PRIRODNO-MATEMATICKI FAKULTET

GRANIČNI SLOJ NA CILINDRICNOM TELU POKRENUTOM IZ STANJA IZVESNIH PREDHODNIH NESTACIONARNIH KRETANJA

Radomir Ašković
magistar mehaničkih nauka

B e o g r a d
Februara 1966. god.

S A D R Ž A J

I. OSNOVNE TEORIJSKE POSTAVKE

§1. Uvod

Za nešto više od pola veka svoga razvoja teorija graničnog sloja se izgradila u krupnu samostalnu granu savremene hidroaerodinamike. Ovakvom brzom tempu razvitka ove, relativno mlade oblasti mehanike tečnosti i gasova, doprinela je njena tesna povezanost sa problemima brodske, avionske i raketne tehnike, kojima se u našem veku poklanja izuzetna pažnja i gde je u poslednje vreme zabeležen buran napredak.

Teorija graničnog sloja, čije je osnovne jednačine za laminaran režim strujanja, dao L.Prandtl 1904. g., uskoro je bila sa uspehom korišćena od strane Blazijusa 1907. godine. Godine 1921. T.Karman je predložio prostu metodu približnog proračuna laminarnog i turbulentnog graničnog sloja i time otvorio vrata širokoj primeni teorije graničnog sloja u tehnici, pri raznovrsnim praktičnim proučavanjima.

Razradjivanje poluempirijskih zakona turbulentnog kretanja od strane Prandtla (1926.g.) i Karmana (1930. g.), omogućili su prodor ideja teorija graničnog sloja i na slučaj turbulentnog režima strujanja.

Uskoro posle pojave osnovnih jednačina teorije graničnog sloja, uporedo sa ravanskim stacionarnim zadacima rešavani su i najprostiji prostorni stacionarni i nestacionarni problemi. Ipak, sanažnija rešavanja nestacionarnih slučajeva obavljena su samo u poslednje vreme.

Procvat teorije graničnog sloja vezan je za period zadnjih petnaest godina, u vezi sa prelaskom na nadzvučne brzine leta. Za savremena etapa razvitka avijacione i raketne tehnike postavila je pred konstruktore i naučnike mnogo novih kompleksnih problema, koji obuhvataju i probleme graničnog sloja.

Sa matematičke tačke gledišta zadaci teorije graničnog sloja od samog svog početka zahtevali su primenu približnih metoda računske integracije sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina, kako običnih, tako i parcijalnih. Katkada je moguće koristiti metode razlaganja rešenja u red, primenjivati proces sukcesivnih aproksimacija, ili drugih načina linearizacije, ali kada problemi graničnog sloja postanu složeniji dolazi se do toga da se mora preći na mašinsku integraciju na računskim elektronskim mašinama. U tom pogledu ni teorija graničnog sloja nije mogla mimoići zajednički, neminovni put za sve fizičke nauke.

Kao što je već rečeno, rezultati postignuti pri rešavanju nestacionarnih graničnih slojeva kasne za dostignućima ostvarenim kod proučavanja stacionarnih graničnih slojeva. Prva ispitivanja u oblasti nestacionarnog graničnog sloja izvršena su odmah posle stvaranja Prandtlove teorije, od strane njegovog saradnika Blasijusa [1] , koji je proučio granični sloj na cilindričnom telu, koje je trzajem pokrenuto kroz mirnu viskoznu tečnost. On je, takodje, rešio i pitanje razvitka graničnog sloja na cilindričnom telu dovedenom u kretanje stalnim ubrzanjem iz stanja mirovanja. Goldštajn i Rosenhed [2] su dopunili rešenja Blasijusova izračunavanjem nekoliko sledećih aproksimacija. Gertler [3] je dao rešenje nestacionarnog graničnog sloja na cilindričnom telu pri stepenom zakonu porasta brzine kretanja sa vremenom. Vatson [4] je uopštio rešenje Gertlerovo na slučaj proizvoljnog eksponenta stepena - ubrzanog kretanja cilindra i eksponencijalnog zakona porasta brzine sa vremenom.

Opšta karakteristika svih postojećih radova iz oblasti nestacionarnog graničnog sloja je mirovanje pre početka kretanja cilindričnog tela. Telo i tečnost, do odredjenog trenutka vremena, nalaze se u miru, a onda ili telo počne da se kreće kroz mirnu viskoznu tečnost, ili, pak, tečnost počne da obstrujava mirno telo. Granični sloj se ne može obrazovati trenutno, već za svoj razvoj zahteva konačno vreme. Dovoljno je pažljivo razgledati poznate fotografije Titjensa [5] , koje prikazuju početak kretanja kružnog cilindra kroz vodu, pa se uveriti u gornje tvrdjenje. Svi citirani radovi analiziraju granični sloj na cilindričnom telu formiranom pod takvim okolnostima; samo se menjaju načini kretanja tela, ali uvek kretanje nasledjuje stanje mirovanja.

Osobito složeni zadatak o kretanju iz stanja mirovanja ravne ploče u svojoj ravni rešili su V.V. Struminski [6] i L.A. Rozin [7] . Rozin je, korišćenjem jednačina Stoksa - uspeo da prouči strujanje u celoj oblasti oko ploče, uključujući i prostor ispred ploče.

Više naučnika (S.M. Targ [8], Dobrišman [9]) koristili su za rešavanje zadataka nestacionarnog graničnog sloja približne postupke, analogne približnim metodama za rešavanje stacionarnog graničnog sloja.

Drugi pravac, pogodniji sa praktičnog stanovišta, vezan je za primenu jednoparametarskih metoda u teoriji nestacionarnog graničnog sloja, što srećemo u radovima V.V. Struminskog [10] i L.A. Rozina [11] .

Iz ovog kratkog pregleda postojećih radova o nestacionarnom graničnom sloju, odmah pada u oči jedinstveni zajednički činilac svih tema: kretanje iz stanja mirovanja. Problemi graničnog sloja na telu pokrenutom ne iz stanja mirovanja, već iz stanja izvesnog prethodnog kretanja, nisu prema tome, rešavani i u literaturi, o bilokakvim pokušajima rešavanja takvih problema, nema ništa zabeleženo. Predmet ovoga rada je baš granični sloj na cilindričnom telu dovedenom u kretanje iz stanja izvesnog nestacionarnog (u daljem celom tekstu govoriće se: prethodnog) kretanja. Uglavnom, radi se o ovome: telo je pokrenuto iz mirovanja trzajem, stalno ubrzano, ili stepeno-ubrzano i ima na sebi odredjeno polje brzina u graničnom sloju koji se formira. A onda se saopštava novi impuls telu (dalje u tekstu: dopunskim) trzajem, stalnim ubrzanjem, ili stepeno - ubrzano i, razume se, zbog toga se stvara nova strujna slika na telu, drukčiji nestacionarni granični sloj. Cilj ovoga rada je da se razvije metoda za proračun takvih nestacionarnih graničnih slojeva.

&2. Izvodjenje jednačina dopunskog graničnog sloja

Za proračun graničnog sloja na telu pokrenutom iz stanja izvesnog prethodnog nestacionarnog kretanja služe poznate Prandtlove jednačine:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

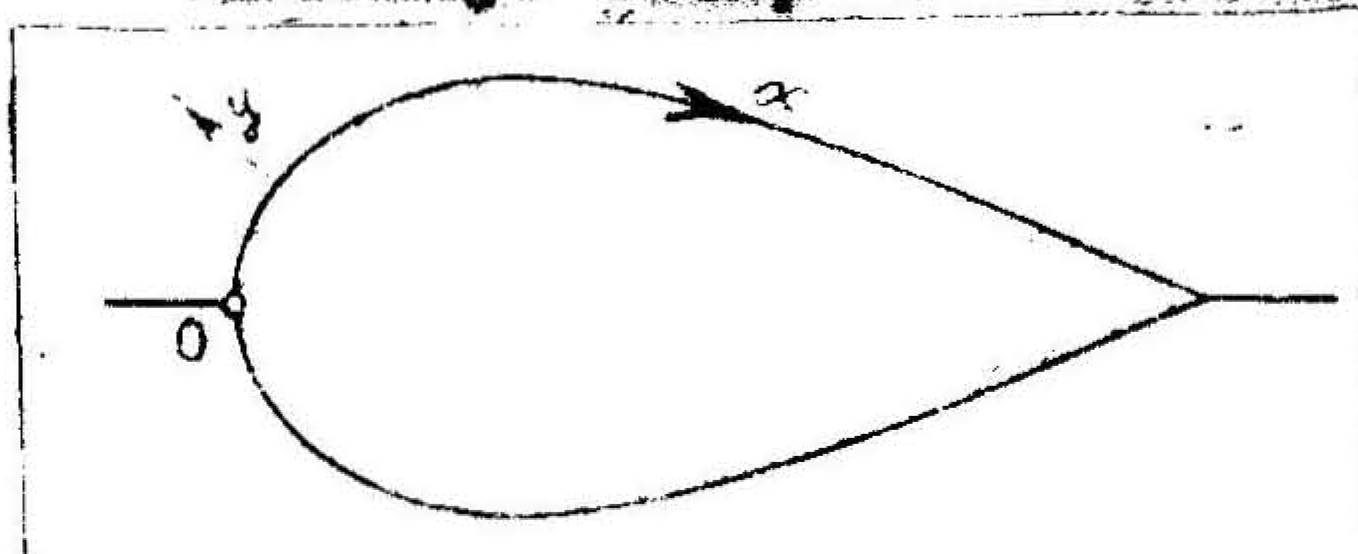
sa graničnim uslovima:

$$u = 0,\ y = 0;\quad u = U,\ y = \infty; \tag{1.2}$$

i početnim uslovom:

$$t = T,\quad u = u_s(x, y, T) \tag{1.3}$$

Ovde je x,y koordinatni sistem vezan za telo, prema sl. 1, "t" - vreme, mereno od momenta kada je počelo prethodno kretanje tela, "T" - trenutak kada nastaje dopunsko kretanje,



Sl. 1

(u,v) - rezultujuće brzine u graničnom sloju u intervalu t T, "U" - rezultujuća brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja u istom intervalu, koja, u stvari, sadrži osim dopunske potencijalne brzine i onu zatečenu, prethodnu potencijalnu brzinu, ρ - gustina fluida i ν - kinematska viskoznost fluida. Osim ovih uobičajenih veličina, u početnom uslovu (1.3) javlja se funkcija $u_s(x,y,T)$, koja predstavlja brzinu u graničnom sloju neposredno uoči pojave dopunskog kretanja, a koja je postala zbog predhodnog kretanja iz stanja mirovanja, te je kao takvu poznajemo.

Problem je, znači u tome da treba rešiti sistem parcijalnih jednačina (1.1) i istovremeno zadovoljiti granične (1.2)

Odmah se, medjutim, naziru krupne teškoće.

Prvo, za rešavanje jednačina (1.1) ne može se primeniti uobičajeni postupak uzastopnih približenja, koji važi samo u periodu formiranja graničnog sloja, a mi ovom prilikom primenjujemo jednačine (1.1) za doba kada jedan, granični sloj u stanju formiranja, trpi svoju izmenu i dogradnju.

I drugo, čak i ako bismo uspešno prebrodili teškoće oko rešavanja jednačina (1.1) dobiveno rešenje je teško prilagoditi početnom uslovi (1.3) i pripremiti ga za praktičnu upotrebu, zbog komplikovanosti funkcije $u_s(x,y,t)$ [12], koja sadrži kombinacije polinoma, funkcije greške i eksponencijalnih funkcija po promenljivoj $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$, kao i činioce, zavisne od promenljive "x".

Ostaje jedino da se učine pokušaji kako bi se početni (i granični) uslovi definisali u univerzalnom obliku.

Ideja kojom se to postiže, a na kojoj bazira ceo ovaj rad, sastoji se u sledećem: na telu je, u trenutku pojave dopunskog kretanja $t = T$, zatečen prethodni granični sloj, dakle, jedno polje brzina odredjeno projekcijama "u_s" i "v_s". Dopunsko kretanje tela, istosmerno sa prethodnim, svakako je unelo promene u granični sloj i sada su u njemu projekcije brzina "u" i "v". Medjutim, može se smatrati da su prethodne projekcije brzina "u_s" i "v_s" sadržane i u ovim rezultujućim brzinama "u" i "v" iza nastanka dopunskog kretanja, samo su one dopunjene dopunskim komponentama brzine "u_d" i "v_d", koje odredjuju dopunski nestacionarni granični sloj, kako će se ubuduće u ovom radu često nazivati. Prema tome, ostavimo li prethodnom graničnom sloju da se i dalje prividno razvija, u okviru rezultujućeg graničnog sloja, i posle trenutka $t = T$, dakle, pri $t_1 \geq 0$:

$$u = u_s + u_d \qquad v = v_s + v_d$$

problem smo sveli na pitanje odredjivanja samo dopunskih projekcija "u_d", "v_d", za koje su početni uslovi definisani univerzalno: za $t_1 = 0$, $u_d = v_d = 0$.

I ne samo to. Istovremeno, mi smo problem sveli na pitanje odredjivanja dopunskog graničnog sloja, polja brzina (u_d, v_d) koje tek nastaje i razvija se, pa se u cilju njegovog proračuna može formirati i postupak sukcesivnih aproksimacija.

Izvedimo, najpre, jednačine nestacionarnog dopunskog graničnog sloja na način koji je sličan Mizesovom postupku [13] izvodjenja jednačina Prandtla. Posmatraćemo najopštiji slučaj opticanja krivolinijske konture.

Podjimo od osnovnih Navie-Stoksovih jednačina hidromehanike za ravanski slučaj:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

i prevodimo ih na bezdimenzijski oblik koristoći karakterističnu dužinu "l" i karakterističnu brzinu "V":

$$\left.\begin{aligned}&x = l\bar{x},\quad y = l\bar{y},\quad t = \frac{l}{V}\bar{t},\\ &u = V\bar{u},\quad v = V\bar{v},\quad p = \rho V^2\bar{p},\quad \nu = \frac{lV}{R_e}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Zamenom vrednosti (1.5) u(1.4) i skraćivanjem obeju strana prvih dveju jednačina toga sistema sa $\frac{V^2}{l}$, a treće sa $\frac{V}{l}$, dobiće se:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

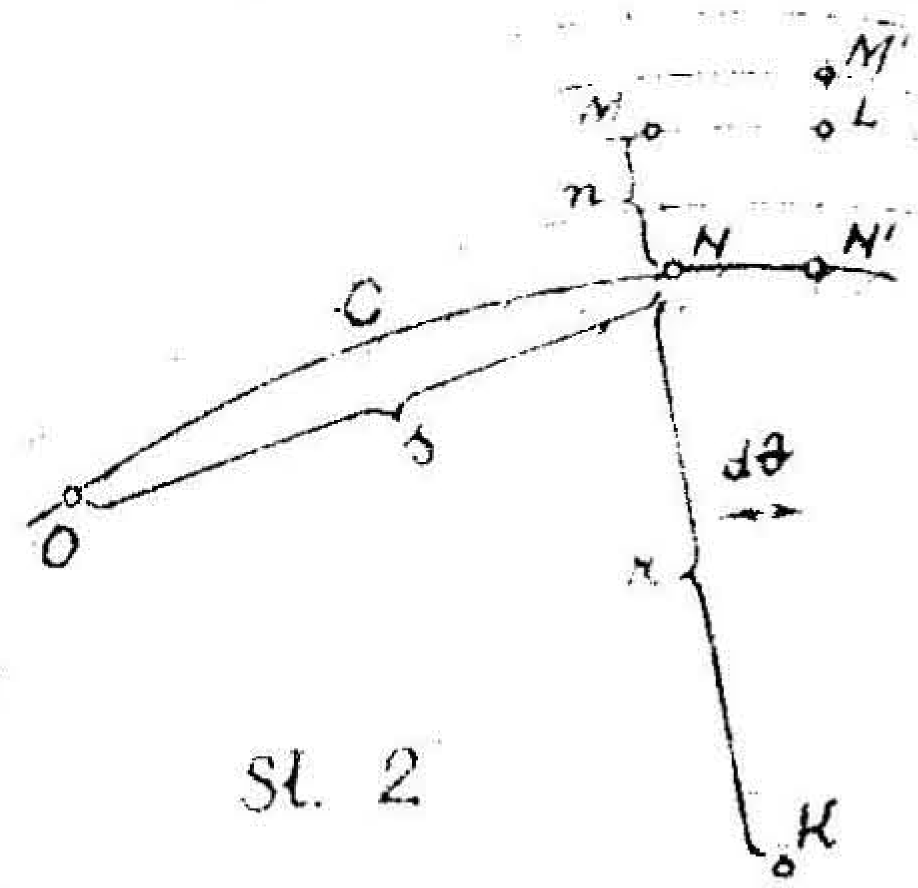
gde su izostavljene crtice iznad slova za fizičke veličine i koordinate.

Očevidno, jednačine hidromehanike, napisane u bezdimenzijskom obliku (1.6), očuvale su svoj predjašnji osnovni oblik, samo što se umesto gustine "ρ" nalazi jedinica, a umesto kinematske viskoznosti "ν" član $\frac{1}{R_e}$, gde je $R_e = \frac{Vl}{\nu}$ Rejnoldsov broj.

Ako sada jednačine (1.6) izrazimo u krivolinijskom ortogonalnom koordinatnom sistemu (q_1, q_2) dobićemo:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_2}{H_1 H_2}\left(v_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - v_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) = \\
&= -\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial (H_2/H_1)}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \right. \\
&+ \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial (H_1/H_2)}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{2}{H_1^2 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{2}{H_1 H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) v_1 + \\
&\left. + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) v_1 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) v_2 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) v_2 \right] \\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} - \frac{v_1}{H_1 H_2}\left(v_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - v_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2} + \\
&+ \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_1^2} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial (H_2/H_1)}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial (H_1/H_2)}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} - \right. \\
&- \frac{2}{H_1^2 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{2}{H_1 H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) v_2 + \\
&\left. + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) v_2 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) v_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) v_1 \right] \\
&\qquad H_2\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + H_1\frac{\partial v_2}{\partial q_2} + v_1\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = 0
\end{aligned}
\right\} \tag{1.7}
$$

gde su H_1 i H_2 odgovarajući Lameovi koeficijenti. Izaberimo sada sistem krivolinijskih koordinata prema sl. 2. Uzmimo u tačkama konture C normale na tu konturu i neka normala kroz proizvoljnu tačku M, koja leži blizu konture C, seče tu konturu u tački N. Ako izaberemo na konturi jednu fiksnu tačku O, položaj proizvoljne tačke M odredjen je, u odnosu na nju, koordinatama $q_1 = s$ i $q_2 = n$, gde je "s" dužina luka



Sl. 2

ON, a "n" dužina normale NM. Odredimo rastojanje susednih tačaka M i M'. Beskonačno bliske normale MN i M'N' seku se u centru krivine K krive C, koji odgovara tački N. Obeležimo radijus krivine krive C u tački N sa r(s) i predpostavimo da je r(s) neprekidna funkcija promenljive "s", zajedno sa svojim prvim izvodom.

