекције ваљка састоји се из двеју дужи које припадају поменутим диркама и из по једног лука сваке елипсе.

Ове напомене је лако уопштити ма за какву купу, и ма за какав ваљак. — И кад се посматрају пројекције ма каквих површи, долазе у обзир линије у равни слике, које образују *руб пројекције површи* (тзв. привидна контура) и линије на самој површи, *од којих тај руб потиче* (тзв. права контура).



Сл. 134



Сл. 135

Задатак. *Конструисати пројекцију обртне купе чија је основа коса према равни слике.*

Нека је t траг равни основе, (k) круг основе у обореној равни, (O) његово средиште (сл. 135). Помоћу афиности добијамо пројекцију k' круга основе. Како је правој купи висина управна на равни основе, пројекција висине је управна на t, дакле и на великој оси елипсе k'. Изаберимо према томе на $(O)O'$ пројекцију V' врха купе. Дирке из V' на k' допуњавају руб пројекције.

Нагласимо да је управност правих t и $O'V'$ потребна да би слика приказивала обртну купу. Али, како једном пројекцијом предмет у простору није одређен, не мора конструисана пројекција купе претстављати само замишљену обртну купу, већ може претстављати и разне косе кружне купе, које се, рецимо, добијају из дате обртне купе кад се врх V помера дуж пројектујућег зрака који пролази кроз V'.

Задаци за вежбу

1. Претставити у управној пројекцији тело које се састоји из два обртна ваљка са заједничком осом: точак и осовину, у општем положају према равни слике.

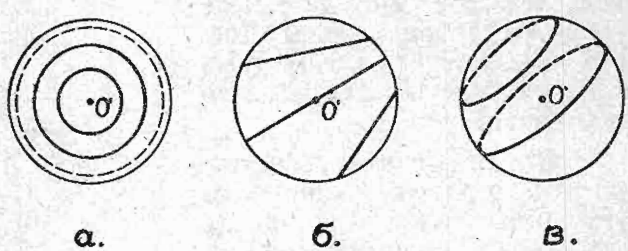
2. Претставити комад праволинијске кружне цеви између два управна пресека. Управни пресек је омеђен двама концентричним круговима чији полупречници су 3 см и 4 см.

3. Претставити вретенасто тело које се састоји из две подударне обртне купе са заједничком основом.

4. Претставити обртно тело које се састоји из полулопте и обртног ваљка, са заједничком основом.

54. ПРЕСЕК ЛОПТЕ ЈЕДНОМ РАВНИ

Свака раван сече лопту по неком кругу. Средиште тог круга је подножје управне спуштене из средишта лопте на ту раван. Ако раван пролази кроз средиште лопте пресек је велики круг лопте.



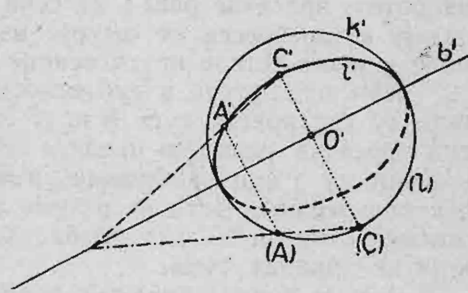
Сл. 136

Ако је пресечна раван упоредна пројекцијској равни, пројекција пресека је круг и то, ако раван пролази кроз средиште лопте, пројекција се поклапа с рубом пројекције лопте, ако не пролази кроз средиште, пројекција је мањи круг, концентричан кругу руба (сл. 136а). Ако је пресечна раван управна на равни пројекције, пројекција пресека је дуж (сл. 136б). Ако је пресечна раван коса према равни слике, пројекција пресека је елипса. Пресеци паралелним косим равнима су у пројекцији сличне елипсе (сл. 136в).

Задатак. *Дата је управна пројекција лопте. Нацртати пресек те лопте једном равни која пролази кроз средиште лопте, знајући пројекцију једне тачке која је на том пресеку и пројекцију једне упореднице те равни.*

Нека је k' руб пројекције лопте, A' пројекција дате тачке (сл. 137). Како пресечна раван α пролази кроз средиште O лопте повуцимо упоредницу кроз O; нека је то права b. Ако оборимо раван α око b тражени пресек p поклопиће се у пројекцији с кругом k'. Дакле b' је оса афиности круга k' и елипсе l' у коју се пројектује пресечни круг l. Тачки A' одговара при томе на кругу k' тачка (A) за коју је $A'(A) \perp b'$. Очигледно, с једне стране праве b' пројектују се тачке круга l које су на ближој полулопти па се виде, а с друге стране праве b' тачке које су на даљој полулопти и које се не виде. У слици смо претпоставили да је тачка A на ближој полулопти, дакле види се половина елипсе, којој припада A'.

Више задатака о пресецима лопте моћи ћемо решавати тек у идућем одељку.



Сл. 137

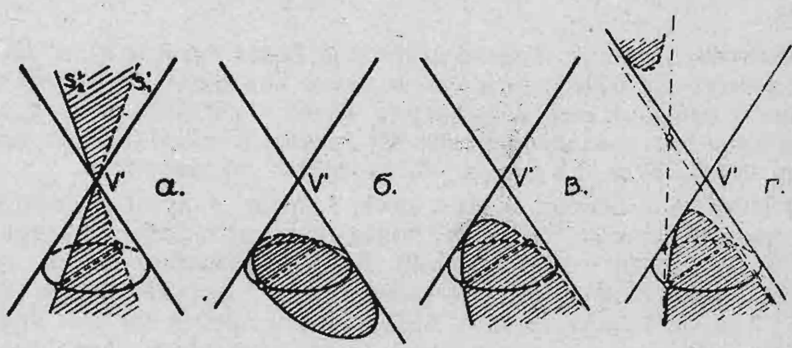
Задаци за вежбу

1. Дата је пројекција лопте и једне тачке A на лопти. Одредити пресек лопте оном равни која је упоредна равни слике, а пролази кроз тачку A.

2. Претставити пресек лопте једном равни управном на равни слике и која пролази кроз две дате тачке на лопти.

55. ПРЕСЕК КУПЕ ЈЕДНОМ РАВНИ

Пресек кружно купасте површи неком равни која пролази кроз врх купасте површи састоји се из две изводнице (s_1 и s_2 у сл. 138а). Ако пресечна раван не прелази кроз врх, пресек је коника: хипербола, парабола или елипса. Ако пресечна раван сече све изводнице у ко-



Сл. 138

начно удаљеним тачкама, пресек је елипса (сл. 138б), при томе убрајамо у елипсе и круг, који се добија кад је пресечна раван упоредна равни водиље. Ако је једна изводница упоредна пресечној равни, пресек је парабола (сл. 138в). Ако су две изводнице упоредне пресечној равни, пресек је хипербола; како се у врху састају два крила купасте површи, имамо у пресеку с њима обе гране (сл. 138г).

Према томе, пресек кружне купе једном равни која пролази кроз врх купе је троугао коме су две стране две изводнице купе, а трећа је тетива круга основе. Ако пресечна раван не пролази кроз врх а сече све изводнице у тачкама које припадају купи, пресек је елипса. Ако, напротив, пресечна раван не сече све изводнице у тачкама које припадају купи, пресек се састоји из лука елипсе, параболе или хиперболе и једне тетиве круга основе.

Као што пресек и руб основе пирамиде беху колинеарни ликови, тако су сад пресек купе и круг њене основе колинеарни ликови, кад год пресечна раван не пролази кроз врх купе и не сече основу. Изводнице су зраци колинеације, а пресек равни основе пресечном равни оса колинеације. Исто је, разуме се, и кад пресечна раван сече раван основе, само што тада треба узети у обзир и део купасте површи који не припада купи.

Ако је водиља купасте површи нека друга линија, имамо разне друге купасте површи. Пре свега, ако је водиља елипса, парабола или хипербола настају купасте површи другог реда, које не сачињавају три разне врсте, већ их све можемо сматрати *елипсним купастим површима*. Заиста, није тешко увидети да као што се купаста површ којој је водиља елипса увек може пресећи тако да пресек буде парабола или хипербола, тако се и обратно, купаста површ којој је водиља парабола или хипербола увек може пресећи тако да пресек буде елипса. Шта више, за сваку елипсну купасту површ може се пресечној равни дати такав положај да пресек буде круг. Према томе кружна купаста површ обухвата све врсте купастих површи којима су водиље конусни пресеци.

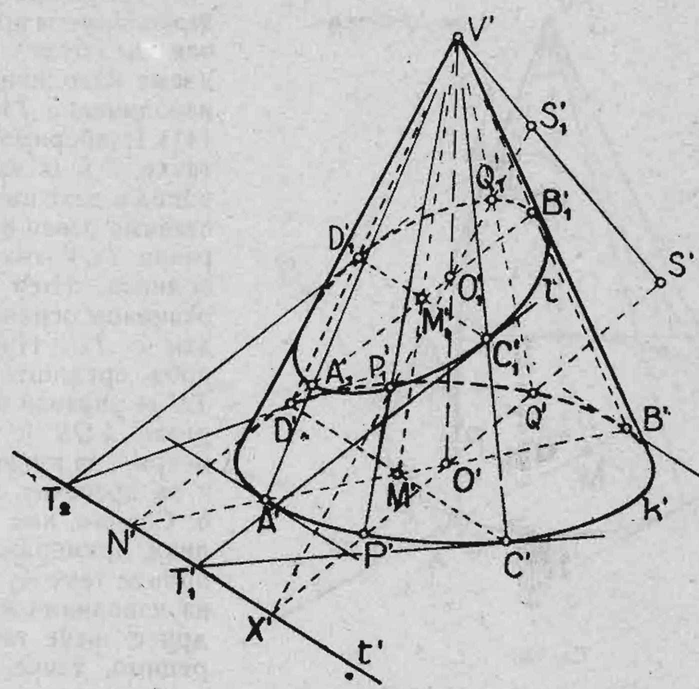
Споменимо овом приликом и зарубљену купу, која настаје кад се једном равни паралелном основи купе отсече од купе део који садржи врх. Разматрање равних пресека зарубљене купе препуштамо читаоцу.

Задатак. *Дата је управна пројекција праве кружне купе. Наћи пројекцију пресека те купе једном косом равни кад знамо пројекцију пресека те равни и равни основе и пројекцију тачака у којима нека права која пролази кроз врх купе продире те обе равни. Изабрати дате елементе тако да пресек буде* а) *елипса,* б) *парабола,* в) *хипербола.*

а) Нека је k основа, V врх купе, t права у којој пресечна раван сече раван основе, SV нека права кроз врх, која продире раван основе у S а раван τ у S_1 (сл. 139). Да би пресек био *елипса* довољно је то да права t не сече круг основе и да, разуме се, не пролази кроз S. Кад би t била права у бескрајности пресек би био круг.

Да бисмо нашли продор које било изводнице, напр. изводнице PV кроз раван τ, поставимо помоћну раван кроз праву SV и изводницу PV. Та раван сече раван основе по правој SP, која пресеца праву t у тачки X, а сече раван τ по правој S_1X. Дакле у пресеку изводнице PV правом S_1X имамо продор те изводнице, тј. једну тачку P_1 траженог пресека купе. Но права SP сече основу у још једној тачки Q, дакле пресек праве S_1X с изводницом QV даје одмах још једну тачку Q_1 пресека. Узимајући разне помоћне равни, добијамо колико хоћемо тачака пресечне елипсе l.

Међу тачкама елипсе l потражимо њена темена. Приметимо да је раван ν која пролази кроз O и управна је на t, раван симетрије за купу и за пресечну раван, дакле и за елипсу. Ако је дакле N подножје управне из O на t, затим A и B њени пресеци са k, раван v сече купу по изводницама AV и BV, на којима су темена A_1 и B_1 елипсе l. Како су дирке у A и B управне на ON, паралелне су спрам t, дакле повлачењем дирки које су паралелне спрам t, налазимо тачке A и B. Но из колинеације следује да су и дирке на елипсу l у A_1 и B_1 паралелне спрам t. Паралелно тим диркама, кроз средиште M_1 осе A_1B_1 пролази друга оса C_1D_1 елипсе l. Тачке C_1 и D_1 добијамо кад кроз тачку M, где VM_1 сече раван основе, повучемо тетиву CD (која у ко-



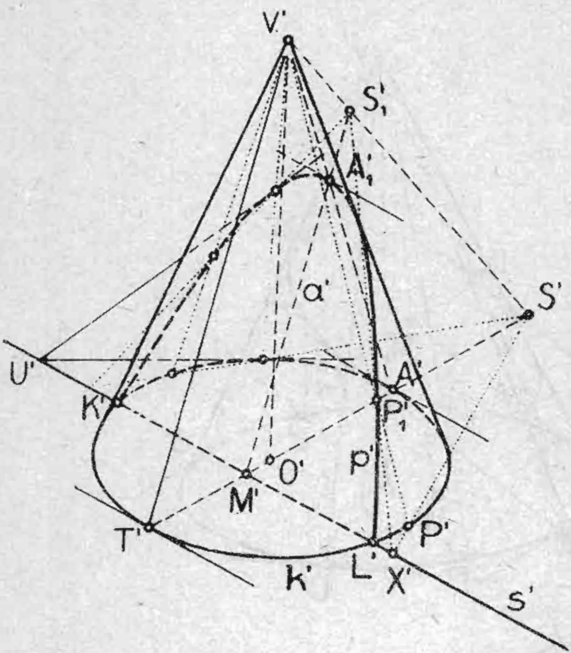
Сл. 139

линеацији одговара пречнику C_1D_1) као све остале тетиве елипсе. Тангенте на елипсу у C_1 и D_1 су, разуме се, паралелне оси A_1B_1 (ма да одговарајуће тангенте у C и D нису паралелне). У пројекцији, најзад, $A'B'$ и $C'D'$ су два конјугована пречника, а помоћу њих можемо лако добити осе елипсе l'.

б) Да би пресек био *парабола* треба пресечна раван да буде паралелна једној изводници, напр. изводници TV (сл. 140). Пошто је нацртана пројекција купе изаберимо тачку T на кругу k основе. Раван која додирује купу дуж TV, сече раван основе у дирци на круг k. Пресечна раван σ сече раван основе у извесној правој s која је упоредна тој дирци. Изаберимо тако пројекцију праве s. Уочимо раван VOT, која је управна на s, дакле је за пресечну параболу раван симетрије. Према томе права по којој та раван сече раван σ је оса параболе, a. Она пролази кроз $s \times OT = M$ и паралелна је спрам TV, дакле можемо јој конструисати пројекцију a'.

Нека је AV друга изводница у којој купу сече раван VOT. Пресек $a \times AV = A_1$ је, очигледно, теме параболе p, дирка у тој тачки упоредна је са s.

Ради конструкције даљих тачака параболе можемо се служити као у прошлом задатку ма којом правом кроз врх V и њеним продорима S и S_1 кроз σ и кроз раван основе, напр. једном правом у равни VOT (тада је S на OT).



Сл. 140

в) Да би пресек био *хипербола* треба пресечна раван да буде паралелна двема изводницама, напр. изводницама TV и UV (сл. 141). Изаберимо дакле две тачке T и U на кругу k, водиљи дате површи и поставимо раван σ упоредну равни TUV тих двеју изводница. Њен пресек s равнином основе је упоредан с TU. Пречник OR кроз средиште R дужи TU је управан на s, дакле раван VOR је раван симетрије за купасту површ и за пресечну хиперболу h. Слично као у претходним примерима можемо добити теме A_1 хиперболе на изводници AV и затим друге њене тачке, прво, рецимо, тачке оне њене гране којој припада теме A_1. Приметимо да се на свакој правој изводнице која пролази кроз тачку лука TAU круга k налази једна тачка исте гране хиперболе.

Другу грану хиперболе добијамо као пресек другог крила купасте површи (које настаје кад продужимо изводнице преко врха купе) истом равни. Конструишимо, дакле, тачке друге гране хиперболе, која припада истом пресеку. Пре свега имамо на оси A_1M хиперболе њено друго теме B_1, које је на изводници BV, али с друге стране врха V ($BV \times MA_1 = B_1$). Уопште, као што се тачке прве гране хиперболе добијају као пресеци равни σ правим појединих изводница које пролазе кроз тачке лука TAU круга k, тако се тачке друге гране хиперболе добијају као пресеци изводницама које пролазе кроз тачке лука PBQ. Само изводнице TV и UV не продиру раван σ или, другим речима, секу је у обим бескрајно далеким тачкама хиперболе. Но бескрајно далеке тачке хиперболе су на њеним асимптотама. Дакле асимптоте хиперболе h су упоредне изводницама PV и QV. Ако дакле нађемо средиште H хиперболе, тј. располовимо њену реалну осу $A_1 B_1$ и кроз H повучемо упоредне x и y спрам TV и UV, имамо асимптоте.

Задаци за вежбу

1. Дата је пројекција праве кружне купе. Нацртати пресек те купе једном равни која пролази кроз три дате тачке на трима изводницама купе.

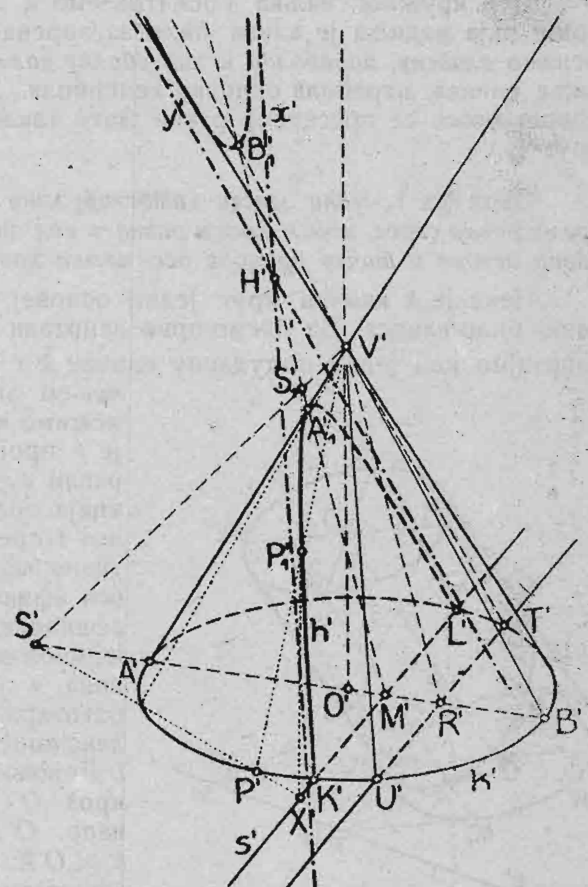
2. Дата је пројекција косе кружне купе. Наћи пресек те купе неком косом равни ако знамо пројекцију пресека те равни и равни основе, и једне тачке на једној изводници, која припада пресеку.

3. Дата је пројекција елипсне купе. Наћи њен пресек једном равни која пролази кроз две дате тачке на ивици основе и кад се зна да је пресек парабола.

4. Претставити раван пресек купасте површи чија водиља је нека равна крива облика осмице, која је задата у пројекцији. Изабрати полазне елементе слободно.

5. Каква може бити пројекција пресека кружне купе једном равни управном на π?

6. У параболном пресеку купе конструисати теме параболе.



Сл. 141

56. ПРЕСЕК ВАЉКА ЈЕДНОМ РАВНИ

Пресек кружног ваљка једном равни која је упоредна његовим основама је круг, подударне ивичном кругу основе. Ако је пресечна раван коса према основама, пресек је елипса, под условом да пресечна раван не сече основе. Ако пресечна раван сече једну основу, један део пресека је тетива круга те основе а остали део је лук елипсе. Ако раван сече обе основе пресек се састоји из две дужи и два подударна лука елипсе. Ако је, најзад, пресечна раван упоредна оси ваљка или садржи осу, пресек је паралелограм, јер сад раван садржи две изводнице ваљка.

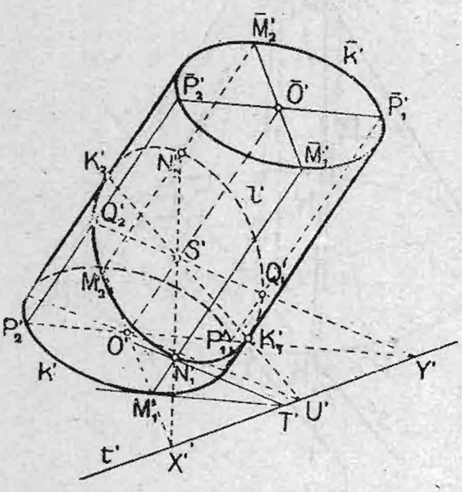
Пресек кружно ваљкасте површи (којој су изводнице целе праве) је круг, елипса или две упоредне праве.

Улогу коју су у одређивању пресека имале на рогљастим површима бочне ивице сад имају изводнице ваљка и ивични кругови обих основа. Као што пресек и основа призме беху два афина лика, а бочне ивице призме зраци афиности, тако су сад изводнице ваљка (или ваљкасте површи) зраци афиности а пресечна крива и водиља су одговарајући афини ликови.

Сем кружног ваљка посматраћемо и друге, као и ваљкасте површи чија водиља је каква било затворена или отворена крива. Споменимо *елипсну, параболну* и *хиперболну ваљкасту површ*, којима су водиље елипса, парабола односно хипербола. За сваку елипсну ваљкасту површ може се пресечној равни дати такав положај да пресек буде круг*).

Задатак 1. *Наћи пресек датог кружног ваљка коме су основе косе према равни слике, неком косом равни α кад знамо пресек те равни једном равни основе и тачку продора осе ваљка кроз ту раван.*

Нека је k ивични круг једне основе; у слици се показује као каква било елипса. Да бисмо прво нацртали пројекцију ваљка (сл. 142), нацртајмо још једну подударну елипсу $\bar{k}$ с упоредним осама и повлачењем заједничких тангената обележимо контуру слике ваљка. Нека је t пројекција пресека равни α и равни његове основе k, а S' пројекција продора осе и те равни. Елипса l пресека и круг k су перспективно афини ликови у две равни, t оса афиности, а оса ваљка OS зрак афиности. Исто је у пројекцији, с јединим разликом што су оба афина лика у једној равни. Знајући две одговарајуће тачке O' и S', можемо лако конструисати пројекцију елипсе l. Довољно је повлачити разне праве кроз O' и одговарајуће кроз S', напр. $O'X'$ и $S'X'$ и кроз пресеке $k' \times O'X$, тј. M_1' и M_2' повући зраке афиности до пресека с $S'X'$: добијамо две тачке N'_1 и N'_2 елипсе l'. Како је увек $N_1S = N_2S$, тачка S је средиште елипсе l.



Сл. 142

Ова конструкција елипсе, просторно гледана, значи да постављамо разне равни кроз осу ваљка, као што је раван OSX. Таква раван сече раван основе k у једној правој, раван α у другој (OX и SX), а омотач ваљка у две изводнице $M_1\bar{M}_1$ и $M_2\bar{M}_2$. Тачке N_1 и N_2 у којима права SX сече те изводнице су, очигледно, заједничке тачке ваљка и равни α. Из таквих тачака састоји се цела елипса l пресека.

Пошто смо одредили две тачке N_1' и N_2' елипсе l' можемо одмах конструисати дирке у тим тачкама. Повуцимо наиме дирку на k' из M_1' и нека она сече t' у тачки T'. Како у перспективно афином односу дирки одговара дирка, права $N_1'T'$ је дирка на l' у тачки N_1'.

*) Ово се и за елипсну ваљкасту и за елипсну купасту површ лако доказује начином аналитичке геометрије.

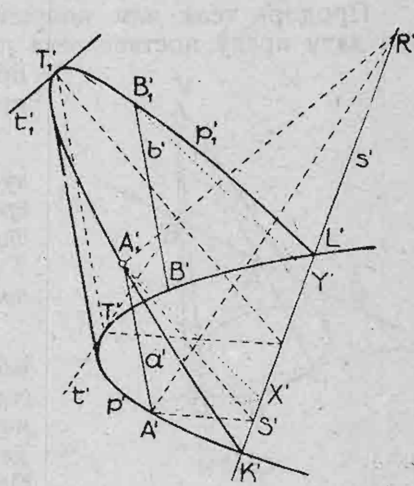
Како су дирке на k' у M_1' и M_2' паралелне, биће и дирка на l' у N_2' паралелна дирка у N_1'.

Ако сад повучемо праву кроз S' упоредну тим диркама и одредимо на њој тачке Q_1' и Q_2' елипсе l', имамо пречник $Q_1'Q_2'$ елипсе, који је конјугован пречнику $N_1'N_2'$ а из два конјугована пречника можемо одредити осе те елипсе.

Елипса l', разуме се, додирује у две тачке K_1' и K_2' пројекције двеју крајњих изводница које сачињавају контуру ваљка. Те тачке можемо наћи као остале тачке пресека. Оне су и стога важне што деле елипсу l' на део који се види и други који се не види. Види се онај део који сече изводнице које се виде.

Задатак 2. *Дата је пројекција параболне ваљкасте површи пројекцијом водиље p и једне изводнице a. Наћи пресек неком равни α кад знамо пресек те равни и равни основе, и тачку A_1 у којој дата изводница продире ту раван.*

Нека је s права у којој раван основе сече пресечну раван (сл. 143). Контура слике дате површи (та површ је неограничена) састоји се само из тангенте t' на пројекцију основе, паралелне датој правој a'. Пресек ће бити, очигледно, такође парабола која додирује изводницу и пролази кроз тачке K и L у којима се секу p и s.



Сл. 143

Замислимо раван постављену кроз изводницу a и паралелне равни постављене кроз друге изводнице, напр. кроз b. Те равни секу раван основе p у правим међу собом паралелним, а исто тако и раван α, дакле троуглима $A'A_1'X'$ и $B'B_1'Y'$ су све три стране паралелне две и две. На основу тога можемо конструисати колико хоћемо тачака параболе p_1'. У ствари пресечна парабола p_1 је перспективно афина спрам параболе p, изводнице су зраци афиности, а права s оса афиности.

Сетимо се да спајањем средишта упоредних тетива параболе добијамо један њен пречник; тачка параболе у којој је дирка управна на оси је теме параболе. Тако можемо датој параболи p наћи увек теме и осу.

Теме и осу параболе p_1' можемо конструисати на овај начин: Кроз A' повуцимо пречник параболе p'. Нека је S' њен пресек са s'. Том пречнику одговара пречник $S'A_1'$ параболе p_1'. У темену те параболе дирка је управна на $S'A_1'$, дакле повуцимо кроз A_1' управну на $S'A_1'$. Ова сече осу афиности s' у тачки R', дакле одговара јој тетива $A'R'$ параболе p'. Дирци t' на p', која је паралелна са $A'R'$ одговара дирка t_1' на p_1' која је паралелна са $A_1'R'$, дакле управна на пречнике, а то је дирка у темену параболе p_1'. Нађимо дакле додирну тачку T' тангенте t' упоредне са $A'R'$, повуцимо изводницу $T' T_1'$ и на њој одредимо тачку T_1' параболе p_1'. Ово је теме параболе p_1'.

Задаци за вежбу

1. Дата је пројекција обртног ваљка. Наћи пресек једном равни која сече основу у двема датим тачкама и једну изводницу у једној датој тачки.

2. Посматрати задатак 1, стр. 100, под претпоставком да је основа ваљка елипса.

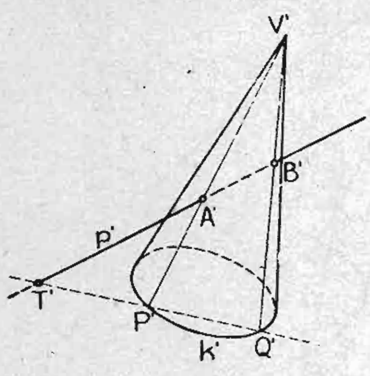
3. Коса ваљкаста површ има за водиљу параболу у равни слике. Наћи пресек једном равни ако знамо траг те равни и тачку продора једне изводнице.

4. Ваљкаста површ има за водиљу хиперболу у некој равни косој према равни слике. Конструисати пресек једном равни, косом према изводницама.

57. ПРОДОРИ КУПЕ И ВАЉКА ПРАВОМ

Посматрање у § 51 о продору призме или пирамиде неком правом преноси се и на продор ваљка и купе правом. Продор лопте правом посматраће се доцније.

Продори тела или површи правом налазе се увек тако да се кроз дату праву постави нека помоћна раван па тражи пресечна линија површи том равни. Тачке продора су тада пресеци те пресечне линије датом правом.



Сл. 144

Задатак. *Дата је у пројекцији кружна купа с врхом V и кругом k основе и једна права која продире омотач купе у извесној тачки A, а раван основе у извесној тачки T. Наћи другу тачку у којој та раван продире омотач купе.*

Најједноставније је поставити помоћну раван кроз врх, дакле раван ATV (сл. 144). Та раван сече купу по изводници AV, која полази из неке тачке P, дакле сече k још у једној тачки Q. Према томе раван ATV сече купу и по изводници QV, а у пресеку $p \times QV$ је друга тачка B продора праве p кроз купу.

Задаци за вежбу

1. Дата је у пројекцији једна права и једна купаста површ којој је водиља извесна равна спирална крива (напр. као Архимедова спирала). Кад су дате у пројекцији две тачке продора површи правом, наћи пројекције осталих тачака продора и тачку продора кроз раван водиље.

2. Дата је пројекција ваљкасте површи чија водиља је синусоида а) у равни слике, б) у косој равни, и пројекције двеју тачака продора неком правом. Наћи даље тачке продора.

3. Дато је у пројекцији неколико кружних купа са заједничким врхом и чије основе су оивичене концентричним круговима једне равни, затим једна права и тачке њеног продора кроз једну од тих купа. Нађи продоре кроз остале купе.

4. Слично као у претходном задатку, заменивши купе ваљцима са заједничком осом.

58. ПРОЈЕКЦИЈЕ КВАДРИКА

Сем купастих и ваљкастих површи постоји пет врста *квадрика* или *површи другог реда*: *елипсоид*, *једнокрилни и двокрилни хиперболоид*, *елипсни и хиперболни параболоид* (редом слике 145 — 149). Лопту можемо сматрати посебним обликом елипсоида.

Рубови (контуре) управних пројекција свих пет врста квадрика, ако постоје, јесу конике (конусни пресеци). Руб пројекције елипсоида је увек елипса (сматрајући круг посебним случајем елипсе), елипсног параболоида и хиперболног параболоида је парабола, двокрилног хиперболоида хипербола и једнокрилног хиперболоида хипербола. Но пројекције тих површи, сем елипсоида, могу покривати и целу пројекцијску раван, а тада контуре нема.

Равни пресеци елипсоида су елипсе, елипсног параболоида елипсе или параболе, хиперболног параболоида хиперболе или параболе, једнокрилног и двокрилног хиперболоида хиперболе, параболе и елипсе. Сем тога пресеци једнокрилног хиперболоида и хиперболног параболоида могу бити и праве.

Размотримо укратко те квадрике, износећи, као и претходно, нека тврђења без доказа.

Да бисмо пак неке конструкције могли већ сада извести, средствима саме нормалне пројекције на једну раван, потребно је допустити да се у цртежу извесне конике, које треба да додирују дате конике, конструишу покушајно. Касније ће се те конструкције моћи да изврше и чисто конструктивно (види § 136 и задатке о квадрикама иза § 130)

Пресеци сваке квадрике паралелним равнима су сличне конике (у колико пресек не дегенерише у две праве, као што може бити код праволинијских квадрика)*.

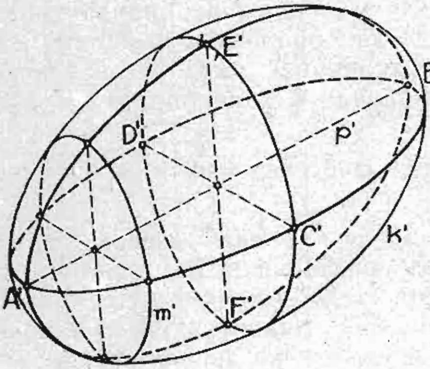
Раван која пролази кроз средиште квадрике (кад постоји средиште) зове се *дијаметарска (пречничка) раван*. Средишта свих коника које настају као пресеци квадрика равнима паралелним једној дијаметарској равни, налазе се на једном пречнику квадрике, *спрегнутом пречнику* те дијаметарске равни. Како у дијаметарској равни постоје парови спрегнутих пречника, можемо у квадрици на бескрајно много начина образовати три међу собом спрегнута пречника. Три међусобно спрегнута и међусобно управна пречника су *осе квадрике*. Парови оса одређују три *главне равни* квадрике.

После ових општих напомена пређимо на појединачне.

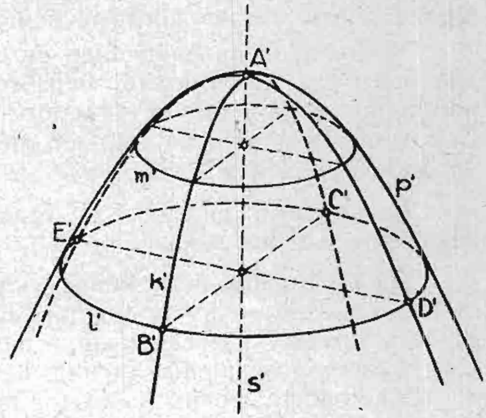
Елипсоид. Свака елипса k' може претстављати контуру управне пројекције елипсоида (сл. 145). У њено средиште пада пројекција средишта O елипсоида. Конструишимо какву било елипсу l' са средиштем O' и која додирује изнутра контуру k' у двема тачкама. Елипсу l' можемо, очигледно, сматрати пројекцијом пресека l елипсоида извесном равни. Конструишимо још једну елипсу m' која изнутра додирује елипсу k' а слична је елипси l' и у сличном (хомотетијском) положају.

*) Сличне елипсе имају осе у истој размери; сличне хиперболе имају асимптоте под истим углом; све параболе можемо сматрати сличним (као и кругове).

Ову конструкцију можемо извршити пробањем. Праву p', која пролази кроз O' и кроз средишта свих елипса као што је m', можемо сматрати пројекцијом праве $p = AB$ која садржи конјуговани пречник AB дијаметарске равни Ol. Нека су $C'D'$ и $E'F'$ пар конјугованих пречника елипсе l'. Да бисмо добили крајеве пречника $A'B'$, (тачке A' и B' нису на рубу k' слике) треба конструисати елипсу $A'E'B'F'$ којој су $A'B'$ и $E'F'$ спрегнути пречници и која додирује елипсу k' у двема тачкама. У пресеку те елипсе с p' налазимо A' и B'. Тако имамо пројекције три међу собом спрегнута пречника AB, CD и EF елипсоида. Приметимо да би $A'B'$, $C'D'$ и $E'F'$ у слици 145 могле бити и пројекције трију оса елипсоида. Пројекција елипсоида, сама за себе остаје у том погледу неодређена.



Сл. 145

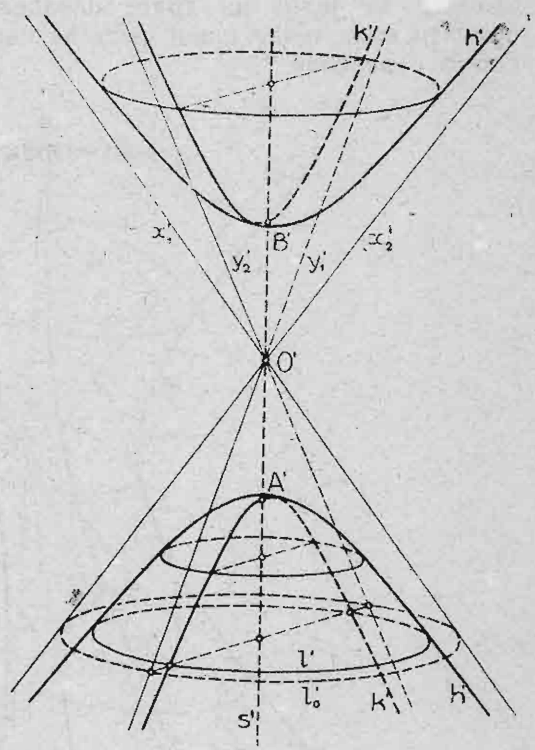


Сл. 146

Елипсни параболоид. Посматрање је у суштини исто као за елипсоид, с том разликом што сад нема средишта.

Свака парабола p' може претстављати руб управне пројекције елипсног параболоида (сл. 146). Конструишимо какву било елипсу l' која додирује параболу p' изнутра у двема тачкама; можемо је сматрати пројекцијом пресека l параболоида неком равни. Права s' кроз средиште елипсе l', паралелна оси параболе p', може се сматрати пројекцијом неког пречника s параболоида. Сви пресеци с паралелним равнима биће сличне, хомотетијске елипсе, а њихова средишта биће на s. Нека је BC ма који пречник елипсе l. Раван BCs сече параболоид по некој параболи k. Њена пројекција k' је парабола кроз B' и C', с пречником s' и која додирује параболу p'. Дирка на параболу k', упоредна тетиви $B'C'$, пролази кроз тачку A' пресека $k' \times s'$. На параболоиду A је крајња тачка пречника s параболоида. Приметимо узгред да би у сл. 146 пречник s могао бити и оса параболоида, а пресеци l, m управни на осу; тада би A било теме елипсног параболоида.

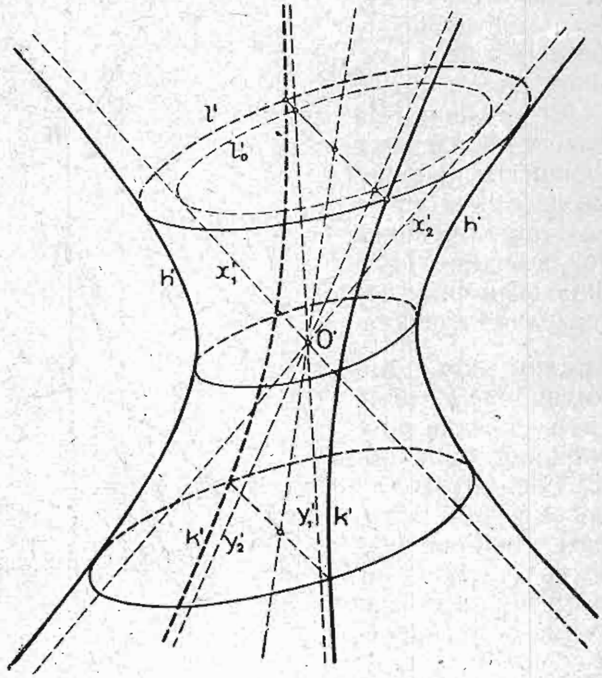
Двокрилни хиперболоид. Макаква хипербола h' може бити руб управне пројекције двокрилног хиперболоида (сл. 147). Асимптоте x_1', x_2' те хиперболе претстављају тада руб асимптотне купасте површи хиперболоида. Пројекција врха O купе је средиште хиперболе h'. Ако конструишемо елипсу l_0' која претставља раван пресек l_0 те купасте површи имаћемо с истим средиштем хомотетијску елипсу l' нешто већу од прве, која додирује хиперболу h' у две тачке и претставља пресек l хиперболоида једном равни. У сл. 147 нацртано је неколико таквих пресека паралелним равнима. Сва средишта тих елипса (као што је l) налазе се на правој AB, која пролази кроз врх O асимптотске купасте површи. Која било раван постављена кроз AB сече асимптотску купасту површ у две праве y_1 и y_2, а хиперболоид у некој хиперболи k, којој су те праве асимптоте а AB пречник. На начин сличан као у посматрању елипсоида и елипсног параболоида можемо одредити тачке A' и B', тј. пројекције пречника AB хиперболоида (и хиперболе k), који је конјугован свим посматраним паралелним равнима.



Сл. 147

Једнокрилни хиперболоид. Свака хипербола h' може такође бити руб управне пројекције једнокрилног хиперболоида (сл. 148). Асимптоте x_1' и x_2' претстављају руб асимптотске купасте површи једнокрилног хиперболоида. Опет су пресеци хиперболоида паралелним равнима, које пресецају ту купасту површ у сличним елипсама (као што је l_0) хомотетијске елипсе (као што је l). Средишта свих тих елипса налазе се на правој s која пролази кроз средиште O хиперболоида и не сече га. Једној од тих елипса (најмањој) средиште је O. Ма која раван постављена кроз s сече асимптотску купасту површ у две праве y_1 и y_2, а хиперболоид у хиперболи k (којој s није пречник).

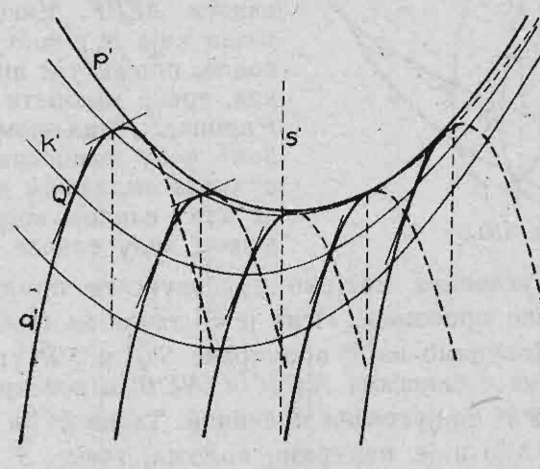
Хиперболни параболоид. Свака парабола p' може бити руб управне пројекције хиперболног параболоида (сл. 149а). Конструишимо у равни слике какву било параболу q' чија оса је паралелна оси s' параболе p' и која се „споља“ додирује с p' у једној тачки (тј. области покривене тетивама обих парабола немају заједничких тачака — ван те додирне тачке). Параболу q' можемо сматрати пројекцијом пресека q параболоида неком равни. Сви пресеци параболоида паралелним равнима су подударне параболе с паралелним осама; оне се могу добити паралелним померањем параболе q; обележимо их знаком $\dot{q}$. Уочимо коју било тачку Q на q и одговарајуће тачке на параболама $\dot{q}$. То су очигледно тачке у којима су дирке на те параболе међу собом паралелне, дакле можемо их и конструисати налажењем додирних тачака паралелних тангената. Све те тачке припадају извесној равни и образују такође једну параболу k с осом упоредном осама првих парабола. Но парабола k је окренута на супротну страну. И то је дакле раван пресек параболног хиперболоида. Сви пресеци параболоида паралелним равнима су параболе, рецимо $\overline{k}$, подударне међу собом и добијају се једна из друге паралелним померањем. Свака од њих пролази кроз тачке првог система парабола, у којима су дирке међу собом паралелне.



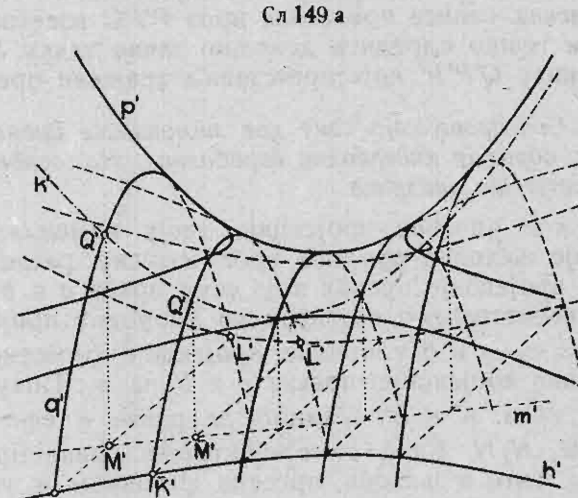
Сл. 148

Пресеци параболоида равнима које секу праву s биће, опште узевши, хиперболе. Да бисмо после конструкције посматраних парабола добили у слици пресеке који су хиперболе, замислимо раван μ која сече параболу q у две тачке K и L, а сече раван параболе k у извесној правој m. Повуцимо дакле кроз неку тачку M' на дужи $K'L'$ ма коју праву m' различиту од $Q'M'$ и $K'L'$ (сл. 149б). Како се равни парабола q и k секу дуж пречника параболе q, који пролази кроз Q, имамо у пресеку M тог пречника и тетиве KL једну тачку праве m. Уочимо коју било параболу $\overline{q}$. Њене пресеке са μ можемо у слици одредити, јер раван параболе q сече раван параболе k у правој $\overline{QM}$ која је упоредна с QM. (Дакле, $\overline{q}' \times k' = \overline{Q}'$, а упоредна правој $Q'M'$ кроз Q' сече m' у $\overline{M}'$.) Раван μ сече раван параболе $\overline{q}$ у правој кроз $\overline{M}$, упоредној спрам KL, тако добијамо у слици $\overline{K}'\overline{L}'$. Тачке K, L и све одговарајуће тачке $\overline{K}, \overline{L}$ образују хиперболу h, пресек параболоида уоченом равни μ. Приметимо напослетку да од положаја равни μ зависи како ће бити окренута гране хиперболе. На слици припадају на нижим пресецима све тачке $\bar{K}$ једној грани а све тачке $\bar{L}$ другој грани; на вишим пресецима парови тачака $\bar{K}$ и $\bar{L}$ који припадају једним параболама $\bar{q}$, су на једној грани, а парови који припадају другим параболама q су на другој грани хиперболе пресека.

Додајмо неколико задатака.



Сл 149 а

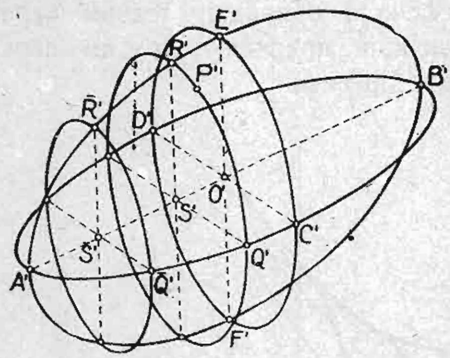


Сл. 149 б

Задатак 1. *Дате су пројекције три спрегнута пречника елипсоида: AB, CD и EF, и пројекција једне његове тачке P. Конструисати пресек елипсоида једном равни која пролази кроз P и упоредна је дијаметарској равни $CDEF$.*

Нека је O средиште елипсоида. Пресек дијаметарском равни $ABCD$ је елипса, чију пројекцију можемо лако нацртати, јер су $A'B'$ и $C'D'$ конјуговани пречници. Исто вреди за пресеке равнима $ABEF$ и

$CDEF$ (сл. 150). Конструишимо пројекције тих трију пресека. Тражени пресек кроз P је елипса хомотетијска спрам елипсе $CEDF$. Нека јој је средиште S, а Q и R тачке које одговарају тачкама C и E елипсе $CEDF$; пречници SQ и SR треба да буду упоредни пречницима OC и OE, дирке у Q и R треба да буду упоредне тим пречницима и треба да буде Q на елипси $ACBD$, R на елипси $AEBF$. Како се у свакој тачки која је у контури слике елипсоида, пројектује две тачке елипсоида, треба изабрати хоћемо ли да P припада „видљивом" или „невидљивом" делу елипсоида. Узмимо да припада видљивом делу. Тада је P на луку елипсе, који одговара видљивом делу елипсе $CEDF$.



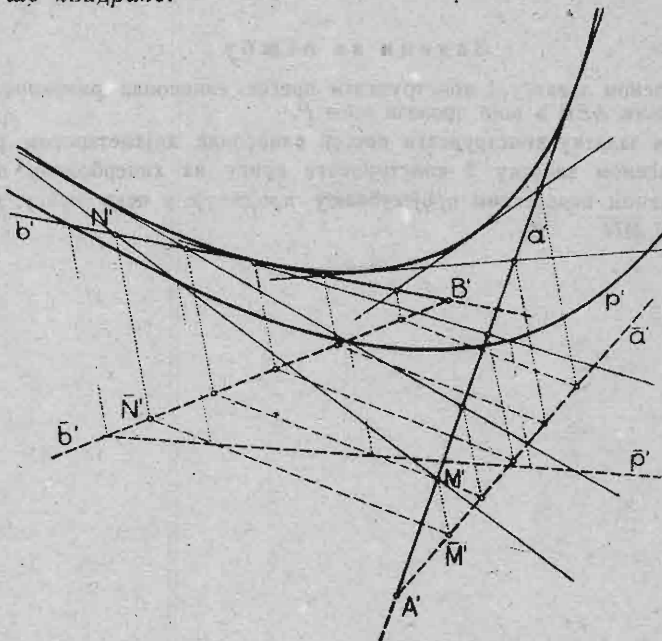
Сл. 150

Према тим условима можемо конструисати пројекцију тражене елипсе једноставно пробањем. Нека је $\overline{S}'$ тачка на $O'A'$ где би могла бити тачка S'. Повуцимо из $\overline{S}'$ полуправе $\overline{S}'\overline{Q}'$ и $S'\overline{R}'$ упоредне са $O'C'$ и $O'E'$, до пресека с елипсама $A'C'B'$ и $A'E'B'$ и конструишимо елипсу којој су $\overline{S}'Q'$ и $\overline{S}'\overline{R}'$ конјуговани пречници. Тачка P' би морала бити на луку те елипсе. Ако није, померимо положај тачке $\overline{S}'$ толико да би поново конструисана елипса пролазила кроз P'. С извесном извежбаношћу неће бити тешко одредити довољно тачно тачку S' на $O'A'$ и конструисати елипсу $Q'P'R'$ која претставља тражени пресек.

Задатак 2. *Све праве које секу две мимоилазне праве а упоредне су датој равни σ, образују хиперболни параболоид. На основу тога конструисати пројекцију те квадрике.*

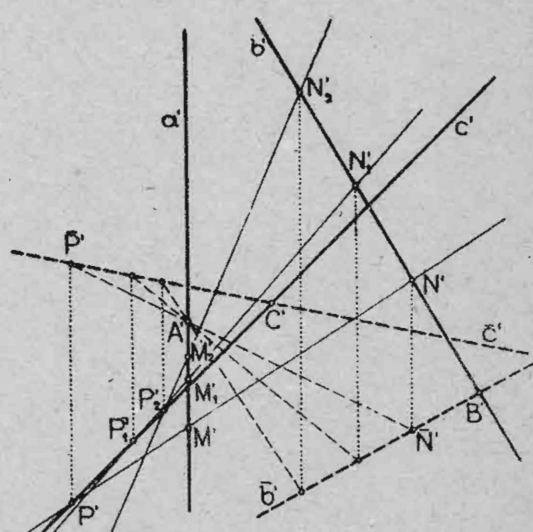
Нека су a' и b' управне пројекције двеју мимоилазних правих, A' и B' пројекције њихових продора кроз извесну раван α (сл. 151). Да бисмо имали пројекције правих које секу праве a и b и упоредне су некој равни, посматраћемо истовремено упоредну пројекцију свега на раван α. Нека су $\overline{a}$ и $\overline{b}$ упоредне пројекције (можемо замислити да су и то управне пројекције) правих a и b на α. Повуцимо дакле $\overline{a}'$ и $\overline{b}'$ ма како кроз A' и B'. Узмимо да раван σ сече праве $a, \overline{a}$, $b, \overline{b}$ редом у $M, \overline{M}$, $N, \overline{N}$. Како су пројектујуће равни правих a и b упоредне, морају бити и њихови пресеци равнином σ упоредни, тј. $M\overline{M} \parallel N\overline{N}$. Дакле, пошто изаберемо тачке M', $\overline{M}'$ N', тачка $\overline{N}'$ је одређена. Уједно је $M'N'$ пројекција једне изводнице хиперболног параболоида. Ако сад померамо паралелно раван σ, помераће се паралелно праве $\overline{MN}$, $M\overline{M}$ и $N\overline{N}$, а на тај начин можемо добити колика хоћемо изводница. Њихова обвојница, ако постоји, је парабола која претставља контуру слике параболоида. Лако је добити и пресек хиперболног параболоида ма којом пројектујућом равни посматране паралелне пројекције. Такав пресек је парабола p чија паралелна пројекција је извесна права p'.

Задатак 3. *Све праве које секу три међусобно мимоилазне праве образују једнокрилан хиперболоид (као његове изводнице). Конструисати пројекцију те квадрике.*



Сл. 151

Нека су a', b', c' управне пројекције трију мимоилазних правих, A', B', C' пројекције њихових продора извесном равни α. Посматрајмо опет пројекцију свега на α, и то у правцу праве a (сл. 152). При томе се a пројектује у A, b у неку праву $\bar{b}$, а c у $\bar{c}$. Ако је MN макоја права која сече све три праве a,b,c, редом у тачкама M, N, P, она се у том паралелном пројектовању пројектује у извесну праву која пролази кроз A. То нам омогућује следећу конструкцију тих изводница једнокрилног хиперболоида: Повуцимо макоју праву кроз A у равни α и нека су $\bar{N}$ и $\bar{P}$ њени пресеци са $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Повуцимо кроз $\bar{N}$ и $\bar{P}$ упоредну правој a до пресека N и P са b и c. Тада права NP сече и праву a у тачки M, дакле је изводница хиперболоида. Мењањем положаја праве $A\bar{N}$ добијамо



Сл. 152

низ изводница у пројекцији. Њихова обвојница је хипербола, контура слике хиперболоида. Нека читалац нацрта самостално и доврши ову слику).

Задаци за вежбу

1. У израђеном задатку 1 конструисати пресек елипсоида равнином упоредном дијаметарској равни AEB и која пролази кроз P.

2. У истом задатку конструисати пресек елипсоида дијаметарском равни APB.

3. У израђеном задатку 2 конструисати криву на хиперболном параболоиду, која се при уоченом паралелном пројектовању пројектује у неку праву $\overline{p}$ која није паралелна правој $\overline{MN}$

ГЛАВА IV

МЕЂУСОБНИ ПРЕСЕЦИ ДВЕЈУ ПОВРШИ (ПРОДОРИ ТЕЛА КРОЗ ТЕЛО)

59. О МЕЂУСОБНИМ ПРЕСЕЦИМА ПОВРШИ И ПРОДОРИМА ТЕЛА КРОЗ ТЕЛО

Две површи се уопште узев секу по просторним линијама. Пресеци рогљастих површи су изломљене линије, а пресеци облих површи обично криве линије. Ако површи ограничавају тела кажемо да таква два тела *продиру* једно кроз друго. Тада је свако од тих тела делимично садржано у другом. Кад се два тела узајамно продиру, линије по којима се њихове површи секу зову се *линије продора*.

Заједнички део простора, који припада обим телима у продору, састоји се из једног или више комада, тј. из једног или више одвојених тела. Кад једном од обих тела који се продиру одузмемо тај заједнички део, преостали део тог тела је онај који остаје изван другог тела. И тај део се састоји из једног или више комада. У најпростијим случајевима, пре свега увек кад су тела испупчена, постоји само један заједнички део обих тела, а преостали део сваког тела састоји се из једног или два комада. Кад се преостали део једног тела састоји из два комада кажемо де је продор тог тела, кроз друго тело *потпун*, а у супротном случају да је *непотпун* (тада се може назвати *задором)*.

У претстављању продора тела кроз тело, или пресека двеју површи задатак нам је да одредимо линије продора или пресека. Начин на који то чинимо није различит од начина како смо налазили равне пресеке површи и продоре површи правим. Ако треба одредити пресек две рогљасте површи имамо два начина: тражимо узајамне пресеке две по две пљосни обих површи, или тражимо продоре појединих ивица једне површи кроз другу површ. У пресецима правастих површи траже се продори појединих изводница једне површи кроз другу.

Како једном пројекцијом узајамни положај оба тела није утврђен, морамо, као досад, у постављању задатака давати сем нормалних пројекција посматраних тела јеш неке податке, који ће чинити задатке одређеним.

Засад посматрамо само пирамиде, призме, купе и ваљке.

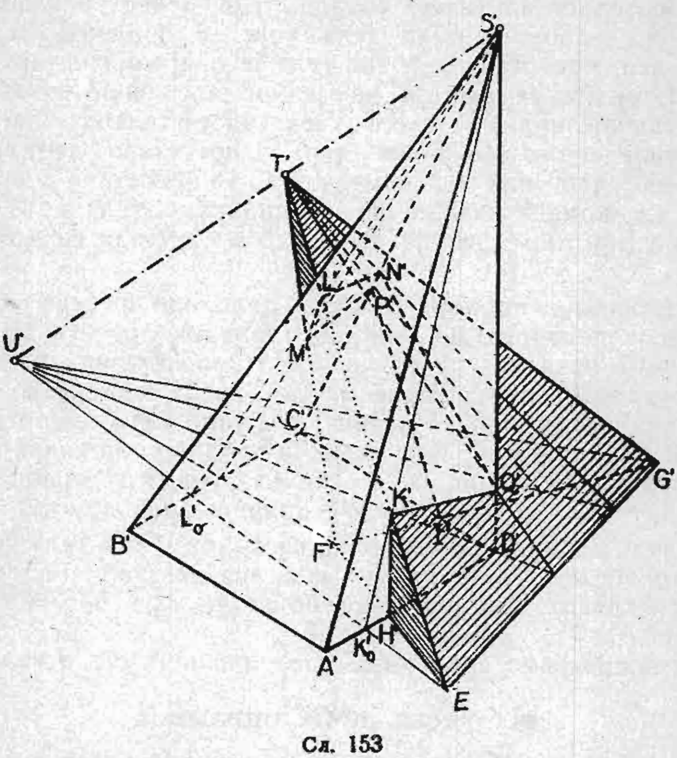
60. ПРЕСЕК ДВЕЈУ ПИРАМИДА

У прва два задатка постављаћемо помоћне равни које секу обе пирамиде и садрже њихове врхове. Пресеке обих пирамида таквим равнима лако је одредити, а заједничке тачке тих пресека биће тачке на линији продора оба тела. Но кад већ постављамо такве равни, бираћемо оне које садрже бар једну ивицу једне пирамиде, јер ћемо тада добити одмах продор те ивице кроз другу пирамиду.

Све помоћне равни садрже праву која пролази кроз врхове обих пирамида. Ако су основе обих пирамида у једној равни, довољно је знати пројекцију тачке у којој та права продире раван обих основа да би, као што ћемо видети, задатак био одређен. Ако су основе у двема разним равнима, довољно је знати тачке у којима та права продире обе равни основа и познавати праву у којој се секу равни обих основа. Тада постављамо редом равни које садрже праву кроз врхове и по једну ивицу једне пирамиде и тражимо пресек те равни другом пирамидом.

Задатак 1. *Дата је управна пројекција четворостране пирамиде $ABCDS$ и тростране $EFGT$, с основама у истој равни, и пројекција тачке у којој права ST продире раван основе. Ако постоји пресек једне пирамиде другом, наћи пројекцију линије пресека.*

На слици 153 узели смо да се основе обих пирамида делимично поклапају. Тачке H и I у којима се пресецају рубови основа већ су заједничке тачке страна обих пирамида, тј. тачке полигона пресека, и то две крајње тачке.



Сл. 153

Нека је U' пројекција тачке продора праве ST и равни обих основа. Посматрајмо редом равни одређене правом ST и по једном изводницом прво једне, затим друге пирамиде. Пођимо од равни EST одређене правом ST и ивицом ET тростране пирамиде. Та раван сече раван основа у правој UE, која пресеца ивице на основи четворостране пирамиде у тачкама K_0 и L_0. Тиме је одређен пресек K_0L_0S ове пирамиде том равни. Ивица ET пресеца троугао K_0L_0S у двема тачкама K и L. То су два темена полигоналне линије пресека: у K продире та ивица страну ADS, а у L страну BCS. На тај начин добијамо дакле пројекције тачака K и L. Понављајући исти поступак потребни број пута с осталим ивицама обих пирамида, добијамо остале тачке продора. Тако налазимо помоћу равни FST тачку M продора ивице FT кроз страну BCS. Страну ADS та ивица не продире. Потражимо ли затим продор ивице GT кроз четворострану пирамиду, одмах видимо да продора нема, јер раван GST не сече основу $ABCD$ ове пирамиде, дакле ни ту пирамиду.

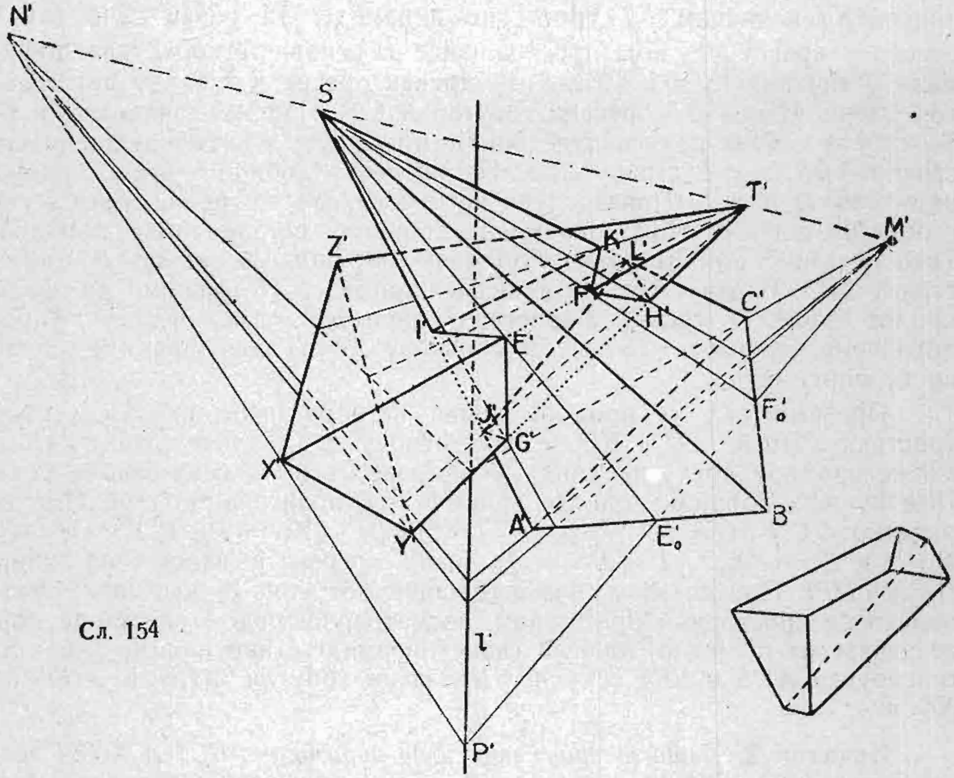
Пређимо сад на продоре ивица четворостране пирамиде кроз тространу. Праве AU и BU не секу основу EFG, дакле ивице AS и BS не продиру другу пирамиду. Али праве UC и UD секу основу EFG. Помоћу њих добијамо још три тачке N, P, Q полигона продора. Имамо, укратко: $UC \times EG = N_0$, $N_0J \times CS = N$; па $UC \times FG = P_0$, $P_0T \times CS = P_0$ и $UD \times EG = Q_0$, $Q_0T \times DS = Q$. Линија пресека је изломљена линија $HKQNLMPI$. При спајању тачака те линије потребно је (као увек) руководити се просторном претставом, посматрајући редом оне тачке које се налазе на по једној пљосни сваке пирамиде. Тако видимо одмах да се троугли ADS и EFT секу по HK, затим троугли ADS и EGT по KQ итд.

Задатак 2. *Дата је пројекција двеју пирамида $ABCS$ и $XYZT$ чије су основе ABC и XYZ у двема разним равнима. Дата је сем тога пројекција праве l по којој се те равни секу и пројекције тачака M и N у којима права ST продире те равни* (сл. 154). *Наћи пресек обих пирамида.*

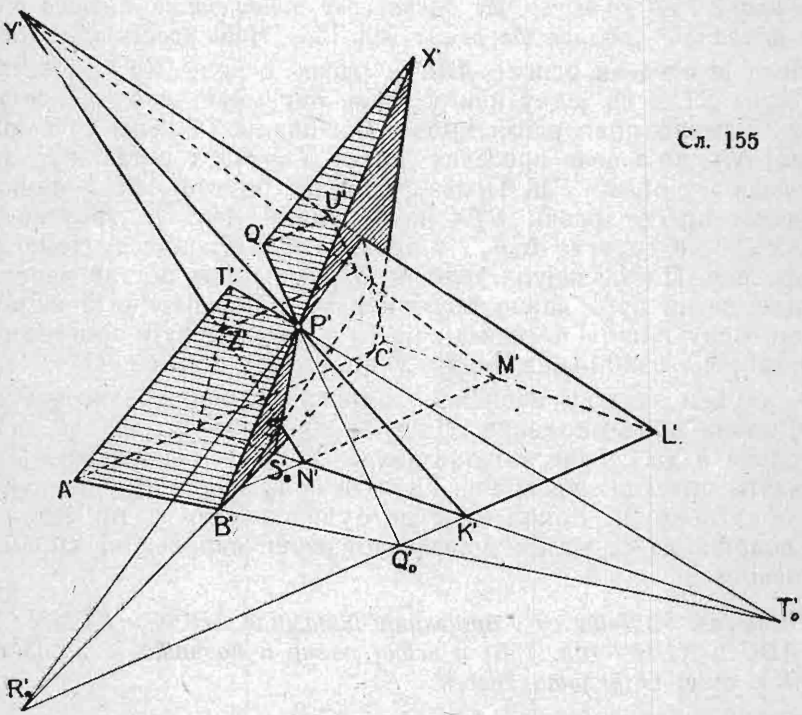
Нека је σ раван основе ABC, τ раван основе XYZ. Постављамо равни кроз ST и по једну ивицу сваке пирамиде, као у претходном задатку. Узмимо прво раван кроз ST и ивицу XT. Она сече раван τ у правој NX, која сече пресечну праву $l = \sigma \times \tau$ у тачки P, а према томе раван σ у правој PM. Права PM сече троугао ABC у тачкама E_0 и F_0, дакле пресек равни STX и пирамиде ABC је троугао E_0F_0S. Ивица XT сече троугао E_0F_0S у тачкама E и F, које су темена полигона пресека. Постављајући тако исто равни кроз остале ивице једне пирамиде, затим кроз ивице друге пирамиде и спајајући тачке продора, добијамо целу линију пресека, која је у овом случају просторни полигон (затворена изломљена линија у простору) $EIKFHLJG$.

У идућем задатку моћи ћемо одређивати непосредно пресеке две по две равни обих пирамида. Претпоставимо да су њихове основе у истој равни и да се две њихове ивице секу. На сличан начин могу се одређивати пресеци кад год је позната (у пројекцији) једна заједничка тачка обих површи. Довољно је да буде познато за по једну тачку сваке површи да се налази у извесној равни паралелној спрам равни обих основа.

Задатак 3. *Дате су у пројекцији пирамиде $ABCX$ и $KLMNY$ с основама ABC и $KLMN$* (сл. 155) *у истој равни и познато је да им се ивице BX и KY секу. Одредити пресек.*



Сл. 154



Сл. 155

Нека је P пресек обих ивица. Равни ABX и KLY секу се у P и у тачки $Q_0 = AB \times KL$, дакле секу се по правој PQ_0. Стране ABX и KLY секу се дакле по дужи PQ (која полази из P и допире до првог пресека Q праве PQ_0 с једном ивицом). На сличан начин добијамо помоћу тачке $R_0 = BC \times KL$ пресек PR страна BCX и KLY итд. Но да бисмо следовали из Q даље изломљену линију пресека, којој смо нашли дуж PQ, пођимо из Q и потражимо пресек страна KLY и ACX. Налазимо на исти начин помоћу тачке $AC \times KL$, која је у слици бескрајно далека (јер је $AC \parallel KL$), пресек QU ($QU \parallel AC$). У тачки U линија пресека се наставља као пресек страна ACY и LMX итд. Линија пресека састоји се из два проста (просторна) полигона $PQUVR$ и $PSWZT$ са заједничком тачком P.

61. ПРЕСЕК ПИРАМИДЕ И ПРИЗМЕ

Призму можемо сматрати зарубљеном пирамидом чији се врх удаљио у бесконачност. Уместо праве која пролази кроз врхове обих пирамида имамо сад праву која пролази кроз врх пирамиде и паралелна је бочним ивицама призме. Да бисмо дакле налазили продоре ивица једне површи кроз стране друге површи, постављаћемо равни кроз ту праву, тј. равни које су паралелне бочним ивицама призме. С том изменом поступак је, као што ћемо видети на идућем задатку, исти као за пресек двеју пирамида.

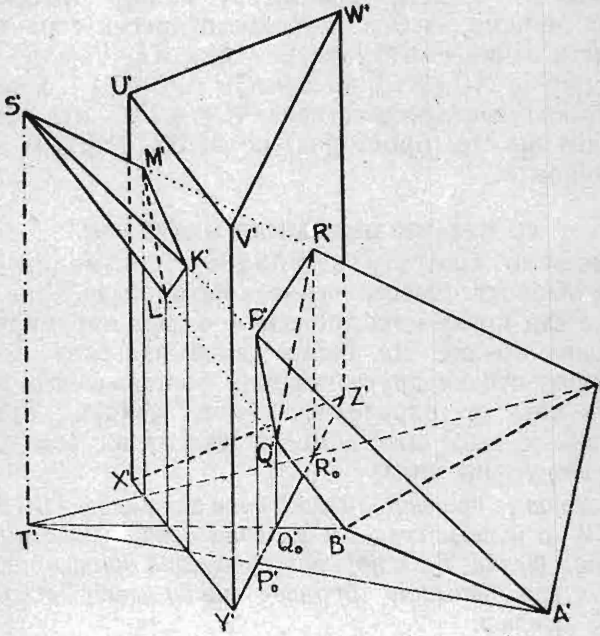
Задатак. *Дата је пројекција тростране пирамиде $ABCS$ и тростране призме $XYZUVW$ с једном основом у равни основе пирамиде. Сем тога дата је пројекција тачке T у којој права упоредна бочним ивицама призме, постављена кроз врх пирамиде, продире раван двеју основа* (сл. 156). *Наћи пресек обе површи.*

Постављамо помоћне равни кроз праву ST и бочне ивице пирамиде. Те равни секу раван основа у правим TA, TB, TC, које секу ивице при основи призме у тачкама $K_0, L_0, \ldots, R_0$. Како те равни садрже праву TS, која је паралелна бочним ивицама призме, њихови пресеци с бочним странама призме су дужи $K_0K, \ldots, R_0R$, паралелне бочним ивицама. У пресецима тих дужи с ивицама пирамиде добијамо темена линије пресека, која се у овом случају распада на два троугла KLM и PQR. Очигледно, тело пирамиде продире потпуно кроз тело призме.

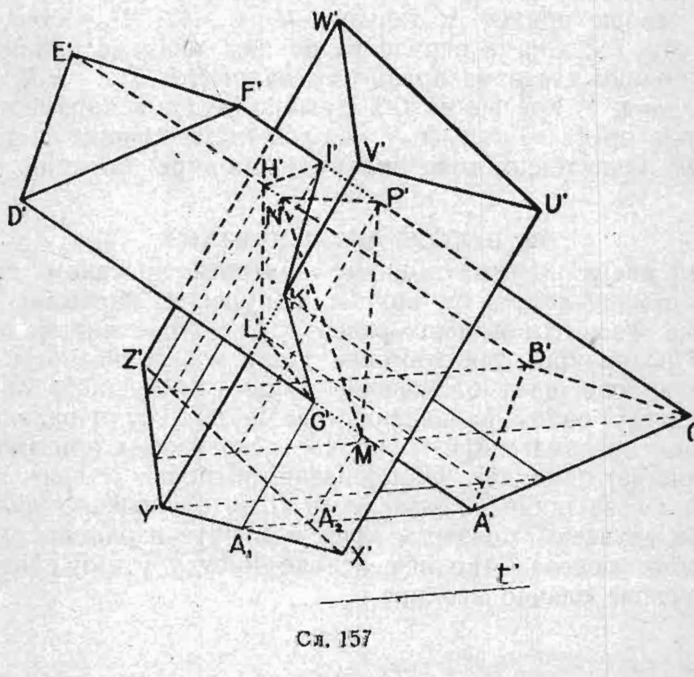
62. ПРЕСЕК ДВЕЈУ ПРИЗАМА

Пресек двеју призама можемо сматрати пресеком двеју зарубљених пирамида којима су врхови допунских пирамида бескрајно далеке тачке. Уместо помоћних равни кроз врхове пирамида имаћемо дакле сада равни кроз две тобожне тачке у бесконачности, а уместо праве кроз врхове једну бесконачно далеку праву, која одређује положај свих међу собом паралелних равни, које су паралелне бочним ивицама обих призама. Најзад, ако две основе обих призама (по једна од сваке призме) припадају једној равни, потребно је знат продор те праве кроз ту заједничку раван, а и то је бесконачно далека тачка, дакле треба да знамо правац у коме поменуте паралелне равни секу ту раван обих основа. Ако пак основе нису у једној равни, морамо допунити услове слично као пре.

Задатак 1. *Дате су управне пројекције двеју тространих призама ABCDEF и XYZUVW, чије су основе ABC и XYZ у једној равни, и дат је правом t правац у коме равни паралелне бочним ивицама обих призама секу ту раван* (сл. 157). *Наћи узајамни пресек тих призама.*



Сл. 156

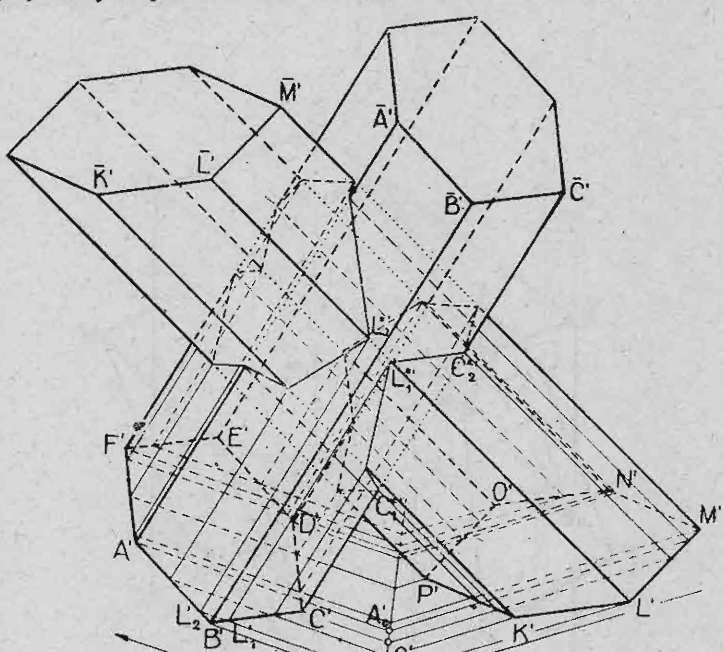


Сл. 157

Кроз теме A основе ABC повлачимо упоредну правој t. Она сече троугао XYZ у две тачке, кроз које пролазе два пресека A_1 и A_2 помоћне равни A_1AD и призме $XYZUVW$. Ти пресеци су паралелни ивицама те призме и одређују две тачке продора G и M. Узимајући редом упоредне помоћне равни кроз остала темена основе ABC добијамо још четири тачке продора. Њима је већ одређен троугао MNP пресека призме $ABCDEF$ страном $XZUW$, али други део линије пресека још није, јер између G и H и између G и J треба одредити тачке K и L продора ивице YV кроз прву призму. Ове две тачке налазимо повлачењем помоћне равни кроз Y.

Задатак 2. *Претставити пресек двеју шестостраних призама чије основе $ABC..F$ и $KL...P$ су у двема разним равнима.*

Нацртајмо прво обе призме у управној пројекцији (претпостављамо да у пројекцији основе нису ограничене ма каквим шестоуглима, него паровима паралелних страна (сл. 158). Изаберимо затим праве s', u' и v', пројекције пресека s обих равни $ABC..$ и KLM, и пресека u и

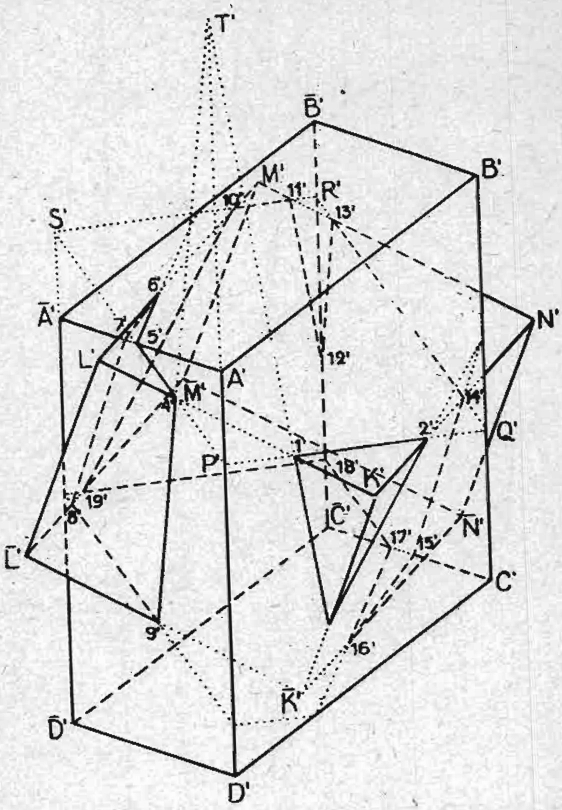


Сл. 158

v тих двеју равни неком равни која је паралелна бочним ивицама обих призама. Тада постављамо овакве паралелне равни кроз поједине бочне ивице једне призме и тражимо пресеке тих равни другом призмом. Ти пресеци су паралелни бочним ивицама те друге призме и на њима налазимо продоре ивица прве призме кроз другу призму. Затим постављамо, исто тако, паралелне равни кроз бочне ивице ове друге призме. Напр. да би се добили продори ивице $C\bar{C}$ повлачимо $CC_0 \parallel a$, $C_0C_1 \parallel v$. Тако долазимо до C_1 и C_2. У пресеку ивице $C\bar{C}$ правим упоредним ивици $L\bar{L}$ налазимо две тачке продора C_1^* и C_2^*. Слично налазимо два продора L_1^* и L_2^* ивице $L\bar{L}$ првом призмом. У спајању тих тачака продора добро је ићи извесним редом, напр. прво посматрати пресек бочних страна $AB\bar{A}\bar{B}$ и $KL\bar{K}\bar{L}$, затим $AB\bar{A}\bar{B}$ и $LM\bar{L}\bar{M}$, затим $AB\bar{A}\bar{B}$ и $MN\bar{M}\bar{N}$ итд. Продор одговарајућих тела је потпун и линија продора се састоји из два одвојена полигона.

Задатак 3. *Претставити узајамни пресек два паралелепипеда у општем положају, полазећи од извесних тачака на линијама пресека.*

Нацртајмо два паралелепипеда $ABC\ldots\bar{D}$ и $KLM\ldots\bar{N}$, слику једног преко слике другог (сл. 159). Узмимо напр. да рогаљ с врхом K другог паралелепипеда стрши ван првог паралелепипеда и према томе изаберимо тачке *1*, *2*, *3* у којима његове ивице продиру страну $ABCD$ првог паралелепипеда. Тиме је одређен први полигон пресека, троугао



Сл. 159

1 2 3. Да бисмо могли решавати даље овај задатак, потребан је још један податак. Зато претпоставимо да ивица KL продире и страну $A\bar{A}D\bar{D}$ и изаберимо тачку продора *4*. Тада су и тачке *5* и *9* одређене, јер пресеци $21 \times 45 = P$ и $31 \times 49 = T$ су на ивици AD или на њеном продужењу. Раван $KLMN$ сече призмасту површ чије су ивице праве AD, BC, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, по паралелограму $PQRS$, који можемо конструисати. То нам даје тачке *10*, *11*, *13* и *14* пресека. Кроз тачку *9* пролази подударан паралелограм, паралелних страна, који претставља одговарајући пресек равни $\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N}$, а тиме добијамо тачке продора *8*, *19*, *18* и *17*. Тачке *5* и $\overline{A}\,\overline{B} \times RS$ су на пресеку равни $AB\overline{A}\overline{B}$ и $PQRS$, тај пресек можемо дакле одредити и добити тачку *6* на ивици LM. Паралелан том пресеку је пресек равни $\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N}$ и $CCDD$, који пролази кроз *17*. Тако добијамо тачку *16*. Затим имамо, укратко: *12* на упоредној спрам *49* кроз *13*; треба спојити *12* и *13*, *11* и *12*, *10* и *19*. Затим, пресек страна $BC\overline{B}\overline{C}$ и $KN\overline{K}\overline{N}$ пролази кроз *14* и упоредан је спрам *49*. Тако добијамо *15*. Пресек кроз *14* и *15* упоредан је пресеку *78*, а пресек кроз *15* и *16* упоредан је пресеку *67*.

63. ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕО ДВА ИЛИ ВИШЕ ТЕЛА

У посматрању два или више тела може се поставити задатак, да се нађе пројекција њихова заједничког дела. Одређивањем продора одређен је и тај заједнички део.

Тако можемо у задатку 2, § 60 потражити заједнички део тела обих пирамида, а то је полиједар (тело) с теменима E, G, J, I, F, K, L, H, који је поново нацртан у слици 154б као засебно тело. Једино што тада треба још урадити је одредити које се ивице тог полиједра виде.

Ако је у питању заједнички део три или више тела, посматрамо прво, рецимо, заједнички део два тела, па део овога који је садржан у трећем телу итд., док не преостане заједнички део свих датих тела.

Задаци за вежбу

1. Дата је у пројекцији права петострана пирамида и коса тространа пирамида, с основама у истој равни, и дата је тачка у којој права која пролази кроз оба врха продире раван основа. Наћи пресек обих површи. Затим нацртати (на засебном месту) пројекцију заједничког дела двају пирамидних тела.

2. Дате су две косе тростране пирамиде једнаких висина, с основама у истој равни. Наћи њихов пресек.

Напомена: Конструкција се може извршити на два начина: помоћу праве кроз врхове или пресецањем две по две пљосни.

3. Дата је пројекција тростране призме $ABCPQR$ и тростране пирамиде $XYZV$ у општем положају. Познате су и пројекције тачака M и N у којима права кроз V, упоредна бочним ивицама призме, продире равни основа ABC и XYZ и пројекција праве t у којој се те равни секу. Наћи продор обих одговарајућих тела.

4. Претставити пресек двеју четвоространих пирамида којима су основе у двема разним равнима које се секу у датој правој t, а продори праве што спаја врхове обих пирамида, кроз равни основа су дате тачке M и N.

5. Дате су правилна шестострана и правилна петострана призма. Основе су им у разним равнима. Наћи продор.

Упутство: Изабрати (сем пројекција обих површи још неке елементе који чине конструкцију одређеном (као у претходним задацима).

6. Нацртати пресек паралелепипеда и тростране пирамиде чија основа је у равни једне основе призме, ако нам је дата у слици једна заједничка тачка извесне бочне пљосни пирамиде и извесне бочне пљосни паралелепипеда.

Упутство: Угледати се на израђени задатак 3, § 60.

7. Дата је пројекција косе четворостране призме и тростране зарубљене пирамиде и зна се да је једна основа призме у равни велике основе пирамиде. Сем тога дати су пресеци по једне ивице сваког тела извесном равни која је паралелна поменутој равни. Наћи продор одговарајућа два тела.

Напомена: Подесити да призма сече и малу основу зарубљене пирамиде.

8. Дат је паралелепипед. Свака његова страна је основа једне пирамиде којој је врх у пресеку дијагонала супротне стране. Нацртати пројекцију заједничког дела свих шест пирамидних тела.

9. Дат је правоугли паралелепипед са квадратном основом. Ти квадрати су основе двеју пирамида чији се врхови налазе на једном од врхова супротне основе. Наћи пресек тих двеју пирамида.

10. Дата је пројекција правилне четворостране пирамиде и правилне четворостране призме. Обе површи стоје на једној равни тако да се квадрати обих основа секу у осам тачака. Наћи продор та два тела.

64. ПРЕСЕК ДВЕЈУ КУПА

Купа се може сматрати граничним обликом коме теже уписане и описане пирамиде којима број бочних ивица бесконачно расте, а при том се бочне стране бесконачно сужују. Имајући то у виду можемо поступак налажења међусобног пресека двеју купа сматрати у суштини истим као за две пирамиде. Улогу бочних ивица пирамида имају сад изводнице купе.

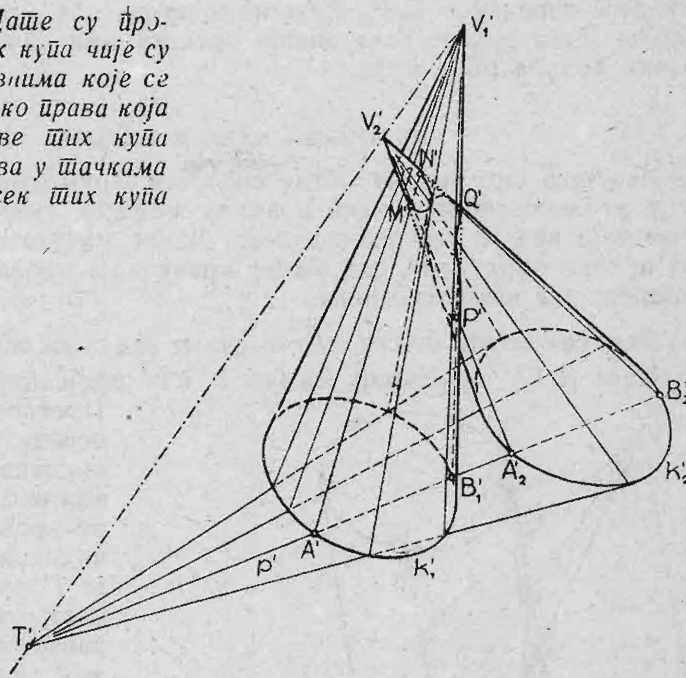
Дакле, можемо постављати помоћне равни које садрже праву што пролази кроз оба врха. Тада треба претпоставити да знамо и тачке у којима та права продире равни обих основа. Такве равни садрже изводнице обих купа. Пресеци тих изводница су заједничке тачке купастих површи обих купа. Ако нађемо довољан број тих тачака, моћи ћемо кроз њих провући линију пресека обих купастих површи. У линији пресека могу учествовати и основе купа, но то ће бити делови равних пресека купе, о којима је било речи у гл. IV.

Задатак 1. *Одредити пресек двеју косих кружних купа кад се обе основе налазе у једној равни, једна ван друге, и кад се зна тачка у којој права постављена кроз врхове обих купа продире раван основа. Подесити да продор буде потпун.*

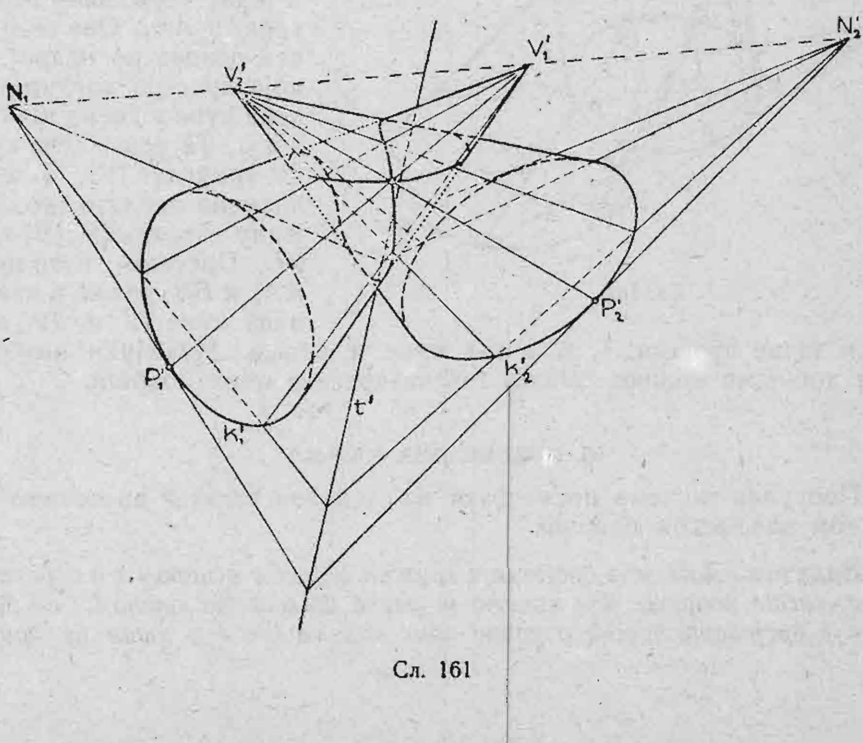
Нека су $k_1'V_1'$ и $k_2'V_2'$ пројекције двеју купа (сл. 160) и T' пројекција тачке у којој права V_1V_2 продире раван обих основа. Посматрамо равни које садрже праву V_1V_2 и које секу обе купе. Те равни секу основе обих купа по правим које пролазе кроз T. Да би, рецимо купа k_2V_2 продирала потпуно кроз купу k_1V_1, треба и две крајње равни које још имају заједничких изводница с купом k_2V_2 (а то су две равни које додирују ту купу по једној изводници) да пресецају купу $k\ V_1$. Дакле, од свих правих у равни обих основа, које пролазе кроз T, треба и обе дирке на круг (или елипсу) k_2 да секу круг (елипсу) k_1.

Нека је p ма која права у равни основа, која пролази кроз T и сече обе основе, круг k_1 у тачкама A_1 и B_1, круг k_2 у тачкама A_2 и B_2. Помоћна раван V_1TA_1 сече прву купу по изводницама A_1V_1 и B_1V_1, а другу купу по изводницама A_2V_2 и B_2V_2. Те четири изводнице секу се у четири тачке: M, N, P, Q, које припадају линији пресека. Мењајући положај помоћне равни добијамо на тај начин онолико тачака колико нам је потребно да бисмо могли довољно тачно кроз њих провући обе линије пресека.

Задатак 2. *Дате су пројекције двеју правих купа чије су основе у двема равнима које се секу по правој t. Ако права која пролази кроз врхове тих купа продире равни основа у тачкама N_1 и N_2, нађи пресек тих купа* (сл. 161).



Сл. 160



Сл. 161

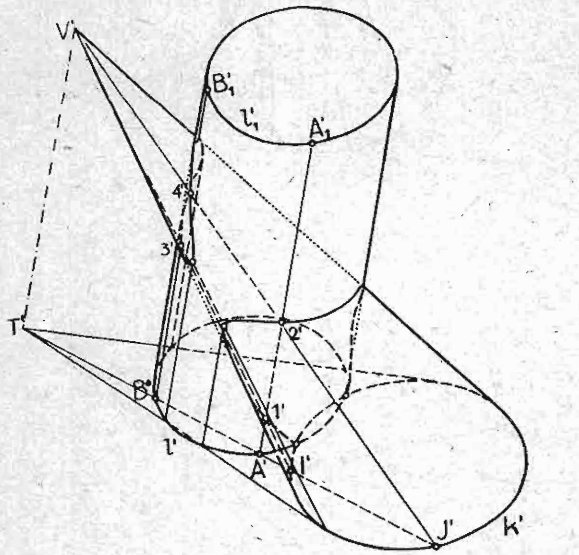
Поступак је у свему сличан као у примеру 2, § 60, кад смо посматрали продор двеју пирамида с основама у разним равнима. Узето је да се дирке N_1P_1 и N_2P_2 секу на t, тј. да раван $V_1V_2P_1$, која додирује једну купу дуж изводнице V_1P_1, додирује такође другу купу дуж изводнице V_2P_2. Кажемо и да се обе купе додирују пресецајући једна другу. Тада линија пресека има тачку самопресецања у тачки додира обих купа.

65. ПРЕСЕК КУПЕ И ВАЉКА

Као што смо призму могли сматрати зарубљеном пирамидом чији врх је у бесконачности, тако и ваљак можемо сматрати зарубљеном купом чији врх је бескрајно далеко. Дакле, уместо праве која пролази кроз врхове обих купа, сад имамо праву која пролази кроз врх купе и упоредна је ивицама ваљка.

Задатак. *Наћи пресек купе и ваљка кад су им основе у једној равни.*

Нека је $l'l_1'$ пројекција ваљка и $k'V'$ пројекција купе (сл. 162).



Сл. 162

Претпоставили смо да се основе купе делимично поклапају с доњом основом ваљка. Повуцимо праву кроз V, упоредну изводницама ваљка и нека је T' пројекција тачке у којој та права продире раван основа. Узмимо једну раван кроз праву VT и једну изводницу ваљка, рецимо AA_1. Она сече раван основа по правој TA која пресеца контуру основе купе у двема тачкама I и J. Та раван сече купу по троуглу IVJ, а истовремено пролази кроз још једну изводницу BB_1 ваљка. Пресеци изводница AA_1 и BB_1 ваљка и изводница купе IV и JV дају четири тачке пресека, 1, 2, 3 и 4, купе и ваљка. Мењајући помоћну раван добијамо колико хоћемо тачака пресека обих површи.

66. ПРЕСЕК ДВА ВАЉКА

Поступак можемо посматрати на следећем задатку пресека ваљка извесном ваљкастом површи.

Задатак. *Дат је у пројекцији кружан ваљак с основом k и ограничен део ваљкасте површи, чија водиља је равна таласаста линија l. Сем тога дат је у пројекцији пресек p равни обих водиља k и l и дати су правци* *u и v у којима равни упоредне изводницама обих површи секу једну и другу раван водиље* (сл. 163). *Одредити пресек обих површи.*

Поступак је у суштини исти као у задатку 2, § 62, као што се види из слике.

Задаци за вежбу

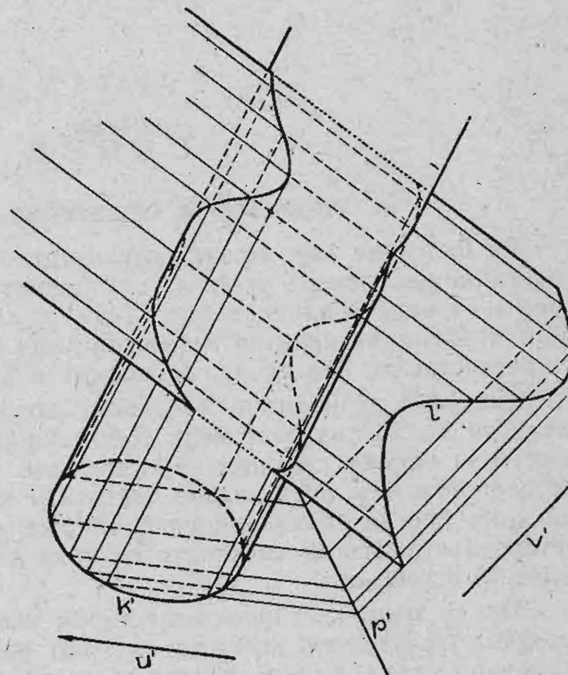
1. Претставити пресек двеју кружних купа чије ивице при основи су два круга разних средишта, један садржан у другом.

2. Претставити пресек кружног ваљка и кружне купе ако су основа купе и једна основа ваљка у истој равни и ако се те основе споља додирују.

3. Претставити пресек двеју кружних купа с основама у двема разним равнима, ако се зна да једна раван постављена кроз врхове обих купа додирује обе купе.

4. Наћи пресек двеју кружних зарубљених купа којима су основе у разним равнима и секу се међу собом. Сем тога знамо тачке у којима права кроз врхове допунских купа продире равни основа.

5. Дата је правилна четворострана призма. У њеним двема основама уписане су основе двеју кружних купа чији су врхови у крајевима једне бочне ивице призме. Наћи пресек обих купа.



Сл. 163

6. Наћи пресек два кружна ваљка с основама у разним равнима и које се секу.

7. Претставити пресек кружне ваљкасте површи и купасте површи чија водиља је извесна равна спирална линија (с два до три завоја).

8. Две кружне ваљкасте површи имају две заједничке додирне равни, а осе им нису упоредне. Одредити пресек обих површи.

ГЛАВА V

СЕНКЕ

67. УПОРЕДНО И СРЕДИШЊЕ ОСВЕТЉЕЊЕ

Да би слике које се добијају нацртном геометријом биле лепше и очигледније узимамо често да су предмети обасјани и да се на њима и око њих виде њихове сенке. Тада у сликама конструишемо и те сенке поступцима нацртне геометрије, као и саме предмете. При томе се претпоставља, као досад, да предмети нису провидни.

Сматрамо да је извор светлости довољно далек да би се зраци светлости могли сматрати међу собом упоредним (напр. сунчана светлост) или пак да светлост сија из једне тачке у близини предмета. У стварности није никад извор светлости само једна тачка, али ако је тело које светли сразмерно малено може се то ради једноставности претпоставити. Извор светлости се тада зове и *светлосна тачка* или *средиште осветљења*.

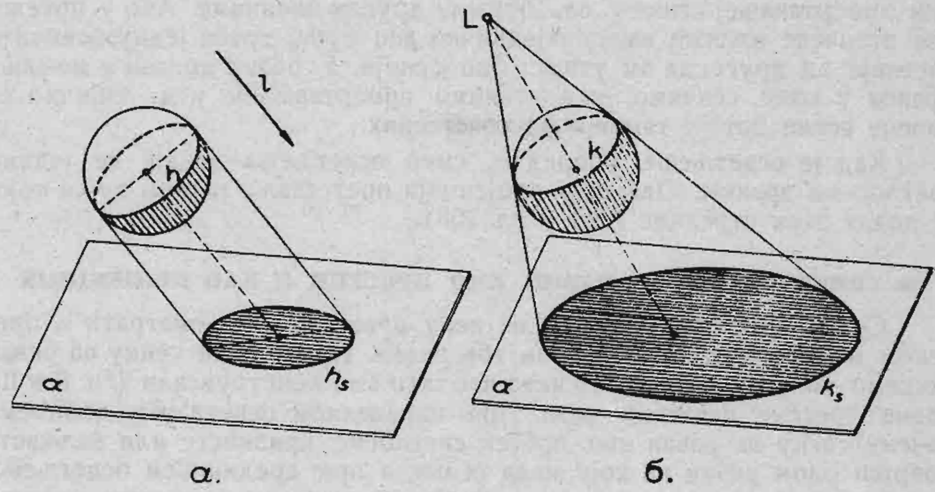
Ако су зраци светлости међу собом упоредни осветљење називамо *упоредним (паралелним) осветљењем;* ако пак зраци светлости извиру из коначно удаљене тачке, осветљење називамо *средишњим (централним) осветљењем.*

68. БАЧЕНА И СОПСТВЕНА СЕНКА. РУБ СЕНКЕ. ПОВРШИ ДОДИРНИХ ЗРАКА СВЕТЛОСТИ

Предмет који није провидан а обасјан је из једног светлосног извора, баца своју сенку на раван тла, на неки зид и уопште на сваки други предмет који стоји у простору на одговарајућем месту. Ту сенку називамо *баченом сенком* првог предмета на други. Ни предмет који баца сенку није сасвим у светлости, па ни кад на њега не пада сенка никаквог другог предмета. Један део његове површи је осветљен, други неосветљен. За неосветљени део површи предмета кажемо да је у *сопственој сенци.* Кад је предмет удубљен (конкаван полиједар, унутрашњост конвексне површи итд.) може постојати и бачена сенка предмета на сам тај предмет.

Линије које на предметима деле осветљени део од неосветљеног називамо *рубом (контуром, границом) сенке.* И бачене и со ствене сенке имају уопште свој руб.

Слика 164а претставља лопту осветљену паралелним осветљењем, а слика 164б исту лопту осветљену из тачке L централним осветљењем. Уједно је претстављен део равни α на коју лопта баца сенку. Конструкцију тих сенки разматраћемо доцније. Сад истичемо само да је круг h, односно k на лопти руб сопствене сенке, а линија h_s односно k_s у равни α (елипса) руб бачене сенке. На лопти је, очигледно, осветљен онај део који је ближи извору светлости, а неосветљен даљи део (сопствена сенка).



Сл. 164

Сенке ћемо најчешће обележавати индексом s, као претходно.

Руб сопствене сенке је на рогљастом телу, опште посматрано, некакав просторни полигон. На облом телу је крива линија. На сложенијим телима (рогљастим и облим) може се руб сенке на самом телу састојати из више одвојених линија.

Зраци светлости који пролазе кроз тачке на рубу сопствене сенке неког предмета одређују руб бачене сенке тог предмета. Ти зраци су претстављени правим које не продиру кроз предмет, него га додирују. Називамо их *додирним зрацима.*

Ако је осветљење упоредно, додирни зраци образују у простору извесну призмасту или ваљкасту површ; ако је осветљење средишње. додирни зраци образују рогаљ или купасту површ. Те површи додирују тела којима припадају дуж руба сопствене сенке. Називамо их *површи додирних зрака светлости* или *светлосне површи.*

Може се догодити да светлосна површ не додирује дати предмет само по линијама које сачињавају руб сопствене сенке, него по целим областима на површи предмета. Тада кажемо да зраци светлости *клизају по предмету,* тј. управо по тим површима које припадају површи предмета. Ово ће се догодити напр. ако површ предмета има равних области (пљосни полиједра, основа купе итд.) и ако таква област припада једној равни коју образују светлосни зраци. Догодиће се и ако је правац паралелног осветљења паралелан изводницама ваљка итд. У таквим случајевима није руб осветљеног дела површи идентичан рубу дела који је у сопственој сенци. Површ по којој светлосни зраци клизају није ни осветљена ни у сенци, већ, рецимо, мање осветљена.

У цртежима (кад не цртамо изофоте, као у § 134) претстављамо сенке (сенчимо) на разне начине. Један начин је уједначено превлачење неком тамнијом, рецимо сивом бојом. То се обично постиже воденим бојама, бледим раствором туша у води (превлачећи више пута), извлачењем паралелних, подједнако размакнутих правих (тзв. шрафирање или процртавање; сенке у сл. 166) или другим начинима. Ако у цртежу две осенчене пљосни имају заједнички део руба, треба једну осенчити светлије од друге, да би утисак био јаснији. У обзир долази и мењање правца у коме сенчимо, кад сенчимо процртавањем, итд. Обично се бачене сенке цртају тамније од сопствених.

Кад је осветљење упоредно, смер осветљења задаје се једним светлосним зраком. Овај се у пројекцији претставља једном дужи којој је додат знак стрелице (као у сл. 166).

69. СЕНКЕ БАЧЕНЕ НА РАВНИ, КАО ПРЕСЕЦИ И КАО ПРОЈЕКЦИЈЕ

Сенку коју предмет баца на неку раван можемо сматрати и пресеком његове светлосне површи том равни. Према томе сенку на раван можемо конструисати онако исто као што смо конструисали (гл. II и III) равне пресеке извесних тела. При паралелном осветљењу добићемо бачену сенку на раван као пресек светлосне призмасте или ваљкасте површи оном равни на коју пада сенка, а при средишњем осветљењу добићемо као пресек светлосног рогља или светлосне купасте површи датом равни.

Тако смо имали у посматраним сенкама лопте, у сл. 164а бачену сенку h_s као пресек светлосне ваљкасте површи, а у сл. 164б бачену сенку k_s као пресек светлосне купасте површи датом равни α. Водиље обих светлосних површи су кругови h и k на лопти.

Сенку коју какав било предмет баца на неку раван можемо геометријски схватити и као његову пројекцију на ту раван. Ако је осветљење средишње, сенка предмета на раван је његова средишња пројекција из средишта осветљења на ту раван. Ако је осветљење упоредно, сенка је упоредна пројекција, и то коса, сем ако би, изузетно, зраци светлости падали управно на раван, јер тада би то била управна пројекција. Једина разлика између пројекције и сенке на неку раван је та што је сенка конструисана већ кад је конструисан њен руб, а у пројекцијама извлачимо и линије у унутрашњости руба, као што су пројекције извесних (видљивих, а и невидљивих) ивица на рогљастим телима.

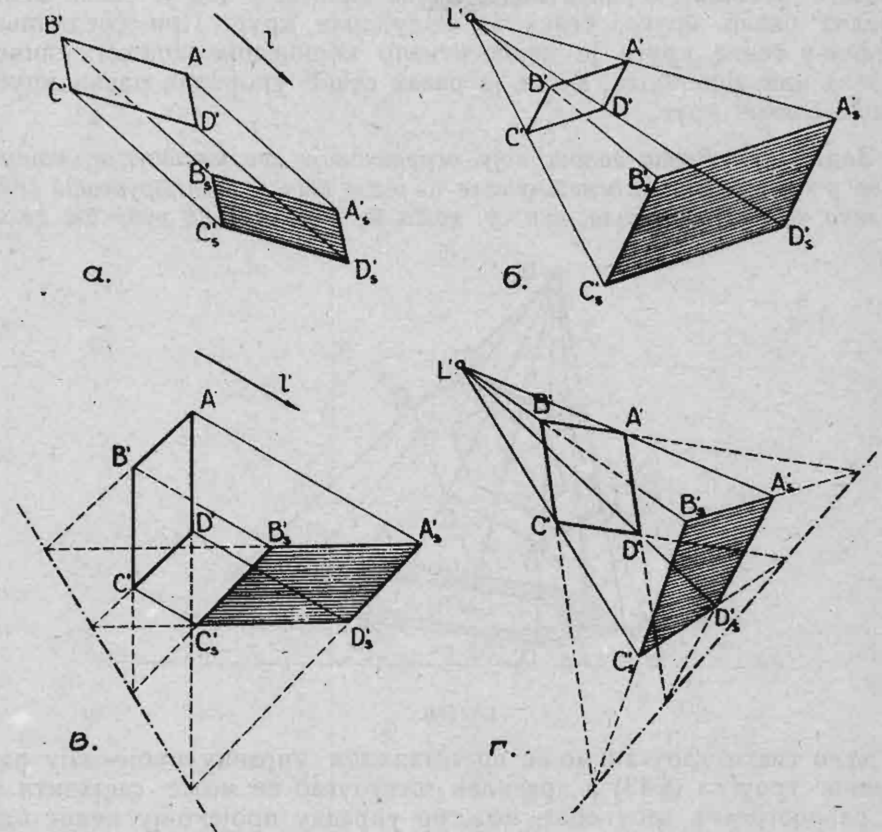
Како се посматрају сенке бачене на раван ма ког положаја спрам равни слике, сенке су, опште посматрано, посредне пројекције (косе и централне) датих предмета.

70. СЕНКА РАВНОГ ЛИКА НА РАВАН

Посматрајмо напр. равну површ ограничену паралелограмом $ABCD$. Сенку коју та површ баца на неку раван σ можемо схватити као њену пројекцију на раван σ. Ако је осветљење средишње, са средиштем осветљења L, имамо средишњу пројекцију, ако је пак осветљење упоредно, имамо упоредну, обично косу пројекцију.

Како је пројекција дужи увек дуж, сем ако би дуж имала правац пројекцијских зрака, биће, опште узевши, сенка површи паралелограма $ABCD$, на раван σ површ извесног четвороугла, и то:

Ако је раван σ упоредна површи паралелограма $ABCD$ и ако је осветљење упоредно (тј. зраци светлости упоредни зраку l), руб сенке је (сл. 165а) подударан паралелограм $A_sB_sC_sD_s$, сличног положаја (хомотетија); ако је осветљење средишње (сл. 165б) руб сенке је сличан и сличног положаја паралелограм $A_sB_sC_sD_s$.



Сл. 165

Ако раван σ није упоредна површи паралелограма $ABCD$ и ако је осветљење упоредно (сл. 165в) сенка је перспективно афин четвороугао $A_sB_sC_sD_s$; ако је осветљење средишње (сл. 165г) сенка је перспективно колинеаран четвороугао $A_sB_sC_sD_s$.

У конструкцији сенке $A_sB_sC_sD_s$ могли смо се у сва четири случаја руководити и г едиштем као да тражимо пресек призмасте површи или рогља једном равни, саобразно глави II.

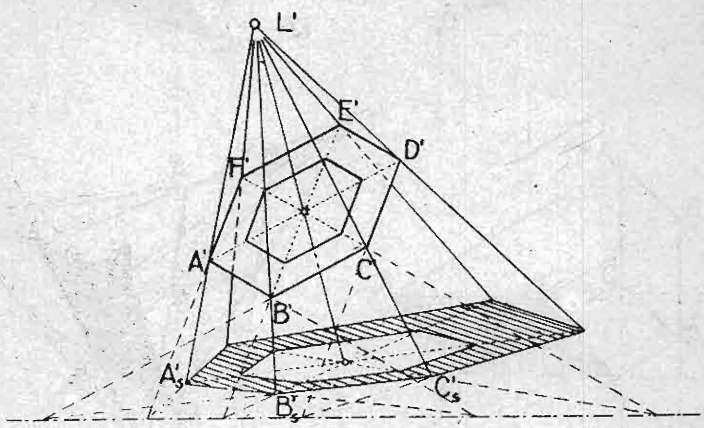
Ово разматрање вреди, разуме се, ма за какве равне ликове (биле то линије или површи):

При упоредном осветљењу сенка равног лика је перспективно афина према том лику, а кад је раван на коју пада сенка упоредна равни датог лика, афиност постаје подударност, сенка је подударан лик у сличном положају.

При средишњем осветљењу сенка равног лика је перспективно колинеарна према том лику, а кад је раван сенке упоредна равни датог лика, колинеација постаје сличност у сличном положају

Задржимо се на кругу. При упоредном осветљењу сенка круга је, опште узевши, перспективно афина елипса, а кад је раван сенке упоредна равни круга, сенка је подударан круг. При средишњем осветљењу сенка круга је перспективно колинеарна коника: елипса, парабола или хипербола, а кад је раван сенке упоредна равни круга, сенка је сличан круг.

Задатак 1. *Равна површ коју ограничавају два шестоугла, концентрична и хомотетијска, осветљена је из једне тачке. Конструисати сенку тог лика на извесну раван, ако су дата три темена на рубу те сенке.*



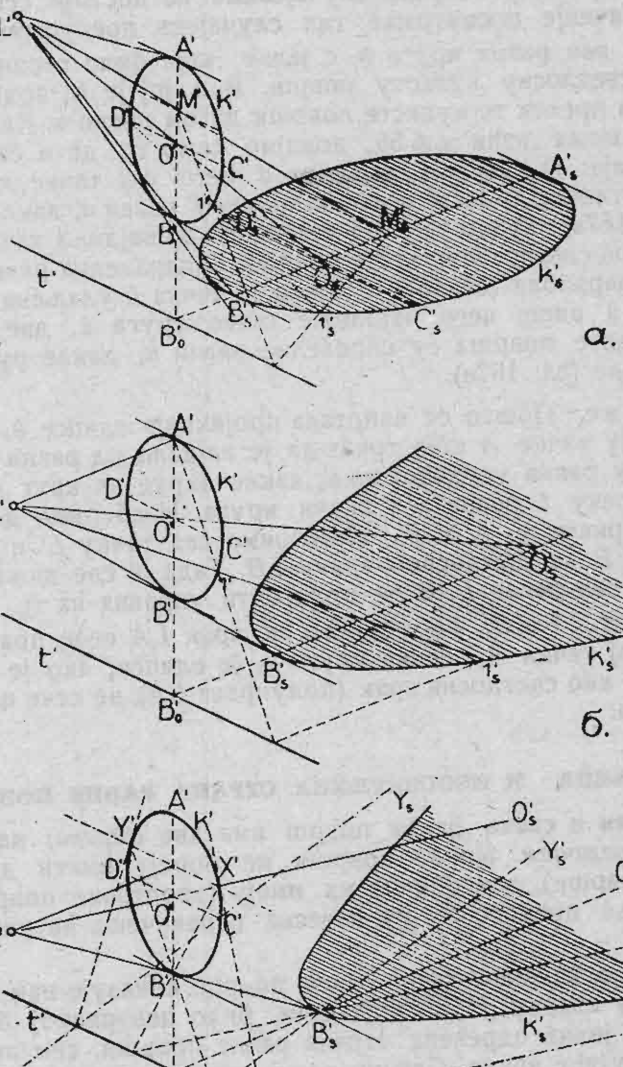
Сл. 166

Како сваки троугао може претстављати управну пројекцију равностраног троугла (§ 43) а правилан шестоугао се може саставити из шест равностраних троуглова, можемо управну пројекцију неког правилног шестоугла $ABCDEF$ конструисати овако: Нацртајмо ма какав троугао $A'B'O'$ и продуживши стране $A'O'$ и $B'O'$ преко O' нацртајмо подударан троугао $D'E'O'$. Како је $A'F' \parallel C'D' \parallel B'E'$ и $B'C' \parallel E'F' \parallel A'D'$ имамо одмах и остала два темена C' и F' шестоугла у пројекцији. Конструишимо затим други, мањи, хомотетијски и концентрични шестоугао. Тиме је управна пројекција предмета завршена (сл. 166).

Изаберимо сад пројекцију светлосне тачке L и напр. сенке A_s, B_s, C_s тачака A, B, C. Тада можемо конструисати осу колинеације и помоћу ње целу сенку коју предмет баца на извесну раван.

Задатак 2. *Конструисати у управној пројекцији сенку при средишњем осветљењу, равне кружне површи на раван која јој није упоредна. У обзир узети разне положаје светлосног извора.*

Нека је L извор светлости, α раван на коју пада сенка. Конструишимо ма како елипсу k'. Можемо је сматрати управном пројекцијом круга k којим је посматрана кружна површ оивичена (сл. 167 а, б и в).



Сл. 167

Ако је светлосна тачка у равни круга, светлосни зраци који пролазе кроз његове тачке су такође у тој равни и клизају по кружној површи. Тада разликујемо ове случајеве: 1) ако је тачка L даља од α него што су све тачке круга k, сенка круга, дакле и кружне површи на α је дуж; 2) ако је L изван k и ако има на k тачака ближих равни

α него што је L, но и једнако далеких као L, сенка круга је полуправа; 3) ако је L на k, али није ни најближа ни најдаља тачка круга, сенка је полуправа; 4) ако је L тачка круга најдаља од α или ако је у кругу, сенка је цела права; у осталим случајевима не постоји сенка круга k на раван α. Тачније посматрање тих случајева препуштамо читаоцу.

Ако је L ван равни круга k, с једне, које било стране те равни, посматрајмо светлосну купасту површ. Врх јој је L, водиља k, руб сенке је раван пресек те купасте површи датом равни α. Како се начин конструкције може наћи у § 55, додајмо само то да и сад разликујемо три случаја: 1) ако је L даље од α него све тачке круга k, све изводнице светлосне купасте површи продиру раван α, дакле руб сенке је елипса (сл. 167а); 2) ако је L од α далеко као најдаља тачка A круга, једна изводница светлосне купасте површи је паралелна равни α, дакле руб сенке је парабола (сл. 167б); 3) ако је тачка L удаљена од α мање него најдаље а више него најближе тачке круга k, две изводнице светлосне купасте површи су паралелне равни α, дакле руб сенке је грана хиперболе (сл. 167в).

Напомене. Пошто се нацртала пројекција елипсе k, изаберимо на k' пројекцију тачке A која треба да је најдаља од равни α. Пречник AB елипсе је у равни управној на α, дакле дирке на круг у A и B су паралелне пресеку t равни α и равни круга. Изаберимо дакле праву t' упоредно диркама у A' и B'. Изаберимо сад тачку L' и пројекцију сенке B_s тачке B на светлосном зраку LB. Тада је све даље одређено (види § 55; но сад раван LAB не мора бити управна на t).

Нека је $AB \times t = B_0$. Ако светлосни зрак LA сече праву B_0B_s, у коначно далекој тачки A_s, сенка круга k_s је елипса; ако је $LA \parallel B_0B_s$, k_s је парабола; ако светлосни зрак (полуправа LA) не сече праву B_0B_s, k_s је хипербола.

71. ОСВЕТЉЕНА И НЕОСВЕТЉЕНА СТРАНА РАВНЕ ПОВРШИ

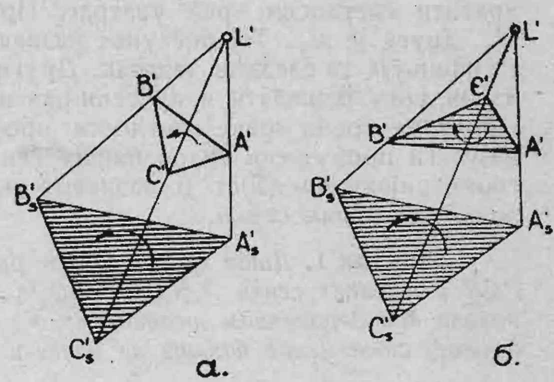
Свака раван и свака равна површ има две *стране;* називамо их често *лицем* и *наличјем.* Криве површи не морају имати две стране (једностране површи), али обично их имају (двостране површи). Следећа посматрања преносе се уз извесна ограничења на разне криве површи.

Кад гледамо из једне тачке равну површ, показује нам она једну или другу своју страну. И у пројекцији, било централној било паралелној, види се једна одређена страна равне површи, сем ако површ садржи пројектујуће зраке. Слично томе, кад осветлимо равну површ централним или паралелним осветљењем, једна страна површи је осветљена, друга неосветљена (у сопственој сенци) сем ако зраци светлости клизају по површи.

Да бисмо видели осветљену страну равне површи, треба да будемо „с исте стране“ равни те површи као што је извор светлости; да бисмо видели неосветљену страну, треба да гледамо „са супротне стране“ те равни.

Посматрајмо сад слике 168 *а* и *б*, које као нормалне пројекције претстављају равну површ ABC ограничену троуглом и њену сенку

$A_sB_sC_s$ на неку раван σ при централном осветљењу из тачке L. Могли смо исто тако узети и да је осветљење паралелно. Узмимо да у пројекцији видимо прво осветљену страну троугласте површи ABC (сл. 168а), затим неосветљену страну (сл. 168б), а да оба пута видимо осветљену страну равни σ (јер само тада се види сенка $A_sB_sC_s$ троугласте површи). У првом случају стојимо, дакле, „с исте стране“ обих равни ABC и σ са које је тачка L, а у другом случају стојимо у односу на тачку L „с исте стране“ равни σ, али „са супротне стране“ равни ABC.



Сл. 168

Посматрач који би гледао из извора светлости видео би осветљену страну како троугласте површи ABC тако и равни σ и за његов поглед би се троугласта површ поклопила с њеном сенком $A_sB_sC_s$. Кад би дакле погледом обилазио темена A, B, C извесним смером обртања*), рецимо од A преко B па C натраг до A, обилазио би погледом уједно темена троугла $A_sB_sC_s$ од A_s преко B_s па C_s до A_s, тј. истим смером обртања. Но кад посматрач у простору мења своје место, смер обртања се за њега не мења, под условом да остане с исте стране равни у којој је предмет. Ако би пак посматрач прешао на супротну страну равни у којој је предмет, смер обртања би се за њега обрнуо.

Исто тако је и кад се посматра у правцу пројектујућих зрака, тј. и у пројекцији на раван слике налазимо исте околности. Имамо дакле следеће правило:

Ако је смер обртања $A'-B'-C'-A'$ и $A'_s-B'_s-C'_s-A'_s$ исти, у пројекцији се виде или осветљене стране троугласте површи ABC и равни σ или неосветљене стране обих површи; ако је смер обртања $A'-B'-C'-A'$ супротан смеру обртања $A'_s-B'_s-C'_s-A'_s$, види се осветљена страна равни σ а неосветљена страна троугласте површи ABC, или обратно.

То видимо непосредно у сл. 168 *а* и *б*, где су смерови обртања назначени стрелицама.

На основу овог правила можемо лако одредити да ли у пројекцији равна површ показује своју осветљену страну или ону која је у сопственој сенци.

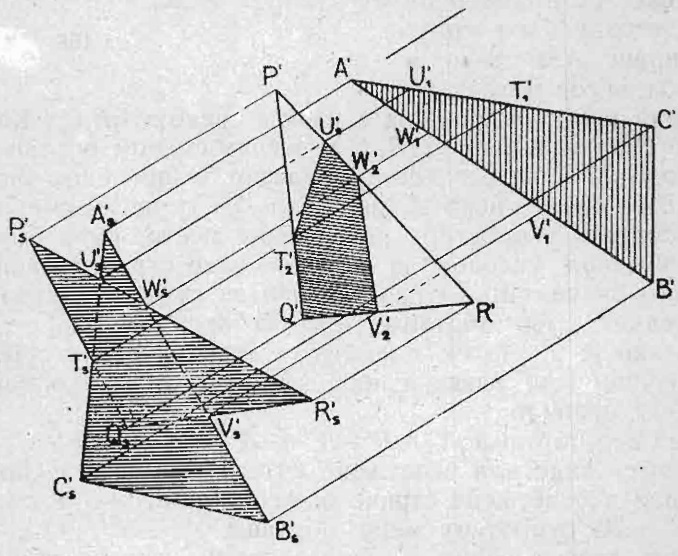
72. СЕНКА ЈЕДНОГ РАВНОГ ЛИКА НА ДРУГИ. ВРАЋАЊЕ УЗ СВЕТЛОСНЕ ЗРАКЕ

Из бачене сенке два предмета на неку раван можемо конструисати сенку једног предмета на други. Ако сенка тачке M_1 једног предмета пада у тачку M_2 другог предмета и ако замислимо да зрак

*) Разликује се *позитивни* и *негативни* смер обртања. Први је супротан кретању казаљке на часовнику, други исти као на часовнику.

светлости, који пролази кроз M_1 и M_2, наставља пут до равни на коју падају сенке, можемо рећи да сенке обих тачака падају у исту тачку M_s те равни. Да бисмо дакле добили сенку M_2 тачке M_1 на друго тело или, напротив, тачку M_1 која баца сенку у M_2, можемо поћи од M_s и пратити светлосни зрак унатраг. Прва тачка до које ћемо доћи је M_2, друга је M_1. Тај поступак називамо *враћањем уз светлосне зраке*. Разјашњује га следећи задатак. Други задатак показаће како се на тај начин могу решавати и пресеци равних ликова, дакле и продори тела. При томе треба зраке светлости продужавати иза тачака на које падају. Ти продужени зраци бацају сенке које немају физичку већ само геометријску вредност и називамо их *геометријским сенкама* за разлику од правих сенки.

Задатак 1. *Дате су пројекције равних троугластих површи ABC и PQR и њихових сенки $A_sB_sC_s$ и $P_sQ_sR_s$, које би свака површ да је сама, бацала при паралелном осветљењу на извесну раван. Одредити да ли постоји сенка једне површи на другу и конструисати ту сенку* (сл. 169).

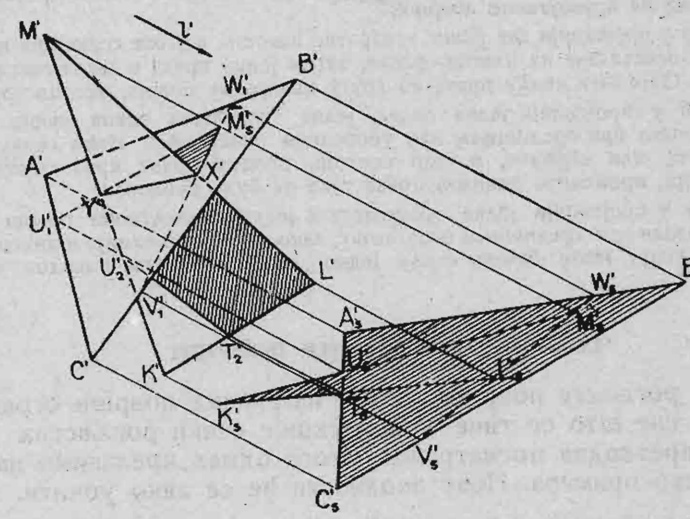


Сл. 169

Пре свега, посматрањем смерова обилажења у троуглима, налазимо да нам троугласта површ PQR показује у слици осветљену страну, а троугласта површ ABC неосветљену страну. Може се одмах рећи: ако сенке $A_sB_sC_s$ и $P_sQ_sR_s$ немају заједничких тачака, тада, очигледно, не постоји сенка једног троугла на други, У случају који је приказан на слици 169 троугли сенке делимично се поклапају, дакле постоји сенка једне троугласте површи на другу. Уочимо тачке T_s, U_s, V_s, W_s у којима се секу троугли $A_sB_sC_s$ и $P_sQ_sR_s$. Како су T_s и U_s на A_sC_s, можемо рећи да су то сенке тачака T_1 и U_1 на страни AC троугла ABC, а како је такође T_s на P_sQ_s, U_s на P_sR_s, можемо рећи да су то сенке тачака T_2 и U_2 на странама PQ и PR троугла PQR. Враћањем уз светлосне зраке долазимо из T_s и U_s прво до T_2 и U_2, дакле T_2

и U_2 су сенке тачака T_1 и U_1 на троугласту површ PQR. Према томе дуж T_2U_2 је сенка дужи T_1U_1. Исто тако налазимо сенку V_2W_2 коју баца део стране AB троугла ABC на површ PQR. Тиме је одређена сенка троугласте површи ABC на троугласту површ PQR.

Задатак 2. *Дате су пројекције равних троугластих површи ABC и KLM и њихове сенке $A_sB_sC_s$ и $K_sL_sM_s$ на извесну раван. При томе се и пројекције троугластих површи и пројекције тих сенки делимично поклапају. Наћи бачену сенку једне троугласте површи на другу и одредити међусобни пресек тих двеју површи* (сл 170).



Сл. 170

Приметимо пре свега да обим троугластим површима видимо у слици осветљене стране.

Нека су T_1 и T_2 тачке које добијамо враћајући се из T_s уз светлосни зрак до пресека с одговарајућим странама троуглова. Нека су U_1 и U_2 одговарајуће тачке на зраку кроз U_s. Продужимо дуж L_sM_s на обе стране до пресека V_s и W_s са странама троугла $A_sB_sC_s$ и нека су V_1 и W_1 одговарајуће тачке на троуглу ABC. Како је M_s на V_sW_s, геометријски зрак светлости MM_s сече дуж V_1W_1 у извесној тачки $\bar{M}_s$. У ту тачку пада сенка тачке M. (Одговарајућа тачка $\bar{L}_s$ на зраку LL_s не долази у обзир, јер враћајући се уз зрак из L_s наилазимо прво на L). Према томе, један део стране LM троугла KLM баца сенку на троугласту површ ABC и та сенка пада у праву V_1W_1. Тачка X у којој се LM и V_1W_1 секу је тачка стране LM, која се поклапа са својом сенком на површ ABC, тј. X је тачка у којој страна LM продире троугласту површ ABC. Сенка коју део стране KM баца на површ, пада у праву $U_1\bar{M}_s$, дакле у пресеку дужи KM и $U\bar{M}_s$ налазимо тачку Y у којој продире страна KM троугласту површ ABC. Тиме је одређен продор XY троугластих површи ABC и KLM и сенка $XY\bar{M}$ коју троугао KLM баца на троугао ABC. Како нам троугласта површ XMY заклања делом површ XM_sY види се од те сенке на слици само један део.

Најзад, спајањем тачака T_2' и U_2' добијамо пројекцију руба сенке коју површ ABC баца на површ KLM. Део $XYLT_2U_2$ троугласте површи KLM је у сенци, или на слици се види само део те области, јер је површ ABC у том делу испред површи KLM.

Задаци за вежбу

1. Дате су пројекције две равне правоугаоне површи, које се налазе у двема равнима а имају једну заједничку ивицу, затим пројекција њихових сенки при паралелном (или централном) осветљењу, на неку раван и пројекција неке праве p и њене сенке p_s на ту раван. Сенка p_s сече сенке обих правоугаоника. Наћи пројекцију сена које права p баца на правоугаоне површи.

2. Дате су у пројекцији две равне квадратне површи, њихове сенке при паралелном или централном осветљењу на извесну раван, затим једна права и њена сенка на једну од тих површи. Одредити сенку праве на другу квадратну површ, ако постоји.

3. Дата је у пројекцији једна права, једна троугласта равна површ и њихове сенке на неку раван при средишњем или упоредном осветљењу. Наћи сенку праве на троугласту површ, или обрнуто, и, ако постоји, продор праве кроз ту површ. Ако продор не постоји, променити положај праве тако да буде продора.

4. Дате су у пројекцији једна троугласта и једна правоугаона површ и њихове сенке на неку раван при средишњем осветљењу, тако да се пројекције и ликова и сенки делимично поклапају. Наћи бачену сенку једног лика на други и њихов међусобни продор.

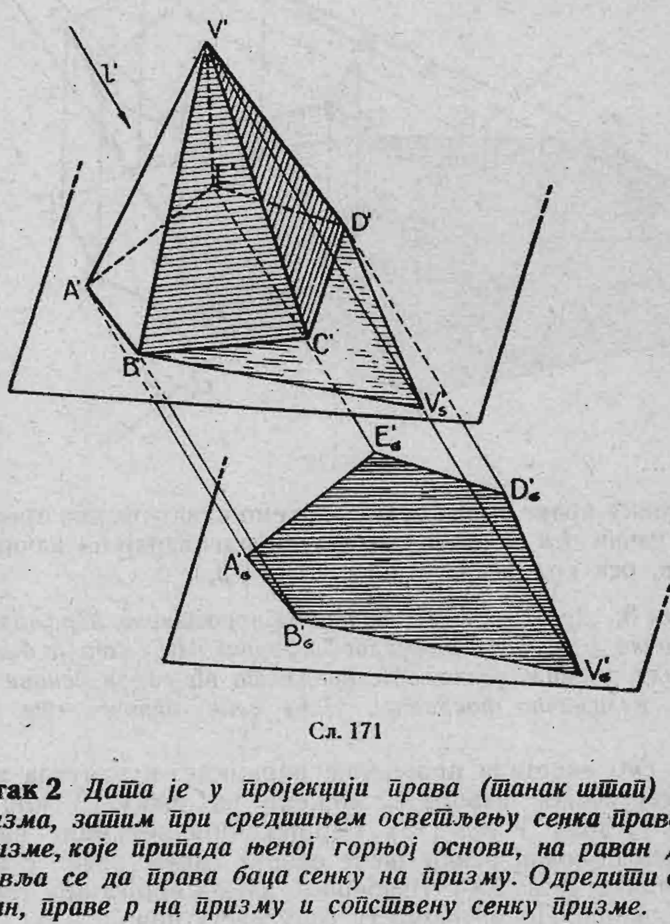
73. СЕНКЕ РОГЉАСТИХ ПОВРШИ

Како се рогљасте површи састоје из равних површи ограничених многоуглима, све што се тиче конструкције сенки рогљастих површи своди се на претходна посматрања. Стога одмах прелазимо на разматрање неколико примера. Нове околности ће се лако уочити.

Задатак 1. *Дата је у пројекцији ма каква петострана пирамида и сенка њеног врха на раван њене основе. Одредити бачену сенку на раван основе и сопствену сенку пирамиде. Затим, претпостављајући да је осветљење упоредно, конструисати сенку пирамиде на неку раван упоредну равни основе.*

Нека је V_s сенка врха V пирамиде $ABCDEV$ на раван њене основе (сл. 171). Спајањем тачке V_s' са пројекцијама темена при основи добијамо пројекције геометријских или истинских сенки одговарајућих ивица AV, BV итд. То су дужи $A'V_s'$, $B'V_s'$ итд. Две међу њима образују оштар угао који садржи све остале. То су дужи $B'V_s'$, и $D'V_s'$. Назовимо их крајњим дужима. Оне, очигледно, припадају пројекцији руба бачене сенке на раван основе. Но то су сенке ивица BV и DV, па како руб бачене сенке потиче од тачака на телу које образују сопствену сенку (§ 68), ивице BV и DV одређују руб сопствене сенке. Том рубу можемо додати изломљену линију $BAED$, дакле, руб сопствене сенке је и сад затворена линија $VBAEDV$. Руб бачене сенке је многоугао $VBCDV$, јер основа пирамиде је у равни на коју пада сенка. Стране BCV и CDV су у сопственој сенци, а остале бочне стране су осветљене. У прилогу томе можемо навести правило из § 71: смерови обртања у троуглима $B'C'V'$ и $B'C'V'_s$, рецимо $B'-C'-V'-B'$ и $B'-C'-V'_s-B'$ супротни су. Напротив смерови обртања $A'-B'-V'-A'$ и $A'-B'-V'_s-A'$ су једнаки.

Досад је било свеједно да ли је осветљење средишње или упоредно: извор светлости је коначно или бесконачно далека тачка на правој VV_s, кад продужимо дуж VV_s иза V. Претпоставимо сада да је осветљење упоредно и да врх баца (рецимо, кроз прозирну раван основе) сенку у тачку V_σ на раван σ упоредну спрам равни основе. Очигледно, сенка пирамиде на раван σ је иста као да потиче од многоугаоне области ABV_sDE у равни основе, па како је раван σ упоредна, сенка на ту раван биће подударна равна површ сличног положаја: $A_\sigma B_\sigma V_\sigma D_\sigma E_\sigma$.

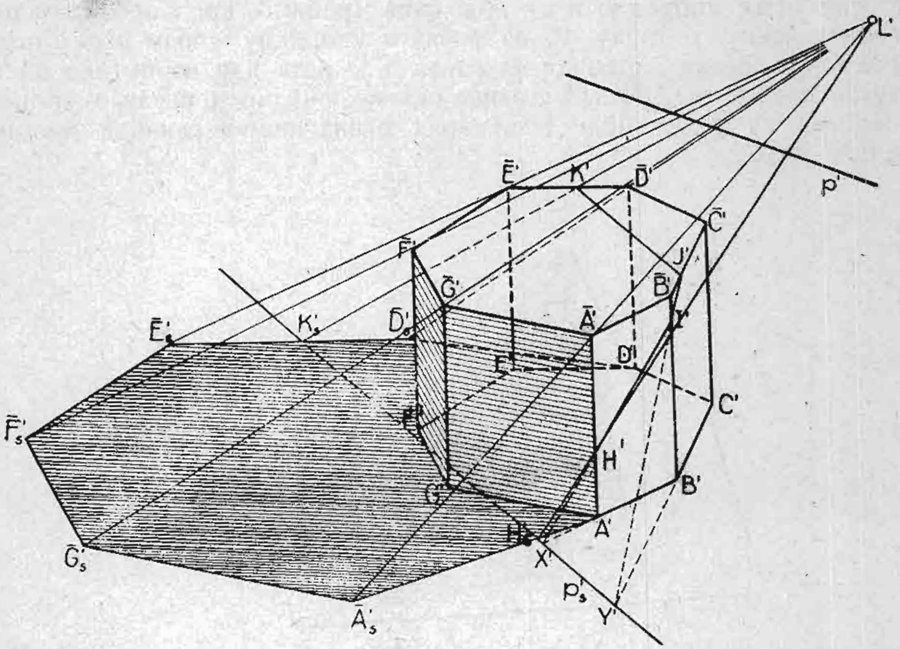


Сл. 171

Задатак 2 ***Дата је у пројекцији права (танак штап) p и седмострана призма, затим при средишњем осветљењу сенка праве p и једног темена призме, које припада њеној горњој основи, на раван доње основе. Претпоставља се да права баца сенку на призму. Одредити сенку призме на ту раван, праве p на призму и сопствену сенку призме.***

Нека је L светлосна тачка и нека је дата сенка $\overline{A}_s$ тачке $\overline{A}$ на горњој основи призме (сл. 172). Како је раван горње основе упоредна равни доње основе, сенка горњег седмоугла је сличан, хомотетичан седмоугао. Пошто га у пројекцији конструишемо налазимо да су и сенке $A\overline{A}_s$, $D\overline{D}_s$ на рубу бачене сенке. Тиме је бачена сенка призме на раван доње основе одређена, дакле и сопствена сенка призме. Сенка p_s праве p сече руб бачене сенке призме у тачкама H_s и K_s које су на $A\overline{A}_s$ и $\overline{E}_s\overline{D}_s$. Враћањем уз светлосни зрак LH_s налазимо на ивици

$A\bar{A}$ тачку H чија сенка је H_s. Но H је уједно сенка извесне тачке праве p на призму, дакле кроз тачку H пролази сенка коју баца p на призму. Исто тако налазимо на ивици $\bar{E}\bar{D}$ тачку K.

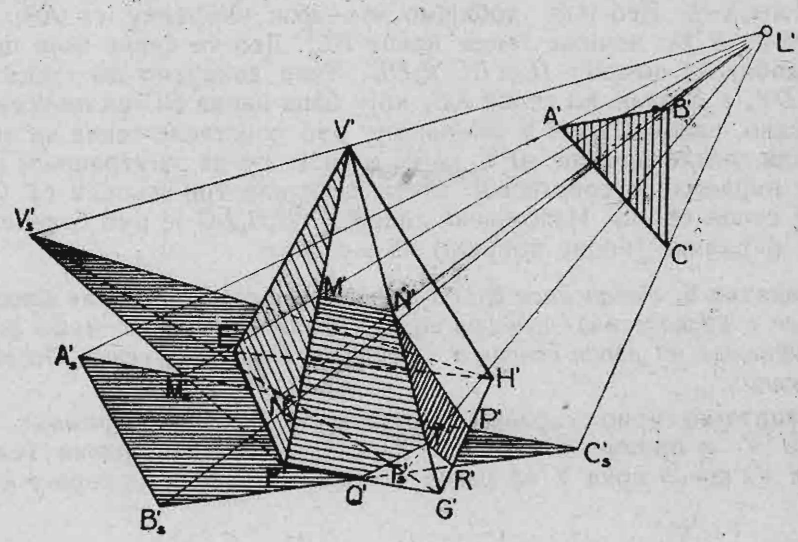


Сл. 172

Целу сенку праве p на призму можемо схватити као пресек призме светлосном равни Lp и конструисати на одговарајући начин. (Приметимо да је p_s оса колинеације и да је $KJ \parallel p_s$).

Задатак 3. *Дата је у пројекцији четворострана пирамида EFGHV, светлосна тачка L и равна троугласта површ ABC, која је ближи тачки L од пирамиде, затим сенке оба предмета на раван основе пирамиде; те сенке се делимично поклапају. Наћи сенку троугласте површи на пирамиду.*

Пошто смо нацртали пројекције пирамиде и троугла и изабрали пројекцију светлосног извора L, можемо на зраку LV још увек изабрати сенку V_s врха V (сл. 173). (Пројекцијом пирамиде није у простору одређен положај равни њене основе спрам равни с ике, дакле ни положај тачке V_s на LV) Изаберимо најзад пројекцију сенке $A_sB_sC_s$ троугласте површи. Посматрајмо ту троугласту површ $A_sB_sC_s$, пошавши од C_1. У P и R његове стране секу ивицу GH која припада осветљеној пљосни GHV. Дакле сенка троугласте површи се од P и R „пење“ уз пирамиду Да бисмо нашли ту сенку на пирамиди, уочимо опет пресеке бачених сенки пирамиде и троугласте површи ABC. Дуж A_sC_s сече сенке FV_s и GV_s (геометријске сенке ивица FV и GV у M_s и N_s. Враћањем уз зраке LM_s и LN_s долазимо прво до тачака M и N на тим ивицама, затим до одговарајућих тачака на AC. Дакле M и N су сенке дужи AC на те ивице, а изломљена линија MNP сенка те дужи на пирамиди и према томе део руба бачене сенке троугласте површи ABC на пирамиду. Цела сенка дужи AC састоји се из дужи A_sM_s и изломљене линије $MNPC_s$. Затим постоји пресек $B_sC_s \times GV_s = T_s$. Отуд,

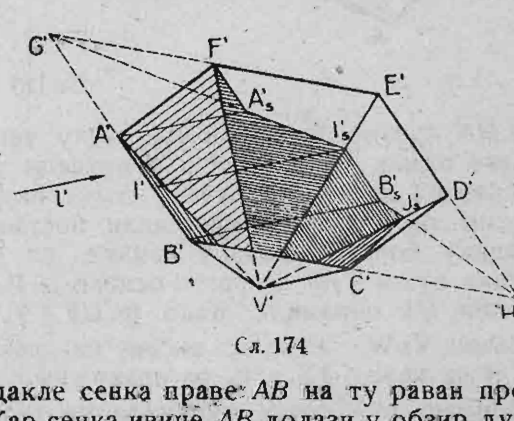


Сл. 173

враћањем уз зрак LT_s налазимо T, па како се сенка B_sC_s дужи, BC на равни основе прекида у Q и R, цела сенка дужи BC је изломљена линија B_sQTPC_s. Тиме је конструкција сенке троугласте површи бачене на пирамиду довршена.

Задатак 4. *Дата је бочна површ шестостране пирамиде (шупља пирамида) чија основа је правилна и окренута горе, и сенка коју при упоредном осветљењу баца једно теме основе на једну бочну пљосан. Одредити сопствену сенку и бачену сенку површи на њу саму.*

Уочени предмет спада у тзв. шупља тела, којима недостаје по нека пљосан. С тога гледишта можемо га назвати шупљом пирамидом, којој недостаје основа Нека је то пирамида $ABCDEFV$ с врхом V (сл. 174). Претпостављамо да у слици видимо унутрашњост пирамиде. Нека је дата сенка A_s тачке A на пљосан EFV. Тиме је довољно одређен и смер осветљења (упоредан са AA_s, од A ка A_s). Сенка праве AF на раван EFV је права A_sF, јер у F продире права AF ту раван. Тиме имамо сенку ивице AF. Да би се добила сенка ивице AB на пљосан EFV приметимо да у тачки $AB \times EF = G$



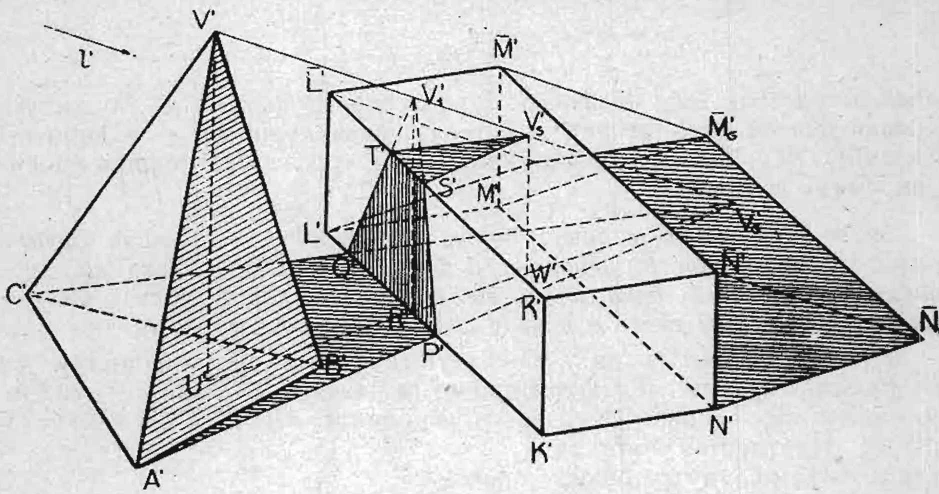
Сл. 174

продире права AB раван EFV, дакле сенка праве AB на ту раван пролази кроз G; то је права GA_s. Као сенка ивице AB долази у обзир дуж

A_sI_s до пресека с EV. Повлачењем зрака кроз I_s налазимо наиме да је I_s сенка тачке I на ивици AB, дакле сенка те ивице допире од A_s до I_s и затим прелази на пљосан DEV, где имамо B_s на зраку светлости кроз B. Део I_sB_s добијамо као дуж упоредну са AB, јер је $AB \parallel DEV$. У B_s почиње сенка ивице BC. Део те сенке који пада на DEV, добијамо помоћу $H = BC \times DE$. Тако долазимо до тачке J_s на ивици DV, а одатле до сенке J_sC_s коју баца ивица BC на пљосан CDV. Очигледно, ивице CV и FV сачињавају руб сопствене сенке на шупљој пирамиди, дакле пљосан AFV, ABV и BCV су на унутрашњој страни шупље пирамиде у сопственој сенци, а остале три пљосни су у сопственој сенци споља. Изломљена линија $FA_sI_sB_sJ_sC$ је руб бачене сенке шупље пирамиде (бочне површи) на њу саму.

