Диференцијални
Рачун
Геометријске примене

Ђор. Ђ. Пујић, проф.

Геометријске примене диференцијалног рачуна

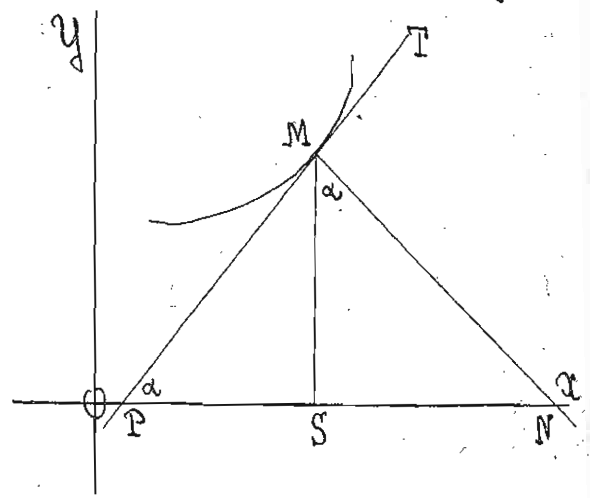
Предавања
Д-р Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

Одређивање главних елемената кривих линија у равни.

Нека је дата крива линија чија је једначина

$$y = f(x)$$

Повуцимо у тачки $M(a,b)$ на ту криву дирку PT, нормалу MN и спустимо из тачке M нормалу MS на осовину Ox.



1° Одређивање једначине дирке

Имамо да одредимо једначину дирке у ма којој тачки $M(a,b)$ на кривој. Дирка, као и свака права, имаће за једначину

$$y = \lambda x + \mu \tag{1}$$

где још ваља одредити λ и μ. Пошто дирка има да прође кроз тачку $M(a,b)$ то мора бити задовољена једначина

$$b = \lambda a + \mu \tag{2}$$

и одузимањем 1) и 2) имамо

$$y - b = \lambda(x - a)$$

Међутим видели смо да угаони коефицијенат λ дирке није ништа друго до извод y' пошто се у њему променљиве координате смене координатама тачке M. Према томе ако је једначина криве дата у облику

$$y = F(x)$$

одакле је

$$y' = F'(x)$$

биће

$$\lambda = F'(a)$$

Заменом у једначини дирке добијамо

$$y - b = F'(a)\cdot(x - a)$$

или

$$y = F'(a)\cdot x + [b - aF'(a)]$$

Из овога се изводи ово практично упуство: једначина дирке криве линије

$$y = F(x)$$

у ма којој њеној тачки (x', y') дата је обрасцем

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x')$$

или

$$y - y' = F'(x')\cdot(x - x')$$

2° Одредба једначине нормале

Једначина нормале биће облика

$$y = mx + n \tag{3}$$

где још ваља одредити m и n. Пошто нормала пролази кроз тачку M, треба да буде

$$b = ma + n$$

одакле одузимањем

$$y - b = m(x - a)$$

Пошто су правац дирке λ и правац нормале m међу собом управни, то треба да буде

$$1+\lambda m=0$$

одакле

$$m=-\frac{1}{\lambda}$$

или

$$m=-\frac{1}{f'(a)}$$

Заменом у горњој једначини добијамо

$$y-b=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

или

$$y=-\frac{x}{f'(a)}+\left[b+\frac{a}{f'(a)}\right]$$

из чега се изводи ово практично правило: Једначина нормале криве линије

$$y=f(x)$$

у једној тачки (x', y') јесте

$$y-y'=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x-x')$$

или

$$y-y'=-\frac{1}{f'(x')}(x-x')$$

3° <u>Одредба дужине: дирке MP, нормале MN, субтангенте PS и субнормале SN.</u>

дужину нормале MP наћи ћемо из једначине

$$\frac{MS}{MP}=\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

па пошто је

$$tg\alpha=\frac{dy}{dx}=y'$$

$$MS=y$$

то се заменом добија

$$T=MP=\frac{y\cdot\sqrt{1+y'^2}}{y'}$$

где још ваља сменити координате x и y координатама тачке M.

Дужину MN имаћемо из једначине

$$\frac{MS}{MN}=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

одакле је

$$N=MN=y\cdot\sqrt{1+y'^2}$$

где још ваља сменити x и y координатама тачке M.

За дужину PS имаћемо

$$\frac{MS}{PS}=tg\alpha=y'$$

одакле је

$$S_t = PS = \frac{y}{y'}$$

За дужину SN имаћемо

$$\frac{SN}{MS} = tg\alpha = y'$$

одакле је

$$S_n = SN = y \cdot y'$$

На послетку за дужину NP имамо

$$PN = PS + SN = \frac{y}{y'} + y \cdot y'$$

<u>Примедба</u>: У овоме до сада претпостављено је да је једначина криве линије решена по y т.ј. дата у облику

$$y = f(x)$$

Међутим дешава се да то није случај већ да је који од ових случајева:

a) једначина криве је решена по x;

в) једначина криве није решена ни по x ни по y;

c) једначина криве дата је у параметарском облику; и

d) једначина криве дата је у поларним координатама.

a) Нека је једначина криве решена по x тако да је н. пр.

$$x = \varphi(y)$$

Отуда је

$$dx = \varphi'(y)\, dy$$

или

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Према томе у свему што претходи треба место y' узети $\frac{1}{\varphi'(y)}$ и у њему сменити $y = b$.

в) Нека је једначина криве дата у нерешеном облику

$$\varphi(x, y) = 0$$

Диференцирањем имамо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

одакле је

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Кад у том обрасцу будемо сменили и у координатама тачке M, имаћемо вредност y' коју треба сменити у предњим обрасцима.

c) Једначина криве може бити дата у параметарском облику

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$

где је t какав параметар тако да се варијацијом тога параметра добијају све тачке (x,y) криве. Диференцирањем горњих једначина имамо

$$dx = f'(t)\,dt$$
$$dy = \varphi'(t)\,dt$$

одакле је

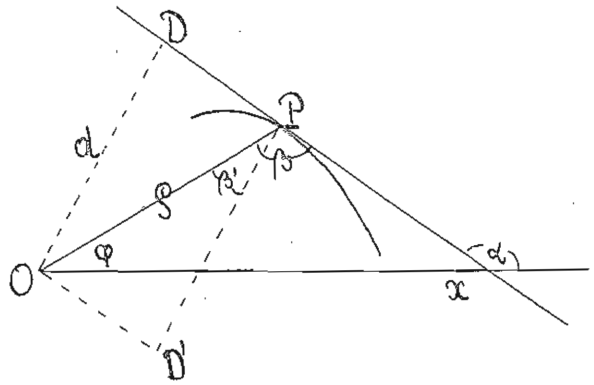
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

Вредност y' што одговара тачки M добићемо кад у последњем обрасцу сменимо t оном специјалном вредношћу која одговара тачки M. Ако тако израчунату вредност y' сменимо у ранијим обрасцима, имаћемо те обрасце и за овакав случај.

d) Претпоставимо да је једначина криве дата у поларним координатама т.ј. у облику

$$\rho = f(\varphi)$$

онда је угао α који гради тангента у тачки $P(\rho,\varphi)$ са поларном осовином одређен једначином



$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r\cos\varphi + r'\sin\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r + r'\,tg\varphi}{r' - r\,tg\varphi}$$

Ако се уведе још угао β између тангенте и радиус-вектора, онда је

$$\alpha = \beta + \varphi$$

или

$$\beta = \alpha - \varphi$$

па је

$$tg\beta = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = \frac{r}{r'}$$

одакле је

$$\sin\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \qquad \cos\beta = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Пошто је растојање тангенте од почетка дато релацијом

$$OD = OP \cdot \sin OPD$$

или

$$d = r\sin\varphi = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Константна дужина нормале PD' у тачки P

је

$$tg(90^\circ+\alpha) = -\cot g\,\alpha = -\frac{1}{tg\,\alpha} = -\frac{r' - r\,tg\,\varphi}{r + r'\,tg\,\varphi}$$

Ако се уведе и угао β' између нормале и радиус-вектора, то је

$$\beta' = \beta - 90^\circ$$

па отуда

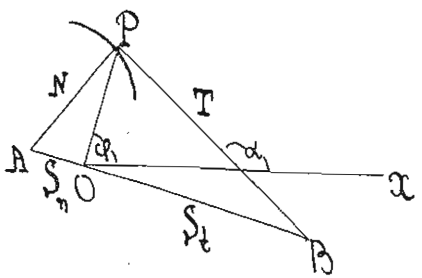
$$tg\,\beta' = -\frac{1}{tg\,\beta} = -\frac{r'}{r}$$

а растојање d' пола O од нормале је дато релацијом

$$OD' = OP \cdot \sin OPD'$$

или

$$d' = r\sin\beta' = \frac{-rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$



Нека је PA нормала дате криве и ако се на OP дигне управна која сече тангенту у B и нормалу у A, онда се PB назива поларном тангентом, $PA = N$ поларном нормалом, $OB = S_t$ поларном субтангентом и $OA = S_n$ поларном субнормалом. Простим посматрањем троуглова OPA и OPB налази се до односа

$PB = T = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2+r'^2}$ – поларна тангента

$PA = N = \sqrt{r^2+r'^2}$ – " нормала

$OB = S_t = r\,tg\,\beta = \frac{r^2}{r'}$ – " субтангента

$OA = S_n = r\cot g\,\beta = r'$ – " субнормала.

Примери:

1. Наћи главне елементе елипсе чија је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Овде је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

па је:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

отуда:

Једначина дирке у тачки (x', y') је

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x'-x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}(x'-x)$$

или

$$a^2yy' - a^2y^2 + b^2xx' - b^2x^2 = 0$$

или деобом са a^2b^2

$$\frac{yy'}{b^2} + \frac{xx'}{a^2} - \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) = 0$$

2. једначина нормале у истој тачки

$$y'-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x'-x)=\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}(x'-x)$$

или

$$\frac{(y'-y)x}{a^2}=\frac{(x'-x)y}{b^2}$$

3. дужина тангенте

$$T=\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}=\frac{y\sqrt{1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}}}{-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}=\frac{y\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}}{-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}=$$

$$=\frac{y\cdot\frac{b^2}{y}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}{\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}=a^2\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$$

4. дужина нормале

$$N=y\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}}=y\cdot\frac{b^2}{y}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}=$$

$$=b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$$

5. дужина субтангенте

$$S_t=\frac{y}{y'}=\frac{y}{-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}=-\frac{a^2y^2}{b^2x}=-\frac{a^2}{b^2x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2=-\frac{a^2-x^2}{x}$$

6. дужина субнормале

$$S_n=yy'=y\cdot-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=-\frac{b^2}{a^2}x$$

2. Одредити главне елементе логаритамске спирале чија је једначина

$$r=ae^{mt}$$

Из једначине је

$$\frac{dr}{dt}=mae^{mt}$$

па је према томе

1. $$S_n=r'=mae^{mt}=mr$$

одакле се види да је геометр. место крајњих тачака субнормале једна спирала слична датој спирали.

2. $$S_t=\frac{r^2}{r'}=\frac{r^2}{mr}=\frac{r}{m}=\frac{1}{m}ae^{mt}$$

Геом. место крајњих тачака субтангенте је дакле опет једна спирала слична датој спирали.

3) $$T=\frac{r}{r'}\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{r}{mr}\sqrt{r^2+m^2r^2}=\frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}$$

4. $$N=\sqrt{r^2+r'^2}=\sqrt{r^2+m^2r^2}=r\sqrt{1+m^2}$$

3. Исто за Архимедову спиралу чија је једначина

$$r=a\varphi$$

Овде је

$$\frac{dr}{d\varphi}=a$$

Отуда
$$S_t = \frac{r^2}{r'} = \frac{r^2}{a} = \frac{r^2}{\frac{r}{\varphi}} = r\varphi = a\varphi^2$$
$$S_n = r' = a$$
Субнормала архимедове спирале је дакле стална.
$$T = \frac{r}{a}\sqrt{r^2 + a^2} = \frac{a\varphi}{a}\sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} = a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}$$
$$N = \sqrt{r^2 + a^2} = \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}$$

4. Исто за хиперболичну спиралу чија је једначина
$$r\varphi = a$$
Овде је
$$r' = -\frac{a}{\varphi^2}$$
Отуда
$$T = \frac{r}{-\frac{a}{\varphi^2}}\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{\varphi^4}} = \frac{\frac{a}{\varphi}}{-\frac{a}{\varphi^2}}\sqrt{\frac{a^2}{\varphi^2} + \frac{a^2}{\varphi^4}} = -\frac{a}{\varphi}\sqrt{1+\varphi^2}$$
$$N = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{\varphi^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{\varphi^2} + \frac{a^2}{\varphi^4}} = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}$$
$$S_t = \frac{r^2}{-\frac{a}{\varphi^2}} = \frac{\frac{a^2}{\varphi^2}}{-\frac{a}{\varphi^2}} = -a$$
$$S_n = r' = -\frac{a}{\varphi^2}$$

5. Исто за логаритамску криву линију чија је једначина
$$y = ce^{\frac{x}{a}}$$
Овде је
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ce^{\frac{x}{a}}}{a} = \frac{y}{a}$$
па је једначина дирке
$$y - y' = \frac{y}{a}(x - x')$$
или
$$\frac{y - y'}{y} = \frac{x - x'}{a}$$
једначина нормале
$$y - y' = -\frac{1}{\frac{y}{a}}(x - x')$$
или
$$\frac{y - y'}{a} = -\frac{x - x'}{y}$$
а исто тако
$$S_t = \frac{y}{\frac{y}{a}} = a$$
$$S_n = y \cdot \frac{y}{a} = \frac{y^2}{a}$$
$$T = \frac{y}{\frac{y}{a}}\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}} = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 + y^2}$$
$$N = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}} = \frac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}$$

6. Исто за циклоиду

$$x = a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

Овди је

$$dx = \left[a \cdot -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a-y}{a}\right)^2}} \cdot -\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}(2a-2y)\right]dy$$

$$= \left[\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}} - \frac{a-y}{\sqrt{2ay-y^2}}\right]dy = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,dy$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

па је једначина дирке

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}\,(x-x')$$

једначина нормале

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,(x-x')$$

и сем тога:

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

$$S_n = \sqrt{2ay-y^2}$$

затим

$$T = y\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$

$$N = \sqrt{2ay}$$

7. Исто за ланчаницу

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Овди је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} + e^{-\frac{x}{a}} \cdot -\frac{1}{a}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right]$$

Међутим из дате једначине је

$$e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2y}{a}$$

одакле квадрирањем

$$e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}} = \frac{4y^2}{a^2}$$

Ако додамо с леве и десне стране ове једначине -4 добијамо

$$e^{2\frac{x}{a}} - 2 + e^{-2\frac{x}{a}} = \frac{4y^2}{a^2} - 4 = 4\,\frac{y^2-a^2}{a^2}$$

или

$$\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = 4\,\frac{y^2-a^2}{a^2}$$

одакле

$$e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2}{a}\sqrt{y^2-a^2}$$

Отуда је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

Према томе једначина дирке је

$$\frac{y-y'}{\sqrt{y^2-a^2}} = \frac{x-x'}{a}$$

једначина нормале

$$\frac{y-y'}{a} = -\frac{x-x'}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

а сем тога

$$S_n = \frac{a}{4}\left(e^{2\frac{x}{a}} - e^{-2\frac{x}{a}}\right)$$

$$S_t = \frac{ay}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

$$N = \frac{y^2}{a}$$

$$T = \frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

8. Исто за круг чија је једна тачка узета за пол.

Круг има за једначину

$$r = a\cos t$$

где је a пречник његов.

Овди је

$$\frac{dr}{dt} = -a\sin t$$

па је

$$S_n = -a\sin t$$

Како је из дате једначине

$$\cos t = \frac{r}{a}$$

или

$$1-\sin^2 t = \frac{r^2}{a^2}$$

или одатле

$$\sin t = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}$$

то је

$$S_n = -\sqrt{a^2-r^2}$$

Исто тако

$$S_t = \frac{r^2}{-a\sin t} = -\frac{r^2}{a\sin t} = -\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$T = \frac{r}{-a\sin t}\sqrt{r^2+a^2\sin^2 t} = -\frac{r}{a\sin t}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{r}{\sin t} = \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$N = \sqrt{r^2+a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t} = a$$

9. Исто за лемнискату чија је једначина

$$r^2 = a^2\cos 2t$$

Овди је

$$2r\,dr = -2a^2 \sin 2t\, dt$$

или

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a^2}{r} \sin 2t$$

Из дате једначине је

$$\cos 2t = \frac{r^2}{a^2}$$

или

$$1 - \sin^2 2t = \frac{r^4}{a^4}$$

одакле

$$\sin 2t = \sqrt{\frac{a^4 - r^4}{a^4}}$$

ако означимо

$$\sqrt{a^4 - r^4} = R$$

биће

$$\sin 2t = \frac{R}{a^2}$$

па према томе

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{R}{r}$$

Отуда

$$S_n = -\frac{R}{r}$$

$$S_t = -\frac{r^3}{R}$$

$$T = \frac{r}{-\frac{R}{r}} \sqrt{r^2 + \frac{R^2}{r^2}} = -\frac{r^2}{R} \cdot \frac{1}{r} \sqrt{r^4 + R^2} = -\frac{a^2 r}{R}$$

$$N = \sqrt{r^2 + \frac{R^2}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{r^4 + R^2} = \frac{1}{r} \sqrt{r^4 + a^4 - r^4} = \frac{a^2}{r}$$

Асимптоте кривих линија.

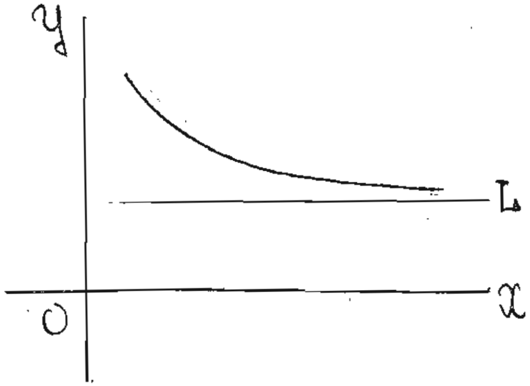
Дешава се да једна крива линија има једну своју грану која се пружа у бесконачност а при томе се непрестано приближује једној утврђеној правој тако да у бесконачности растојање између криве линије и те праве постоје бескрајно мало. Таква се права тада зове <u>асимптотом</u> криве линије. Такав је н. пр. случај код хиперболе, а он се јавља и код бескрајно много других разноврсних линија.

Питање је сад како се може распознати за једну дату криву да ли има асимптота и како се оне, ако их има, одређују. При том испитивању прво се тражи да ли крива линија има асимптота које су паралелне осовини OX или OY, па затим се траже асимптоте које нису паралелне тим осовинама.

1° Асимптоте паралелне осовини OX.

Оне се одређују тражећи оне вредности y_a за које једначина криве постаје

$$x=\infty$$



Кад је једначина решена по x т.ј. написана у облику

$$x=\frac{F(y)}{\varphi(y)}$$

треба тражити оне вредности x_a за које је

$$\varphi(y)=0$$

ако та једначина нема никаквих коначних, реалних и одређених решења крива нема никакву асимптоту паралелну X-осовини. На против ако су таква решења

$$y=b_1 \quad y=b_2 \quad \dots$$

онда су праве

$$y=b_1 \quad y=b_2 \quad \dots$$

тражене асимптоте. Тако н. пр. крива линија

$$x=\frac{y}{1+y^2}$$

има две асимптоте паралелне X-осовини, а то су

$$y=1 \quad \text{и} \quad y=-1$$

Ако једначина није решена по x нити се може решити, а међутим је могућно уредити ју по степенима од x, онда ју можемо написати у облику

$$\varphi_0(y)x^m+\varphi_1(y)x^{m-1}+\dots+\varphi_{m-1}(y)x+\varphi_m(y)=0$$

или деобом са x^m

$$\varphi_0(y)+\frac{\varphi_1(y)}{x}+\frac{\varphi_2(y)}{x^2}+\dots+\frac{\varphi_{m-1}(y)}{x^{m-1}}+\frac{\varphi_m(y)}{x^m}=0$$

Вредност y_a за које је $x=\infty$ добијамо пуштајући да у овој последњој једначини x бескрајно расте. Тада сви чланови сем првог теже нули тако да се једначина претвара у:

$$\varphi_0(y)=0$$

Ако та једначина нема никаквих реалних, коначних и одређених решења по y, онда крива нема тражених асимптота. На против ако има таквих решења и ако су она

$$y=b_1 \quad y=b_2 \quad \dots$$

онда су праве

$$y=b_1 \quad y=b_2 \quad \dots$$

асимптоте тражене врсте. Н. пр. ако је дата крива

$$x^2y^2+xy-x^2-1=0$$

и ако ју уредимо по степенима од x добијамо

$$x^2(y^2-1)+xy-1=0$$

или деобом са x^2

$$y^2-1+\frac{y}{x}-\frac{1}{x^2}=0$$

за $x=\infty$ једначина се своди на

$$y^2-1=0$$

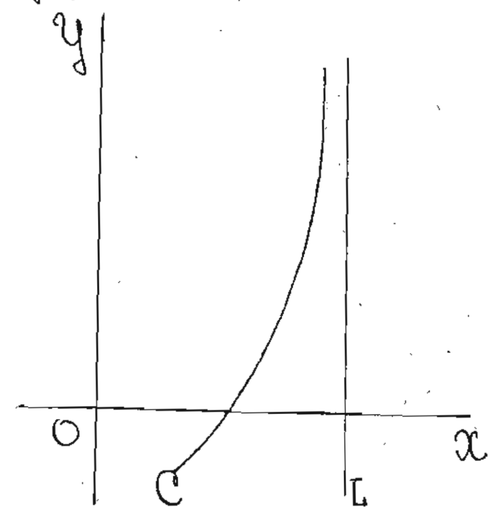
што значи да имамо две асимптоте

$$y=1 \quad \text{и} \quad y=-1$$

које су паралелне x-осовини.

2° Асимптоте паралелне осовини OY.

Оне се добијају тражећи оне вредности x_α за које y постаје бескрајно. Ако је $x=\alpha$, онда таква једначина представља тражену асимптоту. Кад је једначина решена по y, одређивање таквих асимптота је непосредно.



Тако н. пр. за криву

$$y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

асимптоте се добијају решењем једначине

$$\cos x = 0$$

Њих има бескрајно много и оне су дате једначинама

$$x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \dots$$

У случају кад једначина није решена по y или је нерешљива по y а при том је алгебарска, може се овако радити: Претпоставимо једначину уређену по степенима од y и нека је то

$$\varphi_0(x)y^m + \varphi_1(x)y^{m-1} + \dots + \varphi_{m-1}(x)y + \varphi_m(x) = 0$$

деобом са y^m добија се

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\frac{1}{y} + \varphi_2(x)\frac{1}{y^2} + \dots + \varphi_m(x)\frac{1}{y^m} = 0 \qquad 1)$$

ако је $x=\alpha$ једна асимптота, онда једначина 1) мора бити задовољена вредностима $x=\alpha$ $y=\infty$. За такве вредности сви чланови једначине 1) постају равни нули осим првог који постаје $\varphi_0(\alpha)$ и асимптота се добија решењем једначине

$$\varphi_0(\alpha) = 0$$

Отуда ово практично упутство за одредбу асимптота паралелних осовини OY: Треба једначину криве уредити по степенима од y и ставити да је раван нули коефицијенат највишег степена од y. Ако је тако добијена једначина немогућна или нема реалних решења, крива нема реалних асимптота; а ако су

$$x = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots$$

реална решења, свако од тих решења представља по једну асимптоту.

Н. пр. нека је дата крива

$$x^2y^3 + 2xy - 4y^3 + 1 = 0$$

која ће, пошто се уреди, бити

$$(x^2-4)y^3 + 2xy + 1 = 0$$

Асимптоте би се добиле решењем једначине

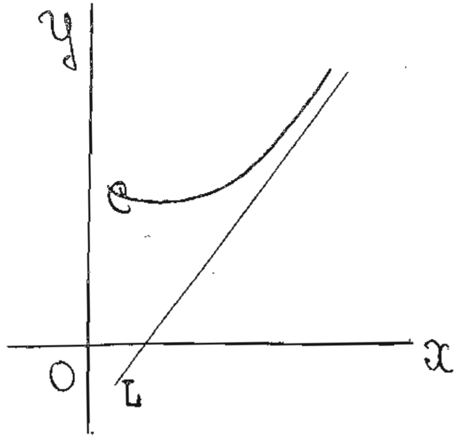
$$x^2 - 4 = 0$$

и према томе имамо две асимптоте

$$x = 2 \quad \text{и} \quad x = -2$$

3° Асимптоте које нису паралелне осовинама.

