МИЛАН С. НЕДИЋ

АЛГЕБРА

ЗА

ШЕСТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Главни просветни савет, под С. бр. 63 од 26 априла 1933 године, препоручио је, а Господин Министар просвете, својом одлуком С. н. бр. 14789 од 21 јуна 1933 године, одобрио је да се ова књига може употребљавати у средњим школама као уџбеник приватног издања, док се не усвоји уџбеник државног издања.

ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКО И КЊИЖАРСКО ПРЕДУЗЕЋЕ ГЕЦА КОН А. Д.
12, КНЕЗ МИХАИЛОВА, 12

БЕОГРАД
Штампарија и књиговезница „Привредник“ Жив. Д. Благојевића
Кнез Михаилова ул. бр. 3

217-936

АЛГЕБРА

ЗА ШЕСТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

од професора М. С. НЕДИЋА.

I. — ИРАЦИОНАЛНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И РАД СА ЊИМА

Ирационални бројеви

Ирационални бројеви. — Када смо досада кореновали бројеве и разне изразе видели смо да корена нестане само тада, ако је радикандов изложилац садржалац коренова изложиоца.

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{n}} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

$$\sqrt[m]{a^{3m}} = a^{\frac{3m}{m}} = a^3$$

Али корен остаје и даље овде:

$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3 . a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$ јер 5 није дељиво са 3

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{2^2 . 2} = 2\sqrt[2]{2}$ јер 3 није дељиво са 2

$\sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{6^1} = \sqrt{6}$ јер 1 није дељиво са 2

Наша слика 1 показује нам да је $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, $\sqrt{4} = 2$. Кад загледамо ове наше корене, видимо да су поткорене количине све други степени и то $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, $\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $4 = 2^2$, те је могуће уклонити корен према ономе што смо горе рекли.

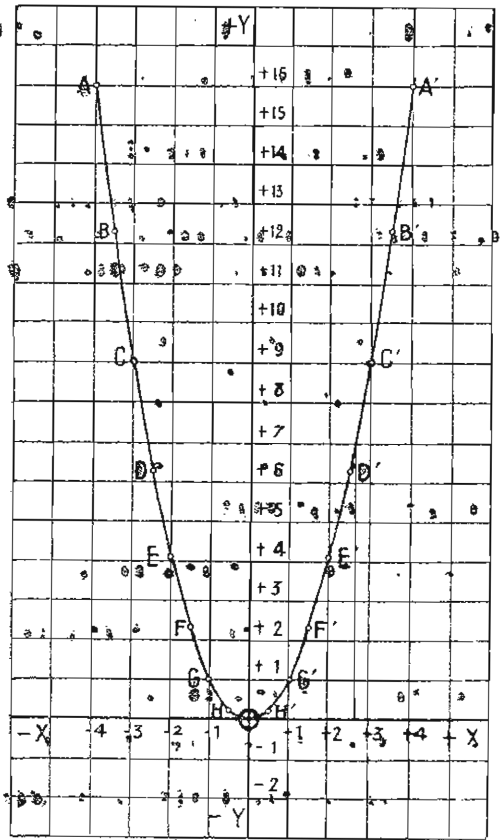
Да видимо где је на нашој слици $\sqrt{7}$.

Нацртај слику 1 на милиметарској хартији, узимајући 10 mm за поделак на осовини. Ми то нисмо могли учинити, јер простор књиге не допушта.

Ординате 9 и 4 (тачке C' и E' на слици 1) имају апсцисе $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{4} = 2$. Наша је ордината 7 између ордината 9 и 4, те и њена апсциса мора бити између $\sqrt{9}$ и $\sqrt{4}$, то јест између 2 и 3,

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

Може ли $\sqrt{7}$ бити цео број? *Не може*, јер се налази између два узастопна цела броја 2 и 3, а ту више нема места ни за један цео број.



Сл. 1.

Може ли $\sqrt{7}$ бити неки разломак? Да видимо. Нека је

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b}.$$

Ако је тако, мора бити

$$7 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a}{b \cdot b}$$

Чим је $\frac{a}{b}$ разломак, не можемо скратити са b. (Јер ако би се a могло поделити са b, онда би $\frac{a}{b}$ био у ствари цео број, а ми смо претпоставили да је разломак). Кад a и b не могу да се скрате са b, не може њихов количник бити цео број. То даље значи да

$$7 \neq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{то јест} \quad \sqrt{7} \neq \frac{a}{b}.$$

Дакле $\sqrt{7}$ није ни цео број, ни разломак. Ако почнемо да извлачимо квадратни корен, добићемо:

$$\sqrt{7} = 2,6$$
$$300 : 46 \cdot 6$$
$$24$$

Је ли $\sqrt{7} = 2,6$? Није, јер нисмо извукли корен без остатка. Узмимо сад ове квадрате:

$$2^2 = 4 \quad 2,6^2 = 6,76.$$

Али наш је број 7. Према томе 2,6 *није* квадратни корен из 7, јер је

$$6,76 < 7.$$

Ако продужимо да извлачимо корен из 7, добићемо

$$\sqrt{7} = 2,64 \; . \; . \; .$$
$$2,64^2 = 6,9696.$$

Вредност 2,64 већ боље одговара броју $\sqrt{7}$, јер је његов квадрат 2,64 = 6,9696 ближи седмици, него број 6,76.

Продужимо извлачење трећег децимала. Добићемо

$\sqrt{7} = 2,645 \; . \; . \; .$ али опет са остатком.

Ако сад овај број дигнемо на квадрат, добићемо:

$$2,645^2 = 6,996025.$$

Овај број 6,996025 је већ доста близу нашег броја 7, али ипак није 7.

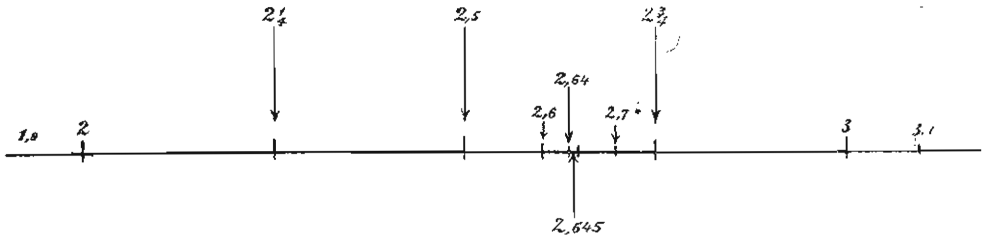
Испишимо сад наше квадрате:

$$2^2 = 4$$
$$2,6^2 = 6,76$$
$$2,64^2 = 6,9696$$
$$2,645^2 = 6,996025.$$

Можемо и даље продужити извлачење корена из броја 7, али никад нећемо добити број који дигнут на квадрат даје 7.

Ми имамо овде 4 приближне вредности за $\sqrt{7}$. Да их нацртамо на бројној линији (сл. 2).

За $\sqrt{7}$ добили смо је најпре 2,6. Кад смо дигли на квадрат 2,6 видели смо да то није 7. Кад смо продужили кореновање, добили



Сл. 2.

смо 2,64. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7. Кад смо продужили кореновање, добили смо 2,645. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7.

Из свега видимо да наш број $\sqrt{7}$ лежи између 2,645 и 2,646. Види се да му се једнако *сужавају границе:* најпре је $\sqrt{7}$ лежао између 2 и 3, па између 2,6 и 2,7, па између 2,64 и 2,65, па између 2,645 и 2,646.

То *сужавање граница* између којих се налази $\sqrt{7}$ показује да он лежи на бројној линији, само му се место не може *рачунски тачно* одредити, као што се може одредити целим бројевима и разломцима: на пр. 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3 итд.

Овакав се број зове *ирационалан број.* Он се не да претставити ни целим, ни разломљеним бројем; он се децималним бројем може најлакше претставити и то само *приближном вредношћу.* Та је приближна вредност утолико тачнија уколико има више децимала.

Ирационални је број корен из броја који није степен чији би изложилац био дељив кореновим изложиоцем.

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$ је ирационалан број, јер изложилац 5 поткорене количине није дељив кореновим изложиоцем.

Али $\sqrt[3]{8}$ *није* ирационалан број, јер је 8 трећи степен од 2:

$$8 = 2^3$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Конструкција ирационалних израза. — Дужи изражене ирационалним бројевима у облику *квадратног* корена могу се конструисати. Узмимо да конструишемо апсцису $a = \sqrt{7}$.

Нека је извесна дуж $a = \sqrt{7}$ cm. Хоћемо да је узмемо у отвор шестара. Послужићемо се Питагориним правилом.

$$a = \sqrt{7}$$
$$a^2 = 7$$
$$a^2 = 16 - 9$$
$$a^2 = 4^2 - 3^2$$

Значи да је a катета у правоуглом троуглу чија је хипотенуза 4, а једна катета, 3. Тај троугао можеш лако конструисати. Нацртај хипотенузу 4; над њом опиши полукруг; узми 3 у отвор шестара; тим отвором пресеци полукруг из једне крајње тачке хипотенузе. Тако добијамо теме правоуглог троугла. Друга његова катета је $a = \sqrt{7}$.

Према овоме видиш да се *ирационални број може тачно обележити на бројној линији.* Узмеш га у отвор шестара, забодеш шестар у почетну тачку, па на осовини отсечеш десно, ако је број позитиван, а лево, ако је твој ирационални број негативан.

Нацртај ове дужи:

$a = \pm\sqrt{5}$, $b = \pm\sqrt{20}$, $c = \pm\sqrt{17}$, $d = \pm\sqrt{27}$.

$(5 = 4 + 1)$ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

$\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$, $\sqrt{27} = \sqrt{25 + (\sqrt{2})^2}$

Нацртај ове дужи:

$a = \sqrt{35}$, $b = \sqrt{94}$, $c = \sqrt{168}$, $d = \sqrt{275}$

$94 = 100 - 6 = 10^2 - (\sqrt{6})^2$

Сад засебно дуж $m = \sqrt{6}$.

$\sqrt{6} = \sqrt{4+2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}$.

Сад опет засебно дуж $n = \sqrt{2}$:

$$n = \sqrt{2}$$
$$n = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$n^2 = 1^2 + 1^2$$

Сад је овако:

$$b^2 = 10^2 - m^2$$
$$m^2 = 2^2 + n^2$$
$$n^2 = 1^2 + 1^2$$

Један веома важан ирационалан број јесте број π. И њега можемо приближно изразити децималним бројем тачношћу која нам је потребна. Знамо да је $\pi = 3{,}14159\ldots$ Број π није корен ниједнога целог броја ни разломка.

Уклањање ирационалних именилаца. — Узмимо разломак

$$\frac{21}{\sqrt{7}}$$

Видели смо да је $\sqrt{7}$ један ирационалан број. Ако хоћемо што тачнију вредност горњег разломка, морамо узети велики број децимала. Знамо да је тешко делити бројем који има много децимала. Зато ћемо уклонити ирационални број из имениоца.

Зашто је $\sqrt{7}$ ирационалан број? Зато што 7 није квадрат ниједнога целог броја. Треба нам под кореном квадрат. То ћемо постићи овако: помножићемо поткорену количину са 7. Шта то значи?

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{7\cdot 7} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$$

Значи да смо именилац помножили са $\sqrt{7}$. Да се разломак не би променио, морамо помножити и бројилац *истим* бројем

$$\frac{21\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\,\sqrt{7}} = \frac{21\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{21\cdot\sqrt{7}}{7} = 3\sqrt{7}.$$

Опет је остао ирационалан број. Само је сад лакше, јер не делимо њиме, већ множимо.

Пример 1. Уклонити ирационалан број из имениоца:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}.$$

Пример 2.

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^1}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^{1+2}}} = \frac{10\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{10\sqrt[3]{25}}{5} = 2\sqrt[3]{25}.$$

Пример 3.

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}} = \frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}}.$$

Поткорена је количина на 1 степену. У изложиоцу јој недостаје још 1, па да буде 2, те да се може уклонити корен. Зато:

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}} = \frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}} = \frac{a\sqrt{(b-c)^1}}{\sqrt{(b-c)^1}\cdot\sqrt{(b-c)^1}} = \frac{a\sqrt{b-c}}{\sqrt{(b-c)^2}} =$$

$$= \frac{a}{b-c}\sqrt{b-c}.$$

Пример 4.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}}$$

Поткореној количини недостаје 2 у изложиоцу, па да буде 5, те да се може уклонити корен. Дакле:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^3}\cdot\sqrt[5]{(b+c)^2}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^5}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{b+c}$$

$$= \frac{a}{b+c}\sqrt[5]{(b+c)^2}.$$

Пример 5.

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Да би чланови у имениоцу постали квадрати, морамо помножити разликом:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{m}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

Пример 6.

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} = \frac{a}{b-c}(\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Пример 7.

$$\frac{x}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=\frac{x(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}=$$

$$=\frac{x(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x})^2-(2\sqrt{y})^2}=\frac{x(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{9x-4y}$$

Комплексни бројеви

Уображени бројеви. — Видели смо да је квадрат и позитивна и негативна броја увек позитиван:

$$(+3)^2=+9 \qquad\qquad (-3)^2=+9.$$

Према томе $\sqrt{-9}$ не може бити ни позитиван ни негативан. Међутим сви бројеви које смо досада видели, или су нула, или позитивни или негативни. $\sqrt{-9}$ није нула, јер $0^2 \neq -9$, те према томе овај број $\sqrt{-9}$ не постоји на нашој бројној линији. Исту ову појаву видећемо увек, кад извлачимо **паран корен из негативног броја**, пошто се сви ти корени своде на квадратни корен:

$$\sqrt[6]{-a}=\sqrt[3]{\sqrt{-a}} \qquad\qquad \sqrt[10]{-b}=\sqrt[5]{\sqrt{-b}} \text{ итд.}$$

Све ове корене можемо увек раставити на производ два корена:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=\pm 3\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a\cdot(-1)}=\pm\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}.$$

Код свију **парних корена из негативна броја** појављује се $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt[14]{-5}=\sqrt[7]{\sqrt{-5}}=\sqrt[7]{\sqrt{5(-1)}}=\sqrt[7]{\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}} \text{ итд.}$$

Међутим знамо да је

$$(+1)^2=+1 \text{ и } (-1)^2=+1.$$

Према томе квадратни корен негативна броја не можемо одредити као што смо бар приближно одређивали ирационалне бројеве.

Бројеве које смо досада видели на нашој осовини зовемо *стварни бројеви* (реални). Квадратни корен из негативна броја зовемо *уображен број*, или *имагинарон број*.

Пошто се сваки квадратни корен негативна броја може свести на производ из једног стварног броја и $\sqrt{-1}$, ми ћемо израз $\sqrt{-1}$ обележити једним нарочитим знаком. Израз $\sqrt{-1}$ зовемо *имагинарна јединица* и обележавамо га првим писменом речи *имагинаран:* **i**.

Према томе, сад можемо лако обележити уображене бројеве:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=\pm 3i$$

$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=\pm i\sqrt{5}$$

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot i=\pm i\sqrt{a}.$$

Досад смо на нашој бројној осовини имали читав низ стварних бројева целих, разломљених и ирационалних. Ако сад те бројеве множењем вежемо са имагинарном јединицом, добићемо нови низ: **низ имагинарних бројева:**

$$\ldots -3i \ldots \qquad -\sqrt{7}\,i \ldots \qquad -2i \ldots \qquad -i \ldots$$

$$-\frac{1}{2}i \ldots \qquad 0{,}25\,i \ldots \qquad +\frac{1}{2}i \ldots \qquad +i \ldots +$$

$$+2i \ldots \qquad +\sqrt{7}\,i \ldots \qquad +3i \ldots$$

Комплексни бројеви. — Алгебарски збир једног стварног и једног уображеног броја зове се *комплексан број*,

Примери:

$$2+2i, \qquad 2-7i, \qquad -5+4i,$$

$$-a+bi, \qquad -c-di, \qquad a-bi \text{ итд.}$$

Њихов је општи облик

$$a+bi.$$

Стварни (реални) је део a; уображени је део bi.

Два комплексна броја који се разликују само знацима пред уображеним бројем, зову се *спрегнуто (коњуговано) комплексни бројеви*. На њих ћемо наићи код квадратних једначина.

Примери коњуговано — комплексних бројева:

$(5+4i)$ и $(3-4i)$, $(-5+2i)$ и $(-5-2i)$, $(a+bi)$ и $(a-bi)$ итд.

Бројна осовина уображених бројева. — Стварне смо бројеве претстављали тачкама на нашој апсцисној осовини. Где ћемо претстављати уображене бројеве? Види се да и они чине један непрекидан низ. Али где су? Да бисмо добили одговор на то питање, рећи ћемо одмах да њихова осовина има исту нулу као и наша стварна осовина, јер је

$$0 \cdot i = 0$$

Узмимо сад један стварни број, рецимо + 3. Помножимо га са i. Добијамо $+3i$. Још не знамо где ћемо обележити тај уображени број. Помножимо $3i$ са i. Добићемо $3i \cdot i = 3i^2 = 3(\sqrt{-1})^2 = 3(-1) = -3$. Шта је било? Кад смо извршили два једнака множења, наша тачка + 3 извршила је пут од 180° и пала у — 3 (сл. 3.)

Продужујемо множење:

$$-3 \cdot i = -3i,\ (-3i) \cdot i = -3i^2 = -3(\sqrt{-1})^2 = -3(-1) = +3.$$

Кад смо извршили *четири једнака* множења, наша тачка + 3 извршила је једно кружно кретање од 360°. Значи, да множењем само са i, тачка прелази пут од 90°. Множењем са $(i \cdot i)$ тачка прелази пут од 270°. Пошто положаји $3i$ и $-3i$ леже на правцима који с позитивним краком стварне осовине заклапају углове од 90° и 270, значи да *тачке уображених бројева леже на једној правој, која је управна у О на осовини реалних бројева.*

Комплексне бројеве обележавамо са z и то овако: реални део са x, а сачинилац уз i са y:

$$z = x + yi$$

пошто иначе реални део преносимо по апсцисној осовини, а коефициенат уз i по ординатној осовини. Према томе и они су претстављени тачкама, али само што њихове тачке не леже ни на једној осовини за $x \gtrless 0$ и $y \gtrless 0$.

Примери:

1) $z_1 = 3 + 2i$

Овде је $x = +3$, $y = +2$. Пренесимо + 3 по X-осовини, а + 2 по Y-осовини, па ћемо добити тачку z_1, која претставља комплексни број z_1 (сл. 3.)

2) $z_2 = -1 + 4i$.

Овде је $x = -1$, $y = +4$.

3) $z_3 = -3 - 3i$.

Овде је $x = -3$, $y = -3$.

4) $z_4 = 3 - 2i$.

Овде је $x = 3, y = -2$.

Бројеви z_1 и z_4 су коњуговано-комплексни бројеви и леже на једној правој линији управној на апсцисној осовини.

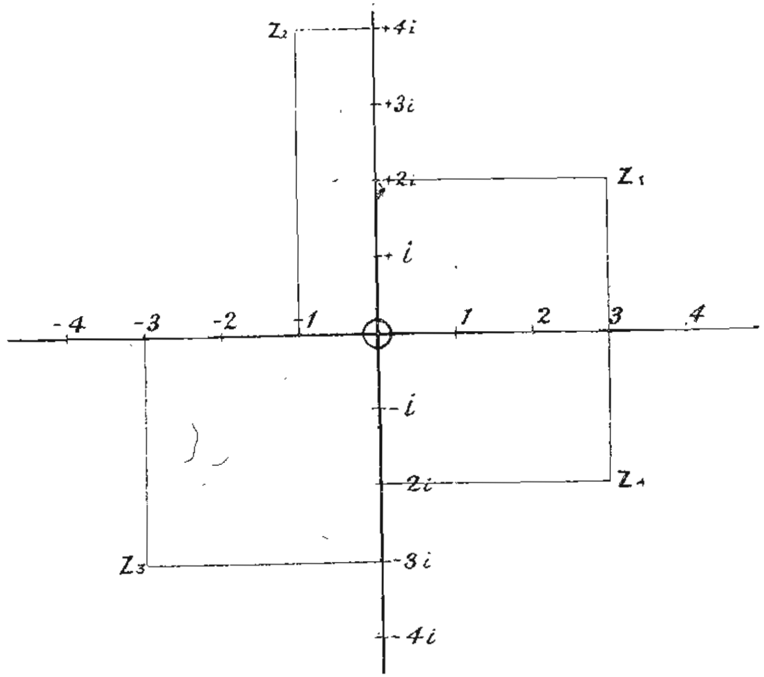
Збир два коњуговано-комплексна броја је стваран број:

$$(3 + 2i) + (3 - 2i) = 6.$$

Производ два коњуговано-комплексна броја је стваран број.

$$(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 2^2 i^2 = 9 - 4i^2 = $$
$$= 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13.$$

Због ове особине коњуговано-комплексних бројева једначина вишег степена од 1 са *стварним* сачиниоцима може да има *уображене* корене.



Сл. 3.

Степени од i. — Ово су 4 узастопна степена од i:

$$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = +1,$$

Да видимо сад како ћемо израчунати који било степен од i. Рецимо i^{17}. Увек треба дати изложилац раставити тако, да један чинилац буде i^4, пошто је $i^4 = 1$

$$17 = 4 \cdot 4 + 1$$

Према томе ће бити:

$$i^{17} = i^{4 \cdot 4} \cdot i^1 = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Узмимо сад да израчунамо вредност i^{2345}

$$\underline{2345} : 4 = 586 \text{ са остатком } 1$$
$$\text{1}$$
$$2345 = 586 \cdot 4 + 1$$
$$i^{2345} = (i^4)^{586} \cdot i = (1)^{586} \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^0 = 1.$$

Рачунске радње с комплексним бројевима. — Сваку рачунску радњу с комплексним бројевима лако ћеш разумети, ако комплексни број сматраш као бином и водиш рачуна о степенима од i. Како се ради видећеш на примерима.

Пример 1. Сабрати z_1 и z_2, кад је $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 + 5i$.
$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + 5i) = (1 + 4) + (2i + 5i) = 5 + 7i.$

Пример 2. — Од z_1 одузети z_2 кад је

$$z_1 = 2 - 3i \qquad z_2 = 6 - 9i$$
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (6 - 9i) = 2 - 3i - 6 + 9i = (2 - 6) + + (-3i + 9i) = -4 + 6i$$

Пример 3. — Помножити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 2 + 5i \qquad z_2 = 1 - 4i.$$
$$z_1 z_2 = (2 + 5i)(1 - 4i) = 2 + 5i - 8i - 20i^2 = 2 - 3i + 20 = 22 - 3i.$$

Пример 4. — Поделити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 26 + 7i \qquad z_2 = 4 + 3i$$

Нека је $z = \frac{z_1}{z_2}$, где је $z = x + yi$. Онда мора *бити*:

$$z_1 = zz_2. \qquad \text{То значи}$$
$$26 + 7i = (x + yi)(4 + 3i)$$
$$26 + 7i = 4x + 4yi + 3xi - 3y = (4x - 3y) + (4y + 3x)i.$$

Два комплексна броја су једнака, кад су засебно једнаки стварни делови, а засебно уображени.

Видели смо да је

$$26 + 7i = (4x - 3y) + (4y + 3x)i$$

Зато мора бити:

$$\text{I} \quad 4x - 3y = 26$$
$$\text{II} \quad 4y + 3x = 7$$

Одатле треба наћи x и y.

$$\text{I} \quad x = \frac{26 + 3y}{4}$$
$$\text{II} \quad 4y + \frac{78 + 9y}{4} = 7$$

$$\text{III} \quad 16y + 78 + 9y = 28$$
$$25y = -50$$
$$y = -2$$
$$x = 5$$

Тражени количник је $z = 5 - 2i$

Проба: $(4 + 3i)(5 - 2i) = 20 + 15i - 8i + 6 = 26 + 7i$

Пример 5. — Поделити z_1 са z_2 кад је

$$z_1 = 1 + 2i \qquad z_2 = 7 + 8i$$

Узећемо опет да је количник $z = x + yi$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \text{ тј.} \qquad x + yi = \frac{1 + 2i}{7 + 8i} \text{ Отуда је}$$

$$7x + 7yi + 8xi - 8y = 1 + 2i$$
$$(7x - 8y) + (7y + 8x)\,i = 1 + 2i$$
$$\text{I} \quad 7x - 8y = 1$$
$$\text{II} \quad 7y + 8x = 2$$
$$\text{I} \quad 49x - 56y = 7$$
$$\text{II} \quad \underline{56y + 64x = 16}$$
$$113x = 23$$
$$x = \frac{23}{113}$$
$$\text{II} \quad y = \frac{2 - 8x}{7}$$
$$y = \frac{6}{113}$$

Тражени је количник:

$$z = \frac{23}{113} + \frac{6}{113}\,i$$

ПОТСЕТНИК БРОЈЕВА

Да се сетимо сад свих бројева које смо досад видели.

I Стварни бројеви

а) Позитивни стварни бројеви:

Позитивни рационални:
1) *Стварни позитивни цели бројеви:* $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ То су бројеви из *природног низа бројева*.
2) *Стварни позитивни разломљени броj.:* $\frac{3}{4} \ldots \frac{5}{7}$ $\ldots 0{,}6 \ldots 3\frac{2}{3} \ldots 15\frac{2}{7} \ldots$

3) *Стварни позитивни ирационални бројеви:* $\sqrt{2} \ldots \sqrt{3} \ldots \sqrt{5} \ldots \sqrt{7} \ldots \sqrt{\frac{500}{33}}$

b) Негативни стварни бројеви:

Негативни рационални

4) *Стварни негативни цели бројеви:* —3, —4, —5, —6, —150, —200.

5) *Стварни негативни разломљени бројеви:* $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{7}$, $-0{,}6$, $-3\frac{2}{3}$, $-10\frac{3}{8}$, $-15\frac{2}{7}$

6) *Стварни негативни ирационални број.:* $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7} - \sqrt{\frac{500}{53}}$.

II Уображени бројеви

a) Позитивни уображени бројеви

7) Уображени позитивни цели бројеви: 3i, 4i, 5i, 6i, 150i 200i

8) Уображени позитивни разломљени бројеви: $\frac{3}{4}$ i, $\frac{5}{7}$ i, 0,6i $3\frac{2}{3}$ i, $15\frac{2}{7}$ i

9) Уображени позитивни ирационални бројеви: — $\sqrt{2}$ i, $\sqrt{3}$, i $\sqrt{5}$, i $\sqrt{\frac{500}{53}}$

b) Негативни уображени бројеви

10) Уображени негат. цели број.: —3i, —4i, —5i, —6i. —150,200i

11) Уображени негат. разломљени број.: $-\frac{3}{4}$ i, $-\frac{5}{7}$ i, —0,6i, $-10\frac{3}{8}$i, $-15\frac{2}{7}$i,

12) Уображени негат. ирационални бр.: $-i\sqrt{2}$ $-i\sqrt{3}$ $-i\sqrt{5}$, $-i\sqrt{\frac{3}{5}}$.

c) Комплексни бројеви:

$1 + i$, $1 - i$, $3 - 2i$, $-4 + 5i$.

d) Коњуговано-комплексни бројеви:

$3 + 4i$ и $3 - 4i$, $-2 + 5i$ и $-2 - 5i$.

Напомена. — Комплексан број $x + yi$ постаје стваран број за $y = o$.

ВЕЖБАЊА

1. — Нађи на бројној осовини приближно место ирационална броја $\sqrt{5}$

2. — Исто за $\sqrt{17}$
3. — Исто за $\sqrt{26}$
4. — Исто за $\sqrt{37}$
5. — Исто за $\sqrt{48}$
6. — Исто за $\sqrt{75}$
7. — Исто за $\sqrt{168}$

Напомена. — При вежбањима 1 до 7 границе између којих лежи ирационалан број сузи до 3 децимала тачно.

Ирационалним бројевима из вежбања 1 до 5 одреди *тачно* место на осовини.

Уклони ирационале бројеве из именитеља ових разломака:

8. $\frac{an}{\sqrt{n}}$

9. $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{c}}$

10. $\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$

11. $\frac{2\sqrt{3-a}}{3\sqrt{b}}$

12. $\frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{a}}$

13. $\frac{a - 2}{\sqrt{a^2 - 4}}$

[Овде треба приметити да $a^2 - 4$ није степен ниједног до сад нама познатог рационалног израза. Према томе га треба замислити на првоме степену: $(a^2 - 4)^1$. До квадрата му недостаје чинилац $(a^2 - 4)^1$].

14. $\frac{a}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{a}{\sqrt[4]{x}}$, $\frac{a}{\sqrt[4]{x^3}}$, $\frac{a}{\sqrt[7]{x^4}}$,

15. $\frac{5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

16. $\frac{3\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ (Може ли се скратити са 3?)

17. $\frac{6}{\sqrt{3} - 5}$

18. $\frac{a\sqrt{a}}{a + \sqrt{3a}}$

19. $\frac{11 - \sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}$

20. $\frac{1\frac{1}{2} - 0{,}8\sqrt{2}}{3 - 4\sqrt{\frac{1}{2}}}$

21. $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

22. $\frac{0{,}6\sqrt{5} - 0{,}4\sqrt{2}}{0{,}2\sqrt{5} - 0{,}3\sqrt{2}}$

23. — Нађи на координатном систему ове бројеве:
$2 + 3i$, $2 - 3i$, $3 + 5i$, $-4 + 6i$, $-9 + 3i$.

24. — Исто за бројеве:
$4 + i$, $3 + 8i$, $7 + i$, $1 + 4i$, $\frac{1}{2} + 5i$.

25. — Исто за бројеве:
$1 + i$, $2 - 2i$, $3 - 3i$, $4 - 4i$, $4 - 5i$, $5 - 4i$, $5 - 3i$, $5 - 5i$, $5 - i$.