Задатак 5. *Раван коса према равни слике садржи основу тростране пирамиде и правоугаоне четворостране призме (квадра). Дата је сенка врха пирамиде на раван основе и на призму. Одредити сенке. Осветљење је упоредно.*

Нацртајмо прво управну пројекцију тростране пирамиде $ABCV$ с врхом V, и призме с основом $KLMN$ у поменутој равни (сл. 175). Нека је V_σ сенка врха V на раван основе а V_s сенка на горњу основу



Сл. 175

$\overline{KLMN}$ призме. Бачену и сопствену сенку пирамиде можемо конструисати одмах. Нека су P и Q пресеци рубова AV_σ и CV_σ ивицом KL. Почев од дужи PQ бачена сенка пирамиде пење се уз призму. Да бисмо тај део сенке одредили поставимо кроз V праву упоредну и једнаку бочним ивицама призме, до продора W кроз раван основе. Сенка дужи V_sW на раван основе је $V_\sigma W$. У праву $V_\sigma W$ пада и сенка висине UV пирамиде. Како је $UV \parallel V_sW$ налазимо U као пресек са правом $V_\sigma W$. Сенка те висине на раван $KL\overline{K}\overline{L}$ је $PV_1 \parallel UV$, при чему је R на ивици KL а V_1 на зраку $\bar{V}V_\sigma$. Спајањем тачака P и Q са V_1 добијамо руб сенке пирамиде на страну $KL\overline{K}\overline{L}$, који допире до ST.

Сенка пирамиде на горњу основу квадра је STV_s. Повлачењем дужи упоредних и једнаких спрам WV_σ кроз L, M и N налазимо најзад сенку квадра на раван основе и његову сопствену сенку.

Задаци за вежбу

1. Дата је пројекција четворостране пирамиде, правац паралелног осветљења и сенке врха на раван основе и на један зид који се подиже са равни основе у близини пирамиде. Конструисати сопствену и бачену сенку пирамиде на раван основе и на тај зид.

2. Дата је тространа пирамида и три тачке у равни основе, у које падају сенке врха при осветљењу из три извора. Претставити сенке бачене на раван основе.

3. Дата је тространа пирамида с врхом окренутим према доле, тачкаст светлосни извор изнад равни основе и сенка једног темена при основи на раван која пролази кроз врх а упоредна је равни основе. Наћи сопствену и бачену сенку. Разликовати када врх пада у сенку основе а кад изван те сенке.

4. Дата је пројекција озго отвореног шупљег квадра, правца паралелног осветљења и управна пројекција тог правца на раван на којој стоји тело. Претставити сопствену сенку и бачену сенку на ту раван и у унутрашњост квадра.

5. Дата је у пројекцији призма којој су основе петокраки звездасти полигони и сенка једног њеног темена при паралелном осветљењу, на раван доње основе. Нацртати сопствену сенку и бачену сенку.

6. Дата је пројекција паралелепипеда и, изнад њега, једне равне површи ограничене паралелограмом. Претставити бачене сенке на раван доње основе и на тај паралелепипед и одредити сопствене сенке ако је извор светлости изнад паралелограма.

7. Уцртати сопствене и бачене сенке у пројекцијама које претстављају продоре у сликама 155 и 158 (које је читалац засебно нацртао) при централном или паралелном осветљењу.

Напомена. Нека у 6 и 7 читалац сам изабере потребне елементе који чине задатак одређеним.

74. СЕНКЕ НЕКИХ ОБЛИХ ПОВРШИ

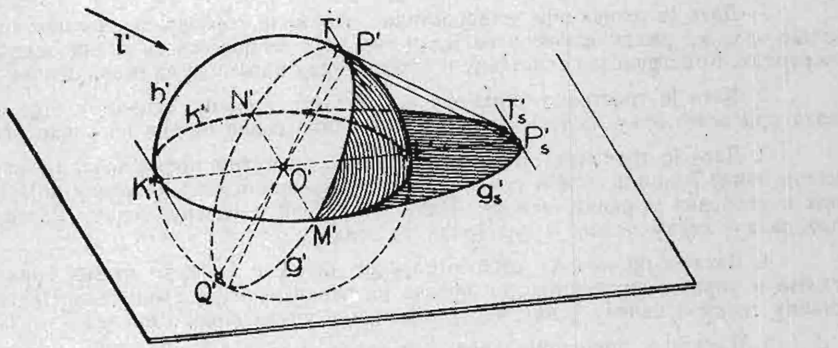
Светлосна купаста површ лопте (види сл. 166) је кружна купаста површ, која додирује лопту по једном кругу, дакле руб сопствене сенке при централном осветљењу је круг. Руб сенке лопте, бачене на неку раван је пресек светлосне купасте површи том равни, дакле руб бачене сенке лопте при централном осветљењу је елипса (укључивши круг), парабола или хипербола. При паралелном осветљењу, купаста светлосна површ прелази у кружну ваљкасту површ, руб сопствене сенке је један велики круг лопте, а руб бачене сенке увек елипса.

Од положаја светлосног извора зависи хоће ли бочна површ кружне купе бити цела осветљена, цела у сопственој сенци или делом осветљена а делом у сенци. У трећем случају руб сенке су две изводнице, као што следује одмах ако уочимо светлосну површ, јер њу образују две равни које садрже зрак светлости кроз врх купе. Према томе бачена сенка купе на раван биће у прва два случаја истоветна баченој сенци саме основе купе, а у трећем случају додаје се овој сенци део ограничен сенком двеју изводница.

Бочна површ ваљка може бити цела у сенци (при средишњем осветљењу) или у зрацима који по њој клизају (при упоредном осветљењу), или делимично осветљена, а тада се руб сенке састоји опет из две изводнице.

Задатак 1. *Наћи сенку коју полулопта баца при упоредном осветљењу на раван своје основе, кад је у пројекцији дат руб сопствене сенке.*

Нацртајмо прво круг h' којим је одређена пројекција лопте, затим елипсу k' која претставља пројекцију великог круга k лопте којим је оивичена основа полулопте (сл. 176). Нека је α раван основе. Средиште



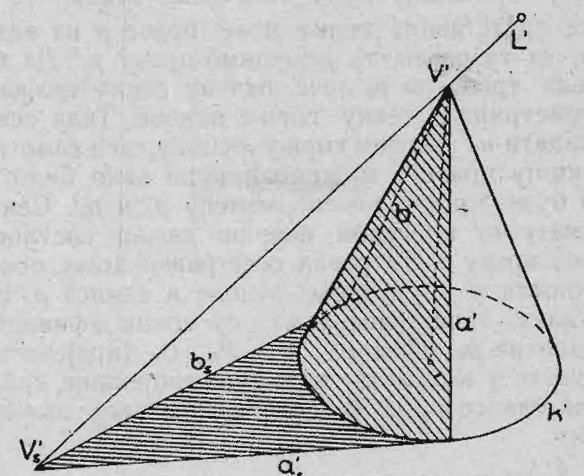
Сл. 176

O лопте је и средиште круга k. Руб сопствене сенке је половина другог великог круга g, који се пројектује као елипса g'. Тиме је одређен и правац паралелног осветљења, јер светлосни зрак који пролази кроз тачку P на великој оси елипсе g' мора додиривати контуру полулопте у тој тачки. Кругови k и g секу се у тачкама M и N свога заједничког пречника. Равни које би у M и N додиривале лопту садржале би, очигледно, зраке светлости и биле би управне на MN. Поставимо кроз O паралелну раван ν. Та раван је управна на MN, дакле сече раван α по управном пречнику KL, дакле $M'N'$ и $K'L'$ су два спрегнута пречника елипсе k'. Раван ν је управна и на равни круга g, дакле сече круг g по управном пречнику PQ, дакле $M'N'$ и $P'Q'$ су два спрегнута пречника елипсе g. На тај начин долазимо до тачака L' и P'

Руб g_s сенке полулопте на раван α потиче од полукруга g. Како и раван ν садржи зраке светлости, онај зрак који пролази кроз P налази се у ν и продире α у тачки P_s праве OL. Тако долазимо до P_s'. Руб g_s је половина елипсе којој је MN пречник а OP_s спрегнути полупречник (дакле напр. дирка на g_s' у P_s' је упоредна са $M'N'$). Тиме је бачена сенка полулопте одређена.

Задатак 2. *Дата је пројекција обртне купе и светлосне тачке. Наћи бочну сенку купе на раван основе и сопствену сенку.*

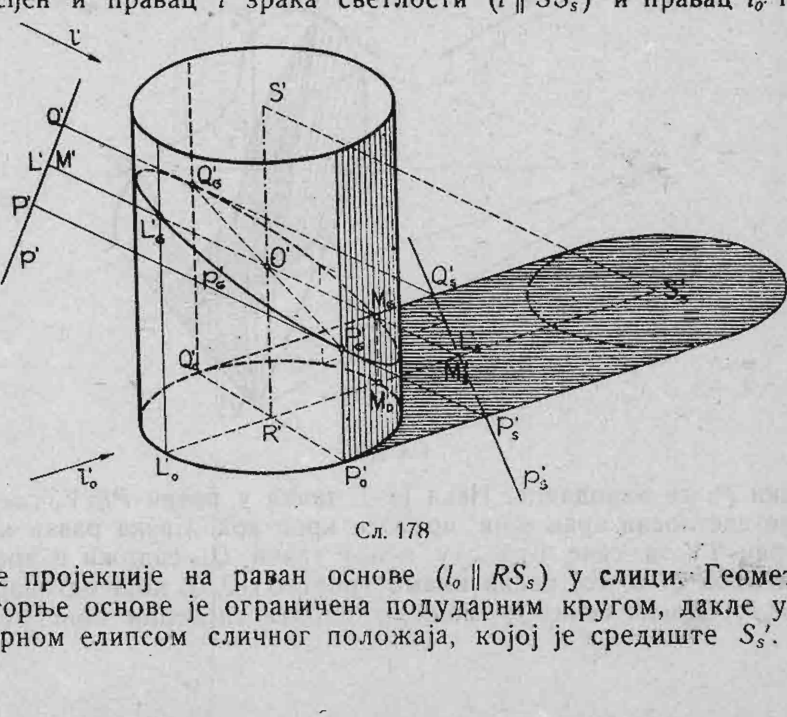
Дата је у пројекцији купа kV, светлосна тачка L и на зраку LV сенка V_s врха на раван основе (сл. 177). Зраци светлости који пролазе рубом сопствене и бачене сенке образују две светлосне равни, које садрже зрак LV и додирују купу у две изводнице a и b (руб сопствене сенке). Како су то две додирне равни купе, оне секу раван основе у диркама на круг k основе; те дирке a_s, b_s образују руб бачене сенке. Према томе повуцимо из V_s' дирке a_s' и b_s' на елипсу Тачкама додира одређене су пројекције изводница a и b, дакле и р сопствене сенке.



Сл. 177

Задатак 3. *Претставити у управној пројекцији сопствену с обртног ваљка и бачену сенку на раван доње основе при паралелном (тљењу, затим бачену сенку једне праве на ваљак и на раван доње осн*

Пошто смо конструисали пројекцију ваљка, при чему је R диште доње а S горње основе (сл. 178) изаберимо положај тачке у коју пада геометријска сенка тачке S на раван доње основе. Т је одређен и правац l зрака светлости ($l \parallel SS_s$) и правац l_o њи



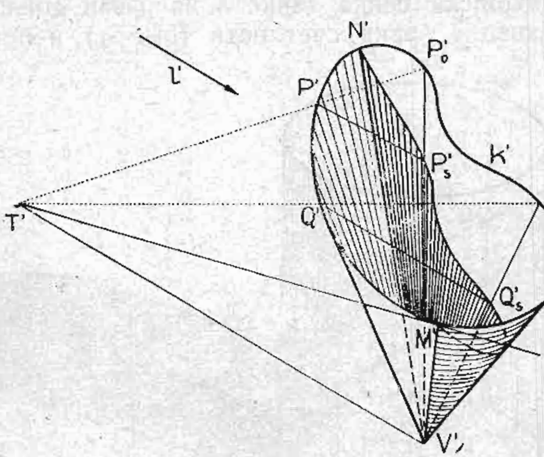
Сл. 178

управне пројекције на раван основе ($l_o \parallel RS_s$) у слици. Геометр сенка горње основе је ограничена подударним кругом, дакле у с подударном елипсом сличног положаја, којој је средиште S_s'. З ничке тангенте на елипсе са средиштима R' и S_s', упоредне и по дужини једнаке дужи $R'S_s'$, довршују слику руба бачене сенке ваљка. Утврдимо где су додирне тачке P_o' и Q_o'. Кроз њих пролазе изводнице ваљка које припадају рубу сопствене сенке.

Да би се претставила сенка неке праве p на ваљак, пођимо од њене сенке p_s на ту раван, тј. повуцимо праву p_s'. Да би права бацала сенку на ваљак треба да p_s сече бачену сенку ваљка. Узели смо да p_s не сече геометријску сенку горње основе. Тада сенка p_σ праве на ваљак неће падати на његову горњу основу, већ само на бочну површ ваљка. Пројекцију праве p можемо повући како било, пазећи да пројекција ваљка буде, просто речено, између p' и p_s'. Сенка p_σ је елипса. Можемо је сматрати пресеком површи ваљка светлосном равни постављеном кроз праву p. Та раван сече раван доње основе у p_s, дакле p_s је оса афиности а круг доње основе и елипса p_s су два перспективно афина лика. Изводнице ваљка су зраци афиности. У слици 178 су конструисане на p_σ тачке L_σ, M_σ, P_σ, Q_σ (крајеви спрегнутих пречника) и обе тачке у којима p'_σ додирује пројекције крајњих изводница. Само половина елипсе p_σ је на осветљеном делу ваљка и претставља истинску сенку.

Задатак 4. *Даша је бочна површ ма какве куйе (шуйља куйа) с врхом окренушим доле и сенка коју йри уйоредном осввешљењу једна шачка на рубу основе баца у унушрашњосш йоврши. Одредиши сойсшвену сенку и бачену сенку ше йоврши на њу саму.*

Нека је P дата тачка на рубу k основе, P_s њена сенка (сл. 179). Тиме је дат правац осветљења, l' у слици. Раван која пролази кроз врх пирамиде и праву PP_s сече површ дуж изводнице VP_s, а линију



Сл. 179

k у тачки P_o те изводнице. Нека је T тачка у равни PP_oV, где права PP_o сече светлосни зрак који пролази кроз врх. Свака раван која садржи зрак TV а сече руб k у некој тачки Q_o садржи и зрак који пролази кроз Q. У тој равни имамо троугао QQ_oQ_s који одговара троуглу PP_oP_s. Дакле сенку Q_s можемо добити следећом конструкцијом у слици: $TQ \times k = Q_o$, Q_s је на пресеку правих Q_oV и $[Q \parallel l]$. Дирке из T на криву k одређују крајње тачке M и N руба бачене сенке, а изводнице MV и NV сачињавају руб сопствене сенке.

Задаци за вежбу

1. Дата је управна пројекција лопте и круга који раздваја осветљени и неосветљени део при централном осветљењу. Наћи пројекцију светлосног извора.

2. Дата је у пројекцији лопта и на њој тачка кроз коју треба да пролази руб сопствене сенке при задатом а) упоредном, б) средишњем осветљењу. Наћи сопствену сенку лопте.

3. Претпостављајући у претходном задатку да знамо и где је у слици геометријска сенка средишта лопте на извесну раван α и који је пресек лопте упоредном равни положеном кроз средиште лопте, наћи и бачену сенку лопте на раван.

4. Дата је пројекција обртне купе, двеју упоредних правих и сенке врха купе и тих правих на раван њене основе при паралелном осветљењу. Одредити остале сенке на телу и равни основе.

5. Дата је у пројекцији светлосна тачка, једна права, прав ваљак и бачена сенка на извесну раван која је упоредна равни основе. Одредити бачену сенку те праве на ваљак.

6. Уцртати сопствене и бачене сенке у пројекцијама које претстављају продоре у сликама 160 и 162 (које је читалац засебно нацртао) при средишњем или упоредном осветљењу.

7. У израђеном задатку 4 на стр. 146 узети да је купа елипсна.

Напомена. Руб сенке бачене у површ је у овом случају равна крива, дакле коника (елипса).

ДЕО ТРЕЋИ

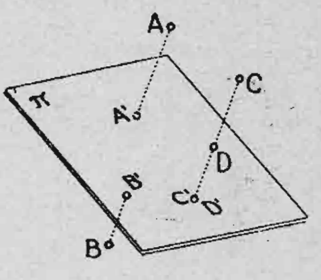
УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ЈЕДНУ РАВАН УЗ ПОСМАТРАЊЕ ОТСТОЈАЊА ОД ТЕ РАВНИ

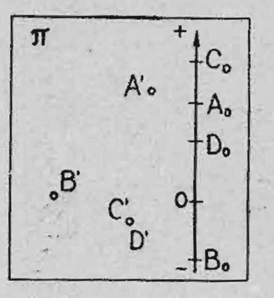
ГЛАВА I

РАВНИ ЛИКОВИ УЗ ПОСМАТРАЊЕ ОТСТОЈАЊА

75. ОТСТОЈАЊА ТАЧАКА. ЛИНИЈА ОТСТОЈАЊА

Под *отстојањем* неке тачке у простору од равни пројекције подразумева се дуж једнака дужи што спаја ту тачку с њеном управном пројекцијом, или пак број којим се та дуж мери. Сматраћемо обично да је отстојање дуж. Приметимо да отстојање тачке A од њене пројекције A' (сл. 180а) може бити и сама дуж AA' и нека дуж једнака тој дужи. Отстојања тачака које су испред равни слике





Сл. 180

(за посматрача који гледа у правцу пројекцијских зрака) сматраћемо позитивним, а отстојања тачака које су иза равни слике негативним. Ако је раван на коју пројектујемо хоризонтална, отстојања се зову *висине*.

Положај тачке у простору потпуно је одређен њеном управном пројекцијом на раван слике и отстојањем. Према томе, неодређеност ликова којима знамо само једну пројекцију на једну раван, престаје чим су позната и отстојања њихових тачака од те равни. Та отстојања можемо унети и у раван слике, преносећи их, рецимо, на једну праву (сл. 183б) од једне почетне тачке 0 и пазећи да позитивна отстојања преносимо на једну (позитивну) страну од тачке 0, а негативна отстојања на другу (негативну страну. Праву на којој се тако бележе отстојања појединих тачака називаћемо *линијом отстојања* (или *линијом висина*). Уз сваку тачку на линији отстојања стављамо оно слово којим је та тачка у простору обележена и додајемо нулу као индекс (напр. A_0 за тачку A; дакле $0A_0 = A'A$).

Отстојања тачака од равни слике могу бити дата и бројевима. Ти бројеви се називају *котама*. Кота је дакле мера отстојања неке тачке од равни слике и претпоставља јединичну дуж (чија је мера 1). Дакле, ако су отстојања одређена бројевима, потребно је одредити на који било начин величину јединичне дужи (напр. речима „јединицом отстојања сматраћемо центиметар“ или нацртавши непосредно у слици, по страни, ту дуж). Ради лакшег налажења отстојања из њихових мера, тј. кота, нацрта се не само јединична дуж, него се на једној дужи забележе на једнаким растојањима тачке чија отстојања су цели бројеви и, рецимо, десети делови јединице. То је *лествица отстојања* (одн. висина).

Увек нам нису потребна сама отстојања тачака од равни, већ разлике тих отстојања (висинске разлике). То бива кад нас не занима тачан положај предмета према равни слике, већ само његов облик и права величина. Разлике отстојања зову се и *релативна отстојања* (одн. *релативне висине*) и дата су непосредно на линији отстојања, на којој тада може изостати тачка 0.

Управно пројектовање на једну раван слике уз посматрање отстојања од те равни претставља једну, унеколико најпримитивнију методу управног пројектовања. Можемо је кратко назвати *методом отстојања*.*

76. ПРАВА ВЕЛИЧИНА ДУЖИ. НАГИБ ДУЖИ И ПРАВЕ ПРЕМА РАВНИ СЛИКЕ

Права је потпуно одређена у простору ако познајемо пројекцију и отстојања од равни слике њених двеју тачака. Исто тако, дуж је потпуно одређена ако познајемо њену пројекцију и отстојања, рецимо, њених крајњих тачака. Тада се може одредити *права величина дужи* и *нагиб* праве одн. дужи према равни слике.

Да бисмо добили праву величину дужи AB (сл. 181) обрнимо четвороугао $ABA'B'$ који стоји у равни управној на равни слике π око његове странице $A'B'$ тако да падне у раван π. Као што смо говорили кад смо посматрали ликове у косим равнима, тако и сад можемо рећи да *обарамо* раван управну на π и у којој се налази четвороугао $ABA'B'$. Обично кажемо да *обарамо дуж* AB у раван слике.

То се обарање може извршити (као свако обарање равни) у два смера. Како су пројекцијски зраци AA' и BB управни на π, углови с теменима A' и B' су и у обореном четвороуглу $(A)(B)A'B'$ прави углови. Дакле, да бисмо конструисали праву величину дужи AB, повуцимо из A' и B' полуправе управне на $A'B'$, обе у истом смеру ако су отстојања истог знака, а у супротном смеру ако су разних знакова.

* Тај назив, опште употребљаван у централној пројекцији, може се употребити за сваку врсту пројектовања на једну раван, кад се сем пројекција посматрају и отстојања од те равни.

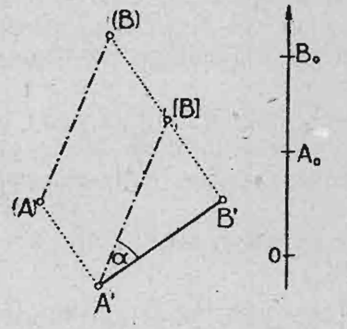
Затим преносимо на те полуправе дужи $0A_0$ и $0B_0$ са линије отстојања. Дуж $(A)(B)$ даје праву величину дужи AB, тј. $(A)(B) = AB$.

Обарања се могу вршити и кад се знају само релативна отстојања тачака од равни слике. Тада обарамо дату раван око једне њене главне линије, у раван упоредну равни слике, тј. обртањем дате равни око упоредне трагу доводимо је у положај упоредан према равни слике.

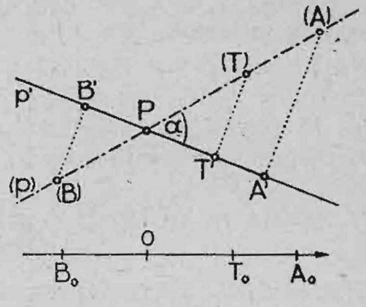
Тако напр. можемо праву величину дужи AB (сл. 181) добити и брже, ако је оборимо у раван π_1 упоредну спрам π и која пролази кроз A. Треба само пренети на управну праву кроз B' дуж A_0B_0, једнаку отстојању тачке B од π_1. Дуж $A'[B]$ даје праву величину дужи AB. Уједно видимо да су за одређивање правих величина дужи (а и других ликова) довољна релативна отстојања.

Тако смо добили уједно *нагибни угао* или *нагиб* дужи AB (или праве AB) према равни π, јер то је оштри угао α што заклапају праве AB и $A'B'$, дакле $\alpha = \sphericalangle B'A'[B]$.

И права може бити дата пројекцијом и отстојањима двеју својих тачака: рецимо права p тачкама A', B' и A_0, B_0 (сл. 182). Тада обарањем



Сл. 181



Сл. 182

праве у раван слике (права (p)) налазимо сем праве величине дужи AB (дуж $(A)(B)$) и траг P праве p и отстојање било које њене тачке T ($= T'(T)$), па и нагиб α праве p.

Ако су познатa само релативна отстојања, траг праве се не може одредити, али могу се добити међусобна растојања њених тачака и њен нагиб према равни слике. То је показала конструкција у слици 181 помоћу тачке $[B]$ којом смо добили праву величину дужи AB и њен нагиб α, јер за ту конструкцију није била потребна тачка 0 на линији отстојања.

Налажењем праве величине појединих дужи и нагиба правих и дужи можемо већ решавати разне задатке у којима се тражи величина и облик неког лика кад су отстојања извесног броја његових тачака од равни слике дата на линији отстојања.

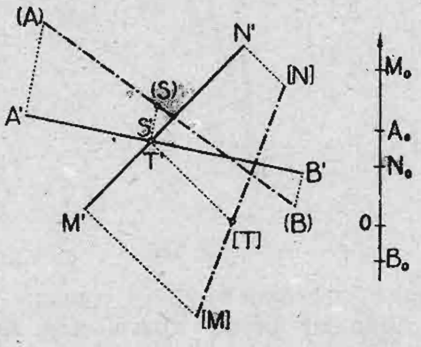
Задатак 1. *Испитати да ли су две праве које су одређене пројекцијом и отстојањем тачака и чије се пројекције секу, мимоилазне праве или не.*

Нека су то праве AB и MN (сл. 183). Пресечна тачка $A'B' \times M'N'$ претставља пројекцију извесне тачке S на AB и извесне тачке T на M. Обарањем правих AB и MN налазимо да су отстојања тачака S и T разна, дакле то су две разне тачке и према томе праве AB и MN су мимоилазне.

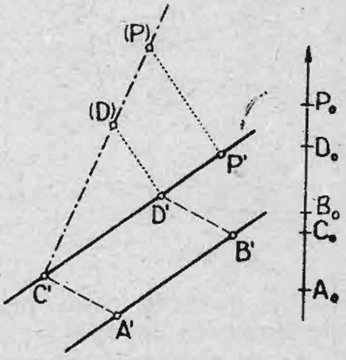
Напомена. Кад би било $S'(S) = T'[T]$ требало би још видети да ли су оба отстојања истог знака, јер само тада је $S \equiv T$ и праве се секу.

Задатак 2. *Дате су пројекције двеју паралелних правих и релативна отстојања тачака A, B на једној и тачке C на другој. Наћи релативно отстојање неке тачке P на другој правој, којој је дата пројекција P'.*

Нека је D тачка праве CP за коју је $BD \parallel AC$, дакле и $B'D' \parallel A'C'$ (сл. 184). Релативно отстојање тачке B у односу на A, тј. A_0B_0 (важан је и смер) једнако је релативном отстојању тачке D у односу на C,



Сл. 183



Сл. 184

тј. C_0D_0. Дакле можемо, ако хоћемо, забележити D_0 на линији отстојања. Но у сврху конструкције довољно је оборити праву CD у раван паралелну равни слике помоћу релативног отстојања $D(D) = A_0B_0$. На $C'(D)$ налазимо (P) у пресеку нормалом из P'. Тада имамо $0P_0 = P'(P) + 0C_0$.

77. РАВАН ОДРЕЂЕНА ПОЛОЖАЈА. НАГИБ РАВНИ ПРЕМА РАВНИ СЛИКЕ

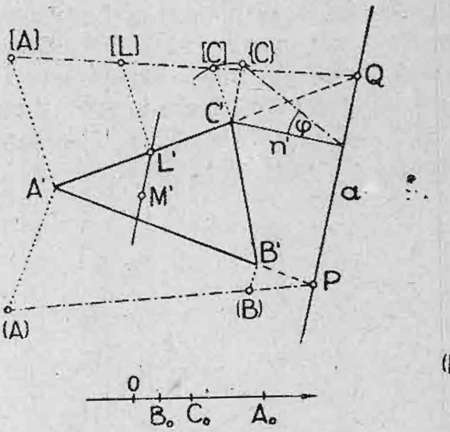
Како је раван одређена трима тачкама, које нису на једној правој, раван α, ма ког положаја, биће одређена пројекцијом и отстојањем трију њених тачака A, B, C које нису на једној правој (сл. 185). Траг a равни α можемо добити помоћу којих било двеју правих те равни, напр. правих AB и AC. Обарањем тих правих налазимо њихове трагове P и Q, а тада је права $PQ \equiv a$ тражени траг.

Отстојање ма које тачке M равни α, којој је дата пројекција M' можемо наћи напр. помоћу упоредница кроз M. Ако је L њен пресек правом AC, тачке L и M имају једнака отстојања, а за L отстојање се добија подизањем управне на $A'C'$ у L' до пресека обореном правом, $[A][C]$. Дуж $L'[L]$ једнака је отстојању тачке M.

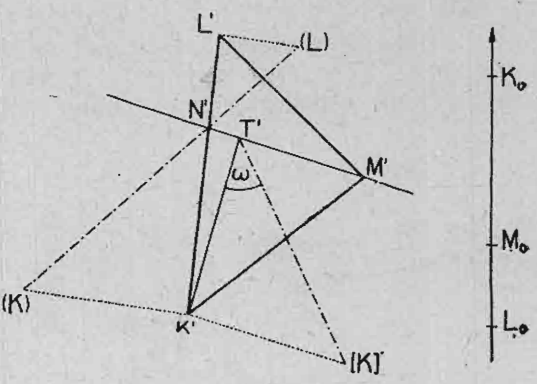
Раван је, разуме се, одређена и кад јој се зна траг, а за једну њену тачку ван трага, пројекција и отстојање. Довољно је да се зна и једна упоредница и једна тачка у равни ван те упореднице.

Нагиб (нагибни угао) равни α према равни слике је нагиб према равни слике, праве која припада равни α и управна је на трагу те равни.

Да би се, дакле, одредио нагиб φ равни α (сл. 185) посматрајмо напр. праву n у α, која пролази кроз C и управна је на a. Повуцимо $n' \perp a$ (§ 39) и оборимо праву n помоћу тачке C. Тиме је угао φ одређен.

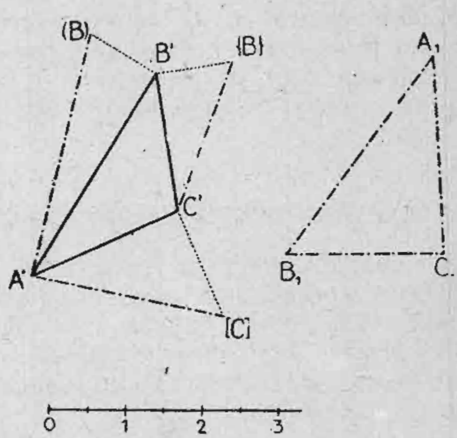


Сл. 185



Сл. 186

Ако су позната само релативна отстојања трију тачака једне равни, не може се одредити тачан положај њеног трага, али правац трага може се одредити, као и нагиб равни. Нека су напр. дата релативна отстојања и пројекције трију тачака K, L, M (сл. 186). Уочимо раван упоредну равни слике и која пролази напр. кроз M. Обарањем праве KL у ту раван налазимо пројекцију $N' \equiv K'L' \times (K)(L)$ тачке N која је у истој равни. Дакле тачке M и N имају исто отстојање од π, тј. MN је једна главна линија равни KLM. Нагиб ω равни можемо добити као у слици 185, обарајући праву TK у исту раван паралелну равни слике. ($K'T' \perp M'N'$, $K'[K] \perp K'T'$, $K'[K] = K'(K)$).



Сл. 187

Задатак. *Одредити прави облик и величину троугла ABC кад је дата његова управна пројекција на једну раван, лествица отстојања и коте његових темена:* $A(1)$, $B(2)$, $C(2{,}5)$.

Обарамо сваку страну троугла око неке праве упоредне равни слике (сл. 187). Како је разлика отстојања тачака A и B једнака 1, тачака B и C 0,5, тачака C и A 1,5 (не водимо сад рачуна о знаку), преносимо на управној на $A'B'$, подигнутој у B', дуж једнаку 1, на управној на $B'C'$ у B' дуж једнаку 0,5, а на управној на $C'A'$ у C' дуж једнаку 1,5. Те дужи преносимо с лествице. Тако добијамо праве величине трију страна, а помоћу њих конструишемо троугао $A_1 B_1 C_1$ подударан троуглу ABC.

Напомена. Тај и многи други задаци могу се решавати такође обарањем равни у којој је дати лик, о чему ће се говорити доцније (в. § 80)

Задаци за вежбу

1. Дат је траг праве p и пројекција и отстојање једне њене тачке A. Наћи отстојање ма које њене тачке којој је дата пројекција и обрнуто, пројекцију кад је дато отстојање на линији отстојања.

2. Дата је права својим двема тачкама A и B и једна тачка T ван те праве а) пројекцијом и отстојањем на линији отстојања, б) пројекцијом, котама A (—1), B (3), T (2) и јединичном дужи. Кроз тачку T поставити праву паралелну датој правој и одредити јој траг.

3. Дат је траг једне равни и једна њена тачка ван трага. Одредити отстојање ма које друге тачке те равни, којој је дата пројекција и, обрнуто, пројекцију кад је дато отстојање.

4. Одредити на страни PR датог троугла PQR, или на продужењу те стране, тачку чије отстојање од равни слике је исто као за тачку Q.

5. Дата је права p својим двема тачкама A и B и траг Q праве q управне на p а) пројекцијом и отстојањима, б) пројекцијом, котама A (2,7), B (1,2) и лествицом отстојања у којој јединична дуж има дужину 0,75 см. Наћи пројекцију q' праве q.

Упутство: Наћи праву величину троугла ABQ.

6. Дате су пројекције четири тачке A, B, C, D које припадају једној равни и релативна отстојања тачака A, B, C. Наћи релативно отстојање тачке D и прави облик и величину четвороугла $ABCD$.

7. Померити паралелно дати паралелограм (задата су три темена) у датом смеру за дату величину. Смер је задат пројекцијом и нагибом.

8. Дат је троугао ABC својим теменима. Наћи релативно отстојање његова тежишта.

9. Дат је троугао KLM пројекцијом, котама K (15), L (—5), M (4) и лествицом отстојања у којој јединична дуж има дужину 0,5 см. Наћи пресечну тачку његових висина.

10. Дате су пројекције и релативна отстојања тачака A, B, C које нису на једној правој. Одредити на линији отстојања релативно отстојање које било тачке P те равни, дате пројекцијом P'. Која је конструкција најкраћа?

11. Проучити како се мења нагиб праве у извесној равни, кад се та права обрће у тој равни око једне своје тачке.

12. Дата је раван својим двема главним линијама (тј. дате су пројекције двеју главних линија и отстојања од равни слике). Наћи пројекцију треће главне линије која има задато отстојање од равни слике.

13. Дат је троугао. Одредити праву величину његових углова.

14. Наћи праву величину угла између двеју датих мимоилазних правих.

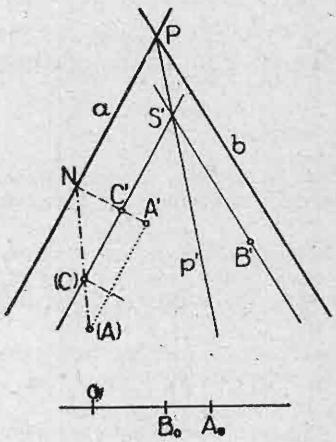
Напомена. *Угао двеју мимоилазних правих* је оштар угао који је одређен једном од двеју датих правих и правом кроз неку тачку те праве, која је паралелна другој датој правој.

78. ПРЕСЕК ДВЕЈУ РАВНИ

Кад су равни или равне површи одређене пројекцијом и отстојањима довољног броја елемената, њихов пресек се лако одређује

Задатак 1. *Две равни су дате траговима и по једном тачком у свакој равни. Одредити њихов пресек.*

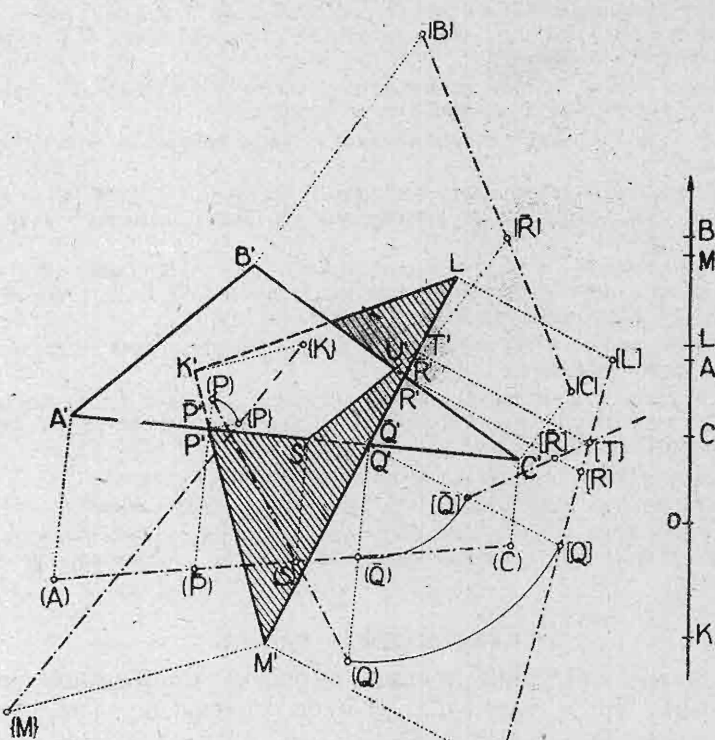
Нека су a и b трагови датих равни α и β, A тачка у α, B у β, дате пројекцијама A', B' и отстојањима (сл. 188 . Уочимо у α једну праву кроз A, напр. праву $AN \perp a$ и нађимо пројекцију C' тачке C на AN која има исто отстојање као тачка B ($C'(C) = 0C_0$). Главна линија равни α кроз C и главна линија равни β кроз B секу се (јер су обе у равни паралелној равни слике и удаљеној од ње за $0B_0$). Дакле пресек њихових пројекција, тачка S', је пројекција тачке S заједничке обим равнима. Друга заједничка тачка је $P = a \times b$. Дакле права $p = PS$ је пресечна права датих равни α и β. Пројекцијом PS и отстојањем $0S_0 = 0B_0$ права p је у простору одређена.



Сл. 188

Задатак 2. *Дате су две равне троугаоне површи ABC и KLM; одредити њихов пресек.*

Један начин је да одредимо трагове равни ABC и KLM и да поступимо као у задатку. 1. Други начин је да један троугао, рецимо KLM пројектујемо на раван другог троугла. ABC, управно на раван слике и



Сл. 189

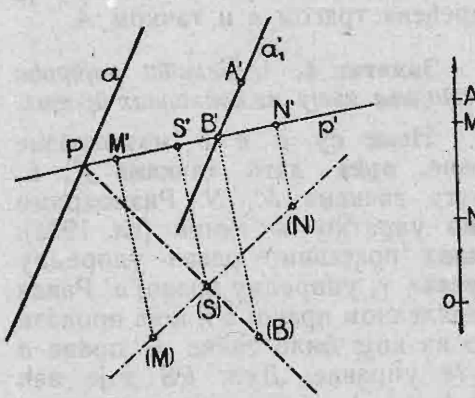
потражимо где се секу стране троугла KLM са тим својим пројекцијама (то су косе пројекције на раван ABC). Нека су P, Q, R три тачке на троуглу KLM, које се пројектују у пресечне тачке троуглова $A'B'C'$ и $K'L'M'$ и нека су $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, (сл. 189) пројекције тачака P, Q, R на раван ABC; дакле $P' = \bar{P}'$, $Q' = \bar{Q}'$, $R' = \bar{R}'$. Обарањем дужи AC и BC налазимо отстојања тачака $\bar{P}, \bar{Q}$ и $\bar{R}$, а обарањем дужи KM и LM отстојања тачака P и Q. Ако дакле у обарању равни $ABA'B'$ оборимо сем праве AB и праву PQ, добићемо у обореном положају њихов пресек S, а отуд и S'. Слично добијамо обарањем равни $LML'M'$ пресек T правих LM и $\bar{Q}\bar{R}$. Тиме имамо пројекцију пресечне праве ST равни ABC и KLM, дакле и пресечну дуж SU обих троугаоних површи, а отстојањима $S'(S)$ и $T'[T]$ тачака S и T положај те дужи је потпуно одређен.

79. ПРОДОР ПРАВЕ КРОЗ РАВАН. УДАЉЕНОСТ ТАЧКЕ ОД РАВНИ

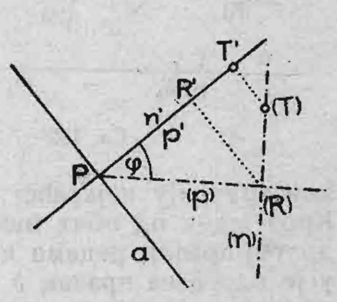
Да би се одредио продор праве кроз раван, општи поступак састоји се у томе да се кроз дату праву постави помоћна раван и нађе њен пресек датом равни. Тражена тачка продора је пресечна тачка дате и пресечне праве. За помоћну раван узима се обично раван управна на равни слике.

Задатак 1. *Дата је права p својим тачкама M и N и раван α својом тачком A и трагом a. Одредити продор праве p кроз раван α.*

Поставимо кроз p раван ν управну на π, тј. пројектујућу раван праве p (сл. 190). Нека се α и ν секу по правој s. Поставимо кроз A главну линију a_1 равни α. Праве a_1 и s равни α секу се у тачки B која има исто отстојање од π као A. Оборимо праве s и p које су обе у ν, прву помоћу M и N, другу помоћу трага P ($\equiv a \times p'$) и B ($M'(M)$, $N'(N)$, $B'(B) \perp p'$; $B'(B) = 0A_0$). Пресек оборених правих (s) и (p) је (S), оборена пресечна тачка правих s и p. Отуд је S' подножје управне из (S) на s' Дуж S' (S) даје отстојање тачке S од π.



Сл. 190



Сл. 191

Задатак 2. *Кроз дату тачку T ван равни α, дате трагом a и нагибом φ, спустити праву управну на α и наћи тачку у којој та управна продире раван α.*

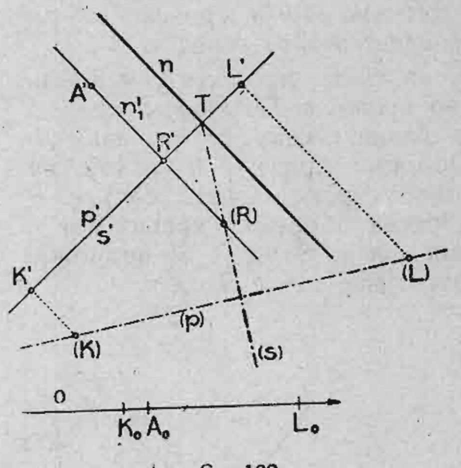
Нека је n права кроз T, управна на α; њена пројекција n' је управна на траг a равни α (сл. 191). Поставимо кроз n раван μ управну на π и оборимо је. Нека је $p \equiv \alpha \times \mu$. Имамо $p' \equiv n'$. Како су тачка T и пресек p садржани у μ, показаће се то и у обореном положају као (T) и (p), и то $\sphericalangle p'(p) = \varphi$, $T'(T) \perp p'$, $T'(T) = 0T_0$. Но и управна n је у равни μ, дакле обарањем равни μ показаће се као права (n) која пролази кроз (T) и управна је на (p). Пресек R правих n и p је тражена тачка продора $\alpha \times n$ и у обореном положају је $(R) = (p) \times (n)$.

Дакле, да бисмо одредили тачку R', оборимо p и T и спустимо из (T) управну на (p). Подножје те управне је (R), а спуштањем управне из (R) на n' добијамо R'. Њено отстојање од π је $R'(R)$. Тиме је и управна n потпуно одређена.

Напоменимо да је у пројекцији видљиви део праве n полуправа с исходиштем R' и која не садржи тачку T', јер је отстојање тачке R веће од отстојања тачке T, а оба су позитивна, дакле раван α заклања тачку T.

Задатак 3. *Кроз дату тачку A која није на датој правој p поставити раван ν управну на p.*

Нека је права p одређена својим двема тачкама K и L (сл. 192). Поставимо кроз A праву n_1 упоредну непознатом трагу n равни ν, а кроз p раван μ управну на π. Имамо $n_1' \perp p'$. Нека је $n_1 \times \mu = R$; $R' = n_1' \times p'$. Нека је $\mu \times \nu = s$; $s' \equiv p'$. Оборимо раван μ. То значи да обарамо праву p, тачку R и праву s. Како је n_1 права упоредна трагу n равни ν, отстојање тачке R је исто као тачке A, дакле $R'(R) = 0A_0$. Како треба да буде $\nu \perp p$, мора бити и $s \perp p$, дакле у обореној равни μ права (s) је управна из (R) на (p). Тако добијамо траг $T \equiv (s) \times p'$ праве s, а тиме и траг n. Раван ν је одређена трагом n и тачком A.

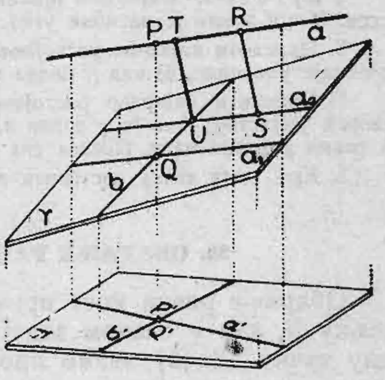


Сл. 192

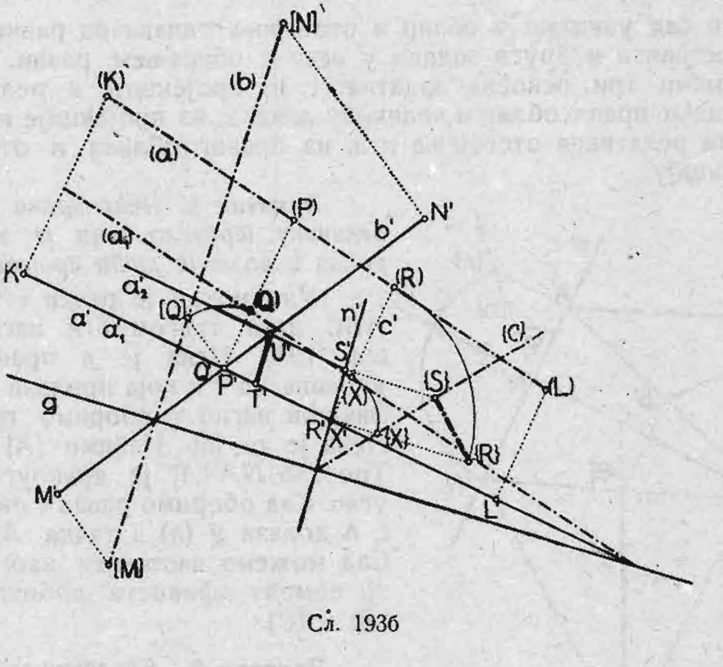
Задатак 4. *Одредити најкраће растојање двеју мимоилазних правих.*

Нека су a и b мимоилазне праве, прва дата тачкама K, L, друга тачкама M, N. Размотримо конструкцију најкраћег растојања прво укратко на скици (сл. 193а). Кроз једну од обих мимоилазних правих поставимо раван упоредну другој правој; рецимо кроз праву b раван γ, упоредну правој a. Раван γ је одређена правом b и правом a_1 паралелном правој a и која пролази кроз неку тачку Q праве b. Спустимо из које било тачке R праве a управну на γ и нека је S подножје те управне. Дуж RS даје већ најкраће растојање тачака правих a и b, али још не спаја тачке тих правих. Стога повуцимо кроз S у γ праву $a_2 \parallel a_1 \parallel a$. Нека је U њен пресек правом b. Права кроз U, паралелна правој RS' сече a у извесној тачки T и $TU = RS$, тј. T и U су најближе тачке мимоилазних правих a и b.

Отуд следује конструкција у равни слике (сл 193б). Оборимо прво праве a и b; то су (a) и $[b]$. Тачка $a' \times b'$ је пројекција извесне тачке P на a и извесне тачке на b, коју ћемо изабрати за тачку Q. Тада је $a_1' \equiv a'$, дакле обарањем праве a вршимо и обарање праве a_1. Оборена права (a_1) мора пролазити кроз (P), при чему је $P'(P) = P'[P]$ и $(a_1) \parallel (a)$. Ради спуштања управне на γ поставимо ма кроз коју тачку R праве a раван ν управну на γ и π и оборимо је. Тако добијамо у обореном положају пресек $c \equiv \gamma \times \mu$, тј. $\{c\}$ и ван $\{c\}$ тачку $\{R\}$. Спуштањем управне из $\{R\}$ на $\{c\}$ налазимо $\{S\}$ а отуд S'. Кроз S' пролази $a_2' \parallel a_1'$, тада је $a_2' \times b' = U'$, $T'U' \parallel R'S'$, $T_oU_o = R_oS_o$.



Сл. 193а



Сл. 193б

Задаци за вежбу

1. Дата је раван α трагом a и тачком A. Кроз дату праву p равни α поставити раван управну на α.

2. Дата је раван α трагом и једном својом тачком. Кроз праву q која је ван α поставити раван управну на α.

3. Наћи удаљеност дате тачке A од дате праве p.

Упутство: Поставити кроз A раван управну на p

4. Дата је троугаона равна површ ABC и права a. Одредити продор праве a кроз ту површ, ако продора има.

Упутство: Може се прво наћи траг равни ABC, затим радити као у решеном задатку 1 претходног параграфа, а може се и без трага, пројектовањем праве a у правцу управном на равни слике, на површ ABC (упоредити с решеним задатком 2, § 78).

5. Дате су две равни косе према равни слике. Наћи нагиб једне равни према другој.

Упутство: Одредити пресек обих равни, затим поставити раван управну на пресек. У тој равни је нагибни угао. Треба га наћи у правој величини.

6. Одредити најкраће растојање тачака двеју мимоилазних правих а) кад су им пројекције упоредне, б) кад је једна од обих правих управна на равни слике.

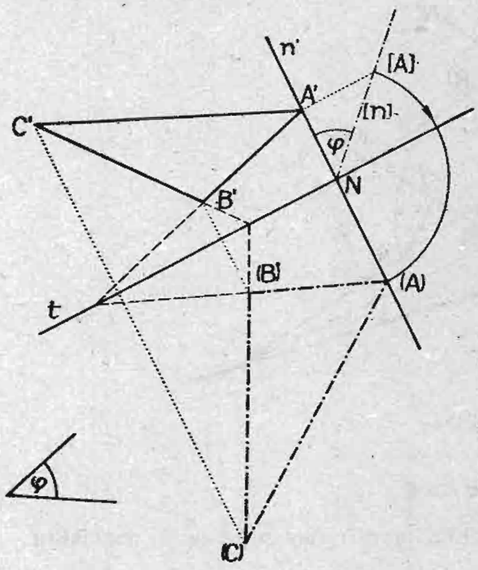
7. Одредити најкраће растојање тачака двеју мимоилазних правих a и b по следећем упутству: Ако је γ раван као у решеном задатку 4 у § 79, поставити кроз a и b равни управне на γ. Пресек тих двеју равни садржи тражену најкраћу дуж.

8. Кроз дату тачку поставити праву која сече две дате мимоилазне праве.

80. ОБАРАЊЕ РАВНИ ОДРЕЂЕНА ПОЛОЖАЈА

Обарање равни косе према равни слике посматрали смо већ у одељку II, али у сваком задатку морали смо претпоставити макар за једну тачку да јој знамо пројекцију и оборени положај, да бисмо могли извршити обарање ликова датих у пројекцији, или враћање из обореног положаја.

Пошто сад узимамо у обзир и отстојања тачака од равни слике, могу се поставити и други задаци у вези с обарањем равни. У том погледу имамо три основна задатка: 1. из пројекције и релативних отстојања наћи прави облик и величину лика, 2. из пројекције и правог облика наћи релативна отстојања и 3. из правог облика и отстојања наћи пројекцију.



Сл. 194

Задатак 1. *Наћи прави облик и величину троугла који је у датој равни и коме је дата пројекција.*

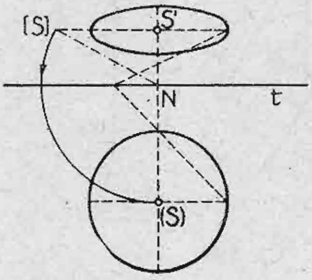
Узмимо да је раван τ троугла ABC дата трагом t и нагибом φ (сл. 194). Нека је n права у τ, управна на t и која пролази кроз A. Знајући нагиб φ оборимо праву n. Нека је то $[n]$. Нађимо $[A]$ на $[n]$. Троугао $NA'[A]$ је правоугли троугао. Кад оборимо раван τ око трага t, n долази у (n) а тачка A у (A). Сад можемо наставити као раније, тј. помоћу афиности добити тачке (B) и (C).

Задатак 2. *Конструисати пројекцију круга с датим полупречником r, који је у равни τ датој трагом t и средиштем S круга.*

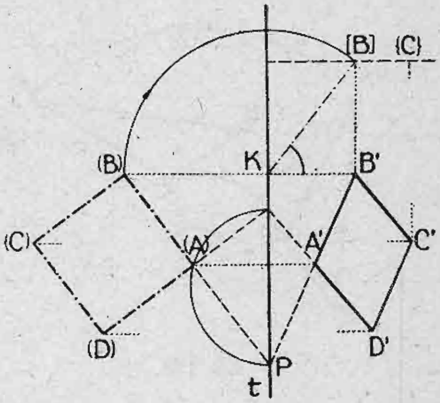
Нека је t траг равни и S' пројекција дате тачке S (сл. 195). Оборимо раван τ у раван слике обарањем тачке S у (S) помоћу троугла $S'N[S]$. У обореној равни опишимо око (S) круг с датим полупречником r а затим одредимо пројекцију кру помоћу афиности.

Задатак 3. *У слици 102 имали смо пројекцију A'B'C'D' квадрата ABCD у општем положају и тај квадрат оборен. Одредити нагиб равни тог квадрата.*

Ма која од тачака A, B, C, D може нам послужити за налажење нагиба. Узмимо напр. тачку B



Сл. 195

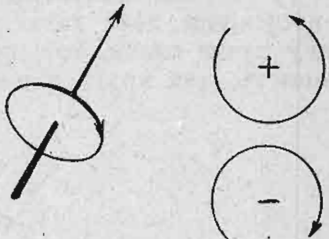


Сл. 196

(сл. 196). **Обарајући** раван кроз B, управну на τ добијамо тачку $[B]$. Угао $B'K\,[B]$ **је** тражени нагибни угао.

81. ОБРТАЊЕ РАВНИХ ЛИКОВА ОКО ПРАВИХ

Обарање равни је обртање равни око трага (или неке упоредните) до поклапања (или упоредности) с пројекцијском равни. Но може се посматрати обртање равни или равних ликова за који било угао око ма какве праве у простору. Права око које се врши обртање зове се *оса обртања*. Погодно је назначити смер обртања на самој оси обртања, о р и ј е н т и ш у ћ и осу, тј. дајући јој онај смер у коме, кад гледамо, видимо обртање у с м е р у к а з а љ к е н а ч а с о в н и к у (сл. 197, лево).



Сл. 197

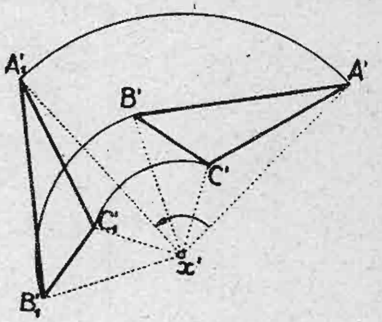
Кад се посматра обртање само у једној равни, или пак у правцу осе обртања, гледајући у једном од два могућа смера, разликује се позитиван и негативан смер обртања. Смер обртања називамо *позитивним* кад се обртање врши у смеру супротном кретању казаљке на часовнику, а негативним када се врши у смеру кретања казаљке на часовнику (сл. 197, десно).

Задатак 1. *Троугао ABC обрнути око праве управне на равни слике, за прав угао у позитивном смеру.*

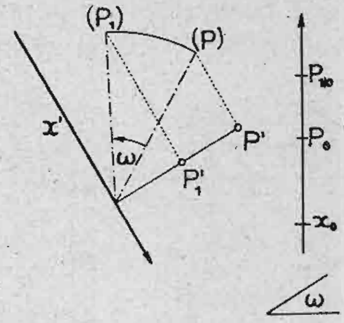
Нека је $A'B'C'$ пројекција троугла и x' пројекција осе обртања (сл. 198). Ако свако теме троугла $A'B'C'$ обрнемо око тачке x' у равни слике за 90° у позитивном смеру, добијамо троугао $A'B'C'$ који је пројекција троугла ABC после траженог обртања око праве x.

Задатак 2. *Тачку P у простору обрнути око оријентисане осе x, која је упоредна равни слике, за угао ω.*

Нека је x' пројекција праве x и P' пројекција тачке P (сл. 199). Обртање се врши у равни управној на π и стога обарамо ту раван



Сл. 198



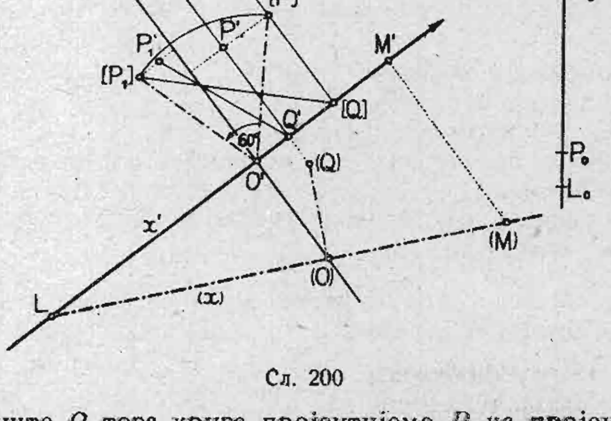
Сл. 199

помоћу тачке P у раван упоредну равни слике и која садржи праву x. Нека је (P) оборени положај тачке P. Тада обрћемо у тој равни тачку (P) у датом смеру за угао ω и добијамо тачку (P_1). Подизањем тачке (P_1) налазимо пројекцију P_1' тачке P_1 која претставља тачку P после обртања.

Исти је поступак ако је права x у равни слике. У том случају, разуме се, обарање се врши у саму раван слике.

Задатак 3. *Обрнути тачку P у простору око ма које оријентисане праве x за 60^0.*

Нека је x' пројекција праве x, одређене тачкама L и M и нека је P' пројекција дате тачке P (сл. 200) Оборимо праву x у раван упоредну равни слике, која пролази кроз L. При задатом обртању тачка P описује лук круга у извесној равни ν која је управна на x. Да бисмо



Сл. 200

добили средиште O тога круга пројектујемо P на пројектујућу раван ξ праве x, нека је Q пројекција тачке P. Имамо $P'Q' \perp x'$. Тачка Q има исто отстојање од π као P. Стога јој можемо одредити положај у обореној равни ξ: имамо $Q'(Q) = P_o L_o$. Како је $PO \perp x$, такође је $QO \perp x$, дакле и $(Q)(O) \perp (x)$. Тако добијамо тачку (O) а отуд O', јер $(O) O' \perp x'$. Уочимо главну линију a равни ν, која пролази кроз O. Очигледно, $a' \perp x'$.

Оборимо раван ν око праве a. Затим, у обореном положају извршимо обртање тачке P. Пре свега, тачка Q долази тада у $[Q]$ при чему је $O'[Q] = (O)(Q)$. Тачка P долази у $[P]$ при чему је $[P]P' \perp a'$, $[P]\{Q\} \parallel a'$. Од крака $O'[P]$ одмеримо угао 60^0 у задатом смеру, имајући на уму смер осе x. Тако добијамо $[P_1]$, тј. тачку P после обртања, у обореној равни ν. Како се праве $P_1 Q$ и a секу у једној тачки, секу се у истој тачки и праве $P_1' Q'$ и $[P_1][Q]$, а то даје назначену конструкцију тачке P_1.

Напоменимо да је при обртању равних ликова пројекција лика у првобитном положају спрам пројекције лика после обртања у афином односу, јер правим одговарају праве а права у бесконачности одговара себи самој. Стога је тада довољно знати три тачке у првобитном и у промењеном положају: остале добијамо на основу афиности (§ 17)

Задаци за вежбу

1. У задатку 3 одредити отстојање тачке P_1 од равни слике.

2. Дати троугао ABC обрнути око трага његове равни за прав угао у датом смеру.

3. Паралелограм $ABCD$, дат пројекцијом и отстојањима, обрнути за 60^0 око оријентисане праве паралелне равни π, која пролази кроз A.

4. Правилан шестоугао задат пројекцијом (мора испуњавати за то услове!) обрнути за 120^0 у датом смеру око осе која је у његовој равни и упоредна је спрам π.

5. Обрнути дати троугао за 30^0 око праве паралелне равни π, која није у равни троугла.

6. Обрнути дати троугао око праве управне на π за 45^0 у позитивном смеру и одредити да ли се обртањем настала троугласта површ сече са полазном.

7. Обрнути дати равни петоугао, задат пројекцијом и отстојањима трију темена, око ма које праве која сече раван слике под углом 45^0.

Упутство: Искористити сличност конструкције обртања трију темена. Остала темена обрнутог лика добијају се помоћу афинитета.

ГЛАВА II

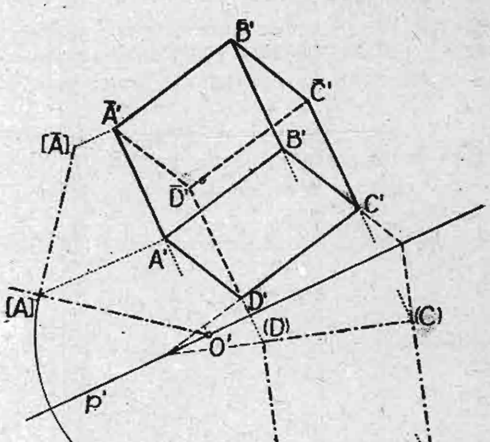
ПРОСТОРНИ ЛИКОВИ УЗ ПОСМАТРАЊЕ ОТСТОЈАЊА

82. ТЕЛА У ОДРЕЂЕНУ ПОЛОЖАЈУ И ОДРЕЂЕНА ОБЛИКА

Кад у обзир узимамо и отстојања од равни слике, можемо конструисати управне пројекције како равних ликова тако и тела одређена облика, одређене величине и положаја спрам равни слике.

Задатак 1. *Конструисати управну пројекцију коцке у општем положају према равни слике.*

Нека је $(A)(B)(C)(D)$ једна страна коцке у обореном положају и нека је p' пројекција оне главне линије равни ABC око које је та раван оборена (сл. 201). Изаберимо нагиб те равни. Зато повуцимо произвољно праву $O'[A]$, одредимо тачку $[A]$ и помоћу ње пројекцију A'. Тачке B', C', D' добијамо непосредно помоћу афиности. Тако смо добили пројекцију $A'B'C'D'$ једне стране коцке. Ивица $A\overline{A}$ налази се у равни управној на π, па се стога у правој величини јавља у обореној тој равни, на правој управној на $O'[A]$. Нека је то $[A][\overline{A}]$. Из тачке $[\overline{A}]$ добијамо пројекцију $\overline{A}'$, а отуд и остале тачке $\overline{B}'$, $\overline{C}'$, $\overline{D}'$. Узели смо да се од два темена B и $\overline{D}$ види теме B.

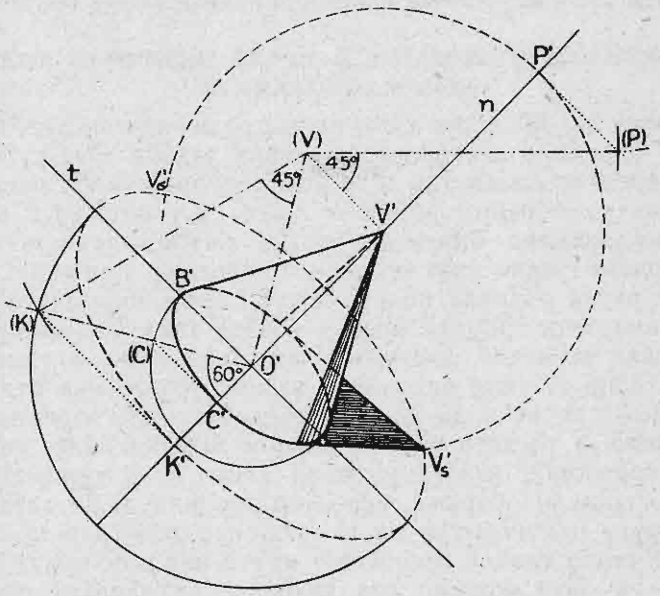


Сл. 201

Задатак 2. *Конструисати обртну купу с датом висином и датим полупречником основе и чија оса је нагнута за 30^0 према равни π.*

Нека је t траг равни у којој је основа купе (сл. 202) и нека је средиште O основе на t. Поставимо кроз O раван $\nu \perp t$ и оборимо је. Тада полупречник OC имамо у правој величини и $\sphericalangle C'O'(C) = 60^0$, дакле можемо конструисати елипсу помоћу афиности.

Висина OV купе показују се у правој величини такође у обореној равни ν и $O'(V) \perp O'(C)$. Одатле добијамо пројекцију врха, V'. Тангенте из V' на елипсу $A'C'B'$ допуњавају пројекцију контуре купе.



Сл. 202

Задатак 3. *Одредити у претходном задатку сопствену сенку купе и бачену сенку на раван основе при упоредном осветљењу под углом 45° према тој равни и према равни слике.*

Опишимо круг у равни основе, полупречником једнаким висини купе и замислимо купу с врхом V и основом одређеном тим кругом. Њене изводнице заклапају с висином угао $\sphericalangle (hs) = 45^0$. Затим уочимо подударну купу с врхом V и основом паралелном равни π. У пресеку основа тих двеју купа биће сенка V_s врха V. Како имамо две тачке пресека, изаберимо једну за тачку V_s; која ће од тих двеју тачака бити V_s зависи од тога с које стране долази светлост Тангенте из V_s на основу дате купе дају контуру бачене сенке.

Задаци за вежбу

1. Конструисати пројекцију правилне четворостране пирамиде кад је ивица при основи 3 cm а висина 5 cm.

2. Конструисати правилан октаедар коме је ивица 4 cm.

3. Нацртати пројекцију правилног тетраедра кад је дата величина ивице и одредити сопствену сенку и бачену сенку на раван упоредну равни π, која пролази кроз најниже теме тетраедра, при упоредном осветљењу које долази с леве стране и заклапа угао 45^0 са π и са равни наспрамне пљосни тетраедра.

4. Нацртати пројекцију равностране кружне купе с основом у косој равни, која има нагиб 30^0 спрам равни слике.

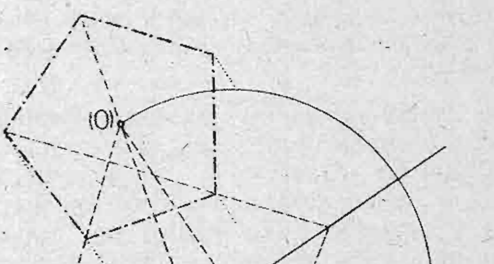
5. Нацртати пројекцију равностраног ваљка с основом у равни чији нагиб је 40^0. Наћи сопствену сенку и бачену сенку на раван слике при средишњем осветљењу које долази из дате тачке.

6. У примеру 3, § 82, пресећи купу неком равни управном на π и одредити праву величину пресека.

7. Нацртати пројекцију правилне шестостране призме с основом управном на равни слике, кад се ивице при основи и бочне ивице односе као 4:6. Пресећи затим ту призму косом равни датог нагиба и одредити праву величину пресека.

83. ОДРЕЂИВАЊЕ ОТСТОЈАЊА И ПРАВЕ ВЕЛИЧИНЕ КАД ЈЕ ЛИК ДАТ У ПРОЈЕКЦИЈИ

У задатку 3,§ 80, поново смо посматрали задатак 2 из § 42 (сл. 102) и накнадно одредили отстојања појединих тачака. Ова су имплицитно била већ одређена самим тим што смо сем пројекције лика (квадрата) знали тај лик у обореном положају. Тако су у одељку II неки ликови били већ имплицитно одређени, ма да само м једном пројекцијом нису одређени. Имали смо и равни одређених положаја, самим тим што смо те равни обарали, конструишући пројекције одређених ликова (круга, равностраног троугла, правоугаоника итд.). Сад можемо уносити у све те слике накнадно отстојања од равни слике и тиме одредити све податке који се тичу величине: нагибе, растојања итд. (метричке особине). Може се рећи да је неодређеност у тим задацима била донекле привидна и то зато што је описом задатка било речено и оно што сама пројекција на једну раван слике није одређивала. И кад, наиме нисмо вршили обарања, већ само тврдили да је дата пројекција квадрата, круга итд. (знајући да је сваки паралелограм пројекција квадрата, да је свака елипса пројекција круга итд.) положај лика био је већ одређен и зато можемо сад накнадно одређивати отстојања појединих тачака (тзв. *обрнути задаци*).



Сл. 203

Тако напр. у слици 59 можемо одредити и отстојања тачака *A*, *B*, *C*, *D* од равни слике. У ту сврху служи иста конструкција као у израђеном задатку 3, § 80, па ће дуж *B*[*B*] (сл. 196) дати отстојање тачке *B* од равни слике. Слично ће бити за остале три тачке.

Та привидна неодређеност важи и за тела, као што видимо из следећег примера.

Задатак. *Нека је дата правилна петострана пирамида као у слици 116. Наћи праву величину висине.*

Из обореног положаја основе можемо конструкцијом као у слици 196 добити отстојања свих тачака основе од равни слике. Како је пирамида правилна, њена висина се налази у равни ν управној на π. У обореној равни ν биће висина пирамиде у правој величини. Из *O'* и (*O*) добијамо тачку [*O*] у обореној равни ν (сл. 203). Висина у обореној равни је на управној на *N*[*O*] кроз [*O*] и то је [*O*][*V*].

Задаци за вежбу

1. У сликама 128 и 135 одредити висине тела.

2. У слици 115 одредити праву величину бочних ивица призме кад знамо да је њихов нагиб спрам равни основе дати угао φ.

3. У слици 139 одредити а) нагиб равни основе према равни π, б) главну линију те равни, кроз тачку O, 3) отстојање врха V од равни $\pi_0 = [O \parallel \pi]$, 4) праву величину висине OV, 5) нагиб пресечне равни спрам равни π, 6) главну линију те равни, која има отстојање од равни π једнако отстојању тачке O од π, 7) нагиб пресечне равни према равни основе.

Упутство: Пресечна раван је „релативно“ одређена чим нађемо релативна отстојања трију њених тачака, напр. C_1, M_1, N. За нагиб пресечне равни према равни основе посматрати троугао MNM_1.

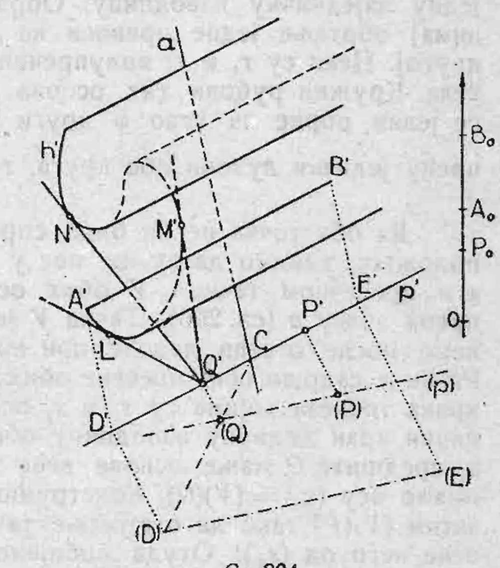
4. У слици 140 одредити нагиб равни основе праве кружне купе, затим праву величину висине. Колики је нагиб пресечне равни према равни основе?

5. Ако претпоставимо у слици 146 да су l, m и остали паралелни пресеци елипсног параболоида кругови, облик површи је одређен. Наћи нагиб равни тих кругова и релативна отстојања темена A и средишта тих кругова од π.

84. ДОДИРНЕ РАВНИ КУПЕ И ВАЉКА И ДОДИРНЕ КУПЕ И ВАЉЦИ

Задатак 1. *Кроз дату тачку поставити додирне равни на дату ваљкасту површ.*

Нека је ваљкаста површ дата једном својом изводницом AB и водиљом h за коју претпостављамо да је ма каква глатка крива у некој равни α датој трагом a и тачком A. Нека је P дата тачка кроз коју треба поставити додирне равни (сл. 204). Поставићемо кроз P праву $p \parallel AB$, јер кроз ту праву пролазе све тражене додирне равни. Права p продире раван α у извесној тачки Q, а додирне равни секу раван α у правим које пролазе кроз Q и додирују криву h. Повлачењем тих правих добијамо тачке додира L, M, N на h, а тим тачкама и правом p одређене су додирне равни.

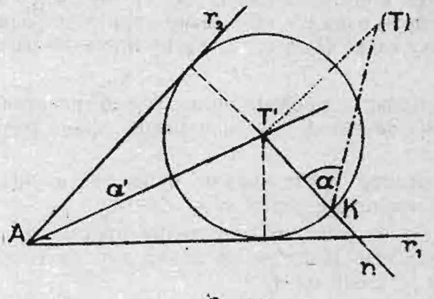


Сл. 204

Повуцимо дакле кроз P' праву $p' \parallel A'B'$. Да бисмо добили тачку продора Q поставимо кроз p' пројектујућу раван ν и одредимо њен пресек равнином α. Пресек је одређен тачком $C = a \times p'$ и тачком D у којој права $[A \parallel a]$ продире раван ν, која је одређена пројекцијом D' ($A'D' \parallel a$) и отстојањем од π, које је једнако отстојању тачке A. Обарањем равни ν добијамо (P) и (D) ($P'(P) = 0P_0$, $D'(D) = 0A_0$). Да бисмо добили (p) треба да у обореној равни знамо ма коју праву упоредну изводницама; таква је права DE за коју је E тачка у којој права $[B \parallel a]$ продире раван ν ($E'(E) = 0B_0$). Дакле повуцимо кроз (P) праву $(p) \parallel (D)(E)$. Тада је $(Q) = (p) \times C(D)$, а отуд $Q' = [(Q) \parallel a] \times p'$.

Задатак 2. *Кроз дату праву поставити раван датог нагиба.*

Нека је a' пројекција праве одређене трагом A и једном тачком T (сл. 205) и нека је α дати нагиб равни. Све равни нагиба α и које пролазе кроз T додирују кружну купу с врхом у тачки T и висином TT', и чије изводнице заклапају с висином угао α. Одредимо тачку K на трагу тако да буде $\sphericalangle T'K(T) = \alpha$. Тада је круг у равни π, са средиштем T и који пролази кроз K, руб основе постављене купе. Тангенте из A на тај круг претстављају трагове двеју равни датог нагиба α и које садрже праву a. Имамо дакле два решења, r_1 и r_2.



Сл. 205

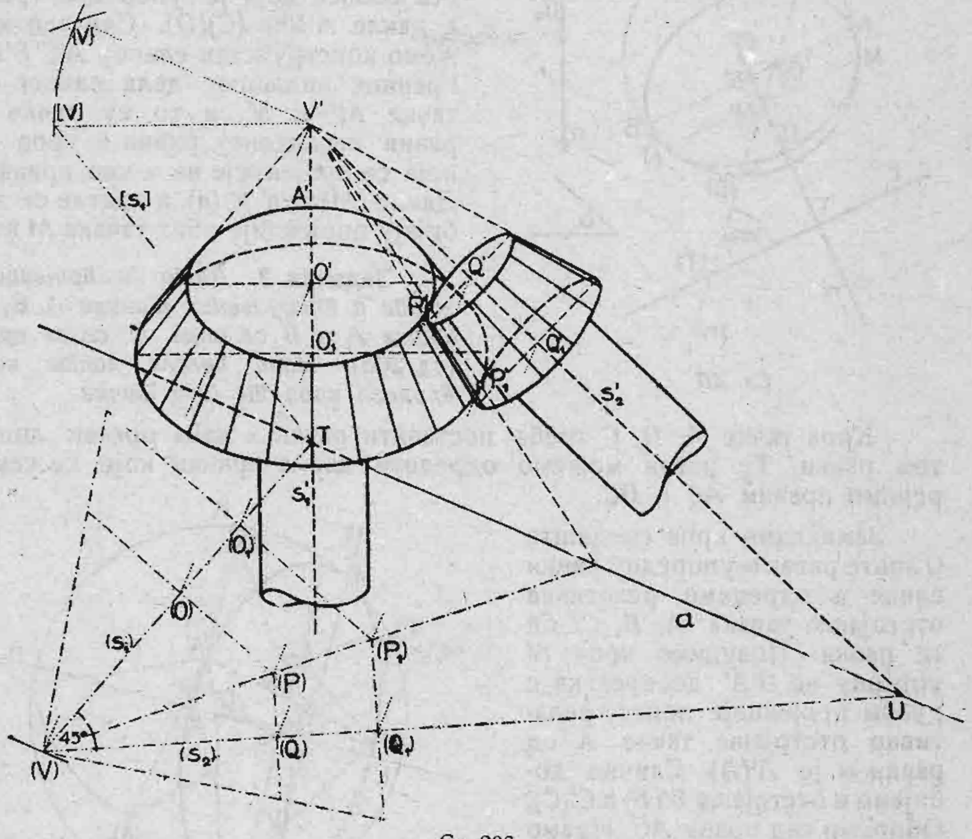
Задатак 3. *Нацртати у косом положају спрам равни слике две обртне зарубљене купе које се додирују и претстављају два купаста точка чије осе заклапају угао 45°. Оба точка треба да буду таква да се обртање једнога извесном угаоном брзином претвара у обртање другога двоструком угаоном брзином*.*

Замишљамо да обе зарубљене купе Σ_1 и Σ_2 имају непрестано једну заједничку изводницу. Обрћу се тако да се (трењем или зупцима) обртање једне преноси на другу без клизања једне купе по другој. Нека су r_1 и r_2 полупречници већих, рецимо датих основа оба тела. Кружни рубови тих основа котрљају се један по другом. Док се један обрне за угао φ други се обрне за угао 2φ. При томе се пређу једнаки лукови оба круга, тј. $\pi r_1 \dfrac{\varphi}{180} = \pi r_2 \dfrac{2\varphi}{180}$, дакле $r_1 = 2r_2$.

Да оба точка не би била спрам равни слике у неком особитом положају, узмимо да су им осе у косој равни α, која је дата трагом a и пресечном тачком V обих оса s_1 и s_2 и да су обе те осе косе према трагу a (сл. 206). Тачка V је заједнички врх двеју купа којима ћемо после отсећи делове при врху. Оборимо раван α око трага a. Раван α садржи осне пресеке обих зарубљених купа. То су два равнокрака трапеза којима су s_1 и s_2 осе симетрије и који имају као заједнички крак додирну изводницу обих купа, рецимо PV. Изаберимо на s_1 средиште O мање основе веће зарубљене купе. У обореној равни имамо осу $(s_1) = (V)(O)$. Конструишимо (s_2) тако да буде $\sphericalangle (s_2 s_1) = 45^0$, затим $(V)(P)$ тако да отстојање тачака те праве од (s_1) буде двапут веће него од (s_2). Отуда добијамо (P) и средиште (Q) мање основе друге зарубљене купе. Затим изаберимо тачку (P_1) према траженој дебљини оба точка. Одредимо затим Q', P', P_1'. Мања основа прве зарубљене купе пројектује се као елипса која пролази кроз P', а права $O'V'$ садржи њену малу осу. Мања основа друге зарубљене купе пројектује се такође у елипсу која пролази кроз P', али чија мала оса је на правој $Q'V'$. Величина велике полуосе прве елипсе једнака је $(O)(P)$.

* Види G. Scheffers, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I, § 95.

Да би се добила мала полуоса $O'A'$, оборимо пројектујућу раван осе s_1. Полупречник OA садржан је у тој равни, дакле у обореној равни имамо $[O][A] \perp [s_1]$ и отуд A'. Слично налазимо велику и малу осу елипсе, којој је средиште Q'. Те елипсе конструишемо лако помоћу афиности. Затим се конструишу и елипсе кроз P_1'. У слици су назначени зупци на точковима; мора их бити двапут више на великом точку него на малом, дакле, напр. 16 и 8.



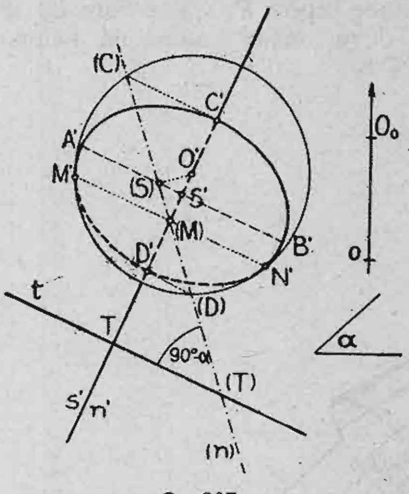
Сл. 206

85. ПРЕСЕК ЛОПТЕ ЈЕДНОМ РАВНИ

У главама IV, V и VI одељка II, могли смо решавати о лопти врло мало задатака. Тек сад, кад узимамо у обзир и отстојања од равни слике можемо решавати више задатака.

Задатак 1. *Пресећи дату лопту косом датом равни.*

Нека је дата пројекција лопте, тј. круг k' у који се лопта пројектује, траг t и нагиб α равни τ којом треба лопту пресећи (сл. 207). Пројектујмо лопту и раван τ на раван која је управна на t и која пролази кроз средиште O лопте. Нека је s упоредница равни ν кроз O. Оборимо раван ν око праве s у раван паралелну равни π. При томе тачка T долази у (T) и то је $T(T) = O'(O) = OO_0$. Нека је права n управна на t у равни τ, она је дакле пресек пројектујуће равни ν и равни τ. Угао $n'(n)$ једнак је нагибу α равни τ, дакле повуцимо кроз (T) праву (n) тако да са n' гради угао α. Средиште S пресечног круга добијамо помоћу тачке (S), $O'(S) \perp (n)$, а одатле S'. Дуж $(C)(D)$ је велика оса елипсе која је упоредна трагу t, дакле $A'B' = (C)(D)$. Сад већ можемо конструисати елипсу $A'C'B'D'$. Границе видљивог дела елипсе су тачке M' и N', а то су тачке у равни паралелној равни π кроз O, која се пројектује на ν као права s. Дакле $(M) = n' \times (n)$, а одатле се добијају пројекције обих тачака M и N.

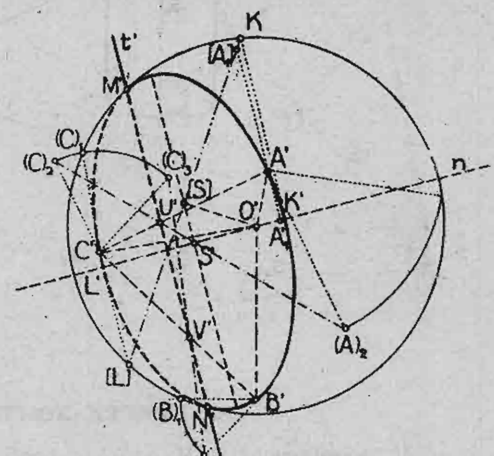


Сл. 207

Задатак 2. *Дата је пројекција лопте и трију њених тачака A, B, C; тачке A и B се виде, C се не види* (сл. 208). *Наћи пресек лопте који пролази кроз те три тачке.*

Кроз тачке A, B, C треба поставити раван и наћи пресек лопте том равни. Ту раван можемо одредити двема правим које се секу, рецимо правим AC и BC.

Замислимо кроз средиште O лопте раван ω упоредну равни слике и одредимо релативна отстојања тачака A, B, C од те равни. Повуцимо кроз A' управну на $O'A'$ до пресека с рубом пројекције лопте; релативно отстојање тачке A од равни ω је $A'(A)$. Слично добијамо и отстојања $B'(B)$ и $C'(C)$. Оборимо сад праву AC. Имамо $A'(A)_2 \perp A'C'$ и $C'(C)_2 \perp A'C'$ и то, како су тачке A и C с разних страна равни ω, полуправа $A'(A)_2$ и $C'(C)_2$ повлачимо у супротним смеровима. Права $(A)_2(C)_2$ је права AC оборена у раван ω. У пресеку пројекције $A'C'$ и праве $(A)_2(C)_2$ је

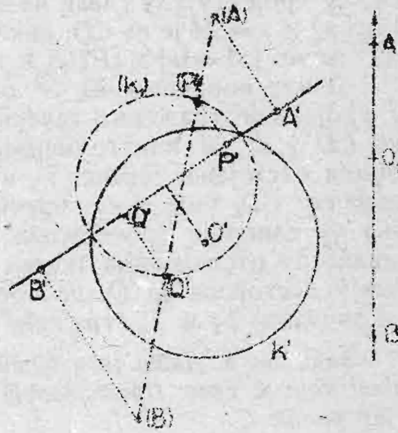


Сл. 208

пројекција продора U праве AC кроз ω. Исто тако је V' пројекција продора праве BC кроз ω. Права $U'V' = t$ је главна линија равни ABC тј. пресек те равни равнином ω. Даље се конструкција изводи као у претходном примеру, наиме, постављамо раван ν управно на раван ABC и на π. На ту раван ν пројектујемо пресек, обарамо раван ν у раван ω и одатле добијамо крајње тачке L' и K' мале осе елипсе у коју се пројектује пресек ABC. Затим добијамо средиште елипсе S' знамо да је велика оса једнака дужи $[K][L]$, а границе видљивог дела су тачке M и N.

Задатак 3. *Одредити продор лопте правом.*

Нека је $O'k'$ пројекција дате лопте и $A'B'$ пројекција праве дате тачкама A и B (сл. 209). Пројектујућа раван праве AB сече лопту по кругу k_1 који се пројектује у дуж. Оборимо ту раван у раван паралелну равни слике кроз средиште O. Тада долази круг k_1 у круг (k_1) а права AB у $(A)(B)$. Пресек праве $(A)(B)$ и круга (k_1) су тачке (P) и (Q), а то су у обореном положају тачке P и Q у којима права AB продире лопту. Отуд имамо и њихове пројекције P' и Q'

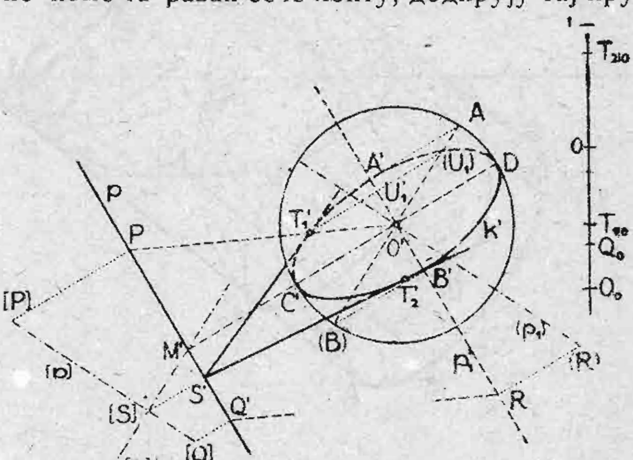


Сл. 209

86. ДОДИРНЕ РАВНИ НА ЛОПТУ И ДОДИРНЕ ЛОПТЕ

Задатак 1. *Кроз дату праву поставити додирне равни на дату лопту.*

Нека је O средиште лопте, а p права дата трагом P и тачком Q. Обе додирне равни које садрже праву p, додирују лопту у двема тачкама T_1 и T_2 (сл. 210). Раван $OT_1T_2 = \nu$ је, очигледно, управна на правој p и сече је у извесној тачки S. Дирке у равни ν, повучене из S на круг k, по коме та раван сече лопту, додирују тај круг у T_1 и T_2.



Сл. 210

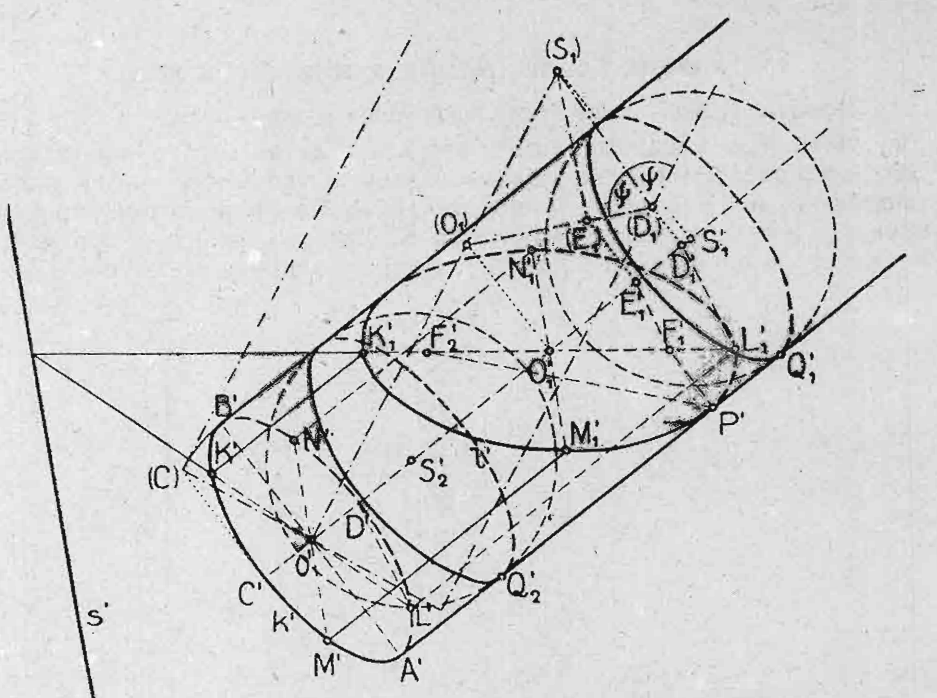
Дакле, да бисмо добили тачке T_1 и T_2 одредимо прво раван ν и круг k. У ту сврху поставимо кроз O праву $p_1 \parallel p$ помоћу тачке R за коју је $OR = PQ$ $(\therefore O'R' \,\#\, PQ')$ и оборимо њену пројектујућу раван, рецимо у раван π_0 која пролази кроз O и упоредна је равни слике. Како је разлика отстојања тачака R и O једнака разлици отстојања тачака Q и P, имамо $(R)R' = OQ_0$. Тако налазимо (p_1), а тада је

$(A)(B) \perp (p_1)$ оборени пречник AB круга k, чија је раван управна на p. Отуд имамо A' и B', дакле обе осе $A'B'$ и $C'D'$ елипсе k'.

Да би се добила тачка S оборимо и пројектујућу раван праве p у π_0. Имамо $P[P] = OO_0$, $Q'[Q] = O_0Q_0$. Уочимо праву n по којој раван ν сече ту пројектујућу раван па оборимо и ту праву. Како је $\pi_0 \times \nu = CD$, тачка $\pi_0 \times n = M$ је на CD, дакле $M' = p' \times C'D'$ и отуд $[n]$ $[M' \parallel (A)(B)]$. Сад имамо $[S] = [n] \times [P][Q]$ и повлачењем управне на p' тачку S'.

Дакле повуцимо из S' обе дирке на k'. Тачке додира T'_1 и T'_2 су пројекције тражених тачака додира. Можемо и да оборимо прво ν око CD у π_0, и конструишемо дирке у обореној равни ν. Да бисмо добили отстојања тачака T_1 и T_2, повуцимо кроз те тачке упоредне пречнику CD, које секу пречник AB у тачкгма U_1 и U_2 истих отстојања (у слици је забележена само тачка U_1). Дужи $U'_1(U_1)$ и $U'_2(U_2)$ једнаке су отстојањима тачака T_1 и T_2 од π_0, дакле преневши их на линију отстојања од O_0 на обе стране налазимо T_{10} и T_{20}. — Правом p и тачкама T_1 и T_2 тражене додирне равни су потпуно одређене.

Задатак 2. *Дата је у општем положају обртна ваљкаста површ и раван која је сече. Претставити лопте које истовремено додирују површ и ту раван.*



Сл. 211

Нека је водиља ваљкасте површи круг k, његово средиште O. Дата раван α сече површ по елипси l чије средиште је нека тачка O_1 на оси те површи. Нека је у слици 211 дата и пресечна права s равни водиље и равни α. Тада су $K'L'$ и $M'N' \parallel s'$ спрегнути пречници елипсе k', који претстављају два управна пречника круга k. Одговарају им у α осе K_1L_1 и M_1N_1 елипсе l, које се пројектују као спрегнути пречници елипсе l' (упореди са сл. 142; s' је оса афиности елипса k' и l').

Средишта S_1 и S_2 двеју тражених додирних лопти су тачке на оси OO_1 чије удаљености од α су једнаке полупречнику круга k. Како је раван $\nu = KLL_1K_1$ управна на равни водиље и на α — дакле то је раван симетрије за α и за ваљкасту површ — тачке додира F_1 и F_2 обих лопти и равни α налазе се у равни ν, тј. на великој оси K_1L_1 елипсе l_1. Дакле, да би се одредила средишта S_1 и S_2 треба у равни ν потражити тачке F_1 и F_2, а у ту сврху раван ν оборити. Како је ν у општем положају према равни слике и према ваљкастој површи, погодно је обрнути је прво око OO_1 у пројектујућу раван те праве, а затим о в у раван оборити. Првим обртањем долази тачка L у D, а L_1 у одговарајућу тачку D_1 на кругу који пролази кроз L_1 и по коме раван упоредна равни водиље сече ваљкасту површ. Како су LD и L_1D_1 упоредне и једнаке тетиве тог круга и круга k, имамо $D'_1 = O'O'_1 \times [L'_1 \parallel L'D']$.

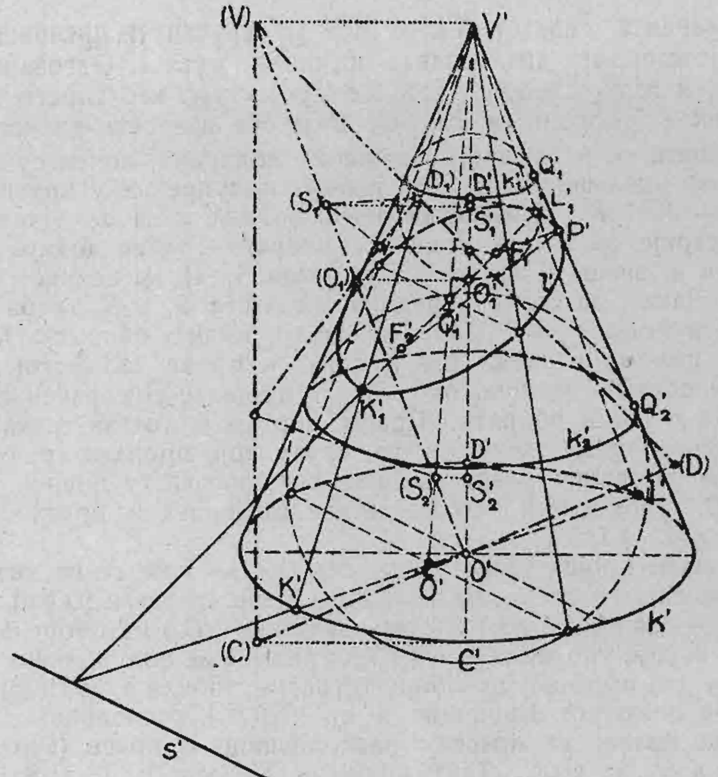
Обарањем пројектујуће равни осе OO_1 — које се на основу познатог положаја те осе може извршити, напр. у раван $[O \parallel \pi]$, тако да је $(O) = O'$ — налазимо (O_1). Затим налазимо (D_1) на обореној изводници DD_1, која је упоредна са $O'(O_1)$ и удаљена за полупречник круга k. Да би се у тој обртаној па обореној равни добила тачка (S_1) једнако удаљена од поменуте изводнице и од $(O_1)(D_1)$, располовимо угао између те две праве; на пресеку располовнице и праве $(O)(O_1)$ имамо (S_1), а отуд S'_1 на $O'O'_1$. Тада имамо и S'_2, јер $O_1S_1 = O_1S_2$. Најзад, слике додирних кругова добијамо кад из S_1 и S_2 опишемо кругове који додирују пројекције изводнице кроз A и B'.

Из подножја (E_1) управне спуштене из (S_1) на $(O_1)(D_1)$ налазимо тачку додира F_1: имамо E'_1 на $D'D'_1$ а затим F'_1, јер $E_1F \parallel D_1L_1$. Најзад, $F_1O_1 = F_2O_1$. На слици су нацртане и пројекције кругова k_1 и k_2 дуж којих лопте додирују ваљкасту површ.

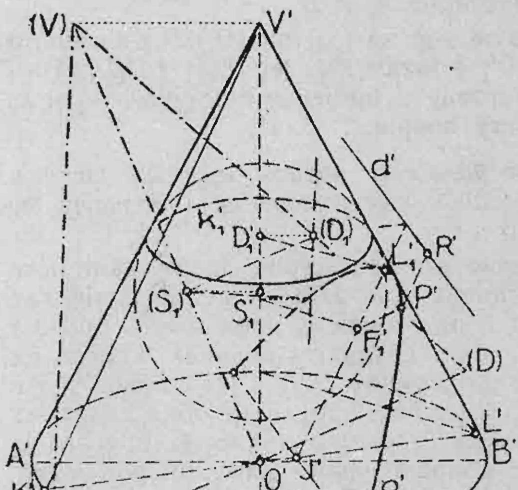
Задатак 3. *Дата је у општем положају обртна купаста површ и раван која је сече. Претставити лопте које истовремено додирују ту површ и ту раван.*

Задатак се може решити слично као претходни. Задржавамо исте ознаке и нека је V врх купасте површи (сл. 212). У колинеацији где кругу водиље, k, одговара коника l, одн. p или h, средишту O круга k одговара тачка O_1 на оси OV (O_1 није средиште конике). Обртањем и обарањем, као претходно, налазимо помоћу (O_1) и (D_1) тачке (S_1) и (S_2), а отуд S'_1 и S'_2. Тада можемо нацртати пројекције обих додирних лопти, па и њихових додирних тачака F_1 и F_2 и додирних кругова k_1 и k_2. Само кад је пресек купасте површи елипса или хипербола (сл. 212а и в) постоје две додирне лопте: у случају елипсе лопте су с исте стране врха V, а у случају хиперболе са супротних страна. У случају параболе (сл. 212б) постоји само једна додирна лопта; додирна тачка је F_1, додирни круг k_1; $\alpha \parallel KV$.

Додирне лопте у задацима 2 и 3 зову се *Данделенове лопте* (по геометру 19-ог столећа Dandelin-у). Помоћу тих лопти доказује се



Сл. 212а

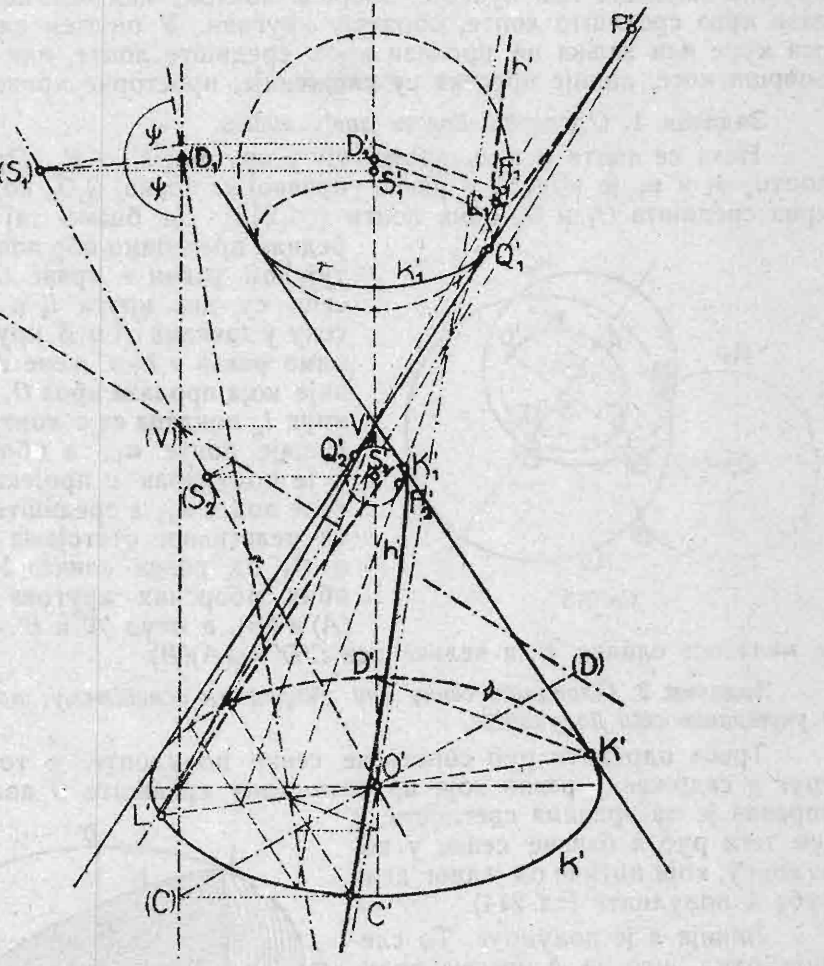


Сл. 212б

једноставно да је **недегенерисан раван пресек обртне купасте или ваљкасте површи коника.**

Доказ да је пресек у случају ваљка и у случају купе, кад раван сече све изводнице, елипса. — Уочимо коју било тачку P на кривој l и изводницу која пролази кроз P сл. 211 и 212а). Нека су Q_1 и Q_2 тачке у којима та изводница додирује обе лопте, тј. сече кругове k_1 и k_2. Како α додирује обе лопте у F_1 и F_2, праве PF_1 и PF_2 су такође дирке на те лопте, па како су удаљености тачке P од тачака додира с једном лоптом међу собом једнаке имамо $PF_1 = PQ_1$, $PF_2 = PQ_2$, дакле $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$. Но дуж Q_1Q_2 има за све изводнице исту величину, тј. $Q_1Q_2 = \text{const.}$, дакле $PF_1 + PF_2 = \text{const.}$, а то значи према познатој дефиницији да је l елипса. Додирне тачке F_1 и F_2 су жиже.

Доказ да је пресек обртне купасте површи једном равни која је упоредна једној изводници парабола. — Нека је у слици 212б KV та изводница а d и F_1J праве по којима раван α сече раван β додирног круга k_1 одн. раван KLV. Повуцимо ма кроз коју тачку P пресечне криве p дуж PR упоредну изводници KV до пресека с d. Како су обе поменуте равни управне на равни KLV, имамо $d \perp F_1J$, дакле $d \perp PR$,



Сл. 212в

јер $F_1J \parallel KV \parallel PR$. Раван водиље и раван β су паралелне међу собом и управне на оси купасте површи; ако је дакле P_1R_1 дуж коју те две равни отсецају на KV, имамо $P_1R_1 \# PR$. Но $PF_1 = PQ$, а $PQ = P_1R$, дакле $PF_1 = PR$ тј., како је $PR \perp d$, p је парабола. Тачка F_1 је њена жижа, права d водиља.

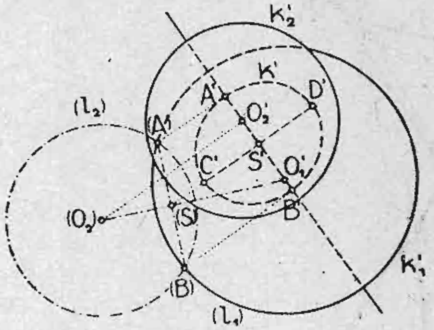
Доказ да је пресек обртне купасте површи једном равни која је упоредна двема изводницама хипербола. — Аналого случају елипсе имамо (сл. 212в) ма за коју тачку P пресечне криве h, којој је тачка F_1 ближа него F_2, $PF_2 - PF_1$ $PF_2 - PF_1 = PQ_2 - PQ_1 = Q_1Q_2 = \text{const}$. Дакле h је хипербола.

87. ПРЕСЕК ЛОПТЕ РОГЉАСТИМ И ОБЛИМ ПОВРШИМА

Ако је површ рогљаста, задатак се своди на одређивање пресека лопте равнима појединих пљосни рогљасте површи. Линија продора је тада састављена из кружних лукова, пошто свака раван сече лопту по кругу. Споменимо укратко пресек лопте лоптом, ваљкастом и купастом површи. — Две лопте се увек секу по кругу. Пресек праве кружне ваљкасте или купасте површи лоптом, кад оса површи пролази кроз средиште лопте, образују кругови. У општем случају, кад оса купе или ваљка не пролази кроз средиште лопте, или кад су те површи косе, линије пресека су сложеније, просторне криве.

Задатак 1. *Одредити пресек двеју лопти.*

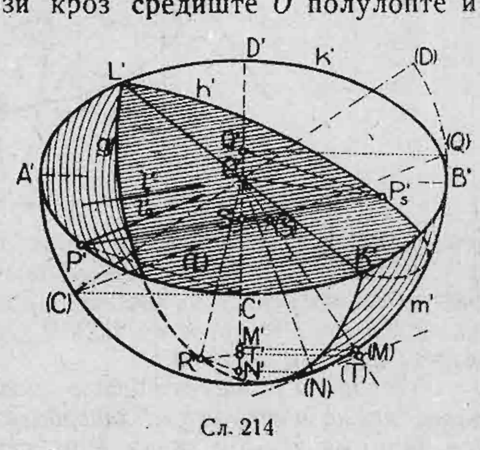
Нека се лопте ω и ω_2 пројектују у кругове k'_1 и k'_2. Пресек обих лопти, ω_1 и ω_2 је круг k у равни управној на правој O_1O_2 која пролази кроз средишта O_1 и O_2 обих лопти (сл. 213). Да бисмо тај круг одредили пресецимо обе лопте пројектујућом равни ν праве O_1O_2. Пресеци су два круга l_1 и l_2 која се секу у тачкама A и B круга k. Оборимо раван ν око њене главне линије која пролази кроз O_1. Оборени круг l_1 поклапа се с контуром пројекције лопте ω_1, а оборени круг l_2 је подударан с пројекцијом контуре лопте ω_2, а средиште добијамо из релативног отстојања тачака O_1 и O_2 од равни слике. У пресеку обих оборених кругова налазимо (A) и (B), а отуд A' и B'. Дуж $A'B'$ је мала оса елипсе k', а велика оса $C'D' = (A)(B)$.



Сл. 213

Задатак 2. *Одредити сенку при упоредном осветљењу, која настаје у унутрашњости полулопте.*

Треба одредити руб сопствене сенке полулопте, а то је полукруг g садржан у равни која пролази кроз средиште O полулопте и управан је на зрацима светлости, и сем тога руб h бачене сенке у полулопту, који потиче од једног дела руба k полулопте (сл. 214).



Сл. 214

Линија h је полукруг. То следује отуд што је h пресек полулопте светлосном ваљкастом површи којој је k водиља, дакле пресек двеју површи другог реда, а пресек површи другог реда је уопште крива четвртог реда, но која се може распасти на две криве другог реда. У нашем случају, и уопште кад крива другог реда баца сенку на површ другог реда, која ту криву садржи, пресечна крива се распада на криву која баца сенку (круг k) и на њену сенку (крива h), дакле h је такође крива другог реда.

Како је свака крива другог реда равна крива, а једине равне криве на лопти су кругови, h је део круга. У његовим крајевима, K и L, дирке на круг k су упоредне с l_0, дакле h је полукруг а KL је пречник круга k, управан на l_0.

Пређимо на конструкцију круга h у пројекцији. Нека је смер осветљења дат у пројекцији зраком l, који пролази кроз O, и његовом управном пројекцијом l_0 на раван руба k полулопте. Полупречник OM полулопте, који је управан на тој равни можемо конструисати обарањем пројектујуће равни ν тог полупречника у раван упоредну равни π, која пролази кроз O. Раван ν сече целу лопту по великом кругу који пролази кроз M, C и D. Обарањем тај круг се поклапа с контурним кругом m' пројекције лопте, јер $(O) \equiv O'$. Тачке C и D долазе дакле у (C) и (D). Тада налазимо (M), на полупречнику $(O)(M) \perp (C)(D)$ и отуд тачку M'.

Потражимо сенку P_s тачке P у којој права l_0 сече круг k. Зрак светлости који пролази кроз P сече полупречник OM у извесној тачки S. Ако раван OMP обрнемо око OM у положај управан на раван слике, тј. до поклапања с ν, а затим је оборимо, тачка P долази у C, затим у (C), а тачка S опет у S, затим у (S), дакле зрак PS прелази у $(C)(S)$, а P_s у тачку $(Q) = (C)(S) \times m'$. Пројекција Q' тачке Q је подножје управне из (Q) на $O'C'$, па како P_s обртањем равни ν пада у Q, имамо $P_sQ \parallel PC$. Тако налазимо P_s'. Но OK и OP_s су два управна полупречника елипсе h, одакле $O'K'$ и $O'P_s'$ су два спрегнута полупречника елипсе h', из којих се та елипса може конструисати.

Елипсу g' можемо конструисати помоћу њеног пречника $K'L'$ и спрегнутог полупречника $O'R'$. Полупречник OR, који је управан на KL и налази се у равни OMP, можемо пак наћи истим обртањем те равни у ν и затим обарањем. Како је $OR \perp l$, тачка R пада обртањем у извесну тачку N, и обарањем у (N), при чему је $(O)(N) \perp (C)(S)$. Отуд налазимо N', а затим R' помоћу светлосног зрака RT, који у R додирује полулопту и сече осу OM у T (имамо $R'T' \parallel l'$ и $R'N' \parallel P'C'$).

Задаци за вежбу

1. Наћи линију продора двеју лопти чији су полупречници r_1 и r_2, међусобна удаљеност средишта мања од $r_1 + r_2$, отстојање средишта O_1 од равни слике $\frac{r_1}{2}$ а средишта O_2 двапут већа, тј. $O_2O_2' = r_1$. $O_1O_1' = \frac{r_1}{2}$.

2. Наћи линију продора двеју лопти чији су полупречници 5 cm и 3 cm, растојање средишта 4 cm, а средишта су а) на истој висини, б) на 5 cm и 3 cm.

3. Дата је лопта и две тачке на њој, нацртати у пројекцији главни круг који пролази кроз те две тачке.

4. Наћи линију продора дате лопте и датог кружног ваљка кад је а) оса ваљка управна на π, б) кад је оса ваљка паралелна спрам π.

5. Наћи линију продора лопте и тетраедра коме су два темена у лопти а два темена ван лопте.

6. Наћи линију продора лопте и правилне четворостране пирамиде с основом у равни слике и висином једнаком двоструком пречнику лопте, кад је средиште лопте на средини висине пирамиде.

7. Наћи линију продора дате лопте и правилне тростране призме с основом у равни слике.

ГЛАВА III

КРОВНЕ ПОВРШИ

88. КРОВНА ПОВРШ.

У применама нацртне геометрије јавља се задатак да се за неку зграду којој је дата основа одреди погодан кров. Геометријски речено, треба за извесну област равни слике, ограничену обично многоугаоним рубом, и која садржи основу зграде, конструисати *кровну површ*, а то је, махом, рогљаста површ чије су стране косе према равни слике и која ту област — *основу* кровне површи — покрива једноструко. Ово последње значи да се у сваку тачку те области пројектује само једна тачка кровне површи. Претпостављамо, наравно, да је раван слике хоризонтална и да кровну површ гледамо озго, у правцу пројекцијских зрака.

Задатак је, пре свега, да се одреде ивице кровне површи кад је задат *нагиб* појединих страна (пљосни) површи. Све стране имају обично исти нагиб, но посматраћемо и општу могућност кад су нагиби разних страна разни.

Кровна површ се завршава доле својим *рубом*, који може цео бити у истој висини или не и образује *стреху*. Руб кровне површи састоји се обично из једног или више полигона Ако их је више од једног, тада један садржи остале. Сваки унутрањи полигон је руб крова према једном дворишту.

Коса ивица кровне површи, која полази махом из тачке на рубу површи, зове се *гребен* ако је дуж ње, озго гледано, површ испупчена, а *увала* ако је удубљена. Горње ивице површи, које су обично хоризонталне, сачињавају *слеме*.

89. КРОВНЕ ПОВРШИ КОЈИМА ЈЕ РУБ НА ЈЕДНОЈ ВИСИНИ

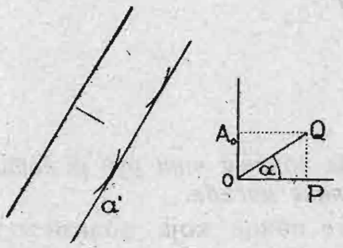
Цртамо само управну пројекцију кровне површи, а не зидова зграде.

Раван једне пљосни кровне површи одређена је својим трагом t, који садржи одговарајући део руба кровне површи, нагибом α и, ако није друкчије одређено, стрелицом управном на t и то с оне стране праве t на коју се пројектује та пљосан кровне површи (сл. 215). Задани угао нагиба нацртан је по страни, рецимо с теменом у исходишту 0 линије отстојања и с хоризонталним краком управним на њу.

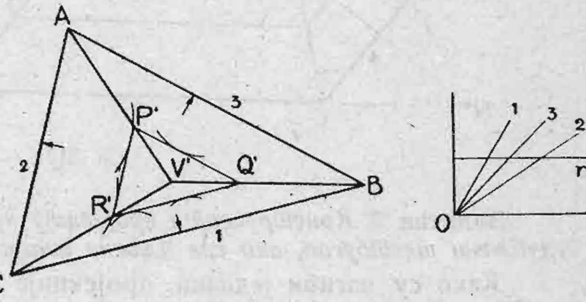
Да би се конструисала главна линија (у овом случају, висинска линија) дате висине $0A_0$, треба одредити „хоризонталну“ катету правоуглог троугла OPQ чија је „вертикална“ катета једнака $0A_0$; дакле треба наћи пресек косог крака угла $P0Q = \alpha$ с управном у A_0 на линију отстојања. Тада је лако конструисати пројекцију a' тражене висинске линије као упоредну удаљену од t за $OP = A_0Q$ (препоручује се конструкција самим шестаром, као што је у слици назначено).

Задатак 1. *Конструисати пројекцију кровне површи ако је у равни слике дат троугао који претставља руб површи и ако су дати нагиби трију страна.*

Нека је троугао ABC дати руб. Обележимо бројкама *1, 2, 3* косе краке углова нагиба трију страна површи, које полазе редом из BC, CA, AB (сл. 216). Да би се добиле пројекције трију ивица кровне



Сл. 215



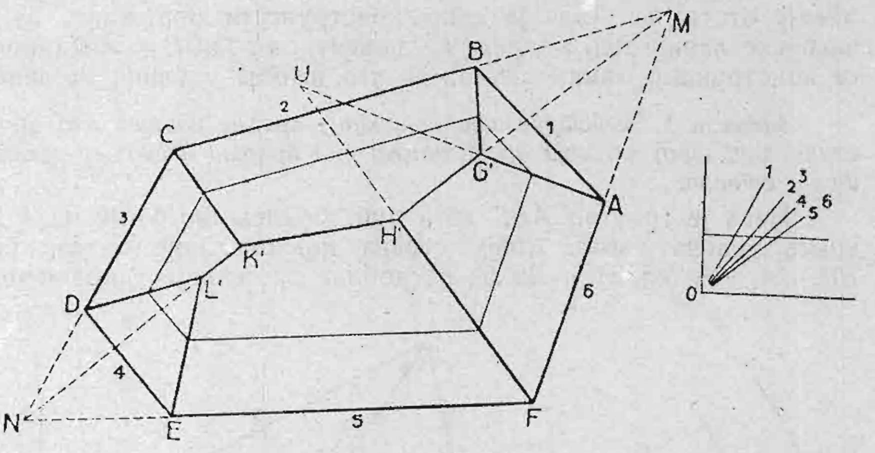
Сл. 216

површи потражимо пресеке трију равни датих траговима BC, CA, AB и одговарајућим нагибима, као у задатку 1, § 78 (сл. 188), тј. помоћу висинских линија на истој висини. Изаберимо у ту сврху висину на линији отстојања и повуцимо управну n на ту линију отстојања. Помоћу пресека праве n с крацима *1*, *2*, *3* конструишимо као у претходним примерима пројекције трију висинских линија. Нека се те линије секу у тачкама P', Q', R'. Кроз те тачке пролазе пројекције трију ивица кровне површи. Ове се секу у једној тачки, пројекцији врха V те површи.

Задатак 2. *Конструисати пројекцију кровне површи чији руб је дати испупчени шестоугао, ако су дати нагиби појединих страна.*

Помоћу међусобних пресека висинских линија на истој висини налазимо, као у претходном примеру, шест ивица које полазе од руба кровне површи (сл. 217). Ивице кроз A и B секу се у темену (врху) G кровне површи, ивице кроз D и E у L. Остали међусобни пресеци тих шест ивица не долазе у обзир. Напр. ивице кроз A и F „сустичу се“ у тачки U, али како је G између A и U, ивица кроз A допире само до G. У ствари, из G полази још једна ивица, заједничка пљоснима FAG и CBG. Продужење те ивице пролази кроз $AF \times CB \equiv M$, дакле је то MG, а други крај те ивице је $H \equiv MG \times FU$. Слично долазимо у слици до ивице LK, а тиме је одређена и последња ивица HK кровне површи.

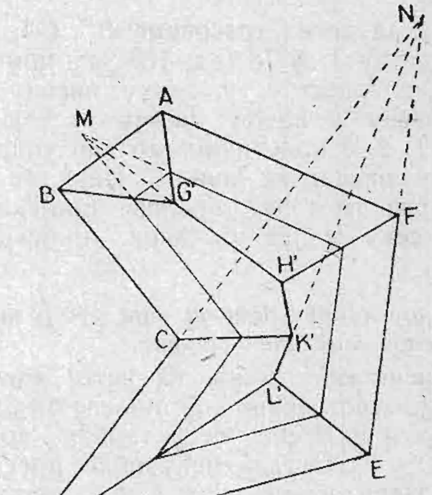
Напоменимо да је пресек те површи равнином кроз најниже теме G и која је упоредна равни слике један мањи полигон с једном страном мање (петоугао) и да је често погодно поћи у даљој конструкцији од тог полигона уместо од датог шестоугла.



Сл. 217

Задатак 3. *Конструисати пројекцију кровне површи чији руб је дати удубљени шестоугао, ако све пљосни имају једнаке нагибе.*

Како су нагиби једнаки, пројекција сваке ивице која полази од руба кровне површи располовљује угао двеју суседних страна руба (BG' располовљује угао ABC итд.) (сл. 218). Прво можемо наћи G' и L', затим помоћу M и N пројекцију ивица GH и LK.

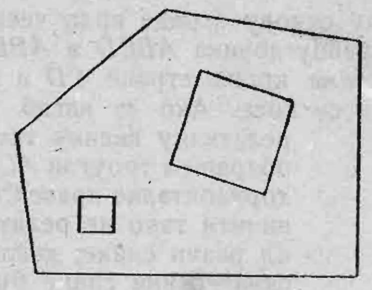


Сл. 218

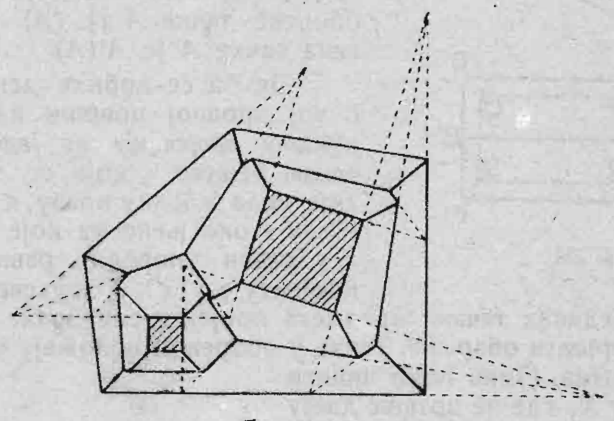
Приметимо да се пресек кровне површи с висинским равнима, упоредним спрам равни слике, распада на два проста полигона почев од пресека који пролази кроз K. Та нова околност придолази кад руб није испупчен полигон.

Задатак 4. *Конструисати пројекцију кровне површи чији се руб састоји из три полигона: једног петоугла (спољашњи зидови зграде) и два правоугаоника (дворишта). Нагиб кровне површи је свугде исти.*

Дата је слика 219 а. Из сваког темена на рубу дате основе кровне површи повуцимо дуж која располовљује угао при одговарајућем темену. Конструкција се изводи као у претходном примеру. У слици 219 б виде се и помоћне конструкције које су употребљене ради добијања ивица које не полазе од руба површи (слемених ивица).



а.



б.

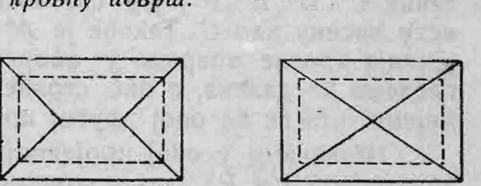
Сл. 219

90. СЛОЖЕНИЈЕ КРОВНЕ ПОВРШИ. ПРОЈЕКЦИЈА НА ВЕРТИКАЛНУ РАВАН

У следећим примерима разликујемо руб кровне површи од пројекције спољних вертикалних површи зграде. Ову пројекцију извлачимо цртицама. Ако је ширина стрехе и нагиб крова свугде исти, та пројекција је линија која прати руб површи на истом отстојању. Узећемо и да руб кровне површи није свугде на истој висини, нити свугде хоризонталан.

Задатак 1. *Дата је зграда која се пројектује на хоризонталну раван као правоугаоник. Одредити погодну кровну површ.*

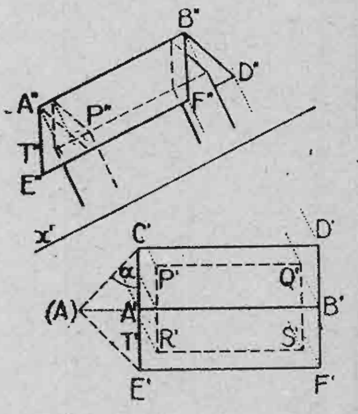
У смислу претходног разматрања нацртајмо прво пројекцију кровне површи чији руб је у једној равни и чије пљосни имају исти нагиб (сл. 220а). Но може се поставити услов да се све четири пљосни кровне површи састају у једној тачки, врху крова. Тада све четири стране не могу имати исти нагиб. Скоро једино долази у обзир пирамида чије се бочне ивице пројектују као половине дијагонала правоугаоника који претставља руб (сл. 220б).



а. б.

Сл. 220

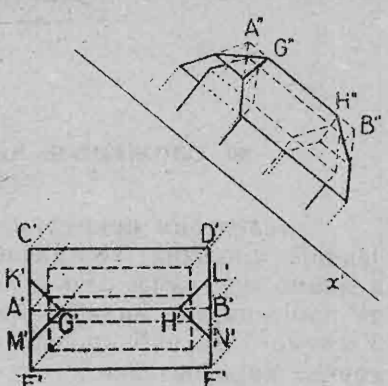
За исту правоугаону основу зграде врло честа је кровна површ која се састоји из два правоугаоника $ABCD$ и $ABEF$ једнаких нагиба (сл. 221). Ивица AB је *слеме* крова, стране CD и EF руба су хоризонталне а остале четири су косе. Ако је нагиб α, можемо добити релативну висину тачке A изнад C и E обарањем троугла ACE (забат крова) око хоризонталне праве CE. Можемо се ограничити тако на релативним отстојањима од равни слике, дакле оставити да „висина“ равни слике буде произвољна. Из $\sphericalangle A'C'(A) = 45^0$ следује конструкција оборене тачке A тј. (A). Релативна висина тачке A је $A'(A)$.



Сл. 221

Да би се добила јаснија претстава о тој кровној површи нацртајмо њену *управну пројекцију на једну вертикалну раван*, рецимо ν, која се дакле, пројектује цела у једну праву, а затим *оборимо раван* ν око њене ма које главне линије x у раван упоредну равни слике (ν се пројектује у x'). У ту сврху треба повући из појединих тачака предмета пројекцијске зраке управне на ν, а затим извршити обарање. Тачке у обореном положају обележаваћемо двема цртицама. (Тако ћемо чинити и у одељку V, где ће цртање двеју нормалних пројекција бити општа основа методе.)

Како је висина праве x произвољна, можемо на управној кроз A' изабрати тачку A'', тј. *оборену пројекцију* (изостављамо у обележавању заграде!) тачке A на раван ν, ма где. На исту нормалу $A'A''$ пренесимо релативну висину тачке A над тачком C, тј. дуж $A'(A)$ „према доле“, а то значи ближе правој x', и кроз добијену тачку повуцимо упоредну спрам праве x'. На тој упоредној су тачке C'', D'', E'', F'', јер све имају исту висину као C. Такође је $A''B'' \parallel x'$, а тиме је одређена цела пројекција кровне површи у обореном положају. Из претпоставке да гледамо из далека, с оне стране равни ν на којој је предмет, одређујемо шта се на овој другој пројекцији види, а шта не.



Сл. 222

Назначимо у овој пројекцији и зидове зграде. Кров се наслања на ивице PQ и RS, дакле уочимо на правој RS тачку T руба кровне површи и одредимо тачку T''. На упоредној кроз T'' спрам x' су, очигледно, тачке R'' и S'', а исто тако и P'' и Q''. Кроз те тачке пролазе пројекције ивица зидова, као што се види из слике.

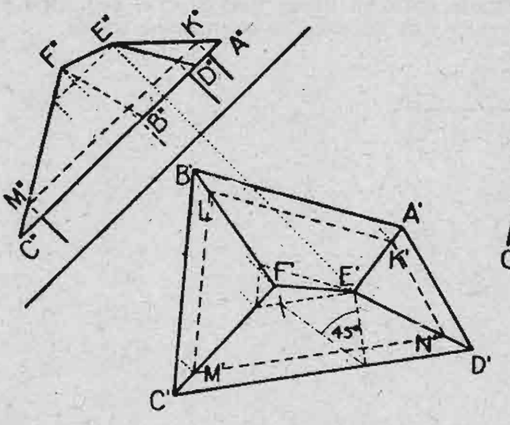
Често се ова кровна површ мења тако што се отсецају крајеви око A и B и тиме додају две косе троугласте пљосни (сл. 222).

Но хоризонтални рубови тих пљосни су на већој висини од рубова CD и EF. Узмимо, да се од посматране кровне површи отсецају делови помоћу равни чији нагиб је такође α а које пролазе кроз средишта K, M и L, N косих рубова AC и AE итд. Нека су равнокраки троугли KMC и LNH нове пљосни. Због једнакости нагиба, $K'C'$ располовљује прав угао $A'K'L'$. Тако налазимо G' и H'. Пројекцију на једну вертикалну раван добијамо с неколико тачака ако већ имамо ту пројекцију за „двострешни" кров претходне слике.

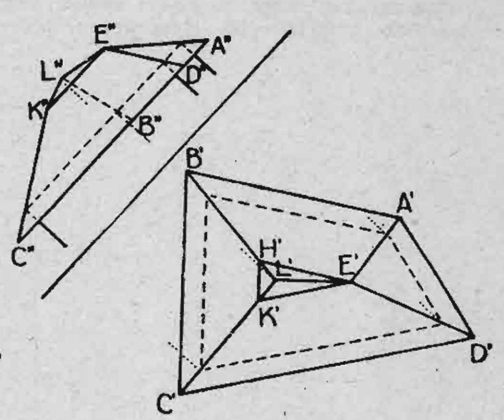
Задатак 2. *Дата је хоризонтална пројекција $K'L'M'N'$ спољне контуре зграде. Одредити погодну кровну површ.*

Одредимо прво кровну површ у смислу § 89, рецимо тако да нагиб свих пљосни буде 45^0 (сл. 223). То би била површ с рубом $KLMN$ и ивицама KE, LF, MF, NE и EF. Да би постојала стреха, проширимо ту површ надоле Тиме добијамо нов руб $ABCD$, а четири прве ивице се продужују. Као што је одмах јасно, а још боље се види у пројекцији на једну вертикалну раван, ивица EF је коса, а то се обично избегава у грађењу кровова, и не сматра се укусним.

Зато пресецимо кровну површ из слике 223 једном хоризонталном равни која пролази кроз врх E. Троугао тог пресека, EKH узимамо за руб „допунског" крова, који се наставља на доњи део претходног крова, а нагиб му је знатно мањи (сл. 224).



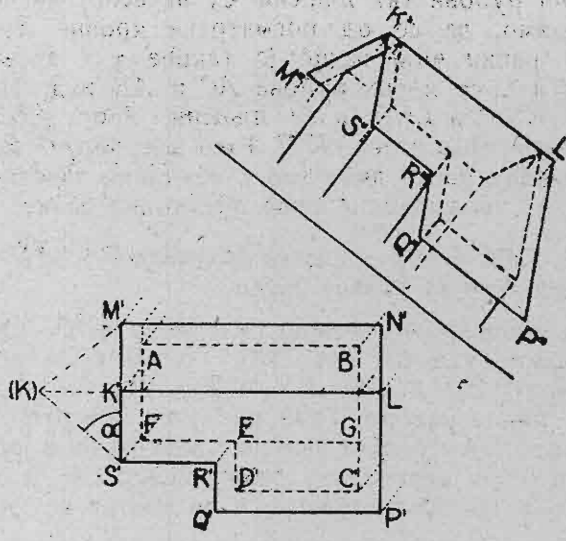
Сл. 223



Сл. 224

Задатак 3. *Дата је зграда која се пројектује на хоризонталну раван као полигон $ABCDEF$* (сл. 225). *Одредити погодну кровну површ.*

Једноставно решење имамо ако изнад правоугаоника $ABGF$ конструишемо површ као у слици 221, а изнад правоугаоника $CDEG$ спустимо кров ниже, тј. проширимо равну површ $KLSR$ и над тај правоугаоник. Нека читалац реши задатак и у смислу слике 225.



Сл. 225

Задаци за вежбу

За произвољно нацртане многоуглове, који претстављају пројекције зграда на хоризонталне равни, одредити кровне површи тражећи разне могућности, као што се показало у §§ 89 — 90. Нацртати и пројекције тих површи на вертикалне равни.

ГЛАВА IV

КОТИРАНА ПРОЈЕКЦИЈА

91. КОТА, РАЗМЕРА И МЕРИЛО

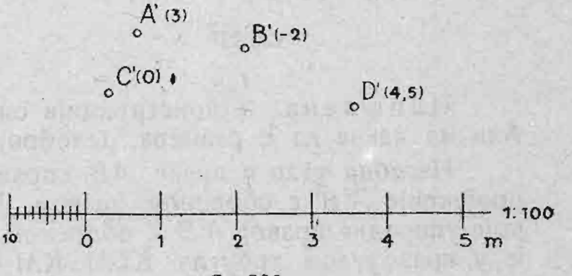
Управна пројекција на једну раван слике зове се *котирана пројекција* ако се уз пројекције тачака, па и линија, запишу бројеви који казују меру њихова отстојања од равни слике. Као што је већ речено (§§ 9 и 75) ти бројеви зову се коте (француски cote, од латинског quota). Претпоставља се да је раван слике хоризонтална, према томе котама се мере *висине* тачака изнад и испод пројекцијске равни. Тачке изнад те равни имају позитивне коте, а испод ње негативне коте.

Пројекцијом и котом свака тачка је потпуно одређена. Но у случају кад имамо бескрајно много тачака, напр. линију, пошто се коте не могу записати уз све тачке, бележимо коте само уз известан број тачака. Тачке уз које су забележене коте називамо *котираним тачкама.*

Како су предмети који се у применама котиране пројекције редовно претстављају, велики спрам цртежа, не може се нацртати сама њихова пројекција, него умањена, *слична слика пројекције.* Ту слику можемо схватити, разуме се, и као пројекцију умањеног предмета, тј. умишљеног или стварног модела.

Према томе, котираној пројекцији треба додати *размеру* у којој је предмет умањен. Та размера се односи на *дужи:* на растојања у свим правцима, како хоризонталним, тако и вертикалним.

Размера је дата бројевима (нумеричка размера), напр. 1:250, 1:1000; и *скалом* (лествицом, *мерилом*) (графичка размера). У слици 226 су претстављене четири тачке $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$ и $D(7{,}5)$ у размери 1:100. Уз мерило је забележена размера 1:100. На основу те размере мерило је нацртано. С лева на десно забележи се известан број тачака на растојањима једнаким по један центиметар, који претстављају метре: 0, 1, 2, ...5 m. Уз последњи број дописује се јединица мерења. У овом случају и уопште обично то је метар (m), али могао би бити и километар или слично. Испред тачке 0 додаје се јединична дуж раздељена на десет једнаких делова *(талон)* да бисмо имали и делове јединице.



Сл. 226

Често се хоризонтална и вертикална растојања смањују у разним размерама, и то обично тако да се вертикална растојања цртају у већој размери (напр. хоризонтална у размери 1 : 1000, а вертикална у размери 1 : 200) да би профили били изразитији.

Претпостављамо увек да је размера дата и мерило конструисано.

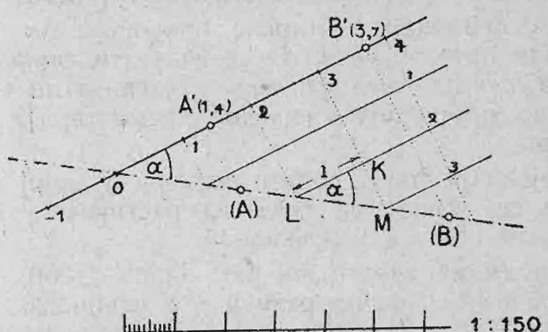
92. ПРАВА

У котираној пројекцији основну улогу у претстављању линија и површи имају тачке чије су коте узастопни цели бројеви јединица (m, km итд.) или, уопште, узастопна умногостручења извесног броја (напр. броја 5, тј.: 5, 10, 15 итд.). Стога се те тачке бележе и на пројекцији праве. Одређивање тачака с целобројним котама, на пројекцији неке праве, зове се *градуирање* (градуација праве.

Дуж која спаја пројекције двеју суседних тачака с целобројним котама, тј. чија је висинска разлика 1, назива се, кратко, *размаком* или *интервалом**). Размак може бити произвољно мален и произвољно велик. Што је размак мањи, права је стрмија, њен нагиб је већи, а што је размак већи нагиб је мањи. Упоредне праве имају једнаке размаке.

Задатак 1. *Градуирати праву AB, задату тачкама $A(1,4)$ и $B(3,7)$.*

Оборимо праву AB (сл. 227) одмеравањем на управним кроз A' и B' дужина 1,4 односно 3,7 са мерила. При томе можемо напр. на управној $B'(B)$ забележити и тачке чија удаљеност B' износи 1, 2 и 3 јединице. Паралелне правој $A'B'$ које пролазе кроз те тачке секу оборену праву $(A)(B)$ у њеним тачкама с целобројним котама. Спуштајући из ових тачака управне на $A'B'$ добијамо на $A'B'$ еквидистантне тачке с котама 1, 2, 3. Њима се придружује тачка с котом 0, тј. траг праве AB, и још онолико тачака с целобројним котама колико у цртежу може стати. Уз нађене тачке треба записати одговарајуће бројеве и тиме је градуирање праве AB извршено.



Сл. 227

Напомена. У конструкцији смо се послужили датим мерилом. Али ма каква да је размера, целобројне тачке на правој AB су исте.

Нагибни угао α праве AB спрам равни слике имамо у пресеку пројекције $A'B'$ сובореном правом. Исти угао имамо у пресеку ма које упоредне правој $A'B'$ с обореном правом, напр. $\alpha = \sphericalangle KLM$. Како је у правоуглом троуглу KLM $KM = 1$, а KL је размак праве AB,

*) Под *интервалом* не би требало подразумевати удаљеност таквих тачака, тј. одговарајућу дужину (меру), као што се не чини ни у другим гранама геометрије, ни у математичкој анализи.

имамо, ако дужину размака обележимо словом i, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{i}$, дакле

$$i = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

тј. *дужина размака* (интервала) праве једнака је реципрочној вредности њеног пада (одн. успона).

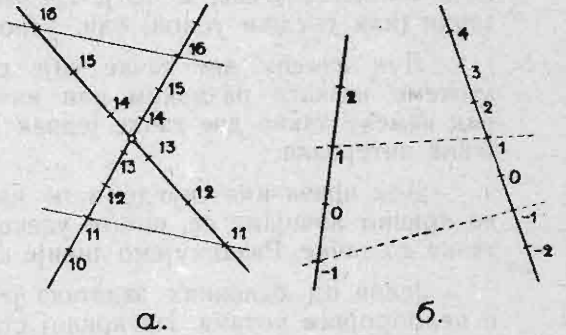
Задатак 3. *Одредити коту ма које тачке на датој градуираној правој.*

Претпоставимо сада да је у слици 227 дата пројекција праве AB с котираним тачкама 0, 1, 2 итд. градуације и да треба одредити коту тачке A дате пројекцијом A'. Подигнимо управну на $A'B'$ из A', одредимо помоћу мерила дужину дужи $A'(A)$. Ово је лако учинити и без шестара, помоћу папирића — преносача — на чијој ивици забележимо дуж $A'(A)$, коју потом прислонимо уз мерило.

Задатак 4. *Одредити да ли су две градуиране праве упоредне, или се секу, или су мимоилазне.*

Ако су праве *упоредне*, тада су им, очигледно, пројекције упоредне, коте које обележавају градуацију расту на обим пројекцијама у истом смеру, а размаци (интервали) обих правих су једнаки.

Ако су пројекције правих упоредне, али коте расту у супротним смеровима или ако су размаци неједнаки, праве се *мимоилазе*.

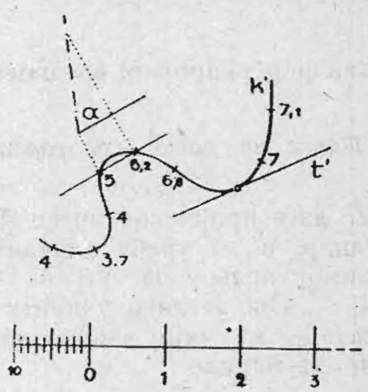


Сл. 228

Ако пројекције правих нису упоредне, праве се секу или мимоилазе. Ако се секу, припадају једној равни, а праве које секу обе дате праве у тачкама једнаких кота јесу висинске праве те равни, дакле су све међу собом упоредне (сл. 228а). Ако су пројекције двеју висинских правих упоредне, и саме те праве су упоредне и очигледно, све висинске праве су упоредне. Дакле, тачки у којој се секу пројекције обих датих правих припада на обим правим иста кота, тј. праве се секу. Према томе, упоредност двеју правих у пројекцији, напр. $\overline{11,11}$ и $\overline{15,15}$ потребан је и довољан услов за сечење датих градуираних правих. Ако услов није испуњен (праве $\overline{-1,-1}$ и $\overline{1,1}$ у сл. 228б), дате праве се мимоилазе.

93. КРИВЕ ЛИНИЈЕ

Како права тако се и крива линија претставља пројекцијом и котама извесног, довољног броја тачака. Равна крива, чија раван није управна на равни слике, одређена је пројекцијом и котама трију њених тачака које не припадају једној правој, јер тиме је одређена и раван у којој је та крива. Ако је крива k ма каква а дата је само својом котираном пројекцијом, потребно је уз њену пројекцију k' знати коте већег броја њених тачака, тј. гушће распоређених на k' (сл. 229). Уколико имамо више котираних тачака познајемо криву тачније, али никад савршено тачно. Криве дате пројекцијом и котама (емпиријске криве, техничке криве*) увек су само приближно одређене. При томе претпостављамо да крива нема између котираних тачака нарочитих неправилности, него да се по могућности једноставно провлачи кроз своје котиране тачке.



Сл. 229

Ако лук између две котиране тачке P и Q заменимо тетивом PQ, можемо обарањем те тетиве наћи њен нагиб α, а то је по дефиницији *средњи нагиб* криве између тачака P и Q (у сл. 229 за тачке 5 и 6,2). Уколико су две тачке на кривој ближе, сечица која кроз њих пролази мање се разликује од дирке на криву, а исто тако и нагиб сечице од нагиба дирке, а то је *нагиб криве* у тачки додира. Разуме се, пројекција t' дирке t на криву k је дирка пројекције k' те криве у одговарајућој тачки. Уз средњи нагиб и нагиб у једној тачки криве посматра се и њихов тангенс, а то је *средњи пад* односно *пад криве* у једној тачки (или средњи успон, одн. успон у једној тачки).

Лук између две тачке чије су коте два узастопна цела броја можемо назвати размаком или интервалом (као на правој). Средњи пад између такве две тачке једнак је тада реципрочној вредности дужине интервала.

Док права има свугде исти нагиб, исти пад и једнаке размаке, на кривим линијама се, опште узевши, нагиб, пад и размак мењају од тачке до тачке. Разликујемо линије сталног и линије промењивог пада.

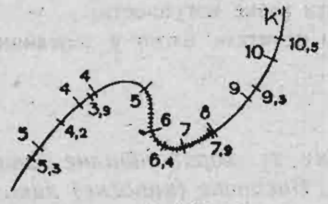
Један од основних задатака је да на датој кривој нађемо тачке с целобројним котама. На кривој сталног пада и њеној пројекцији целобројне тачке су подједнако размакнуте, тј. интервали су једнаки, дакле градуира се као права. Налажење целобројних тачака на кривој може се приближно извршити на основу дате пројекције криве и котираних тачака, претпостављајући као да је пад криве између суседних котираних тачака сталан.

Задатак 1. *У котираној пројекцији дата је крива* (сл. 230) *с котираним тачкама 5,3, 4,2, 3,9, 5 итд. Одредити тачке с целобројним котама.*

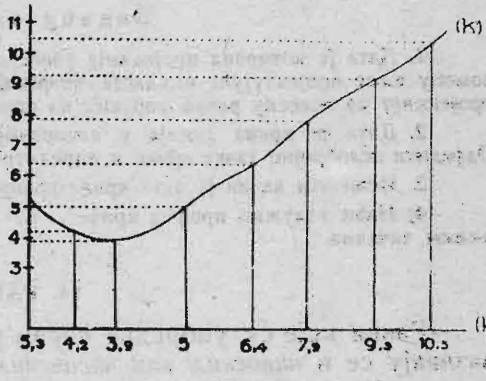
Поделимо лук (5, 6,4) на 64 — 50 = 14 једнаких делова приближно), лук (6,4, 7,9) на 15 једнаких делова итд. и међу добијеним тачкама, чије су коте узастопни бројеви с једном децималом, потражимо оне чије коте су цели бројеви.

*) Назив „графичке криве" (Müller) нисмо усвојили, јер сем пројекције k', дате су коте (бројеви), дакле крива није дата чисто графички.

