Теорија Извода

са применама

Бор. Ј. Пујић, проф.

Теорија извода

са применама

Предавања
Dr Мих. Петровића,
проф. Универзитета,
(допуњена примерима)

Основни појмови о функцијама

У Математици имамо сталних и променљивих количина. Стална је количина н. пр. $\pi = 3,14$, а променљива н. пр. полупречник, висина и т. д.

Променљиве количине могу бити зависне (везане) или независне једна од друге. Кад две количине зависе једна од друге тако, да кад се промени једна, промени се и друга, онда се те количине називају функцијама т. ј. једна је количина функција друге. Н. пр. пређени пут и време, полупречник и површина круга, запремина гаса и притисак су функције једна друге.

Те количине називају се

функцијом онда кад се зна начин како зависи једна количина од друге, али кад се зна начин како зависе једна од друге, онда се то зове *једначином*, као н. пр.

$$p = r^2\pi$$

Кад се прецизира начин како једна количина зависи од друге, онда је резултат прецизирања једначина. Али кад се не обраћа пажња на то како y зависи од x-а, онда се то обележава овако:

$$y = f(x)$$
$$y = \varphi(x)$$
$$y = \psi(x)$$

и т. д.

Код површине круга имали би

$$p = f(r)$$

а ако би хтели да означимо како p зависи од r, имали би

$$p = r^2\pi$$

И у једном и у другом случају оне зависе једна од друге.

Појам функције претпоставља да се има посла најмање са две променљиве количине и то се увек даје произвољна вредност једној количини а вредност се друге израчунава. Она количина којој се даје произвољна вредност зове се *независно променљива количина* а она друга *функција*. Која ће количина бити независно променљива а која функција зависи од нас. За независно променљиву количину готово увек се узима она која је простија. Н. пр. код површине круга

$$p = r^2\pi$$

узећемо за независно променљиву количину полупречник r, па ћемо за

$$r = 1, 2, 3 \ldots$$

имати

$$p = F(r) = r^2\pi = 3{,}14\ ;\ 12{,}56\ ;\ 28{,}26\ ; \ldots$$

Операције које треба извршити па да се дође до функције могу бити *алгебарске* и *трансцедент-*

не. Алгебарске су операције кад имамо посла са простим алгебарским радњама; њих има шест: сабирање, одузимање, множење, дељење, степеновање и кореновање. Све остале се сматрају као трансцедентне као н. пр. логаритмовање, тражење синуса, косинуса и т. д.

Према овим операцијама и функције се деле на: алгебарске и трансцедентне. Алгебарске су функције оне кад су операције које су њима изражене алгебарске операције као н. пр.

$$\frac{1+x}{1-x} \;;\; \sqrt[3]{x} \;;\; \sqrt{\frac{2+x^2}{x}} \;;\; x^m+ax^2 \text{ и т. д.}$$

Трансцедентне функције су н. пр.

$$\log x,\ \sin x,\ \cos x \text{ и т. д.}$$

Алгебарске функције делесе на рационалне и ирационалне. Рационалне су функције ако су у њима са независно-променљивом количином изражене само ове операције: сабирање, одузимање, множење, дељење и подизање на степен који је цео број. Такве су функције н. пр.

$$1+x \;;\; x^3+x^2-3x \;;\; \frac{3+2x^3-4x^5}{x^3-x^2+x} \text{ и т. д.}$$

Ирационалне функције биле би онда кад би осим горњих операција имали још и кореновање и степеновање са разломљеним бројевима као н. пр.

$$\sqrt{x^3-3x^2-1} \;;\; \frac{1+x}{\sqrt{x-1}} \;;\; x^{\frac{1}{3}}-x+x^{\frac{5}{2}} \text{ и т. д.}$$

Трансцедентних функција има бескрајно много и бескрајно разноврсних и могу се карактерисати са разних гледишта. Тако, има функција карактерисаних том особином да свакој вредности независно-променљиве количине одговара само једна вредност функције. Такве функције зову се униформним функцијама. Напротив има таквих функција да једној датој вредности независно променљиве количине одговара не једна већ бескрајно много вредности функција. Такве функције називају се <u>мултиформне</u>. Униформне функције биле би

$\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x$; $1+x-\operatorname{ctg} x$ и т. д.

а мултиформне

$\arcsin x$; $\arccos x$ и т. д.

Исто тако

$$\sqrt{1+\sin x}$$

биће мултиформна функција јер квадратни корен има две вредности.

Дешава се да је више променљивих количина везано тако да кад се једна од њих мења, мењају се и остале и за ту једну се каже да је функција оних осталих. Н. пр. запремина цилиндра зависи од полупречника и висине и према томе

$$v = f(r, h)$$

где сви троје могу бити променљиви; ако се две такође количине мењају и трећа се мења и она је њихова функција. Ако је потребно да се означи њихова заједничка зависност, онда се пише

$$v = f(r, h)$$

Исто тако ако хоће да се означи да p зависи од $x, y, z, \dots$ пише се

$$p = f(x, y, z, \dots)$$

Међутим ако треба означити и сам начин те зависности, онда се у место $f, \varphi, \psi, \dots$ мора употребити баш она специјална функција која том случају одговара. Н. пр. код цилиндра неће онда бити довољно само

$$v = f(r, h)$$

већ морамо писати

$$v = r^2 \pi h$$

Графичко представљање функција

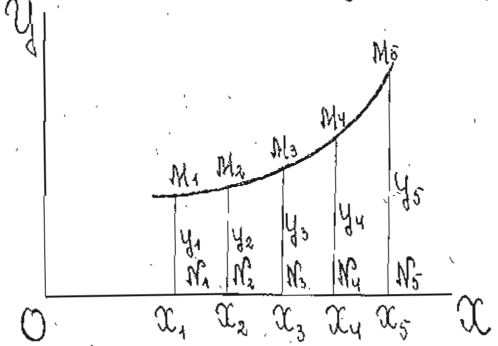
Нека су дате две променљиве количине x и y и нека су везане тако да је

$$y = f(x) \qquad 1.)$$

Ако је познат начин на који зависи y од x-а, онда би на место једначине 1.) писали

y = нека функција од x

Нацртајмо две координатне осовине и дајмо променљивој x разне узастопне вредности и пренесимо их на апсцисну осовину тако да добијемо тачке N_1 N_2 N_3 ... Израчунајмо из једначине 1.) одговарајуће вредности y-а и изнад сваке тачке $x_1, x_2, x_3, \dots$ обележимо одговарајуће тачке $M_1, M_2, M_3, \dots$ од којих свака има за апсцису по једну вредност x-а а за ординату њој одговарајућу вредност y-а израчунату из једначине 1.). Уколико су узете вредности $x_1, x_2, x_3, \dots$ ближе једна другој, утолико су и тачке $M_1, M_2, M_3 \dots$ ближе и ако су вредности x-а бескрајно близу једна другој биће и тачке M близу и образоваће једну криву или праву линију. Према начину на који смо добили ту линију излази да свакој оваквој линији одговара по једна једначина 1.) и свакој једначини 1.) одговара по једна крива линија. Линија је графички а једначина рачунски представљена.



У тражењу овакве линије састоји се графичко представљање функција. Врло многе особине функција излазе на видик јасније кад се графички представе него кад се траже рачунским путем.

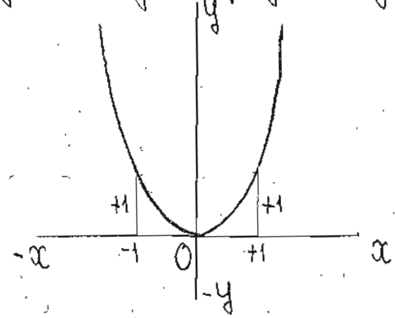
При конструисању дате функције обично се овако ради: образује се шема, па се затим у рубрици x стављају разне узастопне вредности у колико хоћемо броју. Спрам њих се стављају одговарајуће вредности y-а добивене из једначине $y = F(x)$. x и y се сматрају као координате тачке M и та се тачка налази кад се претходно нацрта x и y. За тачније представљање криве потребно је више тачака M.

x	y
.	.
.	.
.	.
.	.

Примери:

1.) Дата је функција $y = x^4$

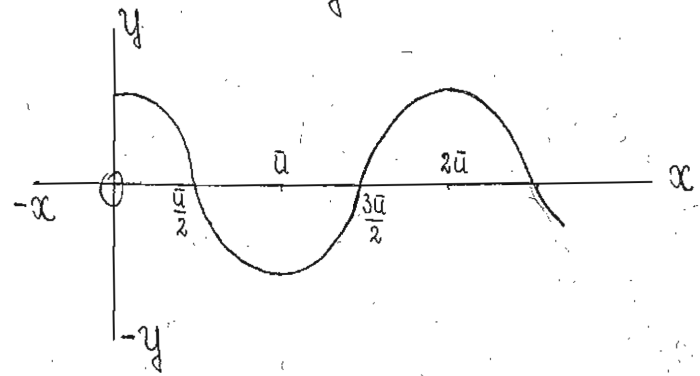
x	y
$-\infty$	$+\infty$
-1	$+1$
0	0
$+1$	$+1$
$+\infty$	$+\infty$



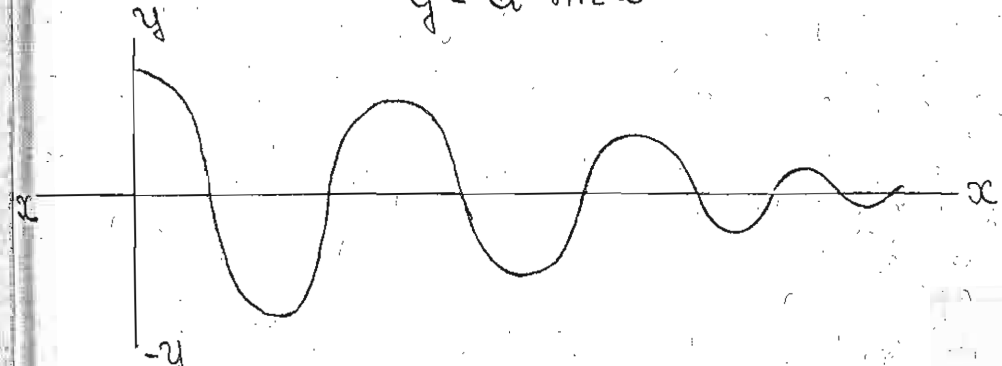
Крива линија има облик параболе четвртог степена.

2. Нека је дата функција $y = \cos x$

x	y
0	$+1$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$+1$



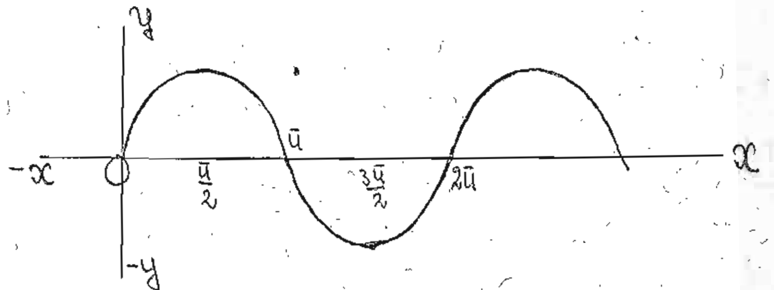
3. Функција $y = a^x \sin x$



представља таласасту линију.

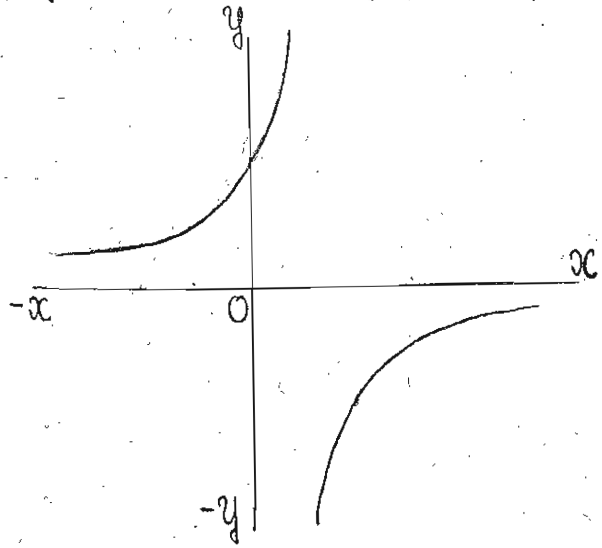
4. функција $y = \sin x$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$+1$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1



5. функција $y=\frac{2}{x-1}$

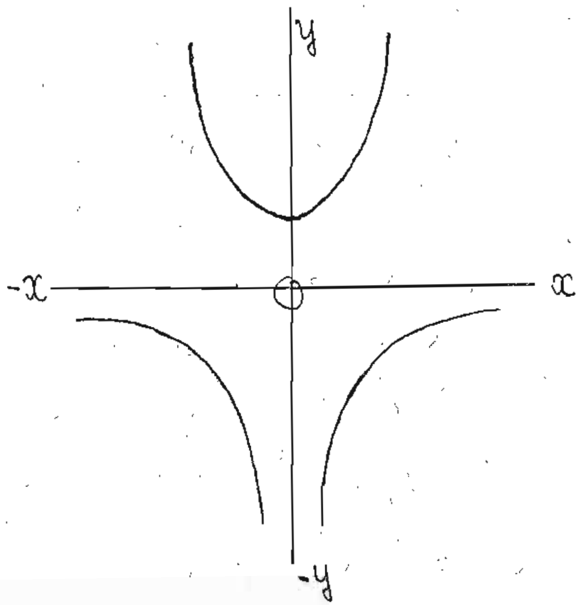
x	y
$-\infty$	0
-2	$\frac{2}{3}$
-1	1
0	2
$+1$	∞
$+2$	-2
∞	0



6. функција

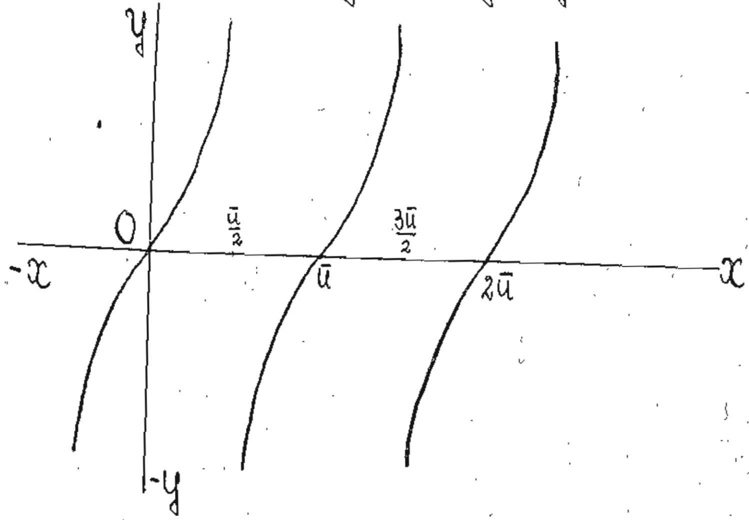
$y=\frac{1}{1-x^2}$

x	y
$-\infty$	0
-2	$-\frac{1}{3}$
-1	∞
0	1
$+1$	∞
$+2$	$-\frac{1}{3}$
$+\infty$	0



7. функција $y=tg\,x$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	∞
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$
2π	0
$\vdots$	$\vdots$



Проучавање функција помоћ њихових прираштаја

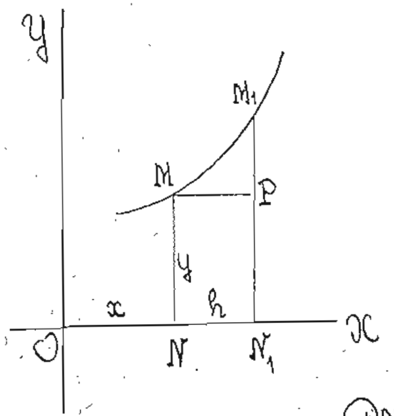
Прираштај је разлика између промењене и првобитне функције

$$f(x+h) - f(x)$$

Нека је дата функција

$$y = F(x)$$

Њеном прираштају одговараће на кривој тачка M_1 чија ће апсциса бити $x+h$



Ордината за тачку M биће $f(x)$ а за тачку M_1 биће $f(x+h)$ тако да ће према самом начину на који смо конструисали криву бити

$$MN = f(x) \qquad M_1N_1 = f(x+h)$$

$$PN_1 = NM = f(x)$$

$$M_1P = M_1N_1 - PN_1 = f(x+h) - f(x)$$

што је прираштај функције $f(x)$. Отуда имамо геометриску дефиницију прираштаја функција: тај прираштај није ништа друго до разлика ордината двеју тачака, од којих једна одговара апсциси од x а друга апсциси од $x+h$.

Практично упуство за израчунавање прираштаја функција: Ако се тражи прираштај функције ваља образовати разлику

$$f(x+h) - f(x)$$

и у њој скратити све што може да се скрати, добивени резултат је тражени прираштај.

Примери:

1. Израчунати прираштај функције $3x^2$.

Овди је

$$f(x) = 3x^2$$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3x^2 + 6hx + 3h^2$$

па је тражени прираштај

$$f(x+h) - f(x) = 6hx + 3h^2$$

2. Израчунати прираштај

функције x^m.

Овде је

$$f(x)=x^m$$

$$f(x+h)=(x+h)^m= x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}h+\binom{m}{2}x^{m-2}h^2+\cdots$$

па је прираштај

$$f(x+h)-f(x)=\binom{m}{1}x^{m-1}h+\binom{m}{2}x^{m-2}h^2+\binom{m}{3}x^{m-3}h^3+\cdots$$

3. Тражи се прираштај функције $1+2x^3$.

Овде је

$$f(x)=1+2x^3$$

$$f(x+h)=1+2(x+h)^3=1+2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3$$

па је прираштај

$$f(x+h)-f(x)=6x^2h+6xh^2+2h^3$$

4. Наћи прираштај функције $\frac{1}{x}$.

Овде је

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{x+h}$$

па је тражени прираштај

$$f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}$$

Извод функција

Од прираштаја функције долази се до појма о <u>изводу</u> функције. Ако прираштај функције поделимо са прираштајем независно-променљиве количине добија се количник

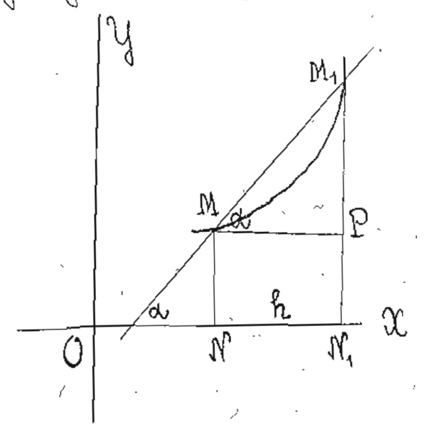
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ако у том количнику пустимо да прираштај h тежи нули тј. да бескрајно опада, онда се тај количник јавља у облику $\frac{0}{0}$. Међутим тај количник за $h=0$ има коначну вредност која има и свој рачунски и свој геометријски смисао.

Ако функцију

$$y=f(x)$$

представимо геометриски кривом линијом C и узмемо на овој тачку M, чија је апсциса x а ордината $f(x)$ и затим пустимо да x порасте за h добијамо тачку M_1 чија је апсциса $(x+h)$ а ордината $f(x+h)$. Онда ће бити



$$M_1P = f(x+h) - f(x)$$

па је према томе количник

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{M_1P}{h} = \frac{M_1P}{MP} = tg\,\alpha$$

према томе горњи количник није ништа друго до коефицијенат правца сечице која пролази кроз M и M_1.

Ако замислимо да h тежи нули, онда се тачка M_1 приближује тачки M и сечица постаје дирка у тачки M на нацртаној кривој. Дакле горњи количник постаје коефицијенат правца дирке у тачки M из чега се види ово правило: Кад је h бескрајно мало, онда горњи израз није ништа друго до коефицијенат правца дирке у тачки M. Па пошто та дирка има утврђен и одређен правац, то је очевидно да тај количник поред све привидне неодређености има утврђену и одређену вредност и она не зависи:

1.) од положаја саме тачке M на кривој т.ј. од вредности x-а која тој тачки одговара и

2.) од облика саме криве линије - од природе функције $f(x)$.

Та тако одређена вредност количника назива се изводом дате функције x-а и игра важну улогу у проучавању разних особина функција.

На тај начин имамо две дефиниције извода: рачунску и геометриску. Према рачунској дефиницији извод функције $f(x)$ јесте резултат који се добија кад се образује количник

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

и у њему стави $h=0$. Према другој, геометријској дефиницији извод се добија

када се конструише геометриски пред-
ставник функције $f(x)$ и повуче дирка
у оној тачки тако добијене криве
линије чија је апсциса x; извод је он-
да коефицијенат правца те дирке.

Извод се означује тиме што
се над функцијом чији се извод тражи
стави запета. Н. пр.

$$(x^m)' \; ; \; (\sin x)' \; ; \; f'(x) \; ; \; \varphi'(x) \; ; \; \dots$$

означавају изводе функција

$$x^m \; ; \; \sin x \; ; \; f(x) \; ; \; \varphi(x) \; ; \; \dots$$

Примери:

1.) Наћи извод функције x^m.

Овди је

$$f(x) = x^m$$
$$f(x+h) = (x+h)^m$$

па је тражени извод

$$(x^m)' = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^m - x^m}{h} =$$

$$= \frac{\left[x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}h + \binom{m}{2}x^{m-2}h^2 + \dots\right] - x^m}{h} =$$

$$= \binom{m}{1}x^{m-1} + h\left[\binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{3}x^{m-3}h + \dots\right]$$

Ако сад у овом изразу пустимо да h
тежи нули, онда извод постаје

$$(x^m)' = \binom{m}{1}x^{m-1} = m x^{m-1}$$

2. Тражи се извод од $\sin x$.

Овди је

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

па је тражени извод

$$(\sin x)' = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Ако пустимо да h тежи нули, први
чинитељ постаје $\cos x$ а други $\frac{\sin 0}{0}$ и
јавља се у привидно неодређеном обли-
ку $\frac{0}{0}$. Зна се пак да кад угао тежи
нули, онда количник између синуса
и угла раван је јединици, па је пре-
ма томе

$$(\sin x)' = \cos x$$

3° Наћи извод функције $\cos x$

Овди је

$$f(x) = \cos x$$
$$f(x+h) = \cos(x+h)$$

па је према томе

$$(\cos x)' = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Ако пустимо да h тежи нули, онда први чинилац постаје $-\sin x$, а други $\frac{0}{0}$ тако да је

$$(\cos x)' = -\sin x$$

4. Наћи извод функције $\log x$.

Овде је

$$f(x) = \log x$$

$$f(x+h) = \log(x+h)$$

па је тражени извод

$$(\log x)' = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Кад би ставили $h=0$, извод би се јавио у облику $\frac{0}{0}$ и не би га могли израчунати. Међутим ако се стави

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{m}$$

одакле је

$$h = \frac{x}{m}$$

онда ставити $h=0$ значи ставити да је $m=\infty$. Предњом сменом добијамо

$$(\log x)' = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{x} \qquad 1.)$$

и овде би још ваљало ставити $m=\infty$. Онда се израз $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ јавља у привидно неодређеном облику 1^∞. Међутим овај израз има потпуно одређену вредност. Ако га развијемо по биномном обрасцу, имаћемо

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \binom{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} + \binom{m}{3}\frac{1}{m^3} + \cdots \qquad 2.)$$

Очевидно је да је

$$\binom{m}{1}\cdot\frac{1}{m} = m\cdot\frac{1}{m} = 1$$

$$\binom{m}{2}\cdot\frac{1}{m^2} = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} = \frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2}$$

$$\binom{m}{3}\cdot\frac{1}{m^3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3} = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и т. д.

И ако сада у свима овим изразима ставимо $m=\infty$, добијамо

$$\binom{m}{1}\cdot\frac{1}{m} = 1 \qquad \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} = \frac{1}{1\cdot 2} \qquad \binom{m}{3}\frac{1}{m^3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \text{и т. д.}$$

Заменом тих вредности у обрасцу 2.) добија се

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \qquad 3.)$$

Из обрасца 3.) види се да пређашњи израз $(1+\frac{1}{m})^m$ има извесну одређену и позитивну вредност дату обрасцем 3.), коју можемо израчунати са колико хоћемо децимала. Кад се ова израчуна нађе се један број који је већи од 2 а мањи од 3; то је број 2,7182 ... који се зове <u>Неперов број</u> и означује знаком e. Он има бескрајно много децимала и није периодичан разломак. Доказано је да он није рационалан број т.ј. никад се не може добити као количник два цела броја. e не може бити никад корен никакве једначине. Доказано је да не може бити корен ни квадратне једначине и најпосле пре 20 и неколико година доказано је да не може бити корен никакве једначине где су сачиниоци цели бројеви. То исто је доказано и за π. Нађена је интересантна веза која постоји између e и π; састоји се у томе што је

$$e^{\pi i} = -1$$

или

$$(2,7182\ldots)^{3,142\ldots\sqrt{-1}} = -1$$

Овај је образац учинио те је пре 20 година доказано да је немогућ задатак о квадратури круга.

Означивши горњи број са e образац 1.) постаје

$$(\log x)' = \frac{\log e}{x} \qquad 4.)$$

Овај образац важи за ма какву основу логаритама. Претпоставимо да је за основу логаритама узет сам број e, онда је очевидно да је

$$\log e = 1$$

па дакле

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad 5.)$$

Из овога се види да извод од $\log x$ добија најпростији облик ако су логаритми узети са основом e. Због тога се они зову <u>природним логаритмима</u>. Као што постоје таблице за бригове логаритме тако постоје таблице и за природне логаритме са основицом e. Употребљавају се зато, што се врло мички обрасци упрошћавају кад се има посла са тим логаритмима.

