РАЦИОНАЛНА
МЕХАНИКА
II

Ђор. Ј. Ајић, проф.

Рационална механика

Предавања
Др. М. Миланковића,
проф. Универзитета

II део.

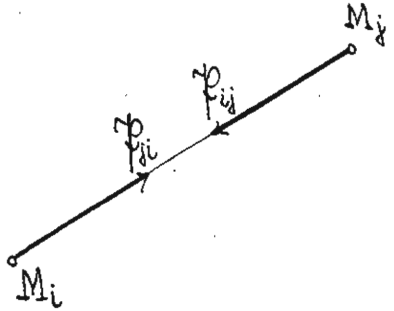
Статика

материјалне линије.

Основни појмови.

Ако имамо један систем материјалних тачака које се могу свака за себе слободно кретати, то за њих важи све оно што смо у механици материјалне тачке извели. Читав систем биће на миру ако се свака тачка буде налазила у стању мировања, а то ће моћи бити случај само онда, ако је резултанта сила које утичу на сваку поједину тачку равна нули.

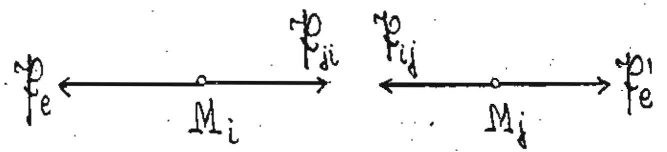
Ако су тачке међусобно везане то ће се та веза показивати у томе да ће кретање једне тачке зависити од кретања осталих т.ј. једна тачка ће утицати на кретање других. Тај утицај на кретање обухватили смо појмом силе, па те силе којима дејствују материјалне тачке једног те истог система једна на другу зовемо *унутарњим* или *интерним силама* за разлику од *спољних* или *екстерних сила* које не потичу од материјалних тачака истог система. Те су силе према принципу акције и реакције увек две и две једнаке, но противног правца. Тако сила F_{ij} којом дејствује



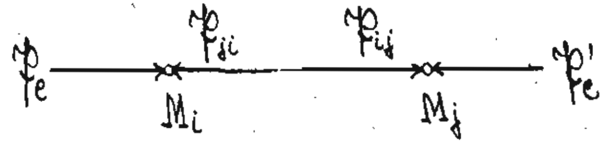
материјална тачка M_i на материјалну тачку M_j једнака је по величини својој сили F_{ji} којом дејствује материјална тачка M_j на тачку M_i. Обе силе падају у праву која спаја те две силе.

Те унутарње силе имају да задовоље сем тога извесним условима. Тако н. пр. унутарње силе једног крутог тела имају да задовоље условима да су увек такове да спрече сваку промену дистанција материјалних тачака посматраног крутог тела. Покушавамо ли према томе да две материјалне тачке каквог крутог тела једну другој приближимо, то ће се између њих појавити одбојне силе које ће то приближавање спречити. Ми претпостављамо да имамо посла са апсолутно крутим телима т.ј. да унутарње силе таквих тела могу достићи произвољну величину. У ствари то није случај; унутарње силе познатих тела не могу прекорачити одређене величине. Достигну ли оне те величине, то се тело разорава. Но већ и код најмањих сила деформишу се тела т.ј. њихове дистанције између тачака мењају се, само је та деформација, ако силе не прекораче извесне границе, тако мала да се може занемарити. Ми ћемо дакле у Рационалној Механици претпоставити да имамо посла са апсолутно крутим телима која су у стању да се без деформације подвргну силама произвољне величине.

Сада ћемо се бавити механиком материјалне линије. Под <u>материјалном линијом</u> разумевамо систем материјалних тачака поређаних у једну линију тако да свака од њих дејствује на обе суседне материјалне тачке. Унутарње силе падају према томе увек у праве које спајају суседне материјалне тачке. Оне могу бити тако велике да спрече промене дистанција тих тачака. Те унутарње силе делимо у две категорије: Ако су таковога правца да спречавају удаљавање двеју суседних тачака т.ј. ако се држе у равнотежи са екстерним силама F_e и F_e' које те-

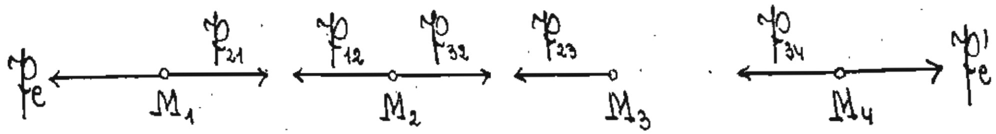


же да размакну тачке M_i и M_j, онда такве силе зовемо <u>силама истезања</u>; ако су те силе ~~истезања~~ интерне таковога правца да спречавају свако приближавање суседних тачака, онда их зовемо <u>силама притиска</u>.



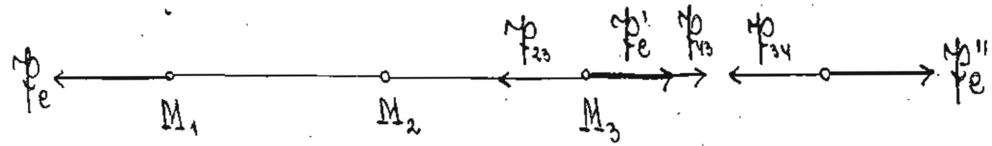
Тако н. пр. у другом случају настоје силе F_e и F_e' од којих прва дејствује на тачку M_i а друга на тачку M_j да приближе обе те тачке једну другој. Да би се тачка M_i налазила у равнотежи, то је потребно да на њу утиче тачка M_j силом F_{ji} која држи силу F_e у равнотежи. Тачка M_i дејствује на тачку M_j једнаком силом F_{ij}, па ће читав систем бити у миру ако су силе F_e и F_e' по величини једнаке.

Испитајмо прво неколико једноставних случајева. Нека су материјалне тачке M_1 M_2 M_3 M_4 (број њихов је произвољан | постављене у праву линији. На прву од њих дејствује спољна



сила $\mathfrak{F}_e$. Питајмо какву интерну силу треба надовезати на тачку M_4 па да се читав систем нађе у равнотежи. Да би се тачка M_1 налазила у равнотежи потребно је да суседна тачка M_2 дејствује на њу силом $\mathfrak{F}_{21}$ која је једнака сили $\mathfrak{F}_e$ но противног правца. По принципу реакције дејствоваће у том случају тачка M_1 на тачку M_2 силом $\mathfrak{F}_{12}$ која је једнака по величини својој сили $\mathfrak{F}_{21}$. За равнотежу тачке M_2 мора друга суседна јој тачка M_3 дејствовати на њу силом $\mathfrak{F}_{32}$ која је једнака сили $\mathfrak{F}_{12}$. Та је сила по принципу реакције опет једнака сили $\mathfrak{F}_{23}$. Продужимо ли ово разматрање до тачке M_4, то ћемо видети да тачка M_3 дејствује на тачку M_4 силом $\mathfrak{F}_{34}$ која је једнака сили $\mathfrak{F}_e$, па ће зато за равнотежу ове последње тачке бити потребно да на њу дејствује сила $\mathfrak{F}'_e$ која је једнака но противног правца сили $\mathfrak{F}_e$. Ове две силе $\mathfrak{F}_e$ и $\mathfrak{F}'_e$ испуњавају према томе исте услове као кад би дејствовале на исту тачку, па зато можемо замислити да се те силе помоћу унутарњих сила шире дуж читаве материјалне линије.

Испитајмо овај случај: На материјалну тачку M_1 дејствује спољна сила $\mathfrak{F}_e$, а на тачку M_3 спољна



сила $\mathfrak{F}'_e$. Питајмо какву силу треба надовезати у тачки M_4 па да се читав систем нађе у равнотежи. Према пређашњем шири се сила $\mathfrak{F}_e$ до тачке M_3 т.ј. на тачку M_3 дејствује тачка M_2 силом

$$F_{23} = F_e$$

Осим тога дејствује на тачку M_3 још и екстерна сила F_e', па да се тачка M_3 налази у равнотежи мора тачка M_4 дејствовати на њу силом F_{43}, па збир $F_e' + F_{43}$ мора по величини својој бити једнак сили F_e, дакле

$$F_e' + F_{43} = -F_e$$

Како материјална тачка M_4 дејствује на тачку M_3 силом F_{43}, то ће тачка M_3 дејствовати на тачку M_4 силом F_{34}, па да би се ова налазила у равнотежи морамо у тачки M_4 надовезати екстерну силу F_e'' која је једнака но противног правца сили F_{34}, дакле једнака и истог правца као сила F_{43}. Зато добијамо једначину

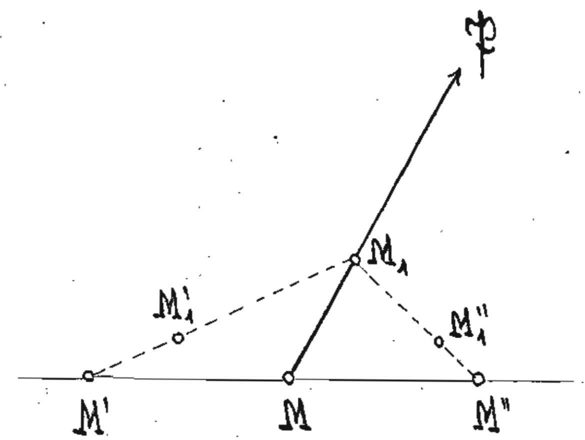
$$F_e' + F_e'' = -F_e$$

или

$$F_e + F_e' + F_e'' = 0$$

збир спољних сила мора бити раван нули, а видимо да у тачки M_3 настаје једна дисконтинуална промена у унутарњим силама јер интерне силе до тачке M_3 нису једнаке интерним силама између тачака M_3 и M_4.

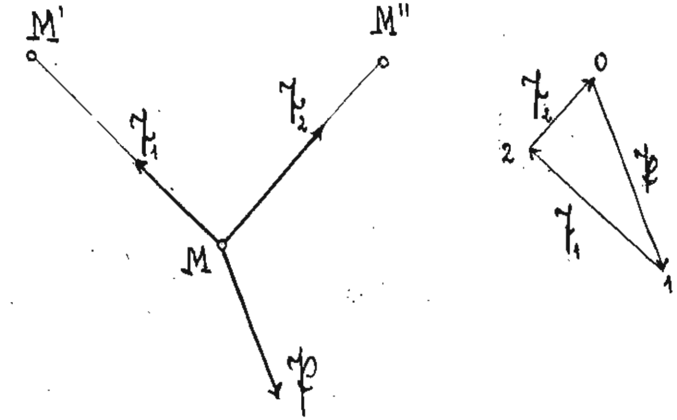
Ако на сваку тачку линије дејствује једна бескрајно мала екстерна сила, то ће се интерне силе мењати континуирно. Ако на елеменат праве материјалне линије дејствује једна екстерна сила која не пада у тај елеменат, то интерне силе између тачке M и суседних јој тачака неће бити у стању да одрже тачку M у равнотежу. Елеменат ће се према томе деформисати тиме да ће се тачка M померити



у положај M_1. Тако ће на тој тачки настати једна дисконтинуална промена материјалне линије.

Ако на сваку тачку материјалне линије дејствују силе које се континуирно по правцу и величини мењају, то ће и материјална линија у том случају имати континуиран облик, па ће се и њене интерне силе мењати континуирно. Такву линију зовемо ланчаницом.

Пре но што приступимо испитивању ланчанице бавићемо се случајем када на тачке материјалне линије дејствују коначне силе концентрисане у појединим тачкама линије. Испитајмо случај када на тачку M дејствује једна коначна сила $\mathcal{P}$. Равнотежа ће моћи наступити само онда, ако материјална линија на томе месту чини један угао, па ако на делове материјалне линије између M и M', и M и M'' не дејствују никакве силе, то ће ти комади бити прави. За равнотежу у тачки M



биће потребно да се у суседним деловима линије јаве интерне силе (у овом случају силе истезања) T_1 и T_2 па да постоји једначина

$$\mathcal{P} + T_1 + T_2 = 0$$

т.ј. те силе морају сачињавати један троугао. Пренесемо ли силу $\mathcal{P}$ у дужину 01, па повучемо ли 02 паралелно са MM'' а 12 паралелно са MM', то нам дужине 12 и 20 представљају силе истезања T_1 и T_2. Означимо ли интензитете тих сила са латинским словима, то постоји једначина

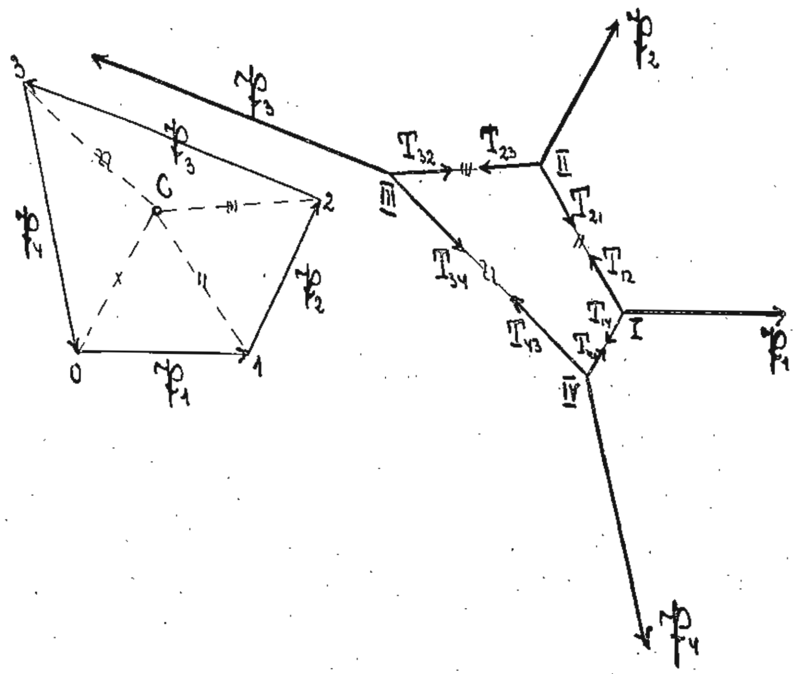
$$\frac{P}{\sin(T_1T_2)} = \frac{T_1}{\sin(\mathcal{P}T_2)} = \frac{T_2}{\sin(\mathcal{P}T_1)}$$

угао (T_1T_2) не може бити раван π

$$\measuredangle(T_1T_2) \gtrless \pi$$

јер би у том случају истезања T_1 и T_2 била бескрајно велика, а истезања T_1 и T_2 шире се до тачака M' и M''.

Испитајмо сада један општији случај када на једну затворену материјалну линију дејствују четири коначне силе. Онда ће та материјална линија добити облик четвороугла, а у угловима тога четвороугла дејствоваће спољне силе. Материјална линија нека сачињава полигон I II III IV. У угловима тога полигона нека дејствују силе $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$. Испитајмо кад ће се тај полигон налазити у равнотежи. За равнотежу тачке I потребно је да сила P_1 сачињава са истезањима T_{12} и T_{14} један затворен троугао. Пренесемо ли према томе дужину $01 = P_1$ па повучемо ли $0C$ паралелно са IV I и $1C$ паралелно са I II, то нам дужине $1C$ и $C0$ представљају истезања T_{12} и T_{14}. Смисао тих истезања је тај да је смисао обилажења по троуглу овај: $01C$, дакле исти онај као и смисао силе P_1; то значи да је сила T_{12} наперена у правцу $1C$ т.ј. од тачке I према тачки II. Та сила шири се до тачке II, па ће у тој тачки дејствовати сила T_{21} која има противни правац. За равнотежу у тој тачки II потребно је да се у комаду II III појави једна сила T_{23} која сачињава

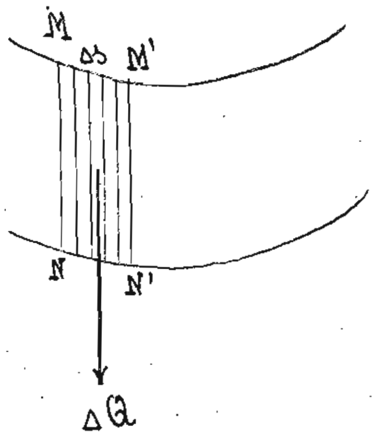


са већ познатим силама у тој тачки T_{21} и P_2 затворени троугао. Сила T_{21} представљена је дужином C1, сила P_2 дужином 12, па ће зато сила T_{23} бити представљена дужином 2C. При томе мора бити 2C паралелно са II III. Сила T_{23} шири се до тачке III, па у тој тачки делује интерна сила T_{32} која је противног правца, па према томе представљена дужином C2, па ће за равнотежу у тачки III бити потребно, да се у комаду III IV појави интерна сила T_{34} која са познатим силама T_{32} и P_3 сачињава затворени троугао. Равнотежа моћи ће постојати у тачки III само онда, ако сила T_{34} буде представљена дужином 3C. У то име потребно је дакле да 3C буде паралелно са III IV. Сила T_{34} шири се до тачке IV и у њој дејствује сила T_{43} која је према томе представљена дужином C3. Равнотежа у тачки IV моћи ће постојати само онда ако се у комаду IV I

буде појавила сила T_{41} која са силама T_{43} и P_4 затвара троугао. То ће бити само онда случај ако буде представљена дужином 0C. Верижни полигон I II III IV биће према томе само онда у равнотежи, ако полигон сила 01230 буде затворен и ако буде постојала једна тачка C такове природе да су праве повучене из те тачке C према угловима 0123 полигона сила паралелне са странама верижног полигона. Полигон сила 01230 зове се често пута и Varignon-ом полигона. Тачка C зове се пол варињона. Стране варињона полигона паралелне су силама, а стране верижног полигона т.ј. полигона чији облик заузима материјална линија паралелне су поларним зрацима C0, C1, C2, ...

Ланчанице.

На посматрану материјалну линију нека дејствују силе које се континуирно мењају од тачке до тачке те линије. Претпоставимо прво да те силе леже у истој равнини у којој лежи и ланчаница и нека су сем тога те силе вертикалне. Део ланчанице MM' којега је дужина једнака Δs нека буде оптерећен оптерећењем представљеним сликом $MM'N'N$. Резултанта тога оптерећења нека буде ΔQ. Онда квоцијенат

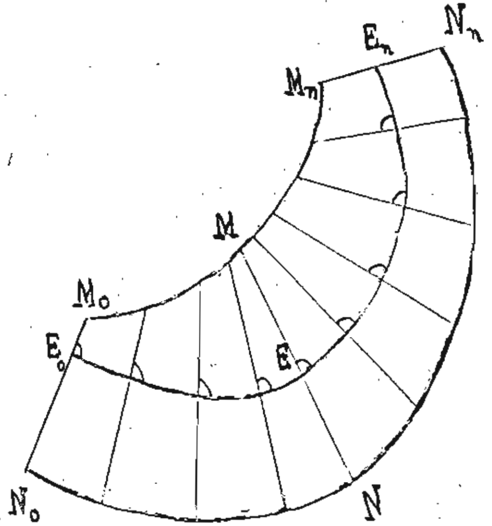


$$\frac{\Delta Q}{\Delta s}$$

називамо *средњим оптерећењем* елемента Δs. Приближује ли се тачка M' бескрајно тачки M, то ће се тај квоцијенат приближавати једној граници

$$F = \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}$$

а вредност тога квоцијента F зовемо *специфичким оптерећењем* ланчанице у тачки M. Ако оптерећења леже у истој равнини са ланчаницом но ако њихов правац није паралелан као у пређашњем случају него ако се континуирно мења, то ћемо систем тих оптерећења моћи представити на овај начин: M_0MM_n нека представља део ланчанице. Закон по коме се мења правац оптерећења ће бити одређен ако нам буде била позната крива E_0EE_n на којој стоје та оптерећења нормално. Ту криву E_0EE_n зовемо *директрисом оптерећења*. Пренесемо ли у сваку тачку M дужине у правцу оптерећења чија је величина једнака специфичном оптерећењу ланчанице, то крајње тачке N тих дужина леже на криви N_0NN_n која нам даје закон по којем се мењају интензитети тих специфичних оптерећења. Ту



криву линију називамо <u>линијом оптерећења</u>.

И у случају да оптерећења не леже у истој равни постојаће гранична вредност квоцијента $\frac{\Delta Q}{\Delta s}$, па ће постојати и директриса и линија оптерећења само ће ове бити просторне криве.

Специфично оптерећење F биће нам у свакој тачки ланчанице одређено ако будемо познавали његове компоненте X, Y, Z. Онда је правац тога оптерећења одређен косинусима

$$\cos(X,F) = \frac{X}{F}$$

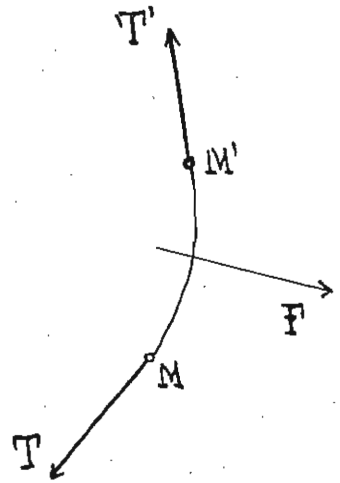
$$\cos(Y,F) = \frac{Y}{F}$$

$$\cos(Z,F) = \frac{Z}{F}$$

при чему је

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Да бисмо извели услове за равнотежу ланчанице уочимо један њен елеменат MM'. Дужина тог елемента нека буде ds, а специфично оптерећење у тачки M нека буде F. Онда је оптерећење тога елемента ds једнако Fds, а компоненте тога оптерећења Xds, Yds, Zds. Делове ланчанице који се настављају на посматрани елеменат



замислимо одстрањене, но да тиме неби равнотежа елемента била нарушена морамо у тачкама M и M' надовезати унутарње силе ланчанице T и T', јер су се тим силама и манифестирали делови које смо уклонили. Казали смо да те унутарње силе стоје у две суседне тачке ланчанице. Тако сила T пролази кроз тачку M и кроз њену непосредно блиску тачку коју смо одстранили. Из тога следује да ће правац силе T тангирати ланчаницу у тачки M, а исто ће тако и правац силе T' тангирати ланчаницу у тачки M'. Углови што их тангенте ланчанице у тачкама M и M' затварају са координатним осама нека буду α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Елеменат MM' је бескрајно мален па зато за његову равнотежу важе сви услови које смо извели за равнотежу материјалне тачке т.ј. за равнотежу је потребно и довољно да збир компонената свих сила које на тај елеменат утичу у сва три правца координатних оса буде раван нули. Компоненте силе F су као што смо већ казали Xds, Yds, Zds; компоненте силе T биће $T\cos\alpha$, $T\cos\beta$, $T\cos\gamma$; компоненте силе T' биће $T'\cos\alpha_1$, $T'\cos\beta_1$, $T'\cos\gamma_1$. Узмимо да су компоненте силе T' позитивне, а да су компоненте силе T негативне, јер ове две силе падају при бескрајном приближавању тачке M' тачки M у исту праву, а имају противан правац. Зато ће једначине равнотеже бити

$$T'\cos\alpha_1 - T\cos\alpha + Xds = 0$$
$$T'\cos\beta_1 - T\cos\beta + Yds = 0$$
$$T'\cos\gamma_1 - T\cos\gamma + Zds = 0$$

Прва два члана горњих једначина представљају нам тоталне диференцијале компонената силе T, па зато имамо једначине

$$d(T\cos\alpha) + Xds = 0$$
$$d(T\cos\beta) + Yds = 0 \qquad 1)$$
$$d(T\cos\gamma) + Zds = 0$$

Ове једначине казују да су диференцијали компонената сила истезања негативно узети једнаки компонентама оптерећења елемента ds. Казали смо да правац силе T пада у правац тангенте у тачки M, па је зато

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

ако x, y, z означавају координате тачке M. Тако добијамо ове једначине

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0 \qquad 2)$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0$$

Кад су силе које дејствују на ланчаницу познате, онда можемо наћи облик ланчанице и њене силе истезања.

Спољне силе које дејствују на ланчаницу у најопштијем су случају функције положаја тачке на коју дејствују, функције лучног одстојања те тачке од једне одређене тачке ланчанице и функције оријентације елемента на који дејствују, т.ј.

$$X = f_1\left(x, y, z, s, \frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dz}\right)$$

$$Y = f_2\left(x, y, z, s, \frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dz}\right)$$

$$Z = f_3\left(x, y, z, s, \frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dz}\right)$$

Ако су нам на тај начин оптерећења задана, онда можемо помоћу тих једначина интегрисати једначине 2) па добијамо н. пр.

$$x = \varphi(s)$$

$$y = \psi(s)$$

$$z = \chi(s)$$

$$T = \Phi(s)$$

Прве три једначине одређују облик

ланчанице, а последња силу истезања. Ако та сила испадне негативна то значи да је та сила на посматраном месту сила притиска.

Ланчанице са паралелним оптерећењима.

Оптерећења ланчанице нека буду паралелна рецимо вертикална. Одаберемо ли према томе осу Y нашег координатног система за вертикалу, то ће бити

$$X = 0$$
$$Z = 0$$

Онда следује из прве и треће од једначина 2)

$$T\frac{dx}{ds} = C_1$$

$$T\frac{dz}{ds} = C_2$$

или ако ове две једначине поделимо једну с другом

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C_2}{C_1}$$

или

$$C_2\,dx - C_1\,dz = 0$$

Поновна интеграција ове једначине даје

$$C_2 x - C_1 z = C_3$$

Ова једначина која нам даје однос између координата x и z тачака ланчанице казује да је ланчаница равна крива и да њена равнина је вертикална. Одаберимо ту равнину за равнину XY нашега координатног система т.ј. захтевајмо да је константно

$$z = 0$$

Онда је

$$C_2 = 0$$
$$C_3 = 0$$

Из превашњих једначина следује онда да је

$$T\frac{dz}{ds} = 0$$

т.ј. компонента силе истезања у правцу Z ишчезава. Ставимо ли константу

$$C_1 = H$$

то имамо сем тога једначину

$$T\frac{dx}{ds} = H$$

где H означава једну константу. Ова једначина казује да је компонента силе истезања у правцу X, дакле у нашем случају хоризонтална компонента, константна. Ова једначина замењује прву једначину од једначина 2), трећа једначина од једначина 2) ишчезава сасвим јер координате ланчанице и силе истезања у правцу Z ишчезавају, па зато добијамо у место једначина 2) ове две једначине

$$T\frac{dx}{ds} = H \qquad 3)$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0 \qquad 4)$$

Из прве од ових једначина следује да је

$$\frac{T}{ds}=\frac{H}{dx}$$

па зато једначина 4) добија облик

$$d\left(H\frac{dy}{dx}\right)+Y\,ds=0 \qquad 5)$$

Специјални случајеви за паралелна оптерећења.

Оптерећење пропорционално апсциси.

Оптерећење Q оног дела ланчанице који се налази између апсцисе 0 и x нека буде дакле

$$Q=-kx$$

Знак - метнули смо због тога што узимамо да је оса Y наперена према горе а оптерећење према доле. Зато је

$$Y=\frac{dQ}{ds}=-k\frac{dx}{ds}$$

Једначина 5) добија према томе облик

$$d\left(H\frac{dy}{dx}\right)-k\,dx=0$$

Интеграција ове једначине даје

$$H\frac{dy}{dx}=kx+C_1$$

Најнижа тачка ланчанице је она за коју је

$$\frac{dy}{dx}=0$$

па је зато апсциса те тачке одређена једначином

$$kx+C_1=0$$

или

$$x=-\frac{C_1}{k}$$

Одредимо константу C_1 тако да је апсциса најниже тачке равна нули т.ј. ставимо

$$C_1=0$$

Онда имамо

$$H\,dy=kx\,dx$$

Поновна интеграција ове једначине даје

$$y=\frac{k}{2H}x^2+C_2$$

Одредимо константу C_2 тако да је за $x=0$ $y=0$ т.ј. да најнижа тачка лежи у почетку координатног система. Онда добијамо

$$C_2=0$$

или

$$y=\frac{k}{2H}x^2$$

или

$$x^2=\frac{2H}{k}y$$

Ланчаница дакле има у овом случају облик параболе.

Обична ланчаница.

Решимо сада овај проблем: Нека се нађе облик што га заузме ланац једнаке дебљине обешен у два своја краја. Како је ланац једнаке дебљине, то је оптерећење пропорционално дужини лука т.ј.

$$Q=-ps$$

Знак – узели смо опет због тога што узимамо да је оса Y вертикална наперена према горе, а сила теже наперена је у противном правцу. Зато је

$$Y = \frac{dQ}{ds} = -p$$

па једначина 5), ако означимо

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

добија облик

$$H\,dy' = p\,ds \qquad 1)$$

или

$$dy' = \frac{p}{H}\,ds$$

Означимо са a ону дужину ланчанице чија је тежина једнака хоризонталној сили H т.ј.

$$ap = H \qquad 2)$$

то добијамо

$$dy' = \frac{ds}{a}$$

или како је

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\;dx$$

то имамо

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}$$

Интеграцијом ове једначине добијамо

$$\log_{nat}\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right) = \frac{x-x_0}{a}$$

где x_0 означава једну константу коју ћемо још одредити. Из ове једначине следује

$$y'+\sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}} \qquad 3)$$

Узмемо ли реципрочну вредност ових вредности лево и десно, то имамо

$$\frac{1}{y'+\sqrt{1+y'^2}} = e^{-\frac{x-x_0}{a}}$$

Рационализирамо ли леву страну ове једначине тиме да бројитељ и именитељ помножимо са $y'-\sqrt{1+y'^2}$, што је именитељ једнак -1, па је зато

$$y'-\sqrt{1+y'^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{a}} \qquad 4)$$

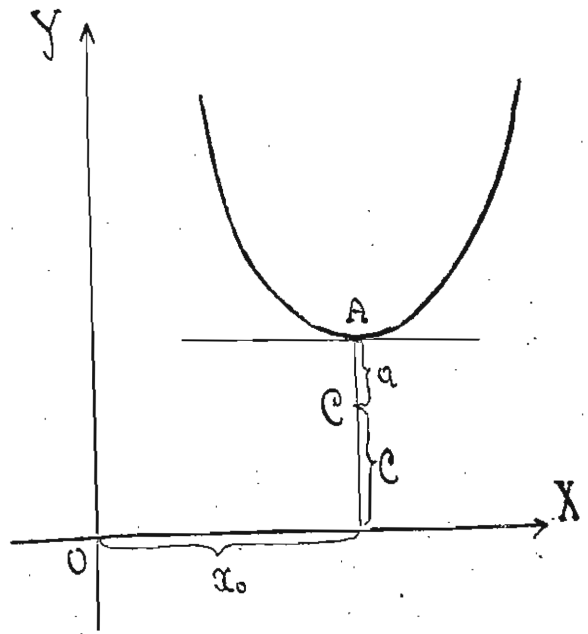
Саберемо ли једначине 3) и 4), то добијамо

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) \qquad 5)$$

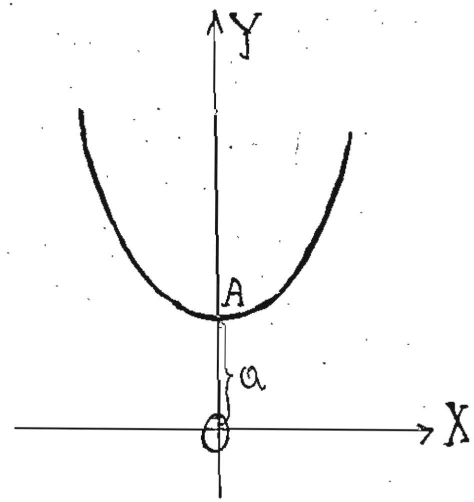
И ова се једначина може директно интегрисати па добијамо

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)+C \qquad 6)$$

Да одредимо значење константа x_0 и C. Ако је $x=x_0$, онда следује из једначине 5) да је $y'=0$, а то значи да је x_0 апсциса најниже тачке. Ординату најниже тачке добијамо из једначине 6) ако ставимо $x=x_0$. У том случају имамо $y=a+C$. Најнижа тачка ланчанице има према томе координате x_0 и $a+C$.



Помакнимо координатни систем тако да апсциса најниже тачке буде равна нули а њена ордината буде a т.ј. помакнимо почетак координатног система у тачку C. Онда морамо у пређашњим једначинама заменити $x-x_0$ са x, а $y-C$ са y, па добијамо место једначина 5) и 6) једначине



$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad 7)$$

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad 8)$$

Ово је једначина ланчанице обзиром на координатни систем који пролази кроз тачку C. Крива је, као што следује из једначине 8), симетрична обзиром на осу Y.

Истакнемо сада још неке особине те криве. Одбијемо ли сада једначину 4) од једначине 3) то добијамо

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)$$

Ова се једначина односила на први координатни систем ; обзиром на овај други гласила би

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

или обзиром на једначину 8)

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{y}{a} \qquad 9)$$

или обзиром на пређашњу једначину за ds

$$\frac{ds}{dx}=\frac{y}{a} \qquad 9^*)$$

Имали смо једначину

$$T\frac{dx}{ds}=H$$

па је зато

$$\frac{T}{H}=\frac{y}{a}$$

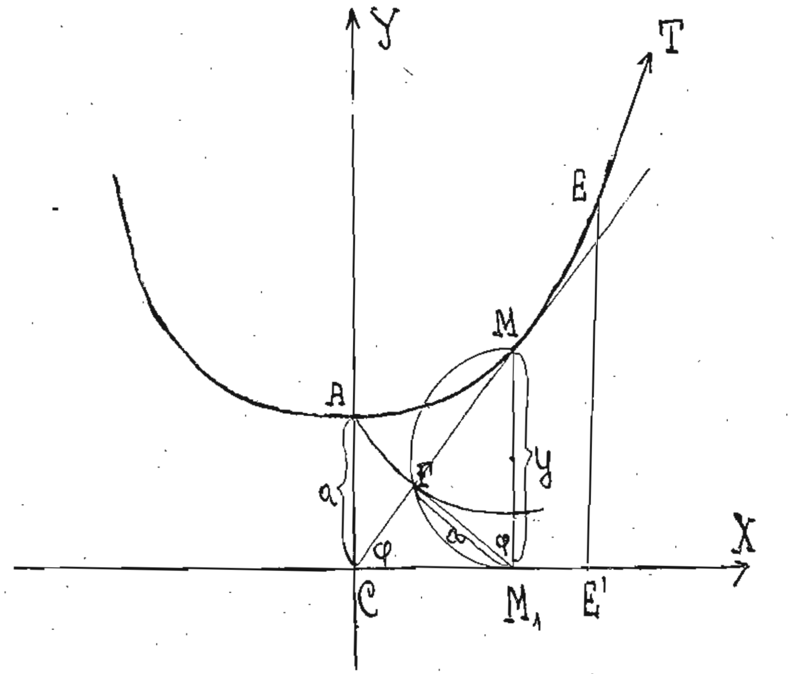
или

$$T=\frac{H}{a}y$$

а обзиром на једначину 3)

$$T=py \qquad 10)$$

Ова једначина казује да је сила истезања T у произвољној тачки E једнака тежини ланца дужине y. Ако према томе ланчаницу (ланац) не обесимо у тачки



E него у тој тачки причврстимо један прстен кроз који провучемо ланац без да га завежемо, па пустимо да комад ланца виси од E до E', то тиме неће бити равнотежа поремећена.

Како је

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

где φ означава угао што са тангентом произвољне тачке M затвара са осом X, то из једначине 9*) следује

$$y\cos\varphi = a \qquad 11)$$

Пустимо ли према томе из тачке M_1 нормалу M_1F на тангенту, то је дужина

$$M_1F = a$$

јер је у том случају угао код M_1 једнак такође φ. Из овога својства следује једноставна конструкција тангенте на ланчаницу: у то име опишемо преко ординате MM_1 тачке M у којој хоћемо да конструишемо тангенту полукруг, па из тачке M_1 пренесемо тетиву M_1F дужине a, онда је права MF тангента ланчанице.

Из прећашње једначине

$$dy' = \frac{ds}{a}$$

следује

$$ds = a\,dy'$$

или интеграцијом

$$s = ay' + C$$

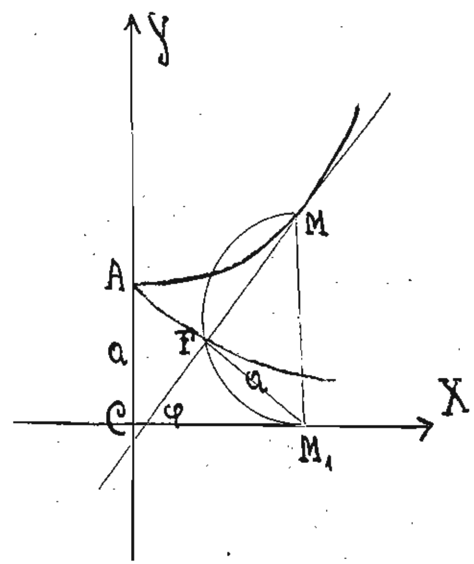
Меримо ли дужину лука од тачке A у којој је тангента хоризонтална т.ј. ставимо ли да је $y'=0$ $s=0$, то ишчезава константа C па добијамо једначину

$$s = ay'$$

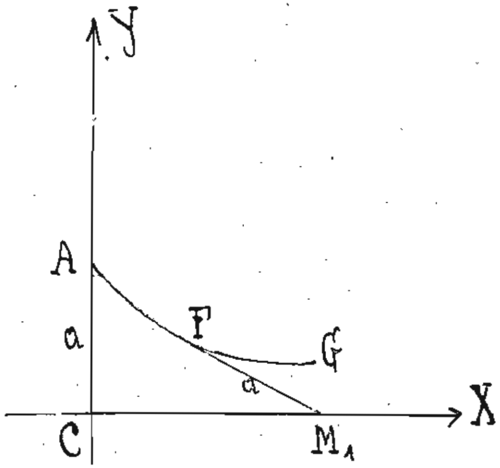
или

$$s = a\,tg\varphi$$

$a\,tg\varphi$ представљено је дужином MF а то значи да та дужина MF представља ректифицирани лук MA. Обавијемо ли око ланчанице конац са крајем у A, па ако тај крај одмотавамо, то ће он проћи кроз тачку F, а то значи да еволвента ланчанице пролази кроз ту тачку. Тачка F је тачка еволуте коју добија-



но одвијањем конца. У моменту када се крај конца налази у F, онда се тај конац прилубљује на ланчаницу у тачки M, значи да је тачка M центар кривине еволвенте за тачку F. Тангента еволвенте стоји нормално на правац MF а то значи да дужина M_1F тангира еволвенту, а како је M_1F за сваку тачку M једнако a, то је дужина тангенте сваке тачке еволвенте једнака a. Замислимо конац дужине a постављен у положај AC. Ако сада једним крајем C помичемо по правих x а други крај његов A оставимо слободан, то ће тај други крај описивати једну криву AFG те особине да ће тангента те криве



FM_1 увек бити једнака дужини конца, јер се други крај A увек креће у правцу конца т.ј. у правцу FM_1. Крива која на тај начин настаје зове се

Коју је нашао Huyghens, па зато можемо да кажемо: еволвента ланчанице јесте Huyghens-ова

Ланчаница једнакога отпора.

Код обичне ланчанице је, као што смо доказали, њено истезање T пропорционално ординати y, зато ће горње тачке ланчанице имати да издрже највеће истезање. Ако променимо пресек ланца тако, да је тај пресек према горњим крајевима све јачи и јачи т.ј. да је ланац дебљи, онда можемо постићи то да је дебљина ланца пропорционална у свима његовим тачкама силама истезања т.ј. где је сила истезања већа ту је и ланац дебљи па пружа према томе у свима тачкама својим исти отпор према силама истезања. Но ланац у овом случају неће заузети облик обичне ланчанице, јер тиме што се мења његова дебљина мења се и његово оптерећење, а код обичне ланчанице смо претпоставили да је то оптерећење пропорционално дужини ланца т.ј. претпоставили смо да је ланац свуда једнако дебео.

Сада ћемо да решимо овај проблем: Нека се нађе облик који заузима онај ланац који је тако димензиониран да је његов пресек у свима тачкама његовим пропорционалан силама истезања. Ми захтевамо дакле да је пресек q пропорционалан истезању T т.ј.

$$q = \frac{1}{k} T$$

Имали смо једначину

$$T \frac{dx}{ds} = H$$

па је зато

$$k q \frac{dx}{ds} = H \qquad 1)$$

Друга једначина за ланчаницу била је

$$H\, dy' + Y\, ds = 0$$

где Y означава оптерећење јединице дужине. То је оптерећење у нашем случају пропорционално пресеку q, па ако са γ означимо специфичну тежину материјала од кога је ланац начињен, то је

$$Y = -\gamma q$$

Знак $-$ метули смо стога што је оса Y наперена према горе, а тежина ланца дејствује у противном смислу. Зато је

$$dy' = \frac{\gamma q}{H} ds \qquad 2)$$

Из једначине 1) следује

$$\frac{q}{H} = \frac{1}{k} \frac{ds}{dx}$$

ставимо ли ову вредност у једначини

2) то добијамо

$$dy' = \frac{\gamma}{k}\,\frac{ds^2}{dx} = \frac{\gamma}{k}\,\frac{dx^2 + dy^2}{dx} =$$

$$= \frac{\gamma}{k}(1 + y'^2)\,dx$$

или

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{\gamma}{k}\,dx$$

Ова се једначина може одмах интегрисати па добијамо

$$\operatorname{arc\,tg} y' = \frac{\gamma}{k}x + C$$

Положимо координатни систем тако да је за најнижу тачку ланчанице т.ј. за $y' = 0$ $x = 0$; то је онда и $C = 0$ па зато имамо једначину

$$\operatorname{arc\,tg} y' = \frac{\gamma}{k}x$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{k}x = y'$$

или

$$dy = \frac{\sin\frac{\gamma}{k}x}{\cos\frac{\gamma}{k}x}\,dx =$$

$$= -\frac{k}{\gamma}\,\frac{-\sin\frac{\gamma}{k}x\;d\frac{\gamma}{k}x}{\cos\frac{\gamma}{k}x}$$

Ова се једначина може одмах интегрисати па имамо

$$y = -\frac{k}{\gamma}\log_{nat}\cos\frac{\gamma}{k}x + C$$

Положимо координатни систем тако да је за $x = 0$ $y = 0$ т.ј. положимо почетну тачку у најнижу тачку ланчанице, то онда добијамо да је $C = 0$ па је зато

$$y = \frac{k}{\gamma}\log_{nat}\sec\frac{\gamma}{k}x$$

- Ово је једначина ланчанице једнаког отпора.

Ако је

$$\frac{\gamma}{k}x = \frac{\pi}{2}$$

онда је

$$\sec\frac{\gamma}{k}x = \infty$$

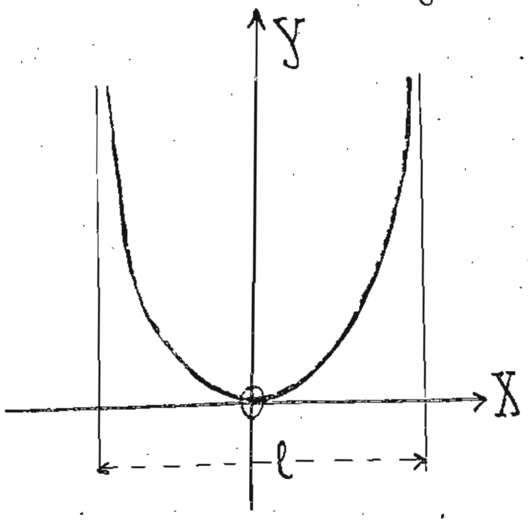
па је зато и

$$y = \infty$$

а то значи да за вредност

$$x=\frac{\pi}{2}\,\frac{K}{\gamma}$$

има ланчаница вертикалну асимптоту.