Sa tačnošću do beskonačno malih veličina višega reda, imamo da je:

$$d\sigma^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LM'}^2, \quad \overline{LM'} = dn, \quad \overline{ML} = [r(s)+n]\,d\theta$$

$$\overline{NN'} = ds = r(s)\,d\theta, \quad \overline{ML} = \frac{r(s)+n}{r(s)}\,ds,$$

te je: $$d\sigma^2 = \left[1+\frac{n}{r(s)}\right]^2 ds^2 + dn^2$$

pa su Lameovi koeficijenti:

$$H_1 = 1 + \frac{n}{r(s)}, \quad H_2 = 1; \tag{1.8}$$

Konačno, uvedimo sledeće relacije (pri čemu imamo u vidu red veličine poprečne brzine u graničnom sloju, kao i samu poprečnu dimenziju graničnog sloja):

$$\left.\begin{aligned} &q_1 = s = x; \quad q_2 = n = \frac{y}{\sqrt{Re}};\\ &v_1 = v_s = u; \quad v_2 = v_n = \frac{v}{\sqrt{Re}};\\ &H_1 = 1 + \frac{y}{\sqrt{Re}\,r(x)}, \quad H_2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Ubacivanjem vrednosti (1.9) u jednačine (1.7) dobiće se

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{H_1}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1}uv = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x} +\\ &+ \frac{1}{Re}\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{r'y}{r^2 Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial y} +\\ &+ \frac{2}{r Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{r^2 Re}\frac{1}{H_1^2}u - \frac{r'}{r^2 Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^3}v\\ &\frac{1}{Re}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{Re}\frac{1}{H_1}u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Re}v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{1}{rH_1}u^2 =\\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re\sqrt{Re}}\left\{\frac{1}{Re H_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{r'y}{r^2 Re}\frac{1}{H_1^3}\frac{\partial v}{\partial x} +\right.\\ &\left. + \frac{1}{rH_1}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{rH_1^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r^2\sqrt{Re}}v + \frac{r'}{r^2}\frac{1}{H_1^3}u\right\} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Ono strujanje pre pojave dopunskog kretanja bilo bi prikazano ovim jednačinama, samo bi se moglo sve fizičke veličine obeležiti indeksom "s", da bi se tako naznačilo da se radi o predhodnom strujanju. Ali, isto tako jednačine (1.10) mogu se tumačiti i kao jednačine rezultujućeg strujanja posle pojave dopunskog kretanja. A da bismo dobili jednačine samo dopunskog strujanja u zasebnom obliku, treba u relaciju (1.10) staviti:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_s + u_d\\ v &= v_s + v_d\\ p &= p_s + p_d \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

zatim razčlaniti ove izraze, iskoristiti činjenicu o neprekinutom razvijanju starog strujanja (u_s i v_s) i posle trenutka $t = T$ kada je stvoreno dopunsko strujanje, te tako dobiti jednačine nestacionarnog dopunskog strujanja oko cilindričnog tela pri proizvoljnom R_e - broju:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_d}{\partial t_1}+\frac{1}{H_1}\left(u_d\frac{\partial u_s}{\partial x}+u_d\frac{\partial u_d}{\partial x}+u_s\frac{\partial u_d}{\partial x}\right)+v_s\frac{\partial u_d}{\partial y}+v_d\frac{\partial u_s}{\partial y}+v_d\frac{\partial u_d}{\partial y}+\\
&+\frac{1}{r\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1}\left(u_s v_d+u_d v_s+u_d v_d\right)=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial p_d}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2}+\frac{1}{r\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_d}{\partial y}+\\
&+\frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}+\frac{r'y}{r^2 Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^3}\frac{\partial u_d}{\partial x}+\frac{2}{r Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial v_d}{\partial x}-\frac{1}{r^2 Re}\frac{1}{H_1^2}u_d-\frac{r'}{r^2 Re\sqrt{Re}}\frac{1}{H_1^3}v_d\\
&\frac{1}{Re}\frac{\partial v_d}{\partial t_1}+\frac{1}{Re}\frac{1}{H_1}\left(u_s\frac{\partial v_d}{\partial x}+u_d\frac{\partial v_s}{\partial x}+u_d\frac{\partial v_d}{\partial x}\right)+\frac{1}{Re}\left(v_s\frac{\partial v_d}{\partial y}+\right.\\
&\left.+v_d\frac{\partial v_s}{\partial y}+v_d\frac{\partial v_d}{\partial y}\right)-\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{1}{rH_1}\left(2u_s u_d+u_d^2\right)=\\
&=-\frac{\partial p_d}{\partial y}+\frac{1}{Re\sqrt{Re}}\left(\frac{1}{Re H_1^2}\frac{\partial^2 v_d}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_d}{\partial y^2}+\frac{r'y}{r^2 Re}\frac{1}{H_1^3}\frac{\partial v_d}{\partial x}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{rH_1}\frac{\partial v_d}{\partial y}-\frac{2}{rH_1^2}\frac{\partial u_d}{\partial x}+\frac{1}{r^2\sqrt{Re}}v_d+\frac{r'}{r^2}\frac{1}{H_1^3}u_d\right)
\end{aligned}\right\}\quad(1.12)$$

Prelazeći na strujanje u graničnom sloju oko tela, dakle puštajući da $R_e \to \infty$, iz jednačina (1.12) dobiće se jednačine dopunskog graničnog sloja:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_d}{\partial t_1}+u_s\frac{\partial u_d}{\partial x}+u_d\frac{\partial u_s}{\partial x}+u_d\frac{\partial u_d}{\partial x}+v_s\frac{\partial u_d}{\partial y}+\\
&+v_d\frac{\partial u_s}{\partial y}+v_d\frac{\partial u_d}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_d}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}\\
&\qquad\qquad 0=-\frac{\partial p_d}{\partial y}
\end{aligned}\right\}\quad(1.13)$$

Razmotrimo još i jednačinu kontinuiteta:

$$H_2\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+H_1\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+v_1\frac{\partial H_2}{\partial q_2}+v_2\frac{\partial H_1}{\partial q_2}=0$$

Smenjivanjem ovde vrednosti (1.9) dobiće se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{1+y/r\sqrt{Re}}\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{1}{r\sqrt{Re}}=0$$

a pomoću izraza (1.11) nastaje jednačina kontinuiteta za dopunsko strujanje pri proizvoljnom R_e - broju:

$$\frac{\partial u_d}{\partial x}+\frac{1}{1+y/r\sqrt{Re}}\frac{\partial v_d}{\partial y}+\frac{1}{r\sqrt{Re}}v_d=0$$

Odavde sledije za $R_e \to \infty$ konačni izgled jednačine kontinuiteta za dopunski nestacionarni granični sloj:

$$\frac{\partial u_d}{\partial x}+\frac{\partial v_d}{\partial y}=0 \qquad (1.14)$$

Kao što je poznato, pritisak u preseku upravnom na granični sloj može se smatrati konstantnim, što ostaje u važnosti i za dopunski granični sloj, kako pokazuje druga od jednačina (1.13). Može se usvojiti da je taj pritisak jednak sa onim pritiskom koji vlada na spoljnoj granici graničnog sloja, a koji je odredjen spoljnim bezviskoznim strujanjem. Prema tome, može se smatrati da je pritisak u graničnom sloju koji je odredjen spoljašnjim potencijalnim strujanjem, poznata funkcija koordinate "x" i vremena.

Usvajajući još i Blazijusov način prikazivanja načina kretanja cilindričnog tela kroz viskozni vluid preko spoljanje potencijalne brzine - može se doći do značenja gradijenta pritiska potrebnog za jednačine (1.13).

Naime, za slučaj kretanja iz stanja mirovanja, dakle, za našu prvu etapu kretanja, imamo u tu svrhu poznatu Ojlerovu jednačinu:

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} \tag{1.15}$$

U periodu $t_1 > 0$ gde je $t_1 = t - T$

$$t = T + t_1 \tag{1.16}$$

spoljašnje potencijalno strujanje je, razume se, ponovo odredjeno Ojlerovom jednačinom. Medjutim, prethodna potencijalna brzina dobila je priraštaj U_d zbog pojave novog dopunskog kretanja, a to se moralo odraziti i na promenu pritiska, te se tako javilo traženo "p_d":

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + \frac{\partial U_d}{\partial t_1} + (U_s + U_d)\frac{\partial (U_s + U_d)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial (p_s + p_d)}{\partial x} \tag{1.17}$$

Tako se, najzad, koristeći jednačine (1.15) i (1.17) može doći do cilja:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x} = \frac{\partial U_d}{\partial t_1} + U_d \frac{\partial U_d}{\partial x} + U_s \frac{\partial U_d}{\partial x} + U_d \frac{\partial U_s}{\partial x}$$

Zamenom ove veze u (1.13) i pridruživanjem jednačine kontinuiteta (1.14) dobiće se sistem jednačina koji definiše dopunski nestacionarni granični sloj:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_d}{\partial t_1} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial x} + v_d \frac{\partial u_d}{\partial y} + u_s \frac{\partial u_d}{\partial x} + u_d \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_d}{\partial y} + \\ &+ v_d \frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{\partial U_d}{\partial t_1} + U_d \frac{\partial U_d}{\partial x} + U_s \frac{\partial U_d}{\partial x} + U_d \frac{\partial U_s}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2} \\ &\qquad\qquad \frac{\partial u_d}{\partial x} + \frac{\partial v_d}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Granični i početni uslovi su:

$$\left.\begin{aligned} &u_d = v_d = 0, \quad za \quad y = 0; \\ &u_d = U_d(x, t_1), \quad za \quad y = \infty; \\ &u_d = v_d = 0, \quad za \quad t = T; \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

Do ovih jednačina može se doći i drugim putem.

Koristeći činjenicu da je granični sloj veoma tanak moguće je krivolinijsku mrežu koordinata, prema sl. 1, smatrati u unutrašnjosti graničnog sloja, mrežom Dekartovih koordinatnih linija (x,y). U tom sistemu, ako zanemarimo zapreminske sile, jednačine Navie-Stoksa za ravansko strujanje viskozne nestišljive tečnosti, imaju oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ako u ovim jednačinama pritisak i brzine označimo indeksima "s" imaćemo jednačine strujanja za prethodno strujanje, u vreme kretanja nastalog direktno iz stanja mirovanja, o čemu je već jednom bilo reči.

Za drugu etapu kretanja, kada se telo prevodi iz ovog u novo kretanje preko veza (1.11) i ovih jednačina, za dopunske brzine "u_d" i "v_d" dobiće se parcijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_d}{\partial t_1} + u_d\frac{\partial u_s}{\partial x} + u_s\frac{\partial u_d}{\partial x} + u_d\frac{\partial u_d}{\partial x} + v_d\frac{\partial u_s}{\partial y} + v_s\frac{\partial u_d}{\partial y} + v_d\frac{\partial u_d}{\partial y} = \\ &\qquad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}\right) \\ &\frac{\partial v_d}{\partial t_1} + u_d\frac{\partial v_s}{\partial x} + u_s\frac{\partial v_d}{\partial x} + u_d\frac{\partial v_d}{\partial x} + v_d\frac{\partial v_s}{\partial y} + v_s\frac{\partial v_d}{\partial y} + v_d\frac{\partial v_d}{\partial y} = \\ &\qquad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_d}{\partial y^2}\right) \\ &\qquad\qquad \frac{\partial u_d}{\partial x} + \frac{\partial v_d}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

Pošto želimo da procenimo relativne veličine pojedinih članova ovih jednačina u graničnom sloju, predjimo na bezdimenzijski oblik tih jednačina. Pri tome ćemo se oslanjati na poznato svojstvo graničnog sloja - vrlo mala debljina graničnog sloja u poredjenju sa uzdužnim dimenzijama ove oblasti strujanja i, u vezi sa tim, vrlo male poprečne brzine, prema podužnim.

Opredelićemo se za isti red veličina brzina i prethodnog i dopunskog kretanja na gornjoj granici graničnog sloja (zajednička karakteristična brzina u podužnom pravcu je U), a i za poprečne komponente prethodnog i dopunskog kretanja uzećemo približno istu karakterističnu brzinu V.

Za razmere vremena i pritiska usvojićemo konstante T i P. Ako sa "prim" označimo bezdimenzijske vrednosti, biće:

$$t_1 = T\cdot t'; \quad x = X x'; \quad y = Y y';$$

$$u_d = U u_d'; \quad v_d = V v_d'; \quad u_s = U u_s', \quad v_s = V v_s'; \quad p_d = P p_d';$$

preko kojih jednačine (1.20) postaju:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X}{UT}\frac{\partial u_d'}{\partial t'} + u_d'\frac{\partial u_s'}{\partial x'} + u_s'\frac{\partial u_d'}{\partial x'} + u_d'\frac{\partial u_d'}{\partial x'} + \frac{XV}{YU}v_d'\frac{\partial u_s'}{\partial y'} + \frac{XV}{YU}v_s'\frac{\partial u_d'}{\partial y'} + \\ &\qquad + \frac{XV}{YU}v_d'\frac{\partial u_d'}{\partial y'} = -\frac{P}{\rho U^2}\frac{\partial p_d'}{\partial x'} + \frac{\nu}{XU}\frac{\partial^2 u_d'}{\partial x'^2} + \frac{\nu X}{Y^2 U}\frac{\partial^2 u_d'}{\partial y'^2} \\ &\frac{X}{UT}\frac{\partial v_d'}{\partial t'} + u_d'\frac{\partial v_s'}{\partial x'} + u_s'\frac{\partial v_d'}{\partial x'} + u_d'\frac{\partial v_d'}{\partial x'} + \frac{XV}{YU}v_d'\frac{\partial v_s'}{\partial y'} + \frac{XV}{YU}v_s'\frac{\partial v_d'}{\partial y'} + \\ &\qquad + \frac{XV}{YU}v_d'\frac{\partial v_d'}{\partial y'} = -\frac{PX}{\rho UVY}\frac{\partial p_d'}{\partial y'} + \frac{\nu}{XU}\frac{\partial^2 v_d'}{\partial x'^2} + \frac{\nu X}{Y^2 U}\frac{\partial^2 v_d'}{\partial y'^2} \\ &\qquad\qquad \frac{\partial u_d'}{\partial x'} + \frac{XV}{YU}\frac{\partial v_d'}{\partial y'} = 0 \end{aligned}\right\} (1.21)$$

preko konstanata X i U obrazujmo R_e broj $R_e = \frac{UX}{\nu}$ i izrazimo dimenzije konstanata T i P:

$$T = \frac{X}{U}; \quad P = \rho U^2$$

Ostaje još da se pobliže odrede razmere poprečne dužine Y i brzine V. Odredićemo ih iz uslova da u trećoj jednačini sistema (1.21) bude ostvarena homogenost u pogledu reda veličine sabiraka, odnosno tako da u sistemu (1.21) ostane samo jedan osnovni parametar: R_e - broj; dakle, u tom smislu, mogu se ustanoviti veze:

$$\frac{XV}{YU} = 1; \quad \frac{\nu X}{Y^2 U} = 1$$

odakle sleduju podaci za red veličina poprečnih dužina i brzina:

$$V = \frac{U}{\sqrt{R_e}}; \quad Y = \frac{X}{\sqrt{R_e}}$$

Sada jednačine (1.21) postaju:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_d'}{\partial t'} + u_d'\frac{\partial u_s'}{\partial x'} + u_s'\frac{\partial u_d'}{\partial x'} + u_d'\frac{\partial u_d'}{\partial x'} + v_d'\frac{\partial u_s'}{\partial y'} + v_s'\frac{\partial u_d'}{\partial y'} + v_d'\frac{\partial u_d'}{\partial y'} = \\ &\qquad = -\frac{\partial p_d'}{\partial x'} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_d'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_d'}{\partial y'^2} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_d'}{\partial t'}+u_d'\frac{\partial v_s'}{\partial x'}+u_s'\frac{\partial v_d'}{\partial x'}+u_d'\frac{\partial v_d'}{\partial x'}+v_d'\frac{\partial u_s'}{\partial y'}+v_s'\frac{\partial v_d'}{\partial y'}+v_d'\frac{\partial v_d'}{\partial y'}\right)=\\=-\frac{\partial p_d'}{\partial y'}+\frac{1}{Re^2}\frac{\partial^2 v_d'}{\partial x'^2}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_d'}{\partial y'^2}\\\frac{\partial u_d'}{\partial x'}+\frac{\partial v_d'}{\partial y'}=0\end{aligned}\right\}\quad(1.22)$$

Sistem (1.22) sadrži parametar R_e, i to najzgodnije smatrati ga u obliku $\frac{1}{\sqrt{Re}}$, kakav ulazi i u izraze za poprečnu koordinatu i poprečnu brzinu u bezdimenzijskom obliku.

Posmatrajući formalno rešenja jednačina (1.22) razvijena po stepenima toga malog parametra:

$$u_d'=u_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}u_{d_1}'+\dots;\quad v_d'=v_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}v_{d_1}'+\dots\quad;$$

$$p_d'=p_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}p_{d_1}'+\dots\quad;$$

$$u_s'=u_{s_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}u_{s_1}'+\dots\quad;\quad v_s'=v_{s_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}v_{s_1}'+\dots\quad;$$

gde su sve veličine obeležene simbolom "prim" funkcije od bezdimenzijskih koordinata i vremena, tada prva jednačina sistema (1.22) dobija oblik:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial t'}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{d_1}'}{\partial t'}+\left(u_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}u_{d_1}'\right)\left(\frac{\partial u_{s_0}'}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{s_1}'}{\partial x'}\right)+\left(u_{s_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}u_{s_1}'\right)\left(\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial x'}+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{d_1}'}{\partial x'}\right)+\left(u_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}u_{d_1}'\right)\left(\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{d_1}'}{\partial x'}\right)+\left(v_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}v_{d_1}'\right)\left(\frac{\partial u_{s_0}'}{\partial y'}+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{s_1}'}{\partial y'}\right)+\left(v_{s_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}v_{s_1}'\right)\left(\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial y'}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{d_1}'}{\partial y'}\right)+\left(v_{d_0}'+\frac{1}{\sqrt{Re}}v_{d_1}'\right)\cdot\\&\cdot\left(\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial y'}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial u_{d_1}'}{\partial y'}\right)=-\frac{\partial p_{d_0}'}{\partial x'}-\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial p_{d_1}'}{\partial x'}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u_{d_0}'}{\partial x'^2}+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial^2 u_{d_1}'}{\partial x'^2}\right)+\frac{\partial^2 u_{d_0}'}{\partial y'^2}+\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial^2 u_{d_1}'}{\partial y'^2}\end{aligned}\right\}\quad(1.23)$$

Ako sravnimo koeficijente uz nulti stepen malog parametra $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ na levoj i desnoj strani, tada iz druge od jednačina (1.22) dobijamo:
$$\frac{\partial p_{d_0}}{\partial y'}=0$$

a iz relacije (1.23) sleduje:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial t'}+u_{d_0}'\frac{\partial u_{s_0}'}{\partial x'}+u_{s_0}'\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial x'}+u_{d_0}'\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial x'}+v_{d_0}'\frac{\partial u_{s_0}'}{\partial y'}+v_{s_0}'\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial y'}+\\+v_{d_0}'\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial y'}=-\frac{\partial p_{d_0}'}{\partial x'}+\frac{\partial^2 u_{d_0}'}{\partial y'^2}\end{aligned}\right\}\quad(1.24)$$

Iz treće jednačine sistema (1.22) je:

$$\frac{\partial u_{d_0}'}{\partial x'}+\frac{\partial v_{d_0}'}{\partial y'}=0$$

vidi se odmah da se dobilo isto kao da je u vezama (1.22) stavljeno $R_e \to \infty$. Ako zadnje tri relacije vratimo na dimenzijski oblik dobićemo konačno, jednačine dopunskog graničnog sloja:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_d}{\partial t_1} + u_d\frac{\partial u_s}{\partial x} + u_s\frac{\partial u_d}{\partial x} + u_d\frac{\partial u_d}{\partial x} + v_d\frac{\partial u_s}{\partial y} + v_s\frac{\partial u_d}{\partial y} + \\ &\qquad + v_d\frac{\partial u_d}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2} \\ &\qquad \frac{\partial p_d}{\partial y} = 0 \\ &\qquad \frac{\partial u_d}{\partial x} + \frac{\partial v_d}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.25)$$

