Eugen [illegible]
[illegible]

École Polytechnique.

1ère Division. 1846.

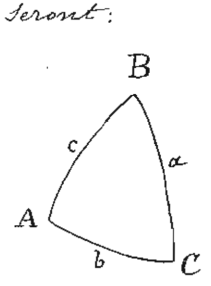
Cours d'Astronomie et de Géodésie.

Trigonométrie sphérique.

Leçon.

Considérations préliminaires. — Du nombre des questions que comprend la Trigonométrie sphérique et des formules suffisantes pour les résoudre. Il y a dans un triangle sphérique six éléments : les trois côtés et les trois angles. Trois de ces six quantités peuvent être prises arbitrairement et suffisent pour déterminer les trois autres. Le problème général de la *Trigonométrie sphérique* consiste à déterminer *analytiquement* ces trois éléments inconnus. Céla se fait au moyen de relations entre les six éléments pris *quatre à quatre*. Six quantités combinées quatre à quatre donnent $\frac{6.5}{1.2} = 15$ combinaisons. Il y aura donc 15 équations à former, pour résoudre tous les cas du problème. Mais si on ne considère que les combinaisons essentiellement différentes, ces 15 équations se réduisent à quatre.

En effet, soient a, b, c les côtés du triangle, et A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés; les quatre combinaisons différentes seront:



1° Les trois côtés et un angle; ce qui comprend les trois combinaisons a b c A; b, c, a B; c a b C.

2° Deux côtés et les deux angles opposés; ce qui comprend les trois combinaisons abAB; bcBC; caCA.

3° Deux côtés et deux angles, dont l'un compris entre les deux côtés; ou, en d'autres termes, quatre éléments consécutifs; ce qui comprend les six combinaisons abCA; acBA; bcAB; baCB; caBC; cbAC.

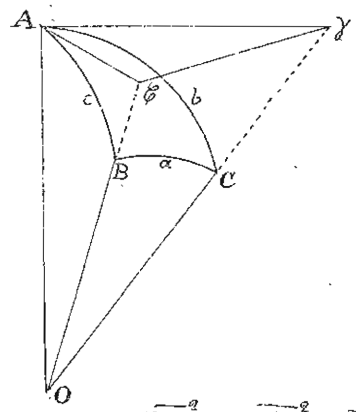
4° Un côté et les trois angles; ce qui donne les trois combinaisons aABC; bABC; cABC.

Ainsi quatre équations suffiront pour résoudre toutes les questions de la Trigonométrie sphérique.

Chacune de ces quatre équations peut se démontrer directement. Mais on peut aussi n'en démontrer qu'une, et en déduire analytiquement les trois autres. C'est la marche que nous allons suivre, en prenant pour guide un mémoire de Lagrange qui se trouve dans le Journal de l'École Polytechnique, (6e Cahier p. 270—296) et la Trigonométrie de Legendre.

Formules générales pour la résolution des triangles sphériques.

1re Formule. Entre les trois côtés et un angle; a, b, c, A.



Que par le sommet A on mène les tangentes aux deux côtés AB, AC; elles rencontrent en $\mathcal{C}$ et γ les prolongements des rayons de la sphère OB, OC; et l'on forme ainsi deux triangles plans $A\mathcal{C}\gamma$, $O\mathcal{C}\gamma$.

On a dans le premier,

$$\overline{\mathcal{C}\gamma}^2 = \overline{A\mathcal{C}}^2 + \overline{A\gamma}^2 - 2A\mathcal{C}.A\gamma.\cos A\,;$$

et dans le deuxième,

$$\overline{\mathcal{C}\gamma}^2 = \overline{O\mathcal{C}}^2 + \overline{O\gamma}^2 - 2O\mathcal{C}.O\gamma \cos BOC.$$

Retranchant ces deux équations, membre à membre, et observant que les deux triangles $AO\mathcal{C}$, $AO\gamma$ étant rectangles en A, on a

$$\overline{O\gamma}^2 - \overline{A\mathcal{C}}^2 = \overline{OA}^2 \text{ et } \overline{O\gamma}^2 - \overline{A\gamma}^2 = \overline{OA}^2,$$

il vient

$$\overline{OA}^2 - O\mathcal{C}.O\gamma.\cos BOC + A\mathcal{C}.A\gamma.\cos A = 0.$$

ou

$$1 - \frac{O\mathcal{C}}{OA}\cdot\frac{O\gamma}{OA}\cos BOC + \frac{A\mathcal{C}}{OA}\cdot\frac{A\gamma}{OA}\cos A = 0$$

Or $\frac{A\mathcal{C}}{OA} = \text{tang}\, AOB$, et $\frac{O\mathcal{C}}{OA} = \text{séc}\, AOB$; cet angle AOB mesure le côté AB du triangle sphérique; donc

$$\frac{A\mathscr{C}}{OA} = \text{tang}\ c, \text{ et } \frac{O\mathscr{C}}{OA} = \text{séc}\ c.$$

Pareillement

$$\frac{A\gamma}{OA} = \text{tang}\ b, \text{ et } \frac{O\gamma}{OA} = \text{sec}\ b.$$

Enfin $\cos BOC = \cos a$.

Notre équation devient donc

$$1 - \text{séc}.b.\text{séc}.c.\cos a + \text{tang}.b.\text{tang}.c.\cos A = 0,$$

ou

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b.\cos c} + \frac{\sin b.\sin c}{\cos b.\cos c}\cos A = 0;$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A \\ \text{On a de même par la transmutation} \\ \text{des lettres,} \\ \cos b = \cos c.\cos a + \sin c.\sin a.\cos B \\ \cos c = \cos a\ \cos b + \sin a.\sin b.\cos C \end{array}\right\} (1)$$

Ces formules comprennent toute la trigonométrie sphérique; c'est-à-dire que toutes les autres relations qu'on pourra trouver entre les trois côtés et les trois angles d'un triangle sphérique, ne seront, nécessairement, que des transformations ou des déductions de ces trois là. Car si l'on a une 4^e^ équation quelconque, et qu'on y mette, à la place des lignes trigonométriques des angles A, B, C, leurs valeurs déduites de ces trois équations, il en résultera une équation entre les trois côtés, qui sera nécessairement identique. Conséquemment la 4^e^ équation n'apprendra rien de plus que les trois premières,

et pourra être considérée comme n'en étant qu'une déduction.

Les trois équations (1) peuvent se réduire, à la rigueur, à une seule, à la 1^ère^ par exemple, puisque les deux autres s'en concluent par la permutation des lettres. De sorte qu'on peut dire que toute la trigonométrie sphérique est comprise dans une seule de ces formules. Aussi donne-t-on le nom de formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, à l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

2^e^ Formule. Entre deux côtés et les angles opposés a, b, A, B.

La 1^ère^ des équations (1) donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\ \sin c}$$

D'où

$$\sin A = \frac{\sqrt{\sin^2 b.\sin^2 c - (\cos a - \cos b.\cos c)^2}}{\sin b.\ \sin c};$$

ou

$$\sin A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a.\cos b.\cos c}}{\sin b.\sin c}.$$

Et

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a.\cos b.\cos c}}{\sin a.\sin b.\sin c}.$$

Le 2^d^ membre est une fonction symétrique des sinus et cosinus des trois côtés a, b, c; par conséquent il reste le même quand on change A en B et a en b, ou A en C et a en c. On a donc les trois équations

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin c} = \frac{\sin C}{\sin c} \dots\dots (2)$$

Les équations expriment que : Dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

Quelques auteurs appellent cette relation la règle ou l'analogie des quatre sinus.

3e Formule. Entre quatre éléments consécutifs. b, A, c, B.

Il suffit d'éliminer a entre les deux premières des équations (1) qui contiennent cos A et cos B. Pour cela, on élimine d'abord cos a, puis on remplace, dans l'équation résultante, sin a par sa valeur donnée par la 1ère des équations, des quatre sinus. Qu'on multiplie donc la 1ère équation par cos c et qu'on l'ajoute, membre à membre, à la seconde, il vient

$$\cos b = \cos b . \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c . \cos A + \sin c \sin a \cos B.$$

ou

$$\sin c \cos b = \sin a \cos B + \sin b \cos c \cos A.$$

Or $\sin a = \dfrac{\sin b . \sin A}{\sin B}$ (équons 2); donc

$$\sin c \cos b = \sin b . \sin A \frac{\cos B}{\sin B} + \sin b \cos c . \cos A.$$

ou $\sin c \dfrac{\cos b}{\sin b} = \sin A \dfrac{\cos B}{\sin B} + \cos c \cos A.$

ou $\cot b \sin c - \cot B \sin A = \cos c . \cos A.$

La permutation des lettres donne cinq autres équations semblables, de sorte qu'on a les six formules:

$$\left.\begin{aligned}
\cot b \sin c - \cot B \sin A &= \cos c \cos A \\
\cot c \sin b - \cot C \sin A &= \cos b \cos A \\
\cot c \sin a - \cot C \sin B &= \cos a \cos B \\
\cot a \sin c - \cot A \sin B &= \cos c \cos B \\
\cot a \sin b - \cot A \sin C &= \cos b \cos C \\
\cot b \sin a - \cot B \sin C &= \cos a \cos C
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ces équations sont difficiles à énoncer et à retenir. On a essayé de leur donner une autre forme ou de leur appliquer quelque procédé de mnémonique, mais sans succès. Cependant il semble qu'il suffisait de remarquer que les formules sont des relations entre quatre éléments consécutifs.

En effet que l'on divise les deux membres de la 1ère par cos c . cos A, elle devient

$$\frac{\cot b}{\cot c} \cdot \frac{1}{\cos A} - \frac{\cot B}{\cot A} \cdot \frac{1}{\cos c} = 1.$$

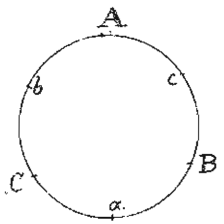
Et puisque les quatre éléments b, A, c, B sont consécutifs, on dira que : Le rapport des cotangentes des deux côtés, divisé par le cosinus de l'angle intermédiaire, moins le rapport des cotangentes des deux angles pris dans l'ordre inverse, divisé par le cosinus du côté intermédiaire, est égal à l'unité.

Sous cet énoncé la formule semble facile à retenir; et l'on passe immédiatement à la forme accoutumée, en multipliant par le produit des deux cosinus.

Il est essentiel d'observer que pour former le rapport des cotangentes des deux côtés, on commence par le côté extrême; c'est-à-dire, qu'on prend pour numérateur le côté qui se trouve extrême, et pour dénominateur celui qui est compris entre deux angles. Ainsi, dans les quatre éléments consécutifs, b, A, c, B, le côté b est extrême et le côté c intermédiaire, ou compris entre deux angles.

Pareillement, dans le rapport des cotangentes des deux angles, le numérateur se rapporte à l'angle extrême.

Pour former les cinq autres formules, au lieu de permuter les lettres, il sera plus simple d'avoir le triangle sous les yeux, ou de concevoir que six points sur une circonférence de cercle représentent l'ordre des six éléments du triangle, et d'appliquer le théorème aux combinaisons qu'on forme en prenant quatre éléments consécutifs.



4e Formule. Entre un côté et les trois angles; c, A, B, C.

Dans les formules (3), il s'en trouve deux qui contiennent c et b et les trois angles A, B, C; ce sont les 2 1ères; il suffit donc d'éliminer b entre ces deux équations, ce que nous ferons en les amenant d'abord à ne contenir que $\cos b$. Pour cela écrivons-les sous la forme

$$\cos c \cos A = \sin c \frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos B}{\sin B} \sin A,$$

$$\cos b \cos A = \sin b \frac{\cos c}{\sin c} - \frac{\cos C}{\sin C} \sin A.$$

et remplaçons $\frac{\sin c}{\sin b}$ par $\frac{\sin C}{\sin B}$; il vient

$$\cos c \cos A = \cos b \frac{\sin C}{\sin B} - \frac{\cos B}{\sin B} \cdot \sin A,$$

$$\cos b \cos A = \cos c \frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\cos C}{\sin C} \cdot \sin A.$$

Ces deux équations ne contiennent plus que $\cos b$; pour l'éliminer on multiplie la première par $\cos A$ et la 2e par $\frac{\sin C}{\sin B}$, et on les ajoute, membre à membre; on a

$$\cos c. \cos^2 A = \cos c - \left(\frac{\cos A \cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin B}\right) \sin A.$$

ou en remplaçant $(1-\cos^2 A)$ par $\sin^2 A$,

$$\sin A \sin B \cos c = \cos A \cos B + \cos C.$$

Ce qui est la relation cherchée. La permutation des lettres en donne deux autres semblables. On a donc les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned}\right\} (4)$$

Les quatre groupes (1), (2) (3), (4) contiennent les quinze équations qui résolvent les questions résultantes des 15 combinaisons des six éléments d'un triangle sphérique, pris quatre à quatre.

Triangle polaire ou supplémentaire.

Les équations (4) comparées, une à une respectivement, aux équations (1), présentent une analogie frappante, d'après laquelle on reconnait que, si l'on forme un triangle sphérique A'B'C' dont les côtés soient les suppléments des angles du triangle ABC, ses angles seront les suppléments des côtés de ce même triangle ABC.

En effet, on a dans ce triangle, d'après la formule (1)

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Or nous supposons

$$a' = 180° - A,\ b' = 180° - B,\ c' = 180° - C$$

d'où $\cos a' = -\cos A,\ \cos b' = -\cos B,\ \cos c' = -\cos C$;

L'équation devient donc

$$-\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A'.$$

D'où l'on conclut, d'après la 1ère des équations (4)

$$\cos A' = -\cos a \text{ c'est-à-dire } A' = 180° - a.$$

Donc les angles du triangle A'B'C' sont égaux aux suppléments des côtés du triangle ABC. C.Q.F.D.

Le triangle A'B'C' s'appelle polaire ou supplémentaire du triangle ABC.

Le théorème que nous venons de démontrer en nous servant des formules générales (1) et (4), se démontre directement, dans les éléments de Géométrie; et on s'en sert pour déduire immédiatement les formules (4) des formules (1).

La considération du triangle polaire peut servir, en général, pour transformer une relation entre les

angles et les côtés d'une figure sphérique quelconque, en une relation différente, entre les côtés et les angles d'une autre figure sphérique. (*)

Formules relatives aux Triangles sphériques rectangles.

On appelle Triangle sphérique rectangle celui qui a un angle droit. Dans ce cas les formules générales (1), (2), (3) et (4) se simplifient considérablement, et la résolution des triangles devient elle-même

(*) Par exemple, prenons ce théorème de Lexell, démontré par Legendre dans les notes qui font suite à sa Géométrie, savoir: Tous les triangles sphériques construits sur une même base et ayant même surface, ont leurs sommets situés sur un petit cercle. Comme la surface d'un triangle sphérique dépend de la somme de ses trois angles, on peut dire que tous les triangles sont déterminés par la condition d'avoir la somme de leurs trois angles constante. On conclut donc de là, par la transformation que nous venons d'indiquer, ce théorème analogue: Tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et la somme de leurs trois côtés constante, ont leurs côtés opposés à l'angle commun, tangents, tous, à un petit cercle.

Ce procédé de transformation des figures sphériques s'applique, par une considération particulière, aux figures planes, et n'est lui-même qu'un cas particulier de méthodes très générales qui servent à transformer les figures à trois dimensions en d'autres figures différentes, et à appliquer à celles-ci les propriétés correspondantes à celles des 1ères figures.

beaucoup plus simple.

Soit A l'angle droit, on aura $\sin A = 1$, $\cos A = 0$, $\cot A = 0$, et celles des formules précédentes où entre l'angle A deviendront

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin b = \sin a \sin B \\ \sin c = \sin a \sin C \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tang b = \sin c \tang B \\ \tang c = \sin b \tang C \\ \tang b = \tang a \cos C \\ \tang c = \tang a \cos B \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos a \tang B \tang C = 1 \\ \cos b \ \sin C = \cos B \\ \cos c \ \sin B = \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Nous n'avons ici que dix formules, au lieu de quinze, parceque nous n'avons pas reproduit celles qui ne contiennent pas l'angle A, lesquelles sont inutiles pour la résolution des triangles rectangles; car dans chaque question relative à la résolution d'un triangle sphérique, on doit nécessairement se servir d'une formule où entrent les trois éléments connus, desquels, ici, fait partie l'angle droit.

Résolution des Triangles sphériques rectangles.

Il suffit de deux éléments pour résoudre un triangle sphérique rectangle, puisque l'angle droit

forme un 3e élément connu.

D'après les formules précédentes, chaque élément sera déterminé par son sinus, son cosinus ou sa tangente. Il est à remarquer que quand ce sera le sinus, il y aura deux valeurs de l'élément, parcequ'un même sinus répond à deux angles, ou à deux arcs, suppléments l'un de l'autre. De sorte qu'alors il pourra y avoir deux solutions, c'est-à-dire deux triangles satisfaisant à la question. Il n'en sera pas de même lorsque l'élément inconnu sera déterminé par son cosinus ou sa tangente, parceque cet élément devant être plus petit que deux angles droits ou que la demi-circonférence, suivant que c'est un angle ou un arc, un cosinus, de même qu'une tangente, ne répondra qu'à un angle ou un arc. Alors le signe de cette ligne trigonométrique indiquera si l'élément inconnu est plus grand ou plus petit que 90°. Il sera plus petit ou plus grand, suivant que ce signe sera + ou −.

La résolution des triangles sphériques rectangles présente six cas, que nous désignerons par l'énoncé des éléments connus.

1° L'hypoténuse et un côté;
2° Les deux côtés;
3° L'hypoténuse et un angle;
4° Un côté et l'angle opposé;
5° Un côté et l'angle adjacent;
6° Les deux angles obliques.

Soit ABC le triangle proposé, A l'angle droit, et <u>a</u> l'hypoténuse.

1.er Cas. L'hypoténuse $\underline{a}$ et le côté $\underline{b}$ sont donnés.

Les trois inconnues c, B, C se déterminent par les trois équations

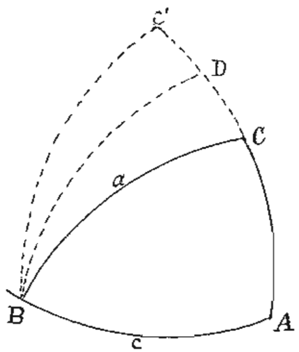
$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \quad (\text{Formule } 1)$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdots\cdots (2)$$

$$\cos C = \frac{\tang b}{\tang a} \cdots\cdots (3)$$

L'équation (2) donne deux valeurs pour l'angle B. Néanmoins le problème n'admet qu'une solution, car il est évident que les deux côtés de l'angle droit $\underline{b}$ et $\underline{c}$, dont le premier est donné, et le second est déterminé sans ambiguité par l'équation (2), ne conviennent qu'à un seul triangle.

Pour reconnaitre quelle valeur de l'angle B on devra prendre, il suffit de remarquer que <u>cet angle sera toujours de même espèce que le côté opposé</u>; c'est-à-dire qu'il sera moindre ou plus grand qu'un angle droit, suivant que le côté opposé $\underline{b}$ sera lui-même moindre ou plus grand qu'un <u>quadrant</u>. En effet, que par le point B on élève un arc BD perpendiculaire au côté BA il rencontrera le côté AC en un point D, et l'arc DA sera égal à un quadrant. Le sommet C du triangle sera sur l'arc AD lui-même, ou bien en C' sur son prolongement. Dans le 1.er cas le côté b = AC sera plus



petit que le quadrant AD et l'angle opposé B plus petit que l'angle opposé DBA. Dans le second cas, le côté $\underline{b}$ sera plus grand que le quadrant, et l'angle B plus grand que l'angle droit. Ainsi l'angle B sera de même espèce que le côté b, lequel est donné. De sorte qu'il n'y aura qu'une solution.

2.e Cas. Les deux côtés b, c sont donnés.

L'hypoténuse et les deux angles adjacents se déterminent par les formules

$$\cos a = \cos b . \cos c \cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \tang B &= \frac{\tang b}{\sin c} \\ \tang C &= \frac{\tang c}{\sin b} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

Ces expressions ne laissent aucune ambiguité.

3.e Cas. L'hypoténuse $\underline{a}$ et l'angle B sont donnés.

On a

$$\sin b = \sin a . \sin B \cdots\cdots (2)$$

$$\tang c = \tang a \cos B \cdots\cdots (3)$$

$$\tang C = \frac{1}{\cos a \tang B} \cdots\cdots (4)$$

c et C sont déterminés sans ambiguité; b sera de même espèce que B.

4.e Cas. Le côté $\underline{b}$ et l'angle opposé B sont donnés.

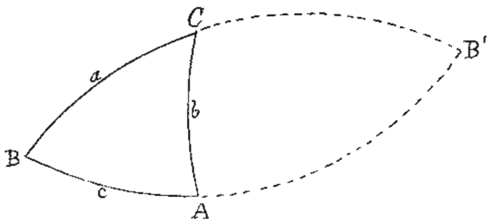
On a

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} \cdots\cdots (2)$$

$$\sin c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sin C = \frac{\cos B}{\cos b} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Chacun des éléments inconnus étant déterminé par son sinus, admet deux valeurs, et la question est susceptible de deux solutions. En effet soit BAC le triangle dont l'angle A est droit, et dont le côté $\underline{b}$ et l'angle opposé B sont donnés; il est clair que si on prolonge les deux côtés BA, BC jusqu'à leur rencontre en B', le triangle AB'C satisfera pareillement à la question, puisque son angle B' est égal à l'angle B du premier.



5e. Cas. Le côté b et l'angle adjacent C sont donnés. On a

$$\text{Tang } a = \frac{\text{tang } b}{\cos C} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{Tang } c = \sin b \text{ tang } C \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{Cos } B = \cos b \sin C \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Il n'y a aucune incertitude sur l'espèce des éléments inconnus.

6e. Cas. Les angles B et C sont donnés.
Les trois côtés se déterminent par les formules

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{1}{\text{tang } B \text{ tang } C} \\ \cos b &= \frac{\cos B}{\sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C}{\sin B} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

2e. Leçon.

Du calcul par logarithmes pour la résolution des triangles sphériques obliques. — Trois manières de procéder.

Les calculs de la trigonométrie sphérique, de même que ceux de la Trigonométrie plane, donnent lieu à des multiplications et à des divisions de nombres composés de beaucoup de chiffres; dès lors il y a un immense avantage à les effectuer par les logarithmes. C'est même en vue, spécialement, de ces calculs trigonométriques qui consumaient la vie des astronomes, que Néper a produit son admirable conception des logarithmes. Ce n'est donc pas sur les lignes elles-mêmes, que s'exécutent les calculs, mais bien sur leurs logarithmes. Il suit de là qu'il faut, pour la rapidité des opérations numériques, que l'expression de la ligne trigonométrique qu'on a à déterminer se prête aisément au calcul de son logarithme; cela a lieu quand l'expression se réduit à un monome formé de diverses lignes trigonométriques comme facteurs ou diviseurs.

Cette condition se trouve remplie dans toutes les formules relatives à la résolution des triangles rectangles. Faut-il, par exemple, calculer l'hypoténuse en fonction des deux autres côtés, on a

$$\cos a = \cos b . \cos c,$$

d'où

$$\mathrm{Log} \cos a = \log \cos b + \log \cos c.$$

Les côtés b et c sont connus; les logarithmes de leurs cosinus sont des nombres donnés par les tables; le calcul se réduit à faire la somme de ces nombres. Cette somme est le logarithme de $\cos a$; et l'on trouve dans les tables à quelle valeur de a répond ce logarithme.

Mais la formule

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

relative aux triangles obliques, ne se prête pas au calcul par logarithmes; car si l'on pose

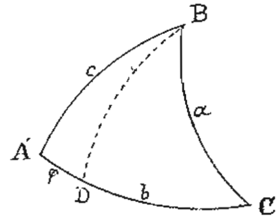
$$\mathrm{Log.} \cos a = \log(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A),$$

il n'en faudra pas moins calculer séparément les deux produits qui entrent dans le deuxième membre. De sorte que l'usage des logarithmes n'offre ici aucun avantage: on peut même dire qu'il n'est pas applicable.

On voit donc qu'il faut approprier les formules trigonométriques au calcul par logarithmes. C'est ce qu'on fait de trois manières:

1° On transforme celles des quatre formules générales (1), (2), (3), (4) qui ne se prêtent pas d'elles-mêmes au calcul par logarithmes, en d'autres aussi générales et dans lesquelles l'inconnue s'exprime par un monome.

2° On décompose le triangle proposé en deux triangles rectangles qu'on résout séparément. Par exemple, qu'on ait à déterminer le côté a en fonction des deux autres côtés b, c et de l'angle A, on abaissera du sommet B un arc BD perpendiculaire sur le côté opposé, et l'on résoudra successivement les deux triangles rectangles BDA, BDC. Soit φ le segment AD; on aura dans le premier triangle, dont l'angle A et le côté c sont connus,



$$\mathrm{tang}\, \varphi = \mathrm{tang}\, c \cos A.$$

et

$$\cos BD = \frac{\cos c}{\cos \varphi}.$$

on a dans le 2e triangle BDC,

$$\cos a = \cos BD . \cos CD = \frac{\cos c . \cos(b-\varphi)}{\cos \varphi}.$$

Ainsi le côté a se détermine par les deux formules,

$$\mathrm{tang}\, \varphi = \mathrm{tang}\, c \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos c . \cos(b-\varphi)}{\cos \varphi},$$

qui, toutes deux, se prêtent au calcul par logarithmes.

Ce procédé qui consiste à diviser le triangle proposé en deux triangles rectangles, a été employé par les auteurs anciens, même avant qu'on eût en vue le calcul par logarithmes: il est encore en usage, chez les astronomes surtout; aussi on l'appelle la <u>méthode astronomique</u>.

3° On introduit dans la formule à calculer un angle auxiliaire, déterminé de telle sorte qu'elle prenne une forme convenable. Ce procédé n'est, au fond, que le précédent; mais on ne prend pour guide que de simples considérations analytiques. Elles sont fondées, en général, sur cette remarque, que, l'on ramène une somme ou une différence $(a \pm b)$ à la forme d'un monome, en faisant

$$a = \operatorname{tang} \varphi, \quad b = \operatorname{tang} \psi.$$

car on a

$$a \pm b = \operatorname{tang}\varphi \pm \operatorname{tang}\psi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin\psi}{\cos\psi} =$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\psi \pm \sin\psi\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{\sin(\varphi \pm \psi)}{\cos\varphi\cos\psi}.$$

Cette méthode se simplifie et se réduit à l'introduction d'un seul angle auxiliaire, dans les différentes formules auxquelles on a à l'appliquer.

Par exemple, reprenons l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

En écrivant

$$\cos a = \cos c\left(\cos b + \sin b \frac{\sin c}{\cos c} \cos A\right),$$

on voit qu'il suffit de faire $\frac{\sin c}{\cos c} \cos A = \operatorname{tang}\varphi$, pour rendre la formule propre à l'emploi des logarithmes; car elle devient

$$\cos a = \cos c\left(\cos b + \sin b \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{\cos c}{\cos\varphi}\cos(b - \varphi).$$

Formules générales calculables par logarithmes.

Les formules (1), (2), (3), (4) ne laissent rien à désirer pour la résolution analytique des triangles sphériques; mais les formules (2) sont les seules qui se prêtent commodément au calcul par logarithmes; nous allons transformer les autres ou les remplacer par d'autres formules qui offrent le même avantage.

Déterminer un angle en fonction des trois côtés. De l'équation

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A,$$

on tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$$

c'est cette expression de $\cos A$ qu'il faut transformer en une autre qui soit propre au calcul par logarithmes.

On en tire

$$\frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b . \sin c}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{b-c+a}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{\sin b \sin c} . \quad (*)$$

Or $\frac{1 - \cos A}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} A$; donc

(*) Il faut se rappeler les quatre formules de la trigonométrie plane :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q),$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q).$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\,\sin c}}$$

Faisons $a+b+c=2s$; *il vient*

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}},\\
\text{et de même}\quad \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\cdot\sin(s-a)}{\sin c\,\sin a}},\\
\sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\,\sin b}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

Pour calculer les cosinus, on a

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\cdot\sin c}{2\sin b\,\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\,\sin c}=\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\,\sin c}$$

$$=\frac{\sin s\,\sin(s-a)}{\sin b\,\sin c}.$$

D'où

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}},\\
\cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin c\,\sin a}},\\
\cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\,\sin b}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

Déterminer un côté en fonction des trois angles. *On transformera les formules (4), de la même manière que les précédentes; et l'on aura, en faisant*

$$A+B+C=2S$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\,\sin C}}\\
\sin\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{-\cos S\cdot\cos(S-B)}{\sin C\,\sin A}}\\
\sin\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{-\cos S\,\cos(S-C)}{\sin A\,\sin B}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B.\sin C}}\\
\cos\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C\,\sin A}}\\
\cos\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\,\sin B}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

Ces formules se déduisent aussi, par la considération du triangle polaire, des formules (6) et (5), respectivement.

Les formules (3), qui servent dans le cas où l'on donne <u>deux côtés et un angle</u>, ou <u>deux angles et un côté</u>, ne s'approprient pas directement au calcul par logarithmes. On les remplace par d'autres formules appelées <u>Analogies de Neper</u>, que nous donnerons ci-dessous.

Formules de Delambre. *Ces formules, dont chacune comprend les six éléments du triangle, sont*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

Pour démontrer la 1ère, prenons la formule élémentaire,

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}A,$$

qui, d'après les formules (5) et (6), devient

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin(s-a)+\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Or d'après la formule élémentaire,

$$\sin p+\sin q=2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q),$$

on a

$$\sin(s-b)+\sin(s-a)=\sin\tfrac{1}{2}(2s-b-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-b-s+a)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}c\,.\cos\tfrac{1}{2}(a-b).$$

On sait que $\sin c=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c.$

On a donc, en ayant égard à la 3e des équations (6),

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Ce qui est la 1ère de nos quatre équations. On démontre semblablement les 3 autres.

Ces formules ont été découvertes en premier lieu par Mr Delambre et peu de temps ensuite par Mr Gauss. (*)

(*) On donne souvent ces formules sous le nom de Gauss, cela n'est pas juste; parceque la priorité appartient à Delambre qui les avait fait connaître en 1807 dans la connaissance des temps pour 1809 (page 445), deux ans avant que Mr Gauss les donnât dans son *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hambourg 1799. L'illustre géomètre de Gottingue les ayant trouvées de son côté et les ayant signalées comme nouvelles, Delambre, en rendant compte de son ouvrage dans la connaissance des temps pour 1812, a revendiqué la priorité qui lui était due (V. p. 349). Toutefois Delambre n'avait pas attaché d'importance à ces formules, et c'est Mr Gauss qui, le premier, en a fait usage et en a montré l'utilité.

Analogies de Neper. Divisant, membre à membre, la 1ère des équations précédentes par la 3e, la 2e par la 4e, puis la 4e par la 3e, et la 2e par la 1ère, on obtient les quatre équations suivantes

$$\left.\begin{aligned}
\tan\tfrac{1}{2}(A+B)&=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.\\
\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.\\
\tan\tfrac{1}{2}(a+b)&=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}.\\
\tan\tfrac{1}{2}(a-b)&=\tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

Ces quatre formules portent le nom d'analogies de Neper, parcequ'elles sont dues à ce géomètre. Chacune d'elles est une relation entre cinq éléments d'un triangle sphérique.

Les deux premières servent à déterminer deux angles, quand on connait les deux côtés opposés et l'angle compris; et les deux autres servent à déterminer deux côtés, quand on connait les deux angles opposés et leur côté commun.

Résolution des triangles sphériques obliques.

La résolution des triangles sphériques obliques comprend six cas différents que nous indiquons par l'énoncé des trois éléments connus.

1°. Les trois côtés;
2°. Deux côtés et l'angle compris;
3°. Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;
4°. Les trois angles;
5°. Deux angles et leur côté commun;
6°. Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

1er Cas. Les trois côtés a, b, c sont donnés.

On détermine les angles A, B, C par les formules (5) ou (6). Ainsi l'on a

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \text{ ou bien } \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

On calcule les deux autres angles par les formules analogues, ou bien par la règle des quatre sinus, c'est-à-dire par les formules (2).

2e Cas. Les deux côtés a, b, et l'angle compris C sont donnés.

Ce problème est un de ceux qui se présentent le plus souvent dans l'astronomie. On détermine les deux angles A, B par les deux 1ères analogies de Neper qui donnent immédiatement leur demi-somme et leur demi-différence. — Le 3e côté c se détermine soit par les relations (2), soit par l'une des deux autres analogies de Neper, soit, par les formules de Delambre, soit par les équations (7) ou (8).

3e Cas. Les deux côtés a, b et l'angle A opposé à l'un d'eux sont donnés.

On détermine l'angle B par la proportion des quatre sinus, formules (2). Cet angle aura deux valeurs; aussi la question est-elle susceptible de deux solutions. On reconnaitra si les deux valeurs de B sont admissibles, c'est-à-dire s'il y a deux solutions, en vérifiant si elles satisfont à ces deux conditions des triangles sphériques:

1°. Que tout angle est plus petit que 180°.

2°. Que, de deux angles, le plus grand est toujours opposé au plus grand côté; en sorte que si l'on a $b > a$, il faut qu'on ait aussi $B > A$.

Les deux autres éléments du triangle, le côté c et l'angle C, se déterminent par les analogies de Neper, après qu'on a calculé l'angle B.

4e Cas. Les ~~trois~~ angles A, B, C sont donnés.

On détermine les ~~trois~~ côtés a, b, c par les formules (7) ou (8).

5e Cas. Les deux angles A, B et leur côté commun c sont donnés.

On détermine les deux côtés a, b par les analogies de Neper qui donnent immédiatement leur somme et leur différence. Le 3ème angle C, qui reste le seul élément inconnu du triangle, se détermine ensuite par la règle des 4 sinus, ou par les formules de Delambre, ou par l'une des analogies de Neper.

6e Cas. Les deux angles A, B et le côté a

opposé à l'un d'eux sont donnés.

Le côté b se détermine par la proportion des sinus, $\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}$. Il pourra y avoir deux solutions comme dans le 3e cas. — Les deux autres éléments du triangle, C et c, se détermineront par les analogies de Neper après qu'on a calculé b.

Remarque sur les six cas généraux de la résolution des triangles sphériques. Les trois derniers cas pourraient se déduire des trois 1ers, par la considération du triangle polaire, de sorte qu'à proprement parler, il n'y a que trois questions ou trois cas différents dans la résolution générale des triangles sphériques.

La 1ère se résout par une seule analogie (formules (5) ou (6)). La 2e peut se résoudre par les analogies de Neper; ou bien par ces analogies et une autre formule. Le 3e cas exige nécessairement deux analogies différentes; et ce cas peut admettre deux solutions.

Il existe deux autres moyens de résoudre les triangles sphériques, que les astronomes et les géomètres mettent fréquemment en pratique: c'est de diviser le triangle proposé en deux triangles rectangles, ou bien de se servir des formules générales, qu'on rend calculables par logarithmes, en introduisant des angles auxiliaires, comme nous l'avons expliqué précédemment.

Unité angulaire — expression d'un arc en angle.

On prend pour unité, dans la mesure des angles, l'angle d'une seconde. 60″ font 1′; et 60′ font 1°. On exprime donc un angle en degrés, minutes, et secondes.

Un arc dont le rayon est connu, peut être déterminé, de deux manières; par sa longueur, ou par l'angle qu'il soutend. De sorte qu'il existe deux expressions différentes d'un arc.

Dans les calculs trigonométriques, on a besoin souvent de passer d'une expression à l'autre. Voici comment cela se fait.

Appelons arc a la longueur d'un arc, et angle a l'angle que cet arc soutend; on a la proportion

$$\frac{\text{arc } a}{\text{angle } a} = \frac{\text{arc } 1''}{\text{angle } 1''}.$$

ou

$$\frac{\text{arc } a}{\text{angle } a} = \text{arc } 1'',$$

puisqu'on prend l'angle de 1″ pour unité.

Telle est la relation entre la longueur d'un arc et l'angle qu'il soutend. Mais, comme l'arc de 1″ diffère très peu de son sinus, c'est ce sinus qu'on introduit dans la relation; de sorte qu'on a, approximativement,

$$\text{arc } a = \text{angle } a \cdot \sin 1''.$$

C'est-à-dire que: un arc est égal, en longueur, à l'angle qu'il soutend, multiplié par le sinus de 1''.

De là, on tire

$$\text{angle } a = \frac{\text{arc } a}{\sin 1''}.$$

Ce qui signifie que : l'angle soutendu par un arc est égal à cet arc divisé par le sinus de 1''.

(Voir page [illegible])

Résolution d'un cas des triangles rectangles par les séries.

L'équation $\tang x = m . \tang a$ peut se résoudre par la série

$$x = a - \left(\frac{1-m}{1+m}\right)\sin 2a + \frac{1}{2}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \sin 4a$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^3 \sin 6a + \frac{1}{4}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^4 \sin 8a \ \&c.$$

Pour démontrer cette formule, écrivons la proposée de cette manière,

$$\frac{\sin x}{\cos x} = m . \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Remplaçons les sinus et cosinus par leurs expressions en exponentielles imaginaires, savoir

$$\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$$

. . . .

Il vient

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = m \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}};$$

ou bien, en remplaçant $e^{-x\sqrt{-1}}$ par $\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}}$,

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = m \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}.$$

De là on tire la valeur de $e^{2x\sqrt{-1}}$:

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{1-m}{1+m}}{\frac{1-m}{1+m}\, e^{2a\sqrt{-1}} + 1}.$$

Pour plus de simplicité, remplaçons $\frac{1-m}{1+m}$ par μ ; il vient

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + \mu}{\mu e^{2\sqrt{-1}} + 1}$$

ou

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2a\sqrt{-1}} . \frac{1 + \mu e^{-2a\sqrt{-1}}}{1 + \mu e^{2a\sqrt{-1}}}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, et divisant ensuite par $2\sqrt{-1}$, on a

$$x = a + \frac{\log(1 + \mu e^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1 + \mu e^{2a\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

D'après la formule

$$\log(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \&c.,$$

l'équation devient

$$x = a + \frac{\mu e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{\mu^2}{2} e^{-4a\sqrt{-1}} + \frac{\mu^3}{3} e^{-6a\sqrt{-1}} - \&c.}{2\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{\mu e^{2a\sqrt{-1}} - \frac{\mu^2}{2} e^{4a\sqrt{-1}} + \frac{\mu^3}{3} e^{6a\sqrt{-1}} - \&c.}{2\sqrt{-1}}$$

$$x = a - \mu \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{\mu^2}{2} \frac{e^{4a\sqrt{-1}} - e^{-4a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{\mu^3}{3} \frac{e^{6a\sqrt{-1}} - e^{-6a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \&^c \ldots\ldots$$

ou, en substituant aux expressions exponentielles imaginaires, les sinus qui y répondent,

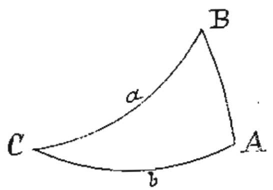
$$x = a - \mu \sin 2a + \frac{\mu^2}{2} \sin 4a - \frac{\mu^3}{3} \sin 6a + \&^c \ldots\ldots$$

En mettant pour μ sa valeur $\frac{1-m}{1+m}$, on obtient l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

Pour que cette formule soit utile dans la pratique, il faut qu'elle soit convergente ; ce qui exige que $\frac{1-m}{1+m}$ soit une quantité plus petite que l'unité.

Il est plusieurs questions de trigonométrie sphérique et même de trigonométrie plane, où l'on peut faire usage de cette série, qui a été donnée par Lagrange. (Mem. de l'Acad. de Berlin ; ann. 1776).

Nous nous bornerons ici à l'appliquer au cas de la résolution des triangles sphériques rectangles, où l'on se propose de calculer un côté en fonction de l'hypoténuse et de l'angle intermédiaire.



On a

$$\tang b = \tang a . \cos C.$$

Il faut donc faire $m = \cos C$, ce qui donne

$$\frac{1-m}{1+m} = \frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{2\sin^2 \frac12 C}{2\cos^2 \frac12 C} = \tang^2 \tfrac12 C.$$

Ainsi l'on a

$$b = a - \tang^2 \tfrac12 C \sin 2a + \tfrac12 \tang^4 \tfrac12 C \sin 4a - \tfrac13 \tang^6 \tfrac12 C \sin 6a + \&^c \ldots$$

Dans cette formule a et b sont deux arcs ; si l'on veut qu'ils soient exprimés en angles, c'est-à-dire en degrés, minutes et secondes, il faudra se servir de la relation

$$\text{arc } a = \text{angle } a . \sin 1''.$$

C'est-à-dire qu'il faudra remplacer l'arc $(b-a)$ par $(b-a)\sin 1''$; b et a représentant alors des angles exprimés en secondes. On aura donc

$$b = a - \tang^2 \tfrac12 C \frac{\sin 2a}{\sin 1''} + \tfrac12 \tang^4 \tfrac12 C \frac{\sin 4a}{\sin 1''} - \tfrac13 \tang^6 \tfrac12 C \frac{\sin 6a}{\sin 1''} + \&^c$$

Or on a sensiblement

$$2\sin 1'' = \sin 2'', \quad 3\sin 1'' = \sin 3'', \quad \&^c \ldots$$

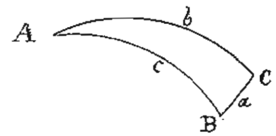
On peut donc écrire

$$b = a - \tang^2 \tfrac12 C \frac{\sin 2a}{\sin 1''} + \tang^4 \tfrac12 C \frac{\sin 4a}{\sin 2''} - \tang^6 \tfrac12 C \frac{\sin 6a}{\sin 3''} + \&^c \ldots$$

3e Leçon.

Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différents de 90°.

Soient b et c les deux côtés peu différents de 90°, lesquels sont connus ainsi que le 3e côté a ; on veut déterminer l'angle A compris entre b et c. On a



$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Si b et c étaient égaux précisément à $90°$, on aurait $A = a$; c'est-à-dire que l'angle A aurait pour mesure l'arc *a*, ou, en d'autres termes, l'angle A serait égal à l'arc *a* *exprimé en angle*. Donc, puisque b et c diffèrent peu de $90°$, A diffère peu de *a*. Faisons donc $A = a + x$; x sera une quantité très petite.

Soit $b = 90° + \beta$; $c = 90° + \gamma$.

L'équation devient

$$\cos(a+x) = \frac{\cos a - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Remplaçons $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs expressions d'après les formules

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} - \&c. \ldots\ldots$$

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{1.2.3} + \&c. \ldots\ldots$$

On aura, en négligeant les termes du 4^e ordre par rapport à β et γ,

$$\sin\beta\sin\gamma = \beta\gamma, \text{ et } \cos\beta\cos\gamma = 1 - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}.$$

Et l'équation devient

$$\cos(a+x) = \frac{\cos a - \beta\gamma}{1 - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}} = (\cos a - \beta\gamma)\left[1 + \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\right) + \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\right)^2 + \&c. \ldots\right]$$

ou, en négligeant les termes du 4^e ordre,

$$\cos(a+x) = \cos a\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2}\right) - \beta\gamma.$$

Or

$$\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x \,;$$

ou, en négligeant le carré de x,

$$\cos(a+x) = \cos a - x \sin a \,;$$

De là et de l'équation précédente, on conclut

$$x = \frac{\beta\gamma - \frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2)\cos a}{\sin a}.$$

On voit que x est du 2^e ordre par rapport à β et γ ; de sorte que le carré de x qu'on a négligé dans l'expression de $\cos(a+x)$ est une quantité du 4^e ordre.

Cette valeur de x fait connaître l'angle A. On la met sous une forme plus commode pour le calcul. On fait

$$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = p, \text{ et } \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = q,$$

ou

$$\beta = p + q \text{ et } \gamma = p - q \,; \text{ il vient}$$

$$x = \frac{(p^2-q^2) - (p^2+q^2)\cos a}{\sin a} = \frac{p^2(1-\cos a) - q^2(1+\cos a)}{\sin a}$$

ou

$$x = p^2 \tang \tfrac{1}{2} a - q^2 \cot \tfrac{1}{2} a.$$

Telle est la valeur de x. L'angle A qu'il s'agissait de déterminer est égal à $(a+x)$.

Il faut observer que x, p et q sont des arcs : dans la pratique ces deux derniers sont donnés, généralement, en *secondes*, et c'est aussi en *secondes* qu'on détermine x. Par conséquent il faut remplacer ces arcs x, p, q par leurs expressions en angles, d'après la relation

$$\text{arc } a = \text{angle } a \sin 1''$$

La formule devient

$$x = p^2 \tang \tfrac{1}{2} a \sin 1'' - q^2 \cot \tfrac{1}{2} a \sin 1''.$$

Cette formule est employée dans les opérations géodésiques, pour la *réduction d'un angle à l'horizon*, ainsi que nous le verrons plus tard.

Elle est d'une grande exactitude quand C et γ n'excèdent pas 2 ou 3 degrés.

Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère.

Quand un triangle sphérique a ses côtés très petits par rapport au rayon de la sphère, comme sont les triangles qu'on trace sur la surface de la terre dans les opérations géodésiques, on peut ramener sa résolution à celle d'un triangle rectiligne. Celui-ci a ses côtés égaux, en longueur, à ~~ceux~~ ceux du triangle sphérique, et jouit des deux propriétés suivantes :

1° Ses angles sont égaux respectivement aux angles du triangle sphérique, diminués d'une même quantité qui est le tiers de l'excès de la somme des trois angles sphériques sur deux angles droits.

2° Sa surface est égale à celle du triangle sphérique.

Ce sont ces deux propriétés sur lesquelles on s'appuie pour ramener, dans tous les cas, la résolution du triangle sphérique à celle du triangle plan.

Pour démontrer la 1ère proposition, on compare l'un à l'autre les angles des deux triangles exprimés par leurs cosinus, en fonction des côtés.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle sphérique ABC tracé sur une sphère du rayon r. Si

l'on conçoit une deuxième sphère, décrite du même centre, et d'un rayon égal à l'unité, les rayons de la 1ère sphère menés aux sommets du triangle ABC détermineront sur la 2e les sommets d'un 2e triangle dont les angles seront égaux à ceux du 1er, et dont les côtés seront $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$; et l'on aura dans ce 2e triangle

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r} \cdot \cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\,\sin\frac{c}{r}}.$$

Puisque r est très grand par rapport aux côtés a, b, c, on aura d'une manière approchée en négligeant les puissances de $\frac{1}{r}$ supérieures à la 4e,

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4.r^4},$$

$$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4.r^4},$$

$$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4.r^4},$$

$$\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3.r^3},$$

$$\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3.r^3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\cos A$ et négligeant les termes au delà de $\frac{1}{r^4}$, on a

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

Multipliant les deux termes de la fraction par $\left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2}{24\,bc\,r^2}.$$

Concevons le triangle rectiligne dont les côtés sont égaux aux arcs a, b, c développés en ligne droite; soient A', B', C', les angles de ce triangle, on aura

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

et

$$\sin^2 A' = \frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}.$$

Donc

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A'.$$

Pour chercher le rapport direct entre les angles A et A' eux-mêmes, soit $A = A' + x$, on aura

$$\cos A = \cos A' \cos x - \sin A' \sin x.$$

ou, en négligeant le carré de x,

$$\cos A = \cos A' - x \sin A'.$$

En comparant cette valeur à l'expression ci-dessus de $\cos A$, on a

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

Donc

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

$\frac{1}{2}bc \sin A'$ est l'aire du triangle rectiligne; désignons-la par α; il vient

$$A = A' + \frac{\alpha}{3r^2};$$

ou

$$A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}.$$

Et pareillement

$$B' = B - \frac{\alpha}{3r^2},$$

$$C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}.$$

On a dans le triangle rectiligne $A' + B' + C' = 180°$; il s'ensuit que

$$A+B+C-\frac{\alpha}{r^2} = 180°;\ \text{d'où}\ \frac{\alpha}{r^2} = A+B+C-180°.$$

$\frac{\alpha}{r^2}$ est donc l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique sur deux angles droits; ce qui démontre la 1ère proposition.

La quantité $x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'$ exprime un arc; pour la convertir en angle, il faut la diviser par $\sin 1''$; de sorte que les véritables expressions de A', B', C' dont on fera usage dans la pratique, sont

$$A' = A - \frac{1}{3}\,\frac{\alpha}{r^2 \sin 1''},$$

$$B' = B - \frac{1}{3}\,\frac{\alpha}{r^2 \sin 1''},$$

$$C' = C - \frac{1}{3}\,\frac{\alpha}{r^2 \sin 1''}.$$

De là résulte

$$\alpha = r^2 \sin 1'' \left[A + B + C - 180°\right].$$

Le 2e membre est l'aire du triangle sphérique.

En effet, l'aire de ce triangle est égale à autant de fois la 8e partie de la surface de la sphère que l'excès $(A+B+C-180°)$ contient de fois l'angle droit ou $90°$. De sorte qu'on a en appelant T cette aire

$$T = \frac{4\pi r^2}{8}\cdot\frac{A+B+C-180°}{90°} = \frac{\pi r^2}{180°}(A+B+C-180°)$$

Or

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\text{arc } 180°}{\text{angle } 180°} = \frac{\text{arc } 1''}{\text{angle } 1''} = \sin 1''.\ \text{Donc}$$

$$T = r^2 \sin 1''(A+B+C-180°).$$

Ainsi α est égal à l'aire du triangle sphérique;

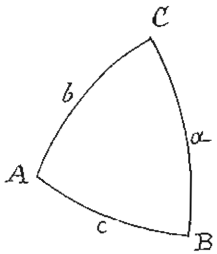
mais c'est aussi l'aire du triangle rectiligne. Donc les deux triangles ont la même surface.

L'expression $\frac{a}{r^2}$, ou, plus exactement, $\frac{a}{r^2 \sin 1''}$ s'appelle l'excès sphérique.

Usage du triangle rectiligne, pour la résolution du triangle sphérique.

C'est ordinairement quand on connaît un côté et les deux angles adjacents, qu'on ramène la résolution du triangle sphérique à celle du triangle rectiligne. Pour cela, il suffit de calculer l'excès sphérique; car alors on connaîtra un côté et les angles du triangle rectiligne; sa résolution consistera à calculer ses deux autres côtés, lesquels seront égaux aux côtés cherchés du triangle sphérique.

Pour déterminer l'excès sphérique on se fonde sur ce que la surface des deux triangles est la même, et on calcule cette surface en regardant le triangle sphérique simplement comme un triangle plan; ce qui est une approximation suffisante.



Soient A, B les deux angles connus, et c le côté adjacent, qui est aussi donné. La surface du triangle, considéré comme plan, est

$$a = \frac{bc \sin A}{2}, \text{ ou, à cause de}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin(A+B)},$$

$$a = \frac{c^2 \sin A . \sin B}{2 \sin (A+B)}.$$

L'excès sphérique $\frac{a}{r^2 \sin 1''}$ est donc déterminé. On en conclut les angles A', B' du triangle rectiligne, qui avec son côté $c' = c$ suffisent pour sa résolution.

Cette manière de ramener la résolution d'un triangle sphérique à celle d'un triangle rectiligne est due à Mr Legendre, et est connue généralement sous le nom de Théorème de Legendre. Nous montrerons plus tard, par des exemples, combien est grande l'approximation que procure, dans les opérations géodésiques, ce moyen de calcul abrégé. (✳)

Mesure du temps. — Chronomètres.

Les Chronomètres sont les instruments qui servent à mesurer le temps. Toutefois on applique plus spécialement ce terme aux montres ~~de~~ d'une grande précision, telles que les montres marines.

Le mouvement offre une mesure naturelle du temps. Car si un corps se meut d'un mouvement uniforme, les espaces parcourus donneront une

---

(✳) Mr Gauss a donné une grande extension au Théorème de Legendre, en prouvant qu'il a lieu pour un triangle tracé sur une surface courbe quelconque, quand les côtés de ce triangle sont les lignes les plus courtes qu'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface.

mesure exacte du temps. Le mouvement du corps peut même n'être pas uniforme, et se composer simplement de <u>périodes uniformes</u>, c'est-à-dire de même durée, pourvu que chaque période ne soit pas d'une durée plus grande que le petit intervalle de temps que l'on veut apprécier. Veut-on par exemple compter par <u>secondes</u>, il faudra que les espaces parcourus par le mobile, dans chaque période, soient toujours de même durée, savoir, d'une seconde ; le mouvement pouvant, du reste, n'être pas uniforme dans l'intervalle de chaque période.

La production d'un mouvement continûment uniforme présenterait de très grandes difficultés ; et c'est un mouvement composé de périodes uniformes, qu'on réalise dans les <u>chronomètres</u>.

Dans la construction d'un chronomètre, on se propose de produire un mouvement angulaire périodiquement uniforme. Ce mouvement est marqué par une aiguille, tournant sur un cadran qui porte des divisions. On conçoit que par des transmissions de mouvement, au moyen de roues dentées, le même moteur, ou le même mécanisme pourra servir à faire tourner, soit autour d'un même centre, soit autour de centres différents, plusieurs aiguilles qui marqueront des divisions du temps différentes : l'une marquera les <u>secondes</u> ; une autre les <u>minutes</u> ; une 3e les <u>heures</u>.

Pièces principales d'un Chronomètre. Tout

mouvement nécessite un <u>moteur</u>. Généralement, un moteur dont l'action doit être régulière a besoin d'un <u>régulateur</u>. Ce <u>régulateur</u>, dans certaines machines, est un mécanisme mis en mouvement par le moteur principal ; dans d'autres machines, c'est un second moteur distinct du premier. C'est ce qui a lieu dans les chronomètres.

Il existe donc dans tout instrument à mesurer le temps, deux moteurs distincts ; l'un, destiné à produire le mouvement de l'aiguille qui marquera le temps ; et l'autre, qu'on appelle le <u>régulateur</u>, destiné à rendre régulière et périodiquement uniforme, l'action du premier.

Le mouvement imprimé immédiatement par le moteur principal que nous appellerons simplement le <u>moteur</u>, se transmet à l'aiguille, au moyen d'un système ou <u>train</u> de roues dentées, qu'on appelle le <u>rouage</u>.

C'est sur l'une de ces roues que le régulateur exerce son action. Cette roue s'appelle <u>roue d'échappement</u>, ou simplement <u>échappement</u>. C'est de cette pièce que dépend principalement la régularité des mouvements de l'instrument.

Enfin, la machine ne pouvant avoir un mouvement indéfini, il faut un mécanisme particulier pour la <u>remonter</u>, sans altérer son mouvement actuel.

Il y a donc à considérer, dans tout chronomètre, cinq parties principales : le <u>moteur</u> ; le <u>rouage</u> ; le <u>régulateur</u> ; l'<u>échappement</u> ; et enfin, le mécanisme pour le remontage.

Les instruments à mesurer le temps sont de deux sortes. Les uns restent fixes dans une même position; ce sont les horloges. Les autres sont portatifs, et doivent fonctionner dans toutes les positions; ce sont les montres.

Dans ces 2 sortes d'instruments le moteur est différent, ainsi que le régulateur. C'est principalement dans ces 2 pièces, que consiste la différence essentielle qui existe entre les horloges et les montres.

Description d'une horloge.

Moteur. Dans les horloges le moteur est un poids suspendu à un cordon enroulé sur un cylindre. Le mouvement de ce cylindre autour de son axe, produit par ce poids, se transmet aux aiguilles au moyen d'un système de roues dentées. Le mouvement tend à s'accélérer; un régulateur est donc indispensable.

On pourrait adapter au cylindre, ou à l'une des roues auxquelles il transmet son mouvement, un petit moulinet dont les ailes éprouveraient de la résistance de la part de l'air. Cette résistance croissant dans le rapport du carré de la vitesse de rotation, il arriverait un moment où elle serait égale précisément à l'action du moteur, et alors le mouvement continuerait uniformément, en vertu de la vitesse acquise.

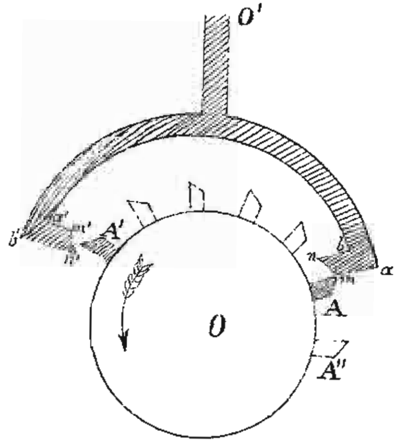
Mais cet instrument n'offrirait aucune précision, à cause des mouvements variables qu'éprouve la masse d'air, et qui font que son action sur les ailes du moulinet n'est pas constante: aussi ce procédé n'est-il guère employé que dans les tournebroches, où le moteur est aussi un poids.

Régulateur. Dans les horloges, le régulateur est un pendule, c'est-à-dire un corps qui oscille autour d'un point fixe. A chaque demi-oscillation, le pendule, par son action sur l'une des roues du rouage, arrête le mouvement. On produit donc ainsi des mouvements périodiques, et l'on évite l'accélération continue du mouvement du poids qui sert de moteur.

Mais une difficulté se présente. Car par cette action retardatrice du pendule, son propre mouvement se ralentit: la résistance de l'air, et le frottement au point de suspension sont encore deux causes de ralentissement. De sorte qu'à chaque oscillation, le pendule perdra une partie de sa force motrice, et l'amplitude de ses oscillations diminuera. Il faut donc, à chaque oscillation, restituer au pendule la portion de force motrice que les trois causes réunies dont nous venons de parler lui font perdre.

Cette restitution se fait par le moteur lui-même, et par l'intermédiaire de l'une des roues du rouage, celle que nous avons appelée échappement.

Echappements. La roue O que nous appelons échappement a ses dents comme les représente la figure. Une pièce de forme circulaire appelée



ancre, parcequ'elle a à ses extrémités deux palettes qui figurent les bras recourbés d'une ancre marine, prend un mouvement circulaire alternatif autour d'un centre O' situé sur la verticale qui passe par le centre de la roue O. Ce mouvement alternatif est produit par les oscillations d'un pendule dont nous ferons connaitre tout-à-l'heure la disposition. C'est ce mouvement de l'ancre qui cause les arrêts de la roue d'échappement, et donne lieu à ses petits mouvements successifs, d'égale durée.

A cet effet, les bras ou palettes de l'ancre, am, a'm' se terminent en biseau par deux petites faces mn, m'n' inclinées dans le même sens. La roue tourne dans le sens indiqué par la flèche. Une dent de droite, A, vient rencontrer la face am, et se trouve arrêtée. A ce moment l'ancre se porte vers la droite ; sa face am glisse sur l'extrémité de la dent A ; et bientôt le point m, origine de la face inclinée mn, coïncide avec cette extrémité de la dent ; alors la dent reprend

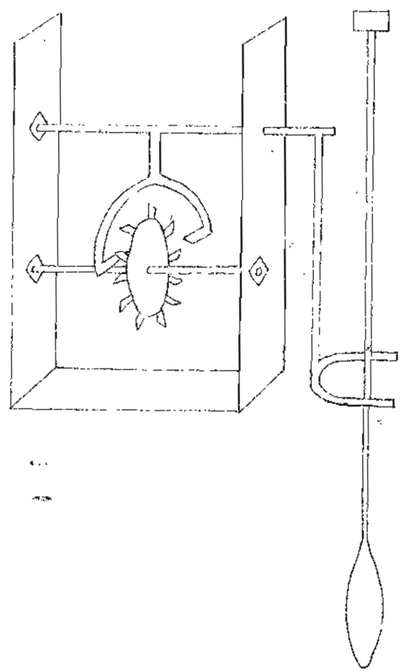
son mouvement, en glissant sur la surface mn. Quand elle abandonne cette face qui s'est portée vers la droite, une autre dent A', située à gauche, se trouve en prise avec la face a'm' de l'autre palette de l'ancre. Alors la roue se trouve encore arrêtée. Mais à ce moment l'ancre fait son oscillation contraire ; elle se porte à gauche, de sorte que la face a'm' glisse sur l'extrémité de la dent A' ; et bientôt la dent atteint la face m'n'. Alors elle reprend son mouvement. Quand elle cesse d'être en prise, c'est une autre dent A'' qui se trouve en prise avec la palette de droite, comme était auparavant la dent A.

Quand les dents glissent sur les faces inclinées mn, m'n' de l'ancre, la pression qu'elles exercent sur ces faces tend à accélérer le mouvement de l'ancre, et restitue au pendule la force motrice que la résistance de l'air et les frottements lui font perdre.

On prend pour le profil des faces am, a'm' des arcs de cercles qui ont leur centre commun au point de suspension de l'ancre ~~du pendule~~. Il s'ensuit que pendant que ces faces am, a'm' glissent sur les dents, celles-ci n'éprouvent aucun mouvement : il y a repos. Aussi ce mécanisme s'appelle échappement à repos.

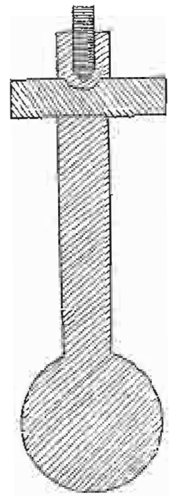
Auparavant on donnait aux faces am, a'm' une légère courbure qui faisait reculer les dents ; cette forme s'appelle échappement à recul.

Disposition de l'ancre et du pendule. L'axe de l'ancre est horizontal et tourne sur deux coussinets. A cet axe est fixée à angle droit, une tige terminée par une fourchette, dans laquelle passe la tige du pendule, celui-ci oscille librement autour de son point de suspension, et frappe les bras de la fourchette, ce qui produit les oscillations de l'ancre. Réciproquement, l'action des dents de la roue d'échappement sur les palettes de l'ancre réagit sur le pendule et entretient son mouvement.

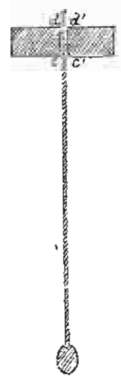


Suspension du pendule. Le mode de suspension qui cause le moins de frottement est dit suspension <u>à couteau</u>. A la tige du pendule est fixée une pièce en acier, qui a la forme d'un coin et qu'on appelle <u>couteau</u>. L'angle de ce couteau est de 90° environ, et un peu arrondi. Il repose sur un coussinet appelé <u>gouttière</u> ou <u>rainure</u>,

également en acier, ou mieux encore en pierre très dure, comme le saphir d'Orient. L'arête du couteau a une longueur proportionnée au poids du pendule. Quand ce poids est double, la longueur doit être double. Une plus grande longueur n'a pas pour objet de changer la quantité de frottement, qui est indépendante de l'étendue des surfaces en contact, mais seulement d'empêcher le couteau et la gouttière de se ronger.



Autre mode de suspenssion. On prend pour la tige du pendule une lame élastique très mince, qu'on serre entre deux plans cd, c'd'. C'est à partir du point c qu'est comptée la longueur du pendule oscillant. De la sorte, il n'y a aucun frottement. Mais la lame, très déliée parcequ'elle doit être très flexible, est sujette à des allongements sensibles, causés par le poids de la lentille. C'est un inconvénient qui ne permet pas toujours l'emploi de ce mode de suspension, qui est dû à Huyghens.



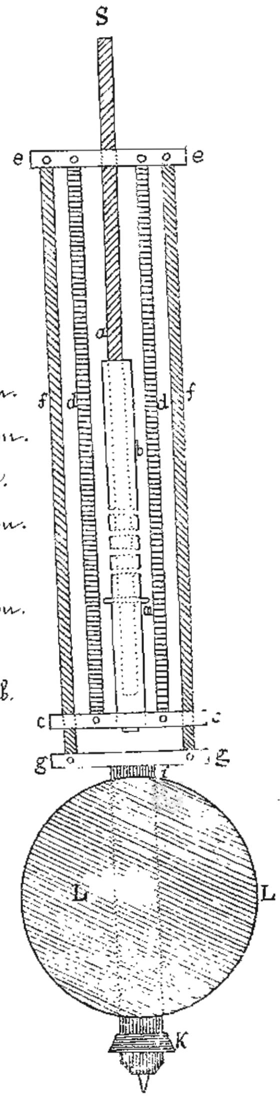
Pendule compensateur. Ce sont les oscillations du pendule qui déterminent les petits mouvements successifs de la roue d'échappement. Il faut donc que ces oscillations soient isochrones. Or on sait que le temps des oscillations d'un pendule est proportionnel à la racine carrée de sa longueur. Il faut donc que cette longueur reste constante. Cela n'a pas lieu dans un pendule simple, à cause de l'action de la température sur le métal dont il est formé. Ainsi, dans nos climats, une horloge à pendule, réglée pendant les froids de l'hiver, retarde pendant les chaleurs de l'été, jusqu'à 20 secondes et au delà. Il faut donc trouver un moyen de corriger cet effet de la température et de rendre la longueur du pendule constante. L'appareil qui produit cet effet s'appelle pendule compensateur.

Ces pendules sont formés de plusieurs métaux différemment dilatables, et tellement combinés que, la dilatation des uns compensant l'effet de la dilatation des autres, le centre de gravité du pendule reste toujours à la même distance du point de suspension.

Voici la disposition d'un des appareils les plus simples, et qui paraissent offrir le plus d'exactitude. La verge Sa est en fer, et s'emboîte dans une douille ou canon b en laiton. Ces deux pièces sont fixées ensemble par une goupille qui les traverse en a. Au canon b est fixée une pièce horizontale cc aussi en laiton, sur laquelle

s'élèvent deux verges d, d en zinc. Ces verges supportent une barre horizontale ee en laiton. A cette barre sont fixées deux tiges verticales f, f en fer, réunies à leurs extrémités inférieures par une pièce horizontale gg en laiton. A cette pièce est fixée une tige verticale iK en fer, qui traverse la lentille L qui est en plomb. Cette lentille est soutenue par un écrou K qui termine la tige, de sorte que la dilatation qui allonge son diamètre, a pour effet d'élever son centre de gravité, c'est-à-dire de le rapprocher du point i.

a. fer.
b. Laiton.
cc. Laiton.
d,d. Zinc.
ee. Laiton.
f,f. fer.
gg. Laiton.
i.K. fer.
L. Plomb.



La verge Sa traverse librement la barre horizontale ee, et les deux tiges f, f, traversent de même la barre cc.

Les effets du pendule se comprennent aisément. Si la température augmente, la verge Sa s'allonge, ainsi que le canon b, et la pièce cc descend; les tiges d, d s'allongent aussi et font monter la barre ee beaucoup plus que la barre cc n'a descendu. Mais l'allongement des tiges f, f fait descendre la barre g g à laquelle est fixée la tige iK; celle-ci s'allonge aussi et contribue à la descente du point extrême K. D'une autre part, la dilatation de la lentille élève son centre de gravité.

Il s'ensuit que le centre de gravité de la lentille s'abaisse par l'effet des dilatations des verges en fer Sa, f et iK et du canon en laiton b, qui font une longueur $(Sa+b+f+iK)$, et qu'il s'élève par l'effet des dilatations des verges d en zinc, et de la lentille L en plomb, qui font une longueur $(d+2r)$, r étant le rayon de la lentille.

Connaissant la dilatation du fer, du laiton, du zinc et du plomb, on saura quelles doivent être les longueurs $(Sa+b+f+iK)$ et $(d+2r)$, pour que les quantités de dilatation de part et d'autre se compensent.

Si l'expérience prouve que le pendule ainsi formé n'a pas une compensation parfaitement exacte, on pourra changer les longueurs Sa, b, de la verge en fer et du canon en laiton, en conservant leur somme $(Sa+b)$ constante. Pour cela, il suffira de déplacer la goupille qui unit les deux pièces. A cet effet, les deux pièces sont percées de plusieurs trous qui se correspondent et dans lesquels on peut introduire la goupille. Comme le laiton a une dilatabilité beaucoup plus grande que le fer, en augmentant la partie b du canon, et en diminuant d'autant la longueur Sa de la verge en fer, ce qu'on fait en élevant la goupille, on donnera à la longueur $(Sa+b)$ une plus grande

dilatation. Le contraire aura lieu si on abaisse la goupille. Voici les dimensions adoptées par Mr. Jurgensen, célèbre horloger danois. (✳)

Verge Sab, 35 pouces, composée de deux parties :

Sa, en fer	29 pouces
b, en laiton	6.
Verges en zinc, d, d,	24 pouces
id. en fer f, f,	24 — 9 lig.
Tige iK en fer	7 — 6.
Hauteur du centre de la lentille au dessus de l'écrou K	5 — 3

Pendule à mercure. On fait usage d'un autre pendule compensateur beaucoup plus simple, et qui ne diffère du pendule ordinaire, qu'en ce que sa lentille contient du mercure dans un tube de verre. Quand la température augmente le centre de gravité de la lentille descend par l'effet de l'allongement de la verge, et s'élève par suite de la dilatation du mercure. Ces deux effets se compensent de manière que le centre de gravité du pendule reste à la même hauteur.

Des montres, ou Chronomètres portatifs.

Moteur. Dans les montres le moteur est

(✳) Mr. Jurgensen est auteur d'un très bon ouvrage, intitulé : <u>Principes généraux de l'exacte mesure du temps par les horloges</u>. 2e édition, 1838, in-4° Bachelier.

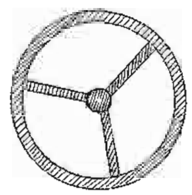
un ressort formé d'une lame plate, élastique, roulée en spirale. Ce ressort est renfermé dans un cylindre, appelé *barillet*, fermé à ses deux bases, et traversé par un axe qui est fixe. L'extrémité centrale du ressort est attachée à cet axe, et l'autre extrémité, au barillet. Pour enrouler le ressort autour de l'axe, et sur lui-même, on fait tourner le barillet; alors le ressort est tendu, et fait effort pour se dérouler et reprendre sa forme primitive. Cet effort fait tourner le barillet autour de l'axe fixe, et ce mouvement de rotation se transmet aux autres parties de l'instrument.

Fusée. Quand le ressort se détend, son élasticité va toujours en diminuant; son effort pour opérer la rotation du barillet diminue donc; et, par suite l'action du barillet sur la roue à laquelle il transmet immédiatement son mouvement, diminue elle-même. Cependant il est nécessaire, pour la régularité de la machine que cette action reste constante. On obtient ce résultat au moyen d'une *fusée*.

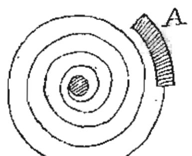
Nous savons qu'on appelle ainsi un cône droit circulaire, sur lequel est tracée une *hélice* dont les *spires* ont de très petits *pas*, de sorte que chaque spire diffère peu d'une circonférence de cercle. On enroule sur la fusée, en commençant par sa base, une chaine flexible (dont les petits chainons sont articulés); l'extrémité de cette chaine est attachée au barillet. Quand celui-ci tourne, la chaine s'enroule sur sa surface et fait tourner la fusée; mais le bras de levier à l'extrémité duquel elle agit pour faire tourner la fusée, est d'abord très petit, c'est quand

le ressort commence à se développer et a la plus grande force; puis, au fur et à mesure que cette force diminue, le bras de levier augmente, et conséquemment l'effort de la chaine sur la fusée peut rester le même.

Régulateur. Dans les montres le régulateur est un *balancier* animé d'un mouvement circulaire alternatif. Ce mouvement est produit par les vibrations d'un ressort roulé en spirale sur un plan, ou d'un ressort qui a la forme d'une hélice cylindrique. Dans les deux cas, le ressort s'appelle *spiral*. On le dit *plat* quand il est en spirale, et cylindrique quand il est en hélice.



Le *balancier* est un cercle pesant à sa circonférence, tel qu'un *volant*. Ce volant est fixé, au moyen de trois rayons, à un axe concentrique, qui fait corps avec lui et qui par conséquent participe au mouvement alternatif; à cet effet, cet axe se termine par deux pivots enclavés dans deux coussinets ou crapaudines.



Le spiral est placé parallèlement au balancier. Son extrémité extérieure entre dans un talon fixe A; et son extrémité intérieure est fixée à l'axe du balancier.

Le spiral est d'abord en équilibre et en repos. Mais si l'on imprime une faible rotation au balancier, son état d'équilibre est détruit, et il tend à reprendre sa position normale. De là naissent des vibrations; et ce sont ces vibrations qui produisent le mouvement alternatif du balancier.

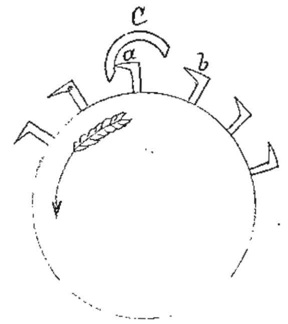
Ce balancier engrène avec les dents de la roue d'échappement, de même que le pendule dans les horloges fixes; ce qui donne lieu aux mouvements périodiques de cette roue. Et réciproquement, les dents de l'échappement exercent sur le balancier une certaine pression qui se transmet au spiral et entretient ses vibrations.

Echappements. L'échappement est la pièce la plus délicate de l'horlogerie; celle qui offre le plus de difficultés à l'artiste, et d'où dépend principalement la bonté d'un chronomètre. Aussi l'on a proposé beaucoup de systèmes d'échappement. Nous en décrirons deux qui sont le plus en usage maintenant: l'échappement à cylindre, et l'échappement libre.

Echappement à cylindre. A l'axe du balancier est fixé un petit cylindre plein en acier, ou mieux en pierre dure, qui participe au mouvement alternatif du balancier. Ce cylindre est évidé vers le milieu de sa longueur; de sorte qu'à cet endroit il se réduit à une demi-surface cylindrique de peu d'épaisseur. Cette partie demi-cylindrique fait, par rapport aux dents de la roue d'échappement, le même office que l'ancre dans les horloges à pendule. C'est-à-dire, que cette

demi-surface cylindrique, par l'effet de sa rotation alternative, arrête, puis laisse passer chaque dent de l'échappement.

Voici le jeu de ce mécanisme. L'échappement tourne dans le sens indiqué. Quand la rotation du balancier se fait dans le même sens, la demi-surface cylindrique dont nous représentons la coupe horizontale par l'arc C oppose sa concavité à la dent a et l'arrête. Aussitôt après, cet arc fait sa rotation dans le sens contraire; alors la dent a se dégage et continue son mouvement; mais alors l'arc C présente sa convexité à la dent suivante b et l'arrête. Une rotation contraire dégage cette dent b, qui reprend son mouvement et va buter contre la surface intérieure de l'arc. Et ainsi de suite. De sorte que les oscillations du balancier, qui sont produites par les vibrations du spiral, causent les arrêts de la roue d'échappement, et divisent ainsi son mouvement en une série de petits mouvements distincts.



La régularité de ces petits mouvements, c'est-à-dire leur isochronisme, dépend donc de la régularité des vibrations du spiral.

Ces vibrations ne tarderaient pas à s'anéantir, puisqu'elles rencontrent à chaque instant une nouvelle résistance de la part des dents de l'échappement qui exercent une pression sur le cylindre C. Mais si, d'une part, cette pression diminue la force de vibration dont le ressort est animé, quand la pointe de la dent glisse sur la surface intérieure ou extérieure du cylindre, d'autre part, la dent, quand elle a atteint l'extrémité de cette surface, s'appuie sur un petit plan incliné qui termine l'arc C à ses deux extrémités, et restitue ainsi au spiral une force qui entretient l'amplitude de ses vibrations. Il résulte de cette disposition, que le balancier accomplit ses vibrations en vertu de l'élasticité du spiral et de la force élastique du ressort qui sert de moteur dans le chronomètre.

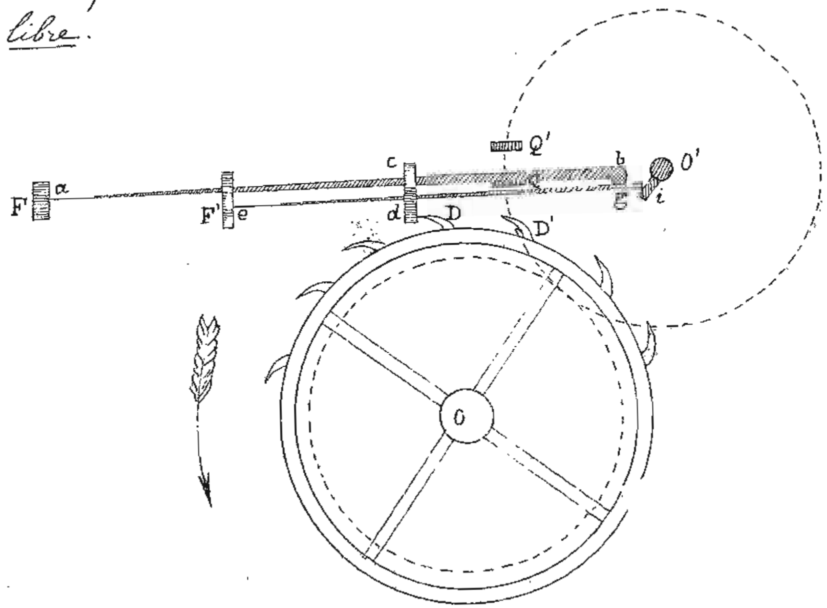
Les dents de l'échappement ne tardent pas à rayer le cylindre C, quand il est en acier. Il est donc préférable de le faire en pierre dure, saphir ou rubis d'Orient.

Il faut aussi faire reposer les pivots du cylindre, c'est-à-dire, de l'axe du balancier, sur des coussinets en pierre dure, bien polis et entretenus d'huile. On fait généralement ces coussinets en diamant.

Le spiral doit avoir son centre parfaitement coïncidant avec celui du balancier, et par conséquent avec l'axe du cylindre. Autrement le spiral exercerait une pression latérale sur cet axe, ce qui causerait des frottements des pivots contre leurs coussinets.

Toute cette partie d'une montre, qui concerne le spiral, exige une grande habileté de la part de l'ouvrier.

Échappement libre. Dans l'échappement à cylindre, il y a une action presque constante de la part de la roue d'échappement sur le balancier ou régulateur ; cette action cause des irrégularités dans les vibrations du spiral. On a cherché à éviter cet inconvénient, en imaginant un autre système d'échappement, appelé <u>échappement libre</u>. Dans celui-ci le régulateur n'agit pas directement sur les dents de la roue d'échappement ; il agit sur un petit ressort très flexible qui arrête les dents, et les laisse passer au moyen d'un faible déplacement. De cette manière, le régulateur n'éprouve pas la même résistance que dans le premier système ; et un autre avantage encore, c'est que son action ne dure qu'un instant en quelque sorte inappréciable, et que presque toute l'amplitude de ses oscillations s'accomplit librement. De là vient le nom d'<u>échappement libre</u>.



Soit un ressort élastique ab, très mince à son origine a, et augmentant d'épaisseur jusqu'à son extrémité b où il se termine par une crosse ou une masse recourbée. Ce ressort est fixé en a dans un talon F, et repose, vers son extrémité, sur un support Q. Une autre pièce fixe Q' l'arrête quand on le soulève. Un bras cd qui fait corps avec ce ressort, s'oppose au passage de la dent D de la roue d'échappement. Pour que cette dent puisse passer, il faut soulever le ressort. à cet effet un second ressort eg semblable à peu près au premier, est fixé en e dans un talon F'; son extrémité g dépasse celle du premier ressort. Le balancier, dont le centre est O', porte un doigt i qui soulève le ressort eg; celui-ci soulève le premier ressort et son bras cd; alors la dent passe. Immédiatement après, le ressort ab et son bras cd reprennent leur position d'équilibre, et la 2e dent D' vient buter contre le bras cd qui l'arrête, jusqu'à ce qu'une 2e oscillation du balancier lui livre passage comme à la dent précédente.

Quand le balancier fait l'oscillation qui élève le ressort eg, son doigt i passe audessus de ce ressort; puis, le balancier faisant une oscillation en sens contraire, presse de haut en bas le ressort eg; qui cède sans difficulté, et le doigt i reprend sa position primitive audessous de ce ressort. Dans ce 2e mouvement, où le ressort eg s'abaisse, il n'exerce aucune action sur le premier, et n'oppose pas une grande résistance au balancier. Ainsi le balancier n'éprouve une résistance appréciable que pendant

le moment, très court, pendant lequel il soulève les deux ressorts, pour laisser passer la dent. Cette résistance détruirait bientôt les vibrations du spiral: pour entretenir celles-ci, on fixe sur le balancier une roue concentrique dont la circonférence porte une saillie sur laquelle viennent frapper, à chaque oscillation, les dents d'une roue concentrique à la roue d'échappements. De cette manière la force motrice dont est animée la roue d'échappement sert à entretenir les vibrations du spiral, et par suite les oscillations du régulateur.

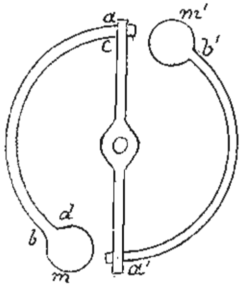
Dans cet échappement, on évite l'emploi de l'huile que nécessitent les pivots dans l'échappement à cylindre. Cela est un avantage, parceque l'huile s'épaissit et exige un nétoyage assez fréquent du chronomètre.

Balancier compensateur.

Dans les horloges à pendule, la chaleur allonge la verge du pendule: alors ses oscillations se font plus lentement; il s'ensuit que l'horloge retarde, car elle met plus de temps qu'il ne faut, à accomplir le nombre d'oscillations nécessaire pour faire parcourir à l'aiguille le tour du cadran. Le froid produit l'effet contraire; il raccourcit la verge du pendule; rend ses oscillations plus rapides; et fait parcourir à l'aiguille le tour du cadran en moins de temps qu'il ne faut;

de sorte que l'aiguille marque midi, par exemple, trop tôt. L'horloge avance donc. Voilà pourquoi les horloges qui n'ont pas de pendule compensateur retardent en été et avancent en hiver.

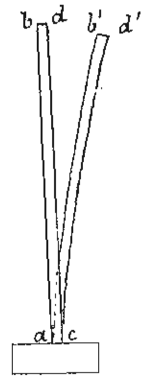
Il en est de même des montres dont le balancier n'a pas de compensation. La chaleur le dilate; sa masse s'éloigne du centre; sa force d'inertie devient plus grande, et la durée de ses oscillations augmente. Il en résulte que la montre retarde. Le contraire a lieu quand la température diminue. Il faut donc faire en sorte que la masse du balancier reste toujours à la même distance de son centre, quelles que soient les variations de température. Pour cela, on compose le balancier de deux parties circulaires indépendantes l'une de l'autre ab, a'b'. Chaque partie est fixée par l'une de ses extrémités a à un diamètre du balancier, et porte à son autre extrémité b qui est libre, une masse de platine. En outre chaque partie ab est composée de deux arcs concentriques fixés l'un à l'autre et formés de métaux différemment dilatables, l'arc extérieur étant le plus dilatable. En combinant convenablement ces deux métaux, on obtient ce résultat, que les masses m, m', qui forment presque tout le poids du balancier, restent à la même distance de son



centre, nonobstant les variations de température.

On fait l'arc extérieur ab en laiton, et l'arc intérieur cd en acier, qui est beaucoup moins dilatable que le laiton.

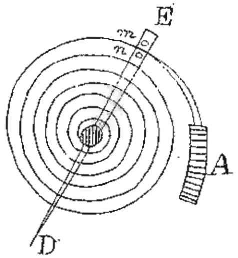
Voici comment s'opère la compensation. Considérons d'abord une lame droite formée par la juxta-position de deux lames l'une ab en laiton, l'autre cd en acier, liées entre elles. Supposons que l'extrémité ac soit assujétie dans un talon fixe. Si la température augmente, les lames ab, cd tendront à s'allonger, mais de quantités différentes. La 1ère étant plus dilatable que la 2e, il s'ensuit que les lames prendront une courbure ab'd'c, telle, que la 1ère lame ab devienne plus longue que la 2e; c'est-à-dire que la courbe sera telle, que la lame la plus dilatable occupera la partie extérieure de l'arc, et la lame la moins dilatable la partie intérieure. Si la dilatation continue, la courbure augmentera.



D'après cela, considérons notre balancier. Si la température augmente, son diamètre et les arcs ab, a'b' s'allongeront; la figure prendra des dimensions plus grandes de sorte que les masses m, m' s'éloigneront du centre. Mais en même temps la courbure des arcs augmentera, et, par suite de cet effet, les masses m, m' se rapprocheront du centre. On conçoit donc qu'il pourra y avoir compensation, c'est à dire que les masses m, m' pourront rester à la même distance du centre.

De la longueur du spiral. — De sa compensation.

La vitesse des vibrations du spiral dépend de sa longueur. Elle diminue quand sa longueur augmente; et elle augmente quand la longueur du spiral diminue. On règlera donc la vitesse des vibrations à volonté, en faisant varier la longueur du spiral.



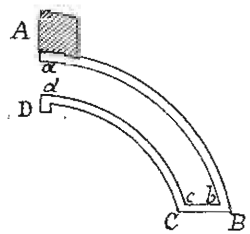
La spire extérieure de ce ressort est fixée dans un talon A; et sa spire intérieure est fixée à l'arbre du balancier. Les vibrations du ressort produisent la rotation alternative de cet arbre. Pour faire varier la longueur du ressort, on a une pièce DE appelée <u>raquette</u>, qu'on peut faire tourner autour du centre du balancier, et dont la partie E porte deux goupilles m, n qui comprennent entr'elles et serrent l'arc du spiral. La partie de ce ressort comprise entre ces goupilles et le point A, ne participe pas aux oscillations, de sorte qu'on peut considérer que le ressort se termine au point <u>m</u>. En faisant donc tourner la raquette ED autour du centre, on allongera ou on raccourcira à volonté le spiral.

Cette opération est nécessaire, d'abord, pour régler la montre à une température donnée, et

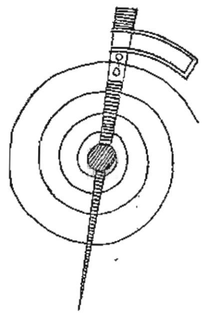
ensuite quand les variations de température augmentent ou diminuent la longueur du spiral.

Compensation naturelle par le spiral. De même que la compensation se fait d'elle-même par le balancier compensateur, elle peut se faire aussi d'elle-même par le spiral, sans qu'on ait besoin de faire tourner la raquette.

Concevons que la raquette soit fixe, ainsi que l'une des deux goupilles, et que l'autre goupille soit mobile et puisse se rapprocher ou s'éloigner de la 1ère, de manière à donner plus ou moins de jeu à la lame du spiral comprise entre les deux goupilles. Si dans ses plus grandes vibrations le spiral ne touche aucune des deux goupilles, leur effet sera nul; mais si on rapproche les deux goupilles de manière à diminuer le jeu du spiral, les vibrations deviendront plus rapides. Il faut donc faire en sorte que la goupille mobile se rapproche ou s'éloigne de l'autre, selon les variations de température.



Soit une lame composée de deux métaux, de la forme ABCD, dont le périmètre extérieur ABCD est en acier, et le périmètre intérieur abcd, en laiton. Supposons que l'extrémité A de la lame soit fixée et ne puisse éprouver de déplacement; et que l'autre extrémité D soit libre. Quand la température augmentera, la partie abcd éprouvera une plus grande dilatation que la partie extérieure ABCD, et le point D s'éloignera du point fixe A. Le contraire aura lieu si la température diminue.



Concevons que le point A étant fixé à la raquette, qui elle-même reste fixe, le point D fasse mouvoir la goupille mobile ; qu'il la rapproche de la goupille fixe quand la température augmente, et qu'il l'en éloigne quand la température diminue. Il s'ensuivra que dans le 1er cas, par exemple, où la température augmente, le jeu du ressort entre les deux goupilles diminuera, et par conséquent ses vibrations deviendront plus rapides ; mais, en même temps, la longueur du ressort augmente, et cet effet tend à diminuer la vitesse des vibrations. Il pourra donc y avoir compensation.

Isochronisme des vibrations du spiral.

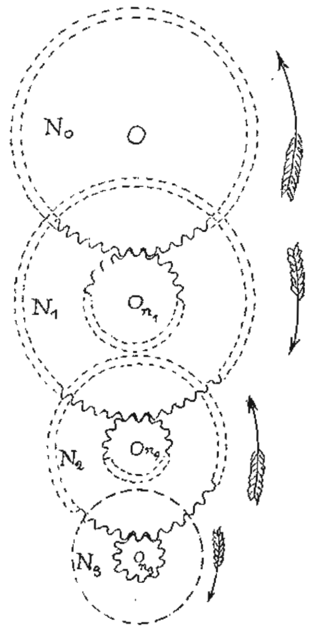
Concevons deux ressorts spiraux d'égale épaisseur, mais dont l'un soit très court et l'autre très long. On a reconnu que dans le spiral très court les grandes vibrations sont plus rapides que les petites ; et qu'au contraire, dans le spiral très long, les grandes vibrations sont plus lentes que les petites. Il s'ensuit qu'il existe un spiral de longueur intermédiaire,

dont les grandes vibrations sont de même durée que les petites. Donc un spiral étant donné, si ses grandes vibrations sont moins promptes que les petites on pourra, en le raccourcissant, lui faire produire des vibrations isochrones.

Un célèbre horloger, Ferdinand Berthoud, a reconnu que les spiraux cylindriques, sont plus propres à l'isochronisme, que les spiraux plats.

5e Leçon.

Rouage des Chronomètres. — Roues énarbrées.



Nous avons dit que le rouage est une suite de roues dentées qui communiquent le mouvement produit par le moteur, à la roue d'échappement. Dans cette communication de mouvement, il y a un changement de vitesse considérable ; car, dans les montres, par exemple, le barillet peut ne faire que trois ou quatre tours en 24 heures, et l'aiguille des minutes en fera 1440, celle des secondes 86400.

Les roues sont fixées deux à deux sur un même axe, une grande et une petite. On dit qu'elles sont énarbrées. La petite roue porte le nom de pignon, et ses dents s'appellent en horlogerie, les ailes du pignon. Une roue et son pignon ont la même vitesse de rotation, puisqu'elles sont fixées sur le même axe.

Chaque roue communique son mouvement à la roue suivante, en engrenant avec le pignon de celle-ci.

La 1ère roue n'a pas besoin de pignon; elle engrène avec le pignon de la seconde.

Calcul du rapport qui a lieu entre les vitesses angulaires des deux roues extrêmes. Soient N_0 le nombre des dents de la 1ère roue, fixée au barillet, ou au cylindre moteur, N_1, N_2, N_3 ..... les nombres des dents des roues suivantes, et n_1, n_2, n_3 ..... les nombres des dents des pignons de celles-ci. Soient T_0, T_1, T_2, T_3,... les nombres de tours que font les roues dans un même intervalle de temps donné. Ces nombres mesurent les vitesses de rotation des roues.

Nous savons que les vitesses de rotation de 2 roues qui engrènent ensemble, sont en raison inverse de leurs rayons, et, par suite, en raison inverse des nombres de leurs dents. On a donc, entre les vitesses de rotation de la 1ère roue et du pignon de la 2e, la relation

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{N_0}{n_1};$$

puisque T_1 exprime le nombre des rotations de la 2e roue, et conséquemment de son pignon.

On a de même à l'égard de la 2e roue et de la 3e,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{N_1}{n_2}.$$

Et pareillement

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{N_2}{n_3}$$

. . . .

$$\frac{T_m}{T_{m-1}} = \frac{N_{m-1}}{n_m}.$$

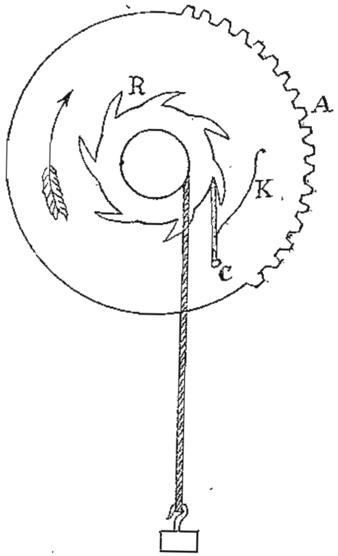
Multipliant ces équations membre à membre, on a

$$\frac{T_m}{T_0} = \frac{N_0, N_1, N_2 \cdots\cdots\cdots N_{m-1}}{n_1, n_2, n_3 \cdots\cdots\cdots n_m}.$$

Tel est le rapport des vitesses angulaires des deux roues extrêmes.

Remontage des Chronomètres.

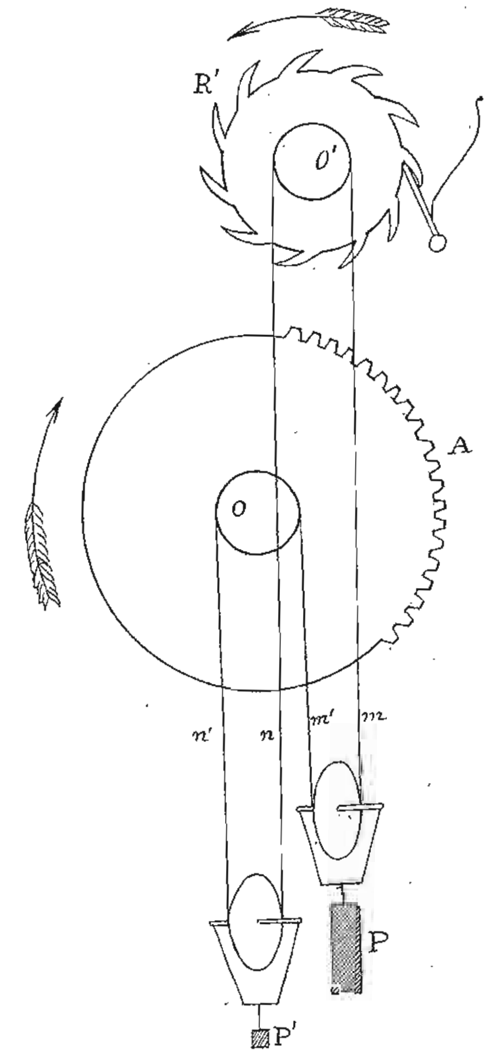
Horloges à poids. Quand le poids qui sert de moteur est arrivé au bas de sa course, il faut enrouler de nouveau sur le cylindre la corde qui le retient; c'est ce qu'on appelle remonter l'horloge. Pour cela on fait tourner le cylindre en sens contraire de son mouvement ordinaire. Mais il faut que la roue dentée A qui tourne avec le cylindre quand la machine fonctionne, ne participe pas à ce mouvement du remontage. Il faut donc qu'on puisse faire cesser momentanément la liaison qui existe entre cette roue et le cylindre. A cet effet, on fixe au cylindre une roue R qui se meut avec lui dans un sens comme dans l'autre; les dents de cette roue sont inclinées, et on l'appelle *roue de rochet*, ou simplement *rochet*. Un *doigt* ou *cliquet*, mobile autour d'un point C de la roue A s'appuie sur le rochet au moyen d'un ressort K qui le presse, et s'engage dans une de ses dents. Quand le rochet tourne



avec le cylindre, dans le sens indiqué, il entraine le doigt et fait tourner la roue A. Mais quand on remonte l'horloge, en faisant tourner le rochet en sens contraire, il abandonne le doigt et ne communique pas son mouvement à la roue A.

Or il ne suffit pas que cette roue ne participe pas au mouvement de remontage, il faut qu'elle continue de tourner pendant le remontage. Pour cela, on ne fixe pas le poids P à l'extrémité de la corde; cette extrémité s'enroule sur un cylindre fixe O' indépendant de l'horloge, et le poids P tend la corde en glissant sur elle, au moyen d'une poulie libre à laquelle il est fixé. Quand le poids sera descendu au bas de sa course, on le fera remonter sans suspendre son action sur la roue A, en faisant tourner le cylindre O' sur lequel la corde s'enroulera.

Ainsi, d'une part, la corde se déroule sur



le cylindre moteur O, et de l'autre, elle s'enroule sur le cylindre auxiliaire O'. Pour que cela ait lieu indéfiniment avec une longueur de corde finie, on voit qu'il suffit de concevoir que la corde passe du cylindre O' sur le cylindre O, au moyen d'un petit poids auxiliaire P' qui tendra ses deux brins n, n'. Mais il faudra, pour que le poids moteur P ne fasse pas glisser la corde sur les cylindres O et O', qu'elle soit enroulée de plusieurs tours, sur chacun de ces cylindres, afin que le frottement qu'elle éprouverait en glissant sur l'un de ces cylindres soit plus considérable que le poids P.

Au cylindre O' est fixé un rochet qui

l'empêche de céder à l'action du poids P et qui permet de le faire tourner dans le sens contraire quand on remonte l'horloge.

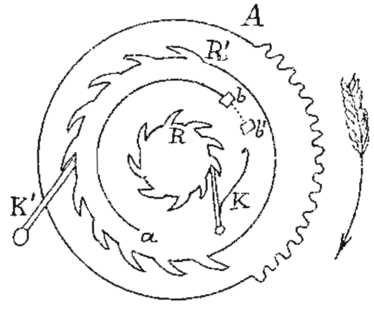
Remontage des montres. Quand la fusée a bientôt accompli toutes ses rotations, et que la chaine est à peu près entièrement déroulée, l'élasticité du ressort moteur est aussi à peu près anéantie; il faut le tendre de nouveau, et en même temps enrouler la chaine sur la fusée.

Pour cela on tourne la fusée en sens contraire de son mouvement, la chaine s'y enroule et fait tourner le barillet aussi en sens contraire

de son mouvement ordinaire; et de la sorte le ressort se tend. Pour que, pendant ce mouvement, la fusée ne fasse pas tourner la roue dentée A qui lui est concentrique, elle conduit cette roue au moyen d'un rochet intermédiaire. Quand on remonte la montre en faisant tourner la fusee dans le sens indiqué par la flèche intérieure, le rochet tourne avec elle, sans entrainer la roue A. Mais cette roue n'a plus de moteur et la montre se trouve arrêtée. Il faut donc un moyen de continuer le mouvement de la roue A. Pour cela on introduit un moteur auxiliaire.

A la fusée est fixée une première roue de

rochet R qui tourne avec elle dans l'un et l'autre sens. Cette roue, au moyen d'un doigt K, entraine un 2^e rochet R'; mais

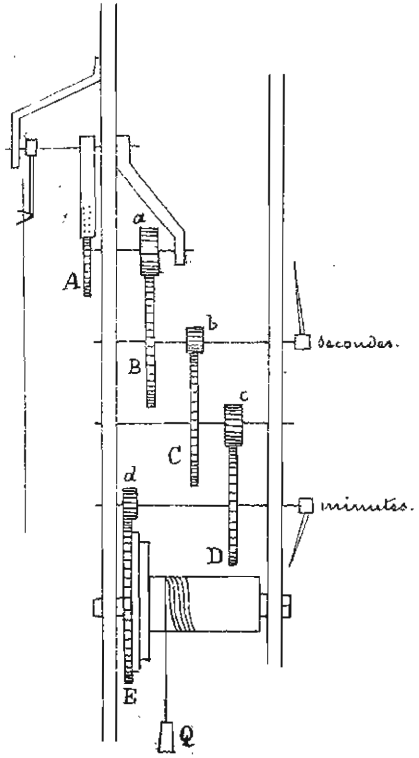


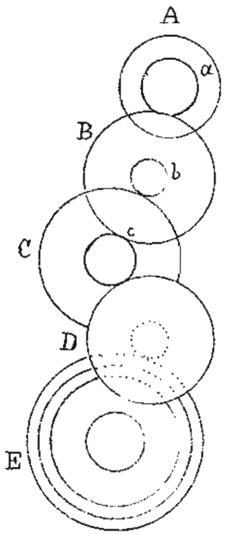
seulement quand la montre marche, et non quand on la remonte. Ce rochet R' fait tourner avec lui la roue dentée A qui est la 1^ère du rouage. A cet effet, cette roue A, qui est superposée sur le rochet R' porte dans une rainure pratiquée dans son épaisseur un ressort <u>ab</u> dont l'extrémité <u>a</u> est fixe, et dont l'autre extrémité <u>b</u> est libre et porte une goupille saillante qui pénètre dans le rochet R'. Quand la montre marche, ce rochet tourne avec la fusée, et tend le ressort dont la longueur devient <u>ab'</u>. C'est ce ressort qui entraine la roue A. Quand le rochet, pendant le remontage, ne tourne plus, le ressort fait effort pour se détendre, et comme sa goupille <u>b'</u> est engagée dans le rochet R' qui reste fixe, cet effort fait tourner la roue A; de sorte que son mouvement n'est pas interrompu. Cette action du ressort n'a lieu que pendant un temps de peu de durée, mais qui est suffisant pour le remontage de la montre.

