ОБИЧНЕ
ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Ђор. Ј. Пујић, проф

Обичне диференцијалне једначине

Предавања
Др. Мих. Петровића,
проф. Универзитета,
(допуњена примерима)

Увод

Код обичних једначина са једном или више непознатих количина има се посла са задатком да се нађе вредности непознатих количина тако да кад ове сменимо у једначини, ова буде идентички задовољена. Код диференцијалних једначина имамо много сложенији случај; ту се има посла са задатком да се одреди једна или више функција које ће бити такве да између њих, независно-промењљивих количина и неколико узастопних извода непознатих количина постоје неки у напред дати односи. Сви су ти односи дати у облику једначина у којима фигуришу:

а) једна или више независно-променљивих количина;

в) једна или више функција;

с) известан број извода тих функција по независно-променљивој.

Свака таква једначина назива се диференцијална једначина.

Према броју независно-променљивих количина и непознатих функција једначине се деле на ове три групе:

1° Обичне диференцијалне једначине. - То су једначине у којима фигурише једна независно-променљива количина н. пр. x, једна непозната функција н. пр. y и један или више узастопних извода y-а по x-у. Н. пр.

$$y^2 + x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y^4 = 0$$

2° Симултане диференцијалне једначине. - То су једначине у којима фигурише независно-променљива количина н. пр. t, више непознатих функција н. пр. $x, y, \dots$ и више извода тих функција по независно-променљивој количини. У таквом случају број једначина увек је раван броју непознатих функција тако да се увек јављају n симултаних једначина са n непознатих функција. Н. пр.

а)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{d^2y}{dt^2} + x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + a = 0$$

в.)

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz$$

$$\frac{dy}{dt} = a'x + b'y + c'z$$

$$\frac{dz}{dt} = a''x + b''y + c''z$$

3° Парцијалне диференцијалне једначине. - То су једначине у којима фигурише више независно-променљивих количина, једна непозната функција и известан број њених делимичних извода по независно-променљивим количинама. Н. пр.

а) $$x+y+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

в) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

Обичне диференцијалне једначине.

То су једначине облика

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots)=0$$

Поједине од означених количина могу и недостајати у једначини, н. пр. x или који од извода, или y, али увек мора фигурисати бар један од извода. Ред највишег извода који фигурише у датој једначини увек је и ред те једначине. Н. пр.

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

је једначина првог реда; ма каква једначина облика

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2})=0$$

била би једначина другог реда и т. д.

Интегралити једну ма какву

диференцијалну једначину значи одредити једну такву функцију x_a коју кад сменимо у једначини ова је идентички њоме задовољена па ма какво било x. Методе за интеграцију различите су и мењају се не само према реду једначине већ и према њеном облику.

Увод.

Најопштији облик овакве једначине био би

$$F(x, y, \frac{dy}{dx})=0 \qquad 1)$$

У таквој једначини може недостајати x или y или dx, али увек мора фигурисати први извод y-а. За овакве једначине важе ове две основне теореме:

1° Ако се дочи једна ма каква група функција дефинисаних једначином

$$F(x, y, C)=0 \qquad 2)$$

која дефинише y као познату функцију x-а и у којој фигурише произвољан параметар C, увек постоји једна диференцијална једначина првог реда 1) која не садржи параметар C а коју међутим задовољава y израчунато из једначине 2.) па ма каква била вредност параметра C. Јер ако једначину 2.) диференцијалимо, добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

т.ј. $\frac{dy}{dx}$ равно је некој функцији $\varphi(x,y,C)$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y,C) \qquad 3.)$$

Елиминацијом параметра C из једначина 2.) и 3.) долази се до извесне једначине која садржи x, y и $\frac{dy}{dx}$ која је дакле облика 1.). Према самом начину на који смо дошли до ње очевидно је да ће она бити задовољена ма каква била вредност C пошто о тој вредности ништа није претпостављено. Тиме је теорема доказана.

2° Кад је дата ма каква диференцијална једначина 1.) увек постоји таква једначина

$$f(x,y,C)=0$$

да кад се из ње израчуна y н. пр.

$$y=\psi(x,C) \qquad 4.)$$

вредност 4.) идентички задовољава једначину 1.) па ма какво било x. Ова је теорема дакле реципрочна првој.

Функција y дефинисана једначином 4.) зове се *општим интегралом* једначине 1.). Параметар C чија је вредност потпуно неодређена назива се *интегралном константом*.

Као што се види општи интеграл једначине првог реда увек садржи једну и то само једну интегралну константу. Њена вредност може бити ма каква. Ако је прецизирамо дајући јој узастопне вредности $C_1, C_2, C_3 \cdots$, функција 4.) биће непрестано интеграл једначине или *партикуларни интеграл*. Свакој вредности параметра одговара по један партикуларан интеграл, према томе свака једначина првог реда има бесконачно много партикуларних интеграла. Н. пр. једначина

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

идентички је задовољена за

$$y = Ce^{x}$$

па ма какво било C. Према томе

$$y = Ce^{x}$$

је њен општи интеграл. Ако константи C дајемо вредности

$$C = 1, 2, 3, \dots$$

добијамо бесконачно много вредности

$$y = e^{x}$$

$$y = 2e^{x}$$

$$y = 3e^{x}$$

. . . . . .

од којих сваки представља по један партикуларни интеграл дате једначине.

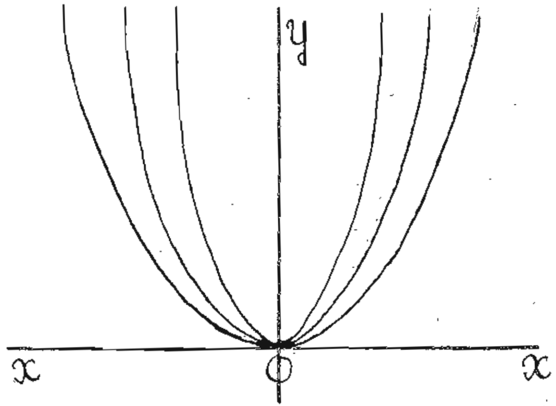
Очевидно је да се из општих интеграла могу извести партикуларни. Обрнути случај је немогућ изузев извесне специјалне случаје. И геометријски је очевидно да општи интеграл једначине првог реда представља групу кривих линија које су обухваћене општим интегралом и добијају се варијацијом интеграционе константе. Н. пр. за једначину

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

коју идентички задовољава функција

$$y = Cx^{2}$$

општи интеграл представља групу парабола које имају заједничко теме у почетку и за коју је дирка осовина Ox.



Методе за интеграцију

Пошто се интеграција једначине првог реда састоји у томе да се непозната функција одреди као функција независно-променљиве количине x и интеграционе константе C, то се интеграција може сматрати за свршену ако смо на ма који начин успели наћи такву једначину

$$f(x,y,C)=0 \qquad 5.)$$

да кад из ове израчунамо y и $\frac{dy}{dx}$ па их сменимо у датој диференцијалној једначини, ова је идентички задовољена. Према томе може се и оваква једначина као што је једначина 5.) назвати општим интегралом дате једначине. Методе којима се долази до једначине 5.) разноврсне се према диференцијалним једначинама са којима се има посла. Навешћемо неколико најважнијих метода.

I. Метода:
помоћу раздвајања променљивих количина.

Ова се метода састоји у томе да се једначина

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0 \qquad 1)$$

у случају кад је то у опште могуће, напише у облику

$$f(x)dx=\varphi(y)dy \qquad 2)$$

тако да с једне стране имамо само x и његов диференцијал, а на другој страни y и његов диференцијал. Ако нам је дакле могуће написати једначину 1.) у облику 2.), онда се каже: да су променљиве раздвојене и њу је сад лако интегралити. Интегралећи обе стране једначине 2.) добија се

$$\int f(x)dx=\int\varphi(y)dy \qquad 3.)$$

па пошто сваки од ових интеграла садржи само по једну променљиву, то се интеграција може извршити и онда ће

$$\int f(x)dx$$

бити извесна функција x_a плус интеграц. константа K

$$\int f(x)dx=\lambda(x)+K$$

а исто тако

$$\int\varphi(y)dy=\mu(y)+K'$$

тако да једначина 3) даје

$$\lambda(x)+K=\mu(y)+K'$$

или ако произвољне константе K и K' спојимо у једну константу C, предња једначина постаје

$$\lambda(x)-\mu(y)+C=0$$

и то ће бити тражени интеграл.

Примери:

1. Кад је дата једначина

$$x\frac{dy}{dx}-y=0$$

њу можемо написати у облику

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

одакле је

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$$

или

$$\log x - \log y + C = 0$$

или

$$\log \frac{x}{y} + C = 0$$

или

$$\frac{x}{y} = e^{-C}$$

т.ј.

$$x = y e^{-C}$$

Пошто је C произвољна константа, то је и e^{-C} произвољна константа коју можемо означити са C тако да ће бити

$$y = Cx$$

Овакво непосредно раздвајање могућно је у врло ретким случајевима. Тако, то је могуће код ова два типа једначина:

а) код једначина које садрже само x и $\frac{dy}{dx}$ т.ј. код једначина облика

$$F(x, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Ако једначину замислимо решену по $\frac{dy}{dx}$ тако да је

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

добили би да је

$$dy = f(x)\,dx$$

одакле је

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

чиме је интеграција извршена.

Н. пр. дата је једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a - x = 0$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-a}$$

или

$$y = \int \sqrt{x-a}\,dx = \int (x-a)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}} + C$$

б) Једначине које садрже само y и $\frac{dy}{dx}$. То су једначине облика:

$$F(y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Ако замислимо једначину решену по $\frac{dy}{dx}$ тако да је

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

имаћемо да је

$$dx = \frac{dy}{f(y)}$$

одакле је непосредно

$$x = \int \frac{dy}{f(y)}$$

Ако замислимо извршену интеграцију на десној страни, добићемо извесну функцију н.пр. $\lambda(y)$ тако да ћемо имати

$$x = \lambda(y) + C$$

и то ће бити тражени општи интеграл.

Н.пр. дата је једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$$

или

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

или

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$$

или

$$\operatorname{arc.}\sin y = x + C$$

или

$$y = \sin x + C$$

чиме је интеграција свршена.

Постоје неколико општих типова једначина првог реда код којих није могуће овакво непосредно раздвајање, али код којих то постоји кад се изврши извесна смена количина и то или смена независно промењљивих количина или непознате функције или и једне и друге. Најважнији су типови ови:

1° Линеарни тип.

То су једначине облика

$$F_1(x)\frac{dy}{dx} + F_2(x)y + F_3(x) = 0$$

т.ј. у којој непозната функција и њени изводи фигуришу линеарно. Скративши једначину са $F_1(x)$ можемо ју написати у простијем облику

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0 \qquad 4)$$

Извршивши смену

$$y = uz$$

где су u и z нове за сад неодређене количине, одакле је

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$$

у једначини 4) ова постаје

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + f(x)uz + \varphi(x) = 0$$

или

$$z\left[\frac{du}{dx}+f(x)u\right]+\left[u\frac{dz}{dx}+\varphi(x)\right]=0 \qquad 5.)$$

Покушајмо сад одредити неодређене функције u и z тако да свака од ових двеју заграда буде равна нули. То ће бити ако је

$$\frac{du}{dx}+f(x)u=0 \qquad 6.)$$

$$u\frac{dz}{dx}+\varphi(x)=0$$

Прва од једначина 6.) може послужити за одредбу функције u а друга за одредбу функције z. Из прве се добија

$$\frac{du}{u}=-f(x)dx$$

или интеграцијом

$$\log u=-\int f(x)dx+C$$

или

$$u=e^{-\int f(x)dx+C} \qquad 7.)$$

Заменом вредности 7.) у другој од једначина 6.) добијамо

$$\frac{dz}{dx}=-\varphi(x)\frac{1}{u}=-\varphi(x)e^{\int f(x)dx+C}$$

или интеграцијом

$$z=-\int dx\,\varphi(x)e^{\int f(x)dx+C} \qquad 8.)$$

На тај начин одређене су обе функције u и z и заменом њихових вредности у 7.) и 8.) у једначини

$$y=uz$$

добија се

$$y=e^{-\int f(x)dx+C}\left[-\int dx\,\varphi(x)e^{\int f(x)dx+C}\right]$$

чиме је y одређено као функција x-а и константе C, где још само треба напоменути да пошто је C произвољна константа, може се израз e^{-C} сменити једном константом.

Н. пр. Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}+2x=0$$

Овди је

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$\varphi(x)=2x$$

и према томе

$$\int f(x)dx=\int\frac{dx}{x}=\log x$$

или

$$e^{-\int f(x)dx}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}$$

Затим би имали

$$\int dx\,\varphi(x)\,e^{\int f(x)dx} = \int dx \cdot 2x \cdot x = 2\int x^2 dx = \frac{2}{3}x^3$$

па према томе

$$y = \frac{1}{x} \cdot -\frac{2}{3}x^3 = -\frac{2}{3}x^2$$

2° Bernouli-еве једначине.

То су једначине облика

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y + f_3(x)y^n = 0$$

где је n ма какав реалан или имагинаран, позитиван или негативан број. Ако у оваквој једначини извршимо смену

$$y = z^k$$

где је k други за сад неодређен број, имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = kz^{k-1}\frac{dz}{dx}$$

па заменом у датој једначини ова постаје

$$f_1(x)kz^{k-1}\frac{dz}{dx} + f_2(x)z^k + f_3(x)z^{kn} = 0$$

Ако једначину скратимо са z^{k-1} добија се

$$kf_1(x)\frac{dz}{dx} + f_2(x)z + f_3(x)z^{kn-k+1} = 0$$

Изаберимо сада k тако да је

$$kn - k + 1 = 0$$

т.ј.

$$k = \frac{1}{1-n}$$

Кад броју k дамо ту вредност, последња једначина постаје

$$kf_1(x)\frac{dz}{dx} + f_2(x)z + f_3(x) = 0$$

т.ј. своди се на линеарну једначину првог реда за коју се зна како се интеграли.

Н. пр. дата је једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2y = 0$$

Пошто је овди

$$n = 2$$

то је

$$k = \frac{1}{1-2} = -1$$

па ћемо извршити смену

$$y = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

после које се дата једначина своди на линеарну једначину првог реда

$$-\frac{dz}{dx} + x^2z + 1 = 0$$

Ако претпоставимо да је линеарна једначина на коју је сведена Bernoulli-ева интеграљена, треба се вратити на стару функцију сменом нађених вредности за z и k у

$$y = z^k$$

3° Једначине хомогене по x и y.

Ове једначине имају ту особину да кад се реше по $\frac{dy}{dx}$ добија се једначина облика

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ако се стави да је

$$y = xz$$

где је z нова непозната функција, одакле је

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

дата једначина постаје

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

или

$$x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$

чиме су променљиве раздвојене, тако да се интеграцијом добија

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{f(z)-z} + C$$

Кад замислимо да је интеграција извршена на десној страни и резултат означимо са $\lambda(z)$, последња једначина постаје

$$\log x = \lambda(z) + C$$

или ако z сменимо са $\frac{y}{x}$,

$$\log x = \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

или

$$\log x - \lambda\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

и то је тражени општи интеграл.

Н. пр. дата је једначина

$$x^2\frac{dy}{dx} - 3y^2\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = 0$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{x^2 - 3y^2} = \frac{-3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

- дакле једначина је хомогена по x и y.

Заменом

$$y = xz$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

добија се

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{3z^2}{3z^2-1}$$

или

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{3z^2}{3z^2-1} - z = \frac{3z^2-3z^3+z}{3z^2-1}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{3z^2-1}{3z^2-3z^3+z}\,dz$$

одакле

$$\log x = \int\frac{3z^2-1}{3z^2-3z^3+z}\,dz + C$$

Ако извршимо интеграцију рационалне функције на десној страни и резултат означимо са $\lambda(z)$, општи интеграл биће

$$\log x = \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

или

$$\log x - \lambda\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

4° Једначине хомогене по x и $\frac{dy}{dx}$.

Ове једначине имају ту особину да кад се реше по y, добија се за резултат једначина облика

$$y = f\left(\frac{1}{x}, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ако се место старе независно-промењиве количине x уведе нова промењива t таква да је

$$t = \frac{x^2}{2}$$

одакле је

$$x\,dx = dt$$

једначина постаје

$$y = f\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Замислимо ову једначину решену по $\frac{dy}{dt}$ тако да из ње добијамо

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y)$$

тада је

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dt$$

или

$$t = \int\frac{dy}{\varphi(y)} + C$$

Замислимо извршену интеграцију на десној страни и нека је добијени резултат $\lambda(y)$; последња једначина тада даје

$$t = \lambda(y) + C$$

Кад t сменимо његовом вредношћу добијамо

$$\frac{x^2}{2} - \lambda(y) - C = 0$$

и то је тражени општи интеграл.