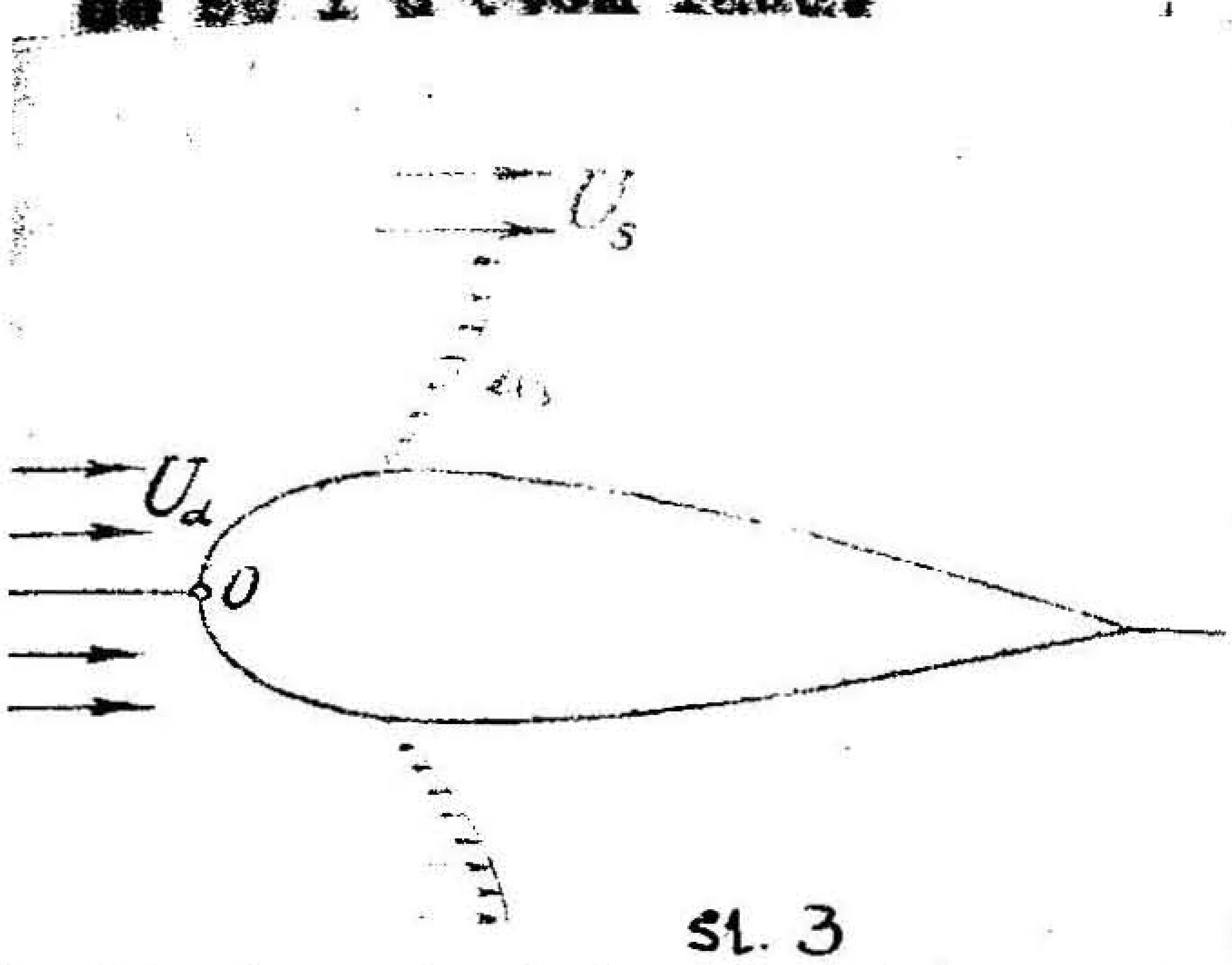
Za odredjivanje vrednosti člana $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_d}{\partial x} \right)$ može se koristiti ranije izloženi postupak. Prema tome, jednačine (1.25) i (1.18) su istovetne. Razume se granični i početni uslovi (1.19) su jedinstveni.

&3. Metoda rešavanja jednačina dopunskog graničnog sloja

Rešavanjem jednačina dopunskog graničnog sloja(1.18) odnosno (1.25) sa graničnim i početnim uslovima (1.19), i dodavanjem toga rešenja izrazima za brzine, u ovom radu nazvanog, "prethodnog" graničnog sloja, koji je počeo svoje formiranje u momentu t = 0, a nastavio ga i posle trenutka t = T, kada se začeo dopunski granični sloj - dolazi se do traženih rešenja graničnog sloja na telu pokrenutom iz stanja izvesnog prethodnog nestacionarnog kretanja.

Pripremimo proces postupnih približenja kao metodu za rešavanje jednačina (1.25). Obrazujmo parcijalne jednačine za pojedina sukcesivna približenja brzine u graničnom sloju. Podsetimo se, najpre, principa kojim Blazijus [14] odredjuje način kretanja tela kroz viskozan fluid. Ako se telo pokrene iz mirovanja trzajem Blazijus usima da je $U = U(x)$, za $t \geq 0$, kada se kreće stalnim ubrzanjem onda je $U = tW(x)$, za $t \geq 0$, itd.

Dakle, u koordinatnom sistemu čvrsto vezanom za samo telo, što je uvek slučaj u teoriji graničnog sloja; Blazijus unima kao da se spoljašnja potencijalna struja, relativno prema telu, kreće odgovarajućim načinom. Ovakav način primenjivaće se i u ovom radu.



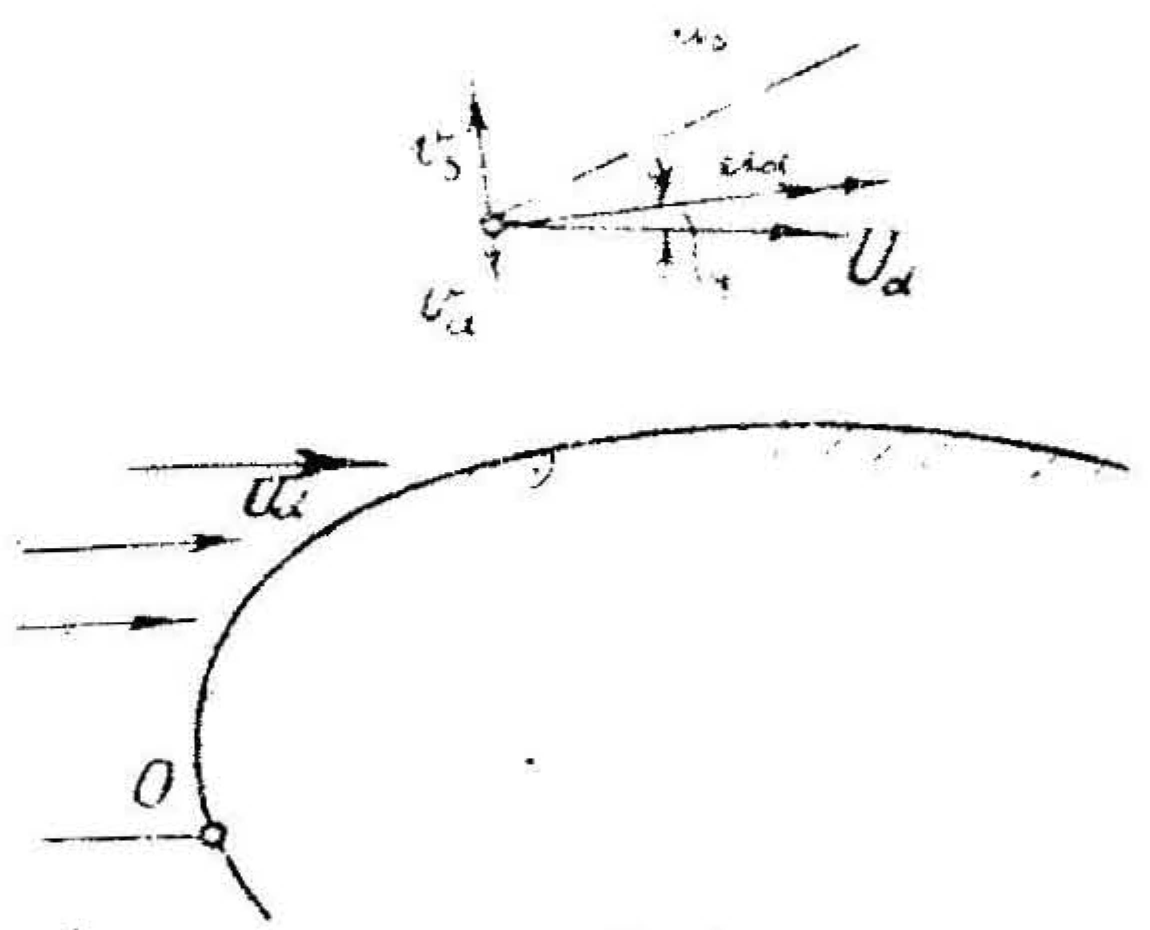
Sl. 3

Dakle, u trenutku $t_1 = 0$, na telu postoji izvestan granični sloj (u_s, v_s). Tada se telu saopštava dopunsko kretanje, odnosno, analogno Blaziјusu, tada kao da nailazi struja tečnosti U_d (v.sl. 3). U prvim trenucima dopunskog kretanja može se primeniti isti princip za formiranje jednačine prvog približenja, kao i pri kretanju iz stanja mirovanja: potencijalna brzina spoljašnje struje U_d se skoro u neizmenjenoj vrednosti prostire gotovo do same konture tela. U stvari, pri tom se u graničnom sloju odigrava proces koji čini da je cela pojava specifična i različita nego u slučaju kretanja tela iz stanja mirovanja. Naime, dopunsko kretanje U_d će, u prvim trenucima, prigušivati postojeće poprečne brzine prethodnog graničnog sloja (v_d će imati suprotan smer od v_s). Znači, uglavnom će U_d pojačavati podužnu komponentu brzine u graničnom sloju, ali, ipak, ne mogu se prenebreći ni poprečne dopunske brzine v_d, pre svega, zato što su one zastupljene u prvoj od jednačina (1.25) sa dva člana: $\left(v_d \frac{\partial u_s}{\partial y} + v_d \frac{\partial u_d}{\partial y}\right)$, a ne samo sa jednim, kao što je to bio slučaj pri kretanju iz stanja mirovanja $\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Upravo, ova činjenica najviše doprinosi mogućnosti, da se, za prvo približenje dopunskog graničnog sloja, mogu zanemariti članovi $\left(v_s \frac{\partial u_d}{\partial y} + v_d \frac{\partial u_s}{\partial y} + v_d \frac{\partial u_d}{\partial y}\right)$, koristeći, pri tome, i podatak, od uvek korišćen, da je poprečno kretanje daleko manje od podužnog. Pri proceni reda veličine ova tri člana imalo se u vidu da su, u domenu važnosti jednačina graničnog sloja, svakako:

$$\frac{\partial u_s}{\partial y} \geqslant 0\,; \quad \frac{\partial u_d}{\partial y} \geqslant 0$$

Ovih nekoliko činjenica koje su korišćene pri formiranju jednačine prvog približenja postaće jasnije ako se poslužimo skicom. Sa sl. 4. je očigledno da je, u prvim trenucima novog kretanja:

$$u_d = U_d \cos\varphi\ ;\ v_d = U_d \sin\varphi\ ;$$



Sl. 4

gde je φ relativno mali ugao, tako da je moguće ustanoviti približnosti:

$$u_d \approx U_d\ ;\ \ v_d \approx U_d\varphi$$

Tako je i formalno opravdano uzimanje da je $u_d \approx U_d$ u prvim trenucima, ali je isto tako dobijena i veličina $v_d \approx U_d\varphi$, koja mada je mala, ipak, uzeta dvaput znatno umanjuje vrednost sledećih triju članova:

$$v_s \frac{\partial u_d}{\partial y} + v_d \frac{\partial u_s}{\partial y} + v_d \frac{\partial u_d}{\partial y}\ ,$$

jer je, skoro do same tačke odvajanja graničnog sloja, a u početnom stadijumu dopunskog kretanja, kako to pokazuje i sl. 4. "v_d" suprotnog smera od "v_s". Ako se ovo doda činjenici o neznatnosti poprečnih brzina u graničnom sloju, stodiće se razlozi za zanemarivanje ova tri člana u jednačini (1.25).

Medjutim, u slučaju da dopunsko kretanje nastaje pre pojave tačke prvog odvajanja graničnog sloja zbog prethodnog kretanja, glavni razlog za zanemarivanje pomenuta tri člana u celoj okolini tela je zanemarljivo mala vrednost poprečnih brzina, koje su tek u samom začetku razvoja, s obzirom na kratkotrajnost kretanja.

Ako izrazimo brzinu graničnog sloja u vidu približenja

$$\left.\begin{aligned} u_d &= u_0(x,y,t_1) + u_1(x,y,t_1) \\ v_d &= v_0(x,y,t_1) + v_1(x,y,t_1) \end{aligned}\right\} \quad (1.26)$$

gde su $u_1 \ll u_0$, odnosno $v_1 \ll v_0$, dobiće se za prvo približenje brzine "u_0", na opisani način:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= \frac{\partial U_d}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x}\left[U_d\left(U_s - u_s\right)\right] \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

sa graničnim uslovima:

$$u_0 = 0,\ y = 0;\ u_0 = U_d(x, t_1),\ y \to \infty; \qquad (1.28)$$

Smenom vrednosti (1.26) u jednačine (1.25) i korišćenjem jednačina za prvo približenje (1.27) nastaje:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + u_s\frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0\frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s\frac{\partial u_s}{\partial y} + v_s\frac{\partial u_0}{\partial y} + \\ + \Delta = u_s\frac{\partial U_d}{\partial x} + U_d\frac{\partial u_s}{\partial x} + U_d\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

gde je:

$$\Delta = u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_s\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_s}{\partial x} + $$
$$+ v_s\frac{\partial u_1}{\partial y} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1\frac{\partial u_s}{\partial y} + v_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} \qquad (1.30)$$

Pre procenjivanja reda veličine izraza(1.30), podsetimo se šta je zanemareno pri formiranju jednačine za drugo približenje u slučaju kretanja iz stanja mirovanja, koja je poznata i može se naći u literaturi [14]. Naime, tamo se smenom $u = u_0 + u_1$ u jednačinu graničnog sloja i uz pomoć jednačine za prvo približenje, došlo do jednačina drugog približenja, a pri tom je zanemareno: $\Delta_s = u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}$

Pri analizi ovog izraza korišćene su sledeće činjenice: a) $u_1 \ll u_0$, $v_1 \ll v_0$ b) $v_0 \ll u_0$ (poprečna kretanja su dosta slabija od podužnih), c) osim ovih podataka, koji važe i za analizu izraza (1.30), biće od koristi okolnost što je za formiranje prvog približenja "u_0" korišćena približnost $u_d \approx U_d$; a s obzirom na naš izbor da U_d bude istog reda veličine kao i U_s, koje na isti način, u principu, učestvuje u formiranju približenja za u_s, sledujе činjenica da se može smatrati da su "u_0" i "u_s" približno istog reda veličine(radi se samo o prvim približenjima i prethodnog i dopunskog graničnog sloja).

Promene pojedinih približenja brzine u graničnom sloju su mnogo veće po "y", nego po "x". Ova činjenica je korišćena i pri analizi izraza za Δ_s . Ovo, uz pomoć prvog podatka pod c) omogućuje da se odbace i članovi: $u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}$; $u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}$ Dodali se svemu tome još i činjenica zabeležena pod e), mogu se zanemariti i članovi: $u_s\frac{\partial u_1}{\partial x}$; $u_1\frac{\partial u_s}{\partial x}$;

Zbog istih razloga zbog kojih su u izrazu za Δ_s mogli biti odbačeni članovi $v_1\frac{\partial u_0}{\partial y}$; $v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}$, mogu se i u izrazu (1.30) zanemariti članovi:

$$v_1\frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad v_1\frac{\partial u_s}{\partial y}$$

Ostaje još da se reši pitanje poslednja dva člana u izrazu (1.30):

$$v_s\frac{\partial u_1}{\partial y} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Činjenica simbolično navedena pod b) na početku analize reda veličine izraza (1.30), udružena sa pojavom da je "v_d" za vreme razvoja dopunskog graničnog sloja, suprotnog smera od "v_s", dakle, ustvari, može se pisati: $v_s\frac{\partial u_1}{\partial y} - v_0\frac{\partial u_1}{\partial y}$, daje osnova zaključku o zanemarljivom redu veličine ove razlike u odnosu na, recimo, red veličine člana $\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$ jednačina (1.29) koji iznosi $\frac{V}{\delta_d^2}$. Ovde je "V" karakteristična brzina, a δ_d - debljina dopunskog graničnog sloja, koja se može definisati kao rastojanje od konture tela do mesta u struji gde se brzina dopunskog graničnog sloja i spoljašnja dopunska brzina U_d razlikuju za 1%, analogno načinu definisanja debljine graničnog sloja pri kretanju iz stanja mirovanja. Može se uzeti da su ove debljine graničnih slojeva približno iste. Zapravo, to što novo dopunsko kretanje nailazi na teren gde već traje jedno njemu istosmerno kretanje, može samo da učini da još bliže konturi dodje do izjednačenja spoljašnje i brzine u graničnom sloju, a to daje još veću prednost opstanku člana $\nu\frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}$ u odnosu na druge o kojima se raspravljalo. Jer, poznato je da je debljina graničnog sloja reda veličine $\frac{l}{\sqrt{Re_2}} = \sqrt{\frac{l\nu}{V}}$. Ako uzmemo da su $l = 1$ m, $V = 1$ m/s, $\nu = 0{,}01$ cm²/s (voda pri 20°C), tada se dobija $\sqrt{\frac{l \cdot \nu}{V}} = 0{,}1$ cm = 1 mm. Očigledno je debljina graničnog sloja veoma mala praktično.

Tako se, uglavnom, kroz poredjenje sa sličnim poslom oko formiranja jednačine drugog približenja pri kretanju iz stanja mirovanja, i ovih nekoliko drugih elemenata, došlo do mogućnosti da se Δ zanemari, tako da jednačine drugog približenja brzine u dopunskom graničnom sloju, onda, glase:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t_1}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=U_d\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(U_d u_s)-(u_s+u_o)\frac{\partial u_o}{\partial x}- \\ &\qquad -(v_s+v_o)\frac{\partial u_o}{\partial y}-u_o\frac{\partial u_s}{\partial x}-v_o\frac{\partial u_s}{\partial y} \\ &\qquad\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

Granični uslovi su:

$$u_1=0,\ y=0\ ;\ u_1=0,\ y\to\infty \ . \tag{1.32}$$

Uzimanjem $u = u_o + u_1 + u_2$, $v = v_o + v_1 + v_2$, pa smenjivanjem u jednačine (1.25) i oslanjanjem na relacije (1.27) i (1.31) moglo bi se, posle slične analize, doći do trećeg približenja (u_2, v_2) brzine, i td.