Једначина такве асимптоте биће



$$y=\lambda x+\mu \qquad 1)$$

где нам само ваља одредити λ и μ. Деобом једначине са x добија се

$$\frac{y}{x}=\lambda+\frac{\mu}{x} \qquad 2)$$

Пустимо сада да се тачка бесконачно удаљава по кривој C; тада ће x и y бескрајно расти. Међутим коефицијенат μ мора остати коначан ако у опште има асимптота на датој кривој; члан $\frac{\mu}{x}$ при том тежи нули и једначина 2) своди се на

$$\lim\frac{y}{x}=\lambda \qquad 3)$$

из чега се изводи ово правило: Угаони сачинилац асимптоте одређује се тражећи границу којој тежи $\frac{y}{x}$ за $x=\infty$. Претпоставимо дакле да је одређена таква вредност λ; заменивши је у једначини 1) добијамо

$$y-\lambda x=\mu$$

а пошто та једначина мора важити за ма какво x и y, то ће важити и за $y=\infty$. Према томе

$$\mu=\lim(y-\lambda x) \qquad 4)$$

из чега се види ово правило: да би одредили коефицијенат μ асимптоте, треба прво одредити λ помоћу једначине 3), сменити тако нађену вредност λ у изразу $y-\lambda x$ и наћи границу којој тежи тај израз за $y=\infty$; та граница је μ. У случају кад је једначина решена по y, треба y сменити својом вредношћу у 3) и 4) и пустити да у њима x бескрајно расте.

Н. пр. дата је крива

$$y=x\sqrt{\frac{x-4}{x-9}}$$

деобом са x добија се

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x-4}{x-9}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{9}{x}}}$$

и граница тога израза је

$$\lambda=1$$

Заменивши ту вредност у $y-\lambda x$ добијамо

$$x\sqrt{\frac{x-4}{x-9}}-x=x\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-9}}{\sqrt{x-9}}=$$

$$=x\frac{x-4-x+9}{\sqrt{x-9}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-9}\right)}=\frac{5}{\sqrt{1-\frac{9}{x}}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{9}{x}}\right)}$$

Ако сад пустимо да x бескрајно расте, добија се

$$\mu=\frac{5}{2}$$

Према томе асимптота дате криве биће

$$y=x+\frac{5}{2}$$

Ако једначина није решена по y већ по x, онда би се у 3) и 4) могло сменити x својом вредношћу помоћу y, па онда тражити граница за $y=\infty$. Ако су тако нађене вредности израза $\frac{y}{x}$ и $y-\lambda x$: λ и μ, асимптота ће опет бити

$$y=\lambda x+\mu.$$

Претпоставимо најзад најопштији случај: да једначина није решена ни по x ни по y, а да је при том алгебарска једначина. Нека је

$$f(x,y)=0$$

једначина криве. Сменимо у њој

$$y=\lambda x$$

и уредимо тако добијену једначину по степенима од x. Резултат ће бити извесна једначина облика

$$\varphi_0(\lambda)x^m+\varphi_1(\lambda)x^{m-1}+\varphi_2(\lambda)x^{m-2}+\cdots+\varphi_m(\lambda)=0$$

Поделимо једначину са x^m па ће бити

$$\varphi_0(\lambda)+\varphi_1(\lambda)\frac{1}{x}+\varphi_2(\lambda)\frac{1}{x^2}+\cdots+\varphi_m(\lambda)\frac{1}{x^m}=0$$

Како је λ коефицијенат једначине асимптоте која није паралелна осовинама, кад се у њој смени $x=\infty$, пошто су сви коефицијенти једначине коначни, то сви чланови осим првог теже нули, тако да се једначина своди на

$$\varphi_0(\lambda)=0$$

из чега се изводи ово практично упутство за одређивање коефицијента λ: треба у једначини криве сменити $y=\lambda x$, уредити добијену једначину по степенима од x и ставити да је раван нули коефицијенат највишег степена. Ако је тако добијена једначина немогућа или нема реалних решења, крива нема тражене асимптоте; иначе свако од реалних решења може одговарати по једној асимптоти.

Нека је сад λ једна тако нађена реална вредност. Пошто је за асимптоту

$$y = \lambda x + \mu$$

заменом те вредности у једначини као и заменом λ нађеном вредношћу у новодобијеној једначини фигурисаће x и μ. Уредити тако добијену једначину по x и нека је она

$$\varphi_0(\mu)x^m + \varphi_1(\mu)x^{m-1} + \varphi_2(\mu)x^{m-2} + \cdots + \varphi_m(\mu) = 0$$

деобом са x^m добијамо

$$\varphi_0(\mu) + \varphi_1(\mu)\frac{1}{x} + \varphi_2(\mu)\frac{1}{x^2} + \cdots + \varphi_m(\mu)\frac{1}{x^m} = 0$$

Пуштајући да x бескрајно расте добијамо

$$\varphi_0(\mu) = 0$$

па се изводи ово практично упутство за одредбу μ што одговара нађеној вредности λ: Ваља у изразу $\lambda x + \mu$ сменити λ раније нађеном вредношћу, па онда у једначини криве сменити y са $\lambda x + \mu$, уредити ју по степенима од x и ставити да је раван нули коефицијенат највишега степена од x. Ако је тако добијена једначина немогућна или нема реалних решења, узетом коефицијенту λ не одговара никаква асимптота; на против ако су μ_1, μ_2, μ_3 ... реална решења, одговарајуће асимптоте биће

$$y = \lambda x + \mu_1, \quad y = \lambda x + \mu_2, \quad y = \lambda x + \mu_3, \quad \ldots$$

Ако исте операције поновимо са свима нађеним λ, имаћемо све асимптоте криве линије.

x x x

Теорија асимптота могла би се довести у тесну везу са теоријом дирака. Та се веза састоји у томе што се у опште асимптота једне криве линије може сматрати као граница којој тежи дирка криве линије кад се додирна тачка бескономично удаљује. То се може лако одредити на овај начин: Ставимо да је угаони сачинилац асимптоте дат вредношћу

$$\lambda = \lim \frac{y}{x} \qquad \text{за } x=\infty$$

Ако би непосредно тражили границу количника $\frac{y}{x}$, она би се јавила у облику $\frac{\infty}{\infty}$. Међутим по L'Hospital-овом правилу та би се граница добила кад би се извод бројитеља поделио изводом именитеља и у резултату пустило да x бескрајно расте. Извод бројитеља је $\frac{dy}{dx}$, извод именитеља је 1 и према томе је

$$\lambda = \frac{dy}{dx} \qquad \text{за } x=\infty$$

Па пошто је $\frac{dy}{dx}$ угаони сачинилац дирке, то се види да угаони сачинилац асимптоте није ништа друго до граница којој тежи угаони сачинилац дирке кад се додирна тачка бесконачно удаљује.

Лако је доказати сличан резултат и за μ. Видели смо да је

$$\mu = \lim (y-\lambda x) \qquad \text{за } x=\infty$$

Ово се може написати у облику

$$\mu = \lim \frac{\frac{y}{x}-\lambda}{\frac{1}{x}} \qquad \text{за } x=\infty$$

Овај се количник јавља у облику $\frac{0}{0}$. Извод бројитеља биће

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}$$

а извод именитеља

$$-\frac{1}{x^2}$$

деобом се добија

$$\mu = \lim \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{-1} = \lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{за } x=\infty \qquad 5)$$

Међутим из једначине дирке

$$y = ax+b$$

где је

$$a = \frac{dy}{dx}$$

види се да разлика

$$y - x\cdot\frac{dy}{dx}$$

није ништа друго до ордината почетка b саме дирке. Међутим образац 5) показује да коефицијенат и није ништа друго до граница којој тежи дирка ордината почетка кад се додирна тачка бесконачно удаљава, чиме је доказано да се одиста асимптота може сматрати као граница дирке.

Али све ово претпоставља да $\frac{dy}{dx}$ и $y-x\frac{dy}{dx}$ теже коначним и одређеним границама за $x=\infty$. Код алгебарских кривих је увек такав случај, јер код њих је извод увек одређен за $x=\infty$ и према томе за алгебарске криве важи увек теорема да се асимптота може сматрати као гранични положај дирке. Такав је случај и код великог броја трансцедентних кривих, али не код свију. Има бескрајно много трансцедентних кривих код којих један од израза $\frac{dy}{dx}$ или $y-x\frac{dy}{dx}$ или оба постају неодређена за $x=\infty$. Тада горње тврђење не важи.

Н. пр. нека је дата крива линија

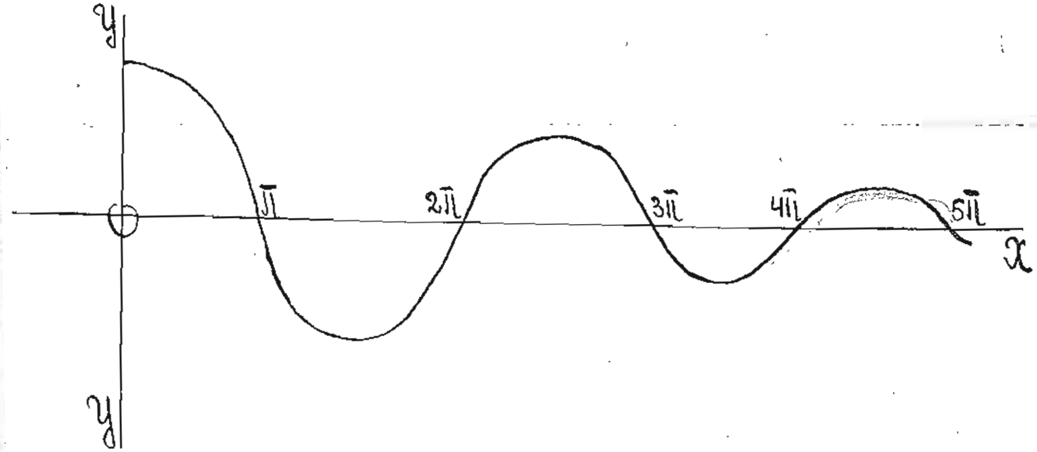
$$y=\frac{\sin x}{x}$$

овди је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} \qquad 6)$$

$$y-x\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{x}-\cos x+\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin x}{x}-\cos x \qquad 7)$$

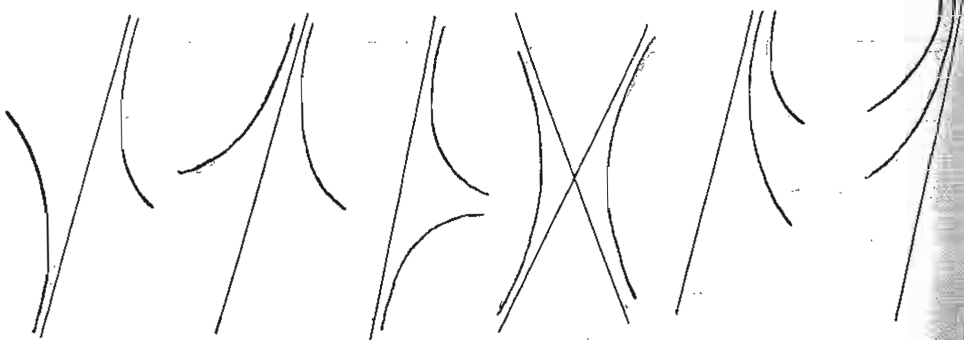
Израз 6) за $x=\infty$ тежи одређеној граници нули, али израз 7) своди се на $-\cos\infty$ који је неодређен. Према томе овди се асимптота не може сматрати као гранични положај дирке. Крива има облик:



Навешћемо још само неке теореме асимптота алгебарских кривих линија које не вреде за трансцеденање. Такве би теореме биле ове:

1. Једна алгебарска крива m-тог степена може имати највише m асимптота.

2. Код алгебарских кривих за сваку асимптоту постоје најмање две гране кривих линија за које је таква права асимптота, а ако постоје више грана за такву асимптоту број је њихов увек паран. Положај таквих грана према асимптоти може бити различан, као што је н. пр. у следећим сликама:



Примери:

1. Нађи асимптоте криве линије чија је једначина

$$x^3 - y(x-a) = 0$$

Ову једначину можемо писати

$$y = \frac{x^3}{x-a}$$

и према томе дата крива има једну асимптоту

$$x = a$$

паралелну y-осовини.

2. Исто за криве другог реда представљене општом једначином

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Ако скупимо за себе чланове другог, а за себе чланове првог степена, имамо

$$x^2\left(A\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + C\right) + x\left(D\frac{y}{x} + E\right) + F = 0$$

и према томе коефицијенат λ је корен једначине

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

т.ј.

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Како је код елипсе B^2-4AC негативно, то је вредност за λ уображена, па дакле елипса нема асимптота.

Затим је

$$\mu = -\frac{D\lambda + E}{2A\lambda + B}$$

па је једначина асимптоте

$$y = \lambda x - \frac{D\lambda + E}{2A\lambda + B}$$

где још ваља сменити λ напред нађеном вредношћу.

Код параболе је

$$B^2 - 4AC = 0$$

па за λ добијамо само једну вредност

$$\lambda = -\frac{B}{2A}$$

Како се за ту вредност λ своди μ на бескрајно, то и парабола дакле нема асимптоте.

Према томе хипербола је једина крива другог степена која има асимптоте.

3. Исто за криву

$$y^3 = ax^2 + x^3$$

Једначина њене тангенте је

$$y' - y = \frac{2ax + 3x^2}{3y^2}(x' - x)$$

ако се стави $x' = 0$, налази се као тангентина ордината почетка

$$y' = y - \frac{2ax^2 + 3x^3}{3y^2} = \frac{3(y^3 - x^3) - 2ax^2}{3y^2}$$

а ако се стави $y' = 0$ у истој једначини тангенте, добија се као њена апсциса почетка

$$x' = x - \frac{3y^3}{2ax + 3x^2} = \frac{2ax^2 - 3(y^3 - x^3)}{2ax + 3x^2}$$

Како је из дате једначине

$$y^3 - x^3 = ax^2$$

то заменом у последњим изразима добијамо

$$y' = \frac{a}{3}\,\frac{x^2}{y^2}$$

$$x' = -\frac{ax^2}{2ax + 3x^2} = -\frac{a}{\frac{2a}{x} + 3}$$

Граничне вредности ових израза за $x = \infty$ (у коме је случају и $y = \infty$) јесу

$$\lim y' = \frac{a}{3}$$

$$\lim x' = -\frac{a}{3}$$

Почетна ордината асимптоте је дакле $\frac{a}{3}$, а почетна апсциса $-\frac{a}{3}$; према томе једначина асимптоте је

$$\frac{x}{-\frac{a}{3}}+\frac{y}{\frac{a}{3}}=1$$

или

$$y=x+\frac{a}{3}$$

-права која чини угао од 45° са x-осовином.

4. Исто за криву

$$x^4y^4-(x^2-y^2)^2+y^2-1=0$$

која има асимптоте паралелне y-оси. Ако једначину уредимо по y, добијамо

$$(x^4-1)y^4+(2x^2+1)y^2-x^4-1=0$$

Једначина

$$x^4-1=0$$

има два реална корена

$$x=\pm 1$$

и пошто за те вредности израз $2x^2+1$ није раван нули, то дата (једначина) крива има две асимптоте

$$x=\pm 1$$

паралелне y-осовини.

5. Исто тако крива

$$(a^2-x^2)y^2=(a^2+x^2)x^2$$

има две асимптоте

$$x=\pm a$$

паралелне y-осовини.

6. Крива

$$ax^3+x^3y-ay^3=0$$

чију једначину можемо писати

$$(a+y)x^3-ay^3=0$$

има једну асимптоту

$$y=-a$$

паралелну x-осовини.

7. Крива

$$(a+b+x)y=c(b+x)$$

има једну асимптоту

$$x=-a-b$$

паралелну y-осовини, и другу

$$y=c$$

паралелну x-осовини.

8. Крива

$$(x+a)y^2=x+2a$$

има једну асимптоту

$$x=-a$$

паралелну y-осовини. Ако њену једначину уредимо по x, добијамо

$$(y^2-1)x + a(y^2-2)=0$$

одакле видимо да та крива има и две асимптоте

$$y=\pm 1$$

паралелне x-осовини.

9. Наћи асимптоте криве

$$x^3+y^3=a^3$$

Овди је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$$

па је

$$\lambda=\lim\frac{dy}{dx}=\lim\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)=-1$$

$$\mu=\lim(y-x\lambda)=\lim(y+x)=\lim\frac{1+\frac{x}{y}}{\frac{1}{y}}=0$$

па је асимптота права

$$y=-x$$

која захвата са x-осовином угао $\frac{3\pi}{4}$.

10. Исто за криву

$$y=a\frac{\sin x}{x}$$

Овди је

$$\frac{dy}{dx}=a\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

па је према томе

$$\lambda=\lim\frac{dy}{dx}=0$$

$$\mu=\lim(y-\lambda x)=\lim y=\lim a\frac{\sin x}{x}=0$$

што значи да је асимптота дате криве

$$y=0$$

т.ј. x-осовина. Она прелази наизменце с једне и друге стране своје асимптоте, док јој у бесконачности не постане тангента.

11. Исто за криву

$$y=\sin\frac{a}{x}$$

Овди је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2}\cos\frac{a}{x}$$

па је

$$\lambda=\lim\frac{dy}{dx}=\lim\left(-\frac{a}{x^2}\cos\frac{a}{x}\right)=0$$

$$\mu=\lim(y-\lambda x)=\lim y=\lim\sin\frac{a}{x}=0$$

Према томе и њена је асимптота

$$y=0$$

т.ј. x-осовина.

12. Исто за криву

$$(x+1)y=(x-1)x$$

Пре свега из саме једначине се види да крива има једну асимптоту

$$x=-1$$

паралелну y-осовини.

Затим, пошто је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)(2x-1)-(x^2-x)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$

то је

$$\lambda=\lim\frac{dy}{dx}=\lim\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\mu=\lim(y-\lambda x)=\lim(y-x)=\lim\left(\frac{x^2-x}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim\frac{-2x}{x+1}=\lim\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}=-2$$

па крива има и асимптоту

$$y=x-2$$

13. Исто за криву

$$(x-2)y=(x-1)(x-3)$$

Пре свега из саме једначине криве види се да она има једну асимптоту

$$x=2$$

паралелну y-осовини.

Из те једначине је

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x-2}$$

па према томе

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)(2x-4)-(x^2-4x+3)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}.$$

Отуда

$$\lambda=\lim\frac{dy}{dx}=\lim\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}=1$$

$$\mu=\lim(y-\lambda x)=\lim(y-x)=\lim\left(\frac{x^2-4x+3}{x-2}-x\right)$$

$$=\lim\frac{-2x+3}{x-2}=-2$$

па крива има и праву

$$y-x+2=0$$

као асимптоту.

14. Исто за криву

$$y^2=\frac{x^3+ax^2}{x-a}$$

Из саме једначине се види да крива има једну асимптоту.

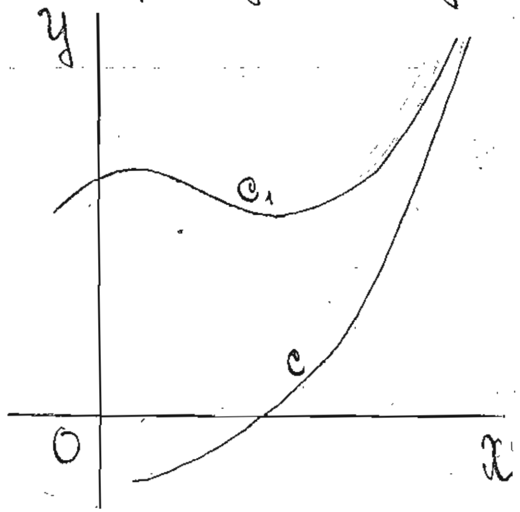
$$x=a$$

паралелну y-осовини.

$$y=\pm(x+a)$$

Криволинијске асимптоте

Дешава се да крива C или једна њена грана нема никакве асимптоте, а да постоји таква једна крива C_1 којој се крива C све више приближује тако да у бескрајности растојање између кривих C_1 и C_2 тежи нули. За криву C_1 тада се каже да је <u>криволинијска асимптота</u> криве C. Одређивање оваквих криволинијских асимптота често пута даје велике олакшице



и за рачуне и за конструкције, јер

се често дешава да је асимптотна крива C_1 за неке специјалне вредности простија од криве C. У том случају довољно велике вредности x почев од једне извесне и довољне вредности x може се лук криве C заменити луком криве C_1. Ми ћемо навести једну доста општу класу кривих линија за које је доста лако наћи овакве криволинијске асимптоте. То су криве линије чије се једначине могу написати у облику

$$y = \varphi(x) + \psi(x) \qquad 1)$$

где $\psi(x)$ има ту особину да је

$$\lim \psi(x) = 0 \quad \text{за } x = \infty$$

Ако уочимо на коју криву 1) и криву дефинисану једначином

$$y = \varphi(x) \qquad 2)$$

разлика њихових ордината има за вредност $\psi(x)$ и према томе она тежи нули за $x=\infty$, што значи да је крива 2) криволинијска асимптота за криву 1). Такав је н.пр. случај са кривим линијама представљеним једначином

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

где су P и Q полиноми по x-у и где је степен полинома P већи од степена полинома Q. Извршивши деобу $\frac{P}{Q}$ док се не дође до остатка који је нижег степена од Q, једначина се може написати у облику

$$y = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{Q(x)}$$

где су φ и ψ полиноми по x-у и где је степен полинома ψ нижи од степена полинома Q. Количник $\frac{\psi(x)}{Q(x)}$ тежи дакле нули за $x=\infty$ и према томе имаћемо као криволинијску асимптоту

$$y = \varphi(x)$$

Примери:

1. Дата је крива

$$y = \frac{x^3 - 3x + 1}{x+1}$$

Ако извршимо деобу, добијамо

$$y = x^2 - x - 2 + \frac{3}{x+1}$$

Према томе дата крива има као асимптоту параболу

$$y = x^2 - x - 2$$

2. Нека је дата крива

$$y = x^2 + e^{-x^2}$$

Пошто e^{-x^2} тежи нули за $x=\infty$, то ће асимптота дате криве бити парабола

$$y = x^2$$

3. Нека је дата крива

$$x^3 - y(x-a) = 0$$

(в. пр. 1. из прошл. одељка).

Једначину криве можемо писати

$$y = \frac{x^3}{x-a} = x^2 + ax + a^2 + \frac{a^3}{x-a}$$

па према томе дата крива има једну параболичну асимптоту

$$y = x^2 + ax + a^2$$

4. Нека је дата крива

$$x^3 - xy + a^3 = 0$$

Из ове једначине је

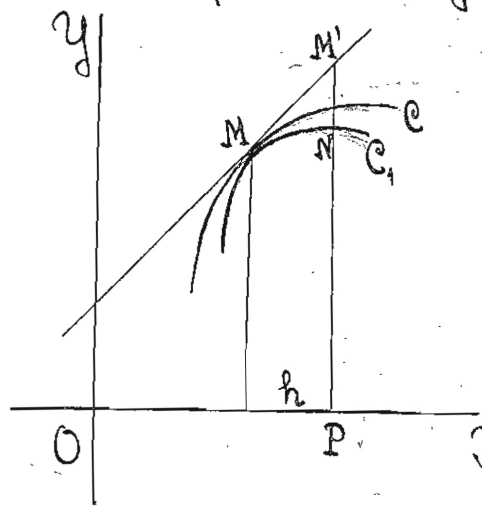
$$y = \frac{x^3 + a^3}{x} = x^2 + \frac{a^3}{x}$$

па дакле крива има једну параболичну асимптоту

$$y = x^2$$

О додиру кривих линија

Додир двеју кривих линија може бити дефинисан на разне начине. Тако: две криве ће се додиривати у једној тачки M ако у тој тачки имају заједничку дирку. Ово ће бити ако имају бар две заједничке бесконачно блиске тачке. Потражимо услове који треба да су испуњени па да криве имају додир. Нека су дате две криве C и C_1 дефинисане једначинама



$$y = f(x)$$
$$y = \varphi(x)$$

Учинимо такву једну заједничку тачку $M(a,b)$ и пустимо да x порасте за h. Уочимо две блиске тачке M' и N' на кривама C и C_1, и разлика ордината $M'P$ и $N'P$ биће дата дужином

$$M'N' = M'P - N'P$$

Међутим је

$$M'P = f(a+h)$$

$$N'P = \varphi(a+h)$$

па према томе

$$M'N' = f(a+h) - \varphi(a+h)$$

Претпоставимо сад да су функције f и φ непрекидне за $x=a$ и у близини те вредности. Тада се изрази $f(a+h)$ и $\varphi(a+h)$ могу развити у редове по Тајлор-овом обрасцу тако да ће бити

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h}{1!} \varphi'(a) + \frac{h^2}{2!} \varphi''(a) + \cdots$$

Заменом у горњем обрасцу добијамо

$$M'N' = [f(a) - \varphi(a)] + \frac{h}{1!}[f'(a) - \varphi'(a)] + \frac{h^2}{2!}[f''(a) - \varphi''(a)] + \cdots \quad 1)$$

Пошто у тачки $M(a,b)$ обе криве имају исту ординату па дакле и исти угаони сачинилац дирке, то је

$$f'(a) = \varphi'(a)$$

тако да се образац 1) своди на

$$M'N' = \frac{h^2}{2!}[f''(a) - \varphi''(a)] + \frac{h^3}{3!}[f'''(a) - \varphi'''(a)] + \cdots \quad 2)$$

ако се h узме за бескрајно малу количину првог реда, образац 2) показује да је $M'N'$ бескрајно мала количина другог реда. Међутим може се десити да је и

$$f''(a) = \varphi''(a)$$

тада десна страна обрасца 2) почиње са h^3 тако да је тада разлика $M'N'$ бесконачно мала количина трећег реда. Тако исто може се десити да је и

$$f'''(a) = \varphi'''(a)$$

и тада десна страна обрасца 2) почиње са h^4, тако да је разлика $M'N'$ бесконачно мала количина четвртог реда и т.д.

