РАЦИОНАЛНА

МЕХАНИКА

I

Ђор. Ј. Пујић, проф.

Рационална механика

Предавања
Д-ра М. Миланковића,
проф. Универзитета

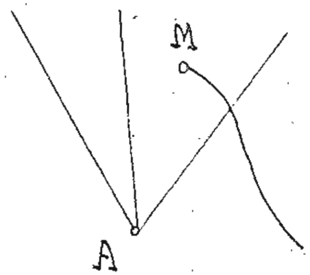
I део

Увод.

Посматрањем промена које се око нас дешавају дошли смо до појма времена. Кад тих промена неби било, небисмо знали шта је то време.

Од свих промена које се у природи дешавају упада највише у очи промена дана и ноћи јер је по њој удешен читав наш живот. Та промена потиче од привидног кретања сунца око земље. Ту је промену човек од памтивека опажао и по њој свој живот удешавао. Напредујући у култури опазио је још и једну другу промену на обзорју: опазио је привидно кретање звезданог неба. Пажљивијим посматрањем опазио је да је кретање звезда стајаћица једномерно а кретање сунца неправилно. Кретање звезданог неба је према томе једна природна јединица за мерење времена, па је звездано небо најтачнији сат. Из тога кретања изведене су јединице времена, од којих ми у Механици употребљујемо секунду.

Остале величине са којима Механика оперише узете су из Геометрије из које је и Механика никла. Те величине: дужине, површине, запремине, углови, ... никле су из наше представе простора. Геометрија испитује однос тих количина који се на концу крајева може увек свести на посматрање међусобних положаја појединих тачака према једном одабраном координатном систему. Нека A представља математски један такав координатни систем.



Онда се положај тачке M одређује помоћу координата које се тако одаберу да је тим координатама положај тачке потпуно одређен. Ако су те координате константе, онда је положај тачке M у том систему сталан. Мењају ли се те координате, онда се мења и положај тачке према том систему, па велимо да тачка изводи у том систему *кретање*. Геометриско место положаја са којима та тачка долази редом до коинциденције зовемо *путањом* или *трајекторијом* те тачке, коју ћемо у будуће звати *мобилном тачком* јер јој приписујемо материјалне особине о којима ћемо детаљније касније говорити. То кретање мобилне тачке везано је за једно извесно *време*. Испитивањем тога кретања у вези са временом и испитивањем услова за то релативно кретање тачке M у координатном систему или услова за релативно мировање тачке M у систему, то је предмет *Механике* материјалне тачке. Како се сва материјална тела могу замислити састављена из материјалних тачака, то се из Механике материјалне тачке може извести и Механика произвољног материјалног тела. Зато ћемо почети са Механиком материјалне тачке.

Механика материјалне тачке.

Механика оперише осим са геометријским величинама са још једном величином која се у геометрији не употребљава: са временом, па се због тога може сматрати за једну проширену геометрију. Ако нам је путања којом се креће мобилна тачка позната, онда је положај мобилне тачке M на тој путањи одређен ако нам је познато одстојање s од једне непомичне тачке M_0 посматране путање.

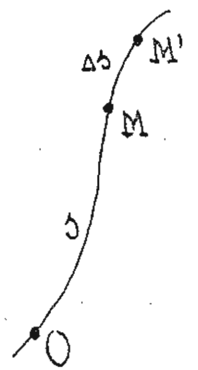
При томе се мора конвенцијом утврдити која се страна путање има да сматра за позитивну а која за негативну.

Кретање мобилне тачке по

путањи биће одређено, ако у сваком моменту будемо познавали њен положај т.ј. ако нам дужина s буде дата као функција времена. Време ћемо означавати увек са t а дужину са s које називамо <u>пређеним путем</u>. Зато ће једначина

$$s = f(t) \tag{1}$$

одређивати кретање мобилне тачке по путањи. У времену t налази се дакле мобилна тачка у положају M; у времену $t+\Delta t$ које се време разликује



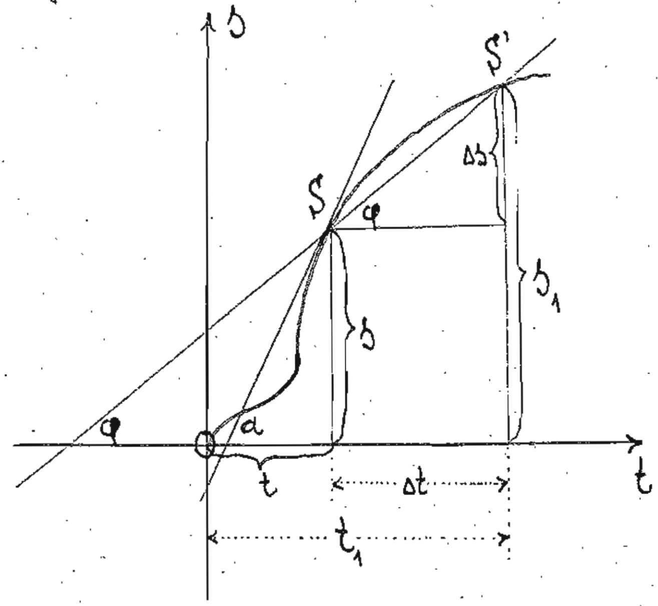
од времена t за једну коначну величину Δt налазиће се мобилна тачка у положају M' чије ће одстојање од O бити $s+\Delta s$ где Δs представља дужину лука MM'. Однос између времена t_1 и пређеног пута s_1 регулисан је једначином

$$s_1 = f(t_1)$$

јер нам та једначина за свако t даје s, или

$$s+\Delta s = f(t+\Delta t)$$

Замислимо да смо једначину 1) графички представили т.ј. да смо одабрали један ортогонални координатни систем, да смо на осу апсциса пренели дужине које одговарају времену t а као ординате пренели дужине које одговарају дужини s. Почињемо ли време да бројимо од момента кад се мобилна тачка налази у тачки



O, онда је у времену $t=0$: $s=0$. Апсциса тачке S представља време t а ордината те исте тачке представља одстојање мобилне тачке у истом времену t. Тако можемо за свако произвољно време t израчунати дужину s, па на тај начин добијамо графичку представу једначине 1) коју називамо дијаграмом пута.

Времену t, одговара превађени пут s. У времену Δt превађује мобилна тачка пут представљен дужином Δs. Квоцијенат

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

називамо средњом брзином тачке на путу MM'. Како нам је једначина 1) позната, то помоћу те једначине можемо да израчунамо вредност овог квоцијента. За сваку вредност t и Δt можемо према томе израчунати средњу брзину. Вредност тога квоцијента представљена је на дијаграму тангентом угла φ т.ј.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=tg\varphi$$

па зато можемо из дијаграма одредити вредност те средње брзине: имамо да спојимо S и S', да израчунамо нагиб φ те праве према оси апсциса; тангенс тога нагиба даје нам средњу брзину.

Шта бива ако вредност Δt опада? Онда се тачка S' приближује тачки S, па се мења и угао φ. Кад се S' приближи бесконачно тачки S, онда права SS' заузима положај тангенте на дијаграму у тој тачки S а квоцијенат $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ заузима у том случају вредност $tg\alpha$, где је α нагиб тангенте у тачки S према оси апсциса. Та се операција језиком више анализе изражава овако

$$\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=tg\alpha \qquad 2)$$

Та гранична вредност квоцијента $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ је потпуно одређена величина, па се та величина зове брзином мобилне тачке у положају M или у времену t. Леви чланови у једначини 2) означавају се у вишој математици овако: место

$$\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

пише се симболички

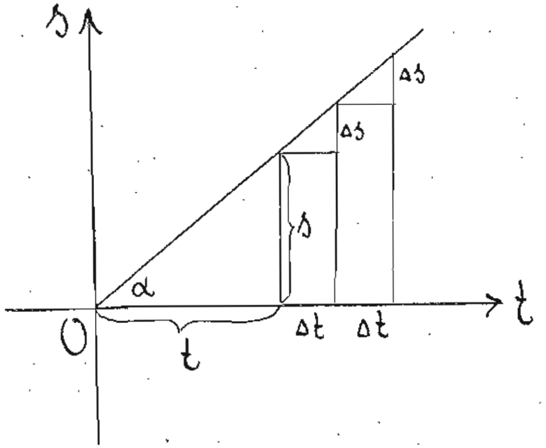
$$\frac{ds}{dt}$$

па се десни израз зове диференцијални количник величине s по времену t. Означимо ли брзину у тачки M са v, то је

$$v = \frac{ds}{dt}$$

а то значи да је брзина мобилне тачке равна диференцијалном количнику пута према времену.

Ако мобилна тачка преваљује у једнаким деловима времена једнаке делове путање, онда је дијаграм пута једна права јер заиста у том случају одговарају једнаким прираштајима времена Δt једнаки прираштаји пута Δs, па је у овом случају бр-



зине v мобилне тачке у сваком моменту једнака

$$v = tg\,\alpha$$

где је α један константан угао. Пре је свакој тачки дијаграма одговарао други угао α, а овде је он константан. Зато можемо да ставимо

$$v = c$$

где је c константа. Из предњег дијаграма следује да је

$$s = t \cdot tg\,\alpha$$

или

$$s = ct \qquad 3)$$

Ова једначина нам у овом случају представља једначину кретања.

Кретање материјалних тела или материјалних тачака бивају изазивана утицајима којих суштину не можемо одредити, али можемо одредити тела или системе оних која та кретања изазивају. Дешава се да и поред тога да на материјалну тачку дејствују тела која иначе изазивају кретања, материјална тачка ипак остаје у миру. Онда велимо да се ти утицаји међусобно поништавају или да се држе у равнотежи.

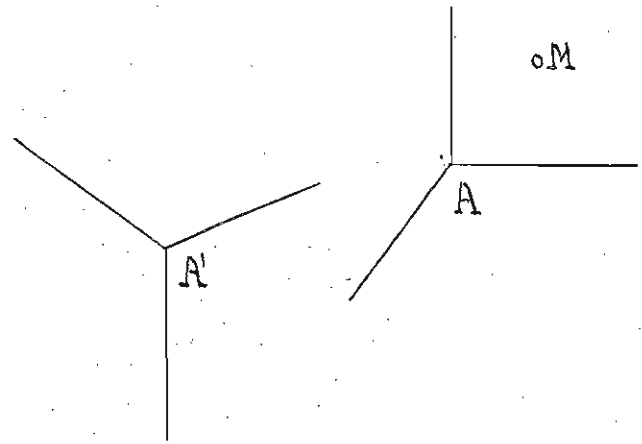
Принципи Механике

Механика је наука стечена на искуству. Та искуства могу се кондензовати у неколико основних принципа, из којих се онда могу сви закони Механике извести. Ти принципи не могу се доказати, њихов доказ лежи у стогодишњем искуству и у томе да не долазе у контрадикцију ни са једном механичком појавом. Тим принципима може се дати различит облик; ми ћемо законе Механике да едифицирамо из три принципа, којима ћемо да дамо у главноме онакав облик какав им је облик дао велики оснивач Механике Њутн.

Први од тих принципа је принцип инерције и ми га формулићемо овако: Држе ли се утицаји који на материјалну тачку дејствују у сваком положају те тачке у равнотежи, то ће се она, ако се стави у кретање, кретати праволинијски и једнаком брзином без престанка. Из овога принципа следује да ако се мобилна тачка не креће праволинијски и једнаком брзином, да се онда утицаји који на ову дејствују не држе у равнотежи. Те утицаје који мењају једнако праволинијско кретање материјалне тачке било тиме да мењају њен правац или тиме да мењају њену брзину зовемо *силом*. Шта је сила ми не знамо, то је за нас само један појам који нам служи за лакше и једноставније описивање механичке појаве. Појам силе потекао је у опште из осећања наше физичке снаге.

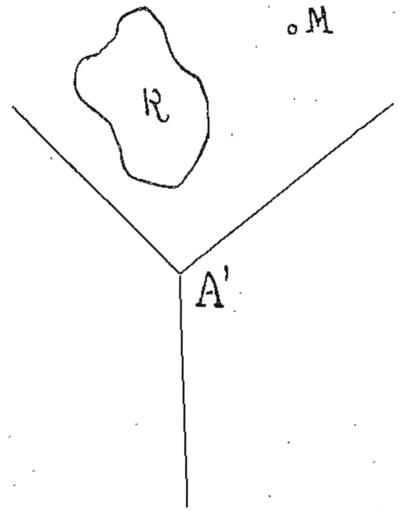
Дејствује ли на материјалну тачку више разних утицаја, то велимо да на њу дејствује један *систем сила*. Манифестација тога система назива се *резултантом* а поједини утицаји *компоненте* тога система. Сила је дакле узрок промене стања кретања материјалне тачке, а правац у којем би се кретала материјална тачка кад би само та сила на њу дејствовала а она се с почетка налазила у миру је *правац силе*. Величина промене кретања зависи од *интензитета силе*. Сила је према томе одређена ако познајемо њен правац и њену величину, она је дакле једна управљена величина или вектор.

До сада смо посматрали кретање мобилне тачке M с обзиром на координатни систем A, а претпоставили смо да систем A не учествује у кретању.



Ако се систем А креће према систему А', онда је очигледно да ће кретање мобилне тачке М с обзиром на систем А' бити друкчије него њено кретање с обзиром на систем А. То друго кретање називамо *релативним кретањем* сложених двеју кретања мобилне тачке с обзиром на систем А и кретања система А с обзиром на систем А'. Видимо такође да мобилна тачка учествује у оба ова кретања. Кретање мобилне тачке с обзиром на систем А назива се често пута и *привидним кретањем* јер посматрач који учествује у кретању система А примећује само то кретање. Такво је н. пр. кретање тела што пада сложено из ових кретања: из кретања његовог с обзиром на земљу и из кретања земљиног. Ово се кретање опет састоји из ротације земље око њене осовине, њене транслације око сунца и транслације читавог сунчаног система. Посматрач који у кретању земље опажа само прво кретање т.ј. кретање тела према земљи.

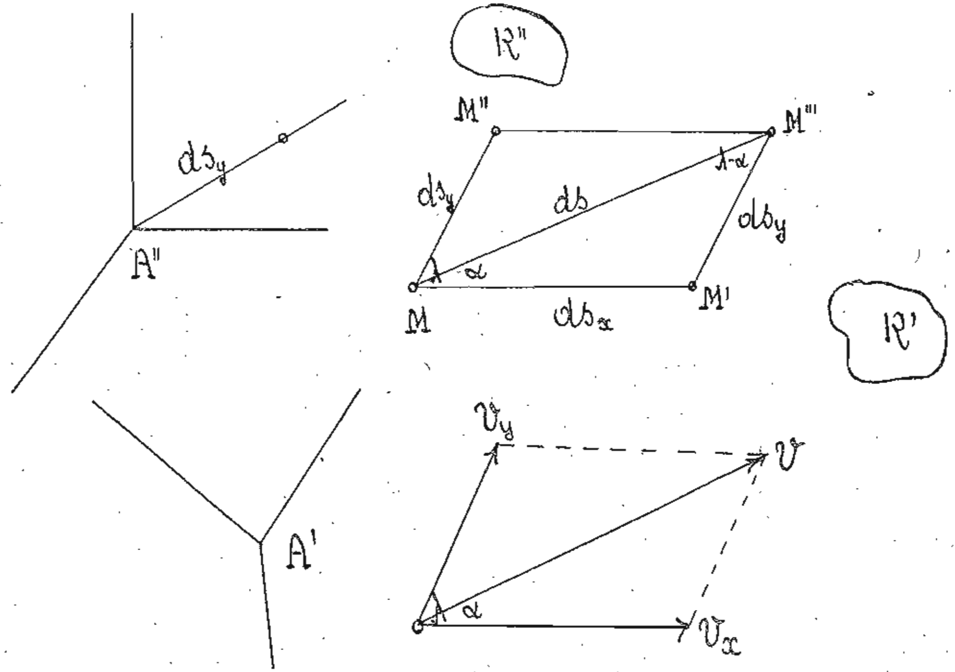
Посматрамо ли кретање мобилне тачке М према систему тела К која су то кретање изазвала, то можемо да формулишемо други основни принцип Механике који гласи:



Кретање мобилне тачке М која се налазила у релативном мировању према систему тела К која су то кретање мобилне тачке изазвала зависи само од релативног положаја мобилне тачке М према систему К, а потпуно је независно од просторног положаја мобилне тачке М и система К према којем другом координатном систему А'. Овај принцип се зове *принцип релативног кретања*.

Према томе принципу је н.пр. релативно кретање тела што пада према земљи зависно само од релативног положаја тога тела према земљи, дакле од висине тога тела изнад земље и од географске ширине и т.д. а независно је од положаја земље у сунчаном систему.

Према овом принципу можемо да испитујемо кретање мобилне тачке M изазвано од више разних система тела. Мобилна тачка M нека изводи



у исти мах два кретања и то: под утицајем система K' превалила би она у бескрајно малом интервалу времена dt у систему A бескрајно мали пут $MM' = ds_x$ у овом систему. Систем A нека се налази у миру. Под утицајем система тела K'' превалила би мобилна тачка у истом том интервалу времена dt пут $MM'' = ds_y$. Питајмо какво ће бити резултујуће кретање мобилне тачке. У то име уведимо један помоћни координатни систем A'' који се креће остајући паралелан своме почетном положају истим кретањем којим би се кретала мобилна тачка у систему A под јединим утицајем K''. Тај систем A'' нека превали у интервалу dt елеменат пута ds_y. Онда се кретање мобилне тачке изазвано системом тела K'' у координатном систему A'' не може приметити, него се у том систему показује само кретање мобилне тачке изазвано системом тела K', па је то кретање према мало час формулисаном принципу независно од положаја координатног система A'' према координатном систему A. Мобилна тачка превалиће према томе у систему A'' пут MM', а како је се за то време систем A'' помакао за елеменат пута ds_y, то ће се мобилна тачка на концу интервала dt налазити у положају M'' који је теме паралелограма MM'M''M'''. Из паралелограма следује, ако дужину MM'' означимо са ds, да је

$$ds_x = \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} ds$$

$$ds_y = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} ds$$

Поделимо ли ове једначине са интервалом времена dt то добијамо

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{ds}{dt}$$

Према дефиницији брзине представља диференцијални квоцијент

$$\frac{ds}{dt} = v$$

брзину резултујућег кретања, а диференцијални квоцијенти

$$\frac{ds_x}{dt} = v_x$$

$$\frac{ds_y}{dt} = v_y$$

брзине компонентних кретања изазваних телима K' односно K'', па зато постоје једначине

$$v_x = \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin\lambda} v$$

$$v_y = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} v$$

Ако су нам познате брзине v_x и v_y и њихови правци који су паралелни елементима пута ds_x и ds_y, онда ћемо добити брзину v резултујућег кретања ако конструишемо паралелограм брзина и узмемо његову дијагоналу. Зато можемо да кажемо да се брзине састављају по закону паралелограма.

Трећи од основних принципа Механике је принцип акције и реакције који гласи: Сваки утицај F или акција материјалне тачке M на материјалну тачку M' праћен је увек утицајем или реакцијом F' материјалне тачке M' на материјалну тачку M, па су ова два утицаја једнака но противнога правца. Према томе принципу једнака је сила којом н. пр. један тежак терет притиште своју подлогу сили којом подлога притиште терет; сила којом земља привлачи камен што пада једнака је сили којом камен привлачи земљу; сила којом сунце привлачи земљу једнака је сили којом земља привлачи сунце; сила којом један магнетни пол привлачи други једнака је сили којом овај други привлачи први пол и т. д.

Из ових принципа извешћемо све законе Механике.

Подела Механике.

Механика се дели у следећа три главна одељка:

1° Кинематика која испитује сва могућа кретања материјалних тела без обзира на силе које су та кретања изазвале. Она се зове и Форономијом, а може се назвати и Геометријом кретања.

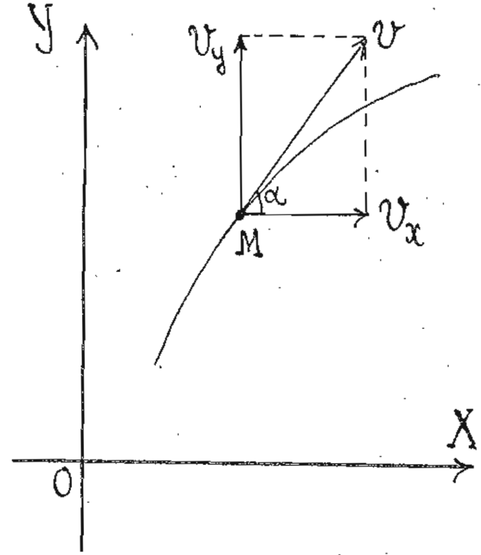
2° Статика која испитује услове равнотеже сила и њихове еквиваленције.

3° Динамика која испитује кретања материјалних тела у вези са силама које су та кретања изазвале.

Кинематика материјалне тачке.

О брзини.

Посматрајмо кретање мобилне тачке која се креће у равни XOY. Она описује при томе једну равну криву, а брзина њена v у произвољном положају је тангента на ту криву.



Раставимо ту брзину у две ортогоналне компоненте v_x и v_y паралелне осама координатног система. То растављање мора се вршити по закону паралелограма, па је због тога

$$v_x = v \cos\alpha$$

$$v_y = v \sin\alpha$$

Но како је

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

то је

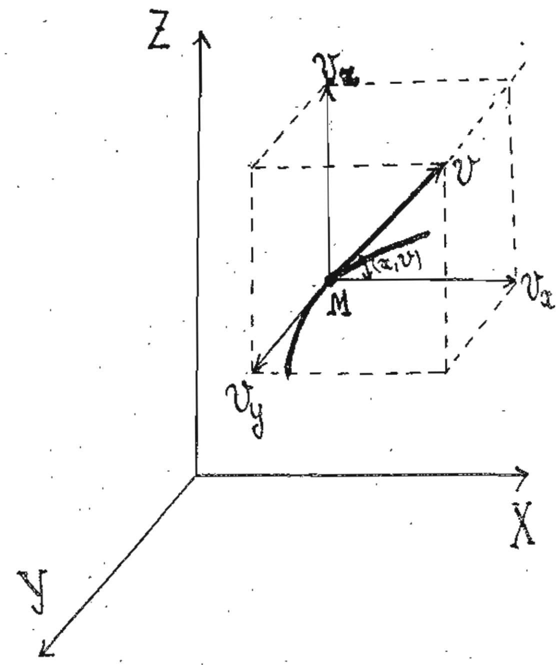
$$v_x = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}$$

Компоненте брзине су према томе диференцијални количници координата по времену.

Ако мобилна тачка описује једну просторну криву, онда можемо брзину v раставити у три компоненте које су паралелне осама OX, OY и OZ. Означимо ли угао што са v затвара са осом x са (x,v), то је

$$v_x = v\cos(x,v)$$



Означимо ли слично томе углове што их v затвара са осама OY и OZ са (y,v) и (z,v), то добијамо

$$v_y = v\cos(y,v)$$

$$v_z = v\cos(z,v)$$

Слично пређашњем може се доказати да су косинуси углова што их тангента у тачки M путање, дакле правац брзине, затвара са координатним осама једнаки

$$\cos(x,v) = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos(y,v) = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(z,v) = \frac{dz}{ds}$$

па како је

$$v = \frac{ds}{dt}$$

то је

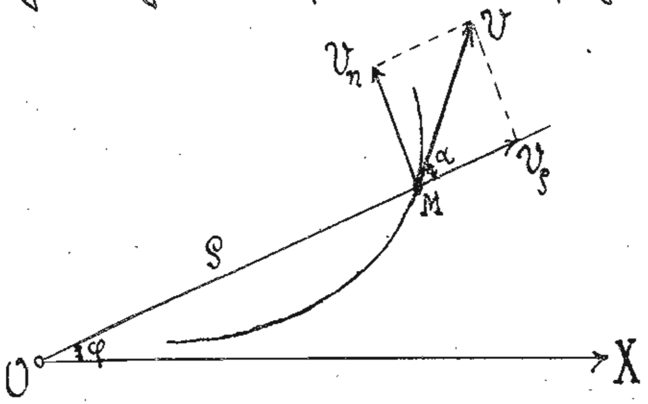
$$v_x = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{ds}{dt}\,\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt}$$

И у овом су случају компоненте брзине једнаке диференцијалним квоцијентима координата по времену.

Ако мобилна тачка описује равну криву, па ако је њен положај дат у поларним координатама, онда је често од користи раставити брзину мобилне тачке v у две компоненте од којих једна v_ρ пада у правац радиус-вектора OM, а друга компонента v_n стоји нормално на тај радиус-вектор. Потражимо



за величину тих двеју компонената. Означимо ли угао што га брзина v која тангира криву затвара са радиус-вектором са α, то је

$$v_\rho = v\cos\alpha$$

$$v_n = v\sin\alpha$$

Како је према пређашњем

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\cos\alpha = \frac{d\rho}{ds}$$

$$\sin\alpha = \rho\,\frac{d\varphi}{ds}$$

то је

$$v_\rho = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{dt}$$

$$v_n = \frac{ds}{dt}\,\rho\,\frac{d\varphi}{ds} = \rho\,\frac{d\varphi}{dt}$$

Брзина v_ρ зове се често пута <u>брзина транслације</u>, а брзина v_n <u>брзина циркулације</u>. Диференцијални квоцијент

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega$$

даје нам брзину којом се мења угао φ; зато се и назива угловном брзином. Ако радиус-вектор OM описује у једнаким јединицама времена једнаке углове, онда је угловна брзина константна.

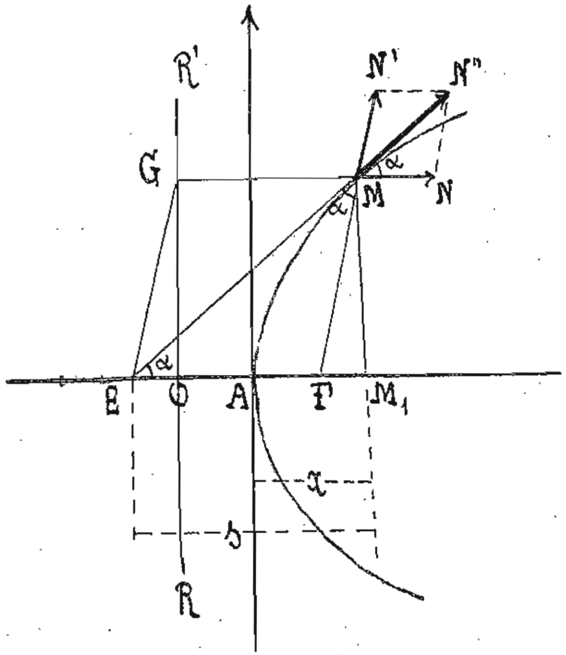
Roberval-ова метода за конструкцију тангената на равним кривама.

Још пре проналаска инфинитезималног рачуна нашао је Roberval, а независно од њега и Torricelli методу за конструкцију тангената на равним кривама које настају кретањем мобилне тачке а које се састоје у овоме: кретање мобилне тачке раставља се у два компонентална кретања, па се конструишу према законима кретања мобилне тачке компоненте брзине. Њихова тангента која је дијагонала њиховог паралелограма даје резултујућу брзину, па према томе и тангенту путање. Ми ће-но прећи неколико специјалних примера ове конструкције.

1° Случај: Парабола.

Основно својство параболе је то да је свака њена тачка M једнако удаљена од жиже F и од директрисе RR'. Зато је

$$FM = GM$$



па параболу можемо дефинисати као криву коју описује једна мобилна тачка која се креће тако да је увек једнако удаљена од F и од RR'. Зато мора брзина MN' којом се мобилна тачка удаљује од жиже F бити једнака брзини MN којом се мобилна тачка удаљује од директрисе RR'. Пренесемо ли према томе у правцу FM произвољну дужину MN' а у правцу GM произвољну дужину MN која је једнака првој т.ј.

$$MN = MN'$$

па конструишемо паралелограм тих брзина $MNN''N'$, то је дијагонала тога паралелограма резултујућа брзина и уједно тангента параболе. Из горњег услова следује

$$\sphericalangle N''MN = \sphericalangle MN''N' = \alpha$$

Из тога следује

$$\sphericalangle FEM = \sphericalangle FME = \alpha$$

па зато

$$EF = FM = GM$$

Спојимо ли према томе тачке E и G, то је четвороугао $EFMG$ ромбус и зато је

$$\sphericalangle GEO = \sphericalangle MFM_1$$

а из сличности троуглова GEO и MFM_1 следује

$$EO = FM_1$$

Како је из својства параболе

$$OA = AF$$

то из последњих двеју једначина следује

$$EO + OA = AF + FM_1$$

или

$$EA = AM_1$$

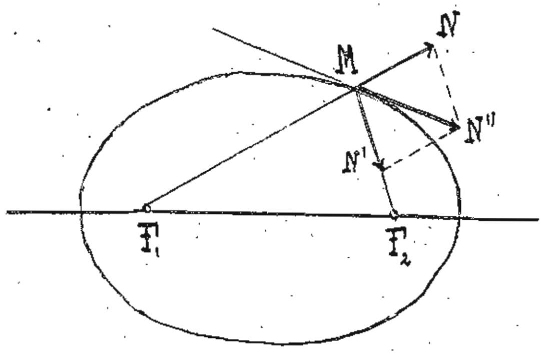
Дужина AM_1 назива се апсцисом тачке M јер се обично координатни систем полаже тако да његова почетна тачка лежи у темену параболе. Дужина EM_1 назива се субтангентом, па зато из горњих релација следује

$$s = 2x$$

т.ј. субтангента параболе једнака је двострукој апсциси.

2° Случај: Елипса

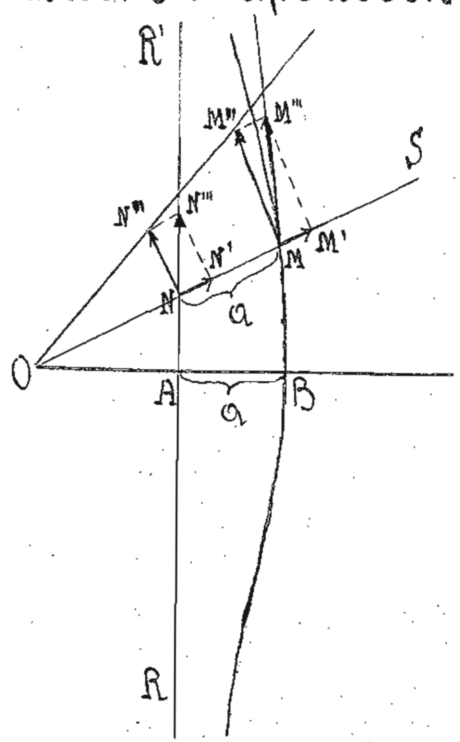
Збир одстојања $F_1M + MF_2$ константан је, па зато можемо да кажемо да



елипсу описује мобилна тачка која се креће тако да у колико се од једне жиже удаљује да се у толико другој жижи приближује да би збир одстојања остао константан. Ако се мобилна тачка брзином MN удаљује од жиже F_1, то се мора истом таквом брзином MN' приближавати жижи F_2. Резултујућа брзина MN'' дијагонала је компонентних брзина, па полови угао NMF_2. То је познато својство тангенте елипсе.

3° Случај: Конхоида

Повучемо ли из тачке O произвољну праву OM која сече непомичну праву RR', па пренесемо ли на праву од њеног пресека N константну дужину



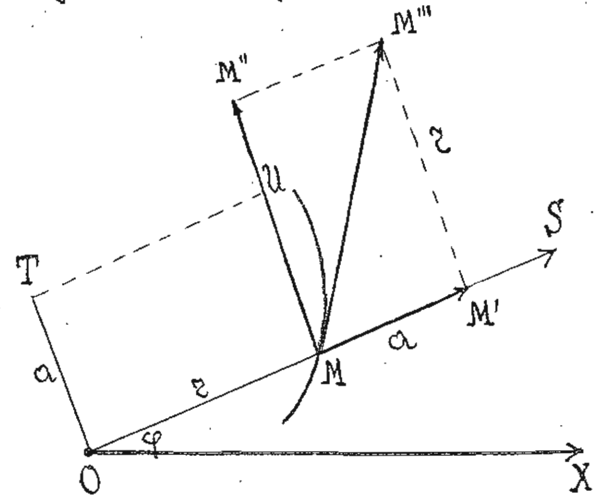
$$a = MN$$

то геометријско место свих тачака M даје једну криву која се зове конхоида. Ми можемо замислити да конхоиду описује једна мобилна тачка M која је везана инваријабилно са једном другом мобилном тачком N. Обе тачке крећу се на правој OS која ротира око тачке O тако, да тачка N клизи непрестано дуж праве RR'. Тачка N креће се дакле увек у правци RR', па нека је NN''' њена резултујућа брзина. Раставимо ову брзину у компоненте, од којих једна пада у правац OS, а друга стоји нормално на њему. Питајмо какве ће компоненте брзине у правцу OS и нормално на тај правац имати друга мобилна тачка M. У правцу MS биће њена компонента брзине MM' једнака брзини NN', јер одстојање тачака M и N остаје увек константно. Брзина MM'' у правцу нормалном на OS односиће се према брзини NN'' као одстојања $OM : ON$ јер обе мобилне тачке налазе се без престанка на правој OS која ротира око тачке O, па се њихове брзине нормалне на тај правац односе као одстојања од тачке O. Саставимо ли компоненте брзине MM'' и MM' у резултанту MM''', то нам она даје правац тангенте у тачки M.

4° Случај: Архимедова спирала

Она постаје на овај начин: мобилна тачка M креће се по правој OS константном брзином

$$v=c$$



Зато је њено одстојање r од тачке O једнако

$$r=ct$$

Ако претпоставимо да се у времену $t=0$ мобилна тачка налази у тачки O, у исто време док се мобилна тачка креће по правој OS, ротира ова око тачке O константном угловном брзином ω, па је зато

$$\varphi=\omega t$$

Ако претпоставимо да се у времену $t=0$ права OS поклапа са осом Ox, c и ω су далье константе. Елиминишемо ли из последњих двеју једначина време t, то добијамо једначину спирале

$$r=\frac{c}{\omega}\varphi$$

Означимо ли константу

$$\frac{c}{\omega}=a$$

то је једначина спирале

$$r=a\varphi$$

Брзина v_s којом се мобилна тачка креће у правцу радиус-вектора једнака је c, а брзина v_n којом се мобилна тачка креће нормално на тај правац једнака је према прећашњем

$$r\frac{d\varphi}{dt}=r\omega$$

па је зато

$$\frac{v_s}{v_n}=\frac{1}{r}\,\frac{c}{\omega}=\frac{a}{r}$$

Пренесемо ли према томе

$$MM'=a$$

$$MM''=r$$

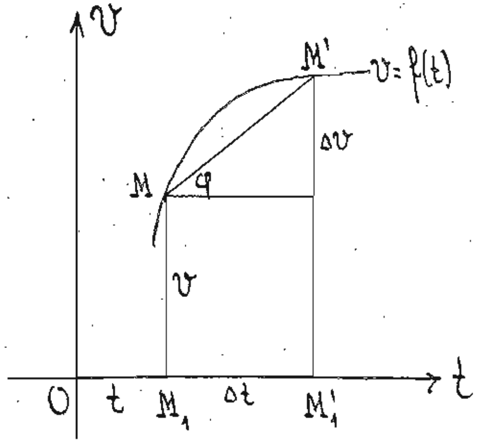
то дијагонала тога правоугаоника даје резултујућу брзину, па према томе и тангенту спирале. Зато се компоненте v_s и v_n односе као $a:r$. Конструишемо ли изнад дужине OM правоугаоник $OMNT$ који је једнак правоугаонику $MM'M''M'''$, то је дијагонала овог првог MT нормална на тангенту, па је зато MT дужина нормале спирале, а OT дужина субнормале. Отуда видимо да је код Архимедове спирале субнормала за све њене тачке константна.

<u>Акцелерација код праволинијских кретања.</u>

Мобилна тачка нека се креће у једној правој тако да се њена брзина мења континуирно од тачке до тачке или од времена до времена. Закон по коме се мења брзина нека буде одређен једначином

$$v = f(t)$$

Онда геометријску представу горње једначине у ортогоналном координатном систему добијамо ако преношамо на осу апсциса време а на осу ордината брзине. У



времену t имаће мобилна тачка брзину v представљену ординатом M_1M, а у времену $t+\Delta t$ имаће мобилна тачка брзину $v+\Delta v$ представљену ординатом $M_1'M'$. У интервалу Δt је према томе прираштај брзине Δv, па квоцијенат $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ називамо <u>средњом акцелерацијом</u> мобилне тачке у интервалу Δt. Тај квоцијент је једнак

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\varphi$$

где φ означава угао што га секанта MM' затвара са апсцисном осовином. Гранична вредност тога квоцијента т.ј.

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = p$$

називамо <u>акцелерацијом</u> мобилне тачке у времену t. Та гранична вредност представљена је и тангенсом угла α што га тангента у тачки M затвара са апсцисном осом, па има према томе коначну и одређену вредност. Како је било

$$v = \frac{ds}{dt}$$

то је

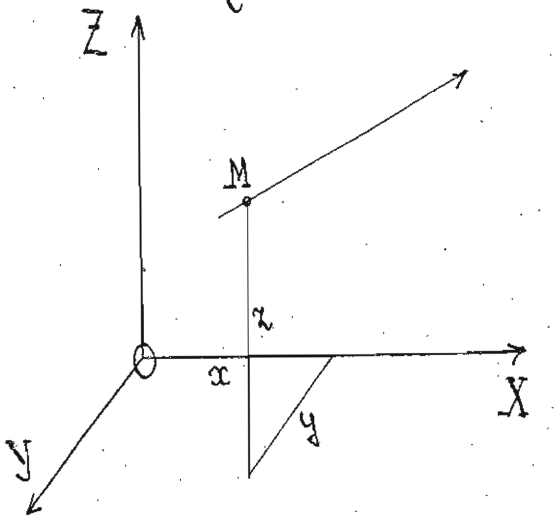
$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Акцелерација је према томе једнака првом диференцијалном количнику брзине по времену или другом диференцијалном количнику пута по времену.

Ако горње две једначине помножимо једну с другом то добијамо једначину

$$v\,dv = p\,ds$$

Мобилна тачка нека се креће



у правој која затвара са координатним осама углове (x,s), (y,s), (z,s). Брзина њена у положају M а у времену t нека буде v. Онда је према пређашњем

$$v_x = v\cos(x,s)$$
$$v_y = v\cos(y,s)$$
$$v_z = v\cos(z,s)$$

где v_x, v_y, v_z означују компоненталне брзине мобилне тачке. Брзина v а према томе и компоненталне брзине нека се континуирно мењају. Правац кретања нека остане непромењен т.ј. углови (x,s), (y,s), (z,s) нека буду константни. Онда добијамо диференцијацијом из горњих једначина по времену ове једначине

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos(x,s)$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos(y,s)$$
$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos(z,s)$$

Количник

$$\frac{dv}{dt} = p$$

представља нам акцелерацију мобилне тачке; коефиценти

$$\frac{dv_x}{dt} = p_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = p_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} = p_z$$

представљају компоненте акцелерације. Зато добијамо једначине

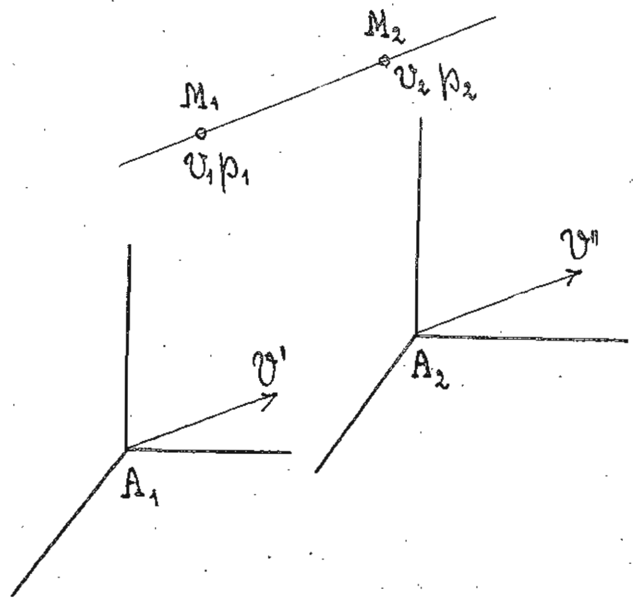
$$p_x = p \cos(x,s)$$

$$p_y = p \cos(y,s)$$

$$p_z = p \cos(z,s)$$

које казују да се акцелерације састављају по истом закону као и брзине т.ј. по закону паралелограма.