Поменути начин постаје нетачан кад је нагиб криве јаче променљив, и ако напр. коте не расту само у једном смеру, — као што је случај у слици 230 где су дате тачке 5,3, 4,2, 3,9, 5 итд. Да бисмо добили тачнију градуацију посматрајмо *пројектујућу ваљкасту површ* криве образовану од свих пројектујућих дужи (које спајају тачке на кривој с њиховим пројекцијама). Затим развијмо ту површ у раван (сл. 231). Тиме ће се крива k' испружити

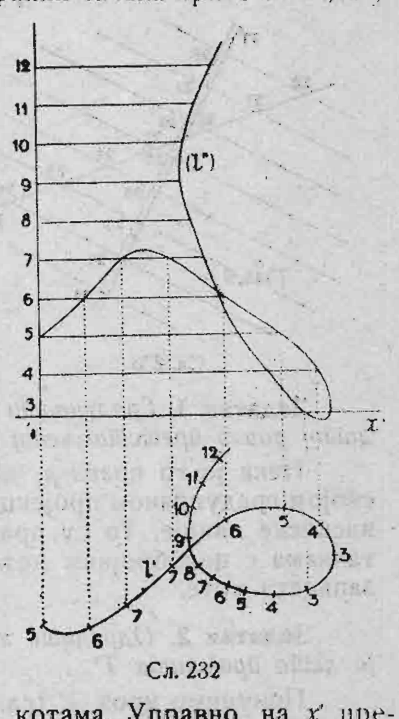


Сл. 230



Сл. 231

у праву (k') а крива k у равну криву (k), коју можемо назвати и *уздужним профилом* криве k. Да бисмо добили криву (k), треба пре свега „испружити" (ректифицирати) криву k', дакле преносити на (k'), редом растојања суседних котираних тачака криве k', или, тачније, дужи једнаке („од ока") луковима суседних котираних тачака криве k'. Тада у добијеним тачкама 5,4 4,2, 3,9 итд. праве (k') дижемо нормале и на њима одмеравамо дужи задате котама. Горње крајеве тих дужи треба спојити у што „правилнију" криву (k) (чији се нагиб континуирано мења). У пресеку с правим упоредним према (k') и с целобројним отстојањима налазимо тачке криве (k) с целобројним котама, а отуд на (k') тачке 5, 4, 4, 5, 6 итд. Најзад треба пренети и „савити" дужи (5,3, 5), (4,2, 4) итд. Тиме је налажење целобројних тачака на кривој k обављено. Слика 231 омогућује нам да уопште сваку тачку криве k котирамо и у њој одредимо нагиб криве, јер овај је једнак нагибу криве (k) у дотичној тачки.



Сл. 232

Задатак 2. *Наћи управну пројекцију (профил) криве дате у котираној пројекцији* (сл. 232) *на раван управну на равни слике.*

Нека је x' пројекција једне главне линије у профилној равни на коју ћемо пројектовати криву дату пројекцијом l' и котама. Управно на x' пренесимо коте одговарајућих тачака, узимајући да x има коту 3 (најнижа тачка криве), затим кроз те тачке повуцимо упоредне према x'. У пресеку с одговарајућим управним правим добијамо друге пројекције тачака криве, а спајањем тих тачака добијамо пројекцију (l''). Из слике се види да се крива прво пење до једног максимума, затим се спушта итд.

Задаци за вежбу

1. Дата је котирана пројекција извесне криве сталног пада. Развити је у раван помоћу њене пројектујуће ваљкасте површи, градуирати криву и наћи њену управну пројекцију на извесну раван управну на равни слике.

2. Дата је крива линија у котираној пројекцији, но чија пројекција је права. Одредити целобројне тачке криве и одредити пројекцију на раван упоредну њеној равни.

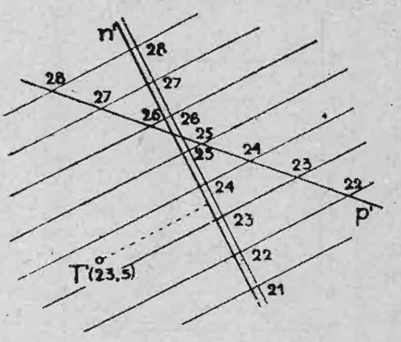
3. Испитати да ли је дата крива равна. (Посматрати разне могућности).

4) Наћи уздужни профил криве из слике 231 и испитати нагиб у појединим њеним тачкама.

94. РАВНИ

Равни које су упоредне спрам равни слике, тј. *хоризонталне равни* називају се и *нивоским* или *висинским равнима*. *Висинске (нивоске) линије* (у случају равни то су праве) или *изохипсе* ма које нехоризонталне равни (§ 39) можемо сматрати пресецима те равни висинским равнима. Праве у равни, које су управне на висинским линијама, су линије *највећег пада*, краће *линије пада* (§ 39).

У котираној пројекцији равни се обично претстављају висинским линијама чије су коте цели бројеви, или уопште целобројни умношци извесног броја јединица, тзв. главним висинским линијама (сл. 233). Зато је довољна и једна градуирана линија највећег пада, па се стога често равни претстављају по једном таквом линијом пада. Да би се линија пада, која претставља раван, разликовала од других градуираних правих, црта се помоћу двеју блиских паралелних правих, извучених неједнаком јачином. При решавању задатка употребљава се увек само дебља права.



Сл. 233

Задатак 1. *Градуирати праву дату пројекцијом и која се налази у датој равни претстављеној линијом пада.*

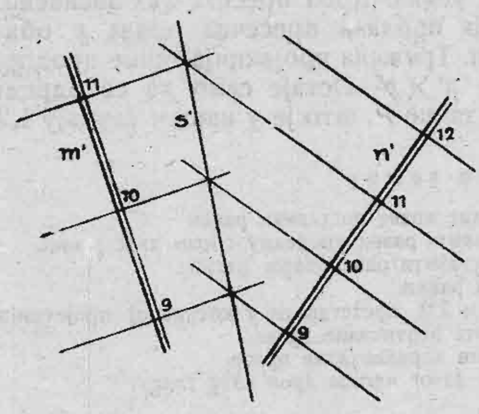
Нека је то права p, дата пројекцијом p Дата је и линија пада n, својом градуираном пројекцијом (сл. 233). Извуцимо у пројекцији главне висинске линије. То су праве управне на n и секу праву p у њеним тачкама с целобројним котама. Дакле, само треба уз те тачке у слици записати коте.

Задатак 2. *Одредити коту тачке T која припада датој равни, кад је дата пројекција T'.*

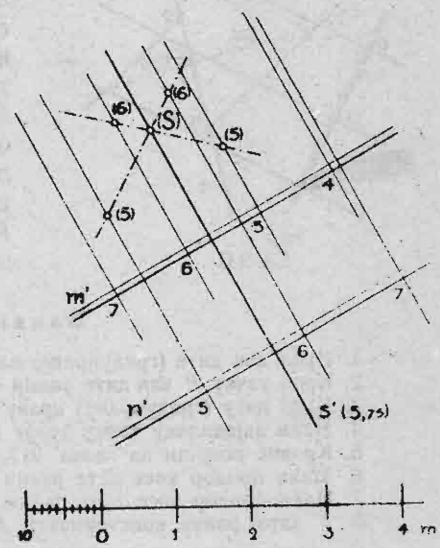
Повуцимо кроз T' (сл. 233) пројекцију висинске линије до пресека с градуираном линијом пада и одредимо коту пресечне тачке.

Задатак 3. *Одредити пресек двеју равни датих својим градуираним линијама пада.*

Ако пројекције m' и n' линија пада нису упоредне (сл. 234), две по две висинске линије истих кота секу се, јер припадају истој висинској равни, а нису упоредне. Те пресечне тачке су целобројне тачке пресечне праве s обих равни. Дакле праву s добијамо одмах градуирану.



Сл. 234

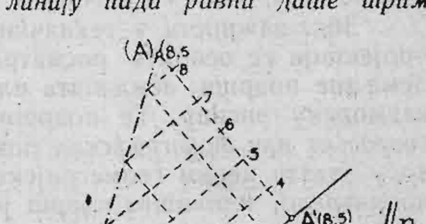


Сл. 235

Ако је $m' \parallel n'$, али равни нису упоредне (сл. 235), висинске линије обих равни се не секу, пресечна права s управна је на линијама пада и јесте заједничка линија обих равни. Тада можемо пресећи обе равни једном равни ν управном на висинске линије и оборивши ту раван на у коју висинску раван, одредити у њој заједничку тачку S обих равни. Права s пролази кроз S, дакле s' кроз (S).

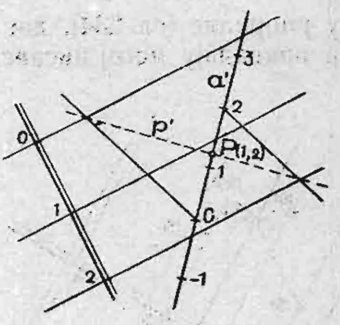
Задатак 4. *Одредити градуирану линију пада равни дате трима тачкама $A\,(8{,}5)$, $B\,(5{,}2)$, $C\,(3)$* (сл. 236).

Градуирајмо једну од правих одређених тим трима тачкама, напр. праву AB, што ћемо извршити помоћу оборене праве $(A)(B)$, а затим на правој $A'B'$ нађимо пројекцију тачке која има коту једнаку као тачка C, тј. 3. Права која пролази кроз C' и ту тачку на $A'B'$ је пројекција једне висинске линије равни ABC. Пројекције целобројних висинских линија можемо затим извући као паралелне праве кроз тачке на $A'B'$ с целобројним котама и напослетку пројекцију једне праве највећег пада као једну праву управну на те висинске линије.



Сл. 236

Задатак 5. *Одредити продор дате праве кроз дату раван.*



Сл. 237

Нека је раван дата градуираном линијом пада, на којој су забележене коте 0, 1, 2 (сл. 237). Поставимо кроз дату праву a' ма коју раван. Та раван је претстављена својим главним висинским линијама, које пролазе кроз целобројне тачке на градуираној правој a, Уочимо напр. висинске линије с котама 0 и 2 обих равни. Кроз пресеке тих висинских линија пролази пресечна права p обих равни. Тражена пројекција тачке продора P је $a' \times p'$. Остаје само да се одреди кота тачке P, што је у нашем случају 1,2.

Задаци за вежбу

1. Кроз две дате (градуиране) паралелне праве поставити раван
2. Кроз тачку P ван дате равни поставити раван упоредну спрам дате равни.
3. Кроз дату (градуирану) праву l поставити раван датог нагиба
4. Наћи заједничку тачку трију датих равни.
5. Кровне површи из слика 217, 219 и 221 претставити у котираној пројекцији.
6. Наћи продор косе дате равни и дате вертикалне праве.
7. Наћи продор косе дате равни и дате хоризонталне праве.
8. У датој равни конструисати праву датог нагиба кроз дату тачку.

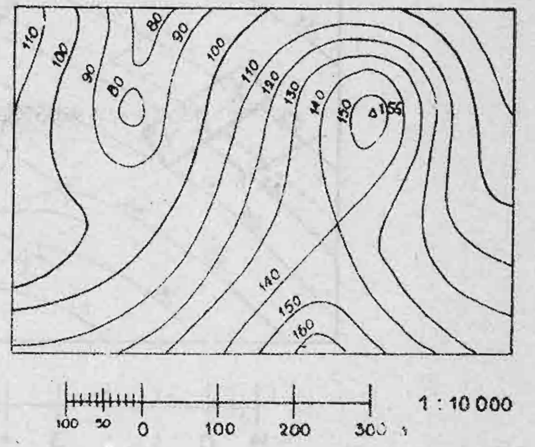
95. ЗЕМЉИШНЕ ПОВРШИ

Пресеци неке површи хоризонталним равнима јесу, опште узевши, криве линије, које се називају *нивоским* или *висинским линијама, изохипсама* или једноставно, *хоризонталним линијама површи.* У котираној пројекцији површи се претстављају обично низовима висинских линија чије коте су узастопни цели бројеви, или целобројни умношци извесног броја јединица, и назваћемо их *главним висинским линијама*, односно *главним изохипсама.* Уз пројекцију сваке изохипсе записује се њена кота.

Због важности у техничким наукама, географији итд. у котираној пројекцији се особито посматрају површи које претстављају крајеве Земљине површи: земљишта или терене. Коте тада означавају обично надморску висину. Те површи називамо *земљишним* (или *теренским*) *површима* или *топографским* површима. То су емпиријске површи, које нису задате неким геометријским законом или обрасцем. Геометријски посматрано, земљишна површ је ма каква непрекидна површ која прекрива раван слике свугде само једанпут, тј. свака управна права на раван слике има с том површи једну и само једну заједничку тачку. (Ово својство имају и кровне површи).

Према томе, у равни слике изохипсе које претстављају неку земљишну површ су ма какве непрекидне криве линије (сл. 238). При томе се изохипсе разних висина (и кота) никад не секу, јер би са управном подигнутом у таквој тачки површ имала бар две заједничке тачке. Али пресек земљишне површи једном висинском равни може се састојати из више одвојених изохипса с истом котом. Сем тога, изохипса може имати двоструких, па и вишеструких тачака (сл. 238).

Претпоставићемо да нам је земљишна површ дата у пројекцији готовим низом својих изохипса чије су коте (као што је већ речено) узастопни целобројни умношци извесног броја јединица. У картографији се такве пројекције земљишних површи израђују на основу геодезијских мерења, која дају коте довољног броја појединих (одвојених) тачака, или на основу снимака (фотограметријски).



Сл. 238

Уколико је висинска разлика између суседних изохипса мања, дата земљишна површ је тачније претстављена. У техничким наукама узима се да је размак од 1 до 5 метара, а у географским картама већи, напр. 50, 100 или више метара. Између двеју суседних изохипса површ је (ако ван изохипса немамо података) у ствари непозната, али претпостављамо да нема неких битних неправилности, већ да се површ непрекидно, и колико је могуће једноставно савија пролазећи кроз изохипсе. Ситне, изохипсама необухваћене неправилности земљишне површи сметале би само решавању задатака и не узимају се у обзир. Исто тако не узимају се у обзир ни ситне неправилности на висинским линијама, као што ни у § 93, где је било речи о кривим линијама, уопште ситне неправилности кривих нисмо узимали у обзир (напр. ситно таласаста линија).

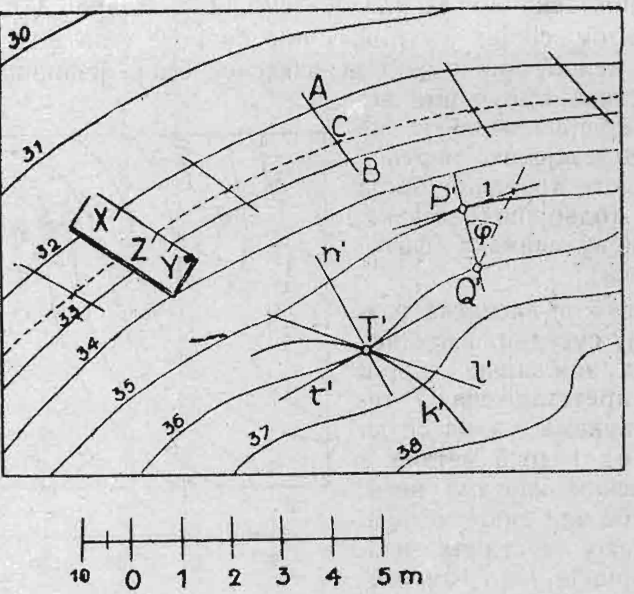
96. ДИРКЕ И ДОДИРНЕ РАВНИ ЗЕМЉИШНИХ ПОВРШИ

Саобразно претходноме претпостављамо да у свакој тачки земљишне површи можемо с довољном тачношћу конструисати тангенту и тангентну раван. Нека је T ма која тачка површи на извесној изохипси (сл. 239), t тангента у T на изохипсу. Као што је изохипса пресек земљишне површи хоризонталном равни, тако је и тангента t пресек тангентне равни τ у тачки T истом хоризонталном равни. Од свих равни које садрже праву t једна је раван τ.

Нека је k ма која крива на површи, која пролази кроз T. Претпостављајући да и k има тангенту у свакој тачки, нека је l њена тангента у T. И права l је, разуме се, у равни τ. Ако није $l \equiv t$, права l је коса спрам равни слике. Права l има највећи пад ако је $l \perp t$, јер је тада l линија највећег пада равни τ. Дакле, од свих кривих k највећи пад у тачки T имају криве које у тој тачки секу изохипсу под правим углом.

Нагиб земљишне површи у једној њеној тачки је нагиб тангентне равни у тој тачки, а *пад земљишне површи* је пад тангентне равни.

*) Можемо апстраховати од (природних или вештачких) вертикалних површи и других изузетака.



Сл. 239

97. ЛИНИЈЕ НА ЗЕМЉИШНИМ ПОВРШИМА

Како у свакој тачки земљишне површи постоји тангентна раван, у свакој тачки постоји правац највећег пада те површи. Идући од тачке до тачке у правцу највећег пада описујемо на површи криву линију која се зове *линији највећег пада* или, краће, *линија пада*. Као што смо видели у § 94, у равни линије пада су праве. Пад криве највећег пада у некој тачки једнак је паду тангентне равни у тој тачки.

Међу разним врстама кр вих на земљишној површи истичу се *криве сталног пада*. Криве највећег пада нису, сем изузетно, криве сталног пада.

Често је потребно у датој котираној пројекцији земљишне површи *интерполирати* или *уметати* између датих изохипса нове изохипсе и, рецимо, гушћим низом изохипса добити тачнију претставу површи Ако већа тачност није потребна, узимамо као да су линије на површи, које спајају две блиске тачке на суседним изохипсама, праве. Ако напр. између изохипса 32 и 33 (сл. 239) треба уметнути изохипсу с котом 32,7, на разним местима повлачимо праве које секу обе изохипсе, напр. прву у A а другу у B, и поделимо дуж AB у размери 7:3.

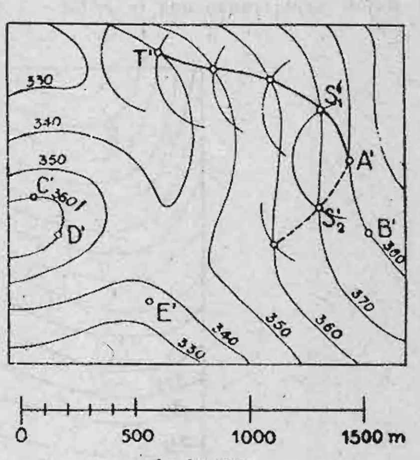
Практичније је не повлачити праве него служити се *преносачем* који начинимо од папира, на чијем рубу обележимо две тачке X и Y и тачку Z између X и Y која дели дуж XY у датој размери, напр. $XZ : XY = 7 : 10$. Дуж XY не сме бити мања од највећег растојања суседних изохипса, јер поступак се састоји у томе да то мерило премештамо дуж посматраних изохипса, тако да X буде увек на првој (32), Y на другој (33) и да у сваком положају забележимо где у слици долази тачка Z. Затим кроз све тако забележене тачке Z треба провући тражену изохипсу.

Задатак 1. *Наћи приближно нагиб земљишне површи у извесној тачки.*

Ако нам већа тачност није потребна, узимамо да се крива на површи, која спаја две блиске тачке P и Q суседних изохипса и чија пројекција је $P'Q'$ поклапа с правом PQ. Тада треба повући $P'Q'$ управно на изохипсу у P или у Q, а нагиб φ праве PQ даће приближно нагиб површи у P (или у Q), па и у ма којој тачки између P и Q.

Задатак 2. *Конструисати у слици* 240 *линију сталног пада која се спушта из тачке A по земљишној површи у једном или другом смеру и чији пад је 1:25.*

Како је висинска разлика суседних изохипса 10 м, имамо $1:25 = 10:250$, дакле узимамо праву кружну купу с врхом у A и основом у хоризонталној равни с котом 370, која има полупречник основе 250 м. Претпостављамо да се у пресеку те купе са земљишном површи, површ мало разликује од равни и да се, према томе, пресек састоји из две изводнице које спајају тачку A с тачкама пресека круга основе и изохипсе, тачкама S_1 и S_2 (као пресек купе једном равни која пролази кроз врх). Пошто се изабере једна од тачака S_1 и S_2, поставља се слично купа с врхом у тој тачки и добијају опет две тачке пресека круга основе и следеће изохипсе. Од тих двеју тачака бирамо сад тачку која одговара првој изабраној тачки, тј. бирамо ону тачку која ће дати линију сталног пада у једном смеру како би се избегле угловне тачке. Можемо рећи да бисмо мењањем смера кретања прелазили с једне на другу линију сталног пада. Слично настављамо и даље и доспевамо до тачке T. Линија AT је једна од двеју кривих датог пада које пролазе из A. Даље од T, у посматраном случају, линија не постоји, јер је у T пад површи мањи од пада линије и основа одговарајуће купе с врхом у T не допире до изохипсе 330, па немамо тачке пресека круга основе с изохипсом.



Сл. 240

Задаци за вежбу

1 Наћи приближно коту тачке на произвољно, изохипсама претстављеној земљишној површи кад је пројекција тачке дата изван изохипсе.

Упутство: послужити се преносачем.

2 У датој котираној пројекцији извесне земљишне површи, где је висинска разлика суседних изохипса 25m, уметнути нове изохипсе тако да висинска разлика буде 5m.

Упутство: Нека читалац прво нацрта како хоће дату котирану пројекцију земљишне површи, затим нека се служи преносачем на коме је убележио свих пет потребних тачака.

3. Увеличати слику 240 земљишне површи тако да размера буде 1 : 10 000, а затим конструисати линије сталног пада које пролазе кроз тачке A, B, C, D и E и чији пад је 1 : 25.

Напомена: Кроз сваку тачку површи, кроз које уопште постоје криве датог пада, пролазе две такве криве.

4. Кроз дирку у датој тачки M земљишне површи (чију пројекцију читалац треба сам да нацрта) и нашавши нагиб линије највећег пада у M, одредити приближно додирну раван у M и претставити је њеној градуираном линијом пада.

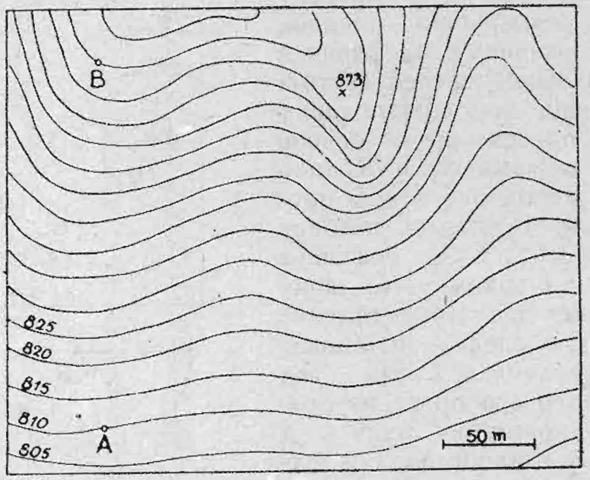
5. Из дате тачке на земљишној површи датој котираном пројекцијом повући приближно криве сталног пада чији нагиби имају неколико разних вредности које нису сувише мале.

6. У задатку 4 нацртати криве сталног пада, кад је тај пад мали.

Упутство: Претходно интерполирати нове изохипсе, да цртање не би било сувише произвољно.

7. Кроз дату тачку на земљишној површи датој котираном пројекцијом повући приближно криву највећег пада. Повући затим више таквих кривих да би се имала претстава о њиховом току у целој слици.

8. На земљишној површи претстављеној у слици 241 спојити тачке A и B линијом чији сталан пад је 1 : 12.



Сл. 241

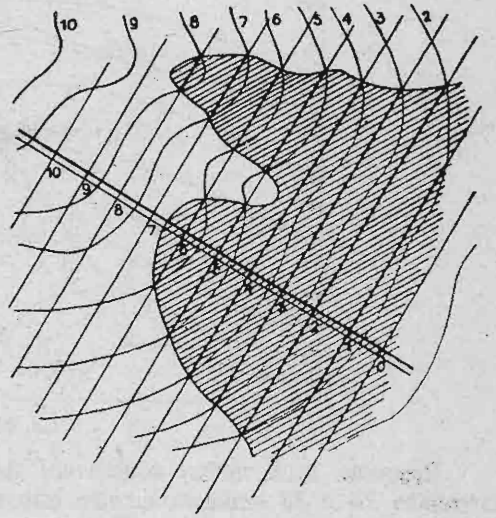
Упутство. Тачке A и B не налазе се на једној кривој тога сталног пада. Зато треба мењати смер у коме се пут пење, тј. тражена линија сталног пада пењаће се у серпентинама и имаће угаоних тачака (окуке пута). Пут не треба да сече изохипсу 860 близу тачке C, због велике стрмине и наглог заокретања изохипса.

9. Да пут у претходном задатку не би на окукама нагло мењао смер, претпоставимо да се на тим местима пројектује делом као део круга полупречника $r = 10$ cm, а средиште у угаоној тачки и да је такав кружни део пута водораван. Тада пут треба променити у близини окука. Учинити то тако да пад пута не буде нигде већи.

98. ПРЕСЕЦИ ЗЕМЉИШНИХ ПОВРШИ

Пресек земљишне површи неком косом равни добија се налажењем тачака у којима се секу једнако котиране висинске линије обих површи и, затим, провлачењем пресечних кривих кроз те тачке, као што се види у слици 242. Слично се добија пресек земљишне површи неком кривом површи, напр. површи зарубљене кружне купе (сл. 243).

Облик пресека једном равни која је управна на равни слике можемо видети ако ту раван оборимо (види задатак 2, § 93). Слично је и кад одређујемо пресек ваљкастом површи чије изводнице су управне на равни слике. Тада треба ваљкасту површ развити у раван, а тиме и пресечну криву као у § 93.

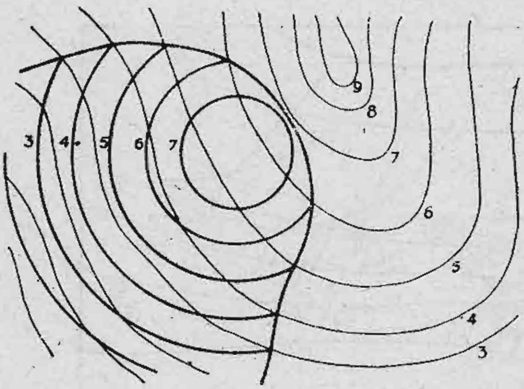


Сл. 242

Помоћу равних пресека земљишне површи можемо тачније одредити тангенту раван у некој тачки, тачније извршити интерполацију изохипса итд.

Задатак 1. *Одредити коту тачке А на земљишној површи, кад је А' дата тачка која није на изохипси.*

Поставимо профилну раван кроз A, напр. раван која пролази кроз врх приказаног брда (сл. 244) и оборимо, тј. нађимо профил пресека. Да би оборена крива пресека (k) била изразитија, не узимамо при обарању јединице из мерила, него изабирамо већу јединицу (узимамо посебно мерило за висине). На кривој (k) имамо тачку (A), чију коту треба одредити из мерила за висине, ако смо нацртали то посебно мерило, или непосредно помоћу изабране јединице. Обарање је извршено у висинску раван чија кота је 30, дакле отстојању $A'(A)$ треба додати 30 јединица.



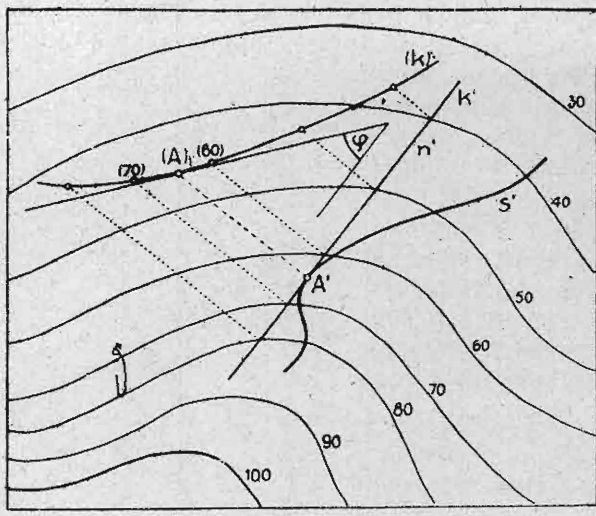
Сл. 243

Напомена. Да смо коту одредили као у § 96, поставивши праву чија је пројекција n, имали бисмо уместо $A'(A)$ дуж на правој $A'(A)$ од A' до пресека са сечицом (60)(70)

Задатак 2. *Нека је s крива на површи и А тачка у којој треба одредити нагиб криве* (сл. 244).

Поставимо у тачки A дирку на s, њена пројекција је n. Нагиб те дирке налазимо у профилној равни постављеној кроз n. То је нагиб дирке на криву (k) у (A).

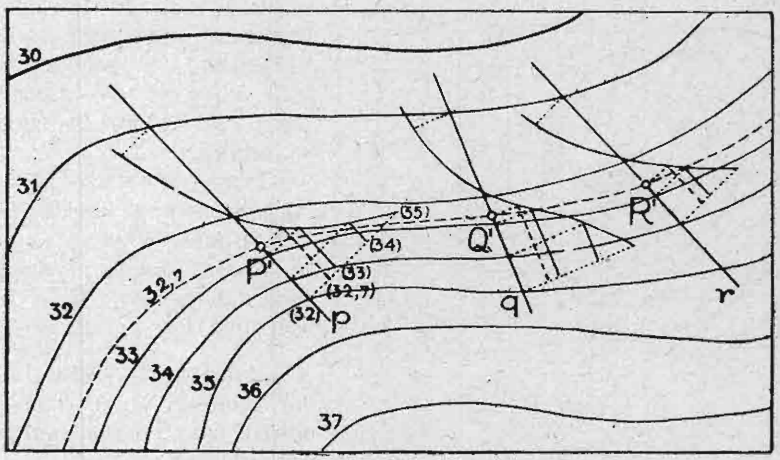
Напомена. Треба приметити разлику спрам нагиба сечице (60)(70), дакле према решењу које би се добило као у § 96.



Сл. 244

Задатак 3. *У датој котираној пројекцији земљишне површи између изохипса 32 и 33 интерполисати изохипсу с котом 32,7.*

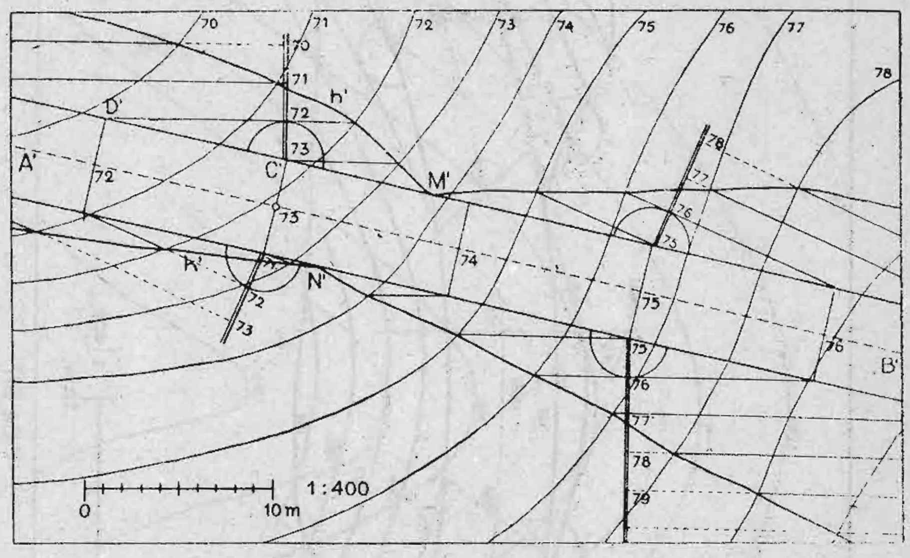
Изаберимо профилне равни које се пројектују у праве p, q, r (сл. 245) и оборимо их напр. у висинску раван с котом 32. Пошто у обореном положају одредимо пресечне криве које имамо у тим равнима и пре еке тих кривих с висинском линијом (32,7), и добијене пресечне тачке вратимо у пројекцију, им мо низ тачака P', Q', R', ... кроз које треба извући нову изохипсу.



Сл. 245

Задатак 4. *На земљишту претстављеном изохипсама на слици* 246 *треба пројектовати пут чија средишња линија је дата у пројекцији и на њој је одређено где треба да буде тачка с котом 73. Ширина пута треби да буде 5 m, успон 1:10, а насипи и усеци имају пад 1:2.*

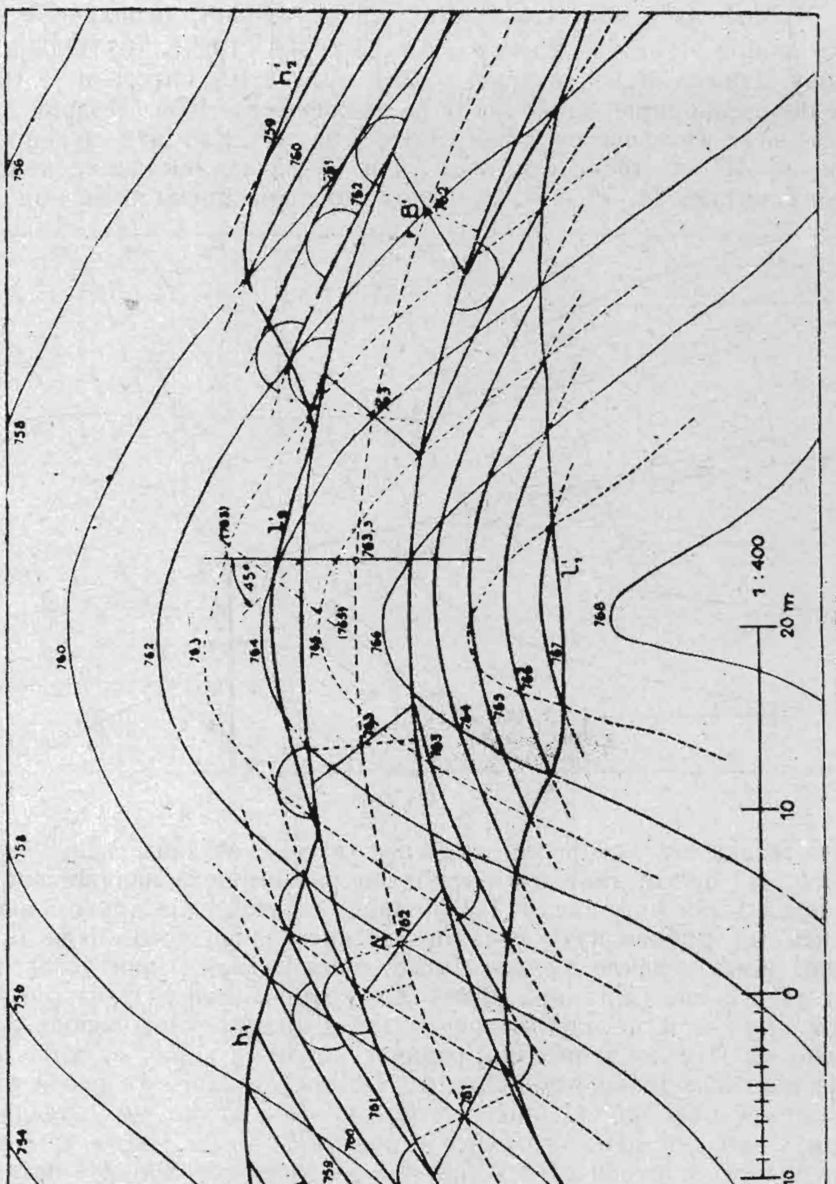
Рубови пута претстављени су двема правим, паралелним средишњој линији AB на отстојању 2,5 m са сваке стране. Градуирајмо средишњу линију. Како је успон (пад) пута 1: 10, интервал је 10 m, тј. суседне целобројне тачке на AB удаљене су 10 m. Површ пута је равна, њене изохипсе су дужи управне на AB. Као што се непосредно види, на AB су тачке с котама 72 и 73 изнад земљишне површи, а тачке с котама 74, 75 и 76 су испод површи, према томе код првих



Сл. 246

двеју тачака пут стоји на насипу, а код осталих трију пролази усеком. На првом делу пута треба од рубова пута наниже поставити две косе равни чији пад је 1:2 (површи насипа), а на другом делу поставити од рубова пута навише две косе равни истог пада (површи усека). Имамо дакле да поставимо свега четири равни датог нагиба кроз дате праве (задатак 2, § 84). Сматрајући тачку C на рубу пута врхом кружне купе чија висина је 1 m а полупречник основе 2 m, повуцимо из D у хоризонталној равни с котом 72 дирку на круг основе. То је изохипса једне равни насипа. Остале изохипсе те равни пролазе кроз друге целобројне тачке истог руба и једнако су удаљене међу собом. Тако добијамо изохипсе с котама 70 — 73. Затим треба одредити пресек те равни са земљишном површи (крива h). На исти начин налазимо раван насипа на другој страни пута и њен пресек са земљишном површи (крива k). Слично одређујемо и равни усека и њихове пресеке с обих страна пута, али сад су купе изврнуте: основе су им у равнима чије су коте за јединицу веће од коте њихових врхова. Пресечне криве насипа и усека састају се у тачкама M и N. То су на рубовима пута једине тачке које су на самој земљишној површи.

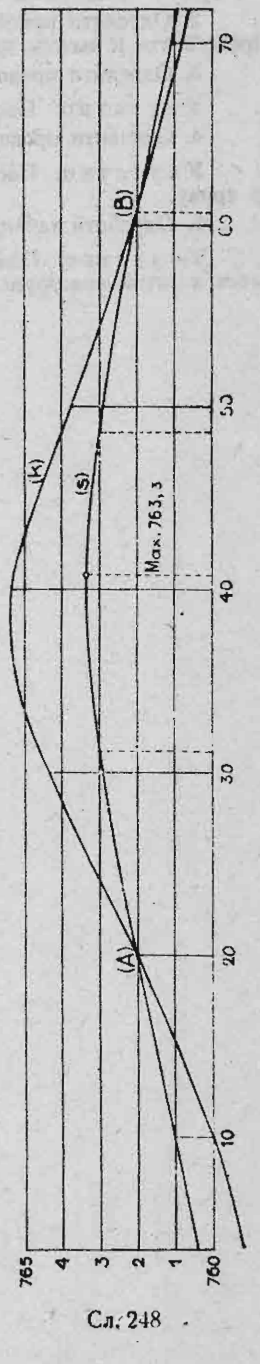
Задатак 5. *На земљишту претстављеном изохипсама на слици 247 пројектовати пут ширине 6 m и чија средишња линија је у пројекцији дати лук круга чији полупречник је 60 m. На тој линији треба тачке A и B*



Сл. 247

да имају коту 762 (као и изохипса земљишта у тим тачкама). Но због земљишта пут се пење идући с леве стране слике до тачке А и успон му је 1:10, затим му успон опада и престаје и пут се спушта тако да је од тачке В пад опет 1:10. Због кривине пут је попреко нагнут 7%. Потребни насипи треба да имају пад 1:1.

На отстојању 3 m од средишње линије *AB* опишимо у пројекцији два концентрична кружна лука, пројекције рубова пута. Замишљамо да је пут (приближно) праволинијска површ образована од правих које се пројектују као нормале на лук $A'B'$: но те праве имају пад 7% (тј. 7:100), тако да је идући од A ка B леви руб пута в ши од десног руба; висинска разлика је 7% од 6 m, тј. 42 cm. Да бисмо одредили како пут из пењања прелази у спуштање, пресецимо земљишну површ пројектујућом ваљкастом површи средишње линије AB и развијмо ту површ у раван (тзв. уздужни профил, сл. 248). Да би пресек био изразитија линија узимамо за висине опет веће јединице. Линија пресека је у слици 248 (k). Линија пута пролази кроз тачке (A) и (B) (с котом 762) и успон јој је лево од (A) и десно од (B) 1:10. Та два дела пута треба спојити испупченом кривом, чији ће успон бити стално мањи. Нацртавши тако у слици 248 отприлике профил криве пута, (s), налазимо на њој две тачке с котом 763, једну с котом 761 и максимум с котом 763,3. Пошто те тачке нађемо и у пројекцији на $A'B'$, треба да одредимо изохипсе површи пута. Како је попречно нагнут, изохипсе нису управне на лук $A'B'$, него су приближно праве које секу $A'B'$ под оштрим углом. Како је на управној у A' тачка спољњег руба пута 42 cm изнад тачке унутрашњег руба, она је 21 cm изнад тачке A. Дакле, ако идући на AB од A наниже ка коти 761 одмеримо 2,1 m и у тој тачки повучемо управну на AB до спољњег руба, долазимо до тачке тог руба чија кота је иста као у A. Према томе, кроз ту тачку и кроз A пролази изохипса површи пута, чија кота је 762.



Сл. 248

Под истим углом према $A'B'$ повлачимо изохипсу у суседној тачки лука $A'B'$ с котом 761, а у суседној тачки с котом 763 узели смо угао нешто мањи, јер је ту успон пута мањи. У тачки с котом 763,3 изохипса је управна на лук $A'B'$, а у B' и суседној котираној тачки слично је као у A' и у поменутој тачки с котом 763, само што су изохипсе изокренуте на другу страну.

Најзад одређујемо површи насипа и њихове пресеке h_1 и h_2 са земљишном површи, и површи усека и њихове пресеке l_1 и l_2. Конструкција је слична као у задатку 4. Постављамо купе чија висина је 1 m, а полупречници основа су 1 m. Изохипсе су нешто закривљене линије, као и сами рубови пута. Извесне појединости може читалац видети из саме слике. Ради тачније конструкције уметане су местимице изохипсе земљишне површи, чије коте су непарни бројеви.

Задаци за вежбу

1. Одредити помоћу пресека величину пада нацртане криве највећег пада у извесној тачки земљишне површи.

2. Одредити помоћу пресека додирну раван у датој тачки земљишне површи. Претставити је њеном градуираном линијом пада.

3. Одредити продоре дате земљишне површи датом правом.

Упутство: Поставити прво раван кроз ту праву и наћи пресек том равни.

4. Одредити продоре земљишне површи датом кривом линијом.

Упутство: Поставити ваљкасту површ с хоризонталним изводницама кроз ту криву.

5. Одредити тачније линију сталног пада задату у израђеном задатку 2, § 97.

Упутство: Помоћу пресека, интерполирати бар по једну изохипсу између датих и затим конструисати тражену линију.

ДЕО IV

УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ДВЕ И ВИШЕ РАВНИ

ГЛАВА I

ТАЧКА И ПРАВА

99. УПРАВНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ НА ДВЕ РАВНИ

Самом управном пројекцијом на **једну раван** предмет у простору није одређен. Али ако познајемо управне пројекције предмета на две равни које нису међу собом упоредне (види § 10), положај предмета, његов облик и величина постају одређени. У овом одељку полазимо од посматрања управних пројекција на две равни, π_1 и π_2, које су међу собом управне. Обично се узима да је раван π_1 хоризонтална, а раван π_2 вертикална (сл. 249) и назива се:

π_1 . . . *прва* или *хоризонтална (водоравна) пројекцијска раван, раван тла, раван тлоцрта,*

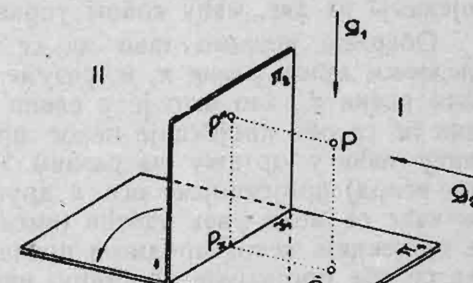
π_2 . . . *друга* или *фронтална (чеона) пројекцијска раван, раван нацрта.*

Пројекција на π_1 зове се *прва пројекција* или *тлоцрт*, а пројекција на π_2 *друга пројекција* или *нацрт*.

Прва пројекција неке тачке P обележава се знаком P' (чита се: P прво) а друга пројекција знаком P'' (чита се: P друго).

На исти начин обележавамо обе пројекције каквог било другог лика.

Пресечна права обих пројекцијских равни зове се *пројекцијска оса* или *линија тла*; обележавамо је словом x.



Сл. 249

Претпоставка да је раван π_1 хоризонтална а π_2 вертикална није битна. Могу то бити две међу собом управне равни ма ког положаја. Али често, особито у применама (кад се напр. претстављају зграде) потребно је конструисати управну пројекцију на хоризонталну раван и на бар једну вертикалну раван. Сем тога ова претпоставка олакшава изражавање.

Хоризонтална пројекцијска раван дели простор на два дела: на *горњи* и *доњи полупростор*. И чеона пројекцијска раван дели простор на два полупростора: један (у коме замишљамо посматрача) називамо *предњим*, други *задњим*. Обе пројекцијске равни деле простор на четири дела или *квадранта*. Квадрант који припада горњем и предњем полупростору називамо *првим (главним) квадрантом*, горњи задњи квадрант *другим квадрантом*, доњи задњи квадрант *трећим квадрантом*, а доњи предњи *четвртим квадрантом* (сл. 249). Најчешће се узима да је предмет у првом квадранту, тј. изнад π_1 а испред π_2.

100. ОБАРАЊЕ ЈЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈСКЕ РАВНИ У ДРУГУ

Будући да треба цртати у једној равни, а не у две које стоје међу собом управно (јер би то било сувише незгодно) *обарамо једну пројекцијску раван у другу* око пројекцијске осе. Тада се обе пројекцијске равни поклапају, па имамо само једну раван цртања, али у њој *две непосредне управне пројекције* претстављеног предмета. При томе је свеједно да ли замишљамо да обарамо π_2 у π_1 обртањем у извесном (назначеном) смеру или π_1 у π_2 у обрнутом смеру.

Тај поступак није сасвим нов. Кад смо у претходном одељку положај тачака утврђивали једном управном пројекцијом и отстојањима од пројекцијске равни, уводили смо често помоћне равни, управне на равни слике и обарали их, вршећи у њима потребне конструкције. А неки пут је требало посматрати и управну пројекцију на такву помоћну раван (напр. у § 90 и § 93). У овом пак одељку спроводимо систематски то пројектовање на још једну раван, као једну општу методу нацртне геометрије. Уместо да полазимо од управне пројекције на само једну раван и потребних отстојања, полазимо одмах од управних пројекција на две, међу собом управне равни.

Обарање вршимо тако да се *горњи део* равни π_2 поклопи са *стражњим* делом равни π_1 и, разуме се, доњи део равни π_2 са предњим делом равни π_1, као што је у слици 249 назначено стрелицама. На тај начин ће се обе пројекције неког предмета који стоји у првом квадранту наћи у цртежу на разним местима: прва пројекција испред (одн. испод) пројекцијске осе, а друга пројекција иза (одн. изнад) осе. Али неће се моћи увек избећи (нити би било потребно) да једна или обе пројекције неког предмета прелазе преко пројекцијске осе, дакле и да се обе пројекције простиру, макар делимично, једна преко друге.

На описаном поступку оснива се ова *метода двеју непосредних управних пројекција*. Истина је да би се обе пројекције могле сместити у једну раван и на други начин, у други узајамни положај, али обарањем доводимо их увек у исти, одређени и, бесумње, најповољнији положај у коме нам и *узајамна веза* обих пројекција стоји јасно пред очима. Имајући у виду ту узајамну везу може се говорити и о двема *придруженим управним пројекцијама* једног предмета и ова метода називати тим именом.

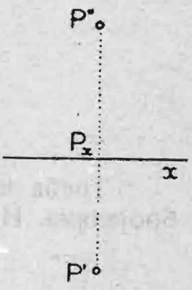
Нагласимо да почетник не сме никада заборавити да у равни цртежа има две пројекције на две међу собом управне равни.

Користиће му можда ако чешће лист на коме црта савије дуж пројекцијске осе до правог угла и тада, посматрајући обе пројекције, замишља у простору предмет чије су то пројекције. *)

101. ТАЧКА

Нека је P која било тачка, рецимо, у првом квадранту (сл. 249). Како је $PP' \perp \pi_1$, $PP'' \perp \pi_2$, пројектујући зраци PP' и PP'' одређују раван која је управна на обим пројекцијским равнима, дакле и на оси x и сече је у извесној тачки P_x тако да су дужи $P'P_x$ и $P''P_x$ управне на x. Четвороугао $P'PP_xP''$ је правоугаоник.

Према томе, кад оборимо једну пројекцијску раван у другу, дужи $P'P_x$ и $P''P_x$ припадају једној правој управној на оси x (сл. 250). Та права на којој су обе пројекције једне тачке и која је управна на оси x, зове се *ординала* или *линија придруживања* те тачке.



Сл. 250

Ма које две тачке P' и P'' у равни цртежа, кроз које пролази права управна на пројекцијској оси, могу бити управне пројекције извесне тачке P у простору. Заиста, ако обе пројекцијске равни посматрамо у свом узајамно управном положају и кроз P' и P'' подигнемо управне пројекцијске зраке, ови зраци се тада секу у извесној тачки P, којој су P' и P'' пројекције. Али, *две тачке у равни цртежа, које нису на једној правој управној на пројекцијској оси x, не могу никад бити управне пројекције једне тачке.*

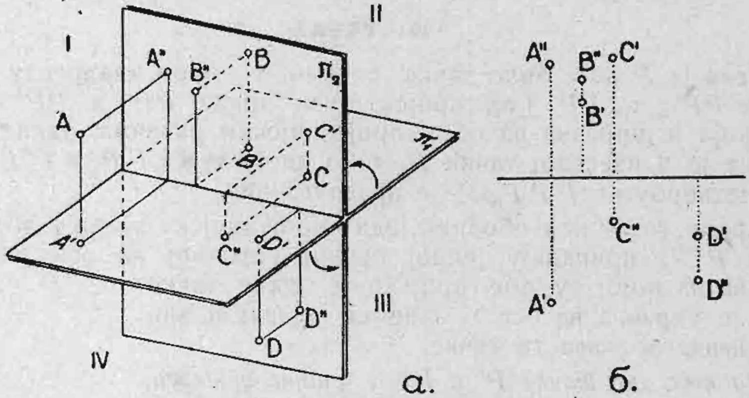
Како је у простору четвороугао $PP'P_xP''$ правоугаоник, имамо $P'P_x = PP''$ и $P''P_x = PP'$, дакле *отстојање прве пројекције P' неке тачке P од осе x једнако је отстојању тачке P од друге пројекцијске равни, а отстојање друге пројекције P'' од осе x једнако је отстојању тачке P од прве пројекцијске равни.*

У слици 251 приказана је по једна тачка у сваком квадранту, прво у скици, ради објашњења (сл. 251а), затим у двема придруженим непосредним пројекцијама (сл. 251б), у равни цртежа Као што и сама слика 251б показује, тачка A је испред π_2, а изнад π_1, тј. у првом квадранту, тачка B је иза π_2, а изнад π_1; тј. у другом квадранту; тачка C је иза π_2, а испод π_1, тј. у трећем квадранту: тачка D је испред π_2 а испод π_1, тј. у четвртом квадранту.

Тачка E која се налази у равни π_1, има другу пројекцију E'' на пројекцијској оси, а њена прва пројекција поклапа се са самом том тачком ($E' \equiv E$). Слично, тачка F која је у π_2, има прву пројекцију F' на пројекцијској оси, а њена друга пројекција поклапа се са самом том тачком ($F'' \equiv F$). Тачка G која је на пројекцијској оси има обе пројекције на тој оси и $G' \equiv G'' \equiv G$ (сл. 252). Али обе пројекције једне тачке могу се поклапати и кад тачка није на пројекцијској оси. Очигледно, пројекције једне тачке се поклапају кад год се тачка

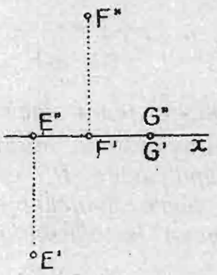
*) Читалац може начинити и модел пројекцијских равни исекавши од картона два „правоугаоника" и просекавши сваки до пола дуж праве која треба да претставља осу x, тако да се оба „правоугаоника" могу дуж тих усека ужљебити један у други.

налази у равни која садржи осу и пролази кроз други и четврти квадрант тако да располовљује угао између пројекцијских равни. Зато се ова раван зове *раван поклапања.*



Сл. 251

Треба напоменути да положај ма које тачке P бива задат и бројевима. Изаберимо на пројекцијској оси почетну тачку O и сматрајући да је мера отстојања тачке P на оси позитивна у једном, негативна у другом смеру, називамо је *апсцисом* тачке P и обележавамо обично словом x. Слично, узимајући да је мера отстојања $P_x P'$ позитивна кад је P испред π_2 а негативна кад је P иза π_2 називамо ту меру *ординатом* y тачке P, и најзад, сматрајући меру отстојања $P_x P''$ позитивном кад је P изнад π_1 а негативном кад је испод π_1, називамо је *котом* или *апликатом* z тачке P. Тада пишемо и P (x, y, z), бележећи редом апсцису, ординату и коту тачке P.



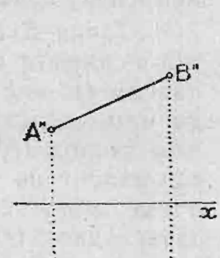
Сл. 252

102. ПРАВА

Пројекције дужи AB одређене су пројекцијама њених крајњих тачака A и B (сл. 253), тј. дуж је претстављена у равни цртежа двема дужима $A'B'$ и $A''B''$ чији се крајеви налазе на двема ординалама.

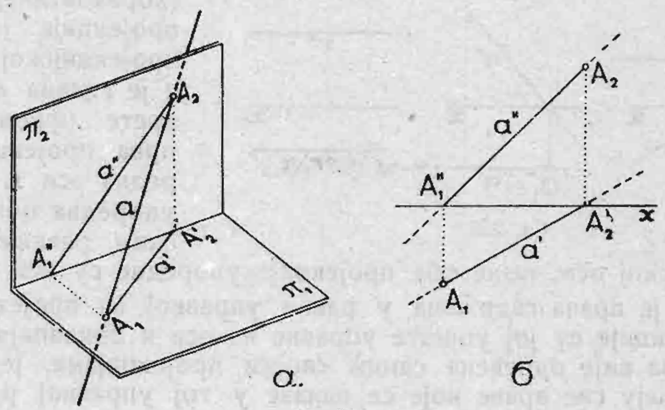
Права a претстављена је својом првом пројекцијом a' на π_1 и другом пројекцијом a'' на π_2, тј. двема правим у равни цртежа (сл. 254б), сем ако је права управна на π_1 или π_2, јер се тада a' или a'' своди на једну тачку.

Ма које две праве a' и a'' у равни цртежа, које нису управне на оси x, могу бити управне пројекције извесне праве a у простору. Заиста, ако π_1 и π_2 посматрамо у њиховом управном положају (као у сл. 254а) и кроз a' и a'' поставимо пројектујуће равни, ове равни се секу у извесној правој a, којој су a' и a'' управне пројекције



Сл. 253

Пројектујућу раван праве a, која је управна на π_1 називамо њеном *пројектујућом равни прве врсте,* а ону која је управна на π_2 њеном *пројектујућом равни друге врсте.*

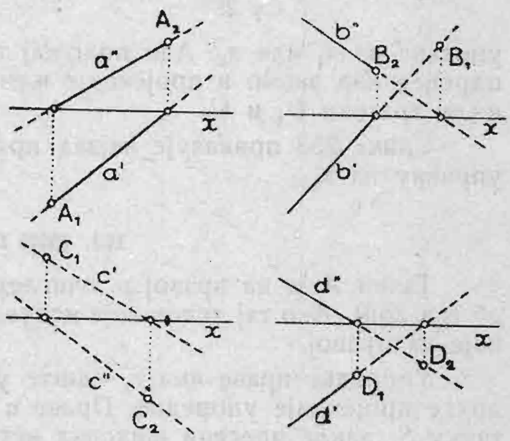


Сл. 254

Тачке у којима нека права продире пројекцијске равни називамо *траговима* те праве (§ 37). Тачку продора A_1 праве a кроз π_1 називамо *првим трагом,* тачку продора A_2 кроз π_2 *другим трагом* праве a (сл. 254). Ако је права a упоредна некој од пројекцијских равни, њен траг у тој равни је бесконачно далек.

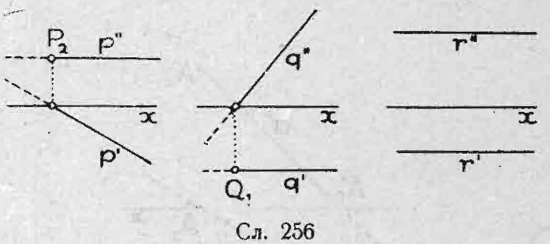
Како је тачка A_1 у π_1, прва пројекција A' поклапа се с A, а друга пројекција A'' је на оси x; за тачку A_2 је обратно. Отуд следује да трагове праве налазимо повлачењем управних на пројекцијску осу у тачкама где пројекције праве секу ту осу.

На слици 255 нацртане су пројекције правих које имају четири различита положаја у простору. Права a је својим средњим делом у првом квадранту, дакле продире раван π_1 у A_1 излазећи у четврти квадрант, а раван π_2 у A_2 излазећи у други квадрант. Права b је средњим делом у другом квадранту, дакле продире раван π_1 прелазећи у четврти, а раван π_2 прелазећи у први квадрант. Права c је средњим делом у трећем квадранту, а пролази још кроз други и четврти квадрант. Права d је средњим делом у четвртом квадранту, а пролази још кроз први и трећи квадрант. У сликама 254, 255 итд. су пројекције правих изван првог квадранта извучене цртицама.



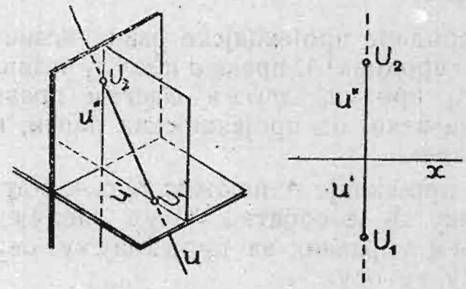
Сл. 255

Праве упоредне једној или другој пројекцијској равни су *главне линије.* Оне које су упоредне првој пројекцијској равни, тј. хоризонталне праве, зовемо *главне линије прве врсте* или *хоризонтале*, а праве упоредне другој пројекцијској равни зовемо *главне линије друге врсте* или *фронтале*. На слици 256 права *p* је главна линија прве врсте (хоризонтала): њена друга пројекција је упоредна пројекцијској оси; права *q* је главна линија друге врсте (фронтала): њена прва пројекција је упоредна оси *x*. Права *r* је упоредна обим пројекцијским равнима, дакле и пројекцијској оси: њене обе пројекције упоредне су оси.

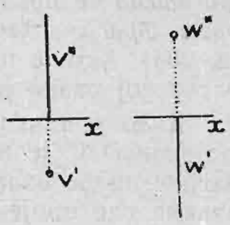


Сл. 256

Ако је права садржана у равни управној на пројекцијској оси, обе пројекције су јој уопште управне на оси и поклапају се (сл. 257). Тада права није одређена самим својим пројекцијама, јер исте пројекције имају све праве које се налазе у тој управној равни а нису



Сл. 257



Сл. 258

управне на π_1 или π_2. Али положај такве праве *u* постаје, разуме се, одређен кад знамо и пројекције њених двеју тачака, што могу бити и њени трагови U_1 и U_2.

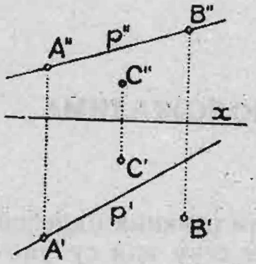
Слика 258 приказује најзад праву *v* управну на π_1 и праву *w* управну на π_2.

103. ДВЕ ПРАВЕ

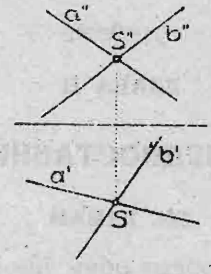
Тачка *A* је на правој *p*, очигледно, само ако је A' на p' и A'' на p'' (сл. 259). Ако тај услов није испуњен, као напр. за тачке *B* и *C*, тачка није на правој.

Упоредне праве имају, опште узев, прве пројекције упоредне и друге пројекције упоредне. Праве *a* и *b* које се секу имају пресечну тачку *S*, дакле пресеци њихових истоимених пројекција морају бити на истој ординали (сл. 260), јер само тада ти пресеци, S' и S'' претстављају пројекцију једне тачке *S*. Дакле, у општем случају, праве чије се пројекције секу у цртежу, не секу се у простору, већ су мимоилазне.

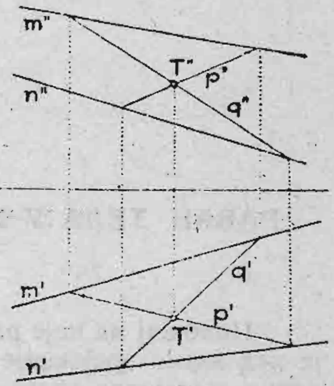
Може се догодити да се пројекције двеју правих *m* и *n* секу ван оквира цртежа (сл. 261). Да би се ипак проверило да ли се те праве секу или не уочимо по две тачке на свакој правој и поставимо кроз те тачке две помоћне праве p и q чије се пројекције секу у оквиру цртежа, у некој тачки T. Ако се те праве p и q секу, тј. $T'T'' \perp x$, секу се и праве m и n тј. није $TT'' \perp x$. Заиста, ако се p и q секу, припадају једној равни, дакле m и n припадају



Сл. 259



Сл. 260



Сл. 261

тој равни и секу се; и обрнуто, ако се m и n секу, припадају једној равни, дакле и p и q се секу.

Напоменимо још да су истоимене пројекције паралелних правих паралелне.

Задаци за вежбу

1. Изабравши јединицу дужине и мерећи позитивне апсцисе од извесне тачке O на десно, конструисати пројекције дужи AB за A (1, 2, 3), B (3, 3, 2) и затим за A (— 1, 3, 1), B (4, — 2,0).

2. Нацртати пројекције тачака које су подједнако удаљене од обих пројекцијских равни.

3. Наћи продоре кроз пројекцијске равни дужи AB кад је а) A у првом, B у другом квадранту, б) A у првом, B у трећем квадранту, в) A у првом, B у четвртом квадранту, г) A у другом, B у трећем квадранту, д) A у другом, B у четвртом квадранту, ђ) A у трећем, B у четвртом квадранту.

4. Поделити у датој размери дуж дату првом и другом пројекцијом.

5. Нацртати пројекције једне праве којој су дати трагови.

6. Нацртати пројекције једне праве садржане у π_1 или у π_2.

7. Претставити у две управне пројекције праву која пролази кроз дату тачку и која је управна а) на π_1, б) на π_2, в) на оси x.

8. Нацртати пројекције двеју мимоилазних правих.

9. Какав је положај праве чије се пројекције секу на пројекцијској оси?

10. Какве су две дужи којима се прве пројекције секу а друге пројекције су упоредне?

11. Какав је положај дужи чије обе пројекције су на пројекцијској оси?

12. Где се налази троугао чије пројекције а) имају симетричан положај према оси x, б) поклапају се?

13. Дате су две ма какве дужи, које немају заједничких тачака. Испитати да ли припадају једној равни.

14. Дате су две дужи чије пројекције су све управне на оси x. Испитати да ли су те две дужи упоредне или мимоилазне.

Упутство: Применити поступак као у слици 261.

15. Кад ће пројекције једне праве бити а) симетричне у односу на осу x, б) упоредне оси, в) кад ће се поклопити са осом?

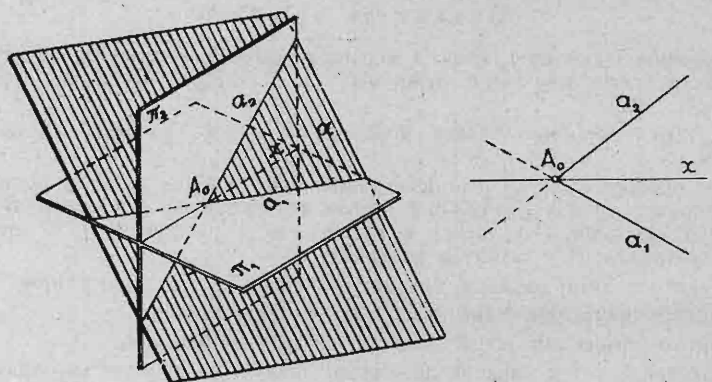
ГЛАВА II

РАВАН ТЕЛА У НАЈЈЕДНОСТАВНИЈИМ ПОЛОЖАЈИМА

104. РАВАН

Положај ма које равни према обим пројекцијским равнима одређен је кад знамо пројекције двеју њених правих (које се секу или су упоредне) или једне праве и једне тачке ван те праве, или трију тачака које нису на једној правој итд.

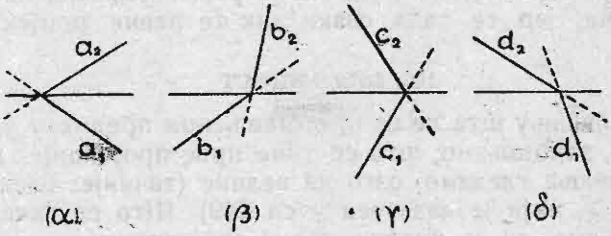
Међу правим једне равни нарочити значај имају њени пресеци с пројекцијским равнима, тј. *трагови* равни (§ 39). Пресек a_1 равни α с π_1 зове се *први (хоризонтални) траг* равни, а пресек a_2 с π_2 *други (фронтални) траг* равни (сл. 262). Како раван α сече и пројекцијску осу у извесној тачки A_0 (обичној или бескрајно далекој), *трагови* a_1 *и* a_2 *секу*



Сл. 262

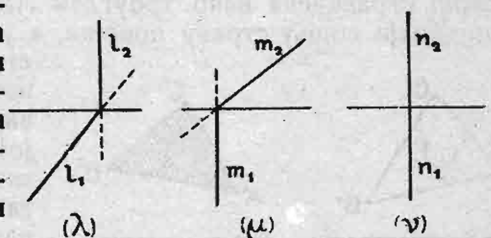
се на пројекцијској оси. С друге стране, ма какве две праве a_1 и a_2, прва у π_1, друга у π_2 и које се секу на пројекцијској оси, одређују извесну раван α којој су a_1 и a_2 трагови. Често је погодно и, бесумње, најједноставније изабрати оба трага једне равни за оне две праве помоћу којих желимо да ту раван претставимо. Обим траговима раван је одређена, док једним својим трагом, разуме се, није (у претходним одељцима додавали смо зато трагу равни још једну њену тачку). Напоменимо да је $a_1' \equiv a_1$, $a_1'' \equiv x$; $a_2'' \equiv a_2$, $a_2' \equiv x$.

У слици 263 дате су, у четири разна положаја, равни које су косе спрам обих пројекцијских равни. Трагови равни α и γ заклапају међу собом у простору оштар угао, а трагови равни β и δ туп угао. Разуме се, пројекције косе равни прекривају целе пројекцијске равни, као што већ знамо из пројекције на једну раван.



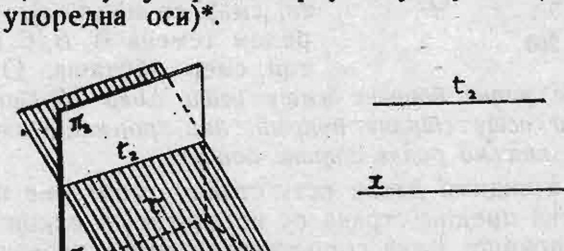
Сл. 263

Слика 264 приказује равни управне на пројекцијским равнима и то: раван λ управну на π_1 (други траг јој је управан на пројекцијској оси), раван μ управну на π_2 (њен први траг је управан на оси) и раван ν управну на π_1 и π_2 (оба трага су управна на оси). Дакле други траг показује да ли је раван управна на првој пројекцијској равни, а први траг да ли је управна на другој. У сва три случаја трагови заклапају у простору прав угао. Сем тога раван λ пројектује се на π_1 цела у свој први траг, тј. $\lambda' \equiv l_1$. Исто тако је $\mu'' \equiv m_2$ и $\nu' \equiv \nu'' \equiv n_1 \equiv n_2$.



Сл. 264

Ако је раван упоредна спрам π_1, нема првог трага, а други траг је упоредан пројекцијског оси; ако је упоредна спрам π_2, нема другог трага, а први траг је упоредан оси. Ако раван није упоредна пројекцијским равнима, али је упоредна пројекцијској оси (сл. 265) има оба трага, која су упоредна оси)*.



Сл. 265

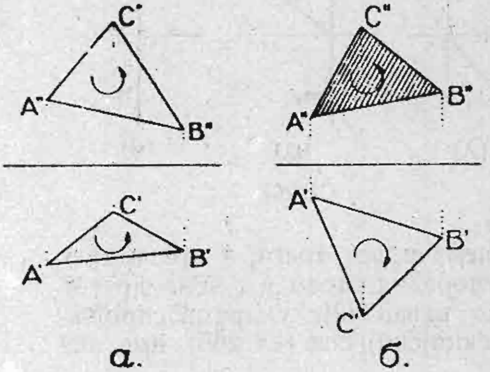
*) Читаоцу може користити ако исече из картона моделе равни: један квадрат и један ромб. Прислањањем квадрата уз обе управне равни модела споменутог у § 100, добија разне равни управне на π_1 или π_2 и упоредне оси x. Прислањањем ромба тако да теме његовог оштрог или тупог угла дође на осу x, добија косе равни.

Ако раван није претстављена траговима него другим својим линијама и тачкама, моћи ћемо извесне закључке о *њеном положају* према пројекцијским равнима донети најлакше пошто јој нађемо трагове. Али, напр. одмах видимо да ли је раван управна на једној пројекцијској равни, јер се тада сваки лик те равни пројектује у дуж.

105. ВИДЉИВОСТ

При одређивању шта се на претстављеном предмету у слици види а шта не види, замишљамо, што се тиче прве пројекције, да у правцу зрака пројектовања гледамо озго из велике (тачније: бесконачне) даљине (у смеру g, који је назначен у сл. 249). Што се тиче друге пројекције замишљамо да у правцу зрака пројектовања гледамо спреда из велике даљине (у назначеном смеру g_2). Прва и друга пројекција треба тако да буде слика онога што видимо гледајући у два назначена, узајамно управна смера.

Према томе, ако нам је својим пројекцијама дата ма каква равна површ ограничена напр. троуглом ABC (сл. 266, а и б) видимо у првој пројекцији горњу страну површи, а у другој пројекцији њену предњу страну. Питање је само да ли је то иста страна троугаоне површи, коју видимо у обим пројекцијама, или јој видимо разне стране? Уочимо зато, као у § 71 известан смер обртања на површи ABC, напр. онај који настаје кад посматрамо редом темена A, B, C. Као што из искуства знамо, ако мењамо свој положај према површи ABC, тај смер је за нас исти догод видимо исту страну површи, а чим се преместимо тако да видимо супротну страну површи, тај смер се мења, тј. посматрајући редом темена A, B, C имамо супротни смер обртања. Отуд следује: *ако обе пројекције равне површи имају исти смер обртања, видимо у обим пројекцијама исту страну површи: ако пројекције имају супротне смерове обртања, видимо разне стране површи.*



Сл. 266

У слици 266 а видимо дакле исту страну троугаоне површи ABC, њена горња и њена предња страна су истоветне: у слици 266 б видимо супротне стране површи, њена горња страна није истоветна с предњом него са задњом страном површи. Напоменимо да у слици 263 видимо у обим пројекцијама исту страну равни α и такође равни γ, а супротне стране равни β и равни δ. (Уверити се о томе савијањем листа хартије дуж осе).

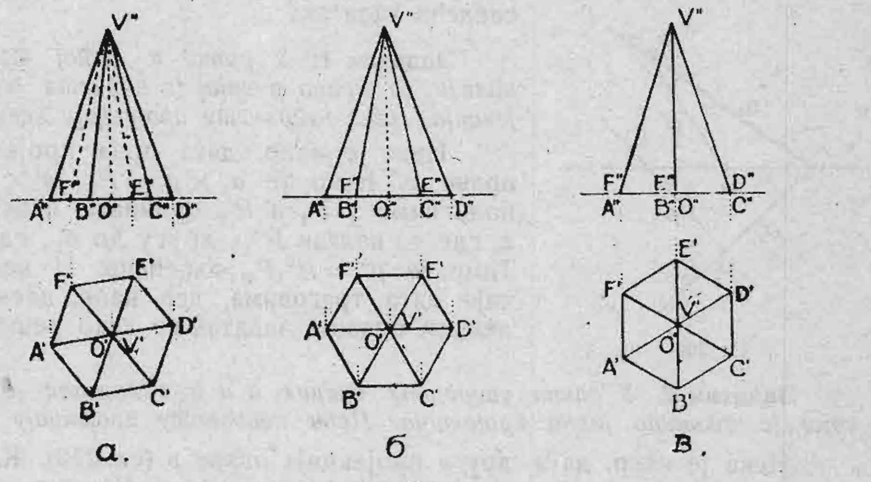
Ако се у двема управним пројекцијама претстављају ликови који не припадају једној равни, важно је имати на уму да је од двеју тачака које се у првој пројекцији поклапају видљива *виша* тачка, а од двеју тачака које се у другој пројекцији поклапају видљива је она која је од обих тачака *предња*, тј. *ближа* посматрачу. На тај начин друга пројекција казује о видљивости у првој пројекцији и обратно.

Нагласимо да је ипак основно да читалац у одређивању видљивости има просторну претставу онога шта је у пројекцијама дато. Тада ће лако и без упутства расуђивати о видљивости, а упутство ће му служити, кад затреба, као провера

Питање видљивости јављаће се особито у претстављању разних тела.

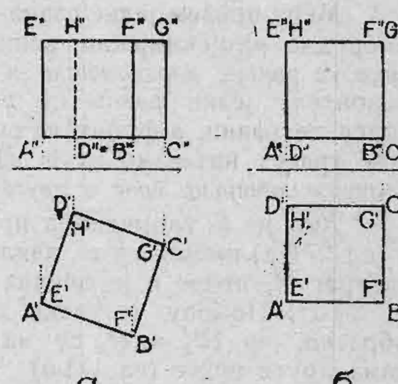
Задатак 1. *Нацртати у двема управним пројекцијама правилну шестострану пирамиду која основом стоји у* π_1, *а висина је једнака двострукој ивици при основи.*

Нацртајмо правилни шестоугао $ABCDEF$ (сл. 267а), који је у π_1, дакле је истоветан са својом првом пројекцијом и претставља основу



Сл. 267

пирамиде. Друга пројекција основе је дуж на оси x. Прва пројекција врха V поклапа се са средиштем O шестоугла. Имамо $O''V'' = OV = 2\,AB$. Бочне ивице се све виде у првој пројекцији. У другој пројекцији виде се пре свега (увек) крајње ивице AV и DV, затим BV и CV, јер су посматрачу ближе, као што видимо из прве пројекције, а ивице EV и FV се не виде. Шестоугао се могао нацртати и у нарочитом положају према оси x, али тада се у другој пројекцији неке бочне ивице поклапају, па и целе бочне стране могу се пројектовати као дужи (види сл. 267, б и в).



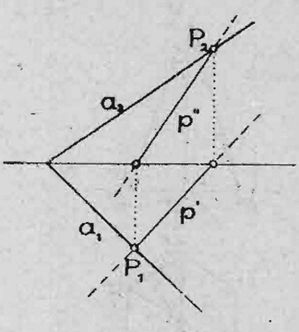
Сл. 268

Задатак 2. *Нацртати у двема управним пројекцијама коцку тако да су јој две стране хоризонталне.*

Као што слика 268 показује, прва пројекција коцке је квадрат. И друга пројекција је квадрат ако су друге две стране упоредне према другој пројекцијској равни (сл. 268, б). Само у супротном случају (сл. 268, а) имамо у другој пројекцији две ивице које не припадају рубу пројекције. Тада из прве пројекције видимо да се усправна ивица кроз B види, јер та ивица се у другој пројекцији поклапа с једном дужи на усправној пљосни која пролази кроз C, а из прве пројекције видимо да је ивица кроз B испред те дужи. Исто тако видимо да се усправна ивица кроз D не види.

106. ПРАВА И ТАЧКА У РАВНИ

Ако је нека раван α дата својим траговима a_1 и a_2, а нека права p је садржана у тој равни, трагови праве p су на одговарајућим траговима равни α, тј. $P_1 \subset a_1$, $P_2 \subset a_2$ (сл. 269). На основу тога решавамо следећи задатак:



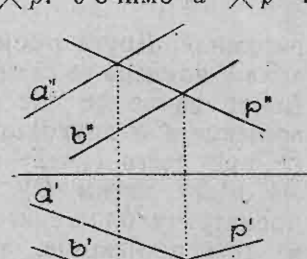
Сл. 269

Задатак 1. *У равни α датој траговима налази се права p којој је позната једна пројекција. Наћи непознату пројекцију праве p.*

Нека је напр. дата прва пројекција p' праве p. Како је $a_1 \times p' = P_1$, $p' \times x = P'_2$, подигнимо у P_1 и P'_2 ординале, прву до осе x, где се налази P''_1, другу до a_2, где је P_2. Тиме је $p'' = P''_1 P_2$ одређено. И кад раван није дата траговима, већ напр. двема паралелним правим, задатак се лако решава.

Задатак 2. *У равни упоредних правих a и b садржана је права p којој је позната једна пројекција. Наћи непознату пројекцију праве p.*

Нека је напр. дата друга пројекција праве p (сл. 270). Како је p у равни ab, постоје пресечне тачке $a \times p$ и $b \times p$. Уочимо $a'' \times p''$ и $b'' \times p''$. Где ординале повучене кроз те тачке секу a' и b' имамо прве пројекције пресечних тачака; кроз њих повуцимо p'.



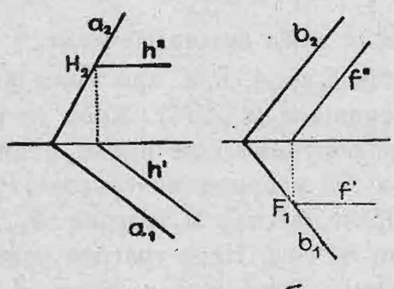
Сл. 270

Међу правим једне равни истичу се праве упоредне пројекцијским равнима, тј. *упоредници* те равни, *хоризонтале* и *фронтале*. Хоризонтале једне равни су упоредне првом трагу те равни, а фронтале су упоредне другом трагу; називамо их и *упоредницама* или *главним линијама прве и друге врсте*

Ако је h упоредница прве врсте, равни α (сл. 271, а) имамо $h \parallel a_1$, дакле и $h' \parallel a_1$. Други траг H_2 праве h је обична тачка (сем ако је $\alpha \parallel x$). Помоћу те тачке одређује се лако h'' кад је дато h', или обратно, јер H'_2 и H_2 су на једној ординали. Слично је с упоредницама друге врсте (сл. 171 б).

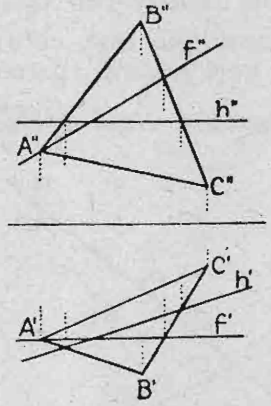
Ако раван није дата траговима, главне линије се одређују као свака права садржана у тој равни. У слици 272 h је главна линија прве врсте (хоризонтала) а f је главна линија друге врсте (фронтала).

Споменимо још *праве* (или *линије*) *највећег пада* (§ 39). И њих има две врсте: *линије пада прве врсте* су праве у датој равни које су управне на првом трагу те равни, а *линије пада друге врсте* су управне на другом трагу. Ако је у равни ρ m линија пада прве врсте, имамо такође $m' \perp r_1$, а m'' се одређује као обично; ако је n линија пада друге врсте имамо $n'' \perp r_2$.



а. б.

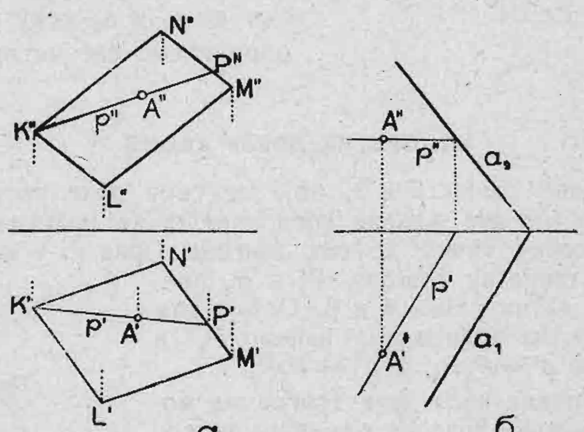
Сл. 271



Сл. 272

Ако у двема пројекцијама треба претставити тачку A која је садржана у датој равни α, не могу се изабрати по вољи обе пројекције такве тачке. Једну, рецимо прву пројекцију тачке A можемо изабрати ма где (јер свака тачка A' у π_1 је управна пројекција извесне тачке равни α, сем ако би било $\alpha \perp \pi_1$). Но самим тим је положај тачке A у α одређен, дакле је и њена друга пројекција одређена.

Задатак 3. *У двема управним пројекцијама дата је раван α и једна пројекција тачке A, садржане у α. Наћи непознату пројекцију тачке A.*



а. б.

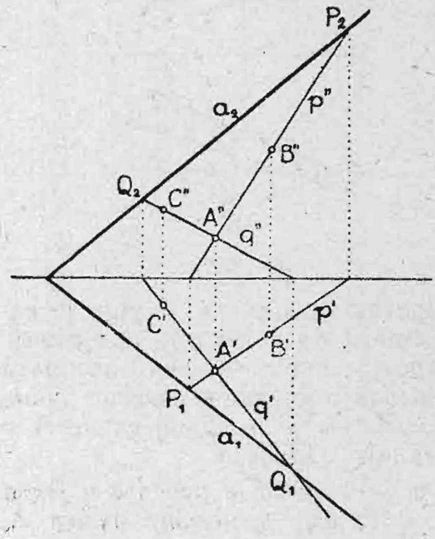
Сл. 273

Претпоставимо, као мало пре, да је дата права пројекција тачке A, тј. A'. (Слично би се поступало и кад би била дата друга пројекција).

Да би се добила друга пројекција тачке A, мора се у α кроз A поставити помоћна права, рецимо p, дакле кроз A' повући ма која права p' и одредити p'' као у претходном параграфу; тада се A'' налази на p''. Овај задатак је израђен у слици 273 и то прво кад је раван α дата паралелограмом $KLMN$, затим кад је дата траговима. У првом случају смо узели $p = AK$, одредили обе пројекције тачке $P = AK \times MN$ и тиме добили p''. У пресеку праве p'' с ординалом кроз A' је A''. У другом случају смо за праву p изабрали хоризонталу.

Видели смо како се одређују пројекције праве и тачке садржане у равни која је дата траговима. Решимо сад обрнути задатак:

Задатак 4. *Наћи трагове равни која је дата трима тачкама.*

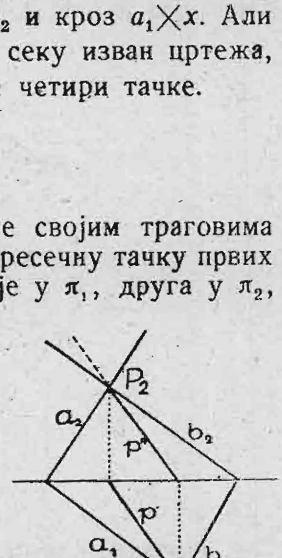


Сл. 274

Нека су A, B, C три тачке дате пројекцијама (сл. 274). Кроз те три тачке повуцимо две праве, рецимо AB и AC и одредимо трагове P_1 и P_2 праве $AB \equiv p$ и трагове Q_1, Q_2 праве $AC \equiv q$. Први трагови правих одређују први траг a_1 равни ABC, а други трагови тих правих, други траг a_2. Како се трагови равни увек секу на пројекцијској оси, проверавамо тиме да ли је цртеж тачан. Претпостављајући да цртамо тачно, та околност допушта да од четири тачке P_1, P_2, Q_1, Q_2 одредимо само три, рецимо P_1, P_2 и Q_1, јер a_2 пролази кроз P_2 и кроз $a_1 \times x$. Али ако се a_1 и a_2 секу изван цртежа, одредићемо све четири тачке.

107. ПРЕСЕК ДВЕЈУ РАВНИ

Ако су две равни α и β, које се секу дате својим траговима (сл. 275) имамо већ две њихове заједничке тачке: пресечну тачку првих трагова и пресечну тачку других трагова. Прва је у π_1, друга у π_2, дакле те две тачке су трагови P_1 и P_2 пресечне праве p датих равни α и β. Остаје нам дакле само да на ординалама нађемо P_1'' и P_2' и повучемо $p' = P_1P_2'$ и $p'' = P_2P_1''$.

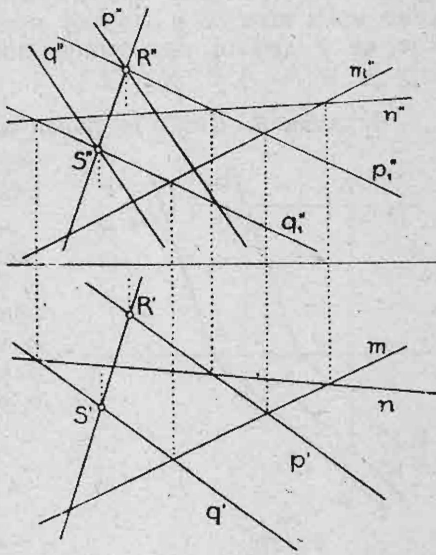


Сл. 275

Ако две равни нису дате траговима можемо, и не тражећи трагове одредити њихов пресек. Постављамо помоћне равни које су управне на π_1 или π_2, јер се пресеци такве равни с датим двема равнима лако одређују, а заједничка тачка тих пресека је заједничка тачка обих датих равни. Двема таквим заједничким тачкама одређен је тражени пресек обих равни.

Ако су две равни упоредне трагови су им упоредни, па и главне линије исте врсте су им упоредне. На основу тога лако је проверити да ли су две равни, дате траговима или на други начин, упоредне.

Задатак 1. *Одредити пресек двеју равни не служећи се њиховим траговима. Прва је дата правим m и n које се секу, друга упоредним правим p и q* (сл. 276).

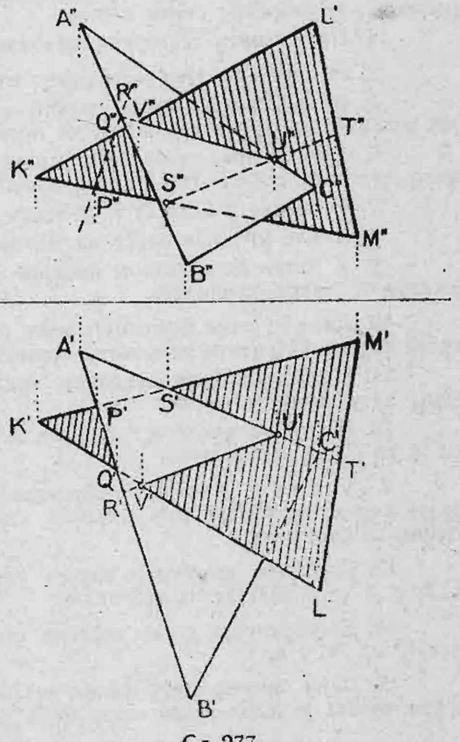


Сл. 276

Поставимо напр. кроз p раван управну на π_1 (пројектујућу раван праве p). Та раван сече раван pq у p а раван mn у некој другој правој p_1 за коју је $p_1' \equiv p'$ и која сече m и n у две тачке. Знајући прве пројекције тих тачака налазимо на одговарајућим ординалама њихове друге пројекције, и тиме другу пројекцију праве p_1. Како су p и p_1 у истој (пројектујућој) равни, секу се у извесној тачки R чију другу пројекцију имамо, јер је $R'' = p'' \times p_1''$, а отуд и прву пројекцију. Тачка R је заједничка тачка двеју датих равни. Исто тако налазимо и на q заједничку тачку S обих равни. Тиме је пресек RS тих равни одређен.

Задатак 2. *Одредити пресек двеју троугаоних равних површи, датих својим пројекцијама.*

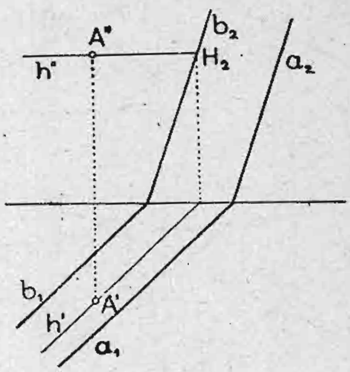
Нека су то троугаоне површи ABC и KLM (сл. 277). Поступајући као у претходном примеру поставимо напр. пројектујуће равни правих AB и AC, управне на π_1 (могле би се исто тако узети и пројектујуће равни управне на π_2). Прва раван сече троугаону површ KLM по дужи PQ, друга по дужи ST. Тада налазимо $AB \times PQ = R$, $AC \times ST = U$ и на правој RU тачку V. Тражена пресечна дуж је UV.



Сл. 277

Напослетку, да би се одредило што се у првој пројекцији види, посматрајмо напр. тачку P на KM и ону тачку на AB која се у првој пројекцији поклапа с P. У другој пројекцији је ова тачка изнад тачке P, дакле у првој пројекцији види се ова тачка, а не P, тј. у близини тачке P види се AB с обих страна тачке P, а KM се види само од K до P и, разуме се, од S до M. Према томе и AV се види, дакле UC се не види. Тако утврђујемо, обилазећи оба троугла у првој пројекцији, шта се у првој пројекцији види, а шта не. Исто тако можемо наћи шта се у другој пројекцији види, полазећи од две тачке које се у другој пројекцији поклапају, напр. од тачке W на KL за коју је $W'' = A''C'' \times K''L''$.

Задатак 3. *Дата је раван α траговима и тачка A ван те равни.* Одредити трагове равни β која је упоредна спрам α и садржи тачку A.



Сл. 278

Кроз A можемо повући одмах једну упоредницу равни β, напр. хоризонталу h, јер $h' \parallel a$, $h'' \parallel x$ (сл. 278). Кроз други траг праве h пролази други траг b_2 равни β, који је упоредан трагу a_2. Тако добијамо b_2, а затим кроз $b_2 \times x$ пролази $b_1 \times a_1$.

Задаци за вежбу

1. Претставити траговима раван која пролази кроз дату тачку **A и** а) упоредна је спрам равни π_1, б) упоредна је спрам равни π_2.

2. Одредити трагове равни дате двема упоредним правим.

3. Претставити двема правим раван а) упоредну спрам равни π_1, б) управну на раван π_1, в) упоредну спрам осе x.

4. Претставити траговима неколико равни које пролазе кроз једну дату праву

Напомена: Има бесконачно много тих равни.

5. Дата је раван двема правим које се секу и прва пројекција једне праве у тој равни. Наћи другу пројекцију те праве (не тражећи претходно трагове равни).

6. Дата је прва пројекција једног равног петоугла и друга пројекција његових двеју суседних страна. Наћи другу пројекцију целог петоугла.

7. Исто као у задатку 6, за један шестоугао коме су **две** и **две** стране упоредне.

8. Зашто је раван одређена једном својом линијом пада?

9. У равни датој једном линијом пада нацртати праву којој знамо а) прву пројекцију, б) другу пројекцију.

10. Дата је једна пројекција неке равне криве линије, и друга пројекција њених трију тачака. Одредити непознату пројекцију које било њене тачке.

11. Наћи пројекције неколико правих које су у датој равни α и пролазе кроз једну дату тачку те равни.

12. Дат је ма какав четвороугао $ABCD$ пројекцијама својих темена. Испитати да ли је то раван четвороугао.

Упутство: Ако је четвороугао раван, његове две дијагонале се секу (или: праве којима припадају две супротне стране четвороугла секу се у обичној или бескрајно далекој тачки).

13. Одредити пројекције тачака садржаних у равнима разних положаја (равни α, β, γ, δ у сл. 263) датих траговима.

14. Конструисати у две управне пројекције косу петострану призму чија основа је а) у π_1, б) у π_2.

15. Наћи пресек двеју равни датих траговима а) кад су им први трагови упоредни, б) кад је једна раван коса, друга хоризонтална или вертикална.

16. Наћи пресек двеју косих равни датих траговима кад им се у цртежу не секу а) први трагови, б) други трагови, в) ни први ни други трагови.

17. Наћи помоћу трагова пресек двеју равни α и β кад је а) $\alpha \perp \pi_1$, б) $\alpha \perp \pi_2$, $\beta \parallel x$, в) $\alpha \perp \pi_1$, $\beta \perp \pi_2$.

18. Наћи пресек двеју равни чији су трагови упоредни према оси x.

Упутство: Пресећи обе равни неком помоћном косом равни или управном на π_1 или π_2.

19. Наћи пресек двеју равни чији се сви трагови сустичу у истој тачки на пројекцијској оси.

Упутство: а) Пресећи обе равни једном помоћном косом равни, б) пресећи обе равни једном хоризонталном (или фронталном) равни и у тој равни наћи пресечну тачку обих равни.

20. Наћи пресек двеју равни, свака дата паралелним правим, а) не употребљавајући трагове, б) помоћу трагова.

21. Наћи пресек двеју равни чији се разноимени трагови поклапају (тј. први траг прве равни с другим трагом друге равни и други траг прве равни с првим трагом друге равни).

22. Наћи пресек двеју равни од којих је једна дата траговима а друга троуглом ABC, не одређујући трагове ове друге равни. Одредити шта се види.

23. Дате су две праве a, b у π_1 и још две праве a_1 и b_1 ван π_1: $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. Одредити пресек равни aa_1 и bb_1 а) помоћу трагова тих равни, б) без трагова.

24. Наћи пресек равни косе према обим пројекцијским равнима једном равни која је а) упоредна спрам π_1, б) упоредна спрам π_2, в) упоредна спрам осе x, г) управна на π_1, д) управна на π_2, ђ) управна на оси x. Равни су дате траговима.

25. Претпоставити два троугла у упоредним равнима, датим траговима. Затим, не узимајући више у обзир трагове, проверити упоредност тих равни испитујући да ли у равни једног троугла постоје праве упоредне правим у равни другог троугла.

26. Наћи заједничку тачку трију равни датих троуглима.

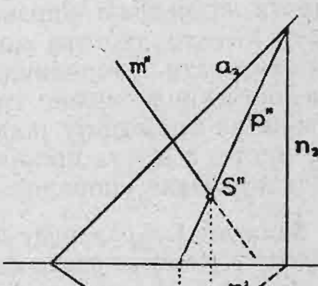
108. ПРОДОР ПРАВЕ КРОЗ РАВАН

Тачку продора праве m кроз раван α налазимо постављањем какве било помоћне равни која садржи праву m и пресецањем дате равни α том помоћном равни. Како је пресечна права p тих равни у једној равни с датом правом m, обе праве се секу (или су упоредне). Тачка S пресека је заједничка тачка праве m и равни α, тј. тачка продора.

За помоћну раван је најпростије узети пројектујућу раван прве или друге врсте праве m, сем кад би међусобни положај праве и равни био такав да је то у цртежу незгодно. У том случају можемо узети коју било раван кроз ту праву.

У ствари, продоре правих кроз раван одређивали смо већ кад смо у § 107 налазили пресек равни не тражећи трагове тих равни (израђени задаци 1 и 2). Две тачке, R и S, у израђеном задатку 1 (§ 107) су продори правих p и q кроз раван mn. Стога сад нећемо засебно посматрати пресек праве и равни дате на други начин, већ само кад је раван дата својим траговима.

Задатак 1. *Нека је α раван дата траговима a_1 и a_2 и m дата права* (сл. 279). *Наћи тачку у којој та права продире дату раван.*



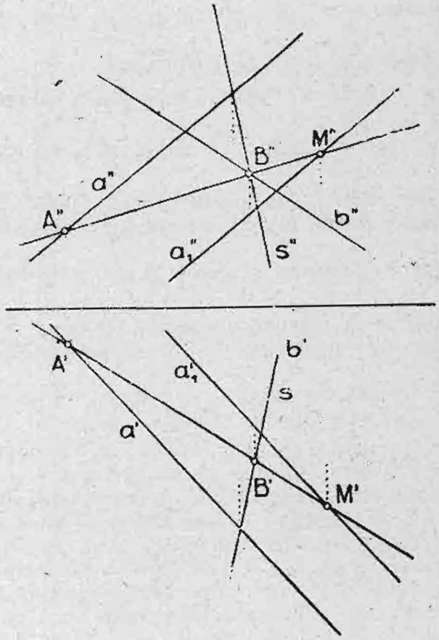
Сл. 279

Поставимо кроз m пројектујућу раван прве врсте, $\nu(\pi_1, \pi_2)$. Равни α и ν секу се у правој p. Праве m и p секу се у тачки S. Ово је тачка продора праве m кроз раван α. Део праве заклоњен равнином α извучен је на слици тање.

Задатак 2. *Кроз дату тачку поставити праву која сече две дате праве.*

Нека су a и b дате праве, M тачка (сл. 280). Кроз M и a постављамо раван и тражимо продор B праве b кроз ту раван. При томе није потребно одређивати трагове те равни.

Повуцимо кроз M напр. праву $a_1 \parallel a$ и кроз b раван ν управну на π_1. Нека је $\nu \times aa_1 = s$. У другој пројекцији налазимо тачку $B = b \times s$. Како је B у равни aa_1, права MB је у тој равни, дакле сече се с правом a у извесној тачки A, па је, према томе, то тражена права која пролази кроз M и сече праве a и b у тачкама A и B.



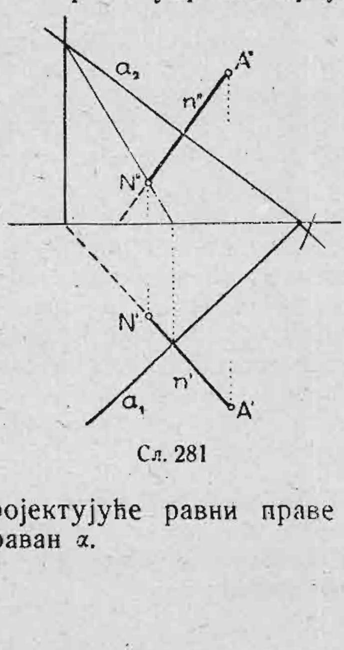
Сл. 280

109. УПРАВНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

Као што из посматрања једне управне пројекције знамо, ако је нека права управна на извесној равни њена управна пројекција је управна на трагу те равни. Исто је кад посматрамо управне пројекције на две равни: да би нека права била управна на извесној равни, потребно је и довољно да њена прва пројекција буде управна на првом трагу те равни, а друга пројекција управна на другом трагу. Уместо трагова можемо, разуме се, посматрати упореднице дате равни: прва пројекција праве треба да буде управна на пројекцију једне упореднице прве врсте, а друга пројекција праве на пројекцију једне упореднице друге врсте.

Задатак 1. *Кроз дату тачку поставити праву управну на раван дату траговима.*

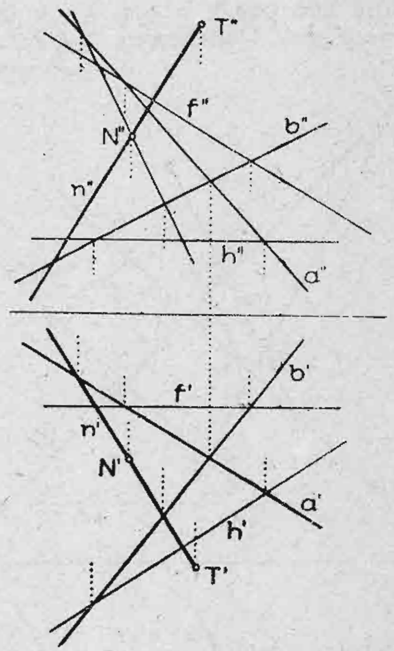
Нека је A тачка, α раван (сл. 281). Из тачака A' и A'' повлачимо управне на a_1 одн. на a_2. То су пројекције праве n, управне на α. Затим помоћу једне пројектујуће равни праве n налазимо тачку N, где управна n продире раван α.



Сл. 281

Задатак 2. *Из дате тачке спустити управну на раван дату двема правим које се секу (не служећи се траговима).*

Нека је T дата тачка, a и b праве којима је одређена раван (сл. 282). Ако хоћемо да избегнемо налажење трагова равни (што је каткад потребно и зато што их у оквиру цртежа не можемо добити) налазимо једну хоризонталу h и једну фронталу f те равни у обим пројекцијама. Права n која пролази кроз T и чије пројекције су $n' \perp h'$ и $n'' \perp f''$, је тражена права, управна на датој равни. Затим налазимо тачку продора N на познати начин, напр. помоћу пројектујуће равни прве врсте праве n.



Сл. 282

Свака раван која садржи праву управну на некој равни, такође је управна на тој равни. На основу тога конструишемо равни управне на датој равни. Да би се добила раван која пролази кроз једну тачку и управна је на датој равни, прво спуштамо из тачке управну на раван, а затим кроз ту управну постављамо раван. Задатак је неодређен јер постоји бескрајно много управних равни које пролазе кроз једну управну праву.

Конструкција равни која пролази кроз дату праву косу спрам дате равни и која је управна на тој равни је, напротив, задатак с одређеним решењем. Треба прво из једне тачке дате праве спустити праву управну на дату раван. Дата права и та управна одређују тражену раван.

Напоменимо да истоимени трагови двеју међу собом управних равни нису међу собом управни, сем ако је бар једна од тих равни управна на једној или другој пројекцијској равни. Равни којима су оба истоимена трага управна један на другом нису никад међу собом управне.

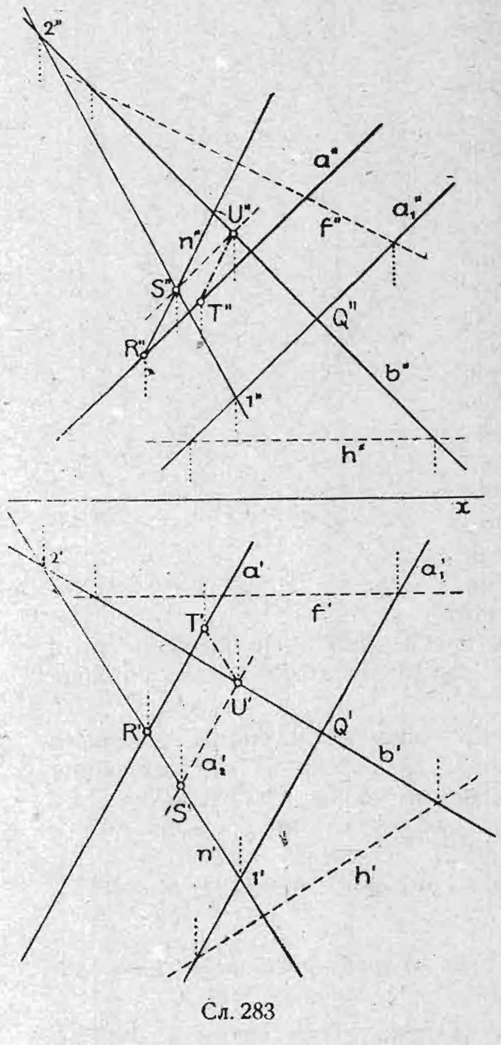
Један од задатка који се решава помоћу управних правих и равни је следећи:

Задатак 3. *Наћи заједничку нормалу и најкраће растојање двеју мимоилазних правих.*

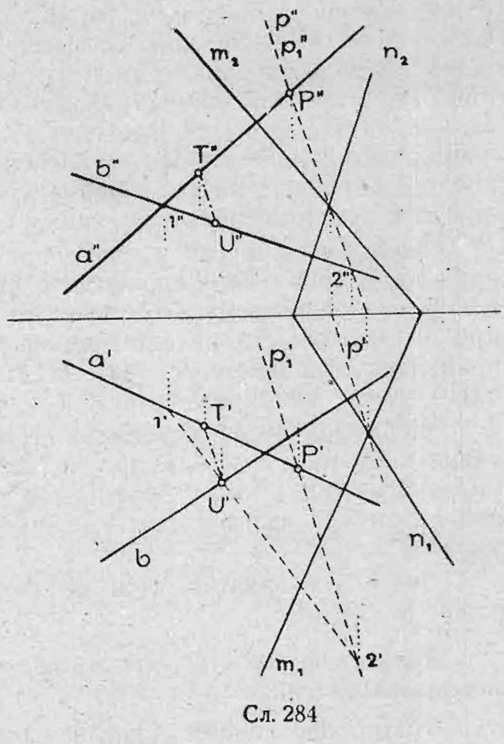
Имамо два начина решавања овог задатка. Први начин познајемо из § 79, где је приказан прво на помоћној слици 193а. Зато га сад није потребно дуже излагати.

I. Дате су мимоилазне праве a, b (сл. 283). Кроз ма коју тачку Q на b поставимо $a_1 \parallel a$ и помоћу упоредница h и f равни ba_1 (а могло би се и помоћу трагова те равни) одредимо пројекције управне n на ba_1 спуштене из неке тачке R на a. Тада помоћу пројектујуће равни прве врсте праве n налазимо $S = n \times ba_1$. Дуж RS једнака је најкраћем растојању тачака правих a и b. Заједничку нормалу TU добијамо постављањем кроз S праве $a_2 \parallel a_1$, јер $U = b \times a_2$ а тада је $TU \parallel RS$

II. Дуж TU налази се у једној равни управној на a и у једној равни управној на b. Праве a и TU одређују једну раван σ, а продор праве b кроз σ даје тачку U. Како TU не знамо унапред, постављамо ма које две равни $\mu \perp a$, $\nu \perp b$ одредивши им трагове (сл. 284). Нека је $p = \mu \times \nu$. Очигледно, $p \parallel TU$. Затим ма кроз коју тачку P праве a поставимо праву $p_1 \parallel p$. Како је $p_1 \parallel TU$, раван σ је истоветна с равни ap_1. Сад можемо конструисати тачку продора $U = b \times \sigma$ не тражећи трагове равни σ, а отуд имамо праву $TU \parallel p$ и T у пресеку с a. Тако смо добили обе најближе тачке мимоилазних правих.



Сл. 283



Сл. 284

Задаци за вежбу

1. Наћи продор ма какве праве и равни а) која пролази кроз пројекцијску осу и једну дату тачку; б) чија се оба трага поклапају.

2. Наћи тачку у којој косу раван продире права а) управна на π_1; б) управна на π_2; в) која је у равни управној на пројекцијској оси.

3. Кроз дату тачку поставити раван управну на дату праву.

4. Одредити трагове равни која пролази кроз дату тачку и управна је на две равни дате а) траговима, б) паровима правих које се секу.

Упутство: Може се прво тражити пресек датих равни и кроз дату тачку поставити раван управна на ту пресечну праву; или из дате тачке спустити управна на сваку од датих равни, раван одређена тим двема правим је тражена раван.

5. Одредити трагове равни која пролази кроз дату тачку и управна је на π_1 и на још једну дату раван.

6. Кроз дату праву поставити раван управну на дату раван а) служећи се траговима, б) не служећи се траговима.

7. Кроз дату тачку поставити праву управну на дату праву а) помоћу трагова, б) без трагова.

Упутство: Кроз дату тачку поставити раван управну на дату праву а затим у тој равни наћи тражену праву.

8. Претставити а) траговима б) паралелограмом раван управну на дату раван и која пролази кроз линију тла.

9. Кроз праву чије се пројекције поклапају с траговима дате равни поставити раван управну на дату раван и наћи њихов међусобни пресек.

10. Дате су три праве од којих је једна хоризонтална. Кроз ту хоризонталну праву поставити раван такву да управне пројекције првих двеју правих на ту раван буду паралелне.

110. ИЗОСТАВЉАЊЕ ПРОЈЕКЦИЈСКЕ ОСЕ

Нормална (и уопште паралелна) пројекција неког предмета на једну пројекцијску раван не мења ни свој облик ни величину ако се та раван помера упоредно себи самој. И кад се обе међу собом управне пројекцијске равни померају упоредо себи самима, а предмет остаје непомичан, његове пројекције се не мењају. Само се отстојања тачака од обих пројекцијских равни мењају, а услед тога се и обе пројекције померају паралелно себи самим, свака у својој равни, удаљујући се од пројекцијске осе или приближавајући јој се.

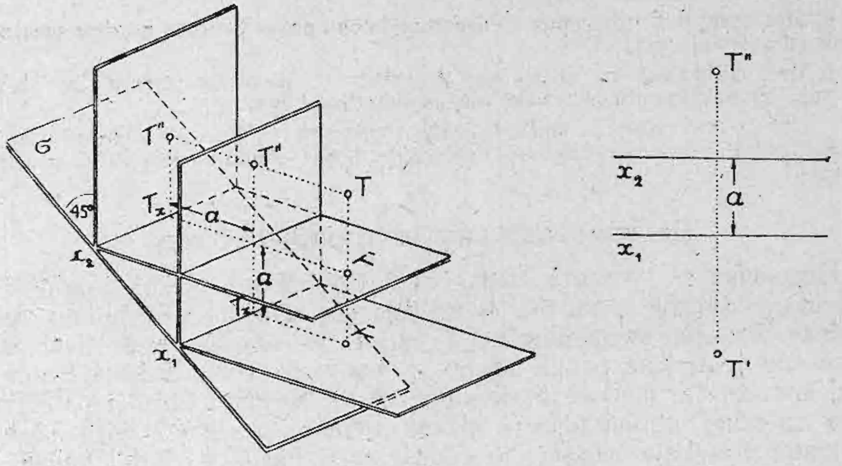
С друге стране, у многим задацима и применама нацртне геометрије није ни потребно познавати тачно положај предмета спрам пројекцијских равни, него само његов облик и његову величину, а у ту сврху довољно је знати само његове две управне пројекције. У техничким наукама потребне су често само управне пројекције разних предмета (зграда, стројева, њихових делова итд.) на две управне равни, јер се у тим пројекцијама налазе сви подаци који се тичу облика и величине предмета. Долази ли пак уз облик и тачан положај неког предмета према некој равни, тада је и сама та раван, у неку руку, део предмета,

Ни у многим задацима саме нацртне геометрије не долази у обзир тачан положај пројекцијских равни према предмету који се претставља. Таквих задатака смо већ имали. То беху задаци у којима нисмо цртали трагове правих и равни. Самим тим свеједно је хоће ли се у тим задацима пројекцијске равни померити упоредно себи самима. Таквим померањем би се само пројекцијска оса померила, а обе пројекције највише ако би се међу собом размакнуле или приближиле. дакле, у свим тим задацима било је непотребно цртати пројекцијску осу x*. Довољне су обе пројекције предмета, нацртане тако да се обе пројекције сваке тачке налазе на једној ординали. Саме ординале одређују пак правац осе x.

* Као што се одмах види, у решавању тих задатака није се оса x ни употребљавала (задаци уз слике 272, 273а, 276, 277, 280, 282, 283).

Према томе, да се не би цртало нешто непотребно, често се у **сликама** изостављају пројекцијске осе. Тога ћемо се и ми отсада држати кад год нам та оса није у решавању задатка потребна. Разуме се, тада не треба ни тражити трагове правих и равни.

Изостављањем осе x постаје положај пројекцијских равни спрам претстављеног предмета донекле неодређен. Каква је неодређеност налази се посматрањем неке тачке T и пројекцијских равни кад оса x пређе из x_1 у x_2 (сл. 285). Тада се ордината $y = \overline{T'T_x}$ повећа за a, а



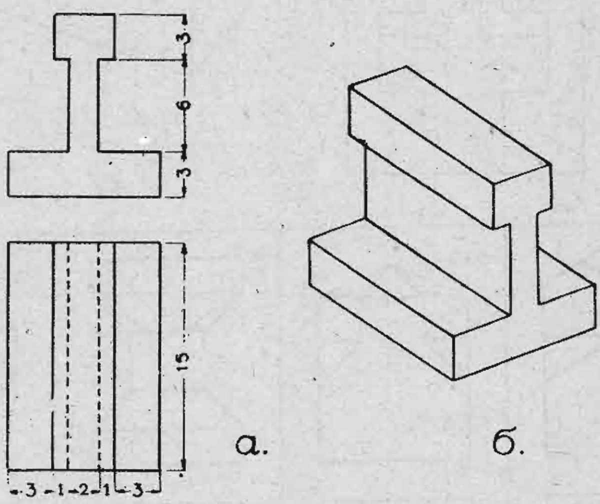
Сл. 285

кота $z = \overline{T''T_x}$ смањи за a, дакле раван π_2 се померила за a уназад, а π_1 за a навише. При томе се оса x паралелно помера по равни σ која је садржана стално у другом и четвртом квадранту простора и располовљује оба та диједра *(раван поклапања).*

111. ИЗБОР ПОЛОЖАЈА ПРЕДМЕТА ПРЕТСТАВЉЕНОГ ДВЕМА УПРАВНИМ ПРОЈЕКЦИЈАМА

Кад се у применама нацртне геометрије тела претстављају двема управним пројекцијама бирају се положаји пројекцијских равни према телу често тако да те равни буду упоредне већини ивица тог тела или главним пљоснима тела или његовим равнима симетрије. Ти се положаји називају *паралелним положајима.* Особито на техничким предметима постоје пак врло често три међу собом управна правца у којима су ивице већином постављене или две међу собом управне равни симетрије итд., а тада претстављање двема управним пројекцијама (сад још не говоримо о трећој пројекцији) у паралелним положајима долази у обзир особито зато што се ивице и удаљености које су упоредне пројекцијским равнима показују у пројекцији у правој величини, тако да их градитељ може узимати непосредно из слике. У ту сврху се и мере, рецимо у центиметрима, обично бележе уз ивице (као у сл. 286а). На томе се делом оснива практична вредност методе придружених нормалних пројекција.

У слици 286а дато је извесно рогљасто тело тлоцртом и нацртом у једном од паралелних положаја, тако да се све његове ивице показују у правој величини, било у првој или у другој пројекцији. Оса x је изостављена. Две цртkане дужи у првој пројекцији претстављају две вертикалне пљосни, дакле и два пара хоризонталних ивица на тим пљоснима, које се озго не виде, а у другој пројекцији се показују као дужи на истим ординалама. Из прве или друге пројекције саме



Сл 286

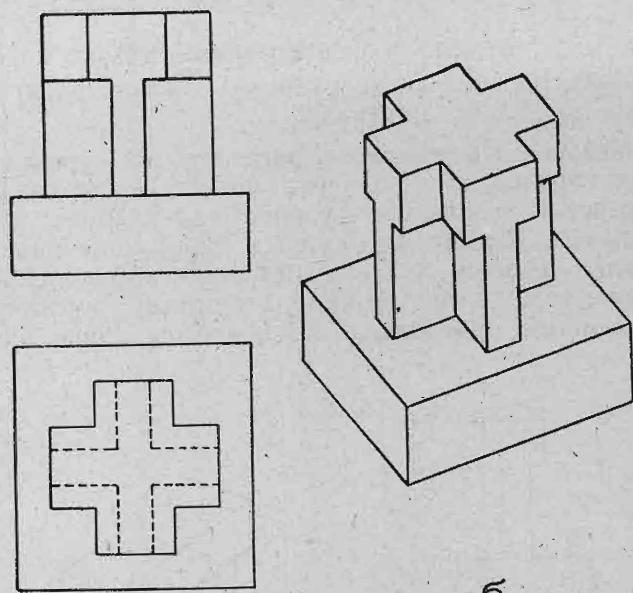
за себе, не сазнајемо ни издалека какав је облик предмета, јер у свакој пројекцији постоје ивице које се поклапају па и пројектују као тачке. На основу таквих двеју „несликовитих" пројекција предмет је одређен и треба га претставити. Да би се читалац у томе вежбао доносе се идући задаци. У сл. 286б дата је управна пројекција истог предмета кад је овај у општем положају према равни слике.

Задаци за вежбу

1. У слици 287а дате су две управне пројекције извесног рогљастог предмета а у слици 287б исти предмет у скици (паралелној пројекцији) без мерења, какву би могао читалац већ сад нацртати. Обележити словима поједина темена у све три пројекције.

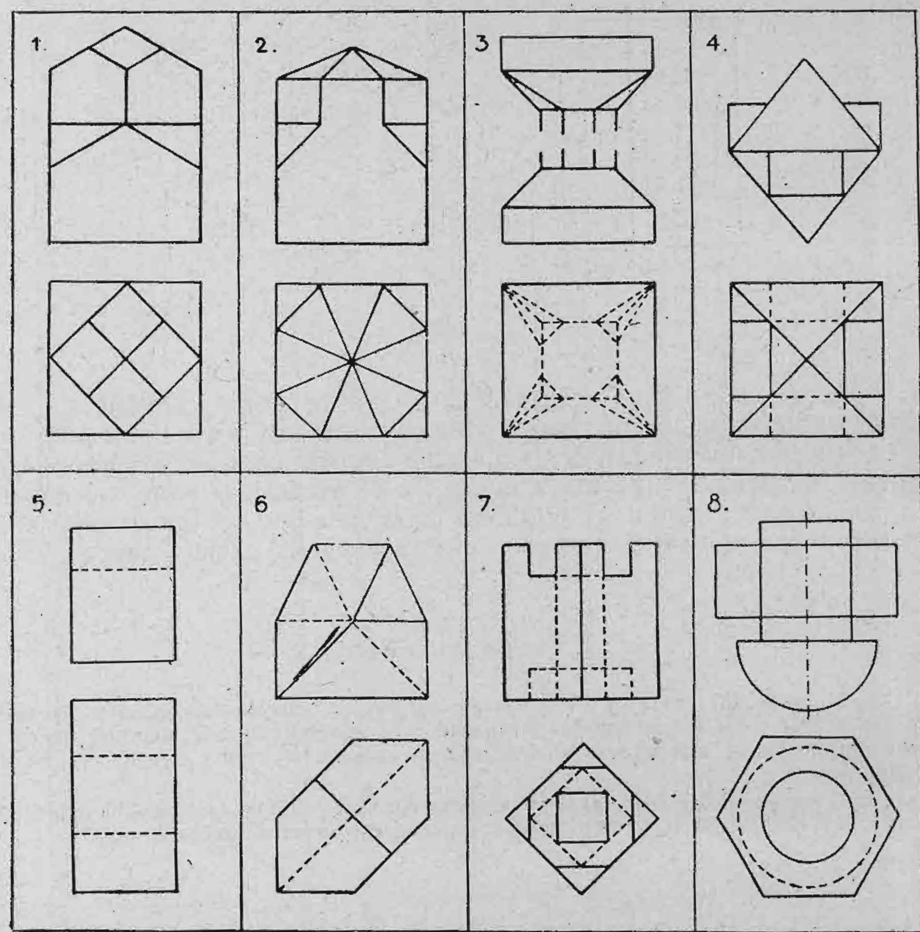
2. У слици 288, 1 до 8, дата су извесна рогљаста тела у две управне пројекције. Нацртати у скицама, као у слици 287б те предмете у општим положајима.

Сл. 287



а. б.

Сл. 288

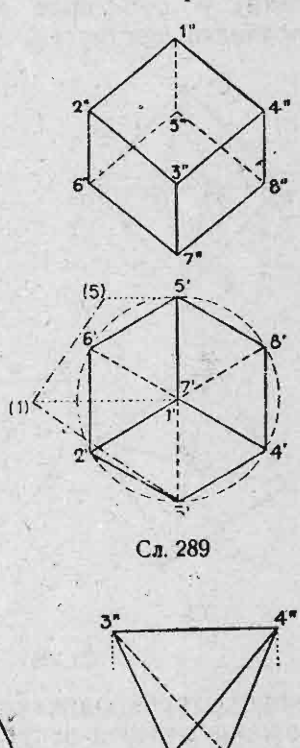


112. ПРАВИЛНИ ПОЛИЈЕДРИ

Правилних полиједара (правилних рогљастих површи) има пет. правилни *тетраедар*, правилни *хексаедар* (или коцка), правилни *октаедар*, правилни *додекаедар* и правилни *икосаедар*. (Имена тих полиједара казују колико страна имају, јер на старом грчком језику *тетра* значи четири, *хекс* шест, *окто* осам, *додека* дванаест, *икоси* двадесет).

Ивице правилног тетраедра граде у простору четири равнострана троугла, ивице коцке шест квадрата, ивице правилног октаедра осам равностраних троуглова, ивице правилног додекаедра дванаест правилних петоуглова, ивице правилног икосаедра двадесет равностраних троуглова.

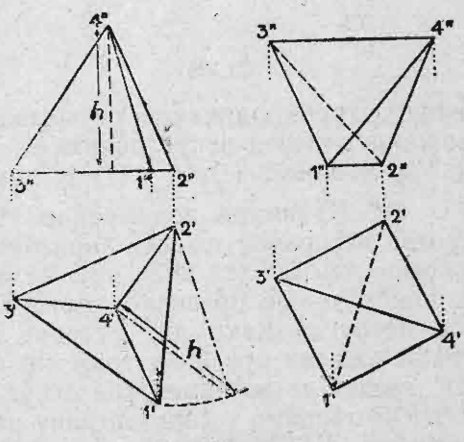
I. Коцка. У слици 268 имали смо већ коцку у једном паралелном и у једном општијем положају. Додајемо слику 289, где се коцка на π_1 пројектује у правцу своје дијагонале *17*. Како све три ивице које полазе из једног њеног темена граде с дијагоналом која полази из истог темена једнаке углове, те ивице се у правцу те дијагонале пројектују у три једнаке дужи ($1'2' = 1'4' = 1'5'$). Те дужи заклапају међу собом једнаке углове. Одатле се лако види да је руб прве пројекције коцке правилан шестоугао. Релативна отстојања од π_1, дакле и другу пројекцију добијамо обарањем дијагонале *1 3* и ивице *1 5*. Имамо $(1)\,3' = 1\,3 = 2\,4 = 2'4'$; тако налазимо (1), а отуд (5), јер $(1)(5) \perp (1)\,3'$. Затим $1''3'' = 5''7'' = (1)1'$, $1''5'' = 3''7'' = (1)1' - (5)5'$.



Сл. 289

II. Правилни тетраедар. Правилни тетраедар *1 2 3 4*, коме је страна *1 2 3* хоризонтална добијамо у првој пројекцији непосредно, а у другој пројекцији пошто нађемо висину *h* тетраедра (сл. 290а). Ово можемо учинити обарањем вертикалне равни која садржи једну косу ивицу, напр. ивицу *2 4*. Тада је $2'(4) = 1'2'$, а $4'(4) = h$.

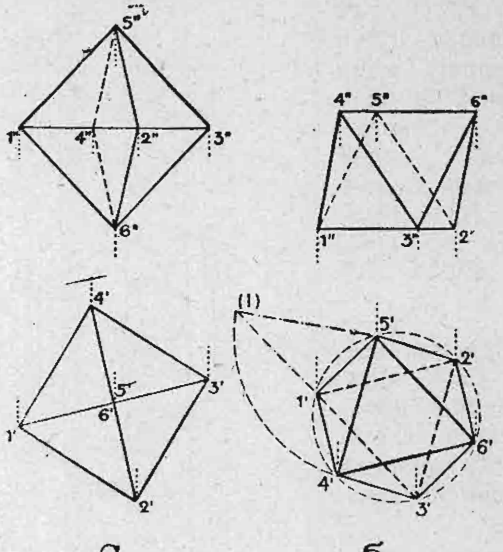
И ако на свакој страни коцке повучемо по једну дијагоналу, тако да се по три дијагонале суседних страна састају у једном темену, добијамо правилан тетраедар. Ако дакле нацртамо пројекције коцке с хоризонталним странама (као у сл. 268а) и повучемо дијагонале њених страна пазећи да на паралелним странама дијагонале буду мимоилазне, добијамо пројекцију правилног тетраедра који „стоји“ на једној својој ивици (сл. 290б).



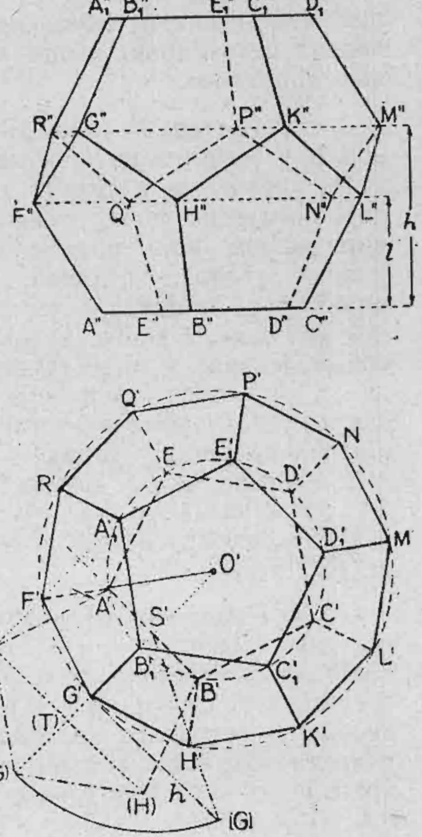
Сл. 290 *а* и *б*

III. Правилни октаедар. Ако је заједничка основа двеју четвоространих пирамида *1 2 3 4 5* и *1 2 3 4 6*, које сачињавају правилан октаедар, хоризонтална, октаедар се на раван тла пројектује у квадрат (сл. 291а). Ивице се пројектују при томе у странице и полудијагонале тог квадрата. У другој пројекцији видимо обе четворостране пирамиде. Њихове висине заједно сачињавају једну дијагоналу октаедра, па како су све три дијагонале једнаке, имамо $5''6'' = 1'3'$, а отуд се лако црта друга пројекција.

Ако правилни октаедар „стоји“ на једној својој пљосни (сл. 291б) у првој пројекцији се равнострани троугао те пљосни не види (црткано) а њој паралелна пљосан се види. Оба троугла образују правилну шестокраку звезду (хексаграм) а руб прве пројекције је правилан шестоугао. За другу про-



Сл. 291



Сл. 292

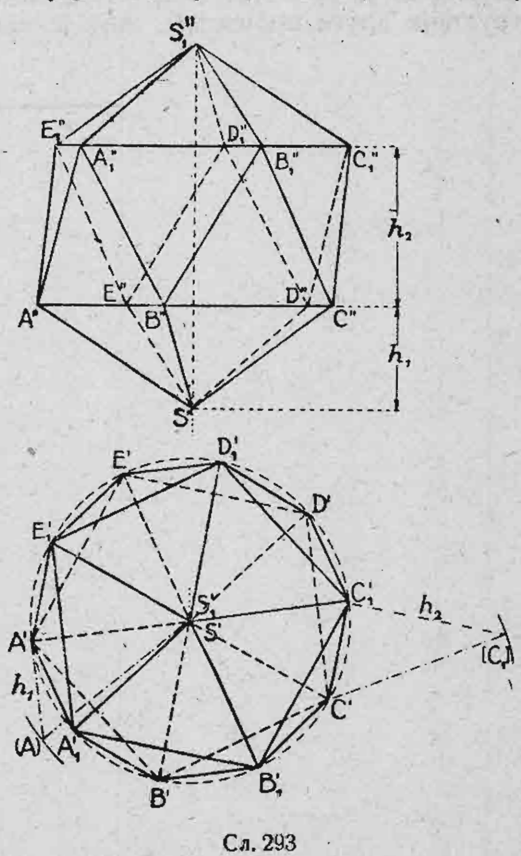
јекцију треба одредити растојање обих хоризонталних пљосни, а то можемо учинити напр. обарањем ивице *1 5* тј. из $(1)(5) = 4'5'$ и $(1)1' \perp 1'5'$ добијамо (1), а $1'(1)$ је тражено растојање.

IV. Правилни додекаедар. Нацртајмо правилни додекаедар коме су две наспрамне пљосни хоризонталне. Пођимо од доње хоризонталне пљосни *ABCDE* (сл. 292), која се пројектује на π_1 у правој величини (о конструкцији правилног петоугла види § 19). Нека је *O* средиште тог петоугла. Како две суседне пљосни *ABHGF* и *AEQRF* граде с првом пљосни правилан триједар чији врх је *A*, пројекција $A'F'$ ивице *AF* налази се на симетрали *AO* угла *BAE*. С друге стране, ако пљосан *ABHGF* оборимо у хоризонталну раван око ивице *AB*, тј. конструишемо петоугао $A'B'(H)(G)(F)$, имамо $F'(F) \perp A'B'$, дакле у пресеку те управне кроз (F) и симетрале AO имамо F' а тада помоћу афиности налазимо петоугао $A'B'H'G'F'$. Пројекције осталих пљосни, суседних пљосни $ABHGF$, подударне су и распоређене око $A'B'C'D'E'$ тако да ограничавају правилан десетоугао $F'G'H'...Q'R'$, који сачињава руб прве пројекције додекаедра. Тако већ имамо шест од дванаест пљосни, и то доњих шест, које се не виде.

Сад морамо имати на уму да суседне ивице тог руба, као што су FG и FR, припадају такође једној пљосни, $A_1B_1G\,FR$, па како је угао $G'F'R' = H'G'F'$, мора бити $A_1'B_1'G'F'R' \cong A'B'H'G'F'$. При томе је права $B_1'G'$ симетрала угла $A'OB'$. Тако добијамо још шест горњих пљосни. Горња хоризонтална пљосан $A_1B_1C_1D_1E_1$ и доња $ABCDE$ имају у пројекцији исто средиште O', а десет њихових темена образују правилан десетоугао $A'B_1'BC_1' \ldots A_1'$.

Приметимо да смо пљосан $ABHGF$ могли оборити око AB и на другу страну. Тада би се поклопила са $ABCDE$ а при томе би тачка F пала у E. Дакле $E'F' \perp A'B'$ и према томе тачку F' смо могли добити једноставно као пресек праве $A'O'$ и управне на $A'B'$ кроз E'.

У другој пројекцији виде се хоризонталне пљосни као дужи, а напр. $ABHGF$ као неправилан петоугао $A''B''H''G''F''$ чију висину, управну на $A''B''$ добијамо у првој пројекцији обарањем симетрале GS петоугла $ABHGF$ у хоризонталну раван, која пролази кроз S. Тачку $[G]$ оборене симетрале добијамо из услова $G'[G] \perp S'G'$, $S'[G] = S'(G)$, а тада је $G'[G] = h$ тражена висина. Дакле на упоредној спрам праве $A''B''$, на отстојању h налазимо G'', а исто тако и K'', M'', P'', R''. Темена F'', H'', L'', N'', Q'' су на упоредној правој, на отстојању l за које очигледно постоји сразмера $h:l = S'(G):S'(T)$, где је $T = SG \times FH$. Тиме имамо доњу половину друге пројекције. Горњу половину је лако нацртати знајући да је свака пљосан горње половине у пројекцији подударна једној пљосни доње половине.



Сл. 293

V. Правилни икосаедар.

Пљосни правилног икосаедра које се састају у једном његовом темену образују бочну површ петостране пирамиде. Можемо сматрати да је икосаедар састављен из двеју таквих петостраних пирамида чије основе су упоредне и једног средњег дела који припада извесном призматоиду. Претпоставимо да су основе двеју таквих пирамида (а то су и основе призматоида) хоризонталне и почнимо с конструисањем прве пројекције икосаедра. Основе обих пирамида су подударни правилни петоугли $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ који се у пројекцији показују у правој величини и имају заједничко средиште у које се пројектују врхови S и S_1 обих пирамида (сл. 293). Дакле, пројекције обих основа уписане су у један круг, тако да су темена на том кругу темена правилног десетоугла. То је руб прве пројекције икосаедра. Обраћајући пажњу на видљивост ивица нацртајмо прву пројекцију.

Да бисмо добили другу пројекцију треба одредити висину h_1 доње и горње пирамиде и висину h_2 призматоида. Оборимо зато једну бочну ивицу доње пирамиде, напр. AS у хоризонталну раван која пролази кроз S. Имамо очигледно $A'(A) \perp A'S'$, $(A)S = AS = AB = A'B'$ и $A'(A) = h_1$. Затим, оборимо једну бочну ивицу призматоида, напр. CC_1, у раван његове доње основе. Имамо $C_1'[C_1] \perp C'C_1'$, $C'[C_1] = CC_1 = AB = A'B'$ и $C_1'[C_1] = h_2$.

У ствари оба та обарања су непотребна. Како је у правоуглом троуглу $S'A'(A)$ дуж $(A)S'$ страна правилног петоугла уписаног у круг полупречника $A'S'$, катета $A'(A)$ је једнака страни уписаног десетоугла (§ 19). Исто тако у троуглу $C'C_1'[C_1]$ је $C'[C_1]$ страна петоугла, $C'C_1'$ десетоугла, дакле $C_1'[C_1]$ је једнако полупречнику $A'S'$ описаног круга. Знајући да је $h_1 = A'A_1'$, $h_2 = A'S'$ могли смо одмах приступити конструкцији друге пројекције, коју је непотребно објашњавати.

ГЛАВА III

ПРЕМЕШТАЊА

113. ОБАРАЊЕ ДУЖИ И ПРАВЕ

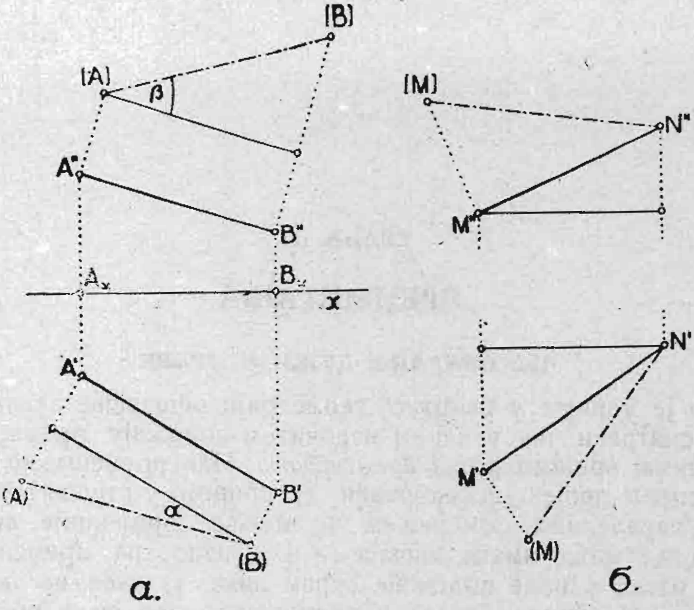
Како је уопште у нацртној геометрији решавање задатака лакше кад је посматрани лик у неком нарочитом положају према пројекцијским равнима, вршимо разна *премештања*. Или премештамо лик у нов положај спрам пројекцијских равни, тј. вршимо у ствари *обртање* лика — јер се паралелним померањем не мењају пројекције лика, дакле само **обртање** може имати значаја — или, напротив, премештамо пројекцијске равни у нове положаје спрам лика, тј. *уводимо нове пројекцијске равни*. И обарање спада у премештања, јер је то посебна врста **обртања**. Можемо рећи да се у *обарању, обртању и увођењу нових пројекцијских равни* састоје три опште методе помоћу којих се у нацртној геометрији решавају многи задаци. Почећемо с обарањем.

Како се дуж обара у раван слике или у коју било раван упоредну равни слике видели смо већ у § 76. Онде су се потребна отстојања од равни слике узимала са линије отстојања. Сада налазимо отстојања од прве пројекцијске равни у другој пројекцији и, обратно, отстојања од друге пројекцијске равни у првој пројекцији. Дакле, да би се дуж AB оборила у раван тла, π_1, пренесу се отстојања $AA' = A''A_x$ и $BB' = B''B_x$ на управне подигнуте у крајњим тачкама дужи $A'B'$, тј. $(A)A' = A''A_x$, $(B)B' = B''B_x$ (сл. 294). Тада је $(A)(B)$ дуж AB оборена у π_1, дакле у правој величини. Тим обарањем добијамо и нагиб α дужи AB према π_1.

На исти начин обара се дуж AB у раван нацрта, π_2. Узима се, управно на $A''B''$, $[A]A'' = A'A_x$, $[B]B'' = B'B_x$ и добија $[A][B] = (A)(B) = AB$, а уједно нагиб β дужи AB према π_2.

Но да би се добила дуж у правој величини и њени нагиби према равни π_1 и π_2 довољно је знати разлике отстојања њених тачака од тих равни. Обарамо тада ма у коју хоризонталну, односно фронталну раван. Оборимо напр. дуж MN (сл. 294б) у хоризонталну раван која пролази кроз N. Пренесимо разлику отстојања тачака M'' и N'' од π_1' управно на $M'N'$ из M'. Тако добијамо (M), па како је $(N) \equiv N'$ имамо већ $(M)N' = MN$ па и нагибни угао према π_1. Слично обарамо у једну фронталну раван, напр. у ону која пролази кроз N. Нагласимо да су сад (M) и $[M]$ (да не бисмо писали $(M)'$ и $[M]''$) п р о ј е к ц и ј е двапут оборене тачке M.

Обарање праве своди се на обарање дужи, јер права је одређена ма којим својим двема тачкама.

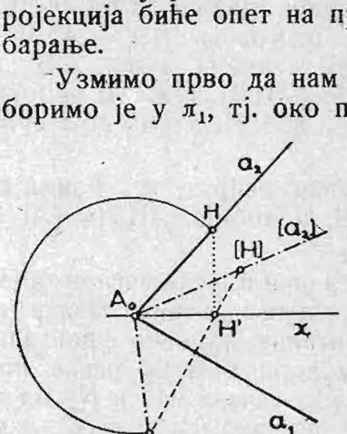


Сл. 294

114. ОБАРАЊЕ РАВНИ

У § 80 обарали смо раван око њеног трага или око упоредници помоћу једне тачке те равни, знајући отстојање те тачке од равни у коју обарамо. И сад, кад имамо две управне пројекције, раван ћемо обарати помоћу једне њене тачке. Та тачка у обореном положају и њена пројекција биће опет на правој управној на линији око које вршимо обарање.

Узмимо прво да нам је раван α дата својим траговима (сл. 295) и оборимо је у π_1, тј. око првог трага a_1. Потражимо пре свега други траг a_2 у обореном положају, а у ту сврху изаберимо ма коју тачку H на другом трагу и нађимо њен оборени положај. Њена прва пројекција H' је на оси x, дакле у обореном положају биће на правој која пролази кроз H' и управна је на a_1. Како је дуж $A_0 H$ у π_2, дата је у својој правој величини. Дакле и кад се раван α обори остаје та дуж у истој величини, тј. $A_0 (H) = A_0 H$. Стога из A_0 описујемо кружни лук полупречника $A_0 H$ до пресека са поменутом управном на a_1. У пресеку је тачка (H). Дакле права $A_0 (H) = (a_2)$ је други траг равни α у обореном положају.



Сл. 295

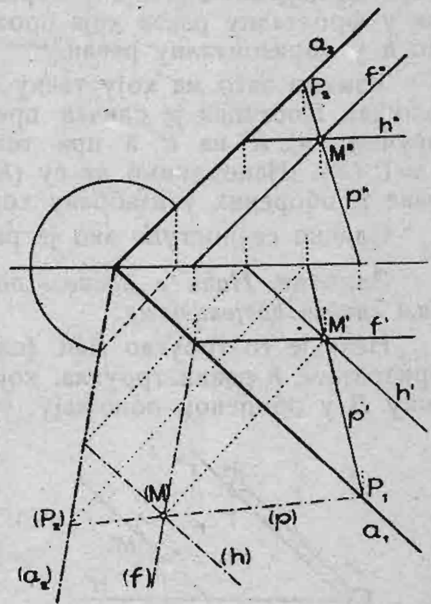
Постоје у ствари две пресечне тачке (H) и $[H]$, са сваке стране осе a_1 по једна, као што се и обарање може извршити у два смера.

Напоменимо да је угао $\sphericalangle\, a_1(a_2)$ једнак углу који граде међу собом оба трага a_1 и a_2 равни α.

Да би се добила ма која права p равни α (сл. 296) у обореном положају, довољно је уочити трагове те праве. Како је P_1 на a_1, остаје P_1 при обарању на своме месту, а како је P_2' на пројекцијској оси, (P_2) је на пресеку праве (a_2) и управне повучене из P_2' на a_1. Тада је $(p) = P_1(P_2)$.

Да би се добила ма која тачка M равни α у обореном положају, треба кроз M повући ма коју праву равни α и наћи ту праву у обореном положају. Тако добијамо (M) на пресеку праве (p) и управне на a_1 кроз M'.

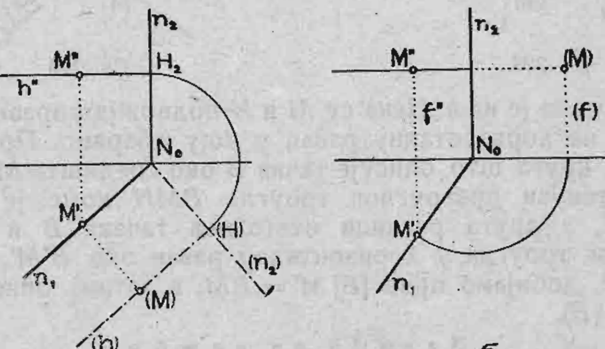
Упоредници равни α задржавају у обореном положају особину да су упоредне једном или другом трагу: хоризонтале трагу a_1, а фронтале обореном трагу (a_2). Стога је погодно добити помоћу њих тачке равни α у обореном положају. Тако добијамо (M) помоћу фронтале f постављене кроз M. Повучемо кроз M' $f' \parallel x$. Кроз $a_1 \times f'$ пролази $(f) \parallel (a_2)$. Исто тако можемо добити (M) помоћу хоризонтале h, имајући у виду да је $(h) \parallel h' \parallel a_1$.



Сл. 296

Обарање равни врши се исто тако око другог трага у π_2. Тада обарамо њен први траг.

У слици 296 претстављена је раван чији трагови граде међу собом оштар угао. Поступак је исти кад је тај угао туп. Ако је тај угао



Сл. 297

а. б.

прав, поступак постаје једноставнији. Рецимо да раван ν управну на π_1 (сл. 297а) треба оборити у π_1. Тада треба само повући $(n_2) \perp n_1$ кроз N_0.

Тачку M равни ν добијамо у обореној равни напр. помоћу хоризонтале налажењем њеног другог трага H_2 и описивањем кружног лука до (H). Тада на (h) налазимо (M). Ако пак оборимо раван ν у π_2, први траг ће се поклопити с пројекцијском осом (сл. 297б).

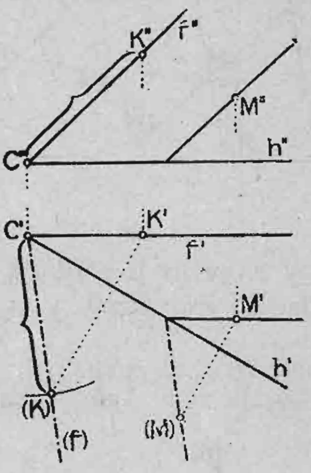
Ако је раван дата својим двема упоредницама h и f (сл. 298), обара се најједноставније у хоризонталну раван која пролази кроз h или у фронталну раван која пролази кроз f. Оборимо раван hf напр. око h у хоризонталну раван.