5. Наћи извод од a^x где је a неки сталан број.

Овде је

$$f(x) = a^x$$

$$f(x+h) = a^{x+h}$$

па је

$$(a^x)' = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h-1}{h} \qquad 1.)$$

где би ваљало ставити да је $h=0$, али се тада овај образац јавља у облику $\frac{0}{0}$. Он је одређен и можемо му наћи вредност. Ако се стави

$$a^h - 1 = \frac{1}{m}$$

логаритмовањем добијамо

$$h = \frac{\log(1+\frac{1}{m})}{\log a} \qquad 2.)$$

и ставити $h=0$ значи ставити $m=\infty$. Израз 1.) постаје

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{\log a}{m\log(1+\frac{1}{m})} = \frac{\log a}{\log(1+\frac{1}{m})^m} \qquad 3.)$$

Ако овде ставимо $m=\infty$ израз $(1+\frac{1}{m})^m$ постаје број e, па према томе образац 3.) даје

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{\log a}{\log e}$$

па према томе из 1.) добијамо

$$(a^x)' = a^x\,\frac{\log a}{\log e} \qquad 4.)$$

За специјални случај кад је

$$a = e$$

образац 4.) даје

$$(e^x)' = e^x$$

што показује да је извод функције e^x раван њој самој и то је једина функција која има ту особину.

Правила за израчунавање извода

Ма каква функција сложена је из разних комбинација простих функција и то добивених помоћу сабирања, одузимања, множења, дељења и т. д. Ако би имали општих правила за упрошћавање тражења извода, онда би се и само тражење извода знатно упростило.

I. Правило за извод збира.

Дата је функција

$$F(x) + \varphi(x)$$

Њен прираштај биће

$$[F(x+h) - F(x)] + [\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$

па је према томе тражени извод те функције

$$[F(x) + \varphi(x)]' = \frac{[F(x+h) - F(x)] + [\varphi(x+h) - \varphi(x)]}{h} =$$

$$= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

Ако h тежи нули први сабирак постаје $F'(x)$ а други $\varphi'(x)$, па према томе имамо образац

$$[F(x) + \varphi(x)]' = F'(x) + \varphi'(x)$$

у коме је исказано ово правило: извод збира двеју функција раван је збиру извода тих функција.

II. Правило за извод разлике.

Слично малопређашњем дошли би до обрасца

$$[F(x) - \varphi(x)]' = F'(x) - \varphi'(x)$$

т.ј. извод разлике двеју функција раван је разлици извода тих функција.

III. Правило за извод производа.

Нека је дата функција $F(x) \cdot \varphi(x)$. Њен извод биће према пређашњем

$$[F(x)\cdot\varphi(x)]' = \frac{F(x+h)\,\varphi(x+h) - F(x)\,\varphi(x)}{h}$$

Ако у бројитељу додамо и одузмемо једну исту количину: $F(x+h)\cdot\varphi(x)$ имаћемо

$$[F(x)\cdot\varphi(x)] = \frac{F(x+h)\varphi(x+h) - F(x)\varphi(x) - F(x+h)\varphi(x) + F(x+h)\varphi(x)}{h} =$$

$$= F(x+h)\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \varphi(x)\,\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Ако пустимо h да тежи нули, добићемо

$$[F(x)\cdot\varphi(x)] = F(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,F'(x).$$

Н. пр.

$$[x e^x]' = x e^x + e^x = e^x (x+1).$$

IV. Правило за извод количника.

Према општем правилу имаћемо

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{\frac{F(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{F(x)}{\varphi(x)}}{h} = \frac{F(x+h)\,\varphi(x) - \varphi(x+h)\,F(x)}{h\,\varphi(x+h)\,\varphi(x)}$$

Ако бројитељу додамо и одузмемо $\varphi(x)\,F(x)$ добићемо

$$\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{F(x+h)\varphi(x) - \varphi(x+h)F(x) + \varphi(x)F(x) - \varphi(x)F(x)}{h\,\varphi(x+h)\,\varphi(x)} =$$

$$= \frac{\varphi(x)\,\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - F(x)\,\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}}{\varphi(x)\,\varphi(x+h)} =$$

$$= \frac{\varphi(x)\,F'(x) - F(x)\,\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$$

Примери:

1.) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot -\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.) $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{\sin x\cdot -\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

V. Правило за извод функције помножене каквим сталним бројем.

Нека је дата функција: $a\,F(x)$ где је a сталан број. Њен извод биће

$$[a\cdot F(x)]' = \frac{a\,F(x+h) - a\,F(x)}{h} = a\,\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= a\cdot F'(x)$$

VI. Правило за извод количника сталног броја и функције.

$$\left[\frac{a}{F(x)}\right]' = \frac{F(x)\,a' - a\cdot F'(x)}{[F(x)]^2} = -\frac{a\cdot F'(x)}{[F(x)]^2}$$

VII. Правило за изводе посредних функција.

Претпоставимо да једна функција зависи од једне променљиве u н. пр.

$$z = F(u)$$

а међутим сама променљива u зависи од x-а т.ј.

$$u = \varphi(x)$$

онда је z непосредна функција од u а посредна функција од x. Ми z можемо сматрати као функцију од u и x. Тражимо z'_u и z'_x. Ако x порасте за h, онда ће променљива u имати свој прираштај који ћемо означити са k. Онда мора и z порасти и тај прираштај означимо са l. Према дефиницији извода имаћемо да је

$$z'_u = \frac{l}{k} \qquad z'_x = \frac{l}{h} \qquad u'_x = \frac{k}{h}$$

па према томе

$$z'_x = \frac{l}{h} = \frac{l}{k}\cdot\frac{k}{h}$$

или

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x$$

Примери:

1. Тражи се извод од log sin x.

Имаћемо

$$[\log \sin x]' = z'_x = z'_u \cdot u'_x$$

где је

$$z = \log u \qquad u = \sin x$$

па према томе

$$z'_u = \frac{1}{u} \qquad u'_x = \cos x$$

Дакле

$$[\log \sin x] = \frac{1}{u}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

2. Тражи се извод од arc sin x.

Ако ставимо

$$z = \arcsin x$$

онда је

$$x = \sin z$$

Ако узмемо изводе и једној и другој страни у једначини, онда ће бити

$$1 = (\sin z)' = \cos z \cdot z'_x$$

Из овога се добија

$$z'_x = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

па дакле

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Тражи се извод од arc cos x.

Ставимо

$$z = \arccos x$$

одакле је

$$x = \cos z$$

или одатле

$$1 = (\cos z)'_x = -\sin z \cdot z'_x$$

па даље

$$z'_x = -\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

или

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Тражи се извод од $\operatorname{arc\,tg} x$

Ставимо

$$z = \operatorname{arc\,tg} x$$

одакле

$$x = \operatorname{tg} z$$

или одатле

$$1 = (\operatorname{tg} z)'_x = \frac{1}{\cos^2 z} \cdot z'_x$$

а одатле

$$z'_x = \cos^2 z = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z} = \frac{1}{1+x^2}$$

или

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

5. На исти начин се налази

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Изводи служе као основа целом диференцијалном и интегралном рачуну.

Испитивање тока функције помоћу извода

Узмимо функцију

$$y = F(x)$$

и пустимо да x расте почев од вредности a, онда се може десити да и сама функција почне да расте или опада. Ако се образује извод $F'(x)$ па се у њему смени x са a, онда ако је добивени резултат позитиван, функција сигурно расте, кад само x почне расти од a па навише. Ако је резултат негативан, функција сигурно опада. Да би то доказали, уочимо извод $F(x)$ и сменимо у њему x са a, па добијамо

$$F'(a) = \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \qquad 1.)$$

Ако функција расте, очевидно је да је

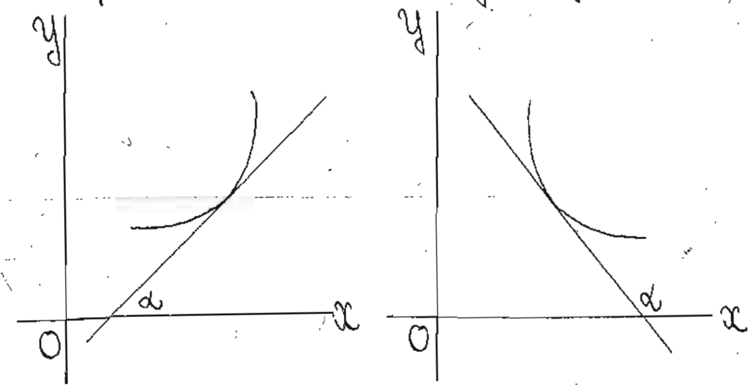
$$F(a+h) > F(a)$$

па су према томе и бројитељ и именитељ у једначини 1) позитивни и обратно ако је $F'(a)$ позитивно, мора и разлика у бројитељу бити позитивна. Ако је $F'(a)$ негативно, па је разлика такође негативна или

$$F(a+h) < F(a)$$

што значи да функција опада.

О томе се уверавамо и геометриски: Очевидно је из слике да



ако се крива пење, дирка гради оштар угао и према томе извод дате функције је позитиван. Ако крива линија силази, угао α је туп и према томе коефицијенат правца дирке т.ј. извод је негативан.

Rolle-ова теорема

У овој је теореми оличена веза која постоји између вредности x-а које поништавају једну дату функцију и вредности x-а које поништавају њен извод. Теорема се састоји у овоме:

Кад имамо једну функцију и ставимо да је она равна нули, добија се једначина

$$F(x)=0 \qquad 1.)$$

Под коренима ове једначине разумеју се оне вредности x-а које ту једначину задовољавају. Између два узастопна стварна корена једначине 1) увек се налази непаран број корена изводне једначине

$$F'(x)=0 \qquad 2.)$$

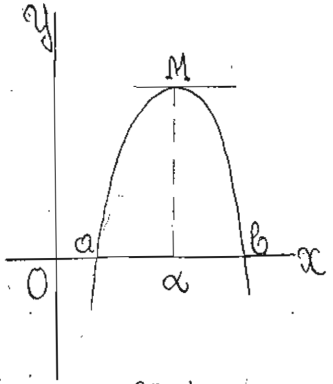
и обратно: између два узастопна стварна корена изводне једначине 2.) може се налазити или само један или ни један корен једначине 1.).

То је Rolle-ова теорема. Најлакше ћемо је доказати геометриски.

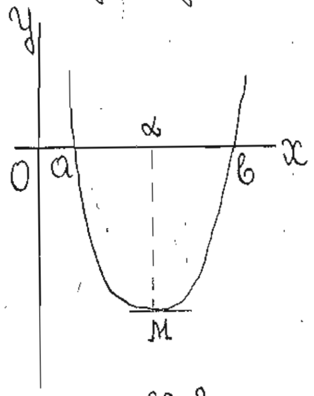
Ако конструишемо криву линију

$$y = F(x)$$

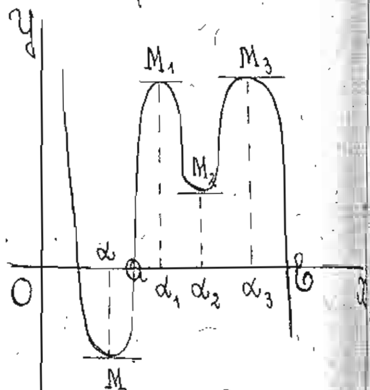
онда корени једначине 1.) јесу апсцисе оних тачака у којима та крива сече



сл. 1.



сл. 2.

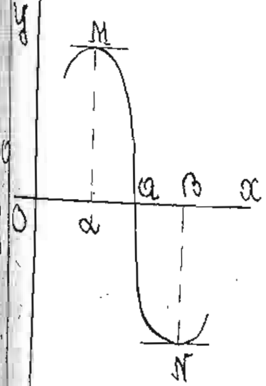


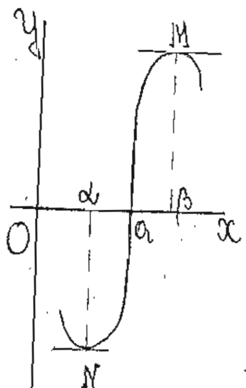
сл. 3.

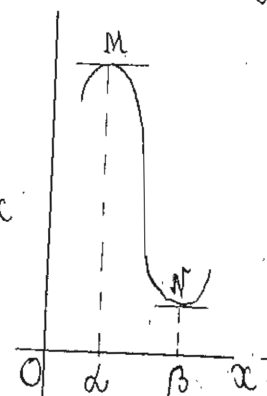
апсцисну осовину. Означимо са a и b два узастопна корена једначине 1.), онда ће у размаку од $x=a$ до $x=b$ крива линија имати један од облика сл. 1., 2. или 3. т.ј. крива може имати или само један

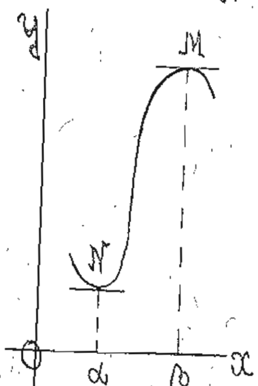
максимум и минимум као у сл. 1. и 2. или неколико као у сл. 3. Код сваког максимума или минимума дирка је паралелна апсцисној осовини и према томе њен коефицијенат правца $F'(x)$ је раван нули, што значи да између a и b мора постојати бар једна вредност x_α за коју ће бити $F'(x)=0$. У сл. 1. и 2. имамо једну такву вредност α, у сл. 3. три. Број максимума и минимума увек је непаран број. Овим је доказан први део теореме т.ј. да се између два узастопна корена једначине 1.) налази увек непаран број корена једначине 2.).

Тако исто доказује се и дру-









ги део теореме: Нека су α и β два узастопна стварна корена изводне једначине 2). Крива линија

$$y = F'(x)$$

имаће један од средњих облика.

Образац за коначне прираштаје

Тај се образац изводи применом Rolle-ове теореме и гласи:

Кад је дата функција $F(x)$ и једна вредност $x=a$, па се x пусти да порасте од a до $a+h$, онда ће прираштај функције $F(a+h) - F(a)$ имати за вредност $hF'(\theta)$ где је θ известан број који се налази између a и $a+h$ т.ј.

$$F(a+h) - F(a) = h \cdot F'(\theta)$$

Уочимо два броја a и b и образујмо количник

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$

Он ће имати одређену вредност коју ћемо означити са λ, па према томе можемо писати

$$F(b) - F(a) - \lambda(b-a) = 0 \qquad 1)$$

ако на левој страни сменимо сталан број

в са променљивом x, онда ће она постати извесна функција од x, коју ћемо означити са $F(x)$ и биће

$$F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a) \qquad 2.)$$

За ову се функцију лако уверавамо да је она равна нули за $x=a$ и $x=b$. Према томе једначина

$$F(x)=0$$

има два корена: a и b и између њих, према Rolle-овој теореми, налази се бар један корен једначине

$$F'(x)=0$$

Према томе мора постојати извесна вредност $x=\theta$ која се налази између a и b и која ће бити таква да је $F'(\theta)=0$. Из једначине 2.) добијамо

$$F'(x) = f'(x) - \lambda \qquad 3.)$$

и једначина $F'(\theta)=0$ према томе постаје

$$F'(\theta) = f'(\theta) - \lambda = 0$$

одакле

$$\lambda = f'(\theta)$$

Заменом ове вредности у једначини 1.) ова постаје

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(\theta) \qquad 4.)$$

где је θ известан број који лежи између a и b. Ако у 4.) ставимо

$$b = a+h$$

добијамо

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(\theta)$$

У последњем обрасцу састоји се образац за коначне прираштаје, који је тиме доказан. Из њега се види да се ма какав прираштај функције може изразити помоћу прираштаја независно-променљиве количине и извода те функције. Употребљује се за разне приближне рачуне и доказивање разних теорема.

Н. пр. познат је $\operatorname{arc\,tg} M$ па се тражи $\operatorname{arc\,tg}(M+1)$. Имаћемо

$$\operatorname{arc\,tg}(M+1) - \operatorname{arc\,tg} M = 1 \cdot f'(\theta)$$

где је

$$M < \theta < M+1$$

Како је

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} M$$

то је

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

па према томе

$$F'(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2}$$

Заменом ове вредности добијамо

$$\operatorname{arctg}(M+1) = \operatorname{arctg} M + \frac{1}{1+\theta^2}$$

где је

$$M+1 > \theta > M$$

Ако је $M=100$, имаћемо

$$\operatorname{arc\,tg} 101 = \operatorname{arc\,tg} 100 + \frac{1}{1+\theta^2}$$

где је

$$101 > \theta > 100$$

или

$$\frac{1}{1+100^2} > \frac{1}{1+\theta^2} > \frac{1}{1+101^2}$$

или, пошто је

$$100000 : 10001 = 0,00009999$$

$$100000 : 10202 = 0,000098$$

то је

$$0,00009999 > \frac{1}{1+\theta^2} > 0,000098$$

Привидно неодређене вредности

Дешава се да се један известан израз, који зависи од x-а, за такаву специјалну вредност x-а јавља у облику: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0 и т. д. Међутим ти изрази у већини случајева имају утврђену и одређену вредност коју треба наћи. Показаћемо како се до тих вредности долази помоћу извода.

I. Уочимо количник две функције

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

Дешава се да се за извесну вредност

$$x=a$$

добије

$$F(a)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(a)=0$$

и тада се дати количник јавља у облику $\frac{0}{0}$ т.ј.

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}$$

Ако пустимо да a порасте за h, онда имамо према обрасцу за коначне прираштаје

$$F(a+h) = F(a) + h\cdot F'(\theta_1)$$
$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\cdot \varphi'(\theta_2)$$

где су θ_1 и θ_2 два броја који се налазе између a и $a+h$. Пошто је по претпоставци $F(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, то се претходни обрасци своде на

$$F(a+h) = h\cdot F'(\theta_1)$$
$$\varphi(a+h) = h\cdot \varphi'(\theta_2)$$

и према томе је

$$\frac{F(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{F'(\theta_1)}{\varphi'(\theta_2)}$$

Пустимо сада да h тежи нули; тада лева страна постаје $\frac{F(a)}{\varphi(a)}$, а пошто θ_1 и θ_2 леже између a и $a+h$, они ће се поклопити са вредношћу a и последњи образац постаје

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}$$

у коме је описано ово правило: Ако се један израз $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ за $x=a$ јавља у облику $\frac{0}{0}$, онда треба извод бројитеља поделити изводом именитеља и у резултату сменити $x=a$, па ће се добити његова права вредност. То је правило познато под именом <u>L'Hospital-овог правила</u>.

Примедба: Дешава се да поред свега тога што је у датом случају употребљено L'Hospital-ово правило, новодобивени израз јавља се опет у облику $\frac{0}{0}$. Тада треба поново применити L'Hospital-ово правило и примењивати га све дотле, док се најзад вредност више не јавља у облику $\frac{0}{0}$.

Примери:

1. $\frac{\sin x}{x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\cos x}{1} \underset{x=0}{=} \frac{1}{1} = 1$

2. $\frac{a^x - b^x}{\sin x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{a^x \log a - b^x \log b}{\cos x} \underset{x=0}{=}$
$= \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

3. $\frac{x^n - a^n}{x-a} \underset{x=a}{=} \frac{0}{0} = n x^{n-1} \underset{x=a}{=} n\cdot a^{n-1}$

4. $\frac{a^x-1}{x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = a^x \log a \underset{x=0}{=} \log a$

5. $\frac{\sin mx}{\sin nx} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{m\cos mx}{n\cos nx} \underset{x=0}{=} \frac{m}{n}$

6. $\frac{\arcsin x}{x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} \underset{x=0}{=} 1$

7. $\frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\sin x}{2x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\cos x}{2} \underset{x=0}{=} \frac{1}{2}$

8. $\frac{e^x - e^{-x}}{x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{e^x + e^{-x}}{1} \underset{x=0}{=} 2$

9. $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x=0}{=} 0$

10. $\frac{x^2\cos x}{\cos x - 1} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{2x\cos x - x^2\sin x}{-\sin x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} =$

$= \frac{2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x}{-\cos x} \underset{x=0}{=} -2$

11. $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x - \cos x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{0}{0} = \frac{-\cos x - \sin x}{2\cos 2x + \sin x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} +1$

12. $\frac{x-\sin x}{x^3} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{1-\cos x}{3x^2} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\sin x}{6x} \underset{x=0}{=}$

$= \frac{0}{0} = \frac{\cos x}{6} \underset{x=0}{=} \frac{1}{6}$

II. Нека је дат израз

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{\varphi(x)}$$

дешава се да је за извесну вредност $x=a$

$$\mathcal{F}(x)=\infty \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\infty.$$

па се дакле горњи количник јавља у привидно неодређеном облику $\frac{\infty}{\infty}$ т.ј.

$$\frac{\mathcal{F}(a)}{\varphi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Да би нашли праву вредност тога израза претпоставимо да је

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{F(x)} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} \qquad 1.)$$

Онда ће за $x=a$ бити

$$F(a)=0 \qquad \Phi(a)=0$$

па како је

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{\varphi(x)} = \frac{\Phi(x)}{F(x)} \qquad 2.)$$

то се тај израз јавља за $x=a$ у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$. Ако се на овај количник примени L'Hospital-ово правило, добија се

$$\frac{\Phi(a)}{F(a)} = \frac{\Phi'(a)}{F'(a)} \qquad 3.)$$

а пошто је

$$\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \qquad F(x) = \frac{1}{\mathcal{F}(x)}$$

то је

$$\Phi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} \qquad F'(x) = \frac{\mathcal{F}'(x)}{[\mathcal{F}(x)]^2}$$

а заменом у обрасцу 3.) добијамо

$$\frac{\Phi(a)}{F(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\mathcal{F}'(a)}\left[\frac{\mathcal{F}(a)}{\varphi(a)}\right]^2 \qquad 4.)$$

Упоређењем образаца 2.) и 4.) добија се

$$\frac{\mathcal{F}(a)}{\varphi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\mathcal{F}'(a)}\left[\frac{\mathcal{F}(a)}{\varphi(a)}\right]^2$$

а одатле је

$$\frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F'(a)}{\varphi'(a)} \qquad 5.)$$

Образац 5.) показује да кад се један израз јавља у привидно неодређеном облику $\frac{\infty}{\infty}$, треба радити исто као и са обликом $\frac{0}{0}$ т.ј. треба извод бројитеља поделити изводом именитеља и сменити у резултату $x=a$.

Онако исто као и код вредности $\frac{0}{0}$ дешава се и овде да ово правило треба поновити више пута.

Примери:

1. $\dfrac{ax^m+b}{cx^m+d} \underset{x=\infty}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{m a x^{m-1}}{m c x^{m-1}} = \dfrac{a}{c}$

2. $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \dfrac{3\cdot\cos^2 5x}{5\cdot\cos^2 3x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} \dfrac{0}{0} =$

$= \dfrac{3\cdot 2\cdot 5 \sin 5x \cos 5x}{5\cdot 2\cdot 3 \sin 3x \cos 3x} = \dfrac{\sin 10x}{\sin 6x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} \dfrac{0}{0} =$

$= \dfrac{10\cos 10x}{6\cdot\cos 6x} \underset{x=\frac{\pi}{2}}{=} \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

3. $\dfrac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)} \underset{x=a}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}} = \dfrac{e^x-e^a}{e^x(x-a)} \underset{x=a}{=} \dfrac{0}{0} =$

$= \dfrac{e^x}{e^x(x-a+1)} = \dfrac{1}{x-a+1} \underset{x=a}{=} 1$

4. $\dfrac{\log x}{\log \sin x} \underset{x=0}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{\sin x}{x\cos x} \underset{x=0}{=} \dfrac{0}{0} =$

$= \dfrac{\cos x}{\cos x - x\sin x} \underset{x=0}{=} 1$

5. $\dfrac{\log x}{x^n} \underset{x=\infty}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \dfrac{1}{n x^n} \underset{x=\infty}{=} 0$

6. $\dfrac{e^x}{x^n} \underset{x=\infty}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{e^x}{n\cdot x^{n-1}} \underset{x=\infty}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \cdots = \dfrac{e^x}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1} \underset{x=\infty}{=} \infty$

III. Кад је дата функција

$$F(x)\cdot\varphi(x)$$

дешава се да је у исто време за $x=a$

$$F(a)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(a)=\infty$$

тако да се израз јавља у привидно неодређеном облику $0\cdot\infty$ т.ј.

$$F(a)\cdot\varphi(a) = 0\cdot\infty$$

Ако ставимо у датом изразу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Phi(x)}$$

онда се израз $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ јавља у привидно неодређеном облику $\frac{0}{0}$ јер је

$$F(a)\cdot\varphi(a) = \frac{F(a)}{\Phi(a)} = \frac{0}{0}$$

и применом L'Hospital-овог правила могли би наћи његову праву вредност.

Исто тако могли смо ставити

$$F(x) = \frac{1}{F(x)}$$

и онда би се израз

$\frac{\varphi(x)}{F(x)}$

јавио у привидно неодређеном облику $\frac{\infty}{\infty}$.