Нађи вредност ових степена од i:

26.	i^{25}	**27.**	i^{87}	**28.**	i^{58}	**29.**	i^{60}
30.	i^{20}	**31.**	i^{28}	**32.**	i^{50}	**33.**	i^{1111}
34.	i^{1073}	**35.**	i^{17846}	**36.**	i^{2567}		

Сабери ова два комплексна броја:

37.	$17 + 18i$ и $12 - 14i$	38	$10 + 12i$ и $14 - 7i$
39.	$2i - 17$ и $14i + 9$	**40.**	$4i - 5$ и $5 - 3i$
41.	$1 - 2i$ и $3i + 4$	**42.**	$7i - 9$ и $6 + 8i$

43. — Од броја $7 + 3i$ одузми број $4 - 5$.
44. „ „ $2 + 5i$ „ „ $6 - 7i$.
45. „ „ $4 - 7i$ „ „ $8 + i$.
46. „ „ $5 - 3i$ „ „ $5 + 3i$.
47. „ „ $7 + 4i$ „ „ $3i + 5$.
48. „ „ $8 + 9i$ „ „ $4i - 3$.
49. — Помножи број $3i - 7$ бројем $4 - 9i$.
50. „ „ $2i + 6$ „ $3i - 2$.
51. „ „ $4 - 2i$ „ $4 - 3i$.
52. „ „ $3 + 2i$ „ $4 - 5i$.
53. „ „ $2 + 3i$ „ $7 - 8i$.
54. „ „ $4 + 5i$ „ $9 + 3i$.
55. „ „ $7 + i$ „ $i - 5$.
56. „ „ $1 + i$ „ $1 - 12i$.
57. — Број $11 + 10i$ подели бројем $2 + 3i$.
58. „ $-32 - i$ „ „ $i - 1$.
59. „ $18 - 2i$ „ „ $5 + 4i$.
60. „ $23 - 2i$ „ „ $4 + 5i$.
61. „ $7 - i$ „ „ $2 + 2i$.
62. — Број $4 + 5i$ подели бројем $5 - 4i$.
63. „ $7 + 8i$ „ „ $8 - 9i$.
64. „ $6 - 3i$ „ „ $5 + 2i$.
65. „ $8 - 7i$ „ „ $i + 8$.
66. „ $5 + 3i$ „ „ $3i - 2$.

II — ЧЕТИРИ РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С ПРИБЛИЖНИМ ВРЕДНОСТИМА

Непотпуни десетни разломак. — Узмимо један десетни разломак са пет децимала: 0,48276.

Ако хоћемо да радимо само са 2 децимала, одбацићемо она три крајња и задржаћемо 0,48. Тада је број 0,48 *непотпуни* десетни разломак. Он је *приближна вредност* броја 0,48276 са *два децимала*. Он је *приближно* **мања** *вредност*.

Ако хоћемо да радимо са 3 децимала, одбацићемо последња два децимала, али нећемо задржати 0,482, већ 0,483. Крајњу смо цифру *повећали* за 1. Ту поправку вршимо кад је прва цифра која се одбацује *већа од 5.* Овде је прва цифра која се одбацује била 7. Зато смо крајњу цифру 2 повећали на 3. Овде смо узели *приближно* **већу** *вредност* 0,483.

Узмимо разломак 0,275. Хоћемо да радимо са 2 децимала. Имамо да одбацимо цифру 5. Овде можемо и поправити цифру 7 и не поправити. Пошто је 7 непаран број, ми ћемо овде поправити на 8. Узећемо број 0,28, да тако добијемо *паран* број. Да је овде био број 0,265, ми бисмо одбацили 5, а задржали бисмо 0,26.

Али ако иза 5 има још децимала, мора се извршити поправка. На пр. 0,27|51. Узимамо 0,28. Од броја 4,28|56 узећемо 4,29.

Грешка. — Кад место свих децимала узмемо само неке, ми чинимо увек грешку. Само ми се трудимо да грешка буде мања. Зато ћемо увек узимати ону приближну вредност где ће грешка бити мања.

Пример. — Узети приближну вредност са 2 децимала од 2,354789.

Хоћемо да одбацимо све децимале десно од 5:

2,35|4789.

Пошто је први одбачени децимал 4, ми нећемо поправљати други децимал 5:

2,35.

Узели смо *приближно мању вредност.* Грешка је мања од 0,005, јер смо одбацили $0{,}004789 < 0{,}005$.

Да смо узели приближно већу вредност: 2,36 грешка би била:

$$\begin{array}{r} 2{,}36 \\ -\ 2{,}354789 \\ \hline 0{,}005211 \end{array}$$

Дакле грешка већа од 0,005. Зато узимамо *мању* приближну вредност.

Напомена. Коју ћеш приближну вредност узети, казаће ти увек први децимал који одбацујеш.

I. — Ако је он **мањи** од 5, узећеш приближно **мању** вредност:

2,7826	2,78 26	**2,78**

II. — Ако је први одбачени децимал 5 и ако иза њега нема више децимала, узећеш ону вредност која твој број чини парним:

2,785	2,78 5	**2,78**
3,415	3,41 5	**3,42**

III. — Ако је први одбачени децимал **5**, а иза њега има још децимала, увек поправи:

2,4751	**2,47 51**	**2,48**
2,4651	**2,46 51**	**2,47**

V. — Ако је први одбачени децимал **већи од 5**, увек поправи:

3,241 621	3,241 621	**3,242**

Величина грешке. — Узмимо број 7,2345609.

Хоћемо само један децимал:	7,2 345609	**7,2**	грешка $< 0{,}05$
„ „ два децимала:	7,23 45609	**7,23**	грешка $< 0{,}005$
„ „ три „	7,234 5609	**7,235**	грешка $< 0{,}0005$
„ „ четири „	7,2345 609	**7,2346**	грешка $< 0{,}00005$
„ „ пет „	7,23456 09	**7,23456**	грешка $< 0{,}000005$

Кад место свих датих децимала узмеш само неколико, *грешка треба увек да је мања од 5 децимала оног места које се прво одбацује.*

Сабирање скраћених бројева

Узмимо три броја: 2,345678 4,742831 и 5,789642. Хоћемо да их саберемо тако, да нам резултат буде са 2 децимала.

Најпре ћемо их сабрати са свима њиховим децималима:

$$\begin{array}{r} 2{,}345678 \\ +\ 4{,}742831 \\ 5{,}789642 \\ \hline 12{,}878151 \end{array}$$

Сад ћемо их сабрати са 2 децимала:

I 2,35 (приближно већа вредност)
II 4,74 (приближно мања вредност)
III 5,79 (приближно већа вредност),
12,88

Код првога броја	грешка	је	мања	од	$+$ 5	хиљадитих	
„ другога	„	„	„	„	$-$ 5	„	
„ трећега	„	„	„	„	$+$ 5	„	
Највећа грешка у збиру	„	„	„		$+$ 5	„	

Значи наш збир је приближно *већа* вредност, где је грешка мања од 5 хиљадитих. То је добро.

Да не бисмо изводили цео овај рачун, узећемо приближне вредности с **два децимала више**. Овако:

Први пример.

$$\begin{array}{r} 2{,}342792 \\ +\ 3{,}413684 \\ 4{,}152903 \\ \hline \end{array}$$

Дати збир са три децимала! Значи последњи децимали да буду хиљадити. То даље значи *да грешка буде мања од 5 десетохиљадитих.*

Траже се три децимала. Ми узимамо два више:

2,34279	(приближно мања вредност)
+ 3,41368	(„ „ „)
4,15290	(„ „ „)
9,90937	Узимамо **9,909**.

Грешка је мања од $\frac{5}{10\,000}$. Да видимо:

$$\begin{array}{r} 2{,}342792 \\ 3{,}413684 \\ 4{,}152903 \\ \hline 9{,}909379 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}909379 \\ 9{,}909 \\ \hline 0{,}000379 \end{array}$$

Грешка је $0{,}000379 < 0{,}0005$

Други пример. — Сабрати 4,78321 ... 5,89643 ... и 18,233247 ... тако, да у резултату буду *два* децимала.

Узећемо од свих бројева приближне вредности са 4 децимала:

$$\begin{array}{r} 4{,}7832 \\ +\ 5{,}8964 \\ 18{,}2332 \\ \hline 28{,}9128 \end{array}$$

Одбацујемо 2 последња децимала. Резултат је 28,91. *Грешка је мања од 5 хиљадитих.*

Одузимање скраћених бројева

Први пример. — Од броја $\sqrt{7}$ одузети број $\sqrt{3}$, а резултат дати са 2 децимала. Узећемо и од $\sqrt{7}$ и од $\sqrt{3}$ приближне вредности са 4 децимала. Али зато нам је потребан и пети децимал, да видимо хоће ли бити поправке:

$$\sqrt{7} = 2{,}64575\ldots \qquad \sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$$

Узећемо ове приближне вредности:

$$\sqrt{7} = 2{,}6458 \qquad \sqrt{3} = 1{,}7321$$
$$\sqrt{7} - \sqrt{3} = 2{,}5458 - 1{,}7321$$
$$\sqrt{7} - \sqrt{3} = 0{,}91.$$

Грешка је мања од 0,005.

Споредни радови:

$$\begin{array}{r} 2{,}6458 \\ -\ 1{,}7321 \\ \hline 0{,}9137 \end{array}$$

Други пример. — Одузети $\frac{4}{7}$ од $\sqrt{2}$. Резултат дати са 3 децимала.

Узећемо приближне вредности са 5 децимала (2 децимала више него што се тражи). Да бисмо могли вршити поправку, морамо узети и шести децимал.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \qquad 4 : 7 = 0{,}571428\ldots$$

Приближне вредности са 5 децимала јесу ове:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421 \qquad \frac{4}{7} = 0{,}57143$$

$$\begin{array}{r} 1{,}41421 \\ -\ 0{,}57143 \\ \hline 0{,}84278 \end{array}$$

Резултат са три децимала је 0,843. Грешка мања од 5 десетохиљадитих.

МНОЖЕЊЕ СКРАЋЕНИХ БРОЈЕВА

Множење скраћеног броја потпуним бројем

Први задатак. — *Израчунати са 3 децимала обим круга, кад је $r = 3$ m.*

Обележимо обим са c. Биће:

$$c = 2r\pi$$
$$c = 2 \cdot 3 \cdot 3{,}1415926535\ldots$$
$$c = 6 \cdot 3{,}1415926535\ldots$$

Траже се 3 децимала у резултату. Значи да грешка мора да буде мања од $\frac{5}{10000}$. То значи мања од 0,5 mm.

Ако узмемо само 3 децимала од броја π, наша ће грешка бити мања од $6 \times \frac{5}{10000}$. То значи грешка ће бити мања од $\frac{30}{10000}$ тј. од $\frac{3}{1000}$. Нама је потребно да грешка буде мања од $\frac{5}{10000}$. Морамо узети један децимал више. Ако узмемо 4 децимала, тј. $\pi \backsimeq 3{,}1416$, грешка ће бити мања од $\frac{5}{100000}$. Кад помножимо са 6, грешка ће бити мања од $6 \times \frac{5}{100000}$ тј. мања од $\frac{30}{100000}$. То значи мања од $\frac{3}{10000}$. Добро је. Узећемо 4 децимала:

$$3{,}1416 \times 6 = 18{,}8496$$

$c \backsimeq 18{,}850$. Грешка мања од 5 десетохиљадитих.

Други задатак. — *Израчунати обим круга, кад му је $r = 75$ cm. Резултат дати са једним децималом.*

$$c = 2r\pi = 2 \cdot 75 \cdot 3{,}1415\ldots = 150 \cdot 3{,}1415\ldots$$

Кад смо множили *једноцифреним* бројем, морали смо узети 1 децимал више него што се тражи. Да пробамо то и овде.

Ако узмемо само 2 децимала: $\pi \backsimeq 3{,}14$, грешимо мање од $\frac{5}{1000}$. Кад ту грешку помножимо са 150, добијемо грешку мању од $\frac{5}{1000} \times 150 = \frac{750}{1000} = \frac{7{,}5}{10}$. Велика је грешка. Кад нам се тражи један децимал, грешка мора бити мања од $\frac{5}{100}$. Овде је мања од 7,5 *десетих*. Морамо утети још децимала.

Узмимо 3 децимала, $\pi = 3{,}142$. Грешка је мања од $\frac{5}{10000}$. Кад то помножимо са 150, биће грешка мања од $\frac{750}{10000}$ тј. мањ од $\frac{75}{1000}$, тј. мања од $\frac{7,5}{100}$. А она мора да буде мања од $\frac{5}{100}$. Морамо узети 4 децимала.

$$\pi \simeq 3{,}1416. \text{ Грешка је мања од } \frac{5}{100\,000}$$

$$\frac{5}{100\,000} \times 150 = \frac{750}{100\,000} = \frac{75}{10\,000} = \frac{7,5}{1000} = \frac{0,75}{100}$$

Добро је.

Шта показују ове пробе? Оне кажу ово:

Кад множиш непотпун број потпуним бројем, узећеш од непотпуног броја најпре онолико децимала колико ти се тражи, а затим још и онолико децимала колико потпун број има целих места. У нашем задатку:

Тражи се	1 децимал
Број 150 има	3 цела места (1 5 и 0).
Од броја π узећемо	4 децимала.

$$c \simeq 150 . 3{,}1416 \simeq 471{,}2 \text{ cm}.$$

Трећи задатак. — *Израчунати са два децимала вредност $17{,}34\pi$.*

Траже се	2 децимала
Број 17,34 има	2 цела места (1 и 7)
Од броја π узећемо	4 децимала

$$17{,}34\pi \simeq 17{,}34 \times 3{,}1416 \simeq 54{,}48.$$

Множење два скраћена броја

Задатак. — *Израчунати површину круга за $r = \frac{2}{3}$ m. Резултат са 2 децимала.*

Обележимо површину са p.

$$p = r^2\pi = \frac{4}{9} \cdot 3{,}1415\ldots\ldots =$$

$$= 0{,}4444444\ldots\ldots \times 3{,}1415926535\ldots\ldots$$

Траже се 2 децимала. Ми ћемо узети **још 2** од множеника. То значи узећемо и четврти децимал од 0,4444 .... Испод четвртог

децимала исписаћемо *цифру јединица* броја 3,1415 ..... а остале његове цифре налево **натрашке**.

```
        0,4444444
....56295 1413
```

Број 0,44 ..... штрчи надесно од броја 3,14 ...... Цифре што штрче доле и горе превучене су цртом. Њих не употребљавамо при множењу.

Остаје ово:

```
  0,4444
× 5 1413        (Множимо 0,4444 са 3).
  1 3332
```

Сад имамо да множимо са 1. Али то множење иде од четворке изнад јединице овако:

```
 0,444
 5 1413          (444 × 1 = 444)
   444
```

Кад множимо са 4 бива ово:

```
 0,44
 5 1413          (44 × 4 = 176)
   176
```

Кад множимо са 1 бива ово:

```
 0,4
 5 1413          (4 × 1 = 4)
     4
```

Кад множимо са 5 бива ово:

```
 0,
 5,1413          (0 × 5 = 0)
      0
```

Дакле овако:

```
 0,4444
 5 1413
 1 3332
    444
    176
      4
      0
 1 3956
```

Одбацимо две крајње цифре: 139,56
Остаје 139
Крајњу фифру повећавамо за 1:

$$139 + 1 = 140$$

Сад одвојимо два места која нам се траже:

$$p = 1{,}40\ m^2.$$

Дељење скраћеног броја

Задатак. — *Израчунати висину равностраног троугла, кад је страна а = 1 м. Резултат са 3 децимала.*

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

$\sqrt{3} : 2 =$

Траже се три децимала.

Делилац има	*1 цифру на месту* целих.
Узећемо	4 децимала у количнику.

Због тога ћемо узети **5** децимала у дељенику.

$$\sqrt{3} \simeq 1{,}73205$$
$$1{,}73205 : 2 = 0{,}86602\ldots$$
$$h \simeq 0{,}866\ m.$$

Напомене: — Ако се траже 2 децимала у количнику, а делиш двоцифреним бројем, узећеш у дељенику (2 + 2) + 1 = 5 децимала.

Ако се тражи 1 децимал у количнику, а делиш једноцифреним бројем, узећеш у дељенику (1 + 1) + 1 = 3 децимала.

Дељење скраћеним бројем

Показаћемо на примерима како се дели скраћеним бројем.

I задатак. — *Решити правоугли троугао ABC, кад му је дата једна страна правог угла BC = a и један оштар угао A.*

(Узимамо да је прав угао *B*. Одмах нацртај један такав троугао).

Одмах ћемо наћи угао *C*:

$$C = 90^0 - A.$$

Сад ћемо трежити стране. Како то радимо? *Везујемо познате комаде за непознате помоћу кружних функција познатих углова.*

Хоћемо да израчунамо хипотенузу. Ми ћемо везати познату страну *a* за непознату хипотенузу *y*. Чиме? Кружном функцијом неког познатог угла. Кога? Рецимо угла *A*. Тада је:

$$\frac{a}{y} = \sin A$$

Одатле је лако наћи *y*:

$$y = \frac{a}{\sin A}.$$

Примена. — Нека је $a = 5{,}5$cm, $A = 61^0\ 18'$.

Тада ће бити

$$y = \frac{5{,}5}{\sin 61^0 18'}.$$

Пошто је $\sin 61^0 18' = \cos 28^0 42'$, биће:

$$y = \frac{5{,}5}{\cos 28^0 42'}$$ Сад даље:

$$\begin{aligned} \cos 28^0 40' &= 0{,}87743 \\ \cos 28^0 50' &= 0{,}87603 \\ d &= \quad 140 \end{aligned}$$

$$p = \frac{dm}{10}$$

$$p = 140 \cdot \frac{2}{10} = 14 \cdot 2 = 28 \qquad \cos 28^0 40' = 0{,}87743$$

$\cos 28^0 40' = 0{,}87743$

За 2′ косинус опадне $-\ 28$

$\cos 28^0 42' = 0{,}87715$

$$y = \frac{5{,}5}{0{,}87715}$$

Број 0,87715 није потпун број. Он има још безброј децимала. Он је један скраћен број. Зато ћемо њиме делити онако како се дели скраћеним бројем.

Хоћемо, рецимо, два децимала у количнику.

Да видимо најпре колико ће цифара на месту целих бити у количнику.

$$5{,}5 : 0{,}8771\ \ldots\ldots =$$

Ако делилац помножимо са 10, добивамо:

8,771 . . . . . .

Дељеник је мањи од тога броја:

$5{,}5 < 8{,}781 \ldots\ldots$

Ако делилац помножимо са 1 он остаје непромењен:

0,8771 . . . . . .

Овај број је мањи од дељеника:

$0{,}8771 \ldots\ldots < 5{,}5 < 8{,}771 \ldots\ldots$

Наш дељеник је између делиоца помноженог са 1 и делиоца помноженог са 10. Између 1 и 10 су само једноцифрени бројеви. Значи, у количнику ћемо имати једну цифру на месту целих.

Хоћемо два децимала у количнику. Сад узмемо 1 (Пошто ће бити једна цифра на месту целих у количнику). Дописујемо јединици онолико нула колико хоћемо децимала у количнику:

100.

Сад у делиоцу не гледамо на запету. Место 0,8771 . . . . . . пишемо:

8771 . . . . . .

Затим слева одвојимо први број у коме се садржи 100.

8,771	Број 100 се не садржи у 8.
87,71	„ „ „ „ „ „ 55.
877,1	„ „ „ садржи „ 877.

Добили смо број 877. Цифре 1 и 5 и све остале за њима одбацујемо.

Сад да спремимо дељеник. Ни у њему не обраћамо пажњу на запету. Место 5,5000 . . . узимамо 55000000.

Затим, у томе броју без запете, узимамо слева први број у коме се садржи 877.

5,5000000	Број 877 се не садржи у 5.
55,000000	„ „ „ „ „ „ 55.
550,00000	„ „ „ „ „ „ 550.
5500,0000	„ „ се садржи „ 5500.

Дељеник ће бити 5500, а делилац 877.

Сад почиње дељење:

$\underline{5500:877} = \mathbf{6}.$ Добили смо прву цифру у количнику.
238

Сад у делиоцу одбацујемо једну цифру и настављамо дељење остатка 238 тим скраћеним делиоцем 87.

$\underline{238:87} = \mathbf{2}.$ Добили смо другу цифру у количнику.
64

Опет одбацујемо једну цифру у делиоцу, па делимо остатак:

$64:8 = \mathbf{8}.$ Добили смо трећу цифру у количнику.

Наш количник је **6,28.**

$$y = \frac{5{,}5}{\cos 28^0\,42'}$$

$$y = \frac{5{,}5}{0{,}8771\ldots.}$$

$$y \simeq 6{,}3.$$

Узмимо сад да нађемо страну AB.

Опишимо из A круг полупречником AB. Тада је:

$$\frac{a}{x} = \operatorname{tang} A \text{ тј. } x = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$$

Примена за $a = 5{,}5$, $A = 61^0 18'$.

Тада ће бити:

$$x = \frac{5{,}5}{\operatorname{tang} 61^0 18'}$$

$$x = 5{,}5 : 1{,}82654$$

$$1{,}8265\ldots. < 5{,}5 < 18{,}265\ldots.$$

Значи имаћемо једну цифру на месту целих. Хоћемо 2 децимала.

Једна цифра на месту целих:

1

Хоћемо два децимала:

100

Да одредимо делилац

1,8265	Број 100 се не налази у 1.
18,265	„ „ „ „ „ „ 18.
182,65	„ „ „ налази „ 182.

Делилац ће бити 182.

Да одредимо сад дељеник.

5,50000	Број 182 се не садржи у 5.
55,00000	„ „ „ „ „ „ 55.
550,00000	„ „ „ садржи у 550.

Дељеник ће бити 550.

$$\begin{array}{l} 550 : 182 = \mathbf{3} \\ \underline{4} \\ \underline{4} : 18 = \mathbf{0} \\ 4 \qquad\qquad 4 : 1 = \mathbf{4}. \end{array}$$

Количник је 3,04. Узећемо 3.

$x \cong 3.$

Да нисмо учинили неку грубу грешку? Да видимо!

По угловима се види да мора бити:

$x < a$. И збиља је

$3 < 5{,}5$.

Знамо да у правоуглом троуглу хипотенуза мора бити највећа страна. Мора бити.

$y > a$ и $y > x$. И збиља је:

$6{,}3 > 5{,}5$ и $6{,}3 > 3$. Грубе грешке нема.

ВЕЖБАЊА

Сабирања скраћених бројева

1\. — Сабери 1,432896.... и 2,347895.... са 2 децимала у резултату.
2\. — Сабери 1,378964.... и 14,785679.... „ 3 „ „ „
3\. — Сабери 2,378993.... и 7,324653.... са 1 децималом у резултату
4\. — Сабери $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ „ „ „ „ „
5\. — Сабери $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ „ 3 децимала „ „
6\. — Сабери $\sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{6}$ „ 2 „ „ „
7\. — Сабери $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10}$ „ 2 „ „ „
8\. — Сабери $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$ „ 1 децималом „ „
9\. — Сабери $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ „ 2 децимала „ „
10\. — Сабери $\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{10}$ „ 2 „ „ „
11\. — Сабери $\pi + \sqrt{3}$ „ 3 „ „ „
12\. — Сабери $\pi + \sqrt{7}$ „ 2 „ „ „
13\. — Сабери $\pi + \sqrt{5}$ „ 3 „ „ „
14\. — Сабери $\pi + \sqrt{6}$ „ 5 „ „ „
15\. — Сабери $\sqrt{3} + \pi$ „ 6 „ „ „
16\. — Сабери $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ „ 2 „ „ „
17\. — Сабери $\sqrt{3} + \sqrt{7} + \pi$ „ 2 „ „ „
18\. — Сабери $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \pi$ „ 2 „ „ „
19\. — Сабери $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ „ 3 „ „ „

20\. — Сабери $1 + \sqrt{7} + \pi$ са 3 децимала у резултату
21\. — Сабери $2 + \sqrt{5} + \pi$ „ 2 „ „ „
22\. — Сабери 1,47896886... и 2,34567898. . и 14,56789633.... „ 3 „ „ „

Одузимање скраћених бројева

23. — Од	1,68965... одузми	0,68943....	са 2 децимала у резултату			
24. — „	4,7777777... „	2,55555555....	„ 6	„	„	„
25. — „	14,7896447... „	$\frac{3}{7}$	„ 4	„	„	„
26. — „	7,8567943.... „	$\frac{4}{6}$	„ 3	„	„	„
27. — „	25,378664.... „	$\frac{5}{14}$	„ 5	„	„	„
28. — „	38,473289543... „	$\frac{3}{17}$	„ 6	„	„	„
29. — „	7,(35) „	6,2(43)	„ 8	„	„	„
30. — „	23,36(57) „	19,(48)	„ 6	„	„	„
31. — „	43,567(8) „	35,42(178)	„ 5	„	„	„
32. — „	18,(37) „	14,343,(14)	„ 4	„	„	„
33. — „	$\frac{3}{11}$ „	$\frac{3}{14}$	„ 3	„	„	„
34. — „	7,8896(73) „	$\frac{2}{15}$	„ 7	„	„	„
35. — „	18,93(45) „	$\frac{4}{13}$	„ 6	„	„	„
36. — „	$\frac{7}{9}$ „	0,(437)	„ 5	„	„	„
37. — „	$\frac{6}{17}$ „	0,00(42)	„ 4	„	„	„
38. — „	1,943(67) „	23,(56)	„ 3	„	„	„
39. — „	0,(567) „	4,3(8)	„ 4	„	„	„
40. — „	0,567(73) „	3,798(5)	„ 4	„	„	„
41. — „	32,56(73) „	$\frac{19}{21}$	„ 5	„	„	„
42. — „	47,43(52) „	$1\frac{14}{15}$	„ 4	„	„	„
43. — „	37,289(3) „	36,(25)	„ 3	„	„	„

44. — Од 45,5443(21) одузми 54,544(21) са 6 децимала у резултату.

45. — „ 7,289(56) „ $\frac{32}{33}$ „ 3 „ „ „

Множење скраћених бројева

46. — Израчунај површину правоугаоника чије су стране $a = 4$ см, $b = \sqrt{3}$ см. (2 децимала у резултату).

47. — Израчунај површину правоугаоника чије су стране $a = 15$ dm, $b = \sqrt{5}$ dm, (2 децимала).

48. — Исто за $a = 2{,}345$ m., $b = \sqrt{2}$ m. (4 децимала).

49. — Исто за $a = 3{,}456$ м., $b = \sqrt{3}$ м. (4 децимала)

50. — Исто за $a = 7{,}54$ m., $d = \sqrt{2}$ dm. (4 децимала).

51. — Израчунај висину равностраног троугла чија је страна $a = 4$ dm. (2 децимала).

52. — Исто за $a = 6$ dm. (2 децимала).

53. — Исто за $a = 4{,}5$ (1 децимал).

54. — Исто за $a = 10{,}75$ m. (1 децимал).

55. — Исто за $a = 14\frac{2}{3}$ m. (3 децимала)

56. — Исто за $a = 25$ m. (3 децимала)

57. — Израчунај обим круга за $r = 4$m. (3 децимала)

58. — „ „ „ „ $r = 10$dm. (2 децимала)

59. — „ „ „ „ „ $r = 2{,}5$m. (4 децимала).

60. — „ „ „ „ „ $r = 4{,}32$m. (3 децимала).

61. — „ „ „ „ „ $r = 4{,}6$ m. (3 децимала).

62. — „ „ „ „ „ $r \frac{17}{32}$ cm. (2 децимала).

63. — „ површину круга за $r = \sqrt{3}$ dm (2 децимала).

64. — „ „ „ „ $r = \sqrt{2}$ dm (2 децимала).

65. — „ „ „ „ $r = 175$m. (3 децимала).

66 — „ „ „ „ $r = 1456$m (3 децимала).

67. — „ „ „ „ $r = \sqrt{5}$ m. (3 децимала).

68. — Израчунај обим круга за $r = \sqrt{2}$ cm. (1 децимал).

69. — „ „ „ „ $r = \sqrt{3}$ cm. (1 децимал).

70. — „ „ „ „ $r = \sqrt{5}$ cm. (1 децимал).

71. — „ „ „ „ $r = \sqrt{2}$ cm. (2 децимала).

72. — Израчунај обим круга за $r = \sqrt{7}$ m. (3 децимала)

73. — „ „ „ „ $r = \sqrt{10}$ m. (5 децимала)

74. — „ „ „ „ $r = \sqrt{6}$ m. (3 децимала).

75. — Израчунај површину равностраног троугла чија је страна $a = 4{,}8$ dm (с 2 децимала)

76. — Израчунај површину равностраног троугла чија је страна $a = 1{,}2$ m. (с 3 децимала).

Дељење скраћених бројева

77. — Израчунај $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

78. — „ $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

79. — „ $\frac{1}{4}\sqrt{5}$

80. — „ $\frac{1}{7}\sqrt{7}$

81. — „ 0,(47) : 2

82. — „ 0,1(35) : 3

83. — „ 0,12(345) : 4

84. — „ 0,135(78) : 4

85. — „ 0,4(78) : 90

86. — „ 1,45(689) : 999

87. — „ $\frac{\pi}{4}$

88. — „ $\frac{\pi}{5}$

89. — „ $\sqrt{43}:98$

90. — „ $\sqrt{1{,}53} : 98$

91. — „ $\sqrt{1{,}445} : 900$

92. — „ $\sqrt{43{,}77} : 177$

93. — „ $\sqrt{5{,}67} : 1001$

94. — „ $\sqrt{1{,}125} : 125$

95. — „ $\sqrt{3{,}432} : 234$

96. — „ $\sqrt{7{,}896} : 444$

97. — Израчунај полупречник круга чији је обим 28 cm.

98. — „ „ „ „ „ „ 37 mm.

99. — „ „ „ „ „ „ 42,223 m.

100. — „ „ „ „ „ „ 108,96 m.

101. 1,47 : 8,93476 . . . . .

102. 56,07 : 2,3243796 . . . . .

103. 20 : 1,4567189 . . . . .

104. 47 : 037842 . . . . .

III — ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Решавање једначине другог степена

Дефиниције. — Ако хоћемо да проучавамо једну једначину, треба најпре да образујемо *полином једначине*. Он се образује кад се

1°. — ослободимо заграда,

2°. — „ разломака,

3°. — пребацимо све изразе на леву страну,

4°. — сведемо,

5°. — уредимо по опадним степенима чланове који садрже непознату коју хоћемо да посматрамо.

Ако тако добивени полином садржи само једну непознату, онда је наша једначина с једном непознатом.

Ако је полином наше једначине полином другог степена по посматраној непознатој, имамо *једначину другог степена* с једном непознатом, која се још зове и *квадратна једначина*.

Пример I. — Дата је једначина

$$3-\frac{6}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{4}{x}+1\right)$$

Најпре се ослобођавамо заграда:

$$3-\frac{6}{x}=\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}$$

Сад се ослобођавамо разломака:

$$3x^2-6x=4+x.$$

Затим пребацујемо све изразе на леву страну:

$$3x^2-6x-4-x=0.$$

Сад сводимо:

$$3x^2-7x-4=0.$$

Пошто је добивени полином уређен по опадним степенима од x, немамо шта да га уређујемо.

Наш полином јесте полином другог степена по x, јер је највиши степен непознате 2, у изразу $3x^2$.

Према томе ово је *квадратна једначина с једном непознатом*.

Као што се види, полином квадратне једначине с једном непознатом има *три члана*: *први члан* са непознатом на другом степену (у нашем примеру то је члан $3x^2$), *други члан* са непознатом на првом степену ($-7\,x$), и *трећи члан* без непознате (-4).

Ако у нашем полиному

$$3x^2-7x-4$$

дајемо *иксу* разне вредности, мењаће се само први и други члан.

Нека је $x=1$.