Узмимо зато ма коју тачку K на фронтали f и нађимо јој оборени положај. Поступак је сличан претходном. Тачка (K) је на управној повученој из K' на h' а при том је $C'(K) = C''K''$. Тако се добија $(f) = C'(K)$. (Напоменимо да су (K) и (f) прве пројекције тачке K и праве f, оборених у изабрану хоризонталну раван).

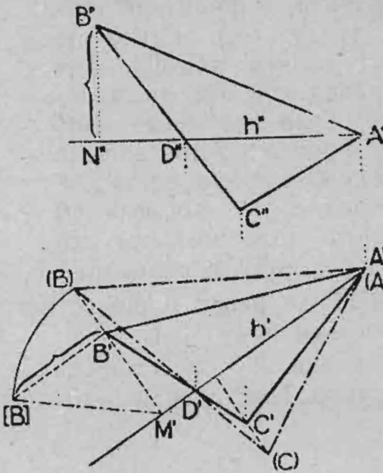
Слично се поступа ако је раван дата ма на који други начин.

Задатак. *Наћи у правом облику и величини троугао ABC, дат обим својим пројекцијама.*

Нека је то троугао ABC (сл. 299). Оборимо троугао напр. око хоризонтале h равни троугла, која пролази кроз A. Да бисмо нашли тачку B у обореном положају, уочимо вертикалну раван која пролази



Сл. 298



Сл. 299

кроз B и управна је на h. Нека су M и N подножја управних спуштених из B на h и на хоризонталну раван у коју обарамо. Приметимо да је полупречник круга што описује тачка B око средишта M при обарању, једнак хипотенузи правоуглог троугла BMN коме је једна катета једнака $B'M'$, а друга разлици отстојања тачака B и N, тј. $B''N''$. Обарањем тог троугла у хоризонталну раван око $B'M'$, при чему је $[B]B' = B''N''$, добијамо прво $[B]M' = BM$, а затим, описавши лук из M налазимо (B).

Задаци за вежбу.

1. Наћи у правој величини дуж а) садржану у равни управној на осу x, б) којој се поклапају обе пројекције.
2. Наћи у правој величини део дате праве, садржан између њених трагова.

3. Дате су пројекције једне тачке M и раван одређена а) својим траговима. б) својом хоризонталом и фронталом кроз тачку P. Наћи отстојање тачке M од равни.

4. Наћи растојање двеју паралелних равни датих траговима.

5. Поставити раван упоредну датој равни на датом отстојању од те равни.

6. Конструисати у датој равни прав угао с датим теменом, који се пројектује а) на π_1, б) на π_2 као прав угао.

7. Оборити 1) у π_1, 2) у π_2 раван дату траговима и ма коју праву те равни, кад је раван а) ма каква, а њени трагови граде туп угао, б) $\perp \pi_1$, в) $\perp \pi_2$, г) $\perp x$.

8. Оборити хоризонталну раван и ма коју тачку те равни у π_2.

9. Оборити раван дату двема упоредним правим и ма коју тачку те равни у а) хоризонтални, б) фронтални положај, не служећи се траговима.

10. Наћи угао двеју правих које се секу, не служећи се траговима.

11. Наћи отстојање тачке од дате хоризонталне праве.

Упутство: Постоје два начина: 1) кроз дату тачку поставити раван управну на дату праву и 2) поставити раван која пролази кроз праву и тачку и у тој равни управну праву кроз ту тачку

12. Наћи угао који заклапа линија тла с једном датом правом.

Напомена: Угао двеју мимоилазних правих је оштри или прави угао који граде две праве упоредне тим правим, а које се секу.

13. Наћи у правој величини угао двеју правих које се секу.

14. Кроз дату тачку поставити праву која сече дату праву под датим углом.

15. Кроз дату тачку поставити праву која сече дату праву а има дати нагиб према равни.

16. Наћи угао који заклапа дата права с датом равни.

17. Наћи тачку у којој права продире раван а) кад су трагови равни паралелни оси x, б) кад раван пролази кроз дату тачку и осу x, в) кад је раван одређена линијом пада.

18. Кад се трагови једне равни поклапају? Ако две равни имају ту особину, наћи пресек тих двеју равни и размотрити какав положај има пресечна права према пројекцијским равнима.

19. Наћи заједничку нормалу на две праве, од којих је једна у равни поклапања.

20. Наћи најкраће растојање дате праве од осе x.

115. РАВНИ ЛИКОВИ ОДРЕЂЕНА ОБЛИКА У ОДРЕЂЕНУ ПОЛОЖАЈУ

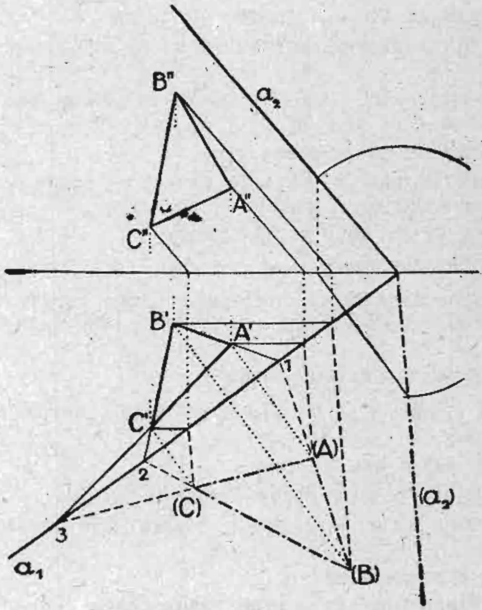
Као што већ знамо из гл. I одељка II, обарањем равни добија се прави облик и величина лика датог у тој равни својом пројекцијом, или се добија пројекција лика задатог облика и величине. То су две основне врсте задатака.

Лик у обореној равни и његова пројекција на ону раван у коју се обара јесу два перспективно афина лика, а у налажењу везе међу обим ликовима користе често главне линије дате равни.

Посматрајмо два задатка који ће нам приказати обе врсте задатака:

Задатак 1. *Наћи пројекције равнокраког троугла који је садржан у извесној равни датој траговима.*

Дати су трагови a_1, a_2 извесне равни α. Оборимо је напр. око a_1 (сл. 300) и у обореној равни α конструишимо ма који равнокраки троугао $(A)(B)(C)$, а затим вратимо раван у њен првобитни положај, тј. конструишимо прву пројекцију $A'B'C'$ тог троугла. У слици 300 то се може учинити помоћу фронтала кроз сва три темена, или се само кроз једно теме, напр. кроз тачку A постави фронтала и нађе A', а затим се одреди B' и C' помоћу афиности, знајући да се одговарајуће праве $A'B'$ и $(A)(B)$, као и $A'C'$ и $(A)(C)$, секу на a_1. Другу пројекцију троугла налазимо из прве пројекције помоћу истих фронтала.



Сл. 300

Задатак 2. *Наћи пројекције круга који се налази у равни датој траговима и коме је дат полупречник и средиште.*

Нека је α дата раван, O дато средиште круга (O' и O'' морају бити на пројекцијама исте главне линије те равни, напр. на фронтали EF, сл. 301). Оборимо раван α опет око првог трага a_1 и нађимо (O), затим опишимо круг (k) у обореној равни задатим полупречником. Отуд налазимо прву пројекцију k' круга, као перспективно афини лик коме је a_1 оса афиности а зраци афиности управни на оси. Као што знамо (гл. I, одељак II) велика оса $A'B'$ елипсе k' је упоредна трагу a_1, а мала оса $C'D'$ је управна на a_1. Знајући осе можемо већ конструисати елипсу k' (налажењем полупречника кривине у теменима итд.), а можемо, према потреби, наћи још коју њену тачку, узимајући разне праве кроз O.

Другу пројекцију k'' круга можемо одредити из прве пројекције. Како се међусобно управни пречници круга пројектују као конјуговани пречници елипсе, а AB и CD су два управна пречника круга k, у другој пројекцији $A''B''$ и $C''D''$ биће два конјугована пречника. Помоћу њих се може и непосредно нацртати елипса k'', ако се не тражи већа тачност, јер знамо да су тангенте у A'' и B'' упоредне пречнику CD, а тангенте у C'' и D'' су упоредне пречнику AB (својство конјугованих пречника). Али боље је одредити осе елипсе k''. У ту сврху боље је поћи опет од круга (k).

Велика оса $E''F''$ елипсе k'' паралелна је другом трагу a_2 равни α (као што је у првој пројекцији велика оса паралелна првом трагу). Дакле кроз (O) повуцимо пречник $(E)(F) \parallel (a_2)$, па кроз O' прву пројекцију пречника EF, $E'F' \parallel x$. Затим повуцимо другу пројекцију исте праве и одредимо на њој тачке E'' и F''. Мала оса $G''H''$ елипсе k'' је управна на a_2 и њене крајње тачке налазимо, полазећи од пречника $(G)(H)$ круга (k), који је управан на $(E)(F)$.

Задаци за вежбу

1. Наћи пројекције квадрата коме је дата једна страница у датој косој равни.

2. Наћи пројекције правилног звездастог седмоугла који се налази а) у некој косој равни, б) у равни управној на π_2, в) у равни управној на пројекцијској оси.

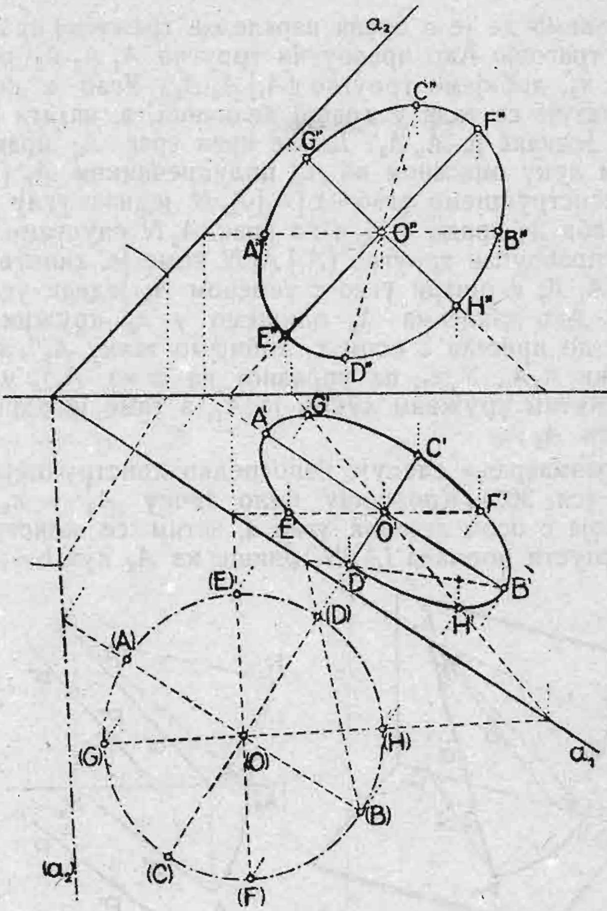
3. Наћи пројекције круга коме је средиште у пресечној тачки двеју датих правих а полупречник дуж дате величине.

4. Кроз три дате тачке које нису на једној правој, поставити круг.

5. Поставити кроз дату тачку круг чије средиште је на датој правој, а круг је у равни управној на тој правој.

6. Наћи пројекције круга уписаног у датом троуглу.

Упутство: Оборити троугао и уписати круг.



Сл. 301

7. У двема пројекцијским равнима дата је по једна елипса. Кад ће те елипсе претстављати пројекције једног круга?

8. Круг датог полупречника налази се у равни одређеној његовим средиштем и једном хоризонталом. Наћи тачке на кругу у којима ће тангенте градити дати угао са π_1.

9. Круг датог полупречника и средишта налази се у равни одређеној средиштем и једном хоризонталом. Наћи тачку на кругу у којој ће пројекције тангенте бити међу собом упоредне.

10. Наћи пројекције круга коме је дато средиште и полупречник, а раван у којој се налази треба да буде управна на правој која пројектује средиште круга на линију тла.

11. Описати круг око троугла датог пројекцијама, не тражећи трагове равни у којој је троугао.

12. У косој равни дата је права. Наћи пројекције круга уписаног у троуглу који граде трагови те равни и та права.

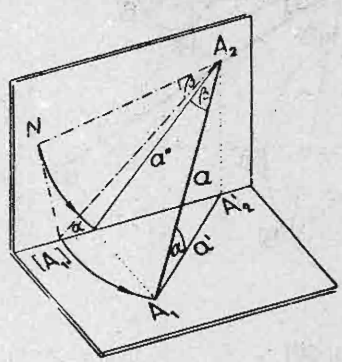
116. ПРАВЕ И РАВНИ ДАТИХ НАГИБА

Обрадимо још следећа два задатка у којима се примењује обарање.

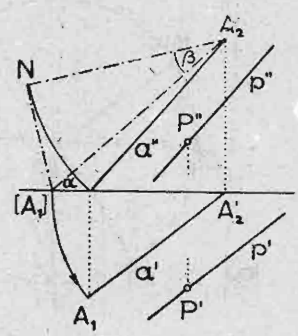
Задатак 1. *Кроз дату тачку поставити праву која гради с пројекцијским равнима дате углове.*

Претпоставимо да је a права паралелна траженој правој (сл. 302), A_1 и A_2 њени трагови. Ако правоугли троугао $A_1 A_2 A_2'$ оборимо око $A_2 A_2'$ у раван π_2, добијамо троугао $[A_1] A_2 A_2'$. Угао α који права a гради с π_1 показује се тада у правој величини, а катета $[A_1] A_2'$ обореног троугла једнака је $A_1 A_2'$. Дакле први траг A_1 праве a налази се на кружном луку описаном из A_2' полупречником $A_2' [A_1]$. Ако на дужи $[A_1] A_2$ конструишемо угао $\sphericalangle [A_1] A_2 N$ једнак углу β који тражена права треба да гради с π_2 и на крак $A_2 N$ спустимо управну из $[A_1]$, добијамо правоугли троугао $[A_1] A_2 N$ коме је хипотенуза $A_2 [A_1]$ једнака дужи $A_1 A_2$ а оштри угао с теменом A_2 једнак углу β. Дакле $[A_1] N = A_1 A_1''$. Ако дакле из A_2 опишемо у π_2 кружни лук полупречника $A_2 N$ до пресека с осом x, добијамо тачку A_1'', а тиме другу пројекцију дужи $A_1 A_2$. У π_1, на управној на x из A_1'', у пресеку с мало пре поменутим кружним луком је A_1, а тиме је одређена и прва пројекција дужи $A_1 A_2$.

Из овог разматрања следује непосредно конструкција пројекција тражене праве (сл. 303). Кроз коју било тачку A_2 у π_2 повуче се права $A_2 [A_1]$ која с осом заклапа угао α, затим се конструише угао $[A_1] A_2 N = \beta$, спусти нормала $[A_1] N$, опише из A_2 лук $N A_1''$ а затим из



Сл. 302



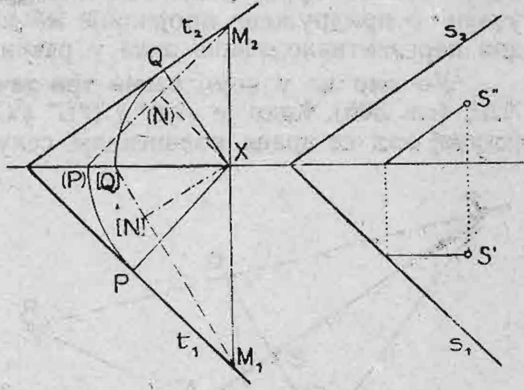
Сл. 303

A_2' опише лук $[A_1] A_1$ до пресека A_1 с управном на x из A_1''. Ако је P тачка кроз коју треба да пролази тражена права p, повлачимо кроз пројекције тачке P упоредне $p' \parallel a'$, $p'' \parallel a''$

Задатак 2. *Кроз дату тачку поставити раван која гради с пројекцијским равнима дате углове.*

Претпоставимо прво да је позната тражена раван τ, чији су нагиби α и β редом према π_1 и π_2 дати (сл. 304). Повуцимо кроз неку тачку X пројекцијске осе управну на ту осу и нека су јој M_1 и M_2 пресеци с t_1 и t_2. Затим спустимо из X управне $XP \perp t_1$ и $XQ \perp t_2$.

Праве XM_2 и XP су трагови равни μ управне на t_1, а XM_1 и XQ су трагови равни ν управне на t_2. Имамо $\tau \times \mu = M_2 P$, дакле ако оборимо правоугли троугао PXM_2 око XM_2 у π_2, угао XPM_2 је нагиб α равни τ према π_1 у правој величини. Исто тако, $\tau \times \nu = M_1 Q$, па ако правоугли троугао OXM_1 оборимо у π, угао XQM_1 је нагиб β равни τ према π_2 у правој величини.



Сл. 304

Нека је N подножје управне из X на τ. Како $NX \subset \mu$ и $\subset \nu$, имамо $NX = \mu \times \nu$, дакле $N = M_2 P \times M_1 Q$. У обореним троуглима имамо пак $(N) X \perp M_2 (P)$, $[N] X \perp M_1 [Q]$.

Приступимо сад решавању задатка. Поставимо прво коју било раван τ која има дате нагибе α и β. Ма из које тачке M_2 повуцимо праву $M_2(P)$ која гради с осом x угао α, затим управну $X(N) \perp M_2(P)$, и опишимо из X полупречником $X(N)$ круг. Повуцимо дирку на тај круг, која гради с осом x угао β. Тачка додира је $[N]$ а у пресеку те дирке с M_2X је M_1. Први траг t_1 пролази кроз M_1 и додирује круг описан из X полупречником $X(P$. Други траг t_2 пролази кроз M_2 и $t_1 \times x$.

Најзад остаје да поставимо тражену раван σ упоредну према τ и која садржи дату тачку, рецимо S.

Задаци за вежбу

1. Одредити нагибне углове дате равни према пројекцијским равнима.

Упутство: Да би се добио нагиб према π_1 поставити раван управну на π_1 и на дату раван, наћи њен пресек с датом равни и оборити га у π_1. Слично за нагиб према π_2.

2. Наћи други траг равни кад је дат њен први траг и угао који та раван гради с линијом тла.

3. Наћи трагове равни кад знамо отстојање те равни од једне тачке N на оси x, угао који та раван гради с π_1 и једну тачку која припада другом трагу те равни.

4. Наћи угао који граде једна коса раван и једна раван која пролази кроз линију тла и једну дату тачку.

5. Наћи друге трагове двеју равни кад знамо њихове прве трагове, затим прву пројекцију њихова пресека и углове што те равни међу собом граде.

6. Једна раван има оба трага на једној правој; наћи угао који трагови те равни граде међу собом

7. Једна раван је дата једном својом хоризонталом и једном тачком. Кроз ту тачку повући у тој равни праву која гради дати угао с хоризонталном равни.

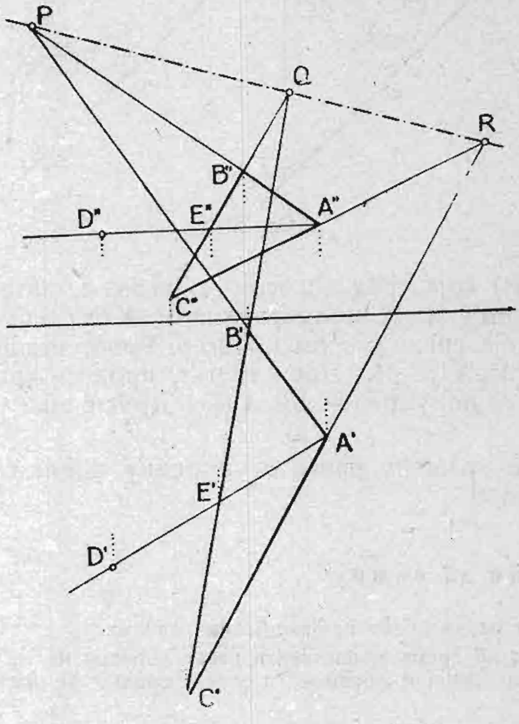
8. Дате су прве пројекције и први трагови два крака једног угла и његова права величина, наћи његову другу пројекцију.

9. Дата је једна хоризонтална права и прва пројекција једне друге праве која сече ту хоризонталну праву под датим углом. Наћи другу пројекцију те друге праве.

117. АФИНА СРОДНОСТ ДВЕЈУ ПРОЈЕКЦИЈА РАВНОГ ЛИКА

Као што смо видели, ма који лик садржан у некој обореној равни и пројекција тог лика на раван у коју је обарање извршено јесу два перспективно афина лика. Но, као што ћемо сада показати, и обе узајамно придружене пројекције ма ког рваног лика су, исто тако, два перспективно афина лика у равни цртежа.

Уочимо ма у којој равни три тачке A, B, C које одређују троугао ABC (сл. 305). Како је $A'A'' \parallel B'B'' \parallel C'C''$, то су по Дезаргову ставу (случај кад се зраци колинеације секу у бескрајно далекој тачки) два перспективно афина троугла, дакле пресечне тачке $A'B' \times A''B'' = P$, $B'C' \times B''C'' = Q$, $C'A' \times C''A'' = R$ јесу на једној правој, оси афиности PQ. Нека је D још једна, ма која тачка равни ABC. Повуцимо праву кроз D и, рецимо, кроз A. Нека је E тачка у којој се секу праве AD и BC. У перспективно афином односу који је одређен троуглима $A'B'C'$ и $A''B''C''$ одговара тачки E' тачка E'', јер је $E'E'' \parallel A'A''$; дакле правој $A'E'$ одговара права $A''E''$, дакле тачки D' одговара тачка D'', јер је $D'D'' \parallel A'A''$. Према томе, пројекције ма ког лика садржаног у равни ABC су два перспективно афина лика с осом афиности PQ.



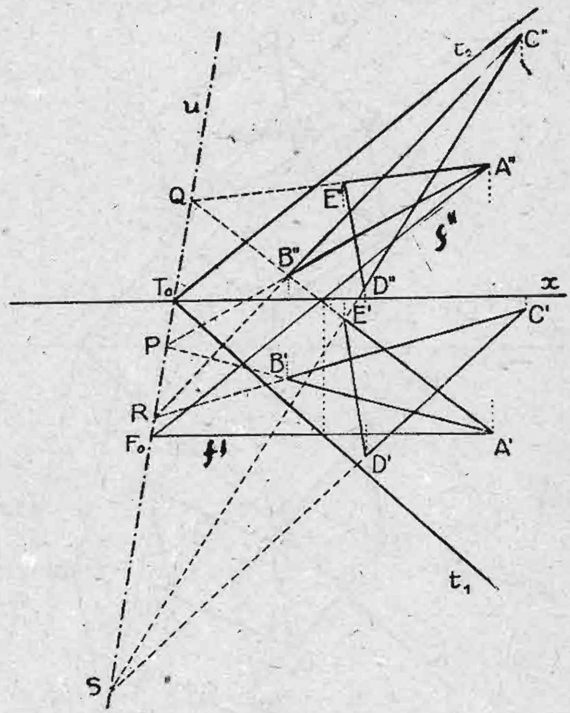
Сл. 305

Отуд следује да се свакој тачки у равни ABC, којој се једна пројекција налази на правој PQ, налази и друга пројекција у истој тачки, тј. то су оне тачке равни ABC којима се обе пројекције поклапају. Дакле PQ је уједно прва и друга пројекција праве у којој раван ABC пресеца раван поклапања (§ 110).

Афина сродност узајамно придружених пројекција допушта брже налажење једне од двеју пројекција кад је друга дата, него, напр. помоћу хоризонтала и фронтала. Треба наћи осу афиности, а затим се непосредно повлаче само пројекције сваке праве. Ово има практичну вредност кад за неки раван лик треба цртати већи број тачака.

Задатак. *У равни τ, задатој траговима, дата је прва пројекција звездастог петоугла ABCDE. Одредити му другу пројекцију.*

Другу пројекцију A'' тачке A (сл. 306) можемо одредити напр. конструкцијом фронтале f која пролази кроз A. Уместо да исто тако или слично одредимо друге пројекције осталих темена, одредимо осу афиности u обих пројекција, која је одређена тачкама $F_0 = f' \times f''$ и $T_0 = t_1 \times t_2$ (јер раван поклапања садржи осу x). Тада имамо $A'B' \times u = P$; $A''P$ је друга пројекција праве AB, дакле B'' припада правој



Сл. 306

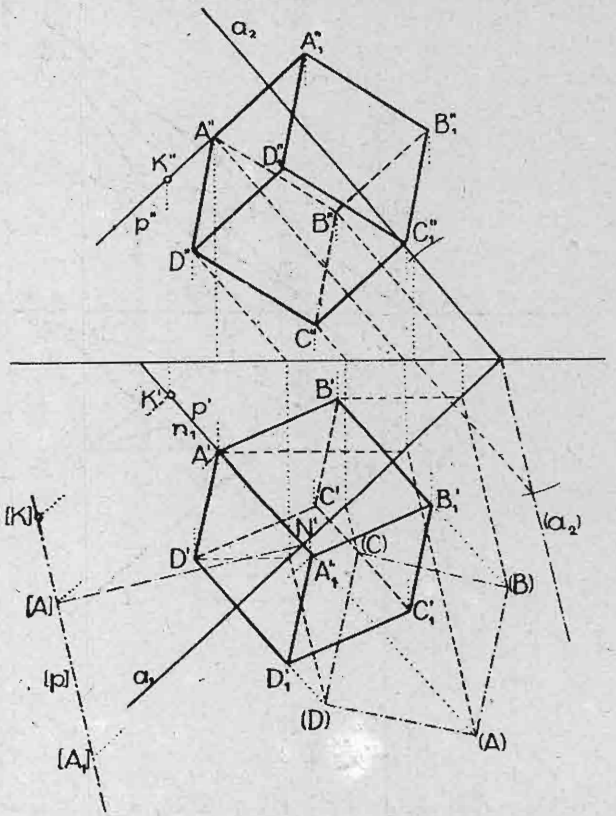
$A''P$ и тако исто: $A'E' \times u = Q$, $E'' \subset A''Q$; $B'C' \times u = R$, $C'' \subset B''R$; $C'D' \times u = S$, $D'' \subset C''S$. Тај поступак је краћи од конструкције помоћу фронтала или којих било правих у равни τ, које би пролазиле кроз тачке B, C, D, E.

118. ПРОСТОРНИ ЛИКОВИ ОДРЕЂЕНА ОБЛИКА, У ПРОИЗВОЉНУ ПОЛОЖАЈУ

Пошто знамо да конструишемо у ком било положају раван лик датог облика и величине, затим праве управне на равни или које граде дате углове са датим правим итд., можемо на основу свега тога конструисати пројекције разних површи и тела, ма у ком положају и, уопште, просторне ликове којима је задат положај, облик и величина.

Задатак 1. *Конструисати пројекције коцке чија се једна страна налази у равни датој траговима и чије ивице имају дату величину.*

Оборимо раван α дату траговима a_1 и a_2 (сл. 307) у раван π_1 и у обореној равни нацртајмо квадрат $(A)(B)(C)(D)$ коме је страница једнака датој дужи. Одредимо затим његове пројекције $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$. Површ оивичена тим квадратом је једна страна коцке. Из темена A, B, C полазе четири ивице које су управне на α, дакле чије пројекције су управне на одговарајућим траговима ($A'A_1' \perp a_1$, $A''A_1'' \perp a_2$ итд.). Треба дакле из једне тачке, напр. из A, подићи управну p на раван α и на p одмерити дуж једнаку ивици коцке. То можемо урадити на два начина:



Сл. 307

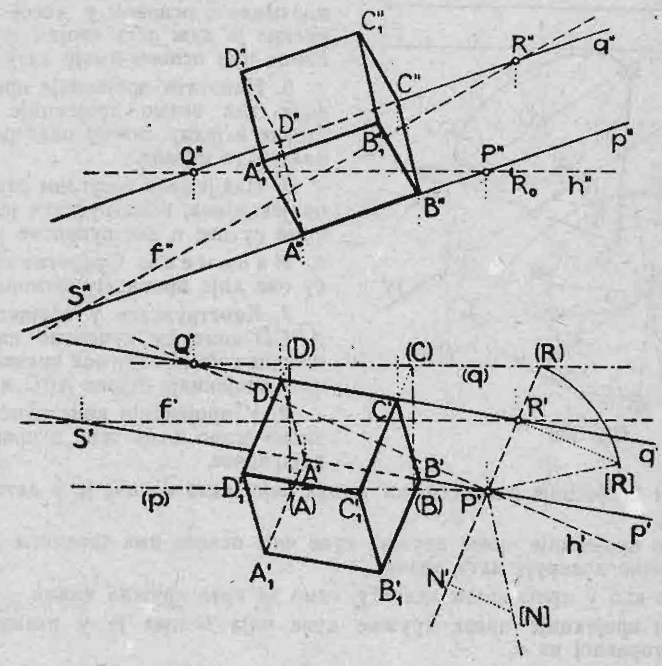
1. Обарамо у π_1 пројектујућу раван ν праве p, која је управна на π_1. Како је $p \perp \alpha$, имамо $n_1 \equiv p' \perp a_1$. Тим обарањем A долази у $[A]$. Ако је N тачка у којој раван ν сече траг a_1, имамо $\alpha \times \nu = AN$. Како је $p \perp NA$, повуцимо $[p] \perp N[A]$ и одмеримо на $[p]$ дуж једнаку ивици коцке; нека је то $[A][A_1]$. Враћањем у прву пројекцију добијамо A_1' и отуд A_1''. Конструисањем пројекција осталих трију ивица, паралелних ивици AA_1, и паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ у обим пројекцијама завршава се задатак.

Напоменимо да је непотребно обарати траг n_2 равни ν, већ само тачку A, знајући да је $A'[A] = A''A_x$.

2. Обарамо непосредно праву p. Како је $p \perp \alpha$, повуцимо $p' \perp a_1$, $p'' \perp a_2$ и оборимо праву p помоћу тачке A и ма које друге тачке K на тој управној. Затим на $[p]$ одредимо $[A_1]$ па вратимо у прву пројекцију.

Задатак 2. *Конструисати коцку којој су две ивице, које припадај једној њеној страни, садржане на двема упоредним правим p и q.*

Нека је PQ ма која хоризонтала равни pq. Оборимо праве p и q око PQ у хоризонталну раван. Уочимо зато неку тачку R на q, за коју је $PR \perp PQ$ и оборимо правоугли троугао PQR. У ту сврху треба одредити праву величину дужи PR обарањем те дужи ($R'[R] \perp P'R'$, $R'[R] = R''R_0$, затим $P'(R) = P'[R]$). Тако добијамо (p) и (q). Тада конструишемо у обореној равни квадрат $(A)(B)(C)(D)$, а отуд и у обим пројекцијама. Остаје да подигнемо из темена A, B, C, D управне на основу коцке. Имамо $AA_1' \perp P'Q'$, а за другу пројекцију треба наћи прво пројекције једне фронтале, напр. f, а тада је $A''A_1'' \perp f''$. Да би се добила величина дужи $A'A_1'$, конструишемо кроз P дуж PN упоредну и једнаку AA_1. У обореној пројектујућој равни налазимо у ту сврху прво $P'[N] \perp P'[R]$ и одмеримо $P'[N] = (A)(B)$. Тада је $A'A_1' = P'N'$. Остало се лако види из слике.

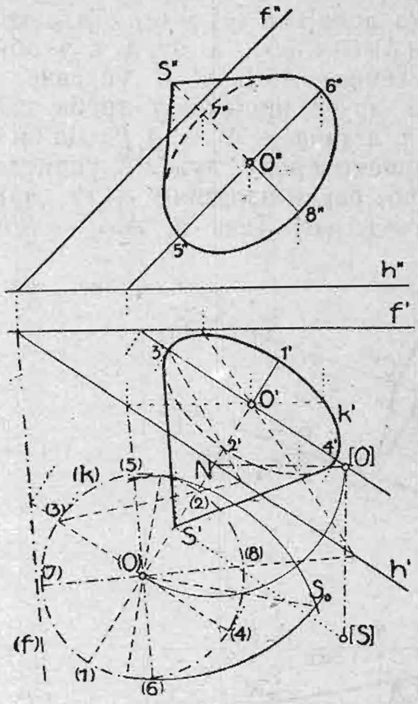


Сл. 308

Задатак 3. *Конструисати пројекције равностране купе чија основа је у равни датој једном хоризонталом и једном фронталом.*

Нека је h хоризонтала, f фронтала дате равни (сл. 309). Обарањем те равни одредимо пројекције k' и k'' круга k основе купе.

Како висина купе, OS пролази кроз средиште O круга k, повуцимо кроз O праву n управну на равни hf ($n' \perp h'$, $n'' \perp f''$ Узмимо, рецимо, први начин поменут у задатку 1, за одређивање пројекције врха S, тј. оборимо O' у $[O]$, затим на правој управној на $[O]N$ одмеримо дуж $[O][S] = OS$, а како се захтева да купа буде равнострана, њена висина OS једнака је висини $(O)S_0$ равностраног троугла коме је страница једнака пречнику круга основе. Ма који пречник круга (k) може послужити за конструкцију таквог троугла (то је само помоћна слика; не треба губити из вида да S није у равни основе!). Тангенте из S' односно из S'' на елипсе k' и k'' допуњују контуру пројекција тражене купе.



Сл. 309

Задаци за вежбу

1. Наћи пројекције правилног тетраедра који је једном својом страном у датој косој равни.

2. Нацртати пројекције коцке чија једна страна је у равни а) управној на π_1, б) управној на π_2.

3. Наћи пројекције косе тростране пирамиде којој је дата основа и дужине трију бочних ивица.

4. Наћи пројекције правилне петостране пирамиде с основом у косој равни и чија висина је дуж дата својим пројекцијама, а ивице при основи имају дату величину.

5. Нацртати пројекције правилног тетраедра кад знамо пројекције једне његове стране и једну линију пада равни у којој се налази та страна.

6. Над једним троуглом који је дат својим пројекцијама, конструисати један тетраедар коме су две и две супротне ивице једнаке.

Напомена: Супротне ивице тетраедра су оне које припадају мимоилазним правим.

7. Конструисати у пројекцији тетраедар $ABCD$ коме су супротне ивице упоредне правим које се секу под правим углом. кад су дате пројекције стране ABC и угао $\sphericalangle ADB$.

8. У пројекцији конструисати коцку кад знамо једно њено теме и правац једне њене дијагонале.

9. Наћи пројекције равностраног ваљка чија једна основа је у датој равни косој према π_1 и π_2.

10. Наћи пројекције праве кружне купе чија основа има средиште у датој тачки O, а круг основе додирује дату праву.

11 Исто као у претходном задатку, само за прав кружни ваљак.

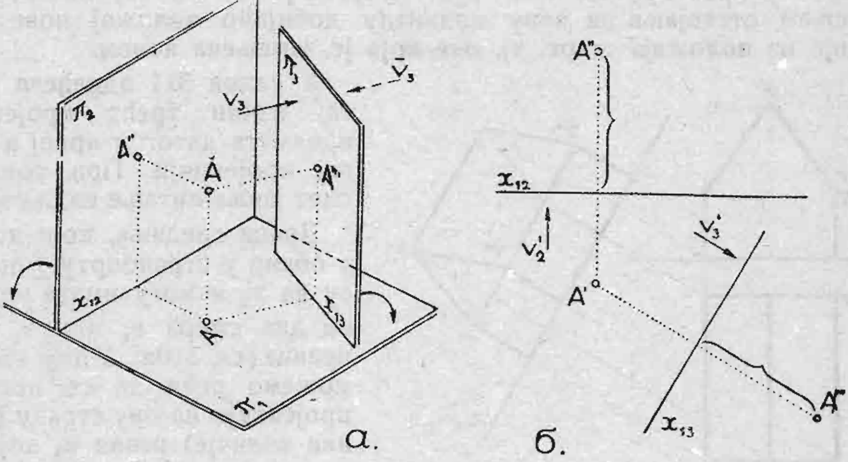
12. Наћи пројекције праве кружне купе чија основа је у равни а) упоредној према π_2, б) управној на π_2.

13. Наћи пројекције правог ваљка коме је основа елипса у датој косој равни. Та елипса пролази кроз три дате тачке а пројектује се на раван π_1 као круг.

119. УВОЂЕЊЕ НОВИХ ПРОЈЕКЦИЈСКИХ РАВНИ

Из двеју управних пројекција, тлоцрта и нацрта неког предмета може се конструисати управна пројекција тог предмета ма на коју трећу раван. Ово се у нацртној геометрији врши обично зато да би се добила слика неког предмета, датог у двема управним пројекцијама, кад се гледа у неком новом правцу, или зато да би се добила пројекција у којој се неки задатак лакше решава. Најједноставније је добити нову пројекцију кад је нова пројекцијска раван управна на једној од првих двеју. Такву трећу пројекцијску раван, управну на π_1 или на π_2, називамо *страноцртном равни* или *трећом пројекцијском равни* и обележавамо знаком π_3. Управна пројекција на трећу пројекцијску раван зове се *трећа пројекција* или *страноцрт*. Трећу пројекцију обележавамо трима цртицама, дакле напр. A''' (читати: A треће) је страноцрт тачке A.

Узмимо да је раван π_3 управна на π_1 (сл. 310а). Тада прва и трећа пројекцијска раван заједно могу послужити на исти начин методи двеју придружених управних пројекција, као равни π_1 и π_2. Опет је



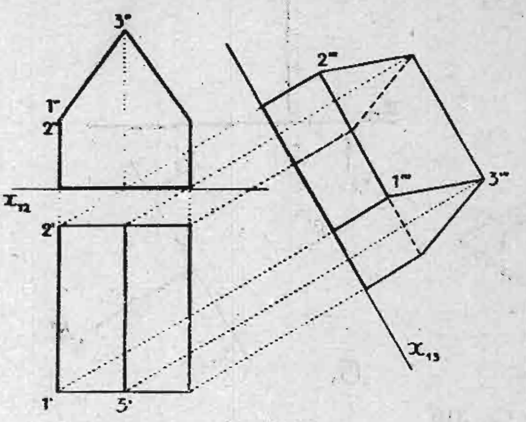
Сл. 310

једна раван хоризонтална, друга (π_3) вертикална. Сваки предмет у простору одређен је својом првом и трећом пројекцијом исто као првом и другом пројекцијом. Пре свега, положај сваке тачке A према π_1 и π_3 одређен је пројекцијама A' и A''' исто онако као што је био одређен првим двема пројекцијама, A' и A''. Дакле, ако смо из прве и друге пројекције неког предмета нашли његову трећу пројекцију, на π_3, можемо, ако хоћемо, његову другу пројекцију отстранити из посматрања и рећи да смо пројекцијску раван π_2 заменили новом пројекцијском равни π_3, или пак да смо раван π_2 преместили. Слично је ако је трећа пројекцијска раван управна на другој пројекцијској равни. Тада су π_2 и π_3 две међу собом управне равни и пројекције A'' и A''' преузимају улогу пројекција A' и A''.

Нова пројекцијска раван сече прву и другу пројекцијску раван по двема правим, траговима равни π_3. Ако је раван π_3 управна на π_1, њен први траг има исту улогу као пројекцијска оса x по којој се секу равни π_1 и π_2. Зато називамо тада први траг равни π_3 *новом пројекцијском осом* и обележавамо знаком x_{13}, дајући тиме на знање да се по тој оси секу прва и трећа пројекцијска раван. По истом правилу осу x можемо сад обележавати знаком x_{12}. (Може се и други траг равни π_3 увести у посматрање и обележити знаком x_{23}, али најчешће није у конструкцијама потребан, па га зато обично и не цртамо у слици.)

Најзад, као што обарамо прве две пројекцијске равни, једну у другу, тако поступамо и са трећом пројекцијском равни и обарамо је у ону од првих двеју пројекцијских равни на коју је управна, обрћући је за прав угао око нове пројекцијске осе, у једном или другом смеру. Тада је опет све у једној равни, равни цртежа.

Ако је раван π_3 управна на π_1, њен положај је одређен чим се постави нова оса x_{13}. Као што су у равни цртежа прве две пројекције ма које тачке A на ординали $A'A''$, која је управна на оси x_{12}, тако су и тачке A' и A''' на својој ординали, која је управна на x_{13} (сл. 310 б). При томе је *отстојање тачке A''' од осе x_{13} једнако отстојању тачке A'' од осе x_{12}*, јер оба та отстојања су једнака отстојању тачке A у простору од њене прве пројекције A'. На тај начин, преношењем отстојања на нову ординалу добијамо положај нове пројекције из положаја старе, тј. оне која је замењена новом.



Сл. 311

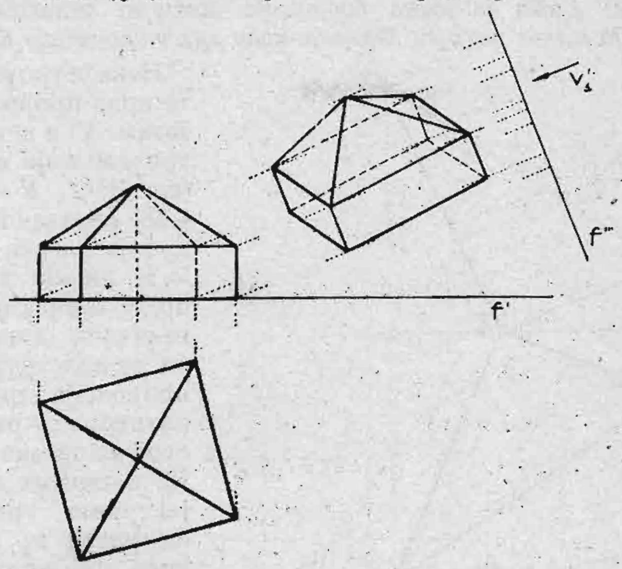
У слици 311 одређена је на тај начин трећа пројекција предмета датог у првој и другој пројекцији. При томе се опет јавља питање видљивости.

Зраци гледања, који долазе у обзир у страноцрту, управни су на π_3 и могу имати ма који од два смера v_3 или $\bar{v}_3$ тога правца (сл. 310а). У том смислу можемо рећи да се предмет пројектује на ону страну (лице или наличје) равни π_3 коју видимо, тј. која је самом стрелицом смера назначена. Дакле, при обарању треба пазити да се предњи део равни π_3 обори у истом смеру, тј. *обртање предњег дела равни π_3 око x_{13} треба почети у смеру у коме гледамо*. Кад би се обарање извршило у супротном смеру, показала би се у равни цртежа она страна равни π_3 на коју не пада пројекција предмета, као кад бисмо кроз лист хартије гледали слику нацртану на њој с друге стране. И тако би се имала тачна пројекција, али би одговарала гледању у супротном смеру ($\bar{v}_3$), дакле видљивост појединих ивица била би погрешно извучена. И одређивање видљивости у тлоцрту и нацрту (§ 105) сагласно је с овим посматрањем.

Најзад, ако је дат за трећу пројекцију смер гледања, тј. стрелица v_3, добро је да у цртежу та пројекција не падне онамо где је прва или друга пројекција. Да би се то постигло, довољно је померити раван π_3 упоредно њој самој, тј. померити упоредно осу x_3. Зато је у слици 311 постављена оса x_{13} довољно далеко. Уосталом, као што често изостављамо осу x, тако изостављамо и нове пројекцијске осе.

Задатак 1. *Предмет (рогљасто тело) дато је у првим двема пројекцијама (сл. 312, прва и друга пројекција). Наћи пројекцију тог предмета на извесну раван управну на π_2, тако да се добије слика предмета гледаног косо озго.*

Положај равни π_3 одређен је ма којом фронталом f, садржаном у тој равни. Нећемо повлачити пројекцијске осе x_2 и x_{23}, јер се обарање равни π_3 може извршити и око фронтале f. Како се у другој пројекцији нови зраци гледања јављају као нормале на f'', треба на њима изабрати онај смер v_3, који показује с десна озго. У том смеру треба оборити и предњи део равни π_3, дакле треба нацртати f'' довољно далеко да би између f'' и нацрта стао страноцрт. Затим, узевши ради



Сл. 312

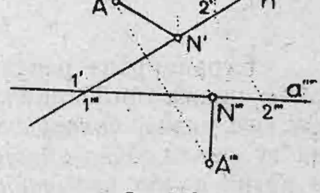
једноставности да се f' поклапа с доњом линијом друге пројекције предмета, преносимо отстојања тачака прве пројекције од f' управно на f'', као што се види из слике.

Решимо још два следећа задатка.

Задатак 1. *Спустити управну из тачке на праву.*

Овај задатак можемо решити и помоћу страноцрта, на следећи начин:

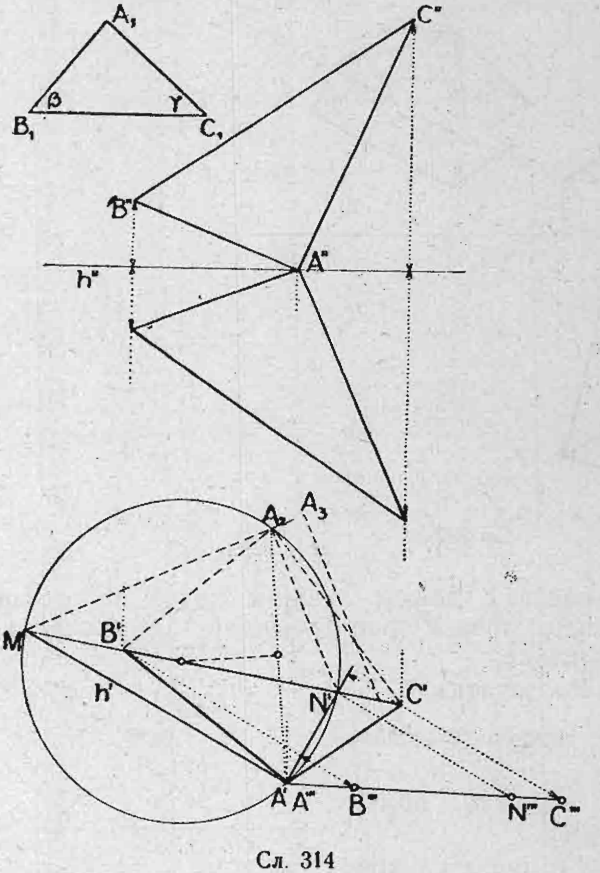
Нека су дате тачка A и права a у првој и другој пројекцији (сл. 313). Поставимо раван π_3 управно напр. на π_1, упоредно правој a или, да буде једноставније, кроз саму праву a, тј. $x_{13} \equiv a'$. Али, како није дата оса x_{12}, послужимо се којом било хоризонталом h равни π_3 уместо осе x_{13}. Имамо $h' \equiv a'$ и повуцимо $h'' \perp A'A''$. Да би се добила трећа пројекција праве, треба наћи трећу пројекцију двеју њених тачака. Али како је a у π_3, налажење пројекције a''' своди се на обарање праве a у хоризонталну раван која пролази кроз h. Оборимо дакле праву a помоћу двеју њених тачака, $1 = a \times h$ и ма које тачке 2, а затим нађимо A''', преносећи отстојање тачке A'' од h'. Управна из A на a пројектује се на



Сл. 313

π_3 као управна права. Дакле подножје N''' управне из A''' на a''' је пројекција траженог подножја нормале из тачке A на праву a. Отуд налазимо N'' и N'.

Задатак 2. *Дата је једна пројекција троугла задатог облика и друга пројекција једног његовог темена; наћи другу пројекцију тог троугла.*



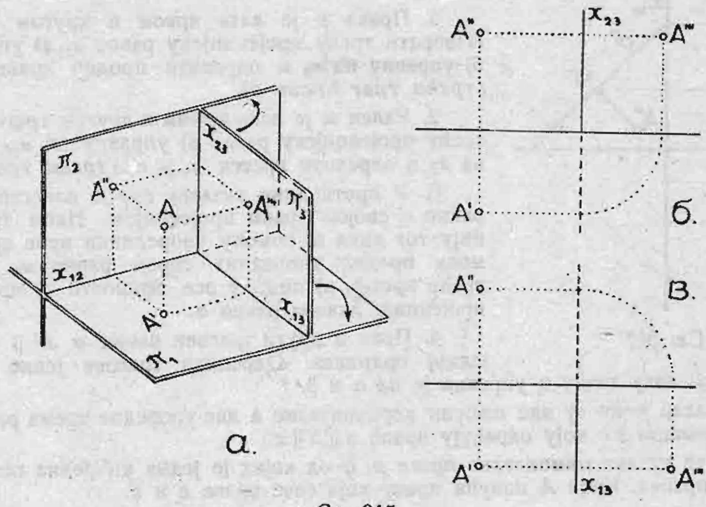
Сл. 314

Нека је троуглу ABC дата прва пројекција $A'B'C'$, затим A'' и нека је $A_1B_1C_1$ троугао који му је сличан (сл. 314). У задатку 1, § 28, показано је како се добија главна линија $AM = h$, линија пада AN у првој пројекцији и права величина дужи AN. Да би се конструисала друга пројекција троугла ABC потребна су релативна отстојања тачака A, B, C од π_1. Да бисмо их добили пројектујемо троугао ABC на раван π_3 постављену кроз AN управно на π_1. Имајући AN у правој величини, опишимо око A' круг с полупречником AN. У пресеку с управном из N' на $A'N'$ имамо N''', а отуд B''' и C'''. Релативна отстојања b и c преносимо на ординале полазећи од h'' у једном или другом смеру; имамо дакле два решења.

120. БОЧНА ПРОЈЕКЦИЈА

Страноцртна раван се употребљава највише кад је управна на обим првим пројекцијским равнима. Тада је називамо *бочном пројекцијском равни, бокоцртном* или *профилном равни*, а управну пројекцију на ту раван *бочном пројекцијом, бокоцртом* или *профилом* (задржавајући и назив *трећа пројекција*). У слици 315 а, приказане су све три пројекцијске равни у том случају, с пројекцијама једне тачке. Како је сад $\pi_3 \perp \pi_1$, и $\perp \pi_2$ можемо према претходно изложеном посматрању раван π_3 оборити и у π_1 и у π_2. Радије се обара у π_2 (сл. 315 б), јер се тада трећа пројекција појављује поред друге, обе у „вертикалном" положају, док би обарање у π_1 дало исту трећу пројекцију окренуту за прав угао (сл. 315 в).

Како се на многим предметима, који се у применама нацртне геометрије претстављају, појављују главне ивице и растојања (којима се записују мере) у правој величини тек ако посматрамо управне пројекције на три међу собом управне равни, конструише се често уз



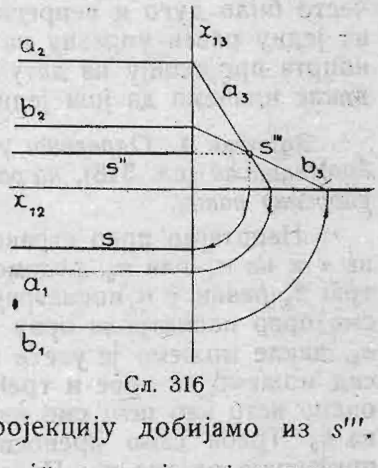
Сл. 315

прву и другу пројекцију бочна пројекција. Неки пут је и у решавању неких теоријских задатака и у применама, погодно радити са нацртом и бокоцртом (другом и трећом пројекцијом), уместо с првом и другом пројекцијом (види сл. 389 и 390).

Доносимо неке задатке који се најједноставније решавају помоћу бочне пројекције.

Задатак 1. *Одредити пресек двеју равни α и β, датих првим и другим траговима и које су упоредне спрам пројекцијске осе x.*

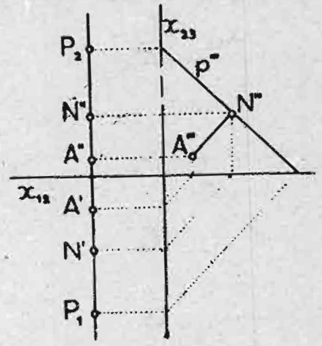
Нађимо трагове равни α и β у једној бочној равни (сл. 316), коју обарамо око x_{23}. Како су a_1 и b_1 у π_1, пројектују се у две тачке равни π_3, које после обртања падају на осу x. Како су a_2 и b_2 у π_2, пројектују се у две тачке на x_{23}. Ако су трећи трагови a_3 и b_3 упоредни, равни α и β су упоредне. Ако се a_3 и b_3 секу, тачка пресека је трећа пројекција s''' пресечне праве s, чију прву и другу пројекцију добијамо из s'''.



Сл. 316

Задатак 2. *Дата је права p траговима који су на једној ординали. На истој ординали су дате пројекције тачке A. Наћи подножје нормале из A на p.*

Пројектујемо праву p и тачку A на једну бочну раван, оборену у π_2 (сл. 317). (Уместо кружним луковима можемо обарање вршити и помоћу упоредних правих које секу праву x_{23} под углом 45°). У трећој пројекцији управна из A на p пројектује се као $A'''N''' \perp p'''$. Одатле добијамо N' и N''.



Сл. 317

Задаци за вежбу

1. Права p је дата првом и другом пројекцијом. Изабрати трећу пројекцијску раван π_3 а) управну на π_1, б) управну на π_2 и одредити продор праве p кроз π_3 *(трећи траг праве p)*.

2. Раван α је дата првим и другим трагом. Изабрати трећу пројекцијску раван а) управну на π_1, б) управну на π_2 и одредити пресек $\pi_3 \times \alpha$ *(трећи траг равни α)*.

3. У претходном задатку дат је известан полигон у равни α својом првом пројекцијом. Наћи трећу пројекцију тог лика а) помоћу упоредница прве врсте, б) помоћу правих упоредних спрам равни π_3 (упоредница треће врсте), в) помоћу осе афиности за прву и трећу пројекцију ликова равни α.

4. Први и други трагови равни α и β секу се на једној ординали. Одредити трагове једне равни која пролази кроз дату тачку и управна је на α и β.

5. Квадар коме су две пљосни хоризонталне а две упоредне према равни π_2 треба пресећи равнином ab коју одређују праве $a \parallel b \parallel x$.

6. Дате су две мимоилазне праве p, q од којих је једна упоредна оси x, и тачка A ван тих правих. Кроз A повући праву која сече праве a и b.

121. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА НА РАВАН МА КОГ ПОЛОЖАЈА

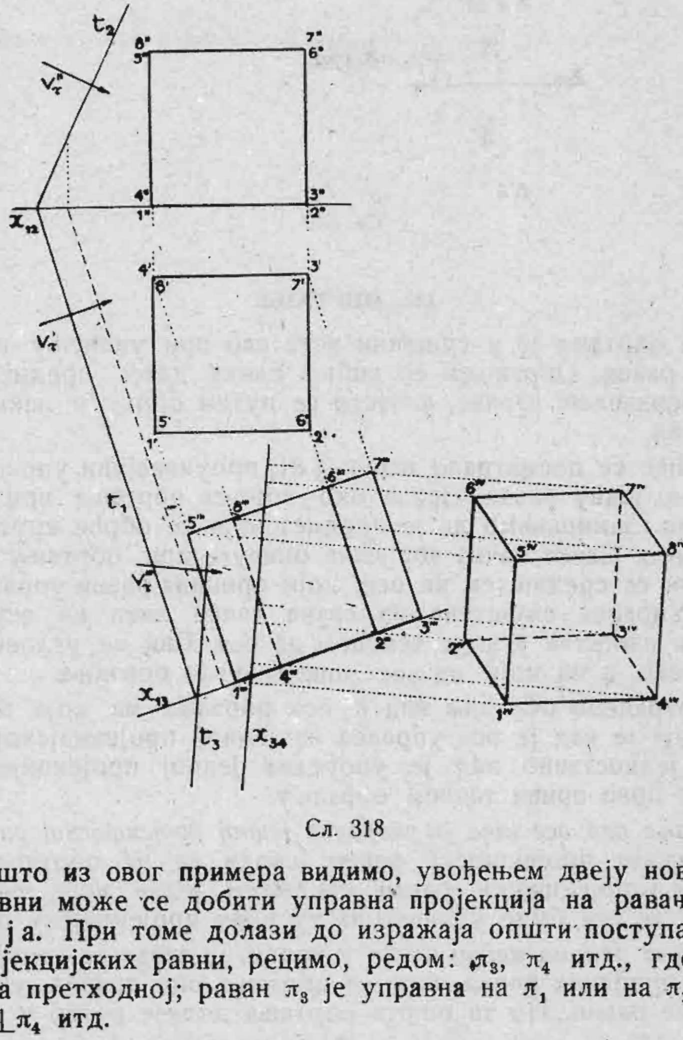
Ако бисмо хтели да из тлоцрта и нацрта одредимо управну пројекцију неког предмета непосредно на раван ма ког положаја, морали бисмо из појединих тачака предмета спуштати управне на ту раван и налазити њихове продоре с том равни. То би за сложеније предмете често било дуго и непрегледно. Једноставније је наћи прво страноцрт на једну раван управну на дату косу раван, а тек помоћу тог страноцрта пројекцију на дату раван. Ова раван је управна на претходну, дакле имаћемо да још једном конструишемо страноцрт.

Задатак 1. *Одредити управну пројекцију коцке дате првим двема пројекцијама* (сл. 318), *на раван τ одређену траговима или на неку њој упоредну раван.*

Нацртајмо прво страноцрт на коју било раван π_3 која је управна на τ и на π_1 или π_2, рецимо на π_1. Нова оса је x_{13}. Одредимо и трећи траг t_3 равни τ и посматрајмо сад прву и трећу пројекцију као што смо прво посматрали прву и другу пројекцију. Раван τ је управна на π_3, дакле можемо је узети за *четврту пројекцијску раван.* Према томе сад можемо из прве и треће пројекције коцке добити пројекцију на τ онако исто као што смо из прве и друге пројекције добили пројекцију на π_3. Треба само преносити управно на t_3 отстојања тачака прве пројекције од осе x_{13}. Права t_3 је сад нова пројекцијска оса.

При свему томе треба изабрати смер гледања за пројекцију на раван τ. Назначимо тај смер стрелицом v_τ управном на τ, дакле чије пројекције су управне на одговарајућим траговима равни τ. Тиме је пак одређен смер у коме се обара четврта пројекцијска раван.

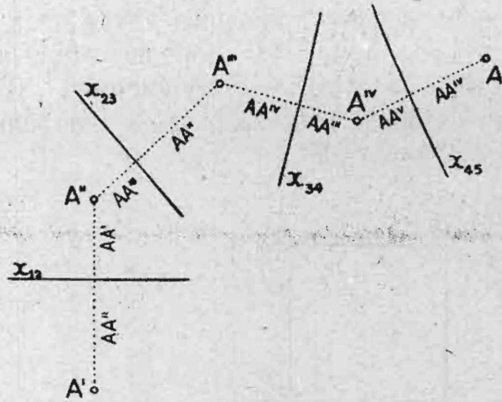
Како би у слици четврта пројекција коцке пала онамо где јој је трећа пројекција боље је померити упоредно нову пројекцијску осу у једном од два смера. То је учињено у смеру ν_τ'''. Тиме је за четврту пројекцијску раван изабрана извесна раван π_1 упоредна равни τ. Нова пројекцијска оса је дакле $x_{34} \parallel t_3$.



Сл. 318

Као што из овог примера видимо, увођењем двеју нових странооцртних равни може се добити управна пројекција на раван **м а к о г п о л о ж а ј а**. При томе долази до изражаја општи поступак увођења нових пројекцијских равни, рецимо, редом: π_3, π_4 итд., где је свака управна на претходној; раван π_3 је управна на π_1 или на π_2, а затим $\pi_4 \perp \pi_3$, $\pi_5 \perp \pi_4$ итд.

За удаљености нових пројекција извесне тачке A од нових оса постоји опште правило по коме је удаљеност сваке нове пројекције од нове пројекцијске осе једнака удаљености претпретходне пројекције од претходне пројекцијске осе. Дакле напр. у низу пројекција A', A'', A''',... тачке A на равни $\pi_1 \perp \pi_2 \perp \pi_3 \perp$... (сл. 319) удаљеност тачке A''' од x_{23} једнака је удаљености тачке A' од x_{12}, удаљеност тачке A^{IV} од x_{34} једнака је удаљености тачке A'' од x_{23} итд.



Сл. 319

122. ОБРТАЊЕ

Сврха обртања је у суштини иста као при увођењу нових пројекцијских равни. Обртањем се добија слика датог предмета кад се гледа с произвољне стране, а често се путем обртања лакше решава неки задатак.

Обртање се посматрало већ у § 81, проучавајући управне пројекције на само једну раван. Права око које се обртање врши зове се *оса обртања*. Замишљамо да је предмет који се обрће круто спојен с осом обртања. Свака тачка тог лика описује при обртању круг или кружни лук са средиштем на оси, који припада равни управној на оси обртања. Управна спуштена из сваке тачке лика на осу обртања описује пак известан угао с теменом на оси. Сви ти углови су међу собом једнаки, а ма који од њих зове се угао обртања.

Посматраћемо обртања кад је оса обртања ма која права. Најједноставније је кад је оса управна на једној пројекцијској равни, а још увек једноставно кад је упоредна једној пројекцијској равни. Стога ћемо прво прићи таквом обртању.

Обртање око осе која је упоредна једној пројекцијској равни а коса је спрам друге пројекцијске равни, своди се на обртање око осе управне на пројекцијску раван увођењем једне нове пројекцијске равни тако да оса буде управна на ту нову пројекцијску раван.

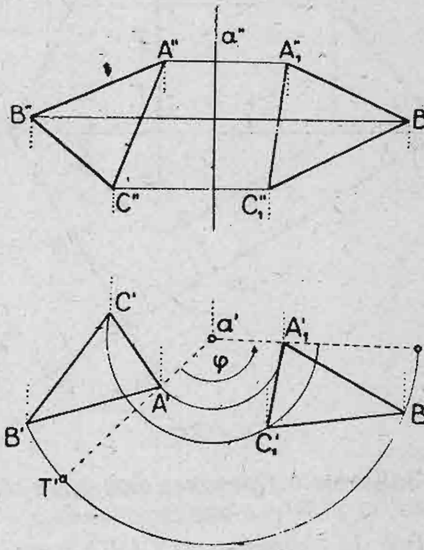
Обртање око ма какве праве у простору своди се узимањем двеју нових пројекцијских равни опет на обртање око правих управних на пројекцијске равни. Но та општа обртања долазе ретко у обзир.

Задатак 1. *Обрнути троугао ABC за угао φ у датом смеру око праве управне на равни тла.*

Како свако теме троугла ABC описује обртањем кружни лук у равни упоредној спрам π_1 (сл. 320) описујемо око тачке a' (у коју се пројектује оса обртања a) кроз свако теме троугла кружни лук у заданом смеру и одмеравамо углове једнаке даном углу. Треба да буде $\varphi = \sphericalangle A'a'A_1' = \sphericalangle B'a'B' = \sphericalangle C'a'C'$. Пошто се одреди једно теме у новом положају, напр. тачка A_1', остала темена добијају се напр.

овако: Одреди се T' и T_1' на правим кроз a', у шестар узме растојање $T'T_1'$ и пренесе из B' на исти лук; тако налазимо B_1', а затим слично C_1'. Троугли ABC и $A_1 B_1 C_1$ су подударни.

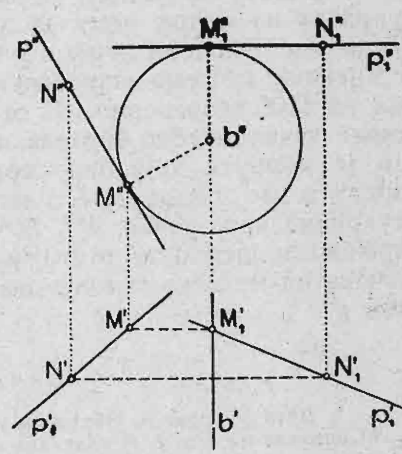
Отстојања тачака од равни π_1 остају тим обртањем непромењена, па се друге пројекције темена обрнутог троугла добијају у пресецима нових ординала, које пролазе кроз A_1', B_1' и C_1', с правим управним на a'', постављеним кроз A'', B'', C''.



Сл. 320

Задатак 2. *Обрнути праву p око осе b, управне на π_2 тако да буде хоризонтална.*

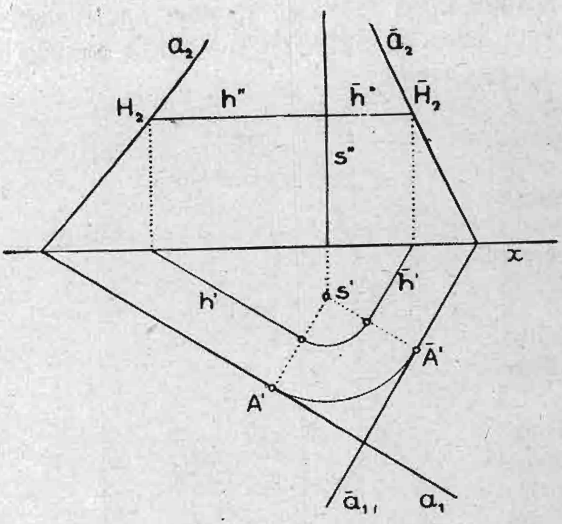
Да би права p добила обртањем положај хоризонталне праве p_1, њена друга пројекција p_1'' треба да буде управна на ординалама (сл. 321). Обрнимо зато прво ону тачку M праве p, за коју је $b''M'' \perp p''$, тј. опишимо кружни лук из b'' кроз M'' до пресека M_1'' с ординалом кроз b''. Постоје две тачке пресека; изаберимо једну. Права кроз M_1'' управна на $b''\,M_1''$, тј. дирка описаног круга у M_1'', је p_1'', јер као што је $p'' \perp b''M''$, тако је и $p_1'' \perp b''M_1''$. Да бисмо добили p_1' треба да уочимо још једну тачку N праве p. Нађимо прво N_1'' из услова $M''N'' = M_1''N_1''$, а затим, у пресеку ординале кроз N_1'' и управне на b' кроз N', имамо N_1', а отуд $p' = M_1'N_1'$.



Сл. 321

Задатак 3. *Обрнути раван α, дату траговима, око осе s управне на раван тла, за прав угао.*

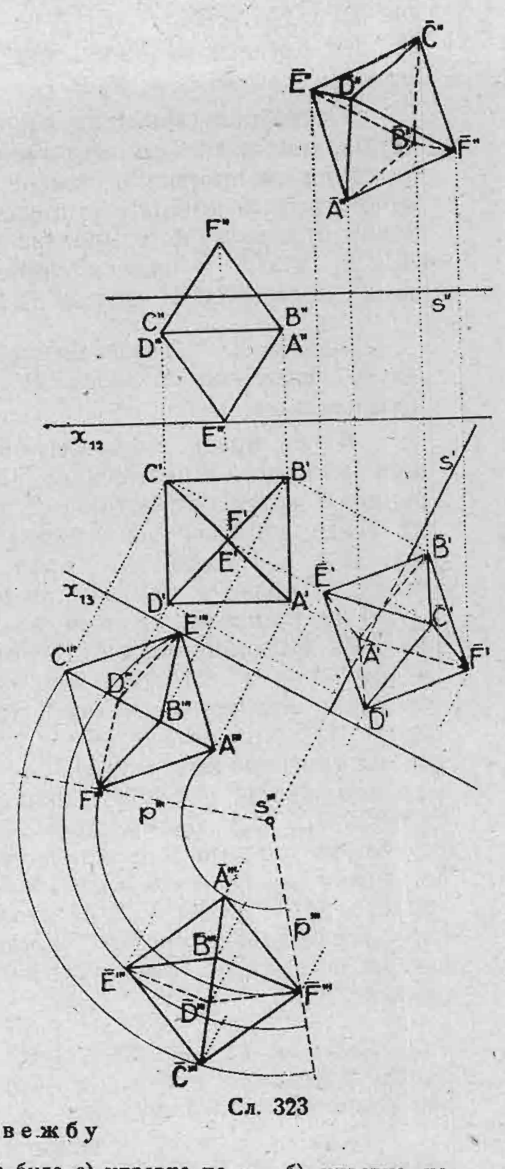
Нека су a_1 и a_2 трагови дате равни α (сл. 322). Да бисмо је обрнули потребно је обрнути њене две праве. За једну праву узмимо први траг a_1 а за другу узмимо једну хоризонталу h равни α. Обртањем тачке A на a_1 ($AS' \perp a_1$) око s' за прав угао, рецимо у позитивном смеру, добијамо $\overline{A}$, а отуд $\overline{a}_1$, први траг обрнуте равни α (равни $\overline{\alpha}$). Да бисмо добили други траг $\overline{a}_2$, нађимо хоризонталу h у обрнутом положају ($\overline{h}' \parallel \overline{a}_1$, на истом отстојању од првог трага). Како је $\overline{h}'' \equiv h''$, налазимо $\overline{H}_2$, а отуд $\overline{a}_2$.



Сл. 322

Задатак 4. *Правилан октаедар обрнути за 110° око хоризонталне осе s.*

Дат је октаедар $ABCDEF$ у првој и другој пројекцији (сл. 323). Одредимо његову пројекцију на раван π_3 управну на s, при чему је $x_{13} \perp s'$. Тада се s''' своди на тачку и у трећој пројекцији можемо извршити обртање за 110° непосредно. Да се не би свака тачка засебно обртала, погодно је обрнути коју било помоћну праву p као у задатку 1, а затим на луковима кроз тачке A''', B''' итд., преносити шестаром отстојања тих тачака од пресека тих лукова правом p''.



Сл. 323

Задаци за вежбу

1. Дата је права a. Обртањем довести да буде а) управна на π_1, б) управна на π_2, в) управна на оси x, г) упоредна према равни π_1, д) упоредна према равни π_2, ђ) упоредна према оси x.

2. Обрнути дату праву око осе управне на π_1 тако да а) хоризонтална пројекција пролази кроз дату тачку, б) дата права сече једну другу дату праву, управну на π_1, в) дуж која спаја трагове дате праве има дату дужину, г) дата права буде упоредна датој равни, д) две пројекције дате праве граде дате углове с осом x.

3. Две дате праве обртати истовремено око осе управне на π_1 док њихове друге пројекције не постану међу собом упоредне.

4. Наћи најкраће растојање двеју мимоилазних правих, употребљавајући обртање.

5. Дату раван обрнути око осе управне на π_1 док не дође у положај а) да пролази кроз дату тачку, б) да буде упоредна датој правој.

6. Дату раван обрнути око њеног првог трага за дати угао.

7. Наћи осу око које треба обртати три дате тачке, да би се нашле на истој правој управној на π_1.

8. Наћи осу око које треба обртати дату раван а) да би та раван прошла кроз дату тачку и била упоредна другој датој равни; б) да би та раван пролазила кроз дату тачку и била управна на једну другу дату раван.

9. Дату раван обрнути око осе управне на π_1 тако да се трагови поклопе.

10. Дате су три тачке A, B, C; а) обрнути тачку C око осе управне на π_1 да дође у положај да буде подједнако удаљена од тачака A и B; б) обрнути систем тачака A и B око осе управне на π_1 тако да постану подједнако удаљене од тачке C.

11. Дате су три тачке A, B, C; а) обртањем око осе управне на π_1 довести тачку C у положај C_1 тако да угао AC_1B буде прав угао; б) обртањем око исте осе довести дуж равни AB у положај A_1B_1 тако да угао A_1CB_1 буде прав угао.

ГЛАВА IV

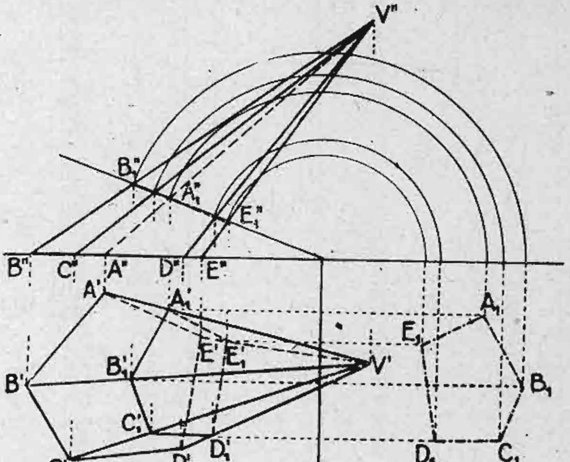
ПРЕСЕЦИ РОГЉАСТИХ И ДРУГИХ ПОВРШИ

123. РАВНИ ПРЕСЕЦИ РОГЉАСТИХ ПОВРШИ

Пошто нам је одређивање равних пресека познато из посматрања управне пројекције на једну раван, можемо се сад ограничити углавном на нове околности које настају посматрањем управних пројекција на две равни, као што ћемо видети на следећим задацима.

Задатак 1. *Пресећи косу петострану пирамиду с основом у равни тла, једном равни која је дата траговима и наћи праву величину и облик пресека.*

Ако је пресечна раван τ управна на једну пројекцијску раван, напр. на π_2, цео пресек на ту пројекцијску раван пројектује се у једну дуж, коју имамо непосредно у слици, а отуд налазимо на одговарајућим ординалама темена пресечног полигона у првој пројекцији (сл. 324). Обарањем равни τ у π_1 или π_2 добијамо праву величину пресека.



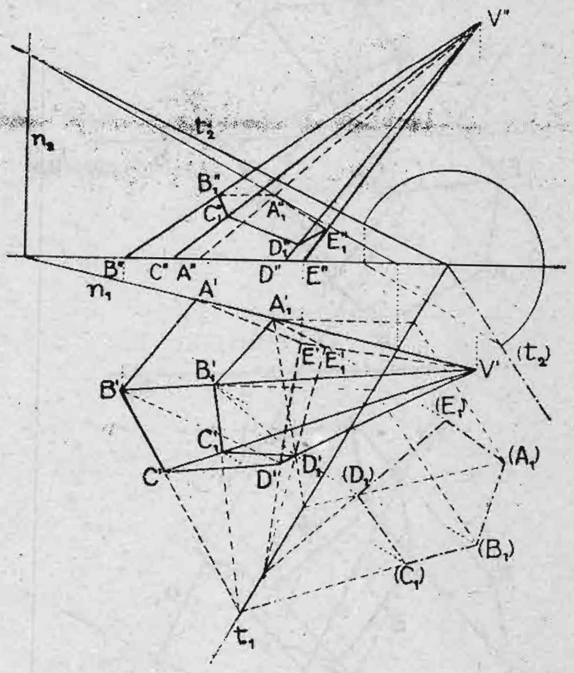
Сл. 324

Посматрајмо случај кад је раван τ ма ког положаја. Како је први траг равни τ њен пресек равнином основе пирамиде, може се у првој пројекцији одредити цели пресек пирамиде помоћу колинеације ако нађемо макар једну тачку тог пресека. Нађимо зато напр. тачку продора A ивице AV кроз раван τ (сл. 325), служећи се вертикалном пројектујућом равни ν те ивице. Тако добијамо A_1'', а отуд A_1'. Даље радимо помоћу колинеације, а пошто добијемо прву пројекцију пресека налазимо тачке друге пројекције на њиховим ординалама. Напослетку обарањем равни, рецимо у π_1, добијамо праву величину пресека.

Уместо да се одреди прво тачка продора A_1, може се наћи одмах пресек равни τ једном бочном страном пирамиде, напр. страном ABV.

У ту сврху може се помоћу праве кроз V, упоредне првом трагу u_1 равни ABV наћи други траг u_2 те равни, затим пресек $ABV \times \tau = A_1B_1$ у обим пројекцијама. Даље можемо опет применити колинеацију.

Цели се пресек може добити, разуме се, и без колинеације, налазећи редом продоре бочних ивица или пресеке бочних страна пирамиде пресечном равни. Тај поступак је нешто дужи, али је вероватније да ће грешке бити мање, јер свако теме пресека одређујемо независно једно од другог, па грешка при одређивању једног темена не утиче на одређивање осталих.



Сл. 325

Уместо изложених начина можемо увести нову пројекцијску раван π_3, управну на π_1, такву да пресечна раван τ буде управна на π_3. Тада се пројекција на π_3 добија непосредно, а одатле прва и друга пројекција. Посматраћемо тај случај на следећем примеру.

Све ово преноси се непосредно на случај кад је основа пирамиде ма у којој хоризонталној равни, само што је тада оса колинеације једна хоризонтала пресечне равни. Слично би се поступало и кад би основа пирамиде била у π_2, или у ма којој фронталној равни; а с извесним изменама и кад би била ма у којој равни уопште.

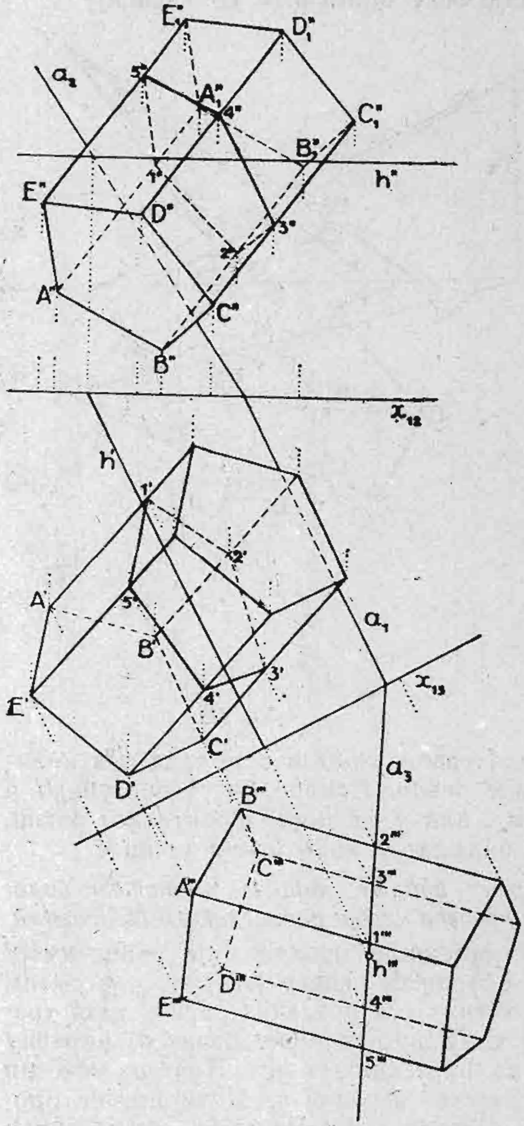
Задатак 2. *Правилну петострану призму, која је у општем положају према пројекцијским равнима, пресећи косом равни датом траговима.*

Нека су $A'B'\ldots$ и $A''B''\ldots$ пројекције призме чије ивице имају дате величине. (Конструисане су обарањем основе $(A)(B)\ldots$, а затим једне бочне ивице, као у § 118). Нека је α пресечна раван, дата траговима a_1 и a_2 (сл. 326). Уведимо нову пројекцијску раван π_3 управну на π_1 и на α. Нека је $x_{13} \perp a_1$ нова пројекцијска оса. Траг a_3 можемо добити помоћу које било хоризонтале h равни a. Цели пресек пројектује се на π_3 као дуж $2'''\,5'''$. Одатле добијамо прву, затим другу пројекцију пресека.

Задатак 3. *Одредити пресек датог призматоида косом равни.*

Нека је призматоиду једна основа оивичена петоуглом $ABCDE$, друга четвороуглом $FGHK$, а све бочне стране троуглима (сл. 327). При цртању морамо имати на уму да је $ABCDE$ раван петоугао, тј. само три тачке, напр. A, B и C можемо изабрати произвољно, а да је $FGEK$ раван четвороугао у паралелној равни, тако да изабравши $F'G'H'K'$ можемо у другој пројекцији узети једну тачку, напр. F''.

Спојимо затим темена обих полигона тако да добијемо бочну површ састављену из троугаоних страна, и на крају одредимо које се ивице виде, а које не виде.



Сл. 326

Претпоставимо да је раван којом треба пресећи дата двема правим a и b. Одредимо пресечну праву s равни ab и равни једне основе, напр. основе $FGHK$ (§ 107), затим продор једне ивице, напр. EF кроз раван ab. Нека је то тачка R (нађена помоћу P и Q). Знајући R и s можемо наћи цели пресек, поступајући као да је s оса колинеације, и то продужавајући оне странице троуглова које су у равни основе $FGHK$, до пресека с правом s, или повлачењем упоредних страницама садржаним у равни ABC (праве $[H \| CD]$ и $[H \| DE]$). Нагласимо да s није оса колинеације, јер бочне ивице не пролазе све кроз једну тачку. Тако добијамо прву пројекцију пресека, а одатле непосредно другу пројекцију.

Задаци за вежбу

1. Праву тространу пирамиду пресећи косом равни (косом према π_1 и π_2) која а) полови висину, б) пролази кроз тачку која дели бочну ивицу по размери 2:3, в) која је управна на једној бочној ивици.

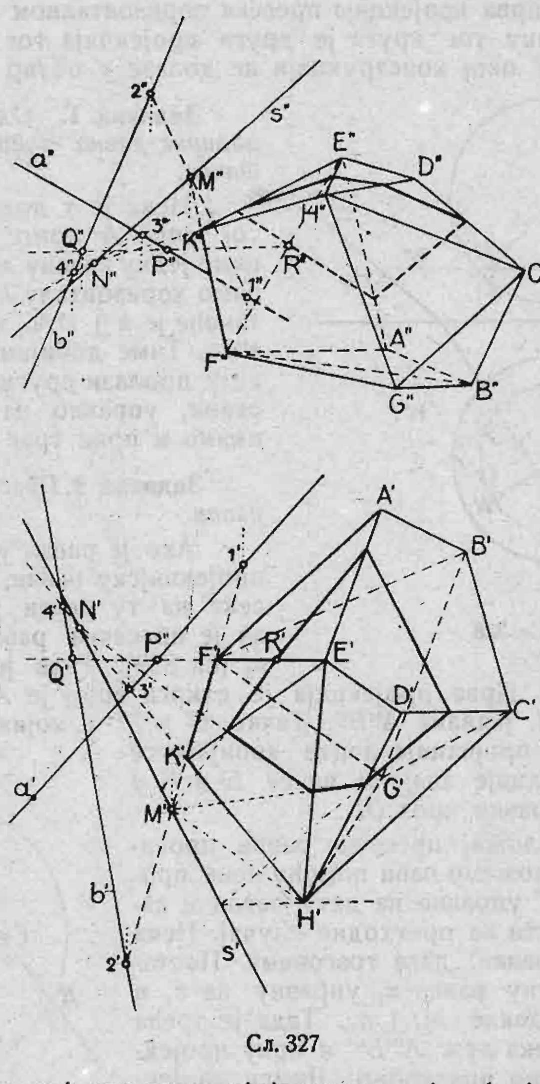
2. Правилну шестострану пирамиду с основом у датој косој равни пресећи једном косом равни која полови њену висину.

3. Тетраедар $ABCD$ пресећи косом равни која је подједнако удаљена од ивица AB и CD и показати да је пресек паралелограм.

4. Правилни тетраедар пресећи једном равни која је упоредна његовим двема наспрамним ивицама.

5. Косу четворострану пирамиду с основом у π_2 пресећи косом равни која пролази а) кроз једну дату тачку ван пирамиде, б) кроз две дате тачке од којих је једна ван пирамиде а друга на једној бочној ивици, в) кроз две тачке од којих је једна на висини пирамиде а друга на правој која спаја врх пирамиде с тачком у којој се секу дијагонале основе.

6. Пресећи коцку једном равни која пролази кроз средишта трију ивица које нису суседне и нису упоредне међу собом. Наћи прави облик и величину пресека.



Сл. 327

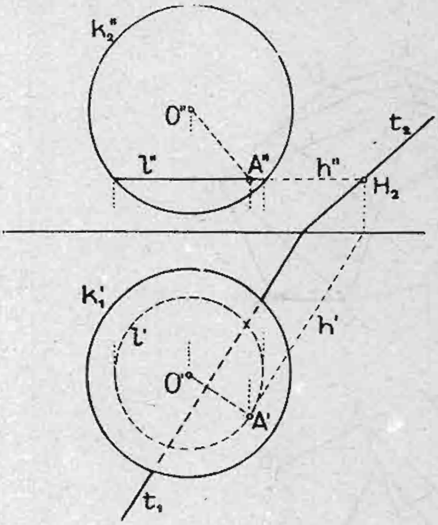
7. Пресећи коцку једном равни која је управна на једној дијагонали и посматрати како се мења пресек кад се раван помера од једног до другог краја дијагонале.

8. Паралелепипед чије су све пљосни косе према пројекцијским равнима пресећи равнином поклапања. Наћи прави облик и величину пресека.

124. ДОДИРНЕ РАВНИ И РАВНИ ПРЕСЕЦИ ЛОПТЕ

Као што већ знамо, управна пројекција лопте је круг, по величини једнак великом кругу лопте (§ 53). Према томе, два подударна круга k_1' и k_2'' (сл. 328) претстављају лопту са средиштем O и полупречником једнаким полупречницима тих кругова. Свака тачка A' у кругу k_1' је пројекција двеју тачака на лопти: једне испод (нека је то тачка A), друге изнад хоризонталне равни кроз O. Тачка A је на пресеку лопте једном хоризонталном или фронталном равни. Круг l'' из

O' кроз A' је прва пројекција пресека хоризонталном равни, а дуж l'', једнака пречнику тог круга је друга пројекција тог пресека; на тој дужи је A''. (У овој конструкцији не долазе у обзир t_1, t_2 и H_2).



Сл. 328

Задатак 1. *Одредити трагове додирне равни лопте у једној њеној тачки.*

Нека је τ додирна раван у датој тачки A лопте (сл. 328). Повуцимо једну главну линију кроз A, рецимо хоризонталу h. Како је $\tau \perp OA$, такође је $h \perp OA$, дакле и $h' \perp O'A'$, $h'' \| x$. Тиме добијамо тачку H_2 кроз коју пролази други траг t_2 додирне равни, управно на $O''A''$, а отуд имамо и први траг t_1.

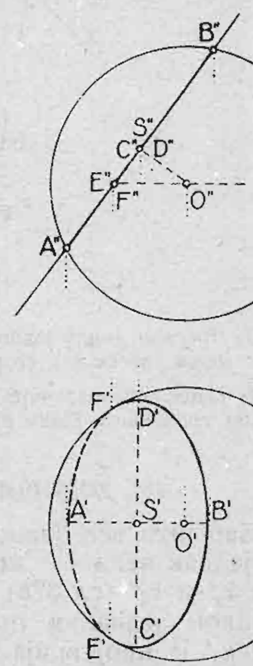
Задатак 2. *Пресећи лопту датом равни.*

Ако је раван управна на једну пројекцијску раван, пројекција пресека на ту раван је дуж. Узмимо да је пресечна раван α управна на π_2 (сл. 329). Тада је друга пројекција дуж $A''B''$. Прва пројекција је елипса којој је $A'B'$ мала оса, а велика оса $C'D'$, једнака $A''B''$. Тачке E' и F' у којима елипса додирује руб прве пројекције лопте добијају се из друге пројекције знајући да су E и F у хоризонталној равни кроз O.

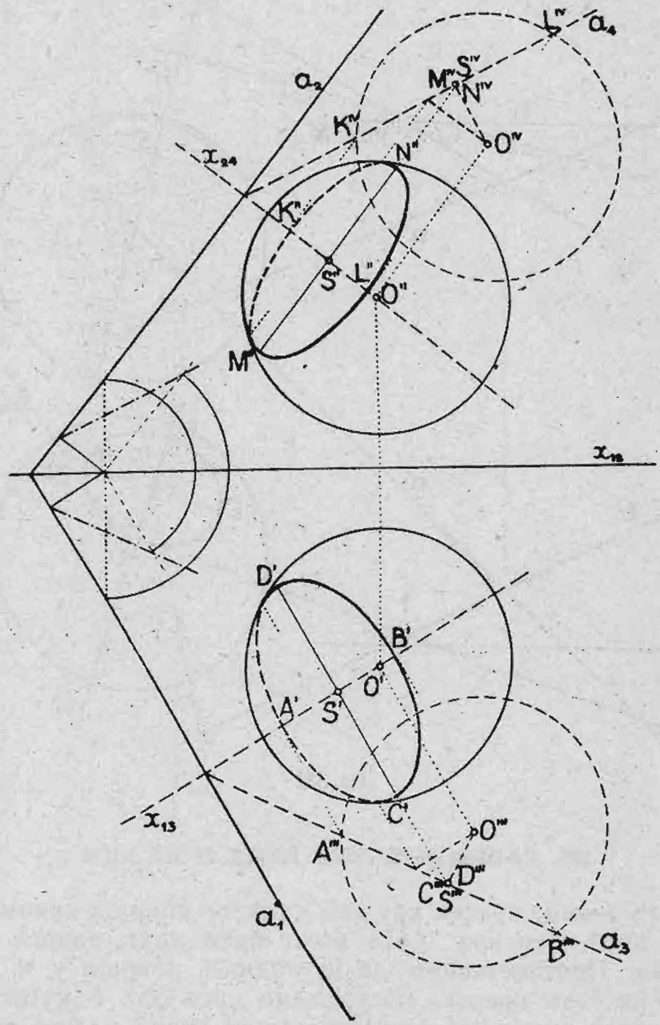
Ако је положај пресечне равни произвољан, пресек можемо наћи помоћу нове пројекцијске равни управне на дату раван и задатак тиме свести на претходни случај. Нека је α пресечна раван, дата траговима. Поставимо страноцртну раван π_3 управну на π_1 и на α (сл. 330), дакле $x_{13} \perp a_1$. Тада је трећа пројекција пресека дуж $A'''B'''$ и прву пројекцију добијамо као претходно. Другу пројекцију можемо добити на исти начин, помоћу страноцртне равни π_4 која је управна на π_2 и α.

Сетимо се да смо исту конструкцију вршили већ у § 85, с том разликом што смо тада посматрали само пресек лопте и равни α равнином управном на α и на пројекцијску раван и која пролази кроз средиште лопте.

Претпоставимо још да раван α није дата траговима, већ двема правим a и b (сл. 331). Одредивши тада једну хоризонталу h и једну фронталу f равни α, конструишимо пројекције нормале n спуштене из средишта O лопте на

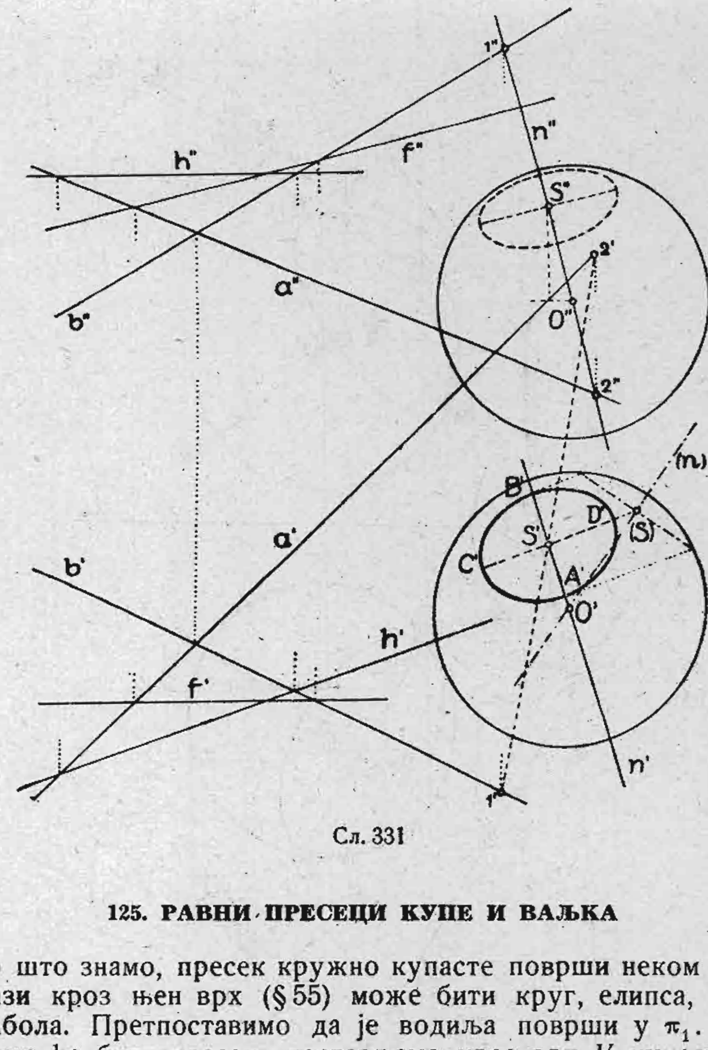


Сл. 329



Сл. 330

α ($n' \perp h'$, $n'' \perp f''$) и одредимо тачку S продора нормале n кроз α (помоћу тачака *1* и *2*). Оборимо затим пројектујућу раван прве врсте праве n у хоризонталну раван која пролази кроз O и одредимо осе $A'B'$ и $C'D'$ елипсе која претставља прву пројекцију пресечног круга. (Или, друкчије гледано, пројектујемо лопту с пресеком на страноцртну раван истоветну с том пројектујућом равни). На исти начин можемо одредити и другу пројекцију пресечног круга.



Сл. 331

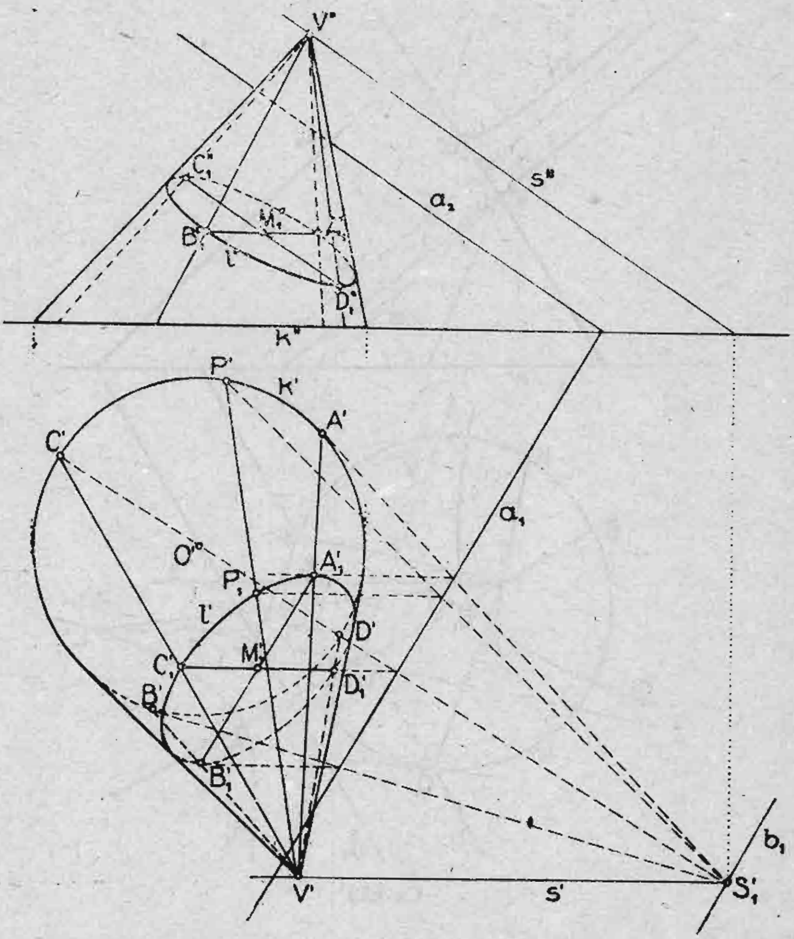
125. РАВНИ ПРЕСЕЦИ КУПЕ И ВАЉКА

Као што знамо, пресек кружно купасте површи неком равни која не пролази кроз њен врх (§ 55) може бити круг, елипса, хипербола или парабола. Претпоставимо да је водиља површи у π_1. Да бисмо видели шта ће бити пресек, постављамо кроз врх V купасте површи помоћну раван β упоредну датој пресечној равни α. Ако први траг b_1 равни β нема заједничких тачака с водиљом, пресек је елипса; ако b додирује водиљу, пресек је парабола; ако сече водиљу, хипербола.

Поступак изналажења пресека је у суштини исти као у § 55, тј. постављамо неку праву s кроз врх купе и одредивши продор те праве кроз раван основе и кроз пресечну раван α, постављамо помоћне равни кроз праву s и кроз неку изводницу. Пресек те изводнице с правом по којој α сече помоћну раван је једна тачка пресечне криве. За праву s можемо сад узети фронталну раван β која пролази кроз врх V. Како је $\alpha \parallel \beta$, продор те праве кроз α је у бесконачности, дакле прве пројекције пресечних правих помоћних равни пресечном равни α су праве паралелне првој пројекцији фронтале, тј. $\parallel x$.

Задатак 1. *Даша је коса кружна куйа и раван* α (сл. 332), *наћи йресек.*

Кроз врх V постављамо фронталу s равни $\beta \parallel \alpha$. Кроз први траг S_1 праве s пролази раван β. Овај не сече основу купе, дакле пресек је елипса. Кроз праву s и поједине изводнице постављамо равни. Пресеци тих равни и равни α су сви упоредни према s, а у пресецима тих пресечних правих и одговарајућих изводница налазимо тачке елипсе прво у првој пројекцији, а отуд у другој пројекцији.



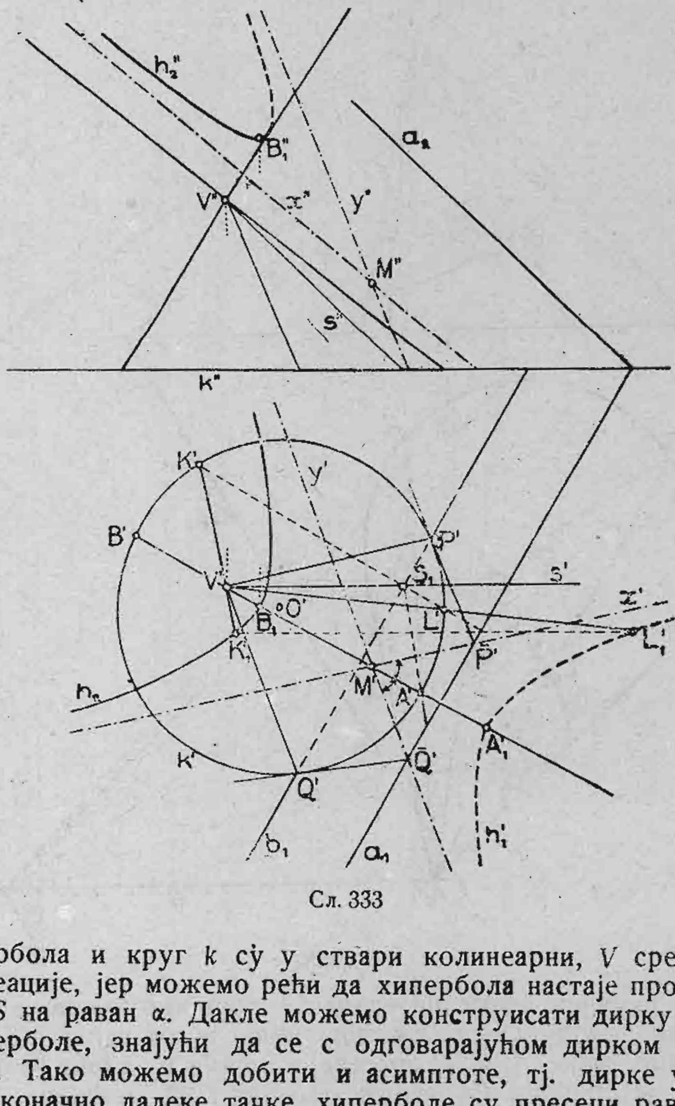
Сл. 332

Један пречник пресечне елипсе l добијамо од помоћних равни чији трагови додирују круг k основе купе, тј. од равни VS_1A и VS_1B; тако налазимо тачке A_1 и B_1 пресека, у којима су дирке на l упоредне, дакле A_1B_1 је пречник. Спрегнути пречник C_1D_1 добијамо од помоћне равни која пролази кроз средиште O основе. Но имајући пар спрегнутих пречника A_1B_1 и C_1D_1 можемо конструисати пресек и не тражећи даљих тачака.

Задатак 2. *Дата је коса кружно купаста површ. Наћи пресек једном равни, таквом да тај пресек буде хипербола.*

Задржавајући исте ознаке, знамо да b_1 мора сећи круг k основе (сл. 333) да би пресек био хипербола.

Тачке хиперболе можемо одредити на исти начин као у претходном случају, тј. помоћу пресека појединих изводница с пресечним правим равни α и равни постављених кроз праву VS_1 и кроз одговарајућу изводницу. У слици 333 грана h_2 је изнад равни π_1, а грана h_1 је на делу купасте површи који је испод равни π_1.



Сл. 333

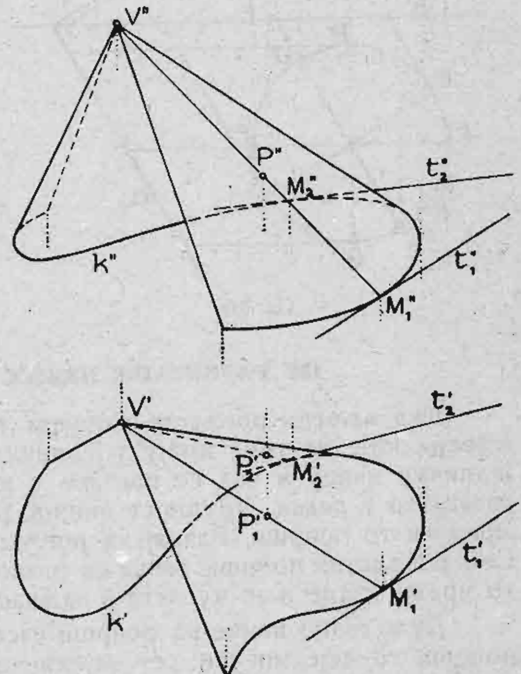
Хипербола и круг k су у ствари колинеарни, V средиште а a_1 оса колинеације, јер можемо рећи да хипербола настаје пројектовањем круга из S на раван α. Дакле можемо конструисати дирку ма у којој тачки хиперболе, знајући да се с одговарајућом дирком круга сече на оси a_1. Тако можемо добити и асимптоте, тј. дирке у бесконачности. Бесконачно далеке тачке хиперболе су пресеци равни α двема изводницама које су јој упоредне. То су изводнице садржане у β, тј. VP и VQ где су P и Q пресеци круга k правом b_1. Повуцимо дакле дирке на k у P и Q и нека оне секу a_1 у $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Тада су асимптоте $m=[\overline{P} \parallel VP]$ и $n=[\overline{Q} \parallel VQ]$, њихов пресек M је средиште хиперболе. Добивши прву пројекцију хиперболе и асимптота, добијамо другу пројекцију лако, знајући да је све то садржано у α.

Темена A_1' и B_1' хиперболе $h_1'h_2'$ добијамо на располовници $M'A'$ угла $\overline{P}'M'\overline{Q}'$, тј. путем помоћне равни VS_1A добијамо тачку A_1', а тачка B_1' је симетрична тачки A_1' у односу на средиште M'.

У идућим задацима посматрамо купасту површ чија водиља је ма каква просторна крива k.

Задатак 3. *Дата је једна пројекција тачке P на купастој површи Vk; наћи непознату пројекцију тачке P.*

Нека је напр. дато P'' (сл. 334). Како се у $P''V''$ пројектују две изводнице, које секу водиљу k у M_1 и M_2, задатак има два решења. Одредивши M_1'' и M_2'' нађимо M_1' и M_2' на k'. У пресеку ординала кроз P'' и пројекција $V'M_1'$ и $V'M_2'$ обих изводница добијамо две тачке, P_1' и P_2': P'' је друга пројекција тачке P_1 и P_2.



Сл. 334

Задатак 4. *На купасту површ из претходног задатка поставити додирну раван кроз дату изводницу.*

Додирна раван садржи дирку на водиљу k у тачки у којој дата изводница сече водиљу. Дакле додирна раван која садржи напр. изводницу VM_1 одређена је правим VM_1 и t_1, а она која садржи VM_2, правим VM_2 и t_2.

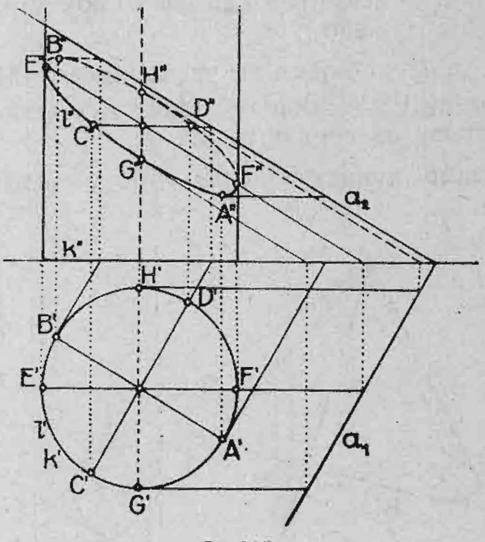
Задатак 5. *У датој тачки купасте површи подићи нормалу на ту површ.*

Одредимо прво додирну раван у тој тачки. Управна права на тој равни и која пролази кроз дату тачку је тражена управна на купастој површи. (Нека конструкцију изврши читалац у свом цртежу).

С ваљком поступамо као с купом чији врх је бескрајно далека тачка.

Задатак 6. *Дата је ваљкаста површ с вертикалним изводницама и чија водиља је круг у π_1. Одредити њен пресек косом равни α.*

Како се прва пројекција површи пројектује у круг водиље k, прва пројекција пресека l поклапа се с k, а другу пројекцију добијамо на хоризонталама и фронталама равни $\varkappa$, кроз поједине тачке пресечне елипсе. У тачкама A'' и B'' тангенте на елипсу l'' су упоредне оси x, тј. то су најнижа и највиша тачка елипсе. У тачкама G'' и H'' тангенте су упоредне другом трагу a_2, а у E'' и F'' елипса l'' додирује пројекцију изводница које сачињавају контуру друге пројекције површи. Како су AB и CD осе елипсе k, а EF и GH парови спрегнутих пречника, можемо из $A''B''$ и $C''D''$ или из $E''F''$ и $G''H''$, као спрегнутих пречника, добити осе елипсе l''.



Сл. 335

126. РАЗВИЈАЊЕ НЕКИХ ПОВРШИ У РАВАН

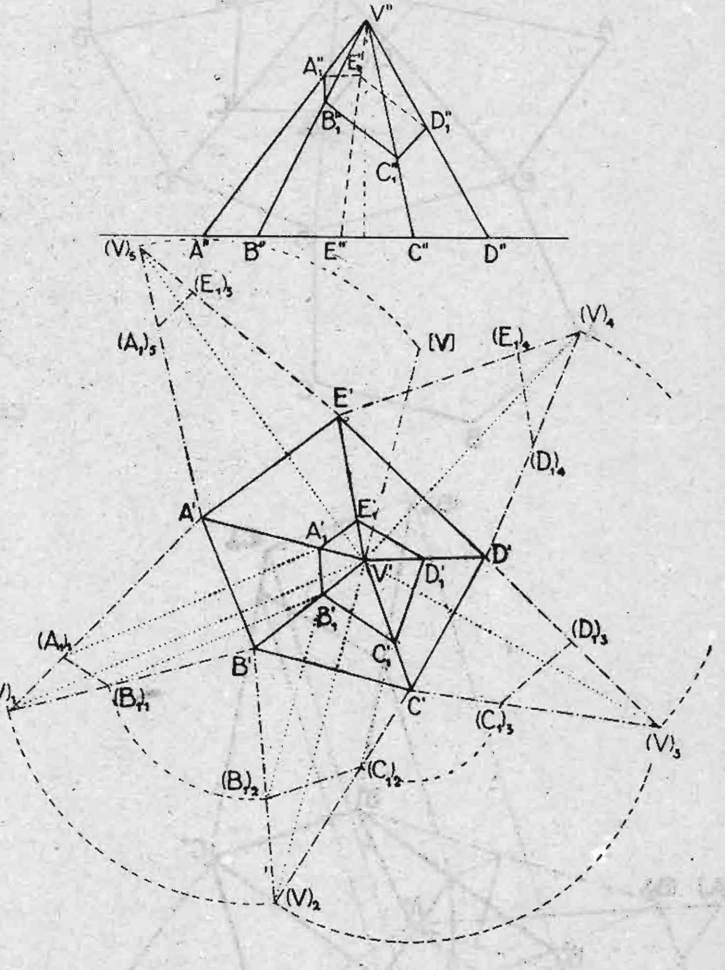
Кад пљосни рогљасте површи поставимо у једну раван тако да пљосни које на телу имају заједничку ивицу имају по могућности заједничку ивицу и кад се поставе у једну раван, кажемо да ту површ *развијамо у раван*. Укупност линија развијене површи називамо често *мрежом* те површи. Развијена рогљаста површ је многоугаона површ. Сем рогљастих површи свака се развојна површ може развити у раван; то вреди дакле и за купасте и ваљкасте површи, па и за купе и ваљке.

Дуж сваке ивице на површи састају се две пљосни. На развијеној површи то није могуће: сем заједничких ивица двеју пљосни постојаће и слободне ивице, које образују руб (контуру) те развијене површи. Заједничкој ивици двеју пљосни дате површи одговарају на том рубу две разне, али једнаке дужи. Напр. у слици 336, где је пирамида развијена у π_1, $A'B'$ је заједничка ивица петоугла $A'B'C'D'E'$ и троугла $A'(V)_1B'$, а $A'(V)_1$ и $A'(V)_5$ претстављају исту ивицу двапут, једном као страницу троугла $A'(V)_1B'$, други пут као страницу троугла $A'(V)_5E'$. У слици 337, напр. B_oC_o је заједничка ивица петоугла AB_oC_oDE и троугла $B_oV_oC_o$, а AB_o и A_oB_o претстављају исту ивицу двапут. Ако би се таква развијена површ исекла од картона, савила и слепила дуж одговарајућих ивица, добила би се рогљаста површ.

Задатак 1. *Петострану пирамиду с основом у π_1 развити у раван слике заједно с линијом пресека.*

Како је основа у π_1 треба само још оборити бочне пљосни у π_1. У ту сврху одредимо праву величину једне бочне ивице, напр. AV обарањем висине око $A'V'$ у $V'[V]$ (сл. 336). Оборимо тада пљосан

ABV у $A'B'(V)_1$, при чему је $A'[V] = A'(V)_1$ и $V'(V')_1 \perp A'B'$. Тиме имамо и BV у правој величини, дакле можемо слично оборити BCV итд. Развијена пирамида има облик неправилне звезде с пет кракова.



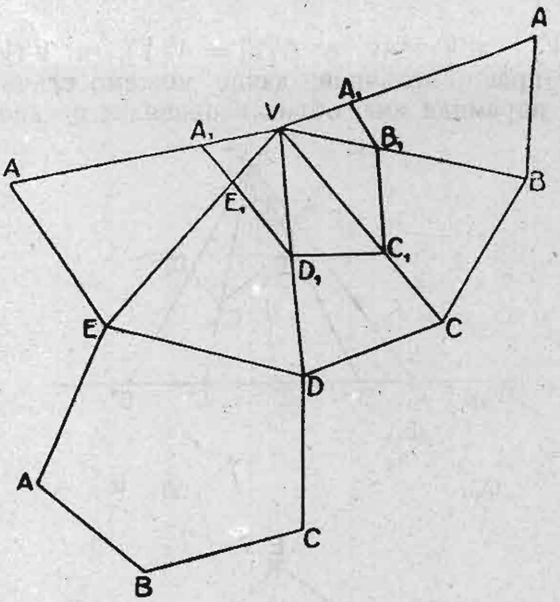
Сл. 336

Линија пресека претвара се при томе у пет дужи које је лако добити, као што се из слике види.

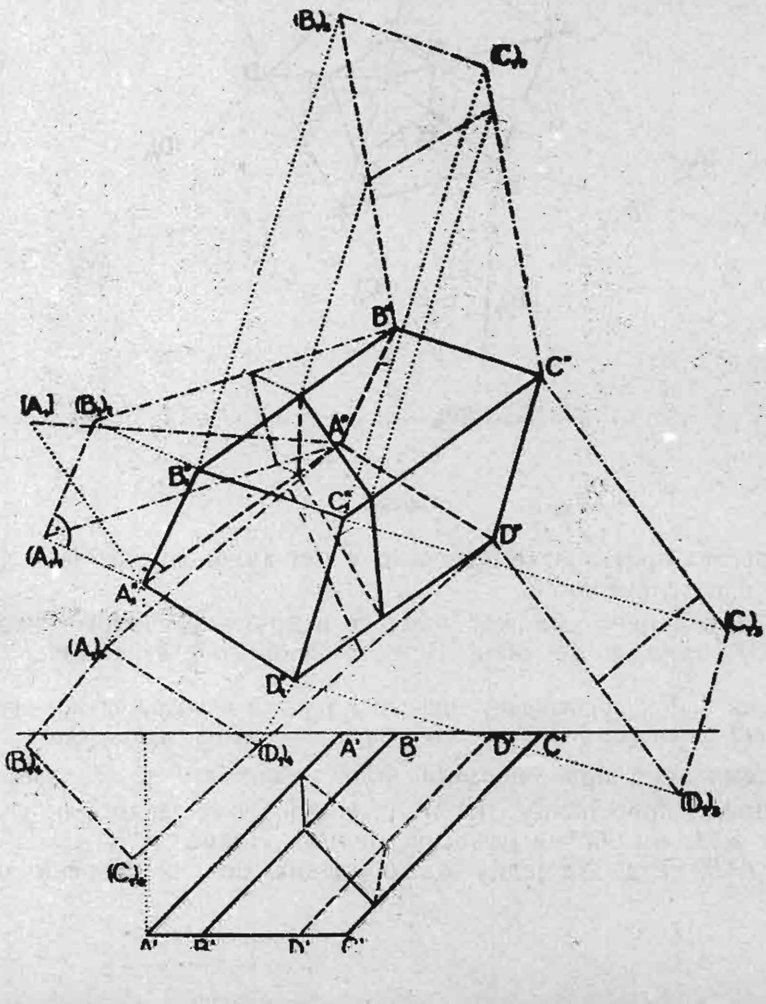
Једном добијена „мрежа" може се и друкчије сложити, као напр. у слици 337, тако да се линија пресека види као изломљена линија.

Задатак 2. *Четворострану призму с једном основом у π_2, пресечену неком равни, развити у раван слике заједно с линијом пресека.*

Можемо опет прво оборити бочне пљосни у π_2 (сл. 338). У ту сврху оборимо прво ивицу $A\overline{A}$ и $A''[\overline{A}]$ да бисмо је добили у правој величини, а затим бочне пљосни редом. Имамо $A''(A_1) = A''[A_1]$ и $A''(A_1)_1 \perp A''B''$ итд. Уз једну од оборених бочних пљосни додајмо

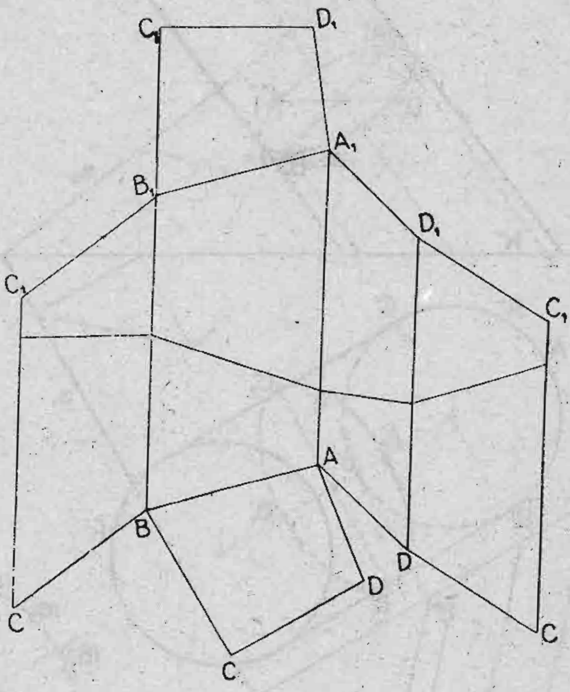


Сл. 337



Сл. 338

горњу основу, напр. $(A_1)_4(B_1)_4(C_1)_4(D_1)_4$. У слици 339 дата је развијена призма на други начин, при чему се линија пресека види као изломљена линија.

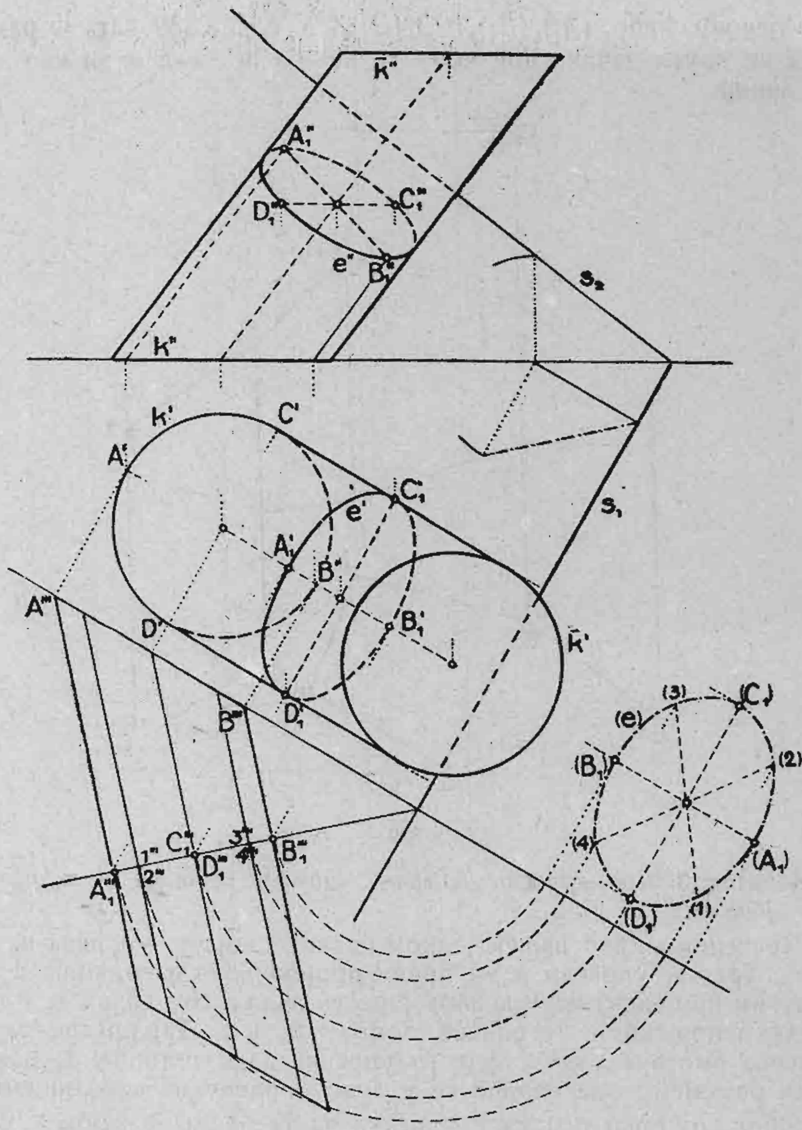


Сл. 339

Задатак 3. *Кос кружан ваљак с доњом основом у* π_1 *развити у раван цртежа.*

Пресецимо прво ваљак једном равни σ која је управна на изводницама. Траг s_1 управан је на првим пројекцијама изводница, а траг s_2 на другим пројекцијама (сл. 340). Пресек ваљка том равни је елипса e. Одредимо пројекције те елипсе помоћу $\pi_3 \perp \sigma$. Тај пресек служи за развијање омотача ваљка, јер је управан на изводницама, дакле кад омотач развијемо претвориће се у дуж управну на изводницама.

Оборимо прво елипсу e у раван π_1 да бисмо је добили у правој величини. Да бисмо затим одредили њену дужину поделимо је на известан број довољно малих лукова. Довољно је поделити је на осам делова додавши тачке *1*, *2*, *3*, *4*, затим пренесимо сваки део приближно на једну праву (сл. 341, дуж $A_1B_1A_1$). Како се у трећој пројекцији изводнице виде у правој величини, преносимо одатле $A'''A_1'''$, $B'''B_1'''$ итд. управно на дуж $A_1B_1A_1$. Тако добијамо тачке кроз које пролази крива која одговара кругу доње основе. Развијени круг горње основе добијамо кад повучемо паралелну криву с друге стране дужи $A_1B_1A_1$, знајући праву величину изводница. Развијену целу површ ваљка допуњавамо двема кружним површима обих основа. Криве развијеног омотача имају по две превојне тачке на изводницама кроз C и D. Кроз те изводнице постављене тангентне равни управне су на основама ваљка.

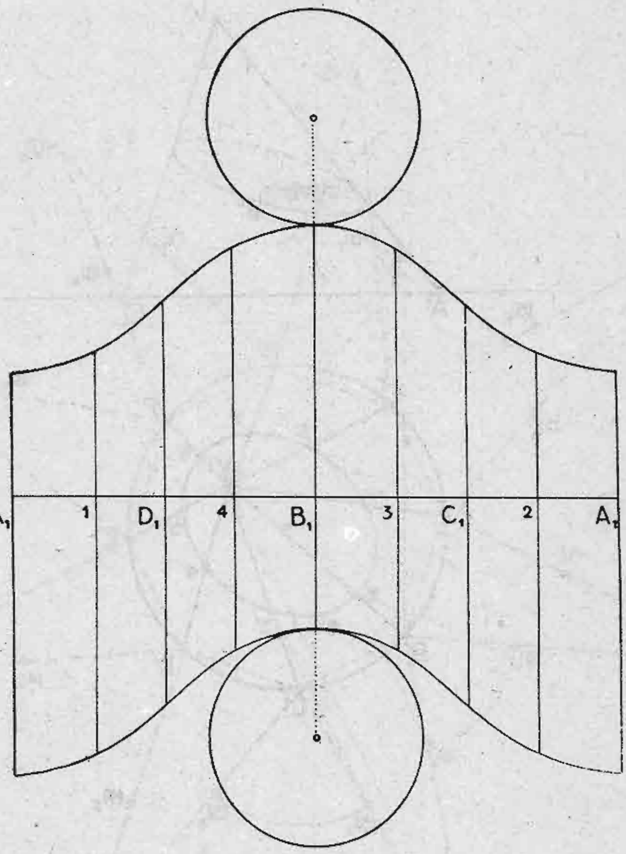


Сл. 340

Задатак 4. *Омотач косе кружне купе с основом у* π_1, *пресечену неком равни, развити у раван цртежа заједно с линијом пресека.*

Доносимо два начина конструкције.

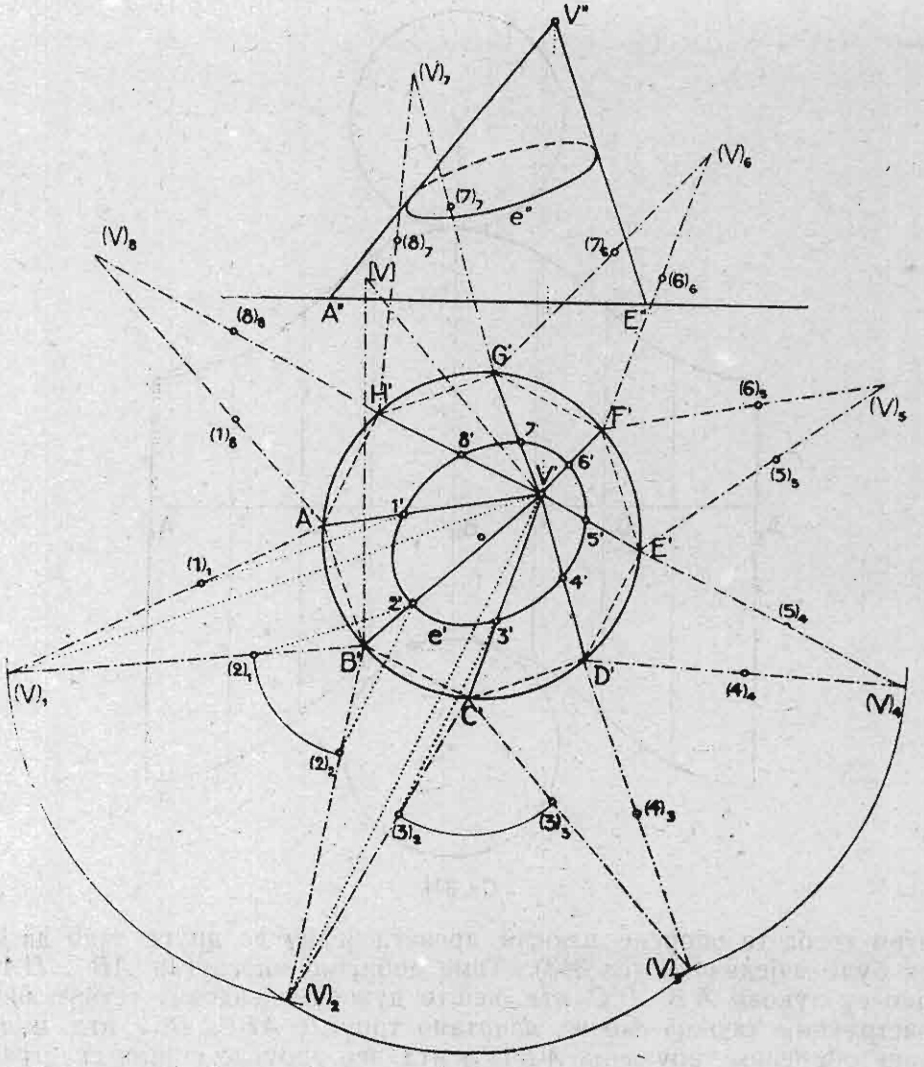
I. Да бисмо развили омотач купе с приближном тачношћу, упишимо у круг основе неки многоугао с довољно малим страницама да би оне биле приближно једнаке одговарајућим луковима круга. У слици 342 изабран је осмоугао *ABC...H*. Затим развијамо пирамиду уписану у купу, којој је врх *V* а основа тај осмоугао. Развијање можемо вршити као у задатку 2, тј. обарајући поједине бочне пљосни, а заједно с њима и тачке пресечне криве (у нашем случају елипсе).



Сл. 341

Затим треба те оборене пљосни пренети једну до друге тако да им врх буде заједнички (сл. 343). Тиме добијамо многоугао $AB \ldots HAV$. Како су лукови $A'B'$, $B'C'$ итд. нешто дужи од њихових тетива, биће конструкција тачнија ако не нацртамо троугле ABV, BCV итд. подударне обореним троуглима $A'B'(V_1)$ итд. већ троугле којима су стране AB, BC итд. нешто веће (по слободној оцени) од $A'B'$, $B'C'$ итд. Пошто кроз тачке $AB \ldots HA$ повучемо криву имамо развијен омотач купе. Из оборених тачака (*1*), (*2*), (*3*) итд. добијамо те тачке и на развијеном омотачу и кроз њих провучена крива је развијена линија пресека.

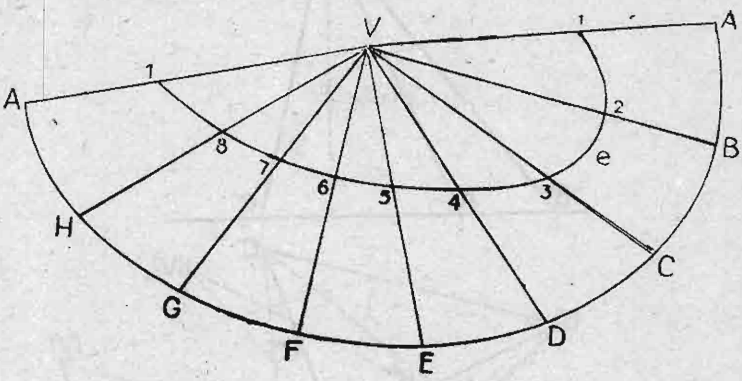
II. За другу конструкцију довољно је имати пројекцију купе на раван њене основе и висину купе. Пресецимо тада купу њеном равни симетрије, која пролази кроз врх V купе и оборимо пресек у раван основе. Поделимо затим половину круга основе на известан број довољно малих делова (тачке $1, 2, 3, \ldots, 9$). Да би се изводнице које пролазе кроз те тачке добиле у правој величини, обрнимо их прво у раван σ око висине купе (тачке $1, 2, 3, \ldots$ долазе тада у $1_\sigma, 2_\sigma, 3_\sigma, \ldots$). Тада се те изводнице у обореној равни σ појављују у правој величини. Развијену криву у правој величини основе, дакле и развијени



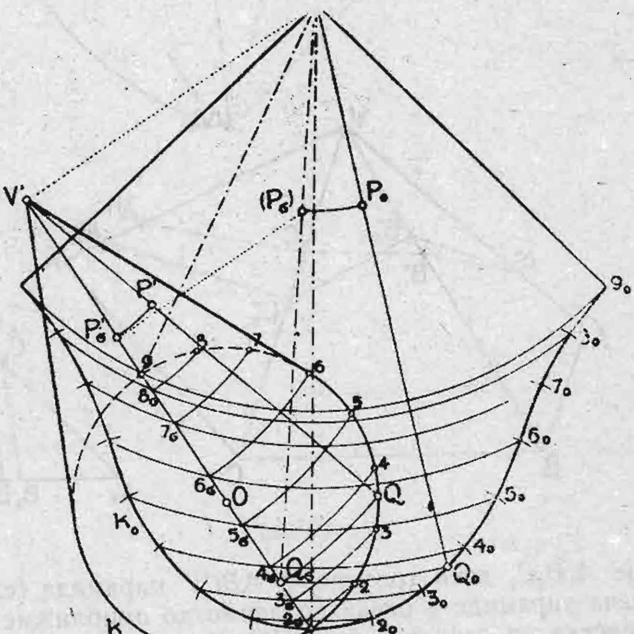
Сл. 342

омотач купе, можемо сад конструисати овако, пошавши од изводнице $1(V)$, коју већ имамо: Опишимо из (V) кружни лук кроз 2_σ и пресецимо га кругом из тачке 1 полупречником 12, затим из (V) опишимо исто тако лук кроз 3_σ и пресецимо га круговима из претходно добијених тачака као средишта и чији полупречник је $2\ 3$, итд. док не дођемо до лука из V кроз тачку 9 и не пресечемо га круговима из двеју претходно конструисаних тачака и чији полупречник је $8\ 9$. Крива k_o провучена кроз конструисане тачке је развијена кружна ивица омотача. Права $1(V)$ јој је оса симетрије.

Ма коју тачку P на некој изводници QV купе можемо добити на развијеном омотачу тиме што ту изводницу обрнемо на исти начин у раван σ и одредимо тачку P'_σ у коју пада P', а отуд тачку (P_σ). Тачка P_0 у коју пада P на развијеном омотачу је на кругу из (V) кроз (P_σ) а на одговарајућој изводници развијеног омотача. На тај начин може се на развијеном омотачу конструисати и пресечна крива омотача неком равни, налажењем довољног броја њених тачака.



Сл. 343

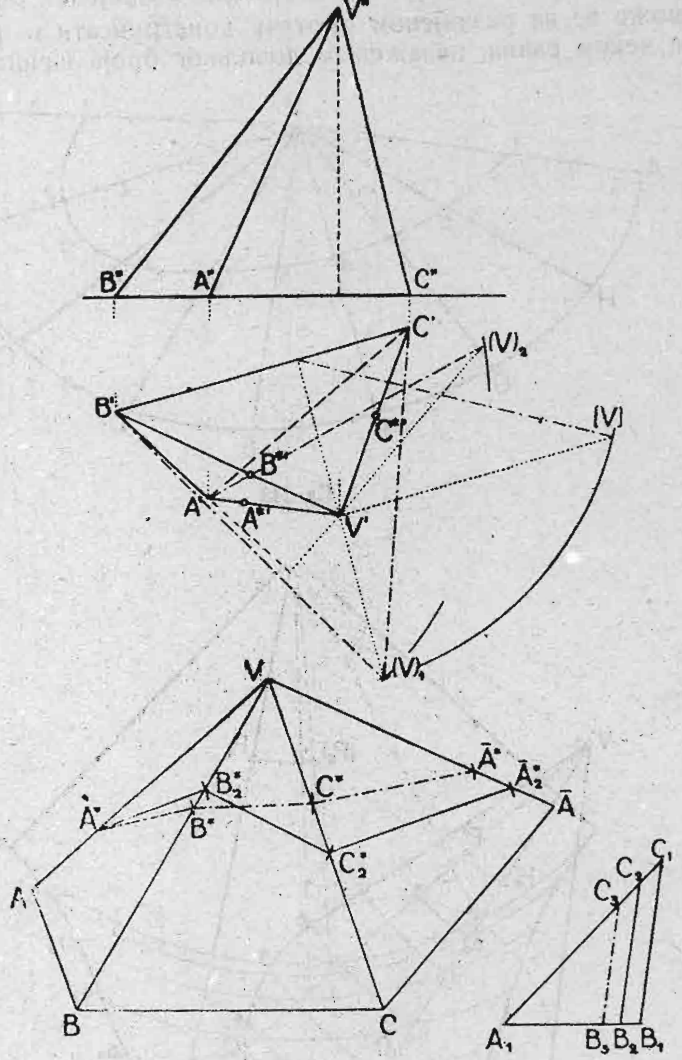


Сл. 344

На исте начине могу се развити ваљци и купе с произвољним водиљама.

Додајмо следећи задатак који решавамо приближном конструкцијом на основу развијања површи у раван.

Задатак 5. *Пресећи тространу пирамиду једном равни тако да пресек буде троугао сличан датом троуглу.*



Сл. 345

Нека је $A_1B_1C_1$ дати троугао, а $ABCV$ пирамида (сл. 345). Развијањем омотача пирамиде у раван долазимо до приближне конструкције траженог пресека на следећи начин: Изаберимо тачку A^* на ивици AV развијеног омотача и помоћу шестара одредимо на BV тачку $B_1{}^*$ тако да буде $A^*B_1{}^* = A_1B_1$. Затим одредимо тачку $C_1{}^*$ на CV тако да буде $B_1{}^*C_1{}^* = B_1C_1$, и тачку $A_1{}^*$ на $\overline{A}V$ тако да буде $C_1{}^*A_1{}^* = C_1A_1$. Тачка $A_1{}^*$ (која није нацртана) пада ван дужи $\overline{A}V$. Стога, и уопште кад се описана конструкција не може да изврши, изводимо је поново, с мањим или већим, сличним троуглом. Зато је у слици изабран троугао $\overline{A}_2B_2C_2$ с којим се добила изломљена линија $A^*B_2{}^*C_2{}^*\overline{A}_2{}^*$.

Да би се добила изломљена линија која претставља пресек пирамиде, треба њена крајња тачка да пада у тачку $\overline{A}^*$ која је од V једнако удаљена као A^*. Ако је $\overline{A}_1 \neq \overline{A}^*$ понављамо конструкцију изломљене линије с већим или мањим троуглом, све док не доспемо до тачке $\overline{A}^*$. Тако се у слици добила линија $A^*B^*C^*\overline{A}^*$ која одговара траженом пресеку. Уједно имамо на троуглу $A_1B_1C_1$ тачке B_3 и C_3 које дају троугао $A_1B_3C_3$, подударан троуглу пресека, $A^*B^*C^*$. Враћањем тачака A_1^*, B_1^*, C^* с развијеног омотача у пројекцију налазимо пројекције траженог пресека, који је сличан датом троуглу $A_1B_1C_1$. Паралелним померањем пресечне равни лако би било добити и троугао пресека подударан датом троуглу.

Задаци за вежбу

1. На лопту поставити додирну раван која је упоредна спрам дате равни.

2. Кроз једну тачку ван дате лопте поставити додирну раван на лопту.

3. Дате су две лопте. Поставити заједничку додирну раван која је упоредна спрам дате праве.

4. Кроз дату тачку поставити раван која је подједнако удаљена од три дате лопте.

5. Описати лопту око тетраедра.

Упутство: Први начин: Пресек лопте једном равни тетраедра је круг описан око дотичне стране тетраедра. На управној кроз средиште тог круга налази се средиште лопте. Дакле треба конструисати управне кроз средишта описаних кругова око двеју стране тетраедра.

Други начин: Ивице тетраедра су тетиве лопте, дакле средиште лопте је тачка у којој се секу равни симетрије трију ивица.

6. Уписати лопту у тетраедар.

Упутство: Конструисати раван симетрије трију диједара тетраедра.

7. У дату коцку уписати лопту и у ту лопту уписати другу мању коцку, тако да ивице ове коцке не буду упоредне ивицама дате коцке, затим у малу коцку уписати другу лопту. Обе коцке пресећи једном равни која додирује мању лопту и наћи прави облик и величину пресека обих коцака и веће лопте.

8. Наћи пресек праве кружне купе једном равни која је управна на круг. Развити купу у раван заједно с линијом пресека.

9. Наћи пресеке косе кружне купе равнима које су упоредне према равни.

10. Кружну купасту површ пресећи косом равни да пресек буде парабола.

11. Купа чија је основа елипса у π_1 има врх који се у првој пројекцији пројектује на елипсу. Пресећи ту купу вертикалном равни и наћи прави облик и величину пресека, а затим је развити у раван цртежа.

12. Прав елипсни ваљак с основом у π_1 пресећи равнином поклапања.

13. Кос кружни ваљак с основом у π_2 пресећи равнином која пролази кроз осу x и једну дату тачку на једној изводници ваљка.

14. Праву хиперболну ваљкасту површ којој је водиља (хипербола) у равни π_1, пресећи косом равни и нацртати прави облик пресека.

15. Косу параболну ваљкасту површ којој је водиља у равни косој према пројекцијским равнима, пресећи једном равни која је управна на њеним изводницама.

16. Зарубљену петострану пирамиду развити у раван цртежа.

17. Дата је купаста површ чија водиља је ма каква крива у π_2. Пресећи је једном равни, косом према π_1 и π_2, а затим је развити заједно са линијом пресека у раван цртежа.

18. Тространу пирамиду пресећи једном равни тако да пресек буде а) равностран троугао, б) равнокрак троугао са задатим крацима.

19. Ма какву тространу призму пресећи једном равни тако да пресек буде троугао сличан датом троуглу.

Напомена: Задатак се може решити на два начина: 1) развијањем површи у раван и 2) на основу задатка из §43.

Упутство за први начин: Пошто се бочне ивице добију на развијеном омотачу призме, права $\overline{AA^*}$ мора бити управна на тим изводницама.

Упутство за други начин: Конструисати стpaноцрт на раван управну на пресечној равни, а затим на раван упоредну пресечној равни.

20. Косу елипсну ваљкасту површ пресећи једном равни тако да пресек буде круг.

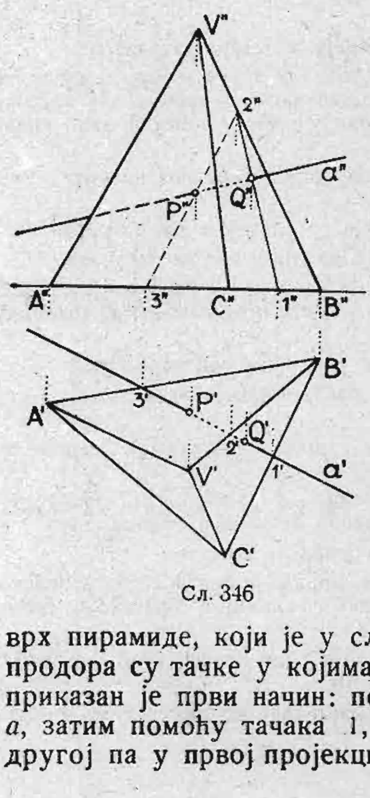
Упутство: Одредити пресек површи, који је управан на изводнице, затим окретати пресечну раван око велике осе добијене елипсе пресека док се осе не изједначе.

127. ПРОДОРИ ПРАВОМ

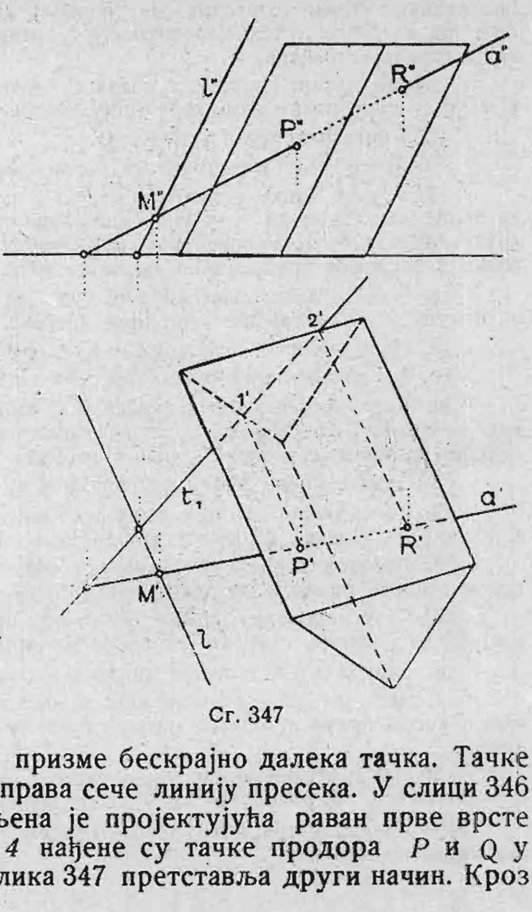
Продоре праве кроз површ или тело имали смо у одељку II, али тада смо претпостављали да су нам две тачке дате, напр. једна тачка продора кроз површ и тачка у којој та права продире раван основе те површи. У двема пројекцијама довољно је познавати пројекције површи и праве. Задатак је тиме одређен.

Задатак 1. *Одредити продор праве кроз пирамиду или призму.*

Продор праве кроз пирамиду или призму можемо наћи на два начина: 1. Пресецањем површи пројектујућом равни дате праве, 2. пресецањем површи оном равни која садржи дату праву и



Сл. 346



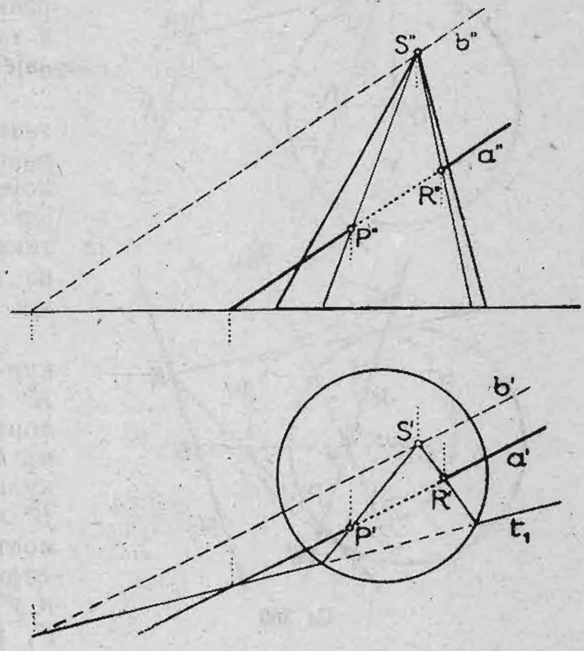
Сг. 347

врх пирамиде, који је у случају призме бескрајно далека тачка. Тачке продора су тачке у којима дата права сече линију пресека. У слици 346 приказан је први начин: постављена је пројектујућа раван прве врсте *a*, затим помоћу тачака 1, *2*, *3*, *4* нађене су тачке продора *P* и *Q* у другој па у првој пројекцији. Слика 347 претставља други начин. Кроз ма коју тачку M дате праве a постављамо праву l упоредну бочним ивицама. Праве a и l одређују раван која сече призму у правим упоредним спрам бочних ивица. Треба само наћи први траг те равни и кроз тачке 1, 2 повући упоредне до a. Тиме добијамо тачке продора P и R.