На томе је основано разликовање врсте додира између две криве

C и C_1. За такве се две криве каже да имају додир n-тог реда у једној тачки $M(a,b)$, ако пустимо да апсциса порасте за бесконачно малу количину првог реда h, па онда, ако разлика одговарајућих ордината буде бесконачно мала количина $(n+1)$ог реда.

Из овога што претходи види се у исто време и потребни и довољни услови који треба да буду испуњени па да криве у тачки M имају додир n-тог реда. Ти се услови, као што се види, састоје у овоме: да би било додира n-тог реда у тачки M треба да буде

$$f(a)=\varphi(a)$$
$$f'(a)=\varphi'(a)$$
$$f''(a)=\varphi''(a)$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{n}(a)=\varphi^{n}(a)$$

другим речима ове функције f и φ, као и сви њихови узастопни изводи до n закључно морају бити међу собом једнаки. Да би се криве само секле т.ј. имале додир нултог реда, треба да буде

$$f(a)=\varphi(a)$$

да би имале додир првог реда, треба да буде

$$f(a)=\varphi(a) \quad \text{и} \quad f'(a)=\varphi'(a)$$

да би имале додир другог реда, треба да буде

$$f(a)=\varphi(a)\,,\quad f'(a)=\varphi'(a) \quad \text{и} \quad f''(a)=\varphi''(a)$$

и т.д.

У колико је виши ред додира двеју кривих, у толико те криве у тој тачки ближе једна уз другу пристају.

У извесним питањима има се посла са задатком овакве врсте: Дата је једначина криве C

$$y=f(x)$$

и једначина криве C_1

$$F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\dots)=0$$

једне фамилије кривих линија, која

садржи у себи извесан број променљивих параметара $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; тражи се да се ови параметри одреде тако да крива C' има у датој тачки M(a,b) са кривом C додир што је могуће вишег реда. Ако смо одредили криву C' на тај начин, онда се тако одређена крива C' назива оскулаторном кривом криве C у тачки M. Из реченог се види да је за додир n-тог реда између кривих C и C' потребан (n+1) услов; према томе ако је број параметара у кривој C' раван p, у опште највиши ред додира између кривих C и C' може бити (p-1).

Одређивање оскулаторне криве C' бива на овај начин: треба једначину криве C' диференцијалити (p-1) пута и резултат ће бити низ једначина

$$F(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\dots)=0$$

$$\Phi_1\left(x,y,\frac{dy}{dx},\alpha,\beta,\gamma,\dots\right)=0$$

$$\Phi_2\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\alpha,\beta,\gamma,\dots\right)=0$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad 3)$$

$$\Phi_{p-1}\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}},\alpha,\beta,\gamma,\dots\right)=0$$

Пошто према дефиницији додира

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} \qquad 4)$$

што фигуришу у једначинама 3) морају бити једнаки са оним вредностима те исте количине

$$y=f(x)$$

то у једначини 3) треба низ 4) сменити вредностима

$$x=a \quad y=b \quad \frac{dy}{dx}=f'(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(a) \dots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}=f^{p-1}(a)$$

Резултат ће бити тај што ће се низ једначина 3) претворити у један систем од p једначина са p непознатих $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Из њих се могу израчунати вредности параметара и онда заменом у једначини

$$F(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\dots)=0$$

3) ова ће представљати тражену оскулаторну криву.

Н. пр. Наћи једначину оскулаторног круга једне дате криве

$$y = f(x)$$

у једној њеној датој тачки $M(a,b)$. Најопштија једначина круга јесте

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2$$

Она садржи три параметра: α, β и γ и према томе у опште највећи ред додира који може имати круг са једном кривом C јесте други ред. Задатак да се нађе оскулаторни круг криве C састоји се дакле у томе да се параметри α, β и γ одреде тако да између криве C и круга буде додир другог реда у тачки M. Диференцијалећи два пута узастопце једначину круга имаћемо

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2$$

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad 5)$$

$$1 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Међутим из једначине

$$y = f(x)$$

је

$$y = b \qquad \frac{dy}{dx} = f'(a) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(a)$$

Заменом у 5) добија се систем једначина

$$(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 = \gamma^2$$

$$(a-\alpha) + (b-\beta)f'(a) = 0$$

$$1 + (b-\beta)f''(a) + f'(a)^2 = 0$$

Из њих се могу израчунати три параметра α, β и γ и налази се

$$\alpha = a - \frac{f'(a) + f'(a)^3}{f''(a)}$$

$$\gamma = -\frac{[1 + f'(a)^2]^{3/2}}{f''(a)}$$

$$\beta = b + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}$$

Заменом тих вредности у једначини круга имали би тражени оскулаторни круг криве

$$y = f(x)$$

Н. пр. Наћи оскулаторни круг параболе

$$y = x^2$$

у њеној тачки $(x=1,\ y=1)$. Овде је

$$a = 1 \quad b = 1$$

$$\frac{dy}{dx}=2x=2 \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2$$

Према томе је

$$\alpha=1-\frac{6}{2}=-2 \qquad \beta=1+\frac{5}{2} \qquad \gamma=\frac{5^{3/2}}{2}$$

па је дакле једначина траженог оскулаторног круга

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$$

Примери:

1. Нађи оскулаторни круг за криву

$$y=x^3-3x^2+2x$$

у тачки (2,0).

Овде је

$$x=2 \qquad y=0$$

$$y'=3x^2-6x+2=2 \qquad y''=6x-6=6$$

па према томе

$$\alpha=2-\frac{2+8}{6}=\frac{1}{3} \qquad \beta=\frac{1+4}{6}=\frac{5}{6} \qquad \gamma=\frac{(1+4)^{3/2}}{6}=\frac{5^{3/2}}{6}$$

па је једначина траженог круга

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{36}$$

2. Исто за криву

$$x^3-x^2-y^2=0$$

Из ове једначине је

$$y^2=x^3-x^2$$

или

$$y=x\sqrt{x-1}$$

а одатле

$$y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} \qquad y''=\frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}$$

Отуда

$$\alpha=x-\frac{\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}+\left(\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}\right)^3}{\frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}}=x-\frac{9x-8}{6x-8}(3x^2-2x)$$

$$\beta=y-\frac{1+\left(\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}{\frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}}=\frac{12y(x-1)}{3x-4}$$

$$\gamma=\frac{\left[1+\left(\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}}}=\frac{9x-8}{6x-8}\sqrt{x^3(9x-8)}$$

3. Исто за равнострану хиперболу

$$xy-a^2=0$$

Овде је

$$y=\frac{a^2}{x}$$

па одатле

$$y'=-\frac{a^2}{x^2} \qquad y''=\frac{2a^2}{x^3}$$

Отуда

$$\alpha=x-\frac{-\frac{a^2}{x^2}+\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)^3}{\frac{2a^2}{x^3}}=x+\frac{\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^6}{x^6}}{\frac{2a^2}{x^3}}=\frac{3x^4+a^4}{2x^3}=\frac{3x^2+y^2}{2x}$$

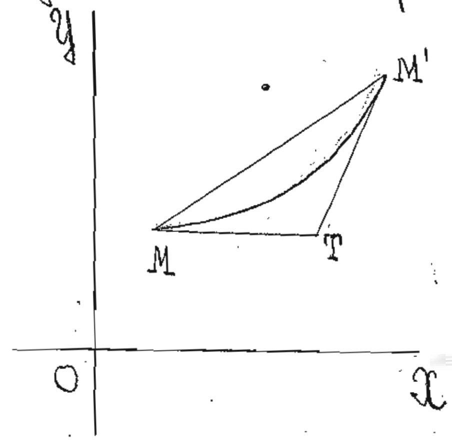
$$\beta = y - \frac{1+\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)^2}{\frac{2a^2}{x^3}} = y + \frac{x^4+a^4}{2a^2x} = \frac{2a^2xy+x^4+a^4}{2a^2x} =$$

$$= \frac{2\frac{a^2}{x}y + x^2 + \left(\frac{a^2}{x}\right)^2}{2\frac{a^2}{x}} = \frac{x^2+3y^2}{2y}$$

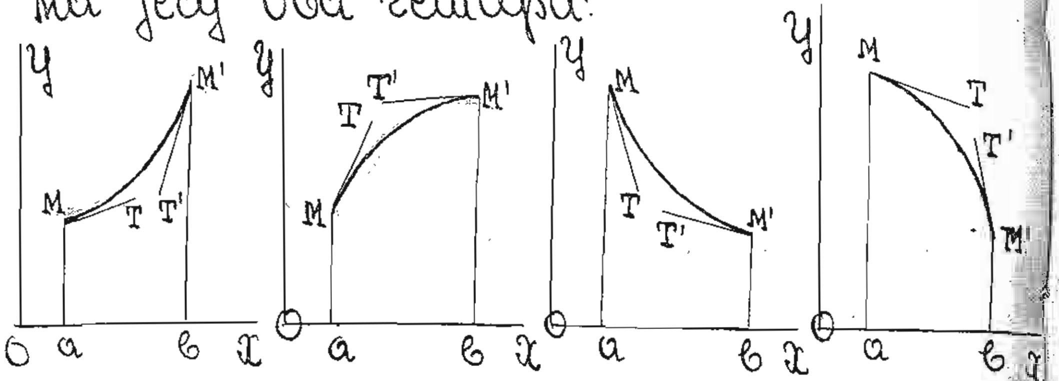
$$\rho = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{2xy}$$

Конкавност и конвексност кривих линија

Ако је дат лук MM' какве криве па повучемо тетиву MM' и дирке на крају лука, лук је као што се из слике види конкаван према тетиви а конвексан према диркама т. ј. кад се гледа са тетиве он је издубљен, а кад се гледа са дирака он је испупчен.



При конструкцији лука какве криве линије од важности је знати да ли је лук у једном датом правцу конкаван или конвексан. Ми ћемо показати како се може испитати да ли је дати лук конкаван или конвексан у правцу на горе или на доле. Најобичнији положаји које може имати један лук према координатним осама јесу ова четири:



сл.1. сл.2. сл.3. сл.4.

У сликама 1. и 3. лук је конвексан у правцу позитивних y-а а конкаван у правцу негативних y-а; у сликама 2. и 4. је обрнуто. Питање је дакле како се, кад је дата једначина криве

$$y=f(x)$$

може распознати са којим се од ова четири случаја има посла за лук те криве између тачака $x=a$ и $x=\text{в}$.

Уочимо најпре сл.1. и означимо са λ угаони сачинилац дирке у једној ма којој тачки. Из слике је очевидно да кад x расте од a до в, λ такође расте, другим речима први извод $f'(x)$ расте задржавајући при том једнако позитивне вредности. Пошто $f'(x)$ расте, то $f''(x)$ мора бити позитивно и према томе сл.1. карактерисана је овим условима

$$f'(x)=+ \qquad f''(x)=+$$

за све вредности x-а између a и в.

Уочимо сад сл.2.; λ је позитивно али опада; дакле $f'(x)$ је позитивно и опада, што значи да је $f''(x)$ негативно. Према томе сл.2. карактерисана је условима

$$f'(x)=+ \qquad f''(x)=-$$

Уочимо сл.3.; λ је негативно и опада; према томе карактеристика за сл.3. је

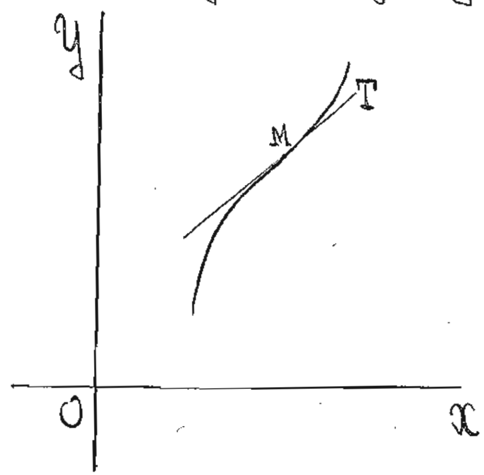
$$f'(x)=- \qquad f''(x)=-$$

На послетку у сл.4. λ је негативно и расте, што значи да је њена карактеристика

$$f'(x) = - \qquad f''(x) = +$$

Према томе питање о облику лука МН' у погледу његове конкавности и конвексности своди се на испитивање знака првог и другог извода за оне вредности x_a које се налазе између граница лука. Као што се види из горњег прегледа ако су ти изводи оба истог знака, лук ће изгледати конвексан кад се гледа одоздо а конкаван кад се гледа одозго; међутим кад су та два извода супротних знакова имаћемо обрнут резултат.

Ако би између граница лука други извод променио знак, што ће бити ако прође кроз нулу, очевидно је да у таквој тачки лук криве мења своју конкавност, тако да ако је био конкаван постаје конвексан и обрнуто. Такве тачке у којима лук мења конкавност називају се <u>превојним</u> или <u>инфлексионим тачкама</u> и оне су, као што се види, карактерисане тиме да за њихову апсцису други извод од x_a постаје раван нули. У близини једне такве тачке лук криве има сличан облик овоме на слици, тако да лук прелази с једне и с друге стране дирке.



Примери:

1. Испитати у којим је тачкама крива

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

конвексна односно конкавна на доле.

Овди је

$$y' = 6x^2 - 12x + 5$$

$$y'' = 12x - 12 = 12(x-1)$$

па је крива конвексна односно конкавна на доле за

$$x \gtrless 1$$

и има у тачки

$$x = 1 \quad y = 1$$

превојну тачку.

2. Исто за криву

$$y=x^4-6x^2$$

Овде је

$$y'=4x^3-12x$$

$$y''=12(x^2-1)$$

па је дата крива конвексна односно конкавна на доле за

$$x^2-1 \gtrless 0$$

т.ј.

$$x \gtrless \pm 1$$

Она има две превојне тачке

$$P_1(1,-5) \quad и \quad P_2(-1,-5)$$

О обвојницама кривих линија

Нека је дата једна фамилија кривих линија дефинисана једначином

$$f(x,y,a)=0$$

где је a какав промењив параметар. Свакој вредности a одговараће по једна крива линија и за две такве линије од којих је једна дефинисана са

$$C \qquad f(x,y,a)=0 \qquad 1)$$

а друга са

$$C_1 \qquad f(x,y,a+da)=0 \qquad 2)$$

каже се да су једна другој бесконачно блиске. Оне се секу у једној тачки и ако пустимо да се a континуирно мења, такве тачке могу имати у равни своје геометријско место које се назива <u>обвојницом</u> кривих. Обвојница је дакле геометријско место пресека бесконачно блиских тачака кривих линија.

Питање је сад како се одређује обвојница кад су дате једначине кривих линија 1) и 2). Ако се са x и y означе координате пресека двеју бесконачно блиских кривих линија што припадају фамилији 1) и 2), x и y у исто време задовољавају једначине 1) и 2). Према томе оне у исто време задовољавају једначину

$$\frac{f(x,y,a+da)-f(x,y,a)}{da}=0$$

која није ништа друго до

$$\frac{df}{da}=0 \qquad 3)$$

Елиминишући параметар a из 1) и 3) добија се извесна једначина

$$\varphi(x,y)$$

коју задовољавају координате пресека и која према томе представља тражену обвојницу из чега се изводи ово <u>практично упутство</u>: да би нашли обвојницу кривих линија

$$f(x,y,a)=0$$

треба елиминисати параметар a из једначина 1) и 3) па ће резултат елиминације бити једначина обвојнице. Ако су те две једначине немогуће ни за какву вредност a, криве немају обвојнице; ако су оне немогуће само за специјалне вредности a, обвојнице се своде на специјалне тачке чије се координате добијају решењем једначина 1) и 3) пошто су у њима смењене вредности a за које су једначине могуће; на последку ако су једначине могуће за произвољно a, има се случај са правом обвојницом.

Дешава се да једначина једне фамилије кривих линија садржи више параметара $a, b, c, \dots$ и то тако, ако је број тих параметара m, између њих је дато $(m-1)$ релација. Тада се из тих релација

$$f(x, y, a, b, c, \cdots)$$

може елиминисати $(n-1)$ параметар, па ће резултат елиминације бити извесна једначина

$$f(x, y, a) = 0$$

која садржи само један параметар, чиме је случај сведен на овај који смо испитали.

Н. пр. одредити обвојницу свију елипса чије осовине леже на истој правој и које све имају исту површину. Ако се дужине полуосовина означе са a и b и ако се за координатне осовине узму поменуте праве, општа једначина свију тих елипса биће:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

и она садржи два параметра a и b. Међутим пошто све треба да имају једну исту површину p, то ће бити

$$\pi a b = p$$

и то је релација која постоји између a и b. Из ње имамо

$$b = \frac{p}{a\pi}$$

и према томе једначина елипсе постаје

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\pi^2 a^2}{p^2} y^2 - 1 = 0 \qquad 4)$$

диференцијаљењем по a добијамо

$$\frac{\partial F}{\ } = -\frac{2a}{a^4} x^2 + \frac{2a \cdot \pi^2}{p^2} y^2$$

Ако ставимо да је овај израз раван нули и скратимо са $2a$, добијамо из те једначине

$$a^2 = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{x}{y}$$

Заменом у 4) добија се

$$\frac{\pi}{p} xy + \frac{\pi}{p} xy - 1 = 0$$

или

$$xy = \frac{p}{2\pi}$$

Према томе тражена обвојница јесте хипербола која има коорд. осе за асимптоте.

За обвојнице важи ова важна теорема: Обвојница додирује све бесконачно много криве линије којима одговара. Да би теорему доказали приметимо прво да обвојница има са сваком од кривих те фамилије бар по једну заједничку тачку према самој дефиницији; довољно је дакле доказати да у тој заједничкој тачки крива C и обвојница имају исти угаони сачиниоц другим речима да извод $\frac{dy}{dx}$ било да се израчуна из једначине криве било из једначине обвојнице има исту вредност у тој заједничкој тачки. Ако се извод израчунава из једначине криве

$$f(x,y,a)=0$$

тој кривој одговара једна утврђена вредност a и према томе диференцијаљењем те једначине имали би

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad 17)$$

Ако се пак $\frac{dy}{dx}$ израчунава из једначине обвојнице, ова се може сматрати дефинисана једначином

$$f(x,y,a)=0$$

где a није стално већ је извесна функција x-а и y-а дефинисана једначином

$$\frac{df}{da}=0 \qquad 18).$$

Према томе кад би диференцијалили једначину обвојнице имали би

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial a}da=0 \qquad 19)$$

где би a требало бити функција дефинисана једначином 18). Међутим баш

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0$$

чини да у једначини 19) нестаје последњег сабирка и да се она своди опет на једначину

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

одакле је опет

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad 20)$$

упоређењем вредности $\frac{dy}{dx}$ које су дате једначинама 17) и 20) од којих је прва израчуната из једначине криве С, а друга из једначине обвојнице, види се да су те две вредности једнаке, чиме је горње тврђење доказано.

Примери:

1. Наћи обвојницу фамилије парабола

$$y^2-2(p+1)x+p^2=0$$

Из једначине је

$$\frac{\partial f}{\partial p}=-2x+2p=0$$

одакле

$$p=x$$

па је једначина тражене обвојнице

$$x^2-y^2+2x=0$$

а то је хипербола.

2. Исто за фамилију правих

$$x\sin p+y\cos p-a=0$$

Из ове једначине је

$$\frac{\partial f}{\partial p}=x\cos p-y\sin p=0$$

или

$$x\cos p-y\sqrt{1-\cos^2 p}=0$$

а одатле

$$\cos p=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Отуда

$$\sin p=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

па заменом у датој једначини добијамо

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-a=0$$

или

$$x^2+y^2=a^2$$

а то је круг полупречника a и центра у коорд. почетку.

3. Исто за фамилију правих

$$x\sin p-y\cos p-a=0$$

Одавде је

$$x\cos p+y\sin p=0$$

или

$$x\cos p+y\sqrt{1-\cos^2 p}=0$$

а одатле

$$\cos p=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin p=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

па заменом добијамо као једначину обвојнице

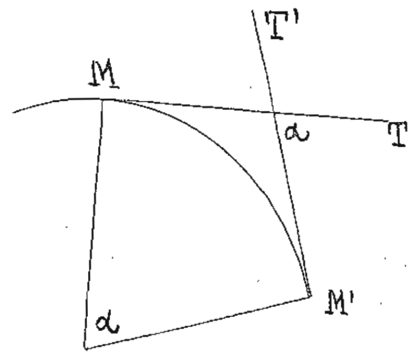
$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - a = 0$$

или

$$(x^2-y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) = 0$$

О кривини кривих линија

До појма о кривини кривих линија у равни долази се упоређивањем лукова кривих линија са кружним лучима. Ако је дат један кружни лук MM' па у његовим крајњим тачкама M и M' повучемо две дирке MT и $M'T'$, очевидно је да ће лук имати у толико већу кривину



у колико је већи угао α који граде те дирке. Међутим тај угао α није ништа друго до централни угао α чији краци пролазе кроз M и M'. Пошто је кривина круга у толико већа у колико је већи тај централни угао α, то за дефиницију кривине круга може се узети ово: под кривином круга разумемо величину угла α што одговара јединици дужине лука. Ако се лук MM' означи са s, као мерило кривине сматраћемо дакле $\frac{\alpha}{s}$. Међутим и величина тог размера може се лако одредити непосредно помоћу полупречника круга. Јер, пошто се угао сматра као лук што одговара полупречнику $r=1$, то ће између полупречника r, лука s и угла α постојати однос

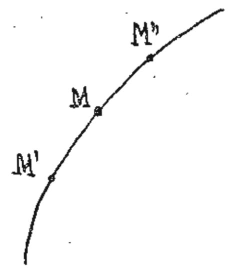
$$s = r\alpha$$

или

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{1}{r}$$

Према томе као мерило кривине једног лука може се сматрати реципрочна вредност његовог полупречника.

Слична дефиниција кривине проширена је и на лукове ма какве криве линије и то на овај начин: Нека је дат лук једне криве линије, па уочимо на њему једну тачку M и две њој бесконачно блиске тачке M' и M''. Кроз ове три тачке увек је могуће повући један круг и то само један круг.



Ако пустимо да се тачке M' и M'' бесконачно приближују тачки M, онда ће се и тај круг потпуно деформисати тежећи извесном граничном кругу C с којим ће се поклопити кад се тачке M' и M'' буду бесконачно приближиле тачки M. Овај круг има према самом начину постанка ту особину да се у бесконачној близини тачке M бесконачно мали лук криве линије подудара са бесконачно малим луком тога круга. Кривина круга C може дакле служити као мерило кривине дате криве у тачки M и због тога се круг C назива *кругом кривине* дате криве линије у тачки M. Полупречник круга C назива се *полупречником кривине* дате криве у тачки M. И на послетку центар круга C назива се <u>центром кривине</u> дате криве у тачки M.

Остаје још да покажемо како се рачунски одређују елементи тог круга т.ј. полупречник кривине и центар кривине. Ако замислимо да је тачка M' бесконачно блиска тачки M, дирке у тим двема тачкама градиће међу собом бесконачно мали угао $d\alpha$ који се назива: <u>углом контингенције</u> тачке M и тачке M'. Тако исто лук MM' биће бесконачно мали и ми ћемо га означити са ds. Пошто се лук MM' поклапа са луком круга кривине, према напоредној дефиницији кружне кривине, кривина овог лука имаће за вредност: $\frac{d\alpha}{ds}$. Међутим као што је показано, она ће у исти мах имати за вредност и $\frac{1}{\rho}$ где је ρ полупречник круга кривине, тако да је

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

одакле је

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

Овај се образац често употребљује у рачунима у којима се непосредно има посла са луком криве линије. Међутим потребно је имати полупречник кривине изражен непосредно помоћу координата тачке M. У том циљу покушајмо израчунати количине $d\alpha$ и ds помоћу тих координата. Ако се координате те тачке означе са (x,y), координате њених бесконачно блиских тачака M' биће $(x+dx,\ y+dy)$. Пошто се лук ds може сматрати као бесконачно мало растојање тачака M и M', то ће бити

$$ds^2 = [(x+dx)-x]^2 + [(y+dy)-y]^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \qquad 1)$$

Одатле је

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

С друге стране угао контингенције $d\alpha$ није ништа друго до угао V који граде међу собом два правца MT и $M'T'$. Ако се ова два угла означе са β и β', биће

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta'}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta'}$$

Међутим пошто је овде угао V бесконачно мали и раван $d\alpha$, његов се тангенс може сменити њим самим тако да је

$$\operatorname{tg} V = d\alpha$$

Пошто с друге стране $\operatorname{tg}\beta$ представља коефицијенат правца дирке у тачки M, то ће његова вредност бити

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = y'$$

На послетку пошто $\operatorname{tg}\beta'$ представља коефицијенат правца дирке $M'T'$ која је бесконачно мало различна од дирке MT, то ће бити

$$\operatorname{tg}\beta' = y' + dy'$$

Заменом ових вредности добија се

$$d\alpha = \frac{y' - (y' + dy')}{1 + y'(y' + dy')} = -\frac{dy'}{1 + y'^2 + y'dy'} \qquad 2)$$

Међутим као што знамо из диференцијалног рачуна биће

$$dy' = y'' dx$$

и у имениоцу последњег обрасца може се занемарити бесконачно мала количина $y'dy'$ поред коначне количине $1 + y'^2$. Према томе последњи образац постаје

$$d\alpha = -\frac{y'' dx}{1 + y'^2}$$

а пошто је, као што смо малочас добили

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

то се из обрасца

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

добија

$$\rho = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}\,(1+y'^2)}{-y'' dx} = -\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad 3)$$

и то је тражени образац помоћу кога се може изразити полупречник кривине једне дате криве у тачки M помоћу координата те тачке. Што се тиче знака обично се полупречник кривине сматра као позитивна количина пошто је то полупречник круга. Према томе ознаку који треба увести у горњем обрасцу треба водити рачуна тек кад се нађе вредност ρ и према томе одредити знак.