Un doigt K' arrête le rochet R' pour que le ressort tendu ab' ne la fasse pas ~~tourner ou~~ produise le mouvement de la roue A.

Disposition du rouage dans une horloge à pendule marquant les secondes et les minutes. (non exigé)

Le rouage dont se sert Mr Jurgensen, pour ses horloges astronomiques se compose de cinq roues et quatre pignons.





Plan ou calibre de l'horloge.

1° La roue d'échappement et son pignon,
2° La roue des secondes et son pignon,
3° Une roue appelée moyenne et son pignon,
4° La roue des minutes et son pignon,

5° La roue du cylindre moteur.

La figure indique la disposition de ces roues et pignons. Voici le nombre de leurs dents.

A roue d'échappement	10 dents
a pignon de la roue d'échappement	20 "
B roue des secondes	60 "
b pignon de la roue des secondes	10 "
C roue moyenne	75 "
c pignon de la roue moyenne	10 "
D roue des minutes	80 "

Jeu de la machine. Dans une horloge à secondes, chaque demi-oscillation du pendule est de la durée d'une seconde et produit un petit mouvement de la roue d'échappement. Nous supposons l'échappement à ancre; or à chaque oscillation du pendule, une dent passe en deux petits mouvements. Dix oscillations produiront donc un tour entier de la roue d'échappement, en 20 petits mouvements; et 30 oscillations produiront trois tours de cette roue en 60 petits mouvements. Ainsi le pignon a fera trois tours en 60 petits mouvements. Ce pignon a 20 ailes; la roue B qu'il engrène en a 60 et fait par conséquent $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ de tour, pendant que le pignon fait un tour entier. Cette roue fait donc un tour entier pendant que le pignon en fait trois. Donc les 30 oscillations, ou 60 demi-oscillations du pendule, produisent un tour entier, en 60 petits mouvements, de la roue B. Cette roue marque donc les secondes et fait sa révolution en une minute.

Son pignon b a 10 ailes; la roue moyenne C qu'il engrène en a 75; celle-ci fait donc $\frac{10}{75}$ de tour pendant que le pignon fait un tour, c'est-à-dire en une minute; et elle fait un tour en 7,5 minutes. Son pignon c a 10 ailes et la roue D qu'il engrène en a 80. Cette roue fait $\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$ de tour pendant que le pignon fait un tour; c'est-à-dire en 7',5; et conséquemment elle fait un tour entier en $7',5 \times 8 = 60'$. Ainsi cette roue conduit l'aiguille des minutes.

Le pignon de la roue D est conduit par la roue E fixée concentriquement au cylindre moteur. Deux autres roues concentriques sont destinées au remontage comme nous le verrons bientôt. Mr Jurgensen donne dix ailes au pignon d, et 156 à la roue E.

Notice historique des anciennes manières de mesurer le temps et des progrès de l'horlogerie.

Les Anciens se servaient pour mesurer le temps, de cadrans solaires, de sablières et de clepsydres. Le sablier était un instrument grossier qui pouvait servir à compter des intervalles fixes de temps, mais non à marquer avec quelqu'exactitude les divisions de chaque intervalle. La Clepsydre, qui mesure le temps par la quantité d'eau qui s'écoule d'un large vase par un petit orifice, comporte plus de précision; c'était la seule

ressource des astronomes. On graduait, soit le vase qui se vidait, soit le vase qui se remplissait, et les échelles graduées donnaient une mesure du temps dont la précision dépendait de l'exactitude apportée dans la graduation.

Aujourd'hui cette graduation est regardée comme une question d'analyse, qui consiste à déterminer le mouvement de l'eau dans un vase qui se vide par un petit orifice. Cette question, comme nous l'avons vu, se ramène à l'intégration de deux équations différentielles. Les Anciens faisaient leurs graduations expérimentalement, en prenant pour repères certains intervalles de temps marqués par les mouvements célestes, dont la durée était connue.

Les clepsydres ont continué d'être en usage fort longtemps après qu'on possédait des horloges à poids, comme offrant plus d'exactitude que celles-ci; et il n'y a pas 300 ans qu'elles ont commencé à tomber en désuétude.

La première origine des horloges à poids ou à ressort, qui, après divers perfectionnements successifs, sont devenues nos horloges et nos montres actuelles, n'est pas bien fixée.

Quelques auteurs ont voulu en attribuer la connaissance aux Anciens, parcequ'Archimède et Posidonius, (240 et 80 ans environ avant notre ère) avaient construit des sphères mouvantes qui représentaient les mouvements du soleil, de la lune et des cinq planètes. Ces machines, a-t-on pensé, marquaient naturellement les heures et les autres divisions du temps. Mais la question est de savoir si ces machines marchaient d'elles-mêmes, au moyen d'un moteur qui leur était inhérent, comme le poids ou le ressort de nos horloges, ou bien s'il fallait la main de l'homme pour les faire fonctionner; ou bien encore si ces machines n'avaient pas pour fondement et pour moteur les clepsydres elles-mêmes. Car on sait que les Anciens, notamment le célèbre Ctésibius, le maître de Héron d'Alexandrie, appliquaient à leurs clepsydres des systèmes de roues dentées pour produire, par l'abaissement du niveau de l'eau divers mouvements, même celui de petites figures.

Vers la fin du 5e siècle de notre ère, Cassiodore et Boèce, sénateurs romains, les deux hommes les plus savants de leur temps, construisaient des horloges; et l'empereur Théodoric en envoya en présent au roi de Bourgogne, avec des ouvriers pour les faire fonctionner. Mais il paraît que c'était des horloges hydrauliques, c'est-à-dire des clepsydres, avec des roues dentées qui servaient à marquer les heures et à représenter les mouvements célestes.

En l'an 809 le calife Aaroun-al-Raschid envoya à Charlemagne une horloge en laiton d'une exécution admirable. Quel était le moteur dans cette horloge? Était-ce encore l'eau, ou bien un poids?

Vers 840, Pacificus, archidiacre de Vérone,

construisit une horloge que quelques auteurs croient avoir été à poids et à balancier, et qu'ils regardent comme la première origine de nos horloges actuelles.

D'autres attribuent l'honneur d'une aussi belle invention à Gerbert, moine d'Aurillac, qui devint pape sous le nom de Sylvestre deux. Gerbert avait construit à Magdebourg une horloge merveilleuse. Mais malheureusement il ne nous est point resté de détails sur ce mécanisme extraordinaire. On ne peut douter, du reste, que Gerbert, doué d'un génie actif et profond, et qui possédait en toutes choses, notamment en Mathématiques, des connaissances supérieures à son temps, ne fût capable de l'invention des horloges à poids.

Mais ce qui paraît certain, c'est que la connaissance, ou du moins l'usage de ces horloges, a tardé beaucoup à se répandre. Car on n'en trouve pas de traces certaines avant le 14e siècle.

Mais on en cite plusieurs de cette époque, lesquelles existaient encore quand divers auteurs en ont fait mention dans leurs ouvrages.

En 1326 un Anglais, nommé Richard Walingfort, « fit par un miracle de l'art, une » horloge qui n'avait pas sa <u>pareille</u> dans toute » l'Europe. » Cette expression peut s'entendre de la perfection de la machine comparée aux autres horloges du même genre; de sorte qu'elle ne signifie pas qu'il n'existait pas déjà des horloges à poids et à balancier.

En 1370 Charles V fit construire par un

allemand, et placer sur la tour de son palais, une grosse horloge.

En 1382 le Duc de Bourgogne enleva de Courtray une horloge fort belle qui sonnait les heures, et la fit apporter à Dijon, où on la voyait encore plus de deux siècles après.

En 1446 il existait à Nuremberg une horloge très fameuse, à laquelle le célèbre géomètre et astronome Régiomontanus apporta quelques perfectionnements.

Dans la seconde moitié du 16e siècle, le grand astronome Tycho-Brahé se servait, dans ses observations astronomiques, de quatre horloges qui marquaient les heures, les minutes et les secondes.

Vers le même temps, on trouve déjà quelques auteurs, Cardan, Dasypodius, Pancirolle, qui traitent, dans leurs écrits, de la construction des horloges.

Mais avant de continuer cette revue historique, il faut dire quel était le mécanisme de ces horloges et nous préparer à apprécier les perfectionnements que ces instruments ont reçus vers le milieu du siècle suivant.

Dans les horloges fixes le moteur était un poids, et dans les horloges portatives, c'est-à-dire dans les montres, c'était un ressort comme à présent. Dans les unes et dans les autres, il y avait un régulateur; mais ce qui fait la différence essentielle entre ces instruments anciens

et nos chronomètres actuels, c'est que le régulateur n'était pas mis en mouvement comme à présent par un moteur particulier. C'était un simple balancier, c'est-à-dire un axe animé d'un mouvement circulaire alternatif autour d'un point central. Les deux bras de ce balancier portaient, à leurs extrémités, deux palettes qui se présentaient successivement à la rencontre des dents de la dernière roue du rouage, et donnaient lieu à des chocs qui absorbaient une partie de la force motrice; ce qui retardait le mouvement et en empêchait l'accélération. Cette dernière roue était celle qu'on appelle aujourd'hui <u>roue d'échappement</u>; on l'appelait alors <u>roue de rencontre</u>.

Telle était la construction des horloges et des montres, comme on le voit encore dans des modèles qui se sont conservés.

En 1639 Galilée, qui venait de découvrir la loi des oscillations du pendule, savoir, que leur durée est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule, conçut l'idée de faire servir ces oscillations à la mesure du temps, dans les observations astronomiques; car en les supposant isochrones, il suffisait de les compter. L'ouvrage dans lequel le grand philosophe Florentin a proposé cette nouvelle mesure du temps et en a montré les usages, était intitulé: <u>L'usage du cadran ou de l'horloge physique universel</u>. Ce procédé donnait plus d'exactitude que les horloges; et plusieurs astronomes et physiciens l'ont appliqué; on cite notamment Riccioli, Langrene, Vandélinus, Mersenne, Kircher. Mais il n'était pas exempt d'imperfections. Sans parler de la difficulté de compter les oscillations; elles n'étaient pas parfaitement isochrones, et la résistance de l'air en diminuait continûment la durée.

Toutefois l'idée de Galilée était heureuse, et peut-être y a-t-il lieu de la regarder comme l'origine et le point de départ des belles inventions de Huygens, d'où datent les grands perfectionnements de l'horlogerie.

Huygens, en effet, eut l'idée de réunir et faire concourir ensemble à la mesure du temps, ces deux procédés alors distincts: les horloges à poids, et le pendule. Il lui suffit de donner au balancier, jusqu'alors parfaitement libre, un moteur qui lui fût propre, et qui en réglât les mouvements; ce moteur fut le *pendule*.

Voilà la première invention du célèbre géomètre, touchant les horloges: il la fit connaître en 1657 dans un petit traité écrit en hollandais.

Huit ans après, quelques envieux voulurent lui enlever la gloire pour l'attribuer à Galilée, bien que celui-ci n'eût laissé aucune trace de cette invention dans son livre du pendule. Huygens défendit ses droits avec succès dans un écrit en 1658. Ce qui est certain, c'est que cette précieuse invention n'a fleuri qu'à partir de cette époque.

En 1662 un horloger hollandais alla en Angleterre, et y construisit les premières horloges à pendule, dont une fût conservée et existe peut-être encore dans le collège de Gresham. D'autres furent construites en France.

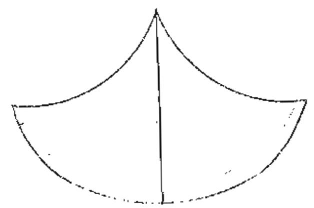
Ces horloges ont été les seules en usage jusqu'en 1673. Elles présentaient une exactitude extrêmement

satisfaisante, au point qu'on entreprit de les employer à la détermination des longitudes.

Cependant Huygens ne se dissimulait pas leur imperfection théorique, résultante du non isochronisme des oscillations du pendule; et le désir de corriger ce défaut, quelque peu sensible qu'il fût dans la pratique, donna lieu à son immortel ouvrage intitulé *Horologium oscillatorium*, l'une des grandes productions mathématiques du 17e siècle.

Dans cet ouvrage Huygens n'eut pas seulement à découvrir cette belle propriété de la cycloïde, savoir, qu'elle est la courbe que doit parcourir le centre de gravité du pendule pour que ses oscillations soient isochrones. Pour appliquer cette belle découverte géométrique, il lui fallut créer la théorie générale des *développées* des courbes, l'appliquer à la cycloïde, et reconnaître que la développée de cette courbe est formée de deux demi-cycloïdes semblables, mais renversées.

Ces questions de haute géométrie résolues, pour en faire l'application, il suffisait de faire osciller le pendule entre les deux demi-cycloïdes; sa longueur étant égale à la distance du point de contact de ces deux courbes au sommet de la première.



La verge flexible du pendule, ou le fil de soie qui en tenait lieu, s'appliquant successivement sur les deux lames cycloïdales, son centre de gravité décrivait la première cycloïde, et par conséquent ses oscillations étaient isochrones.

Huygens imagina encore un autre régulateur, jouissant de la propriété de l'isochronisme, qu'il appela pendule circulaire, dans lequel la force centrifuge se combinait avec la pesanteur et qui exigeait une développée, non plus de la cycloïde, mais de la parabole.

Ces inventions donnaient au plus haut degré un caractère scientifique à l'art de l'horlogerie.

Huygens chercha à introduire une pareille précision dans les montres, où le pendule n'était pas applicable. Il imagina alors le ressort spiral, qui est aujourd'hui en usage. Il obtint en 1675 un privilège du roi, mais qui n'eut pas d'effet, parcequ'il fut reconnu que l'abbé de Hautefeuille, son confrère à l'académie des sciences, avait déjà proposé, en 1674, d'ajouter un régulateur au balancier des montres. Ce régulateur était un ressort droit dont une extrémité était fixe et dont l'autre extrémité, fixée au balancier, participait à ses oscillations et leur donnait la régularité nécessaire.

Mais le docteur Hook, mécanicien et physicien anglais très distingué revendiqua l'idée de ce ressort droit appliqué comme régulateur des montres. De sorte que la part de Huygens dans cette partie de l'horlogerie, fut d'avoir remplacé un ressort droit par un ressort en spirale qui offrait plus de précision, et qui est celui qui est resté en usage.

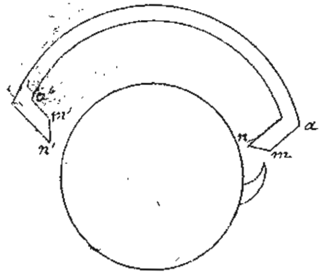
Ces inventions de Huygens, le pendule

comme régulateur des horloges, et le ressort en spirale, comme régulateur des montres, ont constitué les véritables fondements de la mesure exacte du temps. Ensuite tous les efforts des artistes ont eu pour but d'obtenir des perfectionnements de détail et d'exécution; perfectionnements qui souvent ont exigé un véritable génie et ont fait la gloire de quelques horlogers célèbres.

Un de ces perfectionnements de détail a permis de renoncer à l'usage de la cycloïde qui semblait nécessaire pour donner aux horloges à pendule toute l'exactitude possible.

Au temps d'Huygens l'action du balancier sur la roue de rencontre se faisait, comme nous l'avons dit, au moyen de deux palettes fixées au balancier, et qui se présentaient, l'une après l'autre à la rencontre de la roue : c'était là le système d'échappement; Huygens y appliqua ses régulateurs sans chercher à le changer. Dans ce système l'amplitude des oscillations du balancier était grande; le pendule avait donc aussi de grandes oscillations; il fallait donc les rendre isochrones, et c'est pour cela qu'Huygens imagina sa cycloïde. Mais en 1680, un artiste anglais, nommé Clément, imagina l'échappement à ancre, au moyen duquel le pendule ne décrit que de petits arcs, qui sont sensiblement isochrones. C'est cette invention qui a fait supprimer la cycloïde comme devenant inutile.

Cet échappement a été d'abord à recul, c'est-à-dire qu'au moment où la dent de la roue d'échappement



rencontre la palette *amn* sur la 1re face *ma*, la roue *recule*; son mouvement change de direction; mais au moment où la dent arrive en *m*, elle reprend sa direction. Il en est de même, quand une autre dent vient frapper en *a'* l'autre palette de l'ancre.

En 1695 un autre horloger anglais, nommé Campion, modifia cet échappement, et en fit l'échappement *à repos*. Il suffit pour cela, que les profils des deux petites faces *am*, *a'm'* soient des arcs de cercles ayant pour centre commun le centre même de rotation de l'ancre. Car pendant que l'ancre fera une demi-oscillation et que la face *am* glissera sur la dent de l'échappement, cette dent restera en repos.

Ainsi l'échappement *à recul* et l'échappement *à repos* ne diffèrent que par la courbure des deux petites faces *am*, *a'm'* des palettes de l'ancre.

C'est cet échappement que nous avons décrit, comme étant encore en usage.]

Mesure des Angles.

Alidades. On se servait, anciennement, pour mesurer les angles, de deux *alidades* munies de *pinnules*, et mobiles autour du centre d'un *limbe*

ou cercle gradué. On appelle *alidade* une règle plate, en métal; et *pinnules*, deux petits plans, de la largeur de la règle, élevés perpendiculairement, à ses extrémités, et percés d'ouvertures qui servent à diriger un rayon visuel vers un objet déterminé. L'une de ses ouvertures est une simple fente étroite dont la direction est perpendiculaire à l'alidade; l'autre a plus de largeur et porte en son milieu un fil très fin parallèle à la fente. L'observateur applique son œil sur la fente et fait tourner l'alidade jusqu'à ce que le fil coïncide avec l'objet qu'il veut viser. Avec la seconde alidade dont le limbe est muni, on vise un second objet; et l'angle compris entre les deux alidades, lequel se mesure sur le limbe, est l'angle des rayons visuels menés du point de l'observateur, ou plutôt du centre de l'instrument, aux deux objets.

Lunettes astronomiques. On a substitué aux alidades des *lunettes astronomiques* munies d'un *réticule*.

La *lunette astronomique* se compose simplement de deux lentilles bi-convexes, placées aux deux bouts d'un tube cylindrique. La première, qu'on appelle *l'objectif*, réunit à son *foyer* les rayons émanés d'un objet éloigné, et y forme une image de cet objet; et la 2e, appelée *l'oculaire*, fait office de microscope et sert à voir l'image, comme si elle était un objet réel, mais sous un angle beaucoup plus grand qu'à la vue simple. Cet angle dépend de la *distance*.

focale de cette lentille, et est d'autant plus grand que cette distance focale est plus petite.

Les lunettes présentent deux avantages inappréciables auxquels l'astronomie moderne doit en grande partie ses découvertes et ses progrès. Le premier est de rendre les objets plus lumineux, puisque tous les rayons qui tombent sur la surface de l'objectif vont se concentrer à son foyer, ou du moins en un espace très petit où ils forment l'image virtuelle. Le deuxième avantage est de *grossir* les objets, c'est-à-dire d'augmenter les angles sous lesquels on les aperçoit: c'est l'effet du microscope qui forme l'oculaire.

Les lunettes dont se servent communément les astronomes grossissent de 70 à 100 fois; quelques-unes de 300 à 500 fois. On peut obtenir des grossissements beaucoup plus considérables, de 1000 à 3000 fois et même au delà; mais l'usage de ces lunettes est difficile et ne convient bien que pour l'observation des astres doués d'une lumière propre, comme les étoiles. (*)

(*) Grossissement des lunettes dont se sont servis quelques astronomes. *Galilée* (Découverte des satellites de Jupiter, des phases de Vénus; observations des taches du soleil) 4, 7 et 32 fois — *Huygens* (Découverte du premier satellite de Saturne, et détermination de la forme de l'anneau) 48, 50 et 92 fois — *D. Cassini*, mêmes grossissements. — *Auzout*, astronome et artiste habile, cite diverses lunettes dont le grossissement était 50, 100, 74, 140, 600.

Après l'invention de l'achromatisme, ces nombres, à parité

Réticule. Quand on observe un point lumineux, pour fixer avec toute la précision possible, son image au foyer central de l'objectif, on applique à la lunette un *réticule*. On appelle ainsi un cercle ou anneau portant deux fils très déliés, (de soie, d'araignée, ou de platine) qui se croisent en son centre, à angle droit. Cet anneau peut glisser dans la lunette; on le place de manière que le point de croisée des deux fils se trouve précisément au foyer de l'objectif; et ensuite quand on vise un objet, on fait coïncider son image avec ce point de croisée.

L'idée de substituer les lunettes aux alidades ou plutôt aux pinnules, est due à Morin. Dans son traité d'astronomie, écrit en 1634, cet astronome dit qu'il se sert de ce procédé « pour mesurer » plus promptement et plus exactement la distance » de la lune aux étoiles. » Mais ce fut Huygens qui, 25 ans après, en 1659 imagina le réticule. Toutefois Morin avait fait un pas vers ce perfectionnement des lunettes, et en avait préparé l'invention. Car il plaçait un fil extérieurement sur l'objectif, en observant que ce procédé pourrait être perfectionné. » Il ne doute point, dit-il, qu'on ne puisse ajouter à ce » que j'ai inventé, des moyens ingénieux qui en rendent

---

de longueur des lunettes, furent notablement dépassés. Herschell produit des grossissements de 1000, 1200, 2600 et 6000 fois. Mais ces grossissements ne pouvaient servir que pour l'observation de brillantes étoiles (Extrait de la Notice de Mr. Arago sur les travaux d'Herschell. *Ann. du Bureau des Longitudes*; ann. 1842.

» l'usage plus exact et plus facile ; je le désire ..... »

Picard ayant fait un grand usage des lunettes dans son opération de la mesure d'un arc du méridien, qu'il exécuta en 1670, on s'était accoutumé à lui attribuer l'invention de ce procédé ; et cette erreur a subsisté plus d'un siècle. Ce n'est qu'en 1783 que ce point historique a été éclairci et que les droits de Morin et de Huygens ont été rétablis.

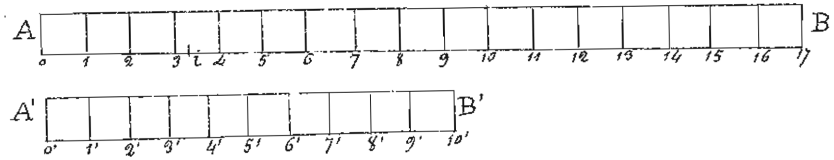
Dans les opérations qui n'exigent pas une grande précision, on continue encore de faire usage des alidades.

Vernier. Le cercle qu'on appelle <u>limbe</u>, autour du centre duquel tournent les alidades ou les lunettes d'un instrument destiné à mesurer les angles, est divisé en un grand nombre de parties égales, et ce sont ces divisions qui font connaître l'angle des deux lunettes. Mais le nombre de ces divisions est limité par la difficulté, et l'impossibilité même, de les marquer sans confusion. On ne peut donc pas estimer une fraction des plus petites divisions marquées sur la circonférence de l'instrument. Ainsi si le limbe est divisé en 2160 parties de sorte que chacune de ses divisions soit $\frac{1}{6}$ de degré, c'est-à-dire 10 minutes puisque $2160 = 360 \times 6$, l'instrument ne donnera la mesure des angles observés, qu'à 10 minutes près de la réalité.

Un géomètre français, nommé <u>Vernier</u>, imagina, en 1631, un instrument très simple, (*) pour apprécier

(*) L'ouvrage qui contient la description de cet instrument est

les fractions de ces petites divisions qu'il est physiquement impossible de subdiviser sur un limbe gradué. Cet instrument ingénieux a reçu le nom de l'inventeur ; il s'appelle <u>Vernier</u>. En voici le principe :



Soient 01, 12, 23, ... les divisions marquées sur une ligne droite ou circulaire AB : nous prendrons une règle droite, pour fixer les idées. On veut estimer des <u>dixièmes</u> de ces divisions. Ainsi la pointe d'un compas, ou un <u>index</u> tombe en <u>i</u> sur la division 34 ; on veut estimer la distance 3i en <u>dixièmes</u> de la division 34.

Le <u>Vernier</u> sera une règle graduée A'B' dont les divisions 0'1', 1'2', 2'3', ... sont les 9/10èmes des divisions de AB ; ou en d'autres termes, dont les divisions différeront de celles de AB d'un dixième de celles-ci.

On appliquera le vernier sur la règle AB, en

Intitulé, <u>La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de Mathématiques, par Pierre Vernier, capitaine et châtelain pour S. M. au château Dornans, conseiller et général de ses ~~vivres~~ monnaies au comté de Bourgogne</u>. Bruxelles 1631 in-8°.

On remarque dans cet ouvrage divers procédés de calculs trigonométriques très expéditifs.

L'auteur avait composé un traité de l'artillerie qui n'a pas été imprimé plaçant son zéro 0' sur le point i. Alors l'un des points de division du vernier coïncidera avec l'un des points de division de AB et fera connaître par son chiffre même, le nombre de dixièmes cherché.

En effet supposons que le segment i3 soit les $\frac{4}{10^{mes}}$ de la division 34; le point 0' du vernier étant placé sur le point i, le point 4' coïncidera avec le point de division 7 de la règle, car on aura $0'4' = 4$ divisions de AB moins $\frac{4}{10^{e}}$ d'une division; $= 37 - 3i = i7$.

Il est clair qu'il n'y a que ce point de division 4' du vernier qui coïncide avec un point de division de la règle. Ce point de coïncidence s'observe avec une loupe qui est fixée au vernier.

Il suffit que le vernier porte neuf divisions lesquelles serviront à estimer les fractions $\frac{1}{10^e}$, $\frac{2}{10^{e}}$, ... $\frac{9}{10^{e}}$. Mais on lui en donne dix parceque pour le former on le prend de la longueur de 9 divisions de la règle AB, et qu'on divise cette longueur en dix parties égales.

Si, au lieu de dixièmes, on voulait estimer d'autres parties d'une division de la règle AB, que nous exprimerons par $\frac{1}{n}$, on prendrait les divisions du vernier égales à celles de la règle, moins $\frac{1}{n^e}$ de celles ci.

Si au lieu d'une règle droite, on a un limbe gradué, on fera le vernier circulaire et on le placera concentriquement au limbe, de manière qu'on puisse le faire glisser dans les deux sens.

Si le limbe a deux décimètres de diamètre, on pourra le diviser très distinctement en $360 \times 6 = 2160$

parties, de sorte que chaque division sera la 6e partie d'un degré, ou 10 minutes; et avec le vernier on appréciera les dixièmes de cette division, c'est-à-dire des minutes. L'instrument donnera donc des mesures exactes à une minute près. On peut même obtenir des mesures exactes à $\frac{1}{3}$ de minute ou 20".

Mais cette perfection des instruments n'était pas encore suffisante pour les besoins de l'astronomie et de la Géodésie, où il fallait une plus grande précision dans les mesures angulaires. Cette précision a été obtenue d'une manière très heureuse par Borda, inventeur du cercle répétiteur que nous allons décrire.

Cercle répétiteur.

Cet instrument a pour objet de déterminer l'angle de deux rayons visuels, en estimant sur le limbe un angle multiple de celui-là, de manière que l'erreur qu'on pourra commettre dans l'estimation de l'angle multiple n'en produira qu'une beaucoup moindre dans la mesure de l'angle cherché. Par exemple, si l'angle multiple est six fois l'angle cherché, et qu'on l'ait déterminé sur l'instrument, à 20" près, l'angle cherché se trouvera mesuré à moins de 3" d'erreur; et si l'on prend un angle décuple, l'erreur possible se trouvera réduite à 2". On pourra donc diminuer cette erreur autant qu'on voudra et approcher ainsi indéfiniment d'une mesure parfaitement exacte.

La répétition de l'angle cherché se fait par la répétition de l'observation qui sert à déterminer cet angle, c'est-à-dire, par la répétition de la visée des deux objets vers lesquels se dirigent les rayons visuels.

L'idée ingénieuse de mesurer ainsi l'angle de deux rayons visuels par un multiple de cet angle, est due au célèbre astronome Tobie Mayer, qui a imaginé ce procédé dans une opération topographique, à défaut d'un instrument qu'il ne pouvait se procurer à cause de son prix élevé. Mayer proposa ensuite d'appliquer le même procédé au quart-de-cercle ou octant, instrument de marine, qu'on aurait remplacé par un cercle entier. Mais ce projet, qu'il publia en 1767, à la suite de ses tables de la Lune, n'eut pas d'exécution, et personne même n'y avait fait attention, si ce n'est Montucla qui en a parlé en 1778 dans son édition des récréations mathématiques d'Ozanam.

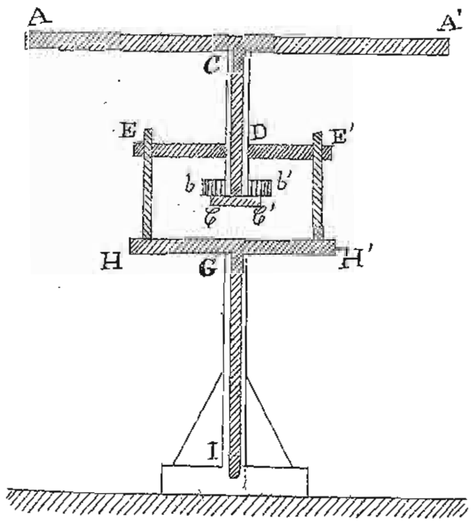
Depuis, Ramsden, célèbre artiste anglais, substitua des cercles entiers, d'une grande précision, aux demi-cercles ou quarts de cercle dont on se servait auparavant pour mesurer les angles; mais sans appliquer cette autre idée de Mayer, la répétition des angles.

Ce fut Borda, célèbre ingénieur de marine, qui, le 1er, mit en pratique cette idée heureuse: il l'appliqua d'abord au cercle de reflexion de la marine, dans lequel il introduisit plusieurs

autres perfectionnements auxquels Mayer n'avait pas songé; et ensuite à un autre instrument différent, celui qui porte le nom de cercle répétiteur de Borda.

Ce cercle qu'on a appelé aussi dans les premiers temps, Cercle à deux lunettes, sert dans les opérations géodésiques pour la mesure des angles sur le terrain, et dans les observations astronomiques pour mesurer les hauteurs des astres au dessus de l'horizon.

Description du cercle répétiteur. Concevons un plateau circulaire AA' fixé perpendiculairement à un axe CD qui passe par son centre. Cet axe est introduit dans un cylindre creux auquel est fixé un essieu EE' qui lui est perpendiculaire. Cet essieu repose sur deux coussinets, de manière



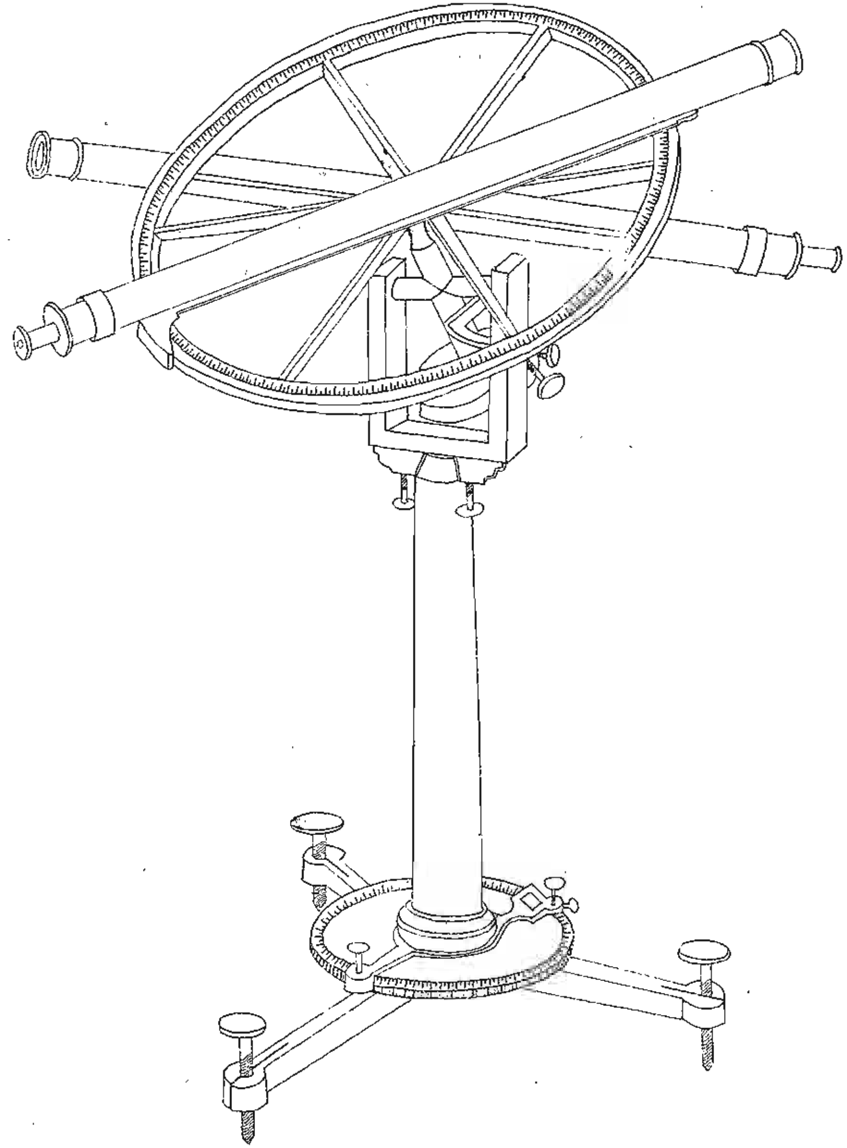
qu'il puisse tourner sur lui-même. Au dessous de cet essieu, le cylindre creux se prolonge et se termine par un tambour bb' destiné à faire contrepoids. L'axe intérieur CD se prolonge aussi et se termine, au dessous du tambour, par un cercle concentrique CC'. Ce cercle, qui a une certaine épaisseur, est denté, de sorte qu'avec une vis sans fin, fixée au tambour, on le fait tourner, et avec lui le plateau supérieur AA'.

L'essieu EE' se place sur deux supports verticaux HE, H'E' qui s'élèvent aux extrémités d'un axe horizontal HH'. Cet axe est placé sur un axe vertical GI qui lui est fixé à angle droit. Cet axe GI entre dans un canon, ou cylindre creux dans lequel il peut tourner sur lui-même. Ce cylindre est assujéti sur le terrain, au moyen d'un trépied, ou base à trois fourches.

Il résulte de cette disposition de l'instrument, que le plateau AA', que nous appellerons maintenant le limbe, parcequ'il porte un limbe ou cercle gradué, peut prendre librement trois mouvements de rotation, l'un sur lui-même, autour de son centre C; l'autre autour de l'axe horizontal EE'; et le 3e autour de l'axe vertical GI.

Au moyen de ces deux derniers mouvements autour des axes EE' et GI, on pourra placer le cercle AA' dans tel plan qu'on voudra, ce plan étant déterminé par les rayons visuels menés à deux objets. En effet, qu'on conçoive un plan horizontal, mené par l'œil de l'observateur; il coupera le plan des deux rayons suivant une droite horizontale; on placera l'essieu EE' dans la direction de cette droite, puis on fera tourner le cercle autour de cet essieu, jusqu'à ce qu'il se trouve dans le plan des deux rayons.

Aux trois pieds de l'instrument sont placées trois vis qui servent à élever ou à baisser à volonté chaque pied par un mouvement lent. C'est ainsi qu'on



13e Feuille.

parvient à placer l'axe GI dans une position parfaitement verticale. Toutefois cette verticalité est nécessaire seulement dans les observations astronomiques. Car dans les opérations géodésiques l'axe GI peut avoir une direction oblique, bien que nous l'ayons supposé vertical, pour faciliter notre description de l'instrument.

Au limbe AA' sont fixées deux lunettes l'une dessus, l'autre dessous. La 1ère tourne autour du centre du limbe; et la 2e autour d'un petit cercle concentrique, à cause de l'axe du limbe qui ne permet pas de placer la lunette à son centre. Néanmoins, on opère avec l'instrument comme si cette 2e lunette tournait autour du centre comme la 1ère. L'erreur qui résulte de son excentricité, est extrêmement petite, et l'on n'en tient compte que dans certains cas, comme nous le dirons en calculant cette erreur.

Le limbe n'est gradué qu'à sa partie supérieure; ainsi il n'y a que la lunette supérieure dont on puisse déterminer les angles de rotation. De sorte qu'on ne pourrait pas mesurer l'angle de deux rayons visuels par une seule observation, comme cela se fait dans les autres instruments.

Deux verniers fixés aux extrémités de la lunette supérieure sont mobiles avec elle et servent à estimer sur le limbe des fractions de ses plus petites divisions. Deux autres verniers sont fixés aux extrémités d'un diamètre perpendiculaire à la lunette et mobile avec elle; de sorte qu'un arc de cercle peut se déterminer avec l'un ou l'autre de ces quatre verniers. On le détermine avec les quatre à la fois, et on prend la

moyenne des quatre mesures trouvées. Cette moyenne offre un résultat plus exact, en général, que chacune des quatre mesures observées. Chaque vernier est muni d'une loupe ou microscope qui sert à lire les divisions marquées par des traits extrêmement fins et rapprochés.

Mouvements de l'instrument. Le limbe peut prendre trois mouvements: l'un sur lui-même, autour de son centre; un second, autour de l'essieu horizontal EE', et un 3e autour de l'axe GI, vertical, ou à peu près. On opère chacun de ces mouvements en deux fois, et de deux manières; d'abord librement avec la main, pour donner à la pièce mobile une position approximative; et ensuite d'un mouvement très lent, au moyen de vis ~~sans fins~~ qui glissent dans leurs écrous, ou de vis sans fin ~~ou~~ qui engrènent des roues dentées. Ainsi à chaque lunette est adapté un petit appareil composé d'une vis et de son écrou. L'écrou fait corps avec la lunette; et la vis est munie de deux petites lames, ou machoires, telles, qu'en les rapprochant au moyen d'une vis de pression, on la fixe au limbe. Alors la lunette, retenue par l'écrou, ne peut plus avancer. Mais en tournant la vis, qu'on appelle vis de rappel, on fait avancer l'écrou, et avec lui la lunette. Ce mouvement est très lent et permet de fixer la lunette avec une grande précision sur le point de visée.

Un mécanisme analogue permet de fixer le limbe dans une position inclinée, après qu'on l'a fait tourner à la main autour de l'essieu EE';

et sert ensuite à continuer lentement ou à rectifier ce mouvement. Pour cela une vis, appelée encore *vis de rappel*, est fixée à l'axe HE et engrène un arc de cercle qui a son centre sur l'essieu EE', et qui tourne avec lui.

Un autre mécanisme semblable permet de fixer l'axe GI, de manière qu'il ne puisse plus tourner sur lui-même qu'au moyen d'une vis. Cette vis engrène un cercle horizontal placé au pied de l'axe GI sur la base de l'instrument. Ce cercle porte le nom de cercle *azimutal*.

Usage du cercle répétiteur pour la mesure des angles sur le terrain. Ce n'est que par tâtonnement qu'on parvient à placer le cercle dans le plan des deux objets; et quand cela est fait à peu près, on se sert avec avantage des trois vis qui sont aux pieds de l'instrument, pour lui donner de petites inclinaisons qui permettent de placer le cercle avec une parfaite exactitude dans le plan des deux objets.

Soient A, B ces deux objets, et appelons *a* et *b* les deux lunettes; *a* est la lunette supérieure et *b* la lunette inférieure. La première porte un index qui marque les divisions du limbe.

On commence par placer cet index au zéro du limbe; et on fixe la lunette. Alors on la dirige sur le premier objet A; le limbe tournant avec elle. La deuxième lunette peut tourner librement; on la dirige sur le deuxième

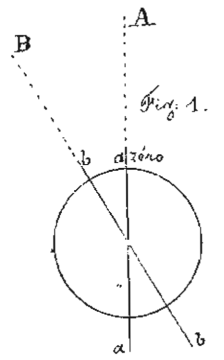


Fig. 1.

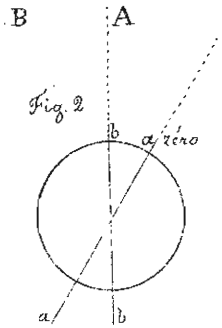


Fig. 2

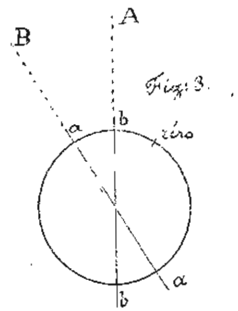


Fig. 3.

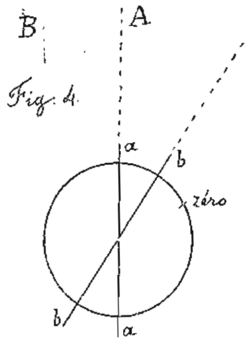
objet B; puis on la fixe au cercle. L'angle des deux lunettes est égal à celui des deux rayons visuels (fig.1.); mais on ne saurait le déterminer immédiatement, parceque la lunette inférieure n'a pas d'index qui marque sa position par rapport au limbe.

Voici ce qu'on fait pour déterminer cet angle, ou plutôt un multiple de cet angle.

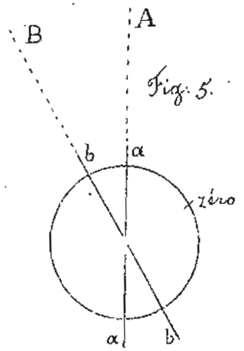
Angle double. On tourne le limbe; les lunettes tournent avec lui; et on fait la rotation de manière que la lunette inférieure *b* se trouve dirigée vers le premier objet A. (fig:2)

On desserre la vis qui fixe la lunette *a* au limbe, et on fait tourner cette lunette de manière à la mettre dans la direction de l'objet B (fig:3). Dans ce mouvement la lunette *a* décrit un angle double de l'angle *α* qu'on veut déterminer. Cet angle double se mesure sur le limbe. Le problème est donc résolu.

Et si l'erreur que l'on commet, en prenant sur le limbe la mesure de cet angle, est, par exemple, de 20", l'erreur relative à l'angle cherché *α* ne sera que de 10".

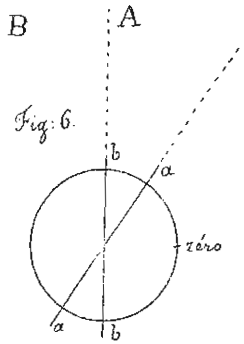


Angle quadruple. Pour diminuer encore cette erreur possible, on formera un angle quadruple de l'angle cherché. A cet effet, on commence par ramener les deux lunettes à leur position primitive (fig. 1.) relativement aux deux objets, sans changer, toutefois, la position de la lunette supérieure, sur le limbe, c'est-à-dire, relativement au zéro. Voici comment.



Les choses étant dans l'état de la figure 3, on fixe la lunette _a_ au limbe; puis on fait tourner le limbe, de manière à voir l'objet A avec la lunette _a_ (fig: 4).

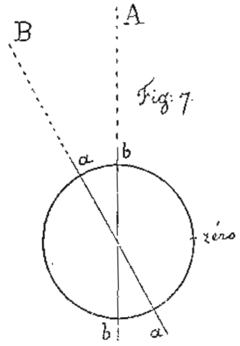
Ensuite on desserre la lunette _b_ qui est fixée au limbe et on la fait tourner de manière à voir l'objet B (fig: 5).



Les deux lunettes se trouvent ainsi dans leur position primitive. Alors on répète la manœuvre déjà faite.

1° On fait tourner le limbe de manière à diriger la lunette inférieure b sur le premier objet A. (fig: 6).

2° On desserre la vis qui fixe la lunette supérieure _a_ et on dirige cette lunette sur le deuxième



objet B. (fig: 7).

Dans ce mouvement la lunette a décrit un angle égal à 2α. Elle avait déjà décrit dans la 1ère manœuvre un angle égal à 2α; l'index marque donc actuellement un angle égal à 4α, c'est-à-dire un angle quadruple de l'angle cherché.

On formera semblablement un angle sextuple, au moyen d'une 3e manœuvre; puis un angle octuple par une 4e manœuvre. Et ainsi de suite.

Remarques sur la manœuvre et l'ordre des différents mouvements de l'instrument. Les deux lunettes étant pointées sur les deux objets, pour mesurer un angle double, on fait d'abord tourner le limbe, puis la lunette _supérieure_, et l'index marque l'angle double.

Pour mesurer un angle quadruple on rétablit l'instrument dans sa 1ère position. A cet effet on fait tourner le limbe d'abord, et ensuite la lunette _inférieure_.

Puis on double l'angle des deux lunettes comme dans le 1er cas. Ainsi la lunette supérieure n'est mobile que pour doubler l'angle, et la lunette inférieure n'est mobile que pour ramener les lunettes dans leur position primitive.

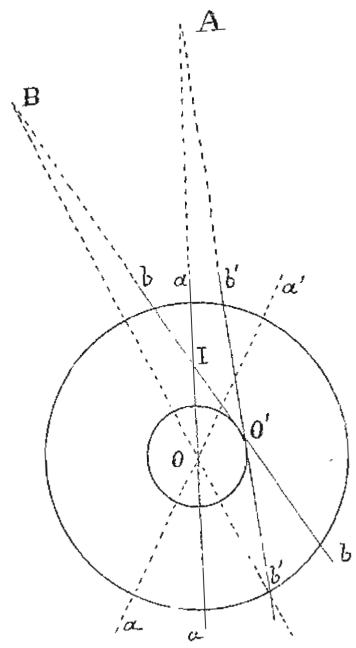
Chaque manœuvre se compose de deux mouvements le 1er du limbe, le 2e d'une lunette. De sorte que le mouvement du limbe et celui d'une lunette sont toujours alternatifs; c'est-à-dire que le limbe ne se meut pas deux fois consécutives, et qu'il n'y a pas non plus deux mouvements consécutifs de la lunette.

Pour reconnaître où en est une manœuvre, on observera que c'est le limbe qui doit tourner, quand les deux lunettes sont pointées sur les deux objets, et au contraire, c'est une lunette qui doit être mobile quand elle n'est pas dirigée sur un des objets.

Enfin, quand l'opération pour la mesure de l'angle double, ou quadruple, &c..... est terminée, les deux lunettes sont pointées sur les deux objets, mais inversement; c'est-à-dire que celle qui visait primitivement l'objet A vise actuellement l'objet B, ainsi que le montrent les figures 3 et 7 qui donnent la mesure des angles double et quadruple.

De l'excentricité de la lunette inférieure.

La lunette inférieure ne passe pas par le centre du limbe; elle se meut tangentiellement à un petit cercle concentrique au limbe. Il en résulte que l'angle observé et mesuré sur le limbe, n'est pas précisément l'angle formé par les deux rayons qui iraient du centre de l'instrument aux deux objets visés. Il en diffère, mais d'une quantité très minime, et d'autant moins appréciable que les deux objets sont plus éloignés de l'observateur.



Cette différence est absolument nulle quand les deux objets sont à l'infini.

En effet, soient A et B ces deux objets. L'angle que l'on veut mesurer est AOB. On dirige la lunette supérieure a sur le point A, et la lunette excentrique b sur le point B; puis, ayant fixé les deux lunettes, on fait tourner le limbe de manière à viser le premier objet A avec la seconde lunette b; alors la lunette a se trouve dans la direction Oa'; on l'amène dans la direction OB, et c'est l'angle $a'OB$ qu'on prend pour le double de l'angle cherché AOB. L'erreur que l'on commet est donc

$$E = \frac{a'OB}{2} - AOB = \frac{a'OA + AOB}{2} - AOB$$

ou

$$E = \frac{a'OA - AOB}{2}.$$

$a'OA$ est l'angle de rotation du limbe; cet angle est égal à celui que forment les deux positions de la lunette b, savoir $AO'B$, on a donc

$$E = \frac{AO'B - AOB}{2}.$$

Les deux triangles OIB, O'IA qui ont un angle égal donnent

$$AOB + B = AO'B + A.$$

d'où
$$AO'B - AOB = B - A.$$

Donc
$$E = \frac{B - A}{2}.$$

Telle est l'erreur que l'on commet en prenant l'angle d'OB pour le double de l'angle cherché AOB.

Exprimons maintenant cette erreur en fonction des distances des deux points A, B. Soient D, D' ces distances, et r le rayon du cercle sur lequel tourne la 2e lunette; on a ~~tang~~ sin $A = \frac{r}{D}$; ~~tang~~ sin $B = \frac{r}{D'}$; ou simplement, parceque les angles A et B sont très petits,

$$A = \frac{r}{D}, \quad B = \frac{r}{D'}.$$

et
$$E = \frac{1}{2} r \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D}\right).$$

Cette expression montre que E est une quantité extrêmement petite; car r est très petit par rapport aux distances D, D'; les fractions $\frac{r}{D}$, $\frac{r}{D'}$, sont donc très petites, et leur différence est encore plus petite.

Quand l'un des points A, B est à l'infini, le terme qui lui correspond devient nul. Et si les deux points sont l'un et l'autre à l'infini, on a $E = 0$.

Si l'on veut apprécier l'erreur E numériquement, pour en tenir compte dans l'estimation de l'angle observé, il faut que cette erreur soit estimée en angle. Or ici elle est exprimée en arc. En effet dans l'équation $\tang A = \frac{r}{D}$, A était un angle;

mais dans l'expression $A = \tang A$ ou $A = \frac{r}{D}$; A est un arc. Il s'ensuit donc que notre expression de E est la différence de deux arcs; c'est-à-dire que E est un arc. Pour que E représente un angle on se sert de la relation

$$\text{angle } E = \frac{\text{arc } E}{\sin 1''}.$$

Et l'expression de E devient

$$E = \frac{r}{2 \sin 1''}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D}\right),$$

ou, parceque $2 \sin 1''$ est sensiblement égal à $\sin 2''$,

$$E = \frac{r}{\sin 2''}\left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D}\right).$$

Pour donner un exemple de la valeur que peut avoir cette erreur E, supposons l'excentricité $r = 20$ lig. ($0^m\ 045$), d'où $\frac{r}{\sin 2''} = 2387'',32$. Soit $D = 20000$ toises (38980 mètres); on a $\frac{r}{D \sin 1''} = 0'',12$. Ainsi l'erreur relative à la visée du point A est de 12 centièmes de seconde. Si l'on suppose $D = 40000$ toises (77961 mètres), elle sera seulement de 6 centièmes de seconde. Et comme l'erreur relative à la visée du 2e point, $\frac{r}{D' \sin 2''}$, se retranche de la 1ère on voit que l'erreur définitive est très petite.

Quand on mesure les trois angles d'un triangle avec le cercle répétiteur, et qu'on fait leur somme, l'excentricité de la lunette ne cause aucune erreur; c'est-à-dire que les erreurs se compensent. En effet soit D'' la distance des deux points A, B. Quand l'observation se fera en A pour calculer l'angle BAO l'erreur sera

$$\frac{1}{2} r \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D''}\right).$$

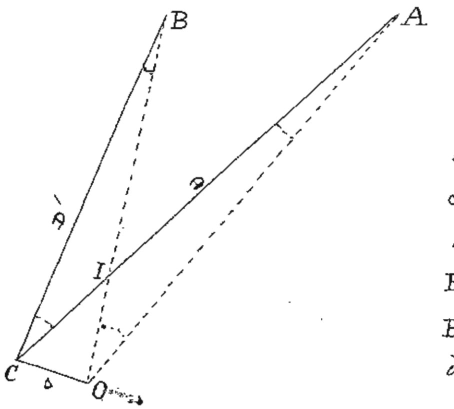
et quand on mesurera l'angle ABO, elle sera

$$\frac{1}{2}\, r\left(\frac{1}{D''} - \frac{1}{D'}\right).$$

Ajoutant ces deux erreurs à la première E relative à la mesure de l'angle BOA, on trouve leur somme égale à zéro.

Cette remarque curieuse a été faite par Borda.

Réduction au centre de station. Souvent, et généralement même, on ne peut pas placer l'instrument au point qu'on veut prendre pour centre de l'observation, c'est-à-dire au sommet de l'angle que l'on veut mesurer. Car ce point appartient ordinairement à une tour, à un clocher ou à quelqu'autre monument; et on ne peut y placer l'instrument. Alors on s'établit en un point voisin; puis, de l'angle observé en cette position, on conclut celui qu'on eût observé du premier point. C'est ce qu'on appelle <u>réduction au centre de station</u>.



Soit C ce centre de station, et O le point duquel on observe, c'est-à-dire le centre de l'instrument; soient A et B les deux objets. Il faut conclure de l'angle observé BOA, l'angle cherché BCA. Les deux triangles BIC, AIO donnent $C+B=O+A$ d'où $C=O+A-B$.

C'est l'angle cherché ACB.

Si l'on observait les angles en A et B, l'angle C serait immédiatement déterminé. Mais la même difficulté se présenterait pour l'observation des angles A et B. Aussi on se borne à mesurer les distances CA et CB, et on en conclut avec une approximation suffisante les valeurs des deux angles.

Soit $CO=\Delta$, et $CA=D$, $CB=D'$. On a dans le triangle COA,

$$\sin A\, \frac{\Delta \sin COA}{D},$$

ou, parceque A est très petit,

$$A=\frac{\Delta \sin COA}{D}.$$

Dans cette expression A est un arc, et pourqu'il exprime un angle, il faut écrire

$$A=\frac{\Delta \sin COA}{D \sin 1''}.$$

On a pareillement, dans le triangle COB,

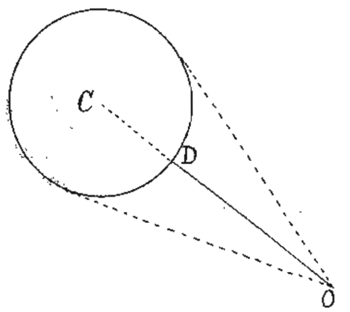
$$B=\frac{\Delta \sin COB}{D' \sin 1''}$$

Donc

$$C=O+\frac{\Delta}{\sin 1''}\left(\frac{\sin COA}{D}-\frac{\sin COB}{D'}\right).$$

Les angles COA, COB se mesurent avec l'instrument, et l'on peut n'en mesurer qu'un parceque leur différence est égale à l'angle déjà mesuré AOB.

Nous avons supposé que le centre de station C, le point de position O et les deux points observés A, B étaient dans un même plan horizontal. Si cela n'avait pas lieu, comme si, par exemple, le point C était l'extrémité d'un clocher, il faudrait considérer les quatre points de la figure comme les projections des points réellement visés. Alors la direction de la ligne OC et sa longueur se déterminent par quelque construction géométrique, selon la forme du monument auquel appartient le point dont C représente la projection.



Par exemple, si ce monument est une tour, on lui mène deux tangentes, et on divise leur angle en deux parties égales: la droite bissectrice est la direction de la ligne OC. Et l'on a OC égale OD plus le demi-diamètre de la tour.

Usage du cercle répétiteur pour les observations astronomiques. Les astronomes se servent du cercle répétiteur pour déterminer la distance *zénitale* d'un astre. On appelle *distance zénitale* l'angle que le rayon visuel mené à un astre fait avec la verticale. Si l'on pouvait viser avec l'une des lunettes un objet au zénit, la mesure d'une distance zénitale se ferait comme la mesure d'un autre angle. Mais il n'existe pas au zénit un objet que l'on puisse viser; il faut donc employer un autre procédé qui n'exige que la visée de l'objet dont on cherche la distance au zénit. Alors on se sert d'une seule lunette, la lunette supérieure qui correspond au limbe gradué.

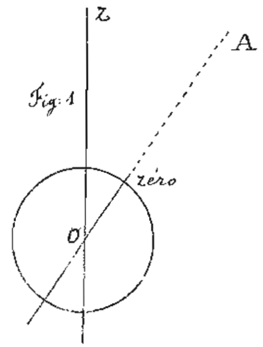
On dispose d'abord l'instrument de manière que son axe soit parfaitement vertical, et que le

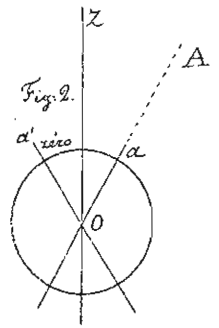
plan du limbe soit lui-même dans un plan vertical. Ces deux conditions sont absolument indispensables.

On donne à l'axe de l'instrument une direction parfaitement verticale par tâtonnement, au moyen des trois vis de son pied, et en vérifiant la verticalité avec un niveau à bulle d'air fixé à l'une des deux lunettes. Voici comment se fait cette vérification. Concevons que le plan du limbe soit dans une position verticale, ou à peu près. On dirige la lunette horizontalement, ce qu'on fait à l'aide du niveau à bulle d'air qui lui est fixé dans le sens de sa longueur. Puis on fait tourner le limbe autour de l'axe de l'instrument. Dans cette rotation la bulle d'air ne changera pas de position si l'axe est bien vertical; et au contraire, elle en changera, si l'axe n'est pas vertical. Car dans le premier cas, où l'axe est supposé vertical, la lunette, qu'on a placée horizontalement, est normale à cet axe, et par conséquent décrit, dans sa rotation, un plan horizontal. Mais si l'axe n'est pas vertical, la lunette ne lui est pas normale, et par conséquent elle décrit un cône droit autour de cet axe; elle ne reste donc pas horizontale, et conséquemment la bulle d'air change continuellement de position.

Après qu'on s'est assuré, de cette manière, de la verticalité de l'axe de l'instrument, on s'occupe de placer le limbe dans un plan parfaitement vertical. C'est ce qu'on fait encore par tâtonnement au moyen d'un fil à plomb qu'on approche de la surface du limbe pour vérifier s'il coïncide avec cette surface. On peut aussi se servir d'un niveau à bulle d'air fixé longitudinalement à l'axe du limbe. Car il suffit de donner à cet axe une position parfaitement horizontale; ce qui se fait au moyen du niveau. Alors le limbe qui, dans la construction de l'instrument, est établi perpendiculairement à son axe, se trouve dans un plan vertical.

Maintenant pour mesurer la distance zénitale d'un astre A, on commence par fixer l'index de la lunette supérieure sur le zéro du limbe; puis on fait tourner le le limbe sur lui-même, c'est-à-dire autour de son centre, jusqu'à ce que la lunette supérieure vienne se placer dans la direction OA de l'astre (fig: 1). Alors, avec la vis de pression, on fixe le limbe pour qu'il ne puisse plus tourner sur lui-même et on lui fait faire une rotation de 180° autour de l'axe de l'instrument, de manière qu'il se retrouve dans le même plan vertical.

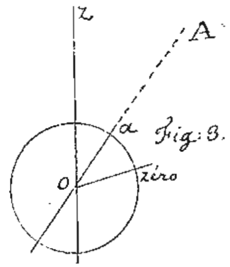




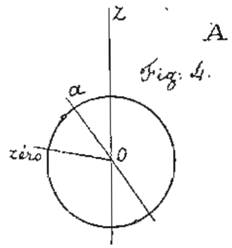
Pendant ce mouvement la lunette a décrit une demi surface conique autour de l'axe de l'instrument et est venue prendre la position Oa' (fig: 2). Alors on desserre la vis qui la fixe au limbe, et on la dirige sur l'astre. Dans ce mouvement, elle décrit un angle a'OA, double de l'angle cherché ZOA.

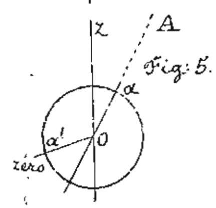
On mesure cet angle sur le limbe; et la question est résolue.

Angle quadruple. Dans la position actuelle du limbe, son zéro est en <u>a'</u>, à gauche de la lunette. Pour faire un angle quadruple, on le fait passer à droite de la lunette; pour cela, on donne au limbe deux mouvements; on le fait tourner de 180° autour de l'axe de l'instrument, puis sur lui-même, de manière à ramener la lunette sur l'astre A. Alors le zéro se trouve à la droite de la lunette (fig: 3).



Maintenant on opère comme en commençant; c'est-à-dire qu'on fait tourner le limbe de 180° autour de l'axe de l'instrument, (fig: 4), puis la lunette sur le limbe, de manière à la ramener sur l'astre (fig: 5). Alors elle marque un angle quadruple d'OA.





On fera de même un angle sextuple, puis octuple, &c .....

Graduation du cercle. — Exactitude des mesures obtenues avec cet instrument. Borda a divisé son cercle en 400 parties qu'on appelle <u>grades</u> pour les distinguer des <u>degrés</u> de la division en 360 parties. Depuis on a continué d'appliquer cette graduation aux cercles répétiteurs. Elle a l'avantage de rendre les calculs plus faciles, parceque les divisions et subdivisions du grade se font en parties centésimales, qu'on appelle minutes, secondes, &c..., de sorte que la minute $= \frac{1}{100^e}$ de grade; la seconde $= \frac{1}{100^e}$ de minute; &c....

L'un des deux cercles dont Delambre s'est servi pour la mesure du méridien, avait $0^m,42$ de diamètre et l'autre $0^m,36$. Ils étaient divisés en 400 grades, et chaque grade subdivisé en 10 parties, ce qui faisait au total 4000 divisions tracées sur le limbe. Le vernier les partageait chacune en 10 parties et indiquait de la sorte des centièmes de grade. L'erreur ne pouvait donc être qu'une fraction d'un centième de grade. A l'aide du microscope, on estimait, à l'œil, des parties assez petites pour qu'elle ne fût que de 2 ou 3 millièmes de grade. Au moyen des quatre verniers, on réduisait encore cette différence; et Delambre estime qu'il obtenait ses mesures à un millième près, ce qui fait 10" centésimales. Mais l'erreur fût elle plus élevée, on la réduisait autant qu'on le voulait par la répétition des angles, ce qui est la propriété caractéristique de l'instrument.

C'est un fait assez curieux, qu'on pourrait encore obtenir une mesure très exacte, avec le cercle répétiteur, lors même qu'il ne serait pas gradué et que l'œil dût commettre une grosse erreur dans l'estimation d'un arc. Il suffirait,

pour cela, de répéter l'observation un très grand nombre de fois; par exemple 1000 fois, ce qui donnerait un angle 2000 fois plus grand que l'angle cherché. En le divisant par 2000 on diviserait aussi l'erreur commise dans son appréciation à l'œil; cette erreur serait donc réduite à une fraction très minime.

Conversion des grades et fractions décimales, en degrés et fractions sexagésimales. Borda avait calculé des tables de logarithmes dans le système de la division décimale, c'est-à-dire en grades et en subdivisions centésimales. Elles ont été imprimées en 1804; mais on ne les a pas mises en usage, et l'ancienne division sexagésimale a subsisté. Il faut donc, en se servant du cercle répétiteur, convertir les mesures qu'il donne, en degrés sexagésimaux. Cela est facile:

$$400 \text{ grades} = 360 \text{ degrés}:$$

donc

$$1^g = \frac{360^\circ}{400} = 0^\circ,9 = 54' = 3240'' \text{ sexagésimales.}$$

Ainsi pour convertir un nombre en degrés, il faut en retrancher le 10^e.

Soit l'arc décimal ...... $46^g,7865625$

son dixième est .... $4,67865625$

L'expression de l'arc en degrés et fractions décimales du degré est donc .... $42^\circ,10790625$.

Pour convertir la fraction de degré en minutes il faut la multiplier par 60, on aura des minutes et fractions décimales de minutes.

Il vient . . . . 42°, 6', 4743750.

Pour convertir la fraction de minute en secondes, on la multiplie par 60, et l'on a des secondes et fractions décimales de seconde.

Il vient enfin . . . . 42°, 6', 28", 46250.

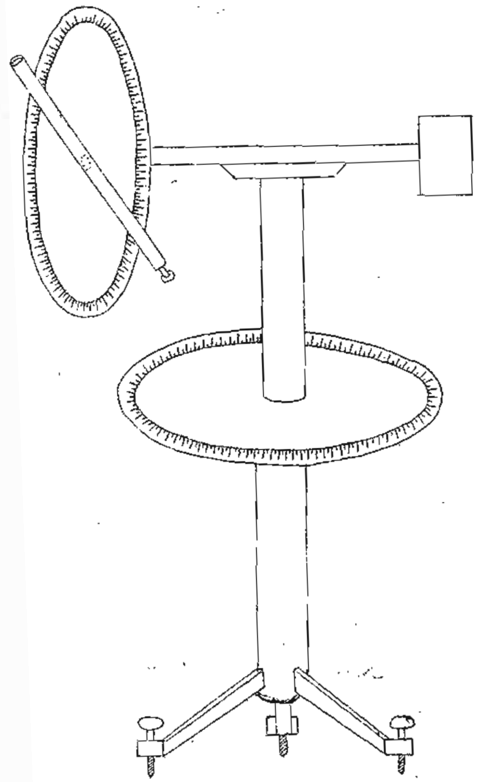
Pour convertir en mesures décimales un arc exprimé en degrés, minutes et secondes sexagésimales, on fait le calcul contraire, sans plus de difficulté. . (I)

Théodolite.

Cet instrument est destiné principalement à mesurer l'angle de deux plans verticaux, ces plans étant ceux dans lesquels se trouvent les rayons visuels menés à deux objets déterminés. Cet angle de deux plans verticaux s'appelle azimut. On se sert aussi du Théodolite pour mesurer les distances zénitales. Voici la description de cet

(I) On pourra consulter pour plus de détails sur l'usage du cercle répétiteur, les ouvrages suivants : 1° Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Grenwich, par M.M. Cassini, Mechain et Legendre. — 2° Connaissance des temps pour l'année 1798. — 3° Base du système métrique décimal, ou Mesure de l'arc du méridien, &c. par M.M. Mechain et Delambre ; t. 1er p. 101 et suivantes ; t. 2. p. 160 et suivantes. — 4° Astronomie de Delambre t. 1er p. 124 — 130.

instrument.



Un limbe, ou cercle gradué, dont le plan est vertical, peut recevoir deux mouvements de rotation, le 1er sur lui-même, autour d'un axe horizontal passant par son centre, le 2e autour d'un axe vertical sur lequel repose l'axe horizontal. Au pied de l'axe vertical est un limbe situé dans un plan horizontal et ayant son centre sur l'axe même. Ce limbe repose sur un plateau, auquel il peut être fixé au moyen d'une vis de pression ; si quand on desserre la vis, il peut tourner autour de son centre. On appelle aussi ce limbe cercle azimutal. Un index, mobile avec le limbe vertical, glisse sur le cercle azimutal, et en indique les divisions. Au limbe vertical est adaptée une lunette qui peut tourner autour de son centre. C'est cette lunette qui sert à placer le limbe dans un plan vertical déterminé. On dirige la lunette vers l'objet qui détermine la direction du plan.

Mesure de l'angle de deux plans. On place d'abord l'index sur le zéro du cercle azimutal, ce qui se fait par une rotation du limbe vertical, puisque l'index est mobile avec lui ; puis, au moyen d'une vis de pression, on fixe l'index au cercle ; et on desserre la vis qui fixe le cercle sur son plateau : alors le cercle est mobile avec le limbe vertical. On fait tourner celui-ci de manière à l'amener dans le premier plan. Cela fait, on fixe le cercle sur son plateau, et on desserre la vis qui le fixait à l'index ; puis on fait tourner le limbe vertical de manière à l'amener dans le 2^e^ plan. Dans cette rotation l'index a décrit sur le cercle azimutal un angle qui mesure et fait connaître l'angle des deux plans.

Angle double, triple, quadruple, &c^a^... On peut, en répétant les observations à la lunette, marquer sur le cercle azimutal un angle double, ou triple, ou quadruple, &c^a^ de l'angle des deux plans. Soient A, B les objets qui déterminent les deux plans. Quand on a mesuré, comme nous venons de le dire, l'angle de ces deux plans, l'index se tourne dans le premier, et la lunette dans le deuxième. Alors on fixe l'index au cercle azimutal, et on rend celui-ci mobile sur son plateau. On fait tourner le limbe vertical pour le ramener dans le premier plan : le cercle azimutal a participé à cette rotation,

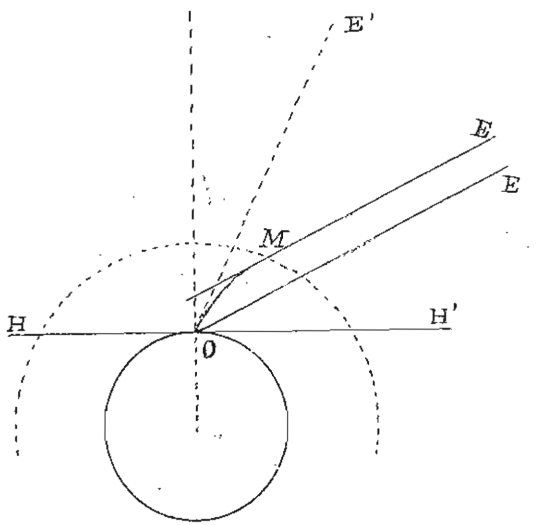
et son index s'est éloigné du premier plan d'un angle égal à celui des deux plans. Alors on fixe le cercle azimutal sur son plateau et on desserre la vis qui le fixait à l'index ; puis on fait tourner le limbe vertical et on le ramène dans le 2^e^ plan : dans cette rotation l'index décrit un nouvel angle égal à l'angle des deux plans ; de sorte qu'il marque, à partir du zéro, un angle double de l'angle cherché.

Par une nouvelle manœuvre semblable, on rendra l'angle triple, et ainsi de suite.

Distances zénitales. Pour mesurer les distances zénitales, on se sert du limbe vertical seulement et de la lunette. L'opération est la même qu'avec le cercle répétiteur.

Réfractions astronomiques.

La lumière qui nous arrive d'un corps céleste, d'une étoile, par exemple, traverse l'atmosphère qui nous entoure. Cette atmosphère augmente de densité en approchant de la terre, de sorte qu'on peut la considérer comme composée d'une infinité de couches d'épaisseurs très petites, de densités différentes. La lumière en passant d'une couche dans la couche inférieure, éprouve une réfraction qui rapproche le rayon lumineux de la normale, puisque les couches augmentent de densité depuis la limite de l'atmosphère jusqu'à la surface de la terre. Il s'ensuit qu'à partir du moment où le rayon lumineux entre dans l'atmosphère, il décrit une ligne courbe qui présente sa concavité vers la terre. L'observateur voit l'astre sur la direction même suivant laquelle le rayon lumineux vient frapper son œil. Cette direction



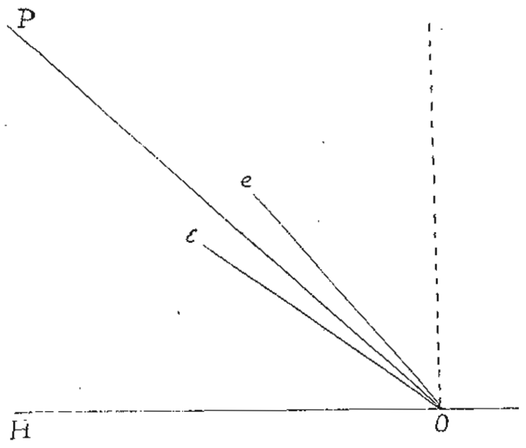
est celle de la tangente à la courbe décrite par le rayon. Soit donc MO cette courbe; sa tangente en M, à la limite de l'atmosphère, sera la direction primitive EM du rayon de lumière, qui émane d'une étoile E, et la tangente en O, lieu du spectateur, sera la direction OE' suivant laquelle le spectateur verra l'astre. Sans la réfraction il le verrait dans la direction OE parallèle à ME; l'effet de la réfraction est donc d'élever l'astre audessus de l'horizon, ou, en d'autres termes, de le rapprocher du zénit. L'angle E'OE formé par la direction apparente de l'astre et sa direction réelle s'appelle réfraction astronomique. Cet angle est d'autant plus grand, que l'astre est plus bas, c'est-à-dire plus

près de l'horizon. On le conçoit, car alors le rayon lumineux traverse les couches atmosphériques plus obliquement, et la courbure de la ligne qu'il décrit est plus prononcée. Au contraire, cette ligne approche d'autant plus d'être droite, que l'astre est plus élevé ou plus près du zénit. Quand il est au zénit même, la réfraction est nulle, parceque le rayon lumineux traverse toutes les couches à angle droit, sans éprouver de réfraction sur aucune.

A l'horizon la réfraction est de 33' (sexagésimales) à peu près; à une hauteur de 45°, elle n'est que de 1'; de sorte qu'elle a diminué, en moyenne, d'un peu moins de 1' par degré; à partir d'une hauteur de 45°, elle diminue d'un peu plus de 1" par degré, puisqu'elle est nulle au zénit.

Exemples et preuves de la réfraction. Les effets de la réfraction se sont manifestés dans une foule d'observations, avant que les astronomes les aient prévus à priori par des considérations théoriques. Car quand ils calculent la position actuelle d'un astre dont ils connaissent les lois du mouvement, ou dont ils connaissent les distances actuelles à certains points déterminés, le résultat du calcul n'est jamais conforme à l'observation, il y a une différence provenant de la réfraction.

Si l'on considère une des étoiles qu'on appelle circompolaires, parceque n'étant pas très éloignées du pôle ou extrémité de l'axe autour duquel semble tourner la voute céleste, elles restent constamment audessus de l'horizon, et si l'on observe les deux passages de cette étoile au méridien, et qu'on déter-



mine avec le théodolite ses hauteurs au-dessus de l'horizon au moment de ces deux passages, la demi-somme de ces hauteurs eOH, εOH donnerait la hauteur même de l'axe du monde, savoir l'angle POH, s'il n'y avait pas de réfraction. Eh bien, cette demi-somme diffère de l'angle POH; elle est plus grande; ce qui prouve qu'il y a réfraction, et que l'effet de la réfraction, est d'élever les objets lumineux au-dessus de l'horizon, ou, en d'autres termes de les rapprocher du zénit.

Diverses autres observations astronomiques conduisent aux mêmes résultats, que le raisonnement, du reste, indique et pouvait faire prévoir.

Il faut donc, dans tous les calculs fondés sur l'observation des astres, tenir compte de l'effet de la réfraction. Aussi est-ce là un des points les plus importants de l'astronomie pratique.

Les Anciens ont connu l'effet que nous appelons la _réfraction_; c'est-à-dire qu'ils ont su que nous apercevons un astre lumineux en un lieu différent de sa véritable position; ils ont même formé quelques conjectures sur la cause de cet effet; mais ils n'en ont pas tenu compte dans

leurs calculs astronomiques.

La théorie des réfractions appartient aux modernes. Les astronomes d'abord ont recueilli des faits, ont construit des tables des réfractions pour différentes hauteurs, puis en ont conclu des formules empiriques, plus ou moins correctes; ensuite les géomètres ont appliqué l'analyse à cette question délicate, l'une des plus difficiles que présente l'étude des phénomènes naturels, parce qu'elle exige des considérations en partie hypothétiques, sur la construction de l'atmosphère et diverses circonstances météorologiques variables. Car les réfractions ne sont pas toujours les mêmes pour une même hauteur, dans un même lieu; elles varient avec les variations du baromètre et du thermomètre, et même de l'hygromètre. La question est donc extrêmement compliquée, et, en fait, d'une très grande difficulté.

Nous allons faire connaître la table des réfractions généralement adoptée aujourd'hui par les astronomes; puis les principales formules, soit empiriques, soit théoriques, proposées par divers auteurs, et enfin, pour donner une idée de l'application de l'analyse à cette question, nous exposerons succinctement la solution donnée par Laplace dans le tome 4 de sa _Mécanique céleste_.

Table des réfractions. Ce qu'il importe de connaître, c'est la réfraction en fonction de la _hauteur apparente_ de l'astre, puisque c'est cette hauteur apparente que l'observateur connait et qu'il doit rectifier pour en conclure la position réelle de l'astre.

Cette hauteur apparente, dans les tables, s'appelle l'argument de la réfraction. En général, les astronomes appellent argument la quantité connue, en fonction de laquelle a été déterminée la quantité que l'on cherche dans les tables.

Voici une table extraite de celles qui ont été calculées par Mrs Bouvard et Arago, et dont se sert le Bureau des Longitudes (Voir la connaissance des temps); on l'appelle Table des réfractions moyennes, parce que, comme nous le dirons ci-après, elle ne convient qu'à un certain état de l'atmosphère.

Table des réfractions moyennes.

Hauteur apparente.	Réfraction.	Hauteur apparente.	Réfraction.	Hauteur apparente.	Réfraction.
0°	33' 46"	1°	24' 21"	2°	18' 2"
3	14 28	20	2 38	65	27
4	11 48	25	2 4	70	21
5	9 54	30	1 40	75	15
6	8 29	35	1 23	80	10
7	7 24	40	1 9	82	8
8	6 34	45	0 58	85	5
9	5 53	50	0 48	88	2
10	5 19	55	0 41	89	1
15	3 34	60	0 33	90	0

On voit qu'à partir du zénit où la réfraction est nulle, jusqu'à 80° où elle est de 10", elle croît proportionnellement à la distance zénitale, à raison de 1" par degré, cette loi de proportionnalité est généralement adoptée.

Correction des réfractions moyennes. Les astronomes ont remarqué que la réfraction varie avec la densité et avec la température de l'atmosphère. Elle augmente quand la densité augmente, et quand la température diminue. Elle diminue dans les cas contraires. La Table ci-dessus convient à un état moyen de l'atmosphère, où le baromètre marque $0^m,76$, et le thermomètre 10° centigrades. Les réfractions calculées ou observées dans cet état de l'atmosphère s'appellent réfractions moyennes. Elles ont besoin d'une correction pour être appliquées à un autre état de l'atmosphère, quand on veut apporter dans les calculs toute l'exactitude possible. Voici comment se fait cette correction: On suppose que la réfraction varie proportionnellement aux variations de densité de l'atmosphère, et conséquemment aux variations des hauteurs du baromètre. Soit donc H la hauteur moyenne du baromètre, et $H+dH$ sa hauteur actuelle; soit θ la réfraction moyenne, et θ_1 la réfraction correspondante à la hauteur barométrique $H+dH$, la température restant la même on aura $\frac{\theta_1}{\theta}=\frac{H+dH}{H}$, ou $\theta_1=\theta\left(1+\frac{dH}{H}\right)$.

Pour la correction relative à la température, on suppose qu'une réfraction représentée par θ_1 à la température t, diminue et devient $\frac{\theta_1}{1+m\,dt}$ à la température $t+dt$; m étant un coefficient numérique déterminé par l'expérience, et qui est indépendant de la pression atmosphérique.

D'après cela, la réfraction qui était $\theta\left(1+\frac{dH}{H}\right)$ à la température t et sous la pression barométrique $(H+dH)$, sera, sous la même pression, et à la température $t+dt$,

$$\theta_2 = \frac{\theta\left(1+\frac{dH}{H}\right)}{1+m\,dt}.$$

Ainsi, connaissant la hauteur apparente d'un astre on trouve dans les tables la réfraction moyenne θ et l'on en conclut, par cette formule, la réfraction réelle θ_2 qu'on doit appliquer à la hauteur apparente observée, pour déterminer la véritable position de l'astre.

Mayer a fait le coefficient $\underline{m}$ égal à 0,0045. Laplace a pris $m = 0{,}0049$. C'est ce dernier nombre que les astronomes ont adopté généralement.

Pour faciliter le calcul de θ_2 et éviter la multiplication et la division qu'il exigerait, on a formé une table des logarithmes des réfractions moyennes, et deux tables des logarithmes des expressions $\left(1+\frac{dH}{H}\right)$ et $(1+m\,dt)$, pour les valeurs de dH et dt qui se présentent communément.

Calcul des Réfractions. — Formules empiriques.

Table de Tycho-Brahé. Ce célèbre astronome est le premier qui forma une table des réfractions. Il la conclut uniquement de ses observations, sans s'appuyer sur aucune considération théorique. Pendant longtemps les astronomes se sont servis de cette table qu'ils modifiaient parfois d'après leurs propres observations.

Hypothèse de Cassini. Dominique Cassini fut le premier qui entreprit de calculer les réfractions, c'est-à-dire de les exprimer par une loi générale qui servît à les déterminer dans chaque cas particulier. Il eut l'idée que, bien que les réfractions se fissent dans des couches atmosphériques de densités différentes, l'effet total pourrait être le même que si elles avaient lieu dans une seule couche homogène de densité moyenne. Il essaya cette hypothèse ; et, au moyen de deux réfractions connues par l'observation, il détermina la hauteur et la densité que devrait avoir la couche fictive. Cette idée lui réussit merveilleusement ; c'est-à-dire qu'il trouva que les réfractions qui se feraient dans cette couche unique seraient très sensiblement les mêmes que celles qui ont lieu dans l'atmosphère terrestre, du moins pour les distances zénitales comprises entre 0° et 70° ; car pour les réfractions qui approchent davantage de l'horizon, il n'y a plus accord. Cassini calcula, d'après cette hypothèse, une table des réfractions qu'il fit paraître en 1662 (dans les Éphémérides publiées par le M.is de Malvasia), et qui pendant longtemps a été reproduite dans la connaissance des temps. Ce fut la première table calculée; mais ce calcul ne reposait pas sur une formule, il se faisait par la résolution trigonométrique d'un triangle rectiligne. M.r Delambre a tiré de cette construction géométrique la relation suivante, entre la réfraction θ et la distance zénitale apparente z,

$$\theta = 58'',7265.\ \mathrm{tang}\,(z - 1,6081.\theta).$$

Formule de Bradley. Cet astronome donna sans démonstration la formule

$$\theta = 57''\ \mathrm{tang}\,(z - 3\theta).$$

qui devint très célèbre, tant par sa simplicité, qu'à cause de sa grande exactitude pour les distances zénitales comprises entre 0° et 75°; à tel point, qu'aujourd'hui encore beaucoup d'astronomes en font usage. On ne sait pas comment Bradley a été conduit à cette formule.

Elle a la forme de celle qui se déduit de la méthode géométrique de Cassini, seulement les coefficients numériques sont différents.

Pour appliquer cette formule au calcul des réfractions, on néglige d'abord le terme 3θ qui est très petit par rapport à la distance zénitale z; alors on a simplement $\theta = 57''\ \mathrm{tang}\ z$;

c'est une première valeur approchée de la réfraction; on met cette valeur à la place de θ dans le terme 3θ, et on a pour seconde expression, plus exacte,

$$\theta = 57''\ \mathrm{tang}\,(z - 3 \times 57''\ \mathrm{tang}\ z).$$

Formule de Simpson. Plusieurs géomètres, Simpson, Boscovich, Duséjour, sont parvenus, par des considérations différentes à une relation de la forme

$$m \sin z = \sin(z - n\theta).$$

Les coefficients numériques m et n se déterminent par deux observations dans lesquelles la réfraction est connue.

Cette formule peut se ramener à la même forme que celle de Bradley.

D'autres auteurs, notamment Daniel Bernoulli et Mayer, ont donné diverses autres formules; ou bien ont construit des tables fondées seulement sur de nombreuses observations, ainsi qu'avait fait en premier lieu Tycho-Brahé. La table donnée par Lacaille a paru offrir une grande exactitude et a été fort suivie.

Théorie analytique des Réfractions. — Méthode de Laplace.

Laplace a soumis le problème difficile des réfractions à une analyse rigoureuse, en ayant égard à la constitution variable de l'atmosphère: sa méthode est une application analytique des lois de l'attraction à petite distance. Il considère le rayon lumineux comme la trajectoire décrite par une molécule lumineuse qui a reçu à son départ une impulsion et qui, arrivé dans la sphère d'activité attractive des couches atmosphériques, est sollicitée par cette force impulsive et par la force résultante de l'action des couches. C'est, comme on voit, une question de mécanique rationnelle. (*) Laplace est conduit de cette manière, à quelques lois du mouvement de la lumière, notamment à celle du rapport constant entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction. Puis, ces lois trouvées, il passe à la solution analytique du problème de la réfraction.

Aujourd'hui, l'hypothèse de l'émission de la lumière est fortement mise en doute, et l'hypothèse des ondes, l'une des grandes conceptions de Huygens, se présente avec plus de probabilité. Mais, lors même que l'hypothèse de l'émission, (qui, comme on sait, était celle de Newton), n'aurait rien de réel, la solution du problème de la réfraction donnée par Laplace n'en subsisterait pas moins dans ses résultats, parceque les principes sur lesquels elle repose immédiatement, sont vrais par eux mêmes, indépendamment de toute hypothèse sur leur cause première. Ces principes, auxquels, du reste, la théorie des ondes conduit comme celle de l'émission, peuvent, à la rigueur, se réduire à un seul, savoir, l'expression du rapport constant des sinus d'incidence

(*) Il est juste de dire que l'application exacte du principe des attractions à petite distance, aux milieux gazeux de densité variable, mais de composition uniforme, a été faite pour la première fois par Kramp dans son *Traité des réfractions astronomiques et terrestres*. Laplace a donné à la démonstration de Kramp plus de netteté, mais non plus de rigueur.

et de réfraction, en fonction des *pouvoirs réfringents* des milieux. C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer pour résoudre le problème des réfractions astronomiques.

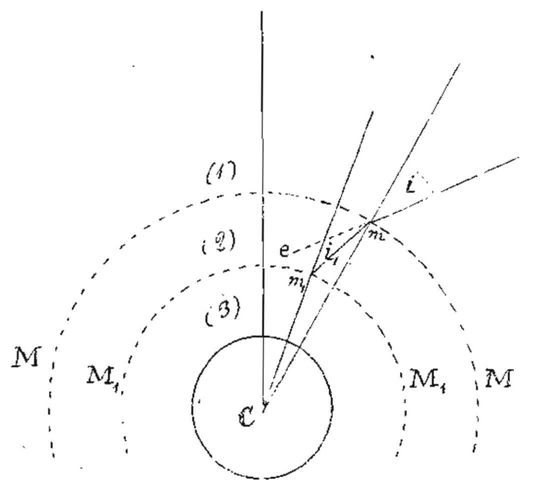
Quand un rayon de lumière passe d'un milieu dans un autre, le rapport entre les sinus d'incidence et de réfraction dépend de la nature de chaque milieu, et son expression est

$$\frac{\sin i}{\sin R} = \frac{\sqrt{1+p'\rho'}}{\sqrt{1+p\rho}}.$$

ρ, ρ' étant les densités des deux milieux, et p p' des coefficients dépendant de la nature de ces milieux. Les deux hypothèses relatives à la lumière conduisent à cette équation; mais dans l'une et l'autre, le 2e membre n'a pas la même signification.

Le produit $p\rho$ est ce que les physiciens ont appellé *le pouvoir réfringent* d'un milieu.

Considérons trois couches atmosphériques consécutives;



soit M la surface de séparation de la 1ère et de la 2e; M_1, la surface de séparation de la 2e et de la 3e.

Le pouvoir réfringent de la première couche est $p\rho$; et celui de la 2e $p_1\rho_1$.

Soit i l'angle d'incidence d'un rayon lumineux sur la surface M; R l'angle de réfraction dans le 2e milieu; on aura

$$\frac{\sin i}{\sin R} = \frac{\sqrt{1+p_1\rho_1}}{\sqrt{1+p\rho}}.$$

Soit i_1 l'angle d'incidence du rayon réfracté mm_1, sur la surface M_1; cherchons le rapport $\frac{\sin i}{\sin i_1}$.

Soient $Cm = r$, $Cm_1 = r_1$; on a dans le triangle Cmm_1

$$\frac{Cm}{Cm_1} = \frac{\sin mm_1C}{\sin m_1mC}; \text{ ou } \frac{r}{r_1} = \frac{\sin i_1}{\sin R}.$$

De cette équation et de la précédente, on tire

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{r_1}{r}\cdot\frac{\sqrt{1+p_1\rho_1}}{\sqrt{1+p\rho}}$$

ou

$$\sin i . r\sqrt{1+p\rho} = \sin i_1 r_1\sqrt{1+p_1\rho_1}$$

Ainsi la fonction $\sin i . r\sqrt{1+p\rho}$ a la même valeur dans deux couches consécutives, et conséquemment, dans toutes les couches. Les quantités i_1, r_1, p_1 et ρ_1 du deuxième membre peuvent donc être considérées comme appartenant à une couche quelconque. Supposons qu'elles appartiennent à la dernière couche parcourue par les rayons lumineux, c'est-à-dire à la couche qui est en contact avec la surface de la terre, i_1 sera l'angle que la tangente à l'extrémité de la trajectoire lumineuse fait avec la verticale menée par l'œil du spectateur; cet angle est la distance zénitale apparente de l'astre; appelons-le z, comme précédemment; soit a le rayon de la terre; l'équation deviendra

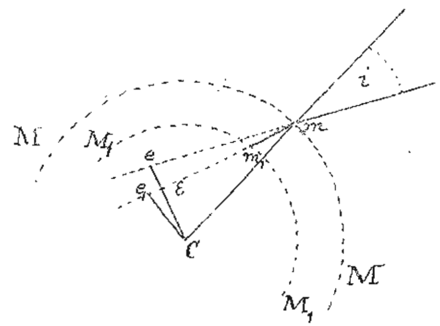
(1) $$\sin i\ r.\sqrt{1+p\rho} = a.\sin z\sqrt{1+p_1\rho_1}.$$

p_1 et ρ_1 sont les valeurs particulières de p et ρ qui conviennent à la couche atmosphérique en contact avec la terre.

Cette équation constitue une relation entre les deux

variables r et i relatives à chaque point de la trajectoire lumineuse; variables qu'on peut regarder comme les coordonnées de cette courbe; l'une étant le rayon vecteur mené du centre de la terre à un point de la courbe, et l'autre, l'angle que la tangente à la courbe en ce point fait avec ce rayon vecteur. De sorte que cette relation est l'équation de la trajectoire lumineuse.

La réfraction totale du rayon lumineux est la somme des réfractions ou déviations partielles qu'il éprouve en pénétrant dans chaque couche. Or, chaque réfraction partielle, telle que emm_1, est l'angle de contingence de la trajectoire lumineuse; la réfraction totale est donc la somme de ces angles de contingence. Dès lors on conçoit que l'équation (1) suffit pour faire connaître cette réfraction totale, puisque la question se réduit à chercher l'expression de l'angle de contingence en fonction des deux coordonnées r et i, et à l'intégrer entre les deux limites déterminées par les limites mêmes de l'atmosphère.



Pour trouver l'expression de cet angle de contingence emm_1, abaissons du point C les perpendiculaires Ce, Ce_1, sur ses deux côtés. Appelons $d\theta$ cet angle emm_1, puisque son intégrale sera la réfraction cherchée θ. On a dans le triangle emC

$$d\theta = \frac{d\varepsilon}{me}$$

or $\quad me = mC \cos emC = r \cos i$

$$e\varepsilon = Ce - C\varepsilon.$$

L'oblique $C\varepsilon$ ne diffère de la perpendiculaire Ce_1 que d'un infiniment petit du 2^e ordre. (*) On peut donc écrire $e\varepsilon = Ce - Ce_1$; $e\varepsilon = d_1 Ce$. Or

$$Ce = Cm \cos eCm = r \sin i;\ \text{donc}$$

$$e\varepsilon = d(r \sin i)$$

Donc

$$(2) \cdots\cdots\cdots\ d\theta = \frac{d(r \sin i)}{r \cos i}$$

ou, d'après l'équation (1),

$$(3) \cdots\cdots\ d\theta = \frac{a \sin Z.\sqrt{1+\rho'\rho'} \cdot d.\frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho}}}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2 \sin^2 Z(1+\rho'\rho')}{(1+\rho\rho)}}}.$$

Telle est l'expression de la réfraction en un point de la trajectoire lumineuse; ce point étant déterminé par son rayon vecteur r. Pour avoir la réfraction totale, il n'y a qu'à intégrer cette expression; mais il faudrait pour cela, connaître la relation générale qui peut avoir lieu entre ρ et ρ qui représente le pouvoir réfringent de la couche et le rayon r. Cette relation n'est pas connue, il n'y a donc pas moyen, dans l'état actuel de nos connaissances sur la constitution des couches atmosphériques, d'exprimer d'une manière générale la réfraction, en fonction du rayon de la couche; on ne peut que faire diverses hypothèses plus ou moins approchantes de la réalité physique, et tirer parti de l'équation ci-dessus par approximation, plus ou moins heureusement. C'est sur ce point épineux de la question que s'est exercée, avec bonheur, la sagacité de l'illustre auteur de la <u>mécanique céleste</u>. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des hypothèses et des calculs par lesquels il est parvenu à l'intégration de l'équation (3) et à une formule de réfraction que voici

$$\theta = 60'',745 \tan Z - 0'',0591 \tan^3 Z.$$

Après Laplace, plusieurs géomètres se sont beaucoup occupés de la même question et ont cherché à modifier ses hypothèses, dans le but de représenter plus exactement la véritable constitution de l'atmosphère. M^r Ivory notamment a consacré deux mémoires à cette question d'un si grand intérêt pour l'astronomie. Mais les physiciens reconnaissent que nos notions météorologiques sont encore trop restreintes pour pouvoir assurer que les hypothèses, même les plus probables et qui se trouvent confirmées dans de certaines limites, sont bien conformes à la constitution physique des couches aériennes. La question des réfractions devra donc être encore l'objet des efforts réunis des physiciens, des astronomes et des géomètres.

Formule de Delambre. La formule de Laplace, calculée théoriquement, mais avec certaines hypothèses sur la constitution physique des couches atmosphériques.

(*) Car on a $Ce_1 = C\varepsilon.\cos\varepsilon Ce_1 = C\varepsilon \cos d\theta = C\varepsilon\left(1 - \frac{d\theta^2}{2}\right)$; d'où

$$C\varepsilon - Ce_1 = \frac{C\varepsilon}{2}\, d\theta^2.$$

$C\varepsilon$ ne diffère donc de Ce_1 que d'un infiniment petit du 2^e ordre.

donne l'expression de la réfraction en fonction des puissances impaires de la distance zénitale apparente de l'astre. La formule de Bradley et la plupart des autres peuvent se ramener à cette même forme. De sorte qu'on est porté à penser que la formule

$$\theta = \mathrm{A}\ \mathrm{tang}\ \mathrm{Z} + \mathrm{B}\ \mathrm{tang}^3\ \mathrm{Z} + \mathrm{C}\ \mathrm{tang}^5\ \mathrm{Z} + \&^{a}.$$

est celle qui peut convenir le mieux pour exprimer les réfractions.

Delambre a fait l'essai de cette formule, en déterminant les coefficients A, B, &^{a}. par l'observation des distances zénitales apparentes des étoiles lors de leur passage au méridien.

Qu'on observe une étoile circompolaire à ses deux passages au méridien. Soit ξ sa distance zénitale apparente, au passage supérieur ; sa distance réelle sera $\xi + \theta$, θ étant la réfraction. Soit pareillement ξ' la distance zénitale apparente de la même étoile, observée à son passage inférieur ; sa distance zénitale réelle sera $\xi' + \theta'$. La demi-somme des deux distances zénitales réelles est le double de la distance zénitale du pôle. Soit K celle-ci on aura

$$2\mathrm{K} = (\xi + \theta) + (\xi' + \theta') = \xi + \xi' + (\theta + \theta')$$

or, d'après la formule que nous supposons exprimer la valeur de θ, on a

$$\theta = \mathrm{A}\ \mathrm{tang}\ \xi + \mathrm{B}\ \mathrm{tang}^3\ \xi + \mathrm{C}\ \mathrm{tang}^5\ \xi + \&^{a} \ldots$$

$$\theta' = \mathrm{A}\ \mathrm{tang}\ \xi' + \mathrm{B}\ \mathrm{tang}^3\ \xi' + \mathrm{C}\ \mathrm{tang}^5\ \xi' + \&^{a} \ldots$$

donc

$$2\mathrm{K} = \xi + \xi' + \mathrm{A}(\mathrm{tang}\ \xi + \mathrm{tang}\ \xi') + \mathrm{B}(\mathrm{tang}^3\ \xi + \mathrm{tang}^3\ \xi') + \mathrm{C}(\mathrm{tang}^5\ \xi + \mathrm{tang}^5\ \xi') + \&^{a} \ldots$$

Dans cette équation ξ et ξ' sont connues, puisque ce sont

les distances zénitales apparentes d'une étoile observée à ses deux passages au méridien ; tang ξ, tang ξ' sont donc des nombres déterminés ; de sorte qu'on peut regarder les coefficients A, B, … comme des inconnues. K distance vraie du pôle au zénit, dans le lieu de l'observation, sera aussi une inconnue.

On formera autant d'équations, qu'on observera d'étoiles, et on conservera autant de coefficients A, B, &^{a}, … moins un, qu'on aura d'équations. Ces équations serviront à déterminer ces coefficients et l'inconnue K.

M^{r} Delambre a négligé les puissances supérieures à la 5^{e} ; de sorte qu'il n'a eu à déterminer que trois coefficients, et il lui a suffi de connaître les distances zénitales de quatre étoiles. Il s'est servi des observations faites par Méchain à Montjoui, près Barcelone, à l'extrémité de l'arc du méridien qu'il avait mesuré. La grande exactitude que procure le cercle répétiteur, dont Méchain s'était servi, a fait penser à Delambre que ces observations étaient plus propres que toutes autres au calcul de sa formule. Voici les quatre équations qu'ont données les quatre étoiles suivantes.

La polaire

$$2\mathrm{K} = 97^{\circ}\ 14'\ 21'',47 + 2,27634\,\mathrm{A} + 2,98440\,\mathrm{B} + 3,9740\,\mathrm{C}.$$

δ de la petite ourse,

$$2\mathrm{K} = 97^{\circ}\ 13'\ 58'',17 + 2,67976\,\mathrm{A} + 3,47044\,\mathrm{B} + 33,31284\,\mathrm{C}.$$

α du dragon,

$$2\mathrm{K} = 97^{\circ}\ 12'\ 58''\,60 + 3,75944\,\mathrm{A} + 36,50251\,\mathrm{B} + 400,06998\,\mathrm{C}.$$

ζ de la grande ourse,

$$9\,K = 97^\circ\, 9'\, 31'',65 + 7,8633\,A + 439,26963\,B + 25581,807\,C.$$

Résolvant ces équations, on trouve

$$A = 61'',1766;\quad B = -0'',2648;\quad C = 0'',002485.$$

La formule de réfraction est donc

$$\theta = 61'',1766\,\mathrm{tg}\,Z - 0'',2648\,\mathrm{tg}^3 Z + 0'',002485\,\mathrm{tg}^5 Z. \text{(1)}$$

Les quatre équations donnent aussi la valeur de K, qui est

$$K = 48^\circ\, 38'\, 19''\, 97375.$$

C'est la distance du pôle au zénit; son complément sera la hauteur du pôle au dessus de l'horizon, savoir 41°, 21'. 40", 02625. C'est la latitude de Montjouy, lieu où ont été faites les observations.

La formule ainsi calculée satisfait pleinement aux huit distances zénitales qui ont servi à déterminer les coefficients A, B, C. Mais elle n'est qu'approximative par rapport à d'autres réfractions; c'est-à-dire que pour une autre distance zénitale observée Z elle ne donnera pas précisément la vraie réfraction correspondante, mais bien une valeur plus ou moins approchée de cette réfraction réelle. Il s'ensuit qu'en se servant d'observations relatives à d'autres étoiles, on trouvera des valeurs un peu différentes des coefficients A, B, C. On peut donc demander de déterminer les valeurs de ces coefficients qui satisfont le mieux, c'est-à-dire qui donnent la formule la plus exacte. Cette question se résout par la *méthode des moindres carrés.*

(1) Voir *Astronomie de Delambre*; t. 1er p. 315; et *Base du système métrique*; t. 2e p. 643.

