Ђор. Ј. Пујић, проф.

Геометријске примене интегралног рачуна.

Предавања
Др. Мих. Петровића,
проф. Универзитета.
(допуњена примерима).

Једна од непосредних примена интегралног рачуна јесте квадратура и ректификација кривих линија т.ј. израчунавање површина ограничених луцима кривих линија и израчунавање дужине лукова кривих линија.

Квадратура равних површина.

Познато је из елемената интегралног рачуна да ако је једна површина ограничена луком криве линије

$$y = f(x)$$

двема крајњим ординатама и апсцисном осовином, величина површине биће дата изразом

$$P = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ако је једначина криве дата у облику

$$x = \varphi(y)$$

одакле је

$$dx = \varphi'(y)\,dy$$

биће

$$P=\int_{\alpha}^{\beta} y\,\varphi(y)\,dy$$

где α и β означавају нове интегралне границе т.ј. где је α ордината криве што одговара апсциси a, а β ордината што одговара апсциси b.

На послетку дешава се да је једначина криве дата у облику

$$x=f(t)$$
$$y=\varphi(t)$$

одакле је

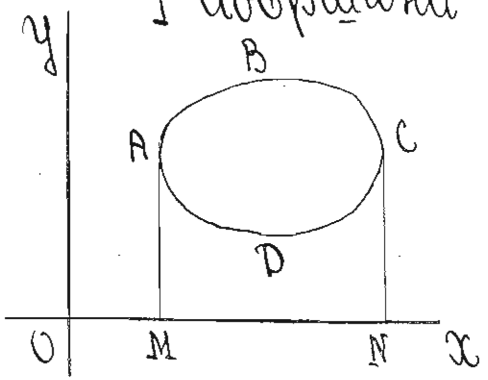
$$dx=f'(t)\,dt$$

па ће величина површине бити

$$P=\int_{m}^{n}\varphi(t)\,f'(t)\,dt$$

Примедбе:

I Површина ограничена кривом линијом ABCDA добија се кад се израчуна површина ABCMN и површина ADCMN, па се друга одузме од прве.



II Дешава се да лук криве линије што ограничава површину пролази с једне и друге стране x-осовине. Пошто су ординате над x-осовином позитивне а испод ње негативне, то ће и површина над x-осовином бити позитивна а испод ње негативна. Према томе тражени интеграл даће нам не апсолутну вредност тражене површине, већ алгебарски збир позитивних и негативних делова те површине. У случају кад су позитивни делови једнаки са негативним, интеграл ће се свести на нулу. Да би добили апсолутну вредност површине треба засебно израчунати њене позитивне и негативне делове, па их онда сабрати као да су сви позитивни.

III Видели смо да одређени интеграли могу бити коначни и одређени чак и онда кад функција под интегралним знаком постаје бескрајна за коју вредност између интегралних граница или за саме те границе. Према томе површина криве може бити коначна и онда кад крива линија што је граничи има асимптота паралелних y-осовини које леже између интегралних граница или се поклапају са којом границом. Тако исто видели смо да интеграл може бити коначан и одређен и кад је која граница бескрајна што показује да површина може бити коначна и онда кад се једна од граничних ордината налази у бескрајности. На послетку је показано и то да интеграл може бити коначан и одређен и онда кад функција у границама није одређена, што показује да и површина може бити одређена и онда кад лук криве што је граничи није одређен (пример су Фреснелови интеграли).

Примери:

1. Нека је дата крива круг
$$x^2+y^2=R^2$$

Одатле је
$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

па је површина
$$P=\int_a^b dx\sqrt{R^2-x^2}$$

Ако ставимо
$$x=Rt$$

одакле је
$$dx=R\,dt$$

неодређени ће интеграл бити
$$R^2\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{R^2}{2}\left[\arc\sin t+t\sqrt{1-t^2}\right]$$

или ако се вратимо на стару променљиву x сменом
$$t=\frac{x}{R}$$

интеграл ће бити
$$\frac{R^2}{2}\left[\arc\sin\frac{x}{R}+\frac{x}{R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right.$$

где још израчунати интеграл ваља

узети у границама у којима се тражи. Ако се као границе узму од 0 до R имали би површину једног кружног квадранта за који се из одређеног интеграла добија

$$P = \frac{R^2\pi}{4}$$

2. Наћи површину елипсе.

Нека је дата једначина елипсе у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

одакле је

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

па је

$$P=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}$$

Ако узмемо круг чији је полупречник раван полуосовини елипсе a, површина тога круга биће

$$U=\int dx\sqrt{a^2-x^2}$$

према томе је

$$P=\frac{b}{a}U$$

одакле се види да се површина елипсе ограничена луком елипсе, двема крајњим ординатама и x-осовином добија, кад се израчуна површина круга ограничена истим ординатама и помножи са $\frac{b}{a}$. Ово је прво по геометријски очевидно, јер смо видели да се елипса може сматрати као пројекција круга полупречника a у равни што пролази кроз малу осовину и која са равнином круга гради угао чији је косинус $\frac{b}{a}$. У зад. 1. нашли смо да квадрант круга износи

$$\frac{R^2\pi}{4}$$

и према томе квадрант елипсе износиће

$$\frac{b}{a}\frac{R^2\pi}{4}=\frac{b}{a}\frac{a^2\pi}{4}=\frac{ab\pi}{4}$$

а према томе површина целе елипсе

$$P = ab\pi$$

3. Дата је обична <u>парабола</u>

$$y^2 = 2px$$

Из ове једначине је

$$y = \sqrt{2px}$$

па је

$$P = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x \sqrt{x}\,dx$$

Како је неодређени интеграл

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

то је

$$P = \sqrt{2p}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^x = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}xy$$

а према томе део површине ограничене параболом од темена до нормале на осовину на одстојању x од координатног почетка биће

$$P = \frac{4}{3}xy$$

4. Ако се асимптоте <u>хиперболе</u> узму за коорд. осовине, једначина хиперболе добија облик

$$xy = k$$

одатле је

$$y = \frac{k}{x}$$

па је

$$P = \int_a^b y\,dx = k\int_a^b \frac{dx}{x} = k\log\frac{b}{a}$$

Као што се види површина хиперболе своди се на природан логаритам броја $\frac{b}{a}$. Због тога се природни логаритми зову још и <u>хиперболични логаритми</u>.

5. Ако је једначина <u>хиперболе</u> дата у обичном облику

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

одакле је

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

и према томе

$$P=\frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

Неодређени интеграл је

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Да би добили први од ова два интеграла на десну страни ставимо

$$x=u \qquad \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=dv$$

одакле је

$$du=dx \qquad v=\sqrt{x^2-a^2}$$

па је

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

Да би добили други од горња два интеграла, ставимо

$$x^2-a^2=x^2z^2$$

одакле је

$$x^2=\frac{a^2}{1-z^2}$$

$$x=\frac{a}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx=\frac{az\,dz}{(1-z^2)^2}$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=xz=\frac{az}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

па је заменом ових вредности

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\log(1-z)+\log(1+z)\right)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\log\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}{a^2}=$$

$$=\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Према томе је тражени неодређени интеграл

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

или ако интеграл с десне стране пребацимо на леву и сведемо

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

а према томе тражена површина

$$P=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]_a^x\cdot\frac{b}{a}$$

$$=\frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Како је из једначине хиперболе

$$\sqrt{x^2-a^2} = \frac{ay}{b}$$

то ако извршимо ову смену биће

$$P = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

6. Цисоида. Ако је пречник тога круга производиље $2a$, њена једначина је

$$(2a-x)y^2 = x^3$$

Одатле је

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} = \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

па је њена површина

$$P = \int_0^{2a}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

Да би добили неодређени интеграл ставимо

$$x = 2az^2$$

одакле је

$$dx = 4az\,dz$$

па је

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 8a^2\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Да би добили овај интеграл, ставимо

$$z^3 = u \qquad \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = dv$$

одакле је

$$du = 3z^2\,dz \qquad v = -\sqrt{1-z^2}$$

$$\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -z^3\sqrt{1-z^2} + 3\int z^2\sqrt{1-z^2}\,dz$$

$$= -z^3\sqrt{1-z^2} + 3\int\frac{z^2-z^4}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

$$= -z^3\sqrt{1-z^2} + 3\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - 3\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\frac{1}{4}z^3\sqrt{1-z^2} + \frac{3}{4}\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Да би добили овај последњи интеграл ставимо сада

$$z = u \qquad \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = dv$$

одакле је

$$du = dz \qquad v = -\sqrt{1-z^2}$$

и према томе

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -z\sqrt{1-z^2} + \int \sqrt{1-z^2}\,dz$$
$$= -z\sqrt{1-z^2} + \int \frac{1-z^2}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$
$$= -z\sqrt{1-z^2} + \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= -\frac{1}{2} z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= -\frac{1}{2} z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2} \arcsin z$$

Према томе је

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{4} z^3\sqrt{1-z^2} - \frac{3}{8} z\sqrt{1-z^2} + \frac{3}{8}\arcsin z$$
$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-z^2}\left(z^3 + \frac{3}{2}z\right) + \frac{3}{8}\arcsin z$$

или ако заменимо

$$z = \sqrt{\frac{x}{2a}}$$

добијамо

$$= -\frac{1}{8a}\sqrt{2ax-x^2}\left(\frac{x}{2a} + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

Тражени неодређени интеграл добијамо ако овај израз помножимо са $8a^2$, дакле

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2}\left(\frac{x}{2} + \frac{3a}{2}\right) + 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

а тражена површина је

$$P = \left[-\sqrt{2ax-x^2}\left(\frac{x}{2} + \frac{3a}{2}\right) + 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}\right]_0^{2a}$$
$$= \frac{3a^2\pi}{2}$$

Површина која лежи између обеју грана криве и њихове асимптоте је дакле

$$P = 3a^2\pi$$

т.ј. трипут већа од површине круга производиље.