Помоћу обрасца 3) лако се решава задатак: одредити полупречник кривине једне криве

$$y=f(x)$$

у једној њеној тачки $x=a$ $y=b$. Треба из $y=f(x)$ израчунати изводе y' и y'', сменити их у обрасцу 3) и у добијеном резултату сменити $x=a$ $y=b$.

Н. пр. тражи се полупречник кривине параболе

$$y=2x^2$$

у њеној тачки $x=1$ $y=2$. Овди је

$$y'=4x$$

$$y''=4$$

Према томе образац 3) даје

$$\rho=\frac{(1+16x^2)^{3/2}}{4}.$$

за $x=1$ имамо

$$\rho=\frac{17^{3/2}}{4}$$

Дешава се да је једначина криве дата не у облику

$$y=f(x)$$

већ у облику параметарских једначина

$$x=f(t) \qquad y=\varphi(t)$$

За такав случај треба образац 3) у неколико изменити. Пођимо од обрасца

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}$$

где смо за ds нашли вредност

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

а за $d\alpha$

$$d\alpha=-\frac{dy'}{1+y'^2}$$

$$\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{dx^2}(dx^2+dy^2)$$

Из обрасца

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

добија се помоћу правила за диференцијалење количника

$$dy'=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}$$

тако да добијамо

$$d\alpha = -\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 \cdot \frac{1}{dx^2}(dx^2+dy^2)} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2+dy^2}$$

У тим обрасцима треба сменити dx, dy, d^2x и d^2y помоћу њихових вредности израчунатих из параметарских једначина дате криве, тако да ћемо имати ds и $d\alpha$ израчунате помоћу параметра t. Заменом тих вредности у обрасцу

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

имаћемо ρ израчунато помоћу t. Ако се тражи ρ за једну тачку на кривој онда у обрасцу за ρ треба сменити t оном вредношћу која тој тачки одговара. Н. пр. тражи се полупречник кривине криве линије

$$x = t-1 \qquad y = t^2$$

у њеној тачки $(x=1, y=4)$. Овој тачки одговара вредност параметра

$$t = 2$$

Из једначина криве линије добија се

$$dx = dt \quad dy = 2t\,dt \quad d^2x = 0 \quad d^2y = 2\,dt^2$$

Заменом тих вредности у горњим обрасцима за ds и $d\alpha$ добија се

$$ds = \sqrt{dt^2 + 4t^2\,dt^2} = dt\sqrt{1+t^2\cdot 4}$$

$$d\alpha = \frac{-2\,dt^3}{dt^2(1+4t^2)} = -\frac{2\,dt}{1+4t^2}$$

Заменом у обрасцу за ρ добијамо

$$\rho = -\frac{dt\sqrt{1+4t^2}\,(1+4t^2)}{2\,dt} = -\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$$

Па пошто посматраној тачки M одговара вредност параметра $t=2$, то ћемо имати

$$\rho = -\frac{17^{3/2}}{2}$$

а пошто ρ треба да је позитивно, треба изоставити знак $-$.

Примедбе:

1. Ако се образац 3) упореди са ранијим обрасцем који даје полупречник оскулаторног круга дате криве у тачки M, види се да се та два обрасца поклапају. Па пошто и оскулаторни круг пролази кроз беско-

начно блиске тачке тачки M као и круг кривине, а међутим имају и исте полупречнике, то се изводи да се круг кривине једне дате криве линије у тачки M поклапа са оскулаторним кругом исте криве у истој тачки M. Према томе центар кривине за тачку M јесте центар оскулаторног круга за тачку M. Говорећи о том кругу ми смо показали како се израчунавају координате центра и тим самим казано је како се одређују координате центра кривине за тачку M.

2. Дешава се да на посматраној кривој линији има тачака за које је полупречник кривине раван нули или бескрајан. Из обрасца за тај полупречник види се да ρ може бити равно нули само за оне тачке за које други извод постаје бескрајан; тај полупречник постаје међутим бескрајан за оне тачке за које је други извод y'' раван нули а да међутим трећи извод има коначну вредност. Овај се случај јавља код превојних тачака. Тако н. пр.

а) крива линија

$$y = x^{3/2}$$

има у тачки $x=0$ $y=0$ полупречник кривине раван нули јер је

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2} \qquad y'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

тако да је за $x=0$ y' коначно а y'' бескрајно.

б) крива линија

$$y = \sin x$$

у тачкама у којима сече x-осовину има полупречник кривине бесконачно велики, јер је

$$y'' = -\sin x$$

и у поменутим тачкама овај је извод раван нули.

3. У поларним координатама полупречник кривине дат је изразом

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{dt^2}}$$

где су r и t поларне координате једначине криве.

Примери:

1. Наћи полупречник кривине ланчанице чија је једначина

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Овде је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}$$

па је

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}$$

(в. стр. 7. код одређене дирке)

2. Исто за хиперболичну спиралу чија је једначина

$$r = \frac{a}{t}$$

Овде је

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a}{t^2} = -\frac{r^2}{a}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2a}{t^3} = \frac{2r^3}{a^2}$$

па је према томе

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{r^4}{a^2}\right)^{3/2}}{r^2} = \frac{r(a^2+r^2)^{3/2}}{a^3}$$

3. Исто за логаритамску спиралу

$$r = a e^{mt}$$

Овде је

$$\frac{dr}{dt} = ma e^{mt} = mr$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = m^2 a e^{mt} = m^2 r$$

па је

$$\rho = \frac{\left[r^2 + m^2 r^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = \frac{r^3(1+m^2)^{3/2}}{r^2(1+m^2)} = r\sqrt{1+m^2}$$

4. Исто за хиперболу

$$xy = k^2$$

Одавде је

$$y = \frac{k^2}{x}$$

па је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k^2}{x^2} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2k^2}{x^3}$$

па отуда

$$\rho = \frac{x^3}{2k^2}\left(1 + \frac{k^4}{x^4}\right)^{3/2}$$

5. Исто за криву

$$r = a \sin 2t$$

Имамо

$$\frac{dr}{dt} = 2a \cos 2t$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -4a \sin 2t = -4r$$

Како је

$$\sin 2t = \frac{r}{a}$$

то је

$$\cos 2t = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}$$

па је

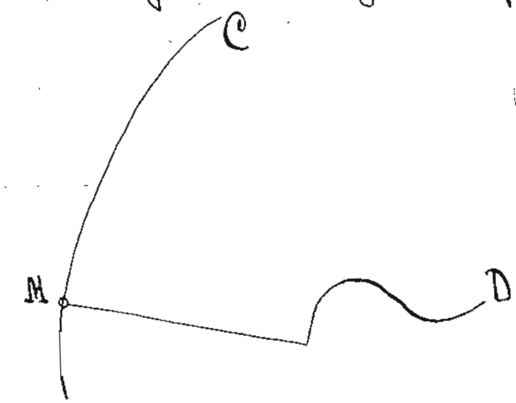
$$\frac{dr}{dt} = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

отуда

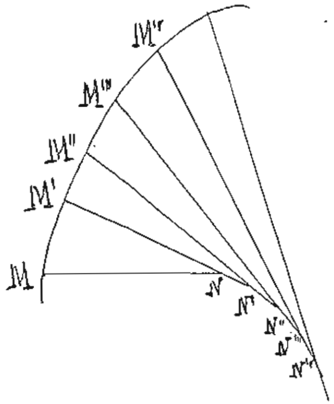
$$\rho = \frac{\left[r^2 + 4(a^2 - r^2)\right]^{3/2}}{r^2 + 2 \cdot 4(a^2 - r^2) + 4r^2} = \frac{(4a^2 - 3r^2)^{3/2}}{8a^2 - 3r^2}$$

Еволуте и еволвенте кривих линија

Ако одредимо центар кривине једне тачке М на једној датој кривој С, па пустимо да се тачка М креће по кривој С, онда ће и центар кривине описивати једну криву линију D. Ова крива D назива се *еволутом* криве С, а крива С *еволвентом* криве D.



Према овој дефиницији еволута се може сматрати као геометријско место центара кривине криве С у свима њеним тачкама. Из ове дефиниције може се непосредно извести и једна проста веза која постоји између еволуте и еволвенте. Уочимо на кривој C један низ бескрајно блиских тачака M,



M'M''M'''... Центар кривине у тачки M криве може се сматрати као пресечна тачка двеју бескрајно блиских нормала у тачкама M и M'. Тако исто центар кривине N' може се сматрати као пресек бескрајно блиских нормала у тачкама M' и M''. Одређујући на тај начин пресеке NN'N''N'''... добићемо једну испрекидану линију NN'N''... Ако тачке MM'M''M'''... образују један континуалан низ, очевидно је да ће и тачке NN'N''... образовати континуални низ т.ј. једну криву која ће бити еволута криве C. Из самог овог начина на који смо дошли до појма еволуте и еволвенте излазе ове њихове особине:

1. Јасно је из слике да је

$$NN' = M'N' - MN$$
$$N'N'' = M''N'' - M'N'$$
$$N''N''' = M'''N''' - M''N''$$
$$\dots\dots\dots$$

Ако ове једначине саберемо, па потег који одговара крајњој тачки означимо са ρ_2 а потег MN што одговара првој тачки M означимо са ρ_1, добија се

$$NN' + N'N'' + N''N''' + \dots = \rho_2 - \rho_1 \qquad 1)$$

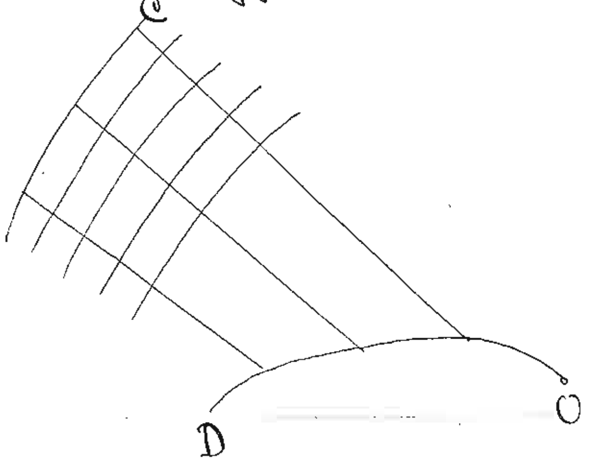
Лева страна једначине 1), ако замислимо да су тачке MM'M''..., па дакле и одговарајуће тачке NN'N''... бесконачно блиске једна другој, представља дужину лука еволуте између њених крајњих тачака којима одговарају потези ρ_2 и ρ_1. Отуда једначина

$$\rho = \rho_2 - \rho_1$$

која исказује ову теорему: Лук еволуте између њених ма којих крајњих тачака раван је разлици полупречника кривине еволвенте који одговарају крајњим тачкама лука еволуте.

2. Очевидно је такође из слике да су дирке у тачкама еволуте у исто време нормале у одговарајућим тачкама еволвенте.

3. Из слике је такође јасно да се помоћу већ нацртане еволуте може одговарајућа еволвента нацртати на овај начин: замислимо у једној тачки O еволуте утврђен крај каквог нерастегљивог конца, а претпоставимо да се он око тачке O обрће тако да се намотава на еволуту D или да се од ње одмотава. Други неутврђени крај конца описаће еволвенту. Па пошто дужина конца може бити произвољна, то је очевидно да једној еволути одговара бескрајно много еволвената. Овако добијене бесконачно много еволвенте



имају ову важну особину: да је одстојање између двеју еволвената дуж повучених потега стално за ма коју њену тачку; због тога се две такве криве линије које имају једну исту еволуту зову <u>равноодстојним</u>.

Остаје нам још да кажемо како се може рачунски пошавши од једначине једне криве C наћи једначина њене еволуте. Јасно је из слике да се еволута једне криве C може сматрати као обвојница нормала криве C. Према општој теорији обвојница коју смо раније имали, треба наћи нормалу у једној произвољној тачки (a, b) криве C, из те једначине помоћу једначине саме криве избацити једну количину a или b тако да само једна од њих фигурише у једначини нормале као променљиви параметар. Затим такође према општој дефиницији обвојница треба наћи изводну једначину једначине нормале по том параметру и на посетку елиминисати параметар из двеју тако добијених једначина. Резултат елиминације биће тражена једначина еволуте.

Ако је једначина криве дата у облику

$$y = f(x)$$

и ако се са a и b означе координате на које тачке криве, једначина нормале у тој тачки биће као што знамо

$$y - b = \frac{1}{y'}(x - a)$$

Из једначине криве је

$$y' = f'(x)$$

тако да ће коефицијенат правца бити

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{f'(a)}$$

и једначина нормале биће

$$y - b = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

или

$$[y - f(a)]\, f'(a) - x - a = 0 \qquad 1)$$

Ова једначина садржи три промењиве: x, y и a где a игра улогу параметра у теорији обвојница. Диференцијалећи по том параметру имаћемо

$$F(x, y, a) = 0 \qquad 2)$$

Елиминацијом a из 1) и 2) имали би

$$\varphi(x, y) = 0$$

која би представљала еволуту.

Међутим у извесним случајевима згодније је задржати b као параметар. У том случају треба изразити $-\frac{1}{y'}$ помоћу b и помоћу једначине криве израчунати и само a помоћу b. Једначина нормале садржаће тада три промењиве: x, y и b. Таква ће једначина бити

$$\psi(x, y, b) = 0$$

Елиминацијом b из

$$\psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\psi}{db} = 0$$

добиће се једна једначина у којој фигурише само x и y и која ће бити једначина еволуте.

На сличан се начин ради и кад
једначина није решена ни по x ни по
y. Тако, ако је једначина криве

$$f(x,y)=0$$

између a и b постојаће однос

$$f(a,b)=0$$

извод y' имаће за вредност

$$y' = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

одакле је

$$-\frac{1}{y'} = \frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}$$

и сменивши у тој једначини $x=a$ $y=b$
имаћемо коефицијенат правца нор
мале изражен помоћу a и b. Према
томе опет ћемо имати једначину
нормале у којој ће фигурисати: x,
y, a и b. Један од та два парамет-
ра a и b елиминисаћемо помоћу
релације

$$f(a,b)=0$$

и онда долазимо на мало пре про
учени случај.

Н. пр. Одредити еволуту па-
раболе

$$y^2=2x$$

Одавде је

$$yy'=1$$

или

$$y'=\frac{1}{y}$$

па дакле

$$-\frac{1}{y'}=-y$$

Према томе коефицијенат правца
нормале биће $-b$. Једначина нормале
у тачки (a,b) биће

$$y-b=-b(x-a)$$

ако задржимо b као параметар, а
a заменимо његовом вредношћу

$$a=\frac{b^2}{2}$$

једначина нормале биће

$$y-b=-b\left(x-\frac{b^2}{2}\right)$$

или

$$2y+2bx-2b-b^3=0 \qquad 3)$$

изводна једначина по параметру b
биће

$$2(x-1)-3b^2=0 \qquad 4)$$

одакле је

$$b=\sqrt{\frac{2(x-1)}{3}}$$

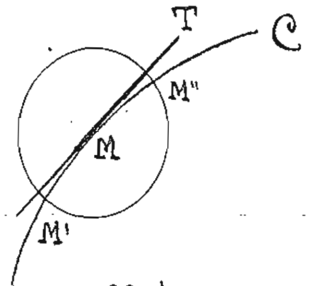
Заменом те вредности у једначини 3) добијамо тражену једначину еволуте.

Као што се види одређивање једначине еволуте своди се једино на диференцијалење и елиминацију и те су операције такве да се за једну криву добија само једна еволута. Међутим реципрочна операција тј. одређивање еволвенте која одговара једној датој еволути много је тежи посао и своди се на интеграцију. Знамо да свака интеграција уноси собом интеграционе константе и то је рачунски разлог што једној еволути одговара бесконачно много еволвената.

Примедба: Свакој кривој линији одговара по једна крива линија као еволута. Међутим у једном специјалном случају еволута се своди на једну тачку; то је у случају круга.

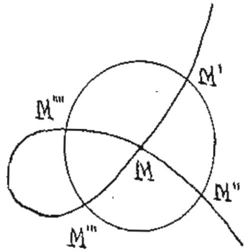
Сингуларне тачке кривих линија.

Уочимо једну криву C и на њој једну тачку M. У тој тачки повучимо дирку MT и опишимо око ње један врло мали круг. Обично се дешава да тај круг сече криву C у двема тачкама M' и M" које се налазе на истој страни дирке T и које су такве да се угао M'MM" врло мало разликује од 180°. Ако су ти услови задовољени, онда се за такву тачку каже да је <u>обична тачка</u> криве C, а ако ма један од њих није задовољен, тачка се M назива <u>сингуларном тачком</u> криве C. Према томе тачка ће M бити сингуларна ако се деси један од ова три случаја:

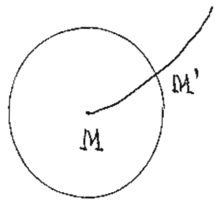


сл. 1.

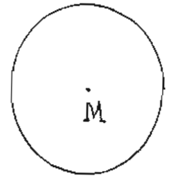
1. Или је број тачака M',M",... већи или мањи од два као н. пр. у сликама 2. 4. и 3.



сл. 2.

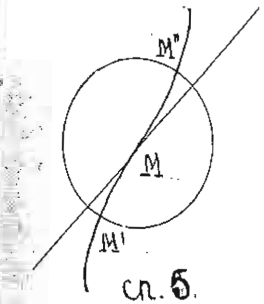


сл. 3.

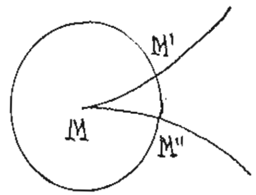


сл. 4.

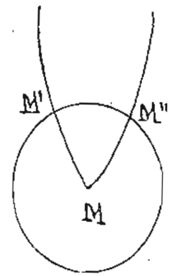
2. Или су тачке M' и M" једна с једне а друга с друге стране дирке као н. пр. у сл. 5.



сл. 5.



сл. 6.



сл. 7.

3. Или се угао M'MM" знатно разликује од 180° као што је случај у сликама 6. и 7.

Према томе који од горњих услова није задовољен и на који начин није задовољен разликују се ове врсте сингуларних тачака.

1° Вишеструке тачке.

То су тачке у којима се укрштају више грана једне исте криве линије. Бесконачно мали круг описан око такве тачке сече криву у више од две тачке.

Аналитичка дефиниција тих тачака била би ова: Ако је

$$f(x,y)=0 \qquad 1)$$

једначина криве, а $M(a,b)$ једна вишеструка тачка, једначина 1) решена по y има за $x=a$ више корена једнаких, а међутим y' добијено из исте једначине има за $x=a$ $y=b$ различите вредности. У таквом случају очевидно је да кроз тачку $M(a,b)$ пролазе више грана функције и да међутим те гране у тој тачки имају различите дирке. Н. пр. нека је дата крива линија

$$y^2 - x^2(x+1)=0$$

одакле је

$$y=\pm x\sqrt{x+1}$$

За $x=0$ обадве гране дају за y једну исту вредност $y=0$. Међутим пошто је из ове једначине

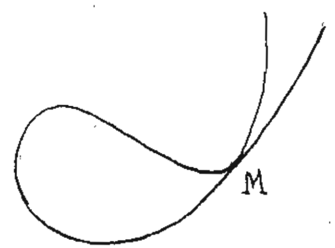
$$y = x(x+1)^{1/2}$$

то је

$$y' = (x+1)^{1/2} + \frac{x}{2}(x+1)^{-1/2} = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \pm\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

За $x=0$ имаћемо дакле две вредности првог извода $y'=\pm 1$. Према томе тачка $x=0$ $y=0$ јесте двострука тачка криве са разним диркама.

Међутим има и вишеструких тачака где се и дирке поклапају. То су <u>вишеструке додирне тачке</u> као у сл. 8. У таквим тачкама једначина криве даје и за y и за y' више вредности



сл. 8.

које се поклапају а међутим y'' има различите вредности. Н. пр. нека је дата крива

$$y^2 - x^4(x+1) = 0$$

одакле је

$$y = \pm x^2\sqrt{x+1}$$

$$y' = 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}} = \pm\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}$$

За $x=0$ имаћемо и за y и за y' по две вредности које се поклапају. Међутим лако се уверавамо тражењем другог извода да ће овај имати за $x=0$ разне вредности. Према томе $x=0$ $y=0$ биће вишеструка додирна тачка.

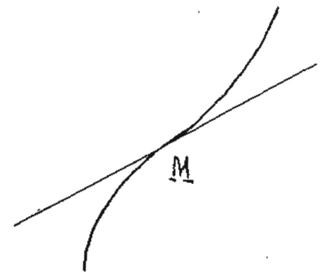
Према броју грана које се укрштају у једној вишеструкој тачки ове се разликују на: двоструке, троструке, ... тачке. Број грана које се укрштају раван је броју корена једначине

$$f(x,y) = 0$$

решеној по y који постају једнаки кад се x смени апсцисом једне тачке тачке.

2° Превојне тачке.

То су тачке у којима крива прелази из конкавног стања у конвексно и обрнуто. Видели смо раније да у таквим тачкама извод пролази кроз један свој максимум или минимум и при томе апсцисе таквих тачака задовољавају једначину



$$y''=0 \quad \text{или} \quad y''=\infty$$

Тако н. пр.

1. Ако је дата крива линија

$$y = \sin x$$

биће

$$y'' = -\sin x$$

и апсцисе тачака у којима крива сече апсцисну осовину су

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

а те су тачке превојне тачке.

2. Ако је дата крива

$$y = x^{5/3}$$

биће

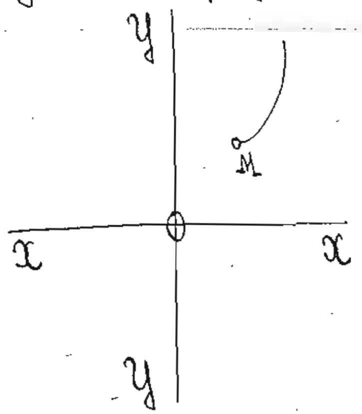
$$y' = \frac{5}{3} x^{2/3}$$

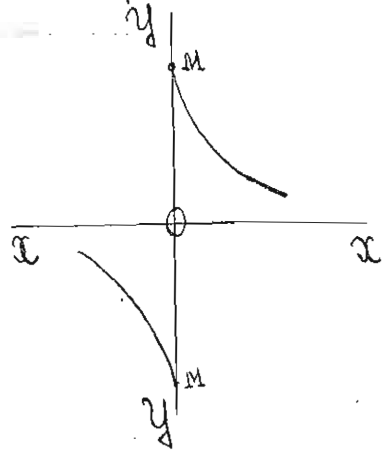
$$y' = \frac{10}{9} \frac{1}{x^{3}}$$

и према томе тачка $x=0$ $y=0$ је превојна тачка.

3° Прекидне тачке

То су тачке у којима се једна грана криве нагло прекида или у којима ордината криве нагло скаче од једне ординате на другу, сасвим различиту ординату.





Аналитичка дефиниција била би ова: ако је $M(a,b)$ једна прекидна тачка, па се једначина криве реши по y, тако да је

$$y = f(x)$$

израз $f(a-\varepsilon)$, где је ε бесконачно мала позитивна количина, тежи једној, а израз $f(a+\varepsilon)$ тежи сасвим другој граници. Те две границе могу бити обе коначне и одређене или штавише и неодређене.

Н. пр. нека је дата крива

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

уочимо тачку чија је апсциса

$$a = 0$$

онда је

$$a - \varepsilon = -\varepsilon$$

$$a + \varepsilon = \varepsilon$$

Вредност

$$f(a-\varepsilon) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{-\varepsilon} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon}$$

тежи граници

$$-\frac{\pi}{2}$$

На против израз

$$f(a+\varepsilon) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon}$$

тежи граници $\frac{\pi}{2}$

Вредност ординате за $x=0$ дакле нагло скаче од $-\frac{\pi}{2}$ на $+\frac{\pi}{2}$ тако да на y-осовини имамо две прекидне тачке дефинисане координатама $(0,-\frac{\pi}{2})$ и $(0,\frac{\pi}{2})$.

4° Осамљене (изоловане) тачке.