Méthode des moindres carrés.

Supposons qu'on ait plusieurs équations linéaires de la même forme, entre trois inconnues x, y, z, telles que

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0,$$
$$a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les coefficients $a, b, c, d, a', b', \ldots$ seront des nombres fournis par des expériences ou des observations; de sorte que, généralement, ces nombres ne sont pas connus avec une exactitude parfaite. Il s'ensuit que les valeurs des trois inconnues x, y, z tirées de 3 des équations, ne satisferont pas exactement aux autres équations. Substituées dans celles-ci, elles produiront des nombres plus ou moins petits qui ne seront pas égaux à zéro, et que nous appellerons des *erreurs.* Ces erreurs ne seront pas les mêmes si l'on se sert de trois autres équations pour déterminer les inconnues. Il s'agit de déterminer les valeurs des 3 inconnues qui satisferont le mieux à l'ensemble des équations.

La première idée qui se présente serait de faire en sorte que la *somme des erreurs* fût *minimum*. Mais on conçoit qu'il ne faut considérer que les valeurs absolues des erreurs, abstraction faite de leurs signes. Or l'analyse ne se prête pas à cette condition qui exclut le signe des quantités; de sorte que si nous voulions exprimer analytiquement que la somme des erreurs est minimum, Mais on ne connait pas ces réfractions θ. Il y avait donc là une difficulté, que Mr Delambre a éludée d'une manière très heureuse, en se servant, pour former chaque équation, de 2 observations; les observations d'une même étoile à ses deux passages au méridien. Chaque étoile fournit comme nous l'avons vu, une équation telle que

$$2K = \zeta + \zeta' + A(\tang \zeta + \tang \zeta') + B(\tang^3 \zeta + \tang^3 \zeta') + \cdots$$

et ce sont ces équations que l'on traite par la méthode des moindres carrés.

Application de la Méthode des moindres carrés à des équations de forme quelconque.

La méthode des moindres carrés, que nous venons d'exposer, concerne des équations linéaires, c'est-à-dire, dans lesquelles les inconnues n'entrent qu'au 1er degré. Quand les équations sont d'une autre forme quelconque, on peut encore employer la méthode des moindres carrés, mais pourvu que l'on connaisse déjà un système de valeurs approximatives, des inconnues. Alors on cherche quelles différences, très petites, existent entre ces valeurs approchées, et celles qui satisferaient à la condition, que la somme des carré des erreurs fût minimum. C'est à la recherche de ces différences qu'on applique la méthode des moindres carrés.

Soient plusieurs équations entre trois inconnues x, y, z.

$$\begin{aligned}
&F(x, y, z, a, b, \ldots\ldots) = 0,\\
&F(x, y, z, a', b', \ldots\ldots) = 0,\\
&F(x, y, z, a'', b'', \ldots\ldots) = 0,\\
&F(x, y, z, a''', b''', \ldots\ldots) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ces équations étant toutes de la même forme et ne différant que par les valeurs des coefficients $a, b, \ldots$ qui répondent à un même phénomène, observé dans des circonstances différentes.

On veut trouver les valeurs de x, y, z qui satisfont le mieux à ces équations, par la condition que la somme des carrés des erreurs soit un minimum.

Nous supposons qu'on connaisse un système de valeurs des trois inconnues, satisfaisant plus ou moins bien aux équations. Ce sont des valeurs approximatives; représentons-les par x_1, y_1, z_1; et soient $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ les quantités dont elles diffèrent de celles qui satisferont à la condition de rendre minimum la somme des carrés des erreurs. Celles-ci étant représentées par x, y, z, on aura

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + \delta x_1,\\
y &= y_1 + \delta y_1,\\
z &= z_1 + \delta z_1.
\end{aligned}$$

Mettant ces valeurs dans les équations proposées, et les développant par la formule de Taylor, en négligeant les puissances supérieures de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ comme très petites, on aura les équations suivantes

$$F_1 + \frac{dF_1}{dx}\delta x_1 + \frac{dF_1}{dy}\delta y_1 + \frac{dF_1}{dz}\delta z_1 = 0,$$

$$F_1' + \frac{dF_1'}{dx}\,\delta x_1 + \frac{dF_1'}{dy}\,\delta y_1 + \frac{dF_1'}{dz}\,\delta z_1 = 0,$$

$$F_1'' + \frac{dF_1''}{dx}\,\delta x_1 + \frac{dF_1''}{dy}\,\delta y_1 + \frac{dF_1''}{dz}\,\delta z_1 = 0.$$

. . . .

Ces équations en même nombre que les proposées serviront à déterminer les inconnues $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$. Or elles sont linéaires, on pourra donc leur appliquer la méthode des moindres carrés.

Ainsi cette méthode est générale, quelle que soit la forme des équations proposées $F = 0$, et la nature de ces équations, algébriques ou transcendantes.

De quelques effets des réfractions.

1° Quand le soleil paraît à l'horizon, les rayons lumineux qui partent de ses deux bords, supérieur et inférieur, subissent des réfractions inégales, parce qu'ils sont inégalement éloignés du zénit; la différence de distance zénitale est de 32', diamètre apparent du soleil. La réfraction du rayon supérieur est moindre que celle du rayon inférieur; la réfraction a donc pour effet d'élever le bord inférieur un peu plus que le bord supérieur, et, par conséquent, d'accourcir le diamètre vertical du soleil. Il s'ensuit que le soleil ne paraîtra pas parfaitement sphérique; il présentera la forme d'un ellipsoïde aplati dans le sens de son diamètre vertical. L'applatissement apparent est de 4'17".

En effet au moment où le bord supérieur atteint

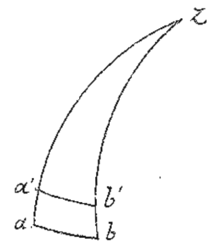
l'horizon, la réfraction l'élève de . . . . 28' 29"

Le bord inférieur se trouve alors à 32' au dessous de l'horizon, la réfraction qu'il éprouve est plus forte, et l'élève de - - - - - - - 32' 46"

Différence . . . . 4' 17"

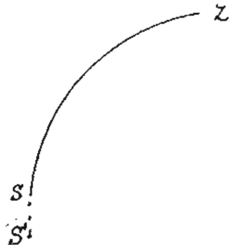
Le bord inférieur a donc été élevé de 4'17" de plus que le bord supérieur; de sorte que le diamètre vertical apparent se trouve accourci de 4'17", et n'est que 27'43". C'est pourquoi le disque solaire paraît aplati.

Les diamètres inclinés à l'horizon éprouveront aussi un accourcissement, mais qui sera moindre que celui du diamètre vertical.

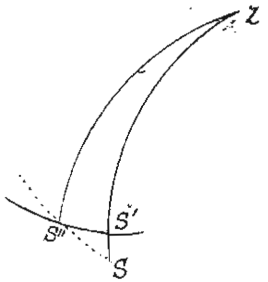


Enfin le diamètre horizontal éprouve lui même une petite diminution. En effet soit ab ce diamètre et z le zénit. Les deux cercles verticaux za, zb sont tangents au disque du soleil. Les points de contact a, b sont élevés en a', b' par la réfraction, a'b' est donc le diamètre horizontal apparent du soleil. Ce diamètre apparent est un peu plus petit que le diamètre réel ab; mais leur différence est excessivement petite.

Les réfractions à l'horizon sont très variables, par suite des variations, dues à différentes causes, qu'éprouve le pouvoir réfringent des couches atmosphériques voisines de la terre. Il s'ensuit que les phénomènes relatifs aux diamètres apparents du soleil ne sont pas toujours les mêmes, et que le soleil peut présenter des formes différentes et variables en très peu de temps.



2° La réfraction accélère le lever des astres et retarde leur coucher. En effet quand on voit un astre à l'horizon en S, sa distance zénitale apparente est 90°; la réfraction l'a donc élevé de 33'; de sorte que l'astre est réellement en S', au dessous de l'horizon, l'arc SS' étant de 33'.



3° La réfraction change l'azimut d'un astre à l'horizon. Nous avons appelé *azimut* l'angle que le plan vertical mené par un astre fait avec un autre plan fixe. Soit S' la position apparente de l'astre à l'horizon; sa position vraie étant en S. L'astre décrit un cercle autour de l'axe du monde. Soit SS" ce cercle qui perce l'horizon en S". C'est quand l'astre sera arrivé au point S" qu'il sera réellement à l'horizon. Il y a donc entre l'azimut de sa position apparente à l'horizon et l'azimut de sa position vraie à l'horizon, une différence égale à l'angle des deux cercles verticaux ZS', ZS".

Ainsi il y aura un calcul à faire pour rectifier l'effet de la réfraction, quand on observera l'azimut d'un astre à l'horizon.

Il y a d'autres effets des réfractions dont nous parlerons plus tard.

Astronomie

L'astronomie est la science des astres. Elle a pour objet principal la connaissance de leurs mouvements. Mais elle considère aussi leurs distances, leur grandeur, leur forme, leur constitution physique, &c. .....

Cette science se fonde sur l'observation et le calcul. Son principal procédé de calcul est la trigonométrie sphérique. Ses principaux instruments d'observation sont, un *chronomètre*, qu'on appelle *horloge astronomique*; le *cercle répétiteur*; le *théodolite*; l'*équatorial*; la *lunette méridienne*; et le *cercle mural*. Les trois premiers de ces six instruments nous sont connus; nous décrirons les autres quand nous aurons à étudier les phénomènes à l'observation desquels ils sont destinés.

Des étoiles et du mouvement diurne de la voute céleste.

Si pendant une nuit on observe le ciel, on le voit parsemé d'une multitude de points ou atomes lumineux qui parraissent fixés sur la concavité d'une sphère. Ces points lumineux ont le nom d'*étoiles*; et la sphère, celui de *voute céleste*. Cette sphère paraît avoir pour centre le point où est placé l'observateur, et paraît tourner autour d'un axe diamétral, en emportant toutes les étoiles qui y sont fixées. En effet, à un instant quelconque, des étoiles, d'abord invisibles, paraissent à l'*horizon* d'un certain côté du spectateur, en s'élevant vers la partie supérieure du ciel; pendant que d'autres étoiles s'abaissent, du côté opposé de l'horizon et disparaissent incessamment.

Nous appelons *horizon* un grand cercle suivant lequel la voute céleste semble couper le plan dont la surface de la terre nous présente l'aspect. La partie de l'horizon vers laquelle les étoiles s'élèvent et commencent à paraître s'appelle l'*orient* ou l'*est*; la partie opposée diamétralement, où les étoiles disparaissent et semblent s'abaisser au dessous de l'horizon, s'appelle l'*occident* ou l'*ouest*. Si le spectateur se place de manière que l'orient soit à sa droite et l'occident à sa gauche, le point de l'horizon placé devant lui sera le *nord* et le point diamétralement opposé sera le *midi* ou le *sud*. Ces quatre points de l'horizon, le *nord* et le *midi*, l'*orient* et l'*occident*, qui sont les extrémités de deux diamètres rectangulaires, s'appellent les *quatre points cardinaux*.

Le mouvement des étoiles de l'orient à l'occident est périodique, et s'accomplit toujours dans le même temps, comme nous le vérifierons bientôt. Nous nous bornons à dire dans ce moment qu'on l'appelle *mouvement diurne*.

Quelques étoiles n'atteignent pas l'horizon, et accomplissent leur mouvement en restant constamment visibles à l'observateur. On les appelle étoiles *circompolaires*, parcequ'elles sont voisines d'un certain point de la voute céleste qui a le nom de *pôle*.

Après ces définitions, reprenons l'étude attentive de la voute céleste; et ne nous bornons plus à un simple aspect; étudions la position et le mouvement des étoiles.

Invariabilité des distances respectives des Etoiles.

On reconnait que dans leur mouvement, les étoiles conservent invariablement leurs distances respectives. Par *distance* de deux étoiles, nous entendons leur *distance angulaire*, c'est-à-dire l'angle des deux rayons visuels menés du spectateur aux deux étoiles.

Si à un moment quelconque on mesure cet angle, puis, qu'un certain temps après, on le mesure de nouveau, on trouve qu'il n'a pas changé, du moins d'une quantité appréciable avec nos instruments: nous pouvons donc dire que les étoiles conservent entr'elles, dans tout le cours de leur mouvement, des distances constantes, et conséquemment un ordre invariable. Les monuments qui nous sont parvenus de l'Astronomie ancienne, nous font connaître que cet ordre était le même il y a 2000 ans.

C'est cette invariabilité qui avait porté les Anciens à regarder le ciel comme une sphère solide de cristal à laquelle les étoiles étaient fixées. Il nous suffit d'indiquer ici une seule objection contre cette opinion des Anciens, c'est que les comètes qui circulent dans l'espace à d'immenses distances, briseraient cette sphère de cristal.

Mouvement diurne.

Pour étudier le mouvement diurne des étoiles, on les observe à différents instants, et on rapporte leurs positions dans le ciel à un point fixe. On prend pour ce point le zénit. Nous savons qu'on appelle zénit le point où une verticale menée par le lieu de l'observateur rencontrerait la voute céleste.

On observe donc les distances zénitales d'une même étoile à différents instants du mouvement diurne, en ayant soin de noter l'heure précise où se fait chaque observation: de sorte que les deux éléments qui servent à déterminer le mouvement de l'étoile sont le temps et un angle zénital. Le complément de cet angle s'appelle la hauteur de l'étoile au dessus de l'horizon.

C'est avec le théodolite qu'on fait ces observations de distances zénitales.

Après avoir ainsi observé une étoile, qu'on fixe la lunette à son limbe (le limbe vertical autour duquel tourne la lunette); puis, quand on jugera, après un certain temps, que l'étoile, (qui parait décrire un cercle), va passer à l'extrémité de la corde horizontale menée par sa position observée, qu'à ce moment, dis-je, on fasse tourner la lunette autour de l'axe vertical du théodolite, il arrivera un instant où avec la lunette, qui a conservé sa position sur le limbe vertical, on apercevra de nouveau l'étoile. On connaitra ainsi deux positions dans lesquelles l'étoile fait des angles égaux avec la verticale et on

connaitra, par l'inspection du limbe horizontal de l'instrument, l'angle des deux plans verticaux qui contiennent l'étoile dans ces deux positions. On déterminera sur ce limbe la trace du plan qui divise cet angle en deux également; on trouve que ce plan est toujours le même, à quelqu'instant du mouvement diurne qu'ait lieu l'observation primitive, et par conséquent quelle que soit la position de l'étoile, c'est-à-dire sa hauteur au dessus de l'horizon, au moment de l'observation. Cela prouve d'abord que la courbe décrite par l'étoile est symétrique par rapport à ce plan. On trouve, en outre, que ce plan est le même pour toute autre étoile. Ainsi toutes les étoiles ont leurs trajectoires symétriques par rapport à un même plan vertical.

On a appelé ce plan le plan méridien, ou simplement le méridien. La trajectoire de chaque étoile rencontre ce plan en deux points qui sont, l'un le plus élevé, et l'autre le plus bas de cette courbe. Ces deux points portent le nom de passage supérieur et passage inférieur de l'étoile: le premier s'appelle aussi culmination de l'étoile.

Axe du Monde. Maintenant que nous avons déterminé le méridien par sa trace sur le limbe horizontal du théodolite, faisons tourner le limbe vertical et plaçons-le dans ce plan méridien. Alors, qu'on observe les passages supérieur et inférieur d'une étoile circompolaire, et qu'on marque sur le limbe vertical les directions de la lunette lors de ces observations : qu'on divise en deux également l'angle de ces deux directions ; on reconnaîtra que la droite bissectrice sera la même pour toutes les étoiles. Cette ligne s'appelle l'axe du monde. Les deux points où elle va rencontrer la voute céleste ont le nom de pôles. L'un d'eux est très voisin d'une certaine étoile qui, par cette raison, a reçu le nom d'étoile polaire. (C'est α de la constellation de la petite ourse).

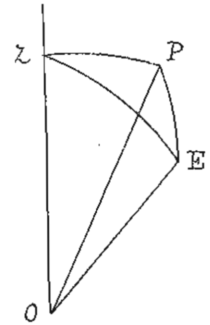
Position de l'axe du Monde. Nous connaissons le plan méridien dans lequel se trouve cet axe, il suffit donc de déterminer sa distance zénitale. Cette distance se trouve indiquée sur le limbe vertical du théodolite, puisqu'on y a marqué les positions de la lunette correspondantes aux deux passages de l'étoile. La distance zénitale de l'axe des pôles est égale à la demi-somme des distances zénitales des deux passages d'une même étoile.

Les Etoiles décrivent des cercles autour de l'axe du Monde. — Leur mouvement est uniforme.

Ces deux propositions se démontrent de deux manières : par l'observation et le calcul, ou bien par l'observation seule.

1ère démonstration. Soit Z le zénit, P l'un des pôles, et E la position d'une étoile. Soit O le lieu de l'observateur ; de sorte que OZ est la verticale, OP la ligne des pôles et OE le rayon visuel mené à l'étoile. Les trois points Z, P, E sont les sommets d'un

triangle sphérique dans lequel on connait le coté ZP, distance du pôle au zénit ; le côté ZE, distance zénitale de l'étoile, qui s'observe avec le théodolite ; et enfin l'angle EZP compris entre deux plans verticaux, qui se détermine aussi avec le théodolite. On pourra donc calculer le côté PE par la formule



$$\cos PE = \cos PZ \cos EZ + \sin PZ \sin EZ \cos Z.$$

c'est la distance de l'étoile au pôle.

A un autre instant de la nuit, on observera de nouveau l'étoile, et on calculera par la même formule sa distance au pôle. On trouvera que cette distance n'a pas varié. Cela prouve que l'étoile décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des pôles. C'est notre première proposition.

Pour démontrer la 2e, on calculera l'angle EPZ, ou P, par la formule entre quatre éléments consécutifs. Ces quatre éléments sont ici : côté EZ, angle Z, côté ZP et angle P.

On a donc

$$\frac{\cot EZ}{\cot ZP}\,\frac{1}{\cos Z} - \frac{\cot P}{\cot Z}\,\frac{1}{\cos PZ} = 1.$$

D'où se tire la valeur de l'angle P. Cet angle est l'inclinaison du plan mené par l'axe du monde et la position actuelle de l'étoile, sur le plan du méridien. On calcule de nouveau cette inclinaison à un autre instant ; et on reconnait qu'elle croît proportionnellement au temps. Ce qui montre que le mouvement de l'étoile est uniforme.

Ainsi, il est prouvé que les étoiles décrivent, d'un mouvement uniforme, des cercles autour de l'axe du monde.

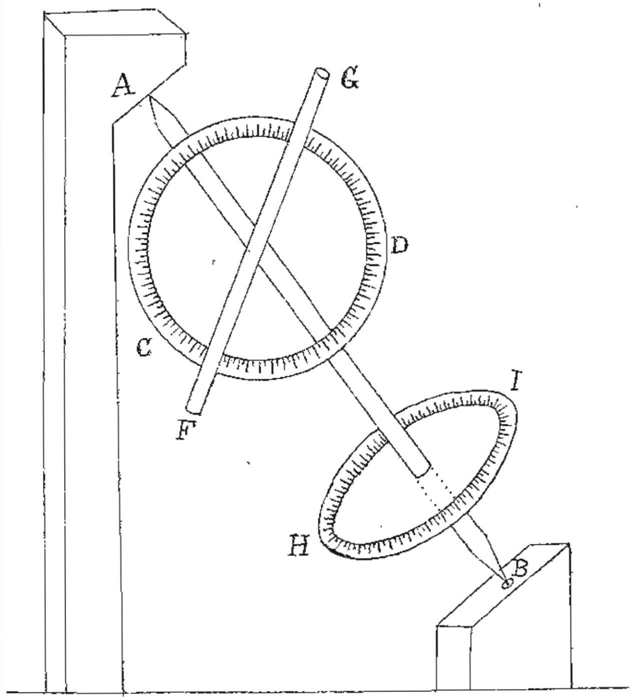
Ces cercles ont reçu le nom de <u>parallèles</u>; l'un d'eux est un grand cercle; c'est celui qui est décrit par une étoile éloignée du pôle de 90°. Ce grand cercle de la sphère céleste s'appelle <u>Equateur</u>.

Jour sidéral. Le temps que met une étoile à revenir au même point du ciel s'appelle <u>jour sidéral</u>. Ce temps est plus court de près de quatre minutes que le jour ordinaire, qui se règle sur le mouvement du soleil, comme nous le verrons plus tard.

2e Démonstration. On vérifie le mouvement uniforme et circulaire des étoiles, au moyen d'un instrument appelé <u>Equatorial</u>.

Equatorial. Cet instrument présente la même disposition que le théodolite; savoir, un limbe CD, muni d'une lunette FG, et tournant autour d'un axe fixe AB; et un 2e limbe HI, fixe dans un plan perpendiculaire à cet axe, et qui sert à mesurer les angles décrits par le 1er limbe. L'axe de l'équatorial est placé dans une direction parfaitement coïncidante avec l'axe du monde, de sorte que son limbe se trouve précisément dans le plan de l'équateur; de là vient que l'instrument a été appelé <u>équatorial</u>.

Pour observer le mouvement d'une étoile, on la vise avec la lunette FG, puis, au moyen d'une vis de pression, on fixe cette lunette au limbe CD. Alors on reconnait qu'en faisant tourner le limbe autour de l'axe AB, on peut suivre avec la lunette le mouvement de l'étoile, ce qui prouve que le rayon visuel mené à l'étoile décrit, dans le mouvement diurne, un cône droit circulaire autour de l'axe du monde. Cette expérience vérifie donc la 1ère partie de notre proposition.



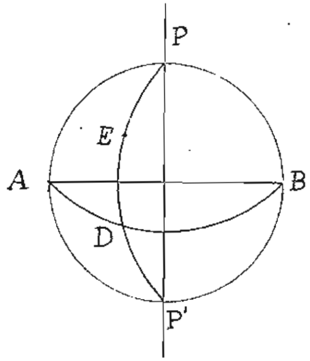
Pour s'assurer de l'uniformité du mouvement de l'étoile, on adapte à l'instrument un mécanisme d'horlogerie qui fait tourner la lunette d'un mouvement uniforme et lui fait faire un tour entier en un jour sidéral. On reconnait alors que quand la lunette a été dirigée vers une étoile et fixée au limbe, elle se trouve toujours pendant le cours de son mouvement, dans la direction de cette même étoile. Ce qui prouve que cette étoile se meut d'un mouvement uniforme.

L'équatorial a d'autres usages, pratiques, que nous ferons connaître plus tard. Les Anciens possédaient un instrument à peu près semblable, qu'ils appelaient machine parallactique; et dont ils se servaient aussi pour vérifier l'uniformité de la révolution diurne; mais leur certitude sur ce point ne pouvait pas égaler la nôtre, à cause du peu de précision des clepsydres qui leur servaient à mesurer le temps.

Coordonnées par lesquelles on détermine la position des étoiles. Déclinaison; Ascension droite.

On détermine la position des étoiles sur la sphère céleste, au moyen de deux coordonnées analogues à celles qui servent à fixer la position d'un point sur un plan. Que par une étoile on mène un grand cercle passant par les pôles du monde, l'arc de ce cercle compris entre l'étoile et l'équateur sera l'une des coordonnées; on l'appelle la déclinaison de l'étoile; la 2e coordonnée sera l'angle que le plan de ce cercle fait avec un plan fixe mené par la ligne des pôles; cet angle, ou l'arc qu'il comprend sur l'équateur s'appelle ascension droite. On a coutume de représenter la déclinaison d'une étoile par la lettre D, et son ascension droite par la double lettre Æ.

Soit PP' la ligne des pôles; ADB l'équateur;



PAP' le plan fixe à partir duquel on comptera l'ascension droite. Soit E une étoile, et D le point où le grand cercle PEP' rencontre l'équateur; l'arc ED sera la déclinaison de l'étoile, et l'angle des deux plans PAP', PEP', ou bien l'arc AD, sera son ascension droite.

La déclinaison est dite australe ou boréale, suivant que l'étoile se trouve, par rapport à l'équateur, du côté du pôle sud ou du pole nord.

Le cercle PEP' qui passe par une étoile, s'appelle cercle de déclinaison, ou bien cercle horaire.

Mesure de l'ascension droite des étoiles.

L'ascension droite d'une étoile est l'angle que le plan de déclinaison passant par cette étoile fait avec un certain plan fixe pris pour origine des ascensions droites. Ce plan fixe, de même que le plan de déclinaison de l'étoile, participe au mouvement diurne: et c'est ce mouvement qui offre le moyen de mesurer l'angle des deux plans; car cet angle est proportionnel à l'intervalle de temps qui s'écoulera entre les passages des deux plans au méridien. Soit t ce temps exprimé en heures sidérales (ou 24e partie du jour sidéral); on aura

$$\frac{\text{Æ}}{t} = \frac{360^\circ}{24}, \text{ ou } \text{Æ} = 15^\circ\, t.$$

En effet, dans le mouvement diurne tous les points de l'équateur passent successivement au méridien, en 24 heures. Et ce mouvement de rotation étant uniforme, le temps qu'un arc de l'équateur met à passer au méridien, est proportionnel à la grandeur de cet arc ; ce temps t est donc donné par la proportion

$$\frac{\text{circonférence}}{\text{arc}} = \frac{24^{h}}{t}$$

ou en représentant l'arc par Æ et la circonférence par 360°

$$\frac{360^\circ}{\text{Æ}} = \frac{24}{t}$$

d'où

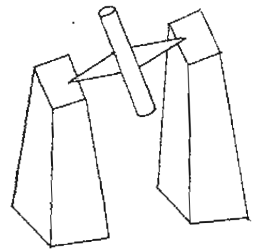
$$\text{Æ} = 15.t.$$

Ainsi pour déterminer l'ascension droite d'une étoile, il suffit de connaître l'heure de son passage au méridien, supposé qu'on connaisse, une fois pour toutes, l'heure du passage du plan fixe pris pour origine des ascensions droites. La différence de ces temps, multipliée par 15° exprimera l'ascension droite de l'étoile.

L'observation du passage d'une étoile au méridien se fait avec un instrument appelé <u>Lunette méridienne</u> ou <u>instrument des passages</u> dont voici la description.

Lunette méridienne. Cet instrument consiste en une lunette astronomique fixée à un axe ou essieu qui lui est perpendiculaire. Cet axe est placé

perpendiculairement au plan méridien ; de sorte que la lunette ne peut tourner que dans ce plan. On donne à l'axe la forme de deux cônes tronqués adossés par leur grande base et qui se terminent par deux tourillons cylindriques. Ces tourillons reposent sur deux coussinets formés chacun de deux plans inclinés, de manière que chaque tourillon ne touche chaque plan que suivant une ligne. Un de ces coussinets est muni d'une vis qui sert à le faire glisser dans une coulisse verticale, afin de pouvoir maintenir l'axe dans une position toujours parfaitement horizontale. L'autre coussinet est muni d'une vis qui sert à le faire mouvoir horizontalement en avant ou en arrière, afin de placer la lunette bien précisément dans le plan méridien.



Les plaques dans lesquelles glissent les coussinets sont fixées solidement sur deux murs en regard, ou sur deux colonnes inébranlables.

L'instrument doit satisfaire à trois conditions essentielles :

1° Que l'essieu ou axe de rotation soit parfaitement horizontal ;

2° Que l'axe optique de la lunette soit rigoureusement perpendiculaire à cet axe de rotation.

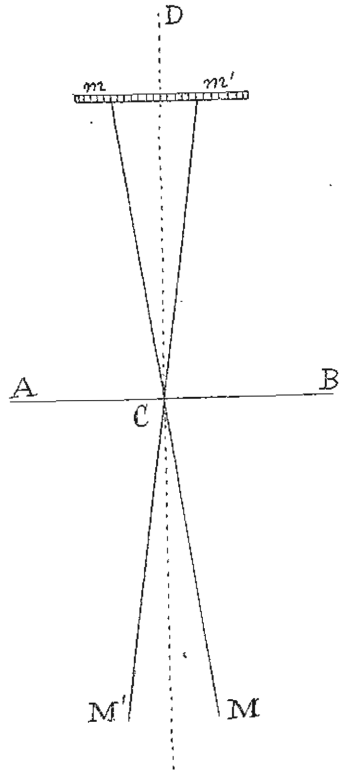
Et 3° enfin que l'axe de rotation soit bien perpendiculaire au plan méridien.

Voici comment on satisfait à ces trois conditions, qui sont indispensables.

1° On vérifie l'horizontalité de l'axe de rotation avec un niveau à bulle d'air qui lui est fixé, et l'on parvient à cette horizontalité au moyen du mouvement vertical qu'on peut donner à l'un des coussinets, ainsi que nous l'avons dit.

2° Pour amener l'axe optique de la lunette à être parfaitement perpendiculaire à l'axe de rotation ou essieu, on vise avec la lunette un objet bien apparent placé à une certaine distance : ce sera, si l'on veut, un disque noir percé d'un trou à travers lequel on verra le ciel comme un point rond lumineux ; ou bien ce sera une mire placée sur une règle horizontale graduée. Nous dirons tout-à-l'heure pourquoi la règle est graduée. Après qu'on a visé la mire, on renverse la lunette, de manière que son arête supérieure devienne l'arête inférieure. Pour cela on enlève l'essieu de dessus ses coussinets, et en le faisant tourner autour d'une droite fictive horizontale, qui lui serait perpendiculaire, on change les tourillons de coussinets. Dans cette nouvelle position, de la lunette, on vise la règle. Si le point visé est le même qu'auparavant, c'est-à-dire, s'il coïncide précisément avec la mire ; on en conclut que l'axe optique de la lunette est bien perpendiculaire à son essieu. Si, au contraire, on aperçoit sur la règle un autre point que la mire, cela prouve que l'axe optique n'est pas précisément perpendiculaire à l'essieu ; il s'écarte de la perpendiculaire d'un angle qui est la moitié de celui que font les rayons

visuels menés aux deux points visés de la règle. En effet, soit AB l'essieu de la lunette, et CD une droite qui lui est perpendiculaire.



Si l'axe optique de la lunette ne coïncide pas parfaitement avec cette droite, il aura une direction MCm ; et l'on visera sur la règle un point $\underline{m}$. Quand on aura fait tourner l'instrument, pour changer les tourillons de coussinets, il aura fait une demi-rotation autour de la droite CD ; la lunette aura donc décrit une demi-surface conique autour de cette droite ; elle aura la direction $M'Cm'$, et elle indiquera sur la règle un point m' différent de m et situé de l'autre côté de la droite CD.

L'angle $m'Cm$ est double de celui que la lunette, ou plutôt, que l'axe optique de la lunette fait avec la droite CD. Il faut donc amener cet axe à se trouver précisément dans la direction de cette droite. Cette droite n'est pas tracée, nous ne la concevons ici qu'idéalement. Mais comme elle passe par le milieu des deux points m', m, on marque sur la règle ce point milieu, ou même on se contente de l'estimer à l'œil ; et c'est sur ce point qu'on dirige l'axe optique de la lunette.

A cet effet, la lunette est munie d'un réticule dont les deux fils doivent se croiser au foyer de l'objectif: c'est la ligne qui passe par ce point et par le centre de l'objectif, qu'on appelle l'axe optique de la lunette. Si par un petit mouvement transversal du réticule, c'est-à-dire, par un petit mouvement du réticule dans son propre plan, on déplace un peu le point de croisée des deux fils, la direction de l'axe optique se trouvera changée. C'est ainsi qu'on arrive à donner à l'axe optique, une direction passant par le milieu des deux points visés m, m'.

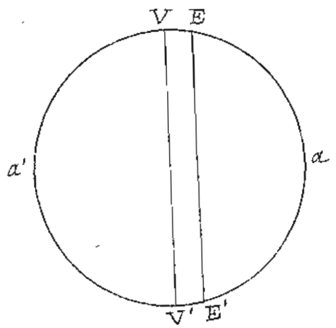
Le déplacement transversal du réticule se fait au moyen d'une vis différentielle qui produit des mouvements insensibles.

Nous avons dit que la règle était graduée; cela servira pour marquer avec précision le point milieu de mm' sur lequel doit se diriger l'axe optique de la lunette; et si l'on veut, pour faire connaître l'angle que l'axe optique, dans sa direction primitive MCm, fait avec la direction CD qu'on doit lui donner. Car il suffit de comparer la moitié du segment mm', à la distance de la règle au point C.

3°. Il nous reste à dire comment on parvient à donner à l'essieu de la lunette une direction parfaitement perpendiculaire au plan méridien.

On observe une étoile circompolaire, à ses deux passages dans le plan que décrit la lunette autour de son essieu, lequel plan est perpendiculaire à cet essieu. On note l'instant précis de chaque passage. Si l'intervalle de temps compris entre les deux passages est égal au demi-jour sidéral, on en conclut

que le plan de la lunette coïncide avec le méridien, et conséquemment que l'essieu est parfaitement perpendiculaire au méridien. Mais si l'intervalle de temps qui sépare les deux passages de l'étoile diffère du demi-jour sidéral, s'il est plus grand, par exemple, cela indique que l'arc $Ea'E'$ décrit par l'étoile entre les deux passages observés, est plus grand que l'arc $E'aE$ qui complète sa révolution: le plan dans lequel ont été observés les deux passages, lequel est le plan EE' décrit par la lunette, se trouve donc à droite du plan méridien VV', et fait avec lui un certain angle. Cet angle est d'autant plus grand, que le temps écoulé entre les deux passages diffère



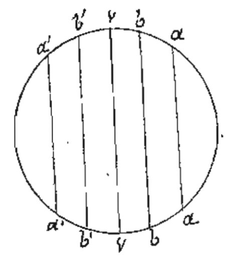
plus d'un demi-jour sidéral. Cette différence de temps est le temps que l'étoile met à décrire les deux arcs EV, $V'E'$. Comme ces arcs sont très petits, et qu'ils sont perpendiculaires au plan méridien VV', le temps que l'étoile met à les décrire est sensiblement proportionnel à l'angle que le plan des deux passages fait avec le plan méridien. De sorte qu'on connait approximativement cet angle, et conséquemment de combien il faut faire tourner le plan décrit par la lunette, pour l'amener à coïncider avec le plan méridien. Pour effectuer cette rotation c'est l'essieu qu'on fait tourner un peu autour d'une verticale. Pour cela on fait mouvoir celui des deux coussinets qui peut prendre un mouvement horizontal.

Cette opération se fait ordinairement par tâtonnement; et l'on n'est assuré de la parfaite perpendicularité de l'axe de l'instrument sur le méridien, qu'après avoir observé plusieurs passages.

Usage de la lunette méridienne. Nous avons dit que la lunette méridienne sert à observer le passage des étoiles au méridien, afin de connaître l'heure précise de ce passage, pour en conclure ensuite l'ascension droite des étoiles. A cet effet, une <u>horloge astronomique</u>, qui est une horloge à pendule d'une grande précision, est l'accompagnement indispensable de la lunette méridienne.

Pour déterminer l'instant du passage d'une étoile, on ne se borne pas à observer son passage au méridien, lequel a lieu quand l'image de l'étoile coïncide avec le point de croisée des deux fils rectangulaires du ~~triangle~~ réticule: cette seule observation pourrait être entachée d'une légère erreur dans l'estimation de l'instant auquel elle a lieu. On observe l'étoile dans des positions voisines, de part et d'autre, du méridien. A cet effet le réticule porte, outre son fil vertical qui coïncide avec le méridien, quatre autres fils parallèles à celui-là, et également éloignés de lui, deux-à-deux. On observe les passages de l'étoile sur les cinq fils et on note les instants de ces passages. Soit t le temps du passage au fil du milieu; les temps

des passages sur les deux premiers fils aa, bb, seront $t-\theta$; $t-\theta'$; et les temps des passages sur les deux derniers fils $b'b'$ et $a'a'$, $t+\theta'$ et $t+\theta$, puisque ces fils sont à la même distance, respectivement, que les deux premiers, du fil du milieu vv.



Dans l'estimation de chacun de ces temps, on pourra commettre une petite erreur: les temps observés seront donc $t-\theta+\varepsilon$; $t-\theta'+\varepsilon'$; $t+\varepsilon''$; $t+\theta'+\varepsilon'''$; et $t+\theta+\varepsilon^{iv}$. La moyenne de ces cinq quantités présentera une valeur approchée du temps véritable t. Cette moyenne est $t + \dfrac{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'''+\varepsilon^{iv}}{5}$

L'erreur est donc la somme des cinq erreurs particulières, divisée par 5; et comme une partie de ces erreurs sera probablement en sens contraire des autres, c'est-à-dire négative, leur somme sera probablement très minime, et pourra même être tout-à-fait nulle. Voilà comment on obtient une grande précision dans l'observation de l'instant où se fait un passage au méridien. (*)

(*) La <u>lunette méridienne</u> est due aux Modernes. Roemer paraît être celui qui s'en est servi le premier. Mais cet instrument, devenu l'un des plus utiles et des plus parfaits de l'astronomie, n'a reçu que dans le siècle dernier, les perfectionnements qui lui ont donné toute la précision dont il était susceptible. (Voir <u>l'histoire céleste</u> de Le Monnier; 1741. in-4°; page LXXV.)

Mesure de la déclinaison des étoiles. La déclinaison d'une étoile est sa distance à l'équateur comptée sur son cercle de déclinaison ou cercle horaire. Cette distance a pour complément la distance de l'étoile au pôle. Il faut donc connaître la direction de la ligne des pôles, et il suffira d'observer, à un instant quelconque, l'angle que la direction de l'étoile fait avec la ligne des pôles, ou axe du monde. On fait cette observation au moment du passage de l'étoile au méridien, et on se sert pour cela d'un instrument appelé cercle mural ou simplement mural et qui ne diffère de la lunette méridienne qu'en ce qu'il porte un limbe.

Description du cercle mural. Cet instrument consiste en un limbe gradué, dont le plan coïncide avec le méridien, et auquel est adaptée une lunette qui tourne autour de son centre: dans ce mouvement la lunette reste constamment dans le plan méridien, de même que la lunette méridienne.

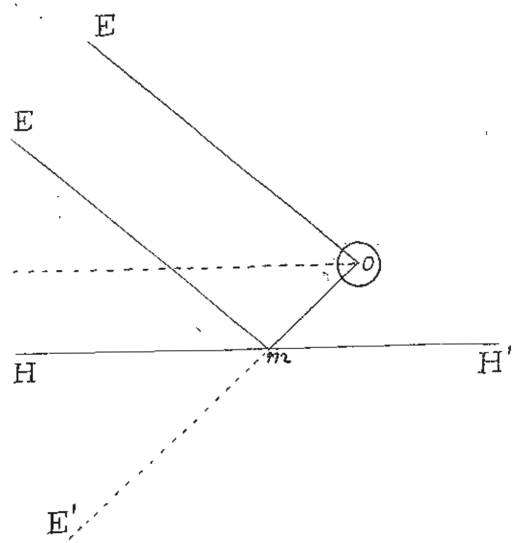
Le cercle mural est fixé contre un mur d'une grande solidité, établi sur des fondements inébranlables. Au moyen de vis de pression, on peut lui donner de petits mouvements insensibles, de manière à le faire coïncider parfaitement avec le plan méridien. Pour s'assurer qu'il a cette position, on se sert de la lunette méridienne. On vise une étoile avec cette lunette; et il faut qu'on puisse voir la même étoile au même instant avec la lunette du mural.

On trace sur le limbe du mural la direction

de la ligne des pôles. Cela se fait par l'observation des deux passages supérieur et inférieur d'une étoile circompolaire. La ligne des pôles divise en deux également l'angle que forment les directions de la lunette, corrigées de la réfraction.

Cette ligne étant déterminée, il suffit d'observer un seul passage d'une étoile pour connaître sa déclinaison. On voit sur le limbe quel est l'angle que la lunette, au moment où elle vise l'étoile, fait avec la ligne des pôles. Cet angle corrigé de la réfraction est le complément de la déclinaison de l'étoile.

Détermination de la hauteur du pôle au dessus de l'horizon, par l'observation d'une étoile. Quand on connaît à priori la distance d'une étoile au pôle, une seule observation de cette étoile avec le cercle mural, suffit pour déterminer la hauteur du pôle audessus de l'horizon. Pour cela on observe l'étoile E à son passage au méridien, et on note la position de l'index de la lunette sur le limbe. Puis on vise aussitôt, avec la lunette l'image E' de l'étoile,



formée par reflexion sur une nappe d'eau ou de mercure HH', et on note le point du limbe où se trouve l'index de la lunette. On connait donc l'angle que font les deux rayons OE, OE' qui visent l'étoile et son image.

Cet angle est double de celui que le premier rayon visuel fait avec la surface de l'eau, c'est-à-dire avec l'horizon. On détermine donc ainsi la hauteur de l'étoile au dessus de l'horizon : on connait sa distance au pôle : on en conclut la hauteur du pôle au dessus de l'horizon.

Si l'étoile est circompolaire, on peut répéter la même observation à son deuxième passage au méridien, et prendre, pour plus d'exactitude, la moyenne des deux résultats.

De même qu'on a marqué sur le mural la ligne des pôles, on y marque aussi la ligne horizontale ; c'est celle qui divise en deux également l'angle E O m.

Catalogue d'étoiles. On appelle ainsi une liste des étoiles, inscrites suivant l'ordre de leurs passages au méridien. On y joint les déclinaisons des étoiles. Ainsi on peut dire, qu'un catalogue d'étoiles se forme au moyen de la lunette méridienne et du cercle mural.

Ce catalogue équivaut à une représentation des étoiles dans leurs positions respectives, sur un globe qui serait l'image parfaite de la voute céleste. Car les déclinaisons sont les distances des étoiles au cercle qui représentera l'équateur, et les temps des passages

font connaitre les ascensions droites des étoiles comptées à partir de l'une d'elles prise pour origine. De sorte qu'on connait les deux coordonnées de chaque étoile ; ce qui suffit pour les placer sur le globe dans leurs positions respectives.

Ce qu'on appelle la sphère des Anciens, par exemple, la sphère d'Eudoxe, qui nous est parvenue, c'est un tel catalogue d'étoiles qui nous fait connaitre l'état du ciel à une époque ancienne.

Classification des étoiles. Pour distinguer les étoiles et en faciliter la connaissance, on les a partagées en groupes qu'on a appelés constellations ou astérismes. Dans chaque constellation on a classé les étoiles par ordre d'éclat. Les plus brillantes sont dites de première grandeur : celles qui le sont un peu moins sont de deuxième grandeur. Et ainsi jusqu'aux étoiles de 6^e^ ou de 7^e^ grandeur, qui sont les plus petites que l'on puisse apercevoir à l'œil nu, dans une nuit sombre et sereine. Mais avec le secours des télescopes la progression va beaucoup plus loin ; et ceux qui sont familiarisés avec les instruments d'un grand pouvoir, comptent des étoiles depuis la 8^e^ jusqu'à la 16^e^ grandeur. Il est à croire que cette limite sera reculée à chaque nouveau perfectionnement qu'on apportera dans la construction des instruments d'observation, et que la multitude d'étoiles qui couvrent la voute céleste paraitra de plus en plus innombrable.

On ne compte que 15 à 20 étoiles de 1^ère^ grandeur ;

50 à 60 de 2.e grandeur ; environ 200 de 3.e ordre ; ensuite les nombres augmentent rapidement, à mesure que l'on descend l'échelle des grandeurs. Le nombre des étoiles déjà enregistrées comme étant visibles à l'œil nu est de 15 à 20 mille. La plus brillante des étoiles d'une constellation est désignée par la lettre α ; les autres le sont, d'après leur éclat, par les lettres grecques suivantes, β, γ, δ, &c.... Après ces lettres on se sert de l'alphabet romain, puis des chiffres vulgaires.

Étoiles changeantes. L'éclat de plusieurs étoiles varie dans un temps plus ou moins long ; quelquefois d'une manière périodique.

L'étoile δ de la grande ourse est actuellement la moins brillante des sept qui forment cette constellation. Quand elle a été désignée par la lettre δ, son éclat était intermédiaire entre celui de γ et celui de ε. L'étoile β de Persée, appelée Algol, varie périodiquement d'éclat tous les trois jours environ (2 jours 21 heures) : étoile de 2.e grandeur, elle passe pendant 3 heures à l'état de 4.e grandeur ; puis elle reparait de 2.e grandeur. Plusieurs étoiles deviennent tout à fait invisibles pendant un certain temps et reparaissent ensuite.

Quand la périodicité de ces changements a été reconnue, on donne aux étoiles le nom de périodiques.

Étoiles temporaires. On appelle ainsi des étoiles qui apparaissent tout à coup, quelquefois très brillantes, et qui disparaissent un certain temps après, sans laisser

de traces. En 1572 il y eut une telle apparition mémorable. Tycho Brahé retournant un soir (le 11 novembre) de son observatoire chez lui, fut étonné de trouver un groupe de gens occupés à regarder une étoile remarquable par son éclat qui égalait celui de Sirius. Certainement cette étoile venait de paraitre soudainement, car Tycho Brahé l'eût aperçue si elle avait été visible une demi-heure auparavant. Son éclat, qui égalait déjà celui de Sirius, alla en augmentant au point qu'elle était visible en plein midi. Elle commença à décroître en décembre de la même année, et au mois de mars 1574 elle avait entièrement disparu. Depuis, les astronomes ont observé de pareils phénomènes. Les chroniqueurs du moyen âge en ont enregistré plusieurs dans leurs relations historiques.

Étoiles colorées. Certaines étoiles ont une couleur rouge, telles qu'Aldébaran ; souvent une couleur sanguinolente. D'autres sont blanchâtres, bleuâtres, jaunes ou vertes.

Étoiles doubles. Beaucoup d'étoiles, étant observées au télescope, se dédoublent. On reconnait qu'elles ne sont point des étoiles simples, qu'elles sont la réunion de deux étoiles dont on distingue la distance. On trouve par exemple, que la belle étoile Castor est formée de deux étoiles de 3.e et de 4.e grandeur, distantes l'une de l'autre de 5". Herschel avait compté plus de 500 étoiles doubles. Depuis, d'autres astronomes, à l'aide d'instruments disposés d'une manière plus convenable, en ont augmenté le nombre considérablement.

Souvent les deux étoiles qui forment un groupe sont colorées différemment, et ont des couleurs d'un contraste frappant. Ainsi γ d'Andromède est composée de deux étoiles dont l'une est d'un rouge très vif, et l'autre d'un vert magnifique.

Révolution des Etoiles doubles les unes autour des autres. Plusieurs étoiles doubles présentent un phénomène infiniment curieux; elles tournent l'une autour de l'autre; de sorte qu'elles forment un <u>système stellaire</u> analogue à notre système planétaire. Cette première analogie a été confirmée par un beau travail de Mr. Savary, qui a reconnu que la loi de la gravitation qui gouverne notre système planétaire, s'étend jusqu'à ces systèmes stellaires et est aussi la loi qui les régit. Mr. Savary a ainsi justifié cette dénomination de <u>gravitation universelle</u> employée par Newton sans prévoir, bien probablement, l'immense extension que recevrait un jour sa grande loi. La méthode de calcul suivie par Mr. Savary l'a conduit à reconnaître que ζ de la grande Ourse décrit, dans la période de 58 ans 1/4, une orbite elliptique dont le demi-grand axe est 8",857. Depuis, Mrs. Encke et John Herschel ont calculé d'autres orbites. La plus considérable jusqu'ici est celle de l'étoile 61 du Cygne; son demi-grand axe est de 15",43; l'étoile accomplit sa révolution en 452 ans.

Mouvement propre des étoiles. On a reconnu que certaines étoiles ont des mouvements propres, et qu'elles se déplacent dans le ciel. Ces mouvements paraissent être jusqu'ici rectilignes; mais il est probable qu'ils appartiennent à quelques orbites immenses qu'on parviendra peut-être un jour à calculer. Ce sont non seulement des étoiles simples qui sont douées de ce mouvement de translation; mais aussi des systèmes d'étoiles doubles, qui, indépendamment de leurs mouvements de révolution l'une autour de l'autre, se trouvent ainsi entraînées de compagnie, par un mouvement progressif de translation, vers certaines régions de l'espace. Par exemple, les deux étoiles qui constituent 61 du cygne, et qui sont presque égales entr'elles, se sont déplacées de 4'.23" depuis 50 ans, ce qui fait un mouvement annuel de 5",3; un peu plus que le tiers de la distance qui les sépare. Parmi les étoiles qui ne sont pas doubles, μ de Cassiopée est celle à laquelle on a reconnu le plus grand mouvement propre; il est de 3",74 par an.

Ces mouvements se font dans des directions différentes qui ne semblent pas indiquer une tendance commune vers un point du ciel plutôt que vers un autre. Et quoiqu'on ait émis déjà, à ce sujet, quelques conjectures, elles ne présentent encore aucun degré de probabilité.

Ces dérangements d'un certain nombre d'étoiles sont si lents, que des observations faites à quelques années de distance ne suffisent pas pour les constater ; et même ils n'ont pu produire encore, depuis l'origine de l'astronomie historique, une altération sensible dans l'apparence du ciel étoilé.

Aussi continue-t-on de considérer les étoiles comme des astres fixes, dénomination que leur ont donné les Anciens, par opposition à certains autres corps célestes, tels que le soleil, la lune, les planètes, qu'ils ont appelés astres errants parceque, bien qu'ils participent au mouvement diurne des étoiles, ils ont des mouvements propres très sensibles.

De la distance des Etoiles à la terre. Les étoiles sont à des distances immenses de la terre. Diverses considérations le prouvent ; mais il nous suffira de dire, dans ce moment, que de quelque point de la terre qu'on les observe, leurs distances angulaires ne varient pas, du moins d'une manière appréciable par nos procédés d'observation les plus délicats. Cela montre que les rayons visuels dirigés des différents points de la terre vers une même étoile sont sensiblement parallèles. De sorte que la distance qui nous sépare de l'étoile est infiniment grande, par rapport à la plus grande distance qui puisse séparer deux spectateurs à la surface de la terre. Bien plus, comme la terre n'est pas immobile au centre de la sphère céleste, ainsi que nous le verrons plus tard, et qu'elle décrit annuellement une orbite dont le diamètre est de 76 millions de lieues environ, on peut dire que c'est par rapport à cet espace de 76 millions de lieues, que la distance des étoiles à

la terre est infiniment grande. Nous ajouterons qu'il est démontré par d'autres considérations, qu'il n'y a aucune étoile de première grandeur, dont la lumière nous parvienne en moins de trois ans. Or la vitesse de la lumière est de 77 mille lieues par seconde : les étoiles sont donc à une distance immense de la terre.

Voie lactée. La Voie lactée est une grande bande lumineuse, blanchâtre, qui paraît faire le tour de la sphère céleste en passant par le Cygne, Cassiopée, Persée, Le cocher, Les Gémeaux, La Licorne. Cette remarquable ceinture a conservé, depuis les âges les plus reculés, la même situation relativement aux étoiles. Lorsqu'on l'examine avec de puissants télescopes, on trouve qu'elle se compose d'étoiles amoncelées par millions, et qui forment comme une sorte de vapeur lumineuse. En un point de son cours, elle se partage comme en deux branches qui se réunissent plus loin, après être restées séparées dans un intervalle d'environ 150°.

Nébuleuses. On appelle ainsi des nuages de vapeurs blanchâtres. Ce sont des amas de petites étoiles, communément de 12^e grandeur, réunies en très grand nombre. Ces agglomérations se présentent sous des formes très diverses. (*)

(*) On peut consulter sur toutes ces parties de l'astronomie

[Aspect figuré du ciel. — Principales constellations. La figure ci-jointe représente perspectivement les principales constellations que nous appercevons dans notre hemisphère. Voici diverses relations de position et de forme qu'on peut remarquer entr'elles. Nous prendrons principalement pour base et point de départ la constellation de la grande Ourse, appelée aussi le chariot. Nous supposerons que le spectateur regarde le nord.

Grande Ourse. 1° La grand ourse se compose de sept étoiles, toutes de 2e grandeur, excepté une, δ, qui a perdu de son éclat, et n'est plus actuellement que de 4e grandeur. Les quatre α, β, γ et δ forment à peu près un rectangle, les trois autres ε, ζ, η sont sur une courbe qui part de δ, elles forment la queue de la grande ourse, les deux premières α, β sont appelées ses gardes. Leur intervalle dans le ciel est d'environ 5°.

Polaire petite Ourse. 2° Que sur le prolongement de $\beta\alpha$ on prenne $\alpha\alpha' = 5\beta\alpha$, on rencontre l'étoile polaire qui est de 3e grandeur et qui est la plus brillante de la petite Ourse. A quelqu'instant du mouvement diurne qu'on l'observe, elle parait toujours être au même point du ciel ou à la même hauteur au dessus de l'horizon, parcequ'étant très près du pôle, à 1°½ de distance, elle ne décrit dans le mouvement diurne qu'un très petit cercle. son passage inférieur au méridien, a lieu à peu près en même temps que celui de ε de la grande Ourse. La petite ourse a à peu près la même figure que la grande ourse. Elle se compose de sept étoiles principales formant un rectangle et une queue. La polaire est l'extrémité de la queue.

---

stellaire que nous venons d'indiquer succinctement, les nombreuses et savantes recherches que Mr Arago a réunies sous le titre d'analyse historique des travaux d'Herschel dans l'annuaire du Bureau des Longitudes de 1842.]

Cassiopée. 3° Si l'on prolonge la droite $\delta\alpha'$, elle rencontre à une distance égale à elle-même, l'étoile β d'un groupe de cinq étoiles de 3e et 4e grandeur formant Cassiopée.

Pégase. Andromède. 4° Plus loin entre $\alpha\alpha'$ et $\delta\alpha'$ prolongées, se trouve un carré formé par quatre étoiles de 2e grandeur dont trois appartiennent à Pégase et la quatrième est α d'Andromède.

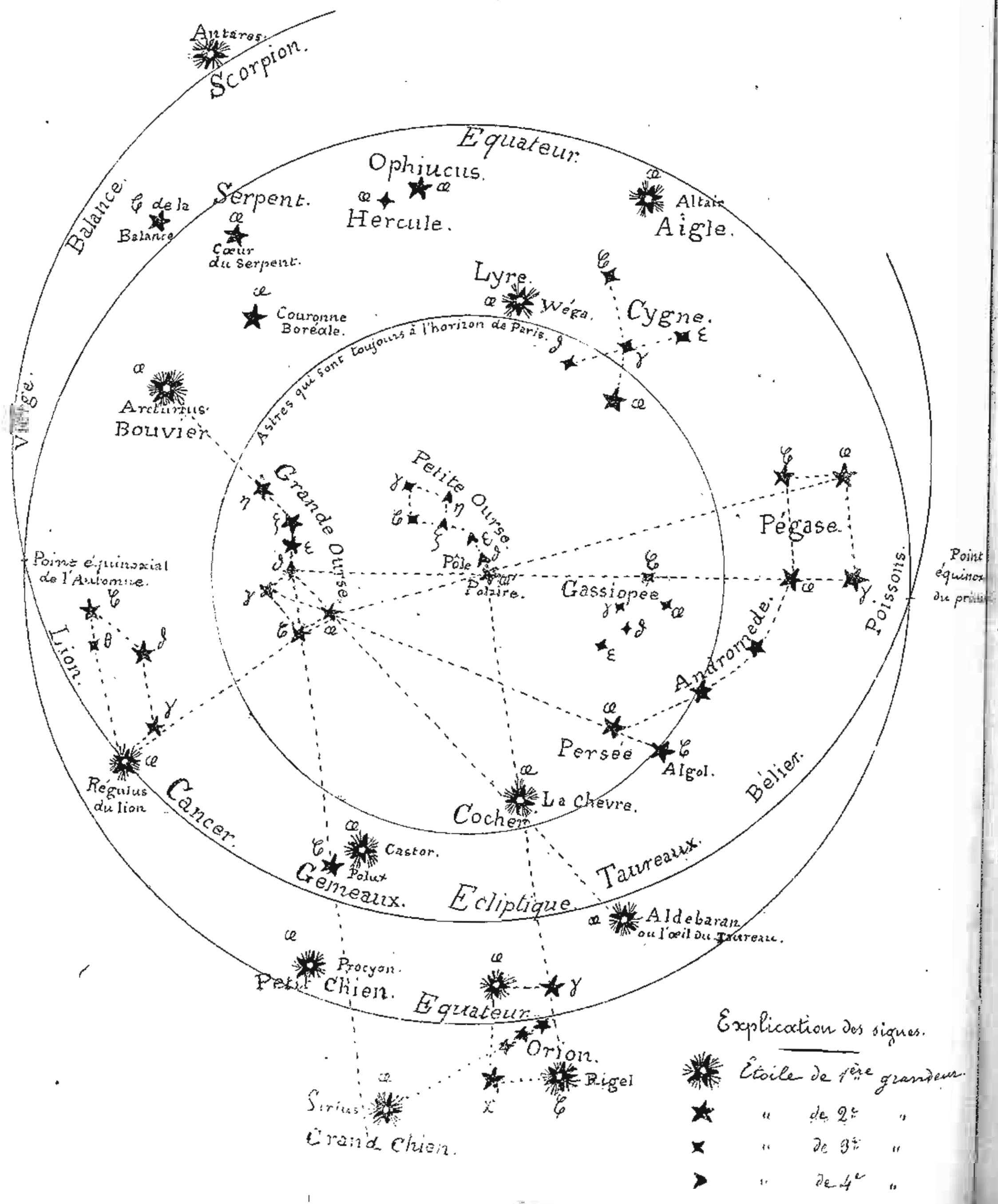
Persée. Algol. 5° Sur le prolongement de la diagonale $\gamma\alpha$ de la grande Ourse se trouvent les deux étoiles de Persée α et β. Celle-ci a le nom d'Algol; elle varie d'éclat dans une période de deux jours 21 heures.

L'Epi. 6° Vers le côté opposé de l'hémisphère, et à peu près sur le prolongement de la même diagonale de la grande Ourse, se trouve l'Epi de la Vierge, étoile de première grandeur.

Régulus du Lion. 7° Le prolongement de $\alpha\beta$ traverse le Lion, laissant un peu au dessous Régulus, l'α de cette constellation, étoile de 1ère grandeur.

Gémeaux. 8° Sur le prolongement de la diagonale $\delta\beta$ se trouvent d'abord Castor et Pollux, α et β des Gémeaux, α est de 1ère grandeur.

Sirius. 9° Puis se trouve Sirius, la plus brillante étoile du ciel.



Procyon
Petit chien.

10° La ligne menée de la polaire à Castor va rencontrer Procyon, étoile de première grandeur, α du Petit chien située à peu près entre Castor et Sirius.

La chèvre.

11° Le prolongement de la ligne qui joint γ d'Andromède à α de Persée passe non loin d'une étoile de 1ère grandeur appelée la Chèvre, α du Cocher.

Orion.

12° La ligne qui joint la Polaire à cette étoile va rencontrer un trapèze appelé Orion, dont α et β, sommets opposés du trapèze sont de première grandeur et γ, δ de 2e grandeur. Cette constellation est très remarquable en ce qu'elle comprend dans l'intérieur du trapèze trois étoiles de 3e grandeur, qui sont en ligne droite entr'elles et avec Sirius.

Acturus.

13° En prolongeant la courbe εζη de la grande Ourse, on rencontre une étoile de 1ère grandeur, Arcturus, α de la constellation du Bouvier.

Wéga de la Lyre.

14° Qu'on joigne l'Epi de la Vierge à Arcturus, la ligne prolongée passera un peu au dessous d'une étoile de 1ère grandeur, qui est α de la Lyre, on l'appelle Wéga.

Le Cygne.

15° A côté un peu à droite et au dessous de celle-ci est le Cygne où l'on distingue cinq étoiles, l'une de 2e et les quatre autres de 3e grandeur.

Aldébaran.

16° La ligne qui va de α de la grande Ourse à la Chèvre, étant prolongée, rencontre Aldébaran, ou l'œil du taureau étoile de première grandeur, α de la constellation du taureau.]

Zodiaque. On a donné le nom de Zodiaque à une région du ciel qui se fait remarquer, non par quelque particularité de sa constitution, mais parce qu'elle est le champs où s'opère le mouvement du soleil, de la lune, et des grosses planètes. Cette région, qui forme une zone de 16° environ d'épaisseur, a été divisée, à une époque très reculée, en douze constellations qu'on appelle zodiacales. Ce sont le Belier, le Taureau, les Gémeaux, l'Ecrevisse, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau et les Poissons. Les deux vers suivants expriment, d'une manière très concise, les noms et l'ordre de ces douze constellations:

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, caper, Amphora, Pisces.

Ecliptique. Dans cette zone que nous appelons zodiaque, on distingue surtout un grand cercle, qui passe par l'Epi et Régulus et qu'on appelle l'Ecliptique.

Ce grand cercle joue un rôle important dans le mouvement général de la sphère celeste, comme nous le verrons plus tard, et dans le mouvement particulier du soleil dont il marque la route apparente. Il coupe l'équateur en deux points qu'on appelle points équinoxiaux: l'un est dit point équinoxial d'automne, et l'autre point équinoxial du printemps, ou simplement équinoxe d'automne, équinoxe du printemps. Le 1er

se trouve à peu près au milieu de l'arc compris entre l'Epi et Régulus. Le 2me lui est opposé diamétralement. Et la droite qui joint ces deux points, laquelle est un diamètre commun à l'équateur et à l'écliptique, s'appelle la ligne des équinoxes. Nous dirons plus tard la raison de ces dénominations, écliptique et équinoxes, qui sont fort anciennes.

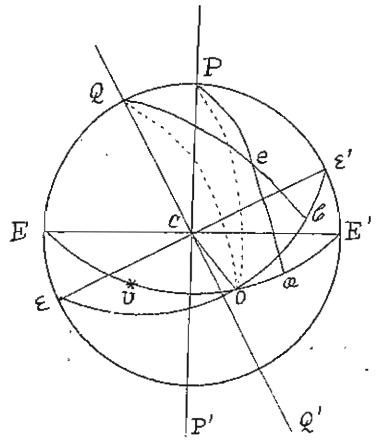
Système de coordonnées par lequel on rapporte la position des étoiles à l'écliptique. On détermine la position des étoiles par rapport à l'écliptique comme on l'a fait par rapport à l'équateur au moyen de deux coordonnées. L'une est la distance de l'étoile à l'écliptique, comptée sur l'arc de grand cercle mené par l'étoile perpendiculairement à l'écliptique; cet arc s'appelle latitude celeste. La 2me coordonnée est la distance du pied de cet arc à un point fixe pris sur l'écliptique: on l'appelle longitude céleste. On prend, généralement, pour ce point fixe l'équinoxe du printemps.

Les Astronomes représentent la longitude céleste par L et la latitude par λ.

Relations entre les deux systèmes de coordonnées des étoiles. Quand on connait les coordonnées d'un système, on en conclut les coordonnées de l'autre système par la considération d'un triangle sphérique.

Soit EOE' le grand cercle de la voute céleste que nous appelons l'équateur; et εOε' le grand cercle que nous appelons l'écliptique. Le diamètre

PP' perpendiculaire au plan du 1er est la ligne des pôles ou axe du monde : Le diamètre QQ' perpendiculaire au plan du 2e s'appelle l'axe de l'écliptique.



Le point d'intersection O des deux cercles est le point équinoxial qu'on prend dans l'un et l'autre système, pour l'origine des coordonnées. Le rayon CO est perpendiculaire au plan des deux axes PP', QQ'. Que par une étoile e, on mène les deux cercles passant par ces deux axes. Le 1er rencontrera l'équateur en un point a, et le 2e rencontrera l'écliptique en un point b ; et les deux coordonnées de l'étoile dans les deux systèmes, seront :

$$D = ea, \quad \text{Æ} = Oa,$$

et

$$\lambda = eb, \quad L = Ob.$$

Ces coordonnées s'expriment, en fonction des côtés du triangle sphérique PeQ ; de sorte que les relations générales entre les éléments de ce triangle donnent lieu à des relations entre nos quatre coordonnées, qui servent à déterminer les unes en fonction des autres.

Quant aux côtés on a

$$Pe = 90° - D \quad \text{et} \quad Qe = 90° - \lambda.$$

et quant aux angles,

$$QPe = QPO + OPe = 90° + \text{Æ}.$$

$$PQe = PQO - OQe = 90° - L.$$

Le côté PQ du triangle PeQ mesure l'inclinaison du plan de l'écliptique sur le plan de l'équateur, que nous appellerons ω.

Ce que l'on a besoin de connaitre, généralement, c'est l'expression de la latitude et de la longitude en fonction de la déclinaison et de l'ascension droite.

La latitude eb, ou son complément eQ se détermine en fonction des 2 côtés Pe, PQ et de l'angle compris, par la formule

$$\cos Qe = \cos PQ . \cos Pe + \sin PQ \sin Pe \cos QPe.$$

La longitude Ob, ou l'angle PQe qui en est le complément, se détermine en fonction des trois mêmes éléments, par la formule des quatre éléments consécutifs

$$\frac{\cot Pe}{\cot PQ} \cdot \frac{1}{\cos QPe} - \frac{\cot PQe}{\cot QPe} \cdot \frac{1}{\cos PQ} = 1.$$

Ces deux équations deviennent

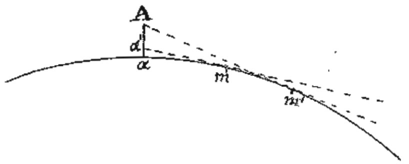
$$\sin \lambda = \cos \omega . \sin D - \sin \omega \cos D . \sin \text{Æ} \; \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sin \omega \operatorname{tang} D + \cos \omega \sin \text{Æ} = \cos \text{Æ} \operatorname{tang} L \; \ldots\ldots (2)$$

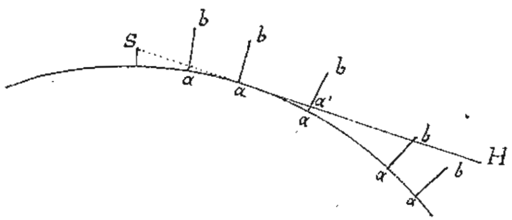
Elles font donc connaitre λ et L en fonction de D et Æ. Mais il faut connaître l'inclinaison ω de l'écliptique sur l'équateur. Nous verrons plus tard comment se détermine cet angle.

Géodésie. — Figure et Mesure de la Terre.

Premier aperçu de la forme de la Terre. Quelques auteurs dans l'antiquité, ne considérant que l'apparence que présente la surface de la terre en chaque position de l'observateur, ont pensé qu'elle était plane; mais cette erreur ne s'est pas propagée; une observation bien simple s'y opposait; c'est que tous les peuples de la terre ne voient pas la lune et les astres se lever au même instant, ainsi que cela aurait lieu si la terre était plane. On n'a donc pas tardé à regarder la terre comme un corps à peu près rond. Différentes observations tendent à prouver qu'elle a cette forme. La plus sensible et probablement la plus ancienne, se fait en mer continuellement. Plus on s'éloigne d'un objet fixe A élevé au dessus de la surface de la mer, plus la hauteur apparente d'A de cet objet diminue; et il vient un moment où il cesse d'être visible. Cela indique que la surface de la mer a une forme sphérique.



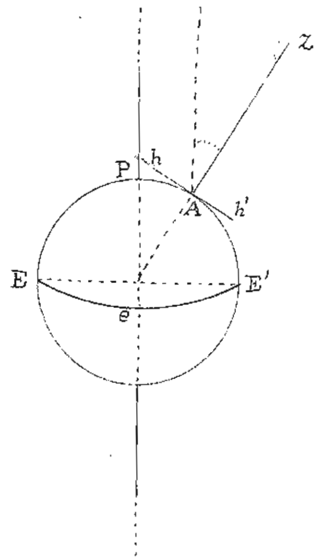
Pareillement, quand un navire s'éloigne du port, un spectateur placé en S le voit pendant un certain temps dans toute sa hauteur ab; mais il arrive un moment où sa base *a* n'est plus visible, et où le spectateur n'en aperçoit plus que la partie supérieure a'b; cette partie visible va toujours en diminuant, et bientôt le navire entier disparait.



Les éclipses de lune offrent encore une preuve de la rondeur de la terre. Car le cône d'ombre projeté par la terre sur la lune produit sur le disque de celle-ci une ligne de séparation d'ombre et de lumière qui a la forme circulaire. Ce qui indique que la terre elle-même a la forme d'un corps rond.

Définitions. Horizon. — Parallèles terrestres. — Equateur. — Pôles de la terre. — Méridiennes.

Les distances des étoiles à la terre sont tellement grandes, que, quelle que soit la position de la terre dans l'intérieur de la sphère céleste, nous pouvons la regarder comme placée au centre même de la sphère.



Si en un point A de la terre, on détermine la direction AZ que prend le fil à plomb, le plan hh' perpendiculaire à cette direction est ce qu'on nomme l'*horizon* du lieu A; et la droite AZ est dite la *verticale* de ce lieu.

L'angle que la verticale fait avec l'*équateur céleste* s'appelle la *latitude* du lieu: Cet angle est égal à la *hauteur du pôle au dessus de l'horizon*.

On appelle *parallèles terrestres* des courbes tracées sur la surface de la terre, de manière que tous les points de chacune d'elles aient la même latitude. Il suit de cette définition, que la latitude d'un lieu est égale à la déclinaison de l'étoile qui se trouve à son zénit. Et cette étoile, dans son mouvement diurne, passera au zénit de tous les autres points du parallèle sur lequel ce point est situé.

Les points dont la latitude est nulle sont ceux où les verticales sont parallèles au plan de l'équateur céleste; Ces points forment une courbe qu'on nomme <u>équateur terrestre</u>.

Il existe à la surface de la terre, deux points, où la verticale est parallèle à l'axe du monde. Ces points s'appellent les <u>pôles</u> de la terre. Ce sont les <u>limites des parallèles</u>.

Nous avons appelé méridien céleste en un lieu A de la terre, le plan déterminé par la verticale et une parallèle à l'axe du monde. Concevons toutes les normales à la surface de la terre parallèles à ce méridien céleste, leurs pieds forment une courbe qu'on appelle la méridienne du lieu A. Cette courbe serait la ligne de contact du cylindre circonscrit à la surface de la terre, qui aurait ses arêtes perpendiculaires au méridien céleste du lieu A.

En chaque point B de cette courbe, le méridien céleste est parallèle au méridien céleste du premier lieu A. Car il passe par deux droites parallèles à ce plan; ces deux droites sont la verticale du lieu B et une parallèle à l'axe du monde. Il s'ensuit

que la méridienne d'un lieu A est aussi la méridienne de chacun des autres points de cette courbe.

Puisque les méridiens célestes de tous les points d'une méridienne sont des plans parallèles entre eux, une étoile située dans un de ces plans peut être considérée, à cause de sa distance infiniment grande, comme se trouvant au même moment dans tous les autres. On peut donc donner cette seconde définition de la <u>méridienne</u>: c'est le lieu des points de la terre pour lesquels des observateurs voient une même étoile passer au même instant à leurs méridiens célestes respectifs.

Système de coordonnées sur la surface de la Terre. Chaque point de la terre se détermine au moyen de deux coordonnées, dont l'une est la <u>latitude</u>, et l'autre, l'angle que le méridien céleste qui passe par ce point, fait avec un autre méridien céleste fixe, pris pour origine; cet angle s'appelle <u>longitude</u>.

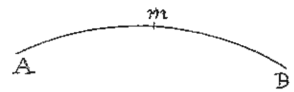
Mesure de la latitude. La latitude d'un point de la terre est égale à la hauteur du pôle au dessus de l'horizon. Nous avons vu comment on détermine cette hauteur par l'observation des deux passages d'une étoile au méridien, ou d'un seul passage, si l'on connait la distance de l'étoile à l'axe du monde.

Mesure de la longitude. 1ère manière. Supposons que l'on possède dans le lieu dont on veut déterminer la longitude, un chronomètre, avec lequel on a déterminé primitivement, dans le lieu pris pour origine des longitudes, l'heure du passage d'une étoile au méridien de ce lieu; on observe, avec ce chronomètre, l'heure du passage de la même étoile au méridien du nouveau lieu. La différence de ces temps convertie en degrés, à raison de 15° pour une heure sidérale, exprime la longitude du lieu. De sorte que cette longitude est $15^\circ (h'-h)$, h et h' étant les heures marquées par le chronomètre au moment du passage de l'étoile aux méridiens de ces deux lieux.

Ce procédé exige que le chronomètre ait une marche très exacte, au moins pendant le temps nécessaire pour se transporter d'un lieu dans l'autre. Le procédé suivant où l'on fait encore usage de chronomètres n'exige pas, néanmoins, une grande précision dans leur marche, parcequ'ils ne serviront qu'à marquer des intervalles de temps assez courts.

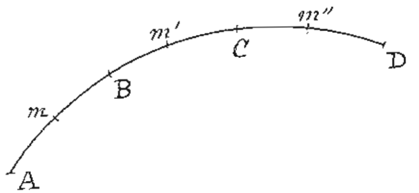
2e Manière; au moyen de feux. Deux observateurs sont placés dans les deux lieux A et B dont on veut déterminer la différence des longitudes; ils possèdent deux chronomètres réglés, respectivement, sur le passage d'une même étoile au méridien de chaque lieu; c'est-à-dire que le chronomètre de l'observateur en A marque 0h. 0'. 0", au moment du

passage d'une certaine étoile au méridien de ce lieu, et que le chronomètre de l'observateur en B marque de même 0h. 0'. 0" au moment du passage de la même étoile au méridien de ce lieu B. A un certain moment convenu auquel les deux observateurs doivent se tenir attentifs, on allume un feu instantané avec de la poudre, ou bien une



fusée, en un point m compris entre A et B et visible de ces deux lieux; les deux observateurs notent sur leurs chronomètres l'instant précis de l'apparition de ce signal; et les heures notées h, h' font connaître la différence de longitude des deux lieux; laquelle est $15^\circ (h'-h)$. Car les distances de l'étoile aux méridiens de ces lieux, au moment du signal, sont $15^\circ h$ et $15^\circ h'$; et par conséquent leur différence $15^\circ (h'-h)$ est la distance entre les deux méridiens.

Ce procédé ne peut être employé que quand la distance AB n'excède pas 10 à 15 lieues, afin que le signal en m puisse être aperçu distinctement. Quand la distance AB est plus considérable, on établit plusieurs observateurs en des stations intermédiaires; et au moyen de feux on opère comme pour déterminer la différence des longitudes de deux stations consécutives. Ainsi soient A, D les deux points extrêmes et B C deux stations intermédiaires. A un instant convenu on produira un feu en m; les observateurs en A et B noteront sur leurs chronomètres les heures h et h'.



A un autre moment aura lieu un signal en $\underline{m'}$; les chronomètres en B et C marqueront alors $h'+\varepsilon$, et h''; enfin à un 3e moment, un feu apparaîtra en $\underline{m''}$; et les chronomètres en C et D marqueront à ce moment $h''+\varepsilon'$ et h'''. La différence des longitudes des deux lieux extrêmes A et D sera $15^\circ\left[(h'''-h)-(\varepsilon+\varepsilon')\right]$.

En effet la distance en longitude des deux lieux A et B est $15^\circ(h'-h)$; celle des deux lieux B et C est $15^\circ(h''-(h'+\varepsilon))$; et celle des deux lieux C et D $15^\circ(h'''-(h''+\varepsilon'))$. La distance totale des deux lieux A et D est donc

$$15^\circ\left[(h'-h)+h''-(h'+\varepsilon)-h'''-(h''+\varepsilon')\right]=15^\circ\left[(h'''-h)-(\varepsilon+\varepsilon')\right].$$

Quand dans le cours des opérations relatives à la mesure des longitudes un phénomène céleste tel qu'une éclipse, doit avoir lieu, on s'en sert comme signal : et alors on détermine par cette seule observation, la différence de longitude de deux lieux de la terre très distants l'un de l'autre. Il suffit que le phénomène soit aperçu de ces deux lieux.

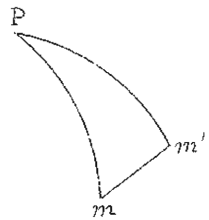
Les astronomes possèdent des méthodes plus exactes, pour déterminer les longitudes, notamment en mer, par l'observation des mouvements célestes. Nous les ferons connaître

plus tard. Nous ne parlons ici que des procédés en usage dans les opérations géodésiques. (*)

Calcul de l'angle formé par les verticales en deux lieux de la terre.

On mesure cet angle par l'arc compris sur la voute céleste entre les deux verticales.

Soient $m\,m'$ les points où ces deux verticales vont rencontrer la voute céleste. Qu'on mène par ces points



les arcs de grands cercles qui passent par les pôles célestes, on formera le triangle mPm' dans lequel les côtés mP, $m'P$ sont connus comme étant le complément de la latitude des deux lieux de la terre ; l'angle mPm' est aussi connu comme étant la différence des longitudes des deux lieux. Le côté $m\,m'$ sera donc déterminé par la formule

$$\cos mm' = \cos mP \cos m'P + \sin mP \sin m'P \cos P\,;$$

ou, en appelant φ l'angle des verticales, λ, λ' les latitudes des deux points de la terre, et L, L' leurs longitudes,

$$\cos\varphi = \sin\lambda \sin\lambda' + \cos\lambda \cos\lambda' \cos(L'-L).$$

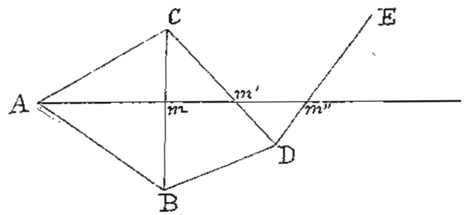
(*) On conçoit que les télégraphes électriques offriront un moyen beaucoup plus exact que la méthode des feux, pour déterminer la longitude relative des deux stations extrêmes, puisque le courant électrique produit à une station se manifeste à l'autre, avec une rapidité telle, qu'on peut dire que le phénomène est instantané.

Mesure de la longueur d'une ligne sur la surface de la terre. — Triangulation. La mesure d'une ligne indiquée sur la surface de la terre par des points marqués de distance en distance sur sa direction, peut rarement s'effectuer directement, au moyen de chaines ou de règles portées bout à bout, à cause des obstacles, tels que les montagnes et les cavités qui s'opposent au tracé effectif de la ligne: et lors même que ce tracé pourrait se faire, sa mesure directe serait toujours une opération très délicate et sujette à erreur. On a donc cherché à effectuer cette mesure d'une autre manière; on la calcule par des procédés trigonométriques, dans lesquels on n'a à mesurer directement que des angles, ce qui se fait avec une grande précision par le cercle répétiteur. Pour cela on forme une série de triangles dont on connait les éléments et qu'on dirige de manière qu'ils soient traversés par la ligne qu'on veut mesurer. On calcule trigonométriquement les segments de cette ligne compris dans les triangles, et l'on en conclut la longueur de la ligne.

Pour déterminer les éléments des triangles, il suffit de connaître une base prise arbitrairement et dont on aura mesuré la longueur à la manière ordinaire, en portant, des règles bout à bout, et en ayant soin de tenir compte des variations de longueur de ces règles, causées par les changements de température. Après que cette base est connue exactement, on n'a plus que des angles à mesurer, et des calculs trigonométriques à effectuer, pour résoudre tous

les triangles auxiliaires, et déterminer la longueur des segments qu'ils interceptent sur la ligne qu'on se propose de mesurer. L'ensemble des triangles ainsi tracés forme une triangulation ou un canevas trigonométrique.

Soit $Amm'm''$.... la ligne qu'on veut mesurer:

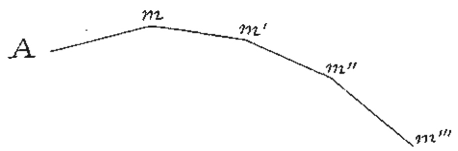


supposons que la partie de la surface de la terre sur laquelle se fera la triangulation soit plane; nous dirons ensuite comment on opère pour tenir compte de la courbure de la terre. On mesurera directement avec beaucoup de soin, une base AB. Des points A, B on dirigera deux rayons visuels sur un 3^e^ point C, choisi de manière qu'on puisse le prendre ensuite pour station. On mesurera les deux angles en A et B; ils serviront avec la base AB, à calculer les côtés CA, CB. Du point A on mesurera, au cercle répétiteur, l'angle mAC. On connaitra l'angle C, soit par une mesure directe, soit par la relation $C = 200 - A - B$. Le triangle CAm sera donc déterminé et servira à calculer le segment Am. On calculera de plus le côté Cm et l'angle en m.

Des points C et B on visera un point D qui puisse être pris ensuite pour station. On connaitra le côté CB et les angles adjacents du triangle CBD. On calculera le côté CD. On connait le côté Cm et les angles adjacents du triangle Cmm';

on en conclura les côtés $m m'$, $C m'$ et l'angle en m'; et ainsi de suite. De sorte qu'après avoir mesuré directement la base AB, on n'aura plus que des angles à mesurer directement, pour calculer les segments Am, mm', $m'm''$, ... dont la somme forme la longueur de la ligne qu'on s'est proposé de mesurer.

Tracé de la ligne la plus courte d'un point à un autre sur la surface de la terre. On sait que la ligne la plus courte entre deux points sur une surface courbe jouit de cette propriété caracteristique, que ses plans osculateurs sont normaux à la surface. Pour tracer une telle ligne à partir d'un point A, dans une direction déterminée Am, on prend sur cette direction un point <u>m</u> assez rapproché du point A, et l'on regarde le segment Am comme un arc



de la ligne cherchée. On se transporte en <u>m</u> et l'on détermine le plan qui passe par la verticale en ce point, et par l'arc mA; sa trace au delà de ce point détermine un 2e arc mm' de la ligne cherchée; et ainsi de suite. Il résulte de cette construction que le plan des deux arcs $m'm$, $m'm''$, pris de part et d'autre d'un point <u>m'</u>, lequel est le plan osculateur de la ligne $A m m' m''$..... en m', passe par la verticale en ce point; ce plan est donc normal à la surface de la terre. Ce qui prouve que la ligne est la plus courte qu'on puisse mener entre ses deux points extrêmes m, m''.

Une ligne ainsi tracée sur la surface de la terre s'appelle <u>ligne géodésique</u>.

Pour déterminer sur le terrain les directions des segments $m m'$, $m'm''$, ... on se sert du théodolite ou du cercle répétiteur. Après qu'on a tracé le premier segment Am dans la direction donnée, on transporte l'instrument en <u>m</u>; on le place de manière que son axe soit parfaitement vertical, ainsi que le limbe de la lunette. On dirige la lunette sur le point A ou sur une mire placée sur la verticale élevée en A; puis on fixe le limbe dans cette direction, et on fait tourner la lunette de manière à la diriger vers un objet tel que m', situé dans le prolongement du plan vertical du limbe. On détermine ainsi la direction du segment $m m'$. Pour déterminer la direction du segment $m'm''$, on transporte l'instrument en <u>m'</u> et l'on opère de même. Et ainsi de suite.

Tracé de la Méridienne. La méridienne d'un lieu se trace suivant le procédé que nous venons de décrire. On dirige, au point de départ, le premier segment Am dans le plan du méridien céleste et on détermine les segments consécutifs mm', $m'm''$, ... comme il vient d'être dit. La ligne ainsi tracée n'est pas rigoureusement la méridienne véritable, c'est-à-dire la courbe lieu des points où les normales seraient toutes parallèles au méridien céleste du lieu A; elle peut en différer un peu. Mais la différence est si petite qu'on la néglige, et qu'on prend une courbe pour l'autre.

Détermination approximative de la forme et des dimensions de la terre. Si l'on mesure différents segments d'une ligne géodésique $Amm'\ldots$, et qu'on cherche la grandeur de l'angle que font entr'elles les verticales menées aux deux extrémités de chaque segment, on trouve que le segment est sensiblement proportionnel à cet angle; c'est-à-dire qu'on a $Am = R\varphi$; $Am' = R\varphi'$; $Am'' = R\varphi''\ldots$; $\varphi, \varphi', \varphi''\ldots$ étant les angles que les verticales en $m, m', m'',\ldots$ font avec la verticale en A; et R un coefficient constant. Cela indique que la ligne $Amm'\ldots$ est sensiblement un cercle; et comme elle a une direction quelconque sur la terre, on en conclut que la surface de la terre est sensiblement sphérique.

Le rayon de la terre sera égal au rapport $\frac{Am}{\varphi}$. Les mesures géodésiques ne donnent pas toutes la même valeur pour ce rapport, parceque la terre n'est pas absolument sphérique, ainsi que nous le verrons bientôt. On trouve pour valeur moyenne $R = 6360000$ mètres. C'est donc une valeur moyenne du rayon de la terre.

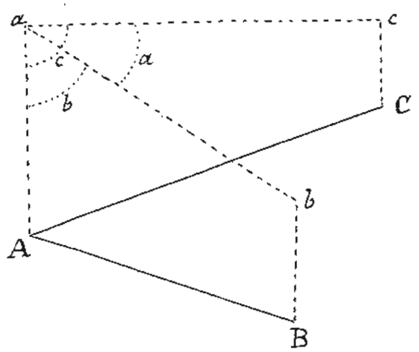
On sait que pour calculer numériquement le rapport $\frac{Am}{\varphi}$ il faut faire choix d'une unité angulaire, et que si l'on prend la seconde pour cette unité, c'est l'expression $R = \frac{Am}{\varphi \sin 1''}$ qui détermine la valeur du rayon R; φ étant un nombre abstrait

qui exprime combien l'angle φ contient de secondes.

De la mesure des angles tracés sur la surface de la terre. Ces angles se déterminent de deux manières: par l'observation seule, au moyen du Théodolite; ou bien par l'observation et le calcul, au moyen du cercle répétiteur.

Par le Théodolite. On place l'instrument au sommet de l'angle qu'on veut mesurer, et l'on donne à son axe une position parfaitement verticale. On dirige successivement le limbe vertical dans la direction des deux côtés de l'angle, c'est-à-dire qu'on vise avec la lunette deux objets situés dans ces directions; et l'angle azimutal décrit sur le limbe horizontal par l'index mobile, est l'angle qu'on veut connaître.

Par le cercle répétiteur. Avec le cercle répétiteur, ce n'est pas l'angle à mesurer qu'on détermine directement, c'est l'angle des deux rayons menés d'un point élevé au dessus de la surface de la terre, à deux autres points qui peuvent être placés soit sur les côtés mêmes de l'angle qu'on veut mesurer, soit sur des verticales élevées en deux points de ces côtés. Dans tous les cas, l'angle BAC, tracé sur la surface de la terre est la projection de l'angle bac observé avec le cercle répétiteur. Il faut donc calculer l'angle cherché en fonction de l'angle observé. Pour cela on ne se borne pas à observer



l'angle bac ; on observe aussi les angles que les rayons visuels ab, ac font avec la verticale aA ; de sorte qu'on connait les trois angles plans de l'angle trièdre qui a son sommet en *a*. L'angle cherché BAC est l'angle dièdre formé par les deux faces baA ; caA. Il se déterminera donc par la formule

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}.$$

ou plutôt, comme les angles b et c sont toujours très peu différents de 90°, on se sert de la méthode abrégée que nous avons donnée pour ce cas dans la trigonométrie. On fait

$$A = \alpha + x \; ; \; b = 90° + \beta \; ; \; c = 90° + \gamma .$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = p \; ; \; \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = q \; ;$$

et l'on détermine x par la formule

$$x = p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha . \sin 1'' - q^2 \cot \tfrac{1}{2} \alpha . \sin 1''.$$

Le calcul de l'angle BAC, en fonction de l'angle observé bac, s'appelle *réduction d'un angle à l'horizon*.

Du calcul des triangles géodésiques. La terre étant sensiblement sphérique, les cotés des triangles géodésiques sont sensiblement des arcs de grands cercles, et conséquemment ces triangles peuvent être traités comme des triangles sphériques. De sorte que les formules générales de

la trigonométrie sphérique leur sont applicables. En outre, les côtés étant toujours très petits par rapport au rayon de la terre, leur résolution se ramène à celle des triangles rectilignes, au moyen du théorème de Legendre.

Cette méthode abrégée est d'une grande exactitude. Delambre et Mechain s'en sont servis pour tous leurs calculs de triangles dans la mesure du méridien.

Le plus grand triangle qu'on ait eu à calculer se trouve sur le territoire espagnol ; il a été observé de nuit par Mrs Biot et Arago. L'*excès sphérique* est de 39'', et le côté connu, de 56 509,04 toises. Le calcul du côté cherché par le théorème de Legendre a donné 82 555,62 toises ; et en résolvant le triangle sphérique par la méthode ordinaire, Mr Puissant a trouvé 82 555,64 toises. La différence n'est donc que de 2 centièmes de toise ; différence presque insensible.

Figure ellipsoïdale de la Terre. — — Aplatissement aux pôles.

Si la mesure de quelques lignes géodésiques a indiqué, comme nous l'avons dit, que la terre a une forme sphérique, néanmoins quelques mesures plus précises, ou quelques autres résultats, ont prouvé que cela n'est pas rigoureusement vrai. Dès lors on a dû penser à la forme ellipsoïdale, et naturellement on a dû croire que l'équateur serait une des sections principales de l'ellipsoïde, et la ligne des pôles, un de ses axes principaux; il a paru probable que l'ellipsoïde serait de révolution autour de cet axe. Mais sera-t-il aplati ou allongé? Cette question a été longtemps indécise. Voici comment on l'a résolue.

On a observé que dans l'ellipse, le rayon de courbure a sa plus grande longueur au sommet du petit axe, et qu'il diminue jusqu'au sommet du grand axe; ce qui prouve que l'arc d'ellipse compris entre deux normales faisant entr'elles un angle donné, est d'autant plus grand, que cet arc est plus rapproché de l'extrémité du petit axe. Il résulte de là que, si la terre est aplatie aux pôles, un arc du méridien, un arc d'un degré par exemple, c'est-à-dire un arc compris entre deux points où les verticales font entr'elles un angle d'un degré, aura plus de longueur au pôle qu'à l'équateur; et en général, augmentera de longueur quand on ira de l'équateur vers le pôle. Ce sera le contraire, si la terre est un ellipsoïde de révolution allongé. Pour résoudre la question de la forme de la terre, il suffisait donc de mesurer sur un méridien deux arcs d'un degré, l'un rapproché de l'équateur, et l'autre du pôle. C'est ce que l'on a fait; et l'on a reconnu que l'arc voisin du pôle est plus grand que l'arc voisin de l'équateur; d'où l'on a conclu que la terre est aplatie à ses pôles; ou qu'elle a la forme

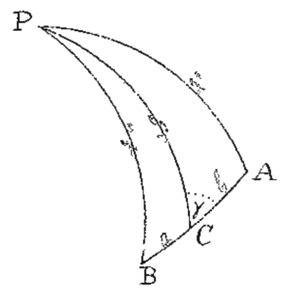
d'un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe.

Détermination d'un arc d'un degré, sur un méridien. Nous venons de dire qu'un arc d'un degré est celui dont les verticales extrêmes font entr'elles un angle d'un degré. Ces verticales sont dans un même plan perpendiculaire à l'équateur, conséquemment l'angle qu'elles comprennent entre elles est égal à la différence des angles qu'elles font avec l'équateur, c'est-à-dire, à la différence des latitudes des 2 points extrêmes de l'axe. Ainsi un arc d'un degré sur un méridien est celui dont les extrémités diffèrent d'un degré en latitude. Quand l'origine de l'arc est donné, il faut donc, après avoir déterminé la latitude de ce 1.er point, chercher par tâtonnement sur le méridien un 2.e point dont la latitude diffère de cette première, d'un degré.

La latitude d'un lieu se détermine par l'observation de la hauteur du pôle au dessus de l'horizon; observation qui se fait dans le lieu même. Mais il peut arriver que ce lieu soit inaccessible. Voici comment alors on opère.

Calcul de la latitude d'un lieu inaccessible.

Soit C ce lieu. Nous supposons que l'on connaît ses distances à deux points A, B, situés sur une même ligne géodésique passant par ce point et dont les latitudes sont connues. Ces points sont, par exemple, deux sommets de la triangulation qui a servi à mesurer le méridien et à déterminer la position du point C. Le calcul de la latitude de ce point repose sur ce théorème de trigonométrie sphérique :



Théorème. Quand trois arcs de grands cercles issus d'un même point P se terminent à un 4e arc de grand cercle, en trois points A, B, C, on a entre ces arcs et les segments qu'ils interceptent sur le 4e la relation :

$$\sin AB \cos PC = \sin BC \cos PA + \sin AC \cos PB.$$

En effet, les arcs PA et PB ont pour expression de leurs cosinus dans les deux triangles PCA, PCB, respectivement.

$$\cos PA = \cos PC \cos AC + \sin PC \sin AC \cos \gamma.$$

$$\cos PB = \cos PC \cos BC - \sin PC \sin BC \cos \gamma.$$

Qu'on multiplie la 1ère équation par $\sin BC$ et la 2e par $\sin AC$, et qu'on les ajoute membre à membre, pour éliminer $\cos \gamma$, on a

$$\cos PA \sin BC + \cos PB \sin AC = \cos PC(\cos AC \sin BC + \cos BC \sin AC).$$

$$= \cos PC \sin(AC + BC)$$

$$= \cos PC \sin AB.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que le point P soit un des pôles de la terre ; les latitudes $\lambda, \lambda', \lambda''$ des trois points C, A, B seront les compléments des arcs PC, PA, PB ; faisons $BC = a$ et $AC = b$, notre équation devient

$$\sin \lambda \sin(a+b) = \sin \lambda' \sin a + \sin \lambda'' \sin b.$$

d'où

$$\sin \lambda = \frac{\sin \lambda' \sin a + \sin \lambda'' \sin b}{\sin(a+b)}.$$

Telle est l'expression exacte de la latitude cherchée. Comme les arcs a et b sont toujours très petits par rapport au rayon de la terre, ainsi que l'arc $(a+b)$, on substitue ces arcs à leurs sinus, et la formule devient

$$\sin \lambda = \frac{a \sin \lambda' + b \sin \lambda''}{a+b}.$$

Tableau des principaux degrés d'arcs méridiens mesurés trigonométriquement.

Lieux des Observations.	Latitude moyenne.	Longueur du grade en mètres.	Noms des Observateurs.
Le Pérou.	0^g 0000.	99 552^m, 3.	Bouguer et Lacondamine.
L'inde.	12, 7778.	99 542, 7.	Lambton.
Cap de Bonne Espérance.	37, 0093.	100 052, 5.	Lacaille.
La Pensylvanie.	43, 5556.	99 789, 1.	Mason et Dixon.
L'Italie	47, 7963.	99 948, 7.	Boscovich et Lemaire.
La France.	51, 3327.	100 017, 9.	Delambre et Méchain.
L'Angleterre.	58, 4074.	100 100, 7.	Mudge.
La Suede.	73, 7037.	100 322, 7.	Melanderhiem et Svanberg.

Ce tableau prouve bien que la terre est aplatie aux pôles.

Les Latitudes moyennes sont celles des points milieux des arcs mesurés. Toutes les opérations ont été faites dans l'hémisphère boréal excepté celle du cap de Bonne Espérance. Celle du Pérou appartient aux deux hemisphères.

La comparaison des divers degrés mesurés, prouve que les méridiens diffèrent un peu entr'eux, et que la terre n'est pas exactement de revolution."

Voici le tableau des mesures exécutées sur différents degrés d'un même méridien, celui de Paris, lequel traverse la France depuis Dunkerque jusqu'à la frontière d'Espagne. Les opérations ont été faites en France par Delambre et Méchain, en Angleterre par le major général Roy, et en Espagne, jusqu'à l'île de Formentera, par Mrs Biot et Arago.

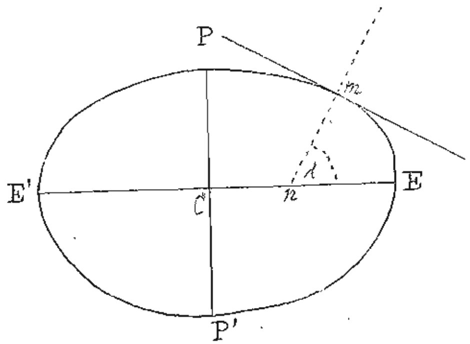
	Latitudes.	Intervalles.	Degrés en toises.	Diminution par degré.
Greenwich..	51°, 28', 40"	0° 26'. 31".	57097t, 22.	
Dunkerque...	51, 2, 8.	2, 11, 19.	57087, 70.	7t, 23.
Panthéon..	48, 50, 49.	2, 40, 6.	57069, 31.	8, 41.
Evaux...	46, 10, 42.	2, 57, 48.	56977, 80.	32, 40.
Carcassonne..	43, 12, 54.	1, 51, 7.	56960, 46.	9, 36.
Mont Jouy..	41, 21, 46.	2, 41, 50.	55946, 89.	5, 03.
Formentera.	38, 39, 56.			

On remarque une grande différence dans la diminution des longueurs des degrés. Si le méridien était parfaitement elliptique, la diminution serait de 10 toises environ par degré. Elle est donc ici trop faible aux extrémités de l'arc mesuré, et trop forte en son milieu. Cela prouve que le méridien n'est pas exactement elliptique.

Mesure des dimensions et de l'aplatissement de la terre, supposée un ellipsoïde de révolution.

Quoique les mesures que nous venons de rapporter tendent à prouver que la terre n'est pas bien exactement un ellipsoïde de révolution, néanmoins on la considère comme ayant cette forme, parce qu'elle n'en diffère pas beaucoup. Dans cette hypothèse, on traite théoriquement différentes questions de géodésie.

La plus importante est celle des dimensions et de l'aplatissement de la terre. L'aplatissement dépend de la différence des rayons qui aboutissent à l'équateur et aux pôles; et ce qu'on entend précisément par l'aplatissement de la terre, c'est le rapport de cette



différence, au rayon de l'équateur. Soit EPE'P' l'ellipse qui nous représente un méridien; son grand axe EE' est le diamètre de l'équateur, et son petit axe PP', l'axe des pôles. L'aplatissement de la terre est le rapport $\dfrac{CE - CP}{CE}$.

Nous nous proposons de déterminer les dimensions de cette ellipse, c'est-à-dire son grand et son petit axe. On en conclura l'aplatissement.

Pour résoudre cette question nous allons chercher l'expression de la longueur d'un arc d'ellipse dont les extrémités sont déterminées par les angles que les normales en ces points font avec le grand axe. Ces angles seront, sur la terre, les latitudes; de sorte que nous aurons l'expression de la longueur d'un arc du méridien terrestre, en fonction des latitudes des extrémités de cet arc. Cette expression contiendra deux inconnues, savoir, les deux axes de l'ellipse qui forme le méridien terrestre. Et par la mesure directe sur le terrain, de deux arcs différents, on déterminera ces deux inconnues.

Expression de l'arc d'ellipse. Soit $CE = a$, et $CP = b$; l'équation de l'ellipse sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On peut exprimer les deux coordonnées de chaque point de la courbe, en fonction d'un angle φ, qui sera une variable indépendante, en faisant

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi.$$

Soit s un arc de la courbe et ds son élément différentiel; on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

ou

$$ds = d\varphi\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}.$$

Faisons $a^2 - b^2 = a^2e^2$; de sorte que e sera le rapport de l'excentricité au demi grand axe; il vient

$$ds = a\, d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Il faut, à la place de l'angle φ, introduire l'angle λ que la normale au point m fait avec l'axe des x ou CE. On a, comme on sait,

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi};$$

ou

$$(\alpha) \ldots\ldots \operatorname{tang}\lambda \cdot \operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}.$$

De là on tire

$$\sin\varphi = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}, \quad \cos\varphi = \frac{\sin\lambda\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}.$$

d'où

$$\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}$$

Et en différentiant l'équation (α),

$$\operatorname{tang}\varphi\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} + \operatorname{tang}\lambda\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 0.$$

d'où

$$d\varphi = -\frac{a}{b}\, d\lambda\, \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\lambda} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\lambda}\, d\lambda.$$

On a donc

$$ds = \frac{a(1-e^2)\, d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

Telle est la relation entre l'élément différentiel de l'arc d'ellipse, et l'angle que la normale à cet élément fait avec le grand axe CE.