7. Циклоида. Диференцијална једначина те криве је

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

па је површина

$$P = \int_0^{2a} \frac{y^2\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

или према претходном задатку 6.

$$P = \frac{3a^2\pi}{2}$$

8. Ланчаница. Њена ди-

ференцијална једначина је

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

па је

$$P = a\int_a^y \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \left[a\sqrt{y^2-a^2}\right]_a^y = a\sqrt{y^2-a^2}$$

9. <u>Станцера</u> Њена једначина је (Maria Agnesi)

$$xy^2 = 4a^2(2a-x)$$

Одатле је

$$y = \frac{2a\sqrt{2a-x}}{\sqrt{x}}$$

па отуда

$$P = 2a\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx$$

Неодређени интеграл је:

$$\int\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx = \int\frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx =$$

$$= 2a\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

Да би добили ова два интеграла извршимо смену

$$x = 2az^2$$

одакле је

$$dx = 4az\,dz$$

па је први од њих

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\arcsin z =$$

$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

а други

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 4a\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

или, према задатку 6.

$$= 4a\left[-\frac{1}{2}z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z\right]$$

$$= -2az\sqrt{1-z^2} + 2a\arcsin z$$

$$= -\sqrt{2ax-x^2} + 2a\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

Према томе је тражени неодређени интеграл

$$\int\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx = 2a\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \sqrt{2ax-x^2}$$

а тражена површина

$$P = 2a\left[2a\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \sqrt{2ax-x^2}\right]_0^{2a}$$

или одатле

$$P = 2a^2\pi$$

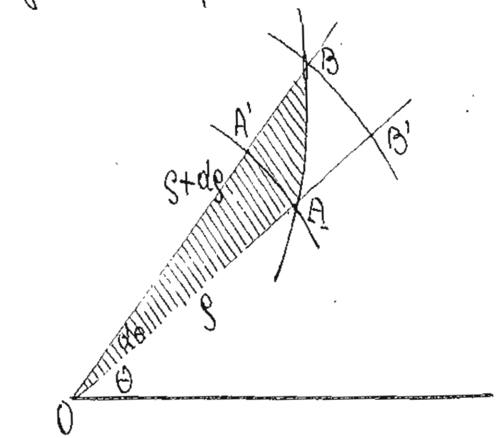
Целокупна пак површина која се налази између криве и њене асимптоте биће

$$P = 4a^2\pi$$

Површине у поларним координатама.

Када је крива дата у поларним координатама обично има да се израчунава површина између лука криве и потега. Узмимо тачку A чији је потег ρ а поларни угао θ, па пустимо да θ порасте за $d\theta$ тако да се добије тачка B са координатама $\rho + d\rho$ и $\theta + d\theta$. Тада је

$$dP = OAB$$



Да би израчунали ову површину приметимо да се њена вредност налази очевидно између вредности површина OAA' и OBB'. Прва од ових површина има за вредност

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

а друга

$$\frac{1}{2}(\rho+d\rho)^2 d\theta$$

одакле је

$$\frac{1}{2}\rho^2 < \frac{dP}{d\theta} < \frac{1}{2}(\rho+d\rho)^2$$

Пустимо да $d\theta$ тежи нули; тада ће и $d\rho$ тежити нули а $\frac{dP}{d\theta}$ остаје извод тражене површине по θ. Последња неједначина претвара се за $d\theta=0$ у једначину

$$\frac{dP}{d\theta}=\frac{1}{2}\rho^2$$

или

$$dP=\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

или

$$P=\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta$$

Ако је сад поларна једначина криве

$$\rho=f(\theta)$$

заменом те вредности у интегралу и узевши га у оним границама у којима се тражи, имали би тражену површину.

Ако је једначина криве дата у облику

$$\theta=\varphi(\rho)$$

одатле је

$$d\theta=\varphi'(\rho)\,d\rho$$

па ће бити

$$P=\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2\varphi'(\rho)\,d\rho$$

Примери:

1. Поларна једначина елипсе, ако се центар њен узме за пол а велика осовина за поларну осовину, гласи

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

па је

$$P=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{a^2b^2\,d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

Како је неодређени интеграл

$$\frac{1}{2}\int\frac{a^2b^2\,d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{b^2}{2}\int\frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{b^2}{a^2}+\operatorname{tg}^2\theta}=$$

$$=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}\theta}{b}\right)$$

и ако као интегралне границе узмемо $t_0=0$ $t=\frac{\pi}{2}$ добићемо

$$P=\frac{ab\pi}{4}$$

као четвртину елипсине површине.

2. Архимедова спирала има једначину

$$\rho = a\theta$$

па је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^\theta a^2\theta^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \theta^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^\theta =$$

$$= \frac{1}{6}a^2\theta^3$$

3. Поларна једначина круга је

$$\rho = r$$

па је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\theta = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{r^2}{2}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^2\pi}{4}$$

површина четвртине круга.

4. Логаритамска спирала има једначину

$$\rho = a e^{m\theta}$$

где је a једна линија, а m један број. Отуда је

$$P = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} a^2 e^{2m\theta}\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} e^{2m\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{e^{2m\theta}}{2m}\right]_{\theta_0}^{\theta} = \frac{a^2}{4m}\left[e^{2m\theta} - e^{2m\theta_0}\right] =$$

$$= \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{4m}$$

5. Лемниската има једначину

$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$$

па је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$$

а целокупна површина обеју грана

$$P = a^2$$

6. Ружа са четири гране има једначину

$$\rho = a\sin 2\theta$$

па се за површину оне гране која лежи у углу YOX добија

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

Да би добили неодређени интегра ставимо

$$2\theta = z$$

одакле је

$$2\,d\theta = dz$$

па је

$$\int \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int \sin^2 z \, dz$$

Да би добили овај интеграл, ставимо

$$\sin z = u \qquad \sin z \, dz = dv$$

одакле је

$$du = \cos z \, dz \qquad v = -\cos z$$

па је

$$\begin{aligned}\int \sin^2 z \, dz &= -\sin z \cos z + \int \cos^2 z \, dz = \\ &= -\sin z \cos z + \int (1 - \sin^2 z)\, dz = \\ &= -\sin z \cos z + \int dz - \int \sin^2 z \, dz = \\ &= -\sin z \cos z + z - \int \sin^2 z \, dz \\ &= \frac{1}{2}(-\sin z \cos z + z)\end{aligned}$$

и према томе је

$$\begin{aligned}\int \sin^2 2\theta \, d\theta &= \frac{1}{4}(-\sin z \cos z + z) = \\ &= \frac{1}{4}(-\sin 2\theta \cos 2\theta + 2\theta)\end{aligned}$$

а одатле

$$\begin{aligned}P &= \frac{a^2}{8}\Big[-\sin 2\theta \cos 2\theta + 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a^2\pi}{8}\end{aligned}$$

а према томе површина све четири гране

$$P = \frac{a^2\pi}{2}$$

т.ј. та површина је половина површине оног круга полупречника a у коме те гране леже.

7. Никомедова конхоида

има једначину

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b$$

па је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{t}\left(\frac{a}{\cos\theta} + b\right)^2 d\theta$$

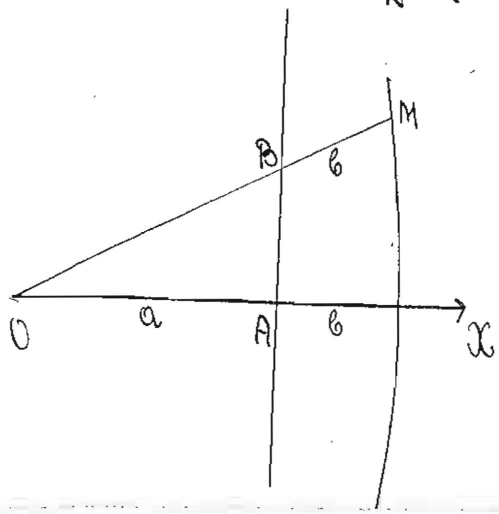
Неодређени интеграл је

$$\int\left(\frac{a}{\cos\theta}+b\right)^2 d\theta = a^2\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}+2ab\int\frac{d\theta}{\cos\theta}+b^2\int d\theta =$$

$$= a^2 \operatorname{tg}\theta + 2ab\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+b^2\theta$$

па отуда

$$P=\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\theta+ab\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\frac{b^2}{2}\theta$$



С друге стране површина троугла OAB је

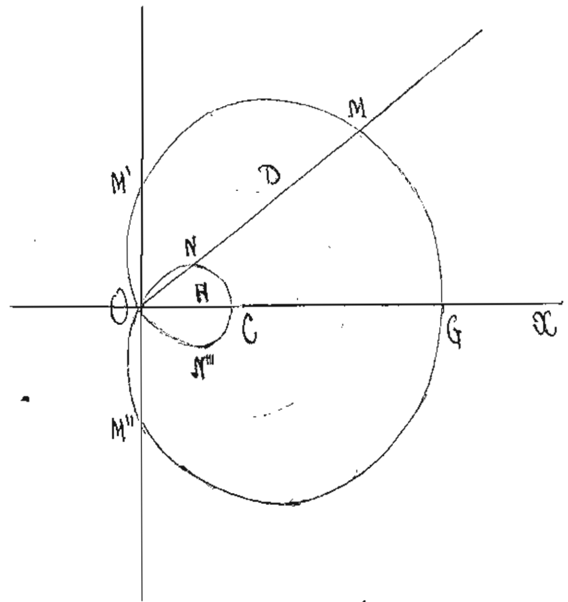
$$\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\theta$$

па је целокупна површина која лежи између криве и њене асимптоте дата изразом

$$2ab\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+b^2\theta$$

8. <u>Паскалов пуж.</u> Потражимо прво површину која лежи у криву OM'DM" чија је једначина

$$\rho = a\cos\theta + b$$



да би добили горњи део те површине довољно је извршити интеграцију између $\theta=0$ и и оне вредности за θ за коју је ρ нула, а та се вредност добија из једначине криве и она је $\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)$ коју ћемо, краткоће ради, обележити са α. Имаћемо

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}(a\cos\theta+b)^2 d\theta =$$

Неодређени интеграл је

$$\int(a\cos\theta+b)^2 d\theta = a^2\int\cos^2\theta\, d\theta+2ab\int\cos\theta\, d\theta+b^2\int d\theta$$

да би добили први од ових интеграла ставимо

$$\cos\theta = u \qquad \cos\theta\, d\theta = dv$$

одакле је

$$du=-\sin\theta\, d\theta \qquad v=\sin\theta$$

па је

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \sin\theta\cos\theta + \int \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \int (1-\cos^2\theta)\, d\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \int d\theta - \int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \theta - \int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(\sin\theta\cos\theta + \theta)$$

и према томе је неодређени интеграл

$$= \frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{a^2}{2}\theta + 2ab\sin\theta + b^2\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta + 2ab\sin\theta + \frac{\theta}{2}(a^2+2b^2)$$

а посматрана површина

$$P = \left[\frac{a^2}{4}\sin\theta\cos\theta + ab\sin\theta + \frac{\theta}{4}(a^2+2b^2)\right]_0^{\alpha}$$
$$= \frac{a^2}{4}\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin\alpha + \frac{\alpha}{4}(a^2+2b^2)$$