Бесконачно мали круг описан око такве тачке не сече криву ни у једној тачки.

Са рачунског гледишта то би биле такве тачке чије координате a и b задовољавају једначину криве, а међутим ни за какве реалне вредности (x,y) које се мало разликују од a и b једначина криве није задовољена. У исто време пошто је тачка изолована, па дакле у њеној непосредној близини нема никакве реалне тачке, то и дирка мора бити имагинарна, па дакле за координате такве тачке мора бити $\frac{dy}{dx}$ имагинарно.

Н. пр. 1. Нека је дата крива

$$y^2 - x^2(x-1)=0$$

одакле је

$$y=\pm x\sqrt{x-1}$$

За вредност x-а мању од 1 корен $\sqrt{x-1}$ је уображен, што значи да крива уопште нема тачака на левој страни од праве $x=1$. Међутим поред свега тога има једна реална тачка на левој страни праве $x=1$ која задовољава једначину криве и према томе може се сматрати да њој припада. То је тачка $x=0$ $y=0$. Лако се уверавамо да ако се стави

$$x=0\pm\varepsilon=\pm\varepsilon$$

y је уображено па ма какво било ε. Тако исто лако се уверавамо да је извод $\frac{dy}{dx}$ уображен за $x=0$, тако да тачка потпуно задовољава дефиницију изолованих тачака.

2. Нека је дата крива линија

трећег степена
$$(y-b)^2-(x-a)^2(x-c)=0$$
тада је
$$y=b\pm(x-a)\sqrt{x-c}$$
Претпоставимо да је задовољен услов
$$0<a<c$$
За све вредности x које су мање од c израз $\sqrt{x-c}$ је имагинаран, што значи да крива нема тачака на левој страни од праве $x=c$. Међутим из једначине је јасно да реална тачка $x=a$ $y=b$ која је на левој страни горње праве задовољава једначину криве, а међутим ма каква тачка $x=a\pm\varepsilon$ даје уображене вредности за y. На послетку како се уверавамо да извод
$$\frac{dy}{dx}=\pm\left[\frac{x-a}{2\sqrt{x-c}}+\sqrt{x-c}\right]$$
постаје уображен за $x=a$, јер је за ту вредност
$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{a-c}$$
Претпостављамо да се усамљене тачке могу сматрати као реалне тачке у којима се састају две уображене гране једне исте криве. Тако у првом примеру се састају уображене гране
$$y=x+\sqrt{x-1}$$
$$y=x-\sqrt{x-1}$$
у тачки $x=0$ $y=0$.

5° Преломне тачке.

То су тачке у којима се опет састају две гране једне исте криве али тако да прелазећи од једне гране на другу дирка нагло мења правац. Са рачунског гледишта те су тачке дефинисане тиме што ако је $x=a$ једна таква тачка, извод $\frac{dy}{dx}$ за $x=a-\varepsilon$ тежи једној истој граници λ кад ε тежи нули, а међутим за $x=a+\varepsilon$ тај исти извод тежи једној другој сасвим различитој граници μ кад ε тежи нули.

Н. пр. 1. Нека је дата крива

линија

$$y = a + x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$$

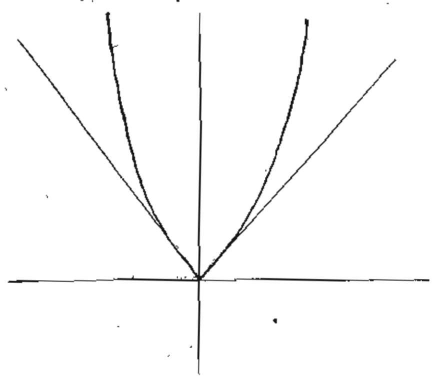
па ћемо имати

$$\frac{dy}{dx} = \left(x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot -\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x}{1+x^2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$$

Лако се уверавамо да је тачка $x=0$ $y=0$ једна преломна тачка криве линије јер за $x=0-\varepsilon=-\varepsilon$ извод постаје

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} - \mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon}$$

Ако пустимо да ε тежи нули, први сабирак тежи нули, а други граници $-\frac{\pi}{2}$. Према томе крива стиже од леве стране у тачку $x=0$ са цирком чији је коефицијенат правца $-\frac{\pi}{2}$. На против за $x=0+\varepsilon=+\varepsilon$ извод постаје



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon}$$

и за $\varepsilon=0$ он тежи граници $+\frac{\pi}{2}$. Крива дакле стиже са десне стране у тачку $x=0$ са цирком чији је коефицијенат правца $+\frac{\pi}{2}$. Она ће дакле близу почетка

имати назначени правац и облик.

2. Нека је дата крива линија

$$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

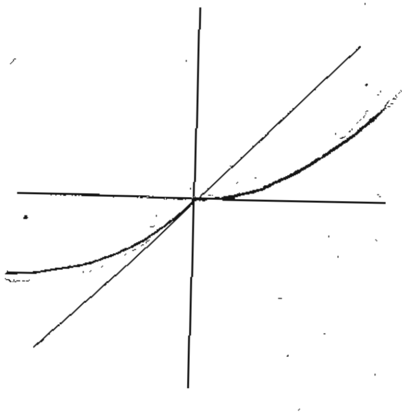
Лако је уверити се да је опет тачка $x=0$ $y=0$ преломна тачка. Да би образовали вредност извода за $x=0$ $y=0$, приметимо да према L'Hospital-овом правилу та вредност није ништа друго до граница којој тежи $\frac{y}{x}$. Међутим је

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

за $x=0-\varepsilon=-\varepsilon$ тај се израз своди на

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

и за $\varepsilon=0$ тежи граници 1, што значи да крива стиже од леве стране у тачку $x=0$ са цирком чији је коефицијенат правца 1. Међутим за $x=0+\varepsilon=+\varepsilon$ тај израз се своди на

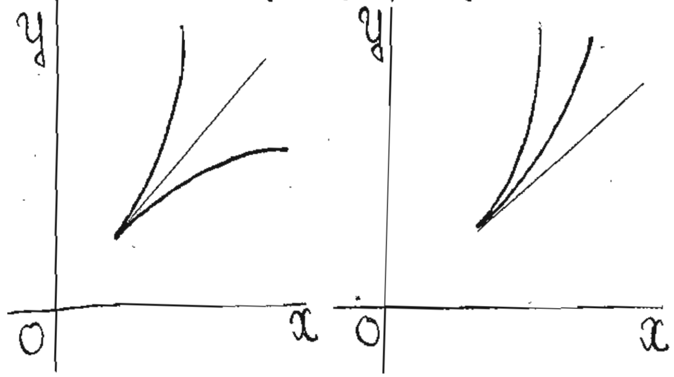


$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}}$$

и за $\varepsilon=0$ тежи граници нула, што зна-
чи да крива стиже с десне стране у
тачку $x=0$ са дирком чији је коефици-
јенат правца нула. Крива ће у близи-
ни почетка имати предњи облик, о-
значен на слици.

6° Повратне тачке.

То су тачке у којима се две
или више грана једне исте криве са-
стају и у исто време завршују има-
јући исту дирку. Са рачунског гле-
дишта те б[illegible]
тачке бит[illegible]
овако деф[illegible]
нисане: то
је таква је[illegible]
на тачка
$x=a$ да се



две или више вредности y-а поклапају

за $x=a$, а тако исто се и вредности из-
вода поклапају, међутим ако је за $x=a-\varepsilon$
у стварно, оно је за $x=a+\varepsilon$ уображено.

Повратних тачака има од
две врсте:

а) такве тачке, у којима су гране што
се у њима састају распоређене с јед-
не и с друге стране дирке; то су по-
вратне тачке прве врсте; и

б) тачке, у којима су гране што се у
њима састају распоређене само са
једне стране дирке; то су повратне
тачке друге врсте.

Питање о томе које ће врсте
бити једна дата повратна тачка
решава се помоћу знака другог из-
вода за вредност x-а за ту тачку.
Ако су све вредности које има дру-
ги извод за $x=a$ различитог знака
међу собом, има се посла са поврат-
ном тачком прве врсте, ако су истог
знака, има се посла са повратном
тачком друге врсте. То излази отуда

што као што је из слике очевидно, кое-
фицијенат правца дирке варира увек
у једном истом смислу растући или
падајући код тачке друге врсте, што
значи да други извод мора имати
исте знаке за обе гране које се у тој
тачки састају. На против за тачке
прве врсте коефицијенат правца дир-
ке час расте час опада, што значи
да знак другог извода није исти за
све те гране.

Н. пр. 1. Нека је дата крива ли-
нија

$$y = a + bx + cx^{5/2}$$

Крива има две гране

$$y = a + bx + c\sqrt{x^5}$$
$$y = a + bx - c\sqrt{x^5}$$

Оне се састају у тачки

$$x=0 \quad y=a$$

Лако је уверити се да ће ова тачка
бити повратна тачка прве врсте,
јер пре свега у њој се састају горње
две гране, затим са десне стране тач-

крива реална а са леве имагинарна.
Извод има за вредности

$$y' = b + \frac{5c}{2}x^{3/2} = b \pm \frac{5c}{2}\sqrt{x^3}$$

Међутим за $x=0$ обе вредности извода
поклапају се са $y'=b$. Према томе и-
мамо посла са повратном тачком
криве, а пошто је

$$y'' = \pm\frac{15c}{4}\sqrt{x}$$

дакле у близини тачке $x=0$ изводи и-
ма две вредности са супротним зна-
цима, то се има посла са повратном
тачком прве врсте.

2. Нека је дата крива линија

$$y = a + bx + x^2 + cx^{5/2}$$

Опет ћемо имати две гране

$$y = a + bx + x^2 + c\sqrt{x^5}$$
$$y = a + bx + x^2 - c\sqrt{x^5}$$

које се састају у тачки $x=0$ $y=a$. Са
десне стране те тачке крива је реал-
на, са леве имагинарна. Извод је

$$y' = b + 2x \pm \frac{5c}{2}\sqrt{x^3}$$

и за $x=0$ он има две вредности које
се поклапају и према томе имамо

поспа са повратном тачком. Међутим други извод има за вредност

$$y'' = 2 \pm \frac{15c}{4}\sqrt{x}$$

и он за x врло мало и позитивно има сталан знак. Према томе имамо поспа са повратном тачком друге врсте.

* * *

Из свега овога види се да у опште код кривих линија можемо имати две врсте сингуларних тачака:

1° Сингуларне тачке које има једна иста крива; ту долазе превојне и прекидне тачке. и

2° Сингуларне тачке у којима се састају две гране једне исте криве (са укрштањем, додиром, најзад прекидом и преломом). Ту долазе: вишеструке тачке прве и друге врсте, повратне тачке прве и друге врсте, осамљене тачке и преломне тачке.

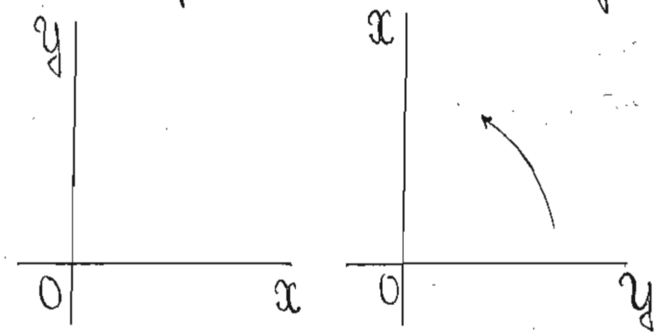
У свему досадашњем претпостављено је да је једначина криве решена по y. Међутим дешава се да је једначина или нерешљива по y или да је много простије решити је по x. У таквим случајевима најпрактичније је овако радити: пермутујемо међу собом x и y тако да једначина

$$x = \varphi(y) \qquad 1)$$

постане

$$y = \varphi(x) \qquad 2)$$

и онда на овакву једначину применимо све оно што је мало час казано за сингуларне тачке. Претпоставимо да смо оперишући са једначином 2) испитали њене сингуларне тачке и конструисали криву у близини те тачке. Да би се вратили на једначину криве треба опет пермутовати x и y што значи да са сликом I до-



сл. I. сл. II.

бијеном конструишући криву, треба о-
брнути целу слику у њеној равни око
тачке O за 90°, затим обрнути целу
раван слике око осовине Oy за 180°.

Остаје нам на почетку најсложенији случај, а то је кад је једначина нерешива по x и y. Нека је дата једначина у облику

$$f(x,y)=0 \qquad 3)$$

Очевидно је да се испитивање сингуларних тачака и овде своди на испитивање вредности y, y' и y'', а до тих се вредности долази на овај начин: диференцијалећи једначину 3) имаћемо

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad 4)$$

Поновним диференцијалењем и сматрајући dx као стално, та јест

$$d^2x=0$$

имаћемо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy\,dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0 \qquad 5)$$

На почетку диференцијалећи опет једначину 5) имаћемо

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,d^2y+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,d^2y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0$$

или

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,d^2y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0 \qquad 6)$$

деобом једначине 4) са dx, једначине 5) са dx², једначине 6) са dx³ добија се

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad 7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad 8)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

За превојне тачке треба нам само други извод. Ако се дакле хоће да испита да би је дата тачка $x=a$ $y=b$ превојна или не, треба из 7) израчунати $\frac{dy}{dx}$ и сменити у њему $x=a$ $y=b$. На тај начин добијамо само једну вредност и заменом те вредности у 8) за $x=a$ $y=b$ имаћемо вредност другог извода да би тачка била превојна, потребно је да други извод буде раван нули или бескрајан.

Тако исто лако је испитивање прекидних тачака. То се испитивање може извршити и непосредно испитивањем једначине

$$f(x,y)=0$$

јер те тачке имају ту особину, ако је $x=a$ $y=b$ таква тачка, једначина

$$f(a\pm\varepsilon, y)=0$$

мора давати за y имагинарне вредности, па ма какво било ε, док међутим за $\varepsilon=0$ треба да се добије један корен и то $y=b$. 9)

Међутим тешкоће се јављају тек онда кад сингуларна тачка коју проучавамо произилази из укрштања неколико грана једне исте криве линије. Претпоставимо да је $x=a$ $y=b$ једна таква тачка. Према ономе што је казано о сингуларним тачкама такве врсте треба у таквој тачки да буде више дирака које су различите или се поклапају. А пошто једначина 7) која дефинише коефицијенат правца дирке y' даје само једну вредност за тај правац, значило би да има само једне дирке, то се та једначина мора свести на идентичност. То показује да за једну такву тачку мора бити

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad 10)$$

према томе оне тачке које у опште могу бити сингуларне тачке што произлазе од више грана једне исте криве добијају се решењем једначина 10) по x и y. Претпоставимо сада да је $M(a,b)$ једна тако добијена тачка. Питање је хоће ли она одиста бити сингуларитет и ако је одиста, какав ће бити сингуларитет. Заменимо x и y са a и b у једначинама 7), 8) и 9). Прва се своди на идентитет. Друга добија облик

$$A + 2By' + Cy'^2 = 0 \qquad 11)$$

а трећа облик

$$M + 3Ny' + 3Py'^2 + 3Qy'^3 + 3Ry'' + 3Sy'y'' = 0 \qquad 12)$$

где су

$A\ B\ C\ M\ N\ P\ Q\ R$ и S

извесни стални бројеви који се добијају заменом $x=a$ $y=b$ у горњим делимичним изводима. Квадратну једначину 11) можемо решити по y' и онда могу наступити ова три случаја:

<u>1° случај</u>: Нека су њени корени реални и неједнаки. Тада у посматраној тачки имамо две једну од друге различите дирке, што показује да се у њој укрштају две гране криве т. ј. да је та тачка двојна тачка.

<u>2° Случај</u>: Нека су корени реални и једнаки. Тада се у тачки M две дирке поклапају, што показује да се има посла или са двојном додирном тачком или са повратном тачком. Које ће од тога двога бити решава се на овај начин: треба у једначини саме криве

$$f(x,y)=0$$

сменити x вредношћу $a \pm \varepsilon$. Ако је M двојна додирна тачка, онда y из те једначине треба да је реално за ма какво $+\varepsilon$ или $-\varepsilon$; на против ако је M повратна тачка, y ће бити н. пр. за $+\varepsilon$ стварно а за $-\varepsilon$ имагинарно, или обратно. Остаје још да се види хоће ли додир бити прве или друге врсте ако је то додирна тачка, као и то да ли ће то бити повратна тачка прве или друге врсте. Казано је раније да то питање решава знак другог извода. Овај пак извод можемо израчунати сменивши у 12) y' кореном једначине 11) чиме ћемо имати за други извод y'' једначину првог степена, одакле можемо израчунати y''. Ако је његов знак негативан, имамо додир прве врсте или повратну тачку друге врсте. Ако је тај извод позитиван, биће обратно.

<u>3° Случај</u>: Нека су корени имагинарни. Тада је тачка M изолована тачка криве.

Може се десити да се једначина 8) сведе на идентичност, што ће бити онда ако су сви делимични изводи што у њој фигуришу равни нули за посматрану тачку. Тада ваља прећи непосредно на једначину 9). Тада исчезавају сви чланови са y'' и једначина 9) добија облик

$$M+3Ny'+3Py'^2+Qy'^3=0$$

За одредбу коефицијента правца дирке имамо једначину трећег степена и дискусијом њених корена испитали би као и мало час природу тачке M. Тачка M биће или трострука тачка или трострука додирна тачка; усамљена не може бити а повратна може.

Може се десити да нова једначина буде идентички равна нули. Тада се прелази на идућу по реду једначину и добија се једначина четвртог степена по y' и дискусијом њених корена одређује се каква је то тачка.

Н. пр. 1. Нека је дата крива линија

$$y^2-x^2(x+1)=0$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3x^2-2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x-2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

Према томе сингуларне тачке добијају се решењем једначина

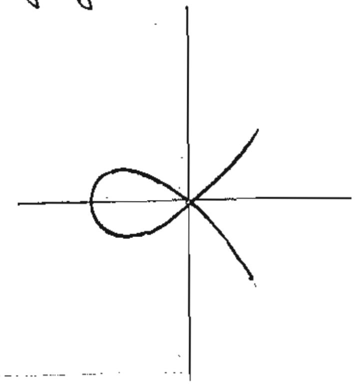
$$-3x^2-2x=0$$
$$2y=0$$

Тачке које то у опште могу бити јесу дакле: $M_1(x=-\frac{2}{3}, y=0)$ и $M_2(x=0, y=0)$. Испитајмо н. пр. тачку $M_2(0,0)$. За њу се једначина 8) своди на

$$-2+2y'^2=0$$

одакле је

$$y'=\pm 1$$



Оба су корена стварна и неједнака и према томе тачка $M_2(0,0)$ је двострука тачка облика који је дат на слици.

2. Нека је дата крива

$$(y-x-1)^2-x^5=0$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2y+2x+2-5x^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2x-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2-20x^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

Сингуларне тачке добијају се решењем једначина

$$-2y+2x+2-5x^4=0$$
$$2y-2x-2=0$$

чији је корен $x=0$ $y=1$. Тачка је повратна.

Остаје нам још да докажемо ову важну теорему за алгебарске криве линије: Никаква алгебарска крива линија не може имати прекидних нити преломних тачака. Нека је $x=a$ $y=b$ једна уочена тачка M. Пренесимо у њу координатни почетак и испитајмо криву (њену природу) у непосредној близини те тачке. Нека је

$$f(x,y)=0$$

једначина посматране алгебарске криве линије. Пре свега увек се може претпоставити да је $f(x,y)$ полином по x, y; ако то није случај, она се може увек на тај облик довести. Групишимо у том полиному парне и непарне степене y-а, па се једначина криве може увек написати у облику

$$P(x,y^2)+y\cdot Q(x,y^2)=0$$

или

$$P(x,y^2)=-y\cdot Q(x,y^2)$$

или квадрирањем

$$[P(x,y^2)]^2+y^2\cdot[Q(x,y^2)]^2=0$$

Опишимо сад око посматране тачке (0,0) један круг полупречника R чија ће једначина бити

$$x^2+y^2=R^2$$

Апсцисе тачака у којима тај круг сече ту криву добијају се кад се смени

$$y^2=R^2-x^2$$

у 1) и тако добијена једначина реши по x. Међутим тако добијена једначина увек је парног степена по x као што се види из 1). Таква једначина има увек паран број стварних корена (који, у осталом, може бити и раван нули) и према томе ма колики био мали полупречник R круга, тај круг или не сече криву или је сече у парном броју тачака. То показује да тачка (0,0) не може бити прекидна,

јер би онда круг секао криву само у једној тачки.

Тиме је доказано за прекидне тачке, сад треба за прелотне. Диференцијалну једначину

$$f(x,y)=0$$

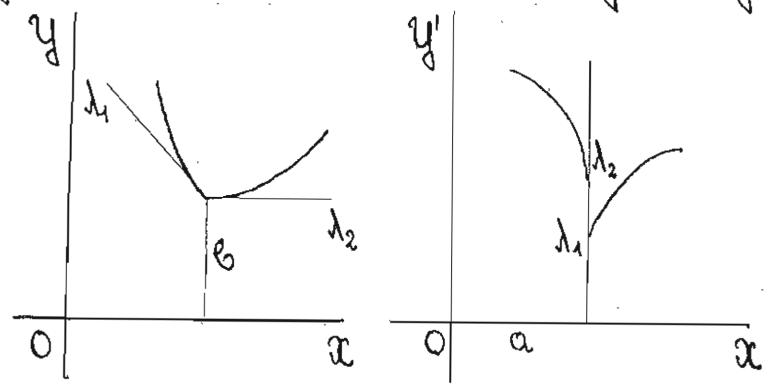
добија се

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,y'=0$$

Елиминацијом x_a и y_a из ових једначина, добија се извесна једначина

$$\varphi'(x,y')=0 \qquad 2)$$

која би решена по y' давала коефицијенат правца дирке. Замислимо два координатна система: OXY и OXY' и уочимо у првом систему криву $f(x,y)=0$ а у другом $\varphi(x,y')=0$.



Кад тачка (x,y) у првом систему описује прву криву, тачка (x,y') описиваће другу криву у својој равни. Ако је тачка чија је апсциса $x=a$ преломна тачка криве $f=0$, y' нагло скаче од једне вредности н.пр. λ_1 на другу н.пр. λ_2, што показује да ће у другој равни крива $\varphi=0$ имати скок од апсцисе $x=a$ тако да јој ордината нагло скаче од λ_1 на λ_2. Као што се види и једна и друга од вредности λ_1 и λ_2 била би прекидна тачка; а пошто је и ова крива алгебарска, јер се алгебарски добија из криве, то она не може имати прекидних тачака, то ни крива не може имати преломне тачке.

Према томе алгебарске криве могу имати само ове сингуларне тач- т.ј. ке: превојне, вишеструке, повратне и усамљене.

Примери:

1. Дата је крива

$$y=\cos mx$$

Овде је

$$y'=-m\sin mx$$

$$y''=-m^2\cos mx$$

па крива има превојних тачака чије су апсцисе корени једначине

$$\cos mx=0$$

дакле

$$x=\pm\frac{\pi}{2m},\ \pm\frac{3\pi}{2m},\ \dots\ \pm\frac{(2(n+1)\pi}{2m}$$

2. Дата је крива

$$y=e^{-\frac{1}{ax}}$$

Овде је

$$y'=\frac{e^{-\frac{1}{ax}}}{ax^2}$$

$$y''=\frac{e^{-\frac{1}{ax}}(1-2ax)}{a^2x^4}.$$

Према томе крива има превојних тачака чија је апсциса корен једначине

$$1-2ax=0$$

$$x=\frac{1}{2a}$$

Ордината је

$$y=\frac{1}{e^2}$$

3. Дата је крива

$$y^4+x^4-2ay^3+2bx^2y=0$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4bxy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-6ay^2+2bx^2$$

и према томе сингуларне тачке добијамо решењем једначина

$$x(x^2+by)=0$$
$$2y^3-3ay^2+bx^2=0$$

Пошто су ове једначине а и једначина криве задовољена за

$$x=0 \quad y=0$$

то је ова тачка сингуларна.

Пошто је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2+4by \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=4bx \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-12ay$$

а те се вредности своде на нулу за горњу тачку, то је и једначина 8) своди на нулу, па морамо узети треће изводе:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=24x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}=4b \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=24y-12a$$

а те вредности за горњу тачку прелазе у

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}=4b \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-12a$$

то једначина 9) постаје

$$12b\frac{dy}{dx}-12a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$$

или

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-b\frac{dy}{dx}=0$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad \frac{dy}{dx}=+\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Коефицијенти праваца су сви реални и неједнаки; има их три; према томе тачка $x=0$ $y=0$ т.ј. координатни почетак је трострука тачка. У њој се састају три гране криве чије су тангенте: x-осовина и две праве подједнако нагнуте према њој.