Н. пр. дата је једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2y^2 - x^2 = 0$$

или одатле

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1}$$

Ако извршимо смену

$$\frac{x^2}{2} = t$$

$$x\,dx = dt$$

резултат ће бити

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 1}$$

или

$$y^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 1$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1+y^2}$$

или најзад

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = dt$$

Одатле је

$$t = \int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + C = \log\left[y+\sqrt{1+y^2}\right] + C$$

или

$$y+\sqrt{1+y^2} = e^{t-c} = Ce^{t}$$

тако да је тражени општи интеграл

$$y+\sqrt{1+y^2} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

5° Једначине хомогене по y и $\frac{dy}{dx}$

Ове једначине имају ту особину да кад се реше по x добија се као резултат једначина облика

$$x = f\left(\frac{1}{y}, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ако се наместо непознате функције y уведе нова функција z тако да буде

$$y = e^{z}$$

имаћемо да је

$$\frac{dy}{y} = dz$$

тако да једначина постаје

$$x = f\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

Замислимо једначину решену по $\frac{dz}{dx}$ тако да је

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)$$

па ћемо имати

$$dz = \varphi(x)\,dx$$

одакле

$$z = \int\varphi(x)dx + C$$

Ако замислимо извршену интеграцију на десној страни и резултат означимо са $\lambda(x)$, имаћемо

$$z = \lambda(x) + C$$

или ако се вратимо на стару функцију сменом

$$z = \log y$$

биће

$$\log y = \lambda(x) + C$$

или

$$y = Ce^{\lambda(x)}$$

Примери:

1° $$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

У овој су једначини непознате променљиве већ раздвојене па је

$$\int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{dy}{1+y^2} = C$$

или

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} C$$

(где смо C сменили са $\operatorname{arc\,tg} C$), или

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg} C$$

одакле

$$\frac{x+y}{1-xy} = C$$

2° $$(x^2+a^2)(y^2+b^2)\,dx + (x^2-a^2)(y^2-b^2)\,dy = 0$$

Деобом целе једначине са

$$(x^2-a^2)(y^2+b^2)$$

добијамо

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}dx + \frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}dy = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{2a^2}{x^2-a^2}\right)dx + \left(1 - \frac{2b^2}{y^2+b^2}\right)dy = 0$$

а одатле интеграцијом

$$\int dx + 2a^2\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \int\frac{2b^2dy}{y^2+b^2} - \int dy$$

или

$$x + a\log\frac{x-a}{x+a} + y - 2b\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{b} = C$$

– општи интеграл дате једначине.

3° $$x\,dy - y\,dx = \sqrt{y^2-x^2}\,dx$$

Ова је једначина хомогена по x и y. Ако извршимо смену

$$y = xz$$

одакле је

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

добијамо

$$x(x\,dz+z\,dx)-xz\,dx=\sqrt{x^2z^2-x^2}\,dx$$

или

$$x^2dz+xz\,dx-xz\,dx=x\sqrt{z^2-1}\,dx$$

или ако скратимо

$$x\,dz=\sqrt{z^2-1}\,dx$$

одакле

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

а одатле интеграцијом

$$\log x=\log\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]+\log C$$

или

$$\frac{x}{C}=z+\sqrt{z^2-1}$$

или ако се вратимо на стару променљиву y

$$\frac{x}{C}=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}$$

или најзад

$$x^2=C(2y-C)$$

и то је тражени општи интеграл.

4. $(5x-4y-7)dx+(2x+3y-12)dy=0$

Извршимо смену

$$x=x_1+\alpha$$

$$y=y_1+\beta$$

где су x_1 и y_1 нове променљиве, а α и β за сад неодређене константе. Једначина онда постаје

$$(5x_1-4y_1+5\alpha-4\beta-7)\,dx_1+(2x_1+3y_1+2\alpha+3\beta-12)\,dy_1=0$$

Ставимо сада

$$5\alpha-4\beta-7=0$$

$$2\alpha+3\beta-12=0$$

одакле је

$$\alpha=3\quad\beta=2$$

па добијамо хомогену једначину

$$(5x_1-4y_1)\,dx_1+(2x_1+3y_1)\,dy_1=0$$

Ставимо сада

$$y_1=x_1t$$

одакле је

$$dy_1=x_1dt+t\,dx_1$$

па добијамо

$$5x_1dx_1-4x_1t\,dx_1+2x_1^2dt+3x_1^2t\,dt+3x_1t^2dx_1=0$$

или

$$5\,dx_1-4t\,dx_1+2x_1dt+3x_1t\,dt+3t^2dx_1=0$$

или одатле

$$\frac{dx_1}{x_1}+\frac{3t+2}{3t^2-2t+5}\,dt=0$$

или најзад

$$\frac{dx_1}{x_1}+\frac{1}{2}\,\frac{6t-2}{3t^2-2t+5}\,dt+\frac{3\,dt}{3t^2-2t+5}=0$$

Одатле је

$$\int \frac{dx_1}{x_1} + \frac{1}{2}\int \frac{(6t-2)dt}{3t^2-2t+5} + \int \frac{3dt}{3t^2-2t+5} = C$$

или

$$\log x_1 + \log(3t^2-2t+5)^{1/2} + \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3t-1}{\sqrt{14}} = C$$

Заменом

$$t = \frac{y_1}{x_1}$$

добијамо

$$\log(3y_1^2-2x_1y_1+5x_1^2)^{1/2} + \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{5y_1-x_1}{x_1\sqrt{14}} = C$$

а заменом у овом изразу

$$x_1 = x-3$$

$$y_1 = y-2$$

добијамо

$$\log\left[3(y-2)^2-2(x-3)(y-2)+5(x-3)^2\right]^{1/2} + \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3(y-2)-(x-3)}{(x-3)\sqrt{14}} = C$$

и то је тражени општи интеграл.

5. $$dy + xy\,dx = x^3dx$$

Ова једначина је линеарна, па је према томе њен општи интеграл дат обрасцем

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \varphi(x)\, e^{\int f(x)dx} dx + C\right]$$

или, како је овде

$$f(x) = x$$

$$\varphi(x) = -x^3$$

то је

$$y = e^{-\int x dx}\left[\int e^{\int x dx} x^3 dx + C\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{\frac{x^2}{2}} x^3 dx + C\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[e^{\frac{x^2}{2}}(x^2-2) + C\right] =$$

$$= x^2-2 + C e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

6. $$dy - \frac{xy\,dx}{x^2-1} = x\,dx$$

И ова је једначина линеарна па је њен општи интеграл

$$y = e^{-\int \frac{x}{x^2-1}dx}\left[\int e^{\int \frac{x}{x^2-1}dx} x\,dx + C\right] =$$

$$= e^{\log\sqrt{x^2-1}}\left[\int e^{-\log\sqrt{x^2-1}} x\,dx + C\right] =$$

$$= \sqrt{x^2-1}\left[\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + C\right] = \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1} + C\right) =$$

$$= x^2-1 + C\sqrt{x^2-1}$$

7. $$dy - \frac{xy\,dx}{3(1-x^2)} = \frac{ay^4dx}{1-x^2}$$

Ову једначину можемо написати у облику

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{3(1-x^2)}y - \frac{a}{1-x^2}y^4 = 0$$

одакле се види да је она Bernouli-јева

типа. Како је овди

$$k=\frac{1}{1-n}=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$$

то ћемо извршити смену

$$y=z^{-\frac{1}{3}}$$

$$dy=-\frac{1}{3}z^{-\frac{4}{3}}dz$$

па добијамо

$$-\frac{1}{3}z^{-\frac{4}{3}}\frac{dz}{dx}-\frac{x}{3(1-x^2)}z^{-\frac{1}{3}}-\frac{a}{1-x^2}z^{-\frac{4}{3}}=0$$

или, ако скратимо

$$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}+\frac{x}{3(1-x^2)}z+\frac{a}{1-x^2}=0$$

или

$$\frac{dz}{dx}+\frac{x}{1-x^2}z+\frac{3a}{1-x^2}=0$$

т.ј. добијамо линеарну једначину по новој функцији z. Из ње је

$$z=e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}\left[-\int e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}\cdot\frac{3a}{1-x^2}dx+C\right]=$$

$$=e^{\log\sqrt{1-x^2}}\left[-\int e^{-\log\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{3a}{1-x^2}dx+C\right]=$$

$$=\sqrt{1-x^2}\left[-\int\frac{3a\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}+C\right]=\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{3ax}{\sqrt{1-x^2}}+C\right)=$$

$$=-3ax+C\sqrt{1-x^2}=-3(ax+C\sqrt{1-x^2})$$

Ако сада заменимо z са

$$z=\frac{1}{y^3}$$

добијамо као општи интеграл дате једначине

$$y^3=-\frac{1}{3(ax+C\sqrt{1-x^2})}$$

8. $$\frac{dx}{1-x^2}+\frac{dy}{1-y^2}=0$$

-Једначина у којој су променљиве већ раздвојене, па је одмах

$$\int\frac{dx}{1-x^2}+\int\frac{dy}{1-y^2}=C$$

Како је

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]dx=\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\log(x+1)-\log(x-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

а исто тако

$$\int\frac{dy}{1-y^2}=\frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}$$

то је тражени општи интеграл

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}=C=\frac{1}{2}\log C$$

или

$$\frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}=C$$

9. $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

Пошто су променљиве раздвојене, то је одмах

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, y = C = \text{arc sin}\, C$$

или

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

- тражени општи интеграл.

10. $(x-1)(y^3-1)\,dx + (x+1)y^2\,dy = 0$

Деобом једначине са $(y^3-1)(x+1)$, добијамо

$$\frac{x-1}{x+1}dx + \frac{y^2}{y^3-1}dy = 0$$

а одатле

$$\int \frac{x-1}{x+1}dx + \int \frac{y^2}{y^3-1}dy = C$$

Како је

$$\int \frac{x-1}{x+1}dx = \int \frac{x}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \int \left[1 - \frac{1}{x+1}\right]dx - \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \int dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx = x - \log(x+1)^2$$

$$\int \frac{y^2}{y^3-1}dy = \log\sqrt[3]{y^3-1}$$

то је тражени општи интеграл

$$x - \log(x+1)^2 + \log\sqrt[3]{y^3-1} = C$$

или

$$x + \log\frac{\sqrt[3]{y^3-1}}{(x+1)^2} = C = \log C$$

или још

$$x = \log\frac{C(x+1)^2}{\sqrt[3]{y^3-1}}$$

11. $(x-1)(y^2-y+1)\,dx - (y+1)(x^2+x+1)\,dy = 0$

Из ове је једначине

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}dx - \frac{y+1}{y^2-y+1}dy = 0$$

а одатле

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{y+1}{y^2-y+1}dy = 0$$

Како је

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{x\,dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \log\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{y+1}{y^2-y+1}dy = \int \frac{y}{y^2-y+1}dy + \int \frac{dy}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2y-1}{y^2-y+1}dy + \frac{3}{2}\int \frac{dy}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$=\log\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}$$

па је општи интеграл

$$\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{y^2-y+1}}-\sqrt{3}\left[\mathrm{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathrm{arc\,tg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right]=C$$

12. $x\,dx+y\,dy=2\cos\alpha\cdot y\,dx$

Ова једначина је хомогена по x и y па ћемо извршити смену

$$y=xz$$

$$dy=x\,dz+z\,dx$$

којом добијамо

$$x\,dx+xz(x\,dz+z\,dx)=2\cos\alpha\cdot xz\,dx$$

или

$$dx+xz\,dz+z^2dx=2\cos\alpha\cdot z\,dx$$

или

$$(z^2-2\cos\alpha\cdot z+1)\,dx=-xz\,dz$$

одакле

$$\frac{dx}{x}=-\frac{z\,dz}{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}$$

а одатле интеграцијом

$$\log x+\int\frac{z\,dz}{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}=C$$

Како је

$$\int\frac{z\,dz}{z^2-2\cos\alpha z+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2z-2\cos\alpha)dz}{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}+\int\frac{\cos\alpha\,dz}{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}=$$

$$=\log\sqrt{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}+\mathrm{cotg}\alpha\cdot\mathrm{arc\,tg}\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

то је тражени општи интеграл

$$\log x+\log\sqrt{z^2-2\cos\alpha\cdot z+1}+\mathrm{cotg}\alpha\cdot\mathrm{arc\,tg}\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}=C$$

или сменом

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\log x+\log\frac{\sqrt{y^2-2xy\cos\alpha+x^2}}{x}+\mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y-x\cos\alpha}{x\sin\alpha}=C$$

или најзад

$$\log\sqrt{y^2-2xy\cos\alpha+x^2}+\mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y-x\cos\alpha}{x\sin\alpha}=C$$

13. $a[a(x+1)+2y]dx+y\,dy=0$

Сменимо у овој једначини

$$x=x'+\alpha$$

$$dx=dx'$$

па добијамо

$$a[a(x'+\alpha+1)+2y]\,dx+y\,dy=0$$

Одавде се види да ако узмемо

$$\alpha+1=0$$

т.ј.

$$\alpha=-1$$

добијамо хомогену једначину

$$a(ax'+2y)dx+y\,dy=0$$

или

$$a^2x'dx' + 2ay\,dx' + y\,dy = 0$$

Сменимо у овој једначини

$$y = x'z$$

$$dy = x'dz + z\,dx'$$

па добијамо

$$a^2x'dx' + 2ax'z\,dx' + x'^2z\,dz + x'z^2dx' = 0$$

или

$$a^2dx' + 2az\,dx' + x'z\,dz + z^2dx' = 0$$

или

$$(a^2 + 2az + z^2)dx' + zx'dz = 0$$

или

$$(z+a)^2dx' + x'z\,dz = 0$$

а одатле

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{z\,dz}{(z+a)^2} = 0$$

Одавде је

$$\int\frac{dx'}{x'} + \int\frac{z\,dz}{(z+a)^2} = C$$

Како је

$$\int\frac{z\,dz}{(z+a)^2} =$$

(ако извршимо смене

$$\sqrt{z+a} = u$$

$$z = u^2 - a$$

$$dz = 2u\,du \qquad)$$

$$= \int\frac{(u^2-a)\,2u\,du}{u^4} = 2\int\frac{du}{u} - 2a\int u^{-3}du =$$

$$= 2\log u - 2a\cdot\frac{u^{-2}}{-2} = \log u^2 + \frac{a}{u^2} = \log(z+a) + \frac{a}{z+a}$$

то последња једначина даје

$$\log x' + \log(z+a) + \frac{a}{z+a} = C$$

или ако заменимо

$$x' = x - \alpha = x+1$$

$$\log(x+1) + \log(z+a) + \frac{a}{z+a} = C$$

или ако заменимо

$$z = \frac{y}{x'} = \frac{y}{x+1}$$

добијамо општи интеграл

$$\log(x+1) + \log\left(\frac{y}{x+1} + a\right) + \frac{a}{\frac{y}{x+1} + a} = C$$

или

$$\log[y + a(x+1)] + \frac{a(x+1)}{y + a(x+1)} = C$$

14. $(1+x)dx + (e^x dx - e^{2y}dy)(1+x^2) = 0$

деобом једначине са $(1+x^2)$ добијамо

$$\frac{1+x}{1+x^2}dx + e^x dx - e^{2y}dy = 0$$

одакле је одмах

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx + \int e^x dx - \int e^{2y}dy = C$$

или

$$\operatorname{arctg} x + \log\sqrt{1+x^2} + e^x - \frac{e^{2y}}{2} = C$$

и то је тражени општи интеграл.

15. $\sin y \cos x\,dx - \sin x \cos y\,dy = \operatorname{tg}^2 y\,dy$

Деобом једначине са $\sin^2 y$ добијамо

$$\frac{\cos x}{\sin y}dx = \left(\frac{\sin x \cos y}{\sin^2 y} + \frac{1}{\cos^2 y}\right)dy$$

и.т.д. (в. решење по методи интеграц. фактора зад.   стр.   ).