Задатак 2. *Одредити продор праве кроз купу.*

Тачке у којима права a продире дату купу можемо одредити ако купу пресечемо једном равни која пролази кроз дату праву a и врх купе. Узмимо да је водиља купе круг у π_1. Поставимо $b = [s \parallel a]$ и одредимо први траг t_1 равни ab (сл. 348).

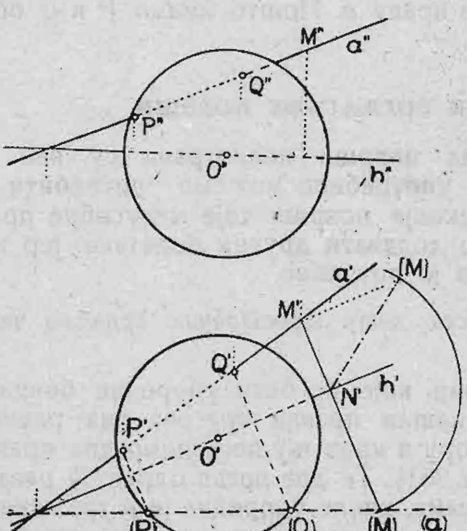
У случају ваљка поставља се раван која је одређена датом правом а и паралелна је изводницама ваљка.



Сл. 348

Задатак 3. *Одредити продор праве кроз лопту.*

Тачке у којима права продире лопту можемо одредити на исти начин као кад смо посматрали пројекције само на једну раван, тј. пресечемо лопту пројектујућом равни прве или друге врсте праве, оборимо ту раван у пројекцијску раван која пролази кроз средиште лопте и у том обореном положају нађемо тачке продора.

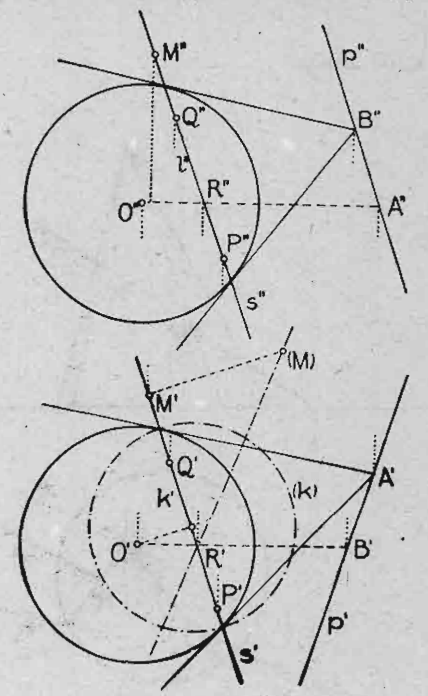


Сл. 348

Додајмо овде још један начин: пресецимо лопту једном равни која пролази кроз дату праву a и кроз средиште O лопте (сл. 349). Кад ту раван оборимо у хоризонталну раван која пролази кроз средиште лопте, пресек се поклапа с контуром пројекције лопте, а положај оборене праве (a) добијамо помоћу троугла $M'[M]N$. Тачке (P) и (Q) су тачке продора у обореној равни, отуда добијамо P' и Q', затим P'' и Q''.

Задатак 4. *Кроз дату праву поставити раван која додирује дату лопту.*

Кроз дату праву p могу се поставити две додирне равни на следећи начин. Све додирне равни које пролазе кроз извесну тачку A праве p обавијају купу коју описују дирке из A. Додирне тачке тих дирки образују известан круг k. Изведимо исто посматрање с неком другом тачком B на p. Све дирке из B образују круг l. Додирне равни кроз p су заједничке додирне равни обих купа с врховима A и B, а тачке додира P и Q с лоптом су заједничке тачке кругова k и l.



Сл. 350

За A и B погодно је изабрати тачке у којима права p продире хоризонталну и фронталну раван, које пролазе кроз средиште O лопте, јер тада је основа прве купе вертикална, а основа друге купе управна на π_2, дакле k' и l'' су две дужи (сл. 350).

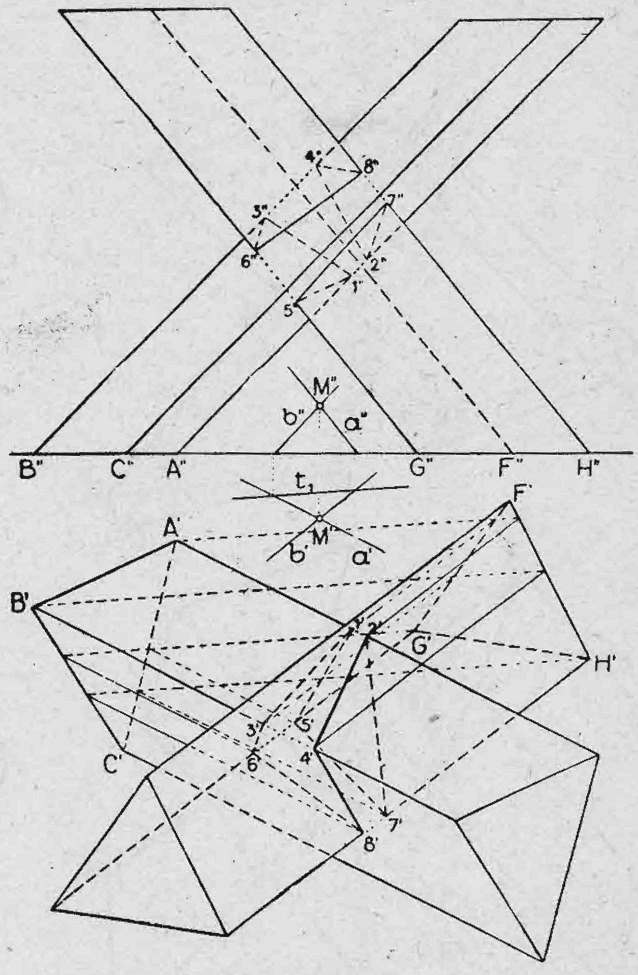
У првој пројекцији контуру купе с врхом у A добијамо кад из A' повучемо тангенте на контуру лопте; спојивши додирне тачке имамо k'. У другој пројекцији контуру купе с врхом у B добијамо кад из B'' повучемо тангенте на контуру лопте у другој пројекцији; спојивши додирне тачке имамо l''. Праве s' и s'' које садрже дужи k', односно l'', јесу пројекције праве $s \equiv PQ$. У P и Q продире права s лопту, дакле P и Q можемо добити као у претходном задатку. То су тражене тачке додира додирних равни на лопту, које можемо поставити кроз праву a. Пошто имамо P и Q обе те равни су одређене.

128. МЕЂУСОБНИ ПРЕСЕЦИ РОГЉАСТИХ ПОВРШИ

Међусобни пресеци рогљастих површи посматрани су већ у §§ 60—62. Поступак који смо тада употребили можемо употребити и сад. Напоменимо само да сем пројекција површи чије међусобне пресеке посматрамо, сад није потребно додавати других података, јер из саме слике одређујемо све што нам је потребно.

Задатак 1. *Наћи међусобни пресек двеју тространих призама чије су основе у* π_1.

Треба поставити помоћне равни које ће бити упоредне бочним ивицама обих призама. Да бисмо нашли правац трагова тих равни, узмимо коју било тачку M у простору и кроз њу поставимо две праве a и b упоредне бочним ивицама (сл. 351). Те две праве одређују раван упоредну бочним ивицама обих призама, дакле упоредна је и траженим помоћним равнима. Нека је t_1 први траг те равни, њиме је одређен правац првих трагова (тај правац је у § 62 бивао задат). Даљи поступак је исти као у § 62, тј. кроз темена при основама повлачимо праве упоредне трагу t_2. То су трагови помоћних равни којима сечемо призме

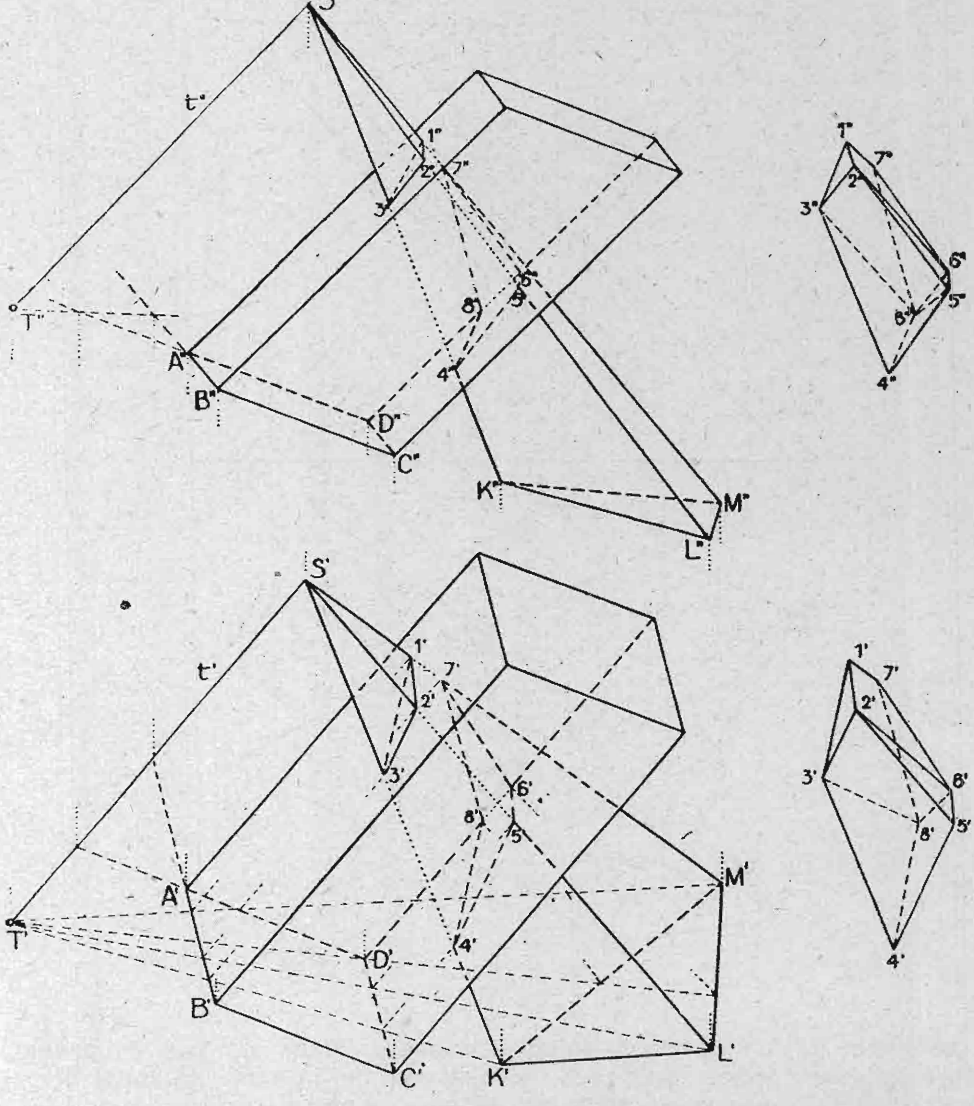


Сл. 351

и добијамо тачке пресека појединих ивица једне призме странама друге призме. Пошто смо тако добили линију продора у првој пројекцији, другу пројекцију добијамо на одговарајућим ординалама.

Задатак 2. *Наћи пресек четворостране призме и тростране пирамиде кад су им основе у једној, ма каквој равни.*

Као у § 61 (сл. 352) постављамо помоћне равни кроз врх пирамиде, упоредне ивицама призме. Све те равни садрже праву t постављену кроз врх пирамиде а упоредну ивицама призме, дакле секу заједничку раван обих основа по правим које пролазе кроз тачку T где права t продире ту раван (сл. 352; конструкција тачке T је назначена). Према томе кроз T' повлачимо праве које пролазе кроз темена при основама призме и пирамиде и тако долазимо до линије продора у првој пројекцији, а отуд и у другој.



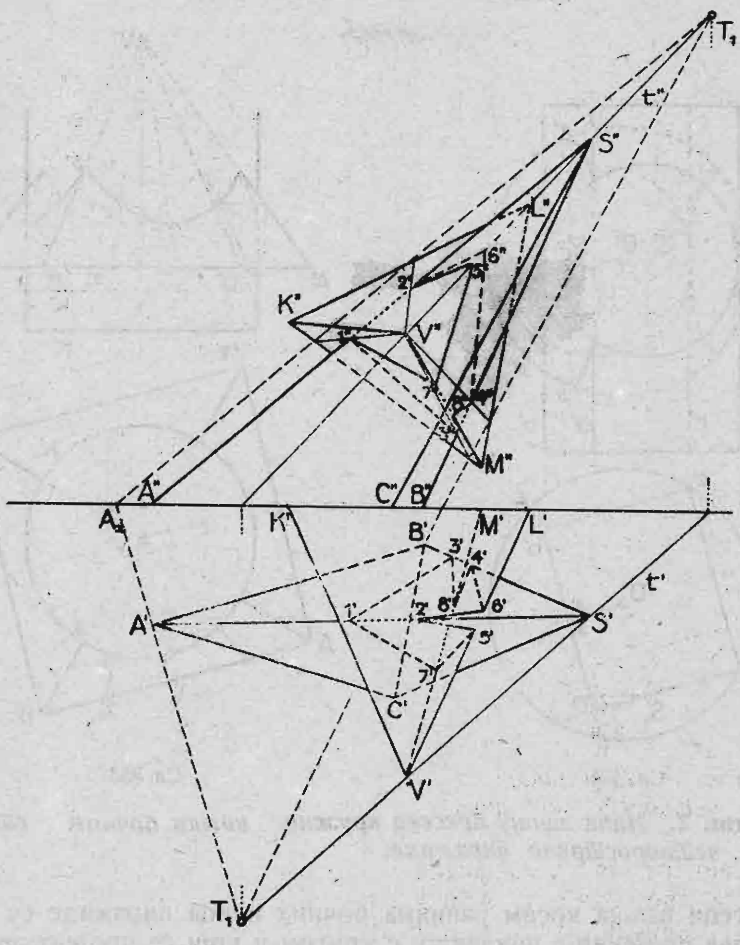
Сл. 352

Паралелним померањем пројекција заједничког дела обих тела у правцу осе x добијамо издвојено претстављен заједнички део у двема пројекцијама.

Задатак 3. *Одредити међусобни пресек двеју пирамида. Једној је основа у* π_1, *другој у* π_2.

Као у § 60, постављамо помоћне равни које садрже праву која пролази кроз оба врха и по једну бочну ивицу пирамида.

Нађимо тачке T_1 и T_2 у којима права t која пролази кроз оба врха S и V продире равни π_1 и π_2 (сл. 353). Даље је поступак исти као у § 60, тј. повлачимо праву T_1A' до пресека A_x осом x. Тачке у којима права A_xT_2 сече основу KLM спајамо с врхом V у другој пројекцији; и тако добијамо друге пројекције тачака *1* и *2* у којима ивица AS продире другу пирамиду. То понављамо за сваку бочну ивицу прве пирамиде, а затим полазећи из T_2 за сваку бочну ивицу друге пирамиде. Тиме добијамо линију продора.



Сл. 353

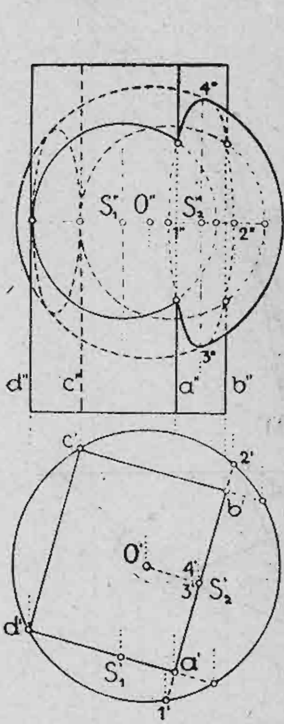
У овом случају права у којој се секу равни основа обих пирамида била је оса x, а поступак би био сличан кад би основе биле ма у којим равнима, само што би тада требало одредити и пресек тих равни.

129. МЕЂУСОБНИ ПРЕСЕЦИ РОГЉАСТИХ И НЕКИХ ОБЛИХ ПОВРШИ

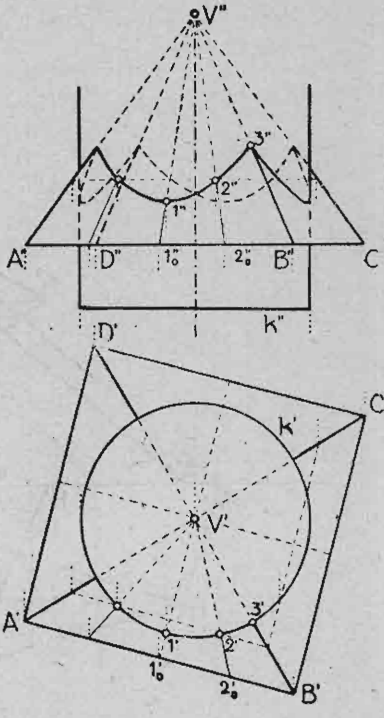
Решавање задатака у којима имамо међусобне пресеке рогљастих и облих површи своди се на сечење обле површи једном по једном равни појединих страна рогљасте површи.

Задатак 1. *Наћи линију пресека лопте и праве четворостране призме.*

Раван пљосни *ab* (сл. 354) сече лопту по кругу који се пројектује у првој пројекцији као тетива *1'2'*, а у другој пројекцији као елипса чија је мала оса *1''2''* а велика *3''4'' = 1'2'*. Али како је бочна страна призме само између *a* и *b*, од елипсе у другој пројекцији припадају линији продора само лукови између *a''* и *b''*. Исто тако налазимо пресеке равнима које садрже остале бочне стране, па спајањем добијамо целу линију продора.



Сл. 354



Сл. 355

Задатак 2. *Наћи линију пресека кружног ваљка бочним странама правилне четворостране пирамиде.*

Пресеци ваљка косим равнима бочних ивица пирамиде су елипсе чије се прве пројекције поклапају с кругом у који се пројектује ваљак. А из прве пројекције лако је добити другу пројекцију, напр. као пресеке правих у којима равни постављене кроз осу ваљка секу обе дате површи (сл. 355).

130. МЕЂУСОБНИ ПРЕСЕЦИ НЕКИХ ОБЛИХ ПОВРШИ

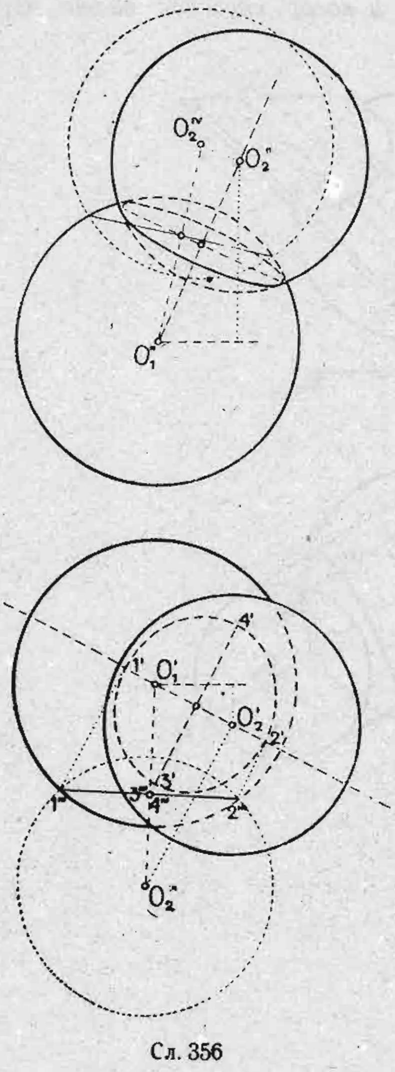
Пресеке лопте ваљкастом и купастом површи одређујемо постављањем помоћних равни које секу ове развојне површи по изводницама. Како је пресек лопте увек круг, налазимо лако тачке на линији пресека.

Задатак 1. *Одредити пресек двеју лопти.*

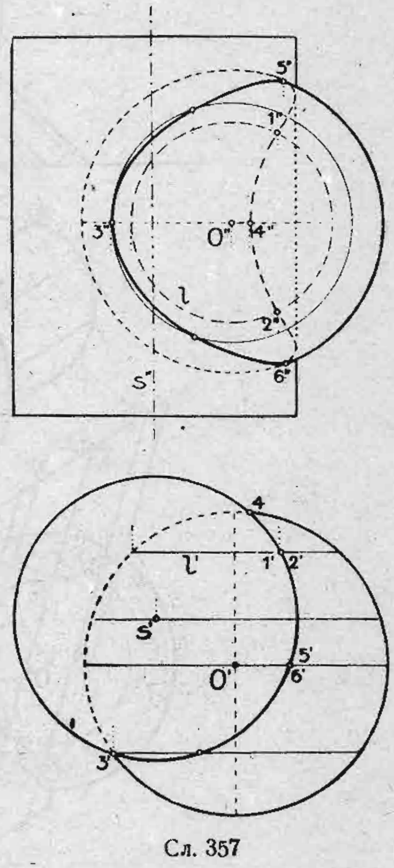
Решавање је слично као у једној пројекцији (сл. 213). Постављамо једну, па другу пројектујућу раван праве која пролази кроз средишта O_1 и O_2 обих лопти (сл. 356), али те равни можемо сад сматрати страноцртним равнима $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\pi_4 \perp \pi_2$, на које се пресек пројектује као дуж.

Задатак 2. *Одредити пресек лопте и правог кружног ваљка с хоризонталном основом.*

Ако је средиште лопте на оси ваљка, пресек се састоји из два упоредна круга. У противном случају пресечна крива је просторна крива



Сл. 356

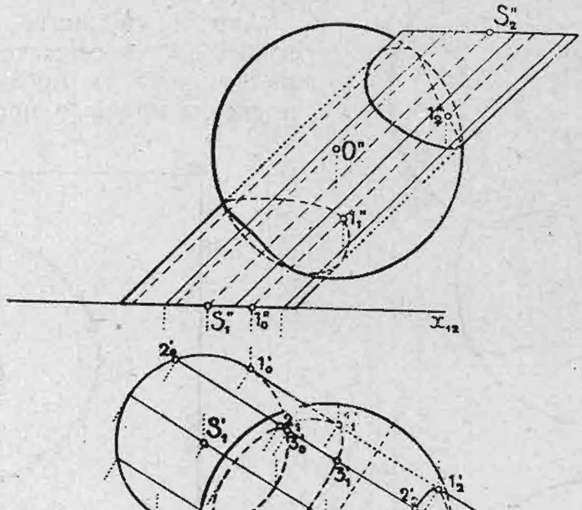


Сл. 357

чије тачке можемо одређивати постављањем пресечних равни упоредних према равни π_2. Свака таква раван сече лопту по неком кругу, напр. l, који се на π_1 пројектује као тетива l', а ваљкасту површ по двема изводницама (сл. 357). У другој пројекцији тај круг се пројектује као круг l'' концентричан кругу контуре лопте у тој пројекцији. У пресеку овог круга другом пројекцијом тих изводница, или једне од њих, налазимо тачке пресечне криве; у нашем случају $1''$ и $2''$. Две изводнице додирују криву, једна у тачки 3, друга у тачки 4. Из друге пројекције криве добијамо прву пројекцију.

Конструкцију смо могли извести и постављањем хоризонталних равни, које секу ваљак и лопту по круговима којима одређујемо пресечне тачке.

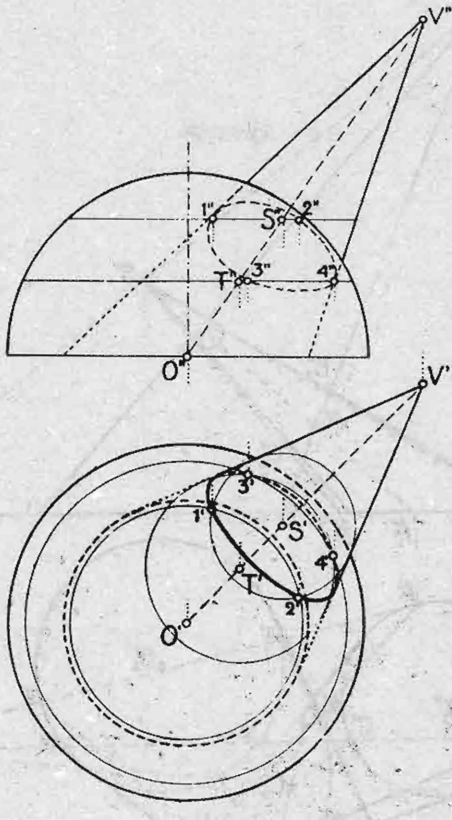
Задатак 3. *Одредити пресек лопте и косог кружног ваљка чија основа је у хоризонталној равни.*



Сл. 358

Пројектујемо лопту и ваљак на страноцртну раван π_3 упоредну изводницама ваљка (сл. 358). Затим постављамо као у претходном задатку помоћне равни упоредне према равни π_3 и налазимо поједине тачке пресечних кривих обих површи

Задатак 4. *Одредити пресек полулопте чији руб је хоризонталан, косом кружном купом чија основа је такође хоризонтална. Круг те основе и руб полулопте су два концентрична круга.*



Сл. 359

Тачке пресечне криве обих површи можемо добити пресецањем полулопте и купе хоризонталним равнима, као што се из слике 359 види.

Међусобне пресеке купастих и ваљкастих површи добијамо слично као пресеке пирамида и призама, узимајући уместо ивица изводнице.

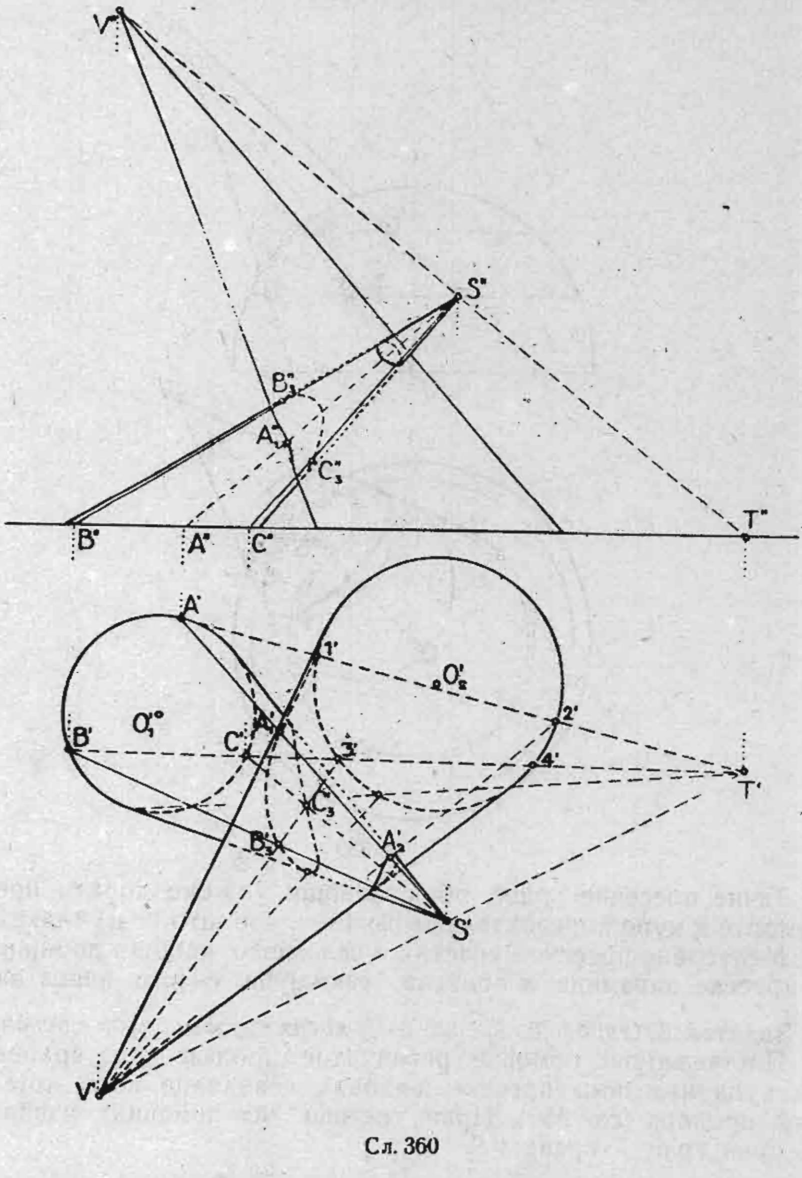
Задатак 5. *Одредити пресек двеју косих кружних купа с основама у* π_1.

Постављајући помоћне равни које пролазе кроз врхове S и V обих купа налазимо пресеке њихових изводница кроз које пролази линија продора (сл. 360). Први трагови тих помоћних равни пролазе кроз први траг T праве VS.

Задатак 6. *Одредити пресек двеју правих кружних ваљкастих површи које се додирују у једној тачки. Једној површи изводнице су вертикалне, а другој хоризонталне* (сл. 361).

Како се обе површи додирују, круг у који се пројектује вертикални ваљак додирује једну контурну изводницу хоризонталног ваљка.

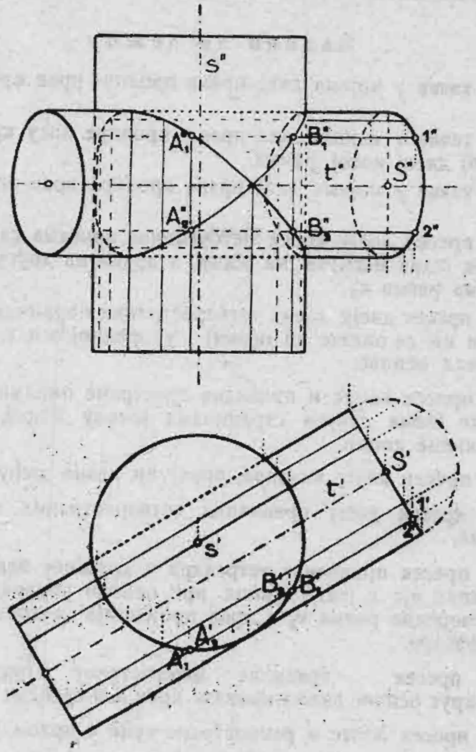
Постављамо помоћне вертикалне равни које секу обе површи по изводницама. У пресецима тих изводница налазимо тачке пресечне криве. У првој пројекцији та линија се поклапа с луком круга у који се пројектују изводнице вертикалног ваљка. Другу пројекцију криве пресека налазимо као пресеке истих изводница у другој пројекцији.



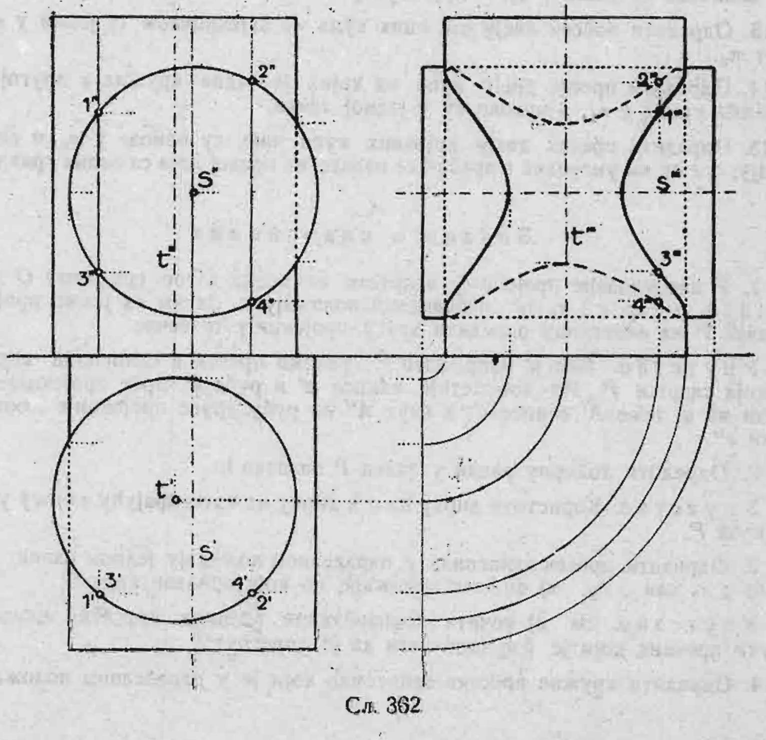
Сл. 360

Задатак 7. *Одредити пресек два права кружна ваљка. Једном је основа у* π_1, *другом у* π_2 (сл. 362).

Равни које садрже изводнице обих ваљака управне су на осу *x*, дакле њихове пресеке с обим површима одређујемо помоћу пројекције на профилну раван π_3. Тада изводимо конструкцију у другој и трећој пројекцији као што смо у претходном задатку извршили у првој и другој пројекцији.



Сл. 361



Сл. 362

Задаци за вежбу

1. Одредити тачке у којима дата права продире прав кружни ваљак чија се оса поклапа с осом x.

2. Одредити тачке у којима дата права продире косу кружну купу чија основа је у а) равни π_2, б) датој косој равни.

3. Одредити тачке у којима дата права продире прав ваљак коме је водиља синусоида у π_2.

4. Одредити пресек двеју косих петоугаоних призама са делимично заједничким основама, од којих је једна нагнута на једну, а друга на другу страну, а бочне ивице су им упоредне према равни π_2.

5. Одредити пресек двеју косих четвоространих пирамида са заједничком основом у равни π_1, а врхови им се налазе на правој упоредној оси x, а пројекција l' пролази кроз пресек дијагонала основе.

6. Одредити пресек коцке и правилне гростране пирамиде с основама у π_2, кад основа пирамиде сече двема својим страницама основу коцке, а висина јој је једнака двострукој дужини ивице коцке.

7. Одредити пресек двају квадара, бирајући разне међусобне положаје.

8. Одредити пресек двеју правилних четвоространих пирамида с основама у двема косим равнима.

9. Одредити пресек правилног тетраедра и кружног ваљка. Тетраедар је једном својом страном у равни π_1, а једна ивица при основи управна је на оси x. Ваљак је кос, изводнице су упоредне равни π_2 а прва пројекција његове осе пролази кроз прву пројекцију врха тетраедра.

10. Одредити пресек правилне шестостране пирамиде и косог ваљка с основама у π_1, кад круг основе ваљка пролази кроз два суседна темена основе пирамиде

11. Одредити пресек лопте и равностране купе с врхом у средишту лопте.

12. Одредити пресек двеју кружних купа које имају заједнички врх а основе разних величина су једна у π_1, а друга у π_2.

13. Одредити пресек двеју кружних купа са заједничком основом у π_1 а врхови су им у π_2.

14. Одредити пресек двеју купа од којих је једна кружна а другој је водиља произвољна крива у π_1, а врхови су у једној тачки.

15. Одредити пресек двеју кружних купа чије су основе у π_1 и делимично се поклапају, осе су им упоредне а врхови се налазе на правој која са осама гради прав угао.

Задаци о квадрикама

1. У две управне пројекције нацртати елипсоид датог средишта O и датих оса $a, b, c : a \parallel x,\ b \perp \pi_2,\ c \perp \pi_1$ (у „паралелном положају“). Затим из једне пројекције које било тачке P на елипсоиду одредити другу пројекцију те тачке.

Упутство. Ако је напр. дато P' уочимо пресек e елипсоида хоризонталном равни која садржи P. Из хомотетије елипсе e' и руба k' прве пројекције елипсоида одредити на a' теме A' елипсе e', а отуд A'' на рубу друге пројекције елипсоида и P'' на дужи e''.

2. Одредити додирну раван у тачки P задатка 1.

Упутство. Користити дирку на e и дирку на одговарајућу елипсу у фронталној равни кроз P.

3. Одредити пресек елипсоида у паралелном положају једном равни а) $\parallel \pi_1$ или $\parallel \pi_2$, б) $\perp \pi_1$ или $\perp \pi_2$, в) општег положаја, но која пролази кроз O.

Упутство. За в) уочити хоризонтални пречник пресечне елипсе и њему спрегнути пречник који је $\parallel \pi_2$ (доказати да је спрегнут!).

4. Одредити кружне пресеке елипсоида који је у паралелном положају.

Упутство. Раван која садржи средњу осу елипсоида сече га по елипси која је круг за два симетрична положаја равни. Упоредне равни дају остале кружне пресеке. Тачке додира паралелних додирних равни су пупчане тачке елипсоида.

5. Одредити продор елипсоида у паралелном положају ма којом правом.

Упутство. Пресек елипсоида пројектујућом равни, напр. $\perp \pi_2$, дате праве p је елипса l. Нашавши осе елипсе l', узмимо осу управну на x за осу афиности у којој елипси l' одговара круг, а правој p' нека права p_1. Из пресека круга с p_1 налазимо пресеке $p' \times l'$.

6. Нацртати пројекцију елипсоида датог у паралелном положају, на странocртну раван.

Упутство Руб странoцрта елипсоида потиче од његова пресека једном дијаметарском равни, коју треба одредити.

7. Одредити пресек елипсоида у паралелном положају једном равни α општег положаја.

Упутство. Одредити пресек у страноцрту, узевши $\pi_3 \perp \alpha$. Поједине тачке пресека можемо добити и постављањем равни $\parallel \pi_1$ (или $\parallel \pi_2$) помоћу хомотетије у првој (или другој) пројекцији.

8. Одредити пројекције елипсоида кад му је дато средиште и осе a, b, c, које су у општем положају.

Упутство. Узети $\pi_3 \perp \pi_1$ и $\perp ab$, $\pi_4 \perp \pi_3$ и $\perp c$. Руб прве пројекције потиче од елипсе на елипсоиду, чија два спрегнута пречника добијамо кад повучемо дирке управне на x_{13} на рубну елипсу треће пројекције, и дирке упоредне са x_{34} на рубну елипсу четврте пројекције (доказати!).

9. У две управне пројекције нацртати отсечак елипсног параболоида коме је оса вертикална, а руб отсечка је елипса с једном осом $\parallel \pi_1$, другом $\perp \pi_2$. Затим одредити из једне пројекције неке тачке P параболоида другу пројекцију те тачке.

Упутство. Задаци о елипсном параболоиду могу се решавати слично као за елипсоид.

10. Одредити додирну раван у тачки P задатка 9.

11. Одредити пресеке посматраног параболоида равнима разног положаја (као у задацима 3 и 4).

12. Одредити продор елипсног параболоида правом.

13. Решити за посматрани отсечак елипсног параболоида задатке 6, 7 и 8.

14. Решити неке од задатака 1—8 за двокрилни хиперболоид. (Решавања су слична као за елипсоид).

15. У две нормалне пројекције нацртати једнокрилни хиперболоид чија имагинарна оса је вертикална, а реалне осе, једна $\parallel \pi_1$, друга $\perp \pi_2$. Затим одредити из једне пројекције тачке P хиперболоида другу пројекцију те тачке.

Упутство а) Решити као за елипсоид. б) Нека је дато P' и нека је t изводница кроз P. Тада је t' дирка на елипсу e' која претставља руб прве пројекције хиперболоида. Нека је $T = e \times t$, A тачка где t продире осну раван упоредну с π_2. Из T' и A налазимо T'' и A'', а отуд t'' и P''.

16. Одредити додирну раван у тачки T задатка 15.

Упутство. Обе изводнице кроз P одређују ту раван.

17. Одредити пресек једнокрилног хиперболоида равнима а) $\parallel \pi_1$, б) $\parallel \pi_2$ (равнима разних отстојања од осе хиперболоида), в) $\perp \pi_1$ и г) $\perp \pi_2$.

18. Одредити продоре једнокрилног хиперболоида неком правом p.

Упутство. Ако је пресек хиперболоида пројектујућом равни друге врсте, праве p елипса, конструисати као за елипсоид. Ако је пресек хипербола h, одредити пресеке $p' \times h'$.

19. Дате су три међу собом мимоилазне изводнице једнокрилног хиперболоида. Поставити изводницу кроз ма коју тачку на једној од тих изводница.

Упутство. Кроз дату тачку и друге две дате изводнице поставити равни; ове се секу по траженој изводници (види сл. 152).

20. У задатку 19 поставити кроз дату тачку додирну раван.

21. У две управне пројекције нацртати хиперболни параболоид с осом $a \parallel x$ и чије главне параболе су $p \parallel \pi_1$, $q \parallel \pi_2$ (Хиперболни параболоид има две равни симетрије, које га секу по „главним параболама").

Упутство. q' и p'' су полуправе, p' је руб прве, q'' руб друге пројекције параболоида.

22. Из једне пројекције тачке P посматраног хиперболног параболоида наћи другу пројекцију те тачке.

Упутство. Ако је дато P', уочити пресек параболоида хоризонталном равни која пролази кроз P. Пресек је парабола $p_1 \cong p$, с осом чија прва пројекција пада на a'. Како је $p_1' \cong p'$, налази се одмах теме A_1' параболе p_1', отуд A_1'' на q'' и P'' на p_1'' ($\parallel x$).

23. Одредити додирну раван у тачки P истог хиперболног параболоида.

24. Дате су две мимоилазне изводнице хиперболног параболоида и раван којој су упоредне све изводнице које секу прве две (раван водиље). Поставити изводницу кроз ма коју тачку на једној од дате две изводнице (види сл. 151).

25. У задатку 24 поставити кроз дату тачку додирну раван.

ГЛАВА V

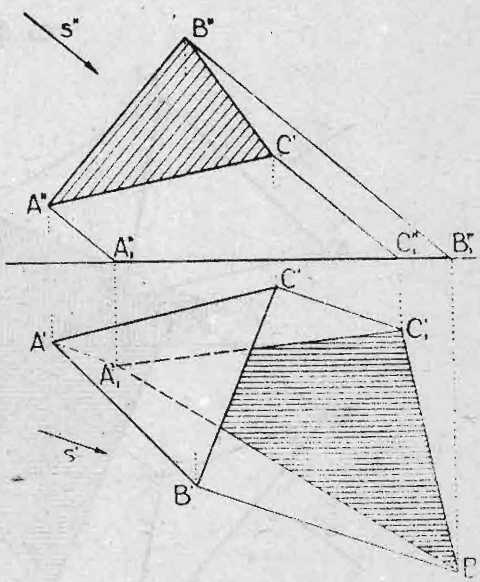
СЕНКЕ

131. СЕНКЕ РАВНИХ ЛИКОВА

Како смо се сенкама бавили већ у глави V одељка II излагања сад могу бити краћа.

Бачене сенке ликова на неки заклон одређујемо налажењем тачака у којима зраци светлости, који пролазе кроз поједине тачке предмета продиру заклон. Сенке на π_1 обележаваћемо индексом $_I$ (напр. A_I је сенка тачке A), сенке на π_2 индексом $_{II}$ (напр. A_{II}), сенке на ма на коју раван индексом s.

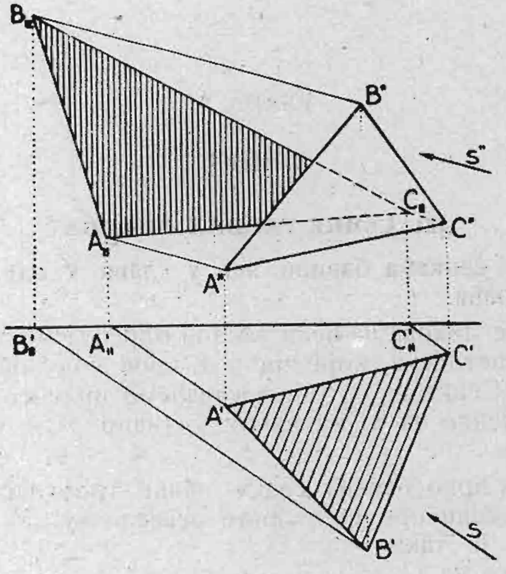
Посматрајмо прво бачену сенку равне троугласте површи ABC на пројекцијске равни при упоредном осветљењу. У слици 363 смер светлосних зрака је такав да постоји само сенка на π_1; то је троугласта површ $A_I B_I C_I$ која се у другој пројекцији види као дуж $A_I'' B_I''$. Како је у првој пројекцији смер обилажења на троуглу ABC и на његовој сенци исти, видимо, према разматрању у § 71, осветљену страну троугла. Према томе, како је смер обилажења различит у првој и у другој пројекцији, видимо у другој пројекцији неосветљену страну површи. Напоменимо да се део сенке $A_I B_I C_I$, који пада у троугао $A'B'C'$, не види, јер је заклоњен троугластом површи.



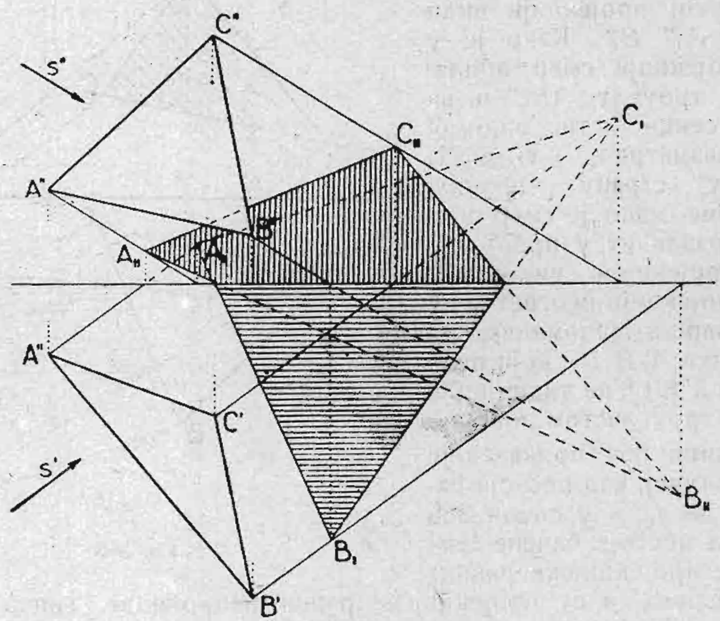
Сл. 363

У слици 364 приказан је обрнути случај, кад постоји само сенка на π_2, а у слици 365 случај кад постоје бачене сенке на обе пројекцијске равни. Ако замислимо да су пројекцијске равни непровидне, сенка троугла се ломи на оси x јер у обзир долази део сенке на π_1, који је испред π_2, и део сенке на π_2, који је изнад π_1. Приметимо да се троуглови $A_I B_I C_I$ и $A_{II} B_{II} C_{II}$ секу у тачкама осе x. (Препуштамо читаоцу да испита њихову колинеарност.)

У слици 366 претстављена је сенка троугла ABC на косу раван τ. Пројекције тачака A_s, B_s, C_s конструисане су помоћу пројектујућих равни прве врсте светлосних зрака. Како су те равни при упоредном

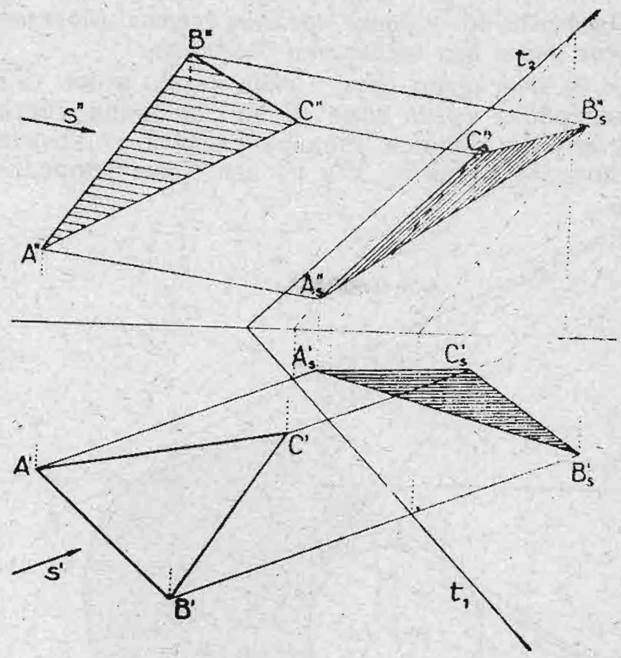


Сл. 364



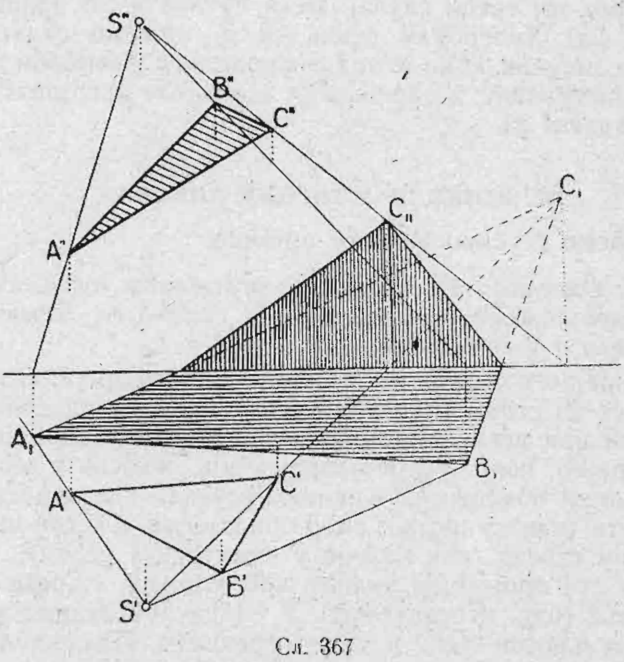
Сл. 365

осветљењу међу собом упоредне, упоредни су и њихови пресеци равнином τ. То нам скраћује конструкцију тачака B_s и C_s ако смо прво одредили тачку A_s, као што се из слике види.



Сл. 366

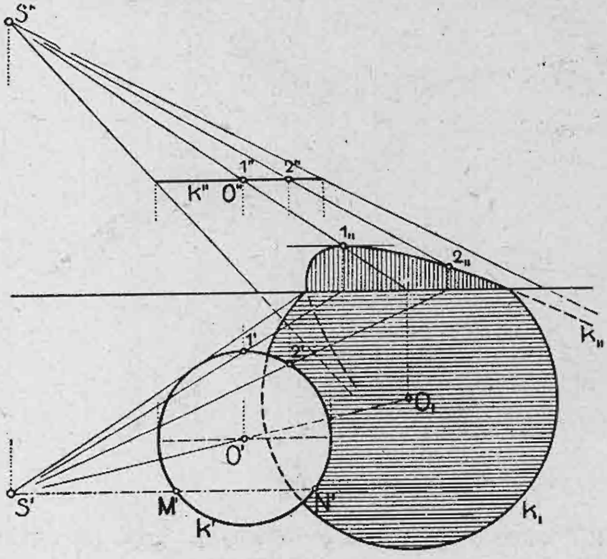
У слици 367 одређена је сенка троугла ABC на обе пројекцијске равни при средишњем осветљењу из средишта S. Поступак је исти као при упоредном осветљењу.



Сл. 367

Задатак. *Одредити сенку равне кружне површи упоредне равни* π_1 *на обе пројекцијске равни при средишњем осветљењу.*

Сенка на π_1 је очигледно круг. Сенка на π_2 може бити елипса, парабола или хипербола према томе да ли сви зраци светлости који додирују руб k кружне површи продиру раван π_2 у коначности, или је један зрак упоредан равни π_2, или су два зрака упоредна равни π_2.



Сл. 368

Посматрајмо тај трећи случај Нека су SM и SN зраци упоредни равни π_2 ($M'N' \parallel x$). Хиперболу сенке на π_2 можемо схватити и као пресек купасте површи којој је врх S а водиља k, равнином π_2 (сл. 368). Појединости конструкције и одређивање асимптота препуштамо читаоцу (види § 125, задатак 2).

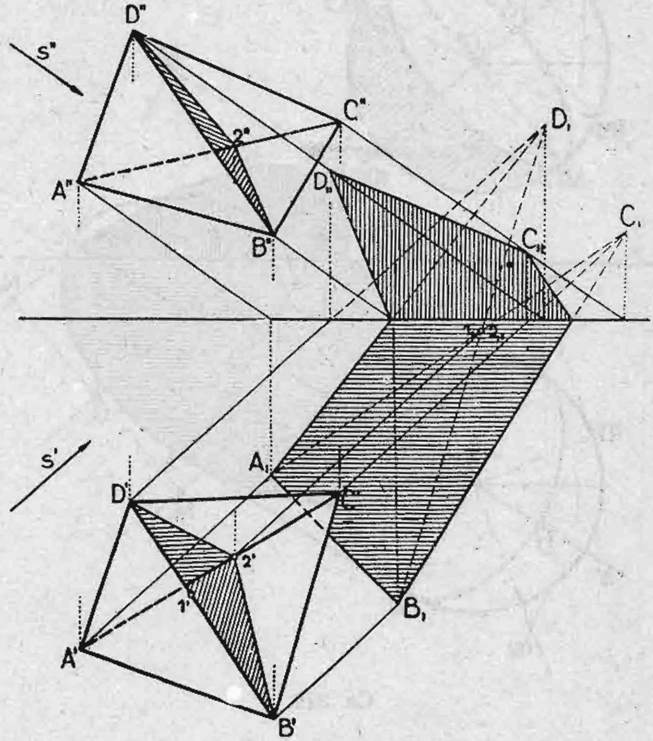
132. СЕНКЕ ПРОСТОРНИХ ЛИКОВА

Ограничићемо се само на неке примере.

Задатак 1. *Одредити при упоредном осветљењу сопствену сенку ма каквог тетраедра коме је отклоњена једна страна, и бачену сенку на пројекцијске равни и у сам тетраедар.*

Како се предмет састоји из три троугласте површи, његова бачена сенка састоји се из сенки тих троугластих површи (сл. 369). Да би се одредило да ли нам нека пљосан окреће осветљену или неосветљену страну посматрајмо, напр. у првој пројекцији, пљосни и њихове сенке у погледу на смер обилажења њихових темена: где пљосан и њена сенка имају исти (или супротан) смер обилажења, пљосан нам показује своју осветљену страну (или која је у сопственој сенци); дакле, ако неку пљосан у тој пројекцији видимо као спољну пљосан тетраедра, она је осветљена (одн. неосветљена). У слици 369 видимо у обим пројекцијама споља пљосан ABD и та је осветљена. Пљосни ABC и ACD

видимо такође осветљене, али са сенком коју баца на њих пљосан ABD. Граница те бачене сенке налази се враћањем уз светлосни зрак $1\ 2$ који пролази кроз тачку $A_1C_1 \times B_1D_1$.

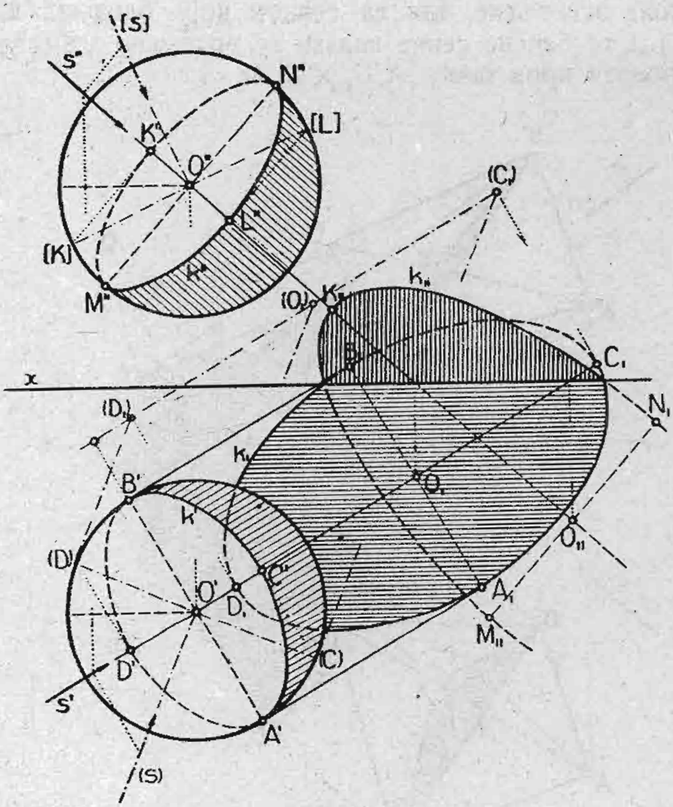


Сл. 369

Задатак 2. *Одредити сопствену сенку лопте и бачену сенку на пројекцијске равни при упоредном осветљењу* (сл. 370).

Одредимо прво руб k сопствене сенке. То је круг по коме лопту сече раван постављена кроз њено средиште O, управна на светлосне зраке и коме су обе пројекције елипсе. У првој пројекцији велика оса елипсе k' је пречник $A'B'$ контурног круга l', управан на пројекцију светлосног зрака s' који пролази кроз средиште лопте. Малу осу можемо добити као у § 85, обарањем пројектујуће равни прве врсте праве s у хоризонталну раван која пролази кроз O. Пресечни круг лопте том равни поклапа се у обореном положају с кругом l', а пречник CD, управан на AB, круга k је пречник $(C)(D)$ управан на (s). Враћањем тачака (C) и (D) у прву пројекцију добијамо крајње тачке C' и D' мале осе елипсе k'. На исти начин могу се и у другој пројекцији одредити осе елипсе k''.

Рубови k_I и k_{II} сенке лопте на пројекцијске равни истоветни су са сенком круга k. Елипсу k_I можемо добити из истог обарања у раван упоредну равни π_1, и слично сенку на π_2. Но можемо их добити и помоћу обих пројекција појединих тачака, напр. A, B, C, D.



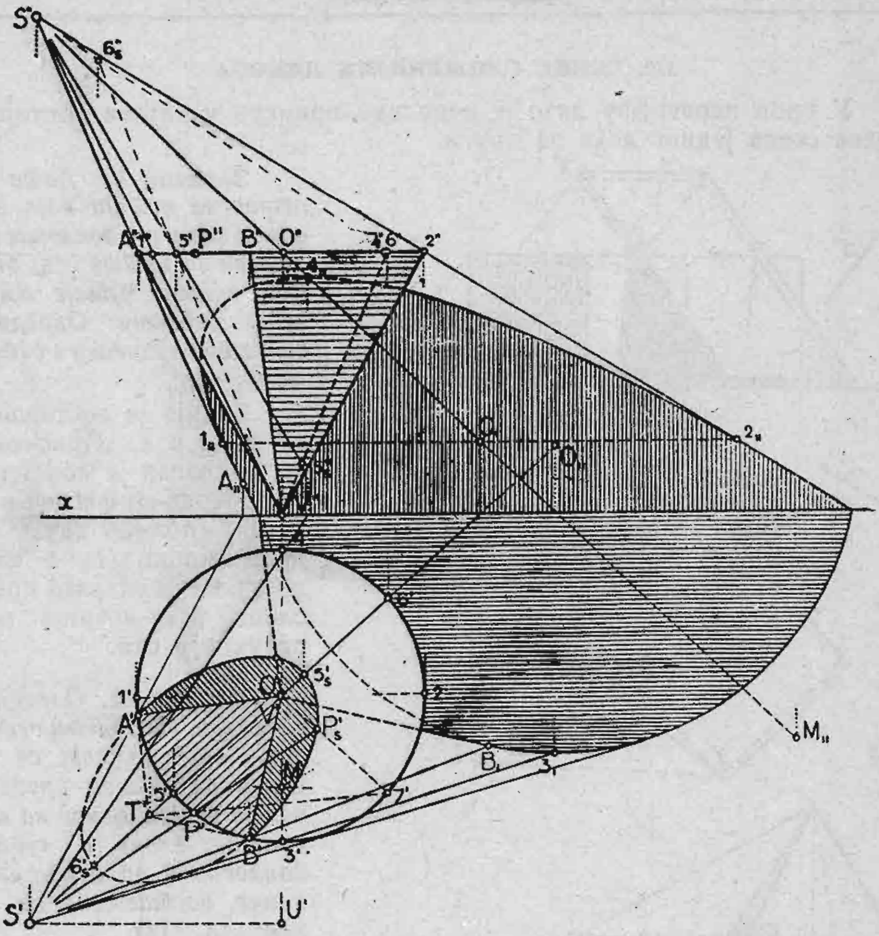
Сл. 370

Задатак 3. *Дата је права кружна купа у изврнутом положају* (сл. 371), *отворена озго. Одредити сопствену сенку и сенку бачену у унутрашњост површи и на пројекцијске равни при средишњем осветљењу из тачке* S.

Бачену сенку на π_1 и π_2 можемо добити као сенку круга k основе, којој додајемо део захваћен диркама из V' на круг k_l сенке. Да бисмо добили сенку у унутрашњости купе, можемо поступити слично као у слици 179, тј. постављати равни кроз праву SV. Ако је T тачка у којој та права продире раван основе купе, сенку P_s у купи, ма које тачке P круга основе добијамо у првој пројекцији повлачењем праве TP до пресека 7 с. k, и зрака SP до пресека с изводницом $V7$. Дирке из T на k дају крајње тачке A и B руба сопствене сенке и бачене сенке у унутрашњост купе.

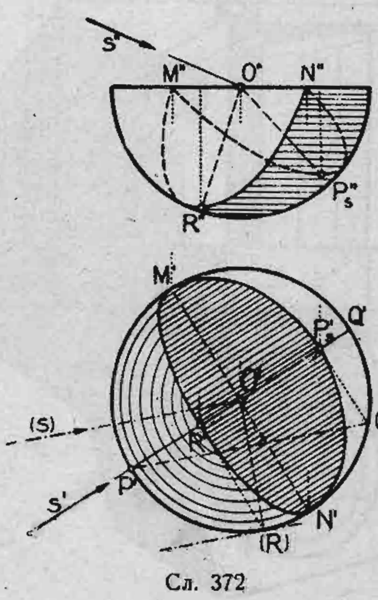
Задатак 4. *Одредити сенку унутрашњости полулопте с хоризонталним рубом, при упоредном осветљењу.*

Као што већ знамо руб бачене сенке у полулопту је један велики полукруг полулопте (§ 87, задатак 2). Да бисмо у првој пројекцији одредили тај полукруг, као и руб сопствене сенке, приметимо да су



Сл. 371

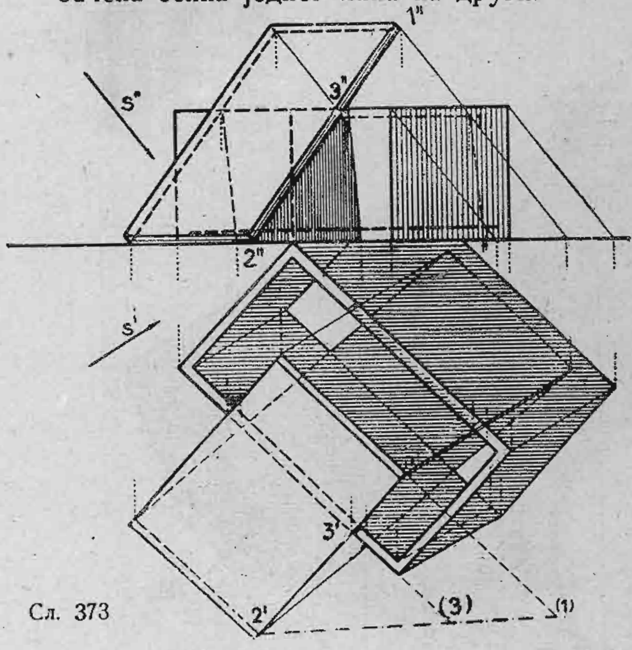
то елипсе са заједничком великом осом $M'N'$ управном на пројекцији s' зрака светлости. Да бисмо одредили мале осе, тј. тачке P_s' и R', оборимо пројектујућу раван прве врсте зрака s око пречника PQ. Зрак s прелази у (s), зрак кроз P у паралелну праву која сече оборени пресечни круг пројектујуће равни у (P_s), а паралелна дирка пролази кроз тачку (R). Отуд налазимо на $P'Q'$ тачке P_s' и R', дакле можемо конструисати елипсе. Сенке у другој пројекцији одређене су првом пројекцијом.



Сл. 372

133. СЕНКЕ СЛОЖЕНИЈИХ ЛИКОВА

У овом параграфу дато је неколико примера у којима постоји и бачена сенка једног лика на други.

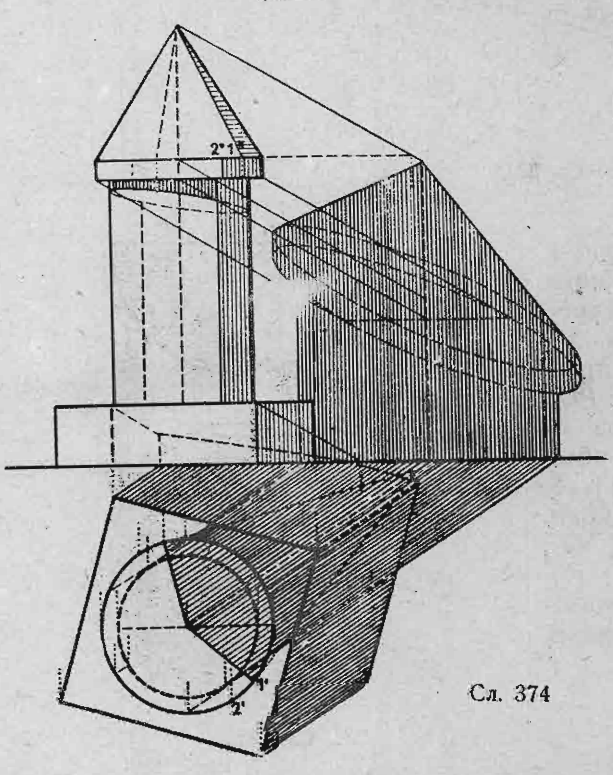


Сл. 373

Задатак 1. *Дата је отворена кутија која има облик квадра и поклопац наслоњен на кутију* (сл. 373). *Сви зидови кутије имају исту дебљину. Одредити сенке при упоредном осветљењу.*

Кутија је постављена са дном у π_1. Прислоњени поклопац је конструисан обарањем његове ивице *1 2* (помоћу тачке (*3*) долазимо до (*1*), а отуд до *1'*). Нека читалац према слици 373 изврши конструкцију сам.

Задатак 2. *Одредити сенке при упоредном осветљењу објекта који се састоји из правог кружног ваљка постављеног на квадратну плочу и купе с подлогом у облику кружне плоче, постављене на ваљак* (сл. 374).

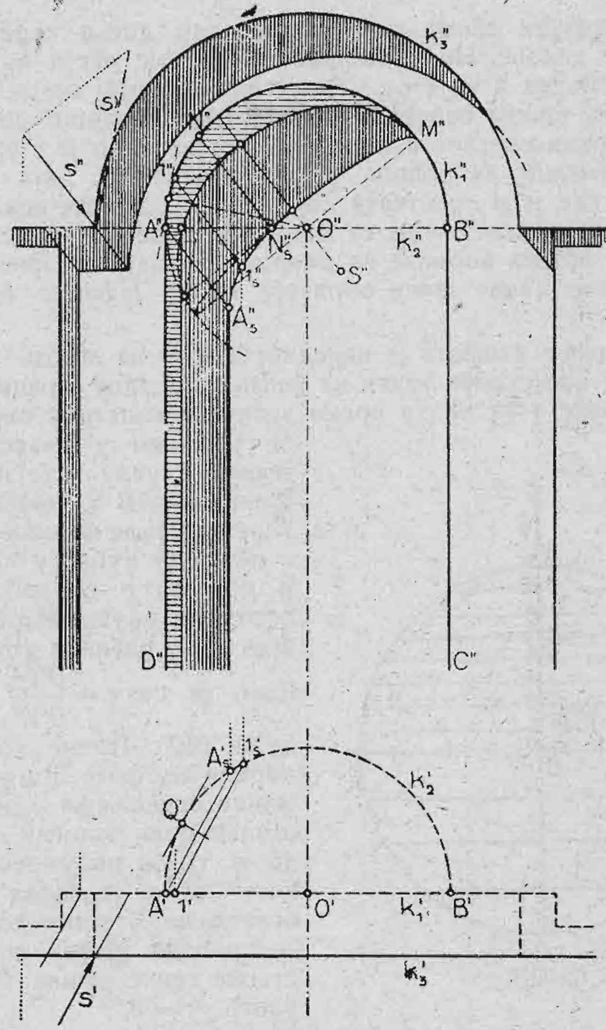


Сл. 374

Бачена сенка на пројекцијске равни састоји се из сенки сва четири дела, сваког засебно. Сем тога ваљак баца сенку на своју подлогу (квадратну плочу), а кружна плоча на ваљак. Приметимо да на горњој основи тачка *1* кроз коју пролази руб сенке на купи, није истоветна с тачком *2* кроз коју пролази сенка на омотачу кружне плоче. Читаоцу се препушта извођење конструкције.

Задатак 3. *Дато је удубљење у зиду (ниша) чије су главне површи:*

1. четвртина лопте са средиштем O и пречником AB, руб јој се састоји из вертикалног полукруга k_1 и хоризонталног полукруга k_2; 2. део ABCD ваљкасте површи којој је водиља тај хоризонтални полукруг; 3. равна површ, паралелна равни π_2, ограничена делимично линијом $DA\,k_1\,BC$; 4. ваљкасти део чије се изводнице пројектују на π_2 као полукруг k_3'' Одредити сенке при упоредном осветљењу.



Сл. 375

Руб бачене сенке у облу унутрашњост удубљења потиче од полукруга k_1 и изводнице AD и састоји се из кружног лука MN_s и лука $N_s A_s$ елипсе, тј. сенки лукова MN и NA, и из изводнице кроз A_s (сл. 375). Руб сопствене сенке у том удубљењу састоји се из кружног лука MQ и изводнице кроз Q. Лукови MN_s и MQ добијају се као у задатку 4 претходног параграфа, а лук $N_s A_s$, рецимо, налажењем неколико тачака.

Руб бачене сенке на равну површ потиче од полукруга k_3 и извесних равних ивица. Сенка полукруга k_3 је лук подударног круга са средиштем S на зраку који пролази кроз средиште круга k_3.

134. ИЗОФОТЕ

Посматрајући сенке разликовали смо досад само осветљене и неосветљене делове. Но у стварности постоје места која су јаче или слабије осветљена и која су у јачој или слабијој сенци. Као што из оптике знамо, јачина осветљења неке равне површи зависи од угла под којим зраци светлости падају на површ. Ако је α угао светлосног зрака с нормалом на површ, јачина осветљења дата је једначином $i = a \cos \alpha$, где је a константа која зависи од материјала. На облим површима јачина осветљења се мења од тачке до тачке, а једнака је у тачкама у којима нормале на површ заклапају са зрацима светлости једнаке углове. Такве тачке образују криве *једнаког осветљења* или *изофоте*.

Посматрање изофота је најједноставније на лопти. На слици 376 приказана је пројекција лопте на раван упоредну зрацима светлости. Угао α нормале n на лопту према зраку светлости у тачки P показује се у слици у правој величини и једнак је углу исте нормале спрам пречника AB у правцу зрака светлости. Дакле нормале с истим углом α образују купасту површ с врхом у средишту O лопте, која сече лопту по кругу. Изофоте су дакле кругови у равнима управним на AB. Како је $\cos \alpha = \dfrac{O'Q'}{O'R'}$, сразмеран је дужи $O'Q'$. Према томе да бисмо добили изофоте лопте на којима се јачине осветљења односе као узастопни цели бројеви, рецимо од O до m, треба полупречник OA поделити на m једнаких делова. Најосветљенијој тачки лопте, тј. тачки A припада јачина m, а рубу сопствене сенке јачина 0. У слици је узето $m = 8$.

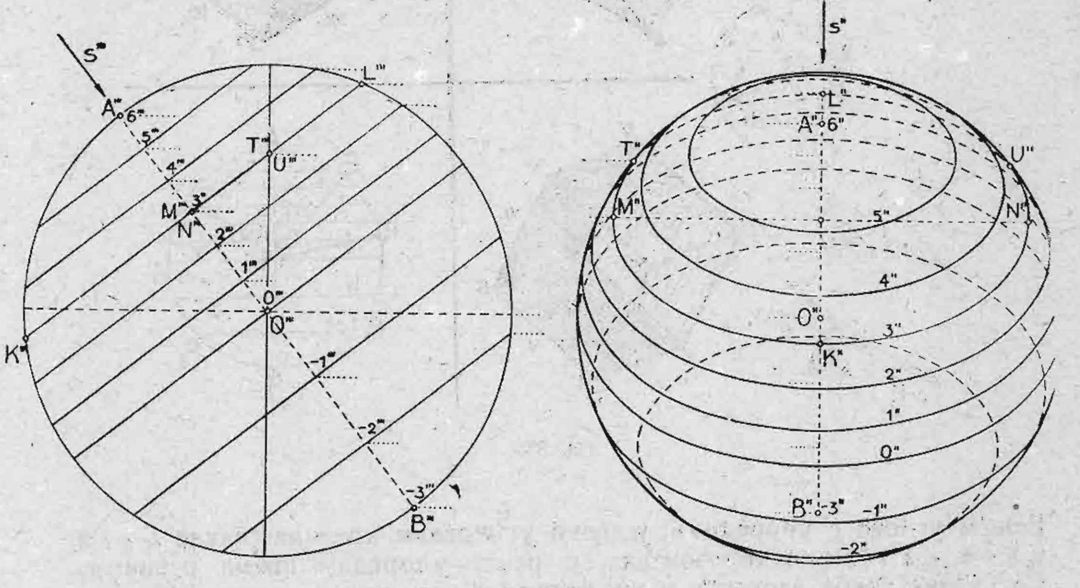
Сл. 376

Како предмети обично нису сами, њихове неосветљене стране (које су у сопственој сенци) примају такође светлости, рецимо од околних осветљених предмета. Услед тога, као што искуство показује, сопствене сенке су често најтамније у близини њихова руба, а целокупно дејство је као да је тело са стране супротне извору светлости обасјано слабијом светлошћу. Узима се да је јачина осветљења на неосветљеној страни равни која је управна на зрацима светлости једнака половини јачине светлости на осветљеној страни. Дакле, на лопти јачина осветљења је у тачки B половина јачине у тачки A, тј. $m/2$. Стога претпостављамо да је m паран број и, да бисмо добили изофоте на страни лопте која је у сопственој сенци, делимо полупречник $O'B'$ на $m/2$ једнаких делова. Најчешће се узима $m = 6$, но прелази су блажи ако је m већи број.

Што се тиче бачених сенки, узима се према искуству да је бачена сенка на неку равну површ у толико тамнија у колико је осветљени део те површи јаче осветљен. Према томе, ако је осветљена страна неке обле површи делимично у баченој сенци (од неког другог предмета) место које би припадало изофоти с бројем n, припада изофоти с бројем $-n$.

Ако сенчење вршимо разблаженим раствором туша (или другим течним средством), треба у случају $m=8$, под условом да је раствор довољно слаб, пређи једанпут целу површ, сем области у изофоти *7*, која, као најосветљенија, остаје необојена; затим пређи једанпут целу површ, сем области у изофоти *6* итд., а после изофоте *2* почињу се изузимати и области на супротној страни: прелази се бојом само део између изофота *2* и *— 3*, затим између *1* и *— 2* и најзад (још једном) део између *0* и *— 1*. Ако се хоће, раствор се може при том постепено појачавати.*

Задатак 1. *Осенчити помоћу изофота лопту осветљену упоредним осветљењем из правца косог према пројекцијској равни.*



Сл. 377

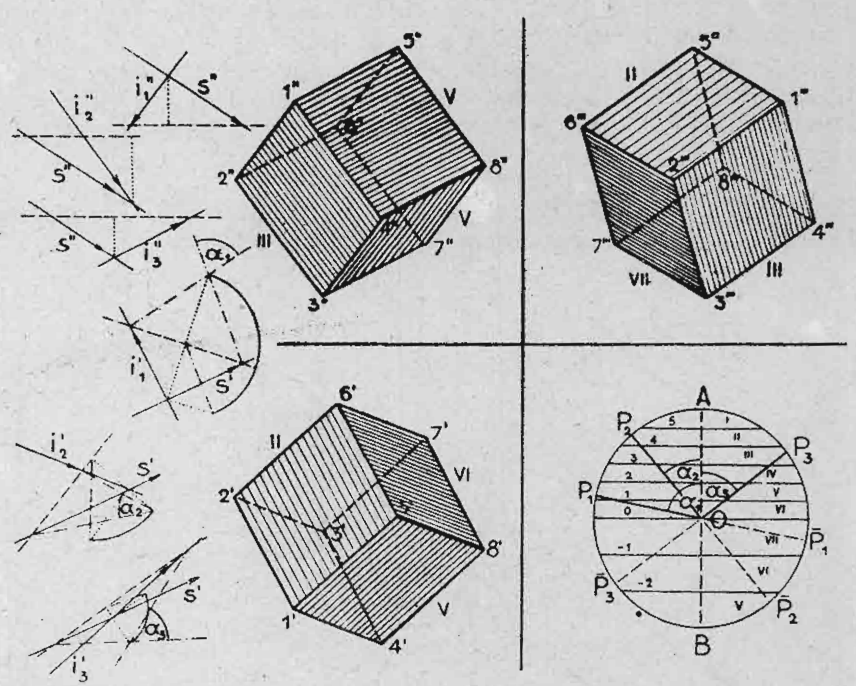
Узмимо да је сем пројекције лопте на извесну раван (на вертикалну раван π_2, сл. 377 десно) дат нагиб зрака светлости s према тој равни. Конструишимо пројекцију лопте на једну раван управну на тој пројекцијској равни и упоредну према зрацима светлости (раван π_3).

* Нека читалац погледа слике с израђеним сенкама у књигама: E. Müller, Lehrbuch der darstell. Geometrie, Bd. I, на крају књиге, и V. *Niče*, Deskript. Geometrija стр. 288.

Знајући нагиб зрака s нацртајмо s''' и одредимо изофоте, рецимо за $m=6$, у равни π_3. Отуд конструишемо изофоте и у првобитно датој пројекцијској равни, где се пројектују као сличне елипсе уписане у контуру лопте.

Задатак 2. *Осенчити, разликујући јачине осветљења, коцку дату у трима управним пројекцијама (тлоцрт, нацрт и бокоцрт) при упоредном осветљењу.*

Треба одредити углове α_1, α_2, α_3 које заклапа зрак светлости с нормалама на три суседне стране коцке, тј. с трима суседним ивицама, рецимо с $1\,2$, $1\,4$, $1\,5$ (сл. 378). Ово можемо извршити са стране, оба-

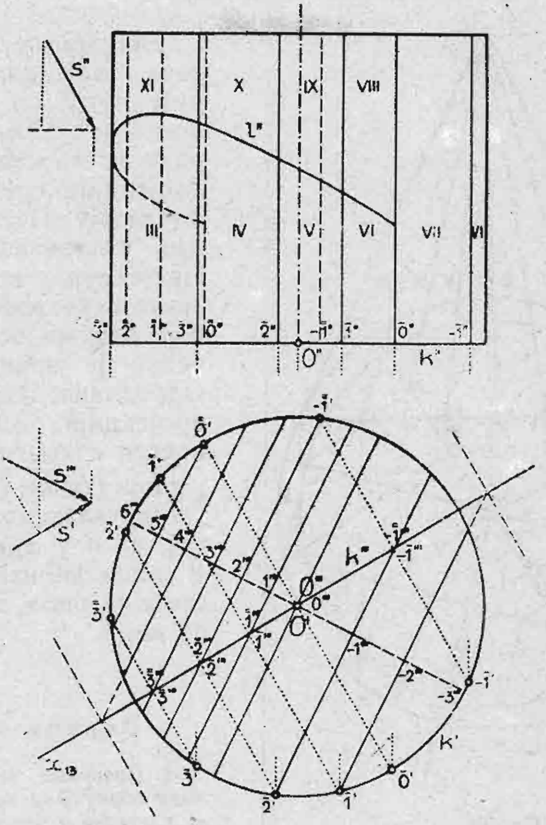


Сл. 378

рањем углова с упоредним, једнако усмереним крацима (дакле $i_1 \parallel 1\,2$, $i_2 \parallel 1\,4$, $i_3 \parallel 1\,5$) око хоризонтала, у раван упоредну према равни π_1. Са стране треба нацртати и пројекцију лопте, као у слици 376; узимамо $m=6$. Затим пренесимо углове α_1, α_2, α_3, полазећи од крака OA, на једну или другу страну праве AB. Тако долазимо до тачака P_1, P_2 и P_3 на кругу. Јачине осветљења зона у које падају те тачке јесу јачине осветљења одговарајућих трију осветљених страна коцке. Продужимо ли полупречнике OP_1, OP_2, OP_3, преко O, долазимо до тачака $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, које одређују на исти начин јачину осветљења осталих трију страна коцке, које су у сенци. Јачине сенчења су обележене римским бројкама, полазећи од бројке I за несенчену област.

Задатак 3. *Одредити изофоте на правом кружном ваљку с хоризонталним основама, при упоредном осветљењу. Претпоставимо да се један део ваљка налази у баченој сенци која потиче од неког предмета испред ваљка и да је руб те бачене сенке нека крива дата у другој пројекцији.*

Упишимо у ваљкасту površ датог ваљка лопту. Нека је O њено средиште (сл. 379). Одређујемо изофоте прво на тој лопти, да бисмо



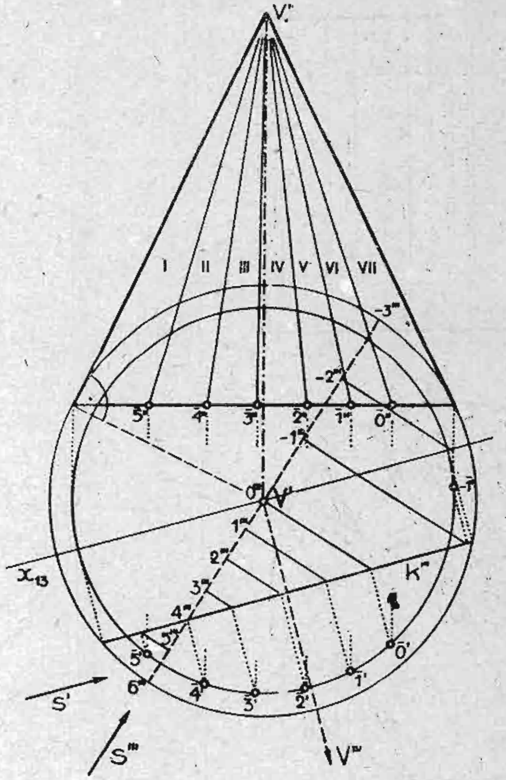
Сл. 379

добили тачке пресека изофота с кругом k по коме лопта додирује ваљак. У тим тачкама јачина осветљења на ваљку је иста као на лопти, јер се у њима бескрајно мали делови обих површи поклапају. Дакле из тих тачака полазе изофоте ваљка, као извесне његове изводнице

Ради конструкције пројектујмо лопту и зрак светлости на раван π_3 која садржи осу ваљка и упоредна је зрацима светлости, и одредимо изофоте у трећој пројекцији (упоредне дужи кроз тачке I''', $2'''$ итд.). Нека су пресеци изофота с кругом k тачке I и $\overline{\overline{I}}$, 2 и $\overline{\overline{2}}$ итд. У трећој пројекцији то су тачке I''', $\overline{\overline{I}}'''$ итд. на пречнику k'''. Отуд их добијамо у првој пројекцији, повлачећи управне дужи на x_{13} до пресека с k', а затим у другој пројекцији на одговарајућим ординалама.

Приметимо да све изофоте лопте не секу додирни круг. То се слаже с околношћу што све јачине осветљења нису остварене на омотачу. Бачена сенка сматра се тамнијом од сопствене. Према томе, осветљеним областима којима припадају јачине сенчења VI, V, IV итд. по обележавању у претходном задатку, припашће редом јачине сенчења VIII, IX, X итд.

Задатак 4. *Одредити изофоте на правој кружној купи с хоризонталном основом, при упоредном осветљењу.*



Сл. 380

Упишимо у купасту позрш дате купе лопту која додирује купу по кругу k њене основе (сл. 380). Једноставности ради претпоставимо да се обе пројекције средишта O лопте поклапају. Поступак је сличан као у претходном примеру. Пројектујмо лопту с кругом k и зраком светлости s на раван π_3 која садржи осу купе и упоредна је зрацима светлости. Одредивши изофоте у трећој пројекцији, одредимо њихов пресек с кругом k у тој пројекцији (тачке $\overline{1}$ и $\overline{\overline{1}}$, $\overline{2}$ и $\overline{\overline{2}}$ итд.). Отуд налазимо те тачке у првој, па и у другој пројекцији. У слици 380 нађене су изофоте само на оном делу купе који се види.

Задаци за вежбу

1. Правилна четворострана пирамида обрнута је тако да јој је врх у π_1 а основа у вишој равни упоредној са π_1. Наћи сопствену сенку и бачену сенку на пројекцијске равни а) при упоредном осветљењу, б) при средишњем осветљењу.

2. Дата је коцка чија једна пљосан је у равни π_1. На коцки је правилна четворострана пирамида чија је висина једнака коцкиној ивици. Одредити сопствену сенку и бачену сенку на π_1 и π_2 а) при упоредном осветљењу, б) при средишњем осветљењу.

3. Дата је правилна двострука шестоугаона пирамида, састављена из две пирамиде које имају заједнички врх а основе у паралелним равнима. Одредити сенке при паралелном осветљењу.

4. Дат је предмет састављен из двеју а) кружних плоча, б) правилних шестоугаоних плоча, које су спојене танком правом четвоространом призмом. Одредити сенке при упоредном или средишњем осветљењу.

5. Одредити сенке добијених комбинованих тела при решавању задатака о продорима, напр. из задатака 4, 5, 9, 11 на стр. 282.

6. Одредити на коцки којој је отклоњена једна страна, сенке споља и изнутра.

7. Одредити сопствену и бачену сенку бочне површи правилне шестостране пирамиде с врхом у π_1, на самој пирамиди и у равни π_1.

8. Разликујући јачине осветљења при упоредном осветљењу, осенчити а) правилан октаедар коме је један врх у π_1, б) правилан тетраедар коме је једна ивица у π_1, а наспрамна у равни упоредној према π_1.

9. Осенчити правилан додекаедар при упоредном осветљењу, разликујући јачине осветљења.

10. Осенчити правилан икосаедар при упоредном осветљењу, разликујући јачине осветљења.

11. Дата је бочна површ кружне купе у општем положају. Осенчити је споља и изнутра при упоредном осветљењу, узимајући у обзир јачине осветљења.

ГЛАВА VI

ОБРТНЕ И ЗАВОЈНЕ ПОВРШИ

135. ОБРТНЕ ПОВРШИ

Површ која настаје обртањем какве било равне или просторне линије око извесне праве зове се *обртна* или *ротациона површ* (§ 26). Та се линија зове *изводница*, а та права *оса* обртне површи. Свака тачка на изводници описује круг који се зове *упоредник* или *паралела*, а свака раван која садржи осу сече површ по равној кривој симетричној спрам осе и зове се *меридијан*. Меридијан може бити и права или садржати праве делове. Где је тако обртна површ се своди на купасту или ваљкасту површ (обртна купаста или обртна ваљкаста површ) или садржи делове тих површи. Претпоставићемо обично да је меридијан крива и то глатка крива.

Ако је оса управна на пројекцијској равни, упоредници обртне површи пројектују се као концентрични кругови. Ако је оса упоредна пројекцијској равни, упоредници се пројектују у дужи управне на пројекцији осе, а руб пројекције је одређен меридијаном чија је раван упоредна према пројекцијској равни, званим *главни меридијан* и, обично, пројекцијама два крајња упоредника. У слици 381 приказана је у двема управним пројекцијама извесна обртна површ с вертикалном осом.

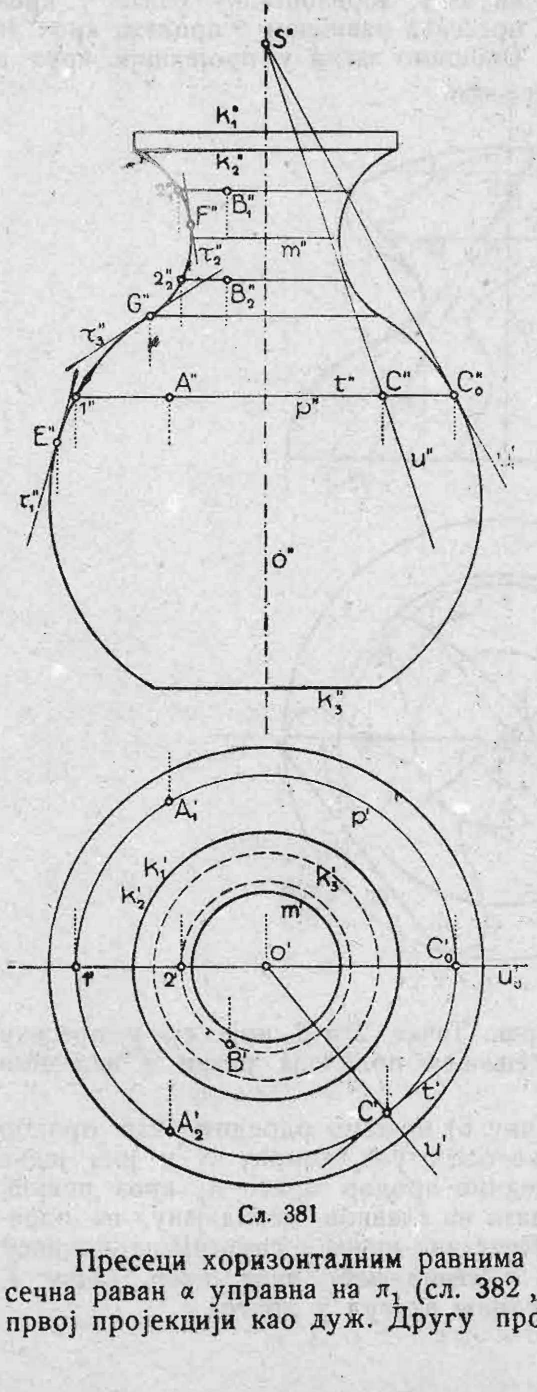
На обртним површима налазимо елипсне, параболне и хиперболне тачке (§ 29), а често постоје све три врсте тачака на истој површи. Тачке где је меридијанска крива спола испупчена (дакле и сама површ испупчена) су елипсне тачке. Таква је у слици 381 тачка E. Додирна раван у таквој тачки не сече површ у њеној близини. Заиста, додирна раван τ_1 у тачки E пројектује се на π_2 у праву τ_1'' која, очигледно, нема у близини тачке E заједничких тачака с површи. Тачке где је меридијанска крива спола удубљена су хиперболне тачке. Таква је тачка F. Додирна раван у таквој тачки сече површ по кривој којој је та тачка двострука тачка. Превојне тачке меридијанске криве су параболне тачке. Таква је тачка G. Додирна раван у таквој тачки сече површ по кривој којој је та тачка повратна тачка. Постоје и сингуларне тачке, на сингуларним линијама, које су, разуме се, кругови (у сл. 381, круг k_2).

Задатак 1. *Дата је обртна површ с вертикалном осом о. Знајући једну пројекцију једне њене тачке, одредити непознату пројекцију исте тачке и додирну раван у тој тачки.*

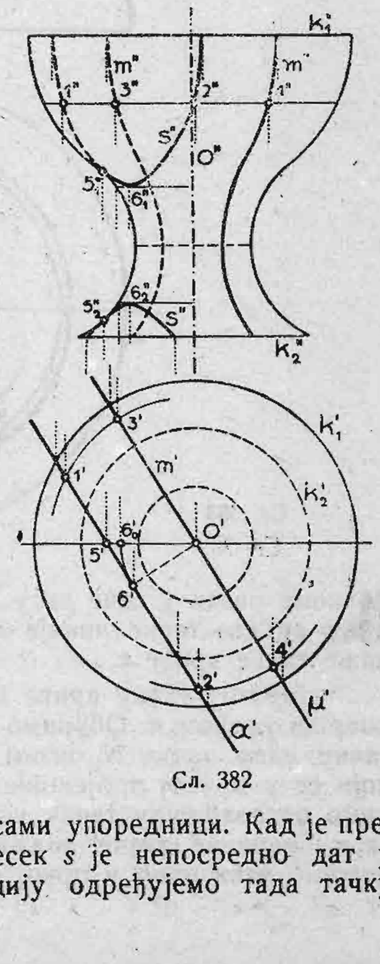
Ако је дата друга пројекција A'' тачке A на површи (сл. 381) повуцимо паралелу p кроз тачку A. Тада је A' на кругу p'; постоје, очигледно, два решења и то A_1' и A_2'. Слично налазимо другу пројекцију неке тачке B кад је дата њена прва пројекција. И тада може постојати више решења, јер се више упоредника може пројектовати на π_1 у исти круг.

Додирна раван у једној тачки, напр. у C одређена је двема диркама на површ у C. Две дирке можемо лако одредити: дирку t на упоредник кроз C и дирку u на меридијан кроз C. Дирка t је хоризонтална и добија се непосредно. Прва пројекција дирке u пролази кроз o', а другу пројекцију добијамо обртањем одговарајуће дирке u_0 у тачки C_0 главног меридијана, на истом упореднику, око осе o. Обртање можемо извршити помоћу тачке $S = u \times o$.

Задатак 2. *Пресећи обртну површ чија оса је вертикална, неком равни α.*



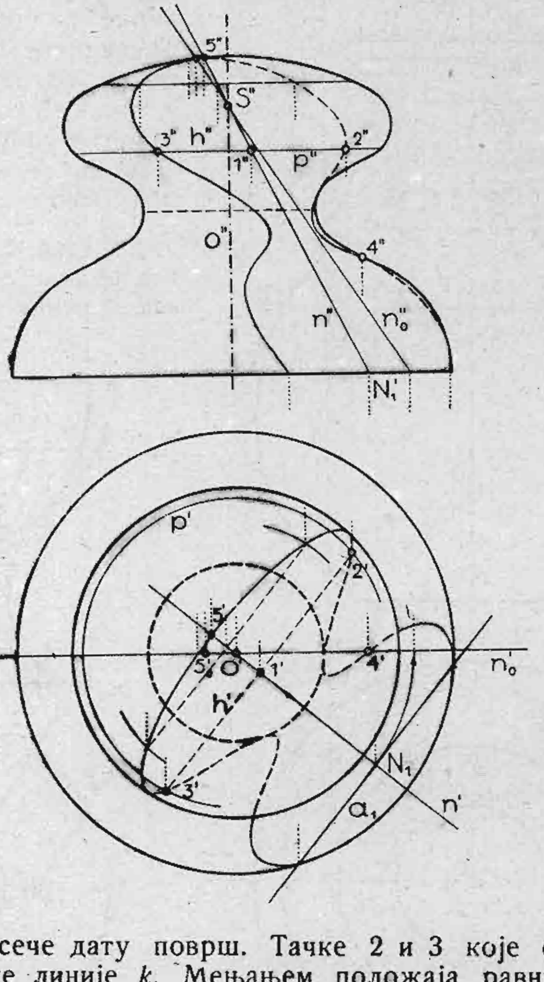
Сл. 381



Сл. 382

Пресеци хоризонталним равнима су сами упоредници. Кад је пресечна раван α управна на π_1 (сл. 382, пресек s је непосредно дат у првој пројекцији као дуж. Другу пројекцију одређујемо тада тачку по тачку, као у претходном задатку. У слици је одређен и један меридијан m.

Ако је раван α ма у ком косом положају, одредимо прво тачку S у којој оса o обртне површи продире раван α (сл. 383) и одредимо линију пада n која пролази кроз S. Тачке на пресечној кривој k можемо добити ако раван α и обртну површ пресечемо ма којом хоризонталном равни. Узмимо напр. ма коју хоризонталну раван χ кроз тачку 1 на линији пада n. Њен пресек h равнином α пролази кроз H и управан је на n, дакле $h' \perp n'$. Опишимо затим у пројекцији круг p



Сл. 383

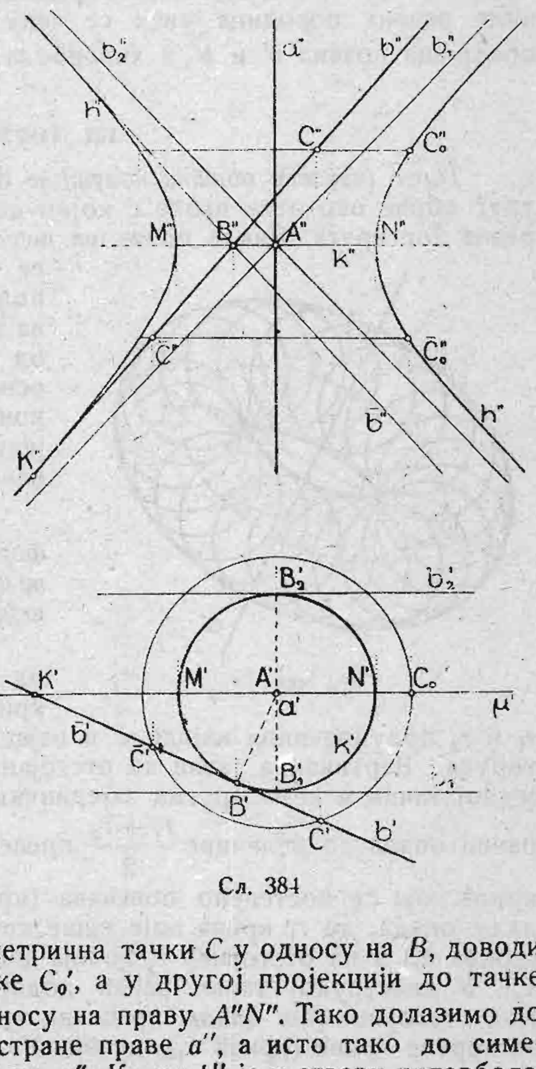
по коме раван χ сече дату површ. Тачке 2 и 3 које су у пресеку $h \times p$ су две тачке линије k. Мењањем положаја равни χ налазимо даље тачке криве k.

Највишу тачку криве k (тачку 5) можемо одредити као продор површи правом n. Обрнимо n око осе o у n_0 помоћу S и још једне тачке, напр. тачке N, затим одредимо продор праве n_0 кроз површ, који се у другој пројекцији налази на главном меридијану, па одредимо одговарајућу тачку на n. Пресечна крива је симетрична у односу на n. Граничне тачке видљивог и невидљивог дела, напр. тачку 4, можемо наћи прво у првој пројекцији а отуд у другој.

136. ОБРТНЕ КВАДРИКЕ

Ако се крива другог реда обрће око једне своје осе настаје обртна површ друго реда или обртна квадрика. Обртањем елипсе настаје *обртни елипсоид*, обртањем хиперболе око реалне осе *обртни двокрилни хиперболоид*, око имагинарне *обртни једнокрилни хиперболоид*, обртањем параболе око њене осе *обртни параболоид*. Задржимо се на једнокрилном хиперболоиду. То је једина витопера обртна површ: настаје и обртањем праве око мимоилазне праве.

Нека су a и b две мимоилазне праве које нису међу собом управне и нека се права b обрће око праве а; тада настаје обртна површ којој је a оса, b изводница. Узмимо опет да је оса вертикална (сл. 384, дато је a', a'' и b', b''). Свака тачка праве b описује круг око осе a, па како тачке праве b имају разна отстојања од a, описују кругове разних величина, који се на π_1 пројектују као концентрични кругови. Једна тачка праве b, наиме тачка B, најближа је правој a, тј извесној тачки A праве a .AB је најкраће растојање тачака мимоилазних правих a и b и описује најмањи круг k, који у првој пројекцији образује контуру слике те обртне површи. Прва пројекција те обртне површи покрива двоструко целу раван π_1 сем унутрашњости круга k.



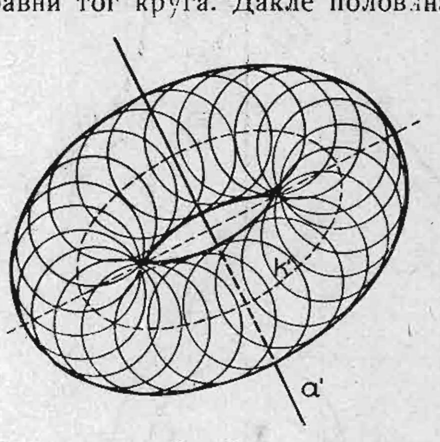
Сл. 384

Да би се добио главни меридијан h, који образује контуру друге пројекције површи, треба пресећи површ равнином $\mu \parallel \pi$. У ту сврху приметимо да ма која тачка праве b, напр. C, описује при обртању те праве круг и да тачка продора C_0 тог круга кроз μ претставља једну тачку меридијана h. Дакле, изабравши C', одредимо C'' на b'', затим C_0' на кругу кроз C'; на другој пројекцији тог упоредника, тј. на дужи $[C'' \perp a'']$ имамо тада C_0''. Тачка B' доводи тако до тачке N'' на k''. Тачка $\bar{C}$ праве b, симетрична тачки C у односу на B, доводи у првој пројекцији до исте тачке C_0', а у другој пројекцији до тачке $\bar{C}_0''$ симетричне спрам C_0'' у односу на праву $A''N''$. Тако долазимо до меридијанске криве h'' с једне стране праве a'', а исто тако до симетричне гране с друге стране праве a''. Крива h'' је у стварн хипербола, а добијена обртна површ обртни једнокрилни хиперболоид: У тачки K права b продире раван μ, дакле b'' додирује хиперболу h'' у тачки K''. Кад се при обртању права b приближује положају упоредном према равни μ (права b_1), тачка продора кроз μ постаје бескрајно далека тачка те хиперболе, дакле b_1'' је једна њена асимптота, а симетрична права b_2'' друга асимптота.

Како је површ симетрична у односу на сваку меридијанску раван, дакле и на раван aB, она садржи сем посматране праве b и праву $\bar{b}$ симетричну спрам b у односу на ту раван. Праве b и $\bar{b}$ секу се у тачки B и поклапају се у првој пројекцији. Како ово вреди за сваки положај праве b, значи да се исти обртни хиперболоид производи и обртањем праве $\bar{b}$ око осе a. То су две породице изводница хиперболоида. Две изводнице исте породице никад се не секу, а две изводнице разних породица увек се секу (упореди с § 58). Круг k' је обвојница правих b' и $\bar{b}'$, а хипербола h'' је обвојница правих b'' и $\bar{b}''$.

137. ТОРУС

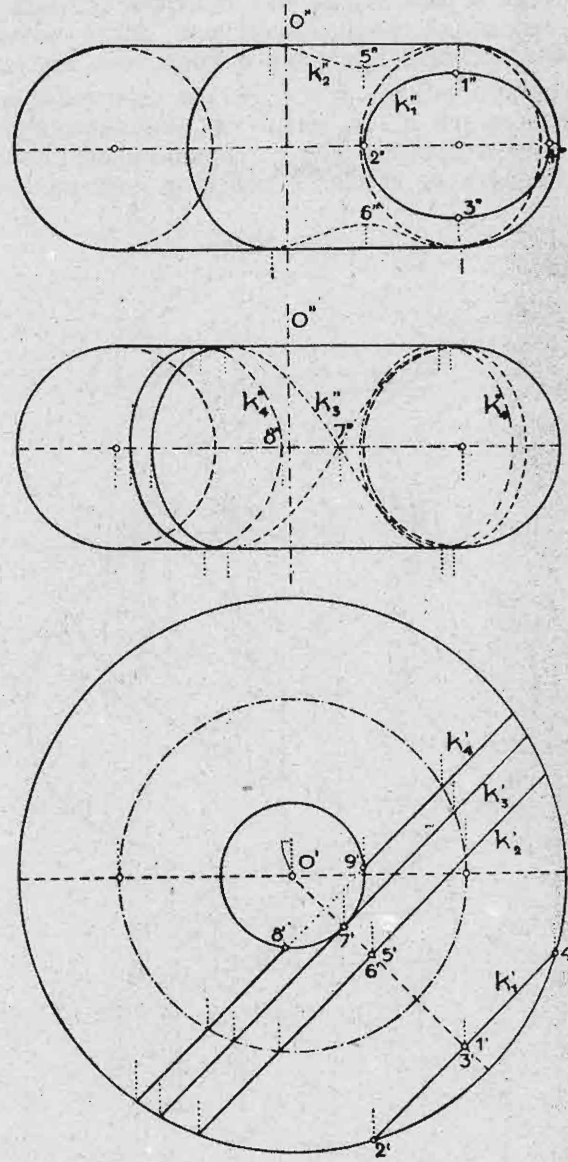
Торус (кружни обртни колут) је обртна површ која настаје кад се круг обрће око неке праве с којом нема заједничке тачке а која је у равни тог круга. Дакле половина његовог меридијана је круг. Торус се може сматрати и обвојницом подударних лопти чија су средишта на кругу коме је полупречник већи од полупречника тих лопти. На основу тога може се торус лако конструисати у једној управној пројекцији, ма у ком положају према равни слике (сл. 385).



Сл. 385

Задатак. *Конструисати пресеке торуса претстављеног у двема управним пројекцијама и коме је оса вертикална, вертикалним равнима.*

С отстојањем пресечне равни од осе мења се облик пресечне криве (сличне Касинијевим). Нека су r_1 и r_2 полупречници најмањег и највећег круга на торусу (екватори торуса . Вертикална раван на отстојању r_2 од осе додирује торус у једној тачки и нема других заједничких тачака с њим. Кад отстојање равни опада до величине $\frac{r_1 + r_2}{2}$ пресечна крива је конвексна затворена крива која се постепено повећава (крива k_1, сл. 386). Кад отстојање даље опада, до r_1 крива није више конвексна, угиба се озго и оздо (крива k_2) и на отстојању r_1 добија двоструку тачку (као лемниската, k_3). У двострукој тачки раван додирује торус (хиперболна тачка). Кад отстојање још опада, пресечна крива се распада на две конвексне затворене криве (крива k_4), да би се за меридијанску раван свела на два круга. Конструкције су извршене као у задатку 2, § 135, цртајући другу пројекцију засебно за k_1 и k_2 и засебно за k_3 и k_4, а служећи се истом првом пројекцијом.



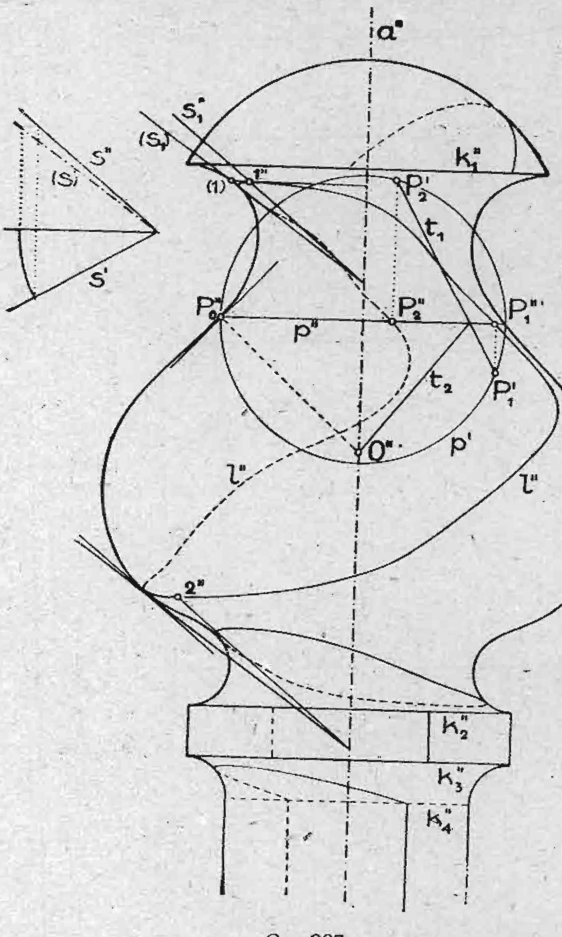
Сл. 386

Постоје две равни управне на оси торуса, које га додирују, свака по кругу с полупречником $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Тачке на тим круговима су параболне тачке торуса (слично као на ваљку и купи, где је додирна линија права). Све тачке торуса које су на већем отстојању од његове осе, су елипсне тачке, а све тачке које су на мањем отстојању су хиперболне тачке.

138. СЕНКЕ ОБРТНИХ ПОВРШИ

Да би се добио руб сопствене сенке, одређују се тачке у којима тај руб сече поједине упорединке површи. То се чини постављањем додирних купа којима је оса заједничка с датом површи а које додирују површ дуж појединих упоредника, или постављањем додирних лопти. Показаћемо практичан поступак с додирним лоптама.

Уочимо ма који упоредник p (сл. 387) и претпоставимо при томе да је раван π_1 раван круга p а π_2 раван главног меридијана. Средиште O додирне лопте је у пресеку осе a с управном на површи у тачки P_0 круга p. Руб l сопствене сенке те лопте је њен велики круг чија

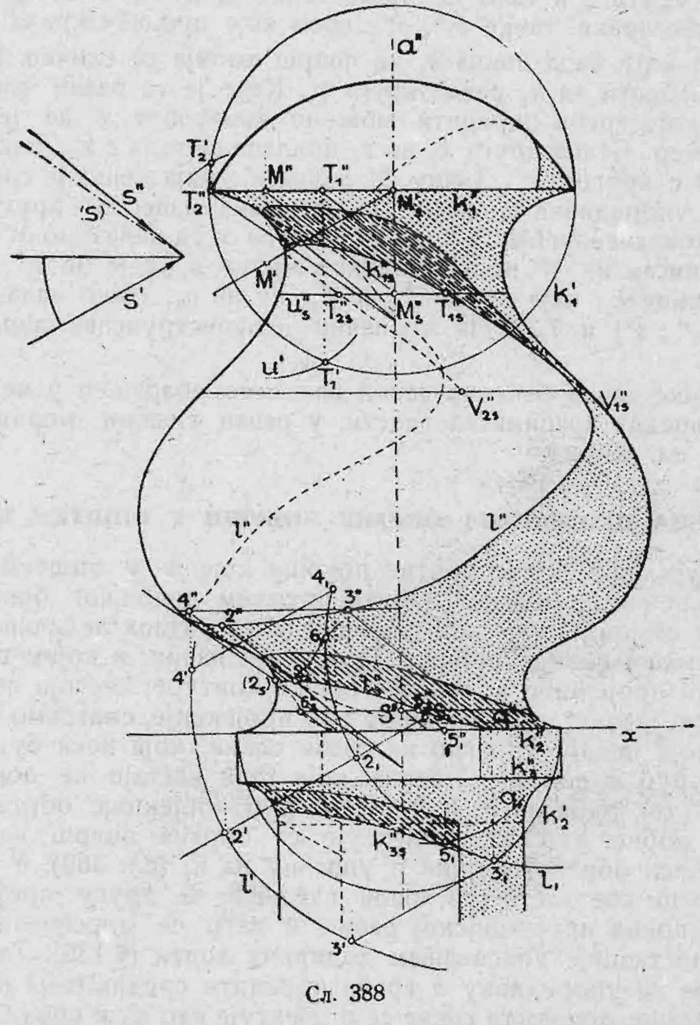


Сл. 387

раван τ је управна на зраку светлости s. Отуд налазимо трагове t_1 и t_2 равни τ: $t_2 \perp s''$ и пролази кроз O'', а $t_1 \perp s'$ и сече се с t_2 на правој p'' (која сад претставља осу x). Нас занимају оне две тачке P_1 у P_2 руба l, које припадају упореднику p, дакле које падају у π_1 тј. на t_1. Дакле P_1' и P_2' налазимо у пресеку праве t_1 с кругом p', коме је p'' пречник; отуд P_1'' и P_2''.

Ако је $\overline{p}$ један највећи или најмањи круг, тачка O пада на p'' и $t_1 = [O'' \perp s']$.

Највише и најниже тачке руба сопствене сенке, као што су тачке *1* и *2*, на рубу *l*, налазимо обарањем меридијанске равни, паралелне светлосним зрацима, у раван главног меридијана. Тада напр. (s_1), тј. оборени зрак s_1 који пролази кроз тачку *1* (сл. 387; обарање се може извршити на страни) додирује оборени меридијан (који се поклапа с главним) у тачки (*1*). Како се s_1'' и (s_1) секу на a'', налазимо отуд s_1'', а на s_1'' тачку $1''$. Будући да се у заједничким тачкама главни меридијан и крива l'' додирују, налазимо те тачке као оне у којима су дирке упоредне зраку s''. Нашавши довољно тачака на рубу сопствене сенке, повлачимо кроз њих линију, или више њих (на посматраном предмету постоје сем *l* још три линије).



Сл. 388

На упоредницима где се правац дирке на меридијан нагло промени, рубна линија се прекида (упоредници k_1, k_2 и k_3), а на упоредницима где се кривина меридијана нагло промени, дирка рубне линије мења нагло правац (упоредник k_4).

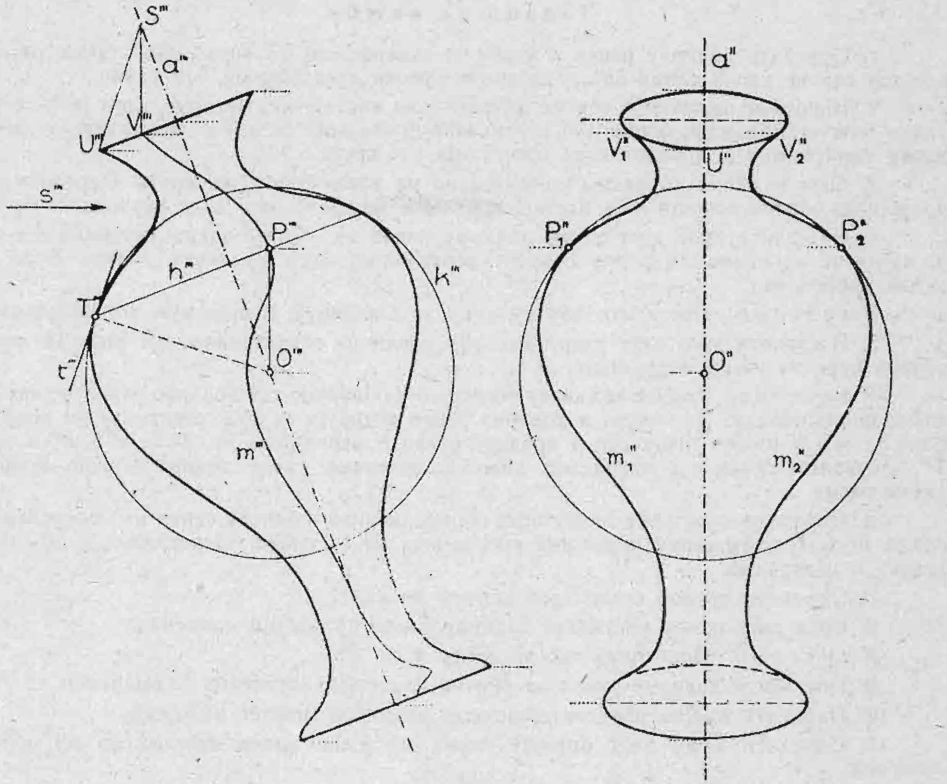
Руб сенке коју баца обртна површ на раван управну на њеној оси може се добити из руба њене сопствене сенке, одређивањем бачене сенке појединих упоредника. Руб бачене сенке на обртну површ, коју баца она сама или неки други предмет, налази се поступком враћања уз светлосне зраке, тражећи прво где се бачене сенке разних упоредника секу. Да бисмо нашли сенку l_s коју руб l баца на површ, (сл. 388) изаберимо напр. раван круга k_2 за раван π_1 и одредимо из l'' криву l' (§ 135, задатак 1) и нађимо из l' и l'' сенку l_l линије l на π_1 (помоћу 2_l, 3_l и 4_l). Затим описујемо лукове кругова који сачињавају сенку на π_1 појединих упоредника, као што је q, и то оног дела површи на који сенка пада, и одређујемо пресеке тих кругова линијом l_l: одредивши сенку S_l средишта S круга q, опишемо лукове полупречником круга q и тако добијамо тачке 5_l и 6_l, а отуд, враћањем уз светлосне зраке, тачке $5_s''$, $6_s''$, кроз које пролази крива l_s''.

Сенка коју баца ивица k_1 на површ добија се слично. Но тада је најбоље изабрати за π_1 раван круга k_1. Како је та раван изнад бачене сенке k_{1s}, коју треба одредити, можемо замислити и да је светлост обрнула смер. Сенка круга k_1 на π_1 поклапа се тада с k_{1s}, дакле у првој пројекцији с кругом k_1'. Тачку M равни π_1, чија сенка је средиште M_s ког било упоредника u_s, на π_1 (u_s је сенка извесног круга u у π_1) добијамо повлачењем $[M_s''\|s'']$ до M'' на k_1'', а отуд налазимо M' на $[M_s'\|S']$. Круг u' описан из M' полупречником круга u_s даје на k_1' оне тачке T_1 и T_2 ивице k_1, чије сенке T_{1s} и T_{2s} су на u_s. Тако налазимо тачку T_{1s}'' на $[T_1''\|s'']$ и T_{2s}''. На тај начин је конструисана линија k_{1s}'', а затим k_{3s}''.

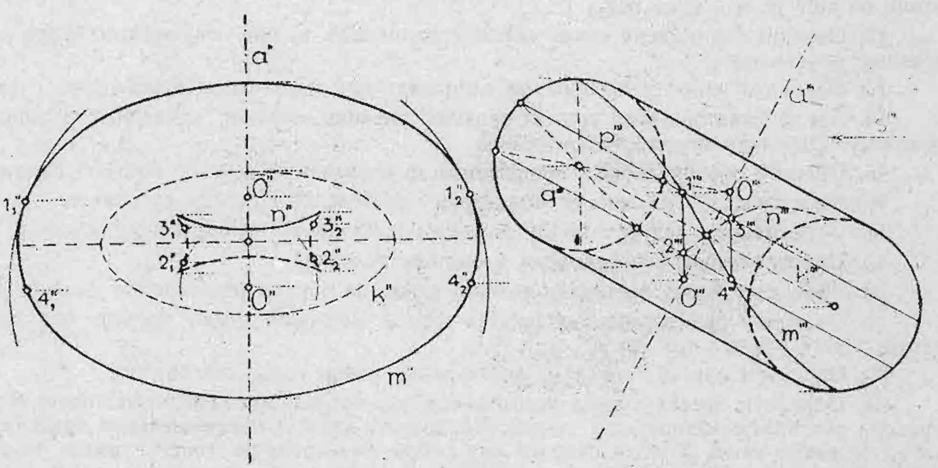
Највише тачке бачених сенки налазимо обарањем у меридијанске равни, упоредне зрацима светлости, у раван главног меридијана, као тачку I у сл. 387.

139. УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА ОБРТНЕ ПОВРШИ У ОПШТЕМ ПОЛОЖАЈУ

Контуру пројекције обртне површи која је у општем положају према равни слике можемо добити цртањем довољног броја упоредника, који се пројектују као сличне елипсе разних величина, а затим извлачењем њихових обвојница. Погоднији начин, и којим се добијају непосредно пројекције појединих тачака контуре, састоји се у томе да пројекцијске зраке који одређују руб пројекције, сматрамо светлосним зрацима који падају управно на раван слике, која нека буде π_2, и да одредимо руб m сопствене сенке, који тада настаје на површи. Пројекција m'' тог руба на π_2 је тражени руб пројекције обртне површи. Да би се добио руб m'' пројектује се обртна површ на раван π_3, упоредну оси обртне површи и управну на π_2 (сл. 389). У новој пројекцији зраци светлости (тј. зраци гледања за другу пројекцију) су упоредни према пројекцијској равни и зато се одређивање руба m врши једноставније уписивањем додирних лопти (§ 138). Тако напр. за тачке руба на упореднику h треба одредити средиште O и сопствену сенку додирне лопте; та сенка се пројектује као дуж кроз O''', управна на s'''. У пресеку те дужи с h''' је тачка P''' линије m'''. Нашавши затим O'', налазимо тачке P_1'' и P_2'' тражене контуре m'' на кругу у који се пројектује на π_2 иста додирна лопта. Крајњу тачку V налазимо исто тако (средиште лопте је тада S).



Сл. 389



Сл. 390

У слици 390 претстављен је истим начином, торус у општем положају према (вертикалној) равни слике. Нацртана је конструкција за тачке $1, 2, 3, 4$. У другој пројекцији постоји спољни руб m'' и унутарњи n''. Криве m''' и n''' су отворене. Највиша и најнижа тачка на n''' дају четири повратне тачке на n''.

Задаци за вежбу

1. Одредити додирну раван у једној а) хиперболној, б) параболној тачки обртне површи сличне као у слици 381 и одредити пресек дате површи том равни.

2. Нацртати пројекције обртне површи која настаје кад се круг, који је у некој равни општег положаја, обрће око вертикалне праве која се на π_1 пројектује у једну жижу елипсе која је хоризонтална пројекција тог круга.

3. Дата је двема управним пројекцијама ма каква просторна крива. Одредити руб пројекције обртне површи која настаје обртањем те криве око једне вертикалне праве.

4. Поставити кроз дату тачку додирну раван на обртну површ (узимамо сем ако се изузетно напомене, да је оса површи вертикална) тако да тачка додира буде на датом упореднику,

Упутство. Поставити обртну купу која додирује површ дуж тог упоредника.

5. Поставити кроз дату тачку додирну раван на обртни елипсоид тако да тачка додира буде на датом меридијану.

Упутство. Уочити ваљкасту површ коју обавијају све додирне равни у тачкама датог меридијана m. Та површ и додирна раван додирују се дуж хоризонталне праве h. Како је $m' \perp h'$ имамо тачку где h продире раван μ меридијана m: $T' = m' \times h'$ а отуд T'' Обртањем равни μ у паралелни положај налазимо тачке додира обртне површи датом равни.

6. Одредити сопствену сенку неке обртне површи и бачену сенку на хоризонталну раван, посматрајући сенку појединих упоредника на ту раван. Осветљење је а) паралелно, б) централно.

7. Одредити продор праве кроз обртну површ.

8. Кроз дату праву поставити додирну раван на обртни елипсоид.

Упутство. Поступити као за лопту у сл. 350.

9. Поставити додирну раван на обртни елипсоид, паралелну датој равни.

10. Одредити пресек обртног елипсоида равнином општег положаја.

11. Одредити купу коју описују дирке из једне тачке постављене на обртни елипсоид.

Напомена. Додирна линија те купе и елипсоида је елипса садржана у поларној равни за коју је врх купе пол.

12. Одредити сопствену сенку обртног елипсоида а) при паралелном б) при централном осветљењу.

13. Одредити изофоте на обртном елипсоиду при паралелном осветљењу.

14. Дат је екваторијални круг и управни пречник обртног елипсоида у општем положају. Одредити пројекције елипсоида.

15. Пресећи обртни параболоид равнима а) паралелним оси, б) општег положаја.

Напомена. а) Пресеци су подударне параболе. б) Пресеци су елипсе.

16. Одредити купу коју описују дирке из једне тачке на обртни параболоид.

17. Нацртати обртни параболоид у општем положају.

18. Кроз дату праву поставити додирну раван на обртни једнокрилни хиперболоид.

19. Одредити руб управне пројекције торуса, мењајући нагиб његове осе према пројектујућој равни од 0^0 до 90^0.

20. Одредити пресек торуса ма којом равни косом спрам његове осе.

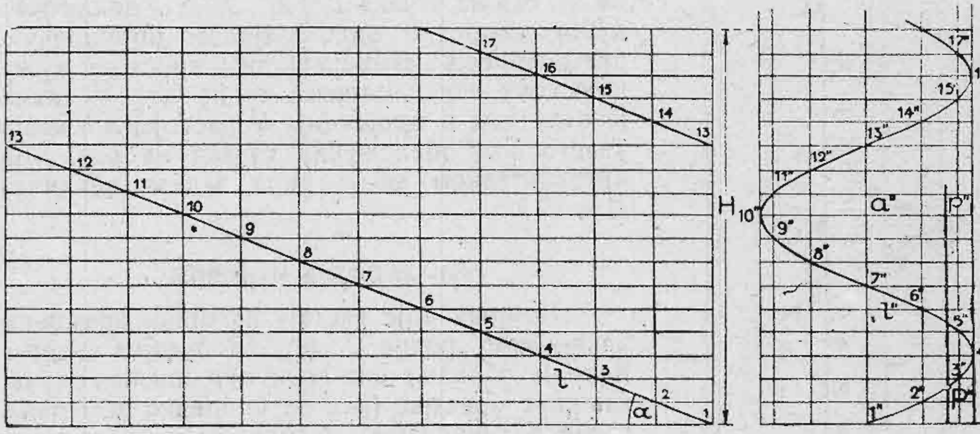
21. Одредити пресек торуса косом равни која пролази кроз средиште торуса (тачку продора осе кроз екваторијалну раван). Посматрати како се пресечна крива мења кад се нагиб те равни мења. Уочити особито ону раван која додирује торус у двема тачкама симетричним према средишту торуса. То су двоструке тачке пресечне криве, која се у ствари састоји из два круга.

22. Осенчити торус при упоредном осветљењу.

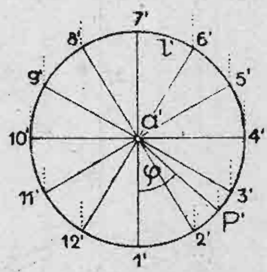
140. ЗАВОЈНИЦА

Тачка P која се креће равномерно на правој p док се ова обрће равномерно око упоредне јој осе a, описује просторну криву која се зове *завојница*.

Ако кретање састављено из равномерног обртања око једне праве и равномерног померања паралелно тој правој назовемо *завојним кретањем*, можемо краће рећи да је завојница крива коју тачка описује завојним кретањем



Сл. 391



Како права p при обртању описује ваљкасту површ, завојница је крива на тој површи. Ако дакле узмемо $a \perp \pi_1$, прва пројекција l' завојнице је круг (сл. 391). Другу пројекцију l'' добијамо ако поделимо круг l' на известан број n, рецимо 12 једнаких делова, а у другој пројекцији одредимо на оси a известан број еквидистантних тачака и кроз њих поставимо дужи управне на a (у простору: равни управне на a). Обележивши на кругу водиље и на оси деоне тачке редом бројкама *1*, *2*, *3* итд., свакој тој тачки на l' одговара у другој пројекцији тачка криве l на одговарајућој ординали и на правој управној на a''. Лако је увидети да је l'' синусоида.

Док се права p обрне за угао величине φ, тачка P се помери на p за извесну величину h која је по дефиницији сразмерна углу φ, тј. h/φ је сталан број.

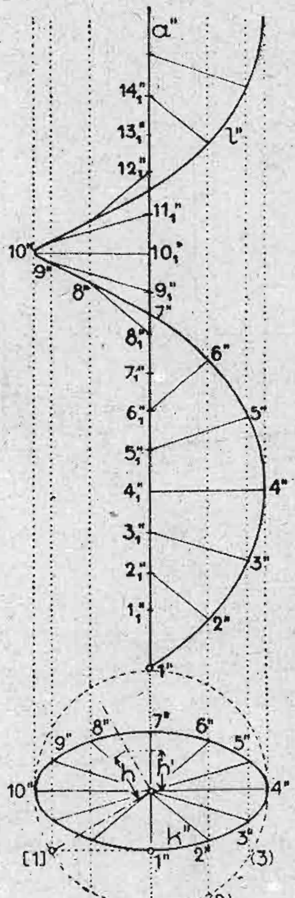
Нека је r растојање правих a и p, тј. полупречник круга l'. И размера величине померања h према величини $r\varphi$ одговарајућег лука на l', тј. $h/r\varphi$ је сталан број. Њиме се одређује нагиб α према равни π_1, дирке у свакој тачки завојнице, јер је, очигледно, $\operatorname{tg} \alpha = h/r\varphi$. Ако је $\varphi = 2\pi$, одговарајућа вредност величине h, тј. $H = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$ зове се *висина хода* завојнице. Свака изводница p ваљкасте површи сече завојницу у бескрајно много тачака; висина хода је величина сталног растојања таквих двеју узастопних тачака.

Ако се ваљкаста површ развије у раван (сл. 391 лево), завојница се претвара у низ упоредних дужи чији нагиб је α.

Завојница је *десно* или *лево завијена* према томе да ли се на ваљкастој површи пење, спољa гледано, с лева на десно или с десна на лево.

Задатак. *Конструисати управну пројекцију завојнице чија оса је коса према равни слике.*

Нацртајмо елипсу k'', пројекцију круга k водиље ваљкасте површи на којој је завојница (сл. 392). Оборивши га, одредимо на њему тачке 1, 2, 3, ..., дакле $1''$, $2''$, $3''$, ... на k'', затим одговарајуће тачке 1_1, 2_1, 3_1, ... на оси a. Уместо дужи управних на a'', сад из тачака $1_1''$, $2_1''$, $3_1''$, ... повлачимо дужи упоредне одговарајућим полупречницима елипсе k'', замишљајући у простору дужи које секу осу и управне су на њој. У слици је одређена и пројекција h' растојања h двеју узастопних обележених тачака на оси, под претпоставком да је била задата величина $H = 12\,h$.



Сл. 392

141. ЗАВОЈНЕ ПОВРШИ

Површи које настају завојним кретањем какве било линије k зову се *завојне површи.* Како је обртање око једне осе посебан случај завојног кретања (кад се упоредно померање сведе на мировање), завојне површи сачињавају шири разред кривих површи него обртне површи. Према томе и решавање задатака нацртне геометрије о завојним површима је уопште сложеније него о обртним површима.

Крива k која производи завојну површ је у сваком свом положају једна њена *изводница.* Свака тачка криве k описује једну завојницу. Заједничка оса свих тих завојница је *оса завојне површи.* Сви пресеци завојне површи равнима које садрже осу, јесу међу собом подударне равне криве, *меридијани* завојне површи. За изводницу једне завојне површи може се узети и сваки њен меридијан. Како се при произвођењу површи меридијан обртањем за 2π поклапа у новом положају са собом самим, меридијан је периодична крива; његова је периода једнака висина хода свих њених завојница.

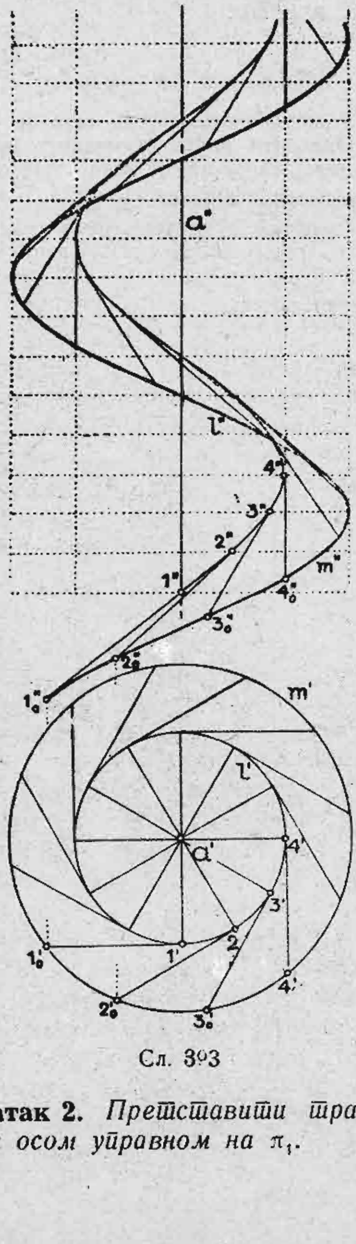
Ако изводница сече осу (разуме се, у бескрајно много тачака), каже се да је завојна површ *затворена*, ако је не сече да је *отворена*.

Ако је изводница права, имамо *праваструу завојну површ*. Каже се да је таква површ *управна* или *коса*, према томе да ли оса образује с изводницом (мимоилазећи се с њом) прав или кос угао. Праваcте завојне површи су опште узевши витопере. Изузетак је *развојна завојна површ*, коју образују дирке једне завојнице. Како те дирке образују косе углове с осом завојнице, то је коса завојна површ. Завојница је њена повратна линија.

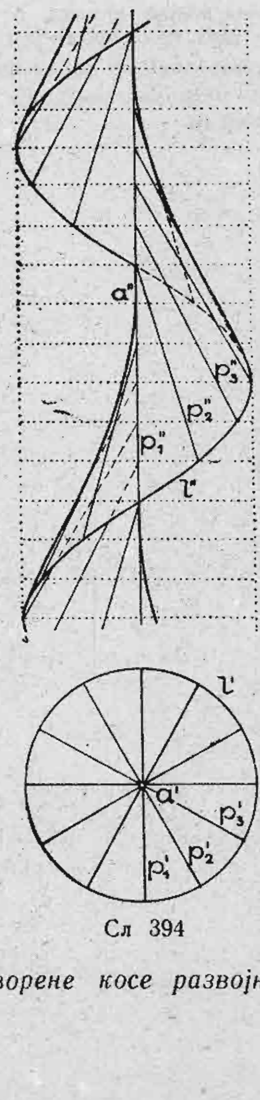
Сопствене сенке завојних површи могу се одређивати општом методом враћања уз светлосне зраке, пошто се одреде бачене сенке.

Задатак 1. *Претставити траку развојне завојне површи, ограничену двема завојницама од којих је једна њен гребен.*

Оса је изабрана управно на π_1. Нека су завојнице којима је површ ограничена: завојница l чије дирке образују ту површ, и завојница m, коју описује једна друга, нижа тачка покретне дирке (сл. 393). Обе завојнице отсецају на свакој дирци једнаке дужи, од тачке додира наниже. Према томе пројекције l' и m' су концентрични кругови, а l'' и m'' синусоиде с истом периодом.



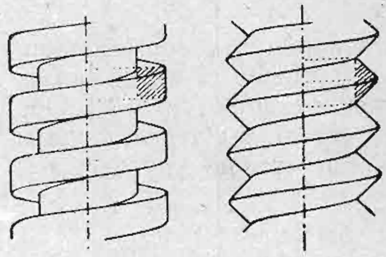
Сл. 393



Сл 394

Задатак 2. *Претставити траку затворене косе развојне завојне површи с осом управном на π_1.*

Овакву површ образује заво ним кретањем права p која сече осу. Претстављамо ону њену траку која допире од осе a до извесне завојнице l, тј. у првој пројекцији пада у унутрашњост круга l'.



а. б.

Сл. 395

Ако права p сече осу a под правим углом, површ је управна, ако под косим углом, површ је коса. У слици 394 претстављена је коса површ. Слика која би претстављала управну површ не би се битно разликовала од слика 391 и 392.

Затворене праваcте завојне површи долазе особито на завртњима и вијцима (сл. 395, а и б).

Задаци за вежбу

1. У двема пројекцијама дата је затворена праваста завојна површ а) коса, б) управна. Одредити другу пројекцију једне њене тачке, којој је дата прва пројекција; или прву пројекцију кад је дата друга пројекција.

2. Одредити додирну раван на површ претходног задатка.

3. У две управне пројекције нацртати завртње претстављене у слици 395 у општем положају.

ДЕО ПЕТИ

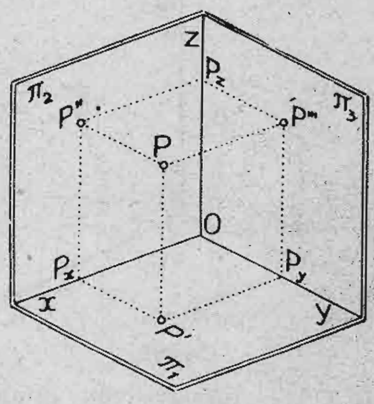
УПРАВНА АКСОНОМЕТРИЈА

ГЛАВА I

ЕЛЕМЕНТИ УПРАВНЕ АКСОНОМЕТРИЈЕ

142. ПРАВОУГЛИ СИСТЕМ ОСА

Положај тачака у простору одређује се у геометрији често помоћу *правоуглог система оса,* тј. трију међу собом управних правих x, y, z које пролазе кроз једну тачку O, *почетак (исходиште)* система (сл. 396). Равни xy, xz, yz називају се *осним равнима* и то по реду: *првом, другом* и *трећом осном равни* и обележавају: π_1, π_2, π_3. Три осне равни деле простор на осам делова који се зову *октанти.* Ма која тачка P у простору пројектује се управно на те три равни; њене пројекције, посматране истим редом, називају се *првом, другом* и *трећом пројекцијом* тачке P (њеним *тлоцртом, нацртом* и *бокоцртом*) и обележавају: P', P'', P''', као и у методи непосредних (придружених) управних пројекција. Пројекције тачке P управно на о с е x, y, z обележавају се знацима P_x, P_y, P_z. Ако осе сматрамо координатним осама, имамо правоугли праволинијски (Декартов) к о о р д и н а т н и с и с т е м.



Сл. 396

Погодно је често посматрати уместо правих x, y, z њихове полуправе са заједничком почетном тачком O и које одговарају позитивним координатним полуосама x, y, z. Те три полуправе одређују *осни триједар првог октанта,* којим је тај октант у простору омеђен. Сваки октант има свој триједар, али у посматрањима се ограничавамо на први.

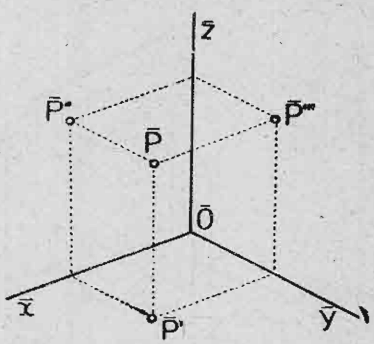
143. ПОЈАМ УПРАВНЕ АКСОНОМЕТРИЈЕ

Под *управном (нормалном* или *ортогоналном) аксонометријом* подразумева се метода нацртне геометрије по којој се предмет претставља *управним пројектовањем на једну раван слике,* а да би предмет био одређен том једном пројекцијом *поставља се уз предмет, у општем по-*

ложају према равни слике а у што једноставнијем положају према предмету, правоугли систем оса. Одмеравајући димензије предмета у правцима тих оса, утврђује се његов положај, облик и величина. Као што ћемо, наиме, још видети, положај тог система оса одређен је самом једном својом пројекцијом и трагсвима (разуме се, на основу претпоставке да пројекција претставља правоугли систем оса), па ће тако, преко тог система бити и предмет одређен самом једном својом пројекцијом. Додајмо да тада, сем непосредне пројекције на раван слике, долазе у обзир и једна или више посредних пројекција (§ 7), управних на осне равни.

Пројекција на раван цртежа назива се и *аксонометријском пројекцијом.* Обележавамо је цртицом изнад слова; напр. $\overline{P}$ је аксонометријска пројекција тачке P (читати: P с цртом или: P надвучено)*. Раван цртежа се обележава словом π и обично зове *раван слике.*

У аксонометрији долазе у обзир, као што је речено, сем непосредне пројекције тачке P на раван π, и посредне пројекције $\overline{P}'$, $\overline{P}''$, $\overline{P}'''$ тј. аксонометријске пројекције управних пројекција P', P'', P''' тачке P на осне равни (аксонометријски тлоцрт, нацрт и бокоцрт) (сл. 397).



Сл. 397

Осе x, y, z и осне равни узимају се у косом положају према равни слике, но како се осе постављају у вези с предметом, напр. тако да предмет стоји на π_1, сматра се обично да је прва пројекцијска раван π_1 хоризонтална, дакле оса z вертикална и према томе раван слике π коса спрам хоризонталне равни.

На предметима се истичу често три међусобно управна правца (правац дужине, ширине и висине). Тада постављамо осе у та три правца.

Ово смо већ чинили у методи двеју придружених непосредних пројекција (§ 111), пројектујући предмете у „паралелним" положајима, на две пројекцијске равни, а по потреби и на трећу, бочну раван. Но како те пројекције увек не дају довољно јасну слику предмета, поставља се у нацртној геометрији и њеним применама задатак да се нацрта управна пројекција предмета на раван ма ког општег положаја. У методи двеју непосредних пројекција упознали смо и начин како се пројекција предмета ма на коју раван налази из датих пројекција путем два страноцрта. Али тај начин је доста сложен. Као што ћемо видети, нормална аксонометрија пружа једноставнији начин за извођење управне пројекције ма на коју раван из непосредних управних пројекција на две равни. У томе се највише састоји практични значај управне аксонометрије.

Али у аксонометрији се задаци решавају и непосредно у аксонометријској пројекцији, не ослањајући се на методу двеју управних

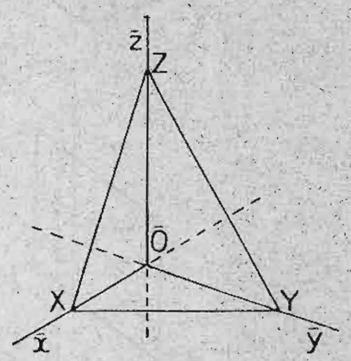
*) Употребљавају се и друга обележавања, као P^n и P^o.

пројекција. То је тзв. *слободна* аксонометрија. Извођење аксонометријских пројекција из двеју (придружених) управних пројекција је пак поступак тзв. *везане* аксонометрије.

Како се у управној аксонометрији посматрају непосредне пројекције само на једну раван слике, а предмети у општим положајима, поступак ће у задацима често бити исти као у одељку II и у гл. I и II одељка III. Карактеристично за овај одељак је пре свега то што у решавању задатака полазимо од одређеног осног триједра.

144. ТРОУГАО ТРАГОВА

Ако почетна тачка O система оса $Oxyz$ није у равни слике π а осе су косе према тој равни, осе продиру раван π у три разне тачке: у *траговима* X, Y, Z оса x, y, z. Осне равни секу пак раван π у три праве: три њихова *трага*, која пролазе кроз тачке X, Y, Z и одређују *троугао трагова* XYZ (сл. 398).



Сл. 398

Ако би тачка O била у равни слике, трагови трију осних равни би пролазили кроз исту тачку и троугао трагова би се свео на саму тачку O; претпостављамо да није тако. Паралелним померањем равни слике може се пак увек лако постићи да O буде иза или испред равни слике.

Како је права z управна на π_1, пројектујућа раван праве z је управна на трагу равни π_1, тј. на правој XY. Дакле и пројекција оса $\bar{z}$ је управна на XY. Исто тако пројекција осе x је управна на YZ, пројекција осе y на XZ (сл. 398). Другим речима, *аксонометријске пројекције трију оса* x, y, z *су висине троугла трагова* XYZ, пројекција исходишта O је тачка њихова пресека (ортоцентар).

