MODIFIKOVANI PSEUDOSPKTRI
I
NJIHOVA PRIMENA U NUMERIČKOJ
ANALIZI

TEZA

Borivoja Mihajlovića

17 decembar 1964 g.

BEOGRAD

U V O D

Osnovni zadatak numeričke analize je da pronadje put kako se u konkretnim slučajevima polazeći od poznatih numeričkih podataka primenom izvesnih obrazaca i algoritama može doći do novih numeričkih podataka sa odredjenim brojem vrednosnih cifara. Kako se pomoću spektralne metode iz niza numerički poznatih podataka odredjuju novi, pomoću matematičkih spektara, to i ovi čine deo aparata numeričke analize. Do sada, primena matematičkih spektara odnosila se uglavnom na nizove (odnosno funkcije) čiji su članovi (odnosno koeficienti) tačni brojevi (celi ili decimalni).

Činjenica je da se mnogi aritmetički, algebarski i analitički problemi mogu rešiti na veoma interesantan, matematičkim spektrima svojstven način. Elektronski aritmeticki računari pružaju nove mogućnosti za primenu matematičkih spektara kada bi se matematički spektri modifikovali tako da vrede i za slučaj da su članovi polaznog niza (odnosno koeficienti funkcija) zaokrugljeni brojevi. Ovo utoliko pre, što elektronski računari sami zaokrugljuju brojeve na odredjeni broj cifara.

Ovim radom dao sam takve modifikacije i priloge, kako samoj teoriji matematičkih spektara tako i njenoj primeni.

(Rad se)

Rad se sastoji iz pet glava. U prve tri glave -- uglavnom izložene neke već poznate činjenice iz ove oblasti kao neophodni elementi za dalja rasudjivanja.

U četvrtoj glavi ~~xxxxxxxx~~ nalazi se definicija modifikovanih pseudospektara i teoreme koje omogućavaju njihovu primenu u numeričkoj analizi kao i upotrebu digitalnih elektronskih računara pri konkretnim izračunavanjima.

U petoj glavi izložena su tri primera primene modifikovanih pseudospektara. Prvi primer odnosi se na rešavanje diferencijalne jednačine prvog reda $y'=f(x,y)$. U drugom primeru prvi put se realizuje primena elektronskih računara u spektralnoj metodi. Treći primer daje prilog metodi inverzne interpolacije uvodeći modifikovane pseudospektre u teorijska razmatranja.

G L A V A   P R V A

MATEMATIČKI SPEKTRI

1. Pojam matematičkog spektra.- Matematicki spektri i spektralna metoda izgradjeni su prema ideji, metodi i rezultatima koji poticu iz fizike, a odnose se na svetlosne spektre. Zato za opštu definiciju spektra uzima se /9/:

Spektrom skupa (O) konkretnih ili apstraktnih objekata O_1, O_2,... naziva se linearni niz, ogranicen ili neogranicen, kome pripada grupa znakova m_1, m_2,... koji su povezani sa objektima O_k tako da jedan objekat O_k odredjuje jednu grupu znakova m_k i obratno, svaka grupa znakova m_k odredjuje samo jedan objekat O_k pod uslovom da svi objekti O_k i svi znaci m_k mogu biti na taj način odredjeni.

Primer da postoje spektri konkretnih objekata (O) jesu svetlosni (emisioni i apsopcioni) spektri, a primer spektara apstraktnih objekata su spektri niza brojeva, koje nazivamo matematičkim spektrima.

Matematičkim spektrom /17/ jednog niza elemenata $\{c_i\}$ zvaćemo broj S, ceo ili decimalan, pozitivan ili negativan, takav da broj S jednoznačno odredjuje niz $\{c_i\}$ i obratno, da svakom nizu $\{c_i\}$ odgovara samo jedan broj S pod uslovom da svi elementi niza $\{c_i\}$ i sve cifre broja S mogu da budu na taj nacin odredjeni.

(2,Opšti)

2. Opšti način obrazovanja matematičkih spektara.-

Neka je data pomoćna funkcija

$$y = F(x)$$

takva, da svakoj vrednosti x iz intervala ($-\infty$, $+\infty$) odgovara samo jedna vrednost y iz intervala (0,1) kao i obratno. Razume se da takvih funkcija ima beskonačno mnogo. Na primer, takva je funkcija

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh} x).$$

Označimo sa $\{x_j\}$ niz brojeva iz intervala ($-\infty$, $+\infty$) koji uzimamo za argument x, a sa

$$F(x_j) = 0,A_j^1 A_j^2 A_j^3 A_j^4 \ldots$$

niz

$$\{F(x_j)\} \ ,$$

gde smo sa A_j^i označili i-tu decimalu j-tog broja.

Kada se "metodom dijagonala" obrazuje broj

$$S = 0,A_1^1 A_2^1 A_1^2 A_3^1 A_2^2 A_1^3 A_4^1 A_3^2 A_2^3 A_1^4 \ \ldots$$

dobićemo zavisnost izmedju broja S i niza brojeva $\{F(x_j)\}$ takvu da će broj S, zbog osobina funkcije $y=F(x)$, jednoznačno odredjivati decimale brojeva $F(x_j)$ kao i obratno, brojevi $F(x_j)$ jednoznačno će odredjivati broj S.

Iz načina obrazovanja spektra S sledi da je

(1) $$p = i + \frac{1}{2}(i+j-1)(i+j-2),$$

gde p označava rang decimale broja S. Dalje je

$$i = p - \frac{n(n-1)}{2} \ ,$$

(1a) $$j = \frac{n(n+1)}{2} - p + 1,$$

$$n = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \sqrt{8p-7}\ \right)\right],$$

(gde zagrada)

gde zagrada [ ] znači najveći ceo broj manji od argumenta. Relacije (1) i (1a) daju vezu izmedju odgovarajućeg cifre broja S i cifara A_j^i broja $F(x_j)$, kao i obratno.

Izloženi postupak je samo jedna od mnogih mogućnosti na koje sve načine možemo obrazovati matematičke spektre. U praksi se upotrebljavaju tzv prugasti spektri, koji se lakše obrazuju i koji su ograničeni na odredjene klase brojeva.

3. <u>Spektar niza celih pozitivnih brojeva.-</u> Neka je dat niz celih pozitivnih $\{N_k\}$ brojeva. U tom slučaju pomoćna funkcija $F(x)$ nije potrebna. Označimo sa h_k i_k dva cela pozitivna broja od kojih broj i_k neka pretstavlja broj cifara broja N_k. Da bi obrazovali prugasti spektar za niz brojeva $\{N_k\}$ potrebno je obrazovati prethodno spektralni niz brojeva $\{G_k\}$ tako, da svako G_k sadrži h_k cifara od kojih krajnje cifre predstavljaju sve cifre broja N_k napisane istim redom, a ispred svih stoje nule čiji je broj h_k-i_k .

Decimalni broj

$$S = G_o, G_1 G_2 G_3 G_4 \dots ,$$

ili ceo broj

$$S = G_o G_1 G_2 G_3 G_4 \dots ,$$

koji se obrazuje jednostavnim ispisivanjem članova niza G_k , sa decimalnim zarezom ili bez njega, naziva se prugastim matematičkim spektrom.

Iz samog načina obrazovanja prugastih matematičkih spektara niza pozitivnih celih brojeva vidi se da oni zadovoljavaju opštu definiciju matematičkih spektara.

(Kada prugasti)

X Kada prugasti spektar S podelimo u grupe od po h_k cifara sleva na desno od decimalnog zareza za slučaj decimalnog broja, odnosno, s desna ~~xx~~ u levo za slučaj celog broja, dobićemo pojaseve prugastog spektra. Broj h_k nazivamo ritmom spektra.

Ritam spektra odredjuje se relacijom

$$h_k = F(k)$$

ili na neki drugi način, rekurentno, iterativno ili nekim drugim postupkom.

Kada je

$$h_k = h = \text{const.}$$

kažemo da je ritam uniforman, a kada je

$$h_k = h + ck ,$$

gde je c ceo pozitivan broj, kažemo da je ritam jednako ubrzan. Ritam može biti ubrzano ubrzan itd.

Za spektralni ritam kaže se da je saglasan sa nizom $\{N_k\}$ kada je $h_k \geq i_k$, za svako k, a za niz se kaže da dopušta spektralni ritam h_k.

Kada se neka funkcija razvije u red

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots ,$$

i kada su koeficijenti a_i celi ograničeni pozitivni brojevi, onda se za ovu funkciju može obrazovati prugasti spektar na pokazani način. U tom slučaju spektar S funkcije f(x) može se takodje dobiti kada se stavi da je $x = 10^{-h}$, pa je

$$S = f(10^{-h}) ,$$

gde je h uniformni ritam saglasan sa nizom koeficijenata a_i

(4. Obrnuti)

4. Obrnuti (inverzni) spektar i pomereni spektar.-

Ponekad je potrebno obrazovati spektar konačnog niza celih pozitivnih brojeva $\{G_k\}$

$$S_1=G_m\dots G_2G_1G_0$$

čiji pojasevi idu obrnutim redom od spektra

$$S=G_0G_1G_2\dots G_m \quad .$$

Spektar S_1 naziva se obrnutim (inverznim) spektrom u odnosu na spektar S.Neka je dat polinom

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m \quad ,$$

čiji su koeficijenti celi pozitivni brojevi,a h uniformni ritam saglasan sa koeficijentima a_i.Polinom P(x) imaće za obrnuti spektar broj

$$S_2=P(10^h) \quad .$$

Neka je dat spektar

$$S_3=G_0,G_1G_2\dots G_m$$

i kada ovaj pomnozimo sa 10^{mh} dobicemo ceo broj

$$S=G_0G_1G_2\dots G_m \quad .$$

Za broj S kažemo da je pomereni spektar u odnosu na spektar S_3. Iz toga sledi,da pomereni spektar polinoma m-tog stepena,sa celim pozitivnim koeficijentima i uniformnim ritmom h,ima vrednost /13/

$$S=10^{mh}P(10^{-h}) \quad .$$

(5.Jedinični spektar)

5. <u>Jedinični spektar.</u>- Spektar sastavljen od niza $\{a_i = 1\}$ sa uniformnim ritmom h nazivamo jediničnim spektrom.
Za i=4 i h=3 biće

$$S = 1001001001.$$

6. <u>Razredjeni spektar.</u>- Kada se izmedju članova niza celih pozitivnih brojeva $\{a_i\}$ ubace <u>0</u> na pojedinim mestima dobićemo nov niz $\{b_k\}$. Spektar obrazovan od niza brojeva b_k sa uniformnim ritmom h zovemo razredjenim spektrom.

Neka je dat niz brojeva

$$3, 11, 0, 17 .$$

Kada ubacimo nule na drugom i četvrtom mestu (sleva na desno) dobićemo niz brojeva

$$3, 0, 11, 0, 0, 17 .$$

Razredjeni spektar sa ritmom h=3 biće

$$S = 3000011000000017.$$

I jedinični spektri mogu biti razredjeni. Neka je dat niz

$$1, 1, 1 .$$

Razredjeni spektar ovog niza na trećem i četvrtom mestu sa ritmom h=2 biće

$$S = 101000001 .$$

7. <u>SPEKTRI NIZA CELIH, različito označenih, brojeva i odredjivanje niza kada je dat spektar.</u>- Kada je dat niz celih brojeva $\{a_i\}$ različito označenih, možemo obrazovati dva spektra. Spektar S_1 neka sadrži pozitivne brojeve niza a_i i nule na mestima gde su bili negativni članovi niza.

(Drugi)

Drugi spektar S_2 neka sadrži apsolutne vrednosti negativnih clanova niza $\{a_i\}$ i nule na mestima gde su se nalazili pozitivni članovi. Oba spektra obrazujmo na isti način uniformnim ritmom $h > i_k$, gde smo sa i_k označili broj cifara najvećeg po apsolutnoj vrednosti člana a_i datog niza. Možemo razlikovati dva slučaja:

I) Kada je $S_1 > S_2$, neka je

$$S = S_1 - S_2 \quad \text{i}$$

II) kada je $S_1 < S_2$, neka je

$$S = -(S_2 - S_1) = S_1 - S_2 .$$

U I) slučaju spektar različito označenih celih brojeva je pozitivan, a u II) slučaju negativan broj.

Spektar S može se i direktno obrazovati iz datog niza brojeva a_i /20/.