Тада чланови нашег полинома овако изгледају: $3\,.\,1^2-7\,.\,1-4$ то јест $3-7-4$.

Нека је $x=5$.

Тада чланови нашег полинома овако изгледају: $3\,.\,2^2-7\,.\,2-4$ то јест $12-14-4$.

Нека је $x=-3$.

Тада чланови нашег полинома овако изгледају; $3\,.\,(-3)^2-7\,(-3)-4$ то јест $27+21-4$.

Као што се види, кад смо *иксу* давали разне вредности, први члан се променио најпре у 3, па у 12, па у 27; други члан најпре у (-7), па у (-14), па у $(+21)$. Трећи члан се није мењао, пошто у њему нема шта да се измени кад се x мења, јер у њему нема *икса*. Он дакле не зависи од *икса*. Зато се *трећи члан* зове још и *независан члан* или *сталан члан* или *константа*. Ми ћемо га звати *сталан члан*.

Пример 2. — Дата је једначина:

$$\frac{x-m}{n}=p\left(\frac{m}{x-n}-x\right)$$

Ослобођавамо се заграде: $\dfrac{x-m}{n}=\dfrac{mp}{x-n}-px.$

Ослобођавамо се разломака: $x^2-mx-nx+mn=mnp-npx^2+n^2\,px$

Пребацујемо све на леву страну:

$$x^2-mx-nx+mn-mnp+npx^2-n^2px=0.$$

Сводимо: $(1+np)x^2-(m+n+n^2p)x+mn(1-p)=0.$

Овде је:

први члан: $(1+np)x^2$

други члан: $-(m+n+n^2p)x$

стални члан: $mn(1-p)$.

Пример 3. — Дата је једначина:

$$x\,(x+2)=\frac{x(6+x)}{5}.$$

Кад на њој вршимо промене као и у ранијим примерима, она ће се редом овако мењати:

$$x^2+\;2x=\frac{6x+x^2}{5}$$

$$5x^2+10x=6x+x^2$$

$$5x^2+10x-6x-x^2=0$$

$$4x^2+\;4x=0$$

Први члан: $4x^2$,

други члан: $4x$,

стални члан: *не постоји*.

Пример 4. — Дата је једначина:

$$x^2-\;1=\frac{10-9x^2}{3}$$

$$3x^2 - 3 = 10 - 9x^2$$
$$3x^2 - 3 - 10 + 9x^2 = 0$$
$$12x^2 - 13 = 0.$$

Први члан: $12x^2$,
други члан: *не постоји,*
стални члан: — 13.

Општи облик квадратне једначине с једном непознатом. — Полином квадратне једначине с једном непознатом уопште има три члана: први, други и стални члан; он, дакле, претставља један *трином. Општи облик* квадратне једначине с једном непознато јесте:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

У нашим примерима су:
у првом примеру: $a = 3$, $b = -7$, $c = -4$
у другом примеру: $a = 1 + np$, $b = -(m + n + n^2p)$, $c = mn(1-p)$
у трећем примеру: $a = 4$, $b = 4$, $c = 0$
у четвртом примеру: $a = 12$, $b = 0$, $c = -13$.

Напомена. Место *икса* можемо узети које хоћемо друго писмо. Према томе и ово су квадратне једначине с једном непознатом:

$3z^2 + 5z - 8 = 0$ по непознатој z
$2y^2 - 3y + 4 = 0$ „ „ y
$5u^2 - 3u - 7 = 0$ „ „ u
$gt^2 - 6 = 0$ „ „ t итд.

Решавање квадратне једначине с једном непознатом дате у облику $ax^2 + c = 0$. — Још из нижих разреда гимназије знамо да решимо овај задатак: *Кад је површина квадрата 25 cm^2, колика му је страна?*

Означимо страну тога квадрата са x. Знамо, да ће његова површина бити дата изразом x^2. Према томе имамо ову једначину

$$x^2 = 25.$$

Из степеновања и кореновања које смо раније учили, знамо да кад нам је дат квадрат неког броја, сâм тај број добијамо, ако из датог квадрата извучемо квадратни корен. Дакле:

$$x = \sqrt{25}, \text{ а одатле } x = 5.$$

Али ми смо раније рекли, да *свака једначина n-тог степена има n корена.* Како је наша једначина $x^2 = 25$ *квадратна,* мора да има *два* корена. Где је други корен? Овде ученик треба да се сети, да се један исти квадрат може добити од два *супротна*

броја. Знамо да и позитивни и негативни бројеви при степеновању *парним* бројем дају *позитиван* степен:

$$(+5)^2 = (+5) \times (+5) = (+25)$$
$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = (+25).$$

А отуда:

$\sqrt{25}$ може да буде и $+5$ и -5.

Према томе наша *квадратна* једначина

$$x^2 = 25$$

има *два* корена који су једнаки по апсолутној вредности, али су супротно означени:

$$x_1 = +5$$
$$x_2 = -5.$$

Та два супротна броја ми ћемо овако означити:

$$x = \pm\sqrt{25} \text{ или } x = \pm 5.$$

Кад загледамо мало боље нашу квадратну једначину

$$x^2 - 25 = 0$$

видимо да она *није* дата у оптшем облику:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Њој недостаје други члан, што значи да је $b = 0$.

Такве једначине где је $b = 0$ лако решавамо. Неколико примера ће то најбоље показати.

Пример 1. — Решити једначину:

$$\frac{3x^2 - 4}{2} = \frac{3 - 4x^2}{3}.$$

Кад се ослободимо разломака и уредимо наш полином биће:

$$17x^2 - 18 = 0$$

Овде је $b = 0$, те је наша једначина дата у облику:

$$ax^2 + c = 0$$

где је $a = 17$, $c = -18$.

Нама треба чист квадрат на левој страни, те ћемо стални члан пребацити на десну страну и поделити обе стране са 17:

$$17x^2 - 18 = 0$$
$$17x^2 = 18$$
$$x^2 = \frac{18}{17}$$

а одатле:

$$x = \pm\sqrt{\frac{18}{17}}$$
$$x_1 = +\sqrt{\frac{18}{17}}$$
$$x_2 = -\sqrt{\frac{18}{17}}$$

Корени су *стварни.*

Пример 2. — Решити једначину:

$$3(2x^2+1)=4(x^2-1)-1$$
$$6x^2+3=4x^2-4-1$$
$$6x^2+3-4x^2+4+1=0$$
$$2x^2+8=0$$

Овде је $a=2$, $b=0$, $c=8$.

Кад поделимо са 2, добијамо

$$x^2+4=0$$

а одатле: $x=\pm\sqrt{-4}$

а то је $x=\pm 2i$

то јест $x_1=2i,\ x_2=-2i.$

Корени *су уображени.*

Из досадашњег објашњења и примера излази ова

Теорема. — *Квадратна једначина*

$$ax^2+c=0$$

у којој је $b=0$ *али* $a\neq 0$, има *два корена дата обрасцем:*

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Корени су стварни, ако су а и с неједнако означени, а уображени, ако су а и с једнако означени.

Решавање квадратне једначине дате у облику $ax^2+bx=0$.

Овакву једначину решавамо растављањем на чиниоце бинома ax^2+bx.

$$ax^2+bx=0$$
$$(1)\qquad x(ax+b)=0$$

Овде је производ два чиниоца раван нули. Зато можемо сваки чинилац посебице уједначити с нулом. Онда из *квадратне* једначине (1) добијамо ове две једначине првог степена:

$$x=0 \text{ и } ax+b=0$$

Одатле имамо ова два корена једначине (1):

$$x_1=0$$
$$x_2=-\frac{b}{a}$$

Пример: — Решити једначину $2x^2-3x=0$

Имаћемо:

$$x(2x-3)=0. \quad \text{Одатле имамо:}$$
$$x=0 \text{ и } 2x-3=0$$

Корени дате једначине биће:

$$x_1=0$$
$$x_2=\frac{3}{2}.$$

Решавање квадратне једначине дате у облику $ax^2+bx+c=0$.

Нека нам је дата једначина:

$$x^2-6x+9=0.$$

Загледајмо мало боље у горњу једначину. Горњи трином можемо написати у облику квадрата овако:

$$(x-3)^2=0.$$

Пошто на левој страни имамо чист квадрат, ми ћемо с обе стране извући квадратни корен:

$$x-3=\pm\sqrt{0}.$$

Знамо да нулу можемо означити са $+$ и са $-$, те ће бити

$$x-3=0$$
$$x-3=0$$

а одатле *два пута* $x=3$.

Значи имамо два корена, који су једнаки: $x_1=x_2=3$.

Узмимо сад једначину:

$$2x^2-7x+3=0.$$

Овде се не види јасно можемо ли на левој страни добити чист квадрат неког израза. Зато ћемо ми решавање оваквих једначина проучити на општем облику:

$$ax^2+bx+c=0$$

Кад дижемо на квадрат бином $(ax+b)$, добијамо трином:

$$(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2.$$

Чланови добивеног тринома постали су овако:

a^2x^2 од $(ax)^2$

b^2 од $(b)^2$

$2abx$ од $2.(ax).(b)$.

Према томе, кад имамо један трином у коме има макар само један квадрат, ми ћемо овако проверити је ли он постао од бинома на квадрат.

Рецимо дат нам је трином:

$$x^2-10x+25.$$

Ако извучемо корен из x^2, добијамо x. Значи да је први члан збиља квадрат неког броја. Ако извучемо квадратни корен из 25, добијемо 5. Значи да су x^2 и 25 постали од квадрата бројеви x и 5. Да би трином $x^2 - 10x + 25$ био квадрат неког бинома, треба да је

$$2 \cdot x \cdot 5 = -10x$$

То ће бити ако при извлачењу квадратног корена из 25 узмемо пред кореном знак —. Тада је тражени бином:

$$(x - 5)$$

јер је збиља:

$$2 \cdot x(-5) = -10x$$

те је:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

Ако су нам дата само два члана једног квадратног тринома, па тражимо трећи, овако ћемо га наћи.

Знамо да при дизању бинома на квадрат добијемо трином, чији је први члан квадрат биномовог првог члана, а други члан тринома двогуби производ првог и другог члана бинома:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2.$$

Из прва два члана тринома $m^2 + 2mn$ можемо добити број n, ако извучемо квадратни корен из m^2, па удвојеним добивеним бројем делимо други члан 2mn:

$$\frac{2mn}{2\sqrt{m^2}} = \frac{2mn}{2m} = n.$$

Вратимо се сад нашем триному:

$$ax^2 + bx + c.$$

Он личи на трином који је постао од квадрата неког бинома, само што му први члан ax^2 није потпун квадрат од ax. Да би то постао, ми ћемо целу једначину

$$ax^2 + bx + c = 0$$

помножити са a:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Ми хоћемо овај трином да претворимо у бином на квадрат. Први члан нашег бинома биће: $\sqrt{a^2x^2} = ax$. Други члан нашег бинома добићемо, ако члан abx поделимо са $2ax$. Дакле:

$$\frac{abx}{2ax} = \frac{b}{2}.$$

Наш бином биће:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right).$$

Ако га дигнемо на квадрат, добијамо:

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}.$$

Упоредимо га сад са триномом наше једначине:

$$a^2x^2 + abx + ac$$

и

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}$$

Да бисмо од нашег тринома

$$a^2x^2 + abx + ac$$

добили трином $a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}$, ми ћемо у једначини

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

додати с обе стране $\frac{b^2}{4}$:

$$\underbrace{a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}} + ac = \frac{b^2}{4}$$

Прва три члана нашег полинома на левој страни чине потпун квадрат бинома $\left(ax + \frac{b}{2}\right)$, те горњу једначину можемо овако написати:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac = \frac{b^2}{4}$$

а одатле

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac.$$

Овакав задатак ми умемо да решимо: просто ћемо извући квадратни корен с обе стране:

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$$

Ову једначину ми умемо да решимо. Биће:

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$$

или:

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

или:

$$ax = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

или:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Решили смо дату квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$. Ово решење јесте **образац** по коме ћемо решавати квадратне једначине. На примерима ћемо показати како се то ради.

Решени примери квадратних једначина

Пример 1. — Решити једначину $5x^2 + 9x - 2 = 0.$

Трудићемо се да на левој страни добијемо квадрат једног бинома.

$$5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$(1) \qquad x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

Удвојеним x поделићемо други члан:

$$\frac{9}{5}x : 2x = \frac{9}{10}$$

$$\left(x + \frac{9}{10}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{81}{100}$$

Значи, ако у једначини (1) место $x^2 + \frac{9}{5}x$ ставимо $\left(x + \frac{9}{10}\right)^2$, стављамо $\frac{81}{100}$ више него што имамо. Да се вредност полинома једначине (1) не би променила, ми ћемо *и одузети* $\frac{81}{100}$. Имаћемо:

$$x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left(x + \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{81}{100} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left(x + \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100} + \frac{40}{100}$$

$$\left(x + \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$$

Сад на левој страни имамо квадрат једног израза. Извући ћемо квадратни корен на обема странама:

$$\left(x + \frac{9}{10}\right) = \pm\sqrt{\frac{121}{100}}$$

Одатле имамо две једначине првог степена:

I $\quad x + \frac{9}{10} = \frac{11}{10} \qquad$ Из ње имамо $x_1 = \frac{1}{5}$

II $\quad x + \frac{9}{10} = -\frac{11}{10} \qquad$ „ „ „ $x_2 = -2.$

Пример 2. — Решити једначину: $2x^2 - 7x + 3 = 0.$

Овде је: $a = 2$
$2a = 4$
$b = -7$
$-b = 7$
$c = 3$
$b^2 = 49$
$ac = 6$
$4ac = 24$

$$\underline{\underline{b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25.}}$$

Према томе је:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

То је даље: $\quad x = \frac{7 \pm 5}{4}$

Корени су: $\quad x_1 = \frac{7+5}{4}$

$$x_2 = \frac{7-5}{4}$$

Значи да је: $\quad x_1 = 3$

$$x_2 = \frac{1}{2}.$$

Корени су *стварни* и *неједнаки*.

Пример 3, — Решити једначину:

$$3x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Овде је $\quad a = 3,$
$2a = 6$
$b = 6,$
$-b = -6$
$b^2 = 36$
$c = 2$
$ac = 6$
$4ac = 24$

$$\underline{\underline{b^2 - 4ac}} = 36 - 24 = \underline{\underline{12.}}$$

Дакле: $\quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6}$

а одатле, пошто је $12 = 3 \cdot 4$:

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{6}$$

То је даље:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Корени су:

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \approx \frac{-3+1{,}73}{3} \approx \frac{-1{,}27}{3} \approx -0{,}42$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} \approx \frac{-3-1{,}73}{3} \approx \frac{-4{,}73}{3} \approx -1{,}58$$

Корени су *стварни* и *неједнаки.*

Пример 4. — Решити једначину:

$$3x^2 - 11\,x - 4 = 0.$$

Овде је

$$\begin{array}{r} a = 3 \\ 2a = 6 \\ b = -11, \\ -b = 11 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2 = 121 \\ c = -\ \ 4 \\ ac = -\ 12 \\ 4ac = -\ 48 \end{array}\right\} \underline{\underline{b^2 - 4ac}} = 121 - (-48) = 121 + 48 = \underline{\underline{169}}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6}$$

То је даље:

$$x = \frac{11 \pm 13}{6}$$

Корени су:

$$x_1 = \frac{11+13}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$x_2 = \frac{11-13}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Корени су *стварни* и *неједнаки.*

Пример 5. — Решити једначину: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Овде је

$$\begin{array}{r} a = 4, \\ 2a = 8 \\ b = -12, \\ -b = 12 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2 = 144 \\ c = \ \ \ 9 \\ ac = \ \ 36 \\ 4ac = 144 \end{array}\right\} \underline{\underline{b^2 - 4ac}} = 144 - 144 = \underline{\underline{0}}.$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$x_1 = \frac{12+0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{12+0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Корени су *стварни* и *једнаки*: $x_1 = x_2 = 1{,}5.$

Пример 6. — Решити једначину:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Овде је:

$$\begin{array}{r} a = 1, \\ 2a = 2 \\ b = -4, \\ -b = 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2 = 16 \\ c = 13 \\ ac = 13 \\ 4ac = 52 \end{array}\right\} \underline{\underline{b^2 - 4ac}} = 16 - 52 = \underline{\underline{-36}}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

То је даље:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x = 2 \pm 3i$$

Корени су:

$$x_1 = 2 + 3i$$

$$x_2 = 2 - 3i.$$

Корени су **коњуговано комплексни.**

Пример 7. — Решити једначину:

$$9x^2 + 6x + 37 = 0.$$

Овде је

$$\begin{array}{r} a = 9, \\ 2a = 18 \\ b = 6, \\ -b = -6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2 = \ \ 36 \\ c = \ \ 37 \\ ac = \ 333 \\ 4ac = 1332 \end{array}\right\} \underline{\underline{b^2 - 4ac}} = 36 - 1332 = \underline{\underline{-1296}}.$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-1296}}{18}$$

То је даље:

$$x = \frac{-6 \pm 36i}{18}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm 2i$$

Корени су:

$$x_1 = -\frac{1}{3} + 2i$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - 2i$$

Корени су *коњуговано комплексни.*

Пример 8. — Решити једначину:

$$abx^2 - (a^2 + b)\,x + a = 0.$$

Овде израз $\underline{\underline{b^2 - 4\,ac}}$ има ову вредност:

$$(a^2 + b)^2 - 4\,ab\,.\,a = a^4 + 2\,a^2b + b^2 - 4\,a^2b = \underline{\underline{a^4 - 2\,a^2b + b^2}}.$$

Према томе је

$$x = \frac{(a^2 + b) \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b + b^2}}{2ab}$$

Да упростимо израз дат квадратним кореном:

$$\sqrt{a^4 - 2a^2\,b + b^2} = \sqrt{(a^2 - b)^2} = \pm\,(a^2 - b).$$

Отуда је

$$x = \frac{a^2 + b \pm (a^2 - b)}{2ab}$$

Корени су:

$$x_1 = \frac{(a^2 + b) + (a^2 - b)}{2\,ab} = \frac{2a^2}{2ab} = \frac{a}{b}$$

$$x_2 = \frac{(a^2 + b) - (a^2 - b)}{2\,ab} = \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a}$$

Дискусија квадратне једначине

— Односи између корена и коефицијената. —

Стварни и уображени корени. — Из примера што смо их навели, види се да корени квадратне једначине с једном непознатом могу бити стварни или комплексни. Пошто су a, b и c стварни бројеви, зависи само од поткорене количине

$$b^2 - 4ac$$

хоће ли корени бити стварни или уображени. Овај се израз зове **дискриминанта** једначине. Кад извлачимо квадратни корен из некога броја, можемо добити стваран или уображен број: стваран ако је поткорена количина позитивна, уображен, ако је поткорена количина негативна. Према томе можемо увек унапред знати хоће ли једна једначина имати стварне, или уображене корене.

Ако је $b^2 - 4ac > 0$ корени су стварни.

Ако је $b^2 - 4ac < 0$ корени су уображени.

Загледај у горњим примерима колико је $b^2 - 4ac$!

Једнаки или неједнаки стварни корени. — Ако дискриминанта једначине

$$b^2 - 4ac$$

није негативна, она може бити

$$b^2 - 4ac > 0 \qquad \text{или}$$
$$b^2 - 4ac = 0.$$

Ако је $b^2 - 4ac > 0$, ми имамо два различита корена:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}.$$

$$x_2 = \frac{-b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}.$$

Они су различити, јер за први корен x_1 *додајемо* израз $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$ на израз $\frac{-b}{2\,a}$, а за други корен x_2 *одузимамо* израз $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$ од израза $\frac{-b}{2\,a}$. Први корен је *збир* два броја, а други *разлика* та два иста броја, који нису нуле. Такав збир и таква разлика не могу бити једнаки. Зато

$$x_1 \neq x_2$$

Ако је дискриминанта равна нули

$$b^2 - 4ac = 0$$

корени су дати овим изразима:

$$x_1 = \frac{-b + 0}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a} + 0$$

$$x_2 = \frac{-b - 0}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a} - 0.$$

Кад једноме броју додајемо нулу, или од њега одузимамо нулу, ми не мењамо његову вредност. Према томе је

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{то јест}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Корени су једнаки.

Склапање једначине кад су дати корени. — Из познатог обрасца за решавање квадратне једначине с једном непознатом имамо:

$$(1) \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(2) \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ако у једнакостима (1) и (2) саберемо леве стране, па их уједначимо са збиром десних страна, добићемо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \quad \text{тј.}$$

$$(3) \qquad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Ако леву страну једнакости (1) помножимо левом страном једнакости (2), па тај производ уједначимо с производом десних страна, добићемо:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}. \text{ То је даље:}$$

$$x_1 \, x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}. \text{ Одатле имамо:}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{тј.}$$

$$(4) \qquad \boxed{x_1 \, x_2 = \frac{c}{a}}$$

Отуда ова

Теорема. — *У једној квадратној једначини с једном непознатом збир корена раван је количнику коефицијента другог члана*

с промењеним знаком и коефицијента првог члана; производ корена раван је количнику трећег и првог коефицијента.

Из (3) имамо:

$$(3') \qquad \boxed{b = -a\,(x_1 + x_2)}$$

Из (4) имамо:

$$(4') \qquad \boxed{c = a x_1 \, x_2}$$

Добивене вредности (3′) и (4′) унесимо у општи облик квадратне једначине с једном непознатом:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Имаћемо:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 \, x_2 = 0 \quad \text{тј.}$$

$$(5) \qquad a\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \, x_2] = 0.$$

Једначина (5) нам казује како можемо склопити квадратну једначину с једном непознатом кад знамо корене те једначине. То ћемо показати на примерима.

Пример 1. — Склопити једначину чији су корени

$$x_1 = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = 2.$$

Ићи ћемо тачно по једначини (5):

$$a\left[x^2 - \left(-\frac{2}{3} + 2\right)x + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2\right] = 0$$

$$a\left[x^2 - \frac{4}{3}\,x - \frac{4}{3}\right] = 0$$

Колико ће бити *a*? То *a* је сталан број. *Оно не утиче на вредност корена.* (Зашто?) Зато га можемо узети колико ми хоћемо. Овде ћемо га узети да је 3, да бисмо уклонили разломке. Имаћемо:

$$3\left(x^2 - \frac{4}{3}\,x - \frac{4}{3}\right) = 0 \qquad \text{тј.}$$

$$3\,x^2 - 4\,x - 4 = 0$$

То је једначина чији су корени $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

Да решимо горњу једначину:

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{16+48}}{6}$$

$$x = \frac{+4 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$ Тачно је.

При склапању једначине можемо се послужити и обрасцима (3′) и (4′) непосредно. То ћемо показати на примерима.

Пример 2. — Склопити једначину чији су корени

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = 3.$$

Узмимо коефициенат a сасвим произвољно. Рецимо нека је $a = 1$, (пошто је то најлакше, а овде немамо разломака).

Тада је: $b = -1\,(8+3) = -11$

$c = 1 \,.\, 8 \,.\, 3 = 24.$

Сама једначина овако изгледа:

$$1 \,.\, x^2 - 11 \,.\, x + 24 = 0 \qquad \text{то јест}$$

$$x^2 - 11\,x + 24 = 0$$

Реши је, те се увери да су јој корени $x_1 = 8$, $x_2 = 3$.

Пример 3. — Склопити једначину чији су корени

$$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{5}$$

Узмимо да је $a = 3 \,.\, 5 = 15$, да **не бисмо имали разломака**.

Биће:

$$b = -15\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = -15\left(\frac{5+3}{15}\right) = -15 \,.\, \frac{8}{15} = -8$$

$$c = 15 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{5} = 1.$$

Отуда једначина:

$$15x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Из једначине (5) можемо извести још један начин за склапање једначине кад су дати њени корени. Да бисмо до њега дошли, ми ћемо једначини (5) дати нешто друкчији облик. Овако:

$$a\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2] = 0$$

$$a\,[x^2 - x_1\,x - x_2\,x + x_1\,x_2] = 0$$

$$a\,[x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)] = 0$$

$$a\,[(x - x_1)\,(x - x_2)] = 0 \qquad \text{тј.}$$

$$(6) \qquad \boxed{\mathbf{a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0}}$$

Једначина (6) нам казује како можемо склопити једначину, кад су дата оба њена корена.

Пример 4. — Склопити једначину кад су њени корени

$$x_1 = -\frac{2}{3} + i \qquad x_2 = -\frac{2}{3} - i$$

Ићи ћемо тачно по једначини (6):

$$a\left\{\left[x - \left(-\frac{2}{3} + i\right)\right]\left[x - \left(-\frac{2}{3} - i\right)\right]\right\} = 0$$

$$a\left\{\left[\left(x + \frac{2}{3}\right) - i\right]\left[\left(x + \frac{2}{3}\right) + i\right]\right\} = 0$$

$$a\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - i^2\right\} = 0$$

$$a\left\{x^2 + \frac{4}{3}\,x + \frac{4}{9} + 1\right\} = 0$$

Узећемо $a = 9$. Добићемо:

$$9\,x^2 + 12\,x + 4 + 9 = 0 \qquad \text{тј.}$$

$$9\,x^2 + 12\,x + 13 = 0.$$

Решимо ову једначину.

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \,.\, 9 \,.\, 13}}{18}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{4 \,.\, 9\,(4 - 13)}}{18}$$

$$x = \frac{-12 \pm 2 \,.\, 3\sqrt{-9}}{18}$$

$$x = \frac{-2 \pm 3\,i}{3}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} + i$$

$$x_2 = -\frac{2}{3} - i$$ Тачно је.

Обрасци (3) и (4) могу нам послужити и за решавање других веома корисних задатака. Њих ћемо показати на примерима.

Пример 5. — У једначини $16x^2 + \lambda x + 21 = 0$ одредити параметар λ тако, да се корени разликују за 1.

Према задатку имамо:

$$\text{I} \qquad x_1 - x_2 = 1$$

Из обрасца (3) имамо:

$$\text{II} \qquad x_1 + x_2 = -\frac{\lambda}{16}$$

Имамо две једначине, а три непознате (x_1, x_2 и λ). Да би нам проблем био одређен, морамо имати три једначине. Трећу једначину даће нам образац (4):

$$\text{III} \qquad x_1\, x_2 = \frac{21}{16}.$$

Сабирањем I и II имамо:

$$2x_1 = 1 - \frac{\lambda}{16} \text{ тј. } \boxed{x_1 = \frac{16 - \lambda}{32}}$$

Уношењем ове вредности у II добијамо:

$$\text{II} \qquad \frac{16-\lambda}{32} + x_2 = -\frac{\lambda}{16}$$

$$x_2 = -\frac{2\lambda}{32} - \frac{16-\lambda}{32}$$

$$x_2 = \frac{-2\lambda - 16 + \lambda}{32}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-\lambda - 16}{32}}$$

Уношењем вредности за x_1 и x_2 у III добијамо:

$$\frac{16-\lambda}{32} \cdot \left(-\frac{16+\lambda}{32}\right) = \frac{21}{16} \text{ тј.}$$

$$-\frac{16^2 - \lambda^2}{32^2} = \frac{21}{16}$$

$$-\frac{16^2 - \lambda^2}{(2 \cdot 16)^2} = \frac{21}{16}$$

$$\frac{\lambda^2 - 16^2}{4 \cdot 16^2} = \frac{21}{16}$$

$$\frac{\lambda^2 - 16^2}{4 \cdot 16} = 21$$

$$\lambda^2 = 4 \cdot 16 \cdot 21 + 16^2$$

$$\lambda^2 = 16\,(84 + 16)$$

$$\lambda^2 = 16 \cdot 100$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 40 \\ \lambda_2 &= -40 \end{aligned}}$$

Добили смо ове две једначине:

$$16x^2 + 40x + 21 = 0 \quad \text{и}$$

$$16x^2 - 40x + 21 = 0$$

Испробаћемо обадве.

Решићемо најпре прву једначину:

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 16 \cdot 21}}{32}$$

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{16 \cdot 4\,(25 - 21)}}{32}$$

$$x = \frac{-40 \pm 8\sqrt{4}}{32}$$

$$x = \frac{-5 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = -\frac{7}{4}$$

Прво λ ($\lambda_1 = 40$) задовољава постављени услов, пошто је:

$$x_1 - x_2 = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Испробај сâм друго λ! (То значи реши другу једначину и види да ли се њени корени разликују за 1).

Пример 6. — У једначини $x^2 + 9x - \lambda = 0$ одредити λ тако, да један корен буде два пута већи од другога.

Према задатку имаћемо:

$$\text{I} \qquad x_1 = 2x_2$$

Из обрасца (3) имамо:

$$\text{II} \qquad x_1 + x_2 = -9$$

Из обрасца (4) имамо:

$$\text{III} \qquad x_1\, x_2 = -\lambda.$$

Вредност за x_1 из I унесимо у II. Добићемо:

$$\text{II} \qquad 2x_2 + x_2 = -9 \text{ тј.}$$

$$\boxed{x_2 = -3}$$

Онда је из I:

$$\boxed{x_1 = -6}$$

Тада ће у III бити:

III $(-6)\ (-3) = -\lambda$ тј.

$$\boxed{\lambda = -18}$$

Кад у датој једначини ставимо $\lambda = -18$, она добија овај облик:

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

Њени су корени:

$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -6.$$

Значи: корени испуњавају постављени услов. То даље значи да је тражено λ збиља -18.

Распознавање корена по коефицијентима a, b, c. — Горњи обрасци нам дају могућност да унапред кажемо *све* особине корена једне једначине, кад јој знамо коефициенте.

Нека нам је дата једначина:

$$5x^2 - 6x - 8 = 0.$$

Да кажемо *све* особине њених коре́на̂, не решавајући једначину.

Да видимо најпре јесу ли корени стварни, или уображени. То нам казује дискриминанта.

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 36 + 160 = 196 > 0.$$

Све нађене особине корена писаћемо с десне стране:

Пошто је дискриминанта већа од нуле, *корени су стварни.*

Да видимо сад јесу ли једнаки или неједнаки. Чим дискриминанта није нула, *корени су неједнаки по апсолутној вредности*, ако је $b \neq 0$.

Какви су по знаку?

Знамо да је њихов производ:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

то јест

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-8}{5} = -\frac{8}{5}.$$

Пошто је производ корена негативан, та два корена морају бити *неједнако означени.*

Да ли је по апсолутној вредности већи позитиван, или негативан корен?

Збир ова два *неједнако означена* корена је:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-6)}{5} = \frac{6}{5}.$$

Кад је збир два неједнако означена релативна броја позитиван, значи да је већа апсолутна вредност позитивног корена.