Повећамо ли пресек ланчанице, то би се у истој мери увећала и њена тежина, па зато за обе две вредности K и γ, од којих је K према претходној једначини

$$K=\frac{T}{q}$$

истезање јединице пресека, а γ специфична тежина, одређен и облик ланчанице. Њено растојање можемо само повећати ако повећамо њено специфично натезање K. Но то се одређеним материјалом не може учинити. Тако је н. пр. за гвожђе

$$K=7800000\ \frac{kg}{m^2}$$

по принципу. Како је за гвожђе специфична тежина

$$7800\ \frac{kg}{m^2}$$

то је

$$\frac{K}{\gamma}=1000$$

а одстојање l обеју асимптота

$$l=\pi\,\frac{K}{\gamma}=1000\,\pi=3140\ m$$

Ова дужина представља нам природну границу ланца гвозденог материјала. Већи размак не можемо са тим материјалом да савладамо помоћу ланца.

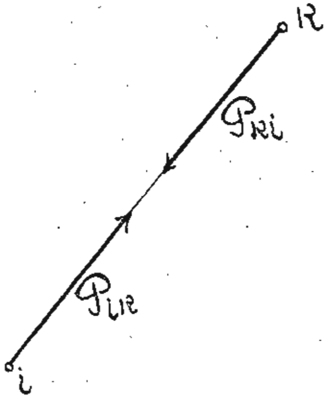
Статика

крутих тела.

Основни појмови

До сада смо претпостављали да су материјалне тачке поразмештане континуирно дуж једне линије; сада можемо ту претпоставку испустити па претпоставити да су материјалне тачке произвољно поразмештане по простору па везане инваријабилно једна за другу тако да њихово узајамно одстојање остаје непромењено. Онда ће свака тачка бити окружена са једном серијом суседних тачака са којима је везана, па ће због тога ова бити нападна тачка од више унутарњих (интерних) сила, док је у другом случају она била нападна тачка само од две интерне силе.

И сада ће важити принцип акције и реакције. Уочимо ли две произвољне тачке i и k таквог система, то ће постојати једнакост сила P_{ik} и P_{ki} којима те две тачке дејствују једна на другу. Силе P_{ik} и P_{ki} једнаке су али противнога правца и дејствују у једној те истој правој.



Тај однос изразићемо аналитички на овај начин: Нека

$$X_{ik} \quad Y_{ik} \quad Z_{ik}$$

буду компоненте прве силе, а

$$X_{ki} \quad Y_{ki} \quad Z_{ki}$$

компоненте друге силе; то онда постоје једначине

$$\begin{aligned} X_{ik}+X_{ki}&=0\\ Y_{ik}+Y_{ki}&=0\\ Z_{ik}+Z_{ki}&=0 \end{aligned} \qquad 1)$$

Ове једначине казују да су силе P_{ik} и P_{ki} једнаке а противног правца, ваља још изразити да те две силе дејствују у истој правој. Тај ће однос бити аналитички изражен на тај начин да ћемо казати да је збир статичких момената ових сила обзиром на тачку O раван нули. Тај је услов изражен, ако са $x_i\, y_i\, z_i$ означимо координате прве тачке, а са $x_k\, y_k\, z_k$ координате друге тачке, једначинама

$$\begin{aligned} (x_i Y_{ik} - y_i X_{ik}) + (x_k Y_{ki} - y_k X_{ki}) &= 0\\ (y_i Z_{ik} - z_i Y_{ik}) + (y_k Z_{ki} - z_k Y_{ki}) &= 0\\ (z_i X_{ik} - x_i Z_{ik}) + (z_k X_{ki} - x_k Z_{ki}) &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

Замислимо да смо ових шест једначина 1) и 2) написали за све могуће комбинације две и две тачке посматраног система, па да смо их сабрали и при том све силе које дејствују на једну те исту тачку саставили у једну резултанту н. пр. силе које дејствују на тачку i саставили у једну силу чије су компоненте $X_i Y_i Z_i$, при чему је даље

$$X_i = X_{ia} + X_{ib} + \dots + X_{ik} + \dots$$
$$Y_i = Y_{ia} + Y_{ib} + \dots + Y_{ik} + \dots \qquad 3)$$
$$Z_i = Z_{ia} + Z_{ib} + \dots + Z_{ik} + \dots$$

онда добијамо ове једначине

$$\sum_i X_i = 0$$
$$\sum_i Y_i = 0 \qquad 4)$$
$$\sum_i Z_i = 0$$

а исто тако једначине 2) дају

$$\sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$
$$\sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \qquad 5)$$
$$\sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

Ове једначине казују да су збирови компонената свих интерних сила, а исто тако и компонената њихових статичких момената једнаки нули.

На посматрано тело нека дејствује сада један систем спољних сила, па на тачку i нека резултанта тих спољних сила које на ту тачку дејствују буде имала компоненте $X_{ie} Y_{ie} Z_{ie}$; онда ће се читав систем налазити у равнотежи ако се буде свака његова тачка налазила у равнотежи. Услови равнотеже једне материјалне тачке били су ти да су збирови компонената свих сила које на њу дејствују у сва три правца равни нули. На тачку i дејствује резултанта интерних сила са компонентама $X_i Y_i Z_i$ и резултанта екстерних сила са компонентама $X_{ie} Y_{ie} Z_{ie}$, па су зато услови равнотеже те тачке ови

$$X_i + X_{ie} = 0$$
$$Y_i + Y_{ie} = 0 \qquad 6)$$
$$Z_i + Z_{ie} = 0$$

Помножимо другу од ових једначина

са x_i а трећу са y_i па одбијмо једну од друге; то добијамо

$$(x_iY_i - y_iX_i)+(x_iY_{ie}-y_iX_{ie})=0 \qquad 7)$$

На исти начин добијамо и ове једначине које следују и цикличком пермутацијом

$$(y_iZ_i - z_iY_i)+(y_iZ_{ie}-z_iY_{ie})=0$$
$$(z_iX_i - x_iZ_i)+(z_iX_{ie}-x_iZ_{ie})=0 \qquad 7)$$

Замислимо да смо овакве једначине 6) и 7) написали за сваку тачку система па сабрали, то добијамо ове једначине

$$\sum_i X_i+\sum_i X_{ie}=0$$
$$\sum_i Y_i+\sum_i Y_{ie}=0 \qquad 8)$$
$$\sum_i Z_i+\sum_i Z_{ie}=0$$

а тако исто

$$\sum_i(x_iY_i-y_iX_i)+\sum_i(x_iY_{ie}-y_iX_{ie})=0$$
$$\sum_i(y_iZ_i-z_iY_i)+\sum_i(y_iZ_{ie}-z_iY_{ie})=0 \qquad 9)$$
$$\sum_i(z_iX_i-x_iZ_i)+\sum_i(z_iX_{ie}-x_iZ_{ie})=0$$

Обзиром на једначине 4) и 5) добијају једначине 8) и 9) коначно овај облик

$$\sum X_e=0$$
$$\sum Y_e=0 \qquad 10)$$
$$\sum Z_e=0$$

(индекс i смо изоставили јер вaља само запамтити да се збир односи на све екстерне силе које дејствују на посматрано тело)

$$\sum(xY_e-yX_e)=0$$
$$\sum(yZ_e-zY_e)=0 \qquad 11)$$
$$\sum(zX_e-xZ_e)=0$$

И у овим се једначинама знак Σ односи на све екстерне силе, а x, y, z значе координате нападних тачака екстерних сила. Ове једначине 10) и 11) казују да је за равнотежу крутог тела потребно да је збир компонената свих екстерних сила у сва три правца раван нули а исто тако и збир компонената њихових статичких момената. Применом Векторске Анализе може се досадање излагање знатно упростити, па у том случају остају поједини закључци исти, али једначине добијају знатно једноставнији облик. Ми ћемо те једначине сада написати и нумерисати их исто тако као и досадање. Означимо ли силе које дејствују између тачака i и k са $\mathfrak{P}_{ik}$ и $\mathfrak{P}_{ki}$, вектор положаја тачке i са $\mathfrak{r}_i$ а тачке k са $\mathfrak{r}_k$, то једначине 1) добијају овај облик

$$\mathfrak{P}_{ik}+\mathfrak{P}_{ki}=0 \tag{1}$$

једначине 2) добијају облик

$$[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_{ik}]+[\mathfrak{r}_k\mathfrak{P}_{ki}]=0 \tag{2}$$

а следеће једначине имају ове облике

$$\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}_{ia}+\mathfrak{P}_{ib}+\dots+\mathfrak{P}_{ik}+\dots \tag{3}$$

$$\sum\mathfrak{P}_i=0 \tag{4}$$

$$\sum[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_i]=0 \tag{5}$$

$$\mathfrak{P}_i+\mathfrak{P}_{ie}=0 \tag{6}$$

Помножимо ли ову једначину векторски са $\mathfrak{r}_i$ то добијамо

$$[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_i]+[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_{ie}]=0 \tag{7}$$

Напишемо ли овакве једначине 6) и 7) за све тачке система па саберемо, то добијамо

$$\sum\mathfrak{P}_i+\sum\mathfrak{P}_{ie}=0 \tag{8}$$

$$\sum[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_i]+\sum[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_{ie}]=0 \tag{9}$$

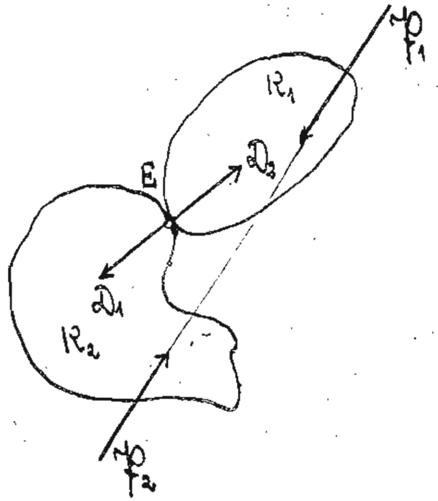
Обзиром на једначине 4) и 5) добијају ове једначине облик

$$\sum\mathfrak{P}_e=0 \tag{10}$$

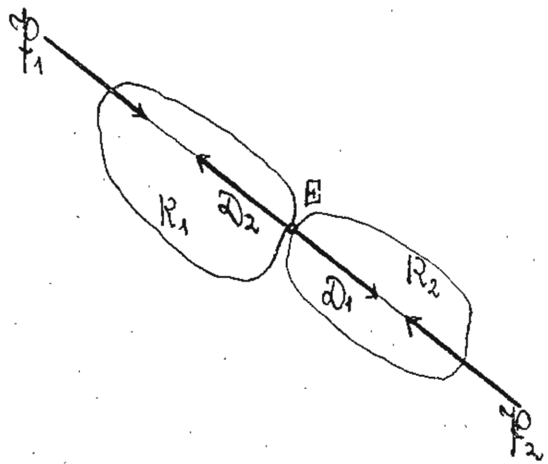
$$\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_e]=0 \tag{11}$$

Једначине 10) и 11) казују опет исто: да векторски збир екстерних сила и векторски збир њихових статичких момената мора бити раван нули. Ови услови равнотеже морају бити испужени за све делове посматраног тела.

Ако се тело састоји из два дела везана н. пр. једним зглавком, то за равнотежу није довољно да су пређашњи услови испуњени за читав систем, нпр. узмимо да на тело K_1 дејствује сила P_1 а на тело K_2 сила P_2, па те две силе имају исту величину а противан правац и да леже у истој правој, то је испуњиво векторски збир тих сила и њихових статичких момената раван нули. Пређашњи услови су испуњени. Кад би ова тела била међусобно круто спојена, онда би ти услови били довољни за равнотежу, но како та два тела нису круто спојена него се могу окретати око зглавка E, то у овом случају неће посто-

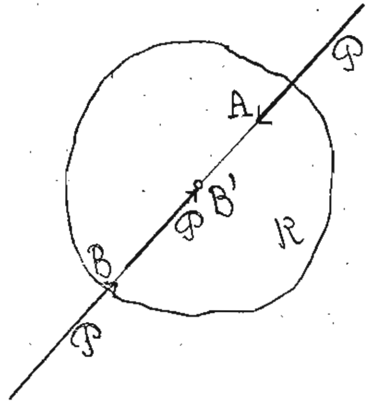


јати равнотежа. Она ће постојати само онда ако су пређашњи услови испуњени за свако тело за себе. При томе ваља притисак D_2 којим дејствује тело K_2 на K_1 рачунати екстерним силама тела K_1, а исто тако притисак D_1 којим дејствује тело K_1 на тело K_2 и који је према принципу акције и реакције једнак но противног правца притиску D_2 рачунати екстерним силама тела K_1. Како дејствују сада на тело K_1 екстерне силе P_1 и D_2 од којих друга пролази увек кроз тачку E, то ће зато моћи постојати равнотежа само онда ако и силе P_1 и P_2 буду пролазиле увек кроз тачку E.



Дејствују ли на једно круто тело две

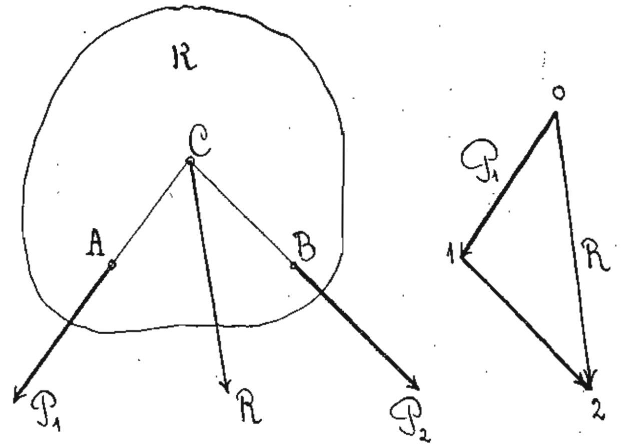
силе једнаке величине, противног правца, а које леже у истој правој, то је, као што се одмах увиђа, њихов векторски збир и збир статичких момената раван нули, па се зато тело K налази у равнотежи.



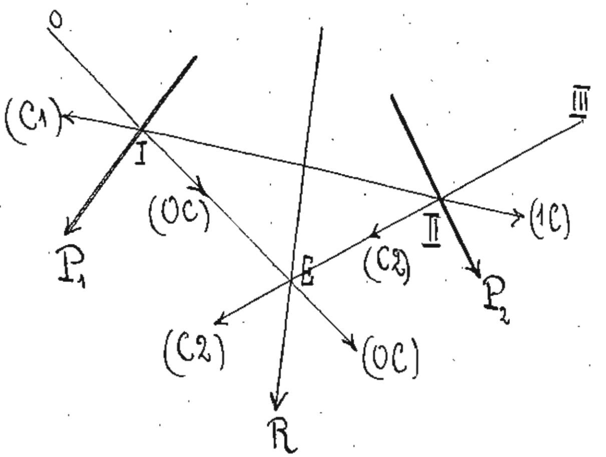
Та равнотежа не би била поремећена кад би сила P дејствовала у тачки B' праве BA. При томе је тачка B' произвољна и мора само лежати у правој BA. Зато можемо сваку силу која дејствује на једно круто тело померити у њеној правој. Силе које дејствују на круто тело спадају према томе у категорију вектора који клизе по својој правој.

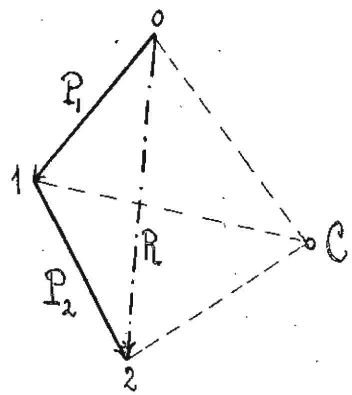
Пре но што приступимо општим случајевима, бавићемо се силама које дејствују на једно круто тело а леже у истој равнини, па ћемо испитивати услове равнотеже таквих сила.

Нека на тело K дејствују силе P_1 и P_2 у тачкама A и B.

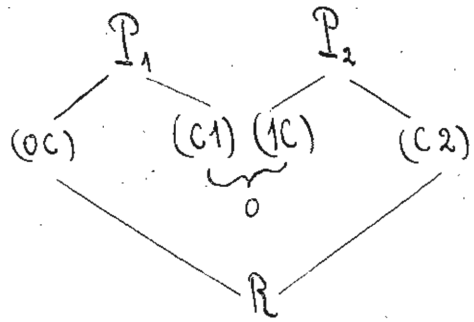


Њихове праве нека се секу у тачки C. Онда можемо замислити да смо и једну и другу силу помакли у ту тачку. Како сада обе силе дејствују на исту материјалну тачку то их можемо саставити по познатом правилу паралелограма у резултанту R. Ако тачка C у којој се праве обеју сила секу не лежи у истој равни то ћемо обе силе саставити на овај начин: конструишимо прво полигон сила 012 и одаберимо тачку C произвољно. Повуцимо из C дужине од 1, 2 и 0. Повуцимо сад 0I паралелно са 0C, I II паралено са 1C и II III паралелно са 2C. Продужимо праве OI и III док се не пресеку у тачки E; онда је тачка E једна тачка



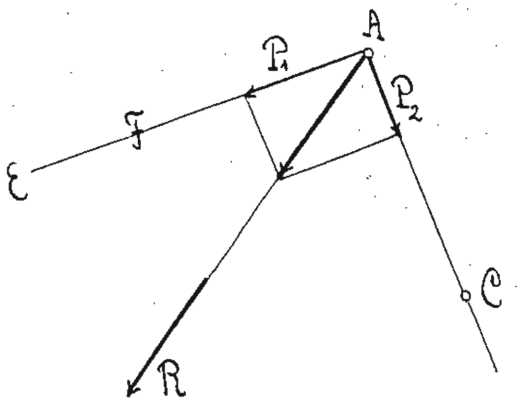


резултанте R. Резултанта R пролази дакле кроз ту тачку, а њена величина одређена је правом O2. Доказ: Силу P_1 можемо раставити у компоненте представљене дужинама (OC) и (C1), а силу P_2 у компоненте представљене дужинама (1C) и (C2). Замислимо ли дакле силу P_1 помакнуту до тачке I и растављену у компоненте (C1) и (O1), силу P_2 премештену у тачку II и растављену у компоненте (1C) и (C2), силе (C1) и (1C) леже у истој правој, једнаке су а противна правца, па се поништавају. Остају само силе (OC) и (C2). Замислимо да смо те две силе преместили у тачку E и у тој тачки E саставили у једну резултанту. Као што се види из полигона сила силе (OC) и (C2) дају за резултанту (O2) или R. Шематски можемо ово груписање сила овако представити:.

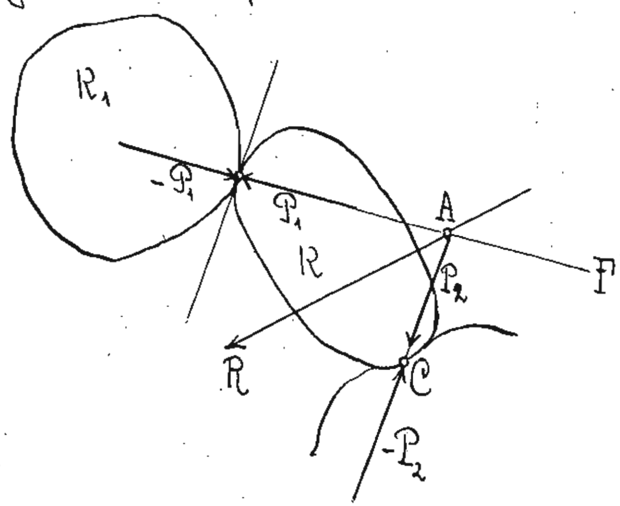


Ако према томе једну силу треба да раставимо у две компоненте које леже са том силом у истој равни, то се праве тих двају компонената морају сећи у правој задане силе или бити са њом паралелне.

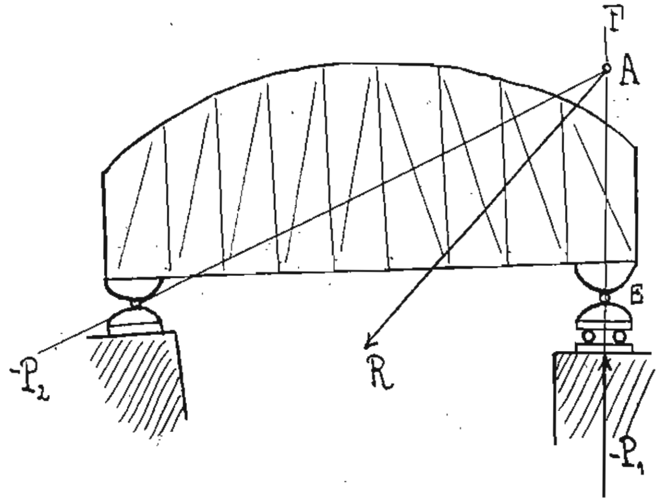
Често пута је задана права једне од тих компонената а од друте једна њена тачка. Ако н. пр. силу R ваља раставити у две компоненте од којих једна пада у праву EF а друга пролази кроз тачку C, то ћемо поступити овако:



праву EF ћемо продужити до тачке A у којој она сече праву задане силе R, тачку A ћемо спојити са тачком C, замислити силу R премештену у тачку A и раставити је у две компоненте P_1 и P_2 од којих прва лежи у правој EF а друга у правој AC. Тај случај имамо н. пр. остварен када сила R дејствује на тело K које се може окретати око зглавка C а у тачки E додирује једно друго тело K_1. Замислимо да се оба тела додирују у једној математској тачки без трења, онда ће тело K_1 изазвати притисак који ће стајати нормално на тангенцијалној равнини додира и пролазити кроз ту тачку E. Зато је права те компоненте



силе одређена јер је дата са EF. Зглавак C може да даје само такову реакцију која пролази кроз њега, па је зато C тачка друге компоненте. Зато ће права те друге компоненте бити AC. Са силом P_1 притиште тело K тело K_1. По принципу акције и реакције дејствоваће тело K_1 на тело K силом $-P_1$. Из истога узрока дејствоваће зглавак C на тело K силом $-P_2$. Силе R, $-P_1$ и $-P_2$ држе се на телу K у равнотежи. У техници се силе $-P_1$ и $-P_2$ зову отпори ослонца.

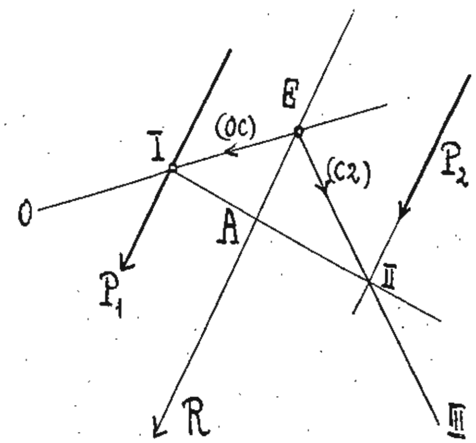


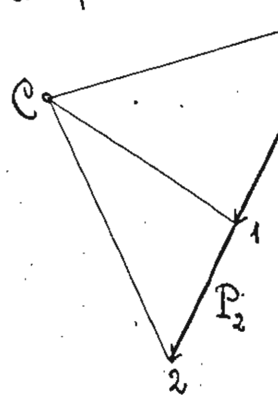
Сличан случај имамо и код мостова, као што се из ове слике види.

Састављање паралелних сила.

1° Случај: Обе силе имају исти правац.

Пренесимо 01 једнако P_1, 12 једнако P_2, одаберимо произвољну тачку C и спојимо ју са 0, 1 и 2, па повуцимо 0I паралелно са C0, I II паралелно са C1

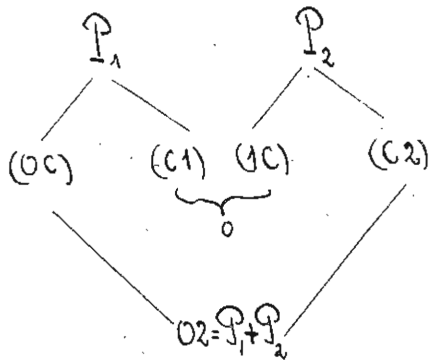




и $\mathrm{II}\,\mathrm{III}$ паралелно са $C2$. Продужимо ли праве OI и $\mathrm{II}\,\mathrm{III}$ док се не секу у тачки E, то тврдимо да резултанта пролази кроз ту тачку, да је паралелна силама P_1 и P_2 и једнака њиховом збиру

$$R = P_1 + P_2$$

Доказ: Замислимо силе P_1 и P_2 премештене у тачке I и II и силу P_1 растављену у компоненте (OC) и $(C1)$, силу P_2 у компоненте $(1C)$ и $(C2)$, то се компоненте $(C1)$ и $(1C)$ које леже у истој правој $\mathrm{I}\,\mathrm{II}$ поништавају, а компоненте (OC) и $(2C)$ можемо замислити премештене у тачку E и састављене оне дају резултанту



$$O2 = P_1 + P_2$$

Из сличности троуглова

$$1AE \sim C10$$

следује

$$\frac{\mathrm{I}A}{AE} = \frac{C1}{P_1} \qquad 1)$$

а из сличности троуглова

$$\mathrm{II}AE \sim C12$$

следује

$$\frac{A\mathrm{II}}{AE} = \frac{C1}{P_2} \qquad 2)$$

Поделимо ли једначину 2) са једначином 1) то добијамо

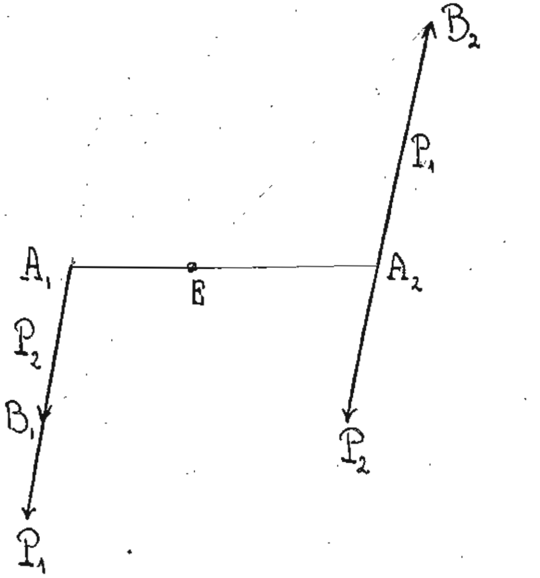
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{A\mathrm{II}}{\mathrm{I}A}$$

а то значи да је трансверзала $\mathrm{I}\,\mathrm{II}$ подељена тачком A у пропорцији сила P_1 и P_2. Горњу једначину можемо и овако написати

$$\frac{P_1}{A\mathrm{II}} = \frac{P_2}{\mathrm{I}A} = \frac{P_1+P_2}{\mathrm{I}A + A\mathrm{II}} = \frac{R}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$$

Ова једначина казује да је однос сваке од сила P_1, P_2 и R према одстојању других двеју на трансверзали константан.

Помоћу овог резултата можемо најједноставније конструисати резултанту сила P_1 и P_2: Пресецимо правце сила трансверзалом A_1A_2 и занесимо почетне тачке тих сила



помакнуте у те тачке. Пренесимо

$$A_1B_1 = P_2$$

а у противном смислу

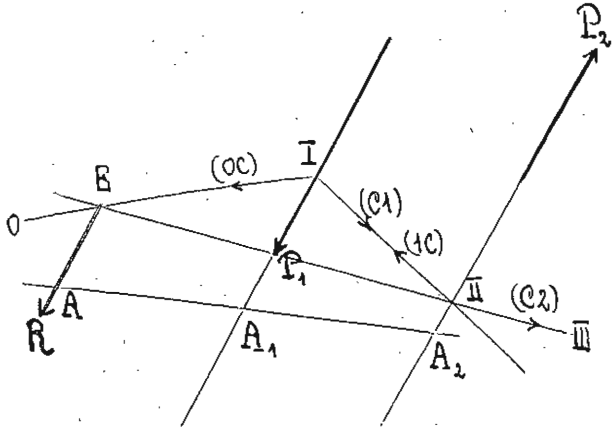
$$A_2B_2 = P_1$$

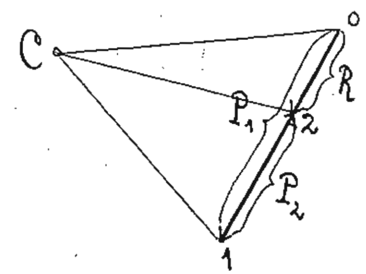
спојимо тачку B_1 и B_2; онда резултанта пролази кроз тачку Е. Њена величина једнака је збиру сила P_1 и P_2.

2° Случај: Обе силе имају противан правац но разне величине.

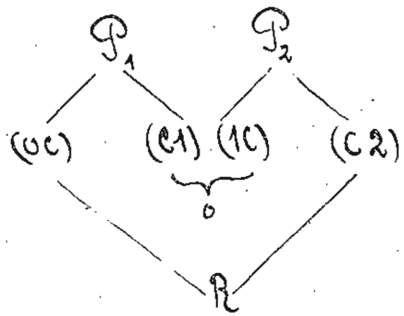
Пренесимо 01 једнако P_1, 12 једнако P_2, одаберимо произвољну тачку С, спојимо је са тачкама 0, 1 и 2, па повуцимо 0I паралелно са С0, I II паралелно са С1 и II III паралелно са С2.

Тврдимо да резултанта R пролази кроз





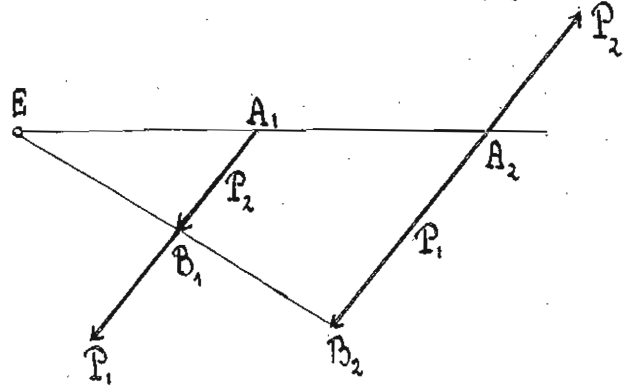
тачку Е и да је једнака диференцији сила P_1 и P_2. Доказ се изводи на исти начин као и у пређашњем случају, а представљен је приложеном шемом.



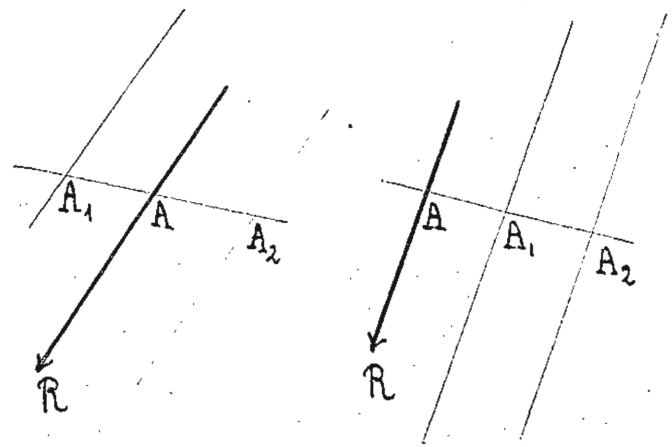
И у овом се случају може доказати да ако правце сила пресечемо произвољном трансверзалом AA_2, да је однос сваке од тих трију сила према одстојању друге две на трансверзали константан

$$\frac{P_1}{AA_2} = \frac{P_2}{AA_1} = \frac{R}{A_1A_2} \qquad 1)$$

Из ове особине следује и једноставна конструкција резултанте: пренесимо из тачке A_2 у правцу силе P_1 дужину $A_2B_2 = P_1$ а из тачке A_1 у правцу противном сили P_2 дужину $A_1B_1 = P_2$, спојимо B_1 и B_2 и онда је E тачка резултанте.



Једначине 1) које су идентичке са једначинама за превашњи случај дозвољавају нам да једну силу раставимо у две паралелне компоненте. Пресецимо све три силе произвољном трансверзалом A_1A_2, што су компоненте у тачкама A_1 и A_2 дате једначинама

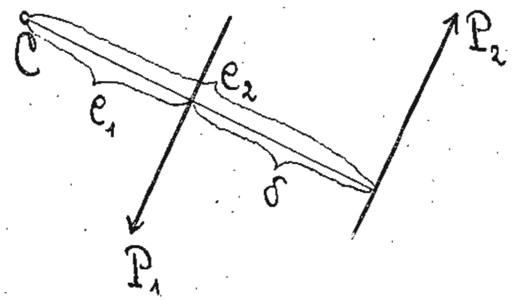


$$P_1 = R\,\frac{AA_2}{A_1A_2}$$

$$P_2 = R\,\frac{AA_1}{A_1A_2}$$

3° <u>Случај</u>: <u>Обе су силе противног правца а по интензитету једнаке</u>.

У том случају такве две силе сачињавају <u>спрег</u> и не могу се саставити у једну резултанту, јер би резултанта морала бити једнака њиховом векторском збиру а тај је раван нули или компоненте резултанте равне збиру компонената ових двеју сила а тај је увек раван нули. Из то-



тога дакле излази да би резултанта била равна нули, но из тога још не следује да се обе силе држе у равнотежи, јер је за услов равнотеже за круто тело било потребно не само да векторски збир тих сила буде раван нули него да и збир статичких момената тих сила обзиром на једну произвољну тачку О буде раван нули. Одаберимо једну такву произвољну тачку О која лежи у равнини ових двеју сила, онда су вектори који представљају статичке моменте ових сила нормални на ту равнину дакле паралелни међу собом. Зато можемо кад их саберемо рачунати само са њиховим интензитетима. Интензитет статичког момента силе P_1 обзиром на тачку О једнак је продукту те силе и одстојања тачке О од праве те силе, дакле $P_1 e_1$; интензитет статичког момента друге силе једнак је $-P_2 e_2$ јер заокреће у противном смислу. Збир статичких момената тих сила једнак је

$$P_1 e_1 - P_2 e_2$$

или како је

$$P_1 = P_2$$

то је тај збир, ако га означимо са M, једнак

$$M = P_1 (e_1 - e_2) = -P_1 \delta$$

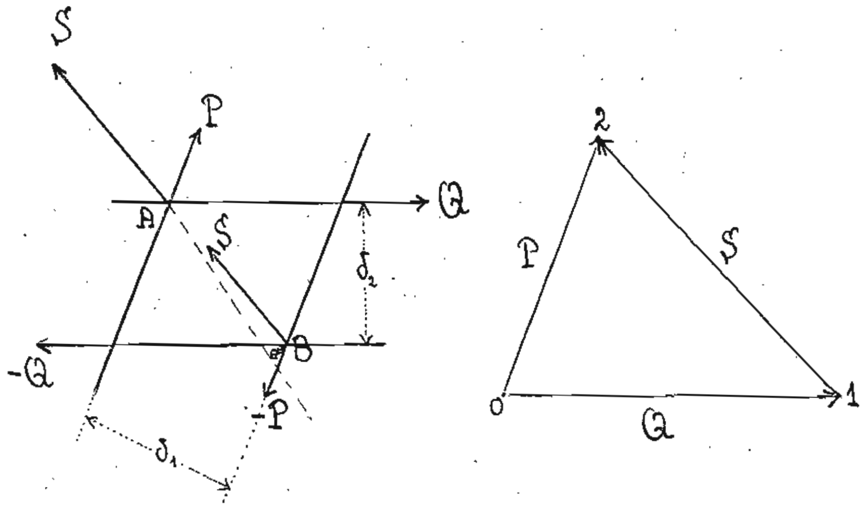
Овај резултат добили бисмо за сваку тачку О јер као што видимо у ту једначину улази само одстојање тих сила а не одстојање тачке О од њих. Статички моменат посматраног спрега је према томе за сваку тачку О равнине константан и једнак продукту интензитета силе са одстојањем. У нашем случају он је испао негативан зато што силе заокрећу у смислу противном сказаљке на сату. Тај статички моменат не ишчезава и зато се обе силе не држе у равнотежи. Овакове две силе истога интензитета, паралелне и противног правца које се према пређашњем не могу даље редуковати зовемо <u>спрегом</u>. Моменат таквог спрега који је као што смо показали продукат интензитета силе са њиховим одстојањем не зависи према томе од њихове оријентације у равнини.

Два спрега имају исти статички моменат ако леже у истој равнини ако заокрену у истоме смислу и ако је продукат силе са одстојањем за оба спрега исти. Тврдимо да су два спрега која леже у истој равнини и имају исти статички моменат еквивалентна. Нека дакле спрегови P $-P$, Q $-Q$ имају исти статички моменат т.ј

$$P\delta_1 = Q\delta_2 \qquad 1)$$

Раставимо сада силу P у две компоненте од којих је једна једнака сили Q. То ћемо извести на овај начин:

Пренесемо у полигону сила силу $P = O2$, кроз тачку



O повучи паралелу са силом Q и начинити $O1 = Q$; спојимо ли 1 са 2 то добијамо другу компоненту силе P. Замислимо сада силу P пренесену у тачку A и растављену у те две компоненте: сила P је резултанта силе Q и силе S. Све три силе дејствују сада у истој тачки A па зато статички моменат резултанте P обзиром на сваку произвољну тачку равнине мора бити једнак збиру статичких момената њезиних компонената. Одаберемо ли као ту тачку обзиром на коју узимамо статичке моменте тачку B, то је одстојање силе P од тачке B једнако δ_1, одстојање силе Q од тачке B једнако δ_2. Означимо ли одстојање силе S од тачке B са x, то мора постојати једначина

$$P\delta_1 = Q\delta_2 + Sx \qquad 2)$$

Узмемо ли у обзир једначину 1) то видимо да је

$$Sx = 0$$

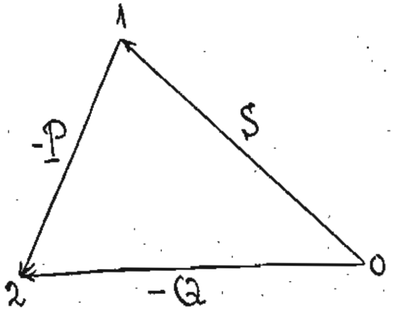
или

$$x = 0$$

а то значи да сила S пролази кроз тачку B. Ми смо дакле од пређашњег система сила добили овај

$$\begin{array}{ccccc} & P & -P & Q & -Q \\ Q & & S \quad -P & Q & -Q \end{array}$$

Сила S пролази кроз тачку B па је у тој тачки можемо саставити са силом $-P$. Обе силе дају $-Q$. Тако смо систем сила $P-P$ трансформисали као што се из следеће шеме види



у систем $Q-Q$. Зато је систем $P-P$ еквивалентан систему $Q-Q$.

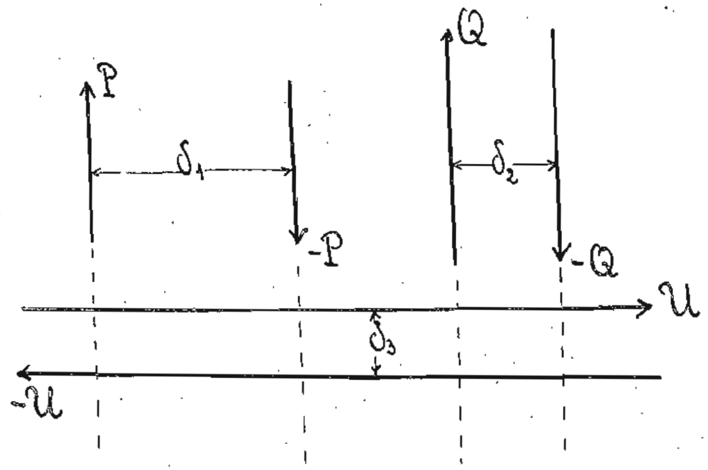
$$\begin{array}{ccccc} & P & & -P \\ Q & & S & -P \\ Q & & & -Q \end{array}$$

Овај однос који смо сада извели важи за случајеве ако се правци сила P и Q секу.

Ако су силе паралелне а имају исте статичке моменте, онда ћемо доказати њихову еквиваленцију на овај начин: Нека буде дакле

$$P\delta_1 = Q\delta_2$$

пресецимо оба спрега са једним спрегом $U-U$ који има исти статички момент као и прва два.



Како је

$$P\delta_1 = U\delta_3$$

то је спрег $P-P$ еквивалентан спрегу $U-U$

$$P\ -P \stackrel{*}{\equiv} \text{И}\ -\text{И}$$

а како је

$$Q\delta_2 = \text{И}\delta_3$$

то је спрег Q - Q еквивалентан спрегу И-И.

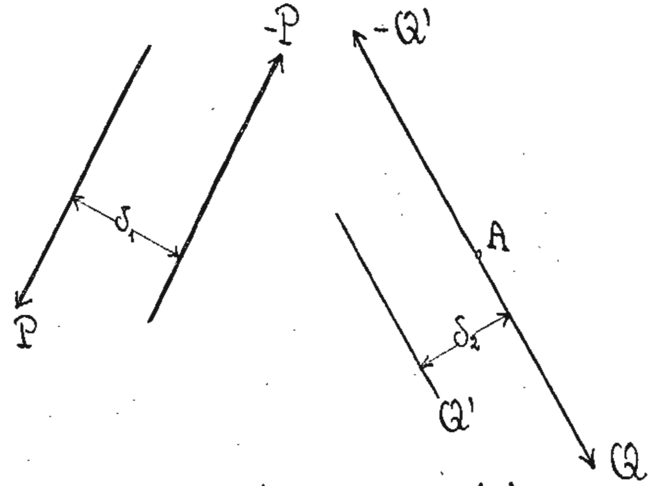
$$Q\ -Q \stackrel{*}{\equiv} \text{И}\ -\text{И}$$

Из ове две еквиваленције следује еквиваленција спрегова

$$P\ -P \stackrel{*}{\equiv} Q\ -Q$$

Састављање једнога спрега са једном силом која лежи у равнини спрега.

Силу Q ваља саставити са спрегом P - P. Спрег P - P можемо према пређашњем заменити са сваким спрегом његове равнине који има исти статички моменат.



Надовежемо ли у тачки A силу -Q' а у одстојању δ_2 силу Q па нека буде интензитет силе Q' једнак сили Q т.ј.

$$Q' = Q$$

а статички моменат спрега $Q'-Q'$ једнак статичком моменту спрега $P-P$ т.ј.

$$Q'\delta_2 = P\delta_1$$

онда можемо спрег $P-P$ заменити са спрегом $Q'-Q'$. Тако смо у место система

$$P \quad -P \quad Q$$

добили систем

$$Q' \quad -Q' \quad Q$$

Силе Q и $-Q'$ уништавају се па зато остаје само сила Q'. Читава операција представљена је у овој шеми.

$$\begin{array}{ccc} P & -P & Q \\ Q' & -Q' & Q \\ Q' & & 0 \end{array}$$

Означимо моменат спрега $P-P$ са M т.ј.

$$P\delta_1 = M$$

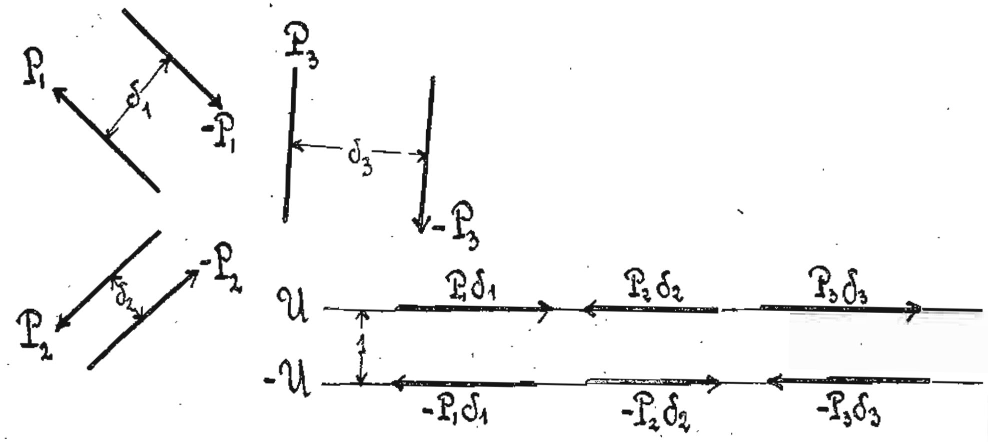
то добијамо

$$\delta_2 = \frac{M}{Q}$$

Имамо ли према томе силу Q да сложимо са једним спрегом момента M, то добијамо као резултат тога састављања опет силу Q но која се налази у другом положају, па је удаљена од првог положаја за дужину $\frac{M}{Q}$. На којој страни од првог положаја лежи нов положај силе Q то зависи од смисла закретања спрега $P-P$.