Казали смо да ако на мобилну тачку не дејствују никакве силе или ако се силе које на њу дејствују држе у равнотежи, да ће се онда мобилна тачка кретати у једној прави константном брзином. Свака промена тог кретања има се приписати утицају једне силе. Правац у коме се тај утицај врши је правац силе. Узмимо сад да се мобилна тачка креће у једној правој, па да на њу дејствује једна сила константне величине које правац пада у праву у којој се мобилна тачка креће. Онда ће се утицај те силе манифестовати тиме да ће се брзина мобилне тачке мењати. У положају M_1 нека мобилна тачка има брзину v_1 а акцелерацију p_1; у положају M_2 нека је њена брзина v_2 а акцелерација p_2. Замислимо сад један координатни систем A_1 који се креће брзином v пара-



лелно мобилној тачки. Онда ће брзина мобилне тачке у томе систему, дакле релативна брзина мобилне тачке према систему A_1 бити

$$v_1 - v' = c$$

Ово је дакле релативна брзина мобилне тачке у положају M_1. Брзина v' којом се креће систем A_1 нека буде константна. Онда је акцелерација мобилне тачке у систему A_1 а у положају M_1 једнака

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d(v_1-v')}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - \frac{dv'}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = p_1$$

Одаберимо сад један други координатни систем A_2 који се креће паралелно мобилној тачки брзином која је одређена једначином

$$v_2 - v'' = c$$

где v'' нека буде константа. Онда је брзина мобилне тачке у систему A_2 а у моменту кад се тачка налази у положају M_2 једнака

$$v_2 - v'' = c$$

а акцелерација у систему A_2 једнака је

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d(v_2-v'')}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = p_2$$

У систему A_1 има према томе мобилна тачка у положају M_1 брзину c и акцелерацију p_1; у систему A_2 има мобилна тачка у положају M_2 брзину c и акцелерацију p_2. Но како смо казали да на мобилну тачку дејствује једна константна сила, онда је у оба положаја брзина мобилне тачке и сила која на њу утиче једнака у та два положаја, разликује се само својим просторним положајем, а тај не утиче на кретање мобилне тачке. Зато ће у оба положаја и акцелерације p_1 и p_2 бити једнаке т.ј.

$$p_1 = p_2$$

Зато можемо да кажемо: Константна сила која дејствује на мобилну тачку даје овој константну акцелерацију.

Нека на мобилну тачку дејствује сила P. Она ће дати мобилној тачки акцелерацију p. Дејствује ли једна друга сила P исте величине, онда ће и ова према принципу релативног кретања дати мобилној тачки исту акцелерацију p. Како се акцелерације сумирају по закону паралелограма, то ће се мобилна тачка кретати сада са акцелерацијом $2p$. Сила $2P$ даје према томе мобилној тачки акцелерацију $2p$. То се може доказати и за сваки други број осим 2, па зато постоји ова једначина

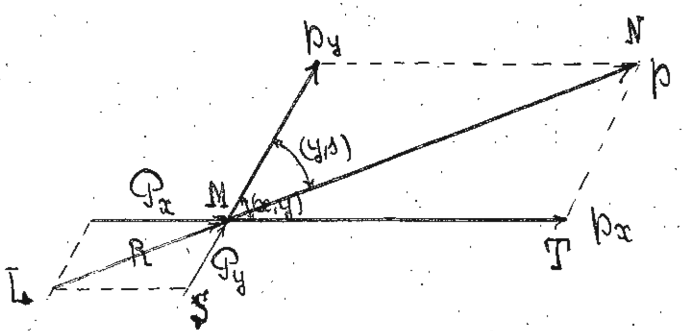
$$P = mp$$

т.ј. сила је пропорционална акцелерацији. Фактор m је према томе независан од силе и акцелерације, него зависи само од физичке конституције посматране мобилне тачке, па се назива масом мобилне тачке.

Утичу ли на мобилну тачку две силе P_x и P_y константне величине но различитог правца, то ће сила P_x дати мобилној тачки акцелерацију

$$p_x = \frac{P_x}{m}$$

а сила P_y акцелерацију



$$p_y = \frac{P_y}{m}$$

Обе ове акцелерације даће резултујућу акцелерацију p која је дијагонала њиховог паралелограма, па је према томе одређена једначином

$$p = p_x \frac{\sin(x,y)}{\sin(y,s)}$$

Помножимо ли леву и десну страну ове једначине са m то добијамо

$$mp = mp_x \frac{\sin(x,y)}{\sin(y,s)}$$

Мобилна тачка кретаће се под утицајем сила P_x и P_y акцелерацијом p, а како је њена маса m, то ће њено кретање бити исто такво као кад би на њу дејствовала сила

$$R = mp$$

у правцу дијагонале MN. Конструишемо ли дијагоналу LM паралелограма што па праве силе P_x и P_y, то из сличности горњих паралелограма следује

$$\frac{LS}{LM} = \frac{p_x}{p}$$

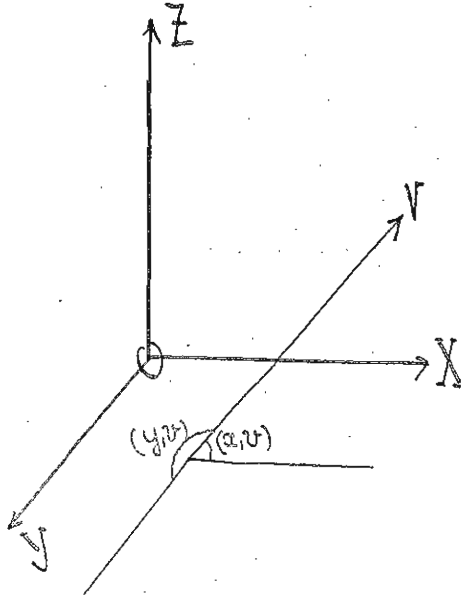
или

$$LM = \frac{LS}{p_x}\cdot p = \frac{P_x}{p_x}\,p = mp$$

Зато нам дијагонала LM представља силу R под утицајем које би се мобилна тачка исто тако кретала као и под утицајем сила P_x и P_y. Ту силу R називамо *резултантом* сила P_x и P_y, па видимо да је она по величини и по своме правцу представљена као дијагонала паралелограма сила P_x и P_y. Зато можемо да кажемо: и силе се састављају по закону паралелограма.

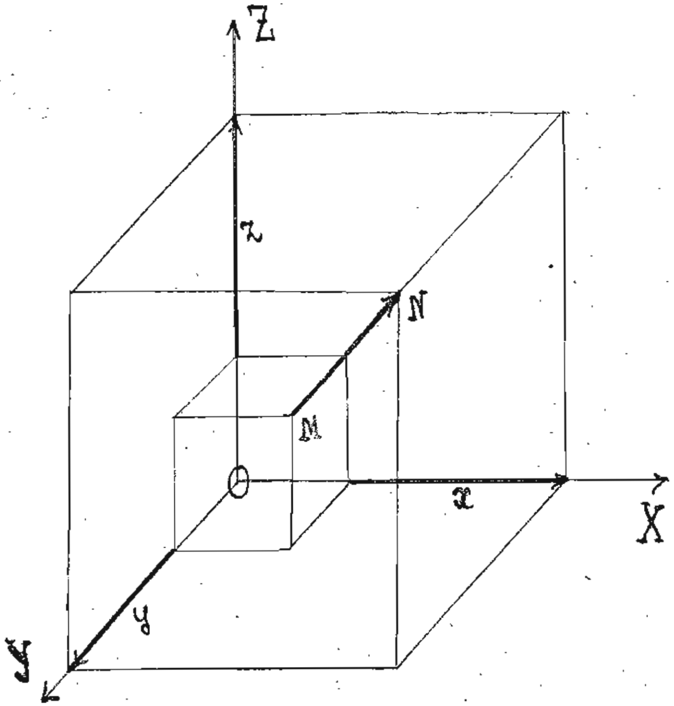
Теорија вектора.

Вектором смо назвали управљене величине за чију одредбу није довољна само величина њихова него и њихова оријентација у простору. Према вишим и према већим и мањим условима за њихову оријентацију делимо векторе на *слободне* и *везане*. Слободни вектори су такви за чију је одредбу потребна њихова величина и њихова оријентација у простору, а који се могу паралелно самом себи произвољно померати у простору. Зато ће такав један слободан вектор бити одређен н. пр. са угловима (x,v), (y,v) које његов правац затвара са координатним осама и са величином V. Такав вектор можемо паралелно



самом себи померити јер се тиме горње три величине (x,v), (y,v) и V које га одређују не мењају.

У аналитичкој механици одређује се слободан вектор обично са три своје пројекције на координатним осама. Те пројекције зову се и <u>компоненте</u> тога вектора. Посматрани вектор нека буде MN; онда су његове компоненте представљене дужинама x, y и z.

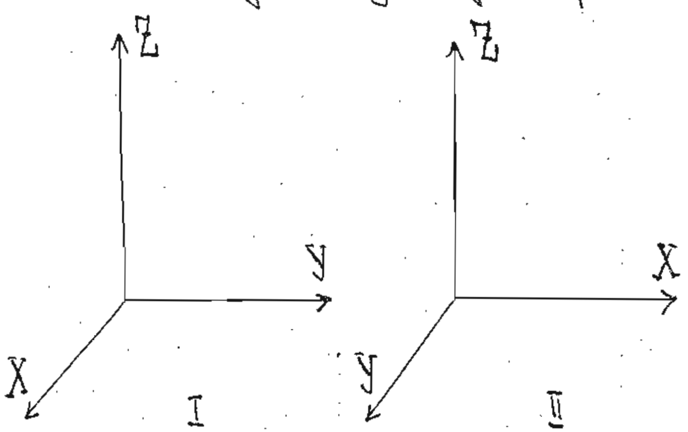


Казали смо да <u>скаларима</u> називамо такве величине које су потпуно одређене једном једином реалном вредношћу, јер њима не одговара никаква оријентација у простору, па је важно одабрати ознаке тако да се из њих може да види која је величина вектор а која скалар. Зато се вектори означавају обично готским словима или такође латинским која се мећу у заграде, а често пута и масним латинским словима.

Векторе зовемо везаним ако је њихова нападна тачка т.ј. њихова почетна тачка одређена у простору или ако је везана на једну праву. У овом другом случају претпостављамо да се та права подудара са правцем вектора, па зато можемо да кажемо да у овом случају вектор може да клизи по својој правој.

У Механици материјалне

тачке имаћемо посла само са слобод-
ним векторима јер је њихова нападна
тачка позната - она је посматрана
материјална тачка - па је зато за од-
редбу таквог вектора н. пр. за одредбу
силе која дејствује на једну матери-
јалну тачку, довољно познавање ње-
них трију компонената. Ми ћемо у
аналитичној механици да представ-
љамо сваки вектор помоћу његове
три ортогоналне компоненте т.ј. по-
моћу његових пројекција на један ор-
тогонални координатни систем. При
томе је важно ово споменути специ-
јално: у теоријској физици су се одо-
маћила досада два разна коорди-
натна система:
<u>француски</u> (II) и <u>енгле-
ски</u> (I). Први употребља-
вају Фран-



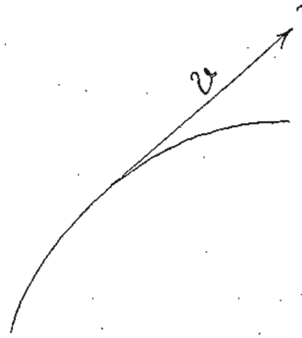
цузи а други Енглези. Немци се служе
и једним и другим. Пошто је Max-
well-ова теорија електрицитета да-
нас свуде усвојена, то се у тој теори-
ји употребљује искључиво енглески ко-
ординатни систем, док се у аналитич-
ној механици још од времена Lagran-
ge-евих употребљава француски. За-
то ћемо и ми у аналитичној механици
употребљавати француски, а у тео-
ријској физици енглески координат-
ни систем.

Брзина материјалне тачке
као што стоји помоћу историјског раз-
витка тога појма у једном од пре-
вашњих одељака развили је ска-
ларна величина

$$v = \frac{ds}{dt}$$

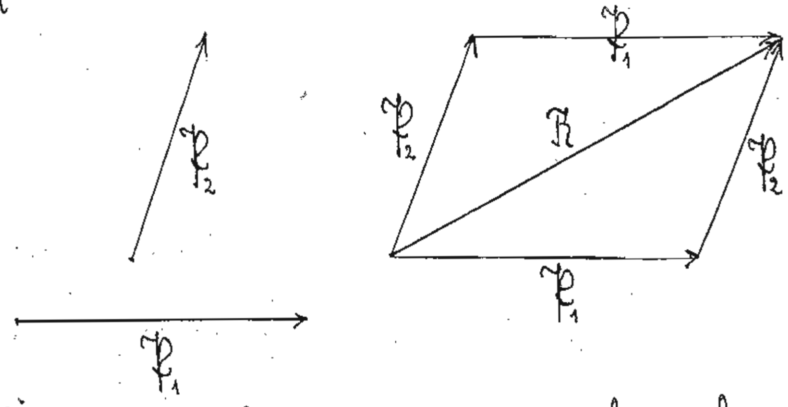
јер је елеменат пута ds кад апстрахо
само за његову дужину као што је то у
овом случају једна скаларна величи-
на; исто је тако и елеменат времена

dt једна скаларна величина. Ако међутим пратимо поред брзине материјалне тачке и за правац у којем се материјална тачка у посматраном моменту креће, то онда добијамо <u>вектор брзине v</u>. То је једна управљена величина која тангира путању материјалне тачке, чија је дужина једнака брзини v и која је наперена на ону страну путање према којој се креће материјална тачка.



И акцелерација као што смо је досад дефинисали је скаларна величина. Акцелерација одређеног правца је векторска величина, па је зовемо <u>вектором акцелерације</u>, а често пута и укратко акцелерацијом. О томе вектору ћемо касније говорити.

Ми ћемо дакле од сада сваки вектор $\mathfrak{F}$ био он сила, брзина, акцелерација, ... представљати помоћу његове три компоненте: X, Y и Z. У уводу смо показали да се силе, брзине и акцелерације сабирају помоћу закона паралелограма, па је један од основних принципа теорије вектора тај: да се сви вектори сабирају по томе закону. Имамо ли према томе да саберемо два вектора $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то ћемо овако поступати:



На крајњу тачку првог вектора надовезаћемо почетну тачку другог, па почетну тачку првог спојити са крајњом тачком другог. Тако добијени вектор $\mathfrak{R}$ представља збир или резултанту првих двају вектора. Ту операцију изражавамо овако

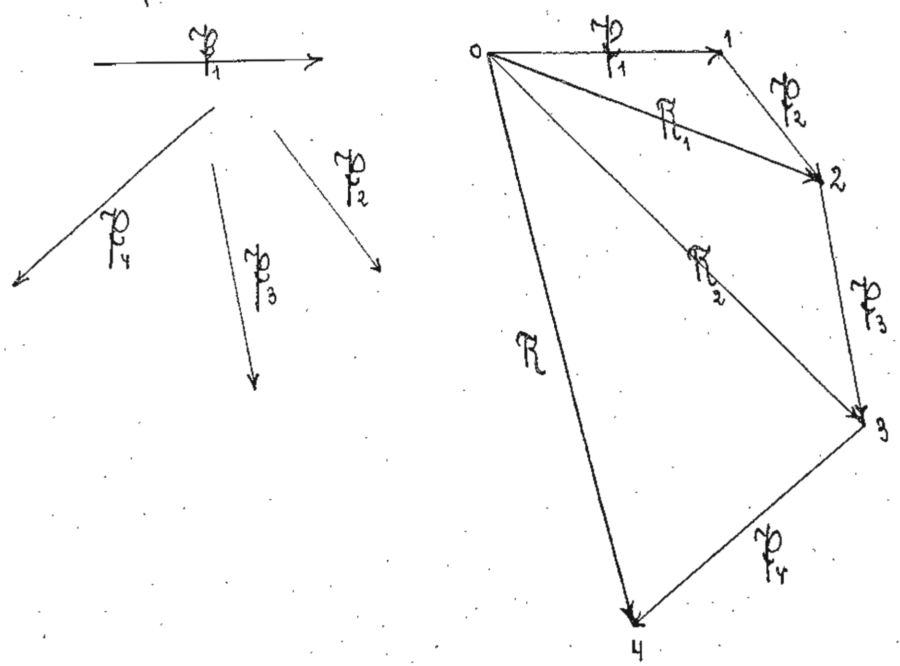
$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{R}$$

Готска слова у овој једначини казују да се величине $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ не сабирају обично него векторски.

Резултат би био исти да смо на вектор $\mathfrak{P}_2$ надовезали вектор $\mathfrak{P}_1$. Зато постоји једначина

$$\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2=\mathfrak{P}_2+\mathfrak{P}_1$$

За сабирање вектора важи дакле комутативни закон као и код обичног сабирања.



Имамо ли више вектора да саберемо н. пр. $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3 \ldots$, то ћемо прво сабрати прва два, добијеној резултанти додати трећи вектор, а новодобијеној резултанти додати четврти и т. д. Из слике видимо да нам за познавање резултанте $\mathfrak{R}$ није потребно познавање резултаната $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$, него смо могли резултанту $\mathfrak{R}$ добити одмах тако, да на вектор $\mathfrak{P}_1$ надовежемо вектор $\mathfrak{P}_2$, на овај надовежемо вектор $\mathfrak{P}_3$, и т. д. па најзад добијамо резултанту спајањем почетне тачке првог вектора са крајњом тачком последњег вектора. Лако се можемо уверити да би резултат био исти ако променимо ред којим надовезујемо векторе један на други.

Ако су вектори $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3 \ldots$ силе, онда се полигон 01234 зове <u>полигон сила</u>.

Да би означили да су величине X, Y, Z компоненте вектора $\mathfrak{P}$ употребљујемо ову једначину

$$\mathfrak{P}=(X)+(Y)+(Z)$$

Заграде које смо употребили значе

да се све компоненте X, Y и Z имају векторски да саберу.

Два вектора P_1 и P_2 са компонентама X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 су једнака или еквиполентна, ако је

$$X_1 = X_2$$
$$Y_1 = Y_2$$
$$Z_1 = Z_2$$

Они су једнаки но противног правца и смисла ако је

$$X_1 = -X_2$$
$$Y_1 = -Y_2$$
$$Z_1 = -Z_2$$

Имамо ли да саберемо више вектора $P_1 P_2 P_3 \cdots$ којих су компоненте $X_1 Y_1 Z_1, X_2 Y_2 Z_2, \cdots$, онда постоје једначине

$$P_1 = (X_1) + (Y_1) + (Z_1)$$
$$P_2 = (X_2) + (Y_2) + (Z_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n = (X_n) + (Y_n) + (Z_n)$$

Саберемо ли све једначине па узмемо ли у обзир да и при векторском сабирању можемо ред сабирака произвољно променити, то добијамо

$$R = P_1 + P_2 + \cdots + P_n =$$
$$= (X_1) + (X_2) + \cdots + (X_n) + (Y_1) + (Y_2) + \cdots + (Y_n) + (Z_1) + (Z_2) + \cdots + (Z_n)$$

Величине $X_1 X_2 \cdots X_n$ имају сада исти правац јер су то све пројекције на једну исту осу нашег координатног система, па их зато можемо сабрати као скаларне величине. Означимо ли према томе збир свих тих компонената са X т.ј.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

а тако исто

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

то добијамо

$$R = (X) + (Y) + (Z)$$

т.ј. компоненте X, Y, Z збира R једнаке су збиру компонената појединих вектора.

Ово правило употребљујемо у аналитичкој механици при сабирању вектора. Имамо ли н. пр. да тражимо резултанту сила $\mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_n$ којих су интензитети т.ј. њихове скаларне величине $P_1\, P_2 \dots P_n$ и које силе затварају са осама система углове $(x,P_1), (y,P_1), (z,P_1); \dots (x,P_n), (y,P_n), (z,P_n)$, онда су нам са тим угловима и интензитетима те силе потпуно одређене. Компоненте тих сила једнаке су

$$X_1 = P_1 \cos(x,P_1) \qquad Y_1 = P_1 \cos(y,P_1) \qquad Z_1 = P_1 \cos(z,P_1)$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots$$

$$X_n = P_n \cos(x,P_n) \qquad Y_n = P_n \cos(y,P_n) \qquad Z_n = P_n \cos(z,P_n)$$

Означимо ли резултанту ових сила са $\mathfrak{R}$, њен интензитет са R а углове што их она затвара са координатним осама са $(x,R), (y,R), (z,R)$, то су компоненте X, Y, Z те резултанте једнаке

$$X = R\cos(x,R) \qquad Y = R\cos(y,R) \qquad Z = R\cos(z,R)$$

те компоненте једнаке су према пређашњем збиру компонената сила $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_n$, па отуда добијамо ове три једначине

$$X = R\cos(x,R) = P_1\cos(x,P_1) + P_2\cos(x,P_2) + \dots + P_n\cos(x,P_n)$$

$$Y = R\cos(y,R) = P_1\cos(y,P_1) + P_2\cos(y,P_2) + \dots + P_n\cos(y,P_n)$$

$$Z = R\cos(z,R) = P_1\cos(z,P_1) + P_2\cos(z,P_2) + \dots + P_n\cos(z,P_n)$$

У овим једначинама које су скаларне једначине познајемо све чланове десне стране, па кад смо те чланове израчунали, онда познајемо и X, Y, Z, па квадрирањем и сабирањем ових једначина добијамо ову једначину

$$R^2\left[\cos^2(x,R) + \cos^2(y,R) + \cos^2(z,R)\right] = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Познато је правило аналитичне геометрије да је збир квадрата косинуса углова што их произвољна права затвара са координатним осама једнак јединици. Зато је

$$\cos^2(x,R) + \cos^2(y,R) + \cos^2(z,R) = 1$$

па је зато

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

На тај начин смо рачунски одредили величину R резултанте. Ваља још да одредимо углове $(x,R), (y,R), (z,R)$ што их њен правац затвара са координатним осама. Из пређашњег следује да су косинуси тих углова једнаки

$$\cos(x,R)=\frac{X}{R}$$

$$\cos(y,R)=\frac{Y}{R}$$

$$\cos(z,R)=\frac{Z}{R}$$

или

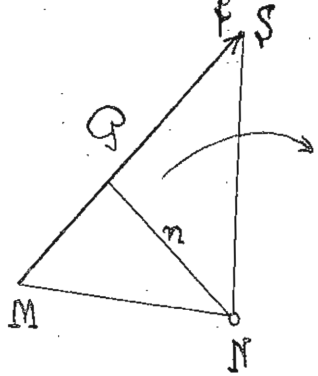
$$\cos(x,R)=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$\cos(y,R)=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$\cos(z,R)=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Како су нам десне стране ових једначина познате, то познајемо и тражене углове, па је састављање сила рачунски потпуно изведено.

У Механици долазимо често у прилику да испитујемо положај једне силе $\mathfrak{P}$ које је величина P према једној тачки N. На тај начин уведен је у Механику појам _статичког момента_, који је у вези с положајем силе $\mathfrak{P}$ према тачки N. Под величином момента силе $\mathfrak{P}$ с обзиром на тачку N, коју величину симболички означавамо са



$$M^{(N)}_{(\mathfrak{P})}$$

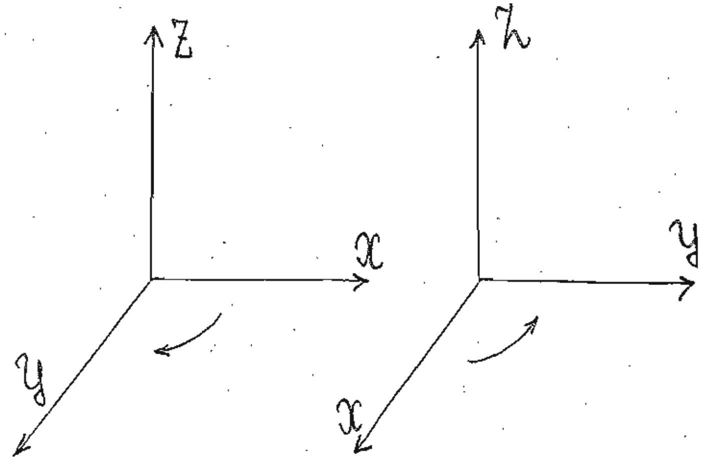
подразумевамо продукат величине P са дужином n

$$M^{(N)}_{(\mathfrak{P})}=P\cdot n$$

где је n дужина нормале из тачке N на правац силе $\mathfrak{P}$. Тај моменат једнак је према томе двострукој површини троугла којега је база сила $\mathfrak{P}$ а врх тачка N

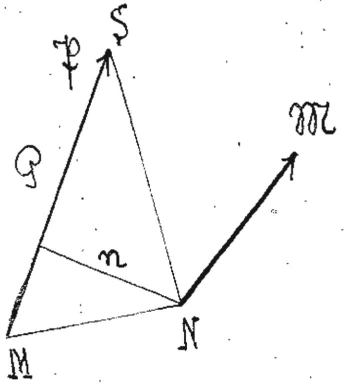
$$M^{(N)}_{(\mathfrak{P})}=2\ \text{area}\ \triangle MSN$$

Поместимо ли силу у њеном правцу произвољно, то се величина момента неће тиме променити. Но ми хоћемо са моментом да изразимо више него што је горњим изразима дато; хоћемо да одредимо и равнину троугла MNS и смисао у којем дејствује сила $\mathfrak{F}$. Ако сила $\mathfrak{F}$ лежи у равнини слике, онда нам је тиме одређена и равнина троугла, па нам је само потребна конвенција када ћемо моменат да сматрамо позитиван а кад негативан. Уговоримо ли да је моменат позитиван онда ако сила $\mathfrak{F}$ заокреће око тачке N у оном истом смислу у коме следује окретање осе X нашег координатног система тако да позитивна страна осе X дође најкраћим путем у позитивну страну осе Y и ако је то кретање посматрано са позитивне стране



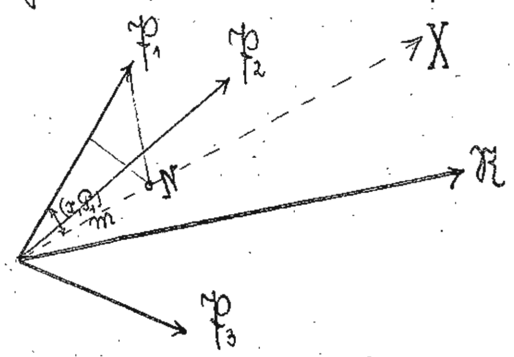
осе Z. Зато ће у француском координатном систему смисао заокретања бити позитиван ако кретање следује у истом смислу као кретање сказаљке на сату; у енглеском координатном систему биће кретање позитивно ако буде следовало у противном смислу кретања сказаљке на сату. Ми ћемо дакле моменат једне силе која дејствује у равнини слике сматрати позитивним, ако та сила буде заокретала противно од смисла кретања сказаљке на сату. Ако посматрани вектор не лежи у равнини слике, онда његов статички моменат не можемо изразити помоћу једне скаларне величине, јер као што смо пре казали хоћемо осим површине троугла MNS да изразимо и равнину његову и смисао заокретања. Зато ће бити потребно да статички моменат представимо помоћу вектора $\mathfrak{M}$. Тај вектор $\mathfrak{M}$ има интензитет или дужину

$$\mathfrak{M} = 2 \text{ area } MSN$$



т.ј. једнак је интензитету P вектора $\mathfrak{P}$ помножено са краком n; тај вектор стоји нормално на равнини троугла MSN и напе-рен је на ону страну те равнине са које посматрано вектор $\mathfrak{P}$ заокреће у позитивном смислу т.ј. у смислу сказаљке на сату. Овим подацима је вектор $\mathfrak{M}$ потпуно одређен, а са њиме опет одређена је рав-нина троугла MSN, величина статичког момента и смисао заокретања.

Дејствује ли на материјалну тачку M више сила $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2 \dots$ па нека је њихова резултанта R. Онда је статички момент силе $\mathfrak{P}_1$ с обзиром на произвољну тачку N



$$\mathfrak{M}^{(N)}_{(P_1)} = P_1 m \sin(x, P_1)$$

Исто је тако статички момент силе $\mathfrak{P}_2$ с обзиром на исту тачку N

$$\mathfrak{M}^{(N)}_{(P_2)} = P_2 m \sin(x, P_2)$$

. . . .

Статички пак момент резултанте R биће

$$\mathfrak{M}^{(N)}_{(R)} = R\, m \sin(x, R)$$

Пројецирамо ли резултанту на праву коју смо означили са X, то пројекција те резултанте мора бити једнака збиру пројекција појединих компонената т.ј.

$$R\cos(x,R) = \sum P\cos(x,P)$$

Исто тако збир пројекција на једну осу Y која је нормална на осу X једнак је пројекцији резултанте R т.ј.

$$R\sin(x,R) = P_1\sin(x,P_1) + P_2\sin(x,P_2) + \dots$$

Помножимо ли ову једначину са m то добијамо

$$m R\sin(x,R) = P_1 m\sin(x,P_1) + P_2 m\sin(x,P_2) + \dots$$

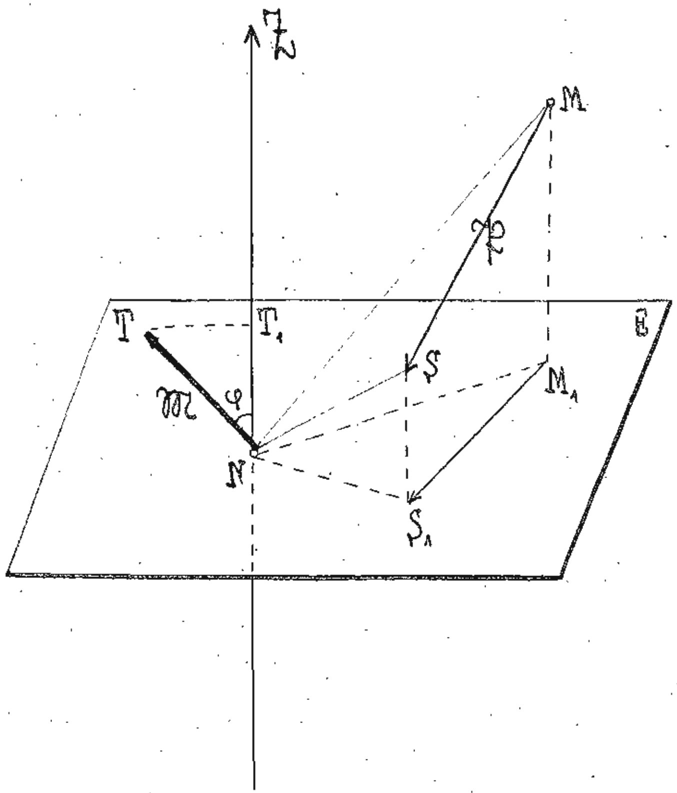
или

$$\mathfrak{M}^{(N)}_{(R)} = \mathfrak{M}^{(N)}_{(P_1)} + \mathfrak{M}^{(N)}_{(P_2)} + \dots$$

или речима: Статички моменат резултанте сила које дејствују на материјалну тачку M једнак је збиру статичких момената појединих компонената.

Статички моменат једне силе с обзиром на једну тачку N ишчезава онда ако је та сила једнака нули или ако тачка N лежи у правцу те силе јер онда ишчезава крак n. Одаберемо ли према томе тачку N у правој резултанте, то ће моменат резултанте с обзиром на ту тачку ишчезнути, па зато можемо да кажемо: Збир статичких момената сила које дејствују на једну материјалну тачку с обзиром на произвољну тачку њихове резултанте једнак је нули.

Ми смо дефинисали статички моменат у његовом најширем значењу као вектор па настаје питање како ћемо га представити аналитички. Јасно је да ће за његову одредбу бити потребне три величине н. пр. његове три компоненте у правцу оса нашег координатног система. Пре него што приступимо извођењу аналитичких израза за те компоненте, доказаћемо следеће: Вектор $\mathfrak{M}$ који је представљен дужином NT нека представља статички моменат вектора $\mathfrak{P}$ представљеног дужином MS с обзиром на тачку N. Значи да је дужина NT једнака према пређашњем



$$NT = 2\,\text{area}\,\Delta SN$$

Сем тога је вектор $\mathfrak{M}$ нормалан на равнини тога троугла па затвара са осом Z угао φ који је једнак углу што га равнина троугла MNS затвара са равнином E нормалном на осу Z. Пројецирајмо сад вектор MS у равнини E. Пројекција троугла MSN у равнини E т.ј. површина троугла NS_1M_1 једнака је површини првог троугла помноженој са косинусом угла φ т.ј.

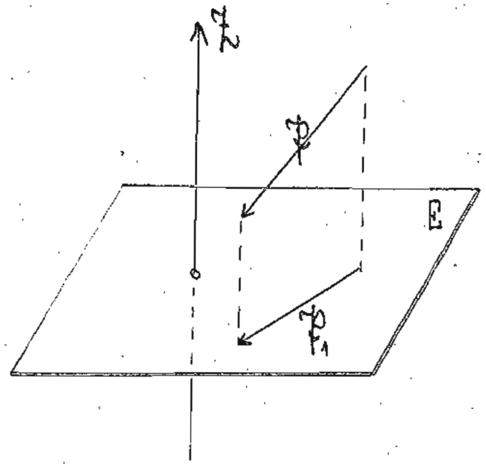
$$\text{area } NS_1M_1 = (\text{area } MSN) \cos\varphi$$

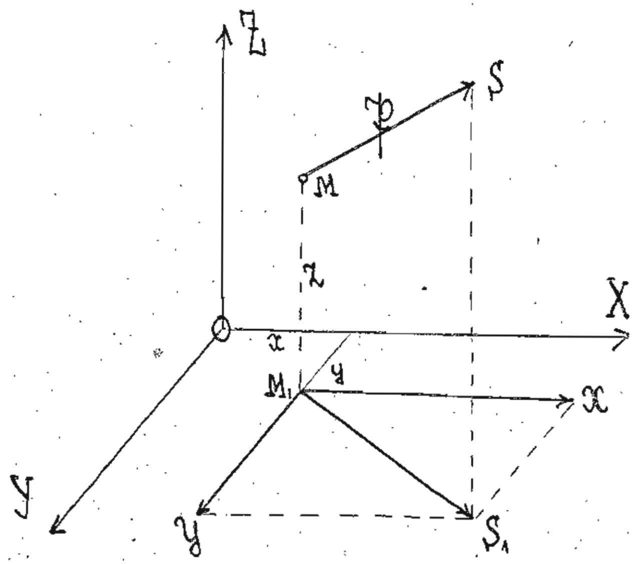
Пројекција вектора $\mathfrak{M}$ у осу Z једнака је

$$NT_1 = MT \cos\varphi = 2 \text{ area } MSN \cos\varphi =$$
$$= 2 \text{ area } M_1S_1N$$

Компонента вектора $\mathfrak{M}$ у правцу осе Z једнака је према томе двострукој површини троугла M_1S_1N. Ту пројекцију зовемо такође статичким моментом вектора $\mathfrak{F}$ с обзиром на осу Z, а она је једнака као што из пређашњег следује статичком моменту пројекције вектора $\mathfrak{F}$ у равнину E нормалну на осу Z с обзиром на продорну тачку N са равнином E.

Помоћу пређашњег правила можемо одредити компоненте вектора $\mathfrak{M}$. Ми ћемо вектор $\mathfrak{F}$ пројецирати у равнину XY нашег координатног система. Статички моменат те пројекције с обзиром на тачку O даје нам компоненту Z вектора $\mathfrak{M}$. Пројецирамо ли вектор $\mathfrak{F}$ у равнину XZ то статички моменат те пројекције с обзиром на тачку O даје компоненту Y вектора $\mathfrak{M}$. На





поспетку статички моменат пројекције вектора $\mathfrak{F}$ у равнину YZ даје компоненту X вектора $\mathfrak{M}$. На тај начин добијамо све три компоненте вектора $\mathfrak{M}$ а он је тиме потпуно одређен.

У тачки M која има координате x, y, z дејствује вектор $\mathfrak{F}$ представљен дужином MS. Компоненте тога вектора су X, Y, Z. Тај вектор је према томе по својој величини и по своме положају потпуно одређен. Питајмо за статички моменат његов с обзиром на тачку O и за компоненте вектора $\mathfrak{M}$. Те компоненте се у аналитичкој механици обично означавају са L, M и N. L је компонента вектора $\mathfrak{M}$ у правцу X, M у правцу Y, а N у правцу Z. Компоненту у правцу Z, дакле величину N добићемо ако пројектујемо вектор $\mathfrak{F}$ у равнину XY, па нађемо статички моменат те пројекције с обзиром на тачку O. Пројекција вектора $\mathfrak{F}$ у равнину XY представљена је дужином M_1S_1. Компоненте те дужине у правцима X и Y су X и Y, па ће зато статички моменат те пројекције с обзиром на тачку O бити једнак збиру статичких момената компонената X и Y. Статички моменат компоненте X с обзиром на тачку O једнак је $-yX$ јер сила X заокреће око тачке O у негативном смислу. Статички моменат компоненте Y с обзиром на тачку O једнак је xY. Зато је

$$N = xY - yX$$

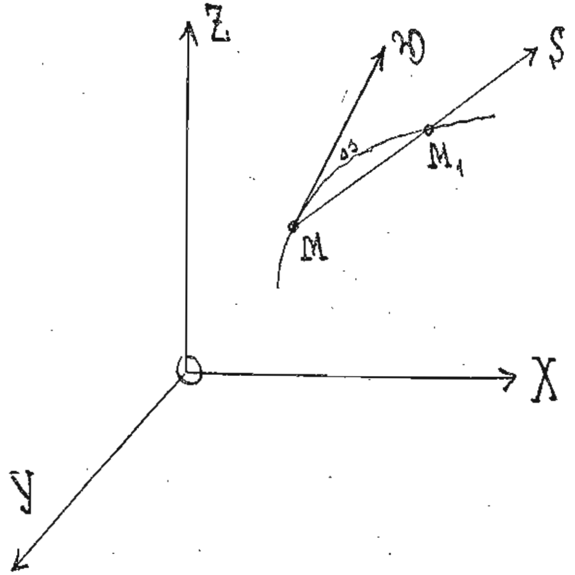
На исти начин добијамо и компоненте L и M вектора $\mathfrak{M}$; ми их можемо извести из предње једначине цикличком пермутацијом па добијамо

$$L = yZ - zY$$

$$M = zX - xZ$$

Вектор брзине.