4. Дата је крива

$$(a^2y-bx^2)^2=a^4(x-a)^5$$

Да би одредили синг. тачке простије је радити овако: из једначине је

$$y=\frac{b}{a^2}x^2\pm(x-a)^{5/2}$$

Одавде се види: 1° да ~~је~~ y за све вредности $x>a$ има две реалне вредности; 2° да се за $x=a$ те две вредности поклапају и прелазе у $y=b$; 3° да су за $x<a$ вредности y-а уображене. Отуда се види да се у тачки $x=a$ $y=b$ састају

две гране криве т.ј. то је двојна тачка
Како је
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2b}{a^2}x \pm \frac{5}{2}(x-a)^{3/2}$$
а та вредност за горњу тачку прелази у
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2b}{a}$$
то значи да у тој тачки обадве гране имају исту тангенту и отуда: та је тачка или двојна додирна или повратна. Из онога што смо рекли раније под 1° и 3° у овом задатку излази да је ово повратна тачка.

Како је
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2b}{a^2}\pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{1/2}$$
и како је тај израз позитиван, то имамо посла са повратном тачком друге врсте.

5. Дата је крива
$$ay^2-x^3+bx^2=0$$
Одавде је
$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3x^2+2bx \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2ay$$
и према томе једине тачке које могу бити сингуларне јесу корени једначина
$$y=0$$
$$x(3x-2b)=0$$
Како су ове једначине а и једначина криве задовољене за $x=0$ $y=0$, то је та тачка сингуларна.

Како је
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x+2b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a$$
а те вредности за горњу тачку прелазе у
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a$$
то једначина 8) постаје
$$2b+2a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$
одакле је
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-\frac{b}{a}}$$
а та је вредност имагинарна, то значи да је тачка $x=0$ $y=0$ изолована.

6. Дата је крива
$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$$
(лемниската).

Овде је
$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x(x^2+y^2)-4a^2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+4a^2y$$

па пошто $x=0$ $y=0$ задовољава и једначину криве и једначине

$$x(x^2+y^2)-a^2x=0$$
$$y(x^2+y^2)+a^2y=0$$

то та тачка може бити сингуларна. Како је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4(3x^2+y^2-a^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=8xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4(x^2+3y^2+a^2)$$

а ти су изрази за горњу тачку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4a^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4a^2$$

то једначина 8) даје

$$-4a^2+4a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=\pm 1$$

то значи да је горња тачка двојна тачка. Тангенте у тој тачки су симетрале коорд. углова.

7. Дата је крива

$$y^2=ax^3$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3ax^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

па имамо синг. тачку $x=0$ $y=0$.

Како је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6ax=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

то израз 8) даје

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=0$$

Према томе тачка $x=0$ $y=0$ је или двојна додирна тачка или повратна. Из дате једначине је

$$y=\pm\sqrt{a}\,x^{3/2}$$

одакле видимо да је y стварно за $x>0$ а уображено за $x<0$; отуда: горња тачка је повратна. Како је

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a}\,\frac{1}{\sqrt{x}}=\pm\infty$$

то је горња тачка $x=0$ $y=0$ (коорд. почетак) повратна тачка прве врсте.

Тангента у тој тачки је, као што се види из вредности за $\frac{dy}{dx}$, осовина апсциса.

8. Дата је крива

$$y^2=ax^2+bx^3$$

Одавде је
$$y = \pm (ax^2 + bx^3)^{1/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2}(ax^2+bx^3)^{-\frac{1}{2}}(2ax+3bx^2)$$
а те две једначине су задовољене тачком $x=0$ $y=0$. Та је тачка двојна.

9. Дата је крива
$$y^2(a-x) - x^3 = 0$$
(цисоида).

Овди је
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y^2 - 3x^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y(a-x)$$
и како су и једначине
$$y^2 + 3x^2 = 0$$
$$2y(a-x) = 0$$
и једначина криве задовољене са $x=0$ $y=0$ то је та тачка сингуларна.

Како је
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x \underset{x=0}{=} 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2y \underset{y=0}{=} 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2(a-x) \underset{x=0}{=} 2a$$
то једначина 8) даје
$$2a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$
или
$$\frac{dy}{dx} = 0$$
Отуда: тачка $x=0$ $y=0$ је или двојна или повратна. Из једначине криве је
$$y = \frac{x^{3/2}}{(a-x)^{1/2}}$$
одакле се види да је y стварно за $x>0$ а уображено за $x<0$; отуда: горња тачка је повратна.

Како је
$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = -6 \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = -2$$
то једначина 9) даје
$$-6$$
то је та тачка повратна прве врсте.

10. Дата је крива
$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$
(Folium Descartes-ов)

Овди је
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$$
Отуда: тачка $x=0$ $y=0$ је сингуларна.

Како је
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x \underset{x=0}{=} 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -3a \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y \underset{y=0}{=} 0$$
то једначина 8) даје
$$-6a\frac{dy}{dx} = 0$$
или

$$\frac{dy}{dx}=0$$

тачка $x=0$ $y=0$ је двојна тачка.

11. Дата је крива

$$(y-x^2)^2 = x(x-a)^3$$

Одавде је

$$y = x^2 \pm x^{1/2}(x-a)^{3/2}$$

Одавде се види да је y стварно и има две вредности за $x>a$; те две вредности се поклапају са $y=a^2$ за $x=a$, оне су уображене за $x<a$. Отуда излази да је $x=a$ $y=a^2$ синг. тачка за криву. Како је

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \left[\frac{3}{2}\sqrt{x(x-a)} + \frac{1}{2}\frac{(x-a)^{3/2}}{\sqrt{x}}\right]$$

а тај израз за горњу тачку постаје

$$\frac{dy}{dx}=2a$$

то је горња тачка повратна. Како је сем тога

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \left\{\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x-a}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-a}{x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{x}\right)^{3/2}\right]\right\}$$

$$\underset{x=a}{=} 2 \pm \infty$$

што значи да је горња тачка повратна тачка прве врсте.

12. Код криве

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2+y^2) - 2a^2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y(x^2+y^2) - 2b^2y$$

одакле се види да је $x=0$ $y=0$ сингуларна тачка. Осим тога

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(3x^2+y^2) - 2a^2 \underset{x=0=y}{=} -2a^2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 8xy \underset{x=y=0}{=} 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4(3y^2+x^2) - 2b^2 \underset{x=y=0}{=} -2b^2$$

па према 8)

$$-2a^2 - 2b^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}i$$

Према томе горња тачка је изолована.

13. Код криве

$$x^6 - 3a^4x^2 + 2y^3 - 3ay^2 + a^3 = 0$$

имамо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^5 - 6a^4x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 6ay$$

отуда синг. тачка: $x=0$ $y=a$.

Како је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 30x^4 - 6a^4 \underset{x=0}{=} -6a^4 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12y - 6a \underset{y=a}{=} 6a$$

па израз 8) даје

$$-6a^4 + 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = \pm a^{3/2}$$

дакле: тачка $x=0$ $y=a$ је двојна.

14. Код криве

$$y^2 + x = x(x-1)^2$$

имамо

$$y = \pm x\sqrt{x-2}$$

Одавде се види да је y стварно за $x \geq$ уображено за $x<2$. На кривој је и тачка $x=0$ $y=0$. Како је

$$\frac{dy}{dx} = \pm\left[\frac{x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2}\right]$$

а та је вредност уображена за $x=0$, то је та тачка изолована.

15. Код криве

$$y^2 = bx^3 - ax^2$$

је

$$y = \pm x\sqrt{bx-a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\left[\frac{bx}{\sqrt{bx-a}} + \sqrt{bx-a}\right]$$

одакле се види да је тачка $x=0$ $y=0$ изолована тачка дате криве.

16. Код криве

$$(x^2-y^2)ay - x^4 = 0$$

је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2axy - 4x^3 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = a(x^2-3y^2)$$

па је тачка $x=0$ $y=0$ сингуларна. Како је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2ay - 12x^2 = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2ax = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6ay = 0$$

то морамо узети

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = -24x = 0 \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 2a \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = -6a$$

па израз 9) даје

$$6a\frac{dy}{dx} - 6a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

одакле

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{dy}{dx} = -1$$

т.ј. горња тачка је тространа.

17. Уочимо криву

$$y = \frac{1}{\log x}$$

За позитивне вредности x све мање и мање вредности y а су реалне; почев од $x=0$, y је најпо уображено. Отуда: $x=0$ $y=0$ је прекидна тачка.

Проучавање алгебарских кривих у близини једне дате тачке

Нека је дата крива

$$f(x,y)=0$$

и на њој једна тачка $M(a,b)$. Проучити криву у близини те тачке значи:

1° испитати да ли кроз ову тачку пролази једна или више грана криве;

2° за сваку од тих грана наћи приближну њену једначину, која ће представљати ту грану са довољном приближношћу у близини тачке M, другим речима значи пораздвајати све гране дате криве што пролазе кроз M и наћи им приближан облик.

Пре свега ако извршимо смену

$$x=x'+a \qquad y=y'+b$$

где су a и b координате тачке M, једначина криве имаће облик

$$F(x',y')=0 \qquad 2)$$

где ће сад тачка M бити координатни почетак. Испитати дакле криву 1) у близини тачке M значи испитати криву 2) у близини тачке (x',y'). Ми ћемо се задржати на овом последњем задатку.

Ако пустимо да x' тежи нули очевидно је да бар један од корена једначине 2) решене по y' мора такође тежити нули. Према томе: свакој бесконачно малој вредности x' одговараће из једначине 2) бар по један бесконачно мали корен y'. Према томе задатак се своди на испитивање бесконачно малих корена код алгебарских једначина. Метода за ово испитивање позната је под именом <u>Puiseux-ове методе</u> и она се састоји у овоме: Нека је

$$F(x,y)=0 \qquad 3)$$

једна ма каква алгебарска једначина који задовољава систем вредности $x=0$ $y=0$. Онда је очевидно да ако x сменимо ма каквом бесконачно малом количином, једначина 3) мора имати бесконачно малих корена. Сматрајмо x као главну бесконачно малу количину т.ј. као бесконачно малу количину првог реда. Тада, ако смо у стању наћи такав један позитиван број μ, да количник $\frac{y}{x^\mu}$ тежи коначној и од нуле различној граници, бесконачно мала количина y биће μ-тог реда. Тада би за довољно мале вредности x било

$$\frac{y}{x^\mu} = \varkappa + \delta \tag{4}$$

где δ тежи нули кад x тежи нули и где је

$$\varkappa = \lim \frac{y}{x^\mu}$$

Из 4) имали би

$$y = \varkappa \cdot x^\mu + \varepsilon \tag{5}$$

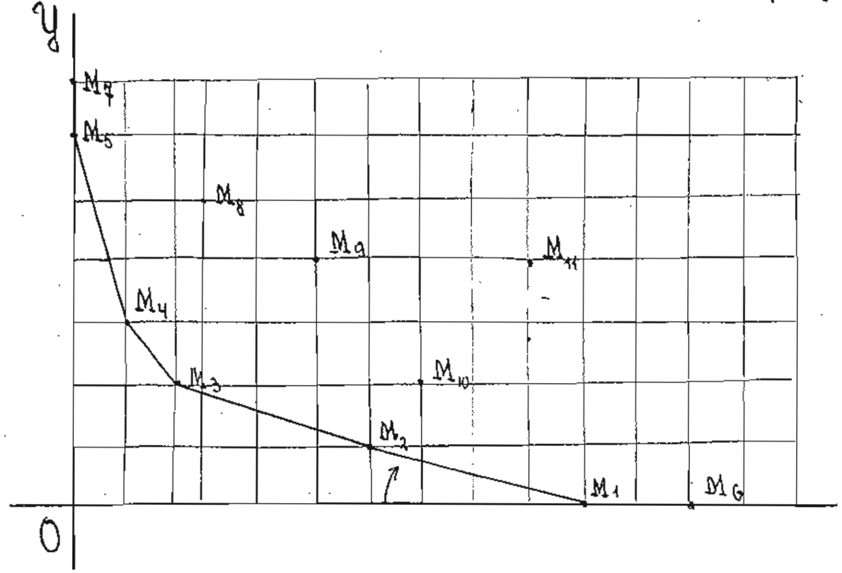
где је ε бесконачно мала количина вишег реда од μ јер је

$$\varepsilon = \delta \cdot x^\mu$$

Ако би дакле знали μ и $\varkappa$, могли би бесконачно мали корен написати у облику 5) и задржати се само на његовом првом члану $\varkappa \cdot x^\mu$ који је бесконачно мала количина најнижег реда. Тај би члан очевидно представљао приближну вредност координате y у непосредној близини коорд. почетка. Према томе одређивање такве приближне вредности своди се на одредбу броја $\varkappa$ и μ што одговарају бесконачно малим коренима једначине 3).

1° Одредба броја μ.

Као што ћемо овде показати та се одредба своди на конструкцију једне полигоналне линије која се назива Њутновом полигоналном линијом и чије ће нам стране дати непосредно коефицијенте μ. Под Њутновом полигоналном линијом разуме се испреломана линија добивена на овај начин: Нека је дат у равни XOY један низ тачака $M_1 M_2 M_3 M_4 \dots$ чије су координате цели и позитивни бројеви и међу којима се налази бар једна тачка на x-осовини и бар једна на у-осовини.



Из тачке M_1 на x-осовини која буде најближа почетку повуцимо праву која се поклапа са Ox кроз M_1 и обрнимо је у правцу стрелице све дотле док се не нађе на једну од осталих тачака; затим обрнимо праву око M_2 у истом правцу док се не нађе на M_3 и поновимо то све дотле док се не нађе на тачку на y-осовини н. пр. на M_5. На тај начин добићемо једну испреламану линију $M_1 M_2 M_3 M_4 \dots$ која на свакој својој страни садржи најмање две тачке а може и више. Ова полигонална линија, према самом начину на који је конструисана, има ту особину да све тачке система леже или на њој самој или са једне њене стране и то оне која је супротна почетку. Она игра важну улогу у многим теоријама а у непосредној је вези са задатком о коме је овде реч.

Вратимо се дакле том задатку. Сменимо у датој једначини 3)

$$y = zx^{\mu} + \varepsilon$$

па ће једначина постати

$$F(x, zx^{\mu}+\varepsilon) = 0 \qquad 6)$$

Међутим пошто је F алгебарска функција x_a и y_a, може се увек написати у облику по x и y т.ј.

$$\Sigma A_n x^{\beta n} y^{\alpha n} = F(x,y) \qquad 7)$$

где су αn и βn цели позитивни бројеви а A_n стални коефицијенти. Према једначини 7) једначина 6) биће облика

$$\sum[A_n(zx^{\mu}+\varepsilon)^{\alpha_n} x^{\beta_n}]=0 \qquad 8)$$

Ако би сад развили израз $(zx^{\mu}+\varepsilon)^{\alpha_n}$ по биномном обрасцу, први члан добијеног збира био би $z^{\alpha_n}x^{\mu\alpha_n}$, а остали чланови били би сви вишег реда, тако да се може написати да је

$$(zx^{\mu}+\varepsilon)^{\alpha_n} = z^{\alpha_n}x^{\mu\alpha_n}+\delta$$

где је δ бесконачно мала количина вишег реда од првог члана. Заменом у једначини 8) ова се може написати

$$\sum A_n z^{\alpha_n} x^{\beta_n+\mu\alpha_n} + \sum \Delta_n = 0$$

где су сабирци Δ_n бесконачно мале количине вишег реда од одговарајућих сабирака првог збира. Занемаривши чланове вишег реда поред чланова нижег реда последња се једначина своди на

$$\sum A_n z^{\alpha_n} x^{\beta_n+\mu\alpha_n}=0 \qquad 9)$$

Из те једначине ваља одредити μ тако да та једначина у опште може постојати. У њој фигуришу разни степени бесконачно мале количине x. Уочимо чланове најнижег степена по x; лако нам се уверити да таквих чланова мора бити бар два а и више, јер ако би био само један, онда би по правилу занемаривања бесконачно малих количина могли занемарити све остале чланове вишег реда и онда би се лева страна једначине 9) свела само на тај члан и она не би могла бити друкчије равна нули осим ако је одговарајући коефицијенат A_n раван нули, што значи да не би постојао ни тај један, а то значи да мора постојати бар два а може и више таквих чланова. Претпоставимо да су она два члана која задовољавају тај услов т.ј. за који су изложиоци $\beta+\mu\alpha$ међу собом једнаки а сви остали већи; претпоставимо, дакле, да су та два члана којима одговарају индекси 1,2 (другим речима ставимо их на прво место). Према самој дефиницији та два члана треба да буду

$$\beta_1 + \mu\alpha_1 = \beta_2 + \mu\alpha_2 < \beta_k + \mu\alpha_k \qquad 10.)$$

где k има све могуће вредности које допушта сама једначина осим $k=1$ и $k=2$. Из једначине 10.) добија се

$$\mu = -\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1} \qquad 11.)$$

а неједначина 10) тада показује да ако коефицијенту μ дамо баш ту вредност 11.), имаћемо да је

$$y-\beta_1+\mu(x-\alpha_1)>0 \qquad 12.)$$

за све вредности

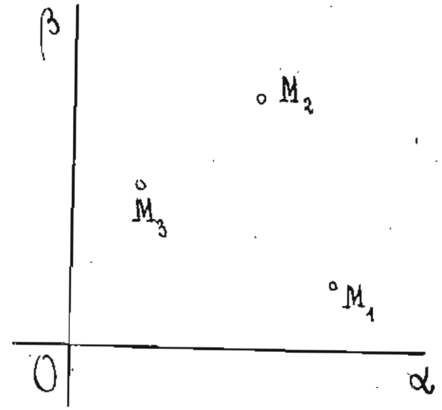
$$x=\alpha_k \quad y=\beta_k$$

где k има све вредности осим 1 и 2. Ове три неједначине и једначине 10.), 11.) и 12.) показују непосредну везу која постоји између задатка о коме је реч и једне Њутнове полигоналне линије.

Узмимо једначину криве у облику

$$\sum A_n x^{\beta_n} y^{\alpha_n} = 0 \qquad 13.)$$

и конструишимо све могуће тачке $M(\alpha,\beta)$ $M_2(\alpha_2\beta_2)$, $M_3(\alpha_3\beta_3)$, ... пошто смо најпре повукли две координатне осовине $O\alpha$ и $O\beta$. Уочимо праву што пролази кроз тачке M_1 и M_2. Једначина те праве биће



$$\frac{y-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

или

$$y-\beta_1 = \frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}(x-\alpha_1)$$

или напослетку

$$y-\beta_1 = -\mu(x-\alpha_1)$$

где μ има вредност 11.) Једначина те праве може се написати у облику

$$y-\beta_1+\mu(x-\alpha_1)=0 \qquad 14.)$$

и ако у њој будемо смењивали $x=\alpha_k$ $y=\beta_k$ где k има све могуће вредности осим 1 и 2, једначина 12.) показује да ће све тачке $M_k(\alpha_k\beta_k)$ осим M_1 и M_2 налазити се у позитивној области те праве. Из тога се непосредно изводи:

а) да је права 14.) једна страна Њут-

новог полигона што одговара тачка-
ма M_1 и M_2;

в.) да тражена вредност μ која треба да задовољи услов 10.) није ништа друго до коефицијенат правца те стране узет са супротним знаком.

Тиме је дакле довршена одредба коефицијента μ. Међутим Њутнов полигон може имати више страна и свака од тих страна доводи до једне могуће вредности за μ. Према томе имаћемо онолико коефицијената колико полигон има страна, из чега се изводи ово практично упутство за одређивање коефицијента μ: Треба једначину криве написати у облику 13.), повући координатне осе $O\alpha$ и $O\beta$, конструисати све тачке (α,β) и увек ће бити бар једна тачка на α-осовини и једна тачка на β-осовини. Помоћу ових конструисати Њутнов полигон и онда коефицијенти правца страна тога полигона, кад се узму са супротним знаком, даће нам све могуће вредности за μ.

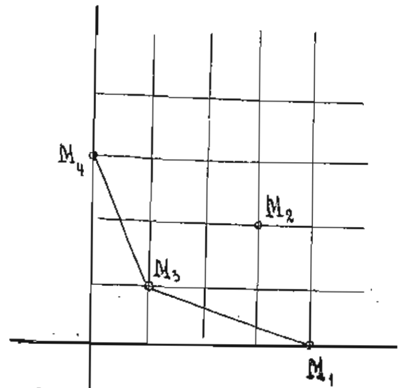
Примедба: Може се десити да на којој од страна полигона буде више од две тачке M. То ни уколико не мења ствар, јер је одредба коефицијента μ остаје иста, само што тада на место два члана најнижег реда у једначини имали би их онолико колико буде било тачака на таквој страни полигона.

Пример: Одредити коефицијенат μ за алгебарску криву

$$ay^4 + bx^2y^3 + cxy + kx^3 = 0$$

Одговарајуће тачке M јесу:

$M_1(4,0)$, $M_2(3,2)$, $M_3(1,1)$, $M_4(0,3)$



Њутнов полигон има дакле две стране: страну M_4M_3 и страну M_3M_1. Коефицијенат правца прве стране је -2, а друге $-\frac{1}{3}$. Према томе имамо за μ две разне вредности: $\mu=2$ и $\mu=\frac{1}{3}$.

2° Одредба коефицијента z.

Претпоставимо да смо на малопређашњи начин одредили све могуће вредности коефицијента μ што одговарају једначини

$$\sum A_n x^{\beta_n} y^{\alpha_n} = 0 \qquad 15.)$$

Свакој таквој вредности μ одговараће по један коефицијенат z у изразу

$$y = z x^{\mu} + \varepsilon$$

што одговара бесконачно малој количини ε. Остају дакле да се нађу вредности z.

Приметимо пре свега да су добијене вредности за μ увек рационални разломци који у осталом могу бити и цели бројеви. Нека је дакле

$$\mu = \frac{p}{q}$$

где су p и q цели бројеви. Извршимо смену

$$x = t^{q}$$

па ће бити

$$y = z x^{\mu} + \varepsilon = z t^{\mu q} + \varepsilon$$

или

$$y = z t^{p} + \varepsilon \qquad 16.)$$

Заменимо 16.) вредношћу у 15.). Пре свега у тој једначини имамо да водимо рачуна само о члановима најнижег реда јер се чланови вишег реда занемарују. Изабратој вредности μ одговарају бар два таква члана а може бити и више, па пошто је за те чланове

$$\beta_k + \mu \alpha_k = \beta_i + \mu \alpha_i = \cdots$$

то после извршене замене може се из свију њих извући као заједнички један степен од x и то тако да у загради остане један полином који зависи само од z. Према томе резултат замене биће извесна једначина облика

$$x^{m} P(z) + \eta = 0$$

где је $P(z)$ известан полином по z а η означује скуп бесконачно малих количина нижег реда од m. Деобом једначине са x^m добија се

$$P(z) + \frac{\eta}{x^m} = 0$$

ако пустимо да x тежи нули, количник $\frac{\eta}{x^m}$ тежиће нули пошто је η бесконачно мала количина нижег реда од m, тако да се једначина своди на

$$P(z) = 0 \qquad 17.)$$

Решењем једначине 17.) добијају се све могуће вредности за z што одговарају изабраној вредности μ.

Разликујмо сада ова два случаја:

a.) Нека једначина 17.) има само имагинарне корене. Тада су сви бесконачно мали корени дате једначине имагинарни.

b.) Нека је

$$z = z_1$$

као стваран и прост корен једначине 17.). Сваком таквом корену одговараће један бесконачно мали корен

$$y = z x^{\mu} + \varepsilon$$

c.) Нека је

$$z = z_1$$

један корен p-тог реда једначине 17.) тада узетој вредности μ одговара p једнаких вредности коефицијента z, тако да ћемо имати p бесконачно малих корена

$$\begin{aligned} y &= z_1 x^{\mu} + \varepsilon_1 \\ y &= z_1 x^{\mu} + \varepsilon_2 \\ &\cdots\cdots \\ y &= z_1 x^{\mu} + \varepsilon_p \end{aligned} \qquad 18.)$$

који имају сви један исти први члан могу се разликовати само у бесконачно малим количинама вишег реда. Да би ове корене пораздвајали, треба још одредити количине $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ што им одговарају. Та би се одредба извршила овако: ако у једначини криве y сменимо са

$$y = z_1 x^{\mu} + \varepsilon$$

где је z_1 и μ замењено нађеном вредношћу, добиће се извесна једначина

$$\varphi(x,\varepsilon)=0$$

на коју треба поново применити исту методу т.ј. одредити јој све бесконачно мале корене ε, која се одредба своди опет на одређивање коефицијената μ и z и онда ако су $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ тако добијени корени, замењени у 18) имали би одговарајућу групу корена што одговарају узетој вредности μ и z. Ако се деси да се и сви ε поклапају, онда ради развијања корена y треба узети још по једну количину вишег реда т.ј. ако смо нашли да је

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_p$$

ваља написати

$$y=z_1x^{\mu}+\varepsilon_1+\eta_1$$
$$y=z_1x^{\mu}+\varepsilon_2+\eta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y=z_1x^{\mu}+\varepsilon_p+\eta_p$$

и по истој малопређашњој методи израчунавати $\eta_1\,\eta_2\cdots\eta_p$. Тога ради на једначину

$$\varphi(x,\varepsilon)=0$$

ваља поново применити малопређашњу методу. Ту операцију ваља понављати док корени не буду раздвојени. Међутим очевидно је да тих операција мора бити краја, јер је очевидно да се бесконачно мали корени не могу поклопити у околини вредности $x=0$.