Састављање произвољнога броја спрегова који леже у истој равнини.

Повуцимо у равнини тих спрегова две праве И и -И којих је одстојање једнако јединици. Онда можемо спрег P_1 $-P_1$ заменити са спрегом сила



$P_1\delta_1$ $-P_1\delta_1$ које леже у правим И-И. Исто тако можемо спрег P_2 $-P_2$ заменити са спрегом сила $P_2\delta_2$ $-P_2\delta_2$ које леже у правим И-И; Спрег P_3 $-P_3$ са спрегом $P_3\delta_3$ $-P_3\delta_3$; и т.д. Сада можемо све силе у правој И и -И сложити у две резултанте. Прва ће дати силу

$$R = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 + \dots$$

а силе праве -И даће исту такову силу само противнога правца, дакле силу -R. Зато смо све спрегове заменили са једним једним који има моменат

$$M = R\cdot 1 = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 + \dots$$

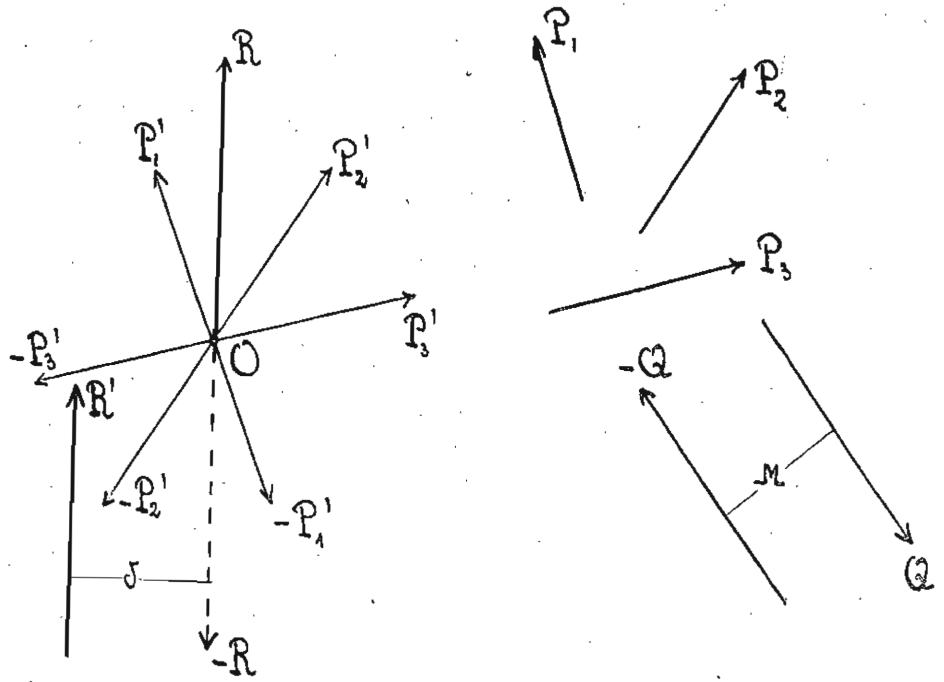
Означимо ли моменат спрега P_1 $-P_1$ са M_1, спрега P_2 $-P_2$ са M_2 и т.д. то из пређашњег следује да је

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

Вала дакле само статичке моменте заданих спрегова сабрати па конструисати један произвољан спрег којега је статички моменат једнак збиру пређашњих статичких момената.

Општи случај састављања сила које дејствују у истој равнини на једно те исто круто тело.

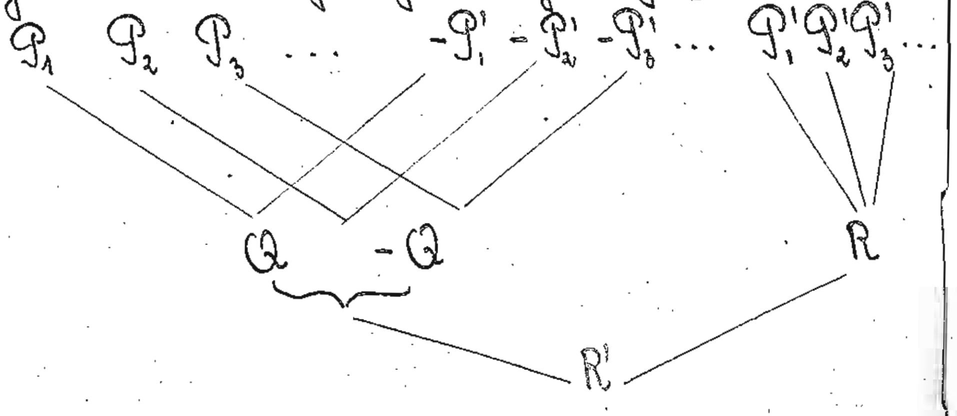
Ваља ли саставити силе $P_1 P_2 P_3$ ... од којих могу по две чинити спрегове, то ћемо поступати на овај начин: У равнини тих сила одаберимо једну редукциону тачку O; кроз тачку O положимо једну силу P_1' која је по правцу и величини једнака сили P_1 и исту такву силу но противног правца P_1'. То можемо учинити јер се ове две силе што смо их надовезали у тачки O међусобно поништавају па не мењају према томе систем задатих си-



ла. Исто тако надовежимо силу P_2' која је по правцу и величини једнака сили P_2 и силу $-P_2'$ и т. д. Тиме се пређашњи систем сила није променио. Нови систем који је еквивалентан пређашњем можемо сада раставити у две групе: Сила P_1 и $-P_1'$ сачињавају један спрег, исто тако силе P_2 и $-P_2'$, P_3 и $-P_3'$ и т. д. Остају још у тачки O силе $P_1' P_2' P_3'$ .... Спрегове то-жемо саставити у један резултујући спрег $Q-Q$ статичког момента M а силе $P'_1\, P'_2\, P'_3 \ldots$ које дејствују све у истој тачки O можемо саставити у једну резултанту R. Тако смо добили сада као резултат једну једину силу R и један једини спрег M. Ово двоје могу се опет саставити заједно, па ћемо добити према претходном као резултат једну једину силу R' која је по величини и правцу једнака сили R а која је удаљена од тачке O за величину

$$\delta = \frac{M}{R}$$

Досадање састављање сила представљено је у следећој шеми



При оваквом састављању могућа су ова четири случаја:

1° $R = 0 \quad M = 0$

онда се задане силе држе у равнотежи;

2° $R \gtrless 0 \quad M = 0$

онда резултује сила R која иде кроз редукциону тачку O;

3° $R = 0 \quad M \gtrless 0$

онда задане силе дају један спрег којега је моменат једнак M;

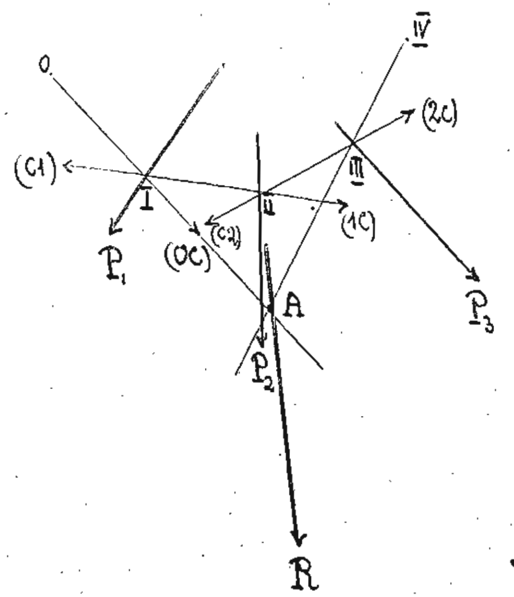
4° $R \gtrless 0 \quad M \gtrless 0$

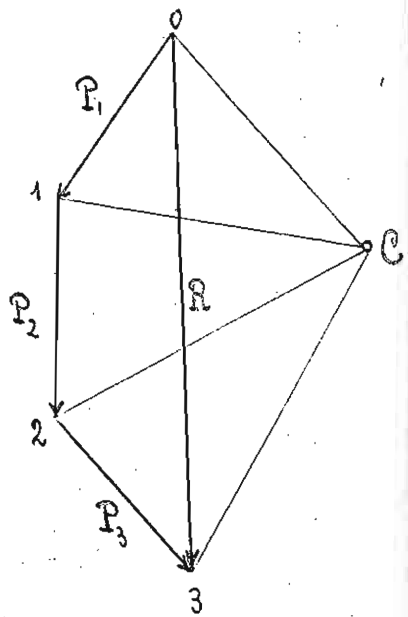
онда резултује једна сила R' која је удаљена од редукционе тачке за дужину

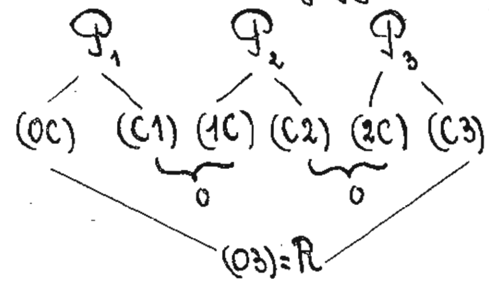
$$\delta = \frac{M}{R}$$

Графичко састављање сила у равнини.

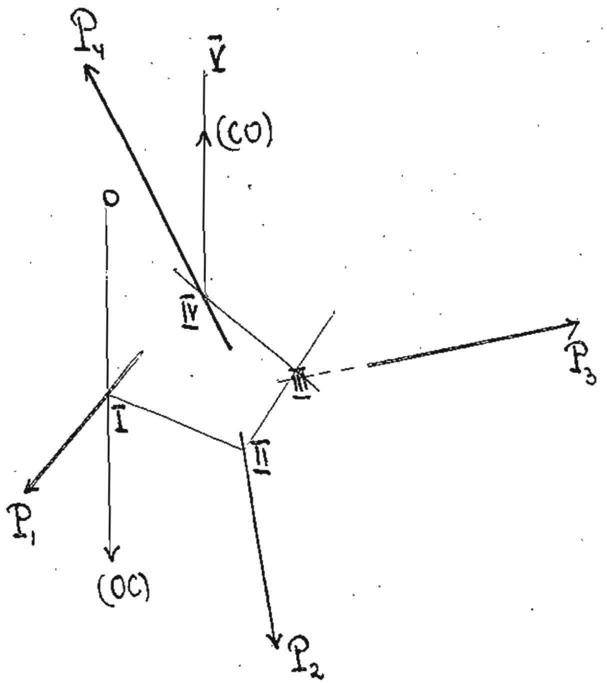
Саставимо полигон сила 0123, одаберимо произвољну тачку С, па повуцимо 0I паралелно са С0, I II паралелно са С1, II III паралелно са С2, III IV паралелно са С3. Продужимо сада праве 0I и IV III док се не секу у тачки А; онда тврдимо да резултанта свих сила $P_1 P_2 P_3 \ldots$ пролази кроз тачку А и да је једнака сили 03. Доказ следује слично као и у претходним случајевима са верижним полигоном а представљен је и у приложеној шеми.

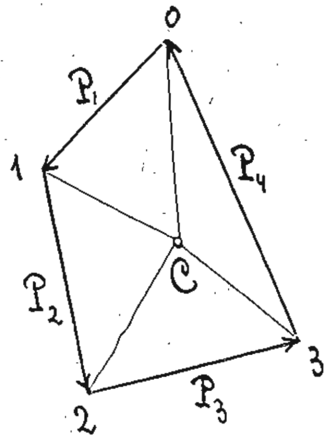






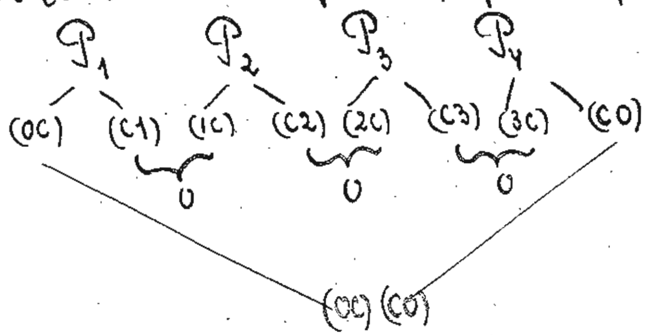
Може се десити случај да је полигон сила затворен као н. пр. у следећем случају. Сила (0С) иде кроз I а сила (С0) кроз IV; оне су једнаке но противног правца, али се не поништавају јер не леже у истој правој. Зато резултује спрег (0С) (С0). Само у случају кад би тачка IV пала у правој 0I онда би се силе (0С) и (С0) поништиле, па би у том случају био верижни полигон 0 I II III IV V затворен. Услов за рав-





нотежу сила у равнини је према томе да и полигон сила 0123... и верижни полигон 0 I II III ... буду затворени.

Шема за горњи пример била би



Састављање сила у равнини помоћу рачуна.

Нека су задане нападне тачке заданих сила које су одређене помоћу ортогоналних координата x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, ... Задану равнину сила одабирамо за равнину XY. Нека су задани даље интензитети $P_1P_2P_3$... сила и углови што их њихове праве затварају са осом x: (xP_1), (xP_2), (xP_3)... Онда су њихове ортогоналне компоненте једнаке

$$X_1 = P_1 \cos(xP_1) \qquad X_2 = P_2 \cos(xP_2) \ \ldots$$

$$Y_1 = P_1 \sin(xP_1) \qquad Y_2 = P_2 \sin(xP_2) \ \ldots$$

Компонента R_x њихове резултанте одређена је изразом

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots =$$

$$=\sum_i X_i =$$
$$=\sum_i P_i \cos(xP_i)$$

а компоненту R_y

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots =$$
$$=\sum_i Y_i =$$
$$=\sum_i P_i \sin(xP_i)$$

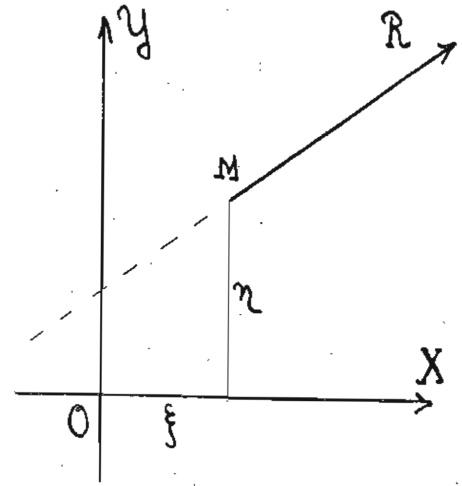
Интензитет резултанте једнак је

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

а угао што га резултанта са осом x затвара одређен је једначином

$$\cos(xR) = \frac{R_x}{R}$$

Резултанта је дакле одређена до сада по своме интензитету и по оријентацији у равнини, јер знамо угао што га она затвара са осом x. Ваља још да одредимо нападну тачку њену, а њу можемо, као што смо показали произвољно померити у правој резултанте. Означимо ли са η и ξ координате произвољне тачке M резултанте, па узмемо ли у обзир да статички моменат обзиром на тачку O мора бити једнак збиру статичких момената задатих сила, то добијамо ову једначину



$$\xi R_x - \eta R_y = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i$$

или

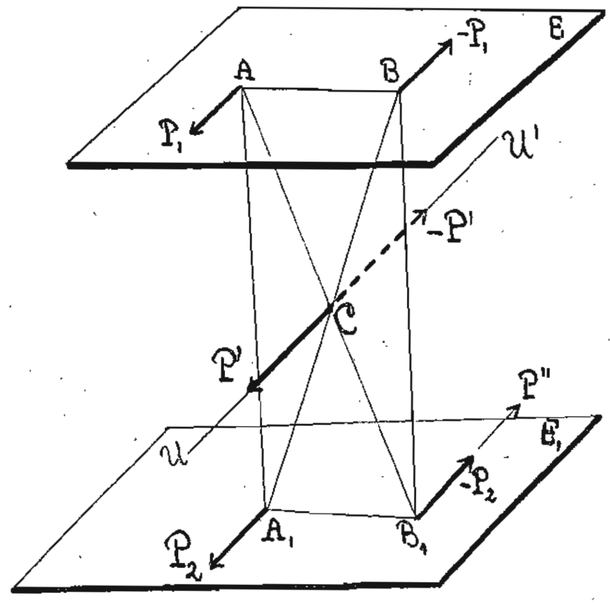
$$\eta = \frac{R_y}{R_x}\xi - \frac{1}{R_x}\sum_i (x_i Y_i - y_i X_i)$$

Кад год η и ξ задовољавају овим условима онда тачка M коју они одређују лежи у правој резултанте. Зато нам горња једначина представља једначину праве у којој дејствује резултанта.

Статика сила у простору које дејствују на једно слободно круто тело

Спрегови у простору

У равнини Е нека дејствује спрег $P_1 - P_1$. Пројецирајмо тај спрег у једну паралелну равнину њој E_1, па добијамо спрег $P_2 - P_2$. Тврдимо да су ова два спрега макар да не леже у истој равнини еквивалентна. Доказ: Повуцимо кроз тачку С једну праву паралелну са силом P_1, па раставимо силу P_2 у две паралелне компоненте од којих једна иде кроз тачку С (означимо ју са P'), а друга кроз тачку B_1. Према закону о састављању и растављању паралелних сила имамо онда ову једнакину



$$\frac{P_1}{CB_1} = \frac{P'}{AB_1}$$

или

$$P' = \frac{AB_1}{CB_1} P_1$$

но како тачка С полови дужину AB_1 то је

$$P' = 2P_1$$

Компонента у тачки B_1: P'' одређена је релацијом

$$\frac{P''}{AC} = \frac{P_1}{CB_1}$$

одакле

$$P'' = \frac{AC}{CB_1} P_1$$

или

$$P'' = -P_1$$

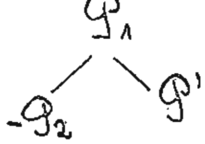
знак - зато јер компонента у B_1 мора имати други правац од силе P_1 јер ова лежи изван њених двеју компонената. Но како је због пројекције

$$P_1 = P_2$$

то је

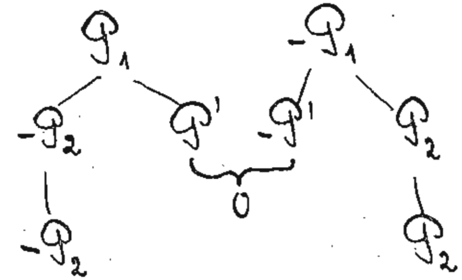
$$P'' = -P_2$$

Ми смо дакле силу P_1 заменили са силом P' која дејствује у тачки C и силом $-P_2$ која дејствује у тачки B_1.



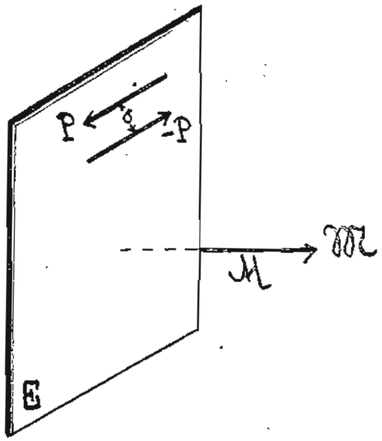
Раставимо ли на исти начин силу $-P_1$ која дејствује у тачки B у две паралелне компоненте од којих једна дејствује у тачки C а друга у тачки A_1, то ћемо на исти начин као и пре у тачки C добити компоненту $-P'$ а у тачки A_1 компоненту P_2. Прве две силе заменили смо

дакле са четири нове: P' - P' P_2 - P_2, но како прве две дејствују у истој тачки C то се оне поништавају. Остају још само друге две, па су према томе силе $P_1 - P_1$ еквивалентне силама $P_2 - P_2$. Трансформација тих сила представљена је у овој приложеној шеми.



Ми смо пре доказали да спрег $P_1 - P_1$ можемо заменити са произвољним спрегом равнине ε који има произвољну оријентацију и одстојање сила само ако је његов статички моменат једнак статичком моменту сила $P_1 - P_1$, а то исто важи и за спрег $P_2 - P_2$ који можемо заменити са произвољно оријентисаним спрегом равнине ε_1, па зато можемо да кажемо: два спрега који дејствују у паралелним равнинама а имају исте статичке моменте су еквивалентна.

Из свега реченог следује да је карактеристика једнога спрега његов статички моменат и оријентација равнине у којој он дејствује, па ћемо због тога један такав спрег моћи потпуно представити једним слободним вектором $\mathfrak{M}$ на овај начин: у равнини E која је произвољно оријентисана у простору нека дејствује спрег P-P.



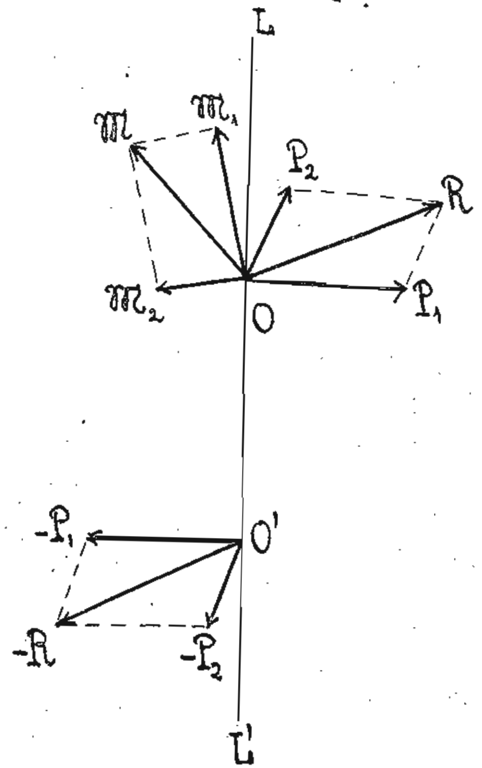
Статички моменат тога спрега нека буде

$$M = P\delta$$

Оријентишемо ли у произвољној тачки простора један вектор који стоји нормално на равнину E, који је нанесен на ону страну те равнине са које посматрају спрег P-P закренеу у позитивном смислу и којега је интензитет M једнак статичком моменту, то нам тај вектор $\mathfrak{M}$ карактерише потпуно спрег P-P. Тај вектор $\mathfrak{M}$ можемо произвољно помакнути у простору не мењајући његову оријентацију, јер и равнину E спрега P-P можемо паралелно самој себи у простору помаћи. Интензитет M довољан је критеријум за спрег P-P у једној таквој равнини јер тај спрег можемо заменити са сваким спрегом његове равнине који има исти статички моменат. Вектор $\mathfrak{M}$ називамо <u>осом спрега</u>. Тај вектор је слободан вектор. Сила која дејствује на круто тело није потпуно слободан вектор него вектор који се може само у својој правој померити. Сила која дејствује на једну материјалну тачку је везан вектор на тој тачки.

Састављање спрегова који леже у равнинама које се секу.

Равнине посматрана два спрега нека се секу у правој LL'. Одаберимо у тој правој две тачке O и O' којих је одстојање једнако јединици. Онда можемо спрег прве равнине заменити са спрегом P_1 $-P_1$ којега силе пролазе кроз тачке O и O' и стоје нормално на правој LL'. Ако је н. пр. равнина слике једнака



равнини првога спрега то треба само величину P_1 одабрати тако да је

$$P_1 \cdot OO' = P_1 = M_1$$

где је M_1 статички моменат првога спрега. Исто тако можемо спрег друге равнине заменити са спрегом P_2-P_2 при чему силе P_2 и $-P_2$ пролазе кроз тачке O и O' и стоје нормално на правој LL'. Њихово одстојање једнако је јединици, па према томе ваља одабрати величину P_2 тако да је

$$P_2 = M_2$$

где је M_2 статички момената другога спрега. Кад смо на тај начин задане спрегове заменили са спреговима P_1 $-P_1$ и P_2-P_2, онда можемо ова два спрега лако саставити у један, јер две и две силе дејствују сада у истој тачки. По закону паралелограма следоваће као резултат спрег R-R. Испитајмо сада у каквом односу стоји нови спрег према заданим. Задани спрегови били су карактерисовани са њиховим осама, па пренесимо њихове осе у тачку O. Оса $\mathfrak{M}_1$ првога спрега стоји нормално на равнину слике, наперена је иза равнине слике, а њен интензитет једнак је статичком моменту M_1 тога спрега, дакле једнак сили P_1. Оса $\mathfrak{M}_1$ стоји нормално на равнини првог спрега, зато $\mathfrak{M}_1$ стоји нормално на P_1. Исто тако оса $\mathfrak{M}_2$ другога спрега стоји нормално на сили P_2 а обе осе стоје сем тога нормално на правој LL'. Интензитет прве осе је P_1 а друге P_2. Начинимо дијагоналу паралелограма што та те две осе ограничавају. Та дијагонала нека буде $\mathfrak{M}$. Паралелограм ограничен силама P_1 и P_2 лежи у истој равнини нормалној на праву LL', као и паралелограм ограничен (силама) осама $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Стране тих паралелограма су једнаке т.ј. интензитет од $\mathfrak{M}_1$ једнак је P_1 а од $\mathfrak{M}_2$ једнак је P_2; сем тога су стране другог паралелограма нормалне на странама првог, па су зато та два паралелограма конгруентна само је други заокренут за 90° према првом. Помакнемо ли према томе први за 90° то ће се оба паралелограма поклопити. Због тога ће интензитет вектора $\mathfrak{M}$ бити једнак интензитету силе R, а сем тога стоји вектор $\mathfrak{M}$ нормално на равнини спрега R-R. Резултујући спрег има статички моменат

$$M = R \cdot OO' = R$$

Вектор $\mathfrak{M}$ стоји нормално на равнини тога спрега, има интензитет који је једнак статичком моменту спрега R-R и наперен је на ону страну равнине са које посматрано заокреће тај спрег у позитивном смислу. Зато нам вектор $\mathfrak{M}$ представља осу резултујућег спрега. Спрегове

P_1-P_1 и P_2-P_2 могли смо према томе саставити на тај начин да смо њихове осе $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ саставили по закону паралелограма у осу $\mathfrak{M}$. Та нам оса онда карактерише потпуно резултујући спрег R-R.

Што важи за два спрега важи и за три, четири, ... па зато можемо да кажемо: спрегови се састављају тако да се њихове осе састављају по закону паралелограма. Њихове су осе слободни вектори па их можемо према томе пренети у исту тачку и сложити онда по познатим правилима слагања сила које дејствују на исту тачку. Имамо ли према томе произвољан број спрегова оријентисаних произвољно у простору, то ће свака од њих бити карактерисован ако нам буду познате осе сваког спрега, а оса сваког спрега позната нам је ако буду познате три њене компоненте M_x, M_y, M_z, па ће према томе компоненте осе резултујућег спрега M_x, M_y, M_z бити одређене једначинама

$$M_x = \Sigma M_x$$
$$M_y = \Sigma M_y$$
$$M_z = \Sigma M_z$$

Тиме је одређен и резултујући вектор. Интензитет његове осе или његов статички моменат M једнак је

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

а његова оса затвара са координатним осама углове дате једначинама

$$\cos(x, M) = \frac{M_x}{M}$$

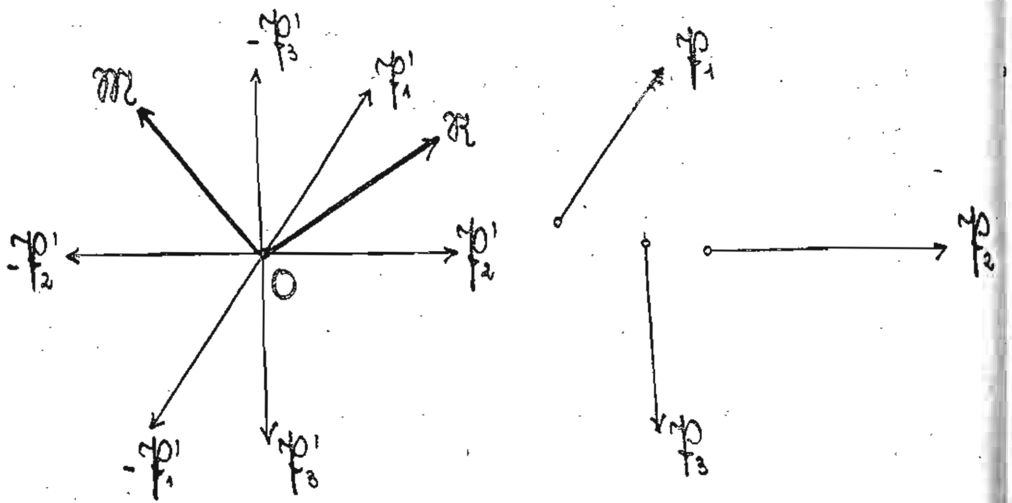
$$\cos(y, M) = \frac{M_y}{M}$$

$$\cos(z, M) = \frac{M_z}{M}$$

Та је оса нормална на равни спрега, па је зато и оријентација равни резултујућег спрега потпуно одређена.

Општи случај састављања сила у простору.

На посматрано круто тело нека дејствују произвољне силе $P_1, P_2, \dots$



Одаберимо једну произвољну тачку О коју ћемо назвати редукционом тачком, па пренесимо у њу силу P_1' која је по правцу и величини једнака сили P_1, но да тиме не бисмо променили систем сила то пренесимо у ту тачку силу $-P_1'$ која се са силом P_1' поништава. Исто то учинимо и са осталим силама. Новодобијени систем сила биће еквивалентан заданом, па га можемо овако груписати: силе $P_1' P_2' P_3' \dots$ које све дејствују у истој тачки О дају резултанту R, а силе $-P_1', -P_2', -P_3', \dots$ сачињавају са силама $P_1, P_2, P_3, \dots$ спрегове, а те спрегове можемо саставити у један резултујући спрег. Оса тога резултујућег спрега нека буде M, па како је та оса слободан вектор то ју можемо произвољно помакнути у простору; можемо ју дакле надовезати и у тачку О, па је зато задани систем сила редукован на једну силу R која дејствује у тачки О и на један спрег који је представљен осом M. То груписање сила представљено је у следећој шеми.

$$\underbrace{P_1\ P_2\ P_3 \dots -P'_1 -P'_2 -P'_3 \dots}_{\mathfrak{M}}\quad \underbrace{P'_1\ P'_2\ P'_3 \dots}_{\mathfrak{R}}$$

Онда су могућа ова четири случаја:

1° $\mathfrak{R}=0 \quad \mathfrak{M}=0$

онда влада равнотежа;

2° $\mathfrak{R}\gtrless 0 \quad \mathfrak{M}=0$

онда се систем даде редуковати на једну једину силу $\mathfrak{R}$ која пролази кроз тачку О;

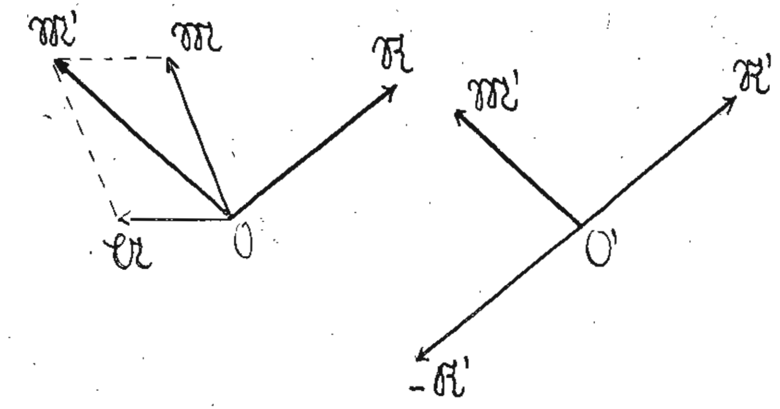
3° $\mathfrak{R}=0 \quad \mathfrak{M}\gtrless 0$

онда резултује један спрег представљен осом $\mathfrak{M}$ који можемо произвољно оријентисати у простору;

4° $\mathfrak{R}\gtrless 0 \quad \mathfrak{M}\gtrless 0$

Са овим ћемо се случајем специјално позабавити.

Узмимо даље да смо задани систем сила помоћу редукционе тачке О редуковали на силу $\mathfrak{R}$ и осу $\mathfrak{M}$. Обе ове величине заједно називамо скраћено <u>типом</u>. Испитајмо сада да ли ће се тај тип променити ако померимо редукциону тачку О. Одаберимо једну произвољну тачку О', па надовежимо у њој силу $\mathfrak{R}'$

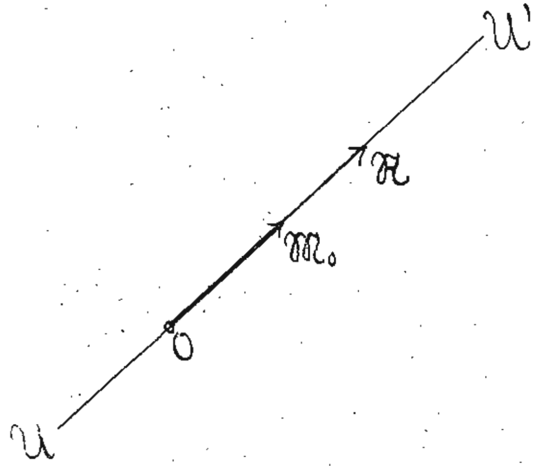


која је по величини и правцу једнака сили $\mathfrak{R}$ и да се систем не би променио силу $-\mathfrak{R}'$. Сада је систем од ове три силе $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', -\mathfrak{R}'$ и спрега $\mathfrak{M}$ еквивалентан заданом. Силе $\mathfrak{R}$ и $-\mathfrak{R}'$ сачињавају сада један спрег. Оса тога спрега нека буде $\mathfrak{C}$, па тај спрег можемо саставити са спрегом представљеним осом $\mathfrak{M}$. Резултоваће по закону паралелограма оса $\mathfrak{M}'$ коју можемо у простору произвољно померити и надовезати у тачку О'. Тако је сада читав систем редукован на силу $\mathfrak{R}'$ и на осу $\mathfrak{M}'$ са другом редукционом тачком O'. Та редукција представљена је у следећој шеми.

$$\underbrace{\mathfrak{M} \qquad \underbrace{\mathfrak{R} \quad -\mathfrak{R}'}_{\text{Сп}}}_{\mathfrak{M}'} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathfrak{R}' \\ | \\ \mathfrak{R}' \\ | \\ \mathfrak{R}' \end{array}$$

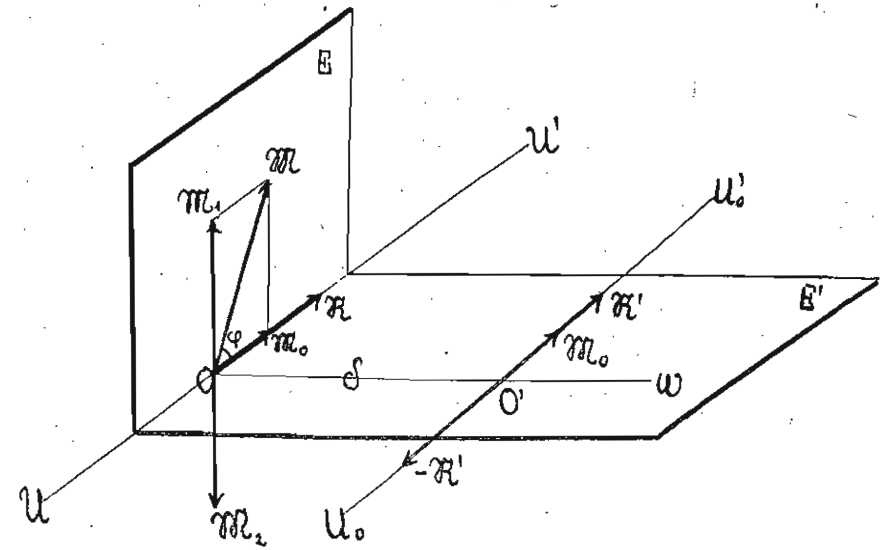
Из ове трансформације видимо ово: Померањем редукционе тачке O не мења се сила $\mathfrak{R}$, она је за све тачке простора као редукционе тачке иста по правцу и величини. Зато све резултате које одговарају свима могућим тачкама простора као редукционим тачкама сачињавају један сноп паралелних права у простору и како свака резултанта има поред свога правца још и одређену величину, то је систем свих тих резултаната један метрички сноп.

Питајмо сад како се мења оса $\mathfrak{M}$ ако померимо редукциону тачку. За сваку тачку праве $\mathfrak{R}'$ као редукциону тачку добили бисмо као што из пређашњег следује исту осу $\mathfrak{M}'$. Померимо ли дакле редукциону тачку у правој $\mathfrak{R}'$, то се оса $\mathfrak{M}$ не мења. Исто тако она се не мења ако је померимо у правој $\mathfrak{R}$. Но чим је померимо из те праве н. пр. из тачке O у тачку O' то се одмах мења оса система спрегова. Све осе $\mathfrak{M}$ које одговарају свима тачкама простора као редукционим тачкама зовемо заједно <u>конкурсом</u>, па ћемо сада испитивати особине тога конкурса. Померањем тачке O мења се дакле оса $\mathfrak{M}$ по правцу и величини, а резултанта $\mathfrak{R}$ се не мења, па ће зато бити могуће редукциону тачку O тако померити да правци осе $\mathfrak{M}$ коју ћемо означити са $\mathfrak{M}_0$ и резултанте $\mathfrak{R}$ подударе се, једном речи биће могуће систем заданих сила редукова-



ти на једну силу R и један спрег кога је равнина нормална на резултанту R јер се правац осе тога спрега подудара са правцем те резултанте. Тај пар једне силе и спрега нормалнога на ту силу зове се <u>завртањ</u> (torseur, Schraube). Померамо ли сада тако добијену редукциону тачку O у правцу R или у правцу M_0, то се тиме неће променити пар R и M_0. па ће он бити исти за све тачке праве uu'. Ту праву простора која има ту особину да се за сваку жељену тачку као редукциону тачку систем заданих сила редукује на један завртањ зовемо <u>централном осом</u> заданога система сила.

Испитајмо сада како ћемо одредити положај те централне осе ако су нам силе задане. Одаберимо произвољну тачку O, па редукујмо потпуно систем сила на резултанту R и осу M. Оне нека затварају угао φ. Положимо кроз њихове праве равнину E, а кроз праваце резултанте R равнину



E' која је нормална на равнину E. У тој равнини повуцимо праву $O\omega$ која је нормална на праву резултанте R. Одаберимо у тој правој једну тачку O' па надовежимо у њу силу R' која је по правцу и величини једнака сили R и да се не би систем променио силу $-R'$. Силе R и $-R'$ сачињавају један спрег. Означимо ли одстојање OO' са δ, то је оса тога спрега M_2 нормална на равнину E' и наперена према доле. Надовежимо ју у тачку O. Интензитет те осе једнак је

$$M_2 = R\delta$$

Раставимо осу $\mathfrak{M}$ у две ортогоналне компоненте

$$M_0 = M\cos\varphi$$
$$M_1 = M\sin\varphi$$

Сада смо интензитете означили са латинским словима. Ми можемо одстојање δ тачке O тако одабрати да оса $\mathfrak{M}_2$ спрега $R-R'$ буде по правцу и величини једнака оси $\mathfrak{M}_1$ но противна смисла. Онда ће се обе те осе поништити, па ће из читавог система резултовати резултанта R' и оса $\mathfrak{M}_0$ коју можемо померити у тачку O' и која ће се подударати са резултантом. Тачка O биће дакле тачка централне осе система. То ће бити онда случај ако интензитет осе $\mathfrak{M}_2$ буде једнак интензитету осе $\mathfrak{M}_1$ т.ј. ако буде било

$$R\delta = M\sin\varphi$$

или

$$\delta = \frac{M}{R}\sin\varphi$$

Ако смо тако одредили величину δ која је горњим једначинама једнозначно детерминирана, а из правца осе $\mathfrak{M}_1$ одређен је и противан правац осе $\mathfrak{M}_2$, па знамо на коју страну тачке O у правој $O\omega$ ваља пренети величину δ. Зато можемо једнозначно одредити положај централне осе u_0u_0'.

Досадања редукција представљена је у овој шеми.

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{M} & & \underbrace{R \qquad -R'} & +R' \\ \mathfrak{M}_0 & \underbrace{\mathfrak{M}_1 & \qquad} & \mathfrak{M}_2 & R' \\ \mathfrak{M}_0 & & 0 & R' \end{array}$$

Обратно, можемо, ако нам је задана централна оса u_0u_0' и задано R' и $\mathfrak{M}_0$ одредити тип који одговара свакој произвољној тачки O простора. У свакој тачки простора остаје R' непромењено а $\mathfrak{M}$ које одговара тачки O одредићемо на овај начин: положимо кроз ту тачку O

и кроз централну осу u_0u_0' раван ε', па положимо у тачки O раван ε нормално на раван ε', а паралелну централној оси; то оса $\mathfrak{M}$ лежи у тој равнини, она затвара са правом uu' у којој се обе равнине секу угао φ, па је

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_1}{M_0}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R\delta}{M_0} = \frac{R}{M_0}\delta$$

или, ако означимо коефицијент

$$\frac{R}{M_0} = k$$

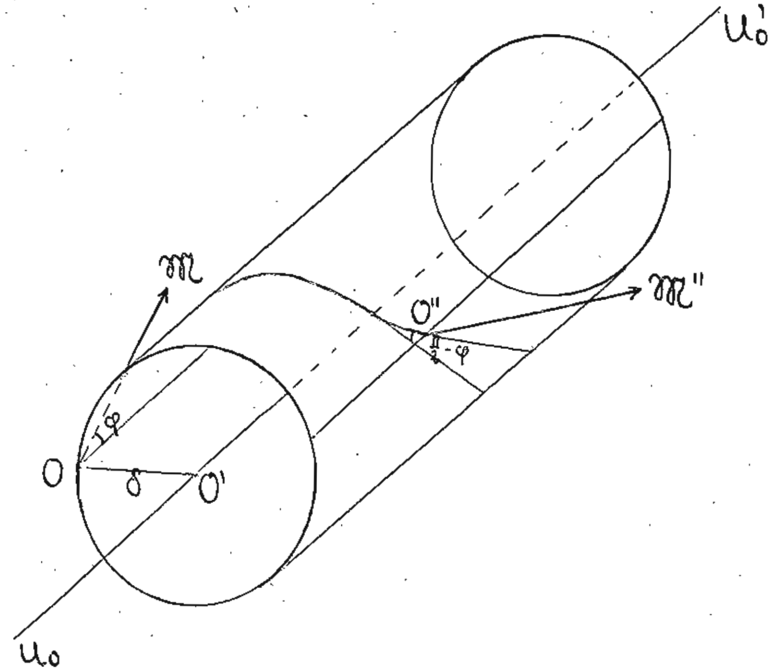
који је задан, то је

$$\operatorname{tg}\varphi = k\delta$$

Што се више одмичемо од тачке O' или од централне осе, то је угао φ све већи. У централној оси је тај угао раван нули. Углом φ одређена је права осе $\mathfrak{M}$ која одговара тачки O. Интензитет M те осе одређен је једначином

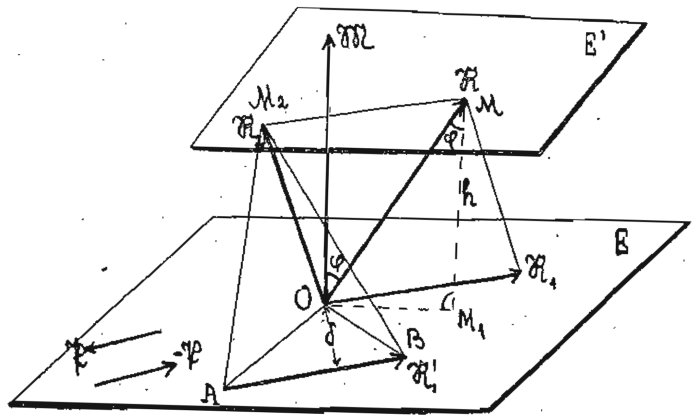
$$M = \frac{M_0}{\cos\varphi}$$

Опишемо ли око централне осе један кружни цилиндар којега је радиус једнак δ, то је за све тачке тога цилиндра угао φ што га оса $\mathfrak{M}$ затвара са генератрисом исти.