Примери:

1. $x\cdot\log\left(a+\frac{b}{x}\right) \underset{x=0}{=} 0\cdot\infty = \frac{\log\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} =$

$$= \frac{\frac{1}{a+\frac{b}{x}}\cdot -\frac{b}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{b}{a+\frac{b}{x}} = \frac{bx}{ax+b} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{b}{a}$$

2. $\sin x\cdot\log x \underset{x=0}{=} 0\cdot\infty = \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} =$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} \underset{x=0}{=} 0$$

3. $x^n\log x \underset{x=0}{=} 0\cdot\infty = \frac{\log x}{\frac{1}{x^n}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{x}}{-n\frac{1}{x^{n+1}}} =$

$$= -\frac{x^n}{n} \underset{x=0}{=} 0$$

4. $\log(1-\sin x)\cot g\, x \underset{x=0}{=} 0\cdot\infty = \frac{\cot g\, x}{\frac{1}{\log(1-\sin x)}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} =$

$$= \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{-\cos x}{(1-\sin x)\log^2(1-\sin x)}} = \frac{(1-\sin x)\log^2(1-\sin x)}{\sin^2 x\cos x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} =$$

$$= \frac{(1-\sin x)2\log(1-\sin x)\cdot\frac{1}{1-\sin x}\cdot -\cos x - \cos x\log^2(1-\sin x)}{\sin^2 x\cdot -\sin x + \cos x\cdot 2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{-2\cos x\log(1-\sin x) - \cos x\log^2(1-\sin x)}{-\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0}$$

$=$

5. $(x+a)\log\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{x=\infty}{=} \infty\cdot 0 = \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x+a}} \underset{x=\infty}{=} \frac{0}{0} =$

$$= \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-\frac{1}{(x+a)^2}} = \frac{\frac{a}{x^2}(x+a)^2}{1+\frac{a}{x}} = \frac{a(x+a)^2}{x^2+a} \underset{x=\infty}{=} \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \frac{2a(x+a)}{2x} = \frac{a(a+x)}{x} \underset{x=\infty}{=} \frac{\infty}{\infty} = a$$

IV. Нека је дата функција

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

и нека су функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ такве да је за $x=a$ у исто време

$$f(a)=\infty \quad \text{и} \quad \varphi(a)=\infty$$

онда је

$$F(a) = \infty - \infty$$

т.ј. функција $F(x)$ се јавља за $x=a$ у привидно неодређеном облику $\infty-\infty$. Међутим ако ставимо

$$F(x) = f(x)\varphi(x)\left\{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right\} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi(x)}}$$

онда је за $x=a$

$$F(a) = \frac{0}{0}$$

чију праву вредност знамо наћи према l'Hospital-овом правилу.

Примери:

1. $$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \underset{x=0}{=} \infty-\infty = \frac{x-\sin x}{x\sin x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} =$$
$$= \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} \underset{x=0}{=} 0$$

2. $$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} \underset{x=0}{=} \infty-\infty = \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} =$$
$$= \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{e^x}{e^x+xe^x+e^x} \underset{x=0}{=} \frac{1}{2}$$

3. $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\log(x-1)} \underset{x=2}{=} \infty-\infty = \frac{\log(x-1)-(x-2)}{(x-2)\log(x-1)} \underset{x=2}{=} \frac{0}{0} =$$
$$= \frac{\frac{1}{x-1}-1}{(x-2)\frac{1}{x-1}+\log(x-1)} \underset{x=2}{=} \frac{0}{0} = \frac{2-x}{x-2+(x-1)\log(x-1)} =$$
$$\underset{x=2}{=} \frac{0}{0} = \frac{-1}{1+(x-1)\frac{1}{x-1}+\log(x-1)} = -\frac{1}{2+\log(x-1)} \underset{x=2}{=} -\frac{1}{2}$$

V. Нека је дата функција
$$F(x) = f(x)^{\varphi(x)}$$
Дешава се да се она за $x=a$ јавља у једном од неодређених облика
$$0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty$$
ако извршимо смену
$$\log f(x) = f_1(x)$$
$$\log F(x) = \psi(x)$$
тада се функција $\psi(x)$ јавља у овом облику
$$\psi(x) = \log F(x) = \varphi(x)\cdot f_1(x) =$$
$$= \varphi(x)\cdot \log f(x)$$
и у сва три случаја за $x=a$ функција $\psi(x)$ се јавља у неодређеном облику
$$0\cdot\infty$$
па њену праву вредност можемо израчунати, па према томе и праву вредност функције $F(x)$ за $x=a$.

Примери:

1. $$F(x) = (x-a)^{x-a} \text{ за } x=a = 0^0$$
$$\psi(x) = \log F(x) = (x-a)\log(x-a) \underset{x=a}{=} 0\cdot\infty =$$
$$= \frac{\log(x-a)}{\frac{1}{x-a}} \underset{x=a}{=} \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{x-a}}{-\frac{1}{(x-a)^2}} = -(x-a) \underset{x=a}{=} 0$$
$$\log F(x) \underset{x=a}{=} 0 \qquad F(a) = 1$$

2. $$F(x) = x^{\frac{1}{x}} \underset{x=\infty}{=} \infty^0$$
$$\psi(x) = \log F(x) = \frac{1}{x}\log x \underset{x=\infty}{=} 0\cdot\infty =$$
$$= \frac{\log x}{x} \underset{x=\infty}{=} \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{x} \underset{x=\infty}{=} 0$$
$$\log F(x) \underset{x=\infty}{=} 0 \qquad F(x) \underset{x=\infty}{=} 1$$

3. $$F(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a} \underset{x=\infty}{=} 1^\infty$$
$$\psi(x) = \log F(x) = (x+a)\log\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{x=\infty}{=} \infty\cdot 0 =$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x+a}} \underset{x=\infty}{=} \frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot -\frac{a}{x^2}}{-\frac{1}{(x+a)^2}} =$$

$$= \frac{a(x+a)}{x} \underset{x=\infty}{=} \frac{\infty}{\infty} = a$$

$$\log F(x) \underset{x=\infty}{=} a \qquad F(\infty) = e^{a}$$

4. $$F(x) = (\sin x)^{x} \underset{x=0}{=} 0^{0}$$

$$\psi(x) = \log F(x) = x \log \sin x \underset{x=0}{=} 0\cdot\infty =$$

$$= \frac{\log \sin x}{\frac{1}{x}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} = -\frac{\operatorname{cotg} x}{\frac{1}{x^2}} \underset{x=0}{=} \frac{\infty}{\infty} = -\frac{x^3}{2\cdot \sin^2 x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} =$$

$$= -\frac{3\cdot x^2}{4 \sin x \cos x} = -\frac{3\cdot x^2}{2\sin 2x} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = -\frac{6\cdot x}{4\cos 2x} \underset{x=0}{=} 0$$

$$\log F(0) = 0 \qquad F(0) = 1$$

Појам о непрекидности функција

Има функција с таквом особином да кад се x поступно и неосетно мења и сама функција се мења поступно и неосетно. Тако н. пр. ако је дата функција x^2, она ће се поступно мењати, кад се x буде поступно мењало. Такве функције зову се *непрекидне* или *континуалне*.

На против има функција с таквом особином да док се x мења поступно и неосетно у извесном размаку, то исто бива и са самом функцијом; али међутим у другом каквом размаку функција има напрескокове тако да њена вредност скаче на другу сасвим различиту. За такве се функције каже да су *прекидне* или *дис-*

континуалне.

Оне вредности независно-променљиве количине за које функција показује такве скокове називају се прекиди тих функција. Тако н. пр. ако уочимо функцију $\frac{1}{x-2}$, докле год x поступно варира у размаку од 0 до 1 и вредности функције ће поступно опадати од $-\frac{1}{2}$ до -1. На против кад x поступно расте од 1 до 3 и кад при том наиђе на специјалну вредност $x=2$, функција представља прекид, њена вредност постаје бескрајна са скоком од $-\infty$ до $+\infty$.

Питање је како се може, кад је дата функција, рачуном познати да ли је она прекидна или није, и како се може, кад је она прекидна, наћи она вредност x-а која одговара тим прекидима. Ако је функција непрекидна у једном датом размаку x-а и ако се пусти да x расте са бесконачно малим прираштајима и саме функције би биле бескрајно мале, другим речима разлика $F(x+h)-F(x)$ треба да је бескрајно мала кад је h бескрајно мало т.ј. за $h=0$ да тежи нули. Ако је за све вредности x-а ово задовољено, онда ће бити функција непрекидна. Ако се у томе размаку нађе једна или више вредности које кад се смене у горњој разлици, та разлика не тежи нули за $h=0$, онда је функција прекидна у том размаку, а вредности x-а одговарају прекидима функције.

Примери:

1. Нека је дата функција x^m. Онда је

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^m-x^m=h\left[\binom{m}{1}x^{m-1}+\binom{m}{2}x^{m-2}h+\cdots\right]$$

Ма какву вредност имало x овај ће израз увек тежити нули кад h тежи нули. Према томе функција x^m је непрекидна за све могуће вредности x-а.

Тако се исто налази да су функције: e^x, $\sin x$, $\cos x$ непрекидне за све вредности x-а.

2. Нека је дата функција $\frac{1}{x-a}$. Онда ће њен прираштај бити

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{x+h-a} - \frac{1}{x-a} = \frac{h}{(x-a)(x+h-a)}$$

Ако променљивој x дамо ма какву вредност различиту од a, очевидно је да ће овај израз тежити нули за $h=0$. Према томе је функција непрекидна за све вредности x-а осим за $x=a$. За $x=a$ горњи се израз своди на ∞; према томе функција има прекид за $x=a$.

3. Нека је дата функција $\log x$. Онда је њен прираштај

$$f(x+h)-f(x) = \log(x+h) - \log x = \log\frac{x+h}{x} = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Ако x има ма какву вредност различиту од нуле, онда ће $\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$ тежити нули за $h=0$. Функција је дакле непрекидна за све вредности x-а различне од нуле. За $x=0$ горња вредност постаје $\log\infty=\infty$, па дакле функција је прекидна за $x=0$.

На исти би начин могли испитати све функције да ли су прекидне или непрекидне. Испитивање прекидности и непрекидности функција може се упростити помоћу једног основног правила а то је ово: Ако се неколико функција зна да су непрекидне у неком датом размаку x-а, онда ће у истом размаку x-а бити непрекидне и све остале ма како компликоване комбинације тих функција добивене сабирањем, одузимањем и множењем. Правило је очевидно само по себи, јер ако су две функције непрекидне у истом размаку, биће и њихов збир, разлика и производ непрекидни. Међутим правило не вреди за оне комбинације које су добивене дељењем, јер све оне вредности за које именилац једне такве комбинације постаје раван нули, целе комбинације буду равне бесконачном броју тако да функција представља скок. Према томе кад имамо функцију која има именилац, за оне вредности x-а за које он постаје раван нули функција има прекид. Н.пр. функције $2x^3-5x+1$, $\sin^2 x + 4x\cos^3 3x$, $xe^x - \sin^2 x$ су непрекидне за све могуће вредности x-а. Напротив функције $\frac{1}{x^2-2x+1}$, $\frac{1}{2x-3}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ имају прекиде и то прва за оне вредности x-а за које је $x^2-2x+1=0$ т.ј. за $x=1$, друга за $x=\frac{3}{2}$, трећа за $x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$ четврта за $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \dots$

Видећемо доцније да и функције добивене кореновањем непрекидне функције представљају прекиде.

Појам непрекидности функције игра врло важну улогу за испитивање функција.

Rolle-ова теорема важи само за непрекидне функције.

Виши изводи или изводи вишег реда

Онако исто као што смо тражили изводе првобитне функције можемо тражити и извод извода. Он се зове <u>други извод</u> дате функције. И сам тај извод биће функција x-а и ми опет можемо тражити извод тога другог извода. Тако добивени резултат назива се <u>трећи извод</u> дате функције. Затим опет можемо тражити извод трећег извода и т.д. У опште под $n^{\text{тим}}$ изводом једне функције подразумева се први извод од $(n-1)^{\text{ог}}$ извода те функције.

Видели смо да се извод функције $F(x)$ означава са $F'(x)$. Тако исто ће се други извод означавати са $F''(x)$, трећи са $F'''(x)$ . . . $n^{\text{ти}}$ са $F^{(n)}(x)$. Према самој дефиницији $n^{\text{тог}}$ извода биће

$$F^{(n)}(x) = \left[F^{(n-1)}(x)\right]'$$

Први, други, трећи . . . извод функције називају се њеним узастопним изводима и то вишим изводима. За тражење виших извода важе она иста правила која важе и за тражење првог извода.

Примери:

1. Наћи узастопне изводе функције x^m.

Имаћемо:

$$f(x) = x^m$$
$$f'(x) = m\,x^{m-1}$$
$$f''(x) = m\cdot(m-1)\,x^{m-2}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f^{(k)}(x) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots(m-k+1)\,x^{m-k}$$

Ако узмемо да је

$$k = m$$

добијамо

$$F^{(m)}(x) = m!$$

што значи да је $F^{(m)}(x)$ стална количина. Очевидно је, пошто је $m^{\text{ти}}$ извод стална количина, да ће сви виши изводи од m бити равни нули.

2. Наћи узастопне изводе функције e^x.

Имаћемо

$$F(x) = e^x$$
$$F'(x) = e^x \quad F''(x) = e^x \quad \cdots \quad F^{(n)}(x) = e^x$$

функција e^x има ту особину да су јој сви изводи међу собом једнаки и равни њој самој.

3. Наћи узастопне изводе функције e^{ax}, где је a сталан број.

Имаћемо

$$F(x) = e^{ax}$$
$$F'(x) = a\,e^{ax} \quad F''(x) = a^2 e^{ax} \quad \cdots \quad F^{(k)}(x) = a^k e^{ax}$$

4. Наћи узастопне изводе функције $\log x$.

Имаћемо

$$F(x) = \log x$$
$$F'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$F''(x) = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$F''(x) = -1 \cdot -2 \cdot x^{-3} = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$$

$$F'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot -3\, x^{-4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$$

. . . . . .

$$F^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)}{x^n}$$

5. Наћи узастопне изводе функције $\sin x$.

Имаћемо

$$F(x) = \sin x$$

$$F'(x) = \cos x \quad F''(x) = -\sin x \quad F'''(x) = -\cos x \quad \ldots$$

Према томе сви виши изводи од $\sin x$ биће и сами равни или $\sin x$ или $\cos x$ са знаком + или −, т.ј.

$$F^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

6. Наћи узастопне изводе функције $\cos x$.

Имаћемо

$$F(x) = \cos x$$

$$F'(x) = -\sin x \quad F''(x) = -\cos x \quad \ldots \quad F^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

7. Наћи узастопне изводе функције

$$F(x) = xe^x$$

имаћемо

$$F'(x) = xe^x + e^x$$

$$F''(x) = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$$

$$F'''(x) = xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x$$

. . . . . .

$$F^{(n)}(x) = xe^x + ne^x$$

8. Наћи узастопне изводе функције

$$F(x) = a^x$$

Имаћемо

$$F'(x) = a^x \log a$$

$$F''(x) = a^x \log a \log a = a^x (\log a)^2$$

. . . . . .

$$F^{(n)}(x) = a^x (\log a)^n$$

Онако исто као што први изводи играју важну улогу, тако исто и виши изводи су од великог значаја. Најважнија је њихова примена у развијању функција у редове. Доказује се да се свака функција може развити у збир од бесконачно великог броја простих функција, тако да се првобитна компликована функција своди на простије функције. Такав задатак развијања функција у бескрајне редове решава се помоћу виших извода.

Тако исто при одређивању максимума и минимума функција виши изводи имају врло важну улогу.

Ти исти изводи имају важну улогу при решавању великог броја геометриских задатака.

О редовима у опште.

Ред у математици је један такав низ количина које иду једна за другом по извесном одређеном закону а не произвољно. Такав би један ред био аритметичка прогресија

1 2 3 4 . . .

или геометриска прогресија

1 2 4 8 16 . . .

Такав би ред био један ма какав низ количина

$u_0 \; u_1 \; u_2 \; u_3 \; \cdots u_n$

где те количине нису произвољне већ за њих постоји известан закон

Поједине од тих количина називају се чланови реда и то његов први, други, трећи . . . члан. u_n се назива $n^{ти}$ члан или општи члан а број n назива се његовим <u>рангом</u>. Закон по коме постају чланови таквог реда назива се <u>закон реда</u>. Н. пр. за ред

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots$$

биће општи члан

$$u_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

и у овом је обрасцу непосредно исказан закон реда јер је исказано да се сви чланови датог реда добијају кад се у изразу $2n-1$ ставља узастопце

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Тако исто за геометриску постепеност

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \dots$$

биће општи члан

$$u_n = 2^{n-1}$$

и у том је обрасцу исказан и закон реда који се добија кад се у изразу 2^{n-1} постепено стави

$$n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Закон реда може бити дат у два разна облика:

1.) Кад је општи члан u_n експлицитно изражен као функција свога ранга n. У таквом случају стављајући у том обрасцу узастопце $n = 1, 2, 3, \dots$ имали би све чланове реда. Такав је случај са примером аритметичке постепености у којој је $u_n = 2n-1$ или са малопређашњим примером геометриске постепености где је било $u_n = 2^{n-1}$

2.) Кад је познат такав образац који исказује везу између општег члана u_n и неколико чланова који му претходе. Тако н. пр. закон реда

$$1 \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1\cdot 2} \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \dots$$

дефинисан је једним обрасцем овог облика

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{n}$$

Из овог обрасца можемо стављајући узастопце $n = 1, 2, 3 \dots$ добити

$$u_1 = \frac{u_0}{1}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{u_0}{1\cdot 2}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{3} = \frac{u_0}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_n = \frac{u_0}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}$$

где још само ваља ставити

$$u_0=1$$

па ћемо имати све чланове датог реда.

Ако би н. пр. тражили све чланове реда чији је закон дат обрасцем

$$u_n = a\,u_{n-1} + b$$

имали би да у том обрасцу ставимо

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

и онда би имали

$$u_1 = a u_0 + b$$
$$u_2 = a u_1 + b = a^2 u_0 + ab + b$$
$$u_3 = a u_2 + b = a^3 u_0 + a^2 b + ab + b$$
$$u_4 = a u_3 + b = a^4 u_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = a^n u_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \dots + ab + b =$$
$$= a^n u_0 + b\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) =$$
$$= a^n u_0 + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

где још само ваља прецизирати први члан u_0 па ћемо из последњег обрасца, стављајући

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

имати све чланове траженог реда.

Под <u>збиром</u> S_n једног датог реда разуме се збир од његових n првих чланова т.ј.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \qquad 1.)$$

Ако знамо збир S_n неког реда изражена као функција броја n, могу се увек наћи и сви чланови реда, јер ако у обрасцу 1.) сменимо n са $n+1$ имаћемо

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \qquad 2.)$$

Одузимањем једначина 1.) и 2.) добија се

$$u_n = S_{n+1} - S_n$$

одакле имамо ово правило: Кад је познат збир од n првих чланова једног реда, па се траже сви чланови тога реда, ваља у датом обрасцу за S_n повећати n за јединицу т.ј. образовати S_{n+1}, па ће разлика $S_{n+1} - S_n$ дати општи члан u_n траженог реда и онда би имали све чланове тога реда.

Примери:

1. Наћи који је то ред за који збир од првих n чланова има као вредност $2n^2 - 3n + 1$.

Овди је
$$S_n = 2n^2 - 3n + 1$$
па је према томе
$$S_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = 2n^2 + n$$
па даље
$$u_n = S_{n+1} - S_n = 2n^2 + n - 2n^2 + 3n - 1 = 4n - 1$$
Ако ставимо узастопце
$$n = 1, 2, 3, \dots$$
налазимо да ће чланови траженог реда бити
$$u_1 = 3 \quad u_2 = 7 \quad u_3 = 11 \quad u_4 = 15 \quad \dots$$
2. Наћи који је то ред за који збир од n првих чланова има за вредност $\sin an$.

Овди је
$$S_n = \sin na$$
$$S_{n+1} = \sin(n+1)a$$
и према томе
$$u_n = S_{n+1} - S_n = \sin(n+1)a - \sin na =$$
$$= 2\cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right)a \sin\frac{a}{2}$$
Пошто $\sin\frac{a}{2}$ не зависи од n, то ако означимо
$$2\sin\frac{a}{2} = \lambda$$
биће
$$u_n = \lambda \cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right)a$$
Стављајући узастопце
$$n = 1, 2, 3, \dots$$
налазимо да ће чланови траженог реда бити
$$u_0 = \lambda\cos\frac{a}{2} \quad u_1 = \lambda\cos\frac{3a}{2} \quad u_2 = \lambda\cos\frac{5a}{2} \quad \dots$$
У исти мах из овога добијамо интересантан тригонометриски образац
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} =$$
$$= \left(\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{3a}{2} + \dots + \cos\frac{n-1}{2}a\right)\lambda =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin an}{\sin\frac{a}{2}}$$

Бескрајни редови.

Претпоставимо да се има посла са једним редом

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots$$

који има бескрајно много чланова. Све оно што је казано за ма какав ред у опште важиће и за овај ред. Означимо и овде са S_n збир од првих n чланова реда. Ако у том збиру пустимо да n бескрајно расте, добићемо збир од бескрајно много чланова реда и означићемо га са S_∞. Овај збир S_∞ може се сматрати као граница којој тежи збир S_n за $n=\infty$. Под збиром S једног оваквог реда подразумеваћемо увек границу којој тежи збир S_n. Овај збир S према природи реда с којим смо имали посла може бити или коначан и одређен или коначан и неодређен или напослетку бескрајно велика количина.

У случају кад је S коначна и одређена количина, за дати се ред каже да је <u>конвергентан</u>. У случају кад је S коначна а неодређена или бескрајно велика количина за ред се каже да је <u>дивергентан</u>. Тако н. пр. ако уочимо геометриску постепеност

$$1 + k + k^2 + k^3 + \cdots$$

зна се да је збир од n првих чланова

$$S_n = \frac{1-k^n}{1-k}$$

Ако је $k<1$, онда ће за $n=\infty$ k^n тежити нули и збир S_n претвара се у збир

$$S = \frac{1}{1-k}$$

и пошто је та количина коначна и одређена, то ће и горњи ред бити конвергентан.

Ако је сад $k>1$, количина k^n за $n=\infty$ постаје и сама бескрајна а тако исто и збир S. Ред је дакле дивергентан.

На послетку ако је $k=1$, дати се ред

своди на

$$1+1+1+1+\cdots$$

дакле opšt je дивергентан. Према свету овоме дати ред биће конвергентан само ако је $k<1$ а дивергентан ако је $k>1$ или $k=1$.

Као други пример уочимо ред чији је општи члан

$$u_n=(-1)^n$$

т.ј. ред

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \cdots$$

Он ће бити дивергентан јер је његов збир S коначан а неодређен.

Ако је ред дивергентан, треба га сасвим одбацити, радити треба само са конвергентним редовима. Стога ваља увек при испитивању каквог реда наћи да ли је конвергентан или дивергентан. За такво испитивање не постоји никакво опште правило. Међутим постоји врло много посебних правила која решавају та питања у појединим случајевима. Таква су правила двојака: једна дају само __потребне__, а друга само __довољне__ услове за конвергенцију. Ни једно правило не даје у исто време и потребне и довољне услове.

Правило које даје потребне услове за конвергенцију.

Да би један ред

$$u_0 \; u_1 \; u_2 \; u_3 \; \dots$$

био конвергентан потребно је да његов општи члан u_n тежи нули кад n бескрајно расте.

Правило се лако изводи из обрасца који смо већ имали и према коме, ако се са S_n означи збир од n првих чланова датог реда, а са S_{n+1} означи збир од (n+1) чланова тога реда, имаћемо

$$u_n = S_{n+1} - S_n$$

Претпоставимо да је ред конвергентан, онда његов збир има коначну и одређену вредност S. Према томе и S_n и S_{n+1} теже коначној и одређеној граници S кад n бескрајно расте. На основу тога можемо написати да је

$$S_n = S + \lambda$$

$$S_{n+1} = S + \mu$$

где су λ и μ две количине које теже нули кад је $n=\infty$. Заменом у обрасцу за u_n добијамо

$$u_n = \mu - \lambda$$

а пошто за $n=\infty$ и λ и μ теже нули, то и u_n мора тежити нули, чиме је правило доказано.

Ово правило даје један услов који свакад мора бити испуњен кад је ред конвергентан. Тако кад он није испуњен за ред се наступно може тврдити да је дивергентан. Али не стоји и обрнуто правило т.ј. није истина да, ако u_n тежи нули, ред мора бити конвергентан. Што се најбоље види из једног примера код кога u_n тежи нули па ипак је ред дивергентан. Узмимо т. зв. хармониски ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

чији је општи члан

$$u_n=\frac{1}{n}$$

тај члан тежи нули за $n=\infty$, а ред ипак није конвергентан. О томе се уверавамо групишући чланове на овај начин

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

Прва од ових заграда има вредност већу од $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ т.ј. од 1; друга заграда има вредност већу од $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ т.ј. од $\frac{1}{2}$; трећа је већа од $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ т.ј. од $\frac{1}{2}$ и т.д. Имали би дакле бескрајно много оваквих заграда од којих је свака већа од $\frac{1}{2}$. Према томе збир таквог реда биће бескрајан т.ј. ред је дивергентан.

Правила која дају довољне услове за конвергенцију.

Таквих правила има веома много. Нека су општија, нека специјалнија т.ј. једна обухватају већи а друга мањи број појединих случајева. У колико је које од тих правила простије и генералније, у толико има већу важност у примени. Ми ћемо навести неколико таквих најважнијих правила која се најчешће употребљују. Тога ради разликоваћемо ова три случаја:

1.) ако су сви чланови реални и истог знака;

2.) ако су сви чланови реални али неједнако означени; и

3.) ако су сви чланови реда имагинарни.

I Случај

Нека је дат ред

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

за који ћемо претпоставити да су му сви чланови реални и једнакого означени. Овај знак можемо увек сматрати као + јер је очевидно да за конвергенцију једног реда не утиче то ако га помножимо са -1. За такве редове са реалним и позитивним члановима вреде ова основна правила

a) D'Alambert-ово правило. Ако количник

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

за $n=\infty$ тежи каквој граници мањој од један, ред је наступно конвергентан, ако тежи граници већој од 1, ред је наступно дивергентан; ако је та граница равна 1, питање о конвергенцији остаје нерешено.