Како је

$$\cos\alpha = -\frac{b}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

то заменом добијамо

$$P = \frac{3}{4}b\sqrt{a^2-b^2} + \frac{1}{4}\alpha(a^2+2b^2)$$

а цела тражена површина је

$$\frac{1}{2}\left[(a^2+2b^2)\alpha + 3b\sqrt{a^2-b^2}\right]$$

Да би добили површину обухваћену кривом OKN''' чија је једначина

$$\rho = a\cos\theta - b$$

довољно је заменити b са $-b$, а α са $\pi-\alpha$ у предњем резултату, што даје

$$\frac{1}{2}\left[(a^2+2b^2)(\pi-\alpha) - 3b\sqrt{a^2-b^2}\right]$$

9. Декартов фолијум. Једначина криве је

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

а њена асимптота

$$y + x + a = 0$$

Ако се стави

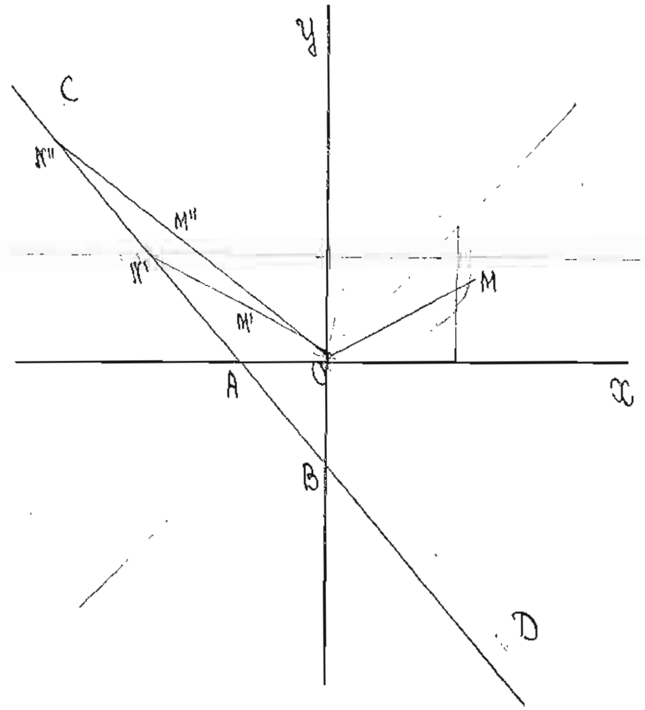
$$y = tx$$

једначина криве постаје

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

а њена асимптота

$$x = -\frac{a}{1+t}$$



Пренесимо сад

криву у поларни систем тако да је

$$\frac{y}{x} = tg\,\theta = t$$

одакле је

$$d\theta = \cos^2\theta \, dt$$

и сем тога

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

одакле је

$$\rho^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

Онда ће површина у опште бити

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int x^2 dt = \frac{1}{2}\int \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\, dt = \frac{3a^2}{2}\int \frac{3t^2dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^3}$$

и ако као инт. границе узмемо $t = tg\,0 = 0$ и $t = tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$, добија се

$$\frac{3a^2}{2}$$

као површина криве.

Да би добили површину између бескрајне гране криве OC, њене асимптоте и два потега, приметимо да је M'N'N''M'' једнако троуглу ON'N'' мање део OM'M'' површине фолијума. Пошто је једначина асимптоте

$$x = -\frac{a}{1+t}$$

општи израз за површину троугла ON'N'' је

$$\frac{1}{2}\int \frac{a^2}{(1+t)^2} dt = -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t}$$

Кад се површина троугла одузме од површине криве добија се као површина M'N'N''M''

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{1+t^3} - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{a^2}{2}\,\frac{2-t}{1-t+t^2}$$

Интеграљеви између граница $t = tg\,\frac{3\pi}{4} = -1$ и $t = tg\,\pi = 0$ добија се

$$\frac{a^2}{2}$$

Исти би се резултат добио за површину ограничену бескрајном граном OD и њеном асимптотом.

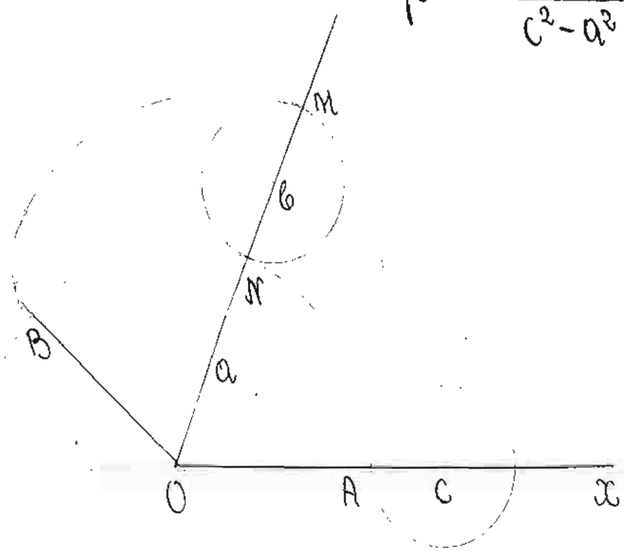
А пошто је површина троугла AOB такође $\frac{a^2}{2}$, то је целокупна површина између бескрајних грана криве и њене асимптоте

$$\frac{3a^2}{2}$$

т. ј. иста колика је и површина кврге.

10. Епициклоида. Њена једна[чина је]

$$p^2 = \frac{c^2(\rho^2-a^2)}{c^2-a^2}$$



Пошто је та
једначина да
та у функцији
ни потега ρ
нормале p ао
вучене из пол
на тангенту
то њено прво
трансформи-
сати општи
израз за повр
шину

$$\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta$$

Зна се да је

$$p = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$$

ако одатле израчунамо $d\theta$ и заменимо добијамо

$$\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int\frac{p\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-p^2}}$$

та дакле

$$P = \frac{1}{2}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{p\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-p^2}}$$

Како је из једначине криве

$$p = \frac{c\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}$$

одатле

$$\sqrt{\rho^2-p^2} = a\sqrt{\frac{c^2-\rho^2}{c^2-a^2}}$$

заменом у P добијамо, ако интегра-
лимо од $\rho_0 = a$ до $\rho = c$

$$P = \frac{c}{4a}(c^2-a^2)\frac{\pi}{2}$$

то је половина површине OAMB; цела
пак површина је

$$\frac{c(c^2-a^2)}{4a}\cdot\pi$$

а ако c заменимо са $a+2b$, добија се

$$\frac{b}{a}(a^2+3ab+2b^2)\pi$$

Ако се од ове површине одбије

површина исечка OANB т.ј. $ab\pi$, добија се за површину између епициклоиде и сталног круга

$$\frac{b^2\pi}{a}(3a+2b)$$

Ако је $b=a$ т.ј. ако су стални круг и круг изводник једнаки, крива постаје Кардиоида чија је површина према предњем једнака

$$P=6a^2\pi$$

11. Хипоциклоида. Њена једначина је иста као једначина епициклоиде само што је код ње

$$c=a-2b$$

Због те вредности $c<a$ целокупна површина биће

$$\frac{c(a^2-c^2)}{4a}\cdot\pi$$

или ако сменимо c њеном вредношћу

$$\frac{b}{a}(a^2-3ab+2b^2)\cdot\pi$$

Отуда ће површина која се налази између криве и сталног круга бити

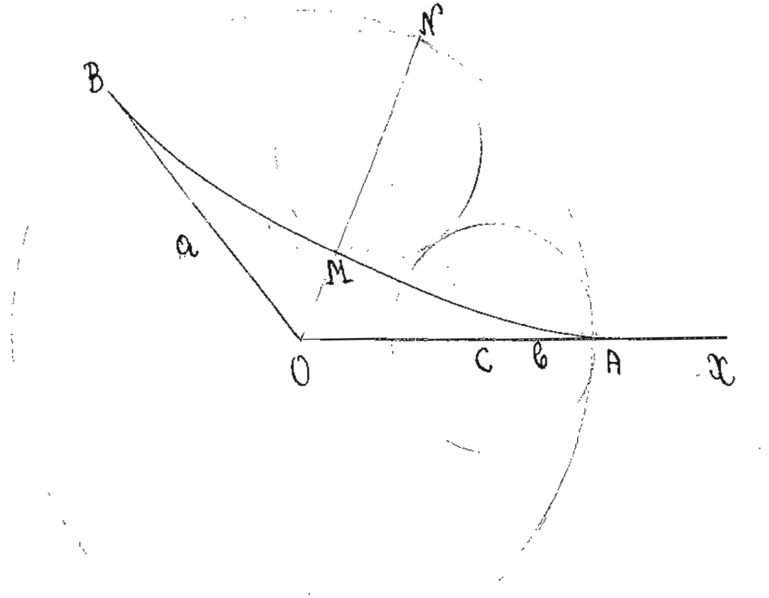
$$\frac{b^2\pi}{a}(3a-2b)$$

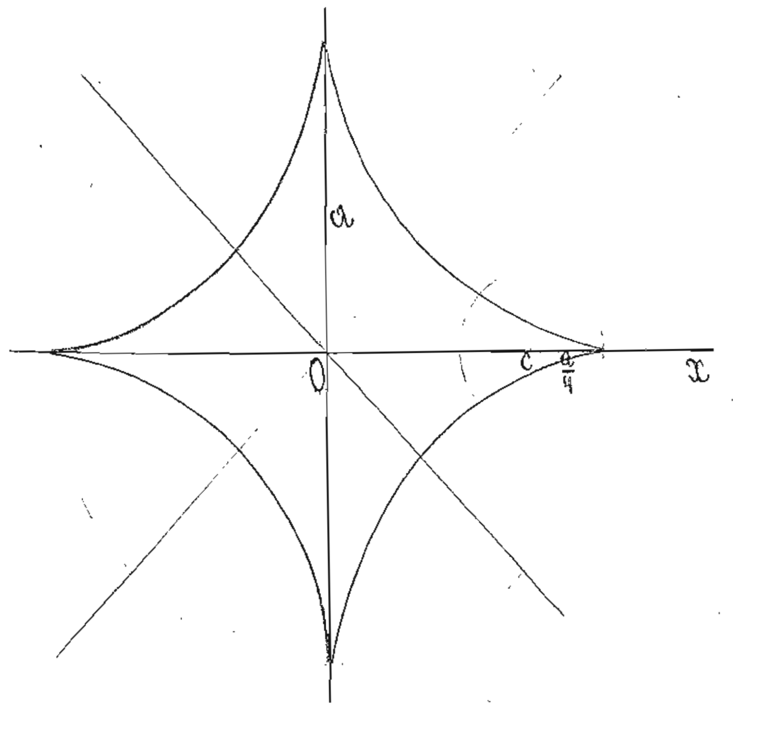
ако је $b=\frac{a}{4}$ израз $\frac{b}{a}(a^2-3ab+2b^2)$ даје $\frac{3}{32}a^2\pi$ што је површина хипоциклоиде, чија је једначина

$$p^2=\frac{a^2-\rho^2}{3}$$

или

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$





Ректификација кривих у равни.