16. $\sqrt{1+y^2}\,dx - 2\sqrt{1+x^2}\,dy = y\sqrt{1+x^2}\,dy$

Деобом целе једначине са $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$ добијамо

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

одакле одмах

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} - \int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = C$$

па је тражени општи интеграл

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)^2 - \sqrt{1+y^2} = C$$

или

$$\log\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{C\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)^2} = \sqrt{1+y^2}$$

а одатле

$$x+\sqrt{1+x^2} = Ce^{\sqrt{1+y^2}}\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)^2$$

17. $x^2dy + y\,dx = ax^2e^{\frac{1}{x}}dx$

Деобом једначине са x^2dx добијамо

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - ae^{\frac{1}{x}} = 0$$

а то је линеарна једначина. У њој је

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\varphi(x) = -ae^{\frac{1}{x}}$$

па је њен општи интеграл

$$y = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left[-\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx + C\right] =$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left[a\int e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx + C\right] = e^{\frac{1}{x}}(ax+C)$$

18. $dy + xy\,dx = (x-1)e^{-x}dx$

Ова је једначина линеарна у којој је

$$f(x) = x$$

$$\varphi(x) = -(x-1)e^{-x}$$

па је њен општи интеграл

$$y = e^{-\int x\,dx}\left[\int e^{\int x\,dx}\cdot -(x-1)e^{-x}dx + C\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-\int e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x}(x-1)\,dx + C\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-\int e^{\frac{x^2}{2}-x}(x-1)\,dx+C\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-e^{\frac{x^2}{2}-x}+C\right] =$$

$$= e^{-x}+Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

19. $dy + ay\,dx = \cos nx\,dx$

Ова је једначина линеарна; за њу је

$$f(x) = a$$
$$\varphi(x) = \cos nx$$

па је

$$-\int f(x)\,dx = -\int a\,dx = -ax$$
$$\int \varphi(x)\, e^{\int f(x)dx}\,dx = \int e^{ax}\cos nx\,dx$$

Како је

$$\int e^{ax}\overset{M}{\cos} nx\,dx = \frac{e^{ax}\cos nx}{a} + \frac{n}{a}\int e^{ax}\overset{N}{\sin} nx\,dx$$
$$\int e^{ax}\sin \overset{N}{n}x\,dx = \frac{e^{ax}\sin nx}{a} - \frac{n}{a}\int e^{ax}\cos \overset{M}{n}x\,dx$$

или

$$M = \frac{e^{ax}\cos nx}{a} + \frac{n}{a}N$$
$$N = \frac{e^{ax}\sin nx}{a} - \frac{n}{a}M$$

одакле сабирањем

$$M = \frac{e^{ax}\cos nx}{a} + \frac{n e^{ax}\sin nx}{a^2} - \frac{n^2}{a^2}M$$

или

$$\frac{a^2+n^2}{a^2}M = \frac{a e^{ax}\cos nx + n e^{ax}\sin nx}{a^2}.$$

или

$$M = e^{ax}\,\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2} = \int e^{ax}\cos nx\,dx$$

па је према томе тражени општи интеграл

$$y = e^{-ax}\left[e^{ax}\,\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2} + C\right]$$

или

$$y = \frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2} + Ce^{-ax}$$

20. $dy + \frac{ny\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = a\,dx$

Линеарна једначина код које је

$$f(x) = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\varphi(x) = -a$$

па како је

$$n\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = n\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \log(x+\sqrt{1+x^2})^n$$

то је

$$e^{-\int f(x)dx} = e^{-\log(x+\sqrt{1+x^2})^n} = \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}$$

и

$$\int\varphi(x)\,e^{\int f(x)dx}\,dx = a\int(x+\sqrt{1+x^2})^n\,dx = aJ$$

да би нашли последњи интеграл (J) ставимо

$$x+\sqrt{1+x^2} = z.$$

одакле је

$$\sqrt{1+x^2} = z - x$$

а одатле

$$1+\cancel{x^2} = z^2 - 2zx + \cancel{x^2}$$

или одатле

$$x = \frac{z^2-1}{2z}$$

а одатле

$$dx = \frac{4z^2-2z^2+2}{4z^2} = \frac{z^2+1}{2z}dz$$

па је

$$J = \int \frac{z^n(z^2+1)}{2z^2}dz = \frac{1}{2}\int(z^n+z^{n-2})dz = \frac{z^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{z^{n-1}}{2(n-1)}$$

или заменом z_a његовом вредношћу

$$= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$$

Отуда је тражени општи интеграл

$$y = \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^n}\cdot\frac{a}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{n-1} + C\right]$$

или још и

$$y = \frac{a}{n^2-1}(n\sqrt{1+x^2}-x) + C(\sqrt{1+x^2}-x)^n$$

21. $$dy - \frac{xy\,dx}{2(1-x^2)} = xy^2dx$$

– тип Бернули-јеве једначине. Како је за њу

$$n = 2$$

то је

$$k = \frac{1}{1-n} = -1$$

па ћемо извршити смену

$$y = z^{-1}$$

$$dy = -\frac{1}{z^2}dz$$

којом добијамо

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} - \frac{x}{2(1-x^2)}\cdot\frac{1}{z} - x\frac{1}{z^2} = 0$$

или

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{2(1-x^2)}z + x = 0$$

а ова једначина је линеарна. За њу је

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int\frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{-2x}{1-x^2}dx =$$

$$= -\log(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$e^{\log(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} = (1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$-\int x\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{(1-x^2)^{1/4}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{4}}du = \frac{4}{3\cdot 2}u^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$$

и према томе је њен општи интеграл

$$z = \left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}} + C\right](1-x^2)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3}(1-x^2) + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

Како је

$$y = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

то је општи интеграл дате једначине

$$y = \frac{3}{2(1-x^2)-3C(1-x^2)^{1/4}}$$

22. $$dy + \frac{ay\,dx}{6(1-x^2)} = \frac{1+x}{(1-x^3)y^5}\,dx$$

-тип Bernoulli-јеве једначине. За њу је

$$n=-5$$

па је

$$k = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

Зато ћемо извршити смену

$$y = z^{1/6}$$

$$dy = \frac{1}{6}z^{-5/6}dz$$

којом добијамо

$$\frac{1}{6}z^{-5/6}\frac{dz}{dx} + \frac{a}{6(1-x^2)}z^{1/6} - \frac{1+x}{1-x^3}z^{-5/6} = 0$$

или

$$\frac{dz}{dx} + \frac{a}{1-x^2}z + \frac{6(1+x)}{1-x^3} = 0$$

а ова је једначина линеарна. За њу је

$$f(x) = \frac{a}{1-x^2}$$

$$\varphi(x) = -\frac{6(1+x)}{1-x^3}$$

$$\int f(x)dx = a\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{a}{2}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{1+x} = [\log(1-x) + \log(1+x)]\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}$$

$$\int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx = -6\int\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}\cdot\frac{1+x}{(1-x^3)^3}\,dx =$$

Да би добили овај интеграл, ставимо

$$\frac{1+x}{1-x} = u^2$$

одакле

$$1+x = \frac{2u^2}{u^2+1} \qquad 1-x = -\frac{2}{u^2+1}$$

$$x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$$

$$dx = \frac{(u^2+1)2u-(u^2-1)2u}{(u^2+1)^2} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}du$$

па добијамо горњи интеграл

$$= -6\int u^a\cdot\frac{2u^2}{u^2+1}\cdot-\frac{(u^2+1)^3}{8}\cdot\frac{4u\,du}{(u^2+1)^2} = -6\int u^{a+3}du =$$

$$= 6\frac{u^{a+4}}{a+4} = \frac{6}{a+4}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\right]^{a+4} = \frac{6}{a+4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

Према томе општи интеграл предње линеарне једначине биће

$$z = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{a/2}\left[\frac{6}{a+4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C\right] =$$

$$= \frac{6}{a+4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{a/2}$$

Како је

$$y=z^{1/6}$$

или

$$z=y^6$$

то је општи интеграл дате једначине

$$y^6=\frac{6}{a+4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{a/2}$$

II Метода

Интеграција помоћу интеграционог фактора.

Свака се диференцијална једначина првог реда

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad 1)$$

може написати у облику

$$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0 \qquad 2)$$

Често пута дешава се да је лева страна у једначини 2) потпун диференцијал неке функције

$$u(x,y)$$

т.ј. да се израз 2) подудара са изразом

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Ако би то био случај, интеграција једначине 1) врло је проста, јер би онда њен општи интеграл био дат изразом

$$u(x,y)=C \tag{3}$$

пошто би се диференцијалењем једначине 3.) дошло непосредно до једначине 2) односно 1).

Н. пр. 1. ако је дата диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

коју можемо написати у облику

$$x\,dy+y\,dx=0$$

њена лева страна је тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=xy$$

и према томе њен општи интеграл је

$$xy=C$$

2. Ако је дата једначина

$$\frac{dy}{dx}+x+y+1=0$$

њу можемо написати у облику

$$\left(1+\frac{1}{x+y}\right)dx+\frac{1}{x+y}dy=0$$

Лако се уверавамо да лева страна није ништа друго до тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=x+\log(x+y)$$

и према томе општи интеграл дате једначине биће

$$x+\log(x+y)=C$$

или

$$\log(x+y)=C-x$$

или

$$x+y=Ce^{-x}$$

или

$$y=Ce^{-x}-x$$

Међутим овакви су случајеви врло ретки и на њих се наилази само онда кад функције $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ што фигуришу у једначини 2.) задовољавају извесне нарочите услове. Потражимо какве услове треба да задовољавају те функције па да израз

$$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy \tag{4.}$$

буде потпун диференцијал. Ради тога ћемо доказати ову теорему: Да то буде, потребно је и довољно да је

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Јер, упоређењем израза 4) са једначином

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{5.}$$

види се да треба да буде

$$f(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$$

Ако прву диференцијалимо по y другу по x добија се

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

а пошто је увек

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

то мора бити и

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad 6.)$$

Тиме је доказано да је горњи услов потребан. Треба још доказати да је он и довољан. Показаћемо сад обрнуто: да кад је услов 6.) задовољен, увек је могуће одредити такву једну функцију $u(x,y)$, да је њен тотални диференцијал

$$du=f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy$$

т.ј. да су њени делимични изводи: по x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y)$$

а по y

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x,y)$$

Покушајмо најпре одредити непознату функцију u тако да буде

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y)$$

Интеграљени ову једначину по x и узевши интеграл у границама од a до x, где је a произвољна граница, може се написати

$$u=\int_a^x f(x,y)\,dx+H(y) \qquad 7.)$$

где $H(y)$ игра сад улогу интеграционе константе. Диференцијаљењем последње једначине по y имаћемо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_a^x\frac{\partial f}{\partial y}\,dx+\frac{\partial H}{\partial y} \qquad 8.)$$

Покушајмо из једначине 8.) одредити u тако да буде

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x,y) \qquad 9.)$$

Заменом 9.) у 8.) и водећи рачуна о томе да је по претпоставци испуњен услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

једначина 8.) претвара се у

$$\varphi(x,y)=\int_a^x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial H}{\partial y}=\left[\varphi(x,y)\right]_a^x+\frac{\partial H}{\partial y}=$$

$$=\varphi(x,y)-\varphi(a,y)+\frac{\partial H}{\partial y}$$

или

$$\varphi(a,y) - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Одатле можемо израчунати непознату функцију H која зависи само од y па је

$$H = \int_b^y \varphi(a,y)\,dy + C \qquad 10.)$$

где b означује једну произвољну вредност y-а. Према самом начину како смо дошли до функције H, ако тој функцији дамо вредност 10.) и сменимо у 7.), добијамо

$$u = \int_a^x f(x,y)\,dx + \int_b^y \varphi(a,y)\,dy + C \qquad 11.)$$

Тако добијена функција имаће ту особину да је њен делимични извод по x : f(x,y) а по y : φ(x,y) т.ј. да је израз

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy$$

тотални диференцијал такве функције чиме је предња теорема доказана.

На овој теореми основано је ово правило за интеграцију једначина првог реда: Кад је дата једначина

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

треба ју написати у облику

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy = 0$$

и испитати да ли је задовољен услов

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Ако је то случај онда се увек може наћи таква једна функција u(x,y) чији ће тотални диференцијал имати за вредност

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy$$

Општи интеграл биће

$$u(x,y) = C$$

где је C интеграциона константа.

Н. пр. 1. Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b+y}{a+x} = 0$$

Њу можемо написати у облику

$$(a+x)\,dy + (b+y)\,dx = 0$$

Овде је

$$f = b+y \qquad \varphi = a+x$$

па је

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1$$

па је услов

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

задовољен. Према томе лева страна горње једначине извесно је тотални диференцијал неке функције u(x,y). Та је функција у овом случају

$$u(x,y) = (a+x)(b+y)$$

и према томе тражени општи интеграл је

$$(a+x)(b+y)=C$$

2. Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx}+\frac{ax+by}{gx+hy^3}=0$$

па се тражи: у ком се случају она може интегралити малопређашњом методом. Ако ју напишемо у облику

$$(gx+hy^3)\,dy+(ax+by)\,dx=0$$

онда је

$$f(x,y)=ax+by \qquad \varphi(x,y)=gx+hy^3$$

и према томе је

$$\frac{\partial f}{\partial y}=b \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=g$$

да би се ова метода могла употребити потребно је и довољно да буде

$$b=g$$

У том случају је лева страна горње једначине тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=\frac{ax^2}{2}+bxy+\frac{hy^4}{4}$$

Међутим случајеви кад је

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

веома су ретки и изузетни, тако да је ова метода у врло ретким приликама употребљива. Међутим у таквим случајевима метода се може изменити на овај начин до кога је први дошао Euler:

Претпоставимо да израз

$$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0 \qquad 12)$$

не задовољава услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad 13)$$

тако да он није тотални диференцијал какве функције. Помножимо једначину 12) са једном засад неодређеном функцијом $\mu(x,y)$ тако да се добија израз

$$\mu f\,dx+\mu\varphi\,dy=0 \qquad 14)$$

Кад би функцију μ изабрали тако да задовољава услов

$$\frac{\partial(\mu f)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\varphi)}{\partial x} \qquad 15)$$

онда би израз 14) очевидно био тотални диференцијал какве функције $u(x,y)$ и општи би интеграл био

$$u(x,y)=C$$

Питање је да ли је могуће одредити μ из

14) и 15). Услов 15) може се написати у облику

$$\mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+f\frac{\partial \mu}{\partial y}-\varphi\frac{\partial \mu}{\partial x}=0 \qquad 16.)$$

Пошто су f и φ познате функције, то су познати и њихови делимични изводи па се 16.) може написати у облику

$$A(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}+H(x,y)\mu=0 \qquad 17.)$$

где су A, B и H познате функције од x и y. Према томе за одредбу μ добијамо једну парцијалну диференцијалну једначину. За сваку такву једначину зна се да има бескрајно много интеграла и према томе постоји бескрајно много тражених функција $\mu(x,y)$. Ако смо у стању наћи макар један интеграл једначине 17.), заменом такве вредности μ у 14) тај ће израз бити тотални диференцијал какве функције $u(x,y)$ и онда би

$$u(x,y)=C$$

био општи интеграл дате једначине.

Као што се види интеграција једне ма какве једначине првог реда може се свести на тражење једног ма ког партикуларног интеграла парцијалне једначине 16.). Кад би увек било могуће наћи један интеграл једначине 16.), интеграција дате једначине првог реда била би свршена и метода би била савршена. Међутим оно што чини методу несавршеном јесте баш то што се у врло ретким случајевима може наћи један интеграл једначине 16.). Тражење тог интеграла тако је тежак посао да баш и онда кад се та метода примењује на дате специјалне случајеве обично се гледа да се функција μ одреди другим неким путем. Овако одређена функција μ назива се *интеграционим фактором* дате диференцијалне једначине и по њему се ова метода назива: методом интеграције помоћу интеграционог фактора. Сама се метода састоји у овоме: Дата диференцијална једначина напише се у облику

$$f(x,y)dx+\varphi(x,y)dy=0$$

и покуша се да се одреди таква једна функција $\mu(x,y)$ да израз

$$\mu f dx + \mu \varphi dy$$

буде тотални диференцијал какве функције $u(x,y)$. Ако је могуће наћи такву функцију μ, онда ће једначина

$$u(x,y)=C$$

представљати општи интеграл дате једначине. Међутим тражење фактора μ бива или помоћу парцијалне једначине 16) или ма којим другим путем. Приметимо само још и то да пошто једначина 17) коју треба да задовољи μ има бескрајно много интеграла, то увек постоји бескрајно много таквих фактора, али они сви доводе до једног истог општег интеграла.

Примери:

1. Уочимо једначину

$$y dx - x dy = 0$$

За њу је

$$f(x,y)=y \quad \varphi(x,y)=-x$$

па је

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-1$$

па услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

није задовољен. Ако једначину помножимо са

$$\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$$

она постаје

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

па је сада горњи услов задовољен. Лако се уверити да лева страна ове једначине није ништа друго до тотални диференцијал функције

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

Према томе општи интеграл био би

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C$$

или

$$\frac{x}{y}=C$$

или

$$y=Cx$$

На место горњег фактора μ могли смо узети

$$\mu=-\frac{1}{x^2}$$

па једначина тада постаје

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$$

Њена лева страна није ништа друго до тотални диференцијал функције $\frac{y}{x}$ па је према томе општи интеграл

$$y=Cx$$

2. Нека је дата једначина

$$(x^m+y)dx-xdy=0$$

За њу се као интеграциони фактор налази

$$\mu=-\frac{1}{x^2}$$

па добијамо једначину

$$\frac{xdy-(x^m+y)dx}{x^2}=0$$

а њена лева страна је тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=-\frac{x^{m-1}}{m+1}+\frac{y}{x}.$$

и према томе општи је интеграл

$$-\frac{x^{m-1}}{m+1}+\frac{y}{x}=C$$

3. $$ydx-xdy=y^3e^ydy$$

Овди је

$$\mu=\frac{1}{y^2}$$

па се добија једначина

$$\frac{dx}{y}-\left(\frac{x}{y^2}+ye^y\right)dy=0$$

код које је услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

т.ј. задовољен. Њена лева страна је тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=-\frac{x}{y}-e^y(y-1)$$

па је њен општи интеграл

$$\frac{x}{y}=(y-1)e^y+C$$

4. $$\sin y\cos x\,dx-\sin x\cos y\,dy=tg^2y\,dy$$

Овди је

$$\mu=\frac{1}{\sin^2y}$$

па се добија једначина

$$\frac{\cos x}{\sin y}dx+\left(-\frac{\sin x\cos y}{\sin^2y}-\frac{1}{\cos^2y}\right)dy=0$$

за коју је

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-\cos x\cos y}{\sin^2y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

а осим тога

$$u(x,y)=\frac{\sin x}{\sin y}-\operatorname{tg} y$$

па је њен општи интеграл

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\operatorname{tg} y+C$$

III. Метода

Интеграција помоћу диференцијалења.