Мобилна тачка нека описује произвољну просторну криву. У времену t нека се налази у положају M, а у времену $t+\Delta t$ у положају M_1. Она је дакле за време Δt превалила дужину $\Delta s =$ лук MM_1. Спојимо тачке M и M_1 једном правом па пренесимо на њу дужину



$$MS = \frac{\text{corda}\ MM_1}{\Delta t}$$

Онда називамо вектор MS <u>вектором средње брзине</u> у времену Δt, јер би мобилна тачка крећући се том брзином у правцу MS стигла у тачку M_1 у исто време као и код свога пређашњег кретања по луку MM_1. Ако сада пустимо да време Δt бескрајно опада, онда се тачка M_1 приближује тачки M бескрајно, а вектор MS приближује се тангенти у тачки M. Тај вектор v једнак је

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\text{corda}\ MM_1}{\Delta t}$$

и називамо га <u>вектором брзине</u> у тачки M. Пројекција лука MM_1 на осе координатног система су, ако су x, y, z координате тачке M, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ па је лук MM_1 једнак векторском збиру тих пројекција т.ј.

$$(MM_1) = (\Delta x) + (\Delta y) + (\Delta z)$$

Ове величине смо метли у заграде да означимо тиме да се имају сматрати као вектори, па према томе и векторски сабирати. Отуда је према горњем

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{(\Delta x)+(\Delta y)+(\Delta z)}{\Delta t} =$$

$$= \left(\lim \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) + \left(\lim \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) + \left(\lim \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

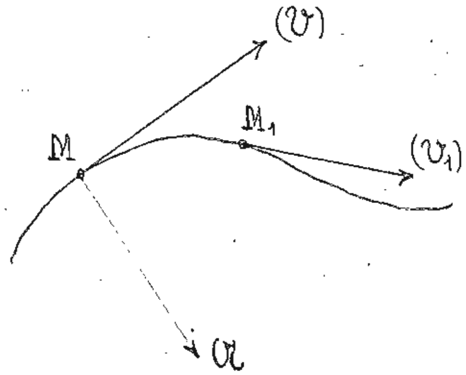
Компоненте вектора брзине су према томе представљене квоциентима

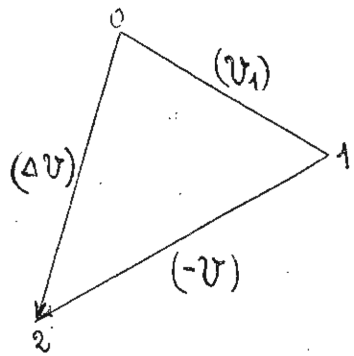
$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Вектор акцелерације.

Мобилна тачка нека описује произвољну просторну криву. У времену t нека се налази у положају M и нека у том моменту има вектор брзине (v). Тај вектор тангира путању. У времену $t+\Delta t$ нека се налази мобилна тачка у положају M_1 и нека у том положају има вектор брзине (v_1). Конструишимо векторску диференцију

$$(v_1)-(v)$$





и означимо ју са (Δv)

$$(v_1)-(v)=(\Delta v)$$

Приближује ли се положај M_1 бескрајно положају M то се вектор (Δv) приближава нули, а положај равнине која пролази кроз ова три вектора дакле положај равнине троугла ок приближава се оскулаторној равни у тачки M. Поделимо ли вектор (Δv) са скаларом Δt то добијамо нов вектор. Означимо га са φ. Тај вектор има исти правац као и вектор (Δv) јер смо га добили деобом овог са скаларном величином која мења интензитет вектора али не мења његов правац. Пренесимо тај вектор у тачку M

$$\varphi=\frac{(\Delta v)}{\Delta t}$$

Шта бива сада ако се тачка M_1 бескрајно приближује тачки M! Вектор φ неће се тад приближавати нули јер је представљен квоцијентом двеју величина које се обе приближавају нули.

Зато ће се вектор φ приближавати једном одређеном вектору γ по своме положају и величини, а тај вектор γ називамо вектором акцелерације у тачки M_1, па је према томе

$$\gamma=\lim_{\Delta t=0}\varphi=\lim_{\Delta t=0}\frac{(\Delta v)}{\Delta t}$$

Вектор (v) можемо раставити у три ортогоналне компоненте па је

$$(v)=\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

Вектор (v_1) једнак је

$$(v_1)=\left(\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{dt}+\Delta\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{dz}{dt}+\Delta\frac{dz}{dt}\right)$$

па је.

$$\varphi=\frac{(\Delta v)}{\Delta t}=\frac{(v_1)-(v)}{\Delta t}=\frac{\left(\Delta\frac{dx}{dt}\right)}{\Delta t}+\frac{\left(\Delta\frac{dy}{dt}\right)}{\Delta t}+\frac{\left(\Delta\frac{dz}{dt}\right)}{\Delta t}$$

а вектор γ је

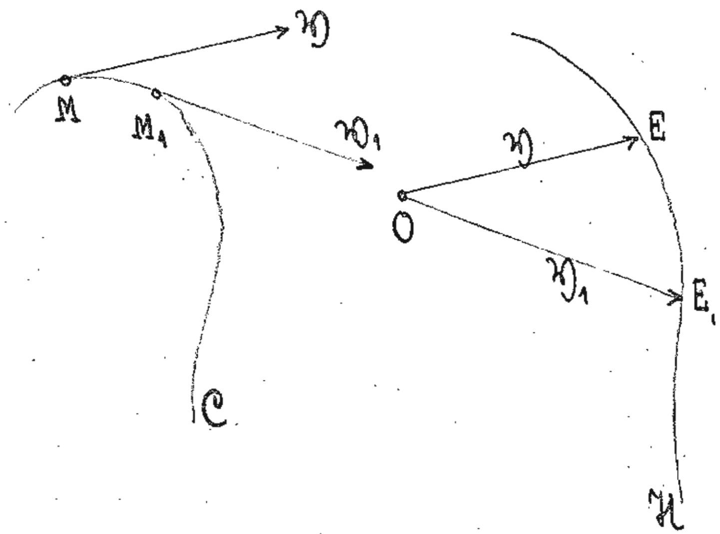
$$\gamma=\lim_{\Delta t=0}\varphi=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

Зато се вектор акцелерације може

раставити у три компоненте паралелне осама координатног система а које су једнаке другим изводима координата мобилне тачке по времену.

Ходограф

Hamilton је на један врло елегантан начин представио вектор акцелерације помоћу вектора брзине на овај начин: Мобилна тачка нека описује криву C. У положају M нека има брзину v, у положају M_1 брзину v_1. Одаберимо у простору једну непомичну тачку O, па пренесимо из те тачке векторе брзина



што их мобилна тачка редом један за

другим постиже. Сви ти вектори брзина сачињаваће једну коначну површину, а крајње тачке тих вектора E и E_1 лежаће на једној криви H коју називамо Hamilton-овим ходографом.
Кад се мобилна тачка налази у положају M у времену t, онда јој одговара у ходографу вектор OE, а кад се налази у положају M_1 у времену $t+\Delta t$, онда јој одговара вектор OE_1. Ми можемо замислити да док се мобилна тачка креће у путањи C, да се у исто доба једна фиктивна мобилна тачка E креће по ходографу H тако да вектор OE који спаја непомичну тачку O са том фиктивном даје у сваком моменту вектор брзине мобилне тачке.

Питајмо сад каквом ће се брзином кретати фиктивна тачка E. Вектор брзине фиктивне тачке E означимо са w, па је он једнак према прећашњем

$$w = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\text{corda}\, EE_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{v_1 - v_2}{\Delta t}$$

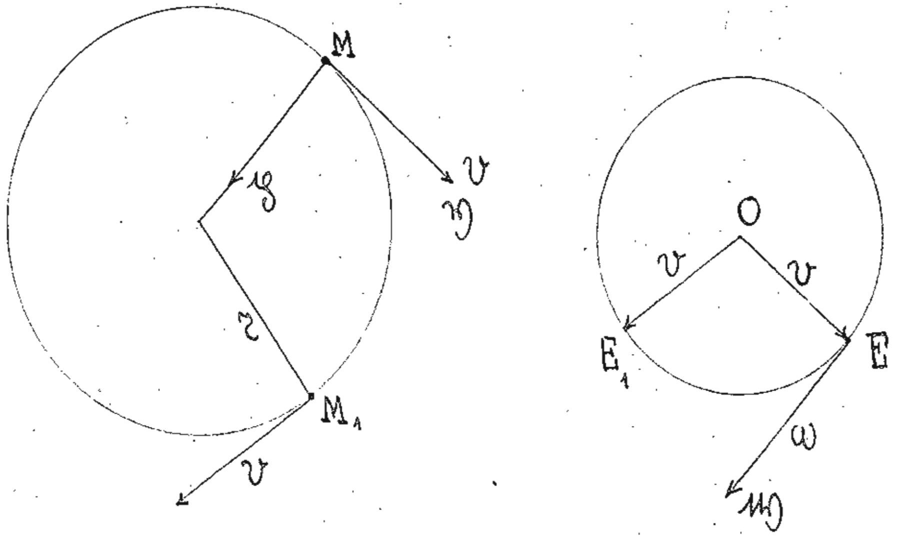
Овај израз не представља ништа друго него акцелерацију мобилне тачке M јер је било

$$\gamma = \lim_{\Delta t = 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t}$$

Зато можемо да кажемо: вектор брзине фиктивне тачке E у ходографу представља у сваком моменту вектор акцелерације мобилне тачке.

Ако се мобилна тачка креће у једној правој константном брзином, онда се ходограф, као што је то лако увидети, редуцира на једну тачку. Фиктивна тачка E мирује; према томе њена брзина једнака је нули и зато је акцелерација мобилне тачке такође равна нули.

Питајмо сад за акцелерацију мобилне тачке ако се она креће у кругу једнаком брзином. Мобилна тачка нека се креће у кругу радиуса r. У положају M нека има брзину v, па вектор брзине тангира круг у том положају. У положају M_1 нека мобилна тачка има исти интензитет



брзине v, но нека вектор брзине тангира у овом положају круг, па вектори брзина у положају M и M_1 нису једнаки него само њихови интензитети. Брзина није променила свој интензитет али је променила свој правац. Конструишимо ходограф. Из тачке O повуцимо вектор v паралелно вектору брзине у тачки M; добијамо тачку E. Тачку E_1 добићемо ако из тачке O повучемо вектор OE_1 паралелан вектору брзине у положају M_1. Но како су дужине тих вектора увек једнаке, то ће ходограф у овом случају бити круг радиуса v. У произвољном положају мобилне тачке M одговара положај E фиктивне тачке. У том положају има фиктивна тачка брзину w које је интензитет ω, а та брзина нормална је на радиус OE. Како та брзина w представља акцелерацију мобилне тачке, то је акцелерација w мобилне тачке нормална на тангенти путање, дакле наперена према центруму круга. Јасно је даље да се фиктивна тачка креће по ходографу једнаком брзином, јер због централне симетрије нема никаквог разлога да брзина фиктивне тачке у једном месту ходографа буде другачија него у другом. Зато је интензитет ω вектора брзине w фиктивне тачке константан или другим речима акцелерација мобилне тачке има исти интензитет, само јој се правац увек тако мења да је у сваком положају наперена према центру путање. Питајмо колики ће бити интензитет те акцелерације. Док мобилна тачка обиђе једанпут око своје путање, дотле обиђе фиктивна тачка једанпут по ходографу. Време обилажења једне и друге тачке једнако је и нека буде T. Интензитет брзине мобилне тачке у путањи је v; он је константан, а пут што га мобилна тачка превали за време T једнак је $2r\pi$, па је због тога

$$2r\pi = T \cdot v \qquad 1)$$

фиктивна тачка обиђе за исто то време ходограф. Интензитет њене брзине је ω; он је константан; а пут што га фиктивна тачка у времену T превали једнак је $2v\pi$, па је зато

$$2v\pi = T \cdot \omega \qquad 2)$$

Поделимо једначину 2) са једначином 1) па добијамо

$$\frac{v}{r} = \frac{\omega}{v}$$

или

$$\omega = \frac{v^2}{r}$$

а то значи да је акцелерација мобилне тачке једнака квадрату њене брзине подељено са радиусом путање.

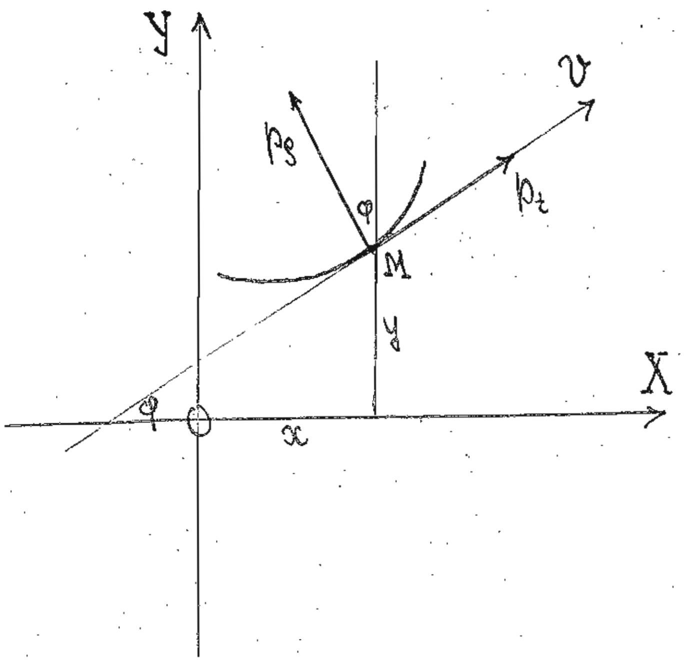
Растављање акцелерације у тангенцијалну и нормалну компоненту.

Свака промена брзине, састојала се у промени интензитета брзине или у промени њеног правца, изазива акцелерацију. Општији случај је да брзина мобилне тачке мења у исти мах и свој интензитет и свој правац. У том случају знамо да вектор акцелерације лежи у оскулационој равни путање и да су његове компоненте у правцима координатних оса представљене другим диференцијалним квоцијентима координата по времену. Зато можемо, кад нам је положај мобилне тачке у путањи одређен, извести вектор акцелерације на овај начин: Кад је положај мобилне тачке одређен, онда су њезине координате дате као функције времена

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t)$$
$$z = f_3(t)$$

Диференцирамо ли ове координате двапут по времену, то добијамо све три компоненте вектора акцелерације који је тиме одређен.

Често пута је корисније вектор акцелерације раставити у две нормалне компоненте, од којих једна пада у тангенту путање, а друга стоји нормално на њу и лежи у оскулационој равнини. Потражимо за величине тих двеју компонената вектора акцелерације и претпоставимо да посматрани бескрајно мали део путање лежи у равнини XY нашег координатног система, другим речима положимо равнину XY нашег система у оскулациону равнину путање. Означимо ли са φ



угао што та тангента у тачки M затвара са осом X, то су компоненте брзине једнаке

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = v\sin\varphi$$

Диференцирајмо ове изразе по времену па добијамо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\frac{ds}{dt}\frac{d\varphi}{ds}\sin\varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\frac{ds}{dt}\frac{d\varphi}{ds}\cos\varphi$$

Знамо да је

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

где је ρ радиус кривине путање у тачки M. Ако крива није равна крива, онда ρ представља прави радиус кривине, јер се наша раван XY поклапа са оскулационом равнином. Зато можемо горње једначине писати у облику

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{v^2}{\rho}\sin\varphi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + \frac{v^2}{\rho}\cos\varphi$$

Пренесимо у правцу тангенте на путању вектор којега је интензитет једнак

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

а у правцу нормалном на тангенту и то према конкавној страни путање вектор чији је интензитет

$$p_\varrho = \frac{v^2}{\varrho}$$

Саставимо та два вектора у резултанту, па нађимо компоненте x и y те резултанте. Према прећашњем те компоненте биће једнаке збиру компонената вектора p_ϱ и p_t. Зато ће компоненте те резултанте бити представљене изразима

$$R_x = p_t \cos\varphi - p_\varrho \sin\varphi$$

$$R_y = p_t \sin\varphi + p_\varrho \cos\varphi$$

или

$$R_x = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{v^2}{\varrho}\sin\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$R_y = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + \frac{v^2}{\varrho}\cos\varphi = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Компоненте R_x и R_y резултанте једнаке су компонентама вектора акцелерације, а како се резултанта R може раставити у векторе p_t и p_ϱ, то можемо да кажемо: акцелерација мобилне тачке може се у свакој тачки путање раставити у две компоненте; једна од њих пада у правац тангенте па се зове *тангенцијална компонента* и има величину

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

друга од њих стоји нормално на првој, лежи у оскулационој равни и пада према томе у правац главног радиуса кривине путање у посматраној тачки; њена је величина једнака

$$p_\varrho = \frac{v^2}{\varrho}$$

па се зове *нормална компонента* или често пута *центрипетална компонента*.

Мобилна тачка изводи дакле у посматраном моменту две акцелерације, па ако је њена маса m, то можемо закључити да су та кретања изазвана двема силама

$$P_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$P_\rho = m\frac{v^2}{\rho}$$

прву од тих сила зовемо тангенцијалном а другу нормалном или центрипеталном јер она настоји да помери мобилну тачку у правцу радиуса кривине њене путање. Прва од тих сила дејствује у правцу тангенте на путању, па је узрок сваког мењања брзине мобилне тачке јер је пропорционална томе мењању брзине.

Ако је тангенцијална компонента непрестано равна нули

$$P_t = 0$$

онда је, као што из горње једначине следује

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

или

$$v = const.$$

а то значи да се мобилна тачка креће једнаком брзином.

Друга сила P_ρ узрок је сваког мењања кривине путање јер је инверзно пропорционална радиусу кривине. Ако је та сила непрестано равна нули

$$P_\rho = 0$$

онда је

$$\frac{mv^2}{\rho} = 0$$

или

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

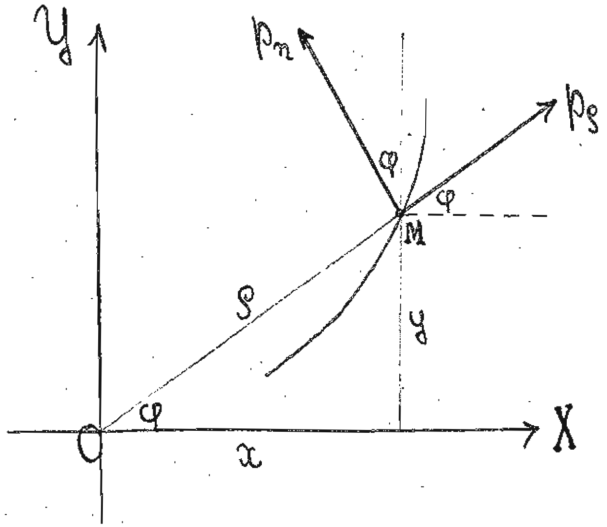
или

$$\rho = \infty$$

Радиус кривине је бескрајан а то значи да се мобилна тачка креће у једној правој.

Акцелерација ако је путања мобилне тачке равна крива дата у поларним координатама

Креће ли се мобилна тачка у једној равној кривој датој у поларним координатама, то ће кретање мобилне тачке бити у сваком моменту познато ако будемо познавали ρ и φ као функције времена t т.ј.



$$\rho = f_1(t)$$
$$\varphi = f_2(t)$$

У овом је случају често пута од користи раставити акцелерацију мобилне тачке у две компоненте, од којих прва p_ρ пада у правац радиус-вектора, а друга p_n стоји нормално на тај правац. Ми ћемо те акцелерације одредити на тај начин што ћемо акцелерацију мобилне тачке раставити у две компоненте које имају правац непомичних оса X и Y, па ћемо онда те две компоненте заменити са компонентама које имају правац p_ρ и p_n. Из слике следује

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

Двоструком диференцијацијом по времену добијамо компоненте акцелерације. Имамо прво

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

а одатле

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\rho}{dt^2}\cos\varphi-\sin\varphi\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\rho}{dt}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}-$$
$$-\rho\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\rho\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2\rho}{dt^2}\cos\varphi+\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}-$$
$$-\rho\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\rho\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\cos\varphi-\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\sin\varphi$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\sin\varphi+\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\cos\varphi$$

Пренесемо ли у правцу радиус-вектора ρ једну акцелерацију која је једнака

$$p_\rho=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

а у правцу нормалном на први једну акцелерацију која је једнака

$$p_n=2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

па заменимо ли ове две акцелерације са друге две p_x и p_y које имају правац оса X и Y, што ће бити

$$p_x=p_\rho\cos\varphi-p_n\sin\varphi$$
$$p_y=p_\rho\sin\varphi+p_n\cos\varphi$$

Сравнимо ли горње једначине то видимо да је

$$p_x=\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$p_y=\frac{d^2y}{dt^2}$$

то значи да су акцелерације p_x и p_y еквивалентне акцелерацијама $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ (које дејствују у правцима оса) или обратно акцелерације добивене горе $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ које дејствују у правцима оса можемо заменити са акцелерацијама p_ρ и p_n које дејствују у правцима радиус-вектора и нормално на тај правац.

Како је

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=2\rho\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=$$

$$= \rho\left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]$$

то можемо изразу за p_n дати згоднији облик, па добијамо коначно ове две једначине

$$p_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$p_n = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Ове две једначине ће нам често пута требати, особито онда ако сила која дејствује на мобилну тачку пролази кроз једну сталну тачку простора O.

Ако је маса мобилне тачке m, онда можемо замислити да је њено кретање изазвано двема силама

$$P_\rho = m p_\rho$$

$$P_n = m p_n$$

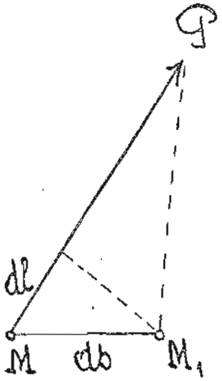
од којих прва пада у правац радиус-вектора т.ј. пролази стално кроз тачку O, а друга стоји нормално на тај правац.

Примедба: Силу P_ρ и акцелерацију p_ρ не треба заменити са центрипеталном силом и акцелерацијом о којима је било говора у прошлом одељку.

Радња

<u>Coriolis</u> и <u>Poncelet</u> увели су у Механику један врло користан појам: појам радње.

Дејствује ли на материјалну тачку M сила P, па ако се ова у бескрајно малом времену dt помери за



бескрајно малу дужину

$$MM_1 = ds$$

то називамо израз

$$dA = P\cos(P,s)\, ds$$

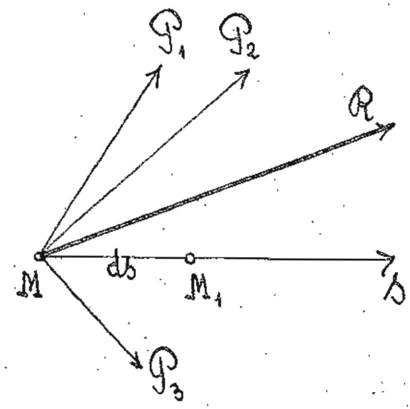
<u>елементарном радњом</u>, где је (P,s) угао што га затвара правац силе са правцем померања. Ако је тај угао оштар, онда је његов косинус позитиван, па је и радња позитивна; ако је тај угао туп, онда је његов косинус негативан, па је и елементарна радња негативна. У првом случају називамо силу P <u>покретном</u>, а у другом <u>отпорном</u>.

Изразу за елементарну радњу можемо дати и овај облик

$$dA = P \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \cos(P,s) \cdot dt = Pv\cos(P,s)\,dt$$

$P\cos(P,s)$ представља пројекцију силе у правац померања, па зато можемо да кажемо: елементарна радња једнака је продукту померања ds са компонентом силе P која пада у тај правац померања.

Дејствује ли више сила $P_1 P_2 \ldots$ на мобилну тачку, па изведу ли оне при томе померање MM_1, то је радња прве силе једнака



$$ds\,[P_1\cos(P_1,s)]$$

друге силе

$$ds\,[P_2\cos(P_2,s)]$$

и т. д. тако да ће укупна елементарна

радња свих тих сила заједно бити

$$dA = [P_1 \cos(P_1,s) + P_2 \cos(P_2,s) + \cdots]\,ds$$

Ако је R резултанта свих тих сила, онда је њена компонента у правцу s једнака збиру компонената сила $P_1 P_2 \ldots$ у томе правцу т.ј.

$$R \cos(R,s) = P_1 \cos(P_1,s) + P_2 \cos(P_2,s) + \cdots$$

па је зато

$$dA = R \cos(R,s)\,ds$$

Исти овај израз добили би кад би тражили елементарну радњу коју изврша сила R ако дејствује на мобилну тачку M а ова се помери за величину MM_1. Зато можемо да кажемо: Збир елементарних радња сила $P_1 P_2 \ldots$ једнак је елементарној радњи њихове резултанте R.

Означимо ли пројекцију померања ds у правац силе са dl, то је

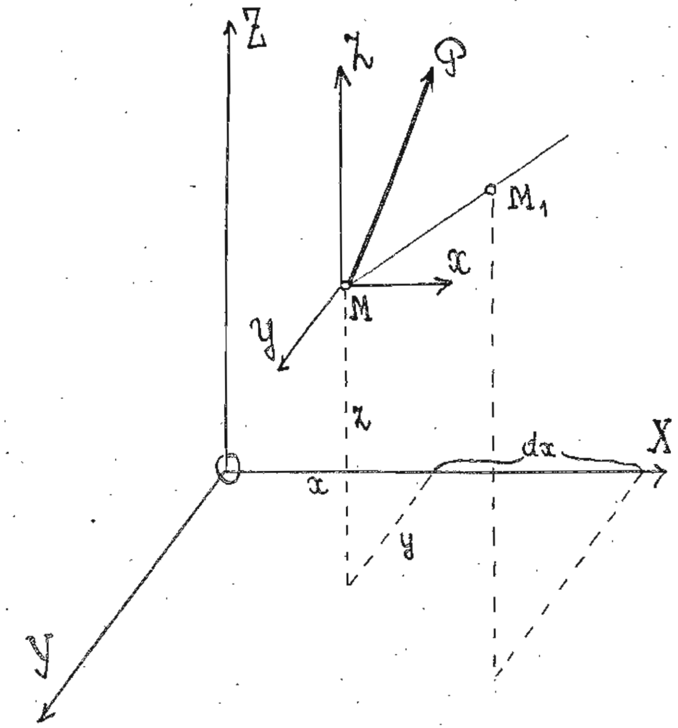
$$dl = \cos(P,s)\,ds$$

или

$$dA = P\,dl$$

Зато можемо да кажемо: Елементарн радња једнака је такође продукту силе и пројекције померања у правац силе.

Ако на мобилну тачку M која има координате x,y,z дејствује сила P која има компоненте X,Y,Z, па ако се мобилна тачка из положаја M помери у положај M_1 који има координате x+dx, y+dy, z+dz, онда је елементарна радња силе P једнака збиру елементарних радња компонената X,Y,Z.



Елементарна радња силе X једнака је према пређашњем продукту те силе са пројекцијом померања у том правцу, а та пројекција је једнака dx. Зато је елементарна радња силе X једнака Xdx. На исти се начин може доказати да је елементарна радња силе Y једнака Ydy, а силе Z: Zdz. Зато ће елементарна радња силе P бити једнака

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz$$

Ако је сила нормална на правац померања, онда ће њена елементарна радња бити равна нули. То можемо увидети и из овог израза јер је

$$dA = Pds\left\{\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds}\right\}$$

где ds означава дужину MM_1. Означимо ли углове што их сила P затвара са координатним осама са (x,P), (y,P), (z,P), а углове што их померање MM_1 затвара са осама са (x,ds), (y,ds), (z,ds) то квоциенти у пређашњој загради дају косинусе тих углова, па је

$$dA = Pds\{\cos(x,P)\cos(x,ds) + \\ + \cos(y,P)\cos(y,ds) + \cos(z,P)\cos(z,ds)\}$$

треба ли овај израз да буде раван нули то мора бити или

$$P = 0$$

или

$$ds = 0$$

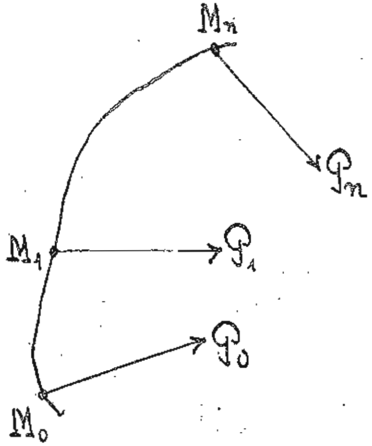
или израз у загради раван нули, а тај је једнак $\cos(P,ds)$, дакле

$$\cos(P,ds) = 0$$

а то значи да је правац силе P нормалан на правац померања ds.

Тотална радња.

Помери ли се мобилна тачка коначном путањом $M_0M_1 \dots M_n$, па ако на њу дејствује сила која у положају M_0 има правац и величину P_0, у положају M_1 правац и величину P_1, … у положају M_n правац и величину P_n, онда називамо граничну вредност израза



$$\lim\left\{\overline{M_0M_1}\,P_0\cos(M_0M_1,P_0)+\overline{M_1M_2}\,P_1\cos(M_1M_2,P_1)+\cdots\right\}$$

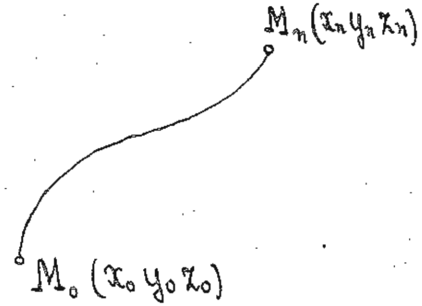
кад елементи путање $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_1M_2}$, … бивају све мањи и мањи <u>тоталном радњом</u>.

Ако су компоненте силе P у тим померањима X, Y, Z, то ће та тотална радња бити једнака

$$A=\int_{M_0}^{M_n}(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

Ако сила која дејствује на мобилну тачку зависи само од положаја ове тачке, онда је за одређење тоталне радње потребно само познавање путање коју мобилна тачка описује, па се израчунавање тоталне радње своди на проблем геометрије.

Нека је путања мобилне тачке задана; једначина њена нека буде изражена помоћу једног параметра q, дакле нека буде



$$x=\varphi(q)$$
$$y=\psi(q) \qquad 1)$$
$$z=\chi(q)$$

Почетној тачки M_0 нека одговара параметар q_0 тако да је

$$x_0=\varphi(q_0)$$

$$y_0 = \psi(q_0)$$
$$z_0 = \chi(q_0)$$

а тачки M_n са координатама x_n, y_n, z_n нека одговара параметар q_n тако да је

$$x_n = \varphi(q_n)$$
$$y_n = \psi(q_n)$$
$$z_n = \chi(q_n)$$

Рекли смо да сила која утиче на мобилну тачку па према томе и њене компоненте X, Y, Z зависе од положаја мобилне тачке, па ће због тога бити

$$X = F_1(x,y,z)$$
$$Y = F_2(x,y,z)$$
$$Z = F_3(x,y,z)$$

Ставимо ли у ове једначине вредности 1), то можемо изразити X, Y, Z као функције од q, па добијамо

$$X = f_1(q)$$
$$Y = f_2(q)$$
$$Z = f_3(q)$$

Елементарна радња једнака је отуда

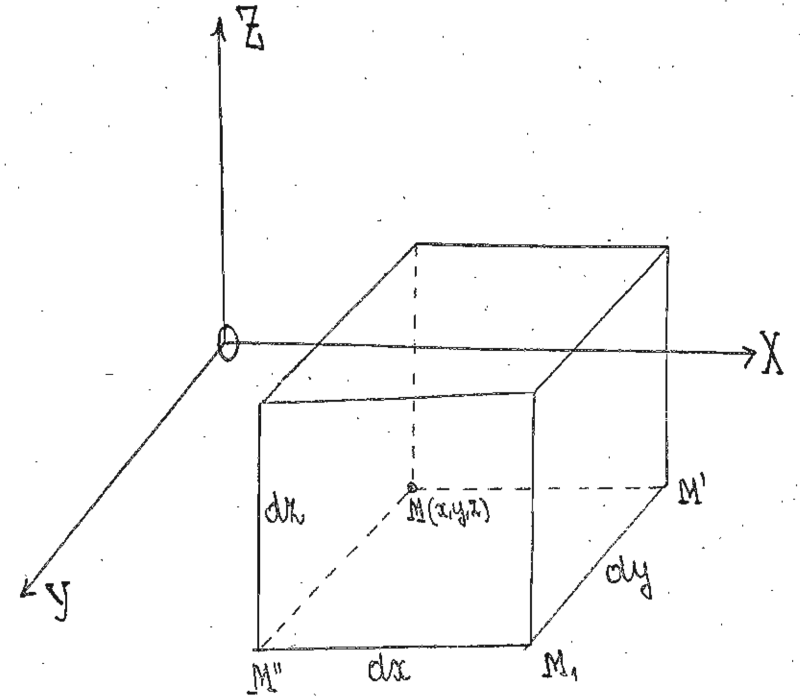
$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$
$$= f_1(q)\,\varphi'(q)\,dq + f_2(q)\,\psi'(q)\,dq + f_3(q)\,\chi'(q)\,dq$$

Интеграл из овог израза даће нам тоталну радњу.

Питајмо сада која услова мора задовољити сила која утиче на мобилну тачку, но која зависи само од положаја мобилне тачке т.ј. за коју је

$$X = X(x,y,z)$$
$$Y = Y(x,y,z)$$
$$Z = Z(x,y,z)$$

па да радња коју таква сила обавља на мобилној тачки не зависи од путање мобилне тачке, него само од њене почетне и завршне тачке. У томе случају мора дакле та независност радње од путање постојати за сваки елеменат простора, па исецимо из тог простора један паралелопипед бескрајно малих димензија. Стране тога паралелопипеда нека буду dx, dy, dz. Тачка M нека има



координате x, y, z. Доведимо сад мобилну тачку из тачке M у тачку M_1 преко тачке M', па израчунајмо елементарну радњу на тој путањи. На путу MM' долази само у обзир компонента X силе што утиче на мобилну тачку, јер друге две компоненте су нормалне на пут MM'. У тачки M има та компонента X вредност $X(x,y,z)$, па ју можемо на бескрајно маленом путу MM' сматрати као константу; зато ће радња на томе путу бити

$$X(x,y,z)\,dx$$

На путу $M'M_1$ долази само у обзир компонента Y силе, јер су остале две компоненте нормалне на пут. У тачки M' има та компонента Y вредност $Y(x+dx,y,z)$, па је зато радња на путу $M'M_1$ једнака

$$Y(x+dx,y,z)\,dy$$

Зато је радња на читавом путу $MM'M_1$ једнака

$$dA_1 = X(x,y,z)\,dx + Y(x+dx,y,z)\,dy.$$

Доведимо сад мобилну тачку из тачке M у тачку M_1 на тај начин да ју доведемо прво у тачку M'' па онда у тачку M_1. На путу MM'' долази само у обзир компонента Y а та има у тачки M вредност $Y(x,y,z)$. Зато је радња на путу MM'' једнака тој сили коју можемо сматрати константном на том путу помноженој са путањом dy т.ј.

$$Y(x,y,z)\,dy$$

На путу $M''M_1$ долази у обзир само компонента X а њена је вредност у тачки M'' једнака $X(x,y+dy,z)$, па је зато радња једнака

$$X(x,y+dy,z)\,dx$$

Радња на путу $MM''M_1$ једнака је према томе

$$dA_2 = Y(x,y,z)\,dy + X(x,y+dy,z)\,dx$$

Наш је захтев да радња буде независна од путање т.ј. да за сваки елеменат пута постоји однос

$$dA_1 = dA_2$$

па зато добијамо

$$\left[Y(x+dx,y,z) - Y(x,y,z)\right]dy = \left[X(x,y+dy,z) - X(x,y,z)\right]dx$$

или

$$\frac{Y(x+dx,y,z) - Y(x,y,z)}{dx} = \frac{X(x,y+dy,z) - X(x,y,z)}{dy}$$

или

$$\frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial y} \qquad 1)$$

На исти начин можемо доказати да још следећа два услова морају бити испуњена

$$\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial z}$$
$$\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial x} \qquad 1)$$

Компоненте X, Y, Z силе морају далле задовољавати ове услове.

Имамо ли једну произвољну функцију

$$U = U(x,y,z)$$

координата x, y, z, то је тотални диференцијал те функције једнак

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad 1^{x})$$

други парцијални диференцијални коефицијенти функције U задовољавају ове услове

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \qquad 2)$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$

Ставимо ли

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad 3)$$
$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

једначине 1) добијају овај облик

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial z}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial y}}{\partial z} \quad \text{"} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial z}}{\partial x} \quad \text{"} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$

Једначине 3) казују дакле исто што и једначине 2); зато ће сила задовољити услове 1) т.ј. радња коју она буде обављала неће зависити од облика путање, ако се компоненте те силе буду могле представити као парцијални диференцијални количници једне исте функције U по x, y, z као што то захтевају једначине 3). Ако таква функција постоји, онда ју називамо функцијом сила а њену негативну вредност потенцијалом. Случај да сила која дејствује на мобилну тачку задовољава овим условима догађа врло често.

Из једначина 1*) и једначина 3) следује

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \qquad 3^*)$$

а како је било

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

то је

$$dU = dA \qquad 4)$$

Нека се мобилна тачка креће у простору па нека на њу дејствује једна сила P чије су компоненте X, Y, Z парцијални диференцијални количници једне функције U координата x, y, z

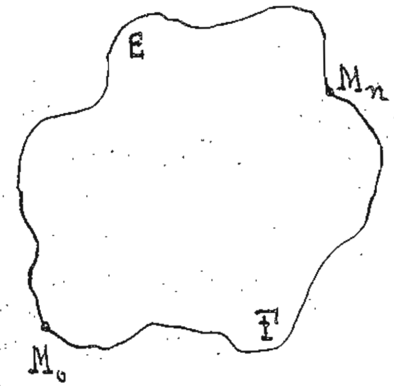
$$U = U(x,y,z)$$

онда свакој тачки простора одговара једна одређена вредност те функције. Тако има та функција у положају M_0 вредност

$$U_0 = U(x_0, y_0, z_0)$$

а у положају M_n вредност

$$U_n = U(x_n, y_n, z_n)$$



Доведемо ли мобилну

тачку из положаја M_0 у положај M_n, то ћемо радњу коју при том обављамо добити интеграцијом једначине

$$dA = dU$$

Дакле

$$A = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_n y_n z_n} dU = U(x_n, y_n, z_n) - U(x_0, y_0, z_0) = U_n - U_0$$

Радња A зависи дакле од почетне и крајње тачке а независи од путање.

Ту исту радњу добијамо ако доведемо тачку путањом $M_0 E M_n$ или путањом $M_0 F M_n$. Радња на путу $M_n F M_0$ једнака је

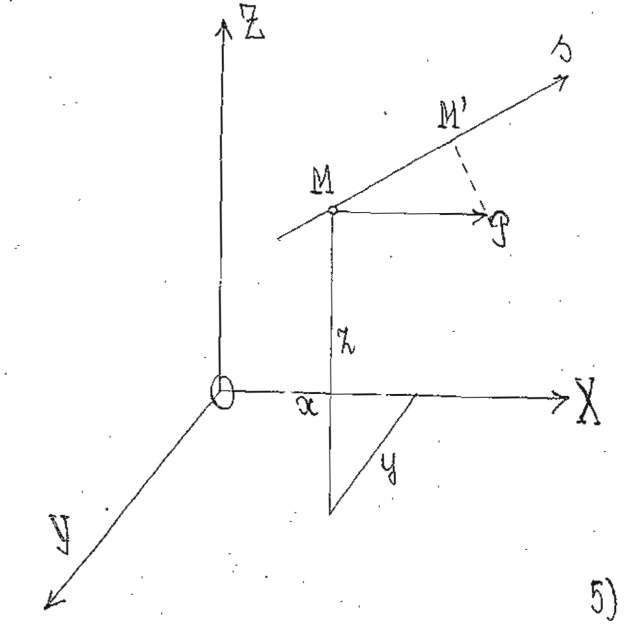
$$A' = \int_{x_n y_n z_n}^{x_0 y_0 z_0} dU = U_0 - U_n$$

Зато ће радња коју обављамо ако мобилну тачку доведемо из M_0 преко $E M_n F$ опет у M_0 бити једнака

$$A + A' = 0$$

Отуда: Радња мобилне тачке на свакој затвореној путањи равна је нули.

Показали смо да су парцијални диференцијални квоцијенти функције U по координатама једнаки компонентама силе P у правцу тих координата. Питајмо сад чему је једнак парцијални диференцијални квоцијент функције U по елементу ds једне праве која затвара са координатним осама углове α, β, γ. Питајмо дакле како ће се променити функција U ако се из тачке M помакнемо у правцу праве s за дужину



$$MM' = ds$$

Из једначина 3*) следује

$$\frac{dU}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \qquad 5)$$

Но како је

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos\beta$$

$$\frac{dz}{ds}=\cos\gamma$$

то ће први члан једначине 5) представљати пројекцију компоненте X у правој s, други члан представљаће пројекцију компоненте Y у правој s, а трећи пројекцију компоненте Z у истој правој s; једном речи десна страна једначине 5) представљаће пројекцију силе P у правој s. Зато можемо да кажемо: парцијални диференцијални квоцијенат функције U по елементу ds даје нам пројекцију силе P у правац тога елемента.