Za spektre niza celih, različito označenih brojeva uvedeni su termini: <u>nominalna, popravljena i efektivna vrednost pojasa.</u> Nominalna vrednost pojasa je broj koji stoji u odgovarajućem pojasu. Popravljena vrednost pojasa jednaka je nominalnoj vrednosti, ako sledeći pojas počinje malom cifrom (od 0 do 4), ili nominalnoj vrednosti povećanoj za 1 ako sledeci pojas počinje velikom cifrom (od 5 do 9). Efektivna vrednost pojasa jednaka je popravljenoj vrednosti ako ova počinje sa malom cifrom, ili komplementu do 10^h popravljene vrednosti sa znakom " – " kada popravljena vrednost pocinje velikom cifrom. Sve ovo važi kada je spektar pozitivan. Kada je spektar negativan važe slična pravila.

Neka je na primer

S = 5/77/83/42/37/

i h=2.

(Nominalne vredn.)

Nominalne vrednosti pojaseva su

5, 77, 83, 42, 37, ,

popravljene vrednosti pojaseva su

6, 78, 83, 42, 37 ,

a efektivne vrednosti pojaseva su

6, -22, -17, 42, 37 .

Da je bilo

S = -577834237

efektivne vrednosti pojaseva bile bi

-6,22,17,-42,-37

Kada se ima ovo u vidu uvek je moguće direktno obrazovati iz datog niza

-23, 2, -57, 0, 14 ,

sa ritmom h=3 spektar

S = 22998056999986 ,

kao i obratno iz spektra S, sa ritmom h=3, direktno dobiti niz

-23, 2, -57, 0, 14 .

Prema načinu obrazovanja spektra niza celih,različito označenih brojeva sledi da će svakom nizu odgovarati samo jedan spektar,kao i obratno svakom spektru samo jedan niz. Tom prilikom treba imati uvek na umu da za S>0 pojas koji odgovara negativnom članu niza počinje sa velikom cifrom, a za S<0 obratno malom cifrom.

8.- <u>Spektar polinoma.-</u> Pod spektrom uredjenog polinoma podrazumevaćemo spektar niza njegovih koeficijenata, koji mogu biti celi, pozitivni ili negativni brojevi.

(Za obrazovanje)

Za obrazovanje spektra polinoma važe prethodna pravila, koja važe za obrazovanje spektra niza celih, različito označenih brojeva.

Kada je

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 5x + 6$$

za h=2, biće

$$S = 199929506 \quad .$$

Pored običnog spektra polinoma u praksi upotrebljavamo i spektar polinoma popravljenog na svim parnim mestima /21/, koji kratko nazivamo popravljeni spektar polinoma. Popravljeni spektar polinoma $\bar{S}$ obrazujemo na sledeći način:

Polinom P(x) uredimo po opadajućim stepenima od x. Zatim, računajući sleva na desno obrazujemo polinom Q(x) sa promenjenim znacima na svakom parnom mestu (drugom, četvrtom, šestom itd.). Spektar polinoma Q(x) biće popravljeni spektar polinoma P(x). Neka je

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 5x + 6 \quad ,$$

biće

$$Q(x) = 2x^4 - 7x^4 + 5x + 6 \quad ,$$

pa je za h=2

$$\bar{S} = 199930506 \quad .$$

Iz načina obrazovanja popravljenog spektra polinoma sledi da je

$$\bar{S} = (-1)^m P(-10^h) \quad ,$$

gde je m stepen polinoma,

Popravljeni spektar polimoma može se dobiti i direktno iz spektra polinoma na sledeći način:

(Treba)

Treba od parnih pojaseva oduzeti dvostuku efektivnu vrednost tog pojasa.

U našem slučaju biće

$$
\begin{array}{rl}
S = & 199929506 \\
 & \quad\;\; -0 \; +10 \\
\hline
\bar{S} = & 199930506 \quad .
\end{array}
$$

Na isti nacin iz popravljenog spektra polinom dobija se običan spektar polinoma.

Sledi da je

$$
\begin{array}{rl}
\bar{S} = & 199930506 \\
 & \quad\;\; -0 \; -10 \\
\hline
S = & 199929506 \quad .
\end{array}
$$

Slično obrazovanju spektra polinoma sa jednom promenljivom,mogu se obrazovati spektri algebarskih jednačina, kao i spektar linearnog polinoma sa više promenljivih.

9. Spektri brojeva koji nisu celi i spektri funkcija.- Opšti način obrazovanja spektara ma kakvih brojeva koje je dao M.Petrović, kao što smo videli nije davao prugaste spektre a u praksi se za računanje koriste prugasti spektri. Obrazovanje prugastih spektara brojeva koji nisu celi bilo je moguće preko izvesne transmutacije /1/, kojom se prvobitni niz brojeva prethodno pretvarao u niz celih brojeva iz koga se zatim obrazovao prugasti spektar. U radu /17/ pokazan je način neposrednog obrazovanja spektra (sa konstantnim ritmom h) brojeva koji nisu celi. To je uvek moguće kada je niz brojeva $\{a_j\}$ sastavljen iz ma kakvih brojeva, ali njihov skup mora biti konačan i mora se unapred znati zakon na osnovu koga se ovi brojevi mogu obrazovati.

(a,Spektri)

a) <u>Spektri niza ma kakvih pozitivnih brojeva.-</u>

Neka je dat niz pozitivnih konačnih ili beskonačnih decimalnih brojeva čiji je skup konačan,

$$a_j = \dots\dots,\dots A_j^i \dots \quad , \quad (j = 1,2,\dots,K) \quad ,$$

gde A_j^i pretstavlja i-tu cifru broja a_j. Označimo sa r maksimalan broj cifara celog dela brojeva a_j. Kako su brojevi a_j različiti medjusobom zaustavimo se na p-to decimalu tako da je razlika izmedju svih brojeva a_j bar dve jedinice na p-tom decimalnom mestu.

Obrazujmu broj S prema relaciji

$$S = a_1 + a_2.10^{-h} + a_3.10^{-2h} + \dots + a_k.10^{-(1-1)h} \quad ,$$

gde je ritam

$$h = r + p + 2 \, .$$

Broj S sadržava sve decimale brojeva a_j, ali će njihove decimale biti pomešane u broju S, bilo da a_j sadrži konačno ili beskonačno mnogo decimala. Prema tome, kada broj S podelimo u pojaseve od po h cifara j-ti pojas neće prestavljati u opštem slučaju broj a_j. Medjutim, broj S će, prema definiciji spektra, prestavljati spektar niza a_j ako zadovoljava sledeća tri uslova:

1. da se iz niza a_j može obrazovati broj S i da se iz broja S može odrediti niz a_j ;

2. da se utvrdjeni spektralni ritam h niz a_j ima samo jedan spektar S ;

3. da spektru S koji dopusta ritam h odgovara samo jedan niz a_j .

(Iz izloženog)

Iz izloženog načina obrazovanja broja S sledi da je drugi uslov zadovoljen. Prvi i treći uslov biće zadovoljeni ako možemo da odredimo postupak za obrazovanje niza $\{a_j\}$ iz broja S tako da ovi uslovi budu zadovoljeni.

Neka je dat spektar S koji dopušta uniformni ritam h, i neka ovaj broj pretstavlja spektar niza ma kakvih pozitivnih brojeva $\{a_j\}$ Prema učinjenoj pretpostavci za niz brojeva $\{a_j\}$ znamo da je on konačan i unapred znamo zakon na osnovu koga se mogu obrazovati članovi ovoga niza. To nam daje mogućnost da načinimo tablicu brojeva datog oblika. Uporedjujući načinjenu tablicu sa brojem S tražimo u njoj broj koji sadrži r celih cifara i p prvih decimala broja S. Tako se nalazi prvi broj niza a_1. Kada se takav broj ne može da nadje onda broj S ne može da pretstavlja spektar brojeva datog oblika.

Drugi broj a_2 nalazi se na isti način kao i prvi ali sada iz novog spektra S_1

$$S_1 = (S-a_1).10^h = a_2+a_3.10^{-h} +\ldots+ a_k.10^{-(k-2).h} \quad .$$

Traženje ostalih članova vrši se iz novih (redukovanih) spektara S_2, S_3, ... itd.,koji se obrazuju sukcesivno, analogno obrazovanju spektra S_1. Na taj način, pokazano je kako se iz se iz spektra S dobija niu $\{a_j\}$. Iz izloženog postupka sledi da je prvi i treći uslov zadovoljen.

Ova metoda /17/ pretstavlja generalizaciju postupka obrazovanja prugastih matematičkih spektara koji je dao M.Petrović.

b) <u>Spektri niza ma kakvih brojeva,pozitivnih i negativnih.</u> Slično obrazovanju spektra niza različito označenih celih brojeva može se na osnovu prethodno izloženog postupka pod a) za

(obrazovanje)

obrazovanje spektra niza ma kakvih pozitivnih brojeva, dati postupak za obrazovanje spektra niza ma kakvih, različito označenih brojeva pod uslovom da je njihov skup konačan a oblik unapred dat.

Neka je dat niz ma kakvih različito označenih brojeva

$$a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, -a_6 \quad ,$$

za koji vrede prethodna ograničenja,

Iz ovoga niza mozemo obrazovati dva spektra. Prvi spektar S_1 obrazujemo od niza pozitivnih brojeva i nula na mestima gde su stajali negativni brojevi tj. od niza

$$a_1, a_2, 0, a_4, 0, 0 \quad .$$

Drugi spektar S_2 obrazuje se od niza

$$0, 0, a_3, 0, a_5, a_6 \quad ,$$

tj. od apsolutnih vrednosti negativnih članova i nula na mestima gde su stajali pozitivni članovi.

r i p imaju isto značenje kao i pod a) samo se sada brojevi a_j razlikuju bar za tri jedinice p-tog decimala. Formula za uniformni ritam ostaje ista, tj.

$$h = r + p + 2 \quad .$$

Spektar niza a_j biće

$$S = S_1 - S_2 \quad .$$

Prema načinu obrazovanja broja S vidimo da je drugi uslov zadovoljen. Ostaje, da se odredi način kako se iz broja S može jednoznačno naći niz a_j, kako bi prvi i treći uslov bili ispunjeni.

(Broj S,)

Broj S, prema načinu na koji se odredjuje, može da bude pozitivan ili negativan broj. Uzmimo u razmatranje slučaj kada je on pozitivan. Za slucaj kada je S negativan broj odredjujemo niz $\{a_j\}$, tako da prvo nadjemo niz za minus S, a zatim svakom članu promenimo predznak.

Kao i u prethodnom slučaju načinimo tablicu brojeva datog oblika. U toj tablici tražimo broj koji je jednak celom delu i p decimala broja S, ili koji je za jednu jedinicu p-tog decimala veći ili za jednu jedinicu p-tog decimala manji. Tako nadjeni broj uzima se za prvi broj a_1 traženog niza. Ovom prilikom mogu nastupiti tri slučaja:

$$a_1 = S \,, \qquad a_1 \quad S \,, \qquad a_1 \quad S \,.$$

U prvom slučaju niz je sastavljen samo iz jednog člana i postupak je završen. U drugom slucaju sledeći član a_2 je takodje pozitivan i njegovo se traženje vrši na način izložen pod a). U trećem slučaju idući član je negativan i da bismo odredili njegovu apsolutnu vrednost uzima se redukovani spektar

$$S_1 = S - a_1 .10^h \,.$$

Traženje ove apsolutne vrednosti vrši se na isti način kako se to cinilo pod a). Kada je a_2 negativno i

$$a_2 \quad S_1 \,,$$

biće sledeći član a_3 suprotnog znaka tj. pozitivan, jer je ispred njega bio negativan. U opštem slučaju za

$$a_j \quad S_{j-1} \,,$$

bice a_{j+1} suprotnog znaka od a_j, pa ce redukovani spektar biti

$$S_j = S_{j-1} - (a_j) .10^h \,.$$

(kada je)

Kada je

$$a_j \quad S_{j-1} \quad .$$

biće a_{j+1} istog znaka kao i a_j .

Postupak za odredjivanje članova niza $\{a_j\}$ vrši se u koracima sve dok se ne izračunaju svi članovi a prema izloženom postupku koji je u suštini analogan prethodnom.

Radi ilustracije ove metode izložiću jedan primer.

Neka je dat spektar niza ma kakvih različito označenih brojeva

$$S = 0,234582342521 \quad .$$

Odrediti niz a_j kada se zna da je ritam h jednak 4($h=4$) i da brojevi a_j imaju sledeće osobine: ceo deo je 0, prva decimala je 2, a treća i četvrta, svaka za sebe, je za jedinicu veća od prethodne decimale, peta i sve ostale su jednake četvrtoj.