Нека је дата једначина

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad 1)$$

Ставимо да је

$$\frac{dy}{dx}=p$$

тако да једначина постане

$$F(x,y,p)=0 \qquad 2)$$

Диференцијалењем једначине 2) добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial p}dp=0 \qquad 3.)$$

Извршимо затим једну од ових двеју операција

1° Или поделимо једначину 3.) са dx чиме се добија једначина

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}=0 \qquad 4.)$$

па елиминишимо x из 1) и 4) и сменимо

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

па ће резултат бити једначина облика

$$\Phi\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)=0 \qquad 5.)$$

Једначина 5.) је опет првог реда у којој се сматра y као независно променљива количина а p као непозната функција. Претпоставимо да смо је интегралили и нека је

$$\varphi(y,p,C)=0 \qquad 6.)$$

њен општи интеграл. Елиминацијом p из 2.) и 6.) добија се једначина

$$\eta(x,y,C)=0$$

која ће представљати општи интеграл једначине 1.). Метода је међутим употребљива само онда кад је једначина 5.) лакша за интеграцију од једначине 1.).

2° или поделимо 3.) са dy чиме се добија

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dy}=0 \qquad 7.)$$

па елиминишимо y из 7.) и 1.) и сменимо

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dx}$$

па се добија једначина

$$\Psi\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad 8.)$$

Ако је

$$\lambda(x,p,C)=0 \qquad 9.)$$

општи интеграл једначине 8.), елиминацијом p из 9.) и 2.) добија се извесна једначина

$$\mu(x,y,C)=0$$

која представља општи интеграл једначине 1.). Ова се метода употребљује онда кад је интеграција једначине 8.) простија од интеграције једначине 1.).

Примери:

1. Нека је дата једначина

$$y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

која се зове Clairot-ова једначина. Ако ставимо да је

$$\frac{dy}{dx}=p$$

добија се

$$y = xp + f(p)$$ 10.)

диференцијалењем се добија

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

y је дакле само собом елиминисано. Сменивши

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

једначина постаје

$$p = x\frac{dp}{dy}p + f'(p)\frac{dp}{dy}p$$

или

$$p\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\left[x + f'(p)\right] = 0$$

Лева ће страна бити равна нули ако је ма који од чинитеља раван нули. Ставимо да је

$$\frac{dp}{dy} = 0$$ 11.)

онда се добија

$$p = C$$

Елиминацијом p из 10) и 11) добија се

$$y = Cx + f(C)$$

па пошто она представља однос између x и y а садржи константу C, то она мора бити општи интеграл дате једначине. Из тога добијамо ово правило: Clairot-ова једначина интеграли се кад се у њој извод $\frac{dy}{dx}$ смени интеграционом константом C.

Н. пр. ако је дата једначина

$$y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

њен ће општи интеграл бити

$$y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$$

Приметимо још и то да општи интеграл ма какве Clairot-ове једначине увек представља једну фамилију правих линија које би се добиле варијацијом константе C.

2. Нека је дата једначина

$$y = x\,f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

која се зове *Lagrange-ова једначина*. Ако ставимо

$$\frac{dy}{dx} = p$$

једначина постаје

$$y = x f(p) + \varphi(p)$$

Диференцијаљењем се добија

$$\frac{dy}{dx} = x f'(p)\frac{dp}{dx} + f(p) + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}$$

или ако сменимо $\frac{dy}{dx}$ са p

$$p = x f'(p)\frac{dp}{dx} + f(p) + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}$$

Множећи обе стране једначине са $\frac{dx}{dp}$ добијамо

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - x f'(p) - \varphi'(p) = 0$$

Ако p сматрамо као независно променљиву количину а x као непознату функцију имамо једну линеарну једначину првог реда за коју смо видели како се интеграли. Ако означимо са $\Lambda(x,p,C)$ њен општи интеграл, елиминацијом p из

$$\Lambda(x,p,C)=0$$

и Lagrange-ове једначине добили би

$$\mu(x,y,C)=0$$

и то би био општи интеграл дате Lagrange-ове једначине.

IV. Метода.

Интеграција помоћу партикуларних интеграла.

Има једначина с том особином да ако знамо известан број партикуларних интеграла, можемо наћи и сам општи интеграл. Као тип те врсте једначина навешћемо:

Riccati-еву једначину то је једначина облика

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0 \qquad 1)$$

За ову је једначину доказано да се никаквим ни алгебарским ни интегралним операцијама не може интегралити док се унапред не зна бар један њен партикуларан интеграл; међутим ако је познат један њен партикуларан интеграл, може се одмах наћи и општи интеграл.

Означимо са z један партикуларан интеграл једначине 1) претпостављајући да је он познат. Ако извршимо смену

$$y = z + u$$

где је u нова непозната функција, имаћемо

$$\frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} + f z^2 + 2fuz + fu^2 + \varphi z + \varphi u + \psi = 0$$

или

$$\frac{du}{dx} + f u^2 + (2fz+\varphi)u + \left[\frac{dz}{dx} + f z^2 + \varphi z + \psi\right] = 0 \tag{2)}$$

Међутим средња заграда у једначини 2) идентички је равна нули пошто је претпостављено да је z интеграл једначине 1). Према томе једначина 2) своди се на

$$\frac{du}{dx} + f u^2 + (2fz+\varphi)u = 0 \tag{3.)}$$

Претпоставимо да смо у једначини 3) сменили z његовом, већ познатом вредношћу і резултат ће бити

$$\frac{du}{dx} + A(x)u^2 + B(x)u = 0$$

а ова једначина припада Bernouli-евом типу. Овакве се једначине, као што смо видели, интеграле сменом

$$u = v^k$$

$$\frac{du}{dx} = kv^{k-1}$$

чиме једначина постаје

$$kv^{k-1}\frac{dv}{dx} + A(x)v^{2k} + B(x)v^k = 0$$

или деобом са v^{k-1}

$$k\frac{dv}{dx} + A(x)v^{k+1} + B(x)v = 0$$

Ако броју k дамо вредност -1, једначина постаје

$$k\frac{dv}{dx} + B(x)v + A(x) = 0 \tag{4.)}$$

т.ј. своди се на линеарну једначину првог реда за коју смо видели како се интеграли. Пошто се увек може учинити да интеграциона константа у интегралу линеарне једначине фигурише само линеарно, то ће општи интеграл једначине 4.) бити облика

$$v = C\lambda(x) + \mu(x)$$

где ће λ и μ бити познате функције x_a.
Заменом v у изразу

$$u = v^{k} = v^{-1} = \frac{1}{v}$$

и ће бити облика

$$u = \frac{1}{C\lambda(x)+\mu(x)}$$

и напослетку заменом у изразу

$$y = z + u$$

види се да ће y бити облика

$$y = \frac{C\alpha_1(x)+\beta_1(x)}{C\alpha_2(x)+\beta_2(x)} \qquad 5.)$$

где ће $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 бити познате функције x_a, чиме би интеграција била довршена.

Из једначине 5.) види се у исто време и начин како интеграциона константа улази у општи интеграл; она дакле улази линеарно и у бројитељ и у именитељ. То је особина Riccati-еве једначине која има врло велику примену.

Пример: Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - xy - 1 = 0$$

Лако се уверавамо да је ова једначина задовољена ако се стави

$$y = x$$

Према томе знамо унапред један њен партикуларан интеграл. Да би нашли њен општи интеграл, ставићемо

$$y = x + u$$

чиме добијамо

$$1 + \frac{du}{dx} + x^2 + 2xu + u^2 - x^2 - xu - 1 = 0$$

или

$$\frac{du}{dx} + u^2 + ux = 0$$

Сменом

$$u = v^{-1} = \frac{1}{v}$$

добија се

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

чиме једначина постаје

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v^2} + \frac{x}{v} = 0$$

или

$$\frac{dv}{dx} - xv - 1 = 0$$

чиме је Riccati-ева једначина сведена на линеарну једначину.

Riccati-ева једначина предстаља једначину с том особином да се може интегралити кад је познат један партикуларан интеграл. Међутим има једначина чија интеграција захтева два, три и више партикуларних интеграла.

* * *

То су у главном методе које се употребљују при интеграцији једначина првог реда. Међутим постоји бесконачан број једначина за које су те методе непримењиве. Између таквих једначина има их такође бесконачан број које се удесном сменом променљивих количина могу свести на који од досад проучених типова. Смене које се у том циљу употребљују своде се у главном на ове:

1° смена непознате функције другом непознатом функцијом;

2° смена независно-променљиве количине другом независно-променљивом количином;

3° смена и независно-променљиве коли-

чине и непознате функције;
4° пермутовање независно-променљиве количине и непознате функције.

Смена која се у датом случају има употребити зависи од природе случаја и за то нема никаквих особитих правила.

Примери:

1. Нека је дата једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+ax^2y\frac{dy}{dx}+bx^3y^2=0 \qquad 1)$$

Ова једначина не потпада ни под један од проучених типова, али ако ју поделимо са x^3, она постаје

$$\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right)^3+ay\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+by^2=0$$

и извршимо смену

$$x\,dx=dt$$

или

$$\frac{x^2}{2}=t$$

или

$$x=\sqrt{2t}$$

једначина постаје

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^3+ay\frac{dy}{dt}+by^2=0 \qquad 2)$$

тако да је сведена на тип једначина у којима не фигурише независно-променљива, а за такве једначине зна се како се интеграле. Ако је

$$\lambda(t,y,C)=0$$

општи интеграл једначине 2), интеграл једначине 1) биће

$$\lambda\left(\frac{x^2}{2},y,C\right)=0$$

2. Нека је дата једначина

$$ay\frac{dy}{dx}+by^2+f(x)=0$$

где су a и b сталне количине. И ова једначина не потпада под проучене типове. Ако извршимо смену

$$y^2=z$$

одакле је

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$$

једначина постаје

$$\frac{a}{2}\frac{dz}{dx}+bz+f(x)=0$$

дакле је сведена на тип линеарне једначине првог реда. Ако је

$$\lambda(x,z,C)=0$$

њен општи интеграл, општи интеграл дате једначине биће

$$\lambda(x, y^2, C)=0$$

3. Нека је дата једначина

$$y\frac{dy}{dx}+f(x)\,y^4+\varphi(x)\,y^2+\psi(x)=0$$

Сменом

$$y^2=z$$

једначина се своди на Riccati-еву једначину

$$\frac{dz}{dx}+2f\,z^2+2\varphi z+2\psi=0$$

4. Нека је дата једначина

$$\frac{dy}{dx}=(ax+by+c)^m$$

Ако извршимо смену

$$ax+by+c=z$$

одакле диференцијалењем

$$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)$$

једначина постаје

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=z^m$$

или

$$\frac{dz}{dx}=a+bz^m$$

одакле је

$$dx=\frac{dz}{a+bz^m}.$$

или

$$x=\int\frac{dz}{a+bz^m}$$

Ако претпоставимо да је интеграција извршена, имаћемо извесну једначину облика

$$\lambda(x,z,C)=0$$

а општи интеграл дате једначине биће

$$\lambda(x, ax+by+c, C)=0$$

О сингуларним интегралима једначине првог реда

Видели смо да се под општим интегралом једначине првог реда

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

разуме таква једна релација

$$\lambda(x,y,C)=0$$

између x и y која у себи садржи једну константу C. Варијацијом C добијају се сви бескрајно многи партикуларни интеграли једначине. Међутим код извесних једначина првог реда јавља се још једна врста интеграла који никако нису обухваћени општим интегралом т.ј. немогуће их је добити из општег интеграла спецификовањем константе. Уочимо н.пр. једначину

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2-1=0 \tag{1)}$$

коју је лако интегралити јер ју можемо написати у облику

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

и интеграцијом се добија

$$\arcsin x-\arcsin y=C \tag{2)}$$

и то је био њен општи интеграл. Овај интеграл можемо још упростити на овај начин: Ако ставимо

$$\begin{aligned}\arcsin x&=u,\\ \arcsin y&=v\end{aligned} \tag{3)}$$

или

$$\begin{aligned}x&=\sin u\\ y&=\sin v\end{aligned} \tag{4)}$$

добијамо

$$\sin(v-u)=\sin C=C$$

или у развијеном облику

$$\sin v\cos u-\cos v\sin u=C$$

или

$$y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C \tag{5)}$$

Ма какву вредност дали константи C у општем интегралу 5), тај се интеграл никад не може свести на

$$y=\pm 1$$

Међутим и вредности

$$y=\pm 1$$

задовољавају једначину 1) и према томе и те се вредности имају сматрати као интеграли једначине 1), а међутим оне никако нису обухваћене општим интегралом 5).

Такав се исти случај дешава са великим бројем диференцијалних једначина и такви интеграли, ма да задовољавају диференцијалну једначину, не задовољавају општи интеграл. Такви се интеграли називају сингуларним интегралима дате једначине.

Остаје нам да објаснимо узрок појаве сингуларних интеграла. Нека је задата једначина

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad 7$$

и нека је

$$A(x,y,C)=0 \qquad 8$$

њен општи интеграл. Варијацијом интеграционе константе C једначина 8) представља једну фамилију бесконачно много кривих линија. Претпоставимо да те криве имају своју обвојницу; за обвојницу знамо да није ништа друго до геометријско место пресека двеју бесконачно блиских кривих што припадају тој фамилији. Узмимо тачку M што припада тој обвојници и нека су C_1 и C_2 бесконачно блиске интегралне криве што се у M секу. Пошто обвојница додирује криве у M, то ће у тој тачки за све те криве линије бити једно исто x, y и $\frac{dy}{dx}$. Па пошто ове три вредности задовољавају диференцијалну једначину сматрајући их као да припадају криву C_1 или C_2, то је очевидно да ће оне задовољавати исту једначину 7) и ако узмемо да оне припадају обвојници. Према томе пошто то вреди за ма какву тачку M обвојнице и сама једначина обвојнице задовољаваће диференцијалну једначину 7). Из самог начина како се из једначине 8) долази до једначине обвојнице очевидно је да се она не може добити спецификовањем константе C у једначини 8). То излази непосредно из тога што, као што знамо, једначина обвојнице добија се елиминацијом C из једначина

$$\lambda=0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial C}=0$$

а не спецификовањем C у једначини

$$\lambda=0$$

Из тога се види ово правило: Кад год крива линија чија је једначина дата општим интегралом посматране диференцијалне једначине има обвојнице, та ће обвојница представљати сингуларни интеграл дате једначине.

Показаћемо сад како се одређују сингуларни интеграли за једну дату једначину. У том циљу разликујмо ова два случаја:

1° Претпоставимо да је познат општи интеграл дате једначине и нека је то

$$\lambda(x,y,C)=0$$

Знамо да се једначина обвојнице добија елиминацијом C из једначина

$$\lambda=0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial C}=0$$

Ако те две једначине имају заједничких решења по C, резултат ће бити извесна једначина

$$\varphi(x,y)=0$$

која представља једначину обвојнице и према томе сингуларни интеграл дате једначине. Ако су пак горње једначине немогуће у исто време, криве немају обвојнице и према томе једначина нема сингуларних интеграла овакве врсте.

Примери:

1. Нека је дата линеарна

једначина

$$\frac{dy}{dx} + f y + \varphi = 0$$

Пошто интеграциона константа улази линеарно у интеграл, то ће овај бити облика

$$y = C\alpha(x) + \beta(x)$$

Једначина $\lambda=0$ овде је

$$y - C\alpha(x) - \beta(x) = 0$$

а једначина $\frac{\partial\lambda}{\partial C}=0$

$$-\alpha(x) = 0$$

а њу је немогуће задовољити за ма какво x што значи да ниједна линеарна једначина првог реда овакве врсте нема сингуларних интеграла.

2. Нека је дата једначина

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{2}{\frac{dy}{dx}}$$

Ова једначина припада типу Clairaut-ових једначина и њен је општи интеграл као што смо видели

$$y = Cx + \frac{2}{C}$$

Једначина $\lambda=0$ овде је

$$y - Cx - \frac{2}{C} = 0$$

а једначина $\frac{\partial\lambda}{\partial C}=0$

$$x - \frac{2}{C^2} = 0$$

Да би из њих елиминисали C имаћемо из друге

$$C = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

па заменом у првој добијамо

$$y = \pm\left[x\sqrt{\frac{2}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}}\right]$$

па као што видимо, једначина има два сингуларна интеграла.

Тако се исто доказује и за најопштију Clairaut-ову једначину

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

да увек има оваквих сингуларних интеграла, јер је њен општи интеграл

$$y = xC + f(C)$$

и према томе имамо једначине

$$y - Cx - f(C) = 0$$

$$-x - f'(C) = 0$$

а оне очевидно могу постојати за ма какво x. Из друге од њих добићемо C, па кад добијену вредност за C сменимо у првој једначини, добићемо тражени сингуларни интеграл.