§4. Diskusija pokušaja u traženju načina rešavanja jednačina (1.27) i (1.31)

Dopunsko kretanje tela, dakle, ne nastaje iz stanja mirovanja. Telo se prethodno već kretalo, a u momentu $t_1 = 0$ izazvano je dopunsko kretanje. Dopunski granični sloj na telu odredjen jednačinama(1.25), odnosno jednačinama (1.27) i (1.31) mora se, prema tome, za ravanski slučaj, obradjivati sa tri promenljive (x,y,t_1). Prethodni granični sloj, koji neprekidno učestvuje u formiranju dopunskog graničnog sloja, što se vidi prisustvom funkcija "u_s" i "v_s" u desnim stranama jednačina (1.25), obradjen je promenljivim (x,y,η). Tu je bitna činjenica da nestacionarna promenljiva $\eta=\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ sadrži vreme "t", a da će imati uticaja i na dopunski granični sloj koji postoji isključivo pri $t_1 \geqslant 0$.

Sve pokušaje prilaženja problemu prikažimo na primeru dopunskog kretanja trzajem, iza prethodnog kretanja, koje je takodje izvršeno trzajem. Zaustavićemo se na prvom približenju dopunskog graničnog sloja.

Tada je, prema [12] :

B) $$u_s = U f_1'(\eta)$$

poznata funkcija koja sadrži Gausovu funkciju greške.

Ubacujući ovu vrednost za "u_s" u jednačinu (1.27) dobiće se:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 2UU'\left[1 - f_1'(\eta)\right] \tag{1.33}$$

Zbog početnog uslova: $u_o = 0$, za $t_1 = 0$, rešenje jednačine (1.33 mora se tražiti u obliku:

$$u_0 = U\zeta_0'(\eta) + t_1 2UU'\zeta_1'(\eta) \tag{1.34}$$

Za koeficijente - funkcije od promenljive η dobiće se obične diferencijalne jednačine sa odgovarajućim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0 && \zeta_0'(0) = 0, \quad \zeta_0'(\infty) = 1 \\ &\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4\left[f_1'(\eta) - 1\right], && \zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

Ali, baš usled toga što promenljiva η iz desne strane veze (1.33) sadrži vreme "t", a rešenje (1.34) mora, zbog pomenutog početnog uslova, sadržati vreme "t_1" u ulozi činilaca, osim svih navedenih diferencijalnih jednačina (1.35), koje su, u stvari, dobivene uporedjivanjem koeficijenata uz iste kombinacije funkcije U(x) i njenih izvoda sa leve i desne strane jednačine (1.33) zamenom izraza (1.34), ostaju još dva člana jednačine (1.33): $\ldots + T \cdot 2UU'\zeta_1'(\eta) = \ldots + T \cdot 2UU'\left[1 - f_1'(\eta)\right]$

koji se na dva načina mogu poništiti:

a) ili, ako bude: $$\zeta_1'(\eta) = 1 - f_1'(\eta) \tag{1.36}$$

b) ili, ako je samo: $$U' = 0$$

Prva mogućnost otpada, jer veza (1.36) ne ispunjava granične uslove za funkciju $\zeta_1'(\eta)$ koje diktira predpostavka rešenja (1.34). Ostaje, prema tome, kao jedina - druga mogućnost: $U' = 0$. Medjutim, ona ograničava domen primene postupka traženja rešenja u vidu (1.34). Naime, predpostavljanje rešenja u obliku funkcije zavisne od promenljive η (iste one sa kojom su sagradjena i rešenja predhodnog graničnog sloja) i svodjenje parcijalne na običnu diferencijalnu jednačinu moguće je samo ako je U = const, a to je za ravnu ploču.

Zaključak: do ovakvog ograničenja procesa rešavanja došlo je zbog nepodobnosti promenljive η u novim okolnostima [illegible] kretanja. Treba tražiti novu promenljivu, koja neće graničavati put rešavanja jednačina i vezati ga za samo odredjene konture tela.

3) Analizom leve strane polazne jednačine (1.27) i adekvatno početnom uslovu, dolazi se do zaključka da bi rešenje "u_o" trebalo tražiti, ne sa ranijom promenljivom η, nego sa novom promenljivom

$$\bar{\eta}=\frac{y}{2\sqrt{\nu \cdot t}} \tag{1.37}$$

Umesto oblika (1.34), treba pokušati sa:

$$u_o = U\zeta_o'(\bar{\eta}) + t_1 2UU'\zeta_1'(\bar{\eta}) \tag{1.38}$$

Zamenom (1.38) u (1.27) dobiće se veza:

$$\left.\zeta_o''' + 2\bar{\eta}\,\zeta_o'' = 0;\ \zeta_1''' + 2\bar{\eta}\,\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4[f_1'(\eta) - 1]\right\} \tag{1.39}$$

Osnovni problem pri integraciji ovih diferencijalnih jednačina je u tome, što su leve strane njihove zavisne od $\bar{\eta}$, dok su desne strane poznate funkcije od ranije promenljive η izmedju kojih postoji odnos:

$$\eta = \bar{\eta}\sqrt{\frac{t_1}{t}} \tag{1.40}$$

Traženje partikularnih integrala homogenih delova jednačina (1.39) moguće je; ali, nastojanja da se dodje do partikularnih rešenja nehomogenih jednačina sistema (1.39) dovela su do uslova, s obzirom na vezu (1.40), da je odredjivanje partikularnih integrala nehomogenih jednačina u zatvorenom obliku, moguće samo ako je ispunjen uslov $\frac{t_1}{t} \to 1$. Ovaj slučaj može imati teorijsku vrednost kao prvi korak u postupnom prilaženju problemu dopunskog graničnog sloja, koji kao prva približnost može da opiše uticaj kratkotrajnih predhodnih kretanja na razvitak dopunskog graničnog sloja.

Gledajući relacije (1.16) i (1.40) ima se utisak, da bi se, za svako odredjeno, brojno "t_1", postigla jedinstvenost promenljivih u jednačinama (1.39), kada bi se one mogle računski integrisati. Pri tom, opštost rešenja u pogledu promenljivih "x" i "y" ne bi bila ni malo ograničena.

Zaključak: ne treba dozvoliti pojavu dveju promenljivih u jednačinama (1.39). Drugim rečima, pošto smo došli do zaključka da je promenljiva (1.37) najpovoljnija i jedina u stanju da, shodno ostalim uslovima, transformiše parcijalnu jednačinu u sistem diferencijalnih, treba izraziti, još na početku rešavanja, desne strane jednačina (1.27) i (1.31) preko novih promenljivih $(x, \bar{\eta}, t_1)$. Valja posebno istaći da su za formu pretpostavljanja rešenja od presudnog značaja upravo desne strane tih jednačina (1.27) i (1.31). Sve u svemu, oblik leve strane ovih jednačina, oblik promenljive (1.37) i početni uslovi kretanja uslovljavaju da desna strana bude, u izvesnom smislu, polinom po "t_1", s a koeficijentima zavisnim od "x" i "η". To treba postići u jednačinama (1.27) i (1.31), pa ih tek tada početi rešavati. Ustvari, tome cilju treba prilagoditi jednu jedinu funkciju iz desnih strana tih jednačina - funkciju "u_s". Dakle, treba poznatu funkciju "u_s" preraditi i dovesti na najkorisniji oblik, upotrebljiv za naš problem.

II. DOPUNSKI GRANIČNI SLOJ PRI KRATKOTRAJNIM PRETHODNIM KRETANJIMA

§1. Uvod

Proučimo, najpre, granični sloj na cilindričnom telu pokrenutom iz stanja izvesnog prethodnog kratkotrajnog kretanja. Uzećemo neke osnovne tipove prethodnih nestacionarnih kretanja trzajem, stalnim ubrzanjem i stepeno-ubrzano, čija su rešenja poznata [12] . U prilog proučavanju graničnog sloja iza kratkotrajnog prethodnog kretanja idu izvesne pojedinosti u vezi sa fenomenom odvajanja graničnog sloja, tom nepoželjnom, ali neminovnom pojavom. Razjasnimo ovu ideju na primeru predhodnog trzaja. Kao što je poznato, granični sloj bi se na kružnom cilindru, pokrenutom trzajem iz stanja mirovanja, prvi put odvojio u zadnjoj zaustavnoj tački posle vremena

$$t_s = 0{,}35\frac{R}{U_\infty}$$

Lako se uveriti odavde, da je za uobičajene, praktično najčešće brojne vrednosti radijusa R i brzine U_∞ , ovo vreme manje od jedne sekunde, dakle, zaista minimalno. Medjutim, promene po "x" i "y" su bile toliko znatne i značajne, da se, evo, već u tako ranom trenutku odigrava dogadjaj od prvorazredne važnosti u teoriji graničnog sloja, - odvajanje graničnog sloja.

Postavlja se pitanje može li se trenutak odvajanja graničnog sloja odložiti, što je od osnovnog interesa za praksu, ako se u medjuvremenu saopšti telu izvesno dopunsko kretanje. Na ovo pitanje treba da daju odgovor rešenja jednačina (1.25) odnosno pojedinih približenja (1.27) i (1.31). Čini se, da će se dobiti dovoljno dobri rezultati, i ako se o ovom kratkom vremenu trajanja prethodnog kretanja (koje može biti, svakako, i manje od vremena predhodnog odvajanja) ne bude vodilo računa. Treba naglasiti da se ovde ne zanemaruje ono što se stvorilo za tako kratko vreme. Staviće se, dakle, puna vrednost "u_s" brzine prethodnog graničnog sloja, koja se dobrim delom oformila i u toku tog zanemarljivo kratkog vremena, u jednačine (1.27)

§2. Dopunski trzaj iza kratkotrajnog prethodnog trzaja

Dopunskim trzajem $\left[U_d = U(x)\right]$ pokrenuto je cilindrično telo, koje se pre toga kretalo trzajem iz stanja mirovanja $\left[U_s = U(x)\right]$, za koji postoji Blazijusovo rešenje graničnog sloja:

$$u_0 = U f_1'(\eta) = U \,\mathrm{Erf}\,\eta ,$$
$$v_0 = -2\sqrt{\nu t}\, U' f_1(\eta) = -2\sqrt{\nu t}\, U'\left[\eta\,\mathrm{Erf}\,\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-\eta^2}\right)\right] \qquad (2.1)$$

Ubacivanjem ovih vrednosti u prvu od jednačina prvoga približenja (1.27) dobiće se:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 2UU'(1-f_1') \qquad (2.2)$$

Traženjem rešenja ove jednačine u vidu:

$$u_0 = U\zeta_0'(\eta) + t\cdot 2UU'\zeta_1'(\eta) \qquad (2.3)$$

dobiće se za nepoznate funkcije diferencijalne jednačine:

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0$$
$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4(f_1' - 1) \qquad (2.4)$$

sa graničnim uslovima, prema (1.28), u obliku:

$$\zeta_0(0) = \zeta_0'(0) = 0 , \quad \zeta_0'(\infty) = 1$$
$$\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0 , \quad \zeta_1'(\infty) = 0 \qquad (2.5)$$

Rešenje prve od jednačina (2.4), sa odgovarajućim graničnim uslovom, glasi:

$$\zeta_0'(\eta) = \mathrm{Erf}\,\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\gamma^2}\,d\gamma \qquad (2.6)$$

Ako partikularno rešenje druge od jednačina (2.4):

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4\,\mathrm{Erf}\,\eta - 4$$

potražimo u obliku: $\zeta_{1p}'(\eta) = X(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + S(\eta)$

za koeficijente X i S dobićemo diferencijalne jednačine:

$$X'' + 2\eta X' - 4X = 4$$
$$S'' + 2\eta S' - 4S = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}X' e^{-\eta^2} - 4$$

čija su odgovarajuća rešenja:

$$X(\eta) = 2\eta^2$$
$$S(\eta) = 2 + 2\eta^2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}$$

tako da je partikularni integral polazne nehomogene jednačine:

$$\zeta_{1p}'(\eta) = 2\eta^2\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 2\eta^2 + 2$$

Pošto su partikularna rešenja homogenog dela jednačine:

$$\zeta_{1L}'(\eta) = 1 + 2\eta^2 ; \quad \zeta_{1L}' = \frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} ;$$

opšti integral druge od jednačina sistema (2.4) glasi:

$$\zeta_1'(\eta)=C_1(1+2\eta^2)+C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-Erf\eta)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right]+$$
$$+2\eta^2 Erf\eta+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}+2\eta^2+2$$

Koristeći granične uslove (2.5) dobiće se vrednosti konstanata:

$$C_1=-2,\qquad C_2=0$$

pa je, konačno, rešenje:

$$\zeta_1'(\eta)=2\eta^2 Erf\eta+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}-2\eta^2 \tag{2.7}$$

Pomoću izraza (2.3) i druge jednačine sistema (1.27) može se doći do:

$$v_1=-2\sqrt{\nu t}\left[U'\zeta_0(\eta)+2t(U'^2+UU'')\zeta_1(\eta)\right] \tag{2.8}$$

a onda jednačina za drugo približenje brzine u graničnom sloju (1.31) dobija oblik:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=UU'P_0(\eta)+t\left[2UU'^2P_{1a}(\eta)+2U^2U''P_{1b}(\eta)\right]+$$
$$+t^2\left[4UU'^3+4U^2U'U''\right]P_2(\eta) \tag{2.9}$$

gde su poznate funkcije:

$$\left.\begin{aligned}
P_0(\eta)&=-3\eta^2Erf^2\eta+\left(\frac{6}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}+2\right)Erf\eta+\frac{6}{\pi}e^{-2\eta^2}-\frac{6}{\pi}e^{-\eta^2}+1\\
P_{1a}(\eta)&=-4\eta^2Erf^2\eta+\left[\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+4\eta^2-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta\right]Erf\eta+\\
&+\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{3\pi}\eta^2\right)e^{-2\eta^2}-\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\right)e^{-\eta^2}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta\\
P_{1b}(\eta)&=-4\eta^2Erf^2\eta+\left[\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+4\eta^2\right]Erf\eta+\\
&+\frac{4}{3\pi}(2\eta^2-1)e^{-2\eta^2}+\left(\frac{4}{3\pi}-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\right)e^{-\eta^2}\\
P_2(\eta)&=-\frac{4}{3}\eta^4Erf^2\eta+\left[\left(-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta+\frac{8}{3}\eta^4\right]\cdot\\
&\cdot Erf\eta-\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{8}{3\pi}\eta^2\right)e^{-2\eta^2}+\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta^3\right)\cdot\\
&\cdot e^{-\eta^2}-\frac{4}{3}\eta^4-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Tražeći rešenje jednačine (2.9) u vidu:

$$u_1=tUU'F_0'(\eta)+t^2\left[2UU'^2F_{1a}'(\eta)+2U^2U''F_{1b}'(\eta)\right]+$$
$$+t^3(4UU'^3+4U^2U'U'')F_2'(\eta) \tag{2.11}$$

za nepoznate koeficijente - funkcije od promenljive "η" dobiće se diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
F_0'''+2\eta F_0''-4F_0'&=-4P_0(\eta)\\
F_{1a}'''+2\eta F_{1a}''-8F_{1a}'&=-4P_{1a}(\eta)\\
F_{1b}'''+2\eta F_{1b}''-8F_{1b}'&=-4P_{1b}(\eta)\\
F_2'''+2\eta F_2''-12F_2'&=-4P_2(\eta)
\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Rešimo ove jednačine.

1° Partikularni integrali homogenog dela prve od sistema jednačina (2.12) su:

$$F_{0k}'=1+2\eta^2;\ F_{0k}'=\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-Erf\eta)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}$$

Ako partikularno rešenje nehomogene jednačine predpostavimo u obliku:
$$F'_{op}(\eta) = X\,Erf^2\eta + Y\,Erf\eta + S \tag{2.13}$$
za funkcije X, Y, S dobiće se diferencijalne jednačine:
$$\left.\begin{aligned} &X'' + 2\eta X' - 4X = 12\\ &Y'' + 2\eta Y' - 4Y = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}X' e^{-\eta^2} - \frac{24}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - \varepsilon\\ &S'' + 2\eta S' - 4S = -\frac{\varepsilon}{\pi}X e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Y' e^{-\eta^2} - \frac{24}{\pi}e^{-2\eta^2} + \frac{24}{\pi}e^{-\eta^2} - 4 \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$
Opšte rešenje diferencijalne jednačine za funkciju X je:
$$X = K_1(1+2\eta^2) + K_1'\left[\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-Erf\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right] - 3$$

ali, zbog svog položaja u partikularnom integralu (2.13), oblik funkcije X koji odgovara problemu glasi:
$$X = K_1(1+2\eta^2) - 3$$
Sada diferencijalna jednačina za funkciju Y ostaje:
$$Y'' + 2\eta Y' - 4Y = -\left(\frac{32}{\sqrt{\pi}}K_1\eta + \frac{24}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2} - 8$$
a njeno potrebno rešenje:
$$Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(4K_1+3)\eta e^{-\eta^2} + 2$$
I, konačno tražeći rešenje treće jednačine sistema (2.14):
$$S'' + 2\eta S' - 4S = \left[\left(\frac{16}{\pi}K_1 + \frac{24}{\pi}\right)\eta^2 - \frac{24}{\pi}K_1 - \frac{12}{\pi}\right]e^{-2\eta^2} + \frac{24}{\pi}e^{-\eta^2} - 4$$
dolazimo do zaključka da je to rešenje moguće naći samo ako je:
$$K_1 = \frac{3}{2}$$
Ovo rešenje ima oblik:
$$S(\eta) = \frac{6}{\pi}e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\pi}e^{-\eta^2} + 1$$
te tako, najzad, dolazimo do partikularnog integrala (2.13) nehomogene jednačine:
$$F'_{op}(\eta) = \left(3\eta^2 - \frac{3}{2}\right)Erf^2\eta + \left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 2\right)Erf\eta + \frac{6}{\pi}e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\pi}e^{-\eta^2} + 1$$
kao i do opšteg rešenja polazne jednačine
$$F_c'(\eta) = C_1(1+2\eta^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-Erf\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right] +$$
$$+\left(3\eta^2 - \frac{3}{2}\right)Erf^2\eta + \left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} + 2\right)Erf\eta + \frac{6}{\pi}e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\pi}e^{-\eta^2} + 1 \tag{2.15}$$
gde konstante, zbog graničnih uslova, imaju vrednosti:
$$C_1 = -K_1 = -\frac{3}{2}\,;\quad C_2 = 2 - \frac{\varepsilon}{\pi}$$
Napomena: Za rešavanje sledećih jednačina sistema (2.12) nije više potrebno pisati nove propratne komentare, jer su oni isti kao i u ovom slučaju. Zato će se samo navoditi rezultati

[illegible] redoslodom kao u prethodnom tekstu, tako da će se moći [illegible]djivanjem lako doći do odgovarajućeg komentara.