Да би доказали ово правило претпоставимо најпре да количник $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ тежи каквој граници мањој од 1. Тада је очевидно да ће ти количници почев од извесног ранга непрестано бивати мањи од једног извесног броја k који је и сам мањи од 1. Претпоставимо да то бива почев од ранга p, дакле

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < k \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < k \quad \cdots \quad \frac{u_{p+n+1}}{u_{p+n}} < k$$

Ако ове неједначине помножимо међу собом, увек ћемо добити по два члана који ће се потирати и биће

$$\frac{u_{p+n+1}}{u_p} < k^{n+1}$$

или

$$u_{p+n+1} < u_p k^{n+1}$$

Ако у овој неједначини стављамо узастопце

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

добија се

$$u_{p+1} < u_p k \qquad u_{p+2} < u_p k^2 \qquad u_{p+3} < u_p k^3 \quad \cdots$$

Разложимо сад задати ред

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots$

на два збира од којих се први свршује чланом u_p а други почиње чланом u_{p+1} т.ј. напишимо га у облику

$$(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_p)+(u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots)$$

Прва заграда, пошто је састављена из збира од коначног броја коначних и одређених сабирака, и сама ће имати коначну и одређену вредност. Довољно је, дакле, доказати да је збир и у другој загради коначан и одређен. Ако га означимо са M онда према предњим неједначинама имаћемо да је

$$M < u_p k[1+k+k^2+\cdots]$$

Ред у загради на десној страни ове неједначине представља једну геометријску прогресију код које је $k<1$; такав ред, видели смо, конвергентан је и према томе његов збир има коначну и одређену вредност. Горња неједначина показује тада да ће и збир M такође бити коначан, а пошто је M збир од самих позитивних чланова, то је јасно да ће у исто време он бити и одређен. То све показује да је дати ред заиста конвергентан. Тиме је доказан први део D'Alembert-ове теореме.

Да би доказали други део претпоставимо да количник

$$\frac{u_{p+n+1}}{u_p}$$

за $n=\infty$ тежи каквој граници већој од 1. Тада ће, почев од једног извесног ранга p, ти количници непрестано бити већи од једног извесног броја k који је и сам већи од 1. Према томе можемо написати ове неједначине

$$\frac{u_{p+1}}{u_p}>k \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}}>k \quad \cdots \quad \frac{u_{p+n+1}}{u_{p+n}}>k$$

које кад помножимо међу собом добијамо неједначину

$$\frac{u_{p+n+1}}{u_p}>k^{n+1}.$$

Стављајући у њој узастопце

$$n=0,1,2,3,\cdots$$

добија се низ неједначина

$$u_{p+1}>u_p k \quad u_{p+2}>u_p k^2 \quad \cdots$$

Радећи као и малочас имали би место

претходне неједначине неједначину

$$M > u_p k(1+k+k^2+\cdots)$$

где на десној страни у загради имамо једну геометр. прогресију за коју је

$$k > 1$$

Збир такве прогресије бескрајан је и према томе и само $M=\infty$ што све показује да је и дати ред дивергентан. Овим је доказан и други део D'Alambert-ове теореме.

На послетку ако ставимо

$$k=1$$

напотреходне дискутовање не може се применити и према томе питање о конвергенцији остаје нерешено.

У примени D'Alambert-овог правила треба увек овако поступати. Кад је дат ред

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \ldots$$

треба члан u_{n+1} поделити чланом u_n и у количнику пустити да n бескрајно расте па одредити границу λ којој тада овај количник тежи. Ако је $\lambda<1$ ред је конвергентан, ако је $\lambda>1$ ред је дивергентан, ако је $\lambda=1$ питање остаје нерешено.

Примери:

1.) Видели смо да се број e може представити збиром

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

Према томе је

$$u_n=\frac{1}{(n-1)!} \qquad u_{n+1}=\frac{1}{n!}$$

па даље

$$\lambda=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n}$$

за $n=\infty$ је $\lambda=0$, а то значи да је $\lambda<1$ и према томе ред је конвергентан.

2. Дат је ред

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

Овди је

$$u_n=\frac{x^{n-1}}{n-1} \qquad u_{n+1}=\frac{x^n}{n}$$

па даље

$$\lambda=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n-1}{n}x=\left(1-\frac{1}{n}\right)x$$

за $n=\infty$ добија се

$$\lambda=x$$

Према томе ако је x мање од 1 ред је конвергентан; ако је $x>1$ ред је дивергентан; ако је $x=1$ питање остаје нерешено.

б.) Cauchy-ево правило. Ако израз

$$\sqrt[n]{u_n}$$

за $n=\infty$ тежи каквој граници мањој од 1, ред је конвергентан; ако тај израз тежи каквој граници већој од 1, ред је дивергентан; ако је та граница равна 1, питање остаје нерешено.

Да би правило доказали, претпоставимо најпре да овај израз тежи граници мањој од 1. Тада ће, почев од једног извесног ранга p, горњи израз бити непрестано мањи од једног извесног броја k који је и сам мањи од 1, тако да ће бити

$$\sqrt[p]{u_p}<k \quad \sqrt[p+1]{u_{p+1}}<k \quad \sqrt[p+2]{u_{p+2}}<k \quad \ldots$$

одакле

$$u_p<k^p \quad u_{p+1}<k^{p+1} \quad u_{p+2}<k^{p+2} \quad \ldots$$

Ако, као и малочас, разложимо дати ред у два збира

$$(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{p-1})+(u_p+u_{p+1}+\cdots)$$

прва ће заграда, разуме се, бити коначна и одређена, а друга, ако ју означимо са M, биће према предњим неједначинама

$$M<k^p(1+k+k^2+k^3+\cdots)$$

Пошто је $k<1$, ред на десној страни неједначине биће конвергентан.

На исти би начин доказали и други део Cauchy-јеве теореме т.ј. ако је $k>1$ ред је дивергентан. Имали би облике исте неједначине само место знака $<$, знак $>$, т.ј. дошли би до неједначине

$$M>k^p(1+k+k^2+k^3+\cdots)$$

Ред би био дивергентан јер је $k>1$.

На послетку кад би било $k=1$ горње извођење било би непримењливо.

У примени Cauchy-јевог правила треба овако поступати: образовати израз $\sqrt[n]{u_n}$, пустити да у њему n бескрајно расте и одредити границу λ тога израза. Тада, ако је $\lambda<1$ ред је конвергентан; ако је $\lambda>1$ ред је дивергентан; ако је $\lambda=1$ ред је сумњив.

Пример: Дат је ред

$$1+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots$$

Овде је

$$u_n=\frac{1}{(2n+1)^n}$$

и према томе

$$\lambda=\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2n+1}$$

За $n=\infty$ добија се $\lambda=0$ т.ј. $\lambda<1$. Ред је дакле конвергентан.

в.) Случајеви на које се не може применити Cauchy-ево и D'Alambert-ово правило. Према D'Alambert-овом и Cauchy-јевом правилу, питање о конвергенцији реда може се увек решити ако је граница λ којој тежи израз $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или $\sqrt[n]{u_n}$ мања или већа од јединице. У првом случају ред је конвергентан, у другом дивергентан. Међутим у случају кад је $\lambda=1$ ни једно ни друго правило не доводи ни до каквог резултата. На први поглед изгледало би да понекад, ако D'Alambert-ово правило не може да реши питање о конвергенцији, решиће га Cauchy-јево правило и обратно. Међутим, лако је уверити се да ако једно од тих правила не доведе ни до каквог резултата, неће ни друго. Да би то доказали доказаћемо да, ако $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ има као границу 1, онда ће израз $\sqrt[n]{u_n}$ имати такође за границу 1. Посматрајмо ред

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$$

за који се пита да ли је конвергентан. Означимо са λ границу којој тежи израз $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, а са μ границу којој тежи израз $\sqrt[n]{u_n}$. Образујмо потоњи ред

$$u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots$$

и потражимо за које ће вредности x-а ред бити конвергентан. D'Alambert-ов израз за тај ред биће

$$\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_nx^n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}x$$

За $n=\infty$ овај израз има за вредност

$$\lambda x$$

Међутим Cauchy-ев израз биће

$$\sqrt[n]{u_nx^n}=x\sqrt[n]{u_n}$$

За $n=\infty$ он тежи граници

$$\mu x$$

Према D'Alambert-овом правилу помоћни ће ред бити конвергентан ако је $\lambda x<1$ а дивергентан ако је $\lambda x>1$, другим речима он ће бити конвергентан за $x<\frac{1}{\lambda}$ а дивергентан за $x>\frac{1}{\lambda}$. Међутим, према Cauchy-јевом правилу тај исти ред биће конвергентан ако је $\mu x<1$ а дивергентан ако је $\mu x>1$ т.ј. он ће бити конвергентан за $x<\frac{1}{\mu}$, а дивергентан за $x>\frac{1}{\mu}$. Посматрајмо сад једну вредност $x=h$, која лежи између $\frac{1}{\lambda}$ и $\frac{1}{\mu}$. Према овоме што смо нашли за вредност x-а по D'Alambert-овом и Cauchy-јевом правилу, помоћни ред, кад се у њему смени $x=h$, био би по једном од та два правила конвергентан а по другом дивергентан, и пошто би тај парадокс важио за ма какво x које лежи између $\frac{1}{\lambda}$ и $\frac{1}{\mu}$, то се $\frac{1}{\lambda}$ мора поклопити са $\frac{1}{\mu}$ т.ј. λ мора бити једнако са μ. У специјалном случају кад је $\lambda=1$ мора бити и $\mu=1$. Из тога излази да сви случајеви који остају нерешени употребом D'Alambert-овог правила остају нерешени и употребом Cauchy-јевог правила.

Питање је како се у тако сумњивим случајевима испитује конвергенција реда. Начин који се тада најчешће употребљује јесте упоређење датог реда са другим редом за који се зна да ли је конвергентан или дивергентан. То је упоређивање основано на употреби ова два правила:

1° правило: Ако су почев од извесног ранга чланови датог реда

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \qquad 1.)$$

мањи од чланова каквог реда

$$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \qquad 2.)$$

за који се већ унапред зна да је конвергентан, онда ће и ред 1.) зацело бити конвергентан. Правило је очевидно само по себи јер, ако је збир реда 2.) коначан, онда ће у толико пре бити коначан и збир реда 1) чији су чланови по реду мањи од чланова реда 2). Међутим тај је збир у исто време и одређен пошто су му сви сабирци коначни и позитивни.

<u>2°. правило</u>: Ако су чланови реда 1) почев од извесног ранга већи од чланова реда 2) за који се зна да је дивергентан, онда ће и сам ред 1) извесно бити дивергентан. И ово је правило очевидно, јер ако је збир реда 2) бескрајан, утолико ће пре бити бескрајан и збир реда 1) чији су чланови по реду већи од чланова реда 2)

Према овим правилима може се при одређивању конвергенције каквог реда узети за упоређивање какав познати ред 2) где би се могло испитивати да ли су чланови већи или мањи од чланова датог реда и решити питање о конвергенцији. Који ће се ред 2) узети за упоређивање са датим редом зависи од природе случаја. Најчешће се за ред 2) узима или геометриска прогресија

$$1+k+k^2+k^3+\cdots$$

за коју се зна да је конвергентан ред ако је $k<1$, а дивергентан ако је $k>1$, или ред

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots \qquad 3.)$$

за који се може доказати да је конвергентан ако је $k>1$, а дивергентан ако је $k<1$ или $k=1$. Да би то доказали претпоставимо да је $k>1$ и напишимо ред у облику

$$1+\left[\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right]+\left[\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right]+\left[\frac{1}{8^k}+\cdots\right.$$

Прва заграда има мању вредност но што би имала кад би други сабирак у њој сменили првим; она је дакле мања од $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}$ т.ј. мања од $\frac{2}{2^k}$ или од $\frac{1}{2^{k-1}}$; друга заграда мања је од $\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}$ т.ј. од $\frac{4}{4^k}$ или од $\frac{1}{4^{k-1}}$ или најзад од $\frac{1}{(2^{k-1})^2}$; трећа заграда била би мања од $\frac{1}{(2^{k-1})^3}$, и т.д. На тај начин налазимо да је збир горњег реда мањи од

$$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^2}+\frac{1}{(2^{k-1})^3}+\cdots \qquad 4.)$$

Ред 4.) није ништа друго до једна геометриска прогресија чији је количник $\frac{1}{2^{k-1}}$. Пошто је $k>1$, то ће овај количник бити мањи од 1 и према томе та ће прогресија представљати конвергентан ред и онда ће, у толико пре, бити конвергентан и ред 3.) чији је збир, као што смо видели, мањи од збира реда 4.) Тиме је доказано да је ред 3.) одиста конвергентан за $k>1$ а дивергентан за $k<1$ или за $k=1$. Да је то збиља тако види се што је за $k=1$ дати ред прелази у хармониски ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

за који смо раније видели да је дивергентан; а за $k<1$ своди се на један известан ред чији су чланови већи од чланова хармониског реда, према чему ће ред извесно бити дивергентан. Знајући тачно услове под којима је ред 3.) конвергентан или дивергентан, он се у врло великом броју разноврсних случајева може узимати као компаративан ред.

Упоређењем тога реда са каквим датим редом

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \qquad 5.)$$

долази се до ова два правила која се врло често употребљују у случајевима где D'Alambert-ово и Cauchy-ево правило не доводе до резултата:

<u>1° правило</u>: Ако се може наћи такав број $k>1$ да израз

$$n^k u_n$$

не постаје бескрајан за $n=\infty$, онда је ред 5.) извесно конвергентан. Јер ако се граница израза, за коју претпостављамо да је коначна, $n^k u_n$ означи са A, очевидно је да се увек може наћи један известан коначан број B, да буде

$$n^k u_n < B$$

Тада је

$$u_n < \frac{B}{n^k}$$

и према томе чланови реда 5.) мањи су од чланова реда

$$B\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\right.$$

А пошто смо за овај последњи ред малочас видели да је конвергентан за $k>1$, то ће и ред 5.) бити конвергентан.

Пример: Пита се да ли је ред

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{a+9b}+\cdots$$

где су a и b позитивни, конвергентан или дивергентан. Овде је

$$u_n=\frac{1}{a+bn^2}$$

па је

$$n^k u_n=\frac{n^k}{a+bn^2}$$

Ако узмемо $k=2$ тај се израз своди на

$$\frac{n^2}{a+bn^2}=\frac{1}{\frac{a}{n^2}+b}$$

и за $n=\infty$ тај последњи израз тежи граници $\frac{1}{b}$. Пошто је $k>1$, то је дати ред конвергентан.

<u>2° правило</u>: кад год израз

$$nu_n$$

не тежи нули за $n=\infty$ дати ред 5.) известно је дивергентан; јер ако претпоставимо да тај израз тежи каквој коначној граници A, онда је увек могућно наћи макар један коначан број B да буде

$$nu_n>B$$

тада је

$$u_n>\frac{B}{n}$$

и према томе чланови реда 5.) већи су од одговарајућих чланова реда

$$B\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

за који смо видели да је дивергентан, па ће према томе и сам ред 5.) бити дивергентан. Ред ће у толико пре бити дивергентан ако је граница израза nu_n $A=\infty$ јер, у колико је граница A већа, у толико се број B може узимати све већи.

Пример: испитати да ли је ред

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\cdots$$

где су a и b позитивни, конвергентан или дивергентан? Овде је

$$u_n=\frac{1}{a+bn}$$

и према томе

$$nu_n=\frac{n}{a+bn}=\frac{1}{\frac{a}{n}+b}$$

Овај израз за $n=\infty$ тежи коначној граници $\frac{1}{b}$ и према томе ред је дивергентан.

И у овом као и у првом примеру не помаже ни D'Alembert-ово ни

Cauchy-јево правило.

Оваквих тачнијих правила за решавање питања о конвергенцији сумњивих редова има врло много; употребљује се оно које је у појединим случајевима најзгодније.

II. Случај

Претпоставимо да су сви чланови датог реда реални али неједнако означени. Тада се може доказати ово основно правило: ако свима члановима таквог реда дамо знак + онда, ако је нови тако добијени ред конвергентан, биће извесно и дати ред конвергентан.

Нека је дати ред

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \cdots \qquad 1.)$$

Ако збир реда 1.) означимо са S, скуп од њихових свих позитивних чланова са P, а скуп свих негативних чланова са Q, биће

$$S = P - Q \qquad 2.)$$

дајмо сада свима члановима који се налазе у скупу Q знак +, то ћемо добити нов ред

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \cdots \qquad 3.)$$

чији ће збир бити

$$S_1 = P + Q \qquad 4.)$$

Ако је ред 3.) конвергентан, онда збир S_1 мора бити коначан и одређен, па према томе и количине P и Q морају бити коначне и одређене. А кад је то случај, онда и њихова разлика т.ј. збир S датог реда 1.) такође је коначан и одређен што значи да је ред 1.) конвергентан, а то смо и хтели доказати.

Ово правило се врло често употребљује кад се има посла са редовима чији су чланови неједнако означени. У таквим случајевима свима се негативним члановима промени знак и онда се помоћу D'Alambert-ова и Cauchy-ева правила или другог кога правила испитује конвергенција новог тако добијеног реда. Ако се за овај последњи ред докаже да је конвергенттан, може се тврдити да је и дати ред конвергентан.

Али приметимо да не стоји и обрнуто правило, јер нови ред може бити дивергентан, па да ипак првобитни ред буде конвергентан. Што се н. пр. види из случаја са редом

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

за који ћемо мало после видети да је конвергентан док је међутим из њега изведени ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

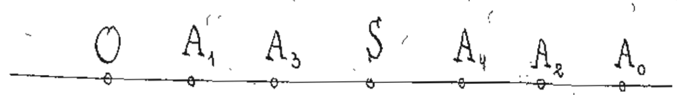
као хармонијски ред дивергентан.

Наизменични или алтернативни редови. Од свих редова са неједнако означеним члановима ови се редови најчешће јављају. То су такви редови код којих су чланови наизменце позитивни и негативни н. пр.

$$u_0 \; -u_1 \; +u_2 \; -u_3 \; \cdots$$

Видели смо да је за конвергенцију једног реда потребан услов: да општи члан реда u_n тежи нули за $n=\infty$. Код ових редова то је у исто време и довољан услов. Тако ћемо доказати ово правило: кад год код једног наизменичног реда његови чланови опадају и теже нули за $n=\infty$, ред је наступно конвергентан.

Повуцимо бројну линију и изаберимо једну дужину за јединицу мере, па онда према



тој јединици постављамо чланове $u_0\, u_1\, u_2 \cdots$ као дужине од нулте тачке на бројној линији. Пренесимо на десну страну дужину

$$OA_0 = u_0$$

затим од тачке A_0 на леву страну дужину

$$A_0A_1 = u_1$$

Тачка A_1 биће на десној страни од нуле јер се претпоставља да чланови реда опадају, па даље да је

$$A_0A_1 < OA_0$$

Од тачке A_1 пренесимо на десну страну дужину

$$A_1A_2 = u_2$$

затим од тачке A_2 пренесимо на леву страну дужину

$$A_2A_3 = u_3$$

и т. д. У опште из тачке A_n преносимо дужину

$$A_nA_{n+1} = u_{n+1}$$

и то на леву или на десну страну од тачке A_n према томе да ли је члан u_n позитиван или негативан. На тај начин добићемо на бројној линији две системе тачака и то

$$A_1 \quad A_3 \quad A_5 \quad A_7 \quad \dots$$
$$A_0 \quad A_2 \quad A_4 \quad A_6 \quad \dots$$

Очевидно је према самом начину постанка тачака да ће се оне приближавати једна другој и да ће се, кад их буде бескрајно много, сусрести у једној извесној тачки S која ће бити негде на бројној линији између O и A_0.

Лако је уверити се да дужина OS тада није ништа друго до збир датога реда, јер би имали

$$OA_0 = u_0$$
$$OA_1 = OA_0 - A_0A_1 = u_0 - u_1$$
$$OA_2 = OA_1 + A_1A_2 = u_0 - u_1 + u_2$$
$$OA_3 = OA_2 - A_2A_3 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

и према томе биће

$$OS = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots$$

што значи да OS одиста представља збир датога реда. А пошто је дужина OS коначна и одређена, то је и дати ред конвергентан, а то је и требало доказати.

У исти мах из слике је очевидно и ово правило које се често употребљује: ако у једном наизменичном реду, тражећи његов збир, задржимо се само на неколико првих чланова а остале занемаримо, учињена погрешка биће увек мања но што је последњи узети члан, а знаће те погрешке биће увек онај исти који има први изостављени члан.

Примери:

1. Ред

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

је конвергентан, јер је наизменичан и чланови му опадају, кад n бескрајно расте. Ако при његовом сумирању узмемо н. пр. само првих десет чланова, учињена погрешка биће мања од 0·1 пошто је последњи узети члан $\frac{1}{10}$ и та ће погрешка бити позитивна, пошто је први изостављени члан $\frac{1}{11}$ позитиван.

2. Ред

$$1-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dots$$

конвергентан је, јер је наизменичан и чланови му опадају кад n бескрајно расте и ако при његовом сумирању узмемо само првих шест чланова, погрешка ће бити мања од $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$ т.ј. од $\frac{1}{720}$ т.ј. од 0,0014 и она ће бити позитивна пошто је први изостављени члан позитиван.

III Случај

Редови са имагинарним члановима.

То су редови облика

$$(u_0+v_0 i)+(u_1+v_1 i)+(u_2+v_2 i)+\dots \qquad 1.)$$

где

$$u_0 \; u_1 \; u_2 \; u_3 \; \dots$$

представљају реалне, а

$$v_0 \; v_1 \; v_2 \; v_3 \; \dots$$

имагинарне делове чланове реда. Ако збир од n првих чланова тога реда означимо са S_n, онда ће бити

$$S_n = P_n + i\,Q_n \qquad 2.)$$

где је

$$P_n = u_0+u_1+u_2+\dots+u_{n-1}$$
$$Q_n = v_0+v_1+v_2+\dots+v_{n-1} \qquad 3.)$$

За ред 1.) каже се да је конвергентан ако су оба реда 3.) конвергентна т.ј. ако збирови P_n и Q_n сваки понаособ теже коначним и одређеним границама за $n=\infty$. Ако се пак збирови од свих бесконачно многих чланова редова 1.) и 3.) означе са S, P и Q, биће

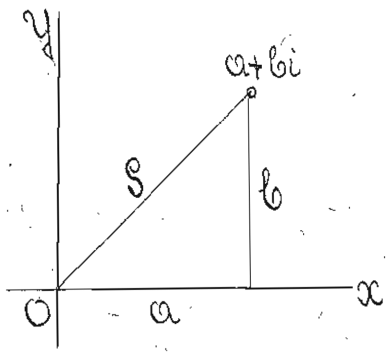
$$S = P + iQ$$

и тако добијено S било би збир реда 1.).

Тражење услова за конвергенцију реда 1.) може се свести на питање о конвергенцији редова са реалним члановима. Тога ради уведимо модуле имагинарних количина. Под <u>модулом</u> ρ имагинарне количине $a+bi$ разуме се вредност

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

Геометриско значење тога појма било би ово: ако се узму две координатне осовине OX и OY, па се на x-ној осовини обележавају само реалне вредности, а на y-ској осовини само чисто имагинарне вредности и то рачунајући реалне количине на десној страни x-ске осовине као позитивне а на левој као негативне, а тако исто рачунајући чисто имагинарне количине изнад x-не осовине као позитивне а испод као негативне, онда се комплексна количина $a+bi$ може представити као једна тачка у равни XOY чија је апсциса a а ордината b. Модуо те количине тада није ништа друго до ρ т.ј. дужина праве која спаја тачку $a+bi$ са координатним почетком, пошто је из слике



$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

Уведимо даље код горњег реда 1.) модуле његових чланова који ће бити

$$\rho_0=\sqrt{u_0^2+v_0^2} \quad \rho_1=\sqrt{u_1^2+v_1^2} \quad \rho_2=\sqrt{u_2^2+v_2^2} \quad \dots$$

Тада ће пре свега имати овај потребни услов за конвергенцију реда: да би један ред био конвергентан потребно је да модуо ρ_n његовог општег члана тежи нули за $n=\infty$. Ово излази непосредно из тога што, да би један ред био конвергентан, потребно је, као што смо видели, да оба реда 3.) буду такође конвергентна, а према ономе што је раније казано о редовима са реалним члановима за то је потребно да и u_n и v_n теже нули за $n=\infty$. Кад је то случај онда очевидно ρ_n мора тежити нули за $n=\infty$. На тај начин имамо један потребан услов за конвергенцију.

Међутим један довољан услов имамо у овом правилу: ако сваки члан реда 1.) сменимо његовим модулом т.ј. образујемо ред

$$\rho_0+\rho_1+\rho_2+\rho_3+\cdots \qquad 4.)$$

онда, кад год је ред 4.) конвергентан, мора бити и дати ред 1.) конвергентан. То излази непосредно из тога, што је у опште, према обрасцу

$$\rho_n=\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

$$u_n<\rho_n \quad v_n<\rho_n$$

т.ј. сваки од чланова једног или другог реда 3.) мањи је од одговарајућег члана реда 4.). Ако је ред 4.) конвергентан, биће у толико пре конвергентни редови 3.), па према томе и сам ред 1.) а то је и требало доказати.

Као што се види питање о конвергенцији ма каквог имагинарног реда може се увек свести на питање о конвергенцији реда 4.) чији су чланови реални и позитивни. За такве редове видели смо раније како се то питање решава. Уведимо још и то да се за редове 1.) код којих је одговарајући ред 4.) конвергентан, каже да су апсолутно конвергентни.