2° Претпоставимо да се не познаје општи интеграл. Напишимо једначину 7) у облику

$$F(x,y,p)=0 \qquad 9)$$

где је

$$\frac{dy}{dx}=p$$

Уочимо опет једну тачку M обвојнице у којој нека се секу две бесконачно блиске интегралне криве C_1 и C_2. Ако на свакој од тих кривих а у непосредној близини тачке M уочимо по једну тачку н.пр. M_1 и M_2 свака ће од њих имати своје x, y и $\frac{dy}{dx}$. Ако пустимо да M_1 и M_2 теже тачки M, онда ће вредности $x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}$ и $x_2, y_2, \frac{dy_2}{dx_2}$ тежити да се поклопе у M. Према томе ако се једначина 9) сматра као једначина са непознатом p, онда кад се x_y и y_y дају вредности што одговарају тачки M за те се вредности морају поклопити бар два решења за p, другим речима за координате тачке M једначина 9) мора имати један вишеструки корен по p. Међутим из теорије вишеструких корена зна се: да је за егзистенцију таквих корена једначине

$$f(x)=0$$

потребан услов

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

Према томе за тачку M имаћемо две једначине

$$f(x,y,p)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

ако су те две једначине уопште могуће за ма какво x, онда из њих можемо елиминисати променљиву p и резултат ће бити извесна једначина

$$\varphi(x,y)=0$$

која према самом начину на који смо је добили представља један сингуларни интеграл дате једначине. Из тога се види да ону исту улогу коју је играла интеграциона константа при тражењу сингуларних интеграла игра p кад се сингуларни интеграл одређује непосредно из диференцијалне једначине, а из свега тога изводи се ово практично упутство за тражење сингуларних интеграла овакве врсте: треба у датој једначини

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

сменити

$$\frac{dy}{dx}=p$$

тако да се добија једначина

$$F(x,y,p)=0$$

Затим треба образовати једначину

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0$$

и из ових двеју последњих једначина елиминисати p. Резултат елиминације биће извесна једначина

$$\Lambda(x,y)=0$$

која ће представљати сингуларни интеграл дате једначине.

Н. пр. нека је дата опет једначина

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{2}{\frac{dy}{dx}}$$

Ако ставимо

$$\frac{dy}{dx}=p$$

једначина постаје

$$y-xp-\frac{2}{p}=0$$

То је једначина $F=0$, а једначина $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ је

$$-x+\frac{2}{p^2}=0$$

Из друге се добија

$$p=\sqrt{\frac{2}{x}}$$

па заменом у прву

$$y=x\sqrt{\frac{2}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{2}}$$

и то је тражени сингуларни интеграл.

Примедба: Видели смо да је одређивање сингуларних интеграла основано на тој особини да две узастопне бесконачно блиске криве имају у једној ма којој тачки сингуларног интеграла исте координате и исту дирку. Пошто ту дефиницију задовољава обвојница интегралних кривих то увек, кад таква обвојница постоји, она ће бити сингуларан интеграл. Али има још једна крива која задовољава исту дефиницију. Та би крива била геометријско место повратних тачака интегралних кривих. За повратне тачке знамо да су то такве тачке у којима се састају две гране које у тој тачки имају исте координате и исту дирку. Према томе геометријско место тих тачака задовољава исту дефиницију коју и обвојница таквих кривих тако да ће једначина тога места задовољавати такође дату једначину. Према томе има случајева кад сингуларни интеграл једне једначине није обвојница интегралних кривих већ геометријско место њихових повратних тачака. У осталом овај је случај изузетан.

Одредба интеграционе константе.

Нека је дата једначина

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

и нека је

$$\Lambda(x,y,C)=0$$

њен општи интеграл. Варијацијом константе C имаћемо све бескрајно многе партикуларне интеграле од којих сваки одговара по једној специјалној вредности те константе. У примени диференцијалних једначина није непосредно дата она вредност константе која одговара посматраном интегралу, већ су дати само услови које треба интеграли да задовоље. Из таквих услова увек се може рачунски одредити сама вредност константе која таквом интегралу одговара. Услов на који се најчешће у таквим приликама наилази јесте овај: тражи се да дати партикуларни интеграл представља криву која пролази кроз једну дату тачку (a,b). Ако је

$$\lambda(x,y,C)=0$$

општи интеграл дате једначине, онда је дати услов аналитички изражен једначином

$$\lambda(a,b,C)=0$$

из које се може одредити вредност константе C што таквом интегралу одговара.

Н. пр. одредити онај партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=2+y$$

који пролази кроз тачку (2,10). Имаћемо

$$\frac{dy}{2+y}=dx$$

одакле

$$\log(2+y)=x+C$$

или

$$y=-2+Ce^{x}$$

Тражени услов доводи до једначине

$$10=-2+Ce^{2}$$

одакле је

$$C=\frac{12}{e^{2}}$$

Према томе тражени партикуларни интеграл јесте

$$y=-2+12e^{x-2}$$

Услов који треба да задовољи партикуларни интеграл често пута је дат и у овом облику: тражи се да интегрална крива у једној тачки чија је апсциса $x=a$ има дирку паралелну једном датом правцу. Услов задатка тада је ово: за $x=a$ треба да буде $\frac{dy}{dx}=\alpha$ где је α унапред дати број. Из општег интеграла

$$\lambda(x,y,C)=0$$

и дате диференцијалне једначине

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

можемо елиминисати y и резултат ће бити извесна једначина

$$\varphi(x, \frac{dy}{dx}, C)=0$$

Према услову задатка треба да буде

$$\varphi(a, \alpha, C)=0$$

одакле се може израчунати одговарајућа вредност константе C.

Н. пр. тражи се онај партикуларни интеграл једначине

$$\frac{dy}{dx}=2+y$$

који у тачки $x=0$ има дирку што са x-осовином гради угао од 45°. Овди је $a=0$ $\alpha=1$ и из општег интеграла

$$y=-2+Ce^x$$

и дате диференцијалне једначине, пошто елиминишемо y имаћемо

$$\frac{dy}{dx}-2=-2+Ce^x$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=Ce^x$$

или заменом $x=0$ $\alpha=1$

$$1=Ce^0=C$$

дакле

$$C=1$$

па је тражени партикуларни интеграл

$$y=-2+e^x$$

То би били најобичнији услови који се у примени једначина првог реда обично траже да буду задовољени. Међутим ти су услови по каткад компликованији и начин на који се помоћу њих одређује вредност константе увек је исти: треба такав услов изразити аналитички и тада, ако он у опште има смисла, израчунати из тако добијене једначине вредност константе.

Обичне диференцијалне једначине вишег реда.

Увод

Под обичном диференцијалном једначином вишег реда разуме се она диференцијална једначина која поред независно-промењиве количине и непознате функције садржи и који извод вишег реда те функције. Ред највишег извода који у једначини фигурише одређује и ред саме једначине. Н. пр. једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y^2=0$$

била би једначина другог реда; једначина

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+y^2=0$$

била би трећег реда и т. д. Општи облик једначине n-тог реда може се симболички представити једначином

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Видели смо да се код једначина првог реда под општим интегралом једначине разуме таква једна релација

$$\lambda(x,y,C)=0$$

између x и y која у себи садржи једну произвољну константу. Кад је једначина вишег реда важи ово правило: под општим интегралом једначине n-тог реда разуме се таква једна релација

$$\lambda(x,y,C_1,C_2,\cdots C_n)=0$$

која садржи n произвољних констаната. Ове константе називају се, као и код једначина првог реда, интеграционим константама. Општи интеграл једначине n-тог реда мора дакле садржати n интеграционих констаната. Спецификовањем ових констаната долази се до партикуларних интеграла једначине. Међутим код ових једначина можемо спецификовати или само једну или само неколико констаната и према томе можемо имати партикуларних интеграла који садрже по једну или више произвољних интеграционих констаната. У овом се разликују једначине вишег реда од једначина првог реда. Код ових сваки партикуларни интеграл представља по једну одређену функцију код које више ништа не остаје неодређено, међутим код једначина вишег реда он може садржати произвољне константе које остају неспецификоване.

Интегралити једначину вишег реда значи наћи њен општи интеграл. Методе за интеграцију разноврсне су и зависе од типа једначине с којом се има посла. Ми ћемо прећи најпростије од тих типова.

I. Тип: Једначине n-тог реда које не садрже независно-променљиву количину

То су једначине облика

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Ако ставимо да је

$$\frac{dy}{dx}=p$$

имаћемо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=p\frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+y\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и т. д.

Заменом тих вредности у датој једначини у овој ће фигурисати

$$y, p, \frac{dp}{dy}, \cdots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}$$

добијена једначина, ако се у њој сматра y као независно-променљива а p као непозната функција, биће $(n-1)^{\text{ог}}$ реда, дакле ред је једначине смањен. Претпоставимо да је ова једначина лакша за интеграцију од прве и нека је

$$\lambda(y, p, C_1, C_2, \cdots C_{n-1})=0 \qquad 2.)$$

њен општи интеграл. Претпоставимо да је једначина 2.) решена по p и ако га сменимо у једначини 2.) његовом вредношћу $\frac{dy}{dx}$ резултат ће бити једначина

$$\lambda\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}\right)=0 \qquad 3.)$$

Једначина 3.) је једначина првог реда у којој нема независно-променљиве и која се увек може интегралити. Интеграција те једначине увешће у рачун једну константу C_n тако да ћемо имати

$$\mu(x, y, C_1, C_2, \cdots C_n)=0$$

који ће представљати општи интеграл дате једначине.

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\frac{dy}{dx}=0$$

Ако ставимо

$$\frac{dy}{dx}=p$$

одакле је

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

једначина постаје

$$p\frac{dp}{dy}+py^2=0$$

или

$$\frac{dp}{dy}+y^2=0$$

или

$$dp=-y^3dy$$

Одатле интеграцијом

$$p=-\frac{y^3}{3}+C_1$$

Заменом $\frac{dy}{dx}=p$ добија се

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{3}+C_1$$

или

$$\frac{3dy}{3C_1-y^3}=dx$$

одакле

$$\int\frac{3dy}{3C_1-y^3}=x+C_2$$

где још валја израчунати интеграл рационалне функције на левој страни.

2. $$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a$$

- једначина криве линије чији полупречник кривине има сталну величину $\underline{a}$.

Заменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

добијамо

$$\frac{\left[1+p^2\right]^{3/2}}{\frac{dp}{dx}}=a$$

или одатле

$$dx=\frac{a\,dp}{\left[1+p^2\right]^{3/2}}$$

а одатле интеграцијом

$$x=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+C_1$$

Одавде је

$$p=\frac{x-C_1}{\sqrt{a^2-(x-C_1)^2}}$$

или, ако заменимо p његовом вредношћу,

$$dy = \frac{(x-C_1)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-C_1)^2}}$$

па отуда

$$y = -\sqrt{a^2-(x-C_1)^2} + C_2$$

или

$$(y-C_2)^2+(x-C_1)^2=a^2$$

а то је једначина круга полупречника а чије су координате центра C_1 и C_2.

3.
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

Ако заменимо

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\,\frac{dp}{dy}$$

добијамо

$$p\,\frac{dp}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

одакле

$$p\,dp=\frac{dy}{4\sqrt{y}}$$

а одатле интеграцијом

$$\frac{p^2}{2}=\frac{\sqrt{y}}{2}+C_1$$

или

$$p^2=\sqrt{y}+2C_1$$

Ако заменимо p његовом вредношћу

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\sqrt{y}+C_1$$

одакле

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{y^{1/2}+C_1}}$$

Заменом

$$y=z^2$$

$$dy=2z\,dz$$

добијамо

$$dx=\frac{2z\,dz}{\sqrt{z+C_1}}$$

одакле интеграцијом

$$x=\frac{4}{3}(z-2C_1)\sqrt{z+C_1}+C_2$$

или заменом z-а

$$x=\frac{4}{3}(y^{1/2}-2C_1)\sqrt{y^{1/2}+C_1}+C_2$$

4.
$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=my\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- једначина криве чији је полупречник кривине пропорционалан нормали.

Једначину можемо писати

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=my\frac{d^2y}{dx^2}$$

Заменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

добијамо из једначине

$$\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{1}{m}\frac{dy}{y}$$

одакле интеграцијом

$$\log(1+p^2)=\frac{2}{m}\log y-\frac{2}{m}\log C_1$$

или

$$1+p^2=\left(\frac{y}{C_1}\right)^{2/m}$$

или

$$p=\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{2/m}-1}$$

Заменом вредности за p добијамо

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{2/m}-1}}$$

Интеграција ове једначине је могућа у овим случајевима:

1° $m=1$; онда је

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2-1}}$$

па интеграцијом

$$x=C_2+C_1\log\left[\frac{y}{C_1}+\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2-1}\right]$$

одакле

$$C_1 e^{\frac{x-C_2}{C_1}}=y+\sqrt{y^2-C_1^2}$$

или

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right)$$

а то је једначина ланчанице.

2° Ако је $m=2$ имамо

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}}$$

одакле

$$x=2\sqrt{C_1}\sqrt{y-C_1}+C_2$$

или

$$(x-C_2)^2=4C_1(y-C_1)$$

– једначина параболе.

3° Ако је $m=-1$ имамо

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{-2}-1}}=\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}$$

одакле

$$x=-\sqrt{C_1^2-y^2}+C_2$$

или

$$y^2+(x-C_2)^2=C_1^2$$

- једначина круга.

4° Ако је $m=-2$

$$dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{-1}-1}}=\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1y-y^2}}$$

- диференцијална једначина циклоиде чији круг-производиља има полупречник $\frac{C_1}{2}$.

5. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$

Сменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

добијамо

$$\frac{dp}{dx}+\sqrt{1-p^2}=0$$

или

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}=-dx$$

одакле

$$\arcsin p=-x+C_1$$

или

$$p=\cos(x-C_1)$$

или ако заменимо p

$$dy=dx\cos(x-C_1)$$

одакле

$$y=\sin(x-C_1)+C_2$$

6. $$y^3\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$$

Сменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

добијамо

$$y^3p\frac{dp}{dy}+1=0$$

или

$$p\,dp=-\frac{dy}{y^3}$$

одакле

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1$$

или

$$p=\frac{\sqrt{1+y^2C_1}}{y}$$

или заменом p

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2C_1}}$$

одакле

$$x=\frac{1}{C_1}\sqrt{1+y^2C_1}+C_2$$

7. $$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$$

Сменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

имамо

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=1$$

одакле

$$\frac{p\,dp}{p^2-1}=-\frac{dy}{y}$$

а одатле

$$\log(p^2-1)^{1/2}=-\log y+\log C_1$$

или

$$\sqrt{p^2-1}=-\frac{C_1}{y}$$

Одавде је

$$p=\frac{\sqrt{y^2-C_1^2}}{y}$$

или сменом p

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-C_1}}$$

а одатле

$$x=\sqrt{y^2-C_1^2}+C_2$$

Пети: Једначине које не садрже непознату функцију

То су једначине облика

$$F(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \qquad 4.)$$

Ако се стави

$$\frac{dy}{dx} = p$$

биће

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2}$$

. . . .

Заменом у једначини 4.) добијамо једначину у којој ће фигурисати

$$x, \; p, \; \frac{dp}{dx}, \frac{d^2p}{dx^2}, \cdots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}$$

У новој једначини биће дакле ред смањен за јединицу и нека је

$$\lambda(x, p, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}) = 0$$

њен општи интеграл. Заменом p његовом вредношћу $\frac{dy}{dx}$ добија се једначина

$$\lambda(x, \frac{dy}{dx}, C_1, C_2, \cdots C_{n-1}) = 0 \qquad 5.)$$

која је првог реда и не садржи непознату функцију. За такве једначине знамо како се интеграле и та ће интеграција увести у рачун нову константу C_n, тако да ћемо имати општи интеграл једначине 4.).

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x) = 0$$

Ако ставимо

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

дата једначина постаје

$$\frac{dp}{dx} + f(x)p + \varphi(x) = 0$$

т.ј. линеарна једначина првог реда.

Претпоставимо да је она интеграљена и нека је

$$\lambda(x,p,C)=0$$

њен општи интеграл. Заменом

$$p=\frac{dy}{dx}$$

добија се

$$\lambda\left(x,\frac{dy}{dx},C\right)=0$$

чијом интеграцијом добијамо тражени општи интеграл.