Il faut intégrer cette expression de ds.

Ecrivons

$$ds = a(1-e^2)\,d\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$$

Développant le binome et négligeant la 4^e^ puissance de e, qui, étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, est une quantité très petite, on a

$$ds = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\lambda\right)d\lambda.$$

or

$$\sin^2\lambda = \frac{1-\cos 2\lambda}{2}$$

il vient

$$ds = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos 2\lambda\right)d\lambda$$

ou, en négligeant les termes en e^4,

$$ds = a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)d\lambda - \frac{3}{4}\,a e^2\cos 2\lambda\,d\lambda.$$

Intégrant,

$$s = a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\lambda - \frac{3}{8}\,a e^2\sin 2\lambda + C.$$

Soient λ, λ' les latitudes des extrémités de l'arc s, on aura

$$s = a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)(\lambda'-\lambda) - \frac{3}{8}\,a e^2(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda)$$

$$(1)\cdots\quad s = a\left(1-\frac{e^2}{4}\right)(\lambda'-\lambda) - \frac{3}{4}\,a e^2\sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda'+\lambda).$$

Si l'axe EE représente l'équateur, les angles λ, λ' seront les <u>latitudes</u> des extrémités de l'arc s de sorte que la valeur de s est l'expression générale de la longueur d'un arc du méridien, dont les extrémités sont déterminées par leurs latitudes.

Arc d'un degré. Si l'arc s est d'un degré,

on aura $\lambda'-\lambda = 1°$. Cet angle est assez petit pour que, à la place de son sinus, on substitue l'arc correspondant, lequel est égal à $\frac{\pi}{180}$. Nous remplacerons donc $\sin(\lambda'-\lambda)$ par $\frac{\pi}{180}$. faisons $\frac{\lambda'+\lambda}{2} = L$ qui sera la <u>latitude moyenne</u> de l'arc s; il vient

$$s = \frac{a\pi}{180}\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}e^2\cos 2L\right).$$

ou en remplaçant $\cos 2L$ par $1-2\sin^2 L$,

$$s = \frac{a\pi}{180}(1-e^2) + \frac{3}{2}\,\frac{a\pi}{180}\,e^2\sin^2 L.$$

Voilà l'expression de l'arc d'un degré, à une latitude moyenne L.

A l'équateur on a $L=0$, et la longueur de l'arc d'un degré se réduit à

$$\sigma = \frac{a\pi}{180}(1-e^2);$$

L'expression générale de s devient

$$s = \sigma + \frac{3}{2}\,\frac{a\pi}{180}\,e^2\sin^2 L.$$

Ainsi, <u>à partir de l'équateur, l'arc d'un degré augmente proportionnellement au carré du sinus de la latitude moyenne.</u>

Mesure de la grandeur et de l'aplatissement de la Terre. La grandeur et l'aplatissement de la terre dépendent des deux quantités <u>a</u> et <u>e</u>. Pour déterminer ces deux quantités, il suffit de connaître la longueur de deux arcs d'un degré pris à des latitudes différentes. En effet, soient S, S' ces deux arcs, L, L' leurs latitudes moyennes, on a les deux équations

$$S = \frac{a\pi}{180}\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L\right),$$

$$S' = \frac{a\pi}{180}\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L'\right).$$

qui servent à déterminer les deux inconnues a et e. Eliminant a, on a

$$\frac{S'}{S} = \frac{1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L'}{1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} e^2 \cos 2L}$$

d'où l'on tire

$$e = \frac{2\sqrt{S'-S}}{\sqrt{(S'-S) + 3(S'\cos 2L - S\cos 2L')}}$$

substituant cette valeur de e dans l'une des deux équations, on en tire la valeur de a.

On a trouvé de la sorte $e = 0^{\text{toise}},077456$; et $a = 3271366$ toises; c'est le rayon de l'équateur.

L'aplatissement est

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2},$$

ou, en négligeant les puissances supérieures de e, $\alpha = \frac{1}{2} e^2$; et mettant pour e sa valeur, $\alpha = \frac{1}{333}$.

Tel est l'aplatissement de la terre; cela signifie que si le rayon de l'équateur est supposé égal à 333; le rayon qui va au pôle sera égal à 332.

Par d'autres considérations on trouve des

résultats un peu différents. La théorie du pendule, dont nous parlerons plus tard, donne $\frac{1}{280}$; et la théorie de la lune $\frac{1}{320}$.

Mesure du quart du méridien. Qu'on fasse dans l'équation (1) ci dessus $\lambda = 0$ et $\lambda' = 90°$; on aura pour le quart du méridien

$$S = a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) 90° = a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{8}\left(4 - e^2\right).$$

$$S = \frac{a\pi}{8}(2+e)(2-e) = 5130938 \text{ toises}.$$

Longueur du mètre. On a pris pour le mètre la dix-millionième partie du quart du méridien; c'est donc $0^{\text{toise}},5130938 = 443^{\text{lignes}},30 = 3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},30$.

Remarque sur les éléments empruntés de l'observation pour la mesure du méridien. D'après l'ensemble des opérations que nous avons indiquées comme ayant été exécutées pour la mesure du méridien, on voit que les éléments du calcul empruntés de l'observation sont :

1° Une base principale mesurée directement;

2° Les angles des triangles du canevas trigonométrique; ces angles étant observés directement au théodolite, ou bien calculés, ainsi que cela s'est fait, au moyen des angles plans observés au cercle répétiteur et réduits à l'horizon.

3° L'angle azimutal du méridien avec la base principale ou une autre base calculée.

4° Enfin les latitudes des points extrêmes.

A ces éléments, déterminés par l'observation et la mesure manuelle, il faut ajouter la mesure directe d'une base finale, qui est un côté du dernier triangle, et l'observation de l'angle que ce côté fait avec le méridien. Ces deux éléments ont été déterminés par le calcul dans la série des triangles; mais on les détermine aussi directement, comme moyen de vérification des opérations.

Notice historique sur la mesure de la terre. (non exigé).

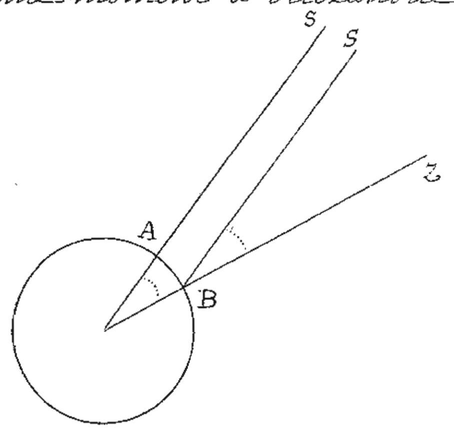
La figure de la terre donne lieu à deux questions distinctes, savoir, de déterminer <u>la forme</u> de la terre et de déterminer <u>sa grandeur</u>. Dès la plus haute antiquité, on s'est occupé de la seconde question; mais la première n'a été soulevée que vers la fin du 17e siècle, par Huygens et Newton. Jusque-là on avait regardé la terre comme sphérique, et ce furent ces deux grands géomètres qui émirent, les premiers, une idée contraire, en pensant que la terre devait être un ellipsoïde de révolution aplati à ses pôles.

Voici l'indication succincte des documents anciens qui nous restent sur la grandeur de la terre et les moyens employés pour la déterminer.

<u>Aristote</u> dit, dans son traité du ciel, livre 2, que ceux qui s'efforcent de conjecturer la grandeur de

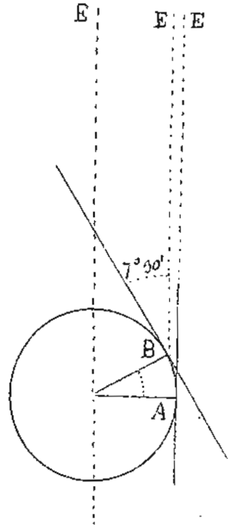
la terre, ne lui donnent guère que 400 000 stades de circonférence. Nous ne connaissons pas la valeur du stade. Ce passage prouve donc seulement qu'au temps d'Aristote, on avait déjà mesuré, plus ou moins bien, la grandeur de la terre.

276 ans avant J.C. <u>Eratostène</u> a mesuré un arc du méridien; son procédé est connu; il repose sur la détermination de la différence des latitudes de deux points du méridien, par l'observation de la hauteur du soleil au dessus de l'horizon, en ces lieux, en un même jour. Eratostène savait qu'à Syène, un certain jour de l'année (le jour du solstice), à midi, les puits étaient éclairés jusqu'au fond, et qu'un style vertical ne portait pas d'ombre; cela indiquait que le soleil était à ce moment au zénit de Syène. Mais au même moment à Alexandrie, Eratostène voyait le soleil à une distance zénitale de 7° 12'. Il en conclut, en supposant le soleil infiniment éloigné, que l'arc AB, distance des deux lieux d'observation, était lui-même de 7° 12', ou par approximation $\frac{360°}{50}$. Or, la distance de Syène à Alexandrie était estimée 5000 stades, Eratostène supposa que ces 5000 stades étaient comptés sur une ligne



droite dirigée suivant le méridien, quoiqu'il y eut près de 3° de longitude entre les deux lieux; et il en conclut que le degré était de 694 stades. et pour avoir un nombre rond pour le degré, il le fit de 700 stades et la circonférence de la terre de 252000 stades. C'est la mesure que beaucoup d'auteurs anciens et du moyen âge ont adoptée d'après Eratostène.

16 ans avant J. C. L'astronome Posidonius, le maître de Cicéron, suivit une autre méthode pour déterminer la différence des latitudes de deux lieux, supposés sur un même méridien; ce fut par l'observation des hauteurs d'une même étoile. Les deux lieux étaient Rhodes et Alexandrie, leur distance était estimée de 5000 stades comme celle d'Alexandrie à Syène. Canobus, belle étoile du vaisseau ne paraissait à Rhodes qu'à l'horizon, sans s'élever au dessus. A Alexandrie, elle s'élevait de 7°30' au dessus de l'horizon, à son passage au méridien. Posidonius en conclut que l'arc AB qui sépare Rhodes d'Alexandrie était lui même de 7°30' ou $\frac{360°}{48}$ et de l'équation



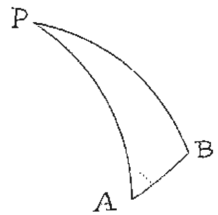
$$\text{arc}\ \frac{360°}{48} = 5000 \text{ stades},$$

il tira

$$\text{arc } 1° = 5000^{st.}\ \frac{48}{360} = 666 \text{ stades}.$$

Ainsi son degré était plus court que celui d'Eratostène, si toutefois son stade était le même; ce que nous ignorons.

125 ans après J. C. Ptolémée dit que pour mesurer le degré d'un arc terrestre, il n'est pas besoin de le prendre dans le méridien même, et qu'il suffit de savoir suivant quel angle, il est incliné au méridien et de connaître les latitudes de ses extrémités. En effet les arcs AP, BP qui joignent ces deux points au pôle, sont les compléments de ces latitudes; on a donc un triangle APB dans lequel on connait les côtés PA, PB et l'angle en A; on en conclut le 3e côté AB, lequel mesure l'angle que font les verticales aux deux extrémités de l'arc AB. Si donc on a mesuré cet arc on en conclut la longueur du degré. Ptolémée dit avoir fait cette opération, mais sans en donner le détail, et sans faire connaître comment il a déterminé la direction AB d'un lieu à l'autre, et mesuré l'angle A. Il dit simplement que, suivant les meilleures mesures, le degré est de 500 stades.



Voilà ce qui nous reste sur la mesure de la terre chez les Grecs. Les Arabes s'en sont aussi occupés.

Au 9e siècle, le Calife Almamoun, qui encourageait les sciences avec beaucoup d'ardeur, fit mesurer un degré du méridien dans les plaines de Singiar : les mathématiciens marchèrent, les uns vers le sud, les autres vers le nord, sur un même méridien, en mesurant la distance parcourue, et en calculant la différence de latitude par la hauteur du soleil : Ils trouvèrent le même résultat que Ptolémée. C'est principalement à trois frères, Mohamed, Ahmed et Hasen, fils de Musa ben Schaker, géomètres très célèbres, (*) qu'on attribue cette mesure d'un degré terrestre. Leur unité de mesure ne nous est pas connue; de sorte que l'on ne peut juger du degré de précision qu'ils obtinrent.

Jusqu'à la Renaissance, on ne trouve pas d'autre tentative sur la mesure de la terre.

(*) Ces trois mathématiciens ne doivent pas être confondus avec Mohamed ben Musa Alkoaresmi, géomètre qui leur fut un peu antérieur, et qui a joui d'une célébrité encore plus grande, comme auteur d'un traité d'Algèbre imité des Hindoux et composé à la demande du même Calife Almamoun. Cet ouvrage très renommé chez les Arabes, a été traduit au XII siècle (1183), et a contribué puissamment à répandre chez les Européens, la connaissance de l'algèbre appelée alors Algebra et Almucabala, (restauration et comparaison); à tel point qu'on regardait Mohamed ben Musa comme l'inventeur de cette science. Cette fausse notion historique, était encore répandue à la Renaissance, ainsi qu'on le voit dans les ouvrages de Cardan, de Tartalea et d'autres. Mais depuis, on a su que les Arabes, loin d'être les inventeurs de l'algèbre, avaient reçu cette science tour à la fois des Grecs et des Hindoux.

En 1550, Fernel, médecin et astronome, mesura l'arc du méridien compris entre Paris et Amiens, et trouva pour le degré 57 070 toises. Son procédé de mesure consista tout simplement à compter les tours de roue de sa voiture, (*) depuis Paris jusqu'au point où par l'observation de la hauteur du soleil, il jugea qu'il s'était avancé d'un degré vers le nord.

En 1616, Snellius célèbre géomètre hollandais, employa, le premier, les mesures trigonométriques combinées avec les observations astronomiques,

---

(*) Ce moyen aussi commode qu'expéditif, de mesurer de grandes distances, était employé par les Anciens. On le trouve décrit dans l'architecture de Vitruve, sous ce titre : « par quel moyen » on peut savoir, en allant en carosse ou dans un bateau, combien » on a fait de chemin » (Livre X ch. XIV). Vitruve dit que c'est une des choses les plus ingénieuses qui aient été transmises par les Anciens. Le procédé avait une certaine analogie avec le rouage de nos montres. Au moyen de roues dentées on faisait qu'une roue eût une vitesse de rotation en rapport avec celle des roues de la voiture, et beaucoup moindre. Celles-ci faisaient 400 tours pendant que l'autre n'en faisait qu'un. Cette roue portait à sa circonférence une ouverture, qui à chaque tour venait coincider avec l'ouverture d'un vase dans lequel étaient de petites boules. De sorte qu'à chaque tour de la roue une petite boule passait par cette ouverture et tombait dans un vase inférieur. La quantité de petites boules reçues ainsi pendant le mouvement de la voiture, dans le vase inférieur faisait connaitre le chemin parcouru.

Quelques modifications dans ce mécanisme le rendaient propre à mesurer le chemin parcouru en bateau.

pour déterminer la distance d'Alcmair à Berg-op-Zoom, et trouva le degré de 55021 toises; résultat très inexact en moins.

Quelque temps après, Norwood, en Angleterre, par un mélange des procédés de Fernel et de Snellius, et en évaluant les détours de la route, avec le graphomètre, trouva 57424 toises; mesure beaucoup plus forte.

En 1669, Picard par le même procédé trigonométrique, détermina avec une précision jusqu'alors inconnue, la distance de Malvoisine à Amiens, d'où il conclut 57060 toises pour le degré; résultat très exact, mais obtenu par la compensation de deux erreurs. D'une part sa toise était trop courte d'un millième; et d'autre part, dans ses calculs de latitude par l'observation des étoiles, il n'avait pas tenu compte de l'aberration et de la nutation qui n'étaient pas connues alors. Ce fut pour ces opérations que Picard et Auzout son collaborateur, substituèrent comme l'avait proposé Morin quelques années auparavant, la lunette astronomique aux alidades du quart de cercle pour la mesure des angles. Ils eurent soin aussi de calculer les réductions au centre des signaux; et ils prirent les distances au zénit avec un grand secteur construit tout exprès. Ces opérations qui reposaient sur tant de procédés nouveaux, firent beaucoup d'honneur à Picard qui les dirigeait. Elles sont le fondement des procédés actuels, et l'on n'a eu qu'à imiter et à perfectionner.

En 1683 Dominique Cassini continua le

travail de Picard, dans le but de mesurer tout l'arc du méridien qui traverse la France, arc de plus de 8°.

En 1700, il s'adjoignit Jacques Cassini son fils et Philippe Maraldi son neveu, et reprit le travail au point où il l'avait laissé en 1683; il le poussa jusqu'à la frontière méridionale de la France; et trouva le degré égal à 57097 toises à la latitude de 45°.

En 1718, Jacques Cassini, Domin. Maraldi, neveu de Philippe, et Delahire le fils, continuèrent dans le nord, d'Amiens à Dunkerque, la mesure commencée par Picard; et trouvèrent dans cette partie, le degré égal à 56960 toises; latitude 50°. On eut ainsi en France la mesure de 8°½ du méridien.

De ces deux résultats, 57097 toises au midi de la France et 56960 au nord, on concluait que le degré avait plus de longueur vers l'équateur que vers le pôle. D'où Cassini induisait, par un raisonnement juste, que le méridien avait la forme d'une ellipse allongée vers les pôles.

Cependant vers la fin du 17e siècle, Huygens et Newton avaient émis l'opinion que la terre devait être un ellipsoïde aplati vers les pôles. Leurs considérations théoriques semblaient donc démenties par le fait. Dès lors cette question de la figure de la terre, prenait un nouveau degré d'intérêt scientifique et piquait vivement la curiosité du public, d'autant plus que des expériences sur la durée des oscillations du pendule, faites dans le même temps à Cayenne par Richer, semblaient indiquer un renflement de la terre à l'équateur, et militer en faveur de l'opinion d'Huygens et de Newton.

Pour la résoudre, on proposa de mesurer deux degrés assez éloignés pour que les erreurs des observations fussent nécessairement moindres que la différence qu'on cherchait. Plusieurs académiciens entreprirent ces opérations délicates et pénibles. Godin, Bouguer et Lacondamine partirent pour le Pérou; et Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier et Outhier allèrent en Laponie: l'astronome Suédois Celsius se joignit à eux.

Au Pérou le degré fut trouvé de 56750 toises, et en Laponie, de 57419. A Paris, suivant la mesure de Picard, il était de 57060 toises. Le degré allait donc en croissant, depuis l'équateur jusqu'au pôle; ce qui résolvait la question en faveur de la théorie d'Huygens et de Newton, c'est-à-dire en faveur de l'aplatissement aux Pôles.

Vers le même temps, en 1739 Cassini de Thury et Lacaille recommencèrent les mesures exécutées en France. Ce grand travail, dû principalement à Lacaille qui l'exécuta en moins de deux ans, eut pour résultat de confirmer à peu près la mesure de Picard, de découvrir les erreurs de Dominique et Jacques Cassini, et de donner une mesure exacte du méridien qui concourait avec les mesures exécutées au Pérou et en Laponie, à prouver l'aplatissement aux pôles. Cette grande question fut donc résolue définitivement et sans laisser aucun nuage dans l'esprit

des géomètres.

Ainsi les astronomes Français qui avaient pris l'initiative au 16e siècle, de cette question importante qui bientôt excita une émulation générale, ont eu la satisfaction de la résoudre, et d'introduire dans la mécanique des corps célestes un élément qui lui était indispensable.

Ce fut alors que Cassini de Thury eut l'idée de sa grande carte de la France. Il couvrit la surface du territoire d'un vaste réseau de triangles par lesquels il détermina les positions des points principaux rapportés sur sa carte.

Pendant ce temps, Lacaille alla au Cap de Bonne Espérance, dans l'hémisphère austral, mesurer un arc du méridien qui lui donna pour le degré 57040 toises, par 33° 18' de latitude.

Le succès des vastes opérations de Cassini de Thury lui donna l'idée de les étendre dans toute l'Europe. Il prolongea en Allemagne, jusqu'à Vienne la perpendiculaire au méridien de Paris. Divers savants ne tardèrent pas à entreprendre eux-mêmes de pareilles mesures dans leurs pays.

Il était surtout intéressant de continuer vers le nord, c'est-à-dire en Angleterre, les opérations du méridien de la France. C'est ce qu'on fit. On convint pour cela de former depuis Londres jusqu'à Douvres, une chaine de triangles qui irait se joindre à celle de la méridienne de Paris, et ferait connaitre la position respective des deux célèbres observatoires de Paris et de Greenwich.

En 1784, on procéda à la mesure d'une première base dans la plaine de Hounslowheat, au sud-ouest de Londres; et en 1787 on commença à former la chaine des triangles. Les commissaires Anglais et Français se réunirent le 23 Septembre à Douvres. Les résultats de ces opérations confirmèrent la grandeur du degré du méridien calculé au nord de Paris par Lacaille et Cassini de Thury.

Enfin, quand le gouvernement Français voulut déterminer une unité fondamentale déduite des opérations de la terre, il fit procéder à une nouvelle mesure du méridien déjà calculée dans le siècle dernier. Cette grande opération a été exécutée en France par Delambre et Méchain, et continuée en Espagne par Mrs Biot et Arago. Elle a servi à fixer les bases de notre système métrique.

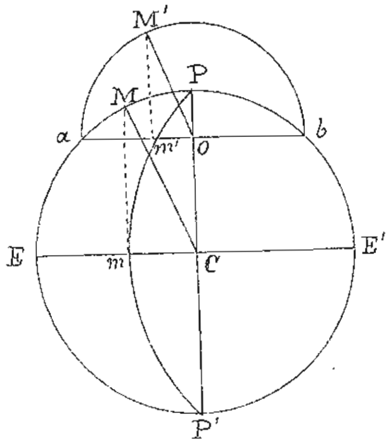
Cartes géographiques.

Les Cartes géographiques ont pour objet de représenter sur une surface plane les positions respectives des différents points de la terre ou d'une partie de la terre. Cette représentation se fait de plusieurs manières: 1° par projection orthographique; 2° par perspective ou projection stéréographique; 3° par le développement conique; 4° par quelques autres moyens particuliers appropriés à l'usage que l'on doit faire des cartes, comme sont les méthodes de Flamsteed, de Mercator, &c....

Pour représenter tout le globe terrestre on emploie les projections orthographiques et stéréographique. Les autres procédés servent, généralement, pour représenter seulement des portions de la surface de la terre, telles que des royaumes ou des provinces.

Projection orthographique.

Cette projection se fait par des lignes parallèles, abaissées perpendiculairement sur le plan de projection. On prend pour ce plan un méridien. L'équateur et les parallèles s'y projettent suivant des lignes droites parallèles entr'elles, et les méridiens suivant des ellipses. Chacune de ces courbes a pour grand axe la ligne des pôles: son demi-petit axe est égal au cosinus de la longitude du méridien projeté, comptée à partir du plan de projection. En effet, soit EPE'P le méridien sur lequel se fait la projection; PP' la ligne des pôles, et EE' la projection de l'équateur. Concevons que le demi cercle EPE' représente la demi circonférence de l'équateur qui aurait tourné autour de la droite EE' comme charnière et qui serait rabattue sur le plan de la figure. Un rayon CM nous représentera la trace d'un méridien sur le plan de l'équateur. Par conséquent, si l'on abaisse la perpendiculaire Mm sur EE' le point m sera la projection du point M du méridien; Cm sera donc le petit axe de l'ellipse, projection du méridien; et l'on voit que Cm est le cosinus de l'arc EM qui marque la longitude du méridien.



Si l'on veut construire l'ellipse par points, on cherchera les projections des points où le méridien rencontre les parallèles, de même qu'on a déterminé la projection du point où il rencontre l'équateur. Soit ab la projection d'un parallèle. Le demi-cercle décrit sur ab représente le rabattement du parallèle lui-même sur le plan de la figure. Si donc on prend l'arc aM' égal à la longitude du méridien, estimée en degrés, (ce qui se réduit à mener le rayon OM' parallèle à CM), le point M' appartiendra au méridien, et sa projection m sera un point de l'ellipse.

Si au lieu de faire la projection sur un

méridien, on la faisait sur l'équateur, tous les méridiens seraient, en projection, des rayons de l'équateur, et les parallèles, des cercles concentriques, ayant pour rayons, respectivement, les cosinus des latitudes des parallèles. Dans cette projection les parties voisines des pôles se projettent à peu près suivant leur grandeur naturelle; et au contraire, les parties qui avoisinent l'équateur, et qu'il importerait le plus de représenter exactement, sont très déformées. Par cette raison, on préfère la projection sur un méridien.

Projection stéréographique.

Cette projection est une perspective sur le plan d'un grand cercle, l'œil étant placé sur la sphère, à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de ce grand cercle. On ne projette que l'hémisphère situé au dessous de ce plan, et pour faire la perspective de l'autre hémisphère, on place l'œil à l'autre extrémité du diamètre perpendiculaire au plan de projection. La représentation de tout le globe terrestre se fait ainsi en deux figures dont l'ensemble s'appelle Mappemonde. (*)

(*) Les projections orthographique et stéréographique ont été connues

Il y a trois sortes de cartes dans le système stéréographique ; elles se distinguent par la position de de l'œil, qui peut être placé au pôle, ou sur l'équateur, ou en un point d'un méridien. Dans le 1er cas la projection est dite *projection polaire* ; dans le 2e *projection sur le méridien* ; et dans le 3e *projection sur l'horizon*.

La projection stéréographique, quelle que soit la position de l'œil, jouit de trois propriétés générales qui lui sont propres et qui servent à la construction des cartes. Ces propriétés s'énoncent ainsi :

1° *Tout cercle tracé sur la sphère se projette suivant un cercle* ;

2° *Les projections de deux cercles se coupent sous un angle égal à celui des deux cercles.*

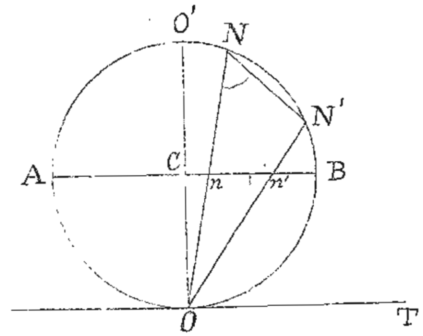
3° *Le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle.*

1ère Proposition. *La projection d'un cercle est elle même un cercle.* Le cercle AOBO' est un grand cercle de la sphère ; le point O est le lieu de l'œil, ou le sommet des cônes projetants ; et le diamètre

---

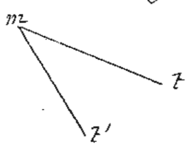
des Grecs : Ptolémée les a décrites dans deux ouvrages qui nous sont parvenus. Il appelle la première *analemme*, et la 2e *planisphère*. Les auteurs du moyen-âge ont appelé celle-ci *astrolabe*. Ce sont les Modernes qui ont remplacé ces deux expressions *planisphère* et *astrolabe*, par celle de *projection stéréographique*.

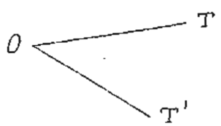
AB perpendiculaire au rayon CO est la trace, sur le plan de la figure, du plan diamétral sur lequel se fait la projection ; ce plan est parallèle au plan tangent à la sphère au point O. Supposons que le plan du cercle tracé sur la sphère, dont nous voulons faire la projection, soit perpendiculaire au plan de la figure ; soit NN' sa trace sur celui-ci. La perspective du cercle est une courbe située dans le plan AB et représentée, sur le plan de la figure, par la droite nn'. On sait, par la propriété des sections *sous-contraires*, ou *anti-parallèles*, d'un cône du 2e degré, que cette courbe sera un cercle si l'inclinaison de son plan sur l'arête ON' du cône projetant est la même que l'inclinaison du plan du cercle NN' sur l'autre arête ON ; c'est-à-dire si les angles nn'O, N'NO sont égaux. Or cela a lieu ; car l'angle nn'O = = n'OT = $\frac{1}{2}$ arc ON' ; et l'angle N'NO est égal aussi à $\frac{1}{2}$ arc ON'. Donc la perspective du cercle NN' est elle même un cercle.



On peut démontrer cette proposition directement, sans invoquer la propriété des sections anti-parallèles. En effet, les angles N'NO et nn'N' sont supplémentaires l'un de l'autre ; on peut donc faire passer un cercle par les quatre sommets du quadrilatère $Nnn'N'$. Ce cercle nous représentera une section diamétrale d'une sphère passant par le cercle NN'; cette sphère rencontrera le cône projetant, suivant une 2e courbe qui sera plane nécessairement; car on sait qu'en général, quand deux surfaces du 2e degré passent par une même section conique, elles ont une deuxième courbe d'intersection qui est elle même une section conique. Ainsi la sphère rencontre le cône suivant un cercle. Ce cercle est évidemment compris dans le plan AB, parceque tout est symétrique de part et d'autre du plan de la figure. Le cône coupe donc le plan AB suivant ce cercle. ce qu'il fallait démontrer.

2e Proposition. Les perspectives de deux cercles tracés sur la sphère se coupent sous le même angle que les cercles eux mêmes. L'angle sous lequel se coupent deux courbes est l'angle formé par leurs tangentes en leur point d'intersection. Il faut donc démontrer que si en un point de la sphère on mène deux tangentes faisant entr'elles un angle quelconque, elles auront pour perspective deux droites qui feront entr'elles le même angle.

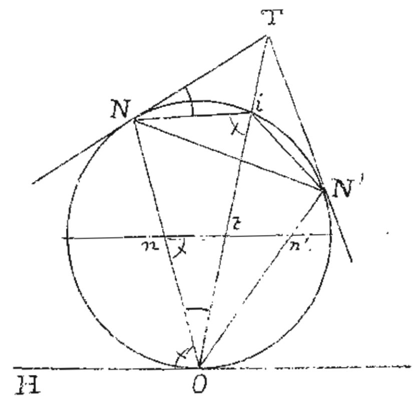




Soit m le point de la sphère, et mt, mt' les deux tangentes; O le lieu de l'œil. Les plans qui font la

perspective de ces deux droites, déterminent sur la sphère deux petits cercles qui se coupent en m et en O. Leurs angles en ces deux points sont égaux. Le premier est l'angle des deux tangentes mt, mt'; le deuxième est l'angle des tangentes aux deux cercles, menées en leur point O. Ces tangentes OT, OT' sont comprises dans le plan tangent à la sphère au point O; elles sont les intersections de ce plan par les plans des deux cercles. Les perspectives des deux tangentes mt, mt' sont les droites d'intersection des deux mêmes plans par le plan diamétral parallèle au plan tangent en O. Conséquemment ces deux droites font entr'elles le même angle que les deux tangentes OT, OT'; et cet angle est égal à celui des deux tangentes mt, mt'. Ce qu'il fallait démontrer.

3e Proposition. Le centre du cercle nn' est la perspective t du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle NN'.



C'est-à-dire qu'on a $tn = tn'$. En effet, on a dans le triangle nOt,

$$\frac{nt}{Ot} = \frac{\sin nOt}{\sin Ont}.$$

Or $nOt = TNi$; $Ont = nOH = NiO$.

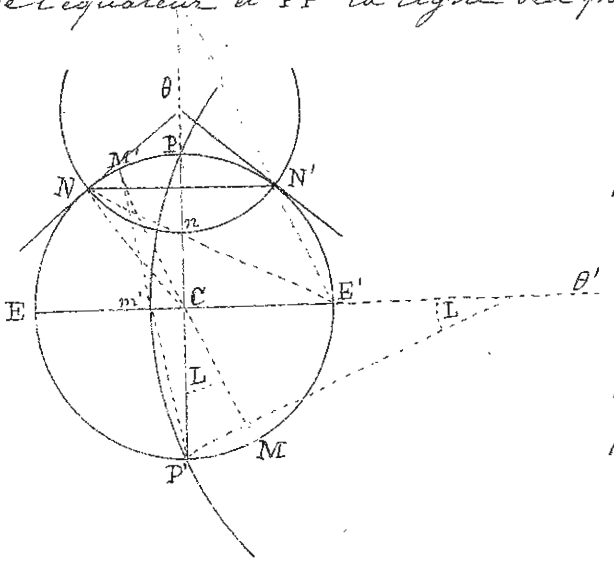
Donc $$\frac{nt}{Ot} = \frac{\sin TNi}{\sin NiO} = \frac{Ti}{NT}.$$

on a pareillement $\frac{n't}{\theta t} = \frac{Ti}{N'T}$. Mais $NT = N'T$

Donc $nt = n't$. C. Q. F. D.

Projection sur le méridien. Dans cette carte, l'œil est placé en un point de l'équateur, et par conséquent la projection se fait sur un méridien.

Les cercles de la sphère qu'on représente dans les cartes géographiques, sont les parallèles et les méridiens. Soit EP'E'P le méridien sur lequel on fait la projection; EE' la trace du plan de l'équateur et PP' la ligne des pôles. Soit NN' la trace d'un parallèle; la perspective de ce cercle sera un autre cercle ayant pour centre d'après la troisième proposition, le point de rencontre θ des tangentes au cercle PEP'E', en N et N'. Soit ρ le rayon θN, et λ la latitude du parallèle. On a en prenant pour unité le rayon de la sphère, $\theta N = \text{tang}\, NC\theta = \cot NCE$;



ou $\rho = \cot \lambda$.

Si l'on veut déterminer directement les points où le cercle qui forme la perspective du parallèle, rencontre la droite PP', on mènera les droites E'N, E'N', et les points où elles rencontreront la droite PP' seront les points cherchés. Pour le prouver, il suffit de considérer le point E' comme le rabattement du point de l'œil sur le plan de la figure.

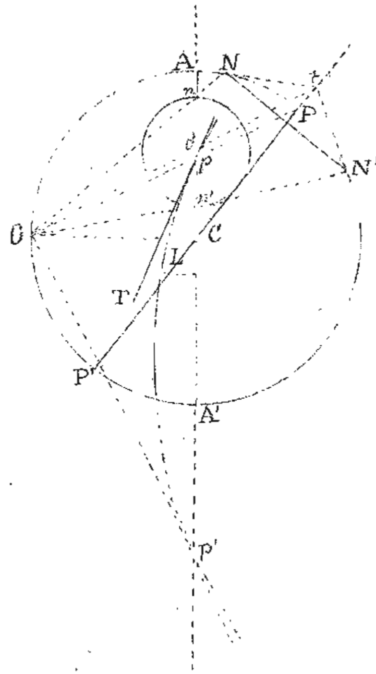
Considérons les méridiens. Celui qui est perpendiculaire au plan de projection se projette suivant la ligne PP'; on l'appelle le méridien moyen. Soit L la longitude d'un deuxième méridien, comptée à partir du méridien moyen. Pour déterminer le centre du cercle qui sera la projection de ce méridien, il faut, toujours d'après notre troisième proposition, concevoir le cylindre circonscrit à la sphère suivant le méridien et mener par l'œil une droite parallèle aux arêtes de ce cylindre: le point où cette droite percera le plan de projection sera le centre cherché. Or cette droite est perpendiculaire au plan du méridien; la construction sera donc facile. Supposons que le demi-cercle de l'équateur sur lequel se trouve le point de l'œil, tourne autour de la droite EE' pour se rabattre et prendre la position EP'E' sur le plan de la figure. Soit M'CM la trace du méridien sur le plan de l'équateur; et $P'\theta'$ la perpendiculaire à cette trace, menée par le point de l'œil rabattu en P'; le point

θ sera le centre du cercle qui est la perspective du méridien. Le rayon de ce cercle est donc $p' = \theta P' = \frac{P'C}{\sin C\theta P'}$. Or le rayon P'C est pris pour l'unité de longueur, et l'angle $C\theta P'$ égal à $P'CM'$, est la longitude L du méridien; donc $p' = \frac{1}{\sin L}$.

La droite P'M' détermine sur EE' le point m', par où passe le cercle décrit avec ce rayon $\theta P'$. La droite P'M déterminerait de même un deuxième point de ce cercle. Mais il n'y a pas lieu de construire celui-ci, parceque le point M n'appartenant pas à l'hémisphère qu'on projette, il n'est pas représenté sur la carte.

Projection sur l'horizon. On appelle point central dans une carte construite stéréographiquement, la projection de l'extrémité du diamètre qui passe par le point de l'œil. Les points qui, sur la terre, sont à égale distance de cette extrémité, se trouvent aussi, en projection, à égale distance du point central. Quand on veut que le point central soit un lieu déterminé de la terre, il faut placer le point de vue sur le méridien de ce lieu, à son point diamétralement opposé. La projection se fait alors sur le plan diamétral perpendiculaire à la verticale du lieu. Ce plan est ce qu'on appelle l'horizon rationnel du lieu. Voilà pourquoi on dit que la projection est faite sur l'horizon.

Soit AOP'A'P le grand cercle perpendiculaire à la verticale du lieu qu'on veut prendre pour point central, qui sera, par exemple, Paris. Le méridien de ce lieu est perpendiculaire au plan de ce grand cercle et le coupe suivant la droite AA'. La ligne des pôles est tracée dans ce méridien. Supposons qu'on le rabatte sur le plan de la figure, en le faisant tourner autour de la droite AA'. Le point de vue se trouvera rabattu en O, et la ligne des pôles suivant une droite PP'. Les deux droites OP, OP' rencontrent AA' en deux points p, p' qui sont les projections des pôles. Toutefois le premier seul de ces points est représenté sur la carte, puisqu'elle ne comprend qu'un hémisphère.



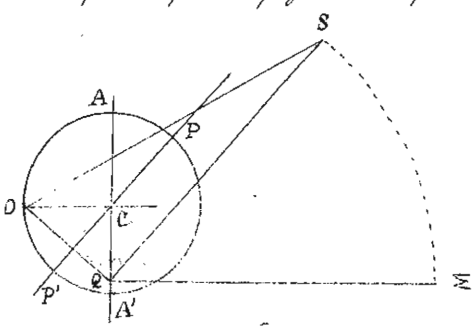
Parallèles. La droite NN' perpendiculaire à la ligne des pôles est la trace d'un parallèle sur le méridien de Paris, rabattu sur le plan de la figure. Les lignes ON, ON' rencontrent AA' en deux points n, n' appartenant à la projection de ce parallèle;

conséquemment cette projection est le cercle décrit sur nn' comme diamètre. Le centre de ce cercle, si on veut le déterminer directement, se trouve, d'après la troisième proposition, sur la droite menée du point O, au point de concours des tangentes au cercle AON' en ses points N, N'.

Méridiens. Les projections des méridiens sont des cercles qui passent par les points p, p'.

Un méridien proposé fait avec le méridien de Paris, un angle L qui est connu; les projections de ces deux méridiens feront entr'elles le même angle. Or la projection du méridien de Paris est la droite AA'; donc si l'on mène par le point p une droite pT faisant avec AA' un angle égal à L, cette droite sera la tangente au cercle qui représentera en projection le méridien proposé. On saura donc construire ce cercle (✳)

(✳) [On pourra, si l'on veut, construire directement son centre par la 3me propriété de la projection stéréographique; c'est une question de géométrie descriptive qui n'offre aucune difficulté. Car il suffit de mener par l'œil une droite perpendiculaire au plan méridien, et de chercher le point où cette droite perce le plan de projection. Ce point sera le centre de la projection du méridien.



Que par le point O on mène une droite OQ perpendiculaire à la droite PP', et une droite OS faisant avec OQ un angle égal à (90° − L). Que par le point où OQ rencontre la droite AA' on mène QS parallèle à PP', laquelle va rencontrer la droite OS au point S. Enfin, que par le point Q on mène la perpendiculaire AA', sur laquelle on prendra le segment QΣ égal à QS; le point Σ sera le centre cherché.]

Projection polaire. On appelle ainsi la projection stéréographique, quand l'œil est placé à l'un des pôles. La projection se fait sur l'équateur. Les méridiens sont représentés par des rayons de l'équateur, et les parallèles par des cercles concentriques. Le second pôle est, en projection, le point central de la carte.

On fait peu d'usage de cette projection, si ce n'est pour les cartes célestes, lorsqu'on veut représenter les constellations polaires; car il n'y a guère que les régions voisines du pôle qui ne soient pas fort altérées. En géographie, comme les pays voisins des pôles sont inhabités et inconnus, on n'a pas lieu de se servir de cette projection.

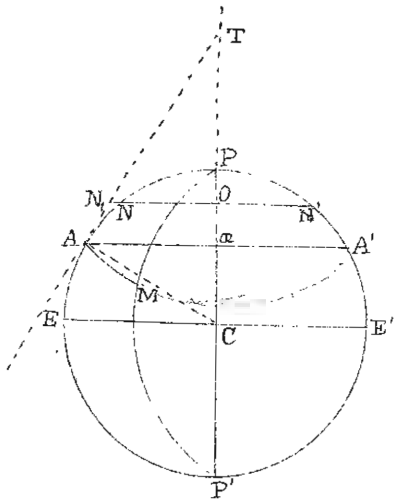
Développement conique.

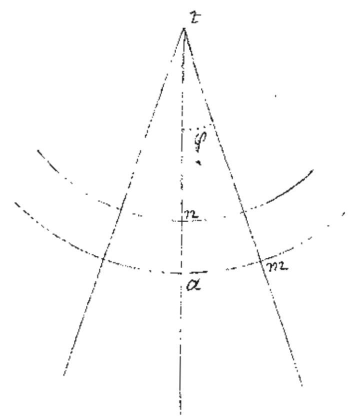
Quand on veut représenter une portion de la terre comprise entre deux parallèles et deux méridiens, telle qu'un royaume, ou simplement une province, on conçoit un cône circonscrit à la terre suivant le parallèle milieu entre les deux parallèles proposés, lequel s'appelle parallèle moyen; et l'on suppose que ce cône se confond avec la surface de la terre dans l'étendue de la zone comprise entre les deux parallèles.

On développe ce cône sur un plan, en un secteur circulaire : les méridiens deviennent des rayons du secteur, et les parallèles, des arcs de cercles concentriques.

Cherchons les rayons de ces cercles, et les directions des droites qui représenteront les méridiens.

Parallèles. Soit A A' le parallèle suivant lequel le cône touche la surface de la terre ; et soit Λ sa latitude AE. Le rayon de ce parallèle, dans le





développement sera

$$t\alpha = TA = \cot\Lambda.$$

Un autre parallèle NN', à la latitude λ, sera, dans le développement, un arc de cercle dont le rayon aura pour expression

$$tn = TN_1 = \frac{TO}{\cos\Lambda} = \frac{CT - CO}{\cos\Lambda} = \frac{\operatorname{cosec}\Lambda - \sin\lambda}{\cos\Lambda}.$$

Méridiens. Le méridien perpendiculaire au plan sur lequel se fait le développement, s'appelle le méridien moyen. $t\alpha$ représente ce méridien dans le développement. Cherchons l'angle φ que le rayon tm représentant un autre méridien dont la longitude est L, fera avec le méridien moyen $t\alpha$. On a arc $am = \varphi . t\alpha$. Et sur la sphère,

$$\text{arc } AM = L . A\alpha = L \cos\Lambda.$$

Or

$$\text{arc } am = \text{arc } AM$$

Donc

$$\varphi\, t\alpha = L\cos\Lambda, \text{ ou } \varphi . \cot\Lambda = L . \cos\Lambda.$$

D'où

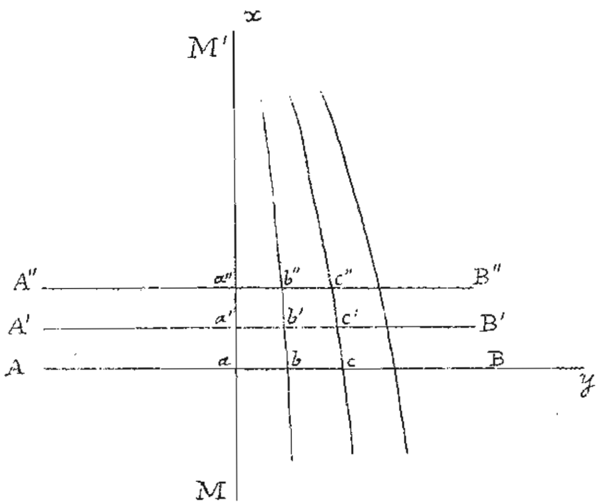
$$\varphi = L \sin\Lambda.$$

Cette valeur de φ et l'expression du rayon tn sont les éléments qui servent à construire la carte.

Développement de Flamsteed.

Dans le développement conique nous avons substitué à la portion de la surface de la terre que nous voulions représenter, la surface du cône circonscrit à la terre suivant le parallèle moyen. Dans le développement de Flamsteed, c'est la surface du cylindre circonscrit à la terre suivant un méridien moyen, que l'on considère comme se confondant avec une portion de la surface de la terre, et que l'on développe sur un plan. De sorte que, dans ce mode de représentation de la sphère, le méridien moyen, devient une ligne droite, qui est le développement de ce méridien, et les arcs de parallèles deviennent aussi des lignes droites égales à ces arcs, respectivement. Les méridiens voisins, de part et d'autre, du méridien moyen, deviennent des lignes courbes, qui sont le développement des ellipses suivant lesquelles les plans des méridiens coupent le cylindre.

Soit MM' la droite qui représente le méridien moyen développé. Les parallèles seront représentés par les droites AB, $A'B'$, $A''B''$, ... perpendiculaires à cette droite MM'. La distance aa' entre deux de ces droites AB, $A'B'$ sera égale précisément à l'arc du méridien compris entre les deux parallèles qu'elles représentent, c'est à dire à la différence des latitudes des deux parallèles.



Soit Λ la latitude du 1er parallèle AB, pris pour origine, et $\lambda, \lambda', \lambda''$, ... les latitudes des autres; on aura, en supposant le rayon de la terre égal à l'unité, $aa' = \lambda - \Lambda$, $aa'' = \lambda' - \Lambda$, &c...

Déterminons les courbes qui représentent les méridiens. Soit $bb'b''$.. l'une de ces lignes, et L la longitude du méridien qu'elle représente, comptée à partir du méridien moyen. Les

ordonnées ab, $a'b'$, $a''b''$, ... sont égales aux arcs des parallèles compris entre les 2 méridiens. Ces arcs sont égaux aux rayons des parallèles multipliés par l'angle L; et ces rayons sont les cosinus des latitudes des parallèles; on a donc

$$ab = L \cos \Lambda,$$
$$a'b' = L \cos \lambda,$$
$$a''b'' = L \cos \lambda'.$$

Ainsi un point de la terre, dont la longitude est L et la latitude λ, est représentée sur la carte par le point b' déterminé par les deux ordonnées

$$aa' = \lambda - \Lambda, \quad \text{et} \quad a'b' = L \cos \lambda.$$

Equations des méridiens. Prenons la droite aM' pour axe des x, et la droite aB pour axe des y, de sorte que $aa' = x$, et $a'b' = y$; on a $x = \lambda - \Lambda$ et $y = L \cos \lambda$; et, en éliminant λ,

$$y = L . \cos(\Lambda + x).$$

C'est l'équation du méridien $bb'b''$...., dont la longitude est L.

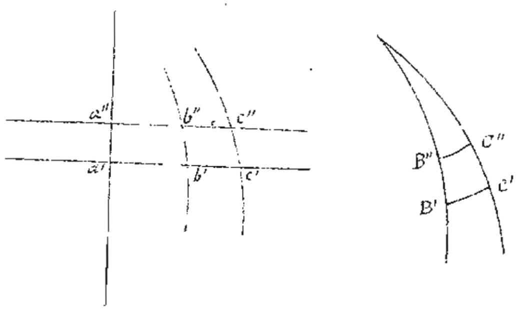
Au point où la courbe $bb'b''$.... rencontre le méridien moyen MM', on a $y = 0$, et par conséquent $\lambda = 90°$. L'abscisse de ce point est donc égale à $90° - \Lambda$. Tous les méridiens, sur la carte, concourent en ce point, qui représente le pôle.

Si l'on suppose que le premier parallèle AB soit l'équateur, on aura $\Lambda = 0$; et l'équation de la courbe $bb'b''$.... devient

$$y = L \cos x.$$

Propriété du développement de Flamsteed. La propriété caractéristique de ce développement; c'est que les aires ne sont pas altérées; c'est-à-dire qu'une figure quelconque a la même surface sur la sphère et dans le développement.

En effet, considérons un petit rectangle sphérique B'C'C''B'' compris entre deux parallèles infiniment voisins, et deux méridiens aussi infiniment

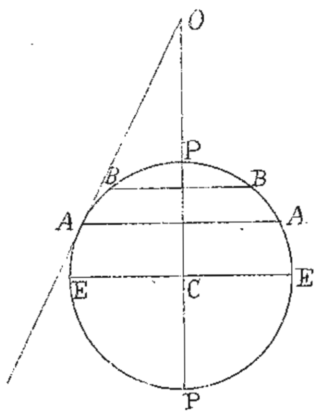


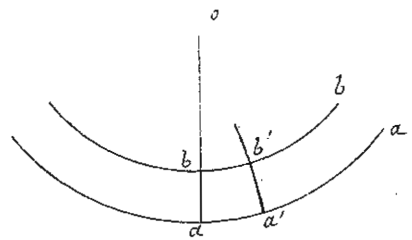
voisins; son aire sera B'C'. B'B''. A ce petit rectangle correspond, dans le développement, un petit trapèze b'c'c''b'' dont l'aire a pour expression b'c'. a'a''. Or on a a'a'' = B'B'', et b'c' = B'C'; les deux aires sont donc égales.

Développement de Flamsteed modifié. Système adopté pour la carte de la France.

Si le développement de Flamsteed a l'avantage de ne pas altérer les distances dans le sens des parallèles, et de conserver la grandeur des aires il a le

défaut d'altérer la configuration des parties qui s'éloignent du parallèle moyen, parceque les méridiens y deviennent obliques aux parallèles, au lieu de leur être perpendiculaires comme sur la sphère. Pour obvier à cet inconvénient, on a eu l'idée de figurer les parallèles, non plus par des droites, mais par des cercles concentriques. Le cercle correspondant au parallèle moyen se détermine comme dans le développement conique; et les autres se déterminent par la condition que leurs distances respectives sont les mêmes que sur la sphère. Le méridien moyen est représenté par une ligne droite, et chacun des autres par une courbe, construite de façon que les arcs interceptés sur les parallèles, entre deux méridiens, restent de même longueur sur la carte. D'après cela, soit AA le parallèle moyen. On décrira sur la carte un cercle aa du rayon oa





égal à $OA = \cot \Lambda = R$, Λ étant la latitude AE. La droite oa représente le méridien moyen EAP.

Le parallèle BB, à la latitude λ, sera représenté par un cercle bb ayant le point o pour centre, et son rayon $r = ob = oa - AB$; ou

$$(1) \ldots\ldots \quad r = \cot \Lambda - (\lambda - \Lambda) = R - (\lambda - \Lambda).$$

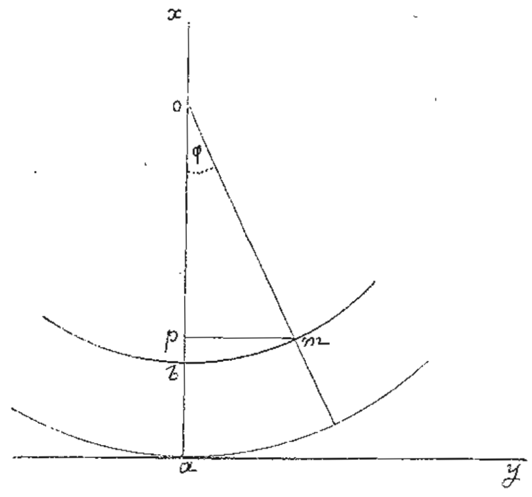
Pour construire un méridien, on prendra sur les cercles aa, bb, ... des segments aa', bb'..... égaux respectivement aux arcs compris sur les parallèles entre le méridien moyen et le méridien qu'on veut représenter. Soit l la longitude de celui-ci par rapport au méridien moyen, l'arc du parallèle BB, compris entre ces deux méridiens, sera égal à $l \cos \lambda$; on aura donc

$$(2) \ldots\ldots \quad \text{arc } bb' = l \cos \lambda .$$

Ainsi un point b' de la carte sera déterminé par le rayon r du cercle sur lequel il se trouve et par la longueur de l'arc bb' compté sur ce cercle, à partir de la droite oa. Les expressions de ces deux coordonnées sont fournies par les deux équations (1) et (2).

Coordonnées rectangles. — Construction des parallèles par points. Les cercles qui représentent les parallèles ont de très grands rayons, leur centre est au dehors de la carte, et il serait très difficile et souvent impossible de décrire ces cercles d'un mouvement continu avec le compas. On les décrit donc par points. Pour cela, on les rapporte à deux axes rectangulaires, dont l'un est le méridien moyen ao, et l'autre, la tangente en a au parallèle moyen. Prenons le premier

pour axe des x et le second pour axe des y. D'un



point m abaissons sur ax la perpendiculaire mp, on aura $ap = x$, $mp = y$. λ et l étant la latitude et la longitude du point m sur la sphère, le rayon de l'arc bm, et la longueur de cet arc sont

$$r = R - (\lambda - \Lambda), \quad \text{arc } bm = l \cos \lambda .$$

Appelons φ l'angle au centre soutendu par l'arc bm, on aura

$$\varphi = \frac{\text{arc } bm}{r}, \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{l \cos \lambda}{r} ; \quad \text{et}$$

$$mp = r \sin \varphi \qquad ap = r \cos \varphi$$

d'où

$$(a) \ldots\ldots \quad x = R - r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi .$$

Telles sont les coordonnées rectangles d'un point m de la carte, par lesquelles on détermine la position de ce point. r et φ qui y entrent, dépendent directement de la latitude et de la longitude du point correspondant sur la sphère ; leurs valeurs sont

$$(b) \ldots\ldots \quad r = R - (\lambda - \Lambda) \ \text{et} \ \varphi = \frac{l \cos \lambda}{r} .$$

Les valeurs des $\underline{x}$ et y exprimées directement en fonction de λ et de $\underline{l}$ sont

$$x = R-(R+\Lambda-\lambda)\cos\frac{l\cos\lambda}{R+\Lambda-\lambda},$$

$$y = (R+\Lambda-\lambda)\sin\frac{l.\cos\lambda}{R+\Lambda-\lambda}.$$

Si l'on veut l'équation d'un parallèle, on éliminera $\underline{l}$ entre ces expressions de x et y; il vient :

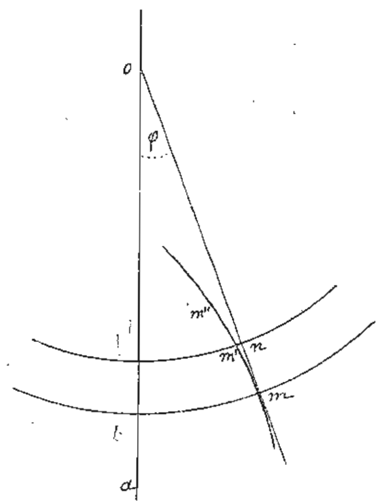
$$\left(\frac{x-R}{R+\Lambda-\lambda}\right)^2+\left(\frac{y}{R+\Lambda-\lambda}\right)^2=1.$$

équation d'un cercle.

Pour obtenir l'équation d'un méridien, il faudrait éliminer λ entre les expressions de x et de y.

Les méridiens coupent tous l'axe oa en un même point qui correspond au pôle, et pour lequel, par conséquent, on a $\lambda = 90°$. La distance de ce point au centre o des cercles est égale à $R+\Lambda, -90°$.

Calcul de l'inclinaison d'un méridien sur un parallèle. Les courbes qui représentent les méridiens ne coupent pas précisément à angle droit les parallèles, comme cela a lieu sur la sphère, mais elles s'écartent très peu de la perpendicularité, de sorte que les portions de la sphère représentées sur la carte sont peu défigurées. C'est là le but qu'on s'est proposé en modifiant le développement de Flamsteed. Pour prouver que le nouveau système satisfait à cette condition, cherchons l'angle



qu'un méridien, en projection, $m\,m'\,m''$ .... fait au point m, avec la normale au parallèle qui passe par ce point. Le point $\underline{m'}$ étant infiniment voisin du point $\underline{m}$, on a dans le triangle $m\,n\,m'$ rectangle en n,

$$\operatorname{tang} m'mn = \frac{nm'}{mn}.$$

Soit le rayon $on = r$ et l'angle $noa = \varphi$; on a $nm' = r\,d\varphi$ et $nm = dr$; donc, en représentant l'angle $m'mn$ par μ,

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Les équations (b) dans lesquelles il faut considérer $\underline{l}$ comme constant, puisque les points m, m' sont sur un même méridien, donnent

$$dr = -d\lambda, \quad\text{et}\quad r\,d\varphi+\varphi\,dr = -l\sin\lambda\,d\lambda.$$

d'où

$$\frac{r\,d\varphi}{dr} = l\sin\lambda-\varphi.$$

donc

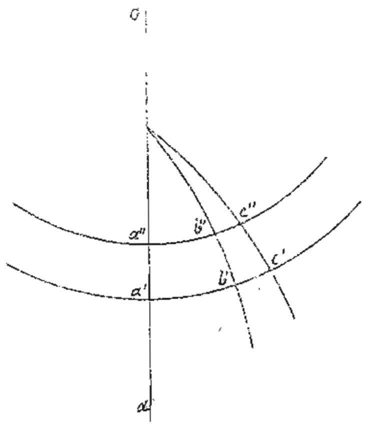
$$\operatorname{tang}\mu = l\sin\lambda-\varphi = l\sin\lambda-\frac{l\cos\lambda}{r}.$$

Cette expression donne pour μ une valeur très petite, surtout dans la carte de France où l est comprise entre $0°$ et $5°$, et $\Lambda = 45°$. Par exemple, pour $\lambda = 50°$ on trouve $\mu = 20'$.

Aux points situés sur le parallèle moyen, on a $r = \cot \lambda$; d'où $\tang \mu = 0$. De sorte que les méridiens sont rigoureusement perpendiculaires au parallèle moyen. Et puisque dans tous les cas, ils s'écartent peu de la perpendicularité, il en résulte que les figures ne sont pas sensiblement déformées.

Egalité des aires. Ainsi que dans le système de Flamsteed, les aires restent les mêmes.

En effet, le petit quadrilatère $b'c'c''b''$ a pour expression de sa surface $b'c'.b'b''$ ou $b'c'.a'a''$. Le petit rectangle correspondant sur la sphère, a pour surface $B'C'.A'A''$. Or on a $b'c' = B'C'$, et $a'a'' = A'A''$. Les surfaces des deux figures sont donc égales.

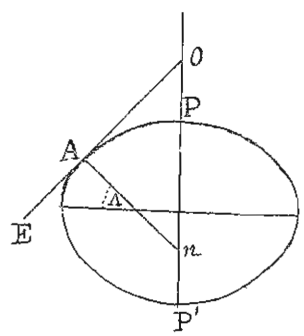


Ainsi ce développement jouit des mêmes propriétés que celui de Flamsteed, et a en outre, l'avantage de déformer très peu les figures. Il devient précisément le développement de Flamsteed, quand le parallèle moyen est l'équateur. Car dans ce cas, le cercle qui représente

sur la carte ce parallèle a son rayon infini, et devient une ligne droite. Tous les autres parallèles sont donc aussi des lignes droites. Conséquemment c'est le système de Flamsteed.

Application au cas où la terre est supposée un sphéroïde. Pour plus d'exactitude, on tient compte dans la carte de France, de l'applatissement de la terre. Le mode de développement s'y prête sans difficulté. Il suffit de ne plus considérer le méridien moyen comme un cercle, dont les arcs sont proportionnels aux latitudes, mais bien comme une ellipse, dont les arcs sont fonctions des latitudes. On se sert alors, pour déterminer les distances des parallèles comptées sur le méridien moyen, de la formule

$$s = a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)(\lambda' - \lambda) - \frac{3}{4} a e^2 \sin(\lambda' - \lambda) \cos(\lambda' + \lambda).$$



Le rayon du parallèle moyen, que nous avons pris égal à $\cot \Lambda$, en supposant le rayon de la sphère égal à l'unité, subit aussi une légère modification, il devient

$$OA = N \cot \Lambda,$$

N étant la normale An à l'ellipse en un point du parallèle, cette normale se termine en n à l'axe de la terre ou ligne des pôles PP'.

Cartes marines. Développement de Mercator.

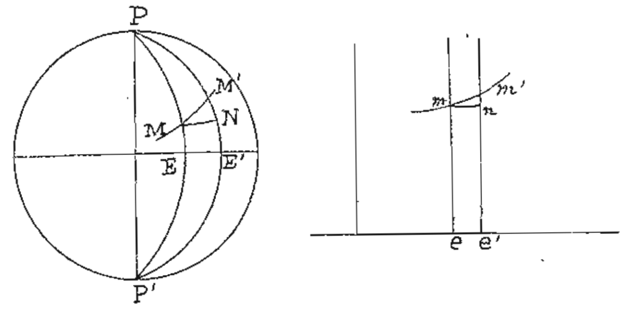
Dans ce système, les méridiens sont représentés par des droites parallèles dont les distances respectives sont les mêmes que celles des méridiens, comptées sur l'équateur. L'équateur et les parallèles sont aussi représentés par des droites perpendiculaires aux premières : les distances de ces droites à l'équateur ne sont pas proportionnelles aux latitudes des parallèles qu'elles représentent ; elles croissent très rapidement, suivant une loi compliquée. Cette loi a pour objet de remplir cette condition, savoir, que deux lignes quelconques tracées sur la carte se coupent sous le même angle que les deux courbes sphériques qu'elles représentent.

C'est, comme on voit, une des propriétés de la projection stéréographique, mais qui n'était que secondaire, et en quelque sorte fortuite, dans ce genre de projection, tandis qu'ici elle forme le caractère principal de la carte, et est le fondement de son usage chez les marins.

Au lieu d'exprimer que deux courbes quelconques font le même angle sur la sphère et sur la carte, il suffit d'exprimer qu'une courbe quelconque fait avec chaque méridien le même angle sur la sphère et sur la carte.

Soit donc une courbe MM'.... tracée sur la sphère, et mm'.... la courbe qui la représente

sur la carte. Considérons deux éléments infiniment petits MM', mm' de ces courbes. Le premier est compris entre deux méridiens EM, E'M' qui font entre eux un angle dl, (l désignant la longitude du méridien EM) ; et le 2me, entre les deux droites parallèles em, e'm' qui représentent ces méridiens. La distance de ces droites est proportionnelle à cet angle dl ; ainsi $ee' = a.dl$. Soit MN l'arc du parallèle qui passe par le point M ; la ligne correspondante sur la carte sera le segment mn d'une parallèle à ee'. Il suffit d'exprimer que les angles en M et m des deux petits triangles M'MN, m'mn sont égaux. Or le triangle M'MN, rectangle en N peut être considéré comme rectiligne ; on a donc



$\text{tang}\, M = \dfrac{M'N}{MN}$; et de même, dans le 2e $\text{tang}\, m = \dfrac{m'n}{mn}$;

il faut donc qu'on ait $\dfrac{M'N}{MN} = \dfrac{m'n}{mn}$; et réciproquement, quand cette équation aura lieu, les angles en M et m seront égaux. C'est donc cette équation qui exprime la relation entre la figure sphérique et la carte, et qui servira à la construction de celle-ci.

Soit λ la latitude du point M, et s la distance correspondante du point m à la droite ee'e''..... qui représente l'équateur. On aura $M'N = a\lambda$, et $m'n = ds$. Or $MN = dl \cos\lambda$; et $mn = a\,dl$, comme nous l'avons dit ci-dessus. Notre équation de condition devient donc

$$\frac{d\lambda}{dl\cos\lambda} = \frac{ds}{a\,dl}.$$

ou

$$ds = \frac{a\,d\lambda}{\cos\lambda}.$$

Cette équation qui fera connaître les distances à l'équateur, des droites correspondantes aux parallèles, et d'où dépend, par conséquent, la construction de la carte. Il faut l'intégrer. Pour cela écrivons-la sous la forme

$$ds = \frac{a\,d\lambda}{\sin(90^\circ+\lambda)} = \frac{a\,d\lambda}{2\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)} =$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{\dfrac{d\lambda}{\cos^2\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}}{\tang\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)} = a\,\frac{d.\tang\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}{\tang\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)}.$$

Intégrant

$$S = a.\log\tang\tfrac{1}{2}(90^\circ+\lambda) + C.$$

Prenons l'intégrale depuis l'équateur; on aura à l'origine, $s=0$, $\lambda=0$, $\tang\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda) = \tang 45^\circ = 1$, $\log.\tang 45^\circ = 0$; la constante est donc nulle. Ainsi l'on a

$$s = a.\log\tang\left(45^\circ+\frac{\lambda}{2}\right).$$

Telle est la formule qui détermine les distances des parallèles à l'équateur, et qui sert à construire une carte dans le système de Mercator.

Usage de ces cartes dans la marine.

Il est évident que, dans ce système, une courbe qui, sur la sphère, coupe tous les méridiens sous le même angle, est représentée par une ligne droite sur la carte, puisque cette ligne fera le même angle avec tous les méridiens qui, sur la carte, sont des droites parallèles entr'elles. C'est à raison de cette propriété que le système de Mercator est adopté pour les cartes marines. Voici pourquoi:

En mer, on ne connait aisément, à chaque instant, que la direction du méridien sur lequel on se trouve, direction indiquée par la boussole; c'est donc aux méridiens successifs que l'on traversera, qu'il faut rapporter la direction à suivre pour aller d'un point à un autre. Si l'on suivait l'arc de grand cercle, comme étant le plus court chemin, cette direction changerait à chaque instant par rapport aux méridiens, parceque l'arc de grand cercle, ferait avec eux des angles différents. Il faudrait donc calculer d'avance ces angles, et ce calcul même ne tarderait pas à ne plus servir, parceque le vaisseau n'ayant pas suivi avec une précision mathématique la direction calculée, il se trouverait en dehors de l'arc de grand cercle, et un nouveau calcul deviendrait nécessaire. Aussi les marins ne suivent pas la route la plus courte, c'est-à-dire l'arc de grand cercle; ils suivent la courbe qui fait partout le même angle avec les méridiens; c'est cet angle, déterminé une fois pour toutes, sous lequel ils se dirigent par rapport aux méridiens, à chaque instant. La détermination de cet angle se fait sans calcul, et de la manière la plus simple. Il suffit de tirer une droite, sur la carte, du point de départ au point où l'on va : l'angle que cette droite fait avec les méridiens, est l'angle sous lequel on doit se diriger pendant tout le cours de la route. On le donne au pilote, qui, par l'observation constante de la boussole, maintient la direction du vaisseau sous cet angle constant avec les méridiens successifs. Toutefois le vaisseau peut être dévié de sa route par les courants : aussi l'on a soin, de temps en temps, de déterminer la position où l'on se trouve et de chercher sur la carte le nouvel angle sous lequel on doit se diriger.

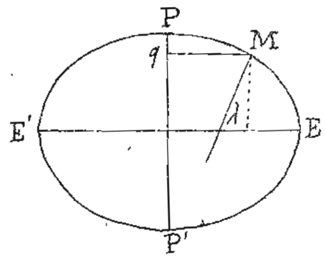
La ligne qui, sur la sphère, coupe tous les méridiens sous un même angle est une sorte de spirale à double courbure qu'on appelle <u>loxodromie</u>. Cette courbe jouit de cette propriété curieuse, savoir, que <u>sa projection stéréographique sur le plan de l'équateur est une spirale logarithmique</u>. En effet, d'après la deuxième propriété de la projection stéréographique, la projection de la loxodromie sera une courbe faisant toujours le même angle avec ses rayons vecteurs.

Cas où l'on tient compte de l'aplatissement de la terre. (non exigé). [Pour donner

à une carte marine toute la précision possible, il faut considérer la terre comme un sphéroïde. Alors l'équation $\frac{m'n}{mn} = \frac{M'N}{MN}$ exprime toujours la condition à laquelle il faudra satisfaire ; mais $M'N$ et MN ont des valeurs différentes : $M'N$ n'est plus égal simplement à $d\lambda$; c'est la différentielle de l'arc d'ellipse, à la latitude λ ; son expression est

$$M'N = \frac{A(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

A étant le rayon de l'équateur, ou demi-grand axe de l'ellipse. MN est un arc de parallèle compris entre deux méridiens faisant entr'eux l'angle dl. On a donc



$$MN = x\,dl,$$

x étant le rayon Mq du parallèle. On trouve aisément que l'expression de x en fonction de la latitude λ du parallèle, est

$$x = \frac{A}{(1+(1-e^2)\tang^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{A\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

Donc

$$MN = \frac{A\cos\lambda\,dl}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}.$$

Et

$$\frac{M'N}{MN} = \frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,dl\,(1-e^2\sin^2\lambda)}.$$

On a toujours

$$\frac{m'n}{mn} = \frac{ds}{a\,dl} \quad \text{et} \quad \frac{M'N}{MN} = \frac{m'n}{mn};$$

on a donc

$$ds = \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda(1-e^2\sin^2\lambda)}.$$

Pour intégrer écrivons

$$ds = \frac{a\,d\lambda}{\cos\lambda} - ae\,\frac{d(e\sin\lambda)}{1-e^2\sin^2\lambda},$$

ou

$$ds = \frac{a\,dl}{\cos\lambda} - \frac{ae}{2}\left(\frac{d(e\sin\lambda)}{1+e\sin\lambda} + \frac{d(e\sin\lambda)}{1-e\sin\lambda}\right).$$

D'où

$$s = a\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{ae}{2}\log.\frac{1+e\sin\lambda}{1-e\sin\lambda}.$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parceque la distance s sera comptée à partir de l'équateur, où l'on a $\lambda = 0$ et $s = 0$.

Le deuxième terme de cette expression de s est très petit, car en le développant en série on a une suite de termes en e^2, e^4, e^6, &c.... et e est une quantité très petite. Aussi dans la construction des cartes marines on a coutume de supposer la terre sphérique.]

Du Soleil.

Mouvement propre du soleil. Le soleil participe au mouvement diurne de la sphère céleste. Mais en outre, il est animé d'un

mouvement qui lui est propre, et que l'on constate aisément à toutes les époques et d'un jour à l'autre. Qu'à un jour quelconque on observe le soleil à son lever à l'horizon, et qu'on remarque une étoile qui se trouve au même instant à l'horizon. Que le lendemain on fasse la même observation, on reconnaitra que le soleil se lève, ou revient à l'horizon, un peu plus tard que l'étoile. Et pareillement, si l'on observe le soleil à son coucher, on connaitra qu'il atteint l'horizon un peu plus tard qu'une étoile avec laquelle il s'y trouvait la veille. Les jours suivants il s'éloignera de plus en plus de ces étoiles. Cela prouve que <u>le soleil est animé d'un mouvement propre, en sens contraire du mouvement diurne de la voute céleste</u>.

C'est en comparant ainsi la position du soleil, à son lever et à son coucher, à celle des étoiles, que les Anciens ont reconnu et étudié le mouvement propre du soleil.

Aujourd'hui la lunette méridienne et l'horloge astronomique nous permettent de constater ce mouvement d'une manière plus simple et plus précise. Car en observant le soleil à son passage au méridien, on reconnait qu'il ne revient au méridien que 4' environ après l'étoile avec laquelle il y passait la veille.

Forme circulaire du disque du soleil. Le soleil ne se réduit pas à un point lumineux, comme les étoiles; il présente un disque d'une certaine étendue, dont les diamètres sont vus sous un angle de 32 minutes environ. Ce disque est parfaitement circulaire: on s'en assure au moyen d'une lunette dans laquelle sont deux fils parallèles qu'on peut rapprocher l'un de l'autre. Supposons que ces deux fils soient verticaux; on déterminera leur distance de manière qu'ils soient tous deux tangents au disque du soleil; puis on fera tourner la lunette autour de son axe; on reconnaitra alors que les deux fils embrassent toujours exactement le disque du soleil; ce qui prouve qu'il est parfaitement sphérique. La hauteur moyenne de ses bords supérieur et inférieur est la hauteur de son centre.

Construction de la trajectoire du soleil. Nous appelons <u>trajectoire</u> du soleil, la courbe que décrit son centre dans son mouvement propre. Pour déterminer cette courbe, on observera chaque jour la position du soleil sur la voute celeste; cette position se détermine par la distance du soleil à l'équateur et au cercle horaire d'une certaine étoile; c'est-à-dire, par la déclinaison et l'ascension droite du soleil. Ce sont donc ces deux coordonnées qu'il faut déterminer à un instant donné. Pour rendre l'opération plus simple, c'est au moment du passage du soleil au méridien, qu'on l'observe et qu'on détermine

ses deux coordonnées. Cela se fait comme pour les étoiles. La forme parfaitement circulaire du disque solaire facilite la détermination des coordonnées de son centre.

Déclinaison. Au moyen d'un fil horizontal placé dans la lunette du cercle mural, on observe les hauteurs H, H' au dessus de l'horizon, des deux bords supérieur et inférieur du disque solaire; la hauteur de son centre est $\frac{H+H'}{2}$. Cette hauteur moins celle du pôle est la distance du centre du soleil au pôle; et le complément de cette distance est sa déclinaison.

Ascension droite. On observe, avec la lunette méridienne et l'horloge astronomique, les heures h, h' des passages au méridien des deux bords antérieur et postérieur du disque solaire. $\frac{h+h'}{2}$ marque l'instant du passage du centre du soleil. On connait, ou l'on observe l'heure du passage de l'étoile dont le cercle horaire est pris pour l'origine des ascensions droites; la différence entre cette heure et $\frac{h+h'}{2}$, convertie en angle, à raison de 15° par heure (sidérale) exprime l'ascension droite cherchée.

Ayant ainsi déterminé la déclinaison et l'ascension droite du soleil pour tous les jours de l'année, on marque ses positions sur la sphère; ce sont autant de points de la courbe qu'il parcourt en vertu de son mouvement propre.

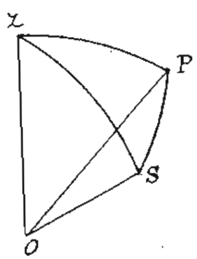
Quant à l'heure de son passage au méridien, on reconnait qu'elle retarde chaque jour de 4' environ; c'est-à-dire que le soleil met à revenir au méridien un *jour sidéral* plus 4'.

Pour construire la courbe décrite par le soleil, nous avons observé cet astre à son passage au méridien, parceque, dans ces positions, la détermination de son ascension droite et de sa déclinaison se fait aisément par l'observation à la lunette méridienne et au mural, instrument d'une grande précision. Mais on peut observer le soleil dans d'autres positions, et déterminer les deux coordonnées, comme il suit.

Détermination de l'ascension droite et de la déclinaison d'un astre à un instant quelconque.

Cela se fait de deux manières, par le calcul et l'observation, ou bien par l'observation seulement.

1ère Manière; par le calcul et l'observation. Soit S la position de l'astre sur la voute céleste, P le pôle, et Z le zénit. Ces trois points sont les sommets d'un triangle sphérique dans lequel le côté SP est le complément de la déclinaison de l'astre, et l'angle en P son ascension droite comptée à partir de l'étoile qui, au moment de l'observation, se trouve dans



le plan méridien ZOP. C'est donc ce côté SP et l'angle P qu'il faut déterminer. Pour cela on connait trois éléments du triangle, 1° le côté SZ, distance zénitale de l'astre, que l'on observe au théodolite; 2° le côté ZP, distance du pôle au zénit, que l'on connait; et 3° l'angle en Z, qui est l'*azimut* de l'astre, c'est-à-dire l'angle que le plan vertical mené par l'astre fait avec le méridien; angle qui s'observe au théodolite.

Les deux inconnues, SP et angle P se détermine donc par les deux équations

$$\cos SP = \cos PZ \cos SZ + \sin PZ \sin SZ \cos Z,$$

$$\frac{\cot SZ}{\cot ZP}\,\frac{1}{\cos Z} - \frac{\cot P}{\cot Z}\,\frac{1}{\cos ZP} = 1.$$

La première fait connaitre la déclinaison de l'astre, par son complément SP; et la deuxième fait connaitre l'angle P qui est l'ascension droite comptée à partir de l'étoile, dont le *cercle horaire*, au moment de l'observation, se trouve dans le plan méridien. L'heure de l'observation est connue par l'horloge astronomique; de sorte qu'on connait ce cercle horaire; conséquemment la position de l'astre se trouve déterminée sur la sphère céleste.

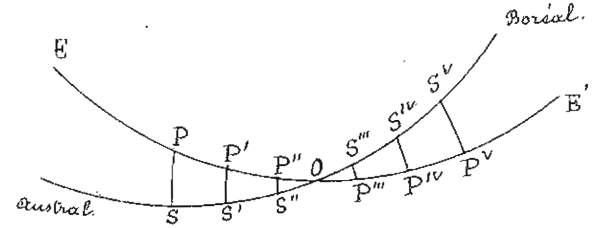
2e Manière: par l'observation seulement. On se sert de l'équatorial. Supposons que la lunette soit dirigée dans le sens de l'axe de l'instrument, qui est la direction de l'axe du monde, et que son limbe soit vertical. Prenons les choses dans cet état, et visons un astre avec la lunette. Alors elle fait avec l'axe de l'instrument un angle égal au complément de la déclinaison de l'astre; de sorte que cet angle, compté sur le limbe de la lunette, fait connaître cette déclinaison. Mais la lunette étant dirigée sur l'astre, le plan de son limbe prolongé, passe par cet astre, il passe aussi par l'axe de l'instrument, et conséquemment par l'axe du monde; il se confond donc avec le plan du cercle horaire de l'astre; primitivement il était situé dans le plan méridien; donc la rotation qu'il a éprouvée est l'ascension droite de l'astre, comptée à partir de l'étoile qui se trouve dans le plan méridien au moment de l'observation: Cette rotation se mesure sur le limbe équatorial qui est perpendiculaire à l'axe de l'instrument. A cet effet, un index mobile avec le limbe de la lunette, comme dans le théodolite, glisse sur le limbe équatorial, et marque la rotation du premier limbe autour de l'axe du monde.

Cette manière expéditive de déterminer la déclinaison et l'ascension droite d'un astre par une seule observation est d'un grand secours dans beaucoup de circonstances; mais le premier procédé est employé dans les observations qui exigent la plus grande exactitude; parceque le théodolite dont on se sert alors, tournant autour d'un axe vertical, est moins sujet à de petits dérangements et offre plus

de précision que l'équatorial qui tourne autour d'un axe incliné.

Points équinoxiaux. La trajectoire du soleil coupe l'équateur, et se trouve en partie dans l'hémisphère boréal et en partie dans l'hémisphère austral. Les points où elle rencontre l'équateur ont reçu le nom de *points équinoxiaux* ou *équinoxes*. Celui qui marque le passage du soleil de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal s'appelle l'*équinoxe du printemps*, et l'autre l'*équinoxe d'automne*.

Détermination des points équinoxiaux. Soient S, S', S'', ... les positions observées du soleil à son passage au méridien, pendant plusieurs jours avant et après son passage d'un hémisphère dans l'autre, par exemple de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal.



Soit EE' l'équateur, et SP, S'P', S''P'',... les arcs qui marquent les déclinaisons du soleil.

Les observations font reconnaître que dans l'intervalle de deux passages au méridien, l'accroissement de l'ascension droite est très sensiblement proportionnel au temps, et qu'il en est de même de la variation de la déclinaison. D'après cela, soit S'' la position du soleil à son dernier passage au méridien dans l'hémisphère austral, et S''' sa position à son premier passage au méridien dans l'hémisphère boréal; soit O le point, inconnu, où le soleil a traversé l'équateur; et $\underline{t}$ l'intervalle de temps, inconnu aussi, qu'il a mis à aller de O en S'''; l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs au méridien est 24 heures sidérales plus une petite quantité θ, sensiblement égale à 4'; on a donc les deux proportions

$$\frac{OP'''}{P''P'''} = \frac{t}{24^h+\theta}\ ; \qquad \frac{S'''P'''}{S''P''+S'''P'''} = \frac{t}{24^h+\theta}.$$

On en conclut

$$OP''' = \frac{P''P'''.\ S'''P'''}{S''P''+S'''P'''}.$$

Le deuxième nombre est connu; de sorte que la position du point O se trouve déterminée.

L'instant où le soleil s'est trouvé en ce point, sera déterminé par la valeur de $\underline{t}$ que donne la deuxième des deux équations, savoir

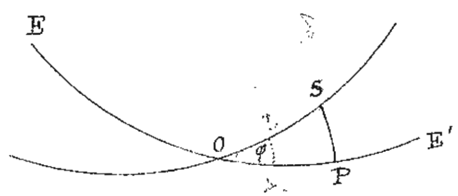
$$t = \frac{(24^h+\theta).\ S'''P'''}{S''P''+S'''P'''}.$$

On déterminera de même la position de l'autre point équinoxial et l'instant où le soleil y passe.

On trouve que ces deux points comprennent sur l'équateur un arc de 180°; c'est-à-dire qu'ils sont aux extrémités d'un diamètre de l'équateur. Ce diamètre s'appelle la <u>ligne des équinoxes</u>.

C'est à partir de l'équinoxe du printemps que les astronomes ont coutume de compter les ascensions droites du soleil.

La courbe décrite par le soleil est plane. — Inclinaison de son plan sur l'équateur. Soit S la position du soleil à un instant quelconque, OP sera son ascension droite Æ, et SP sa déclinaison D. Concevons l'arc de grand cercle qui passe par les points O et S; soit φ son inclinaison sur l'équateur; on aura dans le triangle sphérique rectangle OPS,



$$\text{tang } SP = \sin OP \text{ tang } O;\ \text{ou tang } D = \sin \text{Æ} \text{ tang } \varphi.$$

D et Æ se déterminent par l'observation; cette équation fait donc connaître l'angle φ. Un autre jour, D et Æ seront différents; mais la valeur de φ sera la même, et égale à 23° 27'. Cela prouve que la courbe parcourue par le soleil est plane, et que l'inclinaison de son plan sur l'équateur est de 23° 27'. Les Anciens ont donné à cette courbe le nom d'<u>écliptique</u>, parceque c'est quand la lune se trouve dans son plan, ou à peu près, que les <u>éclipses</u> peuvent avoir lieu.

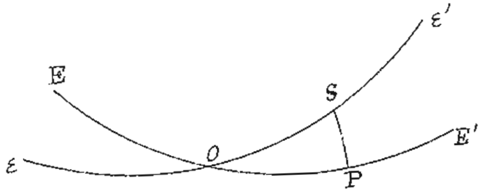
L'écliptique est cette courbe dont nous avons déjà fait mention en parlant des douze constellations zodiacales.

Année tropique. Le temps que le soleil met à revenir au même équinoxe est toujours le même ; ce temps est de 366 jours sidéraux 2422 dix-millièmes. On l'appelle *année tropique*. Pour le déterminer, il suffit d'observer deux passages du soleil à l'équinoxe, c'est-à-dire de calculer, comme nous l'avons fait ci-dessus, les instants de ces passages. L'intervalle de temps compris entre les deux passages fait connaître la longueur de l'*année tropique*. Pour plus d'exactitude, il faut observer l'équinoxe à deux époques assez éloignées, par exemple à un intervalle de 50 ou 100 ans.

Longitude du soleil. L'arc parcouru par le soleil sur l'écliptique, à partir d'un point fixe pris pour origine, s'appelle *longitude*. On prend pour ce point fixe l'*équinoxe du printemps*, comme dans l'expression des ascensions droites.

Calcul de la longitude par l'observation.

Soit EE' l'équateur, $\varepsilon\varepsilon'$ l'écliptique ; S la position actuelle du soleil ; SP son cercle de déclinaison. On a dans le triangle rectangle SPO,



$$\tang OP = \tang OS \cos O,$$

ou, en appelant L la longitude OS, et φ l'angle O,

$$\tang Æ = \tang L \cos \varphi.$$

L'ascension droite $Æ$ se détermine par

l'observation, de sorte que cette équation fait connaître la longitude du soleil à un instant donné.

Expression de la longitude en fonction du temps. — Longitude moyenne. — Equation du centre.

L'observation montre que le mouvement apparent du soleil, c'est-à-dire, son mouvement angulaire autour de la terre, n'est pas uniforme ; de sorte que l'accroissement de longitude pendant un même intervalle de temps, pris pour unité, n'est pas toujours le même.

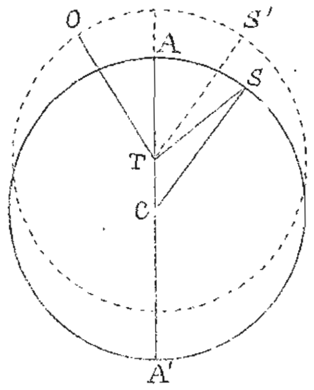
Concevons un soleil fictif qui, à une époque, coïnciderait avec le soleil vrai, et décrirait l'écliptique d'un mouvement uniforme et dans le même temps que le soleil vrai, c'est-à-dire en une année tropique. Soit n l'accroissement de longitude de ce soleil fictif dans l'unité de temps ; au bout du temps t sa longitude sera $L' = nt + \alpha$; α étant sa longitude au moment où l'on commence à compter le temps t.

Soit L la longitude du soleil vrai au bout du temps t ; elle diffère de celle du soleil fictif ; ainsi l'on a

$$L = L' + \Delta ;$$

la différence Δ étant incessamment variable. En déterminant chaque jour cette différence, par l'observation du soleil vrai, on pourra étudier la loi de ses variations, et exprimer la différence elle-même en fonction du temps.

On a reconnu de la sorte, que pour représenter le mouvement apparent du soleil, il suffit de supposer qu'il se meut d'un mouvement uniforme, sur-un cercle dont la terre n'occupe pas le centre. Soit C le le centre de ce cercle, et T la position de la terre. Si le rapport du rayon du cercle à la distance de son centre à la terre, savoir $\frac{CS}{CT}$, a une certaine valeur convenable, le mouvement apparent du soleil sera le même que si le soleil décrivait ce cercle d'un mouvement uniforme.



Cette manière très simple de représenter le mouvement du soleil est due aux Anciens. Hipparque l'a enseignée ; on la lui attribue ; mais elle pourrait bien être plus ancienne.

On en conclut immédiatement l'expression de la différence Δ.

En effet, supposons que le soleil fictif ait coïncidé avec le soleil vrai au moment où celui-ci se trouvait en A sur le rayon CT ; quand le soleil vrai est en S sur le cercle le soleil fictif se trouve sur la droite TS' parallèle au rayon CS ; de sorte que l'angle S'TS est l'expression de la différence Δ. Or on a $S'TS = TSC$; et dans le triangle CTS ;

$$\frac{\sin CST}{\sin CTS} = \frac{CT}{CS}; \text{ ou } \sin CST = \frac{CT}{CS} \sin ATS.$$

L'angle CST est très petit, et l'on peut prendre cet

angle lui-même à la place de son sinus ; on a donc

$$CST \text{ ou } \Delta = \frac{CT}{CS} \sin ATS.$$

Le rapport $\frac{CT}{CS}$ est une quantité constante égale à $\frac{1}{30}$ à peu près : représentons-la par $2e$, de sorte que $e = \frac{1}{60}$. Soit O le point à partir duquel on compte les longitudes ; faisons l'angle $OTA = L_1$; on aura

$$ATS = OTS - OTA = L - L_1.$$

Donc

$$\Delta = 2e \sin(L - L_1).$$

or

$$L = L' + \Delta; \quad \text{donc}$$

$$\Delta = 2e \sin(L' - L_1 + \Delta).$$

Δ étant une quantité très petite de l'ordre de e, $\sin(L' - L_1 + \Delta)$ ne diffère de $\sin(L' - L_1)$ que d'une quantité de cet ordre ; et conséquemment en écrivant

$$\Delta = 2e \sin(L' - L_1);$$

au lieu de la véritable valeur ci-dessus, l'erreur sera une quantité de l'ordre du carré de e. Or e est assez petit pour qu'on néglige son carré. De sorte qu'on prend

$$\Delta = 2e \sin(L' - L_1).$$

on a donc

$$L = L' + 2e \sin(L' - L_1)$$

or

$$L' = nt + \alpha; \quad \text{donc}$$

$$(1) \ldots\ldots \quad L = nt + \alpha + 2e \sin(nt + \alpha - L_1).$$

Telle est l'expression de la longitude du soleil en fonction du temps. Le terme $(nt - \alpha)$, qui exprime la longitude du soleil fictif, s'appelle la longitude moyenne, et le terme $2e \sin(nt+\alpha-L_1)$ s'appelle l'équation du centre.

On appelle en général, équation, dans l'Astronomie, la différence entre la valeur actuelle d'une quantité variable, et la valeur qu'aurait cette quantité si elle croissait uniformément.

Ainsi le terme $2e \sin(nt+\alpha-L_1)$ exprime proprement l'équation de la longitude du soleil. On l'appelle équation du centre, parcequ'il provient et qu'il dépend de la position du centre de l'orbite du soleil par rapport à la terre.

Le terme L_1 est la longitude vraie du soleil à l'instant où elle est la même que la longitude moyenne, puisque nous avons supposé que le soleil fictif coïncidait avec le soleil vrai en A, et que c'est l'angle OTA que nous avons représenté par L_1. Et en effet si dans l'équation (1), on suppose L égale à la longitude moyenne $nt+\alpha$, il s'ensuit $\sin(nt+\alpha-L_1)=0$; d'où $L_1 = nt+\alpha = L$. Ainsi L_1 est la longitude du soleil à l'instant où celle-ci est égale à la longitude moyenne.

La longitude vraie coïncidera encore avec la longitude moyenne, quand leur valeur commune sera (L_1+180°). Car on satisfait à l'équation $\sin(nt+\alpha-L_1)$ en faisant $nt+\alpha = 180^\circ + L_1$. Cela a lieu au point A'. Ainsi c'est dans les points A et A' que le soleil vrai coïncide avec le soleil fictif S'. Et en effet il est évident qu'en ces points la différence $\Delta = TSC$, ou équation du centre, est nulle.

C'est en ces points que l'équation du centre

croît le plus rapidement ; car son accroissement est proportionnel à l'accroissement du sinus de l'angle STA ; et il est clair que cet accroissement, pour un même accroissement de l'angle est d'autant plus grand que l'angle est plus près de zéro ou de 180°. Ce qui a lieu en A et A'. Il s'ensuit que c'est en ces points A et A' que le mouvement du soleil différera le plus du mouvement moyen ; c'est-à-dire que c'est en ces points que le mouvement du soleil est le plus lent ou le plus rapide.

Calcul de l'ascension droite du soleil, en fonction du temps. — Ascension moyenne. — Équation du temps.

L'ascension droite se déduit de la longitude, par la formule

$$\tan \text{Æ} = \tan L \cos \varphi.$$

qui résolue en série donne (page 99),

$$L - \text{Æ} = \tan^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 2L - \tfrac{1}{2} \tan^4 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 4L + \&^c \ldots$$

on a

$$\varphi = 23^\circ, 27' ; \quad \frac{\varphi}{2} = 11^\circ, 43', 3'' \text{ et}$$

$\tan^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{25}$ à peu près ; les termes en $\tan^4 \frac{1}{2}\varphi$, $\tan^6 \frac{1}{2}\varphi$, &c..... sont très petits et négligeables devant $\tan^2 \frac{1}{2}\varphi$. On peut donc écrire simplement

$$L - \text{Æ} = \tan^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 2L,$$

ou

$$\text{Æ} = L - \tan^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin 2L.$$

ou en remplaçant le terme L par la valeur trouvée ci-dessus, équation (1) ;

$$\text{Æ} = nt + \alpha + 2e \sin(nt+\alpha-L_1) - \sin 2L . \tan^2 \tfrac{1}{2}\varphi.$$

A la place de $nt+\alpha$ sous le signe *sin*, mettons son expression tirée de la valeur de L, il vient

$$Æ = nt+\alpha+2e \sin\{L-L_1-2e \sin(nt+\alpha-L_1)\}$$
$$-\sin 2L.\ \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi.$$

En négligeant le carré et les puissances supérieures de $2e$, comme dans le calcul de la longitude, on peut remplacer $\sin\{L-L_1-2e \sin(nt+\alpha-L_1)\}$ par $\sin(L-L_1)$; on a donc

$$Æ = \{nt+\alpha\} + \{2e \sin(L-L_1) - \sin 2L.\ \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi\}.$$

La première partie du second membre s'appelle l'ascension moyenne, et la deuxième, équation du temps exprimée en arc. Nous verrons plus loin la signification de cette dénomination.

On a coutume de désigner cette équation du temps par u ; de sorte qu'on a

$$u = 2e \sin(L-L_1) - \sin 2L.\ \tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi,$$

et

$$Æ = nt+\alpha+u.$$

15e Leçon.

Mesure du temps. — Jour vrai. — Jour moyen. — Equation du temps. — Cadrans solaires. — Année civile. — Calendrier.

Jour vrai. On appelle jour solaire, ou jour vrai, l'intervalle de temps compris entre deux passages du soleil au méridien. Si le soleil n'était pas animé d'un mouvement propre sur la sphère céleste, il passerait toujours au méridien avec les mêmes étoiles, et le jour vrai serait le même que le jour sidéral. Mais, par suite de son mouvement propre, qui a lieu en sens contraire du mouvement diurne, le soleil revient chaque jour au méridien, un peu plus tard que l'étoile avec laquelle il y a passé la veille. De sorte que le jour vrai est un peu plus long que le jour sidéral.

La différence est de 4' environ ; mais cette différence n'est pas constante ; c'est-à-dire que le jour vrai n'est pas toujours de même durée. Il éprouve de petites variations, en plus et en moins d'une valeur moyenne, qui dépendent de la position du soleil sur l'écliptique, c'est-à-dire de sa longitude. Cette inégalité du jour vrai se peut constater par l'observation. Nous la démontrerons par l'expression même du jour vrai que nous calculerons tout-à-l'heure.

Jour moyen. Le jour vrai n'étant pas de longueur constante, on n'a pu le prendre pour unité, dans la mesure du temps : on a pris un jour fictif de durée constante, qu'on a appelé jour moyen.

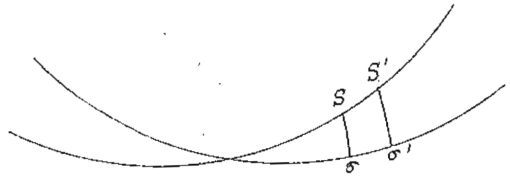
Que l'on conçoive un soleil fictif parcourant l'équateur d'un mouvement uniforme, et faisant sa révolution en une année tropique. Que ce soleil fictif, à son départ, ait son ascension droite, ou distance à l'équinoxe, égale à la longitude moyenne du soleil vrai : enfin, qu'il participe au mouvement diurne. L'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs de ce soleil fictif au méridien, sera ce qu'on appelle le *jour moyen*.

Temps vrai. — Temps moyen. Le temps mesuré en *jours moyens*, s'appelle *temps moyen*, et le temps mesuré en *jours vrais* le *temps vrai*. Le moment du passage du soleil véritable au méridien, s'appelle le *midi vrai*; et le moment du passage du soleil fictif que nous venons de supposer se mouvoir sur l'équateur, le *midi moyen*.

L'intervalle de temps qui sépare un midi vrai du midi moyen, ou plus généralement, l'intervalle de temps qui sépare les passages du soleil vrai et du soleil moyen sur un même cercle de déclinaison, s'appelle l'*équation du temps*. On exprime cette *équation* en *temps moyen*.

Dans l'expression de la longitude du soleil en fonction du temps, se trouve un nombre constant $\underline{n}$ qui exprime l'accroissement moyen de la longitude dans l'unité de temps. Si cette unité est le *jour moyen*, la valeur de $\underline{n}$ est $59', 8'', 33$. Si on prenait pour unité le jour sidéral, la valeur de n serait $58', 58'', 64$. Mais on a coutume de prendre le jour moyen, de sorte que l'on a $n = 59', 8'', 33$.

Expression du jour vrai en fonction de la longitude du soleil. Soient S, S' les positions du soleil sur l'écliptique, à deux passages consécutifs au méridien, et t, t' les temps qui marquent les instants de ces passages; $(t'-t)$ sera le *jour vrai*. Soit θ le jour sidéral. Une étoile située sur le cercle de déclinaison $S\sigma$ passe au



méridien en même temps que le soleil, à son premier passage. Quand elle revient au méridien, après une révolution qui a duré le temps θ, le soleil s'en trouve éloigné de l'arc $\sigma\sigma'$. Le jour vrai est donc égal au jour sidéral θ plus le temps nécessaire pour que le soleil décrive, dans le mouvement diurne, un arc égal à $\sigma\sigma'$. Ce temps est $\frac{\theta}{2\pi}\sigma\sigma'$.(*) (abstraction faite du mouvement propre du soleil pendant ce temps très court, qui ne produit qu'une différence insensible). On a donc

$$(t'-t) = \theta + \frac{\theta}{2\pi}\sigma\sigma'.$$

$\sigma\sigma'$ est la différence des ascensions droites du soleil aux instants t, t'. On a

$$\mathcal{R} = nt + \alpha + u$$
$$\mathcal{R}' = nt' + \alpha + u'$$
$$\mathcal{R}' - \mathcal{R} = n(t'-t) + u' - u.$$

donc

$$(t'-t) = \theta + \frac{\theta}{2\pi}\left\{n(t'-t) + u' - u\right\}.$$

(*) Car la circonférence entière de l'équateur passe au méridien dans le temps θ, l'unité de circonférence passe donc dans le temps $\frac{\theta}{2\pi}$; et l'arc $\sigma\sigma'$, dans le temps $\frac{\theta}{2\pi}\cdot\sigma\sigma'$.

d'où

$$t'-t = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\theta} - n} + \frac{u'-u}{\frac{2\pi}{\theta} - n}.$$

Telle est la valeur du jour vrai exprimée en jour sidéral. On voit qu'elle se compose d'une partie constante, et d'une 2e partie variable, dépendante de la longitude du soleil. Ce qui prouve, ainsi que nous l'avions annoncé, que la durée du jour vrai n'est pas constante.

Valeur du jour moyen. Le terme constant $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\theta} - n}$, ou $\frac{\theta}{1-\frac{\theta}{2\pi}.n}$ exprime le jour moyen. Car le calcul du jour moyen sera absolument le même que pour le jour vrai, de sorte que l'expression du jour vrai devient celle du jour moyen si l'on y met à la place de u et u' les valeurs qui conviennent au soleil moyen. Or ces valeurs sont zéro, parceque l'ascension droite du soleil moyen est précisément égale à la longitude du soleil vrai. L'expression du jour moyen se réduit donc au premier terme du jour vrai.

Il est à remarquer que le jour moyen est égal précisément à la moyenne des jours vrais dans le cours d'une année tropique; de sorte que sa dénomination est rigoureusement exacte.

En effet, le temps que le soleil fictif met à revenir à son point de départ sur l'équateur est egal à l'année tropique; ce temps est égal à la somme des jours moyens compris dans l'année tropique; or cette somme est égale à un jour moyen multiplié par le nombre des jours moyens compris dans l'année tropique. On a donc

Année tropique = (1 jour moyen) × (nombre de j. moy.)

A chaque jour moyen correspond un jour vrai, de sorte que le nombre de jours moyens est le même, dans une année tropique, que le nombre de jours vrais. D'une autre part, l'année tropique est la somme des jours vrais qui la forment; l'équation devient donc

$$\Sigma \text{ jours vrais} = 1 \text{ jour moyen} \times \text{nombre de jours vrais}$$

$$1 \text{ jour moyen} = \frac{\Sigma \text{ jours vrais}}{\text{nombre de jours vrais}}.$$

Le deuxième membre exprime la valeur moyenne du jour vrai. Donc le jour moyen est égal à la moyenne des jours vrais.