* * *

Помоћу ове Puiseux-ове методе можемо сад лако решити постављени задатак: проучавање једне криве у близини дате тачке. Као што је казано, то проучавање се своди на ово:

а) Испитати колико грана пролазе кроз ту тачку;

б) добити по један аналитички израз за сваку грану и то да он представља само ту грану, другим речина поразвајати аналитички те гране.

Оба ова задатка своде се на ово: Ако има да се испита крива у близини тачке ($x=a$, $y=b$), вала извршити смену

$$x=a+x' \quad y=b+y'$$

добијена једначина

$$F(x',y')=0 \tag{19}$$

таква је да је задовољена паром вредности $x'=0$ $y'=0$ т.ј. тачка (a,b) представља почетак. За врло мале вредности x' добијају се врло мале вредности y' или ако се x' сматра као бесконачно мала количина првог реда, једначина 19) решена по y' даће нам једну или више вредности y' које ће такође бити бесконачно мале. Одређивање тих вредности као функције x_a бива по малотрежашној Пизеух-овој методи и извршује се овако: прво помоћу одговарајуће Њутнове полигоналне линије одреде се све вредности μ што одговарају једначини; свакој од тих вредности одреди се одговарајући коефицијенат z по ранијем упутству и ако је μ' таква вредност а $z_1, z_2 \cdots z_p$ њој одговарајуће вредности z_a, таквој вредности μ одговара p грана криве линије $F(x',y')=0$ које ће бити облика

$$y'_1 = z_1 x^{\mu'} + \varepsilon_1$$
$$y'_2 = z_2 x^{\mu'} + \varepsilon_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y'_p = z_p x^{\mu'} + \varepsilon_p$$

где су $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ скуп чланова вишег реда од μ'. Ако би се десило да су и вредности $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ међу собом једнаке, вала извршити смену

$$y' = z_1 x^{\mu'} + \varepsilon_1$$

и применити малотрежашну операцију на једначину $\varphi(x',\varepsilon)=0$.

Тако би биле поразвајане гране у што одговарају вредности μ'. То исто треба учинити и са још којош вредношћу μ ако их има и на тај начин биће пораздвајање све гра-не што пролазе кроз почетак. Ако у аналитичким изразима за вред-ности $x'y'$ сменимо

$$x' = x - a \quad y' = y - b$$

имаћемо пораздвајање све гране што пролазе кроз тачку (a,b) и оне ће бити у облику

$$y = b + z(x-a)^{\mu} + \varepsilon$$

где је ε скуп чланова који садрже $(x-a)$ на вишем степену од μ, чиме је задатак потпуно решен.

Кад имамо такве анали-тичке изразе за све гране што про-лазе кроз тачку (a,b), лако им је и проучити облик. Тако н. пр. ако се наће само једна вредност за μ и ако њој одговара само једна вред-ност z па је поред тога μ цео број, кроз тачку (a,b) пролази само једна грана криве и то је обична тачка за криву.

Пример: дата је крива

$$ay^4 + bx^2y^3 + cxy + kx^3 = 0$$

за коју се тражи да се проучи у бли-зини почетка т.ј. да јој се пораз-двајају све гране што пролазе кроз почетак. Видели смо да полито-нална линија има две стране: M_4M_3 и M_3M_1. Првој одговара вредност $\mu_1 = 2$ другој $\mu_2 = \frac{1}{3}$. Испитајмо гране што одговарају вредности $\mu_2 = \frac{1}{3}$. Према ранијем упутству ставићемо

$$x = t^3$$

$$y = zx^{\mu} = zt^{\mu q} = zt$$

Скуп оних чланова што леже на стра-ни која одговара вредности $\mu_2 = \frac{1}{3}$ је-сте збир од првог и трећег члана, то је дакле

$$ay^4 + cxy$$

Заменом горњих вредности у том ску-пу и ставивши да је равно нули, добија се једначина

$$az^4t^4 + ct^3 \cdot zt = 0$$

или

$$zt^4(az^3+c)=0$$

Скративши са t^4 добија се

$$z(az^3+c)=0$$

Она има два реална корена

$$z=0 \qquad z=\sqrt[3]{-\frac{c}{a}}$$

О првом се не води рачуна. Према томе се види да коефицијенту $\mu_2=\frac{1}{3}$ одговара $z=\sqrt[3]{-\frac{c}{a}}$. Пошто је овај корен прост, то имамо само једну грану што одговара коефицијенту μ_2 и та је грана облика

$$y=zx^{\mu_2}+\varepsilon$$

или

$$y=\sqrt[3]{-\frac{c}{a}}\,x^{\frac{1}{3}}+\varepsilon$$

Тако би исто за прву вредност μ_1 имали да ставимо

$$x=t$$

$$y=zt^2+\varepsilon$$

и пошто тој вредности μ одговарају четврти и трећи члан т.ј. збир

$$cxy+kx^3$$

то заменом x и y добија се

$$ct\,zt^2+kt^3=0$$

или

$$t^3(cz+k)=0$$

одакле је

$$z=-\frac{k}{c}$$

И овде дакле имамо само једну грану криве и то

$$y=-\frac{k}{c}x^2+\varepsilon$$ 21.)

Као што се види почетак представља једну двојну тачку за дату криву и гране које кроз њу пролазе поклапају се у близини почетка једна са параболом

$$y+\frac{k}{c}x^2=0$$

а друга са кривом трећег степена

$$y^3+\frac{c}{a}x=0$$

Проучавање бесконачно удаљених тачака на кривој

Нека је дата једначина криве

$$f(x,y)=0 \qquad 1.)$$

Ако се тражи да се проучи природа бесконачно удаљене тачке $x=\infty$ $y=\infty$ за ту криву, треба ставити

$$x=\frac{1}{\varepsilon} \qquad y=\frac{1}{\eta}$$

чиме једначина постаје

$$\varphi(\varepsilon,\eta)=0 \qquad 2.)$$

Тачки $x=\infty$ $y=\infty$ криве 1.) одговара тачка $\varepsilon=0$ $\eta=0$ криве 2.). Према томе задатак се своди на проучавање бесконачно малих корена једначине 2.) који смо задатак раније имали. Ако је почетак обична тачка за криву 2.), онда се за бесконачно удаљену тачку криве 1.) каже да је обична тачка. Ако је почетак вишеструка тачка криве 2.), онда је бесконачно удаљена тачка вишеструка тачка криве 1.) и т.д. И у опште какве год врсте буде почетак за криву 2.) такве ће исте врсте бити бесконачно удаљена тачка за криву 1.).

Ако крива има какву асимптоту паралелну x-осовини н.пр. $y=b$, па се тражи да се проучи природа оне бесконачно удаљене тачке што се налази у правцу асимптоте, ваља ставити $x=\frac{1}{\varepsilon}$ $y=b+\eta$ и испитати ново добијену криву $\varphi(\varepsilon,\eta)=0$ у близини почетка. Тако исто може се тражити да се испита природа бесконачно удаљене тачке у правцу асимптоте $x=a$ у правцу y-осовине. Тада ваља ставити $x=a+\varepsilon$ $y=\frac{1}{\eta}$ и испитати тачку $\varepsilon=0$ $\eta=0$ за криву $\varphi(\varepsilon,\eta)=0$. На посетку дешава се да треба испитати положај тране једне криве линије према једној већ познатој асимптоти т.ј. да ли се грана налази с једне или с друге стране асимптоте. Ако је крива дата у облику

$$y=f(x)$$

и ако је једначина асимптоте

$$y=\lambda x+\mu$$

разлика

$$f(x)-\lambda x-\mu$$

даће нам разлику између ординате криве и ординате асимптоте. Према томе да ли је та разлика позитивна или негативна знаћемо увек положај криве према асимптоти. А пошто је та разлика бесконачно мала, то ако ставимо да је

$$y-\lambda x-\mu=\eta$$

па сменимо то у једначини криве, добиће се

$$\varphi(\varepsilon,\eta)=0$$

за коју нам ваља испитати природу тачке $\varepsilon=0$ $\eta=0$ и знаке η за врло мале вредности ε.

Конструкција кривих линија у правоуглим координатама

Начин конструкције зависи од тога да ли је једначина решена по једној од координата или не.

1° Случај.

Нека је једначина решена по једној од координата н. пр. по y. Онда се ради на обичан начин т.ј. траже се размаци x-а у којима ће y бити стварно, прецртају се размаци у којима је уображено. Затим се траже вредности x-а за које ће y бити бесконачно или нула. Помоћу тако нађених вредности образује се таблица

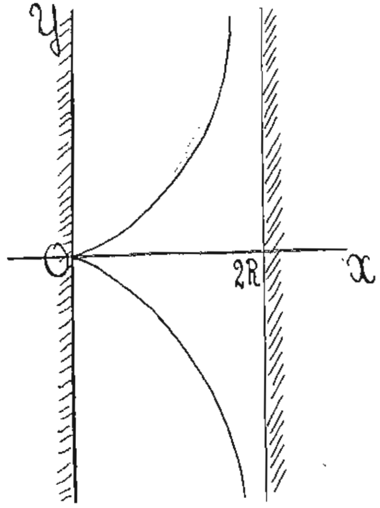
x	. . . .
y	. . . .

и онда се проучи знак у разним размацима забележеним у тим таблицама. При томе се ваља обзирати на знак првог извода т.ј. да ли је функција максимум или минимум. Затим се одређују и асимптоте. Кад је добијен облик о површном облику криве линије, може се у горњу таблицу уметнути још колико се хоће тачака да би се добио прецизнији облик криве и ако се нађе да која од тачака заслужује нарочиту пажњу, треба проучити криву у њеној близини. Такав је н. пр. случај са сингуларитетима. Кад је све то готово, кроз добијене тачке треба повући криву.

Примери:

1. Цисоида. Њена је једначина

$$x(x^2+y^2)=2Ry^2$$



Ако се реши по y имаћемо

$$x^3 + xy^2 - 2Ry^2 = 0$$

или

$$y^2(x-2R) = -x^3$$

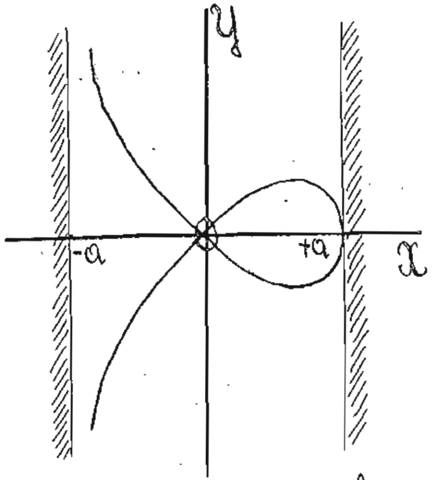
одакле

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2R-x}}$$

Кад је x позитивно и веће од 2R, y је уображено.

2. Строфоида. Њена је једначина

$$x(x^2+y^2) = a(x^2-y^2)$$



ако ју уредимо

$$x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0$$

или

$$y^2(x+a) = x^2(a-x)$$

одакле

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

x ће дакле бити стварно између +a и -a.

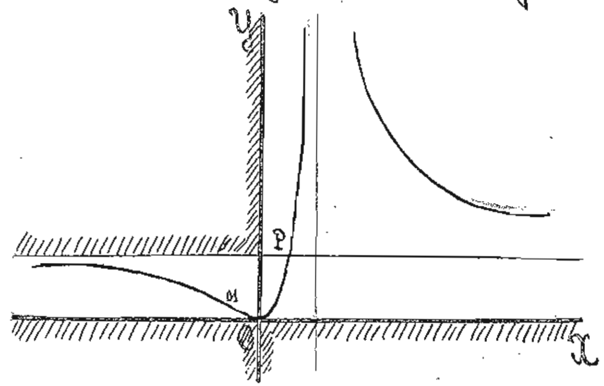
3. Дата је крива

$$y(x-1)^2 - x^2 = 0$$

одакле

$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Из једначине се види да ако је y негативно, x је имагинарно, одакле следује да се крива налази цела изнад x-осовине.



Она додирује x-осовину у почетку и више не сече координатне осовине. две асимптоте $x-1=0$ и $y-1=0$; друга сече криву у тачки $P(\frac{1}{2}, 1)$.

Из једначине криве је

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3} \qquad y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$y'=0$ даје $x=0$, одакле се види да је почетак минимум. $y''=0$ даје $x=-\frac{1}{2}$, па се види да је тачка $M(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$ превојна тачка.

За $x=2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-4$ добијају се даље тачке са својим тангенцијалним правцима: $P(2,4)$ $y'=4$; $P(\frac{1}{2},1)$ $y'=8$; $P(-4, \frac{16}{25})$ $y'=-\frac{8}{125}$.

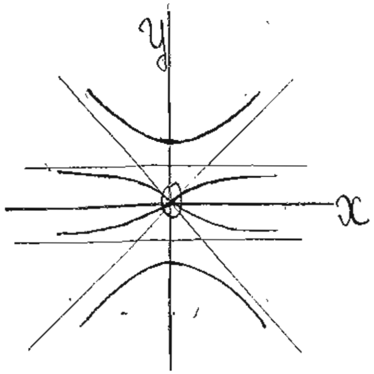
Пошто крива не може да сече асимптоте и коорд. осовине осим у показаним тачкама, то се она мора налазити у несенченом делу и имати нацртани облик.

4. Конструисати криву

$$x^2y^2 - y^4 - a^2(x^2-4y^2)=0$$

Из једначине криве је

$$x = \pm y\sqrt{\frac{y^2-4a^2}{y^2-a^2}}$$



одакле се види да крива лежи симетрично према обадвема осама. Почетак је њен центар, јер је за сваку тачку $P(+x,+y)$ везана једна тачка $P(-x,-y)$.

Крива има у почетку једну двојну тачку са тангентама истих $x\mp 2y=0$ и сече x-осовину још у $x=\infty$, y-осовину у тачкама $P(0,\pm 2a)$ којима $y'=0$ припада.

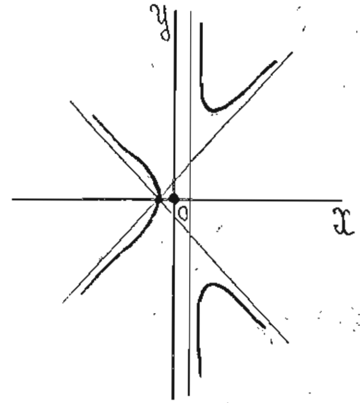
Она има као асимптоте: 1° обадве симетрале $x\mp y=0$ са обичним додиром у бескрајности; оне секу криву само у почетку. 2° Паралелне праве $y\mp a=0$ као тангенте на двојној тачки у $x=\infty$ $y=\pm a$.

5. Једначина криве

$$2(x^3-xy^2)+x^2+y^2=0$$

даје

$$y=\pm x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$$



одакле се види да је крива симетрична према x-осовини и да у почетку има једну изоловану тачку.

Пресеци са x-осовином су: изолована тачка $P(0,0)$ и тачка $P(-\frac{1}{2},0)$ са $y'=\infty$.

Пресеци са y-осовином су: изолована тачка $P(0,0)$ и тачка $P(0,\infty)$.

Асимптоте су: 1. $x-\frac{1}{2}=0$ која нема пресека у бескрајности са кривом и 2. осна асимптота $x\pm y+\frac{1}{2}=0$ које секу криву у тачки $P(-\frac{1}{2},0)$ за коју је $y'=\infty$.

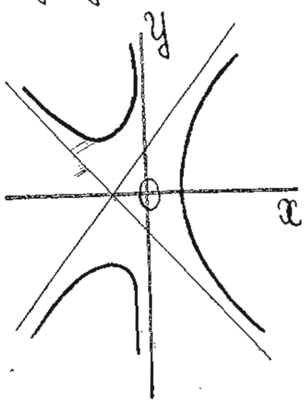
Максимум је у тачки $P(1,-1.732)$; минимум у $P(1,1.732)$.

6. Једначина криве

$$x^3 - xy^2 + 2x^2 + x - 4 = 0$$

даје

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x-4}{x}}$$



одакле се види да је крива симетрична према x-оси.

Пресек са x-осовином је $P(1,0)$ $y'=\infty$; пресек са y-осовином је у $y=\infty$.

Асимптоте су $x=0$, $x-y+1=0$, $x+y+1=0$; њих крива не сече.

Остале тачке које узимамо су: $P(-1,-2)$ $y'=-1$; $P(-1,2)$ $y'=+1$ и $P(2,\ 2\cdot 6)$ $y'=1\cdot 3$

2° Случај.

Кад једначина није решљива ни по једној координати, тада је најбоље поћи прво од асимптота према ранијим упутствима. Затим ваља гледати да ли је крива симетрична према једној тачки или према једној правој па су испитивања основана на овим правилима:

1. Правило: да би крива линија била симетрична према координатном почетку потребно је и довољно да се у њој може сменити x са $-x$, y са $-y$. Тако н. пр. крива

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

симетрична је према почетку. Према томе да би се испитало да ли у равни постоји каква тачка симетрије за дату криву, треба ставити у једначини криве

$$x = a + x' \qquad y = b + y'$$

и гледати да ли је могуће одредити a и b тако да нова једначина остаје непромењена кад сменимо x' са $-x'$ и y' са $-y'$. Очевидно је да се овакво испитивање своди на тражење заједничких решења тих једначина по a и b. Те би се једначине добиле стављајући равно нули оне чланове који сметају симетрији. Такве једначине ако имају заједничких решења и ако су она a и b, онда је $P(a,b)$ центар симетрије; ако нема никаквих заједничких решења нема ни центра симетрије.

2. Правило: Да би x-осовина била симетрала треба да једначина остане непромењена кад се y смени са $-y$.

3. Правило: Да би y-осовина била симетрала треба да једначина остане непромењена кад се x смени са $-x$.

Кад је овај посао одређивања асимптота и елемената симетрије довршен, покушава се да се, ако је могућно, x и y изразе као функције параметра t. Претпоставимо да је то учињено и да је добијено

$$x=F(t) \quad y=\Phi(t)$$

тада ваља образовати таблицу

t	.	.	.
x	.	.	.
y	.	.	.

давати параметру t произвољне вредности, израчунавати одговарајуће вредности x и y и забележити их у таблици. Из одговарајућих вредности за x и y може се наћи овлашан облик те криве. Таблице се допуњују према потреби умећући нове вредности, а при том имати на уму и ово:

Правило: Ако би се тражиле директно асимптоте из облика $x=F(t)$ $y=\Phi(t)$, онда:

1. асимптоте паралелне y-осовини нашли би решивши једначину $\Phi(t)=\infty$ по t и сменивши ту вредност t у $x=F(t)$.
2. да би се нашле асимптоте паралелне x-осовини, треба решити једначину $F(t)=\infty$ по t и сменити t у $y=\Phi(t)$.
3. да би нашли асимптоте непаралелне осовинама

$$y=\lambda x+\mu$$

вања решити једначину $F(t)=0$ па добијену вредност н. пр. $t=t_1$ сменити у количнику

$$\frac{y}{x}=\frac{\Phi(t)}{F(t)}$$

добијена вредност представља коефицијенат λ. Ако се тако добијена вредност смени у изразу

$$y-\lambda x=\Phi(t)-\lambda F(t)$$

и нађе граница тог израза, имаћемо и одговарајући коефицијенат μ.

Приметимо да је увек могућно код алгебарских кривих изразити x и y са $F(t)$ и $\Phi(t)$, али се дешава да су ове функције врло компликоване. Међутим дешава се кад су $F(t)$ и $\Phi(t)$ рационалне функције од t за такве криве конструкција је знатно упрошћена и такве криве називају се уникурсалним кривим линијама. Оваквих кривих линија има за ма какав степен и за њих важи ово опште:

Правило: Свака крива $n^{тог}$ реда која има једну вишеструку тачку $(n-1)^{ог}$ реда јесте уникурсална крива. Правило се доказује овако: Ако је $x=a$ $y=b$ таква вишеструка тачка, сменом $x=a+x'$ $y=b+y'$ добићемо криву линију за коју је почетак вишеструка тачка $(n-1)^{ог}$ реда. Пресецимо криву линију правом $y'=tx'$; пошто ова пролази кроз вишеструку тачку $(n-1)^{ог}$ реда, то та права сече криву у $(n-1)$ тачки које се поклапају, а осим тога сече још у једној тачки пошто је степен једначине n. Према томе резултат смене у једначини $\varphi(x'y')=0$ треба да буде производ:

$$x'^{n-1}\cdot\psi(x'y')=0$$

где функција ψ садржи x на првом степену. Скративши једначину са x'^{n-1} добија се једначина првог степена по x'

$$\psi(x',t)=0$$

из које очевидно кад је решена по x' добијамо x' као рационалну функцију од t н. пр.

$$x' = R(t)$$

Заменом те вредности у

$$y' = tx'$$

добићемо y' као рационалну функцију од t н. пр.

$$y' = R'(t)$$

Ако се сад вратимо на прву једначину имаћемо x и y изражене као функције од t, што значи да је крива уникурсална крива.

Пример:

$$x^3+y^3-axy=0$$

За њу се лако уверавамо да је почетак двојна тачка, јер ако ставимо

$$y=tx$$

и пустимо да x и y теже нули, добијамо за t две вредности, а пошто t представља угаони сачинилац дирке у коорд. почетку, то у тој тачки имамо две дирке. Заменом се добија

$$x^3+t^3x^3-atx^2=0$$

или

$$(t^3x-at+x)x^2=0$$

Ако пустимо да x тежи нули скративши са x^2, добија се једначина

$$t^3x-at+x=0$$

одакле је

$$x=\frac{at}{1+t^3}$$

Заменом у

$$y=tx$$

добија се

$$y=\frac{at^3}{1+t^3}$$

дакле x и y су изражени као функције параметра t.

Тако би исто изразили x и y за криву

$$ax^m+by^m+cx^py^{m-p-1}=0$$

Примена на криву у простору.

Познато је да је једна крива у простору дефинисана двема једначинама између координата x, y и z н. пр.

$$F(x,y,z)=0$$
$$\Phi(x,y,z)=0$$

Свака од њих дефинише по једну површину тако да се крива добија у пресеку тих двеју површина.

Ове се једначине пишу по некад у облику

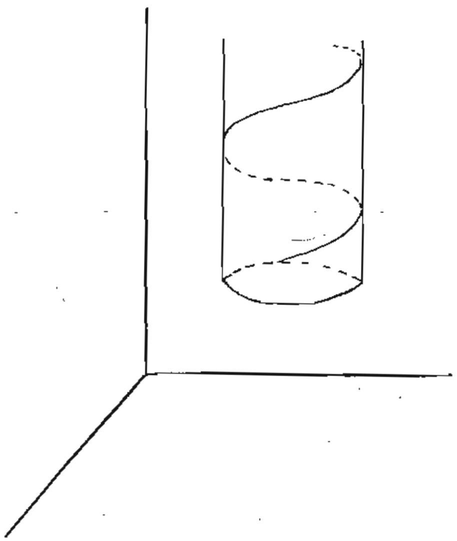
$$x=f(z)$$
$$y=\varphi(z)$$

који је згоднији у извесном рачуну.

На послетку крива у простору може бити дефинисана параметарским једначинама

$$x=f(t)$$
$$y=\varphi(t)$$
$$z=\psi(t)$$

Варијацијом параметра t варирају x, y и z али не произвољно. Кад би елиминисали x и y имали би две једначине између z и t, што показује да њихове варијације не би биле произвољне. Тако н. пр.



$$x = m\cos t$$
$$y = m\sin t$$
$$z = nt$$

дефинисале би у простору извесну криву, која лежи на цилиндру

$$x^2+y^2=m^2$$

што би била извесна завојна линија.

Дирке кривих у простору

Као и у равној геометрији и овде се дирка може дефинисати као сечица што пролази кроз две бесконачно блиске тачке.

Познато је из Аналитичке Геометрије да права што пролази кроз две тачке $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ има за једначину

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad 1)$$

Ако замислимо тачке M_1 и M_2 да су бесконачно блиске једна другој и ако се координате тачке M_1 означе са (x,y,z) а тачке M_2 са $(x+dx, y+dy, z+dz)$ биће

$$x_2-x_1=dx \quad y_2-y_1=dy \quad z_2-z_1=dz$$

и ако координате једне ма које тачке

дирке означимо са (X,Y,Z), једначина 1) даје

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \qquad 2)$$

и једначина 2) дефинише на тај начин дирку у тачки (x,y,z).

Ако нам је једначина криве дата у облику

$$f(x,y,z)=0$$
$$\varphi(x,y,z)=0$$

диференцијалењем ових двеју једначина добијају се две једначине из којих се могу израчунати dx и dy помоћу x,y,z и dz. Заменом у једначини дирке 2) и скративши са dz, једначина дирке добија се у облику

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$$

где ће a, b и c бити познате координате.

Исто би то било и кад би једначине криве биле дате у облику

$$x=f(z)$$
$$y=\varphi(z).$$

На послетку ако су једначине криве дате у параметарском облику

$$x=f(t)$$
$$y=\varphi(t)$$
$$z=\psi(t)$$

из њих добијамо

$$dx=f'(t)\,dt$$
$$dy=\varphi'(t)\,dt$$
$$dz=\psi'(t)\,dt$$

па заменом у 2) и скративши са dt добијамо

$$\frac{X-x}{f'(t)}=\frac{Y-y}{\varphi'(t)}=\frac{Z-z}{\psi'(t)}$$

где још ваља сменити x,y,z њиховим вредностима израженим са t.