Ако се правац s поклапа са правцем силе, онда је

$$\cos\alpha=\frac{X}{P}$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{P}$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{P}$$

Означимо у том случају елеменат ds са dn, па из једначине 5) следује

$$\frac{dU}{dn}=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{P}=\frac{P^2}{P}=P$$

Отуда: Парцијални диференцијални квоцијент функције U у правцу силе даје величину силе.

Нека на мобилну тачку дејствују више сила

$$P_1\ P_2\ P_3\ \ldots$$

од којих свака има своју функцију сила

$$U_1\ U_2\ U_3\ \ldots$$

т.ј. нека важе једначине

$$X_1=\frac{dU_1}{\partial x}\qquad Y_1=\frac{dU_1}{\partial y}\qquad Z_1=\frac{dU_1}{\partial z}$$

$$X_2=\frac{\partial U_2}{\partial x}\qquad Y_2=\frac{\partial U_2}{\partial y}\qquad Z_2=\frac{\partial U_2}{\partial z}$$

$$X_3=\frac{\partial U_3}{\partial x}\qquad Y_3=\frac{\partial U_3}{\partial y}\qquad Z_3=\frac{\partial U_3}{\partial z}$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

па ће компоненте X, Y, Z резултанте

R свих тих сила бити према пређаш-њем једнаке

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots =$$
$$= \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial x} + \dots =$$
$$= \frac{\partial (U_1 + U_2 + U_3 + \dots)}{\partial x}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots =$$
$$= \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial y} + \dots =$$
$$= \frac{\partial (U_1 + U_2 + U_3 + \dots)}{\partial y}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots =$$
$$= \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial z} + \dots =$$
$$= \frac{\partial (U_1 + U_2 + U_3 + \dots)}{\partial z}$$

Ставимо ли

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots = U$$

то добијамо

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Функција U која је једнака збиру функција $U_1 U_2 U_3 \dots$ игра улогу функције сила резултанте.

Еквипотенцијалне површине

Рекли смо да је функција U само функција координата x, y, z т.ј.

$$U = U(x,y,z)$$

па називамо површину која је представљена једначином

$$U(x,y,z) = C$$

где C означава једну константу, еквипотенцијалном површином, јер је у свима тачкама такве површине потенцијал а према томе и функција сила константна.

Једначину такве површине можемо написати и у овом облику

$$F(x,y,z) = U(x,y,z) - C = 0$$

Из аналитичке геометрије познато је да су косинуси углова α, β, γ што их нормала такве површине затвара са координатним осама једнаки

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Но како је према пређашњем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = X$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} = Y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

где X, Y, Z представљају компоненте сице P

$$P=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

која утиче на мобилну тачку, то је

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{X}{P}=\cos(x,P)$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{Y}{P}=\cos(y,P)$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{Z}{P}=\cos(z,P)$$

Косинуси углова што их сила P затвара са координатним осама једнаки су косинусима углова што их нормала еквипотенцијалне површине затвара са истим осама. Зато можемо да кажемо: сила P стоји у свакој тачки простора нормално на еквипотенцијалну површину.

Како је било

$$\frac{dU}{dn}=P$$

где n означава елеменат у правцу силе P, то је према овој једначини лева страна позитивна т.ј. U расте кад је P позитивно, а то значи да функција U расте у позитивном правцу силе P или другим речима: сила P наперена је на ону страну еквипотенцијалне површине на којој страни функција U расте. Леву страну горњег израза можемо представити и као граничну вредност израза

$$\lim_{\Delta n=0}\frac{U_1-U_2}{\Delta n}$$

где су U_1 и U_2 вредности функције U на двема суседним еквипотенцијалним површинама а Δn одстојање тих површина на уоченом месту. Како је тај израз раван P т.ј.

$$\lim_{\Delta n=0}\frac{U_1-U_2}{\Delta n}=P$$

то је сила P инверзно пропорционална одстојању тих површина. Уочимо ли према томе две суседне еквипотенцијалне површине, то ће сила P бити највећа на оном месту где су те две површине најближе једна другој.

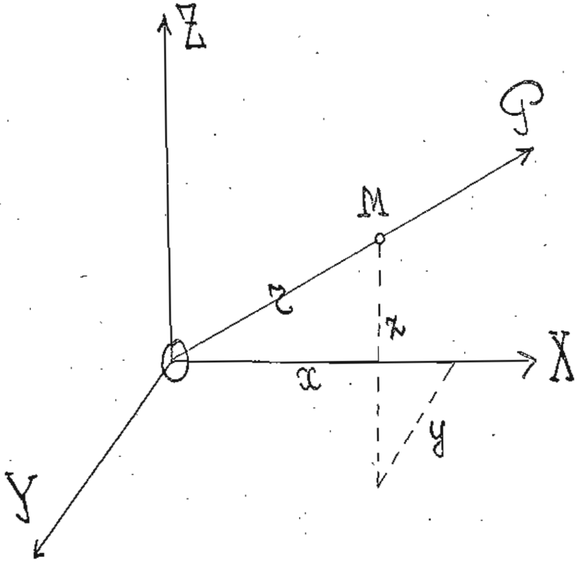
Специјални случај.

Нека на мобилну тачку утиче сила P која пролази кроз тачку O која је само функција одстојања те мобилне тачке од једне непомичне тачке O простора коју узимамо за почетну тачку нашег координатног система. Нека даље буде

$$P = F(r) \qquad 1)$$

где r значи одстојање тачке M од тачке O, а оно је једнако

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad 2)$$



Према ономе што смо раније извели имаћемо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X = P\cos(x,P) = F(r)\,\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y = P\cos(y,P) = F(r)\,\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = Z = P\cos(z,P) = F(r)\,\frac{z}{r}$$

па отуда

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{F(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

Диференцирајмо ли једначину 2) то добијамо

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

зато је израз у горњој загради једнак
$r\,dr$

па је због тога

$$dU = \frac{F(r)}{r}\,r\,dr = F(r)\,dr$$

или

$$U = \int F(r)\,dr$$

Десна страна ове једначине представља такође једну функцију од r н. пр.
$\Phi(r)$

Зато можемо да ставимо

$$U = \Phi(r)$$

Еквипотенцијалне површине биће у овом случају представљене једначином

$$U = \Phi(r) = const.$$

или ако ову једначину решимо по r

$$r = const.$$

што значи да су еквипотенцијалне површине у овом случају кугле са центром у O.

Статика
материјалне тачке.

Услови за равнотежу слободне материјалне тачке.

Материјална тачка која се може слободно да креће налазиће се онда у положају равнотеже ако се све силе које утичу на њу буду поништавале т.ј. ако резултанта тих сила буде равна нули. Означимо лиса X, Y, Z ортогоналне компоненте те резултанте, то је аналитички услов равнотеже изражен једначинама:

$$X=0$$
$$Y=0$$
$$Z=0$$

Ако резултанта сила које дејствују на материјалну тачку деривира од функције сила U, т.ј. ако је могуће њене компоненте представити као диференцијалне квоцијенте једне функције U тако да је

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

онда ће аналитички услов за равнотежу бити изражен једначинама

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Ове једначине су уједно услов да на том месту равнотеже (x,y,z) функција U достизава своју екстремну вредност.

Ако је посматрано поље сила равно т.ј. ако U зависи само од x и y

$$U = U(x,y)$$

онда ће на месту које одговара једначинама 1) функција U имати свој максимум ако је

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

а осим тога

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$$

функција U имаће на месту (x,y) своју минималну вредност ако је

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

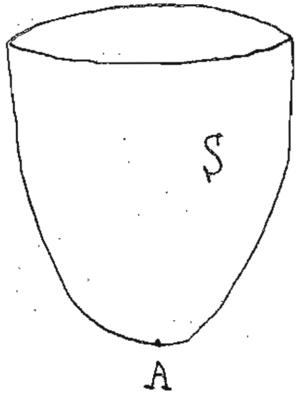
а осим тога

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$$

функција U неће имати ни максимума ни минимума ако постоји релација

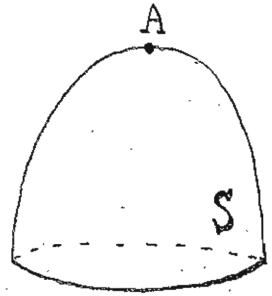
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

Посматрајмо прво први случај ако у положају равнотеже функција U достизава свој максимум. Померимо ли према положају (x,y) мобилну тачку бесконачно мало, то ће сила која буде на њу у томе новом положају дејствовала бити наперена према првом положају (x,y), јер као што смо пре показали сила је наперена на ону страну на коју функција сила расте, па како је у (x,y) максимум, то ће и сила бити наперена према тој тачки. То све важи за сваки суседни положај тачке (x,y). Зато ће мобилна тачка ако је померимо бескрајно мало из положаја (x,y), па је пустимо самој себи, вратити се у свој стари положај. Тај положај биће према томе положај <u>стабилне равнотеже</u>. Н. пр. ако се тешка мобилна тачка налази у унутрашњости суда S, онда ће најнижи положај A тога суда бити положај стабилне равнотеже. Померена из тога положаја и пуштена самој себи



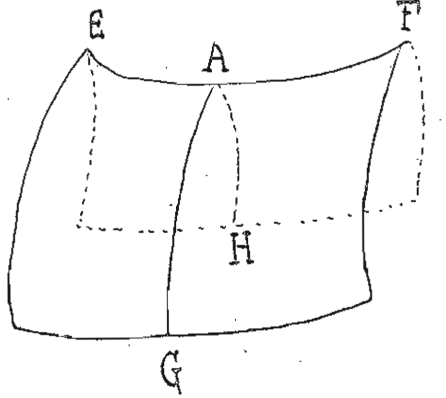
враћа се опет у положај A.

Уочимо други случај када у положају (x,y) функција U постизава свој минимум. Померимо ли сада мобилну тачку из тога положаја (x,y), то ће сила која на њу дејствује на овом положају бити наперена од положаја (x,y) јер је сила наперена на ону страну на којој функција сила расте. Зато ће мобилна тачка остављена у томе новом положају самој себи удаљити се од положаја (x,y). Зато је место (положај где функција сила постизава минималну вредност положај <u>лабилне равнотеже</u>. Н. пр. налази ли се тешка мобилна тачка на спољашњој страни суда S, то је њен положај A положај лабилне равнотеже.



Уочимо трећи случај када су до душе услови 1) задовољени, али када функција сила

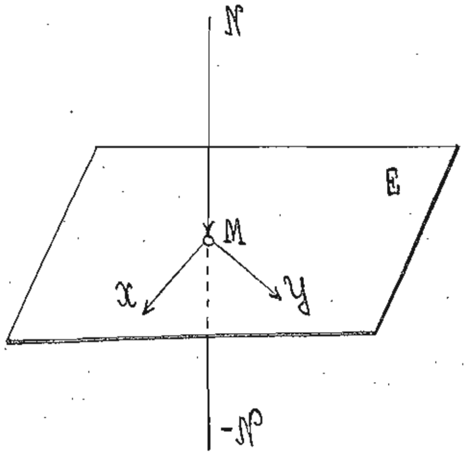
у томе положају не достизава ни макси-
малну ни минималну вредност. Онда ће у околини тога положаја (x,y) постојати једна област у којој је функција сила И мања него у положају (x,y), па ће се мобилна тачка померена у ту област враћати натраг положају (x,y), али ће се уз положај (x,y) налазити и друга област у којој је функција сила већа него у положају (x,y), па ће се мобилна тачка померена у ту област удаљавати сама од себе од положаја (x,y). Н. пр. на седластој површини има



тешка мобилна тачка у положају A. такав положај равнотеже који одговара трећем случају. Померена дуж линије EF она се враћа у положај A, а померена дуж линије HG она се удаљује од положаја A.

Тачка везана на површину.

До сада смо претпостављали да је мобилна тачка у своме кретању потпуно слободна, али се често пута дешава да је кретање мобилне тачке везано за извесне услове. Један од тих услова је н. пр. да је мобилна тачка присиљена да се креће у једној задатој површини коју не може да остави али јој у кретању у самој површини не стоје никакве препреке на путу. Испитајмо услове равнотеже у таквом случају, а претпоставимо прво да је мобилна тачка присиљена да се креће по површини ε. Мобилна тачка нека се налази у положају M. Онда једна сила N која је у томе положају нормална на равнину ε неће бити у стању да по-



билну тачку помери из положаја M. То следује из аксионе симетрије с обзиром на тачку M, јер нема због те савршене симетрије никаквог разлога да се мобилна тачка помери под утицајем силе N у правцу x или у другом правцу y.

Исто је то случај ако се мобилна тачка не налази на каквој равнини, но се налази на ма каквој површини; онда можемо бесконачно мали део површине у околини тачке M сматрати за један део равнине, па сила N која буде нормална на тај део неће бити у стању да мобилну тачку помери из тога положаја.

Пошто се мобилна тачка налази у положају M у равнотежи, то значи да равнина E или површина о којој смо говорили дејствује са истом силом N но противног правца (-N), тако да поништава утицај силе N. Ту силу -N зовемо реакцијом или отпором површине. Повећамо ли силу N, то ће се у истој мери повећати и отпор. Како ми претпостављамо да су сва тела и површине са којима имамо посла у рационалној механици апсолутно крута, то претпостављамо да и отпор површине може бити произвољно велик. У природи није то случај већ чврстоћа сваког тела има своју границу. Често је пута отпор посматране површине наперен само на једну страну те површине. Тако н. пр. мобилна тачка која се налази на површини једног крутог тела није у стању да ту површину остави на оној страни на којој то тело

Формулишимо аналитички услове за равнотежу мобилне тачке која је присиљена да се креће по површини

$$F(x,y,z)=0 \qquad 1)$$

У положају (x,y,z) су косинуси углова што их нормала на површини у тој тачки затвара са координатним осама једнаки, ако означимо са

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

овиме

$$\cos\alpha=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\cos\beta=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\cos\gamma=\lambda\frac{\partial F}{\partial z}$$

Отпор површине нормалан је према пре- ђашњем на ту површину, па ако величину тога отпора или његов интензитет означимо са N, то су компоненте његове паралелне са координатним осама

$$N\cos\alpha=\lambda N\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$N\cos\beta=\lambda N\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$N\cos\gamma=\lambda N\frac{\partial F}{\partial z}$$

ако у томе положају (x,y,z) дејствује још на мобилну тачку сем овог отпора сила P чије су компоненте X,Y,Z, то ће се мобилна тачка налазити у равнотежи ако је збир компонената у сва три правца координатних оса раван нули т.ј. ако буде било

$$X+\lambda N\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

$$Y+\lambda N\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad 2)$$

$$Z+\lambda N\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

Из једначине 1) и једначина 2) можемо одредити следеће четири непознате количине:

$$N,\ x,\ y,\ z$$

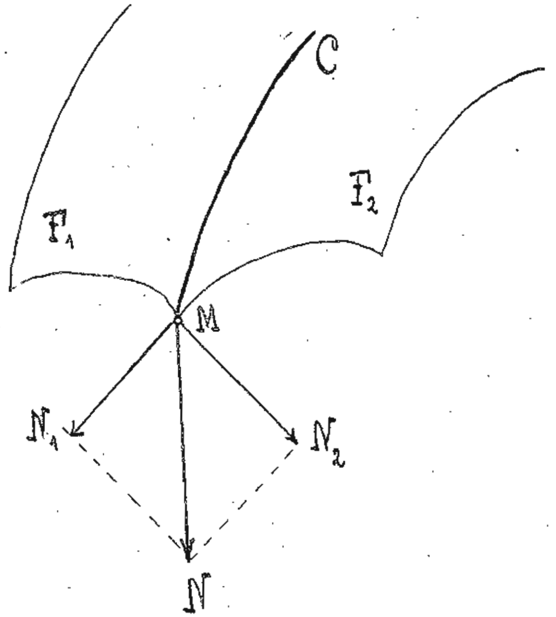
т.ј. наћи положај равнотеже мобилне тачке и величину отпора површине. Кад нас та величина N не интересује него тражимо положај (x,y,z), онда ћемо узети једначину 1) и следеће две једначине 3) које следују из једначина 2)

$$X:\frac{\partial F}{\partial x}=Y:\frac{\partial F}{\partial y}=Z:\frac{\partial F}{\partial z} \qquad 3)$$

Мобилна тачка везана на једну криву

Ако је мобилна тачка присиљена да се креће по једној заданој кривој, онда ће слично превашњем сила F која буде стајала нормално на тој кривој неће бити у стању да мобилну тачку помери дуж те криве, јер посматрани елеменат криве можемо сматрати као елеменат праве, па због симетрије обзиром на силу F нема никаква разлога да се мобилна тачка помакне пре на лево или на десно. Зато ће отпор криве бити увек нормалан на ту криву, а услови равнотеже да тај отпор буде по величини и по правцу једнак сили F.

Формулишимо аналитички те услове равнотеже. Једначина криве C на којој је мобилна тачка присиљена да се креће нека буде



$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)&=0 \\ F_2(x,y,z)&=0 \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Ми можемо према томе криву C сматрати као пресек површина

$$F_1(x,y,z)=0$$

и

$$F_2(x,y,z)=0$$

У произвољном положају M је отпор криве нормалан на ту криву, па га можемо раставити у две компоненте N_1 и N_2 од којих је прва нормална на површину F_1 а друга на површину F_2. Косинуси углова што их нормала прве површине затвара са координатним осама једнаки су

$$\cos\alpha_1 = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

$$\cos\beta_1 = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\cos\gamma_1 = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

где је

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2}}$$

Косинуси углова што их нормала на другу површину затвара са координатним осама једнаки су

$$\cos\alpha_2 = \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\cos\beta_2 = \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\cos\gamma_2 = \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

где је

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2}}$$

Ако у према томе N_1 и N_2 интензитети оба отпора, то ће компоненте првог отпора бити

$$\lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad ; \quad \lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad ; \quad \lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

а компоненте другог отпора

$$\lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad ; \quad \lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad ; \quad \lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

Ако у положају M дејствује на мобилну тачку сила P чије су компоненте X, Y, Z, то ће услови равнотеже у положају M бити изражени тиме да збир свих компонената у сва три правца буде раван нули. Зато једначине

$$X + \lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

$$Y + \lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

$$Z + \lambda_1 N_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2 N_2 \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

представљају аналитички критеријум за равнотежу мобилне тачке у положају (x, y, z). Из једначина 1) и 2) могу се одредити пет непознатих количина: x, y, z, N_1 и N_2 тј. положај равнотеже и величина отпора.

Услови за равнотежу мобилне тачке на заданој линији можемо, ако се могу израчунати тотални диференцијали dx, dy и dz, дати и овај облик: Косинуси углова што их тангента криве у положају (x, y, z) затвара са координатним осама једнаки су:

$$\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{dz}{ds}$$

2) Утиче ли на мобилну тачку сила P са компонентама X, Y, Z, то су косинуси углова што их та сила затвара са координатним осама једнаки

$$\cos\alpha_2 = \frac{X}{P}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{Y}{P}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{Z}{P}$$

Услов равнотеже је тај да правац силе P стоји нормално на тангенти, а тај је услов аналитички изражен једначином

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0$$

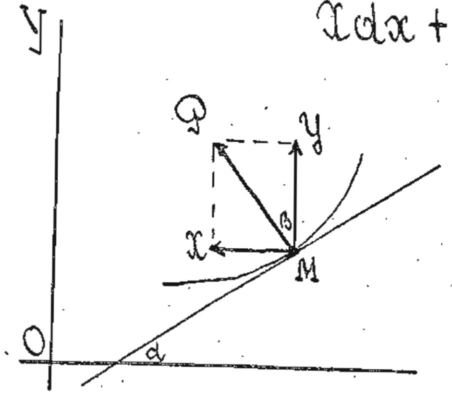
или обзиром на пређашње једначине

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \qquad 3)$$

Задовољавају ли координате x, y, z једначину 3) то оне одређују положај равнотеже.

Ако је крива линија равна крива, па њену раван одаберемо за раван XY нашег координатног система то једначина 3) добија облик

$$X dx + Y dy = 0 \qquad 3')$$



Значење једначине 3') следује из слике. У положају M треба сила P бити нормална на тангенту те криве т.ј. мора бити

$$\alpha = \beta$$

а како је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{y}$$

то је

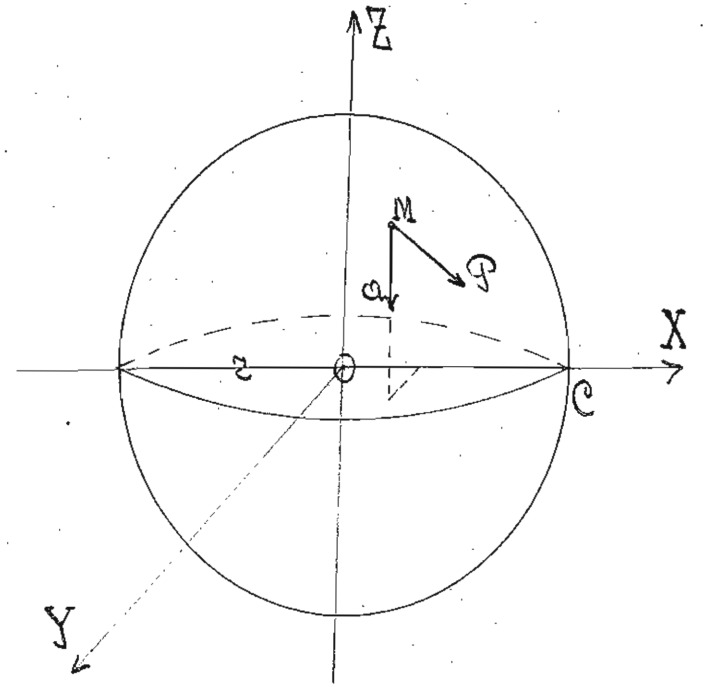
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

из којег услова следује једначина 3').

Примери:

1. На кугли радиуса r налази се тешка материјална тачка тежине q. Она је привлачена од једне непомичне тачке површине кугле силом инверзно пропорционалном кубусу одстојања од те тачке. Нека се нађе на површини кугле систем оних крива на којима се мобилна тачка у сваком положају налази у равнотежи.

Непомична тачка нека буде C. Онда је сила P којом она привлачи мо-



бичну тачку M у положају (x,y,z) једнака

$$P=\frac{R}{MC^3}$$

или ако означимо

$$MC=D$$

онда је

$$P=\frac{R}{D^3}$$

Косинуси углова што их правац силе P затвара са координатним осама једнаки су

$$\cos(x,P)=\frac{r-x}{D}$$

$$\cos(y,P)=\frac{y}{D}$$

$$\cos(z,P)=\frac{z}{D}$$

Зато су компоненте силе P једнаке

$$P\cos(x,P)=R\,\frac{r-x}{D^4}$$

$$P\cos(y,P)=-R\,\frac{y}{D^4}$$

$$P\cos(z,P)=-R\,\frac{z}{D^4}$$

На мобилну тачку дејствује сем тога њена тежина a у негативном правцу осе Z; зато су компоненте X, Y, Z резултанте сила које дејствују на мобилну тачку једнаке

$$X=R\,\frac{r-x}{D^4}$$

$$Y=-R\,\frac{y}{D^4}$$

$$Z=-R\,\frac{z}{D^4}-a$$

Елементи криве на којој се мобилна тачка налази у сваком положају у равнотежи морају задовољавати према пређашњем овај услов

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0$$

па је зато заменом

$$\frac{R}{D^4}\left[(r-x)\,dx-y\,dy-z\,dz\right]-a\,dz=0$$

D је одстојање тачака C и M, које имају координате $C(r,0,0)$ и $M(x,y,z)$. Зато је

$$D^2=(r-x)^2+y^2+z^2$$

па тражена једначина добија облик

$$\frac{r\,dx-(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{[(r-x)^2+y^2+z^2]^2}=\frac{a}{R}\,dz \qquad 1)$$

Овим условима морају задовољити елементи тражене криве, но она се сем тога мора налазити на површини кугле чија је једначина

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad 2)$$

Елементи криве морају према томе задовољавати и једначину коју добијамо диференцирањем једначине 2)

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0 \qquad 3)$$

тако да једначина 1) добија сада овај облик

$$\frac{r\,dx}{[(r-x)^2+y^2+z^2]^2}=\frac{a}{R}\,dz \qquad 4)$$

Имениоцу ове једначине можемо дати и други облик јер је он једнак изразу

$$[r^2-2rx+\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2}]^2=[2r^2-2rx]^2=$$
$$=4r^2(r-x)^2$$

па једначина 4) прелази у једначину

$$\frac{dx}{(r-x)^2}=4r\frac{a}{R}\,dz$$

Интеграција ове једначине даје

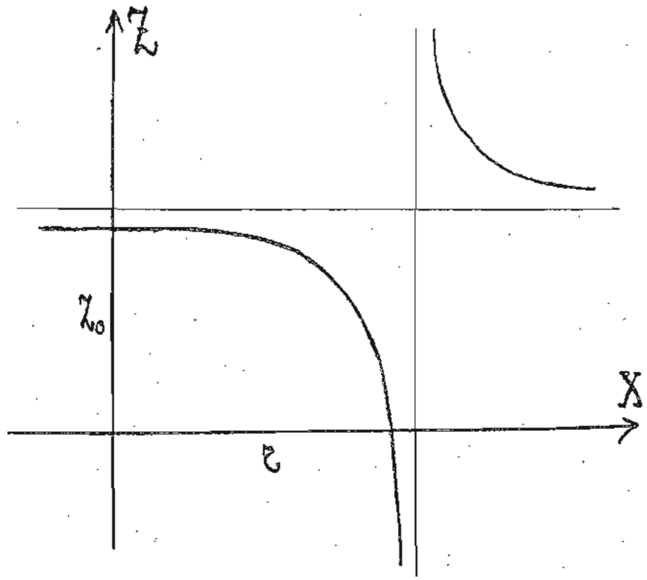
$$\frac{1}{r-x}=4r\frac{a}{R}(z-z_0)$$

где је z_0 константа. Зато су једначине криве на којима се мобилна тачка налази у равнотежи своде на две једначине

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=r^2\\ (r-x)(z-z_0)&=\frac{R}{4ra}\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Друга од ових једначина казује да су пројекције тих линија на кугли у равнини XZ хиперболе

$$\left.\begin{aligned} x&=r\\ z&=\infty\end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{matrix} z = z_0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\}$$

Како је z_0 произвољна константа, то имамо читав систем таквих хипербола. Вертикална њихова асимптота је непомична. Тражене криве на површини купе су криве у којима површина чија је директриса хипербола а генератриса паралелна оси y пресеца површину купе.

2° Материјална тачка тежине a везана је танким концем преко котура O непомично са теретом Q; нека се нађе систем оних површина на којима се мобилна тачка под утицајем тих сила налази у равнотежи.

Котур о коме је реч нека се налази у тачки O; онда је мобилна тачка у сваком своме положају привлачена силом Q према тачки O. Означимо ли одстојање

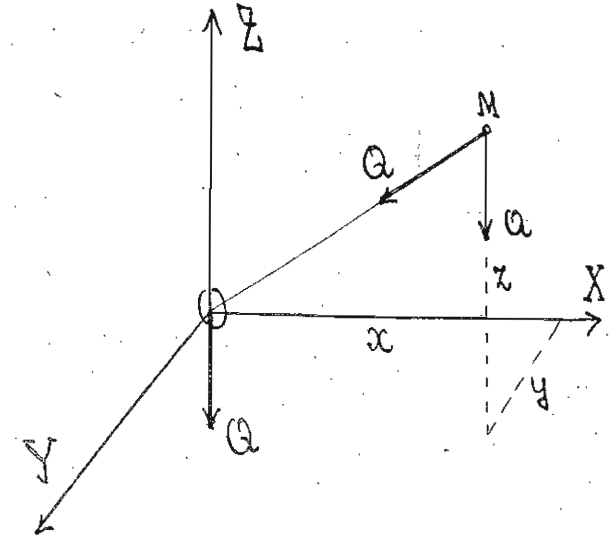
$$\overline{OM} = \rho$$

то су компоненте те силе једнаке

$$-Q\frac{x}{\rho}$$

$$-Q\frac{y}{\rho}$$

$$-Q\frac{z}{\rho}$$



На мобилну тачку дејствује сем тога њена тежина a; зато су компоненте резултанте свих сила једнаке

$$X = -\frac{x}{\rho}Q$$

$$Y = -\frac{y}{\rho}Q$$

$$Z = -\frac{z}{\rho}Q - a$$

Површине на којима ће се мобилне тачка тачка под утицајем тих сила налазити у равнотежи мораjу задовољавати услов да је у свакој њиховој тачки резултантна сила нормална на површину. Ако те силе деривирају од функције сила, онда ће те површине, као што смо пре показали, бити еквипотенцијалне површине. Њихова је једначина

$$U = const.$$

или у диференцијалном облику

$$dU = 0$$

или према пређашњем је

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

или

$$dU = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

Зато ће диференцијална једначина тражених површина бити

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0$$

Њу можемо из досадањих података формирати, па је она

$$-\frac{Q}{\rho}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) - a\,dz = 0$$

Но како је

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

то је

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = \rho\, d\rho$$

Зато имамо једначину

$$-Q\,d\rho = a\,dz$$

Ова се једначина може одмах интегралити па је

$$-Q\rho = a(z - z_0)$$

где је z_0 константа, или квадрирањем

$$\rho^2 = \left(\frac{a}{Q}\right)^2 (z - z_0)^2$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a}{Q}\right)^2 (z - z_0)^2$$

Ово је једначина система тражених површина и она садржи у себи произвољну константу z_0. Означимо

$$\frac{a}{Q} = m$$

то је пресек тих површина са координатном равнином XZ представљен једначином

$$x^2 + z^2 = m^2 z^2 - 2m^2 z_0 z + m^2 z_0^2$$

или

$$x^2 + (1 - m^2) z^2 + 2m z_0 z = m^2 z_0^2$$

Ова једначина представља коничну линију.

Ако је

$$m=1$$

т.ј.

$$a=Q$$

онда је тај пресек парабола; ако је

$$m<1$$

т.ј.

$$a<Q$$

онда је пресек елипса; ако је

$$m>1$$

т.ј.

$$a>Q$$

онда је пресек хипербола.

Динамика материјалне точке.

Једначине кретања.

Утиче ли на мобилну тачку сила представљена вектором $\mathfrak{F}$ чије су компоненте X, Y и Z, па означимо ли вектор акцелерације мобилне тачке са $\mathfrak{g}$, то су компоненте тога вектора према превашњем

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Означимо ли масу мобилне тачке са m, то постоји једначина

$$\mathfrak{F} = m\,\mathfrak{g}$$

Из ове векторске једначине следују следеће три скаларне једначине

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad 1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \qquad 1)$$

Ове једначине зову се једначине кретања мобилне тачке.

Означимо ли са $\vec{r}$ вектор положаја мобилне тачке, то је векторијелни облик једначине кретања

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Одредити кретање материјалне тачке значи помоћу једначине кретања изразити њене координате x, y, z као функције времена. У то име морају количине X, Y, Z бити познате т.ј. морамо знати утицајем каквих сила креће се мобилна тачка. Те величине могу бити функције следећег облика

$$X = F_1(x, y, z, x', y', z', t)$$
$$Y = F_2(x, y, z, x', y', z', t) \qquad 2)$$
$$Z = F_3(x, y, z, x', y', z', t)$$

где t значи време а x', y', z' изводе по времену. Комбинацијом једначина 1) и 2) добијамо према томе три диференцијалне једначине другог реда, па ће зато интеграли тих једначина садржати у себи шест произвољних констаната и имати следећи облик

$$x = \varphi(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t)$$
$$y = \psi(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \qquad 3)$$
$$z = \chi(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t)$$

одакле је

$$x' = \varphi'(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t)$$
$$y' = \psi'(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \qquad 3)$$
$$z' = \chi'(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t)$$

Питајмо на који ћемо начин одредити те константе. Те константе одређују се иницијалним условима т.ј. условима кретања у једном уоченом моменту

$$t = t_0$$

Ако нам је у том моменту познат положај мобилне тачке и вектор њене брзине, онда су нам познате тиме следеће величине:

за

$$t = t_0$$

нека буде

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x^0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y^0$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z^0$$

где су v_x^0 v_y^0 v_z^0 компоненте брзине у уоченом моменту. Ми имамо шест услова; ако их применимо на једначине 3) ако се ове могу решити, онда ће нам бити могуће одредити величине констананта C као функције координата, њихових извода и времена. На тај начин добијамо ове једначине

$$C_1 = \Phi_1(x, y, z, x', y', z', t)$$

$$C_2 = \Phi_2(x, y, z, x', y', z', t) \qquad 4)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_6 = \Phi_6(x, y, z, x', y', z', t)$$

Ове једначине или једначине имплицитног облика од којих свака садржава само једну константу, зову се први интеграли једначина кретања. Ако те интеграле имамо, онда можемо одредити координате и њихове изводе као функције времена.

Вектор квантитета кретања

Ако је маса мобилне тачке m, онда називамо вектором квантитета кретања онај вектор који добијамо ако вектор v брзине мобилне тачке помножимо са масом m, дакле вектор

$$mv$$

Како је m скаларна величина, то ће вектор mv имати исти правац као и вектор v. Како су компоненте вектора v биле према пређашњем

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

то ће компоненте вектора квантитета кретања бити

$$m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}$$

Изведимо сада неке особине тога вектора квантитета кретања. Једначинама кретања

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

можемо дати следећи облик

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z$$

Ове једначине казују да су диференцијални количници компонената вектора квантитета кретања по времену једнаки компонентама резултанте сила које утичу на мобилну тачку или да је диференцијални квоциенат вектора квантитета кретања по времену једнак резултанти сила.

Ако се силе које утичу на мобилну тачку држе у равнотежи т.ј. ако је

$$X=0$$
$$Y=0$$
$$Z=0$$

онда следује из пређашњих једначина

$$m\frac{dx}{dt}=A$$

$$m\frac{dy}{dt}=B$$

$$m\frac{dz}{dt}=C$$

где су A, B и C константе.

И о статичком моменту вектора квантитета кретања обзиром на неку тачку могу се формулисати интересантне теореме које ћемо често пута примењивати. Ако се мобилна тачка налази у положају (x,y,z) или ако је вектор њеног положаја $\mathfrak{r}$, онда је статички моменат вектора квантитета кретања $m\mathfrak{v}$ једнак

$$\mathfrak{M}=[\mathfrak{r}\, m\mathfrak{v}]=m[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}] \qquad 1)$$

Компоненте M_x, M_y и M_z тога статичког момента биће према томе субдетерминанте следећег израза

$$\mathfrak{M}=m\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}$$

т.ј.

$$M_x=m\left\{y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$M_y=m\left\{z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right\} \qquad 2)$$

$$M_z=m\left\{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}$$

Ове резултате могли смо одмах написати употребив познате једначине за статичке моменте. Диференцирајмо ли ове изразе по времену, добијамо

$$\frac{dM_x}{dt} = m\left\{\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + y\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{dy}{dt} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right\}$$

или

$$\frac{dM_x}{dt} = m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

т.ј.

$$\frac{dM_x}{dt} = yZ - zY$$

$$\frac{dM_y}{dt} = zX - xZ \qquad 3)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = xY - yX$$

Ове једначине казују да су диференцијални квоцијенти компонената статичког момента вектора квантитета кретања једнаки статичком моменту силе $\mathfrak{P}$ која дејствује на мобилну тачку обзиром на координатне осе.

До овог резултата могли смо доћи и директније помоћу векторске анализе: Из једначине 1) следује

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = m\underset{0}{[\mathfrak{v}\mathfrak{v}]} + m[\mathfrak{r}\mathfrak{w}] = [\mathfrak{r}m\mathfrak{w}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}] \qquad 4)$$

Ова једначина казује да је диференцијални квоцијент момента $\mathfrak{M}$ по времену једнак статичком моменту силе $\mathfrak{P}$ обзиром на тачку O. Једначина 4) казује дакле исто што и једначине 3).

Ако сила $\mathfrak{P}$ која утиче на мобилну тачку пролази увек кроз осу Z, онда је њен статички моменат обзиром на ту осу једнак нули; зато је у том случају

$$xY - yX = 0$$

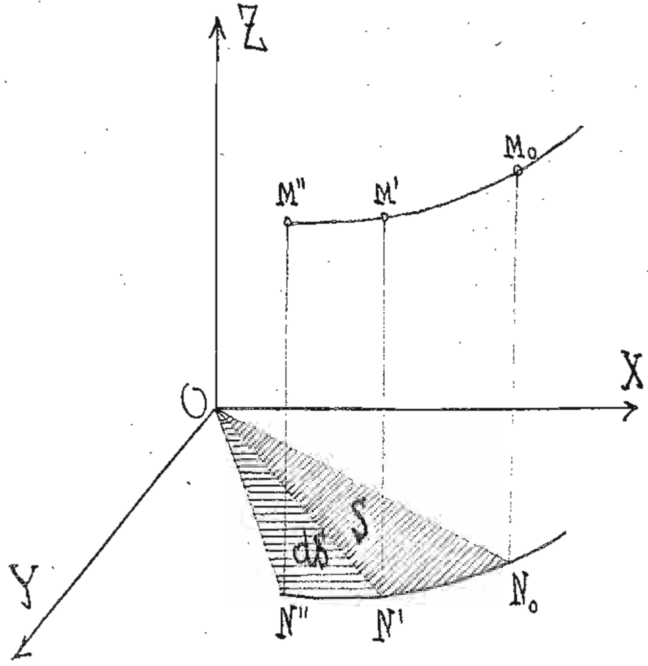
па из последње од једначина 3) следује

$$M_z = C$$

где је C константа, па је зато према једначини 2)

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C$$

Ова једначина има једно интересантно геометријско значење. Мобилна тачка нека описује путању M_0M''. У времену t_0 нека се налази у положају M_0; у времену t у положају M', а у вре-



менту $t+\Delta t$ у положају M''. Пројецирамо ли увек положај мобилне тачке у равнину xy, то радиус вектор ON' описује при кретању мобилне тачке једну површину S, па ће та површина што ју је радиус вектор описао у интервалу времена од t_0 до t бити представљена површином S, док у интервалу времена dt опише радиус вектор површину dS која је једнака површини бескрајно суженог троугла $ON'N''$. Ако су координате положаја M': x, y, z, онда су координате тачке N': $x, y, 0$, а координате тачке N'': $x+dx, y+dy, 0$. Зато је површина тог троугла

$$dS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x+dx & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

па је због тога

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{c}{m} = c_1$$

где c_1 означава једну нову константу. Ова једначина казује да је брзина којом се мења површина S за време читавог кретања мобилне тачке константна, а то значи да у случају када сила која утиче на мобилну тачку пролази стално кроз осу Z, да радиус вектор ON' описује у једнаким деловима времена једнаке површине. Обрнуто: ако се мобилна тачка креће тако да пројекција њеног радиус вектора у равнини XY описује у једнаким деловима времена једнаке површине т.ј. када је

$$\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = c_1$$

онда следује диференцирањем ове једначине

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

или

$$xm\frac{d^2y}{dt^2} - ym\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

или

$$xY - yX = 0$$

Последња једначина казује да је статички моменат силе F која утиче на мобилну тачку с обзиром на осу Z једнак нули или да та сила F пролази непрестано кроз осу Z.

Централне силе.

Пролази ли сила F која утиче на мобилну тачку стално кроз једну непомичну тачку простора онда такву силу називамо централном силом.