Dans l'expression $\frac{\theta}{1-\frac{\theta}{2\pi}n}$ du jour moyen, mettons pour n sa valeur $59', 8'', 33$, on aura:

J. moy. = j. sidéral + 3'. 56'', 555 temps sidéral.

Or 3'56'', 555 de temps sidéral répondent à 3'. 55'', 9094 de temps moyen; on a donc

J. moy. = j. sidéral + 3'. 55'', 9094 jour moyen.

Et de là on tire

J. sidéral = j. moy. − 3'. 55'', 9094 jour moyen

ou

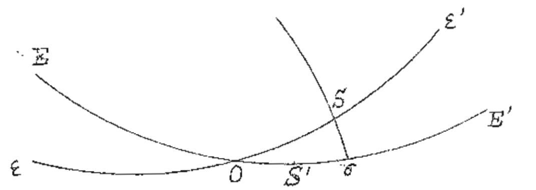
Jour sidéral = 23^h. 56'. 4'', 0916 jour moyen.

On voit donc que le jour solaire est plus long que le jour sidéral, de 4' environ, ainsi que nous l'avions annoncé.

Expression de l'année tropique en jours

moyens. Nous avons dit que l'année tropique exprimée en jours sidéraux est de $366^j,2422$. Or dans le cours d'une année tropique, le soleil, par suite de son mouvement rétrograde sur l'écliptique, passe une fois de moins qu'une étoile au méridien ; il n'y passe donc que 365,2422 fois ; de sorte que l'année tropique contient 365,2422 jours moyens.

Expression de l'équation du temps. Soit S la position du soleil vrai sur l'écliptique, et S' la position du soleil fictif sur l'équateur, au même moment. $O\sigma$ est l'ascension droite Æ du soleil vrai,



et OS' celle du soleil fictif, que nous désignerons par Æ_m. On a

$$\text{Æ} = \text{Æ}_m + S'\sigma.$$

Nous avons trouvé pour l'expression de Æ,

$$\text{Æ} = (nt + \varepsilon) + u.$$

Or $(nt+\varepsilon)$ exprime la longitude moyenne du soleil vrai, laquelle est égale évidemment à l'ascension droite du soleil fictif qui se meut sur l'équateur ; on a donc $\text{Æ}_m = nt + \varepsilon$, et par conséquent

$$\text{Æ} = \text{Æ}_m + u.$$

L'arc $S'\sigma$ est donc égal à la quantité représentée par u.

Les deux soleils ne passeront pas en même

temps au méridien du lieu de l'observateur, dans le mouvement diurne. Si l'ascension droite du soleil vrai est plus grande que celle du soleil moyen, comme le suppose l'état de la figure, celui-ci passera le premier au méridien, parceque le mouvement diurne se fait en sens contraire du mouvement propre du soleil, c'est-à-dire dans le sens E'O. L'intervalle de temps qui séparera les deux passages au méridien sera ce qu'on appelle l'équation du temps. C'est ce qu'il faut ajouter ou retrancher au temps moyen, pour avoir le temps vrai. Supposons, par exemple, que cet intervalle de temps soit de 3' ; quand il sera midi moyen, il s'en faudra de 3' qu'il soit midi vrai ; il ne sera donc en temps vrai que $11^h\,57'$, tandisqu'il est 12^h en temps moyen. De sorte que dans ce cas il faut retrancher l'équation du temps 3', du temps moyen pour former le temps vrai. Il faudrait l'ajouter si l'ascension droite du soleil fictif était plus grande que celle du soleil vrai.

La révolution diurne s'accomplit dans le jour sidéral θ, conséquemment l'intervalle de temps qui sépare les passages des deux points S' et σ au méridien est $\frac{\theta}{2\pi} S'\sigma$, ou $\frac{\theta}{2\pi} u = \frac{24^h}{360} u = \frac{u}{15}$.

Telle est l'expression de l'équation du temps. On voit que c'est l'arc u converti en temps. Par conséquent on peut dire aussi que l'arc u est l'équation du temps exprimée en arc. Voilà donc la raison de cette dénomination qu-nous avons attribuée à l'arc u précédemment.

Discussion de l'équation du temps.

L'équation du temps jouit d'une propriété très remarquable: elle devient nulle d'elle même quatre fois dans le cours de l'année; de sorte que ses variations sont périodiques. Elle atteint une valeur maximum, égale à 17' à peu près.

Prenons l'équation exprimée en arc, savoir:

$$u = 2e\sin(L - L_1) - \tang^2\frac{1}{2}\varphi . \sin 2L .$$

L_1 est l'angle ATO (figure de la page 266); c'est la longitude de l'axe AA' sur lequel se trouve le soleil quand ses distances à la terre sont minimum et maximum. Si l'on prend pour le point O, à partir duquel on compte les longitudes, l'équinoxe du printemps, la valeur de L_1 est de 279° environ.

A cet équinoxe, la longitude du soleil est nulle; ainsi $L = 0$ et $u = 2e\sin(-L_1) = 2e\sin(-279°)$; u est donc positif. Si L augmente à partir de zéro, on trouve que u est encore positif, mais que sa valeur va en diminuant, parceque le 2e terme croît plus rapidement que le premier. Et au bout d'un mois environ après l'équinoxe, (vers le 15 avril) $u = 0$. L continuant d'augmenter, u devient négatif. Sa valeur absolue croît d'abord, puis décroît et devient nulle, un peu avant $L = 90°$ (vers le 15 juin). L augmentant toujours, u redevient positif, augmente d'abord, puis diminue et

redevient nul pour la 3e fois, un peu avant que L ait atteint 180°, c'est-à-dire avant l'équinoxe d'automne (vers le 1er Septembre). Enfin L augmentant toujours, u est négatif et devient nul un peu après $L = 270° = 3 \times 90°$. (vers le 24 décembre).

Du temps marqué par les horloges.

Dans beaucoup de villes les horloges marquent le temps vrai. Pour cela, on les règle tous les jours sur le midi vrai; c'est-à-dire qu'on leur fait marquer midi au moment du passage du soleil au méridien; ou bien on les règle pour plusieurs jours de suite, en allongeant ou accourcissant convenablement leur balancier. Mais cet usage a le double inconvénient d'occasionner des frais d'entretien journalier de l'horloge, et de la mettre en désaccord avec les montres qui ne peuvent marquer que le temps moyen, lequel, comme nous venons de le voir, ne coïncide que quatre fois par an avec le temps vrai, et peut en différer de 17'. Aussi l'on a abandonné, à Paris, cet usage d'indiquer le temps vrai par les horloges publiques; et depuis 1828, elles marquent le temps moyen. De la sorte, les montres qui marchent bien doivent s'accorder avec les horloges.

Usage des cadrans solaires pour déterminer le temps moyen, et régler les horloges.

Il faut savoir déterminer, chaque jour, le temps moyen. Cela se fait avec un cadran solaire qui accusera le temps vrai, et une table comprenant l'équation du temps pour tous les jours de l'année. Le temps vrai, moins l'équation du temps égale le temps moyen que l'on cherche.

Voici quelle sera la construction du cadran. On aura une surface parfaitement fixe, plane ou courbe, indifféremment, et dans une position quelconque, c'est-à-dire, horizontale, verticale, ou inclinée à l'horizon. A cette surface on fixera un style, ou axe, rigoureusement parallèle à l'axe de la terre, c'est-à-dire qui soit dans le plan méridien et incliné sur l'horizon, d'un angle égal à la latitude du lieu. Par cet axe on fera passer douze plans dont le premier coïncide avec le méridien, et qui fassent entr'eux, pris deux à deux consécutivement, des angles égaux. On déterminera les traces de ces douze plans sur la surface du cadran; ce qui est une opération de géométrie descriptive. Il est clair que ces traces seront les ombres du style quand le soleil, dans son mouvement diurne, se trouvera dans les douze cercles horaires équidistants, marqués sur la sphère à partir du méridien. Car à cause de la petitesse de la terre par rapport à la distance du soleil, on peut regarder le style comme étant placé au centre même de la terre, et comme coïncidant avec l'axe du monde autour duquel le soleil accomplit sa rotation diurne. On subdivisera, si l'on veut, ces douze divisions, de manière que le cadran marque les fractions de l'heure.

D'après cela, le cadran fera connaître le temps vrai; on en retranchera l'équation du temps relative au jour où l'on se trouve, laquelle est donnée par des tables annuelles, (la connaissance des temps; l'annuaire du bureau des longitudes); et la différence sera le temps moyen cherché. Cette différence pourra être une somme parceque l'équation du temps est périodiquement positive et négative.

Année civile. Calendrier. On appelle année civile l'unité de temps que l'on emploie pour exprimer de longs intervalles de temps. Si l'année tropique était composée d'un nombre exact de jours, elle conviendrait parfaitement pour cette année civile; parcequ'elle commencerait toujours à la même heure, et à une même position du soleil sur l'écliptique; de sorte que tous les phénomènes, tels que ceux des saisons, des nuits et des jours, &c. qui sont dus au mouvement du soleil, comme nous le verrons, se représenteraient toutes les années dans le même ordre. Mais l'année tropique ne contient pas un nombre exact de jours; elle contient 365 jours moyens plus 2422 dix-millièmes du jour moyen. On ne peut donc pas la prendre pour l'année civile, car alors les années successives commenceraient à des instants différents du jour; ce qui aurait de nombreux inconvénients. Il faut donc imaginer une année fictive composée d'un nombre exact de jours; et il faut en outre, que cette année diffère peu de l'année tropique, pour que le retour des mois qui forment les divisions de l'année coïncide toujours avec les mêmes phénomènes auxquels donne lieu le mouvement du soleil.

Depuis Numa jusqu'à Jules César, le le calendrier romain, duquel le nôtre dérive, ne remplissait ces conditions que très imparfaitement. On prenait pour base l'année lunaire qui est de 355 jours environ, comme nous le verrons plus tard, et par des additions ou intercalations de jours, on en faisait une année civile approchant de l'année tropique. Mais ces intercalations, fixées par les Pontifes, étaient faites arbitrairement, et souvent en vue d'intérêts particuliers, pour servir les usurpations des magistrats, de sorte qu'il s'était introduit dans la chronologie et dans le calendrier romain une confusion inextricable. On doit à Jules César, assisté de Sosigène, célèbre astronome et mathématicien d'Alexandrie, d'avoir fait cesser ce désordre, et d'avoir imaginé une année civile fixe, véritablement en rapport avec l'année tropique. Ce grand fait de chronologie, qui aurait suffi seul pour perpétuer la mémoire de son auteur, date de l'an 45 avant l'ère vulgaire.

Jules César, supposant que l'année tropique était de 365 j. 25, c'est-à-dire 365 j. $\frac{1}{4}$ exactement, imagina deux sortes d'années, une année <u>commune</u>, de 365 jours, et une année

dite <u>bissextile</u>, de 366 jours. Il dit qu'on compterait trois années communes successives, et que la 4e serait bissextile. De la sorte, chaque période de quatre années était égale précisément à quatre années tropiques. Ce système a été appelé le <u>calendrier Julien</u>, du nom de Jules César. Lors d'une année bissextile on disait qu'il y avait <u>intercalation</u> d'un jour dans l'année commune. Puisqu'on avait supposé l'année tropique exactement de 365 j. $\frac{1}{4}$, on regardait que chaque période de quatre années commençait avec l'année tropique; et que le phénomène de l'équinoxe arrivait toujours au même jour de l'année. Ce jour, depuis l'an 327, fut supposé le 21 mars, parce qu'en cette année l'équinoxe qu'on détermina par l'observation, arriva le 21 mars. On eut besoin à cette époque de déterminer le jour de l'équinoxe, parce que le concile de Nicée, en cette année 323, décidait que la célébration de la Pâque aurait lieu le dimanche qui coïnciderait avec l'équinoxe ou le suivrait. Et depuis on supposa que l'équinoxe arrivait tous les ans ce même jour 21 mars. Cependant au bout de quelques siècles on reconnut que cela n'avait pas lieu, et que l'équinoxe tombait à des jours qui précédaient de plus en plus le 21 mars des calendriers. Ainsi en l'année 1582 le phénomène avait réellement lieu le 11 mars des mêmes calendriers.

Ces erreurs provenaient de ce qu'on avait supposé l'année plus longue qu'elle n'est, en la faisant de 365 j, 25, au lieu de 365 j, 2422. Car il en résultait que, la fin de chaque année empiétait sur le commencement de l'année suivante, et qu'on appelait, par exemple, 31 décembre, le jour qui aurait dû s'appeler 1.er janvier, ou 2, ou 3, ... janvier. Le commencement des années retardait donc; il s'ensuivait qu'en plaçant l'équinoxe au 21 mars, on retardait sa véritable époque, qui s'éloignait de plus en plus du 21 mars, au point qu'en 1582, comme nous venons de le dire, l'équinoxe arrivait réellement le 11 mars.

Ces erreurs occasionnaient de l'incertitude et des irrégularités dans la célébration des fêtes de l'église qui ne se faisait pas aux mêmes jours dans tous les pays, parceque le véritable jour de l'équinoxe, d'où devait dépendre, d'après la décision du concile de Nicée, le jour de Pâques et par suite le jour des autres fêtes mobiles, n'était pas connu.

En 1582 le pape Grégoire XIII résolut de remédier à ces inconvénients, et après avoir pris l'avis d'un conseil de mathématiciens et d'astronomes, il résolut 1.° que, pour réparer les erreurs accumulées depuis l'année 325 où l'équinoxe du printemps avait eu lieu réellement le 21 mars, le 5 octobre de l'année 1582 serait appelé le 15 octobre; et 2.°, que, pour éviter les erreurs à venir, trois années séculaires ne seraient pas bissextiles, et que la quatrième le serait; ou, en d'autres termes, qu'on supprimerait dans le calendrier Julien, trois jours en 400 ans.

Voici la raison de cette réforme, qui est encore empreinte d'une petite erreur, mais dont les conséquences ne se feront sentir que dans un grand nombre de siècles.

Le calendrier Julien supposait l'année tropique de $365\,j.\frac{25}{100}$: elle n'est en réalité que de 365 j. 2422. Dans le calendrier Grégorien, on la suppose de 365 j, 2425; il y a donc encore erreur; mais faisons en abstraction, et supposons l'année tropique, de 365 j, 2425 exactement. On a

$$365\,j, 2425 = 365\,j\,\frac{25}{100} - \frac{75}{10\,000} = 365\,j.\,\frac{25}{100} - \frac{3}{400};$$

ou

$$\text{année tropique} = \text{année Julienne} - \frac{3}{400}.$$

Donc 400 années tropiques feront 400 années Juliennes moins trois jours. Il faut donc supprimer trois jours sur 400 années Juliennes, pour que l'expiration de cette période coïncide avec l'expiration d'une année tropique. C'est ce qu'on réalise dans le système Grégorien, où, sur quatre années séculaires consécutives, il y en a trois qu'on ne fait pas bissextiles, tandis qu'elles l'étaient dans le système Julien.

Ce système proposé par le pape Grégoire XIII, a reçu le nom de réforme ou correction Grégorienne; et le calendrier actuel s'appelle aussi Calendrier Grégorien. Il comprend divers préceptes pour le calcul des fêtes mobiles de l'église, dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

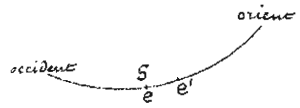
Ce calendrier, introduit en 1582 dans les états romains, et adopté aussitôt dans tous les pays catholiques, ne l'a été que successivement et beaucoup plus tard chez les nations protestantes. La Russie et la Grèce sont les seules contrées de l'Europe qui aient conservé l'ancien calendrier, ou le <u>vieux style</u>, suivant l'expression usitée. La différence des dates dans le <u>vieux</u> et le <u>nouveau style</u> est, depuis l'année 1800, de 12 jours; de sorte que le jour que nous appelons, par exemple, le 10 mai s'appelle chez les Russes le 28 avril.

Quand on veut comparer des dates historiques anciennes, telles que toutes celles qu'on trouve dans les chroniques du moyen-âge, à des dates postérieures à 1582, il faut ne pas oublier que les premières sont exprimées dans le calendrier Julien, et les nouvelles dans le calendrier Grégorien; il faut donc, pour les comparer, les rapporter au même style; c'est ce qu'on fait en appliquant aux dates anciennes la correction Grégorienne. Cette correction consiste à avancer les dates anciennes, d'un jour sur 125 ans environ; puisque les deux calendriers, qui auraient coïncidé en l'an 325, ont différé de 10 jours en 1582, c'est-à-dire en 1257 ans, et qu'on a appelé alors <u>15 octobre Grégorien</u>, le jour qui s'appelait <u>5 Octobre Julien</u>.

16e Leçon.

Précession des équinoxes.

Concevons une étoile située en e dans le plan de l'écliptique, et dans la direction même de la position actuelle S du soleil. Après un intervalle de temps égal à l'année tropique, le soleil reviendra au même point de l'écliptique, c'est-à-dire à la même longitude comptée à partir de l'équinoxe. Mais l'observation montre que l'étoile ne s'y trouve plus; elle est bien encore sur l'écliptique, mais en e', à une distance du point primitif, égale à 50",1, et vers l'orient, c'est-à-dire du côté où se fait le mouvement propre du soleil. Après un deuxième retour du soleil au même point de l'écliptique, l'étoile en sera éloignée de 100",2, et ainsi de suite; de sorte que l'étoile semble se mouvoir sur l'écliptique de l'occident vers l'orient, d'un mouvement uniforme, à raison de 50",1, par année tropique, ou d'une révolution entière en 25920 ans environ.



Dans ce mouvement apparent, toutes les étoiles conservent entr'elles les mêmes positions relatives. De sorte que c'est la sphère céleste toute entière qui semble animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe de l'écliptique.

Ce phénomène a reçu le nom de <u>précession des équinoxes</u>. Si l'on conçoit qu'au moment où le soleil se trouve au point équinoxial, il coïncide avec une étoile, il reviendra à l'équinoxe avant d'atteindre l'étoile; son retour à l'équinoxe précèdera son retour à l'étoile. De là le nom de *précession des équinoxes*. (*)

Année sidérale. Le temps que le soleil met à revenir à l'étoile s'appelle *année sidérale*. Ce temps est de 365 *jours moyens* 2564 dix-millièmes, ou 365 jours 6h, 9', 9"; tandis que l'*année tropique*, comme nous l'avons dit, est de 365 j.m. 2422, ou 365 j.m. 5h, 48', 49". Différence 20', 20".

Déplacement de l'étoile polaire. On conçoit que le mouvement des étoiles autour de l'axe de l'écliptique déplacera l'étoile polaire, qui aujourd'hui se distingue par sa proximité du pôle à tel point qu'elle paraît immobile pendant le mouvement diurne. Et en effet à l'époque de la construction des plus anciens catalogues d'étoiles qui nous sont connus, cette étoile était éloignée de 12° du pôle. Depuis elle s'en est toujours rapprochée, tellement que sa distance n'est plus actuellement que de 1°, 24'.

(*) On donne encore d'autres raisons de cette dénomination; on dit que c'est parce que si, dans le mouvement diurne, l'équinoxe passe aujourd'hui au méridien en même temps qu'une étoile, à un nouveau passage, il *précèdera* l'étoile.

Cette distance continuera de diminuer jusque vers l'an 2095, où elle sera réduite à 26', 30". Ensuite l'étoile s'éloignera du pôle jusqu'à une distance d'environ 46° qu'elle atteindra en 13000 ans environ; puis elle se rapprochera de nouveau du pôle pendant un même intervalle de temps.

Dans 13000 ans l'étoile α de la Lyre, aujourd'hui très éloignée du pôle, n'en sera plus qu'à 5° de distance. Ce sera elle, probablement, qui, à raison de son éclat, jouera alors le rôle de celle que nous appelons aujourd'hui la *polaire*. Celle ci nécessairement devra perdre son nom.

Autre explication de la précession. — Rétrogradation de la ligne des équinoxes. Concevons une étoile située sur l'écliptique, sa *longitude*, ou distance à l'équinoxe, va toujours en augmentant, à raison de 50",1 par année. Voilà le fait que constate l'observation, et auquel nous avons donné le nom de *précession des équinoxes*. Nous avons expliqué ce fait en supposant l'étoile animée d'un mouvement propre sur l'écliptique. Mais on peut l'expliquer d'une seconde manière: en supposant que l'étoile reste fixe, et en attribuant à la ligne des équinoxes un mouvement de rotation autour du centre de l'écliptique, d'orient en occident. Dans ce mouvement, la ligne des équinoxes *rétrogradera* par rapport au mouvement propre du soleil qui se fait d'occident en orient. De là l'expression de rétrogradation de la ligne des équinoxes pour désigner le phénomène appelé déjà précession des équinoxes. Mais il faut observer que ce terme précession convient encore dans l'hypothèse de la rétrogradation ; car il exprime simplement que le retour du soleil à l'équinoxe précède son retour à l'étoile avec laquelle il coïncidait une année auparavant.

Admettre la rétrogradation de la ligne des équinoxes, sur l'écliptique, c'est admettre un mouvement de l'équateur, puisque cette ligne est la trace de ce plan sur l'écliptique. Or, l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique est constante et égale à 23°, 27'. Il faut donc supposer que le plan de l'équateur a un mouvement de rotation autour de l'axe de l'écliptique ; mouvement qui fera décrire à la ligne des pôles un cône droit autour de cet axe.

Ainsi le phénomène de la précession s'explique, soit par un mouvement de rotation de la sphère céleste autour de l'axe de l'écliptique, d'occident en orient, soit par un mouvement de rotation de la ligne des pôles autour de cet axe de l'écliptique, mais en sens contraire, c'est-à-dire, d'orient en occident.

Ce phénomène a été connu d'Hipparque, le plus grand astronome, et on peut dire, le fondateur de l'astronomie chez les Grecs (125 ans avant notre ère). C'est en comparant

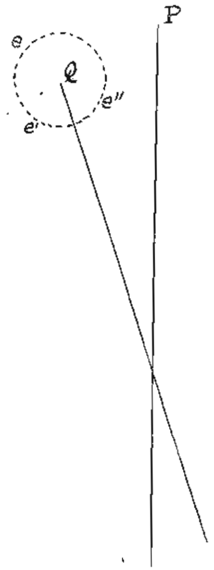
les positions des étoiles, par rapport à la ligne des équinoxes, à leurs positions à une époque antérieure, qu'Hipparque a constaté le mouvement apparent de la sphère céleste d'occident en orient.

Près de 260 ans après, Ptolemée, l'auteur du grand traité d'astronomie connu sous le nom d'Almageste, en se fondant sur les observations d'Hipparque, mit hors de doute la précession des équinoxes, et trouva qu'elle avait été de 2°, 20' environ dans l'espace de 267 ans ; ce qui faisait 36" par an : résultat trop faible, dû au peu d'exactitude des observations, au temps de Ptolémée et d'Hipparque.

Ptolémée attribua la précession des équinoxes au mouvement de la sphère céleste autour de l'axe de l'écliptique. Les astronomes du moyen-âge ont suivi ce sentiment. Mais les modernes ont adopté l'autre explication du phénomène, savoir, la rétrogradation de la ligne des équinoxes, causée par le mouvement de rotation de l'axe du monde autour de l'axe de l'écliptique, comme nous le verrons plus tard.

Nutation.

Nous avons expliqué la précession en supposant que chaque étoile E décrit autour de l'axe de l'écliptique un petit cercle ee'e", dans l'espace de 26000 ans environ. Tel est le mouvement propre des étoiles que les observations avaient paru démontrer jusque vers le milieu du siècle dernier. Mais alors des observations plus exactes ont fait reconnaître que ce cercle ee'e" ne représentait pas les véritables positions de l'étoile, et que chaque point e ne devait être considéré que comme une position *fictive* ou *moyenne*, autour de laquelle l'étoile oscillait, en décrivant une petite ellipse, dans l'espace de 18 ans $\frac{2}{3}$ environ; c'est-à-dire, que si l'on fait abstraction de la précession, et qu'on considère le point e comme fixe sur le cercle ee'e", pendant 18 ans $\frac{2}{3}$, l'étoile décrira la petite ellipse autour de ce point e dans cet intervalle de temps. Mais en tenant compte de la précession, c'est-à-dire du déplacement du point e sur le cercle, l'étoile décrira l'ellipse autour de ce point, en même temps que ce point aura son mouvement de translation sur le cercle. De sorte que la véritable trajectoire de l'étoile est une courbe non fermée,

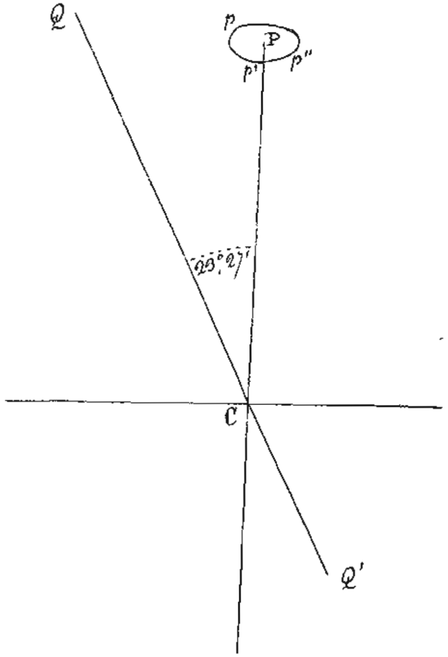


résultante de ces deux mouvements.

Ce déplacement de chaque étoile autour d'une position moyenne a reçu le nom de *nutation*. La découverte en a été faite vers 1730 par Bradley, célèbre astronome anglais (1692 — 1762). Les demi-axes de l'ellipse sont de 9",2 et 6",87 environ.

Nous parlons d'un déplacement apparant des étoiles; déplacement qui change leurs positions par rapport à l'équateur considéré comme fixe. Mais on peut regarder les étoiles comme fixes, et l'équateur comme mobile, ainsi que nous l'avons déjà fait pour la *précession*. Alors ce sera le pôle du monde qui décrira sur la voute céleste une petite ellipse ayant ses demi-axes égaux à 9",2 et 6",87. Le premier est dirigé vers le pôle de l'écliptique, et le 2d lui est perpendiculaire.

Ainsi soit QQ' l'axe de l'écliptique; CP la position moyenne de l'axe du monde, celle qui aurait lieu si l'on négligeait la nutation. Que l'on décrive la petite ellipse pp'p", dont le grand axe, compris dans le plan QCP, soutende un angle de 18",4 et le petit axe un angle de 13 à 14"; la véritable position du pôle du monde sera mobile sur la circonférence de cette petite ellipse, et la décrira en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ. De sorte que l'axe du monde décrira le cône qui a pour base cette petite ellipse.



Ce déplacement de l'axe du monde cause, premièrement, une variation dans l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique, inclinaison que nous avions supposée jusqu'ici constante: et secondement, une variation dans la position de la ligne des équinoxes, et conséquemment dans la *précession*. De sorte que la précession de 50",1 dont nous avons parlé n'est qu'une valeur moyenne de la précession véritable. On l'appelle quelquefois la *précession moyenne*, mais plus généralement on la désigne simplement sous le nom de *précession*, et l'on compte à part ses variations périodiques.

Puisque la précession est sujette à de petites variations, il s'ensuit que la longueur de l'année tropique n'est pas absolument constante, et qu'elle éprouve aussi de petites

variations, mais il faut plusieurs siècles pour les rendre sensibles.

De la division de l'écliptique en 12 signes.

Les Anciens ont divisé l'écliptique, *à partir de l'équinoxe du printemps*, en douze arcs égaux qu'ils ont appelés *signes*; chacun de ces arcs est la 12e partie de la circonférence et vaut 30°. Dans la plupart des traités d'astronomie, on compte la longitude du soleil par *signes*, *degrés*, *minutes*, &c.. Ces douze signes ont reçu les mêmes noms et dans le même ordre, que les douze constellations zodiacales; ainsi, le premier a été appelé le *signe du bélier*; le deuxième, le *signe du taureau*; le troisième, le *signe des gémeaux*; et ainsi de suite. C'est parce que, à une époque reculée, les douze constellations correspondaient respectivement aux douze signes. Ainsi, au temps d'Hipparque, (125 ans avant notre ère), l'étoile principale de la constellation du *bélier* coïncidait avec l'équinoxe du printemps, ou l'origine du premier signe. Mais depuis lors l'état du ciel a bien changé par suite de la *précession* des équinoxes; les douze constellations se sont éloignées de l'équinoxe, de 30° environ, de sorte que la constellation du bélier, par exemple, ne se trouve plus dans le premier signe, elle est actuellement dans le deuxième. Cependant on a continué de donner aux douze signes les mêmes noms, de sorte qu'on appelle toujours *signe du bélier* le premier signe, à partir de l'équinoxe : on dit, par exemple, que *le soleil entre dans le bélier*, quand il arrive à l'équinoxe, bien qu'il soit encore éloigné de 30° de la constellation du bélier.

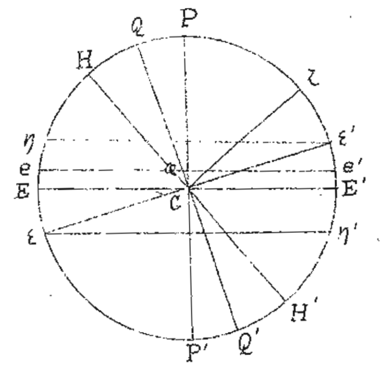
Il faut donc soigneusement distinguer les *signes de l'écliptique* ou du *zodiaque*, qui sont fixes par rapport à l'équinoxe, et les *constellations* qui sont mobiles et qui s'éloignent continuellement de l'équinoxe.

La notation des longitudes par *signes*, bien qu'elle se trouve encore dans ses ouvrages modernes, commence pourtant à tomber en désuétude ; et on ne compte plus que par *degrés*, *minutes*, &c.

Du jour et de la nuit. De leur durée aux différentes latitudes, et aux différentes époques de l'année.

Dans le cours de son mouvement diurne, le soleil se trouve tantôt au dessus de l'horizon du spectateur et tantôt au dessous. Le temps pendant lequel le soleil se trouve au dessus de l'horizon s'appelle le *jour* ; et le temps pendant lequel il se trouve au dessous s'appelle la *nuit*. Le jour et la nuit forment ensemble un intervalle de 24 heures, *jour vrai* ; mais ils

sont, généralement, de durée différente. Leur durée respective dépend, d'abord de la latitude du lieu du spectateur, et ensuite de l'époque de l'année, car elle est variable, chaque jour, dans le même lieu.



Soit PP' l'axe du monde ; QQ' l'axe de l'écliptique ; EE' et εε' les traces des plans de l'équateur et de l'écliptique sur le plan des deux axes. La terre, à raison de sa petitesse par rapport à la distance du soleil, pourra être considérée comme un point situé au centre de la sphère céleste. Soit CZ la verticale du lieu de la terre où se trouve l'observateur, et HH' l'horizon. Soit ee' un parallèle décrit par le soleil dans ce mouvement diurne ; ce parallèle est coupé par l'horizon en deux arcs inégaux, dont l'un se projette suivant eα, et l'autre suivant αe'. Quand le soleil décrira l'arc projeté en αe, il se trouvera au dessous de l'horizon et il fera *nuit* ; quand, au contraire, le soleil décrira l'arc projeté en αe', il sera au dessus de l'horizon, et il fera *jour*. Plus le parallèle décrit par le soleil s'éloignera de l'équateur ; c'est-à-dire, plus la déclinaison du soleil augmentera, plus le jour sera long et la nuit sera courte. Quand le soleil aura atteint sa plus grande déclinaison qui est de 23°,27', et qu'il décrira le cercle $\varepsilon\eta$ ($E\varepsilon'$ = = 23°,27'.) le jour aura sa durée maximum. Ce jour s'appelle le solstice d'été: il arrive le 21 juin. A partir de ce moment, la déclinaison du soleil diminue, et l'on retrouve des jours et des nuits de même longueur qu'auparavant. Quand le soleil arrive au point de l'écliptique que nous avons appelé équinoxe, il décrit, sensiblement, l'équateur dans le mouvement diurne, et alors le jour est égal à la nuit. C'est de là qu'est venu le nom d'équinoxe. Ensuite le soleil passe dans l'autre hémisphère, et le jour va en diminuant jusqu'à ce que le soleil atteigne sa plus grande déclinaison. Alors il décrit le parallèle $\varepsilon\eta'$, et le jour a sa plus petite durée de l'année; on l'appelle le solstice d'hiver; il tombe le 22 décembre.

Des solstices et des tropiques. Voici la raison de ces expressions, solstice d'été, solstice d'hiver. Quand le soleil, supposé actuellement dans l'hémisphère boréal, atteint sur l'écliptique le point le plus éloigné de l'équateur, ou en d'autres termes, le point où sa déclinaison est maximum, l'arc de l'écliptique ou du moins sa tangente est parallèle à l'équateur; de sorte que, pendant que le soleil décrit cet

arc, sa déclinaison ne varie pas; et l'on dit que le soleil est stationnaire en déclinaison, sol stat; d'où l'on a appelé solstice le point de l'écliptique où se trouve le soleil. On dit solstice d'été, parce que c'est à ce moment que commence l'été. Dans l'hémisphère austral, il y a un point semblable sur l'écliptique. On l'appelle solstice d'hiver, parce que c'est au moment où le soleil y arrive que commence l'hiver. Il est clair que les deux solstices sont situés sur un même diamètre de l'écliptique, et que ce diametre est perpendiculaire à la ligne des équinoxes; on l'appelle ligne des solstices.

Quand le soleil se trouve à l'un des solstices, le parallèle qu'il décrit dans le mouvement diurne s'appelle tropique, d'un mot grec qui signifie retour, parce qu'après avoir décrit ce parallèle le soleil cesse de s'éloigner de l'équateur, il revient à l'équateur.

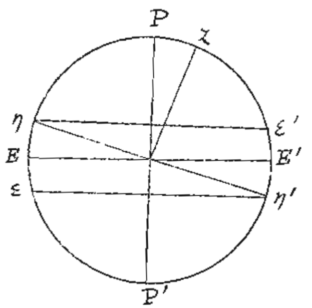
Le tropique de l'hémisphère boréal est dit tropique du cancer, parceque le soleil entre alors dans le quatrième signe qui est celui du cancer. Par une raison semblable le tropique de l'hémisphère austral est dit tropique du capricorne.

Du jour et de la nuit, eu égard à la latitude du lieu de l'observateur. Faisons varier le lieu terrestre pour lequel nous avons décrit le phénomène des jours et des nuits pendant le cours d'une année. Plaçons ce lieu à l'un des pôles;

la verticale se confondra avec l'axe du monde, et l'horizon sera le plan de l'équateur. Le soleil sera donc visible pendant six mois, et invisible le reste de l'année. Ainsi il fera jour pendant six mois de suite, et nuit pendant les six autres mois.

Pour un lieu terrestre situé sur l'équateur, l'horizon partagera également chacun des parallèles décrits par le soleil, et le jour sera constamment égal à la nuit.

Concevons que le plan de l'horizon soit tangent aux deux tropiques, ou parallèles de plus grande déclinaison du soleil, ce qui aura lieu s'il est incliné de 23°,27' sur l'équateur; il est clair qu'au solstice d'été, où le soleil décrit le tropique $\varepsilon'\eta$, le jour sera de 24 heures, et qu'au solstice d'hiver où le soleil décrit le tropique $\varepsilon\eta'$, le jour sera nul, et la nuit de 24 heures. Les points de la terre pour lesquels ce double phénomène a lieu, sont situés à 23°,27' de distance du pôle, sur un parallèle terrestre dont la latitude est 90° − 23°,27' = 66°.33'. Un semblable parallèle existe dans l'autre hémisphère. Ces deux parallèles terrestres s'appellent *cercles polaires*.



Que l'on conçoive sur la terre les lieux où les verticales passent par le tropique du cancer, (parallèle de plus grande déclinaison du soleil dans l'hémisphère boréal); ces lieux jouiront de la propriété que le soleil sera à leur zénit le jour du solstice d'été. Ils formeront un parallèle dont la latitude sera de 23°,27'. Un parallèle semblable existe dans l'autre hémisphère. Ces deux cercles s'appellent *tropiques* de même que les deux parallèles célestes.

Zones terrestres. Les cercles polaires et les tropiques partagent la terre en cinq zones, pour lesquelles l'action du soleil est très différente. On appelle *zone torride* l'espace compris entre les deux tropiques; *zones tempérées* celles qui sont comprises entre les tropiques et les cercles polaires; et enfin *zones glaciales* les calottes sphériques qui ont pour bases les cercles polaires.

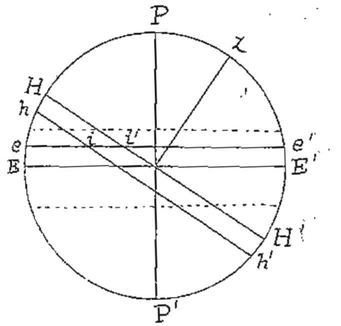
Crépuscules. La lumière du soleil, après que cet astre a commencé à s'abaisser sous l'horizon, ne s'éteint que graduellement, et produit une continuation du jour qu'on appelle *crépuscule*. La limite du crépuscule est difficile, ou plutôt impossible à fixer; car elle dépend de la pureté de l'atmosphère et de la disposition de nos organes. Cependant, on est convenu de fixer la fin du crépuscule, au moment où l'on commence à apercevoir, à l'œil nu, par un ciel pur, les étoiles de 5e et 6e grandeur. On a reconnu qu'alors le soleil est à environ 18° au dessous de l'horizon.

Un semblable phénomène a lieu avant le lever du soleil, c'est-à-dire avant sa réapparition sur l'horizon. On l'appelle vulgairement aurore ; mais les astronomes le désignent, comme le phénomène du soir, sous le nom de crépuscule.

Ce qui produit le crépuscule, c'est que le soleil, en s'abaissant sous l'horizon, continue d'éclairer une partie de l'atmosphère. Les molécules atmosphériques réfléchissent vers le spectateur la lumière qu'elles reçoivent ainsi directement du soleil. C'est cette lumière réfléchie qui produit le crépuscule ; et on conçoit qu'elle diminue au fur et à mesure que le soleil s'abaisse au dessous de l'horizon, parceque le segment atmosphérique éclairé diminue continuellement.

On se rend bien raison de ce phénomène de la lumière crépusculaire, si l'on considère ce qui se passe quand un rayon de lumière pénètre par le trou d'un volet dans une chambre obscure : le rayon est visible sur tout son trajet ; et si on l'absorbe, ou si on le laisse sortir par un trou opposé, la lumière qu'il répand en traversant la chambre, suffit pour l'illuminer complètement.

Durée du crépuscule. Soit z le zénit, et HH' l'horizon d'un lieu de la terre, soit hh' un plan parallèle à l'horizon, et situé à 18° au dessous ; c'est-à-dire que l'arc Hh, sur la voute céleste, est égal à 18°. Quand le soleil décrit un parallèle ee', le crépuscule commence au moment où le soleil arrive en i, et sa durée est le temps du parcours de l'arc du parallèle qui se projette en ii'. De sorte que le crépuscule durera d'autant plus long-temps, que cet arc sera plus long, et par conséquent plus incliné sur l'horizon.



Si à un jour de l'année, le parallèle décrit par le soleil, passe par le point h, à ce jour le crépuscule finira à minuit, et l'aurore commencera au même moment ; de sorte qu'il n'y aura pas de nuit : à plus forte raison il n'y aura pas de nuit, si le parallèle décrit par le soleil s'élève au dessus du point h. C'est ce qui arrive à Paris pendant tout le mois de juin, et dans les pays plus au nord. Car pour Paris dont la latitude est 49° environ, on a EH = 41°. Vers le solstice d'été, en juin, la déclinaison du soleil est de 23° environ. On a 41° − 23° = 18°. De sorte que le soleil, dans son mouvement diurne, touche à peu près le plan hh'. Ce qui fait qu'il n'y a pas d'intervalle de temps, ou très peu, entre la fin du crépuscule et le commencement de l'aurore.

Saisons. On divise l'année en quatre saisons, qui sont le Printemps, l'Eté, l'Automne et l'Hiver, et qui répondent aux quatre divisions formées sur l'écliptique par les équinoxes et les solstices. Le Printemps commence au moment où le soleil traverse l'équateur pour passer de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal, ou, en d'autres termes, au point de l'écliptique que nous avons appelé équinoxe du printemps : il dure le temps que le soleil met à parcourir sur l'écliptique un arc de 90°. Alors le soleil se trouve au solstice d'été, et cette saison commence ; elle dure jusqu'au passage du soleil à l'équinoxe d'automne. Alors l'automne commence et va jusqu'au solstice d'hiver, qui fixe le commencement de la quatrième saison.

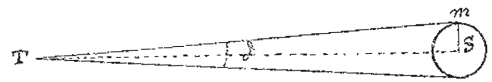
Ces quatre saisons, bien qu'elles répondent à quatre divisions égales de l'espace angulaire décrit par le soleil dans sa course annuelle, sont néanmoins d'inégales durées, parceque la vitesse du soleil n'est pas la même dans chaque saison, comme nous le verrons bientôt. Voici, à peu près, la durée de chaque saison en jours moyens. Printemps 92 j. 21 h [illegible].

Eté 93 j. 14 h. 11' ; Automne 89 j. 17 h. 1' ; Hiver 89 j. 1 h. 14'. Ainsi l'été est la plus longue des quatre saisons, et l'hiver la plus courte. Le printemps vient après l'été. L'Automne diffère peu de l'hiver.

17e Leçon.

Distances variables du soleil à la terre. — Véritable forme de l'écliptique. — Loi des aires. — Mouvement elliptique du soleil.

La distance du soleil à la terre varie d'un jour à l'autre. On s'en aperçoit en mesurant le diamètre apparent du soleil à diverses époques de l'année.



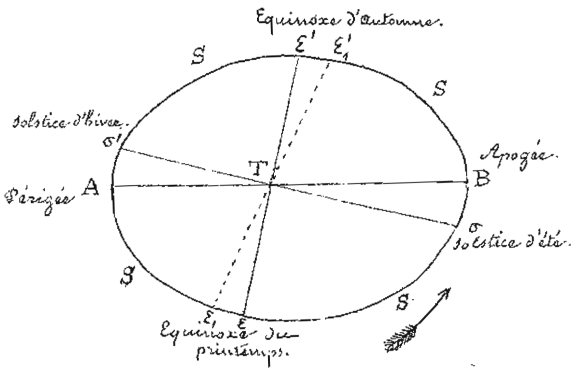
Soit δ ce diamètre apparent, D le diamètre réel, et r la distance du soleil à la terre. On a dans le triangle TmS rectangle en m,

$$Sm = ST \sin mTS, \text{ ou } \tfrac{1}{2}D = r \sin \tfrac{1}{2}\delta.$$

δ est un angle très petit, égal à 30' à peu près ; on peut donc remplacer $\sin\frac{1}{2}\delta$ par l'angle lui-même, de sorte qu'on a $D = r\delta$. Le diamètre D est constant. L'angle δ se mesure par l'observation, et l'on reconnait qu'il éprouve de petites variations. On en conclut donc que la distance du soleil à la terre est variable. L'équation $r\delta = D$ montre que cette distance est en raison inverse du diamètre apparent du soleil.

Forme de la trajectoire du soleil. Soient r, r' les distances du soleil observé à deux jours différents, et δ, δ' ses diamètres apparents. On aura $r\delta = r'\delta'$; ou $r' = r\dfrac{\delta}{\delta'}$. δ et δ' sont connus, on pourra donc en prenant pour r une longueur arbitraire, et en portant sur les directions du soleil des segments égaux aux valeurs de r', déterminer une courbe semblable à celle que décrit le soleil. On reconnait que cette courbe est une ellipse dont la terre occupe un des foyers. Cette grande découverte de l'astronomie moderne est due à Képler.

Soit T la terre, SSSS..... l'ellipse décrite par le soleil; AB son grand axe. Les deux sommets A, B s'appellent apsides et le grand axe ligne des apsides. L'apside A qui est le point où le soleil se trouve à sa plus petite distance de la terre s'appelle périgée; et l'apside B qui est le point où le soleil est à sa plus grande distance de la terre s'appelle apogée. Les distances elles-mêmes, savoir TA, TB, sont dites distance



périgée, distance apogée.

Qu'on représente par 1 le demi-grand axe de l'ellipse, la distance apogée sera égale à 1,01679; et la distance périgée à 0,98321. De sorte que l'excentricité, ou distance du centre au foyer est égale à $\frac{1}{2}(1,01679 - 0,98321) = 0,01679$ ou $\frac{1}{60^e}$ à peu près.

Les points solsticiaux σ, σ' sont situés à environ 9° des apsides; et les points équinoxiaux sont sur l'axe $\varepsilon\varepsilon'$ perpendiculaire à la ligne $\sigma\sigma'$; cet axe est l'intersection du plan de l'écliptique par le plan de l'équateur.

En vertu de la précession des équinoxes, cet axe $\varepsilon\varepsilon'$ se déplace, de sorte qu'à une autre époque, l'an prochain, par exemple, il aura la position $\varepsilon_1\varepsilon'_1$. Il s'ensuit que les solstices s'éloignent de plus en plus des apsides; et qu'au contraire les équinoxes s'en rapprochent.

Loi des Aires. Képler a trouvé que les secteurs répondant à des arcs décrits par le soleil dans des temps égaux, par exemple, dans un jour moyen, sont égaux en surface. De sorte que l'aire décrite par le rayon vecteur du soleil est proportionnelle au temps. Ainsi soit dv l'angle décrit par le rayon vecteur r, pendant le temps infiniment petit dt; $\frac{1}{2}r^2 dv$ sera l'aire du secteur; on aura donc $\frac{1}{2}r^2 dv = C\,dt$; C étant une constante, ou $\frac{1}{2}r^2\frac{dv}{dt} = C$. Cette équation exprime la loi de Képler connue sous le nom de loi des aires.

D'après cette loi, le soleil doit avoir sa vitesse maximum au périgée, et sa vitesse minimum à l'apogée. Et en effet, tandis que l'accroissement moyen de longitude est de 59' 8'',33 <u>par jour</u>, on trouve par l'observation que cet accroissement est de 1° 1' 9'',9 au périgée, et seulement de 57' 11'',5 à l'apogée.

Les angles v comptés à partir du grand axe, portent le nom d'<u>anomalie</u>, et les angles comptés à partir de la ligne des équinoxes celui de <u>longitude</u>.

Longitude du soleil calculée d'après les lois du mouvement elliptique.

Nous avons déterminé le mouvement du soleil sur l'écliptique, c'est-à-dire sa longitude en fonction du temps, en admettant, comme résultat de l'observation, que le mouvement apparent du soleil est le même que si cet astre décrivait d'un mouvement uniforme un cercle non concentrique à la terre. Maintenant nous connaissons, outre le mouvement apparent du soleil, que donne l'observation, les lois de son mouvement réel; nous savons que ce n'est pas ce cercle qu'il décrit, mais une ellipse dont la terre occupe un des foyers, et que la relation entre le temps et les espaces parcourus, est telle, que les secteurs décrits par le rayon vecteur sont proportionnels aux temps. Ces deux lois suffisent pour déterminer la longitude en fonction du temps.

Soit <u>a</u> le demi-grand axe de l'ellipse, e le

rapport de l'excentricité à ce demi-grand axe $\left(e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$; r le rayon vecteur, et v l'angle qu'il fait avec le grand axe; on aura

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}; \\ \text{et} \quad \frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} &= C. \end{aligned}\right\}$$

Ce sont là les deux équations qui expriment le mouvement du soleil. Qu'on les résolve, c'est-à-dire, qu'on en tire les valeurs de v et de r en fonction du temps, on connaîtra à chaque instant non seulement la longitude du soleil, mais encore sa distance à la terre; ce que ne faisait pas connaître l'hypothèse du mouvement circulaire qui ne servait qu'à représenter la longitude, et qui aurait donné des distances très fautives, comme nous le verrons.

A la place de l'angle v que nous avons appelé l'<u>anomalie</u> et qui se compte à partir du grand axe, substituons la <u>longitude</u> comptée de l'équinoxe; désignons celle-ci par <u>l</u> et appelons L_1 l'angle que le grand axe fait avec la ligne des équinoxes; on a $v = l - L_1$. Supposons $a = 1$; de sorte que e sera l'excentricité même de l'ellipse; il vient

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(1-e^2)}{1+e\cos(l-L_1)} \\ \frac{1}{2} r^2 \frac{dl}{dt} &= C. \end{aligned}\right\}$$

On peut déterminer immédiatement le coefficient C. En effet soit T l'<u>année tropique</u>, c'est-à-dire le temps que le soleil met à décrire l'ellipse entière ; le secteur décrit par le rayon vecteur pendant ce temps, est l'aire de l'ellipse, πab. On a donc

$$\frac{\pi a b}{T} = C\ ;$$

ou, parceque $a = 1.$ et $b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-e^2}$

$$C = \frac{\pi\sqrt{1-e^2}}{T}$$

Notre deuxième équation devient donc

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{r^2}\cdot\frac{2\pi}{T}.$$

Représentons $\frac{2\pi}{T}$ par $\underline{n}$; et à la place de r^2 mettons sa valeur ; il vient

$$\frac{dl}{dt} = \frac{n\left(1+e\cos(l-L_1)\right)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$dl = n(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\left(1+2e\cos(l-L_1)+e^2\cos^2(l-L_1)\right)dt.$$

C'est cette équation qu'il faut intégrer pour déterminer $\underline{l}$ en fonction de $\underline{t}$.

Le terme $\underline{e}$ étant très petit, négligeons-le d'abord, on a simplement

$$dl = n\,dt,$$

d'où

$$l = nt + \alpha\ ;$$

α étant la constante qui exprime la longitude à l'origine du temps.

Substituons cette valeur approchée de $\underline{l}$ dans

notre équation, et négligeons le carré de e ; il vient

$$dl = n\left(1+2e\cos(nt+\alpha-L_1)\right)dt.$$

Et en intégrant,

$$l = nt + 2e\sin(nt+\alpha-L_1) + \alpha'.$$

Il est clair que la nouvelle constante α' est égale à la première α, pour que, en supposant $e=0$ dans cette expression de l, on retrouve la même valeur que précédemment ; nous écrirons donc

$$(\alpha) \ldots\ldots\ l = nt + \alpha + 2e\sin(nt+\alpha-L_1).$$

Si l'on veut une valeur plus exacte de $\underline{l}$, on substituera celle-ci à la place de $\underline{l}$ dans l'équation différentielle, on négligera e^3 en conservant les termes en e et e^2 et l'on intégrera. Et ainsi de suite, pour avoir des valeurs de $\underline{l}$ de plus en plus exactes. Mais l'expression de $\underline{l}$ réduite à la première puissance de e offre une approximation suffisante dans beaucoup de calculs.

Nous avons dit que le premier terme $(nt+\alpha)$ s'appelle la <u>longitude moyenne</u>, et le second l'<u>équation du centre</u>. La longitude moyenne serait la longitude d'un soleil fictif qui décrirait l'écliptique d'un mouvement angulaire uniforme, dans le même temps que le soleil vrai ; la coïncidence des deux soleils ayant lieu sur la ligne des apsides, c'est-à-dire à l'apogée et au périgée. $nt+\alpha$ étant la longitude du soleil fictif à l'instant $\underline{t}$, $(nt+\alpha-L_1)$ est sa distance au grand axe de l'ellipse, distance angulaire vue du foyer, ou de la terre ; c'est donc l'<u>anomalie</u> du soleil fictif ; on l'appelle <u>anomalie</u>

moyenne, de sorte que l'expression de la longitude du soleil vrai peut s'écrire

$$\text{Longit. vraie} = \text{longit. moy.} + 2e \sin(\text{anom. moy.})$$

Reprenons l'expression

$$l = nt + \alpha + 2e \sin(nt + \alpha - L_1).$$

Elle contient quatre coefficients constants; n, e, α et L_1. Le 1er n qui est l'accroissement de longitude moyenne dans l'unité de temps, est connu; c'est $\frac{2\pi}{T}$, T étant la durée de l'année tropique. L'expression numérique de n dépendra de l'unité de temps que l'on prendra pour exprimer l'année tropique. Les astronomes prennent le jour moyen; et l'on a $n = \frac{360°}{365,2422} = 59'.8'',33$. Il reste à déterminer les trois autres quantités e, α, L_1: la 1ère est l'excentricité de l'ellipse, le demi-grand axe étant pris pour unité; la 2e α est la longitude moyenne, à l'origine du temps; et la 3e L_1 la longitude du grand axe de l'ellipse.

Trois observations du soleil suffisent pour déterminer ces trois quantités. Car on déterminera, à chaque observation, la longitude du soleil, de sorte qu'on connaitra le 1er membre de l'équation (a). On notera l'instant précis de chaque observation. On aura donc trois équations, qui serviront à déterminer les trois inconnues e, α, L_1. Mais pour obtenir plus d'exactitude, on formera un grand nombre d'équations auxquelles on appliquera la méthode des moindres carrés. En prenant pour

origine du temps le 1er janvier 1800, on a trouvé

$$e = 0,01679228.$$

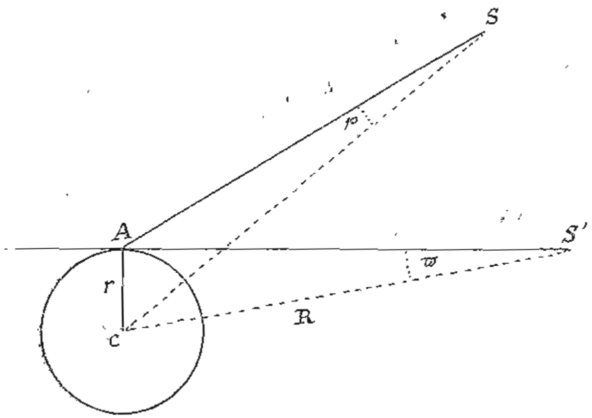
$$\alpha = 280° \; 53' \; 19''.$$

$$L_1 = 279° \; 3' \; 28''.$$

La valeur de l quand on n'y fait entrer que la première puissance de e est la même que celle que nous avons déduite de l'hypothèse du mouvement circulaire et uniforme du soleil. Ainsi cette hypothèse, qui a servi aux Anciens à construire leurs tables du mouvement du soleil, conduit à des résultats numériques qui ne diffèrent de ceux qui répondent au véritable mouvement du soleil, que parceque dans ceux-ci on aurait négligé les puissances supérieures de l'excentricité e. Mais il faut bien remarquer que néanmoins l'ellipse de Képler diffère considérablement du cercle des Anciens. Car l'excentricité n'y est que moitié de ce qu'elle était dans le cercle, puisque nous l'avons représentée dans le cercle par $2e$, en supposant $e = \frac{1}{60}$, comme dans l'ellipse même. Il résultait de cette excentricité double de la véritable, que le cercle donnait une distance apogée du soleil trop grande, et une distance périgée trop faible; ce dont les Anciens se seraient aperçus s'ils avaient su mesurer avec une certaine exactitude le diamètre apparent du soleil.

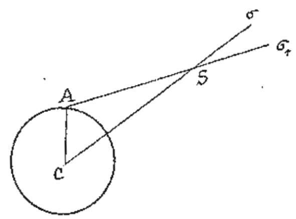
Des Parallaxes.

On appelle <u>parallaxe</u> d'un astre, relative à un observateur placé en un lieu de la terre, l'angle qui a son sommet au centre de l'astre, et dont les côtés passent par le lieu de l'observateur et par le centre de la terre, ou, en d'autres termes, l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'astre, le rayon de la terre. Ainsi



soit S la position d'un astre; sa parallaxe relative à un lieu A de la surface de la terre, sera l'angle ASC. Quand l'astre est à l'horizon en S', la parallaxe est dite <u>parallaxe horizontale</u>; et quand l'astre est au dessus de l'horizon, comme en S, on dit <u>parallaxe de hauteur</u>.

Ce terme <u>parallaxe</u> est pris du grec et signifie <u>changement</u>. On entend ici le <u>changement</u> qui s'opère dans la position apparente d'un astre sur la voute céleste, quand on l'observe d'un point de la surface de la terre, au lieu de l'observer du <u>centre</u> de la terre. Ainsi, l'astre S, vu du centre de la terre, paraîtrait en σ; et vu du point A, il paraît en σ_1. Il y a donc



<u>changement</u> de position apparente, quand on passe du centre à un point de la surface de la terre. Et la différence des deux positions dépend de l'angle ASC. C'est pour cela que cet angle a été appelé <u>parallaxe</u>.

Relation entre la parallaxe horizontale et la distance de l'astre au centre de la terre. Soit ϖ la parallaxe horizontale ASC, R la distance CS' de l'astre au centre de la terre, et r le rayon de la terre; on a dans le triangle S'AC, $CA = CS'.\sin\varpi$, ou $r = R\sin\varpi$; ou, parceque l'angle ϖ est très petit, $r = R\varpi$. Telle est la relation entre la parallaxe horizontale d'un astre et sa distance au centre de la terre.

Relation entre la parallaxe de hauteur et la parallaxe horizontale. Soit <u>p</u> la parallaxe de hauteur ASC, et Z la distance zénitale de l'astre, ou l'angle ZAS. On a dans le triangle SAC

$$\frac{\sin p}{\sin Z} = \frac{CA}{CS}.$$

Soit ϖ la parallaxe horizontale de l'astre, le jour même où l'on considère sa parallaxe de hauteur; en un jour la distance de l'astre à la terre n'aura pas varié sensiblement, de sorte qu'on peut supposer $SC = S'C = R$. on a donc

$$\frac{\sin p}{\sin Z} = \frac{r}{R};$$

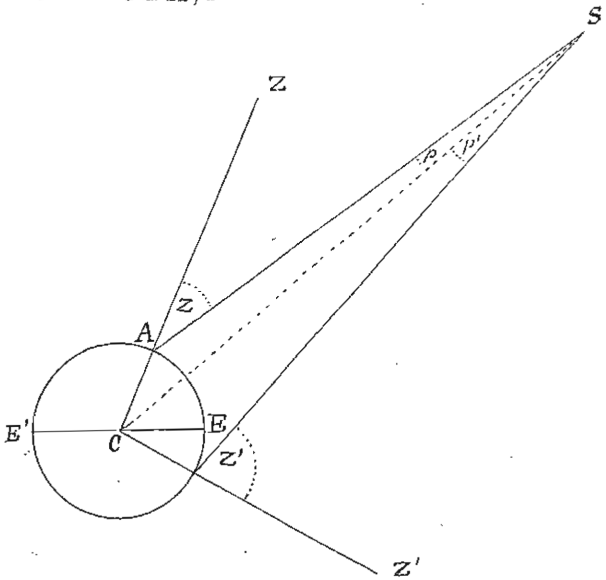
ou, parceque p est très petit,

$$p = \frac{r}{R}\sin Z; \quad p = \varpi \sin Z.$$

D'après cette relation entre les parallaxes horizontale et de hauteur d'un astre observé à deux instants d'un même jour, il suffit de déterminer l'une des deux parallaxes. C'est la parallaxe horizontale que l'on détermine directement, ce qui se fait par deux observations simultanées.

Calcul de la parallaxe horizontale. A un même instant on observe l'astre de deux points de la terre A, A' situés sur un même méridien, et on détermine ses distances zénitales, Z, Z'. On a en appelant p, p' ses parallaxes de hauteur en ces lieux, et ϖ sa parallaxe horizontale

$$p = \varpi \sin Z \quad p' = \varpi \sin Z'.$$



Dans le quadrilatère ACA'S', la somme des quatre angles est égale à quatre droits ou 360°. on a donc

$$ACA' + (180° - Z) + (180° - Z') + (p + p') = 360°,$$

ou

$$ACA' + p + p' - (Z + Z') = 0.$$

Soient λ, λ' les latitudes des deux points A, A'; on a $ACA' = \lambda + \lambda'$; remplaçons p et p' par leurs valeurs en fonction de $\sin Z$ et $\sin Z'$; il vient

$$\lambda + \lambda' + \varpi(\sin Z + \sin Z') - (Z + Z' = 0)$$

d'où

$$\varpi = \frac{(Z + Z') - (\lambda + \lambda')}{\sin Z + \sin Z'}.$$

Le deuxième membre est connu. On détermine donc par cette équation la parallaxe horizontale d'un astre.

L'expression de la parallaxe en fonction de la distance de l'astre à la terre étant $\varpi = \frac{r}{R}$, cette parallaxe est d'autant plus petite que l'astre est plus éloigné de la terre. Aussi trouve-t-on que la parallaxe des étoiles est insensible, de sorte qu'il faut la considérer à peu près comme nulle. La parallaxe du soleil est de 8″,6; quantité fort petite.

Parallaxes d'ascension droite; de déclinaison; de longitude; de latitude. Puisque l'effet des parallaxes est de changer la position apparente d'un astre sur la voute céleste, il s'ensuit que pour comparer des observations faites en différents points de la terre, il faut les ramener toutes au centre de la terre. Ainsi, de la position apparente d'un astre, observé d'un point de la terre; il faut conclure la position dans laquelle l'astre serait vu du centre de la terre. Les coordonnées de la position apparente de l'astre telles que l'ascension droite, la déclinaison, la longitude, la latitude, seront différentes des coordonnées de la position de l'astre vu du centre de la terre. Les différences entre ces coordonnées s'appellent *parallaxes d'ascension droite*, *de déclinaison*, *de longitude*, et *de latitude*. On détermine ces différentes parallaxes par des calculs trigonométriques. Mais il ne nous est pas nécessaire d'entrer ici dans ces détails.

Usage des parallaxes pour déterminer les distances des astres à la terre. — Distance du soleil.

Puisqu'on a entre le rayon r de la terre, la distance D d'un astre et sa parallaxe horizontale ϖ la relation $r = \varpi D$, on voit que cette parallaxe ϖ fait connaître la distance de l'astre à la terre, $D = \frac{r}{\varpi}$. Pour le calcul numérique il faut écrire $D = \frac{r}{\varpi \sin 1''}$.

Pour le soleil on a $\varpi = 8'',6$. Le sinus de $1''$ est égal à $\frac{1}{206\,264,8}$; la distance du soleil à la terre est donc $D = r.\frac{206\,264,8}{8,6} = 24000.\,r$ environ. Ainsi la distance du soleil à la terre est égale à 24 mille fois le rayon de la terre. Mais on conçoit qu'on ne doit regarder ce résultat que comme une approximation qui peut être assez éloignée de la réalité, parceque une simple différence de $\frac{1}{10''}$

de seconde dans la parallaxe donnerait un résultat sensiblement différent; et on ne peut espérer dans l'état actuel de l'astronomie, d'obtenir la parallaxe avec une plus grande précision.

Diamètre du soleil. Soit R le rayon du soleil, D sa distance à la terre; le sinus de son demi-diamètre apparent est $\frac{R}{D}$; ce demi-diamètre apparent est de 15 à 16'. Ainsi $\frac{R}{D} = \sin 15'$ ou parceque le sinus de 15' diffère peu de l'arc, $\frac{R}{D} = 15'$. La parallaxe du soleil est $\frac{r}{D} = 8'',6$. On a donc $\frac{R}{r} = \frac{15'}{8'',6} = 109$. $R = 109.\,r$. Ainsi le demi-diamètre du soleil est égal à environ 109 fois le rayon de la terre.

Phénomènes que présente la surface du soleil. — Constitution physique de cet astre.

Facules, pénombres, taches sur la surface du soleil. Quand on observe le soleil avec un puissant télescope, dont l'oculaire est garni d'un verre coloré, pour garantir l'œil de l'ardeur des rayons solaires, (*) on

---

(*) L'art d'observer le soleil est un point très délicat de l'Astronomie. Il faut éviter non seulement une lumière trop vive, mais aussi la chaleur des rayons calorifiques. Faute d'une attention suffisante, plusieurs astronomes sont devenus aveugles.

voit que la surface du soleil présente dans son ensemble une lumière d'égale intensité. Mais sur ce fond d'un éclat moyen, des espaces se font remarquer, les uns par leur blancheur éclatante, d'autres comme étant un peu moins lumineux que l'ensemble de la surface du soleil, et d'autres enfin comme étant absolument noirs. Les espaces les plus lumineux ont reçu le nom de <u>facules</u>, et les espaces noirs, celui de <u>taches</u>. Les espaces dont la lumière est moindre que l'éclat moyen de la surface du soleil sont d'une teinte grisâtre: ils entourent les taches noires comme une bordure; on les appelle <u>pénombre</u>.

Généralement les facules se trouvent dans le voisinage des taches. Celles-ci paraissent et disparaissent spontanément et changent de forme. En outre, elles sont douées d'un mouvement commun qui présente une certaine régularité. Une tache qu'on observe actuellement sur le bord oriental du disque, s'en écarte, d'abord lentement, puis, en augmentant de vitesse jusqu'au milieu du disque; alors sa vitesse diminue jusqu'au bord vers lequel elle se dirige; puis elle disparait. Ce trajet d'un bord à l'autre se fait en 14 jours à peu près, soit que la tache semble suivre un diamètre ou bien une corde du disque solaire. Et 14 jours environ après leur disparition, la plupart de ces taches reparaissent au premier bord où on les a observées. Elles semblent donc animées d'un mouvement commun sur la surface du soleil, mouvement qui a lieu du bord oriental au bord occidental, c'est-à-dire en sens contraire du

mouvement propre du soleil. Et si on considère ce mouvement des taches comme une rotation autour d'un axe du soleil, on dira que cette rotation se fait dans le même sens que le mouvement propre du soleil, qui lui même est une rotation autour de la terre.

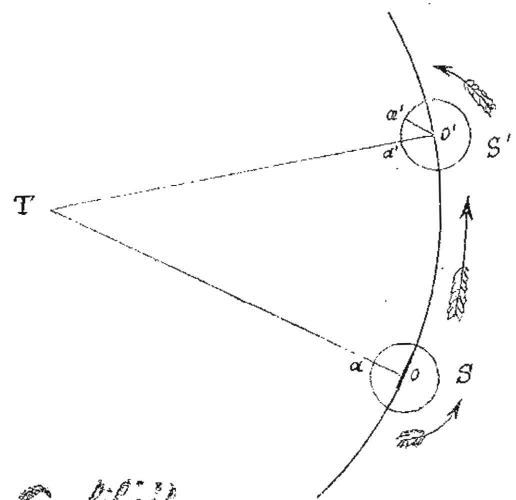
Indépendamment de ce mouvement commun, les taches éprouvent des déplacements particuliers et surtout elles sont sujettes à des changements de forme. D'un jour à l'autre, ou même d'heure en heure, elles s'élargissent ou se resserrent, et disparaissent tout-à-fait au milieu de leur course. D'autres paraissent spontanément sur des points qui ne présentaient rien de remarquable auparavant.

Rotation du soleil autour d'un axe.

Quelle est la cause de ces taches? Sont-elles produites, comme on l'avait cru d'abord, par des corps étrangers qui viennent se placer devant le soleil et qui en augmentent ou en diminuent l'éclat? ou bien sont-ce des phénomènes adhérents au soleil lui-même? Cette dernière hypothèse parait beaucoup plus probable. Car un corps étranger, tel que Mercure ou Vénus, parcourrait avec la même vitesse chaque partie de son orbite projetée sur le soleil; et nous avons dit que les taches traversent le disque solaire <u>avec des vitesses variables</u>. Ce fait s'explique naturellement, si l'on suppose que ces taches sont animées d'un mouvement de rotation autour du soleil. Car dans des temps égaux elles décriront des arcs égaux, mais ces arcs se projetteront sur le disque solaire suivant des lignes d'autant plus petites qu'elles seront plus rapprochées du bord, et qui augmenteront vers le centre. Ces lignes seront les vitesses apparentes des taches; celles-ci paraîtront donc augmenter de vitesse en allant d'un bord vers le centre, et en diminuer en allant du centre vers le bord opposé.

Aussi l'hypothèse d'un mouvement de rotation des taches du soleil est admise maintenant par les astronomes. Cette rotation parait s'accomplir en 27 jours 12 heures. Néanmoins, à cause du déplacement du soleil sur l'écliptique, sa durée réelle n'est que de 25 jours 14 heures. Voici comment on détermine cet intervalle de temps.

Durée de la rotation du soleil. Soit a une tache qui, vue de la terre T, se projette actuellement sur le centre même du disque solaire. Dans $27^j,\frac{1}{2}$ la tache aura accompli sa rotation apparente, c'est-à-dire qu'elle se projettera



encore sur le centre du disque solaire. Mais alors le soleil se trouvera en un autre lieu de l'écliptique; il aura parcouru un arc OO'; de sorte que la tache sera en a'. Sa rotation s'est faite dans le sens même du mouvement du soleil sur l'écliptique, ainsi que l'indique la flèche. Soit O'α' parallèle à Oα, il est clair que quand la tache arrive en α' elle a fait une révolution entière. Donc quand elle arrive en a' elle a fait plus d'une révolution; elle a décrit une circonférence entière plus l'arc α'a'. Nous supposons que la rotation se fait autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique, ce qui n'est pas tout à fait exact, comme nous le verrons tout à l'heure, mais la différence est sans influence sensible sur le calcul actuel.

Nous connaissons le temps que la tache met à venir en a'; c'est $27^j\frac{1}{2}$. Cherchons le temps qu'elle met à décrire l'arc α'a'. Pour cela, il faut calculer l'angle a'O'α' ou l'angle OTO' qui lui est égal: or le soleil décrit sur l'écliptique 360° en $365^j,2422$; conséquemment en $27^j\frac{1}{2}$ il décrira un arc de 27° 7': c'est la mesure de l'angle OTO'. Donc en $27^j\frac{1}{2}$ la tache a a décrit réellement 360° + 27° 7'. Soit donc t le temps pendant lequel elle aura accompli une simple rotation, on aura

$$\frac{27^{j}.12^{h}}{t} = \frac{360^\circ+27^\circ 7'}{360^\circ}, \text{ d'où } t = 25^{j}\,14^{h}.$$

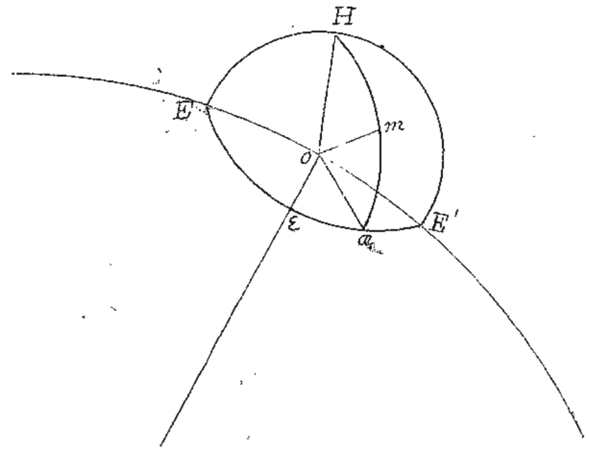
Ainsi les taches font une révolution en $25^j\,14^h$ environ, puisqu'on les considère comme inhérentes au soleil, on peut dire que c'est le soleil qui fait une révolution autour d'un de ses diamètres en 25j 14h. (*)

(*) La première découverte des taches du soleil date de 1611. Il semble qu'elle nécessitait l'usage du télescope et un moyen d'affaiblir les rayons solaires; conditions qui suffiraient pour expliquer comment elle a été si tardive. Cependant quelques auteurs ont cru trouver des traces anciennes de ce phénomène, et ont cité des textes où il est question de taches vues sur le soleil. Mais si quelques individus doués d'une vue privilégiée, ou mettant à profit des circonstances atmosphériques exceptionnelles, sont parvenus à apercevoir des taches solaires, ces faits isolés et rares n'ont eu aucune conséquence utile; et l'on peut dire que la découverte des taches du soleil appartient aux Modernes et date de 1611. Mais cette découverte a donné lieu à une question de priorité fort débattue et confuse. On a voulu en attribuer l'honneur à Fabricius, à Galilée, à Scheiner et même au célèbre algébriste Harriot. Un examen approfondi des diverses pièces de ce débat scientifique et historique a porté Mr Arago à conclure en faveur de Fabricius.

Ce sont les taches qui ont conduit à la connaissance de la rotation du soleil. La découverte de ce phénomène important appartient aussi et sans aucun doute à Fabricius, qui a parfaitement décrit et expliqué, le premier, la révolution des taches. Toutefois Jordan Bruno avait soupçonné la rotation du soleil; et sur ce point, le génie de Képler avait aussi devancé l'observation: car dans le 32e chapitre de son immortel ouvrage: De motibus stellæ Martis, il dit « Le corps du soleil est » magnétique; il tourne autour de lui même ». (Voir p. 250-279 de la notice de Mr Arago sur les travaux d'Herschel; Annuaire du bureau des longitudes; année 1842).

La courbe que décrit une tache sur le disque solaire a une forme elliptique, puisque c'est la projection d'un cercle. La direction de ces courbes indique celle de l'axe de rotation. Cet axe est incliné de 7° environ sur le plan de l'écliptique. Le plan qui lui est perpendiculaire, et qu'on peut appeler l'équateur solaire coupe le plan de l'écliptique suivant une droite qui fait avec la ligne des équinoxes un angle de 80° environ.

Coordonnées héliocentriques. On détermine la position d'une tache sur la surface du soleil par deux coordonnées analogues à celles qui servent à fixer la position d'une étoile sur la voute céleste. Que l'on conçoive le grand cercle EaE' suivant lequel le plan de l'écliptique coupe la surface du soleil, et l'axe diamétral oH perpendiculaire au plan de ce cercle. Que par cet axe et par une tache m on mène un plan, lequel coupera la



surface suivant un grand cercle $Hm\alpha$. L'arc $m\alpha$ compris sur ce grand cercle entre la tache et l'écliptique, ou l'angle $mO\alpha$ est l'une des coordonnées, et s'appelle *latitude héliocentrique*; l'arc $\alpha\varepsilon$ ou l'angle $\alpha O\varepsilon$ que le plan du cercle de latitude fait avec une parallèle à la ligne des équinoxes, est la deuxième coordonnée et s'appelle *longitude héliocentrique*.

On exprime ces deux coordonnées d'une tache en fonction de quantités fournies par l'observation. En observant une tache à trois époques, c'est-à-dire dans trois positions différentes sur le disque solaire, on en conclut par le calcul, la position de l'axe autour duquel se fait leur rotation, et le temps de cette rotation, déjà calculé d'une autre manière.

Bien que l'on ait plusieurs méthodes pour calculer, par trois observations d'une tache, les éléments du mouvement de rotation du soleil, les résultats laissent quelque incertitude; d'une part, parceque la forme variable des taches rend leur observation difficile, et de l'autre, parcequ'on peut croire que ces taches ont un mouvement propre, indépendamment de leur rotation commune, et qu'on ne peut pas tenir compte de ce mouvement propre si toutefois il a réellement lieu, ce qui est encore incertain.

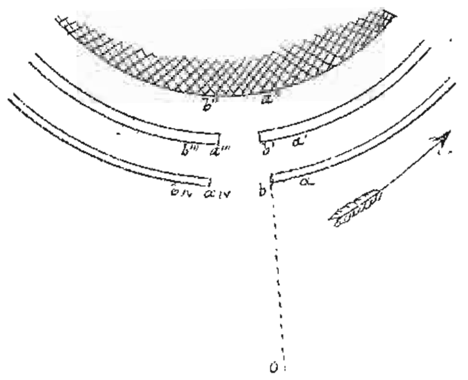
Jamais les taches ne s'apperçoivent dans le voisinage des pôles de l'équateur solaire. Elles sont comprises dans une région qui s'étend à 30° environ de part et d'autre de cet équateur, et qui cependant est plus large et contient un plus grand nombre de taches dans l'hémisphère supérieur

ou boréal que dans l'hémisphère austral.

Quelques astronomes ont soupçonné un petit déplacement de la ligne d'intersection de l'équateur solaire avec le plan de l'écliptique. Mais c'est encore là une conjecture incertaine.

Constitution physique du soleil. Quand une tache commence à apparaître au bord oriental du disque solaire, elle a d'abord une teinte grisâtre peu distincte; puis, quand elle s'éloigne du bord, un point noir paraît, et ensuite une autre teinte grisâtre; ce sont ces teintes qu'on appelle *pénombre*.

A leur suite se remarquent souvent les *facules*, d'une lumière éclatante. Cet aspect des taches entourées d'une pénombre, a fait penser qu'elles ne sont pas à la surface lumineuse du soleil, mais bien au fond d'une espèce de puits, ou de cône tronqué dont la grande base serait à la partie externe de l'astre. La manière la plus heureuse de se rendre compte de ce phénomène, est de considérer le soleil comme un corps opaque entouré de deux couches atmosphériques lumineuses, chacune d'une certaine épaisseur; la couche extérieure étant plus lumineuse que la couche voisine du soleil. Il y aurait dans ces deux couches une sorte de déchirement, ou solution de continuité, de manière que l'ouverture faite dans la couche extérieure serait plus large que celle de la couche intérieure. Quand, par suite de la rotation du soleil et des couches qui l'entourent, l'extrémité b de la couche supérieure ab commence à apparaître au spectateur, il commence à apercevoir la partie $a'b'$ de la couche interne qui est moins lumineuse que la couche ab ; cette partie $a'b'$ forme la pénombre ; puis vient la partie $a''b''$ du noyau solaire, c'est la tache noire ; ensuite on voit la partie $a'''b'''$ de la couche interne, c'est encore la pénombre ; enfin la couche externe $a^{IV} b^{IV}$ paraît dans toute sa clarté. En



b et a^{IV} la lumière est parfois plus brillante ; alors ce sont ces espaces qu'on appelle *facules*. On explique leur présence à côté de la pénombre, en supposant que cette vaste déchirure dans les atmosphères solaires est produite par une sorte de volcan, et qu'alors la matière qui occupait d'abord l'espace $b a^{IV}$ se trouve refoulée sur la circonférence du trou, où par conséquent l'atmosphère est plus dense et plus lumineuse.

Cette hypothèse, que le soleil est un noyau solide entouré de deux couches lumineuses, est généralement admise aujourd'hui, parce qu'elle

présente plus de probabilité que les différentes autres explications que les astronomes et les physiciens avaient données auparavant. Mais quelle est la nature de ces couches lumineuses ? Sont-elles solides, liquides, ou gazeuses ? Une belle expérience de Mr Arago a résolu cette question intéressante, en prouvant que la surface du soleil est réellement gazeuse. Mr Arago remarqua que quand on regarde un corps solide ou liquide avec un oculaire biréfringent, si la lunette est dirigée normalement à la surface du corps, les deux images sont incolores, et si elle est dirigée obliquement les deux images ont des couleurs *complémentaires* ; mais pour un gaz incandescent, tel que la flamme d'une lampe, quel que soit l'angle sous lequel les rayons visuels sont dirigés, les deux images ont toujours la même teinte. Or c'est ce qui a lieu quand on regarde le soleil. Si l'on observe son centre, les rayons visuels sont normaux à sa surface ; si l'on observe ses bords, ils sont inclinés sur la surface du soleil ; et dans tous les cas les deux images présentent la même teinte. D'où Mr Arago a conclu, démonstrativement, que la surface externe du soleil est une matière gazeuse.

Quand nous avons supposé que les taches du soleil n'étaient autre chose que le noyau de cet astre mis à nu par une ouverture pratiquée dans son atmosphère, nous n'avons pas entendu dire que ce noyau fût réellement noir ou privé de lumière ;

mais seulement qu'il était beaucoup moins lumineux que son atmosphère. De sorte que son apparence noire n'est qu'un effet relatif. Car quel qu'il soit par lui même, il reçoit au moins la lumière de son atmosphère; de sorte qu'il est nécessairement lumineux.

Lumière zodiacale. On suppose que le soleil est entouré d'une troisième atmosphère très peu dense et de forme elliptique très aplatie. Et ce serait cette atmosphère, très étendue dans l'espace qui produirait cette lueur connue sous le nom de *lumière zodiacale*, qu'on aperçoit un peu après que le soleil est descendu sous l'horizon dans le courant d'avril ou d'octobre. Elle est dirigée suivant l'équateur solaire, lequel, à ces époques, est dans la direction de la terre. Ce qui fait que cette atmosphère se présente alors dans toute son épaisseur, et devient plus visible qu'aux autres époques de l'année.

On peut consulter sur toute cette partie très délicate de la constitution physique du soleil, les développements dans lesquels est entré Mr Arago dans sa notice sur la vie et les travaux d'Herschel.

De la Lune.

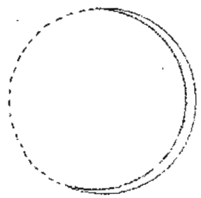
18e Leçon. La Lune participe au mouvement diurne de la sphère céleste, et a, comme le soleil, un mouvement propre, en vertu duquel sa position change

chaque jour très sensiblement par rapport aux étoiles. Ce mouvement a lieu dans le même sens que celui du soleil, mais il est beaucoup plus rapide.

Le disque lunaire n'est pas toujours entièrement lumineux, et sa partie lumineuse change incessamment de forme. Les apparences diverses qui en résultent ont reçu le nom de *phases*.

En voici la description.

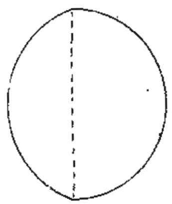
Phases. A une certaine époque (qui se renouvelle plusieurs fois dans l'année), la Lune se couche très peu de temps après le soleil. Alors on la voit sous la forme d'un *croissant* très délié et ayant ses cornes très pointues, comme un simple filet demi-circulaire.



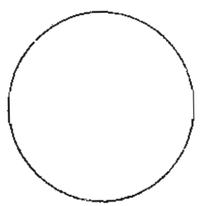
Sa convexité est tournée vers le soleil (ou vers l'occident); elle est circulaire; et sa concavité a une forme elliptique. On reconnait, à la vue simple, ou avec une lunette d'un faible grossissement, que ce croissant fait partie d'un disque circulaire dont l'autre partie n'est éclairée que d'une très faible lumière, qu'on appelle *lumière cendrée*. Au moyen de deux fils parallèles, mobiles dans la lunette, on reconnait que tous les diamètres du cirque lunaire sont sensiblement égaux. Les pointes du croissant sont les extrémités d'un diamètre.

Le jour suivant, la lune est un peu plus éloignée de l'horizon quand le soleil se couche; son croissant a plus d'épaisseur; et sa lumière cendrée diminue d'intensité.

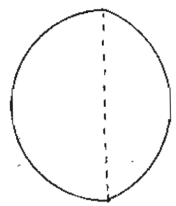
Vers le 7.e jour, la Lune se trouve au méridien quand le soleil se couche; alors elle présente la forme d'un demi-disque circulaire. La lumière cendrée a entièrement disparu. La Lune se trouve alors à 90° du soleil; on dit qu'elle est en quadrature ou à son premier quartier.



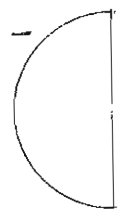
Les jours suivants, la partie éclairée continue de s'accroître, et le bord opposé au soleil, qui était d'abord concave, puis droit, devient convexe et elliptique; de sorte que le disque lumineux est formé d'un demi-cercle et d'une demi-ellipse qui se raccordent.



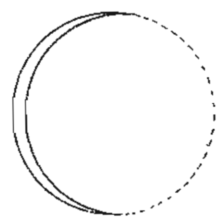
Enfin 7 jours après le premier quartier, le disque est tout à fait circulaire. On lui donne alors le nom de pleine lune; ou bien on dit que la lune est en opposition. Elle passe alors au méridien vers minuit, c'est-à-dire quand le soleil est lui-même au méridien inférieur.



Le lendemain et les jours suivants, on voit la partie du disque tournée vers le couchant diminuer d'épaisseur, et prendre une forme elliptique de plus en plus aplatie.



Le 7.e jour après la pleine lune, le disque présente un demi-cercle dont le diamètre est du coté de l'occident; la partie circulaire est tournée du coté du soleil. La lune est alors à 270° du soleil; de sorte qu'elle parait à l'horizon, à minuit. On dit qu'elle est à son dernier quartier, ou à sa seconde quadrature.



Les jours suivants le contour droit se creuse en prenant une forme elliptique; de sorte que la Lune présente de nouveau un croissant qui devient de plus en plus délié. Sa convexité est tournée vers l'orient, ou vers le soleil. La lumière cendrée reparait. La Lune se lève alors à peu près avec le soleil, mais un peu plus tôt. On dit qu'elle est dans le déclin.

Enfin, il arrive un jour, le 6.e à peu près, où elle se lève en même temps que le soleil. Alors elle disparait et on lui donne le nom de nouvelle lune, ou Néoménie. On dit qu'elle est en conjonction.

Elle reste invisible deux ou trois jours ; ensuite elle reparait, suivant de près le soleil, c'est-à-dire se couchant un peu après lui. Alors les mêmes phases se renouvellent.

Mois synodique lunaire, ou lunaison. — L'intervalle de temps que dure l'accomplissement de ces quatre phases de la Lune s'appelle lunaison, ou mois synodique lunaire. On le compte de nouvelle lune à nouvelle lune, ou, en d'autres termes, de conjonction à conjonction. Il est de $29^{j}\ 12^{h}\ 44'\ 2''$ temps moyen, c'est à dire $29^{j}\frac{1}{2}$ à peu près. Ainsi le mois synodique lunaire est le temps que la lune met à revenir à la même position par rapport au soleil.

Mois sidéral lunaire. Le temps qu'elle met à revenir à la même position par rapport aux étoiles, est un peu moindre, à cause du mouvement propre du soleil qui a lieu dans le même sens que celui de la lune. Cet intervalle de temps est de $27^{j}\frac{1}{3}$ à peu près ($27^{j}\ 7^{h}\ 43'\ 11''$) ; on l'appelle mois sidéral lunaire.

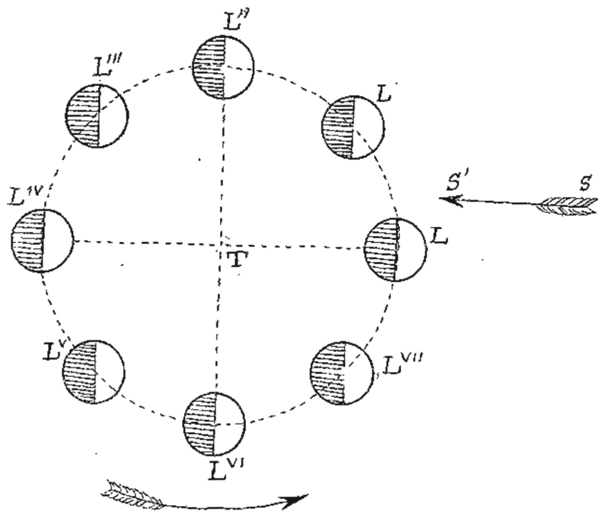
Rapport entre l'année tropique et la lunaison. — Cycle lunaire. 19 années solaires ou tropiques, comprennent 235 mois synodiques

lunaires. Car on a sensiblement l'égalité $365^{j},2422 \times 19 = 29^{j},53 \times 235$. Il s'ensuit qu'au bout de 19 ans les phases de la lune se reproduisent précisement aux mêmes dates. De sorte que si l'on a noté pendant 19 ans les quantièmes successifs, par exemple de la nouvelle lune, ce tableau servira pour les 19 années suivantes. Cette période de 19 ans a été découverte par Méton, 400 ans avant notre ère. On l'appelle Cycle de Méton, ou cycle lunaire, ou bien encore nombre d'or, parceque les Athéniens, dans leur admiration des propriétés de cette période, en avaient gravé le calcul en lettres d'or. Ce cycle a toujours été d'un grand usage dans la chronologie.

Explication des phases de la Lune. On se rend compte aisément des phases que présente la Lune, en supposant qu'elle tourne autour de la terre, dans un plan peu différent de celui de l'écliptique, et qu'elle reçoive sa lumière du soleil. Car le soleil étant assez éloigné d'elle pour que ses rayons puissent être considérés comme parallèles, elle aura toujours un hémisphère obscur et un hémisphère éclairé ; et ce sera celui-ci, qui, n'étant visible de la terre qu'en partie, donnera lieu aux phases que nous observons.

Puisque ce sont les positions relatives de la lune, par rapport au soleil, que nous voulons considérer, nous supposerons le soleil fixe en un certain lieu de l'écliptique et nous observerons la lune dans toutes les positions qu'elle prend en tournant autour de la terre.

Soit T la position de la terre; et que la flèche SS' indique la direction dans laquelle le soleil envoye ses rayons lumineux. Que L, L', L'',...... nous représentent des positions successives de la lune par rapport au soleil;



c'est-à-dire, qu'en L la lune est dans la direction même du soleil; en L'', à 90° du soleil; en L^{IV}, à 180° &c. Dans chaque position, la lune a un hémisphère éclairé, comme le montre la figure. Quand elle est en L, aucune partie de son hémisphère lumineux n'est visible de la terre, c'est l'époque de la _nouvelle lune_. Quand elle est en L', une partie de l'hémisphère lumineux sera visible; cette partie est comprise entre deux portions de surfaces coniques ayant leur sommet commun en T; la première circonscrite à la lune, et la deuxième passant par

le grand cercle, séparation d'ombre et de lumière sur la lune. La première surface conique touche la lune suivant un cercle dont la projection sur la voute céleste forme le contour du disque lunaire, et parait circulaire. La deuxième surface conique rencontre le plan de ce disque suivant une ellipse. L'espace compris entre cette ellipse et le contour visible du disque, forme le _croissant_ que présente la lune. On voit donc pourquoi la convexité de ce croissant est circulaire et tournée vers le soleil; et pourquoi sa concavité est elliptique. Quand la lune est en L'', évidemment son hémisphère éclairé se projettera suivant un demi-cercle. En L''', il se projette suivant un disque terminé par deux arcs convexes, l'un, à droite, circulaire, et l'autre, à gauche, elliptique. En L^{IV} tout l'hémisphère éclairé est visible, sous la forme d'un disque circulaire complet. Dans les positions suivantes, la lune présente des aspects analogues, dont il est également facile de se rendre compte.

En L on dit que la lune est en _conjonction_ avec le soleil, parcequ'elle est du même côté que lui par rapport à la terre. En L^{IV} on dit qu'elle est en _opposition_, parcequ'elle est du côté opposé au soleil, par rapport à la terre. Ces deux phases, la _conjonction_ et l'_opposition_, s'appellent aussi _syzygies_. En L'' et en L^{VI}, on dit que la lune est en _quadrature_, parcequ'elle est à 90° du soleil.

Si la lune se mouvait précisément dans le plan de l'écliptique, comme nous venons de le supposer, il y aurait deux eclipses à chaque lunaison; éclipse de soleil lors de la conjonction ou nouvelle lune, et éclipse de lune lors de l'opposition ou pleine lune. Mais les éclipses sont beaucoup plus rares, parceque la lune ne se meut pas précisément dans l'écliptique, ainsi que nous le verrons tout-à-l'heure.

Le disque lumineux de la lune nous éclaire d'une lumière dont l'intensité dépend de l'étendue de ce disque et de la pureté de notre atmosphère. Cette lumière n'est que la réflexion de celle que la lune reçoit du soleil.

Explication de la lumière cendrée. La terre produit à l'égard de la lune, des phénomènes semblables à ceux que produit la lune à l'égard de la terre, c'est-à-dire que l'hémisphère terrestre éclairé par le soleil présenterait à un habitant de la lune les mêmes phases que la lune présente à un habitant de la terre. La terre éclaire donc la lune d'une lumière chaque jour variable. C'est cette lumière qui, dans certaines positions, nous rend visible l'hémisphère obscur de la lune, et que nous avons appelée lumière cendrée. Elle a d'autant plus d'intensité que la partie de l'hémisphère terrestre lumineux visible de la lune est plus considérable. Cela a lieu quand la lune est en L, c'est-à-dire lors de la nouvelle lune; car alors tout l'hémisphère lumineux de la terre éclaire la lune. Ensuite la lumière cendrée diminue. Mais on observe que la lumière cendrée n'a pas toujours

la même intensité dans les nouvelles lunes. Cela provient de ce que l'hémisphère éclairé de la terre, celui qui produit la lumière cendrée, n'est pas toujours le même, et conséquemment ne réfléchit pas toujours la même quantité de lumière. L'océan, par exemple, ou une grande étendue de forêts, réfléchit moins de lumière que la terre, et produit une lumière cendrée moins intense. La lumière cendrée dépend aussi de l'état de l'atmosphère.

La lumière que la terre renvoie à la lune est beaucoup plus abondante que celle que la lune nous envoie, à cause de la plus grande surface de la terre. Le rapport des surfaces est de 13 à 1. Car le rayon apparent de la lune, vu de la terre, est de 15 à 16'; le rayon apparent de la terre, vu de la lune, c'est-à-dire la parallaxe horizontale de la lune est de 56 à 57'. Les diamètres des deux corps sont donc à peu près dans le rapport de $\frac{15}{56}$, et leurs surfaces dans celui de $\frac{15^2}{56^2} = \frac{1}{13}$. (✳)

(✳) On avait autrefois supposé que la lumière cendrée était une lumière propre de la lune, ou une sorte de phosphorescence qui devenait plus intense quand la lune avait été exposée plus longtemps aux rayons du soleil, comme cela a lieu, en général, pour tous les corps. Mais cette explication est tout-à-fait inadmissible. Car c'est précisément à l'époque où la lumière cendrée a le plus d'intensité, que la partie du globe lunaire sur laquelle elle se manifeste est le moins exposée aux rayons solaires. Enfin, il arrive quelquefois dans les éclipses de lune, que

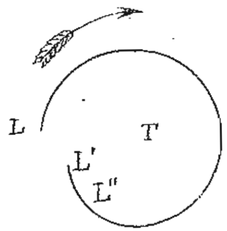
Orbite lunaire. Pour connaître la courbe que la lune décrit dans son mouvement propre, on détermine chaque jour la position de son centre sur la sphère céleste, par son ascension droite et sa déclinaison, comme nous l'avons fait pour le soleil. On reconnaît ainsi que la trajectoire de la lune est sensiblement plane, et que son plan est incliné sur l'équateur et sur l'écliptique. Son inclinaison sur l'écliptique est constante et de 5° 9'; mais son inclinaison sur le plan de l'équateur varie d'une lunaison à l'autre. Toutefois elle est comprise entre 18° et 28°. Elle varie donc de 10°. Cette variation s'accomplit en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

L'orbite lunaire rencontre le plan de l'écliptique en deux points qu'on appelle les *nœuds*. L'un est dit *nœud ascendant* et l'autre *nœud descendant*. Le premier est celui où la lune traverse le plan de l'écliptique quand elle se dirige vers le pôle boréal. Le nœud descendant correspond à la région du pôle austral.

Rétrogradation des nœuds. La lune ne traverse pas l'écliptique aux mêmes points. Ses nœuds rétrogradent par rapport à la direction de son mouvement. Soit T la terre, L le nœud ascendant actuel de la lune, laquelle se meut dans la direction indiquée. Le prochain nœud ascendant ne sera

la lumière disparait tout-à-fait, tandis qu'il devrait rester celle qu'on attribuait à la phosphorescence.

pas en L mais en L', le suivant en L''. Et ainsi des autres.



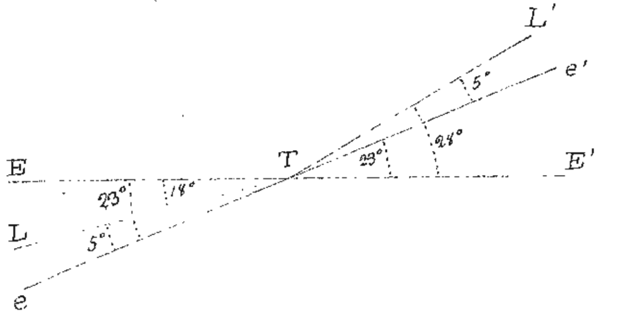
De sorte que les points où la lune perce l'écliptique dans ses passages successifs forment une courbe qui est décrite en sens inverse du mouvement de la lune. Voilà pourquoi on dit que les *nœuds rétrogradent*. D'après cela, on voit qu'un nœud ascendant et le nœud descendant suivant ne sont pas précisément à 180° de distance, c'est-à-dire en ligne droite avec la terre. Toutefois on appelle *ligne des nœuds* la droite qui joint, dans chaque orbite, le nœud ascendant au nœud descendant.

La rétrogradation des nœuds, ou de la ligne des nœuds, se fait d'un mouvement sensiblement uniforme et assez rapide; il est de 3' 10" environ par jour solaire moyen; et la révolution entière d'un nœud sur l'écliptique, est de 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

Explication de la variation d'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'équateur.

Nous avons dit que le plan de l'orbite lunaire est incliné de 5° 9' sur le plan de l'écliptique, et que cette inclinaison est constante; il s'ensuit, puisque la ligne des nœuds a un mouvement de rétrogradation sur l'écliptique, que le plan de l'orbite lunaire roule sur un cône droit circulaire dont l'axe est celui de l'écliptique et dont les arêtes font avec cet axe un angle de 84° 51' ou 85° environ. Une révolution de ce plan s'accomplit en 18 ans $\frac{2}{3}$.

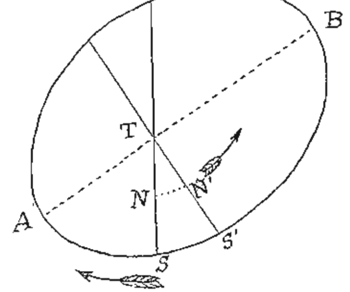
C'est ce mouvement qui produit la variation d'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'équateur; et l'on voit pourquoi cette inclinaison oscille entre 18 et 28°. En effet soient EE' et ee' les traces des plans de l'équateur et de l'écliptique sur le plan de la figure auquel nous les supposons perpendiculaires.



Les deux lignes TL, TL' inclinées de 5° 9' sur la ligne ee' seront les traces du plan de l'orbite lunaire (sur le plan de la figure), quand la ligne des nœuds coïncide avec la ligne des équinoxes; ce qui a lieu deux fois en 18 ans $\frac{2}{3}$. Dans le 1er cas, l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'équateur, mesurée par l'angle LTE est de 18° environ, $(23°27' - 5°9' = 18°18')$; dans le 2e cas elle est L'TE' = 28° environ. $(23°27' + 5°9' = 28°36')$. Ce sont les inclinaisons *minimum* et *maximum*.

Révolution synodique du nœud. Soit SAB l'écliptique, c'est-à-dire la courbe parcourue

par le soleil annuellement. Supposons le soleil en S, et que le nœud de la lune se trouve actuellement en N sur la direction du soleil.



Le soleil et le nœud se meuvent en sens contraire, comme l'indiquent les deux flèches; le nœud se retrouvera donc sur la direction du soleil en N', avant que celui-ci ait achevé sa révolution tropique.

Le temps qui s'écoule entre deux coïncidences consécutives du nœud avec la direction du soleil, s'appelle *révolution tropique du nœud*; il est de 346 jours $\frac{1}{2}$ à peu près (346j, 619). On dit que c'est le temps du *retour du nœud au soleil*.