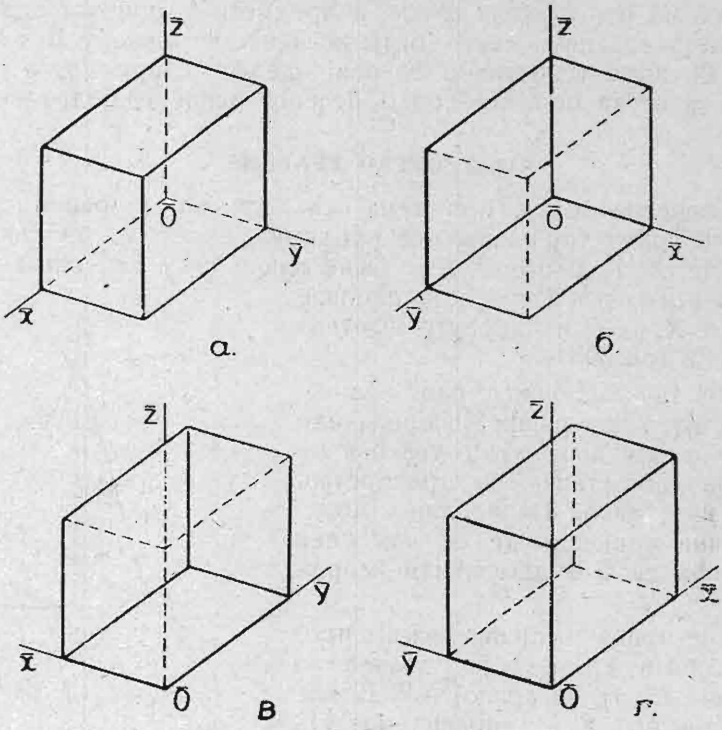
Отуд следује конструкција троугла трагова кад је дата пројекција осног триједра, и обратно, конструкција једног осног триједра кад је дат троугао трагова.

Ако је дата пројекција осног триједра и треба конструисати троугао трагова, пођимо од једне тачке X на $\bar{x}$ и повуцимо $XY \perp \bar{z}$ и $XZ \perp \bar{y}$. Самим тим је $YZ \perp \bar{x}$. Троугао XYZ је троугао трагова за један од бескрајно много могућих, међу собом упоредних положаја равни π.

Треба имати на уму да осни триједар $Oxyz$ може имати у односу на посматрача више разних (осам) положаја, од којих су четири приказана у слици 399 помоћу квадра коме три ивице падају на ивице тог триједра.

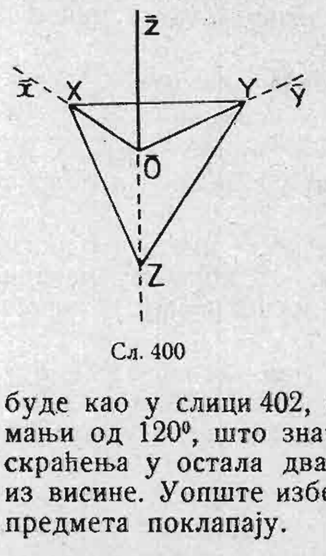
У слици 399 а и г видимо раван xy озго (тзв. *поглед озго*), а у сл. 399 б и в видимо раван xy оздо (*поглед оздо*); у сл. 399 а и в видимо унутрашњост диједра образованог равнима xz и yz, а у сл. 399 б и г видимо исти диједар споља.

У слици 400 је конструисан троугао трагова у случају као у слици 399 г; тачка Z је на продужењу ивице z осног триједра.



Сл. 399

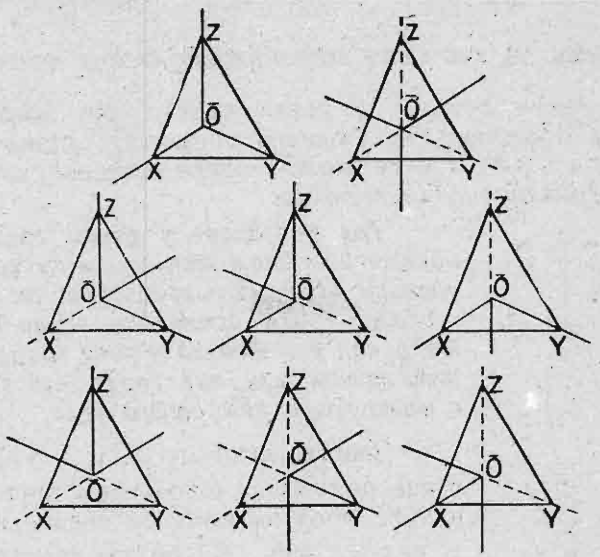
Ма какав положај имао осни триједар, угао XOY је прав а његови краци садрже трагове X и Y. Дакле угао $X\overline{O}Y$ је туп и висина $\bar{z}$ троугла $X\overline{O}Y$ сече страну X између X и Y. Отуд закључујемо да су углови троугла XYZ у теменима X и Y оштри. Слично је и у односу на друге две висине и стране троугла; дакле сва три угла троугла трагова су оштра. Према томе, тачка 0 пада у унутрашњост троугла трагова.



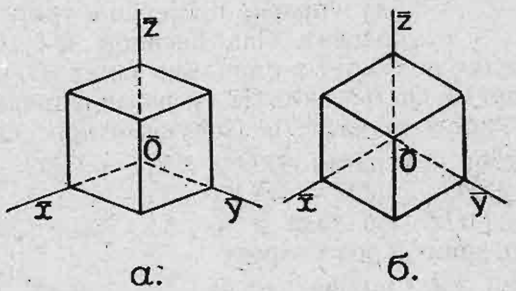
Сл. 400

Обратно, ако је дат троугао трагова XYZ, увек можемо конструисати пројекцију осног триједра повлачењем висина троугла XYZ. При томе имамо осам решења (сл. 401).

Да би аксонометријска слика давала најбољи утисак гледамо обично да пројекције оса заклапају различите углове међу собом (тиме се избегава напр. да пројекција коцке буде као у слици 402, а и б) и да при том углови $X\overline{O}Z$ и $Y\overline{O}Z$ буду мањи од 120^0, што значи да скраћење у правцу осе z буде мање од скраћења у остала два правца, сем ако треба дати поглед, рецимо, из висине. Уопште избегавамо да се пројекције упоредних ивица датог предмета поклапају.



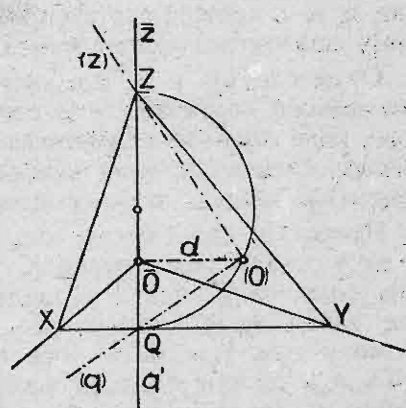
Сл. 401



Сл. 402

145. ОТСТОЈАЊЕ ПОЧЕТНЕ ТАЧКЕ

Посматрајмо пројектујућу раван једне од трију оса, рецимо осе z (сл. 403). То је раван $z\bar{z}$, која се пројектује цела у праву $\bar{z}$, а сече раван π_1 по извесној правој q чија пројекција је такође права $\bar{z}$ а чији траг Q је на трагу XY равни π_1. Како је $\pi_1 \perp z$, такође је $q \perp z$. Отстојање d тачке O од равни слике дато је пак нормалом спуштеном из O на праву $\bar{z}$, тј. висином $O\bar{O}$ правоуглог троугла OQZ. Ако троугао OQZ оборимо у раван слике π, показује се дуж $O\bar{O} = d$ у правој величини, као висина $(O)\bar{O}$ правоуглог троугла $Q(O)Z$, тј. обореног троугла OQZ, а конструише се помоћу полукруга с пречником QZ.

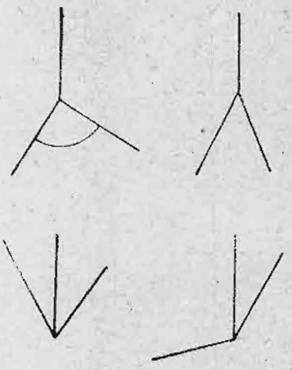


Сл. 403

Сем отстојања d добили смо тако и праву величину $(O)Z$ отсечка OZ на оси z. На исти начин могу се добити и отсечци OX и OY у правој величини.

146. УСЛОВИ ЗА УПРАВНУ ПРОЈЕКЦИЈУ ОСНОГ ТРИЈЕДРА

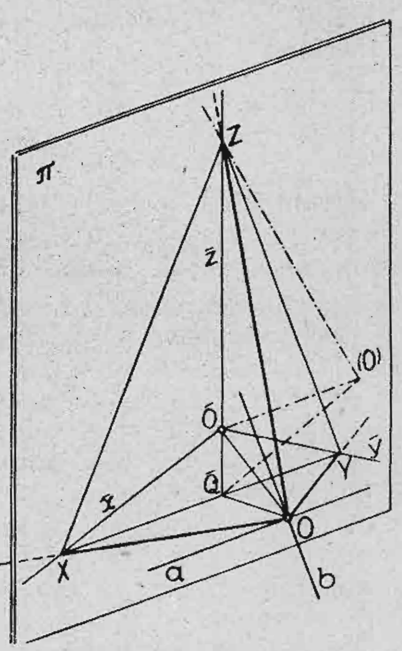
Ма какве три полуправе у равни слике, које полазе из једне тачке, не могу претстављати управну пројекцију правоуглог осног тријeдра (као у сл. 404), али се може изрећи следећи став основног значаја у ортогоналној аксонометрији:



Сл. 404

Три полуправе у равни слике, са заједничком почетном тачком могу претстављати управну пројекцију правоуглог осног тријeдра с осама косим према тој равни тада и само тада кад све три полуправе граде међу собом тупе углове или две граде туп угао а трећа с њима гради два оштра угла.

Заиста, нека су $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ у равни π три такве полуправе с почетном тачком $\bar{O}$ и нека је XYZ троугао коме су висине на правим $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (сл. 405. Да би тај троугао претстављао троугао трагова, његове висине треба да буду управне пројекције трију дужи узајамно управних. Над висином QZ тог троугла као над пречником опишимо полукруг и одредимо тачку (O) као у слици 403. Обрнимо затим троугао $Q(O)Z$ око QZ у раван управну на π и нека је O тачка у коју дође тачка (O). Повуцимо кроз O праву $a \parallel XY$. Како је $\bar{z} \perp XY$, такође је и раван $OZ\bar{O} \perp XY$, $\therefore$ $OZ\bar{O} \perp a$, $\therefore$ $OZ \perp a$. Но сем тога је $OZ \perp OQ$, $\therefore$ $OZ \perp OXY$; $\therefore$ $OX \perp OZ$ и $OY \perp OZ$. Но тада је и $OX \perp OY$. Повуцимо, наиме, кроз O праву $b \parallel YZ$. Како је $\bar{x} \perp YZ$, такође је и $OX\bar{O} \perp YZ$, $\therefore$ $OX\bar{O} \perp b$, $\therefore$ $OX \perp b$. Но $OX \perp OZ$, $\therefore$ $OX \perp OYZ$, $\therefore$ $OX \perp OY$.

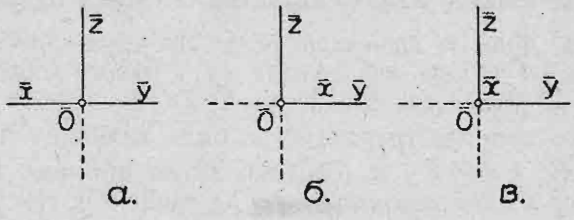


Сл. 405

Дакле праве OX, OY, OZ су међу собом управне. Но праве $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ су им управне пројекције и према томе полуправе $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ претстављају управну пројекцију правоуглог осног тријeдра.

Отуд следује и да *три полуправе у равни цртежа, које граде међу собом тупе углове, увек могу претстављати управну пројекцију правоуглог осног тријeдра* (тзв. *главни став управне аксонометрије*).

Преостају два случаја кад све три осе нису косе према равни π. Тада је макар једна, напр. оса z упоредна са π, дакле раван xy је управна на π. Осе x и y могу при том бити косе према π (сл. 406, а и б) или једна од њих је упоредна са π, друга управна на π (сл. 406 в).



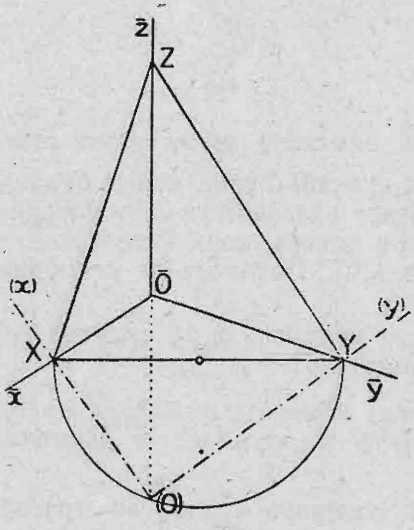
Сл. 406

147. ОБАРАЊЕ ОСНИХ РАВНИ У РАВАН СЛИКЕ

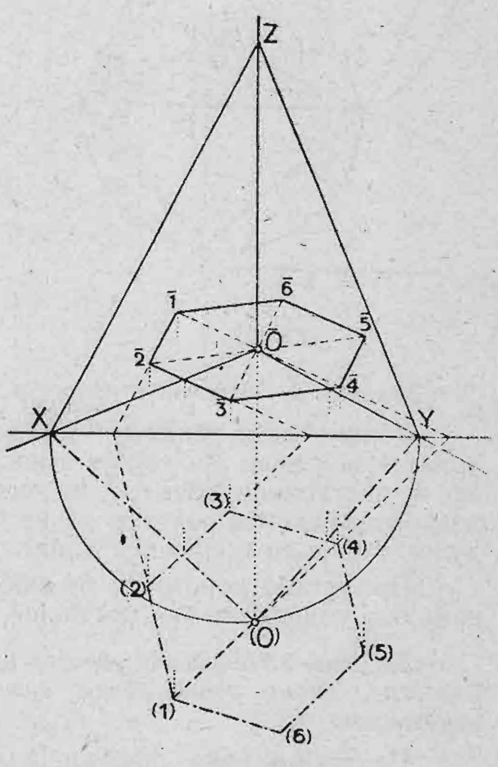
Обарања осних равни у раван слике врше се као што смо и досад обарали равни. Обарањем равни π_1 око њеног трага XY тачка O долази у (O), при чему је $O(O) \perp XY$, па како је $\sphericalangle XOY$ прав угао, (O) је на полукругу који је описан над пречником XY. На основу тога можемо конструисати у аксонометрији какав било лик садржан у π_1, задатог положаја, облика и величине. Сем тога имамо у правој величини дужи OX и OY двеју оса (сл. 407).

Задатак. *Конструисати аксонометријску пројекцију правилног шестоугла који је у равни* π_1, *а средиште му је у почетној тачки O.*

Нацртајмо правилан шестоугао у обореној равни π_1, са средиштем (O) (сл. 408), а



Сл. 407



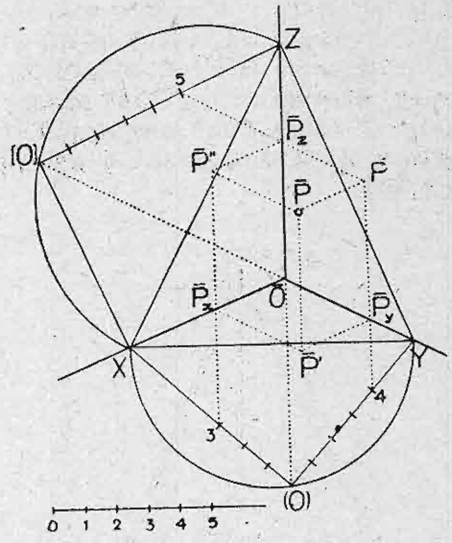
Сл. 408

затим, знајући тачку $\bar{O}$, налазимо аксонометријску пројекцију шестоугла помоћу афиности.

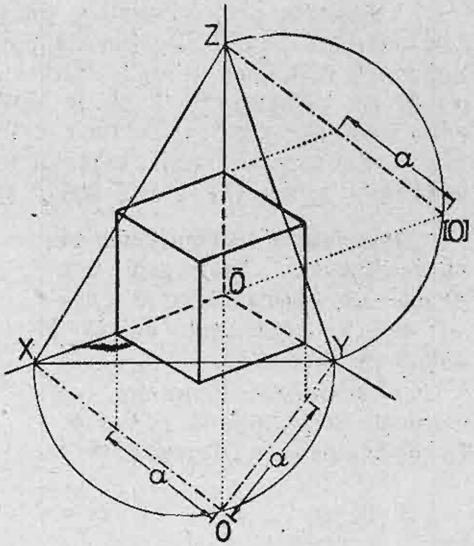
148. ПРИМЕРИ ПРЕТСТАВЉАЊА РАЗНИХ ПРЕДМЕТА

Задатак 1. *Дата је пројекција осног триједра. Треба одредити пројекцију неке тачке P чије координате су у односу на тај триједар, измерене извесном јединицом,* $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$.

Нацртајмо троугао трагова које било величине повлачењем правих $XY \perp \bar{z}$, $XZ \perp \bar{y}$, $YZ \perp \bar{x}$ (сл. 409). Затим оборимо троугао XOY и на обореној оси x одмеримо, полазећи од тачке (O), три задате јединице, и на обореној оси y четири јединице. Затим, оборимо напр. троугао XOZ и одмеримо на обореној оси z пет јединица. Тиме добијамо тачке $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$, $\bar{P}_z$, а отуд, рецимо, $\bar{P}'$ и на упоредној спрам $\bar{z}$, преношењем дужи $\overline{OP_z}$, тачку $\bar{P}$.



Сл. 409



Сл. 410

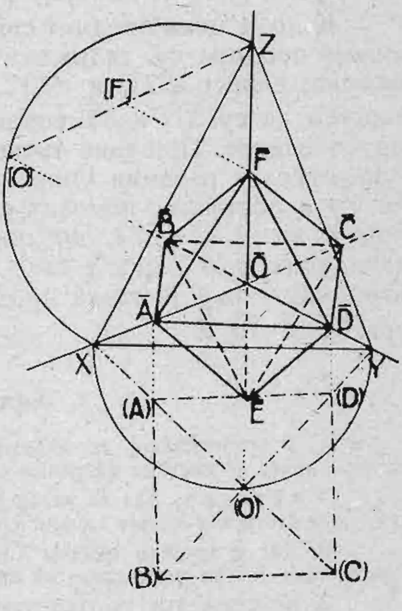
Задатак 2. *Нацртати коцку у косом положају према равни слике.*

Узмимо осни триједар тако да три суседне ивице коцке буду на осама. Изабравши пројекцију осног триједра налазимо помоћу обарања, као у претходном примеру, на осама три темена коцке као тачке једнако удаљене од почетне тачке O (сл. 410). Повлачењем упоредних дужи добија се пројекција коцке.

Приметимо поново да би слика била нејасна кад би троугао трагова био равнокрак или, штавише, равностран.

Задатак 3. *Нацртати управну пројекцију правилног октаедра у косом положају према равни слике, замишљојући да му је једна дијагонала вертикална.*

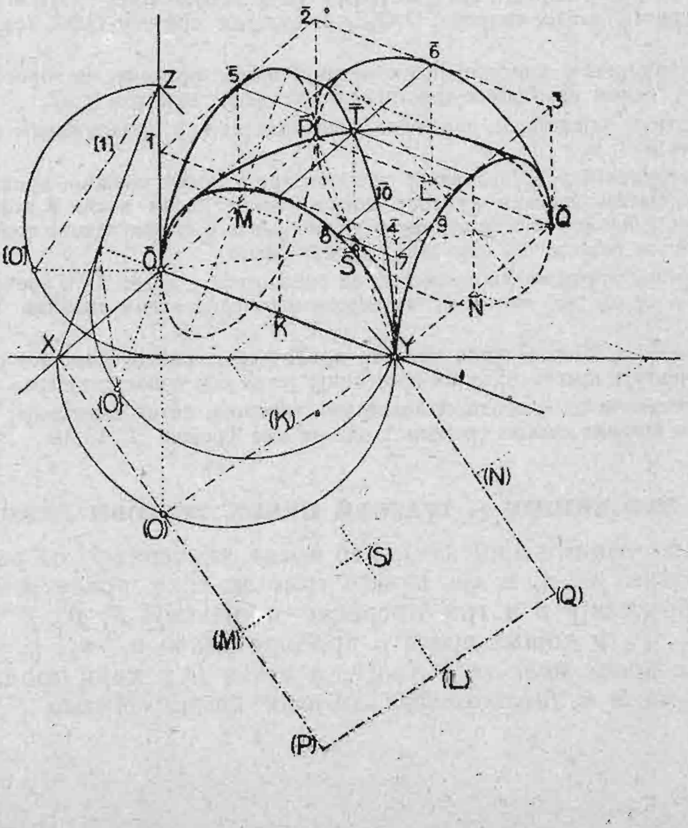
Нацртајмо прво пројекцију осног триједра и троугао трагова. Затим, узевши да је квадрат $ABCD$ (састављен из ивица) у равни π_1, нацртајмо квадрат $(A)(B)(C)(D)$ у обореној равни π_1 и конструишимо га отуд у аксонометријској пројекцији (сл. 411). Затим треба из средишта O квадрата $ABCD$ подићи нормалу и на њој одредити остала два темена E и F ($EO = FO = AO$). У ту сврху оборимо пројектујућу раван осе z и пренесимо на $[O]Z$ дуж $[O][F] = (A)(O)$. Отуд имамо $\bar{F}$ на оси z, а затим $\bar{E}$, јер је $\overline{EO} = \overline{FO}$.



Сл. 411

Задатак 4. *Нацртати продор два подударна права кружна полуваљка чије осе су међу собом управне.*

Замишљамо да су осе KL и MN обих ваљака у π_1, и да се оба ваљка пројектују на π_1 у квадрат $OPQY$, коме је OY једна страна. Нађимо обарањем равни π_1 пројекцију $\bar{O}\bar{P}\bar{Q}\bar{Y}$ (сл. 412), а затим обарањем пројектујуће равни $\overline{z}z$ одредимо на оси z дуж $\bar{O}\,\bar{1}$ једнаку полупречницима OM и OK основа обих ваљака. Тако долазимо до пројекције квадра коме су основе $OPQY$ и $1\ 2\ 3\ 4$ и у који су уписана оба полуваљка. Круг основе са средиштем M је у π_2 и пројектује се као елипса $\bar{O}\ \bar{5}\ \bar{P}$ којој су $\overline{MO}$ и $\overline{M5}$ спрегнути полупречници. Можемо јој одредити непосредно и осу, јер је, очигледно, велика оса упоредна трагу XZ равни π_3 и једнака $(O)(P)$, а мала оса



Сл. 412

је у пројектујућој равни $y\overline{y}$ и добија се обарањем те равни (назначено тачком $\{O\}$). Елипса са средиштем $\overline{N}$ је подударна и у сличном положају. Слично се добијају и остале две елипсе, са средиштима $\overline{K}$ и $\overline{L}$.

Како је цели предмет симетричан у односу на равни *1OQ3* и *2PY4*, линије продора су садржане у тим равнима, тј. то су равни пресеци ваљака: елипсе *OTQ* и *PTY*. Њихове пројекције можемо конструисати знајући да су $\overline{S}\overline{O}$ и $\overline{S}\overline{T}$ спрегнути пречници једне елипсе, а $\overline{S}\overline{P}$ и $\overline{S}\overline{T}$ друге елипсе. Поједине тачке тих елипса можемо добити и посматрајући пресеке равнима упоредним равни π_1. Пођимо напр. од тачке *7* на *Y4* и поставимо помоћну раван χ кроз *7*. Раван χ сече равни основа које се секу дуж *Y4*, по правим *7 8* и *7 9*. Из тачака *7* и *9* полазе изводнице дуж којих χ сече обе обле површи, а тачка *10* где се те изводнице секу је тачка продора. У слици треба нацртати паралелограм $\overline{7}$ $\overline{8}$ $\overline{10}$ $\overline{9}$.

Задаци за вежбу

1. У ортогоналној аксонометрији дата је пројекција система оса и отстојање почетне тачке *O* система од равни слике. Одредити троугао трагова.

Упутство. Кад се раван слике упоредно помера, троугао трагова и линије које дају отстојање остају слични себи самима; *O* је средиште сличности.

2. Дат је троугао трагова *XYZ*. Конструисати троугао трагова за осни триједар окренут око *XY* за угао такав да нова оса *Z* има упола мањи нагиб према равни слике

3. Конструисати троугао трагова тако да се дужи *OX*, *OY*, *OZ* односе као бројеви 3 : 4 : 7.

Упутство. Нацртати троугао $(O)XY$ тако да буде $(O)X : (O)Y = 3 : 4$ (помоћу Аполонијева круга), затим троугао $O_1Q_1Z_1$ подударан троуглу *OQZ* (сл. 403), а отуд тачку *Z*.

4. Конструисати у управној аксонометрији продор правилне четворостране призме с основом у π_1 једном правилном тространом призмом с основом у π_2.

5. Нацртати заједнички део обих тела задатка 4 у придруженим непосредним пројекцијама на π_1 и π_2.

6. Конструисати у ортогоналној аксонометрији праву кружно купасту површ с осом на оси *Z*. Затим пресећи купасту површ једном косом равни β која је управна на π_2 и уписати у њу лопте које додирују уједно раван β (Данделенове лопте). Удесити да пресек буде а) елипса, б) парабола, в) хипербола.

7. Нацртати лопту полупречника *r*, са средиштем у тачки *O* и претставити тело које настаје кад се од тела лопте отсеку делови паралелно осним равнима, на отстојању 3/4 *r* од тачке *O*.

Напомена. Лопту треба пресећи помоћу шест равни. Мала оса сваке елипсе у коју се пројектује пресек пада на пројекцију једне осе осног триједра.

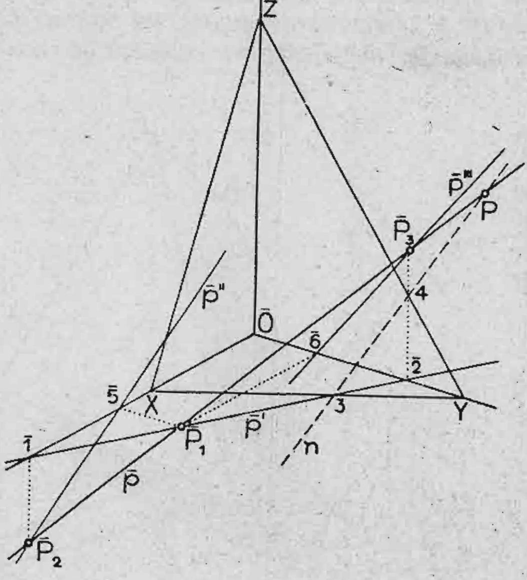
8. Претставити по слободном нахођењу степенице датих димензија; нека се дужина, висина и ширина сваког степеника односе као бројеви 7 : 1 : 2,5.

149. ПРОЈЕКЦИЈЕ И ТРАГОВИ ПРАВЕ. ТРАГОВИ РАВНИ

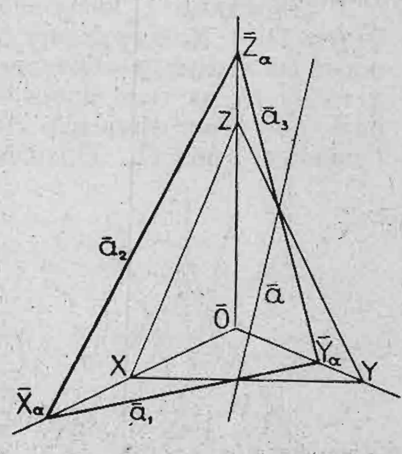
Права се уопште пројектује као права, непосредно на раван слике и на осне равни π_1, π_2 и π_3. Према томе за неку праву *p* имамо непосредну пројекцију $\overline{p}$ и три посредне пројекције $\overline{p}'$, $\overline{p}''$, $\overline{p}'''$ (сл. 413). Тачке P_1, P_2, P_3 у којима права *p* продире равни π_1, π_2, π_3 су редом *први*, *други* и *трећи траг* те праве, а тачка *P* у којој продире раван π је *траг у равни* π *(аксонометријски траг праве)*. Имамо $P_1 = p \times p'$,

$P_2 = p \times p''$, $P_3 = p \times p'''$. Права је одређена својим двема пројекцијама: непосредном и једном посредном, или двема посредним; тада се увек лако налазе њени трагови.

Праве a_1, a_2, a_3 по којима нека раван сече осне равни π_1, π_2, π_3 су *редом први други* и *трећи траг* те равни (сл. 414), а права a по којој сече раван слике је *траг у равни слике (аксонометријски траг равни).* Како су стране троугла трагова пресеци осних равни и равни слике, трагови a и a_1 секу се на правој XY, трагови a и a_2 на XZ, трагови a и a_3



Сл. 413



Сл. 414

на YZ. Трагови a_1, a_2, a_3 образују такође троугао, чија темена X_α, Y_α, Z_α су на осама x, y, z. То је *троугао трагова* равни α, који се пројектује на раван слике као троугао $\bar{X}_\alpha \bar{Y}_\alpha \bar{Z}_\alpha$. Само ако раван садржи коју осу или тачку O, тог троугла нема. Напоменимо да су XYZ и $X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ (или $\bar{X}_\alpha \bar{Y}_\alpha \bar{Z}_\alpha$) перспективно колинеарни троугли, којима је O (одн. $\bar{O}$) средиште, а a оса колинеације.

Задатак 1. *Дата је права* p *непосредном и првом пројекцијом у равни слике. Одредити јој трагове, другу и трећу пројекцију.*

Прво, $\bar{p} \times \bar{p}' = \bar{p}_1$ (сл. 413). Продоре праве p равнима π_1, π_2 и π_3 добијамо, као увек, постављањем помоћне равни кроз p и налажењем њених пресека тим равнима. Таква је раван $pp' = \nu$ ($\nu \perp \pi_1$). Она сече π_2 по вертикалној правој која пролази кроз $p' \times x = 1$, дакле на тој правој налазимо други траг P_2. Исто тако на вертикалном пресеку $\nu \times \pi_3$ кроз $p' \times y = 2$ имамо P_3.

Друга пројекција p'' пролази кроз P_2 и кроз P_1'', тј. кроз $[P_1 \parallel y] \times x = 5$, а трећа пројекција p''' пролази кроз P_3 и кроз P_1''', тј. кроз $[P_1 \parallel x] \times y = 6$.

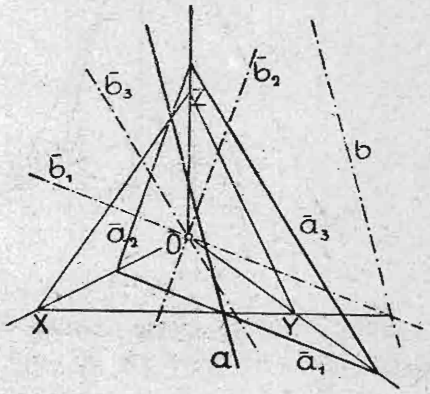
Први траг равни ν је $n_1 = p'$, трећи траг је $2\ 4$, дакле њен траг n у равни слике пролази кроз $n_1 \times XY = 3$ и $n_3 \times YZ = 4$, тј. $n = 3\ 4$. Тада имамо и траг праве p у равни слике: $P = \bar{p} \times n$.

Задатак 2. *Одредити трагове равни β која је упоредна датој равни α $(a, \bar{a})$ и пролази кроз почетну тачку O.*

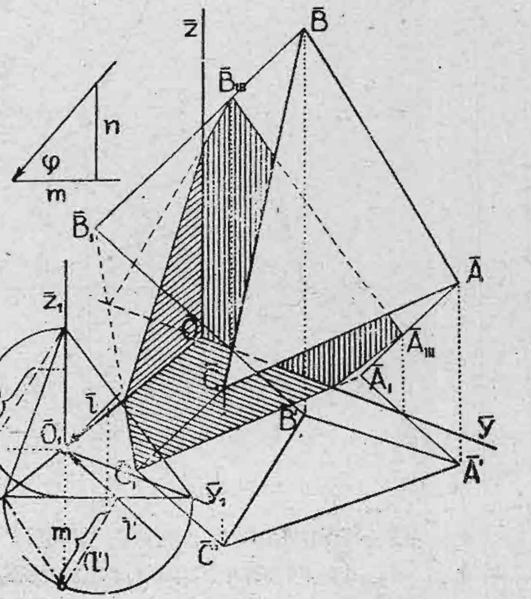
Дате праве a и $\bar{a}_1$ морају се сећи на XY (сл. 415). Налазимо $\bar{a}_2 = (a \times XZ)(\bar{a}_1 \times \bar{x})$ и слично $\bar{a}_3$. Кроз $\bar{O}$ пролазе $\bar{b}_1 \| \bar{a}_1$, $\bar{b}_2 \| \bar{a}_2$, $\bar{b}_3 \| \bar{a}_3$. Најзад, траг b пролази кроз тачку $b_1 \times XY$, $\| a$.

Задатак 3. *Одредити при паралелном осветљењу сенку троугла ABC датог непосредном и посредном првом пројекцијом, на зидове осног триједра, кад је дата посредна прва пројекција зрака светлости l и нагиб φ зрака l према π_1.*

Одредимо $\bar{l}$, знајући $\bar{l}'$ и φ (сл. 416. Конструкцију вршимо на страни, изабравши на x тачку O_1 за теме новог, паралелног осног триједра. Нека l пролази кроз O_1. Обарањем



Сл. 415



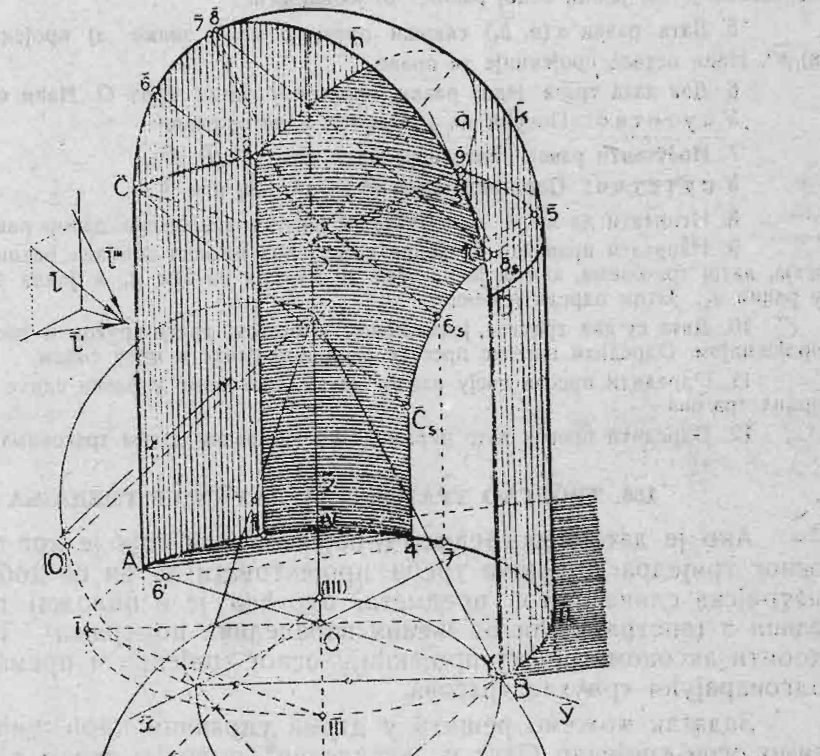
Сл. 416

равни π_1 и осе z_1 одредимо у аксонометријској пројекцији, на l' и на z_1 дужи једнаке катетама m и n правоуглог троугла с углом φ. Отуд налазимо $\bar{l}$. Сенке A_l, B_l, C_l на π_1 трију темена налазимо повлачењем правих $\| \bar{l}$ и $\| \bar{l}'$. Но сенке тачака A и B падају на π_3. Тачка $\bar{A}_{III}$ је на правој $[(\bar{A}'\bar{A}_l \times \bar{y}) \| \bar{z}]$ а слично и $\bar{B}_{III}$. Отуд налазимо лако цели руб сенке бачене на зидове осног триједра.

Задатак 4. *Претставити површ која се састоји из половине бочне површи правог кружног ваљка и четвртине лопте* (сл. 417) *и одредити сенке у удубљењу те површи (нише) при паралелном осветљењу.*

Пројекцију доње основе ваљка налазимо обарањем равни π_1. Контура пројекције лоптастог дела је део круга $\bar{k}$, а вертикални круг h који спреда ограничава лоптасти део пројектује се као елипса $\bar{h}$. Можемо је конструисати из пречника $CD \| \bar{y}$ и вертикалног полупречника, који се добија обарањем осе z. Велика полуоса је $\overline{S7} \perp \bar{x}$.

Нека је осветљење дато зраком l ($\bar{l}$, $\bar{l}'$); нађимо и $\bar{l}'''$. Помоћу $\bar{l}$ и l' налазимо руб сопствене сенке на ваљку (у $\bar{1}$ је дирка на елипсу $\| \overline{l'}$) и на лопти (елипса $\bar{q}$ чија велика оса је управна на $\bar{l}$ и пролази кроз $\bar{S}$ и која пролази кроз $\bar{2}$). У тачки $\bar{3}$ дирка на $\bar{h}$ је $\| \bar{l}'''$. Руб бачене сенке на ваљкасти део почиње у 4 ($A\,4 \| l'$) и пење се до C_s ($C_s 4 \| AC$), затим је извесна крива до 5, којој можемо одредити поједине тачке, напр. 6_s овако: замислимо зрак светлости кроз тачку 6 и његову прву пројекцију; имамо $\overline{6\,6_s} \| \bar{l}$, $\overline{6'6_s'} \| \bar{l}'$, $\overline{6\,6'} \| 6_s 6_s' \| \bar{z}$.



Сл. 417

Руб бачене сенке у лопти је велики круг (§ 87) коме је један полупречник $S3$ а управни полупречник је $S10$, при чему је тачка 10 на зраку светлости кроз 8, а 8 на полупречнику $\overline{S8} \| \bar{l}'''$. Раван $8S10$ садржи полупречник лопте $\overline{S9} \| x$, а имамо $\overline{S9} \perp \overline{S8}$, дакле знамо круг m по коме раван $8S10$ сече лопту. Према томе можемо помоћу афиног круга одредити тачку $\overline{10}$ пресека елипсе $\bar{m}$ (ненацртане) и праве $\overline{8\ 10}$. Тада можемо конструисати пројекцију руба бачене сенке, јер $\overline{S3}$ и $\overline{S10}$ су спрегнути полупречници те елипсе.

Задаци за вежбу

1. Дата је права p ($\overline{p}$, $\overline{p}'$) и тачка T на p пројекцијом $\overline{T}$. Наћи остале три пројекције тачке T.

2. Одредити пројекције праве p која пролази кроз дату тачку T ($\overline{T}$, $\overline{T}'$) и управна је на равни слике.

3. Одредити пројекције праве a паралелне једној осној равни и која пролази кроз дату тачку, кад је дата пројекција $\overline{a}'$.

4. Дате су две мимоилазне праве. Одредити пројекције праве која их сече а паралелна је а) једној осној равни, б) једној оси.

5. Дата раван α (a, $\overline{a}_1$) садржи праву p којој знамо а) пројекцију $\overline{p}$, б) $\overline{p}'$, в) $\overline{p}''$. Наћи остале пројекције те праве.

6. Два дата трага једне равни пролазе у слици кроз O. Наћи остале трагове.

Упутство: Повући ма коју праву у датој равни.

7. Поставити раван слике кроз дату тачку P ($\overline{P}$, $\overline{P}'$).

Упутство: Поставити кроз P раван $\parallel \pi_2$ или $\parallel \pi_3$.

8. Испитати да ли је дата тачка A ($\overline{A}$, $\overline{A}'$) заклоњена датом равни μ ($\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$).

9. Нацртати правилан октаедар коме једна пљосан припада равни општег положаја, датој траговима, кад је једно теме те пљосни на оси z, а једна њена страница у равни π_1. Затим одредити сенке.

10. Дата су два троугла, један првом и другом, други другом и трећом посредном пројекцијом. Одредити њихове пресеке равнином слике и међу собом.

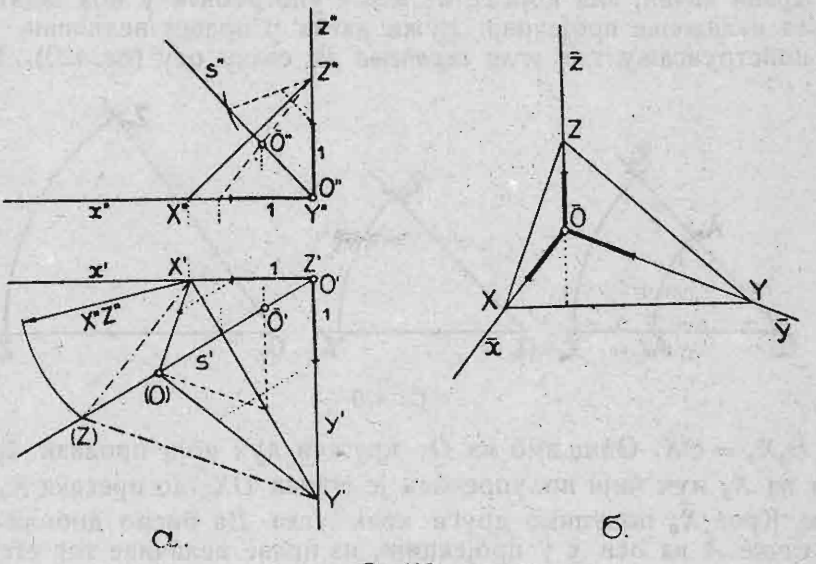
11. Одредити пресек двеју равни датих траговима у равни слике и пројекцијом првих трагова.

12. Одредити пресек дате пирамиде једном равни датом траговима.

150. ТРОУГАО ТРАГОВА ЗА ДАТ СМЕР ГЛЕДАЊА

Ако је дат смер гледања (пројектовања), који је кос према осама осног триједра а у коме треба пројектовати да би се добила аксонометријска слика датог предмета, одређен је и положај пројекцијске равни π (апстрахујући од њених паралелних померања). Тада је лако добити аксонометријску пројекцију осног триједра и према томе један одговарајући троугао трагова.

Задатак можемо решити у двема управним пројекцијама. Поставимо осни триједар $Oxyz$ у „паралелни" положај спрам равни π и π_2 (сл. 418 а) и по подацима помоћу којих је одређен смер гледања нацртајмо пројекције s' и s'' праве s која тај смер одређује. Узмимо да s пролази кроз O. Тада имамо да поставимо раван π управну на s, да јој одредимо тачке продора X, Y, Z осама и да нађемо управну пројекцију тачке O на раван π, тј. тачку $\overline{O}$, где права s продире раван π. Како нам је потребан троугао XYZ у правој величини и положај тачке O у том троуглу, оборимо га напр. у раван упоредну равни π_1 (помоћу лука описаног из X' полупречником $XZ = X''Z''$) и нађимо $(\overline{O})$. Тада треба још само пренети лик $X'Y'(Z)(\overline{O})$ с пројекцијама трију јединичних дужи, на место где ћемо нацртати аксонометријску пројекцију, пазећи да при том уперена права s, добивши правац управан на раван цртања има смер од гледаоца ка тој равни (сл. 418 б). Пројекције јединичних дужи на оси x и y налазимо непосредно у првој пројекцији. За јединичну дуж на оси z опишимо лук полупречником $(O)(Z)$ из Z'' до пресека правом s''; на добијеној дужи наћи ћемо на основу сразмере тражену дуж.

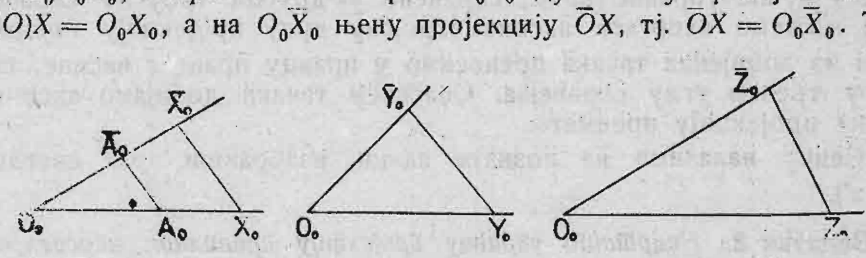


Сл. 418

151. СКРАЋЕЊА У ПРАВЦИМА ОСА

Како су у аксонометријској пројекцији све дужи у правцима оса скраћене, један од основних задатака је наћи размере у којима су скраћене. То се постиже обарањем оса или осних равни у раван слике. Један начин обарања појединих оса изложен је у § 145, а у § 147 други којим добијамо одмах две осе оборене у раван слике.

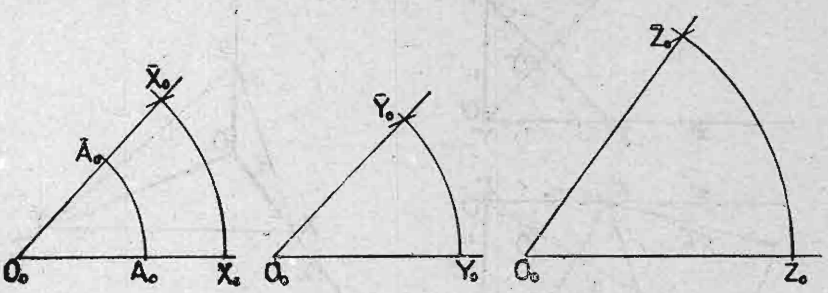
Знајући дужи OX, OY, OZ у правој величини и њихове пројекције $\overline{O}X$, $\overline{O}Y$, $\overline{O}Z$, као напр. у слици 411 (на тај осни триједар односи се ово разматрање), можемо добити пројекцију којих било дужи у правцу тих оса. И обратно, ако знамо пројекцију које било дужи у правцу једне осе, можемо наћи њену праву величину. Нацртајмо за сваку осу по један угао произвољне величине (сл. 419), напр. за осу x угао $X_0O_0\overline{X}_0$, и пренесимо на крак O_0X_0 дуж OX у правој величини, тј. $(O)X = O_0X_0$, а на $O_0\overline{X}_0$ њену пројекцију $\overline{O}X$, тј. $\overline{O}X = O_0\overline{X}_0$. Тада,



Сл. 419

да бисмо у слици одредили положај тачке A на оси x кад јој знамо отстојање од тачке O, пренесемо то отстојање на крак O_0X_0 (тачка A_0); повлачењем $A_0\overline{A}_0 \parallel X_0\overline{X}_0$ добијамо и отстојање тачке $\overline{A}$ од $\overline{O}$, јер је $\overline{O}\overline{A} = O_0\overline{A}_0$. Обратно, ако имамо пројекцију $\overline{A}$ тачке A, преношењем дужи $\overline{O}\overline{A}$ на крак $O_0\overline{X}_0$ и повлачењем $\overline{A}_0A_0 \parallel \overline{X}_0X_0$ добијамо $O_0A_0, = OA$.

Краћи начин, али који се не може употребити у оба задатка, већ само за налажење пројекција дужи датих у правој величини, састоји се у конструисању тзв. *угла скраћења* за сваку осу (сл. 420). Нека је



Сл. 420

опет $O_0X_0 = OX$. Опишимо из O_0 кружни лук који пролази кроз X_0, затим из X_0 лук чији полупречник је једнак $\overline{O}X$, до пресека $\bar{X}_0$ првим луком. Кроз $\bar{X}_0$ повуцимо други крак угла. Да бисмо добили отстојање тачке A на оси x у пројекцији, из праве величине тог отстојања, опишимо око O_0 лук полупречником једнаким $\overline{O}A$, који сече краке угла у тачкама A_0 и $\bar{A}_0$; тада је $A_0A_0 = OA$.

152. ПРИМЕРИ ИЗВОЂЕЊА АКСОНОМЕТРИЈСКЕ СЛИКЕ ИЗ ДВЕ УПРАВНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

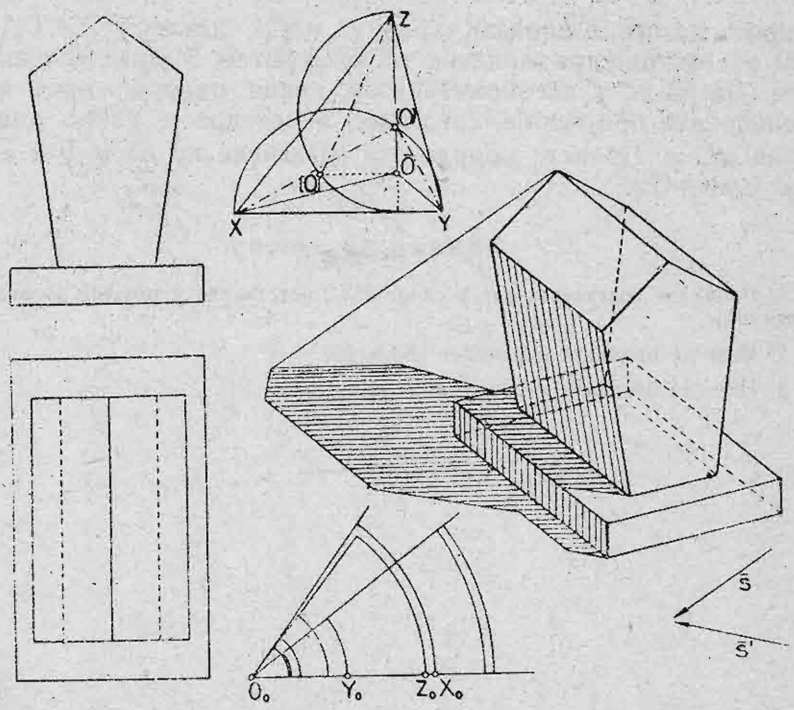
Задатак 1. *Предмет дат у двема управним пројекцијама у слици 421a (богумилски споменик), претставити у општем положају према равни слике и одредити сенке на предмету и бачену сенку на раван тла при упоредном осветљењу.*

Нацртајмо пројекцију осног триједра и троугао трагова XYZ, затим углове скраћења (нацртани су с једним заједничким краком). Тада из непосредне прве пројекције преносимо у правцу праве $\bar{x}$ дужи паралелне оси x, скраћене у првом троуглу скраћења, а у правцу праве $\bar{y}$ дужи управне на x, скраћене у другом троуглу скраћења. Отуд можемо нацртати аксонометријску прву пројекцију предмета. Затим из добијених тачака преносимо у правцу праве $\bar{z}$ висине, скраћене у трећем углу скраћења. Спајањем тачака добијамо аксонометријску пројекцију предмета.

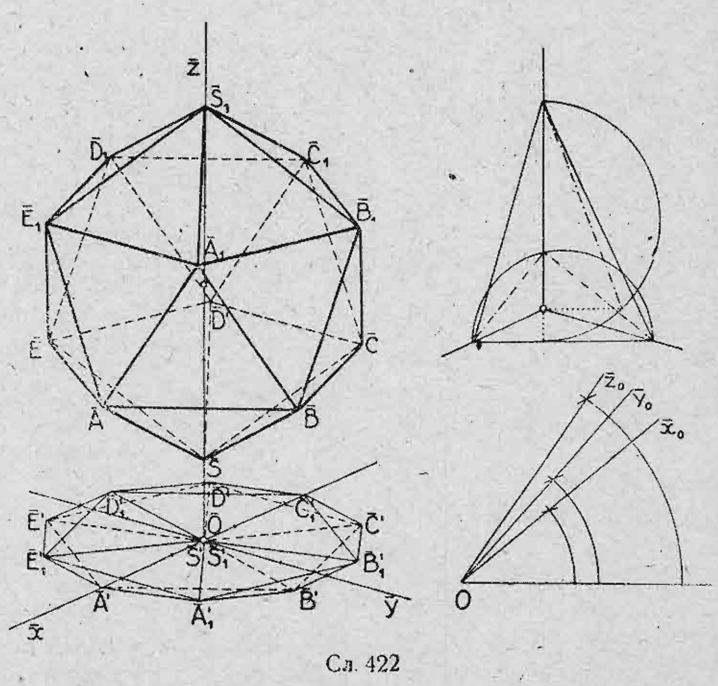
Сенку налазимо на познати начин, изабравши зрак светлости s $(\bar{s}, \bar{s}')$.

Задатак 2. *Нацртати управну пројекцију правилног икосаедра, у општем положају према равни слике.*

Пођимо од слике 293, но према ономе што је речено у § 143 нећемо се служити увођењем нових пројекцијских равни, већ изаберимо пројекцију осног триједра и поступимо по аксонометријској методи, преносећи координате појединих темена икосаедра скраћене, на пројекције оса триједра. Да би преношење било једноставније прет-


Z
O'
$\bar{O}$
(O)
X
Y
$\bar{s}$
$\bar{s}'$
O_0
Y_0
Z_0
X_0

Сл. 421


$\bar{z}$
$\bar{S}_1$
$\bar{D}_1$
$\bar{C}_1$
$\bar{E}_1$
$\bar{B}_1$
$\bar{A}_1$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{C}$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{S}$
$\bar{D}'$
$\bar{D}'_1$
$\bar{C}'_1$
$\bar{E}'$
$\bar{C}'$
$\bar{O}$
$\bar{E}'_1$
$\bar{S}'$
$\bar{S}'_1$
$\bar{B}'_1$
$\bar{A}'$
$\bar{A}'_1$
$\bar{B}'$
$\bar{y}$
$\bar{x}$
$\bar{z}_0$
$\bar{y}_0$
$\bar{x}_0$
O

Сл. 422

поставимо да оса x пролази кроз A' и C_1', дакле, $y \perp A'C_1'$, и да се врх O осног триједра поклапа са средиштем S' прве пројекције икосаедра. Да би се у аксонометријској слици одвојила прва пројекција од непосредне пројекције, средиште икосаедра је узето довољно високо на оси z. Пренете координате назначене су на $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Тако се добија слика 422.

Задаци за вежбу

1. Правилан додекаедар дат у слици 292, претставити у општем положају методом аксонометрије.
2. Исто за предмете у сликама 286 и 287.
3. Исто за предмате у слици 288.

ГЛАВА II

УПРАВНА ПРОЈЕКЦИЈА НА ЈЕДНУ РАВАН СЛИКЕ УЗ ЈЕДНУ ПОСРЕДНУ УПРАВНУ ПРОЈЕКЦИЈУ

153. МЕТОДА ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Већ кад смо конструисали напр. пројекцију продора двеју тро} гластих површи у § 72 помоћу њихове бачене сенке на извесну раваı имали смо сем непосредне управне пројекције обих ликова још и њı хову паралелну пројекцију на неку другу раван, тј. посредн паралелну пројекцију, јер бачену сенку при упоредном осветљењ можемо схватити као паралелну пројекцију. Дакле задатак који би би неодређен да нисмо имали посредну пројекцију обих троугласти површи, постао је одређен пазнавањем те посредне пројекције.

Тако уопште, кад познајемо једну посредну пројекцију уз непс средну, положај предмета постаје одређен и задаци се могу решаватı као и у претходном одељку, кад су се решавали на основу двеј непосредних пројекција. Сада ћемо управо претпостављати да нам ј уз непосредну управну пројекцију предмета на раван слике дата . тој равни и једна његова посредна управна пројекција.

На томе се ослања делом и управна аксонометрија, као што см видели у претходној глави. У овој глави посматраћемо пак решавањ задатака на основу једне непосредне и једне посредне управне пројек ције не уводећи осни триједар. Главна вредност тих посматрањ проистиче ипак из њихове примене у управној аксонометрији.*

Методу нацртне геометрије која се изграђује на посматрању једн непосредне и једне посредне пројекције можемо уопште називат: *методом посредне пројекције.*

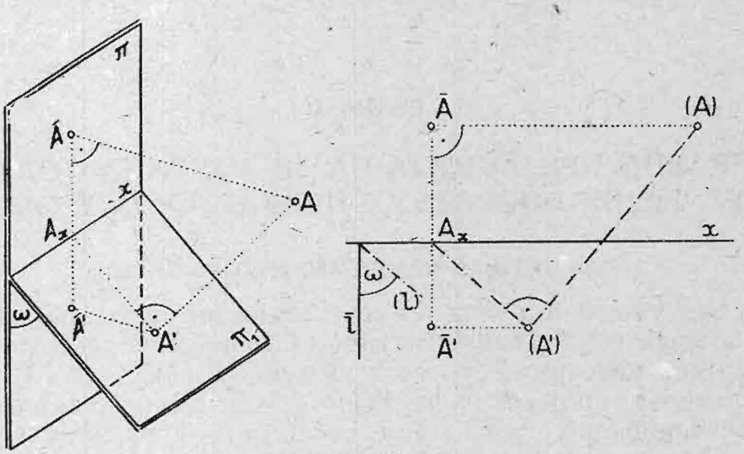
Приметимо да смо, сем у претходној глави, методу посредн пројекције употребљавали, вођени очигледношћу и не тумачећи њени: правила, у скицама којима смо читаоцу објашњавали поступке пројек товања (напр. сл. 1, 5, 91, 100 и многе друге).

Полазимо дакле од две пројекцијске равни: равни слике π ı извесне равни π_1 која је коса према π и на коју се такође пројектуј управно посматрани предмет. Раван π_1 можемо називати *споредној пројекцијском равни* или пак *равни тла* (сматрајући да је хоризонтална а раван π коса). Одређена је својим трагом x у равни слике π ı нагибом ω спрам те равни (сл. 423).

---

* Неки писци сматрају штавише да садржај ове главе припада управној аксоно метрији, али аксонометрију карактерише пре свега осни триједар, који сад изостављамс

Пројекцију тачке A на раван π_1 обележаваћемо цртицом (тј. A'), а на раван слике цртицом изнад слова (тј. $\overline{A}$). У равни слике (сл. 423 десно) имамо дакле непосредну пројекцију $\overline{A}$ тачке A и посредну пројекцију $\overline{A}'$. Ординала, која спаја обе пројекције $\overline{A}$ и $\overline{A}'$ управна је на



Сл. 423

трагу x. Ма које две тачке на некој правој управној на x могу тако бити пројекције извесне тачке у простору. Ако је $\overline{A} \equiv \overline{A}'$, тачка A је у равни π_1, тј. $A \equiv A'$, и обратно. Праву $\overline{A}\overline{A}'$ треба схватити и као управну пројекцију, на раван π, пројектујућег зрака AA', којим се тачка A пројектује на π_1. Како су ти пројектујући зраци међу собом упоредни и управни на π_1, њихове пројекције на π морају бити такође међу собом упоредне и управне на x.

Као што видимо непосредно из леве слике 423, положај сваке тачке A потпуно је одређен пројекцијама $\overline{A}$ и $\overline{A}'$.

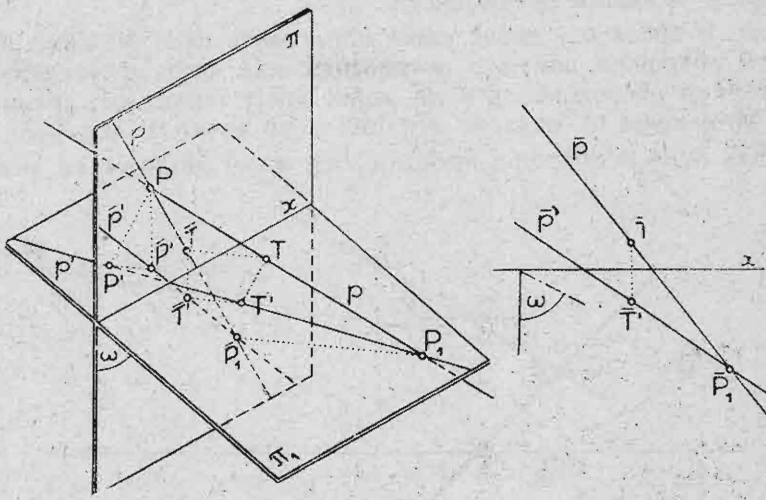
Према томе можемо одмах приступити задатку, да из пројекција $\overline{A}$ и $\overline{A}'$ одредимо отстојање тачке A од равни слике и од равни тла. То постижемо обарањем четвороугла $AA'\overline{A}'\overline{A}$, који је у равни управној на x, у раван слике. Обарањем (десна слика) добијамо тачке (A) и (A') на правим управним на $\overline{A}\overline{A}'$. Да би се, прво, добила тачка (A') потребно је оборити и дуж $A'A_x$ чији је нагиб спрам π једнак нагибу ω равни π_1. Зато, и уопште увек, потребно је да је нацртан угао ω, рецимо пројекцијом и обореним положајем полуправе l у равни π_1, управне на x. Повлачењем праве $[A_x \parallel (l)]$ добијамо (A'), а отуд (A) у пресеку управне кроз $\overline{A}$ и управне на $A_x(A')$ кроз (A'). Дуж $\overline{A}(A)$ даје отстојање тачке A од π, а $\overline{A}'(A)$ отстојање од π_1.

На сличан начин можемо и у ортогоналној аксонометрији одредити отстојање ма које тачке од равни слике и осних равни кад је тачка дата непосредном и једном посредном пројекцијом.

У идућим параграфима разматраћемо укратко решавање неких основних задатака, освргћући се на примене у управној аксонометрији.

154. ПРАВА И ДУЖ

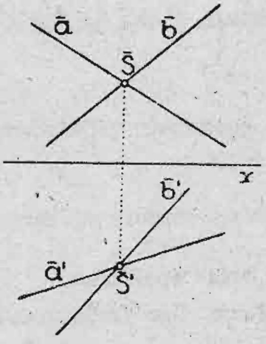
Права p ма ког положаја дата је својом непосредном пројекцијом $\bar{p}$ и посредном $\bar{p}'$ сл. 424). Ма које две праве у равни π могу тако бити пројекције извесне праве у простору. Пресечна тачка обих пројекција је пројекција оне тачке P_1 праве p за коју је $P_1 \equiv P_1'$, тј. пројекција *трага праве p у равни тла;* називаћемо га *споредним трагом.*



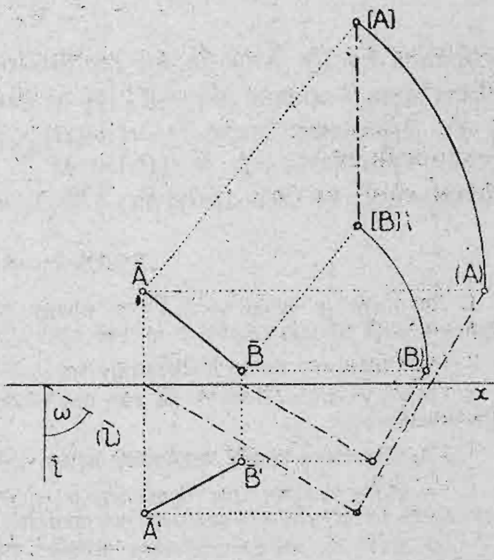
Сл. 424

Очигледно, да би се две праве a и b секле потребно је и довољно да тачке $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{a}' \times \bar{b}'$ буду на правој управној на x (сл. 425). Тада су то пројекције пресечне тачке S.

Пређимо на одређивање праве величине неке дужи AB. Пошто на начин описан у § 153 добијамо отстојања тачака A и



Сл. 425

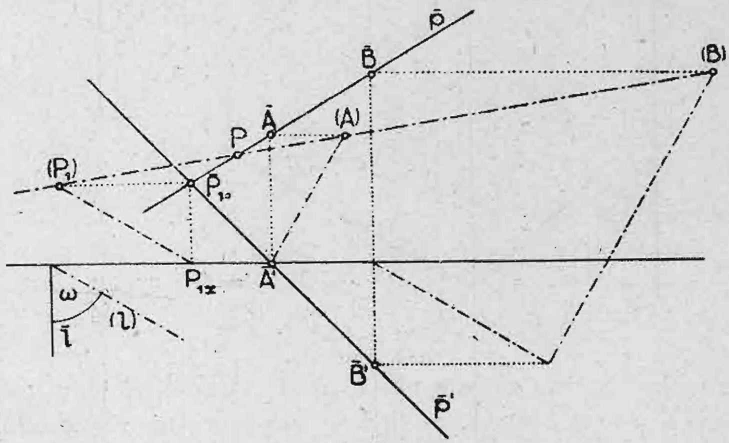


Сл. 426

B од π (сл. 426), можемо их пренети управно на AB и добити $[A][B]$ као дуж AB оборену у раван слике, тј. њену праву величину.

Али краће је добити управну пројекцију дате дужи AB на *бочну раван* π_3, управну на оси x (бокоцрт $A'''B'''$) и одредити праву величину из двеју придружених непосредних пројекција $\overline{A}\overline{B}$ и $A'''B'''$. (Конструкција се препушта читаоцу). Уопште, у решавању метричких задатака може се сматрати општим начином решавања: *одредити бочну пројекцију из обих датих пројекција, затим решити задатак у двема непосредним управним пројекцијама.*

Траг P праве p у равни слике или *главни траг* можемо из $\bar{p}$ и $\bar{p}'$ одредити обарањем праве p у раван слике око пројекције $\bar{p}$. Тада треба добити отстојања од π ма којих двеју тачака на p, рецимо тачке A чија пројекција A' пада на x и још неке тачке B (сл. 427; упореди са сл. 424). За A је обарање простије, јер из $\bar{A}'$ подиже се непосредно



Сл. 427

управна на (l). Али да би се добио траг P није потребно преносити отстојања управно на $\overline{A}\overline{B}$, јер и сама права $(A)(B)$ сече, очигледно, $\bar{p}$ у P. Добијамо дакле $P = (A)(B) \times \bar{p}$. Приметимо да је и за P_1 обарање простије, јер је $(P_1) = (P_1')$. Тада се задатак решава кратко, цртањем само два троугла $\overline{A}\overline{A}'(A)$ и $\overline{P}_1 P_{1x}(P_1)$; имамо $P = (A)(P_1) \times \bar{p}$.

Задаци за вежбу

1. Дата је тачка $A(\overline{A},\overline{A}')$ и права $b(\bar{b},\bar{b}')$. Одредити пројекције хоризонталне праве p која пролази кроз A и сече праву b.

2. Одредити бочну пројекцију ма које тачке $A(\overline{A},\overline{A}')$.

Упутство. Повући ма где пројекцијску осу $\pi \times \pi_3 = x_3$, оборити π_3 око те осе и наћи π_1'''.

3. Одредити праву величину дужи $a(\bar{a},\bar{a}')$ помоћу њене бочне пројекције.

4. Наћи главни траг праве $p(\bar{p},\bar{p}')$ помоћу бочне пројекције. Где треба повући осу x_3 да би се употребило најмање линија?

5. Дате су две мимоилазне праве. Одредити праву која их сече и упоредна је оси x.

Упутство: Служити се бокоцртом.

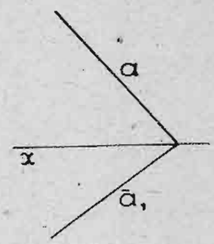
6. У ортогоналној аксонометрији дата је пројекција квадра. Одредити обарањем праву величину његових дијагонала.

Упутство. Равни π и π_1 аксонометрије сматрати пројекцијским равнима методе посредног пројектовања.

7. Дата је у ортогоналној аксонометрији непосредна и прва посредна пројекција паралелепипеда. Одредити праву величину његових страна и дијагонала.

155. РАВАН

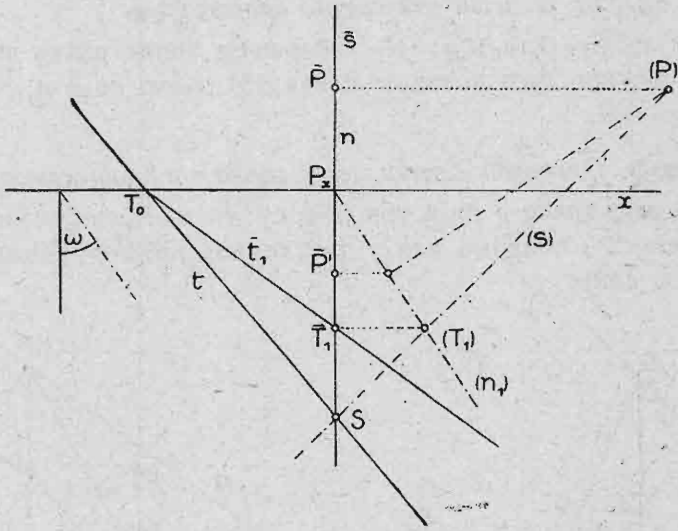
Задржавамо се само на посматрању трагова равни. То су, пре свега, праве a и a_1 по којима дата раван α сече равни π и π_1. Права $a = \alpha \times \pi$ је *главни траг* равни α, а права $a_1 = \alpha \times \pi_1$ је њен *споредни траг* (сл. 428). Оба трага секу се на оси x.



Сл. 428

Лако је одредити пројекцију споредног трага равни задате пројекцијама двеју ма каквих правих. Овде ћемо изнети одређивање главног трага.

Узмимо да је нека раван τ одређена пројекцијом трага t_1 и једном својом тачком $P(\bar P, \bar P')$ (сл. 429). Да би се добио траг t равни τ одредимо пресек s равни τ оном равни ν која пролази кроз P и управна је на x. Траг S праве s је тачка на траженом трагу t. Нека је $T_1 = t_1 \times \nu$. Имамо $\bar s = n \perp x$, $\nu \times \xi = P_x T_1$. У обореној равни ν имамо $(s) = (P)(T_1)$ и $S = \bar s \times (s)$, дакле $t = T_0 S$.

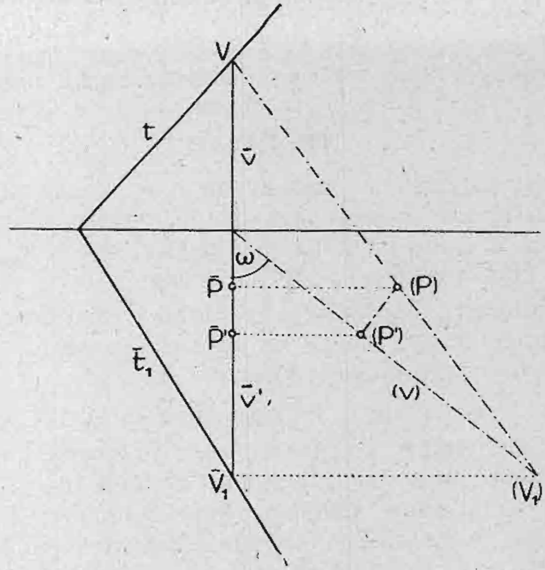


Сл. 429

Доносимо још неке задатке о равнима.

Задатак 1. *Дата је раван* τ $(t, \bar t_1)$ *и пројекција* $\bar P$ *извесне тачке* P *у* τ. *Наћи* $\bar P'$.

Поставимо опет кроз P раван $\nu \perp x$ и оборимо је у π (сл. 430). Нека је $\nu \times \tau = v$. Оборивши v_1 имамо $(v) = V(V_1)$, отуд (P), а отуд (P') на (v') и $\bar P'$ на v'.



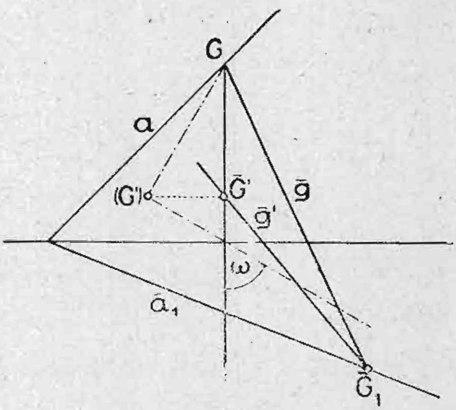
Сл. 430

Задатак 2. *Одредити посредну пројекцију $\bar g'$ праве g садржане у равни α (a, $\bar a_1$), кад је дата непосредна пројекција $\bar g$.*

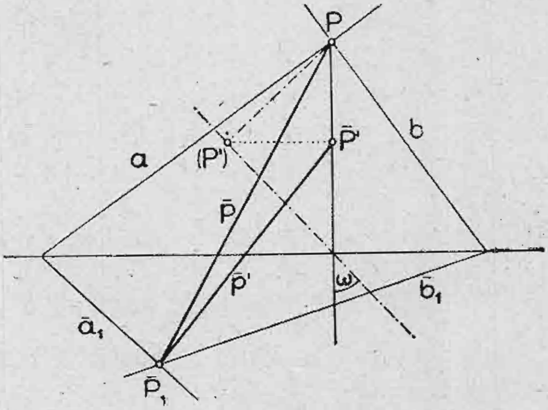
Имамо $a \times \bar g = \bar G$, $\bar a_1 \times \bar g = \bar G_1$. Обарањем бочне равни која садржи G добијамо $\bar G'$, као што показује слика 431. Како се $\bar g$ и $\bar g'$ секу у $\bar G_1$, имамо и $\bar g' = \bar G' \bar G$.

Задатак 3. *Одредити пресек двеју равни α и β одређених траговима.*

Пројекције праве p чији трагови су P и P_1, пролазе кроз $\bar P_1$. Пошто нађемо $\bar P'$, обарамо као у претходном примеру; имамо $\bar p = P \bar P_1$, $\bar p' = \bar P' \bar P_1$ (сл. 432).

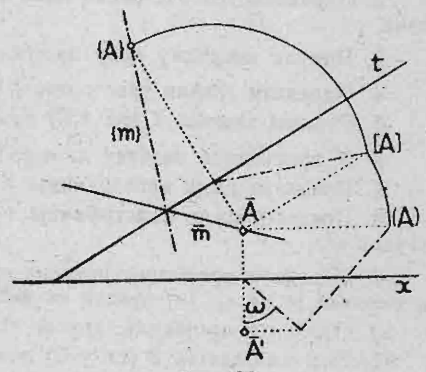


Сл. 431



Сл. 432

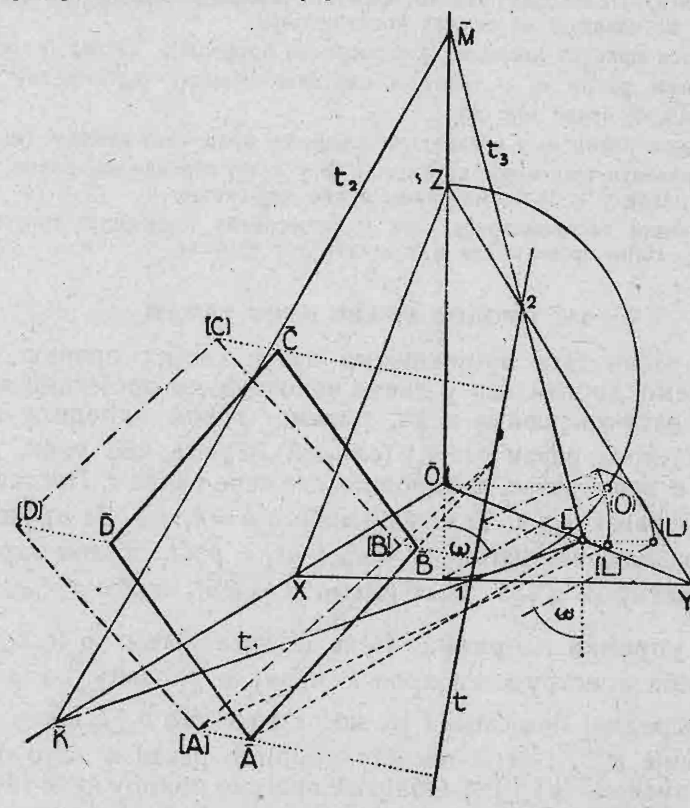
Обарање равни. Нека је раван τ дата трагом t и пројекцијом једне своје тачке $\bar A$ (сл.433). Отстојање $\bar A(A)$ тачке A од π пренесемо од $\bar A$ упоредно трагу t и затим, поступајући као у одељку III, долазимо до $\{A\}$ тј. тачке A у равни τ, обореној око трага t. Даље би се сваки лик у τ, дат у непосредној пројекцији на π, могао помоћу афиности добити у обореном положају, и обрнуто (у слици је претстављена једна права m равни τ, која пролази кроз A).



Сл. 433

Задатак 4. *У нормалној аксонометрији дате су пројекције трагова* t_1 *и* t_2 *равни* τ *и пројекција* $\overline{AB}$ *дужи* AB *која је у равни* τ (сл. 434). *Нацртати пројекцију квадрата са страном* AB, *садржаног у равни* τ.

Одредимо прво траг t равни τ помоћу тачака 1 и 2 у којима се трагови t и t_3 секу с троуглом трагова, затим оборимо раван τ у раван слике, оборивши прво напр. тачку $L = t_1 \times t_3$ на описани начин, посматрајући пројекцију на π_1 уз непосредну пројекцију на π. Тада XY има улогу осе x претходних разматрања, а угао $\omega = \sphericalangle(\pi, \pi_1)$ налази се обарањем равни $z\bar{z}$. Добивши $[L]$ у обореној равни τ, тачке $[A]$ и $[B]$ налазимо помоћу афиности. Конструишемо затим у обореном положају један од два могућа квадрата $[A][B][C][D]$ и враћамо га помоћу афиности у првобитни положај равни τ.



Сл. 434

Задаци за вежбу

1. Одредити главни траг равни дате пројекцијом споредног трага и пројекцијом једне њене тачке P, постављањем бочне равни кроз P.

2. Одредити трагове равни дате пројекцијама а) двеју паралелних правих, б) трију тачака.

3. Повући посредну прву пројекцију трага a равни α $(a, \overline{a}_1)$.

4. Одредити главни траг праве $p(\overline{p}, \overline{p}')$ одређивањем трагова равни pp'.

5. Решити задатак 1 (сл. 430) помоћу бочне пројекције.

6. У претходном задатку дато је $\overline{P}'$, наћи $\overline{P}$.

7. Показати да је конструкција у слици 430 иста као у слици 429.

8. Показати да је конструкција с тачком G у слици 431 иста као у слици 430 с тачком P.

9. Одредити пројекције пресека a_2 равни α $(a, \overline{a}_1)$ оном равни која садржи осу x и управна је на π_1. Тај пресек се назива *другим трагом* равни α.

10. Одредити пројекције другог трага равни дате као у задацима 1 и 2 овог списка.

11. Решити задатак 3 (сл. 432) помоћу других трагова.

12. Одредити пресек двеју равни датих а) паровима упоредних правих, б) паровима правих које се секу, в) троуглима.

Напомена. Кад равни нису дате траговима, већ двема пројекцијама парова правих, конструкције се изводе као у непосредним пројекцијама.

13. Кад је раван дата пројекцијом првог и другог трага, одредити а) из непосредне пројекције неке праве у тој равни посредну прву пројекцију те праве, и обратно, б) слично за тачку у тој равни.

Напомена. Положајни задаци који се решавају помоћу пројекција првог и другог трага, не изискују метричких конструкција.

14. Испитати афиност посредне и непосредне пројекције ликова у једној равни.

15. Обарањем равни π_1 у раван π одредити оборену (непосредну) пројекцију а) тачке $A(\overline{A}, \overline{A}')$, б) праве $p(\overline{p}, \overline{p}')$.

16. Обарањем равни π_1 у π одредити (оборени) први траг равни α $(a, \overline{a}_1)$.

17. Конструисати пројекције круга који је у датој вертикалној равни, косој према π а) обарањем равни у π, б) посматрањем бочне пројекције.

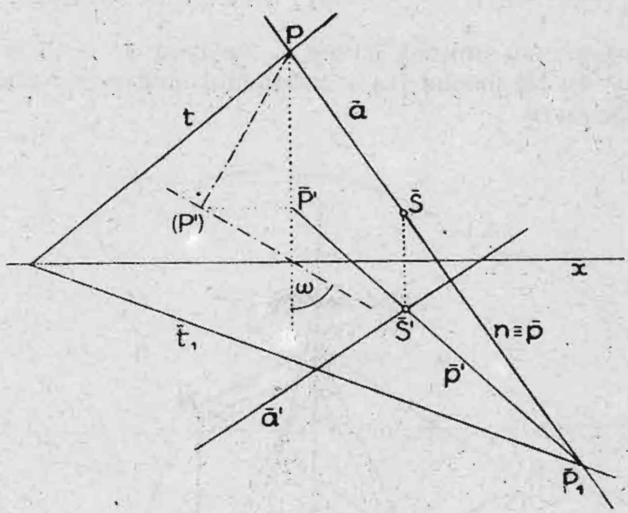
18. У управној аксонометрији дата је непосредна пројекција троугла у равни датој траговима. Наћи прави облик и величину тог троугла.

156. ПРОДОР ПРАВЕ КРОЗ РАВАН

Ако је раван дата пројекцијама двеју својих правих, продор с правом можемо добити као у двема непосредним пројекцијама. Узмимо да је раван дата траговима и да, рецимо, треба одредити продор S праве $a(a, a')$ кроз раван $\tau(t, \overline{t}_1)$ (сл. 435). Треба, као увек, поставити кроз праву a неку раван и одредити где сече раван τ. Поставимо њену пројектујућу раван $\nu \perp \pi$. Тада за ν имамо $\overline{n} = \overline{n}_1 = \overline{a}$. За пресек $p = \nu \times \tau$ је $\overline{p} = \overline{a}$, а за његове трагове $P = \overline{p} \times t$, $\overline{P}_1 = \overline{p} \times \overline{t}_1$. Треба одредити још $\overline{P}'$ као у задатку 3, § 155. Тада имамо $\overline{p}' = \overline{P}'\overline{P}_1$ и $\overline{S}' = \overline{p}' \times \overline{a}'$, а отуд $\overline{S}$.

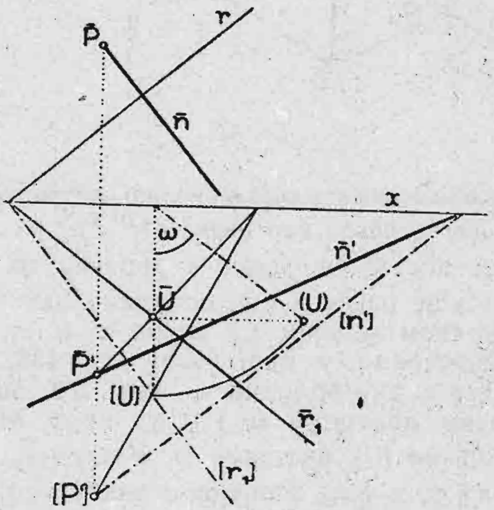
Права управна на равни. Нека је дата раван ρ $(r, \overline{r}_1)$ и тачка $P(\overline{P}, \overline{P}')$. Треба конструисати кроз P праву n управну на ρ (сл. 436).

У непосредној пројекцији је, као што знамо $\overline{n} \perp r$, али у посредној пројекцији није $\overline{n}' \perp \overline{r}_1$, него тек ако оборимо раван π око трага x у раван слике имаћемо $[\overline{n}'] \perp [\overline{r}_1]$. Обарање вршимо помоћу неке тачке U на $\overline{r}_1$.



Сл. 435

Добијамо $[U]$ у обореној равни π_1 помоћу (U); тада $[r_1]$ пролази кроз $[U]$. Посматрањем праве PU добијамо у афином односу, у коме је x оса афиности, из $\bar{P}'$ тачку $[P']$. Сад можемо повући нормалу $[n']$ кроз $[P']$, затим, на основу афиности, $\bar{n}'$.

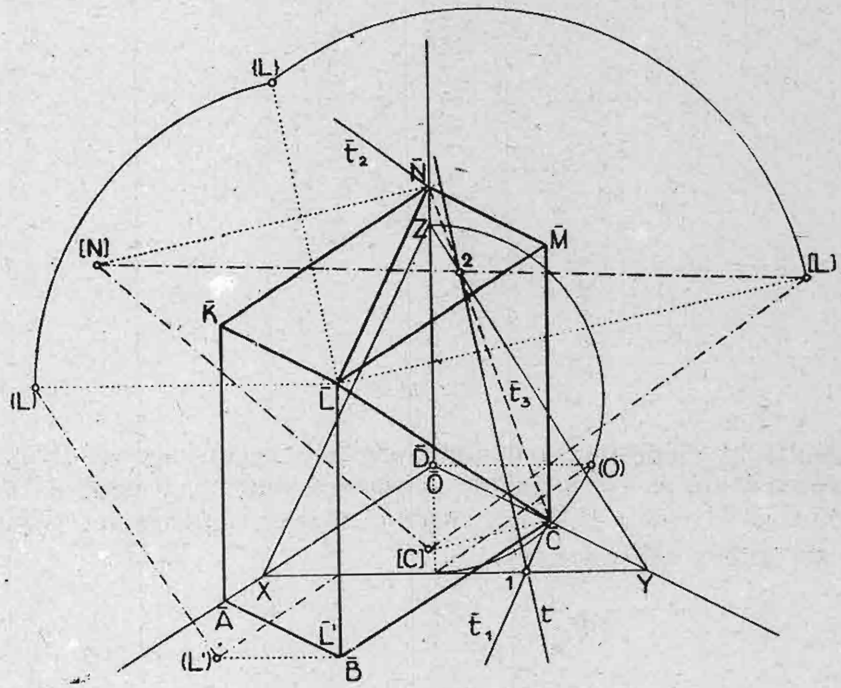


Сл. 436

Задатак 1. *У управној аксонометрији дат је квадар AB...MN* (сл.437). *Наћи у правој величини троугао CLN.*

Троугао CLN можемо оборити у раван $\bar{\pi}$. Нађимо зато траг t равни $\tau = CLN$. Имамо $t_1 = [C \parallel LN]$, $t_2 = [N \parallel CL]$, $t_3 = CN$, дакле t пролази напр. кроз тачке $1 = t_1 \times XY$ и $2 = t_3 \times YZ$. Обарање равни CLN

можемо сад извршити помоћу тачке L, знајући $\overline{L}$ и $\overline{L'}=\overline{B}$ по § 155 (као у задатку 4). Нашавши $[L]$ у обореној равни τ, налазимо $[C]$ и $[N]$ помоћу афиности.



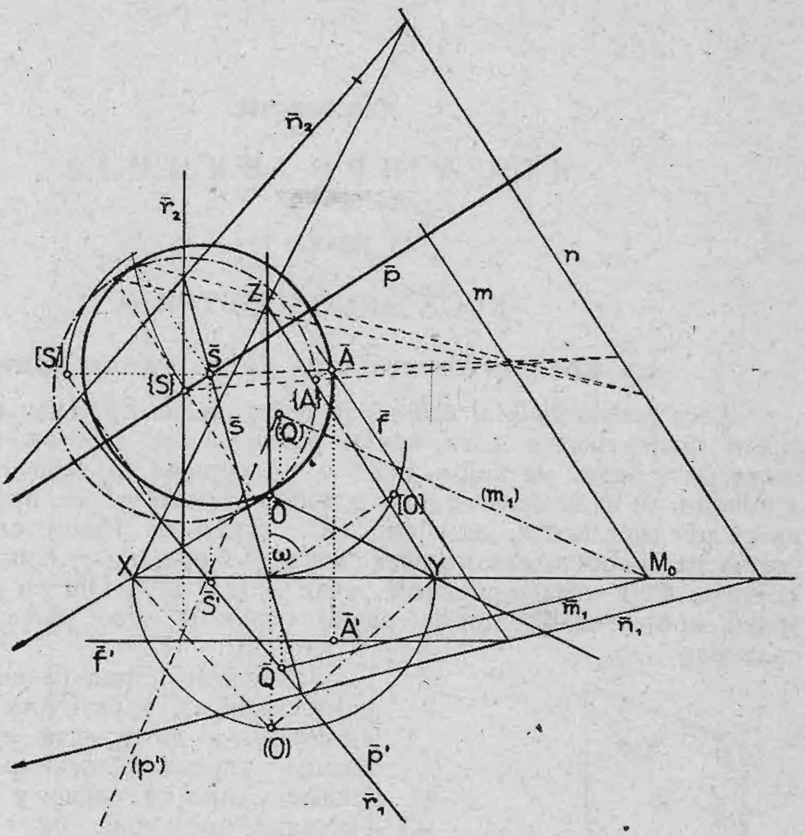
Сл. 437

Задатак 2. *Претставити у ортогоналној аксонометрији круг описан тачком* $A(\overline{A}, \overline{A'})$ *која се обрће око праве* $p(\overline{p}, \overline{p'})$.

Треба кроз A поставити раван ν управну на p. Нађимо прво трагове m и m_1 ма које равни $\mu \perp p$, повуцимо дакле ма где $m \perp \overline{p}$ до пресека M_0 с пресечном линијом XY равни π и π_1, која има улогу осе x у смислу разматрања у овој глави (сл. 438). Кроз M_0 треба повући $m_1 \perp p'$. У ту сврху оборимо π_1 око XY помоћу тачке O и нађимо (p'), а затим повуцимо $(m_1) \perp (p')$ кроз M_0. Помоћу тачке $Q = m_1 \times p'$, којој знамо (Q), налазимо $\overline{Q}$, а отуд $\overline{m}_1$.

Знамо да је $n \parallel m$, $n_1 \parallel m_1$. Повуцимо дакле пројекције праве $f \parallel m$ кроз A (имамо $\overline{f} \parallel m$, $\overline{f'} \parallel XY$). Кроз пресечну тачку $f \times f'$ пролази n_1. Како се n и n_1 секу на XY, добијамо отуд n. Одредимо још пројекцију трага n_2, знајући да пролази кроз тачке $n_1 \times OX$ и $n \times XZ$.

Нађимо сада тачку продора S праве p кроз ν, рецимо, помоћу пресека s равни $\rho = pp'$ и ν; s пролази кроз $n_1 \times r_1$ и $n_2 \times r_2$. Затим оборимо раван ν око n и опишимо круг у обореном положају: $\{k\}$. Тада на основу афиности добијамо пројекцију $\overline{k}$ траженог круга. Отуд је лако наћи два спрегнута пречника елипсе $\overline{k'}$ и конструисати ту елипсу.



Сл. 438

Задаци за вежбу

1. Одредити продор дате праве кроз раван дату пројекцијама а) двеју паралелних правих, б) троугла.

Упутство. Као у две непосредне пројекције.

2. Одредити продор дате праве кроз раван $\tau(t, \bar{t}_1)$ а) служећи се бокоцртом, б) пројекцијом $\bar{t}_2$ другог трага, в) пројекцијом $\bar{t}'$ прве пројекције t' трага t (тј. обим пројекцијама правих t и t_1). Која конструкција је најкраћа?

3. Спустити из тачке $P(\bar{P}, \bar{P}')$ нормалу на раван α дату двема паралелним правим и наћи отстојање тачке P од α.

Упутство. Нацртати бочну пројекцију.

4. Спустити из тачке $P(\bar{P}, \bar{P}')$ нормалу n на раван α $(a, \bar{a}_1)$ служећи се бокоцртом и наћи отстојање тачке P од α.

Упутство. Пошто се повуче $n'' \perp a_3$, употребити ради налажења $\bar{n}'$ тачку $n \times \pi_1$.

5. У ортогоналној аксонометрији дата је раван α општег положаја и дуж AB у α. Конструисати једну правилну призму чија основа је у α, ивица AB, а висина једнака $2\,AB$.

ДЕО ШЕСТИ

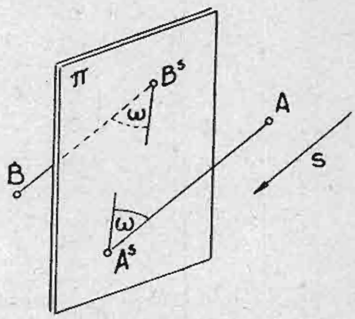
КОСА ПРОЈЕКЦИЈА

ГЛАВА I

КОСА АКСОНОМЕТРИЈА

157. КОСА ПРОЈЕКЦИЈА НА ЈЕДНУ РАВАН СЛИКЕ

Коса (клиногонална) пројекција је упоредна пројекција у којој су зраци пројектовања коси према равни слике. Правац пројектовања може бити задат ма којом дужи s, упоредном зрацима пројектовања, а хоћемо ли да назначимо и смер пројектовања, у коме претпостављамо да се предмет гледа, додајемо знак стрелице. Раван слике (пројекцијску раван) обележавамо опет словом π, а пројекцију горњим индексом s: напр. A^s је коса пројекција тачке A (сл. 439). Оштри угао ω нагиба зрака пројектовања према равни слике је *угао пројектовања* (*или гледања*).



Сл. 439

Замислимо поред равни слике π још једну раван π^*, управну на зрацима пројектовања, и да у исти мах настаје у равни π^* управна пројекција посматраног предмета. Ако се гледа у правцу пројектовања пројекције на π и на π^* се поклапају. Дакле, кад се на косу пројекцију гледа у *правцу пројектовања* утисак је исти као кад се гледа на управну пројекцију управно на раван слике.

Сенке које при паралелном осветљењу предмети бацају на раван, јесу косе пројекције, сем изузетно, кад су зраци светлости управни на раван на коју сенка пада, јер тада је пројекција управна. Дакле косим пројекцијама смо се већ бавили посматрајући сенке. Но само кад смо при упоредном осветљењу конструисали сенке на саме пројекцијске равни (као у гл. V, одељка IV) биле су то косе пројекције непосредно на раван слике.

Уместо о косој, могло би се говорити сад и о *општој упоредној пројекцији*, допуштајући да угао ω буде и прав. Посматрања би остала иста, само што би обухватала управну пројекцију као засебан случај, у коме се многе конструкције упрошћују. Ограничавајући се на косу пројекцију не морамо узимати у обзир тај засебни случај, којим смо се већ бавили.

Како многа посматрања о управној пројекцији вреде уопште за упоредну пројекцију, моћи ћемо преко многих чињеница прелазити укратко, упућујући на раније главе и параграфе ове књиге.

158. ОСОБИНЕ КОСОГ ПРОЈЕКТОВАЊА

Наведимо неке најосновније чињенице које вреде како за управну тако и за косу пројекцију.

Пројекција тачке је тачка. Свака коначно удаљена тачка A има увек као пројекцију A^s коначно удаљену тачку ($s \parallel \pi$ искључује се). Пројекција праве a је права a^s, сем ако је $a \parallel s$, јер тада је a^s тачка. Пројекције паралелних правих су паралелне праве. Размера двеју дужи на истој правој или на паралелним правим остаје у пројекцији иста. Пројекција равне површи λ је равна површ λ^s, сем ако је $\lambda \parallel s$, јер тада је λ^s права, полуправа или дуж. Изузимајући тај случај, равни ликови и њихове косе пројекције су у перспективно афином односу.

Према томе и многе слике које су се односиле на управну пројекцију вреде за косу пројекцију. Тако напр. слике 85 и 90 могу се односити и на косу пројекцију. То вреди особито за помоћне слике на којима смо разјашњавали односе у простору (напр. у сл. 85—95), јер ове су цртане од ока, али повлачећи тачно упоредне праве.

Како о пројекцијама тако се и о траговима правих и равни многи закључци непосредно преносе из управне у косу пројекцију. Може се уопште рећи да се положајни задаци, укључивши упоредност, решавају једнако ма у којој паралелној пројекцији; метрички задаци не. Што се тиче метричких односа коса пројекција дужи може бити не само мања или једнака, већ и већа од саме дужи. Ако је права управна на равни, њена коса пројекција није управна на трагу те равни, сем изузетно. Раван лик у косој пројекцији и у обореном положају су два перспективно афина лика, али зраци афиности нису управни на оси афиности. Коса пројекција круга је уопште елипса, али пројекција пречника круга, који је упоредан пројекцијској равни, није велика оса елипсе, сем изузетно.

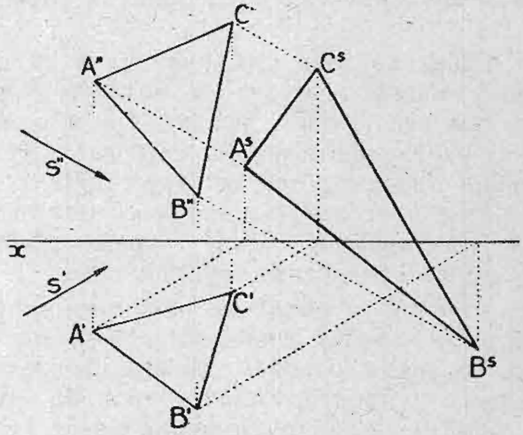
Пресеци и продори могу се (као положајни задаци) вршити истим поступцима као у управној пројекцији. Према томе напр. слике 117—127 могу се схватити и као косе пројекције ма под којим углом пројектовања. То нас ослобађа потребе да све те и такве слике и одговарајућа тумачења овде поновимо. Читаоцу се препоручује да прегледа градиво одељка II, уочавајући оне односе и задатке који се решавају на исти начин у косој пројекцији.

Неодређеност предмета кад је дата само пројекција на једну раван још је већа у косој пројекцији него у управној, јер из саме косе пројекције неке тачке не зна се ни правац у коме је та тачка.

159. ИЗВОЂЕЊЕ КОСЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ ИЗ ДВЕЈУ УПРАВНИХ ПРОЈЕКЦИЈА

Претстављање предмета и уопште решавање задатака може се вршити непосредно у косој пројекцији *(слободна коса пројекција)* или предмет може бити дат другом врстом пројектовања, у којој су и конструкције извршене, па се отуд само изводи коса пројекција *(везана коса пројекција)*.

У овом параграфу посматраћемо ову другу могућност, претпостављајући да је предмет дат двема придруженим управним пројекцијама на равни π_1 и π_2. За раван слике π узмимо раван π_2 и изаберимо смер пројектовања, претстављен правом s, која је одређена својим управним пројекцијама s' и s''.

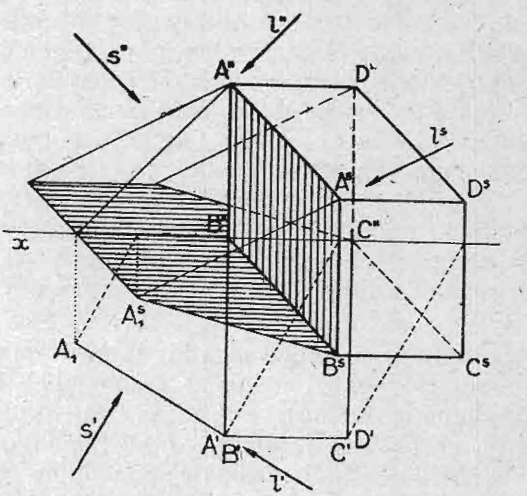


Сл. 440

Нека је дат напр. троугао ABC својим двема управним пројекцијама (сл. 440). Одређивање косе пројекције $A^s B^s C^s$ своди се на одређивање сенке троугла ABC на π_2 при упоредном осветљењу у смеру s, тј. на одређивање тачака у којима пројекцијски зраци који пролазе кроз темена троугла продиру раван π.

Овај елементаран начин, који се овде износи ради прегледа разних поступака, је *методa прод ра.** Посматрајмо још следећи задатак:

Задатак. *У двема управним пројекцијама дат је смер косог пројектовања s и квадар* (сл. 441). *Одредити косу пројекцију квадра, затим његову сопствену сенку и бачену на раван тла π_1 при упоредном осветљењу датог смера.*



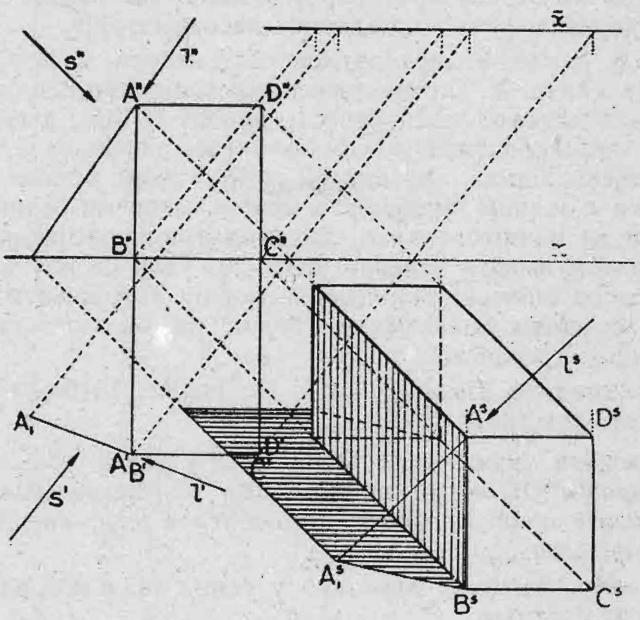
Сл. 441

Пошто методом продора нацртамо косу пројекцију квадра, пређимо на одређивање бачене сенке. Ова се може одредити прво у двема управним пројекцијама, као сенка квадра на π_1, а отуд у косој пројекцији. Тако је у слици нађена прво сенка A_l на π_1 тачке A, затим коса пројекција A_l^s тачке A_l. Претпоставивши да зрак светлости l пролази кроз тачку A, имамо сад и његову косу пројекцију l^s и косу пројекцију l'^s његове прве пројекције l', јер $l^s = A^s A_l^s$, $l'^s = B^s A_l^s$. Помоћу l^s и l'^s можемо добити бачену сенку непосредно, не тражећи је прво у двема управним пројекцијама. Поступак је исти као кад смо у управној пројекцији на једну раван конструисали сенку предмета (напр. у § 73).

Да се коса пројекција и управне пројекције не би нацртале на истоме месту може се извршити паралелно померање косе пројекције

* Та се метода више употребљава у перспективи.

налево или надесно тиме што осу x померимо наниже одн. навише. У сл. 442 конструкција је извршена тако, узевши x^s за пројекцијску осу.



Сл. 442

Идућим параграфом прелазимо на аксонометријску методу у косој пројекцији, подеснију за извођење косе пројекције из две управне пројекције. Косом пројекцијом долази се пак уопште лако до очигледне слике предмета онда кад је овај дат у „паралелном положају" према π_1 и π_2, који има својих предности (§ 111) али је очигледност тада најмања. Због тога се коса пројекција много употребљава у техничким наукама, када треба пружити очигледну слику предмета датог у паралелном положају, у две или три управне пројекције.

Задаци за вежбу

1. Нацртати косе пројекције, са задатим правцима пројектовања, предмета претстављених двема управним пројекцијама у сликама 286а, 287а (сл. 286б и 287б су већ косе пројекције) и одредити сенке сопствене и на раван тла при упоредном осветљењу.

2. Конструисати по слободном избору предмет у двема управним пројекцијама, а отуд у косој пројекцији и затим сенке.

160. ПОЈАМ КОСЕ АКСОНОМЕТРИЈЕ. ПОЛКЕОВ СТАВ

У *косој аксонометрији* пројектује се предмет косо на једну раван слике, а уз предмет поставља, у косом положају према равни слике, правоугли систем оса, одмеравајући димензије предмета у правцима тих оса. Самим тим долази природно и до тога да се сем непосредне пројекције на раван слике посматрају посредне пројекције, управне на осне равни. Дакле разлика између косе и управне аксонометрије је у врсти пројектовања на раван слике.

Уопште, под *аксонометријом* подразумева се метода којег било пројектовања на једну раван слике, у којој основну улогу има правоугли систем оса, као што и само име казује (на грчком аксон = оса, метреин = мерити). Према врсти пројектовања на раван слике разликује се пак управна, коса и средишња аксонометрија.

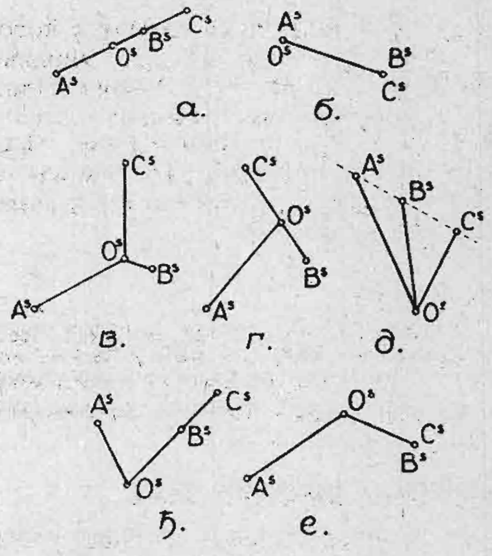
Полазимо, дакле, од правоуглог система оса и пројектујемо га косо на раван слике. У управној аксонометрији пројекција осног триједра је морала задовољавати извесне услове (§ 146), а пошто је пројекција осног триједра била једном изабрана, скраћења у правцима оса била су одређена. Дакле, ако систем трију међу собом управних и једнаких дужи с једним заједничким крајем назовемо осним *трокраком*, можемо рећи да у ортогоналној аксонометрији пројекција трокрака мора свакако испуњавати извесне услове*). Тако се и у косој аксонометрији поставља питање: које услове морају задовољити три дужи у равни слике, с једним заједничким крајем, да би претстављале косу пројекцију осног трокрака?

Постоји следећи *Полкеов став* (K. Pohlke, 1810—1876 називан *основним ставом аксонометрије:*

Ма какве три дужи O^sA^s, O^sB^s, O^sC^s у равни цртања, с једним заједничким крајем O^s, могу претстављати паралелну, било косу било управну пројекцију осног трокрака. Једини услов је да све три дужи не припадају једној правој.

Дакле напр. не може бити као у слици 443 а и б, али може бити као у слици 443 в до е.

Доказаћемо следећи, општији став:



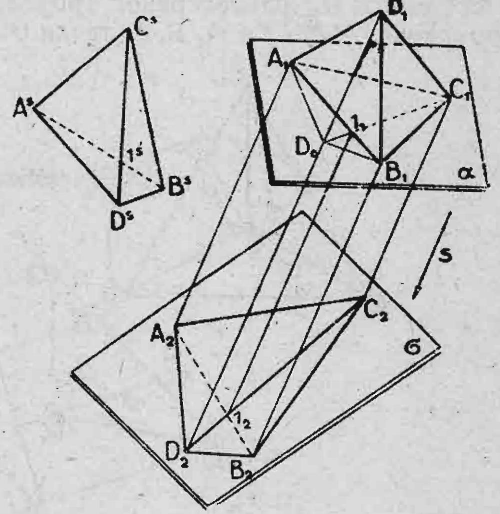
Сл. 443

Ма какве четири тачке A^s, B^s, C^s, D^s у равни слике, које нису све на једној правој могу претстављати увек паралелну пројекцију четири темена једног тетраедра $ABCD$, сличног каквом било датом тетраедру $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Раван лик који се састоји из четири тачке које не припадају једној правој и правих које спајају те тачке називамо *четворотемеником.* Прво ћемо косо пројектовати темена датог тетраедра $A_1 B_1 C_1 D_1 = \Delta_1$ на неку раван α тако да настане четворотеменик афин датом четворотеменику $A^s B^s C^s D^s$, а затим на другу раван σ тако да настане четворотеменик сличан датом четворотеменику (сл. 444).

*) Читалац може потражити те услове у тригонометријском облику.

Раван α може бити свака раван, но ради једноставности изаберимо $\alpha = A_1 B_1 C_1$. Свака два троугла су међу собом афина, дакле и троугао $A^s B^s C^s$ је афин троуглу $A_1B_1C_1$. Нађимо у α тачку D_0 (помоћу тачке 1, види § 17, сл. 15) која у том афином пресликавању одговара тачки D^s. Тада права $s = D_1 D_0$ одређује правац паралелног пројектовања тетраедра Δ_1 на раван α, којим настаје четворотеменик $A_1 B_1 C_1 D_0$ афин датом четворотеменику $A^sB^sC^sD^s$.



Сл. 444

Посматрајмо сада тространу призмасту површ ψ чије ивице су упоредне правој s а водиља је троугао $A_1B_1C_1$. Као што се показало у задатку 5, § 126, тространу призмасту површ можемо увек пресећи једном равни тако да пресек буде троугао сличан датом троуглу (у неизрађеном задатку 9, § 126, дато је упутство и за тачну конструкцију пресека); решење пружају равни у два разна положаја. Пресецимо дакле призмасту површ ψ равнином σ тако да пресечни троугао $A_2 B_2 C_2$ буде сличан датом троуглу $A^sB^sC^s$, и нека је $s \times \sigma = D_2$. Тада је четворотеменик $A_2 B_2 C_2 D_2$ паралелна пројекција тетраедра Δ_1. Но тај четворотеменик је афин четворотеменику $A_1 B_1 C_1 D_0$, дакле и четворотеменику $A^s B^s C^s D^s$, па како је при томе троугао $A_2 B_2 C_2$ сличан троуглу $A^s B^s C^s$, ова афиност је сличност, тј. четворотеменик $A_2 B_2 C_2 D_2$ је сличан датом четворотеменику $A^s B^s C^s D^s$.

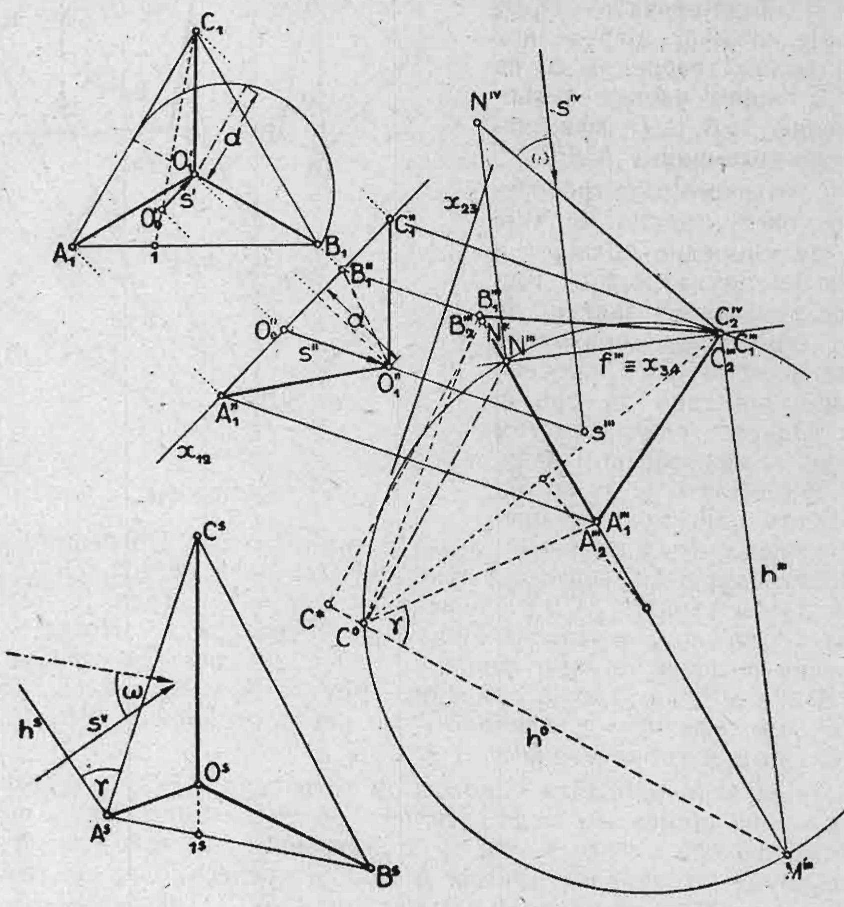
Сад је лако одредити у простору тетраедар $ABCD = \Delta$ тако да му паралелна пројекција буде дати четворотеменик $A^sB^sC^sD^s$. Увећајмо или смањимо сразмерно површ ψ и тетраедар Δ_1 тако да троугао $A_2 B_2 C_2$ буде подударан троуглу $A^s B^s C^s$ и пренесимо их по том тако да се троугао $A_2 B_2 C_2$ поклопи с троуглом $A^s B^s C^s$. Тада из A^s, B^s, C^s, D^s пролазе упоредни зраци, ивице површи ψ, до темена извесног тетраедра Δ. Дакле четворотеменик $A^s B^s C^s D^s$ је упоредна пројекција тетраедра Δ који је сличан датом тетраедру.

Тиме је доказан и ужи, Полкеов став, у коме претпостављамо да су три ивице датог тетраедра $A_1 B_1 C_1 D_1$, рецимо A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 једнаке и узајамно управне.

161. КОНСТРУКЦИЈА ПРАВЦА ПРОЈЕКТОВАЊА ИЗ ПРОЈЕКЦИЈЕ ТРОКРАКА

Следујући претходни доказ, може се конструисати правац пројектовања s кад је дата паралелна пројекција трокрака $O^s A^s B^s C^s$ (сл. 445а).

Изабравши раван α (у датом доказу) за прву пројекцијску раван π_1, пројектујмо дати тетраедар $O_1 A_1 B_1 C_1$, коме су ивице A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 једнаке и узајамно управне, прво управно на α. Тада се O_1 пројектује у средиште O_1' равностраног троугла $A_1 B_1 C_1$. У афином пресликавању троуглова $A^s B^s C^s$ и $A_1 B_1 C_1$ тачки O^s одговара тачка O_0', коју конструи-



Сл. 445

шемо помоћу тачке 1. Већ је $O_0 O_1$ пројекција праве s, но потребно је утврдити положај праве s према равни у којој је дата коса пројекција трокрака, дакле одредити положај равни σ.

Зато пројектујмо управно трокрак на раван $\pi_2 \parallel s$, дакле повуцимо $x_{12} \parallel O_0'O_1'$, одредимо A_1'', B_1'', C_1'', O_0'' и, нашавши удаљеност d тачке O_1 од α, одредимо O_1'' и s''. Упоредне правој s'', повучене кроз A_1'', B_1'' и C_1'' претстављају другу пројекцију призмасте површи ψ.

Пројектујмо затим површ ψ с троуглом $A_1 B_1 C_1$ у правцу s, тј. управно на раван π_3 ($x_{23} \perp s'$). У тој пројекцији троугао $A_1 B_1 C_1$ се поклапа с траженим пресеком $A_2 B_2 C_2$ површи ψ равнином σ, а s''' је тачка. Тиме смо задатак свели на онај који је решен у § 43 (задатак 1) и који се може изрећи овако: Из управне пројекције $A_2'''B_2'''C_2'''$

троугла $A_2 B_2 C_2$, сличног троуглу $A^s B^s C^s$, одредити пресечну раван σ. На онде изложен начин (помоћу троугла $A_2''' B_2''' C^0 \sim A^s B^s C^s$) нађимо једну главну линију h равни σ и једну њену линију пада f и пројектујмо раван σ на нову раван π_4 управну на h ($x_{34} = f'''$; из $M'''C^* = M'''C_2'''$ и $N^*C^* \parallel N'''C^0$ налазимо $N^{IV}C^{IV} = N^*C^*$).

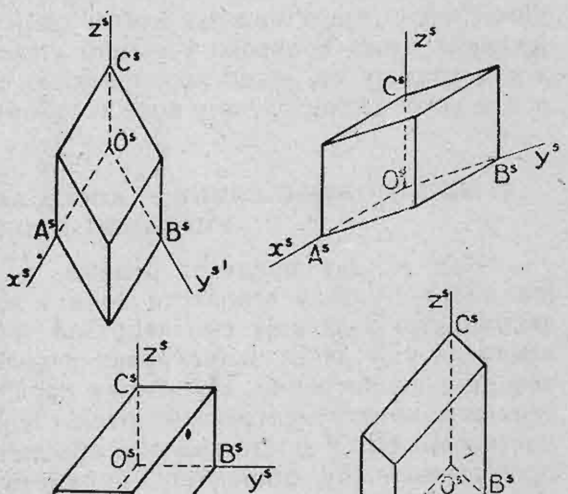
На π_4 раван σ се пројектује као права σ^{IV}; $s^{IV} \perp x_{34}$, а нагибни угао ω зрака s према равни σ показује се у правој величини. То је угао косог пројектовања троугла $A_1 B_1 C_1$ на σ, којим се добија троугао сличан троуглу $A^s B^s C^s$, дакле и траженог правца пројектовања којим се одговарајући трокрак пројектује у четворотеменик $A^s B^s C^s O^s$.

Положај троугла $A_2 B_2 C_2$ према h у равни σ исти је као положај подударног троугла $A_2''' B_2''' C^0$ према h^0. Дакле права h^s повучена под углом γ спрам $A^s C^s$, $\gamma = A_2''' C^0 M'''$, је управна на зраке пројектовања, као што су и s и h управне (а мимоилазне) праве. Ако дакле s^V означава управну пројекцију једног зрака пројектовања на раван пројекције $A^s B^s C^s$, имамо $s^V \perp h^s$, а под углом ω оборени зрак (s).

162. ИЗБОР ОСНОГ ТРОКРАКА

У косој аксонометрији, на основу Полкеова става можемо нацртати слику трокрака ма како, тј. повући пројекције трију ивица осног триједра $Oxyz$ ма у која три правца и на њима ставити где било пројекције трију тачака A, B, C, које треба да претстављају крајње тачке једнаких дужи OA, OB, OC.

Али да коса пројекција не би дала неприродну, развучену слику предмета, треба се ипак држати извесних ограничења. Довољно је нацртати осни трокрак према услову да слика коцке, конструисана са тим трокраком, даје природан утисак коцке. Слике 446 претстављају косе пројекције коцке са рђаво изабраним трокрацима.

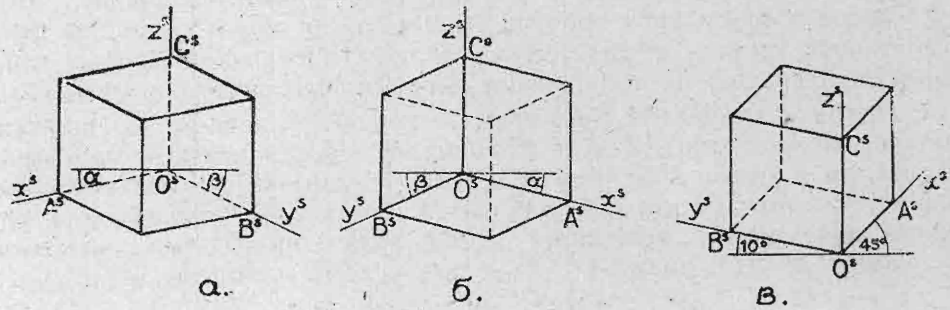


Сл. 446

По E. Müller-у*), обележивши словима α и β углове полуправих x^s и y^s са правом управном на z^s (сл. 447 а и б), повољне слике добијамо ако узмемо α отприлике између 10^0 и 15^0, β између 20^0 и 30^0, $O^sA^s = O^sC^s$ и $O^sB^s = \dfrac{3}{4} O^sC^s$. Може се узети и обрнуто: α између

*) E. Müller, Lehrb. der darst. Geom., Bd. II, § 187.

20^0 и 30^0, β између 10^0 и 15^0, $O^sB^s = O^sC^s$ и $O^sA^s = \frac{3}{4} O^sC^s$. Углове α и β довољно је, разуме се, узети од ока, но дуж која је најскраћенија треба да буде крак већег угла. Већи угао можемо узети и до 45^0, али тада треба и дуж на његову краку изабрати краћу: $\frac{2}{3}$ O^sC^s до $\frac{1}{2}$ O^sC^s (сл. 447в).



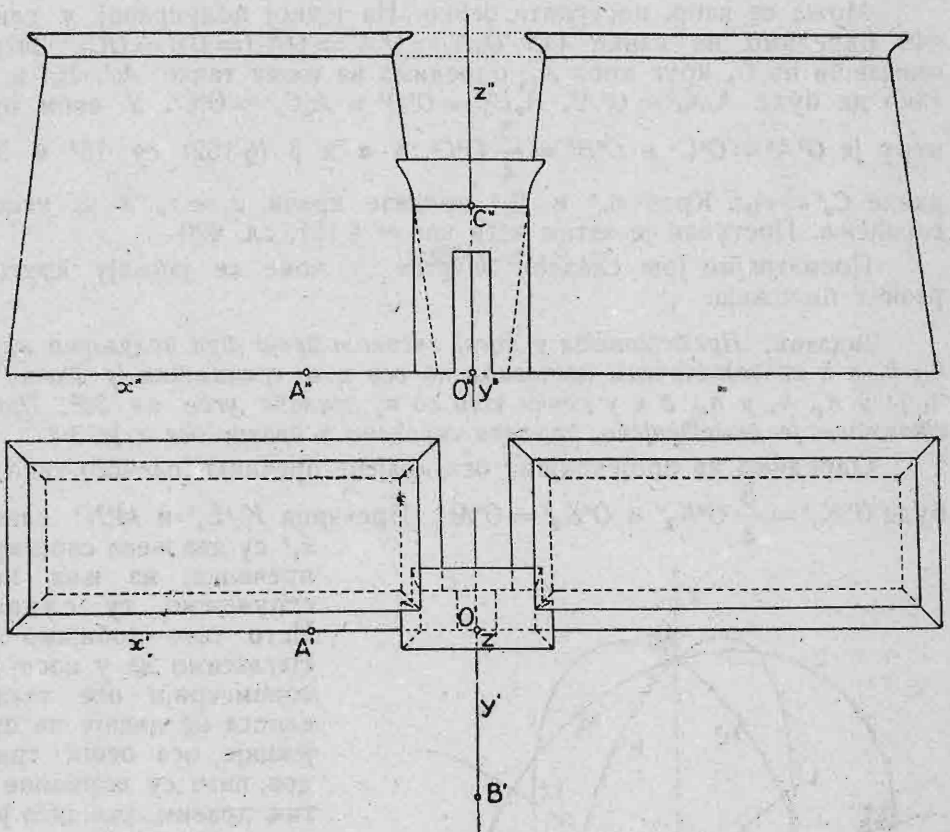
Сл. 447

Слика у косој аксонометрији назива се *триметријском*, *диметријском* или *изометријском* према томе да ли су пројекције трију дужи трокрака међу собом различите, две једнаке или све три једнаке.

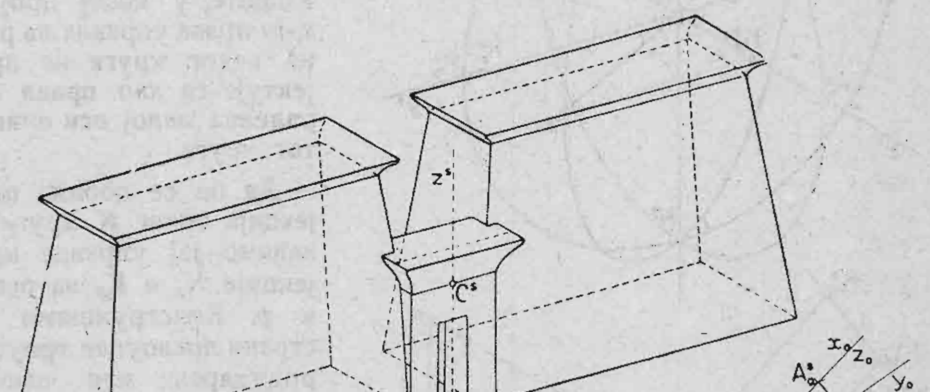
У применама нацртне геометрије употребљава се особито често диметријско претстављање косом пројекцијом, где су пројекције двеју једнаких дужи трокрака узајамно управне; дакле пројекције двеју оса x и z узимају се, једна хоризонтално, друга вертикално, а пројекција осе y косо. О том случају косе аксонометрије говориће се више у гл. II.

163. ИЗВОЂЕЊЕ СЛИКЕ У КОСОЈ АКСОНОМЕТРИЈИ ИЗ ДВЕЈУ УПРАВНИХ ПРОЈЕКЦИЈА

Кад је дат предмет, рецимо, у двема управним пројекцијама (сл. 448, — улаз у египатски храм) а хоћемо да га претставимо у косој аксонометрији за коју смо нацртали трокрак $O^sA^sB^sC^s$ (сл. 449), треба имати на уму да не знамо праву величину дужи OA, OB, OC. Али то нам није ни потребно. На основу параграфа 161 могла би се та права величина конструисати из нацртаног трокрака, али цели поступак је доста сложен. У претстављању предмета тражи се пак само да слика претставља косу пројекцију предмета с л и ч н о г датом предмету. Према томе можемо узети да дужима OA, OB, OC, чију величину не знамо, одговарају на предмету, дакле и у слици 448, ма које три међу собом једнаке дужи, које сад обележавамо исто тако OA, OB, OC. Будући да се у том пресликавању одржавају размере дужи у правцу сваке осе, треба само конструисати углове сразмера, помоћу којих се за сваку дуж у правцу оса, дату у двема управним пројекцијама одређује лако одговарајућа дуж на одговарајућој оси аксонометријске слике.



Сл. 448



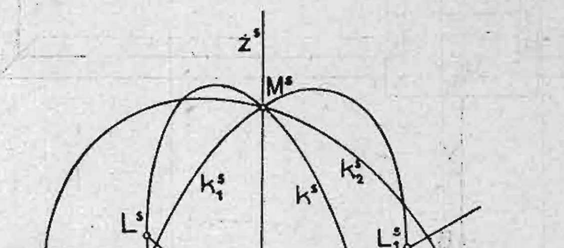
Сл. 449

Може се напр. поступити овако. На једној полуправој у слици 449 одредимо из слике 448 $O_0A_0 = O'A' = OA$ $(= OB = OC)$. Затим, описавши из O_0 круг кроз A_0, одредимо на њему тачке A_0^s, B_0^s и C_0^s тако да буде $A_0A_0^s = O^sA^s$, $A_0B_0^s = O^sB^s$ и $A_0C_0^s = O^sC^s$. У овом примеру је $O^sA^s = O^sC^s$ и $O^sB^s = \frac{3}{4} O^sC^s$, а α и β (§ 162) су 15^0 и 30^0; дакле $C_0^s \equiv A_0^s$. Кроз A_0^s и B_0^s пролазе краци $x_0 \equiv z_0$ и y_0 углова скраћења. Поступак је затим исти као у § 151, сл. 420.

Посматрајмо још следећи задатак, у коме се јављају кругови разних положаја.

Задатак. *Претставити у косој аксонометрији три подударна круга k_1, k_2 и k са заједничким пречником на оси z и средиштем у тачки O: k_1 је у π_2, k_2 у π_3, а k у равни која са π_3 заклапа угао од 30^0. Претстављање је диметријско, размера скраћења у правцу осе x је 3:4.*

Одредимо на пројекцијама оса крајеве пречника (сл. 450) тако да буде $O^sK_1^s = \frac{3}{4} O^sK_2^s$ и $O^sK_2^s = O^sM^s$. Пречници $K_1^sL_1^s$ и M^sN^s елипсе k_1^s су два њена спрегнута пречника; из њих конструишемо ту елипсу. Исто тако добијамо k_2^s. Нагласимо да у косој аксонометрији осе таквих елипса не падају на пројекције оса осног триједра, нити су нормалне на тим правим, као што је у управној аксонометрији. Уопште, у косој пројекцији права управна на равни неког круга не пројектује се као права паралелна малој оси елипсе тог круга.



Сл. 450

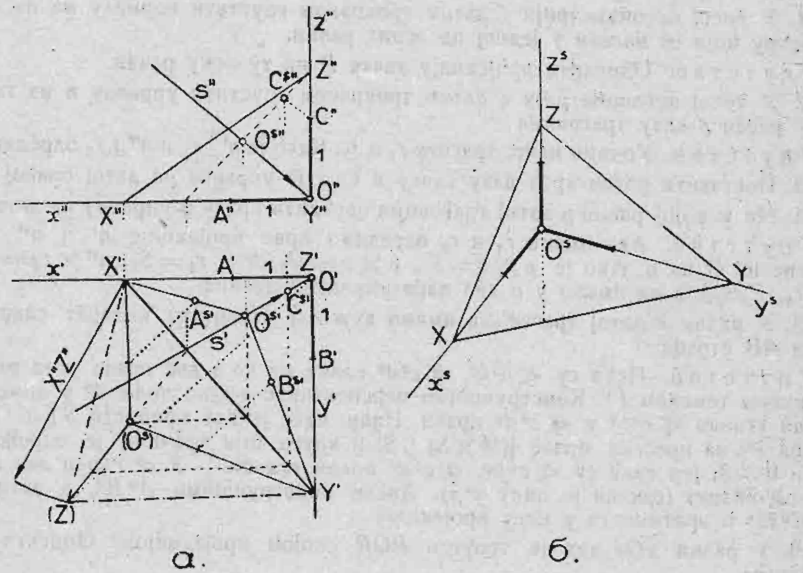
Да би се добила пројекција тачке K круга k, нађимо јој управне пројекције K_x и K_y на осе x и y. Конструишимо на страни правоугли троугао подударан или сличан троуглу OKK_y. Имамо $\sphericalangle K_yOK = 30^0$. Узмимо $OK = O^sK_2^s$ (без обзира на величину оне дужи OK у простору, која се пројектује у $O^sK_2^s$). Тада је $O^sK_y^s = OK_y$, а $O^sK_x^s = \frac{3}{4} OK_x = KK_y$. Скраћивања у размери 3:4 извршена су ма на ком углу (угао с теменом O_0) помоћу паралелних дужи.

Уопште, при решавању метричких задатака у косој аксонометрији погодно је вратити се у засебном цртежу на праве величине отстојања појединих тачака на осама осног триједра, а у сложенијим задацима на две нормалне пројекције. Пошто у нормалним пројекцијама извршимо потребне конструкције, преносимо резултате преко угла скраћивања на осе x^s, y^s, z^s, а отуд их састављамо у косој пројекцији.

164. ПРОЈЕКЦИЈА ОСНОГ ТРОКРАКА ЗА ДАТИ СМЕР ГЛЕДАЊА

Да би се добијале слике у косој аксонометрији поступа се као у претходном параграфу; али ако хоћемо можемо (рецимо, у теоријском разматрању) поћи и од смера косог пројектовања и за тај смер конструисати косу пројекцију трокрака. Тада ћемо имати не само сразмере појединих дужи, већ и њихове праве величине.

Као у § 150 **поставимо** осни триједар у паралелан положај према π_1 и π_2 (**да би слика била** јаснија није $x' = x''$) и нацртајмо пројекције s' и s'' **праве** s **која одређује** смер пројектовања, и **пројекције** троугла **трагова** XYZ (сл. 451а). Сад не тражимо да **буде** $s \perp \pi$. Задатак се решава



Сл. 451

као у § 150. Пошто смо одредили тачку $S = s \times \pi$ и (S) налазимо $(A) = X'(S) \times [A' \parallel s']$ и слично (B) и (C). Тада можемо конструисати косоаксонометријску слику трокрака са троуглом трагова (сл. 451 б).

Задаци за вежбу

1. Предмете дате у двема управним пројекцијама у сл. 288 претставити у косој аксонометрији с две једнаке и узајамно управне дужи трокрака и углом скретања 45°.

2. Нацртати у косој аксонометрији правилну купу с основом у π_1 и шестострану правилну призму са једном основом у π_3, и одредити сенку при упоредном осветљењу, подесивши да купа баца сенку на призму.

3. Уз дату косу пројекцију трокрака дата је коса пројекција троугла трагова неке равни ε и једне дужи AB у ε. Претставити правилну шестострану пирамиду с основом у ε којој је AB ивица а висина има двоструку дужину.

4. Нацртати у косој аксонометрији правилан додекаедар, узимајући трокрак с угловима $\alpha = 10^0$, $\beta = 30^0$, а дужима у односу $4:3:4$.

5. Нацртати у косој аксонометрији круг у равни која садржи осу x и заклапа с осама y и z једнаке углове.

6. Нацртати у косој аксонометрији обртни ваљак коме је једна основа у равни датој траговима а висина једнака пречнику обих основа.

7. Нацртати лопту којој је пречник дата дуж на оси x.

8. Нацртати у косој аксонометрији завојницу којој је z оса.

9. У равни ма ког положаја дата су два права угла $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ непаралелних кракова и једна права p. Нацртати праву q те равни, управну на p.

Упутство. Нацртати троугао који се налази у истој равни и чије су стране паралелне с a, c и p. Знајући праве управне на a и c, можемо повући две висине троугла а отуд и трећу, која даје правац правих управних на p.

10. У једној осној равни датог осног трокрака дата је нека права p. Нацртати праву q која је управна на p и налази се у тој равни.

Упутство. Нека је p напр. у равни xOy, у којој су и крајеви A и B трокрака. Кроз средиште S стране AB равнокраког правоуглог троугла ABO пролази права $OS \perp AB$.

11. У косој аксонометрији с датим трокраком спустити нормалу ма из које тачке P на праву која се налази у једној од осних равни.

Упутство. Одредити пројекцију тачке P на ту осну раван.

12. У косој аксонометрији с датим трокраком спустити управну n из тачке P ма на коју раван ρ дату траговима

Упутство. Уочимо напр. трагове r_1 и r_2. Како је $n' \perp r_1$ и $n'' \perp r_2$ одредимо n' и n''.

13. Поставити раван кроз дату тачку и која је управна на датој правој

14. Ма у којој равни ρ датој траговима одредити праву q управну на датој правој p.

Упутство. Ако имамо r_1 и r_2 одредимо прве пројекције n' и n'' управне n спуштене из O на ρ. Ако је $\rho \times z = R_z$, $\rho \times y = R_y$, $n' \times r_1 = S_1$, $n'' \times r_2 = S_2$ тада је $R_z S_1 \perp r_1$, $R_y S_2 \perp r_2$ па имамо у ρ два пара управних правих.

15. У равни σ датој траговима имамо дуж AB. Нацртати квадрат садржан у σ и коме је AB страна.

Упутство. Нека су $\sphericalangle a^s b^s$, $\sphericalangle c^s d^s$ слике ма која два права угла равни σ, са заједничким теменом P^s. Конструишимо перспективно афино поље σ^0 у коме су одговарајући углови $\sphericalangle a^0 b^0$ и $\sphericalangle c^0 d^0$ прави. Напр. нека је оса афиности $S \parallel a$. Темену P^s одговара P^0 на пресеку праве $[(b^s \times S) \perp S]$ и круга чији пречник је одређен тачкама $c^s \times S$ и $d^s \times S$, јер тада су $\sphericalangle a^0 b^0$, $\sphericalangle c^0 d^0$ прави углови.— *У σ^0 сваки лик се показује у правом облику (сличан* је лику у σ). Дакле конструишимо $A^0 B^0$, а затим квадрат $A^0 B^0 C^0 D^0$ и вратимо га у косу пројекцију

16. У равни xOy дат је троугао PQR својом пројекцијом. Описати круг око тог троугла.

Упутство. Нацртати у перспективно афином пољу троугао PQR у правом облику. Како је дат равнокрак правоугли троугао ABO, можемо поље σ^0 одредити тако да буде $S = A^s B^s$, $\therefore A^0 B^0 O^0 = A^s B^s O^0$.

17. Троугао у равни π_2 окренути у тој равни за 30^0 око O.

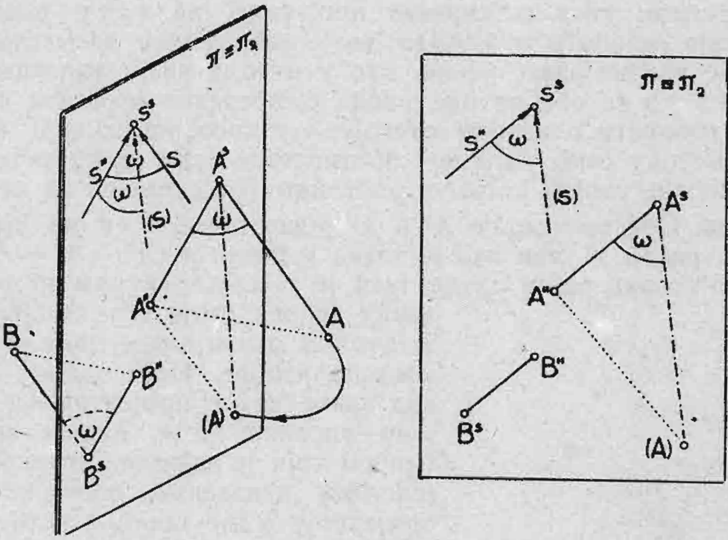
18. Конструисати коцку којој једна ивица припада равни датој траговима.

ГЛАВА II

МЕТОДА ОТСТОЈАЊА И МЕТОДА ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

165. КОСА ПРОЈЕКЦИЈА НА ЈЕДНУ РАВАН СЛИКЕ УЗ УПРАВНУ ПРОЈЕКЦИЈУ НА ТУ РАВАН

Као што је управном пројекцијом на једну раван слике претстављен одређен предмет одређена положаја тек ако се знају, рецимо, и отстојања појединих његових тачака од равни слике, тако је и косом пројекцијом на једну раван слике предмет одређен тек ако се зна правац пројектовања и напр. удаљености појединих тачака од њихових косих пројекција.



Сл. 452

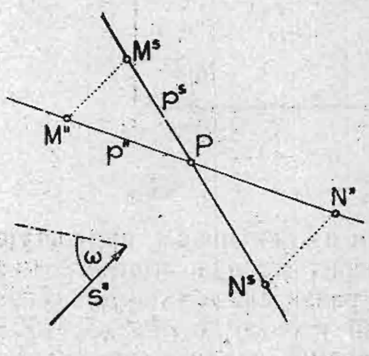
Како се права s, која претставља правац пројектовања, пројектује у тачку s^s, најприродније је ради утврђивања правца пројектовања познавати управну пројекцију s'' праве s на раван слике и нагиб праве s, $\omega = \measuredangle ss''$, који обарањем праве s долази у раван слике (сл. 452). За разлику од косих пројекција обележавамо управне пројекције двема цртицама, дакле s'' је управна пројекција праве s на раван слике π, која се обично сматра вертикалном. Ако тада знамо косу пројекцију

A^s неке тачке A и напр. удаљеност тачке A од A^s, положај тачке A у простору потпуно је одређен. Удаљеност треба тада, разуме се, сматрати величином која је позитивна кад је тачка с једне стране равни π, а негативна кад је с друге стране.

Оборимо дуж AA^s у раван π. Повуцимо праву $[A^s \parallel s'']$ и одмеримо угао ω од те праве. Преношењем дате удаљености шестаром из A^s у једном или другом смеру налазимо (A). Ако спустимо нормалу из (A) на $[A^s \parallel s'']$ имамо управну пројекцију A'' тачке A на π и отстојање тачке A од њене друге пројекције: $AA'' = (A)A''$. **Дакле**, ако је дата коса пројекција A^s тачке A и растојање AA^s, тада је лако наћи управну пројекцију A'' тачке A на раван π и отстојање тачке A од те равни. И обратно, из другог или трећег податка налази се лако први. Свакако, кад је дат смер пројектовања својом управном пројекцијом s'' и углом ω, положај тачке у простору може бити дат једним од трију равноправна **начина**: 1. **косом** пројекцијом A^s и удаљеношћу тачке A од њене косе пројекције, 2. косом пројекцијом A^s и отстојањем тачке A од пројекцијске равни и 3. косом пројекцијом A^s и управном пројекцијом A'' тачке A.

Првом начину не придаје се методска вредност. Ако су пак уз косу пројекцију дата отстојања тачака од равни слике имамо *методу отстојања* или *дистанција* у косој пројекцији (у управној пројекцији смо се бавили методом дистанција у одељку III, а још ћемо се бавити њоме у перспективи). Ако сматрамо да су за поједине тачке дате по две пројекције: коса и управна пројекција на и с т у раван слике, могли бисмо говорити о *методи двеју непосредних пројекција на исту раван* (а не на две разне равни, као у методи двеју управних пројекција). Али како се обе методе своде непосредно једна на другу, довољно је говорити о методи отстојања у косој пројекцији. Осврћемо се на ту методу само укратко, претпостављајући да су тачке у простору одређене својим косим и управним пројекцијама на исту раван.

Тачка. Обе пројекције A^s и A'' једне тачке A су на правој упоредној са правом s'', сем ако је тачка у равни π ($A^s = A'' = A$). Ако је нека тачка испред равни слике, тада је та тачка на свом пројектујућем зраку испред своје косе пројекције; ако је пак иза равни **слике**, тада је **иза** своје косе пројекције. Исти односи **постоје и** кад зраке косог пројектовања пројектујемо управно на π, дакле: ако идући смером који је назначен стрелицом на s'' (сл. 452) наилазимо прво на управну пројекцију једне тачке, а затим на косу пројекцију, та тачка је испред равни π (напр. A); ако је обрнуто, тачка је иза равни π (напр. B).



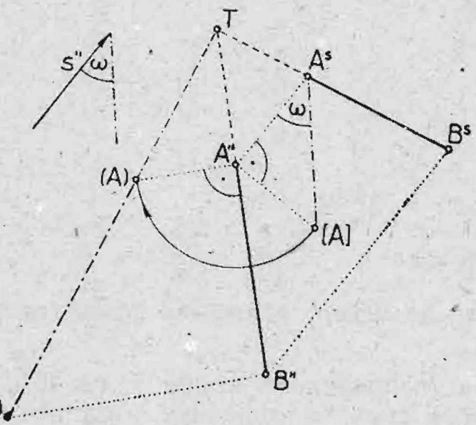
Сл. 453

Права и дуж: Пресек обих пројекција p^s и p'' праве p је траг P те праве у равни π (сл. 453). Тачка M на p је испред π, а N иза π.

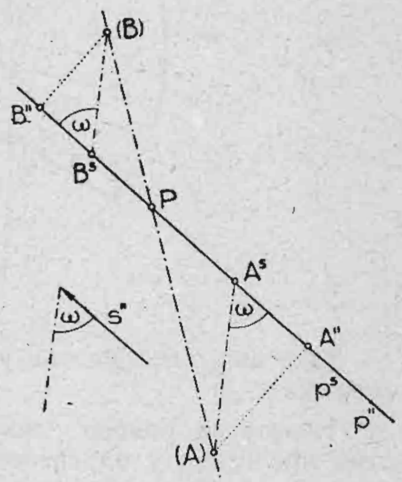
Задатак. *Одредити праву величину дужи AB дате својом косом и управном пројекцијом на раван π.*

Да би се дуж AB добила у правој величини оборимо је у раван слике (сл. 454). Треба наћи отстојање тачака A и B од π, а тада се обарање врши на познат начин, трапезом $(A)A''B''(B)$. Ако се уочи траг T праве AB довољно је наћи отстојање тачке A, јер $(A)(B)$ пролази кроз T, па се (B) добија непосредно из B''.

Права (или дуж) је потпуно одређена обим пројекцијама, сем ако се пројекције поклапају или ако се једна од њих своди на тачку, тј. ако је права $\perp \pi$ или $\parallel s$. У таквим случајевима треба знати обе пројекције двеју њених тачака. У слици 455 претстављена је права p за коју је $p^s = p''$ и која је одређена пројекцијама двеју својих тачака A и B. Тада можемо напр. обарањем тачака A и B оборити праву.