Особине корена:

1. Корени су *стварни.*
2. Корени су *неједнаки* по апсолутној вредности.
3. Корени су *неједнако означени.*
4. По апсолутној вредности *већи је позитиван корен.*

Сада ћемо решити једначину, да би смо проверили све ово што смо рекли о коренима.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10} = \frac{3 \pm 7}{5}$$

$$x_1 = \frac{3 + 7}{5} = \frac{10}{5} = +2$$

$$x_2 = \frac{3 - 7}{5} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

Види се да једначина има два корена, који збиља имају све оне особине, које смо унапред одредили помоћу коефициената *a*, *b* и *c*.

Дискусија квадратне једначине

Случај кад је $c=0$, али $a \neq 0$ и $b \neq 0$. — Ако је дата једначина

$$ax^2 + bx = 0$$

можемо је написати овако:

$$x(ax + b) = 0$$

Овде може бити: $x = 0$ и $ax + b = 0$.

Наша једначина има сад два корена:

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{a}{b}$$

Случај кад је $a = 0$, али $b \neq 0$ и $c \neq 0$. — Тада имамо једначину првога степена

$$bx + c = 0$$

која даје један једини корен

$$x = -\frac{c}{b}$$

Да бисмо имали квадратну једначину, мора увек бити $a \neq 0$.

Да видимо сад шта бива с коренима квадратне једначине, кад *a* неограничено опада, тј. кад а **тежи нули**. Ми то бележимо овако: $a \to 0$ и читамо: „а тежи нули."

Случај кад $a \to 0$, али $b \neq 0$ и $c \neq 0$. — Знамо да је

$$x_1 - x_2 = -\frac{b}{a}$$

Узмимо сад једначину:

$$ax^2 - 3x + 1 = 0.$$

Ако је *a* веома мало, збир корена $x_1 + x_2$ биће веома велики по апсолутној вредности. Неки је $a = 0{,}0001$. Биће:

$$\frac{1}{10\,000}x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{\frac{1}{10\,000}}$$

$$x_1 + x_1 = 30\,000$$

Ако *a* стане опадати и постане рецимо, $\frac{1}{10\,000\,000}$, имаћемо:

$$\frac{1}{10\,000\,000}x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 30\,000\,000.$$

Ако узмемо за *a* још мању вредност, рецимо $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ имаћемо:

$$x_1 + x_3 = 3\,000\,000\,000.$$

Види се ово: што се *a* више ближи нули, збир корена нагло расте и кад је *a* веома *мало*, тај збир је веома *велики*.

Знамо да је

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 \quad \frac{c}{a}.$$

Деобом добијамо

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$$

а одатле:

$$\frac{x_1}{x_1 x_2} + \frac{x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$$

То је даље:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -\frac{b}{c}$$

Видели смо да кад *a тежи нули*, збир корена постаје све већи и *тежи бесконачноме*.

Збир наша два корена тежи бесконачноме кад $a \to 0$. Али у томе случају не могу оба корена тежити бесконачном. Јер ако би они оба тежили бесконачноме, њихове реципрочне вредности $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ тежиле би ка нули, те збир реципрочних вредности корена $\frac{1}{x_2} + \frac{x_2}{1}$ не би могао бити раван једноме коначноме броју $-\frac{b}{c}$, *који није нула*. Значи, да за $a \to 0$, само један корен тежи бесконачном. Узмимо да је то корен x_1. Тада ће у једначини

$$(1) \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

разломак $\frac{1}{x_1}$ бити:

$$\frac{1}{x_1} \to 0 \quad \text{за } x_1 \to \infty$$

и горња једначина (1) постаје:

$$0 + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} \quad \text{то јест:} \quad \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

а одатле:

$$x_2 = -\frac{c}{b}$$

Закључак: Кад у једначини $ax^2 + bx + c = 0$ сачинилац $a \to 0$, имамо два корена:

$$x_1 \to \infty \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{c}{b}$$

Такав је случај на пример у једначини,

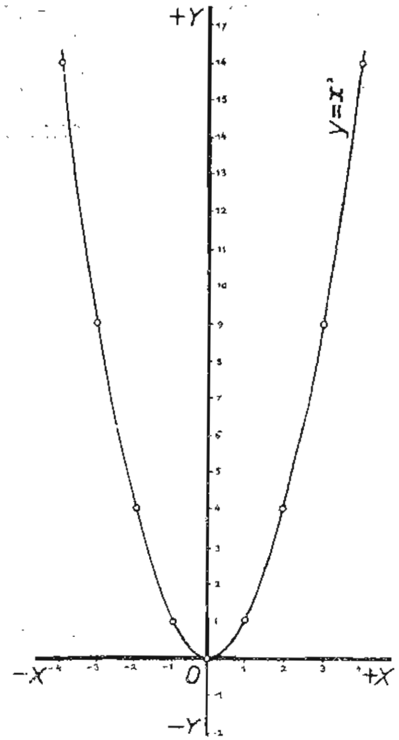
$$(\lambda - 1)\, x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ кад } \lambda \to 1.$$

Графичко претстављање тринома другог степена

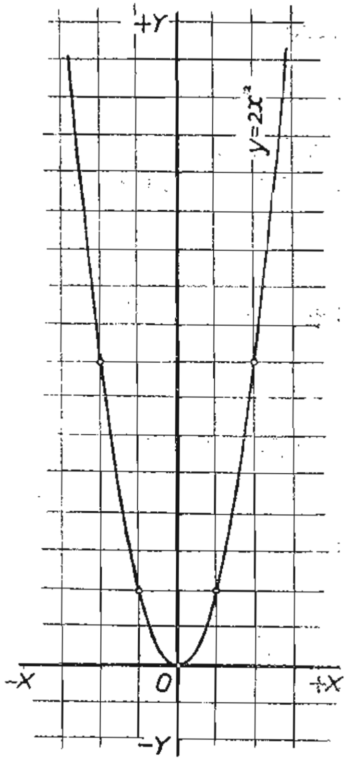
Претстављање функције $f(x) = x^2$ и функције $f(x) = ax^2$. — Ту смо функцију проучили код степеновања. Видели смо да она претставља *параболу*, криву линију која има два крака симетрична према једној правој, која пролази кроз њено теме (сл. 4). Видели смо да оба крака наше криве леже с исте стране једне праве која пролази кроз теме параболино. То је на слици 4 апцисна осовина. Оба параболина крака налазе се с горње стране апсцисне осовине.

Код степеновања смо проучили и криву $f(x) = ax^2$, где је a позитивно, или негативно. Зато се нећемо овде задржати на функцији $f(x) = ax^2$.

На слици 5 је $y = 2x^2$, а на слици 6 је $y = 3x^2$. У оба случаја је $a > o$. На слици 7 је $y = -x^2$. Ту је $a < o$, пошто је $a = -1$.



Сл. 4.

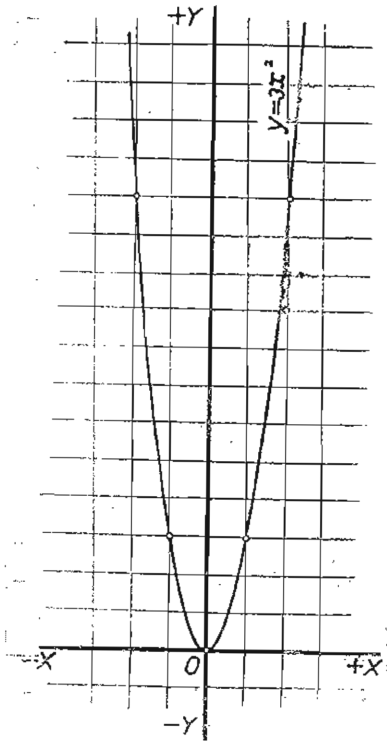


Сл. 5.

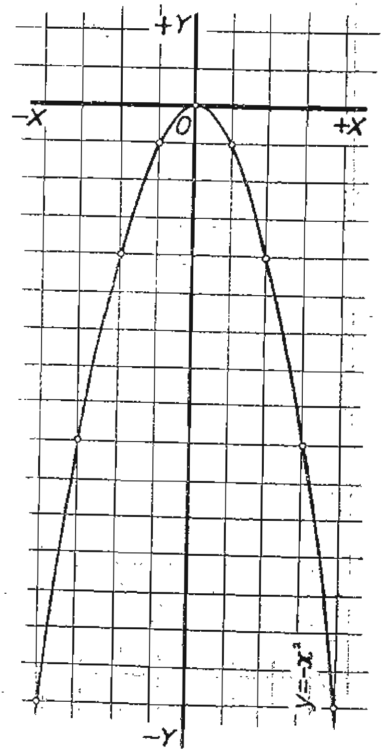
На слици 8 се виде 6 паробола са 6 разних a. Видимо да се при промени сачиниоца a у једначини $y = ax^2$ парабола шири или сужава, тј. мења свој отвор, али не мења положај свога темена. Видимо још и ово: чим у једначини $y = ax^2$ сачинилац a промени знак, парабола мења смисао отварања. Са слика видимо да се за $a > o$ парабола отвара у *позитивном* смислу ординатне осовине, а за $a < o$ да се она отвара у *негативном* смислу ординатне осовине.

Функција $f(x) = x^2 + c$. — Узмимо најпростији случај: $c = +1$. Тада наша функција постаје

$$f(x) = x^2 + 1.$$



Сл. 6.



Сл. 7.

Кад загледамо ове две криве:

$$y = x^2 \text{ и } y = x^2 + 1$$

видимо да су ординате криве $y = x^2 + 1$, увек за 1 *веће* при истој апсциси. Кад нацртамо криву $y = x^2$ (на нашој слици 9 она је претстављена испрекиданом линијом), криву $y = x^2 + 1$ добићемо, ако за исту апсцису узмемо ординату за 1 *већу*.

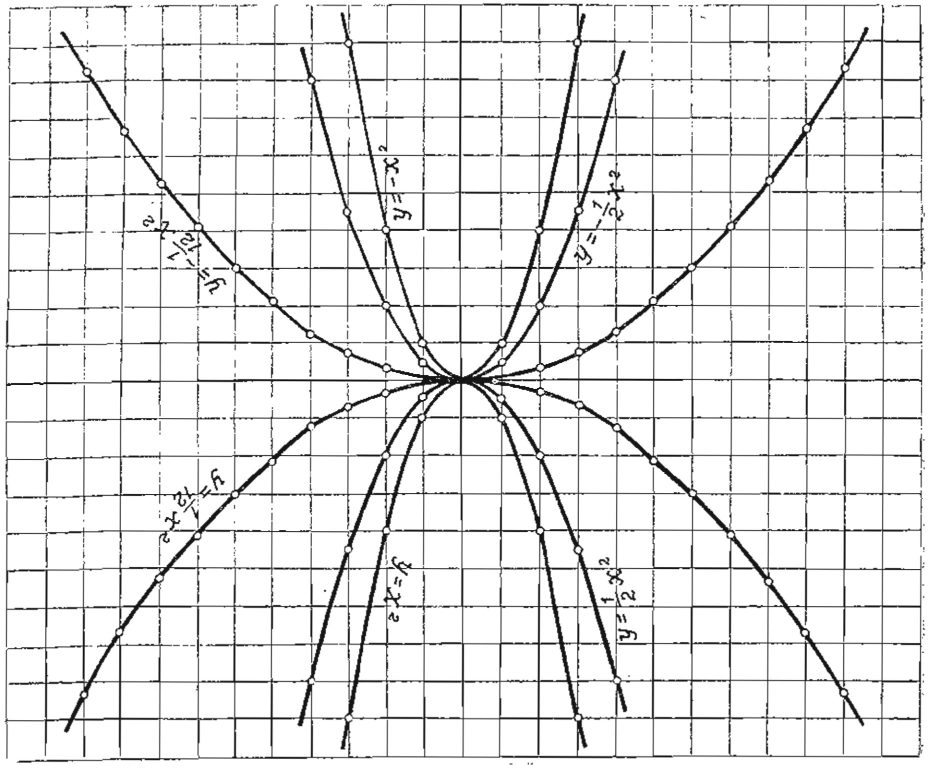
Узмимо сад $c < 0$. Да посматрамо најпростији случај: $c = -1$.

Кад криву

$$y = x^2 - 1$$

упоредимо са кривом $y = x^2$, видимо да прва крива има за 1 *мање* ординате од друге криве, а за исту апсцису (сл. 9). Кад је нацртамо, видимо да и она претставља *параболу*.

Сад нам је јасно да функција $y = x^2 + c$ претставља увек параболе за ма какво c. Јер c казује за колико су повећане орди-



Сл. 8.

нате параболе $y = x^2$, ако је $c > 0$, или за колико су смањене ординате параболе $y = x^2$, ако је $c < 0$.

Са слике 9 видимо сад ово: кад у једначини параболе $y = x^2 + c$ почне c да се мења, парабола врши *транслацију* у правцу ординатне осовине.

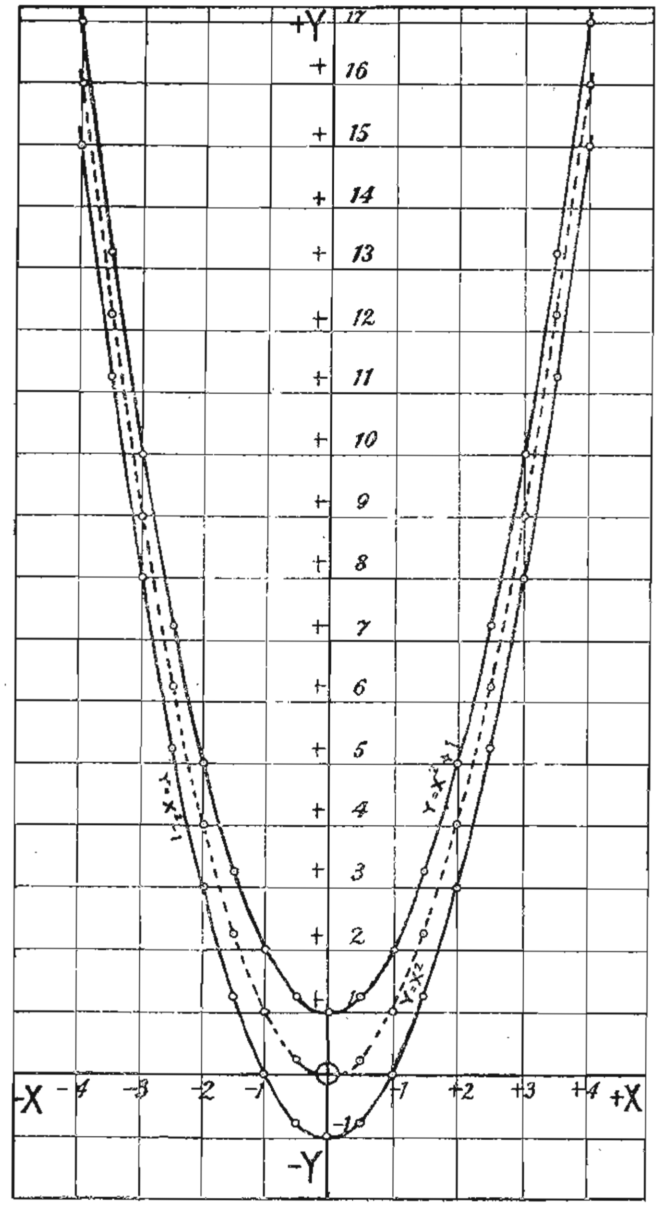
Претстављање функције $f(x) = (x - m)^2$. — Ако у триному квадратне једначине ставимо $a = 1$ и узмемо да једначина има два једнака корена $x_1 = x_2 = m$, наш трином ће добити овај облик:

$$(x - m)\ (x - m) = 0 \text{ или}$$

$$(x - m)^2 = 0.$$

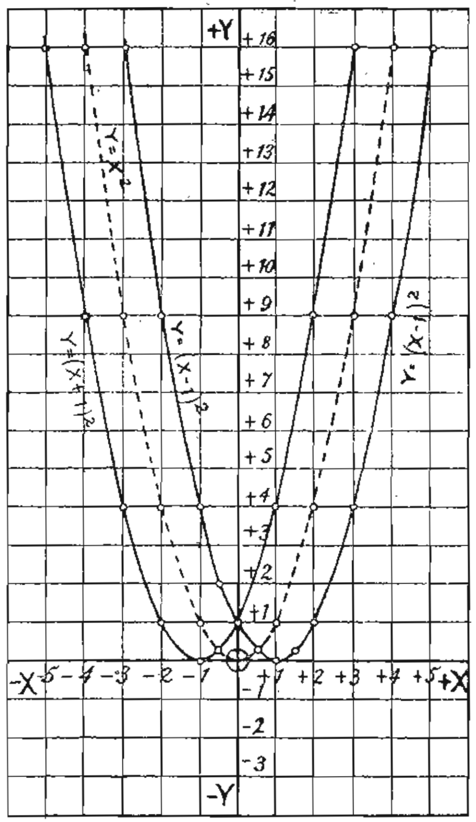
Узмимо најпростији случај: $m = -1$. Тада ће бити:

$$y = (x + 1)^2.$$



Сл. 9.

Види се одмах да ће за x веома велико и y бити веома велико и *позитивно*, па узели за x позитивну или негативну вредност, пошто је функција дата у облику *квадрата* (а квадрат свију стварних бројева је позитиван). То показује да *крива нема тачака испод апсцисне осовине.* Види се даље да y опада док x расте ка нули (сл. 10.) Кад узмемо неколико малих вредности за x, видећемо да y стално опада:



Сл. 10.

$$f(-4) = y = (-4+1)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$f(-2) = y = (-2+1)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$f(-1) = y = (-1+1)^2 = 0^2 = 0.$$

Функција y спадне на нулу, кад је $x = -1$.

Ако x продужи да расте, видеће се да y почиње да расте.

$$f(0) = y = (0+1)^2 = 1$$
$$f(1) = y = (1+1)^2 = 4$$
$$f(3) = y = (3+1)^2 = 16.$$

То је опет парабола, са теменом у $x = -1$, $y = 0$. Ако је боље загледамо, видимо да се она може добити из пароболе $y = x^2$ *транслацијом* за -1. И збиља, на кривој $y = x^2$ ордининати $y = 9$, одговара апсциса $x = 3$. Ако хоћемо да добијемо исту ординату 9 на кривој $y = (x+1)^2$ морамо извршити транслацију за -1. Кад погледамо на слику видимо да апсциси $3 + (-1) = +2$ збиља одговара иста ордината $y = 9$.

Исто тако размишљајући и посматрајући криву $y = (x-1)^2$ видећемо да она претставља опет *параболу,* која се може извести *транслацијом* за $+1$, из параболе $y = x^2$. (сл. 10.)

Види се, да функција $y = (x+m)^2$ претставља *параболу,* па било $m > 0$ или $m < 0$. У сваком случају то је парабола која се из параболе $y = x^2$ добија транслацијом: за $x = -m$, па било $m < 0$, или је $m > 0$ (види слику 10.)

Нацртај слику 10 на координатном систему са подеоцима од 2 mm, па узми $m = 3$, и повуци паралелне са апсцисном осовином. Видећеш да пресечне тачке на свима трима параболама имају апсцисе претстављене са 3 броја, који се узастопце разликују за 3.

Са слике 10 видимо сад ово: кад се у једначини параболе $y = (x+m)^2$ мења m, парабола врши *транслацију* у правцу *апсцисне* осовине.

Посматрајмо функцију

$$y = (x-3)^2$$

Начинимо таблицу:

y	$-\infty$	негативно, расте	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	позитивно, расте	$+\infty$
x	$+\infty$	позитивно, опада	$+36$	$+25$	$+16$	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	позитивно, расте	$+\infty$

Кад изразимо графички ово што нам казује таблица, добијамо слику 11.

Видимо да је то опет парабола. Теме јој је у тачци M (3,0). Симетрична је према павој L ($x=3$).

Посматрајмо функцију

$$y = (x+2)^2$$

Начинићемо ову таблицу:

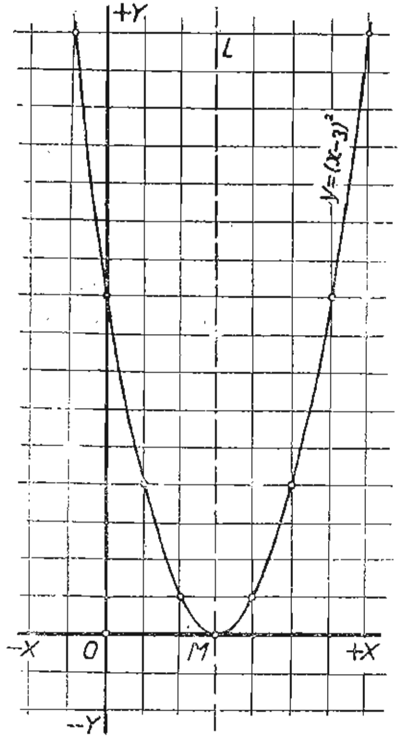
x	$-\infty$	негативно, расте	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	позитивно, расте	$+\infty$
y	$+\infty$	позитивно, опада	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	позитивно, расте	$+\infty$

Кад графички изразимо ово што нам казује таблица, добијамо слику 12.

И то је једна парабола. Теме у тачци O (-2,0). Симетрична према правој L ($x = -2$).

Узмимо сад да у триному квадратне једначине с једнаким коренима сачинилац a није јединица. Дакле: $a \gtrless +1$.

Узећемо један прост случај: $y = 2(x - 1)^2$.



Сл. 11.

Кад загледамо боље у једначину видимо ово,

x	$-\infty$	негативно, расте	0	расте	$+1$	расте	$+\infty$
y	$+\infty$	позитивно, опада	2	опада	0	расте	$+\infty$

Дакле опет *парабола* са теменом у $x = +1$, $y = 0$ и са симетријском осовином $x = 1$ (сл. 13).

Шта ће бити ако је $a = -1$?

Како стоје једна према другој ове пароболе: $y = 2x^2$ (сл. 5) и $y = 2(x - 1)^2$?

Нацртај те две параболе на истом координатном систему, загледај и објасни.

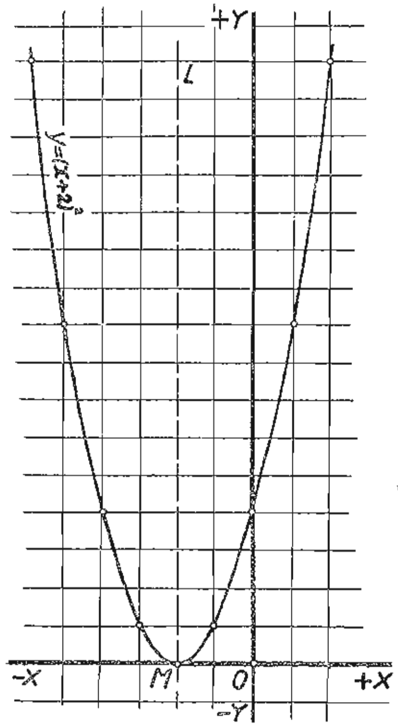
Узмимо сад случај где ни a ни m није 1.

Посматрајмо функцију

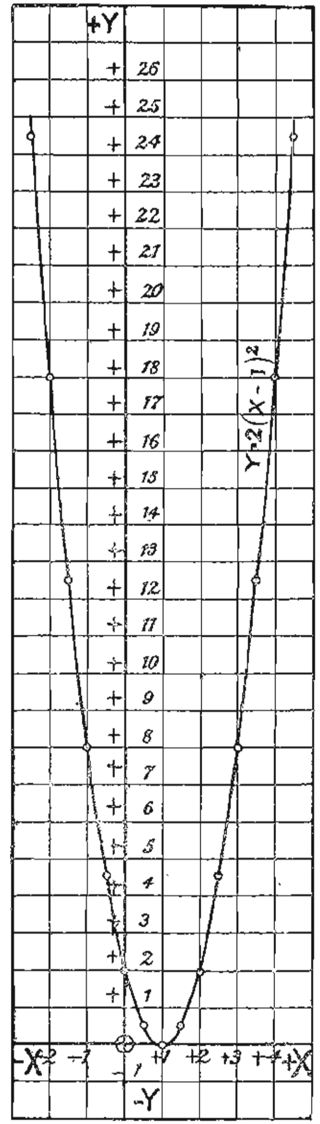
$$y = 2(x - 2)^2$$

Начинимо најпре њену таблицу:

x	$-\infty$	негативно, расте	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	позитивно, расте	$+\infty$
y	$+32$	позитивно, опада	$+32$	$+18$	$+8$	$+2$	0	$+1$	$+8$	$+18$	$+32$	позитивно, расте	$+\infty$

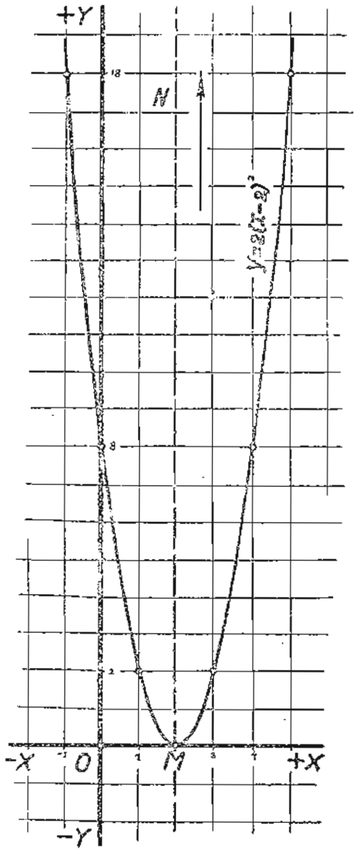


Сл. 12.



Сл. 13.

Кад изразимо ово што казује таблица, добијамо слику 14. Опет парабола. Теме је у тачци M (+ 2,0). Симетрична је према правој MN (x = + 2). Отвара се у смислу стрелице. (У позитивном смислу ординатне осовине).



Сл. 14.

Узмимо сад функцију у којој је $a<0$. Посматрајмо функцију

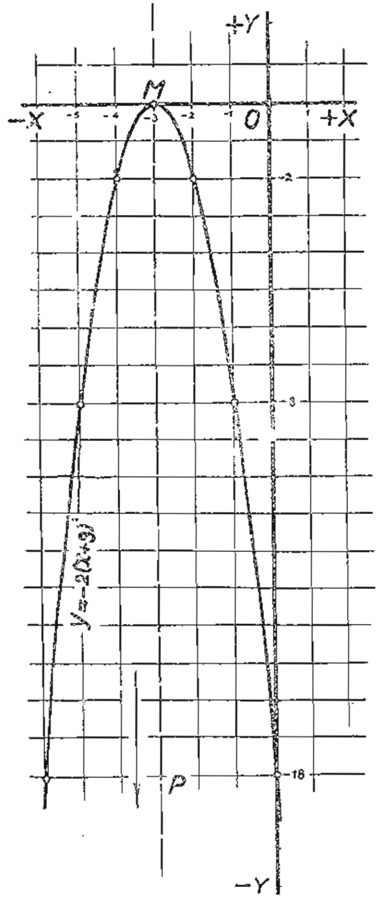
$$y = -2(x+3)^2$$

Начинићемо њену таблицу:

x	$-\infty$	негативно, расте	−4	−4	−3	негативно, расте	−2	−1	0	+ 1	позитивно, расте	$+\infty$
y	$-\infty$	негативно, расте	−8	−2	0	негативно, опада	−2	−8	−18	−32	негативно, опада	$-\infty$

Кад изразимо графички ово што казује таблица, добијамо слику 15.

Добили смо опет параболу. Теме је у тачци M (−3,0). Симетрична је према правој MP (x = − 3). Отвара се у негативном смислу ординатне осовине. (То показује стрелица на слици).



Сл. 15.

Улога сачинилаца a, b и c у једначини параболе y = ax² + bx + c. — Из свега досадањег видимо ово:

Кад се у једначини параболе

$$y = ax^2 + bx + c$$

мењају сачиниоци a, b и c,

1) сачинилац a *шири* или *сужава* параболу, али јој теме не помера;

2) сачиниоци b и c својом променом терају параболу да врши *транслацију* било у правцу апцисне осовине, било у правцу ординатне осовине.

Општи канонични облик тринома квадратне једначине. — Да бисмо лакше посматрали промене тринома $ax^2 + bx + c$ при промени икса, написаћемо га у једном веома подесном облику.

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

У загради имамо један квадратни трином. Међутим, ми смо видели како је лако посматрати квадрате, па били они квадрати монома или бинома [На пр. x^2, $(x \pm m)^2$ итд.]. Зато ћемо се постарати да од горњег квадратног тринома у загради добијемо квадрат. Трином у загради личи на квадрат бинома:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2.$$

Кад су нам дата само прва два члана тринома који је постао од бинома на квадрат:

$$m^2 + 2mn$$

добићемо овако оба члана *бинома* чији је квадрат наш трином:

Први члан бинома биће: $\sqrt{m^2} = m$.

Други члан бинома биће: $2mn : 2m = n$.

И збиља је наш бином $(m + n)$.

Из прва два члана тринома $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, добићемо овако квадрат бинома:

$$\sqrt{x^2} = x \quad \frac{b}{a}x : 2x = \frac{b}{2a}.$$

Јест, али кад бином $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ дигнемо на квадрат, имамо:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Да бисмо од нашег израза у загради у једнакости (1) добили квадрат бинома морамо му додати и одузети $\frac{b^2}{4a^2}$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] =$$

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Овај облик (2) тринома квадратне једначине зове се *општи канонични облик.*

Посматрање функције $f(x) = y = ax^2 + bx + c$. — Узмимо један прост случај

$$y = x^2 - 2x + 2.$$

Напишимо наш трином у каноничном облику:

$$y = (x - 1)^2 - \frac{4 - 8}{4}.$$

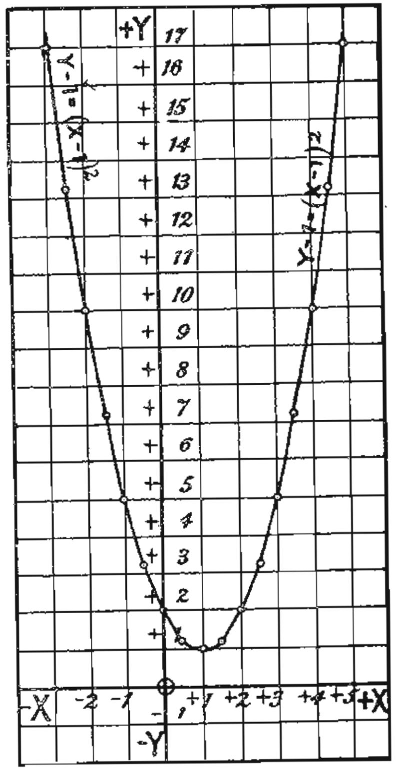
$$y = (x - 1)^2 + 1.$$

Имаћемо ову таблицу:

x	$-\infty$	расте	0	расте	1	расте	$+\infty$
y	$+\infty$	опада	2	опада	1	расте	$+\infty$

Добили смо опет *параболу* са *теменом* у тачци $x = 1$, $y = 1$ (сл. 16).