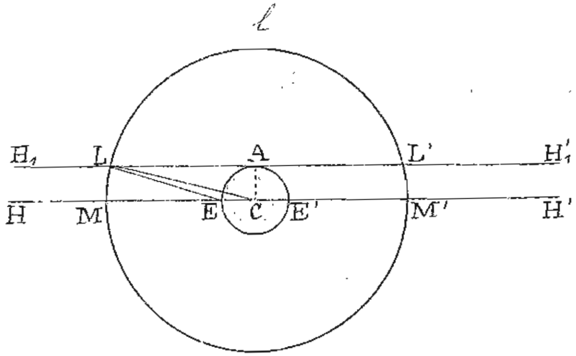
Rapport entre la lunaison et la révolution synodique du nœud. 223 lunaisons font à très peu près 19 révolutions synodiques du nœud. Car on a 223 lunaisons = 6585j, 32, et 19 révol. synod. = 6585j, 78. Il s'ensuit que si actuellement la lune est à son nœud, et sur la direction du soleil, elle se retrouvera à son nœud au bout de 223 lunaisons, et sera encore à ce moment sur la direction du soleil. Toutes les positions respectives qui auront lieu entre la lune et le soleil, pendant ces 223 lunaisons, ou 18 ans et 10 jours, se reproduiront donc dans le même ordre et aux mêmes intervalles de temps pendant les 18 ans et 10 jours suivants. De sorte qu'on pourra prédire les phénomènes, tels que les éclipses, auxquels donnent lieu les positions respectives du soleil et de la lune.(*)

Parallaxe de la lune. On peut déterminer la parallaxe horizontale de la lune par deux observations simultanées faites en deux lieux de la terre situés à une grande distance sur un même méridien. C'est la méthode par laquelle nous avons déterminé la parallaxe du soleil. On trouve ainsi que la parallaxe horizontale de la lune varie entre 54' et 61'; sa valeur moyenne est 57'. Cette variation provient de deux causes; d'abord de la variation de la distance de la lune à la terre; et ensuite de l'aplatissement de la terre. Car la parallaxe de la lune, est l'angle sous lequel on verrait un rayon terrestre du centre de la lune, et cet angle dépend de la grandeur du rayon terrestre.

Voici une autre méthode particulière pour déterminer, approximativement, la parallaxe de la lune. Soit EAE' l'équateur terrestre. Pour un observateur placé en un de ses points A, l'horizon rationnel sera le plan diamétral HH' perpendiculaire au rayon CA, et l'horizon <u>sensible</u> le plan $H_1H'_1$, tangent en A. Par rapport

(*) Cette période de 18 ans 10 jours a été connue des Chaldéens sous le nom de <u>saros</u>. Elle leur servait à prédire le retour des éclipses déjà connues par l'observation; de même que la période de 19 ans dont nous avons parlé ci dessus, leur servait à former leur calendrier lunaire.

à la distance du soleil, le rayon de la terre est



extrêmement petit, ce qui fait que nous avons pu jusqu'ici supposer que ces deux plans se confondaient, et ne parler que de l'horizon rationnel; mais il n'en est pas de même à l'égard de la lune; elle cessera d'être visible, ou bien elle redeviendra visible quand son bord supérieur atteindra l'horizon sensible. Ainsi LlL' est l'arc de cercle que la lune décrit, dans le mouvement diurne, pendant le temps qu'elle est visible. Or la lune met $24^h\,50'$ environ à revenir au méridien, c'est-à-dire, à accomplir une révolution. Elle met donc $12^h\,25'$ à décrire la demi-circonférence MlM'. On observe à l'horloge astronomique le temps qu'elle met à décrire l'arc LlL'; on trouve $12^h\,17'$ environ. Il s'ensuit que la lune parcourt chacun des arcs ML, M'L' en 4' environ. Ces 4' correspondent, dans le mouvement diurne de la lune, à peu près à un arc de 1°. Ainsi l'arc LM est de 1° environ. Cet arc mesure l'angle LCM, égal à CLA, c'est-à-dire à la parallaxe de la lune. Cette parallaxe est donc de 1° environ.

Distance de la lune à la terre. Cette distance se conclut de la parallaxe horizontale, comme pour le soleil. On trouve que sa valeur moyenne est de 60 rayons terrestres à peu près, ou $\frac{1}{400^e}$ de la distance du soleil.

Diamètre apparent de la lune. Il varie entre $29' \frac{1}{3}$ et $33' \frac{1}{2}$.

Diamètre de la lune. On le conclut du diamètre apparent et de la distance de la lune à la terre. Il est à peu près 0,27 du diamètre terrestre. Par conséquent le volume de la lune est à peu près 0,02, ou plus exactement $\frac{1}{49^e}$ de celui de la terre.

Forme de l'orbite lunaire. Si l'on observe chaque jour la lune à son passage au méridien, et que l'on calcule en même temps sa distance réelle à la terre, on pourra, en portant sur les rayons visuels qui fixent la direction de la lune, des segments proportionnels à ces distances, déterminer la courbe qu'elle parcourt en vertu de son mouvement propre. On trouve, en négligeant de petites quantités dont nous dirons tout à l'heure la cause, que cette courbe est une ellipse dont la terre occupe un des foyers. Cette ellipse est plus aplatie que celle que parcourt le soleil. Car son excentricité est 0, 05484 ; le demi-grand axe étant pris pour unité. Les extrémités du

grand axe ont le nom d'<u>apsides</u> ; ce sont les points où la lune est à sa distance <u>maximum</u> et <u>minimum</u> de la terre. Le 1er s'appelle <u>apogée</u>, et le 2e <u>périgée</u>.

Déterminer le lieu de l'apogée, sur l'orbite lunaire. On observe tous les jours le diamètre apparent de la lune ; et l'on marque les positions de cet astre sur son orbite au moment de l'observation. On trouve qu'à chaque observation, en correspond une seconde qui donne le même diamètre apparent. La lune se trouve, dans ces deux positions, à des distances égales de la terre, et conséquemment sur deux rayons également inclinés sur la ligne des apsides, ou grand axe de l'orbite. La bissectrice de l'angle de ces deux rayons détermine donc l'apogée.

Révolution de la ligne des apsides. L'ellipse lunaire n'est pas fixe dans son plan ; elle tourne autour du foyer où est située la terre, dans le même sens que le mouvement propre de la lune. Cette révolution s'accomplit en 9 ans environ (3232, 5) jours solaires moyens). Ce qu'on reconnait en déterminant la position de l'apogée à différentes époques. Ce phénomène est connu sous le nom de <u>révolution de la ligne des apsides</u>. (*)

(*) Il y a une pareille révolution dans l'ellipse solaire, nous

Il faut observer que cette rotation de l'ellipse lunaire n'altère pas le mouvement angulaire de la lune; mais seulement ses distances à la terre, parcequ'elle passe de la position actuelle sur un rayon vecteur autre que celui sur lequel elle se trouverait, si l'ellipse était fixe. Il en résulte qu'en réalité la trajectoire de la lune diffère de l'ellipse, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus. Du reste, le plan de l'ellipse roule sur un cône droit de révolution autour de l'axe de l'écliptique; ce qui fait que la véritable trajectoire de la lune dans l'espace, n'est pas plane et diffère encore à cet égard, d'une ellipse.

Du mouvement angulaire de la lune, et de ses équations ou inégalités.

(non exigé.)

[Si le mouvement de la lune était rigoureusement elliptique, tel que nous avons supposé le mouvement du soleil, son mouvement angulaire aurait son expression de la forme.

n'en avons pas tenu compte, parcequ'elle est peu sensible. La ligne des apsides, en vertu de son déplacement, et en tenant compte de la rétrogradation de la ligne des équinoxes, se retrouve à la même distance angulaire de cette ligne en 21000 ans environ.

$$\text{mouvement vrai} = nt + \alpha + 2e\sin(nt + \alpha - L_1)$$

ou

$$\text{mouvement vrai} = \text{mouv}^{t}\ \text{moyen} + 2e\sin(\text{anomalie moyenne}).$$

Nous appelons *anomalie moyenne*, l'angle qu'un astre fictif, se mouvant d'un mouvement uniforme, ferait avec la ligne des apsides, ou grand axe de l'ellipse.

Puisque la lune ne décrit pas exactement une ellipse, on doit penser que le terme $2e$(anom. moyenne), que nous avons appelée *équation du centre*, ne suffira pas pour représenter avec toute l'exactitude désirable, son véritable mouvement, et qu'à cette *équation* principale il en faudra joindre une ou plusieurs autres. C'est ce qui a lieu en effet. Si l'on observe chaque jour la position de la lune, on reconnait qu'elle diffère de la position qu'indiquerait la formule du mouvement elliptique.

De sorte qu'à chaque observation correspond une petite différence Δ qu'il faut ajouter, avec son signe, à l'*équation du centre*.

Si ce terme Δ provenait d'une seule cause, on conçoit qu'une étude attentive des variations qu'il éprouve incessamment, pourrait faire apercevoir assez facilement la loi de ces variations, et par suite l'expression de ce terme. Mais on conçoit aussi que si cette quantité Δ provient de plusieurs causes à la fois, son expression pourra être compliquée et formée de termes répondant à ces diverses causes respectivement. Si ces causes de perturbation dans le mouvement de la lune, étaient connues *à priori*, ou du moins, si l'on en avait une idée assez distincte, on aurait de grandes facilités pour prévoir la forme des différents termes de cette quantité Δ. Aujourd'hui ces causes sont connues; mais elles ne le sont que depuis un siècle et demi. Toutefois une étude attentive des variations de la quantité Δ a suffi pour montrer que ses principales inégalités avaient des rapports manifestes avec la position du soleil; et cette remarque indiquait la période de chaque inégalité. Or l'expérience a prouvé aux astronomes que les inégalités qui affectent les mouvements angulaires des astres sont périodiques, c'est-à-dire qu'elles reprennent les mêmes valeurs quand l'angle dont elles dépendent et qu'on appelle l'*argument*, redevient le même; d'où il résulte que ces inégalités se peuvent exprimer par des sinus. (*)

D'après ces considérations, les astronomes ont découvert dans l'expression de la quantité Δ, trois termes principaux, ou trois *inégalités principales*.

(*) Les anciens exprimaient une inégalité périodique par un mouvement circulaire uniforme. C'est, je crois, Copernic qui, le premier, a fait usage d'une expression analytique et s'est servi d'un sinus; Tycho Brahé lui a emprunté cette idée heureuse, dont les astronomes aujourd'hui font ~~un~~ usage continuel.

Appelons A l'anomalie moyenne de la lune; *a* l'anomalie moyenne du soleil, et D la distance angulaire de la lune au soleil; α, β, γ trois coefficients numériques; les trois termes dont se compose Δ, sont de la forme

$$\alpha \sin(2D-A),\ \beta \sin 2D,\ \text{et } \gamma \sin a.$$

L'expression du mouvement angulaire de la lune est donc

Mouvement vrai = mouvement moyen $+ 2e \sin A + \alpha \sin(2D-A) + \beta \sin 2D + \gamma \sin a.$

Le premier terme $2e \sin A$ est l'*équation du centre*; le deuxième, $\alpha \sin(2D-A)$ s'appelle *évection*; le troisième, $\beta \sin 2D$, *variation*, et le quatrième, $\gamma \sin a$, *équation annuelle*.

Ainsi la longitude de la lune a quatre inégalités ou *équations* principales, l'*équation du centre*; l'*évection*; la *variation*; et l'*équation annuelle*.

En mettant à la place des coefficients leurs valeurs numériques, la somme des quatre *équations* devient

$$6°20' \sin A + 1°20' \sin(2D-A) + 36' \sin 2D + 11',16 \sin a.$$

Si l'on observe la lune dans les syzygies, on a $D=0$ ou $D=180°$; $\sin(2D-A) = -\sin A$, la *variation* est nulle, et en faisant abstraction de l'équation annuelle qui est toujours très petite, l'équation totale se réduit à

$$6°20' \sin A - 1°20' \sin A = 5° \sin A.$$

Dans les quadratures on a

$$2D = 180°;\ \sin(180°-A) = \sin A;$$

et il vient

$$6°20' \sin A + 1°20' \sin A = 7°40' \sin A.$$

La plus grande valeur de la variation est de 36'; elle répond à $\sin 2D = 1$; ce qui a lieu quatre fois dans le cours d'une lunaison, savoir, quand $D = 45°$, ou $135°$, ou $125°$, ou enfin $315°$. On nomme ces positions de la lune octants. La variation est nulle dans les syzygies et dans les quadratures.

On conçoit que l'équation totale du mouvement de la lune, qui vient d'être représentée par quatre termes distincts, pourrait l'être différemment, c'est-à-dire par des termes d'une autre forme, et même en plus ou moins grand nombre; car on sait que souvent une même quantité variable peut être représentée par diverses formules empiriques différentes dans leurs formes, et qui cependant s'accordent assez bien dans de certaines limites. La théorie des réfractions nous en a offert un exemple. Aussi ce n'est pas précisément par les quatre termes ci-dessus, que les Grecs exprimaient le mouvement de la lune. Les deux dernières inégalités, la variation et l'équation annuelle leur ont été inconnues. Nous ne voulons pas dire que l'erreur qu'ils commettaient alors dans l'expression du mouvement de la lune était précisément la somme de ces deux termes; une partie de ces termes pouvait se trouver comprise avec plus ou moins d'exactitude, dans la

manière dont ils représentaient le mouvement de la lune avec deux équations ou inégalités seulement, lesquelles inégalités n'étaient pas exprimées comme aujourd'hui sous forme analytique, mais bien par des constructions géométriques. (*)

Nous n'avons parlé que de quatre inégalités principales de la longitude de la lune; mais les astronomes en reconnaissent beaucoup d'autres, dont une partie ont été découvertes par Mr. Laplace, comme conséquences naturelles du principe de l'attraction, dont nous parlerons plus tard. (**)

(*) Un auteur arabe du 10e siècle, Aboul-Wéfa, très renommé comme géomètre et astronome, a exprimé le mouvement de la lune par trois inégalités. Quand ce fait a été remarqué, il y a quelques années, dans le traité d'astronomie de cet auteur, dont un manuscrit existe à la Bibliothèque royale, on a cru reconnaître que la troisième inégalité présentait tous les caractères de la variation et l'on en a conclu que la découverte de cette inégalité, qui a fait tant d'honneur à Tycho Brahé, remontait à Aboul Wéfa. Depuis, la question a été controversée. Malheureusement le manuscrit arabe est incomplet, et c'est sur un fragment seulement que l'on a discuté. Cet état du manuscrit cause l'obscurité qui règne sur cette question d'un grand intérêt historique et scientifique.

(**) Les tables lunaires de Mayer contiennent 14 équations; celles de Burg (1806) en contiennent 28; celles de Burckardt (1812), 32; et celles de Mr. Damoiseau (1824), 46. Depuis Mr. Damoiseau a encore poussé l'exactitude plus loin.

Des inégalités de la latitude de la lune.

La distance de la lune à l'écliptique, ou latitude, admet des inégalités ou équations, de même que la longitude, mais qui sont moins nombreuses, et d'une valeur numérique beaucoup moindre. La plus considérable provient d'une inégalité dans l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique. Nous avons supposé cette inclinaison de 5° 9' environ. Mais ce n'était là qu'une valeur moyenne; le plan de l'orbite lunaire éprouve une espèce de balancement autour de la ligne des nœuds. Le maximum d'inégalité qui en résulte dans la latitude est de 8' 47". La découverte de cette équation est due à Tycho.

Des inégalités du rayon vecteur, ou de la parallaxe.

Le rayon vecteur, ou distance de la lune à la terre, dépend de la parallaxe horizontale; et réciproquement. De sorte que les inégalités qui affectent l'un affectent aussi l'autre. Ces inégalités sont nombreuses.

La distance de la lune à la terre varie suivant une loi qui ne s'accorde pas avec celle du mouvement elliptique, ce dont on s'aperçoit par les parallaxes; cela provient de la révolution des apsides, car ce mouvement de l'ellipse lunaire change la position de la lune dans le sens de son rayon vecteur. Cela cause une variation très sensible dans la distance de la lune à la terre,

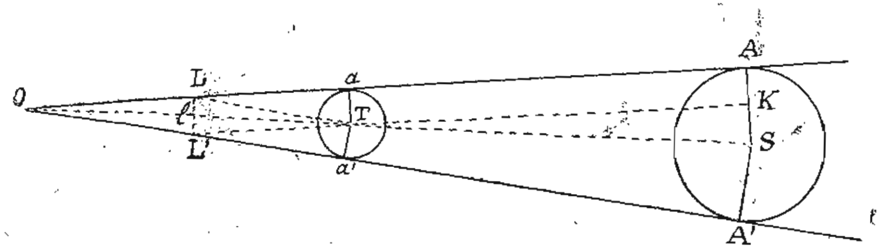
et par conséquent dans les parallaxes. Mais outre cette variation, le rayon vecteur est affecté de beaucoup d'inégalités, qui prouvent que l'ellipse lunaire ne conserve pas toujours les mêmes dimensions: elle se dilate et se resserre successivement.

Nous avons dit que l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire éprouvait des inégalités; nous ajouterons que le mouvement du nœud, et la révolution des apsides en éprouvent aussi. Ces inégalités ont été déterminées par Laplace.

Des Eclipses.

19e Leçon. Si la lune se mouvait exactement dans le plan de l'écliptique, il y aurait, dans le cours de chaque lunaison, une éclipse de lune et une éclipse de soleil. Eclipse de lune, quand la lune serait en opposition, parcequ'alors elle se trouverait dans le cône d'ombre projeté par la terre, et conséquemment serait privée de la lumière du soleil et deviendrait invisible. Eclipse de soleil quand la lune serait en conjonction, parcequ'alors elle cacherait le soleil. Mais la lune se mouvant dans un plan incliné de 5° 9' sur celui de l'écliptique, elle pourra se trouver, lors d'une opposition, au dessus ou au dessous du cône d'ombre projeté par la terre, et conséquemment il n'y aura pas éclipse de lune. Et pareillement, lors d'une conjonction, la terre pourra être en dehors du cône d'ombre projeté par la lune, de sorte qu'il n'y ait pas éclipse de soleil. On conçoit donc que les éclipses de lune et de soleil pourront être beaucoup moins fréquentes que si la lune se mouvait précisément dans le plan de l'écliptique. Nous allons calculer quelles sont les conditions de position de la lune par rapport au soleil, pour qu'elles aient lieu.

Eclipses de lune. Soit S le soleil, T la terre. la lune sera éclipsée quand elle se trouvera au delà de la terre, dans le cône d'ombre $a O a'$ ... si elle



pénètre entièrement dans ce cône, l'éclipse est <u>totale</u>; si elle n'y pénètre qu'en partie seulement, l'éclipse est partielle.

Possibilité d'éclipse. Pour qu'il y ait éclipse, totale ou partielle, il faut que le sommet O du cône d'ombre soit plus éloigné de la terre que la lune. Trouvons d'abord

que cette condition est toujours remplie.

Soient SA, rayon du soleil $= R$; Ta rayon de la terre $= r$; ST distance moyenne du soleil à la terre $= D$; et TO distance du sommet du cône d'ombre au centre de la terre $= \Delta$. Il faut calculer cette distance Δ. Soit TK parallèle à Aa. Les triangles semblables OTa, TSK donnent

$$\frac{OT}{Ta} = \frac{TS}{SK}, \text{ ou } \frac{\Delta}{r} = \frac{D}{R-r}; \text{ d'où } \Delta = \frac{Dr}{R-r}.$$

Nous avons trouvé

$$D = 24000\,r;\quad R = 109\,r;$$

donc

$$R - r = 108\,r; \text{ et } \Delta = \frac{24000}{108}\,r = 222\,r.$$

Or la lune est éloignée de la terre de 60 rayons terrestres à peu près, elle entrera donc dans le cône d'ombre.

L'éclipse peut être totale. Pour le prouver nous allons calculer l'angle LTL' que soutend le diamètre LL' de la section faite dans le cône d'ombre à la distance de 60 rayons terrestres, et comparer cet angle au diamètre apparent de la lune. On a

$$LTl = ALT - TOL.$$

L'angle ALT est la parallaxe horizontale de la lune $= 57'$; on a

$$TOL = STK; \quad \sin STK = \frac{SK}{TS} = \frac{R-r}{D};$$

cet angle est sensiblement égal à son sinus;

nous écrirons donc

$$STK \text{ ou } TOL = \frac{R}{D} - \frac{r}{D};$$

or $\frac{R}{D}$ est le demi-diamètre apparent du soleil, 15' environ, et $\frac{r}{D}$ est la parallaxe du soleil, 8",6 ; on a donc

$$TOL = 15' - 8'',6.$$

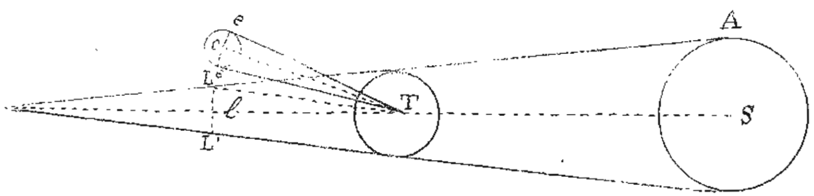
donc

$$LTl = 57' - 15' + 8'',6 = 42'\,8''.$$

Or le demi-diamètre apparent de la lune n'est que de 15' environ ; elle pourra donc être contenue entièrement dans le cône d'ombre. Ainsi les éclipses de lune peuvent être totales.

Condition relative à la latitude de la lune pour qu'il y ait éclipse. Il est clair que pour qu'il y ait éclipse, il faut que la latitude de la lune, c'est-à-dire sa distance à l'écliptique, ne soit pas considérable, car autrement elle passerait au dessus du cône d'ombre.

Soit c le centre de la lune un peu avant



qu'elle entre dans le cône d'ombre. Pour qu'il y ait éclipse, il faudra que l'on ait angle $cTl < cTe + LTl$. C'est-à-dire

que la latitude du centre de la lune doit être plus petite que la somme des deux angles LTl et cTe. Ces deux angles sont, en valeur moyenne, de 42' et 15' ; la latitude doit donc être plus petite, moyennement, que 57'. Et comme les deux angles sont variables en plus et en moins de leurs valeurs moyennes 42' et 15', la latitude peut varier elle-même de part et d'autre de 57' ; ses deux limites sont 63' et 52' ; c'est-à-dire que si la latitude, à l'époque de l'opposition, est plus grande que 63', il ne pourra pas y avoir d'éclipse ; et si elle est moindre que 52', il y aura toujours éclipse, partielle ou totale.

Détermination des époques où il pourra y avoir éclipse. On consultera les Ephémérides qui font connaître, en longitude et latitude, les positions du soleil et de la lune pour tous les jours de l'année, à l'heure de midi. On cherchera à quelles époques les longitudes des deux astres différeront de 180°, et on verra s'il en est auxquelles la latitude de la lune soit au dessous de 63' ; c'est à celles-ci seulement qu'il pourra y avoir éclipse ; alors on calculera le temps précis où se passera le phénomène.

Calcul de l'instant de l'opposition. Nous appelons opposition le lieu de la lune quand sa longitude surpasse celle du soleil de 180°. On trouvera dans les Ephémérides que cela arrive entre deux midis consécutifs déterminés. Il reste à calculer l'instant précis du phénomène. La lune marche plus vite que le soleil, conséquemment l'excès de sa longitude sur celle du soleil, que nous appellerons sa longitude relative, va en augmentant. Donc, au midi qui précède l'opposition, sa longitude relative n'est pas encore de 180°; elle est de 180° − ε; et au midi suivant elle est plus grande que 180°, disons 180 + ε'. (ε+ε') est l'accroissement de la longitude relative pendant 24^h, et ε l'accroissement depuis le premier midi jusqu'au moment de l'opposition. Dans un si court intervalle de temps les accroissements de longitude relative sont proportionnels aux temps; on aura donc, en appelant t le temps compris entre l'opposition et le midi qui la précède,

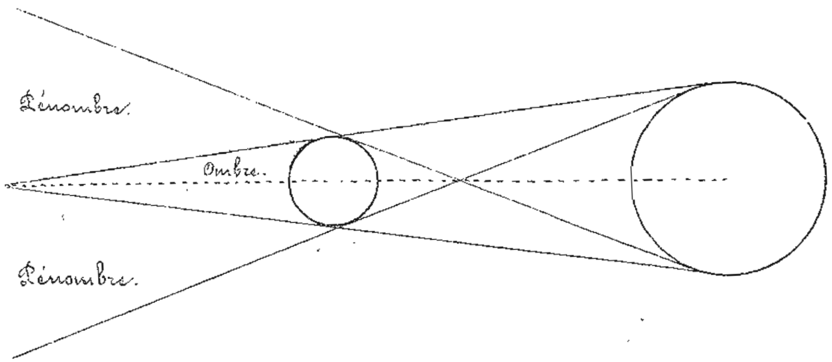
$$\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{24^h} = \frac{\varepsilon}{t}; \text{ d'où } t = \frac{\varepsilon . 24^h}{\varepsilon+\varepsilon'}.$$

Ce qui fait connaître le moment précis de l'opposition.

On calcule aussi le moment de l'entrée ou immersion de la lune dans le cône d'ombre, et le moment de sa sortie ou émersion. C'est ce qu'on appelle proprement le calcul de l'éclipse. (*)

Phénomènes qui accompagnent les éclipses de lune. Même avant d'entrer dans le cône d'ombre la lumière de la lune s'affaiblit, parcequ'elle entre dans la pénombre. On appelle ainsi l'espace compris entre les deux surfaces coniques qu'on peut circonscrire au soleil et à la terre.

(*) Ce calcul se trouvera ci-dessous.



Cet affaiblissement de la lumière de la lune, rend extrêmement difficile l'observation du moment où l'éclipse commence et du moment où elle finit. Aussi il n'est pas rare que les observateurs se trompent de 2', et même de 3' sur le commencement ou la fin d'une éclipse.

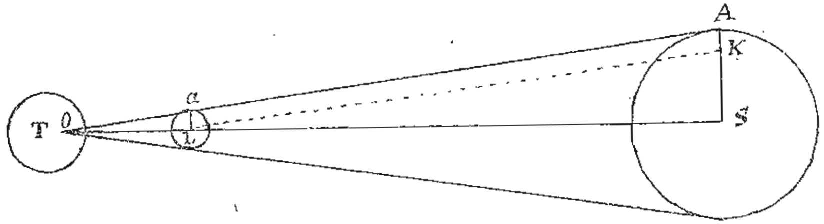
Quand l'éclipse est totale il est des cas où la lune est absolument invisible, et il en est où son disque est encore visible et présente une teinte rougeâtre. Cela provient de la réfraction que les rayons du soleil, surtout les rayons rouges, éprouvent en traversant l'atmosphère terrestre, réfraction qui en dirige quelques-uns sur la lune. C'est pourquoi la lune a une teinte rougeâtre, de même que le soleil quand il se couche.

L'atmosphère terrestre produit un autre effet; elle cause une petite augmentation dans le rayon du cercle d'ombre, c'est-à-dire, de la section du cône d'ombre, à l'endroit où la lune le traverse, comme si le rayon de la terre était augmenté, ce qui donnerait lieu à un cône d'ombre plus prolongé et par conséquent plus large. En effet la densité des couches inférieures de l'atmosphère est assez considérable pour que les rayons qui les traversent ne puissent pas éclairer suffisamment la lune. Il en résulte donc que ces couches produisent l'effet d'une augmentation dans le rayon terrestre, et par suite dans le rayon de l'ombre, qu'il faut augmenter. Les astronomes paraissent s'accorder à ajouter $\frac{1}{60}$ au rayon calculé. Cependant cette correction est incertaine.

Eclipses de soleil.

Ce n'est qu'à l'époque d'une conjonction, qu'il peut y avoir éclipse de soleil; car il faut que la terre, ou du moins une partie de la terre, se trouve dans le cône d'ombre projeté par la lune. Il faut en outre, que la lune soit près de ses nœuds, et que sa latitude n'excède pas $1^\circ\frac{1}{2}$. Ainsi pour connaître les époques de possibilité d'éclipse, on cherchera dans les Ephémérides qui donnent pour chaque jour, par longitude et latitude, les positions de la lune et du soleil,

à quelles époques la lune a la même longitude



que le soleil, et une latitude moindre que $1^\circ\frac{1}{2}$. Ensuite, il faut chercher si, à ces époques, la terre atteindra le cône d'ombre.

On a dans les deux triangles semblables

$$aLO,\ KSL,\quad \frac{LO}{La} = \frac{LS}{SK},\quad LO = \frac{La.LS}{SK},$$

ou, en appelant r' le rayon de la lune $LO = \dfrac{Dr'}{R-r'}$.

On a approximativement

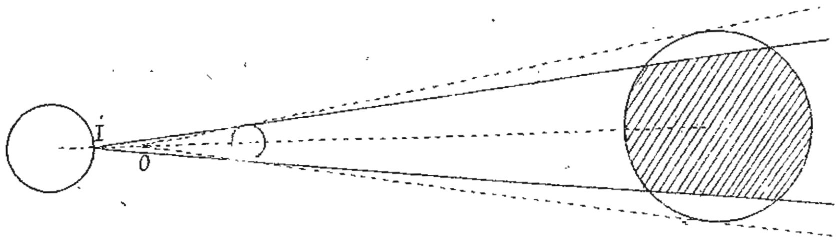
$$D = 24000r\ ;\ R = 109r \text{ et } r' = \frac{1}{4}r.$$

Donc $LO = 56r$ à peu près.

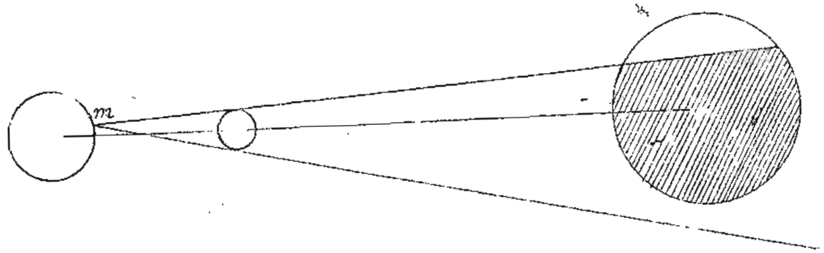
La distance de la terre à la lune est de 60 rayons terrestres; il semblerait donc que le cône d'ombre n'atteindra pas la terre. Cependant comme l'expression de LO n'est qu'approximative, et qu'elle varie avec les distances variables de la lune à la terre, il peut arriver que la terre pénètre dans le cône d'ombre; mais elle n'y peut être contenue entièrement, et il n'y aura qu'une portion de sa surface qui s'y trouvera; de sorte qu'une éclipse de soleil peut n'être visible pour aucun point de la terre; ou bien l'être pour un seul point, ou pour une certaine zone; mais jamais pour la terre entière.

L'éclipse sera totale pour tous les points compris dans cette zone qui est une calotte sphérique.

Supposons que le cône d'ombre n'atteigne pas la terre; si par le point I où la ligne des centres va percer la terre, on mène un cône tangent à la



lune, il formera sur le disque ~~plein~~ solaire un cercle concentrique qui sera masqué par la lune, et conséquemment obscur; de sorte que le soleil aura la forme d'une bande circulaire lumineuse. On dit alors que l'éclipse est annulaire.



Un observateur placé en un lieu de la terre m,

non situé sur la ligne des centres, verra une partie seulement du disque solaire; l'autre partie lui étant masquée par la lune. L'éclipse alors est partielle.

Si les trois centres, du soleil, de la lune et de la terre ne sont pas exactement en ligne droite, l'éclipse ne sera que partielle, à moins que ces trois points ne s'écartent pas beaucoup de la ligne droite.

On voit qu'il existe une différence entre les éclipses de lune et les éclipses de soleil: c'est qu'une éclipse de lune totale ou partielle, a lieu pour tous les points de la terre; c'est-à-dire que la partie éclipsée est invisible de tous les points de la terre; tandis que dans une éclipse de soleil la partie invisible n'est pas la même pour tous les points de la terre.

Phénomènes qui accompagnent les éclipses de soleil. Dans les éclipses totales de soleil on aperçoit une zone lumineuse autour du disque opaque de la lune. Cette lumière existe-t-elle dans une atmosphère de la lune, ou dans une atmosphère du soleil? Dans le premier cas elle serait concentrique à la lune et se déplacerait avec elle. Dans le deuxième cas, elle serait concentrique au soleil et excentrique à la lune quand celle-ci se déplace. C'est ce qui a lieu; de sorte qu'on attribue cette zone lumineuse à une atmosphère solaire; peut-être est-ce celle qui produit la lumière zodiacale.

Lors d'une éclipse totale de soleil, on peut voir à l'œil nu des étoiles de troisième et quatrième grandeur, et dans une éclipse partielle, des étoiles de première grandeur.

Souvent on voit lors d'une éclipse, des rayons lumineux, tels que des éclairs, sillonner le disque opaque de la lune. Ce sont peut-être des étoiles filantes qui deviennent visibles à cause de l'obscurité causée par l'éclipse.

Les tables du soleil et de la lune prouvent que, terme moyen, on peut observer sur toute la terre, 70 éclipses en 18 ans; 29 de lune et 41 de soleil.

Jamais dans une année, il n'y a plus de sept éclipses; jamais il n'y en a moins de deux. Quand il n'y en a que deux, elles sont toutes deux de soleil.

Pour un point donné de la terre, les éclipses de soleil totales ou annulaires sont extrêmement rares. Une éclipse totale visible dans le midi de la France a eu lieu dans la matinée du 8 juillet 1842. (✳)

(✳) Mr Arago a inséré dans l'Annuaire du Bureau des longitudes de 1842, une notice sur les éclipses de soleil, et particulièrement sur celle qui devait avoir lieu le 8 juillet, en signalant les questions de physique céleste sur lesquelles ce phénomène rare

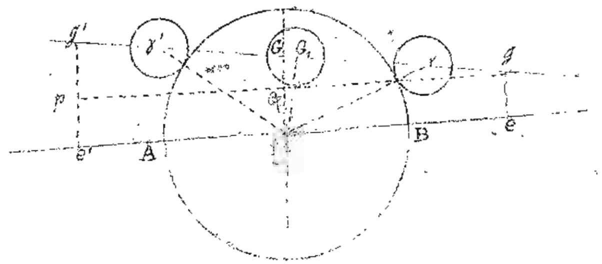
Calcul d'une éclipse de Lune:
(non exigé:)

[Calcul de l'instant du milieu de l'éclipse. Soit ADB la section du cône d'ombre dans laquelle la lune doit entrer. Soient γ, γ' les positions de la lune aux moments de l'immersion et de l'émersion. $\gamma\gamma'$ est la route suivie par la lune; c'est un petit arc de l'orbite lunaire; nous pouvons le considérer comme une ligne droite. Son point milieu G, est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre L sur $\gamma\gamma'$; ce sera la position de la lune au temps milieu de l'éclipse. C'est ce temps que nous calculerons d'abord, et qui nous servira ensuite à déterminer le temps du commencement de

---

pourrait répandre quelques lumières. Depuis, l'illustre astronome a traité, dans une nouvelle notice, (Annuaire de 1846), ces questions, et diverses autres qu'il n'avait pas prévues dans son premier programme, et que l'observation du merveilleux phénomène de 1842 a fait naître. Nous dirons seulement ici que cette éclipse a paru indiquer qu'il existe autour du soleil une troisième atmosphère, formée de nuages obscurs ou faiblement lumineux. Cette troisième enveloppe si elle existe réellement, fournira l'explication de plusieurs phénomènes concernant les pénombres et facules qui ne s'expliquent pas, jusqu'ici d'une manière bien satisfaisante: peut-être aussi donnera-t-elle la clef de quelques-unes des grandes et déplorables anomalies que l'on remarque dans le cours des saisons.

l'éclipse, où la lune est en γ, et le temps de la fin de l'éclipse, où la lune est en γ'.



Soit lG perpendiculaire sur AB qui représente l'écliptique; G est le lieu de la lune et lG sa latitude au moment de l'opposition; ce moment est connu, puisque nous venons de voir comment on le détermine; la latitude lG sera donc connue aussi. Soient g, g' les positions de la lune, une heure avant l'opposition et une heure après. Les longitudes de ces deux points, et conséquemment le, le' seront connues; leurs latitudes ge, $g'e'$ le seront aussi. Ces données suffisent pour résoudre la question de déterminer l'instant précis du milieu de l'éclipse, puis l'instant de son commencement et de sa fin.

Soit n le mouvement de la lune en latitude, pendant 1^h; à l'époque de l'éclipse, c'est-à-dire l'accroissement de latitude pendant une heure. Menons gp parallèle à ee', et rencontrant lG en q, on aura $Gq = n$. Soit m le mouvement de la lune en longitude pendant une heure, et M celui du soleil; le mouvement relatif de la lune sera $(m-M)$. Nous pouvons supposer le soleil fixe, et conséquemment le cône d'ombre fixe, en ne donnant à la lune que le mouvement $m-M$ en longitude. On aura donc $el = le' = m{-}M$.

Calculons l'angle $GlG_1 = i$. Il est égal à Ggq; on a donc

$$\tang i = \frac{qG}{qg} = \frac{n}{m-M}.$$

Ainsi l'angle i est connu.

Calculons les deux lignes Gg, GG_1 pour en conclure le temps où la lune se trouve en G_1 milieu de l'éclipse.

On a dans le triangle Gqg,

$$Gg = \frac{qg}{\cos i} = \frac{m-M}{\cos i}.$$

Et dans le triangle GlG_1

$$GG_1 = Gl \sin i.$$

Gl est la latitude de la lune au moment de l'opposition; elle est connue; appelons-la λ; on a

$$GG_1 = \lambda \sin i.$$

La lune parcourt les espaces gG, GG_1 en des temps qui leur sont proportionnels; le 1er est 1^h, on a donc en appelant θ le 2^e;

$$\frac{\theta}{1^h} = \frac{\lambda \sin i}{\frac{m-M}{\cos i}}, \text{ d'où } \theta = \frac{\lambda \sin i \cos i}{m-M}.$$

C'est le temps du milieu de l'éclipse.

Temps du commencement et de la fin de l'éclipse.

Pour conclure du temps du milieu de l'éclipse, le temps du commencement, il suffit de connaître l'espace γG. Car en appelant t l'intervalle de temps dont le commencement de l'éclipse précède son milieu, on aura

$$\frac{t}{1^h} = \frac{G_1\gamma}{g\,G}, \text{ ou } t = \frac{G_1\gamma\cos i}{m-M}.$$

Or on a dans le triangle $G_1 l \gamma$,

$$G_1\gamma = \sqrt{\overline{l\gamma}^2 - \overline{G_1 l}^2}.$$

On a $G_1 l = Gl\cos i = \lambda\cos i$. Soit ρ le rayon de la section ADB du cône d'ombre; r' le rayon de la lune; de sorte que $l\gamma = \rho + r'$; il vient

$$G_1\gamma = \sqrt{(\rho+r')^2 - \lambda^2\cos^2 i}.$$

Le commencement de l'éclipse précède donc son milieu, du temps t dont la valeur est.

$$t = \frac{\cos i\sqrt{(\rho+r')^2 - \lambda^2\cos^2 i}}{m-M}.$$

Le même intervalle a lieu entre le milieu et la fin; de sorte que la durée de l'éclipse sera

$$\frac{2\cos i\sqrt{(\rho+r')^2 - \lambda^2\cos^2 i}}{m-M}.$$

Ainsi le problème est résolu.]

Phénomènes que présente la surface de la lune. — Rotation. — Libration. — Constitution physique de la lune.

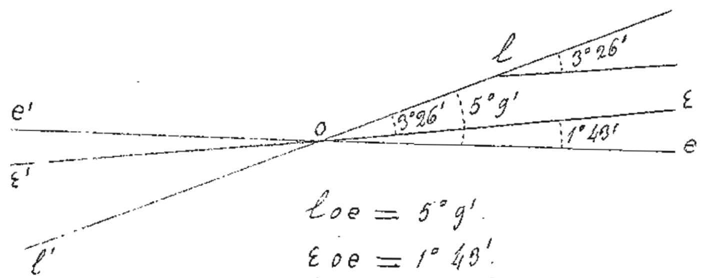
Taches. On aperçoit à la surface de la lune

de nombreuses taches, dont chacune a toujours la même forme avec de légères variations de teinte, et qui toutes conservent les mêmes distances respectives; de sorte qu'on doit les considérer comme des accidents permanents de la surface de la lune.

Rotation de la lune. Inclinaison du plan de son équateur sur le plan de l'écliptique.

L'observation de ces taches, prouve, de même que pour le soleil, que la lune tourne autour d'un de ses diamètres, et fait connaître la position de ce diamètre et la vitesse de rotation. On trouve ainsi, par le calcul, que l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan de l'écliptique est d'un degré et demi à peu près; que l'intersection de ces plans est parallèle à la ligne des nœuds; de sorte que le plan de l'orbite lunaire et le plan de l'équateur lunaire coupent le plan de l'écliptique suivant deux droites parallèles.

Soit ee' le plan de l'écliptique, ll' celui de l'orbite lunaire; qu'on mène par l'intersection de ces deux plans



$$loe = 5°9'.$$
$$\varepsilon oe = 1°43'.$$
$$lo\varepsilon = 3°26'.$$

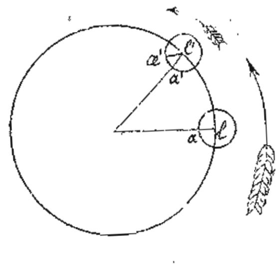
un troisième plan $\varepsilon\varepsilon'$ faisant avec le plan de l'écliptique ee' un angle de 1°43' et avec le plan de l'orbite lunaire un angle de 3°26'; le plan de l'équateur lunaire sera parallèle à ce troisième plan εε'.

Vitesse de rotation. On trouve que la vitesse de rotation de la lune autour de son axe est précisément la même que sa vitesse angulaire autour de la terre, c'est-à-dire que la lune met $27^{j.}\frac{1}{3}$ à accomplir sa rotation.

Ces divers résultats que fait connaître le calcul, peuvent s'obtenir directement, par la seule observation. En effet, on remarque qu'une tache quelconque, située très près du centre du disque lunaire, conserve toujours la même position, sauf de très faibles variations. Il en est de même des taches voisines du bord de la lune. Cela prouve que la lune nous présente toujours le même hémisphère. D'où l'on conclut qu'elle a un mouvement de rotation autour d'un axe peu incliné sur le plan de son orbite, et qu'elle accomplit cette rotation précisément dans le même temps qu'elle met à effectuer son mouvement autour de la terre.

En effet soit ll'.. l'orbite lunaire, et soit <u>a</u> une tache qui se projette sur le centre du disque. Quand la lune va en l', si elle n'avait pas de rotation autour de son centre, la ligne <u>la</u> resterait parallèle à elle même, et prendrait la position l'α. La tache serait donc en α' et

serait vue de la terre très près du bord du disque;



or on la voit au centre du disque; elle est donc en <u>a'</u>; elle a donc tourné de l'angle α'l'a', lequel est égal à l'angle lTl' qui mesure la rotation de la lune autour de la terre. Ainsi les deux mouvements de rotation de la lune s'accomplissent dans le même temps.

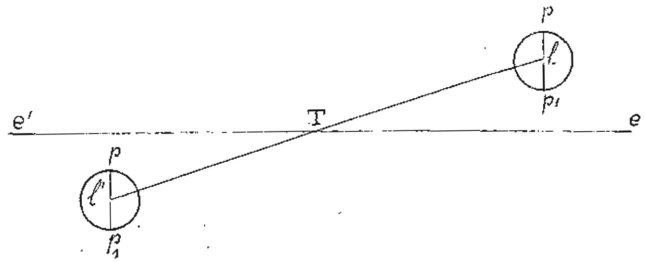
Ensuite, comme, à l'inspection des taches, on reconnait que c'est toujours à peu près le même hémisphère que nous présente la lune, il s'ensuit nécessairement que son axe de rotation est à peu près perpendiculaire au plan de son orbite. Et en effet l'équateur lunaire n'est incliné sur le plan de l'orbite lunaire que de 3°26'.

Libration de la lune. Toutefois il n'est pas rigoureusement vrai que les taches conservent absolument la même position sur le disque lunaire. Elles éprouvent de petits déplacements qui les font osciller autour d'une position moyenne. Ce mouvement d'oscillation ou de balancement a reçu le nom de <u>libration</u>. Il se fait dans plusieurs sens, et il a plusieurs causes que nous allons examiner.

Libration en longitude. Pour qu'une tache centrale restât toujours au centre du disque lunaire, il faudrait, comme nous l'avons vu, que le mouvement de rotation de la lune sur elle-même fût toujours égal, angulairement, à son mouvement autour de la terre. Or le premier est uniforme, et le deuxième ne l'est pas; il est affecté de plusieurs inégalités. Il suit de là que les taches éprouvent de petits déplacements qui seront dans un sens quand le mouvement de la lune autour de la terre sera plus rapide que le mouvement moyen, et dans le sens opposé quand le mouvement vrai deviendra moins rapide que le mouvement moyen. Ces petits déplacements se feront dans le sens de l'équateur lunaire, et par conséquent à peu près parallèlement au plan de l'écliptique. On leur donne le nom de <u>libration en longitude</u>.

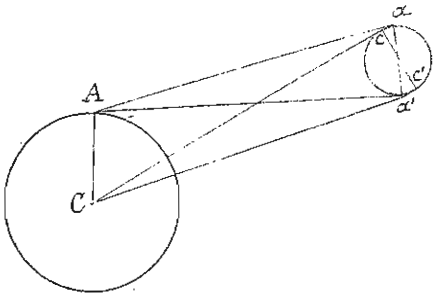
Libration en latitude. L'axe de rotation de la lune est sensiblement perpendiculaire au plan de l'écliptique; conséquemment, quand la lune sera dans ce plan, à l'un de ses nœuds, on verra de la terre ses deux pôles, ou du moins on verra l'un des deux pôles et des points très voisins de l'autre; de sorte qu'on verra des taches situées aux deux pôles ou dans leur voisinage. Quand la lune s'élèvera en l au dessus de l'écliptique, le rayon qui va de la terre à son centre sera incliné de plus en plus, jusqu'à une certaine

limite, sur l'axe de rotation; il s'ensuit qu'on cessera de voir les taches qui avoisinent le pôle supérieur p, et qu'on en verra au pôle inférieur p_1, qui auparavant étaient invisibles. Quand la lune sera dans une position l' diamétralement opposée,



(à près de 14 jours d'intervalle), ce sera le contraire; le pôle p et les régions voisines seront visibles, et le pôle p_1 sera devenu invisible. Ce déplacement apparent des pôles fait que les taches centrales se déplaceront aussi et cesseront d'être centrales; leur déplacement se fera dans le sens perpendiculaire au plan de l'écliptique, tantôt au dessus, tantôt au dessous du centre du disque apparent. Ce mouvement d'oscillation s'appelle <u>libration en latitude</u>, parcequ'il se fait perpendiculairement à l'écliptique, et conséquemment sur les cercles de latitude.

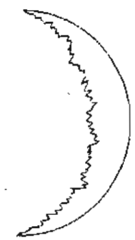
Libration diurne. Il y a une troisième cause de déplacement apparent des taches; elle provient de ce que l'observateur est placé à la surface de la terre, et non à son centre, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent. Il s'ensuit que l'hémisphère lunaire visible d'un point A de la terre n'est pas limité absolument comme l'hémisphère qui serait vu du centre de la terre; et la position relative des deux contours apparents a a', c c' ne reste pas la même dans le cours d'une lunaison; des taches visibles tel jour du point A, pourront donc être invisibles tel autre jour. Ce qui fait que les taches auront un petit déplacement apparent dû à ce que l'observateur est en A, à la surface de la terre, au lieu d'être au centre. Ce troisième déplacement apparent des taches s'appelle libration diurne.



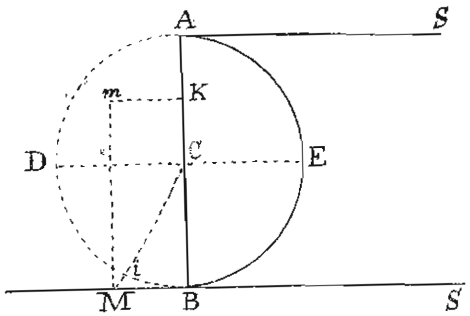
20e Leçon.

Montagnes de la lune. Les taches de la lune présentent toujours les mêmes circonstances, mais elles sont très variables de forme et d'intensité. Une tache très prononcée peut être accompagnée d'une teinte moins intense qui se prolonge d'abord, comme une ombre, puis diminue et disparait, avec la tache elle-même. Ces taches, et les ombres surtout, disparaissent lors de la pleine lune, c'est-à-dire, quand la lune reçoit normalement les rayons du soleil.

Ces phénomènes prouvent l'existence à la surface de la lune, de hautes montagnes et de cavités profondes. Les taches les plus intenses sont produites par ces cavités, et les ombres par les montagnes. Quand on observe la lune avec de puissantes lunettes, le bord de son disque tourné vers le soleil est circulaire et uni; mais l'autre bord qui forme la séparation d'ombre et de lumière, et qui devrait offrir l'apparence d'une ellipse bien tranchée, si la lune était une sphère bien unie, se montre toujours avec des déchirures ou dentelures profondes, qui indiquent des cavités et des points proéminents. Sur la partie non éclairée du disque on aperçoit quelques points brillants; ce sont les sommets de montagnes éclairées par le soleil. On mesure la hauteur de ces montagnes.



Mesure de la hauteur des montagnes. On observe la lune vers l'époque d'une quadrature; alors le demi-disque AEB est éclairé et le demi-disque ADB obscur. On distingue sur cette partie obscure un point éclairé m; c'est le sommet d'une montagne. Menons la corde mK perpendiculaire au diamètre AB. On mesurera avec une lunette munie d'un réticule à deux fils parallèles, la distance mK. Concevons le plan qui passe par le diamètre DE de la lune et par le sommet de la montagne projeté en m. Ce plan coupera la surface de la lune suivant un grand cercle. Ce grand cercle rabattu sur le disque lunaire, par une rotation autour du diamètre DE, se confondra avec le cercle DBE,



et la tangente en B représentera le rayon du soleil qui éclaire le sommet de la montagne projeté en m. La droite mM parallèle à AB détermine ce sommet M. La hauteur de la montagne au dessus de la surface de la lune est Mi. Or on connait dans le triangle rectangle MCB, le côté CB qui est le demi-diamètre de la lune, et le côté MB égal à mK que l'on mesure par l'observation. On connaitra donc CM et par suite Mi = CM − CB.

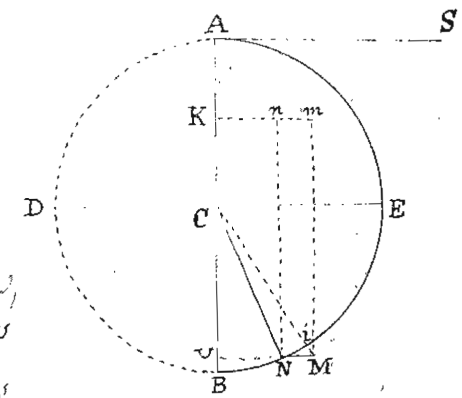
Ce calcul donne généralement une valeur plus petite que la hauteur véritable de la montagne, parceque la tangente BM, qui nous représente un rayon lumineux, ne passe pas, en général, par le sommet extrême de la montagne; il la coupe et en détache une partie qui échappe au

calcul. De sorte qu'il faut considérer le calcul comme donnant simplement une limite inférieure de la hauteur de la montagne.

Ce procédé n'est applicable qu'aux montagnes qui sont dans le voisinage du diamètre AB; car celles-là seulement peuvent être éclairées; les autres, plus éloignées de ce diamètre n'auraient pas assez de hauteur pour atteindre la tangente BM.

Il faut donc un autre procédé pour mesurer la hauteur des montagnes qui sont près du bord du disque. Cela se fait par l'observation de leurs ombres.

On aperçoit sur le demi-disque éclairé AEB une ombre mn; elle est projetée par une montagne dont le sommet est en m. Concevons comme tout à l'heure, que le cercle qui passe par mn et par le diamètre DE, soit rabattu sur le disque lunaire; la hauteur de la montagne sera Mi.



On calcule Mi comme côté du triangle MNi, dans lequel le côté MN et l'angle en N se déterminent par l'observation.

Au moyen de fils micrométriques dans la

lunette, on détermine mn égale à MN; et nK qui est égale au sinus de l'angle NCB; cet angle est égal à l'angle N qui se trouve ainsi déterminé.

La plus haute montagne calculée par ces procédés paraît avoir 2800 mètres de hauteur.

Caractère volcanique des montagnes de la lune. Ces montagnes sont en très grand nombre; la surface de la lune semble en être parsemée; et leurs positions relatives n'offrent aucune régularité; on distingue cependant quelques chaines. Les montagnes sont de deux sortes; les unes se présentent telles que des cônes ou pics se terminant en pointe; les autres, qui sont plus nombreuses, présentent à leur partie supérieure une large ouverture circulaire qui laisse apercevoir une grande profondeur, comme serait un puits ou le cratère d'un volcan. Ces ouvertures circulaires ont quelquefois 5 à 6 miriamètres (12 à 15 lieues) de diamètre. La hauteur d'une telle ouverture est la même de tous cotés, ce qu'on vérifie par les ombres. La profondeur d'un tel puits surpasse de beaucoup la hauteur extérieure de son ouverture, c'est-à-dire la hauteur de cette ouverture au dessus de la surface de la lune; la différence est quelquefois de 7 à 8000 mètres. Le fond de l'excavation est ordinairement une aire plane. Au centre s'élève souvent une petite éminence conique à pente raide. Sur le contour d'une large ouverture on en voit souvent d'autres petites; de sorte qu'autour d'un cratère s'en trouveraient de plus petits. Cet aspect de la lune présente à un haut degré le caractère volcanique.

Absence d'eau. On est porté à croire que la lune est partout sensiblement solide et qu'elle ne contient pas de parties liquides, ou du moins de grandes masses liquides. Certaines parties grisâtres qui avaient été prises pour des mers ont reçu ce nom. Mais on remarque qu'elles sont traversées par des veines d'une autre teinte qui indiquent des élévations ou des dépressions. On avait pensé d'abord que ces accidents de terrain pourraient être au fond des mers, et qu'on les apercevait à travers la masse liquide, mais la lumière provenant de ces fonds aurait alors des propriétés de polarité par réfraction dont on reconnait qu'elle est dépourvue. On reconnait en outre que la lumière qui nous vient de la lune n'a pas été réfléchie sur des surfaces de glace.

D'autres considérations concourent encore à prouver qu'il n'y a pas d'eau à la surface de la lune. C'est qu'il n'y a pas d'atmosphère et qu'il ne s'y forme pas de nuages.

Il n'y a pas d'atmosphère, du moins aux sommités de la lune, ce que nous prouverons tout à l'heure. On en conclut qu'il n'y a pas d'eau; car elle se volatiliserait promptement.

D'une autre part, il n'y a pas de nuages autour de la lune; car un nuage d'une assez faible étendue, telle que celle du jardin du Luxembourg, pourrait être distingué sur le disque lunaire, qu'il obscurcirait. Or ce disque est également visible dans toute son étendue; il ne se forme donc pas de nuages autour de la lune.

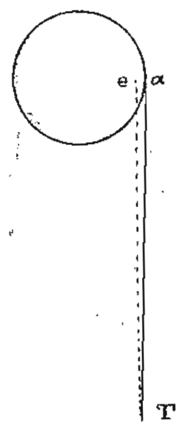
Absence d'atmosphère autour de la lune.

Plusieurs phénomènes prouvent qu'il n'y a pas d'atmosphère autour de la lune, du moins d'atmosphère plus dense ou plus réfringente que celle qui peut exister dans les espaces planétaires. En effet, la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface de la lune est nettement tranchée; d'un côté c'est l'ombre, et de l'autre la lumière vive, sans dégradation de teinte analogue à notre lumière crépusculaire. Cela prouve qu'il n'y a pas autour de la lune une atmosphère pouvant recevoir ou transmettre les rayons lumineux, comme fait notre atmosphère terrestre.

Une autre preuve non moins forte, à l'appui de cette opinion, se tire de l'occultation des étoiles par le disque de la lune. A l'instant où ce disque atteint une étoile, celle-ci cesse d'être visible; et au moment où elle reparait à l'autre bord c'est dans tout son éclat. S'il y avait une atmosphère autour de la lune, elle couvrirait l'étoile, qui dès lors ne disparaitrait qu'en perdant graduellement de son éclat. En outre, l'étoile enverrait encore quelque lueur, par réfraction, après son occultation par le

disque lunaire.

Il y a une autre manière de vérifier que l'étoile cesse d'être visible au moment même où le disque lunaire l'atteint; et qu'elle devient visible au moment où elle coïncide avec l'autre bord du disque lunaire. Pour cela, on calcule, d'après la connaissance que l'on a du mouvement de la lune, le temps qu'elle mettra à parcourir un arc de son orbite égal à son diamètre; et l'on trouve que ce temps est précisément égal à celui qui s'écoule depuis le moment de l'occultation de l'étoile jusqu'au moment de sa réapparition. Or s'il y avait une atmosphère autour de la lune, son effet serait de diminuer le temps pendant lequel l'étoile serait invisible.



Il est facile de calculer de combien le temps de l'invisibilité de l'étoile serait diminué.

Supposons que la déviation d'un rayon lumineux produite par la réfraction d'une atmosphère lunaire soit de 1"; une étoile sera encore visible quand le disque de la lune l'aura dépassée d'une seconde; c'est-à-dire quand l'angle eTa sera égal à 1". Et elle redeviendra visible 1" avant que l'autre bord de la lune l'ait atteinte. Le temps de l'invisibilité de l'étoile sera donc diminué du temps que la lune met à décrire un angle de 2". Ce temps est de 4" environ. Ainsi le temps réel de l'occultation de l'étoile serait moindre de 4" que le temps calculé d'après le mouvement de la lune. Ce temps de 4" serait très appréciable par les observateurs. Conséquemment on ne peut pas supposer qu'il existe autour de la lune une atmosphère capable de produire dans les rayons lumineux la réfraction très minime de 1", réfraction que produirait la faible quantité d'air qui reste dans la machine pneumatique quand on y fait le vide.

Toutefois ces considérations prouvent seulement qu'il n'y a pas d'atmosphère aux sommités des montagnes de la lune, là où passent les rayons lumineux, et elles ne prouvent pas qu'il n'y a pas d'atmosphère dans les cavités de la lune.

De l'influence de la lune sur le temps. Les astronomes croyent que la lune n'influe pas sur le temps: le public croit qu'elle influe beaucoup, par exemple, qu'il y a changement de temps quand la lune change de phase.

Des observations recueillies pendant 48 années, prouvent que cette opinion commune est dénuée de fondement; mais elles tendent toutefois à faire reconnaître une certaine influence de la lune.

On appelle période croissante l'intervalle de temps compris entre la nouvelle lune et la

pleine lune; et période décroissante l'autre partie de la lunaison.

Des observations recueillies pendant 48 années ont fait reconnaître qu'il y a plu un plus grand nombre de fois pendant la période croissante que pendant la période décroissante. Le plus grand nombre de jours de pluie a lieu vers le 2e octant; et le minimum vers le deuxième quartier.

La quantité de pluie donne le même résultat: elle est maximum vers le 2e octant, et minimum vers le 2e quartier.

Pareillement, le nombre des jours couverts a son maximum vers le 2e octant, et son minimum vers le 2e quartier.

Il semble donc qu'on doive reconnaître une certaine influence à la lune; mais qui n'est pas celle que le public lui attribue depuis la plus haute antiquité.

Des Planètes.

Les Planètes sont des astres qui nous paraissent brillants comme de belles étoiles, et qu'on prendrait pour des étoiles, si on ne les observait pas avec soin et pendant plusieurs jours.

Mais une observation suivie ne tarde pas à montrer que ces astres se distinguent des étoiles de plusieurs manières. Généralement ils sont dépourvus de *scintillation*, cette sorte de mouvement dont la lumière des étoiles paraît douée. Il n'est qu'une planète, Vénus, qui présente parfois ce phénomène, quand son éclat est le plus vif. Les planètes, observées avec de forts grossissements, présentent des disques dont les diamètres apparents augmentent avec le grossissement des lunettes, tandis que les étoiles paraissent toujours réduites à de simples points lumineux. Enfin, les planettes changent de position par rapport aux étoiles, d'une manière très sensible et très remarquable, comme nous allons le voir. Ainsi elles se distinguent essentiellement des étoiles à plusieurs égards.

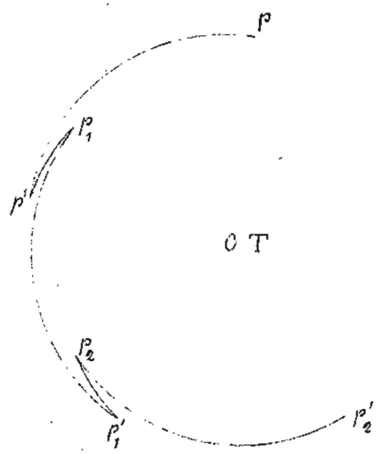
Mouvement des planètes. Les orbites des planètes sont presque toutes comprises dans une zone qui s'éloigne peu du plan de l'écliptique.

Le mouvement d'une planète paraît très irrégulier; il se fait tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; et en changeant de direction, la planète paraît éprouver un certain temps de repos, c'est à dire rester *stationnaire*.

On appelle mouvement *direct* celui qui se fait d'*occident en orient*, comme le mouvement propre du soleil et de la lune; et mouvement *rétrograde* celui qui se fait d'*orient en occident* comme le mouvement diurne de la sphère céleste.

Stations et rétrogradations des planètes.

Soit p la position d'une planète au moment où elle paraît stationnaire sur la voute céleste, c'est-à-dire par rapport aux étoiles. Après un repos, elle prend un mouvement *direct* de p en p', position où elle paraît de nouveau stationnaire.



Dans ce mouvement, la plus grande vitesse a eu lieu au milieu du trajet de p en p'. Après une station en p', la planète *rétrograde* jusqu'en p_1; sa plus grande vitesse ayant lieu au milieu de $p'p_1$. Puis son mouvement redevient *direct*, et elle décrit $p_1p_1' = pp'$. En p_1' la planète est stationnaire; puis elle rétrograde et décrit $p_1'p_2 = p'p_1$; puis elle reprend son mouvement direct, de p_2 en p_2': $p_2p_2' = p_1p_1'$; et ainsi de suite.

La vitesse maximum de la planète, dans chaque mouvement direct ou rétrograde, a lieu au point milieu de l'arc décrit; et à ce moment le soleil se trouve sur le même cercle horaire que la planète.

Conjonction. — Opposition. Quand le

soleil et la planète sont du même côté de la terre, sur le même cercle horaire, on dit que la planète est en *conjonction*; il peut arriver deux cas: que la planète soit au delà du soleil, ou bien en deçà. Dans le premier cas, on dit qu'il y a *conjonction supérieure*, et dans le deuxième cas, *conjonction inférieure*. Quand la terre se trouve entre le soleil et la planète, on dit que celle-ci est en *opposition*.

Nombre et noms des planètes. Les Anciens connaissaient sept planètes: Mercure, Vénus, le soleil, la Lune, Mars, Jupiter et Saturne. Les Modernes ont rayé de ce nombre le Soleil et la Lune, et y ont compris la Terre; puis, ont ajouté cinq nouvelles planètes, appelées Uranus, Cérès, Pallas, Junon, Vesta; ce qui en a porté le nombre à onze. (*)

Planètes supérieures et inférieures. Les positions que prennent les planètes par rapport au soleil donnent lieu de les distinguer en deux classes. Les unes ne s'éloignent jamais

(*) La planète Uranus a été découverte par Herschel en 1781; Cérès par Piazzi en 1801, Pallas par Olbers en 1802; Junon par Harding en 1804; et enfin Vesta par Olbers en 1807. Dernièrement une nouvelle planète, de la catégorie de ces quatre dernières, Cérès, Pallas, Junon et Vesta a été découverte, et a reçu le nom d'Astrée.

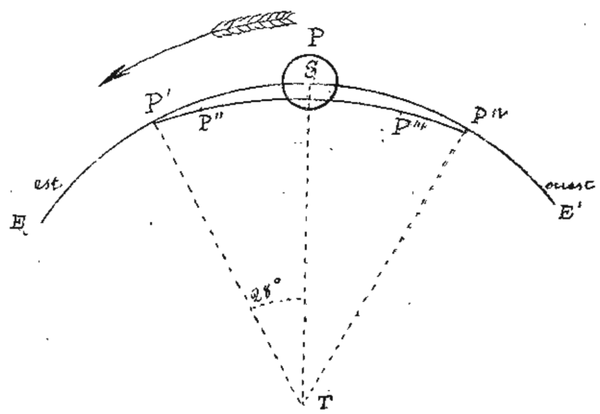
du soleil qu'à des distances angulaires assez petites; on les appelle *planètes inférieures*. Les autres s'éloignent du soleil à toutes les distances angulaires possibles; c'est-à-dire de 0° à 360°. On les appelle *planètes supérieures*.

Il n'y a que deux planètes *inférieures*; Mercure et Vénus. La première ne s'éloigne du soleil que de 28 à 30°; et la seconde de 48 à 50°. De sorte que ces deux planètes paraissent osciller de part et d'autre du soleil.

Les Planètes *supérieures* sont Mars, Cérès, Pallas, Junon, Vesta, Jupiter, Saturne et Uranus.

On appelle *élongation* la distance angulaire d'une planète au soleil.

Planètes inférieures. Les phénomènes que nous présente le mouvement des deux planètes inférieures, Vénus et Mercure, sont les mêmes.



Soit S le soleil; EE' l'écliptique. Supposons la planète en conjonction, et étudions son mouvement à partir de ce moment. Supposons que ce soit le mouvement *direct* qu'elle prenne.

La planète se meut donc d'occident en orient. Elle se couche aujourd'hui avec le soleil, puisqu'elle est en conjonction. Mais elle se meut plus rapidement que le soleil, il s'ensuit que demain elle se couchera un peu plus tard: l'intervalle de temps entre son coucher et celui du soleil ira en croissant pendant plusieurs jours; c'est-à-dire que la planète s'éloignera de plus en plus du soleil; soit P' sa position lors de sa plus grande élongation, (28 à 30° pour Mercure, et 48 à 50° pour Venus.) Arrivée en P' la planète a la même vitesse que le soleil: son mouvement continue d'être direct, mais son élongation et sa vitesse diminuent; bientôt celle-ci devient nulle; c'est-à-dire que la planète semble stationnaire par rapport aux étoiles. Son élongation alors est SP''. A partir de ce moment la planète rétrograde, c'est-à-dire qu'elle revient vers l'occident. Ce mouvement se continue jusqu'à ce qu'elle ait passé de l'autre coté du soleil à une distance SP''' = SP''. Dans ce trajet il y a une conjonction, ou pour parler plus exactement, un instant où la planète s'est trouvée sur le même cercle horaire que le soleil. Alors dans le mouvement diurne, la planète passe au méridien en même temps que le soleil; et à partir de ce moment elle se couche toujours, et conséquemment se lève toujours avant le soleil. En P''' la planète parait stationnaire par rapport aux étoiles, et sa distance au soleil augmente encore un

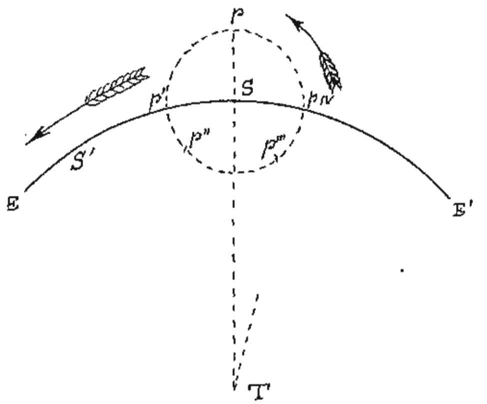
peu et atteint sa plus grande valeur SP^{IV}. Alors la planète reprend son mouvement direct et se rapproche du soleil. Bientôt elle l'atteint et se retrouve comme en P. Alors les mêmes phénomènes se reproduisent. Ainsi le mouvement direct a lieu pendant que la planète décrit l'arc P'''P^{IV}PP'P''; et le mouvement rétrograde, pendant qu'elle décrit l'arc P''P'''. Le diamètre apparent de la planète varie continuellement dans le cours d'une révolution. Dans le mouvement direct, à partir de la conjonction, il augmente progressivement; quand la planète rétrograde, il continue d'augmenter, jusqu'à la nouvelle conjonction. Alors il diminue jusqu'à une autre conjonction. Cela prouve que de la première conjonction à la deuxième, la planète s'est rapprochée de la terre; et qu'ensuite elle s'en est éloignée, jusqu'à une troisième conjonction.

Enfin l'observation montre que la première conjonction, celle à partir de laquelle le diamètre de la planète augmente, est supérieure, c'est-à-dire qu'alors la planète est derrière le soleil; et qu'au contraire, c'est lors d'une conjonction inférieure, c'est-à-dire quand la planète passe devant le soleil, que son diamètre apparent a sa valeur maximum.

De ces phénomènes il faut conclure que la planète se meut autour du soleil.

Cette hypothèse rend bien compte des

stations et rétrogradations, et des maximum et minimum de vitesse, qui ont lieu lors des conjonctions supérieure et inférieure, respectivement.



En effet soit $pp'p''p'''p^{iv}$ l'orbite de la planète c'est-à-dire la courbe sur laquelle nous concevons que la planète se meut autour du soleil, pendant que le soleil emporte cette courbe dans son mouvement sur l'écliptique. Ce mouvement du soleil se fait de S en S'; et le mouvement de la planète se fait dans le même sens, de p en p'. Nous supposons, pour fixer les idées, l'orbite de la planète dans le plan même de l'écliptique, quoiqu'en réalité elle lui soit inclinée.

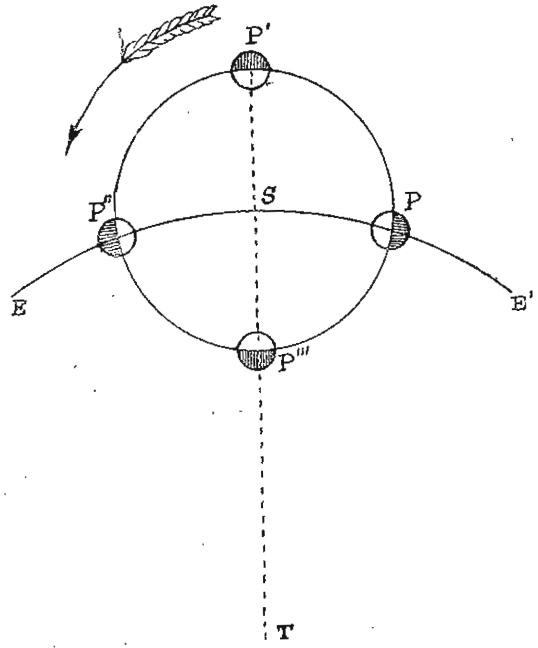
Le mouvement angulaire de la planète dans l'unité de temps se compose du mouvement du soleil et de la projection sur l'écliptique de l'arc que la planète décrit sur son orbite dans l'unité de temps. Cet arc est de grandeur constante, mais sa projection sur l'écliptique est variable; en p elle a sa plus grande valeur, et en p' elle est nulle. On voit donc que, en p,

conjonction supérieure, la planète a sa plus grande vitesse; qu'en p', plus grande élongation de la planète, sa vitesse est la même que celle du Soleil; puis, qu'elle diminue, et qu'en un certain point p'' elle est nulle; de sorte que la planète paraît stationnaire par rapport aux étoiles. Alors la planète rétrograde jusqu'en p''' où son mouvement devient nul, parceque l'arc qu'elle décrit sur son orbite, dans l'unité de temps est vu de la terre sous le même angle que le mouvement du soleil. A partir de p''' cet angle diminue, de sorte que le mouvement de la planète redevient direct; en p^{iv}, plus grande élongation occidentale, ce mouvement est le même que celui du soleil; de p^{iv} en p il va en augmentant. Puis les mêmes phénomènes se reproduisent.

De p'' en p''' se trouve la conjonction inférieure. Il est clair que c'est dans cette position que la planète a sa plus grande vitesse rétrograde, par la même raison que c'est lors de la conjonction supérieure qu'elle a sa plus grande vitesse directe.

Phases d'une planète inférieure. Si la planète se meut autour du soleil, comme nous venons de le supposer, elle devra présenter des phases semblables à celles de la lune. Ce fait, qui avait été prédit dans le système de Copernic, s'est trouvé réalisé aussitôt qu'on put observer les planètes au télescope. Voici les phases qu'on aperçoit.

En P, à la plus grande élongation occidentale, la planète est à son premier quartier; elle paraît sous la forme d'un croissant dont la courbe convexe est tournée vers le soleil en P', lors de la conjonction supérieure, la planète est pleine; elle présente un disque entier éclairé; en P'', elle est à son deuxième quartier; et



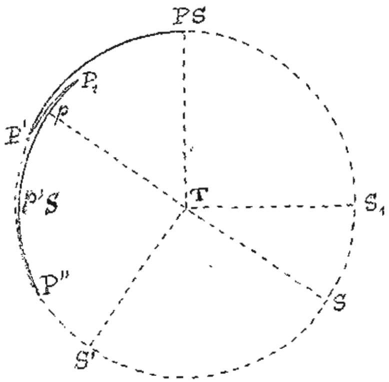
en P''', conjonction inférieure, la planète devient invisible, ou bien elle présente encore un croissant très délié dont les cornes sont sur un diamètre horizontal, parceque la planète étant dans un plan différent de l'écliptique, et non en ligne droite avec le soleil, il peut arriver qu'une petite partie de son hémisphère éclairé nous soit visible.

Passages sur le soleil. Quand, au moment d'une conjonction inférieure, la planète se trouve dans le plan de l'écliptique, elle passe sur le soleil comme un point noir, puisque son hémisphère éclairé ne nous est pas visible. Il en résulte une éclipse annulaire du soleil. Ce phénomène est désigné simplement sous le nom de passage.

La planète forme sur le disque solaire une sorte de tache qui se distingue, sous deux rapports, des véritables taches du soleil. D'abord, parcequ'elle présente un contour bien tranché et non accompagné de la pénombre qui entoure les taches du soleil. Ensuite, parce que son mouvement sur le disque solaire est uniforme; ce qui n'a pas lieu pour les véritables taches.

Planètes supérieures.

Prenons une époque où la planète sera en conjonction avec le soleil en PS. Alors elle sera animée d'un mouvement direct, comme celui du soleil, mais plus lent; de sorte que, dans le mouvement diurne, elle précédera le soleil, c'est-à-dire qu'elle se couchera avant lui et se lèvera avant lui. Après quelque temps, la planète sera en P' où elle paraîtra stationnaire par rapport aux étoiles; et le soleil, qui va plus vite qu'elle, en sera assez éloigné, en S' par exemple. Alors la planète rétrograde de P' en P_1; au point p de l'arc $P'P_1$ où sa vitesse est maximum, elle se trouve en opposition avec le soleil qui est arrivé en S. En P_1 la planète est stationnaire, puis elle reprend son mouvement direct de P_1 en P''. En un point p' de cet arc P'P'', la vitesse de la planète est maximum et alors elle est en conjonction avec le soleil. En P'' elle est stationnaire, et bientôt elle rétrograde. Et ainsi de suite. De sorte que dans le cours d'un mouvement direct, la planète se trouve une fois en conjonction avec le soleil, et alors sa vitesse est maximum; et dans le cours d'un mouvement rétrograde elle se trouve une fois en opposition avec le soleil, et alors sa vitesse est encore maximum.



Les planètes supérieures sont à une très grande distance de la terre et du soleil.

Ces planètes, à l'exception de Mars, la plus voisine de la terre et du soleil, ne nous présentent

aucune apparence de phases; conséquemment, c'est toujours, sensiblement, leur hémisphère éclairé qui est visible de la terre; c'est-à-dire que l'hémisphère de la planète visible de la terre, diffère peu de l'hémisphère éclairé par le soleil. Cela prouve que la terre est peu éloignée du soleil comparativement à la distance de la planète; ou, en d'autres termes, que la distance de la planète au soleil et à la terre est extrêmement grande par rapport à la distance de la terre au soleil.

On remarque, en effet, que les planètes supérieures ne s'interposent jamais entre le soleil et la terre. Lors d'une conjonction, la planète est derrière le soleil, et lors d'une opposition, elle est de l'autre côté de la terre.

Les conjonctions et les oppositions reviennent à des intervalles de temps égaux. Ce qui prouve une liaison constante entre la marche de la planète et celle du soleil.

On se rend compte des phénomènes que nous venons de décrire, en supposant que ces planètes tournent autour du soleil, pendant que le soleil, en parcourant l'écliptique, emporte avec lui leurs orbites. Ces orbites sont plus grandes que celles du soleil; c'est pourquoi les planètes ne passent jamais entre le soleil et la terre.

On remarque que c'est lors d'une conjonction que le diamètre apparent de la planète est le plus petit, et lors d'une opposition qu'il a sa plus grande valeur. Cela provient de ce que dans le premier cas, la planète est à sa plus grande distance de la terre, et dans le deuxième cas à sa plus petite distance.

Étudions maintenant mathématiquement, c'est-à-dire par le calcul, toutes les circonstances du mouvement d'une planète.

Des orbites des Planètes.

Nœuds d'une planète. L'orbite d'une planète rencontre le plan de l'écliptique en deux points qu'on appelle les nœuds de la planète ou de son orbite : de même que pour la lune, ces deux points sont dits nœud ascendant, et nœud descendant, selon que la planète, quand elle arrive en ces points, passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal, ou de celui-ci dans l'hémisphère austral.

Nous appellerons, par anticipation, ligne des nœuds, la droite menée du soleil à un nœud.

Déterminer l'instant où une planète passe à son nœud. On détermine, par l'observation, la latitude de la planète peu de temps avant son passage au nœud, et peu de temps après. Comme les deux latitudes λ, λ' sont, l'une australe

et l'autre boréale, leur somme est l'accroissement de latitude pendant l'intervalle de temps qui sépare les deux observations, 24^h par exemple ; et l'instant du passage de la planète au nœud est déterminé par la proportion $\frac{t}{24} = \frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}$.

t exprime le temps écoulé depuis le moment du passage au nœud jusqu'au moment de la seconde observation.

La ligne des nœuds est toujours parallèle à elle-même, quelle que soit la position du soleil sur l'écliptique. Pour le prouver, nous allons calculer l'angle que la droite menée du soleil à un nœud fait avec la ligne des équinoxes. Nous trouverons que cet angle est constant.

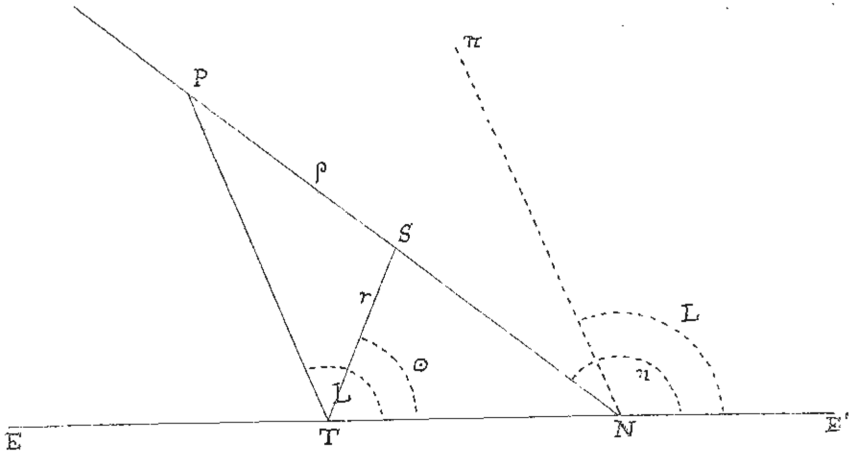
Soit T la terre, EE' la ligne des équinoxes ; P la planète quand elle se trouve dans le plan de l'écliptique, et S le soleil au même moment ; la droite SP est la ligne des nœuds.

Nous voulons déterminer l'angle SNE que cette droite fait avec la ligne des équinoxes. L'angle STE' est la longitude du soleil, que nous désignerons par $\odot$; PTE' est la longitude de la planète, appelons-la L, et faisons

$$\text{angle } SNE' = n\ ;\ TS = r,\ SP = \rho.$$

On a dans le triangle SPT

$$\frac{SP}{ST} = \frac{\sin STP}{\sin P} \; ; \text{ ou } \; \frac{\rho}{r} = \frac{\sin(L-\odot)}{\sin(n-L)}.$$



A une autre époque où la planète se trouvera encore dans le plan de l'écliptique, sa longitude sera différente, ainsi que celle du soleil ; de sorte qu'on aura une autre équation :

$$\frac{\rho'}{r'} = \frac{\sin(L'-\odot')}{\sin(n'-L')}.$$

On formera ainsi autant d'équations que l'on observera de passages de la planète à l'écliptique. On trouve que toutes ces équations dans lesquelles les deux quantités L et ⊙ ont toujours des valeurs différentes, sont satisfaites par les mêmes valeurs de n et de ρ. Ce qui prouve, 1° que la distance d'un nœud au soleil est constante ; et 2° que la ligne des nœuds se meut parallèlement à elle même.

Cet angle n qui est constant s'appelle

la longitude du nœud.

Les orbites planétaires sont planes. Ce que nous appelons l'orbite d'une planète, ce n'est pas la courbe même que la planète décrit dans l'espace, c'est la courbe que l'on peut toujours supposer décrite par la planète, pendant que cette courbe serait emportée par le soleil dans son mouvement autour de la terre. De sorte que le mouvement réel de la planète dans l'espace, sera le mouvement résultant de son mouvement propre sur l'orbite, et du mouvement de cette courbe emportée par le soleil.

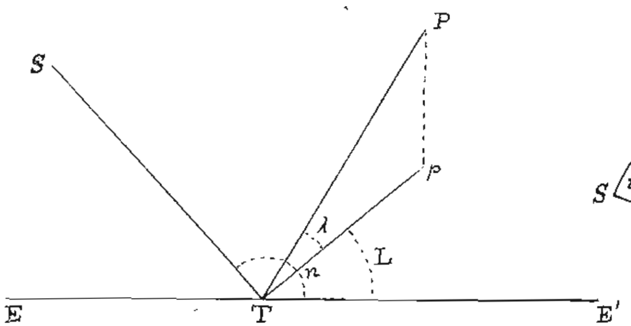
Pour prouver que cette courbe est plane, il faut mener un plan par le lieu de la planète, considérée à une époque quelconque, et par la ligne des nœuds, et mesurer l'inclinaison de ce plan sur l'écliptique ; si cette inclinaison est constante, il sera démontré que la planète se meut dans ce plan.

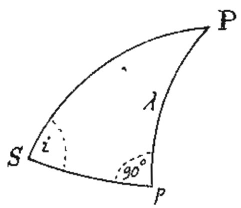
On fait cette vérification dans des circonstances particulières, mais où néanmoins les positions de la planète ne sont pas les mêmes ; à savoir, quand le plan en question passe par la terre ; ce qui a lieu quand la longitude du soleil est égale précisément à la longitude constante du nœud.

Ainsi, à chaque époque où la longitude du soleil sera égale à n, on observera la planète, et on calculera l'angle que le plan mené par sa position et par la ligne des nœuds, fait avec l'écliptique. On trouve que cet angle est constant, et que la planète occupe dans le plan des positions différentes. On en conclut que l'orbite de la planète est situé dans ce plan.

Calcul de l'inclinaison du plan d'une orbite planétaire sur le plan de l'écliptique.

Soit S la position du soleil quand sa longitude est égale à n, longitude du nœud de la planète. Soit P la position de la planète à cette époque,





et p sa projection sur le plan de l'écliptique; l'angle $PTp = \lambda$ sera la latitude de la planète et l'angle $pTE' = L$ sa longitude. Soit i l'inclinaison du plan PTS sur le plan de l'écliptique. C'est cet angle que nous voulons calculer. Pour cela, nous considérerons la pyramide triangulaire dont TS, TP et Tp sont les arêtes. L'angle dièdre qui a pour arête Tp est droit et conséquemment

on a

$$\operatorname{tang} PTp = \operatorname{tang} i \sin pTS,$$

ou

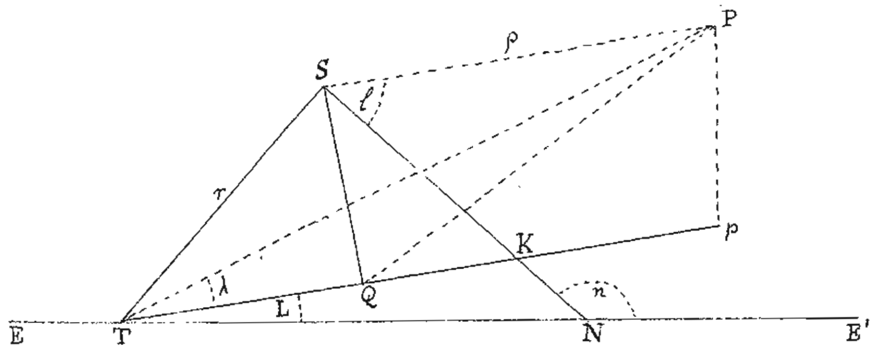
$$\operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} i \sin (n-L).$$

L'angle cherché i est donc déterminé. A quelque époque qu'on forme cette équation, on trouve la même valeur de i; c'est l'angle que le plan de l'orbite de la planète fait avec le plan de l'écliptique.

Des coordonnées qui servent à déterminer l'orbite d'une planète.

On peut déterminer par le calcul et l'observation, à un instant quelconque, le rayon mené de la planète au soleil, et l'angle que ce rayon fait avec la ligne des nœuds. Ces deux quantités qui constituent un système de coordonnées de l'orbite, s'expriment en fonction de la longitude du nœud, de l'inclinaison de l'orbite, de la longitude du soleil au moment de l'observation, de la longitude et de la latitude de la planète.

Soit T la terre; EE' la ligne des équinoxes,



P la position de la planète, S celle du soleil; SN la ligne des nœuds, c'est-à-dire la trace du plan de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique.

Abaissons la perpendiculaire Pp sur ce plan: on aura

Angle pTE' = longitude de la planète $= L$;
Angle PTp = latitude de la planète $= \lambda$;
Angle STE' = longitude du soleil $= \odot$;
Angle SNE' = longitude du nœud $= n$;
Angle $PSN = l$, et $SP = \rho$.

l et ρ sont les deux coordonnées qui fixent la position de la planète sur son orbite.

On trouve les expressions

$$(1)\cdots \cot l = \frac{\sin(\odot - L)\sin i}{\tang\lambda \sin(n-\odot)} + \cos i \cot(n-\odot)$$

$$(2)\cdots \rho = \frac{r\sin(\odot - L)}{\cos l \sin(n-L) + \sin l \cos(n-L)\cos i}$$

Voir pour la démonstration les pages 411 et 412 sous le titre [Calcul des coordonnées [illegible]]

La première détermine immédiatement la valeur de l; et on met cette valeur dans la seconde équation qui alors donne la valeur de la seconde coordonnée ρ.

Les deux coordonnées se trouvent donc exprimées en fonction des cinq quantités $n, i, \odot, L$ et λ, dont les deux premières sont connues et les trois autres se déterminent par l'observation.

Lois de Képler. Par le calcul de ces deux coordonnées l et ρ, continué pendant plusieurs années, et fondé sur les observations de

Tycho-Brahé et sur les siennes propres, Kepler est parvenu à la découverte admirable de ces trois grandes lois du mouvement des planètes:

1° L'orbite d'une planète est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers;

2° Les aires décrites autour de ce point par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps;

3° Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil, sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

Cette troisième loi, celle qui a couté le plus d'efforts au génie persévérant de Képler est bien remarquable et bien importante (*)

(*) Képler annonce en ces termes cette grande découverte: « Après avoir trouvé les vraies dimensions des orbites par les » observations de Brahé et par l'effet continu d'un long travail, » enfin j'ai découvert la proportion des temps périodiques à » l'étendue de ces orbites...... Et si vous voulez en savoir la date » précise, c'est le 8 Mars de cette année 1618, que d'abord conçue dans » mon esprit, puis essayée maladroitement par des calculs, partant » rejetée comme fausse, puis reproduite le 15 de Mai avec une nouvelle » énergie, elle a surmonté les ténèbres de mon intelligence: mais si » pleinement confirmée par mon travail de 17 ans sur les observations de » Brahé, et par mes propres méditations parfaitement concordantes, que je croyais » d'abord rêver et faire quelque pétition de principe: mais plus de doute, c'est » une proposition très certaine et très exacte, que <u>le rapport entre les temps » périodiques de deux planètes est précisément ses qui-altère du rapport des moyennes » distances.</u> » (Harmonices mundi libri V, p. 189.)

Elle sert à déterminer immédiatement les grands axes des orbites planétaires, quand on en connait un, celui de l'écliptique, par exemple ; car la terre, comme nous le verrons bientôt, n'est par autre chose qu'une planète, à laquelle ces trois lois de Képler sont applicables. Le calcul des grands axes des orbites planétaires se réduit donc à la détermination de la durée des révolutions des planètes ; ce qu'on sait faire avec une grande précision.

Les extrémités du grand axe d'une orbite planétaire sont les points où la planète se trouve à sa plus grande et à sa moindre distance du soleil. Le premier s'appelle <u>aphélie</u> et le deuxième <u>périhélie</u>.

La durée de la révolution de la planète autour du soleil, c'est-à-dire le temps qu'elle met à décrire son orbite s'appelle son <u>temps périodique</u>.

Éléments elliptiques des planètes. Nous appelons <u>éléments elliptiques</u> d'une planète certaines données nécessaires et suffisantes pour faire connaitre le mouvement de la planète. Ces éléments sont au nombre de sept ; ils comprennent 1° la direction du plan de l'orbite ; 2° la grandeur de cette courbe, qui est une ellipse, et sa situation dans son plan ; 3° le lieu que la planète occupait sur cette courbe à une époque connue ; et 4° son <u>temps périodique</u>.

Pour déterminer la position du plan de l'orbite, deux éléments suffisent, puisque ce plan passe par le soleil. On prend son <u>inclinaison</u> sur l'écliptique, et l'angle que sa droite d'intersection

avec l'écliptique, ou <u>ligne des nœuds</u>, fait avec la ligne des équinoxes, angle qu'on appelle <u>longitude du nœud</u>.

Trois éléments suffiront pour déterminer la position et la grandeur de l'ellipse dans son plan, puisqu'on connait un de ses foyers qui est le lieu du soleil. Le demi-grand axe et l'excentricité sont les deux éléments par lesquels on détermine la grandeur de la courbe ; et pour déterminer sa position, on prend l'angle que le grand axe fait avec la ligne des nœuds.

Voilà déjà cinq éléments destinés à faire connaitre la position de l'ellipse dans l'espace et sa grandeur ; il ne reste plus qu'à fixer les circonstances du mouvement de la planète. Pour cela, il suffit de connaitre l'époque précise où elle se trouve en un point déterminé de son orbite, et <u>la durée de son temps périodique</u>. On prend pour <u>l'époque</u>, celle où la planète passe à son périhélie (extrémité du grand axe la plus voisine du soleil) ; cette donnée s'appelle simplement <u>passage au périhélie</u>.

Voilà quels sont les sept <u>éléments elliptiques</u> d'une planète. Ils forment sept inconnues qu'il faut déterminer pour connaitre le mouvement de la planète, c'est-à-dire pour pouvoir calculer les positions qu'elle occupera dans l'espace à des instants donnés. D'après la troisième loi de Kepler, ces sept inconnues se réduisent à six, parce que le <u>temps périodique</u> se conclut du demi-grand axe par la relation

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3};$$

quand on connait le demi-grand axe de l'orbite d'une planète quelconque et le temps de sa révolution.

Ainsi le problème de déterminer le mouvement d'une planète se réduit à la recherche de six inconnues.

1ère Méthode, au moyen d'observations faites dans des circonstances particulières. On détermine la longitude du nœud et l'inclinaison du plan de l'orbite, comme nous l'avons fait précédemment; puis on calcule par les deux équations (1) et (2), les coordonnées polaires de la planète dans une de ses positions. A deux autres époques, on déterminera de même deux autres positions de la planète. On connaitra donc trois points de l'ellipse qu'elle parcourt; ce qui suffira pour décrire cette courbe et en déterminer les axes, en grandeur et en position. Ainsi le problème sera résolu. Mais on voit qu'il exige des observations faites à des époques et dans des circonstances particulières.

Pour déterminer la longitude du nœud, l'angle n, il faut observer la planète à deux époques où elle se trouve précisément à son nœud, c'est-à-dire dans le plan de l'écliptique; et pour déterminer l'inclinaison i du plan de l'ellipse sur l'écliptique, on choisit l'époque où la longitude du soleil est égale à celle du nœud. Les trois autres observations se font à des époques quelconques.

Nous allons résoudre le même problème, c'est-à-dire déterminer les six éléments elliptiques d'une planète, simultanément, par trois observations quelconques.

2e Méthode. Détermination simultanée des éléments elliptiques d'une planète par trois observations. Soient

1° n la longitude du nœud;

2° i l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique;

3° a le demi-grand axe de l'ellipse;

4° e son excentricité; (*)

5° ω l'angle que le grand axe fait avec la ligne des nœuds;

et 6° θ le temps qui marque l'époque du passage au périhélie.

Soit ρ le rayon vecteur mené du soleil à la planète; l l'angle qu'il fait avec la ligne des nœuds; nous avons dit qu'entre ces deux coordonnées de la planète, l et ρ, et les angles n et i, on a les deux équations

$$(1) \ldots \cot l = \frac{\sin(\odot - L) \cdot \sin i}{\operatorname{tang} \lambda \sin(n - \odot)} + \cos i \cot(n - \odot).$$

$$(2) \ldots \rho = \frac{r \sin(\odot - L)}{\cos l \sin(n - L) + \sin l \cdot \cos(n - L) \cos i}.$$

(*) e est proprement le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; mais comme dans l'expression numérique de e, on a coutume de faire le demi-grand axe égal à l'unité, on dit que e est l'excentricité.

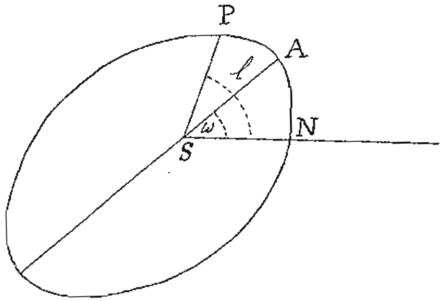
Les deux premières lois de Képler fournissent deux autres équations entre les mêmes coordonnées l et ρ, et les quatre éléments elliptiques a, e, ω et θ.

En effet, l'orbite planétaire étant une ellipse dont le soleil occupe un foyer, on a l'expression suivante du rayon vecteur ρ,

$$(3) \cdots\cdots \quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(l-\omega)}.$$

Maintenant, qu'on applique la loi des aires. Soit A le périhélie de la planète et P sa position actuelle; SN la ligne des nœuds.

La surface du secteur ASP est une fonction de l'angle $(l-\omega)$. On exprimera que cette surface est à l'aire de l'ellipse, comme le temps écoulé depuis le passage au périhélie est au temps de la révolution entière. Cette proportion constituera une relation entre l, ω, a, e, θ, que je représente par



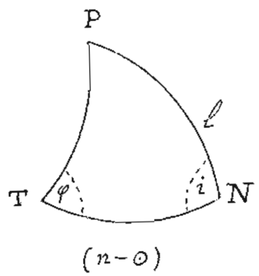
$$(4) \cdots\cdots \quad f(l, a, e, \omega, \theta) = 0.$$

Qu'entre les quatre équations (1), (2), (3) et (4), on élimine les deux coordonnées ρ et l, il en résultera deux équations entre les six

inconnues n, i, a, e, ω et θ. Les quantités connues dans ces deux équations, savoir L, λ et $\odot$, sont fournies par l'observation. On fera deux autres observations, à deux autres époques plus ou moins rapprochées; ce qui fournira quatre nouvelles équations. On aura donc, en tout, six équations qui suffiront pour déterminer les six inconnues.

Pour plus de précision, on ne se borne pas à trois observations seulement; on en fait un grand nombre, et on applique aux équations la méthode des moindres carrés.

[Calcul des deux coordonnées de l'orbite d'une planète. (Non exigé). Considérons la pyramide triangulaire dont les trois arêtes sont SP, ST, SN; ces deux dernières sont dans le plan de l'écliptique; l'inclinaison de la face PSN sur ce plan est connue, c'est l'angle i calculé ci-dessus; soit φ l'inclinaison de l'autre face PST sur le plan de l'écliptique. On a entre ces deux angles dièdres i et φ, et les deux angles plans PSN $= l$ et NST $= n-\odot$, la relation



$$\frac{\cot l}{\cot(n-\odot)}\,\frac{1}{\cos i} - \frac{\cot\varphi}{\cot i}\,\frac{1}{\cos(n-\odot)} = 1.$$

L'angle φ se détermine par la pyramide qui a pour arêtes TS, TP, Tp. L'angle dièdre correspondant à cette dernière arête est droit, et l'on a

$$\text{tang}\,\lambda = \text{tang}\,\varphi \sin(\odot - L).$$

L'équation ci-dessus donne pour cot l,

$$(1)\ldots\quad \cot l = \frac{\sin i \sin(\odot - L)}{\text{tang}\,\lambda \sin(n-\odot)} + \cos i \cot(n-\odot).$$

Pour déterminer ρ, abaissons SQ perpendiculaire sur Tp; cette droite est perpendiculaire au plan PTp, et conséquemment à la droite PQ. On a donc dans le triangle rectangle PQS,

$$SQ = SP \cos PSQ = \rho \cos PSQ.$$

Or dans le triangle SQT on a

$$SQ = ST \sin STQ = r \sin(\odot - L).$$

Donc

$$(2)\ldots\quad \rho \cos PSQ = r \sin(\odot - L).$$

Ainsi pour connaître ρ il suffit de déterminer l'angle PSQ. Pour cela, que l'on considère la pyramide qui a pour arêtes SP, SQ, SN dans laquelle on a

$$\cos PSQ = \cos NSP . \cos NSQ - \sin NSP . \sin NSQ . \cos i$$

or

$$NSP = l,\ NSQ = SKp - 90^\circ = (n-L) - 90^\circ.$$

Il vient

$$\cos PSQ = \cos l \sin(n-L) + \sin l \cos(n-L) \cos i.$$

L'équation (2) devient donc

$$(2)\ldots\quad \frac{r \sin(\odot - L)}{\rho} = \cos l \sin(n-L) + \sin l \cos(n-L) \cos i.$$

l est donné par l'équation (1); cette dernière fera donc connaître le rayon ρ.

Ainsi les deux équations (1) et (2) font connaître toutes les circonstances du mouvement propre de la planète autour du soleil.]

Apparences que présente la surface des planètes.

Planètes inférieures. Ces deux planètes qui sont moins éloignées du soleil que la terre, présentent des phases. Elles ont des montagnes; car leur croissant présente des troncatures quelquefois très étendues qu'on distingue bien.

L'observation des phases de Mercure est très difficile et exige une forte lunette, tant à cause de sa petitesse que de sa proximité du soleil; car cette proximité fait que la planète se trouve presque toujours dans l'atmosphère lumineuse de cet astre; ce qui empêche de l'apercevoir aisément. Elle paraît comme une étoile de quatrième grandeur.

Vénus a une atmosphère. Car vers le 1er quartier la ligne de séparation d'ombre et de lumière n'est pas bien nette, on y remarque une dégradation de lumière, qui même présente plusieurs couleurs, qu'il faut attribuer à une réfraction des rayons lumineux dans l'atmosphère de la planète.

On aperçoit des taches sur Vénus, et elles se déplacent ; ce qui annonce que la planète tourne sur elle-même. Le déplacement des taches se fait à peu près parallèlement à la ligne de séparation d'ombre et de lumière ; l'équateur de la planète est donc à peu près parallèle au plan de cette ligne, et conséquemment à peu près perpendiculaire sur le plan de l'orbite de la planète. Il fait un angle de 72° avec ce plan de l'orbite, qui lui même est incliné de 3° 23' sur le plan de l'écliptique. La rotation de Venus se fait en 23^h 21'. Ses pôles ne présentent point d'aplatissement sensible.