Tablica brojeva ovog oblika biće

$$0.201\dot{2}$$
$$0.212\dot{3}$$
$$0.223\dot{4}$$
$$0.234\dot{5}$$
$$0.245\dot{6}$$
$$0.256\dot{7}$$
$$0.267\dot{8}$$
$$0.278\dot{9}$$

Uporedjujući broj S sa brojevima iz ove tablice vidimo da će prvi član biti

$$a_1 = 0.234\dot{5} \quad .$$

(Kako je a_1)

Kako je a_1 S, to je

$$S_1 = (S-a_1).10^4 = 0.2678676\dot{5}$$.

Uporedjujući dalje tablicu sa brojem S_1 zaključujemo da je

$$a_2 = 0.267\dot{8}$$.

Kako je a_2 S_1, sledeći član biće negativan, pa je

$$S_2 = S_1-a_2 .10^4 = 0.212\dot{3}$$.

Prema tome je

$$a_3 = -0.212\dot{3}$$.

$S_3 = 0$ što znači da je postupak završen.

Obrnuto, neka je dat niz

$$a_1 = 0.234\dot{5}$$

$$a_2 = 0.267\dot{8}$$

$$a_3 = -0.212\dot{3}$$

čiji članovi pripadaju gornjoj tablici.

Odrediti prugasti spektar za dati niz brojeva.

Vidimo da se na drugom decimalnom mestu brojevi datog niza razlikuju bar za tri jedinice. Zato možemo staviti da je

$h = r+p+2 = 0+2+2 = 4$. Dalje je

$$S_1 = 0.23458234444\dot{4}$$

$$S_2 = 0.00000000212\dot{3}$$.

pa je

$$S = S_1-S_2 = 0.23458234232\dot{1}$$.

(o Spektri funkc.)

e) <u>Spektri funkcija.-</u> Prema teoriji matematičkih spektara, spektrom funkcije zove se spektar koeficijenata Mac-Laurin-ovog reda u koji se funkcija prethodno razloži:

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \dots \quad .$$

Ako koefijenti ovog razvoja zadovoljavaju prethodne uslove i dopuštaju ritam h biće moguće obrazovati prugasti spektar S

$$S = a_0+a_1.10^{-h}+a_2.10^{-2h}+a_3.10^{-3h}+ \dots \quad ,$$

koji predstavlja spektar date funkcije f(x).

10. <u>Primena prugastih matematičkih spektara.-</u> Pojam spektra može da se dovede u usku vezu sa elementima koji odredjuju neku funkciju. Naime, može da se obrazuje broj S u kome se eksplicitno pojavljuju vrednosti ovih elemenata. Zato spektri pored ostalog, mogu igrati ulogu korisnog instrumenta u računanju. Naročito prugasti matematički spektri našli su svoju primenu u algebri, analizi, numeričkoj analizi, teoriji verovatnoće i teoriji funkcija.

Opšti postupak u spektralnoj metodi je da se iz datih podataka b_k u problemu, a posle izvesnih razmišljanja i računanja obrazuje prugasti spektar S, iz koga se ~~xxxx~~ tada može dobiti odgovor na više načina. Prvo, svaki pojas može da da odgovor na po jedno postavljeno pitanje. Drugo samo neki od pojaseva, ili samo jedan, mogu da pruže odgovor na postavljena pitanja. Treće, svaki pojas može da da odgovor na po jedno postavljeno pitanje sa "da" odnosno "ne". Ovo se konkretno može ilustrovati sa sledećim primerima:

(Primer 1.)

__Primer 1.__- Traži se proizvod polinoma

$$P_1(x) = x^3-14x^2+6 \quad i \quad P_2(x) = x^2-27x-32 \quad .$$

Kada ritam odredimo pomocu indikatorskog broja /21/ koji za ovaj slučaj iznosi

$$i = 2m\ a\ b = 6\ 14\ 32 = 2688 \quad .$$

sledi da je h = 4, pa je

$$S = 998600000006 \quad i \quad S_2 = 99729968 \quad ,$$

odnosno

$$S = S_1\ S_2 = 995903460455983798O8 \quad .$$

Prema tome je

$$P(x) = P_1(x).P_2(x) = x^5-41x^4+346x^2-454x^2-162x-192 \quad .$$

Ovde je svaka pruga od S dala odgovor tj. odredila po jedan koeficijenat.

__Primer 2.__- Treba izračunati

$$\frac{121}{206}-\frac{17}{84} \quad .$$

Indikatorski broj je

$$i = 4\ 206\ 84 = 69216 \quad ,$$

pa je h = 5.

Dalje je

$$S_1 = 12100206 \ ; \quad S_2 = 1699916 \quad ,$$

i

$$S = S_1\ S_2 = 20569333782696 \quad .$$

(Interesantno je podvuci da iako se razlomci oduzimaju njihovi se spektri množe.)

) (Ovde poslednje)

Ovde poslednje dve pruge -6662 i -17304 daju traženi odgovor. Sledi da je

$$\frac{121}{206} - \frac{17}{84} = \frac{6662}{17304} \quad .$$

<u>Primer 3.-</u> Broj

$$S = \frac{1}{9_2} + \frac{1}{9_4} + \cdots + \frac{1}{9_{200}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{9_4}{9.9_2} \quad ;$$

gde 9_i označava broj sastavljen iz "i" devetki, daje odgovor na pitanje koji su brojevi manji do 100 prosti na sledeći način: kada se S napiše u obliku decimalnog broja

/02

S= 0,/00/00/00/01/00/02/00/01/02/00/04/00/02/02/03/00/04/ ...

i podeli u pojaseve sa ritmom h=2, tako da rangu pojasa k odgovara po jedan broj prirodnog niza od 1 do 100, svakom pojasu koji se sastoji samo iz nula odgovaraće prost broj (jedinica se ovde uzima kao prost broj), a onaj koji nije sastavljen od samih nula složeni broj.

Iz ovog spektra se vidi da su brojevi 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 prosti. Ovo je primer za spektar koji na postavljena pitanja svojim pojasevima odgovara sa "da" i "ne".

G L A V A   D R U G A

OPŠTI POGLED NA SPEKTRALNU METODU

Prugasti matematički spektri i spektralna metoda.-

Matematički spektri svode proučavanje izvesnih funkcija (ili opštije svake funkcije odredjene izbrojivim uslovima) na proučavanje jednog broja S /3/. Pokazano je da je teorija matematičkih spektara, i na osnovu nje stvorena spektralna metoda, dovoljno elastična i plodna u primenama. Spektri se ne primenjuju danas samo za aritmetisiranje nekih rešenih problema, već se pomoću njih mogu rešiti i takvi koji se na drugi način ne mogu rešiti.

Uniformni prugasti matematički spektar S je broj (decimalan ili ceo) koji se može podeliti na delove (pojaseve) od po h cifara koji odredjuju brojeve a_i. Spektralna metoda treba da nam pruži mogućnost da odredimo broj S, odnosno svako a_i iz datih brojeva b_k i celog pozitivnog broja h pomoću relacije

(2) $$S = f(b_k, h) = F(h),$$

gde smo sa f označili niz operacija koje treba izvršiti nad b_k i h.

(Da bi spektral.

Da bi spektralna metoda bila primenljiva /22/ potrebno je da budu ispunjeni uslovi:

1) unapred treba da znamo da su nepoznate a_i celi pozitivni brojevi,

2) da smo u stanju da iz datih veličina b_k i uslova problema odredimo ceo pozitivan broj $\underline{h}$ (ritam spektra) saglasan sa nizom brojeva a_i,

3) da su nam odredjene operacije f koje treba obaviti da bi smo dobili spektar S.

Opšti način obrazovanja spektara ma kakvih brojeva koje je dao M.Petrović /9/ daje spektar koji nije prugast i koji se ne koristi u primeni. Postoje više načina na koji se mogu obrazovati matematički spektri. Nas će interesovati samo prugasti matematički spektri sa konstantnim ritmom $\underline{h}$.

Uslove 1), 2), 3) teško je zadovoljiti. Stoga uslov da a_i budu celi brojevi, doveo je do potrebne da se prvo niz brojeva b_k , gde b_k bile da su celi ili nisu celi, pomoću izvesne transmutacije pretvori u nov niz tako da bi tražene brojeve a_i pretvorili u nove brojeve c_i koji su celi. U tom slučaju broj S predstavlja direktno spektar niza $\{c_i\}$ ali pošto bi se iz tog niza mogao dobiti niz $\{a_i\}$ to bi broj S na posredan način predstavljao niz brojeva a_i .

Kasnije, /17/ i /20/ pokazano je da se mogu obrazovati spektri i od niza ma kakvih celih brojeva (pozitivnih ili negativnih), kao i onih koji nisu celi pod uslovom da je taj niz brojeva datog oblika, tj. mora unapred biti poznat zakon na osnovu koga se ovi brojevi koji nisu celi mogu obrazovati. Na taj način, prvi uslov je bio ublažen.

(Treći uslov)

Treći uslov u primeni ne donosi mnogo teškoća, ali drugi uslov, odredjivanje saglasnog ritma <u>h</u> zadaje mnogo teškoća, jer ne postoji zadovoljavajuci postupak kojim bi se precizirao ritam <u>h</u> u opštim problemima analize.

M.Petrović bavio se spektrima više od 20 godina i jedini je do 1932 godine objavljivao radove iz ove oblasti. U tom prvom periodu razvoja matematičkih spektara odredjivanje ritma <u>h</u> nije zadavalo suviše teškoća. Spektralna metoda tretirana je kao teorijska metoda sa ciljem da se samo pokaže kako je moguće da se jedan algebarski i analitički postupak transformiše u čisto aritmetički, bez pretenzija da bude iskorišćen u numeričkim izračunavanjima, odnosno u numeričkoj analizi.

Docnijim radovima /13/, /14/, /15/, /19/ i /21/ zasnovan je nov način primene matematičkih spektara i tada se pokazalo da su najveće teškoće za njihovu primenu proizilazile iz odredjivanja ritma <u>h</u>. To je 1957 godine dovelo K.Orlova /22/ na ideju da uvede pseudospektre (matematičke akorde) kod kojih ritam nije bio unapred odredjen, već se postepeno odabirao u koracima.

G L A V A   T R E Ć A

PSEUDOSPEKTRI I NJIHOVA PRIMENA

Definicija 1.- Pseudospektar.- Pod pseudospektrima podrazumevamo brojeve S_j formirane pomoću relacija

(3) $\quad S_j = f(b_k, h_j) = F(h_j).x \quad (j=1,2,..)...$

gde f ima isto značenje kao u prethodnoj glavi, u relaciji (2), a $h_1, h_2, h_3, ...$ su celi rastuci pozitivni brojevi.

Spektralna metoda sa primenom pseudospektara sastoji se u tome da se iz sukcesivnog medjusobnog uporedjivanja brojeva S_1, S_2, S_3... dobije izvestan broj trazenih nepoznatih a_i.Postupak se nastavlja dotle dok svi a_i ne budu na taj način odredjeni.

Pomoću ove metode u principu će uvek biti moguće da se odredi konačno mnogo nepoznatih a_i, što je u saglasnosti sa principom numeričke analize.

Kako h_j u svakom koraku raste, pseudospektar S_j postaće spektar S tek kada je $h_j \geqslant h$ dovoljno veliko tj. saglasno sa nizom brojeva a_i koga tražimo. To znači, da kada podelimo pseudospektar na pojaseve širine $h_j < h$, pojasevi neće odredjivati sve a_i jer će cifre u izvesnim pojasevima biti na neki način medjusobno izmešane. Razlika izmedju pseudospektara i spektara je u tometome što će za izvesno h_k pseudospektar odredjivati samo neke od brojeva a_i, dok će cifre od preostalih a_i biti delimično ili potpuno pomešane.

(Primena)

Primena pseudospektara je neizbežna sa teorijskog gledišta u problemima kod kojih nismo u stanju da nadjemo formulu za odredjivanje saglasnog ritma h .

S prakticnog gledista ona je neizbežna i u slučaju kada formula za h odredjuje isuviše veliki, prakticno neprihvatljiv broj.

Kao što spektre delimo u pojaseve i pseudodpektre delimo u pojaseve od po h_j cifara i govorimo o efektivnoj vrednosti ovih pojaseva potpuno analogno kao i kod spektara. Čistim pojasom pseudospektara zovemo onaj pojas koji sadrzi cifre samo jednog a_i (gde cifre nisu izmešane sa ciframa nekog drugog a_j), u protivnom slučaju pojasevi nisu čisti.