Горњу једначину можемо овако написати:



Сл. 16.

$$y - 1 = (x - 1)^2.$$

Кад загледамо мало боље слику 16, видимо да је парабола

$$y - 1 = (x - 1)^2$$

постала од параболе

$$y = x^2$$

после транслације за $x = +1$ и транслације за $y = +1$.

Други пример. — Претставити функцију $y = x^2 - 4x - 5$.

Најпре ћемо је написати у каноничном оббику:

$$y = \left(x + \frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{16 + 20}{4}$$

$$y = (x - 2)^2 - 9$$

Сад њену таблицу:

x	$-\infty$	негативно расте	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
y	$+\infty$	позитивно опада	$+16$	$+7$	0	$-\frac{11}{4}$	-5	-8	-9	-8	-5	0	$+7$	$+16$

x	позитивно, расте	$+\infty$
y	позитивно расте	$+\infty$

Кад графички изразимо ово што казује таблица, добијамо слику 17.

Опет парабола. Теме у тачци S (2, — 9). Симетрична према правој *S A* (x = + 2). Отвара се у позитивном смислу ординатне осовине.

Трећи пример. — Претставити функцију

$$y = -x^2 + 6x - 8$$

Најпре ћемо је написати у каноничном облику:

$$y = -\left[\left(x + \frac{6}{-2}\right)^2 - \frac{36 - 32}{4}\right]$$

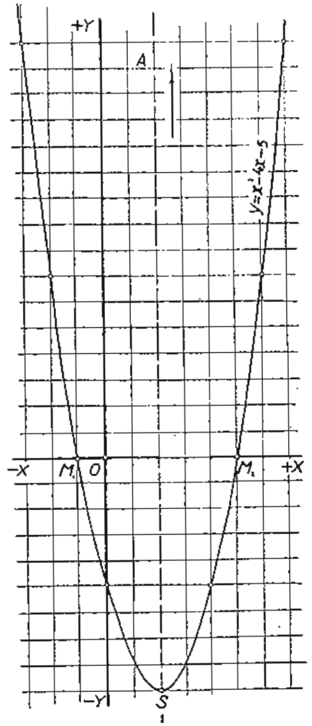
$$y = -[(x - 3)^2 - 1]$$

Сад њену таблицу:

x	$-\infty$	негативно, расте	-2	-1	0	позитивно, расте	$+1$	$+2$	позитивно, расте
x	$-\infty$	негативно, расте	-24	-15	-8	негативно, расте	-3	0	позитивно, расте

x	$+3$	позитивно, расте	$+4$	$+5$	позитивно, расте	$+\infty$
y	$+1$	позитивно, опада	0	-3	негативно, опада	$-\infty$

Кад изразимо ово што казује таблица, добијамо слику 18.



Сл. 17

Четврти пример. — Претставити функцију

$$y = 2x^2 - 4x - 6$$

Овај ћемо задатак решити **помоћу образаца.**

Једначину параболе

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где је } a > o,$$

написаћемо у каноничном облику:

(1) $$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Први случај. — Ако је

$$b^2 - 4ac > o,$$

разлика у загради имаће *најмању вредност* кад њен први члан буде нула, тј.

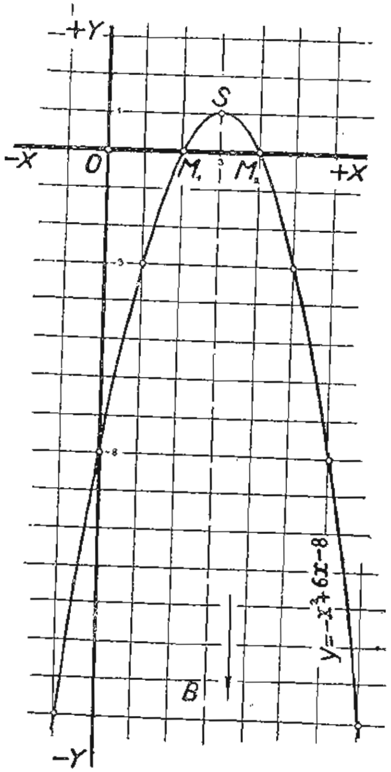
(2) $$x + \frac{b}{2a} = o$$

Значи за $x = -\frac{b}{2a}$ парабола има своју *најнижу* тачку, тј. $x = -\frac{b}{2a}$ је *апсциса њеног темена.*

А колика је ордината темена? Њу ћемо добити кад у једначини (1) ставимо $x = -\frac{b}{2a}$. Имаћемо ове **обрасце за координате параболина темена**:

(3)
$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}}$$

У једначинама (3) прва једначина претставља праву паралелну са ординатном осовином. На тој правој лежи параболино теме. Па то је онда **једначина параболине осовине**:



Сл. 18.

(4)
$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Сад ћемо брзо графички претставити дату нам параболу

$$y = 2x^2 - 4x - 6$$
$$a = 2$$
$$b = -4$$
$$c = -6$$

Једначина параболине осовине:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$x=1$ једначина осовине.

То је рецкаста права SL на слици 19.

Сад ординату параболин‹е› темена:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$y = \frac{4 \cdot 2 \cdot (-6) - (-4)^2}{4 \cdot 2}$$
$$y = \frac{-48 - 16}{8}$$
$$y = -\frac{64}{8}$$
$$y = -8$$

Добили смо тачку S на параболиној осовини (теме).

Сад су нам потребне само неколико симетричних тачака.

Рачунаћемо само тачке десно од осовине и одмах обележавати и њине симетричне тачке лево од осовине:

x	$+2$	$+3$	$+4$	Итд.
y	-6	0	$+10$	

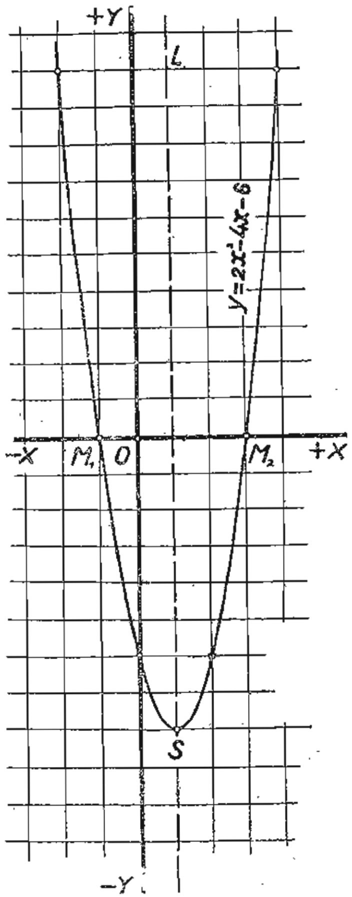
Добивамо слику 19.

Други случај. — Нека је сад

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$$

Тада је збир у средњој загради једначине (1) увек позитиван. Први члан му је променљив и *увек позитиван.* Он ће бити најмањи кад буде нула. Отуда опет исти обрасци (3) важе и у овом случају.

Напомена. — Исти обрасци важе и за $a < o$.



Сл. 19.

Графичко решавање квадратне једначине с једном непознатом

Први начин

Узмимо једначину $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Лева страна ове јединачке претставља један полином другог степена по x:

$$x^2 - 5x + 4.$$

Знамо да овај полином мења своју вредност, чим x промени своју.

На пр. за $x = 2$, $P = 2^2 - 5 . 2 + 4 = -2$

за $x = 6$ $P = 6^2 - 5 . 6 + 4 = +10$ Итд.

Значи, наш полином је функција икса.

$$x^2 - 5x + 4 = f(x).$$

Функција је променљива. Зато имамо право да место f (x) ставимо један променљив број. Ставићемо y:

$$y = x^2 - 5x + 4$$

Ову функцију можемо претставити графички.

Канонични облик:

$$y = \left(x + \frac{-5}{2}\right)^2 - \frac{25 - 16}{4}$$

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$y = \left(\frac{2x - 5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{(2x - 5)^2}{4} - \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}[(2x - 5)^2 - 9]$$

Из досадањег знамо да је ово

1) парабола (јер је изражена квадратним триномом):

2) парабола која се отвара у позитивном смислу ординатне осовине (јер је $a = \frac{1}{4} > 0$);

3) парабола чија је симетрала L:

$$2x - 5 = 0 \quad \text{тј.} \quad x = \frac{5}{2} ;$$

4) парабола чије је теме у тачци

$$S\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

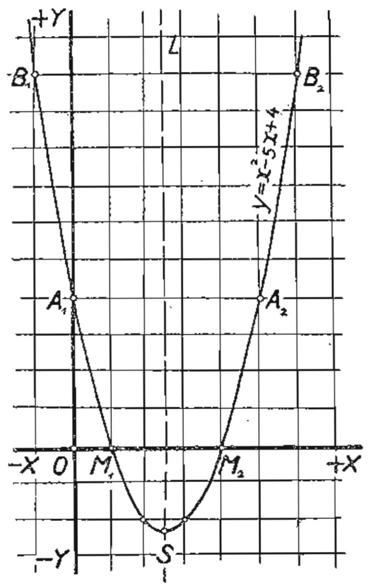
Према томе можемо је лако конструисати (*сл. 20.*), чим обележимо неколико њених тачака (S, M_1 и M_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2).

Шта су корени једне једначине с једном непознатом? То су оне вредности за променљиву, које своде полином једначине на нулу

Корени наше једначине $x^2 - 5x + 4 = 0$ јесу такви бројеви, који своде полином $x^2 - 5x + 4$ на нулу. А кад је $x^2 - 5x + 4 = 0$, тада је $y = 0$.

Кад на слику гледамо, можемо да кажемо, да су корени наше једначине апсцисе оних тачака, где је $y = 0$. Међутим, *y* је равно нули само онда, кад наша крива сиђе на апсцисну осовину.

Значи: корени наше једначине су апсцисе оних тачака, у којима апсцисна осовина сече нашу криву линију.



Сл. 20.

Апсциена осовина сече нашу криву у тачкама M_1 и M_2. Апсцисе тих тачака су $+1$ и $+4$. Према томе, решења наше једначине су

$$x_1 = +1 \text{ и } x_2 = +4.$$

И збиља је у једначини:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

за $x = +1$ $\qquad 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$

Број $+1$ је корен наше једначине.

За $x = +4$ $\qquad 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$

Број $+4$ је корен наше једначине.

Други пример. — Графички решити једначину:

$$6x - x^2 - 8 = 0$$

Ставимо $y = -x^2 + 6x - 8$. Нацртајмо ту криву (сл. 18). Апсцисна осовина сече ту криву у тачкама M_1 и M_2. Њиве су апсцисе $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Према томе, то су решења наше једначине. И збиља је у једначини:

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

за $x = 2$ $\qquad -2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = -4 + 12 - 8 = 0.$

Број 2 је корен наше једначине.

За $x = 4$ $\qquad -4^2 + 6 \cdot 4 - 8 = -16 + 24 - 8 = 0.$

Број 4 је корен наше једначине.

Трећи пример. — Графички решити једначину $x^2 + 4x + 4 = 0$

Ставимо $y = x^2 + 4x + 4$ и нацртајмо ту криву (сл. 12).

Апсцисна осовина *додирује* нашу криву у тачци M, чија је апсциса $x = -2$. Решење наше једначине је:

$$x_1 = -2 \text{ и } x_2 = -2.$$

И збиља је у једначини:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

за $x = -2$ $\qquad (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0.$

Откуд знамо да су оба корена једнака? Знамо по томе, што дирка постаје од сечице, кад се пресечне тачке поклопе. Међутим видимо да је апсцисна осовина дирка наше криве.

Четврти пример. — Решити једначину

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Ставимо $y = x^2 - 4x + 5$, па нацртајмо ту параболу.

Најпре канонични облик:

$$y = \left(x + \frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{16 - 20}{4}$$

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

То је парабола са слике 21.

Симетрала ове параболе је права L:

$$x - 2 = 0, \text{ тј. } x = 2$$

Где је теме? У тачци S $(2, +1)$. У коме смислу се отвара? У позитивном смислу ординатне осовине, пошто је $a = 1 > 0$.

Сад само неколико њених тачака:

$A_1 (+1, +2)$, $A_2 (+3, +2)$, $B_1 (0, +5)$, $B_2 (+4, +5)$ $C_1 (-1 + 10)$, $C_2 (+5, +10)$.

Где апцисна осовина сече ову криву? Нигде. Решења наше једначине су *комплексна*.

Да проверимо то:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

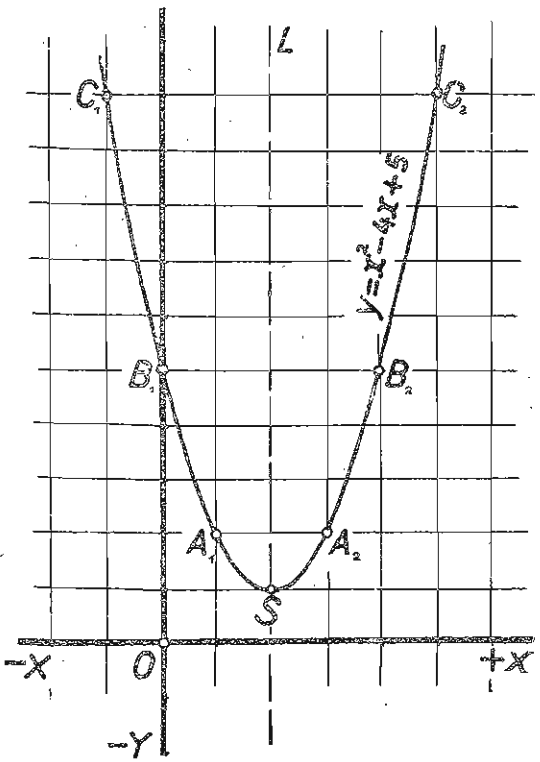
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = 2 + i$$

$$x_2 = 2 - i$$

Наше графичко решење је добро. Оно нам је унапред казало да су наши корени уображени.



Сл. 21.

Други начин графичког решавања квадратне једначине с једном непознатом

Показаћемо још један начин графичког решавања квадратне једначине са једном непознатом.

Први пример. — Решити графички једначину :

$$x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0.$$

Ставимо овако :

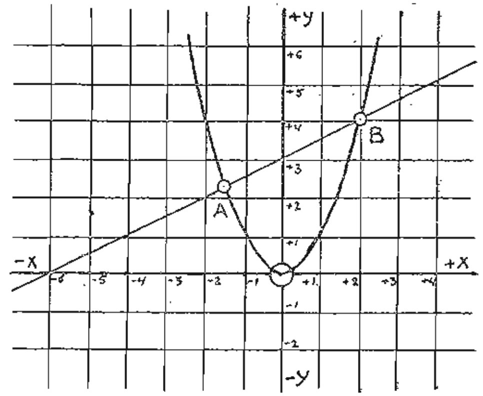
$$x^2 = \frac{x}{2} + 3.$$

Тиме смо раставили квадратну једначину на два дела: један другог степена, а други првог степена по *иксу*. Пошто су једнаки, уједначимо оба са y :

(1) $$y = x^2$$

(2) $$y = \frac{x}{2} + 3.$$

Ми познајемо обе ове једначине; прва претставља параболу, а друга праву линију. Нацртајмо их обе (сл. 22). Оне се секу у тачкама A и B, чије су апсцисе $x_1 = -1\frac{1}{2}$, $x_2 = +2$. То су корени (решења) наше квадратне једначине.



Сл. 22.

И збиља је:

$$\left(x + 1\frac{1}{2}\right)(x - 2) = x^2 - \frac{x}{2} - 3.$$

Зашто су апсцисе тачака A и B решења наше једначине? Кад одузмемо једначину (2) од једначине (1) добићемо:

(3) $$x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0$$

а то је наша задата једначина. Заједничко решење за једначине (1) и (2) мора задовољавати и једначину (3).

Други пример. — Решити графички једначину

$$10x^2 - 23x - 68 = 0$$

Најпре ћемо учинити да сачинилац уз x^2 буде $+1$, тј. поделићемо целу једначину са 10. Добићемо:

$$x^2 - 2{,}3x - 6{,}8 = 0$$

Сад даље:

$$x^2 = 2{,}3x + 6{,}8$$

Имамо две криве:

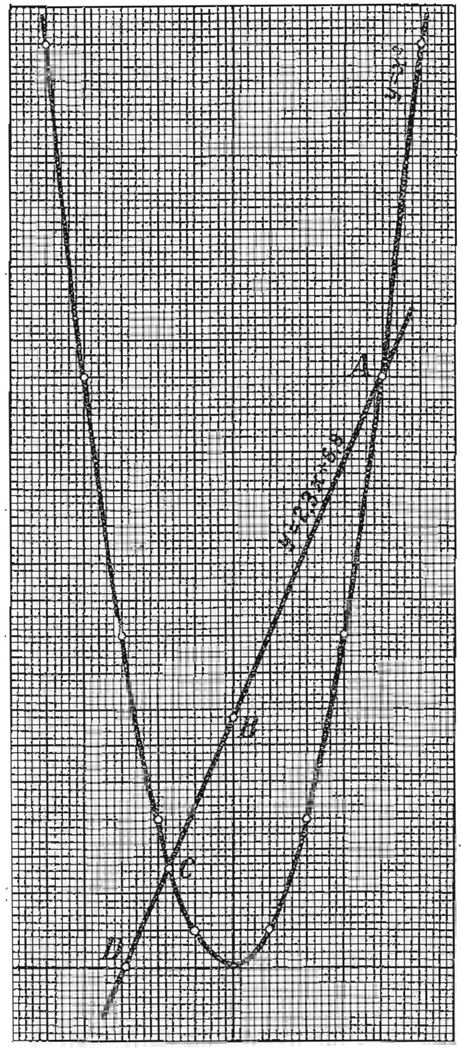
$$y = x^2$$

$y = 2{,}3x + 6{,}8$. (То је права линија. Права линија се зове још и „крива првог степена“).

Кад их нацртамо (сл. 23) видимо да права сече параболу у тачкама C и A, чије су апсцисе

$$x_1 \backsimeq -1{,}8 \qquad x_2 = 4$$

То су корени једначине $10x^2 - 23x - 68 = 0$. (За први корен добили смо само *приближну вредност* 1,8.) За јединицу смо узели дуж од 5 mm.)



Сл. 23.

Трећи пример. — Решити једначину

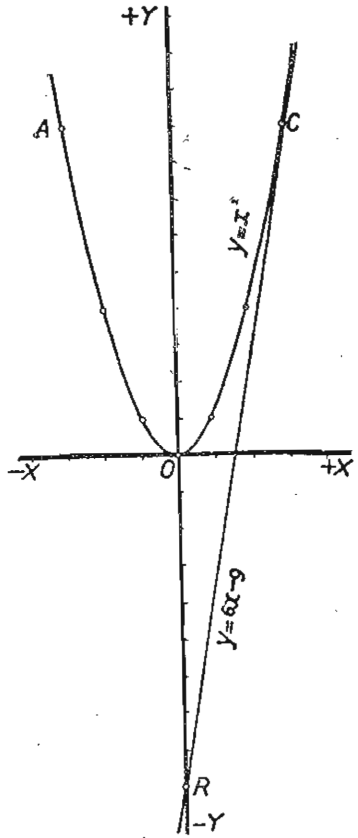
$$x^2 - 6x + 9 = 0, \text{ тј. } \qquad x^2 = 6x - 9.$$

Ставимо:

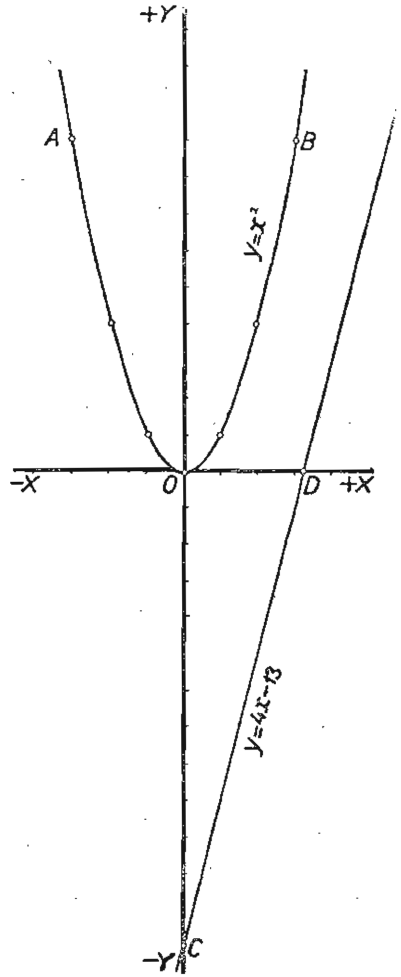
(1) $\qquad y = x^2$

(2) $\qquad y = 6x - 9$

Конструишимо обе ове линије (сл. 24).



Сл. 24.



Сл. 25.

Прва претставља параболу AOC, а друга праву RC. Та права је дирка на параболи у тачци C. Координате додирне тачке C су $x = 3$, $y = 9$. Према томе, решење наше једначине је:

$x_1 = x_2 = 3$. (Пошто је $+3$ апсциса додирне тачке C.)

Четврти пример. — *Решити једначину*

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Ставимо најпре $x^2 = 4x - 13$. Затим

(1) $y = x^2$

(2) $y = 4x - 13$

Конструишимо обе ове линије (сл. 25). Прва је парабола AOB. Друга је права CD. Оне немају заједничких тачака. Према томе, наша једначина нема *стварних* корена. Корени наше једначине су комплексни.

Решимо дату једначину:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x_1 = 2 + 3i$$
$$x^2 = 2 - 3i$$

Корени су збиља комплексни.

ВЕЖБАЊА УЗ ТРЕЋИ ОДЕЉАК

Решити ове једначине и извршити пробу:

1. $x^2 = 225$
2. $x^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$
3. $x^2 - p^2 + 4pq - 4q^2 = 0$
4. $5x^2 = 125$
5. $0,3\,x^2 - 6,075 = 0$
6. $\frac{7}{8}x^2 - 224 = 0$
7. $0,12\,x^2 - 1,08 = 0$
8. $0,09\,x^2 - 0,6084 = 0$
9. $3380 - \frac{5}{9}x^2 = 0$
10. $308 - \frac{7}{11}x^2 = 0$
11. $4x^2 - 11 = 89$
12. $79 - 4x^2 = 16$
13. $4,3 - 6x^2 = 2,8$
14. $1,845 - 0,5\,x^2 = 1,6$
15. $2\frac{1}{4} - \frac{2}{9}x^2 = 2\frac{1}{8}$
16. $x - \frac{49}{x} = 0$
17. $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$
18. $\frac{8x^2}{27} = \frac{3}{2}$
19. $\frac{ax}{b^2} = \frac{b^2}{a^2x}$
20. $\frac{a^3x}{b} - \frac{b}{ax} = 0$
21. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{ab^2} + \frac{ab^2}{x}$
22. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$
23. $\frac{3x+8}{5x-2} - \frac{x+1}{3x-7} = 0$
24. $\frac{4x+5}{7x-1} - \frac{x-2}{2x+9} = 1$

25. $1 - \frac{5x-6}{4x-1} + \frac{x-5}{8x+19} = \frac{5x}{(4x-1)(8x+19)}$
26. $\frac{x-2}{x+3} - \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2+5x+6} = 0$
27. $\frac{7}{x-4} - \frac{4}{x-6} = \frac{2}{x+2}$
28. $\frac{x}{a-x} = \frac{x}{x-a} + 2\frac{2}{3}$
29. $-4x(-1-x) + 6(3-x+2x) + 10 = 0$
30. $5x^2 - 3x + 7 = -3(1+x) + 4$

Решити ове једначине и извршити пробу:

31. $x^2 - 3x + 2 = 0$
32. $x^2 - 5x + 6 = 0$
33. $x^2 + 5x + 6 = 0$
34. $x^2 + 6x + 8 = 0$
35. $x^2 - 8x + 16 = 0$
36. $x^2 - 10x + 25 = 0$
37. $x^2 - 2x - 15 = 0$
38. $x^2 - 6x - 16 = 0$
39. $x^2 - 5x - 36 = 0$
40. $x^2 - 6x - 55 = 0$
41. $2x^2 - 3x - 2 = 0$
42. $3x^2 - 7x - 16 = 0$
43. $7x^2 - 41x - 56 = 0$
44. $3x^2 - 7x - 66 = 0$
45. $5x^2 - 4x - 6 = 0$
46. $x^2 - 7x - 9 = 0$
47. $x^2 + 6x + 25 = 0$
48. $x^2 - 8x + 25 = 0$
49. $x^2 + 4x + 9 = 0$
50. $x^2 + x - 5 = 0$
51. $6x^2 - 4\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$
52. $11x^2 - 57\frac{2}{3}x + 68\frac{3}{4} = 0$
53. $x^2 - 2\frac{1}{12}x - 6\frac{1}{4} = 0$
54. $x^2 - 1\frac{2}{15}x - 1\frac{1}{5} = 0$
55. $(2x+1)^2 + (3x+1)^2 - (x-1)(2x+5) = (2x+3)^2$
56. $(2x+4)^2 - (3x-1)^2 + (3x-1) = 4(2x-3)^2$
57. $(x-3)(x-4)(x+7) - x(x-4)(x-1) = 18$
58. $(x-8)(x+2)(x+5) - (x-3)(x-4)(x-6) = 192$
59. $(2x+3)^3 + (4x-3)^3 = (2x+1)(4x+3)(9x+25) + 853$
60. $\frac{x+3}{3} - \frac{2}{x-4} = \frac{x}{6} + \frac{x-2}{4}$
61. $\frac{5x-3}{6} - \frac{7x-1}{10} = \frac{7}{3x-2} - \frac{4x-9}{3}$
62. $\frac{5x+2}{8x-7} = \frac{9x-1}{6x+5} + \frac{1}{3}$
63. $\frac{3x+2}{2x+7} - \frac{4x-5}{2x-7} = \frac{13-8x}{4x^2-49} - \frac{1}{3}$
64. $\frac{5x+4}{5x-4} + \frac{5x-4}{5x+4} = \frac{13}{6}$

65. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x-1}$

66. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

67. $x^2-ax-bx+ab=0$

68. $x^2+ax-6a^2=0$

69. $x^2+x-bx+ab+a=a^2-b$

70. $x^2-x=a^2-1$

71. $x^2-bx+2ab=a^2+2b^2-ab$

72. $x^2+ax-2a^2=0$

73. $2x^2-3a+a^2=0$

Склопи једначину из ових корена:

74. $x_1=3,\ x_2=5$

75. $x_1=5,\ x_2=3$

(Какве су међу собом једначине које добијаш из вежбања 74 и 75? Зашто?)

76. $x_1=-3,\ x=8$

77. $x_1=-10,\ x_2=1$

78. $x_1=5,\ x_2=-5$

79. $x_1=3,\ x_2=-3$

80. $x_1=4,\ x_2=4$

81. $x_1=-3,\ x_2=-3$

82. $x_1=\frac{1}{10},\ x_2=10$

83. $x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-3$

84. $x_1=\sqrt{3},\ x_2=2$

85. $x_1=\sqrt{3},\ v_2=-\sqrt{3}$

86. $x_1=0{,}001,\ x_2=0{,}01$

87. $x_1=\sqrt{3},\ x_1=\sqrt{5}$

88. $x_1=i+3,\ x_2=3-i$

89. $x_1=5+3\,i,\ x_2=5-3\,i$

90. $x_1=3+4\,i,\ x_2=3-4\,i$

91. $x_1=5+4i,\ x_2=5-4i$

92. $x_1=1\frac{1}{3},\ x=-2$

93. $x_1=2\frac{3}{5}\ x_2=-0{,}4$

94. $x_1=-1,\ x_2=0$

95. $x_1=-0{,}5,\ x_2=-4\frac{1}{2}$

96. $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{3}$

97. $x_1=2\sqrt{3},\ x_2=3\sqrt{2}$

98 $x_1=4-2\,i,\ x_2=4+2\,i$

99. $x_1=0{,}5+i,\ x_2=0{,}5-i$

100. $x_1=8-\frac{1}{8}i,\ x_2=8+\frac{1}{8}i$

101. $x_1=\frac{1}{100},\ x_2=10.$

d 102. — У једначини

$$\lambda x^2-7x+3=0$$

одредити λ тако, да један корен буде шест пута већи од другога.

d 103. — У једначини

$$x^2-2\lambda x+6=0$$

одредити λ тако, да се корени разликују за 1.

104. — У једначини

$$x^2-5x+2\lambda=0$$

одредити λ тако, да један корен буде једна четвртина онога другога.

105. — У једначини

$$3\lambda x^2-6x+8=0$$

одредити λ тако, да један корен буде половина онога другога.

106. — У једначини

$$3x^2-13\lambda x+14=0$$

одредити λ тако, да се корени разликују за $\frac{1}{3}$.

107. — У једначини

$$x^2-11x-5\lambda=0$$

одредити λ тако да један корен буде десети део оног другог корена.

108. — У једначини

$$2x^2+3\lambda x+25=0$$

одредити λ тако, да се корени разликују за $(-2{,}5)$.

Најпре кажи све што знаш о коренима сваке од наредних једначина, а затим их реши, те провери оно што си унапред одредио.