Planètes supérieures. — Mars, la planète la moins éloignée du soleil, a un disque circulaire un peu elliptique, et des taches dont le déplacement permet de reconnaitre un mouvement de rotation qui se fait en 24^h 39'. L'axe de rotation est incliné de 30° 18' sur l'écliptique. On aperçoit aux pôles de la planète des taches blanchâtres qui augmentent et diminuent alternativement d'étendue. On suppose que ce sont, comme aux pôles de la terre, des glaces qui augmentent d'étendue quand les pôles ont été plus long-temps privés de la lumière solaire. Cette hypothèse est confirmée par l'observation des positions qu'occupe la planète, par rapport au soleil, quand ces variations d'étendue des taches ont lieu.

Jupiter a un disque elliptique. Ses diamètres, dont la valeur moyenne est de 37", ont été mesurés très exactement par M.r Arago, qui a trouvé que le plus grand surpasse le plus petit de $\frac{1}{16^e}$ de la valeur moyenne. Ce qui présente un aplatissement considérable. Sur sa surface on aperçoit des taches qui ont la forme de bandes ou zones obscures, dirigées dans le sens du plus grand diamètre. Ces bandes éprouvent des variations qui font supposer que leur cause existe dans l'atmosphère de la planète. On pense qu'elles correspondent à des tranches plus transparentes, formées par des courants analogues à nos vents alisés, et qui nous laissent voir le corps, comparativement plus obscur, de la planète. L'observation attentive de ces taches a fait connaitre que Jupiter tourne autour de son plus petit diamètre, lequel est perpendiculaire à la direction des bandes. La rotation se fait avec une rapidité étonnante, en 10^h 45'. L'équateur de la planète fait un angle de 3° 5' avec le plan de son orbite autour du soleil, et conséquemment est peu incliné sur l'écliptique.

A côté de Jupiter on aperçoit quatre petits corps lumineux qui circulent autour de la planète : on leur donne le nom de satellites. Ils accomplissent leurs révolutions dans des temps respectifs de durée constante. Leurs orbites sont à peu près dans le plan de l'equateur de la planète et conséquemment peu inclinées sur l'écliptique.

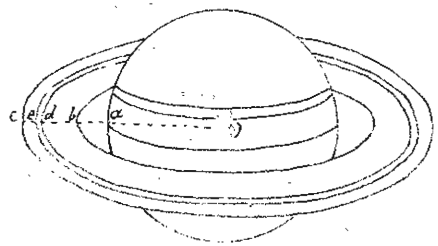
Il en résulte qu'on voit les satellites osciller de part et d'autre de Jupiter en suivant à peu près une ligne droite. Quand ils passent devant Jupiter ils projettent sur son disque de petites taches d'ombre circulaires, visibles dans de bons télescopes, que l'on peut mesurer et dont on déduit la grosseur des satellites. Quand ils passent derrière la planète ils sont éclipsés, soit par elle directement, soit par l'ombre qu'elle projette. Ces éclipses sont des phénomènes très précieux dans l'astronomie d'observation.

Le temps de la révolution de Jupiter autour du soleil est de 12 ans.

Saturne a un aplatissement de $\frac{1}{14}$. Il tourne en $10^h\,29'$ autour de son plus petit diamètre. Il nous présente plusieurs bandes grisâtres (5 à 6) semblables à celles de Jupiter, mais plus larges et moins bien marquées ; on les attribue de même à des phénomènes atmosphériques. Autour de Saturne circulent sept satellites, six dans des plans peu différents de l'équateur de la planète, et le septième dans un plan incliné de 20° sur cet équateur. Ces satellites sont plus petits que ceux de Jupiter.

Saturne nous présente un mécanisme merveilleux ; il est entouré d'un large anneau circulaire très plat, situé à peu près dans le plan de l'équateur. Cet anneau est opaque, mais il nous paraît lumineux quand nous apercevons son côté éclairé par le soleil. Il disparaît quand son

plan passe par la terre, parcequ'alors il nous présente sa circonférence ; ou plutôt sa paroi latérale qui a peu d'épaisseur. Il disparaît encore quand c'est sa face non éclairée qu'il nous présente. Cet anneau a un mouvement de rotation autour de son axe, qui s'accomplit dans un temps à peu près égal à celui de la rotation de Saturne. On aperçoit au milieu de cette bande circulaire une ligne noire que l'on regarde comme étant un intervalle qui sépare deux anneaux concentriques.



Voici approximativement les dimensions que présente ce merveilleux assemblage, à une distance moyenne. Oa rayon de Saturne = 9" ; Ob rayon de la circonférence interne de l'anneau intérieur = 13",4 ; Oc rayon de la circonférence externe de l'anneau extérieur = 20" ; ab espace vide entre le 1er anneau et la planète = 4",4.

On bien, en tenant compte de la distance, on trouve approximativement :

2.Oc	diam. extérieur de l'anneau externe	283 912 116 mètres
2.Oe	" intérieur " "	249 881 503 "
2.Od	" extérieur de l'anneau interne ..	244 116 977 "
2.Ob	" intérieur " "	188 822 361 "

2. 0a	diamètre équatorial de la planète ...	127 393 367.m
ab	intervalle entre la pl. et l'anneau intérieur ..	30 721 821.
de	intervalle des anneaux	2 882 283.
	Épaisseur des anneaux, au plus	160 931.

Saturne est 995 fois plus gros que la terre; il fait sa révolution autour du soleil en 29 ans 5 mois 14 jours.

Uranus. Son volume est 80 fois celui de la terre. Cette planète met environ 84 ans à accomplir sa révolution autour du soleil. Elle est accompagnée de deux satellites qui se meuvent dans un plan presque perpendiculaire à l'écliptique.

L'immense distance d'Uranus s'oppose à ce qu'on connaisse l'état physique de cette planète qui nous paraît comme un petit disque rond d'un éclat uniforme.

Cérès, Pallas, Junon, Vesta. Ces quatre planètes sont appelées ultrà-zodiacales parce que leurs orbites sont beaucoup plus inclinées que celles des autres planètes sur l'écliptique. Leur petitesse ne permet pas de connaître leur constitution physique. Une d'entr'elles, Pallas, offre, dit-on, un aspect nébuleux qui indiquerait l'existence d'une vaste atmosphère dont la force expansive ne serait que faiblement réprimée par l'attraction d'une aussi petite masse. (*)

(*) On a calculé approximativement que, par suite du peu d'attraction qu'une aussi petite masse peut exercer, un homme placé à sa surface sauterait aisément à vingt mètres de haut, et n'éprouverait pas une plus rude secousse dans sa chute, que lorsqu'il tombe de un mètre à la surface de la terre.

Inclinaison des orbites planétaires sur l'écliptique.

Mercure	7° 0' 9."		Petites planètes.
Vénus	3° 23' 28."		
Mars	1° 51' 6."	Vesta	7° 8' 9."
Jupiter	1° 18' 51."	Junon	13° 4' 9."
Saturne	2° 29' 35."	Cérès	10° 57' 26."
Uranus	0° 46' 28."	Pallas	34° 34' 55."

Des Comètes.

Les comètes sont des astres qui se distinguent des étoiles et des planètes par leur mouvement propre et par leur aspect.

Vers le centre d'une comète s'aperçoit un point lumineux semblable à une étoile ou une planète, et qu'on appelle le noyau. Ce noyau est enveloppé d'une nébulosité ou espèce de brouillard lumineux, qu'on nomme chevelure. Le noyau et la chevelure forment la tête de la comète. Des traînées lumineuses accompagnent la plupart des comètes; on leur donne le nom de queues, quoiqu'elles précèdent souvent les comètes

La comète de Mr Encke fait sa révolution en 1207 jours, ou 3 ans $\frac{1}{2}$ environ. On l'appelle généralement comète à courte période. C'est en 1819 que Mr Encke a reconnu sa périodicité, en comparant ces éléments paraboliques à ceux qu'offraient trois apparitions observées en 1786, 1795 et 1805.

La troisième comète a été aperçue, d'abord à Johannisberg par Mr Biela, le 27 février 1826, et 10 jours après à Marseille par Mr Gambart. Mais ce fut celui-ci qui, après en avoir calculé les éléments paraboliques, sur ses propres observations, reconnu que la comète avait déjà été observée en 1805 et en 1772, et qu'ainsi elle était périodique. Il fallut dès lors passer des éléments paraboliques aux éléments elliptiques, pour découvrir la durée de la révolution. Mr Clausen, et Mr Gambart firent ce calcul, et reconnurent, presqu'en même temps, que cette nouvelle comète faisait sa révolution dans l'espace de 6 ans $\frac{3}{4}$ environ. C'est une petite comète sans queue et sans apparence de noyau solide. Par une coïncidence remarquable, son orbite coupe le plan de l'écliptique à une distance

---

trouve une seule position d'une comète observée en 1456. Pingré a reconnu que cette position et la date s'appliquent à la comète de Halley. L'apparition antérieure, qui a eu lieu en 1378, a été découverte, il y a peu de temps, par Mr Laugier, dans un catalogue chinois, (traduit par Mr Ed. Biot). De sorte qu'on connait maintenant sept apparitions de la comète. Mr Laugier en a conclu que sa période moyenne est de 76, 1 ans.

du soleil égale à peu près à la distance de la terre au soleil, de sorte qu'il pourrait arriver qu'elle se trouvât à quelque jour très voisine de la terre.

Aucune comète n'ayant encore présenté de phases, on a toujours été dans le doute sur la nature de la lumière de ces astres. Leur appartient-elle, ou est-ce la lumière du soleil réfléchie? Des expériences photométriques très délicates, faites par Mr Arago, sur la comète de Halley, à son passage en 1835, ont prouvé que sa lumière était, en partie du moins, de la lumière solaire réfléchie.

Comètes dont on a calculé les éléments elliptiques par l'observation. Nous venons de dire que les comètes observées jusqu'ici ont leurs excentricités trop grandes, et que l'arc qu'elles décrivent pendant le temps qu'elles sont visibles se confond trop sensiblement avec une parabole, pour qu'on ait pu calculer directement par l'observation leurs éléments elliptiques, et conséquemment le temps de leur révolution. Cela était vrai jusqu'à ces derniers temps. Mais ces dernières années ont été fécondes en apparitions de comètes qui ont été découvertes par MM. Laugier, Mauvais, et Faye à Paris, et Vico à Rome; et parmi ces comètes il s'en est trouvé deux dont l'excentricité, moindre que d'ordinaire, a permis de calculer directement leurs éléments elliptiques. La première, a été, découverte par M.r Faye le 22 Novembre 1843; la durée de sa révolution est 7 ans $\frac{4}{10}$. La deuxième a été découverte par M.r Vico le 22 août 1844; son temps périodique est de 5 ans 5 mois.

Ainsi l'on connait actuellement cinq comètes périodiques, et dont les astronomes peuvent annoncer le retour.

Mouvement de la Terre.

Mouvement de rotation autour d'un diamètre. Jusqu'ici nous avons regardé la sphère céleste comme animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre de la terre, et nous avons supposé celle-ci immobile au centre du monde.

Ce système, qui semble justifié au premier abord par les mouvements apparents des astres, présente, si l'on en approfondit les conséquences, de graves difficultés.

En admettant la rotation de la voute céleste, il faut admettre que les étoiles, qui sont situées à des distances presque incalculables, décrivent autour de la terre des circonférences immenses avec une rapidité prodigieuse, et toutes dans le même temps, en un jour. Et cela admis, comment expliquer que le soleil, la lune et les planètes participent à ce mouvement

général de la sphère céleste, sur laquelle ils ne sont pas fixés, ainsi que le prouve leur mouvement propre.

Mais ces mouvements apparents des corps célestes peuvent s'expliquer d'une autre manière qui ne donne pas lieu aux graves difficultés qu'entraine l'hypothèse de la rotation de la voute céleste.

Qu'on suppose la voute céleste immobile et la terre animée d'un mouvement de rotation autour d'un de ses diamètres, il est clair que le spectateur placé à la surface de la terre, ignorant le mouvement dont il est animé, attribuera à un mouvement de rotation des corps célestes, en sens contraire, son changement de position par rapport à eux; la voute céleste lui paraitra donc tourner précisément autour de l'axe de rotation de la terre, et accomplir sa rotation en 24 heures. Cet axe de rotation de la terre, sera son plus petit diamètre, celui qui joint ses pôles, puisque nous avons vu que ce plus petit diamètre est dirigé suivant l'axe du monde.

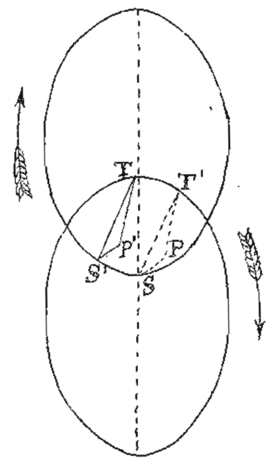
Ainsi l'hypothèse de la rotation de la terre autour de son plus petit diamètre explique le mouvement diurne de la sphère céleste, du soleil et des planètes.

Mouvement de translation autour du soleil. La terre présente quelques analogies avec les planètes; comme elles, elle est opaque et éclairée par le soleil. Celles des planètes auxquelles on a reconnu un aplatissement tournent autour de leur plus petit diamètre, et c'est aussi autour de son plus petit diamètre que nous pouvons attribuer à la terre un mouvement de rotation. Plusieurs planètes ont des satellites qui tournent autour d'elles; la terre en a aussi un qui est la lune.

Ces analogies entre la terre et les planètes portent à supposer que la terre peut bien comme celles-ci, tourner, dans l'espace, autour du soleil qui serait fixe: et cette hypothèse prend un nouveau degré de probabilité, si l'on considère que, dans ce système formé des planètes, du soleil et de la terre, le soleil joue un rôle tout particulier; puisque les planètes tournent autour de lui; puisque c'est cet astre qui les éclaire ainsi que la terre. Il est donc plus naturel de supposer que c'est la terre qui tourne autour du soleil, de même que les planètes, que de supposer que c'est le soleil qui tourne autour de la terre, en emportant dans son mouvement, tout le système de planètes dont il est le centre.

Dans cette hypothèse du mouvement de la terre autour du soleil, elle décrirait une ellipse dont le soleil occuperait un des foyers; et cette courbe serait précisément de mêmes dimensions que celle que le soleil nous parait décrire annuellement autour de la terre. En effet soit SS' l'ellipse que le soleil parait décrire annuellement dans le sens SS'; la terre occupe un de

ses foyers, en T. Traçons une deuxième ellipse TT' passant par le foyer T de celle-là, ayant pour foyer le sommet S, périgée du soleil. Supposons le soleil fixe en S et que la terre se meuve sur cette deuxième ellipse dans le sens TT' d'un mouvement précisément égal à celui que nous attribuons au soleil d'après son mouvement apparent. Dans cette hypothèse, à l'époque où le soleil nous parait être en S', la terre sera en T' éloigné de T autant que S' l'est de S. Or les deux lignes TS', T'S sont parallèles. Le spectateur placé à la surface de la terre, en T', verra donc le soleil, supposé immobile en S, dans la même direction et coïncidant avec les mêmes étoiles, que si la terre fût restée en T et que le soleil se fût mu de S en S'. Ainsi le mouvement apparent du soleil n'est pas changé.



Il en sera de même du mouvement apparent des planètes. En effet, soit P' la position d'une planète, dans l'hypothèse du mouvement du soleil. Qu'on prenne SP égale et parallèle à S'P', P sera la position de la planète dans l'hypothèse de l'immobilité du soleil; et la terre verra la planète dans la direction T'P. Or T'P est parallèle à TP'; la terre voit donc la planète dans la même direction que dans l'hypothèse du mouvement du soleil.

Les mouvements apparents du soleil et des planètes permettent donc de supposer que le soleil est fixe et que la terre se meut autour de cet astre en décrivant annuellement une ellipse ayant pour un de ses foyers le lieu même du soleil.

Dans cette hypothèse, les deux autres lois de Képler s'appliquent à l'orbite de la terre. Car le secteur TST' que décrit la terre est égal au secteur STS' que semblait décrire le soleil; le secteur de la terre sera donc proportionnel au temps: ce qui est la 2e loi de Képler. La 3e subsiste aussi, puisque l'orbite de la terre a le même grand axe et est décrite dans le même temps que l'orbite apparente du soleil.

L'application des trois lois de Kepler au mouvement de la terre présente une analogie de plus entre la terre et les planètes.

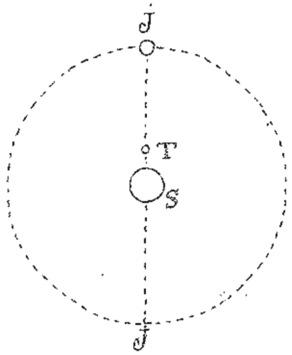
Enfin ce mouvement de la terre n'altère en rien l'aspect que nous présentent les étoiles; il ne change pas leurs distances apparentes, parceque les étoiles restent immensément éloignées de la terre dans toutes ses positions.

Découverte et Mesure de la vitesse de la lumière par les éclipses des satellites de Jupiter.

Les satellites de Jupiter tournent autour de cette planète d'un mouvement à peu près uniforme. A chaque révolution, chacun d'eux passe dans le cône d'ombre projeté par Jupiter, et il y a <u>éclipse</u> du satellite. Le mouvement de Jupiter autour du soleil étant connu, et le mouvement d'un satellite autour de la planète étant aussi connu, on peut déterminer à chaque instant les positions de ces trois corps, le soleil, Jupiter et le satellite, et assigner l'instant où l'éclipse aura lieu.

Mais sans recourir au calcul, l'observation seule, suffisamment prolongée, suffira pour faire connaitre à quel intervalle de temps, en moyenne, se succèdent ces éclipses. On reconnaitra, par exemple, que la 110e éclipse d'un satellite se reproduit périodiquement dans tel intervalle de temps.

Roëmer remarqua, en 1675, en comparant les observations d'éclipses des satellites faites pendant plusieurs années successives, que certaines éclipses arrivaient un peu plus tôt qu'indiquait le résultat moyen de ces observations; que d'autres arrivaient un peu plus tard; et que celles-ci succédaient aux premières dans un ordre constant. Il reconnut que les éclipses hâtives avaient lieu quand Jupiter se trouvait en <u>opposition</u>, et les éclipses tardives, lors de la conjonction. Dans le premier cas, Jupiter se trouve en J, à sa plus petite distance de la terre; et dans le deuxième cas en J', à sa plus grande distance. Roëmer fut donc conduit à penser que le retard ou l'avance de l'éclipse provenait de sa distance à la terre, à laquelle se trouvait Jupiter au moment du phénomène. Il reconnut en effet que les variations de temps étaient proportionnelles aux variations des distances. Pour expliquer ce fait curieux, il fut obligé d'admettre



que la lumière ne nous arrive pas instantanément, comme on l'avait cru jusqu'alors, et que sa vitesse a une valeur appréciable. (*) La

(*) Cette conséquence résultait d'un raisonnement déjà fait par Descartes, en 1634, et qu'on trouve dans le recueil de ses lettres. Ce philosophe avait observé que si la lumière n'avait pas une vitesse infinie, nous devrions voir les éclipses de lune un peu plus tard que le calcul les indique; mais les observations dont il se servit pour faire l'application de son raisonnement ne présentaient pas de différence avec le calcul; et il en conclut que la lumière nous est transmise instantanément. Ce raisonnement est juste; et si Descartes l'eût appliqué aux observations des satellites de Jupiter, au lieu de l'appliquer aux éclipses de lune qui ne donnent pas des différences de temps à peu près inappréciables, à cause de la proximité de la lune, l'astronomie lui eût été redevable de la belle découverte de Roëmer.

différence des temps qu'il reconnaissait entre diverses éclipses lui fit ainsi découvrir que la lumière met 8' 13" à parcourir le rayon de l'écliptique, c'est-à-dire à venir du soleil à la terre. Voici comment on prouve ce beau résultat.

Soit a l'instant réel d'une éclipse quand Jupiter est en opposition, et t l'instant où nous voyons le phénomène; cet instant est indiqué par la pendule. La différence entre le temps t et le temps a exprime précisément le temps que la lumière a mis à venir du lieu de l'éclipse à la surface de la terre. Soit θ ce temps, on aura

$$t = a + \theta.$$

Pour une éclipse ayant lieu quand Jupiter est en conjonction, (laquelle sera la 110^e après celle que nous venons d'observer lors de l'opposition), on aura une équation semblable, savoir, $t' = a' + \theta'$.

Enfin observons l'éclipse qui aura lieu lors du retour de Jupiter à l'opposition, (laquelle sera la 110^e après la précédente), on aura alors l'équation $t'' = a'' + \theta$; θ qui exprime le temps que la lumière met à venir de Jupiter à la terre, a la même valeur que lors de la première éclipse, puisque Jupiter se trouve de nouveau en opposition et conséquemment à la même distance de la terre.

Les expressions de t, t', t'' donnent

$$t'-t=(\alpha'-\alpha)+(\theta'-\theta).$$
$$t''-t'=(\alpha''-\alpha')-(\theta'-\theta).$$

D'où

$$(t'-t)-(t''-t')=2(\theta'-\theta)+(\alpha'-\alpha)-(\alpha''-\alpha').$$

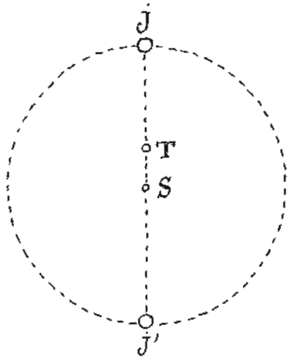
Or $(\alpha'-\alpha)$ et $(\alpha''-\alpha')$ sont des quantités égales, parce que ce sont les temps qui séparent deux mêmes nombres d'éclipses, temps comptés à partir des instants réels des éclipses. L'équation se réduit donc à

$$(t'-t)-(t''-t)=2(\theta'-\theta).$$

Le premier membre est connu; il se compose de temps marqués par l'horloge de l'observateur: on trouve qu'il est égal à 32'52". On a donc

$$2(\theta'-\theta)=32'52'';\quad \theta'-\theta=16'26''.$$

Soit J et J' les positions de Jupiter, lors de l'opposition et de la conjonction. θ est le temps que la lumière met à parcourir l'espace JT, et θ' le temps qu'elle met à parcourir l'espace J'T; $(\theta'-\theta)$ est donc le temps qu'elle met à parcourir la différence de ces deux espaces, c'est-à-dire le double de **ST**.



Le temps que la lumière met à parcourir l'espace **ST**, distance de la terre au soleil, est donc de 8'13".

Cette distance est 24000 fois le rayon terrestre; on en conclut que la lumière parcourt 308988461 mètres (77247 lieues) par seconde.

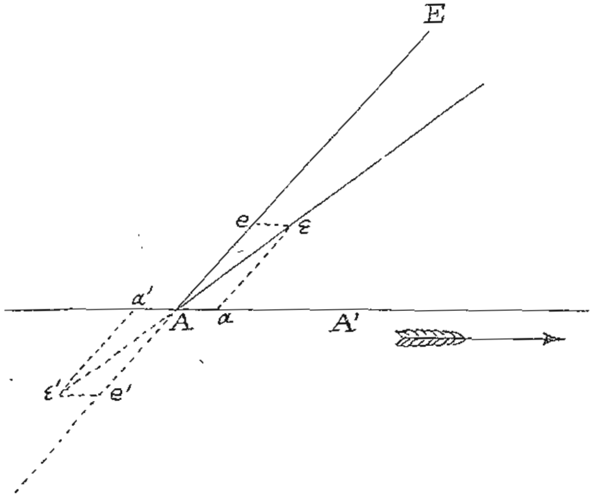
Aberration de la lumière.

La sensation de la vue paraît être produite par une sorte de pression ou de choc des molécules lumineuses contre l'œil du spectateur: la direction suivant laquelle ces molécules arrivent d'un objet, détermine la ligne sur laquelle cet objet paraît être; et si la série des molécules, ou le rayon lumineux, a été infléchie dans sa route par une cause quelconque, le spectateur suppose l'objet placé sur le prolongement de leur dernière direction; c'est ce qui arrive dans les réfractions atmosphériques.

Nous supposons, dans cette explication de l'effet de la lumière sur l'œil du spectateur, que celui-ci est en repos. Mais s'il est en mouvement, on en conclut qu'il verra l'objet lumineux, non plus dans la direction même du rayon de lumière qui vient frapper son œil, mais bien dans une direction composée de celle-là et de celle du mouvement dont il est animé lui-même. Que l'on compose deux vitesses, dont l'une égale à celle du rayon de lumière, et l'autre égale et contraire à la vitesse du spectateur; la résultante de ces deux vitesses marquera la direction dans laquelle le spectateur verra l'objet.

En effet, on n'altèrera point la position relative du spectateur, de l'objet et des molécules lumineuses qui en émanent, si l'on suppose que tout ce système éprouve un certain mouvement commun à toutes ses parties. Supposons que ce mouvement soit égal et contraire au mouvement de translation de la terre. Alors le spectateur sera en repos, et la molécule lumineuse sera animée de deux vitesses, ou plutôt sera animée de la vitesse résultante de sa vitesse propre et d'une autre égale et contraire à celle de la terre. Elle viendra donc frapper l'œil du spectateur dans la direction de cette vitesse résultante; de sorte que c'est dans cette direction que le spectateur verra l'objet.

D'après cela, soit E la position d'une étoile; EA le rayon lumineux qu'elle envoie et qui vient frapper l'œil du spectateur en A. Soit AA' la direction de la terre dans son mouvement de translation; si l'on prend sur la direction du rayon lumineux et sur une direction opposée au mouvement de la terre



deux segments Ae', Aα' qui représentent respectivement la vitesse de la lumière et la vitesse de la terre, c'est dans la direction Aε' que le

rayon lumineux viendra frapper l'œil du spectateur, conséquemment c'est sur le prolongement Aε que celui-ci verra l'étoile. On détermine cette direction en construisant le parallélogramme eAαε dont les deux côtés Ae, Aα représentent les vitesses de la lumière et de la terre.

Ainsi la position apparente de l'étoile diffère de sa position réelle. Ce phénomène a reçu le nom d'*aberration*; et l'angle EAε qui marque la différence de la position apparente à la position réelle, est dit l'*angle d'aberration*, ou simplement l'*aberration*.

Mesure de l'aberration. On a dans le triangle eAε,

$$\frac{\sin eA\varepsilon}{\sin e\varepsilon A} = \frac{e\varepsilon}{Ae}; \quad \text{d'où}$$

$$\sin EA\varepsilon = \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}} \cdot \sin \varepsilon AA'.$$

La vitesse de la terre est de 7 lieues $\frac{7}{10}$ par seconde; celle de la lumière de 77000 lieues environ. Le rapport de ces deux vitesses est $\frac{7{,}7}{77000} = \frac{1}{10000}$. Donc

$$\sin EA\varepsilon = \frac{1}{10000} \cdot \sin \varepsilon AA'.$$

on a

$$\frac{1}{10000} = \frac{\operatorname{tang} 20'',25}{\text{rayon}} = \frac{\operatorname{tang} 20'',25}{1}.$$

Donc

$$\sin EA\varepsilon = \operatorname{tang} 20'',25 \cdot \sin \varepsilon AA'.$$

L'angle d'aberration $EA\varepsilon$ est très petit; on peut donc le substituer à son sinus; on peut de même substituer l'angle de 20",25 à sa tangente; alors on a

$$EA\varepsilon = 20'',25.\ \sin \varepsilon AA'.$$

Ainsi l'aberration d'une étoile, due au mouvement de la terre, est égale à l'angle de 20",25 multiplié par le sinus de l'angle que la direction apparente de l'étoile fait avec la direction du mouvement de la terre.

Comme l'angle $\varepsilon AA'$ ne diffère de EAA' que de l'aberration, qui est une quantité très petite, on peut prendre $EA\varepsilon = 20'',25 \sin EAA'$.

Effet annuel de l'aberration.

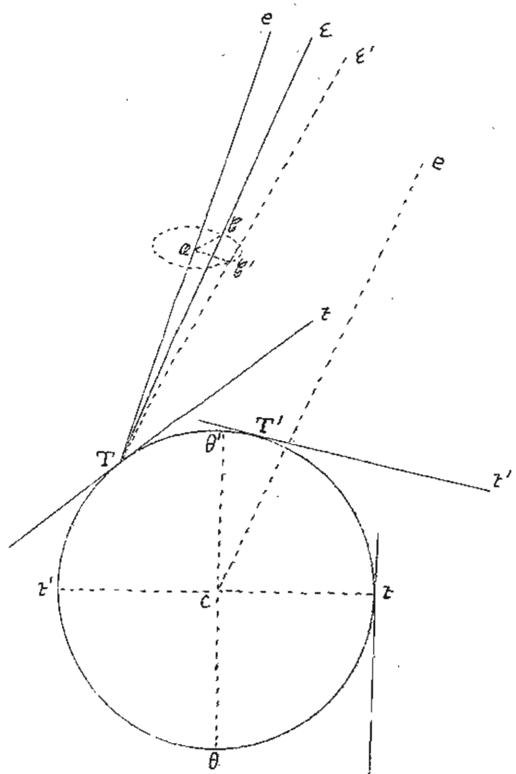
La direction dans laquelle nous voyons une étoile dépend donc de la direction actuelle de la terre dans son mouvement de translation autour du soleil. Or la terre change à chaque instant de direction puisqu'elle décrit une ellipse; nous voyons donc une étoile dans des directions continuellement variables. De sorte que les positions apparentes de l'étoile sur la voute céleste forment une certaine courbe que l'étoile parait décrire dans le cours d'une révolution annuelle de la terre autour du soleil. Voyons quelle est cette courbe.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que la terre décrive un cercle, au lieu d'une ellipse,

et que son mouvement soit uniforme.

Les rayons menés de l'étoile aux différentes positions de la terre pourront être regardés comme parallèles entr'eux, à cause de l'immense distance de l'étoile. L'inclinaison de ces rayons sur le plan de l'écliptique sera la latitude de l'étoile.

Considérons la terre dans une de ses positions en T, et soit Te le rayon mené à l'étoile



dans sa position réelle. Pour déterminer sa position apparente ε, il faut prendre sur Te un segment $T\alpha$ proportionnel à la vitesse de la lumière, et mener la droite $\alpha\beta$ parallèle à la direction actuelle de la terre, savoir $T\tau$ et proportionnelle à sa vitesse: la droite $T\beta\varepsilon$ déterminera la position apparente de l'étoile, et l'angle $eT\varepsilon$ sera l'aberration.

Pour une autre position quelconque T' de la terre, on fera une construction semblable ; ou bien par le même point a on mènera une droite aC' égale à aC, mais parallèle à la direction $T't'$ du mouvement de la terre en T' ; TC' marquera sur la voute céleste la position de E' de l'étoile vue du point T. Donc, si l'on décrit du point a comme centre, et avec le rayon aC, une circonférence de cercle $CC'C''$...... située dans un plan parallèle à l'écliptique, les droites TC, TC'....., qui s'appuieront sur cette circonférence, marqueront les directions suivant lesquelles on verra l'étoile sur la voute céleste, dans tout le cours du mouvement annuel de la terre autour du soleil. Ces directions forment un cône du 2.d degré qui a pour base le petit cercle $CC'C''$.....; conséquemment les positions apparentes de l'étoile seront une petite ellipse sphérique, résultante de l'intersection de ce cône par la voute céleste ; ellipse sphérique qu'on peut regarder comme une ellipse plane, tant à cause de l'immensité de la voute céleste, que du peu d'étendue occupée par la nappe du cône. Le centre de cette ellipse sera sensiblement la position réelle e de l'étoile. Ses demi-diamètres seront les cordes soutendues par les angles d'aberration. Leur expression est $u = 20'',25 \sin\varphi$, φ étant l'angle que le rayon mené de la terre à la position réelle de l'étoile, (rayon de direction constante), fait avec la direction variable du mouvement de la terre. Le plus grand demi-diamètre de l'ellipse correspond à l'angle $\varphi = 90°$; et il est égal à $20'',25$; ce diamètre est dirigé perpendiculairement à la projection, sur le plan de l'écliptique, de la droite Te, ou ce, qui marque la direction réelle de l'étoile. Il correspond à la position de la terre en t et t'. Le plus petit diamètre, c'est-à-dire la plus petite aberration, correspond à la plus petite valeur de l'angle φ. C'est la latitude de l'étoile, ou l'angle ecT. Soit λ cet angle, le plus petit diamètre de l'ellipse sera égal à $20'',25 \sin\lambda$, et il sera dirigé dans le plan qui passe par l'étoile et par l'axe de l'écliptique. Il correspond aux positions θ et θ' de la terre.

On voit que les petites ellipses d'aberration des différentes étoiles seront très différentes entr'elles. Elles auront toutes leur demi-grand axe de grandeur constante, égal à $20'',25$ et parallèle au plan de l'écliptique, mais dans une direction différente, puisqu'il est perpendiculaire au plan du cercle de latitude de l'étoile. Quant au demi-petit axe, il est très variable, puisqu'il dépend de la latitude de l'étoile. Il est nul pour une étoile située dans le plan de l'écliptique. De sorte que l'étoile parait osciller le long d'une petite ligne droite. Pour une étoile voisine de l'écliptique, le petit axe est très petit et l'ellipse très allongée. Et pour une étoile située au pôle de l'écliptique, l'ellipse est un cercle ; (dans la supposition que l'orbite de la terre soit elle même un cercle.

L'aberration affecte tous les astres. Elle les fait voir dans une position un peu différente de leur position réelle.

Elle incline le soleil sur la direction du mouvement de la terre, d'un angle de 20",25 sans le faire sortir du plan de l'écliptique. De sorte que la longitude apparente du soleil est moindre que la longitude vraie, de cette quantité constante 20",25.

Aberration diurne.

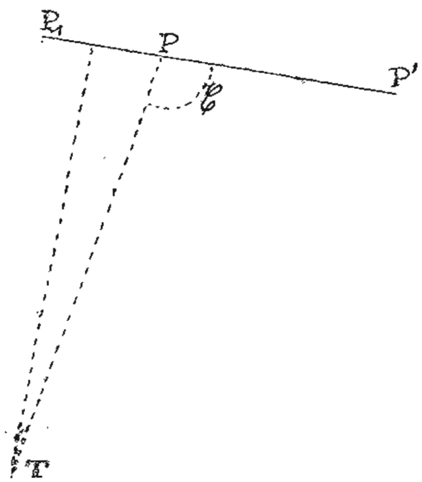
Nous avons calculé l'aberration d'une étoile causée par le mouvement de translation de la terre autour du soleil; mais la terre a un second mouvement, son mouvement de rotation sur elle même, lequel produit aussi un déplacement apparent de chaque étoile sur la voute céleste; ce déplacement s'appelle aberration diurne. Pour le calculer, il faut connaître la vitesse de rotation du point de la terre qui reçoit le rayon lumineux envoyé par l'étoile. Cette vitesse est à peu-près $\frac{1}{65^e}$ de la vitesse de translation. En effet en 365 j.,25 la terre décrit une circonférence dont le rayon est égal à 24000 fois le rayon terrestre. Elle parcourt donc en un jour, un espace égal à $\frac{2\pi . 24000\,r}{365,25}$. Or en un jour un point situé à l'équateur decrit un espace égal à $2\pi r$; le rapport des deux vitesses de translation et de rotation est donc $\frac{24000}{365,25} = 65,7$.

De sorte que la vitesse de rotation est à peu près $\frac{1}{65^e}$ de la vitesse de translation. Mais l'aberration, d'après son expression générale, est proportionnelle à la vitesse de la terre. Donc la plus grande aberration due au mouvement de rotation sera $\frac{1}{65^e}$ de la plus grande aberration due au mouvement de translation, savoir $\frac{20",25}{65,7} = 0",308$. Cette quantité étant très petite, on a coutume de la négliger dans les calculs astronomiques.

Aberration des Planètes.

L'aberration des planètes, c'est-à-dire la différence qui existe, à chaque instant, entre leur position réelle et leur position apparente, n'est pas aussi simple que celle des étoiles. Celle-ci n'est due qu'au mouvement de la terre, et l'aberration des planètes est produite non seulement par le mouvement de la terre, mais aussi par le mouvement de la planète elle même. Chacun de ces deux mouvements donne lieu à un déplacement apparent, et la résultante de ces deux aberrations partielles et simultanées, forme l'aberration totale de la planète.

Aberration due au mouvement de la planète. Supposons un instant la terre immobile en T. Soit P la position de la planète au moment où elle nous envoie un rayon lumineux PT; nous verrons la planète dans la direction TP; mais pendant le temps que le rayon lumineux aura mis à parcourir l'espace PT, la planète aura été en P_1; elle occupera donc réellement la position P_1 au moment où nous la verrons en P; la différence de ces deux positions est l'angle P_1TP; c'est ce que l'on appelle <u>l'aberration due au mouvement de la planète</u>. Pour avoir l'expression de cet angle, posons la proportion



$$\frac{\sin P_1TP}{\sin TPP_1} = \frac{PP_1}{P_1T}.$$

L'angle P_1TP est très petit; substituons-le à son sinus; faisons $TPP_1 = \mathcal{C}$, et remplaçons TP_1 par TP; on a

$$P_1TP = \sin \mathcal{C} \frac{PP_1}{TP}.$$

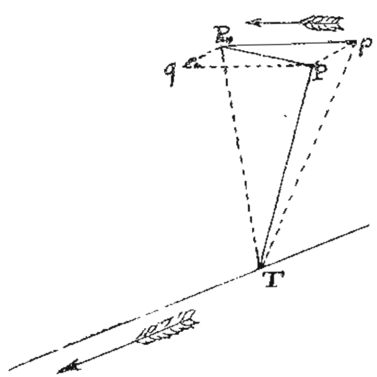
Telle est l'expression de l'aberration qui serait due au mouvement de la planète, <u>si la terre était immobile</u>.

PP' est l'espace que la planète parcourt

pendant le temps que la lumière met à arriver de P en T. De sorte que le rapport $\frac{PP_1}{PT}$ est égal au rapport des vitesses de la planète et de la lumière. Soient v et V ces vitesses; on a

$$P_1TP = \frac{v}{V} \sin \mathcal{C}.$$

Aberration totale. Ayons égard maintenant au mouvement de la terre. Soit p la position de la planète au moment où elle envoie un rayon lumineux, T la position de la terre au moment où le spectateur reçoit ce rayon. Pour déterminer la direction dans laquelle le spectateur verra la planète, il faut mener par le point p une droite parallèle à la direction actuelle de la terre dans son mouvement et prendre sur cette droite le segment pP, tel, que le rapport $\frac{pT}{pP}$ soit égal à celui des vitesses de la lumière et de la terre. Le point P marquera la direction dans laquelle le spectateur verra la planète.



Or pendant le temps que le rayon de

lumière a mis à venir de p en T la planète, en vertu de son mouvement propre, s'est transportée en P_1. C'est donc en P_1 qu'elle se trouve au moment où le spectateur la voit en P. De sorte que l'aberration effective est l'angle P_1TP. On a dans le triangle PTP_1, en prenant l'angle P_1TP à la place de son sinus

$$P_1TP = \sin P_1PT \cdot \frac{PP_1}{TP_1}.$$

Les trois lignes pT, pP, pP_1 sont proportionnelles aux vitesses de la lumière, de la terre, et de la planète. De sorte que ces trois lignes peuvent représenter les vitesses elles-mêmes. Menons Pq égale et parallèle à pP_1, de manière à former le parallélogramme PqP_1p. Le côté Pq représente donc, en grandeur et en direction, la vitesse de la planète, et le côté Pp est égal, et de direction contraire, à la vitesse de la terre: la diagonale PP_1 est donc en grandeur et en direction la vitesse relative de la planète. Représentons-la par v'; appelons $\mathcal{C}$ l'angle P_1PT que cette vitesse relative fait avec la direction apparente de la planète; et enfin à la place de TP_1 prenons Tp qui n'en peut différer qu'infiniment peu et qui est égale à la vitesse V de la lumière; l'expression de l'aberration devient

$$P_1TP = \frac{v'}{V} \sin \mathcal{C}.$$

C'est l'angle que la direction réelle d'une planète fait avec sa direction apparente. On voit que pour déterminer cet angle au moment où

l'on observe une planète, il faut connaître, à ce moment, en grandeur et en direction, la vitesse de la terre et la vitesse de la planète, pour en conclure la vitesse relative de celle-ci, qui entre, en grandeur et en direction, dans l'expression de l'aberration.

Cette expression générale comparée à celle que nous avions trouvée d'abord en supposant la terre immobile, fait voir qu'on peut, en effet, pour calculer l'aberration d'une planète, supposer la terre immobile, en attribuant à la planète un mouvement relatif, c'est-à-dire le mouvement résultant du mouvement propre de la planète et d'un mouvement égal et contraire à celui de la terre.

De l'aberration diurne des Planètes. — Preuve de la rotation de la Terre.

Soit ω la vitesse angulaire du mouvement diurne, et ρ le rayon de la terre: la vitesse d'un point de l'équateur sera $\rho\omega$. Soit u l'angle que la direction du mouvement de rotation de ce point, fait avec le rayon mené à une planète située aussi, au moment de l'observation, dans le plan de l'équateur; l'aberration de la planète, due à ce mouvement de la terre, a pour valeur $\frac{\omega\rho . \sin u}{V}$, V étant la vitesse de la lumière.

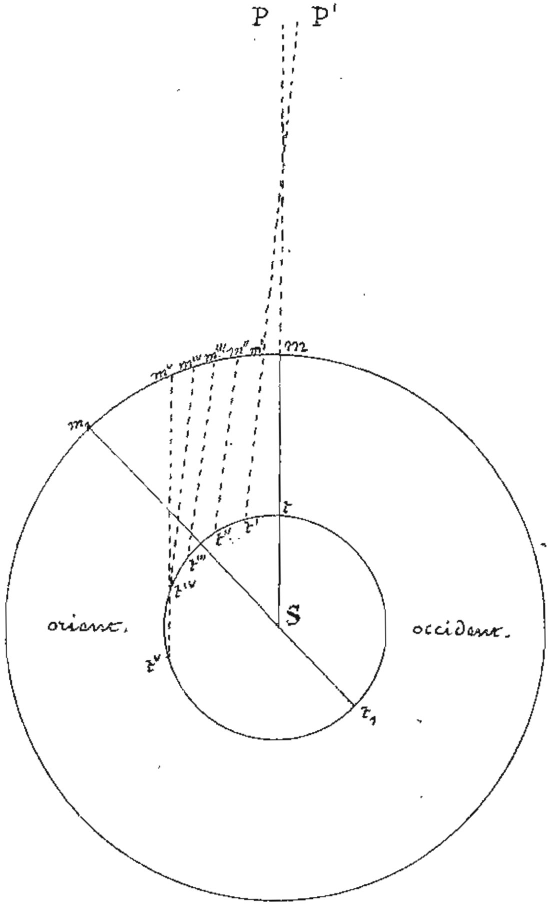
Concevons maintenant que la terre ne soit pas animée du mouvement de rotation que nous venons de lui supposer, et que ce soit la planète qui soit douée du mouvement diurne. Soit r sa distance à la terre; sa vitesse sera $r\omega$; et l'aberration due à ce mouvement de la planète sera $\frac{\omega r . \sin u'}{V}$; u' étant l'angle que la direction du mouvement de la planète fait avec le rayon vecteur r. L'aberration aura donc deux expressions différentes, suivant que ce sera la terre ou la planète qui sera animée du mouvement diurne. Or, si la première expression donne une valeur très petite, telle, que l'aberration échappe aux observations, il n'en est pas de même de la seconde, à cause du facteur r qui y entre et qui prend des valeurs extrêmement grandes, beaucoup plus considérables même que la distance du soleil à la terre. On pourrait donc apprécier par l'observation cette aberration dont les planètes seraient affectées, d'autant plus qu'elle n'aurait pas toujours la même valeur. Or on ne remarque aucune inégalité de cette sorte. Cela est donc une preuve certaine que le mouvement diurne n'est pas dû à la rotation de la sphère céleste, et qu'il n'est à nos yeux qu'une illusion produite par la rotation de la terre.

Explication de divers mouvements apparents, dans l'hypothèse du mouvement de la terre.

Stations et rétrogradations des planètes supérieures.

Prenons la planète Mars, et supposons-la en opposition; elle sera en m, la terre en t, et le soleil en S. Elle semble prendre, par rapport aux étoiles, un mouvement rétrograde d'orient en occident. En voici l'explication: La terre se meut d'occident en orient et va en t'; la planète se meut dans le même sens et va en m', mais elle va moins vite que la terre, ainsi que nous le prouverons tout à l'heure; la ligne mm' est donc plus petite que la ligne tt'; d'où il suit que le rayon $t'P'$ projette la planète sur la sphère céleste à l'occident par rapport à sa position en P. Voilà pourquoi la planète semble rétrograder. La terre et la planète continuant leur mouvement, il arrivera un moment où deux rayons consécutifs $t''m''$, $t'''m'''$ seront parallèles; alors la planète paraîtra stationnaire.

Un rayon suivant, $t^{IV}m^{IV}$, s'écarte de $t'''m'''$, et ne projette plus la planète à l'occident de sa position primitive; alors son mouvement devient direct, c'est-à-dire qu'il paraît se faire d'occident en orient. Les rayons étant menés à des intervalles de temps égaux, l'angle de deux rayons consécutifs, ira en augmentant jusqu'à la conjonction en t_1, m_1, parce que les arcs de grandeur constante compris dans cet angle tendront à devenir perpendiculaires à ses côtés; ce qui a lieu lors de la conjonction: la vitesse de la planète ira donc en augmentant, jusqu'au moment de la conjonction. Alors le mouvement se ralentira parce que l'angle des deux rayons ira en diminuant: bientôt il deviendra nul, et à ce moment il y aura station. Puis l'inclinaison des deux rayons aura lieu du côté opposé et la planète commencera à rétrograder.



Et ainsi de suite.

Nous avons dit que la vitesse absolue de la planète est plus petite que celle de la terre. En effet, soient a, a' les demi-grands axes des orbites de la terre et de la planète, et T, T' les temps de leur révolution; on aura

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{T^2}{T'^2};\ \text{ou}\ \frac{a^2}{T^2} : \frac{a'^2}{T'^2} = \frac{a'}{a},$$

et

$$\frac{2\pi a}{T} : \frac{2\pi a'}{T'} = \sqrt{\frac{a'}{a}}.$$

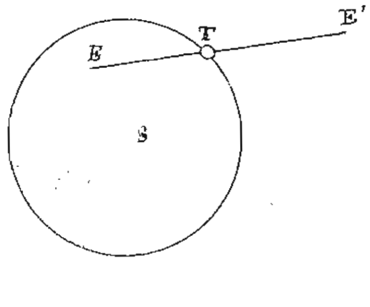
Nous pouvons supposer approximativement que les deux orbites sont des cercles; alors $2\pi a$, $2\pi a'$ sont leurs circonférences, et conséquemment $\frac{2\pi a}{T}$, $\frac{2\pi a'}{T'}$ sont les vitesses absolues de la terre et de la planète. Leur rapport est égal à $\sqrt{\frac{a'}{a}}$; or $a' > a$; donc la vitesse de la terre est plus grande que celle de la planète. C. Q. F. P.

Précession des équinoxes.

Nous avons vu que le phénomène de la précession des équinoxes consiste en ce que, la longitude de chaque étoile comptée à partir de la ligne des équinoxes augmente annuellement de 50",1, comme si la voute céleste était animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe de l'écliptique, d'occident en orient, ou bien que la ligne des équinoxes fût animée d'un mouvement de rétrogradation c'est-à-dire d'orient en occident, sur l'écliptique.

L'écliptique est le plan dans lequel le soleil semble se mouvoir ; mais si on suppose le soleil fixe et la terre mobile, ce sera le plan de l'orbite terrestre. La ligne des équinoxes sera la droite d'intersection de ce plan par l'équateur terrestre, puisque celui-ci est dans le plan de l'équateur céleste. Ainsi la ligne des équinoxes sera une droite passant par le centre de la terre, et se mouvant avec elle dans le plan de l'écliptique ; et cette droite ne restera pas parallèle à elle-même, elle déviera du parallélisme d'un angle de 50",1 par année ; de sorte qu'en 26000 ans environ, elle accomplira autour du centre de la terre une révolution complète. Cette révolution se fera en sens contraire du mouvement de la terre.

Supposons que le plan de l'équateur terrestre garde la même inclinaison sur le plan de l'écliptique ; son axe restera également incliné sur l'axe fixe de l'écliptique ; mais la direction de cet axe changera, puisque la ligne des équinoxes, qui lui est perpendiculaire,



tourne autour du centre de la terre. Il s'ensuit que si la terre restait fixe pendant les 26000 ans que la ligne des équinoxes emploie à faire sa rotation, l'axe terrestre décrirait un cône de révolution autour de l'axe de l'écliptique dans cet intervalle de temps.

Ainsi il faudra admettre, dans l'hypothèse du mouvement de la terre, que son axe des pôles ne reste pas parallèle à lui-même, et qu'il change de direction en décrivant un cône de révolution autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique ; ce cône étant décrit dans l'espace de 26000 ans environ. Son angle au centre est de 23° 27'. C'est-à-dire que l'axe des pôles de la terre est incliné de 23° 37' sur l'axe de l'écliptique.

Ce mouvement de l'axe des pôles terrestres rend compte de la précession des équinoxes. Nous verrons qu'en effet ce mouvement a lieu, et nous dirons la cause qui le produit.

Nutation.

Nous avons vu que chaque étoile paraît osciller autour d'une position moyenne et décrire, en 18 ans $\frac{2}{3}$, une petite ellipse dont les demi-axes sont de 9",2 et 6",87 environ. Nous avons appelé nutation ce petit mouvement périodique. Nous avons dit qu'on pouvait considérer les étoiles comme fixes, et attribuer au pôle du monde un mouvement semblable. Il faut donc, si nous supposons la terre mobile, que son axe de rotation, qui est dirigé suivant l'axe du monde, éprouve ce petit mouvement de nutation ; et cette hypothèse rend raison de la nutation apparente des étoiles. Ainsi nous admettrons que l'axe de la terre, en même temps qu'il est animé du mouvement de précession, et qu'il accomplit une révolution de 26000 ans, éprouve un autre petit mouvement périodique qui s'accomplit en 18 ans $\frac{2}{3}$, autour d'une position moyenne.

Nous verrons plus loin quelle est la cause de ce petit mouvement de nutation.

Ce mouvement altère l'inclinaison de l'axe de la terre sur l'écliptique, et conséquemment l'inclinaison du plan de l'équateur terrestre ; de sorte que l'inclinaison de 23° 27′ n'est qu'une valeur moyenne.

Interprétation des lois de Képler.

Rappelons l'énoncé de ces trois lois :

1° Le rayon vecteur mené du soleil à une planète décrit des aires égales dans des temps égaux ;

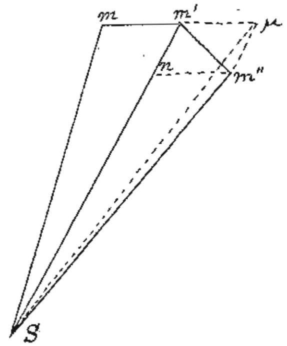
2° Chaque planète décrit une ellipse dont le soleil occupe un des foyers ;

3° Les carrés des temps périodiques des planètes sont comme les cubes des demi-

grands axes de leurs orbites. (*)

La première loi, relative aux aires décrites par les rayons vecteurs, prouve que *la force qui dévie, à chaque instant, la planète de la direction rectiligne, est dirigée, nécessairement, vers le soleil*.

En effet, soit mm' l'élément rectiligne parcouru par la planète pendant un temps dt. Puisque la planète ne continue pas de se mouvoir suivant le prolongement $m'\mu$ de cet élément, il existe nécessairement une certaine force perturbatrice qui vient se combiner avec celle qui lui a fait décrire cet élément mm', pour écarter la planète de la direction $m'\mu$, et l'amener en m''. Quelle est cette force ? Or sans cette force la planète décrirait, dans le temps dt, l'espace $m'\mu = mm'$; et l'aire $m'S\mu$ serait égale à l'aire mSm'. Mais l'aire $m''Sm'$ est aussi égale à mSm', d'après la loi de Kepler, on a donc $m''Sm' = \mu Sm'$; mais ces deux triangles ont même base Sm', ils ont donc aussi même hauteur ;



(*) Souvent, au lieu de dire *le demi-grand axe d'une orbite*, on dit la *moyenne distance de la planète au soleil*, parce qu'en effet, le demi-grand axe est la moyenne entre la plus grande et la plus petite distance de la planète au soleil.

c'est-à-dire que la ligne $m''\mu$ est parallèle à Sm'. Donc si l'on prend sur $m'S$ le segment $m'n = \mu m''$, $m'm''$ sera la diagonale du parallélogramme construit sur les côtés $m'\mu$ et $m'n$. Ces deux côtés représentent donc les deux forces qui ont agi sur la planète pour lui faire décrire l'élément $m'm''$. La première est précisément celle qui lui avait fait décrire l'élément mm', la deuxième est donc la force perturbatrice qui, à chaque instant, vient détourner la planète de sa direction; et cette force est constamment dirigée vers le soleil. C.Q.F.D.

Voilà donc la signification de la loi des aires; ou, si l'on veut, sa conséquence mathématique.

Cette conséquence a été connue de Képler; mais elle n'apprend rien sur l'~~identité~~ intensité de la force qui attire la planète vers le soleil; et un raisonnement inexact avait porté Képler à supposer que cette force d'attraction pouvait s'exercer en raison inverse de la simple distance de la planète au soleil.

C'est la 2e loi, relative à la forme elliptique de l'orbite planétaire qui détermine l'intensité de la force d'attraction. On le conçoit; car si la loi suivant laquelle cette force agit était donnée en fonction de la distance de la planète au soleil, la courbe décrite par la planète serait par là même, déterminée, et on saurait en trouver l'équation par les formules de la dynamique. Donc, réciproquement, la courbe étant connue, de forme et de position par rapport au centre d'attraction,

l'expression de la force attractive doit être aussi déterminée. Et en effet, Newton a reconnu, par les principes de la dynamique, que, puisque la courbe décrite par chaque planète est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers, il faut nécessairement que la force qui l'attire vers le soleil soit en raison inverse du carré de la distance de la planète au soleil. La démonstration de cette proposition a été donnée dans le cours de mécanique rationnelle, il est donc inutile de la reproduire ici. Il nous suffit de rappeler que la loi d'attraction, *en raison inverse du carré de la distance*, est comprise implicitement dans la loi de Képler; qu'elle en est la conséquence ou l'interprétation mathématique.

Passons à la troisième loi, qui établit un rapport général entre les distances des planètes au soleil et les temps de leurs révolutions.

Nous venons de reconnaître que l'action du soleil sur une planète, dans ses différentes positions, varie suivant les valeurs inverses des carrés des distances de la planète, c'est-à-dire que son expression est de la forme $\frac{a}{r^2}$, a étant un nombre constant, dans tout le cours du mouvement de la planète. Pour une autre planète, la force d'attraction du soleil aurait pour expression $\frac{a'}{r'^2}$. Quels sont ces coefficients a, a', constants pour chaque planète respectivement? Sont-ils les mêmes, à égalité de masse, ou bien diffèrent-ils suivant la nature de la matière qui compose chaque planète? Par exemple, si la force attractive du soleil était du genre de l'action magnétique qui dépend essentiellement de la nature des substances, les coefficients a, a' seraient très différents. Eh bien, la troisième loi de Képler résout la question que nous venons de poser; elle apprend que les coefficients a, a', sont égaux, à égalité de masse planétaire, quelle que soit la nature des matières dont les planètes sont composées; c'est-à-dire qu'à la même distance du soleil et à masse égale, toutes les planètes éprouveraient de sa part la même attraction.

Ainsi les lois de Képler font connaître les forces qui régissent notre système planétaire, et conduisent à l'explication newtonienne du mécanisme du ciel. Remarquons, en passant, qu'elles ont dévoilé une grande et admirable destination de ces antiques courbes, les sections coniques, qui étaient cultivées spéculativement depuis 2000 ans, sans qu'on se doutât du double rôle qu'elles devaient jouer, par elles-mêmes, comme étant les orbites planétaires, et par la propriété de leurs foyers, d'être les centres des attractions qui enchainent et font mouvoir les corps célestes. (*)

(*) Il existe dans les cônes du 2e degré deux droites, appelées les <u>lignes focales</u> du cône, qui jouissent de nombreuses propriétés analogues à celles des foyers dans les sections coniques. Peut-être trouvera-t-on que ces droites jouent aussi, dans quelques phénomènes naturels, (par exemple dans les phénomènes de la double réfraction et de la polarisation) un rôle analogue à celui des foyers dans le système planétaire. Dans les surfaces du 2e degré ce sont 2 courbes, une ellipse et une hyperbole (ou bien 2 paraboles, dans les paraboloïdes) qui donnent lieu à des propriétés analogues à celles des foyers dans les sections coniques et des lignes focales dans les cônes.

Des perturbations qu'éprouvent les éléments elliptiques.

Les lois de Képler ne sont pas absolument conformes aux mouvements des planètes, elles n'en sont qu'une approximation; tellement que, si les observations d'après lesquelles l'illustre astronome est parvenu à ces admirables lois, eussent été d'une parfaite précision, sa découverte lui eût échappé. Les petites différences variables, qui ont lieu entre le mouvement réel d'une planète et le mouvement approché qu'indiquent les lois de Képler, s'appellent <u>inégalités</u> ou <u>perturbations</u>, parce qu'elles sont dues à certaines causes qui troublent le mouvement normal.

Ces perturbations, quoique très petites et communément insensibles dans un court intervalle de temps, finissent, lorsqu'elles s'accumulent dans le cours des âges, par altérer notablement les éléments elliptiques originaires; au point que les valeurs de ces éléments, qui représentaient parfaitement les mouvements de la planète à une certaine époque, n'y satisfont plus après un laps de temps suffisant.

Ces perturbations proviennent des actions mutuelles des planètes les unes sur les autres. S'il n'y avait d'autres corps dans l'univers que le soleil et une planète, celle-ci décrirait exactement une ellipse autour du soleil, et les deux premières lois de Képler se vérifieraient rigoureusement. Mais chacune des autres planètes exerce une certaine attraction sur la première, attraction qui la fait dévier de sa route et détruit l'exactitude mathématique de son mouvement.

Quant à la troisième loi, elle n'est qu'approximative, même en faisant abstraction des influences réciproques des planètes les unes sur les autres; et cela tient à la différence des masses des diverses planètes. En effet, soit M la masse du soleil, et m celle d'une planète. Soit μ l'action que deux masses égales à l'unité de masse, exerceront l'une sur l'autre à une distance égale à l'unité de distance. L'attraction du soleil sur l'unité de masse de la planète sera égale à $\frac{\mu M}{r^2}$; ce sera la force accélératrice qui sollicitera la planète, en vertu de l'action du soleil. Réciproquement, l'attraction de la planète sur l'unité de masse du soleil sera $\frac{\mu m}{r^2}$ ou $-\frac{\mu m}{r^2}$ en regardant la première comme

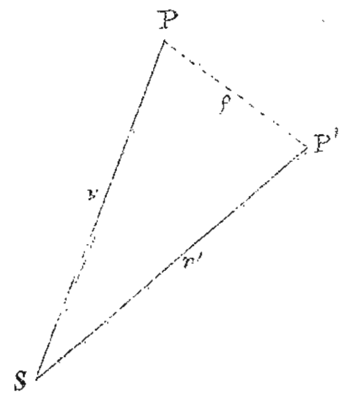
positive. Cette action produit un déplacement du soleil qu'elle rapproche de la planète: si donc nous voulons supposer le soleil fixe, il faut lui attribuer une action sur la planète, égale et contraire à celle que cette planète exerce sur lui. L'action totale du soleil sur l'unité de masse de la planète sera donc une force accélératrice égale à $\frac{\mu(M+m)}{r^2}$. Or les masses des planètes sont différentes; le coefficient de $\frac{1}{r^2}$ dans l'expression de l'attraction du soleil sur les planètes ne sera donc pas constant comme le voudrait la troisième loi de Képler; mais le terme m est très petit par rapport à la masse M du soleil, car la masse de Jupiter, la plus considérable, n'est que neuf dix millièmes environ de celle du soleil. (✳) Il s'ensuit que le coefficient de $\frac{1}{r^2}$ reste à peu près le même pour toutes les planètes, et que la troisième loi de Képler se vérifie approximativement.

Calcul des éléments elliptiques en ayant égard aux attractions réciproques des planètes.

Considérons seulement deux planètes P, P';

(✳) Plus exactement: 0,000 953 570 222; c'est-à-dire 953 570 222 trillioniemes. Les masses de toutes les planètes réunies ne sont pas un huit-centième de celle du soleil.

et supposons, pour simplifier la question, que leurs orbites soient dans le même plan; soient m, m' leurs masses, M celle du soleil; r, r' les distances des deux planètes au soleil; x, y les coordonnées de la première, et x', y' celles de la deuxième; enfin soit ρ leur distance. Nous supposons l'origine des coordonnées placée au centre du soleil.



L'action de la planète P sur le soleil sera $\frac{m}{r^2}$, ses composantes parallèles aux axes coordonnés seront

$$\frac{m}{r^2}\cos(r,x);\quad \frac{m}{r^2}\cos(r,y),\quad \text{ou}\quad \frac{mx}{r^3},\quad \frac{my}{r^3}.$$

Attribuons au soleil, comme nous l'avons fait ci-dessus, une action sur la planète égale et dirigée en sens contraire; ses composantes seront

$$-\frac{mx}{r^3};\quad -\frac{my}{r^3}.$$

Pareillement la planète P' exercera une action égale à $\frac{m'}{r'^2}$; et nous supposerons le soleil doué d'une action égale et directement contraire, qu'il exercera sur la planète P', et dont les composantes seront

$$-\frac{m'x'}{r'^3},\quad -\frac{m'y'}{r'^3}.$$

L'action propre du soleil, en vertu de sa masse, sur la planète P, a pour composantes

$$-\frac{Mx}{r^3},\quad -\frac{My}{r^3}.$$

Enfin l'action de la planète P' sur la planète P a pour composantes

$$\frac{m'(x'-x)}{\rho^3},\quad \frac{m'(y'-y)}{\rho^3}.$$

Les composantes de la force accélératrice qui sollicite la planète P sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m+M}{r^3}x - \frac{m'x'}{r'^3} + \frac{m'(x'-x)}{\rho^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m+M}{r^3}y - \frac{m'y'}{r'^3} + \frac{m'(y'-y)}{\rho^3}.$$

Pareillement les composantes de la force accélératrice qui sollicite la planète P', sont

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{m'+M}{r'^3}x' - \frac{mx}{r^3} + \frac{m(x-x')}{\rho^3},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{m'+M}{r'^3}y' - \frac{my}{r^3} + \frac{m(y-y')}{\rho^3}.$$

Ces quatre équations suffisent pour déterminer les coordonnées des deux planètes, en fonction du temps. Les intégrales contiendront quatre constantes relatives à chaque planète. Il y en eût eu six, si nous avions supposé les orbites dans des plans différents. Ces six constantes équivalent aux six éléments elliptiques de la planète. On déterminera ces constantes, au moyen d'observations. En effet chaque observation d'une planète fera connaître ses coordonnées x, y, z. On mettra dans les expressions générales de ces coordonnées en fonction du temps, trouvées par l'intégration, les valeurs numériques que donne l'observation actuelle. On aura ainsi une équation entre les constantes. Chaque nouvelle observation fournira une nouvelle équation. On formera donc autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer les constantes; ou plutôt on formera un grand nombre d'équations que l'on traitera par la méthode des moindres carrés.

Les masses des planètes entrent dans les équations; on pourra les considérer comme des inconnues, qu'on déterminera en même temps que les constantes, ou éléments elliptiques des planètes.

Quand on ne considère que deux planètes, la question est connue sous le nom de problème des trois corps. L'intégration des équations offrait de très grandes difficultés; aussi ce problème, quoique le plus simple dans ce genre, n'a été résolu que par les successeurs de Newton.

Des inégalités périodiques et séculaires des éléments elliptiques des planètes.

La méthode que nous venons d'exposer pour la détermination des éléments elliptiques des planètes, diffère essentiellement, quant au

principe et quant aux résultats, des deux méthodes déjà enseignées précédemment. Celles-ci reposaient sur les lois de Képler, et donnaient pour les éléments elliptiques de chaque planète, des valeurs fixes et déterminées. La nouvelle méthode repose sur la loi de la gravitation universelle, et donne pour les mêmes inconnues des valeurs qui ne sont point constantes, et qui, au contraire, sont des fonctions du temps et par conséquent sont variables. On trouve que ces éléments elliptiques, excepté les demi-grands axes dont nous reparlerons tout-à-l'heure, ont pour expression une quantité constante, suivie de termes dépendant du temps et périodiques. Ces termes forment les équations ou inégalités de l'élément elliptique, et le terme constant en est la valeur moyenne. Ces inégalités sont de deux sortes. Les unes s'appellent inégalités périodiques; elles dépendent de la situation mutuelle des diverses planètes, et reprennent les mêmes valeurs quand les configurations ou positions respectives des planètes redeviennent les mêmes. Leurs périodes ne sont pas, en général, d'une bien longue durée. Les autres s'appellent inégalités séculaires; elles sont bien périodiques comme les premières, mais elles ne dépendent pas des positions relatives, ou configurations des planètes, et la durée de leur période est extrêmement considérable, par exemple, de plusieurs milliers de siècles, tellement, qu'elles semblent croître proportionnellement au temps, et que les observations n'auraient pu faire soupçonner une période que l'analyse seule pouvait indiquer.

Les demi-grands axes des orbites planétaires jouissent en quelque sorte d'un privilège exclusif ; quoiqu'ils aient des inégalités périodiques, ils sont exempts des inégalités séculaires qui affectent les autres éléments.

Une conséquence importante de cette invariabilité des grands axes, est la constance des révolutions périodiques. Il s'ensuit, par exemple, que l'année sidérale est toujours de même durée ; ce qui n'a pas lieu, comme nous l'avons vu, pour l'année tropique. Ainsi l'année sidérale offre une mesure du temps qui sera la même aux époques les plus reculées.

Les inclinaisons des orbites planétaires, et leurs excentricités, ne sont point invariables comme les grands axes, elles ont des inégalités séculaires; mais ces inégalités sont renfermées dans de très étroites limites. (*)

(*) La variation séculaire de l'inclinaison de l'écliptique, produite par l'action des planètes, est actuellement de 48" par siècle. Elle s'est manifestée aux astronomes par l'augmentation des latitudes de toutes les étoiles dans certaines régions du ciel, et la diminution des latitudes pour celles qui sont situées dans les régions opposées. Il en résulte que l'écliptique se rapproche de l'équateur. Après une immense période de siècles, l'inclinaison deviendra croissante; et elle oscillera de part et d'autre d'une valeur moyenne, sans que ses écarts dans un sens et dans l'autre, puissent atteindre 1°21'.

L'excentricité de l'orbite terrestre va en diminuant depuis les âges les plus reculés; sa variation actuelle n'est pas de plus de 0,00004 en un siècle. Cette diminution continuera (il y a peu de raison d'en douter), jusqu'à ce que l'excentricité s'évanouisse, et que l'orbite devienne exactement circulaire; après quoi l'excentricité croîtra jusqu'à une certaine limite peu considérable, pour décroître ensuite de nouveau. La durée de cette période, dit M.r J. Herschel, ne se compte ni par centaines ni par milliers d'années. C'est une étendue dans laquelle l'histoire de l'astronomie et de la race humaine ne figure en quelque sorte que comme un point.

Cette circonstance jointe à l'invariabilité des grands axes, assure la fixité de notre système planétaire.

La connaissance de cette belle loi du système du monde, est due à Lagrange et à Laplace, dont M.r Poisson a, sur plusieurs points essentiels, complété les travaux.

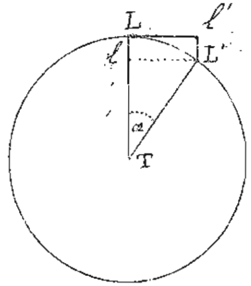
25.e Leçon:

Identité de la pesanteur à la surface de la terre, avec la force d'attraction qui retient la lune dans son orbite autour de la terre.

Tous les corps, lorsqu'on les élève au dessus de la surface de la terre, retombent en suivant la verticale. Ils sont déterminés à cette descente en vertu d'une force ou d'un effort qu'on nomme *pesanteur* ou *gravité*. Dans tous les temps, quelques philosophes ont attribué cette force à une *attraction* que la terre exercerait sur tous les corps qui l'environnent. C'est surtout dans le XVII^e siècle, que cette idée d'*attraction* a été reproduite avec le plus d'autorité. On pensa même que c'était une force de même nature, qui, s'exerçant sur la lune, retenait ce satellite dans son orbite autour de la terre. Mais on ne sut pas quelle était la variation d'intensité de cette force attractive de la terre, en raison de l'augmentation ou de la diminution de la distance du corps attiré. et faute de connaître cette loi de la force d'attraction, on ne pouvait donner suite à une idée si heureuse et si féconde. Ce fut Newton qui découvrit cette loi. Il pensa que l'attraction devait s'exercer *en raison inverse du carré de la distance du corps attiré au corps attirant*; et il vérifia aussitôt, par un calcul appliqué au mouvement de la lune, cette conjecture qui fut l'origine et le fondement de son système de la *gravitation universelle*.

Il chercha, d'après le mouvement connu de la lune, quelle est l'intensité de la force attractive qui dévie ce satellite de la ligne droite et lui fait décrire une ellipse autour de la terre, et il compara cette force à l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre, pour vérifier s'il y a entre l'une et l'autre la raison inverse des carrés des distances au centre de la terre.

Soit LL' un arc de l'orbite lunaire assez petit pour que, pendant que la lune le décrit, la force attractive exercée par la terre, reste sensiblement constante et parallèle à la droite LT. Que l'on construise le rectangle Ll L' l'; son côté Ll' représentera la force d'impulsion dont la lune est animée quand elle arrive en L, et son côté Ll, la force d'attraction exercée par la terre.



Cette attraction est une force accélératrice; et puisque nous la supposons constante et s'exerçant dans une même direction LT, son expression est, comme on sait, le double de l'espace qu'elle fait parcourir à la lune, divisé par le carré du temps. Soit donc t le temps que la lune met à aller de L en L'; ce sera le temps que la force accélératrice emploierait à la faire tomber vers la terre, de l'espace Ll; ainsi l'expression de cette force accélératrice est $\frac{2.Ll}{t^2}$.

Soit $LT = R$ et α l'angle LTL'; on a

$$Ll = LT - Tl = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha) = 2R\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha;$$

ou simplement

$$Ll = 2R\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

parce que l'angle α étant très petit, nous pouvons le substituer à son sinus. Soit T la durée de la révolution de la lune autour de la terre; on a par la loi des aires et en supposant, par approximation, que l'orbite lunaire est circulaire,

$$\frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} \; ; \; \alpha = \frac{2\pi t}{T} \; ; \text{ et } Ll = \frac{2R\pi^2 t^2}{T^2}.$$

La force accélératrice qui sollicite la lune a donc pour valeur $\frac{4R\pi^2}{T^2}$.

Soit g l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre; si c'est la même force qui agit sur la lune, dans la raison inverse du carré des distances, on devra avoir, en appelant r le rayon de la terre,

$$\frac{4R\pi^2}{T^2} : g = \frac{r^2}{R^2} ;$$

ou

$$g = \frac{4R^3\pi^2}{r^2 T^2}.$$

Il faut vérifier si cette valeur de g s'accorde avec celle que donnent les expériences sur la chute des corps à la surface de la terre.

On a $R = 60.r$; $r = 6360000$ mètres ;
$T = 27^j,3$, ou, pour exprimer T en secondes,
$T = (27,3)\,24^h = (27,3).24.60' = (27,3) \cdot 24.3600''$.
on a donc

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(60)^3\, 6360000 = \frac{4\pi^2 (60)^3 .\, 6360000}{(3600'')^2\, 24^2\, (27,3)^2}.$$

Cette valeur de g, est à peu près égale à celle que donne l'expérience, savoir $g = 9^m,8096$. Cependant il y a une petite différence qui provient de ce que dans le rapport des attractions nous n'avons pas

tenu compte des masses de la terre et de la lune, ou du moins nous avons négligé celle-ci qui est $\frac{1}{75^e}$ de celle de la terre. Car en appelant M la masse de la terre, et m celle de la lune, c'est la proportion

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} : g = \frac{M+m}{R^2} : \frac{M}{r^2} \; ; \text{ ou } \frac{4R^3\pi^2}{T^2} = g r^2 \frac{M+m}{M}$$

que l'on doit avoir.

Ainsi il est prouvé que l'action de la terre sur la lune, et la pesanteur des corps à la surface de la terre, sont une même force qui s'exerce sur tous les corps avec une intensité qui est en raison inverse des carrés de leurs distances au centre de la terre.

Loi des masses. La troisième loi de Képler donnait immédiatement à Newton la loi des masses. Car nous venons de trouver que la force accélératrice qui sollicite le corps attiré vers le corps attirant a pour expression $\frac{4R\pi^2}{T^2}$. Puisqu'elle est proportionnelle à la valeur inverse du carré de la distance, on a donc $\frac{4R\pi^2}{T^2} = \frac{C}{R^2}$ · d'où $\frac{R^3}{T^2} = \frac{C}{4\pi^2}$; C étant une constante relative au mobile dont il s'agit. Pour un autre corps on aura $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{C_1}{4\pi^2}$. Or la 3e loi de Képler dit que $\frac{R^3}{T^2} = \frac{R_1^3}{T_1^2}$. Donc $C = C_1$. Donc la force accélératrice, pour la même distance des corps attirés, est la même. Donc la force motrice, c'est-à-dire l'attraction totale est exclusivement proportionnelle aux masses.

Telles sont les considérations qui ont conduit Newton à la loi de la gravitation universelle, c'est-à-dire de l'attraction universelle des corps, en raison directe des masses et inverse des carrés des distances.

Notice historique sur la découverte de la loi d'attraction. (non exigé).

Dans tous les temps, même chez les Anciens, il s'est trouvé des philosophes qui ont attribué à la terre une force nécessaire pour retenir les corps autour de son centre, et qui ont regardé comme une loi générale, que toute la matière de l'univers était douée d'une pareille tendance vers certains centres.

Copernic, (1473 — 1543) eut aussi l'idée d'une attraction générale; car il attribuait la rondeur des corps célestes à la tendance qu'ont leurs différentes parties à se réunir.

Tycho, (1546 — 1601) semble avoir fait un pas de plus, en adoptant une force centrale dans le soleil pour retenir les planètes dans leurs orbites autour de lui.

Képler, (1571 — 1630) génie plus vaste et plus hardi, porta ses idées encore plus loin: il n'admit pas seulement l'attraction de chaque planète sur ses propres molécules, et l'attraction du

soleil sur les planètes autres que la terre; ainsi que faisait Tycho; il sentit que l'attraction était générale et réciproque; que celle du soleil devait s'étendre sur la terre et sur la lune, et qu'elle causait les inégalités reconnues dans le mouvement de ce satellite de la terre; enfin, que les corps attirés par le soleil exerçaient réciproquement une attraction sur cet astre lui-même. Képler s'exprime, notamment sur l'attraction réciproque entre la terre et la lune, d'une manière explicite très remarquable. Il dit que « les eaux de la mer s'élèveraient vers la lune, » si la terre ne les attirait; et que la lune tomberait » vers la terre, sans la force de projection avec laquelle » elle décrit son orbite. » Il explique le phénomène des marées par l'attraction de la lune.

Fermat (1601 — 1665) eut les mêmes idées que Képler sur une attraction générale et réciproque de toutes les parties de la matière. Il dit: « La commune opinion est que la pesanteur est » une qualité qui réside dans le corps même qui » tombe; d'autres sont d'avis que la descente des » corps procède de l'attraction d'un autre corps qui » attire celui qui descend, comme la terre. Il y a » une troisième opinion qui n'est pas hors de » vraisemblance, que c'est une attraction mutuelle » entre les corps, causée par un désir naturel que » les corps ont de s'unir ensemble, comme il est » évident au fer et à l'aimant, lesquels sont tels, » que, si l'aimant est arrêté, le fer ne l'étant pas, » l'ira trouver; et si le fer est arrêté, l'aimant

» ira vers lui : et si tous deux sont libres, ils s'approcheront réciproquement l'un de l'autre, en sorte toutefois que le plus fort des deux fera le moins de chemin. » (<u>varia opera math. p. 24.</u>)

L'attraction fut adoptée par Bacon (1561–1626) qui dans son fameux livre intitulé <u>Novum organum scientiarum</u>, parle souvent de l'attraction magnétique de la terre sur les corps graves ; de la lune sur les eaux de la mer ; du soleil sur Mercure et Vénus. Le célèbre philosophe proposa même des expériences propres à vérifier ces attractions.

L'astronome Hévélius (1611 – 1687) donnait aux comètes un mouvement parabolique résultant de l'action simultanée d'une force de <u>projection</u> et de l'<u>attraction</u> du soleil.

Roberval (1602 – 1675) attribuait à toutes les parties de matière dont l'univers est composé, la propriété de tendre les unes vers les autres ; « c'est » pour cela, dit-il, qu'elles se disposent sphériquement, » non par la vertu d'un centre, mais par leur » <u>attraction mutuelle</u>, et pour se mettre en équilibre les unes avec les autres. » (<u>Aristarchi Samii de mundi systemate liber</u>. 1644.)

Le docteur Hook (1635 – 1703), exprima comme Képler, Fermat et Roberval, le principe d'une attraction mutuelle de tous les corps célestes. Après avoir dit que cette force est d'autant plus puissante, que le corps sur lequel elle s'exerce est plus près du centre d'attraction, il ajoute : « Pour » ce qui est de la <u>proportion</u> suivant laquelle ces » forces diminuent à mesure que la distance augmente, » j'avoue que je ne l'ai pas encore vérifiée . . . . . . » Je donne cette ouverture à ceux qui ont assez » de loisir et de connaissances pour cette » recherche. »

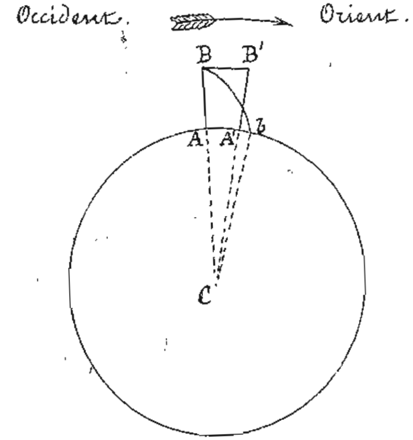
Cette loi que le docteur Hook proposait de trouver, fut précisément celle que chercha Newton (1642 – 1727), et qu'il eut le bonheur de découvrir : c'est en la vérifiant sur le mouvement de la lune, qu'il fut confirmé dans l'idée qu'il possédait le véritable principe de la mécanique céleste, la plus grande loi de l'univers.

Pemberton rapporte que les premières conjectures de Newton datent de 1666. Mais ce ne fut qu'en 1687 que parut le grand ouvrage des <u>Principes mathématiques de la philosophie naturelle</u>, qui contient les admirables travaux de l'auteur sur la mécanique des corps célestes, ou système du monde. C'est par la synthèse géométrique, je veux dire par la seule géométrie des Anciens, que Newton a traité ces grandes questions qui depuis sont entrées dans le domaine de l'analyse.

Il est juste de dire que les travaux de ses prédécesseurs, pendant un demi-siècle fécond en grands géomètres et astronomes, concouraient tous à former et à réunir comme à dessein, les matériaux qui lui étaient nécessaires. Laplace développe cette idée dans l'<u>exposition du système du monde</u> (p. 375). où il dit : « Il était réservé à Newton de nous faire connaître le principe général des mouvements célestes. La nature, en le douant d'un profond génie, prit encore soin de le placer dans les circonstances les plus favorables. Descartes avait changé la face des sciences mathématiques, par l'application féconde de l'algèbre à la théorie des courbes et des fonctions variables. Fermat avait posé les fondements de l'analyse infinitésimale, par ses belles méthodes des maxima et des tangentes. Wallis, Wren et Huygens venaient de trouver les lois de la communication du mouvement. Les découvertes de Galilée sur la chute des graves, et celles d'Huygens sur les développées et sur la force centrifuge, conduisaient à la théorie du mouvement dans les courbes. Képler avait déterminé celles que décrivent les planètes, et entrevu la gravitation universelle. Enfin Hook avait très bien vu que les mouvements planétaires sont le résultat d'une force primitive de projection combinée avec la force attractive du soleil. La mécanique céleste n'attendait ainsi pour éclore, qu'un homme de génie, qui, rapprochant et généralisant ces découvertes, sût en tirer la loi de la pesanteur. C'est ce que Newton exécuta dans son ouvrage des principes mathématiques de la philosophie naturelle. »]

Chute des corps d'une grande hauteur. — Preuve du mouvement de rotation de la terre.

Concevons une tour élevée en un point A de la terre, à une hauteur AB assez considérable, de 100 mètres par exemple. Que la face AB de cette tour, située du côté de l'orient soit parfaitement verticale, de sorte que sa direction se confonde avec celle du fil à plomb. Que du point B on laisse tomber un corps pesant; si la terre



est immobile, ce corps suivra, dans sa chute, la verticale et viendra tomber en A, au pied de la tour. Mais si la terre a un mouvement de rotation sur elle-même, dans la direction de l'occident à l'orient, le corps grave situé en B participera à ce mouvement; il sera donc animé d'une force de projection dans le sens BB' perpendiculaire à AB, au moment où il deviendra libre. En même temps, il sera soumis à l'action de la pesanteur provenant de l'attraction de la terre, de sorte que sa trajectoire sera une ellipse ayant un foyer au centre de la terre, en supposant toutefois que la direction de l'attraction tende vers le centre, comme si la terre était parfaitement sphérique et homogène. Soit b le point où cette ellipse rencontre la surface de la terre, et t le temps que le corps a mis à arriver en ce point. Pendant ce temps la terre à tourné et la verticale AB est venue en A'B'. La force accélératrice qui a fait dévier, à chaque instant, le corps de la direction BB', étant dirigée vers le centre C de la terre, l'aire du secteur décrit à chaque instant, sera égale à l'aire du secteur que ce corps eut décrit en vertu de la seule force de projection. Donc l'aire totale BCbB décrite pendant le temps t est égale à l'aire BCB'B qui eut été décrite pendant ce même temps, en vertu de la seule force de projection. Pour que cette égalité ait lieu, il faut nécessairement que le point b soit au delà du point A'. Ainsi si la terre tourne, un corps abandonné à lui-même, à une certaine hauteur en B, devra, dans sa chute, s'écarter de la verticale, et tomber en un point b distant du pied de cette verticale, et situé à l'orient, c'est-à-dire du côté vers lequel tourne la terre.

L'expérience a confirmé ce résultat de la théorie; c'est donc une nouvelle preuve du mouvement de la terre.

Calcul de la déviation du corps. L'angle A'Cb exprime la déviation du corps, c'est-à-

dire sa distance à la verticale au moment où il arrive à la surface de la terre. C'est cet angle que nous allons calculer.

Soit $r =$ CA le rayon de la terre; $h =$ AB et $\varphi =$ l'angle BCB'. La droite BB' étant très petite par rapport au rayon CB de la circonférence décrite par le point B dans le mouvement de rotation de la terre, nous considérerons le triangle BCB' comme un secteur de cercle. Son aire aura donc pour expression

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{CB}\times \mathrm{arc\,BB'} = \frac{1}{2}\,\varphi(r+h)^2.$$

Le secteur elliptique BCb se compose du secteur circulaire ACb et du segment elliptique ABb. Soit u l'angle de déviation A'Cb; on aura

$$\mathrm{AC}b = \varphi + u, \text{ et aire } \mathrm{AC}b = \frac{1}{2}\,r^2(\varphi+u).$$

Pour calculer le segment ABb, nous le considérerons comme appartenant à une parabole; car l'ellipse ayant son sommet en B et étant très aplatie on peut sans erreur sensible, la regarder comme une parabole dans l'étendue du petit arc Bb. Le segment ABb sera donc un segment parabolique, dont l'aire est le produit de sa base multipliée par les $\frac{2}{3}$ de sa hauteur, ou

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{A}b\times\mathrm{AB} = \frac{2}{3}\,hr(\varphi+u);$$

et l'aire du secteur BCb est

$$\frac{1}{2}\,r^2(\varphi+u) + \frac{2}{3}\,hr(\varphi+u).$$

On aura donc en l'égalant au secteur BCB',

$$\frac{1}{2}\varphi(r+h)^2 = \frac{1}{2}r^2(\varphi+u) + \frac{2}{3}hr(\varphi+u).$$

h et u sont des quantités très petites par rapport à r et à φ; on peut donc négliger le carré h^2 et le produit hu; alors il vient

$$\frac{1}{2}\varphi r^2 + \varphi r h = \frac{1}{2}r^2(\varphi+u) + \frac{2}{3}hr\varphi:$$

ou

$$\frac{1}{3}\varphi r h = \frac{1}{2}r^2 u$$

$$ru = \frac{2}{3}\varphi h.$$

Telle est l'expression de l'angle de déviation u. L'angle φ a pour valeur $\frac{AA'}{r}$. L'arc AA' est compté sur le parallèle du point A, et est proportionnel à la rotation que la terre éprouve pendant le temps que le corps met à tomber du point B à sa surface. Soit t ce temps, et T la durée de la révolution diurne de la terre; la rotation qui a lieu pendant le temps t a pour expression $\frac{2\pi}{T}t$. Soit λ la latitude du point A; on a

$AA' = \frac{2\pi}{T}t\,r'$

$$AA' = \frac{2\pi}{T}t.\,r\cos\lambda.$$

Or t étant le temps que le corps met à tomber de la hauteur $AB = h$, on a

$$h = \frac{gt^2}{2}, \text{ ou } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Donc

$$AA' = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2h}{g}}.\,r\cos\lambda, \text{ et}$$

$$\varphi = \frac{2\pi\cos\lambda}{T}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Et par suite

$$u = \frac{4}{3}\,\frac{\pi h\cos\lambda}{rT}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

ou, pour le calcul numérique,

$$u = \frac{4}{3}\,\frac{\pi h\cos\lambda}{rT\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Il restera à mettre dans cette expression de u les valeurs numériques de r, h, T, λ et π.

L'expérience prouve qu'un corps abandonné à lui même à une hauteur de 100 mètres (307 pieds), à une latitude de 45°, s'écarte du pied de la verticale, vers l'orient, de 15 millimètres (6 lignes $\frac{1}{2}$).

On peut faire l'expérience aussi en laissant tomber un corps dans un puits très profond, tel qu'un puits de mine. On a trouvé pour une profondeur de 162 mètres (500 pieds) une déviation de 27 millimètres (1 pouce).

Ces expériences sont des preuves convaincantes du mouvement de rotation de la terre sur elle même.

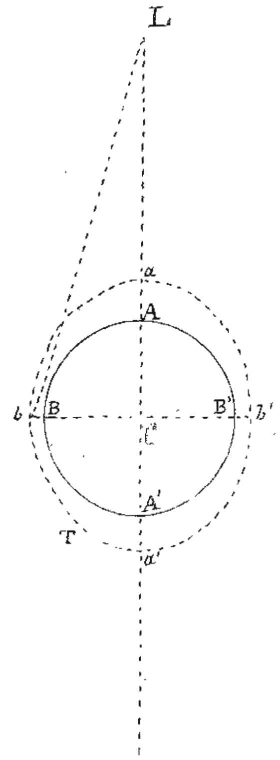
Théorie des marées.

On donne le nom de *Marées* à un

mouvement alternatif des eaux de la mer, d'après lequel elles s'élèvent et s'abaissent successivement au delà d'une certaine hauteur moyenne. Deux fois par jour, ou, plus exactement, deux fois en 25 heures environ, et à peu près à 12 h. ½ d'intervalle, la mer atteint sa hauteur maximum; et de même, deux fois dans le cours de ces 25 heures, elle atteint sa valeur minimum. Dans le premier cas on dit que la marée est haute, et dans le deuxième qu'elle est basse.

L'intervalle de 12 h. ½ environ qui a lieu entre deux marées hautes, de même qu'entre deux marées basses, est le temps qui sépare deux passages consécutifs de la lune au méridien, passage supérieur et passage inférieur. Il y a donc, à cet égard, analogie entre les retours périodiques des marées et le mouvement de la lune; ce qui porte à penser que la principale cause de ce phénomène est due à l'action de la lune. Voyons comment cette hypothèse nous rendra compte du phénomène.

Pour fixer les idées, supposons que la lune décrive l'équateur dans le mouvement diurne; et qu'un observateur soit placé en A sur l'équateur terrestre. La ligne AA' représente le méridien du lieu. Nous supposons la terre composée d'un noyau solide homogène et sphérique, recouvert d'une masse liquide. Le cercle ABA'B' représente la section du noyau solide par le plan de l'équateur, et la courbe



aba'b' la section de la surface liquide. Considérons la lune au moment où elle passe en L au méridien du lieu; soit m sa masse, et R sa distance au centre de la terre. L'attraction qu'elle exerce sur le noyau solide de la terre, passe par son centre et est proportionnelle à $\frac{m}{R^2}$. Les molécules liquides pourront obéir séparément à l'attraction de la lune. Cette attraction sera plus considérable sur les molécules situées en A du côté de la lune, que sur le centre de la terre; la différence sera

$$\frac{m}{(R-r)^2} - \frac{m}{R^2} = \frac{m[R^2-(R-r)^2]}{R^2(R-r)^2} = \frac{m(2Rr-r^2)}{R^2(R-r)^2},$$

ou $\frac{2mr}{R^3}$, en négligeant r^2 au numérateur et r devant R au dénominateur. Cette différence constitue une attraction relative de la lune sur les molécules liquides situées en A, comme si la lune n'exerçait pas d'attraction sur la partie solide de la terre.

Cette attraction relative diminue le poids de ces molécules liquides. L'action de la lune sur les molécules situées en b et b' à 90° de distance du point A sera sensiblement la même que sur la terre elle même. Car l'attraction de la lune sur une molécule en B a pour valeur $\frac{m}{\overline{Lb}^2}$; et sa composante dans le sens de CL est $\frac{m}{\overline{Lb}^2}\cos L$, L désignant l'angle bLC. on a $Lb=\frac{LC}{\cos L}$; la composante de l'attraction exercée sur la molécule b est donc $\frac{m}{R^2}\cos^3 L$. Or l'angle en L est très petit; c'est la parallaxe de la lune; on peut donc prendre son cosinus égal à l'unité; et la composante de l'attraction est $\frac{m}{R^2}$; c'est-à-dire qu'elle est la même que sur la terre elle-même; conséquemment la lune n'exercera point sur les molécules en b et b' une action particulière propre à contrebalancer son action sur les molécules en a. Il faut donc, pour que l'équilibre ne soit pas troublé, que son épaisseur dans les parties en a rendues moins pesantes, par suite de l'action de la lune, soit plus considérable que dans les parties en b et b'. Quant aux molécules liquides situées dans la partie a', diamétralement opposée à a, l'attraction qu'elles éprouveront de la part de la lune sera moindre que celle qu'elle exerce sur les molécules en b et b' et sur la terre solide; la différence est $\frac{m}{R^2}-\frac{m}{(R+r)^2}$, ou approximativement, $\frac{2mr}{R^3}$. En vertu de cette attraction

relative, la terre tendra à s'éloigner du liquide situé en a' : c'est comme si lui-même tendait à s'éloigner de la terre supposée fixe. Ainsi la pesanteur du liquide en a' sera diminuée, de même que la pesanteur du liquide en a ; son épaisseur devra donc être plus considérable qu'en b et b'. De sorte que l'on voit que la masse liquide prendra la forme d'un ellipsoïde allongé dans le sens a a', c'est-à-dire vers la lune.

Maintenant tenons compte du mouvement de rotation de la terre. Pour cela nous pouvons attribuer à la lune elle-même un mouvement de rotation fictif en sens contraire, et supposer la terre immobile; la lune, dans six heures, aura décrit 90°, et sera dans la direction bb'; cette direction sera donc celle du grand axe de l'ellipsoïde aqueux; conséquemment il y aura dépression en a et a'. Six heures après, la lune sera revenue au méridien du côté de a', et il y aura élévation du liquide en a et a'; puis, six heures après, dépression; et enfin après que le mouvement diurne sera accompli, la lune sera revenue au méridien du côté de a, et les mêmes phénomènes se reproduiront.

Observons maintenant que la lune ne revient pas au méridien au bout de 24 heures, parce qu'elle a un mouvement rétrograde, qui retarde son retour. Ce mouvement s'accomplit en 27 jours $\frac{1}{3}$; de sorte qu'il est de 13° 10' environ par jour; or la lune décrit 15° en 1 heure dans le mouvement diurne; il lui faudra donc 50' environ au delà des

24 heures du mouvement diurne, pour revenir au méridien. Donc l'intervalle entre deux marées correspondantes au passage supérieur de la lune au méridien, sera de 25 heures environ. Et par conséquent l'intervalle entre deux marées hautes consécutives, 12 h. $\frac{1}{2}$, et l'intervalle entre une marée haute et la marée basse suivante, 6 h. $\frac{1}{4}$.

Etablissement d'un port. Nous avons supposé que le mouvement ascensionnel de la masse liquide en a avait lieu au moment même où la lune occupait la position à laquelle répond ce mouvement. Mais il n'en est pas ainsi, la masse liquide met un temps assez long, et qui n'est pas le même dans tous les lieux sur une longue côte, à accomplir ce mouvement. Cela provient de différentes causes; de la cohésion des molécules liquides entr'elles; du frottement qu'elles éprouvent contre leur lit; de la vitesse qu'elles ont acquise dans le mouvement descendant auquel doit succéder le mouvement ascendant. Le retard qu'éprouve ainsi une marée, haute ou basse, est différent dans les différents lieux; mais il est toujours le même dans un même port.

Ce retard s'appelle *l'établissement d'un port*. Il est de 3 h. $\frac{1}{2}$ à Lorient; de 3 h. 33' à Brest; de 6 h. à St Malo; de 10 h. $\frac{1}{2}$ à Dieppe; et de 11 h. 45' à Dunkerque et à Calais. A Ostende, il n'est que de 20'.

Expression du mouvement ascensionnel de la mer en fonction du temps. Ce mouvement se composera d'une partie constante qui sera la hauteur moyenne, et d'une partie variable qui dépendra de la position de la lune, et qui par conséquent sera fonction du temps. Cette partie variable, étant périodique, pourra s'exprimer par un sinus ou un cosinus. Soit donc a la hauteur moyenne de la mer, dans le lieu pour lequel on veut calculer son mouvement, h sa hauteur pour une certaine position de la lune; on aura $h = a + \mu \cos V$, V étant un angle qui dépend de la position de la lune, et μ un coefficient constant, qui est la plus grande variation de hauteur, en plus et en moins, de la valeur moyenne a.

Soit ε l'angle que le cercle horaire de la lune fait à un instant t avec le méridien du lieu, V sera une fonction de cet angle ε. Appelons $\mathcal{C}$ la valeur de cet angle ε au moment de la plus grande hauteur de la mer. Nous connaissons quatre valeurs de la fonction V; car on doit avoir

$$h = a + \mu, \text{ quand } \varepsilon = \mathcal{C};$$
$$h = a - \mu, \text{ quand } \varepsilon = \mathcal{C} + 90°;$$
$$h = a + \mu, \text{ quand } \varepsilon = \mathcal{C} + 180°;$$
$$\text{et } h = a - \mu, \text{ quand } \varepsilon = \mathcal{C} + 270°.$$

Il est clair qu'on satisfait à ces quatre conditions en faisant $V = 2(\varepsilon - \mathcal{C})$. Posons donc

$$h = a + \mu \cos 2(\varepsilon - \mathcal{C}).$$

L'expérience prouve que cette formule satisfait au mouvement de la mer.

Comme le coefficient μ exprime la plus grande variation de hauteur, il est naturel de le supposer proportionnel à la force qui produit cette variation, c'est-à-dire à $\frac{mr}{R^3}$. Aussi fait-on $\mu = b\frac{mr}{R^3}$, b étant le coefficient qui convient dans le port auquel la formule sera applicable.

Il faut exprimer en fonction du temps l'angle ε que la lune fait avec le méridien. Les tables donnent, pour tous les jours, l'ascension droite de la lune, c'est-à-dire l'angle que son plan horaire fait avec la ligne des équinoxes; soit φ cet angle. Il suffit donc de connaitre l'angle que la ligne des équinoxes fait avec le méridien au moment pour lequel on calcule la hauteur de la mer. Soit t le temps sidéral qui marque cet instant; ce temps étant compté à partir du passage de la ligne des équinoxes au méridien. C'est ce temps qu'il faut convertir en angle pour avoir la position de la ligne des équinoxes. Soit θ le jour sidéral; l'angle de rotation correspondant à l'unité de temps sera $\frac{2\pi}{\theta}$, et l'angle correspondant au temps t, $\frac{2\pi}{\theta}t$, ou nt; en faisant $n = \frac{2\pi}{\theta}$ = vitesse de rotation de la terre. On a donc $\varepsilon = nt - \varphi$. De sorte que notre formule devient

$$h = a + b\frac{mr}{R^3}\cos 2(nt - \varphi - \mathcal{C}).$$

$\mathcal{C}$ est l'angle que la lune fait avec le méridien au moment de la plus grande hauteur. Cet angle est connu, puisqu'on sait par l'observation combien de temps après le passage de la lune au méridien, a lieu cette plus grande hauteur. On peut dire que $\mathcal{C}$ exprime le <u>retard</u> ou l'établissement du port.

Action du soleil sur les marées. Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'action de la lune; mais le soleil exerce une action semblable, et produit des effets analogues, quoique moins considérables, à cause de sa très grande distance. Le mouvement de la mer occasionné par l'attraction du soleil s'exprime par une formule semblable à la précédente; c'est-à-dire que les variations de hauteur, à partir de la hauteur moyenne, ont pour valeur

$$\frac{b'Mr}{D^3}\cos 2(nt - \varphi' - \mathcal{C}').$$

M étant la masse du soleil, D sa distance au centre de la terre; φ' l'ascension droite du soleil, et $\mathcal{C}'$ le retard de la marée solaire sur le passage au méridien.

La marée totale se compose donc de deux marées partielles, la marée lunaire et la marée solaire. Il faut donc pour déterminer la hauteur de la mer, à un instant quelconque, faire la somme des variations de hauteur dues partiellement à l'action de la lune et à l'action du soleil. On a pour expression de cette hauteur

$$H = a + \frac{bmr}{R^3}\cos 2(nt - \varphi - \mathcal{C}) + \frac{b'Mr}{D^3}\cos 2(nt - \varphi' - \mathcal{C}').$$

Nous avons dit que l'action de la lune est plus considérable que celle du soleil. En effet, on a, en prenant la masse de la terre pour unité

$$m=\frac{1}{75} \text{ et } M = 355000. \text{ Or } R = 60r;\ D = 24000r;$$

d'où l'on conclut que le rapport de $\frac{m}{R^3}$ à $\frac{M}{D^3}$ est plus grand que 2,5. Ainsi l'attraction de la lune est égale à peu près à deux fois et demie celle du soleil.

Calcul de l'heure de la plus grande marée en hauteur et en dépression.