Одаберимо ту непомичну тачку простора за почетну тачку нашег координатног система; онда ће статички моменти те силе обзиром на све три осе бити једнаки нули, јер та сила пролази у исти мах кроз све три осе. Зато ће бити

$$yZ - zY = 0$$
$$zX - xZ = 0$$
$$xY - yX = 0$$

па ће због тога, према пређашњем, постојати једначине

$$\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C_1$$

$$\frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = C_2$$

$$\frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} \quad x\frac{dz}{dt}\right) = C_3$$

Помножимо ли прву од ових једначина са z, другу са x, трећу са y, па их саберемо, то добијамо

$$C_1 z + C_2 x + C_3 y = 0$$

Ова једначина казује да путања мобилне тачке лежи у равнини која пролази кроз почетну тачку координатног система. Путања мобилне тачке лежи према томе у равнини која пролази кроз центар сила и иницијалан вектор брзине.

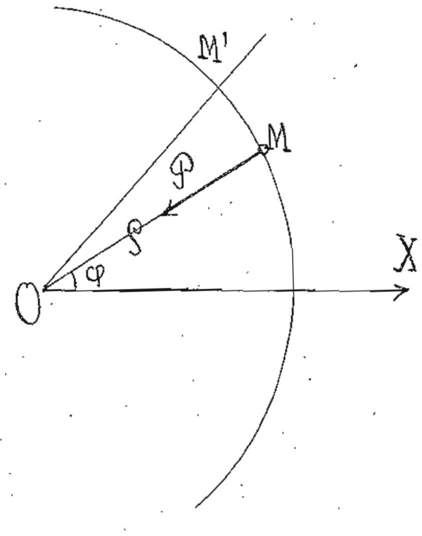
Из пређашњих једначина следује

$$\frac{ds_x}{dt} = A$$

$$\frac{ds_y}{dt} = B$$

$$\frac{ds_z}{dt} = C$$

где A, B, C значе константе, а s_x, s_y, s_z
5) површине што их пројекција радиус вектора у координатној равни YZ, ZX, XY описује. Како пројекције радиус вектора у све три координатне равнине описују у једнаким деловима времена једнаке површине, то ће сам тај радиус вектор описивати у равнини путање у једнаким деловима времена једнаке површине. До овога резултата можемо једноставније овако доћи: Одаберимо равнину путање за равнину слике. Центар сила нека буде O. Кроз ту тачку O пролази стална сила F која утиче на мобилну тачку. Означимо ли радиус-вектор са ρ а угао што га



он са произвољно одабраном осом x у равнини путање затвара са φ. Раставимо ли силу P у компоненте P_ρ и P_n од којих прва пада у правац радијус-вектора а друга стоји нормално на тај правац, то је

$$P_n = 0$$

Извели смо једначину

$$P_n = m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

па је зато

$$m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = const.$$

Израз на левој страни представља нам површину

$$OMM' = ds$$

коју радијус-вектор опише у интервалу dt т.ј.

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = ds$$

па је зато

$$\frac{ds}{dt} = const.$$

Жива сила

Узмимо једначине кретања

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

па конструишимо израз

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}dt\left(2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{m}{2}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

Отуда следује

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{m}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2} d\left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2} dv^2 =$$

$$= d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Добили смо дакле једначину

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Израз

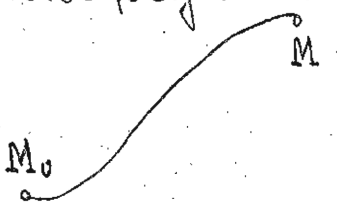
$$\frac{mv^2}{2}$$

зовемо <u>живом силом</u> мобилне тачке, а лева страна горње једначине представља нам елементарну радњу. Зато је

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

одакле: Диференцијал живе силе раван је елементарној радњи.

Крене ли се мобилна тачка из положаја M_0 у положај M, па има ли у првом положају брзину v_0 а у другом брзину v, то ће интеграција гор-



ње једначине дати једначину

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

где A означава тоталну радњу обављену на путу M_0M. Зато можемо да кажемо: Тотална радња једнака је промени живе силе.

Ми смо показали да је тотална радња једнака таквој промени функције сила између почетне и крајње тачке путање, па ако на посматрану тачку дејствују силе које деривирају од функције сила U, то ће постојати једначине

$$U - U_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Диференција живих сила што их мобилна тачка има у почетној и крајњу тачки путање једнака је диференцијалној вредности функција сила у тим тачкама.

Врати ли се мобилна тачка обавивши произвољан пут натраг у почетни положај или натраг у еквипотенцијалну површину почетног положаја, онда ће бити

$$U = U_0$$

због тога

$$v = v_0$$

– Мобилна тачка враћа се у еквипотенцијалну површину почетног положаја увек са почетном брзином.

Теорему живе силе извели бисмо помоћу векторске анализе на овај начин: Помножимо ли једначину кретања

$$\mathfrak{F} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

са једначином

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\,dt$$

то добијамо

$$\mathfrak{F}\,d\mathfrak{s} = m\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)^2$$

или интеграцијом

$$\int \mathfrak{F}\,d\mathfrak{s} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Праволинијско кретање.

Утиче ли на мобилну тачку једна сила константног правца, па пада ли иницијални вектор брзине у правац те силе, то ће се мобилна тачка кретати у томе правцу.

Доказ: Одаберимо правац силе за осу X; онда су компоненте силе у правцима Y и Z равне нули, па због тога добијају друге две једначине кретања ове облике

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

1)

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

а како и компоненте иницијалних брзина у правцима Y и Z исчезавају, то постоје за моменат $t=0$ ови услови:

за $t=0$

$$\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dz}{dt}=0$$

Интеграција једначина 1) даје

$$\frac{dy}{dt}=C_1$$

$$\frac{dz}{dt}=C_2$$

но узмемо ли у обзир услове 2) то видимо да константе C_1 и C_2 ишчезавају т.ј.

$$\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dz}{dt}=0$$

Поновна интеграција ових једначина даје

$$y=y_0$$
$$z=z_0$$

где су y_0 и z_0 константе. Ове једначине казују да се мобилна тачка креће у праву која је паралелна оси x.

2)

Пад у безваздушном простору.

Сва тела у погледу материје изложена су као што је познато тежи, сили која има вертикалан правац, наперена је према доле и даје свим телима исту акцелерацију. Та сила представљена је једначином

$$G=mg$$

где m означава масу мобилне тачке, а g једну константу која се на уоченом месту земље не мења са временом.

Нека мобилна тачка почиње своје падање у тачки O у времену $t=0$ и са почетном брзином $v=0$. Узмемо ли правац силе и пута позитиван према доле, то је сила G једнака

$$G=+mg$$

па је зато једначина кретања

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

Интеграција ове једначине даје

$$\frac{ds}{dt}=gt+C$$

Но како је

за $t=0$

$$\frac{ds}{dt}=v=0$$

то је

$$v=\frac{ds}{dt}=gt$$

Поновна интеграција ове једначине даје

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C$$

Меримо ли пут од тачке O т.ј. ако је

за $t=0$

$s=0$

то је

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

Вертикалан хитац у вис.

Мобилна тачка нека у времену $t=0$ започиње своје кретање вертикално у вис почетном брзином $v=v_0$ и пут меримо од те тачке вертикално у вис, па је због тога

за $t=0$

$s=0$

Сила G која утиче сад на мобилну тачку има правац противан позитивном смислу од s, па зато морамо да ставимо

$$G=-mg$$

па једначина кретања добија облик

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g$$

Интеграција ове једначине даје

$$v = \frac{ds}{dt} = -gt + C$$

ако применимо инцијални услов добијамо

$$v_0 = C$$

па отуда

$$v = v_0 - gt \qquad 1)$$

или

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt$$

Интеграција ове једначине даје

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + C_1$$

применимо ли други инцијални услов то добијамо

$$C_1 = 0$$

па отуда

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad 2)$$

Питамо ли сад за време што та мобилна тачка треба да се попне до свог највишег положаја, то то време T добијамо из једначине 1) ако ставимо

$$\text{за } t = T$$
$$v = 0$$

јер мобилна тачка има у томе времену кад се попне на највиши положај брзину нула. Зато је

$$T = \frac{v_0}{g} \qquad 3)$$

Питамо ли за висину пењања т.ј. за пут превађен у времену T, то га можемо добити ако једначину 3) ставимо у једначини 2), а можемо применити и познату кинематску једначину

$$v\,dv = p\,ds$$

У нашем случају је

$$v\,dv = -g\,ds$$

чија интеграција даје

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -gs$$

Висину L пењања добићемо ако у овој једначини ставимо

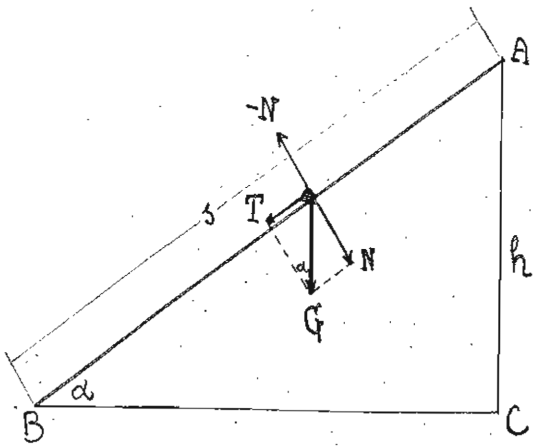
$$\text{за } s = L$$
$$v = 0$$

Отуда

$$L = \frac{v_0^2}{2g}$$

Пад на стрмој равнини

Мобилна тачка нека се налази на апсолутно глаткој стрмој равнини. Нека на њу не утиче никаква друга спољна сила него тежа и нека започиње своје кретање са иницијалном брзином нула. Испитајмо законе њеног кретања. Угао нагиба стрме равнине нека буде α. Раставимо тежину G мобилне тачке у две компоненте: једну N која стоји нормално на равнини и другу T



која пада у равнину. Како је мобилна тачка присиљена да се креће по равнини, то ће на њу дејствовати равнина отпором $-N$ који је једнак но противног правца компоненти N. Те две силе N и $-N$ поништавају се, па зато можемо сматрати да се тачка слободно креће под јединим утицајем силе T. Зато ће једначина кретања бити

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = T$$

Но како је

$$T = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

то једначина кретања добија облик

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\alpha$$

Интеграција ове једначине даје нам

$$\frac{ds}{dt} = v = g\sin\alpha \cdot t + C$$

Но како је

за $t=0$

$v=0$

то је

$$C=0$$

па је

$$v = g \sin\alpha \cdot t$$

Поновна интеграција ове једначине даје

$$s = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2 + C_1$$

но како је

$$\text{за } t = 0$$
$$s = 0$$

то је

$$C_1 = 0$$

па је

$$s = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2$$

- Мобилна се тачка креће тако као кад би њена акцелерација била константна и једнака

$$g \sin\alpha .$$

Умањивањем угла α можемо умањити и ту акцелерацију. На тај је начин Галилеј одредио акцелерацију теже.

Из кинематске једначине

$$v\,dv = p\,ds$$

која у нашем случају добија облик

1) $$v\,dv = g \sin\alpha\, ds$$

следује интеграцијом

$$\frac{v^2}{2} - \cancel{\frac{v_0^2}{2}}_{0} = s g \sin\alpha$$

или

$$v = \sqrt{2gs \sin\alpha}$$

- Брзина коју мобилна тачка достигне падајући од тачке A до тачке B представљена је горњим изразом. Означимо

2) ли дужину

$$AC = h$$

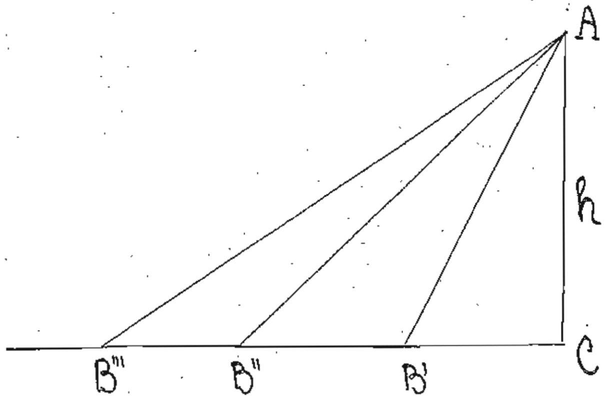
то је

$$h = s \sin\alpha$$

или

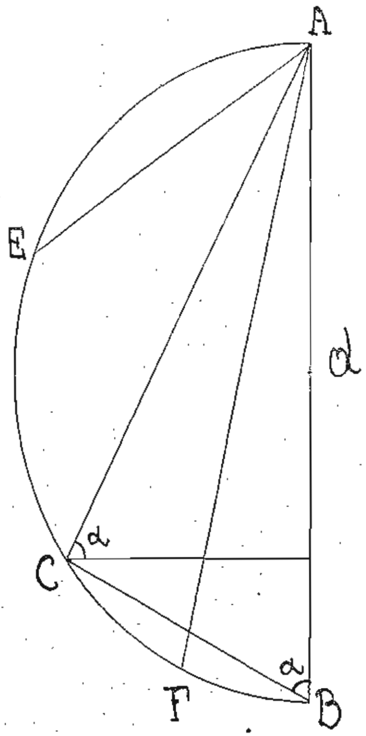
$$v = \sqrt{2gh}$$

- Брзина коју мобилна тачка достигне падајући по стрмој равнини од тачке A до тачке B иста је таква по својој величини као кад би мобилна тачка падала вертикално од тачке A до тачке C. Другим речима: мобилна тач-



ка падајући по стрмим равнинама AB', AB'', AB''', ... достизава у тачкама B', B'', B''', ... исту брзину која је једнака $\sqrt{2gh}$.

Пада ли мобилна тачка по дијаметру AB полукруга ACB, то се време T што га треба да дође из тачке A у тачку B израчунава према пређашњем из једначине



$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

ако ставимо

за $s=d$

$t=T$

дакле

$$T=\sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Пада ли мобилна тачка по тетиви AC, то се време T_1 израчунава из једначине 2) ако се у њој стави

$$AC=s$$
$$t=T_1$$

дакле из једначине

$$s=\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot T_1^2$$

одакле

$$T_1=\sqrt{\frac{2\frac{s}{\sin\alpha}}{g}}$$

Угао нагиба α стрме равнине AC једнак је такође углу ABC, па је због тога

$$\frac{s}{\sin\alpha}=d$$

па отуда

$$T_1=\sqrt{\frac{2d}{g}}=T$$

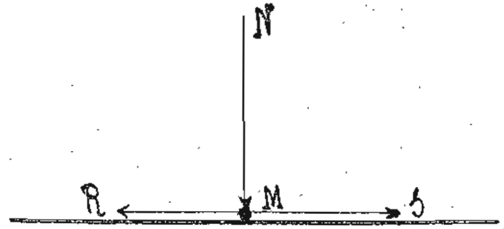
Мобилна тачка стиже према томе у исто време у тачку C кад и у тачку B, а како је тачка C била произвољна тачка полукруга, то мобилна тачка стиже у исто доба у све тачке полукруга C, E, F, ... ако пада по стрмим равнинама AC, AE, AF, ...

О силама трења.

Бацимо ли материјалну мобилну тачку која је приближно остварена у једној материјалној куглици на хоризонталну подлогу, то се тежина мобилне тачке поништава са отпором подлоге, па се све силе које утичу на мобилну тачку држе у равнотежи. Она би се према томе морала, ако јој дамо једну почетну брзину, по принципу инерције кретати без престанка истом брзином. Искуство нас учи да то није случај, него да ће кретање мобилне тачке бити успорено као кад би каква сила дејствовала на њу у смислу противном правцу кретања. Таква сила постоји у истини па се зове <u>сила трења</u>.

Она потиче отуда што ни материјална куглица ни подлога нису апсолутно чврсте и апсолутно глатке, па се због тога делови материјалне куглице зарију између делова подлоге и тиме пречe кретање. <u>Coulomb</u> је експерименталним путем испитао законе силе трења и дошао до ових закључака који не важе потпуно егзактно: сила трења дејствује у додирној површини противно правцу кретања, па је пропорционална нормалном притиску на додирну површину. Та сила зависи од материјалног састава мобилне тачке и подлоге, а не зависи од брзине ни од величине додирне површине.

Налази ли се мобилна тачка на хоризонталној подлози па креће ли се у правцу s, то ће у противном правцу кретања дејствовати на њу сила трења R која је

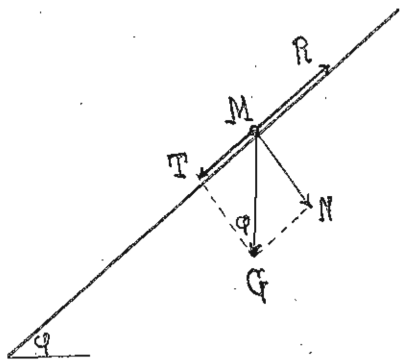


пропорционална нормалном притиску N мобилне тачке на подлогу т.ј.

$$R = kN$$

Коефицијенат k зависи од материјалног састава тела која се додирују и зове се коефицијенат трења.

Замислимо да смо мобилну тачку M тежине G положили на косу раван нагиба φ. Онда ће сила трења R бити пропорционална нормалном притиску N



$$R = kN =$$
$$= kG\cos\varphi$$

Мобилну тачку покреће трења превазишен компонента T која је једнака

$$T = G\sin\varphi$$

а њеном се кретању одупире сила R. У моменту кад те две силе T и R буду једнаке, онда ће кретање мобилне тачке ако јој дамо једну извесну брзину бити једнако (униформно). Мењањем угла φ можемо то постићи, па ће тај угао φ бити одређен једначином

$$R = T$$

или

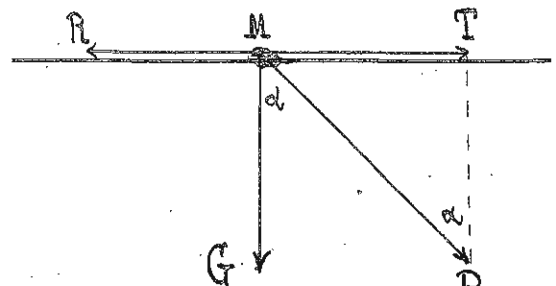
$$kG\cos\varphi = G\sin\varphi$$

или

$$k = tg\,\varphi$$

Кад дакле тангенс угла нагиба буде раван коефицијенту трења, онда ће се мобилна тачка кретати једнаком брзином. Тај угао φ називамо углом трења.

На мобилну тачку M која се налази на хоризонталној подлози нека дејствује њена тежина G и једна сила P која затвара са G угао α. Ако је $P = 0$ или веома малено према G јасно је да се мобилна тачка неће кретати, па питајмо колика мора да буде величина силе P па да се мобилна тачка стави у кретање. Кретање



мобилне тачке изазива компонента T силе P, а она је једнака

$$T = P \sin\alpha$$

Томе се кретању опире сила трења R која је једнака

$$R = kN$$

где је N нормални притисак мобилне тачке на подлогу, а тај је једнак збиру силе G и вертикалне компоненте силе P т.ј.

$$N = G + P\cos\alpha$$

Мобилна ће се тачка почети кретати кад буде било

$$T = R$$

т.ј.

$$P\sin\alpha = kG + Pk\cos\alpha$$

Како је

$$k = \operatorname{tg}\varphi$$

то горња једначина добија облик

$$P\sin\alpha = G\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + P\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha$$

или

$$P[\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha] = G\sin\varphi$$

или

$$P\sin(\alpha-\varphi) = G\sin\varphi$$

одакле

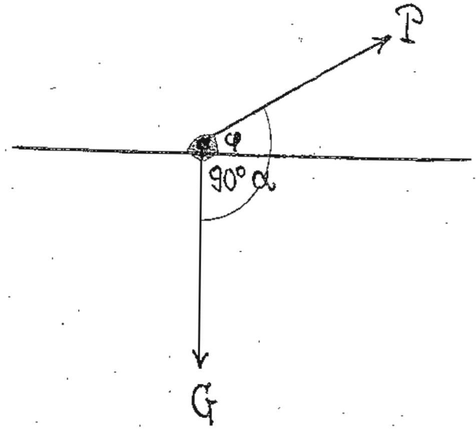
$$P = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}G$$

Величина силе P која је у стању да покрене мобилну тачку зависи, као што се из пређашње једначине види, од величине угла α, па питање колики треба да буде угао α да би сила P била што мања т.ј. да достигне свој минимум. Диференцирамо ли пређашњу једначину по α то добијамо

$$\frac{dP}{d\alpha} = -\frac{\sin\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{\sin^2(\alpha-\varphi)}G$$

P ће бити минимум ако овај израз буде раван нули т.ј. ако буде

$$\cos(\alpha-\varphi) = 0$$



одакле

$$\alpha-\varphi = 90^\circ$$

или

$$\alpha = 90^\circ+\varphi$$

Ми ћемо према томе са најмањом силом P покренути мобилну тачку, ако сила P буде затварала са хоризонталном подлогом угао φ.

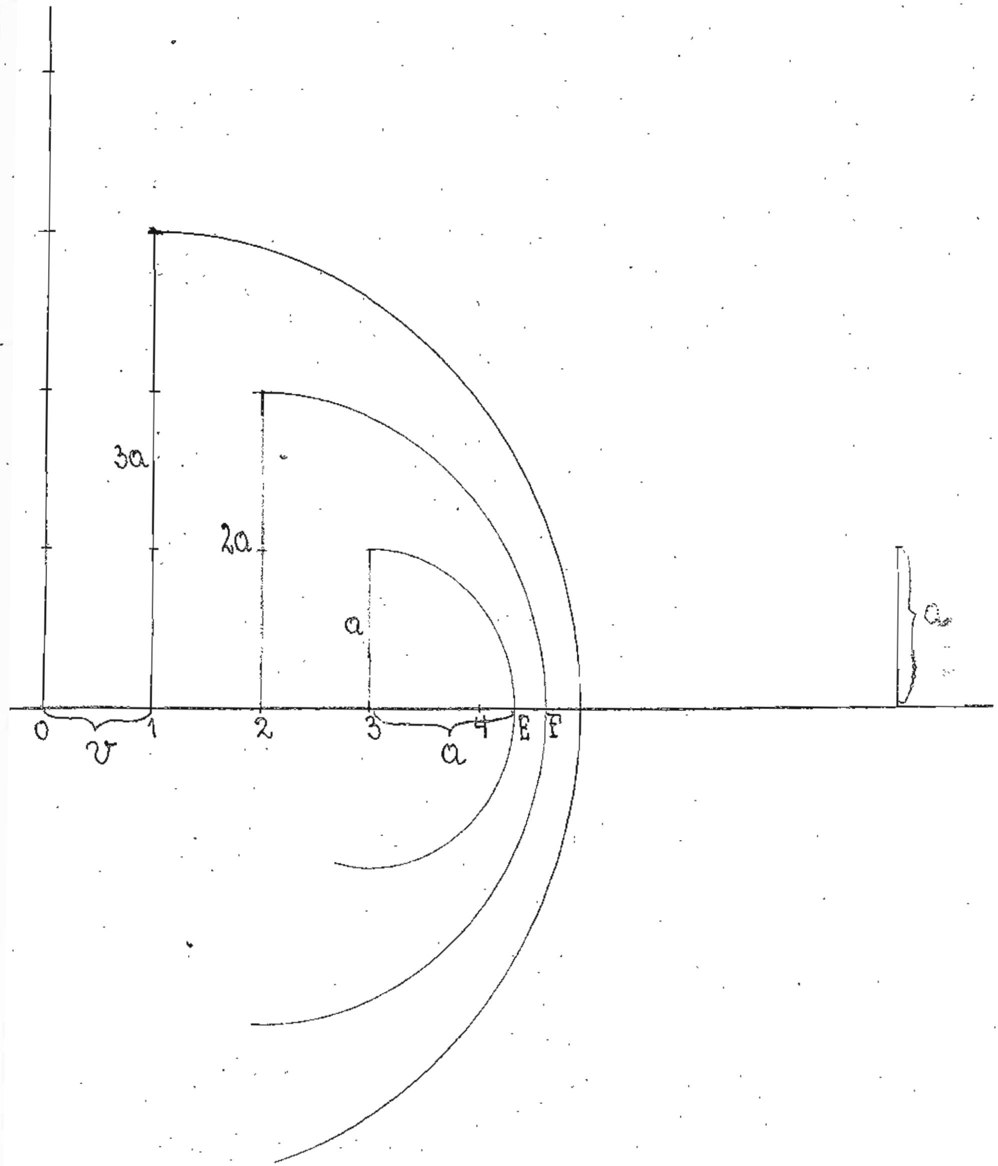
О отпору ваздуха.

Једна од важних сила отпора (реактивних сила) је отпор на који наилази мобилно тело кад се креће кроз ваздух. Тај отпор је врло компликоване природе. Он зависи у првом реду од транслаторне брзине којом се мобилно тело креће, од облика мобилног тела, од глаткости његове површине и од кретања мобилног тела око властитог тежишта. Ми ћемо, имајући за сада у виду само кретање мобилне тачке, узети у обзир да отпор ваздуха зависи од брзине којом се мобилна тачка креће, па ћемо претпоставити да је тај отпор пропорционалан квадрату брзине. У ствари је тај отпор при малим брзинама до по прилици 200 m у секунди пропорционалан брзини; од 200 m па до 333 m пропорционалан је по прилици квадрату брзине; код те брзине од 333 m тај се отпор дисконтинуирно мења. Узрок је тој појави овај: звучни ваздушни таласи шире се брзином од 333 m у секунди, па ако тело које се креће није достигло ту брзину, то ти таласи могу да узмичу испред мобилног тела; ако је брзина мобилног тела већа, онда настаје услед тих таласа згушњавање ваздуха у околини мобилног тела. То ћемо најлакше овако увидети: Мобилна тачка нека се при крају прве, друге, треће, ... секунде налази у положајима 1, 2, 3, ... тако да нам дужине

$$01 = 12 = 23 = \dots$$

представљају брзину мобилне тачке. Брзина звука нека буде представљена дужином a, па нека буде

$$v < a$$



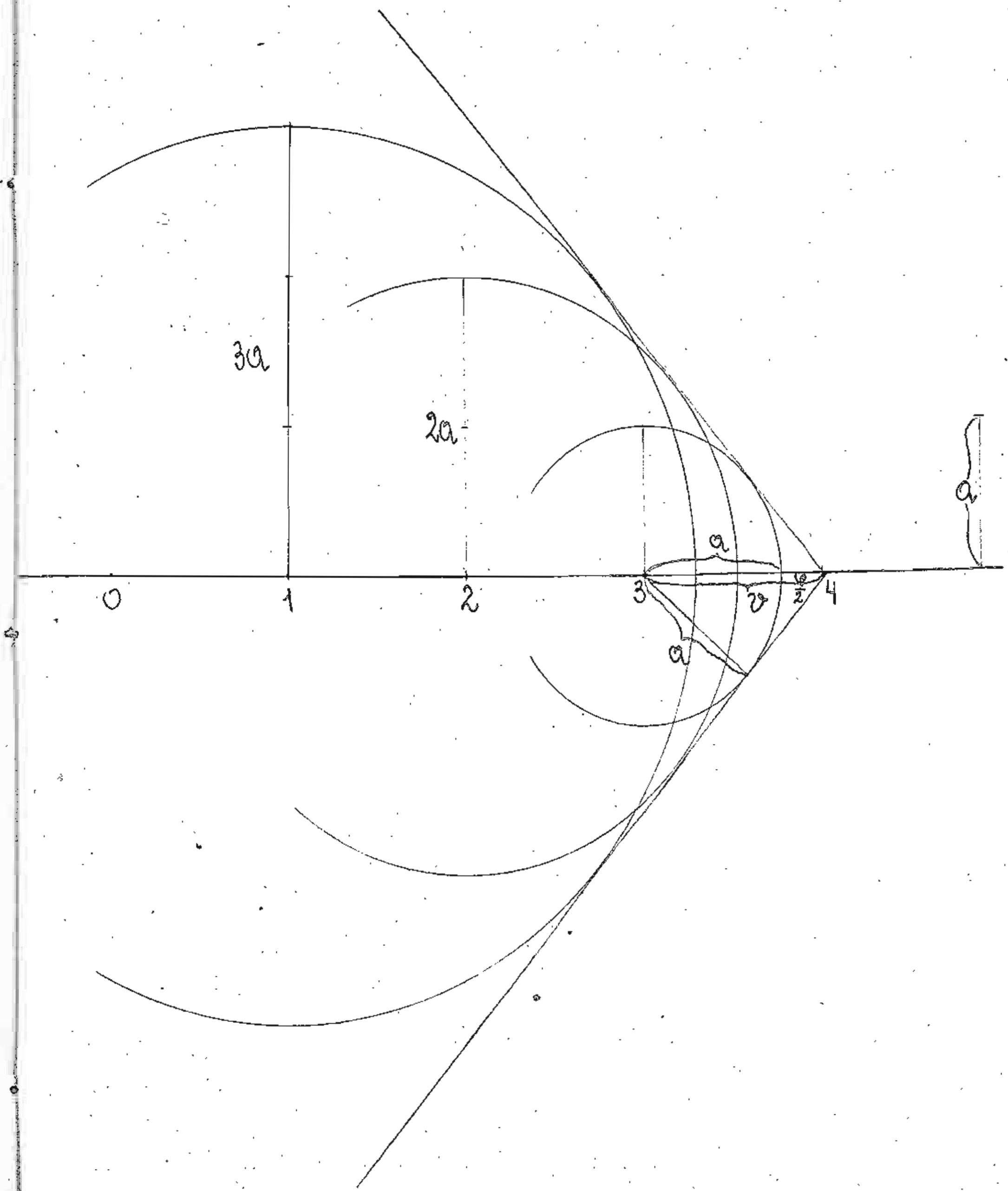
Нацртајмо сада положај таласа при крају четврте секунде који су изазвани мобилном тачком у положајима 0, 1, 2 и 3. Талас изазван мобилном тачком кад се она налазила у положају 3 (на крају треће секунде) раширио се је при крају четврте секунде до тачке E, па је зато $3E = a$. Талас изазван при крају друге секунде у положају 2 раширио се при крају четврте секунде до тачке F па је $2F = 2a$ но како је $23 = v < a$, то тачка F мора лежати десно од тачке E. Ваздушни се таласи дакле не секу, не пертурбирају се и могу се слободно кретати.

Ако је

$$v > a$$

онда ћемо добити следећу слику, па на њој видимо да се у конусу којем је угао на врху једнак φ секу ваздушни таласи, па се дакле међусобно пертурбирају. Као што из слике следује постоји однос

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{v}$$



а одатле: што је брзина v већа тим је тај конус оштрији т.ј. тим се у мањем делу простора згушњавају звучни таласи.

Вертикалан хитац у ваздух

Испитајмо законе кретања мобилне тачке бачене вертикално у вис ако узмемо у обзир отпор ваздуха и претпоставимо да је тај отпор пропорционалан квадрату брзине. Онда на мобилну тачку дејствују ове силе: властита тежина

$$G = mg$$

и отпор ваздуха

$$W = kv^2$$

Мобилна тачка нека буде бачена у моменту $t=0$ брзином $v=v_0$. Пут s рачуна се позитивно према горе. Сила G наперена је доле; исто тако и сила W. Зато је једначина кретања мобилне тачке

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -G - W$$

Коефицијенту k који одређује отпор ваздуха можемо дати други један облик. Отпор ваздуха је тим већи што је већа брзина мобилне тачке, па ће код једне величине те брзине

$$v = c$$

тај отпор бити једнак тежини мобилне тачке, па ће се мобилна тачка достигнувши ту брзину кретати униформно. Ту брзину c добијамо из једначине

$$G = kc^2$$

одакле је

$$k = \frac{G}{c^2}$$

па је једначина кретања

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -G\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

или ако G заменимо

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{c^2+v^2}{c^2}\,g$$

Употребимо једначину

$$v\,dv = p\,ds$$

па је у нашем случају

$$v\,dv = -\frac{c^2+v^2}{c^2}g\,ds$$

или

$$\frac{v\,dv}{c^2+v^2} = -\frac{g}{c^2}ds$$

Одатле интеграцијом

$$\frac{1}{2}\log_{nat}(c^2+v^2) = -\frac{g}{c^2}s + C_1$$

Константу C_1 одређујемо условом

за $s=0$

$v=v_0$

па дакле

$$\frac{1}{2}\log_{nat}(c^2+v_0^2) = C_1$$

и према томе горњи интеграл добија облик

$$2\frac{g}{c^2}s = \log_{nat}\frac{c^2+v_0^2}{c^2+v^2}$$

или одатле

$$s = \frac{c^2}{2g}\log_{nat}\frac{c^2+v_0^2}{c^2+v^2}$$

тако смо одредили путању s као функцију брзине.

Ова једначина дозвољава нам да одредимо висину пењања L. Ту величину добијамо ако у предњу једначини ставимо

за $v=0$

$s=L$

Отуда

$$L = \frac{c^2}{2g}\log_{nat}\frac{c^2+v_0^2}{c^2}$$

Употребимо сада једначину

$$p = \frac{dv}{dt}$$

дакле у нашем случају

$$-\frac{c^2+v^2}{c^2}g = \frac{dv}{dt}$$

или

$$dt = -\frac{1}{g}\frac{c^2}{c^2+v^2}dv = -\frac{c}{g}\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Ова се једначина може директно интеграсити па је

$$t = -\frac{c}{g}\operatorname{arctg}\frac{v}{c} + C_2$$

или

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{c} = -\frac{g}{c}(t - C_2) = \frac{g}{c}(C_2 - t)$$

или

$$\frac{v}{c} = \operatorname{tg}\left[\frac{g}{c}C_2 - \frac{g}{c}t\right] = \frac{\operatorname{tg}\frac{g}{c}C_2 - \operatorname{tg}\frac{g}{c}t}{1 + \operatorname{tg}\frac{g}{c}C_2 \operatorname{tg}\frac{g}{c}t}$$

Сада можемо одредити константу C_2 условом

$$\text{за } t = 0$$
$$v = v_0$$

дакле

$$\frac{v_0}{c} = \operatorname{tg}\frac{g}{c}C_2$$

па према томе

$$v = c\,\frac{\frac{v_0}{c} - \operatorname{tg}\frac{g}{c}t}{1 + \frac{v_0}{c}\operatorname{tg}\frac{g}{c}t}$$

Ова једначина дозвољава нам да одредимо трајање пењања T јер имамо само да ставимо

$$\text{за } t = T$$
$$v = 0$$

па добијамо

$$\frac{v_0}{c} - \operatorname{tg}\frac{g}{c}T = 0$$

или

$$\frac{g}{c}T = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}$$

или најзад

$$T = \frac{c}{g}\operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}$$

Сада да одредимо пут као функцију времена; за то ћемо применити једначину

$$\frac{ds}{dt} = v$$

или у нашем случају

$$\frac{ds}{dt} = c\,\frac{\frac{v_0}{c} - \operatorname{tg}\frac{g}{c}t}{1 + \frac{v_0}{c}\operatorname{tg}\frac{g}{c}t}$$

или

$$ds = c\,\frac{\frac{v_0}{c}\cos\frac{g}{c}t - \sin\frac{g}{c}t}{\frac{v_0}{c}\sin\frac{g}{c}t + \cos\frac{g}{c}t}\,dt$$

Овај се израз може директно интеграли јер помножи ли се бројител са $\frac{g}{c}$

што он представља диференцијал именитеља. Зато је

$$s=\frac{c^2}{g}\log_{nat}\left(\frac{v_0}{c}\sin\frac{g}{c}t+\cos\frac{g}{c}t\right)+C_3$$

Константу C_3 одређујемо из услова

за $t=0$

$s=0$

одакле

$$C_3=0$$

па је

$$s=\frac{c^2}{g}\log_{nat}\left(\frac{v_0}{c}\sin\frac{g}{c}t+\cos\frac{g}{c}t\right)$$

Када мобилна тачка достигнувши висину L почиње да пада, онда не важе за њу досадање једначине кретања, јер сила G дејствује у правцу пута (у којем се пут увећава), дакле позитивно, а сила W дејствује као реактивна сила у противном правцу кретања т.ј. негативно. Зато је једначина кретања у овом случају

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=G-W=G\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\,\frac{c^2-v^2}{c^2}$$

И ова ће се једначина слично интегралити као у пређашњем случају. Ми ћемо сада само испитати какву ће брзину v_n достићи мобилна тачка када се поврати у положај одакле је бачена. Применимо опет једначину

$$v\,dv=p\,ds$$

или у нашем случају

$$v\,dv=\frac{c^2-v^2}{c^2}g\,ds$$

или

$$\frac{v\,dv}{c^2-v^2}=\frac{g}{c^2}ds$$

Интеграција ове једначине даје

$$-\frac{1}{2}\log_{nat}(c^2-v^2)=\frac{g}{c^2}s+C_1$$

Како је

за $s=0$

$v=0$

то је

$$-\frac{1}{2}\log_{nat}c^2=C_1$$

па зато

$$s = \frac{c^2}{2g} \log_{nat} \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

Брзину v_n добијамо ако у тој једначини ставимо

$$v = v_n$$
$$s = L$$

па даље

$$L = \frac{c^2}{2g} \log_{nat} \frac{c^2}{c^2 - v_n^2}$$

L је исто које је било у прошлом случају јер је то висина пењања, па зато имамо

$$\frac{c^2}{2g} \log_{nat} \frac{c^2 + v_0^2}{c^2} = \frac{c^2}{2g} \log_{nat} \frac{c^2}{c^2 - v_n^2}$$

или одатле

$$\frac{c^2 + v_0^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v_n^2}$$

Из ове једначине следује

$$(c^2 + v_0^2)(c^2 - v_n^2) = c^4$$

или одатле

$$v_n^2 = c^2 - \frac{c^4}{c^2 + v_0^2} = \frac{c^2 v_0^2}{c^2 + v_0^2}$$

или

$$\left(\frac{v_n}{v_0}\right)^2 = \frac{c^2}{c^2 + v_0^2}$$

На десној страни ове једначине сви су чланови позитивни, па је зато именитељ увек већи од бројитеља. Због тога је

$$\left(\frac{v_n}{v_0}\right)^2 < 1$$

или

$$\frac{v_n}{v_0} < 1$$

или

$$v_n < v_0$$

Отпором у ваздуху враћа се тобична тачка са мањом брзином натраг него што је бачена вертикално у вис.

Пад на стрмој равнини ако се узме у обзир отпор ваздуха и трење.

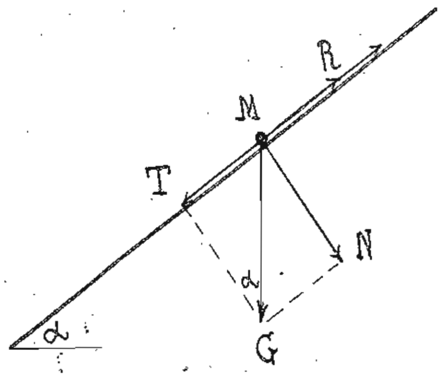
На мобилну тачку дејствују у овом случају ове силе: компонента T њене тежине G

$$T = G \sin\alpha$$

која дејствује у смислу кретања, дакле је позитивна; отпор трења

$$R = -k N$$

који дејствује у смислу противном кретању, дакле негативно. Како је



$$N = G \cos\alpha$$

то је

$$R = -k G \cos\alpha$$

Сем тога дејствује на мобилну тачку отпор ваздуха W који је једнак према пређашњем

$$W = -\frac{G}{c^2} v^2$$

И тај је отпор негативан. Једначина кретања мобилне тачке биће према томе

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m p =$$

$$= T + R + W =$$

$$= G\left(\sin\alpha - k\cos\alpha - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Како је

$$G = m g$$

то је

$$p = g\left(\sin\alpha - k\cos\alpha - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Означимо ли са φ угао трења, то је

$$k = \operatorname{tg}\varphi$$

па је због тога

$$p = g\left(\sin\alpha - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= g\left(\frac{\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi} - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

или

$$p = g\,\frac{c^2\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} - v^2}{c^2}$$

Означимо ли

$$c^2\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} = a^2$$

при чему је a једна константа, то добијамо

$$p = g\,\frac{a^2 - v^2}{c^2}$$

Према вредности константе a разликујемо три разна случаја:

1° ако је a^2 позитивно т.ј.

$$a^2 > 1$$

онда добијамо једначину истог облика као при паду у отпорном ваздуху. Интеграцију те једначине смо већ извели.