109. $x^2-8x+15=0$

110. $x^2-10x+9=0$

111. $x^2+7x+6=0$

112. $x^2+14x+33=0$

113. $x^2+16x+64=0$

114. $x^2+22x+121=0$

115. $x^2-4x-21=0$

116. $x^2+3x-70=0$

117. $5x^2+17x+12=0$

118. $4x^2+4x-35=0$

119. $x^2-3x-5=0$

120. $4x^2-3x-7=0$

121. $x^2-5x-5=0$

122. $x^2+10+29=0$

123. $x^2+16x+113=0$

124. $x^2+2x+10=0$

125. $16x^2-24x-13=0$

126. $9x^2-8x-7=0$

127. $-6x^2-5x+4=0$

128. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=1$

129. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=2$

130. $\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+4}{5x-3}$

131. $\frac{2x-3}{x}=\frac{3x-4}{x+1}+2$

132. $7x^2-7x-\sqrt{7}=0$

133. $x^2\sqrt{2}-x\sqrt{48}-\sqrt{3}=0$

134. $\sqrt{7}-x\sqrt{8}-x^2=0$

Реши па дискутуј ове једначине:

135. $x^2+2ax=3a^2$

136. $x^2+(a+b)\,x=2a^2-5ab+2b^2$

137. $x^2-(a-b)\ x=2ab+2b^2$

138. $x^2-\frac{b}{a}(a-b)\,x=2a^2-ab+b^2$

139. $x^2-(a^2+b^2)\ x=ab\,(a^2-b^2)$

$6 = 2 \cdot 3$

140. $x^2+2ax=b+c$

141. $(x-a+b)\ (x-b+c)=0$

142. $x^2-ax=0$

143. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2$

144. $a^2(b-x)^2=b^2\ (a-x)^2$

145. $(a-x)\ (x-b)=(a-x)\ (c-x)$

146. $(x-a+b)\,(x-a+c)=(a-b)-x^2$

147. $a^2 (a - x)^2 = b^2 (b - x)^2$
148. $abx^2 - (a^2 + b^2) x + ab = 0$
149. $(a - x)^2 + (x - b)^2 = (a - b)^2$
150. $(a - x)(b - x) = 2 (a - b)^2$
151. $(a - 1) x^2 + (1 - a) x = 1$
152. $(2 - 3x)(x - 3a) = 0$
153. $(5 - a) x^2 - (a - 1) x = 9$
154. $4x^2 - (a - 1) x = 1$
155. $(5 + x) x - c = 0$
156. $(1 - 2a) x + (3 - x) 4x = a$

157. — Шта бива са коренима ове једначине, кад је $\alpha = \frac{2}{3}$?

$$2x^2 - 4x + (2\alpha - 3) = 0$$

158. — Исто питање за $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$2x^2 - (4\alpha - 1) x - 4 = 0$$

159. — Исто питање за $\alpha = -2m$

$$3x^2 - (\alpha + 2m) x - 5 = 0.$$

160. — Исто питање за $\alpha \to \frac{1}{2}$

$$3x^2 (2\alpha - 1) + x^2 - 1 = 0$$

161. — Исто питање за $\alpha \to -\frac{5}{3}$

$$8x^2 (3\sigma + 5) + 3x + 2 = 0$$

162. — Исто питање за $\alpha \to 0{,}1$

$$8x^2 (10\alpha - 1) + 3x + 7 = 0$$

163. — Исто питање за $\alpha \to \frac{3}{4}$

$$2 (8\alpha - 6) x^2 + (12\alpha - 9) x + 1 = 0$$

164. — Исто питање за $\alpha \to -0{,}01$

$$x^2 (100\alpha + 1) + 25\alpha + \frac{1}{4}) x + 1 = 0.$$

165. — Исто питање за $\alpha \to 2$

$$5 (3\alpha - 6) x^2 + 4 (5\alpha - 1) x + \frac{\alpha}{3} 1 = 0.$$

Какви су корени наредних једначина, кад се *a* мења од $-\infty$ до $+\infty$:

166. $(a + 3) x^2 + (2a + 3) x + a + 5 = 0.$
167. $(a + 5) x^2 + (2a - 3) x + a - 10 = 0.$
168. $(a - 2) x^2 + (2a - 2) x + 3a + 4 = 0.$
169. $(2a + 3) x^2 + (a + 1) x + 4 = 0.$

170. $(3a - x) x + (4a - x) x = 5.$
171. $(a - 2x) + (x - 2a) x = 0.$
172. $(x - 2) a + (1 - a) x^2 = 0.$
173. $(4x - 1) a + (x - 1) x = 0.$
174. $(5x - a) x + (1 - a) x = a.$
175. $(4 + a) x + (a - 4) x^2 = a.$
176. $(7 - a) x^2 + (a - 7) x = a^2.$
177. $(1 - a) x + (2 - a) x^2 = 1.$

(У вежбањима 166 — 177 најпре образуј дискриминанту $D = b^2 - 4ac$. Затим испитај какво треба да је *a*, па да корени буду стварни, а какво па да корени буду уображени. Затим пусти *a* да се мења).

Реши ове једначине и изврши пробу:

178. $(2x - 5)^2 - 5 (2x - 5) + 4 = 0.$

Овде можемо извршити ову смену: $2x - 5 = y$. Тада добијамо ову квадратну једначину.

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Она има ове корене: $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Пошто је $2x - 5 = y$, добијамо ове две једначине:

$$2x - 5 = 1 \text{ и } 2x - 5 = 4$$

а одатле:

$$x_1 = 2{,}5 \quad x_2 = 4{,}5.$$

179. $(9x - 7)^2 + (3x - 7) - 10 = 0$
180. $(5x - 3)^2 + 7 (5x - 3) - 18 = 0$
181. $(6x + 3)^2 - 16 (6x + 3) + 15 = 0$
182. $4 (4x - 9)^2 - 5 (4x - 9) - 21 = 0$
183. $3 (7x - 11)^2 + 7 (7x - 11) - 48 = 0$
184. $(ax + b)^2 - 2b (ax + b) - a (a - 2b) = 0$
185. $(ax - b)^2 + b (ax - b) - a (a - b) = 0$
186. $3a (2ax - 3b)^2 - 6a (2ax - 3b) + 9ab (2a - 3b) = 0$
187. $5b (5ax - 4b)^2 + 3a^2 (5ax - 4b) - b (3a^2 + 5b^2) = 0.$

Реши ове једначине и изврши пробу:

188. $7{,}35x^2 - 33{,}82x - 148{,}88 = 0$
189. $3{,}87x^2 + 37{,}25x - 644{,}5 = 0.$
190. $0{,}575x^2 - 3{,}424x + 2{,}75 = 0$
191. $51{,}48x^2 - 67{,}95x + 14{,}65 = 0$
192. $x^2 + (5a^3 + 10a^2 - 7) x + 6a^8 + 23a^6 + 2a^4 - 41a^2 + 10 = 0$
193. $\left(\frac{2}{3}x - 5\right)^2 - 1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x - 5\right) - 5 = 0$ (Види вежбање 178.)
194. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2 - 3\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}\right) - 2\frac{1}{16} = 0$

195. $\left(\frac{ax}{b}-b\right)^2-(a+b)\left(\frac{ax}{b}-b\right)+2b(a-b)=0$ Дискусија.

196. $a\left(2x-\frac{3b}{a}\right)^2-2a\left(2x-\frac{3b}{a}\right)+\frac{3b}{a}(2a-3b)=0$

197. $ab\left(\frac{3x}{b}-\frac{4}{a}\right)^2+\frac{3a}{b}\left(\frac{3x}{b}-\frac{4}{a}\right)-\frac{3a^2+5b^2}{a^2b}=0$

198. $\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{3}\right)^2-1\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{3}\right)-7\frac{1}{9}=0$

Конструисати ове функције:

199. $y = 7x^2$

200. $y = \frac{1}{2}x^2$

201. $y = -4x^2$

202. $y = -5x^2$

203. $y = \frac{2}{3}x^2$

204. $y = 0{,}001x^2$

205. $y = 5x^2$

206. $y = 25x^2$

207. $y = x^2$

208. — Како треба изабрати подеоке на осовинама, па да параболе из вежбања 205 и 206 буду претстављене истом кривом?

209. $y = x^2 + 2$

210. $y = x^2 - 3$

212. $y = x^2 - 6$

213. $y = x^2 + 1{,}5$

214. $y = 2x^2 + 1$

215. $y = 3x^2 + 2$

216. $y = (x - 4)^2$

217. $y = (x + 1{,}5)^2$

218. $y = (2x - 1{,}5)^2$

219. $y = -2(x - 0{,}5)^2$

220. $y = x^2 + 3$

221. $y = x^2 - 5$

222. $y = x^2 + 6$

223. $y = x^2 - 2{,}5$

224. $y = 2x^2 - 1$

225. $y = 4x^2 + 5$

226. $y = (x - 2{,}5)^2$

227. $y = (x + 3{,}5)^2$

228. $y = 3(x - 3)^2$

229. $y = -3(x - 2)^2$

230. — Конструисати функцију: $y = x^2 - 4x + 4$.

(У коме облику може да се напише $x^2 - 4x + 4$?)

231. — Конструисати функцију:

$$y = x^2 - 6x + 9.$$

232. — Исто за функцију:

$$3y = 6(x^2 - 2x + 1).$$

(Подели обе стране са 3).

233. — Исто за функцију:

$$y = -\frac{2}{3}(x^2 + 2x + 1).$$

234. — Исто за функцију:

$$y = 2x^2 - 6x + 9.$$

235. — Исто за функцију:

$$y = 3x^2 - 5x \quad 2.$$

236. — Исто за функцију:

$$y = 8x^2 - 6x^2 + 1.$$

237. — Исто за функцију:

$$y - 2x^2 - 7x + 3.$$

238. — Исто за функцију:

$$y - 1 = 3x^2 + 2x - 2.$$

239. — Исто за функцију:

$$y + 2 = 4x^2 - 3x - 2.$$

240. — Исто за функцију:

$$y - 3 = 3x^2 - 12x + 12.$$

241. — Исто за функцију:

$$y = 3x^2 + 4x + 5.$$

242. — Исто за функцију:

$$y = x^2 + 2x + 3.$$

Реши графички ове једначине:

243. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$

244. $3x^2 - x + 1 = 0$

245. $x^2 - 4x + 3 = 0$

246. $x^2 - 30x - 200 = 0$

247. $-x^2 + 5x - 6 = 0$

248. $x^2 - 4x + 20 = 0$

249. $x^2 + 7x + 12 = 0$

250. $-x^2 + 8x^2 - 12 = 0$

251. $-x^2 + 11x - 18 = 0$

252. $-x^2 + 22x - 120 = 0$

253. $x^2 + x - 2 = 0$

254. $x^2 - 2x + 5 = 0$

На слици 23 реши ове једначине:

255. $x^2 - 5x + 6 = 0$ (Имаш само да одредиш правац праве $y = 5x - 6$, да поставиш лењир у томе правцу и одмах да прочиташ решење, тј. да прочиташ апсцисе тачака у којима твој лењир сече нацртану параболу).

256. $x^2 + 4x + 3 = 0$

257. $2x^2 - x - 1 = 0$

258. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

259. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

260. $x^2 - x - 30 = 0$

261. $x^2 + 6x + 9 = 0$

IV — КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ВИШЕ НЕПОЗНАТИХ

Систем квадратних једначина. — Две или више квадратних једначина, за које претпостављамо да су задовољене истим вредностима за непознате, чине *систем квадратних једначина*.

Пример. — Систем квадратних једначина:

$$3x^2 + 4y^2 - 5x = 14$$
$$5x^2 - y^2 - 3y = -5.$$

Обе ове квадратне једначине задовољавају се вредностима $x = 1$, $y = 2$:

$$3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1 = 14$$
$$5 \cdot 1^2 - 2^2 - 3 \cdot 2 = -5.$$

Систем квадратних једначина с двема непознатима. — Систем квадратних једначина може бити од две, три и више једначина. Ми ћемо показати само неколико врсти система с двема непознатима.

I — *Систем у коме је једна једначина линерна* (првог степена):

$$x^2 - y^2 = 32$$
$$x - 2y = 2.$$

II — *Систем у коме једна једначина има све изразе другог степена.*

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$
$$x^2 + 3x + y^2 - 4y = 1$$

III — *Систем у коме једна једначина садржи неки познати образац*:

$$x^2 - 2xy + y^2 = a$$
$$x^2 - y^2 = b.$$

IV — *Систем у коме се једна једначина може раставити на чиниоце првог степена*:

$$3x^2 - xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 5y - 19 = 0.$$

Прву једначину можемо овако написати:

$$3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0.$$

Овако ћемо је раставити на чиниоце:

$$3x\,(x - y) + 2y\,(x - y) - 7\,(x - y) = 0$$
$$(x - y)\,(3x + 2y - 7) = 0$$

Види се да смо је раставили на чиниоце првога степена.

Решавање система квадратних једначина с двема непознатима. — Пре него што се пређе на решавање система, треба образовати полином обеју једначина (ослободити се заграда и разломака, пребацити све изразе на леву страну, свести и уредити полином).

Општи облик квадратне једначине с двема непознатима овако изгледа:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Кад се уреде оба полинома према овоме општем облику, треба загледати да није код нашег система који од 4 горе поменута случаја. Ако јесте, онда систем треба овако решавати:

Једна је једначина у систему линеарна. — Нека нам је дат систем:

(1) $$x^2 - y^2 - 5x - 2 = 0$$
(2) $$2x - 3y - 6 = 0.$$

Линеарну једначину (2) решићемо по иксу и добивену вредност сменити у квадратној једначини (1):

(3) $$x = \frac{6 + 3y}{2}$$

$$\frac{36 + 36y + 9y^2}{4} - y^2 - 5 \cdot \frac{6 + 3y}{2} - 2 = 0.$$

Кад се ова једначина упрости, добије се:

$$5y^2 + 6y - 32 = 0$$

а одатле:

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = -3{,}2$$

Ако добивене вредности сменимо у (3) добићемо:

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = -1{,}8.$$

Решења нашег система јесу:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = -1{,}8$$
$$y_1 = 2 \qquad y_2 = -3{,}2.$$

Овај начин на који смо сад радили зове се *метод замене*

ВЕЖБАЊА

Решити систем:

1. $x + y = 7{,}5$; $xy + 14$
2. $x - y = 2$; $xy = 63$
3. $3x - 2y = 0$; $xy = 13{,}5$
4. $2x - y = 5$; $x^2 = 42$
5. $x + y = 7$; $x^2 - y^2 = 21.$
6. $x - y = 5$; $x^2 + y^2 = 37$
7. $x + y = 8$; $x^2 + y^2 = 34$
8. $x - y = 1$; $3x^2 + y^2 = 31$
9. $3x - y = 1$; $5x^2 - y^2 = -5$
10. $2x + y = 7$; $x^2 + y^2 = 13$
11. $3x^2 - 5xy + 4y^2 + 2x - 3y = 7$; $4x - 3y = 5$
12. $x^2 + xy + y^2 = 10$; $x + y = 6$
13. $x^2 + 2xy + y^2 = 25$; $x - y = 3$
14. $x - y = 3$; $x^2 + y^2 = xy = 3$
15. $x^2 + \frac{8}{3}xy - y^2 = 0$; $2x + 3y = 26$
16. $16x^2 + 5xy - y^2 = 0$; $y - 10x = 5$

17. $x + y = 5$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$

18. $x + y = \frac{21}{8}$

$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}$

19. $3x - 2y = 1{,}0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1{,}25$

20. $2x - y = 3$

$4x^2 - 5y^2 = 3x + 5$

21. $3x^2 - 2xy = 8$

$2x - 3y = 11$

22. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$x + y = 13$

(У вежбању 22 прву једначину степенуј са 2, затим остави само корен на левој страни, па опет степенуј са 2. Можеш ли решити задатке 17 и 22 помоћу неке смене?).

23. $x^2 + y^2 = 20$

$\frac{x}{y} = 2$

24. $x + y = 2{,}5$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4{,}25$

V — ПРОБЛЕМИ ДРУГОГ СТЕПЕНА

Проблем другог степена. — Проблем другог степена је онај проблем чије се решење своди на једначину *другог* степена.

Ступњеви проблема. — И код проблема другог степена имамо ступњеве као и код проблема првог степена:

I { 1. — Избор непознате,
  2. — постављање једначине;

II { 1. — решење једначине;

III { 1. — дискусија једначине,
  2. — дискусија проблема.

Пошто је једначина другог степена сложенија од једначине првог степена, овде су дискусија једначине и дискусија проблема сложеније него код једначине првог степена. То ће ученик видети на примерима.

Решени примери проблема другог степена

Пример 1. — *Наћи таква два броја, да им је збир — 9, а производ 14.*

Нека су та два броја x и y.

Њихов је збир — 9:

$$x + y = -9.$$

Њихов производ је 14:

$$x\,y = 14.$$

Кад је њихов збир — 9, а производ 14, x и y морају бити *корени* ове једначине:

$$(1) \qquad z^2 + 9z + 14 = 0.$$

Из ње имамо:

$$z_1 = -2 \qquad z_2 = -7.$$

Значи да су наши тражени бројеви

$$x = -2 \qquad y = -7.$$

Једначина (1) ће дати сигурно два корена, пошто је њена дискриминанта $b^2 - 4ac = 81 - 56 = 25$.

Добивена решења $z_1 = -2$ и $z_2 = -7$ можемо овако узети:

$$x = z_1 = -2 \qquad y = z_2 = -7$$

или:

$$y = z_2 = -7 \qquad y = z_1 = -2.$$

У оба случаја проблем је задовољен, јер је

$$-2 + (-7) = -9$$
$$(-2)(-7) = 14$$

и

$$-7 + (-2) = -9$$
$$(-7)(-2) = 14$$

Добивена *два* решења претстављају у овом случају једно решење.

Пример 2. — *Стране једног правоугаоника разликују се за а, а површина тога правоугаоника је р. Наћи стране.*

Ако је једна страна x, друга је $x - a$.

Површина је $x(x - a) = p$.

Добили смо квадратну једначину $x^2 - ax - p = 0$. Из ње је:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4p}}{2}.$$

Дискусија једначине. — Да испитамо израз:

$$a^2 + 4p.$$

Кад збир два броја може бити мањи од нуле? Ако је негативни сабирак већи по апсолутној вредности, или ако су оба сабирка негативна.

У нашем случају разлика *a* правоугаоникових страна може бити позитивна или негативна, али површина нема смисла ако је изражена негативним бројем. Значи наше *p* је позитивно.

Квадрат сваког стварног броја је позитиван, те је и a^2 позитивно, па било $a \gtrless 0$. Према томе оба наша сабирка a^2 и $4p$ су позитивни. Дакле увек је:

$$a^2 + 4p > 0.$$

Према томе и наше x има две стварне вредности:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4p}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4p}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p}$$

Стране нашег правоугаоника су:

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p} \qquad \text{и} \qquad -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p}$$

То је ако узмемо x_1.

А ако узмемо x_2, имаћемо:

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p} \qquad \text{и} \qquad -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4p}$$

Дискусија проблема. — Добили смо два решења. Да бисмо видели одговарају ли нашем проблему, ми ћемо овако размишљати:

1) Знамо да p мора бити позитиван број.

2) Добивене вредности за стране могу бити позитивне и негативне.

Ако стране правоугаоника обележимо са m и n, имаћемо у првом случају:

$$m_1 = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4p}{a^2}}\right) \qquad n_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4p}{a^2}} - 1\right)$$

а у другом случају:

$$m_2 = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4p}{a^2}} - 1\right) \qquad n_2 = -\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4p}{a^2}}\right)$$

Кад загледамо добивене резултате, видимо да први правоугаоник има позитивне стране, ако је $a > 0$, негативне, ако је $a < 0$. Други правоугаоник, има позитивне стране, ако је $a < 0$, а негативне, ако је $a > 0$. По апсолутној вредности стране су у обрнутом реду *једнаке*. То значи, да ми добијамо исти правоугаоник, само је он први пут положен у првом квадранту на координантом систему, а у другом случају је изврнуто положен у трећем квадранту.

Узмимо да је $a = 2$, $p = 3$. Добићемо правоугаоник чије су стране 3 и 1 и правоугаоник чије су стране -1 и -3. На координатном систему нацртај правоугаоник, чија је осовина $+3$, а висина $+1$. Видећеш да је то правоугоаник у првоме квадранту, наслоњен на обе осовине. Сад нацртај правоугаоник чија је основица апциса -1, а висина ордината -3. Видећеш, да су то два једнака правоугаоника, само изврнуто положена.

Пример 3. — *Два детета имају заједно 10 година. После n година биће квадрат броја година старијег детета за 20 већи од десетоструког броја година оног другог детета. Колико је година једноме, а колико другоме? Дискусија.*

Избор непознате. — Кад бисмо знали број година старијег детета, знали бисмо одмах и године онога друга. Обележимо године старијег детета са x.

Постављање једначине. — Дати проблем ћемо превести на алгебарски језик

Српским језиком:	Алгебарским језиком:
Два детета имају заједно 10 година.	Прво x, друго $10 - x$.
После n година	$x + n$, „ $10 - x + n$
биће квадрат броја година старијег детета	$(x + n)^2$
за 20 већи	$(x + n)^2 - 20$
од десетоструког броја година оног другог детета.	$(x + n)^2 - 20 = 10(10 - x + n)$

Решавање једначине. — Ова једначина има ове корене:

$$x_1 = -(n + 5) + \sqrt{20n + 145}$$

$$x_2 = -(n + 5) - \sqrt{20n + 145}$$

Дискусија једначине. — Наша једначина може имати

1. два *једнака* стварна корена, ако је

$$20n + 145 = 0 \text{ тј. ако је}$$
$$5(4n + 29) = 0 \text{ или}$$
$$4n + 29 = 0 \text{ или}$$
$$n = -\frac{29}{4}$$

2. два *неједнака* стварна корена, ако је

$$4n + 29 > 0 \text{ тј.}$$
$$n >= -\frac{29}{4}$$

3. два комплексна корена, ако је

$$4n + 29 < 0 \text{ тј.}$$
$$n < -\frac{29}{4}$$

Дискусија проблема. — Наше x претставља године једног лица. Зато одмах одбацујемо комплексна решења.

Узмимо први случај: два једнака стварна корена за $n = -\frac{29}{4}$.

Тада је:

$$x_1 = -\left(-\frac{29}{4} + \frac{20}{4}\right) = -\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$x_2 = 2\frac{1}{4}$$

Значи, *старије* дете има две године и три месеца, а *млађе* 7 година и 9 месеци! То је очевидно немогуће. Сем тога, број *n* је број који се алгебарски додаје на године и једног другог детета. Једно дете има 2 године и 3 месеца. Јасно је да се од тога броја у нашем случају не могу одузети 7 година и 3 месеца. (Пошто је наше $n = -\frac{29}{4} = -7{,}25 = -7$ год. и 3 месеца.)

Значи, ако је *n* такво, да једначина даје два једнака корена, наш проблем нема смисла.

Узмимо сад случај кад једначина даје два стварна, неједнака корена. Тада мора бити:

$$n > -\frac{29}{4}, \text{ тј.}$$

$$(1) \qquad n > -7{,}25.$$

Сем тога, наше *n* мора по апсолутној вредности бити мање од 5, пошто овде старије дете мора да има више од 5 година.

Зато услов (1) можемо поправити овако:

$$(2) \qquad -5 < n < 5.$$

Услов (2) се не противи услову (1), пошто је $-5 > -7{,}25$. Кад је $n > -5$, оно је одмах веће и од $-7{,}25$. Значи, чим је задовољен услов (2), задовољен је и услов (1).

Године једног лица изражавају се рационалним бројем. Зато поткорена количина мора бити потпун квадрат:

$$20\,n + 145 = m^2$$

Одатле је:

$$(3) \qquad n = \frac{m^2}{20} - 7{,}25$$

Али услов (2) каже да је

$$n > -5$$

То значи да мора бити

$$\frac{m^2}{20} - 7{,}25 > -5$$

$$\frac{m^2}{20} > 2{,}25$$

Одатле је:

$$m^2 > 45$$

Али услов (2) каже и да је

$$n < 5$$

То значи да мора бити:

$$\frac{m^2}{20} - 7{,}25 < 5$$

$$\frac{m^2}{20} < 12{,}25$$

$$m^2 < 245$$

Отуда излазе ова два услова:

I $\quad n = \frac{m^2}{20} - 7{,}25 \quad$ и $\quad$ II $\quad 45 < m^2 < 245.$

Пробајмо сад за $m^2 = 100$.

Тада је $n = 5 - 7{,}25 = -2{,}25$ и

$x_1 = -(n+5) + 10 = -(-2{,}25 + 5) + 10 = 7{,}25$. Добро је

Прво дете има 7 год. и 3 мес., друго 2 год. 9 мес. Изврши пробу!

$x_2 = -(n+5) - 10 = -(-2{,}75) - 10 = -7{,}25$. Нема смисла.

Пробајмо сад $m^2 = 225$.

Тада је $n = \frac{225}{20} - 7{,}25 = 11{,}25 - 7{,}25 = 4.$

$x_1 = -(4+5) + 15 = +6$. Добро је.

Старије дете има 6 год., млађе 4. После 4 год.: старије 10. млађе 8 $10^2 = 10 \cdot 8 + 20$. Добро је. Друго решење (x_2) нема смисла.

Пример 4.— Од свих правоугаоника чији обим износи 2s одредити онај правоугаоник који има највећу површину.

Полуобим тога правоугаоника биће s. Обележимо једну страну са x. Тада ће друга страна бити (s—x). Обележимо површину траженога правоугаоника са y. Тада имамо:

једна страна траженога	правоугаоника:		x
друга „	„	„	$s - x$
површина „	„		$y = x(s-x)$

Имамо *параболу:*

$$y = -x^2 + sx$$

Она има:

$$a = -1$$
$$b = +s$$
$$c = 0$$

Због $a < o$ она се *отвара* у негативном смислу ординатне осовине. Зато ће имати своју *највишу тачку* (то је њено теме).

То значи да ћемо имати једно *ипсилон* веће од свих осталих. Са y је означена површина правоугаоника. Значи збиља постоји правоугаоник који има обим $2s$, а има већу површину од свих осталих правоугаоника истог обима.

Треба само да нађемо координате темена ове параболе. Апсциса темена биће, по обрасцу:

$$x = -\frac{b}{2a}\,. \qquad \text{То је овде:}$$

$$x = -\frac{s}{-2}\ \text{тј.}$$

$$x = \frac{s}{2}\,.$$

Кад је $x = \frac{s}{2}$, ипсилон достиже своју највећу вредност.

А колика је онда друга правоугаоникова страна? Она ће бити:

$$s - x \ \text{ тј.}$$

$$s - \frac{s}{2}\ \text{тј.}\ \frac{s}{2}\,.$$

Значи: наш правоугаоник достиже највећу површину кад му стране постану једнаке. Отуда ово: **од свих правоугаоника сталног обима квадрат има највећу површину**.

Нашли смо да су стране $\frac{s}{2}$. Квадрат има 4 стране:

$$\frac{s}{2}\cdot 4 = 2s.\ \text{То је збиља дати обим.}$$

ВЕЖБАЊА УЗ ПЕТИ ОДЕЉАК

1. — Производ четвртине и петине једног броја је 500. Који је тај број?

2. — Производ петоструког неког броја и једне његове трећине је 540. Који је тај број?

3. — Кад се m-ти део неког броја помножи n-тим делом тога броја, добије се број a. Који је тај број? (Дискусија!)

4. — Ако се a подели неким бројем, добија се n-струки тај број. Нађи га. (Дискусија!)

5. — Производ два броја је 980, а ти бројеви стоје у размери као 4 : 5. Који су то бројеви?

(Ако је први x, тада је други $\frac{5}{4}$ x. Продужи!)

6. — Производ два броја који се разликују за d износи n. Који су то бројеви?

(Ако је већи x, мањи је x — d. Изрази сад да је њихов производ n!)

7. — Наћи број чијем квадрату кад се дода m, добије се n-струки тај број. Испитати какви треба да су m и n, па да проблем буде могућан.

Примена $m = 6$, $n = 4$.

8. — Наћи стране правоуглог троугла чија је хипотенуза a, а разлика страна правог угла је d. Дискутовати!

Примена: $a = 20$, $d = 4$ или $a = 20$, $d = 0$ или $a = 20$, $d = 20$ или $a = 20$, $d = 30$. (Загледај добро ове вредности за d!)

(Ако је мања управна страна x, тада је већа $x + d$. Сети се Питагориног правила!)

9. — Број 84 треба раставити на два чиниоца тако, да им разлика буде 5.

(Ако је један чинилац x, други ће бити 5 — x. Изрази да им је производ 84!)

10. — Збир два броја је 18, а производ 17. Нађи их.

(Ако је један x, други је 18 — x. Та два броја су корени једне квадратне једначине. Које?)

11. — Збир два броја је 16, а разлика њихових квадрата је 32. Који су то бројеви?

12. — Збир два броја је 23. Збир њихових квадрата је 277. Који су то бројеви?

13. — Разлика два броја је d, а збир њихових квадрата је n. Који су то бројеви? Дискутовати!

14. — Разлика два броја је 10, а удвојен збир њихових квадрата је 2600. Који су то бројеви?

15. — Збир два броја је a, а производ n. Који су то бројеви?

(Најпре изради задатак, па дискутуј! Затим узми да ти је $a = 22$, а $n = 96$, па опет изради задатак!)

16. — Који је тај цео број, који је за d мањи од квадрата претходног броја? Дискусија:

(Нека је тај број x. Тада је његов претходни број x — 1)

Примена: $d = 29$, или $d = 51$, или $d = 55$.

17. — Збир два броја је s, а збир њихових квадрата је a. Који су то бројеви? Дискусија!

Примена: $a = 9$, $s = 45$, или: $a = 13$, $s = 89$.

(Ако је један број x, други је s — x).

18. — Кад се реципрочна вредност некога броја помножи са 1,44 добије се тај број. Који је?

19. — Који је тај број што је за $\frac{5}{6}$ већи од своје реципрочне вредности?

20. — Збир реципрочних вредности два узастопна цела броја је $\frac{11}{30}$. Који су то бројеви?

(Ако је један x, други је $x + 1$. Збир њихових реципрочних вредности биће $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ ит. д.)

21. — Производ бројиоца и имениоца једног разломка је 120. Разломак би био раван јединици, кад би се од имениоца одузела јединица па додала бројиоцу. Који је тај разломак?

(Кад је разломак раван јединици? За колико се разликују два цела броја кад је довољно од једнога одузети 1, па додати 1 другоме, те да се изједначе?)

22. — Који је тај број чије $\frac{3}{4}$ увећане за 1 и помножене са његове $\frac{4}{5}$ умањене за 15, даје број 16?

23. — Једно земљиште има облик квадрата. Колика је страна тога квадрата, кад се зна ово: ако се додаду 2 метра једној страни, а одузму 10 метара од друге стране, добија се правоугаоник чија је површина 88 ари? Слика!

24. — Известан број лица имају да плате подједнако за превоз до неког места. Подвоз за све скупа staje 390 динара. Кад су стигли у то место, реше да двојица од њих не плате, пошто су сиромашни. Због тога је сваки од осталих имао да плати још по 32,50 динара. Колико је било путника?

(Разлика између онога што су они платили и стварне цене подвоза је 32,50).

25. — Наћи број који умањен за свој квадратни корен даје 210.

(Како би решио једну овакву једначину:

$$3y - 2\sqrt{y} = 8?$$

Да ли би ту била корисна ова смена: $\sqrt{y} = z$?)

26. — Разлика два броја је 16, а разлика њихових квадратних корена је 2. Који су то бројеви?

(Да решимо овакву једначину:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$$

Степенујемо обе стране са 2:

$$x + 2\sqrt{x^2+5x} + x + 5 = 25.$$

То је даље:

$$2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 \text{ или}$$
$$2x + 2\sqrt{x^2+5x} = 20 \text{ или}$$
$$x + \sqrt{x^2+5x} = 10 \text{ или}$$
$$\sqrt{x^2+5x} = 10 - x. \text{ А даље?)}$$

27. — Наћи такав цео број, да разлика његовог четвртог степена и његовог квадрата буде 600.

(Да решимо овакву једначину:

$$x^4 - x^2 = 12.$$

Ставимо $x^2 = y$:

$$y^2 - y = 12.$$

Кад нађеш y, како ћеш наћи x?)