У тачки O додирује оса $\mathfrak{M}$ тај цилиндер и затвара са генератрисом угао φ. Тачка O'' има исто одстојање δ од централне осе, па зато оса $\mathfrak{M}''$ која одговара тој тачки тангира цилиндер и затвара са генератрисом угао φ. То важи за све тачке тога цилиндра, па што можемо да кажемо да су осе $\mathfrak{M}$ које одговарају тачкама тога цилиндра тангенте хеликса тога цилиндра који има угао пењања $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Што је радијус тога цилиндра већи, тим бива већи и угао φ т.ј. мања стрмина тих хеликса којих тангенте имају исти правац као и осе $\mathfrak{M}$, које одговарају тачкама површине цилиндра.

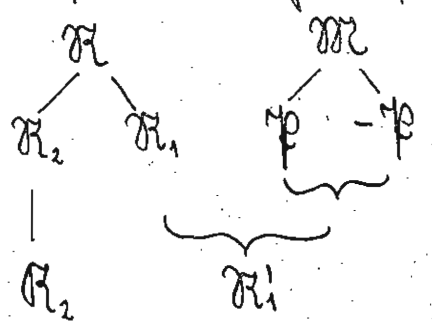
Казали смо да један произвољан систем сила које утичу на слободно круто тело можемо на бескрајно много начина раставити или редуковати на једну појединачну силу и на један спрег. Међутим одговара овоме систему само једна одређена права простора, ми смо ју назвали централном осом, која има ту особину да за све њене тачке као редукционе тачке појединачна сила и оса спрега имају исти правац. Таквом систему одговара само једна одређена вредност резултанте $\mathfrak{R}$ и једна одређена вредност осе $\mathfrak{M}_0$ која се са правцем те резултанте подудара. Сада ћемо доказати да се систем сила може на бескрајно много начина редуковати и на две силе којих се праве укрштају. Узмимо да смо помоћу једне произвољне редукционе тачке редуковали наш систем сила на појединачну силу $\mathfrak{R}$ и спрег којега је оса једнака $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}$ затварају један угао φ и само за тачке централне осе ишчезава тај угао.



Положимо кроз крајњу тачку M резултанте $\mathfrak{R}$ једну раван E' која је паралелна равни E. Одстојање обеју равнина нека буде h. Растављамо сад силу $\mathfrak{R}$ у две компоненте од којих је једна $\mathfrak{R}_1$ сасвим произвољна а има ту особину да пада у равнину $\mathcal{E}$; друга компонента биће онда $\mathfrak{R}_2$ па ће њена крајња тачка M_2 пасти у раван $\mathcal{E}'$. Спрег којега је оса $\mathfrak{M}$ можемо замислити у равнини $\mathcal{E}$, па нека буде представљен силама $\mathfrak{P}$ - $\mathfrak{P}$. Тај спрег можемо сада саставити са силом $\mathfrak{R}_2$, па ћемо, као што смо показали добити силу $\mathfrak{R}_1'$ која је једнака и паралелна сили $\mathfrak{R}_1$ а од ње удаљена за одстојање

$$\delta = \frac{M}{R_1}$$

ако су M и R_1 интензитети осе $\mathfrak{M}$ и силе $\mathfrak{R}_1$. Тако је пређашњи систем (типус) $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}$ редукован сада на две поједине силе $\mathfrak{R}_1'$ и $\mathfrak{R}_2$. Та редукција представљена је приложеном шемом.



Како је сила $\mathfrak{R}_1$ била по правцу и величини произвољна, а и положај саме равнине $\mathcal{E}$ био је произвољан, то ју можемо паралелно самој себи помаћи, па можемо типус $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}$ на бесконачно много начина редуковати на две укрштене силе. Но при свима тим редукцијама остаје једна величина непромењена, а ту величину зовемо <u>инваријантом</u>. Та величина V је запремина тетраедра што га ограничавају такве две укрштене силе. У нашем је случају база тога тетраедра троугао ABO а врх тачка M_2. Запремина тога тетраедра једнака је према томе трећини продукта површине троугла ABO са висином h, дакле

$$V = \frac{1}{3} AB \frac{\delta}{2} h$$

Но $AB \cdot \delta$ даје нам момент спрега $\mathfrak{P}$ - $\mathfrak{P}$ па је зато тај продукт једнак интензитету M осе $\mathfrak{M}$

$$AB \cdot \delta = M$$

Сем тога је
$$h = R\cos\varphi$$
па је због тога
$$V = \frac{1}{6} MR\cos\varphi$$
Но
$$M\cos\varphi = M_0$$
где је M_0 интензитет осе $\mathfrak{M}_0$ која се подудара са централном осом, па је зато
$$V = \frac{1}{6} R M_0$$

Казали смо да једном одређеном систему сила одговара само једна једина вредност $\mathfrak{R}$ и једна једина вредност $\mathfrak{M}_0$, па због тога је волумен V увек исти макар на који начин редуковали тај задани систем на две укрштене силе.

Редуковање произвољних сила у простору помоћу рачуна.

Досадање резултате ваља изразити језиком анализе. Систем сила
$$\mathfrak{P}_1 \quad \mathfrak{P}_2 \quad \dots \quad \mathfrak{P}_i$$
биће нам математски одређен ако будемо познавали нападну тачку сваке силе, а та је одређена координатама
$$x_i \; y_i \; z_i$$
ако будемо познавали интензитет
$$P_i$$
сваке силе и углове
$$(x, \mathfrak{P}_i) \; , (y, \mathfrak{P}_i) \, , (z, \mathfrak{P}_i)$$
што их права те силе затвара са координатним осама. Онда су нам компоненте сваке такове силе одређене једначинама

$$X_i = P_i \cos(x, P_i)$$
$$Y_i = P_i \cos(y, P_i)$$
$$Z_i = P_i \cos(z, P_i)$$

па ће компоненте резултанте R бити одређене следећим изразима

$$R_x = \sum_i P_i \cos(x, P_i)$$
$$R_y = \sum_i P_i \cos(y, P_i) \qquad 1)$$
$$R_z = \sum P_i \cos(z, P_i)$$

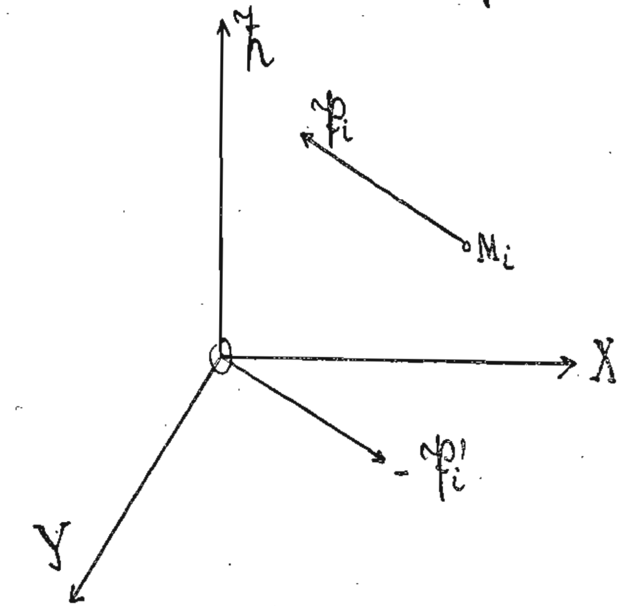
Узмимо почетну тачку O нашега координатног система за редукциону тачку; онда је једначинама 1) појединачна сила R потпуно одређена. Интензитет R те силе једнак је

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

а углови што их њена права са координатним осама затвара дати су једначинама

$$\cos(x, R) = \frac{R_x}{R}$$
$$\cos(y, R) = \frac{R_y}{R}$$
$$\cos(z, R) = \frac{R_z}{R}$$

Казали смо да смо као редукциону тачку одабрали почетну тачку координатног система; онда према пређашњем сачињава свака сила P_i са са силом $-P_i'$ која пролази кроз тачку O један спрег. Оса тога спрега једнака је, као што је лако увидети, статичком моменту силе P_i обзиром на тачку O. Зато оса спрега изазваног силом P_i има ове компоненте



$$M_x^i = (y_i Z_i - z_i Y_i)$$
$$M_y^i = (z_i X_i - x_i Z_i)$$
$$M_z^i = (x_i Y_i - y_i X_i)$$

Оса резултујућег спрега M имаће пре

на томе све компоненте

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$$

Интензитет те осе једнак је

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

а углови што их она затвара са координатним осама једнаки су

$$\cos(x, \mathfrak{M}) = \frac{M_x}{M}$$

$$\cos(y, \mathfrak{M}) = \frac{M_y}{M}$$

$$\cos(z, \mathfrak{M}) = \frac{M_z}{M}$$

та оса је према томе потпуно одређена. Оса $\mathfrak{M}$ и сила $\mathfrak{R}$ затварају угао којега је косинус једнак

$$\cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{M}) = \cos(x, \mathfrak{R})\cos(x, \mathfrak{M}) + \cos(y, \mathfrak{R})\cos(y, \mathfrak{M}) + \cos(z, \mathfrak{R})\cos(z, \mathfrak{M}) = \frac{1}{RM}\left\{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z\right\}$$

Из ове једначине следује да је

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = RM\cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{M}) = RM_0 = 6V$$

Овај последњи израз представља према томе запремину тетраедра о коме смо већ говорили, а како је за сваки систем величина R и интензитет M_0 осе $\mathfrak{M}_0$ која пада у правац централне осе једна одређена величина, то је овај израз једнак за све произвољне тачке простора које одабирамо за почетну тачку нашега координатног система. Зато зовемо величину

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = J$$

<u>инваријантом</u> задатога система. Од какве је важности тај израз за редукцију система то ћемо одмах сада видети.

При редукцији нашега система сила могу наступити ови специјални случаји:

1° $R=0 \quad M=0$

онда је и

$$J=0$$

У овом се случају задате сила држе у равнотежи.

2° $$R=0 \quad M\neq 0$$

онда је

$$R_x=R_y=R_z=0$$

па је због тога и

$$J=0$$

- читав систем редукује се на један спрег.

3° $$R\neq 0 \quad M=0$$

Онда је

$$M_x=M_y=M_z=0$$

па зато и

$$J=0$$

- Систем сила редукује се на једну појединачну силу $\mathfrak{R}$ која пролази кроз почетну тачку O нашега координатног система.

4° $$R\neq 0 \quad M\neq 0$$

али оса спрега $\mathfrak{M}$ стоји нормално на резултанти $\mathfrak{R}$ т.ј.

$$\sphericalangle(\mathfrak{R},\mathfrak{M})=\frac{\pi}{2}$$

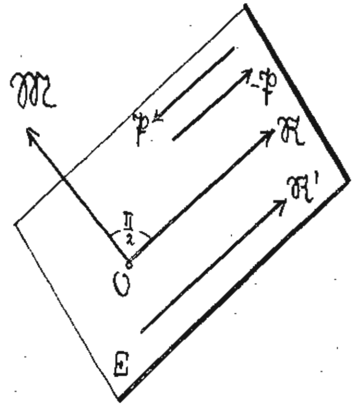
или

$$\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{M})=0$$

па је због тога према горњим једначинама и

$$J=0$$

Како оса спрега стоји нормално на резултанти $\mathfrak{R}$, то можемо ту осу заменити са једним спрегом $\mathfrak{P}$-$\mathfrak{P}$ који лежи у истој равнини E у којој лежи резултанта $\mathfrak{R}$, па тај спрег можемо са том резултантом саставити опет у једну силу $\mathfrak{R}'$ која је по правцу и величини једнака сили $\mathfrak{R}$ а од ње удаљена за дужину



$$\delta=\frac{M}{R}$$

И у овом случају дакле резултује једна једина сила. Сетимо ли се начина како смо одредили централну осу система сила, па узмемо ли у обзир да је наше $\mathfrak{M}'$ према тадањим ознакама једнако $\mathfrak{M}_1$ јер стоји нормално на оси $\mathfrak{R}$ и да је онда централна оса имала одстојање

$$\delta = \frac{M_1}{R}$$

од резултанте $\mathfrak{R}$, то видимо да у овом нашем случају коначна резултанта $\mathfrak{R}'$ на коју се читав систем сила може да сведе пада у централну осу. Овај случај је у ствари идентичан са трећим случајем, само смо овде већ одабрали редукциону тачку O у правој централне осе. Да смо то и у овом случају учинили био би моменат $\mathfrak{M}$ такође раван нули.

5° $\qquad R \gtrless 0 \quad M \gtrless 0 \quad \sphericalangle(\mathfrak{R},\mathfrak{M}) \gtrless \frac{\pi}{2}$

онда је

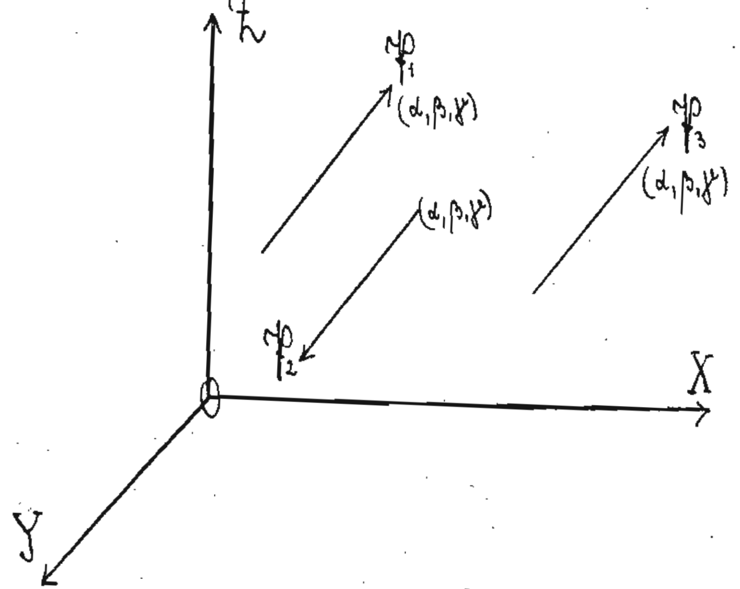
$$\mathcal{J} \gtrless 0$$

У овом случају затварају резултанта $\mathfrak{R}$ и оса $\mathfrak{M}$ један угао који није раван ни нули ни $\frac{\pi}{2}$, па се тај систем сила не даје даље редуковати. Из њега даље следује једна појединачна сила и један спрег или две укрштене силе.

Досадање резултате можемо овако рекапитулирати: Кад год је инваријанта једнака нули онда се систем даје редуковати или на једну једину силу или на један спрег; а кад је инваријанта различита од нуле онда резултује и сила и спрег или две укрштене силе.

Састављање паралелних сила у простору

Све задане силе нека буду паралелне, па нека њихове праве затварају са координатним осама углове α, β, γ. Онда су компоненте резултанте једнаке, као што смо раније доказали



$$R_x = \sum_i P_i \cos\alpha = \cos\alpha \sum_i P_i$$

$$R_y = \sum_i P_i \cos\beta = \cos\beta \sum_i P_i \qquad 1)$$

$$R_z = \sum_i P_i \cos\gamma = \cos\gamma \sum_i P_i \qquad 1)$$

Компоненте резултујуће осе биће једнаке

$$M_x = \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$= \sum_i (y_i P_i \cos\gamma - z_i P_i \cos\beta) =$$

$$= \cos\gamma \sum_i y_i P_i - \cos\beta \sum_i z_i P_i \qquad 2)$$

На исти начин добијамо

$$M_y = \cos\alpha \sum_i z_i P_i - \cos\gamma \sum_i x_i P_i$$

$$M_z = \cos\beta \sum_i x_i P_i - \cos\alpha \sum_i y_i P_i \qquad 2)$$

Формирајмо сада изразе

$$R_x M_x = \cos\gamma\cos\alpha \sum_i P_i \sum_i y_i P_i - \cos\alpha\cos\beta \sum_i P_i \sum_i z_i P_i$$

$$R_y M_y = \cos\alpha\cos\beta \sum_i P_i \sum_i z_i P_i - \cos\beta\cos\gamma \sum_i P_i \sum_i x_i P_i$$

$$R_z M_z = \cos\beta\cos\gamma \sum_i P_i \sum_i x_i P_i - \cos\alpha\cos\gamma \sum_i P_i \sum_i y_i P_i$$

Одавде следује

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$$

Инваријанта је равна нули и зато резултује или једна једина сила или спрег.

Специјални случајеви:

1° $R=0 \quad M=0$

Онда влада равнотежа. Услови на равнотеже можемо обзиром на једначине 1) и 2) дати и овај облик

$$\Sigma P = 0$$

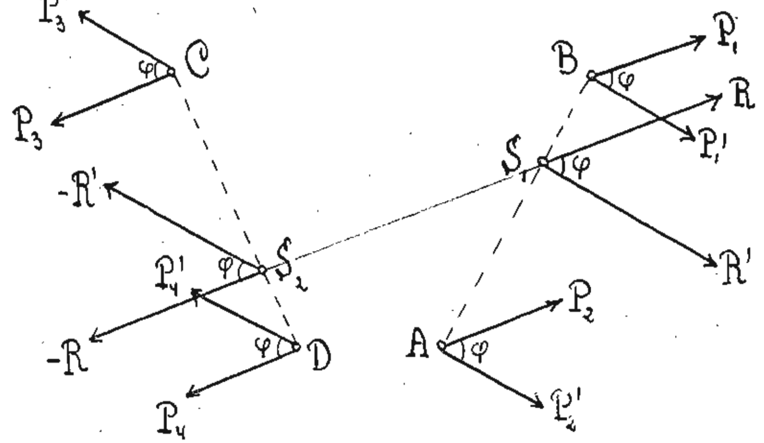
$$\frac{\Sigma x_i P_i}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma y_i P_i}{\cos\beta} = \frac{\Sigma z_i P_i}{\cos\gamma}$$

Ово су такође услови равнотеже. Ако су бројитељи последњих разломака равни нули, онда су услови равнотеже за произвољне вредности углова α, β, γ. Зато равнотежа неће бити поремећена ако читав систем сила у њиховим нападним тачкама а без промене њихових интензитета заокренемо за један произвољан угао тако да силе остану и даље паралелне. Тај случај, за који је даке

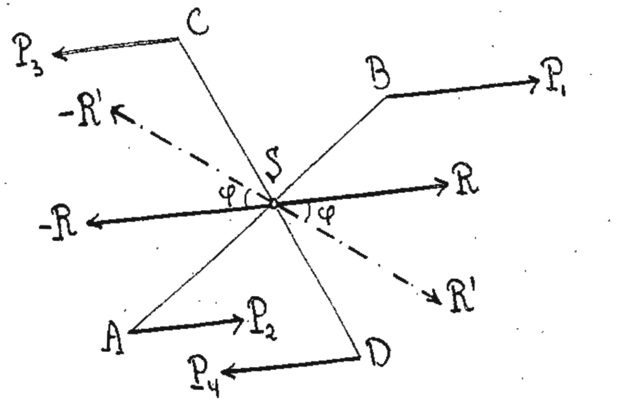
$$\Sigma x_i P_i = \Sigma y_i P_i = \Sigma z_i P_i = 0$$

зове се <u>астатичном равнотежом</u>.

Пример обичне и астатичне равнотеже за две силе: Узмимо две произвољне тачке равнине S_1 и S_2 па надовежимо у тачку S_1 силу R а у тачки S_2 силу $-R$. Како те две силе леже у истој правој,



то се држе у равнотежи. Раставимо сад силу R у две паралелне компоненте P_1 и P_2 од којих прва иде кроз тачку B а друга кроз тачку A. Тачке A и B су произвољне само леже са S_1 у истој правој. На исти начин раставимо силу $-R$ у две паралелне силе P_3 и P_4. Сада се систем сила $P_1 P_2 P_3 P_4$ налази у обичној равнотежи, јер заокренемо ли све силе за један угао φ, онда те силе долазе у положаје $P_1'P_2'P_3'P_4'$. Силе P_1' и P_2' дају резултанту R' која иде кроз S_1, а силе P_3' и P_4' дају резултанту $-R'$ која иде кроз S_2. Обе те силе су паралелне, противнога правца и исте величине али не леже више у истој правој; оне дакле дају спрег и равнотежа је поремећена. Падну ли тачке S_1 и S_2 у исту тачку, онда се променом правца сила неће променити равнотежа као што се види из следеће



слике. Заокренемо ли сада силе $P_1P_2P_3P_4$ за исти угао φ, то ће резултанта R доћи у положај R' а резултанта $-R$ у положај $-R'$. Обе силе леже сада у истој правој па равнотежа није поремећена.

2° $R=0 \quad M \gtrless 0$

Онда резултује један спрег. Тај спрег представљен је осом M а компоненте те осе представљене су једначинама 2). Та је оса слободан вектор, па је зато тај вектор са једначинама 2) потпуно одређен.

3° $R \gtrless 0 \quad M \gtrless 0$

Онда резултује као што смо пре показали увек једна једина сила. Компоненте те силе одређене су једначинама 1). Интензитет те силе једнак је

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}\,\sum P$$

Како су α, β, γ углови што их један те исти правац затвара са координатним осама, то је израз под кореном раван јединици, па је зато

$$R = \sum P$$

На тај начин смо одредили интензитет резултанте. Знамо даље да је она паралелна компонентама, а због тога нам је познат и њен правац. Ваља само да се одреди права у којој она дејствује. Ту ћемо праву одредити помоћу познатог услова да статички моменат резултанте обзиром на тачку O мора бити раван збиру статичких момената компонената. Компоненте статичког момента резултанте једнаке су, ако са ξ, η, ζ означимо координате њене нападне тачке или још општије координате произвољне тачке њене праве, изразима

$$\eta R_z - \zeta R_y$$
$$\zeta R_x - \xi R_z$$
$$\xi R_y - \eta R_x$$

Узмемо ли у обзир једначине 1) то можемо ове изразе изразити помоћу силе P и углова α, β, γ, па ће ти изрази морати бити једнаки збиру статичких момената компоненталних сила који су збирови представљени једначинама 2). На тај начин добијамо ове једначине

$$\eta \cos\gamma \sum P_i - \zeta \cos\beta \sum P_i = \cos\gamma \sum y_i P_i - \cos\beta \sum z_i P_i$$
$$\zeta \cos\alpha \sum P_i - \xi \cos\gamma \sum P_i = \cos\alpha \sum z_i P_i - \cos\gamma \sum x_i P_i$$
$$\xi \cos\beta \sum P_i - \eta \cos\alpha \sum P_i = \cos\beta \sum x_i P_i - \cos\alpha \sum y_i P_i$$

Ове једначине одређују ξ, η, ζ или дају једначину праве у којој дејствује резултанта. Тој једначини можемо дати овај облик: поделимо прву од тих једначина са $\cos\beta\cos\gamma \sum P_i$, другу са $\cos\gamma\cos\alpha \sum P_i$, трећу са $\cos\alpha\cos\beta \sum P_i$, то добијамо

$$\frac{\eta}{\cos\beta} - \frac{\zeta}{\cos\gamma} = \frac{\frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\beta} - \frac{\frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\gamma}$$

$$\frac{\zeta}{\cos\gamma} - \frac{\xi}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\gamma} - \frac{\frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\xi}{\cos\alpha} - \frac{\eta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\alpha} - \frac{\frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\beta}$$

Из ових једначина следује даље

$$\frac{\xi - \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\alpha} = \frac{\eta - \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\beta} = \frac{\zeta - \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}}{\cos\gamma} \qquad 3)$$

Ово је једначина праве у којој дејствује резултанта. Ону тачку те резултанте за коју бројитељи последњих разломака ишчезавају т.ј. тачку чије су координате

$$\xi_0 = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}$$

$$\eta_0 = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} \qquad 4)$$

$$\zeta_0 = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}$$

зовемо <u>центром паралелних сила</u>. Заокренемо ли све те паралелне силе за један угао, то ће се α, β, γ променити, али нападне тачке задатих сила и њихови интензитети остају исти и зато је координате ξ_0, η_0, ζ_0 не мењају; кад год да заокренемо паралелне силе, увек њихова резултанта пролази кроз тачку (ξ_0, η_0, ζ_0).

Посматрајмо сад једно круто тело материјално које је изложено само утицају своје властите тежине. Ми то тело можемо замислити подељено у бескрајно мале елементе са масама

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad \dots$$

тежине тих елемената биће

$$m_1 g \quad m_2 g \quad m_3 g \quad m_4 g \quad \dots$$

то значи сила P_i једнака је

$$P_i = m_i g$$

где је g акцелерација теже на посматраном месту земље. Те силе паралелне су међусобно па зато имају и оне један центар сила. Координате тога центра одређене су једначинама

$$\xi_0 = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$\eta_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$\zeta_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Видимо да координате тога центра сила не зависе од акцелерације него само од распореда маса. Зато се та тачка зове <u>центрумом маса</u> или такође <u>тежиштем</u>. Координате тога тежишта можемо представити и на овај начин

$$\xi_0 = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots\right)$$

или, како је

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = M$$

т.ј. представља читаву масу посматраног тела, то је

$$M\xi_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots$$

$$M\eta_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots \qquad 5)$$

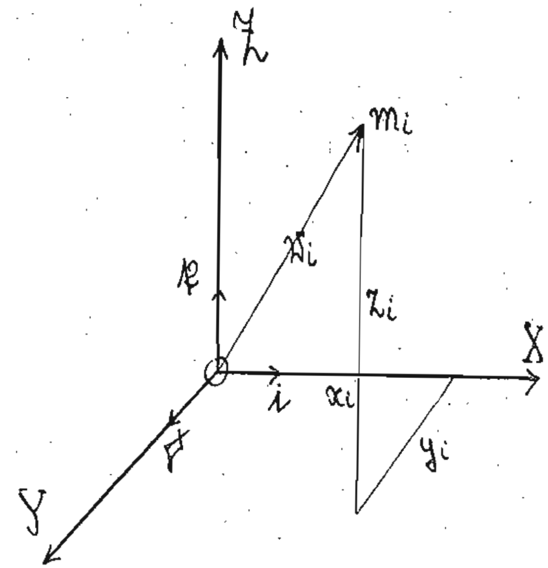
$$M\zeta_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots$$

Означимо ли вектор положаја масе m_i са $\mathfrak{r}_i$ а јединичне векторе у правцима X, Y, Z са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$, то је онда

$$\mathfrak{r}_i = x_i \mathfrak{i} + y_i \mathfrak{j} + z_i \mathfrak{k}$$

Означимо ли вектор положаја тежишта са $\mathfrak{r}_0$, то је на исти начин

$$\mathfrak{r}_0 = \xi_0 \mathfrak{i} + \eta_0 \mathfrak{j} + \zeta_0 \mathfrak{k}$$



Помножимо ли прву од једначина 5) са јединичним вектором $\mathfrak{i}$, другу са $\mathfrak{j}$, трећу са $\mathfrak{k}$ па саберемо, то добијамо

$$M\mathfrak{r}_0 = m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3 + \cdots \qquad 5^x)$$

Ова једначина замењује три једначине 5) па даје векторски израз за положај тежишта. Можемо га писати и овако

$$\mathfrak{r}_0 = \frac{m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

Уочимо ли једно такво тешко тело то у једном одређеном положају тога тела према земљи имају силе теже које на елементе тога тела утичу један одређен правац према самоме телу. Закренемо ли то тело за један извесан угао, то ће нападне тачке тих сила а исто тако и њихови интензитети остати непромењени, али су се њихови правци према самоме телу променили, но те силе остале су и даље паралелне, па ће зато њихова резултанта пролазити и у новом положају кроз једну одређену тачку тога тела која је одређена једначинама 5) и која зависи само од распореда маса тога тела, коју смо тачку назвали тежиштем, па зато можемо да формулишемо и ову дефиницију тежишта: тежиште је она са посматраним телом чврсто везана тачка кроз коју пролази резултанта тежине тога тела макар се у каквом положају према земљи то тело налазило.

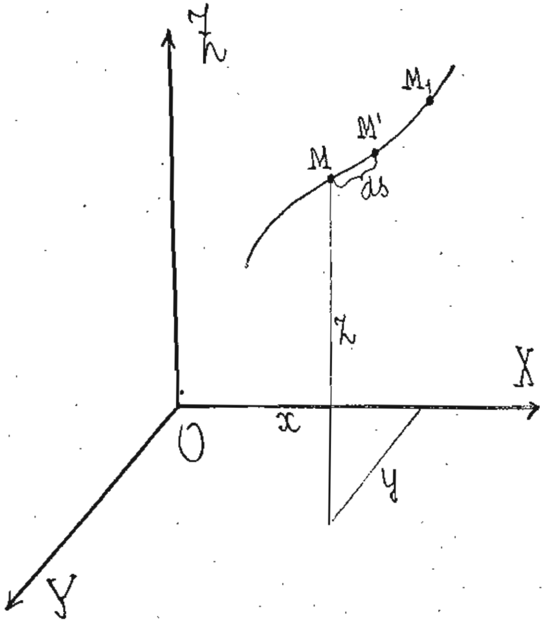
Ми смо при формирању једначина 5) раставили у дискретне малене елементе са масама $m_1 m_2 m_3 \ldots$ За математске операције биће потребно замислити тело као један континуум па га раставити у елементе запремине. Свакој тој елементарној запремини одговараће једна одређена маса, па ако сада за одређење центра маса употребимо једначине 5), то ће десне стране тих једначина добити облик интеграла. Ако је једна димензија посматраног тела према осталим бескрајно малена, онда велимо да имамо посла са једном *материјалном површином*; ако су две димензије бескрајно малене према трећој кажемо да имамо посла са једном *материјалном линијом*.

Једначине за одредбу тежишта материјалне линије

Уочимо ли део MM_1 једне такове материјалне линије; дужина тога дела нека буде

$$\text{arc}\ MM_1 = \lambda$$

а тежина нека буде G; онда називамо квоцијенат



$$\frac{G}{\lambda}$$

<u>средњом тежином</u> комада MM_1. Ако је маса тога комада једнака m, онда је

$$G = m \cdot g$$

а квоцијенат $\frac{m}{\lambda}$ који је g-пута мањи од пређашњег квоцијента називамо <u>средњом густином</u> комада MM_1. Граничну вредност тога квоцијента

$$\rho = \lim_{\lambda = 0} \frac{m}{\lambda}$$

када се дакле тачка M_1 бескрајно приближује тачки M зовемо <u>специфичном густином</u> посматране материјалне линије у тачки M. Онда је маса бескрајно малог елемента

$$MM' = ds$$

једнака

$$dm = \rho\, ds$$

Замислимо да смо читаву материјалну линију раставили у елементе ds; онда ће једначине 5) које одређују тежиште такве линије добити овај облик

$$M\xi_0 = \int_L x\rho\, ds$$

$$M\eta_0 = \int_L y\rho\, ds$$

$$M\zeta_0 = \int_L z\rho\, ds$$

збирови једначина 5) замењени су дакле интегралом који се има протегнути на читаву материјалну линију. Маса M материјалне линије једнака је интегралу

$$M=\int_L \rho\, ds$$

Ако је материјална линија хомогена онда је ρ константно па га можемо изводити пред интегрални знак; онда је дакле

$$M=\rho\int_L ds=\rho l$$

где l означава дужину посматране линије. Координате тежишта су у том случају дате једначинама

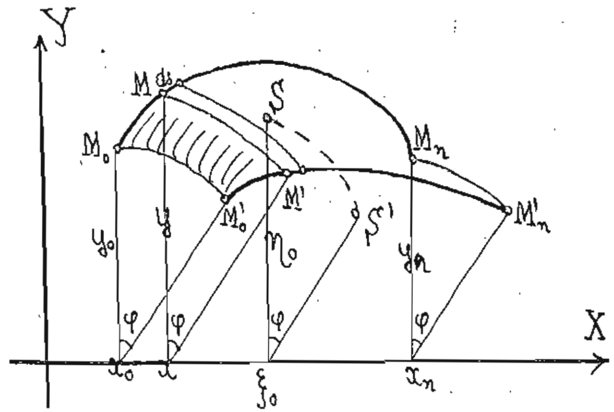
$$\xi_0=\frac{1}{l}\int_L x\, ds$$

$$\eta_0=\frac{1}{l}\int_L y\, ds$$

$$\zeta_0=\frac{1}{l}\int_L z\, ds$$

Папусова теорема.

Имамо ли равну криву која лежи у равнини xy, то ће, ако још претпоставимо да је линија хомогена, координате њеног тежишта бити представљене изразима



$$\xi_0=\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_n} x\, ds$$

$$\eta_0=\frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_n} y\, ds$$

Замислимо да та крива ротира око осе X и опише угао φ; то ће она описати један део једне ротационе површине. Питајмо колика је површина тога дела. Сваки елеменат ds описује при ротацији један појас који можемо сматрати за цилиндричан са висином ds. Површина тога појаса једнака је

$$\text{arc}\ MM'\cdot ds=y\varphi\, ds$$

Зато ће читава крива описати повр-

шину
$$F = \int_{x_0}^{x_n} y\varphi\, ds = \varphi \int_{x_0}^{x_n} y\, ds = l\varphi\eta_0$$

При ротацији опише тежиште S лук
$$\text{arc}\ SS' = \eta_0\varphi$$

па је зато
$$F = l\cdot \widehat{SS'}$$

Ова једначина казује да је површина што ју опише крива M_0MM_n једнака продукту дужине те криве са путем што га при тој ротацији опише тежиште.

Примедба: Ову теорему нашао је и формулисао скоро истим овим речима Александринац Папус (живео у III или IV веку по Христу). У XVII веку публиковао је под својим именом ту исту теорему Језуита Гулдин (професор у Бечу и Грацу), па се ова теорема зове често пута по њему и Гулдинова теорема. Но како је могуће, а по историчару за математику Кантору шта више вероватно, да је Гулдин познавао списе Папусове, то је праведније ову теорему звати само Папусовом.

Тежиште површина.

Замислимо једну материјалну површину. Исецимо из те површине један елеменат Δf. Маса тога елемента нека буде μ. Онда називамо коефицијенат

$$\frac{\mu}{\Delta f}$$

средњом **густином** посматраног елемента Δf, а његову граничну вредност

$$\rho = \lim_{\Delta f = 0} \frac{\mu}{\Delta f}$$

називамо **густином** у посматраној тачки. Ако је површина хомогена, онда је ρ константно. При израчунавању тежишта раставићемо површину у бескрајан број бескрајно малених елемената df; онда је маса сваког таквог елемента једнака ρdf, па именитеље једначина које нам дају координате тежишта и које су биле

$$\xi_0 = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$$

$$\eta_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$$

$$\zeta_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

добијају место збира облик овога интеграла

$$\iint_F \rho \, df$$

где интеграцију ваља раширити по читавој површини. Збир у бројитељу за израз ξ_0 добија облик интеграла

$$\iint_F \rho x \, df$$

зато ће координате тежишта бити представљене изразима

$$\xi_0 = \frac{\iint_F \rho x \, df}{\iint_F \rho \, df}$$

$$\eta_0 = \frac{\iint_F \rho y \, df}{\iint_F \rho \, df}$$

$$\zeta_0 = \frac{\iint_F \rho z\, df}{\iint_F \rho\, df}$$

Именитељ ових израза

$$\iint_F \rho\, df = M$$

представља целокупну масу посматране површине. Ако је ρ константно онда га можемо извадити пред знак интеграла, па како

$$\iint_F df = F$$

представља посматрану површину, то координате тежишта добијају овај облик

$$\xi_0 = \frac{1}{F}\iint_F x\, df$$

$$\eta_0 = \frac{1}{F}\iint_F y\, df$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{F}\iint_F z\, df$$

Ако је површина равна па лежи у равнини XY, онда је елеменат

$$df = dx\, dy$$

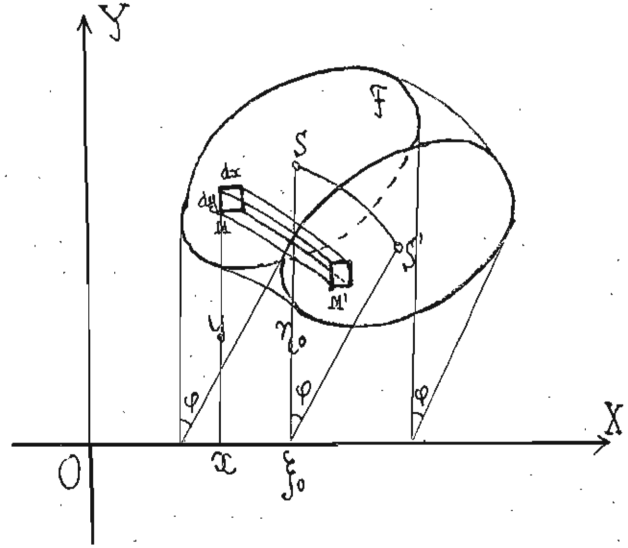
па су координате тежишта

$$\xi_0 = \frac{1}{F}\iint_F x\, dx\, dy$$

$$\eta_0 = \frac{1}{F}\iint_F y\, dx\, dy$$

Друго Папусово правило.

У равнини XY нека се налази једна површина F; тежиште те површине нека буде S. Оно је одређено претходним једначинама.



Нека сада та површина ротира око осе X за угао φ. Онда сваки елеменат $dx\, dy$ описује једну запремину која је једнака

$$\text{arc } MM'\, dx\, dy = y\varphi\, dx\, dy$$

Читава запремина F описане при тој

ротацији запремину

$$V = \iint_F y\varphi \, dx\, dy = \varphi \iint_F y \, dx\, dy = \eta_0 \varphi F$$

одакле је

$$\eta_0 \varphi = \overset{\frown}{SS'}$$

где $\overset{\frown}{SS'}$ представља пут што га је описало тежиште, то је

$$V = F \cdot \overset{\frown}{SS'}$$

Ова једначина изражава другу теорему Папусову: Ротира ли једна равна површина око једне праве своје равнине, то она описује при томе једну запремину која је једнака површини која ротира помноженој са путем што га при тој ротацији описује тежиште те криве.

Тежиште запремина.

Уочимо једну материјалну запремину, па исецимо из ње један елеменат запремине ΔV. Маса тога елемента нека буде μ; онда зовемо коефицијенат

$$\frac{\mu}{\Delta V}$$

средњом густином посматраног елемента, а његову граничну вредност

$$\rho = \lim_{\Delta V = 0} \frac{\mu}{\Delta V}$$

густином запремине у оној тачки простора у којој извршимо гранични прелаз. При израчунавању тежишта такве запремине раставићемо ју у бескрајан број бескрајно малених елемената dV. Маса сваког таквог елемента

биће онда $\rho\, dV$, па ће збирови у имени-
тељима једначина за тежиште бити
замењени троструким интегралима

$$\iiint_V \rho\, dV$$

а слично и збирови у бројитељима. Зато
ће једначине координата тежишта
бити

$$\xi_0 = \frac{\iiint_V \rho x\, dV}{\iiint_V \rho\, dV}$$

$$\eta_0 = \frac{\iiint_V \rho y\, dV}{\iiint_V \rho\, dV}$$

$$\zeta_0 = \frac{\iiint_V \rho z\, dV}{\iiint_V \rho\, dV}$$

ако је запремина хомогена, онда мо-
жемо ρ извадити пред знак инте-
грала, па ће интеграл

$$\iiint_V dV = V$$

представљати посматрану запреми-
ну, а сем тога можемо елеменат dV
написати и у овом облику

$$dV = dx\, dy\, dz$$

па једначине тежишта добијају о-
вај облик

$$\xi_0 = \frac{1}{V} \iiint_V x\, dx\, dy\, dz$$

$$\eta_0 = \frac{1}{V} \iiint_V y\, dx\, dy\, dz$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{V} \iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

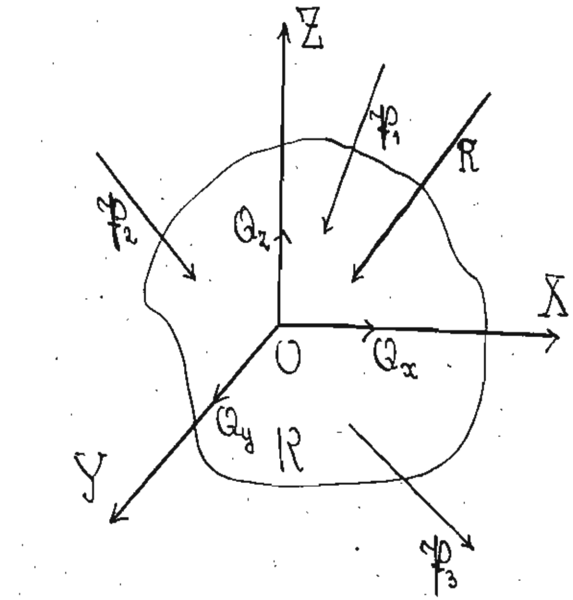
Статика везанога крутог тела.

Ако посматрано тело није слободно него је у појединим својим тачкама, линијама или површинама везано на друга тела, то ће то тело ако га оптеретимо, притискивати извесним силама та тела на које је везано, а по принципу акције и реакције бити притискивано истим силама но противнога правца. Тела на која је посматрано круто тело везано можемо одстранити ако их заменимо са силама којима су она посматрано тело притискивала. Када смо то учинили можемо тело сматрати као слободно.

Најважнији случајеви везања крутог тела јесу ови:

1° <u>Једна тачка крутог тела фиксирана је у простору.</u>

Посматрано тело K може се према томе окретати око те тачке. Та тачка нека буде O. Одаберимо ју за почетну тачку нашег координатног система. На посматрано тело нека дејствују силе P_1 P_2 P_3 ... Те силе настојаће да помере тело K заједно са тачком O, но како је она фиксирана, то ће она овом померању давати отпор тај отпор, ако претпоставимо да је



тачка О апсолутно непомична, може бити произвољно велики и има само то ограничење да пролази кроз тачку О. Означимо компоненте тога отпора са Q_x, Q_y, Q_z, то тим компонентама можемо дати увек онакове величине које су потребне за одржање равнотеже. Сада када смо тачку О заменили са силама Q_x, Q_y, Q_z можемо сматрати тело као слободно, па ће услов равнотеже бити према пређашњем тај да збирови компонената свих сила које утичу на посматрано тело и збирови њихових статичких момената обзиром на тачку О буду равни нули. Означимо резултанту сила P_1 P_2 P_3 ... са R, њене компоненте са R_x, R_y, R_z а компоненте њених статичких момената обзиром на тачку О са M_x, M_y, M_z, то сем ових сила дејствују на посматрано тело силе Q_x, Q_y, Q_z које пролазе кроз тачку О па недају њихове компоненте статичком моменту обзиром на тачку О. Зато ће једначине равнотеже имати овај облик

$$\begin{aligned} R_x + Q_x &= 0 \\ R_y + Q_y &= 0 \\ R_z + Q_z &= 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

$$\begin{aligned} M_x &= 0 \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

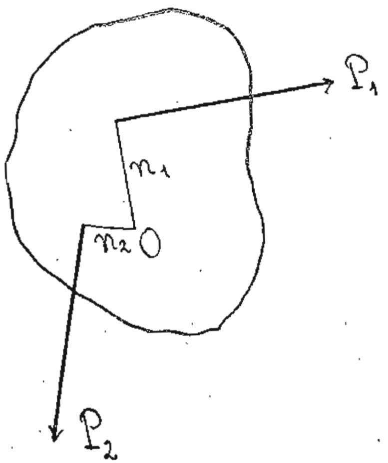
Једначине 1) могу бити, ако је тачка О апсолутно чврста, увек задовољене јер смо казали да њеним величинама Q_x Q_y Q_z можемо дати произвољну величину. Зато ће постојати равнотежа онда ако једначине 2) буду задовољене. Те једначине 2) су задовољене ако је статички моменат резултанте R обзиром на тачку О раван нули т.ј. ако сила R пролази кроз тачку О.