$$F_{1a}''' + 2\eta F_{1a}'' - 8F_{1a}' = 16\eta^2 \mathrm{Erf}^2\eta + \Big[\Big(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} - 16\eta^2 +$$
$$+ \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta\Big]\mathrm{Erf}\,\eta - \Big(\frac{16}{3\pi} + \frac{16}{3\pi}\eta^2\Big)e^{-2\eta^2} + \Big(\frac{16}{3\pi} + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta$$

$$F_{1aL}'(\eta) = 1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4$$

$$F_{1aL}'(\eta) = \frac{1}{32}\Big(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\Big)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\Big(\eta^3 + \frac{5}{2}\eta\Big)e^{-\eta^2}$$

$$F_{1ap}'(\eta) = X\,\mathrm{Erf}^2\eta + Y\,\mathrm{Erf}\,\eta + S$$

$$X'' + 2\eta X' - 8X = 16\eta^2$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 8Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2} + \Big(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} - 16\eta^2 + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta$$

$$S'' + 2\eta S' - 8S = -\frac{8}{\pi}X e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\eta^2} - \Big(\frac{16}{3\pi} + \frac{16}{3\pi}\eta^2\Big)e^{-2\eta^2} +$$
$$+ \Big(\frac{16}{3\pi} + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta$$

$$X = K_1\Big(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\Big) - 4\eta^2 - 1$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 8Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}\Big[(8K_1 - 8)\eta + \frac{16}{3}K_1\eta^3\Big]e^{-\eta^2} + \Big(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} -$$
$$- 16\eta^2 + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta$$

$$Y = \Big[\Big(\frac{20}{3\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{35}{6\sqrt{\pi}}\Big)\eta + \Big(\frac{1}{3\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}K_1\Big)\eta^3\Big]e^{-\eta^2} + 4\eta^2 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta + 1$$

$$S'' + 2\eta S' - 8S = \Big[\Big(\frac{72}{3\pi} - \frac{104}{3\pi}K_1\Big) + \Big(-\frac{24}{\pi} - \frac{32}{3\pi}K_1\Big)\eta^2 + \Big(\frac{32}{3\pi}K_1 +$$
$$+ \frac{8}{3\pi}\Big)\eta^4\Big]e^{-2\eta^2} + \Big(\frac{16}{\pi} - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\Big)e^{-\eta^2} - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta$$

$$K_1 = \frac{1}{4}$$

$$S = \Big(\frac{2}{3\pi}\eta^2 - \frac{4}{3\pi}\Big)e^{-2\eta^2} + \Big(-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{7}{6\sqrt{\pi}}\eta - \frac{8}{5\sqrt{\pi}}\Big)e^{-\eta^2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta$$

$$F_{1ap}'(\eta) = \Big[K_1\Big(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\Big) - 4\eta^2 - 1\Big]\mathrm{Erf}^2\eta + \Big\{\Big[\Big(\frac{20}{3\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{35}{6\sqrt{\pi}}\Big)\eta +$$
$$+ \Big(\frac{1}{3\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}K_1\Big)\eta^3\Big]e^{-\eta^2} + 4\eta^2 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta + 1\Big\}\mathrm{Erf}\,\eta +$$
$$+ \Big(\frac{2}{3\pi}\eta^2 - \frac{4}{3\pi}\Big)e^{-2\eta^2} + \Big(-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{7}{6\sqrt{\pi}}\eta - \frac{8}{5\pi}\Big)e^{-\eta^2} +$$
$$+ \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\eta$$

Opšte rešenje je: $F_{1a}'(\eta) = C_1\Big(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\Big) + C_2\Big[\frac{1}{32}\Big(1 + 4\eta^2 +$

$$+ \frac{4}{3}\eta^4\Big)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\Big(\eta^3 + \frac{5}{2}\eta\Big)e^{-\eta^2}\Big] + F_{1ap}'(\eta) \qquad (2.16)$$

a konstante, zbog graničnih uslova, dobijaju vrednosti:

$$C_1 = -K_1 = -1, \quad C_2 = 32 - \frac{256}{15\pi}.$$

3° $F_{16}''' + 2\eta F_{16}'' - 8F_{16}' = -4P_{16}(\eta)$

$$F_{16}'(0) = 0, \quad F_{16}'(\infty) = 0.$$

$$(F_{16h})_1 = 1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4$$

$$(F_{16h})_2 = \frac{1}{32}(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}(\eta^3 + \frac{5}{2}\eta)e^{-\eta^2}$$

$$F_{16p}'(\eta) = X\,\mathrm{Erf}^2\eta + Y\,\mathrm{Erf}\,\eta + S$$

$$X'' + 2\eta X' - 8X = 16\eta^2$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 8Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2} - \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 - \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2} - 16\eta^2$$

$$S'' + 2\eta S' - 8S = -\frac{8}{\pi}Xe^{-2\eta^2} + \frac{16}{3\pi}(1 - 2\eta^2)e^{-2\eta^2} -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\eta^2} + \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 - \frac{16}{3\pi}\right)e^{-\eta^2}$$

$$X = K_1(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4) - 4\eta^2 - 1$$

$$Y = \left[\left(\frac{20}{3\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{19}{3\sqrt{\pi}}\right)\eta + \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}K_1 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\right)\eta^3\right]e^{-\eta^2} + 4\eta^2 + 1$$

$$S = \frac{2}{\pi}\eta^2 e^{-2\eta^2} + \left(\frac{8}{15\pi} - \frac{3}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\eta^3\right)e^{-\eta^2}$$

$$K_1 = 1{,}0$$

Opšte rešenje ove jednačine, prema tome, je:

$$F_{1c}'(\eta) = C_1 (F_{1ck}')_1 + C_2 (F_{1ck}')_2 + F_{1cp}'(\eta) \qquad \textbf{(2.17)}$$

a preko graničnih uslova dobiju se vrednosti konstanata:

$$C_1 = -K_1 = -1, \quad C_2 = 32 - \frac{256}{15\pi}$$

4° $F_2''' + 2\eta F_2'' - 12 F_2 = -4 P_2(\eta)$

$$F_2'(0) = 0, \quad F_2'(\infty) = 0.$$

$$(F_{2k}')_1 = 1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6$$

$$(F_{2k}')_2 = \frac{1}{384}\left(1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6\right)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) -$$

$$- \frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta\right)e^{-\eta^2}$$

$$F_{2p}'(\eta) = X\,\mathrm{Erf}^2\eta + Y\,\mathrm{Erf}\,\eta + S$$

$$X'' + 2\eta X' - 12X = \frac{16}{3}\eta^4$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 12Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2} + \left(\frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta^3 +\right.$$

$$\left. + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2} - \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta - \frac{32}{3}\eta^4$$

$$S'' + 2\eta S' - 12S = -\frac{8}{\pi}Xe^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\eta^2} + \left(\frac{8}{3\pi} + \frac{32}{3\pi}\eta^2\right)e^{-2\eta^2} -$$

$$-\left(\frac{8}{3\pi} + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta^3\right)e^{-\eta^2} + \frac{16}{3}\eta^4 + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\eta$$

$$X = K_1\left(1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6\right) - \frac{4}{3}\eta^4 - 2\eta^2 - \frac{1}{3}$$

$$Y = \left[\frac{16}{15\sqrt{\pi}}K_1\eta^5 + \left(\frac{112}{15\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{44}{15\sqrt{\pi}}\right)\eta^3 + \left(\frac{44}{5\sqrt{\pi}}K_1 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{103}{30\sqrt{\pi}}\right)\eta\right]e^{-\eta^2} + \frac{8}{3}\eta^4 + 4\eta^2 + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\eta + \frac{2}{3}$$

$$K_1 = \frac{11}{24}$$

$$S = \left(\frac{2}{45\pi} - \frac{1}{90\pi}\eta^2 + \frac{11}{45\pi}\eta^4\right)e^{-2\eta^2} + \left(\frac{12}{35\pi} + \frac{103}{30\sqrt{\pi}}\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{44}{15\sqrt{\pi}}\eta^3\right)e^{-\eta^2} - \frac{4}{3}\eta^4 - 2\eta^2 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\eta - \frac{1}{3}$$

Opšte rešenje, dakle, glasi:

$$F_2'(\eta) = C_1(F_{2k}')_1 + C_2(F_{2k}')_2 + F_{2p}'(\eta) \tag{2.18}$$

a vrednosti integracionih konstanata su:

$$C_1 = -K_1 = -\frac{11}{24}\ , \ C_2 = 304 - \frac{15616}{105\pi}\ .$$

Rešenjima (2.15), (2.16), (2.17) i (2.18) u potpunosti je odredjeno i drugo približenje brzine u dopunskog graničnom sloju (2.11).

Medjutim, pošto bi odredjivanje drugih aproksimacija u svim varijantama predhodnog i dopunskog kretanja predstavljalo čisto formalno veoma dug i težak posao - zadržaćemo se svugde samo na prvim aproksimacijama pri proračunima puta i vremena odvajanja graničnog sloja. A ovo stoga da bismo na kraju mogli izvršiti uspešna medjusobna poredjenja rezultata i doneti merodavne zaključke.

Tako je, u ovom slučaju, ukupna brzina u graničnom sloju: $u = U[f_1'(\eta) + \zeta_0'(\bar\eta) + 2tU'\zeta_1'(\bar\eta)]$ (2.19)

što se dobilo sabiranjem izraza (2.1) i (2.3). Tačka odvajanja graničnog sloja definisana je uslovom

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

Odavde se može doći do vrednosti vremena odvajanja graničnog sloja, znanom izraza (2.19)

$$t = -\frac{f_1''(0) + \zeta_0''(0)}{2U'\zeta_1''(0)} \tag{2.20}$$

gde su: $\zeta_0''(0) = f_1''(0) = 2/\sqrt{\pi}\ ,\ \zeta_1''(0) = 2/\sqrt{\pi}$

Primer: kružni cilindar radijusa R = 50 cm., trzajem jačine U_∞ = 10 cm/s, pokrenut je iz stanja predhodnog trzaja istog intenziteta.

Poznato je da je, u slučaju kružnog cilindra, brzina potencijalnog strujanja: $U = 2U_\infty \sin\frac{x}{R}$

Iz obrasca (2.20) se vidi da u tom slučaju, prvo odvajanje graničnog sloja nastaje u zadnjoj zaustavnoj tački kao i pri kretanju iz stanja mirovanja, posle vremena

$$t_{odv} = 0{,}5\,\frac{R}{U_\infty} = 2{,}50\ sec \tag{2.21}$$

Do toga trenutka kružni cilindar je prešao put:

$$s_{odv} = 1{,}0\ R \tag{2.22}$$

&3. Dopunsko jednako-ubrzano kretanje iza prethodnog trzaja

Na prethodno kretanje ostvareno trzajem iz stanja mirovanja $\left[U_s = U(x)\right]$, nadovezuje se dopunsko kretanje cilindričnog tela stalnim ubrzanjem $\left[U_d = t\,W(x)\right]$. Smenjujući ove i vrednosti (2.1) u prvu od jednačina (1.27) dobiće se, za prvo približenje brzine u graničnom sloju, veza:

$$\frac{\partial u_o}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} = W + (UW' + U'W)(1 - f_1') \tag{2.23}$$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku

$$u_o = tW\,\zeta_o'(\eta) + t^2(UW' + U'W)\,\zeta_1'(\eta) \tag{2.24}$$

dobićemo za nepoznate koeficijente - funkcije obične diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_o''' + 2\eta\,\zeta_o'' - 4\zeta_o' = -4 \\ &\zeta_1''' + 2\eta\,\zeta_1'' - 8\zeta_1' = 4(f_1' - 1) \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Granični uslovi su:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_o(0) = \zeta_o'(0) = 0, \quad \zeta_o'(\infty) = 1 \\ &\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Rešenje prve od jednačina (2.25), koje ispunjava odgovarajući granični uslov (2.26) je:

$$\zeta_o'(\eta) = (1 + 2\eta^2)\,Erf\,\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,e^{-\eta^2} - 2\eta^2 \tag{2.27}$$

Ako partikularno rešenje druge od jednačina (2.25)

$$\zeta_1''' + 2\eta\,\zeta_1'' - 8\zeta_1' = 4(Erf\,\eta - 1)$$

potražimo u vidu: $\zeta_{1p}'(\eta) = X(\eta)\,Erf\,\eta + S(\eta)$

za koeficijente $X(\eta)$ i $S(\eta)$ dobiće se diferencijalne jednačine

$$X'' + 2\eta X' - 8X = 4$$

$$S'' + 2\eta S' - 8S = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,X' e^{-\eta^2} - 4$$

čija su odgovarajuća rešenja:

$$X = -\frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{2},$$

tako da je partikularni integral polazne nehomogene diferencijalne jednačine:

$$\mathfrak{J}'_{1p}(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Erf}\,\eta$$

Pošto su partikularna rešenja homogenog dela ove diferencijalne jednačije :

$$(\mathfrak{J}'_{1k})_1 = 1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4$$

$$(\mathfrak{J}'_{1k})_2 = \frac{1}{32}\left(1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\right)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}\eta + \eta^3\right)e^{-\eta^2}$$

Opšte rešenje druge od jednačina (2.25) glasi:

$$\mathfrak{J}'_1(\eta) = C_1(\mathfrak{J}'_{1k})_1 + C_2(\mathfrak{J}'_{1k})_2 + \mathfrak{J}'_{1p}(\eta)$$

Koristeći granične uslove (2.26) mogu se izračunati vrednosti konstanata: $C_1 = 0$, $C_2 = -16$

pa je, konačno, rešenje naše jednačine:

$$\mathfrak{J}'_1(\eta) = -\frac{1}{2}(1 - \mathrm{Erf}\,\eta)\left(4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4\right) + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}\eta + \eta^3\right)e^{-\eta^2} \tag{2.28}$$

Funkcijama (2.27) i (2.28) potpuno je odredjeno rešenje za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja (2.24) a uz pomoć vrednosti (2.1) i ukupna brzina u graničnom sloju oko cilindričnog tela:

$$u = Uf'_1(\eta) + tW\mathfrak{J}'_0(\eta) + t^2(UW' + U'W)\mathfrak{J}'_1(\eta) \tag{2.29}$$

Iz uslova za odvajanje graničnog sloja na telu $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ sleduje, preko veze (2.29), relacija:

$$Uf''_1(0) + tW\mathfrak{J}''_0(0) + t^2(UW' + U'W)\mathfrak{J}''_1(0) = 0 \tag{2.30}$$

gde su poznate vrednosti koeficijenata:

$$f''_1(0) = 1{,}128; \quad \mathfrak{J}''_0(0) = 2{,}256; \quad \mathfrak{J}''_1(0) = 0{,}940.$$

Iz jednačine (2.30) se može izračunati vreme koje protekne do pojave odvajanja graničnog sloja u odredjenoj tački na konturi cilindričnog tela.

Primer: Kružnom cilindru radijusa $R = 50$ cm pokrenutom iz mirovanja trzajem ($U_\infty = 10$ cm/s), ubrzo je saopšteno i konstantno ubrzanje $V_o = 10$ cm/s^2. Koristeći poznate vrednosti

$$U = 2U_\infty \sin\frac{x}{R}, \quad W = 2V_o \sin\frac{x}{R},$$

iz jednačine (2.30) se dobija da vreme odvajanja graničnog sloja u zadnjoj zaustavnoj tački kružnog cilindra predstavlja rešenje jednačine:

$$0{,}94\,t^2 - 2{,}82\,t - 1{,}41 = 0$$

Dakle, prvo odvajanje graničnog sloja, nastaje posle vremena:

$$t_{odv} = 3{,}4 \text{ sec} \tag{2.31}$$

a put odvajanja iznosi:

$$s_{odv} = U \quad t + \frac{1}{2} V_o t^2 = 91{,}8 \text{ cm} \tag{2.32}$$

§4. Trzaj iza kratkotrajnog jednako-ubrzanog prethodnog kretanja

Cilindrično telo je pokrenuto stalnim ubrzanjem $\left[U_s = tW(x)\right]$, a potom dodatnim trzajem $\left[U_d = U(x)\right]$ dovedeno u konačno stanje kretanja.

Pošto je granični sloj na telu, zbog prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem, opredeljen Blasijusovim rešenjem [12]

$$u_s = tWf_1'(\eta) = tW\left[(1+2\eta^2)Erf\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 2\eta^2\right]$$

$$v_s = -2t\sqrt{\nu t}\,W' f_1(\eta) \tag{2.33}$$

prva od jednačina za prvo približenje brzine u graničnom sloju (1.27) postaje:

$$\frac{\partial u_o}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} = t(UW' + U'W)(1 - f_1') \tag{2.34}$$

Pretpostavljanjem rešenja u obliku:

$$u_o = U J_o'(\eta) + t^2(UW' + U'W)J_1'(\eta) \tag{2.35}$$

nastaju jednačine:

$$J_o''' + 2\eta J_o'' = 0$$

$$J_1''' + 2\eta J_1'' - 8J_1' = 4(f_1' - 1) \tag{2.36}$$

na graničnim uslovima:

$$J_o(0) = J_o'(0) = 0, \quad J_o'(\infty) = 1$$

$$J_1(0) = J_1'(0) = 0, \quad J_1'(\infty) = 0 \tag{2.37}$$

Rešenje prve od jednačina (2.36) koje ispunjava odgovarajući granični uslov (2.37) je:

$$J_o'(\eta) = Erf\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\sigma^2} d\sigma \tag{2.38}$$

Ako partikularni integral druge od jednačina (2.36):

$$J_1''' + 2\eta J_1'' - 8J_1' = (8\eta^2+4)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2} - 8\eta^2 - 4$$

potražimo u vidu:

$$J_{1p}'(\eta) = X(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + S(\eta)$$

za koeficijente - funkcije $X(\eta)$ i $S(\eta)$ dobiće se diferencijalne jednačine:

$$X'' + 2\eta X' - 8X = 8\eta^2 + 4$$

$$S'' + 2\eta S' - 8S = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,X' e^{-\eta^2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2} - 8\eta^2 - 4$$

čija su odgovarajuća rešenja

$$X = -1 - 2\eta^2$$

$$S = 1 + 2\eta^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2}$$

Dakle, partikularni integral nehomogene jednačine je:

$$J_{1p}'(\eta) = (1+2\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2}$$

Kako su partikularna rešenja homogenog dela ove diferencijalne jednačine:

$$(J_{1k}')_1 = 1 + 4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^4$$

$$(J_{1k}')_2 = \frac{1}{32}\left(1+4\eta^2+\frac{4}{3}\eta^4\right)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}\eta + \eta^3\right)e^{-\eta^2}$$

opšte rešenje druge od jednačina (2.36) je:

$$J_1'(\eta) = C_1 (J_{1k}')_1 + C_2 (J_{1k}')_2 + J_{1p}'(\eta)$$

Korišćenjem graničnih uslova (2.37) može se doći do vrednosti konstanata:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -32.$$

pa je, konačno, rešenje polazne jednačine:

$$J_1'(\eta) = 1 + 2\eta^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2} - (1+2\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta - \left(1+4\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^6\right)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}\eta + \eta^3\right)e^{-\eta^2} \qquad (2.39)$$

Sada je brzina dopunskog graničnog sloja, sa tačnošću do prvog približenja (2.35) odredjena, a uz pomoć izraza (2.33) može se doći do ukupne brzine u graničnom sloju oko cilindričnog tela:

$$u = U J_0'(\eta) + tW f_1'(\eta) + t^2(UW' + U'W)J_1'(\eta) \qquad (2.40)$$

Iz uslova za tačku odvajanja graničnog sloja na telu $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ dolazi se do izraza:

$$t^2(UW'' + U'W)J_1''(0) + tW f_1''(0) + U J_0''(0) = 0 \qquad (2.41)$$

gde su poznate konstante:

$$f_1''(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \quad J_0''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad J_1''(0) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}.$$

Znači, iz veze (2.41) se može naći vreme koje prodje do pojave odvajanja graničnog sloja u odredjenoj tački na konturi cilindričnog tela.