Н. пр. ред

$$(1+i)+\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{i}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{i}{3^3}\right)+\cdots$$

чији је општи члан

$$u_n=\frac{1}{n!}\pm\frac{i}{n^n}$$

апсолутно је конвергентан, јер се лако уверавамо да је ред чији је општи члан

$$\rho_n=\sqrt{\left(\frac{1}{n!}\right)^2+\frac{1}{n^{2n}}}$$

конвергентан.

Као специјалне и врло важне врсте редова који се у математици на сваком кораку употребљавају проучићемо детаљније две врсте редова, а то су: Maclaurin-ови и Taylor-ови редови.

Maclaurin-ови редови

Maclaurin-ови или изложилачки редови то су редови облика

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots \qquad 1.)$$

т.ј. редови уређени по степенима какве променљиве количине x. За количине $A_0 A_1 A_2 \cdots$ претпостављамо да не зависе од x-а и оне се називају коефицијентима датог Maclaurin-овог реда. Ми ћемо увек претпоставити да су ти коефицијенти реални.

Главно питање о Maclaurin-овим редовима јесте питање о њиховој конвергенцији. Познато нам је из досадашњег, да то питање зависи од облика општег члана; међутим тај члан овде је

$$u_n = A_{n-1}x^{n-1}$$

и пошто у њему фигурише променљива количина x, то се тај члан мења не само са n него и са x. Према томе на први поглед може се очекивати да ће ред за прве бити конвергентан а за друге дивергентан. Задатак који би имао да се реши био би овај: за које ће вредности x-а какав дати ред бити конвергентан а за које дивергентан. Да би решили тај задатак разликоваћемо следећа два случаја:

I. <u>Ако се посматрају само реалне вредности x-а</u>. Придајмо свима члановима нашег реда 1) знак + и сматрајмо за један тренутак и само x као позитивно. Тада ћемо имати ред облика

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad 2.)$$

где је општи члан

$$u_n = A_{n-1} x^{n-1}$$

и где су сви чланови реални и позитивни. На ред 2.) можемо применити D'Alambert-ово или Cauchy-ево правило и тако наћи услов за конвергенцију. D'Alambert-ов израз био би овде

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A_n x^n}{A_{n-1} x^{n-1}} = \frac{A_n}{A_{n-1}} x$$

Cauchy-ев пак израз био би

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{A_{n-1} x^{n-1}} = \sqrt[n]{A_{n-1}}\, x^{\frac{1}{n}}$$

За $n=\infty$ и ако границу којој тада тежи $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ означимо са α, D'Alambert-ов израз постаје

$$\alpha x$$

Међутим видели смо да тада и Cauchy-ев израз $\sqrt[n]{A_{n-1}}$ мора тежити истој граници α и према томе и Cauchy-ев израз своди се на

$$\alpha x$$

И према D'Alambert-овом и према Cauchy-евом правилу ред 2.) биће конвергентан ако је

$$\alpha x < 1$$

т.ј. ако је

$$x < \frac{1}{\alpha}$$

А према ономе што је казано за редове са неједнако означеним члановима биће конвергентан и онај ред који се из реда 2.) добија, ако члановима реда 2.) променимо како хоћемо знак. Према томе ред 1.) биће такође конвергентан за $x < \frac{1}{\alpha}$ т.ј. за све вредности x-а које леже између 0 и $\frac{1}{\alpha}$. Али пошто x_a смемо променити знак а да конвергенција опет остане, то ће тај исти ред бити конвергентан за све вредности x_a које леже између 0 и $-\frac{1}{\alpha}$. Другим речима ред 1.) биће насигурно конвергентан за све вредности x_a које леже између

$$-\frac{1}{\alpha} \quad \text{и} \quad +\frac{1}{\alpha}$$

Тај размак од $-\frac{1}{\alpha}$ до $+\frac{1}{\alpha}$ назива се <u>размак конвергенције</u> датог Maclaurin-овог реда.

Према томе практично упутство за одређивање тога размака било би ово: вала свима члановима придати знак + па онда образовати или количнике $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ или $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ или израз $\sqrt[n+1]{A_{n+1}}$ или што је исто $\sqrt[n]{A_n}$ и тражити границу којој било један било други израз тежи за $n=\infty$. Ако се та граница означи са α, онда тражени размак конвергенције јесте од $-\frac{1}{\alpha}$ до $+\frac{1}{\alpha}$. Ма какву вредност имало x у томе размаку ред 1.) биће насигурно конвергентан. Који ћемо од горњих израза узети свеједно је за крајњи резултат, јер оба доводе до истог резултата. Међутим са практичне стране некад је лакше употребити један, а некад други.

Примери:

1. Тражи се размак конвергенције Maclaurin-овог реда

$$1 - \frac{2x}{2} + \frac{4x^2}{3} - \frac{8x^3}{4} + \frac{16x^4}{5} - \dots$$

чији је општи члан

$$A_n x^n = \frac{2^n x^n}{n+1}$$

Овди је

$$A_n = \frac{2^n}{n+1} \qquad A_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2}$$

и према томе је

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = 2\frac{n+1}{n+2} = 2\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

за $n=\infty$ овај израз тежи граници 2 т.ј. овди је

$$\alpha = 2$$

и према томе тражени размак конвергенције jeсте од $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$.

2. Нека је дат ред

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{4^4} + \cdots$$

чији је општи члан

$$u_n = \frac{x^n}{n^n}$$

Cauchy-ев израз је

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n}$$

и за $n=\infty$ овај израз тежи граници нула, дакле

$$\alpha = 0$$

Размак конвергенције је према томе од $-\frac{1}{0} = -\infty$ до $+\frac{1}{0} = +\infty$, другим речима ред је конвергентан за све могуће вредности x-а.

3. Наћи размак конвергенције реда

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^3 + \frac{1}{5}(\operatorname{tg} x)^5 - \cdots$$

чији је општи члан

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} (\operatorname{tg} x)^{2n+1}$$

Ако уведемо нову променљиву

$$y = \operatorname{tg} x$$

добијамо ред

$$y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 + \cdots$$

чији је општи члан

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} y^{2n+1}$$

Према томе је

$$A_n = \frac{1}{2n+1} \qquad A_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$$

па је D'Alembert-ов израз

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

и за $n=\infty$ он тежи граници 1 т.ј.

$$\alpha = 1$$

Отуда је размак конвергенције новог реда од -1 до $+1$, односно $\operatorname{tg} x$ мора да лежи између -1 и $+1$ што значи да само x мора да лежи између $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{4}$ и то је тражени размак конвергенције.

4. Наћи размак конвергенције реда

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

чији је општи члан

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Овде је

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \qquad A_{n+1} = \frac{1}{n!}$$

па је D'Alembert-ов израз

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

и за $n=\infty$ он тежи граници

$$\alpha = 0$$

па је тражени размак конвергенције од $-\infty$ до $+\infty$ т.ј. дати ред је конвергентан за све могуће вредности x-а.

II. Претпоставимо сад да су коефицијенти Maclaurin-овог реда ма какви, реални или имагинарни, а тако исто и вредности које будемо давали x-у и потражимо за какве ће вредности x-а такав ред бити конвергентан. Нека је дат ред

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots \qquad 1.)$$

Означимо са B_n модуо општег сачиниоца A_n а са ρ модуо променљиве x. (Ако је количина чији се модуо тражи реална и позитивна, њен модуо је раван њој самој; ако је она реална и негативна, њен модуо раван је њеној апсолутној вредности). Ако уочимо ред

$$B_0 + B_1 \rho + B_2 \rho^2 + B_3 \rho^3 + \cdots \qquad 2.)$$

који ћемо назвати модуларним редом реда 1.), онда се може доказати ово правило: ако је ред 2.) конвергентан за једну реалну и позитивну вредност н. пр.

$$\rho = r$$

онда ће ред 1.) извесно бити конвергентан за све реалне или имагинарне вредности x-а чији је модуо мањи од r. Јер, ако уочимо ред

$$B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + B_3 r^3 + \cdots \qquad 3.)$$

и претпоставимо да је доказана његова конвергенција, па онда уочимо једну ма коју вредност x-а чији модуо нека је ρ, онда, пошто су у редовима 2.) и 3.) сви чланови реални и позитивни и пошто је

$$\rho < r$$

па даље у опште

$$B_n \rho^n < B_n r^n$$

то је сваки члан реда 2.) мањи од одговарајућег члана реда 3.) и према томе, пошто је ред 3.) конвергентан, тора бити конвергентан и ред 2.). Међутим ред 2.) није ништа друго до ред који се добија кад се у реду 1.) сваки члан замени својим модулом. Али ми смо раније доказали да ако је модуларни ред једног имагинарног реда конвергентан, мора и сам тај имагинарни ред бити конвергентан. Тиме је доказана конвергенција реда 1.) за све вредности x-а чији је модуо мањи од r, а тиме је доказано и горње правило.

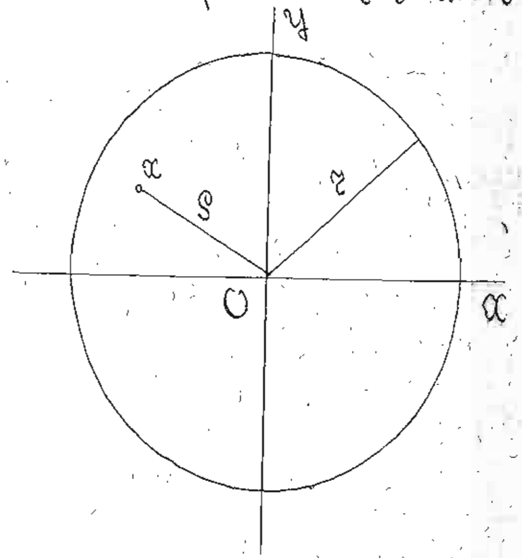
Томе се правилу може дати и овакав облик који се у пракси обично употребљује: претпоставимо да смо у једном датом реду 1.) сменили све сачиниоце $A_0\, A_1\, A_2 \ldots$ њиним модулима $B_0\, B_1\, B_2 \ldots$ и да смо за тако добијени ред

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots$$

на ма који начин доказали да је он конвергентан за једну извесну реалну и позитивну вредност

$$x = r$$

дати ред 1.) биће тада насигурно конвергентан за све вредности x-а које се у бројној равни налазе у унутрашњости круга описаног око почетка са полупречником r. Јер свака таква вредност x као што се из слике види има свој модуо $\rho < r$ и према горњем правилу ред је за сваку такву вредност x-а конвергентан.



Такав један круг који има особину да је дати ред 1.) конвергентан за све вредности x-а које се налазе у унутрашњости круга назива се <u>кругом конвергенције</u> датог реда.

Задатак: одредити за један дати Maclaurin-ов ред круг конвергенције састоји се у томе да се одреди полупречник тога круга. Кад је овај одређен круг описан око почетка тим полупречником биће тражени круг конвергенције. Оваквих кругова имали би бескрајно много јер сваки круг концентричан са малопређашњим кругом а мањег полупречника од ρ може се такође сматрати као круг конвергенције датог реда према горњем правилу. С тога је, кад је дат задатак овакве врсте, од интереса наћи што је могуће већи круг и обично се кругом конвергенције датог реда 1) назива највећи могући круг. Тражење полупречника тога круга бива на овај начин: претпоставимо да смо у датом реду 1) сменили коефицијенте $A_0 A_1 A_2 \dots$ њиховим модулима B_0 $B_1 B_2 \dots$ и образовали Maclaurin-ов ред

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots \qquad 4)$$

Одредимо размак конвергенције реда 4) и претпоставимо да је тако нађени размак од $-\lambda$ до $+\lambda$. Очевидно је да у место малопређашњег броја ρ можемо узети λ тако да се λ може сматрати као тражени полупречник. Ако опишемо круг са полупречником λ око почетка, дати ред биће конвергентан за све вредности x_a у унутрашњости тога круга.

Примери:

1. Нека је дат ред

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

чији је општи члан

$$u_n = \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Модуо коефицијента тога општег члана биће

$$B_n = \frac{1}{2n+1}$$

Ако уочимо ред

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots$$

који се овди своди на

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

Применом D'Alembert-ова правила налази се да ће његов размак конвергенције бити од -1 до $+1$ јер је

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \underset{n=\infty}{=} 1$$

па дакле је $\alpha = 1$. Према томе полупречник круга конвергенције за овај ред биће $r=1$. За $x=2+i$ тачка је ван круга, јер је њен модуо $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ и за ту вредност ред не би био конвергентан. За $x=0{\cdot}3+0{\cdot}7i$ тачка је у кругу, јер је њен модуо $\sqrt{0{\cdot}09+0{\cdot}49}=\sqrt{0{\cdot}58}$ и ред би за ту вредност x-а био конвергентан.

2. Нека је дат ред

$$1 \pm \frac{x}{1} \pm \frac{x^2}{1\cdot 2} \pm \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} \pm \cdots$$

Ако сменимо све коефицијенте њиховим модулима добија се ред

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

За овај ред видели смо применом D'Alembert-овог правила да је конвергентан за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. Према томе може се узети да је $r=\infty$ т.ј. ред је конвергентан за све вредности x-а које се налазе у унутрашњости круга описаног око почетка са бескрајно великим полупречником, другим речима ред је конвергентан за све могуће вредности x-а у целој бројној равни.

Taylor-ови редови

То су редови облика

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots$$

т.ј. редови уређени по степенима разлике $(x-a)$, где је x променљива а a стална количина и где коефицијенти $A_0\ A_1\ A_2 \ldots$ не зависе такође од x-а. Maclaurin-ови редови нису дакле ништа друго до специјални случај Taylor-ових редова који се на њих своде у случају кад је $a=0$.

Два основна задатка с којима се има посла у теорији Taylor-ових редова јесу ова:

1. ако се има посла само са реалним коефицијентима и реалним вредностима x-а, одредити размак конвергенције једног таквог реда; и

2. ако се има посла са имагинарним вредностима x-а па било да су коефицијенти реда реални или имагинарни, одредити круг конвергенције датог реда.

Као што ћемо показати оба задатка своде се врло лако на исте задатке код Maclaurin-ових редова.

I. Одредба размака конвергенције. Нека је дат Taylor-ов ред

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \cdots \qquad 1)$$

где се претпоставља да су сви коефицијенти $A_0, A_1, A_2 \cdots$ а тако исто и a реални. Ставимо да је

$$x - a = t$$

и одредимо размак конвергенције Maclaurin-овог реда

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots$$

добијеног горњом заменом. Нека је тај размак од $t=-\lambda$ до $t=+\lambda$. Очевидно је да док t варира од $-\lambda$ до $+\lambda$, x варира од $(a-\lambda)$ до $(a+\lambda)$. Размак конвергенције првобитног реда 1) биће дакле размак од $(a-\lambda)$ до $(a+\lambda)$, чиме је горњи задатак решен.

Примери:

1. Тражи се размак конвергенције Taylor-овог реда

$$(x-4) + \frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5} + \cdots$$

Ако се стави

$$x-4=t$$

добија се Maclaurin-ов ред

$$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots$$

за чији смо размак конвергенције раније видели да је од -1 до $+1$. Овди је дакле $\lambda=1$, а пошто је $a=4$, то је тражени размак од 3 до 5. Дати ред биће дакле конвергентан за све вредности x-а које се налазе између 3 и 5.

2. Наћи размак конвергенције Taylor-овог реда

$$1 - \frac{2}{2}(x-1) + \frac{4}{3}(x-1)^2 - \frac{8}{4}(x-1)^3 + \cdots$$

Сменом

$$x-1=t$$

прелази дати ред у Maclaurin-ов ред

$$1-\frac{2}{2}t+\frac{4}{3}t^2-\frac{8}{4}t^3+\cdots$$

чији смо размак раније нашли да је од $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$. Како је овде $a=1$, то је тражени размак конвергенције од $1-\frac{1}{2}$ до $1+\frac{1}{2}$ т.ј. од $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$.

II. Одредба круга конвергенције. Нека је дат Taylor-ов ред

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots \qquad 1.)$$

Ако се опет стави

$$x-a=t$$

добија се Maclaurin-ов ред

$$A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots \qquad 2.)$$

Претпоставимо да смо одредили круг конвергенције тога Maclaurin-овог реда и нека је његов полупречник r. Ред 2.) биће такође конвергентан за све вредности t у унутрашњости круга описаног око почетка полупречником r. Али док се t креће у томе кругу, дотле се x креће опет у једном кругу полупречника r али описаног у бројној равни око тачке a као центра, из чега се види ово правило: Круг конвергенције датог Taylor-овог реда 1.) биће круг описан око тачке $x=a$ као око центра са полупречником r, где r означава полупречник круга конвергенције одговарајућег Maclaurin-овог реда 2.)

Примери:

1. Нека је дат Taylor-ов ред

$$1-\frac{x-1}{1}+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots$$

Одговарајући Maclaurin-ов ред је

$$1-\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\cdots$$

и његов полупречник круга конвергенције лако се налази да је $r=1$. Према томе круг конвергенције датог Taylor-овог реда биће круг описан око тачке $x=1$ као центра полупречником $r=1$.

2. Нека је дат Taylor-ов ред

$$(x-4)\pm\frac{(x-4)^3}{3}\pm\frac{(x-4)^5}{5}\pm\cdots$$

одговарајући Maclaurin-ов ред биће

$$t\pm\frac{t^3}{3}\pm\frac{t^5}{5}\pm\cdots$$

за који смо нашли да има као полупречник круга конвергенције $r=1$. Према томе дати Taylor-ов ред биће конвергентан за све тачке x које се налазе у унутрашњости круга описаног око тачке $x=4$ полупречником $r=1$ -то је тражени круг конвергенције.

Развијање функција у Maclaurin-ове редове

Већ из неколико простих примера можемо се уверити да се понека функција може развити у Maclaurin-ов ред т.ј. написати у облику

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

Тако н. пр. деобом се налази да је

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

и т. д.

што показује да се свака од ове четири функције може написати у облику Maclaurin-овог реда. Тако исто применом биномног обрасца добија се

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3 + \cdots$$

дакле и те се функције могу представити у облику Maclaurin-овог реда.

Међутим то није случај само са овим функцијама; још бескрајно много функција могу се развити у Maclaurin-ов ред. Ми ћемо показати како се то развијање врши и у којим је случајевима оно могућно.

Развити функцију $F(x)$ у Maclaurin-ов ред значи написати ју у облику

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \qquad 1.)$$

и израчунати јој коефицијенте $A_0 A_1 A_2 \dots$ Претпоставити да је могућно функцију $F(x)$ развити у такав ред и потражимо узастопне изводе таквога реда по x-у, па ћемо добити низ образаца

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots \\ F'(x) &= A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots \qquad 2.) \\ F''(x) &= 2A_2 + 2\cdot3 A_3 x + 3\cdot4 A_4 x^2 + \cdots \\ F'''(x) &= 2\cdot3 A_3 + 2\cdot3\cdot4 A_4 x + 3\cdot4\cdot5 A_5 x^2 + \cdots \\ F^{IV}(x) &= 2\cdot3\cdot4 A_4 + 2\cdot3\cdot4\cdot5 A_5 x + \cdots \qquad 2.) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Обрасци 2.) треба да важе за све могуће вредности x-а за које би ред 1.) био конвергентан, па дакле и за специјалну вредност $x=0$. Ако се у обрасцима 2.) стави $x=0$, добија се низ образаца

$$\begin{aligned} F(0) &= A_0 \\ F'(0) &= A_1 \\ F''(0) &= 1\cdot2\, A_2 \qquad 3.) \\ F'''(0) &= 1\cdot2\cdot3\, A_3 \\ F^{IV}(0) &= 1\cdot2\cdot3\cdot4\, A_4 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned} A_0 &= F(0) \\ A_1 &= \frac{F'(0)}{1} \\ A_2 &= \frac{F''(0)}{1\cdot2} \qquad 4.) \\ A_3 &= \frac{F'''(0)}{1\cdot2\cdot3} \\ A_4 &= \frac{F^{IV}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \\ &\cdots \end{aligned}$$

и заменом у 1.) добијамо образац

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(0) + \cdots$$

који исказује ово *правило*: кад год је једну функцију могуће развити у Maclaurin-ов ред, општи сачинилац тога реда добија се кад се у $n^{\text{том}}$ изводу функције $F(x)$ смени $x=0$ и резултат подели са $n!$ т.ј.

$$A_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

Да би ово развијање било могућно и имало смисла, потребно је да буду испуњени ови услови:

1. овако израчунати сачиниоци $A_0 A_1 \cdots$ треба да су коначни и одређени, јер ако је један било бескрајан било неодређен, то ће исто бити случај и са целим редом, дакле ред би био бесмислен;
2. тако нађени ред треба да је конвергентан за оне вредности x-а за које се жели употребити. Може се десити да ред буде дивергентан за све вредности x-а и тада га треба одбацити. Ако то није случај, онда постоји за тај ред известан размак конвергенције или известан круг конвергенције. Тада ће ред бити употребљив за све вредности x-а које се налазе у таквом размаку или у таквом кругу. Одређивање таквог размака или круга бива по упутствима која смо већ видели код Maclaurin-ових редова.
3. треба да разлика између дате функције $F(x)$ и нађеног реда

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

буде равна нули за све вредности x-а које леже у размаку или кругу конвергенције тога реда. Да би то било потребно је и довољно да буде испуњен овај услов: ако узмемо $(n+1)$ члан реда, добићемо збир

$$S_n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

потребно је да разлика

$$F(x) - S_n$$

која се обично означује са R_n (*остатак реда*), тежи нули кад n бескрајно расте.

Код ова три побројана услова главни су 1) и 2). За услов 1. увек се лако види да ли је задовољен или не, јер из обрасца 4) лако се увиђа да ће он бити задовољен онда кад су $F(x)$ и сви њени узастопни изводи коначни и одређени и непрекидни за $x=0$. За услов 2 т.ј. за конвергенцију нађеног реда видели смо како се испитује. Услов 3. испитује се да ли је задовољен тражени остатак реда R_n и гледајући да ли тежи нули за $n=\infty$. Овај услов 3. готово је увек испуњен кад су прва два испуњена; само у изузетним случајевима то није.

Примери:

1. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Имаћемо

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad F'(x)=\frac{1}{2(1-x)^{3/2}} \quad F''(x)=\frac{1\cdot3}{2^2(1-x)^{5/2}} \quad F'''(x)=\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3(1-x)^{7/2}} \cdots$$

у опште

$$F^{(n)}(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

Отуда

$$F(0)=1 \quad F'(0)=\frac{1}{2} \quad F''(0)=\frac{1\cdot3}{2^2} \quad F'''(0)=\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3} \cdots$$

у опште

$$F^{(n)}(0)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}$$

па је тражени ред

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{2^3}+\frac{5x^3}{2^4}+\frac{35x^4}{2^7}+\cdots$$

2. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $(a+x)^m$.

Овде је

$$F(x)=(a+x)^m \quad F'(x)=m(a+x)^{m-1} \quad F''(x)=m(m-1)(a+x)^{m-2} \cdots$$

отуда

$$F(0)=a^m \quad F'(0)=ma^{m-1} \quad F''(0)=m(m-1)a^{m-2} \cdots$$

па је тражени ред

$$(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}a^{m-2}x^2+\cdots$$

а то је Newton-ов биномни образац.

Ако је $a=1$ и $m=\frac{1}{2}$, добијамо

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{3}{2^3}\frac{1}{1\cdot2\cdot3}x^3-\cdots$$

Ако је $m=-1$, добијамо

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\cdots\right)$$

3. Развити у Maclaurin-ов ред функцију a^x.

Овде је

$$F(x)=a^x \quad F'(x)=a^x\log a \quad F''(x)=a^x(\log a)^2 \cdots$$

а одатле:

$$F(0)=1 \quad F'(0)=\log a \quad F''(0)=(\log a)^2$$

тако да је тражени ред

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2}{1\cdot 2}(\log a)^2 + \cdots$$

Ако ставимо $a=e$, биће

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

а ако се узме још и $x=1$

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots = 2{,}7182818\ldots$$

4. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\mathrm{Log}(a+x)$.

Имаћемо

$$F(x)=\mathrm{Log}(a+x) \quad F'(x)=\frac{\mathrm{Log}\,e}{a+x} \quad F''(x)=-\frac{\mathrm{Log}\,e}{(a+x)^2} \quad \cdots$$

па зато

$$F(0)=\mathrm{Log}\,a \quad F'(0)=\frac{\mathrm{Log}\,e}{a} \quad F''(0)=\frac{-\mathrm{Log}\,e}{a^2} \quad F'''(0)=\frac{2\,\mathrm{Log}\,e}{a^3}$$

па је тражени ред

$$\mathrm{Log}(a+x)=\mathrm{Log}\,a+\mathrm{Log}\,e\left[\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\cdots\right]$$

што би било у Briggs-овом систему. У природном систему имали би

$$\log(a+x)=\log a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\cdots$$

а ако је осим тога још и $a=1$, биће

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

5. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\sin x$.

Имаћемо

$$F(x)=\sin x \quad F'(x)=\cos x \quad F''(x)=-\sin x \quad F'''(x)=-\cos x \ \ldots$$

Отуда

$$F(0)=0 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=0 \quad F'''(0)=-1 \quad F^{IV}(0)=0 \ \ldots$$

па је зато тражени ред

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots$$

Диференцирајући обадве стране добијамо

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

т.ј. развили смо и функцију $\cos x$ у Maclaurin-ов ред који би добили и да смо тражили n извода те функције.

6. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\mathrm{tg}\,x$.