Овакво тело којем је једна тачка фиксирана називамо попутом у најширем смислу речи, па је услов за равнотежу полуге тај: да резултанта спољних сила пролази кроз фиксирану тачку. Ако све силе леже у истој равнини коју одабирамо за равнину XY, то је довољан услов равнотеже

$$M_x = 0$$

$$M_y = 0$$

Имамо ли н. пр. само две силе P_1 и P_2 којих су одстојања од тачке O једнака n_1 и n_2, то је статички моменат обзиром на тачку O



$$-P_1 n_1 + P_2 n_2 = 0$$

или

$$P_1 n_1 = P_2 n_2$$

Ово је познато елементарно правило полуге. Ако су компоненте сила P_1 и P_2: $P_x'\ P_y'$ и $P_x''\ P_y''$ то се отпор ослонца O израчунава из једначина 1) које у овом случају добијају облик

$$P_x' + P_x'' + Q_x = 0$$

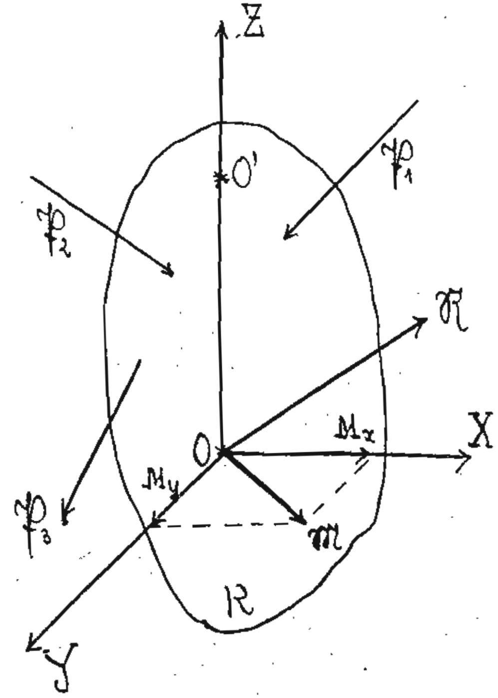
$$P_y' + P_y'' + Q_y = 0$$

Интензитет отпора ослончевој једнак је

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

2° Једна права посматраног тела фиксирана је у простору.

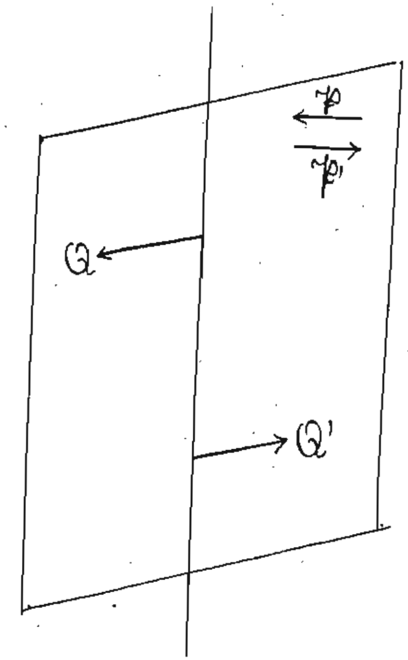
Ако су две тачке посматраног тела фиксиране, онда су фиксиране и све тачке које леже у правој која спаја те две тачке. Одаберимо ту праву за осу Z. На посматрано тело нека дејствују силе $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$, па нека резултанта тих сила буде сила R. Одаберимо тачку O за почет-



ну тачку нашег координатног система, па нека компоненте статичког момента свих спољних сила обзиром на тачку O буду M_x M_y M_z. Слично као у пређашњем случају моћи ће оса Z или боље рећи свака тачка осе Z да даје произвољну реакцију спољним силама само са том рестрикцијом да такве реакције морају пролазити кроз осу Z. Нека је према томе

$$M_z = 0$$

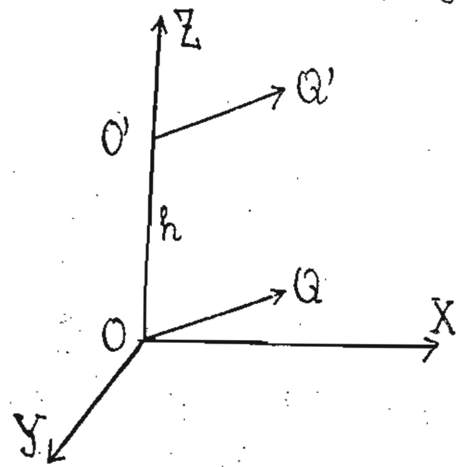
Онда спољне силе дају резултанту R и спрег којега је оса M. Па оса M лежи у равнини XY јер је M_z равно нули, па може бити зато, јер M стоји нормално на Z, замењена са једним спрегом који лежи у једној равнини која пролази кроз осу Z. Тај спрег можемо опет заменити са спрегом Q и Q' којега силе нападају две произвољне тачке осе Z. Како смо казали да тачке осе Z могу дати реакције произвољне величине, то ће тај спрег моћи бити поништен на оси Z. Сила R такође може бити поништена на оси Z, па је зато довољан услов равнотеже



$$M_z = 0$$

т.ј. да је збир статичких момената спољних сила обзиром на осу Z раван нули.

Хоћемо ли да одредимо реакције осе то ћемо поступити на овај начин: Оса Z нека буде причвршћена у тачкама O и O'; реакција тачке O нека буде сила Q а реакција тачке O'



сила Q'. Њихове компоненте нека буду $Q_x\ Q_y\ Q_z$ и $Q'_x\ Q'_y\ Q'_z$. Спољне силе нека дају резултанту R чије су компоненте $R_x\ R_y\ R_z$ и спрег који је представљен осом $\mathfrak{M}$ чије су компоненте $M_x\ M_y\ M_z$. Ми можемо према пређашњем такође казати да су $M_x\ M_y\ M_z$ статички моменти спољних сила обзиром на осе X, Y, Z или компоненте статичног момента спољних сила обзиром на редукциону тачку O. За равнотежу је потребно да је збир компонената свих сила и њихових статичких момената обзиром на осе X, Y, Z раван нули. У правцу X дејствују компоненте $R_x\ Q_x$ и Q'_x, тако добијамо ову једначину

$$R_x + Q_x + Q'_x = 0$$

а на исти начин

$$R_y + Q_y + Q'_y = 0$$
$$R_z + Q_z + Q'_z = 0$$

Статички моменат спољне силе обзиром на осу X представљен је величином M_x; сила Q не даје статичког момента обзиром на осу X јер пролази кроз ту осу; статички моменат силе Q' обзиром на осу X једнак је $Q'_y h$; позитиван је јер ако се гледа са позитивне стране осе X заокреће око те осе у позитивном смислу. Зато мора постојати једначина

$$M_x + h\cdot Q'_y = 0 \qquad 2)$$

На исти начин добијамо за осу Y ову једначину

$$M_y - h\cdot Q'_x = 0 \qquad 2)$$

а за осу Z једначину

$$M_z = 0 \qquad 2)$$

Казали смо да величине $Q_x\ Q_y\ Q_z\ Q'_x\ Q'_y\ Q'_z$ можемо произвољно одабрати, па ће зато горње једначине равнотеже 1) и 2) моћи бити задовољене увек онда ако је

$$M_z = 0$$

јер величине Q немају утицаја. Па једначина

$$M_z = 0$$

је у ствари услов равнотеже. Остале величине можемо израчунати из осталих пет једначина, но како имамо шест непознатих а пет једначина, то нећемо моћи одредити свих шест непознатих, али је за четири величине проблем ипак једнозначно одређен, јер величина

$$Q'_z + Q_z = Z$$

игра улогу једне непознате. Ставимо ли ту величину у трећу од једначина 1) имамо пет једначина са пет непознатих па можемо одредити Q_x, Q_y, Q'_x, Q'_y и Z. Како се сила Z дели у две компоненте од којих једна дејствује на тачку O а друга на тачку O', то се за апсолутно круто тело не може одредити. За тела у природи одређују се те две компоненте правилима науке о еластицитету.

3° <u>Посматрано тело може да ротира око осе Z а сем тога може та оса да клизи у својој правој.</u>

Онда је, кад не би наступала ротација око осе Z, довољан услов

$$M_z = 0$$

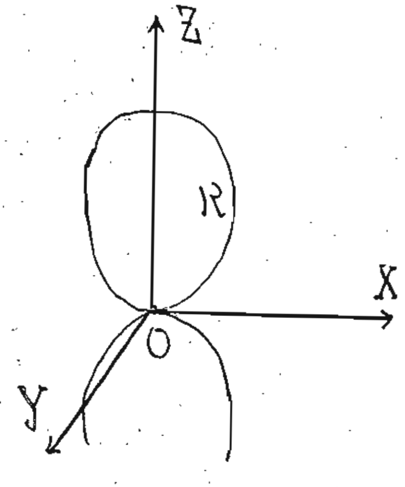
а кад се не би тело померало транслаторно у правцу Z довољан услов

$$R_z = 0$$

- Ово су дакле услови равнотеже.

4° <u>Тело се ослања у једној својој тачки на једну површину.</u>

Та тачка нека буде O. Равнина која тангира посматрано тело K а због тога уједно и подлогу у тачки O нека буде равнина XY тако да је оса Z нормална на подлогу, па зато има реакција подлоге трења пр-



кашњем правац осе Z. Да тело K не ротира око тачке O потребно је да спољне силе које на њега дејствују дају резултанту која пролази кроз тачку O т.ј. да буде

$$M_x = 0$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = 0$$

Но да та резултанта R може бити поништена од реакције подлоге потребно је да пада у правој Z т.ј. да буде

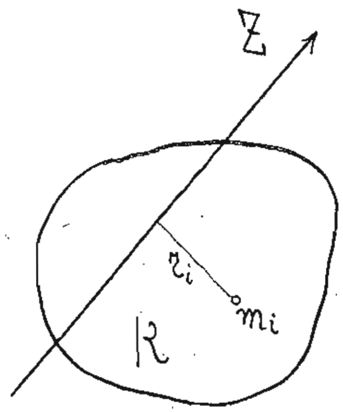
$$R_x = 0$$
$$R_y = 0$$

-То су пет услова равнотеже. Сем тога мора резултанта спољних сила бити наперена према подлози т.ј. у нашем случају мора R_z бити негативно.

Динамика крутога тела.

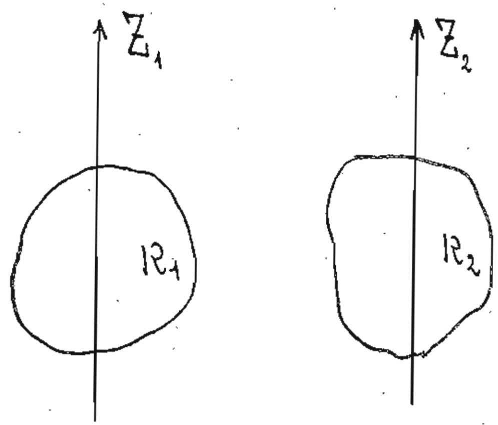
Наука о моментима инерције.

Проучавамо ли кретање једног крутог тела K, то је често пута врло важно израз који се добија ако материјалне делиће из којих се тело састоји $m_1 m_2 m_3 \dots$ помножимо са квадратом њихових одстојања од једне са телом инваријабилно везане осе Z па све те чланове саберемо. Тај израз, који има дакле облик



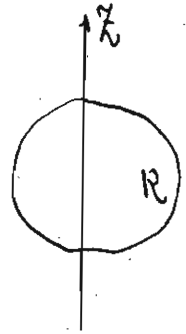
$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

зовемо <u>моментом инерције</u> посматраног тела обзиром на осу Z. Ако се тело не састоји из дискретних елемената него ако га сматрамо за континуум горња сума добија облик интеграла. Динамичко значење овог израза упознаћемо тек касније, а сада ћемо само да поменемо да су н. пр. два тела K_1 и K_2 која ротирају око оса Z_1 и Z_2 динамички еквивалентна ако су њихови моменти инерције обзиром на те осе међу собом једнаки.



Није далеко потребно да су масе обају тела једнаке, него је главно да су те масе око оса Z_1 и Z_2 тако распоређене да дају исте моменте инерције. Онда ће исти систем спољних сила изазвати у оба случаја ротације истога карактера.

Уочимо једно тело K. Моменат инерције тога тела обзиром на осу Z нека буде

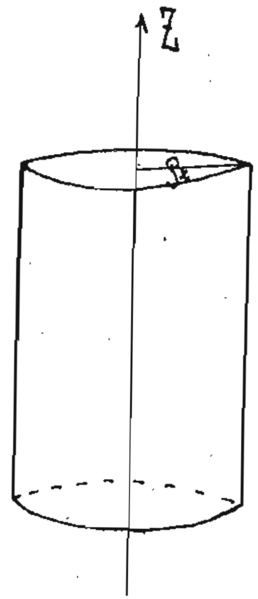


$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

а маса тога тела нека буде

$$M = \sum_i m_i$$

Замислимо сада ту масу распоређену по омотачу једнога цилиндра тако да је моменат инерције тога цилиндра обзиром на његову осу опет једнак J_z и онда ћемо радијус тога цилиндра ρ_z одредити на овај начин: Моменат инерције тога цилиндра једнак је



$$J_z = \sum_i m_i \rho_z^2$$

а како је ρ_z за све елементе константно то је

$$I_z = \rho_z^2 \sum_i m_i$$

Ми захтевамо да маса поразмештена по цилиндру буде једнака M т.ј.

$$\sum_i m_i = M$$

па је зато

$$I_z = M\rho_z^2$$

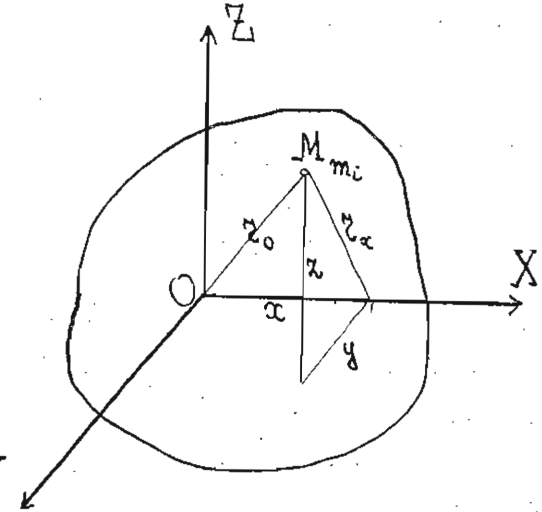
Како нам је I_z и M задато, то је ρ_z одређено изразом

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

Ову величину ρ_z зовемо <u>радијусом инерције</u> тела K обзиром на осу Z. Ова величина игра важну улогу у проблемима динамике.

Моменат инерције обзиром на координатне осе.

Координате произвољне тачке M масе m_i посматраног тела обзиром на ортогонални координатни систем, обзиром на осе X, Y, Z, нека буду: x, y, z. Онда је квадрат одстојања r_x те тачке од осе x једнак



$$r_x^2 = y^2 + z^2$$

па је зато моменат инерције посматраног тела обзиром на осу x једнак

$$I_x = \sum_i m_i r_x^2 = \sum_i m_i (y^2 + z^2)$$

На исти начин добијамо

$$I_y=\sum_i m_i(z^2+x^2)$$

$$I_z=\sum_i m_i(x^2+y^2)$$

Означимо одстојање произвољне тачке М од тачке О са r_0, то називамо израз

$$I_0=\sum_i m_i r_0^2$$

поларним моментом посматраног тела обзиром на тачку О. Како је

$$r_0^2=x^2+y^2+z^2$$

то је

$$I_0=\sum_i m_i(x^2+y^2+z^2)$$

Из прећашњих једначина следује

$$I_x+I_y+I_z=\sum_i 2m_i(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=2\sum m_i(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=2I_0$$

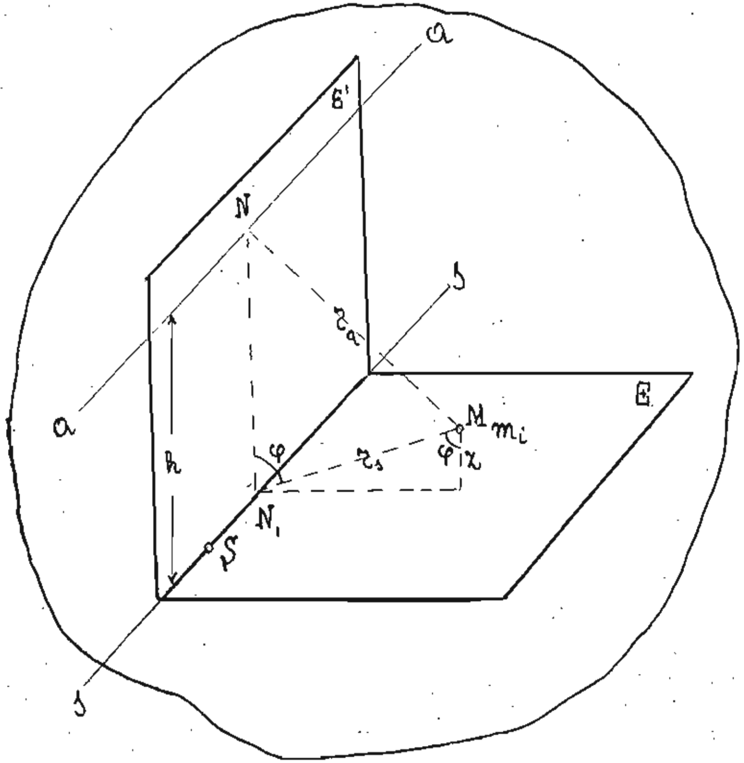
или

$$I_0=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)$$

Моменте инерције називају често пута и моментима тирације (или жирације), а такође и квадратичним аксијалним моментима за разлику од квадратичних планарних момената које добијамо ако елементе једнога тела помножимо са квадратима одстојања тога елемента од једне равнине која је инваријабилно везана са телом па све те продукте саберемо.

Штајнерово правило.

Узмимо једно тело К. Тежиште тога тела нека буде S. Моменат инерције тога тела обзиром на једну произвољну осу аа нека буде J_a. Повуцимо кроз тежиште S једну осу ss паралелну оси аа. Моменат инерције посматраног тела обзиром на ту осу ss нека буде J_s. Одстојање обеју оса нека буде h.



Питајмо какав релација постоји између момената инерције J_a и J_s. Узмимо једну произвољну тачку M посматраног тела. Кроз осу ss положимо равнину ε која стоји нормално на равнини ε' што пролази кроз обе осе. Одстојање тачке M од равнине ε нека буде z; њено одстојање од осе ss нека буде r_s, а од осе аа нека буде r_a. Координата ζ тежишта т.ј. одстојање тежишта од равнине ε дато је према пређашњем једначином

$$\zeta = \frac{\Sigma m_i z}{\Sigma m_i}$$

но како је то одстојање равно нули јер тачка S лежи у равнини ε, то из тога следује да је

$$\Sigma m_i z = 0$$

Из троугла MNN_1 следује по Карнотовој теореми

$$r_a^2 = r_s^2 + h^2 - 2hr_s\cos\varphi$$

но како је

$$r_s\cos\varphi = z$$

то добијамо једначину

$$r_a^2 = r_s^2 + h^2 - 2hz$$

Помножимо ову једначину са масом m_i посматране тачке па замислимо да смо такове једначине написали за све тачке посматраног тела па сабрали, то добијамо ову једначину

$$\sum m_i r_a^2 = \sum m_i r_s^2 + \sum m_i h^2 - \sum 2 m_i h z$$

но како је

$$\sum m_i r_a^2 = J_a$$

$$\sum m_i r_s^2 = J_s$$

то добијамо ову једначину

$$J_a = J_s + h^2 \sum m_i - 2h \sum m_i z$$

Последњи члан ове једначине ишчезава према пређашњем, а како збир

$$\sum m_i = M$$

представља целокупну масу посматраног тела, то добијамо једначину

$$J_a = J_s + Mh^2$$

која изражава Штајнерову теорему: Моменат инерције J_a једнога тела обзиром на произвољну осу aa једнак је моменту инерције J_s тога тела обзиром на осу ss која пролази кроз тежиште тога тела а паралелна је првој оси увећаном са продуктом масе тога тела и квадрата одстојања обеју оса.

Овај други члан т.ј. продукат Mh^2 једнак је таковоме моменту инерције обзиром на осу aa што би га имала целокупна маса тела концентрисана у тежишту S.

Имали смо једначину

$$J_s = M\rho_s^2$$

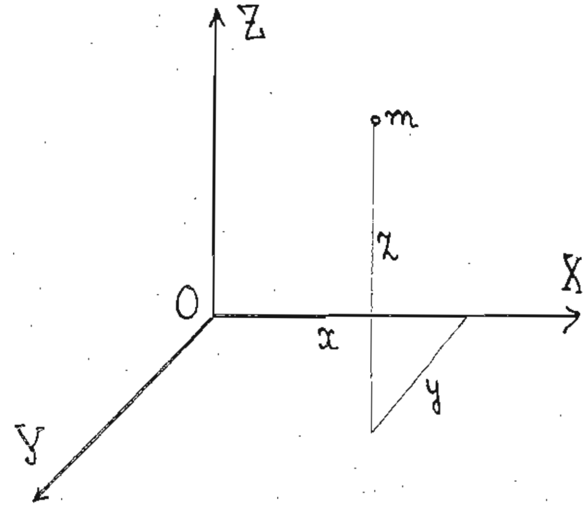
где ρ_s означава радијус инерције обзиром на осу ss, па зато можемо пређашњој једначини дати и овај облик

$$I_a = M(\rho_s^2 + h^2)$$

Како је h^2 увек позитивно то из ове једначине следује да је моменат инерције обзиром на све могуће паралелне осе (њој) најмањи за ону осу која пролази кроз тежиште. Из ове једначине следује такође да свима осама које су генератрисе цилиндера чија оса пролази кроз тежиште одговарају исти моменти инерције.

Моменти девијације.

Везано са телом инваријабилно ортогонални систем X, Y, Z. Координате произвољне тачке тога тела нека буду x, y, z; маса те тачке нека буде m. Онда називамо изразе

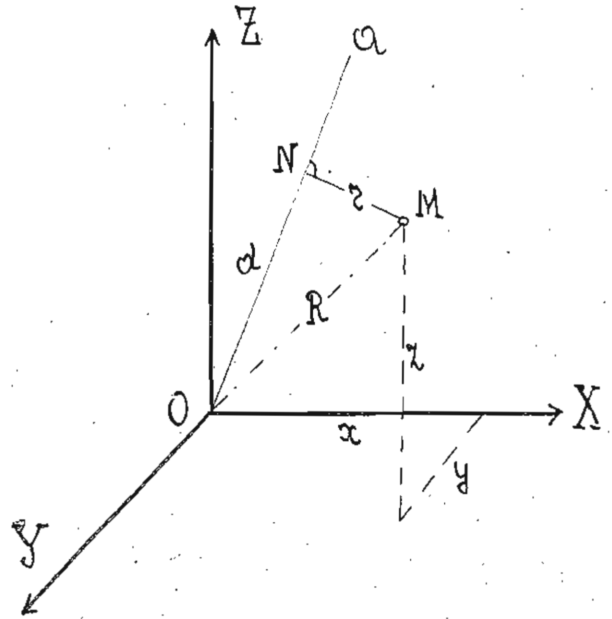


$$D_x = \sum myz$$
$$D_y = \sum mzx$$
$$D_z = \sum mxy$$

моментима девијације посматраног тела обзиром на координатни систем. Са I_x I_y I_z означили смо моменте инерције тога тела обзиром на координатне осе. Величине $J_x\, J_y\, J_z\, \mathcal{L}_x\, \mathcal{L}_y\, \mathcal{L}_z$ називамо шест константа посматраног тела, јер кад су нам те величине познате онда можемо израчунати моменте инерције тога тела обзиром на сваку произвољну осу као што ћемо то да докажемо.

Елипсоид инерције.

Нека су задани моменти инерције $J_x\, J_y\, J_z$ посматраног тела обзиром на координатне осе, исто тако и девијациони моменти $\mathcal{L}_x\, \mathcal{L}_y\, \mathcal{L}_z$; нека се нађе моменат инерције посматраног тела обзиром на једну произвољну осу a која пролази кроз почетну тачку координатног система и затвара са осама углове α, β и γ. Као



што је познато постоји између тих

величина α, β и γ ова једначина

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad 1)$$

Моменат инерције посматраног тела обзиром на осу a биће одређен једначином

$$J_a = \sum m r^2$$

где m означава масу појединих елемената тога тела а r њихово одстојање од осе a. Ту величину J_a треба изразити помоћу шест заданих величина и помоћу углова α, β и γ. Из слике следује да је

$$r^2 = R^2 - d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - d^2$$

такође је

$$d = R\cos(a, R)$$

где (a, R) означава угао што га затварају праве a и R. Тај угао једнак је према правилима Аналитичке Геометрије

$$\cos(a,R) = \cos\alpha\cos(x,R) + \cos\beta\cos(y,R) + \cos\gamma\cos(z,R)$$

но како је

$$\cos(x,R) = \frac{x}{R}$$

$$\cos(y,R) = \frac{y}{R}$$

$$\cos(z,R) = \frac{z}{R}$$

то је

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

Одатле је

$$d^2 = x^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\beta + z^2\cos^2\gamma +$$
$$+ 2xy\cos\alpha\cos\beta + 2yz\cos\beta\cos\gamma + 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

Зато је

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma -$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha =$$
$$= x^2\underbrace{(1-\cos^2\alpha)}_{\cos^2\beta+\cos^2\gamma} + y^2\underbrace{(1-\cos^2\beta)}_{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha} + z^2\underbrace{(1-\cos^2\gamma)}_{\cos^2\alpha+\cos^2\beta} -$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

Зато је

$$r^2 = (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (z^2+x^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma -$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

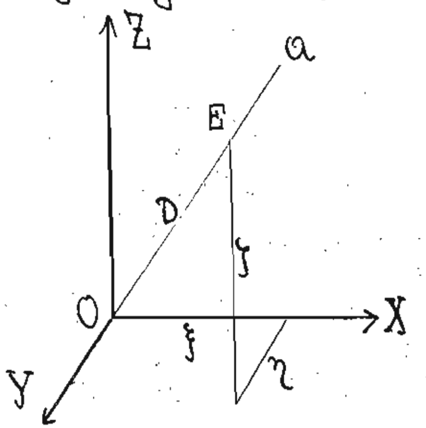
Замислимо да смо овакве једначине написали за све елементе посматраног тела, да смо помножили сваку од тих једначина са масом посматраног елемента па сабрали; то добијамо ову једначину

$$\Sigma m r^2 = \cos^2\alpha\, \Sigma m(y^2+z^2) + \cos^2\beta\, \Sigma m(z^2+x^2) + \cos^2\gamma\, \Sigma m(x^2+y^2) - 2\cos\alpha\cos\beta\, \Sigma mxy - 2\cos\beta\cos\gamma\, \Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\, \Sigma mzx$$

или

$$I_a = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2\mathfrak{D}_x\cos\alpha\cos\beta - 2\mathfrak{D}_y\cos\gamma\cos\alpha - 2\mathfrak{D}_z\cos\alpha\cos\beta \qquad 2)$$

Питајмо сада како ће се мењати израз I_a ако оса a буде мењала своју оријентацију у простору а пролазила као и досад кроз тачку O. Да добијемо јасну слику о зависности израза I_a од оријентације осе a замислимо да смо на уоченом положају осе a пренели дужину D која је инверзно пропорционална радиусу инерције ρ_a при чему је као што знамо



$$\rho_a = \sqrt{\frac{I_a}{M}}$$

Нека буде дакле

$$D = \frac{R^2}{\rho_a}$$

где је R^2 једна позитивна константа. Зато је

$$D = R^2\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{I_a}}$$

Ако се мења положај осе a, онда се мења и величина израза I_a, дакле и величина радиуса инерције ρ_a, па према томе и дужина D, дакле и положај тачке E на правој a. Питајмо на каквој површини лежи тачка E ако оса a мења свој положај. Ваља дакле да нађемо једну једначину између координата тачке E: ξ, η, ζ и заданих константа; та једначина биће једначина површине по којој се креће тачка E ако оса a мења свој положај.

Из слике следује

$$\xi = D\cos\alpha = K^2\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{I_a}}\cos\alpha$$

$$\eta = D\cos\beta = K^2\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{I_a}}\cos\beta$$

$$\zeta = D\cos\gamma = K^2\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{I_a}}\cos\gamma$$

Из ових једначина и једначине 2) ваља елиминисати углове α, β и γ, па ћемо добити тражену једначину између ξ, η и ζ и заданих шест констаната.
Из последњих једначина следује да је

$$\cos^2\alpha = \frac{I_a}{K^4 M}\xi^2$$

$$\cos^2\beta = \frac{I_a}{K^4 M}\eta^2$$

$$\cos^2\gamma = \frac{I_a}{K^4 M}\zeta^2$$

$$\cos\beta\cos\gamma = \frac{I_a}{K^4 M}\eta\zeta$$

$$\cos\gamma\cos\alpha = \frac{I_a}{K^4 M}\zeta\xi$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{I_a}{K^4 M}\xi\eta$$

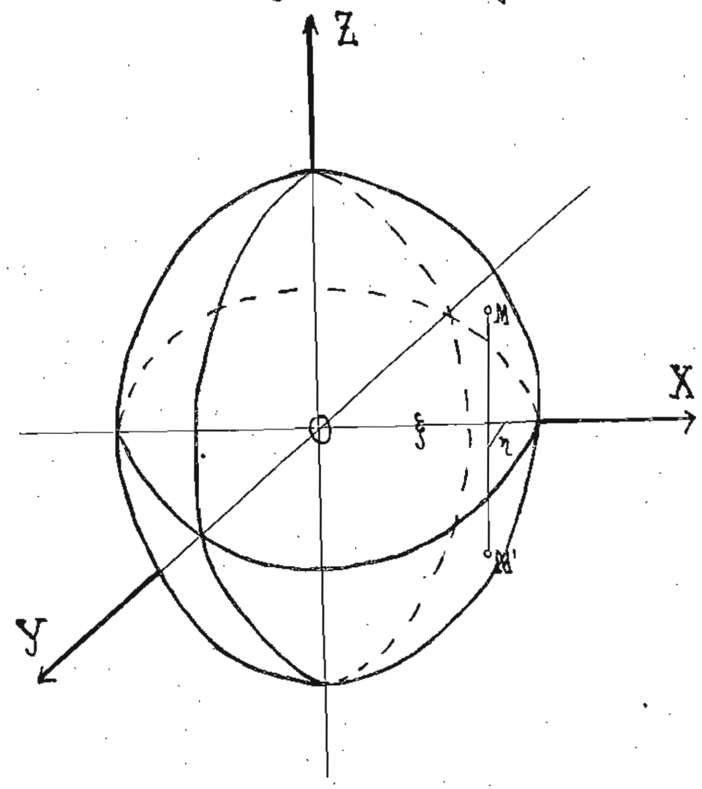
Ове вредности ваља ставити у једначину 2) па добијамо на тај начин

$$I_x\xi^2 + I_y\eta^2 + I_z\zeta^2 - 2L_x\eta\zeta - 2L_y\zeta\xi - 2L_z\xi\eta = K^4 M \qquad 3)$$

Ово је једначина тражене површине. Ова једначина је централно симетрична према тачки O јер ако ју задовољава једна извесна комбинација $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$, дакле једна тачка са тим координатама, онда ју задовољава и тачка са координатама $(-\xi_1\ -\eta_1\ -\zeta_1)$, јер када ставимо ове друге вредности у једначину 3) знак − не утиче ништа. Обе ове тачке $(\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1)$ и $(-\xi_1\ -\eta_1\ -\zeta_1)$ леже симетрично обзиром на тачку O. Одстојање тачке O од тачке E једнако је D. То одстојање не може бити бескрајно велико јер би онда моменат инерције I_a морао бити раван нули, а моменат инерције једног коначног тела обзиром на произвољну осу не може бити раван нули јер представља збир самих позитивних чланова, јер је маса елемента m увек позитивна а исто тако и квадрат одстојања. Из истога су узрока коефицијенти величина ξ^2, η^2, ζ^2 у једначини 3) увек позитивни.

Из свега овог следује да је површина другога реда представљена једначином 3) елипсоид. Тај елипсоид зове се <u>елипсоид инерције</u> посматраног тела обзиром на тачку O. Тај елипсоид има три осе нормалне једна на другу. Једна од њих представља максималан дијаметар за све равне пресеке који пролазе кроз њу; друга представља минимални дијаметар, а трећа је оса за неке пресеке максимум а за неке минимум. Помоћу Аналитичке Геометрије може се из једначине 3) одредити оријентација тих главних оса посматраног елипсоида у простору.

Замислимо да смо координатне осе тако заокренули да се подударају са главним осама елипсоида, које осе називамо такође <u>главним осама инерције</u> посматраног тела обзиром на тачку O. Онда свакој комбинацији $(\xi\eta)$ одговарају две тачке M и M' које су симетричне према равнини XY, дакле одговарају две величине ζ и $-\zeta$ а то значи да ако



је оса Z главна оса инерције, да онда једначина елипсоида мора бити чисто квадратична обзиром на осу Z, па дакле ако је оса Z главна оса инерције величине $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_y$ ишчезавају т.ј.

$$\mathcal{L}_x = 0$$
$$\mathcal{L}_y = 0$$

На исти начин можемо доказати да ако је X једна од главних оса инерције, онда је елипсоид симетричан обзиром на равнину YZ, па зато једначина 3) мора бити чисто квадратична обзиром на ξ. Критеријум да је оса X главна оса инерције је према томе

$$\mathcal{L}_y = 0$$
$$\mathcal{L}_z = 0$$

а критеријум да је оса Y главна оса инерције је на исти начин

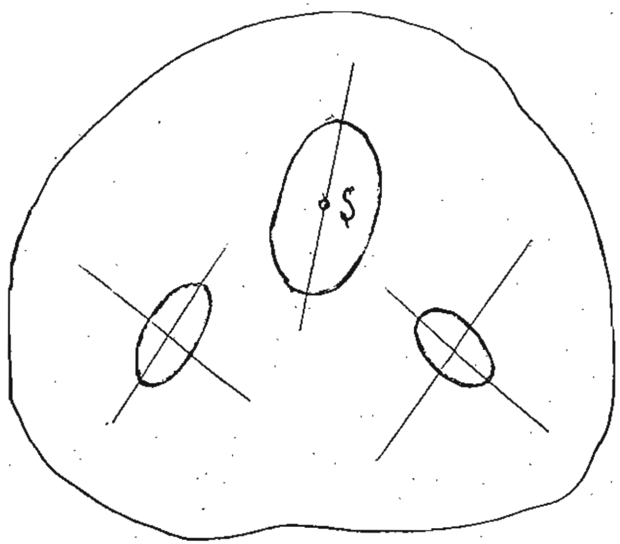
$$\mathcal{L}_z = 0$$
$$\mathcal{L}_x = 0$$

Ако смо тако заокренули координатне осе, онда једначине 2) и 3) добијају ове облике

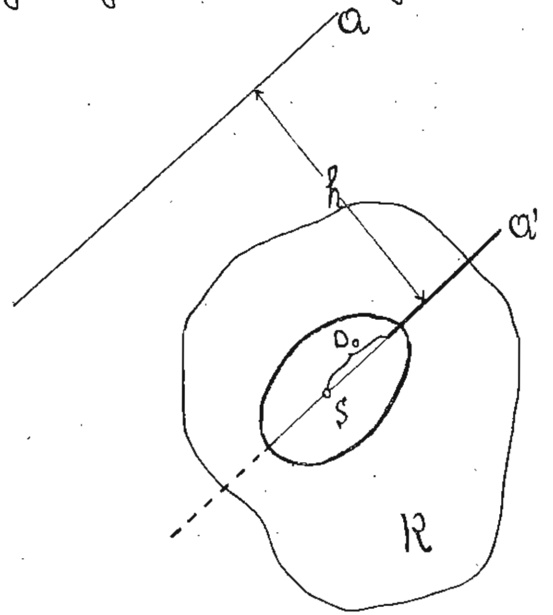
$$J_a = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma \qquad 2^*)$$

$$J_x \xi^2 + J_y \eta^2 + J_z \zeta^2 = k^4 M \qquad 3^*)$$

За сваку тачку у телу можемо на тај начин конструисати елипсоид инерције. Ти елипсоиди биће у главном различити и различито оријентисани. Они ће бити тим већи што су моменти инерције обзиром на уочену тачку мањи, па како смо показали да су од свих паралелних оса моменти инерције обзиром на ону осу која иде кроз тежиште најмањи, то ће елипсоид који одговара тежишту бити највећи. Тај елипсоид зовемо <u>централним елипсоидом</u>. Ако нам је познат централни елипсоид и-



нерције, онда можемо одредити моменат инерције за сваку произвољну осу a на овај начин: Положимо кроз тежиште S једну осу a' која је паралелна заданој оси a. Та оса a' нека исеца из елипсоида радиус D_0. Онда је према пређашњем



$$D_0 = R^2 \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{J_{a'}}}$$

где $J_{a'}$ означава моменат инерције посматраног тела R обзиром на осу a'. Зато је величина $J_{a'}$ одређена.

$$J_{a'}^2 = R^4 \frac{M}{D_0^2}$$

Доказали смо Штајнерово правило да је моменат инерције обзиром на осу a J_a једнак

$$J_a = J_{a'} + Mh^2$$

где h означава одстојање обеју оса a и a'. Зато је

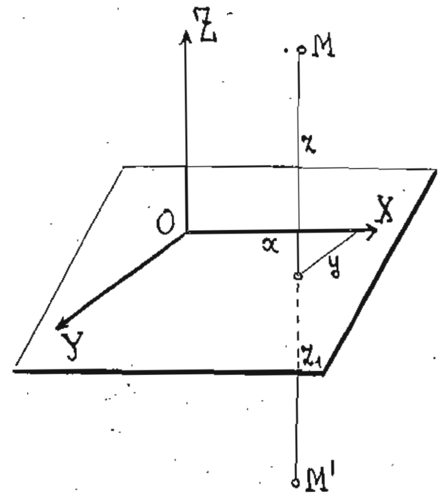
$$J_a = M\left(h^2 + \frac{R^4}{D_0^2}\right)$$

На тај начин смо одредили моменат инерције обзиром на произвољну осу a.

Ако су моменти инерције обзиром на две нормалне осе међусобно једнаки, онда прелази елипсоид инерције у ротациони елипсоид, па су моменти инерције обзиром на све дијаметре његовога екватора међусобно једнаки. Ако су моменти инерције обзиром на три међусобно нормалне осе једнаки, онда прелази елипсоид инерције у куглу. Тако су н. пр. централни елипсоиди коцке, октаедра, пентагондодекаедра кугле; што следује из тога што можемо кроз тежиште тих тела положити три нормалне осе обзиром на које је материја једнако распоређена.

Примедба. Ротациони елипсоид нашао је већ Cauchy 1824 године, али је његову важност за проблеме динамике увидео и доказао тек Poinsot, па се зато тај елипсоид и зове обично Poinsot-ов елипсоид а неки аутори називају и Cauchy-Poinsot-ов елипсоид. И Binet-овим планарним квадратичним моментима одговара један елипсоид. Ми смо казали да Binet-ов моменат инерције добијамо ако елементе посматраног тела помножимо са квадратом одстојања од једне равнине. Пренесемо ли на нормалу те равнине једну дужину која је инверзно пропорционална Binet-овом моменту, па конструишемо ли на тај начин све дужине које одговарају свима равнинама које иду кроз исту тачку O, то добијамо опет један елипсоид. Место да преносимо те дужине тако да су инверзно пропорционалне него их одабирамо директно пропорционалне моментима, то место Poinsot-овог елипсоида добијамо MacCullagh-ов, а место Binet-овог Culman-ов, но од свију елипсоида најважнији је Poinsot-ов.

Ако је материја посматраног тела симетрично распоређена обзиром на једну равнину тако да симетричним тачкама одговарају једнаке масе, то је свака нормала те равнине централна оса посматраног тела обзиром на продорну тачку те нормале у равнини. Доказ: Одаберимо ту равнину за равнину XY. Због симетрије одговара свакој тачки M једна тачка M' која има исто x и y, исто z но противног знака.



И масе обеју тачака су једнаке. Зато за све две тачке M и M' постоји једначина

$$mxz + mxz_1 = 0$$

и једначина

$$myz + myz_1 = 0$$

јер су масе једнаке, величине x и y такође међусобом једнаке, а

$$z_1 = -z$$

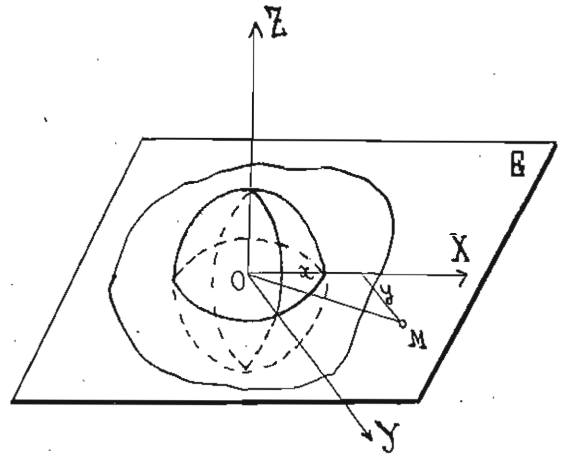
Овакве једначине можемо написати за све симетричне парове тачака, па ако их саберемо, то добијамо једначине

$$\Sigma mxz = 0$$

$$\Sigma myz = 0$$

а ове су једначине, као што смо већ показали, критеријум да је оса Z главна оса инерције.

Ако посматрамо тело има облик плоче т.ј. ако му је једна димензија бескрајно малена, онда је равнина E која иде кроз ту плочу равнина симетрије, па је зато свака нормала те плоче главна оса инерције за произвољну тачку, а то значи да остале две осе леже у равнини E. Равнина E подудара се према томе са једним



главним пресеком елипсоида инерције посматране плоче. Нацртани елипсоид је главни елипсоид инерције за тачку O. У овоме случају важе још и следеће релације: означимо ли координате произвољне тачке плоче M са (x, y) то су моменти инерције обзиром на координатне осе представљени изразима

$$J_x = \Sigma my^2$$

$$J_y = \Sigma mx^2$$

$$I_z = \sum m(x^2+y^2)$$

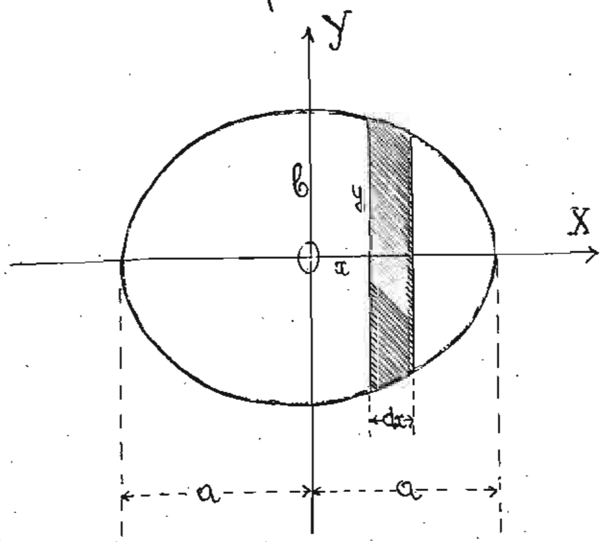
Зато је у овом случају

$$I_z = I_x + I_y$$

Примери:

1° Моменат инерције елиптичне плоче.