2. $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-x^4=0$$

Ову једначину можемо писати

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\pm x^2$$

одакле, узастопном интеграцијом одмах добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x^4}{3\cdot 4}+C_1x+C_2$$

$$y=\pm\frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

3. $$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

Сменом

$$\frac{dy}{dx}=p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

добијамо једначину

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+p^2+1=0$$

коју можемо писати

$$\frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0$$

одакле интеграцијом

$$\operatorname{arc\,tg} p+\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} C_1$$

или

$$\frac{x+p}{1-px}=C_1$$

Одавде је

$$p=\frac{C_1-x}{1+C_1x}$$

или, ако заменимо p

$$dy=\frac{C_1-x}{1+C_1x}dx$$

а одавде је

$$C_1^2y=(1+C_1^2)\log(1+C_1^2x)-C_1x+C_2$$

4. $$\frac{d^4y}{dx^4}=e^{ax}$$

Узастопном интеграцијом одмах добијамо

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{e^{ax}}{a}+C_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^{ax}}{a^2}+C_1x+C_2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{ax}}{a^3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$y=\frac{e^{ax}}{a^4}+C_1\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+C_2\frac{x^2}{1\cdot2}+C_3x+C_4$$

5. $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2=(1+x)^n$$

Из једначине је

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\pm(1+x)^{n/2}$$

па узастопном интеграцијом одмах добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm2\frac{(1+x)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm2^2\frac{(1+x)^{\frac{n+5}{2}}}{(n+3)(n+5)}+C_1x+C_2$$

и најзад

$$y=\pm2^3\frac{(1+x)^{\frac{n+7}{2}}}{(n+3)(n+5)(n+7)}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2\frac{x}{1}+C_3$$

III Тип: Једначине које не садрже ни непознату функцију ни неколико узастопних извода

То су једначине облика

$$F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \qquad 6.)$$

Ако се стави

$$\frac{d^k y}{dx^k}=p$$

биће

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}=\frac{dp}{dx}$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^{n-k} p}{dx^{n-k}}$$

Заменом у 6.) добија се нова једначина у којој ће се јавити

$$x, p, \frac{dp}{dx}, \dots \frac{d^{n-k} p}{dx^{n-k}} \qquad 7.)$$

Према томе ред једначине биће смањен за k, па дакле ова једначина биће простија за интеграцију од прве. Претпоставивши да је ова једначина интеграљена, у њеном општем интегралу имаћемо (n-k) констаната и нека је тај интеграл

$$\Lambda(x, p, C_1, C_2, \dots C_{n-k})=0$$

Заменом

$$p=\frac{d^k y}{dx^k}$$

у њену добија се нова једначина

$$\Lambda\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, C_1, C_2, \dots C_{n-k}\right)=0 \qquad 8.)$$

која је $k^{тог}$ реда и такође много простија за интеграцију од једначине 6.). Интеграл те једначине 8.) увешће још k констаната тако да ћемо имати n констаната, па дакле имаћемо сам општи интеграл дате једначине.

Примери:

1. $$\frac{d^4 y}{dx^4}+x\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2=0$$

Ако ставимо

$$\frac{d^3y}{dx^3}=p$$

одакле је

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{dp}{dx}$$

дата једначина постаје

$$\frac{dp}{dx}+xp^2=0$$

одакле је

$$\frac{dp}{-p^2}=x\,dx$$

а одатле интеграцијом

$$\frac{1}{p}=\frac{x^2}{2}+C_1$$

или

$$p=\frac{2}{C_1+x^2}$$

Заменом p добија се једначина

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2}{C_1+x^2}$$

одакле се добија помоћу три узастопне интеграције њен општи интеграл.

IV. Тип: Једначине које су хомогене по $y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}$.

За једначину

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

се каже да је хомогена по

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}$$

онда, кад се сменивши у њој

$$\frac{dy}{dx}=k_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=k_2y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=k_3y$$

$$\dots\dots$$

цела једначина може скратити извесним степеном y-а. Н. пр. једначина

$$(1-x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+y^2-xy\frac{dy}{dx}=0$$

задовољава предњу дефиницију хомогености, јер ако у њој ставимо

$$\frac{dy}{dx}=R_1y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=R_2y$$

једначина се може скратити са y^2 тако да остаје

$$(1-x)R_2^2+1-xR_1=0$$

Ако се стави да је

$$y=e^{\int z dx}$$

где је z нова непозната функција, имаћемо

$$\frac{dy}{dx}=z e^{\int z dx}=zy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z\frac{dy}{dx}+y\frac{dz}{dx}=z^2y+y\frac{dz}{dx}$$

и т. д. Овако би имали продужити и са осталим изводима и пошто се у сваком од ових нових извода јавља по један извод zа нижег реда за јединицу од одговарајућег извода yа, то ћемо, кад их будемо сменили у једначини добити извесну једначину у којој ће фигурисати

$$x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$$

и из које, због претпоставке хомогености можемо извући $e^{\int z dx}$. Пошто једначину скратимо са тим заједничким чиниоцем добићемо као резултат извесну једначину у којој ће као независно-променљива бити x а непозната функција z, и чији ће ред бити смањен за јединицу. Ако ову последњу једначину будемо интегралили, њен ће интеграл садржати $(n-1)$ константу. Означимо тај општи интеграл са

$$\Lambda(x,z,C_1,C_2,\dots C_{n-1})=0$$

Из једначине

$$y=e^{\int z dx}$$

добијамо

$$z=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

па заменом у предњем општем интетрагу добија се једначина

$$\lambda\left(x, \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}, C_1, \dots C_{n-1}\right)=0$$

у којој ако сматрамо у као непознату функцију имамо једначину првог реда. Претпоставимо да је та једначина интеграљена, то ћемо имати још једну константу, тако да ћемо имати нову релацију

$$\mu\left(x, y, C_1, C_2, \dots C_n\right)=0$$

која ће бити општи интеграл дате једначине.

Н. пр. нека је дата једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\varphi(x)y=0 \qquad 1)$$

која очевидно задовољава претпостављени услов хомогености. Ако ставимо

$$y=e^{\int z dx}$$

имаћемо

$$\frac{dy}{dx}=z e^{\int z dx}=zy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z\frac{dy}{dx}+y\frac{dz}{dx}=z^2y+y\frac{dz}{dx}$$

Заменом у 1) добијамо

$$z^2y+y\frac{dz}{dx}+f(x)zy+\varphi(x)y=0$$

или ако скратимо са у

$$z^2+\frac{dz}{dx}+f(x)z+\varphi(x)=0 \qquad 2)$$

Према томе дата једначина сведена је на Riccati-јеву једначину првог реда.

Једначина 1) јесте најопштија линеарна једначина другог реда која има врло честу примену у Механици и Математичкој физици. Из овога што је изведено види се пак ова теорема: Ма каква линеарна једначина другог реда може се свести на Riccati-еву једначину првог реда. У тој вези између линеарне и Riccati-еве једначине лежи и сама вредност Riccati-еве једначине.

Примери:

1. $$y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y\frac{dy}{dx}}{1+x}$$

Ако сменимо

$$y = e^{\int z dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = zy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z^2y + y\frac{dz}{dx}$$

добијамо

$$y^2\left(z^2+\frac{dz}{dx}\right) - z^2y^2 = \frac{zy^2}{1+x}$$

или ако скратимо једначину са y^2

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1+x}$$

или

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{1+x}$$

Одавде је

$$\log z = \log(1+x) + \log C_1$$

или

$$z = C_1(1+x)$$

Отуда је

$$z dx = C_1(1+x) dx$$

а

$$\int z dx = C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right) + C_2$$

па је

$$y = e^{\int z dx} = e^{C_1(x+\frac{x^2}{2})+C_2}$$

- тражени општи интеграл.

2. $$x^2y\frac{d^2y}{dx^2} = (1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ако извршимо познату смену добијамо

$$x^2y^2\left(z^2+\frac{dz}{dx}\right) = (1+x^2)z^2y^2$$

или ако скратимо са y^2

$$x^2z^2 + x^2\frac{dz}{dx} = z^2 + z^2x^2$$

или

$$x^2\frac{dz}{dx} = z^2$$

одакле

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

Интеграцијом имамо

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1$$

одакле

$$z = \frac{x}{1+xC_1}$$

па је

$$z dx = \frac{x dx}{1+xC_1}$$

и

$$\int z dx = \int\frac{x dx}{1+xC_1}$$

Да би нашли интеграл на десној страни ставимо

$$1+C_1x=u$$

одакле

$$x=\frac{u-1}{C_1}$$

$$dx=\frac{du}{C_1}$$

па је

$$\int z\,dx=\int\frac{\frac{u-1}{C_1}\,\frac{du}{C_1}}{u}=\int\frac{u-1}{uC_1^2}du=$$

$$=\frac{u}{C_1^2}-\frac{\log u}{C_1^2}+C_2=$$

$$=\frac{1+C_1x}{C_1^2}-\frac{\log(1+C_1x)}{C_1^2}+C_2=$$

$$=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\log(1+C_1x)+C_2$$

Отуда је општи интеграл дате једначине

$$y=e^{\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\log(1+C_1x)+C_2}$$

3. $$xy\frac{d^2y}{dx^2}=y\frac{dy}{dx}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{nx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ако извршимо познату смену добијамо

$$xy^2\left(z^2+\frac{dz}{dx}\right)=zy^2+xz^2y^2+\frac{nxz^2y^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

или ако скратимо са y^2

$$xz^2+x\frac{dz}{dx}=z+xz^2+\frac{nxz^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

или одатле

$$x\frac{dz}{dx}=z+\frac{nxz^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

а ово је Bernouli-ева једначина. Ставимо

$$z=\frac{1}{u}$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

па добијамо

$$-\frac{x}{u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+\frac{nx}{u^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

или множењем са u^2

$$-x\frac{du}{dx}=u+\frac{nx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

или

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u+\frac{n}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

- а то је линеарна једначина, па је

$$u=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int e^{\int\frac{dx}{x}}\frac{n}{\sqrt{a^2-x^2}}+C_1\right]=$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int \frac{nx\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + C_1\right] =$$

$$= \frac{n\sqrt{a^2-x^2} + C_1}{x}$$

Отуда је

$$z = \frac{x}{n\sqrt{a^2-x^2} + C_1}$$

па је

$$\int z\,dx = \int \frac{x\,dx}{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1}$$

Да би нашли интеграл на десној страни ставимо

$$a^2-x^2 = v^2$$
$$nv + C_1 = \xi$$

па је

$$\int z\,dx = \int \frac{-v\,dv}{nv+C_1} = -\int \frac{\xi - C_1}{n^2\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{C_1}{n^2}\log\xi - \frac{\xi}{n^2} =$$

$$= \frac{C_1}{n^2}\log\left[n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right] - \frac{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1}{n^2} + C_2$$

Отуда је тражени општи интеграл

$$y = e^{\frac{C_1}{n^2}\log\left[n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right] - \frac{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1}{n^2} + C_2}$$

Ово можемо писати и друкчије: ако логаритмујемо обадве стране имамо

$$\log y = \frac{C_1}{n^2}\log\left[n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right] - \frac{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1}{n^2} + \log C_2$$

или одатле

$$n^2\log y = C_1\log\left[n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right] - n\sqrt{a^2-x^2} - \underbrace{C_1 \overset{n^2}{+} \log C_2}$$

или

$$n\sqrt{a^2-x^2} = C_1\log\left[n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right] - n^2\log C_2 y$$

VIII: Линеарне једначине.

Под линеарном једначином n-тог реда разуме се ма каква једначина облика

$$\frac{d^ny}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_n(x)y=F(x) \quad 1)$$

у којој њени изводи фигуришу линеарно. Коефицијенти

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots f_n(x)$$

могу бити сталне или функције x_a. Поједини од њих могу бити идентички равни нули. Члан $F(x)$ на десној страни једначине зове се независним чланом једначине. У случају кад је он идентички раван нули каже се да је једначина без независног члана.

а) Линеарне једначине без независног члана.

То су једначине облика

$$\frac{d^ny}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+f_n(x)y=0 \quad 2)$$

За овакве једначине важе ове основне теореме:

I Теорема: Ако је

$$y=u(x) \quad 3.)$$

један интеграл те једначине, онда је и

$$y=C\cdot u(x) \quad 4.)$$

бити такође интеграл те једначине. Јер ако сменимо 4.) у 2.) имаћемо као резултат

$$C\left[\frac{d^nu}{dx^n}+f_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots+f_{n-1}(x)\frac{du}{dx}+f_n(x)u\right] \quad 5.)$$

где заграда означава резултат који се добија кад се у 2) на место y_a стави u. А пошто је u интеграл, то ће заграда бити равна нули и према томе и израз 5.), што показује да је израз 4.) одиста интеграл дате једначине.

II Теорема: Ако су

$$\begin{aligned} y &= u_1(x) \\ y &= u_2(x) \end{aligned} \qquad 6.)$$

два интеграла једначине 2.), онда ће и израз

$$y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \qquad 7.)$$

бити такође интеграл те једначине. Јер ако у једначини 2.) сменимо y са изразом 7.), резултат ће бити облика

$$C_1[\cdots\cdots] + C_2[\cdots] \qquad 8.)$$

Прва заграда представља резултат који се добија кад се у 2.) смени y са $u_1(x)$, а друга кад се y смени са $u_2(x)$. Свака од тих заграда биће идентички равна нули пошто су u_1 и u_2 интеграли једначине; према томе и сам израз 8.) је раван нули, што значи да је израз 7.) одиста интеграл дате једначине.

III. Теорема: Ако се зна n партикуларних интеграла једначине 2.)

$$\begin{aligned} y &= u_1(x) \\ y &= u_2(x) \\ y &= u_3(x) \\ &\cdots\cdots \\ y &= u_n(x) \end{aligned} \qquad 9.)$$

општи интеграл те једначине биће

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n \qquad 10.)$$

где су

$$C_1, C_2, \cdots C_n$$

произвољне константе. Пре свега израз 10.) задовољава једначину 2.), јер ако y сменимо тим изразом, на левој страни једначине 2.) резултат ће бити облика

$$C_1[\cdots] + C_2[\cdots] + \cdots + C_n[\cdots]$$

где прва заграда представља резултат смене $y=u_1(x)$, друга резултат смене $y=u_2(x)$, $\cdots$ Пошто су $u_1, u_2, \cdots$ интеграли једначине 2.) то ће свака од тих заграда бити равна нули и према томе израз 10.) задовољава једначину 2.). А пошто тај израз садржи n констаната $C_1, C_2, \dots C_n$, то он представља општи интеграл једначине 2.), чиме је теорема доказана.

За линеарне једначине 2.), кад им је ред виши од 1, доказано је да се не могу интегралити док су функције $f_1, f_2, \cdots f_n$ непрецизиране. Међутим има бескрајно много типова таквих једначина у којима ти коефицијенти имају специјалне облике, те се оне могу интегралити. Такав би један тип једначина био н. пр. линеарна једначина са сталним коефицијентима.

б.) Линеарна једначина са сталним коефицијентима а без независног члана.

То су једначине облика

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \qquad 11.)$$

где су

$$a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n$$

стални бројеви. Ове је једначине први интегралио Euler и то на овај начин:

Ако се стави да је

$$y=e^{rx}$$

где је r за сад неодређен од x-а независан број, резултат смене на левој страни једначине 11.) биће

$$e^{rx}f(r) \qquad 12.)$$

где је

$$f(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n \qquad 13.)$$

Изаберимо сада неодређени број r тако

да он буде корен алгебарске једначине

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \qquad 14.)$$

тада ће идентички бити

$$f(r) = 0$$

и према томе и израз 12.) је раван нули, а отуда

$$y = e^{rx}$$

биће интеграл једначине 11.).

Према томе ако су

$$r_1, r_2, \cdots r_n$$

корени једначине 14.), пошто сваком од тих корена одговара по један интеграл, то ћемо имати n партикуларних интеграла

$$y = e^{r_1 x}$$
$$y = e^{r_2 x} \qquad 15.)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y = e^{r_n x}$$

Разликујмо сада ова два случаја:

1° Нека су корени $r_1, r_2, \cdots r_n$ сви неједнаки. Тада ће сви партикуларни интеграли 15.) бити међу собом различити и тада ће, према малочас доказаној теореми, општи интеграл једначине 11.) бити

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x} \qquad 16.)$$

2° Нека има и једнаких корена и нека је н. пр.

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_p$$

Тада ћемо опет имати n партикуларних интеграла 15.) помоћу којих можемо склопити и сам општи интеграл 16.). Али пошто је

$$e^{r_1 x} = e^{r_2 x} = \cdots = e^{r_p x}$$

то ће се израз 16.) јавити у облику

$$y = (C_1 + C_2 + \cdots + C_p) e^{r_p x} + C_{p+1} e^{r_{p+1} x} + \cdots + C_n e^{r_n x} \qquad 17.)$$

или ако константу $C_1 + C_2 + \cdots + C_p$ означимо са C_p

$$y = C_p e^{r_p x} + C_{p+1} e^{r_{p+1} x} + \cdots + C_n e^{r_n x} \qquad 18.)$$

Израз 18.) одиста ће бити интеграл једначине 11.), али пошто он садржи само $n-p$ константата, дакле мање него што треба за општи интеграл, то се он не може сматрати за општи интеграл. Да би у овом случају нашли сад општи интеграл, ми ћемо у једначини 11.) извршити смену

$$y = z e^{rx} \qquad 19.)$$

где је z нова непозната функција а r као и мало пре неодређени стални број. Узастопним диференцијалењем једначине 19.) добићемо

$$\frac{dy}{dx} = \left(zr + \frac{dz}{dx}\right) e^{rx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(r^2 z + 2z\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right) e^{rx}$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d^n z}{dx^n} + \binom{n}{1} r \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \cdots\right] e^{rx}$$

Заменом у једначини 11.) њена лева страна постаје

$$\left[z f(r) + \frac{dz}{dx}\frac{f'(r)}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{f''(r)}{1\cdot 2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{f'''(r)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right] e^{rx} \qquad 20.)$$

Претпоставимо сад да је

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_p$$

Онда је

$$r = r_1$$

корен p-тог реда за једначину

$$f(r) = 0$$

Према ономе што се зна из теорије једнаких корена алгебарских једначина тада ће бити у исто време

$$\begin{aligned} f(r)&=0\\ f'(r)&=0\\ f''(r)&=0\\ &\dots\dots\\ f^{p-1}(r)&=0 \end{aligned} \qquad 21.)$$

док је

$$f^{p}(r) \neq 0$$

Водећи рачуна о изразима 21.) у једначини 20.) нестаје неколико првих чланова тако да она постаје

$$\left[\frac{d^p z}{dx^p}\frac{f^p(r)}{1\cdot 2\cdots p} + \cdots\cdots + \frac{d^n z}{dx^n}\frac{f^n(r)}{1\cdot 2\cdots n}\right] e^{rx} \qquad 22.)$$

Лако се увиђа да ако се у изразу 22.) смени

$$z = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_p x^{p-1} \qquad 23.)$$

где су

$$C_1, C_2, C_3, \cdots C_p$$

произвољне константе, биће идентички

$$\frac{d^pz}{dx^p}=0$$

$$\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}}=0$$

. . . . . .

$$\frac{d^nz}{dx^n}=0$$

тако да је израз 22.) идентички раван нули. То показује да ако у изразу

$$y=ze^{rx} \tag{24.)}$$

узмемо за z вредност 23.), тај ће израз 24.) бити један интеграл једначине 11.).