Osnovna teorema u metodi pseudospektara je sledeća:

Teorema 1. Kada problem daje dva pseudospektra, obrazovana sa dva uniformna različita ritma, koji imaju k prvih efektivnih vrednosti pojaseva jednakih, ovi pojasevi predstavljaće k prvih članova traženog niza a_i pozitivnih celih brojeva.

Teorema 1 daje potrebne i ~~dovoljne i~~ dovoljne uslove kada su a_i celi i pozitivni brojevi /22/. U protivnom slučaju kada su a_i celi (pozitivni ili negativni brojevi) ili razlomci, uslovi su samo potrebni. Da bi bili u stanju da odredimo i ~~xx~~ u ovom slučaju brojeve a_i potrebni su dopunski uslovi. Ovi dopunski uslovi mogu biti veoma različiti i o njima je moguće govoriti samo u konkretnim slučajevima.

Kako bi kasnije mogli uočiti razliku izmedju primene pseudospektara i modifikovanih pseudospektara, tj. kako bi mogli imati što bolji uvid u potrebu uvodjenja modifikovanih pseudospektara izložiću ukratko postupak /22/ za rešavanje

(obične)

obične diferencijalne jednačine prvoga reda primenom pseudospektara.

Neka je potrebno naći partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda, sa početnim uslovima $y=y_o$ za $x=x_o$, za diferencijalnu jednačinu

$$(4) \qquad y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(x,y)$$

gde je $Q(x_o,y_o) = 1$, P i Q polinomi po x,y, čiji su koeficijenti celi brojevi.

Napomenimo, da se svaka racionalna funkcija $\psi(x,y)$ sa celim koeficijentima, pod uslovom da su x_o, y_o, celi brojevi, može elelmentarnim transformacijama redukovati na oblik (4).

Da bi omogućili primenu pseudospektara potrebno je prvo naći funkcije oblika (3). Za to će nam biti dovoljno da analiziramo analitički postupak aproksimiranja integrala diferencijalnih jednačina /15/, kao što je to u radu /22/ uradjeno.

Polazimo od diferencijalne jednačine

$$y' = \varphi(x,y),$$

i obrazujemo izraz oblika

$$y = y_o + \int_{x_o}^{x} \varphi(x,y_o)\, dx \quad ,$$

zatim razvijamo integrand po Tajlorovoj formuli, zadržavamo jedan član, odbacujemo ostatak $R_1(x)$ i realizujemo integraciju. Na taj način dobijamo prvu aproksimaciju

$(y_1=y_o+)$

$$y_1 = y_o + \int_{x_o}^{x} \overrightarrow{\varphi(x,y_o)}^{1} dx = y_o + \int_{x_o}^{x} \left[b_1 + \overrightarrow{R_1(x)}\right] dx$$

(5) $$y_1 = y_o + b_1 (x - x_o)$$

pri čemu oznaka " $\xrightarrow{\quad\quad} 1$ " znači odbacivanje $R_1(x)$ u izrazu $\varphi(x,y_o)$, a " $\longrightarrow$ " označava odbacivanje celog izraza. Analogno dobijamo dalje aproksimacije, tako da možemo pisati da je

$$y_i = y_o + \int_{x_o}^{x} \overrightarrow{\varphi(x,y_{i-1})}^{i} dx = y_o + \int_{x_o}^{x} \left[b_1 + b_2(x-x_o) + \ldots + b_i(x-x_o)^{i-1} + \overrightarrow{R_i(x)}\right] dx$$

$$y_i = y_o + b_1(x-x_o) + \frac{b_2}{2}(x-x_o)^2 + \ldots + \frac{b_i}{i}(x-x_o)^i .$$

Za slučaj $x_o = 0$ rešenje će biti oblika

(6) $$y = y_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i} x^i .$$

Učinimo još jednu pretpostavku. Neka su y_o i koefijcenti razvoja funkcije $(i-1)! \varphi(x,y_{i-1})$ u Tajlorov red do ~~kkog~~ i-tog člana celi brojevi.

U analitičkoj metodi za rešavanje postavljenog problema bilo je potrebno nalaženje tri vrste funkcija po x

		y_o
$\varphi(x,y_o)$	$\overrightarrow{\varphi(x,y_o)}^{1}$	y_1
$\varphi(x,y_1)$	$\overrightarrow{\varphi(x,y_1)}^{2}$	y_2
$\varphi(x,y_2)$	$\overrightarrow{\varphi(x,y_2)}^{3}$	y_3

. . . .

(Za uspostavljanje)

Za uspostavljanje spektralne metode, zasnovane na prethodno izloženoj analitičkoj metodi, potrebno je naći odgovajuće brojeve umesto funkcija tj. odgovarajuće pseudospektre i postupak kako se iz ovih pseudospektara mogu da odrede koeficijenti a_i. Označimo sa s_i pseudospektre koji odgovaraju vrednostima y_i, a sa $\bar{S}_i$ pseudospektre koji odgovaraju funkcijama $(i-1)!\psi(x, y_{i-1})$. Prema učinjenoj pretpostavci biće

$$(i-1)!\psi(x, \bar{y}_{i-1}) = (i-1)!(b_1+b_2x+b_3x^2+\dots+b_ix^{i-1}+R_i)$$

gde su koeficijenti b_i celi brojevi. Stavljajući da je $x=10^{-h}$ obrazujmo brojeve

$$(7)\quad S_i=(i-1)!\psi(10^{-h}, s_{i-1})=(i-1)!\left[b_1+b_2 10^{-h}+\dots+b_i 10^{-(i-1)h}+\right.$$
$$\left.R_i(10^{-h})\right], \qquad (i=1,2,3,\dots),$$

i

$$(8)\quad \bar{S}_i=(i-1)!\psi(10^{-h}, s_{i-1})=(i-1)!\left[b_1+b_2 10^{-h}+\dots+b_i 10^{-(i-1)h}\right],$$
$$(i=1,2,3,\dots),$$

$\bar{\bar{S}}_i$ pretstavljaće pseudospektre, koji će za dovoljno veliko h biti spektri prema definiciji spektara polinoma. Iz (7) i (8) sledi da je $\bar{S}_i$ u stvari broj S_i zaokrugljen na $(i-1)h$ prvih decimala.

Iz (6), (7) i (8) sledi da je

$$(9)\quad y_{i+1}=y_0+b_1x+\frac{b_2}{2}x^2+\dots+\frac{b_i}{i}x^i+\frac{b_{i+1}}{i+1}x^{i+1}=y_i+\frac{b_{i+1}}{i+1}x^{i+1},$$

gde je

$$(10)\quad b_{i+1}=\frac{\bar{\bar{S}}_{i+1}-i\bar{S}_i}{i!}\cdot 10^{+ih}, \qquad (i=1,2,3,\dots),$$

(i za)

i za a_{i+1} dobijamo formulu

(11) $$a_{i+1} = 10^{ih}(\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i), \quad (i=1,2,3,\ldots) .$$

Činjenica da je y_{i+1} zbir od y_i i $\frac{a_{i+1}}{(i+1)!} x^{i+1}$

daje vezu izmedju s_{i+1} i s_i

(12) $$s_{i+1} = s_i + \frac{\bar{S}_{i+1} - i\bar{S}_i}{(i+1)!} 10^{-h}, \quad (i=1,2,3,\ldots) .$$

Još treba postaviti formule za početne uslove. Za a_o i a_1 iz (6) i (8) sledi da je

(13) $$a_o = s_o = y_o \quad i \quad a_1 = \bar{S}_1 ,$$

pa je

(14) $$s_1 = s_o + 10^{-h} \bar{S}_1 .$$

Obrasci (11), (13) i (14) dovoljni su da se odredi svako a_i do željenog ranga, iako je ritam $\underline{h}$ ostao neodredjen. Primenom pseudospektara izračunavamo prvo dva broja $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$ iz (7) za dva različita ritma $(h_2 > h_1)$. Kada oni prema teoremi za uporedjivanje daju istu vrednost za a_i, postupak ćemo smatrati završenim. U protivnom slučaju izračunava se treći pseudospektar $\bar{S}_3$ sa većim ritmom h_3 $(h_3 > h_2)$ i ponovi uporedjivanje. Kada i ovaj pseudospektar ne daje zadovoljavajuće rezultate, nastavljamo sa izračunavanjem novih pseudospektara sve dok ne dodjemo uporedjivanjem do željenog a_i. Kao što je bilo prethodno rečeno pseudospektre $\bar{S}_i$ dobijamo zaokrugljivanjem brojeva S_i na $(i-1)h$ prvih decimala.

(Nastaviće se)

Uzećemo jedan primer gde je moguće naći i analitičko rešenje kako bi mogli uporediti rezultat dobiven primenom pseudospektara sa onim koji se dobija iz analitičkog rešenja.

Neka je

$$y' = x+y \quad .$$

Traži se partikularno rešenje za početne uslove $x_o=0$ i $y_o=1$.

Biće:

$S_1^{(1)}=0!\varphi(10^{-1};1)=0,1+1=1,1$ $\quad \bar{S}_1^{(1)}=1$ $\quad s_1^{(1)}=1,1$

$S_1^{(2)}=0!\varphi(10^{-2};1)=0,01+1=1,01$ $\quad \bar{S}_1^{(2)}=1$ $\quad s_1^{(2)}=1,01$

$S_2^{(1)}=1!\varphi(10^{-1};1,1)=0,1+1,1=1,2$ $\quad \bar{S}_2^{(1)}=1,2$ $\quad s_2^{(1)}=1,11$

$S_2^{(2)}=1!\varphi(10^{-2};1,01)=0,01+1,01=1,02$ $\quad \bar{S}_2^{(2)}=1,02$ $\quad s_2^{(2)}=1,0101$

$S_3^{(1)}=2!\varphi(10^{-1};1,11)=2(0,1+1,11)=2,42$ $\quad \bar{S}_3^{(1)}=2,42$ $\quad s_3^{(1)}=1,1103$

$S_3^{(2)}=2!\varphi(10^{-2};1,0101)=2(0,01+1,0101)=2,0402$ $\quad \bar{S}_3^{(2)}=2,0402$ $\quad s_3^{(2)}=1,01010033$

Prema (11) je

$$a_o = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = 2; \ \ldots$$

pa je

$$y = 1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+ \ \ldots$$

Analitičko rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y = 2e^x-x-1$$

koje kada razvijemo u Tajlorov red u blizini $x=0$ daje

$$y = 2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)-x-1 = 1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\cdots \quad .$$

GLAVA ČETVRTA

MODIFIKOVANI PSEUDOSPEKTRI

<u>Modifikacija pseudospektara.-</u> Kada rezimiramo ukratko spektralnu metodu sa primenom pseudospektara onda vidimo da su za njenu primenu bila potrebna samo dva uslova:

1. da unapred znamo da su a_i celi pozitivni brojevi,

2. da su nam odredjene operacije (3) koje treba obaviti da bi dobili pseudospektre, odnosno spektre, u zavisnosti od <u>h</u>, koje je ostalo neodredjeno.

Uvodjenjem pseudospektara K.Orlov učinio je ogroman korak unapred, u odnosu na ranije pomenuta tri uslova M.Petrovića, koja je bilo teško ispuniti zbog ritma <u>h</u>.

U problemima numeričke analise operiše se sa približnim brojevima zaokrugljenim na konačan broj vrednosnih cifara. Pored toga različite digitalne računske mašine(ručne,električne ili elekronske) podešene su za računanje sa zaokrugljenim brojevima,ili brojevima čiji je broj cifara ograničen. Prema tome, od velikog je interesa modifikovati pseudospektre tako da se mogu primeniti i u ovim slučajevima. Delimično to je uradjeno u mojim radovima /23/, /24/ i /26/. Ovim radom želim da problem postavim na širu osnovu, tj. da se uslov 1. proširi na slučaj kada su a_i zaokrugljeni brojevi.

(Mogućnost)

Mogućnost uvodjenja modifikovanih pseudospektara može se uočiti i iz primera izloženog u trećoj glavi. Nas interesuje problem šta će biti kada se koeficijenti $\frac{a_i}{i!}$ izraze kao približni (zaokrugljeni) brojevi na maksimalne r cifara, kao i drugi problemi u kojima su tražene nepoznate zaokrugljeni brojevi.

Za definiciju modifikovanih pseudospektara i njihovu primenu biće potrebna sledeća teorema:

Teorema 2. Kada se problem odredjivanja neke funkcije svodi na problem odredjivanja polinoma (ili sistema linearnih polinoma sa više nepoznatih)

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n\,,\quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i, j=1,2,\dots,n\right), \tag{15}$$

gde su koeficienti a_i (a_{ij}, b_i) približni brojevi sa konačnim brojem cifara, čiji je maksimalan broj r, a čiji je broj decimala $p_i \leqq p$, onda je uvek moguće odabrati ceo pozitivan broj k tako da polinom $kf(x)$ ima samo cele koeficiente.