2° ако је a^2 негативно т.ј.

$$a^2 < 1$$

онда можемо ставити

$$a^2 = -a_0^2$$

при чему је a_0^2 један позитиван број, па акцелерација има облик

$$p = -g\,\frac{a_0^2 + v^2}{c^2}$$

Ова једначина је иста као што смо у имали при вертикалном хитцу у ваздуху.

3° ако је

$$a = 0$$

Овим ћемо се случајем сада бавити. Онда је

$$p = -\frac{g}{c^2}v^2$$

Из једначине

$$v\,dv = p\,ds$$

следује

$$v\,dv = -\frac{g}{c^2}v^2\,ds$$

или

$$ds = -\frac{c^2}{g}\,\frac{dv}{v}$$

одакле интеграцијом

$$s = -\frac{c^2}{g}\log_{nat} v + C$$

Почетна брзина мобилне тачке нека буде v_0 т.ј.

за $s=0$

$v=v_0$

па се зато константа C одређује из једначине

$$0=-\frac{c^2}{g}\log_{nat} v_0 + C$$

па је

$$s=\frac{c^2}{g}\log_{nat}\frac{v_0}{v} \qquad 1)$$

На овај начин је s одређено као функција брзине. Ова једначина казује да ће мобилна тачка достићи брзину $v=0$ за $s=\infty$.

Применимо сада једначину

$$\frac{dv}{dt}=p$$

па је

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{g}{c^2}v^2$$

или

$$dt=-\frac{c^2}{g}\frac{dv}{v^2}$$

Интеграција ове једначине даје

$$t=\frac{c^2}{g}\cdot\frac{1}{v}+C_2$$

Како је било

за $t=0$

$v=v_0$

то се константа C_2 одређује из једначине

$$0=\frac{c^2}{g}\frac{1}{v_0}+C_2$$

па отуда

$$t=\frac{c^2}{g}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right) \qquad 2)$$

Треба да одредимо још s као функцију од t. То можемо учинити без интеграције ако између једначина 1) и 2) елиминишемо v. Из једначине 2) следује

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{g}{c^2}t$$

или

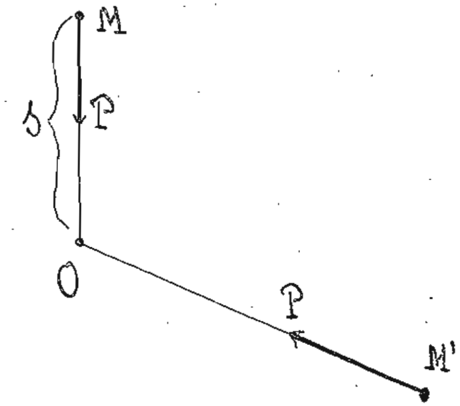
$$\frac{v_0}{v}=1+\frac{g}{c^2}v_0 t$$

Ставимо ли ову вредност у једначини 1) то добијамо

$$s = \frac{c^2}{g}\log_{nat}\left(1+\frac{g}{c^2}v_0 t\right) \qquad 3)$$

Таутохроно кретање.

Праволинијско кретање називамо *таутохроним* ако мобилној тачки која је пуштена самој себи треба увек исто време да стигне до тачке О коју називамо *центром таутохронизма*. Па макар се из које тачке кретала. Почне ли мобилна тачка своје кретање из положаја М са почетном брзином нула, то ће она, ако је привлачена од центра О силом Р требати једно извесно време Т да стигне у тачку О.



Ми захтевамо да и из сваког другог положаја M' мобилна тачка утроши то исто време T да стигне у положај O и претпостављамо да сила P зависи само од одстојања s мобилне тачке од центра O. Питајмо каква мора да буде функција P од s па да услов таутохронизма буде задовољен. Теорема живе силе

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} P\,ds$$

примењена на овај случај добија, ако је s_0 одстојање иницијалног положаја мобилне тачке, облик

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{s_0}^{s} P\,ds$$

јер смо казали да мобилна тачка започиње своје кретање са иницијалном брзином нула. Означимо израз

$$\int_{0}^{s} P\,ds = -\varphi(s)$$

то можемо учинити јер смо казали да је сила P само функција од s, па је и због тога вредност горњег интеграла такође једна функција од s. Из горњег следује да је

$$\int_{0}^{s_0} P\,ds = -\varphi(s_0)$$

а

$$\int_{s_0}^{s} P\,ds = \int_{0}^{s} P\,ds - \int_{0}^{s_0} P\,ds = -\varphi(s) + \varphi(s_0)$$

Зато је

$$\frac{mv^2}{2} = \varphi(s_0) - \varphi(s)$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\varphi(s_0) - \varphi(s)} = \frac{ds}{dt}$$

или

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{\varphi(s_0) - \varphi(s)}}$$

Време што га мобилна тачка треба да дође из положаја s_0 у тачку O за коју је $s=0$ је према томе

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{s=s_0}^{s=0} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s_0) - \varphi(s)}}$$

или ако променимо границе

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{\varphi(s_0)-\varphi(s)}}$$

Ставимо сада

$$\varphi(s)=z$$

$$\varphi(s_0)=z_0$$

Решимо ли прву од ових једначина, то ће бити s једна функција од z речимо

$$s=\psi(z)$$

па је

$$ds=\psi'(z)\,dz$$

Зато је

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{z_0}\frac{\psi'(z)\,dz}{\sqrt{z_0-z}}$$

Уведимо сада једну нову варијаблу u па ставимо

$$z=z_0u$$

онда је

$$dz=z_0\,du$$

па горњи интеграл добија облик

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{1}\frac{\psi'(z_0u)\,z_0\,du}{\sqrt{z_0-z_0u}}$$

Границе овог интеграла су 0 и 1 јер је за $z=0$ $u=0$, а за $z=z_0$ $u=1$. Пређашњем изразу можемо дати овај облик

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{1}\frac{\psi'(z_0u)\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}\,du$$

Време T мора бити независно од почетног положаја, па зато горњи интеграл мора бити независан од вредности z_0 јер та константа z_0 зависи од почетног положаја s_0. Зато мора горњи израз диференциран по z_0 бити раван нули т.ј.

$$\frac{dT}{dz_0}=-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{1}\frac{\psi''(z_0u)\,u\sqrt{z_0}+\frac{1}{2}\psi'(z_0u)\frac{1}{\sqrt{z_0}}}{\sqrt{1-u}}\,du=0$$

Ставимо ли за u пређашњу вредност то добијамо једначину

$$\int_0^{1}\frac{\psi''(z)\frac{z}{z_0}\sqrt{z_0}+\frac{1}{2}\psi'(z)\frac{1}{\sqrt{z_0}}}{\sqrt{1-\frac{z}{z_0}}}\,\frac{dz}{z_0}=0$$

или

$$\int_0^{1}\frac{\psi''(z)\cdot z+\frac{1}{2}\psi'(z)}{z_0\sqrt{z_0}\sqrt{1-\frac{z}{z_0}}}\,dz=0$$

Да овај израз буде раван нули мора његов именитељ бити раван нули т.ј.

$$z\,\psi''(z) + \frac{1}{2}\,\psi'(z) = 0$$

или

$$\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} = 0$$

или

$$\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}\,dz + \frac{1}{2}\,\frac{dz}{z} = 0$$

Ова се једначина може одмах интегралити па даје

$$\log_{nat}\psi'(z) + \frac{1}{2}\log_{nat} z = C$$

или

$$\log_{nat}\sqrt{z}\,\psi'(z) = C$$

или

$$\sqrt{z}\,\psi'(z) = C$$

или

$$\psi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}$$

или

$$\psi'(z)\,dz = \frac{C\,dz}{\sqrt{z}}$$

И ова се једначина може одмах интегралити па добијамо

$$\psi(z) = 2C\sqrt{z} + C_2$$

или

$$\psi(z) = C_1\sqrt{z} + C_2$$

Ако је $s=0$ онда и вредност рада $\int_0^s P\,ds$ ишчезава па је

$$\text{за } s=0$$
$$\varphi(s)=0$$

и обратно. Ставимо у горњу једначину $z=0$, онда је према једначини $\varphi(s)=z$ и $s=0$, а према једначини $s=\psi(z)$ и $\psi(z)=0$ па је зато константа

$$C_2=0$$

па имамо

$$\psi(z) = C_1\sqrt{z}$$

или према пређашњем

$$s = C_1\sqrt{z}$$

или

$$z = \frac{s^2}{C_1^2}$$

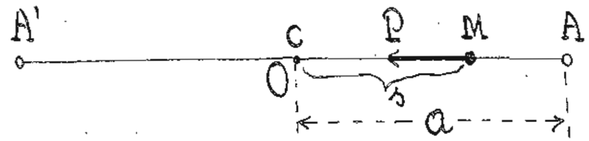
или

$$\varphi(s) = \frac{s^2}{C_1^2}$$

Но како је било
$$\int_0^s P\,ds = -\varphi(s)$$
то је
$$\int_0^s P\,ds = -\frac{s^2}{C_1^2}$$
Диференцирамо ли ову једначину по s то добијамо
$$P = -\frac{2}{C_1^2}\,s$$
Означимо ли позитивни коефицијенат $\frac{2}{C_1^2}$ са k^2
$$\frac{2}{C_1^2} = k^2$$
то је
$$P = -k^2 s$$
Отуда: Кретање мобилне тачке биће таутохроно ако сила буде пропорционална одстојању s мобилне тачке од центра O. Како сила и одстојање имају противне знакове, а s меримо од центра, то ће сила P бити наперена према центру. Сада ћемо да се упознамо са особинама тога праволинијског кретања

Хармоничне осцилације

Мобилна тачка M нека буде привлачена према центру O силом P која је пропорционална одстојању s мобилне тачке M од центра O т.ј.



$$P = -k_1^2 s$$
Означимо ли са m масу мобилне тачке то можемо коефицијенат k_1^2 заменити са коефицијентом mk^2
$$k_1^2 = mk^2$$
јер је m увек позитивно, па је зато
$$P = -mk^2 s$$
а акцелерација је
$$p = -k^2 s$$
Дадемо ли мобилној тачки у положају M

једну брзину од центра О, то ће кретање мобилне тачке бити успорено јер је сила наперена противно смислу кретања. Услед тога ће брзина мобилне тачке у једном положају А спасти на нулу, па ће мобилна тачка обрнути правац свога кретања т.ј. кретати се према центру О и то убрзано, да у тачки О достигне своју највећу брзину c. Прошавши кроз положај О кретање ће мобилне тачке бити опет успорено, па ће она у положају А' који лежи симетрично према положају А окренути правац свога кретања према центру О. Тако ће мобилна тачка без престанка осцилирати на дужини АА'. Брзину c коју она достизава у тачки О зовемо интензитетом осцилације; максимална одстојања ОА и ОА' мобилне тачке од тачке О, дакле дужину a зовемо амплитудом осцилације; одстојање s једног произвољног момента зовемо елонгацијом.

Из једначине

$$v\,dv = p\,ds$$

следује

$$v\,dv = -k^2 s\,ds$$

одакле интеграцијом

$$\frac{v^2}{2} = -k^2\frac{s^2}{2} + C$$

За тачку А имамо

$$s = a$$
$$v = 0$$

Применимо ли ове једначине на горњу једначину, то добијамо

$$0 = -\frac{k^2a^2}{2} + C$$

одакле

$$C = \frac{k^2a^2}{2}$$

па је зато

$$v^2 = k^2(a^2 - s^2)$$

или

$$v = k\sqrt{a^2 - s^2} \qquad 1)$$

У тачки О је

$$s = 0$$

$$v = c$$

Применимо ли ове вредности на једначину 1), то добијамо

$$c = ka \qquad 2)$$

- Интензитет осцилације пропорционалан је амплитуди. У колико више одмакнемо мобилну тачку од центра O, у толико ће брже она проћи кроз тај центар.

Из једначине

$$v = \frac{ds}{dt}$$

следује

$$k\sqrt{a^2 - s^2} = \frac{ds}{dt}$$

или

$$dt = \frac{1}{k}\cdot\frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \frac{1}{k}\,\frac{d\left(\frac{s}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{s}{a}\right)^2}}$$

одакле интеграцијом

$$t = \frac{1}{k}\arcsin\frac{s}{a} + C$$

Почињемо ли време t да бројимо од момента када мобилна тачка прође кроз тачку O, онда је

за $t = 0$

$s = 0$

па зато

$$C = 0$$

па имамо једначину

$$t = \frac{1}{k}\arcsin\frac{s}{a} \qquad 3)$$

Време T што та мобилна тачка треба да, пошавши из тачке A стигне у положај A' и опет се натраг повратити у положај A зовемо <u>периодом осцилације</u>. Из симетрије кретања према тачки O следује, да је време што та мобилна тачка треба да из положаја O дође у положај A једнако $\frac{T}{4}$. Зато ћемо периоду T израчунати ако у пређашњу једначину ставимо

$$s = a$$

$$t = T/4$$

Онда добијамо

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{k}\arcsin 1 = \frac{1}{k}\,\frac{\pi}{2}$$

или одавде

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Из једначине 3) следује

$$kt = \arcsin \frac{s}{a}$$

или

$$\frac{s}{a} = \sin kt$$

или

$$s = a \sin kt \qquad 5)$$

Ставимо ли једначину 5) у једначини 1) то добијамо

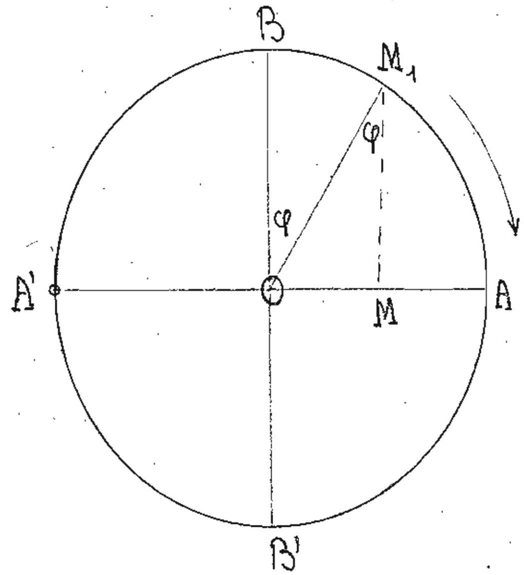
$$v = ka\sqrt{1 - \sin^2 kt}$$

или

$$v = ka \cos kt \qquad 6)$$

Једначина 5) која решава проблем кретања показује да је s тригонометријска функција од t, па се зато посматрано кретање зове хармонично. Јасну слику о особинама овог кретања можемо добити на овај начин: Око дужине AA' опишимо један круг којега је та дужина дијаметар, дакле круг са центром у O а са радиусом a.

4) Замислимо да једна фиктивна тачка започиње у моменту t=0 своје кретање у тачки B, па да се креће константном брзином c по периферији



круга. Онда ће се она у моменту t налазити у положају M_1, па је дужина лука

$$\widehat{BM_1} = ct$$

или

$$a\varphi = ct$$

одакле

$$\varphi = \frac{c}{a}t$$

или према једначини 2)

$$\varphi = kt$$

пројекција M те фиктивне тачке у дужину AA' има одстојање од тачке O

$$OM = a \sin\varphi = a \sin kt$$

а према једначини 5)

$$OM = s$$

Пројекција M фиктивне тачке креће се према томе као посматрана мобилна тачка која изводи хармониску осцилацију, па нам такво кретање фиктивне тачке даје јасну слику кретања мобилне тачке M. Мобилној тачки треба да обиђе једанпут око периферије круга $2\pi a$ време $\frac{2\pi a}{c}$ или

$$\frac{2\pi a}{c} = \frac{2\pi}{k} = T$$

Из предашње слике следује да је дужина

$$\begin{aligned} MM_1 &= a\cos\varphi = \\ &= a\cos kt = \\ &= \frac{1}{k} ka\cos kt = \\ &= \frac{1}{k} v \end{aligned}$$

а то значи да је ордината MM' пропорционална брзини. Према томе нам горња слика даје и распоред како се брзине мобилне тачке мењају за време кретања. Увећамо ли време t за величину T, онда добијамо

$$s = a \sin k(t+T)$$

$$v = ka \cos k(t+T)$$

или

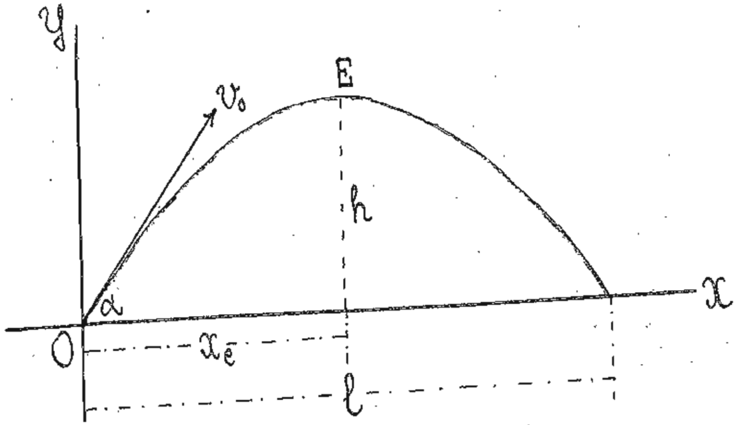
$$s = a \sin(kt + \underbrace{kT}_{2\pi}) = a \sin kt$$

$$v = ka \cos(kt + \underbrace{kT}_{2\pi}) = ka \cos kt$$

Зато можемо да кажемо: периода T то је оно време услед којега се понављају исти односи (или исте прилике) кретања.

Коси хитац у безваздушном простору

Бацимо ли мобилну тачку почетном брзином v_0 под углом α косо увис, то ће мобилна тачка кретати се у оној вертикалној равнини која садржава у себи иницијални вектор брзине.



Одаберемо ли ту равнину за равнину XY, тачку O одакле мобилна тачка започиње своје кретање за почетну тачку координатног система и положимо осу Y вертикално, то ће једначине кретања мобилне тачке бити

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$$

јер на мобилну тачку дејствује само тежа mg; она је наперена према доле, а нема компоненте X.

Из прве једначине следује

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

одакле интеграцијом

$$\frac{dx}{dt}=C_1$$

$\frac{dx}{dt}$ представља брзину мобилне тачке у правцу x, а та је у иницијалном моменту једнака

$$v_0\cos\alpha$$

дакле

$$\left.\frac{dx}{dt}\right\}_{t=0}=v_0\cos\alpha$$

Како према превашњој једначини остоје непромењено за време читавог кретања, то је

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \cos\alpha \qquad 1)$$

Поновном интеграцијом добијамо

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_2$$

но како је

за $t=0$

$x=0$

то је

$$C_2 = 0$$

па је

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad 2)$$

Из друге једначине кретања следује

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

одакле интеграцијом

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3$$

У иницијалном моменту $t=0$ је брзина

$$\left.\frac{dy}{dt}\right\}_{t=0} = v_0 \sin\alpha$$

па је зато

$$C_3 = v_0 \sin\alpha$$

или

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad 3)$$

Поновна интеграција ове једначине даје

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + C_4$$

но како је

за $t=0$

$y=0$

то је

$$C_4 = 0$$

па имамо

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad 4)$$

Брзина v у произвољном моменту дата је једначином

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 =$$

$$= v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2 t =$$

$$= v_0^2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} - 2gt \underbrace{\left[v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right]}_{y}$$

дакле

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \qquad 5)$$

Елиминишемо ли из једначина 2) и 4) време t, то из једначине 2) добијамо

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

па је

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Ово је једначина параболе са вертикалном осом која је конкавна према доле.

Највиша тачка те параболе нека буде тачка E са координатама x_e и h. Време T што га мобилна тачка треба да дође у положај E зовемо *време пењања*. То време можемо одредити из једначине 3) ако у њу ставимо

$$t = T$$
$$v_y = 0$$

јер у тачки E не пење се тачка више у вис, него има хоризонталан положај. Зато је

$$0 = v_0 \sin\alpha - gT$$

или

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad 6)$$

Координате тачке E добијамо ако у једначинама 2) и 4) ставимо за t вредност T. На тај начин добијамо

$$x_e = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$$

Дужину l која је једнака $2x_e$ зовемо *даљином хитца*. Она је према томе једнака

$$l = 2x_e = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Питајмо под којим углом ваља бацити мобилну тачку па да l буде максимум. У то име диференцирајмо l по α и ставимо једнако нули

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0$$

или

$$\cos 2\alpha = 0$$

одакле

$$2\alpha = 90^\circ$$

или

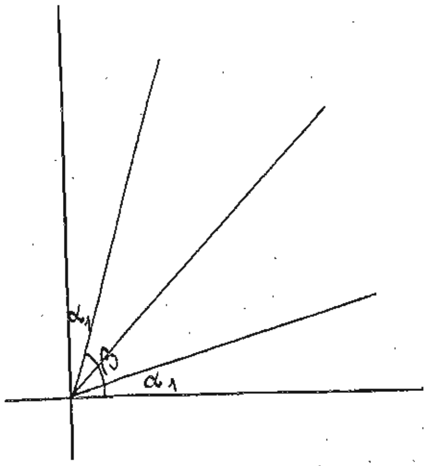
$$\alpha = 45^\circ$$

Ако питамо под којим углом α треба бацити мобилну тачку, па да достигне једну задану даљину l_1, то α израчунавамо из једначине

$$l_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ова једначина има два корена, јер ако је један корен $2\alpha_1$, онда је такође корен и $2\beta = \pi - 2\alpha_1$ или

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$



Из слике следује да иницијални вектори брзине затварају исте углове са правом која је наклоњена под 45° према хоризонту.

Балистичне криве

Ефективна путања мобилне тачке бачене косо зове се балистична крива. То је дакле она крива коју описује мобилна тачка под утицајем теже и отпора ваздуха. Ми ћемо се бавити сад са теоријом тих крива и испитати два случаја: први случај када је отпор ваздуха пропорционалан брзини мобилне тачке и други случај када је тај отпор пропорционалан квадрату брзине. У ствари је, као што смо већ споменули, тај отпор компликованије природе.

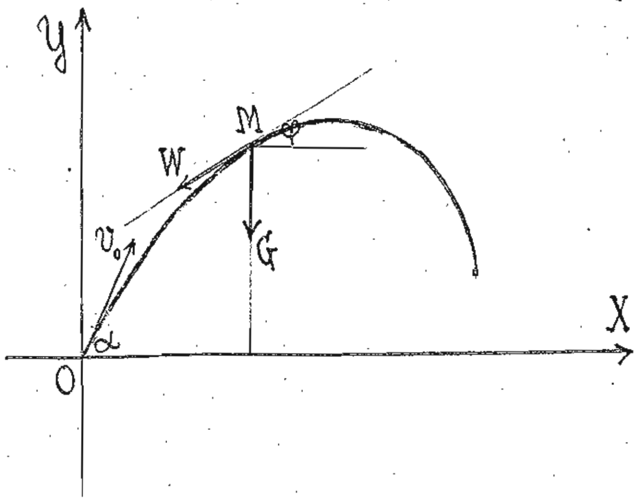
1° Случај.

Отпор ваздуха је пропорционалан брзини мобилне тачке т.ј.

$$W = kv$$

На мобилну тачку утиче дакле теже G у негативном правцу осе Y и отпор ваздуха W у правцу тангенте на путању противно смислу кретања. Земљина тежа је

$$G = mg$$



Место коефицијента k уводимо опет ону брзину c коју које би мобилна тачка падала једнаком брзином т.ј. брзину која је дата релацијом

$$mg = kc$$

па је дакле

$$W = mg\frac{v}{c}$$

Једначине кретања мобилне тачке су ове

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -W\cos\varphi = -mg\cos\varphi\frac{v}{c}$$

$$m\frac{d^2y}{dt} = -G - W\sin\varphi = -mg - mg\sin\varphi\frac{v}{c}$$

Како је

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$$

то једначине кретања добијају овај облик: прва од њих добија облик

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{c}v\frac{dx}{ds} = -\frac{g}{c}v\frac{dx}{dt}\cdot\underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{v}} =$$

$$= -\frac{g}{c}\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{g}{c}\,dt$$

одакле интеграцијом

$$\log_{nat}\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{c}t + C_1$$

или

$$\frac{dx}{dt} = C e^{-\frac{g}{c}t}$$

за

$$t=0$$

је

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$$

па је зато

$$v_0\cos\alpha = C$$

па отуда

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{g}{c}t}$$

Одавде интеграцијом имамо

$$x = -\frac{c}{g}v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{g}{c}t} + C_2$$

Но како је

$$\text{за } t=0 \quad x=0$$

то је

$$0 = -\frac{c}{g}v_0\cos\alpha + C_2$$

па отуда

$$x = \frac{c}{g}v_0\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right) \qquad 1)$$

Друга једначина кретања даје

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - g\frac{v}{c}\frac{dy}{ds} = -g - g\frac{v}{c}\frac{dy}{dt}\underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{v}} = -g - \frac{g}{c}\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{-g - \frac{g}{c}\frac{dy}{dt}} = dt$$

Одавде интеграцијом

$$-\frac{c}{g}\log_{nat}\left(-g - \frac{g}{c}\frac{dy}{dt}\right) = t + C_3$$

или

$$g - \frac{g}{c}\frac{dy}{dt} = C e^{-\frac{g}{c}t}$$

За

$$t=0$$

је

$$\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha$$

па дакле

$$-g-\frac{g}{c}v_0\sin\alpha=C$$

и према томе

$$\frac{g}{c}\frac{dy}{dt}=-g+(g+v_0\sin\alpha)e^{-\frac{g}{c}t}$$

или

$$\frac{dy}{dt}=-c+(c+v_0\sin\alpha)e^{-\frac{g}{c}t}$$

Одавде имамо интеграцијом

$$y=-ct-\frac{c}{g}(c+v_0\sin\alpha)e^{-\frac{g}{c}t}+C_1$$

За $t=0$ је $y=0$ па је

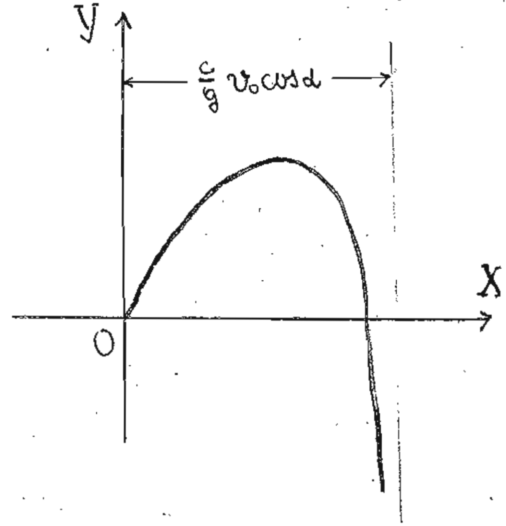
$$0=-\frac{c}{g}(c+v_0\sin\alpha)+C_1$$

и према томе

$$y=-ct+\frac{c}{g}(c+v_0\sin\alpha)(1-e^{-\frac{g}{c}t})$$

Тако смо одредили x и y као функције времена t и тиме решили проблем кретања. За свако произвољно време t одређен је према томе положај мобилне тачке. Једначине 1) и 2) дају нам и једначину путање ако се t сматра као параметар. У осталом између тих једначина може се и елиминисати t.

Из горњих једначина следује још једна интересантна особина балистичке криве. Док се је Галилејева парабола простирала у бесконачност т.ј. за $t=\infty$ било и $x=\infty$, дотле је у овом случају за $t=\infty$



$$x=\frac{c}{g}v_0\cos\alpha$$

а то значи да балистичка крива има
2) једну вертикалну асимптоту и да мобилна тачка не може прећи хоризонталну дистанцију $\frac{c}{g}v_0\cos\alpha$.

2° Случај

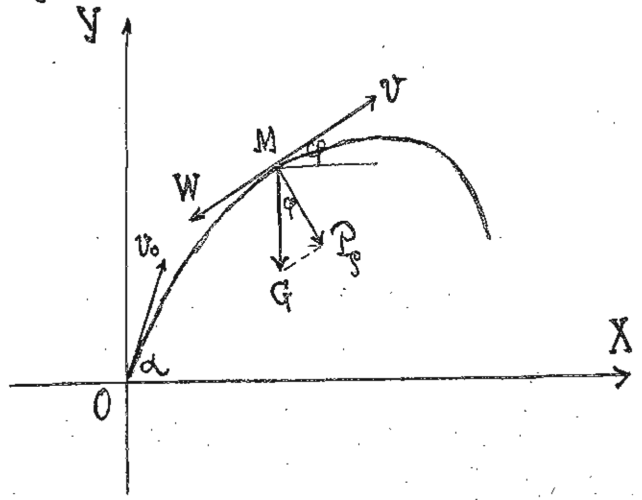
Отпор ваздуха је пропорционалан квадрату брзине мобилне тачке т.ј.

$$W = kv^2$$

Уведимо опет место коефицијента k коефицијенат c, па имамо

$$W = mg\frac{v^2}{c}$$

У овом случају неће бити могуће провести интеграцију једначина кретања тако да добијемо x и y као функције од t, али ћемо



ипак моћи добити довољно података да испитамо природу кретања и особине путање на овај начин: прва једначина кретања била би

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -W\cos\varphi = -mg\frac{v^2}{c}\cos\varphi$$

или

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = -\frac{g}{c}v^2\cos\varphi$$

Но како је

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varphi$$

па добијамо

$$\frac{d(v\cos\varphi)}{v\cos\varphi} = -\frac{g}{c}\underbrace{v\,dt}_{ds} = -\frac{g}{c}ds$$

одакле интеграцијом

$$\mathrm{lognat}\,(v\cos\varphi) = -\frac{g}{c}s + C$$

или

$$v\cos\varphi = Ce^{-\frac{g}{c}s}$$

Како је за

$$s = 0$$
$$v\cos\varphi = v_0\cos\alpha$$

што је зато

$$v_0 \cos\alpha = c$$

па отуда

$$v\cos\varphi = v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{g}{c}s} \qquad 1)$$

Другу једначину кретања не бисмо могли корисно применити, али можемо добити једну једначину кретања када узмемо у обзир да је отпор W увек тангенцијалан, па према томе не утиче на центрипеталну компоненту P_ϱ. Зато ће центрипетална компонента P_ϱ зависити само од теже G и угла нагиба путање т.ј.

$$P_\varrho = G\cos\varphi = mg\cos\varphi$$

Но како је

$$P_\varrho = m\frac{v^2}{\varrho}$$

где ϱ означава радиус кривине, то добијамо једначину

$$\frac{v^2}{\varrho} = g\cos\varphi$$

или

$$v^2 = g\cos\varphi\cdot\varrho = g\cos\varphi\,\frac{ds}{d\varphi}$$

па обзиром на једначину 1) имамо

$$v^2 = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}\, e^{-\frac{2g}{c}s}$$

или ако ову вредност ставимо у претпоследњу једначину, то добијамо

$$v_0^2\cos^2\alpha\,\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = g\, e^{\frac{2g}{c}s}\, ds$$

или

$$\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\, e^{\frac{2g}{c}s}\, ds \qquad 2)$$

У овој једначини су варијабиле φ и s; оне су одељене, па је зато интеграција ове једначине могућа. Том интеграцијом нећемо до душе добити једначину криве т.ј. x као функцију од y, него ћемо добити φ као функцију од s. Пођимо од леве стране па имамо

$$J = \int\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \int\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\sec^2\varphi\, d\varphi$$

Применимо парцијалну интеграцију на други члан, па означимо

$$\sin\varphi = u$$

$$\operatorname{tg}\varphi \sec^2\varphi\, d\varphi = dv$$

па је

$$du = \cos\varphi\, d\varphi$$

$$v = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi$$

а према једначини

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

добијамо

$$J = \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi - \int\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi =$$

ако заменимо

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

имамо

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\underbrace{\int\cos\varphi\, d\varphi}_{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\sin\varphi\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Израчунајмо сад интеграл

$$J_1 = \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int\frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

Ставимо

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = t$$

па је

$$J_1 = -\int\frac{dt}{\sin t} = -\int\frac{d\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} =$$

$$= -\int\frac{\sec^2\frac{t}{2}\, d\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = -\log_{nat}\operatorname{tg}\frac{t}{2} =$$

$$= -\log_{nat}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Зато је

$$J = \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\log_{nat}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

па је отуда интеграл једначине 2)

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\log_{nat}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{c}{v_0^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2g}{c}s} + C$$

за $s = 0$ је $\varphi = \alpha$ па имамо

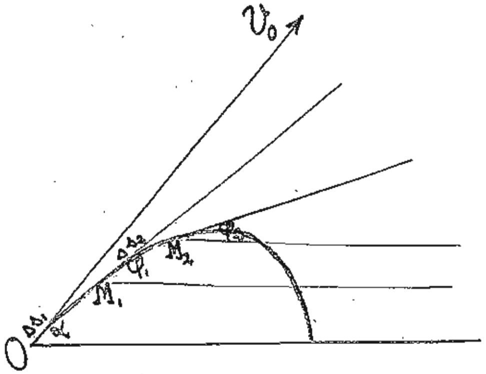
$$\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{2}\log_{nat}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{c}{v_0^2\cos^2\alpha} + C$$

па је зато

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{2}\log_{nat}\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=$$

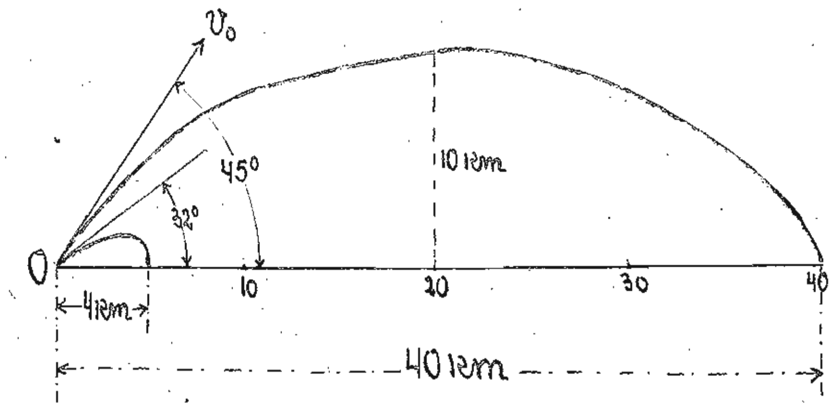
$$=\frac{1}{2}\frac{c}{v_0^2\cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2g}{c}s}-1\right)$$

Тако смо добили угао φ као функцију од s. Тиме што је угао нагиба φ претходном једначином дат као функција дужине лука s можемо балистичку криву конструисати на овај начин: За $s=0$ је $\varphi=\alpha$. Пренесимо на тангенти v_0 иницијалне тачке балистичке криве један произвољно мален део дужине Δs_1; то можемо тај део сматрати као елеменат балистичке криве. Из претходне једначине можемо сада израчунати угао φ_1 који одговара дужини лука Δs_1. Помоћу тога угла можемо конструисати



опет следећи елеменат криве MM_1 кога је дужина Δs_2. Сада можемо израчунати угао φ_2 који одговара дужини лука $(\Delta s_1+\Delta s_2)$, а помоћу њега конструисати опет један елеменат криве M_2M_3. На тај начин можемо постепено конструисати читаву криву која је у ствари замењена полигоном $OM_1M_2M_3\dots$ Што су стране тога полигона краће тиме је конструкција тачнија.

Следећа слика представља теориску (Галилејеву параболу) и стварну



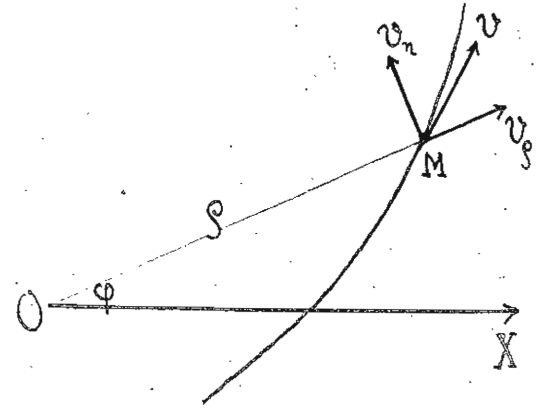
путању (балистичку криву) ђулета баченог из топа почетном брзином

$$v_0=620\,\frac{m}{sec}$$

Централне силе

Дефиницију централних сила већ смо формулисали. Показали смо такође да ће путања мобилне тачке која се креће под утицајем централне силе бити равнина која пролази кроз центар сила. Зато ћемо ту равнину одабрати за равнину XY нашег координатног система, па ћемо све проблеме моћи решити помоћу две координате. Центар сила одабраћемо наравно за почетну тачку координатног система. Још је природније место ортогоналних координата употребљавати поларне. Центар сила одабраће се за пол.

Раставимо ли брзину v у компоненте v_ρ и v_n од којих прва пада у правац радиус-вектора а друга стоји нормално на томе правцу, то смо доказали следеће једначине:



$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

$$v_n = \rho \frac{d\varphi}{dt} \qquad 1)$$

Исто су тако акцелерације мобилне тачке у тим двама правцима дате једначинама

$$p_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$p_n = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Но како је сила централна, то је акцелерација p_n стално једнака нули

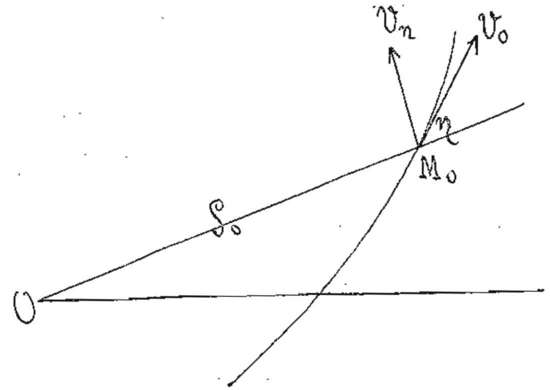
$$p_n = 0$$

па из тога услова следује једначина

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \qquad 2)$$

која изражава <u>принцип површина</u>.

Константу C једначине 2) можемо одредити ако нам је познато кретање у једноме произвољном моменту $t=t_0$ т.ј. ако нам је у том моменту познат положај и правац кретања мобилне тачке. У томе моменту нека буде радиус-вектор мобилне тачке ρ_0, брзина v_0 а угао што га вектор брзине затвара са радиус-вектором нека буде η. Једначина 2) мора постојати и за тај моменат,



па је можемо написати у облику

$$\left\{\rho\left(\rho\frac{d\varphi}{dt}\right)\right\}_{t=t_0}=C$$

но како је према једначини 1)

$$\rho\frac{d\varphi}{dt}=v_n$$

а брзина v_n у уоченом моменту је

$$v_n=v_0\sin\eta$$

то мора постојати једначина

$$\rho_0 v_0\sin\eta=C$$

Брзина v мобилне тачке дата је једначином

$$v^2=v_\rho^2+v_n^2=$$

$$=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad 3)$$

Из једначине 2) следује да је

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{C}{\rho^2}$$

па ставимо ли ову вредност у једначини 3) то добијамо

$$v^2=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{\rho^2} \qquad 4)$$

На овај начин смо изразили брзину v као функцију од ρ и од t. Њу можемо изразити и као функцију од ρ и од φ т.ј. као функцију положаја, јер из једначине 2) следује

$$\frac{1}{dt^2}=\frac{1}{d\varphi^2}\,\frac{C^2}{\rho^4}$$

Ставимо ли ову вредност у једначину 4) то добијамо

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \frac{C^2}{\rho^4} + \frac{C^2}{\rho^2} =$$

$$= C^2\left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]$$

Но како је

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$$

то је

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi}\right)^2$$

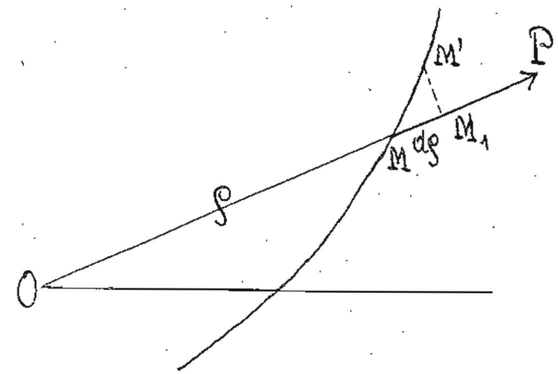
па је зато

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] \qquad 5)$$

Теорема живе силе казује да је диференцијал живе силе једнак елементарној радњи т.ј.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

У нашем случају па је елементарна радња једнака продукту силе P која пада у правац радиус-вектора и коју узимамо позитивно ако увећава радиус-вектор



т.ј. ако је наперена од центра, и пројекције MM_1 елемента пута MM'. А како је MM' као што се захтева бескрајно мало, то је

$$MM_1 = d\rho$$

па зато имамо једначину

$$\frac{m}{2} d(v^2) = P\,d\rho \qquad 6)$$

Из једначине 6) следује

$$\frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dt} = P\frac{d\rho}{dt}$$

или обзиром на једначину 4)

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right] = P\frac{d\rho}{dt}$$

или ако диференцијацију изведемо у њој

$$\frac{m}{2}\left[2\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d^2\rho}{dt^2} - 2\frac{C^2}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{dt}\right] = P\frac{d\rho}{dt}$$

или

$$m\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{mC^2}{\rho^3} = P \qquad 7)$$

Ову једначину можемо написати и у облику

$$m\frac{d^2\rho}{dt^2} = P + m\frac{C^2}{\rho^3} \qquad 7^*)$$

па нам она одређује кретање мобилне тачке по радиус-вектору. Мобилна се тачка креће по радиус-вектору тако као кад би на њу сем силе P дејствовала једна фиктивна сила $m\cdot\frac{C^2}{\rho^3}$ наперена од центра и која настоји да мобилну тачку удаљи т.ј. да радиус-вектор повећа.