Primer: Kružnom cilindru radijusa $R = 50$ cm, pokrenuto stalnim ubrzanjem $V_0 = 10$ cm/s, uskoro je dodat dopunskim trzaj $U_\infty = 10$ cm/s. Pošto su $U = 2U_\infty \sin\frac{x}{R}$, $W = 2V_0 \sin\frac{x}{R}$, iz jednačine (2.41) sleduje da vreme odvajanja graničnog sloja u zadnjoj zaustavnoj tački kružnog cilindra, treba dobiti rešavanjem jednačine

$$8t^2 - 30t - 15 = 0$$

Pozitivno rešenje ove kvadratne jednačine kazuje da prvo odvajanje graničnog sloja nastaje u trenutku:

$$t_{odv} = 4{,}197 \text{ sec} \tag{2.42}$$

Put odvajanja je:

$$s_{odv} = U_\infty t_{odv} + \frac{1}{2} V_0 t_{odv}^2 = 130{,}17 \text{ cm} \tag{2.43}$$

§5. Jednako-ubrzano kretanje iza kratkotrajnog kretanja stalnim ubrzanjem

Cilindrično telo je pokrenuto stalnim ubrzanjem $[U_s = tW(x)]$, a ubrzo mu je saopšteno novo konstantno ubrzanje V_0: $[U_d = tW(x)]$. Ubacujući ove vrednosti, zajedno sa izrazima (2.33) u prvu jednačinu sistema (1.27), dobiće se parcijalna jednačina za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = W + 2t^2 WW'(1 - f_1') \tag{2.44}$$

Potražimo rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_0 = tWJ_0'(\eta) + t^3\, 2WW'J_1'(\eta) \tag{2.45}$$

Tada će se za nepoznate koeficijente funkcije dobiti diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} J_0''' + 2\eta J_0'' - 4J_0' &= -4 \\ J_1''' + 2\eta J_1'' - 12J_1' &= 4(f_1' - 1) \end{aligned} \tag{2.46}$$

sa graničnim uslovima:

$$\zeta_0(0) = \zeta_0'(0) = 0, \quad \zeta_0'(\infty) = 1,$$
$$\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0. \tag{2.47}$$

Rešenje prve od jednačina sistema (2.46) koje ispunjava odgovarajući granični uslov je:

$$\zeta_0'(\eta) = (1+2\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 2\eta^2 \tag{2.48}$$

Ako partikularno rešenje druge jednačine sistema (2.46)

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 12\zeta_1' = (8\eta^2+4)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 8\eta^2 - 4$$

potražimo u obliku: $\zeta_{1p}'(\eta) = X\,\mathrm{Erf}\,\eta + S$

za koeficijente-funkcije dobiće se diferencijalne jednačine:

$$X'' + 2\eta X' - 12X = 8\eta^2 + 4$$
$$S'' + 2\eta S' - 12S = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}X' e^{-\eta^2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 8\eta^2 - 4$$

čija su odgovarajuća rešenja:

$$X(\eta) = -\eta^2 - \frac{1}{2}$$
$$S(\eta) = \eta^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}$$

Prema tome, partikularni integral nehomogene jednačine je:

$$\zeta_{1p}'(\eta) = (\eta^2 + \tfrac{1}{2})(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}$$

Pošto su partikularna rešenja homogenog dela ove diferencijalne jednačine

$$(\zeta_{1k}')_1 = 1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6$$
$$(\zeta_{1k}')_2 = \frac{1}{384}(1+6\eta^2+4\eta^4+\frac{8}{15}\eta^6)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{720\sqrt{\pi}}(\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta)e^{-\eta^2}$$

njeno opšte rešenje glasi:

$$\zeta_1'(\eta) = C_1(\zeta_{1k}')_1 + C_2(\zeta_{1k}')_2 + \zeta_{1p}'(\eta)$$

Uz pomoć graničnih uslova (2.47) mogu se izračunati vrednosti konstanata:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -192$$

Tako se dolazi do konačnog rešenja polazne jednačine:

$$\zeta_1'(\eta) = \frac{1}{2} + \eta^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - (\frac{1}{2}+\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta - \frac{1}{2}(1+6\eta^2+4\eta^4+$$
$$+\frac{8}{15}\eta^6)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) + \frac{12}{45\sqrt{\pi}}(\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta)e^{-\eta^2} \tag{2.49}$$

Rešenjima (2.48) i (2.49) odredjeno je prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja (2.45). Pomoću izraza (2.45) i druge jednačine sistema (1.27) može se izračunati:

$$v_0 = -2\sqrt{\nu t}\left[tW'\zeta_0(\eta) + 2t^3(W'^2 + WW'')\zeta_1(\eta)\right] \tag{2.50}$$

a onda jednačina za drugo približenje brzine u graničnom sloju (1.31) postaje:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=t^2WW'\Pi_1(\eta)+t^4\left[WW'^2\Pi_2(\eta)+W^2W''\Pi_3(\eta)\right]+$$
$$+t^6WW'(W'^2+WW'')\Pi_4(\eta) \qquad (2.51)$$

gde su poznate funkcije:

$$\Pi_1(\eta)=(-4\eta^4-3)\mathrm{Erf}^2\eta+\left[\left(-\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+8\eta^4+4\eta^2-\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta+2\right]\mathrm{Erf}\,\eta+$$
$$+\left(-\frac{4}{\pi}\eta^2+\frac{8}{\pi}\right)e^{-2\eta^2}+\left(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta-\frac{8}{\pi}\right)e^{-\eta^2}-4\eta^4-4\eta^2+\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta+1$$

$$\Pi_2(\eta)=\left(\frac{64}{105}\eta^8+\frac{16}{3}\eta^4\right)\mathrm{Erf}^2\eta+\left[\left(\frac{36608}{19005\sqrt{\pi}}\eta^7+\frac{3298432}{19005\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{10992}{35\sqrt{\pi}}\eta^3+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{2456}{105\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}-\frac{128}{105}\eta^8+\frac{448}{105}\eta^6-\frac{64}{15\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{16}{3}\eta^4-\frac{64}{3\sqrt{\pi}}\eta^3-\left.\frac{944}{105\sqrt{\pi}}\eta\right]\mathrm{Erf}\,\eta+$$
$$+\left(\frac{125024}{19005\pi}\eta^6+\frac{3291712}{19005\pi}\eta^4+\frac{23344}{105\pi}\eta^2+\frac{32}{21\pi}\right)e^{-2\eta^2}-\left(\frac{36608}{19005\sqrt{\pi}}\eta^7+\right.$$
$$\left.+\frac{5888}{35\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{4304}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{192}{\pi}\eta^2+\frac{344}{105\sqrt{\pi}}\eta+\frac{123488}{19005\pi}\right)e^{-\eta^2}+$$
$$+\frac{64}{105}\eta^8+\frac{64}{15\sqrt{\pi}}\eta^5-\frac{64}{15}\eta^6-\frac{32}{3}\eta^4+\frac{64}{3\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{944}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

$$\Pi_3(\eta)=\left(\frac{96}{35}\eta^8+\frac{2464}{105}\eta^6+\frac{104}{3}\eta^4+8\eta^2\right)\mathrm{Erf}^2\eta+\left[\left(\frac{16}{7\sqrt{\pi}}\eta^7+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{2152}{105\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{772}{35\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{302}{105\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+\frac{192}{35}\eta^8-\frac{4816}{105}\eta^6+$$
$$\left.+\frac{184}{3}\eta^4-8\eta^2+\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta\right]\mathrm{Erf}\,\eta+\left(\frac{8}{7\sqrt{\pi}}\eta^6+\frac{344}{35\pi}\eta^4+\frac{115}{21\pi}\eta^2-\right.$$
$$\left.-\frac{176}{105\pi}\right)e^{-2\eta^2}-\left(\frac{16}{7\sqrt{\pi}}\eta^7+\frac{708}{35\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{424}{21\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta-\frac{176}{105\pi}\right)e^{-\eta^2}+$$
$$+\frac{96}{35}\eta^8+\frac{112}{5}\eta^6+\frac{80}{3}\eta^4-\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

$$\Pi_4(\eta)=\left(-\frac{64}{1575}\eta^{12}-\frac{256}{525}\eta^{10}-\frac{272}{105}\eta^8-\frac{64}{15}\eta^6-\frac{16}{3}\eta^4\right)\mathrm{Erf}^2\eta+\left(\frac{-1664\eta^{11}}{40725}+\right.$$
$$\left.+\frac{533888}{57015}\eta^9+\frac{9954144}{95025}\eta^7+\frac{35792}{172}\eta^5+\frac{944}{35}\eta^3-\frac{176}{105}\eta\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\mathrm{Erf}\,\eta+$$
$$\left(\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta+\frac{352}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{352}{525\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{32}{3}\eta^4+\frac{128}{15}\eta^6+\frac{544}{105}\eta^8+\frac{512}{525}\eta^{10}+\right.$$
$$\left.\frac{128}{1575}\eta^{12}\right)\mathrm{Erf}\,\eta+\left(-\frac{64}{285075}\eta^{10}+\frac{186848}{19005}\eta^8+\frac{5827744}{57015}\eta^6+\right.$$
$$\left.+\frac{15355616}{95025}\eta^4-\frac{5872}{175}\eta^2-\frac{66}{525}\right)\frac{1}{\pi}e^{-2\eta^2}+$$

$$+\Big(\frac{74272}{95025\pi}\eta^4+\frac{1056}{35\pi}\eta^2+\frac{88}{175\pi}+\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta-\frac{944}{35\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{35792}{175\sqrt{\pi}}\eta^5-$$

$$-\frac{9954144}{95025\sqrt{\pi}}\eta^7-\frac{533888}{57015\sqrt{\pi}}\eta^9+\frac{1664}{40725\sqrt{\pi}}\eta^{11}\Big)e^{-\eta^2}-\frac{64}{1575}\eta^{12}-$$

$$-\frac{256}{525}\eta^{10}-\frac{272}{105}\eta^8-\frac{64}{15}\eta^6-\frac{16}{3}\eta^4-\frac{352}{525\sqrt{\pi}}\eta^5-\frac{352}{105\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{176}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

Tražeći rešenje jednačine (2.51) u obliku:

$$u_1=t_1^3WW''F_0'(\eta)+t_1^5\left[WW'^2F_{1a}'(\eta)+W^2W''F_{1b}'(\eta)\right]+$$
$$+t_1^7WW'(W'^2+WW'')F_2'(\eta) \qquad (2.53)$$

za nepoznate koeficijente funkcije od promenljive "η" dobiće se diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
F_0'''+2\eta F_0''-12F_0'&=-4\Pi_1(\eta)\\
F_{1a}'''+2\eta F_{1a}''-20F_{1a}'&=-4\Pi_2(\eta)\\
F_{1b}'''+2\eta F_{1b}''-20F_{1b}'&=-4\Pi_3(\eta)\\
F_2'''+2\eta F_2''-28F_2'&=-4\Pi_4(\eta)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.54)$$

Rešimo ove jednačine:

1° Partikularni integrali homogenog dela prve jednačine sistema (2.54) su:

$$(F_0'k)_1=1+6\eta^2+4\eta^4+\frac{8}{15}\eta^6$$

$$(F_0'k)_2=\frac{1}{384}\left(1+6\eta^2+4\eta^4+\frac{8}{15}\eta^6\right)(1-\mathrm{Erf}\,\eta)-\frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\eta^5+7\eta^3+\frac{33}{4}\eta\right)e^{-\eta^2}$$

Ako partikularno rešenje nehomogene jednačine pretpostavimo u vidu:

$$F_{0p}'(\eta)=X\,\mathrm{Erf}^2\eta+Y\,\mathrm{Erf}\,\eta+S \qquad (2.55)$$

za funkcije X, Y, S dobiće se diferencijalne jednačine:

$$X''+2\eta X'-12X=16\eta^4+12$$

$$Y''+2\eta Y'-12Y=-\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2}+\left(\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}-32\eta^4-16\eta^2-\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta-8 \qquad (2.56)$$

$$S''+2\eta S'-12S=-\frac{8}{\pi}Xe^{-2\eta^2}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2}+\Big(\frac{16}{\pi}\eta^2-$$
$$-\frac{32}{\pi}\Big)e^{-2\eta^2}+\left(-\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta+\frac{32}{\pi}\right)e^{-\eta^2}+16\eta^4+16\eta^2-\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta-4$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine za funkciju X(η) koja odgovara ovom problemu je:

$$X(\eta)=K_1\left(1+6\eta^2+4\eta^4+\frac{8}{15}\eta^6\right)-4\eta^4-6\eta^2-2$$

Sada diferencijalna jednačina za funkciju Y(η) postaje:

$$y'' + 2\eta y' - 12y = \Big[\Big(\frac{64}{\sqrt{\pi}} - \frac{96}{\sqrt{\pi}}K_1\Big)\eta + \Big(\frac{160}{\sqrt{\pi}} - \frac{128}{\sqrt{\pi}}K_1\Big)\eta^3 - \frac{128}{5\sqrt{\pi}}K_1\eta^5\Big]e^{-\eta^2} - 32\eta^4 - 16\eta^2 + \frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta - 8$$

a njeno rešenje, potrebno ovom prilikom je:

$$y(\eta) = 8\eta^4 + 14\eta^2 - \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\eta + 3 + \Big[\Big(\frac{44}{5\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{7}{\sqrt{\pi}}\Big)\eta + \Big(\frac{112}{15\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{8}{\sqrt{\pi}}\Big)\eta^3 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}}K_1\eta^5\Big]e^{-\eta^2}$$

I, konačno, tražeći rešenje treće jednačine sistema (2.56)

$$S'' + 2\eta S' - 12S = -\frac{8}{\pi}\chi e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\chi' e^{-\eta^2} + \Big(\frac{16}{\pi}\eta^2 - \frac{32}{\pi}\Big)e^{-2\eta^2} + \Big(-\frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{16}{\sqrt{\pi}}\eta + \frac{32}{\pi}\Big)e^{-\eta^2} + 16\eta^4 + 16\eta^2 - \frac{32}{\sqrt{\pi}}\eta - 4$$

dolazimo do zaključka da je to rešenje moguće naći samo ako je:

$$K_1 = 5/4$$

Ovo rešenje glasi:

$$S(\eta) = \frac{1}{3\pi}(2\eta^4 + \eta^2 + 8)e^{-2\eta^2} + \Big(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{9}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{112}{35\pi}\Big)e^{-\eta^2} - 4\eta^4 - 8\eta^2 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\eta - 1$$

te tako, najzad, postaje potpuno odredjen partikularni integral (2.55), a sa time i opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine:

$$F_0'(\eta) = C_1(F_{0k}')_1 + C_2(F_{0k}')_2 + F_{0p}'(\eta) \qquad (2.57)$$

Zbog graničnih uslova: $F_0'(0) = 0, \ F_0'(\infty) = 0,$ konstante moraju imati vrednosti:

$$C_1 = -K_1 = -\frac{5}{4}, \quad C_2 = 864 + \frac{7168}{35\pi}$$

2° $F_{1a}''' + 2\eta F_{1a}'' - 20F_{1a}' = -4\Pi_2(\eta)$

$$(F_{1ak}')_1 = 1 + 10\eta^2 + \frac{40}{3}\eta^4 + \frac{16}{3}\eta^6 + \frac{16}{21}\eta^8 + \frac{32}{945}\eta^{10}$$

$$(F_{1ak}')_2 = \frac{1}{122880}\Big(1 + 10\eta^2 + \frac{40}{3}\eta^4 + \frac{16}{3}\eta^6 + \frac{16}{21}\eta^8 + \frac{32}{945}\eta^{10}\Big)(1 - \mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{1814400\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{2}\eta^9 + 11\eta^7 + \frac{147}{2}\eta^5 + 165\eta^3 + \frac{2895}{32}\eta\Big)e^{-\eta^2}$$

$$F'_{\text{ráp}}(\eta) = X(\eta)\,\mathrm{Erf}^2\eta + Y(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + S(\eta)$$

$$X'' + 2\eta X' - 20X = -\frac{256}{105}\eta^8 - \frac{64}{3}\eta^4$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 20Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}X' e^{-\eta^2} + \frac{512}{105}\eta^8 - \frac{1792}{105}\eta^6 +$$

$$+\frac{256}{15\sqrt{\pi}}\eta^5 - \frac{64}{3}\eta^4 + \frac{256}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{3776}{105\sqrt{\pi}}\eta - \Big(\frac{146432}{19005\sqrt{\pi}}\eta^7 +$$

$$+\frac{13193728}{19005\sqrt{\pi}}\eta^5 + \frac{43968}{35\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{9824}{105\sqrt{\pi}}\eta\Big)e^{-\eta^2}$$

$$S'' + 2\eta S' - 20S = -\frac{8}{\pi}X e^{-\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Y' e^{-\eta^2} - \Big(\frac{100096}{19005\pi}\eta^6 +$$

$$+\frac{13166848}{19005\pi}\eta^4 + \frac{93376}{105\pi}\eta^2 + \frac{128}{21\pi}\Big)e^{-2\eta^2} + \Big(\frac{493952}{19005\pi} + \frac{3776}{105\sqrt{\pi}}\eta +$$

$$+\frac{768}{\pi}\eta^2 + \frac{17216}{105\sqrt{\pi}}\eta^3 + \frac{23552}{35\sqrt{\pi}}\eta^5 + \frac{146432}{19005\sqrt{\pi}}\eta^7\Big)e^{-\eta^2} -$$

$$-\frac{256}{105}\eta^8 + \frac{256}{15}\eta^6 - \frac{256}{15\sqrt{\pi}}\eta^5 + \frac{128}{3}\eta^4 - \frac{256}{3\sqrt{\pi}}\eta^3 - \frac{3776}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

$$X = K_1\Big(1 + 10\eta^2 + \frac{40}{3}\eta^4 + \frac{16}{3}\eta^6 + \frac{16}{21}\eta^8 + \frac{32}{945}\eta^{10}\Big) +$$

$$+\frac{64}{105}\eta^8 + \frac{448}{105}\eta^6 + \frac{192}{9}\eta^4 + \frac{28}{3}\eta^2 + \frac{14}{15}$$

$$Y = Y(\eta), \quad S = S(\eta).$$

$$K_1 = \frac{262641053}{25340\pi} - \frac{8529747}{905\sqrt{\pi}}$$

Tako je konačno, odredjen opšti integral druge diferencijalne integracije sistema (2.54)

$$F_{1a}'(\eta)=C_1\left(1+10\eta^2+\frac{40}{3}\eta^4+\frac{16}{3}\eta^6+\frac{16}{21}\eta^8+\frac{32}{945}\eta^{10}\right)+C_2\left[\frac{1}{122880}\left(1+10\eta^2+\frac{40}{3}\eta^4+\frac{16}{3}\eta^6+\frac{16}{21}\eta^8+\frac{32}{945}\eta^{10}\right)(1-\mathrm{Erf}\,\eta)-\frac{1}{1814400\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\eta^9+11\eta^7+\frac{147}{2}\eta^5+165\eta^3+\frac{2895}{32}\eta\right)e^{-\eta^2}\right]+X\,\mathrm{Erf}^2\eta+Y\,\mathrm{Erf}\,\eta+S \tag{2.58}$$

$$F_{1a}'(0)=0,\quad F_{1a}'(\infty)=0,$$

$$C_1=-K_1,\quad C_2=122880\left[K_1-S(0)\right]$$

$$3^\circ\quad F_{1b}'''+2\eta F_{1b}''-20F_{1b}'=-4\Pi_3(\eta)$$

$$F_{1bp}'=X\,\mathrm{Erf}^2\eta+Y\,\mathrm{Erf}\,\eta+S$$

$$X''+2\eta X'-20X=-\frac{384}{35}\eta^8-\frac{9856}{105}\eta^6-\frac{416}{3}\eta^4-32\eta^2$$