Из тога се види ово правило: Кад год је r један вишеструки корен p-тог реда једначине

$$f(r)=0$$

том корену одговара интеграл

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_{p-1}x^{p-1}]e^{rx}$$

другим речима томе корену одговарају p партикуларних интеграла

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2e^{rx},\ \cdots\ x^{p-1}e^{rx}$$

Све ово вреди било да су корени реални било да су они имагинарни. Међутим кад су корени имагинарни ако би задржали ове интеграле у досадашњем облику они би били имагинарни. Ми ћемо показати како се тим интегралима може дати реалан облик. Разликујмо опет два случаја:

1° Уочимо један пар простих имагинарних корена н. пр.

$$r_1=\alpha+\beta i$$

$$r_2=\alpha-\beta i$$

првом би корену одговарао партикуларни интеграл

$$y_1=C_1e^{(\alpha+\beta i)x}=C_1e^{\alpha x}e^{+\beta ix}=C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \tag{25.)}$$

а другоме

$$y_2=C_2e^{(\alpha-\beta i)x}=C_2e^{\alpha x}e^{-\beta ix}=C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x) \tag{26.)}$$

Према томе посматраном пару имагинарних корена r_1 и r_2 одговарао би партикуларни интеграл

$$y=y_1+y_2=e^{\alpha x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]$$

где A и B имају вредности

$$A = C_1 + C_2$$
$$B = i\,(C_1 - C_2)$$

Пошто су C_1 и C_2 произвољне константе, то се и A и B могу сматрати као произвољне константе и према томе можемо их сменити константама C_1 и C_2, па посматраном пару имагинарних корена одговара даље партикуларни интеграл облика

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

2° Уочимо један пар вишеструких имагинарних корена н. пр.

$$r_1 = \alpha + \beta i$$
$$r_2 = \alpha - \beta i$$

и означимо са p ред таквих корена. Показали смо раније да ће првоме од ових корена одговарати партикуларни интеграл

$$y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_p x^{p-1})\, e^{r_1 x}$$

а другоме

$$y_2 = (D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + \cdots + D_p x^{p-1})\, e^{r_2 x}$$

Ако r_1 и r_2 сменимо њиховим вредностима имаћемо

$$y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_p x^{p-1})\, e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$
$$y_2 = (D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + \cdots + D_p x^{p-1})\, e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x)$$

Према томе таквом пару имагинарних корена одговарао би партикуларни интеграл

$$y = y_1 + y_2 = e^{\alpha x}[M_1 + M_2 x + \cdots + M_p x^{p-1}]\cos\beta x + e^{\alpha x}[N_1 + N_2 x + \cdots + N_p x^{p-1}]\sin\beta x \qquad 27.)$$

где су

$$M_1, M_2 \cdots M_p$$
$$N_1, N_2 \cdots N_p$$

константе чије су вредности

$$M_1 = C_1 + D_1 \qquad N_1 = i\,(C_1 - D_1)$$
$$M_2 = C_2 + D_2 \qquad N_2 = i\,(C_2 - D_2)$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

па пошто су константе $C_1, C_2 \cdots D_1, D_2 \cdots$ произвољне, очевидно је да ће и константе $M_1, M_2 \cdots N_1, N_2 \cdots$ бити произвољне и према томе у изразу 27.) има $2p$ произвољних констаната.

Из целокупне предње дискусије може се извести ово практично

Упутство. За интеграцију линеарних једначина са сталним коефицијентима а без независних чланова: Нека је дата једначина 11.)

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

Образујмо алгебарску једначину

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad 28.)$$

која се назива карактеристичном једначином дате једначине 11.), решимо ју по z и раздвојимо за себе реалне и имагинарне корене, просте и вишеструке. Онда:

1° Сваком реалном и простом корену н. пр. z_1 одговара интеграл облика

$$C_1e^{z_1x}$$

2° Сваком реалном вишеструком корену z_1 чији је ред p одговара интеграл облика

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_px^{p-1})e^{z_1x}$$

3° Сваком пару простих имагинарних корена н. пр.

$$z_1=\alpha+\beta i$$
$$z_2=\alpha-\beta i$$

одговара по један интеграл облика

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

4° Сваком пару вишеструких имагинарних корена н. пр.

$$z_1=\alpha+\beta i$$
$$z_2=\alpha-\beta i$$

чији ред нека је p одговара по један интеграл облика

$$e^{\alpha x}[M_1+M_2x+M_3x^2+\cdots+M_px^{p-1}]\cos\beta x+$$
$$+e^{\alpha x}[N_1+N_2x+N_3x^2+\cdots+N_px^{p-1}]\sin\beta x.$$

Збир свих оваквих интеграла представљаће општи интеграл дате једначине.

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Карактеристична једначина овде је

$$z^2-3z+2=0$$

Њени су корени

$$z_1=1$$

$$z_2=2$$

и пошто су они реални и прости, то ће првом одговарати интеграл

$$C_1 e^x$$

а друге

$$C_2 e^{2x}$$

и према томе општи је интеграл

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Карακт. једначина је

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

Њени корени су

$$r_1 = 1 + 2i$$
$$r_2 = 1 - 2i$$

па томе пару имагинарних корена одговара општи интеграл

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Карακт. једначина је

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

и она има два једнака корена

$$r_1 = r_2 = 1$$

Пошто је овде p=2 то ће овом пару вишеструких корена одговарати општи интеграл

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x$$

4. $$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$$

Карακт. једначина је

$$r^2 + k = 0$$

а њени корени

$$r_1 = +\sqrt{-k}$$
$$r_2 = -\sqrt{-k}$$

Према томе ако је k позитивно оба су корена имагинарна, па је општи интеграл

$$y = C_1 \cos x\sqrt{k} + C_2 \sin x\sqrt{k}$$

Ако је k негативно, корени су стварни и неједнаки, па је општи интеграл

$$y = C_1 e^{x\sqrt{-k}} + C_2 e^{-x\sqrt{-k}}$$

5. $$\frac{d^6y}{dx^6} - 11\frac{d^5y}{dx^5} + 49\frac{d^4y}{dx^4} - 115\frac{d^3y}{dx^3} + 154\frac{d^2y}{dx^2} - 114\frac{dy}{dx} + 36y = 0$$

Карακт. једначина је

$$r^6 - 11r^5 + 49r^4 - 115r^3 + 154r^2 - 114r + 36 = 0$$

а њени корени су

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 2$$
$$z_3 = z_4 = 3$$
$$z_5 = 1+i$$
$$z_6 = 1-i$$

па је отуда општи интеграл те једначине

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{3x} +$$
$$+ (C_5 \cos x + C_6 \sin x) e^{x}$$

6. $$6 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 0$$

Карakт. једначина је

$$6 z^2 - z - 1 = 0$$

а њени корени

$$z_1 = \frac{1}{2}$$
$$z_2 = -\frac{1}{3}$$

па је тражени општи интеграл

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{3}}$$

7. $$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Карakт. једначина је

$$z^3 - z^2 - z + 1 = 0$$

а њени корени

$$z_1 = -1$$
$$z_2 = z_3 = 1$$

па је тражени општи интеграл

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) e^{x}$$

8. $$\frac{d^3y}{dx^3} - (3m^2 - n^2) \frac{dy}{dx} + 2m(m^2 + n^2) y = 0$$

Карakт. једначина је

$$z^3 - (3m^2 - n^2) z + 2m(m^2 + n^2) = 0$$

а њени корени

$$z_1 = -2m$$
$$z_2 = m + ni$$
$$z_3 = m - ni$$

па је општи интеграл

$$y = C_1 e^{-2mx} + e^{mx} (C_2 \cos nx + C_3 \sin nx)$$

9. $$\frac{d^4y}{dx^4} - m^2 y = 0$$

Карakт. једначина је

$$z^4 - m^2 = 0$$

а њени корени

$$z_1 = \sqrt{m}$$
$$z_2 = -\sqrt{m}$$
$$z_{3,4} = \pm i \sqrt{m}$$

па је општи интеграл

$$y = C_1 e^{x\sqrt{m}} + C_2 e^{-x\sqrt{m}} + C_3 \cos x\sqrt{m} + C_4 \sin x\sqrt{m}$$

10. $$\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 62\frac{d^2y}{dx^3} - 156\frac{dy}{dx} + 169y = 0$$

Карakт. једначина је

$$r^4 - 12r^3 + 62r^2 - 156r + 169 = 0$$

њена корени су

$$r_{1,2} = r_{3,4} = 3 \pm 2i$$

па је општи интеграл

$$y = e^{3x}\left[(C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x\right]$$

11. $$\frac{d^5y}{dx^5} - 3m\frac{d^4y}{dx^4} + 4m^2\frac{d^3y}{dx^3} + 4m^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3m^4\frac{dy}{dx} - m^5y = 0$$

Карakт. једначина је

$$r^5 - 3mr^4 + 4m^2r^3 + 4m^3r^2 + 3m^4r - m^5 = 0$$

а њени корени

$$r_1 = r_2 = r_3 = m$$

$$r_{4,5} = \pm mi$$

па је општи интеграл

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{mx} + C_4\cos mx + C_5\sin mx$$

в) Линеарне једначине са сталним коефицијентима и са независним чланом.

То су једначине облика

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = F(x) \qquad 1)$$

За ове једначине важи ова основна теорема: Ако знамо један партикуларан интеграл те једначине инаћемо одмах и његов општи интеграл. Јер ако је

$$y = u(x)$$

један партикуларан интеграл, онда сменивши

$$y = u + z$$

где је z нова непозната функција, лева страна једначине 1) написане у облику

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^n} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny - F(x) = 0 \qquad 2)$$

постаје

$$\left[\frac{d^n u}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{du}{dx}+a_n u\right]+$$
$$+\left[\frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dz}{dx}+a_n z\right]$$

Лева страна постаје равна нули јер је по претпоставци u интеграл. Према томе ако смо у стању наћи z тако да и друга заграда буде равна нули, онда ће

$$y=u+z$$

бити очевидно интеграл једначине 1.). Али друга заграда стављена да је равна нули доводи до једначине

$$\frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dz}{dx}+a_n z=0 \qquad 4.)$$

која није ништа друго до прва једначина ослобођена независног члана. Претпоставимо да смо интегралили једначину 4.) и нека је

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_nz_n$$

њен општи интеграл; тада ће

$$y=u+C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_nz_n$$

бити интеграл једначине 1.), а пошто он садржи n констаната, он ће бити њен општи интеграл.

Отуда ово упутство за интеграцију једначине 1.): Треба наћи један ма који партикуларан интеграл једначине 1.), затим наћи општи интеграл те исте једначине али ослобођене независног члана. Збир та два интеграла биће општи интеграл првобитне (дате) једначине.

За једначину ослобођену независног члана видели смо како се интеграли и према томе сва тешкоћа при интеграцији једначине са независним чланом своди се на тражење једног партикуларног интеграла. Ми ћемо показати како се он тражи. Пре свега постоји неколико типова функције $F(x)$ за које се партикуларни интеграл налази врло лако простим путем. Такви су ови случајеви:

1°

Нека је $F(x)$ стална количина A. Ако ставимо да је

$$y=B$$

једначина се своди на

$$a_n B = A$$

одакле је

$$B=\frac{A}{a_n}$$

и према томе имамо партикуларан интеграл

$$y=\frac{A}{a_n}$$

У случају кад је

$$a_n=0$$

ова метода издаје, али тада се ради овако: Претпоставимо да је p последњих коефицијената равно нули тако да је

$$a_n=0$$
$$a_{n-1}=0$$
$$\cdots\cdot$$
$$a_{n-p+1}=0$$

тада треба ставити

$$y=Bx^p$$

Резултат замене у једначини биће

$$a_{n-p}B=A$$

одакле

$$B=\frac{A}{a_{n-p}}$$

па је тада партикуларни интеграл

$$y=\frac{Ax^p}{a_{n-p}}$$

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+(m^2-n^2)y=m-n$$

Партик. интеграл је овде

$$y=\frac{m-n}{m^2-n^2}=\frac{1}{m+n}$$

а каракт. једначина

$$r^2-2mr+m^2-n^2$$

има корене

$$r_1=m+n$$
$$r_2=m-n$$

па је тражени општи интеграл

$$y=C_1e^{(m+n)x}+C_2e^{(m-n)x}+\frac{1}{m+n}$$

2. $$\frac{d^7y}{dx^7}-\frac{d^5y}{dx^5}-2\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-2y=4m$$

Партик. интеграл је

$$y=\frac{4m}{-2}=-2m$$

а каракт. једначина

$$r^7-r^5-2r^4-5r^3-4r^2-3r-2=0$$

има као корене

$$r_1 = r_2 = -1$$

$$r_{\substack{3,5\\4,6}} = \pm i$$

$$r_7 = 2$$

па је тражени општи интеграл

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x +$$

$$+(C_5+C_6x)e^{-x}+C_7e^{2x}-2m$$

2°

Нека је $F(x)$ какав полином по xу чији степен нека је m н. пр.

$$F(x) = A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m$$

Ако тада ставимо да је

$$y = B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_mx^m$$

лако се уверавамо да је могуће наћи коефицијенте $B_0\ B_1\ B_2 \cdots B_m$ тако да је једначина задовољена, јер ћемо имати да је

$$\frac{dy}{dx} = B_1+2B_2x+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B_2+2\cdot 3B_3x+\cdots$$

Заменом у једначини и упоређивањем коефицијената леве и десне стране имали би низ једначина

$$a_nB_m = A_m$$

Из прве од њих можемо наћи B_m, из друге B_{m-1} и т. д.

Ова би метода издала у случају кад је

$$a_n=0$$

тада се овако ради: Претпоставимо да је неколико последњих сачинилаца н. пр. p равно нули

$$a_n=0$$

$$a_{n-1}=0$$

$$\cdots\cdot$$

$$a_{n-p+1}=0$$

Тада се једначина своди на

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-p}\frac{d^py}{dx^p}=F(x)$$

Ако ставимо да је

$$\frac{d^py}{dx^p}=z$$

једначина постаје

$$\frac{d^{n-p}z}{dx^{n-p}} + a_1\frac{d^{n-p-1}z}{dx^{n-p-1}} + \cdots + a_{n-p}z = F(x)$$

Пошто сад у новој једначини последњи члан није раван нули, то ћемо за z имати вредности

$$z = D_1 + D_2x + \cdots + D_m x^m$$

Заменом вредности за z добијамо једначину

$$\frac{d^py}{dx^p} = D_1 + D_2x + \cdots + D_m x^m$$

коју можемо интегралити p-пута узастопце тако да ћемо добити y као полином $(m+p)$-тог реда. Коефицијенти тога полинома одредили би се непосредном сменом у једначини и упоређењем леве и десне стране.

Примери:

1. $$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

ако заменимо

$$y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6Ax + 2B$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6A$$

добијамо

5.) $$6A - 12Ax - 4B - 3Ax^2 - 2Bx - C + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = x^3$$

или

$$2Ax^3 + (2B - 3A)x^2 + (2C - 2B - 12A)x + (6A - 4B - C + 2D) = x^3$$

па отуда упоређењем

$$2A = 1$$
$$2B - 3A = 0$$
$$2C - 2B - 12A = 0$$
$$2D - C - 4B + 6A = 0$$

одакле је

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = \frac{3}{4}$$
$$C = \frac{15}{4}$$
$$D = \frac{15}{8}$$

и према томе је

$$y_1 = \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{15}{8}$$

Каракт. пак једначина је

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

чији су корени

$$r_1 = 1$$
$$r_2 = -1$$
$$r_3 = 2$$

па је

$$y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

Према томе тражени општи интеграл је

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{15}{8}$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = x^2 - x + 3$

ако ставимо

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$$

добијамо једначину

$$12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = x^2 - x + 3$$

одакле упоређењем добијамо

$$A = \frac{1}{9} \quad B = \frac{1}{27} \quad C = \frac{1}{3}$$

и према томе

$$y_1 = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{3} = \frac{3x^2 + x + 9}{27}$$

Каракт. пак једначина је

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

чији су корени

$$r_1 = r_2 = 3$$

па је

$$y_2 = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$$

Отуда је тражени општи интеграл

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{3x^2 + x + 9}{27}$$

3°

Нека је функција F(x) експоненцијална функција

$$F(x) = A e^{\alpha x}$$

тада имамо један партикуларан интеграл облика

$$y = B e^{\alpha x}$$

где је B константа која се овако одређује: Извршимо у једначини смену

$$y = B e^{\alpha x}$$

$$\frac{dy}{dx} = B\alpha e^{\alpha x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = B\alpha^2 e^{\alpha x}$$

. . . .