Stavljajući da je $k=10^q (q \geqq p)$, istinitost ove teoreme je očigledna.

Definicija 2. Modifikovanim pseudospektrima nazivamo brojeve

$$S_j = f(kb_i, h_j) = F(h_j) \qquad (j=1,2,\dots) \tag{16}$$

koji su obrazovani od brojeva kb_i, gde je $k=10^q$ i $q \geqq 0$, a f ima isto značenje kao u relaciji (2) i (3) prethodne dve glave, $h_1, h_2, h_3, \dots$ pretstavljaju rastuće cele pozitivne brojeve.

(Ritam)

Ritam modifikovanih pseudospektara u opštem slučaju nije odredjen, ali u nekim konkretnim problemima moguće je postaviti gornju granicu za ritam. U slučajevima kada je ritam modifikovanih pseudospektara prema uslovima zadataka potpuno odredjen problem se svodi na običan spektralni postupak /23/,/24/ i /26/.

Iako je definicija modifikovanih pseudospektara formalno slična sa definicijom pseudospektara, ona je znatno šira što će se kasnije videti iz njihove primene.

Modifikovane pseudospekre delimo na pojaseve od po <u>h</u> cifara. Takodje, govorimo i o efektivnoj vrednosti pojaseva analogno onom što je rečeno za pseudospektre. O čistim pojasevima ne možemo govoriti jer se radi o spektrima formiranim od niza približnih (zaokrugljenih) brojeva. Govorićemo o delimično čistim pojasevima sa <u>m</u> vrednosnih cifara kada se <u>m</u> prvih cifara efektivne vrednosti i-tog pojasa poklapa sa odgovarajućim ciframa traženih brojeva a_i.

Da bi omogućili primenu modifikovanih pseudospektara, potrebno je modifikovati teoremu za uporedjivanje. Radi toga uvodimo sledeću definiciju:

<u>Definicija 3.- Dva modifikovana pseudospektra sa dva različita ritma imaće sve efektivne vrednosti odgovarajućih pojaseva, zaključno sa k-tim pojasom, približno jednake, kada se brojne vrednosti odgovarajućih pojaseva ne razlikuju više od $\frac{1}{2}$ jedinice m-tog mesta (računajući s leva na desno).</u>

Ova teorema sada glasi:

<u>Teorema 3.- Kada problem daje dva modifikovana pseudospektra sa dva različita ritma i kada ovi modifikovani pseudospektri imaju sve efektivne vrednosti odgovarajućih pojaseva,</u>

(zaključno)

zaključno sa k-tim pojasom približno jednake, onda će ovi pojasevi ~~pojasevi~~ pretstavljati približna rešenja za a_i, $(i = 1,2,\ldots k)$, odnosno, približno, rešenje problema.

Teorema 3 daje potrebne i dovoljne uslove za upoređivanje modifikovanih pseudospektara.

Označimo sa

$$\pm A_1^{(i)} A_2^{(i)} A_3^{(i)} \ldots \text{ i } \pm B_1^{(i)} B_2^{(i)} B_3^{(i)} \ldots \quad (i = 1,2,\ldots,k)$$

efektivne vrednosti i-tih pojaseva dva modifikovana speudospektra sa različitim ritmovima $(h_2 > h_1)$, pri čemu svako $A_{(j)}^{(i)}$ i $B_{(j)}^{(i)}$ $(j = 1,2,\ldots)$ Pretstavljaju jednu od cifara $0,1,2,\ldots,9$.

Neka je

$$A_{(j)}^{(i)} = B_{(j)}^{(i)}, \quad \text{za } j = 1,2,\ldots,m \quad , \tag{17}$$

gde je $m \leq r$, i gde smo sa r označili maksimalan broj cifara od a_i, biće $r - m \geq 0$, pa je (17) dovoljan i potreban uslov da svako a_i bude odredjeno približno sa $m+p-r$ decimala.

Teorema 4.- Kada su ispunjeni uslovi teoreme 3 svako a_i $(i=1,2,\ldots,k)$ dobija se iz relacije

$$a_i = (\pm A_{(1)}^{(i)} \smile A_{(2)}^{(i)} \ldots A_{m}^{(i)}) : 10^{m+p-r} \quad .$$

Ova teorema posledica je teoreme 3 i relacije (17).

U problemima numeričke analize često je potrebno odrediti polinome čiji su koeficienti približni brojevi sa

(istim)

istim brojem decimala p. Jasno je da u takvim problemima moramo primeniti modifikovane pseudospektre. Iz pravila za približno računanje poznato je da krajnji rezultat ne može imati veći broj vrednosnih cifara od najlošijeg polaznog podatka.

Pretpostavka da u polinomu (15) maksimalan broj cifara za a_i iznosi r može nam u primeni olakšati izbor ritma h_j. Da bismo dobili maksimalnu tačnost za a_i (koju dopuštaju polazni podaci), dovoljno je tada za modifikovane pseudospektre uzeti uniformne ritmove

$$h_1 = r + s \quad \text{i} \quad h_2 = r + s + 1, \tag{18}$$

gde je s prirodan broj koji zavisi od konkretnog slučaja. U nekim slučajevima možemo ga unapred odrediti. U tome i leži razlika izmedju primene pseudospektara, kod kojih donja granica za h ničim nije unapred odredjena, i modifikovanih pseudospektara kod kojih možemo da znamo gornju granicu za h (preko koje ne vredi ići, jer ne daje bolje rezultate), kada je s odredjeno nekim uslovima problema. Kada se za h uzme manja vrednost od ove gornje granice možemo opet dobiti tražene veličine a_i, ali će ova rešenja biti manje tačna tj. imati manje vrednosnih cifara (od onog broja cifara, koje se mogu dobiti s obzirom na tačnost polaznih podataka). Ovo će zavisiti od oblika relacija (16).

<u>Teorema 5.- Maksimalna vrednost u napred iznetom smislu uniformnog ritma modifikovanih pseudospektara iznosi $h = r + s + 1$, gde je r broj vrednosnih cifara najlošijeg polaznog podatka, a s prirodan broj zavisan od samog problema.</u>

Ova teorema sledi iz prethodnog izlaganja.

Ritam h biće neodredjen ako iz uslova problema ne možemo da odredimo s. U tom slučaju treba ići korak po korak

(kao kod)

kao kod primene pseudospektara sve dok se primenom teoreme 3 za uporedjivanje ne dodje do dva modifikovana pseudospektra S_{j-1} i S_j iz kojih će biti moguće da približno odredimo nepoznate a_i $(i=1,2,\ldots,k)$. U primeni, ićićemo korak po korak i onda kada formula (18) odredjuje i suviše velik, praktično neprihvatljiv broj za h.

G L A V A   P E T A

PRIMENA MODIFIKOVANIH PSEUDOSPEKTARA U NUMERIČKOJ ANALIZI

<u>Primena modifikovanih pseudospektara u numeričkoj analizi.</u>- Kao prvi primer uzećemo integraciju diferencijalne jednačine

$$y' = f(x,y)$$

spektralnom metodom sa primenom modifikovanih pseudospektara, pod pretpostavkom da je $f(x,y)$ polinom čiji su koeficienti pozitivni brojevi sa r vrednosnih cifara. Ovde nemamo za cilj da izložimo neku suštinski novu metodu, već da pokažemo mogućnost primene modifikovanih pseudospektara, na metodu izloženu u trećoj glavi, koju prethodno moramo modifikovati.

Za početne uslove $x_0=0$ i $y_0=a_0$ traženo partikularno rešenje biće oblika

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots .$$

Da bismo obrazovali spektralni postupak razmotrimo prvo modifikovanu Pikarovu metodu /15/, gde je

$$y_i = y_0 + \int_0^x f(\overrightarrow{x, y_{i-1}})' \, dx$$

i

$$y_i = y_0 + b_1x + \frac{b_2}{2}x^2 + \frac{b_3}{3}x^3 + \dots + \frac{b_i}{i}x^i \quad .$$

Kao što je u trećoj glavi bilo izloženo ova metoda pretstavlja sukcesivne aproksimacije. Svaka nova aproksimacija

(pretstavlja)

pretstavlja polinom čiji je stepen za jedinicu veći od prethodnog. Interesantno je istaći da svi članovi istog stepena u novoj aproksimaciji, imaju iste koeficiente kao u prethodnoj aproksimaciji. Na taj način jednom dobijeni koeficienat se ~~xxx~~ uopšte ne menja (ne usavršava u daljoj aproksimaciji). Prema tome biće

$$
\begin{aligned}
& y_0 = a_0 && , \quad a_0=b_0 \\
(19) \qquad & y_1 = a_0 + \int_0^x f(\overrightarrow{x,y_0})^{1} dx = a_0 + a_1 x && , \quad a_1=b_1 \\
& y_2 = a_0 + \int_0^x f(\overrightarrow{x,y_1})^{2} dx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 && , \quad a_2= \frac{1}{2} b_2
\end{aligned}
$$

U spektralnom postupku sa primenom modifikovanih pseudospektara svaki novi koeficient a_i zaokruglićemo na isti broj decimala kao prethodni. Drugim rečima mi tražimo približno partikularno rešenje oblika

$$y_i = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 + \dots + a_ix^i \quad , \quad (i=1,2,3,\dots)$$

gde su svi a_i zaokrugljeni na isti broj decimala. Ovo ograničenje neće uticati na usavršavanje koeficienata, tj. jednom odredjeni koeficienat a_i zadržaće svoju vrednost u daljim aproksimacijama, jer smo za $f(x,y)$ pretpostavili da je cela racionalna funkcija. Kada u ovu funkciju sukcesivno zamenjujemo vrednost za y_i koeficienti iz prethodne aproksimacije biće jednaki odgovarajućim koeficientima uz isti stepen u novoj aproksimaciji.

Kada u praksi računamo sa približnim brojevima, uvek se postavlja problem tačnosti. Ovde to pitanje za A_i nećemo razmatrati u opštem slučaju, već ćemo pretpostaviti da polinom $f(x,y)$ nema više od deset članova i da njegov stepen nije veći od pet.

(U tom slučaju,

U tom slučaju biće nam potrebne dve cifre obezbedjenja, za a_i tj. treba računati i zaokrugljivati polazne podatke i one dobijene u toku računanja na dve decimale više od onog broja decimala koji želimo da imamo u približnom rezultatu. Ovaj rezultat može biti i tačniji ali neće biti lošiji od predvidjenog. Kad je stepen polinoma manji od pet i broj članova polinoma manji od deset on će sigurno biti mnogo bolji.

Da bi obrazovali spektralni postupak, stavimo u relacije (19) da je $x=10^{-h_j}$ i za ritam h uzmimo

$$h_j = p + j \quad , \qquad j = 0,1,2,\dots\dots$$

gde p označava broj decimala od a_i. Ovaj broj unapred je dat, jer prema učinjenoj pretpostavci svako a_i zaokrugljujemo na isti broj decimala p.

Biće

$$s_0^{(j)} = y_0 = a_0$$

$$(20) \qquad s_1^{(j)} = a_0 + a_1 10^{-h_j} \quad , \qquad a_1 = b_1$$

$$s_2^{(j)} = a_0 + a_1 10^{-h_j} + a_2 10^{-2h_j} \quad , \qquad a_2 = \frac{1}{2} b_2$$

Iz (19) i (20) sledi da ćemo umesto polinoma y_i dobiti odgovarajuće modifikovane pseudospektre

$$(21) \qquad s_i^{(j)} = a_0 + a_1 10^{-h_j} + a_2 10^{-2h_j} + \dots + a_i 10^{-ih_j} \quad , \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,k \; . \\ j=0,1,2,\dots\dots \end{matrix}$$

S obzirom da je f(x,y), prema učinjenoj pretpostavci, polinom po x čiji su koeficienti celi pozitivni brojevi sa r vrednosnih cifara, biće i $f(x,y_{i-1})$ takodje polinom po x. Kada u ove polinome stavimo $x=10^{-h_j}$, dobićemo nove modifikovane pseudospektre

$$(22) \qquad S_i^{(j)} = f(10^{-h_j}, s_{i-1}^{(j)}) \quad , \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,k \\ j=0,1,2,\dots\dots \end{matrix}$$

(Analogno tome)

Analogno tome, možemo obrazovati i modifikovane pseudospektre

$$(23) \qquad S_i^{(j)} = f(\overset{\longmapsto}{10^{-h}, s_{i-1}^{(j)}})^{i} \quad , \quad \begin{matrix} i = 1,2,\dots,k \\ j = 0,1,2,\dots \end{matrix} \quad .$$

koji će u stvari biti delovi spektara $S_i^{(j)}$ (22) i to zaključno sa $\underline{i}$-tim pojasom. Zato možemo staviti da je

$$(24) \qquad s_i^{(j)} = \frac{10^{-h}}{i} f(\overset{\longmapsto}{10^{-h}, s_{i-1}^{(j)}})^{i} \quad , \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,k \\ j=1,2,\dots \end{matrix} \quad .$$

gde oznaka " $\overset{\longmapsto}{}^{i}$ " ima novo simboličko značenje i označava efektivnu vrednost i-tog pojasa od $S_i^{(j)}$. U praksi biće dovoljno da ispišemo cifre od $S_i^{(j)}$, zaključno sa i-tim pojasom.