$$Y''+2\eta Y'-20Y=-\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2}-\left(\frac{64}{7\sqrt{\pi}}\eta^7+\frac{8608}{105\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{3088}{35\sqrt{\pi}}\eta^3-\frac{1208}{105\sqrt{\pi}}\eta\right)e^{-\eta^2}+\frac{768}{35}\eta^8+\frac{19264}{105}\eta^6-\frac{736}{3}\eta^4+32\eta^2-\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

$$S''+2\eta S'-20S=-\frac{8}{\pi}Xe^{-2\eta^2}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\eta^2}-\left(\frac{32}{7\pi}\eta^6+\frac{1376}{35\pi}\eta^4+\frac{460}{21\pi}\eta^2-\frac{704}{105\pi}\right)e^{-2\eta^2}+\left(\frac{64}{7\sqrt{\pi}}\eta^7+\frac{2832}{35\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{1696}{21\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta-\frac{704}{105\pi}\right)e^{-\eta^2}-\frac{384}{35}\eta^8-\frac{448}{5}\eta^6-\frac{320}{3}\eta^4+\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

$$X=K_1\left(1+10\eta^2+\frac{40}{3}\eta^4+\frac{16}{3}\eta^6+\frac{16}{21}\eta^8+\frac{32}{945}\eta^{10}\right)+\frac{96}{35}\eta^8+\frac{464}{15}\eta^6+\frac{800}{9}\eta^4+\frac{206}{3}\eta^2+\frac{103}{15}$$

$$y=-\frac{61}{6}+\frac{352}{945\sqrt{\pi}}\eta-\frac{305}{3}\eta^{2}-\frac{1196}{9}\eta^{4}-\frac{184}{3}\eta^{6}-\frac{192}{35}\eta^{8}+$$

$$+\Big[\Big(\frac{772}{63\sqrt{\pi}}K_1+\frac{63079}{1764\sqrt{\pi}}\Big)\eta+\Big(\frac{1408}{63\sqrt{\pi}}K_1+\frac{145183}{2205\sqrt{\pi}}\Big)\eta^{3}+\Big(\frac{448}{45\sqrt{\pi}}K_1+$$

$$+\frac{2684}{105\sqrt{\pi}}\Big)\eta^{5}+\Big(\frac{1408}{945\sqrt{\pi}}K_1+\frac{16}{7\sqrt{\pi}}\Big)\eta^{7}+\frac{64}{945\sqrt{\pi}}K_1\eta^{9}\Big]e^{-\eta^{2}}$$

$$S=\Big[\Big(\frac{2486}{945\pi}K_1+\frac{194237689}{19792080\pi}\Big)+\Big(\frac{964}{315\pi}K_1+\frac{141127}{3740\pi}\Big)\eta^{2}+$$

$$+\Big(\frac{4376}{945\pi}K_1+\frac{428}{35\pi}\Big)\eta^{4}+\Big(\frac{688}{945\pi}K_1+\frac{8}{7\pi}\Big)\eta^{6}+$$

$$+\frac{32}{945\pi}K_1\eta^{8}\Big]e^{-2\eta^{2}}+\Big(\frac{224}{945\sqrt{\pi}}+\frac{43541}{630\sqrt{\pi}}\eta+\frac{107}{\sqrt{\pi}}\eta^{3}+$$

$$+\frac{2069}{105\sqrt{\pi}}\eta^{5}+\frac{112}{63\sqrt{\pi}}\eta^{7}\Big)e^{-\eta^{2}}+\frac{96}{35}\eta^{8}+\frac{152}{5}\eta^{6}+$$

$$+\frac{764}{9}\eta^{4}+\frac{191}{3}\eta^{2}-\frac{352}{945\sqrt{\pi}}\eta+\frac{191}{30}$$

$$K_1=\frac{915162221}{535873184}$$

Opšti integral polazne diferencijalne jednačine je:

$$F_{1e}'(\eta)=C_1\Big(1+10\eta^{2}+\frac{40}{3}\eta^{4}+\frac{16}{3}\eta^{6}+\frac{16}{21}\eta^{8}+\frac{32}{945}\eta^{10}\Big)+$$

$$+C_2\Big[\frac{1}{122880}\Big(1+10\eta^{2}+\frac{40}{3}\eta^{4}+\frac{16}{3}\eta^{6}+\frac{16}{21}\eta^{8}+\frac{32}{945}\eta^{10}\Big)(1-\mathrm{Erf}\,\eta)-$$

$$-\frac{1}{1814400\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{2}\eta^{9}+11\eta^{7}+\frac{147}{2}\eta^{5}+165\eta^{3}+\frac{2895}{32}\eta\Big)e^{-\eta^{2}}\Big]+F_{1ep}'(\eta) \qquad (2.59)$$

a zbog graničnih uslova $F_{1e}'(0)=0,\quad F_{1e}'(\infty)=0,$

konstante postižu vrednosti:

$$C_1=-K_1\ ,\ C_2=122880\,[K_1-S(0)]$$

4° $F_2'''+2\eta F_2''-28F_2'=\Big(\frac{256}{1575}\eta^{12}+\frac{1024}{525}\eta^{10}+\frac{1088}{105}\eta^{8}+\frac{256}{15}\eta^{6}+$

$+\frac{64}{3}\eta^{4}\Big)\mathrm{Erf}^{2}\eta+\Big(\frac{6656}{40725}\eta^{11}-\frac{2135552}{57015}\eta^{9}-\frac{39816576}{95025}\eta^{7}-$

$$-\frac{143168}{175}\eta^5-\frac{3776}{35}\eta^3+\frac{704}{105}\eta\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\mathrm{Erf}\,\eta-\Big(\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta+\frac{1408}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+$$
$$+\frac{1408}{525\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{128}{3}\eta^4+\frac{512}{15}\eta^6+\frac{2176}{105}\eta^8+\frac{2048}{525}\eta^{10}+\frac{512}{1575}\eta^{12}\Big)\mathrm{Erf}\,\eta+$$
$$+\Big(\frac{265}{285075}\eta^{10}-\frac{747392}{19005}\eta^8-\frac{23310976}{57015}\eta^6-\frac{61422464}{95025}\eta^4+$$
$$+\frac{23488}{175}\eta^2+\frac{1056}{525}\Big)\frac{1}{\pi}e^{-2\eta^2}+\Big(-\frac{297088}{95025\pi}\eta^4-\frac{4224}{35\pi}\eta^2-$$
$$-\frac{352}{175\pi}-\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta+\frac{3776}{35\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{143168}{175\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{39816576}{95025\sqrt{\pi}}\eta^7+$$
$$+\frac{2135552}{57015\sqrt{\pi}}\eta^9-\frac{6656}{40725\sqrt{\pi}}\eta^{11}\Big)e^{-\eta^2}+\frac{256}{1575}\eta^{12}+$$
$$+\frac{1024}{525}\eta^{10}+\frac{1088}{105}\eta^8+\frac{256}{15}\eta^6+\frac{64}{3}\eta^4+$$
$$+\frac{1408}{525\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{1408}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

Partikularni integrali homogenog dela ove jednačine su:

$$F_{2h}'=1+14\eta^2+28\eta^4+\frac{56}{3}\eta^6+\frac{16}{3}\eta^8+\frac{32}{45}\eta^{10}+\frac{64}{1485}\eta^{12}+\frac{128}{135135}\eta^{14}$$
$$F_{2h}'=\frac{1}{82575360}\Big(1+14\eta^2+28\eta^4+\frac{56}{3}\eta^6+\frac{16}{3}\eta^8+\frac{32}{45}\eta^{10}+\frac{64}{1485}\eta^{12}+$$
$$+\frac{128}{135135}\eta^{14}\Big)(1-\mathrm{Erf}\,\eta)-\frac{1}{43589145600\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{2}\eta^{13}+\frac{45}{2}\eta^{11}+$$
$$+\frac{2915}{8}\eta^9+\frac{10575}{4}\eta^7+\frac{278019}{32}\eta^5+\frac{364665}{32}\eta^3+\frac{509985}{128}\eta\Big)e^{-\eta^2}$$

Ako partikularno rešenje nehomogene jednačine potražimo u obliku:

$$F_{2p}'(\eta)=X\,\mathrm{Erf}^2\eta+Y\,\mathrm{Erf}\,\eta+S$$

za funkcije X,Y,S dobiće se diferencijalne jednačine:

$$X''+2\eta X'-28X=\frac{256}{1575}\eta^{12}+\frac{1024}{525}\eta^{10}+\frac{1088}{105}\eta^8+\frac{256}{15}\eta^6+\frac{64}{3}\eta^4$$

$$Y''+2\eta Y'-28Y=-\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\eta^2}+\Big(\frac{6656}{40725}\eta^{11}-\frac{2135552}{57015}\eta^9+$$
$$+\frac{39816576}{95025}\eta^7-\frac{143168}{175}\eta^5-\frac{3776}{35}\eta^3+\frac{704}{105}\eta\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}-$$
$$-\Big(\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta+\frac{1408}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{1408}{525\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{128}{3}\eta^4+\frac{512}{15}\eta^6+\frac{2176}{105}\eta^8+$$
$$+\frac{2048}{525}\eta^{10}+\frac{512}{1575}\eta^{12}\Big)$$

$$S''+2\eta S'-28S=-\frac{8}{\pi}Xe^{-2\eta^2}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\eta^2}+\Big(\frac{256}{285075\pi}\eta^{10}-$$
$$-\frac{747392}{19005\pi}\eta^8-\frac{23310976}{57015\pi}\eta^6-\frac{61422464}{95025\pi}\eta^4+\frac{23488}{175\pi}\eta^2+$$
$$+\frac{1056}{525\pi}\Big)e^{-2\eta^2}+\Big(-\frac{297088}{95025\pi}\eta^4-\frac{4224}{35\pi}\eta^2-\frac{352}{175\pi}-\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta+$$
$$+\frac{3776}{35\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{143168}{175\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{39816576}{95025\sqrt{\pi}}\eta^7+\frac{2135552}{57015\sqrt{\pi}}\eta^9-$$
$$-\frac{6656}{40725\sqrt{\pi}}\eta^{11}\Big)e^{-\eta^2}+\frac{256}{1575}\eta^{12}+\frac{1024}{525}\eta^{10}+\frac{1088}{105}\eta^8+$$
$$+\frac{256}{15}\eta^6+\frac{64}{3}\eta^4+\frac{1408}{525\sqrt{\pi}}\eta^5+\frac{1408}{105\sqrt{\pi}}\eta^3+\frac{704}{105\sqrt{\pi}}\eta$$

Očigledno je da se, istim postupkom kao u prethodnim slučajevima, može doći do odgovarajućih rešenja ovog rekurzivnog sistema diferencijalnih jednačina, a time i do partikularnog integrala polazne nehomogene jednačine. Pošto su već odredjeni partikularni integrali homogenog dela ove jednačine, lako je doći i do konačnog rešenja, koristeći granični uslov:

$$F_2'(0) = 0, \quad F_2'(\infty) = 0 .$$

Time bi kompletno bilo odredjeno i drugo približenje brzine u graničnom sloju (2.33). Kao što je već naglašeno, ovde će se zadržati samo prva aproksimacija brzine u graničnom sloju, da bi se izbegle ogromne računske teškoće. Rezultati odredjivanja druge brzinske aproksimacije su navedene da bi se pokazalo da se to u principu može postići, no da je to skopčano sa veoma teškim čisto računskim poslovima.

Sabirajući izraz (2.45) sa prvim izrazom veze (2.33) može se doći do ukupne brzine u graničnom sloju oko cilindričnog tela:

$$u = 2tW\zeta_0'(\eta) + 2t^3 WW'\zeta_1'(\eta) \tag{2.60}$$

Iz uslova odvajanja graničnog sloja $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ dolazi se do izraza za vreme odvajanja:

$$t^2_{odv} = - \frac{\zeta_0''(0)}{W'(x)\,\zeta_1''(0)} \tag{2.61}$$

gde su poznate vrednosti:

$$\zeta_0''(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \quad \zeta_1''(0) = \frac{6}{5\sqrt{\pi}} .$$

Primer: Kružnom cilindru radijusa $R = 50$ cm pokrenutom stalnim ubrzanjem $V_o = 10$ cm/s^2, ubrzo potom saopšteno je dopunsko stalno ubrzanje $V_o = 10$ cm/s^2.

Pošto je za kružni cilindar poznata funkcija

$$W(x) = 2V_0 \sin\frac{x}{R}$$

iz relacije (2.61) rezultuje da prvo odvajanje graničnog sloja nastaje u zadnjoj zaustavnoj tački, posle vremena:

$$t_{odv} = \left(\frac{5}{3}\,\frac{R}{V_0}\right)^{1/2} = 2{,}886 \text{ sec} \tag{2.62}$$

Cilindar je do tada prešao put:

$$s_{odv} = \frac{1}{2}(2V_0)\,t^2_{odv} = 1{,}666\,R$$
$$s_{odv} = 83{,}5 \text{ cm} \tag{2.63}$$

2.6. Stepeno-ubrzano kretanje iza kratkotrajnog stepeno-ubrzanog kretanja cilindričnog tela

Ograničimo se, zbog matematičkih teškoća pri rešavanju na slučaj istovetnih prethodnih i dopunskih kretanja:

$$U_s = At^{\alpha}W(x),\ U_d = At^{\alpha}W(x),\ \alpha \geq 0 .$$

Pošto je granični sloj na telu, zbog prethodnog kretanja stepeno-ubrzano, odredjen Vatsonovim rešenjem [12] :

$$u_0 = At^{\alpha}W(x)\left[1 - f(\eta)\right]$$

$$f(\eta) = 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\cdot g_{\alpha}(\eta) \tag{2.64}$$

gde je:

$$g_{\alpha}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+1)}\int_{\eta}^{\infty}(\gamma-\eta)^{2\alpha}e^{-\gamma^2}d\gamma$$

smenom svih ovih izraza u prvu jednačinu sistema (1.27) dobiće se za prvo približenje brzine u graničnom sloju jednačina pogodna za rešavanje

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A\alpha t^{\alpha-1}W + 2A^2t^{2\alpha}WW'f(\eta) \tag{2.65}$$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_0 = At^{\alpha}W(x)\zeta_0'(\eta) + 2A^2t^{2\alpha+1}WW'\zeta_1'(\eta) \tag{2.66}$$

dobićemo za nepoznate fukcije diferencijalne jednačine:

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' - 4\alpha\zeta_0' = -4\alpha$$

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4(2\alpha+1)\zeta_1' = -4f(\eta) \tag{2.67}$$

sa graničnim uslovima:

$$\zeta_0(0) = \zeta_0'(0) = 0\ ,\ \zeta_0'(\infty) = 1$$

$$\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0,\quad \zeta_1'(\infty) = 0 . \tag{2.68}$$

Rešenje prve od jednačina (2.67) , koje ispunjava odgovarajući granični uslov (2.68), je:

$$\zeta_0'(\eta) = 1 - 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)g_{\alpha}(\eta) \tag{2.69}$$

Partikularna rešenja homogenog dela druge jednačine sistema (2.67) su:

$$\zeta_{1h}'(\eta) = P(\eta)$$

$$\zeta_{1h}'(\eta) = g_{2\alpha+1}(\eta)$$

gde je $P(\eta)$ polinom $\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)$-og reda, a $g_{2\alpha+1}(\eta)$ integral Gausove funkcije greške oblika

$$g_{2\alpha+1}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(4\alpha+3)}\int_{\eta}^{\infty}(\gamma-\eta)^{4\alpha+2}e^{-\gamma^2}d\gamma$$

Partikularno rešenje nehomogene jednačine potražimo u vidu:

$$\mathfrak{I}_{1p}'(\eta) = K\,g_\alpha(\eta)$$

Pošto se druga jednačina sistema (2.67) može napisati u obliku

$$\mathfrak{I}_1'''' + 2\eta\mathfrak{I}_1''' - 4\alpha\mathfrak{I}_1'' - 4(\alpha+1)\mathfrak{I}_1' = -2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\,g_\alpha(\eta)$$

biće: $\quad -4(\alpha+1)K\,g_\alpha(\eta) = -2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\,g_\alpha(\eta)$

odakle je:

$$K = 2^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+1}$$

Prema tome , partikularno rešenje nehomogene jednačine glasi:

$$\mathfrak{I}_{1p}'(\eta) = 2^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+1}\,g_\alpha(\eta) \tag{2.70}$$

Opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je:

$$\mathfrak{I}_1'(\eta) = C_1 P(\eta) + C_2\,g_{2\alpha+1}(\eta) + 2^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+1}\,g_\alpha(\eta)$$

Zbog uslova $\mathfrak{I}_1'(\infty)=0$ mora biti $C_1 = 0$, a koristeći drugi granični uslov $\mathfrak{I}_1'(0)=0$ dobije se vrednost:

$$C_2 = -2^{4\alpha+2}\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\alpha+1}$$

tako da je konačno rešenje:

$$\mathfrak{I}_1'(\eta) = -2^{4\alpha+2}\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\alpha+1}\,g_{2\alpha+1}(\eta) + 2^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+1}\,g_\alpha(\eta) \tag{2.71}$$

Rešenjima (2.69) i (2.71) prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja (2.66) je potpuno odredjeno. Dodajući joj brzinu prethodnog graničnog sloja (2.64) dobiće se ukupna brzina u graničnom sloju oko cilindričnog tela:

$$u = At^\alpha W(x)\left[1 - f(\eta) + \mathfrak{I}_0'(\eta)\right] + 2A^2t^{2\alpha+1}WW'\mathfrak{I}_1'(\eta) \tag{2.72}$$

U tački odvajanja graničnog sloja je: $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ odakle se dobija jednačina:

$$2A\,t_{odv}^{\alpha+1} = \frac{f''(0) - \mathfrak{I}_0''(0)}{W'(x)\,\mathfrak{I}_1''(0)} \tag{2.73}$$

Put odvajanja graničnog sloja iznosi:

$$s_{odv} = \int_0^{t_{odv}} 2At^\alpha dt = \frac{2A}{\alpha+1}t_{odv}^{\alpha+1} = \frac{f''(0) - \mathfrak{I}_0''(0)}{(\alpha+1)W'\mathfrak{I}_1''(0)} \tag{2.74}$$

gde su poznate konstante:

$$f''(0) = -2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha)},\quad \mathfrak{I}_0''(0) = 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha)},$$

$$\mathfrak{I}_1''(0) = 2^{4\alpha+2}\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\alpha+1}\,\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(4\alpha+2)} - 2^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+1}\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha)} \tag{2.75}$$

Izraz (2.74), zajedno sa vrednostima (2.75), pruža mogućnost da se potraži odgovor na jedno interesantno pitanje. Naime, kod kružnog cilindra, kada je kratkotrajno prethodno jednako-ubrzano kretanje bilo "pojačano" dopunskim jednako-ubrzanim kretanjem

($\alpha = 1$), put odvajanja graničnog sloja je bio veći ($s_{odv} = 1,66$ R), no u slučaju dopunskog trzaja iza kratkotrajnog prethodnog trzaja ($\alpha = 0$, $s_{odv} = 1,0$ R). S tim u vezi, postavlja se pitanje može li se put odvajanja proizvoljno povećavati, povećanjem izložioca vremena "α", što bi za praksu vrlo značajno bilo. Zato potražimo graničnu vrednost izraza (2.74), smenjujući u njega vrednosti (2.75), pri $\alpha \to \infty$.