En admettant que la forme ci-dessus donne exactement la hauteur de la mer en fonction du temps, on déterminera l'heure de la plus grande variation, en égalant à zéro la dérivée $\frac{dH}{dt}$. φ et φ' qui expriment l'ascension droite de la lune et du soleil, varient avec le temps, et par conséquent leurs valeurs précises dépendent du temps que l'on cherche. Mais ce temps est à peu près connu; de sorte qu'on connaîtra aussi à peu près les valeurs de φ et de φ'; et comme ces quantités varient lentement, on pourra leur supposer ces valeurs approximatives et les regarder comme constantes. D'après cela la différentiation ne portera que sur le temps, et l'on aura l'équation

$$\frac{bm}{R^3}\sin 2(nt-\varphi-\mathcal{C})+\frac{b'M}{D^3}\sin 2(nt-\varphi'-\mathcal{C}')=0;$$

ou

$$\frac{bm}{R^3}\sin 2(nt-\varphi-\mathcal{C})+\frac{b'M}{D^3}\sin 2\left[(nt-\varphi-\mathcal{C})+(\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}')\right]=0;$$

ou

$$\frac{bm}{R^3}\sin 2(nt-\varphi-\mathcal{C})+\frac{b'M}{D^3}\Big[\sin 2(nt-\varphi-\mathcal{C})\cos 2(\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}')+$$
$$+\cos 2(nt-\varphi-\mathcal{C})\sin 2(\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}')\Big]=0;$$

ou, en faisant $\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}'=\psi$,

$$\left(\frac{bm}{R^3}+\frac{b'M}{D^3}\cos 2\psi\right)\sin 2(nt-\varphi-\mathcal{C})+$$
$$+\frac{b'M}{D^3}\sin 2\psi\cos 2(nt-\varphi-\mathcal{C})=0.$$

D'où

$$\operatorname{tang} 2(nt-\varphi-\mathcal{C})=-\frac{\frac{b'M}{D^3}\sin 2\psi}{\frac{bm}{R^3}+\frac{b'M}{D^3}\cos 2\psi}.$$

Qu'on fasse $\frac{bm}{R^3}:\frac{b'M}{D^3}=B$; il vient

$$\operatorname{tang} 2(nt-\varphi-\mathcal{C})=-\frac{\sin 2(\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}')}{B+\cos 2(\varphi-\varphi'+\mathcal{C}-\mathcal{C}')}.$$

Le temps t tiré de cette formule fait connaître l'instant de la plus haute marée luni-solaire.

Si l'on avait $nt-\varphi-\mathcal{C}=0$, ce temps serait le même que pour la simple marée lunaire; mais l'angle $nt-\varphi-\mathcal{C}$ est très petit; de sorte que le temps t tiré de l'équation diffère peu de celui de la marée lunaire.

Ce temps t est variable à chaque marée, tandis que le retard $\mathcal{C}$ de la marée lunaire est constant. Il s'ensuit que le retard de la marée totale se compose d'une <u>partie constante</u> C, et d'une <u>partie variable</u> donnée par la formule ci-dessus. C'est le retard <u>constant</u> qu'on appelle l'<u>Établissement du port</u>.

Dans les syzygies les deux marées partielles, lunaire et solaire, ont lieu dans le même sens; elles produisent donc les marées totales les plus fortes, lesquelles ont lieu aux époques de la <u>pleine lune</u> et de la <u>nouvelle lune</u>. Au contraire, les plus basses marées ont lieu lors des quadratures, parceque les marées partielles ont lieu en sens contraires.

Mais la plus haute marée n'arrive pas au moment de la syzygie, elle arrive 36 heures plus tard; de telle sorte qu'elle n'est que la troisième après celle du jour de la syzygie. Cela est un fait constaté par l'observation et dont les causes ne sont pas bien connues. Pareillement la plus basse marée qui répond à une quadrature n'arrive que 36 heures après le jour de la quadrature.

L'élévation des eaux dépend de l'étendue de la mer, elle est d'autant plus grande que la mer est plus vaste. Aussi les marées si considérables dans l'Océan, sont à peine sensibles dans la Méditerannée, et ne le sont nullement dans la mer Caspienne et dans la mer Noire.

La différence de hauteur de la marée haute et de la marée basse n'est pas la même dans les ports d'une même côte. Elle peut varier

considérablement. Cela provient des circonstances locales, par exemple de la configuration des côtes qui avoisinent le port. A St Malo et à Granville la différence de hauteur peut être de 15 mètres environ; ainsi, de la marée basse à la marée haute, en 6 heures, l'eau s'élève de 15 mètres. A Brest, la différence est de 6 mètres environ.

Le phénomène des marées offre un moyen de calculer le rapport des masses m et M de la lune et du soleil, mais approximativement seulement, parce que les constantes b, b' ne sont pas égales, et ne sont pas connues assez exactement.

Explication de la précession et de la Nutation.

Nous avons vu que la <u>précession</u> est un mouvement rétrograde sur l'écliptique, de la droite d'intersection de ce plan par le plan de l'équateur terrestre, droite qu'on appelle <u>ligne des équinoxes</u>. Ce mouvement a lieu parce que l'axe terrestre ne reste pas parallèle à lui-même: cet axe décrit, (abstraction faite du mouvement de translation de la terre), un cône droit circulaire autour de l'axe de l'écliptique. Il s'ensuit que la projection de cet axe terrestre sur le plan de l'écliptique fait une rotation dans ce plan, et que la ligne des équinoxes, qui est la droite perpendiculaire à cette projection, fait une pareille rotation. La durée de cette rotation est de 26000 ans environ.

La Nutation est un petit mouvement d'oscillation de l'axe terrestre autour d'une position moyenne; mouvement en vertu duquel cet axe ne décrit pas précisément le cône droit circulaire dont nous venons de parler, mais bien une surface conique ondulée qui marque sur la voute céleste un épicycloïde sphérique. Et si l'on faisait abstraction du mouvement de l'axe dû à la précession, ce petit mouvement secondaire ferait décrire à l'axe terrestre un petit cône à base elliptique dans l'espace de 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

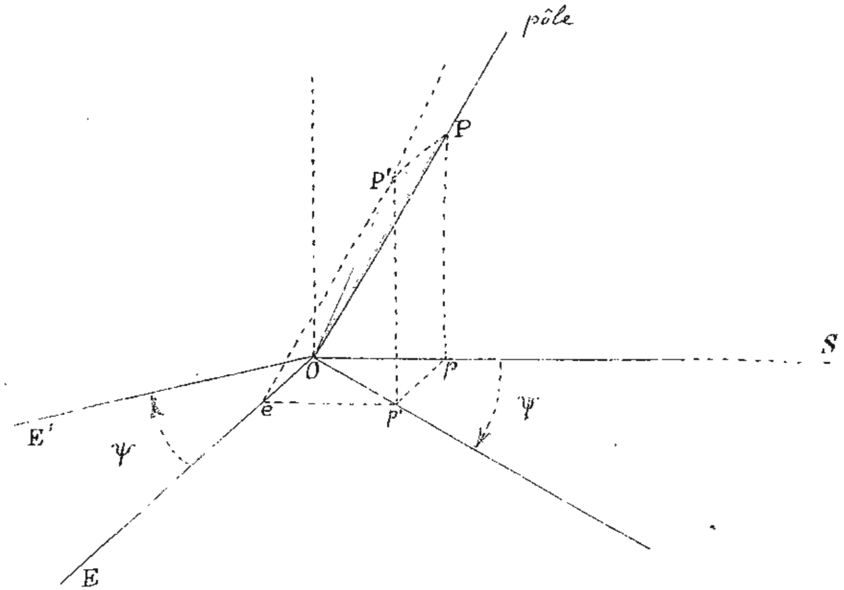
Ces deux mouvements la précession et la Nutation, sont dus à l'action du soleil et de la lune sur la terre; et ils ont lieu parce que la terre n'est pas parfaitement sphérique. Car si la terre était sphérique et homogène, il n'y aurait ni précession ni nutation, ainsi que nous le verrons tout à l'heure.

Ne considérons que l'action du soleil sur la terre; ce que nous allons dire s'appliquera à l'action de la lune.

Le soleil exerce sur chaque molécule de la terre une attraction en raison inverse du carré de la distance; ces attractions sont autant de forces passant toutes par le centre

du soleil que nous supposons réduit à un point attirant. Ces forces ont une résultante unique. Cette résultante passerait évidemment par le centre de la terre si elle était sphérique; (nous la supposons homogène). Mais la terre étant renflée à l'équateur, ce renflement peut être considéré comme une espèce d'anneau dont la partie tournée vers le soleil sera, en raison de sa moindre distance au soleil, plus attirée que la partie opposée; il s'ensuit que la résultante des attractions totales du soleil ne passera pas par le centre de la terre, et qu'elle passera un peu au delà de ce centre, du côté où l'équateur s'incline vers le soleil.

Soit OP l'axe terrestre, Op sa projection sur le plan de l'écliptique; OE la ligne des équinoxes, laquelle est perpendiculaire à Op. Supposons le soleil situé du côté où l'axe terrestre est incliné sur le plan de l'écliptique, c'est-à-dire au delà de Op (à droite de la figure). C'est des molécules terrestres situées au dessous de l'écliptique, que le soleil sera le plus rapproché; conséquemment la résultante de ses attractions sur toutes les molécules de la terre sera située au dessous de ce plan et tendra à faire tourner le plan de l'équateur autour de la ligne des équinoxes, et à le coucher sur le plan de l'écliptique. Le plan tournerait en effet, si la terre n'était pas animée d'un mouvement de rotation autour d'elle même, ce mouvement, comme nous allons le voir, s'oppose à ce que le plan de



l'équateur, et la terre conséquemment, tourne autour de la ligne des équinoxes.

Décomposons la force attractive du soleil en une autre, égale, parallèle et de même sens passant par le centre de la terre, et en un couple; considérons maintenant cette force et ce couple. La force fait dévier la terre de la direction rectiligne dans son mouvement de translation autour du soleil. C'est la force accélératrice qui, en se combinant avec l'impulsion primitive qu'a reçue la terre, fait décrire à son centre

une ellipse.

Le couple tend à faire tourner la terre autour d'un certain axe passant par son centre, et cette rotation, en se composant avec celle qui anime actuellement la terre, la modifie et change la position de l'axe autour duquel elle a lieu, de même que la force dont nous venons de parler exerce une action perturbatrice qui tend sans cesse à changer la direction du mouvement de translation.

Décomposons ce couple en trois autres ayant pour axes un système de trois axes principaux de la terre, qui seront 1° l'axe de la terre ou ligne des pôles, 2° la ligne des équinoxes, et 3° la droite perpendiculaire à celle-ci dans le plan de l'équateur. Ces trois couples ayant pour axes trois axes principaux du corps, produiront trois vitesses de rotation autour de ces axes mêmes.

La vitesse de rotation autour de la ligne des équinoxes tend à faire incliner l'équateur sur le plan de l'écliptique; mais elle se composera avec la vitesse de rotation dont la terre est animée autour de son axe; il en résultera un mouvement effectif autour d'un autre axe OP' lequel sera peu différent de l'axe OP, parce que des deux couples de rotation que nous venons de composer, celui qui produit la rotation actuelle de la terre autour de son axe est beaucoup plus considérable que le couple accélérateur provenant de l'attraction du soleil. Le premier est de grandeur finie et le deuxième infiniment petit. L'axe terrestre OP étant devenu OP', sa projection Op sur le plan de l'écliptique aura changé aussi, et sera Op'; par suite la ligne des équinoxes, qui lui est perpendiculaire, aura pris une autre direction OE'.

Pour composer les rotations qui produisent les deux couples, on sait qu'il faut porter sur leurs axes des segments Op, Oe qui leur soient proportionnels, et construire le parallélogramme sur ces deux lignes; sa diagonale OP' représentera l'axe et la grandeur de la rotation résultante; ce sera donc, en direction, le nouvel axe de la terre, et en grandeur, la vitesse de rotation autour de cet axe.

Quand le soleil est de l'autre côté de l'écliptique, la résultante de ses attractions sur les molécules de la terre, est située au dessus de ce plan, et elle tend encore à faire tourner la terre autour de la ligne des équinoxes, et dans le même sens. Le couple accélérateur que nous venons de composer avec le couple de rotation actuelle de la terre, donne une rotation résultante qui s'accomplit encore dans le même sens. De sorte que le mouvement de la ligne des équinoxes se fait constamment dans le même sens. Voilà la cause de la <u>précession</u>.

Nous avons dit que, dans ce mouvement, l'axe de la terre décrit un cône droit autour de l'axe de l'écliptique; de sorte que l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique reste la même, nonobstant le couple qui provient de l'action du soleil et qui tend à diminuer cette inclinaison. En effet, P'Op' marque la nouvelle inclinaison de l'axe des pôles sur le plan de l'écliptique, et cet angle ne diffère de l'angle POp que d'un infiniment petit du 2e ordre; car on a

$$\text{tang}\, POp = \frac{Pp}{Op}; \quad \text{tang}\, P'Op' = \frac{P'p'}{Op'}; \quad \text{or}$$

$$Pp = P'p'; \quad Op' = \frac{Op}{\cos\psi}; \quad \text{donc}$$

$$\text{tang}\, P'Op' = \frac{Pp}{Op}\cos\psi; \quad \text{et}$$

$$\text{tang}\, P'Op' - \text{tang}\, POp = \frac{Pp}{Op}(1-\cos\psi).$$

L'angle ψ est infiniment petit; donc $(1-\cos\psi)$ est un infiniment petit du second ordre. Ainsi la différence des tangentes des deux angles P'Op', POp est un infiniment petit du second ordre; à plus forte raison il en est de même de la différence des deux angles; on peut donc les considérer comme égaux. De sorte que l'inclinaison du plan de l'équateur sur l'écliptique ne varie pas.

Il faut voir maintenant quelle sera l'action des deux autres couples. Celui qui a pour axe la droite située dans le plan de l'équateur perpendiculairement à la ligne des équinoxes, tend à faire tourner la terre autour de cette droite; et cette rotation composée avec celle qui anime la terre, donne lieu à une rotation résultante dont l'axe se trouve dans le plan même de projection de l'axe terrestre, conséquemment le déplacement de cet axe dans ce plan, ne donne pas lieu à un déplacement de la ligne des équinoxes. C'est ce déplacement de l'axe de la terre, lequel ne produit pas de précession, qu'on appelle la nutation. Ce déplacement diminue l'inclinaison de l'axe de la terre pendant six mois, et l'augmente ensuite pendant six mois, de sorte que cette nutation due à l'action du soleil a une période annuelle.

Enfin le couple qui a pour axe l'axe même de la terre se combine par voie d'addition ou de soustraction avec le couple de rotation actuelle de la terre, et ne trouble en rien la direction de son axe, de sorte qu'il n'influe ni sur la précession ni sur la nutation. Il n'a d'autre effet que de produire une légère variation dans la rotation diurne.

Il est à remarquer que le mouvement de précession est nul quand le soleil se trouve aux équinoxes, parce qu'alors la force qui résulte de son action sur la terre passe

évidemment par le centre du sphéroïde, et qu'il n'y a pas de couple perturbateur. C'est à l'époque des solstices que la précession a la plus grande valeur.

Ce que nous venons de dire de l'action du soleil peut s'étendre à l'action de la lune. Et cette action étant plus considérable que celle du soleil, à cause de la proximité de la lune, c'est celle-ci qui a le plus de part dans le mouvement de précession.

La nutation se compose de même de celle que produit le soleil et de celle que produit la lune, et elle a des parties périodiques. Celle qu'on observe et qui s'accomplit en 18 ans $\frac{2}{3}$ est due à la périodicité des nœuds de la lune. (✱)

Mesure de l'aplatissement de la terre, tirés du mouvement de la lune.

Puisque par suite du renflement de la terre à l'équateur, la lune produit un effet particulier sur le mouvement de la terre,

---

(✱) Les principes sur lesquels reposent ces considérations sur le phénomène de la précession et de la nutation sont empruntés d'un mémoire inédit de Mr. Poinsot, dont une analyse succincte a paru en 1804 sous le titre de Théorie nouvelle de la rotation des corps.

réciproquement l'action de la terre sur la lune, diffère, à raison de ce renflement, de ce qu'elle serait si la terre avait une forme sphérique. On doit donc retrouver dans le mouvement de la lune des traces de l'aplatissement de la terre. Et en effet, Mr Laplace a reconnu dans le mouvement lunaire deux perturbations provenant du renflement de l'équateur terrestre; d'où il a conclu par le calcul, la valeur de l'aplatissement de la terre. Il l'a trouvé de $\frac{1}{305}$, valeur très approchée de $\frac{1}{298}$ ou $\frac{1}{300}$ que donnent les mesures directes.

Loi de Bode relative aux distances des planètes au soleil.

Les distances des planètes au soleil ont entre elles un rapport très singulier qui a été remarqué vers la fin du siècle dernier, par Bode, astronome de Berlin.

Qu'on écrive la série

0 3 6 12 24 48 96 192,

dans laquelle chaque terme, abstraction faite du premier qui est zéro, est double du terme précédent; et qu'à tous les termes on ajoute le nombre 4, on aura cette seconde série

Mercure	Vénus	la Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne	Uranus
4	7	10	16	28	52	100	196.

Ces nombres expriment d'une manière très approchée, les distances des planètes Mercure,

Vénus, la Terre, Mars, Cérès, Jupiter, Saturne et Uranus, au soleil.

Quand Bode a remarqué cette loi, on ne connaissait pas encore Cérès, de sorte qu'il y avait une lacune entre Mars et Jupiter. Bode soupçonna l'existence d'une planète intermédiaire, répondant au nombre 28. Sa conjecture ne tarda pas à se réaliser par la découverte de Cérès, qui satisfait parfaitement à cette loi singulière. Mais bientôt après on découvrit trois autres petites planètes. On aurait pu craindre qu'elles ne vinssent contrarier la loi de Bode; au contraire, elles l'ont confirmée et ont contribué à faire supposer que loin de ne présenter qu'une relation fortuite entre des distances indépendantes les unes des autres, cette loi tient essentiellement à la structure de notre système planétaire. Car ces trois nouvelles petites planètes sont à très peu près à la même distance du soleil que Cérès. Les légères différences peuvent être regardées comme provenant des perturbations, que ces planètes ont éprouvées de la part des autres. En tenant compte de ces perturbations, on trouve que les orbites des quatre planètes ont eu primitivement un point commun. Cette circonstance a fait supposer à l'astronome Olbers que ces quatre petits corps pouvaient être des fragments d'une même planète brisée dans une explosion.

Principaux éléments du système solaire, relatifs aux planètes.

Le tableau suivant contient : les distances moyennes des planètes au soleil, celle de la terre étant prise pour unité ; les durées (en jours moyens) des révolutions sidérales des planètes ; les durées de leurs rotations sur elles-mêmes ; et enfin leurs diamètres, celui de la terre étant pris pour unité.

	Distances m. au soleil.	Révolutions sidérales.	Durées des rotations.	Diamètres.
Mercure...	0, 387	87ʲ, 97	1ʲ, 000	0, 39.
Vénus....	0, 723	224, 70	0, 973	0, 97.
La Terre...	1, 000	365, 256	0, 997	1, 00.
Mars...	1, 524	686, 98	1, 027	0, 56.
Vesta.....	2, 375	1335, 21		
Junon....	2, 667	1591, 00		
Cérès....	2, 767	1681, 54		
Pallas....	2, 768	1681, 71		
Jupiter...	5, 203	4332, 60	0, 414	11, 56.
Saturne....	9, 539	10758, 97	0, 428	9, 61.
Uranus....	19, 183	30688, 71		4, 26.

Pour le soleil et la lune.

	Durée de la rotation.	Diamètres.
Le Soleil....	25ʲ, 500	109, 93.
La Lune....	27, 322	0, 27.

Détermination de la forme de la Terre, dans l'hypothèse d'une masse primitivement fluide, animée d'un mouvement de rotation.

Méthode d'Huygens. Toutes les planètes ont la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ; et elles tournent autour de leur petit axe. Leur aplatissement est d'autant plus grand que leur vitesse de rotation est elle-même plus grande. D'après cette donnée de l'observation, Huygens a supposé que les planètes et la terre elle-même pouvaient avoir été primitivement des masses fluides, animées d'un mouvement de rotation autour d'elles-mêmes ; et il a cherché à calculer quelle forme avaient dû prendre ces masses fluides, en vertu de ce mouvement de rotation et de l'attraction exercée sur elles-mêmes.

Quant à cette attraction, Huygens, considérant la terre comme à peu près sphérique, supposa que son action attractive sur chacun de ses points était dirigée vers le centre, comme si toute la masse attirante fût réunie en ce point.

Il faut donc trouver les conditions d'équilibre d'une masse fluide dont chaque molécule est attirée vers un centre et est soumise à la force centrifuge résultante de la rotation autour d'un axe fixe.

Huygens a trouvé par un calcul assez simple, que la masse fluide a la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati à ses pôles. Et en appliquant ce calcul au cas de la terre, pour laquelle il supposait le rayon de l'équateur connu, ainsi que l'intensité de la pesanteur et la force centrifuge à l'équateur, il en a conclu que l'aplatissement de la terre devait être de $\frac{1}{578}$. C'est-à-dire que le rayon équatorial surpasse le rayon polaire de $\frac{1}{578}$e du rayon équatorial.

Ce résultat est un peu trop faible; car les mesures géodésiques donnent à peu près $\frac{1}{300}$. L'erreur provient de l'hypothèse que faisait Huygens en considérant l'attraction de la masse fluide comme une force dirigée vers le centre, ainsi que cela aurait lieu si la terre était rigoureusement sphérique, supposé qu'elle fût homogène.

Méthode de Newton. Newton a calculé

plus rigoureusement qu'Huygens l'aplatissement de la terre, en calculant l'attraction de la terre d'après le principe général, que toutes les molécules s'attirent en raison directe de leurs masses, et inverse du carré des distances. Il a supposé que la terre était un sphéroïde aplati aux pôles, et il a calculé l'attraction qu'un tel corps, supposé homogène, exerce sur les points situés à sa surface. Cette attraction, combinée avec la force centrifuge, a conduit Newton à un aplatissement égal à $\frac{1}{230}$; c'est-à-dire qu'il a trouvé que les deux axes, équatorial et polaire, sont entr'eux dans le rapport de 230 à 229. Ce rapport est un peu trop fort; cela provient de ce que Newton a supposé la terre homogène, tandisque sa densité augmente en allant de la surface au centre.

En attribuant à la terre la forme d'un ellipsoïde aplati, Newton supposait <u>à priori</u>, que cette forme convenait à l'équilibre d'une masse liquide animée d'un mouvement de rotation. Mais cette proposition importante n'a été démontrée que par Maclaurin, dans son beau mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes.

Les théories d'Huygens et de Newton font connaître aussi les variations de l'intensité de la pesanteur en allant de l'équateur aux pôles. Mais ces variations se peuvent déterminer expérimentalement

au moyen du pendule.

Mesure de la variation de la pesanteur à la surface de la terre, au moyen du pendule.

La durée des oscillations d'un pendule est $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, l étant la longueur du pendule, et g l'intensité de la pesanteur. En un autre lieu de la surface de la terre la durée des oscillations du même pendule sera $T' = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$. on a donc la relation

$$\frac{g}{g'} = \frac{T'^2}{T^2}.$$

qui fait connaître le rapport des intensités de la pesanteur en deux lieux de la terre.

C'est ainsi qu'on mesure, au moyen du pendule, les variations de la pesanteur à différentes latitudes.

La durée des oscillations se mesure par l'observation. Pour cela, on fait faire au pendule un grand nombre n d'oscillations, et on observe au moyen d'une horloge, la durée totale θ de ces oscillations, et l'on a $T = \frac{\theta}{n}$.

Pour compter les oscillations, on se sert d'un procédé ingénieux, imaginé par

Borda, et qu'on appelle méthode des coïncidences.

On place le pendule A qu'on doit faire osciller, devant l'horloge dont on se servira pour compter le temps, de manière qu'à l'état de repos le pendule A et celui de l'horloge soient dans un plan perpendiculaire aux deux plans parallèles dans lesquels se feront leurs oscillations. Si ces oscillations étaient de même durée, les deux pendules coïncideraient toujours. Mais cela n'a pas lieu, généralement; il y a une petite différence entre les durées de leurs oscillations.

Supposons que le pendule de l'horloge aille un peu moins vite que le pendule A; quand celui-ci aura fait une oscillation, le premier n'aura pas encore accompli la sienne et se trouvera à une petite distance de l'autre. Quand le balancier de l'horloge aura accompli sa deuxième oscillation, le pendule se trouvera un peu plus éloigné encore du balancier; et ainsi de suite, de sorte qu'il arrivera un moment où le balancier se trouvera éloigné du pendule de toute l'étendue d'une amplitude; c'est-à-dire, qu'au moment où le pendule A termine une oscillation, à droite, par exemple, le balancier se trouve à gauche et va en commencer une. Il est clair que le balancier a fait une oscillation de moins que le pendule; et alors ils passent en même temps sur la verticale, mais en y arrivant de côtés différents. Dans un même intervalle de temps, le balancier fera encore une oscillation, et alors terminera son amplitude en même temps et du même côté que le pendule A. De sorte qu'ils passeront en même temps sur la verticale. Le moment de cette coïncidence sur la verticale se notera sur le cadran de l'horloge et l'aiguille des secondes indiquera le nombre n des oscillations du balancier. Le nombre des oscillations du pendule sera n + 2.

Par ce moyen on calcule les variations de la pesanteur, et l'on en conclut que sa diminution, en allant du pôle à l'équateur est de $\frac{1}{176}$; quantité intermédiaire entre celles que donnent les théories d'Huygens et de Newton.

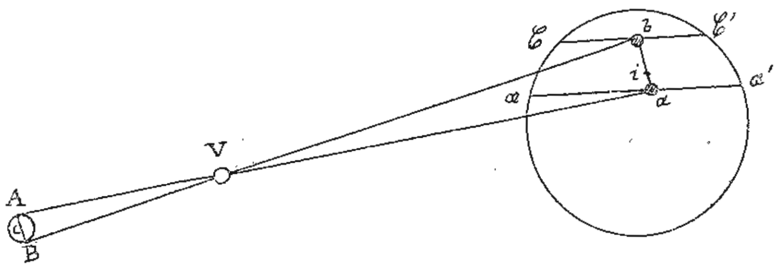
Des variations de la pesanteur déterminées ainsi expérimentalement, avec une grande exactitude, en différentes stations sur la méridienne de Dunkerque à Formentera, Mr. Mathieu a conclu, par des calculs que nous n'exposerons pas ici, que l'aplatissement de la terre est de $\frac{1}{298}$; valeur très approchante de celle que donnent les mesures trigonométriques.

Détermination de la parallaxe du soleil par l'observation des passages de Vénus.

Les passages de Vénus sur le disque solaire fournissent le moyen le plus exact de déterminer la parallaxe du soleil, et par suite sa distance à la terre. Le calcul exige des observations simultanées faites en des lieux éloignés. Il est très compliqué à cause de toutes les circonstances dont il faut tenir compte. Nous allons seulement indiquer le principe de cette méthode qui offre un exemple admirable de la précision avec laquelle les astronomes sont parvenus à déterminer les éléments de la mécanique céleste.

Quand Vénus passe sur le disque du soleil, le point où elle s'y projette n'est pas le même pour tous les spectateurs placés à la surface de la terre. Pour un observateur placé en A, Vénus, que nous supposons en V, se projettera en a ; tandis qu'au même moment un observateur placé en B la verra en b. C'est cette différence de position de Vénus sur le disque solaire, pour deux observateurs placés en des points différents de la terre, qui devient l'élément principal du calcul par lequel se détermine la parallaxe du soleil.

Concevons pour fixer les idées, que les deux lieux A, B où sont les observateurs, soient les extrémités du diamètre terrestre perpendiculaire



au plan de l'écliptique; et faisons abstraction du mouvement de rotation de la terre.

Supposons qu'on puisse déterminer par l'observation l'intervalle ab des deux points a, b; on aura dans les deux triangles semblables AVB, aVb,

$$\frac{AB}{AV} = \frac{ab}{aV}.$$

or le rapport des distances de Vénus à la terre et au soleil, lors de la conjonction, est connu; on a à peu près

$$\frac{aV}{AV} = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}.$$

On a donc

$ab = 2\frac{1}{2}AB = 5CB$ = cinq fois le rayon terrestre.

Ainsi le rayon terrestre porté sur ab de a en i ne serait que le $\frac{1}{5}$ de ab. Donc les angles sous lesquels on verrait de la terre les deux segments ab, ai sont entr'eux comme 5 est à 1. Or le second est égal à l'angle sous lequel on verrait du soleil,

le rayon CA de la terre; c'est donc la parallaxe du soleil. De sorte que cette parallaxe est $\frac{1}{5}$ de l'angle sous lequel on voit de la terre le segment ab.

La question est donc ramenée à la détermination de l'angle sous lequel on verrait du centre de la terre le segment ab, c'est-à-dire la distance des deux positions apparentes du disque de Vénus.

L'observateur en A voit décrire par Vénus une corde $\alpha\alpha'$, et l'observateur en B une corde CC'; et le segment ab mesure la distance de ces deux cordes. Chaque spectateur pourra déterminer par des mesures micrométriques la longueur de chaque corde; et de ces longueurs on conclura la distance des deux cordes, qui est la chose cherchée.

Un autre moyen, plus exact, sera de noter le temps que Vénus mettra à parcourir les deux cordes $\alpha\alpha'$, CC'. Car le mouvement angulaire de Vénus étant parfaitement connu, on conclura de ce temps les espaces parcourus, c'est-à-dire les longueurs des cordes $\alpha\alpha'$, CC'. Ainsi le problème est résolu.

De la quantité de chaleur envoyée par le soleil sur la terre, pendant la durée d'une saison.

La quantité de chaleur que reçoit la terre pendant la durée de chaque saison est la même, malgré l'inégalité de durée des saisons. Considérons le soleil comme un point qui envoie des rayons calorifiques; les rayons que reçoit la terre sont compris dans le cône qui lui est circonscrit et qui a pour sommet le lieu du soleil: la courbe de contact de ce cône circonscrit peut être regardée comme un grand cercle de la terre, à cause du grand éloignement du soleil. Voyons quelle est la quantité de chaleur que reçoit la surface de ce grand cercle.

Soit r le rayon de la terre; πr^2 la surface de son grand cercle. Soit R la distance du soleil, et θ la quantité de la chaleur reçue par l'unité de surface, à l'unité de distance, et dans l'unité de temps. Le cône de chaleur qui a pour base cette unité de surface α, à une distance R, une base R^2 fois plus grande sur laquelle il répand la même quantité de chaleur θ; donc l'unité de surface, à cette distance R, ne reçoit que $\frac{\theta}{R^2}$ de chaleur. Le grand cercle terrestre en

reçoit donc $\frac{\pi r^2 \theta}{R^2}$. Et comme l'hémisphère terrestre diffère peu du grand cercle, quant aux effets de la chaleur, à cause du grand éloignement du soleil, nous dirons que c'est l'hémisphère terrestre qui reçoit cette quantité de chaleur dans l'unité de temps. La quantité de chaleur reçue dans le temps dt sera donc $\frac{\pi r^2 \theta}{R^2}\,dt$. D'après la loi des aires, on a entre le rayon vecteur du soleil, R, et le temps dt la relation $\frac{1}{2}R^2 dv = C\,dt$, C étant une constante. d'où $\frac{dt}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{dv}{C}$; de sorte que la quantité de chaleur reçue par la terre dans le temps dt est $\frac{\theta \pi r^2}{2C}\,dv$. Pendant une saison cette quantité de chaleur sera

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{\theta \pi r^2}{2C}\,dv = \frac{\theta \pi r^2}{2C}\left(v_1 - v_0\right).$$

Or la ligne des solstices étant perpendiculaire à la ligne des équinoxes, on a $v_1 - v_0 = 90°$. La quantité de chaleur envoyée par le soleil, a donc pour valeur $\frac{\theta \pi r^2}{2C}\,90°$, conséquemment elle est constante. Ainsi, quoique l'hiver dure un peu moins que l'été, la quantité de chaleur reçue par la terre pendant ces deux saisons est la même.

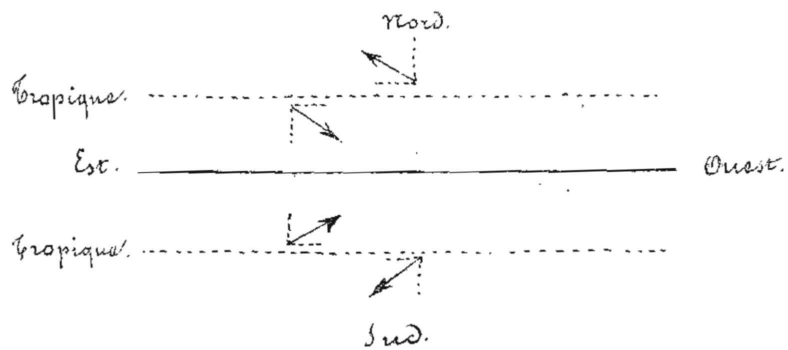
Toutefois, la constante C, qui dépend de l'excentricité de l'orbite de la terre, éprouve de petites variations, qui font que la quantité de chaleur reçue par la terre, pendant une saison n'est pas rigoureusement la même dans tous les temps, mais la différence est très petite et varie d'une manière périodique.

Vents alisés. Parmi les courants qui traversent l'atmosphère et qui portent le nom de vents, les plus remarquables sont les vents alisés qui règnent dans les régions équatoriales, et semblent souffler de l'Est à l'Ouest, en sens contraire du mouvement de rotation de la terre. Voici la cause de ces vents.

Les couches atmosphériques en contact avec la terre, à l'équateur, se dilatent par la chaleur et s'élèvent; les couches des zones tempérées viennent les remplacer; elles sont plus froides, et elles arrivent avec des vitesses dues à la rotation diurne de la terre, vitesses moindres que celles des parallèles terrestres qu'elles traversent, puisque la vitesse de rotation des points de la terre augmente en allant vers l'équateur. Il s'ensuit que les corps situés à la surface de la terre, dans la région équatoriale, frappent avec une vitesse relative les molécules d'air qui arrivent des zones voisines. C'est donc comme si l'on éprouvait le choc d'un vent qui viendrait en sens opposé au mouvement de la terre. Ces molécules atmosphériques ont, en

outre, une vitesse perpendiculaire à l'équateur, puisqu'elles arrivent des parallèles voisins; cette vitesse composée avec celle de la rotation relative dont nous venons de parler, donne lieu à un choc dans une direction inclinée à l'équateur. Et on remarque en effet que les vents alisés ne soufflent pas de l'Est à l'Ouest, mais du Nord-Est si l'on est au Nord de l'équateur; ou du Sud-est si l'on est du côté Sud de l'équateur.

Il existe dans les régions tempérées des vents analogues, mais qui soufflent dans des directions contraires, c'est-à-dire du Sud-Ouest dans l'hémisphère boréal, et du Nord-Ouest dans l'hémisphère austral.



En effet les couches équatoriales qui se sont élevées, comme nous venons de le dire, se refroidissent dans les régions supérieures de l'atmosphère; elles retombent des deux côtés dans les zones tempérées et y remplacent les couches inférieures qui ont passé dans la région équatoriales. Or elles arrivent avec des vitesses de rotation plus grandes que celles des points terrestres, il s'ensuit qu'elles frappent le spectateur dans la direction même du mouvement de la terre, c'est-à-dire en venant de l'ouest. Et si l'on tient compte de leur mouvement normal à l'équateur, puisqu'elles viennent de la région équatoriale, leur mouvement réel sera incliné au parallèle du lieu, et il en résultera un vent qui semblera venir du sud-ouest dans l'hémisphère boréal et du Nord-ouest dans l'hémisphère austral.

Quoique diverses causes s'opposent à la permanence de ces vents, on reconnait néanmoins qu'un vent d'Ouest souffle plus souvent que les autres, à Paris et dans divers autres lieux de la zone tempérée.

Ces vents d'ouest sont cause que la différence des températures extrêmes sur une même ligne isotherme est moindre sur les côtes occidentales que sur les côtes orientales. Car pour arriver sur les côtes occidentales les molécules atmosphériques ont traversé une grande étendue de mers où la température est peu variable; et au contraire pour arriver sur les côtes orientales, elles ont traversé une grande étendue de continents où la température est beaucoup plus variable.

Application de l'astronomie à la détermination des longitudes terrestres.

La détermination des longitudes consiste dans ces deux questions : déterminer l'heure actuelle dans le lieu où l'on est, et l'heure d'un lieu où l'on n'est pas. La différence des deux heures, exprime, comme nous le verrons, la longitude cherchée.

Comme il est nécessaire de connaître les différentes *mesures* du temps dont les astronomes font usage, nous allons rappeler d'abord, brièvement, ce qui a déjà été dit à ce sujet.

De la mesure du temps.

Les astronomes se servent du *temps sidéral*, du *temps solaire vrai* ou simplement *temps solaire*, et du *temps moyen*. (V. p. 270).

Le *temps sidéral* se mesure par le mouvement diurne. Le *jour sidéral* est l'intervalle de temps qui sépare deux passages d'une même étoile au méridien. On prend pour cette étoile celle qui coincide avec le *point* équinoxial du printemps ; de sorte que l'origine du jour est le moment du passage de l'équinoxe au méridien. Soit p l'angle que le cercle de déclinaison de l'équinoxe fait actuellement avec le méridien, cet angle converti en temps, savoir $\frac{p}{15}$ exprimera l'heure sidérale. De sorte qu'en représentant par h_s le temps exprimé en heures sidérales, on aura $h_s = \frac{p}{15}$.

Le temps vrai se mesure par le mouvement du soleil. Le jour vrai est l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs du soleil au méridien. Soit p_v l'angle que le cercle horaire du soleil fait actuellement avec le méridien, $\frac{p_v}{15}$ sera le temps vrai exprimé en heures, nous écrirons $h_v = \frac{p_v}{15}$.

Enfin, le temps moyen se mesure par le mouvement d'un soleil fictif qui décrirait l'équateur d'un mouvement uniforme et dans le même temps que le soleil vrai met à décrire l'écliptique. Le jour moyen est l'intervalle de temps qui séparerait deux passages consécutifs de cet astre fictif, au méridien. Soit p_m l'angle que son cercle horaire fait actuellement avec le méridien, le temps moyen exprimé en heures est $h_m = \frac{p_m}{15}$. C'est le temps écoulé depuis le moment où le soleil fictif a passé au méridien.

Relation entre le temps vrai et le temps moyen. Appelons u la différence des ascensions droites du soleil vrai et du soleil fictif, dont nous avons donné l'expression en fonction du temps (V. p. 270.), et p_v, p_m les distances des deux astres au méridien ; on a

$$p_m = p_v + u.$$

$$\frac{p_m}{15} = \frac{p_v}{15} + \frac{u}{15}.$$

ou

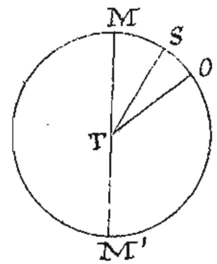
$$h_m = h_v + \frac{u}{15}.$$

Or $\frac{u}{15}$ est ce que nous avons appelé l'équation du temps (p. 277). Nous dirons donc que : l'heure moyenne est égale à l'heure vraie plus l'équation du temps.

On a coutume de désigner l'équation du temps, simplement par u ; ainsi l'on écrit

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \quad h_m = h_v + u.$$

Relation entre le temps vrai et le temps sidéral. Concevons que le cercle MOM' représente l'équateur céleste ; T le lieu de l'observateur ; MM' la trace de son plan méridien sur le plan de l'équateur ; TO la trace du plan horaire de l'équinoxe à un instant déterminé ; et TS la trace du plan horaire du soleil.



On a $\quad MTO = MTS + STO\,;$

ou $\quad p_s = p_v + STO$

$$\frac{p_s}{15} = \frac{p_v}{15} + \frac{STO}{15}$$

$\frac{STO}{15}$ est l'ascension droite du soleil exprimée en temps; représentons-la par $Æ_v$; et observons que $\frac{p_s}{15}$ est l'heure sidérale, et $\frac{p_v}{15}$ l'heure solaire vraie; il vient donc

(2) · · · · · · · · · $h_s = h_v + Æ_v$.

C'est à dire que: l'heure sidérale est égale à l'heure solaire plus l'ascension droite du soleil.

Relation entre le temps sidéral et le temps moyen. Des deux relations précédentes (1) et (2) on tire

$$h_s = h_m + Æ_v - u.$$

Et si l'on ne veut pas considérer le soleil vrai, on remplacera u par sa valeur $u = Æ_v - Æ_m$; $Æ_m$ étant l'ascension droite du soleil fictif il vient

(3) · · · · · · · · $h_s = h_m + Æ_m$.

C'est-à-dire que l'heure sidérale est égale à l'heure moyenne, plus l'ascension droite du soleil fictif.

D'après les trois équations ci-dessus, quand le temps sera connu en heures, dans l'un des trois systèmes de mesure, on saura l'exprimer immédiatement dans chacun des deux autres.

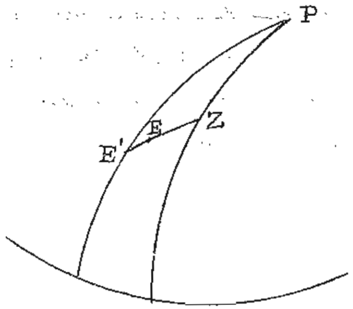
L'ascension droite du soleil et l'équation du temps sont données par les tables de la connaissance des temps.

Déterminer l'heure en un lieu dont la latitude est connue.

Pour déterminer l'heure actuelle dans le lieu où l'on se trouve, il suffit, quand on connait la latitude du lieu, d'observer la distance zénitale d'une étoile ou du soleil. Dans le 1er cas on détermine l'heure sidérale, et dans le 2e cas, l'heure solaire vraie; on passe de l'une à l'autre par les formules précédentes.

Par l'observation d'une étoile. Soit $Æ_e$ l'ascension droite convertie en temps, de l'étoile qu'on observe, p l'angle que son cercle de déclinaison fait dans ce moment avec le méridien; $\left(Æ_e + \frac{p}{15}\right)$ est la distance de l'équinoxe au méridien, distance exprimée en heures; on a donc $h_s = Æ_e + \frac{p}{15}$. L'ascension droite de l'étoile est donnée par les Ephémérides; il suffit donc de déterminer l'angle p; cela se fait par l'observation de la distance zénitale de l'étoile.

Soit Z le zénit du lieu; P le pôle; E la position apparente de l'étoile. On observe sa distance zénitale ZE. Or la réfraction élève l'étoile dans son plan azimutal; de sorte que dans la réfraction on la verrait en E'; l'arc EE', ou l'angle qui le soutend est ce qu'on appelle la réfraction: cet arc est donné par les tables ou les formules de réfraction;



de sorte qu'on connait l'arc ZE'. On connait aussi les deux côtés ZP, E'P dont le premier est le complément de la latitude du lieu de l'observateur, et le deuxième, le complément de la déclinaison de l'étoile E', dans sa position apparente corrigée de la réfraction. On calculera donc dans le triangle ZPE', l'angle cherché E'PZ $= p$. on a

$$\cos E'Z = \cos E'P . \cos ZP + \sin E'P . \sin ZP \cos E'PZ;$$

ou, en appelant λ la latitude du lieu, D la déclinaison de l'étoile E', et z sa distance zénitale

$$\cos z = \sin \lambda \sin D + \cos \lambda \cos D \cos p.$$

Il faut tenir compte de l'aberration de la lumière qui change la position des astres. E' est la position de l'étoile, corrigée de la réfraction; mais ce lieu E' diffère encore de la véritable position de l'étoile, parce qu'il est affecté de l'aberration. Au lieu de corriger ce lieu E', c'est la déclinaison de l'étoile, que l'on corrige

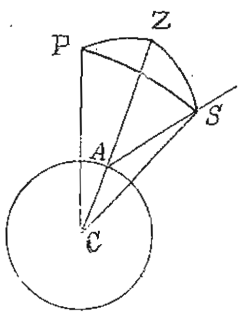
pour l'appliquer au lieu E', que donne l'observation. De sorte que dans l'équation précédente, D représentera non pas la déclinaison du véritable lieu de l'étoile, mais la déclinaison de l'étoile <u>affectée de l'aberration</u>, telle que nous la voyons en E'. Alors il faut aussi que dans l'expression de l'heure, $h_s = Æ_e + \frac{p}{15}$, $Æ_e$ représente l'ascension droite de cette étoile fictive E' affectée de l'aberration.

Les Éphémérides donnent les déclinaisons et ascensions droites des étoiles affectées de l'aberration, calculées de dix en dix jours. Une simple interpolation les donne ensuite pour les jours intermédiaires.

Par l'observation du soleil. L'heure vraie sera $h_v = \frac{p_v}{15}$, et l'heure moyenne $h_m = \frac{p_v}{15} + u$. Il faut donc déterminer l'angle p que fait le cercle horaire actuel du soleil avec le méridien. On calculera cet angle par la formule ci-dessus, comme pour le cas d'une étoile.

La déclinaison D du soleil est donnée par les Éphémérides.

Quant à la distance zénitale observée, il faut la corriger de la réfraction, comme pour une étoile, et en outre, de la parallaxe, pour la ramener à ce qu'elle serait si l'observation eût été faite du centre de la terre. En effet soit A. le lieu de l'observateur à la surface de la terre. La distance zénitale du soleil observée et corrigée de la réfraction est l'angle ZAS; et la distance zénitale qu'il faut faire entrer dans le calcul est l'angle ZCS. Celui-ci est égal à l'angle ZAS, moins l'angle en S qui est la parallaxe du soleil. De sorte que la correction due à la parallaxe consiste à retrancher la parallaxe de la distance zénitale observée. La correction de la réfraction consiste à ajouter la réfraction à la distance zénitale observée; de sorte qu'on peut dire que la distance zénitale cherchée égale la distance zénitale observée, plus la réfraction, moins la parallaxe.



✳ Détermination simultanée de la latitude et de l'heure en un lieu.

Si la latitude du lieu où l'on se trouve n'est pas connue, on observera une étoile à deux instants différents, on aura les deux équations

$$\cos z = \sin\lambda \sin D + \cos\lambda \cos D \cos p,$$
$$\cos z' = \sin\lambda \sin D + \cos\lambda \cos D \cos p'.$$

On pourra connaître, au moyen d'une montre marchant bien, quoique non réglée, le temps écoulé entre les deux observations. Soit t_s ce temps,

on aura $\frac{p'-p}{15} = t_s$; conséquemment les deux inconnues p et p' se réduisent à une seule, p par exemple; et dès lors il n'y a plus que deux inconnues p et λ. Les deux équations ci-dessus les feront connaître.

Pour faciliter les calculs, on fait l'une des observations quand l'étoile est très près du méridien, alors l'angle p est très petit, et dans l'expression de son cosinus on néglige son carré; c'est-à-dire qu'on suppose son cosinus égal à l'unité; la première équation devient

$$\cos z = \sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda.$$

On en tire la valeur de λ, et on la substitue dans la deuxième équation. Celle-ci devient

$$\cos z' = \sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \cos(p + 15 t_s).$$

Elle donne la valeur de p. Comme p est très petit, on fait

$$\cos(p + 15 t_s) = \cos p \cos 15 t_s - \sin p \sin 15 t_s$$
$$= \left(1 - \frac{p^2}{2}\right) \cos 15 t_s - p \sin 15 t_s.$$

L'équation est donc

$$\cos z' = \sin D \sin\lambda + \cos D \cos\lambda \left\{\left(1 - \frac{p^2}{2}\right) \cos 15 t_s - p \sin 15 t_s\right\}.$$

Ainsi p se calculera par la résolution d'une équation du deuxième degré.

Après qu'on aura ainsi déterminé p qui donne l'heure cherchée, on pourra obtenir une valeur plus exacte de la latitude. Pour cela, au lieu de faire $\cos p = 1$ dans la première équation, on fera $\cos p = 1 - \frac{p^2}{2}$. L'équation donnera une valeur de λ un peu différente de la première et plus exacte.

Si au lieu d'observer une étoile, on observe le soleil, on devra, comme ci-dessus, tenir compte de la parallaxe.

Détermination des longitudes.

La *longitude* d'un lieu B est l'angle que le méridien de ce lieu fait avec le méridien d'un autre lieu A pris pour origine.

Que dans les deux lieux on observe, au même instant, une même étoile, et qu'on détermine les angles que son cercle horaire fait avec les méridiens des deux lieux, la différence de ces angles sera l'angle même des deux méridiens, et conséquemment la *longitude* cherchée.

Or l'angle qu'une étoile fait avec le méridien d'un lieu, angle variable à cause du mouvement diurne, sert à mesurer le temps sidéral. On fait marquer à l'horloge 0^h au moment où l'étoile passe au méridien; et ensuite l'angle p qu'elle fait à un autre instant, avec le méridien, converti en temps, c'est-à-dire $\frac{p}{15}$ indiquera l'*heure sidérale* à cet instant.

De sorte que nous pouvons dire que la différence de longitude des deux lieux, est la différence des heures sidérales en ces deux lieux,

convertie en angle.

Nous supposons bien entendu, que les heures sidérales se rapportent à la même étoile. Les astronomes ont coutume de compter le temps sidéral à partir du passage de la ligne des équinoxes au méridien, comme s'il se trouvait sur la voute céleste une étoile dans la direction précise de cette ligne.

D'après cela, soit t_s la différence de temps sidéral dans les deux lieux A, B; $15\,t_s$ sera l'expression de la longitude du point B, comptée à partir du méridien du point A.

On peut aussi se servir du temps solaire *moyen* pour mesurer les longitudes, car l'heure moyenne en un lieu, convertie en angle, exprime l'angle que le soleil fictif (qui est supposé se mouvoir uniformément sur l'équateur) fait avec le méridien de ce lieu. Conséquemment la différence des heures moyennes, dans les deux lieux A et B, convertie en angle, exprime l'angle des deux méridiens, c'est-à-dire la longitude cherchée. Ainsi t_m étant la différence du temps moyen, dans les deux lieux, $15^\circ.\,t_m$ sera la longitude cherchée.

L'heure moyenne ou l'heure sidérale, dans le lieu où l'on se trouve, se détermineront, comme nous l'avons vu précédemment, par l'observation d'une étoile ou du soleil; de sorte que : le problème des longitudes, se réduit à connaître, à un instant donné, quelle est l'heure dans un certain lieu éloigné, pris pour origine des longitudes.

Déterminer l'heure en un lieu où l'on n'est pas. On a plusieurs manières de résoudre ce problème : 1° au moyen de chronomètres portatifs ; 2° par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter, ou des occultations des étoiles par la lune ; 3° par l'observation des distances de la lune aux étoiles et au soleil.

Par les chronomètres. Il faut que l'on ait dans le lieu B où l'on se trouve, un chronomètre marquant l'heure du lieu A, on détermine par l'observation d'un astre, l'heure du lieu B ; et la différence des heures, multipliée par 15, exprime, en degrés, la longitude du lieu B, comptée à partir du méridien du lieu A.

Par les éclipses et les occultations. L'heure des éclipses de certains astres, ou des occultations de certaines étoiles par la lune, est calculée pour le lieu A, et indiquée dans les Éphémérides ; on observe le phénomène dans le lieu B où l'on se trouve, et on note l'heure en ce lieu ; la différence des heures, multipliée par 15,

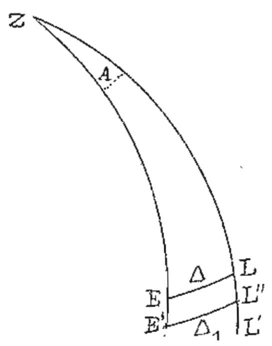
donne la longitude.

Les éclipses de lune ne peuvent guère être d'aucun secours pour la détermination des longitudes, parce qu'elles sont rares, et parce que le commencement de l'éclipse n'est pas nettement marqué. On emploie les éclipses des satellites de Jupiter avec avantage, quoique, à cause de la pénombre, le moment précis de l'immersion et de l'émersion dépende un peu du grossissement et de la bonté de la lunette. Mais en observant les instants de ces deux phénomènes, on en conclut la durée de l'éclipse, et par suite l'heure du milieu de l'éclipse. Cette heure est indépendante de la petite différence que peut causer la différence de grossissement des lunettes employées par les divers observateurs.

Les occultations d'étoiles par la lune offrent un avantage ; c'est que le phénomène est instantané ; mais il n'est pas assez fréquent pour qu'on puisse compter sur ce moyen de déterminer les longitudes.

Par les distances de la lune aux étoiles. Le procédé le plus en usage, en mer surtout, consiste à mesurer dans le lieu où l'on se trouve, la distance actuelle de la lune à une étoile ou au soleil. On sait par les Éphémérides que cette distance, qui est variable d'un instant à l'autre, répond à une certaine heure du lieu A (de Paris, par exemple).

Les distances que donnent les Ephémérides se rapportent au centre de la terre, c'est-à-dire que ce sont les angles formés par les rayons vecteurs menés du centre de la terre aux deux astres. Il faudra donc, en observant dans le lieu B la distance des deux astres, tenir compte de la parallaxe. Il faudra aussi avoir égard à la réfraction. Voici comment on opère. Supposons qu'il s'agisse de la distance de la lune à une étoile. Soient E, L les positions apparentes des deux astres; EL sera la distance observée: appelons-la Δ. Soit Z le zénit. On observera les distances zénitales des deux astres; de sorte que les trois côtés du triangle ZEL seront connus. On en conclura la valeur de son angle EZL = A par la formule



$$\cos A = \frac{\cos\Delta - \cos ZE \,.\, \cos ZL}{\sin ZE \,.\, \sin ZL}.$$

La réfraction et la parallaxe déplacent un astre dans son plan vertical, de sorte que les positions réelles des deux astres sont dans les plans ZE, ZL. La réfraction les a élevés; la véritable position de l'étoile est donc en E', et

celle de la lune en L'. Du centre de la terre, la lune serait vue un peu plus rapprochée du zénit, en L''. L'étoile n'a pas de parallaxe, de sorte que E'L'' est la distance des deux astres vus du centre de la terre. Soit r_e la réfraction éprouvée par l'étoile, sa distance zénitale réelle est $ZE' = z' = ZE + r_e$. Soit r_l la réfraction éprouvée par la lune, et π sa parallaxe horizontale; sa parallaxe actuelle sera $\pi \sin ZL'$, et l'on aura $ZL'' = z'' = ZL + r_l - \pi \sin ZL'$. On connait donc dans le triangle E'ZL'', les deux côtés ZE', ZL'' et l'angle compris A déterminé par l'équation ci-dessus. Conséquemment on pourra calculer le côté E'L''. Appelons-le Δ_1, on aura

$$\cos\Delta_1 = \cos z' \cos z'' + \sin z' \sin z'' \cos A.$$

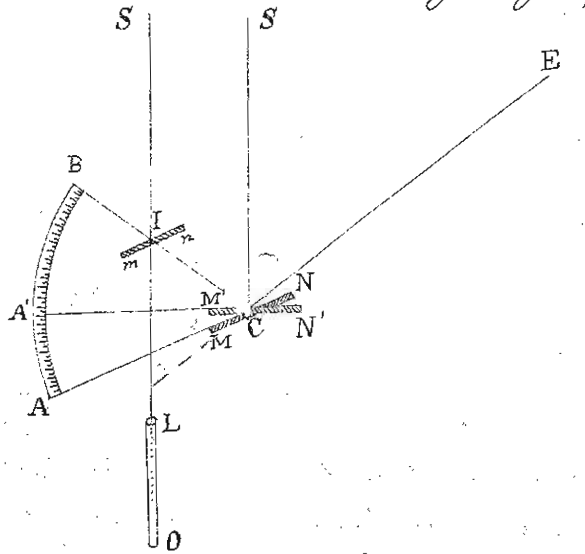
C'est la distance réelle des deux astres vus du centre de la terre. Les Ephémérides indiqueront à quelle heure de Paris correspond cette distance. Et c'est cette heure qu'il s'agissait de déterminer.

Quand on observe la distance de la lune au soleil, on prend la distance des bords des deux disques, et on y ajoute la somme des deux rayons. On a ainsi la distance des centres des deux astres.

Les Ephémérides donnent les distances de trois heures en trois heures. Si la distance observée n'est pas précisément l'une de celles-là, on détermine par une simple interpolation, à quelle heure elle correspond.

Du Sextant.

Dans les questions que nous venons de traiter, nous avons toujours eu besoin de mesurer par l'observation la distance apparente des deux astres, et leurs distances zénitales. Sur terre, cela se fait avec le cercle répétiteur et le théodolite. Mais sur mer il faut un instrument portatif et d'un usage plus prompt. On se sert d'un instrument qu'on tient à la main, et qu'on appelle Sextant parce que le cercle gradué qui s'y trouve est de 60° environ, quoique l'instrument puisse servir à mesurer les angles jusqu'à 120°.



Soit un limbe gradué AB de 60° environ, dont les deux rayons extrêmes CA, CB sont fixes. Sur CB est un miroir mn fixé perpendiculairement au plan de l'instrument; la partie inférieure seule de ce verre est étamée et forme miroir; et

la partie supérieure est un simple verre qui laisse passer librement les rayons lumineux. Au centre C se trouve un deuxième miroir entièrement étamé, perpendiculaire comme le premier, au plan de l'instrument, et mobile autour du centre, de manière que le prolongement de ce miroir est un rayon du secteur dont l'extrémité peut parcourir l'arc AB. Ce rayon a le nom d'alidade. A son extrémité se trouve un vernier qui sert à lire sur le limbe, les angles décrits par ce rayon mobile. Une lunette OL est fixée à l'instrument, et dirigée sur le premier miroir mn.

Usage du sextant pour mesurer la distance angulaire de deux astres. L'observateur tient l'instrument à la main. Concevons qu'on ait placé le deuxième miroir MN parallèlement au premier; si l'on dirige la lunette sur un astre S, on le verra double; d'abord directement à travers le verre supérieur du miroir mn, et puis par réflexion sur les deux miroirs; car le rayon SC se réfléchira sur le miroir MN, puis subira une deuxième réflexion sur le miroir mn, en prenant une direction parallèle à SC. Il apportera donc dans la lunette une image de l'astre S qui sera précisément dans la direction de l'astre lui-même. Cela aura lieu quand on aura placé le deuxième miroir MN parallèle au miroir fixe mn. Soit E l'étoile dont on veut mesurer la distance à l'astre S. On continuera de voir le soleil directement dans la lunette, et on fera tourner le miroir MN pour lui donner une direction M'N' telle, que l'image de l'étoile E vienne se placer dans la direction de la lunette, au moyen des deux réflexions sur M'N' et mn. Soit A' l'extrémité du rayon suivant lequel se trouve dirigé le miroir M'N'. Les divisions du limbe feront connaître l'angle A'CA. Cet angle sera la demi-distance angulaire de l'étoile à l'astre.

C'est à dire qu'on aura $A'CA = \frac{ECS}{2}$; de sorte que l'angle cherché ECS sera déterminé.

Pour prouver qu'on a $A'CA = \frac{ECS}{2}$, ou $ECS = 2A'CA$, observons que CI étant le rayon SC réflechi sur MN, on a $ICS = 180° - 2ICA$.

Pareillement IC étant aussi le rayon EC réflechi sur M'N, on a $ICE = 180° - 2ICA'$. Donc

$$ICE - ICS = 2(ICA - ICA') \text{ ou}$$
$$ECS = 2A'CA. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Quand l'un des astres qu'on veut observer est le soleil, il faut amortir l'intensité de ses rayons: à cet effet, il y a plusieurs petits verres colorés, fixés au sextant de manière que par une simple rotation, on les amène devant les deux miroirs.

Mesure de la hauteur d'un astre au dessus de l'horizon.

Pour déterminer la distance zénitale d'un astre, on mesure, avec le sextant, la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon; c'est le complément de la distance zénitale.

Si l'on est en mer, on regarde l'horizon comme déterminé par la ligne d'intersection de la surface liquide par la voute céleste; et sur terre on forme un horizon artificiel, comme nous le dirons tout à l'heure.

Observation en mer. La hauteur d'un astre au dessus de l'horizon est l'angle que le rayon visuel mené à l'astre fait avec la ligne horizontale comprise dans le plan vertical mené par l'astre. On tient donc le sextant, à la main, de manière que son limbe soit dans ce plan vertical. Alors on observe directement, c'est-à-dire à travers le verre non étamé du petit miroir, la ligne qui forme la limite de l'horizon, et on fait tourner le grand miroir, de manière que l'image de l'astre devienne tangente à cette ligne limite. L'angle décrit par le miroir est indiqué par l'extrémité de son alidade sur le limbe; et cet angle est la demi-hauteur de l'astre au dessus de l'horizon; c'est-à-dire qu'il faut doubler cet angle pour avoir la hauteur cherchée.

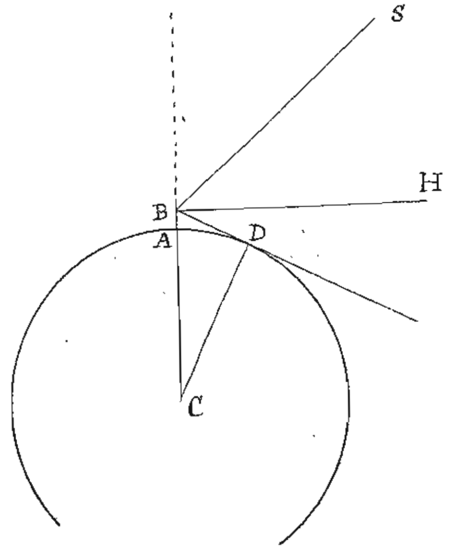
Si le limbe n'était pas bien vertical, on n'aurait pas précisément cette hauteur, on aurait l'angle que le rayon visuel mené à l'étoile fait avec la ligne horizontale comprise dans le plan du limbe. Cet angle serait un peu plus grand que la hauteur cherchée.

Pour s'assurer que l'on tient l'instrument dans une position bien exactement verticale, on lui donne de petits mouvements à droite et à gauche, et l'on voit si l'image de l'astre reste tangente à l'horizon. Alors l'instrument est vertical. Mais il ne le serait pas, si l'image de l'astre s'élevait d'un côté, au dessus de la ligne qui représente l'horizon, et plongeait, de l'autre côté, au dessus de cette ligne.

Quand l'astre qu'on observe a un diamètre appréciable, c'est la hauteur de son centre au dessus de l'horizon, que l'on cherche. Pour cela, on observe successivement les hauteurs de ses deux bords, supérieur et inférieur, en les amenant à être tangents à la ligne limite de l'horizon. On prend la moyenne entre les deux hauteurs observées; c'est la hauteur du centre de l'astre. Comme on trouve dans les Ephémérides le diamètre apparent de l'astre, il suffit de mesurer la hauteur de son bord inférieur, et d'y ajouter le demi-diamètre apparent.

On conçoit qu'après avoir mesuré la hauteur de l'astre, il faudra la rectifier en tenant compte de la réfraction. Et si l'astre a une parallaxe, il faudra aussi y avoir égard, pour obtenir la distance zénitale de l'astre vu du centre de la terre.

Correction due à la dépression de l'horizon. Il y a une autre correction plus considérable à faire subir à la distance observée; elle est causée par la dépression de l'horizon. Concevons l'observateur placé en B, à une certaine hauteur au dessus de la surface de la mer. L'horizon lui paraîtra limité par la courbe de contact de la surface de la mer et du cône circonscrit qui aurait son sommet en B.



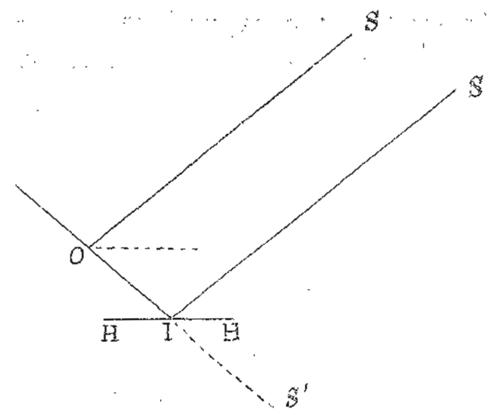
Si donc l'astre est en S, l'angle que l'observateur mesure est SBD, tandis que la véritable hauteur de l'astre au dessus de l'horizon est l'angle SBH. Il faut donc, de l'angle observé retrancher l'angle HBD. Cet angle HBD s'appelle <u>dépression de l'horizon</u>. Il dépend, comme on voit, de la hauteur AB à laquelle l'observateur se trouve placé au dessus de la surface de la mer. L'angle CBD est le complément de cette dépression; et l'on a

$$\sin CBD = \frac{CD}{CB} = \frac{r}{r+h};$$

en appelant r le rayon de la terre et h la hauteur de l'observateur au dessus de la surface de la mer. On a des tables où la <u>dépression</u> se trouve calculée pour différentes hauteurs. De sorte que la correction se fait immédiatement.

Observation sur terre. On dispose une surface parfaitement horizontale, qu'on appelle <u>horizon artificiel</u>. Ce sera la surface d'une masse de mercure, ou bien un plan de glace bien dressé, qu'on place horizontalement au moyen de trois vis et d'un niveau à bulle d'air. L'astre dont on veut mesurer la distance zénitale se réfléchit sur cet horizon artificiel, de sorte qu'on peut mener deux rayons visuels dirigés, l'un sur l'astre S, et l'autre sur son image S' produite par cette réflexion; l'angle de ces deux rayons est le double de la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon. Il suffit donc d'observer cet angle avec le sextant. Pour cela, on dirige la lunette

sur l'image de l'astre, de manière à voir cette image <u>directement</u>; et on fait tourner le miroir MN de manière à voir l'astre lui-même, par une double reflexion sur ce miroir et sur le petit miroir fixe mn. Comme l'angle



que décrit, dans cette rotation, l'alidade du miroir MN est la moitié de l'angle SOI formé par les rayons visuels qui vont à l'astre et à son image, cet angle exprime précisément la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon.

Quand on prend pour horizon artificiel la surface du mercure, il faut qu'il soit renfermé dans un vase d'assez grandes dimensions en longueur et en largeur, parce que le mercure tend à se bomber, par une dépression le long des parois du vase. Il faut aussi pour observer toutes les conditions d'exactitude, renfermer le mercure dans une cage de verre, pour le soustraire aux agitations de l'air. Les lames de verre devront être à faces bien parallèles pour ne pas changer on a à lire sur le limbe un arc qui est multiple de celui qu'on aurait eu à lire sur le sextant. L'erreur qu'on commettra dans cette lecture sera donc atténuée.

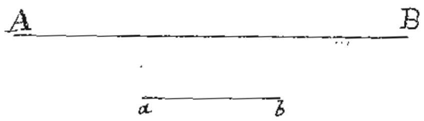
Tel est le principe du *cercle de réflexion*.

Topographie.

La *Topographie* comprend le *Levé des plans*, le *Nivellement* et l'*Arpentage*.

La petite étendue de terrain que l'on a à considérer peut être regardée comme une surface plane. On projette sur cette surface, par des lignes verticales, les objets qu'on veut y représenter; et on reproduit sur le papier, dans de moindres dimensions, l'ensemble de ces projections. Le dessin qui en résulte s'appelle le *levé du plan*.

Il y a plusieurs manières de former ce dessin. Quelle que soit celle qu'on suive, il faut toujours commencer par mesurer, au moyen d'une *chaine* en fer, un côté AB de la figure qu'on veut représenter. On prend sur le papier une ligne ab qui correspondra au



côté AB. Le rapport $\frac{ab}{AB}$, qui est arbitraire, mais qui subsistera dans toutes les autres parties de la figure, s'appelle l'*échelle*. Ainsi, si un millimètre représente un décamètre, l'échelle est un *dix millième*, et l'on dit que le plan est au *dix millième*.

Quand on mesure une longueur AB avec la chaine, pour suivre exactement la ligne droite depuis une extrémité jusqu'à l'autre, on place dans l'intervalle des *jalons*.

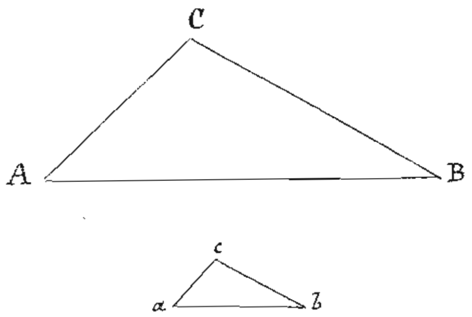
Pour tracer la carte, ou faire le levé d'un plan, on se sert d'un instrument bien simple, appelé *planchette*. C'est une petite planche carrée placée sur deux axes horizontaux en croix, lesquels sont fixés au haut d'un axe vertical. Cet axe vertical se termine inférieurement par trois pieds inclinés qui entrent en terre et donnent à l'instrument une fixité convenable. La planchette peut tourner autour de son centre, au moyen d'une vis qui la fixe à l'axe vertical; chacun des deux axes horizontaux sur lesquels elle repose peut recevoir un mouvement lent dans son plan vertical, au moyen de vis de rappel, afin qu'on parvienne à donner à la planchette une position parfaitement horizontale. On se sert, à cet effet, d'un niveau à bulle d'air, qu'il faut toujours avoir à sa disposition.

On recouvre la planchette d'une feuille de papier sur laquelle on trace la carte.

Enfin on a une *alidade*, ou bien une règle surmontée d'une lunette qui lui est parallèle. Nous verrons tout à l'heure quel usage constant on fait de cette alidade.

Il y a trois manières de se servir de la planchette.

1er Procédé. Après avoir pris comme nous l'avons dit, une ligne ab pour correspondre au côté AB de la portion de terrain qu'on veut représenter, on se transporte au point A ; on place la planchette de manière que la projection du point *a* de la carte coïncide avec le point A du terrain ; on place l'alidade le long de la ligne ab ;

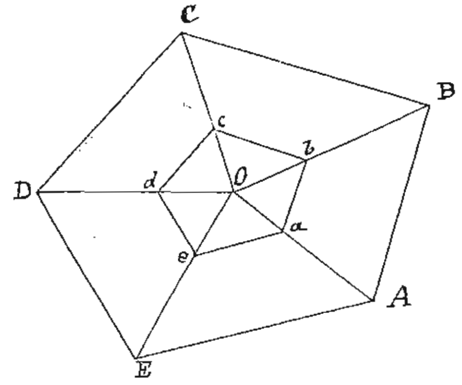


puis on fait tourner la planchette jusqu'à ce que la ligne ab se trouve dans la direction de AB, ce qui a lieu quand, au moyen de l'alidade, on aperçoit le jalon placé en B. Cette opération s'appelle *orienter* la planchette. Quand elle est faite, on retire l'alidade, et

on la place dans la direction du point A à un autre point C : au moyen de la règle même que forme l'alidade on trace sur le papier une ligne ac dans la direction AC : ensuite on transporte la planchette au point B, et on fait coïncider la ligne ba avec BA ; puis on dirige l'alidade sur le point C et on trace la ligne bc. L'intersection des deux lignes ac, bc détermine le point c qui correspond au point C. On déterminera de même tout autre point de la carte. Ce procédé s'appelle *méthode d'intersection*.

2e Procédé. Après avoir placé la planchette de manière que le point b coïncide avec B, et que ba ait la direction de BA, on tire la ligne bc dans la direction de BC, au moyen de l'alidade. On mesure avec la chaîne la longueur BC ; et on prend bc dans le rapport avec BC, fixé par l'échelle. Après avoir ainsi déterminé le point c au moyen de la première base AB, on détermine pareillement un point suivant d au moyen de la base BC. Et ainsi de suite. Ce procédé s'appelle *méthode de cheminement*. Pour que l'opération soit exacte, il faut que le polygone se ferme, c'est-à-dire qu'on revienne au point de départ A.

3e Procédé. On établit la planchette en un lieu O d'où l'on aperçoive les principaux



points du terrain. Au moyen de l'alidade, on trace les lignes Oa, Ob, Oc .... dirigées vers les points A, B, C, ... Puis, on mesure avec la chaine les distances OA, OB, OC, ...; et on prend Oa, Ob, Oc, ... proportionnels à ces distances. On forme ainsi la carte abcde.

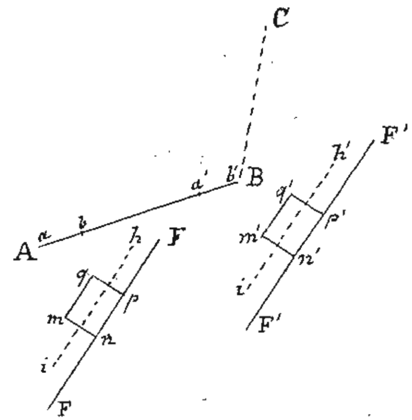
De la Boussole ou Déclinatoire.

On peut se servir pour *orienter* la planchette, d'une boussole consistant en une aiguille aimantée renfermée dans une petite boite carrée; cet instrument prend le nom de *déclinatoire*.

Orienter la planchette, c'est la placer de manière qu'un côté du dessin coïncide en direction avec la ligne tracée sur le terrain, à laquelle correspond ce côté.

Après qu'on a orienté la planchette sur une base de départ AB, c'est-à-dire, qu'on a placé le point *a* du dessin au dessus du point A du terrain, et fait coïncider en direction, le côté ab avec la ligne AB, ce qu'on fait

avec l'alidade, on place le déclinatoire sur la planchette, et on le fait tourner jusqu'à ce que l'aiguille ih devienne parallèle à l'un des côtés np, du carré qui forme la boite. Ce côté s'appelle *ligne de foi*. On tire sur le papier, dans la direction de ce côté, une ligne FF qu'on appelle aussi *ligne de foi*; cette ligne reste tracée sur le papier; et elle sert pour orienter la planchette, à chacune des stations.

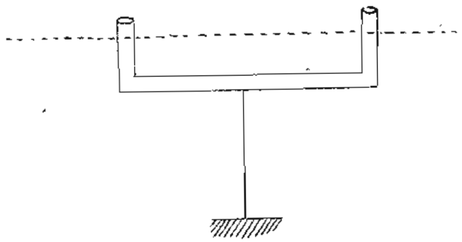


On se transporte en B; on y fait coïncider le point b du dessin avec le point B du terrain, et pour diriger le côté ba sur BA, on place le déclinatoire le long de la ligne de foi F'F', puis on fait tourner la planchette, autour du point b, jusqu'à ce que cette ligne de foi se trouve parallèle à la direction que prend l'aiguille. Alors il est clair que la figure tracée sur le papier, se trouve, dans sa nouvelle position (a'b', F'F'), parallèle à sa position primitive (ab, FF). Conséquemment la ligne b'a', parallèle à ba, coïncide en direction, avec la ligne BA; c'est-à-dire que la planchette est *orientée*.

Voilà quel est l'usage du déclinatoire. Mais ce procédé expéditif n'est pas absolument exact, à cause de la variation diurne de la déclinaison de l'aiguille, variation qui peut être de 12 à 15 minutes.

Nivellements.

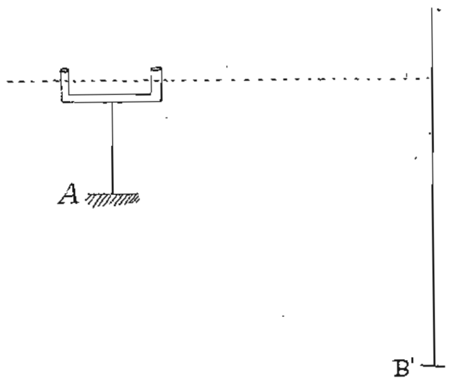
Pour déterminer la différence de hauteur verticale de deux points de la terre éloignés l'un de l'autre, on se sert du *niveau d'eau*.



Cet instrument est un long tube recourbé à angle droit à ses extrémités, et qui se termine par deux fioles en verre. On verse de l'eau dans ce tube, jusqu'à ce qu'elle s'élève dans les fioles. La ligne menée tangentiellement aux deux surfaces du liquide qui s'aperçoit dans les fioles, est nécessairement horizontale. C'est sur cette propriété qu'est fondé l'usage du *niveau d'eau*.

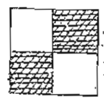
Soient A, B les deux points de la terre dont on veut déterminer la différence de hauteur verticale. On établit le niveau en A, et on fait placer en B une règle verticale le

long de laquelle peut glisser une mire ou voyant.



On élève cette mire jusqu'à ce qu'elle se trouve sur le prolongement de la ligne tangente aux deux surfaces du liquide dans les fioles. La hauteur de la mire au dessus du point B, diminuée de la hauteur du niveau au dessus du point A, est la hauteur du point A au dessus du point B.

On prend pour *mire* ou *voyant* une petite planche carrée divisée en quatre parties dont deux sont blanches et les deux autres noires.



Le niveau d'eau n'offre pas une grande exactitude, parce qu'on peut commettre de petites erreurs, en déterminant à l'œil, la ligne qui rase les surfaces du liquide dans les deux fioles.

Pour des nivellements qui exigent plus d'exactitude, on se sert du *niveau à bulle d'air*. C'est un tube rempli en partie d'alcool. Au dessus du liquide il se forme de la vapeur d'alcool; et c'est cette vapeur qu'on appelle la *bulle d'air*. On se sert d'une lunette pour viser les objets.

Influence de la réfraction. Puisque c'est pour opérer avec une grande précision qu'on se sert d'un niveau à bulle d'air, on devra avoir égard à la réfraction. Pour cela, on se sert des tables de réfraction relatives aux objets terrestres. Ou bien on peut corriger, dans l'opération même, l'effet de la réfraction; voici comment: au lieu de chercher directement la différence de niveau des deux points proposés, on prend un point intermédiaire, et on cherche les différences de niveau de ce point aux deux premiers. Dans ces deux opérations les effets de la réfraction sont en sens contraires et se détruisent à une très faible différence près.

Analyse des Leçons.

1ère Leçon. Pages 1 — 16.

Trigonométrie sphérique. — Du nombre des questions que comporte le problème général de la Trigonométrie sphérique. — Quatre formules devront suffir pour tous les cas. — Démonstration de la formule qui a lieu entre les trois côtés et un angle; et déduction des trois autres formules de celle-là. — Propriétés du triangle polaire ou supplémentaire.

Formules relatives aux triangles rectangles. — Résolution de ces triangles.

2e Leçon. P. 17 — 33.

Considérations sur le calcul par logarithmes, pour la résolution des triangles sphériques obliques. — Trois manières de procéder. — Formules générales calculables par logarithmes. — Formules de Delambre — Analogies de Néper.

Résolution des triangles sphériques obliques. — Remarque sur les six cas généraux de la résolution des triangles sphériques.

Unité angulaire. — Expression d'un

arc en angle.

Résolution de l'équation $\tang x = m \tang a$ par les séries.

3e Leçon. P. 33 — 47.

Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différents de 90°. Résolution d'un triangle sphérique dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère. — Le triangle rectiligne dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique donne lieu à deux propriétés relatives, l'une à ses angles et l'autre à sa surface. — Usage du triangle rectiligne pour la résolution du triangle sphérique.

De la mesure du temps. Chronomètres. — Il y a à considérer dans tout instrument à mesurer le temps, cinq parties principales: le moteur, le rouage, le régulateur, l'échappement, et le mécanisme servant au remontage. — Deux sortes d'instruments: les horloges et les montres.

Des horloges: Moteur. — Régulateur. — Échappement à ancre.

4e Leçon. P. 48 — 67.

Disposition de l'ancre et du pendule. — Suspension du pendule. — Pendule compensateur.

Des montres: Moteur. Fusée. — Régulateur. Balancier. Spiral; plat; cylindrique. — Échappement à cylindre. — Échappement libre. — Balancier compensateur. — Longueur du spiral. De sa compensation par la raquette. — Compensation naturelle du spiral. — Spiraux isochrones.

5e Leçon. P. 67 — 73. et 86 — 93.

Rouage des chronomètres. Roues inarbrées. — Rapport des vitesses des deux roues extrêmes.

Remontage des horloges à poids. — Remontage des montres.

Mesure des angles. — Alidades à pinnules. — Lunettes astronomiques. Réticule. — Vernier.

6e Leçon. P. 93 — 116.

Cercle répétiteur. Sa description. — Mouvements de l'instrument; deux manières de les produire. — Usage du cercle répétiteur pour la mesure des angles sur le terrain. — Remarques sur la manœuvre et l'ordre des différents mouvements de l'instrument.

De l'excentricité de la lunette inférieure. Correction de l'erreur qui en résulte.

Réduction au centre de station.

Usage du cercle répétiteur pour les observations astronomiques.

Graduation du cercle. — Conversion des grades en degrés.

7e Leçon. P. 116 — 135.

Théodolite. — Son usage pour mesurer un angle azimutal, et les distances zénitales des astres.

Réfractions astronomiques. — Exemples et preuves de la réfraction. — Réfractions moyennes. — Leur correction relative à l'état barométrique et thermométrique de l'atmosphère.

Calcul des réfractions. — Table de Tycho. — Hypothèse de Cassini. — Formules

de Bradley et de Simpson.

Théorie analytique. — Méthode de Laplace.

8e Leçon. P. 135 — 154.

Formule de Delambre.

Méthode des moindres carrés.

De quelques effets des réfractions. Aplatissement dans le sens vertical, du disque du soleil à l'horizon. — Du lever et du coucher des astres. — Changement d'azimut à l'horizon.

Astronomie. — Des étoiles. — Invariabilité de leurs distances respectives. — Mouvement diurne de la voute céleste. — Méridien d'un lieu. Axe du monde. — Les étoiles décrivent des cercles autour de l'axe du monde, et leur mouvement est uniforme. Première demonstration de ces deux propositions, par l'observation et le calcul. — Jour sidéral.

9e Leçon. P. 154 — 175.

Description de l'équatorial. Son usage pour demontrer, par l'observation seulement, le mouvement circulaire uniforme des étoiles autour de l'axe du monde.

Coordonnées par lesquelles on détermine la position des étoiles sur la sphère céleste. Déclinaison. Ascension droite.

Lunette méridienne, ou instrument des passages. — Trois conditions essentielles dans la disposition de l'instrument. — Son usage pour mesurer l'ascension droite des étoiles.

Cercle mural. — Son usage pour mesurer la déclinaison des étoiles.

Déterminer la hauteur du pôle au dessus de l'horizon par l'observation d'une étoile.

Catalogue d'étoiles.

Classification des étoiles par ordre d'éclat. — Étoiles changeantes. Périodiques Temporaires. Colorées. — Étoiles doubles. Revolution de l'une autour de l'autre. — Mouvement propre des étoiles. — De leurs distances à la terre. — Voie lactée. — Nébuleuses.

10e Leçon. P. 180 — 195.

Zodiaque. — Ecliptique. — Points équinoxiaux.

Système de coordonnées rapportées à l'écliptique. — Latitude céleste. Longitude céleste. — expression de la latitude et de la longitude d'une étoile en fonction de sa déclinaison et de son ascension droite.

Géodésie. Figure et mesure de la terre. — Premier aperçu de la forme de la terre.

Définitions : Horizon. Latitudes. Parallèles terrestres. Equateur. Pôles de la terre. Méridienne d'un lieu.

Système de coordonnées sur la surface de la terre ; latitude ; longitude. — Mesure de la latitude. — Mesure de la longitude ; de deux manières : 1° avec un chronomètre d'une marche bien précise. 2° au moyen de signaux.

Calcul de l'angle formé par les verticales en deux lieux de la terre.

Mesure de la longueur d'une ligne sur la surface de la terre. — Triangulation. — Tracer la ligne la plus courte, en partant d'un point sous une direction donnée.

11e Leçon. P. 195 — 212.

Tracé de la méridienne d'un lieu.

Détermination approximative de la forme et de la grandeur de la terre.

De la mesure des angles tracés sur la surface de la terre : par le théodolite ; par le cercle répétiteur. — Réduction d'un angle à l'horizon. — Du calcul des triangles géodésiques.

Preuve de la forme ellipsoïdale de la terre et de l'applatissement aux pôles. — Détermination d'un arc d'un degré sur le méridien. — Calcul de la latitude d'un lieu inaccessible.

Mesure des dimensions et de l'aplatissement de la terre supposée un ellipsoïde de révolution. — Expression générale d'un arc d'un méridien, dont les extrémités sont déterminées par leurs latitudes. — Longueur d'un arc d'un degré, en fonction de la latitude moyenne. Cet arc croît, à partir de l'équateur, proportionnellement au carré du sinus de sa latitude moyenne. — Détermination du rayon de l'équateur, et de l'aplatissement de la terre. — Mesure du quart du méridien. — Longueur du mètre.

Remarque sur les éléments empruntés de l'observation pour la mesure du méridien.

12e Leçon. P. 222 — 240.

Cartes géographiques. — Projection stéréographique ; ses trois propriétés générales.

— Projection sur le méridien. — Projection sur l'horizon. — Projection polaire.

Développement conique.

Développement de Flamsteed. — Conservation des aires.

13e Leçon. P. 240 — 252.

Développement de Flamsteed modifié. système adopté pour la carte de France. — Coordonnées rectangles. Construction des parallèles par points. — Calcul de l'inclinaison d'un méridien sur un parallèle. — Cas où la terre est supposée un sphéroïde.

Cartes marines. Développement de Mercator. — Usage de ces cartes en mer.

14e Leçon. P. 254 — 270.

Du soleil. — Mouvement propre du soleil. — Forme circulaire de son disque. — Construction de sa trajectoire. — Détermination de sa déclinaison et de son ascension droite lors de son passage au méridien ; à un instant quelconque ; par deux méthodes : 1° par l'observation et la calcul; 2° par l'observation seule, avec l'équatorial.

Points équinoxiaux. — Déterminer la position de ces points sur l'équateur, et l'instant où le soleil s'y trouve.

La trajectoire du soleil est une courbe plane. — Inclinaison de son plan sur l'équateur. — Année tropique.

Longitude du soleil. — Calcul de la longitude par l'observation de l'ascension droite. — Expression de la longitude en fonction du temps. — Longitude moyenne. — Equation du centre.

Calcul de l'ascension droite du soleil en fonction du temps. — Ascension moyenne. — Equation du temps.

15e Leçon. P. 270 — 286.

Mesure du temps. — Définitions: jour vrai; jour moyen; temps vrai; temps moyen; midi vrai; midi moyen; équation du temps.

Expression du jour vrai en fonction de la longitude du soleil. — Valeur du jour moyen. — Expression de l'année tropique en jours moyens. — Expression de l'équation du temps. — Sa propriété de

devenir quatre fois nulle dans le cours de l'année tropique.

Du temps marqué par les horloges. — Usage des cadrans solaires pour déterminer le temps moyen, et régler les horloges.

Année civile. — Calendrier Julien. — Correction grégorienne.

16e Leçon. P. 287 — 305.

Précession des équinoxes. Mouvement apparent de la voute céleste autour de l'axe de l'écliptique d'occident en orient. — Année sidérale. — Déplacement de l'étoile polaire. — Autre explication de la précession. Rétrogradation de la ligne des équinoxes, par suite d'un mouvement de rotation de l'équateur autour de l'axe de l'écliptique.

Nutation.

De la division de l'écliptique en douze signes.

Du jour et de la nuit. — De leur durée dans un même lieu, aux différentes époques de l'année. — Solstices. Tropiques célestes.

De la durée du jour et de la nuit à différentes latitudes. — Cercles polaires. Tropiques terrestres. — Division de la terre en cinq zones.

Crépuscule. — L'aurore peut suivre immédiatement le crépuscule, dans certains lieux, à certaines époques.

Division de l'année en quatre saisons.

17e Leçon. P. 305 — 327.

Distances variables du soleil à la terre. — Véritable forme de l'écliptique. — Ligne des apsides. Apogée; Périgée; excentricité. — Loi des aires.

Longitude du soleil calculée d'après les lois du mouvement elliptique. — Différence notable entre l'ellipse de Képler et le cercle excentrique de l'astronomie ancienne.

Parallaxes. — Relation entre la parallaxe horizontale et la distance de l'astre au centre de la terre. — Relation entre la parallaxe de hauteur et la parallaxe horizontale. — Calcul de la parallaxe horizontale, par deux observations simultanées.

Distance du soleil à la terre. — Calcul de son diamètre.

Phénomènes que présente la surface du soleil. Taches. Pénombre. Facules. Rotation du soleil autour d'un axe. Durée

de la rotation. — Inclinaison de l'axe de rotation sur le plan de l'écliptique.

Coordonnées héliocentriques d'un point de la surface du soleil.

18e Leçon. P. 327 — 339.

Constitution physique du soleil; explication du phénomène des taches, de la pénombre et des facules. — Lumière zodiacale.

De la lune. — §. 1er Phénomène général du mouvement de la Lune. — Mouvement propre dans le sens du mouvement du soleil. — Phases. — Mois synodique, ou lunaison. — Mois sidéral lunaire. — Cycle lunaire, ou nombre d'or: rapport entre l'année tropique et la lunaison.

Explication des phases de la Lune. — Explication de la lumière cendrée.

19e Leçon. P. 340 — 347.

§. 2e Du mouvement apparent sur la voûte céleste. — Construction de l'orbite lunaire sur la voûte céleste. Cette courbe est un grand cercle. — Ses nœuds. — Rétrogradation des nœuds. — L'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique est constante, et son inclinaison sur le plan de l'équateur est variable dans de certaines limites. — Révolution synodique du nœud. — Rapport entre la lunaison et la révolution synodique du nœud.

§. 3e Mouvement elliptique. — Parallaxe de la lune. Méthode particulière pour la déterminer par une observation faite à l'équateur. — Distance de la Lune à la terre. — Diamètre apparent. — Diamètre réel. — Forme elliptique de l'orbite lunaire. — Déterminer le lieu de l'apogée. — Révolution de la ligne des apsides.

20e Leçon. P. 355—366 et 370—376.

Des éclipses. — Eclipses de Lune. — Possibilité d'éclipse. — L'éclipse peut être totale. — Condition relative à la latitude de la lune, pour qu'il y ait éclipse; limites. — Détermination des époques où il pourra y avoir éclipse. — Calcul de l'instant de l'opposition. — Phénomènes qui accompagnent les éclipses de lune.

Eclipses de soleil. — Distance du sommet du cône d'ombre projeté par la Lune. — L'éclipse est totale, ou annulaire, ou partielle. — Elle n'est visible que sur une certaine zone de la terre. et jamais sur tout l'hemisphère tourné vers le soleil. — Zone lumineuse qui apparait autour du disque de la lune, dans les éclipses de soleil.

Phénomènes que présente la surface de la lune. — Taches. — Rotation de la lune. — Son équateur coupe l'écliptique suivant une droite parallèle à la ligne des nœuds. — Vitesse de rotation de la lune.

Libration, en longitude; en latitude. — Libration diurne.

21e Leçon. P. 376—395.

Constitution physique de la Lune. — Montagnes. — Mesure de leur hauteur; 1° par l'observation des points brillants sur le demi-disque obscur; 2° par la mesure des ombres portées sur le demi-disque éclairé. — Caractère volcanique des montagnes de la lune. — Absence d'eau. — Absence d'atmosphère. — De l'influence de la lune sur le temps.

Des planètes. — Phénomènes qui les distinguent des étoiles. — Leur mouvement propre. — Mouvement <u>direct</u>; <u>rétrograde</u>. <u>Stations</u>. — Conjonctions;

supérieure; inférieure. — Opposition. — Nombre et noms des planètes. — Distinction des planètes en inférieures et supérieures. — Elongation.

Explication du mouvement apparent d'une planète inférieure, dans l'hypothèse qu'elle se meut autour du soleil. — Ses phases. — Son passage sur le soleil.

22e Leçon. P. 395 — 418.

Planètes supérieures. — Description de leur mouvement apparent.

Orbites des planètes. Nœuds. Ligne des nœuds. — Déterminer l'instant où la planète est à son nœud. — La ligne des nœuds fait toujours le même angle avec la ligne des équinoxes; et la distance du soleil à un nœud est constante. — L'orbite d'une planète est une courbe plane. — Calcul de l'inclinaison de son plan sur l'écliptique. — Coordonnées qui servent à déterminer le mouvement propre d'une planète dans le plan de son orbite.

Lois de Képler. — Aphélie; périhélie. Temps périodique.

Éléments elliptiques des planètes. — 1ère méthode pour les déterminer au moyen

d'observations faites dans des circonstances particulières. — Deuxième méthode; détermination simultanée des sept éléments elliptiques.

Apparences que présente la surface des planètes. — Anneau de saturne. Petites planètes.

23e Leçon. P. 419 — 438.

Des comètes. — Noyau. Chevelure. Queue. — Trajectoires des comètes. — De leurs éléments paraboliques. — Comment on peut reconnaître, en général, si une comète a déjà paru. — Comètes de Halley, d'Encke et de Gambart. — Comètes dont on a calculé les éléments elliptiques lors de leur première apparition.

Mouvement de la terre. — Mouvement de rotation autour de son axe des pôles. — Mouvement de translation autour du soleil.

Découverte et mesure de la vitesse de la lumière par les éclipses des satellites de Jupiter.

Aberration de la lumière. Expression de l'aberration en fonction de l'angle que la direction apparente d'un astre fait avec la direction du mouvement de la terre.

24e Leçon. P. 438 — 467.

Effet annuel de l'aberration.

Aberration diurne.

Aberration des planètes. — Son expression. — Absence d'aberration diurne. Preuve de la rotation de la terre.

Explication de divers mouvements apparents, dans l'hypothèse du mouvement de la terre. — stations et rétrogradations des planètes supérieures. — Précession des équinoxes. — Nutation.

Interprétation des lois de Képler.

Des perturbations qu'éprouvent les éléments elliptiques. — La troisième loi de Képler n'est qu'approximative, même abstraction faite des influences réciproques des planètes les unes sur les autres.

Calcul des éléments elliptiques en ayant égard aux abstractions réciproques des planètes.

Des inégalités périodiques et séculaires des éléments elliptiques des planètes. — Invariabilité des grands axes. Limites restreintes des inégalités séculaires des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Stabilité du système planétaire.

25e Leçon. P. 467 — 472. et 477 — 493.

Identité de la pesanteur à la surface de la terre, avec la force d'attraction qui retient la lune dans son orbite.

Chute des corps d'une grande hauteur — Preuve du mouvement de rotation de la terre.

Théorie des marées. — expression de l'attraction relative exercée par la lune sur les molécules liquides, à son passage au méridien. — Ce qu'on entend par l'établissement d'un port. — Expression du mouvement ascensionnel de la mer en fonction du temps. — Marées solaires. — Calcul de l'heure de la plus grande marée en hauteur et en dépression.

26e Leçon. P. 493 — 518.

Explication de la précession et de la nutation.

Loi de Bode relative aux distances

Note sur les calculs numériques où entrent des angles.

Voici deux exemples qui se présentent fréquemment, où il faut introduire dans l'expression d'un angle, le facteur sin 1″ pour la rendre propre au calcul numérique.

I. Quand on exprime un angle φ par l'arc AA′ qu'il soutend dans un cercle du rayon r, on a $\varphi = \frac{AA'}{r}$; et pour le calcul numérique

$$\varphi = \frac{AA'}{r \sin 1''}.$$

En effet le rapport $\frac{AA'}{r}$ est un nombre abstrait qui ne suffit pas pour exprimer la valeur numérique d'un angle; il exprime seulement combien de fois l'angle φ contient l'unité d'angle. On prend pour unité d'angle, l'angle de 1″. On a

$$\frac{\varphi}{1''} = \frac{AA'}{aa'}\text{; ou } \varphi = \frac{AA'}{aa'}.$$

aa' étant l'arc de 1″ dans le cercle du rayon r auquel appartient l'arc AA′.

Or soit $\alpha\alpha'$ l'arc de 1″ dans le cercle dont le rayon est égal à l'unité. On a

$$\frac{aa'}{\alpha\alpha'} = \frac{r}{1}\text{; ou } aa' = r.\alpha\alpha'.$$

Donc $$\varphi = \frac{AA'}{r.\alpha\alpha'}.$$

A la place de $\alpha\alpha'$ qui est l'arc de 1″ dans le cercle dont le rayon est l'unité, prenons le sinus de cet arc; il viendra

$$\varphi = \frac{AA'}{r \sin 1''}$$

C. Q. F. D.

II. Quand on a l'équation $\sin p = \frac{r}{R} \sin z$, comme dans le calcul des parallaxes; on dit, l'angle p étant très petit on substitue cet angle à son sinus, de sorte qu'on a

$$p = \frac{r}{R} \sin z.$$

Pour le calcul numérique c'est $p = \frac{r}{R}\,\frac{\sin z}{\sin 1''}$ qu'il faut prendre. En effet, ce n'est pas un angle qu'on peut substituer à son sinus, mais bien l'arc soutendu par cet angle; ainsi dans l'équation $p = \frac{r}{R}\sin z$, il est sousentendu que p représente un arc. Et si l'on veut introduire, à la place de cet arc, l'angle qui le soutend, on se sert de la formule qui donne l'expression de l'arc en fonction de l'angle, savoir

arc = angle. sin 1''.

Et comme on représente l'angle par p, de même que l'arc, il vient

$$p \sin 1'' = \frac{r}{R}\sin z,$$

ou

$$p = \frac{r}{R}\,\frac{\sin z}{\sin 1''}.$$

?, p. 578!

C. Q. F. P.

Errata

Page 14. Ligne 11; Pour; lisez: par.
" 36 " 12: à cause; lisez: à ceux.
" 37 Dernière équation, $\frac{a^4 b^4 c^4}{24 r^4}$; lisez: $\frac{a^4 - b^4 - c^4}{24 r^4}$.

Page 37 2e ligne en remontant; ces deux; lisez: les deux.
" 91 5e lig. en remontant; moies; lisez: monnaies.
" 106 à la place de $\tang A = \frac{r}{D}$, $\tang B = \frac{r}{D'}$, lisez: $\sin A = \frac{r}{D}$, $\sin B = \frac{r}{D'}$.
" 138 lig. 17. aproximative; lisez: approximative.
" 164 11e lig. en remontant; triangle; lisez: réticule.
" 247 lig. 7. l'applatissement; lisez: l'aplatissement.
" 262 lig. 11. Dans; lisez: donc.
" 266 lig. 1ère. occupe; lisez: n'occupe pas.
" 268 9e lig. en remontant. coincidera avec; lisez: coincidera encore avec.
" 269 lig. 10. haut; lisez: lent.
" 270 1ère équation; Mettre le signe $-$ devant $\sin 2L \tang^2 \frac{1}{2}\varphi$.
" 296 lig. 11. La nutation; lisez: La rotation.
" 300 " 6. Par; lisez: Pour.
" 301 " 5. sera; lisez: passera.
" 302 " 11. ce crépuscule; lisez: le crépuscule.
" 308 " 4 59' 83'',33; lisez: 59' 8'',33.
" 309 " 11 ce qui ne faisait; lisez: ce que ne faisait.
" 310 $\partial l = n(1-e^2)^{\frac{3}{2}}(1+\ldots)$; lisez: $\partial l = n(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1+\ldots)$.
" 326 6e ligne en remontant; s'appercoivent; lisez: s'aperçoivent.
" 361 lig. 1ère entre la; lisez: entre dans la.
" 364 " 10. plein; lisez: solaire.
" 371 " 11. ces; lisez: ses.

Page 375 ligne 20; du disque; *lisez*: du centre du disque.
" 385 " 4; qu'il y a; *lisez*: qu'il a.
" 389 " 16; de deux; *lisez*: des deux.
" 456 " 15; l'identité; *lisez*: l'intensité.
" 503 8e ligne en remontant; ont éprouvé; *lisez*: ont éprouvée.
" 514 9e " " ; de la chaleur; *lisez*: de chaleur.
" 523 7e " " ; distances exprimées; *lisez*: distance exprimée.
" 527 dernière ligne; $\cos p = 1 \frac{p^2}{2}$; *lisez*: $\cos p = 1 - \frac{p^2}{2}$.
" 539 lig. 15; couche; *lisez* courbe.
" 541 dernière ligne; parallaxe; *lisez*: parallèles.
" 576 après la dernière équation; *ajoutez*:
L'arc de 1", dans le cercle dont le rayon est l'unité, se détermine par la proportion

$$\frac{\text{arc } 1''}{\text{angle } 1''} = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}; \quad \text{d'où}$$

$$\text{arc } 1'' = \frac{\pi . 1''}{180^\circ} = \frac{\pi . 1''}{(180.60.60)''} = \frac{\pi . 1''}{648000''} = \frac{3,1415926}{648000}.$$

Cette valeur numérique est aussi celle de sin 1" qu'on substitue ordinairement, dans les formules, à arc 1".