Дата једначина тада постаје облика

$$f(\alpha)\, B e^{\alpha x} = A e^{\alpha x}$$

где је

$$f(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$$

Одатле је

$$B = \frac{A}{f(\alpha)}$$

и према томе имаћемо партикуларан интеграл

$$y = \frac{A e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$$

Ова метода издаје у случају кад је α корен једначине

$$f(\alpha) = 0$$

Тада се ради овако: Ако је α корен p-тог реда те једначине, стављa се да је

$$y = A x^p e^{\alpha x}$$

и онда је, као што би се лако могли уверити, увек могуће одредити константу A тако да y задовољава једначину. У том случају имаћемо један партикуларан интеграл облика

$$y = A x^p e^{\alpha x}$$

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^x$$

Карakт. једначина је

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

а њени корени

$$r_1 = -1$$
$$r_2 = -2$$

С друге стране овде је

$$A = 2$$
$$\alpha = 1$$

па је партикул. интеграл дате једначине

$$y = \frac{2e^x}{1^2 + 3\cdot 1 + 2} = \frac{2e^x}{6} = \frac{e^x}{3}$$

па је тражени општи интеграл

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 20y = e^{6x}$$

Карakт. једначина је

$$r^2 - 9r + 20 = 0$$

а њени корени су

$$r_1 = 4$$

$$r_2 = 5$$

С друге стране овде је

$$A = 1$$

$$\alpha = 6$$

па је партик. интеграл

$$y = \frac{1 \cdot e^{6x}}{6^2 - 9 \cdot 6 + 20} = \frac{e^{6x}}{2}$$

Према томе тражени општи интеграл је

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} + \frac{e^{6x}}{2} =$$

$$= e^{4x}\left(C_1 + C_2 e^{x} + \frac{1}{2} e^{2x}\right)$$

4°

Нека је

$$F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

где A или B може бити равно нули. Лако се тада уверавамо заменом да једначина има као партикуларан интеграл

$$y = M\cos\beta x + N\sin\beta x$$

где су M и N константе које се одређују заменом и упоређивањем леве и десне стране.

У случају кад метода издаје покушава се да се једначина задовољи партикуларним интегралом

$$y = (M\cos\beta x + N\sin\beta x)\,x^{p}$$

где су M и N константе, а p један, згодно изабран, цео број.

Примери:

1. $$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 14y = \sin x$$

Каракт. једначина је

$$r^3 - 6r^2 - 9r + 14 = 0$$

а њени корени су

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -2$$

$$r_3 = 7$$

па је општи интеграл облика

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{7x} + y_1$$

где још ваља одредити партик. интеграл y_1. Да би њега одредили извршимо у датој једначини смену

$$y = A\cos x + B\sin x$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x + B\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B\sin x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A\sin x - B\cos x$$

па добијамо једначину

$$A\sin x - B\cos x - 6(-A\cos x - B\sin x) -$$
$$- 9(-A\sin x + B\cos x) + 14(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

или ако ју средимо

$$(10A + 20B)\sin x + (20A - 10B)\cos x = \sin x$$

Одавде упоређењем леве и десне стране видимо да треба да буде

$$10A + 20B = 1$$
$$20A - 10B = 0$$

одакле добијамо

$$A = \frac{1}{50} \qquad B = \frac{1}{25}$$

па је дакле тражени партик. интеграл

$$y_1 = \frac{\cos x}{50} + \frac{\sin x}{25}$$

и према томе општи интеграл дате једначине је

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{7x} + \frac{\cos x}{50} + \frac{\sin x}{25}$$

2.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos mx$$

Каракт. једначина је

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$$

чији су корени

$$r_1 = r_2 = 1$$
$$r_3 = r_4 = -1$$

па је општи интеграл дате једначине облика

$$y = (C_1 + C_2x)e^{x} + (C_3 + C_4x)e^{-x} + y_1$$

где још ваља одредити партик. интеграл y_1. Да би њега одредили сменимо у датој једначини

$$y = A\cos mx$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx} = -Am\sin mx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -Am^2\cos mx$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = Am^3 \sin mx$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Am^4 \cos mx$$

па добијамо једначину

$$Am^4\cos mx + 2Am^2\cos mx + A\cos mx = \cos mx$$

или

$$(Am^4 + 2Am^2 + A)\cos mx = \cos mx$$

одакле упоређењем

$$Am^4 + 2Am^2 + A = 1$$

или

$$A(m^4 + 2m^2 + 1) = 1$$

или

$$A(m^2+1)^2 = 1$$

а одатле

$$A = \frac{1}{(m^2+1)^2}$$

и према томе је партик. интеграл

$$y_1 = \frac{\cos mx}{(m^2+1)^2}$$

а тражени општи интеграл

$$y = (C_1 + C_2x)e^{x} + (C_3 + C_4x)e^{-x}] + \frac{\cos mx}{(m^2+1)^2}$$

5°

Нека је

$$F(x) = Ae^{\alpha x}P(x);$$

где су A и α константе, $P(x)$ полином по x-у. Ако извршимо смену

$$y = Be^{\alpha x}z$$

где је B неодређена константа а z нова непозната функција, имаћемо диференцијалењем

$$\frac{dy}{dx} = B\alpha e^{\alpha x}z + Be^{\alpha x}\frac{dz}{dx}$$

. . . .

Заменом у датој једначини очевидно је да обе стране једначине можемо скратити са $e^{\alpha x}$ тако да ће резултат бити извесна линеарна једначина по z чија је независан члан функција - полином по x-у, а за такве случајеве видели смо како се налази интеграл.

6°

Нека је

$$F(x) = e^{\alpha x}(A\sin \beta x + B\cos \beta x)$$

Интеграција се опет врши сменом

$$y = e^{\alpha x} z$$

где је z нова непозната функција. Пошто се та смена буде извршила, једначина се опет може скратити са $e^{\alpha x}$ и резултат ће бити извесна линеарна једначина по z где ће независан члан бити облика $M \sin \beta x + N \cos \beta x$, а за такве једначине знамо како се оне интеграле.

7°

Нека је $F(x)$ равно збиру од више оваквих фактора за које се може наћи општи интеграл н. пр.

$$F(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

Лако се доказује ова теорема: Означимо леву страну једначине са $D(x,y)$ тако да је

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = D(x,y)$$

Ако се са u_1 означи један партикуларни интеграл једначине

$$D(x,y) = u_1(x) \qquad 8.)$$

са u_2 један парт. интеграл једначине

$$D(x,y) = u_2(x)$$

и т. д. онда ће

$$y = u_1 + u_2 + \cdots \qquad 8.)$$

представљати партик. интеграл једначине

$$D(x,y) = F(x) \qquad 9.)$$

(О томе се уверавамо заменом 8.) у 9.)

Ова је теорема од врло велике важности за интеграцију једначина са независним члановима, јер она даје могућности да се у врло великом броју случајева тај независан члан знатно упрости. Н. пр. ако је

$$F(x) = e^{\alpha x} \sin x$$

дату једначину можемо разложити на две тако да код прве буде независан члан $e^{\alpha x}$ а код друге $\sin x$. Код сваке од њих можемо наћи по један партикуларан интеграл, а збир тих партикуларних интеграла даће нам један партикуларан интеграл првобитне једначине.

9°

Нека је независан члан $F(x)$ ма каква функција од x. За такав случај постоје више метода, од којих ћемо ми навести једну која је најважнија јер се примењује и у другим приликама. То је:

Лагранжова метода или *метода варијације интеграционих констаната*.

Та се метода састоји у овоме: Нека је дата линеарна једначина

$$\Delta(y) = F(x) \qquad 1$$

где је краткоће ради стављено

$$\Delta(y) = \frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny \qquad 2$$

Кад у једначини 1) не би било независно члана т.ј. кад би се имало посла са једначином

$$\Delta(y) = 0 \qquad 3$$

онда, да би нашли општи интеграл те једначине треба да познајемо њених n партикуларних интеграла

$$y_1\ y_2 \cdots y_n$$

и тада ће општи интеграл бити

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \qquad 4)$$

где су $C_1\ C_2 \cdots C_n$ интеграционе константе.

Претпоставимо сада да на место једначине 3.) имамо једначину 1.); тада је очевидно да израз 4.) неће задовољавати једначину 1.) докле год $C_1, C_2 \cdots C_n$ остану константе. Лагранж је покушао да једначину 1.) ипак задовољи изразом 4.) али сматрајући $C_1\ C_2 \cdots C_n$ не као константе већ као функције од x одређене тако да једначина 1.) буде задовољена. Пре свега у изразу 4.) имамо n таквих констаната. Ако тај израз сменимо у једначини 1.), резултат те смене биће извесна једначина у којој ће бити исказана једна релација између тих констаната. Према томе и пошто је број констаната n остаје нам до воље да поставимо још $(n-1)$ релацију и то онакве релације какве будемо хтели. Ми ћемо за те релације изабрати онакав облик какав у том рачуну буде најзгоднији. Диференцијални израз 4.) имаћемо

$$\frac{dy}{dx}=\left[C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx}\right]+ \left[y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n\frac{dC_n}{dx}\right] \tag*{5.)}$$

Као једну релацију између константата C ми ћемо узети ону која се добија ставивши другу заграду да је равна нули т.ј.

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0 \tag*{6.)}$$

Образац 5.) постаје тада

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx} \tag*{7.)}$$

Његовим диференцијалењем добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\cdots+C_n\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]+ \left[\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}\right] \tag*{8.)}$$

Ставимо опет да је друга заграда у изразу 8.) равна нули па се тиме добија

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0 \tag*{9.)}$$

а образац 8.) постаје

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\cdots+C_n\frac{d^2y_n}{dx^2} \tag*{10.)}$$

Тај посао можемо продужити све док не добијемо тражену (n-1) релацију између константата C. Те су релације ове:

$$\begin{aligned}
&y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0\\
&\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx}=0
\end{aligned} \tag*{11.)}$$

За поједине изводе y-а по x-у имаћемо као што се из досадањег види

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+C_n\frac{dy_n}{dx}\\
&\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\cdots+C_n\frac{d^2y_n}{dx^2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}
\end{aligned} \tag*{12.)}$$

Диференцијалењем последњег од образаца 12.) добијамо

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left[C_1\frac{d^ny_1}{dx^n} + C_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + \cdots + C_n\frac{d^ny_n}{dx^n}\right] +$$

$$+\left[\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}\right] \qquad 13.)$$

Заменом 4.), 12.) и 13.) у једначини 1.) имаћемо као резултат

$$C_1\Delta(y_1) + C_2\Delta(y_2) + \cdots + C_n\Delta(y_n) +$$

$$+\left[\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}\right] = F(x) \qquad 14.)$$

Једначине 11.) и 14.) представљају систем од n једначина са n непознатих:

$$\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots \frac{dC_n}{dx}$$

Лако нам се уверити да се из тих једначина увек могу одредити ове непознате. Да би се у то уверили довољно је показати да детерминанта система није равна нули. Та је детерминанта као што се лако види:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Ако се сада сетимо да су у општем партикуларни интеграли облика међу собом једнаког

$$y_1 = e^{r_1x}$$

$$y_2 = e^{r_2x}$$

$$\cdots$$

кад све ово сменимо у детерминанти Δ ова постаје

$$\Delta = e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Први чиниоц очевидно није никада раван нули т.ј.

$$e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x} \neq 0$$

Други чиниоц представља једну Вандермондову детерминанту за коју смо видели да не може бити равна нули ако су јој елементи различити. Према томе кадгод су корени $r_1, r_2 \cdots r_n$ прости и различити детерминанта Δ биће различита од нуле што показује да једначина 1.) има један систем коначних и одређених решења. На исти се начин доказује да Δ није равно нули ни онда кад има једнаких корена. Тада знамо да ће партикуларан интеграл имати за вредности

$$y_1 = P_1(x)\, e^{r_1 x}$$

$$y_2 = P_2(x)\, e^{r_2 x}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

где су $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\cdots$ полиноми по $x_у$. Заменом у детерминанти може се опет извући као заједнички чинилац

$$e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x}$$

и онда у детерминанти што остаје фигурисаће у елементима x тако да ће цела детерминанта бити функција од x.

На тај начин из горњег система једначина можемо увек одредити непознате

$$\frac{dC_1}{dx},\ \frac{dC_2}{dx},\ \cdots\ \frac{dC_n}{dx}$$

као функције $x_а$ и на тај начин добићемо н. пр.

$$\frac{dC_1}{dx} = X_1$$

$$\frac{dC_2}{dx} = X_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dC_n}{dx} = X_n$$

где ће

$$X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$$

бити познате функције $x_а$. Из тих образаца имаћемо интеграцијом

$$C_1 = \int X_1\, dx$$

$$C_2 = \int X_2\, dx$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_n = \int X_n\, dx$$

Према самом начину на који смо дошли до ових вредности израз

$$y = y_1 \int X_1 dx + y_2 \int X_2 dx + \cdots + y_n \int X_n dx$$

биће један партикуларан интеграл једначине

$$\Delta(y) = F(x)$$

Примери:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sec x$$

Каракт. једначина

$$r^2+1=0$$

има корене

$$r_1=i$$

$$r_2=-i$$

па је

$$y_1=C_1\cos x+C_2\sin x$$

За одредбу константата C_1 и C_2 имамо према томе једначине

$$\cos x\frac{dC_1}{dx}+\sin x\frac{dC_2}{dx}=0$$

$$-\sin x\frac{dC_1}{dx}+\cos x\frac{dC_2}{dx}=\sec x$$

Из прве једначине је

$$\frac{dC_1}{dx}=-\operatorname{tg}x\frac{dC_2}{dx}$$

па заменом у другој имамо

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x\frac{dC_2}{dx}=\sec x$$

или одатле

$$\frac{dC_2}{dx}=1$$

а одавде

$$C_2=x+D_2$$

и према томе

$$\frac{dC_1}{dx}=-\operatorname{tg}x$$

одакле

$$C_1=\log(\cos x)+D_1$$

Отуда тражени општи интеграл је

$$y=D_1\cos x+D_2\sin x+x\sin x+\cos x\log(\cos x)$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\frac{x}{(1+x)^2}$$

Каракт. једначина је

$$r^2+3r+2=0$$

њени корени су

$$r_1=-1$$

$$r_2=-2$$

па је

$$y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

За одредбу константата C_1 и C_2 имамо

$$\frac{dC_1}{dx}e^{-x}+\frac{dC_2}{dx}e^{-2x}=0$$

$$-\frac{dC_1}{dx}e^{-x}-2\frac{dC_2}{dx}e^{-2x}=\frac{x}{(1+x)^2}$$

Из прве једначине је

$$\frac{dC_2}{dx} = -e^{x}\frac{dC_1}{dx}$$

па заменом у другој имамо

$$\frac{dC_1}{dx}e^{-x} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

одакле

$$C_1 = \int\frac{x e^{x} dx}{(1+x)^2}$$

Отуда

$$\frac{dC_2}{dx} = -\frac{e^{2x}x}{(1+x)^2}$$

одакле

$$C_2 = -\int\frac{x e^{2x} dx}{(1+x)^2}$$

Према томе тражени општи интеграл је

$$y = D_1e^{-x} + D_2e^{-2x} + e^{-2x}\int\frac{e^{2x}dx}{1+x}$$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} + m\frac{dy}{dx} - 6m^2y = n^x$$

Каракт. једначина је

$$r^2 + mr - 6m^2 = 0$$

а њени корени су

$$r_1 = 2m$$
$$r_2 = -3m$$

па је

$$y = C_1e^{2mx} + C_2e^{-3mx}$$

За одредбу констаната C_1 и C_2 имамо

$$\frac{dC_1}{dx}e^{2mx} + \frac{dC_2}{dx}e^{-3mx} = 0$$

$$\frac{dC_1}{dx}2me^{2mx} - \frac{dC_2}{dx}3me^{-3mx} = n^x$$

Из прве је

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{dC_2}{dx}\frac{1}{e^{5mx}}$$

па заменом у другој добијамо

$$\frac{dC_2}{dx} = -\frac{n^x}{5me^{-3mx}}$$

одакле

$$C_2 = -\frac{1}{5m}\frac{n^xe^{3mx}}{3m+\log n}$$

Отуда

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{n^x}{5me^{2mx}}$$

одакле

$$C_1 = -\frac{1}{5m}\frac{n^xe^{-2mx}}{2m-\log n}$$

Према томе тражени општи интеграл је

$$y = D_1e^{2mx} + D_2e^{-3mx} - \frac{n^x}{(2m-\log n)(3m+\log n)}$$