Сл. 454



Сл. 455

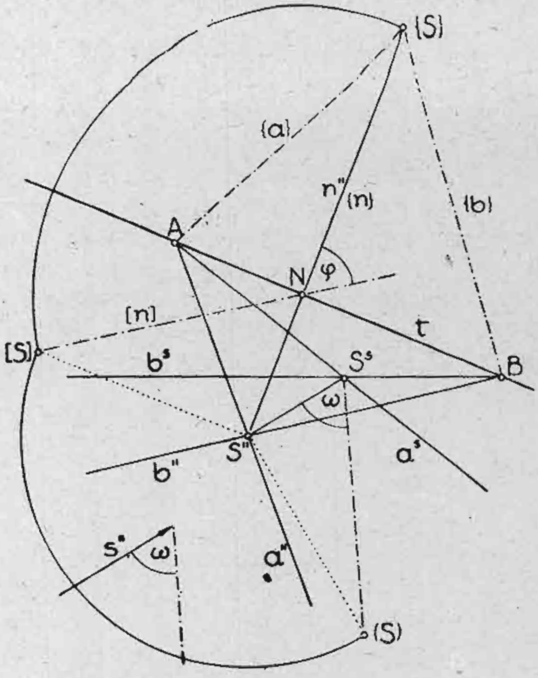
Раван: Раван је одређена чим се знају обе пројекције трију њених тачака које не припадају једној правој.

Задатак. *Раван τ је дата обим пројекцијама двеју својих правих a и b. Одредити траг равни τ и нагиб према равни π, затим је оборити у π.*

Из пројекција правих a и b знамо трагове $A = a^s \times a''$, $B = b^s \times b''$, дакле и траг t равни τ (сл. 456). Тачку $a \times b = S$ имамо у обим пројекцијама, јер $S^s = a^s \times b^s$, $S'' = a'' \times b''$, а самим тим и управну пројекцију s'' зрака пројектовања, дакле потребан је само још угао ω да би задатак био одређен. Обарањем праве $[S \parallel s]$ нађимо (S) а затим, знајући отстојање тачке S од π повуцимо у управној пројекцији линију пада n кроз S. Оборивши је на познати начин добијамо нагиб φ равни τ. Сад се може наћи тачка $\{S\}$ у коју пада S ако се τ обори око t.

Нагласимо још да смо се косом и управном пројекцијом на исту раван већ бавили, посматрајући управну пројекцију неког предмета на извесну раван и његову сенку на исту раван при упоредном осветљењу (у одељку IV: прву пројекцију и сенку на π_1 или другу пројекцију и сенку на π_2 итд.).

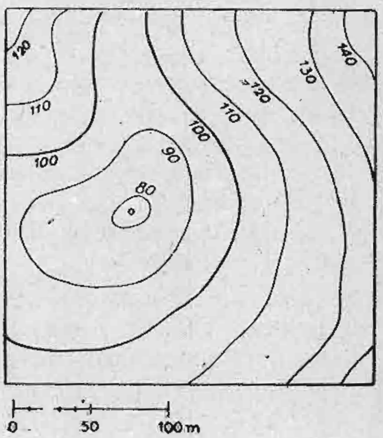
Како отстојања могу у управној пројекцији бити дата и котама, можемо косу пројекцију конструисати и непосредно из котиране пројекције, да би се напр. некој земљишној површи дала очигледнија слика.



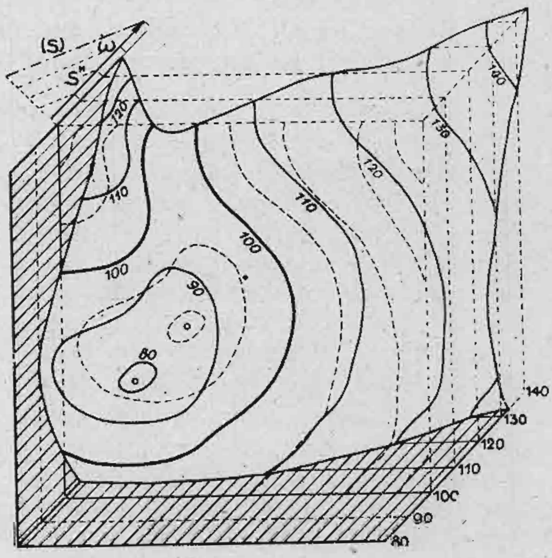
Сл. 456

Задатак. *Претставити у косој пројекцији земљишну површ дату у слици 457а.*

Нацртајмо поново слику 457а (испрекидане криве у сл. 457б) а затим пренесимо у одређеном косом смеру s'' поједине изохипсе (паралелним померањем). Свака изохипса се помера за дуж која је сразмерна висинској разлици спрам извесне полазне висине. За раван π $(\equiv \pi_2)$ изабрали смо хоризонталну раван у висини 100.



Сл. 457а



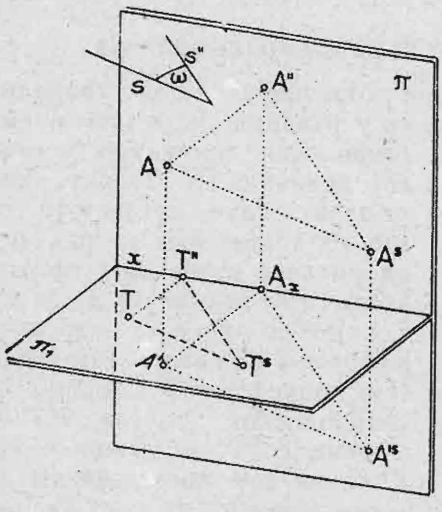
Сл. 457б

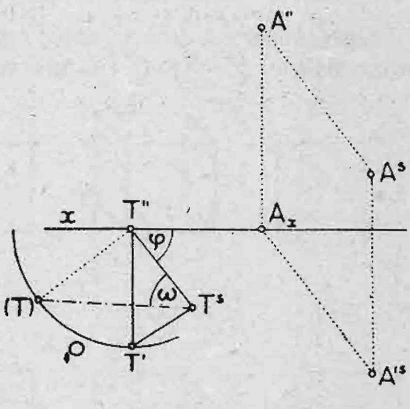
Према томе изохипса на тој висини остаје при косом пројектовању на своме месту; више изохипсе померају се у смеру s'' а ниже у супротном смеру. Оборени зрак (s) добија се кад се на s'' пренесе дуж за коју се помера изохипса висине 140, а управно на s'' дуж са мерила, која претставља 40 m.

166. КОСА ПРОЈЕКЦИЈА НА ЈЕДНУ РАВАН СЛИКЕ УЗ ЈЕДНУ ПОСРЕДНУ УПРАВНУ ПРОЈЕКЦИЈУ

У овом и следећим параграфима ове главе бавићемо се много употребљаваном методом косог пројектовања, која се обично назива једноставно *косом пројекцијом**, а можемо је назвати и *методом посредне пројекције*, будући да у њој узимамо у обзир, сем непосредне косе пројекције, и косу пројекцију управне пројекције предмета на другу једну (хоризонталну) раван.

Предмет може, наиме, да буде одређен косом пројекцијом на једну раван слике и кад се зна његова пројекција на неку другу раван, па се и та пројекција пројектује у истој косој пројекцији на раван слике. Тај начин у нормалној пројекцији разматрали смо већ у гл. II претходног одељка, а сад га уводимо у косу пројекцију. За раван слике (цртања) π узимамо обично вертикалну раван, а предмет пројектујемо још и управно на једну хоризонталну раван π_1, која се обично зове *раван тла*, и тај тлоцрт пројектујемо заједно с предметом самим косо на раван слике π.





Сл. 458

Косу пројекцију обележавамо као досад горњим индексом s, а пројекцију на π_1 цртицом; дакле напр. A^s је коса пројекција тачке A, A' управна пројекција на π_1 а A'^s коса пројекција тачке A', тј. посредна пројекција тачке A (сл. 458).

*) Неки је називају и *кавалијерском перспективом*; други тако зову засебан случај косе пројекције (§ 167).

Сматрамо дакле да су тачке у простору, а тако и други геометријски **ликови** задати непосредном и посредном косом пројекцијом.

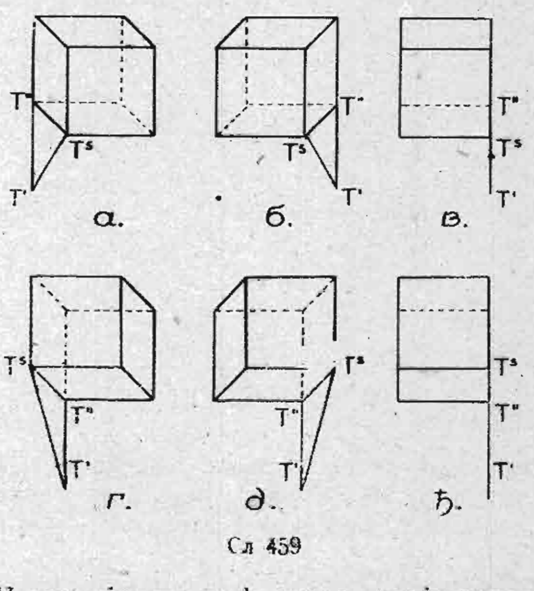
У задацима долази у обзир и управна пројекција на раван π. Та **раван прима** тада улогу равни $\pi = \pi_2$ двеју непосредних пројекција. **Управну** пројекцију на π_2 обележавамо тада опет двема цртицама. Праву у којој се секу равни π_1 и π_2, тј. *линију тла* обележавамо словом x. Праве које спајају обе косе пројекције појединих тачака, као што је $A^s A'^s$ и које су управне на оси x, јесу ординале косих пројекција.

Смер пројектовања може се и сада задати управном пројекцијом оријентисане дужи s на раван π и њеним нагибом ω, али погодније је поћи од једне тачке T у равни π_1 и задати њену косу пројекцију T^s, управну пројекцију T'' и отстојање TT'' од равни слике. Ово отстојање може бити дато у равни слике као дуж TT'' оборена ма у ком смеру, тј. у виду *круга отстојања*, o, описаног око T'' полупречником TT'' (сл. 458б). Ако из T'' повучемо управну на T^sT'' до пресека (T) с кругом o, тада је $(T)T^s$ оборени пројекцијски зрак, који пројектује тачку T у T^s, дакле $\sphericalangle T''T^s(T) = \omega$. Но предност има обарање тачке T у смеру управном на осу x, у T', ради обарања тлоцрта у раван слике. Троугао $T^sT''T'$ се зове *пројекцијски троугао.*

Смер пројектовања може бити дат и бројевима, а за те бројеве узима се обично: величина φ оштрог угла између осе x и дужи $T''T^s$ *(угла скретања)* и *размера скраћења* n, по којој су скраћене у косој пројекцији све дужи које су управне на равни слике, тј. $n = T''T^s/T''T'$

167. ПРОЈЕКЦИЈА КОЦКЕ. ИЗБОР СМЕРА ПРОЈЕКТОВАЊА

Посматрајмо коцку којој су две стране хоризонталне а две упоредне према равни π. Како се ликови садржани у равнима упоредним према равни слике пројектују у правој величини и облику, две пљосни коцке пројектују се као квадрати, али за разлику од управне пројекције ти квадрати се не поклапају. За тачку T којом се одређује смер пројектовања можемо узети једно теме коцке (сл. 459). Страна $T'T''$ пројекцијског троугла $T^sT''T'$ једнака је TT'', тј. ивици коцке. У слици 459 претстављена је коса пројекција за шест разних смерова пројектовања. У сликама а, б и в смер пројектовања је уперен косо наниже и пружа поглед на коцку озго. У сликама г, д и ђ смер пројектовања је уперен косо навише и пружа поглед оздо.



Сл 459

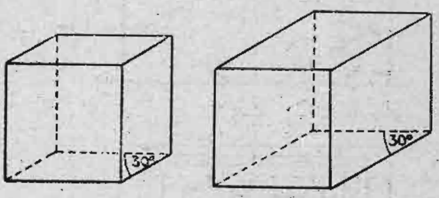
У случајима в и ђ зраци пројектовања припадају равнима управним на π и π_1: тада слици коцке недостаје очигледност

Већ из овог примера произлази практична вредност ове методе косе пројекције, којом се на лак начин долази до очигледних слика, а задаје смер пројектовања. Из добијених слика добијају се пак једноставно димензије претстављених предмета у правцима упоредним према равни π и управним на π, јер прве се показују у правој величини а што се других тиче, за размеру скраћења може се изабрати који било погодан број.

За поменути угао скретања (између x и s'') узима се обично $\varphi = 30^0$, 45^0 или 60^0, а за размеру скраћења неки разломак с малим бројевима, напр. $n = 1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$.

Да би коса пројекција дала природну слику предмета треба да нагиб ω зрака пројектовања према равни слике буде рецимо већи од 60^0, дакле,

$$n = \operatorname{ctg} \omega < \frac{1}{2}.$$



а. б.

Сл. 460

За $n \geqslant 1$ слике су неприродне. Али за $n = 1$ имамо ту предност што су и дужи у правцу управном на равни слике дате у слици у правој величини. Најлепшим се сматрају слике за $\varphi = 30^0$ и $n = 1/2$. Ако је $n = 1$ и $\varphi = 45^0$ коса пројекција се назива *кавалијерском перспективом**.

У сл. 460 нацртана је коцка а) за $\varphi = 30^0, n = 1/2$, б) за $\varphi = 30^0$, $n = 1$. Сл. 461 претставља предмет (асирско-вавилонски храм) а) у двема управним пројекцијама, б) у косој пројекцији са $\varphi = 30^0$, $n = 1/2$, в) у кавалијерској перспективи.

Задаци за вежбу

1. Увећати слику 261а, а затим из ње извести 261 б и в.

2. Нацртати исти предмет у косој аксонометрији са $\alpha = 10^0$, $\beta = 30^0$, скраћење дубине 3:4.

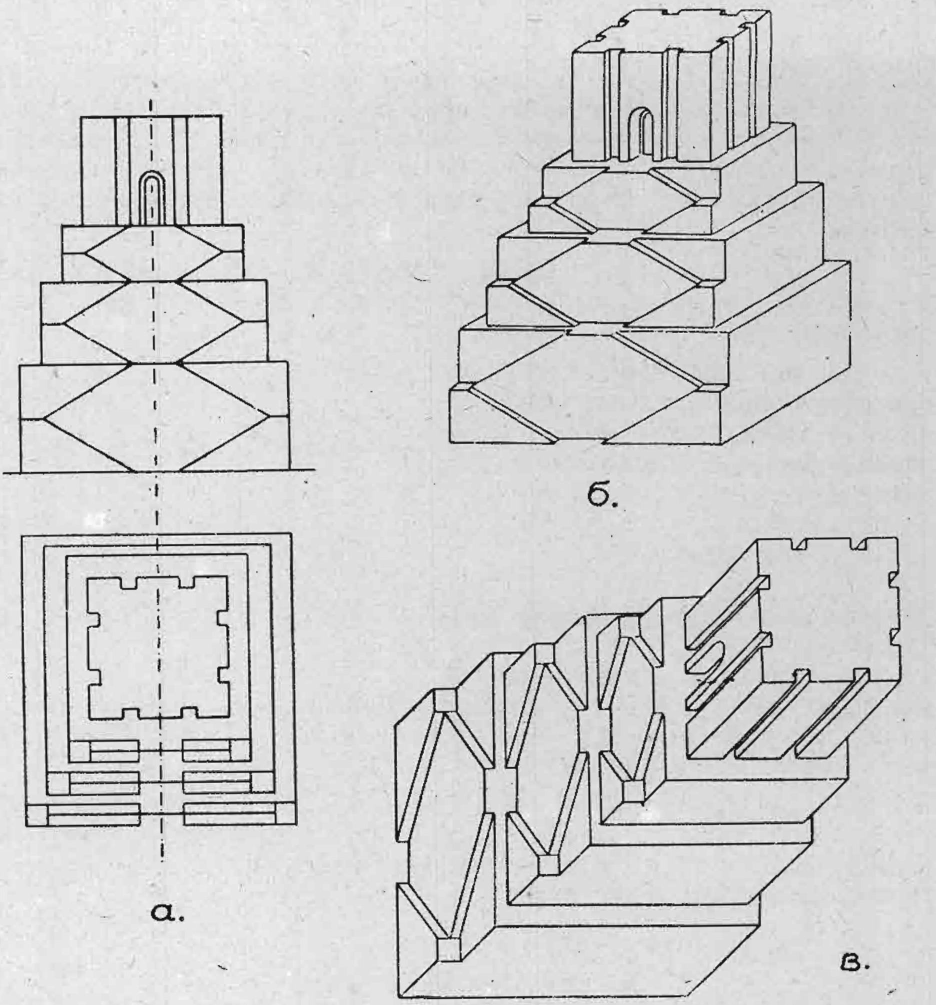
3. Нацртати у косој пројекцији с изабраним углом скретања и размером скраћења предмете претстављене у сликама 421, 442, 448.

4. Исто за предмет у слици 412.

5. Исто за предмет у слици 381 (оса површи нека буде управна на π).

---

*) При томе би требало првенствено сматрати раван слике хоризонталном, а кавалијерску перспективу истоветном с тзв. *птичјом перспективом*, но аутори се у дефиницијама не слажу. Реч „перспектива" не указује овде на централну пројекцију. Назив „кавалијерски" (коњанички) указује на поглед с висине и потиче, вероватно, од извесних узвишица на утврђењима, званих кавалијерима (cavaliers).



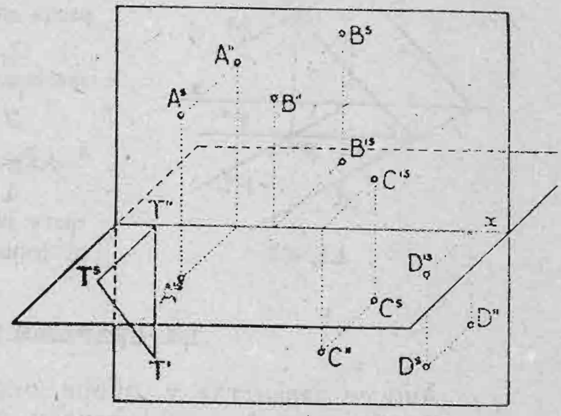
Сл. 461

168. ТАЧКА, ПРАВА И РАВАН

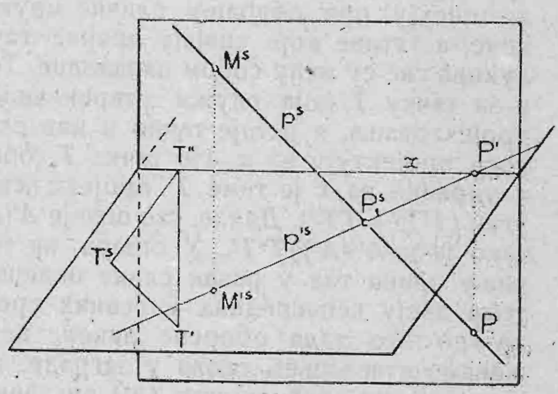
Тачка. Приметимо пре свега да правоугаоник $AA'A_xA''$ у сл 458 прелази косом пројекцијом у паралелограм $A^sA'^sA_xA''$ (дакле дуж $A^sA'^s$ једнака је отстојању тачке A од π_1). Као што се види из сл. 462, за тачке у разним квадрантима простора, који су одређени равнима π и π_2 распоред косе непосредне, косе посредне и управне пројекције на одговарајућем паралелограму је различит.

Ако је тачка A дата пројекцијама A^s и A'^s, налази се одмах A'' повлачењем упоредних правој T^sT'' кроз A^s и A'^s и упоредне правој $A^sA'^s$ кроз A_x. И обрнуто, ако је дато A^s и A'' налази се одмах A'^s. Дакле, из ове методе посредне пројекције прелази се лако у методу отстојања и обрнуто.

Очигледност косе пројекције може се повећати претстављањем равни π_1 и π_2 помоћу њихових ограничених, правоугаоних делова, као што је учињено у сликама 462 и 463.



Сл. 462



Сл. 463

Права. пресек обих пројекција p^s и p'^s је коса пројекција $P_1{}^s$ трага $P_1 = p \times \pi_1$ праве p у равни π_1, а траг P праве p у равни слике добија се на ординали кроз $P' = x \times p'^s$ (сл. 463).

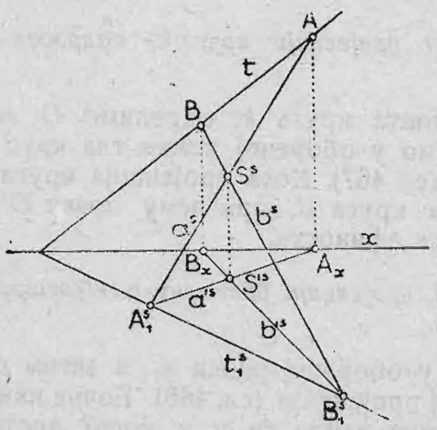
Раван. Два трага равни: траг a, у равни слике, и траг a_1, у равни основе, који је у слици претстављен својом косом пројекцијом a'_1, секу се на оси x.

Задатак 1. *Одредити трагове равни τ, дате двема правим a и b које се секу.*

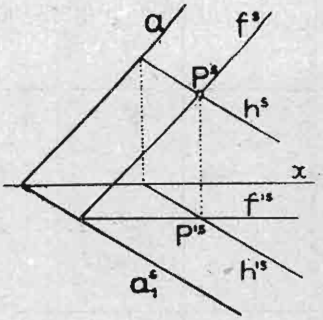
Како је дато a^s, a'^s и b^s, b'^s (сл. 464) имамо трагове $A_1{}^s = a^s \times a'^s$ и $B_1{}^s = b^s \times b'^s$ и, на ординалама кроз A_x и B_x, трагове A и B правих a и b, а отуд трагове равни τ, $t = AB$ и $t_1{}^s = A_1{}^s B_1{}^s$. Оба трага се, очигледно, секу на оси x. Но то можемо и доказати на основу Дезаргова става. Нека је, наиме, $a \times b = S$. Троугли ABS^s и $A_x B_x S'^s$ су перспективни, јер је $AA_x \| BB_x \| S^s S'^s$; дакле тачке $AB \times A_x B_x$, $AS^s \times A_x S'^s = A_1{}^s$ и $BS^s \times B_x S'^s = B_1{}^s$ секу се на једној правој, тј. пресек правих t и x налази се на правој $A_1{}^s B_1{}^s = t_1{}^s$.

Задатак 2. *Дата је једна пројекција тачке P која је у равни датој траговима. Наћи другу пројекцију тачке P.*

Узмимо да је дата непосредна пројекција P^s (сл. 465). Посредну пројекцију P'^s можемо добити помоћу које било праве у равни α, напр. повлачењем обих пројекција хоризонтале h кроз P или фронтале f кроз P.



Сл. 464



Сл. 465

Задаци за вежбу

1. Одредити у косој пројекцији пресек двеју равни датих траговима.

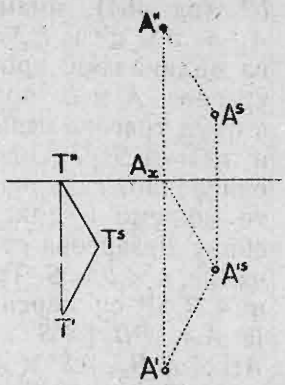
2. Одредити продор праве и равни, датих траговима.

Упутство: Поставити кроз праву раван а $\perp \pi_1$, б) $\perp \pi$.

3. Решити претходни задатак кад се а) оба трага дате равни поклапају у пројекцији, б) обе пројекције дате праве поклапају.

169. ОБАРАЊЕ РАВНИ ТЛА

Ако се раван тла π_1 обори око осе x у раван слике, пројекција A' ма које тачке A пашће у неку тачку (A') на правој која пролази кроз A'' и управна је на x (сл. 466). Све тачке равни π_1 које нису на x, описују при обарању сличне кружне лукове, а тетиве које спајају крајње тачке тих лукова све су међу собом паралелне. То вреди и за тачку T која служи утврђивању смера пројектовања, а остаје тачно и кад се тетиве косо пројектују на π. Но тачка T, оборена у π управно на x је теме T' пројекцијског троугла ($T'T''=TT''$). Дакле, као што је $A'(A')\parallel TT'$, тако је и $A'^s(A')\parallel T^sT'$. У ствари, на том обарању равни тла у раван слике оснива се метода двеју непосредних управних пројекција, па као што тада оборене ликове не обележавамо стављањем слова у заграде, тако нећемо ни сад, већ уместо (A') писаћемо опет A'. Троугли $T^sT''T'$ и A'^sA_xA' су слични и одговарајуће стране су им упоредне.



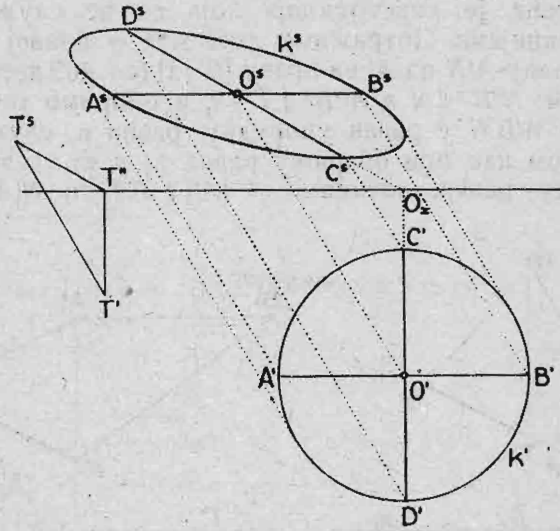
Сл. 466

Задатак 1. *Конструисати у косој пројекцији круг k, садржан у равни тла.*

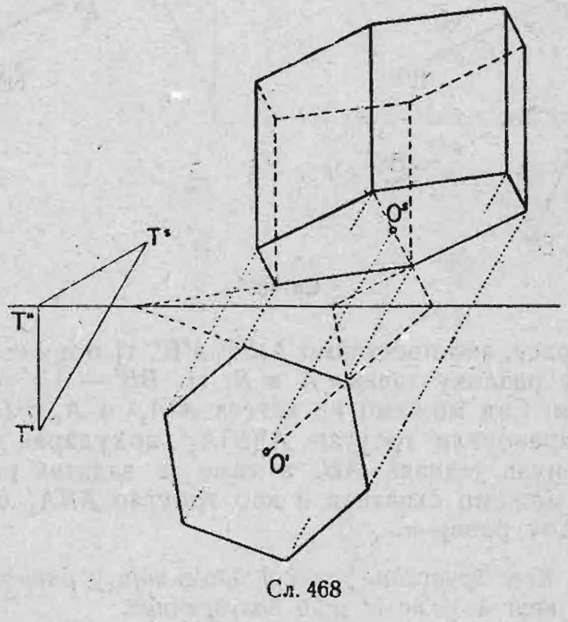
Ако је дата пројекција O^s средишта круга k, одредимо O' помоћу пројекцијског троугла и опишимо у обореној равни тла круг k' из тачке O' задатим полупречником (сл. 467). Коса пројекција круга k је елипса перспективно афина спрам круга k', при чему права $O'O^s$ даје правац зрака афиности а x је оса афиности.

Задатак 2. *Конструисати у косој пројекцији правилну шестострану призму с доњом основом у равни тла.*

Конструишимо прво шестоугао у обореној равни π_1, а затим помоћу афиности тај шестоугао у косој пројекцији (сл. 468). Бочне ивице призме су паралелне према равни слике, дакле се и у косој пројекцији виде као дужи управне на оси x и у правој величини.



Сл. 467



Сл. 468

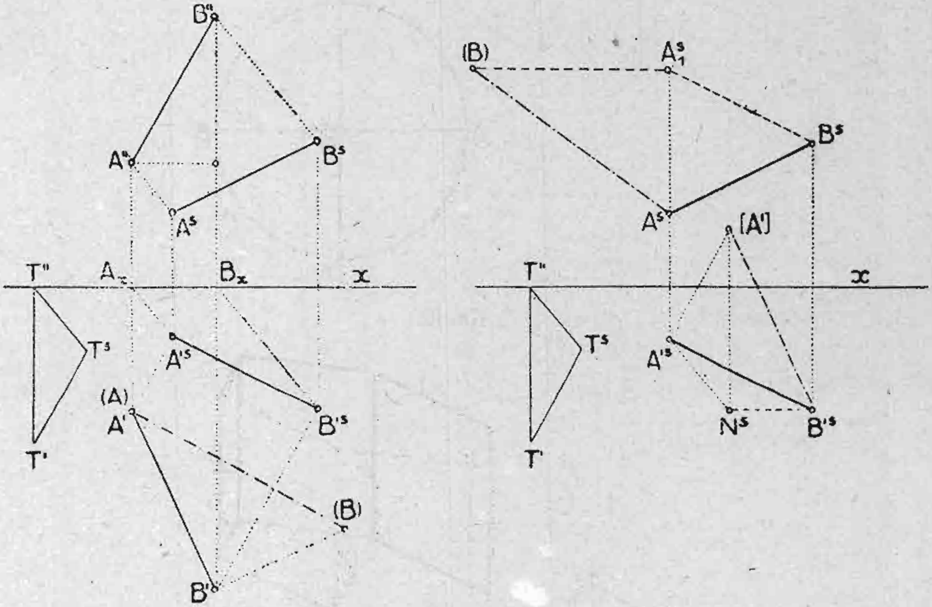
170. ПРЕЛАЗ У ДВЕ НЕПОСРЕДНЕ УПРАВНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ И ОБРАТНО

Обарањем равни тла прелази се непосредно из косе пројекције у две непосредне управне пројекције, и обратно. Дакле задаци, особито метрички, могу се решавати у двема управним пројекцијама па решења пренети у косу пројекцију.

Задатак 1. *Одредити праву величину дужи AB.*

Преко тачака A_x и B_x долазимо прво до A', A'', B', B'', а отуд на познати начин до $(A)(B) = AB$ (сл. 469 лево).

Нешто краћа је конструкција која се не служи непосредним управним пројекцијама. Потражимо дуж $A'B'$ у правој величини. Спустимо зато управну $A'N$ из A' на праву $[B' \parallel x]$ (сл. 469 десно) а то значи у косој пројекцији: $N^sB'^s \parallel x$ и $A'^sN^s \parallel T^sT'$, и оборимо тачку A', тј. правоугли троугао $A'B'N$ у раван упоредну равни π, служећи се пројекцијским троуглом као при обарању равни π_1 у π; тј. ако је $[A']$ тачка A' оборена у ту раван, начинимо $A'^s[A'] \parallel T^sT'$ и $N[A'] \perp x$. Тада је $[A']B'^s = A'B'$.



Сл. 469

С друге стране, ако поставимо $A_1B \# A'B'$, тј. повучемо $A_1{}^sB^s \# A'^sB'^s$, имамо висинску разлику тачака A и B, тј. $BB' - AA' = AA_1 = A^sA_1{}^s$ у правој величини. Сад можемо из катета $A^sA_1{}^s$ и $A_1{}^sB^s (= A'B' = [A']B'^s)$ конструисати правоугли троугао $A^s(B)A_1{}^s$ подударан троуглу ABA_1, коме је хипотенуза једнака AB, а тиме је задатак решен. Конструисани троугао можемо схватити и као троугао ABA_1 оборен око AA_1 у раван упоредну равни π.

Задатак 2. *Конструисати у косој пројекцији у равни α задатој траговима a и $a_1{}^s$, круг k коме је дат полупречник.*

Помоћу једне главне линије можемо из једне пројекције средишта O круга k наћи другу, напр. из O^s тачку O'^s (сл. 470). Пређимо затим у две управне пројекције. Помоћу пројекцијског троугла одредимо за коју било тачку M на трагу a_1 равни α, из M^s оборену тачку M'. Тиме имамо први траг a_1 у обореној равни π_1. Слично као M' одредимо O'. Како је $a = a_2$, можемо оборити раван α око a_1, одредити (O), описати круг (k) и отуд одредити елипсу k', прву пројекцију круга k. Елипса k'^s, која претставља косу пројекцију елипсе k' добија се као перспективно афина слика елипсе k' при чему је x оса афиности. На исти начин обарањем равни α око a у π_2 може се добити елипса k^s као перспективно афина слика елипсе k'', па и круга $[k]$ у π_2 при чему је a оса афиности. Но k^s можемо добити и из k'^s као перспективно афину слику те елипсе, с осом афиности $a_1{}^s$.

Задаци за вежбу

1. Одредити трагове једне праве у двема непосредним управним пројекцијама из њених косих пројекција, и обратно.

2. Нацртати у косој пројекцији за $\varphi = 30^0$, $n = 1/3$ праву кружну купу с основом у π_1 и врхом горе, и сенке при упоредном осветљењу.

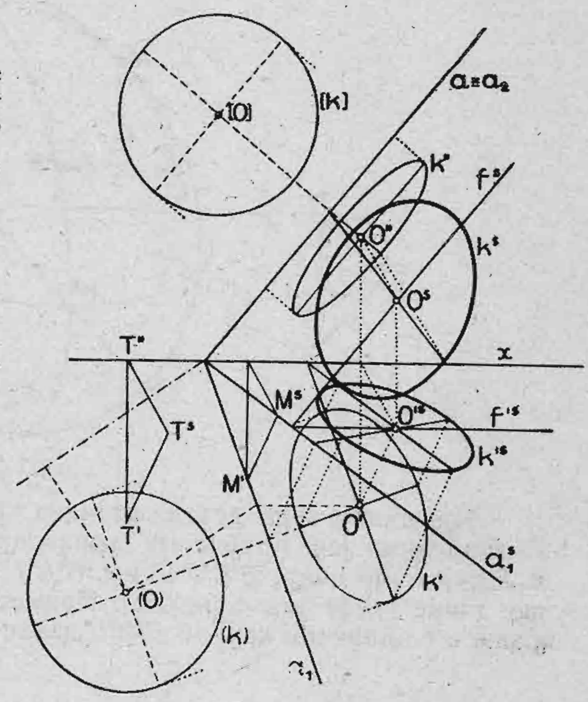
3. Конструисати у косој пројекцији за $\varphi = 45^0$, $n = 2/3$ бочну површ праве кружне купе с хоризонталном основом и врхом доле. и сопствену сенку и бачену у унутрашњост површи, при средишњем осветљењу.

4. Нацртати у косој пројекци,и квадрат коме су две стране на двема датим упоредним правим општег положаја Узети за правац пројектовања $\varphi = 45^0$, $n = 1/2$.

5. Одредити отстојање дате тачке од равни дате траговима.

6. Конструисати у косој пројекцији коцку у општем положају.

7. Конструисати у косој пројекци и обртну површ с вертикалном осом, нацртавши известан број паралела.

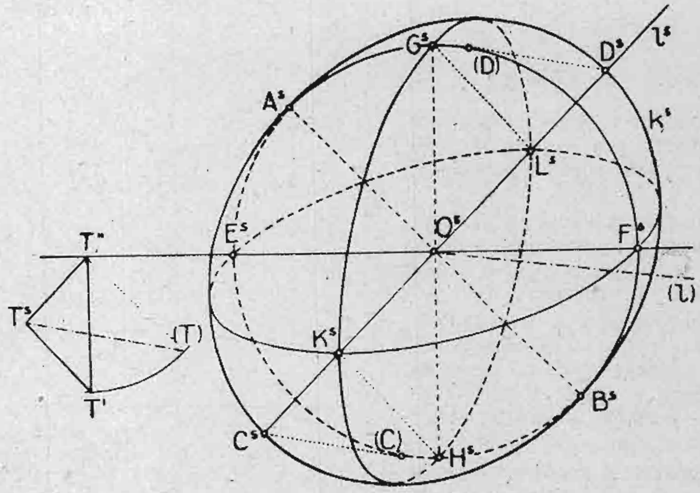


Сл. 470

171. КОСА ПРОЈЕКЦИЈА ЛОПТЕ

Зраци пројектовања који додирују лопту, као и зраци светлости кад се тражи сенка лопте, одређују руб k^s њене косе пројекције и образују праву кружно ваљкасту површ. Ова додирује лопту у великом кругу $ACBD$ чија раван је управна на зрацима пројектовања, а тај круг се пројектује као елипса $A^sC^sB^sD^s$ (сл. 471). Та елипса је руб k^s косе пројекције лопте. Да бисмо је одредили приметимо да је раван σ, која је управна на π и садржи пројекцијски зрак l кроз средиште O лопте, раван симетрије за лопту, ваљкасту површ и раван π, дакле и за елипсу k^s. Према томе пречник AB лопте, који је управан на σ даје малу осу те елипсе, а велику осу C^sD^s можемо добити обарањем у раван π круга по коме σ сече лопту.

Претпоставимо да је O на оси x. Велики круг $EHFG$ по коме раван π сече лопту садржи пречник AB, а пројектује се у тај исти круг. Дакле $A^sB^s = AB \perp l^s \parallel T^sT''$. Но и круг пресека са σ, оборен око праве l^s у π, поклапа се с кругом $EHFG$. Оборимо још и зрак l. У ту сврху нека је (T) тачка T оборена у истом смеру, тј. $T''(T) \perp T^sT''$. Тада је $(T)T^s$ оборени зрак TT^s, дакле $(l) \parallel (T)T^s$. Дирке обореног круга, паралелне правој (l) додирују га у тачкама (C) и (D), а секу l^s у C^s и D^s. Добивши осе A^sB^s и C^sD^s можемо конструисати елипсу k^s.



Сл. 471

Пројекције свих других великих кругова додирују изнутра елипсу k^s. Одредимо још пројекцију хоризонталног круга и управног на оси x. Пројекције обих, $E^sK^sF^sL^s$ и $L^sG^sK^sH^s$ пролазе кроз K^s и L^s и само те две тачке треба још одредити. Приметимо зато да се круг $EHFG$ поклапа и с обореним кругом $EKFL$ дакле $HK^s = H^sK^s \parallel T^sT'$ и $G^sL^s \parallel T^sT'$.

ДЕО СЕДМИ

СРЕДИШЊА ПРОЈЕКЦИЈА (ПЕРСПЕКТИВА)

ГЛАВА I

ОСНОВЕ. МЕТОДА ПРОДОРА

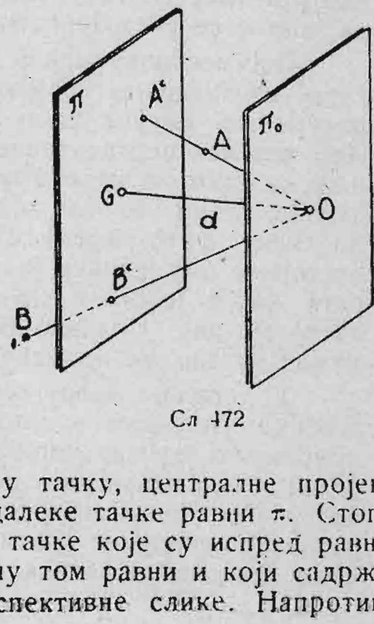
172. ОКО, РАВАН СЛИКЕ И РАВАН ИШЧЕЗАВАЊА. ОТСТОЈАЊЕ ОКА

У средишњој (централној) пројекцији или *перспективи* (од латинске речи perspicere = прозирати, јасно видети) пројектује се предмет из једне коначно удаљене тачке, *средишта пројектовања* или *очне тачке*, или краће *ока*, на раван слике (пројекцијску раван) π. *Зраци пројектовања* (или *гледања*) су праве које пролазе кроз O, а *пројектујуће равни (равни гледања)* равни које пролазе кроз O. Обично се замишља да је раван π вертикална и да је с оне стране очне тачке с које је предмет, тј. да полуправе на зрацима гледања, које полазе из очне тачке и пролазе кроз тачке предмета, продиру раван слике (сл. 1 и 2 у § 5).

Тачка A^c у којој зрак гледања, пролазећи кроз тачку A сече раван π је *средишња (централна) пројекција* или *перспективна слика* тачке A.

Централне пројекције тачака, правих итд. обележавамо уопште горњим индексом c.

Тачка која је између очне тачке и своје пројекције је *испред* равни слике (сл. 472, тачка A), а тачка чија пројекција је између очне тачке и саме те тачке је *иза* равни слике (тачка B). Тачке садржане у равни слике поклапају се са својим централним пројекцијама.



Сл 472

За тачке садржане у равни π_0, која је упоредна равни π и пролази кроз очну тачку, централне пројекције ишчезавају, тј. постају бесконачно далеке тачке равни π. Стога се раван π_0 зове *раван ишчезавања*. Само тачке које су испред равни ишчезавања, тј. у полупростору ограничену том равни и који садржи пројекцијску раван π, у равни π перспективне слике. Напротив, тачке које су иза равни ишчезавања немају централних пројекција у конкретном смислу, већ само у геометријском. То су само тачке продора пројекцијских зрака кроз раван π, но које се *такође могу употребљавати* у решавању задатака. Полупростор испред равни ишчезавања назива се *видним* (такође *реалним*) *полупростором*, а полупростор иза те равни *геометријским (виртуалним) полупростором*.

Да би централно пројектовање било одређено треба да положај очне тачке према равни π буде одређен. Знајући с које стране равни π је око O, положај му је потпуно одређен управном пројекцијом на π и отстојањем од π. Управна пројекција ока на раван слике π зове се *главна тачка;* обележаваћемо је словом G. Отстојање OG зове се *отстојање очне тачке (дистанција ока)* или само *отстојање (дистанција)*. Зрак који пролази кроз главну тачку је *главни зрак*. Главна тачка је природно средиште перспективне слике, јер природно је претпоставити да је раван слике управна на зраку гледања који пролази отприлике кроз средиште слике.

Вертикална права у равни слике, која пролази кроз главну тачку G зове се вертикала.

173. ОСОБИНЕ ПЕРСПЕКТИВЕ. ВЕЗАНА И СЛОБОДНА ПЕРСПЕКТИВА

У перспективи пројектују се тачке на правој као тачке на правој, али пројекције упоредних правих нису упоредне, нити се размера дужи на једној правој или на упоредним правим одржава у пројекцији. Стога се напр. из перспективне слике не могу непосредно узимати праве величине оних дужи које су упоредне равни слике, као што се може из слика у паралелним пројекцијама. Али у перспективи слике имају велику очигледност, особито кад претстављају веће предмете, на којима се у стварности изразито истичу закони перспективе.

Перспективна слика показује пак највећу очигледност кад се гледа из средишта пројектовања (које се зато и зове „око“). Ово је, разуме се, могуће само кад отстојање очне тачке није премалено. Ако нам пак перспективне слике пружају природан утисак и кад на њих гледамо из неке друге тачке простора, то долази бесумње од навике, којој много доприноси рашитеност фотографских слика. За сваку фотографску слику око је извесна тачка испред слике, а отстојање ока једнако је отстојању објектива од равни филма у апарату којим је слика снимљена. Дакле требало би слику посматрати из те даљине. Но како је та даљина обично премалена, гледамо из даљих тачака, не примећујући при томе разлику.

У довољно малој околини тачке G зраци пројектовања су приближно упоредни и управни на π, дакле ту је перспективна слика приближно једнака управној пројекцији. У близини сваке друге тачке равни π перспективна слика је приближно истоветна с косом пројекцијом. Средишња пројекција је уопштење упоредне пројекције, упоредна пројекција је средишња пројекција којој је средиште пројектовања бесконачно далека тачка.

---

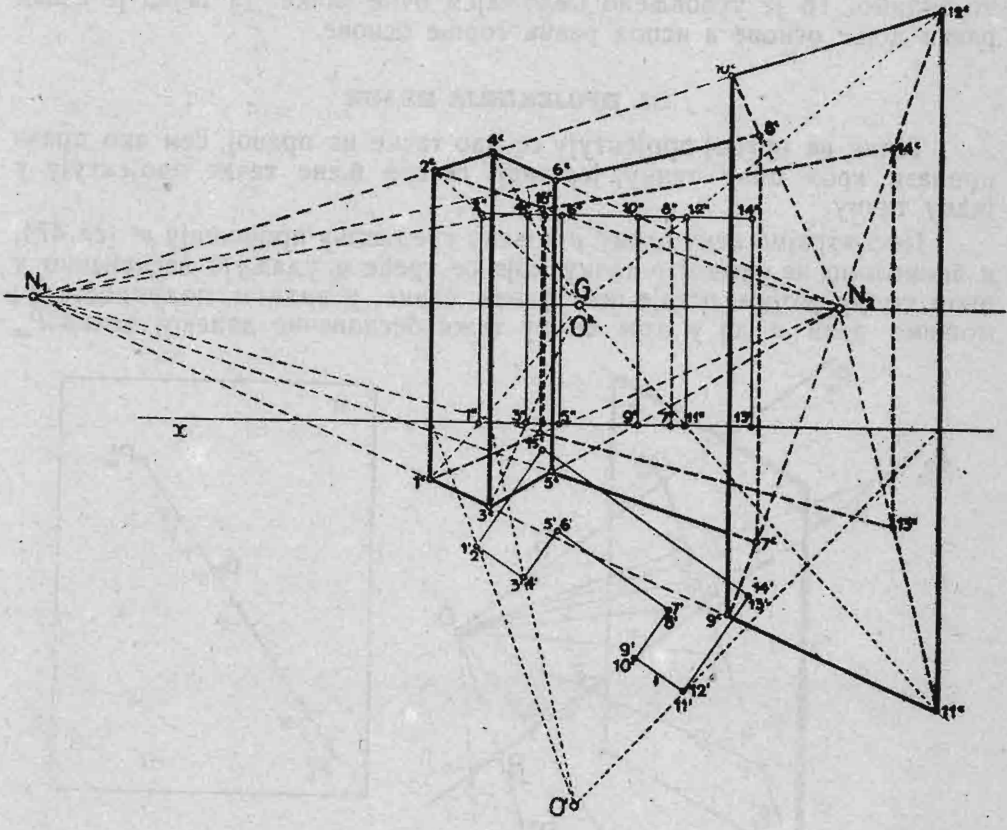
*) Неки писци називају главну тачку „очном тачком“. То не усвајамо, да се „главна тачка“ не би заменила с „оком“.

Средишњим пројектовањем смо се већ у ствари бавили конструишући сенке које при централном осветљењу предмети бацају на равни.

Као што смо напр. у аксонометрији разликовали везану и слободну аксонометрију, тако можемо и у перспективи разликовати *везану* и *слободну* перспективу, тј. предмет може бити дат неком другом врстом пројектовања, напр. двема управним пројекцијама, па на основу тога налазимо његову перспективну слику, или напротив, конструишемо перспективну слику непосредно.

174. ПРИМЕР КОНСТРУКЦИЈЕ ПЕРСПЕКТИВНЕ СЛИКЕ. МЕТОДА ПРОДОРА

Почнимо одмах с примером везане перспективе, у коме је предмет (призмасто тело) дат у двема управним пројекцијама (сл. 473, — део извучен танким линијама). Претпостављамо да је вертикална раван π_2 уједно раван π централног пројектовања. Изабравши положај очне тачке O, перспективну слику предмета налазимо тражећи средишње



Сл. 473

пројекције појединих његових тачака, тј. тачке продора (или трагове) одговарајућих пројекцијских зрака кроз раван π_2. Конструкција је иста као да тражимо сенку тог предмета на раван π_2 при средишњем осветљењу из тачке O. У том одређивању тачака продора зрака пројектовања, на основу двеју управних пројекција састоји се у перспективи *метода продора*.

Као што и та слика показује, средишње пројекције паралелних ивица нису увек паралелне. Вертикалним ивицама пројекције су вертикалне, дакле паралелне. Напротив, хоризонталним ивицама пројекције су косе.

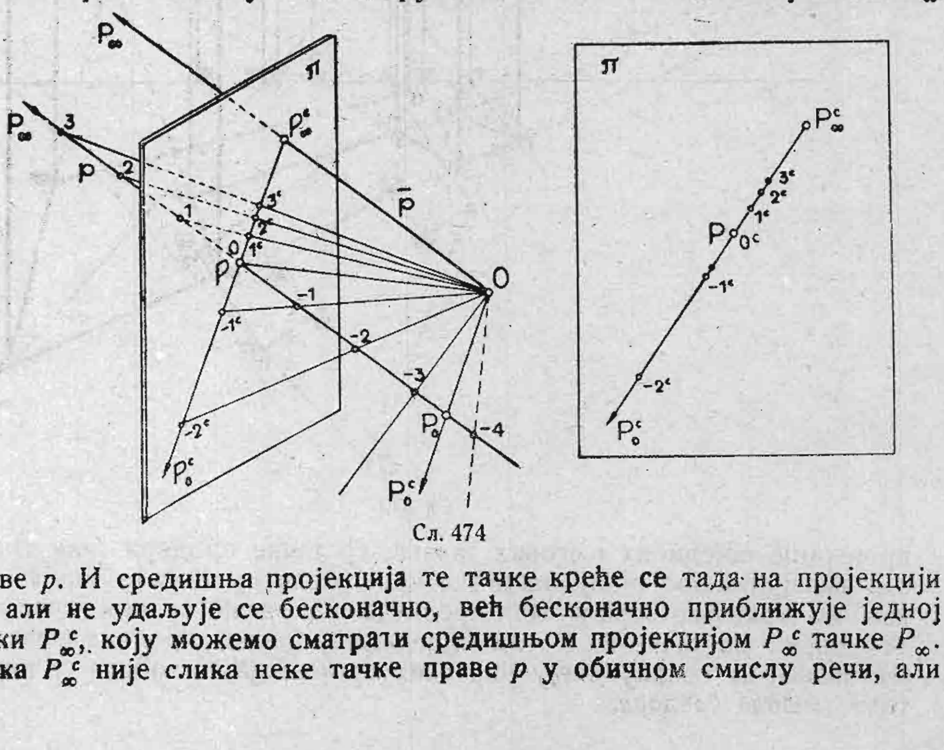
Средишње пројекције једнаких ивица нису опште узевши (а на слици 473 никад) једнаке: од двеју једнаких ивица ближа је већа а даља мања; то зна свако и из искуства.

Док у паралелној пројекцији све равне површи које су међу собом паралелне видимо с исте стране, у средишњој пројекцији није тако. У другој пројекцији напр. пљосни *3 4 6 5* и *11 12 14 13* видимо обе, јер их гледамо с десне стране. Напротив, у средишњој пројекцији те пљосни нам окрећу супротне стране и у вези с тим види се само пљосан *3 4 6 5*. Исто тако, док у првој пројекцији гледамо на горњу и доњу основу тела с исте стране, наиме озго, у средишњој пројекцији гледамо на доњу основу озго, а на горњу оздо, па ни једну не видимо. То је условљено положајем очне тачке: та тачка је изнад равни доње основе а испод равни горње основе.

175. ПРОЈЕКЦИЈА ПРАВЕ

Тачке на правој пројектују се као тачке на правој, сем ако права пролази кроз очну тачку, јер тада се све њене тачке пројектују у једну тачку.

Посматрајмо неку праву p и њену средишњу пројекцију p^c (сл. 474) и замислимо на правој p тачку која се креће и удаљује бесконачно у оном смеру којим остаје иза равни слике, у видном полупростору; можемо рећи и да у том смеру тежи бесконачно далекој тачки P_∞



Сл. 474

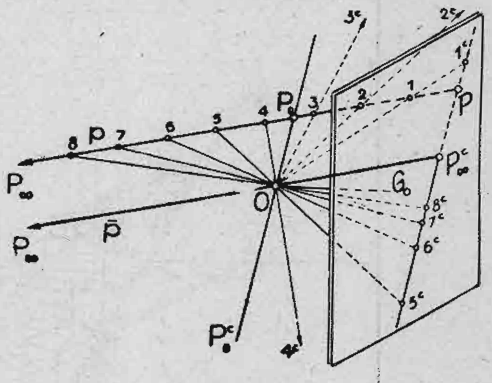
праве p. И средишња пројекција те тачке креће се тада на пројекцији p^c, али не удаљује се бесконачно, већ бесконачно приближује једној тачки P_∞^c, коју можемо сматрати средишњом пројекцијом P_∞^c тачке P_∞. Тачка P_∞^c није слика неке тачке праве p у обичном смислу речи, али је у перспективи значајна и зове се *недоглед* праве p. *Дакле недоглед неке праве је средишња пројекција бескрајно далеке тачке те праве* На слици 474 тачке *1, 2, 3,*... су равномерно распоређене на правој p (еквидистантне тачке); њихове централне пројекције су све ближе једна другој у колико су ближе недогледу.

Пројекцијски зрак $\bar{p}$ који пролази кроз недоглед неке праве p упоредан је тој правој и зове се њен *упоредни зрак.*

Друга значајна тачка на пројекцији неке праве p је њен *траг* P у равни π *(траг у равни слике).* Ако се на p тачка креће, рецимо из P, у смеру који је супротан претходном, тада се и њена средишња пројекција креће на p^c у смеру који је супротан претходном. Односи су обрнути: док се тачка на p креће од P до тачке продора P_0 кроз раван ишчезавања π_0, дотле се њена пројекција удаљује на p^c бесконачно. Тачка P_0 је *тачка ишчезавања* праве p, а тачка $P_0{}^c$, која одговара тачки ишчезавања је бескрајно далека тачка праве p^c Приметимо да је $OP_0 \| p^c$, дакле $OP_\infty^c PP_0$ паралелограм.

Према томе није најтачније рећи да п р а в а p има своју перспективну слику p^c, нити да је перспективна слика праве p п р а в а p^c. Само п о л у п р а в а p испред равни π_0, с почетном тачком P_0 има своју перспективну слику: полуправа иза π_0 не отсликава се на π, сем у апстрактно геометријском смислу. Пројекција полуправе p је пак п о л у п р а в а p^c с почетном тачком P_∞^c. Траг P налази се на тој полуправој — под претпоставком да су предмет и раван слике с исте стране ока.

Ако су пак предмет и раван слике с разних страна ока, као што је при фотографисању (тада је O тачка на објективу фотографског апарата) и посматра се нека права p и њена перспективна слика p^c, траг P је у продужењу полуправе p^c (сл. 475).

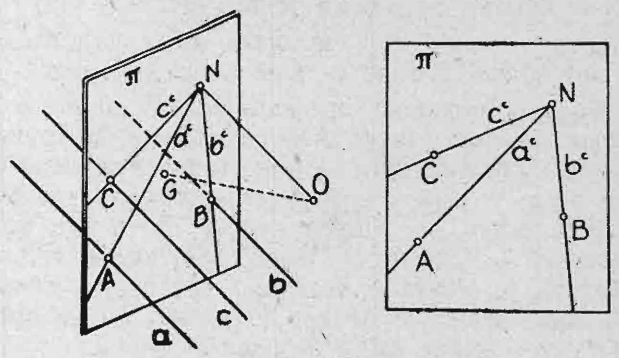


Сл. 475

Положај сваке праве у простору одређен је њеним недогледом и трагом у равни слике. Заиста, ако за праву p знамо P и P_∞^c знамо јој не само пројекцију $p^c = PP_\infty^c$ него и $p = [P \| OP_\infty^c]$. Ма које две тачке у равни слике могу се схватити као траг у равни слике и недоглед неке праве. Свака права има свој недоглед. Али недоглед може бити и једна бескрајно далека тачка равни слике. То је онда кад је права упоредна равни слике, јер тада је и њен упоредни зрак упоредан равни слике, дакле сече је у бесконачности. Пројекција праве је тада цела права.

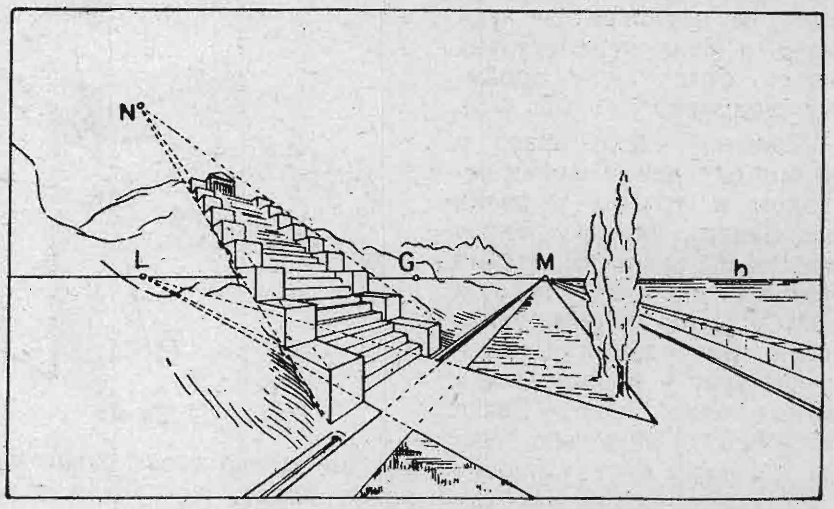
Упоредне праве имају исти недоглед, јер пролазе кроз исту бескрајно далеку тачку. Средишње пројекције паралелних правих сустичу се у њиховом заједничком недогледу. У слици 476 *a, b, c* су паралелне праве N њихов недоглед. У слици 473 N_1 и N_2 су недогледи. Недогледом је утврђен *правац* свих међу собом упоредних правих.

Праве које нису упоредне имају разне недогледе. Свака тачка у равни слике може бити недоглед извесних међу собом упоредних правих. Само кад су праве упоредне према равни слике, упоредне су им и средишње пројекције. Према томе и средишње пројекције вертикалних правих су међу собом упоредне, и то вертикалне.



Сл. 476

Недоглед правих управних на равни слике је главна тачка, тј. O'' (као у сл. 478). Недогледи хоризонталних правих су у равни слике на хоризонталној правој која пролази кроз главну тачку. Заиста, упоредни зраци тих правих припадају хоризонталној равни постављеној кроз очну тачку O, а та раван сече раван слике у хоризонталној правој која пролази кроз главну тачку. Та хоризонтална права, која пролази кроз главну тачку (под претпоставком да је раван слике вертикална) зове се *хоризонт*. Дакле ***недогледи хоризонталних правих су на хоризонту.***



Сл. 477

У слици 477 имамо недоглед M разних правих у правцу хоризонталног пута који пролази обалом, недоглед L хоризонталних правих управних на претходне и недоглед N правих у правцу степеница. Прва два недогледа су на хоризонту h, дуж кога се „састаје“ небо и море. Недоглед N правих које су косе према хоризонталној равни је изнад хоризонта.

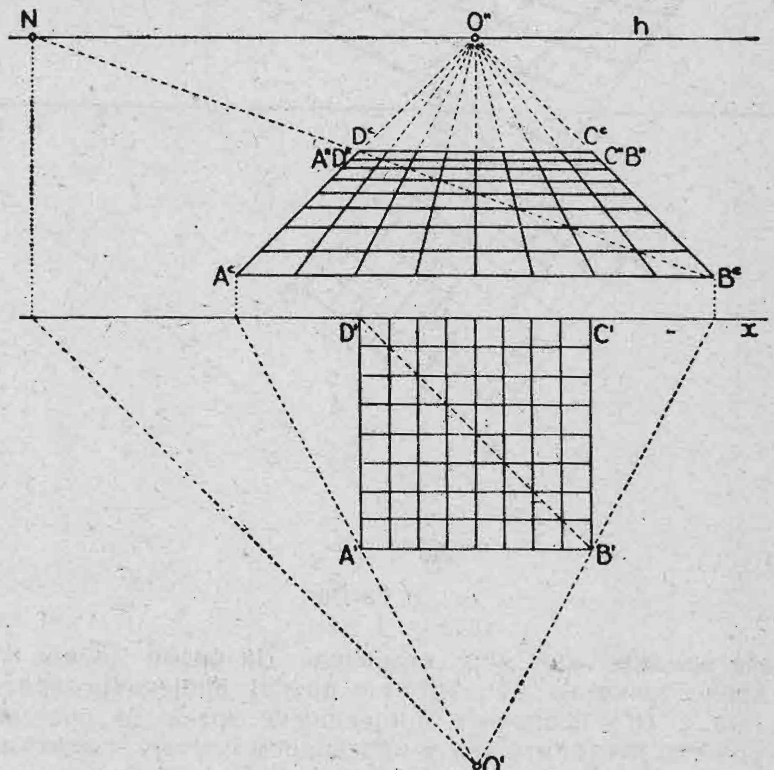
Враћајући се на опште разматрање приметимо да се недогледи свих правих једнаког нагиба спрам равни слике налазе на кругу k_0 *(нагибном кругу)* који је описан око главне тачке полупречником $r = d \operatorname{cotg} \alpha$, где је d величина отстојања ока, тј. OG, а α нагибни угао.

У конструкцијама је често користан нагибни круг за $\alpha = 45^0$. Полупречник тога круга, на коме су дакле недогледи свих правих чији нагиб износи 45^0, једнак је отстојању d и зове се *круг отстојања* или *дистанције*.

176. ПРИМЕРИ КОНСТРУКЦИЈЕ ПЕРСПЕКТИВНЕ СЛИКЕ МЕТОДОМ ПРОДОРА, С УПОТРЕБОМ НЕДОГЛЕДА

Задатак 1. *Претставити у перспективи квадрат у хоризонталној равни, подељен на 64 квадратна поља.*

Ако су две стране квадрата $ABCD$, рецимо AB и CD паралелне оси x, узмимо напр. да је CD у π, јер тада је $C^cD^c \equiv C''D''$ $(\equiv A''B'')$

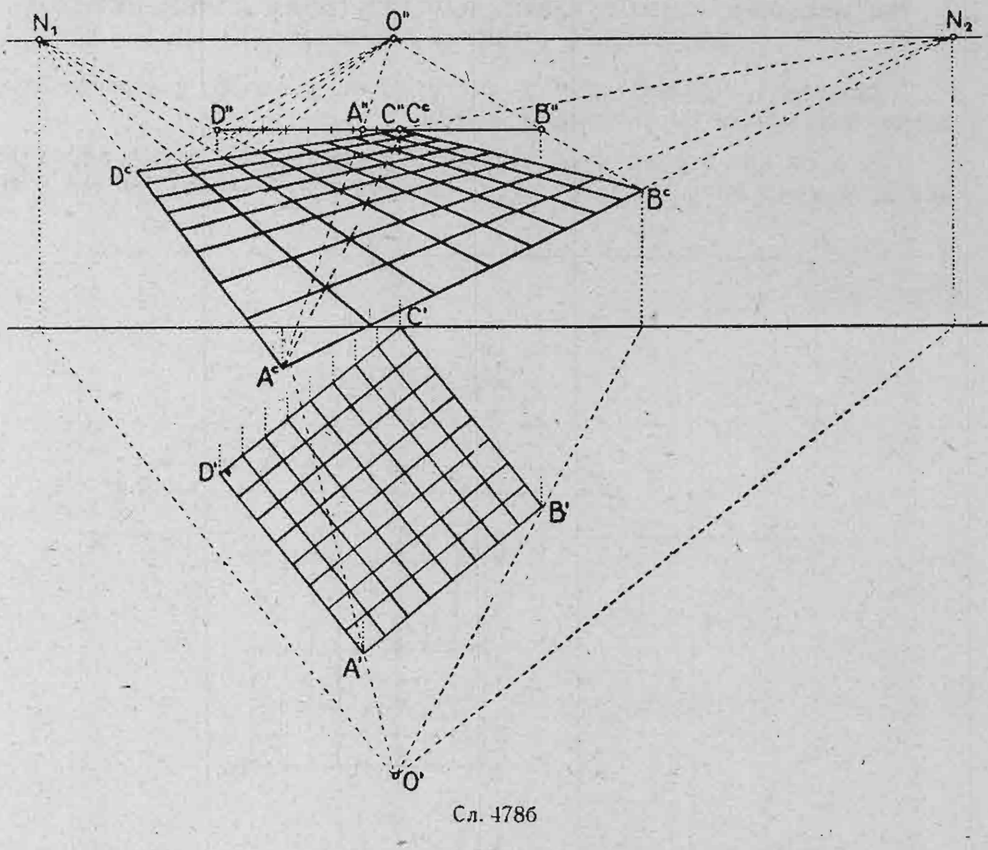


Сл. 478а

(сл. 478а). Како су AD и BC управне на π, недоглед тих страна је главна тачка $G \equiv O''$. И линије којима је квадрат подељен а које су управне на π имају недоглед O''. Нацртаћемо их поделивши напр.

A^cB^c на осам једнаких делова и спојивши те тачке с O''. Ни тачке поделе на A^cD^c не морамо претходно конструисати у нормалним пројекцијама. Приметимо наиме да праве паралелне дијагонали BD и које пролазе кроз деоне тачке на AB, пролазе и кроз деоне тачке на AD. Одредимо дакле недоглед N праве BD (N је на $[O \| BD]$) и кроз N и деоне тачке на A^cB^c повуцимо праве. Њихови пресеци с A^cD^c су тражене тачке кроз које провлачимо упоредне с x.

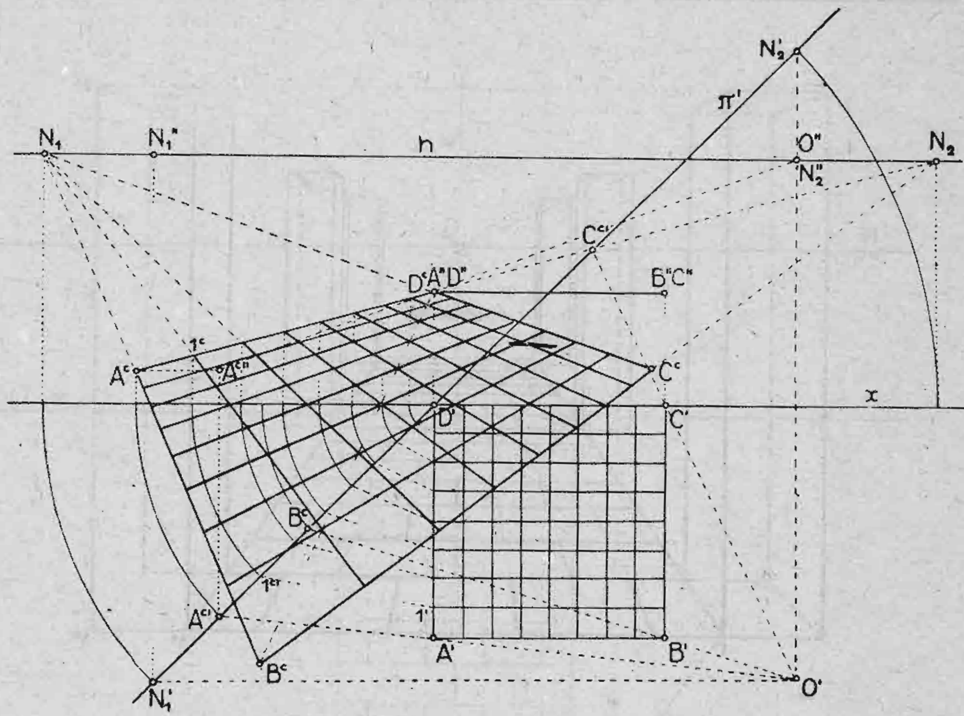
Ако су стране квадрата косе према равни слике (478б), одредимо им недогледе N_1 и N_2 повлачењем упоредних зрака пројектовања ON_1 и ON_2 ($O'N_1' \| A'D'$, $O''N_1'' \| x$; $O'N_2' \| A'B'$, $O''N_2'' \| x$). И линије поделе



Сл. 478б

квадрата пролазе кроз исте недогледе. Да бисмо добили у перспективи деоне тачке на CD, треба у другој пројекцији кроз O'' и те тачке (на $C''D''$) повлачити пројекцијске зраке до пресека с C^cD^c. Даље можемо поступити као у претходном случају, служећи се једном дијагоналом. Појединости се могу лако видети из слике.

Ако хоћемо да добијемо перспективну слику квадрата $ABCD$ у косом положају, као у слици 478б, можемо и да га оставимо у паралелном положају према π_1 и π_2, али да за раван слике π изаберемо вертикалну раван нагнуту спрам π_2 (сл. 478в). Тада раван π оборимо у π_2 као страноцртну раван.



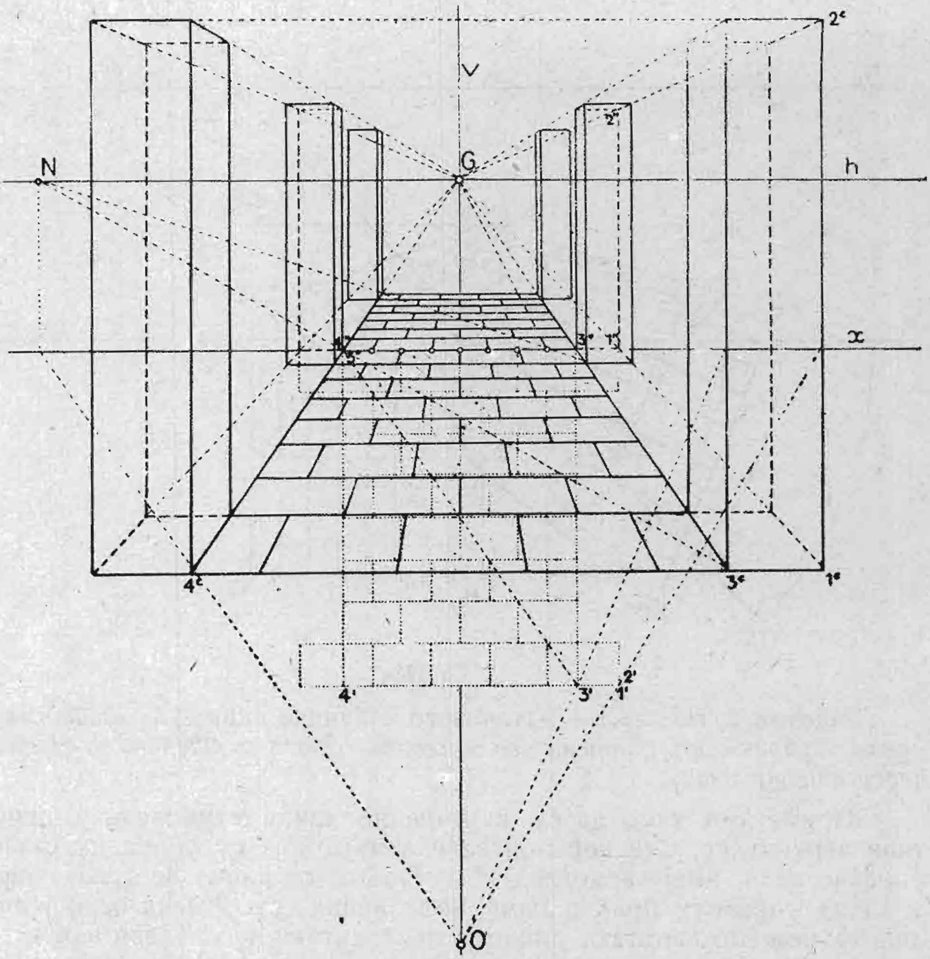
Сл. 478в

Задатак 2. *На слици* 479 (тачкасто извучене линије) *претстављен је у двема управним пројекцијама део поплочане стазе са стубовима. Нацртати перспективну слику.*

Приметимо само да су вертикалне ивице стубова и у перспективи вертикалне. Све хоризонталне линије које су у правцу стазе, тј. управне на π, имају недоглед у G. Пошто су плоче на стази нацртане у двема управним пројекцијама, поделивши дуж $3\ 4$ на осам једнаких делова можемо нацртати плоче у перспективи на следећи начин: Дуж $3\ 5$ пролази кроз низ темена плочних правоугаоника. Нађимо дакле недоглед N и пројекцију $3^c\,5^c$ праве $3\ 5$. Тада повлачећи у другој пројекцији пројектујуће зраке кроз G и кроз деоне тачке на $3''4''$ налазимо у пресеку с $3^c\,5^c$ исти низ темена у перспективи. На основу ових тачака плоче се у перспективи лако цртају. Пошто смо перспективну слику дела стазе, датог у управним пројекцијама нацртали, нацртајмо даљи део стазе у перспективи, користећи се правом која одговара правој $3\ 5$, и упоредна јој је, која дакле пролази кроз N и кроз ону тачку даљег стуба која одговара тачки 3.

Задатак 3. *Раскрсница двеју улица дата је тлоцртом у слици 480а. У нацрту је дата и заједничка висина v свих зграда. Нацртати перспективну слику и одредити сенке при упоредном осветљењу.*

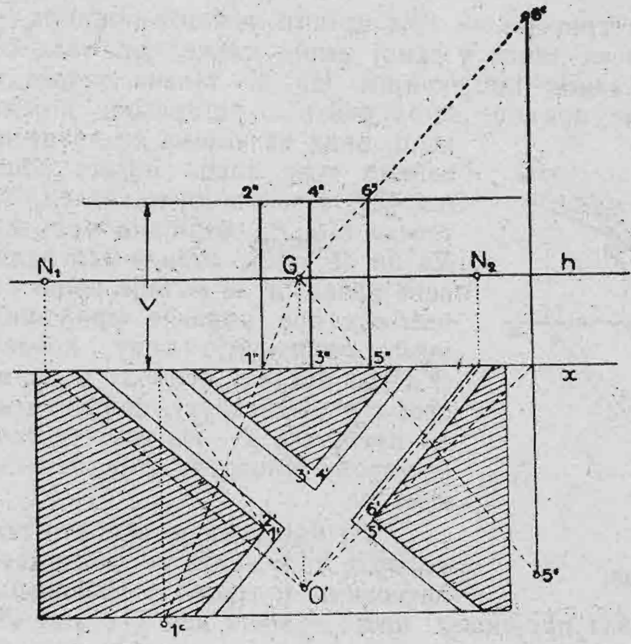
Знајући висину зграда можемо, изабравши положај осе x у слици 480а нацртати придружену другу пројекцију. Затим изаберимо положај ока, тј. O' и $O''=G$. Довољно је наћи недогледе N_1 и N_2 и средишње пројекције тачака 1, 5 и 6 да би се могла конструисати



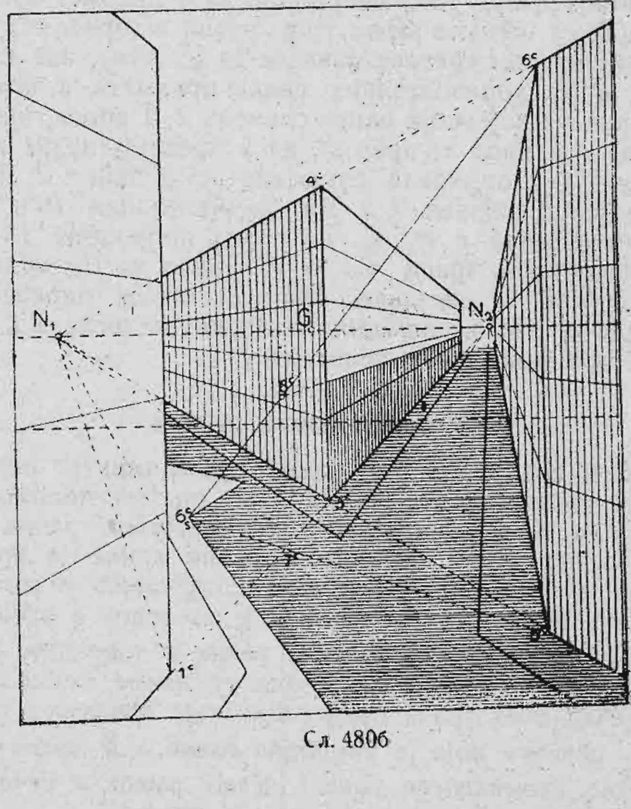
Сл. 479

средишња пројекција свих ивица зграда. Тачке G, N_1, N_2 и 1^c, 5^c, 6^c су затим пренете у слику 480б, да би се одвојено нацртала средишња пројекција датих зграда. Спратови су назначени хоризонталним линијама, исто тако ивице тротоара. Те ивице су нацртане помоћу тачака у којима њихова прва пројекција сече осу x (у ту сврху пренета је оса x с тим тачкама у слику 480б).

У одређивању сенки можемо прво изабрати како нам се свиди сенку тачке 6, тј. 6_s^c. Повлачећи праве кроз недогледе N_1 и N_2 налазимо тада руб сенке. Тачку 8 где зрак $6\ 6_s$ продире раван осветљене стране зграда налазимо помоћу тачке 7, која је подножје вертикалне дужи спуштене из 8 на раван тла. Кроз 8^c и N_2 пролази у слици руб сенке на осветљеној страни зграда. Сенке ивица $1\ 2$ и $5\ 6$ секу се у слици у заједничком недогледу, који је такође на хоризонту али ван оквира слике.

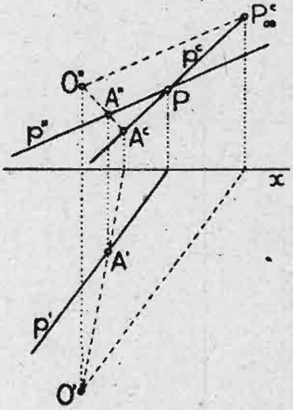


Сл. 480а



Сл. 480б

Метода трагова. — Кад цртамо методом продора, у добити смо кад год је нека тачка у самој равни слике, јер тада се поклапа са својом централном пројекцијом. Но до таквих тачака можемо увек доћи тражећи продоре кроз раван π, тј. трагове појединих правих, напр. оних на којима су ивице предмета. Кад нађемо траг такве праве, рецимо праве p (сл. 481) а знамо јој недоглед, тада спајањем тачака P и P^c_∞ добијамо њену пројекцију p^c. Да би се затим добила централна пројекција неке тачке A на p није више потребно употребити обе управне пројекције, већ само једну пројекцију: прву, повлачењем праве $O'A'$ до пресека осом x, и ординале до пресека с p^c, или другу, повлачењем праве $O''A''$ до пресека с p^c. На томе се оснива поступак у методи продора, који се назива *методом трагова.*



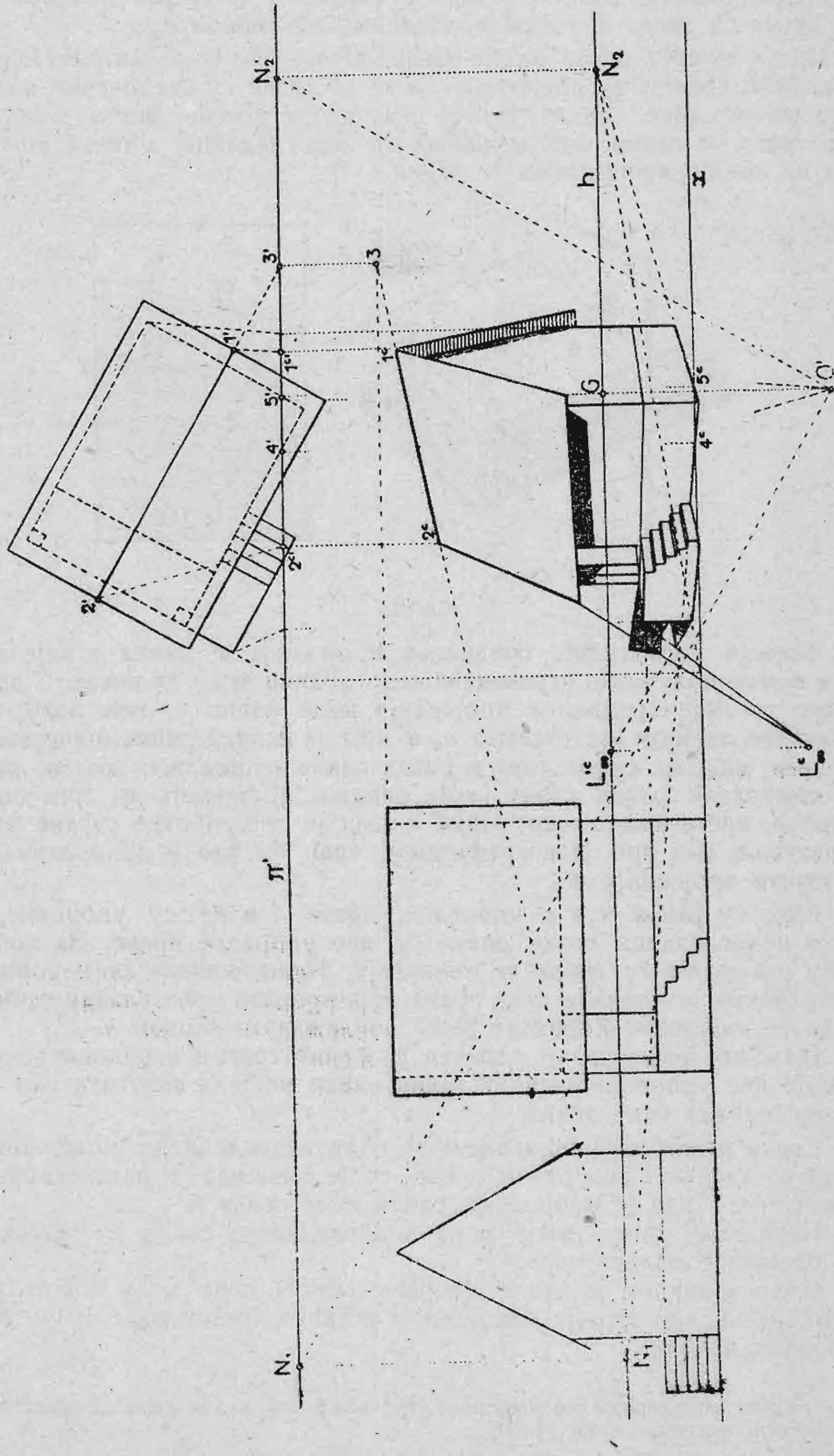
Сл. 481

Тај поступак је особито погодан кад су управне пројекције предмета дате на засебним листовима (планови у техници). Тада се цртање централне пројекције може вршити као у слици 482. Повуче се линија тла x и хоризонт h. Затим се друга пројекција (и евентуално трећа пројекција) причврсти поред места где треба цртати, напр. лево, а прва пројекција изнад тога места (као да је предмет иза π_2) у косом положају. Тада се повуче први траг равни π (права π') довољно високо над линијом тла, претпоставивши да је $\pi \| \pi_2$, иза π_2. Одредимо недогледе N_1 и N_2 хоризонталних ивица предмета, а затим, да би се добила средишња пројекција напр. слемена *1 2* крова, нађимо тачку *3* продора праве *1 2* кроз π: прво $3'$, па у пресеку праве $1''2''$ (која садржи и тачку $3''$) и ординале спуштене из $3'$ тачку *3*. Права $N_1 3$ је средишња пројекција праве *1 2*. Да бисмо добили 1^c и 2^c повуцимо $O'1'$ и $O'2'$ до пресека с π', тј. до првих пројекција $1^{c\prime}$ и $2^{c\prime}$ тачака продора пројекцијских зрака $O1$ и $O2$ кроз π. На ординалама кроз $1^{c\prime}$ и $2^{c\prime}$. Поступак се наставља. Напослетку су одређене сенке помоћу недогледа N_1, N_2 и слободно изабраних недогледа L^c_∞ и L'^c_∞ светлосних зрака при упоредном осветљењу.

177. ПРОЈЕКЦИЈА РАВНИ

Као што је средишња пројекција праве општег положаја полуправа, тако је средишња пројекција равни општег положаја полураван у равни слике π. Само пројекције пројектујућих равни су праве у равни π. Пресечна права равни α и равни слике је *траг а* равни α *(траг у равни слике)*. Трагови правих садржаних у равни α јесу на трагу те равни: напр. траг P праве p је на трагу a равни α (сл. 483).

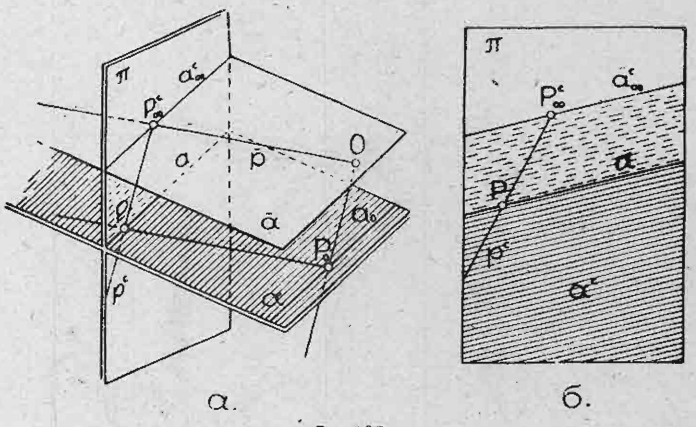
Недогледи правих садржаних у равни α припадају једној правој, *недогледници* равни α. Сви ти недогледи су, наиме, тачке продора кроз раван π, пројекцијских зрака паралелних тим правим, а ти зраци припадају једној равни $\bar{\alpha}$ која је упоредна равни α и пролази кроз очну тачку *(упоредна пројектујућа раван)*. Како раван $\bar{\alpha}$ сече раван π по једној правој, сви ти недогледи су на тој правој.



Сл. 482

Недогледница равни α је дакле *средишња пројекција бескрајно далеке праве* a_∞ *равни* α: стога је обележавамо знаком a_∞^c.

Права по којој раван α сече раван ишчезавања је *линија ишчезавања*, a_0 равни α. Централне пројекције тачка те праве су бесконачно далеке тачке равни слике. Дакле, ако је нека права у некој равни, њен траг је на трагу те равни, њен недоглед на недогледници, а тачка ишчезавања на линији ишчезавања те равни.



Сл. 483

Тачније посматрано, средишња пројекција α^c равни α није цела раван π него полураван ограничена недогледницом a_∞^c те равни. С друге стране, то није средишња пројекција целе равни α, већ полуравни ограничене линијом ишчезавања a_0 и која је испред равни ишчезавања. Сем тога, кад год су предмет и раван слике испред ока, траг те равни је у полуравни равни слике, која садржи пројекцију α^c. Ако би се, напротив, претстављао део равни α који је са супротне стране равни ишчезавања, као при фотографисању, траг би био у полуравни која не садржи пројекцију α^c.

Како су равни α и $\bar{\alpha}$ упоредне, праве $\bar{a}$ и a_∞^c су упоредне, тј. траг и недогледница сваке равни су две упоредне праве. За пројектујућу раван обе те праве се поклапају. Недогледница свих хоризонталних равни је хоризонтална права која пролази кроз главну тачку G и зове се *хоризонт*. Хоризонт ћемо обележавати словом h.

Положај сваке равни одређен је њеним трагом и недогледницом. Ма које две упоредне праве у равни слике могу се схватити као траг и недогледница неке равни.

Свака раван има недогледницу Али недогледница може бити и бескрајно далека права равни слике: то је онда кад је раван упоредна равни слике. Тада је пројекција равни цела раван π.

Паралелне равни имају исту недогледницу: свима је заједничка иста бескрајно далека права.

Недогледницом је дакле утврђен *став**) свих међу собом упоредних равни, као што је недогледом утврђен правац свих међу собом упоредних правих.

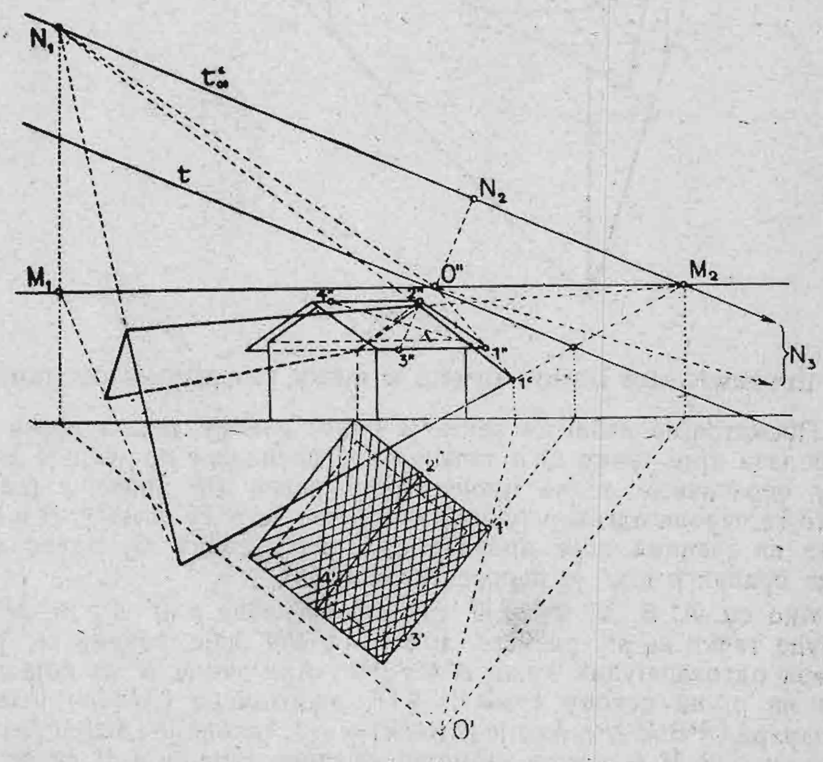
*) *Став* карактерише све међусобно упоредне равни, као што *правац* карактерише све међусобно упоредне праве (§ 13).

Равни које нису упоредне имају разне недогледнице. Свака права у равни слике може бити недогледница извесних међу собом упоредних равни.

Недогледница вертикалних равни, управних на раван слике је вертикала.

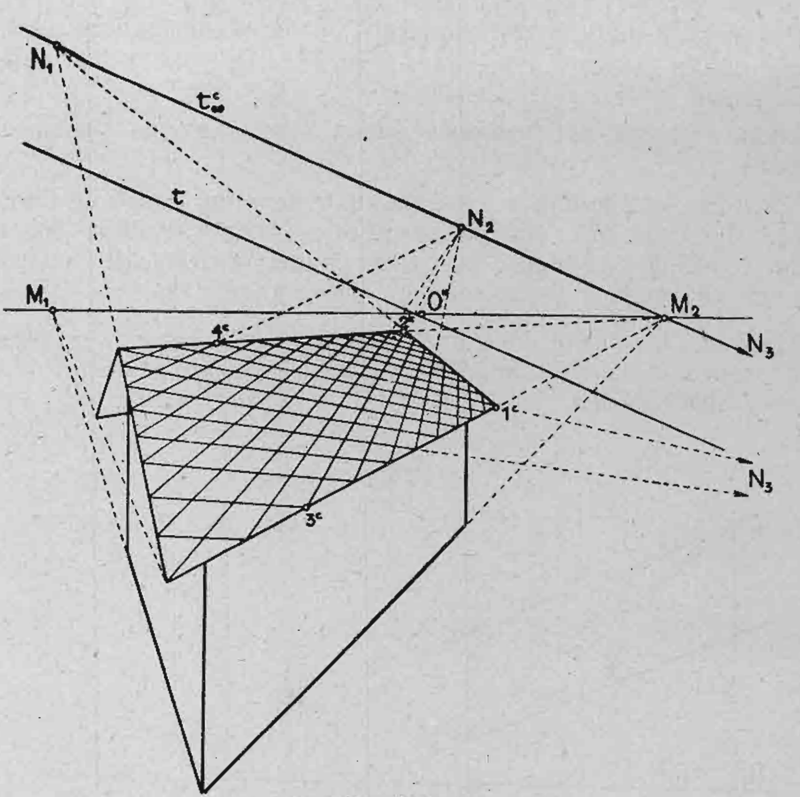
Како смо већ имали у сликама недогледницу хоризонталних равни, а напр. у слици 479 вертикала v беше недогледница вертикалних пљосни стубова, управних на раван слике, посматрајмо још само задатак где се јавља и недогледница једне косе равни.

Задатак. *На слици 484а претстављена је у двема управним пројекцијама зграда с кровом који је покривен плочама ромбног облика. Нацртати у перспективи.*



Сл. 484а

Приметимо само да су траг t и недогледница t_∞^c равни τ кровне површи која се види у перспективној слици, две косе праве (сл. 484а и б). Хоризонталне ивице зграде имају недогледе M_1 и M_2, косе ивице посматраног дела крова имају недоглед N_1. Ивице кровних плоча имају недогледе N_2 и N_3 на недогледници t_∞^c те равни.

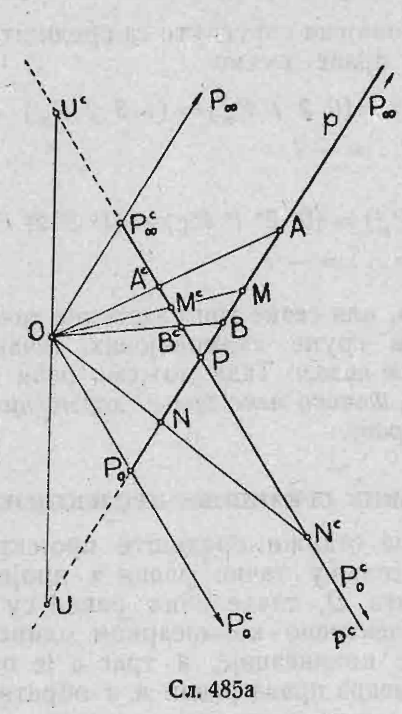


Сл. 484б

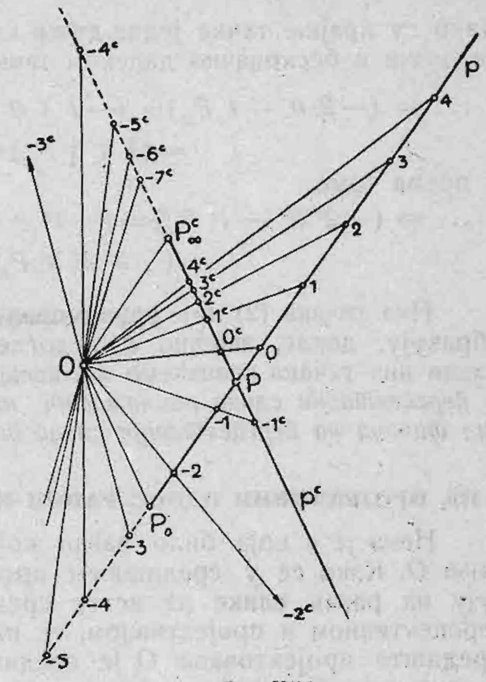
178. ПРОЈЕКТИВНИ ОДНОС ПРАВЕ И ЊЕНЕ СРЕДИШЊЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Посматрајмо изближе какав је однос између тачака праве p која не пролази кроз тачку O и тачака њене средишње пројекције p^c. У ту сврху ограничимо се на пројектујућу раван Op праве p (сл. 485а). Пошто се парови одговарајућих тачака, као што су A и A^c, B и B^c итд. налазе на зрацима који пролазе кроз исту тачку O, однос између тачака правих p и p^c је перспективан (§ 18).

Ако су A, B, M ма које три тачке праве p и A^c, B^c, M^c одговарајуће тачке на p^c, размера дужи AM/BM није, разуме се, једнака размери одговарајућих дужи A^cM^c/B^cM^c. Али ако је N ма која четврта тачка на p, на основу става II, § 17, дворазмера $(ABMN)$ једнака је дворазмери $(A^cB^cM^cN^c)$. Ако је $(ABMN)=-1$, такође је $(A^cB^cM^cN^c)=-1$, тј. ако су A, B, M, N четири хармонијске тачке, тада су и A^c, B^c, M^c, N^c четири хармонијске тачке. Обострано једнозначни однос тачака двеју правих у коме свакој групи хармонијских тачака једне праве одговара хармонијска група тачака друге праве зове се *пројективан однос* или *пројективно пресликавање* једне праве на другу. (У гл. II, одељка I посматрали смо пројективни однос међу тачкама двеју равни. Тај однос се зове и колинеација. Сад је пак реч о пројективном односу тачака двеју правих). Дакле *тачке једне праве и њихове средишње пројекције образују пројективне низове тачака.*



Сл. 485а



Сл. 485б

Ако за B, M и N узмемо редом P, P_0 и P_∞ имамо $(APP_0P_\infty) = (A^cPP_0^cP_\infty^c)$, па како је

$$\frac{AP_\infty}{PP_\infty} = 1 \text{ и } \frac{A^cP_0^c}{PP_0^c} = 1,$$

имамо

$$\frac{AP_0}{PP_0} = 1 : \frac{A^cP_\infty^c}{PP_\infty^c}$$

$$AP_0 \cdot A^cP_\infty^c = PP_0 \cdot PP_\infty^c.$$

Како десна страна ове једнакости не зависи од положаја тачке A, производ на левој страни има сталну вредност k, дакле

$$A^cP_\infty^c = \frac{k}{AP_0},$$

тј. *удаљеност тачке A^c од недогледа праве p је обрнуто сразмерна удаљености тачке A од тачке ишчезавања P_0.*

Посматрајмо на правој p равномерни низ тачака (еквидистантне тачке, сл. 485б):

(1) $\quad \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

и одговарајуће тачке на p^c:

(2) $\quad \ldots, -3^c, -2^c, -1^c, 0^c, 1^c, 2^c, 3^c, \ldots$

Како су крајње тачке једне дужи хармонијски спрегнуте са средиштем те дужи и бесконачно далеком тачком праве, имамо

$$\ldots = (-2\ 0\ -1\ P_\infty) = (-1\ 1\ 0\ P_\infty) = (0\ 2\ 1\ P_\infty) = (1\ 3\ 2\ P_\infty)$$
$$= (2\ 4\ 3\ P_\infty) = \ldots = -1$$

и према томе

$$\ldots = (-2^c\ 0^c\ -1^c\ P_\infty^c) = (-1^c\ 1^c\ 0^c\ P_\infty^c) = (0^c\ 2^c\ 1^c\ P_\infty^c) = (1^c\ 3^c\ 2^c\ P_\infty^c)$$
$$= (-2^c\ 4^c\ 3^c\ P_\infty^c) = \ldots = -1.$$

Низ тачака (2) није равномеран низ, али сваке три узастопне тачке образују, дакле, заједно с недогледом групе хармонијских тачака. Такав низ тачаканазваћемо *хармонијским низом.* Тада можемо рећи да је *перспективна слика равномерног низа тачака неке праве хармонијски низ тачака на перспективној слици те праве.*

179. ПРОЈЕКТИВНИ ОДНОС РАВНИ И ЊЕНЕ СРЕДИШЊЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Нека је α која било раван која не садржи средиште пројектовања O. Како се у средишњем пројектовању тачке равни α пројектују на раван слике из истог средишта O, тачке обих равни су у перспективном и пројективном, тј. перспективно-колинеарном односу. Средиште пројектовања O је средиште колинеације, а траг a је оса колинеације. Свакој правој равни α одговара права равни π и обратно. Недогледница a_∞^c је противоса те колинеације у равни π, а линија ишчезавања a_0 противоса у равни α.

Да бисмо изближе разматрали колинеацију тачака неке равни α и њене перспективне слике α^c, посматрајмо два низа паралелних и еквидистантних линија равни α (правилну паралелограмску мрежу) и њену слику у перспективи. Узмимо прво да је раван α хоризонтална и да се посматрају праве

$$\ldots,\ m_{-2},\ m_{-1},\ m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

равни α, које су управне на равни слике и чији недоглед је дакле главна тачка G на хоризонту h; праве другог низа нека буду упоредне равни слике (правоугаона мрежа, сл. 486а). Имамо у ствари да конструишемо сличну мрежу линија као у слици 478а. Све дијагоналне праве тих правоугаоника, које су међу собом паралелне имају заједнични недоглед. Постоје дакле два таква недогледа P_∞^c и Q_∞^c, једнако далека од G. Ако су правоугаоници квадрати, тачке P_∞^c и Q_∞^c су пресеци круга отстојања и хоризонта. Како тачке на правој a образују равномеран низ, тачке на пројекцијама n_1^c, n_2^c, $n_3^c, \ldots$ образују такође равномерне низове. На дијагоналним правим

$$\ldots,\ p_{-2},\ p_{-1},\ p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots$$

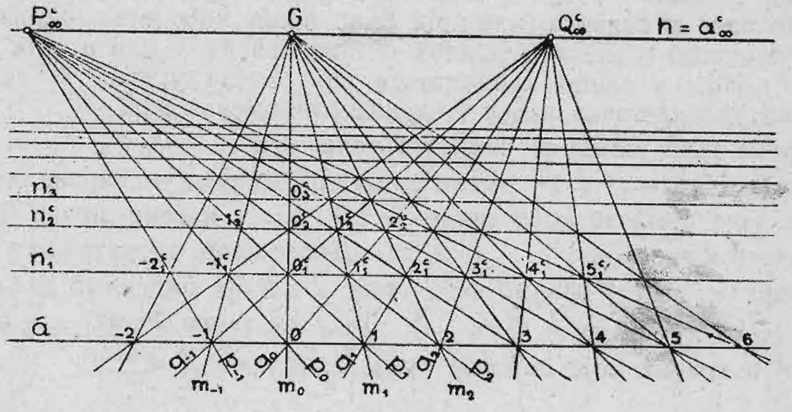
као и на дијагоналним правим

$$\ldots,\ q_{-2},\ q_{-1},\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ \ldots$$

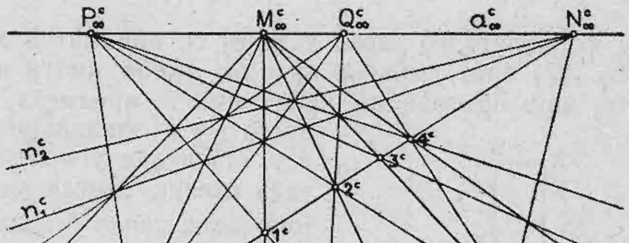
имамо пак према разматрању прошлог параграфа хармонијске низове тачака, тј. напр. 1, -1_2^c, 0_1^c и P_∞^c су четири хармонијске тачке; исто тако и -1, 1_2^c, 0_1^c и Q_∞^c итд., јер права a и свака од тих дијагоналних правих су у перспективно пројективном односу, при чему је G средиште (као O у сл. 485а). Из истог разлога имамо и на правим

$$\ldots,\ m_{-2},\ m_{-1},\ m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

хармонијске низове тачака; у перспективно пројективном односу тих правих и праве a средиште је тачка P_∞^c (или Q_∞^c).



Сл. 486а



Сл. 486б

Приметимо да се у тачки 0 секу две стране четворотеменика $GQ_\infty^c 1_1^c 0_1^c$. Друге две стране, h и n_1^c секу се у бесконачно далекој тачки праве a, а остале две стране $0_1^c Q_\infty^c$ и $1_1^c G$ секу праву a у тачкама -1 и 1. Добијене четири тачке на правој a треба да буду хармонијске тачке по ставу IV, § 17; и заиста, тачка 0 је средиште размака $(-1,\ 1)$.

Исти односи постоје ма на каквој паралелограмској мрежи које било равни.

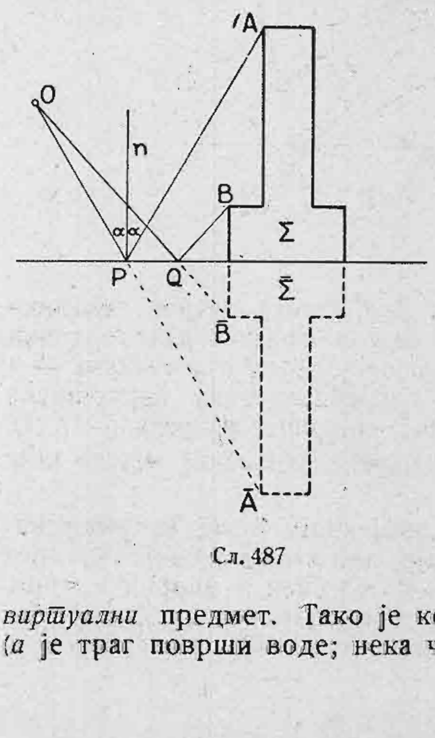
Слика 486б претставља централну пројекцију такве мреже у извесној равни α чију недогледицу можемо, ако хоћемо, сматрати опет истоветном с хоризонтом, но по слици може бити и упоредна хоризонту (тада рава α није хоризонтална!). Штавише, ако слику заокренемо, може нам претстављати и односе ма у којој косој равни α.

Прамен паралелних правих $\ldots m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \ldots$ и прамен паралелних правих $\ldots, n_{-2}, n_{-1}, n_0, n_1, n_2, \ldots$ образују паралелограмску мрежу (можда и правоугаону, ако су им недогледи управо недогледи узајамно управних правих). Средишње пројекције тих правих пролазе кроз два недогледа M_∞ и N_∞ а пројекције дијагоналних правих кроз друга два P^c_∞ и Q^c_∞. Како чворне тачке те мреже образују на свакој од тих правих у α равномеран низ тачака (напр. $\ldots, 0, 1, 2, \ldots$ на правој n), имамо у слици саме хармонијске низове тачака. Ако посматрамо траг a равни α (или коју било праву која је упоредна трагу и недогледници) и пресеке правих m (или правих n, или p, или q) том правом, имамо у слици хармонијски низ тачака у коме је недоглед бескрајно далека тачка праве a, дакле равномеран низ.

Према томе може се нацртати напр. низ $\ldots, 1^c, 2^c, 3^c, \ldots$ на основу самих тачака 1^c и 2^c. Знамо да ма које међусобно паралелне праве равни α, које пролазе кроз тачке $\ldots, 1, 2, \ldots$ и секу праву a, секу ову у равномерном низу $\ldots, \overline{1}, \overline{2}, \ldots$. Дакле напр. посматрањем правих чији недоглед је P^c_∞ нађимо на a тачке $\overline{1}$ и $\overline{2}$ па одредимо даље тачке $\overline{3}, \overline{4}, \ldots$ ($\overline{1}\,\overline{2} = \overline{2}\,\overline{3} = \overline{3}\,\overline{4} = \ldots$). Тада су тачке $3^c, 4^c, \ldots$ у пресеку праве n^c и правих које пролазе кроз P^c_∞ и кроз $\overline{3}, \overline{4}, \ldots$.

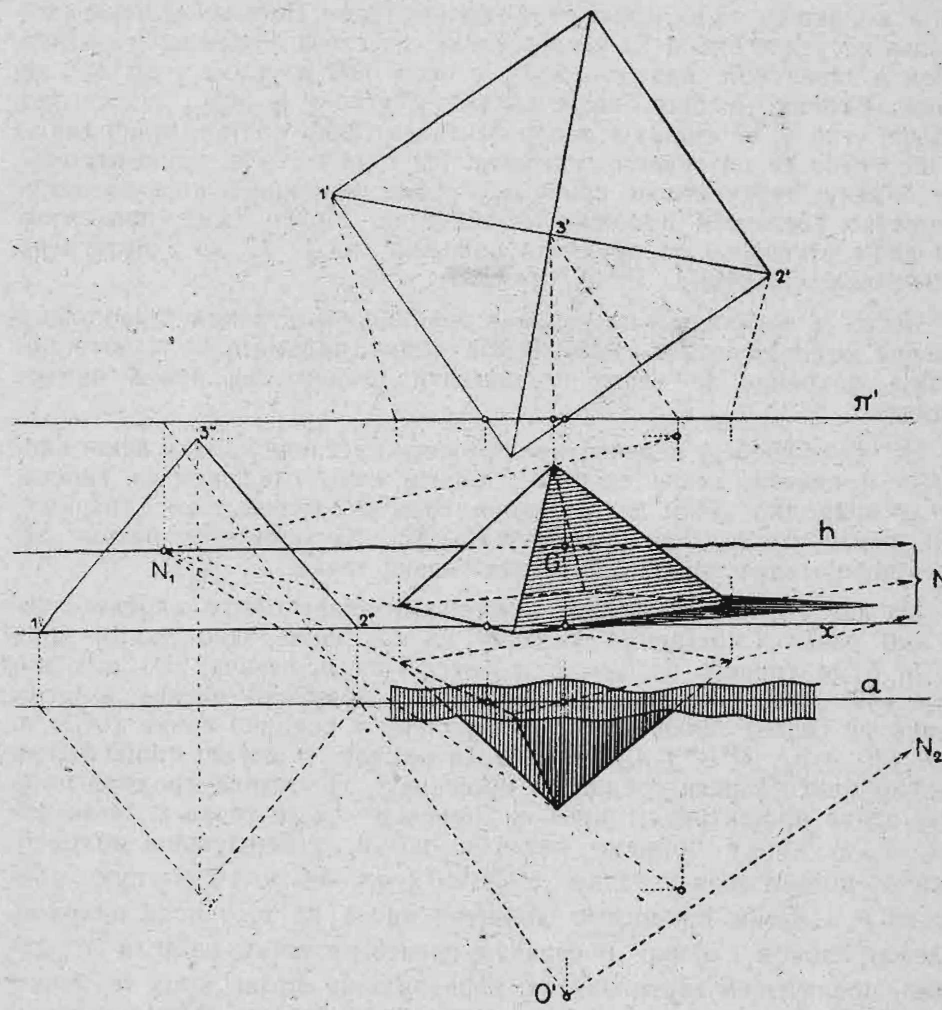
180. СЛИКА ПРЕДМЕТА И ЊЕГОВОГ ОГЛЕДАЊА

Ако је χ хоризонтална раван у којој се предмет Σ огледа и која је у схеми (сл. 487) претстављена правом, треба имати на уму да се зрак светлости, који пролази из неке тачке A предмета, ломи на површи χ у P, заклапајући с нормалом n у P једнаке углове. У оку O се тада ствара утисак као да постоји још једна тачка $\overline{A}$ испод површи χ, симетрична тачки A у односу на раван χ. Тако се ствара и слика $\overline{B}$ сваке друге тачке B у истој равни OAP услед ломљења зрака светлости у одговарајућој тачки Q. Ма за коју тачку C предмета, чији преломљени зрак OMC припада другој вертикалној равни, понавља се исто. На тај начин добија се утисак као да се испод стварног предмета, испод површи χ, налази предмет $\overline{\Sigma}$, подударан првом и симетричан у односу на раван симетрије χ.



Сл. 487

Дакле, ако треба претставити огледање, нацртаћемо у перспективи сем стварног предмета симетрични, *виртуални* предмет. Тако је конструисана слика 488 методом трагова (a је траг површи воде; нека читалац нацрта слику и сам).



Сл. 488

181. ИЗБОР ПОЛОЖАЈА ОКА И РАВНИ СЛИКЕ

Као што се из досад наведених примера види, перспективна слика може дати природан утисак претстављеног предмета. Али колико ће слика давати заиста природан утисак, зависи од избора положаја ока и равни слике у односу на претстављени предмет.

Ако се претстављају већи предмети (напр. зграде) најобичније је поставити раван слике у вертикалан положај, јер обично, кад посматрамо, гледамо отприлике у хоризонталном правцу.

Како наше око не види истом јасношћу све предмете испред нас, већ потпуно јасно само предмете садржане у извесној купи „јасног гледања“, образованој зрацима који се сустичу у оку, а чине с осом OG угао γ око 15^0 до 20^0, сви предмети који нису обухваћени том купом чине нам се у перспективној слици мање или више деформисани. У колико су од ње даљи, изобличење је веће. Но извесна мања изобличења не утичу битно на изглед слике, па стога можемо обухватити сликом и тачке које падају у купу с осом OG и углом γ до 30^0, па и више. Уколико је око ближе предмету, угао γ је већи: кад се око удаљује, угао γ, се смањује и перспективна слика постаје природнија. Али не треба се ни сувише удаљити, јер тада се губи приметна разлика између перспективне слике и управне пројекције, која одговара бесконачно удаљеном положају посматрача. Могло би се практично рећи да је отстојање од предмета повољно кад је 1½ до 2 пута веће од његових димензија.

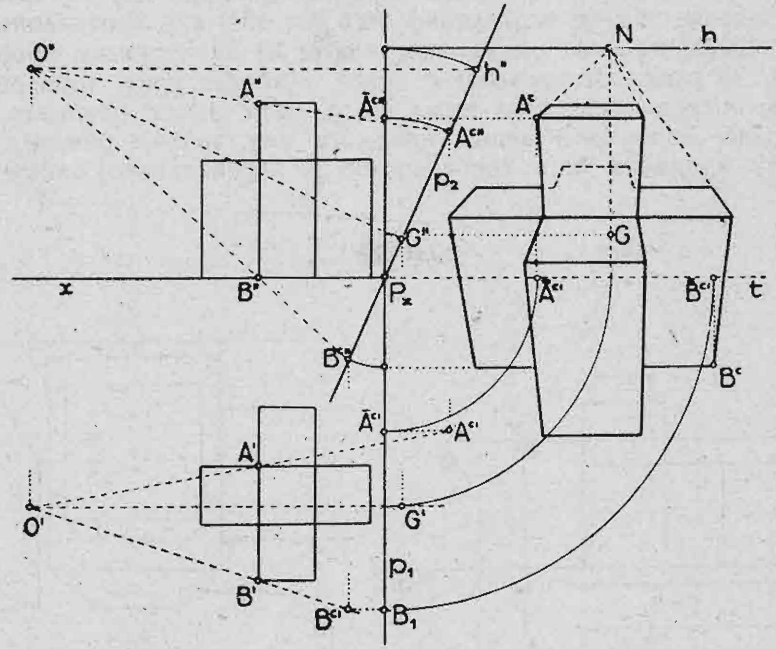
Често је висина ока посматрача онолико изнад равни тла, колико одговара његовој висини. Али да би слика предмета била што повољнија потребно је често подешавати висину ока према висини предмета.

Но често треба у перспективи пружити прегледну слику неког сложенијег предмета, каква се може добити само гледањем из висине. Тада је природно узети да је главни зрак OG окренут косо наниже, дакле раван π коса (као што је у сл. 489. Хоризонт је, разуме се, опет хоризонтална линија, али изнад главне тачке.

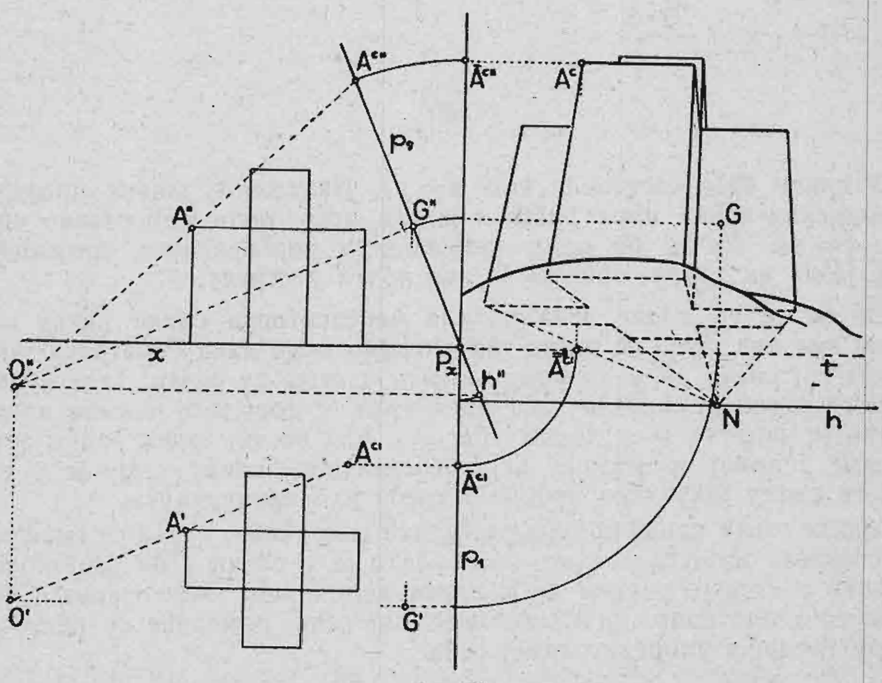
Из две управне пројекције извешћемо такву слику најједноставније ако раван π поставимо управно на π_2, дакле тако да јој први траг p_1 буде управан на оси x, а други траг p_2 нагнут, као што показује слика 489. Око O треба изабрати у довољној висини, а затим h'' тако да главна тачка G буде отприлике у средини слике ($OG \perp \pi$, дакле $O'G' \perp p_1$, $O''G'' \perp p_2$). Пошто се одреде у двема пројекцијама довољно много тачака средишње пројекције, тј. тачака продора појединих зрака пројектовања кроз π, „пренесу" се те тачке у раван цртања. У ту сврху обрнемо раван π око p_1 у вертикални положај. Тачка A^c долази тада у тачку $\overline{A}^c$ ($A^{c\prime}\overline{A}^{c\prime} \perp p_1$, $A^{c\prime\prime}$ и $\overline{A}^{c\prime\prime}$ на луку описану из P_x). Затим преносимо добијене тачке са p_1 у нови положај, обележен словом t и, ако $\overline{\overline{A}}^{c\prime}$ означује пренесену тачку, из $\overline{\overline{A}}^{c\prime}$ и $\overline{A}^{c\prime\prime}$ добијамо, повлачењем вертикалне и хоризонталне праве кроз те тачке, тачку A^c. Слично добијамо остале тачке предмета, па и главну тачку G и хоризонт h. Као што рекосмо, h је изнад G.

Ако се пак хоће да нарочито истакне висина посматраног предмета, смер гледања се окреће косо навише. Тада је хоризонт испод главне тачке. У сл. 490 приказан је поглед косо навише на исти предмет као у претходном примеру. Поступак је у свему сличан, само што је други траг p_2 равни слике нагнут на супротну страну. Ако не желимо да доњу основу предмета у перспективној слици видимо оздо (што не би, рецимо, одговарало погледу на неку зграду, упереном навише) морамо поставити тачку O изнад π_1 (O'' изнад x) или пак заклонити доњу основу. У сл. 490 замислили смо да зграда стоји на брду, изнад посматрача. Приметимо да је сада G изнад хоризонта h.

Кос хоризонт би значио кос положај посматрача (као напр. кад се гледа из авиона коме положај није хоризонталан). Може се смер гледања изабрати толико нагнут да хоризонт буде ван оквира цртежа.

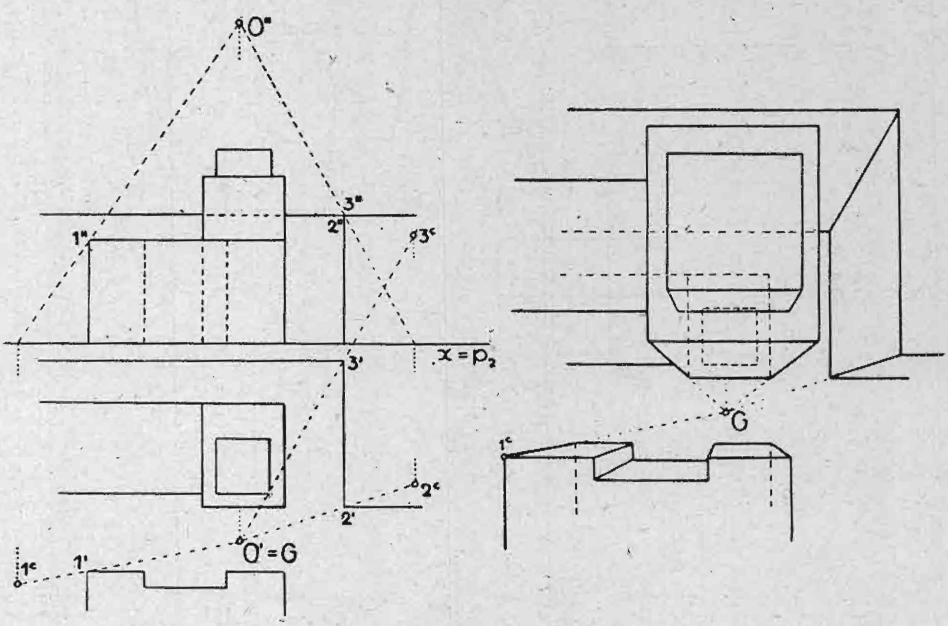

O"
A"
Ā^c"
A^c"
h"
N
h
A^c
P₂
G"
G
x
B"
P_x
A^c'
Ā^c'
B^c'
t
B^c"
B^c
Ā^c'
A^c'
A'
O'
G'
P₁
B'
B^c'
B₁

Сл. 489


A^c"
Ā^c"
A^c
P₂
A"
G"
G
x
P_x
O"
h"
Ā^c'
t
N
h
A^c'
Ā^c'
A'
P₁
O'
G'

Сл. 490

Најзад, смер гледања може бити и вертикалан, као кад се напр. посматрају високе зграде вертикално озго (сл. 491) или вертикално оздо (сл. 492). Свака од ових слика изведена је из две управне пројекције предмета. За раван пројектовања треба изабрати неку хоризонталну раван. За поглед озго очна тачка мора бити изнад предмета, а за поглед оздо мора бити испод предмета или, тачније речено, испод оног дела предмета који треба да се у перспективној слици види.

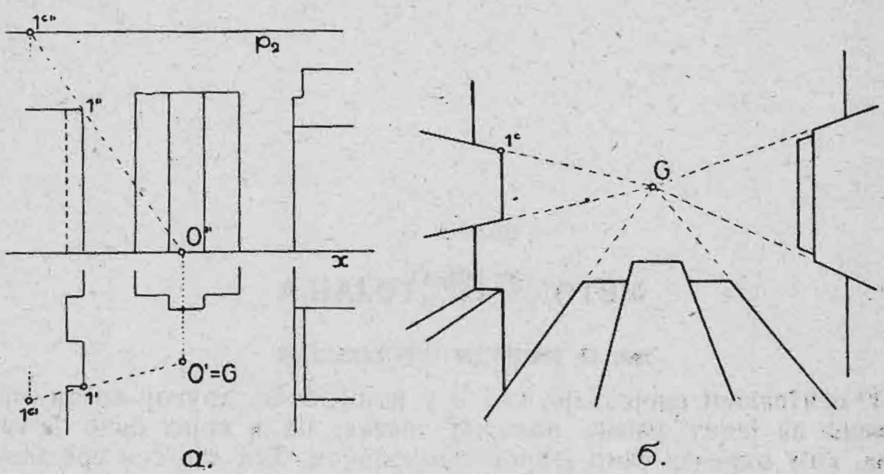


Сл. 491

У слици 491а поставили смо $\pi = \pi_1$. Налажење тачака продора пројекцијских зрака кроз раван π је сад исто тако једноставно као кад је $\pi = \pi_2$. Да не би прва пројекција и перспективна пројекција дошле једна на другу, пренета је ова друга у страну.

Да би се из слике 492а добила перспективна слика какву посматрач има кад стоји на равни тла, можемо очну тачку сматрати тако блиском тој равни да је можемо ставити у саму ту раван. Тада треба поставити раван π управно на главни зрак, у довољној висини изнад π_1; тако је нацртан њен други траг p_2. Али на тај начин тачке продора које у првој пројекцији дају перспективну слику, дају је у наличју, те слику коју тако добијемо треба још преокренути.

Ако се раван слике помера паралелно самој себи, слика се смањује или повећава, остајући слична себи. Тако је у слици 478в узет положај равни π који је учинио да је слика нешто већа него слика 478б. Ако би се хтело напр. да слика буде још већа, помериће се раван π у смеру гледања упоредно самој себи.



Сл. 492

Задаци за вежбу

1. Претставити у перспективи предмете из слике 287 и неке из слике 288.
2. Нацртати у перспективи зграду на обали, и њено огледање у води.
3. Претставити поглед озго на зграде дате у слици 480.
4. У погледу на избор положаја ока испитати слике 478 — 480, 484.

ГЛАВА II

МЕТОДА ОТСТОЈАЊА

182. О МЕТОДИ ОТСТОЈАЊА

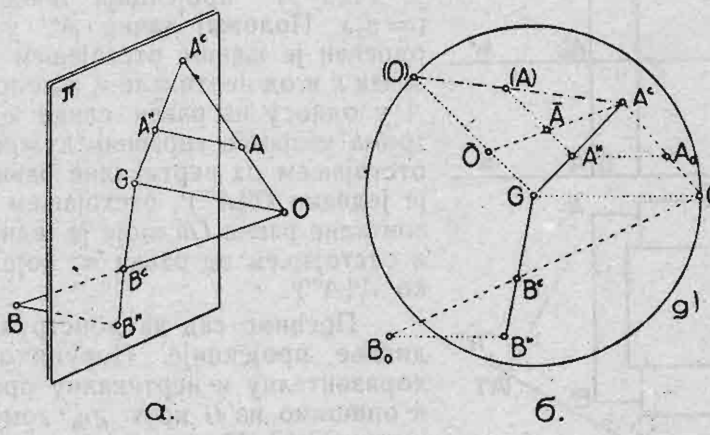
У централној пројекцији, као и у којој било другој врсти пројектовања на једну раван, положај тачака, па и којих било других ликова, није одређен само једном пројекцијом. Тек ако сем средишње пројекције неке тачке A имамо још неки податак о тој тачки, као што је њено отстојање од равни слике, или удаљеност AA^c, или управну пројекцију на исту раван, положај тачке A у простору, с једне или друге стране равни слике, потпуно је одређен. Сличне околности беху при посматрању косе пројекције. Како тада тако и сада претходно наведена три случаја своде се на један. Задавању удаљености AA^c не придаје се методске вредности. Ако су пак задане две пројекције, средишња и управна, имамо уствари *методу двеју пројекција на исту раван слике,* но тада се, као што ћемо видети, непосредно налази и отстојање тачке A од равни слике. Према томе довољно је говорити само о ***методи отстојања***, претпостављајући дакле да су за довољан број тачака дате *централне пројекције и отстојања од равни слике.* Тада можемо решавати све задатке као у одговарајућим посматрањима ранијих одељака.

Како је при конструкцијама често потребно обарати отстојање очне тачке око главне тачке у ком било смеру, црта се једном за свагда *круг отстојања* g из средишта G и коме је полупречник једнак отстојању тачке O.

Управне пројекције на раван слике обележаваћемо обично двема цртицама (претпостављајући да је раван слике π истоветна с π_2). Како је свака тачка A и њена средишња пројекција A^c на једном зраку пројектовања, а управна пројекција A'' је на управној спуштеној из A на π, раван $AA''A^c$ је управна на π и садржи O и G, дакле A'' и A^c су на правој која пролази кроз G (сл. 493). Сем тога је $AA'' \parallel OG$, дакле ако је тачка A задата управном пројекцијом A'' и отстојањем од равни слике наћи ћемо њену средишњу пројекцију у равни цртања овако: Раван постављену кроз зрак пројектовања OA управно на π, оборимо око управне пројекције GA'' тог зрака. Повуцимо дакле кроз G управну на GA'' до пресека кругом отстојања. Тачка пресека (O) је оборена тачка O. У A'' подигнимо управну дуж $A''(A)$ једнаку отстојању тачке A од π. Тада је $(O)(A)$ оборени пројекцијски зрак тачке A, а његов пресек правом GA'' је A^c. Ову конструкцију можемо мењати утолико што дужи $G(O)$ и $A''(A)$ можемо повући м а у к о м д р у г о м с м е р у, напр. GO_0 и $A''A_0$. Очигледно, права O_0A_0 пролази такође кроз A^c.

У овој конструкцији треба обратити пажњу на то с које стране равни π је тачка A. Узевши да су O и A с исте стране равни π, оборене тачке (O) и (A) (или пак O_0 и A_0) треба одредити с исте стране праве GA''. Ако је пак тачка B иза равни слике, одговарајуће тачке треба одредити с разних страна праве GB''.

Сем тога, за тачку A која је испред равни слике управна пројекција је између средишње пројекције и главне тачке, тј. A'' је између A^c и G; за тачку B која је иза равни слике однос је други, B^c је између B'' и G.



Сл. 493

Догађа се да је отстојање ока, $OG = d$, тако велико да круг отстојања излази из оквира слике. Штавише, ако перспективна слика треба да покрије цело поље расположиво за цртање, тако ће редовно и бити (не губећи из вида да отстојање очне тачке треба да буде веће од највеће димензије перспективне слике). Тада се наместо тог круга може описати круг мањег полупречника, напр. $d/2$, $d/3$, $d/4$ и у истој размери смањити отстојање тачака у конструкцији средишњих пројекција тачака. Ако је, наиме, $G\overline{O} = k \cdot d$ $(0 < k < 1)$ и $A''\overline{A} = k \cdot A''(A)$, тада и права $\overline{O}\,\overline{A}$ пролази кроз A^c.

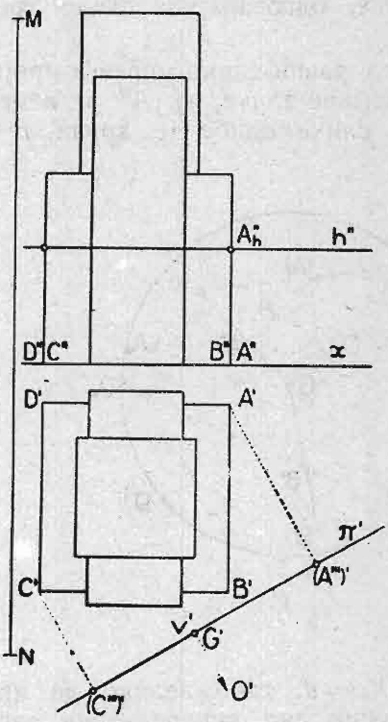
Ма које две тачке различите од G и које се налазе на правој што пролази кроз G могу, очигледно, бити управна и средишња пројекција извесне тачке у простору.

Приметимо да је посматрање управне и средишње пројекције на исту раван истоветно с посматрањем управне пројекције неког лика и његове сенке на исту раван при средишњем осветљењу.

183. ПРИМЕР КОНСТРУКЦИЈЕ ПЕРСПЕКТИВНЕ СЛИКЕ МЕТОДОМ ОТСТОЈАЊА

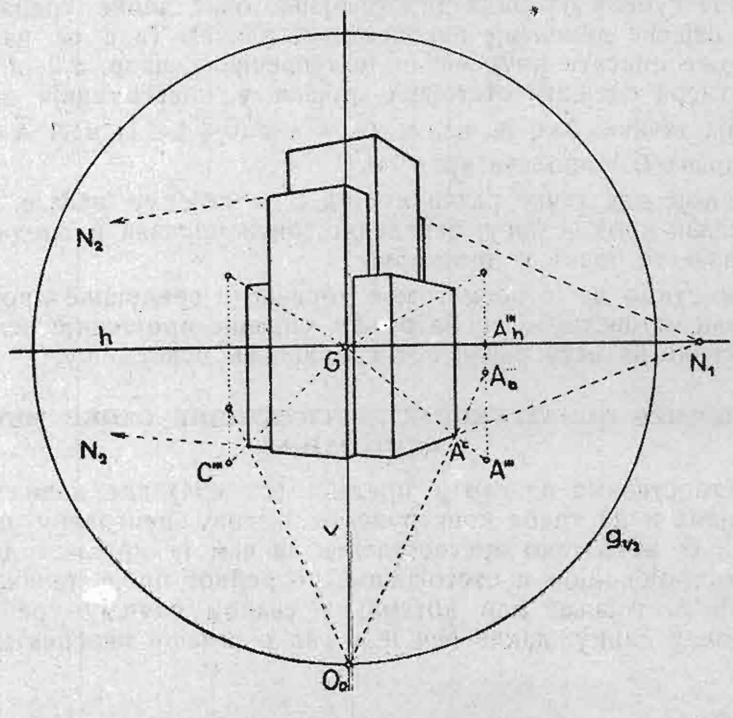
Претпоставимо да нам је предмет (сл. 494) дат двема управним пројекцијама и да треба конструисати његову централну пројекцију. Могло би се исто тако претпоставити да нам је предмет дат једном управном пројекцијом и отстојањима потребног броја тачака, задатих на „линији отстојања“ или котама; у сваком случају треба извести перспективну слику, дакле реч је и сад о везаној перспективи.

За раван слике изаберимо вертикалну раван, косу спрам π_2, чија је прва пројекција π'. Одредимо и положај очне тачке. Није потребно да њене пројекције буду у оквиру слике 494а; довољно је да одредимо где је друга пројекција h'' хоризонта ($h \subset \pi$) и где је једна или друга пројекција главне тачке G; отстојање d можемо претставити једном дужи нацртаном поред слике (дуж MN). Пројектујмо затим предмет управно на π. Нека је тако A''' пројекција тачке A на π ($=\pi_3$). Положај тачке A''' у равни π одређен је њеним отстојањем од хоризонта h и од вертикале v, а положај тачке A у односу на раван слике одређен је трима узајамно управним дужима: њеним отстојањем од вертикалне равни Ov, које је једнако $G'(A''')'$, отстојањем од хоризонталне равни Oh, које је једнако $A''A_h''$ и отстојањем од равни π, које је једнако $A'(A''')'$.



Сл. 494а

Пређимо сад на конструкцију средишње пројекције. Повуцимо кроз G хоризонталну и вертикалну праву, h и v, и опишимо из G круг $g_{1/2}$ коме је полупречник $d/2$. Преносећи отстојања тачке A од Ov и од Oh, нађимо тачку A''' ($GA_h''' = G'(A''')'$, $A_h'''A''' = A_h''A''$). Сад поступимо као што је описано у претходном параграфу. Нека је O_0 тачка круга



Сл. 494б

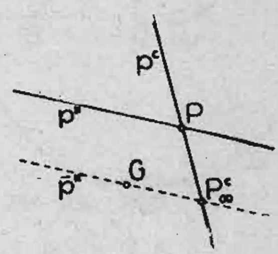
g_1, напр. на v. Дуж једнаку половини отстојања тачке A од π пренесимо на праву $A'''A_h''' \parallel v$, од A''' до A_o, тј. $A'''A_o = \frac{1}{2} A'(A''')'$. Тада је $GA''' \times A_oO_o = A^c$.* Како су O и A са супротних страна равни π, треба да су A_o и O_o са супротних страна праве OA'''. На исти начин можемо наћи још коју тачку, но главно је одредити на исти начин и недогледе и служити се њима.

184. РЕШАВАЊЕ НЕКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ОТСТОЈАЊА

Кад имамо у средишњој пројекцији довољан број конструисаних тачака, можемо даље конструкције вршити методом отстојања, служећи се само средишњим и управним пројекцијама на раван π. Осврнимо се на неке елементарне конструкције.

Ма која права p која не припада некој пројектујућој равни управној на равни π, одређена је својом управном пројекцијом p'' и средишњом пројекцијом p^c (сл. 495). Ако, наиме, поставимо пројектујућу раван Op праве p, тада је p^c пресек равни π том равни, а раван pp'' је управна на π, дакле различита од Op и, према томе, p^c и p'' су две разне праве у равни π, сем ако је p у π.

Решимо следећи задатак.



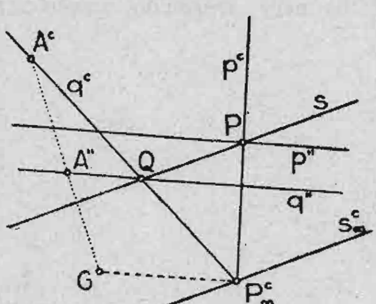
Сл. 495

Задатак 1. *Кад су дате обе пројекције p^c и p'', одредити траг и недоглед праве p.*

Траг је $P = p^c \times p''$ (јер тачка за коју се поклапају обе пројекције је у равни слике). Уочимо паралелни зрак пројектовања $\bar{p} \parallel p$; на њему је недоглед P^c_∞ (сл. 495). Но $\bar{p}'' = [G \parallel p'']$. Отуд $P^c_\infty = p^c \times \bar{p}''$, тј. недоглед праве p је на правој кроз G, која је упоредна пројекцији p''.

Задатак 2. *Раван σ дата је пројекцијама праве p и тачке A. Одредити траг и недогледницу те равни.*

Одредимо као у претходном задатку тачке P и P^c_∞. Конструишимо пројекције праве q која пролази кроз A и упоредна је правој p (сл. 496). Имамо $q^c = A^cP^c_\infty$ и $q'' = [A'' \parallel p'']$, отуд $Q = q^c \times q''$. Дакле, $s = PQ$ и $s^c_\infty = [P^c_\infty \parallel s]$ су траг и недогледница равни σ.



Сл. 496

Задатак 3. *Одредити праву величину дужи дате пројекцијама.*

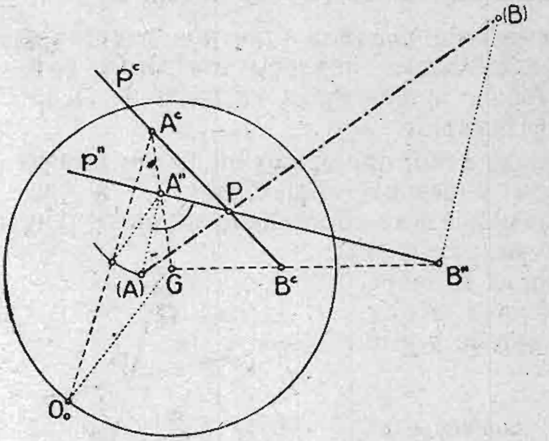
Док за решавање претходних, положајних задатака није било потребно познавати отстојање очне тачке, за овај метрички задатак то је потребно.

Дате су пројекције A^cB^c и $A''B''$ дужи AB; разуме се, праве A^cA'' и B^cB'' морају пролазити кроз G (сл. 497). Да бисмо добили праву величину дужи AB, оборимо је око њене управне

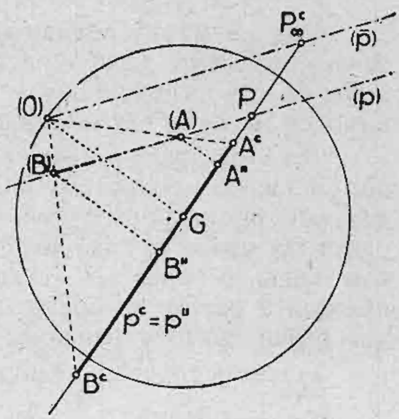
*) У сл. 494б треба ставити A_o наместо A_h''', а $A_h''' = h \times A'''A_o$.

пројекције. Зато одредимо отстојање тачке A од равни π на изложени начин, помоћу круга отстојања. Отстојање тачке B не морамо тражити, јер знамо траг P. Преносећи отстојање тачке A управно на $A''B''$ из A'' и спајањем с P налазимо $(A)(B) = AB$.

Ако права A^cB^c пролази кроз G (сл. 498), поклапа се са својом управном пројекцијом, но претходна конструкција се изводи на исти начин и налази се $(A)(B)$. Штавише, ако је p права којој се обе пројекције поклапају, потребно је да знамо пројекције двеју њених тачака



Сл. 497



Сл. 498

A и B, да би њен положај био одређен и да бисмо могли одредити њен траг и недоглед. Оборивши праву p имамо наиме $P = p'' \times (p) = A''B'' \times (A)(B)$ и $P^c_\infty = [(O) \parallel (P)] \times p''$.

Задаци за вежбу

1. Нацртати методом отстојања вавилонски храм, дат двема управним пројекцијама у сл. 461а.

2. Управном пројекцијом и отстојањима од равни слике дат је обртан ваљак. Нацртати методом отстојања тај ваљак у перспективи.

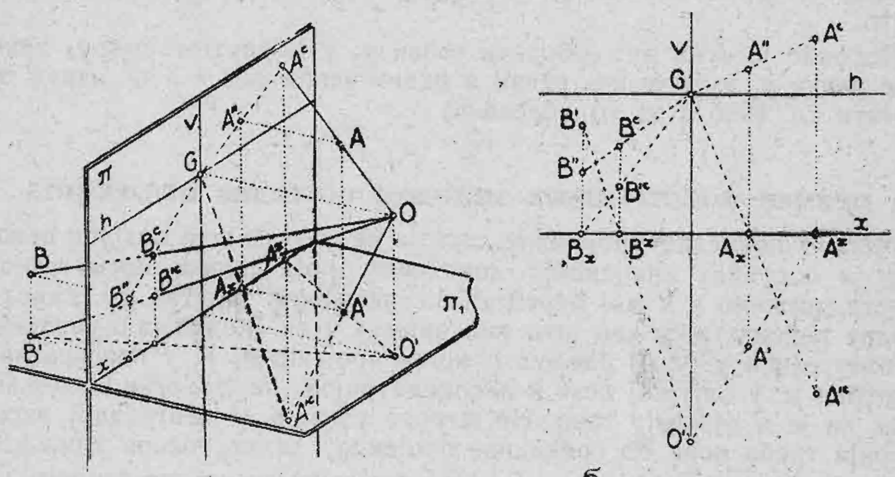
3. Нацртати поглед озго, вертикално на доле, на неку земљишну површ дату котираном пројекцијом.

ГЛАВА III

МЕТОДА ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

185. О МЕТОДИ ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

У перспективи уводи се метода посредне пројекције на исти начин као у косој пројекцији. Поставља се једна раван π_1 управно на раван слике π и на ту раван управно пројектује посматрани предмет, да би се затим, сем предмета самог, пројектовала на раван π и та управна пројекција. Обично се узима да је раван слике вертикална. Претпоставићемо да је тада раван π_1 хоризонтална и да је очна тачка изнад ње; називаћемо је, као и у косој пројекцији, *раван тла*, а управне пројекције обележавати цртицом; напр. A' биће управна пројекција тачке A на π_1. Дакле у средишњој пројекцији имаћемо сем *непосредне пројекције* A^c тачке A, њену *посредну пројекцију* A'^c (*перспективну прву пројекцију*) и слично за друге ликове.



а. б.

Сл. 499

Траг равни π_1 у равни слике је хоризонтална права x (*оса* x или *линија тла*) која не пролази кроз главну тачку, већ је обично испод ње (сл. 499). Хоризонт h је недогледница равни π_1.

Средишња пројекција равни π_1 је дакле доња полураван равни π_1, којој је граница h. Само тачке оног дела равни π_1 који је испред равни ишчезавања имају своје перспективне слике.

Пројектујућа раван OAA', која пројектује дуж AA' на раван слике је вертикална, управна на оси x, тј. *непосредна и посредна пројекција ма које тачке налазе се на правим управним на линији тла.* Док непосредна пројекција може бити ма где у равни слике, посредна пројекција је, као што рекосмо, испод хоризонта, и то испод осе x ако је тачка испред равни слике (тачка A), а изнад осе x ако је тачка иза равни слике (тачка B). У задацима долази у обзир и управна пројекција на раван π, коју тада сматрамо у исти мах другом пројекцијском равни π_2.

Посматрајмо правоугаоник $AA'A_xA''$. Раван тог правоугаоника је управна на оси x, њена недогледница је вертикала v. Праве AA'' и $A'A_x$ су управне на π, дакле њихов недоглед је тачка G. Како су тачке A'' и A_x у равни π, поклапају се са својим централним пројекцијама, дакле четвороугао $A^cA'^cA_xA''$ је перспективна слика правоугаоника $AA'A_xA''$. Отуд следује непосредна конструкција пројекције A'' ако су дате обе средишње пројекције A^c и A'^c: у пресеку праве GA'^c осом x (сл. 499б) подижемо дакле управну на осу x; у пресеку с GA^c је A''. На тај начин прелазимо лако из методе посредне пројекције у методу отстојања, и обрнуто.

Ако раван π_1 оборимо у π и пројекције тачака у обореној равни обележимо једнако као пре обарања, имаћемо у равни слике и управне пројекције на π_1, које се такође лако одређују. Како права $O'A'$ (сл. 499а) пролази кроз $A^x = A^cA'^c \times x$, исто је и у обореној равни π_1 (сл. 299б). Према томе, на пресеку праве $O'A^x$ с ординалом A_xA'' је A'. На тај начин можемо увек прећи из методе посредне пројекције у перспективи, у методу двеју придружених управних пројекција и обрнуто.

Погодно је неки пут оборити раван π_1 у обрнутом смеру, тако да део равни π_1 који је иза равни π падне испод осе x а O' изнад x. (Нацртати сл. 499б и за то обарање!)