Израчунајмо моменат инерције елиптичне плоче обзиром на њене главне осе и на осу која стоји на њима нормално. Елиптична плоча нека има густину ρ, па претпоставимо да је хомогена т.ј. да је ρ константно. Онда ће тежиште те плоче пасти у центар елипсе, па ће обе мале осе те елипсе и



трећа оса која на њима нормално стоји бити главне осе централног елипсоида. Једначина елипсе која ограничава посматрану плочу је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a и b су полуосе елипсине. Раставимо елипсу у сасме уске траке паралелне оси Y. То је моменат инерције такве једне траке обзиром на осу Y једнак

$$dI_y = \rho\, 2y\, dx\, x^2$$

па је зато моменат инерције читаве плоче једнак

$$I_y = \int_{-a}^{+a} dI_y = 2\int_0^a dI_y$$

дакле

$$I_y = 4\rho\int_0^a y x^2 dx$$

Из једначине елипсе следује да је

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

па је дакле

$$I_y = 4\rho\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,x^2\,dx$$

Ставимо

$$x = a\sin\varphi$$

одакле је

$$dx = a\cos\varphi\,d\varphi$$

па је

$$I_y = \rho\frac{ba^4}{a}\int_0^a 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

Како је

$$4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = (2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = (\sin 2\varphi)^2$$

а према обрасцу

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

биће

$$(\sin 2\varphi)^2 = \frac{1-\cos 4\varphi}{2}$$

па је

$$I_y = \rho b a^3\int_0^a \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi$$

Из једначине супституције следује да је

за $x = 0$ $\varphi = 0$

за $x = a$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

па је зато

$$I_y = ba^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{8}\,d(4\varphi) =$$

$$= ba^3\rho\left\{\frac{4\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{8}\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= ba^3\rho\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\pi\right\} =$$

$$= \frac{\pi b a^3\rho}{4}$$

или

$$I_y = ab\frac{\pi}{4}\rho a^2$$

Површина елипсе једнака је

$$ab\pi$$

а маса њена

$$ab\pi\rho$$

па је зато

$$I_y = \frac{Ma^2}{4}$$

На исти начин добијамо да је

$$I_x = \frac{Mb^2}{4}$$

а I_z је једнако према предашњем

$$I_z = I_x + I_y$$

дакле

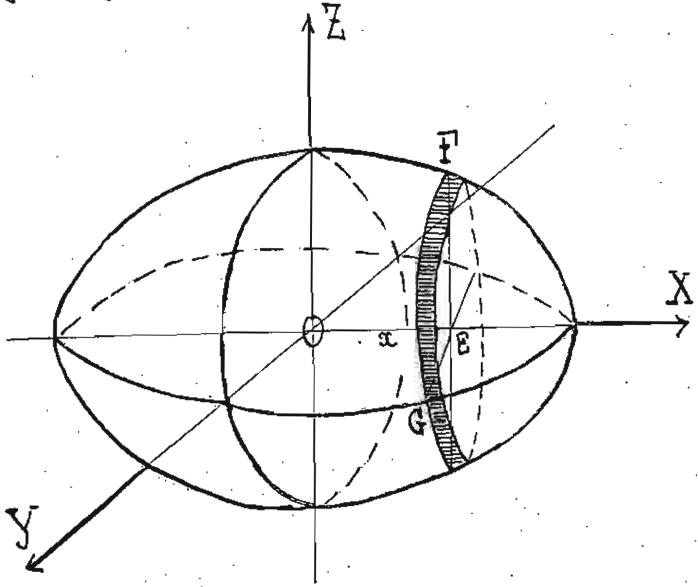
$$I_z = M\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{\pi}{4}\rho ab(a^2+b^2)$$

2° Моменат инерције хомогеног елипсоида обзиром на његове главне осе.

Једначина елипсоида је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad 1)$$

где су a, b и c његове полуосе. Тражимо његов моменат инерције обзиром на осу X. Расецимо елипсоид у бесконачно танке плоче



нормално на осу X. Маса те плоче једнака је

$$\pi\cdot EF\cdot EG\cdot dx\cdot\rho$$

зато је моменат инерције те плоче обзиром на осу X која стоји нормално на њу и која према томе одговара предашњем моменту I_z једнак је

$$dI_x = \pi\cdot EF\cdot EG\cdot dx\cdot\rho\,\frac{EF^2+EG^2}{4}$$

Да би се интеграција могла извести вала величине EF и EG изразити као функције од x. Величина EF је апликата пресека елипсоида са равнином XZ. Једначину тога пресека (који је елипса) добијамо ако у једначини 1) ставимо $y=0$, дакле

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

одакле је

$$EF=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Величина EG је ордината пресека елипсоида са равнином XY. Једначи-

На тога пресека је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

па је зато

$$\mathcal{E}g=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Зато је

$$dI_x=\pi\rho\,\frac{bc}{a^2}(a^2-x^2)\,\frac{(c^2+b^2)(a^2-x^2)}{4a^2}\,dx$$

одакле

$$I_x=2\pi\rho\,\frac{bc(c^2+b^2)}{4a^4}\int_0^a(a^2-x^2)^2dx=$$

$$=\pi\rho\,\frac{bc(c^2+b^2)}{2a^4}\int_0^a(a^4-2a^2x^2+x^4)\,dx=$$

$$=\pi\rho\,\frac{bc(c^2+b^2)}{2a^4}\left(a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{a^5}{5}\right)$$

дакле

$$I_x=\frac{4\pi\rho}{3}\,\frac{abc(c^2+b^2)}{5}$$

Запремина елипсоида једнака је

$$\frac{4}{3}abc\pi$$

а маса његова

$$M=\frac{4}{3}abc\pi\rho$$

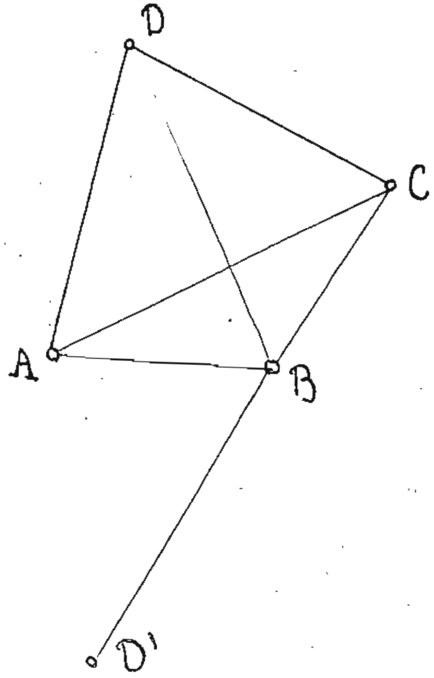
Зато је

$$I_x=M\,\frac{c^2+b^2}{5}$$

Цикличком пермутацијом добијају се моменти инерције обзиром на остале осе.

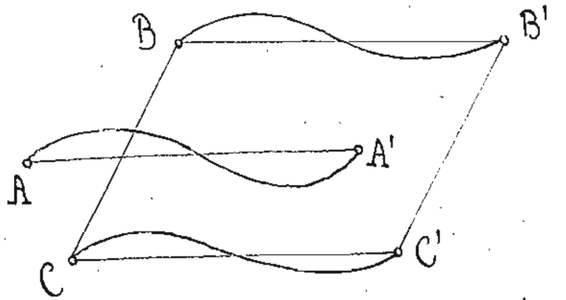
Неки елементи кинематике крутих тела.

Материјалне тачке једнога крутог тела везане су инваријабилно једна на другу, па ће зато кретање таквога тела условљавати извесне релације између путања њихових елемената. Пре свега је јасно да ће кретање посматраног тела бити потпуно одређено ако нам буду била позната кретања његових трију тачака које не леже у истој правој. Узмимо да познајемо кретање трију тачака A, B и C и према томе у сваком моменту њихов положај. Онда нам је и положај једне произвољне тачке D посматраног тела познат јер су одстојања те тачке AD, BD и CD од заданих тачака остала непромењена а тим одстојањима одређена је и тачка D. Истина тим одстојањима одговара још једна тачка D' која лежи симетрично према првој обзиром на раван ABC, али како се свака тачка при континуирном кретању тела може помаћи само у своје суседне положаје, то ће се моћи лагано одредити на којој страни равни ABC лежи тачка D.



Транслаторно или прогресивно кретање крутог тела.

Креће ли се круто тело тако да све тачке његове описују при томе кретању паралелне и континуирне путање, онда такво кретање називамо *транслаторно*.



Тачке A, B, C посматраног тела описују паралелне и континуирне путање т.ј.

$$AA' \parallel BB' \parallel CC'$$

и осим тога

$$AA' = BB' = CC'$$

Имамо да докажемо да је такво кретање могуће. Одаберимо две произвољне тачке тела B и C; онда је због горњих услова права BB' паралелна правој CC', а те су две праве опет због тих услова међусобно једнаке. Зато је четвороугаоник $BB'C'C$ паралелограм, па је због тога

$$BC = B'C'$$

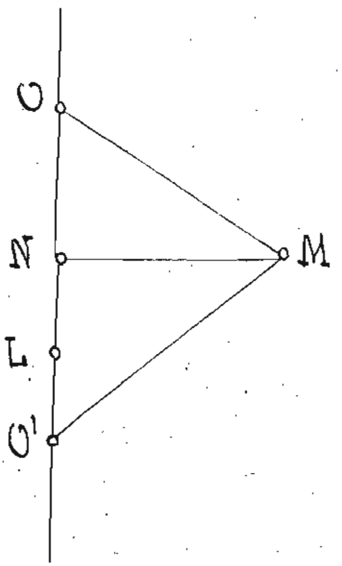
Ова једначина казује да се одстојање тачака B и C није за време кретања променило. То се може доказати за све тачке па је зато то кретање могуће. Како је

$$BC \parallel B'C'$$

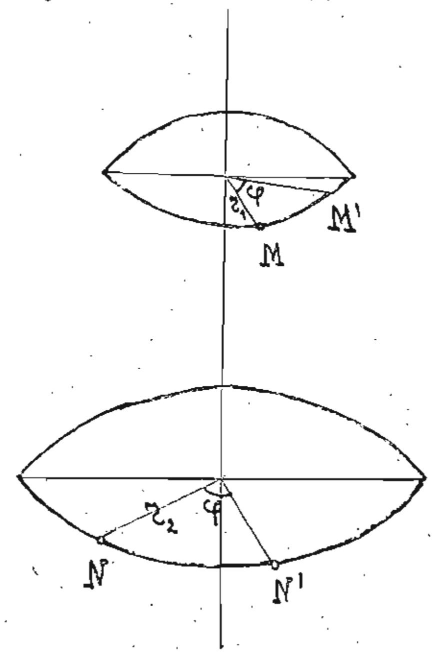
то можемо транслаторним кретањем назвати оно кретање код којега тело за време свога кретања остаје непрестано паралелно своме почетном положају.

Ротационо кретање.

Креће ли се посматрано круто тело тако да за време читавог кретања две од његових тачака не мењају свој положај, онда је последица тога да ће све тачке које леже на правој која спаја те две тачке O и O' остати такође непомичне, јер одстојања OL и $O'L$ произвољне тачке L те праве остају, јер је тело круто, непромењена, а то је само онда могуће ако и тачка L не мења свој положај. Праву



OO' називамо <u>осом ротације</u>. Како су даље одстојања OM и $O'M$ једне произвољне тачке M посматраног тела инваријабилна, то је и троугао $OO'M$ непроменљив, па ће зато и одстојање NM тачке M од осе OO' остати за време читавог кретања непромењено. Тачка M описиваће према томе један круг којега раван стоји нормално на оси ротације и којега центар пада у осу ротације. Ово важи и за сваку другу тачку посматраног крутог тела, па ће и тачка N описивати један такав круг. Одстојања r_1 и r_2 посматраних тачака зовемо <u>радиус-векто-</u>



рина. Нека тачка M опише у произвољном времену t угао φ, то ће и тачка N у истом том времену описати исти тај угао φ, јер се одстојање тачака M и N не мења за време кретања, а то је само онда могуће ако се обе тачке помере за исти угао. Од тачке до тачке мења се према томе r, а од времена до времена угао φ. Пут што га тачка M у времену t превалила једнак је

$$s = r_1 \varphi$$

па како је r_1 независно од времена то је брзина v мобилне тачке једнака

$$v = r_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

или ако означимо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

и назовемо угловном брзином, то је

$$v = r_1 \omega$$

Казали смо да су углови φ за које се померају тачке посматраног тела у истом интервалу времена једнаки. Зато ће ω бити у узетом моменту времена једнак за све тачке посматраног тела, па ће брзина v_2 тачке N бити

$$v_2 = r_2 \omega$$

што следује из тога што је пут s_2 тачке N у времену t једнак

$$s_2 = r_2 \varphi$$

па се диференцирањем добија предња једначина.

Акцелерација p мобилне тачке једнака је

$$p = \frac{dv}{dt} = r_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Величину

$$\gamma = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

називамо угловном акцелерацијом, па је зато

$$p = r_1 \gamma$$

а тангенцијална сила P_t која утиче на мобилну тачку M које маса

Нека буде m једнако је

$$P_t = m\frac{dv}{dt} = mr_1\gamma$$

Из истих разлога као и пре је у једном уоченом моменту времена γ за све тачке тела исто.

Ако је угловна брзина ω константна, онда је γ равно нули, па ротацију називамо униформном. Ако је γ позитивно онда је ротација убрзана, а ако је негативно она је успорена.

D'Alembert-ов принцип

Посматрајмо кретање једног произвољног система материјалних тачака. Тај систем може бити једно круто тело али не мора нео се може састојати и из једног читавог система крутих тела везаних у појединим тачкама један на други, а могу поједини делови тога система бити и слободни. Уочимо кретање једне тачке тога система, па ће та тачка у уоченом моменту имати једну извесну акцелерацију g. Ако су координате те тачке (x, y, z), онда је та акцелерација представљена векторским збиром

$$g = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

Заграде казују да се компоненте имају сабрати векторски. Ту једначину могли смо написати и у овом облику

$$g = \frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k$$

где i, j и k означују јединичне векторе у правцима координатних оса. На ту посматрану тачку дејствују неке од спољних сила које утичу на посматрани систем. Резултанта тих спољних сила нека буде F. Сем тога утичу на посматрану тачку и неке од интерних сила посматраног система т.ј. силе које дејствују између посматране тачке система и оних тачака са којима је та тачка у вези. Резултанта тих интерних сила нека буде f. Мобилна тачка изводи, као што смо казали акцелерацију g па ако њену масу означимо са m, то значи да се она тако креће као кад би на њу дејствовала сила mg. Ту силу називамо ефективном силом. На посматрану тачку дејствовале су силе F и f, а она изводи кретање као кад би на њу дејствовала сила mg. Значи да ефективна сила мора бити резултанта сила F и f да бисмо добили посматрано кретање, дакле

$$F + f = mg$$

или

$$F + f + (-mg) = 0$$

Горња једначина казује да се спољна сила F, интерна сила f и негативно узета ефективна сила mg држе у равнотежи. То важи за сваку тачку система, па напишемо ли овакове једначине за сваку тачку па саберемо, то добијамо ову једначину

$$\Sigma \mathcal{F} + \Sigma f + \Sigma(-m\gamma) = 0$$

или

$$\Sigma \mathcal{F} + \Sigma f = \Sigma m\gamma$$

На посматрани систем дејствовале су силе представљене сумом $\Sigma \mathcal{F}$, а изазвале су у ствари силе представљене сумом $\Sigma m\gamma$, па према D'Alembert-овом принципу морају та два система сила међу собом бити еквивалентна т.ј. посматрани систем тела променио је спољне силе у еквивалентни систем, а то значи није у ствари ни једну од спољних сила поништио нити какву нову силу створио. Зато је дакле

$$\Sigma \mathcal{F} = \Sigma m\gamma$$

па је због тога

$$\Sigma f = 0$$

-значи да су се интерне силе међу собом поништиле. Ово поништавање интерних сила следује у осталом и из познатог принципа акције и реакције јер су две и две од интерних сила увек једнаке па се поништавају.

D'Alembert-ов принцип можемо изразити и овако:

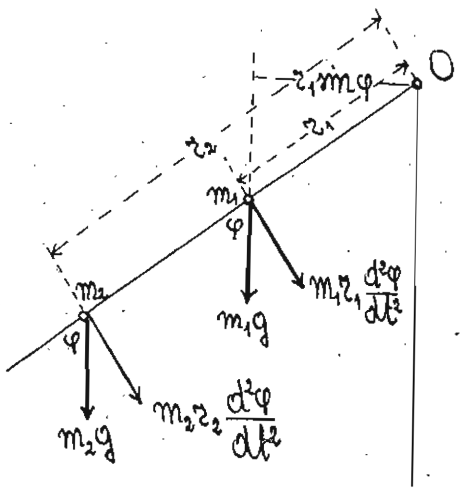
$$\Sigma \mathcal{F} + \Sigma(-m\gamma) = 0$$

т.ј. задане силе спољне и ефективне силе које су се појавиле негативно узете држе се у равнотежи.

Овај принцип своди према томе сваки проблем Динамике на проблем Статике.

Пример:

Две материјалне тачке масе m_1 и m_2 везане су међу собом полугом без тежине која се може окретати око тачке O. На те тачке дејствује од спољних сила њихова тежина, дакле на прву тачку сила m_1g а на другу m_2g. Померимо ту полугу из хоризонталног положаја у кос па ју пустимо саму себи. Онда ће та тачка осцилирати. Кад би свака од тачака m_1 и m_2 могла за себе да осцилира, онда би нам њихово кретање било познато јер би свака од њих сачињавала једно математско клатно, а њихово сло кретање већ испитали.



Диференцијалне једначине њиховог кретања биле би у том случају за прву тачку

$$r_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin\varphi = 0$$

а за другу

$$r_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin\varphi = 0$$

Тако би трајање осцилација прве тачке било дато, према пређашњем, једначином

$$T = \pi \sqrt{\frac{r_1}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cdots \right\}$$

а за другу тачку

$$T = \pi \sqrt{\frac{r_2}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cdots \right\}$$

где α означава амплитуду. Као што видимо из ових једначина периоде неби биле једнаке због неједнакости дужине клатна, па би краће клатно тј. маса m_1 осциловати брже него маса m_2. У нашем су случају обе масе међусобно везане па присиљене да извађају осцилације исте периоде. Зато ће се осцилације масе m_2 морати убрзати а масе m_1 успорити.

Испитајмо даље какво ће кретање извађати обе тачке када су међусобно спојене. У ученом моменту је брзина прве тачке v_1 једнака

$$v_1 = r_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

а брзина друге тачке

$$v_2 = r_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Обе тачке крећу се по кругу па су према томе ефективне силе које на њих дејствују ове: тангенцијална

$$P_t = m\frac{dv}{dt}$$

и центрипетална

$$P_\rho = m\frac{v^2}{\rho}$$

јер би само под утицајем тих сила мобилна тачка изводила кружно кретање са радиусом ρ и са брзином v. Зато су ефективне силе које на тачку m_1 дејствују ове

$$m\frac{dv_1}{dt} = m_1 r_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

и сила

$$m_1\frac{v_1^2}{r_1} = m_1 r_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Ефективне силе које дејствују на масу m_2 једнаке су на исти начин

$$m_2\frac{dv_2}{dt} = m_2 r_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$m_2\frac{v_2^2}{r_2} = m_2 r_2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Сем тога дејствују на посматране две тачке спољне силе

$$m_1 g$$

$$m_2 g$$

Према D'Alembert-овом принципу морају се тих свих шест сила, при чему четири ефективне силе ваља узети са негативним знаком, држати у равнотежи. Све силе леже у истој вертикалној равни, па је услов равнотеже изражен н. пр. тиме да збир њихових статичких момената обзиром на произвољну тачку њихове равни мора бити раван нули. Одаберемо ли као ту тачку тачку O, то видимо да центрипеталне силе прве и друге тачке пролазе кроз ту тачку. Због тога су њихови статички моменти обзиром на ту тачку равни нули, па се и не појављују у једначини. Остају још само четири силе: две тангенцијалне и две силе теже. Тантенцијалне силе нормалне су на радиус-векторима r_1 и r_2 а силе теже затварају за радиус-векторима угао φ. Зато ће једначина која изражава да је збир статичких момената тих сила обзиром на тачку О равни нули имати овај облик

$$m_1 r_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} r_1 + m_2 r_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} r_2 +$$

$$+ m_1 g r_1 \sin\varphi + m_2 g r_2 \sin\varphi = 0$$

У овој једначини имају сви чланови исти знак зато јер је тангенцијална сила позитивна када дејствује у правцу у којем се φ увећава, но ми морамо узети ефективне силе негативно па зато заокрену све као што се из слике види у истом смислу око тачке О. Горњој једначини можемо дати и овај облик

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (m_1 r_1 + m_2 r_2) g \sin\varphi = 0$$

или

$$\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin\varphi = 0$$

Означимо величину

$$\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2} = \lambda$$

па добијамо једначину

$$\lambda \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin\varphi = 0$$

Ова једначина одређује нам кретање система. Исто такво кретање добили бисмо кад би једна једина тачка произвољне масе а у одстојању λ осциловала око тачке О, јер ово је уједно и диференцијална једначина математичког клатна дужине λ. Та хипотетска тачка која се налази у одстојању λ од тачке О и која изводи исте осцилације које и полуга Om_1m_2 односно обе тачке m_1 и m_2 кад су спојене зове се центар осцилације.

Главне једначине динамике система.

Уочимо један систем материјалних тачака и у њему једну материјалну тачку масе m. Координате те тачке обзиром на један непомичан систем нека буду x, y, z. Онда су компоненте акцелерације те тачке у уоченом моменту у правцима координатних оса једнаке

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

па зато дејствује на ту материјалну тачку једна ефективна сила која има ове компоненте

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}$$

На уочену тачку нека сем тога дејствује једна спољна сила која има компоненте

$$X, Y, Z$$

Уочимо ли све тачке система, то се према D'Alembert-овом принципу систем спољних сила мора држати у равнотежи са системом негативно узетих ефективних сила, а то значи према правилима статике да збир компонената тих сила у сва три правца координатних оса, а осим тога и збир статичких момената тих сила обзиром на координатне осе мора бити раван нули. Пренесемо ли одмах негативне чланове што потичу од ефективних сила на другу страну, то добијамо следећих шест једначина

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X$$

$$\sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \qquad 1)$$

$$\sum m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z$$

исто тако

$$\sum \left(xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (xY - yX)$$

или како је

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

јер ако изведемо диференцијацију на десној страни то добијамо заиста леву страну једначине (јер се два члана поништавају); зато остале три динамичке једначине добијају овај облик

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum (xY - yX)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum (yZ - zY) \qquad 2)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \sum (zX - xZ)$$

Ове шест једначине 1) и 2) зову се <u>Главне једначине динамике</u>

Непосредне конзеквенције из главних једначина динамике

Координате
$$\xi_0 \ \eta_0 \ \zeta_0$$
тежишта посматраног система материјалних тачака одређене су, као што знамо, једначинама

$$\begin{aligned} M\xi_0 &= \Sigma m x \\ M\eta_0 &= \Sigma m y \\ M\zeta_0 &= \Sigma m z \end{aligned} \qquad 1)$$

где је
$$M = \Sigma m$$
и означава масу читавог система. Диференцирајмо ове једначине по времену; то добијамо

$$\begin{aligned} M\frac{d\xi_0}{dt} &= \Sigma m \frac{dx}{dt} \\ M\frac{d\eta_0}{dt} &= \Sigma m \frac{dy}{dt} \\ M\frac{d\zeta_0}{dt} &= \Sigma m \frac{dz}{dt} \end{aligned} \qquad 2)$$

Величине

$$\frac{d\xi_0}{dt} = V_x$$
$$\frac{d\eta_0}{dt} = V_y$$
$$\frac{d\zeta_0}{dt} = V_z$$

представљају компоненте брзине тежишта, а величине

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

представљају компоненте брзине мобилне тачке. Зато постоје једначине

$$MV_x = \sum m v_x$$

$$MV_y = \sum m v_y \qquad 3)$$

$$MV_z = \sum m v_z$$

Продукат масе материјалне тачке са брзином назвали смо квантитетом кретања; зато величине

$$m v_x,\; m v_y,\; m v_z$$

представљају компоненте квантитета кретања појединих материјалних тачака, а величине

$$MV_x,\; MV_y,\; MV_z$$

представљају компоненте квантитета кретања тежишта када би у њему била концентрисана читава маса система. Једначине 3) нам казују да је векторски збир квантитета кретања свију тачака посматраног система једнак квантитету кретања што би га имала једна фиктивна материјална тачка која би се кретала са тежиштем и имала масу једнаку маси читавог система.

Диференцирајмо једначине 2) поново по времену, па добијамо

$$M\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2z}{dt^2}$$

Узмемо ли у обзир једначине 1) прећашњег одељка, па добијамо ове једначине

$$M\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \sum X$$

$$M\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = \sum Y \qquad 4)$$

$$M\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = \sum Z$$

Ове једначине казују да се тежиште

система креће исто тако као кад би у њему била концентрисана читава маса система и кад би на њега дејствовале директно без промене величине и правца све спољне силе. Ове једначине изражавају Њутнов закон кретања тежишта система. Из тога закона следује да интерне силе немају никаквог утицаја на кретање тежишта. Интерним силама не може се тежиште померити. Замислимо ли н. пр. на апсолутно глатким шинама један вагон напуњен са каменом; нека тај вагон мирује; онда се његово тежиште налази у миру у једном одређеном положају. Избацимо ли из вагона један терет, то је та промена у распореду материјала система изведена интерним силама и зато се тежиште читавог система који је сада добио други облик не може померити. У колико се терет померио на једну страну у толико се читав вагон помера на другу да би тежиште остало непомерено. Једно избачено тане из топа описује балистичку криву т.ј. његово тежиште описује ту криву. Распрсне ли се то тане, то ће се поједини његови комади кретати даље тако да опет њихово заједничко тежиште описује прећашњу балистичку криву.

Вектори квантитета кретања имају своје статичке моменте, па су ти статички моменти вектора квантитета кретања тачке m са координатама (x,y,z) представљени овим изразима: компоненте су

$$m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt}$$

а статички моменти обзиром на

координатне осе једнаки су према томе

$$xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}$$

или

$$mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}$$

статички моменат квантитета кретања обзиром на осу Z,

$$my\frac{dz}{dt} - mz\frac{dy}{dt}$$

обзиром на осу Y,

$$mz\frac{dx}{dt} - mx\frac{dz}{dt}$$

обзиром на осу X. Саберемо ли све те статичке моменте то добијамо статички моменат квантитета кретања читавог система. Он ће бити према томе представљен овим изразима

$$\Sigma\left(mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\Sigma\left(my\frac{dz}{dt} - mz\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Sigma\left(mz\frac{dx}{dt} - mx\frac{dz}{dt}\right)$$

Те моменте називамо и *угловним моментима* посматраног система. Прећашње моменте

$$\Sigma m\frac{dx}{dt}\ ,\ \Sigma m\frac{dy}{dt}\ ,\ \Sigma m\frac{dz}{dt}$$

називамо *линеарним квантитетима кретања*. Из последњих трију главних једначина динамике следује да су диференцијални квоцијенти угловних квантитета кретања по времену једнаки статичким моментима спољних сила обзиром на исте осе

$$\frac{d}{dt}\Sigma\left(mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(xY - yX)$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma\left(my\frac{dz}{dt} - mz\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(yZ - zY)$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma\left(mz\frac{dx}{dt} - mx\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(zX - xZ)$$

И прве три једначине од главних

једначина динамике можемо писати у облику

$$\frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt}=\sum X$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\frac{dy}{dt}=\sum Y$$

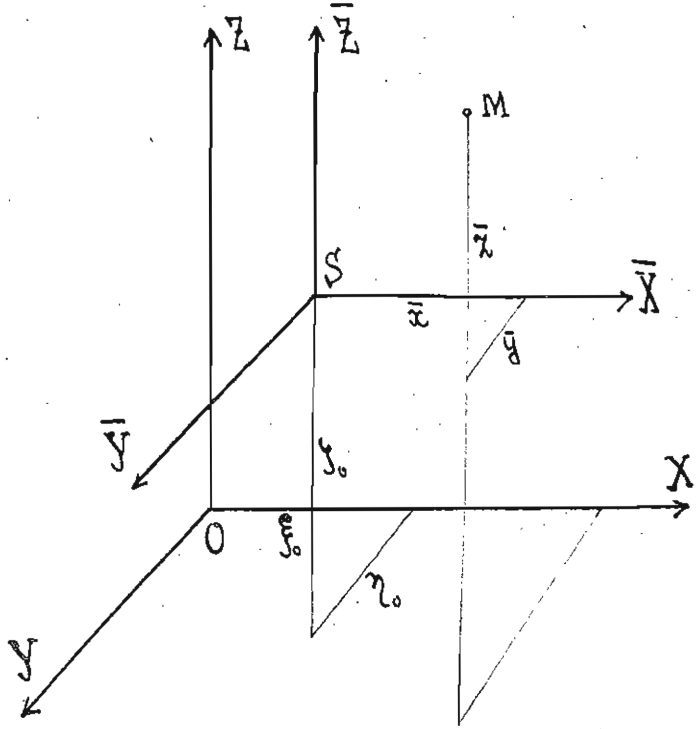
$$\frac{d}{dt}\sum m\frac{dz}{dt}=\sum Z$$

па оне казују да су диференцијални квоцијенти линеарног квантитета кретања посматраног система по времену једнаки збиру компонената спољних сила.

Угловни квантитет кретања посматраног система обзиром на осу Z представљен је изразом

$$\sum\left(mx\frac{dy}{dt}-my\frac{dx}{dt}\right)$$

При томе је претпостављено да је координатни систем непомичан. Уведимо сада један помичан координатни систем $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ којега почетак лежи у тежишту система и који се креће са тежиштем паралелно своме првом положају који положај нека буде паралелан положају X,Y,Z. Координате тежишта нека



буду (ξ_0,η_0,ζ_0), а координате произвољне тачке M обзиром на нови систем $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Онда постоје једначине

$$x=\xi_0+\bar{x}$$

$$y=\eta_0+\bar{y}$$

$$z=\zeta_0+\bar{z}$$

Супституишимо ове вредности у

торни израз за угловни квантитет кретања и то добијамо

$$\sum m\left(\xi_0 \frac{d\eta_0}{dt} - \eta_0\frac{d\xi_0}{dt}\right) + \sum m\left(\bar x\frac{d\bar y}{dt} - \bar y\frac{d\bar x}{dt}\right) +$$

$$+\sum m\left(\xi_0\frac{d\bar y}{dt} - \eta_0\frac{d\bar x}{dt}\right) + \sum m\left(\bar x\frac{d\eta_0}{dt} - \bar y\frac{d\xi_0}{dt}\right) =$$

$$= \left(\xi_0\frac{d\eta_0}{dt} - \eta_0\frac{d\xi_0}{dt}\right)\underbrace{\sum m}_{M} + \sum m\left(\bar x\frac{d\bar y}{dt} + \bar y\frac{d\bar x}{dt}\right) +$$

$$+\xi_0\sum m\frac{d\bar y}{dt} - \eta_0\sum m\frac{d\bar x}{dt} + \frac{d\eta_0}{dt}\sum mx - \frac{d\xi_0}{dt}\sum my$$

Казали смо да почетна тачка координатног система $\bar x, \bar y, \bar z$ лежи у тежишту, па због тога постоје једначине

$$\sum m\bar x = \sum m\bar y = \sum m\bar z = 0$$

па је због тога такође

$$\sum m\frac{d\bar x}{dt} = \sum m\frac{d\bar y}{dt} = \sum m\frac{d\bar z}{dt} = 0$$

па ће због тога угловни квантитет кретања обзиром на осу Z бити представљен овим изразом

$$\left(\xi_0 M\frac{d\eta_0}{dt} - \eta_0 M\frac{d\xi_0}{dt}\right) + \sum m\left(\bar x\frac{d\bar y}{dt} - \bar y\frac{d\bar x}{dt}\right)$$

Први члан овога израза представља угловни квантитет кретања што би га имала маса M концентрисана у тежишту обзиром на координатни систем X, Y, Z; други члан представља угловни квантитет релативног кретања посматраног система обзиром на мобилни систем $\bar x, \bar y, \bar z$. Диференцијални коцијент тога угловног квантитета кретања по времену једнак је статичком моменту спољних сила обзиром на исту осу Z. Узмемо ли статички моменат спољних сила обзиром на тежиште система т.ј. положимо ли систем X, Y, Z обзиром на који узимамо статичке моменте у тежиште, то је онда

$$\xi_0 = 0$$
$$\eta_0 = 0$$
$$\zeta_0 = 0$$

па зато добијамо ову једначину

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\bar{x}\frac{d\bar{y}}{dt}-\bar{y}\frac{d\bar{x}}{dt}\right)=\sum(\bar{x}Y-\bar{y}X)$$

Ова једначина казује да кретање система око тежишта зависи само од спрегова и од статичких момената спољних сила обзиром на то тежиште.

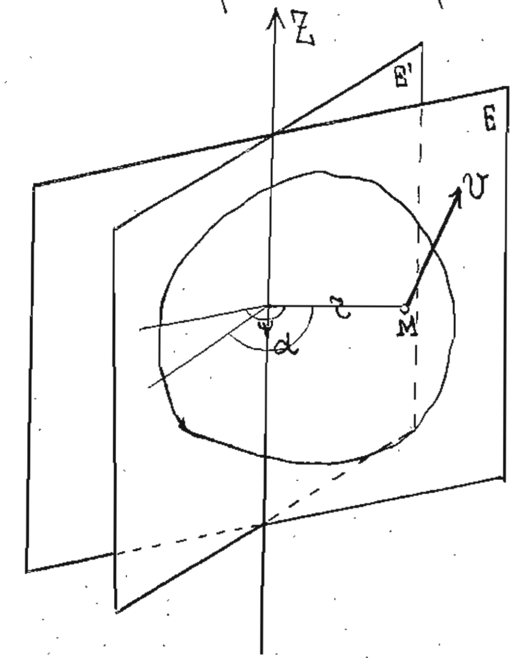
Досадање резултате можемо овако рекапитулисати: тежиште посматраног система креће се тако као кад би у њему била сконцентрисана читава маса система и дејствовале све спољне силе директно на тежиште. Означимо ли резултанту тих спољних сила са $\mathfrak{R}$ а спрег који оне дају обзиром на тежиште са $\mathfrak{M}$, то кретање тежишта зависи само од резултанте $\mathfrak{R}$. Ми можемо посматраном систему додати произвољне спрегове док ти спрегови неће изменити резултанту $\mathfrak{R}$ па неће према томе променити ни кретање тежишта. Кретање система око тежишта зависи само од статичког момента сила обзиром на то тежиште т.ј. зависи само од спрега $\mathfrak{M}$. Ми можемо додати у тежишту система произвољну силу; док та сила не мења спрег $\mathfrak{M}$, јер је њен статички моменат обзиром на тежиште раван нули. Ми можемо према томе у тежишту додати и силу $-\mathfrak{R}$ која ће се са силом $\mathfrak{R}$ поништити, кретање система око тежишта остаје непромењено. Систем се креће око тежишта тако као кад би тежиште било непомично а на систем дејствовао само спрег $\mathfrak{M}$. Ови закони зову се законима независности транслације система од ротације, па дозвољавају да се кретање једног система растави у два специјална проблема и то:

1° у проблем кретања његовог тежишта. Тај је проблем идентичан са проблемом кретања једне мобилне тачке.

2° У проблем кретања система око тежишта. Тај је проблем идентичан са ротацијом система око једне непомичне тачке.

Кретање крутог тела око једне осе која је фиксирана у простору.

Посматрамо тело нека ротира око осе Z. Положимо кроз ту ту осу која је непомична једну раван E која је такође фиксирана у простору. Положимо сем тога кроз осу Z једну другу раван E' која је везана са телом и која према томе ро-



тира око осе Z. Угао што га те две равнине затварају означимо са φ. Тај угао мења се са временом. Уочимо једну произвољну тачку M посматраног тела. Одстојање те тачке од осе Z означимо са r. Угао што га радиус-вектор r затвара са равнином ε означимо са ψ, а угао што га тај радиус вектор затвара са равнином ε' означимо са α. Како је равнина ε' круто везана са телом то је угао α за једну уочену тачку M независан од времена. Угао ψ мења се са временом. Из слике следује да је

$$\psi = \varphi + \alpha$$

Диференцирањем ове једначине добијамо

$$d\psi = d\varphi$$

промена $d\varphi$ је према томе у једном датом бескрајно малом интервалу времена за све тачке M тела константна и једнака промени угла што га затварају обе равнине ε и ε'. Брзина v тачке M једнака је према предашњем

$$v = r\frac{d\psi}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

Вектор брзине нормалан је на радиус-вектор, па је величина квантитета кретања представљена изразом

$$mv = mr\frac{d\varphi}{dt}$$

а моменат овог квантитета кретања или угловни квантитет кретања уочене тачке једнак је

$$mvr = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$$

Угловни квантитет читавог тела обзиром на осу Z једнак је

$$W_z = \sum mr^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\sum mr^2$$

Последњи збир једнак је моменту инерције обзиром на осу Z т.ј.

$$I_z = \sum mr^2$$

па је зато
$$W_z = J_z \frac{d\varphi}{dt}$$
Све тачке посматраног тела па према томе и произвољна тачка M крећу се у кругу. Тачка M креће се дакле тако као кад би на њу дејствовала тангенцијална сила
$$m\frac{dv}{dt}$$
у правцу тангенте на кругу и центрипетална сила
$$m\frac{v^2}{r}$$
у правцу радиус-вектора и то у његовом негативном правцу т.ј. према оси. Ове две силе представљају према томе ефективне силе које дејствују на посматрано тело. Према D'Alembert-овом принципу морају се све негативно узете ефективне силе држати у равнотежи са спољним силама. Посматрано тело окреће се око осе Z, па смо доказали у Статици да је довољан услов равнотеже да је збир статичких момената свих сила које на то тело дејствују обзиром на осу Z раван нули. Имамо дакле тај услов аналитички да изразимо и да при том узмемо у обзир све спољне силе и све ефективне силе. Означимо ли статички моменат спољних сила обзиром на осу Z са M_z то имамо томе моменту да прибавимо моменте негативно узетих ефективних сила, но узмемо ли у обзир да све центрипеталне силе
$$\frac{mv^2}{r}$$
пролазе кроз осу, то је њихов статички моменат обзиром на осу Z раван нули; тако остаје само да прибавимо величини M_z статички моменат негативно узетих тангенцијалних сила, а ти су представ-

лени изразом

$$\sum -m\frac{dv}{dt}r$$

Зато имамо једначину

$$M_z - \sum m r \frac{dv}{dt} = 0$$

Према арезашњем је

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

па зато добијамо једначину

$$\sum m r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sum m r^2 = M_z$$

а како је

$$\sum m r^2 = I_z$$

то добијамо једначину

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

- Ово је једначина кретања крутог тела око непомичне осе. Сравнимо ли ову једначину са једначином кретања мобилне тачке

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P$$

то видимо да акцелерацији у другом случају одговара угловна акцелерација у првом; сили P у другом случају одговара статички моменат M_z, а маси m моменат инерције I_z посматраног тела. Имамо ли друго једно тело произвољног облика и друге масе но које има исти моменат инерције, на које дејствују исте силе тако да дају исти моменат M_z, то ће се ово друго тело кретати истом угловном акцелерацијом око осе Z као и прво, имаће дакле исту једначину кретања. Ако су дакле у оба случаја иницијални услови исти, то ће ротације обају тела бити исте. Зато смо и назвали два тела која имају исти моменат инерције обзиром на једну осу <u>дина-</u>

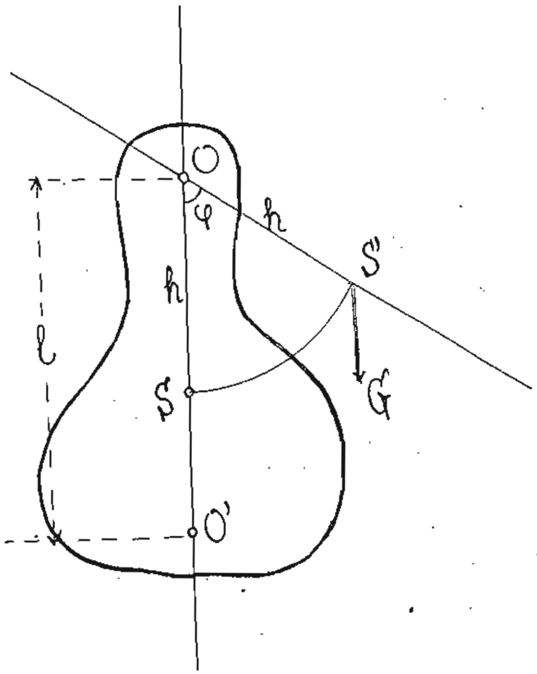
мички еквивалентним телима обзиром на ту осу.

Физичко клатно.

Круто тело које се може да окреће око једне хоризонталне осе зовемо физичким клатном у најужем смислу речи, јер називамо физичким клатном и оно које се под утицајем теже може окретати око једне косе осе. Ако је та оса скоро вертикална онда називамо то клатно хоризонталним клатном. Потпуно вертикална несме оса да буде јер онда би посматрано тело под утицајем теже или било на миру или би ротирало једнаком угловном брзином око осе па не би имало карактер клатна. Ми ћемо се да бавимо само са првим слу-
чајем

чајем. Последњи случај упознаћемо у Небеској Механици.

Нека дакле оса клатна буде O и нека стоји нормално на раванину у којој се клатно креће. Тежиште клатна нека буде S. Кад се то тежиште налази у вертикали испод осе O, онда се клатно налази у положају равнотеже. Одстојање OS означимо са h. Померимо ли клатно за један произвољан угао из тога положаја равнотеже па препустимо ли га самом себи, то ће оно изводити осцилације око осе O. OS' нека буде један произвољан положај праве OS везане круто са посматраним телом за време кретања. Означимо елонгацију са φ; онда је једначина кретања дата према пређашњем изразом



$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_0$$

где J_0 означава моменат инерције клатна обзиром на осу O, а M_0 статички моменат спољних сила обзиром на ту осу у уоченом моменту. Рекли смо да на круто тело дејствује само његова властита тежина G, па је зато

$$M_0 = -Gh\sin\varphi$$

Знак − долази зато што у нацртаном положају тежа настоји да умањи угао φ. Означимо ли масу клатна са M то је

$$G = Mg$$

а означимо ли радијус инерције клатна обзиром на осу O са ϱ_0 то је ϱ_0 једнако према пређашњем

$$\rho_0=\sqrt{\frac{J_0}{M}}$$

па је зато

$$J_0=M\rho_0^2$$

ставимо ли ове вредности у горњу једначини, то добијамо

$$M\rho_0^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-Mgh\sin\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g\frac{h}{\rho_0^2}\sin\varphi=0$$

Ово је једначина кретања посматраног клатна. Једначина кретања математичког клатна била је

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

па зато видимо да математичко клатно које има дужину l једнак

$$l=\frac{\rho_0^2}{h}$$

осцилира исто тако као и посматрано физичко клатно. Пренесемо ли дужину

$$OO'=l$$

то видимо да ће тачка O' у свези са посматраним телом исто тако осцилирати као кад би била одељена од тела и везана са тачком O концем исте дужине. Математичко клатно које има дужину

$$l=\frac{\rho_0^2}{h}$$

зовемо <u>синхроним математичким клатном</u> посматраног физичког клатна. Трајање осцилација тога синхроног клатна једнако је према пређашњем

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{\alpha}+\cdots\right\}$$

где α означава амплитуду клатна, па ће зато трајање осцилација посматраног физичког клатна бити представљено једначином

$$T=\pi\sqrt{\frac{\rho_0^2}{hg}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cdots\right\}$$

тачку O' зовемо <u>центром осцилације</u> а ону осу која иде кроз тај центар а паралелна је првој оси зовемо <u>осом осцилације</u>.