Имамо

$$F(x)=\mathrm{tg}\,x \quad F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad F''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad F'''(x)=2\,\frac{\cos^2 x-3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

одакле

$$F(0)=0 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=0 \quad F'''(0)=2 \ \ldots$$

па је

$$\mathrm{tg}\,x=x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{2x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{17x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots$$

7. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\arcsin x$.

Имаћемо

$$F(x)=\arcsin x \quad F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad F''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$F'''(x)=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} \qquad F^{IV}(x)=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}} \qquad F^{V}(x)=\frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}} \cdots$$

Отуда

$$F(0)=0 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=0 \quad F'''(0)=1 \quad F^{IV}(0)=0 \quad F^{V}(0)=9 \quad \cdots$$

тако да је тражени ред

$$\operatorname{arc\,sin} x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Пошто је

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sin} x$$

то је

$$\operatorname{arc\,cos} x = \pi - x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}-\cdots$$

8. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\operatorname{arc\,tg} x$.

Имамо

$$F(x)=\operatorname{arc\,tg} x \qquad F'(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad F''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$F'''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \qquad F^{IV}(x)=\frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4} \qquad F^{V}(x)=24\,\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5} \cdots$$

или

$$F(0)=0 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=0 \quad F'''(0)=-2 \quad F^{IV}(0)=0 \quad F^{V}(0)=24 \quad \cdots$$

и према томе

$$\operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Како је

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x$$

то је

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\cdots$$

9. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $e^{\sin x}$

Имамо

$$F(x)=e^{\sin x} \qquad F'(x)=\cos x\, e^{\sin x} \qquad F''(x)=e^{\sin x}[\cos^2 x-\sin x]$$

$$F'''(x)=e^{\sin x}(\cos^3 x-\tfrac{3}{2}\sin 2x-\cos x)$$

$$F^{IV}(x)=e^{\sin x}(\cos^4 x-3\sin x\cos 2x-3\cos 2x-\tfrac{3}{2}\sin 2x\cos x-$$
$$-\cos^2 x) \quad \cdots$$

или одатле

$$F(0)=0 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=1 \quad F'''(0)=0 \quad F^{IV}(0)=-3 \quad \cdots$$

па је тражени ред

$$e^{\sin x}=1+x-\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{3x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\cdots$$

10. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\frac{e^x}{\cos x}$.

Имамо

$$F(x)=\frac{e^x}{\cos x} \qquad F'(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x} \qquad F''(x)=\frac{e^x(2+\sin 2x)}{\cos^3 x}$$

$$F'''(x)=e^x\,\frac{2\cos x\cos 2x+(2+\sin 2x)(\cos x+3\sin x)}{\cos^4 x}$$

и т. д.

или одатле

$$F(0)=1 \quad F'(0)=1 \quad F''(0)=2 \quad F'''(0)=4 \quad \cdots$$

па је

$$\frac{e^x}{\cos x}=1+x+\frac{2x^2}{1\cdot2}+\frac{4x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{12x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

11. Развити у Maclaurin-ов

ред функцију $\sqrt{1+e^x}$.

Овди је

$$F(x)=\sqrt{1+e^x} \quad F'(x)=\frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \quad F''(x)=\frac{1}{4}\frac{2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^{3/2}}$$

$$F'''(x)=\frac{1}{8}\frac{4e^x+2e^{2x}+e^{3x}}{(1+e^x)^{5/2}} \quad F^{IV}(x)=\frac{1}{16}\frac{8e^x-4e^{2x}+4e^{3x}+e^{4x}}{(1+e^x)^{7/2}} \quad \ldots$$

или одатле

$$F(0)=\sqrt{2} \quad F'(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad F''(0)=\frac{3}{4}\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad F'''(x)=\frac{7}{8}\frac{1}{2^2\sqrt{2}}$$

$$F^{IV}(0)=\frac{9}{16}\frac{1}{2^3\sqrt{2}}$$ и т.д.

тако да је тражени ред

$$\sqrt{1+e^x}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}\frac{x}{1}+\frac{3}{4^2}\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{7}{4^3}\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{9}{4^4}\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\right)$$

12. Развити у Maclaurin-ов ред функцију e^{e^x}.

Имаћемо

$$F(x)=e^{e^x} \quad F'(x)=e^{e^x}e^x \quad F''(x)=e^{e^x}e^x(1+e^x)$$

$$F'''(x)=e^{e^x}e^x(1+3e^x+e^{2x})$$

$$F^{IV}(x)=e^{e^x}e^x(1+7e^x+6e^{2x}+e^{3x})$$ и т.д.

или одавде

$$F(0)=e \quad F'(0)=e \quad F''(0)=2e \quad F'''(0)=5e \quad F^{IV}(0)=15e \quad \ldots$$

па је зато

$$e^{e^x}=e\left(1+x+\frac{2x^2}{1\cdot2}+\frac{5x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{15x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\right)$$

13. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $(1+e^x)^2$.

Овде је

$$F(x)=(1+e^x)^2 \quad F'(x)=2e^x(1+e^x) \quad F''(x)=2e^x(1+2e^x)$$

$$F'''(x)=2e^x(1+4e^x) \quad F^{IV}(x)=2e^x(1+8e^x) \quad \ldots$$

а одатле

$$F(0)=4 \quad F'(0)=2+2 \quad F''(0)=2+2^2 \quad F'''(0)=2+2^3$$

$$F^{IV}(0)=2+2^4 \quad \ldots$$

и према томе

$$(1+e^x)^2=4+(2+2)\frac{x}{1}+(2+2^2)\frac{x^2}{1\cdot2}+(2+2^3)\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

14. Развити у Maclaurin-ов ред функцију e^x+e^{-x}.

Овди је

$$F(x)=e^x+e^{-x} \quad F'(x)=e^x-e^{-x} \quad F''(x)=e^x+e^{-x} \quad F'''(x)=e^x-e^{-x} \quad \ldots$$

или одатле

$$F(0)=2 \quad F'(0)=0 \quad F''(0)=2 \quad F'''(0)=0 \quad \ldots$$

и према томе

$$e^x+e^{-x}=2+2\frac{x^2}{1\cdot2}+2\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

Диференцирајући обадве стране ове једначине добијамо нов ред

$$e^x-e^{-x}=2\frac{x}{1}+2\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+2\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

15. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\sin(x+\alpha)$.

Овди је

$$F(x)=\sin(x+\alpha) \quad F'(x)=\cos(x+\alpha) \quad F''(x)=-\sin(x+\alpha)$$

$F'''(x) = -\cos(x+\alpha) \quad F^{IV}(x) = \sin(x+\alpha) \quad \dots$

или одатле

$F(0) = \sin\alpha \quad F'(0) = \cos\alpha \quad F''(0) = -\sin\alpha \quad F'''(0) = -\cos\alpha$

$F^{IV}(0) = \sin\alpha \quad \dots$

и према томе

$$\sin(x+\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha\frac{x}{1} - \sin\alpha\frac{x^2}{1\cdot2} - \cos\alpha\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \dots$$

Диференцирајући обе стране ове једначине добијамо нов ред

$$\cos(x+\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha\frac{x}{1} - \cos\alpha\frac{x^2}{1\cdot2} + \sin\alpha\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \dots$$

16. Развити у Maclaurin-ов ред функцију $\sin^2 x$.

Имамо

$F(x) = \sin^2 x \quad F'(x) = \sin 2x \quad F''(x) = 2\cos 2x \quad F'''(x) = -4\sin 2x$

$F^{IV}(x) = -8\cos 2x \quad F^{V}(x) = 16\sin 2x \quad F^{VI}(x) = 32\cos 2x \quad \dots$

или одатле

$F(0) = 0 \quad F'(0) = 0 \quad F''(0) = 2 \quad F'''(0) = 0 \quad F^{IV}(0) = -2^3 \quad F^{V}(0) = 0$

$F^{VI}(0) = 2^5 \quad \dots$

и према томе

$$\sin^2 x = 2\frac{x^2}{1\cdot2} - 2^3\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + 2^5\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} - \dots$$

Euler-ови и Moivre-ов образац

Видели смо да се функције e^x, $\cos x$ и $\sin x$ могу развити у Maclaurin-ове редове тако да је

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dots \qquad 1.)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \dots \qquad 2.)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \dots \qquad 3.)$$

Сва три реда задовољавају услове који су потребни да би то развијање имало смисла. Пре свега сви су чиниоци коначни и одређени и редови су конвергентни за све могуће стварне и уображене вредности x-а а лако је се уверити да и остатак R_n тежи нули кад n бескрајно расте.

Ако у обрасцу 1.) сменимо x са xi и раздвојимо стварне и уображене делове, имаћемо

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\dots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\dots\right)$$

или, упоређењем са обрасцима 1.) и 2.)

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x \qquad 4.)$$

Ако сменимо овде x са $-x$ добићемо

$$e^{-xi}=\cos x-i\sin x \qquad 5.)$$

Сабирањем и одузимањем последња два обрасца имамо

$$\cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} \qquad 6.)$$

$$\sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} \qquad 7.)$$

Обрасци 4.) 6.) и 7.) зову се Euler-ови обрасци. Они се у математици на сваком кораку употребљавају.

Ако у обрасцима 4.) ставимо $x=2k\pi$, где је k ма какав позитивни или негативни цео број, добија се

$$e^{2k\pi i}=1$$

ако ставимо $x=(2k+1)\pi$, добија се

$$e^{(2k+1)\pi i}=-1$$

ако се стави $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, добија се

$$e^{(2k+1)\frac{\pi i}{2}}=i$$

Из последња три обрасца можемо лако израчунати логаритме. Тако из првог имамо

$$\log 1=2k\pi i$$

и стављајући узастопце

$$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

налази се да је

$$\log 1=0,\pm2\pi i;\pm4\pi i;\dots$$

из чега се види, да $\log 1$ има бескрајно много вредности од којих је само једна стварна и равна нули, а све су остале уображене. Из тога се лако изводи то, да и логаритам сваког позитивног броја има бескрајно много вредности од којих је једна стварна а остале уображене, јер такав један број a увек се може написати у облику

$$a=1\cdot a$$

дакле је

$$\log a=\log 1+\log a$$

$\log a$ са десне стране јесте стварни логаритам који се налази у таблицама, и према томе $\log a$ имаће увек само једну стварну вредност и то ону табличну, и бескрајно много уображених вредности које се добијају кад се тој табличној дода или одузме ма који од бројева: $2\pi i, 4\pi i, \dots$

Слични се резултати могу извести и за логаритме негативних бројева, јер је

$$-a = -1 \cdot a$$

Међутим из другог од горња три обрасца имамо

$$\log -1 = (2k+1)\pi i$$

Одакле и логаритми негативних бројева имају бескрајно много вредности од којих је једна стварна и налази се у таблицама као логаритам одговарајућег позитивног броја, а друге су све уображене и разликују се међу собом непарним бројем од πi.

Тако би исто нашли и логаритме уображених бројева јер је

$$\log ai = \log a + \log i$$

или према последњем од горња три обрасца

$$\log ai = \log a + \frac{2k+1}{2}\pi i$$

На послетку при тражењу логаритама комплексних бројева радиће се на овај начин: Нека се н. пр. тражи $\log(a+bi)$. Ставимо да је

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

па ћемо одатле имати

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

тако да можемо израчунати r и θ. Количина r назива се <u>модулом</u> комплексне количине $(a+bi)$ а θ њеним <u>аргументом</u>. Претпоставимо дакле да смо помоћу горњих образаца израчунали r и θ, па ће бити

$$\log(a+bi) = \log(r\cos\theta + i r\sin\theta) =$$
$$= \log r e^{\theta i} = \log r + \theta i$$

На тај начин изгледало би на први поглед да имамо само један логаритам, али пошто је

$$e^{\theta i} = e^{\theta i}\cdot 1 = e^{\theta i} e^{2k\pi i} = e^{(\theta+2k\pi)i}$$

па ћемо добити

$$\log(a+bi) = \log r + \theta i + 2k\pi i$$

- дакле опет имамо бескрајно много логаритама.

Као последњу примену Euler-ових образаца навешћемо извођење Moivre-овог обрасца који такође игра веома важну улогу у математици. Из обрасца 4) добија се степеновањем

$$(\cos x + i \sin x)^m = e^{mxi}$$

а према Euler-овом обрасцу

$$e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$$

и према томе је

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$$

и то је т. зв. <u>Moivre-ов образац</u> за степеновање уображених количина. Он се употребљује за решавање разноврсних задатака. Ми ћемо овди показати његову једну тригонометријску примену: претпоставимо да се зна

$$\sin x = \lambda$$

па се тражи да се помоћу λ израчуна $\sin mx$. Из Moivre-овог обрасца добија се, ако леву страну развијемо по биномном обрасцу

$$\left[\cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2}x \sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4}x \sin^4 x - \dots\right] + i\left[\binom{m}{1}\cos^{m-1}x \sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}x \sin^3 x + \dots\right] = \cos mx + i \sin mx$$

Ако уједначимо посебице стварне и уображене делове на левој и десној страни, добијају се ова два важна тригонометријска обрасца за синусе и косинусе умножених лукова

$$\cos mx = \cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2}x \sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4}x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin mx = \binom{m}{1}\cos^{m-1}x \sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}x \sin^3 x + \dots$$

Помоћу њих дакле можемо наћи синус и косинус ма ког угла mx, ако се зна синус и косинус угла x.

Развијање функција у Taylor-ове редове

Развити једну функцију $F(x)$ у Taylor-ов ред уређен по степенима од $(x-a)$ значи написати ју у облику

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \dots$$

и израчунати коефицијенте $A_0\, A_1\, A_2 \dots$

Претпоставимо најпре да је могућно такво развијање, па ћемо имати низ образаца

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \dots$$

$$F'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \dots$$

$$F''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-a) + 3\cdot 4A_4(x-a)^2 + \dots$$

$$F'''(x) = 2\cdot 3A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4(x-a) + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Ако је овакво развијање одиста могућно, онда ови обрасци треба да важе за све вредности x-а у размаку конвергенције горњег реда, па дакле и за саму вредност $x=a$. Међутим за ту вредност добија се из горњих образаца

$$F(a) = A_0$$

$$F'(a) = A_1$$

$$F''(a) = 2A_2$$

$$F'''(a) = 2\cdot 3A_3$$

$$\dots\dots$$

или одатле

$$A_0 = F(a)$$

$$A_1 = F'(a)$$

$$A_2 = \frac{F''(a)}{1\cdot 2}$$

$$A_3 = \frac{F'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\dots\dots$$

па је према томе

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1}(x-a) + \frac{F''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \frac{F'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-a)^3 + \dots$$

Из овога се види ово правило: кад год је могуће дату функцију $F(x)$ развити у Taylor-ов ред уређен по степенима од $(x-a)$, коефицијенат A_n члана са $(x-a)^n$ добија се кад се у n-том изводу функције $F(x)$ смени x са a и резултат подели са $n!$

Међутим да би такво развијање било тачно, потребно је да функција задовољава извесне услове сличне онима при развијању у Maclaurin-ове редове. Тако, потребно је:

1.) да би коефицијенти $A_0\, A_1\, A_2 \cdots$ буду коначни и одређени, а из општег обрасца

$$A_n = \frac{F^n(a)}{n!}$$

види се, да ће то бити онда, ако су функција $F(x)$ и сви њени узастопни изводи коначни и одређени за $x=a$.

2.) да добијени ред буде конвергентан у каквом размаку вредности x. Раније је показано како се одређује размак конвергенције Taylor-ових редова; и

3.) да разлика између $F(x)$ и збира од n првих чланова реда тежи нули за $n=\infty$. Ова се разлика назива остатком реда; дакле остатак реда треба да тежи нули за $n=\infty$.

Предње правило можемо изразити и у овим облику

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(x) + \cdots$$

који ћемо узети за решавање задатака.

Примери:

1. Развити у Taylor-ов ред функцију $\log(a+x)$.

Имаћемо

$$F(x) = \log(a+x) \quad F'(x) = \frac{1}{a+x} \quad F''(x) = -\frac{1}{(a+x)^2}$$

$$F'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(a+x)^3} \quad F^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(a+x)^4} \quad \cdots$$

па је зато

$$\log(a+x+h) = \log(a+x) + h\frac{1}{a+x} - \frac{h^2}{1\cdot 2}\frac{1}{(a+x)^2} + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1\cdot 2}{(a+x)^3} - \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(a+x)^4} + \cdots$$

2. Развити у Taylor-ов ред функцију a^{mx}.

Имаћемо

$$F(x) = a^{mx} \quad F'(x) = m\log a\, a^{mx} \quad F''(x) = (m\log a)^2 a^{mx} \cdots$$

па је зато

$$a^{m(x+h)} = a^{mx}\left[1 + \frac{mh}{1}\log a + \frac{m^2h^2}{1\cdot 2}(\log a)^2 + \cdots\right]$$

3. Развити у Taylor-ов ред функцију $\frac{a+x}{a-x}$.

Имаћемо

$$F(x)=\frac{a+x}{a-x}\qquad F'(x)=\frac{2a}{(a-x)^2}\qquad F''(x)=\frac{2\cdot 2a}{(a-x)^3}$$

$$F'''(x)=\frac{2\cdot 2\cdot 3a}{(a-x)^4}\quad \dots$$

па отуда

$$\frac{a+x+h}{a-x-h}=\frac{a+x}{a-x}+2a\left[\frac{h}{(a-x)^2}+\frac{h^2}{(a-x)^3}+\frac{h^3}{(a-x)^4}+\dots\right]$$

4. Развити у Taylor-ов ред функцију $(a+bx)^m$.

$$F(x)=(a+bx)^m$$
$$F'(x)=bm(a+bx)^{m-1}$$
$$F''(x)=b^2m(m-1)(a+bx)^{m-2}$$
$$F'''(x)=b^3m(m-1)(m-2)(a+bx)^{m-3}$$
$$\dots\dots\dots$$

тако да је

$$[a+b(x+h)]^m=(a+bx)^m\left[1+\frac{m}{1}\frac{bh}{a+bx}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{b^2h^2}{(a+bx)^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{b^3h^3}{(a+bx)^3}+\dots\right]$$

Метода неодређених коефицијената

Показали смо како се и код Maclaurin-ових и код Taylor-ових редова коефицијенти могу израчунати помоћу узастопних извода. Али то није једина метода за ово израчунавање. У извесним случајевима за то се употребљује и т. зв. метода неодређених коефицијената која се састоји у овоме: претпоставимо н. пр. да је унапред познат какав однос који постоји између функције $F(x)$ и кога њеног извода и да се тражи да се та функција развије у Maclaurin-ов ред. Ако се стави да је

$$F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots$$

из тог обрасца можемо наћи и онај извод који фигурише у поменутом односу. Заменом тога извода у овом односу добићемо извесну једначину у којој ће фигурисати разни степени x-а и непознати коефициенти $A_0\, A_1\, A_2 \dots$ Сведимо такву једначину на нулу и уредимо леву страну једначине по степенима x-а тако да добијамо

$$M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + M_3 x^3 + \dots = 0$$

Да би она могла опстати потребно је да сви сачиниоци $M_0\, M_1\, M_2 \dots$ посебице буду равни нули, па пошто ти сачиниоци зависе од $A_0\, A_1\, A_2 \dots$ то се из тако добијених једначина

$$M_0 = 0$$
$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$\dots$$

могу израчунати коефицијенти $A_0\, A_1\, A_2$

Ова метода није свагда сигурна, али у извесним случајевима доводи брзо до резултата.

Н. пр. развити у Maclaurin-ов ред функцију e^x.

За ту се функцију зна да су јој изводи равни њој самој; дакле постоји релација

$$F(x) - F'(x) = 0$$

Ако се стави

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

биће

$$F'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots$$

Заменом у горњој једначини и пошто смо ју уредили по степенима x-а добијамо

$$(A_0 - A_1) + (A_1 - 2A_2)x + (A_2 - 3A_3)x^2 + \dots = 0$$

према томе

$$A_0 - A_1 = 0$$
$$A_1 - 2A_2 = 0$$
$$A_2 - 3A_3 = 0$$
$$A_3 - 4A_4 = 0$$
$$\dots$$

и одатле

$$A_1 = A_0$$

$$A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{A_0}{1\cdot 2}$$

$$A_3 = \frac{A_2}{3} = \frac{A_0}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$A_4 = \frac{A_3}{4} = \frac{A_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\cdots\cdots$$

Према томе сви се сачиниоци могу израчунати помоћу првог сачиниоца A_0. Међутим из обрасца

$$e^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

ставивши $x=0$ добија се

$$A_0 = 1$$

па се према томе за тражене сачиниоце добијају вредности

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{1}{1}$$

$$A_2 = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$A_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

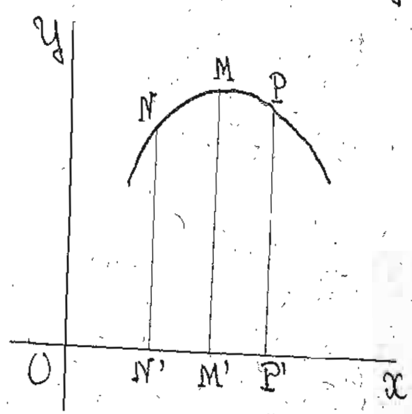
$$\cdots$$

које смо раније на други начин нашли.

Иста метода и на исти начин може се применити при израчунавању сачиниоца Taylor-ових редова, само што би место разних степена x-а имали разне степене од $(x-a)$.

За једну функцију $F(x)$ каже се да за једну вредност $x=a$ достиже свој <u>maximum</u>, ако је вредност коју она има за $x=a$ већа од оних вредности које она има за вредности x-а у близини тачке $x=a$. Тако исто за функцију се каже да достиже свој <u>minimum</u> за $x=a$ ако је вредност коју она добија за $x=a$ мања од оних које она добија за ближње вредности x-а.

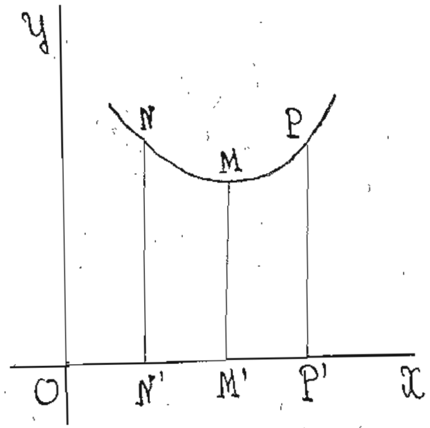
Са геометријске стране под maximum-ом функције разумели би такву њену ординату, да су све ординате које се налазе у близини ове прве би-ло с њене леве било



с десне стране мање од ње саме. Такав ће један maximum представљати ордината MM' јер је

$$NN' < MM'$$
$$PP' < MM'$$

Обрнуто ће бити код minimum-а, где су суседне ординате веће од саме минималне ординате, као што је на слици пример са ординатом MM' јер је



$$NN' > MM'$$
$$PP' > MM'$$

Питање о траженју maximum-а и minimum-а функција састоји се из ова два задатка:
1.) Кад је дата функција $F(x)$, нађи оне вредности x-а за које она постаје maximum или minimum; и
2.) Нађи саме те максималне и минималне вредности функције.

Прво ћемо решити први задатак. Пре свега очевидно је из онога што смо раније имали о изводима да функција може бити maximum или minimum само за оне вредности x-а за које је њен први извод раван нули. То је у осталом очевидно и строго тачно јер функција, достигнув maximum прелази из растења у опадање, а достигнув свој minimum прелази из опадања у растење; први извод при томе мења знак и према томе пролази кроз нулу. Са геометријске стране ствар је очевидна по томе што у тачкама које одговарају maximum-у и minimum-у једне криве линије дирка је паралелна x-ној осовини и према томе њен коефицијенат правца т.ј. први извод функције постаје раван нули.

Претпоставимо дакле да смо нашли оне вредности x-а за које је задовољена једначина

$$F'(x)=0$$

и нека је

$$x=a$$

једна таква вредност. Питање је хоће ли за $x=a$ функција бити максимум или минимум или ни једно ни друго. Уочимо две оближње вредности x-а: једну

$$x=a-\varepsilon$$

која је дакле мања од $x=a$ и другу

$$x=a+\varepsilon$$

дакле већу од $x=a$. Овим трима вредностима: $a-\varepsilon$, a, $a+\varepsilon$ одговарају вредности функције $F(a-\varepsilon)$, $F(a)$, $F(a+\varepsilon)$. Ако је функција одиста максимум за $x=a$, онда $F(a)$ мора бити веће од оближњих вредности $F(a-\varepsilon)$ и $F(a+\varepsilon)$ т.ј. обе разлике

$$\begin{aligned} &F(a-\varepsilon)-F(a)\\ &F(a+\varepsilon)-F(a) \end{aligned} \qquad 1.)$$

морају бити негативне. Да би функција била минимум за $x=a$, треба да је вредност $F(a)$ мања од обеју оближњих $F(a+\varepsilon)$ и $F(a-\varepsilon)$, па дакле обе разлике 1.) морају бити позитивне. На послетку ако функција није ни максимум ни минимум за $x=a$, онда ће вредност $F(a)$ бити мања од једне оближње вредности а већа од друге т.ј. од разлика 1.) једна је позитивна а друга негативна. Према томе задатак који имамо у виду решава се испитивањем знакова разлика 1.). То испитивање може се извршити на овај начин: према Taylor-овом обрасцу и претпостављајући да $F(x)$ задовољава оне услове које смо навели код Taylor-ових редова имаћемо да је

$$\begin{aligned} F(a-\varepsilon) &= F(a)-\frac{\varepsilon}{1}F'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}F''(a)-\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(a)+\dots\\ F(a+\varepsilon) &= F(a)+\frac{\varepsilon}{1}F'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}F''(a)+\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(a)+\dots \end{aligned} \qquad 2.)$$

а одатле се за разлике 1.) добијају ове вредности

$$\begin{aligned} F(a-\varepsilon)-F(a) &= -\frac{\varepsilon}{1}F'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}F''(a)-\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(a)+\dots\\ F(a+\varepsilon)-F(a) &= \frac{\varepsilon}{1}F'(a)+\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}F''(a)+\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(a)+\dots \end{aligned} \qquad 3.)$$

Пошто је претпостављено да за $x=a$ први је извод раван нули, то први чланови на десној страни образаца 3.) отпадају, тако да се ти обрасци своде на

$$F(a-\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} F''(a) - \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3} F'''(a) + \cdots$$

$$F(a+\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} F''(a) + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3} F'''(a) + \cdots$$

Посматрајмо сад ова три случаја:

1° Нека је

$$F''(a) > 0$$

Ако узмемо ε довољно мало т.ј. посматрамо оближње вредности у непосредној близини од $x=a$, онда ће чланови који садрже $\varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \cdots$ бити по својој апсолутној вредности мањи од члана са ε^2 тако да ће знак целе десне стране образаца 3.) бити онај исти који имају чланови са ε^2, а пошто је претпостављено да је $F''(a) > 0$, то ће тај знак бити позитиван и према томе обе разлике 3.) биће позитивне. Функција је дакле minimum за $x=a$.