28 — Сума од 3800 динара има да се подели на известан број сиромаха. Кад је требало да се дели, јаве се за помоћ још њих 6. Због тога сад сви добијају по 48 динара мање него што би добили, да оних 6 нису дошли. Колико их је било пре него што су се пријавили оних шест сиромаха?

Дискутовати проблем!

29 — Раставити број *a* на два сабирка тако, да је њихов производ једнак збиру њихових квадрата.

Ако је један сабирак x, како ћеш означити онај други? Дискусија и једначине и проблема!

30. — Наћи један двоцифрен број са једнаким цифрама тако, да кад се од цифре десетица одузме 1, а цифри јединица дода 1, добија се број чији је квадрат за 147 већи од траженог броја.

Дискутовати!

31. — Наћи три узастопна цела броја таква, да је њихов производ 5 пута већи од њиховог збира.

(Ако је на бројној линији средњи од та три броја *x*, леви је $(x - 1)$, а десни $(x + 1)$.

32. — Количину $5a + b$ раставити на два сабирка тако, да им збир квадрата буде 13 $(a^2 + b^2)$. Дискусија!

33. — Површина једног правоугаоника је 1440 m^2. Колике су му стране, кад је основица за 18 m дужа од висине?

34. — Основица једног правоугаоника је дужа од висине за 19 m. Кад би висина била већа за своју $\frac{1}{3}$, а основица мања за своју $\frac{1}{4}$, површина правоугаоника била би 1320 m^2 мања Колике су стране? Дискусија проблема!

35. — Обим једног правоугаоника је 252 m, а површина 3888 m². Колике су стране?

36. — Цифра десетица једног двоцифреног броја за 3 је већа од цифре јединица. Ако се тај број помножи збиром својих цифара добије се број 814. Који је тај двоцифрени број?

37. — Збир цифара једног двоцифреног броја је 10. Ако цифре промене места, па се тако добивени број помножи првобитним бројем, добије се број 2944. Који је тај број?

38. — Збир два броја је 200. Квадратни корен првог броја, увећан за други број даје 44. Који су то бројеви? (Види 25 вежбање).

39. — Збир два броја је 40, а збир њихових кубова 17080. Који су то бројеви?

40. — Разлика два броја је 10, а разлика њихових кубова 20530. Који су то бројеви?

41. — Колика је ивица једнога суда у облику коцке, који би хватао 4167 cm³ више, кад би му ивица била дужа 3 cm?

42. — Један трговац купи за извесну суму новаца робе на којој има још и 5% трошкова и прода је за 11500 динара. При тој продаји заради толико процената, колико износи један хиљадити део куповне цене. Пошто је купио ту робу? Дискусија проблема.

(Ако ју је купио за x динара, трошкови су му $\frac{5x}{100}$, а проценат зараде $\frac{x}{1000}$.)

43. — Један трговац прода неку ствар за 39 динара. На тој продаји заради онолико процената, колико динара је он платио за ту ствар. Пошто ју је он купио?

44. — Неко има под интересом 8000 динара и сваке године на крају улаже још 100 динара. Почетком треће године имао је 8982,80 динара. Колики је проценат?

45. — Капитал од k динара донесе i динара интереса кад је број година за d већи од процента под којим се капитал даје под интерес. На колико година је дат капитал под интерес? Под којим процентом? Дискусија!

46 — Капитал од 5400 динара донесе 1296 динара интереса, кад је број година за 2 већи од процента. На колико година је дат капитал под интерес и под којим процентом?

47. — Капитал од 2400 динара донео је 420 динара интереса за извесно време. Он би донео исто толико интереса, да је био

дат за 1% мање, али да је стојао 1 годину дана више под интересом. Колики је проценат?

48. — Један човек да под интерес 20 000 динара на 5 година. После тога времена узме из банке свој капитал са интересом и да све то под интерес за 1% мање него раније. На тај начин му је годишњи интерес 1300 динара. Израчунати проценат.

49. — Неко купи известан број метара неке тканине за m динара. Да је сваки метар плаћао a динара мање, добио би за исту своту b метара више. Колико метара је купио и по којој цени? Дискусија!

50. — Кроз 3 године број година једнога детета биће потпун квадрат. Пре три године број његових година био је тачно квадратни корен из тога квадрата. Колико му је година? (В. 25 вежбање).

51. — Стране два квадрата разликују се за d cm. Збир њихових површина је n cm². Колике су им стране? Дискусија!

Примена: $d = 5$, $n = 193$.

52. — У једноме правоугломе троуглу чија је површина p, управне стране стоје у размери као m : n. Колике су им стране? Дискусија!

Примена: $p = 150$, $m = 3$, $n = 4$

53. — Колике су управне стране правоуглога троугла, чија је површина p, кад се оне за d разликују?

Примена: $p = 84$, $d = 17$.

54. — У једноме правоугломе троуглу хипотенуза је 75 cm а управне стране стоје у размери као 7 : 24. Колике су те стране?

55. — У једноме равнокракоме троуглу основица је за 19 cm дужа од висине, а крак је дужи од висине за 8 cm. Колика је основица?

56. — Око једнога правоугаоника са странама a и b описан је опет правоугаоник тако, да су му све стране подједнако удаљене од унутрашњег правоугаоника. Површина великог правоугаоника је n пута већа од површине малога. Колике су им стране?

Примена: $a = 6$, $b = 8$, $n = 4\frac{2}{3}$

57. — Основице два правоугаоника истих висина стоје у размери као 3 : 4, а квадрати њихових дијагонала разликују се за 252. Колике су им стране?

58. — Дата је страна једног троугла $a = 5$ см, њена висина $h_a = 4$ cm и полупречник уписаног круга r. Израчунати оне друге две стране. Дискутовати!

59. — Дат је полупречник описаног круга једног троугла, једна страна и збир других двеју страна. Израчунати стране. Дискутовати.

60. — Дата је једна права и две тачке F и F' ван ње. Наћи на првој тачку M тако, да је

$$MF + MF' = 2a,$$

кад *a* је дата дужина.

Sa P и P' означи пројекције тачака F и F' на датој правој, па стави

$$PF = d, F'P' = d', PP' = 2m, PM = x.$$

Дискутовати!

61. — Дат је један троугао ABC. Поделити га на два дела правом повученом паралелно са BC тако, да однос тих двеју површина (на које је сад растављен троугао) износи m. Дискутовати!

62. — У једноме ромбу чија је страна 17 cm, разликују се дијагонале за 14 cm. Колике су дијагонале?

63. — Израчунати дијагонале једног ромба чија је површина 266 cm². а збир дијагонала 47 cm.

64. — У једном троуглу чија је површина 170 cm², збир стране и висине која пада на њу је 57 cm. Колика је та страна?

65 — У кругу полупречника r = 17 cm, повучена је једна тетива тако, да је она 1 cm дужа од свога средишнога растојања. Колика је тетива?

66. — Оцу је било *a* година кад му се родио син. Ако би се помножиле садање године оца и сина, производ би био m пута већи од квадрата синовљевих година. Колико им је година? Дискусија.

Примена: $a = 24$, $m = 3$.

67. — Неко прими годишњи интерес од свога капитала који износи 18 000 динара. Потроши од интереса 500 динара, а остатак интереса дода капиталу и све дâ под интерес под *истим* процентом. На крају друге године имао је 21 280 динара. Под којим процентом даје он свој новац под интерес?

68. — Два се тела крећу од темена A по крацима правог угла. Прво се креће брзином од c_1 у секунди. Друго тело полази из A после t секунди и креће се брзином c_2. После колико секунада од поласка другог тела њихово праволиниско растојање је d? Дискутовати! Примена: $c_1 = 7$, $c_2 = 6$, $t = 3$, $d = 37$.

69. — Два гласника пођу једновремено за једну варош удаљену 90 км од места поласка. Први прелази 1 км на час више од другога и стигне 1 час пре другога. Којом брзином се крећу?

70. — Два гласника иду један другоме у сусрет из двеју вароши удаљених 320 км; први пређе свакога дана 8 км више од другога и број дана колико се он кретао до сусрета раван је половини броја километара које други прелази дневно. Где су се срели?

71. — Два путника пођу у сусрет један из места A, други из места B. Кад су се срели, путник из A је прешао 12 км више од другога. Они наставе пут истом брзином и путник из A стигне у B 4 ч. 40 м. после сусрета, а путник из B стигне у A $7\frac{5}{7}$ час. после сусрета. Колико је растојање тих двеју вароши?

72. — Две цеви утичу у један басен. Кад свака за себе пуни басен, прва га пуни за 3 часа брже од друге. Обе заједно пуне басен за 3 часа и 36 минута. За колико часова могу те цеви да напуне басен свака за себе?

VI — ЛОГАРИТМИ

Дефиниција. — Системи логаритама. — Декадни логаритми. — Логаритамска линија.

Дефиниција. — Нека нам је дат степен:

$$a^b = m.$$

Овде имамо 3 броја: a, b, и m. Ако нам је непознато *a*, имаћемо да *коренујемо* обе стране са b:

$$x^b = m$$

$$x = \sqrt[b]{m}$$

Ако нам је непознато m, треба извршити означено *степеновање*:

$$2^3 = x$$

$$x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Али ако нам је непознат *изложилац*, не помаже ни *степеновање* ни кореновање:

$$2^x = 8.$$

Овде су дати *степен и основа, па се тражи изложилац.*

Изложилац дате степене количине којој је позната основа јесте **логаритам.**

Овде је 2 **основа,** дати број 8 јесте **нумерус,** или *логаритманд* или **антилогаритам,** а x је **логаритам.** Он овде износи 3, јер је $2^3 = 8$.

Разни системи логаритама. — Пошто степени могу имати разне основе, види се да може бити и разних система логаритама.

$$3^x = a, \qquad x = \log_{(3)} a$$

$$m^x = b, \qquad x = \log_{(m)} b.$$

*) У Математици се употребљавају свега две основе за логаритамски систем: основа *e* и основа *10*.

Основа *e* је један ирационалан број, који овако изгледа:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \ldots\ldots$$

Кад се узму само првих девет чланова, добије се ова приближна вредност за број e:

$$\boxed{e = 2{,}7183.}$$

Логаритми на тој основи зову се **природни логаритми.** Обележавају се овако:

lognat.

На пр. логаритам броја *a* на тој логаритамској основи обележили бисмо овако:

lognat *a*.

То се чита: „*Логаритам натуралис* a".

Логаритми са основом *e* зову се још и *Неперови логаритми*, по енглеском математичару *Џону Неперу*, који је пронашао логаритме 1614 године.

Ми ћемо узети такозване *вулгарне логаритме* или *декадне логаритме*, *Бриксове логаритме*. Код њих је основа 10.

$$10^2 = 100 \qquad\qquad 10^5 = 100\,000$$
$$2 = \log_{(10)} 100 \qquad\qquad 5 = \log_{(10)} 100\,000.$$

Логаритми декадних јединица. — Нека нам је дат овакав задатак: Наћи x, кад се зна да је:

$$100 = 10^x$$

Овде је позната вредност степена (100), дата је основа (10), па се тражи изложилац. То значи тражи се логаритам за основу 10:

$$x = \log_{(10)} 100$$

Ово питање можемо и овако поставити: Којим бројем треба степеновати основу 10, да би се добио број 100?

Знамо да је то број 2. Дакле:

$$\log_{(10)} 100 = 2.$$

* Све што је овде ситним слогом штампано учи се само у реалци. — Писац.

Пошто ћемо се служити само декадним логаритмима, нећемо ни писати основу. Подразумеваћемо да је основа 10. Ако променимо основу, ми ћемо је означити у загради крај логаритамског знака.

Сад можемо израдити једну малу таблицу логаритама декадних јединица.

$$1 = 10^0 \qquad \log\ 1 = 0$$
$$10 = 10^1 \qquad \log\ 10 = 1$$
$$100 = 10^2 \qquad \log\ 100 = 2$$
$$1\,000 = 10^3 \qquad \log\ 1\,000 = 3$$
$$10\,000 = 10^4 \qquad \log\ 10\,000 = 4$$
$$100\,000 = 10^5 \qquad \log\ 100\,000 = 5$$

Можемо сад прећи и на декадне јединице с негативним изложиоцем

$$0{,}1 = \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \qquad \log\ 0{,}1 = -1$$

$$0{,}01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \qquad \log\ 0{,}01 = -2$$

$$0{,}001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \qquad \log\ 0{,}001 = -3$$

Логаритми декадних јединица. — Ми смо видели изложилачке (експоненцијалне) функције:

$$y = 2^x\ ,\ y = 3^x\ ,\ \text{и}\ y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

видели смо да *свакоме* позитивноме *x* одговара једно позитивно *y* и да *свакоме* негативноме *x* одговара једно опет позитивно *y*.

Да смо узели функцију

$$y = 10^x$$

имали бисмо овакву једну таблицу:

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
y	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Да смо узели разломљене изложиоце, имали бисмо:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y	$\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$	$\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$	$10\sqrt{10} = 31{,}62\ldots$

Видимо да *свакоме* x (било цело или разломљено, позитивно или негативно) одговара увек једно *позитивно* y. И обрнуто: свакоме позитивноме y одговара једно x.

Пошто је овде x **логаритам,** а y **број** *(нумерус, логаритманд-антилогаритам)* значи ово:

Сваки позитиван број има свој логаритам.

Из горњих таблица се види да је:

$$\log 0{,}001 = -3 \qquad \log 3{,}162 \ldots\ldots = \frac{1}{2}$$
$$\log 0{,}01 = -2$$
$$\log 0{,}1 = -1 \qquad \log 31{,}62 \ldots\ldots = \frac{3}{2}$$
$$\log 1 = 0$$
$$\log 10 = 1 \qquad \log 2{,}1544 \ldots\ldots = \frac{1}{3}$$
$$\log 100 = 2$$
$$\log 1000 = 3 \qquad \text{Итд.}$$

Логаритамска линија.— Да претставимо функцију $f(x) = \log x$. Претставићемо је на исти начин, као и све функције досад. Узећемо да нам функција $f(x) = \log x$ претставља Бриксове логаритме чија је основица 10. Направимо нашу таблицу вредности за независно промењиву x и за функцију y.

x	1000000	100000	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001
y	6	5	4	3	2	1	0	-1	—2	—3	—4	—5	—6	—7

x	0,00000001	0,000000000000000001	0,000000000000000000000000000001
y	—8	—18	—30

Ова таблица нам казује ово (сл. 26). Функција *log x* расте много спорије него независно промењива, док је $x > 1$. За веома велико и позитивно x, добијамо позитивно у, те је наша крива *изнад* позитивног крака апцисне осовине. Што х више опада, y је стално позитивно, али је све мање, те се крива линија благо нагиње ка апсцисној осовини. Кад x спадне на $+1$, y је 0, што значи да наша крива ту пресеца апсцисну осовину. Кад је $x < 1$ и креће се ка нули, y постаје негативно и расте по апсолутној вредности. То значи да крива прилази ординатној осовини и удаљује се од апсцисне осовине. Функција y сад много брже опада, него

независно промењива x, што значи да наша крива веома брзо прилази ординатној осовини. Растојање између наспрамних тачака ординатне осовине и наше криве постаје све мање, али није нула. Јер за $y = -100000$, х је један децимал који иза десетне запете има 99999 нула. То значи и за y веома велико, постоји извесно растојање између наспрамних тачака на нашој кривој и на ординатној осовини. То растојање је све мање и мање, оно *тежи* нули.

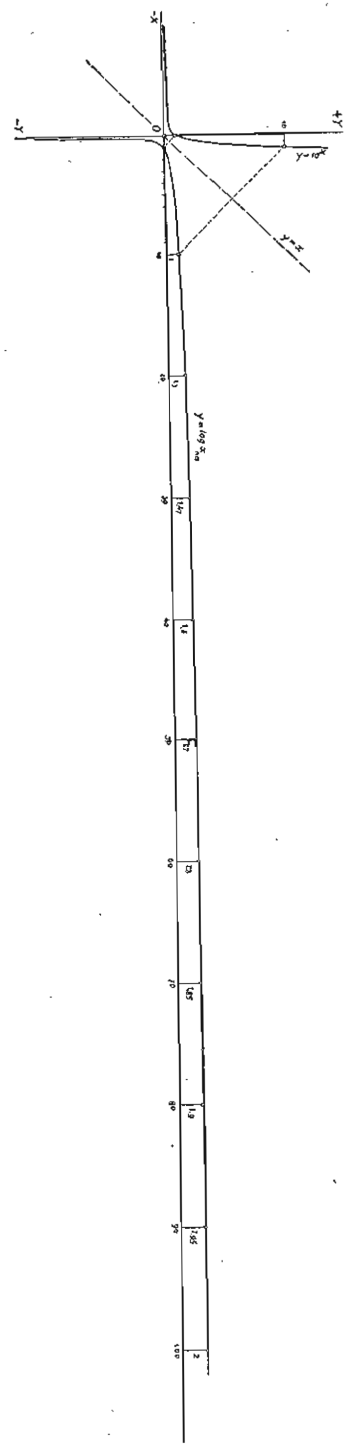
Наша крива се све више удаљује од апсцисне осовине и све више ближи ординатној осовини. И док x тежи нули, наша крива тежи негативној бескрајности. Ми то пишемо овако:

$$y = \log x \underset{\text{за } x \to 0}{\to} -\infty .$$

То читамо: „ипсилон равно логаритам икс тежи минус бесконачноме, кад икс тежи нули."

За логаритамску линију негативан крак ординатне осовине је њена *асимптота*. То значи права линија којој се крива логаритамска линија стално приближује, али је никад не додирне.

За негативно x ми немамо крака наше криве, што значи, да не постоје стварни логаритми за негативне бројеве. **Логаритми негативних бројева**



Сл. 26.

Ако узмемо за основицу нашег логаритамског система број 2, имаћемо две линије:

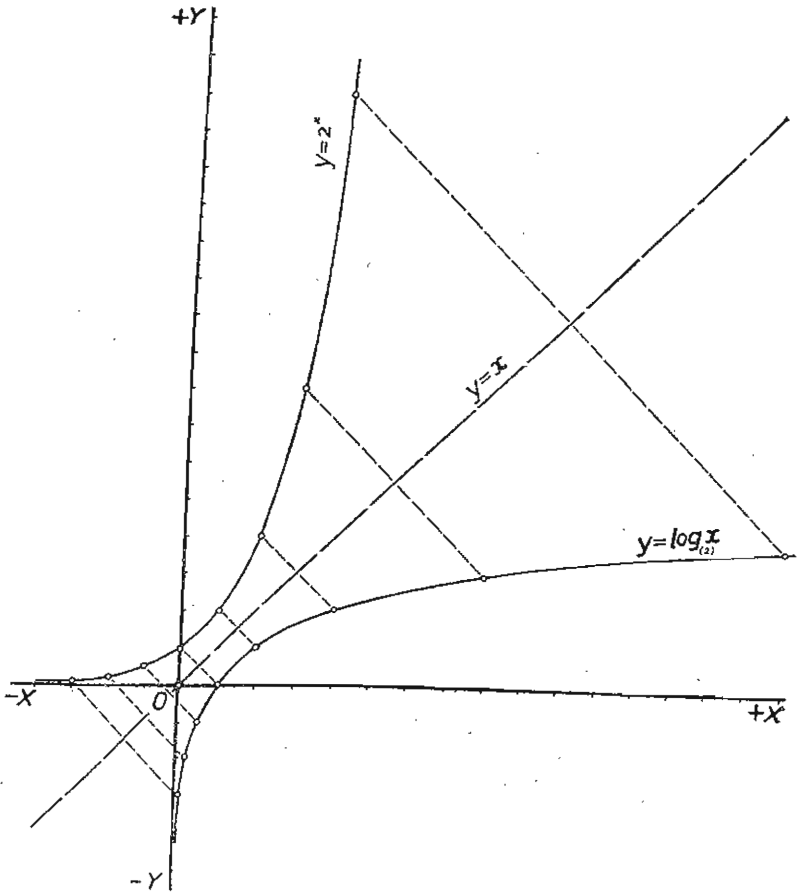
$y = 2^x$

x	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4
y	+16	+8	+4	+2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$y = \log_{(2)} x$

x	+16	+8	+4	+2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4

Види се да су изложилачке (експоненцијална) функција и логаритамска функција за исту основу симетричне према правој $y = x$. (Сл. 27.)



Слика 27.

Логаритам производа, количника, степена и корена.

Логаритам производа. — Да нађемо логаритам производа два броја a и b:

$$\log ab =$$

Малочас смо видели да и позитивни и негативни бројеви имају своје логаритме. Нека је

$$\log a = x \quad \text{и} \quad \log b = y.$$

Тада можемо писати:

$$10^x = a \quad \text{и} \quad 10^y = b.$$

Кад помножимо биће;

$$ab = 10^x \,.\, 10^y$$
$$ab = 10^{x+y}$$

Не знамо чему је раван log ab, али знамо да је

$$\log 10^{x+y} = x + y$$

Пошто је

$$10^{x+y} = ab$$

биће:

$$\log 10^{x+y} = \log ab = x + y.$$

Пошто је

$$x = \log a \qquad y = \log b$$

биће:

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Ову особину логаритама могли бисмо овако изразити:

Логаритим производа раван је збиру логаритама појединих чинилаца тога производа.

Ако производ има више од 2 чиниоца, логаритам задржава и даље горњу особину и обазац важи и даље.

$$\log abcde = \log (abc) \,.\, (de) = \log abc + \log de = \log (ab).\ c + \log d + \log e$$
$$= \log ab + \log c + \log d + \log e = \log a + \log b + \log c + \log d + \log e$$

Пример :

$$\log 10 \,.\, 100 =$$

По горњој теореми мора бити :

$$\log 10 \,.\, 100 = \log 10 + \log 100$$

а то је даље:

$$\log 10 \,.\, 100 = \log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3$$

Пошто је $10 \,.\, 100 = 1000$, а ми знамо да је

$$\log 1000 = 3,$$

види се да је тачна горња теорема.

Логаритам количника.— Да нађемо логаритам бројева a и b.

$$\log \frac{a}{b} =$$

Нека је $\log a = x \qquad \log b = y.$
Тада је:

$$10^x = a \qquad 10^y = b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$$

$$\log \frac{a}{b} = \log 10^{x-y} = x - y = \log a - \log b.$$

Ову особину логаритама можемо овако изразити:

логаритам количника раван је разлици логаритама дељеника и делиоца.

Логаритам степена.— Да нађемо логаритам степена a^m:

$$\log a^m =$$

Нека је опет $\log a = x$
Тада је:

$$10^x = a$$

$$a^m = (10^x)^m = 10^{mx}$$

$$\log a^m = \log 10^{mx} = mx = m \log a.$$

Ову особину логаритама можемо овако изразити:

логаритам степена раван је производу изложиоца и логаритма основе.

Логаритам корена.— Корен увек можемо написати у облику степена, те ће бити:

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a = \frac{\log a}{n}.$$

Ову особину логаритама можемо овако изразити:

логаритам корена раван је количнику логаритма подкорене количине и кореног изложиоца.

РАД СА ЛОГАРИТМИМА.— ЛОГАРИТАМСКЕ ТАБЛИЦЕ.

Карактеристика и мантиса.— Из онога што смо већ видели знамо ово: *логаритми декадних јединица су цели бројеви*:

$\log 1 = 0$	$\log 10 = 1$	$\log 10\,000 = 4$
	$\log 100 = 2$	$\log 100\,000 = 5$
	$\log 1000 = 3$	$\log 1\,000\,000 = 6$

Какви ће бити логаритми бројева између декадних јединица? Узмимо један такав број Број 17 се налази између 10 и 100. Колики је његов логаритам?

10	17	100
$\log 10$	$\log 17 = ?$	$\log 100$
1		2

Може ли $\log 17$ бити 1? Не може, јер свакоме броју припада само један логаритам. Како је $1 = \log 10$, не може бити $1 = \log 17$. Исто тако $\log 17$ не може бити 2, јер је то логаритам од 100. Број 17 лежи између 10 и 100, те и његов логаритам мора лежати између $\log 10$ и $\log 100$. Дакле:

$$\log 10 < \log 17 < \log 100.$$

То значи да логаритам 17 има 1 *цело* и неке децимале:

$$\log 17 = 1,\ldots.$$

Цели у логаритму зову се **карактеристика** или **значица,** а децимали **мантиса** или **казаљка.**

Колика је *мантиса* за $\log 1000$?

Мантиса се **не** *мења, ако број множимо декадном јединицом.*

$$\log 170 = \log 10 + \log 17 = 1 + 1,\ldots.$$

Као што се види, $\log 170$ и $\log 17$ разликују се за 1 *цело*; према томе *је остала мантиса иста.*

Мантиса се **не** *мења ако број делимо декадном јединицом:*

$$\log \frac{17}{10} = \log 17 - \log 10 = \log 17 - 1 = 1,\ldots - 1 = 0,\ldots.$$

Као што се види, $\log 1{,}7$ разликује се од $\log 17$, за 1 *цело:* према томе *мантиса* (децимали) *је остала иста.*

Одређивање карактеристике.— Сваки број који није декадна јединица мора лежати између двеју декадних јединица.

На пр.	8	лежи између	1 и	10,	то јест између	10^0 и 10^1
„	75	„ „	10 „	100,	„ „ „	10^1 „ 10^2
„	7856	„ „	1000 „	10000,	„ „ „	10^3 „ 10^4

итд., итд.

Према томе и логаритми ових бројева увек леже између два цела броја.

$\log 7$ између 0 и 1
$\log 75$ „ 1 „ 2
$\log 7856$ „ 3 „ 4 итд.

Према томе, логаритам сваког броја који није декадна јединица састављен је из цела броја и извесног броја децимала; из

карактеристике или **значице** и из **мантисе** или **казаљке.** Карактеристика је логаритам местне вредности прве вредностне цифре с лева.

На пр. $\log 346 =$

Прва цифра с лева је 3. Она претставља стотине. Њена местна вредност је 100.

$\log 100 = 2$. Зато је карактеристика од $\log 346$ број 2:

$\log 346 = 2, \ldots$

Карактеристика је увек једнака изложиоцу за основу 10 местне вредности прве цифре с лева.

На пр. $\log 4789 =$

Прва цифра с лева је 4. Њена местна вредност је $1000 = 10^3$. Отуда је

$\log 4789 = 3, \ldots.$

Трећи пример: $\log 87{,}66 =$

Местна вредност цифре 8 је $10 = 10^1$. Изложилац 1. Отуда је $\log 87{,}56 = 1, \ldots.$

$\log 17 = 1, \ldots.$	$\log 86{,}457 = 1, \ldots.$
$\log 375 = 2, \ldots$	$\log 25{,}36 = 1, \ldots.$
$\log 5436 = 3, \ldots$	$\log 4{,}756 = 0. \ldots.$

Логаритми правих разломака. — Прави разломак је *мањи од јединице*: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{1}{9}, \ldots.$

Знамо да је код права разломка $\frac{m}{n}$ увек $m < n$. Према томе ће бити:

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$$

Како је $m < n$, биће

$\log m < \log n$, те према томе:

$\log m - \log n$ *мора бити негативно.*

Логаритам броја мањег од јединице је негативан.

Примери:

$$\log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$$

$$\log \frac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3.$$

Одређивање мантисе. — Логаритамске таблице. — Видели смо да можемо карактеристику одредити веома лако за сваки број који има целих. Мантису налазимо у *логаритамским таблицама.*

Логаритамске таблице садрже природне бројеве до извесног броја (рецимо од 1 до 10000 или од 1 до 15000) и мантисе њихових логаритама са извесним бројем њихових децимала.

Таблица је подељена у вертикалне и хоризонталне ступце

N	Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
252	40	140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253		312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254		483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255		654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256		824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257		993	010*	027*	044*	061*	078*	095*	111*	128*	145*
258	41	162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259		330	347	363	380	397	414	431	447	464	481

У првом вертикалном ступцу с лева иду бројеви у природном низу. У првом хоризонталном ступцу горе и доле исписане су 0 и све цифре редом.

Узмимо да нађемо логаритам броја 2534. Најпре треба да му одредимо *карактеристику*. Прва вредносна цифра с лева (2) има местну вредност 1000. Према томе је карактеристика 3. Сад ћемо у таблицама тражити мантису. У ступцу природних бројева наћемо 253, а у хоризонталном горњем ступцу наћемо 4. Од 253 вучемо по хоризонталном реду надесно, а од 4 из хоризонталног реда вучемо по вертикалном реду наниже.

На месту где смо се срели, наилазимо на последње три цифре наше матисе: 381. Прве две цифре су напред. Да се не би понављале, пишу се само једанпут напред. Наша мантиса ће бити 40381. Према томе је

$\log 2534 = 3{,}40381.$

Узмимо да нађемо $\log 25946$. Најпре одређујемо карактеристику:

$\log 25946 = 4, \ldots.$

У нашој таблици нема броја 25946. Али ми знамо да се мантиса не мења, ако број делимо декадном јединицом. Према томе, исте мантисе имају логаритми бројева 25946 и 2594,6. Зато ћемо у таблицама тражити мантису за број 2594,6.

У таблицама имамо бројеве 2594 и 2595. Нема нашега броја 2594,6 који је између ова два броја. Али ми знамо да је

$2594 < 2594{,}6 < 2595$

Према томе мора бити:

$\log 2594 < \log 2594{,}6 < \log 2595.$

Ми ћемо видети у таблицама колико порасте логаритам, док број порасте од 2594 до 2595.

$$\begin{aligned} \log 2595 &= 3{,}41414 \\ \log 2594 &= 3{,}41397 \\ \hline d &= \quad\;\; 17 \end{aligned}$$

Разлика логаритама два узастопна цела броја зове се **таблична разлика**. Њу можемо наћи у таблицама. Наша таблична разлика је 17. Сад ћемо овако размишљати.

На месту где лежи наш број 2594,6 логаритам порасте за 17 крајњих децимала, док број порасте за 1. Колико ће порасти логаритам, кад наш број порасте за 0, 6?

$$\begin{array}{ll} 1 & 17 \\ 0,6 & x \\ \hline \end{array}$$

$$x : 17 = 0,6 : 1 \qquad (1)$$
$$x = 17 \,.\, 0,6$$
$$x = 10,2$$

Ми ћемо узети $x = 10$. Према томе ће бити:

$\log 2594{,}6 = \log 2594 + 0{,}00010 = 3{,}41397 + 0{,}00010 = 3{,}41407.$

Према томе биће:

$$\log 25946 = 4{,}41407.$$

Ми смо *поправили* мантису мањег броја за 10. Обележимо ту **поправку** са *p*. **Занемарени број** 0,6 обележимо са *n*. Тада ће из (1) бити:

$$p = dn.$$

Практично упутство. — Ако се дати број не налази у логаритамским таблицама, његов логаритам се овако одређује:

1. Најпре се одреди карактеристика.

У нашем примеру она је била 4. Дакле, овако: 4 . . . .