Означимо ли са J_s моменат инерције посматраног клатна обзиром на једну осу која иде кроз тежиште S а паралелна је заданој оси, то је према Штајнеровом правилу

$$J_0 = J_s + Mh^2$$

Означимо ли радијус инерције који одговара оси која пролази кроз S са ρ_s, то је

$$\rho_s = \sqrt{\frac{J_s}{M}}$$

или

$$J_s = M\rho_s^2$$

па зато пређашња једначина добија овај облик

$$M\rho_0^2 = M\rho_s^2 + Mh^2$$

или

$$\rho_0^2 = \rho_s^2 + h^2$$

па зато добијамо

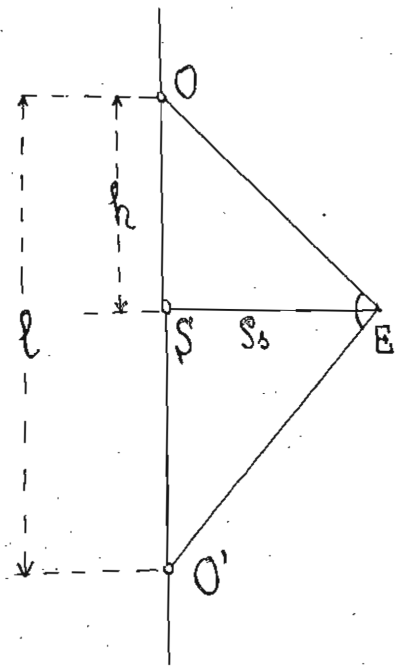
$$l = \frac{\rho_0^2}{h} = h + \frac{\rho_s^2}{h}$$

Ова једначина казује да је дужина l већа од дужине h т.ј. да тачке O и O' леже увек на разним странама тежишта.

Из ове једначине следује даље

$$\rho_s^2 = h(l-h)$$

Ова једначина казује да је радијус ρ_s средња геометријска пропорционала дужине h и дужине $l-h$ т.ј. дужине OS и SO'. Из тога својства следује конструкција центра осцилације O'. Задано нам је O и S, дакле и дужина h а познајемо, јер нам је облик клат-



на познат и радијус инерције ρ_s. Пренесемо ли тај радијус инерције ρ_s нормално на дужину OS у S, па спојимо ли O са E и начинимо угао код E једнак правом углу, то је тако добијена тачка O' заиста центар осцилације, онда је дужина

$$OO' = l$$

па мора верификовати једначину

$$\rho_s^2 = h(l-h)$$

према познатом правилу је висина правоуглог троугла средња геометриска пропорционала између оба дела хипотенузе, дакле

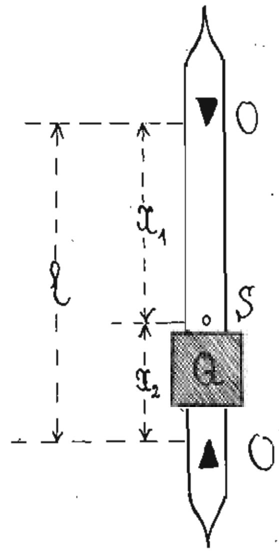
$$SE^2 = OS \cdot SO'$$

или

$$\rho_s^2 = h(l-h)$$

Горња једначина је према томе верификована.

Обесимо ли клатно у тачки O' па тражимо ли за тај случај центар осцилације то видимо из пређашње конструкције да ће у овом случају бити тачка O центар осцилације. У првом случају када је тачка O центар осцилације била је дужина синхроног математског клатна l и у другом случају биће дужина синхроног клатна опет l, па ће зато физичко клатно осциловати једнако било оно обешено у тачки O или у тачки O'. На том се својству оснива конструкција и примена Катер-овог реверзионог клатна. То је клатно које може да осцилује око тачке O исто тако као око тачке O'. Терет Q може се по том клатну померати, па се помера тако дуго док осцилације око тачке O као бесилишта и око тачке O' не буду имале исту периоду.



Тежиште клатна нека буде S. Радијус инерције обзи-

ром на осу која пролази кроз тежиш-
те а нормална је на равнини слике
нека буде ρ_s ; онда ћемо одстојање x_1
тежишта S ако је l дужина синхро-
ног клатна одредити из једначине

$$h = l - \frac{\rho_s^2}{h}$$

ако место h ставимо x_1, т.ј. из једна-
чине

$$x_1^2 - l x_1 + \rho_s^2 = 0$$

Исто тако ћемо одстојање x_2 наћи из
исте једначине ако место h ставимо
x_2, дакле

$$x_2^2 - l x_2 + \rho_s^2 = 0$$

Из прве једначине добијамо

$$x_1 = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \rho_s^2}$$

а из друге

$$x_2 = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \rho_s^2}$$

Ваља нам да одредимо које знакове
пред корен ваља узети. Ако би у пр-
вом случају употребили знак + а
исто тако и у другом, то би x_1 и x_2
било једнако а то је само онда слу-
чај ако се тежиште налази у по-
ловини дужине OO'. Конструкција
клатна може се увек тако удесити
да то не буде случај и онда су x_1 и x_2
неједнаки, па ако је x_1 веће од x_2
та ваља у првом изразу узети знак
+ а у другом − т.ј.

$$x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \rho_s^2}$$

$$x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \rho_s^2}$$

Саберемо ли последње једначине то
добијамо

$$x_1 + x_2 = l$$

Ако је дакле могуће померањем те-
рета Q дати клатну такав облик
да оно осцилујући око тачке O и ос-
цилујући затим око тачке O' има
исту периоду осцилације, то је од-
стојање тих двеју тачака једнако

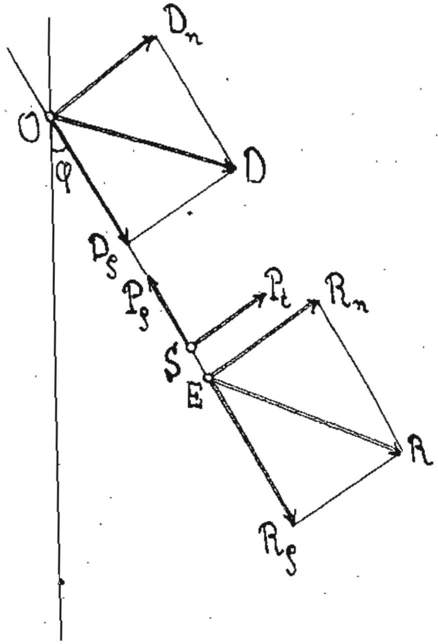
дужини l синхроног клатна. Измеримо ли према томе дужину T тих осцилација и амплитуду α, то из једначине 1) можемо одредити акцелерацију g теже на посматраном месту. Зато се ово клатно примењује у Геодезији.

Притисак на осу.

На посматрано круто тело које се може окретати око једне у простору фиксиране осе нека дејствује произвољан систем сила. Питајмо за силе реакције осе. Пре но што приступимо испитивању општега случаја испитаћемо један једноставнији специјалан случај.

Први случај.

Оса око које се тело окреће нека буде нормална на равнину силе. Означимо ју са O. Тежиште тела нека пада такође у равнину слике. Силе које дејствују на посматрано тело нека буду симетрично распоређене обзиром на равнину слике тако да се дају редуковати на једну резултанту R у равнини слике. Онда ће и реакција осе т.ј. сила којом дејствује оса на тело D лежати такође у равнини слике. Сила R нека



сече у тачки E праву OS. Раставимо је у две компоненте од којих једна R_s пада у ту праву а друга R_n стоји нормално на ту праву и исто то учинимо и са силом D коју растављамо у компоненте D_s и D_n. Одстојање тежишта S од тачке O нека буде

$$OS = h$$

Означимо ли са φ угао што га права OS затвара са једном у равнини слике фиксираном правом, то је једначина кретања посматраног тела према пређашњем

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_0$$

где J_0 означава моменат инерције посматраног тела обзиром на осу O а M_0 статички моменат спољних сила обзиром на ту осу. Тај моменат једнак је

$$M_0 = +R_n n$$

где је

$$n = OE$$

Према Штајнеровом правилу је

$$J_0 = J_s + Mh^2 = M(\rho_s^2 + h^2)$$

где J_s означава моменат инерције обзиром на осу кроз тежиште нормалну на равнину слике, а ρ_s радијус инерције обзиром на исту ту осу. Отуда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{R_n n}{M(\rho_s^2 + h^2)} \qquad 1)$$

Показали смо да се тежиште S тела креће исто тако као кад би у њему била концентрисана цитава маса тела а дејствовале све спољне силе; при томе морамо сада међу спољне силе рачунати и реакцију осе. Тежиште тела S креће се по кругу радиуса h, па је брзина v једнака

$$v = h\frac{d\varphi}{dt}$$

зато су ефективне силе које на нега дејствују ове:

$$P_t = M\frac{dv}{dt} = Mh\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

и сила

$$P_\rho = M\frac{v^2}{h} = Mh\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Ова сила дејствује у правцу према тачки O. Према D'Alembert-овом правилу морају се спољне силе држати са негативно узетим ефективним силама у равнотежи, па због тога морају збирови њихових компонената у произвољним правцима бити равни нули. Узмимо за те правце правац OS и правац који је нормалан на њему па добијамо ове две једначине

$$D_\rho + R_\rho + P_\rho = 0$$

$$D_n + R_n - P_t = 0$$

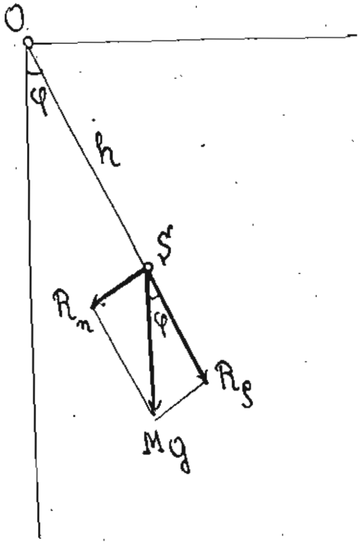
При формулисању ових једначина обрнули смо правац ефективних сила. Из ових и пређашњих једначина следује

$$D_\rho = -Mh\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - R_\rho \qquad 2)$$

$$D_n = Mh\frac{d^2\varphi}{dt^2} - R_n \qquad 3)$$

Ако су нам спољне силе задане, онда једначина 1) одређује вредност квоцијента $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, а интеграцијом и вредност квоцијента $\frac{d\varphi}{dt}$. Ставимо ли ове вредности у једначинама 2) и 3) то нам оне одређују притисак на осу.

Узмимо да на посматрано тело дејствује само тежа; онда сила Mg, тежина тела, дејствује у тежишту па је, употребив пређашње ознаке



$$R_s = Mg\cos\varphi$$

$$R_n = -Mg\sin\varphi$$

Знак − потиче отуда што сила R_n има сада противан правац него у пређашњем случају. Осим тога у овом случају је

$$r = h$$

јер сила R пролази кроз тежиште. Зато једначина 1) добија овај облик

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-Mgh\sin\varphi}{M(\rho_s^2 + h^2)}$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gh}{\rho_s^2 + h^2}\sin\varphi \qquad 4)$$

Ова се једначина даје интегрисати. Помножимо ли ју са $\frac{d\varphi}{dt}$ то она добија овај облик

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{gh}{\rho_s^2 + h^2}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

одакле интеграцијом добијамо

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{gh}{\rho_s^2 + h^2}\cos\varphi + C$$

Нека нам као иницијалан услов буде позната угловна брзина ω_0 када се права OS налази у хоризонталном положају т.ј.

$$\text{за } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

Ставимо ли ове вредности у пређашњу једначину то добијамо

$$\omega_0^2 = C$$

па је зато угловна брзина одређена једначином

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 + \frac{2gh}{\rho_s^2 + h^2}\cos\varphi \qquad 5)$$

Ставимо ли вредности 4) и 5) у једначине 2) и 3) то добијамо ове изразе за реакције осе

$$D_\xi = -Mh\left\{\omega_0^2 + \frac{2gh}{\rho_s^2+h^2}\cos\varphi\right\} - Mg\cos\varphi =$$

$$= -Mh\omega_0^2 - Mg\cos\varphi\left[\frac{2h^2}{\rho_s^2+h^2}+1\right] =$$

$$= -Mh\omega_0^2 - Mg\cos\varphi\,\frac{\rho_s^2+3h^2}{\rho_s^2+h^2}$$

$$D_\eta = -Mh\frac{gh}{\rho_s^2+h^2}\sin\varphi + Mg\sin\varphi =$$

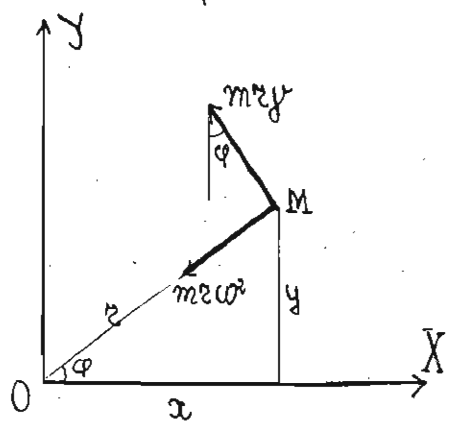
$$= Mg\sin\varphi\left[-\frac{h^2}{\rho_s^2+h^2}+1\right] =$$

$$= Mg\sin\varphi\,\frac{\rho_s^2}{\rho_s^2+h^2}$$

Из ових једначина видимо да на компоненту D_η не утиче стање кретања него само спољне силе, моментални положај и облик посматраног тела, а не брзина којом се креће.

Општи случај

Посматрамо тело које нека буде сада произвољног облика нека се окреће око једне чврсте осе коју одаберимо за осу Z. Узмимо да је та оса нормална на равнину слике, па положимо осе X и Y нашег координатног система у равнину слике за сада са произвољном оријентацијом. Касније ћемо тим двема осама дати такову оријентацију да се добијене једначине упросте. Оса Z стоји дакле нормално на равнину слике и пролази кроз тачку O. Замислимо да је та оса причвршћена у две тачке од којих једна нека буде тачка O а друга једна тачка U



која је за дистанцију h удаљена од тачке O. Реакцију осе можемо дакле замислити сконцентрисану у тим двема тачкама па означимо компонента реакције која иде кроз тачку О са $X_0 Y_0 Z_0$ а компоненте реакције која иде кроз тачку И нека буду $X_u Y_u Z_u$. На посматрано тело нека дејствују произвољне силе. Оне се помоћу тачке О као редукционе тачке дају свести на резултанту R са компонентама $R_x R_y R_z$ и на спрег M са компонентама $M_x M_y M_z$. Према D'Alembert-овом принципу морају се све те спољне силе у које морамо урачунати сада и реакције осе држати са негативно узетим ефективним силама у равнотежи. Ефективне силе представљају један систем сила који се даје помоћу тачке О као редукционе тачке свести на једну резултанту која има компоненте $X_e Y_e Z_e$ и на један спрег са компонентама $M_x^e M_y^e M_z^e$. Те силе узете негативно држе се са осталим силама у равнотежи, па зато постоје ових шест

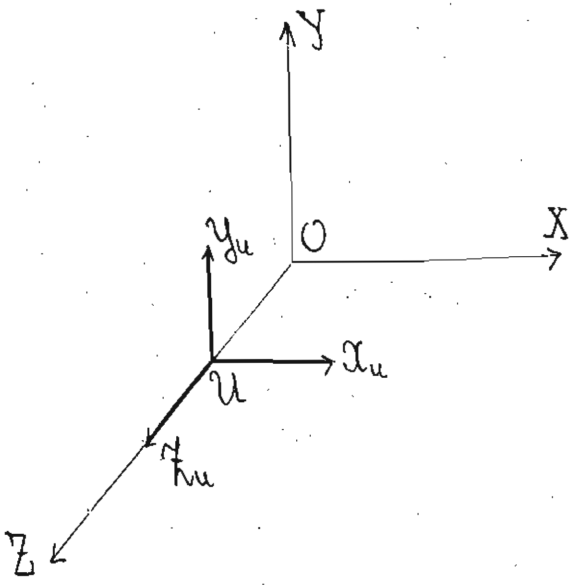
једначина

$$X_0 + X_u + R_x - X_e = 0 \qquad 1)$$

$$Y_0 + Y_u + R_y - Y_e = 0 \qquad 2)$$

$$Z_0 + Z_u + R_z - Z_e = 0 \qquad 3)$$

Сада долазе три једначине које изражавају да је збир статичких момената обзиром на осе X, Y, Z раван нули. Реакција кроз О са компонентама $X_0 Y_0 Z_0$ не даје статичке моменте обзиром на те осе јер пролази кроз све три осе. Реакција кроз тачку И не даје статичког момента обзиром на осу Z јер пролази кроз осу Z, али даје статичке моменте обзиром на осу X и обзиром на осу Y. Статички моменат обзиром на осу X једнак је $-Y_u h$ јер заокреће, ако се гледа са позитивне стране осе X, у смислу сказаљке на сату. Статички моменат обзиром на осу Y једнак је $X_u h$; позитиван је зато јер гледано са



позитивне стране осе У закрене противно смислу сказаљке на сату. Тако добијамо још ове три једначине

$$-Y_u h + M_x - M_x^e = 0 \qquad 4)$$

$$X_u h + M_y - M_y^e = 0 \qquad 5)$$

$$M_z - M_z^e = 0 \qquad 6)$$

Спољне силе су нам задане, ваља само изразити ефективне силе помоћу познатих величина, па ћемо из ових шест једначина моћи одредити реакције осе.

Уочимо једну произвољну тачку M посматраног крутог тела. Све тачке тога тела крећу се у кругу око осе Z па имају свака од њих ако означимо са ω угловну брзину посматраног момента, а са

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt}$$

угловну акцелерацију посматраног момента, ове ефективне силе: силу

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d(r\omega)}{dt} = mr\gamma$$

у правцу тангенте, и силу

$$m\frac{v^2}{r} = m\frac{(r\omega)^2}{r} = mr\omega^2$$

у правцу радиус-вектора. Ефективне силе посматране тачке у правцима координатних оса представљене су изразима

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}$$

ако даље узмемо компоненте од првих двеју сила у правцима оса, то морамо добити друге три силе. Зато постоје ове једначине

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mr\gamma\sin\varphi - mr\omega^2\cos\varphi$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mr\gamma\cos\varphi - mr\omega^2\sin\varphi$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Како је

$$r\cos\varphi = x$$

$$r\sin\varphi = y$$

то добијамо ове једначине

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma m y - \omega^2 m x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma m x - \omega^2 m y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Ефективне силе ваља сабрати у систем $X_e\ Y_e\ Z_e\ M_x^e\ M_y^e\ M_z^e$. Компонента X_e је збир свих компонената ефективних сила у правцу x, па дакле

$$X_e = \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\sum my - \omega^2\sum mx$$

Исто тако је

$$Y_e = \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma\sum mx - \omega^2\sum my$$

$$Z_e = \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

γ и ω^2 могли смо извадити пред знак Σ јер је у уоченом моменту угловна брзина и угловна акцелерација за све тачке посматраног тела иста. Означимо координате тежишта посматраног тела са $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ то постоје као што знамо једначине

$$M\xi_0 = \sum mx$$

$$M\eta_0 = \sum my$$

$$M\zeta_0 = \sum mz$$

где M означава масу посматраног тела. Зато добијамо ове једначине

$$X_e = -M\eta_0\gamma - M\xi_0\omega^2$$

$$Y_e = M\xi_0\gamma - M\eta_0\omega^2$$

$$Z_e = 0$$

Ваља још наћи моменте ефективних сила обзиром на координатне осе. Они су представљени изразима

$$M_x^e = \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$M_y^e = \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$M_z^e = \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

Ставимо ли у овим једначинама добијене вредности за

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\;,\; m\frac{d^2y}{dt^2}\;,\; m\frac{d^2z}{dt^2}$$

то добијамо

$$M_x^e = -\sum z(\gamma m x - \omega^2 m y) = -\gamma\sum m z x + \omega^2\sum m y z$$

$$M_y^e = \sum z(-\gamma m y - \omega^2 m x) = -\gamma\sum m y z - \omega^2\sum m z x$$

$$M_z^e = \sum x(\gamma m x - \omega^2 m y - \sum y(-\gamma m y - \omega^2 m x) =$$

$$= \gamma\sum m x^2 - \omega^2\sum m x y + \gamma\sum m y^2 + \omega^2\sum m x y =$$

$$= \gamma\sum m(x^2+y^2) = \gamma\sum m r^2 =$$

$$= \gamma I_z$$

где I_z означава момент инерције посматраног тела обзиром на осу z. Ставимо ли ове вредности у једначинама 1) до 6) то добијамо

$$R_x + X_0 + X_u + \gamma M\eta_0 + \omega^2 M\xi_0 = 0 \qquad 1^{*})$$

$$R_y + Y_0 + Y_u - \gamma M\xi_0 + \omega^2 M\eta_0 = 0 \qquad 2^{*})$$

$$R_z + (Z_0 + Z_u) = 0 \qquad 3^{*})$$

$$M_x - Y_u h + \gamma\sum m x z - \omega^2\sum m y z = 0 \qquad 4^{*})$$

$$M_y - X_u h + \gamma\sum m y z + \omega^2\sum m x z = 0 \qquad 5^{*})$$

$$M_z - \gamma I_z = 0 \qquad 6^{*})$$

Из последње једначине (6^{*}) израчуна се γ и интеграцијом те једначине ω. Онда се из првих пет једначина могу израчунати следећих пет величина

$$X_0\,,\; Y_0\,,\; X_u\,,\; Y_0\,,\; Z_0+Z_u$$

(-исти случај као у Статици). Те величине су линеарне функције осталих величина. Остале величине у једначинама су или статичке силе, то су величине $R_x\, R_y\, R_z\;\; M_x\, M_y\, M_z$, или динамичке величине, то су величине у којима долазе ω и γ. Кад су ω и γ једнаки нули онда те динамичке величине ишчезавају. Статичке силе опет ишчезавају онда ако на посматрано тело не дејствују никакве силе. Зато можемо реакције осе које потичу од статичких сила и реакције које потичу од динамичких сила израчунати сваку за себе. Прве реакције које ћемо означити са $X_0^s, Y_0^s, X_u^s, Y_u^s, Z_0^s + Z_u^s$ израчунавамо на тај начин да у горњим једначинама занемаримо све чланове са γ и ω па израчунамо реакције; друге т.ј. динамичке реакције које ћемо означити са $X_0^d, X_u^d, Y_0^d, Y_u^d, Z_0^d + Z_u^d$ израчунаћемо на тај начин да у горњим једначинама занемаримо чланове $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ па израчунамо реакције. Ако статичке и динамичке реакције саберемо добијамо тоталне реакције.

При овоме се могу десити ови

Специјални случајеви.

Ако је оса Z око које се посматрано тело окреће главна оса инерције за тачку O, онда знамо да у том случају ишчезавају изрази Σmxz и Σmyz т.ј.

$$\Sigma mxz = \Sigma myz = 0$$

Израчунајмо сада динамичке реакције т.ј. занемаримо у предњим једначинама величине $R_x\, R_y\, R_z\, M_x\, M_y\, M_z$. Онда из једначина 3*), 4*) и 5*) следује

$$(Z_0^d + Z_u^d) = 0$$

$$X_u^d = 0$$

$$Y_u^d = 0$$

Како можемо читаве реакције осе Z приписати тачки O то видимо да је динамичка реакција тачке И једнака нули. Ако сем тога дејствују на посматрано тело такове силе које такође не дају никакво(г) притиска у тачки U т.ј. ако се редукују на једну једину силу која иде кроз тачку O и евентуално на један спрег M_z, онда можемо причвршћење осе у тачки U сасвим напустити јер тачка U неће онда да издржи никакав притисак, па ће бити довољно да је причврстимо у тачки O. Ако сем тога исчезава и моменат тих сила т.ј. ако се спољне силе редукују на једну једину силу која пролази кроз тачку O, онда следује из једначине 6*)

$$\gamma = 0$$

а то значи да је

$$\omega = const.$$

па се динамичке реакције тачке O израчунавају онда из једначина 1*) и 2*) т.ј. из једначина

$$X_0^d = -\omega^2 M \xi_0 \qquad 7)$$

$$Y_0^d = -\omega^2 M \eta_0 \qquad 8)$$

Зато можемо да кажемо: дејствују ли на посматрано тело такове силе које дају једну једину резултанту која пролази кроз тачку O, па ставимо ли посматрано тело у ротацију око једне од његових најмање трију главних оса инерције за тачку O, то ће тело ротирати без престанка око те осе константном угловном брзином не мењајући свој положај. Ту осу називамо __перманентном осом__.

Ако спољне силе сасвим ишчезавају онда ће тачка O имати да издржи само динамички притисак којега су компоненте X_0^d и Y_0^d представљене једначинама 7) и 8). И тај ће притисак ишчезнути ако тачка O буде пала у тежиште посматраног тела, јер је онда

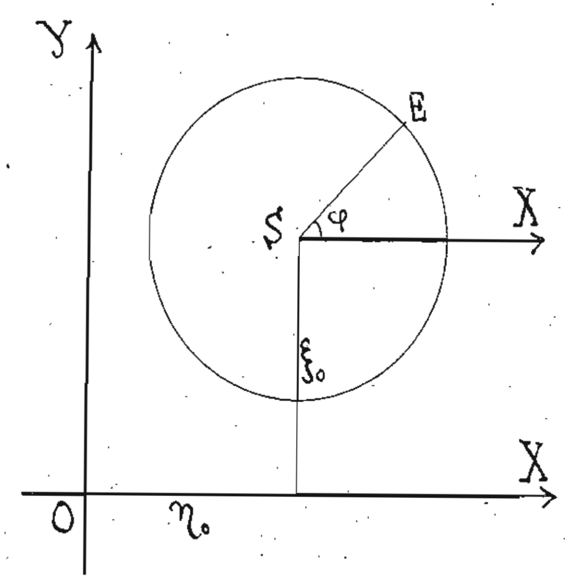
$$\xi_0 = 0$$

$$\eta_0 = 0$$

Зато можемо да кажемо: не дејствују ли на посматрано тело никакове спољне силе, па ставимо лита у ротацију око једне од главних оса његовог централног елипсоида онда ће то тело ротирати једнаком угловном брзином без престанка не мењајући свој положај и неће морати бити нигде причвршћено. Зато називамо главне осе централног елипсоида слободним осама посматраног тела. (Железница на једном точку).

Равна кретања крутога тела

Посматрано тело нека буде симетрично обзиром на једну равнину коју одабирамо за равнину XY нашега координатног система. Онда и тежиште S тога тела чије координате означимо са (ξ_0, η_0) лежи такође у равнини XY. Дејствују ли на посматрано тело силе које леже у равнини XY или које су симетричне обзи-



ром на ту равнину тако да се и у првом и у другом случају дају свести на једну резултанту у равнини XY или на један спрег у тој истој равнини, онда ће иницијалан пресек посматраног тела са равнином XY остати без престанка у тој равнини, па кретање зовемо <u>равним кретањем</u>, јер нам је за одредбу положаја посматраног тела довољно да познајемо положај његовог пресека у равнини XY. Тај пресек нам је одређен ако познајемо положај тежишта S т.ј. координате ξ_0 и η_0 и оријентацију пресека у равнини т.ј. угао φ што га једна са тежиштем везана права SE пресека затвара са осом X. У овом случају су дакле ξ_0, η_0 и φ координате тела. Треба да одредимо три једначине кретања из којих се те координате могу одредити као функције времена.

Према Њутновом закону креће се тежиште тако као кад би у њему била концентрисана читава маса M и кад би на њу дејствовале све спољне силе. Означимо ли са R_x и R_y компоненте резултанте спољних сила то дакле постоје једначине

$$M\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = R_x \qquad 1)$$

$$M\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = R_y \qquad 2)$$

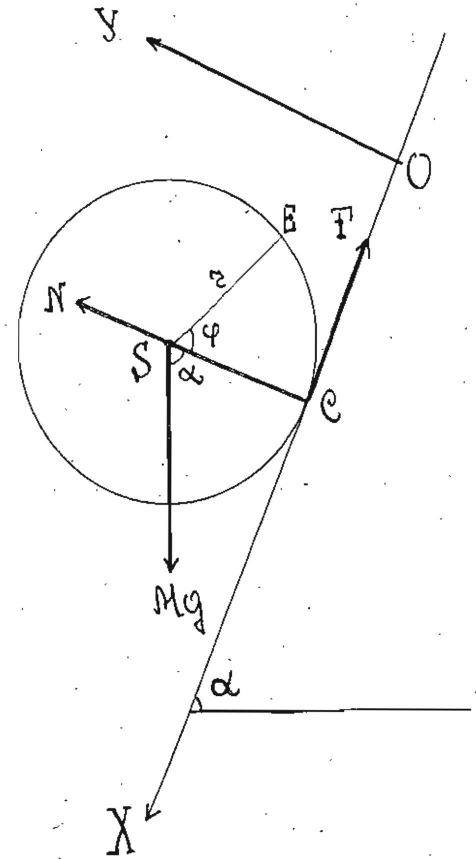
које једначине одређују кретање тежишта. Треба још одредити ротацију тела око тежишта. Према закону о независности ротације од транслације креће се тело око тежишта тако као кад би у њему причвршћено било а на њега дејствовали само спрегови које добијамо око одабереног тежиште као редукционој тачки. Нека дакле спрег који у нашем случају резултује буде означен са M_3; онда ће тело ротирати око тежишта као кад би малопређашње било и на њега дејствовао спрег M_3. Спрег лежи у равнини XY и зато је његова оса нормална на ту равнину, а како се тело окреће тако око свога тежишта да његов иницијални пресек остане увек у равнини XY, то је његово кретање око тежишта такво као кад би ротирало око једне осе која пролази кроз S а нормална је на равнину XY. Зато ће трећа једначина кретања бити изражена са

$$I_3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_3 \qquad 3)$$

где I_3 означава моменат инерције обзиром на ту осу. Из ових трију једначина можемо израчунати ξ_0, η_0 и φ као функције од t, па према томе одредити положај тела у сваком моменту.

Пример:

Једна кружна плоча која не мора бити хомогена но чији је материјал симетрично око њеног центра распоређен тако да њено тежиште S пада у центар круга, нека се котрља а да не клизи по косој равнини нагиба α. Нека на круг дејствује само његова тежина Mg. Нека се испита кретање круга.



Круг нека започне своје кретање у тачки O без иницијалне брзине. У том положају нека се тачка E круга додирује са стрмом равнином. Како се круг котрља а не клизи, то је лук CE једнак прави CO. Означимо CO са x, а радиус круга са r, то постоји једначина

$$r\varphi = x$$

Ако нам је дакле познато x, онда познајемо и координате тежишта S јер је

$$\xi_0 = x$$
$$\eta_0 = r$$

па познајемо и оријентацију круга јер нам је познат угао φ. Положај круга одређен је дакле потпуно са једном координатом. Овакав систем чији је положај одређен само са једном координатом зовемо систем са ______ веза̄на.

Из горњих једначина следује

$$\varphi = \frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\eta_0}{dt^2} = 0$$

па зато једначине кретања 1), 2), 3) добијају овај облик

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = R_x \qquad 1^x)$$

$$0 = R_y \qquad 2^x)$$

$$J_s \frac{1}{r}\frac{d^2x}{dt^2} = M_s \qquad 3^x)$$

Означимо нормални отпор стрме равнине са N а силу трења са F, то је

$$R_x = Mg\sin\alpha - F$$
$$R_y = -Mg\cos\alpha + N$$
$$M_s = +Fr$$

– зато јер моменат умањује угао φ.

Из једначине $2^x)$ следује

$$N = Mg\cos\alpha$$

Тиме је нормални отпор одређен.

Из једначине $1^x)$ следује

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F \qquad 1^{xx})$$

а из једначине 3ˣ)

$$\mathcal{J}_s \frac{1}{r} \frac{d^2x}{dt^2} = +Fr \qquad 3^{xx})$$

Елиминишимо из последњих двеју једначина непознату величину F, што ћемо добити једначину кретања која одређује x као функцију од t. Ставимо ли вредности за F из једначине 1ˣˣ) у једначини 3ˣˣ) што добијамо

$$\mathcal{J}_s \frac{1}{r} \frac{d^2x}{dt^2} = -Mr\frac{d^2x}{dt^2} + Mgr\sin\alpha$$

како је

$$\mathcal{J}_s = M\rho_s^2$$

где ρ_s означава радиус инерције обзиром на осу кроз S, што добијамо

$$\rho_s^2 \frac{d^2x}{dt^2} = -r^2\frac{d^2x}{dt^2} + gr^2\sin\alpha$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{\rho_s^2 + r^2}\sin\alpha$$

Ова се једначина даје директно интегрисати. Прва интеграција даје

$$\frac{dx}{dt} = g\frac{r^2}{\rho_s^2 + r^2}(\sin\alpha)t + C$$

но како је

$$\text{за } t = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0$$

то је

$$C = 0$$

па поновна интеграција даје

$$x = \frac{g}{2}\frac{r^2}{\rho_s^2 + r^2}(\sin\alpha)t^2$$

И овде ишчезава интеграциона константа јер је

$$\text{за } t = 0$$

$$x = 0$$

При кретању мобилне тачке на стрмој равнини имали смо ову диференцијалну једначину

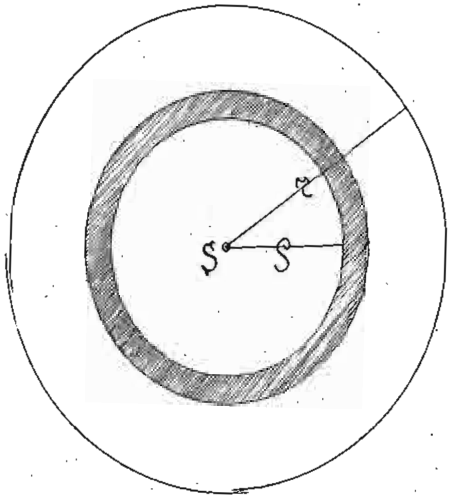
$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha$$

т.ј. она је гласила тако као кад би

на њу дејствовала акцелерација $g\sin\alpha$. Кретање круглог тела је исто такво само место акцелерације $g\sin\alpha$ имамо акцелерацију

$$g\frac{r^2}{\rho_s^2+r^2}\sin\alpha$$

Ако је круг хомоген, а његова густина једнака ν, онда је његов моменат инерције обзиром на осу кроз S једнак



$$J_s=\int_0^r 2\pi\rho\, d\rho\, \nu\, \rho^2 =$$
$$= 2\pi\nu\int_0^r \rho^3\, d\rho =$$
$$= \pi\frac{\nu}{2}r^4$$

Маса круга једнака је

$$M=\nu r^2\pi$$

па је дакле

$$\rho_s^2=\frac{J_s}{M}=\frac{r^2}{2}$$

па је зато једначина кретања у овом случају

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Круг се дакле котрља две трећине пута спорије него што би се котрљала мобилна тачка т.ј. 2/3 сила примењује се на спуштање а 1/3 на обртање око тежишта.

Теорема живе силе.

Уочимо једну произвољну тачку посматраног система. Онда на њу дејствују интерне силе које дају резултанту са компонентама $X_i\, Y_i\, Z_i$. Сем тога дејствују на ту тачку (евентуално) и екстерне силе које дају резултанту са компонентама $X_e\, Y_e\, Z_e$. Означимо ли масу уочене тачке са m, то су једначине кретања те тачке

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_e + X_i$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_e + Y_i$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_e + Z_i$$

Конструишимо израз

$$(X_e + X_i)\,dx + (Y_e + Y_i)\,dy + (Z_e + Z_i)\,dz = m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

Овој једначини можемо дати и овај облик

$$(X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz) + (X_i\,dx + Y_i\,dy + Z_i\,dz) = \frac{m}{2}\,d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

Први члан леве стране означава елементарну радњу што су ју обавиле екстерне силе при померању посматране тачке; означимо ту елементарну радњу са

$$dA_e$$

Други члан леве стране означава елементарну радњу интерних сила; означимо ју са

$$dA_i$$

Израз

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$$

означава квадрат брзине посматрање тачке. Зато добијамо једначину

$$dA_e + dA_i = d\,\frac{mv^2}{2} \qquad 1)$$

Израз

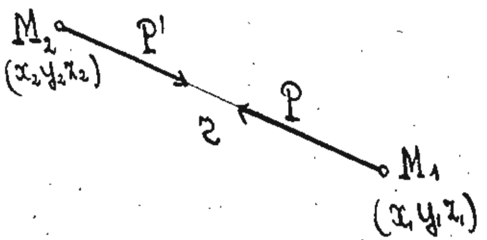
$$\frac{mv^2}{2}$$

зовемо <u>живом силом</u> посматране тачке.

Замислимо сада да смо овакве једначине написали за све тачке система па сабрали; то добијамо

$$\sum d\,\frac{mv^2}{2} = \sum dA_e + \sum dA_i$$

Последњи члан ове једначине представља нам збир елементарних интерних сила посматраног система. Прво ћемо испитати значење и вредност тога израза. Уочимо две произвољне тачке посматраног система M_1 и M_2. Њихове координате нека буду $(x_1 y_1 z_1)$ и $(x_2 y_2 z_2)$.



Њихово одстојање r једнако је према томе

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad 2)$$

На тачку M_1 дејствује тачка M_2 силом P, а на тачку M_2 дејствује тачка M_1 силом P'. Према принципу акције и реакције интензитети тих сила су једнаки и оне падају у исту праву. Компоненте силе P једнаке су

$$P_x = P\,\frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$P_y = P\,\frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$P_z = P\,\frac{z_2 - z_1}{r}$$

а компоненте силе P' су једнаке овим компонентама само противног знака, дакле

$$P'_x = -P\,\frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$P'_y = -P\,\frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$P'_z = -P\frac{z_2-z_1}{r}$$

Замислимо сада да се тачка M_1 померила за једну бескрајно малену дужину која има компоненте dx_1 dy_1 dz_1, а да се је тачка M_2 померила за дужину која има компоненте dx_2 dy_2 dz_2. Онда ће радња силе P бити једнака

$$P_x dx_1 + P_y dy_1 + P_z dz_1$$

а радња силе P' биће једнака

$$P'_x dx_2 + P'_y dy_2 + P'_z dz_2$$

Обе радње добићемо ако ова два израза саберемо, па ставимо ли још у тај израз пређашње вредности за P_x P_y P_z P'_x P'_y P'_z то добијамо елементарну радњу што су је обе тачке при померању извршиле. Она је

$$da_i = \frac{P}{2}\{(x_2-x_1)(dx_1-dx_2)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)\}$$

Диференцирајмо једначину 2) па добијамо, ако одмах пократимо са 2,

$$r\,dr = (x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)$$

Претпостављамо да дистанција обеју тачака M_1 и M_2 : r остане непромењена; то је случај код крутих тела, а такође је случај код материјалних линија; зато је

$$dr = 0$$

па помножимо ли последњу једначину са -1 то добијамо

$$(x_2-x_1)(dx_1-dx_2)+(y_2-y_1)(dy_1-dy_2)+(z_2-z_1)(dz_1-dz_2)=0$$

Зато је

$$da_i = 0$$

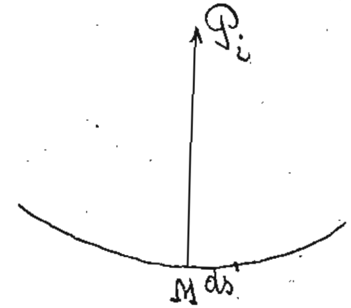
Напишемо ли овакове једначине за све могуће комбинације од две и две тачке посматраног система па саберемо, то добијамо да је збир елементарних радња свих интерних сила раван нули т.ј.

$$\Sigma\, da_i = 0$$

Зато једначина 1) добија облик

$$\sum d\frac{mv^2}{2}=\sum dA_e \qquad 1^x)$$

Ми смо до сада претпоставили да се посматрани систем састоји из елемената који могу бити или крута тела или апсолутно танке материјалне линије које се не дају истегнути. Но посматрани систем може лежати на ослонцима т.ј. поједине његове тачке могу бити присиљене да се крећу или по заданим линијама или по заданим површинама. Онда реакције које се на таквим ослонцима указују можемо рачунати у екстерне силе, но можемо их при примени горње једначине рачунати и у интерне силе, јер је њихова елементарна радња при сваком померању равна нули. То следује из овога: узмимо да је једна тачка система присиљена да се креће по једној заданој линији без трења. Онда је сила P_i којом дејствује та линија на посматрану тачку као што смо већ показали нормална на ту линију. Тачка M може се померати само у тој линији лево и десно, па је једно и друго њено померање нормално на сили, а то значи да је елементарна радња те силе у ослонцу равна нули.



Исто то важи и за тачку која се може померати у једној заданој површини; и онда је отпор те површине нормалан на свако померање. Зато је и радња свих тих сила у ослонцима равна нули. Ово све важи, као што смо већ казали, само онда ако се у ослонцима не указују силе трења.

Интеграцијом једначине $1^x)$ добијамо

$$\sum \underline{mv^2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_e \qquad 3)$$

Израз

$$\sum \frac{mv^2}{2}$$

зовемо <u>кинетичком енергијом</u> посматраног система, па зато можемо да кажемо: Промена кинетичке енергије посматраног система једнака је збиру радња што их за то време те промене обављају све екстерне силе.

Ова теорема зове се <u>теорема живе силе.</u>

<u>König-ова теорема</u>

Израз

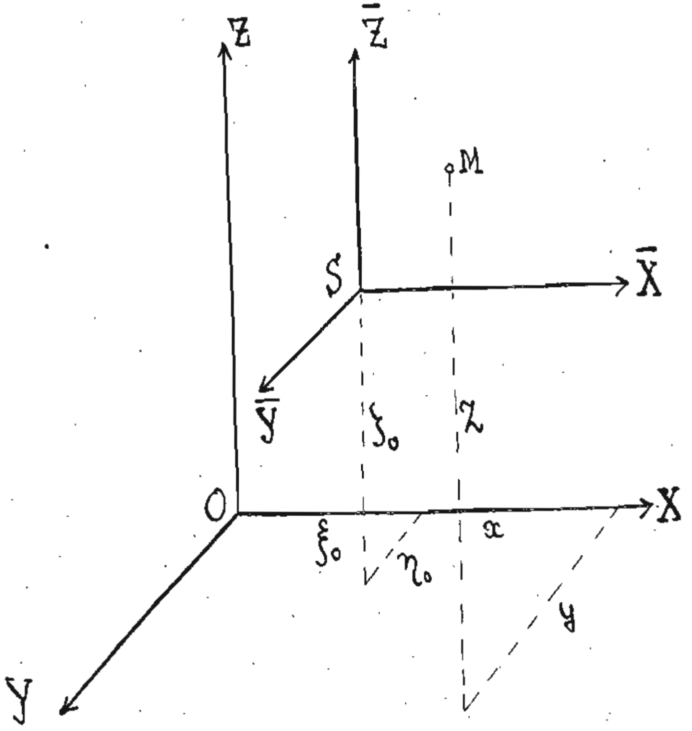
$$\sum \frac{mv^2}{2}$$

који смо назвали кинетичком енергијом посматраног система односи се на апсолутно кретање посматраног тела јер смо претпоставили да је координатни систем на који су се наше једначине односиле непомичан. Тај непомични систем означимо са XYZ. Тежиште посматраног система нека буде S. Његове координате обзиром на први координатни систем нека буду $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$. Онда постоје једначине

$$M\xi_0 = \sum mx \qquad 1)$$

$$M\eta_0 = \sum my$$
$$M\zeta_0 = \sum mz \qquad 1)$$

где су (x, y, z) координате произвољне тачке система. Вежимо сада са системом један мобилни координатни систем $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ који се креће са системом тако да његова почетна тачка лежи увек у тежишту S система а да су осе тог система увек паралелне



осама непомичног система. Означимо ли координате тачке M обзиром на тај мобилни систем са $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, то постоје једначине

$$x = \xi_0 + \bar{x}$$
$$y = \eta_0 + \bar{y} \qquad 2)$$
$$z = \zeta_0 + \bar{z}$$

Диференцирајмо ове једначине по времену, то добијамо

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi_0}{dt} + \frac{d\bar{x}}{dt} = V_x + \bar{v}_x$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta_0}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt} = V_y + \bar{v}_y \qquad 2^{x})$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta_0}{dt} + \frac{d\bar{z}}{dt} = V_z + \bar{v}_z$$

где даље

$$V_x \quad V_y \quad V_z$$

означавају компоненте брзине V тежишта обзиром на непомични координатни систем, а

$$\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$$

означавају компоненте брзине $\bar{v}$ којом се тачка M креће у мобилном систему.