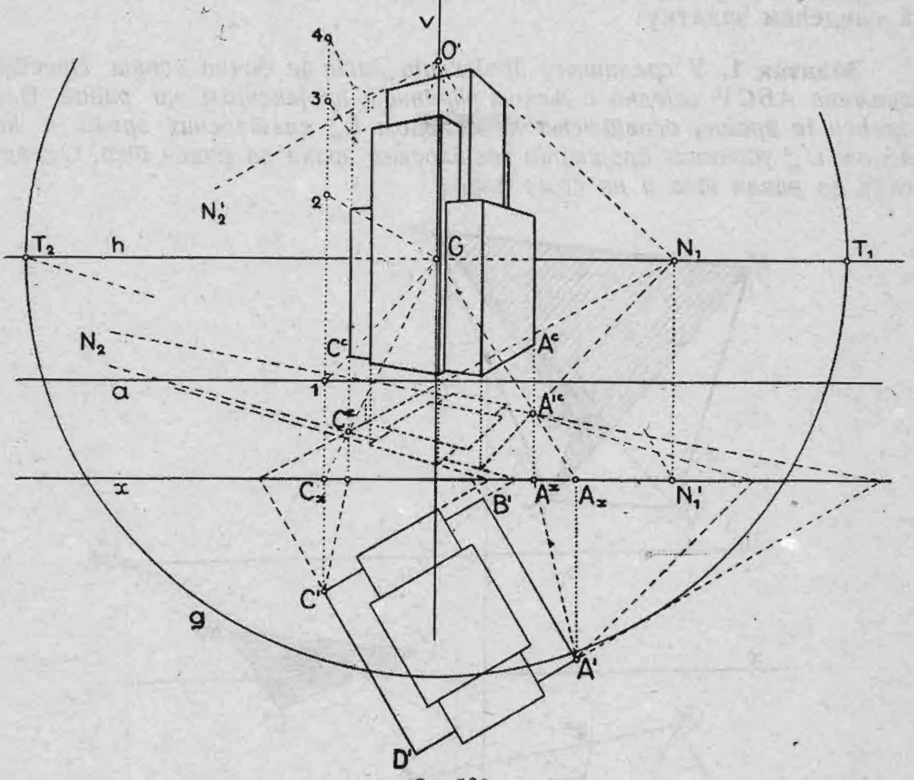
186. ПРИМЕР КОНСТРУКЦИЈЕ МЕТОДОМ ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Метода посредне пројекције састоји се у томе што имајући непосредну и посредну пројекцију довољног броја тачака посматраног предмета, можемо у самој перспективи решавати задатке (у смислу слободне перспективе) као што смо чинили у гл. II одељка о управној аксонометрији и у гл. II одељка о косој пројекцији. И у перспективи ова метода је у најужој вези с аксонометријом: *централном аксонометријом*, па је и називају тако. Но, строго узевши, у централној аксонометрији треба поћи од средишње пројекције једног осног триједра.

Како у тим посматрањима имају основан значај пројекције на раван π_1, позабавићемо се и конструкцијом такве пројекције.

Задатак. *Конструисати у перспективи методом посредне пројекције предмет дат у слици* 494а.

Нацртавши линију h хоризонта и вертикалу v кроз главну тачку G, повуцимо испод h траг $a \parallel h$ равни α на коју је постављен предмет, а испод a траг $x \parallel h$ равни π_1 (сл. 500). Оборимо раван π_1 у раван слике и конструишимо квадрат $A'B'C'D'$ и цели тлоцрт предмета у обореном положају, изабравши нагиб линија према оси x. Узмимо да је предмет иза π (дакле, ако је оборени тлоцрт испод x, O' је изнад x). Да средишња пројекција предмета и средишња пројекција прве пројекције не би покриле једна другу, узели смо α изнад π_1.



Сл. 500

Тада имамо, као у слици 499, $A_x = [A' \perp x] \times x$, $A^x = A'O' \times x$, $A'^c = GA_x \times [A^x \perp x]$ и слично за друге тачке тлоцрта. Али погодније је наћи недогледе N_1 и N_2 ($N_1' = [O' \parallel A'B'] \times x$, N_1 је на h; слично N_2, но пада ван оквира слике) а затим конструисати посредну пројекцију појединих линија тлоцрта, знајући да се посредне пројекције секу на x с истим у обореном положају (напр. $A'B'$ и $A'^cB'^c$ секу се на x).

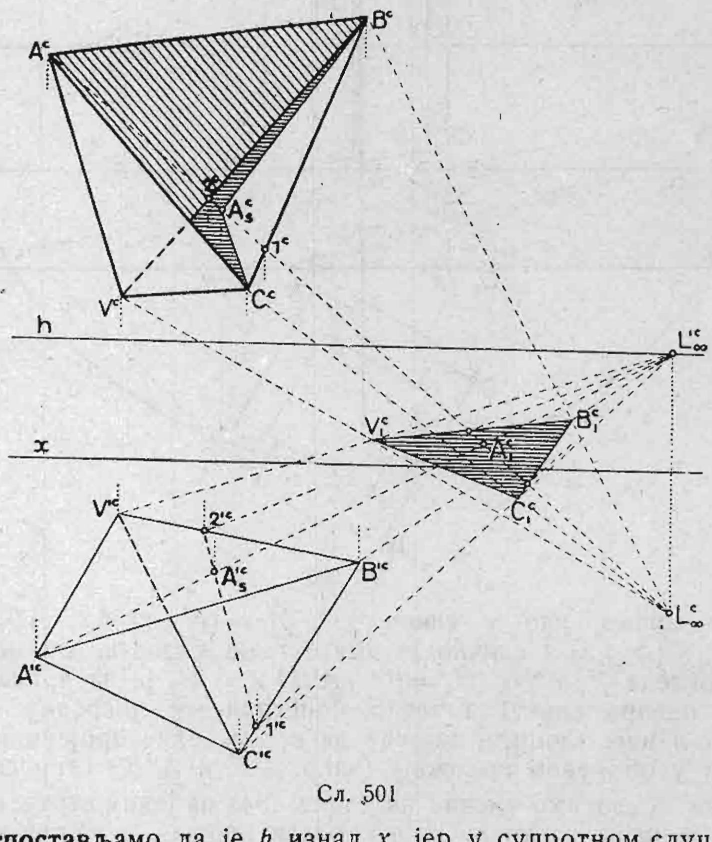
Затим преносимо висине из слике 494а на једну вертикалну праву која је у π, напр. на праву која пролази кроз C_x, и то пошав од тачке 1 на a (у α). Нека су 2, 3, 4 тачке које тако добијамо. Тада је C^c на $G1$ а изнад C'^c; исто тако горња тачка дотичне вертикалне ивице је на $G2$. Слично се налазе и тачке у висини 3 и 4, повлачећи праве кроз N_1 и N_2 и њихове пресеке с вертикалним правим кроз тачке посредне пројекције.

Често користе и тачке T_1 и T_2 у пресеку круга отстојања, g хоризонтом. То су наиме недогледи хоризонталних правих које секу раван π под углом 45^0. Дакле, да би се напр. добила тачка C^c треба само повући праву $C'K$, која с x гради угао 45^0 и спојити K са T_1; тада је $C^c = KT_1 \times GC_x$.

187. РЕШАВАЊЕ НЕКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ПОСРЕДНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

Кад имамо сем непосредне и посредну средишњу пројекцију неког лика могу се особито једноставно конструисати сенке, на начин који смо уосталом употребљавали већ у претходној глави. Покажимо то на следећем задатку:

Задатак 1. *У средишњој пројекцији дата је бочна површ тростране пирамиде $ABCV$ заједно с њеном управном пројекцијом на раван тла и одређен је правац осветљења недогледом L^c_∞ светлосних зрака и недогледом L'^c_∞ управних пројекција светлосних зрака на раван тла. Одредити сенку на раван тла и на саму површ.*



Сл. 501

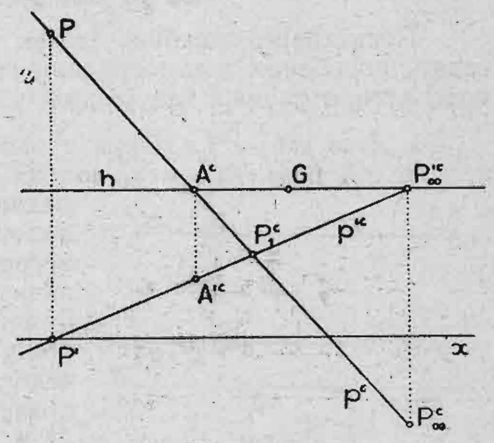
Претпостављамо да је h изнад x, јер у супротном случају видела би се у перспективи раван π_1 оздо, а тада се на њој не би видела сенка површи $ABCV$ (сл. 501). Дато је $A^cB^cC^cV^c$, $A'^cB'^cC'^cV'^c$, L^c_∞ и L'^c_∞. Бачену сенку на π_1 налазимо у пресецима зрака светлости који пролазе кроз темена површи и њихових пројекција на π_1, тј. $A_1{}^c = A^cL^c_\infty \times A'^cL'^c_\infty$ итд. Како је $A_1{}^c$ у троуглу $B_1{}^cC_1{}^cV_1{}^c$, зрак светлости који пролази кроз A продире површ BCV. Тачку продора налазимо (као у сваком поступку с двема пројекцијама уочавањем праве $1\,2$ која се у пројекцији поклапа с тим зраком, јер $A_s = 1\,2 \times AL_\infty$, дакле у посредној пројекцији $A_s'^c = 1'^c2'^c \times A'^cL'^c_\infty$, а отуд налазимо $A_s{}^c$.

Још постоји питање да ли се у перспективној слици види осветљена страна површи BCV или неосветљена. Из посредне пројекције се види да су тачке A, B, C ближе оку од тачке V, а отуд би се у двема управним пројекцијама већ закључило да видимо унутрашњост површи. Али у перспективи то није довољно, јер зраци гледања имају разне правце. Но приметимо да је тачка на зраку AA_s, која се у непосредној пројекцији поклапа с тачком 2, ближе оку од тачке 2 на ивици BV, јер у пројекцији на π_1 та тачка је ближа посматрачу од тачке 2 (налази се испод $2'^c$). Отуд следује да у непосредној пројекцији видимо зрак светлости све до A_s, дакле видимо осветљену страну површи BCV, на коју пада сенка. То значи уједно да гледамо у унутрашњост површи.

Решимо још следећа два задатка.

Задатак 2. *Одредити трагове и недогледе кад је права р дата непосредном и посредном пројекцијом.*

Дато је G, h, x и обе пројекције праве p, тј. p^c и p'^c (сл. 502). Пресек тих пројекција, тј. $P_1{}^c$ је средишња пројекција трага праве у π_1, $P_1 = p \times p'$. Траг праве p' у равни слике је тачка $P' = p' \times x$, у коју се пројектује управно на π_1 траг P праве p (траг у равни π), дакле $PP' \perp h$. Недоглед P'^c_∞ праве p' је на хоризонту h. Раван pp' је вертикална, дакле њена недогледница је управна на h. Према томе недоглед P^c_∞ праве p и недоглед P'^c_∞ њене пројекције p' су на правој управној на линији тла. Тако налазимо P^c_∞ из P'^c_∞.



Сл. 502

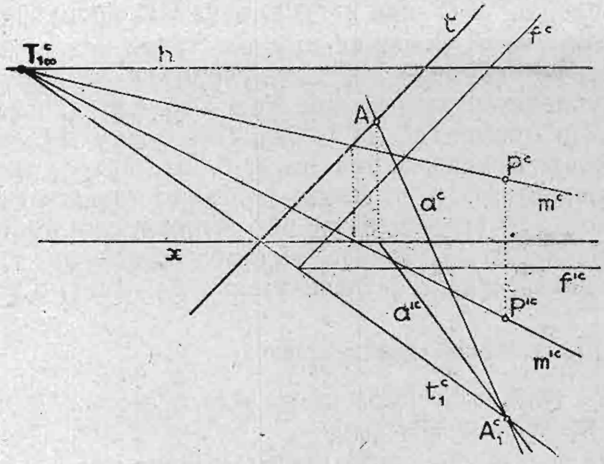
Задатак 3. *Дата је једна пројекција тачке Р садржане у равни τ која је дата траговима. Одредити другу пројекцију тачке Р.*

Дат је траг у равни слике t равни τ и пројекција $t_1{}^c$ њеног трага у равни тла; оба се трага секу на линији тла x (сл. 503). Нека је сем тога дата посредна пројекција P'^c тачке P.

Пројекцију P^c добијамо тада као у свим начинима пројектовања — јер је ово положајни задатак — повлачењем које било праве у равни τ кроз тачку P. У слици је изабрана хоризонтала m. Њен недоглед, као и недоглед њене пројекције m' је недоглед трага t_1, тј. $T^c_{1\infty} = h \times t_1{}^c$. Дакле повуцимо $m'^c = P'^c\, T^c_{1\infty}$ и у пресеку с осом x подигнимо управну до трага t. Кроз ту тачку на t $T^c_{1\infty}$ пролази m^c, а на m^c имамо P^c.

Уместо главне линије прве врсте m, могли смо употребити и главну линију друге врсте или какву било праву равни τ. У слици су нацртане и пројекције једне фронтале f ($f^c \parallel t$, $f'^c \parallel x$) и праве a, општег положаја.

Обртањем истог поступка добија се P'^c из P^c.

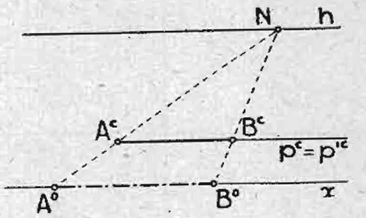


Сл. 503

188. ПРАВА ВЕЛИЧИНА ДУЖИ

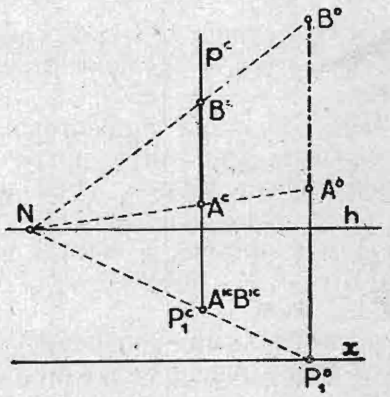
Посматрајмо засебно задатак одређивања праве величине дужи задате посредном и непосредном средишњом пројекцијом. Изложимо прво четири случаја кад је дуж у посебним положајима.

I. *Дуж у* π_1 *и* $\parallel \pi$. Нека је AB ма која дуж упоредна спрам равни π, у π_1 (сл. 504). Ако у π_1 поставимо кроз A и B две ма какве упоредне праве које секу осу x у A^0 и B^0, имамо $A^0B^0 = AB$, јер је ABB^0A^0 паралелограм. Дакле дуж A^0B^0 даје праву величину дужи AB. Према томе повуцимо у централној пројекцији кроз ма коју тачку на хоризонту h, која претставља недоглед извесних хоризонталних правих, праве NA^c и NB^c; у пресеку с x имамо A^0 и B^0.



Сл. 504

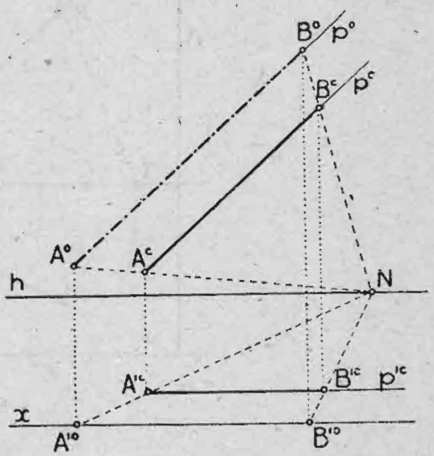
II. *Вертикална дуж*. Да би вертикална дуж AB, тј. управна на π_1, дакле и упоредна спрам π (сл. 505) била дата, потребно је знати сем пројекције A^cB^c и посредну пројекцију, тј. пројекцију трага P_1 праве p која садржи дуж AB. Повуцимо кроз P_1 и тачке A и B упоредне хоризонталне праве и одредимо њихове продоре P_1^0, A^0, B^0 кроз раван слике. Како су те праве упоредне, имају заједнички недоглед N на хоризонту h. Имамо сем тога $A^0B^0 = AB$. Дакле, да бисмо добили праву величину дужи AB изаберимо недоглед ма где на h, одредимо



Сл. 505

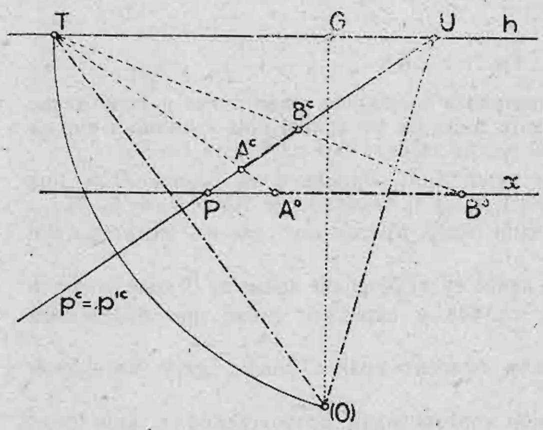
$P_1^0 = NP_1^c \times x$ и повуцимо кроз ту тачку $p^0 \parallel p^c$. У пресеку праве p^c и праве NA^c и NB^c су тачке A^0 и B^0.

III. *Ма која дуж* $\parallel \pi$. Ако је AB дуж упоредна спрам равни π а коса према π_1 имамо $A'B' \parallel x$, а дужи AA' и BB' су вертикалне (сл. 506). Помоћу тих дужи поступак се своди на претходна два поступка. Изабравши недоглед N на h повуцимо у средишњој пројекцији упоредне хоризонталне праве кроз A, B, A', B', тј. NA^c, NB^c и NA'^c, NB'^c. На x имамо у пресеку с другим двема правим A'^0 и B'^0, а отуд A^0 и B^0.



Сл. 506

IV. *Ма која дуж у* π_1. Ако је AB у π_1 на косој правој p чији недоглед је U (сл. 507), оборимо у π раван $\bar{\pi} = [O \parallel \pi_1]$ око h. Тада O долази у (O) у правцу управном на h, а права $\bar{p}$ (упоредни зрак праве p) постаје $(\bar{p}) = (O)U$. Нагиб праве p према равни π једнак је $\sphericalangle TU(O)$.

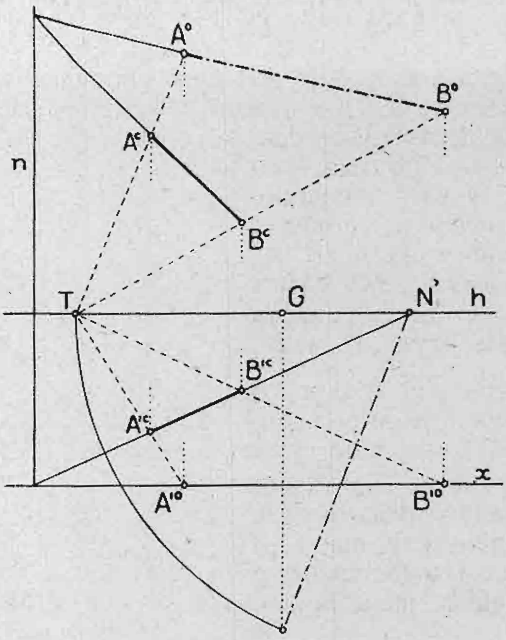


Сл. 507

Ако дуж OU оборимо у равни $\bar{\pi}$ око U на праву h, пашће O у неку тачку T; дуж OT је тетива лука тог обарања. Ако пак праву p оборимо у раван π_1 око P, на праву ν, тетиве обарања свих њених тачака су, очигледно, упоредне тетиви OT, дакле им је недоглед T. Према томе можемо у средишњој пројекцији повући тетиве обртања праве p, које пролазе кроз тачке A и B и добити те тачке у обореном положају: $A^0 = TA^c \times x$, $B^0 = TB^c x \times$. Дуж A^0B^0 даје праву величину дужи AB.

V. *Дуж општег положаја.* За такву дуж (сл. 508), њена пројекција $A'B'$ на π_1 је у положају претходног случаја, дакле можемо јој наћи праву величину, тј. дуж $A'^0B'^0$, као претходно. Но тиме налазимо лако и дуж AB обрнуту око трага n вертикалне равни $ABA'B'$ у раван слике, јер у том обарању тетиве обртања су упоредне тетивама обртања тачака A' и B'. Дакле, повуцимо TA^c и TB^c до вертикалних правих, повучених кроз A'^0 и B'^0; у пресеку имамо A^0 B^0, а тиме $A^0B^0 = AB$.

Исте поступке, I до V, можемо и обрнути за решавање обрнутог задатка: *Наћи обе централне пројекције дужи дате величине, која се налази на датој правој.*



Сл. 508

Задаци за вежбу

1. Дата је непосредна и посредна централна пројекција једне праве и једне тачке на тој правој. Одредити централну пројекцију тачке на тој правој чија удаљеност има од дате тачке дату величину. Решити задатак редом за свих пет случајева I — V.

2. Дате су обе средишње пројекције дужи $A_0 A_1$. Одредити на правој $A_0 A_1$ низ еквидистантних тачака A_n ($n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) тј. таквих да је $A_{n-1} A_n = A_n A_{n+1}$.

3. Поделити дату дуж на известан број (напр. 5) једнаких делова, посматрајући редом пет случајева I — V.

4. Нацртати степенице чије уздужне ивице су а) упоредне према π, б) косе према π.

5. Нацртати улаз у египатски храм, сл. 448 и одредити сенке при паралелном осветљењу.

6. Земљишну površ која претставља брдовит крај с реком, дату котираном пројекцијом, претставити у перспективи.

Упутство. Нацртати у перспективи хоризонтални правоугаоник у који пада котирана пројекција и коме је једна страна у равни слике. Затим поделити правоугаоник квадратном мрежом. Помоћу ње преноси се котирана пројекција у средишњу. Затим подићи висине у појединим тачкама и нацртати изохипсе.

ГЛАВА IV

МЕТОДА ТРАГОВА И НЕДОГЛЕДА

189. О МЕТОДИ ТРАГОВА И НЕДОГЛЕДА

Као што смо видели, кад у средишњој пројекцији знамо главну тачку и отстојање очне тачке, свака права која није упоредна равни π_0 одређена је својим трагом и недогледом; исто тако је и раван, која није упоредна равни π, одређена својим трагом и недогледницом. За тачку не постоји тако једноставно одређивање. Тачка није одређена ни самом својом средишњом пројекцијом. Али ако је трагом и недогледом дата једна права која садржи тачку којој знамо средишњу пројекцију, та тачка је одређена. Исто тако је одређена ако знамо траг и недогледницу неке равни која садржи ту тачку; али обичније је да тачка буде одређена правом. Ту праву називамо тада *носиоцем* те тачке.

Ако су на речени начин дате потребне тачке праве и равни — тј. траговима, недогледима и недогледницама — можемо решавати све задатке у с а м о ј перспективи. У томе се састоји *метода трагова и недогледа.* Та метода спада изразито у слободну перспективу.

Приметимо да се недоглед неке праве може сматрати средишњом пројекцијом тачке продора те праве кроз бескрајно далеку раван, тј. њеног трага у бескрајно далекој равни. Исто тако може се и недогледница неке равни сматрати средишњом пројекцијом трага те равни у бесконачно далекој равни. Дакле, што се тиче правих и равни можемо рећи и да радимо с а м и м т р а г о в и м а. Сетимо се да смо и у двема управним пројекцијама могли решавати задатке о правим и равнима помоћу њихових трагова. Према томе реч је о једном општем начелу нацртне геометрије, по коме се уместо пројекција посматрају трагови. Као што су за одређивање елемената потребне две пројекције, тако су потребна и два трага. То начело се према томе назива *начелом двају трагова*, за разлику од *начела двеју пројекција,* које полази од пројекција датих елемената.

190. РЕШАВАЊЕ НЕКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ТРАГОВА И НЕДОГЛЕДА

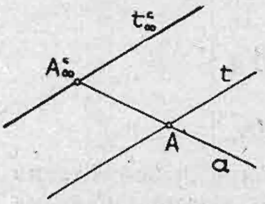
Реч је о елементарним положајним задацима. Као што знамо:

I. *Ако је права a у равни τ, недоглед праве a је на недогледници равни τ, а траг праве a на трагу равни τ.*

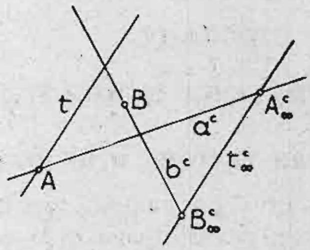
Према томе, ако је напр. дат траг t равни τ и права a у тој равни (трагом и недогледом) недогледница t_∞^c равни τ је права $[A_\infty^c \parallel t]$ (сл. 509).

Ако су дате две праве a и b и треба *кроз a поставити раван* τ *упоредну правој* b, имамо $t_\infty^c = A_\infty^c B_\infty^c$ и $t = [A \parallel t_\infty^c]$ (сл. 510).

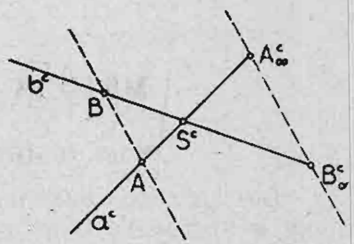
Да би постојао *пресек* двеју правих потребно је и довољно да припадају једној равни, дакле да им трагови буду на трагу те равни а недогледи на недогледници. Такве су праве a и b у слици 511.



Сл. 509



Сл. 510



Сл. 511

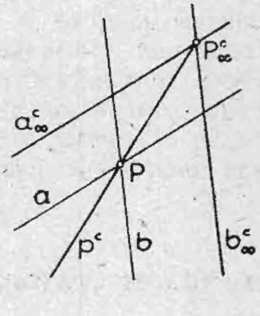
Праве a и b у слици 510 су напротив мимоилазне. Како су траг и недогледница сваке равни упоредне можемо рећи:

II. *Да би се две праве секле потребно је и довољно да права која спаја њихове трагове буде упоредна правој која спаја њихове недогледнице.*

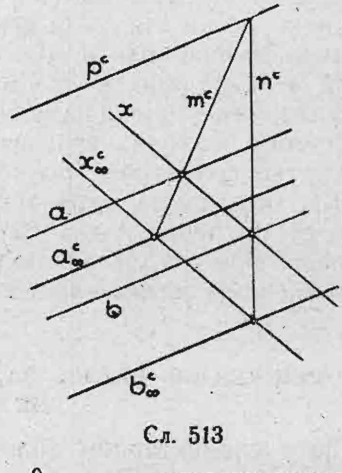
Да би се одредио *пресек двеју равни* α и β треба само одредити тачку пресека обих трагова тих равни и тачку пресека обих недогледница (сл. 512).

III. ***Тачка** пресека трагова двеју равни је траг њи ове пресечне праве, а тачка пресека недогледница је недоглед пресечне праве.*

Да би се одредио пресек двеју равни α и β чији су трагови упоредни, (дакле и недогледнице упоредне) треба обе равни пресећи неком помоћном равни ξ (сл. 513). Нека је наиме $\alpha \times \xi = m$, $\beta \times \xi = n$;



Сл. 512

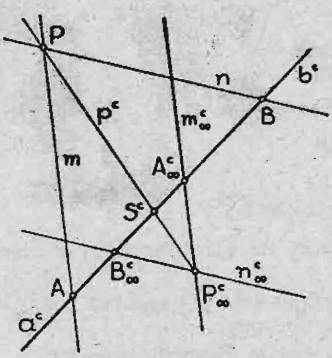


Сл. 513

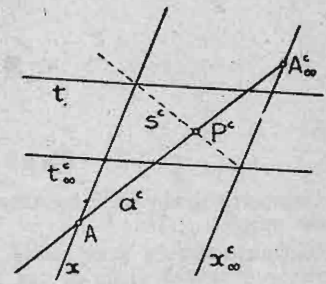
тачка $m \times n$ је заједничка равнима α и β, дакле кроз ту тачку пролази пресечна права p тих равни, упоредна траговима.

Да би се одредио пресек *двеју правих a и b чије пројекције падају на једну праву* (сл. 514) треба поставити кроз сваку праву неку раван различиту од пројектујуће, рецимо μ кроз a и ν кроз b и наћи пресек p тих равни. Тада је пресек обих правих $S = p \times a = p \times b$ и одређује се непосредно.

Да би се одредио *продор праве a кроз раван τ*, треба кроз праву a поставити помоћну раван ξ и наћи пресечну праву обих равни. Тачка продора је $P = a \times s$ (сл. 515).



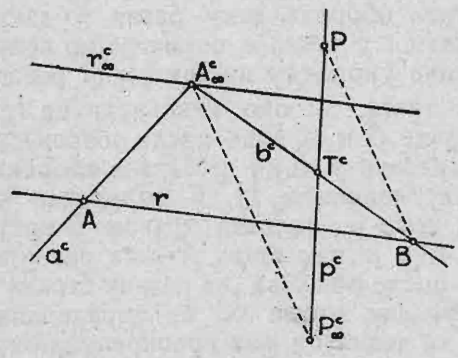
Сл. 514



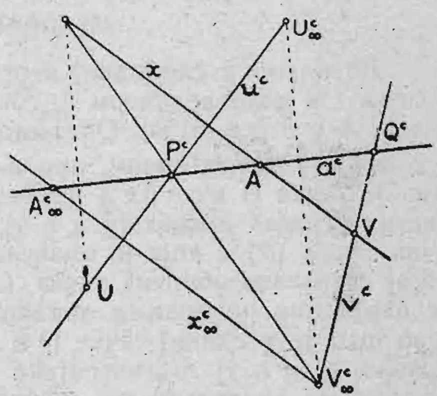
Сл. 515

Да би се поставила *раван ρ кроз праву a и тачку T на носиоцу p* (сл. 516) постављамо кроз T праву $b \parallel a$. Имамо $b^c = T^c A^c_\infty$. Затим, како су b и p у једној равни, мора бити $BP \parallel A^c_\infty P^c_\infty$; отуд налазимо B. Тада је $r = AB$ и $r^c_\infty = [A^c_\infty \parallel r]$.

Да би се одредио *траг и недоглед праве a која спаја две тачке P и Q, дате на носиоцима u и v*, поставимо раван $\xi = Pv$. Та раван садржи праву a, дакле $A \subset x$, $A^c_\infty \subset x^c_\infty$ (сл. 517).

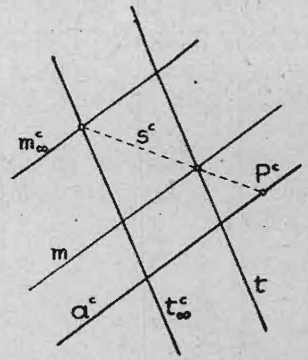


Сл. 516



Сл. 517

Права паралелна равни слике одређена је једном равни која је садржи. Да би се напр. одредио *продор P праве a паралелне равни слике и садржане у равни ν, кроз раван τ*, треба одредити пресек s обих равни (сл. 518).



Сл. 518

Задаци за вежбу

1. Одредити праву која пролази кроз тачку на датом носиоцу и сече друге две мимоилазне праве.

2. Одредити пресек неке равни једном равни која је упоредна равни π а одређена је једном својом тачком (која је пак на датом носиоцу).

3. Одредити пресек праве једном равни која је упоредна равни π.

4. Одредити раван која пролази кроз три тачке.

5. Дат је недоглед праве n и средишња пројекција једне њене тачке, садржане у датој равни α. Наћи траг праве n.

6. Кроз дату тачку која је у датој равни поставити праву чији нагиб према равни слике износи 60^0.

7. Кроз дату праву поставити раван датог нагиба према равни слике.

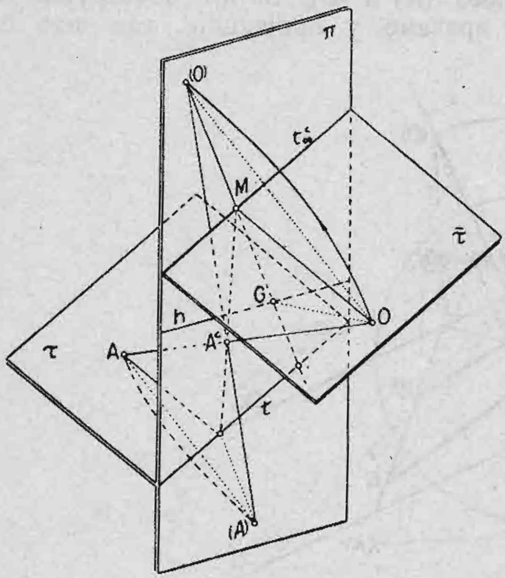
8. Испитати да ли дата раван сече дату дуж.

9. Поставити праву која сече две мимоилазне праве.

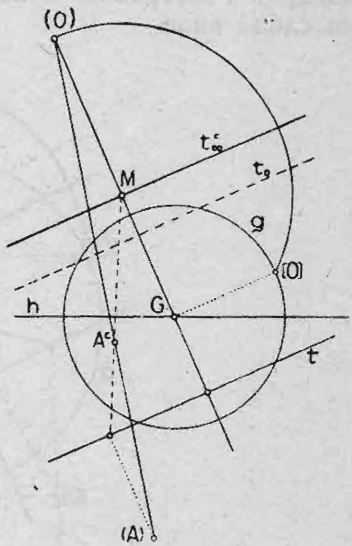
191. ОБАРАЊЕ РАВНИ

Да бисмо у слободној перспективи оборили неку раван τ дату трагом t и недогледницом t^c_∞, око трага t у раван π, посматрајмо неку тачку A у τ (сл. 519а). Оборимо такође упоредну пројектујућу раван $\bar{\tau}$ равни τ у истом смеру, око њеног трага, тј. око недогледнице t^c_∞. Ако је тачка A испред равни π, тачке O и A биће после обарања с „истих страна" правих t^c_∞ и t, тј. полураван у којој се налази оборена очна тачка (O) а која је омеђена недогледницом t^c_∞, и полураван у којој се налази оборена тачка (A) а која је омеђена трагом t могу се паралелним померањем поклопити. Ако је пак тачка A иза равни π (као што је у слици) тачке O и A су после обарања „са разних страна" правих t^c_∞ и t, тј. одговарајуће полуравни могле би се паралелним померањем поклопити тек пошто би се једна од њих преокренула око своје међе.

Приметимо да при обарању обих равни тачке O и A описују кружне лукове у упоредним равнима, управним на t и t^c_∞ и да су тетиве $A(A)$ и $O(O)$ тих лукова упоредне. У ствари тетива $O(O)$ је паралелни зрак пројектовања тетиве $A(A)$, дакле (O) је недоглед сечице $A(A)$.



Сл. 519 а



Сл. 519б

Како су тетиве $A(A)$ и $O(O)$ упоредне, тачке O, (O), A, (A) припадају једној равни, која садржи пројектујући зрак OA тачке A а сече раван π по правој $(O)(A)$. Дакле $A^c = OA \times (O)(A)$.

То нам омогућује да у равни слике π вршимо обарање равни τ. Оборимо прво раван $[O \perp t]$, тј. која садржи дуж OG и управна је на τ и $\bar{\tau}$ (сл. 519б). Та раван сече недогледницу t_∞^c у тачки M, недогледу линија пада равни τ и пројектује се у праву GM. Дакле кад је оборимо, тачка O пада у правцу $\parallel t$. Нека је $[O]$ тако оборена тачка O.

Обарањем равни $\bar{\tau}$ око t_∞^c тачка O долази у (O) на GM, па како је и $[O]M = (O)M = OM$, налазимо (O) описивањем кружног лука из M.

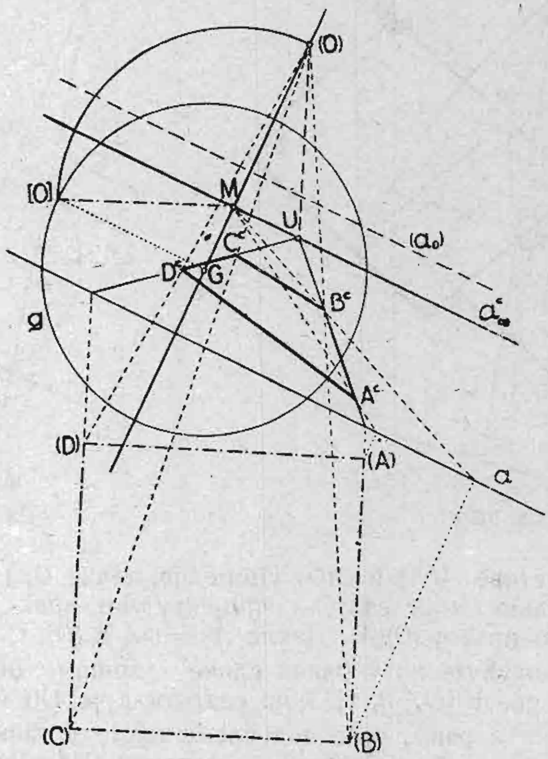
Посматрајмо сад обарање равни τ и при томе праву у τ која пролази кроз A и управна је на трагу t. Недоглед те праве је M, дакле у средишњој пројекцији то је права MA^c. У обореној равни τ та права је управна на t и пролази кроз (A), а сече се с MA^c на оси обарања, t. Отуд се за сваку тачку A равни τ може из A^c одредити (A) или обратно.

Уочимо још линију ишчезавања, t_0 равни τ. Кад се раван τ обори, t_0 пада с исте стране трага t као што у равни $\bar{\tau}$, у односу на t_∞^c, пада тачка O; при томе је раздаљина правих t и (t_0) једнака $(O)M$ (јер је раздаљина правих t и t_0 једнака OM).

Задатак. *У перспективи дата је дуж AB у некој равни α, одређеној трагом и недогледом. Конструисати у α квадрат коме је AB страна.*

Пошто смо нашли тачку (O) у обореној равни α, можемо на описани начин, помоћу недогледа M линије пада одредити тачке (A) и (B). Али можемо и непосредно нацртати оборену праву AB (сл. 520) обарањем њеног недогледа U: оборена права AB је $[(A^cB^c \times a) \parallel (O)U]$.

На правим $(O)A^c$ и $(O)B^c$ налазимо (A) и (B). Затим конструишемо квадрат у обореном положају и враћамо у пројекцију, као што се на слици види.



Сл. 520

Приметимо да су четвороугли $A^cB^cC^cD^c$ и $(A)(B)(C)(D)$ перспективно колинеарни с осом колинеације a и средиштем (O). Како линији ишчезавања a_0 равни α одговара у централној пројекцији бескрајно далека права те равни, оборена линија ишчезавања (a_0) је противоса у тој колинеацији.

Уопште, *средишња пројекција равног лика и тај лик у обореној равни су перспективно колинеарни. Средиште колинеације је очна тачка у обореној упоредној равни, а оса колинеације траг равни.*

Задаци за вежбу

1. Дат је у равни тла какав било многоугао својом средишњом пројекцијом. Наћи га у правој величини.

2. Дат је какав било многоугао у обореној равни тла. Наћи његову средишњу пројекцију.

3. Нацртати средишњу пројекцију правилних шестоугаоника у паралелним равнима општег положаја.

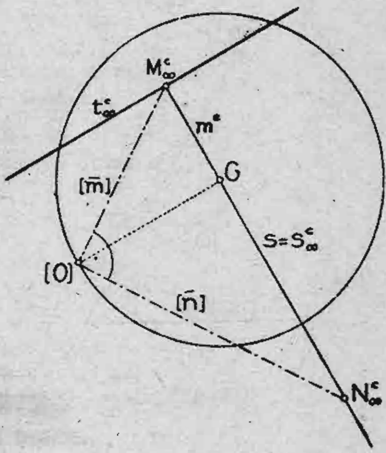
192. УПРАВНЕ ПРАВЕ И РАВНИ. УГАО ДВЕЈУ ПРАВИХ. ПРАВА ВЕЛИЧИНА ДУЖИ

Изнесимо неколико задатака који се решавају обарањем пројектујућих равни.

Задатак 1. *Одредити недоглед правих управних на датој равни.*

Довољно је знати недогледницу дате равни τ. Поставимо кроз очну тачку O пројектујућу раван σ управну на π и на τ (сл. 521). Њен траг s пролази кроз G и управан је на t^c_∞. Равни τ и σ секу се по линији пада m чији недоглед је $M^c_\infty = t_\infty \times s$. Раван σ је једноставно оборити. Тачка O пада на круг отстојања у $[O]$, у смеру управном на s. Тада је $[O]M^c_\infty = [\bar{m}]$ оборен упоредни зрак праве m. Ако је n ма која права управна на τ, њен упоредни зрак $\bar{n}$ је такође управан на $\bar{\tau}$, па и на $\bar{m}$, дакле у обореном положају $[\bar{n}]$ је права управна на $[\bar{m}]$ кроз $[O]$, а $[\bar{n}] \times s$ недоглед N^c_∞ праве n. То је заједнички недоглед свих правих управних на τ.

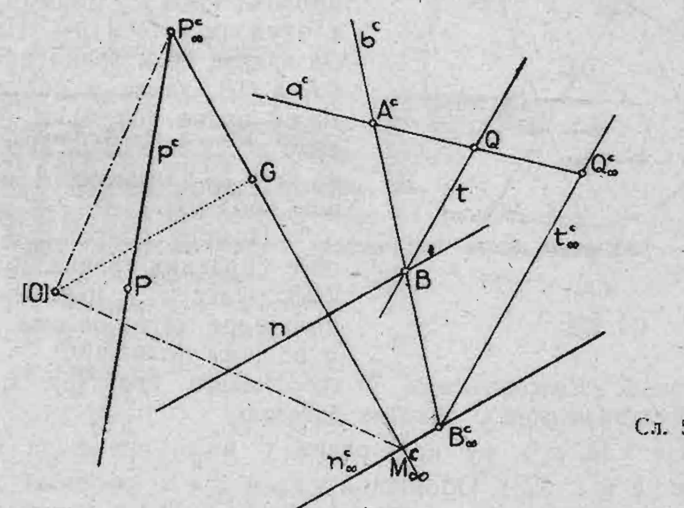
На исти начин решавамо и обрнути задатак: *одредити недогледницу свих равни управних на датој правој.*



Сл. 521

Задатак 2. *Кроз дату тачку A поставити раван ν управну на датој правој p.*

Нека је тачка A дата пројекцијом A^c и носиоцем q (Q, Q^c_∞). На начин као у задатку 1 одредимо недогледницу n^c_∞ равни ν управне на p (сл. 522): $[O]G \perp GP^c_\infty$, $[O]M \perp [O]P^c_\infty$, $n^c_\infty \perp GP^c_\infty$. Сад можемо поставити

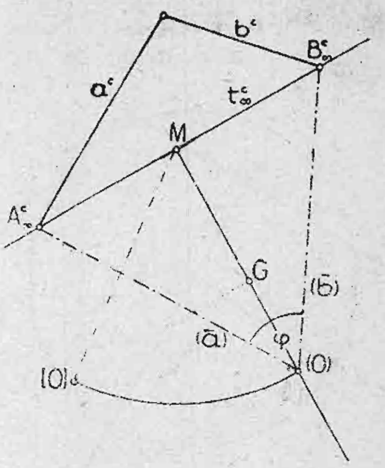


Сл. 522

кроз A ма коју праву b која припада равни ν. Изаберимо недоглед B^c_∞ праве b на n^c_∞ и поставимо раван τ кроз b и q. Имамо $t^c_\infty = B^c_\infty Q^c_\infty$, $t = [Q \parallel t^c_\infty]$. Тада је $B = b^c \times t$. Према томе траг n равни ν је на $[B \parallel n^c_\infty]$.

Задатак 3. *Одредити угао двеју правих a и b.*

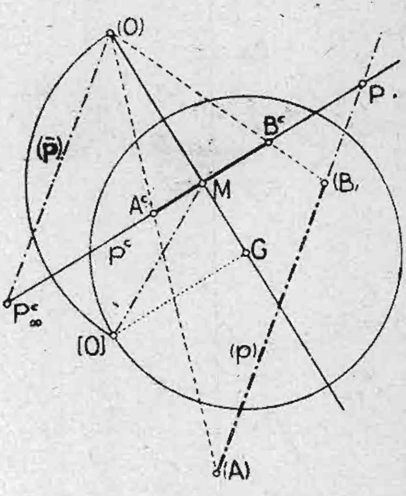
Довољно је знати недогледе правих a и b (опште узевши праве се могу и мимоилазити). Угао упоредних зрака $\bar{a}$ и $\bar{b}$ правих a и b једнак је углу φ тих правих, а добијамо га обарањем равни $\bar{a}\bar{b}$. Да би се ово обарање извршило треба наћи отстојање OM ока O од трага $A_\infty^c B_\infty^c$ равни $\bar{a}\bar{b}$ (сл. 523). Оборимо опет пројектујућу раван управну на $\bar{a}\bar{b}$; тада је $M[O] = MO$. Пренесимо дуж $M[O]$ од M на MG. Тада је (O) очна тачка у обореној равни $\bar{a}\bar{b}$ и према томе $(O)A_\infty^c = (\bar{a})$ и $(O)B_\infty^c = (\bar{b})$, а оштри угао тих правих је тражени угао.



Сл. 523

Задатак 4. *Одредити праву величину дужи AB која припада датој правој.*

Нека је дуж AB на правој p одређеној трагом и недогледом (сл. 524). Да бисмо добили праву величину те дужи оборимо пројектујућу раван Op праве p. Траг те равни је p^c. Оборимо претходно пројектујућу раван $[O \perp p^c]$, да бисмо добили отстојање очне тачке од p^c, тј. дуж OM, слично као у претходном примеру. Тако добијамо (O) у обореној равни Op ($(O\,M = [O]M)$. Како паралелни зрак $\bar{p}$ праве p пролази кроз P_∞^c имамо $(\bar{p}) = (O)P_\infty^c$, а отуд $(p) = [P \parallel (\bar{p})]$. Но у равни Op налазе се и зраци пројектовања OA и OB, дакле у обореној равни то су праве $(O)(A)$ и $(O)(B)$ које секу p^c у A^c и B^c. Тако и обратно, из A^c и B^c налазимо (A) и (B) на правим кроз (O).



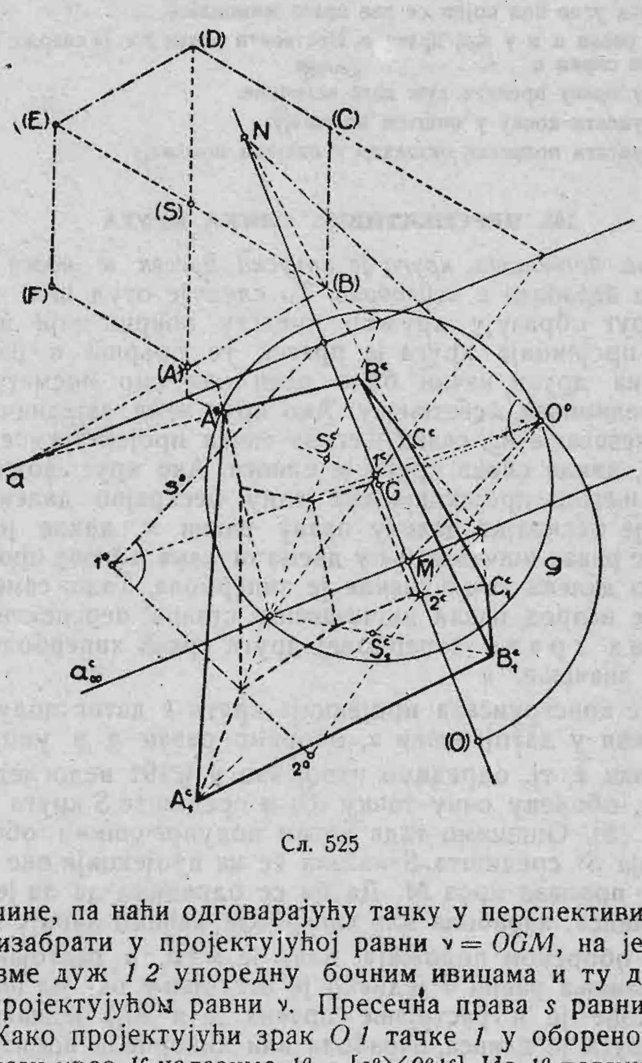
Сл 524

Помоћу обарања и конструкције управних правих можемо напр конструисати у перспективи разне полиједре датих облика и величина у општем положају.

Задатак 5. *Конструисати у перспективи правилну шестострану призму датих димензија у општем положају.*

Нека је α (a, a_∞^c) ма која раван у којој треба да буде једна основа призме (сл. 525). Оборивши равни α и $\bar{\alpha}$, оборимо тачку O и конструишимо правилни шестоугао $ABCDEF$ са средиштем S прво у обореном положају а потом његову средишњу пројекцију, као у примеру прошлог параграфа. Затим одредимо недоглед N бочних ивица.

управних на равни основе ($O^0N \perp O^0M$) и повуцимо пројекције NA^c, NB^c итд. правих које садрже бочне ивице. Да би се одредила пројекција друге основе призме требало би, опште узевши, оборити једну од правих које садрже бочне ивице и тада на њој одмерити дуж



Сл. 525

задате величине, па наћи одговарајућу тачку у перспективи. Али једноставније је изабрати у пројектујућој равни $\nu = OGM$, на једној бочној пљосни призме дуж $1\,2$ упоредну бочним ивицама и ту дуж оборити заједно са пројектујућом равни ν. Пресечна права s равни α и ν пада у $s^0 \parallel O^0M$. Како пројектујући зрак $O\,1$ тачке 1 у обореном положају, тј. $O^0 1^0$ пролази кроз 1^c налазимо $1^0 = [s^0 \times O^0 1^c]$. Из 1^0 повуцимо управну на s^0 и одредимо дуж $1^0 2^0$ једнаку задатој висини призме. Тада имамо $2^c = GM \times O^0 2^0$. Полазећи од 2^c конструишимо пројекцију друге основе призме знајући да упоредне ивице обих основа имају заједнички недоглед на недогледници равни α. Приметимо да су оба шестоугла перспективно колинеарна за средиште колинеације N и осу a^c_∞.

Задаци за вежбу

1. Дата је раван α и права p; поставити раван β која садржи праву p и управна је на α.

2. Одредити отстојање дате тачке од дате праве.

3. Одредити отстојање дате тачке од дате равни.

4. Одредити угао под којим се две праве мимоилазе.

5. Дата је раван α и у њој права p. Поставити раван β која садржи праву p и под датим је нагибом спрам α.

6. На дату праву пренети дуж дате величине.

7. Конструисати коцку у општем положају.

8. Конструисати правилан октаедар у општем положају.

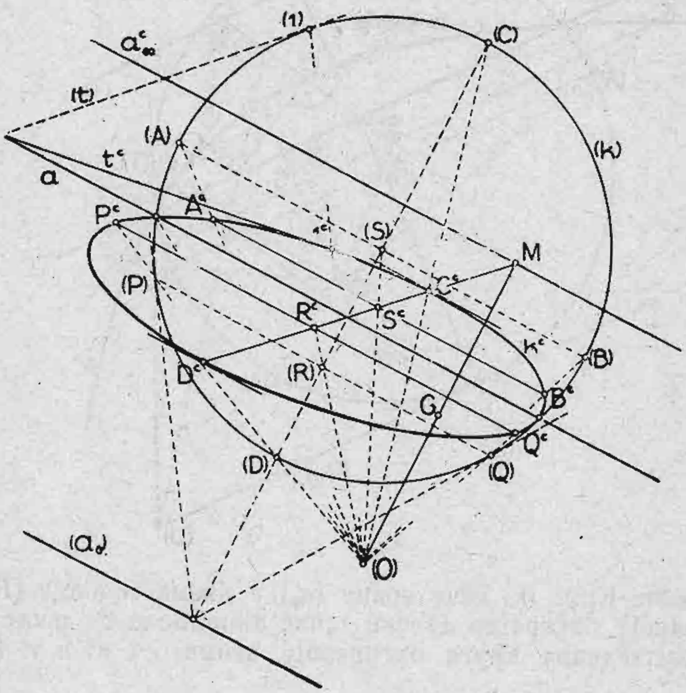
193. ПЕРСПЕКТИВНА СЛИКА КРУГА

Средишња пројекција круга је конусни пресек и може бити како елипса тако и парабола и хипербола. То следује отуд што зраци који пројектују круг образују кружно купасту површ чији врх је очна тачка, дакле пројекција круга је пресек те површи и равни слике. О томе је на други начин било речи кад смо посматрали сенку круга при средишњем осветљењу. Ако круг нема заједничких тачака са равни ишчезавања π_0, свака његова тачка пројектује се на π као обична тачка, дакле слика круга је елипса. Ако круг додирује раван ишчезавања, његова пројекција има једну бескрајно далеку тачку у којој додирује бескрајно далеку праву равни π, дакле је парабола. Ако круг сече раван ишчезавања у двема тачкама његова пројекција има две бескрајно далеке тачке, дакле је хипербола. Тада само онај део круга, који је испред равни ишчезавања ствара перспективну слику, а то је једна грана хиперболе; друга грана хиперболе има само геометријско значење.

Да би се конструисала пројекција круга k датог полупречника и који је садржан у датој равни α, оборимо раван α и упоредну пројектујућу раван $\overline{\alpha}$, тј. одредимо прво, као у § 191 недоглед M линија пада равни α, оборену очну тачку (O) и средиште S круга у обореном положају, тј. (S). Опишимо тада датим полупречником оборени круг (k). Пројекција S^c средишта S налази се на пројекцији оне линије пада равни α, која пролази кроз M. Да би се одредило да ли је пројекција k^c круга k елипса, парабола или хипербола, нађимо линију ишчезавања a_0 равни α у обореном положају. Како је $\alpha \parallel \overline{\alpha}$, а растојање трага и линије ишчезавања равни α једнако је отстојању ока од недогледнице равни α, такође је и растојање правих a и (a_0) једнако је $M(O)$. Пројекција круга је елипса, парабола или хипербола према томе да ли права a_0 има с кругом k ниједну, једну или две заједничке тачке.

Посматрајмо редом сва три случаја.

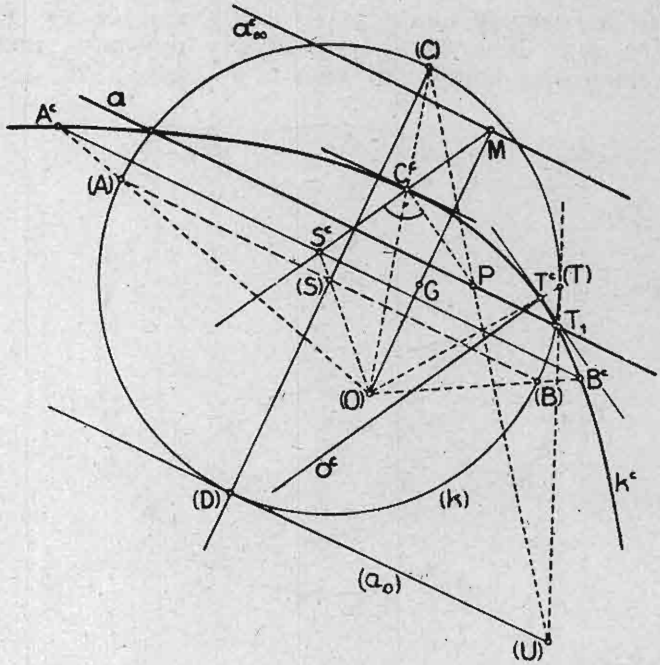
Елипса. Нађимо пројекцију пречника AB круга упоредног равни π и пречника CD управног на AB. Имамо $(A)(B) \parallel a$, $(C)(D) \perp a$, а отуд пројекције тих пречника (сл. 526). Како су дирке у A и B управне на a, дирке на k^c у A^c и B^c пролази кроз M, дакле A^cB^c *није пречник елипсе.* Дирке у C^c и D^c су паралелне трагу a, дакле C^cD^c је пречник. Да би се добио спрегнути пречник P^cQ^c приметимо да је упоредан диркама у C^c и D^c и да пролази кроз средиште R^c дужи C^cD^c. Као што пројекција S^c средишта S круга није средиште елипсе, тако ни тачка R, чија пројекција је средиште R^c елипсе, није средиште круга k. Пречнику P^cQ^c одговара тетива $(P)(Q)$ круга (k) а упоредним диркама на k^c у P^c и Q^c одговарају дирке у (P) и (Q), које се секу на противоси (a_0) колинеације. На основу спрегнутих пречника можемо сад конструисати елипсу на који било начин. У слици 526 одређена је



Сл. 526

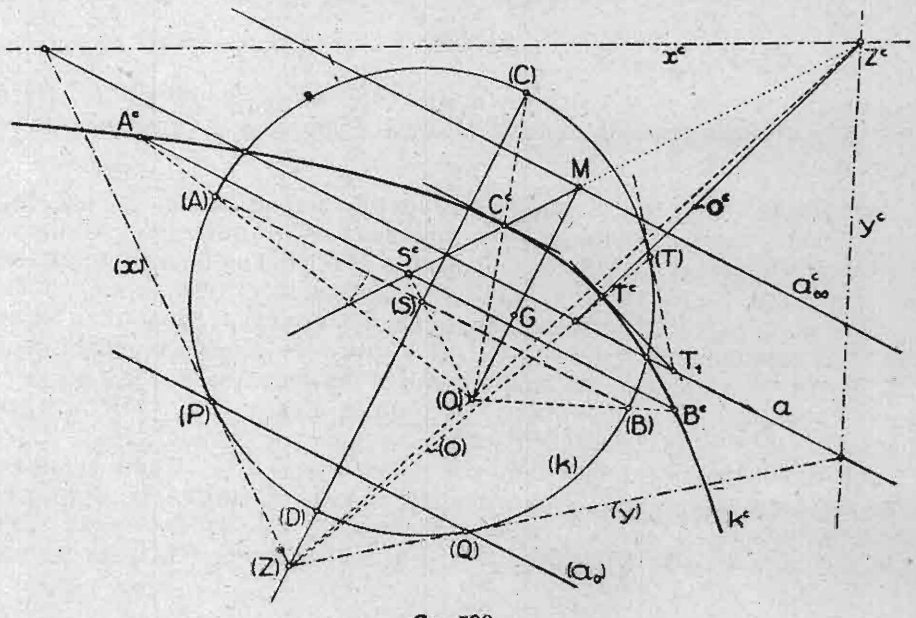
непосредно и тачка 1^c у коју се пројектује ма која тачка 1 круга. Дирку t^c у 1^c налазимо на основу сечења с дирком у (1) на оси колинеације a.

Парабола. Круг (k) додирује оборену линију ишчезавања, (a_0). Можемо опет одредити пројекцију пречника AB упоредног равни π и тачке C на управном пречнику CD. Тачки D'одговара бескрајно далека тачка параболе. Како уопште правој a_0 одговарају бескрајно далеке тачке равни π, (a_0) је противоса колинеације круга и параболе. Полуправа C^cS^c, која одговара пречнику $(C)(D)$ круга (k) је један пречник параболе. Да би се добила њена оса и теме T приметимо да је дирка у темену управна на пречницима и повуцимо праву $C^cP \perp MS^c$ и одговарајућу сечицу $(C)P$ круга. Уочимо затим на тој сечици тачку (U) на (a_0), која одговара бескрајно далекој тачки праве C^cP. Свим сечицама круга, које пролазе кроз (U) одговарају сечице параболе, које пролазе кроз исту бескрајно далеку тачку, тј. управне су на пречнику C^cS^c. Дакле и дирци (t) из (U) на круг (k) одговара дирка t^c параболе, која је управна на пречницима, а тачки додира (T) одговара теме T^c параболе. Ако дакле повучемо дирку (t) и одредимо $T_1 = (t) \times a$, имамо $t^c = [T_1 \perp C^c S^c]$, затим T^c на $(O)(T)$. Оса параболе је дакле права $O^c \parallel C^c S^c$, која пролази кроз T^c.



Сл. 527

Хипербола. Круг (k) сече праву (a_0) у двема тачкама (P) и (Q) којима одговарају бескрајно далеке тачке хиперболе k^c, дакле диркама (x) и (y) у тим тачкама круга одговарају асимптоте x^c и y^c (сл. 528)

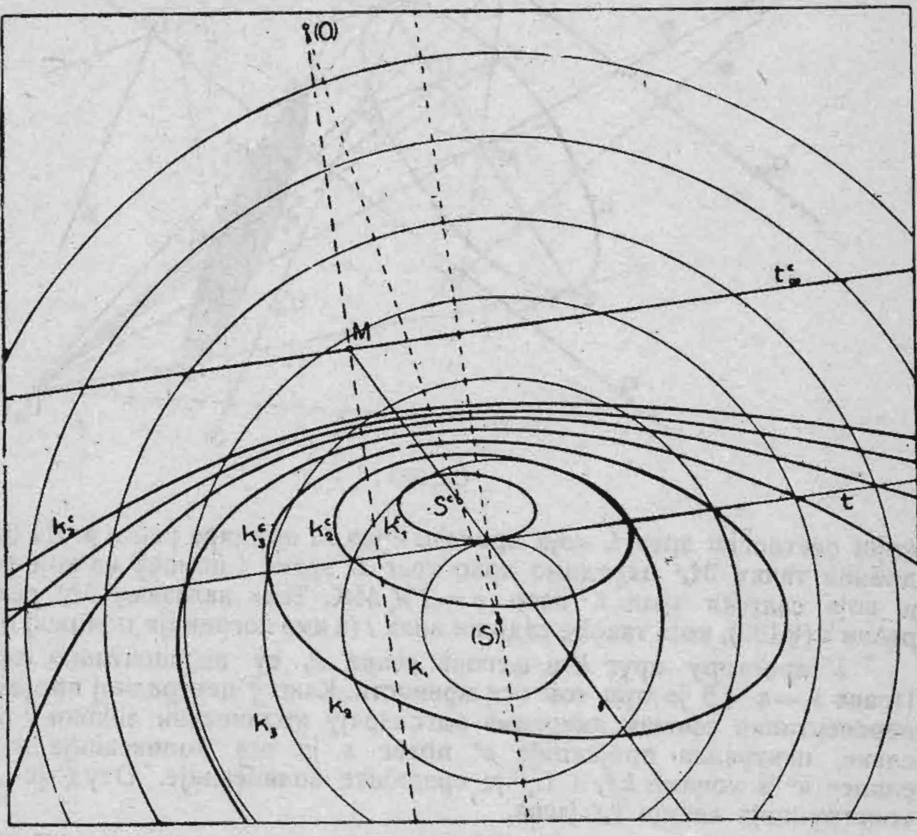


Сл. 528

Можемо их конструисати помоћу пресека осом афиности a и тачке Z^c, која одговара пресечној тачки (Z) обих дирки. Како је тачка Z иза линије ишчезавања a_0, тачка Z^c није реална слика неке тачке равни α, али нам сад користи у конструкцији. Реална оса O^c хиперболе је располовница угла обих асимптота, која пада у област конструисаних тачака A^c, B^c итд. Да бисмо добили теме хиперболе, нађимо сечицу (O) круга (k), која одговара оси O^c, и пресечну тачку с кругом, (T), која је „изнад" (a_0).

Задатак 1. *Нацртати у извесној равни* τ *средишњу пројекцију низа концентричних кругова чији полупречници се односе као природни бројеви* 1, 2, 3 *итд.*

Као у претходном посматрању, опишимо из заједничког средишта (S) оборене кругове (k_1), (k_2), (k_3) итд. чији се полупречници односе као бројеви 1, 2, 3, ..., напр. до 7 (сл. 529). Очна тачка је изабрана



Сл. 529

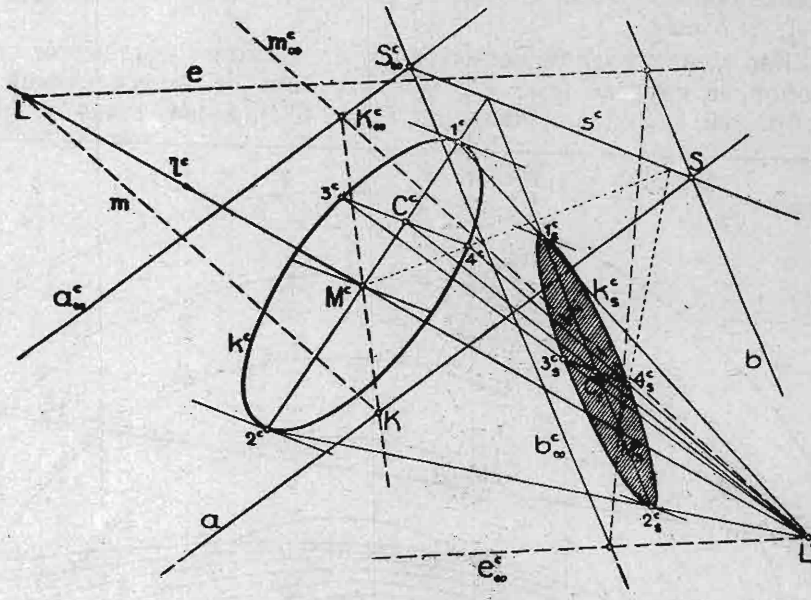
тако да линија ишчезавања s_0 додирује круг k_5. Према томе k_1^c, k_2^c, k_3^c и k_4^c су елипсе, k_5^c је парабола а k_6^c и k_7^c су хиперболе.

Кад би се смањивало отстојање очне тачке — као што би одговарало посматрачу који се приближује средишту кругова — број елипса би се смањивао. У први мах би крива k_6^c постала хипербола, а

$k_4{}^c$ би остала елипса; параболе не би било све док противоса не би додирнула круг k_4; итд. Кад би се, напротив, отстојање очне тачке повећавало, број елипса би растао.

Задатак 2. *Одредити при упоредном осветљењу с датим недогледом светлосних зрака, сенку коју равна површ ограничена кругом* k *и садржана у датој равни* $\alpha\,(a,\ a^c_\infty)$ *баца на дату раван* $\beta\,(b,\ b^c_\infty)$.

Претпоставимо да је конструисана централна пројекција k^c круга k и да је то елипса (сл. 530). Сенка $M_s{}^c$ које било тачке M кружне површи, напр. тачке која одговара средишту M^c елипсе k^c је тачка у



Сл. 530

којој светлосни зрак l, који пролази кроз M продире раван β. Да бисмо добили тачку $M_s{}^c$ одредимо прво траг L зрака l помоћу ма које равни μ која садржи зрак l, напр. $\mu = l \times MK$. Тада налазимо $M_s{}^c$ помоћу равни ε (§ 190), која такође садржи зрак l (а има погоднији положај од μ).

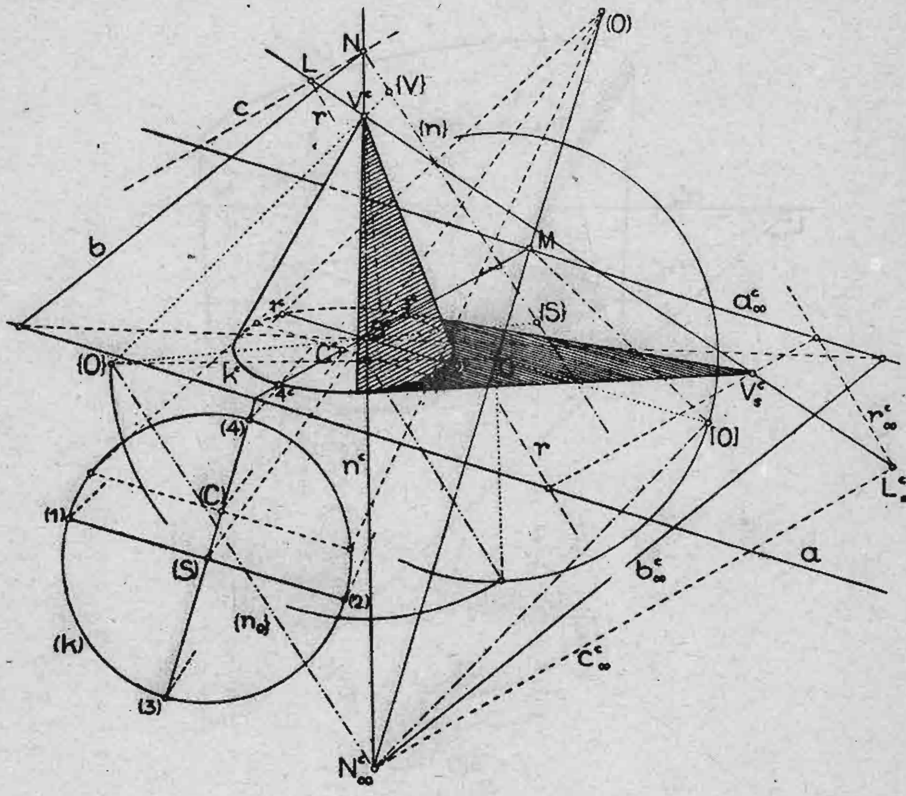
У простору круг k и његова сенка k_s су перспективно афини. Права $s = \alpha \times \beta$ је при том оса афиности. Како у централној пројекцији перспективно афиним ликовима одговарају колинеарни ликови у равни слике, централна пројекција s^c праве s је оса колинеације између елипсе k^c и конике $k_s{}^c$, а L^c_∞ је средиште колинеације. Отуд је даља конструкција линије $k_s{}^c$ јасна.

Како ово спада у положајне задатке, конструкција је иста као за упоредно пројектовање. Можемо напр. конструкцију изводити као да одређујемо пресек купе чија управна пројекција је $k^cL^c_\infty$ једном равни која сече раван основе по правој чија пројекција је s^c.

На основу претходнога можемо конструисати перспективне слике кружне купе и ваљка. Решимо, као примере, следећа два задатка.

Задатак 3. *Нацртати у перспективи обртну купу kV дате величине и с основом у датој равни α и затим сенке при паралелном осветљењу.*

Обарањем пројектујуће равни управне на α (a, a^c_∞) налазимо тачку $[O]$ и отуд (O) (§ 191) и недоглед N^c_∞ правих управних на α ($[O]N^c_\infty \perp [O]M$) (сл. 531). Помоћу обореног круга, (k), који је задате величине



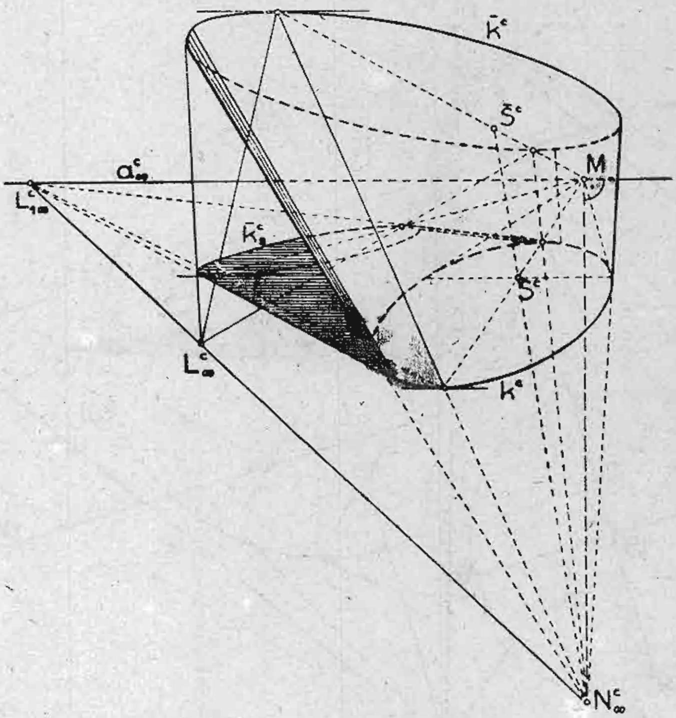
Сл. 531

и чије средиште нека буде (S), конструисана је средишња пројекција круга. Да би се добила пројекција врха V поставимо праву $n \perp \alpha$ кроз S и одмеримо на њој задану висину SV купе. Имамо $n^c = S^c N^c_\infty$. Затим, као у задатку 4, § 192, оборимо пројектујућу раван nO праве n, уочивши прво пројектујућу раван управну на nO. Нека је $\{O\}$ очна тачка тако оборена. Имамо $\{n_0\} = \{O\} N^c_\infty$ и према томе, ако је N траг праве n (нађен помоћу неке равни β која садржи праву n) имамо $\{n\} = [N \parallel \{n_0\}]$. Затим $\{S\} = \{n\} \times \{O\} S^c$. Преношењем задате висине, од $\{S\}$ у једном од два смера, налазимо $\{V\}$, а отуд V^c на $\{O\}\{V\}$.

У слици је затим нацртана и сенка купе при паралелном осветљењу, сопствена и бачена на раван основе (упореди са задатком 2; помоћне равни су γ и ρ).

Задатак 4. *Нацртати у перспективи обртни ваљак $k\overline{k}$ дате величине и с „доњим" кругом k у датој равни α, а затим сенке при паралелном осветљењу.*

Претпоставивши да је позната средишња пројекција k^c, круга k чије средиште је S, и да смо нашли недоглед N_∞^c правих управних на α, одредимо у слици, на оси ваљка средиште $\overline{S}$ горњег круга $\overline{k}$, тако да висина $S\overline{S}$ има дату величину, — поступком као у претходном задатку (сл. 532). Затим конструишимо елипсу $\overline{k}^c$ која припада равни



Сл. 532

$\overline{\alpha} \parallel \alpha$, дакле с истом недогледницом a_∞^c. Како су у простору кругови k и $\overline{k}$ перспективно афини (штавише подударни), конике k^c и $\overline{k}^c$ су перспективно колинеарне, с осом колинеације a_∞^c и средиштем колинеације N_∞^c. Разуме се, k^c и $\overline{k}^c$ могу бити елипсе, параболе или хиперболе.

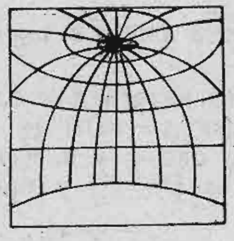
Сенке двеју изводница које припадају рубу сопствене сенке добијају се кад се кроз те изводнице поставе светлосне равни. Њихова недогледница садржи недоглед L_∞^c светлосних зрака и недоглед N_∞^c изводница. Бачене сенке тих двеју изводница припадају и равни α и тим светлосним равнима, дакле њихов недоглед је $L_{1\infty}^c = a_\infty^c \times N_\infty^c L_\infty^c$. Приметимо да су сенка $\overline{k}_s$ и основа $\overline{k}$ такође перспективно афине, а исто тако и $\overline{k}_s$ и k. Дакле $\overline{k}_s^c$ и $\overline{k}^c$ су перспективно колинеарне с осом a_∞^c и средиштем L_∞^c, а $\overline{k}_s^c$ и k^c су перспективно колинеарне с истом осом а средиштем $L_{1\infty}^c$.

Задаци за вежбу

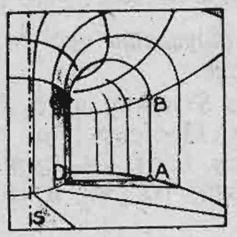
1. Нацртати у перспективи круг а) који пролази кроз три тачке дате средишњим пројекцијама и равнином у којој се налазе; б) који пролази кроз дату тачку и додирује дату праву.

2. Скица 533 претставља унутрашњост дворане у облику полулопте. Претставити ту дворану у перспективи. Полулопта гледана изнутра, претстављена је извесним бројем својих равномерно распоређених вертикалних великих кругова (меридијана) и еквидистантних хоризонталних кругова (паралела).

3. Слика 534 претставља скицу унутрашњости кружног ходника, који је описан линијом $ABCD$ (полукруг BC и дужи AB, AD и CD) садржаном у вертикалној равни, кад се та линија обрће око вертикалне осе s садржане у тој равни. Ходник је обртна



Сл. 533



Сл. 534

површ и претстављен је линијом $ABCD$ у извесном броју равномерно распоређених положаја (меридијани) и извесним бројем хоризонталних кругова (паралеле) Претставити тај ходник у перспективи, кад је очна тачка у ходнику.

Напомена. У задацима 2 и 3 слике неких кругова биће елипсе, а неких хиперболе, изузетно парабола.

194. ПЕРСПЕКТИВНА СЛИКА ЛОПТЕ

Само ако је око ван лопте, перспективна слика лопте има свој криволинијски руб. Ако би око било на лопти или у њој, слика лопте била би: у првом случају полураван или цела раван пројекције, у другом случају цела раван пројекције, (упореди са задатком за вежбу 2 у § 193). Зраци пројектовања који додирују дату лопту σ образују обртну купасту површ $\varkappa$ чија оса пролази кроз средиште S лопте, а пресек те купасте површи пројекцијском равни је руб s^c перспективне слике лопте. Дакле, *ако је очна тачка изван лопте, лопта је у перспективи оцртана конусним пресеком: елипсом, параболом или хиперболом, према томе да ли раван ишчезавања лопту не сече, додирује или сече.*

Руб s^c перспективне слике лопте је круг само ако је средиште лопте на главном зраку OG.

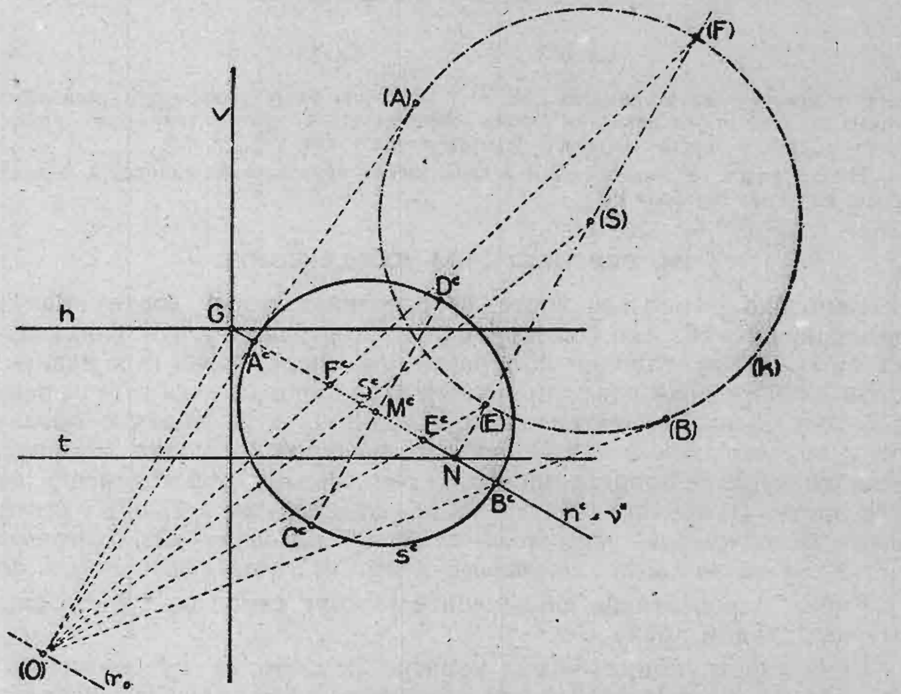
Ради конструкције руба s^c корисно је знати да су *жиже криве s^c средишње пројекције крајева оног пречника лопте, који је управан на равни слике.*

Да бисмо то доказали уочимо сем лопте σ још и оне лопте које додирују не само купу $\varkappa$, већ и раван π. То су Данделенове лопте. Кад је s^c елипса или хипербола постоје две такве лопте, σ_1, и σ_2, а кад је s^c парабола постоји само једна, σ_1. Нека су S_1 и S_2 средишта лопти σ_1 и σ_2. Као што знамо (§ 86, задатак 3) жиже F_1 и F_2 елипсе, одн. хиперболе, су тачке у којима лопте σ_1 и σ_2 додирују пресечну раван π. Дакле $S_1F_1 \perp \pi$, $S_2F_2 \perp \pi$. Приметимо да су лопте σ_1 и σ_2 у хомотетији спрам σ, са средиштем сличности у врху O купе. У том односу тачки F_1 лопте σ_1 одговара крајња тачка $\overline{F}_1$ упоредног и једнако усмереног полупречника лопте σ, а тачки F_2 лопте σ_2 крајња тачка $\overline{F}_2$ упоредног пречника лопте σ. Полупречници $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ сачињавају један пречник лопте σ и то управни на π. Дакле жиже криве s^c су перспективне слике обих крајева оног пречника лопте σ, који је управан на равни π. У случају параболе пројекција једног од обих крајева је бескрајно далека, дакле постоји само једна жижа.

Посматрајмо следећа два задатка.

Задатак 1. *Конструисати руб s^c слике лопте σ којој је дато средиште S и полупречник.*

Поставимо кроз S праву $n \perp \pi$. Њен недоглед је главна тачка G; одредимо јој траг N. Пројектујућа раван $\rho = nOG$ је управна на π, дакле $\rho'' = \rho^c = n^c$ (сл. 535). Оборимо ρ око n^c у π. Како су O и S у ν, налазимо (O) на правој $[G \perp n^c]$ и (S) на $[N \perp n^c]$ у пресеку с $(O)S^c$.



Сл. 535

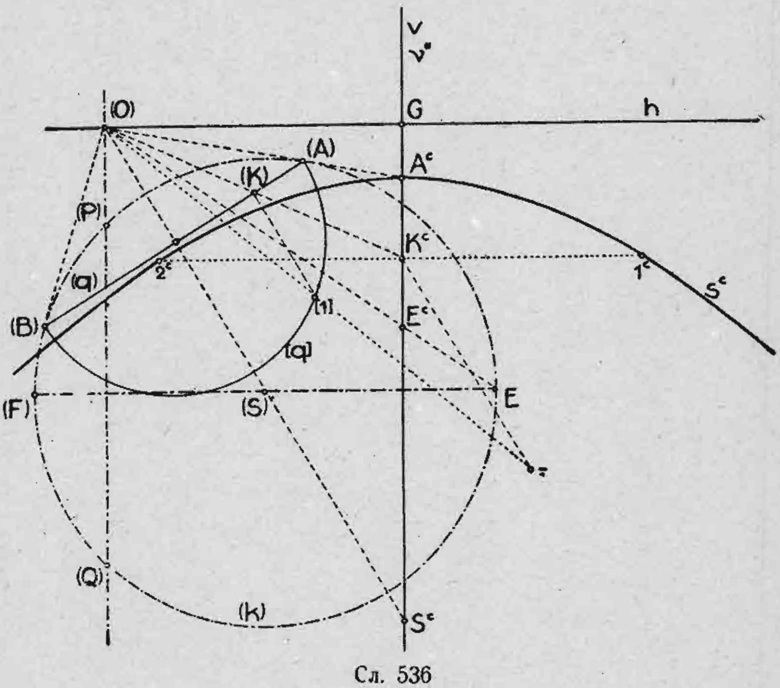
Раван ρ сече лопту σ по једном великом кругу k, који је управан на π. Опишимо око (S) оборени круг (k). Два зрака гледања која додирују круг k, додирују и лопту σ у двема тачкама A и B, дакле A^c и B^c су тачке на контури s^c. Повуцимо дакле дирке из (O) на k; у њихову пресеку с n^c имамо A^c и B^c. Круг k се пројектује у дуж A^cB^c.

Како је ρ раван симетрије за σ и за s^c, A^cB^c је оса криве s^c. Та крива је очигледно елипса, парабола или хипербола према томе да ли линија ишчезавања v_0 не сече, додирује или сече круг k, и аналого за (v_0) и круг (k). Дакле у сл. 535 s^c мора бити елипса, јер се (n_0) и (k) не секу.

Пречник лопте σ, који је управан на π, припада и кругу k. То је пречник EF; $(E)(F) \perp n^c$. Отуд налазимо E^c и F^c; то су према малопређашњем закључку жиже елипсе s^c. На основу жижа и велике осе одређујемо и малу осу C^cD^c и целу елипсу s_c.

Задатак 2. *Претставити у перспективи лопту дате величине у случају кад је руб њене слике грана хиперболе.*

Узмимо да је средиште S лопте у вертикалној пројектујућој равни $Ov \perp \pi$ (сл. 536). Оборимо ту раван око v у π. Имамо (O) на хоризонту h, а S^c на $(O)(S)$. Нека је опет $k = \sigma \times Ov$. Да би крива s^c била грана хиперболе изаберимо (S) тако да круг (k) сече оборену линију ишчезавања $[(O) \parallel v]$ равни Ov. Средишње пројекције тачака додира A и B дирки повучених из O на k су темена хиперболе, али једино теме A^c има реално значење и припада грани s^c, док B^c има само геометријско (виртуално) значење.



Сл. 536

Даље тачке на s^c можемо добити на следећи начин: Те тачке припадају додирној купи $\varkappa$ с врхом у O и која додирује лопту σ по извесном кругу q коме је AB пречник. У обореној управној пројекцији на раван Ov круг q се пројектује као дуж $(A)(B)$. Ма у коју тачку K дужи AB пројектују се две симетричне тачке 1 и 2 круга q. Нека је $[q]$ круг q у новом обарању око $(A)(B)$. Како је дуж $1\ 2$ хоризонтална, њена средишња пројекција, је $\parallel h$ и пролази кроз K^c. Из очигледних сразмера $K1 : K^c1^c = OK : OK^c$ и $(O)(K) : (O)K^c = (K)[1] : K^c\overline{1}$

(где је $K^c\overline{1} \parallel (K)[1]$) и једнакости $(O)(K) = OK$, $(O)K^c = OK^c$, $(K)[1] = K1$ следује $K^c1^c = K^c\overline{1}$. Тако налазимо 1^c а отуд и 2^c. На тај начин можемо наћи довољан број тачака криве s^c.

Задаци за вежбу

1. У претходном задатку 1 нацртати у перспективи известан број великих кругова (меридијана) лопте σ, по којима је секу равни што садрже њен вертикални пречник, а затим известан број кругова (паралела) по којима хоризонталне равни секу лопту.

2. Нацртати у перспективи ма коју обртну површ, гледану споља.

Упутство. Треба нацртати перспективну слику довољног броја кругова (паралела) те површи; њихова обвојница даје контуру перспективне слике обртне површи.

ГЛАВА V

НЕКЕ ПРИМЕНЕ ПЕРСПЕКТИВЕ

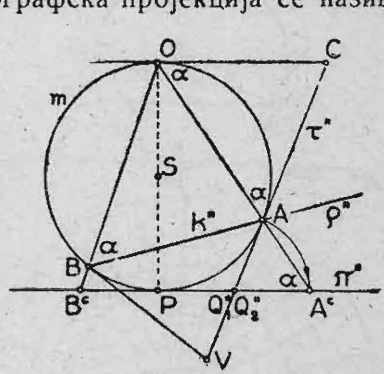
195. СТЕРЕОГРАФСКА ПРОЈЕКЦИЈА

Стереографска пројекција је средишња пројекција лопте (сфере) из једне њене тачке на раван слике која је управна на пречнику што пролази кроз ту тачку. Узима се најчешће да раван слике додирује лопту на супротном крају тог пречника. Стереографска пројекција се примењује особито у географији (картографији). Претпоставивши ради једноставности да је површ земље лопта, многе географске карте цртају се у тој врсти пројекције. Најпре се цртају слике меридијана и паралела.

Према томе и ми ћемо, посматрајући лопту σ, називати крајеве једног њеног пречника *половима*, велике кругове лопте који пролазе кроз полове *меридијанима*, а кругове у равнима управним на *оси*, која спаја полове, *паралелама*. *Екватор* је највећа паралела. Ако је очна тачка O у једном од полова, имамо *поларну стереографску пројекцију*, ако је на екватору имамо *екваторијалну стереографску пројекцију*, а кад је O ма где друге на лопти, стереографска пројекција се назива *хоризонталном*.

Докажимо два значајна својства стереографске пројекције:

I. *Стереографска пројекција* k^c *ма ког круга* k *лопте* σ *је опет круг, сем ако круг* k *пролази кроз средиште* O *пројектовања јер пројекција круга који пролази кроз* O *је права или дуж.*



Сл. 537

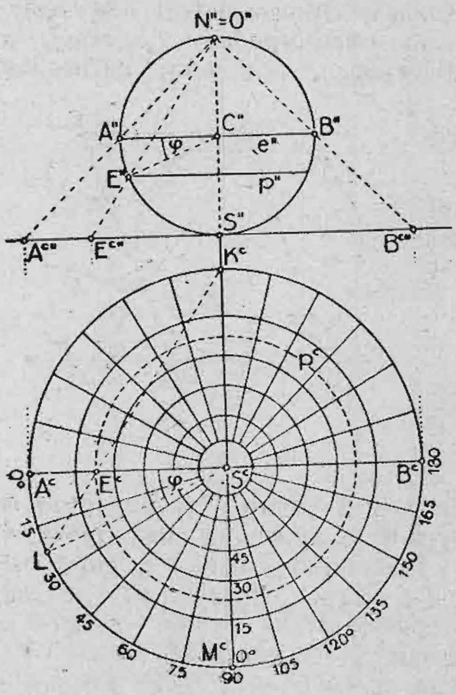
Да бисмо то доказали уочимо управну пројекцију лопте на пројектујућу раван π_2 управну на равни слике π и на равни ρ круга k (сл. 537). Нека је m меридијан по коме се секу σ и π. Тачка P у којој раван π додирује лопту је и додирна тачка круга m и праве π''. Управна пројекција k'' круга k је дуж која спаја тачке A и B у којима круг k продире кроз π_2. Повуцимо у равни π_2 дирке на m у A и O; оне се секу у некој тачки C и граде равнокрак троугао AOC, дакле $\sphericalangle AOC = \sphericalangle OAC$. Како периферијски углови $\sphericalangle ABO$ и $\sphericalangle OAC$ припадају истом луку AB, једнаки су, дакле $\sphericalangle ABO = \sphericalangle AOC$. Но $\sphericalangle AOC = \sphericalangle OA^cB^c$, јер $OC \parallel \pi''$, дакле $\sphericalangle OA^cB^c = \sphericalangle ABO$. То значи равни ρ једнак нагибу изводнице OA према π. Али, очигледно, пресеци те кружно купасте површи равнима управним на њеној равни симетрије π_2 и које према изводницама садржаним у ν имају једнаке нагибе, јесу сличне криве. Дакле и k^c је круг.

II. *Стереографска пројекција угла што заклапају две линије на лопти је угао исте величине.*

Додајмо у претходном разматрању додирну раван τ у тачки A. Како је $\tau \perp \pi_2$ имамо $\tau'' = AC$. Замислимо у τ две праве AQ_1 и AQ_2, које се секу у A и додирују у A две линије на лопти. Угао између тих линија је $\sphericalangle Q_1AQ_2$. Нека су Q_1 и Q_2 тачке у којима те две праве продиру раван π. Очигледно, $Q_1'' = Q_2''$. Из ранијег посматрања следује $\sphericalangle OA^cB^c = \sphericalangle A^cAQ_1''$ дакле $AQ_1'' = A^cQ_1''$. Према томе, **ако** раван τ оборимо око Q_1Q_2 у π, тачка A пада у A^c, троугао AQ_1Q_2 поклапа се с троуглом $A^cQ_1Q_2$, дакле $\sphericalangle Q_1AQ_2 = \sphericalangle Q_1A^cQ_2$.

Но у посматраној централној пројекцији праве AQ_1 и AQ_2 пројектују се у праве A^cQ_1 и A^cQ_2. Те праве су пак дирке на оне линије у π у које се пројектују уочене две линије на лопти. Дакле угао између тих линија на лопти једнак је углу између њихових стереографских пројекција.

На основу овог својства углови неког малог троугла нацртаног на лопти су приближно једнаки угловима његове стереографске пројекције, тј. та два троугла су приближно слична, утолико сличнија уколико су мања. Каже се и да у стереографској пројекцији влада сличност *у маломе*, или да је пресликавање лопте на раван, које та пројекција пружа, *конформно*.



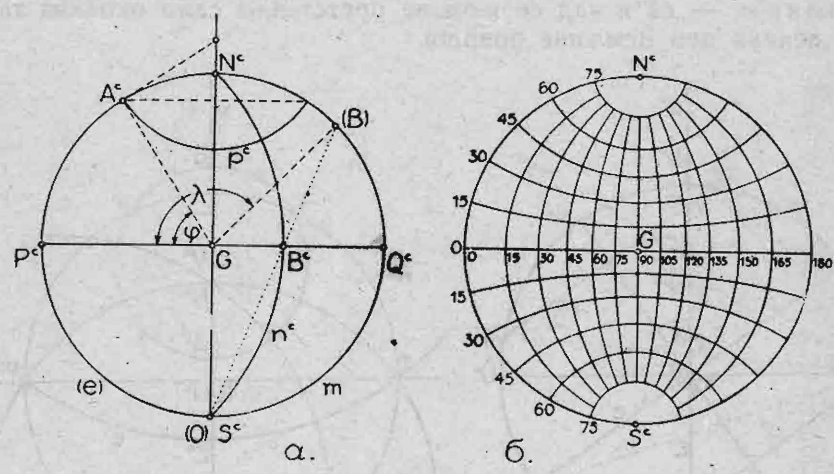
Сл. 538

Задатак 1. *Одредити у поларној стереографској пројекцији мрежу меридијана и паралела северне или јужне хемисфере, са размацима по 10^0.*

Можемо замислити да је раван π хоризонтална и да из северног пола N, највише тачке лопте, пројектујемо на π њену јужну половину. Посматрајмо уједно управну пројекцију на вертикалну раван π_2 која садржи напр. почетни меридијан m (тј. за 0^0). Меридијани се пројектују као полупречници круга e^c, слике екватора e. Ако је r величина полупречника лопте, полупречник круга e^c је $S''A^{c''} = 2r$. Да бисмо добили пројекцију паралеле p дате „географске ширине“ φ, уочимо на меридијану m тачку E и одредимо $E^{c''}$. Отуд имамо на m^c тачку E^c, кроз коју пролази круг p^c (метода продора!).

Тачку E^c можемо добити и без управне пројекције на π_2. Уочимо пречник $K^cM^c \perp A^cB^c$, круга e^c, и нека је на луку A^cM^c L тачка за коју је $\sphericalangle A^cS^cL = \varphi$, а $E^c = LK^c \times A^cB^c$. Тада је $\sphericalangle LS^cM^c = 90^0 - \varphi$, $\therefore$ $\sphericalangle LK^cM^c = 45^0 - \varphi/2$. Но и $\sphericalangle E''C''S'' = 90^0 - \varphi$, $\therefore$ $\sphericalangle E''O''S'' = 45^0 - \varphi/2$, па како је $K^cS^c = OS''$, правоугли троугао $E^cK^cS^c$ и $E^{c''}O''S''$ су подударни и $E^cS^c = E^{c''}S''$, дакле заиста E^c је тачка у π, чија пројекција на π_2 је $E^{c''}$. Према томе, подела лука A^cM^c на једнаке делове, рецимо од по 10^0 или 15^0, која нам даје слике меридијана, служи непосредно и за конструкцију слика паралела: треба само спојити тачке на луку A^cM^c с K^c и одредити пресеке с A^cB^c.

Задатак 2. *Одредити у екваторијалној стереографској пројекцији мрежу меридијана и паралела једне од двеју хемисфера омеђених главним меридијанским кругом m. Размаци међу линијама мреже нека буду 15^0.*



Сл. 539

Погодно је поставити раван π кроз средиі ге лопте. Тада је m у π, $\therefore$ $m^c = m$, $N^c = N$, $S^c = S$ (сл. 539а). Евва ͻ e пројектује се као пречник P^cQ^c круга m, управно на N^cS^c. Глаі тачка G пада у средиште круга m^c.

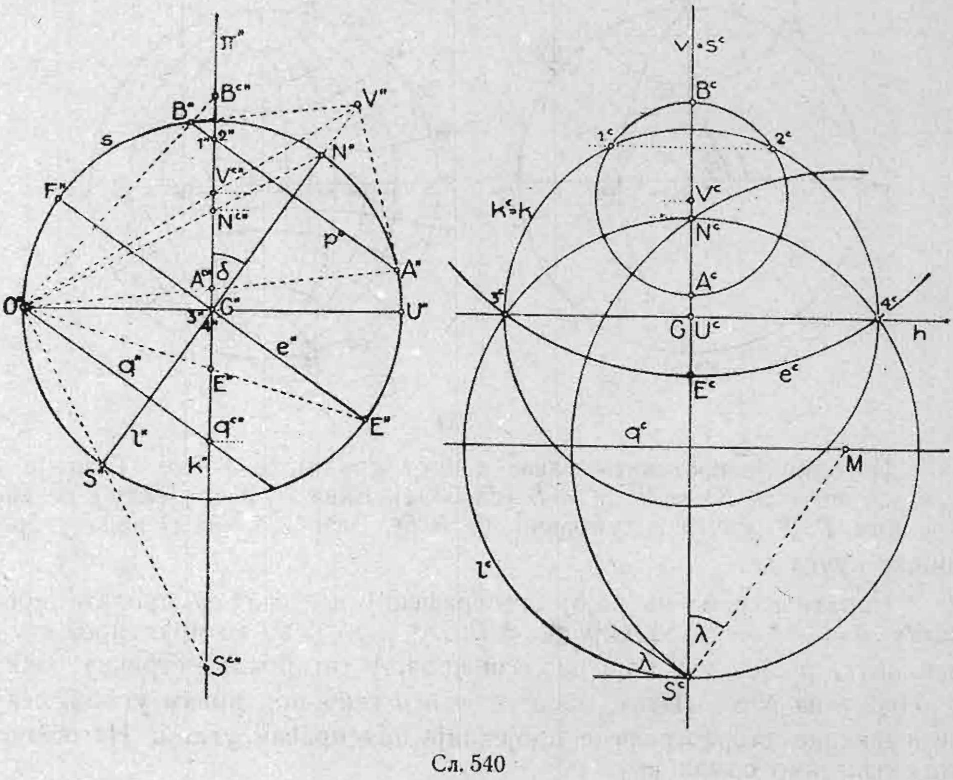
Паралела p ма на којој „географској ш. ини“ φ пролази кроз тачку $A = A^c$ на m, за коју је $\sphericalangle P^cGA^c = \varphi$. ко се круг пројектује као круг, p^c је круг који пролази кроз A^c и кроз симетричну тачку у односу на N^cS^c. Затим, како се m и p секу под првим углом, секу се и њихове стереографске пројекције под правим углом. На основу тога налазимо одмах круг p^c.

Да бисмо добили слику меридијана n ма за коју „географску дужину“ λ, оборимо екватор e у раван слике; тада се поклапа с m, а тачка O пада, рецимо, у S^c. Како пројектујемо хемисферу која је наспрам тачке O, долази у обзир половина круга (e) која се поклапа с луком $P^cN^cQ^c$. Нека је дакле $\sphericalangle PGB = \lambda$; у обореној равни то је угао $P^cG(B)$. Зрак који пројектује тачку B пада у $(O)(B)$, а његов продор B^c кроз π пада на F^cQ^c. Дакле стереографска пројекција n^c траженог меридијанског круга пролази кроз N^c, S^c и B^c, па како је то такође круг, можемо га непосредно нацртати; средиште му је на P^cQ^c.

На тај начин конструисана је слика 539б, с размацима по 15°.

Задатак 3. *Одредити стереографску пројекцију мреже меридијана и паралела кад је очна тачка ма где на лопти, а тражи се слика целе наспрамне хемисфере. Размаци међу линијама мреже нека буду 15°.*

Сад је O ма која тачка на лопти σ. Раван слике, π додирује лопту на супротном крају U пречника кроз O, или је паралелна тој додирној равни. Како је на земљиној лопти та раван за место U хоризонтална, стереографска пројекција се у овом општем случају назива х о р и з о н т а л н о м, — па и кад се њом не претставља само околина тачке U, већ велики део Земљине површи.

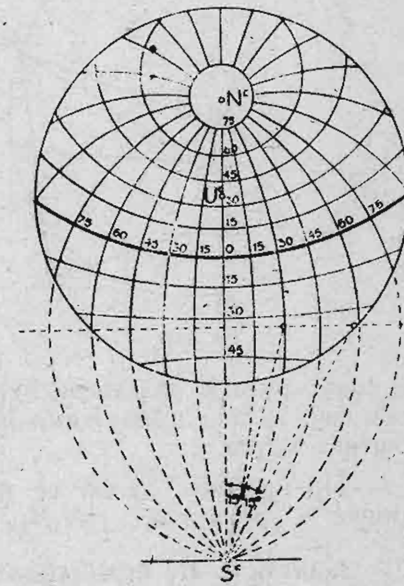


Сл. 540

Поставимо раван π кроз средиште C лопте. Нека је δ нагиб осе NS, која спаја полове, према равни π. Замислимо да је раван π вертикална и посматрајмо уједно управну пројекцију на вертикалну раван π_2, која је управна на π (сл. 540). Хемисфера која је наспрам тачке O, омеђена је великим кругом $k = \sigma \times \pi$, дакле $k^c = k$. Нека је на њој пол N. Средишње пројекције потребних тачака добићемо прво у управној пројекцији на π_2, као продоре светлосних зрака кроз π (метода продора!).

Тако се налази слика p^c ма које паралеле p помоћу пројекције њених тачака A и B, знајући да је p^c круг и да је A^cB^c пречник тог круга. Ако је тачка B предалеко, можемо употребити и тачке 1 и 2 пресека $p \times k$. Но средиште круга p^c можемо добити и као средишњу пројекцију V^c врха V обртне купе која додирује лопту дуж p. Заиста, изводнице те купе секу круг p под правим угловима, који су истоветни с угловима под којима круг p сече меридијане. Дакле средишње пројекције тих углова морају бити такође прави углови, тј. праве које спајају тачку V^c с тачкама круга p^c секу тај круг под правим угловима: V^c је средиште круга p^c.

Тако је конструисана и слика e^c екватора. Једна паралела, q пролази кроз O, дакле пројектује се као права $q^c \perp v$. И један (средњи) меридијан, s пролази кроз O; припада равни управној на π, дакле $s^c = v$. Слика сваког другог меридијанског круга је круг који пролази кроз тачке N^s и S^c. Како такав круг сече пројекције паралела под правим угловима, а и q^c је пројекција једне паралеле, средиште сваког таквог круга је на правој q^c. Напр. M је средиште круга m^c који претставља ма који меридијански круг m. Меридијански круг l који припада равни управној на π_2 пројектује се као круг l^c коме је N^cS^c пречник. Ако је λ величина угла под којим се ма који меридијан m сече с меридијаном l, величина угла под којим се секу кругови l^c и m^c је такође λ, а то је и величина угла MS^cN^c. Према томе, ако хоћемо да нацртамо меридијане под задатим угловима, треба само да пренесемо те углове од крака S^cN^c у једном или другом смеру.



Сл. 541

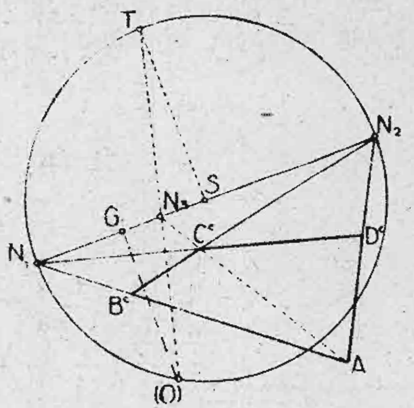
На изложени начин нацртана је „хоризонтална“ пројекција у слици 541, с размацима по 15°. Географске дужине су рачунате од места U.

196. ОБРНУТИ ЗАДАЦИ ПЕРСПЕКТИВЕ И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ

Из саме перспективне слике неког предмета, коме је непознат облик и величина, не може се одредити ни облик ни величина, нити положај спрам равни слике. И положај очне тачке спрам равни слике остаје тада непознат. Али ако знамо геометријска својства тог предмета, као напр. упоредност или управност неких ивица, могу се све те непознате величине одредити. Одређивањем непознатог предмета или положаја ока спрам равни слике бавимо се у тзв. *обрнутим задацима перспективе*. Ти задаци долазе особито у тзв. реконструкцији уметничких слика и у фотограметрији. *Реконструкцијом* се назива анализа уметничких слика, која се врши ради провере да ли је слика перспективно тачна (и самом уметнику може то требати у току рада на једној слици). *Фотограметрија* је анализа фотографских снимака, којој је сврха да из снимака добије тачан облик и величину снимљених предмета. Износимо неке најпростије обрнуте задатке. Сетимо се да смо већ у § 83 посматрали неке такве задатке, но кад је предмет био дат у једној управној пројекцији.

Ако знамо да је неки четвороугао перспективна слика паралелограма, тада су две тачке у којима се секу парови наспрамних страна недогледи тих страна, а права која спаја те недогледе је недогледница равни паралелограма. Из даљих података можемо дознати више.

Задатак 1. *Знајући да је четвороугао $A^cB^cC^cD^c$ перспективна слика квадрата у некој равни управној на равни слике, одредити главну тачку и отстојање ока.*



Сл. 542

Нађимо недогледе N_1 и N_2 парова паралелних страна квадрата; N_1N_2 је недогледница равни ν квадрата. Претпоставимо да су тражени подаци већ познати (сл. 542) и да је раван ν оборена око N_1N_2 у π. Упоредни зраци ON_1 и ON_2 страна квадрата су у ν и заклапају међу собом прав угао. Дакле, кад се ν обори, угао $N_1(O)N_2$ је прав угао и према томе (O) пада на круг k коме је дуж N_1N_2 пречник.

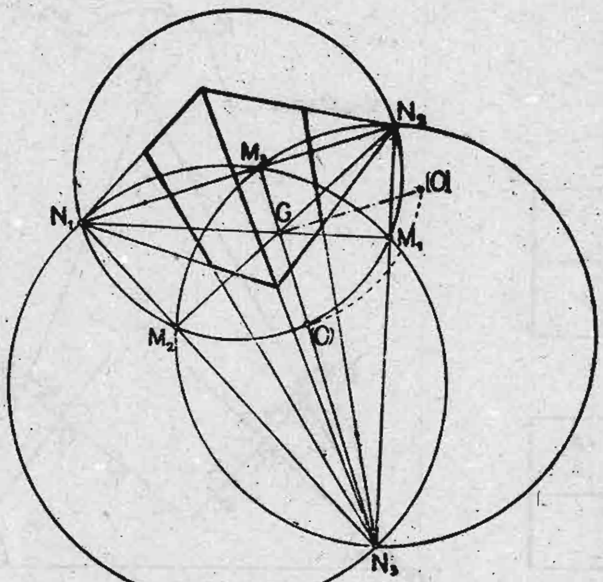
Недоглед N_3 дијагонале AC је такође на N_1N_2. Како је $\sphericalangle BAC = 45^0$, такође је $\sphericalangle N_1(O)N_3 = 45^0$, тј. $\sphericalangle N_1(O)N_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle N_1(O)N_2$. Дакле и лукови круга k, захваћени периферијским тим угловима стоје у истој размери, тј. ако продужимо $(O)N_3$ до пресека T с k, лук N_1T је четвртина круга.

Према томе, да би се одредила тачка (O) повуцимо кроз средиште S круга k $ST \perp N_1N_2$; (O) налазимо на правој TN_3.

Задатак 2. *Из перспективне слике квадра коме ни једна ивица није паралелна с прам равни слике, одредити главну тачку и отстојање ока.*

Нађимо недогледе N_1, N_2, N_3 ивица квадра и опишимо кругове којима су пречници стране троугла $N_1N_2N_3$. Како је $\sphericalangle N_1ON_2$ прав угао, обарањем тог угла око N_1N_2 у π тачка O пада у (O) на круг пречника N_1N_2, а сама тачка O је негде на лопти σ_1 којој је N_1N_2 пречник. Исто тако, O је на лопти којој је пречник N_2N_3 и на лопти којој је пречник N_3N_1, дакле је O једна од двеју тачака пресека тих трију лопти. Како су управне пројекције на π, пресека двеју по двеју лопти њихове заједничке тетиве N_1M_1, N_2M_2, N_3M_3, главна тачка G је пресечна тачка тих тетива. Уочимо сад напр. раван ν управну на N_1N_2, која пролази кроз G (дакле садржи O) и оборимо је око GM_3

у π. Како је O на лопти σ_1 а пресек $\sigma_1 \times \nu$ је круг коме је полупречник $M_3(O)$, опишимо из M_3 круг који пролази кроз (O). У пресеку праве $[G \| N_1N_2]$ с тим кругом је тачка O оборена у том обарању, $[O]$; дакле $G[O] = GO = d$.



Сл. 543

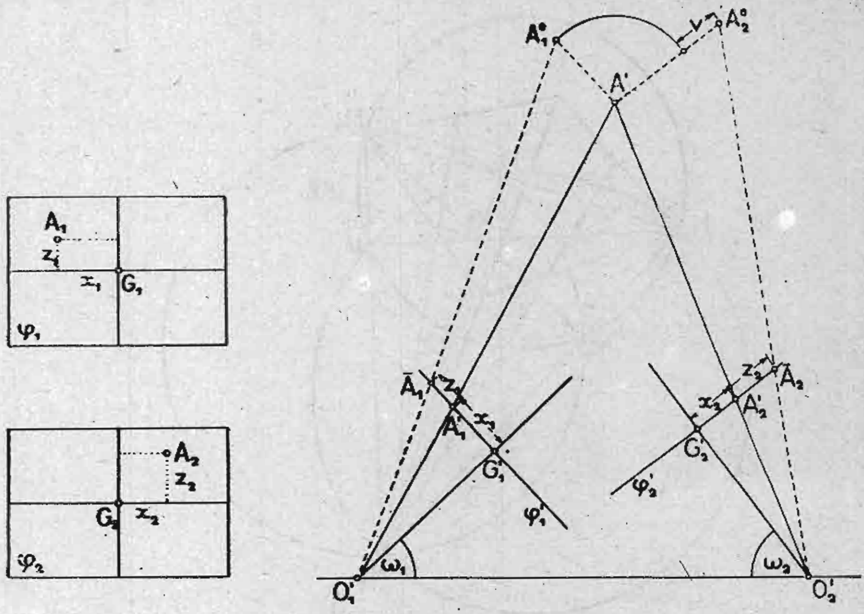
У фотограметрији долазе особито у обзир задаци као што је следећи:

Задатак 3. *Даша су два снимка извесног предмета, с разних места, извршена при вертикалном положају плоче: слике 554а и б. Одредити тај предмет, знајући раздаљину d очних тачака O_1 и O_2 обих снимака и углове ω_1 и ω_2 које заклапају главни зраци O_1G_1 и O_2G_2 с O_1O_2.*

Нацртајмо прву пројекцију у размери $1:n$. Нека су A_1 и A_2 средишње пројекције тачке A. У слици 544в претставимо управну пројекцију свега на неку хоризонталну раван π. Како су обично снимци сразмерно мали, треба замислити да су удаљености у тој пројекцији јаче умањени него слике, тј. дужи φ_1' и φ_2' у које се пројектују фотографске плоче су сразмерно велике. То не мења ништа ако и отстојања O_1G_1 и O_2G_2 нацртамо у истој сразмери као те дужи. Пренесемо ли апсцисе x_1, x_2 тачке A из оба снимка на φ_1' и φ_2', добијамо $O_1'A_1' \times O_2'A_2' = A'$, тј. положај тачке A' према O_1' и O_2'. Посматрањем даљих тачака можемо тако одредити прву пројекцију (тлоцрт) предмета.

Потребне су још висине појединих тачака. Приметимо да се величина вертикалне дужи односи према њеној пројекцији на вертикалну раван као удаљеност које било њене тачке од ока према удаљености њене пројекције од ока. Дакле, ако коту z_1 тачке A_1 пренесемо на φ_1' од тачке A_1' и кроз њен крај $\bar{A}_1$ и O повучемо праву до пресека $A,^0$

с $[A' \| \varphi_1']$, дуж $A'A_1^0$ даје висину тачке A изнад хоризонталне равни која пролази кроз O_1. Исто тако налазимо дуж $A'A_2^0$ која даје висину тачке A изнад (или испод) хоризонталне равни која пролази кроз O_2. Разлика обих дужи, $A'A_1^0$ — $A'A_2^0$ даје висинску разлику обих очних

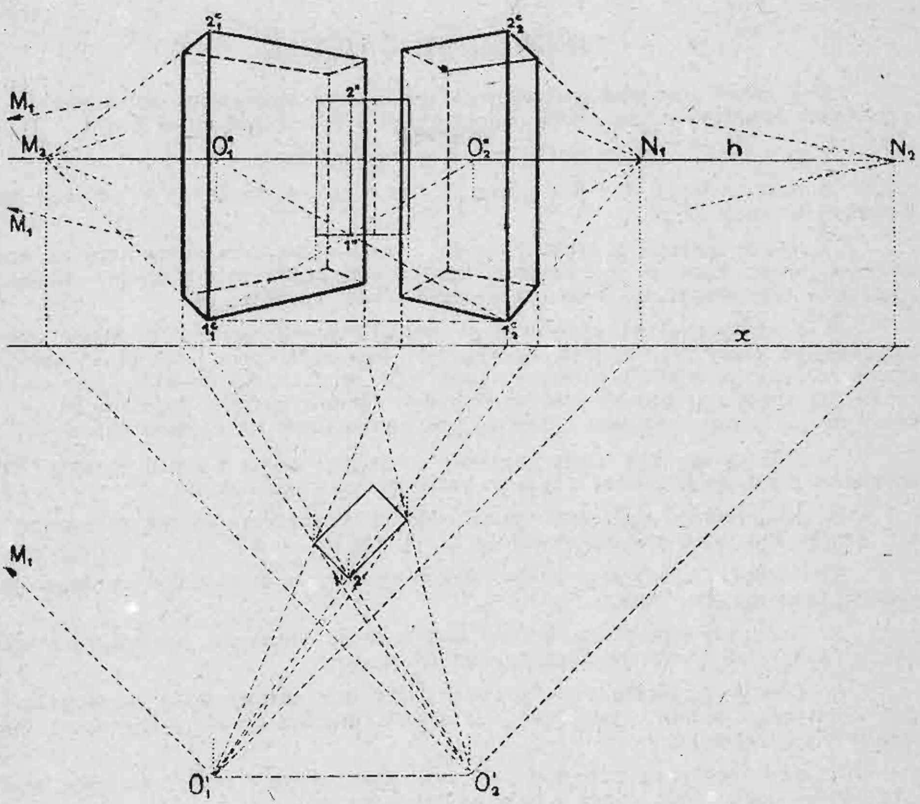


Сл. 544

тачака. Знајући тлоцрт предмета и коте појединих тачака, можемо нацртати и његов нацрт, а тиме је предмет геометријски потпуно одређен.

197. СТЕРЕОСКОПСКЕ СЛИКЕ

Перспективна слика даје утисак који имамо кад предмет посматрамо из једне тачке, дакле, тачније, кад га гледамо једним оком. Када пак гледамо обим очима, у свако око се пројектује по једна перспективна слика, па како су очне тачке обих слика разне, нису ни те перспективне слике потпуно подударне. Ипак у свести имамо само један предмет. Но управо на основу различности обих слика, коју при гледању обим очима не запажамо свесно (него тек ако наизменице гледамо једним па другим оком) — видимо предмете просторно, запажамо не само ширину и висину, него и дубину. Несвесно и непосредно обавља се у нама, такорећи, она „реконструкција" предмета, коју смо разматрали у претходном задатку и која се врши у фотограметрији. Под *стереоскопском сликом* неког предмета подразумева се пар његових перспективних слика, чије очне тачке имају растојање као наша два ока. Ако дакле гледамо на те слике обим очима из очних тачака, десну слику десним оком, леву левим, имамо јасан утисак о просторности предмета. У слици 545 конструисана је стереоскопска слика коцке методом продора на познати начин. Растојање G_1G_2 је у слици премалено да бисмо је могли стереоскопски гледати. — Постоји справа нарочито саграђена за гледање стереоскопских слика: *стереоскоп*.



Сл. 545

Задаци за вежбу

1. Нацртати у хоризонталној стереографској пројекцији мрежу меридијана и паралела за карту Европе у размери 1 : 25 000 000. Узети меридијане и паралеле у размацима од по 10°.

2. Нацртати за екваторијалну стереографску пројекцију Африке мрежу меридијана и паралела с погодним размацима, и у погодној размери.

3. Конструисати мрежу меридијана и паралела за поларну стереографску пројекцију Арктичке области, до поларног круга.

4. Нацртати пројекцију лопте из њеног средишта на раван која је додирује а) у полу, б) на екватору, в) ма у којој другој тачки.

Напомена. Средишња пројекција лопте из њеног средишта зове се гномонска пројекција. У случајевима имамо редом поларну, екваторијалну и општу (хоризонтазну) гномонску пројекцију.

5 У гномонским пројекцијама нацртаним претходно, спојити ма које две тачке на лопти најкраћим путем.

Напомена. Практична вредност гномонске пројекције оснива се на томе што се сваки велики круг лопте пројектује у праву.

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ

1. У двема управним пројекцијама дате су три мимоилазне праве a, b, c. Наћи осу обртне ваљкасте површи која садржи праву a и додирује праве b и c.

Упутство: Пројектовати на раван управну на a.

2. Дате су тачке A и B и права p. Нацртати правоугаоник с дијагоналом AB и трећим теменом на p.

3. Дат је триједар у двема управним пројекцијама и на двема његовим ивицама по једна тачка. Кроз те две тачке поставити оне равни које пресецају триједар по троуглима дате површине. Наћи прави облик таквог троугла.

4. У лопту с датим средиштем и полупречником уписати у двема управним пројекцијама коцку тако да једна пљосан буде паралелна спрам једне равни дате двема својим главним линијама и да једна ивица која припада тој пљосни буде паралелна спрам оне праве која полови угао између обих главних линија. Одредити затим сенку коцке на две равни паралелне пројекцијским равнима при паралелном осветљењу.

5. Дате су методом двеју управних пројекција равни α и β и права p. Кроз p поставити раван која пресеца α и β по узајамно управним правим.

6. Кроз тачку P поставити раван чије се удаљености од три дате тачке A, B и C односе као дужи $a : b : c$. Уочити и случај кад је $a = b = c$.

7. Нацртати коцку дате ивице тако да три ивице које полазе из једног темена пролазе кроз три дате тачке.

8. Тространу призмасту површ дату у двема управним пројекцијама пресећи једном равни тако да пресек буде равностран троугао.

9. Дато је средиште једне коцке и права која садржи једну њену ивицу. Нацртати ту коцку помоћу страноцрта. На основу изофота осенчити ову коцку при паралелном осветљењу.

10. Један правилан петоугао је истовремено нацрт и тлоцрт извесног петоугла у простору. Наћи прави облик и величину тог петоугла.

11. Наћи средиште лопте која пролази кроз три дате тачке и додирује дату раван.

12. Дате су две мимоилазне праве. Нацртати равнокрак троугао с датом висином и површином, коме је основица на једној правој а врх на другој.

13. Дату тачку окренути око дате праве тако да се обе пројекције поклоп

14. Нацртати онај правилан тетраедар коме две наспрамне ивице припадају двема датим узајамно управним мимоилазним правим.

15. Кроз дате тачке поставити оне праве које имају дата најкраћа отстојања од двеју датих мимоилазних правих.

16. Дата је тачка A и права p. Одредити облик оног паралелограма равни Ap коме су обе пројекције правоугаоници и коме је једно теме у A, друго на p.

17. Дат је нацрт једне пљосни правилног тетраедра и дата је раван која садржи наспрамно теме. Одредити тлоцрт и бокоцрт тог тетраедра.

18. Дате су две ивице a и b триједра и два угла α и β. Одредити у две управне пројекције трећу ивицу c тако да пљосни триједра наспрам a и b имају за углове α и β.

19. Триједар је одређен трима од шест својих елемената (трију ивичних углова и трију диједарских углова). Отуд имамо шест могућих задатака, јер могу бити дате:

а) три стране (дакле три ивична угла, као у претходном задатку),

б) две стране и диједарски угао међу њима,

в) две стране и угао једног наспрамног диједра,

г) сва три диједарска угла,

д) два диједарска угла и страна међу њима,

ђ) два диједарска угла и страна наспрам једног од тих диједара.

Решити задатке који одговарају случајевима од б) до ђ)).

20. На две дате лопте поставити кроз дату тачку заједничке дирке.

Упутство: Види задатке о триједрима.

21. Дате су две једнаке дужи AB и CD, прва паралелна са π_1, друга паралелна са π_2. Одредити ону осу око које треба обрнути дуж AB да би се поклопила са CD Одредити угао обртања.

22. Дат троугао ABC окренути око дате праве p толико да раван ABC добије спрам π_2 нагиб 60^0.

23. Два круга која су у π_1 имају средишта на линији тла, 9 см далеко једно од другог, а полупречници су 3 см и 4 см. Поставити у две нормалне пројекције две заједничке дирке, једну a унутарњу и једну b спољњу. Дирка a, окрећући се око линије тла описује купу. Наћи другу пројекцију и праву величину пресека ове купе вертикалном равни чији је први траг дирка b.

24. У двема нормалним пројекцијама дата је лопта која додирује обе пројекцијске равни. Раван која пролази кроз две тачке лопте, дијаметрално супротне тачкама у којима лопта додирује пројекцијске равни и чији први траг гради с линијом тла угао 60^0, сече ту лопту. Замишљајући да је мањи део лопте, који та раван отсеца, отклоњен, осенчити споља и изнутра остали део лопте при упоредном осветљењу.

25. У двема нормалним пројекцијама наћи пресек купе и ваљка, који су одређени на следећи начин: ваљак је прав, његова основа је дат круг у π_1; купа има врх на оси ваљка, основа је хипербола која додирује основу ваљка а асимптоте су јој праве које садрже два међу собом управна пречника тог круга, од којих је један упоредан линији тла. Наћи пројекције тангенте у једној тачки линије пресека.

26. Правилна осмострана пирамида $SABC\ldots$ с основом у π_1 постављена је тако да јој је ивица AB управна на линији тла. Кроз врх S поставити праву паралелну линији тла и на тој правој, на отстојању $R \times 2{,}5$, где је R полупречник описаног круга око осмоугаоника $ABC\ldots$, узети тачку T. Та тачка је врх косе осмостране пирамиде с истом основом $ABC\ldots$. Наћи пресек тих двеју пирамида, издвојити њихов заједнички део и наћи његове сенке при паралелном осветљењу.

27. Тространа пирамида $SABC$ налази се у четвртом квадранту, основа ABC је у π_1, ивица AB паралелна линији тла, а тачка C испред AB. Узети да је $AB = AC = 11{,}6$ см, $BC = 14{,}7$ см и $SA = SB = SC = 10{,}4$ см.

а) Нацртати пројекције те пирамиде.

б) Одредити пројекције пресека те пирамиде једном равни која је управна на SA и пролази кроз тачку која дели ту ивицу по размери $1:3$.

в) Одредити пројекције тачке M на ивици SA, из које би се ивица BC видела под правим углом.

28. Нацртати пројекције тростране пирамиде $SABC$ чија је основа у π_1, а S у четвртом квадранту. Тачка B је на оси x, а ивица AB је управна на x. Узети да је $AB = 11{,}1$ см, $BC = 12{,}5$ см, $AC = 14{,}1$ см, $SB = 11{,}8$ см и $SA = 12{,}1$ см. Круг у равни π_2, који је уписан у углу $B''S''C''$ тако да додирује краке тог угла, а пречник му је 3,6 см, је основа ваљка чије су изводнице управне на π_2. Одредити пресек тог ваљка и те пирамиде.

29. У π_2 дат је круг полупречника 3,2 см, који додирује линију тла. Правилан петоугао уписан у том кругу и чије теме A је на линији тла, је основа једне праве призме. Права купа чији врх је у профилној равни која садржи тачку A, удаљену 8,4 см од π_1 и 6,9 см од π_2, има за основу круг у π_1 полупречника 6 см. Одредити пресек те купе и призме.

30. Тространа пирамида $SABC$ има основу ABC у π_1. Њен триједар с врхом S има сва три ивична угла права. Ивице основе су $AB = 20{,}9$ см, $BC = 19{,}3$ см и $AC = 14{,}9$ см. Ивица AB је паралелна линији тла (A је десно) и удаљена од ње за 22 см. Наћи пресек те пирамиде лоптом која пролази кроз S и кроз средишта страница троугла ABC.

31. Дате су две праве AB и CD својим двема управним пројекцијама и једна тачка O на линији тла. Наћи пресек равни која садржи праву AB и тачку O и равни која садржи CD а паралелна је линији тла.

32. У равни $\pi_1 \equiv xy$ нацртан је лук синусне линије у размаку $0 \leq x \leq 3{,}14\ldots$ Наћи пресек једном косом равни обртне површи која настаје окретањем тог лука око осе x.

33. Кад се две кружно купасте или ваљкасте површи секу тако да линија пресека има две двоструке тачке, та линија се распада на две криве другог реда. Претставити у двема управним пројекцијама такве две површи које се секу по једној хиперболи и једној параболи.

34. Дате су четири тачке: A (0, 10, 7), B (0, 10, 0), C (— 36, 13, 7) D (7, 17, 14). Претставити у двема управним пројекцијама лопту са средиштем A и која пролази кроз B, затим купу с врхом B и чија основа је хоризонталан круг са средиштем C а пролази кроз A. Одредити пресек купе и лопте и претставити тело које остаје кад се из лопте одузме унутрашњост купе. Затим одредити сенке при паралелном осветљењу чији смер је DB.

35. Коцка чија дијагонала има 14 см има једну дијагоналу вертикалну и једну упоредну са π_2. Кад се коцка обрће око ове последње дијагонале, њене ивице описују обртне површи које ограничавају извесно тело. Претставити обе пројекције тог тела, обасјаног паралелним зрацима.

36. Дата је раван α својим траговима, који са линијом тла граде углове 60^0 и 30^0. На тој равни стоји кутија у облику квадра, којој се једно теме A налази на првом трагу a те равни, а краћа ивица основе гради са a угао 60^0.

а) Претставити у двема управним пројекцијама ту кутију са поклопцем подигнутим за 135^0 и који је причвршћен за кутију својом дужом ивицом дуж највише ивице кутије.

б) Одредити сенке при упоредном осветљењу.

37. Пирамида с врхом S има за основу правилан шестоугао $ABCDEF$ у равни π_1. Једна призма има за основу квадрат с дијагоналом BC а бочне ивице су јој упоредне с правом SD.

а) У двема управним пројекцијама претставити пресек те пирамиде том призмом.

б) Паралелним померањем издвојити пројекције заједничког дела обих тела.

в) Претставити тај заједнички део у нормалној аксонометрији и нацртати сенку при паралелном осветљењу.

38. Два темена једне праве двоструке купе су S (2, 2, 16) и T (— 10, 18, 4). Заједничка основа је круг у симетралној равни дужи ST

а) Одредити контуре те купе у двема управним пројекцијама.

б) Пренети то у косу аксонометрију и одредити сенке при средишњем осветљењу из тачке L (— 20, 16, 20).

39. Дата је лопта са средиштем O (— 12, 7, 3) и полупречником једнаким 3 см. Око лопте су описани: купа с врхом у тачки S (— 9, 7, 13) и ваљак чије су изводнице паралелне линији тла.

а) Претставити у двема управним пројекцијама заједнички део тела купе и ваљка.

б) Површ тог заједничког дела развити у раван.

40. Три тачке A (0, 10, 8), B (— 9, 10, 0) и C (— 12, 3, 0) одређују раван која садржи елипсу. Прва пројекција средишта елипсе је тачка O' (— 2, 9, 0). Њена велика оса пролази кроз A' а полуосе су дугачке 6 см и 3 см.

а) Одредити у двема управним пројекцијама површ која настаје обртањем те елипсе око вертикалне осе која пролази кроз A'.

б) Одредити пресек те површи датом равни.

41. Конструисати торус чије средиште је у тачки O (—4, 12, 8) а оса вертикална. Круг који производи торус има пречник једнак 2 см, а његово средиште је удаљено од средишта торуса за 6 см. Одредити сопствену сенку и бачене сенке на пројекцијске равни при паралелном осветљењу.

42. Кроз тачку M (0, 9, 8) пролази вертикална права a и једна права b која је паралелна равни π_2' а са равни π_1 заклапа угао 45^0. Сем тога дат је круг са средиштем у тачки (6, 9, 8) и који додирује праву b. Обртањем око праве a и праве b тај круг описује два торуса. Наћи пресек тих торуса.

43. У котираној пројекцији дат је равностран троугао ABC: A (—7,6; 8; 0) B (7,6; 8; 0) и C испред AB. Тај троугао је основа правилног тетраедра $ABCS$ чији врх S је изнад равни π_1. На свакој страни тетраедра подигнута је по једна призма чије су висине једнаке дужи AB.

Претставити у котираној пројекцији то сложено тело и наћи хоризонталне пресеке на размацима од 2 м. Одредити коте свих темена. Нацртати сенке ако је светлост паралелна правој SD, где је D (10,8; —12; 0).

Исто то тело претставити у управној аксонометрији.

44. Дата је лопта полупречника = 5 см са средиштем у тачки C (0, 10, 10). Око те лопте описане су две купе чији су врхови у тачкама A (—12, 10, 14) и B (8, 10, > 10) при чему је $CA = CB$.

а) Наћи пресек тих двеју купа. Одредити осе кривих, тачке на контури, тангенте у двоструким тачкама и праву на којој се налазе двоструке тачке.

б) Паралелним померањем издвојити пројекције заједничког дела тих купа и осенчити га кад је осветљен паралелним осветљењем.

45. Правилан тетраедар $ABCD$ има три врха A, B, C у равни π_1 а четврти врх D изнад те равни.

Нека је σ лопта описана око тог тетраедра а τ хиперболни параболоид који садржи странице просторног четвороугла $ABCD$. Тај хиперболоид дели лопту σ на два дела од којих један обухвата средиште ивице BD тетраедра. Само у првој пројекцији претставити тај део, претпостављајући да је ограничен равнином π_1 и још једном другом хоризонталном равни која је за 1 см виша од тачке D.

46. Дата је лопта са средиштем O и полупречником = 6 см. Нека је на папиру дуж $O'O'' = 17$ см. Оса једне обртне купе је у равни α која је паралелна равни π_2 и пролази кроз средиште лопте, а њен врх S је на вертикалној правој d, која пролази кроз тачку D која је највише у десно на лопти. Врх S је изнад тачке D и то тако да једна изводница купе која је у равни α пролази кроз средиште O а у пројекцији $S''O''$ гради са $O''D''$ угао 60^0. Друга изводница која је у равни α је у другој пројекцији тангента повучена из S'' на контуру лопте.

Претставити тело сложено од те лопте и те купе, која се с једне стране завршава врхом S, а с друге стране равнином која је управна на њену осу и која пролази кроз продор B праве SO и тангентне равни на лопту у њеној најнижој тачки.

Осенчити то тело при паралелном осветљењу.

47. Коцка чија ивица је 16 см постављена је тако да су јој две стране хоризонталне а две паралелне равни π_2.

Шест обрнутих параболоида имају темена у средиштима појединих страна коцке а пролазе кроз уписане кругове наспрамних страна коцке.

Претставити у двема управним пројекцијама заједнички део тих параболоида.

48. Дата је елипса у хоризонталном положају, средиште јој је удаљено од обих пројекцијских равни за 10 см, велика оса је $AB = 20$ см и упоредна је линији тла, а мала оса је $CD = 8$ см. Нека права m упоредна је равни π_2 и пролази кроз средиште елипсе, а нагнута је 45^0 према π_1.

Претставити обртну површ која настаје обртањем те елипсе око праве m. Одредити сенке те површи на њеној спољњој и унутарњој страни при паралелном осветљењу, ако су зраци управни на равни поклапања.

49. У управној аксонометрији дате су сем пројекције осног триједра пројекција тачке A на оси y и пројекције $\overline{MS}$ и $\overline{M'S'}$ једне дужи паралелне спрам осе y. Претставити ону обртну купу с врхом S а чија основа има средиште M, која садржи тачку A и одредити пресек те површи са равни xy.

50. Дата је у управној аксонометрији пројекција осног триједра и први, други и трећи траг неке равни. Претставити обртну купу чији круг основе додирује та три трага и чија је висина једнака пречнику тог круга.

51. У управној аксонометрији дата је пројекција осног триједра и пројекције A, A' тачке A. Нацртати полулопту која стоји на равни π_1, има средиште у O и пролази кроз A. Одредити за дати смер осветљења сопствену сенку полулопте и бачену сенку на π_1.

52. У управној аксонометрији нацртати лопту датог полупречника и која додирује све три осне равни. За дат. смер осветљења одредити сопствену сенку и бачену на π_3.

53. На оси x осног триједра дата је тачка A, а на оси z, с разних страна тачке O дате су тачке N и S. Нацртати онај обртни елипсоид, коме је оса NS и који пролази кроз A. Нацртати затим екватор и један меридијан елипсоида.

54. Дате су аксонометријске пројекције двеју једнаких дужи OA и OB на осама x и y осног триједра. Одредити пројекцију треће осе и углове скраћивања за све три осе.

55. Нацртати у управној аксонометрији осни триједар тако да се скраћења на осама односе као $5:4:6$ и претставити разне кристале тесералног система.

56. У управној аксонометрији нацртати правилну шестострану пирамиду постављену у равнотежни положај с врхом у π_1. У пирамиду је уписана лопта. Пресећи пирамиду и лопту једном равни која је управна на π_2 а са π_1 гради угао 45^0 и пролази кроз средиште висине пирамиде.

57. У управној аксонометрији одређен је тетраедар $SABC$ чија је пљосан ABC у π_1, на следећи начин: врх S је 7 см изнад π_1, ивица SA је у једној профилној равни, а пљосан SBC (B је лево) је у равни упоредној са π_2. Пљосни SAB и SAC граде свака са профилном равни у којој је ивица SA, угао 45^0. На ивици SB узимамо између S и B тачку D на 2 см од S и кроз D постављамо раван управну на SB. Та раван сече SC у E и SA у F.

а) Наћи пројекције тог пресека DEF.

б) Поставити лопту којој је пречник DE и наћи заједнички део лопте и тог тетраедра.

58. Средиште лопте је удаљено од осних равни π_1 и π_2 за по 10 см, а полупречник је 8 см. Три тачке A, B, C налазе се на горњем делу лопте Прве пројекције полупречника лопте, које пролазе кроз те тачке, имају дужине: $S'A' = 4$ см, $S'B' = 6$ см, $S'C' = 7$ см, а углови које ове пројекције граде с правом упоредном оси x и која пролази кроз O' су редом 30^0, 75^0, 100^0. Конструисати у управној аксонометрији круг који пролази кроз A, B, C.

59. У нормалној аксонометрији дата је лопта и три тачке на њој. Наћи светлосни извор за који су те три тачке на рубу сопствене сенке те лопте

60. У нормалној аксонометрији дата је елипса у π_1. Нацртати једну лопту којој бачена сенка при паралелном осветљењу има за руб ту елипсу.

61. У косој аксонометрији дати су осни триједар и дуж SV. Претставити ону обртну купу којој је врх V, средиште основе S и чија основа додирује раван π. Затим, за дати смер осветљења одредити сопствену и бачену сенку на π_1.

62. Дата је коса пројекција осног трокрака $OABC$. Нацртати лопту уписану у коцку с теменима O, A, B, C и сопствену сенку лопте кад је правац осветљења дат једном дијагоналом коцке.

63. Четири тачке у равни цртања и дужи које их спајају сачињавају косу пројекцију правилног тетраедра. Нацртати лопту која му је описана и њен пресек равнином једне пљосни тетраедра.

64. Дата је коса пројекција осног триједра и трагови неке равни у двема осним равнима. Претставити лопту која додурује ту раван а има средиште у почетној тачки триједра.

65. У косој аксонометрији нацртати елипсоид коме су дате осе.

66. У косој аксонометрији претставити торус који лежи на π_1.

67. Уз пројекцијски троугао дате су непосредне и посредне пројекције двеју тачака S и V. Претставити методом посредне косе пројекције правилну четворострану пирамиду с врхом V и средиштем основе S, којој једно теме лежи у π тако да дијагонала основе која пролази кроз то теме буде нагнута спрам π за 45^0.

68. Дуж AB, упоредна са π_1 и дата својим косим пројекцијама, је оса шупљег обртног ваљка с датим полупречником. Претставити методом посредне пројекције тај ваљак као и сенке на њему и на једној равни упоредној са π_1.

69. Дате су непосредна и посредна коса пројекција линије пада равни α, затим коса пројекција средишта круга у α, чији полупречник је дат. Нацртати тај круг и његову сенку на π_1 при централном осветљењу.

70. Дате су тачке S и V својим обим косим пројекцијама. Претставити обртну купу с врхом V и чија основа има средиште S и додирује раван тла. При паралелном осветљењу одредити сенке на купи и на равни тла.

71. Дата је права p, тачка S на p и тачка T ван p. Методом посредне косе пројекције претставити ону обртну купу којој је врх S, оса p и чији круг основе пролази кроз T.

72. Дата је права p и тачке A и B. Нацртати методом посредне косе пројекције лопту која пролази кроз A и B, а средиште јој је на p.

73. У перспективи дате су методом посредне пројекције две мимоилазне праве. Наћи њихово најкраће растојање.

74. Дате су у перспективи методом посредне пројекције тачка P и права a. Нацртати правилан шестоугао с теменом P, чија раван је управна на a, средиште пак на a.

75. Дата је раван λ трагом и недогледницом и тачка M у λ. Нацртати у λ правилан петоугао са средиштем M и страницом дате дужине, упоредном спрам равни слике, затим управну призму којој је основа тај петоугао, а висина дата. Одредити сенку те призме на λ.

76. Претставити у перспективи паралелепипед чије три ивице припадају трима датим мимоилазним правим.

77. Дате су у перспективи три тачке својим обим пројекцијама. Претставити круг који пролази кроз те тачке.

78. Дате су у перспективи две тачке својим обим пројекцијама. Претставити круг који кроз њих пролази, има дат полупречник и показује се као парабола. Одредити теме и жижу те параболе.

79. Дате су раван α (a, a^c_∞), тачка S (S^c, S'^c) и права p (β^c, β'^c). Нацртати обртну купу којој је врх S, раван основе α а p дирка.

80. Четвороугао у равни слике је перспективна слика квадрата чија страна има дату величину, а раван дат нагиб. Нацртати једну од коцака које имају тај квадрат за пљосан.

81. Четвороугао у равни слике је перспективна слика четвороугла коме је познат облик, и чија раван има дат нагиб. Одредити главну тачку и отстојање ока и оборити тај четвороугао у раван слике.

82. Хипербола која пролази кроз три дате тачке и има дату праву за асимптоту је централна пројекција неког круга. Изабравши главну тачку и отстојање ока, одредити траг и недоглед равни таквог круга и оборити га у раван слике.

83. Исти задатак с параболом која пролази кроз три дате тачке и којој је дат правац осе.

ПОГЛЕД У ПОВЕСТ НАЦРТНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Ради подизања разних грађевина у Старом веку, међу којима беше и величанствених и сложених, није било довољно обележавање на тлу, којим отпочиње свако грађење на земљишту. Постало је потребно цртање слике која треба да пружи нужне податке о будућој грађевини и у ствари је њен тлоцрт. Уз тлоцрт морале су придоћи управне пројекције на вертикалне равни, ради података о висинама, а и да би се дала унапред некаква слика грађевине. Према томе може се рећи да су први почеци Нацртне геометрије стари колико историја човечанства. Ипак, као наука, нацртна геометрија се изградила тек у Новом веку, особито од доба ренесансе, у Италији, Француској и Немачкој.

Знатних појединости које спадају у нацртну геометрију налазимо већ у Старом веку. Хипархова *стереографска пројекција* небеске сфере на раван цртежа (II. столеће пре Хр.) и Птолемајова примена те методе на цртање географских карата (I столеће н.е.) већ је поглавље нацртне геометрије. Витрувиус, архитект из старог Рима, пише у свом делу о архитектури, које обухвата десет књига и састављено је 10 год. пре Хр., о цртежима као основама за извођење грађења и назива тлоцрт и нацрт *икнографијом* и *ортографијом*.

Доцније се та „вештина“ неговала у Средњем веку, особито при грађењу катедрала и других знатнијих грађевина При томе се развила нарочито *стереотомија,* која је затим цветала све до новијег времена и у којој се тесани комади камена или дрвета претстављају цртањем (паралелним пројекцијама).

Гаспар Монж (Gaspard Monge, 1746 — 1818), који се често назива творцем нацртне геометрије, скупио је у једну целину поступке пројектовања, до тада познате у занату и уметности, дао им јединство методе, „удахнувши им научни дах“. Тако је настала *метода нормалног пројектовања на две равни,* која се зато назива и *Монжовом методом.* Монж излаже ту методу на својим предавањима год. 1795 у Парискoj „Нормалној школи“; та предавања су објављена као књига год. 1798—99.

О неким чињеницама *перспективе* писао је, кажу, већ Еуклид у својој *Оптици,* делу које нам се није сачувало, а у коме се говорило и да се у перспективи упоредне праве међусобно „приближују“. Но Стари век, а поготову Средњи век не беху, чини се, још „открили“ централну пројекцију, ма да наилазимо на погдекојој слици старе грчке и римске културе трагове перспективе. Тако напр. на исликаним зидовима Помпеје видимо слике које дочаравају доста успешно трећу димензију. Ивице управне на равни слике секу се на тим сликама у свом продужењу, али не све у једној тачки; као да се перспектива само наслућује, Тек почетком ренесансе, у XV столећу Брунелески (Philippo Bruneleschi, 1377 — 1466) проналази у перспективи *методу продора*, полазећи од тлоцрта и нацрта. Л. Б. Алберти (Lione Battista Alberti) налази да се праве управне на равни слике секу у главној тачки. Он је написао прво дело о перспективи: Della pictora libri tre, завршено 1436, но издато тек 1511, на латинском. У првој четвртини XVI столећа познат је и хоризонт и недоглед хоризонталних правих. Тек око године 1600 заснива Гидобалдо дел Монте (Guidobaldo del Monte), перспективу чисто геометријски и уводи недоглед ма за коју праву. Увођењем координата за перспективно претстављање тачке Дезарг долази већ на праг методе отстојања.

Чудну чињеницу што се основно појимање перспективе развило у човечанству тек од XV столећа можемо схватити ако имамо на уму да, гледајући обим очима, спајамо опажаје вида несвесно са чулно-телесним опажајима кретања и простора, и доживљавамо на тај начин све три димензије простора. Човечја свест у свом развоју кроз векове успева да продре у тај спој опажаја вида и просторних опажаја и да издвоји саме опажаје вида тек почетком Новог доба.

У току XVIII и XIX столећа јављају се и остале методе пројектовања, као што је *котирана пројекција, аксонометрија* и *коса пројекција*. Претстављање тачака тлоцртом и котом употребљавало се одавно, али развило се у општу методу углавном током XVII столећа у француској техници утврђења. Прво излагање котиране пројекције даје Ноазе (F. Noizet) год. 1823. У. Фариш (W. Farish) борио се за изометријску пројекцију у аксонометрији (1832). J. Вајсбах (Weisbach) је углавном развио законе управне аксонометрије (1840).

ПОПИС НАЗИВА

П

Р