Под ректификацијом разуме се израчунавање лукова.

Уочимо на кривој две тачке чије апсцисе нека су x_1 и x_2, а ординате y_1 и y_2. Растојање тих двеју тачака биће:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ако је тачка $(x_1 y_1)$ бесконачно блиска тачки $(x_2 y_2)$ разлика x_2-x_1 постаје dx а разлика y_2-y_1 постаје dy, а растојање тих двеју тачака постаје диференцијал лука посматране криве. Према томе ако се дужина лука означи са s биће

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

или

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

То је основни образац за израчунавање дужине лукова.

Размотримо сада ове случајев

1° Нека је једначина криве дата у облику

$$y=f(x)$$

одакле је

$$dy=f'(x)\,dx$$

тако да образац 2. постаје

$$ds=dx\sqrt{1+f'(x)^2}$$

одакле је

$$s=\int dx\sqrt{1+f'(x)^2}$$

На пример тражи се лук параболе

$$y=kx^2$$

Одатле је

$$dy=2kx\,dx$$

та ће бити

$$s=\int dx\sqrt{1+4k^2x^2}$$

2. ако ставимо

$$2kx=t$$

одакле је

$$dx=\frac{dt}{2k}$$

наћемо

$$s=\frac{1}{2k}\int dt\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{4k}\left[\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+t\sqrt{1+t^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4k}\left[\log\left(2kx+\sqrt{1+4k^2x^2}\right)+2kx\sqrt{1+4k^2x^2}\right]$$

2° Нека је једначина криве дата у облику

$$x=f(t)$$
$$y=\varphi(t)$$

одакле је

$$dx=f'(t)\,dt$$
$$dy=\varphi'(t)\,dt$$

та је

$$s=\int dt\sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}$$

На пример нека је дата једначина круга у облику

$$x=R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

одакле је

$$dx = -R\sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = R\cos\varphi\, d\varphi$$

па је

$$s = \int d\varphi \sqrt{R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi} = \int R\, d\varphi = R\varphi$$

или ако се вратимо на стару променљиву биће

$$s = R \arccos\frac{x}{R}$$

3°. Нека је једначина криве дата у облику

$$x = \varphi(y)$$

одакле је

$$dx = \varphi'(y)\, dy$$

па је

$$s = \int dy \sqrt{1+\varphi'(y)^2}$$

4° Ако је једначина криве дата у поларним координатама

$$f(\rho, \varphi) = 0$$

биће

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}$$

а одатле

$$s = \int \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

Помоћу основног обрасца

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

може се решавати велики број геометријских задатака. Из њега се изводе ова два обрасца која имају врло честу примену: Образац 2. можемо написати у облику

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad 3.$$

Ако се са α означи угао који гради дирка у тачки (x, y) са x-осовином биће

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

одакле је

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

па образац 3. постаје

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

или

$$dx = ds\cos\alpha$$

Тако исто образац 2. можемо написати у облику

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$$

Међутим из обрасца

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

добија се да је

$$\sin\alpha = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

и према томе образац 5. постаје

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

одакле је

$$dy = ds\sin\alpha$$

На тај начин дошли смо до ова два важна обрасца

$$dx = ds\cos\alpha$$
$$dy = ds\sin\alpha \tag{6.}$$

где α значи угао дирке са x-осовином. Помоћу њих решава се велики број задатака од којих ћемо ми навести ове:

1. Наћи криву линију код ко-

ће постојати унапред дати однос између полупречника кривине ρ и правца дирке α. Нека је тај однос исказан у облику

$$\rho = f(\alpha) \tag{5.}$$

Видели смо у теорији кривина да се полупречник кривине може претставити у облику

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

одакле је

$$ds = \rho\, d\alpha$$

или

$$ds = f(\alpha)\, d\alpha$$

Заменом у обрасцима 6. добија се

$$dx = f(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha$$
$$dy = f(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha$$

одакле интеграцијом добијамо

$$x = \int f(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha$$
$$y = \int f(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha \tag{7.}$$

Замислимо да су ове интеграције извршене имаћемо координате криве линије изражене као функције параметра α.

На пример наћи криву линију

за коју је полупречник кривине сталан. Ако се та стална вредност означи са k имаћемо

$$\rho = k$$

и према томе

$$f(\alpha) = k$$

Заменом у обрасцима 7. добијамо

$$x = k\int \cos\alpha \, d\alpha = k \sin\alpha$$

$$y = k\int \sin\alpha \, d\alpha = -k \cos\alpha$$

Квадрирањем и сабирањем ових једначина добија се

$$x^2 + y^2 = k^2$$

– дакле тражена крива је круг полупречника k.

2. Наћи криву линију за коју ће између полупречника кривине и лука постојати унапред дати однос. Претпоставимо да је тај однос дат у облику

$$\rho = f(s)$$

Из обрасца

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

имаћемо

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{f(s)}$$

одатле интеграцијом

$$\alpha = \int \frac{ds}{f(s)}$$

ако извршимо интеграцију имаћемо α као функцију од s н. пр.

$$\alpha = \varphi(s)$$

Заменом у обрасцима 6. добијамо

$$dx = ds \cos\varphi(s)$$

$$dy = ds \sin\varphi(s)$$

или одатле

$$x = \int ds \cos\varphi(s)$$

$$y = \int ds \sin\varphi(s)$$

На тај начин имаћемо координате чиме је задатак решен.

На пример: наћи криву за коју је полупречник кривине ма које тачке раван луку криве линије рачунатом од једне сталне тачке на кривој. Дати однос је

$$\rho = s$$

Заменом у

$$d\alpha = \frac{ds}{s}$$

биће

$$\alpha = \log s$$

па отуда

$$x = \int ds \cos \log s$$

$$y = \int ds \sin \log s$$

Примери:

1. Дат је круг чија је једначин

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Из те једначине је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

па отуда

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\left[\arcsin \frac{x}{R}\right]$$

Ако се интеграл узме у границама од $x_0 = 0$ до $x = R$, добијамо као четвртину обима круга

$$\frac{R\pi}{2}$$

2. Дата је логаритамска спи-
рала чија је једначина

$$\rho = a e^{m\varphi}$$

Из ње је

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = m a e^{m\varphi}$$

па отуда

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + m^2 a^2 e^{2m\varphi}} \cdot d\varphi = a\sqrt{1+m^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[e^{m\varphi}\right]_{\varphi_0}^{\varphi} = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(\rho - \rho_0)$$

3. Поларна једначина кру-
га је

$$\rho = a$$

па отуда

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$$

и према томе

$$s = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = a\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a\pi}{2}$$

четвртина обима.

4. Дата је ланчаница чија је једначина

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Из ње је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

и према томе

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2}$$

У предњем одељку нађено је за површину

$$P=a\sqrt{y^2-a^2}$$

па је према томе

$$P=a\cdot s$$

5. Диференцијална једначина циклоиде је

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

па отуда

$$s=\int_0^{2a}\sqrt{1+\frac{y^2}{2ay-y^2}}\,dy=\sqrt{2a}\int_0^{2a}\frac{dy}{\sqrt{2a-y}}=$$

$$=\sqrt{2a}\cdot\left[-2\sqrt{2a-y}\right]_0^{2a}=4a$$

6. Једначина полу-кубне параболе је

$$ay^2=x^3$$

Из ње је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2ay}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{9x^4}{4a^2y^2}=\frac{9x}{4a}$$

па отуда

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^x\sqrt{4a+9x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{2}{27}(4a+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x=$$

$$=\frac{(4a+9x)^{\frac{3}{2}}-(4a)^{\frac{3}{2}}}{27\sqrt{a}}$$

7. Обична парабола има једначину

Из ње је
$$y^2=2px$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p}$$
па отуда
$$s=\int_0^y\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=$$
$$=\frac{1}{p}\int_0^y\frac{p^2+y^2}{\sqrt{p^2+y^2}}\,dy=p\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}}+\frac{1}{p}\int_0^y\frac{y^2dy}{\sqrt{p^2+y^2}}$$
Да би нашли први од ова два интеграла ставимо
$$\sqrt{p^2+y^2}=z-y$$
одакле је
$$y=\frac{z^2-p^2}{2z}$$
$$dy=\frac{z^2+p^2}{2z^2}\,dz$$
па заменом добијамо
$$\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}}=\int\frac{dz}{z}=\log z=\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$
Да би одредили други интеграл, ставимо
$$y=u\qquad\frac{y\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}}=dv$$
одакле је
$$du=dy\qquad v=\sqrt{p^2+y^2}$$
па је
$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{p^2+y^2}}=y\sqrt{p^2+y^2}-\int dy\sqrt{p^2+y^2}=$$
$$=y\sqrt{p^2+y^2}-\int\frac{p^2+y^2}{\sqrt{p^2+y^2}}\,dy=$$
$$=y\sqrt{p^2+y^2}-p^2\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}}-\int\frac{y^2dy}{\sqrt{p^2+y^2}}=$$
$$=y\sqrt{p^2+y^2}-p^2\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)-\int\frac{y^2dy}{\sqrt{p^2+y^2}}$$
$$=\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^2}{2}\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$
и према томе
$$s=p\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)+\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p}{2}\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$

8. Архимедова спирала и-
ма једначину
$$\rho=a\varphi$$
одакле је

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=a$$

па је

$$s=\int_0^\varphi\sqrt{\rho^2+a^2}\,d\varphi=\int_0^\varphi\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^\varphi\sqrt{1+\varphi^2}$$

Сличном интеграцијом као у претходном задатку добијамо

$$s=\frac{a\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2}+\frac{a}{2}\log\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)$$

9. Дата је елипса

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Из њене једначине је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

а одатле

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{b^4x^2}{a^4y^2}=\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$$

па је четвртина обима елипсе

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx$$

Међутим неодређени интеграл можемо писати

$$\int\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx=\int\sqrt{\frac{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

па ако заменимо

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$$

овај неодређени интеграл постаје

$$=\int\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

Ако сада ставимо

$$x=a\sin\varphi$$

што смемо учинити јер је x увек мање од a, неодређени интеграл постаје

$$=a\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

Ако се сада овај корен развије по биномном правилу, и ако се границе 0 и a смене одговарајућим границама 0 и $\frac{\pi}{2}$, добићемо

$$s=a\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\varepsilon^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\varepsilon^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi-\dots\right]$$

или ако се ови интеграли израчунају по ранијим обрасцима

$$s=\frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\varepsilon^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\varepsilon^3\right)^2-\dots\right]$$

и тај нам ред представља четвртину елипсиног обима.