Из једначине 6) следује

$$\frac{m}{2}\,\frac{d(v^2)}{d\varphi} = P\frac{d\rho}{d\varphi}$$

или обзиром на једначину 5)

$$\frac{m}{2}C^2\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] = P\frac{d\rho}{d\varphi}$$

или ако извршимо диференцијацију

$$\frac{mC^2}{2}\left[2\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi}\,\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2} - 2\frac{1}{\rho^3}\,\frac{d\rho}{d\varphi}\right] = P\frac{d\rho}{d\varphi}$$

или

$$mC^2\left[-\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{d\varphi}\,\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2} - \frac{1}{\rho^3}\,\frac{d\rho}{d\varphi}\right] = P\frac{d\rho}{d\varphi}$$

или

$$P = -\frac{mC^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right] \qquad 8)$$

Ова се једначина зове Binet-ова.

Испитајмо сада још за услове када ће мобилна тачка задржати исто одстојање од центра сила т.ј. када ће описивати круг. У то име је потребно да и иницијални вектор брзине буде нормалан на радиус-вектор, а то значи да угао η буде једнак $\frac{\pi}{2}$:

$$\eta = \frac{\pi}{2}$$

или

$$C = \rho_0 v_0 \sin\frac{\pi}{2} = \rho_0 v_0$$

Једначина 7*) одређује нам кретање на радиус-вектору, па ако мобилна тачка описује круг, то значи да се она не креће по радијус-вектору или да је десна страна једначине 7*) равна нули т.ј.

$$P + m\frac{C^2}{\rho^3} = 0$$

или обзиром на претходну једначину за C и обзиром на то да је ρ константно (јер мобилна тачка описује круг) т.ј.

$$\rho = const = \rho_0$$

добијамо

$$P + m\frac{v_0^2}{\rho_0} = 0$$

Од свију случаја централних сила најважнија су ова два:

1° кад је сила пропорционална одстојању мобилне тачке од центра, и

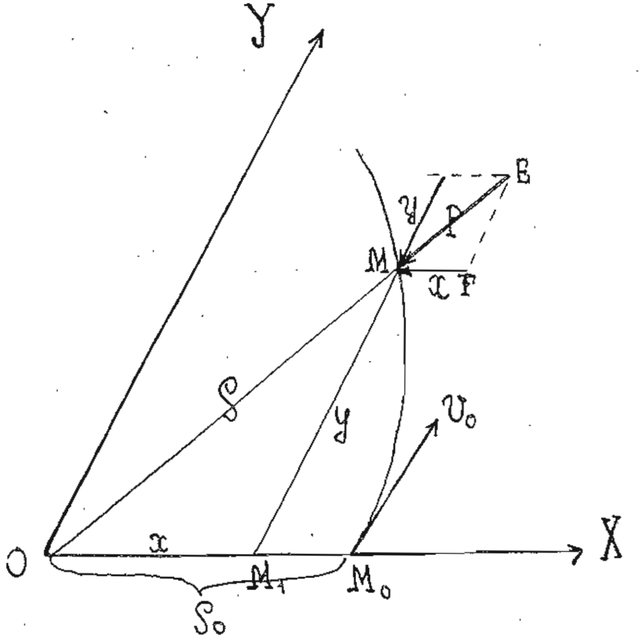
2° кад је инверзно пропорционална квадрату тога одстојања.

Са једним специјалним случајем првог случаја бавили смо се; то је било праволинијско хармонично кретање. Испитивајмо сада општи случај кад је кретање криволинијско.

Центар O нека привлачи мобилну тачку силом која је пропорционална одстојању ρ мобилне тачке од центра т.ј.

$$P = -k^2 m\rho$$

Иницијални положај мобилне тачке нека буде M_0, његов радијус-вектор ρ_0, вектор иницијалне брзине нека буде v_0; он не мора бити нормалан на ρ_0. Повуцимо кроз тачку O паралелу са вектором v_0 па одаберимо ју за осу Y нашег координатног система. Раставимо ли силу P у компоненте X и Y паралелне са координатним осама, што следује из сличности троуглова



$$\Delta MET \sim \Delta OMM_1$$

да је

$$\frac{X}{P} = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{Y}{P} = \frac{y}{\rho}$$

па је зато

$$X = \frac{x}{\rho} P = -k^2 m x$$

$$Y = \frac{y}{\rho} P = -k^2 m y$$

па једначине кретања

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

добијају облик

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 m x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 m y$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0 \qquad 1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = 0 \qquad 2)$$

Ове једначине ваља интегрисати. Једначину 1) задовољава при згодном избору константе r овај интеграл

$$x = e^{rt}$$

јер је

$$\frac{dx}{dt} = r x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r^2 x$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 1) то ће она бити задовољена ако је

$$r^2 + k^2 = 0$$

Ова једначина има два корена

$$r_1 = +ik$$

$$r_2 = -ik$$

па су зато партикуларни интеграли једначине 1)

$$x = e^{ikt}$$

$$x = e^{-ikt}$$

Оба ова партикуларна интеграла можемо сјединити у општи ако их помножимо са произвољним константама C_1 и C_2 па саберемо. Зато је општи интеграл једначине 1)

$$x = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt}$$

Применимо ли Euler-ове обрасце то они дају

$$x = C_1(\cos kt + i \sin kt) + C_2(\cos kt - i \sin kt) =$$

$$= (C_1 + C_2)\cos kt + i(C_1 - C_2)\sin kt$$

Заменимо ли произвољне константе C_1 и C_2 са другим па ставимо

$$C_1 + C_2 = C_1'$$

$$i(C_1 - C_2) = C_2'$$

то општи интеграл једначине 1) добија облик

$$x = C_1' \cos kt + C_2' \sin kt \qquad 3)$$

На исти начин добијамо и општи интеграл једначине 2) који има исти облик т.ј.

$$y = C_3' \cos kt + C_4' \sin kt \qquad 4)$$

Ваља још одредити константе C_1', C_2', C_3' и C_4'. У ту сврху послужићемо се иницијалним условима

за $t = 0$

$x = \rho_0$

па је зато

$$\rho_0 = C_1'$$

Диференцијацијом једначине 3) добијамо

$$\frac{dx}{dt} = -kC_1' \sin kt + kC_2' \cos kt$$

Ми растављамо брзине у компоненте од којих прва пада у правац осе X а друга у правац осе Y. У иницијалном моменту је вектор брзине паралелан оси Y, па је зато компонента у правцу осе X једнака нули т.ј.

за $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Применимо ли овај услов на претходну једначину то добијамо

$$0 = kC_2'$$

Тиме смо одредили константе C_1' и C_2' па интеграл једначине 1) има облик

$$x = \rho_0 \cos kt \qquad 5)$$

На исти начин одређујемо константе C_3' и C_4'.

$$\text{за } t = 0$$
$$y = 0$$

па је обзиром на једначину 4)

$$C_3' = 0$$

Диференцијацијом једначине 4) добијамо

$$\frac{dy}{dt} = -\cancelto{0}{kC_3' \sin kt} + kC_4' \cos kt$$

а како је

$$\text{за } t = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = v_0$$

то је

$$v_0 = kC_4'$$

или

$$C_4' = \frac{v_0}{k}$$

зато је интеграл једначине 2)

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt \qquad 6)$$

Из једначина 5) и 6) следује

$$\frac{x}{\rho_0} = \cos kt$$

$$\frac{y}{\frac{v_0}{k}} = \sin kt$$

Ако ове једначине квадрирамо па саберемо добијамо

$$\left(\frac{x}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{v_0}{k}}\right)^2 = 1 \qquad 7)$$

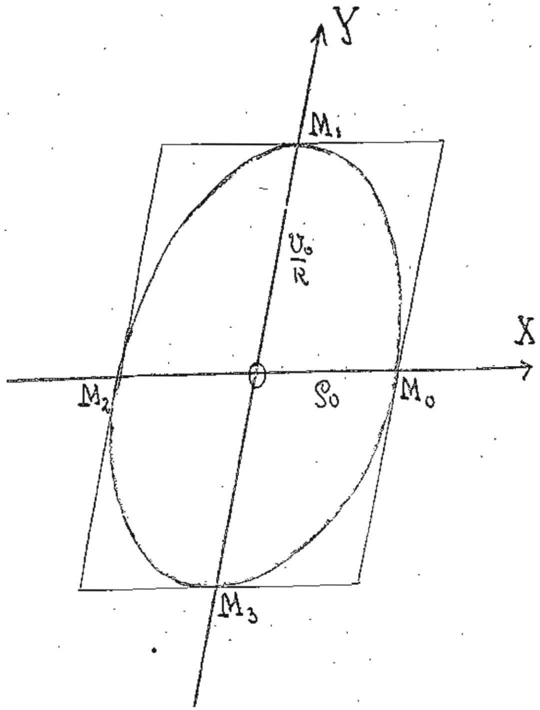
а то значи да је путања мобилне тачке елипса.

Кад би сила P одбијала мобилну тачку, онда би било

$$P = +k^2 m \rho$$

т.ј. имали бисмо место досадањег k^2 да ставимо $-k^2$. Онда би у једначини 7) други члан добио негативан знак, па би путања мобилне тачке била хипербола.

Значење константе k можемо на овај начин одредити: Из једначина 5) и 6) следује да пројекције мобилне тачке на координатне осе изводују хармоничке осцилације. Путања мобилне тачке је елипса са конјугованим дијаметрима ρ_0 и $\frac{v_0}{k}$. У иницијалном моменту започиње мобилна тачка своје кретање у M_0. По истеку једног времена за које је



$$kt = \frac{\pi}{2}$$

биће x као што из једначине 5) следује равно нули т.ј. мобилна тачка ће се налазити у положају M_1. По истеку једног времена за које је

$$kt = \pi$$

биће, као што из једначине 5) следује

$$x = -\rho_0$$

т.ј. мобилна тачка ће се налазити у положају M_2. Како је овај други два пута већи од првог, то ће мобилна тачка требати исто толико време да дође из M_0 у M_1 колико са треба да дође из M_1 у M_2 и због симетрије исто толико времена колико треба да пређе путеве M_2M_3 и M_3M_0. Означимо ли према томе време што га мобилна тачка треба да опише читаву елипсу са T, и назовемо ли то време периодом кретања, то ће мобилна тачка требати да из тачке M_0 дође у тачку M_1 време $\frac{T}{4}$. Положају M_1 одговарају дакле ови услови:

$$t = \frac{T}{4}$$
$$x = 0$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 5), то добијамо

$$0 = \rho_0 \cos k\frac{T}{4}$$

или

$$\frac{kT}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Одатле је

$$k = \frac{2\pi}{T}$$

Зато једначината 5) и 6) можемо дати ове облике

$$x = \rho_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \qquad 8)$$

$$y = \frac{v_0 T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad 9)$$

Из једначине 8) видимо да када је

$$t = 0, T, 2T, 3T, \ldots$$

да је

$$x = \rho_0$$

т.ј. после времена nT, где је n један цео број, достизава x своју амплитудну вредност. После тога времена враћа се дакле мобилна тачка у први положај. Зато се T зове <u>период</u>, а ρ_0 <u>амплитуда</u>.

И једначини 9) можемо дати сличан облик као једначини 8) јер је

$$\sin \alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

па можемо једначину 9) написати у облику

$$y = -\frac{v_0 T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{v_0 T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

Тако добијамо ове једначине

$$x = \rho_0 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

$$y = -\frac{v_0 T}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

y достизава своје максималне вредности ако је

$$t = \frac{T}{4}, 1\frac{1}{4}T, 2\frac{1}{4}T, \ldots$$

а то значи да y добива своје максималне вредности за једну четвртину периоде касније него x. Зато велимо да се оба хармонична кретања у правцу x и y разликују за фазу од четвртине периоде.

Кретање мобилне тачке можемо према томе сматрати као сложено кретање од два хармонична кретања у правцима x и y, од којих прво кретање има амплитуду (или интензитет) ϱ_0, а друго амплитуду $\frac{v_0 T}{2\pi}$. Оба кретања имају исту периоду T, а фазе им се разликују за четвртину периоде.

У теориској физици често пута се стоји пред кинематским проблемом да се саставе две или више таквих хармоничких осцилација, па ћемо примера ради показати како се таква кретања састављају и одредити путању мобилне тачке ако је њено кретање резултат двају хармоничких осцилација у правцима X и Y које узимамо тада нормално један на други.

1° Пример.

Мобилна тачка изводи у правцима X и Y ове осцилације

$$x = a\cos\frac{2\pi}{T}t$$

$$y = b\cos\frac{2\pi}{2T}t = b\cos\frac{\pi}{T}t$$

што значи да су амплитуде оба кретања a и b, да је периода првог кретања T а другог $2T$ т.ј. друго кретање има два пута већу периоду него прво. Фазе оба кретања не разликују се, јер у истом моменту $t=0$ достижу оба кретања своју амплитудну вредност. Горњим једначинама је кретање потпуно одређено јер у сваком моменту познајемо положај мобилне тачке. Питајмо само за једначину путање мобилне тачке. У то име ваља из горњих једначина елиминисати t. Из гониометријске једначине

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

следује

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

па је према тој једначини

$$x = a\left(2\cos^2\frac{\pi}{T}t - 1\right) = a\left[2\frac{y^2}{b^2} - 1\right]$$

или

$$x+a=2\frac{a^2}{b^2}y^2$$

или

$$y^2=\frac{b^2}{2a^2}(x+a)$$

Мобилна тачка описује према томе једну параболу.

2° Пример.

Нека опет периода другог кретања буде два пута већа од периоде првог, али нека прво кретање заостаје за фазу од четвртине своје периоде т.ј.

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{4}\right)$$

$$y=b\cos\frac{\pi}{T}t$$

Друго кретање достизава своју амплитуду у времену $t=0$, а прво у времену $t=\frac{T}{4}$. Питајмо сада за једначину путање. Имамо

$$x=a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)=$$

$$=a\sin\frac{2\pi}{T}t=$$

$$=2a\sin\frac{\pi}{T}t\cos\frac{\pi}{T}t=$$

$$=2a\cos\frac{\pi}{T}t\cdot\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{T}t}$$

па је зато

$$x=2a\frac{y}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

или

$$b^2x=2ay\sqrt{b^2-y^2}$$

или

$$b^4x^2=4a^2y^2(b^2-y^2)$$

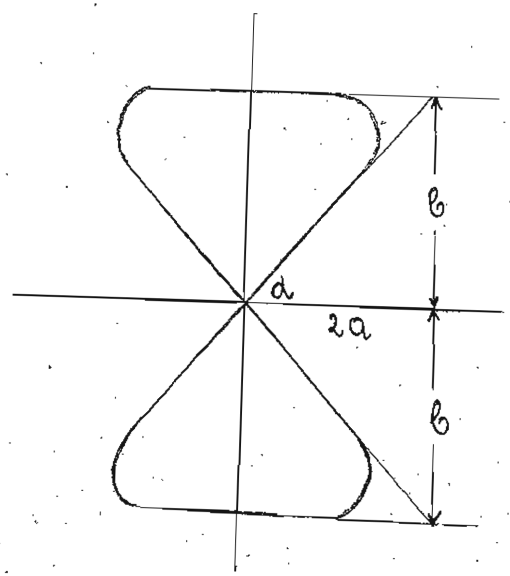
Ово је једначина путање мобилне тачке. За $x=0$ добијамо

$$y=\pm 0 \text{ и } \pm b$$

За $y=0$ имамо

$$x=\pm 0$$

што значи да крива сече осу Y четири пута а осу X два пута. За



мало y можемо место члана b^2-y^2 ставити b^2, па добијамо

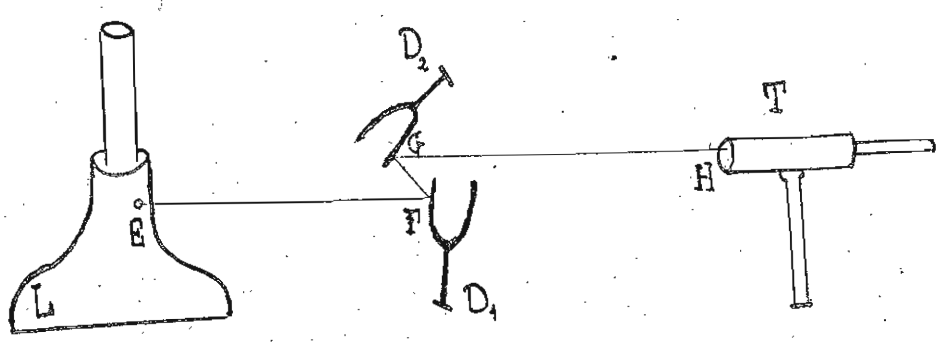
$$b^2x^2 = 4a^2y^2$$

или

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{2a}$$

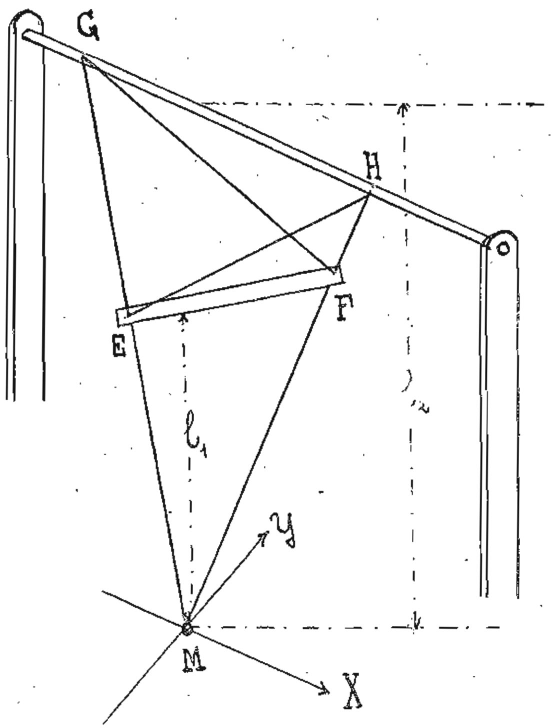
То значи за мало y можемо елементе криве заменити са две праве представљене горњом једначином. Крива ће имати облик предње слике.

<u>Lissajoux</u> је опитски представио овакве путање које настају састављањем двају хармонијских осцилација. Дијапазони осцилирају хармонијски. Комбинацијом двају таквих дијапазона који имају разли-



личите периоде (периода одређује висину тона), којима се могу дати различите фазе, састављају се најразноврсније путање. Из лампе L излази светли зрак EF, у тачки F удара на једно огледало причвршћено на дијапазону D_1 који стоји вертикално. Кад тај дијапазон звучи, онда се рефлектовани зрак FG помера у вертикалној равни хармонички. Тај зрак удара у тачки G на друго једно огледалце причвршћено на једном хоризонталном дијапазону D_2. Кад тај дијапазон звучи, помера се рефлектовани зрак GH у хоризонталној равни хармонички. Кад оба дијапазона звуче заједно, онда тачка H изводи обе осцилације па описује једну слику која се зове Lissajous-ова фигура. Она се посматра у дурбину T.

Овакве Lissajous-ове фигуре могу се извести и помоћу закаченог клатна. Клатно M обешено је помоћу жица EM и FM на оси EF, па даље може да осцилује у правцу X нормал-



но на ту осу, па је дужина клатна на тих осцилација l_1. Оса EF обешена је помоћу жица GE, GF, HE и HF на осу GH, па може осциловати нормално на ту осу (осе EF и GH укрштају се и нормалне су једна на другу). Осцилацијом око осе GH креће се клатно у правцу Y, па је дужина клатна у том правцу l_2. Клатно изводи дакле у исти мах две осцилације: прву у правцу X са дужином клатна l_1, а другу у правцу Y са дужином клатна l_2. Од дужина клатна зависе и периоде обају кретања, па се може према томе удесити да се периоде стоје у произвољној пропорцији. Исто се тако могу и фазе кретања разликовати. Клатно ће описивати према томе једну Lissajous-ову фигуру.

Проблем да се нађе сила када је позната путања.

Нека се реши следећи проблем: Мобилна тачка описује праву путању чија је једначина у поларним координатама

$$\rho = f(\varphi) \qquad 1)$$

Њен радиус вектор описује једнаке површине у једнаким интервалима времена т.ј.

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \qquad 2)$$

Нека се нађе сила P која изазива то кретање мобилне тачке.

Из једначине 2) следује да је

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

а то значи да је

$$p_n = 0$$

т.ј. сила P пролази константно кроз пол координатног система или сила P је централна сила. Зато вреди за њу Binet-ова једначина

$$P = -\frac{mC^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right] \qquad 3)$$

Закон по коме се сила мења нашли бисмо из једначина 1) и 3), но то решење није одређено. Ми можемо из тих једначина елиминирати ρ, можемо елиминирати и φ или само један израз за ρ и φ. Решење постаје тек онда одређено ако утврдимо да сила P зависи или само од ρ или само од φ.

Узмимо овај специјалан случај: мобилна тачка описује конични пресек т.ј. једначина је 1) у овом случају

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \qquad 1^*)$$

- Ово је поларна једначина коничног

пресека. У њој p означава половину параметра, а ε нумерички ексцентрицитет. Ако је $\varepsilon=0$, онда је конични пресек круг; ако је $\varepsilon<1$, онда је он елипса; ако је $\varepsilon=1$, он је парабола; и ако је $\varepsilon>1$ хипербола. Треба даље да нађемо централну силу која изазива овакво кретање мобилне тачке, па претпоставимо да је та сила P само функција одстојања мобилне тачке од центра а не зависи од угла φ. Ако знамо да је средиште силе P центар O, онда из централне симетрије обзиром на ту тачку следује, да сила P може бити само функција одстојања ρ, јер нема никаквог разлога да се та сила у једном правцу друкчије манифестира него у другом. Ваља нам даље из једначина 1*) и 3) елиминисати угао φ. Из једначине 1*) следује

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi \qquad 4)$$

Диференцијацијом имамо

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi}=-\frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}=-\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi \qquad 5)$$

Ставимо ли вредности 4) и 5) у једначину 3) то добијамо

$$P=-\frac{mC^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{p}$$

или ако ставимо константу

$$\frac{C^2}{p}=\mu$$

биће

$$P=-\frac{\mu m}{\rho^2} \qquad 6)$$

- Сила P биће инверзно пропорционална квадрату одстојања ρ, а пошто је негативна то она умањује то одстојање т.ј. привлачи мобилну тачку према центру.

Кретање мобилне тачке која је присиљена да остане на заданој површини.

Ако је мобилна тачка присиљена да остане на површини

$$f(x,y,z)=0 \qquad 1)$$

онда знамо из Статике, да ће на мобилну тачку осим спољних сила дејствовати још отпор површине који је увек нормалан на површину и који је увек бројно велики да присили мобилну тачку да на површини остане. Тај отпор одредићемо према томе тако, да координате мобилне тачке x, y, z задовољавају увек једначину 1). При томе није потребно претпоставити да је површина непомична или да се не мења, него се може узети да облик путање зависи и од времена. У томе ће случају једначина површине бити

$$f(x,y,z,t)=0 \qquad 1^*)$$

па ваља отпор површине тако одредити да у посматраном моменту t задовољава мобилна тачка једначину 1*).

Нормала површине затвара са координатним осама углове којих су косинуси

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Зато су компоненте нормалног отпора

$$N\cos\alpha$$
$$N\cos\beta$$
$$N\cos\gamma$$

Ако сем тога на мобилну тачку дејствују спољне силе које дају резултанту R чије су компоненте X, Y и Z, то ће једначине кретања мобилне тачке бити

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma$$

или ако означимо

$$\frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \lambda$$

једначине кретања добијају овај облик

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \qquad 2)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \qquad 2)$$

Из једначина 2) и једначине 1) или 1*) може се одредити x, y и z и величина λ. Узмимо општији случај да је једначина површине представљена са једначином 1*). Ако диференцирамо ту једначину по времену, добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Диференцирамо ли ову једначину, имамо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} +$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\frac{dy}{dt} +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial t}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad 3)$$

Ставимо у једначини 3) вредности за

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}$$

то можемо из једначине 3) израчунати λ и ставити у једначинама 2) које ће нам представљати једначине кретања.

Кретање мобилне тачке на заданој криви.

Ако је мобилна тачка присиљена да се креће на једној криви које облик може да зависи и од времена, то ту криву можемо сматрати као пресек двеју површина

$$f_1(x,y,z,t)=0$$

$$f_2(x,y,z,t)=0$$

па захтевамо да мобилна тачка остане и на једној и на другој површини. Онда ће према пређашњем њене једначине кретања имати овај облик

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Из горњих двеју једначина могу се одредити величине x, y, z, λ_1 и λ_2.

Кретање мобилне тачке ако на њу не дејствује никаква спољна сила.

Ако на мобилну тачку не дејствује никаква спољна сила, онда је

$$X = Y = Z = 0$$

па из једначина 2) што смо их пре извели добијамо ове једначине

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad 1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

На мобилну тачку дејствује према томе

само нормални отпор површине, а како се мобилна тачка креће по површини то је тај отпор увек нормалан на путању, а то значи да је тангенцијална сила равна нули

$$P_t = 0$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = 0$$

Интеграција ове једначине даје

$$v = const.$$

или

$$v = c$$

где c означава једну константу. Мобилна се тачка креће према томе по површини непрестано са константном брзином c која је једнака њеној иницијалној брзини.

Из једначине

$$v = \frac{ds}{dt}$$

следује

$$c = \frac{ds}{dt}$$

или

$$\frac{1}{dt} = c\frac{1}{ds}$$

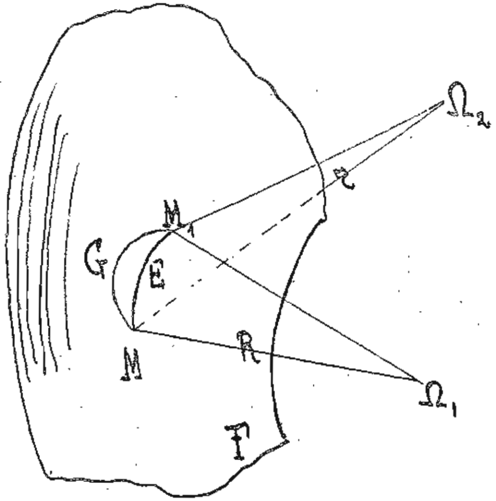
Ставимо ли ову вредност за dt у једначине 1) то добијамо

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc^2}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc^2}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad 2)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\lambda}{mc^2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

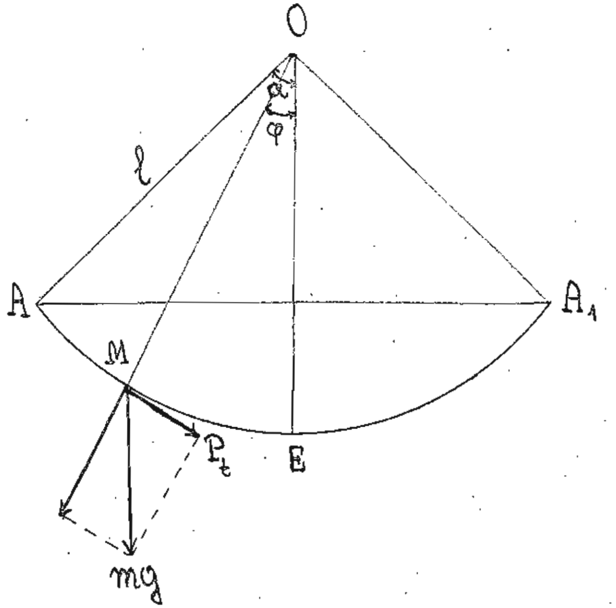
Ове једначине изражавају геометријско својство путање а њихова интеграција даје путању. Исти овај облик имају диференцијалне једначине геодезиских линија на површини 1) или 1*); то значи да се мобилна тачка креће на геодезиској линији површине. Да се мобилна тачка креће на геодезиској линији површине можемо без обзира на једначине 2) доказати на овај начин: На мобилну тачку дејствује само отпор површине. Тај је нормалан на путању и једнак централној сили која дејствује на тачку. Тангенцијална сила равна је нули. Но показали смо пре да централна сила лежи у оскулационој равнини путање, па како је нормална на путању то значи да пада у правац главног радиуса кривине путање. Та сила је нормална на површину, па зато долазимо до закључка да главни радиус кривине путање мобилне тачке пада увек у нормалу посматране површине.



F нека представља један део посматране површине, MEM_1 елеменат путање. Та је путања тако завијена да главни радиус кривине те путање R стоји нормално на површину. Повуцимо између тачака M и M_1 једну другу криву MGM_1; онда ће та крива имати други радиус кривине r који се неће подударати са нормалом површине. Тај радиус r биће мањи од R, јер од свих радиуса кривине у тачки M највећи је главни радиус кривине. Елеменат MEM_1 има према томе од свих могућих елемената криве што их можемо повући између тачака M и M_1 највећи радиус кривине. Што значи да је MEM_1 најкраћи пут између тачака M и M_1, а то је својство геодезиске линије. Путања мобилне тачке подудара се дакле са геодезиском линијом површине на којој се она креће.

Једноставно клатно

Мобилна тачка нека буде причвршћена на танком концу дужине l који је обешен о тачку O. Померена из положаја равнотеже E у положај A па пуштена сама себи, мобилна ће се тачка кретати на вертикалном луку AEA_1. Ако не узмемо у обзир трење конца о тачки O и отпор ваздуха, то ће мобилна тачка пошавши из тачке A брзином нула попети се у тачку A_1 која



лежи у истој хоризонтали са тачком A. То следује већ и из тога да су еквипотенцијалне равнине хоризонталне, па се мобилна тачка враћа у еквипотенцијалну раван која иде кроз тачку A са истом брзином која је једнака нули. Угао AEO означимо са α

$$\measuredangle AEO = \alpha$$

и назовимо га амплитудни угао. Варијабилни угао EOM означимо са φ

$$\measuredangle EOM = \varphi$$

и назовимо га елонгацијом.

У положају M дејствује на мобилну тачку њена тежина mg и отпор површине или отпор конца, који стоји нормално на путањи мобилне тачке у којој је мобилна тачка присиљена да се креће. Зато ће тангенцијална сила P_t која дејствује на мобилну тачку M бити

$$P_t = -mg \sin\varphi$$

знак $-$ зато што та сила настоји да уњами угао φ. Како је

$$P_t = m\frac{dv}{dt}$$

то је

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi \qquad 1)$$

Означимо ли са путом s одстојање EM, то је

$$s = l\varphi$$

а

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}$$

и према томе

$$\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Ставимо ли ову вредност у једначину 1) то добијамо

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad 2)$$

Ово је диференцијална једначина кретања; њена интеграција даје нам φ као функцију времена и одређује у сваком моменту путању мобилне тачке. Из горње једначине следује, ако ју помножимо са $2\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{dt} + 2\frac{g}{l}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

или

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\frac{g}{l}\sin\varphi\, d\varphi = 0$$

или интеграцијом

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\frac{g}{l}\cos\varphi + C = 0$$

За тачку A имамо

$$\varphi = \alpha$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

па добијамо

$$-2\frac{g}{l}\cos\alpha + C = 0$$

па је

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

Одавде следује

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$$

ваља одредити знак корена. Почетну тачку времена узели смо када се мобилна тачка налази у амплитудном положају, па када према томе време расте опада угао φ. Зато ваља кореном изразу дати знак −, па је

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$$

Ставимо

$$1 - \cos\varphi = x$$
$$1 - \cos\alpha = a \qquad 3)$$

па добијамо диференцијацијом прве једначине

$$\sin\varphi\, d\varphi = dx$$

одакле

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$$

Тако добијамо

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,\sqrt{a-x}} \qquad 4)$$

Из једначине 3) следује

$$2 - x = 1 + \cos\varphi$$

па је зато

$$1-\cos^2\varphi = (1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)$$
$$= x(2-x)$$

Тако једначина 4) добија облик

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{2-x}\,\sqrt{ax-x^2}}$$

или

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}\,\sqrt{ax-x^2}}$$

Време T што га мобилна тачка треба да из положаја A дође до положаја A_1 једнако је

$$T = 2\int_a^0 dt = -2\int_0^a dt$$

Зато је

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}\,\sqrt{ax-x^2}}$$

Развимо израз

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

па зато имамо

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^a\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\right\}\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Означимо

$$\int_0^a\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=A_n$$

па је

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{A_0+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)A_1+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{1}{2}\right)^2A_2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{1}{2}\right)^3A_3+\cdots\right\} \qquad 5)$$

За интеграле A_n можемо извести једну редукциону једначину на овај начин:

$$A_n=\int_0^a\frac{x^{n-1}x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Ставимо сада

$$ax-x^2=u$$

што добијамо диференцијацијом

$$a\,dx-2x\,dx=du$$

или

$$x\,dx=\frac{1}{2}a\,dx-\frac{1}{2}du$$

Зато је

$$A_n=\int_0^a\frac{x^{n-1}\left(\frac{1}{2}a\,dx-\frac{1}{2}du\right)}{\sqrt{ax-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}a\int_0^a\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^a x^{n-1}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

Овај последњи израз можемо развити помоћу парцијалне диференцијације, јер ако означимо

$$x^{n-1} \text{ са } u$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} \quad \text{"} \quad dv$$

то је

$$du=(n-1)x^{n-2}dx$$

$$v=2\sqrt{u}$$

па је

$$\int x^{n-1}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}\,x^{n-1}-2(n-1)\int\sqrt{u}\,x^{n-2}dx$$

Зато је

$$A_n=\frac{1}{2}a\int_0^a\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\sqrt{ax-x^2}\,x^{n-1}+$$

$$+(n-1)\int_0^a x^{n-2}\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

Последњи израз можемо рационализирати тиме да га помножимо и разделимо са $\sqrt{ax-x^2}$, па да га раздвојимо у два интеграла. На тај начин добијамо

$$A_n=\int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}a\int_0^a\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-\underbrace{\left\{\sqrt{ax-x^2}\,x^{n-1}\right\}_0^a}_{0}+$$

$$+a(n-1)\int_0^a\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-(n-1)\int_0^a\frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Из ове једначине можемо извести, ако пренесемо последњи члан на леву страну, следећу редукциону једначину

$$n\int_0^a\frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{2n-1}{2}a\int_0^a\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Ова је једначина редукциона једначина која нам даје могућност да члан A_n изразимо помоћу члана A_{n-1}, па та једначина даје

$$A_n=\frac{2n-1}{2n}a\,A_{n-1}$$

Тако можемо помоћу ове једначине изразити све чланове серије 5) помоћу члана A_0 јер је

$$A_1=\frac{1}{2}a\,A_0$$

$$A_2=\frac{3}{4}a\,A_1=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^2A_0$$

$$A_3=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}a^3A_0$$

. . . .

па зато једначина 5) добија облик

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a}{2}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^3+\dots\right\}A_0$$

Ваља нам само да израчунамо интеграл A_0. Он је

$$A_0=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Како је

$$ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

то је

$$A_0=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}}=\int_0^a\frac{d\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^2}}=$$

$$=\left\{\arcsin\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right\}_0^a=$$

$$=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Зато је

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a}{2}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

Из једначине 3) следује

$$\frac{a}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

па зато имамо

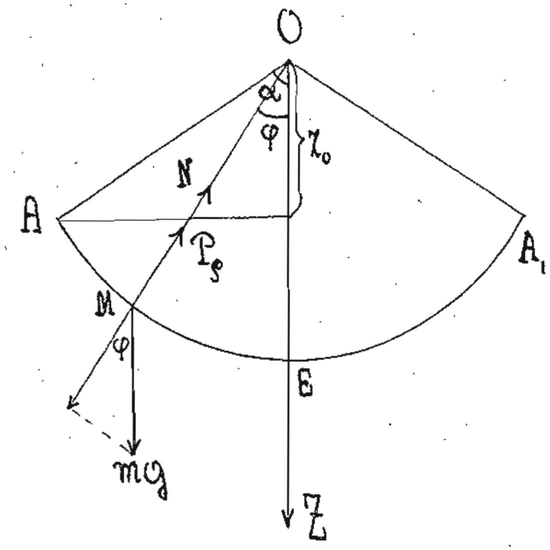
$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cdots\right\} \qquad 6)$$

Ову једначину нашао је Euler, па серија те једначине конвергира врло брзо ако је α малено. Зато је довољно задовољити се само са првим члановима те серије.

Брзину мобилне тачке израчунаћемо помоћу теореме живе силе. По тој је теореми

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dA$$

где dA означава елементарну радњу. Ту ћемо радњу израчунати на овај начин: На мобилну тачку утичу ове две силе: тежа mg и отпор путање N. Ова друга сила увек је нормална на путању, па је зато њена елементарна радња равна нули. Ваља дакле да израчунамо само елементарну радњу теже, а ту добијамо на тај начин ако силу помножимо са пројекцијом елемента пута у правац силе. Та пројекција једнака је, ако осу Z наперимо вертикално доле, dz па је зато



$$dA=mg\,dz$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=mg\,dz$$

Интеграцијом добијамо

$$v^2=2gz+C$$

Означимо ли апликату тачке A са z_0 то је за $z = z_0$

$v = 0$

па је

$$0 = 2gz_0 + C$$

или

$$v^2 = 2g(z - z_0) \qquad 7)$$

Како је

$$z = l\cos\varphi$$

$$z_0 = l\cos\alpha$$

то је

$$v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

или

$$v = \sqrt{2gl}\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha} \qquad 8)$$

Означимо ли брзину мобилне тачке у најнижем положају Е са С, то ћемо С добити ако у горњу једначину ставимо

за $\varphi = 0$

$v = C$

т.ј.

$$C = \sqrt{2gl}\sqrt{1 - \cos\alpha} \qquad 9)$$

Питајмо колики је отпор N путање. Мобилна тачка креће се кад се налази у положају M у кругу којега је радијус једнак l са брзином v. Зато на њу дејствује једна центрипетална сила

$$P_s = \frac{mv^2}{l}$$

та центрипетална сила наперена је према центру O. Отпор путање N мора према томе бити тако велики да изазове ту центрипеталну силу. Од центра дејствује компонента теже која је једнака

$$mg\cos\varphi$$

и зато отпор N мора бити тако велики да његова диференција изнад ове компоненте буде једнака центрипеталној сили т.ј.

$$N - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{l}$$

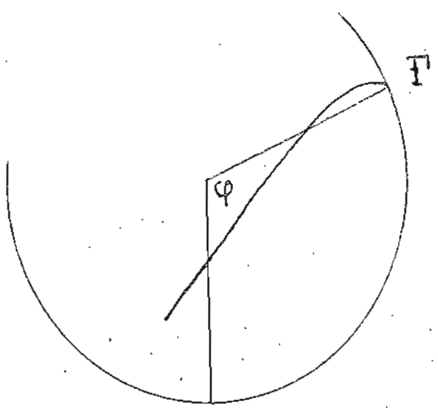
или

$$N = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{l} =$$

$$= mg(\cos\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos\alpha) =$$

$$= mg(3\cos\varphi - 2\cos\alpha)$$

Ово је отпор путање који је наперен према центру. Ако мобилна тачка виси о концу, то тај конац даје само једнострани отпор т.ј. он може да изазове силу N наперену према центру, или не може да изазове на мобилну тачку силу која би била наперена од центра. Зато N не сме бити у овом случају негативно. У тачки F у којој N мења знак т.ј. у тачки F која има такво φ да је



$$N = 0$$

или

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}\cos\alpha$$

оставила би мобилна тачка путању па би падала по параболи.