2° Претпоставимо да је

$$F''(a) < 0$$

тада ће оба члана са ε^2 бити негативна, па дакле ће обе разлике 3.) бити негативне. Функција је дакле maximum за $x=a$.

3° Нека је

$$F''(a) = 0$$

У обрасцима 3.) отпадају тада и чланови са ε^2 тако да се ти обрасци своде на

$$F(a-\varepsilon) - F(a) = -\frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3} F'''(a) + \cdots$$

$$F(a+\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3} F'''(a) + \cdots \qquad 4.)$$

Пошто ће за ε довољно мало цела десна страна образаца 4.) имати знакове чланова са ε^3, то се из ових образаца види, да ако је $F'''(a) \gtrless 0$, једна ће од разлика 1.) бити позитивна а друга негативна, што показује да тада функција није ни maximum ни minimum. Да би дакле она могла то бити, потребно је да буде

$$F'''(a) = 0$$

и у том се случају обрасци 4.) своде на

$$F(a-\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} F^{IV}(a) - \frac{\varepsilon^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} F^{V}(a) + \cdots$$

$$F(a+\varepsilon) - F(a) = \frac{\varepsilon^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} F^{IV}(a) + \frac{\varepsilon^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} F^{V}(a) + \cdots$$

Према томе ако је $F^{IV}(a)<0$, обе ће те разлике бити негативне, да ће дакле функција бити maximum; ако је $F^{IV}(a)>0$, обе ће разлике бити позитивне, па ће функција бити minimum; на послетку ако је $F^{IV}(a)=0$, лако се уверавамо као и мало час да ће једна разлика бити позитивна а друга негативна и т. д.

Из целе ове дискусије изводи се овај резултат који се непосредно примењује у задацима maximum-а и minimum-а: Да би нашли оне вредности x-а за које функција $F(x)$ може бити maximum или minimum, треба образовати њен први извод $F'(x)$, ставити га да је раван нули и решити тако добијену једначину по x-у. Овако добијене вредности x-а јесу оне за које функција може а не мора бити maximum или minimum. Да би решили

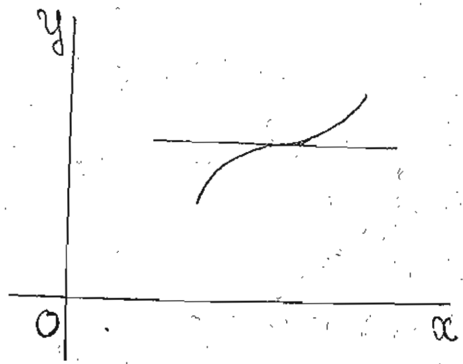
5.) хоће ли она то бити или не, треба са сваком тако добијеном вредношћу x-а н. пр. $x=a$ радити овако: образовати други извод $F''(x)$ и сменити у њему $x=a$. Ако је тада $F''(a)>0$, функција је minimum; ако је $F''(a)<0$, функција је maximum; ако је $F''(a)=0$, онда се даље испитивање врши помоћу трећег извода $F'''(a)$. Ако је тај израз различан од нуле, функција није ни maximum ни minimum; ако је пак он раван нули, треба образовати $F^{IV}(a)$ и испитивати његов знак. Ако је тај израз већи од нуле, функција је minimum; ако је мањи од нуле, функција је maximum; а ако је $F^{IV}(a)=0$, онда опет ваља образовати идући извод и вршити испитивање као и до сад.

Опште пак правило које обухвата све ово може се изказати на овај начин: ако образујемо низ извода

$$F'(x) \quad F''(x) \quad F'''(x) \quad \dots$$

функција ће бити maximum или minimum ако је први по реду извод који није раван нули за $x=a$, реда парног и онда знак тога извода решава да ли је maximum или minimum: ако је он позитиван, функција је minimum; ако је он негативан, функција је maximum. На против функција неће бити ни maximum ни minimum, ако је први по реду извод који није раван нули за $x=a$ непарног реда.

Видећемо у геометријским применама диференцијалног рачуна да тачке за које је први извод раван нули а које међутим не одговарају ни maximum-у ни minimum-у одговарају т. зв. <u>превојним тачкама</u>. То су тачке у којима крива прелази од једне на другу страну своје дирке, што у обичним тачкама није случај, јер у њима крива линија остаје с једне стране своје дирке.



Задатак: знајући вредност $x=a$ за коју функција $F(x)$ достиже свој maximum или minimum, наћи саму ту максималну или минималну њену вредност, решава се врло просто, јер тражена вредност није ништа друго до $F(a)$.

Примери:

1. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30.$$

Имаћемо

$$F'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0$$

или

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

одакле

$$x = 4 \pm 1$$

или

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 3$$

Како је

$$F''(x) = 6x - 24$$

то је

$$F''(5) = +6$$

-дакле за $x=5$ имамо један minimum и то

$$F(5) = 380$$

и

$$F''(3) = -6$$

-дакле за $x=3$ имамо један maximum и то

$$F(3) = 84$$

2. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000$$

Имамо

$$F'(x) = 5x^4 - 225x^2 + 1620 = 0$$

или

$$x^4 - 45x^2 + 324 = 0$$

Ова једначина има четри стварна корена и то:

$$x = \pm 6, \pm 3$$

Како је

$$F''(x) = 20x^3 - 450x$$

то је:

$F''(6) = +1620$ т.ј. за $x=6$ $F(x)$ је minimum
$F''(-6) = -1620$ " " " $x=-6$ " " maximum
$F''(3) = -810$ " " " $x=3$ " " "
$F''(-3) = 810$ " " " $x=-3$ " " minimum.

3. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

Овде је

$$F'(x) = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2 = 0$$

или

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = 0$$

Ова једначина има као корене

$$0, \ 1 \ \text{и} \ \pm i$$

Како је

$$F''(x) = 300x^4 - 240x^3 + 180x^2 - 120x$$

што је

$$F''(1) = +12$$

т.ј. за $x=1$ функција је minimum;

$$F''(0) = 0$$

и зато морамо образовати трећи извод; он је

$$F'''(x) = 1200x^3 - 720x^2 + 360x - 120$$

и како је

$$F'''(0) \neq 0$$

то за $x=0$ функција није ни maximum ни minimum

4. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

Први извод је

$$F'(x) = \frac{x-3}{(1+x)^3}$$

и он стављен раван нули даје

$$x-3=0$$

т.ј. има као корен

$$x=3$$

Како је

$$F''(x) = \frac{10-2x}{(1+x)^4}$$

што је

$$F''(3) = +\frac{1}{4^3}$$

т.ј. за $x=3$ функција је minimum.

5. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{a+x}{a^2+x^2}$$

Први извод је

$$F'(x) = \frac{a^2-2ax-x^2}{(a^2+x^2)^2}$$

и он стављен да је раван нули даје

$$a^2 - 2ax - x^2 = 0$$

Ова једначина има два корена

$$+a(\sqrt{2}-1) \quad \text{и} \quad -a(\sqrt{2}+1)$$

Да би дознали да ли који од ова два корена одговара maximum-у или minimum-у довољно је диференцирати само бројитељ извода $F'(x)$ јер именитељ, пошто је увек позитиван, не утиче на знак другог извода. Извод тога бројитеља је

$$-2a - 2x$$

и смењујући у њему вредности горњих корена видимо, да је за $x=a(\sqrt{2}-1)$ функција maximum, а за $x=-a(\sqrt{2}+1)$ minimum.

6. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2 + x^2}$$

Први извод је

$$F'(x) = \frac{[(x^2-1)^2+x^2][2x^2+x^2+1] - x(x^2+1)[2(x^2-1)2x + 2x]}{[(x^2-1)^2+x^2]^2}$$

па

$$F'(x) = 0$$

даје

$$[(x^2-1)^2+x^2][2x^2+x^2+1] - x(x^2+1)[2(x^2-1)2x+2x] = 0$$

или

$$x^6+4x^4-4x^2-1=0$$

Ова једначина има два стварна корена

$$x = \pm 1$$

Да би видели да ли је функција за који од та два корена maximum или minimum, узећемо као и у примеру 5. само извод бројитеља извода $F'(x)$. Тај извод је

$$-6x^5-16x^3+8x$$

и смењујући у њему вредности горњих корена видимо да је за $x=1$ функција maximum, а за $x=-1$ minimum.

7. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$$

Имаћемо

$$F'(x) = \frac{(x^4-x^2+1)(3x^2-1) - (x^3-x)(4x^3-2x)}{(x^4-x^2+1)^2}$$

па $F'(x)=0$ даје

$$(x^4-x^2+1)(3x^2-1) - (x^3-x)(4x^3-2x) = 0$$

или

$$x^6-2x^4-2x^2+1=0$$

Ова једначина има четири стварна корена

$$x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad и \quad \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Као и у пр. 5. узећемо извод само бројитеља извода $F'(x)$; он је

$$5x^5-8x^3-4x$$

и сменом вредности горњих корена у њему долазимо до резултата: да ће за $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ функција бити maximum, а за $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ minimum.

8. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}$$

Први извод је

$$F'(x) = \frac{(a-x)(b-x)(a+x+b+x) - (a+x)(b+x)[-(a-x)-(b-x)]}{[(a-x)(b-x)]^2}$$

па $F'(x)=0$ даје

$$x^2 - ab = 0$$

Корени ове једначине су

$$x = \pm\sqrt{ab}$$

Као и у пр. 5. узимамо само извод бројитеља извода $F'(x)$ и он је

$$2x$$

Сменом вредности горњих корена видимо да је за $x=\sqrt{ab}$ функција minimum, а за $x=-\sqrt{ab}$ maximum.

9. Нађи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

Први извод је

$$F'(x) = \frac{(x^2+3x+2)(2x-3) - (x^2-3x+2)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

и стављен раван нули, он даје

$$(x^2+3x+2)(2x-3) - (x^2-3x+2)(2x+3) = 0$$

или

$$x^2 - 2 = 0$$

одакле је

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Извод бројитеља извода $F'(x)$ даје

$$2x.$$

и заменом у њега вредности горња два корена видимо да је функција за $x=\sqrt{2}$ minimum, а за $x=-\sqrt{2}$ maximum.

10. Нађи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = (x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{3}}-1)$$

Заменом

$$x^{\frac{1}{6}} = z$$

функција $F(x)$ прелази у

$$\varphi(z) = (z^3-1)(z^2-1) = z^5 - z^2 - z^3 + 1$$

Њен први извод је

$$\varphi'(z) = 5z^4 - 3z^2 - 2z$$

и стављен раван нули даје

$$5z^4 - 3z^2 - 2z = 0$$

Ова једначина има два стварна корена: 0 и 1. Други извод је

$$\varphi''(z) = 20z^3 - 6z - 2$$

и сменом горњих корена добијамо

$\varphi''(0) = -2$ т.ј. функција је за $z=0$ maximum

$\varphi''(1) = 14$ " " " " " " $z=1$ minimum.

11. Нађи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = x\sqrt{ax-x^2}$$

Њен први извод је

$$F'(x) = \frac{3ax-4x^2}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

и $F'(x)=0$ даје

$$3ax - 4x^2 = 0$$

одакле је

$$x = 0 \text{ или } \frac{3a}{4}$$

Други извод је

$$F''(x) = \frac{3a^2x-12ax^2+8x^3}{4(ax-x^2)^{3/2}}$$

Како је:

$F''\left(\frac{3a}{4}\right) = -\frac{3a}{4}$ то је $F(x)$ maximum за $x = \frac{3a}{4}$

$$F''(0) = \frac{0}{0} = \frac{3a^2-24ax+24x^2}{4\cdot\frac{3}{2}(ax-x^2)^{1/2}(a-2x)} \underset{x=0}{=} \infty$$

12. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{x}{\log x}$$

Овде је

$$F'(x) = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

па $F'(x)=0$ даје

$$\log x - 1 = 0$$

одакле је

$$x = e$$

Други извод је

$$F''(x) = \frac{2-\log x}{x(\log x)^3}$$

па отуда

$$F''(e) = +\frac{1}{e}$$

т.ј. наша функција је minimum за $x=e$, а сама та минимална вредност је

$$F(e) = e$$

13. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}$$

Овде је

$$F'(x) = \frac{\sin^2 x\, 2\sin mx \cos mx\, m - \sin^2 mx\, 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}$$

и $F'(x)=0$ даје једначину

$$\sin^2 x\, 2\sin mx \cos mx\, m - \sin^2 mx\, 2\sin x \cos x = 0$$

или

$$\sin x \sin mx\,(2\sin x \cos mx\, m - 2\sin mx \cos x) = 0$$

Овде се могу десити три случаја:

1° или је $\sin x = 0$; онда је $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$

2° " " $\sin mx = 0$; " " " $x = 0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots$

3° " " $2m \sin x \cos mx - 2\sin mx \cos x = 0$

или

$$m\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,mx$$

Да би нашли које вредности x-а одговарају maximum-у или minimum-у, образоваћемо извод само бројитеља извода $F'(x)$ и он је

$$P = 2m\left[m\sin^2 x\sin^2 mx + m\sin^2 x\cos^2 mx + 2\sin mx\cos mx\sin x\cos x\right] - 2\left[-\sin^2 mx\sin^2 x + \sin^2 mx\cos^2 x + 2m\sin x\cos x\sin mx\cos mx\right] =$$

$$= \sin^2 x\sin^2 mx(2-2m^2) + 2m^2\sin^2 x\cos^2 mx - 2\sin^2 mx\cos^2 x$$

и сменом у њему горњих вредности x-а добијамо:

1° $P_{\sin x=0} = -$ т.ј. за вредности x-а дате једначином $\sin x=0$, функција је maximum и равна

$$F = m^2$$

2° $P_{\sin mx=0} = +$ т.ј. за вредности x-а дате једначином $\sin mx=0$ функција је minimum

3° $P_{m\,tg\,x = tg\,mx} = -$ т.ј. за вредности x-а дате једначином $m\,tg\,x = tg\,mx$ функција је maximum.

14. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \frac{e^x}{\sin(x-a)}$$

Овде је

$$F'(x) = \frac{e^x\sin(x-a) - e^x\cos(x-a)}{\sin^2(x-a)}$$

и $F'(x)=0$ даје

$$e^x\left[\sin(x-a) - \cos(x-a)\right] = 0$$

и према томе је

1° или $e^x=0$ т.ј. $x=-\infty$

2° " " $\sin(x-a)-\cos(x-a)=0$ т.ј.

$$tg(x-a) = 1 \quad \text{а одатле}$$

$$x = a+\frac{\pi}{4},\ a+\frac{5\pi}{4}$$

Извод бројитеља извода $F'(x)$ је

$$P = 2e^x\sin(x-a)$$

и сменом горњих вредности x-а добијамо:

$P_{x=a+\frac{5\pi}{4}} = -$ т.ј. за $x=a+\frac{5\pi}{4}$ функција је maximum и равна $-\sqrt{2}\,e^{a+\frac{5\pi}{4}}$

$P_{x=a+\frac{\pi}{4}} = +$ т.ј. за $x=a+\frac{\pi}{4}$ функција је minimum а њена вредност је $\sqrt{2}\,e^{a+\frac{\pi}{4}}$

15. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x) = \sin x\cos(a-x)$$

Први извод је

$$F'(x) = \cos(2x-a)$$

отуда једначина

$$\cos(2x-a)=0$$

одакле

$$2x-a=\pm\frac{\pi}{2}$$

или

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{\pi}{4}$$

Други извод је

$$F''(x)=-2\sin(2x-a)$$

и сменом у њему горњих вредности за x видимо да ће функција $F(x)$ бити за $x=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}$ maximum, а за $x=\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}$ minimum. Сам пак тај maximum је

$$F\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(a-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\sin\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{4}\left[\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right]^2=\frac{1}{2}(1+\sin a)$$

minimum је пак

$$F\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(a-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-\frac{2}{4}\left(\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}(1-\sin a)$$

16. Наћи maximum-е и minimum-е функције

$$F(x)=a^{x+1}-a^x-x$$

Први извод је

$$F'(x)=a^{x+1}\log a-a^x\log a-1$$

и стављен раван нули даје једначину

$$a^{x+1}\log a-a^x\log a=1$$

или

$$a^x a\log-a^x\log a=1$$

одакле је

$$a^x=\frac{1}{(a-1)\log a}$$

а само x добијамо логаритмисањем, јер је

$$x\log a=\underset{0}{\log 1}-\log[(a-1)\log a]$$

или

$$x=-\frac{\log[(a-1)\log a]}{\log a}$$

Други извод је

$$F''(x)=a^{x+1}\log^2 a-a^x\log^2 a=$$

$$=(\log a)^2\left(a^{x+1}-a^x\right)$$

и заменом горње вредности за x добијамо

$$F''(x)=(\log a)^2\left[a^{1-\frac{\log[(a-1)\log a]}{\log a}}-a^{-\frac{\log[(a-1)\log a]}{\log a}}\right]$$

одакле видимо да ако је $a>1$, овај ће израз имати знак $+$, а ако је $a<1$ знак $-$, што значи да је функција $F(x)$ maximum ако је $a>1$, а minimum ако је $a<1$, за горњу вредност x-а.

17. Наћи број x чији ће $x^{\text{ти}}$ корен бити maximum.

Имамо да тражимо maximum функције

$$F(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

Њен први извод је

$$F'(x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}(1-\log x)$$

и он стављен да је раван нули даје једначину

$$1-\log x = 0$$

одакле

$$x = e$$

Други извод је

$$F''(x) = -x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^3} - x^{\frac{1}{x}}\frac{2}{x^3}(1-\log x) + x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}(1-\log x)^2$$

и он, као што се види, има знак $-$ за $x=e$ т.ј. функција је заиста maximum за $x=e$. Сам пак maximum је

$$F(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

18. Поделити број n на два дела тако да је збир $p^{\text{тих}}$ степена та два дела minimum.

Имамо да тражимо minimum функције

$$F(x) = x^p + (n-x)^p$$

Први извод је

$$F'(x) = px^{p-1} - p(n-x)^{p-1}$$

и стављен да је раван нули даје једначину

$$x^{p-1} - (n-x)^{p-1} = 0$$

или

$$x = n-x$$

одакле је

$$x = \frac{n}{2}$$

Други извод је

$$F''(x) = p(p-1)x^{p-2} + p(p-1)(n-x)^{p-2}$$

па отуда

$$F''\left(\frac{n}{2}\right) = 2p(p-1)\left(\frac{n}{2}\right)^{p-2}$$

што значи да је дата функција заиста minimum за $x = \frac{n}{2}$.

19. Одредити целу функцију другог степена која за $x=a$ има

један maximum, односно minimum.

Нека је тражена функција

$$F(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Њен први извод је

$$F'(x) = 2\alpha x + \beta$$

и он изједначен са нулом даје

$$2\alpha x + \beta = 0$$

одакле је

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = a$$

или

$$\beta = -2\alpha a$$

Други извод је

$$F''(x) = 2\alpha$$

па ће наша функција бити maximum односно minimum према томе да ли је α негативно или позитивно и биће

$$F(x) = \alpha x^2 - 2\alpha a x + \gamma.$$

20. Од 64 палидрвца начинити правоугаоник највеће површине.

Ако је једна страна тога правоугаоника x, онда је друга $(32-x)$ тако да имамо да тражимо maximum функције

$$F(x) = x(32-x)$$

јер је то површина траженог правоугаоника. Први извод је

$$F'(x) = -x + 32 - x$$

и он стављен раван нули даје

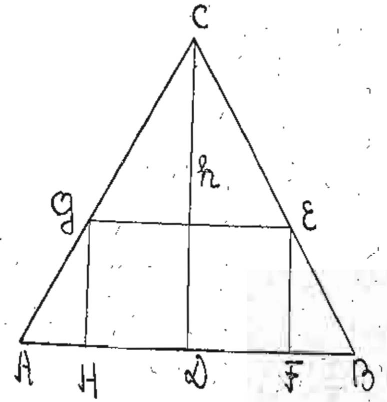
$$x = 16$$

Други извод је

$$F''(x) = -2$$

што значи да је та површина одиста највећа ако је једна страна правоугаоникова начињена од 16 палидрваца – т.ј. правоугаоник се своди на квадрат.

21. У равнокраки троугао $(2a, h)$ уписати један правоугаоник највеће површине.



Овде је

$$AB = 2a$$

$$CD = h$$

па ако означимо

$$DF = x$$

$$EF = y$$

Онда из сличности троуглова BCD и BEF имамо

$$(a-x):y=a:h$$

одакле

$$y=\frac{h(a-x)}{a}$$

па ће површина траженог правоугаоника бити, а то ће уједно бити и функција чији maximum тражимо,

$$F(x)=2xy=\frac{2h}{a}x(a-x)$$

Њен први извод је

$$F'(x)=\frac{2h}{a}(a-x-x)$$

и он уједначен са нулом даје једначину

$$a-2x=0$$

одакле је

$$x=\frac{a}{2}$$

Отуда је

$$y=\frac{h(a-\frac{a}{2})}{a}=\frac{h}{2}$$

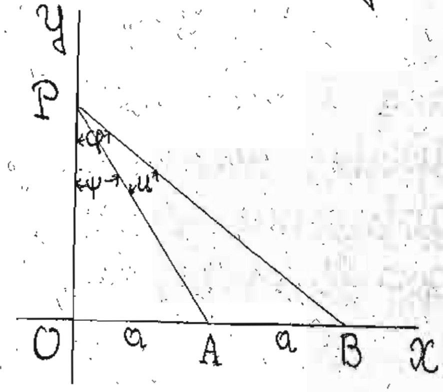
Како је

$$F''(x)=-2\frac{2h}{a}$$

то је дакле заиста површина уписаног правоугаоника највећа ако је
$x=\frac{a}{2}$ $y=\frac{h}{2}$.

22. На x-ној осовини леже у растојању a и $2a$ од почетка две тачке A и B. Наћи на y-оној осовини тачку P за коју ће угао $APB=u$ бити највећи.

Ако означимо



$$\sphericalangle OPA=\psi$$
$$\sphericalangle OPB=\varphi$$

то, како је

$$tg\,\varphi=\frac{2a}{y}$$
$$tg\,\psi=\frac{a}{y}$$
$$u=\varphi-\psi$$

то је

$$tg\,u=\frac{tg\varphi-tg\psi}{1+tg\varphi\, tg\psi}=\frac{ay}{2a^2+y^2}$$

Први извод је

$$F'(y)=\frac{(2a^2+y^2)a-ay\cdot 2y}{(2a^2+y^2)^2}$$

и он уједначен са нулом даје

$$(2a^2+y^2)a-2ay^2=0$$

или

$$2a^2-y^2=0$$

одакле

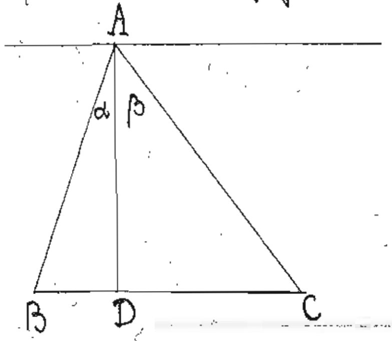
$$y=\pm a\sqrt{2}$$

Други извод или још боље извод бројитења извода $F'(y)$ је

$$P = -2ay$$

па је дакле функција $F(y)$ заиста maximum за $y = \pm a\sqrt{2}$.

23. Дата је права BC и једна њој паралелна права. На паралелној правој нађи такву тачку A, да праве повучене из тачке A до тачака B и C граде међу собом максимални угао.



Ако обележимо

$$BC = b$$
$$AD = h$$
$$BD = x$$
$$tg\sphericalangle BAC = y$$

онда је

$$y = tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{\frac{x}{h} - \frac{b-x}{h}}{1 - \frac{x}{h}\frac{b-x}{h}} = \frac{bh}{h^2 - bx + x^2}$$

Први извод ове функције је

$$y' = -\frac{bh(-b+2x)}{(h^2 - bx + x^2)^2}$$

и он уједначен са нулом даје

$$-b + 2x = 0$$

одакле је

$$x = \frac{b}{2}$$

Ако узмемо извод бројитеља извода у добијамо

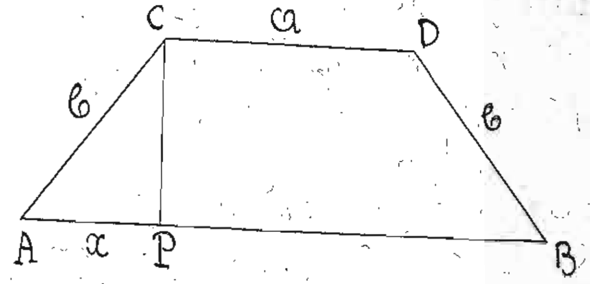
$$-2bh$$

што значи да је заиста угао BAC највећи кад је $x = \frac{b}{2}$.