Činjenica da broj cifara od s_i koji je praktično ograničen unapred nije poznat, već samo broj decimala, prilikom obrazovanja spektra (22), odnosno (23) u praksi može da dovede do prelaženja cifara iz nižeg u viši pojas na nekim mestima. U takvim slučajevima moguće je efektivnu vrednost pojasa sa dovoljno veliko $\underline{h}$ odrediti iz pomerenog spektra polinoma, jer je

$$P(x) = C_0+C_1x+C_2x^2+\dots = 10^{q}\left(C_0\, 10^{-q}+(C_1x)\, 10^{-q}+C_2x^2)10^{-q}+\right)\dots ,$$

pa je

$$P(10^{-h}) = 10^{q}\left(C_0\, 10^{-q}+C_1 10^{-h-q}+C_2 10^{-2h-q}+\right)\dots ,$$

gde je q prirodan broj, a izraz u zagradi pomerani spektar polinoma (u užem smislu), glava prva, tač. 4.

Izloženi spektralni postupak ilustrovaćemo na primeru

$$y' = y^2 + x^3 ,$$

gde se traži približno partikularno rešenje u obliku Mac Laurinovog reda, sa početne uslove $x_0=0$ i $y=0.5$, pod pretpostavkom da su koeficienti približnog partikularnog rešenja zaokrugljeni na tri decimale.

(Čitam)

Ritam modifikovanih pseudospektara za 3 biće

$$h = 3 + j\,, \qquad j = 0,1,2,\ldots\,,$$

Dalje je prema (20), (22) i (24)

$$s_0 = s_0 = 0.5 \quad , \quad s_0^{(0)} = 0.500$$
$$s_0^{(1)} = 0.5000$$

$$S_1^{(0)} = f(10^{-3}; s_0^{(0)}) = 0.500^2 + 10^{-9} = 0.250\ldots$$

$$S_1^{(1)} = f(10^{-4}; s_0^{(1)}) = 0.5000^2 + 10^{-12} = 0.2500\ldots$$

$$a_1^{(0)} = 10^{-3}\,\overline{f(10^{-3}; s_0^{(0)})}^{1} = 0.250 \quad ; \quad s_1^{(0)} = 0.500250$$

$$a_1^{(1)} = 10^{-4}\,\overline{f(10^{-4}; s_0^{(1)})}^{1} = 0.2500 \quad ; \quad s_1^{(1)} = 0.50002500$$

$$S_2^{(0)} = f(10^{-3}; s_1^{(0)}) = 0.500250^2 + 10^{-9} = 0.250250\ldots$$

$$S_2^{(1)} = f(10^{-4}; s_1^{(1)}) = 0.50002500^2 + 10^{-12} = 0.25002500\ldots$$

$$a_2^{(0)} = \frac{10^{-3}}{2}\,\overline{f(10^{-3}; s_1^{(0)})}^{2} = 0.125 \quad ; \quad s_2^{(0)} = 0.500250125$$

$$a_2^{(1)} = \frac{10^{-4}}{2}\,\overline{f(10^{-4}; s_1^{(1)})}^{2} = 0.1250 \quad ; \quad s_2^{(1)} = 0.500025001250$$

$$S_3^{(0)} = f(10^{-3}; s_2^{(0)}) = 0.500250125^2 + 10^{-9} = 0.250250188_5\ldots$$

$$S_3^{(1)} = f(10^{-4}; s_2^{(1)}) = 0.500025001250^2 + 10^{-12} = 0.250025001876\ldots$$

($a_3^{(0)} =$)

$$a_3^{(0)} = \frac{10^{-3}}{3} f(\overline{10^{-3};\ a_3^{(0)}}^{\,3}) = 0.063; \quad a_3^{(0)} = 0.500250125063$$

$$a_3^{(1)} = \frac{10^{-4}}{4} f(\overline{10^{-4};\ a_3^{(1)}}^{\,3}) = 0.0630; \quad a_3^{(1)} = 0.5000250012500630$$

$$a_3^{(2)} = 0.5000025000125000630 0$$

$$s_4^{(0)} = f(10^{-3};\ a_3^{(0)}) = 0.500250125063^2 + 10^{-9} = 0.250250188625 \ldots$$

$$s_4^{(1)} = f(10^{-4};\ a_3^{(1)}) = 0.5000250012500125000630^2 + 10^{-12}$$

$$= 0.2500250018761255 \ldots$$

$$s_4^{(2)} = f(10^{-5};\ a_3^{(2)}) = 0.50000250001250006300^2 + 10^{-15}$$

$$= 0.25000250001875112550 \ldots$$

$$s_4^{(3)} = f(10^{-6};\ a_3^{(3)}) = 0.500000250000125000063000^2 + 10^{-18}$$

$$= 0.250000250000187501125500 \ldots$$

$$a_4^{(2)} = \frac{10^{-5}}{4} f(\overline{10^{-5};\ a_3^{(2)}}^{\,4}) = 0.281; \quad a_4^{(2)} = 0.5000025000125000630028100$$

$$a_4^{(3)} = \frac{10^{-6}}{4} f(\overline{10^{-6};\ a_3^{(3)}}^{\,4}) = 0.281; \quad a_4^{(3)} = 0.5000002500001250000630000281000$$

$$s_5^{(2)} = f(10^{-5};\ a_4^{(2)}) = 0.5000025000125000630028100^2 + 10^{-15}$$

$$= 0.25000250001875112553 2812 \ldots$$

$$s_5^{(3)} = f(10^{-6};\ a_4^{(3)}) = 0.5000002500001250000630000281000^2 + 10^{-18}$$

$$= 0.25000025000018750112550328125 \ldots$$

$$a_5^{(2)} = \frac{10^{-5}}{5} f(\overline{10^{-5};\ a_4^{(2)}}^{\,5}) = 0.066$$

$$a_5^{(3)} = \frac{10^{-6}}{5} f(\overline{10^{-6};\ a_4^{(3)}}^{\,5}) = 0.066$$

(Prema tome)

Prema tome traženo približno partikularno rešenje je

$$y = 0.500+0.250x+0.125x^2+0.063x^3+0.281x^4+0.066x^5 + \dots \quad .$$

Kada se za rešavanje ove diferencijalne jednačine upotrebi metoda /15/ dobićemo da je

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \dots \quad .$$

Uporedjujući ove rezultate možemo utvrditi da su dobijena približna rešenja tačna do $\frac{1}{2}$ jedinice poslednjeg decimalnog mesta.

Razlog za uvodjenje modifikovanih pseudospektara bio je da se omogući primena spektralne metode u slučaju kada se radi sa približnim (zaokrugljenim) brojevima kao i korišćenje elektronskih aritmetičkih računara, u ovim slučajevima.

U sledećem primeru pokazaćemo primenu modifikovanih pseudospektara na prvi deo Graeffe-ove metode, tj. na onaj deo koji se sastoji u uzastopnom transformisanju algebarskih jednačina tako da svaka sledeća jednačina ima za korene kvadrate korena prethodne jednačine. Pored toga izradićemo program za elektronsku računsku mašinu NE 803, pomoću koje ćemo obaviti potrebna računanja i time pokazati mogućnost korišćenja elektronskih računara u spektralnoj metodi sa primenom modifikovanih pseudospektara.

Prema Graeffe-ovoj metodi kada je data jednačina

(25) $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

transformisana jednačina biće

(26) $$Q(y) = (-1)^n P_n(-x)\, P_n(x)$$

gde je $y = x^2$

Pretpostavimo da smo sve koeficiente a_i zaokruglili na isti broj vrednosnih cifara r. Pomnožimo jednačinu (25) sa 10^q tako da $10^q a_i$ (teorema 2) budu celi brojevi. Obrazujmo zatim spektar S_1 polinoma $10^q P(x)$ i njegov popravljeni spektar $\bar{S}_1$. Koeficiente transformisane jednačine dobićemo iz proizvoda ova dva spektra prema jednačini (26)

$$S_2 = S_1 \times \bar{S}_1 .$$

Za dalje transformacije, analogno prethodnom, biće

$$S_{i+1} = S_i' \times \bar{S}_i \qquad (i=1,2,\dots, m).$$

(Da bi smo problem)

Da bismo problem rešili potrebno je odrediti ritam. Kada se radi sa celim i tačnim brojevima ritam je odredjen ranije (Glava I, t.7).

Ritam spektara S_1 i $\bar{S}_1$ je

$$h = r+1$$

gde $\underline{r}$ pretstavlja broj cifara od a_1 najvećeg po modulu koeficienta jednačine, a ritam rezultujućeg spektra je $2h$ /21/.

Kako se ovde radi o brojevima čiji broj cifara raste iz transformacije u transformaciju, maksimalno na $2r+2$, jasno je da bi izračunavanje spektralnom metodom tačnih vrednosti koeficienata stvaralo ogromne poteškoće za računanje na mašini. Zato se mora pristupiti zaokrugljivanju koeficienata transformisane jednačine i to na prethodni maksimalan broj vrednosnih cifara $\underline{r}$. Ovo zaokrugljivanje koeficienata transformisane jednačine u skladu je sa primenom modifikovanih pseudospektara i pravilima za približno računanje, jer proizvod dva približna broja sa $\underline{r}$ vrednosnih cifara može maksimalno da ima $\underline{r}$ vrednosnih cifara.

Postavlja se sada pitanje da li je moguće na nekoj računskoj mašini izračunati sa pomenutim zaokrugljivanjem proizvode $S_1 x \bar{S}_1$.

Pokazaćemo, s obzirom da se ovde radi o broju vrednosnih cifara koji ne može iz koraka u korak preći vrednost $\underline{r}$, da je moguće izraditi veoma jednostavan i kratak ciklični program za eketronski aritmetički računar. Uzmimo konkretno da izradimo u autokodu program za mašinu National-Elliott 803.

Neka je data jednačina

$$P_5(x) = 1.23x^5-2.52x^2-16.1x^3+17.3x^2+29.4x-1.34 = 0$$

Posle množenja sa 10^2 biće

$$10^2\ P_5(x) = 123x^5-252x^2-1610x^3+1730x^2+2940x-134 = 0$$

(Ritam)

Ritam spektra je ovde

$$h = 4 + 1 = 5$$

Pomenuta mašina dozvoljava ispisivanje konstanata sa 8 cifara u pokretnom zarezu. Medjutim, nama je potrebna maksimalno 4 vrednostne cifre, pa će svaki od datih koeficienata moći da se smesti u po jednu ćeliju memorije. Treba dakle načiniti program za proizvode

$$S_{i+1} = S_i \times \bar{S}_i \qquad (i=1,2,3,4...)$$

Pri sastavljanju programa nećemo imati za cilj da izradimo kompletni program za Graeffe-ovu metodu, već samo da pokažemo mogućnost realizacije proizvoda

$$S_{i+1} = S_i \times \bar{S}_i \qquad i=1,2,...,10$$

gde nam S_i i S_{i+1} pretstavljaju modifikovane pseudospektre tj. modifikovane pseudospektre jednačina dve uzastopne transformacije. Program ćemo tako sastaviti da svaka ćelija memorije sadrži efektivnu vrednost pojasa. Kako mašina sama zaokrugljuje brojeve posle množenja 8x8 cifara na 8 cifara, što je više od potrebnog maksimalnog broja vrednosnih cifara koji u našem konkretnom slučaju iznosi 4, biće potrebno voditi računa samo o naredbi za ispisivanje vrednosnih cifara 4 rezultata. Takodje ne moramo voditi računa pri unošenju koeficienata polazne jednačine u memoriju mašine o veličini koeficienata. Umesto celih brojeva možemo unositi i odgovarajuće decimalne brojeve, jer će mašina u pokretnom zarezu umesto broja 125 zapisati 1,25/03 ili umesto broja 12.5 napisati 1,25/01 itd. Da nebi došlo brzo do prekoračenja opsega koji može da zapamti ćelija mašine, treba nastojati da se jednačina (25) ne pomnoži sa 10^q tako da svi koeficienti postanu celi brojevi, već da najmanji po apsolutnoj vrednosti koeficienat a_i leži izmedju 1 i 10. U našem slučaju biće $q=0$.