10. Једначина епициклоиде

$$p^2=\frac{c^2(\rho^2-a^2)}{c^2-a^2}\qquad c=a+2b$$

Пошто се она јавља у функцији од p бија се и ρ треба прво трансформисати

$$ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\varphi^2}$$

Како је

$$p=\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}}$$

то ако одавде израчунамо $d\varphi^2$ и заменимо, добијамо

$$ds=\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-p^2}}$$

а одатле

$$s=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-p^2}}$$

како је из једначине криве

$$\sqrt{\rho^2-p^2}=a\sqrt{\frac{c^2-\rho^2}{c^2-a^2}}$$

то ће половина лука бити

$$s=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}\int_a^c\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{c^2-\rho^2}}=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{4b}{a}(a+b)$$

а цео лук ће бити

$$\frac{8b}{a}(a+b)$$

Ако је $b=a$ (кардиоида), до-

$16a$.

11. Хипоциклоида има једначину

$$p^2=\frac{c^2(\rho^2-a^2)}{c^2-a^2}\qquad (c=a-2b)$$

На сличан начин као у претходном задатку добили би

$$\frac{8b}{a}(a-b)$$

за цео лук криве.

Ако је $b=\frac{a}{4}$, добија се $\frac{3a}{2}$. То је четвртина хипоциклоиде чија је једначина

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

Ректификација кривих линија у простору.

Уочимо на једној датој кривој у простору две тачке $M(x,y,z)$ и $M'(x',y',z')$. Растојање тих тачака дато је обрасцем

$$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Ако тачке M и M' постану бесконачно блиске једна другој, разлике $(x-x')$, $(y-y')$ и $(z-z')$ постају dx, dy и dz, а растојање MM' постаје ds т.ј. диференцијал лука криве линије, па је према томе

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad 1.$$

Овај образац је основни образац помоћу кога се израчунавају дужине лукова кривих у простору.

Као што знамо да би

функција била дефинисана потребне су две једначине између x, y и z. Те две једначине могли би решити по две непознате н. пр. по x и по y и изразити их помоћу z, тако да је н. пр.

$$x = f(z)$$
$$y = \varphi(z)$$

и тада ће те две једначине дефинисати криву. Из њих је

$$dx = f'(z)\,dz$$
$$dy = \varphi'(z)\,dz$$

Заменом у обрасцу 1. добијамо

$$ds = dz\sqrt{1+f'(z)^2+\varphi'(z)^2}$$

или одатле

$$s = \int dz\sqrt{1+f'(z)^2+\varphi'(z)^2}$$

где још ваља узети интеграл између оних граница између којих се тражи. Тако н. пр. ако се тражи лук између две тачке $M_1(a_1 b_1 c_1)$ и $M_2(a_2 b_2 c_2)$ интеграл треба узети између граница c_1 и c_2.

Примери:

1. Тражи се лук криве дефинисане једначинама

$$x = a\cos z$$
$$y = a\sin z$$

Из њих је

$$dx = (a\cos z - a\sin z)\,dz$$
$$dy = (a\sin z + a\cos z)\,dz$$

па је отуда

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (a^2\cos^2 z - 2a^2 z\sin z\cos z + a^2\sin^2 z\cdot z^2$$
$$+ a^2\sin^2 z + 2a^2 z\sin z\cos z + a^2 z^2\cos^2 z +$$
$$+ 1)\,dz^2$$
$$= (a^2 + a^2 z^2 + 1)\,dz^2$$

Према томе је

$$s = \int dz\sqrt{a^2+a^2z^2+1}$$

Ако ставимо да је

$$a^2z^2 = (1+a^2)t^2$$

одакле је

$$az = t\sqrt{1+a^2}$$

$$dz = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,dt$$

интеграл постаје

$$s = \frac{1+a^2}{a}\int dt\sqrt{1+t^2}$$

$$= \frac{1+a^2}{a}\left[\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+t\sqrt{1+t^2}\right]$$

и ако се вратимо на првобитну променљиву x сменом

$$t = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}z$$

добија се

$$s = \frac{1+a^2}{2a}\left[\log\left(\frac{az}{\sqrt{1+a^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2z^2}{1+a^2}}\right)+\frac{az}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{1+\frac{a^2z^2}{1+a^2}}\right]$$

2. Дата је цилиндарска завојница чије су једначине

$$x = r\sin\frac{z}{ar}$$

$$y = r\cos\frac{z}{ar}$$

Из тих једначина је

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{a}\cos\frac{z}{ar}$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{a}\sin\frac{z}{ar}$$

па отуда

$$s = \int_{z_0}^{z}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{z}{ar}+\frac{1}{a^2}\sin^2\frac{z}{ar}}\,dz$$

$$= \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}\int_{z_0}^{z}dz = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}\,(z-z_0)$$

а како a представља тригонометријску тангенту угла (сталног) v који чини крива са генератрисом цилиндра, то је

$$s = \frac{z-z_0}{\sin v}$$

3. Конусна завојница има једначине

$$x^2+y^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-z)^2$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \cot^2 v$$

па је

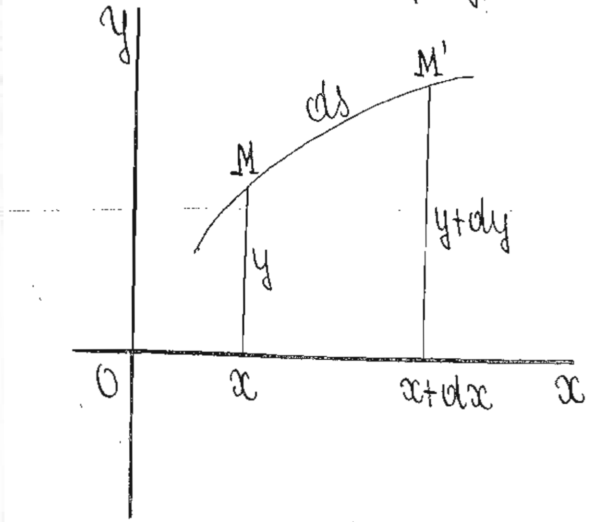
$$s = \int_{z_0}^{z}\sqrt{1+\cot^2 v}\,dz = \frac{z-z_0}{\sin v}$$

Квадратура површина у простору.

Под задатком квадратуре у простору разуме се израчунавање величина површина датих својим једначинама. За сличан проблем у равни видели смо да се своди на једну интеграцију; проблем у простору своди се на две интеграције. Међутим има специјалних случајева где се проблем квадратуре и у простору своди на једну интеграцију. Такав је случај код израчунавања обртних површина.

Обртне површине.

Уочимо обртну површину ко-ја постаје обртањем криве C око о[се]вине Ox и претпоставимо да се тражи величина њеног пространог омота[ча] између граница $x=\alpha$ $y=\beta$. Ако уочимо две бескрајно блиске тачке M и M'



чије координате у равни Oxy нека су (x,y) и $(x+dx, y+dy)$ онда се пространи површина описана луком MM' може сматрати као површина једног бесконачно уског зарубљеног конуса чије су две основе полупречника y и $y+dy$, а чија је дужина стране ds. Познато је из елементарне геометрије да се омотач таквог конуса добија кад се обим средњег круга помножи са страном. Средњи круг има за полупречник

$$\frac{y+(y+dy)}{2}$$

према томе његов је обим

$$2\pi\,\frac{y+(y+dy)}{2}$$

Величина стране је ds и према томе ако се тражена површина означи са P имаћемо

$$dP=\frac{2\pi[y+(y+dy)]}{2}\,ds$$

Ако бесконачно малу количину dy занемаримо поред коначне $2y$, добија се

$$dP = 2\pi y\,ds \qquad 2.$$

Претпоставимо сад да је једначина генератрисе C дата у облику

$$y=f(x)$$

онда ћемо имати

$$dy=f'(x)\,dx$$

Према томе је

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+f'(x)^2}$$

тако да образац 2. добија облик

$$dP=2\pi\, dx\, f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$$

а одатле

$$P=2\pi\int dx\, f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$$

Где још ваља тај интеграл узети изме[ђу] оних граница између којих се тражи омотач. Као што се види задаци овакве врсте своде се на само једну интеграцију.

Примери:

1. Израчунати омотач прате-насте површине на кугли која постаје обртањем круга

$$x^2+y^2=R^2$$

око осовине Ox. Диференцијаљењем ове једначине добијамо

$$x\,dx+y\,dy=0$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Према чему је

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{R}{y}dx$$

Заменом у једначини 2. добија се

$$dP=2R\pi\, dx$$

$$P=2R\pi\int_{\alpha}^{\beta}dx=2R\pi(\beta-\alpha)$$

2. Тражи се површина пратена-тог омотача обртног елипсоида који постаје обртањем елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

око осовине Ox. Диференцијаљењем ове једначине добијамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

па отуда

$$ds=dx\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}=dx\frac{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}{a^2y}$$

Како је из једначине елипсе

$$a^4y^2 = a^4b^2 - a^2b^2x^2$$

то заменом имамо

$$ds = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{a^4b^2 - a^2b^2x^2 + b^4x^2} = \frac{b\,dx}{a^2y}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)}$$

или ако означимо

$$a^2 - b^2 = c^2$$

имаћемо

$$ds = \frac{b\,dx}{a^2y}\sqrt{a^4 - c^2x^2}$$

Заменом у обрасцу 2. добијамо

$$dP = \frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{a^4-c^2x^2}\,dx$$

одакле је

$$P = \frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-c^2x^2}$$

Ако се стави да је

$$c^2x^2 = a^4t^2$$

одакле је

$$x = \frac{a^2}{c}t$$

$$dx = \frac{a^2}{c}dt$$

добија се

$$P = \frac{2a^2b\pi}{c}\int dt\sqrt{1-t^2} =$$

$$= \frac{2a^2b\pi}{c}\left[\frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\right]$$

или ако се вратимо на првобитну променљиву x сменом

$$t = \frac{c}{a^2}x$$

добијамо

$$P = \frac{2a^2b\pi}{c}\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{cx}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{cx}{a^2}\sqrt{1-\frac{c^2x^2}{a^4}}\right]$$

где још треба узети интеграл у оним границама у којима се тражи. Ако се као границе узму $x_0=0$ $x=a$, добијамо половину површине елипсоида

$$P = \frac{2a^2b\pi}{c}\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\frac{c}{a}\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right]$$

$$= \frac{a^2b\pi}{c}\left[\arcsin\frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2}\right]$$

Као што се види површина елипсоида може се увек тачно израчунати, јер се израчунавање своди на обичне функције.

3. Ако је генератриса права паралелна x-осовини

$$y=R$$

одакле је

$$dy=0$$

имаћемо

$$dP=2\pi R\,dx$$

а одатле

$$P=2\pi R\int_{x_0}^{x}dx=2\pi R(x-x_0)$$

- површина дакле описаног цилиндра је равна производу из обима основе $2\pi R$ и висине $x-x_0$.