Ако су амплитуде осцилације тако мале да се синус њихов може заменити са самим углом, онда диференцијална једначина 2) добија овакав облик

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad 1)$$

Помножимо ли ову једначину лево и десно са $2d\varphi$, то ју можемо написати у облику

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\frac{g}{l}\varphi\, d\varphi = 0$$

или интеграцијом

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l}\varphi^2 + C = 0$$

Кад је $\varphi = \alpha$ онда је $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ па је зато

$$0 + \frac{g}{l}\alpha^2 + C = 0$$

или

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\alpha^2 - \varphi^2)$$

Одавде следује

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$$

или одатле

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{l}{g}}\arcsin\frac{\varphi}{\alpha}+C$$

За $t=0$ је $\varphi=\alpha$ па је зато

$$0=\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi}{2}+C$$

или

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\varphi}{\alpha}-\frac{\pi}{2}\right] \qquad 2)$$

Трајање осцилације добијамо ако у једначини 2) ставимо

за $\varphi=-\alpha$

$t=T$

Зато је

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\underbrace{\arcsin(-1)}_{\frac{3\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right]$$

или

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 3)$$

Из једначине 2) следује

$$\arcsin\frac{\varphi}{\alpha}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

или

$$\frac{\varphi}{\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

или

$$\varphi=-\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad 4)$$

Тако смо изразили елонгацију φ помоћу времена и тиме решили проблем кретања: за свако произвољно време знамо положај мобилне тачке.

Из једначине 4) можемо одредити и брзину мобилне тачке. Она је једнака

$$v=l\frac{d\varphi}{dt}$$

или

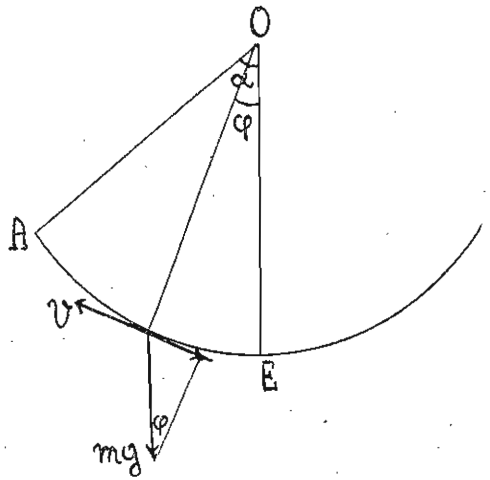
$$v=l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad 5)$$

Брзину c у најнижој тачки E добијамо ако у овој једначини ставимо $t=\frac{T}{2}$. Дакле

$$c=l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad 6)$$

Клатно у отпорном ваздуху.

Казали смо да је отпор ваздуха при маленим брзинама пропорционалан брзини, па како ћемо претпоставити да клатно има малену брзину то ћемо узети да је отпор W пропорционалан брзини v. Када се мобилна тачка креће тако да се угао φ увећава онда дејствују противно правцу тога кретања отпор W и компонента теже $mg\sin\varphi$. Зато је тангенцијална сила једнака



$$P_t = -mg\sin\varphi - W$$

Казали смо да је

$$W = kv$$

Уведемо ли место коефицијента k ону брзину c код које је отпор ваздуха једнак тежини мобилне тачке т.ј. за коју је

$$mg = kc$$

то добијамо

$$W = mg\frac{v}{c}$$

Зато је

$$P_t = -mg\left(\sin\varphi + \frac{v}{c}\right)$$

Диференцијална једначина кретања биће према томе

$$m\frac{dv}{dt} = P_t$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi - \frac{g}{c}v$$

Но како је

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}$$

а одатле

$$\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

то добијамо, ако ове вредности ставимо у једначини

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{g}{c}\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Претпоставимо сад да клатно изводи тако мале осцилације да можемо синус угла φ заменити увек са самим углом, онда горња једначина добија овај облик

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{c}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad 1)$$

Ставимо у овој једначини

$$\varphi = e^{rt}$$

одакле је

$$\frac{d\varphi}{dt} = r e^{rt}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r^2 e^{rt}$$

Једначина 1) биће према томе задовољена ако константа r буде задовољавала ову квадратну једначину

$$r^2 + \frac{g}{c}r + \frac{g}{l} = 0 \qquad 2)$$

Из ове једначине добијамо да је

$$r = -\frac{g}{2c} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4c^2} - \frac{g}{l}}$$

Члан под кореном је позитиван ако је

$$\frac{g^2}{4c^2} > \frac{g}{l}$$

или ако је

$$\frac{gl}{4} > c^2$$

Променимо знак чланова под кореном т.ј. извадимо фактор $\sqrt{-1}$ пред кореном, па ће једначина 2) имати ова два корена

$$r_1 = -\frac{g}{2c} + i\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{g^2}{4c^2}}$$

$$r_2 = -\frac{g}{2c} - i\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{g^2}{4c^2}}$$

Ставимо сад

$$\frac{g}{l} = a^2$$

$$\frac{g}{2c} = b$$

па су корени једначине 2)

$$z_1 = -b + i\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$z_2 = -b - i\sqrt{a^2 - b^2}$$

Са ова два корена можемо саставити општи интеграл једначине 1) који ће бити једнак

$$\varphi = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

или

$$\varphi = e^{-bt}\{C_1 e^{i\sqrt{a^2-b^2}} + C_2 e^{-i\sqrt{a^2-b^2}}\}$$

Применимо ли Euler-ове обрасце то добијамо

$$\varphi = e^{-bt}\{C_1 \cos\sqrt{a^2-b^2}\,t + i C_1 \sin\sqrt{a^2-b^2}\,t +$$

$$+ C_2 \cos\sqrt{a^2-b^2}\,t - i C_2 \sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\}$$

Сменимо ли константе C_1 и C_2 са новим константама таквим да је

$$C_1 + C_2 = C_1$$

$$i(C_1 - C_2) = C_2$$

то добијамо

$$\varphi = e^{-bt}\{C_1 \cos\sqrt{a^2-b^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\} \qquad 3)$$

Да бисмо одредили константе C_1 и C_2 образујмо још израз

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-bt}\{-C_1\sqrt{a^2-b^2}\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t +$$

$$+ C_2\sqrt{a^2-b^2}\cos\sqrt{a^2-b^2}\,t - C_1 b\cos\sqrt{a^2-b^2}\,t -$$

$$- C_2 b \sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\}$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-bt}\{[C_2\sqrt{a^2-b^2} - C_1 b]\cos\sqrt{a^2-b^2}\,t -$$

$$-[C_1\sqrt{a^2-b^2} + C_2 b]\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\} \qquad 4)$$

Константе ћемо одредити на овај начин: ставимо у једначини 3)

за $t = 0$

$\varphi = \alpha$

а у једначини 4)

за $t = 0$

$\frac{d\varphi}{dt} = 0$

Онда добијамо

$$\alpha = C_1$$

$$0 = C_2\sqrt{a^2-b^2} - C_1 b$$

Из ових једначина следује

$$C_1 = \alpha$$

$$C_2 = \alpha \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Из једначине 3) следује онда

$$\varphi = e^{-bt}\alpha\left\{\cos\sqrt{a^2-b^2}\,t + \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t\right\} \qquad 5)$$

ставимо ли вредности константата у једначину 4) то добијамо

$$\frac{d\varphi}{dt} = -e^{-bt}\left[\alpha\sqrt{a^2-b^2} + \alpha\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t =$$

$$= -\alpha e^{-bt}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin\sqrt{a^2-b^2}\,t \qquad 6)$$

Брзина мобилне тачке биће равна нули, као што из једначине 6) следује, за $t=0$ и онда за сваку вредност T ако буде

$$\sqrt{a^2-b^2}\,T = \pi$$

исто тако и за сваку вредност nT, јер је онда

$$\sqrt{a^2-b^2}\,nT = n\pi$$

Значи да ће T бити <u>периода</u> осцилација и да та периода остоје константна. Осцилације су <u>изохроне</u>

Из пређашњих једначина следује да је

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{g^2}{4c^2}}}$$

Кад не би било отпора ваздуха онда би други члан под кореном отпао, па бисмо за периоду осцилација добили

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- израз који смо већ извели. Због отпора ваздуха бива именитељ мањи, па због тога периода већа. Отуда: отпор ваздуха увећава периоду.

Питајмо каква ће бити друга амплитуда, ако је прва била α_0. Ту ћемо амплитуду добити из једначине 5) ако у њој ставимо

$$\varphi = \alpha_1$$

$$t = T = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

На тај начин добијамо

$$\alpha_1 = -\alpha_0 e^{-bT} \qquad 7)$$

Следећа амплитуда биће

$$\alpha_2 = +\alpha_0 e^{-2bT} \qquad 7)$$

а добили бисмо ју на тај начин да смо ставили

$$t = 2T$$

трећа амплитуда једнака је

$$\alpha_3 = -\alpha_0 e^{-3bT}$$

$$\cdots\cdots \qquad 7)$$

$$\alpha_n = \pm \alpha_0 e^{-nbT}$$

Као што видимо амплитуде опадају у геометријској прогресији. Из једначина 7) следује

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_0} = e^{-nbT}$$

или одатле

$$\log_{nat}\alpha_n - \log_{nat}\alpha_0 = -nbT$$

или

$$b = \frac{\log_{nat}\alpha_0 - \log_{nat}\alpha_n}{nT} \qquad 8)$$

Величина b зове се логаритмички декремент; он се може и експериментално одредити: Имамо само да измеримо почетну и n-ту амплитуду и избројимо време nT које лежи између њих.

Кад смо тако одредили константу b, онда из једначине

$$\frac{g}{2c} = b$$

можемо одредити константу c која нам даје отпор ваздуха

$$c = \frac{g}{2b}$$

Таутохрона крива за случај теже.

Нека се реши овај проблем: Нека се одреди вертикална крива у којој тешка материјална тачка падајући достиже у једну сталну тачку О те криве па макар у којој тачки отпочела своје кретање.

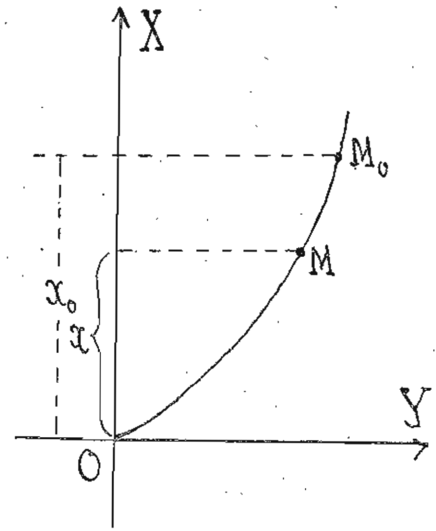
Започне ли мобилна тачка своје кретање у тачки M_0, то ћемо њену брзину у положају M одредити помоћу теореме живе силе

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

Елементарна радња dA једнака је

$$dA = -mg\,dx$$

јер је dx пројекција елемента пута на правац силе. Знак $-$ стоји зато јер сила умањује апсцису x. Зато имамо



$$d\,\frac{v^2}{2} = -g\,dx$$

или одатле интеграцијом

$$\frac{v^2}{2} = -gx + C$$

Како је за $x = x_0$ $v = 0$ то је

$$0 = -gx_0 + C$$

или

$$v^2 = 2g(x_0 - x)$$

или

$$v = \sqrt{2g(x_0 - x)} = \frac{ds}{dt}$$

Одатле је

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{ds}{\sqrt{x_0 - x}}$$

Време T што га мобилна тачка треба да из положаја M_0 дође у положај О добијамо ако горњу једначину интегришемо између граница x_0 и 0. У претходну једначину метнули смо пред корен знак – јер ћемо пут s да меримо од тачке 0 па се зато са растућим временом умањује лук s. Отуда

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{x_0 - x}}$$

или

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{x_0} \frac{ds}{\sqrt{x_0 - x}}.$$

Кад би нам путања била позната, онда бисмо могли изразити s као функцију од x

$$s = \varphi(x)$$

па бисмо имали

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{x_0} \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{x_0 - x}}$$

Ми захтевамо да T буде независно од x_0 и зато ћемо, пре но што тај захтев математски формулишемо, уклонити x_0 из границе интеграла т.ј. ставити

$$x = x_0 u$$

па добијамо

$$dx = x_0\,du$$

или

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{1} \frac{\varphi'(x_0 u)\, x_0\, du}{\sqrt{x_0 - x_0 u}}$$

или

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{1} \frac{\varphi'(x_0 u) \sqrt{x_0}\, du}{\sqrt{1 - u}}$$

T мора бити независно од x_0 па зато мора бити

$$\frac{dT}{dx_0} = 0$$

дакле

$$\frac{dT}{dx_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{1} \frac{\varphi''(x_0 u)\, u \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \varphi'(x_0 u) \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{\sqrt{1 - u}}\, du = 0$$

Именитељ мора бити стално једнак нули; зато добијамо

$$\varphi''(x_0 u)\, u x_0 + \frac{1}{2} \varphi'(x_0 u) = 0$$

или

$$x \varphi''(x) + \frac{1}{2} \varphi'(x) = 0$$

Из ове једначине следује

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{1}{2x}$$

или интеграцијом

$$\log_{nat}\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\log_{nat} x + \log_{nat} C =$$

$$= \log_{nat}\frac{C}{\sqrt{x}}$$

т. ј.

$$\varphi'(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

Како је било

$$\varphi'(x) = \frac{ds}{dx}$$

то имамо

$$ds = C\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

или

$$\sqrt{1+y'^2}\,dx = C\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

одакле

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{C^2}{x}$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{C^2-x}{x}$$

или

$$dy = \sqrt{\frac{C^2-x}{x}}\,dx$$

Ово је диференцијална једначина тражене криве; коју треба да интегришемо. Имаћемо одмах

$$y = \int\sqrt{\frac{C^2-x}{x}}\,dx$$

или ако под интегралом бројитељ и именитељ помножимо са $\sqrt{C^2-x}$ добијамо

$$y = \int\frac{C^2-x}{\sqrt{C^2x-x^2}}\,dx =$$

$$= \int\frac{\frac{C^2}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{C^2}{2}\right)^2-\left(x-\frac{C^2}{2}\right)^2}}\,dx + \int\frac{\frac{C^2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{C^2}{2}\right)^2-\left(x-\frac{C^2}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}2\sqrt{\left(\frac{C^2}{2}\right)^2-\left(x-\frac{C^2}{2}\right)^2} + \frac{C^2}{2}\arcsin\frac{x-\frac{C^2}{2}}{\frac{C^2}{2}} + C$$

или

$$y = -\sqrt{C^2x-x^2} - \frac{C^2}{2}\arccos\left(\frac{2x}{C^2}-1\right) + C.$$

Почетак координатног система лежи на самој криви, па је зато за $x=0$ и $y=0$ а због тога

$$C=\pi$$

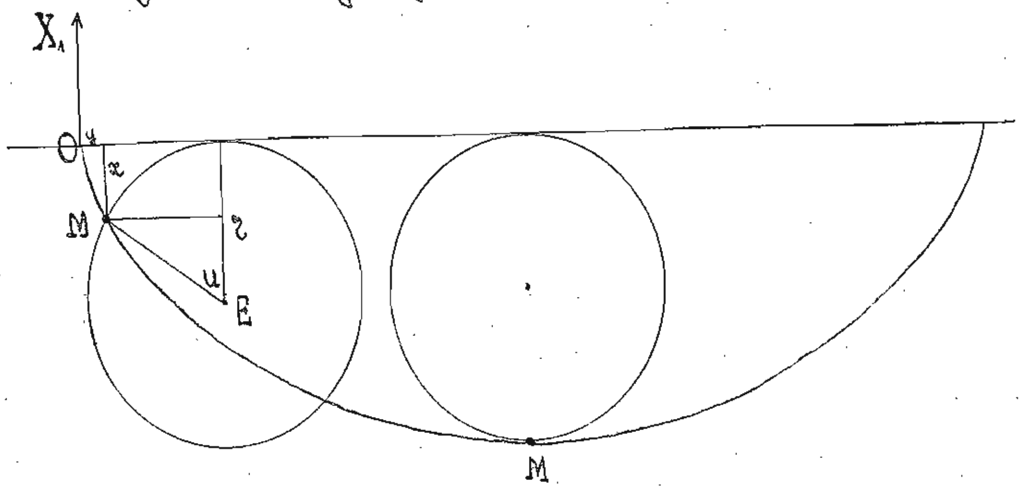
а отуда

$$y=-\sqrt{C^2x-x^2}-\frac{C^2}{2}\arccos\left(\frac{2x}{C^2}-1\right)+\pi$$

Променимо правац осе y и померимо га за угао π. Онда ће бити у новом систему

$$y=\sqrt{C^2x-x^2}+\frac{C^2}{2}\arccos\frac{2x-C^2}{C^2}$$

Ова једначина представља нам тражену криву. Она је једначина <u>циклоиде</u> како ћемо се на следећи начин уверити: циклоида је крива коју описује



једна тачка периферије круга који се котрља по једној правој. Ако је круг започео своје кретање у тачки O па дошао центром у положај E, онда ће тачка M која се пре налазила у положају O имати следеће координате

$$x=-(r-r\cos u)=-r+r\cos u$$

$$y=ru-r\sin u$$

На тај смо начин извели једначину циклоиде помоћу параметра u. Ако хоћемо y као функцију од x то ваља између горње две једначине елиминисати параметар u. Из прве једначине следује

$$\cos u=\frac{x+r}{r}$$

одакле је

$$u=\arccos\frac{x+r}{r}$$

$$\sin u=\sqrt{1-\cos^2 u}=\sqrt{1-\frac{x^2+2xr+r^2}{r^2}}=\frac{1}{r}\sqrt{-x^2-2rx}$$

Зато је

$$y=r\arccos\frac{x+r}{r}-\sqrt{-x^2-2rx}$$

Ставимо радиус круга

$$r=\frac{C^2}{2}$$

то је

$$y = \frac{C^2}{2}\arccos\frac{2x+C^2}{C^2} - \sqrt{-x^2 - C^2 x}$$

Уведемо ли транслацију координатног система т.ј. ставимо ли место x ново x_1

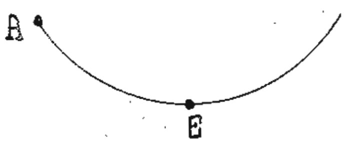
$$x = x_1 - C^2$$

то добијамо

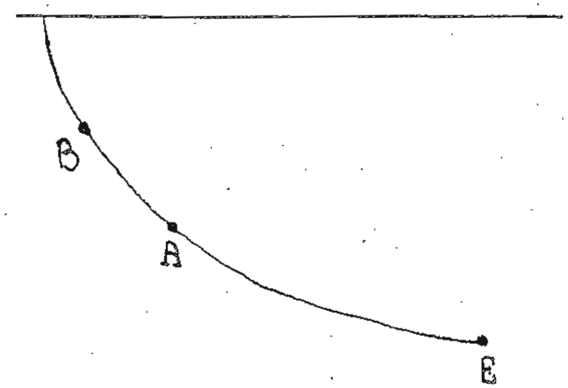
$$y = \frac{C^2}{2}\arccos\frac{2x_1 - C^2}{C^2} \mp \sqrt{C^2 x_1 - x_1^2}$$

Како смо другом корену могли дати знак + то видимо да је ова једначина идентична са једначином таутохроне крива коју смо извели. Таутохрона крива је према томе за тежу циклоида.

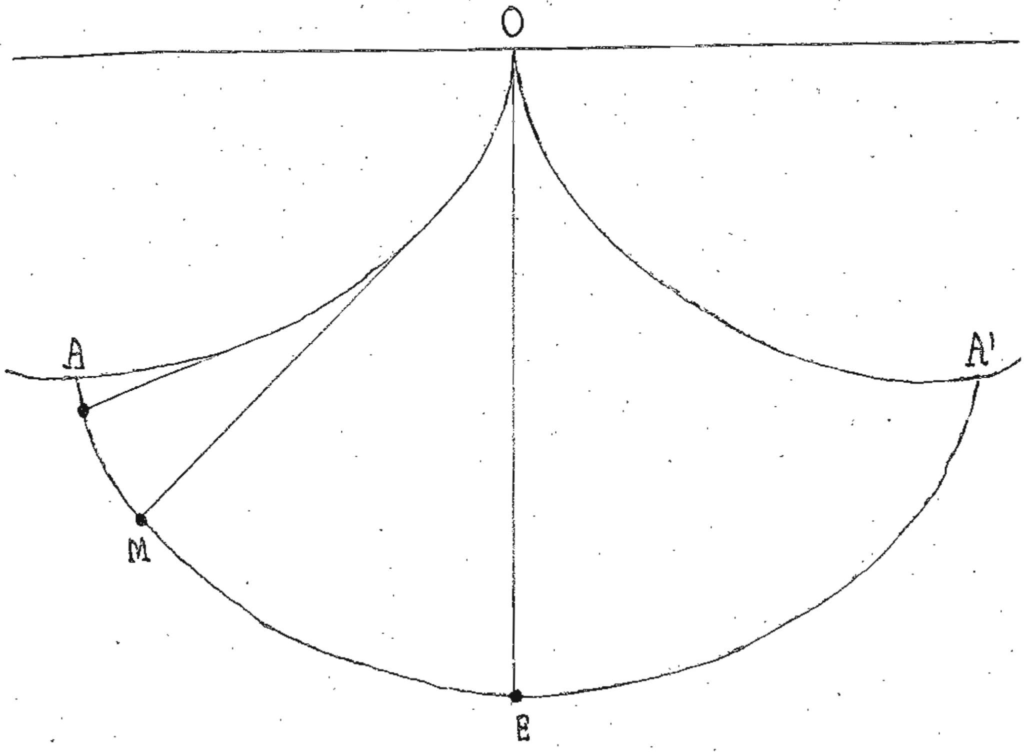
Својство таутохронизма циклоиде нашао је Huyghens. Кружно клатно није таутохроно јер време што га мобилна тачка треба да падајући по кругу падне у најнижу тачку E зависи као што смо показали од амплитуде, даље од



почетне тачке A. Та зависност од амплитуде је за мале амплитуде незнатна, па само у том случају имамо да захвалимо да се кружно клатно може примењивати за мерење времена. Циклоида је потпуно таутохрона. Пада ли мобилна тачка по циклоиди, то ће она требати исто толико време да стигне из положаја A у E колико га треба да стигне из које друге тачке B у положај E.



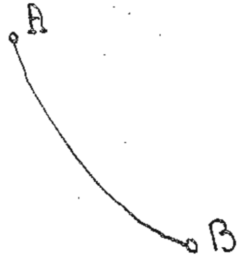
Својство да је еволута циклоиде опет циклоида применио је Huyghens за конструкцију циклоидног клатна. Имамо ли две гране циклоиде OA и OA' једну поред друге и на њима конструисана два кратка цилиндра нормално на равнину слике, па обесимо ли на концу OE који има



дужину лука OA или OA' тешку куглицу, па ставимо ли ју у кретање, то ће се конац обавијати око цилиндра OA и OA' тако да ће куглица E описивати еволвенту горњих циклоида, а то је опет, као што из теорије циклоиде следује, једна циклоида која им је конгруентна. Зато ће крива AMEA' коју описује мобилна тачка бити опет циклоида. Мобилна ће се тачка кретати по циклоиди; њено кретање биће таутохроно; трајање осцилација биће независно од амплитуде.

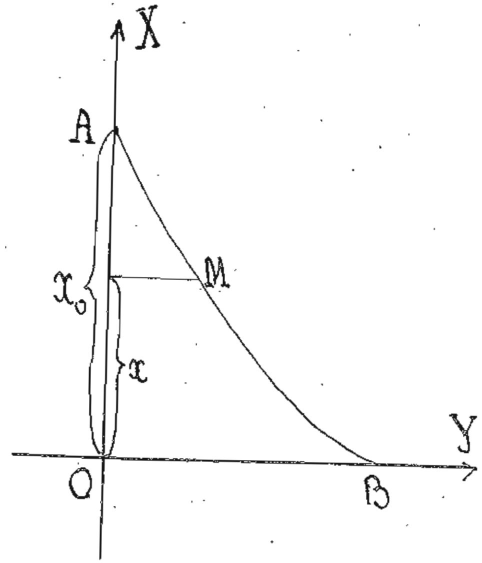
Проблем брахистохроне.

Нека се реши овај проблем: две тачке A и B које не леже у истој вертикали а ни у истој хоризонтали, нека се споје једном вертикалном кривом тако да мобилна тачка, започињући своје кретање у положају A са брзином нула, стиже крећући се по тој криви за најкраће време



у положај B. Та крива неће бити права што спаја A и B; права је додуше најкраћи пут између тачака A и B, али мобилна тачка под утицајем теже не превaљује га за најкраће време.

Мобилна тачка нека започне своје кретање у положају A. Њена брзина у ~~почетном~~ положају M израчунаће се према предашњем из теореме живе силе која је овде облика



$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg\,dx$$

или

$$v^2 = -2gx + C$$

За $x_0 = x$ је $v = 0$ па је

$$C = 2gx_0$$

зато је

$$v^2 = 2g(x - x_0)$$

или

$$v = \sqrt{2g}\,\sqrt{x - x_0} = \frac{ds}{dt}$$

или

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}$$

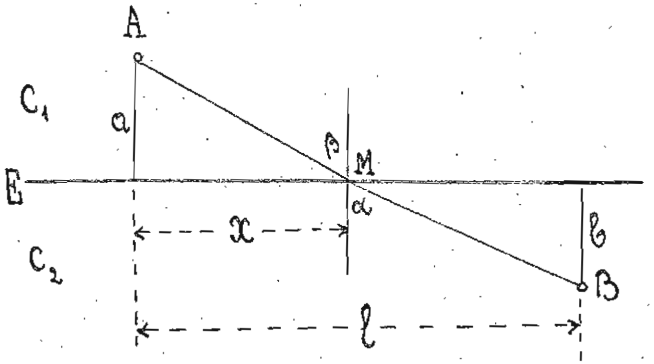
Време што га мобилна тачка треба да из положаја A дође у положај B једнако је

$$T=-\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{0}\frac{ds}{\sqrt{x-x_0}}$$

Горње једначине имају знак – зато што кад време расте x опада. Зато је

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{x_0}\frac{ds}{\sqrt{x-x_0}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{x_0}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x-x_0}}\,dx$$

Наш је проблем према томе овај: Ваља одредити y као функцију од x тако да време T, дакле да вредност горњег интеграла, буде минимум. Ово је основни проблем <u>варијационог рачуна</u>. Ми ћемо горњи проблем решити као што га је решио Johan Bernoulli. Он се при томе користио Фермаовим доказом да светлост, пролазећи кроз два медиума, бира такав пут да за најкраће време стиже из једне одабране тачке A у



другу тачку B. EF нека буде граница двају медиума. У првом се покретна тачка креће брзином c_1, а у другом брзином c_2. Нека се нађе тачка M која задовољава тај услов да је при горњим брзинама пут AMB пређен у најкраћем времену. Време T што га светлост треба да пређе пут AMB једнако је,

$$T=\frac{AM}{c_1}+\frac{MB}{c_2}=$$

$$=\frac{1}{c_1}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{b^2+(l-x)^2}$$

Ваља одредити x тако да T буде минимум. Дакле

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}$$

или

$$\frac{dT}{dx}=0$$

а како је

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin\beta$$

$$\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \sin\alpha$$

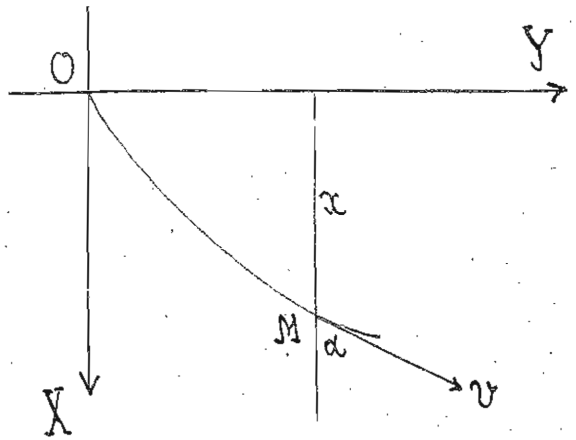
што добијамо

$$\frac{\sin\beta}{c_1} = \frac{\sin\alpha}{c_2} = k$$

Да смо место другог медијума у ком се светлост шири брзином c_2 имали такав медијум у ком се светлост шири брзином c, што би опет било

$$\frac{\sin\alpha}{c} = k$$

Вратимо се сада када смо ову релацију за светлост доказали опет проблему брахистохроне. Започиње ли мобилна тачка своје кретање у O са брзином нула, то је према принципу живе силе њена брзина v у тачки M једнака



$$v = \sqrt{2gx}$$

Замислимо сада да имамо један медијум којега се густина мења са x тако да је та густина дата једначином

$$\sigma = \frac{c_1}{\sqrt{2gx}}$$

Уђе ли у такав простор један светлосни зрак, то ће брзина ширења светлости бити инверзно пропорционална густини, па ће брзина ширења светлости за апсцису x бити једнака

$$v = \frac{k_1}{\sigma} = \frac{k_1\sqrt{2gx}}{c_1}$$

или ако означимо

$$\frac{k_1}{c_1} = 1$$

то је

$$v = \sqrt{2gx}$$

Брзина ширења светлости биће за апсцису x од које она само зависи иста таква као и брзина мобилне тачке која зависи само од апсцисе x. Но ка-

Ко смо пре доказали да се светлост шири тако да за најкраће време доспева у свој циљ, то имамо само да испитамо кретање светлости у оваквом медијуму, па ће нам путања светлости дати путању мобилне тачке, по којој она за најкраће време стиже из тачке А у тачку В. Доказали смо релацију

$$\frac{\sin\alpha}{c} = k$$

где с значи брзину ширења светлости. Та брзина светлости једнака је тада брзини мобилне тачке, па је зато

$$\sin\alpha = kv$$

Но како је

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

а

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$$

то постоји једначина

$$\frac{dy}{ds} = k\sqrt{2gx}$$

или

$$\frac{dy^2}{ds^2} = 2k^2gx$$

или како је

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

то је

$$dy^2 = 2gk^2x\,dy^2 + 2gk^2x\,dx^2$$

или

$$(1 - 2gk^2x)\,dy^2 = 2gk^2x\,dx^2$$

Означимо

$$2gk^2 = c^2.$$

то је

$$dy = \sqrt{\frac{c^2x}{1-c^2x}}\,dx$$

или

$$dy = c\sqrt{\frac{x}{1-c^2x}}\,dx$$

Уведимо нову координату

$$x_1 = 1 - c^2x$$

то је

$$x = \frac{1-x_1}{c^2}$$

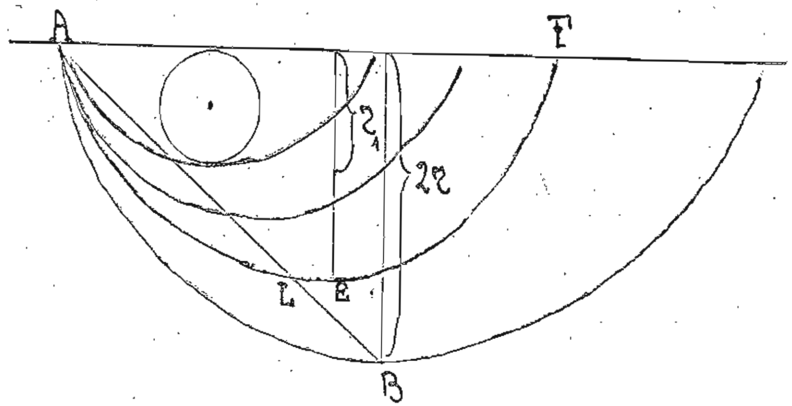
па је зато

$$dx = -\frac{1}{c^2}\,dx_1$$

а отуда

$$dy = \frac{c}{c^2}\sqrt{\frac{1-x_1}{x_1}}\,dx_1$$

Ово је диференцијална једначина тражене криве. Она је идентична са диференцијалном једначином таутохроне, па како смо доказали да је таутохрона крива циклоида, то следује да ће и брахистохрона бити циклоида. Ваља дакле између тачака A и B повући један лук циклоиде које је директриса хоризонтална и пролази кроз тачку A. Треба одабрати ону циклоиду која пролази кроз тачку B. Ваља дакле наћи радиус круга који започињући своје кретање у тачки A описује такву циклоиду да она пролази кроз тачку B. У то име послужићемо се са релацијом да су све циклоиде међу собом сличне и да се односе као радиуси кругова којима су оне изведене. Конструишимо једну произвољну циклоиду AEF која има радиус r_1



Та циклоида нека сече праву AB у тачки L. Онда ће радиус r оне циклоиде која пролази кроз тачку B следовати из релације

$$\frac{r}{r_1} = \frac{AB}{AL}$$

т.ј.

$$r = \frac{AB}{AL}\,r_1$$

На тај начин можемо конструисати циклоиду која пролази кроз тачку B. Тиме је проблем решен.

Кретање мобилне тачке на ротационој површини ако на њу не утичу никакве силе.

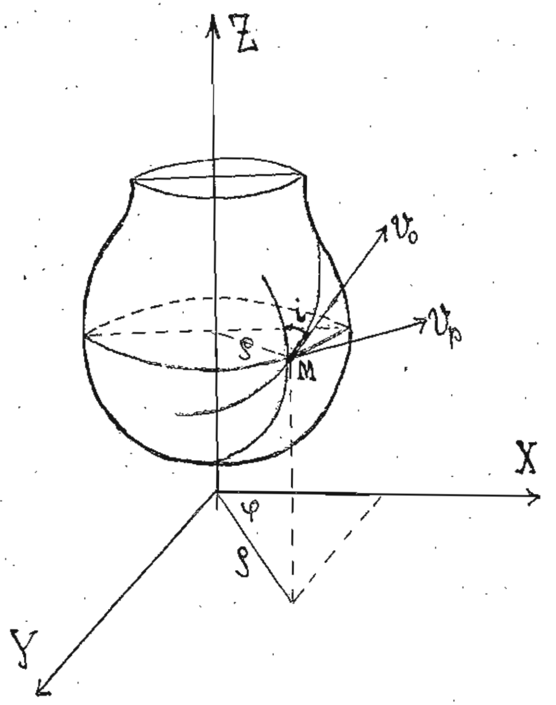
Ми смо већ доказали да ако се мобилна тачка креће по једној произвољној површини без утицаја какве спољне силе него само утицајем иницијалне брзине, да ће онда њена брзина

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 \qquad 1)$$

бити константна и да ће се мобилна тачка кретати по геодетској линији посматране површине. Отпор површине је једина сила која утиче на мобилну тачку, а тај је отпор нормалан на површину. Но како је у нашем случају површина ротациона, то ће тај отпор сећи осу ротационе површине и лежати увек у равнини меридијана. Ми смо пре доказали да у случају када на мобилну тачку дејствује сила која сече сталну једну непомичну праву простора, да онда радиус-вектор пројекције мобилне тачке на једну равнини нормалној на ту праву описује у једнаким деловима времена једнаке површине. Означимо ли према томе са ρ тај радиус-вектор пројекције мобилне тачке, а са φ угао његовог заокретања, то постоји једначина

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C \qquad 2)$$

Ако је мобилна тачка M, ако осу ротационе површине узмемо за осу Z нашег координатног система, то ће за пројекцију M_1 важити једначина 2). При томе значи ρ та-



које и радиус паралелног круга на којем се налази мобилна тачка. Облик ротационе површине биће нам познат кад будемо познавали једначину њеног меридијана

$$z = f(x)$$

Онда је ротациона површина дата изразом

$$z = f(\rho)$$

или

$$\rho = \psi(z)$$

Једначине 1) и 2) представљају нам једначине кретања, па питајући за путању мобилне тачке. У то име ваља помоћу тих једначина изразити ρ као функцију од φ, јер у том случају познајемо пројекцију путање мобилне тачке на раван XY, а кад ту пројекцију познајемо, онда познајемо и саму путању. Ваља дакле изразити ρ као функцију од φ. Из слике следује да је

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

а према пређашњем

$$z = f(\rho)$$

У једначини 1) значи ds лук путање, па за њега постоји релација

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ds ћемо према томе изразити помоћу пређашњих једначина помоћу ρ и φ. Из тих једначина следује

$$dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi$$
$$dz = f'(\rho)\, d\rho$$

$$dx^2 = \cos^2\varphi\, d\rho^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$dy^2 = \sin^2\varphi\, d\rho^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2$$
$$dz^2 = f'^2(\rho)\, d\rho^2$$

Зато је
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + f'^2(\rho)\, d\rho^2 =$$
$$= \rho^2 d\varphi^2 + [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2$$
Из једначине 1) следује да је
$$ds^2 = v_0^2\, dt^2$$
Зато је
$$\rho^2 d\varphi^2 + [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2 = v_0^2\, dt^2$$
Из једначине 2) следује да је
$$dt^2 = \frac{1}{C^2}\rho^4 d\varphi^2$$
па је зато
$$\rho^2 d\varphi^2 + [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2 = \frac{v_0^2}{C^2}\rho^4 d\varphi^2$$
или ако ставимо
$$\frac{v_0}{C} = \frac{1}{k}$$
то је
$$\left[\frac{\rho^4}{k^2} - \rho^2\right] d\varphi^2 = [1 + f'^2(\rho)]\, d\rho^2$$
одакле је
$$d\varphi = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{1 + f'^2(\rho)}{\frac{\rho^2}{k^2} - 1}}\, d\rho$$

Интеграција ове једначине даје
$$\varphi = \int \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{1 + f'^2(\rho)}{\frac{\rho^2}{k^2} - 1}}\, d\rho + C$$
тако смо добили φ као функцију од ρ, или обратно, па нам ова једначина даје према томе једначину путање. Она садржава у себи две произвољне константе k и C. Ако се мења k мења се и облик криве; ако се мења C, онда се облик криве не мења, него се она заокрене само за један угао $d\varphi$ који одговара промени константе C.

Елеменат лука $d\sigma$ меридијана једнаке је
$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx =$$
$$= \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$
а како у једначини меридијана можемо x заменити са ρ то је
$$d\sigma = \sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\rho$$

Зато диференцијална једначина путање добија и овај облик

$$d\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{\sqrt{\frac{\rho^2}{R^2}-1}}$$

Затвара ли у положају M путања мобилне тачке са меридијаном угао i, то је компонента њене брзине v_p која пада у паралелу једнака

$$v_p = v_0 \sin i$$

а та брзина једнака је брзини пројекције M_1 у равнини XY, дакле

$$v_p = \rho\frac{d\varphi}{dt}$$

Из једначине 2) следује да је

$$\rho\rho\frac{d\varphi}{dt} = c$$

па зато

$$\rho v_p = c$$

или

$$\rho v_0 \sin i = c$$

или

$$\rho \sin i = \frac{c}{v_0}$$

или према пређашњим ознакама

$$\rho \sin i = R$$

Где R означава једну константу. Ова једначина изражава једну геометриску особину путање или једну геометриску особину геодетске линије на ротационој површини. Она казује да геодетска линија затвара у свим тачкама ротационе површине углове i којих су косинуси инверзно пропорционални одстојању посматране тачке од осе ротационе површине. Ова се једначина зове Clairaut-ова једначина.