(Program će)

Program će se odvijati ciklički.

Obično se uzima 5 do 10 ciklusa. Mi ćemo uzeti 10, ali će mašina stati i ranije ako dodje do prekoračenja opsega broja koji može da registruje ćelije memorije mašine.

Pored toga daćemo naredbu da se ispiše naslov i koeficienti polazne i transformisanih jednačina.

Prilog: program i odštampani rezultatu, koji se slažu sa rezultatima dobijenim na stonoj električnoj mašini.

Iz priloženih rezultata se vidi da je mašina stala posle petog koraka i pri tome se upalilo svetlo na komandnom pultu, koje ukazuje na prekoračenje opsega u veličini broja koji može da se smesti u memoriju mašine. To znači da je uvek, prilikom izrade cikličnog programa za ovaj računski postupak, bolje predvideti koji ciklus više a mašina će automatski stati tako gde njena moć računanja prestaje.

Iz tabele ispisanih rezultata vidi se, da prema drugom delu Graeffe-ove metode da je:

$$|x_1| = \sqrt[32]{\frac{0.2341 \times 10^{23}}{0.7535 \times 10^{5}}} \approx 4.066$$

$$|x_2| = \sqrt[32]{\frac{0.3968 \times 10^{38}}{0.2341 \times 10^{23}}} \approx 2.992$$

$$|x_3| = \sqrt[32]{\frac{0.8746 \times 10^{47}}{0.3968 \times 10^{38}}} \approx 1.958$$

$$|x_4| = \sqrt[32]{\frac{0.2144 \times 10^{48}}{0.8746 \times 10^{47}}} \approx 1.028$$

$$|x_5| = \sqrt[32]{\frac{0.1168 \times 10^{5}}{0.2144 \times 10^{48}}} \approx 0.044$$

(Kada)

```
SETS I
SETV A(5)B(1 )CD
SETR 2
1)TITLE PROIZVOD MODIFIKOVANOG PSEUDOSPEKTRA I NJEGOVOG PO
PRAVLJENOG SPEKTRA

A=1.23
A(1)=-2.52
A(2)=-1 .1
A(3)=17.3
A(4)=29.4
A(5)=-1.34
C=
D=
CYCLE I= :1:5
LINE
PRINT A(I),4/
REPEAT I
2)D=D+1
CYCLE I= :1:1
B(I)=
REPEAT I
CYCLE I= :1:5
C=A(I)*A
B(I)=B(I)+C
C=-A(I)*A(1)
B(I+1)=B(I+1)+C
C=A(I)*A(2)
B(I+2)=B(I+2)+C
C=-A(I)*A(3)
B(I+3)=B(I+3)+C
C=AI*A4
B(I+4)=B(I+4)+C
C=-A(I)*A(5)
B(I+5)=B(I+5)+C
REPEAT I
CYCLE I= :1:5
A(I)=B(2I)
LINE
PRINT A(I),4/
REPEAT I
JUMP IF D$1 @2
STOP
START 1
```

PROIZVOD MODIFIKOVANOG PSEUDOSPEKTRA I NJEGOVOG PO
PRAVLJENOG SPEKTRA

.123 /	1
-.252[illegible] /	1
-.1[illegible]1[illegible] /	2
.173[illegible] /	2
.294[illegible] /	2
-.134[illegible] /	1
.1513/	1
-.4596/	2
.41[illegible]7/	3
-.1253/	4
.91[illegible]7/	3
-.1796/	1
.2289/	1
-.[illegible]45 /	3
.6295/	5
-.8[illegible]68/	[illegible]
.[illegible]249/	6
-.3224/	1
.5239/	1
-.4259/	6
.26[illegible]2/	1[illegible]
-.5471/	12
.6[illegible]5/	12
-.1[illegible]4[illegible]/	2
.2745/	2
-.1541/	12
.63[illegible]7/	19
-.2957/	24
.4[illegible]31/	24
-.1[illegible]1/	3
.7533/	3
-.2341/	23
.39[illegible]/	3[illegible]
-.[illegible]74[illegible]/	47
.2144/	4[illegible]
-.116[illegible]/	5

Kada uporedimo načinjen program za primenu spektralne metode, sa onim koji bismo morali načiniti u ovom slučaju za klasičan Graeffe-ov postupak

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\
a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 & -a_5 & \cdots \\
\hline
a_0^2 & -a_1^2 & a_2^2 & -a_3^2 & a_4^2 & -a_5^2 & \cdots \\
 & +2a_0a_2 & -2a_1a_3 & +2a_2a_4 & -2a_3a_5 & +2a_4a_6 & \cdots \\
 & & +2a_0a_4 & -2a_1a_5 & +2a_2a_6 & -2a_3a_7 & \cdots \\
 & & & +2a_0a_6 & -2a_1a_7 & +2a_2a_8 & \cdots \\
 & & & & +2a_0a_8 & -2a_1a_9 & \cdots \\
 & & & & & +2a_0a_{10} & \cdots \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdots
\end{array}
$$

vidimo da je on znatno kraći. Razlika u dužini programa za ova dva postupka biće sve veća u koliko je stepen polazne jednačine veći, jer broj naredbi, ako uzmemo samo onaj deo programa koji se odnosi na stvarno računanje, u spektralnoj metodi iznosi 2x(n+1) gde je n stepen jednačine, a u drugoj metodi morali bismo programirati sve a_i^2 i sve $2a_{i-j}xa_{i+j}$ kao i njihove zbirove pa je jasno da ce se broj ovih operacija znatno povećavati sa povećanjem stepena n polazne jednačine, a samim tim i povećavati programi.

U trećem primeru izložiću neka uprošćavanja kod primene reverzije Stirlingove, odnosno Beselove interpolacione formule. Iako se to može uraditi i za opšti slučaj, izlaganje ću ograničiti, radi boljeg uvida i jasnoće, na interpolacione polinome četvrtog stepena.

Neka je data:

a) Stirlingova interpolaciona formula

$$(27)\qquad y = y_0 + m_1 u + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-1} u^2 + \frac{1}{6} m_3\, u(u^2-1) + \frac{1}{24}\Delta^4 y_{-2}\, u^2(u^2-1),$$

koja se može napisati u obliku uredjenog polinoma

$$(28)\qquad y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 \;,$$

gde je

$$a_0 = y_0\,, \qquad a_2 = \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{24}\Delta^4 y_{-1}\;,$$

$$a_1 = m_1 - \frac{1}{6} m_3\,, \quad a_3 = \frac{1}{6} m_3\;, \qquad a_4 = \frac{1}{24}\Delta^4 y_{-2}$$

b) Beselova interpolaciona formula

$$(29)\qquad y = m_0 + \Delta y_0 v + \frac{1}{2} m_2\left(v^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1}\; v\left(v^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{24} m_4\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right),$$

koja se može napisati u obliku uredjenog polinoma

$$(30)\qquad y = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4 \;,$$

gde je

$$a_0 = m_0 - \frac{1}{8} m_2 + \frac{3}{128} m_4\;, \qquad a_2 = \frac{1}{2} m_2 - \frac{5}{48} m_4\;,$$

$$a_1 = \Delta y_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{-1}\;, \quad a_3 = \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1}\,, \quad a_4 = \frac{1}{24} m_4\;.$$

(Da bi)

Da bi izvrsili reviziju formula (27),(28) i iste napisali u obliku reda

$$(31) \qquad s = C_1\left(\frac{y-a_0}{a_1}\right) + C_2\left(\frac{y-a_0}{a_1}\right)^2 + C_3\left(\frac{y-a_0}{a_1}\right)^3 + C_4\left(\frac{y-a_0}{a1}\right)^4 + \dots$$

gde je s=u (odnosno s=v), moramo prethodno odrediti koeficiente C_i (i=1,2,3,4,...) prema relacijama

$$(32) \qquad \begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= -\frac{a_2}{a_1} \\ C_3 &= -\frac{a_3}{a_1} + 2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \\ C_4 &= -\frac{a_4}{a_1} + 5\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_3}{a_1}\right) - 5\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \end{aligned}$$

i . . . .

Kada se ove formule konkretno primenjuju, s jedne strane vidimo da ima dosta izracunavanja, a s druge strane videcemo u primeni da su nizovi $\{a_i\}$ i $\{C_i\}$ (i=1,2,3,4,) monotono opadajuci i da su a_4 i C_4 mali brojevi. Ta cinjenica moze da se iskoristi za uproscavanje ovih formula.

Inverznu interpolaciju mozemo izvrsiti i putem iteracije. Treba odgovarajucu interpolacionu formulu eksplicitno izraziti po drugom clanu u (odnosno v), formule (41) i (42), ili pak mozemo je prethodno napisati u obliku uredjenog polinoma

$$y = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4$$

gde je s = u (odnosno s=v), pa je tek onda eksplicitno izrazi- ti po drugom clanu

(33)

(33) $$z = \frac{y-a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}z^2 - \frac{a_3}{a_1}z^3 - \frac{a_4}{a_1}z^4 \quad .$$

Kada je $y=a$, gde a leži u intervalu (y_0, y_1), za prvu aproksimaciju uzima se

$$z^{(1)} = \frac{a-a_0}{a_1} = v \quad ,$$

pa je

(34) $$z^{(2)} = v - \frac{a_2}{a_1}v^2 - \frac{a_3}{a_1}v^3 - \frac{a_4}{a_1}v^4 \quad .$$

Pokazaćemo da je praktično za malo a_4 dovoljno da se zaustavimo na $z^{(2)}$.

Vratimo se na formule (27) i (28). Stavimo da je:

a) za Stirlingovu formulu

$$b_0 = y_0, \quad b_1 = m_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-1}, \quad b_3 = \frac{1}{6}m_3, \quad b_4 = \frac{1}{24}\Delta^4 y_{-1}, \ldots$$

pa je

(35) $$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - b_3, \quad a_2 = b_2 - b_4, \quad a_3 = b_3; \quad a_4 = b_4 \quad .$$

b) za Beselovu formulu

$$b_0 = m_0, \quad b_1 = \Delta y_0, \quad b_3 = \frac{1}{6}\Delta^3 y_{-1}, \quad b_4 = \frac{1}{24}m_4 \quad ,$$

pa je

$$a_0 = b_0 - \frac{1}{4}b_2 + \frac{9}{16}b_4, \quad a_1 = b_1 - \frac{1}{4}b_3, \quad a_2 = b_2 - \frac{3}{2}b_4, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = b_4 \ldots$$

Iz relacije (35), odnosno (36) sledi da je za malo b_4

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{a_1} - \frac{b_4}{a_1} \approx \frac{b_2}{a_1} \quad ;$$

(37) $$\frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{a_1} \quad .$$

(odnosno)

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{b_4}{a_1}$$

odnosno

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} - \frac{5}{2}\frac{b_4}{b_1} \approx \frac{b_2}{b_1} \quad ,$$

(38) $$\frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1}$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{b_4}{b_1}$$

Ako je broj koraka u iteraciji malé, brzo se dolazi do rezultata, a to je ovde slučaj sa formulom (34). Kada se zadovoljimo sa tačnošću koju daje formula (34), možemo staviti u red (31) da je

(39) $$c_2 = -\frac{a_2}{a_1} \quad , \quad c_3 = -\frac{a_3}{a_1} \quad , \quad c_4 = -\frac{a_4}{a_1} \quad .$$

Relaciju (33), iz koje sledi formula (34) možemo napisati u obliku razlike

$$z = \frac{y-a_0}{a_1} - P_4\ (z),$$

gde je

$$P_4(z) = z^2\ P_2(z)\ ,$$

a

(40) $$P_2(z) = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}\, z + \frac{a_4}{a_1}\, z^2$$

Kada se problem inverzne interpolacije rešava iterativnim putem na taj način što se interpolaciona formula (27), odnosno (28) reši eksplicitno po drugom članu, dodavajući i oduzimajući $\frac{b_3}{b_1}$ u, odnosno $\frac{1}{4}\frac{b_3}{b_1}$ v, dobićemo relacije