4. Нека је генератриса права која пролази кроз коорд. почетак

$$y=ax$$

Одатле је

$$dy=a\,dx$$

и према томе

$$ds=dx\sqrt{1+a^2}$$

па отуда

$$dP=2\pi\cdot ax\cdot dx\sqrt{1+a^2}$$

а одатле

$$P=2\pi a\sqrt{1+a^2}\int_0^x x\,dx=2\pi a\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

или ако заменимо

$$a=\frac{y}{x}$$

добијамо

$$P=2\pi y\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Према томе површина омотача описане купе је једнака производу из обима основе $2\pi y$ и половине стране $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

5. Генератриса је tractrice, чија је диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Према томе је

$$ds=\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

а како је сем тога из једначине генератрисе

$$y\,dx = -dy\sqrt{a^2-y^2}$$

то је

$$dP = 2\pi y\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-y^2}} = -2\pi a\,dy$$

па отуда

$$P = -2\pi a\int_a^0 dy = 2\pi a\int_0^a dy = 2\pi a^2$$

– двострука површина круга чија је тангента стално полупречник.

6. Генератриса је циклоида чија је диференц. једначина

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

Отуда је

$$ds = dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$

па је

$$dP = 2\pi y\cdot dy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$

а одатле

половина површине

$$P = 2\pi\sqrt{2a}\int_0^{2a}\frac{y\,dy}{\sqrt{2a-y}} = 2\pi\sqrt{2a}\left[-2(2a-y)^{\frac{1}{2}}\frac{4a+y}{3}\right]_0^{2a} = \frac{32}{3}\pi a^2$$

7. Генератриса је ланчаница чија је једначина

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Из ње је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

па отуда

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

Према томе је

$$dP = \frac{\pi a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$$

а одатле

$$P = \frac{\pi a}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{\pi a}{2}\left[\int_0^x\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx\right]$$

$$=\pi a\left[\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)+x\right]$$

8. Генератриса је парабола

$$y^2=2px$$

Из те једначине је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$$

па је

$$ds=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{y}dx$$

и према томе

$$dP=2\pi\sqrt{p^2+y^2}\,dx=2\pi\sqrt{p^2+2px}\,dx$$

а одатле

$$P=2\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{p+2x}\,dx=2\pi\sqrt{p}\left[\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left[(p+2x)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]$$

9. Генератриса је хипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Из њене једначине је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

па је

$$ds=dx\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}$$

Како је из једначине хиперболе

$$a^4y^2=a^2b^2x^2-a^4b^2$$

то је

$$ds=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}$$

Ако ставимо

$$a^2+b^2=c^2$$

биће

$$ds=\frac{dx}{a^2y}\sqrt{c^2x^2-a^4}$$

и према томе

$$dP=\frac{2\pi b}{a^2}\sqrt{c^2x^2-a^4}\,dx$$

а одатле

$$P=\frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{c^2x^2-a^4}\,dx$$

Ако сада ставимо

$$c^2x^2=a^4t^2$$

одакле је

$$x = \frac{a^2}{c} t$$

$$dx = \frac{a^2}{c} dt$$

добијамо

$$P = \frac{2a^2 b\pi}{c} \int \sqrt{t^2-1}\, dt$$

$$= \frac{2a^2 b\pi}{c} \left[\frac{1}{2} t\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2} \log\left(t + \sqrt{t^2-1}\right) \right]$$

или ако сменимо

$$t = \frac{cx}{a^2}$$

биће

$$P = \frac{2a^2 b\pi}{c} \left[\frac{cx}{2a^2} \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^4} - 1} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{cx}{a^2} + \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^4} + 1}\right) \right]$$

Ако сада узмемо интеграл између гра-ница a и x т.ј. ако посматрамо само део хиперболоида који лежи на позитивној страни x-осовине и то његов део од темена до једне равни нормалне на x-осовину на одстојању x од коорд. почетка, добићемо (водећи рачуна о томе да је $c^2 - a^2 = b^2$)

$$P = \frac{2a^2 b\pi}{c} \left[\frac{xc}{2a^2} \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^4} - 1} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{cx}{a^2} + \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^4} - 1}\right) \right]$$

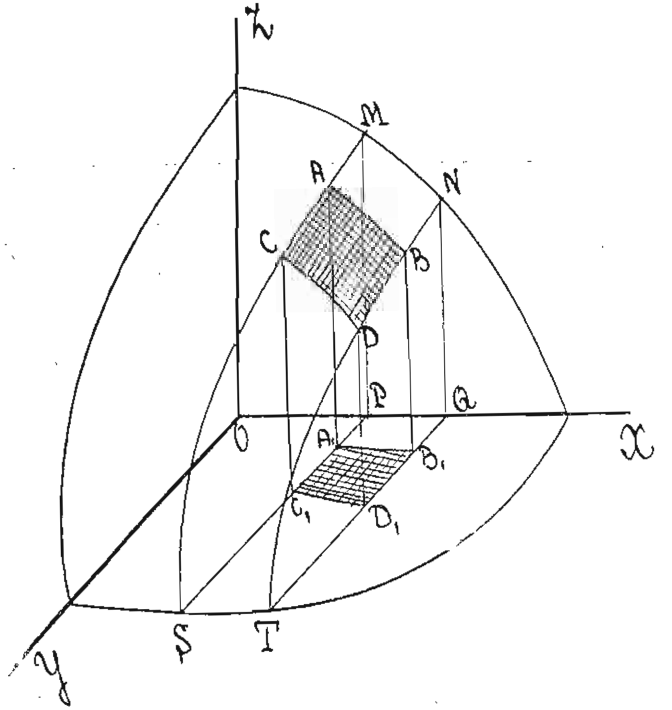
$$- b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{c} \log \frac{ac+b}{a}$$

Ма какве површине у простору

Нека је дата површина чија је једначина

$$z = f(x,y)$$

и претпоставимо да се тражи величина њене површине у разним границама. Ове границе могу бити дате разним облицима; н. пр. може тражени део омотача бити дефинисан својом пројекцијом у равни, ограничен датим кривим линијама итд. Пресецимо нашу дату криву површину двема равнинама MPS и MQT које би биле паралелне равни ZOY. Те ће равни отсецати на омотачу површине једну извесну прстенасту зону MNST. Пресецимо затим ту прстенасту зону двема равнинама ABB'A' и CDD'C' које би биле паралелне равни XOZ. Ове ће равни на тој зони отсецати један део површине ABCD који ће се у равни XOY пројектовати по једном извесном правоугаонику A'B'C'D'. Ако сад замислимо да су прве две равни бесконачно блиске једна другој тако да је прстенаста зона бесконачно уска и затим да су и друге две равни бесконачно блиске једна другој, отсечак површине ABCD био би бесконачно мали тако да га онда можемо сматрати као равну површину. Угао који ће раван тога бескрајно малог отсечка чинити са равнином XOY очевидно није ништа друго до угао који додирна раван на површини



н. пр. у тачки A гради са равнином XOY. Пројекција тога отсечка у равни XOY јесте правоугаоник $A'B'C'D'$ и према томе очевидно је да ће бити

$$A'B'C'D' = ABCD \cdot \cos\gamma$$

одакле је

$$ABCD = \frac{A'B'C'D'}{\cos\gamma} \qquad 1.$$

Међутим очевидно је да је

$$A'B'C'D' = A'B' \cdot C'A' = dx \cdot dy$$

а с друге стране, као што ће бити доказано у геометр. применама диференц. рачуна, $\cos\gamma$ дат је овим обрасцем

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}$$

па заменом у 1. добијамо

$$ABCD = dx \cdot dy \cdot \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}$$

Тако израчунати део површине $ABCD$ очевидно није ништа друго до диференцијал целог омотача. Ако се цела површина означи са P биће

$$dP = dx\, dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} \qquad 2.$$

и то је основни образац за израчунавање површина. Да би имали целу површину образац 2. мора се најпре интегралити по једној променљивој н. пр. по y сматрајући x као сталну. Резултат те прве интеграције биће облика

$$dx \cdot \Phi(x,y)$$

где још у изразу $\Phi(x,y)$ ваља увести границе по y. Ове границе зависе од врсте задатка. Може се н. пр. тражити површина између двеју датих вредности $y=a$ $y=b$ и онда ће нам та прва интеграција дати

$$dx\,[\Phi(x,b) - \Phi(x,a)]$$

Или може се тражити површина између двеју кривих линија

$$y = \varphi_1(x)$$

$$y = \varphi_2(x)$$

и онда ћемо место y ставити те

вредности. Крајњи резултат биће израз облика $\psi(x)$. Затим ваља тај израз интегралити још једанпут по x, и добијени интеграл узети у оним границама у којима треба да се креће x. Резултат те интеграције биће известан број који представља величину тражене површине. Као што се види до те се површине долази двогубом интеграцијом израза

$$dx\cdot dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

једанпут по x и једанпут по y. Што се симболички обележава овако

$$P=\iint dx\cdot dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

где су у првом интегралу означене границе y, а у другом границе x. Овакви изрази носе назив <u>двоструки интеграли</u> и као што се види у најопштијем случају израчунавање величине површине своди се на такве двоструке интеграле. Операција коју представља такав интеграл јесте супротна делимичном интегралењу.

Примери:

1. Дата је конусна површина чија је једначина

$$z^2=2xy$$

Из те једначине је

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{z}\qquad\frac{dz}{dy}=\frac{x}{z}$$

па је

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}$$

а отуда

$$P=\int_0^x dx\int_0^y\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy$$

како је

$$\int_0^y\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy=\sqrt{\frac{x}{2}}\int_0^y y^{-\frac{1}{2}}dy+\frac{1}{\sqrt{2x}}\int_0^y y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=\sqrt{2x}\,y^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3\sqrt{2x}}\,y^{\frac{3}{2}}$$

то је

$$P = y^{\frac{1}{2}}\int_0^x \sqrt{2x}\,dx + \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{2xy} + \frac{2}{3}y\sqrt{2xy}$$

$$= \frac{2}{3}z(x+y)$$

2. Израчунати површину лопте чија је једначина

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Из ове једначине је

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

па отуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

и према томе осмина површине лопте ће бити

$$P = R\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Како је

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

то је

$$P = R\int_0^R \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{R\pi}{2}\left[x\right]_0^R = \frac{R^2\pi}{2}$$

а отуда целокупна површина лопте

$$P = 4R^2\pi$$

3. Дат је обртни параболоид чија је једначина

$$y^2+z^2=2px$$

Одредити онај део његове површине који лежи између темена и једне равни нормалне на x-осовини на одстојању x од коорд. почетка.