Замислимо да смо овакове једначине написали за све тачке посматраног система, сваку једначину помножили масом m посматране тачке, па све једначине сабрали; по добијамо једначину

$$\sum m v_x = \sum m V_x + \sum m \bar{v}_x$$

Како V_x можемо изводити пред знак збира, па означимо ли

$$\sum m = M$$

т.ј. масу читавог система, то добијамо ове једначине

$$\sum m v_x = M V_x + \sum m \bar{v}_x$$

$$\sum m v_y = M V_y + \sum m \bar{v}_y \qquad 3)$$

$$\sum m v_z = M V_z + \sum m \bar{v}_z$$

Диференцирајмо једначине 1) по времену; то добијамо

$$M \frac{d\xi_0}{dt} = \sum m \frac{dx}{dt}$$

или обзиром на пређашње ознаке

$$M V_x = \sum m v_x \qquad 4)$$

и на исти начин

$$M V_y = \sum m v_y$$

$$M V_z = \sum m v_z \qquad 4)$$

Ставимо ли ове вредности у једначине 3) то добијамо

$$\sum m \bar{v}_x = \sum m \bar{v}_y = \sum m \bar{v}_z = 0 \qquad 5)$$

Сада можемо приступити трансформацији израза за кинетичку енергију система

$$\sum \frac{m v^2}{2}$$

Тај израз можемо написати у облику

$$\sum \frac{m v^2}{2} = \sum \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Ставимо ли у десну страну ове једначине вредности из једначина 2^x), то добијамо

$$\sum \frac{m v^2}{2} = \sum \frac{m}{2} \{ V_x^2 + \bar{v}_x^2 + 2 V_x \bar{v}_x + V_y^2 + \bar{v}_y^2 + 2 V_y \bar{v}_y + V_z^2 + \bar{v}_z^2 + 2 V_z \bar{v}_z \}$$

или ако ове чланове у једначини сложимо

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \underbrace{(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}_{V}\sum\frac{m}{2} +$$

$$+\sum\frac{m}{2}\underbrace{(\bar v_x^2+\bar v_y^2+\bar v_z^2)}_{\bar v} +$$

$$+V_x\underbrace{\sum m\bar v_x}_{0} + V_y\underbrace{\sum m \bar v_y}_{0} + V_z\underbrace{\sum m\bar v_z}_{0}$$

Последња три члана у овој једначини су једнаки нули обзиром на једначину 5). Зато добијамо једначину

$$\sum\frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \sum\frac{M\bar v^2}{2} \qquad 6)$$

Ова једначина изражава <u>König-ову теорему</u> која гласи: Кинетичка енергија читавога система једнака је живој сили што би ју имало тежиште када би у њему била концентрисана читава маса M система увећаној за кинетичку енергију релативнога кретања система обзиром на координатни систем $\bar x\bar y\bar z$ који се креће са тежиштем а остаје паралелан своме иницијалном положају.

Узмимо да су у иницијалном положају биле брзине

$$v_0 \quad V_0 \quad \bar v_0$$

Онда је промена кинетичке енергије од иницијалног до произвољног положаја једнака

$$\sum\frac{mv^2}{2}-\sum\frac{mv_0^2}{2} = \frac{M}{2}(V^2-V_0^2)+\sum\frac{m\bar v^2}{2}-\sum\frac{m\bar v_0^2}{2}$$

Лева страна представља нам радњу што су ју за то време обавиле спољне силе. Зато ту једначину можемо писати даље овако

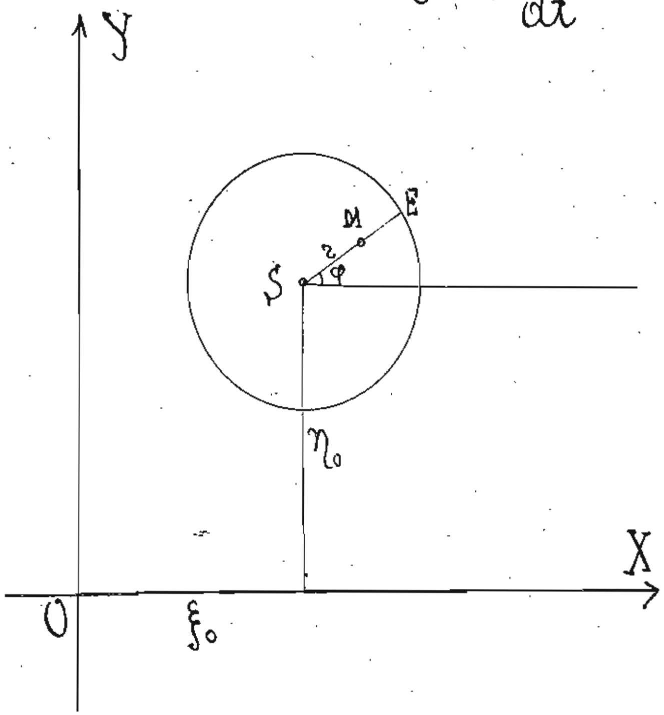
$$A_e = \frac{M}{2}(V^2-V_0^2)+\sum\frac{m\bar v^2}{2}-\sum\frac{m\bar v_0^2}{2}$$

Посматрајмо случај равног кретања. Онда је

$$V^2 = \left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_0}{dt}\right)^2$$

Релативна брзина $\bar v$ посматраног тела око тежишта једнака је

$$\bar{v} = r\frac{d\varphi}{dt}$$



Где је r одстојање уочене тачке M од тежишта, а $\frac{d\varphi}{dt}$ угловна брзина која је у уоченом моменту једнака за све тачке посматраног система. Зато можемо ту угловну брзину извадити пред знак суме па добијамо

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\sum\frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sum mr^2$$

Последњи збир представља нам моменат инерције посматраног тела обзиром на осу која пролази кроз тежиште а нормална је на равнину кретања. Зато је

$$J_s=\sum mr^2 = M\rho_s^2$$

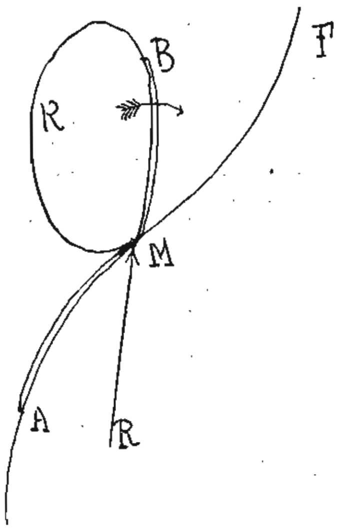
где ρ_s означава радиус инерције обзиром на исту осу. Због тога можемо једначину 6) у случају равног кретања писати у овом облику

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{MV^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 J_s$$

или

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{M}{2}\left\{V^2+\rho_s^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} \qquad 6^{x})$$

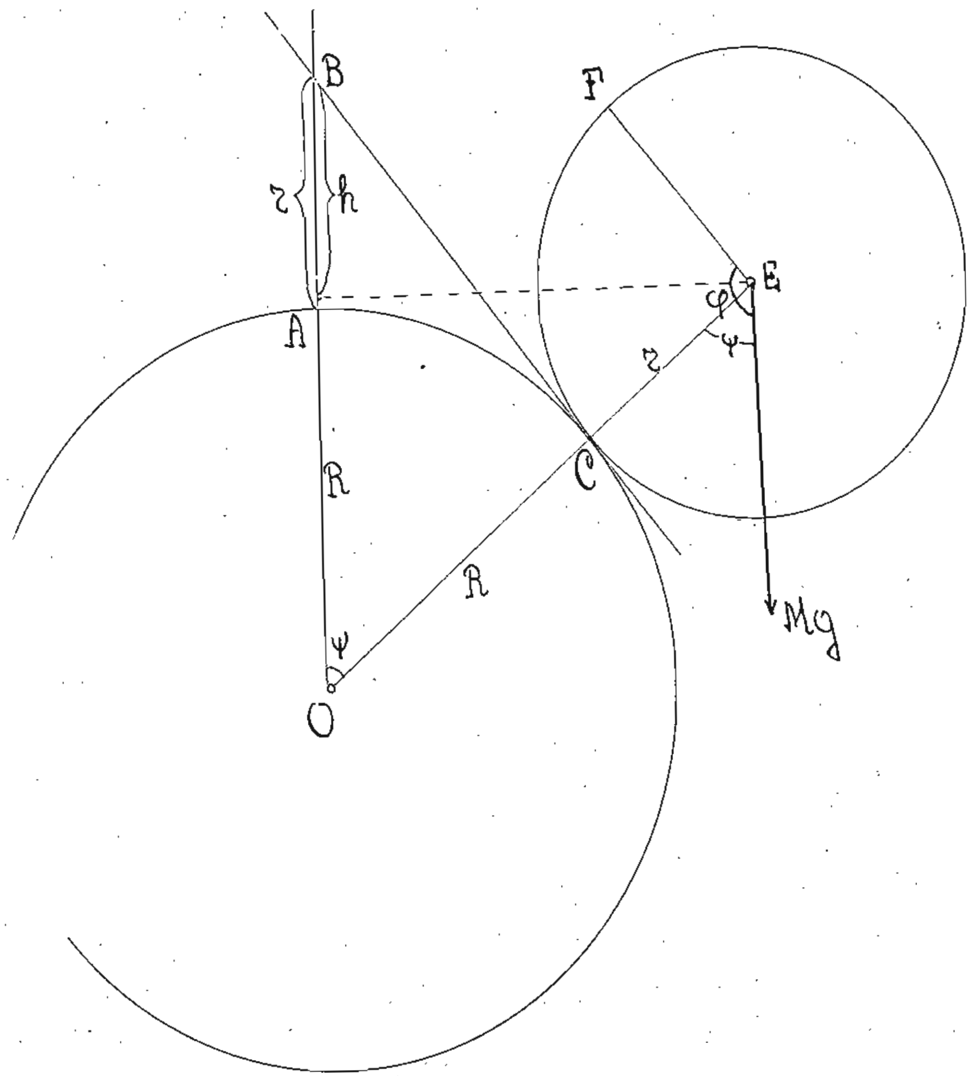
Показали смо да је радња сила реакције у ослонцима који су непомични и у онима где је тачка посматраног тела присиљена да се креће по једној заданој линији или по једној заданој површини равна нули. Сада ћемо да докажемо да је радња реакција и онда равна нули ако је тело присиљено да се котрља без клизања по једној заданој површини. Посматрамо тело K које се котрља без клизања по површини F. То котрљање без клизања могли бисмо на овај начин остварити: Замислимо један апсолутно гибак конац који не мења своју дужину причвршћен на површини F у тачки A; други крај тога конца нека буде причвршћен на телу K у тачки B.



Ако је конац затегнут тако да се приљања на површини F изнад тела, ако се тело котрља у смислу као што смо означили на слици, то оно неће моћи клизити по површини F јер га у томе спречава конац. Додирна тачка тела K и површине F нека буде M; реакција површине F на тело K нека буде R. Та реакција не мора сада бити нормална на површину јер тангенцијалној компоненти даје отпор конац. Питајмо какова ће бити радња те силе R. У то име ваља да узмемо само у обзир да се тело у уоченом моменту окрене око тачке M тј. да је тачка M непомична или да је, као што ћемо касније доказати, моментални центар ротације. Њено померање је према томе равно нули, па је због тога и радња силе R равна нули. У следећем моменту доћи ће друга једна тачка тела до додира са површином и у њој ће се показати једна друга реакција, али у сваком случају та реакција не помера нападну тачку.

Пример:

Хомогена тешка кугла масе M, радијуса r, нека се котрља без клизања по кугли радијуса R. Осим теже нека на њу не дејствују никакве спољне силе. Нека се нађе кретање купе. Учино лук AC једнак



луку CF, онда се је тачка F додиривала са тачком A. Означимо ли угао што га радиус EF затвара са вертикалом са φ, онда постоји због пређашњег једначина

$$R\psi = r(\varphi - \psi) \qquad 1)$$

Са углом φ из којега следује из горње једначине угао ψ изражен је потпуно положај купе. Посматрани систем зависи дакле само од једног параметра па га можемо назвати <u>системом са потпуним везама</u>. Једна једина једначина одредиће према томе његово кретање, па зато можемо употребити одмах једначину која изражава теорему живе силе. Та једначина је била

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} M \rho_s^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A_p \qquad 2)$$

где A_p означава радњу спољних сила. Од спољних сила дејствује на купу само њена тежина Mg и реакција доње купе, но радња те реакције је, као што смо мало пре показали, равна нули. Зато имамо да узмемо само у обзир радњу тежине. Она дејствује у центру E а наперена је у вертикали доле, па је њена радња од иницијалног положаја па до посматраног једнака

$$A_p = Mgh$$

где h означава дужину за коју се је тежиште кугле спустило доле. Како је

$$h = (R+r) - (R+r)\cos\psi$$

то је

$$A_p = Mg(R+r)(1-\cos\psi)$$

Тежиште E кугле креће се у кругу радијуса $(R+r)$, па је зато његова брзина

$$V = (R+r)\frac{d\psi}{dt}$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 2), па скратимо ли одмах са M, то добијамо

$$(R+r)^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \rho_s^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(R+r)(1-\cos\psi) \qquad 3)$$

Из једначине 1) следује

$$\frac{R+r}{r}\psi = \varphi$$

па је зато

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{R+r}{r}\frac{d\psi}{dt}$$

Ставимо ли ову вредност у једначину 3) то добијамо

$$(R+r)^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\left(1+\frac{\rho_s^2}{r^2}\right) = 2g(R+r)(1-\cos\psi)$$

или

$$\left(1+\frac{\rho_s^2}{r^2}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R+r}(1-\cos\psi)$$

Ова се једначина може сада без потешкоћа интегрисати. Да довршимо рачун треба још да израчунамо вредност радијуса инерције ρ_s обзиром на осу која у тачки E стоји нормално на равнину слике. Означимо ли моменат инерције обзиром на ту осу са J_z, то су због потпуне симетрије кугле моменти инерције обзиром на друге две ортогоналне осе међу собом једнаки т.ј.

$$J_x = J_y = J_z$$

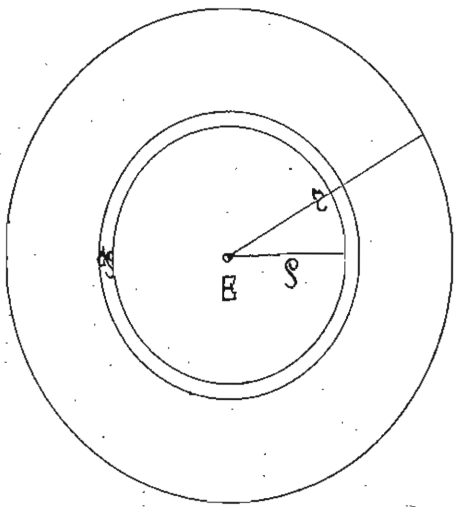
Показали смо да је поларни моменат обзиром на тачку E

$$J_0 = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) = \frac{3}{2} J_z$$

па је зато

$$J_z = \frac{2}{3} J_0$$

А поларни моменат J_0 можемо врло лако израчунати. Замислимо да смо куглу разделили у саме бескрајно танке концентричне слојеве; онда је маса једног таквог слоја који има радијус ρ а дебљину $d\rho$ једнака



$$\nu 4\pi\rho^2 d\rho$$

где ν означава густину кугле. Зато добијамо моменат инерције тога слоја ако горњи израз још помножимо са ρ^2, па ће моменат инерције читаве кугле J_0 бити једнак

$$J_0 = 4\pi\nu \int_0^r \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi\nu r^5$$

Маса читаве кугле једнака је

$$M = \frac{4}{3}\pi\nu r^3$$

па је зато

$$J_z = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\pi\nu r^5$$

а

$$\rho_s^2 = \frac{J_z}{M} = \frac{2}{5} r^2.$$

Зато је

$$1 + \frac{\rho_s^2}{r^2} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{7}$$

па једначина кретања добија овај облик

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R+r}(1-\cos\psi)$$

Из ове једначине следује да је

$$dt=\sqrt{\frac{10}{7}}\sqrt{\frac{R+r}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$$

па је

$$t=\sqrt{\frac{2\cdot 7}{10}}\sqrt{\frac{R+r}{g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}}$$

а како је

$$\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}=\sin\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}$$

то је

$$t=2\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{R+r}{g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\frac{\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}}$$

Поделимо ли именитељ и бројитељ под интегралом са $\cos^2\frac{\varphi}{4}$, то добијамо горе $\sec^2\frac{\varphi}{4}$ а доле $tg\frac{\varphi}{4}$ тако да је бројитељ диференцијал именитеља. Зато је

$$t=2\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{R+r}{g}}\left\{\log_{nat} tg\frac{\varphi}{4}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi}$$

Функција сила

Утичу ли на посматрани систем такове силе да је израз

$$\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

тотални диференцијал једне функције U т.ј.

$$\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=dU$$

онда ту функцију U називамо функцијом сила. Лева страна представља нам елементарну радњу, па је зато

$$dA=dU$$

или интеграцијом

$$A=U-U_0$$

т.ј. радња што ју силе обављају на систему једнака је диференцији вредности функције U између коначног и почетног положаја без обзира на пут или на конфигурације кроз које је систем прошао.

Доказали смо да је та радња једнака диференцији кинетичке енергије система т.ј.

$$A = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}$$

Последње две једначине можемо спојити у ову једначину

$$\sum \frac{mv^2}{2} + (-U) = \sum \frac{mv_0^2}{2} + (-U_0)$$

Израз $(-U)$ називамо потенцијалном енергијом система, па зато ова једначина казује да је збир кинетичне и потенцијалне енергије у иницијалном положају једнак збиру кинетичне и потенцијалне енергије за време читавога кретања или другим речима да је збир кинетичне и потенцијалне енергије константан.

Потенцијалну енергију можемо схватити и као способност система да обавља једну радњу. Бацимо ли н. пр. једно тело вертикално у вис, то ће његова кинетичка енергија опадати, али ће његова потенцијална енергија расти т.ј. тело добија способност да падајући у иницијалном положају натраг обавља радњу.

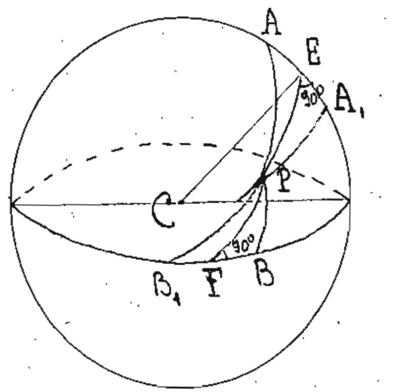
Овакови механички системи за које постоји функција сила зову се по Лорду Келвину (Вилему Томзону) конзервативним. Указују ли се силе трења, то посматрани систем сила неће имати своју функцију сила. Изгледа, дакле, да у томе случају није горњи услов задовољен да је збир кинетичке и потенцијалне енергије константан. То важи само са механичког гледишта јер ће се заиста један део механичке енергије утрошити, али ће се показати услед трења у облику топлоте, па се зато овај принцип, ако се топлота, електрична и магнетна стања сматрају такође као енергије, може генералисати и у том облику носи он назив принцип о одржању енергије који гласи: да је у васиони збир енергија константан и неуништив.

Кретање крутог тела у простору од три димензије.

Ако су тачке посматраног система везане инваријабилно једна на другу, онда кретање сваке тачке зависиће од кретања осталих, па зато морају постојати неки општи услови кретања који морају у сваком случају бити задовољени па ма какво кретање то било. Ти услови морају бити такви да ако познајемо кретање трију тачака посматраног тела које не леже у истој правој, да онда морамо познавати и кретање читавог система. Те опште услове који сачињавају кинематику крутог тела ћемо сада да испитујемо.

Кретање крутог тела око једне непомичне тачке.

Тачка C посматраног тела нека буде непомична. Њен положај је према томе одређен у сваком моменту, зато ваља да познајемо само још кретање других двеју тачака A и B, па да нам тиме буде одређено кретање свих тачака. Положај тачке A у времену t нека буде A а у времену t_1 A_1. Исто тако нека буде положај тачке B у у времену t: B, а у времену t_1: B_1.



Положимо равнину слике кроз тачке C, A и A_1. Одаберимо тачку B у посматраном телу тако да буде

$$CB = CA$$

т. ј. да тачке A и B леже на истој кугли које центар лежи у тачки C. Положимо кроз положаје A и A_1 највећи круг, па тај круг лежи према претпоставци у равнини слике. Положимо исто тако кроз положаје B и B_1 највећи круг. Располовимо лук AA_1 тачком E, па положимо кроз ту тачку највећи круг који стоји нормално на луку AA_1. Располовимо лук BB_1 тачком F, па положимо и кроз њу највећи круг који стоји нормално на том луку BB_1. Оба круга секу се у тачки P. Спојимо тачку P највећим круговима са тачкама A, A_1, B, B_1. Онда постоје између сферних троуглова које смо на тај начин добили ове релације

$$\triangle AEP \cong \triangle A_1EP$$

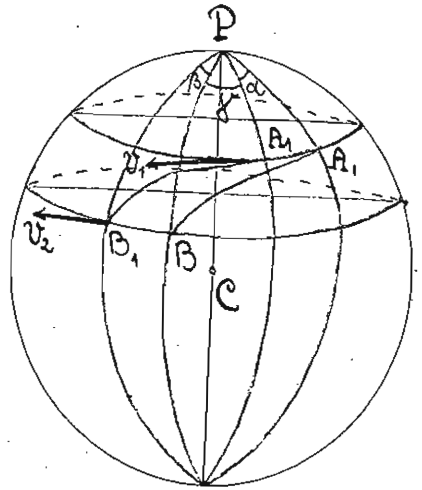
јер је

$$\widehat{AE} = \widehat{A_1E}$$

јер су углови код E прави, а страна EP је заједничка. Зато следује једначина

$$\widehat{PA} = \widehat{A_1P}$$

Ова једначина казује да тачке A и A_1 леже на истом паралелном кругу ако одаберемо за пол кугле тачку P. Нацртајмо нову слику такву да оса CP лежи у равнини слике.



Онда леже A и A_1 на истом паралелном кругу. Из прве слике следује даље

$$\triangle BFP \cong \triangle B_1FP$$

из истих разлога као и пре, па зато следује да је

$$\widehat{PB} = \widehat{PB_1}$$

а то значи да тачке B и B_1 леже на

истом паралелном кругу ако одаберемо тачку P за пол. Тај положај представљен је на другој слици. Повуцимо на другој слици меридијане кроз тачке A, A_1, B и B_1; онда су ти меридијани идентични са исто означеним највећим круговима на првој слици. Спојимо на другој слици тачку A са тачком B највећим кругом и исто тако тачку A_1 са тачком B_1; онда су лукови

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$$

зато јер се за време кретања међусобна дистанција посматраних двеју тачака не мења. Зато следују ове једначине

$$\Delta PAB \cong \Delta PA_1B_1$$

јер су им све три стране међу собом једнаке, па зато

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle A_1PB_1$$

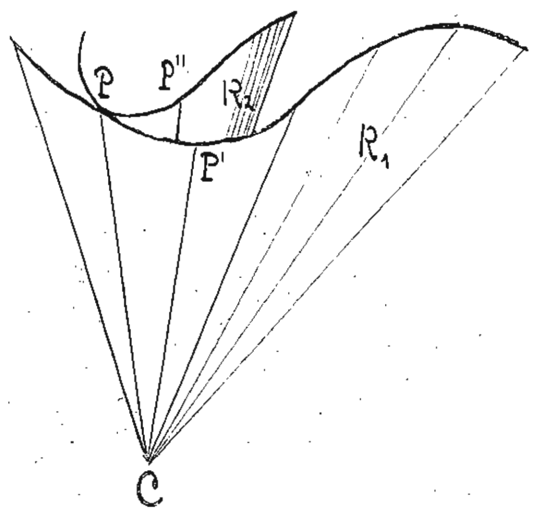
или употребив углове α, β, γ као што је на слици означено

$$\alpha + \gamma = \gamma + \beta$$

или

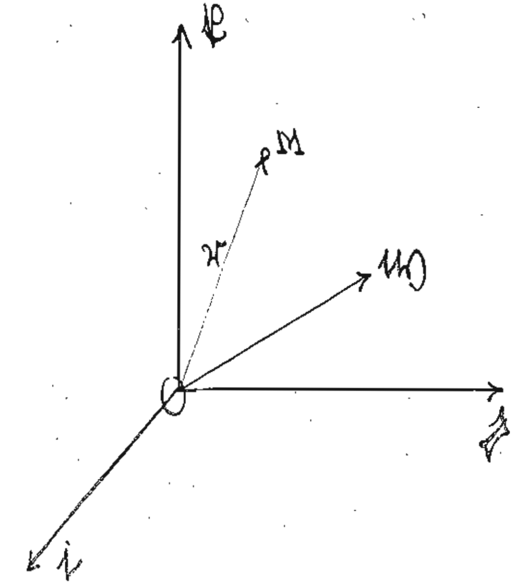
$$\alpha = \beta$$

а то значи да се ротацијом тела око осе CP за угао α може довести тачка A до коинциденције са тачком A_1, а тачка B до коинциденције са тачком B_1. Положаји AB и A_1B_1 били су, сем рестрикције да отстојања тачака остају непромењена, произвољни, па зато можемо да кажемо: посматрано тело може се из свог иницијалног положаја довести у сваки произвољан положај ротацијом око једне осе која пролази кроз тачку C. Ако су почетни положај и положај у који доводимо тело бескрајно блиски, онда се оса CP зове <u>моментана оса</u>. Сваком елементу кретања посматраног тела одговара једна моментана оса. Та оса мења од момента до момента свој положај у телу а и своје положаје у простору. Ако су нам за-дата кретања тачака A и B у следеђем моменту т.ј. ако познајемо векторе брзине v_1 и v_2, то су ти вектори тангенте на паралелне кругове AA_1 и BB_1, па претпостављамо сада да су померања AA_1 и BB_1 бескрајно мала. Можемо осу CP добити онда на тај начин да у тачкама A и B положимо равнине које су нормалне на векторе v_1 и v_2. Обе те равнине секу се у моментаној оси CP. Сваком моменту кретања одговара дакле једна моментана оса. Ако је то кретање континуирно, то та оса мења континуирно свој положај у посматраном телу а пролази без престанка кроз тачку C. Значи дакле да су сви положаји моментаних оса у телу генератрисе једнога конуса којега врх лежи у тачки C. Но моментана оса мења континуирно свој положај у простору, па зато сви положаји моментаних оса у простору сачињавају генератрисе једнога конуса у простору са врхом у C. Тај конус је везан за простор т.ј. он је непомичан док је први конус везан за тело па се окреће заједно са телом. У једном одређеном моменту је посматрана оса ротације генератриса и једног и другог конуса, то значи да се у тој моментаној оси која одговара том моменту додирују оба конуса. Та моментана оса нека буде у посматраном моменту оса CP.



У тој се оси додирују конус K_1 који је непомичан у простору и конус K_2 који ротира заједно са телом. У следеном моменту имаће ротациона оса у простору други положај па ће одговарати генератриси СФ' конуса K_1, а имаће други положај у самом телу па ће одговарати генератриси СФ'' конуса K_2. У томе другом моменту ће се генератрисе СФ' и СФ'' додиривати, а то значи да се конус K_2 котрља по конусу K_1. Зато можемо свако кретање посматраног крутог тела око тачке С схватити на овај начин: У простору је фиксиран један конус са врхом у С, иначе му облик може бити произвољан; са телом је везан један други конус K_2 са врхом у С; овај други конус котрља се преко првога.

Кретање посматраног тела у моменту t биће нам према томе познато ако будемо познавали његову моменталну осу ротације, угаону брзину и смисао у којем тело ротира. Све те три величине можемо представити једним вектором ω којега се правац подудара са осом ротације, чији је интензитет једнак угаоној брзини и који је наперен на ону страну са које посматрано тело ротира у позитивном смислу.



Онда, ако означимо вектор положаја произвољне тачке М тела узет од почетне тачке О вектора ω са r, то је, као што смо већ више пута казали, брзина тачке М представљена изразом

$$v = [\omega r]$$

Означимо ли јединичне векторе у правцу нормалних оса са i, j, k, и означимо ли компоненте вектора ω са $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, па узмемо ли у обзир да су компоненте вектора r x, y, z, то горњи израз можемо представити и са детерминантом

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

па су зато компоненте вектора v субдетерминанте првог реда претходне детерминанте и према томе

$$v_x = z\omega_y - y\omega_z$$

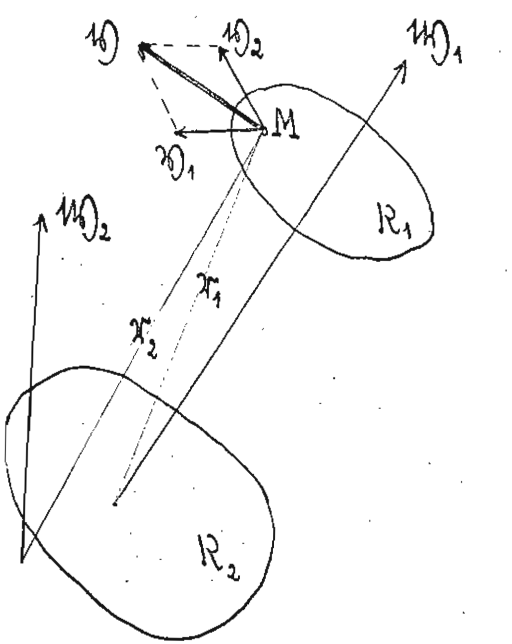
$$v_y = x\omega_z - z\omega_x$$

$$v_z = y\omega_x - x\omega_y$$

Ми смо при овом излагању употребили енглески координатни систем док се у Рационалној Механици обично примењује француски, но како се у том случају и смисао закретања узима позитивно кад следује у смислу казаљке на сату, то горње једначине остају непромењене и за француски координатни систем.

Састављање ротација.

Посматрамо тело K_1 нека извађа у посматраном моменту ротацију представљену вектором ω_1 т.ј. нека ротира око праве вектора ω_1; ω_1 нека буде даље моментална оса ротације. Та оса ротације нека буде везана са телом K_2 па нека ово ротира око осе ω_2. Питајмо какву ће брзину имати у посматраном моменту произвољна



тачка M тела K_1. Услед ротације око осе ω_1 биће њена брзина

$$v_1 = [\omega_1 r_1]$$

а услед ротације око осе ω_2 биће њена брзина

$$v_2 = [\omega_2 r_2]$$

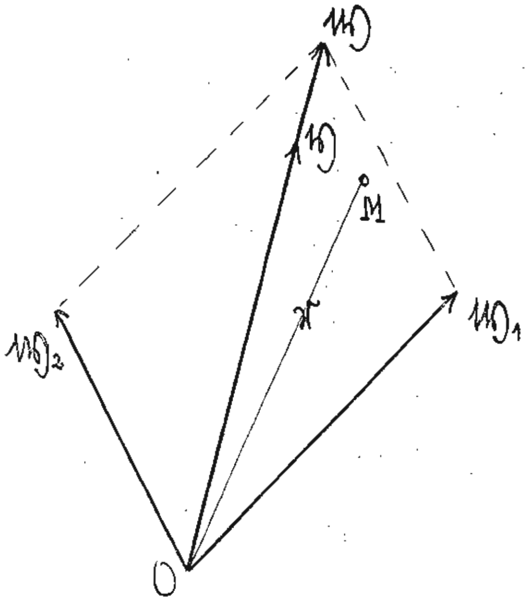
Но обе ове брзине дају се по правилу паралелограма саставити у једну, па је зато резултујућа брзина тачке M

$$v = v_1 + v_2 = [\omega_1 r_1] + [\omega_2 r_2]$$

На исти начин дају се саставити и већи број истовремених ротација.

Специјални случај.

1° Ако се праве вектора ω_1 и ω_2 међусобно секу, онда их можемо замислити да дејствују у њиховој тачки пресека O јер су век-



тори ротације вектори који се могу померати дуж својих правца јер се тим померањем у правој векторски продукат $[\omega r]$ не мења. Узмимо сада једну тачку M; онда је резултујућа брзина према пређашњем једнака

$$v = [\omega_1 r] + [\omega_2 r] =$$
$$= [(\omega_1 + \omega_2) r]$$

Саставимо ли дакле ротације ω_1 и ω_2 у једну резултујућу ω

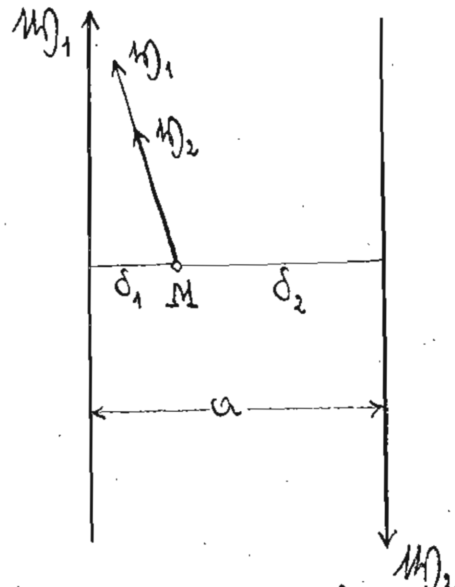
$$\omega_1 + \omega_2 = \omega$$

онда је брзина произвољне тачке M једнака

$$v = [r \omega]$$

а то значи да се произвољна тачка а према томе и читаво тело креће у посматраном моменту тако као кад би ω била моментана оса ротације.

2° Ротације ω_1 и ω_2 нека сачињавају један векторски спрег т.ј. нека су паралелне, исте величине, но противнога правца. Онда мобилна тачка M креће се у посматраном моменту услед ротације око осе ω_1 нормално на равнину слике, наперена је иза слике а њен интензитет једнак је



$$v_1 = \omega_1 \delta_1$$

Услед ротације око осе ω_2 креће се мобилна тачка опет нормално на равнину слике и то у правцу иза равнине слике. Интензитет те брзине једнак је

$$v_2 = \omega_2 \delta_2$$

Обе брзине, јер падају у исти правац, можемо сада једноставно сабрати, па је интензитет резултујуће брзине једнак

$$v = \omega_1 \delta_1 + \omega_2 \delta_2$$

Но како је

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

јер смо казали да оба вектора сачињавају један спрег, то је

$$v = \omega(\delta_1 + \delta_2) = \omega a$$

где a означава одстојање обеју оса. Овај израз једнак је за све тачке посматраног тела, па вектор брзине

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{M}$$

може бити представљен осом $\mathfrak{M}$ посматраног спрега $(\mathfrak{w}_1\ \mathfrak{w}_2)$, јер је интензитет те осе $\mathfrak{w}_0$ једнак ωa, а оса је наперена на ону страну векторског спрега са које посматран тај спрег заокреће у позитивном смислу, далеко иза равнине слике.

Како су брзине $\mathfrak{v}$ за све тачке посматраног тела у уоченом моменту кад оно изводи две ротације око оса које сачињавају векторски спрег једнаке, то посматрано тело изводи транслаторно кретање. Обратно, можемо свако транслаторно кретање у уоченом моменту заменити са ротацијом око једног спрега којега је оса $\mathfrak{M}$ једнака вектору брзине транслаторног кретања.

Општи случај.

Посматрано тело нека изводи у уоченом моменту произвољан број ротација представљених векторима

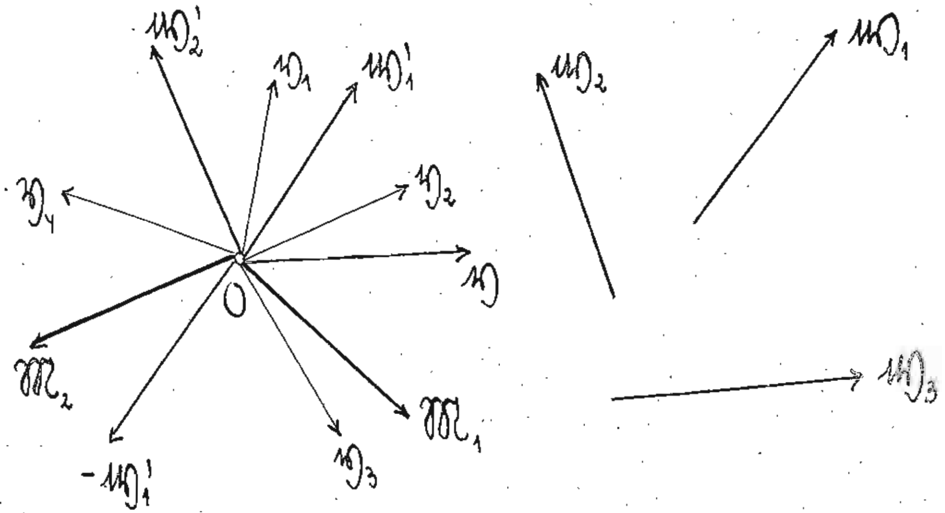
$$\mathfrak{w}_1 \quad \mathfrak{w}_2 \quad \mathfrak{w}_3 \quad \ldots$$

Нека у истом моменту изводи произвољан број транслација представљених векторима

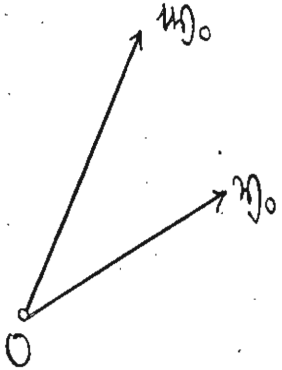
$$\mathfrak{v}_1 \quad \mathfrak{v}_2 \quad \mathfrak{v}_3 \quad \ldots$$

Питајмо шта ће бити резултујуће

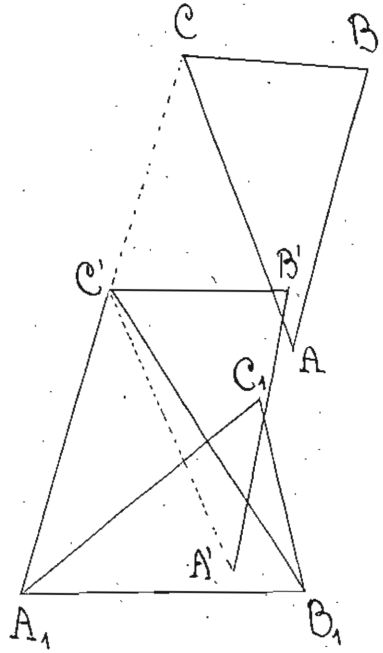
кретање посматраног тела у уоченом моменту. Вектори $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3 \dots$ везани су на своје праве па се не могу произвољно сложити у један. Вектори $v_1\ v_2\ v_3 \dots$ су слободни век-



тори па их можемо у произвољну тачки O простора надовезати и сложити у вектор v. Услед транслација $v_1\ v_2\ v_3 \dots$ изводи посматрано тело транслацију v. Питајмо какво кретање изводи тело услед ротација $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3 \dots$. Надовежемо ли у то име у тачки O вектор ω_1' који је по правцу и величини јед-нак вектору ω_1 и вектор $-\omega_1'$, па замислимо да посматрано тело изводи ротацију ω_1' и ротацију $-\omega_1'$. То смемо учинити јер се те две ротације, јер су једнаке а противне, међусобно поништавају. Сада можемо ротације ω_1 и $-\omega_1'$ саставити у једну транслацију која ће бити представљена слободним вектором $\mathfrak{M}_1$, а тај можемо надовезати у тачки O. Учинимо то исто са векторима $\omega_2\ \omega_3 \dots$ то ћемо вектор ω_2 моћи заменити са вектором ω_2' у тачки O и са транслаторним вектором $\mathfrak{M}_2$. Транслације $v\ \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \dots$ дају се саставити у једну заједничку транслацију v_0, а ротације $\omega_1'\ \omega_2'\ \omega_3' \dots$ дају се сложити, јер иду сада све кроз исту тачку, у једну заједничку ротацију ω_0. Зато можемо кретање посматраног тела редуковати на ротацију ω_0 и на транслацију v_0. У посматраном моменту извађа дакле тело ротацију око осе ω_0 и транслатира сем тога у правцу v_0.

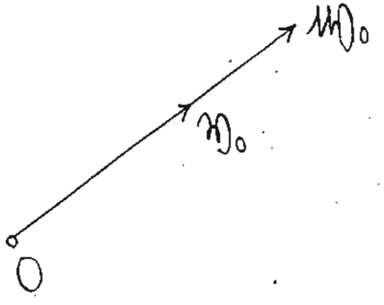


Свако произвољно кретање крутога тела у једном моменту можемо заменити његовом ротацијом и његовом транслацијом. Казали смо да је кретање тела одређено ако познајемо кретање од три његове тачке које не леже у истој правој. Нека дакле положај тих тачака у времену t буде A, B, C а у времену $t+\Delta t$: A_1, B_1, C_1. Ми можемо из првога положаја доћи у овај други на тај начин да транслацијом тела доведемо тачку C у положај C_1 а онда можемо одредити у том новом положају њене ротационе осе на тај начин да тачке A и B из положаја A', B' у које су доведене транслацијом дођу у положај A_1, B_1. Ако је време Δt бескрајно мало, то ћемо имати једну елементарну транслацију и једну бескрајно малу ротацију око једне моменталне осе.



Зато можемо у сваком моменту кретање крутог тела заменити са једном транслацијом и једном ротацијом.

При пређашњем извађању била је тачка O произвољна. Променимо ли тачку O то ћемо добити до душе исти вектор ω_0 али ће вектор v_0 променити свој правац. Из теорије састављања сила знамо да можемо положај тачке О тако одабрати да вектори ω_0 и v_0 падну у исти правац, јер ово састављање било је сасвим аналого састављању сила које дејствују на



круто тело; што су онде биле поједине силе везане на правац, то су овде ротације које су такође везане на правац; што су онде били спрегови сила представљени слободним осама то су овде спрегови ротација који дају транслације представљене слободним векторима. Сведемо ли дакле кретање посматраног тела на ротацију око осе ω_0 и на транслацију у правцу v_0 који се подудара са правцем ротације, то би свака тачка тела, када би ова два вектора остали не-промењени за време читавога кретања описивала један хеликс. Но вектори ω_0 и v_0 мењаће се у општем случају од момента до момента, па ће се и ти хеликси који би били описивани од тачака тела мењати од момента до момента. Сваком моменту одговара један елеменат хеликса, а то кретање које би посматрано тело извађало када се од уоченог момента па на даље вектори ω_0 и v_0 не би мењали зовемо *тангенцијално хеликсоидално кретање* крутог тела које одговара уоченом моменту. Свако кретање крутог тела даје се према томе представити као један континуиран низ тангенцијалних хеликсоидалних кретања.