2. Одвоји се онолико места, колико је потребно да би се смањени број могао наћи у таблицама. Од 25946 правимо 2594,6.

3. Тражимо табличну разлику d за логаритме бројева између којих се налази наш децимални број:

$$\begin{array}{r} 41414 \\ 397 \\ \hline d = 17 \end{array}$$

4. Образујемо поправку овако: занемарени број множимо табличном разликом $p = dn$.

$$p = 17 . 0,6 = 10,2.$$

Узимамо цео број. То је овде 10, пошто због 2 не вршимо поправку.

5. Поправку додајемо мантиси логаритма мањег броја:

$$\begin{array}{r} 41397 \\ 10 \\ \hline 41407 \end{array}$$

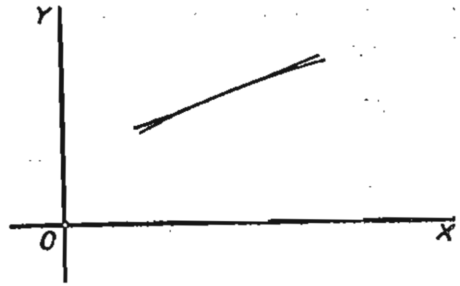
6. Добивени збир је мантиса траженога логаритма.

Напомена: *1* — Логаритам није пропорционалан с бројем На пр. ако број постане 10 пута већи, логаритам неће бити 10 пута већи.

$\log 100 = 2 \qquad \log 1000 \neq 20$, већ је $\log 1000 = 3$.

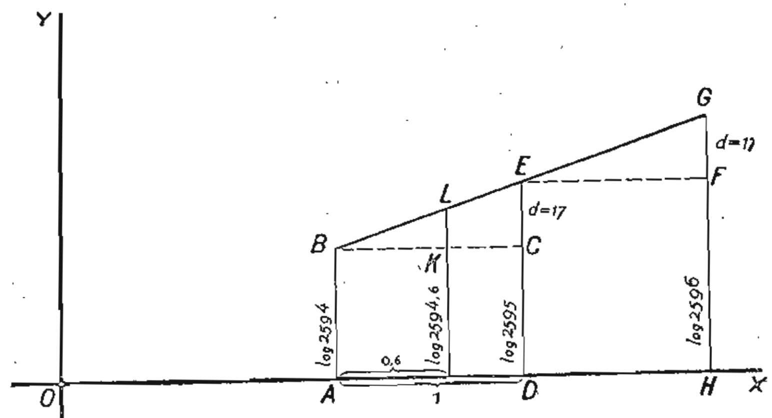
Као што видиш, број 100 је постао 1000: постао 10 пута већи. Његов логаритам није постао 10 пута већи: није постао 20, већ 3.

Ми смо се горе послужили пропорцијом. То смемо да урадимо, јер је логаритамска линија (сл. 26 и 27) за велике бројеве (за велике апсцисе) веома близу праве линије (сл. 28). Због тога можемо сматрати да се логаритми крећу по правој линији на месту где се налази на пр. log 2594. А кад можемо узети да се крећу по правој линији, можемо узети и овај однос (сл. 29):



Сл. 28.

$$KL : CE = BK : BC, \text{ т.ј.}$$
$$p : 17 = 0,6 : 1$$
$$p = 17 \times 0,6$$
$$p = dn$$



Сл. 29.

Уосталом, и из таблице се види, да је на томе месту и наредна таблична разлика 17. FG = 17). На томе месту је:

$$414-397 = 431-414 = 17$$
$$17 = 17$$

Напомена 2. — Звездица код мантисе значи да узмеш прве две цифре од мантисе из доњег реда. На пр. log 2576 = 41095.

Логаритми десетних разломака. — Видели смо да је логаритам бројева мањих од јединице негативан. Разломци су мањи од јединице. Њих можемо овако претставити:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \frac{1}{100} = 10^{-2}, \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \frac{1}{10000} = 10^{-4} \cdot \text{итд.}$$

Сваки разломак лежи између једне од ових декадних јединица с негативним изложиоцем, те и *логаритам сваког разломка лежи између два негативна броја, или између нуле и негативне јединице.*

Примери:

1)
$$1 > \frac{3}{10} > \frac{1}{10}$$
$$\log 1 > \log \frac{3}{10} > \log \frac{1}{10}$$
$$0 > \log \frac{3}{10} > -1.$$

И збиља је

$$\log \frac{3}{10} = \log 3 - \log 10 = \log 3 - 1 = 0{,}47712 - \mathbf{1} \text{ а то је } -0{,}52288$$
$$0 > -0{,}52288 > -1$$

Нађи на бројној основини, те се увери!

2)
$$\frac{1}{10} > \frac{7}{100} > \frac{1}{100}$$
$$\log \frac{1}{10} > \log \frac{7}{100} > \log \frac{1}{100}$$
$$-1 > \log \frac{7}{100} > -2$$

$$\log \frac{7}{100} = \log 7 - \log 100 = \log 7 - \mathbf{2} = 0{,}84510 - \mathbf{2} = -1{,}15490.$$

И збиља је

$$-1 > -1{,}15490 > -2.$$

3)
$$\frac{1}{10\,000} > \frac{9}{100\,000} > \frac{1}{100\,000}$$
$$\log \frac{1}{10\,000} > \log \frac{9}{100\,000} > \log \frac{1}{100\,000}$$
$$-4 > \log \frac{9}{100\,000} > -5$$

$$\log \frac{9}{100\,000} = \log 9 - \mathbf{5} = 0{,}95424 - 5 = -4{,}04576$$

4) Нађи вредност за log 0,0103

$$\log 0{,}0103 = \frac{103}{10\,000} = \log 103 - \mathbf{4} = 2{,}01284 - \mathbf{4} = 0{,}01284 - \mathbf{2} = $$
$$= -1{,}98716$$

5) Нађи вредност за log 0.000027

$$\log 0{,}000027 = \log \frac{27}{1\,000\,000} = \log 27 - \mathbf{6} = 1{,}43136 - \mathbf{6} =$$
$$= 0{,}43136 - 5 = -4{,}56864$$

Да испишемо резултате добивене из горњих примера:

$$\log 0{,}3 = 0{,}47712 - 1.$$
$$\log 0{,}07 = 0{,}84510 - 2.$$
$$\log 0{,}00009 = 0{,}95424 - 5.$$
$$\log 0{,}0103 = 0{,}01284 - 2.$$
$$\log 0{,}000027 = 0{,}43136 - 5.$$

Важна напомена. — Логаритам десетна разломка не пишемо у облику разлике, као што смо горе написали. Пишемо га овако: нађени умањитељ узимамо са знаком минус (—) изнад њега и стављамо га на место целих испред мантисе:

$\log 0{,}3 = 0{,}47712 - 1$ пишемо овако: $\overline{1}{,}47712$
$\log 0{,}0103 = 0{,}01284 - 2$ пишемо овако: $\overline{2}{,}01284$ итд.

Тако добијамо логаритам састављен из два дела: из негативне карактеристике и позитивне мантисе.

Правило за вађење логаритама десетних разломака. — Логаритам сваког десетног разломака који није декадна јединица састављен је из два дела: из негативне карактеристике и позитивне мантисе. Карактеристика је логаритам месне вредности прве вредностне цифре с лева у задатом броју и увек је једнака изложиоцу за основу 10 те месне вредности. Мантиса је увек једнака са мантисом логаритма цела броја који чине цифре у разломку.

Пример: log 0,073 =

Прва вредностна цифра с лева је 7. Њена местна вредност је $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Карактеристика је — 2. Мантиса логаритма броја 73 је 86332. Отуда је log 0,073 = $\overline{2}$,86332.

Тражење антилогаритма (нумеруса). — Сваки логатитам има свој број. Кад нам је дат логаритам, па хоћемо да му нађемо број, служимо се опет логаритамским таблицама. Како се то ради, показаћемо на примерима.

Пример 1 — Наћи број чији је логаритам 2,40398.

Одмах тражимо ону страну у таблицама, на којој мантисе почињу са 40. Кад смо је нашли, тражимо међу мантисама и остале три цифре: 398. Кад погледамо на таблицу на страни 115, видимо да мантиси 40398 одговара број 2535. Али ми знамо да имају исту ту мантису логаритми свих бројева који имају те цифре: 2535 253,5 25,35 2,535 0,002535 253500 итд., пошто се мантиса не мења, кад се број множи или дели декадном јединицом. Који је од свих тих бројева наш број?

Наш логаритам има карактеристику 2. Знамо да је $10^2 = 100$. Значи да у нумерусу прва цифра с лева има местну вредност стотине. Према томе од свих малочас поређаних бројева узећемо 253,5. Број сваког логаритма зовемо антилогаритам или нумерус. Обележаваћемо га са *anlog* или са *antilog*, или са *N*. Према томе ће бити:

anlog 2,40398 = 253,5.

Пример 2. — Наћи број чији је логаритам 1,41145.

Тражимо мантису 41 145. Налазимо 41 162. Пошто је наша мантиса мања, тражимо је у горњем реду. Налазимо је са звездицом, на самом крају положеног реда. Видимо да мантиси 41 145 одговара број 2579.

Наш логаритам има карактеристику 1. Знамо да је $10^1 = 10$. Значи да у нумерусу прва цифра с лева има местну вредност десетице. Према томе, тражени број биће:

antilog 1,41145 = 25,79.

Пример 3. — Наћи вредност за anlog $\overline{1}$,40722.

И ову мантису налазимо у таблицама. Њој одговара број 2554. Наш логаритам има негативну јединицу за карактеристику.

Знамо да је $10^{-1} = \frac{1}{10}$. Значи да у нумерусу прва вредностна цифра с лева има местну вредност 0,1. Према томе, тражени број биће:

anlog $\overline{1}$,40722 = 0,42554

Пример 4. — Наћи вредност anlog 4,1376.

То се пише и овако: $N\overline{4{,}41376}$.

Ове мантисе нема у таблицама. Прва мања мантиса је 41363. Прва већа је 41380. Наша мантиса је између тих двеју:

$$41363 < 41376 < 41380.$$

Према томе и наш тражени број мора лежати између бројева који одговарају тим двема мантисама што смо их нашли у таблицама.

Мантиси 41363 одговара број 2592.

Мантиси 41380 одговара број 2593.

Према томе и наш тражени број мора лежати између бројева 2592 и 2593:

$$2592 < N < 2593.$$

Кад се број повећа од 2592 на 2593, логаритам *на томе месту* порасте за 17 најмањих јединица. (То су овде 17 стохиљадитих делова: 41380 — 41363 = 17.). Наша мантиса је између ове две мантисе. Она је већа за 13 од прве мање мантисе.

Сад ћемо се послужити правилом тројним.

Кад број порасте за 1, логаритам на томе месту порасте за 17. Колико ће порасти број, кад логаритам порасте само за 13?

$$\begin{array}{ll} 1 & 17 \\ x & 13 \\ \hline \end{array}$$

$$x : 1 = 13 : 17$$

$$x = \frac{13}{17}$$

$$\begin{array}{l} 13:17 = 0{,}7647058\ldots \\ 130 \\ \;\;110 \\ \;\;\;\;80 \\ \;\;\;\;120 \\ \;\;\;\;\;100 \\ \;\;\;\;\;\;150 \\ \;\;\;\;\;\;\;14 \end{array}$$

Пошто је наша мантиса већа за 13 од мантисе логаритма броја 2592, наш број је већи за 0,7647058... од броја 2592. Према томе наш број је

$$2592 + 0{,}7647058\ldots = 2592{,}7647058\ldots$$

Запету можемо да избришемо и да сматрамо да број који одговара нашој мантиси може бити

25927647058 ....

Наш логаритам има карактеристику 4. Према томе број који му одговара мора имати 5 цифара на месту целих. Њих ћемо одвојити слева надесно:

$$N\overline{4{,}41376} = 25927{,}647.$$

Да ли одатле видиш, докле треба делити при тражењу поправке?

Пример 5. — Наћи вредност за $\mathcal{N}\,\overline{0,41203}$.

Прва мања мантиса . . . . 196 . Њој одговара број 2582.

Поправка . . . . $p = 203 - 196 = 7$.

Таблична разлика на томе месту:

Прва већа мантиса . . .	41212
Прва мања мантиса. . . .	196
Таблична разлика	16

1 — 16 (x претставља занемарени број).

x — 7

$x : 1 = 7 : 16$

$$x = \frac{7}{16}$$

$$\begin{array}{l} 7 : 16 = 0,4375 \\ 70 \\ \;\;60 \\ \;\;120 \\ \;\;\;80 \\ \;\;\;— \end{array}$$

Први мањи број	2582
Поправка	0,4375
Тражени број	25824375

Карактеристика је 0. Зато у добивеном броју треба слева одвојити 1 место. Тражени број биће:

$$\mathcal{N}\,\overline{0,41203} = 2,5824375$$

Задржаћеш онолико децимала колико ти је речено, или колико ти је потребно према задатку.

Практично упутство за рад с таблицама. — Обележимо занемарен број са n, табличну разлику са d, поправку са p.

I. — *За тражење логаритма биће:* $p = nd$.

(Поправка се *додаје* логаритму првога мањега броја).

II. — *За тражење антилогаритма:* $n = \frac{p}{d}$.

(Занемарен број се додаје нађеном првом мањем броју.

Пример 1. — Наћи log 25,679

Карактеристика	1.
Занемарени број	0,9.
Таблична разлика	$d = 960 - 943 = 17$.
Поправка	$p = dn = 17 \times 0,9 = 15,3 \approx 15$.
Мањи логаритам	1,40943
Поправка	+ 15
Тражени логаритам.	1,40958

Пример 2. — Наћи $\mathcal{N}\,\overline{2,41084}$.

Прва мања мантиса. . .	078. Одговара јој број 2575.
Поправка	$p = 6$
Таблична разлика . . .	$d = 95 - 78 = 17$
Занемарени број. . . .	$n = p : d = 6 : 17 \approx 0,35$
Први мањи број. . . .	2575
Занемарени број	35
Тражени број може бити...	257535

Наш број има две нуле напред због карактеристике 2. Зато је:

$$\mathcal{N}\,\overline{2,4\,084} = 0,0257535$$

Рачунање с логаритмима. — Прва корист од логаритама је, што они *знатно смањују рад* при множењу и дељењу и дају нам могућност да израчунамо сваки степен и сваки корен природних бројева. Примери ће то набоље показати.

Пример 1. — Израчунати вредност неког броја x, који је дат овим разломком:

$$x = \frac{2,35 \cdot 4,007 \cdot 23,45 \cdot 17,68 \cdot 4579 \cdot 0,0236}{14,39 \cdot 14,987 \cdot 237,4 \cdot 201,6 \cdot 0,006}$$

Логаритмишимо с обе стране. (Једнакост ће остати и даље, пошто једнаки бројеви имају једнаке логаритме).

$$\log x = (\log 2,35 + \log 4,007 + \log 23,45 + \log 17,68 + \log 4579 + \log 0,0236) - (\log 14,39 + \log 14,987 + \log 237,4 + \log 201,6 + \log 0,006).$$

Кад бисмо нашли логаритме познатих бројева и сабрали логаритме из прве заграде за себе, а из друге заграде за себе, то би био и сувише *дугачак* посао, а ми управо зато и употребљавамо логаритме, да бисмо посао скратили Ми ћемо скратити посао.

Кологаритам. — Ми знамо да *одузети* од броја *a* број *b*, значи броју *a додати супротан број* броја *b*:

$$a - b = a + (-b).$$

Знамо и да су *супротни бројеви* она два броја, чији је збир нула.

Да не бисмо најпре сабирали логаритме у првој загради, а затим одузимали збир у другој загради, ми ћемо све ово да претворимо у сабирање. То ћемо постићи на тај начин, што ћемо место логаритама у другој загради узети њихове *супротне бројеве* и *додати* их редом сабирцима у првој загради.

Шта је супротан број једног логаритма?

На пр. $\log 235 = 2,37107$

Супротан број логаритма броја log 235 jесте број $\overline{\log 235} =$ — 2,37107. Десна страна има овде да се преради тако, да мантиса постане позитивна. То се постиже, ако се десној страни дода и одузме један исти цео број, први већи од log 235, па изврши свођење.

Први већи цео број од log 235 = 2,37107 jесте број 3. Њега треба додати и одузети.

$$\begin{aligned}-\log 235 &= (3 - 2{,}37107) - 3 = \\ &= 0{,}62893 - 3 = \\ &= \overline{3}{,}62893\end{aligned}$$

То је *супротан број* логаритму 2,37107. И збиља је:

$$\begin{array}{r} 2{,}37107 \\ \underline{\overline{3}{,}62893} \\ 0{,}00000 \end{array}$$

Супротан број једног логаритма зове се **кологаритам** и обележава се са colog.

log 235 = 2,37107 colog 235 = $\overline{3}$,62893

Кад загледамо логаритам и кологаритам истог броја, видимо ово *правило за одређивање кологаритма, кад је дат логаритам.*

За целе у кологаритму узме се број који је допуна логаритмовој карактеристици до — 1. Затим се пође од десетне запете у логаритму и за децимале кологаритма узимају се цифре које су допуна до 9 цифрама логаритмових децимала. Последња цифра кологаритма је допуна до 10 крајњој цифри логаритмових децимала.

Примери:

log 5753 = 3,75989	log 12759 = 4,10582
colog 5753 = $\overline{4}$,24011	colog 12759 = $\overline{5}$,89418
log 526,5 = 2,72140	log 0,935 = $\overline{1}$,97081
colog 526,5 = $\overline{3}$,27860	colog 0,935 = 0,12919

Кад је у логаритму крајњи децимал 0, при одређивању кологаритма претпоследња цифра се допуњује до 10, а за последњи кологаритмов децимал узима се нула.

Сад кад знамо да одредимо *кологаритам,* можемо продужити *брже* израчунавање вредности нашег разломка. Из прве заграде узећемо логаритме, а из друге кологаритме и све редом сабрати:

$$\begin{array}{rrl}
\log & 2{,}35 & = 0{,}37101 \\
\log & 4{,}007 & = 0{,}60282 \\
\log & 23{,}45 & = 1{,}37014 \\
\log & 17{,}68 & = 1{,}24748 \\
\log & 4579 & = 3{,}66077 \\
\log & 0{,}0236 & = \overline{2}{,}37291 \\
\text{colog} & 14{,}39 & = \overline{2}{,}84194 \\
\text{colog} & 14{,}987 & = \overline{2}{,}82428 \\
\text{colog} & 237{,}4 & = \overline{3}{,}62452 \\
\text{colog} & 201{,}6 & = \overline{3}{,}69551 \\
\text{colog} & 0{,}006 & = \underline{2{,}22185} \\
 & & \ 0{,}83323
\end{array}$$

$$\log x = 0{,}83323$$

$$x = /N\,\overline{0{,}83323}$$

$$x = 6{,}811$$

Пример 2. — Израчунати вредност за x дато овим изразом:

$$x = \frac{\sqrt[3]{2{,}37^2 \times 14} \times 3{,}45^3}{(25{,}5)^2 \times \sqrt{170{,}6}}$$

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 2{,}37^2 + \log 14) + 3\log 3{,}45 + \text{colog}\, 25{,}4^2 + \text{colog} \sqrt{170{,}6}$$

$$= \frac{2}{3}\log 2{,}37 + \frac{1}{3}\log 14 + 3\log 3{,}45 + \text{colog}\, 25{,}4^2 + \text{colog}\sqrt{170{,}6} =$$

Сад треба наћи све логаритме и кологаритме

$$\begin{aligned}
\log 2{,}37 &= 0{,}37475 \\
\frac{2}{3}\log 2{,}37 &= 0{,}24983 \\
\log 14 &= 1{,}14613 \\
\frac{1}{3}\log 14 &= 0{,}38204 \\
\log 3{,}45 &= 0{,}53782 \\
3\log 3{,}45 &= 1{,}61346 \\
\log 25{,}4 &= 1{,}40483 \\
2\log 25{,}4 &= \underline{2}{,}80966 \\
\text{colog}\ 25{,}4^2 &\quad \overline{3}{,}19034 \\
\log 170{,}6 &= 2{,}23198 \\
\frac{1}{2}\log 170{,}6 &= 1{,}11599 \\
\text{colog}\sqrt{170{,}6} &= \overline{2}{,}88401
\end{aligned}$$

Према том $\log x$ добићемо, ако извршимо ово сабирање:

$$\frac{2}{3}\log 2{,}37 = 0{,}24983$$
$$\frac{1}{3}\log 14 = 0{,}38204$$
$$3\log 3{,}45 = 1{,}61346$$
$$\mathrm{colog}\ 25{,}4 = \bar{3}{,}19034$$
$$\mathrm{colog}\sqrt{170{,}6} = \bar{2}{,}88401$$
$$\log x = \bar{2}{,}31968$$
$$x = 0{,}0209$$

Нешто из историје логаритама

Велики астрономи Коперник (1473—1543) и Тихо-де Брахе (1546—1601) учинили су тако велике проналаске у астрономији, да је дотадање знање математике постало недовољно за брзо рачунање са веома великим бројевима који су се појављивали у астрономским израчунавањима. Због тога су математичари покушавали да пронађу нов начин рада са великим бројевима. Хтели су да омогуће да се множење и дељење веома великих бројева претвори у сабирање и одузимање. Било је више математичара који су то покушавали. Није им никако полазило за руком да пронађу оно што им је недостајало. Најближе је био дошао до логаритама немачки калуђер августинског реда, Михаел Штифел (1486—1567). У једној његовој математичкој књизи издатој 1544 године чак се налази и једна таблица логаритама. Али он није успео да из својих радова извуче потребне закључке. Бројеве које је он сложио у поменуту таблицу он није назвао логаритмима, нити је био свестан значаја тих бројева.

Логаритме је, независво од Штифела, пронашао и први објавио енглески математичар, барон Џон Непер. Он се родио 1550 године у Марчистону, близу Единбурга у Шкотској, а умро је 1617 године. Свој проналазак логаритама објавио је он у своме делу „Mirifici Logarthmornm Canonis Descriptto“, године 1614.

Кад је Непер издао то своје дело, многи математичари су седали на посао, да усаврше тај велики проналазак. Енглески математичар, Хенри Бригс, професор у Грешемову Колеџу у Оксфорду, објавио је 1618 године своје дело о логаритмима. Он је узео за логаритамску основицу број 10 и израдио логаритамске таблице за бројеве од 1 до 1000, са 14 децимала.

После та два велика дела настао је још живљи рад да се логаритми усаврше.

Италијански астроном Галилеј (1564—1642) конструисао је у то доба телескоп, те је астрономија добила велики полет у почетку XVII века. Телескоп и логаритми кренули су је нагло напред.

ПРЕТВАРАЊЕ БРИКСОВИХ ЛОГАРИТАМА У НЕПЕРОВЕ И ОБРНУТО

ОДЕЉАК ЗА РЕАЛКЕ

Претварање Бриксових у Неперове логаритме.

То ћемо показати на примерима.

Пример I. — Наћи Неперов логаритам за број 3.

Нека је то број x.

$$\mathrm{lognat}\ 3 = x$$

Тада мора бити:

(1) $$e^x = 3.$$

Али ми знамо да је $\log 3 = 0{,}47712$. Тада мора бити:

(2) $$10^{0{,}47712} = 3$$

Кад упоредимо (1) и (2), добијамо:

$$e^x = 10^{0{,}47712}$$

Логаритмисањем добијамо:

$$x\log e = 0{,}47712 . \log 10$$
$$x = \frac{0{,}47712}{\log e}$$

(3) $$\mathrm{lognat}\ 3 = \log 3 . \frac{1}{\log e}$$

Ако место 3 узмемо број 10, биће:

$$\mathrm{lognat}\ 10 = \frac{\log 10}{\log e}$$
$$\mathrm{lognat}\ 10 . \log e = 1.$$

Пошто је $\underline{\log e = 0{,}43429}$, биће:

(4) $$\mathrm{lognat}\ 10 = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{0{,}43429} = 2{,}30259$$

Кад загледамо (3) и (4), можемо да напишемо:

$$\mathrm{lognat}\ n = \log n . \mathrm{lognat}\ 10, \text{ или:}$$

(5) $$\boxed{\mathrm{lognat}\ n = 2{,}30259 \log n}$$

Сад можемо лако наћи Неперов логаритам за број 3.

$$\mathrm{lognat}\ 3 = 2{,}30259 \log 3$$
$$\mathrm{lognat}\ 3 = 2{,}30259 . 0{,}47712$$
$$\mathrm{lognat}\ 3 = 1{,}09061.$$

Пример 2. — Наћи Неперов логаритам за број 2564.

lognat 2564 = 2,30259 . log 2564
lognat 2564 = 2,30259 . 3,40892
lognat 2564 = 7,84934

Пример 3, — Наћи lognat x, кад је log x = 0,30103.

lognat x = 2,30259 . log x
lognat x = 2,30259 . 0,30103

Обадва наша чиниоца су непотпуни децимални бројеви. Зато ћемо их множити по правилу за множење таквих бројева. Хоћемо 5 децимала у резултату. Зато ћемо цифру множиочевих јединица потписати под *седми* децимал множеников. Затим ћемо множиочеве цифре исписати *обрнутим редом* налево па тек онда множити. Нулом нећемо множити, већ одмах прелазимо на множење са 3, па са 1, па са крајњом тројком слева.

$$\begin{array}{r} 2{,}302590\ 0 \\ 30103{,}\ 0 \\ \hline 6907770 \\ 23025 \\ 690 \\ \hline 6931485 \end{array}$$

Одбацујемо две крајње цифре:
69314
Повећавамо крајњу цифру за 1:
69315
Одвајамо 5 десетних места:
lognat x = 0,69315

Пример 4. — Наћи lognat *x*, кад је log *x* = 0,94645.

lognat x = 2,30259 . log x
lognat x = 2,30259 . 0,94645

$$\begin{array}{r} 2{,}3025900 \\ 546490 \\ \hline 20723310 \\ 921036 \\ 138150 \\ 9208 \\ 1150 \\ \hline 21792854 \end{array}$$

Узимамо 217928.
Повећавамо крајњу цифру за 1:
217929.
Одвајамо 5 децимала:
2,17929.
lognat x = 2,17929.

Претварање Неперових логаритама у Бриксове.

Пример 1. — Наћи log x, кад је lognat x = 1,38629.

Знамо да је

$$\text{lognat}\ x = \frac{\log x}{\log e}$$

Одатле је:

(6) log *x* = lognat *x*. log *e* т.ј.
(7) log *x* = lognat *x*. 0,43429.

У нашем задатку биће:

log *x* = 1,38624. 0,43429.
log *x* = 0,60206.

Пример 2. — Наћи log x, за lognat x = 1,79176.

Пошто су оба броја непотпуна, множићемо их по правилу за множење непотпуних бројева. Пошто тражимо и пети децимал, потписаћемо јединице множиочеве испод седмог децимала множениковог. Затим ћемо множилац потписати обрнутим редом његових цифара.

$$\begin{array}{r} 1{,}7917600 \\ 92430 \\ \hline 7167040 \\ 537528 \\ 71668 \\ 3582 \\ 1611 \\ \hline 7781429 \end{array}$$

Одбацујемо два последња места:
77814.
Повећавамо крајњу цифру за 1:
77815.
Одвајамо 5 децимала:
0,77815.
Тражени логаритам биће:
log x = 0,77815.

ВЕЖБАЊА УЗ ШЕСТИ ОДЕЉАК

1. — Кажи напамет логаритме ових бројева:
100 000   1 000 000   100 000 000
0,0001   0,00001   0,000001   0,0000001.

2. — Између којих целих бројева леже логаритми ових бројева.
29   49   135   257   346
1 207   14 506   25 347   182 346

3. — Шта то значи кад се каже log 10 000 = 4?

4. — Исто питање за log 1 000 000 = 6.

5. — Какав треба да је број, па да му логаритам буде цео број?

6. — Како се одређује карактеристика логаритма броја који је већи од 1? На пр. за број 349?

7. — Како се одређује карактеристика логаритма броја који је мањи од 1, а већи од нуле? На пр. броја 0,047?

8. — Колики је логаритам нуле?

9. — Може ли сваки број бити основа логаритамског система? На пр. бројеви 0 и 1? Зашто?

10. — Да ли би било добро да се за основу логаритамског система узме негативан број? Зашто?

11. — Колики је логаритам броја 64 за основу 4?
То се пише овако: $\log_{(4)} 64 = x$. То значи $4^x = 64$. Колико је x?
12. — Исто питање за $\log_{(3)} 8$.
13. — Исто питање за $\log_{(5)} 125$.
14. — Исто питање за $\log \frac{8}{27}$ за основу $\frac{2}{3}$.
15. — Исто питање за $\log 5$ за основу $\frac{1}{5}$.
16. — Исто питање за $\log 256$ за основу $\frac{1}{4}$.

Изврши означено логаритмисање:

17. $\log 3ax\,(x+y)$
18. $\log \frac{ab}{c(x+7)}$
19. $\log (ab)^2$
20. $\log \sqrt{ab}$
21. $\log 5a^2b\,\sqrt[3]{c}$
22. $\log 7x\,\sqrt[2]{ab^3}$
23. $\log 2ab\,\sqrt{c}$
24. $\log (2a+b)\,\sqrt[3]{a^3b}$
25. $\log 2(a+b)^4$
26. $\log (a^2 - b^2)^2$
27. $\log 4abc^3$
28. $\log ab\,(c-d)^4$
29. $\log \frac{ab}{c^3}$
30. $\log (a+b)^{x+y}$
31. $\log \frac{ax^{-3}\sqrt{n}}{n^{1-}\sqrt[3]{a^2x}}$
32. $\log \frac{a^n\sqrt{bx}\,.\,\sqrt[3]{az^2}}{3\sqrt[5]{abxz^2}}$
33. $\log \sqrt[n]{a\sqrt{b\sqrt[n]{a}}}$
34. $\log \frac{a^2}{c^4}$
35. $\log a^2x^2$
36. $\log 4n^{-2}$
37. $\log (4n)^{-2}(x^4)^{-5}$
38. $\log \frac{a^{\frac{p}{n}}}{b^n\ c^{-p}}$
39. $\log \sqrt[3]{a^4x^5}$
40. $\log \sqrt{\frac{(2a)^8}{b}}$
41. $\log \frac{a}{bc}\sqrt[3]{cd}$
42. $\log \left(\frac{10}{ab}\right)^3$
43. $\log (ab)^x$
44. $\log ab^x$
45. $\log \sqrt{\frac{4a^2\sqrt{ab}}{5b\sqrt[3]{a^2b}}}$
46. $\log (a-x)^2\sqrt[-3]{a^2-x^2}$
47. $\log \log \sqrt[3]{n^2}$
48. $\log \frac{10\log a}{\log a^3}$
49. $\log \frac{\log x^2}{\log^2 x^2}$