Из једначине је

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p}{z} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

па је

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{p^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{z^2+p^2+y^2}}{z} = \frac{\sqrt{p^2+2px}}{\sqrt{2px-y^2}}$$

а отуда четвртина тражене површине

$$P = \int_0^x \sqrt{p^2+2px}\,dx\int_0^{\sqrt{2px}} \frac{dy}{\sqrt{2px-y^2}}$$

Како је
$$\int_0^{\sqrt{2px}} \frac{dy}{\sqrt{2px-y^2}} = \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{2px}}\right]_0^{\sqrt{2px}} = \frac{\pi}{2}$$
то је
$$P = \frac{\pi}{2}\int_0^x \sqrt{p^2+2px}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{(p^2+2px)^{\frac{3}{2}}}{3p}\right]_0^x =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{(p^2+2px)^{\frac{3}{2}}}{3p} - \frac{p^2}{3}\right] = \frac{\pi}{6}\sqrt{p}\left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right]$$

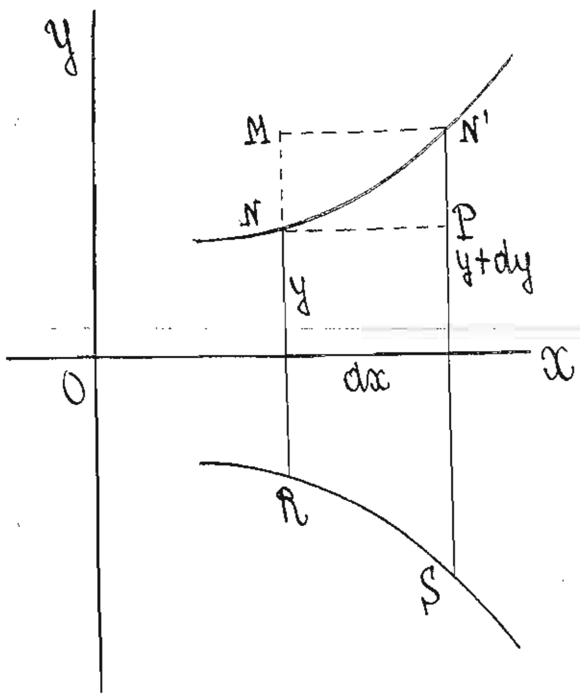
Кубатура

И овај се задатак своди на израчунавање одређених интеграла.

Разликоваћемо, као и код квадратуре у простору следећа два случаја:

Кубатура обртних тела

Претпоставимо да се тражи запремина тела које постаје обртањем криве C око OX. Уочимо на кривој тачку N чије су координате x и y, и пустимо да x порасте за dx тако да се на кривој добије тачка N' чије су координате x+dx и y+dy. Очевидно је из слике да елеменат запремине NN'SR лежи по вредности између запремина двеју цилиндера од којих један има за полупречник основице y, а други y+dy, а имају заједничку висину dx. Ако се тражени елеменат запремине означи са dv, биће



$$\pi y^2 dx < dv < \pi (y+dy)^2 dx$$

Деобом са dx имаћемо

$$\pi y^2 < \frac{dv}{dx} < \pi (y+dy)^2$$

Ако пустимо да dx тежи нули па дакле и dy, ова се неједначина претвара у једначину

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2$$

дакле је

$$dv = \pi y^2 dx$$

$$v = \int \pi y^2 dx$$

што је тражени образац за запремину обртног тела. У њему треба заменити y изражено помоћу x из једначине дате криве и узети интеграл између граница које се траже.

Примери:

1. Дата је елипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Из ње је

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

Ако се посматра само четвртина елипсе као изводница, добићемо половину запремине обртног елипсоида

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=$$

$$=\frac{b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{2}{3}ab^2\pi$$

а према томе површина целог елипсоида биће

$$V=\frac{4}{3}ab^2\pi$$

Ако је

$$a=b$$

добија се

$$V=\frac{4}{3}a^3\pi$$

као запремина лопте.

2. Дата је права

$$y=ax$$

У овом случају изводница, чија је горња страна један део дате праве, јесте један трапез чијим обртањем око осовине x постаје зарубљена купа, чија је запремина

$$V=\pi a^2\int_{x_0}^{x}x^2\,dx=\frac{1}{3}\pi a^2(x^3-x_0^3)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^2(x^2+xx_0+x_0^2)(x-x_0)=$$

$$=\pi(y^2+yy_0+y_0^2)\cdot\frac{1}{3}(x-x_0)$$

запремина зарубљене купе.

Ако је

$$x_0=0 \quad y_0=0$$

биће

$$V=\pi y^2\cdot\frac{1}{3}x$$

запремина купе.

3. Дата је парабола

$$y^2=2px$$

наћемо

$$V=\pi\cdot 2p\int_0^x x\,dx=\pi x^2 p=\frac{1}{2}\pi y^2 x$$

- запремина обртног параболоида од темена до равни паралелне са равнином YOZ на одстојању x од почетка.

4. Дата је хипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Запремина обртног хиперболоида од темена до равни нормалне на x-осовину на одстојању x од почетка биће

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_a^x(x^2-a^2)\,dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^x=$$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right)+\frac{2}{3}\pi ab^2$$

Ако је

$$x=2a$$

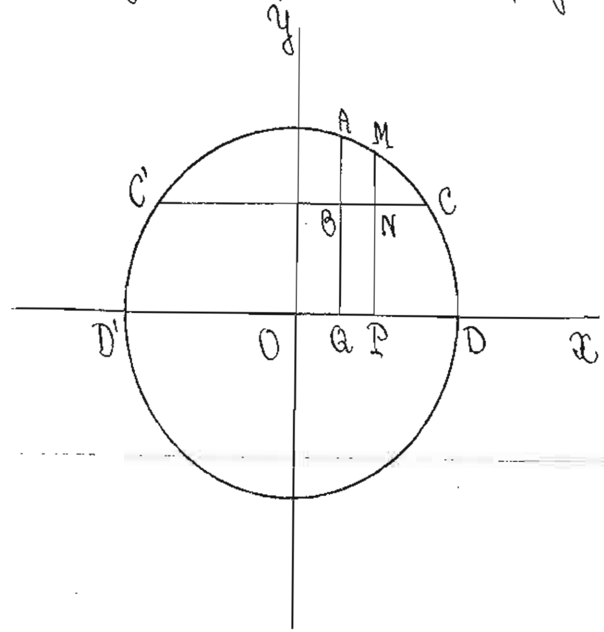
запремина је

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

т.ј. иста колико запремина елипсоида који постаје обртањем половине елипсе која има исте осовине као и хипербола.

5. Тело које постаје обртањем једног кружног отсечка око пречника који је паралелан тетиви.

Узмимо центар за коорд. почетак, а за осовину x пречник DD' паралелан датој тетиви CC'. Кроз тачке A и M отсечног лука повуцимо ординате AQ и MP које секу CC' у B и N, и означимо



$$DD'=2R \quad CC'=2a \quad MP=y \quad NP=y$$
$$OQ=x_0 \quad OP=x$$

Запремина која постаје обртањем AMPQ биће

$$\pi\int_{x_0}^{x}y^2\,dx$$

запремина која постаје обртањем BNPQ

$$\pi\int_{x_0}^{x} y^2\,dx$$

и према томе запремина која постаје обртањем AMNB биће

$$V=\pi\int_{x_0}^{x}(y^2-Y^2)\,dx$$

Како је

$$y^2=R^2-x^2$$
$$Y^2=R^2-a^2$$

то је

$$V=\pi\int_{x_0}^{x}(a^2-x^2)\,dx$$

Ако интеграцију извршимо између граница $x_0=0$ и $x=a$ добићемо као половину тражене запремине

$$V=\pi\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=$$
$$=\frac{2}{3}a^3\pi$$

а целокупна тражена запремина

$$V=\frac{4}{3}a^3\pi$$

– то је запремина лопте полупречника a.

Ако је $a=R$ биће

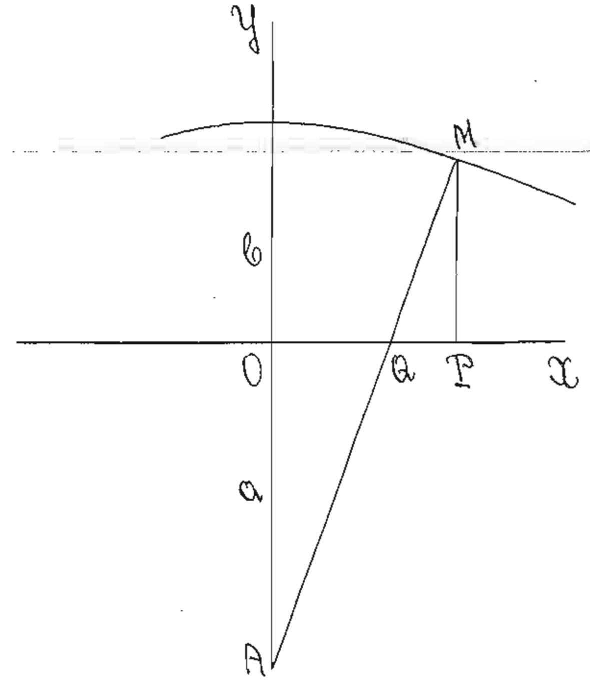
$$V=\frac{4}{3}R^3\pi$$

– запремина лопте полупречника R.

Запремина тела које постаје обртањем криволинијског трапеза CC'D' биће отуда

$$V=\frac{4}{3}\pi(R^3-a^3)$$

6. Запремина тела које постаје обртањем конхоиде око њене асимптоте.



Ако се осовина криве узме за осовину y а њена асимптота за осовину x, једначина криве биће

$$xy=(a+y)\sqrt{b^2-y^2}$$

одатле је

$$dx=-\frac{ab^2+y^3}{y^2\sqrt{b^2-y^2}}\,dy$$

Ако још приметимо да границама $x_0=0$ $x=\partial$ одговарају границе $y_0=b$ $y=0$ добићемо као половину тражене запремине

$$V=-\pi\int_b^0 \frac{ab^2+y^3}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy = \pi\int_0^b \frac{ab^2+y^3}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy$$

$$=\pi\left[ab^2\int_0^b \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} + \int_0^b \frac{y^3\,dy}{\sqrt{b^2-y^2}}\right]$$

Међутим је

$$\int\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = \arcsin\frac{y}{b}$$

Да би добили други интеграл ставимо

$$b^2-y^2=z^2$$

Одатле је

$$y^2=b^2-z^2$$

$$y=(b^2-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y\,dy=-z\,dz$$

$$y^3dy=(z^3-zb^2)\,dz$$

па је

$$\int\frac{y^3dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = \int\frac{z^3-b^2z}{z}\,dz = \int(z^2-b^2)\,dz =$$

$$=\frac{z^3}{3}-b^2z=\frac{(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-b^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Према томе је

$$V=\pi\left[ab^2\arcsin\frac{y}{b}+\frac{(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-b^2(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^b$$

$$=\pi\left[ab^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{b^3}{3}+b^3\right]$$

$$=\frac{b^2\pi}{2}\left[a\pi+\frac{4b}{3}\right]$$

а целокупна тражена запремина

$$V=b^2\pi\left[a\pi+\frac{4b}{3}\right]$$

7. Запремина тела које постаје обртањем циклоиде око x-осовине.