Из једначине 2.) могу се лако одредити и углови које гради дирка са осовинама. Познато је из Аналитичке геометрије да кад је дата једначина праве

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$$

и ако су углови које гради та права

са коорд. осовинама α, β и γ, онда је

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Кад се то примени на једначину 2) имамо да је

$$a = dx \qquad b = dy \qquad c = dz$$

тако да последњи обрасци постају

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

али видели смо да ако се са ds означи елеменат лука на криву, биће

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$

тако да последњи обрасци постају

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

и у таквом облику најчешће се изражавају $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

Ако су н. пр. једначине криве дате у параметарском облику, треба из тих једначина наћи dx, dy, dz, затим помоћу ових наћи ds и онда сменити у предњим обрасцима, па ћемо имати косинусе тражених углова изражене помоћу t.

Примери:

1. Нека је дата завојна крива

$$x = m\cos t$$
$$y = m\sin t$$
$$z = nt$$

Одатле је

$$dx = -m\sin t\,dt$$
$$dy = m\cos t\,dt$$
$$dz = n\,dt$$

Према томе једначина дирке у оној тачки криве којој одговара посматрана вредност t биће

$$\frac{X - m\cos t}{-m\sin t} = \frac{Y - m\sin t}{m\cos t} = \frac{Z - nt}{n}$$

Лук ds дат је обрасцем

$$ds^2 = (m^2+n^2)\,dt^2$$

одакле је

$$ds = dt\sqrt{m^2+n^2}$$

Заменом у горњим обрасцима нала-
зи се да су косинуси углова између
дирке и осовина дати обрасцима

$$\cos\alpha = \frac{-m\sin t}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{m\cos t}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

из чега се види да све дирке граде
један исти угао са Z-осовином т.ј. са
обртном осовином оног цилиндра на
коме је описана сама завојна ли-
нија.

2. Тражи се дирка криве

$$y = x^3 - x^2$$
$$z = x^2 + y^2$$

у њеној тачки P (1,0,1).

Овди је

$$dy = (3x^2 - 2x)\,dx$$

$$dz = 2x\,dx + 2y\,dy$$

или за : $x=1$ $y=0$ $z=1$

$$dy = dx \quad dz = 2\,dx$$

па је једначина тражене дирке

$$X-1 = Y = Z - 1/2$$

Нормална раван.

Под нормалном равни једне криве у једној тачки разуме се раван што пролази кроз ту тачку и стоји управно на тангенти у тој тачки.

Нека су x, y и z координате тачке кроз коју пролази нормална раван. Пошто раван треба да пролази кроз ту тачку M, то треба да постоји однос

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

а пошто та иста раван мора бити нормална на дирки, то мора бити

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

то према ономе што смо видели у геометрији услов управности праве на равна треба да буде

$$\frac{A}{dx}=\frac{B}{dy}=\frac{C}{dz}$$

Ако заједничку вредност ова три количника означимо са λ, биће

$$A=\lambda dx$$
$$B=\lambda dy$$
$$C=\lambda dz$$

и онда заменом у горњој једначини равни, пошто се скрати са λ, добијамо

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0 \quad 1)$$

и то је тражена једначина нормалне равни у тачки (x,y,z). Овди још остаје да се из једначине криве одреде dx, dy, dz и смене у 1.).

Примери:

1. Одредити нормалну раван завојне линије

$$x=m\cos t$$
$$y=m\sin t$$
$$z=nt$$

Пошто је

$$dx = -m \sin t \, dt$$
$$dy = m \cos t \, dt$$
$$dz = n \, dt$$

то ће у оној тачки криве којој одговара посматрана вредност параметра t једначина нормалне равни бити

$$-(X - m\cos t) m \sin t + (Y - m \sin t) m \cos t + (Z - nt) n = 0$$

или

$$-X m \sin t + Y m \cos t + Z n - n^2 t = 0$$

2. Исто за криву

$$y = x^3 - x^2$$
$$z = x^2 + y^2$$

у тачки $P(1,0,1)$.

Овди је

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 1$$
$$dy = (3x^2 - 2x)\, dx = dx$$
$$dz = 2x\, dx + 2y\, dy = 2dx$$

па је једначина тражене нормалне равни

$$(X-1) + Y + 2(Z-1) = 0$$

или

$$X + Y + 2Z - 3 = 0$$

Оскулаторна раван.

Замислимо на датој кривој три блиске тачке M_1 M_2 M_3; кроз њих се увек може поставити једна раван H. Ако пустимо да се тачке M_1 M_2 и M_3 крећу по кривој онда ће и та раван мењати свој положај. Ако једна од њих н. пр. M_1 остане стална а M_2 и M_3 бесконачно се приближују, онда ће и раван H тежити граничном положају и поклопити се са извесном равни O која пролази кроз M_1 и која се назива оскулаторном равни криве.

Према томе дефиниција оскулаторне равни криве била би ова: Оскулаторна раван једне криве у једној тачки јесте раван што пролази кроз ту тачку M и још две тачке на кривој бесконачно блиске тачки M.

Из ове се дефиниција изводи непосредно једначина оскулаторне равни. Означимо са (x,y,z) координате посматране тачке M; онда се за координате једне бескрајно блиске њој тачке M_1 могу узети вредности: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, а за координате друге такође њој бескрајно блиске тачке: $x+dx+d^2x$, $y+dy+d^2y$, $z+dz+d^2z$. Пошто тражена раван има да прође у исто време кроз три тачке $M_1\ M_2\ M_3$, то ако се са A, B и C означе њени коефицијенти, имаћемо

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$
$$A(X-x-dx)+B(Y-y-dy)+C(Z-z-dz)=0$$
$$A(X-x-dx-d^2x)+B(Y-y-dy-d^2y)+C(Z-z-dz-d^2z)=0$$

другу од ових једначина можемо сменити разликом између ње и прве, а трећу разликом између ње и друге, тако да ћемо на место ових имати три условне једначине

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$
$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$$
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0$$

На тај начин имамо систем од три линеарне једначине са три непознате A, B и C. Познато је да ће оне имати само онда решења различна од нуле, ако им је детерминанта равна нули. Што показује да је

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \qquad 6.)$$

Једначина 6.) важи за ма какво X, Y, Z у посматраној равни и према томе она представља једначину оскулаторне равни у тачки (x,y,z).

Ако ју уредимо по елементима прве врсте, добијамо је у облику

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \qquad 7.)$$

где је

$$A = dy\, d^2z - dz\, d^2y$$
$$B = dz\, d^2x - dx\, d^2z$$
$$C = dx\, d^2y - dy\, d^2x$$

Да би имали једначину оскулаторне равни у њеном дефинитивном облику, треба још из једначине криве израчунати диференцијале што фигуришу у једначинама 8.) и помоћу њих наћи A, B и C. Заменом у једначини 7.) и скративши једначину са још оним диференцијалом који буде остао, имаћемо дефинитивну једначину оскулаторне равни.

Кад су једначине криве дате у параметарском облику, можемо из њих изнаћи: dx, dy, dz, d^2x, d^2y и d^2z једино помоћу t и dt и очевидно је да ће се у свима тим изразима јавити dt као чинилац; A, B и C из 8.) јавиће се у облицима

$$A = \lambda(t)\, dt^3$$
$$B = \mu(t)\, dt^3$$
$$C = \nu(t)\, dt^3$$

и заменом у 7.) имаћемо тражену
8.) једначину, пошто се ова скрати
са dt^3.

Пример: Наћи оскулаторну раван завојне линије

$$x = m\cos t$$
$$y = m\sin t$$
$$z = nt$$

Одатле је

$$dx = -m\sin t\, dt$$
$$dy = m\cos t\, dt$$
$$dz = n\, dt$$
$$d^2x = -m\cos t\, dt^2$$
$$d^2y = -m\sin t\, dt^2$$
$$d^2z = 0$$

Коефицијенти A, B и C постају

$$A = mn\sin t\, dt^3$$
$$B = -mn\cos t\, dt^3$$
$$C = (m^2\sin^2 t + m^2\cos^2 t)\, dt^3 = m^2\, dt^3$$

Према томе оскулаторна раван имаће за једначину

$$mn\sin t\,[X - m\cos t] - mn\cos t\,[Y - m\sin t] + m^2[Z - nt] = 0$$

Главна нормала кривих.

Очевидно је да у опште у једној тачки какве криве у простору имамо једну дирку а бесконачно много нормала. Између свих тих бесконачно много нормала нарочиту улогу игра једна и то она која се у исто време налази и у оскулаторној равни и она се назива главна нормала криве у посматраној тачки. Према томе главна нормала криве добија се као пресек нормалне равни и оскулаторне равни

Из те дефиниције добијају се у исто време и једначине главне нормале. Тако за нормалну раван знамо да је дата једначином

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-dz)\,dz = 0 \qquad 9.)$$

а за оскулаторну раван

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \qquad 10.)$$

где A, B и C имају вредности 8.). Скуп тих једначина представља једначину главне нормале у тачки (x,y,z).

Овим једначинама можемо дати још један облик који се често употребљава. Њих можемо решити помоћу разлика $X-x$, $Y-y$ и $Z-z$. На тај начин долазимо до

$$\frac{X-x}{\lambda} = \frac{Y-y}{\mu} = \frac{Z-z}{\nu} \qquad 11.)$$

где ће λ, μ и ν бити одређени помоћу dx, dy, dz, d^2x, d^2y и d^2z. Из обрасца 11.), претпостављајући да смо нашли λ, μ и ν, могу се наћи углови које гради нормала са осовинама. Према ономе што знамо из Аналитичке Геометрије биће

$$\cos\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

О кривинама кривих у простору

Видели смо да је код кривих у равни кривина једне криве у посматраној тачки M дефинисана количником између угла контингенције што одговара двема бесконачно блиским тачкама M и M' те криве и лука MM' т.ј. количником

$$\frac{d\alpha}{ds}$$

Тако исто видели смо и то да се под полупречником кривине тачке M разуме реципрочна вредност горњег количника. Тако ако се са ρ означи полупречник кривине, биће

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Исто се то може раширити и на криве у простору. Ако уочимо бесконачно мали лук једне криве

$$MM' = ds$$

он се може сматрати као да је у равни и онда се кривина тога лука сматра као кривина криве у тачки M и њена ће вредност бити

$$\frac{d\alpha}{ds}$$

где је α угао контингенције тачака M и M'. Исто тако полупречник кривине у тачки M биће полупречник кривине бесконачно малог лука MM' а његова ће вредност бити дата обрасцем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Тако дефинисана кривина назива се <u>правом кривином</u> криве у тачки M а такав полупречник кривине <u>правим полупречником кривине</u>.

У простору се јавља још једна кривина која се назива <u>друга кривина</u> или <u>торсија криве</u>. Уочимо на кривој две бесконачно блиске тачке M и M'. Тада ћемо у тачки M имати једну, а у тачки M' другу оскулаторну раван, које ће се бесконачно мало разликовати једна од друге. Оне ће градити бесконачно мали угао $d\theta$ и тада се под торсијом разуме

$$\frac{d\theta}{ds}$$

а под другим полупречником кривине или полупречником торсије разуме се вредност ρ' дефинисана обрасцем

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\theta}{ds}$$

Као што се види из ових образаца оба полупречника кривине своде се на израчунавање лука ds и бесконачно малих углова $d\alpha$ и $d\theta$. За лук смо видели како се израчунава, а углови пак $d\alpha$ и $d\theta$ израчунавају се по самој њиховој

дефиницији.
Ако означимо са

$$R = \pm\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

онда је угао кривине дат обрасцем

$$\omega = R\,ds$$

полупречник кривине обрасцем

$$\rho = \frac{1}{R}$$

а координате X, Y и Z центра кривине

$$X = x + \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$Y = y + \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$Z = z + \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}$$

Примери.

Одредити главне елементе
1. Цилиндричне хелисе

$$x = r \sin\frac{z}{ar}$$

$$y = r \cos\frac{z}{ar}$$

одакле је

$$x^2 + y^2 = r^2$$

где је r полупречник цилиндра а a тригонометријска тангента сталног угла ν које чини крива са генератрисама.
Из једначина криве је

$$\frac{dx}{dz} = r \cdot \frac{1}{ar}\cos\frac{z}{ar} = \frac{y}{ar} \qquad \frac{dy}{dz} = -r \cdot \frac{1}{ar}\sin\frac{z}{ar} = -\frac{x}{ar}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{a^2r^2} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{y}{a^2r^2}$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = -\frac{y}{a^3r^3} \qquad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{x}{a^3r^3}$$

Заменом ових вредности у обрасцима изведеним раније добија се

1. једначина тангенте

$$\frac{X-x}{\frac{y}{ar}} = \frac{Y-y}{-\frac{x}{ar}} = \frac{Z-z}{1}$$

2. извод за пут криве

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2r^2}+\frac{x^2}{a^2r^2}+1} = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} = \frac{1}{\sin v}$$

3. косинуси углова између дирке и осовине

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{\frac{y}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{y}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{y}{r}\cos v$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = -\frac{\frac{x}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = -\frac{x}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = -\frac{x}{r}\cos v$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dz}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin v}} = \sin v$$

одакле се види да тангента чини са z-осовином сталан угао.

4. једначина нормалне равни

$$(X-x)\frac{y}{ar} - (Y-y)\frac{x}{ar} + (Z-z) = 0$$

или

$$Xy - xY + (Z-z)\,ar = 0$$

5. Оскулаторна раван. Овде је

$$A = \frac{y}{a^2r^2}\,dz$$

$$B = -\frac{x}{a^2r^2}\,dz$$

$$C = -\frac{y}{ar}\,dz\cdot\frac{y}{a^2r^2}\,dz^2 - \frac{x}{ar}\,dz\,\frac{x}{a^2r^2}\,dz^2$$

па заменом једначина те равни је

$$-(X-x)\frac{y}{a^2r^2} + (Y-y)\frac{x}{a^2r^2} + (Z-z)\left(\frac{x^2}{a^3r^3}+\frac{y^2}{a^3r^3}\right) = 0$$

или

$$Xy - xY - \frac{r}{a}(Z-z) = 0$$

6. Главна нормала. Пошто је

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sin v}$$

то је

$$\frac{d^2s}{dz^2} = 0$$

и према томе

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2} = -\frac{\frac{x}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}} = -\frac{1}{r^2(1+a^2)} = -\frac{x}{r^2}\cos^2 v$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2} = -\frac{\frac{y}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}} = -\frac{y}{r^2(1+a^2)} = -\frac{y}{r^2}\cos^2 v$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

па заменом добијамо једначину те нормале

$$-\frac{X-x}{\frac{x}{r^2}\cos^2 v} = -\frac{Y-y}{\frac{y}{r^2}\cos^2 v} = \frac{Z-z}{0}$$

или

$$X y - x Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = z$$

одакле се види да је главна нормала паралелна бази цилиндра

7. Косинуси углова те нормале и осовина

Овди је

$$R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\cos^4 v + \frac{y^2}{r^2}\cos^4 v} = \frac{\cos^2 v}{r}$$

па је

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{x}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{x}{r}$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{y}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{y}{r}$$

$$\cos\gamma = 0$$

одакле се види да је главна нормала увек нормална на осу цилиндра, као што је већ нађено.

8. Угао кривине је

$$\omega = \frac{\cos^2 v}{r} ds$$

Кривина је дакле стална.

9. Полупречник кривине је

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 v}$$

10. Координате центра кривине су

$$X = x - \frac{r^2}{\cos^4 v} \cdot \frac{x}{r^2}\cos^2 v = -x\,tg^2 v = -a^2 x$$

$$Y = y - \frac{r^2}{\cos^4 v} \cdot \frac{y}{r^2}\cos^2 v = -y\,tg^2 v = -a^2 y$$

$$Z = z$$

11. Угао торсије

$$\varepsilon = \frac{\sin 2v}{2r} ds$$

2. Д^ю за цилиндричну хелису

$$x = -a^2 r \sin\frac{z}{ar}$$

$$y = -a^2 r \cos\frac{z}{ar}$$

одакле је

$$x^2 + y^2 = a^4 r^2$$

Из једначина је

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y}{ar} \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{x}{ar}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{a^2r^2} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{y}{a^2r^2}$$

па би према томе добили исте резултате као под 1.

3. Наћи тангенту, нормалну и оскулаторну раван криве која се добија пресеком два цилиндра права чије се осе секу нормално.

Једначине те криве су

$$x^2 + z^2 = a^2$$
$$y^2 + z^2 = b^2$$

Одавде је

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{z}{x} \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y}$$

па је једначина дирке

$$\frac{X-x}{-\frac{z}{x}} = \frac{Y-y}{-\frac{z}{y}} = \frac{Z-z}{1}$$

или

$$Xx + Zz = x^2 + z^2 = a^2$$
$$Yy + Zz = y^2 + z^2 = b^2$$

Једначина нормалне равне биће

$$(X-x)\cdot -\frac{z}{x} + (Y-y)\cdot -\frac{z}{y} + (Z-z) = 0$$

или

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} - \frac{Z}{z} = 1$$

Једначина оскулаторне равни је

$$b^2x^3X - a^2y^3Y + (a^2-b^2)z^3Z = a^2b^2(a^2-b^2$$

Примене на површине

Знамо да је једна површина у простору дефинисана једначином

$$f(x,y,z) = 0$$

између координата њених тачака.

У многим рачунима замишља се једначина решена по z

$$z = \varphi(x,y)$$

или ако је решена по другој којој променљивој, ова се узима за z. У таквим случајевима обично се бележе делимични изводи овако:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Додирна раван.

Кроз једну тачку: $M(x,y,z)$ на једној датој површини можемо повући бескрајно много дирака на површину. Ми ћемо доказати да све те бескрајно многе дирке леже у једној равни и наћи ћемо једначину те равни.

Замислимо кроз тачку M једну ма какву криву и означимо са X, Y, Z координате једне ма које дирке на тој кривој у тачки M. Познато нам је да ће једначина дирке тада бити

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \qquad 1.)$$

Пошто је тачка M на површини, то њене координате морају најпре задовољавати једначину

$$f(x,y,z)=0$$

Диференцијалећи ту једначину добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0 \qquad 2.)$$

Ако заједничку вредност количника 1.) означимо са λ, имаћемо

$$dx=\frac{X-x}{\lambda}$$

$$dy=\frac{Y-y}{\lambda}$$

$$dz=\frac{Z-z}{\lambda}$$

Заменом у 2.) и множењем целе једначине са λ добија се

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \qquad 3.)$$

У овој једначини x, y, z означују координате тачке M а X, Y, Z координате ма које тачке посматране дирке. Ако замислимо x, y, z замењене њиховим вредностима, једначина 3) биће облика

$$AX+BY+CZ+D=0 \qquad 4.)$$

она дакле представља једну исту раван, а пошто коефицијенти A, B, C, D

зависе само од x, y и z т.ј. од координата тачке M и од облика функције f т.ј. од облика површине, а никако не зависе од облика криве коју смо замислили да пролази кроз M, то ће једначина 4.) важити за све тангенте у тачки M. То показује да све те дирке леже у једној равни чија је једначина 3.) и та је раван називa **додирном равни** дате површине у тачки M.

Из једначина 3.) и 4.) лако се налазе углови које површина гради са координатним осовинама. Познато је из Аналитичке Геометрије да су косинуси углова α, β, γ које гради раван 4.) дати обрасцима

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Код додирне равни је

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Према томе поменути косинуси имаће за вредност

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \qquad 5.)$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

У случају кад је једначина дата у облику

$$z = \varphi(x,y)$$

или

$$\varphi(x,y) - z = 0$$

имаћемо да је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = p$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

Према томе једначина додирне равни постаје

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0$$

а косинуси 5.) прелазе у

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Пример: Нека је дата кугла

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Према томе једначина додирне равни у тачки (x, y, z) биће

$$x(X-x) + y(Y-y) + z(Z-z) = 0$$

или

$$Xx + Yy + Zz - (x^2+y^2+z^2) = 0$$

или најзад

$$Xx + Yy + Zz = R^2$$

2. Нека је дат елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

и према томе додирна раван биће

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0$$

или

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0$$

или најзад

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$$

3. Дат је коноид

$$x^2 z^2 + a^2 y^2 - z^2 x^2 = 0$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz^2 - 2xz^2 = 2x(z^2 - z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2z$$

па заменом добијамо једначину додирне равни

$$(X-x)\,2x(z^2-r^2) + (Y-y)\,2a^2y + (Z-z)\,2x^2z = 0$$

или одатле

$$Xx(z^2-r^2) + Yy\,a^2 + Zz\,x^2 = x^2z^2 - x^2r^2 + a^2y^2 + x^2z^2$$

или најзад, обзиром на једначину коноида

$$(z^2-r^2)Xx + a^2Yy + x^2Zz = x^2z^2$$

Када је

$$z=r \quad y=0$$

једначина те равни је

$$Z=r$$

Нормала.

Под нормалом површине

$$f(x,y,z)=0$$

разуме се права која пролази кроз тачку M и стоји управно на додирној равни. Пошто права пролази кроз тачку $M(x,y,z)$, њена једначина мора бити облика

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

а пошто она треба да стоји управно на додирној равни

$$AX+BY+CZ+D=0$$

то између коефицијената a, b, c, A, B, C морају постојати односи

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

Ако заједничку вредност ова три копичника означимо са λ, биће

$$a = A\lambda$$
$$b = B\lambda$$
$$c = C\lambda$$

тако да једначина нормале, пошто се скрати са λ, постаје

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}$$

Али пошто, као што смо видели, коефицијенти A, B и C имају за вредност

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z}$$

то једначина нормале добија дефинитиван облик

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad 6)$$

У случају кад је једначина површине дата у облику

$$z = \varphi(x,y)$$

биће

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -1$$

тако да једначина 6) постаје

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

и оне се обично пишу у овом облику

$$X-x + p(Z-z) = 0$$
$$Y-y + q(Z-z) = 0$$

Примери:

1. Нека је дат елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

тако да једначине нормале постају

$$\frac{a^2}{x}(X-x) = \frac{b^2}{y}(Y-y) = \frac{c^2}{z}(Z-z)$$

или

$$\frac{a^2X}{x} - a^2 = \frac{b^2Y}{y} - b^2 = \frac{c^2Z}{z} - c^2$$

2. Дат је конус

$$x^2z^2 + a^2y^2 - z^2x^2 = 0$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(z^2 - z^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2z$$

па је једначина нормале

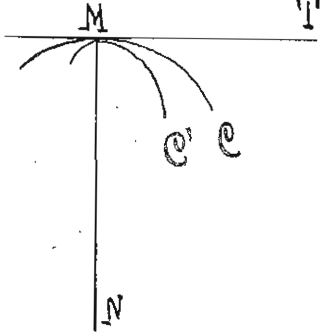
$$\frac{X-x}{x(z^2-y^2)}=\frac{Y-y}{a^2y}=\frac{Z-z}{x^2z}$$

О кривини површине

Кривина површина није онако прост појам као кривина кривих било у равни било у простору. Не постоји ни једна количина чија би вредност потпуно дефинисала кривину једне површине у једној датој тачки. Та ће кривина бити очевидно разна према томе у коме је правцу посматрано. Кроз једну тачку може се повући бескрајно много кривих; свака би од њих имала кривину и све те бесконачно многе кривине састављале би површину. У први мах би изгледало да се проучавање кривине своди на проучавање бесконачно многих кривих на њој. Међутим то је проучавање знатно упрошћено тиме што између тих бесконачно многих кривих постоје извесне везе, тако да кад је познат врло мали број тих кривих, све су остале познате. Те су везе оличене у двема основним теоремама на којима је основана целокупна теорија кривине кривих површина, а то су:

1° Meunier-ова теорема.

Нека је дата на посматраној површини једна тачка M. Повуцимо кроз њу једну ма коју дирку н.пр. MT и нормалу MN. Дирка и нормала одређују раван која стоји управно на додирној равни у тачки M.



Та ће раван дату површину пресећи по једној извесној линији C која се зове нормалним пресеком дате површине. Ако замислимо кроз дирку MT другу раван која више не пролази кроз нормалу већ са њом гради угао θ, та ће раван сећи површину по кривој C' која се назива косим пресеком дате површине. Означимо са ρ полупречник кривине нормалног пресека C а са ρ' полупречник кривине косог пресека C'. Meunier-ова теорема тада гласи овако: Полупречник кривине косог пресека није ништа друго до пројекција полупречника кривине нормалног пресека на правац полупречника самог тог пресека т.ј.

$$\rho' = \rho \cos\theta$$

Ова теорема своди проучавање кривине свију бесконачно многих косих пресека на проучавање кривине само нормалних пресека.

2° Euler-ова теорема.

Замислимо да се дирка у M обрће око нормале MN. Сваком положају одговарајуће равни ТМР одговараће по један нормалан пресек те површине. Сваки од тих пресека имаће свој полупречник кривине и сад настаје питање да ли постоји веза између тих тако добијених полупречника кривине. Та веза постоји и она је описана у Euler-овој теореми која гласи: Збир реципрочних вредности полупречника кривине код ма каква два нормална пресека кроз тачку М а који су један на другом нормални сталан је т.ј.

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = const.$$