(41) $$u = \frac{y-a_0}{a_1} - \frac{b_2}{a_1}\, u^2 - \frac{b_3}{b_1}\, u(u^2-1) - \frac{b_4}{b_1}\, u^2(u^2-1) - \frac{b_3}{b_1}\, u\ ,$$

(odnosno)

odnosno

$$(42)\qquad v = \frac{y-a_0}{a_1} - \frac{b_2}{a_1}(v^2-0.25) - \frac{b_3}{a_1}v(v^2-0.25) - \frac{b_4}{a_1}(v^2-0.25)(v^2-2.25) - \frac{1}{4}\frac{b_3}{a_1}v$$

Relacija (41), odnosno (42) može se napisati u obliku

$$u = \frac{y-a_0}{a_1} - P_4(u)$$

gde je

$$P_4(u) = u^2 F_1(u) \; ,$$

a

$$(43)\qquad F_1(u) = \frac{b_2}{a_1} + \frac{b_3}{a_1}u(1-u^{-2}) + \frac{b_4}{a_1}u^2(1-u^{-2}) + \frac{b_3}{a_1}u^{-1} \; ,$$

odnosno

$$v = \frac{y-a_0}{a_1} - P_4(v)$$

gde je

$$P_4(v) = v^2 F_2(v)$$

a

$$(44)\qquad F_2(v) = \frac{b_2}{a_1} + \frac{b_3}{a_1}v(1-0.25v^{-2}) + \frac{b_4}{a_1}v^2(1-0.25v^{-2})(1-2.25v^{-2}) + \frac{1}{4}\frac{b_3}{a_1}v^{-1}$$

Uporedjujući polinom (40) sa (43), odnosno (44) možemo prema teoremama (3),(4) i (5) odrediti koeficijente $\frac{a_i}{a_1}$ $(i=2,3,4)$ za formulu (33) iz pojaseva modifikovanih pseudospektar

$$(45)\qquad -S^{(j)} = 10^{h_j} F_k(10^{\pm h_j}) = \frac{b_2}{a_1}10^{h_j} + \frac{b_3}{a_1}10^{2h_j} + \frac{b_4}{a_1}10^{3h_j} \; , \quad j=1,2$$

(sa ritmom)

sa ritmom

$$h_j = p + j\,,$$

gde je $k=1$, odnosno $k=2$.

Da bi ~~smo~~ ovo dokazali, pretpostavimo da smo svako $\frac{a_i}{a_1}$ ($i=2,3,4$) zaokruglili na isti broj decimala p i da su relacije (37), (38) praktično zadovoljene, tj. da je $\frac{a_i}{a_1} = \frac{b_i}{a_1}$ ($i=2,3,4$). Kada se u formulu (43), odnosno (44) stavi ~~[illegible]~~ $u = 10^{+h_j}$, odnosno $v = 10^{h_j}$, izrazi $(1-u^{-2})$, odnosno $(1-0.25v^{-2})$ i $(1-2.25v^{-2})$ zaokrugljivanjem na p decimala svode se na jedinicu, a $\frac{b_2 u^{-1}}{a_1}$, odnosno $\frac{1}{4}\frac{b_3}{a_1}v^{-1}$ može se zanemariti, pa je

$$\overset{*}{s}{}^{(j)} = 10^{h_j} F_k(10^{h_j}) = \frac{b_2}{a_1}10^{h_j} + \frac{b_3}{a_1}10^{2h_j} + \frac{b_4}{a_1}10^{3h_j} \quad (j=1,2).$$

Ovo se može iskazati sledećom teoremom:

<u>Teorema 6.</u> Ako je prilikom inverzne interpolacije b_4 dovoljno malo, onda će efektivne vrednosti sukcesivnih pojaseva, pomnožene sa 10^{-p-1}, modifikovanog pseudospektra

$$\overset{*}{s}{}^{(j)} = 10^{h_j} F_k(10^{+p+1})$$

gde je $F_k(x)$, $k=1$, odnosno $k=2$, odredjeno formulom (43), odnosno (44), dati koeficiente $\frac{a_i}{a_1}$ ($i=2,3,4$), a koji figurišu u formuli (34).

Da bismo se uverili da se primenom formule (34) računanje znatno skraćuje, a praktično se ništa ne gubi od tačnosti, izradićemo sledeći primer prvo na klasičan način, a zatim na način izložen u ovom radu.

Neka je funkcija $y=f(x)$ data tablicom i neka se traži za koju će vrednost x-a biti $y=0,5$.

(Uzmimo samo)

Uzmimo samo onaj deo tablice razlika koji će sadržati potrebne vrednosti argumenta,funkcije i odgovarajuće razlike potrebne za primenu Beselove interpolacione formule.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,47	0,4937452		−851		1
		90046		−10	
0,48	0,5027498		−861		2

Kako je $x_0 = 0{,}47$, $h = 0{,}01$ biće

(46) $$y = 0{,}4982475+0{,}0090046v + (-0{,}0000856)\frac{v^2-0{,}25}{2}+(-0{,}0000010)\frac{v(v^2-0{,}25)}{6}$$

Prema (50) biće

$$a_0 = 0{,}4982475 + \frac{0{,}0000856}{8} = 0{,}4982582,$$

$$a_1 = 0{,}0090046 + \frac{0{,}0000010}{24} = 0{,}00900464,$$

$$a_2 = -\frac{0{,}0000856}{2} = -0{,}0000428,$$

$$a_3 = -\frac{0{,}0000010}{6} = -0{,}00000017,$$

$a_4 = 0$, (zaokrugljeno).

Dalje je

$$\frac{y-a_0}{a_1} = \frac{0{,}5-0{,}4982582}{0{,}00900464} = 0{,}1934356$$

$$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{0{,}0000428}{0{,}00900464} = -0{,}004753$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = (-0{,}004753)^2 = 0{,}0000225910,$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 = -0{,}0000001074,$$

$\left(\frac{a_3}{a_1}\right)$

$$\frac{a_3}{a_1} = -\frac{0,00000017}{0,00900464} = -0,00001888,$$

$$\frac{a_4}{a_1} = 0 \text{ (zaokrugljeno)}$$

Prema (32) je

$$c_2 = -\frac{a_2}{a_1} = 0,004753,$$

$$c_3 = 0,00001888 + 2(0,000022591) = 0,00006406,$$

$$c_4 = 0+5(-0,004753)(-0,00001888)-5(-0,0000001074)$$
$$= 0,000000986 .$$

Zamenjujući ove vrednosti u red (31), biće

$$v = 0,1934336+0,004753(0,1934336)^2+0,00006406(0,1934336)^3$$
$$= 0,1934336+0,0001778+0,00000046 = 0,19561186 = 0,1956119$$

Dalje je

$$u = v + \frac{1}{2} = 0,693612,$$

pa je

$$x = x_0+hu = 0,47+0,01(0,693612) = 0,47693612 .$$

Medjutim, prema (36),(44) i (46) sledi da je

$$F_2(v) = \frac{1}{2}\,\frac{0,0000856}{0,0090046}(1-0,25\,v^{-2})+\frac{1}{6}\,\frac{0,0000010}{0,0090046}\,v(1-0,25v^{-2})$$
$$+\frac{1}{24}\left(\frac{0,0000010}{0,0090046}\right)v^{-1}$$
$$= 0,004753(1-0,25\,v^{-2}) + 0,0000189\,v(1-0,25\,v^{-2})+0,0000047v^{-1}$$

pa je za $v = 10^8$

$$-S^{(1)} = 10^8\,F_2(10^8) = 189000475300$$

Prema teoremi 6, računajući pruge pojaseve s desna na levo, biće

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = -0,004753 \;; \qquad \frac{b_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_1} = -0,0000189$$

(Kako je)

Kako je $\frac{y-a_0}{a_1} = 0.1934336$, sledi da je

$$v^{(2)} = 0.1934336 - (-0.004753)(0.1934336)^2 - (-0.0000189)(0.193433$$

$$= 0.1934336 + 0.0001778 + 0.0000001 = 0.1936115$$

Uporedjujući prethodni rezultat, $v=0.1936119$, sa ovim koji smo dobili prema formuli (34), $v^{(2)}= 0.1936115$, vidimo da razlika iznosi samo 4 jedinice poslednjeg decimalnog mesta, koja razlika u daljem računanju ne igra nikakvu ulogu, jer je

$$x = x_0+hu = 0.47+0.01(0.5+0.193612 = 0.47693612$$

sa zaokrugljivanjem na šest decimala isto za oba načina računanja. Medjutim, broj operacija u novoj metodi znatno je manji od broja operacija u metodi reversije.

Uporedjivanje nove metode sa primenom formule (41), odnosno (42) na klasičan način pokazalo bi prednost prve metode. U klasičnoj metodi morali bismo izračunati bar još treću iteraciju da bi mo konstatovali da se možemo zaustaviti na drugoj.

L I T E R A T U R A

M. Petrović

/1/ Les spectres numériques Gauthire-Villars, Paris 1919.

/2/ Problemes arithmétiques sur équations differentielles, Bull de le Société mathématique de France 52, 1924.

/3/ Correspondence entre la fonction et le fraction decimale Proced. of the V internat. Congr. of mathématics Toronto 1924.

/4/ Spectres des prèbabilités, Enseignement mathématique 24. 1925.

/5/ Spectres des fonctions d'une variable représentables analytiquement, Comptes rendus du 50-ieme Congres de l'Association Française pour l'avancement des Sciences, Lyon 1926.

/6/ Brojni spektri pojava, Glas Srpske Akademije Nauka, Beograd 1926.

/7/ Spectres numériques des phénomènes Glas SKA CXXVII, 1927.

/8/ Un mode de représentation approximative de fonctions, Glas SKA CXXVII, 1927. Beograd.

/9/ Leçons sur les spectres mathématiques, Paris, 1928.

/10/ Le procéde spectral de calcul numériquees en Astronomie, Annuaire de l'Observatoire astronomique de Belgrade 2, 1930.

/11/ Théoreme sur les fonctions algèbrique a coefficients tayloriens commensurables, Revue Mathématique de l'Union Interbalcanique, Athène 1936.

/12/ Séries de puissances a coefficients nombres entiers comme inversions des intégrales abeliennes, La revista de ciencias Nr. 420 Ana XXXVIII Lima Peru, 1937.

K. Orlov

/13/ Primena spektralnog računa na probleme o polinomima Glas SKA CLII, Beograd, 1932.

/ Application du calcul spectral aux problèmes sur les polynomes, Bull. de l'Ac. Serbe 16.1, 1933.

/14/ Rekurzivno izračunavanje matematičkih spektara, Glas SKA CLIV Beograd, 1933.

Évaluations des spectres mathématiques à l'aide de relations de réccurence, Bull. de l'Ac. Roy. Serbe N^{o} 1, Belgrade 1933.

/15/ Jedna metoda aproksimiranja za intégralne diferencijalne jednačine, Glas SKA CLXIII, prvi razred 8 , Beograd, 1934.

Un procédé d'approximation concernant les integrales des équations differentielles Bull. de l'Acad. Roy. Serbe N Belgrade, 1935.

/16/ Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara, teza Beograd, 1935.

/17/ Spektri brojeva koji nisu celi, Prvi Kongres matematičara i fizičara FNRJ, II-Naučna saopštenja i obaveštenja, Beograd, 1951.

/18/ Matematički spektri, Prvi Kongres matematičara i fizičara FNRJ II Naučna saopštenja i obaveštenja, Beograd, 1951.

/19/ Application practique de la theorie des spectres mathématiques de M. Petrović au calcul numérique. La revue scintifique, Paris, 1953.

/20/ Méthodes spectrale pratique d'évaluation numérique des déterminants et de résolution du système d'équations linéaires, Vesnik V, 1-2, Beograd, 1953.

/21/ Osnovi praktične spektralne aritmetike i algebre, Beograd, 1935.

/22/ Application des spectres mathématiques a la resolution des équations differentielles ordinaires, Bull. de la Société des mathématiqiens et physiciens de la R.P. de Serbie Vol. IX, 3-1, Beograd, 1957.

B. Mihajlović

/23/ Praktična spektralna metoda za numeričko proveravanje približnih rešenja sistema linearnih jednačina, Vesnik XI, Beograd, 1959.

/24/ Numeričko rešavanje sistema linearnih jednačina primenom matematičkih spektara, Vesnik XII, Beograd, 1960.

/25/ Računska mašina u radu grupa mladih matematičara, Nastava matematike i fizike XI, Beograd, 1962.

B. Mihajlović i F. Pecka

/26/ Primena matematičkih spektara na metodu Bernoulli-a za izmalaženje korena algebarskih jednačine, Matem. Vesnik, I-3, Beograd, 1964.

S A D R Ž A J