Диференц. једначина циклоиде је

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

па је половина тражене запремине

$$V=\pi\int_0^{2a}\frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

да би добили неодређени интеграл
ставимо

$$y = 2az^2$$

одакле је

$$dy = 4az\,dz$$

па добијамо

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}} = 16a^3 \int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Ставимо сада

$$z^5 = u \qquad \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = dv$$

одакле је

$$du = 5z^4\,dz \qquad v = -\sqrt{1-z^2}$$

па је

$$\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -z^5\sqrt{1-z^2} + 5\int z^4\sqrt{1-z^2}\,dz$$

$$= -z^5\sqrt{1-z^2} + 5\int \frac{z^4(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

$$= -z^5\sqrt{1-z^2} + 5\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - 5\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\frac{z^5\sqrt{1-z^2}}{6} + \frac{5}{6}\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

На исти начин као овај интеграл до

били би

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z^3\sqrt{1-z^2}}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin z$$

па је према томе

$$\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z^5\sqrt{1-z^2}}{6} - \frac{5z^3\sqrt{1-z^2}}{24} - \frac{5z\sqrt{1-z^2}}{16} + \frac{5}{16}\arcsin z$$

и отуда

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}} = -\frac{8a^3z^5\sqrt{1-z^2}}{3} - \frac{10a^3z^3\sqrt{1-z^2}}{3} - 5a^3z\sqrt{1-z^2} + 5a^3\arcsin z$$

или ако извршимо смену

$$z = \sqrt{\frac{y}{2a}}$$

добићемо најзад

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}} = -\sqrt{2ay-y^2}\left(\frac{y^2}{3} + \frac{5ay}{6} + \frac{5a^2}{2}\right) + 5a^3\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}$$

Ако сада вредност овог интеграла
узмемо у границама од 0 до 2a, он
постаје

$$5a^3\cdot\frac{\pi}{2}$$

и према томе

$$V=\frac{5a^3\pi^2}{2}$$

Целокупна запремина биће према томе

$$V=5a^3\pi^2$$

8. Запремина тела које постаје обртањем страниере око њене асимптоте.

Ако се осовина криве и њена асимптота узму за коорд. осовине, једначина криве биће

$$xy=2a\sqrt{2ay-y^2}$$

Одатле је

$$dx=-\frac{2a^2}{y\sqrt{2ay-y^2}}dy$$

па је половина тражене запремине

$$V=-2a^2\pi\int_{2a}^{0}\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}=2a^2\pi\int_{0}^{2a}\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

Ако у неодређеном интегралу извршимо смену

$$y=2az^2$$
$$dy=4az\,dz$$

биће

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}=4a\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

или према предњем зад. 7

$$=4a\left[-\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin z\right]$$

или ако се вратимо на промењиву y

$$=2a\left[-\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{2a}+\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}\right]$$

Ако сада овај интеграл узмемо у границама од 0 до 2a добијамо

$$2a\cdot\frac{\pi}{2}=a\pi$$

и према томе

$$V=2a^3\pi^2$$

а целокупна тражена запремина биће

$$V=4a^3\pi^2$$

9. Запремина тела које постаје обртањем циклоиде око њене асимптоте.

Ако се осовина криве узме за y-осовину, а асимптота за x-осовину, једначина криве биће

$$x^2y=(2a-y)^3$$

Из ње је

$$dx=-\frac{(a+y)\sqrt{2ay-y^2}}{y^2}dy$$

па је половина тражене запремине

$$V=\pi\int_0^{2a}(a+y)\sqrt{2ay-y^2}\,dy$$

Ако у неодређ. интегралу ставимо

$$y=2az^2$$
$$dy=4az\,dz$$

добијамо

$$\int(a+y)\sqrt{2ay-y^2}\,dy=8a^3\int(1+2z^2)z^2\sqrt{1-z^2}\,dz$$

$$=8a^3\int\frac{(z^2+2z^4)(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}}dz$$

$$=8a^3\left[\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}+\int\frac{z^4dz}{\sqrt{1-z^2}}-2\int\frac{z^6dz}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

Ако ова три интеграла заменимо вредностима израчунатим у претходном зад. 7. добијамо

$$=8a^3\left[\frac{z^5\sqrt{1-z^2}}{3}+\frac{z^3\sqrt{1-z^2}}{6}-\frac{z\sqrt{1-z^2}}{4}+\frac{1}{4}\arcsin z\right]=$$

$$=8a^3z\sqrt{1-z^2}\left[\frac{z^4}{3}+\frac{z^2}{6}-\frac{1}{4}\right]+2a^3\arcsin z$$

или, ако се вратимо на променљиву y заменом

$$z=\sqrt{\frac{y}{2a}}$$

добијамо

$$=4a^2\sqrt{2ay-y^2}\left[\frac{y^2}{12a^2}+\frac{y}{12a}-\frac{1}{4}\right]+$$
$$+2a^3\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}$$

Ово је вредност неодређеног интеграла; заменом ње вредности у обрасцу за запремину, добијамо

$$V=\pi\left[4a^2\sqrt{2ay-y^2}\left(\frac{y^2}{12a^2}+\frac{y}{12a}-\frac{1}{4}\right)+2a^3\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}\right]_0^{2a}$$

$$=\pi\cdot 2a^3\frac{\pi}{2}=a^3\pi^2$$

Ово је половина тражене запремине и према томе цела запремина биће

$$V=a^3\pi^2$$

10. Запремина тела које постаје обртањем Жеронове лемнискате око велике осовине.

Једначина криве је

$$y^2 = \frac{a^2x^2 - x^4}{a^2}$$

па је половина тражене запремине

$$V = \pi \int_0^a \frac{a^2x^2 - x^4}{a^2}\,dx = \pi\left[\int x^2 dx - \frac{1}{a^2}\int x^4 dx\right]_0^a$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{a^2}\,\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{2a^3\pi}{15}$$

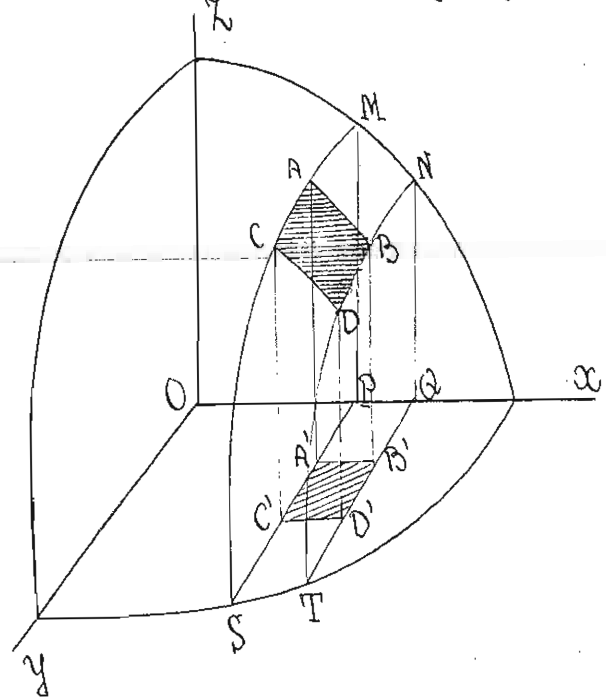
а цела запремина

$$V = \frac{4a^3\pi}{15}$$

Кубатура макаквих тела.

Нека је дато макакво тело у простору ограничено са три стране коорд. равнинама или равнинама њима паралелним, а с једне стране таквом површином чија једначина нека је

$$z = f(x,y)$$



Пресецимо тело равнинама MPS и NQT које нека су паралелне равни YOZ. Оне ће отсецати на телу извесну зону коју ћемо поново пресећи двема равнинама ABB'A' и CDD'C'. Све те четири равни отсецање у датом телу једну запремину ABB'A'CDD'C' која се може сматрати као елеменат тражене запремине. Потражимо запремину тога елемента. Означимо са z_1 и z_2 највећу и најмању координату z за све тачке које се налазе на елементарној површини ABCD. Горња елементарна запремина лежаће по својој вредности очевидно између запремина два паралелопипеда који имају заједничку основу A'B'C'D' и од којих један има за висину z_1 а други z_2. Запремине та два паралелопипеда биће

$$z_1\,dx\,dy \qquad z_2\,dx\,dy$$

Према томе ако се тражени елеменат запремине означи са dv, биће

$$z_1\,dx\,dy < dv < z_2\,dx\,dy$$

Претпоставимо сад да dx и dy теже нули; онда ординате z_1 и z_2 теже да се подударе међу собом и са координатом z оне тачке на коју ће се свести елеменат површине ABCD. Последња неједначина претвара се дакле у једнакину

$$dv = z\,dx\,dy \qquad 1.$$

то је основни образац за задатак о коме је реч. Да би из њега извели тражену вредност v треба извршити две узастопне интеграције н. пр. најпре по y која кад буде извршена треба сменити у интегр. границама; затим по x и опет сменити интегр. границама. Резултат интеграције биће известан број који представља вредност тражене запремине. Образац 1. доводи дакле до обрасца

$$v = \iint z\,dx\,dy$$

пошто је идентички

$$z = \int dz$$

то се последњи интеграл пише у облику

$$v=\iiint dx\,dy\,dz$$

Израз на десној страни назива се троструким интегралом и он симболички означава ове операције: треба dz изразити помоћу x и y из једначине површине, затим извршити прву интеграцију било по x било по y и сменити границе и напослетку извршити другу интеграцију по променљивој која буде остала и у њу сменити интегр. границе. При овом поступку интеграљену свеједно је којим ће се редом ићи, премда има изузетних случајева где то неће бити свеједно већ ће требати означити и ред којим ће се интеграције вршити.

Примери:

1. Тражи се запремина елипсоида чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ако се он пресече равнином нормалном на x-осовини на одстојању x од почетка, пресек ће бити елипса чија је једначина

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

како је површина елипсе једнака производу из броја π и њених полуосовина, то је површина ове елипсе

$$u=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

а једна је према томе половина тражене запремине

$$V=\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=$$

$$=\frac{2}{3}abc\pi$$

према томе цела запремина

$$V=\frac{4}{3}abc\pi$$