24. У једном равнокраком трапезу дате су једнаке стране и једна од база. Одредити другу базу тако да површина трапеза буде maximum.

Како је

$$CP = \sqrt{b^2 - x^2}$$



то је површина трапеза, па дакле и функција чији maximum тражимо

$$F(x) = 2\frac{x\sqrt{b^2-x^2}}{2} + a\sqrt{b^2-x^2} = (a+x)\sqrt{b^2-x^2}$$

Први извод је

$$F'(x) = (a+x)\cdot\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{b^2-x^2}} + \sqrt{b^2-x^2}$$

и он уједначен са нулом даје

$$2x^2 + ax - b^2 = 0$$

одакле је

$$x = -\frac{a}{4} \pm \frac{\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$$

Други извод је

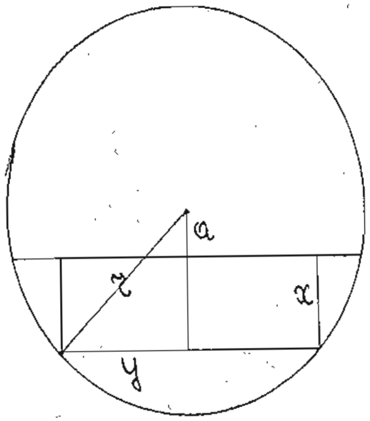
$$F''(x) = \frac{2x^3-2ax^2-3b^2x-ab^2}{(b^2-x^2)^{3/2}}$$

и сменом горњих вредности за x видимо да ће за

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$$

површина бити највећа.

25. Уписати највећи могући правоугаоник у једном одсечку датог круга.



Дато је дакле a и r. Из слике је

$$y = \sqrt{r^2-(a+x)^2}$$

па је зато површина уписаног правоугаоника

$$F = 2xy = 2x\sqrt{r^2-(a+x)^2}$$

Први извод ове функције је

$$F'(x) = \frac{-4x^2-6ax+2r^2-2a^2}{\sqrt{r^2-(a+x)^2}}$$

па $F'(x)=0$ даје

$$4x^2+6ax-2(r^2-a^2)=0$$

одакле је

$$x = \frac{\sqrt{9a^2+8(r^2-a^2)}-3a}{4}$$

и то је вредност x-а за коју је тражена површина највећа.

Ако је $a=0$, вредност x-а која одговара максимум-у јесте

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

а површина правоугаоника има за вредност

$$F = r^2$$

26. Поделити број a на два дела тако да је производ $m^{\text{те}}$ степена једног дела и $n^{\text{те}}$ степена другог дела максимум.

Ако је један део x, други је $(a-x)$ тако да имамо да тражимо максимум функције

$$F(x) = x^m(a-x)^n$$

Одавде је

$$F'(x) = -x^m n(a-x)^{n-1} + (a-x)^n m x^{m-1}$$

и $F'(x)=0$ даје једначину

$$m(a-x)-nx=0$$

одакле је

$$x=\frac{ma}{m+n}$$

Други извод је

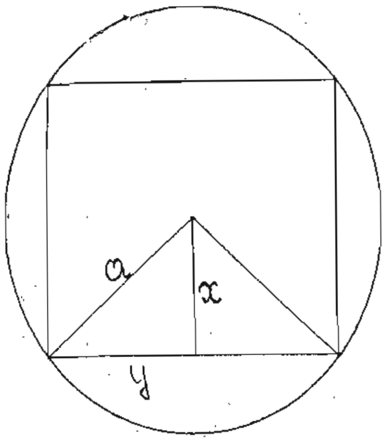
$$F''(x)=(m^2-m)x^{m-2}(a-x)^n-2nm\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}+(n^2-n)x^m(a-x)^{n-2}$$

тако да је

$$F''\left(\frac{ma}{m+n}\right)=-\frac{n^n m^{m-1}a^{m+n-2}+m^m n^{n-1}a^{m+n-1}}{(m+n)^{m+n-2}}$$

тј. горњи је производ одиста maximum за горњу вредност x-a.

27. У кругу радиуса a уписати правоугаоник највеће површине.



Из слике је

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

тако да је површина уписаног правоугаоника

$$F(x)=8\,\frac{xy}{2}=4x\sqrt{a^2-x^2}$$

Одатле је

$$F'(x)=\frac{4(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

па $F'(x)=0$ даје једначину

$$a^2-2x^2=0$$

одакле је

$$x=\frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Други извод је

$$F''(x)=4\,\frac{2x^3-3a^2x}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

па отуда

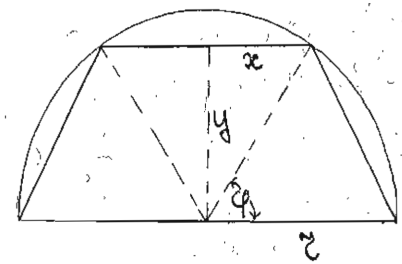
$$F''\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)=-a^3\sqrt{2}\Big/\left(\frac{2a^2}{4}\right)^{3/2}$$

што значи да је па површина одиста maximum за предњу вредност x-a.

28. У полукругу радиуса r уписати трапез највеће површине.

Из слике је

$$F=2\,\frac{ry}{2}+2\,\frac{xy}{2}\cancel{+\frac{ry}{2}}$$



Како је

$$y=r\sin\varphi$$
$$x=r\cos\varphi$$

то је

$$F=r^2\sin\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi=$$
$$=r^2\sin\varphi(1+\cos\varphi)$$

Први извод је

$$F'=r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\cos\varphi)$$

па $F'=0$ даје једначину

$$\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+\cos\varphi=0$$

одакле је

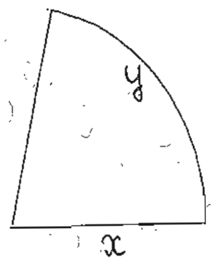
$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

Како је

$$F''=r^2\left[-2\sin 2\varphi-\sin\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$$

што је заиста за $\varphi=\frac{\pi}{3}$ горња површина максимум.

29. Између свију кружних исечака обима $2s$ нађи онај чија је површина максимум.



Овди је

$$2s = y + 2x$$

одакле

$$y = 2(s-x)$$

па је зато површина исечкова

$$F = \frac{yx}{2} = x(s-x)$$

Одатле је

$$F' = s - 2x$$

па $F'=0$ даје

$$x = \frac{s}{2}$$

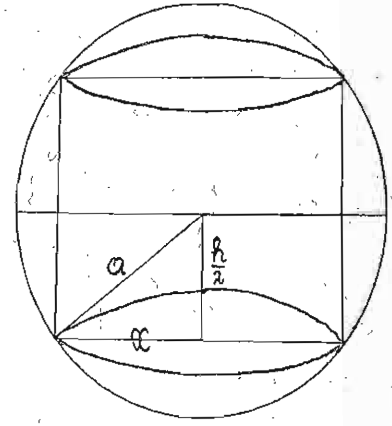
Како је још

$$F'' = -2$$

што је заиста горња површина исечка максимум за $x=\frac{s}{2}$.

30. Из кугле радиуса a исећи облицу највеће запремине.

Ако је радиус облице x, биће



$$\frac{h}{2} = \sqrt{a^2-x^2}$$

па је зато

$$V = x^2\pi\cdot h = 2x^2\pi\sqrt{a^2-x^2}$$

Одатле је

$$V' = 2\pi\frac{2a^2x-3x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

па

$$V' = 0$$

даје једначину

$$2a^2x - 3x^3 = 0$$

одакле је

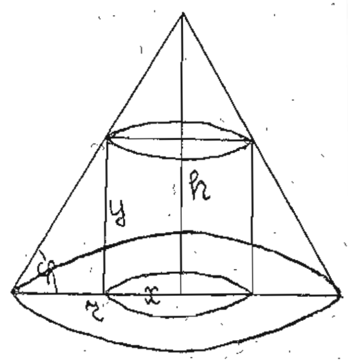
$$x = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Како је

$$V'' = 2\pi\frac{2a^4-9a^2x^2+6x^4}{(a^2-x^2)^{3/2}}\Big|_{x=\frac{a}{3}\sqrt{6}} = -$$

т.ј. V је одиста максимум за $x=\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

31. У правој кружној купи уписати прав цилиндар највеће запремине.



Ако је радиус основе купине r, њена висина h, радиус облице x а висина њена y, онда је, као што се види из слике

$$y=(r-x)\,tg\,\varphi=\frac{h}{r}(r-x)$$

па је зато запремина облице

$$V=x^2\pi\cdot y=\pi\frac{h}{r}x^2(r-x)$$

Одатле је

$$V'=\pi\frac{h}{r}(2rx-3x^2)$$

па $V'=0$ даје једначину

$$2rx-3x^2=0$$

одакле је

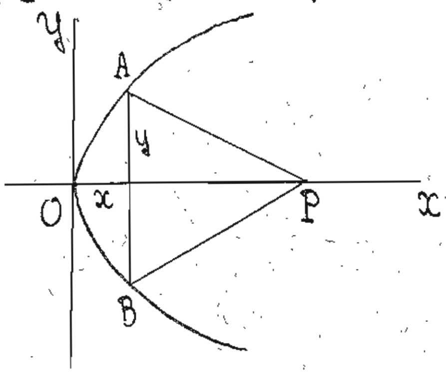
$$x=\frac{2}{3}r$$

Како је

$$V''=\pi\frac{h}{r}(2r-6x)\underset{x=\frac{2}{3}r}{=}-2\pi h$$

т.ј. запремина уписане облице одиста је максимум за $x=\frac{2}{3}r$.

32. У параболи $y^2-2px=0$ уписати равнокраки троугао PAB (AB паралелно y-оној осовини) највеће површине (PO=a).



Површина уписаног троугла је

$$F=\frac{2y(a-x)}{2}=y(a-x)$$

а како је из једначине параболе

$$y=\sqrt{2px}$$

то је

$$F=(a-x)\sqrt{2px}$$

Одатле је

$$F'=\frac{ap-3px}{\sqrt{2px}}$$

па $F'=0$ даје

$$ap-3px=0$$

одакле

$$x=\frac{a}{3}$$

Како је

$$F''=\frac{-3p^2x-ap^2}{(2px)^{3/2}}\underset{x=\frac{a}{3}}{=}-$$

што то потврђује да је површина троугла ABP одиста максимум за $x=\frac{a}{3}$.

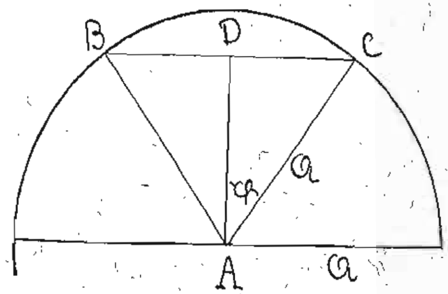
33. У полукругу радиуса a уписати равнокраки троугао највеће површине. Врх његов да лежи у центру.

Из слике је

$DC=a\sin\varphi$

$AD=a\cos\varphi$

тако да је површина уписаног равнокраког троугла



$$F = \frac{2DC \cdot AD}{2} = a^2 \sin\varphi \cos\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi$$

Одатле је

$$F' = \frac{a^2}{2} 2\cos 2\varphi = a^2 \cos 2\varphi$$

и $F'=0$ даје једначину

$$\cos 2\varphi = 0$$

одакле је

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Како је

$$F'' = -2a^2 \sin 2\varphi \underset{\varphi=\frac{\pi}{2}}{=} -2a^2$$

то је површина уписаног равнокраког троугла одиста maximum за $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

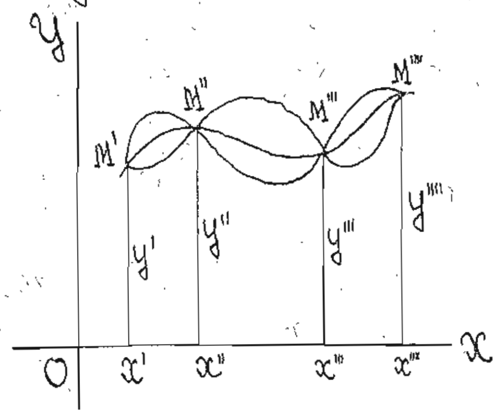
Дешава се да се незна рачунски израз једне функције, али се знају вредности које она добија за извесне специјалне вредности независно-променљиве количине. Тада се јављају ова два задатка:

1° да се израчунају вредности које ће добити функција за друге какве вредности независно-променљиве количине; и

2° да се нађе аналитички израз саме те функције.

Приметимо пре свега да други задатак обухвата први, јер кад би се успео наћи аналитички израз непознате функције, онда би из тога израза могли увек израчунати вредности функције за које се хоће вредности x-а. Овај други задатак представља оно што се зове задатком интерполације. Тај би се задатак састојао у томе: да се нађе аналитички израз једне функције кад се знају вредности које та функција добија за неколико специјалних вредности x-а.

Задатку интерполације може се дати и овај геометријски облик: наћи једначину криве линије кад се зна неколико тачака $M'M''M'''\dots$ кроз које она пролази. Лако је уверити се



да задатак интерполације није потпуно одређен, јер кроз један дати систем изолованих тачака може пролазити безбројно много кривих линија. Међутим баш у случајевима у којима се интерполација употребљује, има се посла са кривим линијама правилним и простим, тако да се горњи задатак своди на одређивање што простије линије која пролази кроз дати систем тачака.

Претпоставимо најпре да имамо само две тачке: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Најпростија линија што пролази кроз њих јесте извесна права

$$y=a+bx$$

где a и b ваља одредити тако да права пролази кроз тачке M_1 и M_2.

Кад би имали три тачке: $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$, као најпростија линија која пролази кроз те три тачке сматра се парабола другог степена

$$y=a+bx+cx^2$$

где ваља одредити a, b и c тако да крива пролази кроз тачке M_1, M_2 и M_3.

На послетку ако би имали n тачака, као најпростија крива која пролази кроз те тачке сматра се парабола $(n-1)^{ог}$ степена

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\dots+kx^{n-1}$$

где би коефицијенте $a, b, c, \ldots$ требало одредити тако да крива одиста пролази кроз дати систем тачака. Па би се одредба могла извршити тако ако се изрази да је једначина задовољена за

$$x=x_1 \quad x=x_2 \quad x=x_3 \quad \ldots \quad x=x_n$$
$$y=y_1 \quad y=y_2 \quad y=y_3 \quad \ldots \quad y=y_n$$

што би нам дало n једначина са n непознатих: $a, b, c, \ldots$ Те би једначине биле линеарне и према томе из њих би било увек могуће израчунати те непознате. Али решавање тих једначина веома је заметно чим број непознатих пређе 3 и према томе ова се метода у пракси не употребљава никад. Ми ћемо за решавање задатка интерполације навести две методе које се најчешће употребљују.

Lagrange-ова метода

Претпоставимо да се тражи једначина криве која пролази кроз систем од n датих тачака:

$$M_1(x_1, y_1) \quad M_2(x_2, y_2) \quad \ldots \quad M_n(x_n, y_n)$$

Ставимо да је

$$y = y_1 F_1(x) + y_2 F_2(x) + \ldots + y_n F_n(x) \qquad 1.)$$

где су $F_1\ F_2 \ldots F_n$ за сада непознате функције x-а. Дајмо сада тим непознатим функцијама овакав специјални облик: да је свака од њих равна једном разломку таквом, да бројилац функције $F_k(x)$ буде производ $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ свију разлика $(x-x_i)$ осим разлике $(x-x_k)$, а именилац не буде ништа друго до резултат који се добија кад се у бројиоцу смени x са x_k. Тако образована функција

$$F_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)\cdots(x_k-x_n)}$$

има тада ове особине:

1.) она постаје равна нули за $x=x_1$, $x=x_2, \cdots x=x_n$ т.ј. за сваку од датих специјалних вредности x_a, осим за вредност $x=x_k$ (јер у њој не фигурише разлика $x-x_k$).

2.) она добија вредност 1 за $x=x_k$.

Претпоставимо дакле да смо на тај начин образовали свих n функција: $F_1(x), F_2(x), \cdots F_n(x)$ и да смо их тако образоване сменили у обрасцу 1.). Лако се увиђа да је једначином 1.) тада решен задатак интерполације. То се види из овога: ако се у једначини 1.) смени $x=x_1$, сви сабирци постају равни нули осим првога и једначина 1.) се своди на

$$y = F_1(x_1)\, y_1$$

а пошто је

$$F_1(x_1)=1$$

то нам једначина 1.) даје

$$y=y_1$$

тако исто, ако у тој једначини сменимо $x=x_2$, сви сабирци осим другог постају равни нули тако да се једначина своди на

$$y=y_2 F_2(x_2)$$

а пошто је

$$F_2(x_2)=1$$

то се једначина 1.) своди на

$$y=y_2$$

и т.д. Дакле једначина 1.) задовољава услове који се тражи за решење задатка интерполације.

Применимо редом образац 1.) који се зове Лагранже-овим интерполационим обрасцем, на случајеве кад се има посла са 3, 4, 5 ... података.

Тражи се функција која за $x=x_1$ добија вредност $y=y_1$, за $x=x_2$ вредност $y=y_2$, а за $x=x_3$ вредност $y=y_3$. Лагранже-ов образац биће за тај случај облика

$$y = y_1 F_1(x) + y_2 F_2(x) + y_3 F_3(x)$$

где је

$$F_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$F_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$F_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

и заменом њиховом у горњем обрасцу имали би тражену функцију за овај случај.

На сличан би начин имали одговарајући образац за 4, 5, … података.

Примери:

1. Наћи криву која пролази кроз четри тачке и то: $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(2,5)$ и $M_4(3,10)$.

Имаћемо да је

$$y = F_2(x) + 5F_3(x) + 10F_4(x)$$

где ће бити

$$F_2(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$

$$F_3(x) = -\frac{x(x-1)(x-3)}{2}$$

$$F_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Према томе Lagrange-ов образац биће

$$y = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) - \frac{5}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{5}{3}x(x-1)(x-2)$$

или, ако уредимо по степенима x-а

$$6y = -2x^3 + 3x^2 - 7x$$

2. Наћи криву која пролази кроз пет тачака: $M_1(0,-1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,3)$, $M_4(3,8)$ и $M_5(4,15)$.

Имаћемо

$$y = -F_1(x) + 3F_3(x) + 8F_4(x) + 15F_5(x)$$

где је

$$F_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{-1\cdot-2\cdot-3\cdot-4} = \frac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{24}$$

$$F_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{2\cdot1\cdot-1\cdot-2} = \frac{x^4-8x^3+19x^2-12x}{4}$$

$$F_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{3\cdot2\cdot1\cdot-1} = \frac{-(x^4-7x^3+14x^2-8x)}{6}$$

$$F_5(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{24}$$

па према томе

$$y = -\frac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{24} + 3\frac{x^4-8x^3+19x^2-12x}{4} -$$

$$-8\frac{x^4-7x^3+14x^2-8x}{6} + 15\frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{24} =$$

$$= -\frac{1}{24}x^4 + \frac{10}{24}x^3 - \frac{35}{24}x^2 + \frac{50}{24}x - 1 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{24}{4}x^3 +$$

$$+ \frac{57}{4}x^2 - \frac{36}{4}x - \frac{4}{3}x^4 + \frac{28}{3}x^3 - \frac{56}{3}x^2 + \frac{32}{3}x +$$

$$+\frac{5}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^3 + \frac{55}{8}x^2 - \frac{30}{8}x = x^2-1$$

Дакле једначина тражене криве је

$$y = x^2-1$$

3. Наћи криву линију која пролази кроз четири тачке: $M_1(0,1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(2,3)$ и $M_4(3,7)$.

Имаћемо

$$y = F_1(x) + F_2(x) + 3F_3(x) + 7F_4(x)$$

где је

$$F_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\cdot -2\cdot -3} = -\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}$$

$$F_2(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot -1\cdot -2} = \frac{x^3-5x^2+6x}{2}$$

$$F_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{2\cdot 1\cdot -1} = -\frac{x^3-4x^2+3x}{2}$$

$$F_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

тако да је

$$y = -\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6} + \frac{x^3-5x^2+6x}{2} - 3\,\frac{x^3-4x^2+3x}{2} +$$

$$+7\,\frac{x^3-3x^2+2x}{6} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{11}{6}x + 1 + \frac{1}{2}x^3 -$$

$$-\frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{3}x =$$

$$= x^2 - x + 1$$

т.ј. тражена крива је

$$y = x^2 - x + 1$$

4. Наћи криву линију која пролази кроз четири тачке: $M_1(0,-1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,\frac{3}{5})$ и $M_4(3,\frac{4}{5})$.

Имаћемо

$$y = -F_1(x) + \frac{3}{5}F_3(x) + \frac{4}{5}F_4(x)$$

где је

$$F_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\cdot -2\cdot -3} = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}$$

$$F_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{2\cdot 1\cdot -1} = -\frac{x^3-4x^2+3x}{2}$$

$$F_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

тако да је

$$y = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{6} - \frac{3}{5}\cdot\frac{x^3-4x^2+3x}{2} + \frac{4}{5}\,\frac{x^3-3x^2+2x}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1 - \frac{3}{10}x^3 + \frac{12}{10}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{4}{30}x^3 - \frac{12}{30}x^2 + \frac{8}{30}x$$

$$= -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$$

и то је тражена крива.

Примедба: Као што се види примена Лагранже-ове методе проста је и лака, али тај образац има једну ману која се састоји у овоме: претпоставимо да смо нашли у коначном облику једначину криве линије која пролази кроз n датих тачака. Ако се хоће једначина да коригује тако, да крива пролази још кроз једну дату тачку, онда се мењају сви чланови Lagrange-овог обрасца тако, да задатак треба сасвим изнова решавати. Међутим баш у практичним случајевима у којима се има посла са интерполацијом јавља се потреба да се нађени образац коригује тако да крива пролази још кроз једну тачку. За такве случајеве било би згодно имати такву једну методу где увођење какве нове тачке у рачун неби имало за последицу мењање дотле већ израчунатих чланова. Ми ћемо овде навести такву једну методу.

Newton-ова метода

Претпоставимо да се тражи једначина криве која пролази кроз n датих тачака: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ $\dots$ $M_n(x_n, y_n)$. Ставимо да је

$$y = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \qquad 1.)$$

где су $a_0\ a_1 \dots a_n$ за сада непознате количине. Покушајмо израчунати те количине тако да крива 1.) пролази кроз дати систем од n тачака. Тада једначина 1.) треба да се

за $x = x_1$ своде на $y = y_1$

" $x = x_2$ " " $y = y_2$

. . . .

Отуда овај низ једначина

за $x = x_1$ $\quad y_1 = a_0$

" $x = x_2$ $\quad y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1)$

за $x = x_3$ $\qquad y_3 = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

. . . .

Имаћемо дакле n једначина са n непознатих $a_0 a_1 \cdots a_n$ и као што се види те су једначине таквог облика да се ове непознате врло лако поступно израчунавају

Кад смо на овај начин израчунали ове непознате коефицијенте, треба их заменити у обрасцу 1) и онда нам тако добивени образац решава задатак интерполације. Нарочита практичност ове методе лежи у овоме:

1° што је лака одредба коефицијената $a_0 a_1 a_2 \cdots$;

2° што, ако смо већ израчунали те коефицијенте за један дати систем тачака, па хоћемо једначину да коригујемо тако да крива линија коју она представља пролази још кроз 1, 2, 3, ... нових тачака, дотле већ израчунати коефицијенти остају непромењени и цела корекција једначине састоји се у томе што се њеној десној страни додају још 1, 2, 3, ... нова члана истог облика као и напређашњи и чији се коефицијенти израчунавају на исти начин као и малочас.

Примери:

1. Наћи једначину криве која пролази кроз систем од четири дате тачке: $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(2,5)$ и $M_4(3,10)$

Тражена једначина биће

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2)$$

За одредбу коефицијената $a_0 a_1 a_2$ и a_3 имаћемо систем једначина

$$0 = a_0$$
$$1 = a_0 + a_1$$
$$5 = a_0 + 2a_1 + 2a_2$$
$$10 = a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3$$

одакле је

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{3}{2} \qquad a_3 = -\frac{1}{3}$$

и према томе једначина криве је

$$y = x + \frac{3}{2}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

или, ако ју уредимо по степенима x-а

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$$

2. Наћи криву линију која пролази кроз четри тачке: $M_1(0,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,1)$ и $M_4(\ ,4)$.

Имаћемо

$$y=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)$$

и према томе

$$1=a_0$$
$$0=a_0+a_1$$
$$1=a_0+2a_1+2a_2$$
$$4=a_0+3a_1+6a_2+6a_3$$

одакле је

$$a_0=1 \quad a_1=-1 \quad a_2=1 \quad a_3=0$$

Отуда је

$$y=1-x+x(x-1)$$

или

$$y=x^2-2x+1$$

или најзад

$$y=(x-1)^2$$

тражена крива.

3. Наћи криву линију која пролази кроз четри тачке: $M_1(0,-1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,5)$ и $M_4(3,20)$.

Имамо

$$y=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)$$

одакле

$$-1=a_0$$
$$0=a_0+a_1$$
$$5=a_0+2a_1+2a_2$$
$$20=a_0+3a_1+6a_2+6a_3$$

или одатле

$$a_0=-1 \quad a_1=1 \quad a_2=2 \quad a_3=1$$

па је зато

$$y=-1+x+2x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$

или

$$y=x^3-x^2+x-1$$

једначина тражене криве.