Ubacujući izraze (2.75) u vezu (2.74) i koristeći pri tom Legendre-ov obrazac za "gama" funkcije

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)}{\sqrt{\pi}\; 2^{1-2z}}$$

dobiće se:

$$\frac{1}{s_{odv}} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+\frac{3}{2})}\right] W'(x)$$

U zadnjoj zaustavnoj tački kružnog cilindra radijusa R, ovaj izraz prelazi u novi oblik

$$\frac{R}{s_{odv}} = -1 + \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+\frac{3}{2})} \qquad (2.76)$$

Iskoristimo sada Binnet-ovu formulu o ponašanju količnika "gama" - funkcija pri velikoj vrednosti promenljive

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} \sim x^{a-b}, \quad za \quad x \to \infty .$$

U našem slučaju imaćemo:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)} \sim \alpha^{-\frac{1}{2}}, \; za\; \alpha \to \infty; \qquad \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+\frac{3}{2})} \sim \sqrt{2}\,\alpha^{1/2}, \; za\; \alpha \to \infty .$$

Tako, preko Binnet-ove formule o asimptotskom ponašanju, iz obrasca (2.76), pri $\alpha \to \infty$ dobijemo vrednost:

$$s_{odv} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} R = 2,439\, R \qquad (2.77)$$

Odavde zaključujemo da se ne može put odvajanja proizvoljno povećati, rašćenjem eksponenta "α", što je i prirodno.

87. Analiza rezultata proračuna graničnog sloja u slučaju kratkotrajnih prethodnih kretanja

U slučaju da se cilindrično telo pokreće iz stanja mirovanja, radovi Blasijusa i Vatsona, pokazuju porast vremena (i puta) odvajanja graničnog sloja sa povećanjem brzine izmene ubrzanja kretanja tela u toku vremena. Pri omenjivanju prethodnih kretanja dopunskim kretanjima, okolnosti pri kojima se obavljaju dopunska kretanja su bitno izmenjeni, pa ipak ispitivanja osnovnih slučajeva kretanja sa stanovišta nestacionarnog graničnog sloja pokazuju sličnost sa rezultatima Blazijusa.

Ispitivanja graničnog sloja na telu pri kratkotrajnim prethodnim kretanjima, mada baziraju na znatnim pojednostavljenjima, ipak omogućuju izvesne realne zaključke u pogledu vremena odvajanja graničnog sloja.

Osnovni zaključak je da je vreme prvog odvajanja graničnog sloja na cilindričnom telu veće pri jednako-ubrzanim kretanjima, nego pri kretanjima trzajem (uzimajući obe kretanja zajedno). Ovo je zaključak "istoga smera" sa zaključcima Blazijusa. Dakle:

1° Vreme odvajanja je veće pri $U_s = U$, $U_d = tW$, no pri $U_s=U=U_d$

2° Vreme odvajanja je veće pri $U_s = tW$, $U_d = U$, no pri $U_s=U=U_d$

3° Vreme odvajanja je veće pri $U_s = tW$, $U_d = tW$, no pri $U_s=U=U_d$

Ali za razliku od uslova pod kojima su vrěmena kretanja ispitivana od strane Blazijusa, ovde su okolnosti takve da postaje aktuelno i pitanje klasificiranja (jednako) ubrzanih kretanja tela. Naime, ova tri slučaja ($U_s = U$, $U_d = tW$; $U_s = tW$, $U_d = U$; $U_s = tW$, $U_d = tW$) prikazuju u suštini jednu kategoriju kretanja tela: jednako ubrzano kretanje. Pa ipak, razlike postoje. Ovde ima dva bitna i centralna faktora.

Prvo, i pored toga što se dopunsko kretanje odvija u novim prilikama, ipak se nesme podceniti ono zatečeno stanje na telu u trenutku radjanja dopunskog kretanja, pa makoliko kratko trajalo ono prethodno kretanje (lako se uveriti da je, za prirodne razmere cilindara, vreme prvog odvajanja graničnog sloja reda veličine jedne sekunde, i manje). Znači, nepovoljnije je ako je zatečeno kretanje bilo trzajem, nego kada se obavljalo stalnim ubrzanjem. Dakle, podatak da je vreme odvajanja veće pri $U_s = tW$, $U_d = U$, nego pri $U_s = U$, $U_d = tW$ prihvatljiv je i opravdan. Prema tome, samo povoljnosti onog "zatečenog stanja" u samom početnom stadijumu kretanja su preimućstva prvog u odnosu na drugo kretanje.

Drugo, kratkotrajnost prethodnih kretanja razlog je tome što je vreme odvajanja graničnog sloja manje pri $U_s = U_d = tW$, no pri $U_s = tW$, $U_d = U$. Mala, zanemarljiva vremenska defazovanost, čini da telo ne "oseća", takoreći, nikakvu kvalitativnu promenu u načinu svoga kretanja (do tada tW, od tada 2tW), pa i "zatečeni proces" u graničnom sloju na telu, trpi manju promenu (u pogledu odvajanja) nego u slučaju kada kretanje iz stanja U ili tW, prelazi u stanje U + tW. Posle svega što je rečeno sleduje zaključak da su, pri kratkotrajnim prethodnim kretanjima, najpovoljnija kretanja oblika U + tW, a najpreciznije posmatrano najkasnije će se odvojiti granični sloj na cilindru, ako se on pokrene trzajem iz stanja prethodnog jednako-ubrzanog kretanja. Put odvajanja graničnog sloja duži je pri $U_s = U_d = tW$, nego pri $U_s = U_d = U$. Ispitivanja su pokazala da je moguće dati odgovor na pitanje promene puta odvajanja pri povećavanju brzine izmene ubrzanja kretanja tela u toku vremena u slučaju istorodnih prethodnih i dopunskih kretanja. U tom smislu, put odvajanja pri $U_s = At^{\alpha} W(x)$, $U_d = Bt^{\alpha} W(x)$, ima konačnu vrednost (s = 2,439 R) čak i za beskrajnu vrednost eksponenta "α" Napominje se da je i ovaj podatak u svojoj suštini saglasan sa rezultatima Vatsona u slučaju kretanja cilindričnog tela iz stanja mirovanja. Veoma bliske su i proporcije između vrednosti pojedinih puteva odvajanja pri kretanjima: trzajem, stalnim ubrzanjem i stepeno-ubrzano, pri $\alpha \to \infty$, u oba slučaja. U ovom slučaju sve te vrednosti su nešto povoljnije, zato što su veće. Ova pojava je i očekivana s obzirom na okolnost da ovde dopunsko kretanje počinje svoj razvoj u sredini gde su već pokrenute fluidne mase i to isto smerno sa dopunskim kretanjem. Medjutim, Vatson proučava kretanje iz stanja mirovanja. Razlika je, dakle, u toj inerciji fluidne mase zatečenog stanja koja ide u prilog činjenici da su vrednosti Vatsonove za pojedine karakteristike nestacionarnog graničnog sloja manje od ovih.

III. GRANIČNI SLOJ NA CILINDRIČNOM TELU POKRENUTOM IZ STANJA IZVESNIH PREDHODNIH NESTACIONARNIH KRETANJA

§1. Uvod

Rešenja nestacionarnog graničnog sloja na telu pokrenutom iz stanja mirovanja [12] funkcije su promenljivih ($x, t, \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$), gde se vreme "t" meri od trenutka kada je kretanje počelo. Ako se u momentu t = T saopšti telu dopunsko kretanje to će se odraziti na granični sloj u vidu pojave dopunskih projekcija brzina u graničnom sloju. Pošto novo kretanje nije automodelno (a to se nije moglo ni očekivati, pošto ni staro - direktno iz mirovanja otvoreno - nije bilo automodelno) tražićemo rešenja jednačina u obliku reda po jednoj promenljivoj. S obzirom na počeni uslov da u trenutku t = T brzine dopunskog graničnog sloja mora da budu jednake nuli, pokazuje se neophodnim traženje rešenja za dopunski nestacionarni granični sloj preko novih promenljivih: $x, t - T, \bar{\eta} = \frac{y}{2\sqrt{\nu(t-T)}}$.

Pošto za ove vreme dopunskog kretanja, u ovom radu usvojeni način tretiranja problema, dozvoljava neprekidni razvoj predhodnog nestacionarnog graničnog sloja - vrednosti dopunskih projekcija brzina postaju zavisne od predhodnog kretanja, obeleženog komponentom brzine u graničnom sloju "u_s"), sa starim promenljivim (x, t, η). Otuda je potrebno prilagodjavanje ovih funkcija novim promenljivim. Razumljivo, pošto funkcija "u_s" odražava prirodu prethodnog kretanja, proces prilagodjavanja novim promenljivim, treba obaviti posebno za pojedina predhodna kretanja: trzajem, stalnim ubrzanjem, itd.

§2. Slučaj prethodnog kretanja - trzajem iz stanja mirovanja

U ovom slučaju granični sloj na cilindričnom telu odredjen je Blazijusovim rešenjem [12] :

$$u_s = U(x) f_1'(\eta) = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\gamma^2} d\gamma \qquad (3.1)$$

Zbog ranije navedene veze (1.40) funkcija koja treba preračunati na odgovarajući oblik zavistan od novih promenljivih glasi: $$f_1' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\overline{\tau}\sqrt{\frac{t_1}{t}}} e^{-\gamma^2} d\gamma \qquad (3.2)$$
Da bi smo postigli oblik definisan u zaključku četvrtog paragrafa, prve glave, poslužićemo se, najpre, nekim stavovima iz analize redova.

Naime, ako se podintegralna funkcija f(x) može predstaviti, u intervalu integracije $[a,b]$, ravnomerno - konvergentnim redom funkcija:

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

tada ima smisla jednačina:

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

i, prema tome, odredjeni integral može biti predstavljen konvergentnim redom:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

U slučaju lako integrabilnih funkcija $\varphi_i(x)$ (na primer, pri razlaganju f(x) u stepeni uniformno konvergentni red) integral $\int_a^b f(x)dx$ može biti izračunat sa ma kojim stepenom tačnosti.

U našem slučaju (3.2) podintegralna funkcija se, prema teoremi Abela, može predstaviti uniformno - konvergentnim redom: $e^{-\gamma^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{1!} + \frac{\gamma^4}{2!} - \frac{\gamma^6}{3!} + \ldots$

u ma kojem konačnom intervalu, pa i u našem $0 \div \overline{\tau}\sqrt{\frac{t_1}{t}}$

Integrišući, dakle, član po član, dobićemo ponovo konvergentni red: $\int e^{-\gamma^2} d\gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{1!3} + \frac{\gamma^5}{2!5} - \ldots$

jer će, u našem slučaju (3.2), biti ispunjeni uslovi za konvergenciju naizmeničnih redova, shodno teoremi Lajbnica. Posebno u našem slučaju, priroda ovih konvergentnih redova je takva, da se i sa samo nekoliko prvih članova može raditi sa izvanrednom tačnošću. Ilustracije radi, navedimo podatak da se $\int_0^{1/2} e^{-\gamma^2} d\gamma$ sa tačnošću do 0,0001 može raditi samo sa prva tri člana reda.

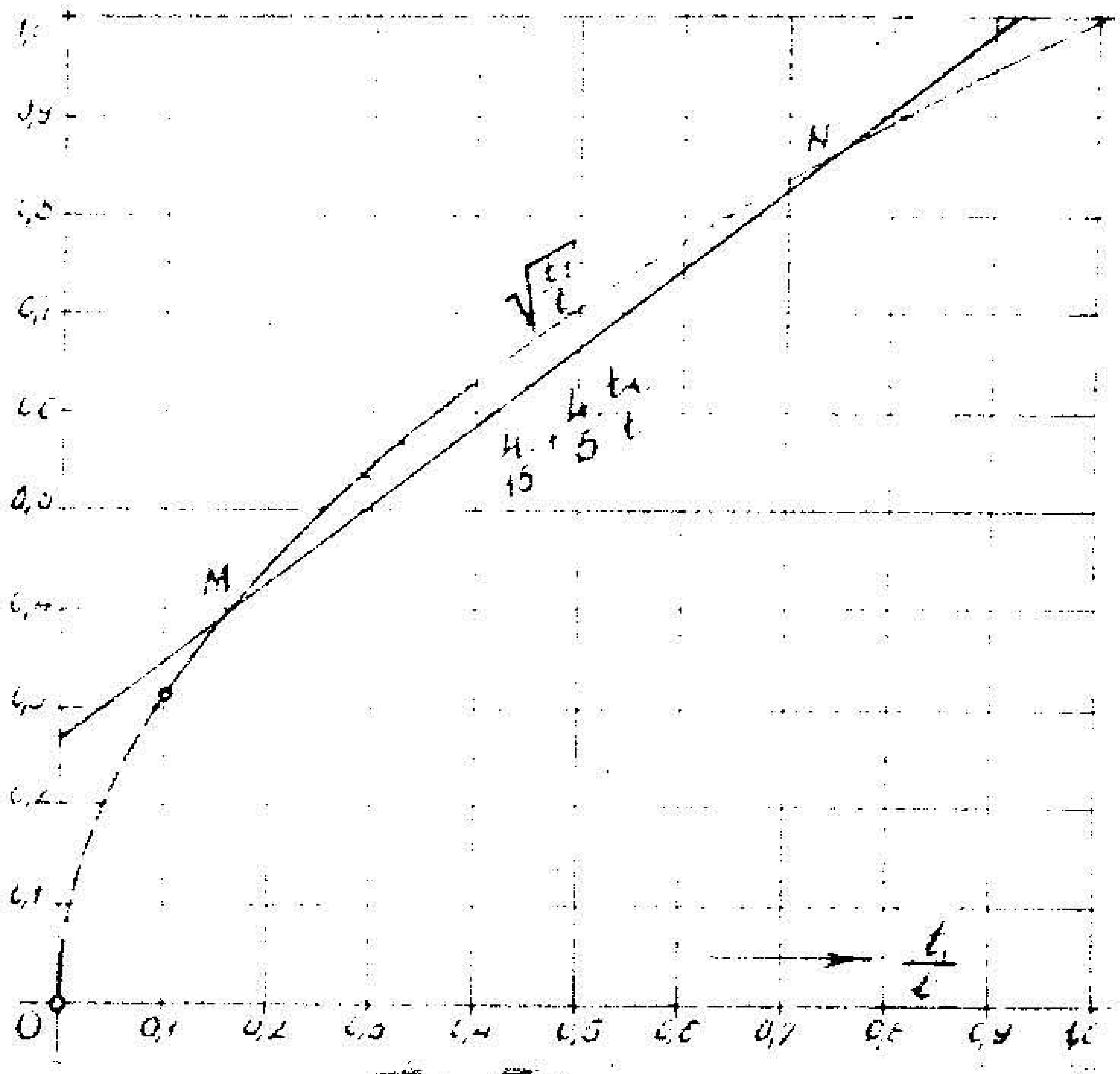
Tako funkcija (3.2) postaje:

$$f_1' \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\overline{\tau}\sqrt{\frac{t_1}{t}} - \frac{1}{1!3}\,\overline{\tau}^3 \frac{t_1}{t}\sqrt{\frac{t_1}{t}} \right] \qquad (3.3)$$

gde smo se zadržali na prva dva člana reda. Pošto je, prema (1.16) $t_1/t < 1$, može se, pod uslovom da srednji kvadrat greške bude najmanji, uzeti približnost [15]:

$$\sqrt{\frac{t_1}{t}} = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}\frac{t_1}{t} \qquad (3.4)$$

Smisao ove približnosti vidi se sa grafičkog prikaza na sl. 5. Očigledno, u intervalu $0,1 \leqslant t_1/t \leqslant 0,9$ ova relacija(3.4) može dobro poslužiti. Najveće odstupanje je pri $t_1/t = 0,4$ i tada relativna greška u odnosu na tačnu vrednost iznosi 5%. Pošto su kratkotrajna prethodna kretanja proučena, koja se mogu obuhvatiti okolinom odnosa $t_1/t \approx 1$, (dakle, sa dovoljno tačnosti bi tu mogao doći interval $0,9 < t_1/t \leqslant 1,0$), izlazi da će se izrazom (3.4) obuhvatiti, uglavnom, cela važna oblast vrednosti količnika t_1/t. Za nultu okolinu odnosa t_1/t $(0 \leqslant t_1/t \leqslant 0,1)$, zaista minimalnu u odnosu na ostali daleko prostraniji interval koji dobro obuhvata relacija (3.4), nema praktičnog interesa, a ukoliko nam treba vrednost "u_s" pri $t_1 = 0$, to ćemo tražiti direktno iz (3.1) stavljajući da je t=T.



Sl. 5.

Napomenimo još da su relacijom (3.4) naročito dobro obuhvaćene okoline presečnih tačaka M i N:

$$\frac{t_1}{t} = 0,165\ , \quad \frac{t_1}{t} = 0,750 .$$

Ubacivanjem izraza (3.4) u vezu (3.3) dobiće se:

$$f_1' = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\bar{\tau} + \left(\frac{8}{5\sqrt{\pi}}\bar{\tau} - \frac{8}{45\sqrt{\pi}}\bar{\tau}^3\right)\frac{t_1}{t} - \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\bar{\tau}^3\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 \qquad (3.5)$$

Da bi se dovršilo prilagodjavanje, treba iz izraza (3.5) činioce(t_1/t) i $(t_1/t)^2$ izraziti preko "t_1" u obliku polinoma, što je razjašnjeno u četvrtom paragrafu prve glave.

Tako je:

$$\frac{t_1}{t} = \frac{\bar{\tau}}{1+\bar{\tau}} \qquad (3.6)$$

gde je iskorišćena veza (1.16) i uvedena oznaka $\bar{\tau} = \frac{t_1}{T}$

Za $\tau < 1$, što obuhvata onu drugu interesantnu i važnu oblast, nasuprot varijanti kratkotrajnih prethodnih kretanja, izraz (3.6) može se transformisati na odgovarajući oblik sa željenim stepenom tačnosti. Analiza je tekla ovako:

a) $\frac{t_1}{t} = \frac{\tau}{1+\tau} \approx \tau(1-\tau) = P_2(\tau)$ (3.7)

τ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40
$\frac{\tau}{1+\tau}$	0,047	0,090	0,166	0,230	0,285
$P_2(\tau)$	0,047	0,090	0,160	0,210	0,240

Tabela 1.

Iz tabele 1. se vidi da aproksimacija (3.7) daje relativno dobre rezultate u domenu $0{,}1 < \frac{t_1}{T} < 0{,}4$, a ovo odgovara intervalu $0{,}09 < \frac{t_1}{t} < 0{,}285$, koji je kao uža okolina presečne tačke M $t_1/t = 0{,}165$ (v. sl. 5) dobro sasvim obuhvaćen vezom (3.4)

b) $\frac{t_1}{t} = \frac{\tau}{1+\tau} \approx \tau(1-\tau+\tau^2) = P_3(\tau)$ (3.8)

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{\tau}{1+\tau}$	0,090	0,166	0,230	0,285	0,333
$P_3(\tau)$	0,091	0,168	0,237	0,304	0,375

Tabela 2.

c) $\frac{t_1}{t} = \frac{\tau}{1+\tau} \approx \tau(1-\tau+\tau^2-\tau^3) = P_4(\tau)$ (3.9)

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{\tau}{1+\tau}$	0,090	0,166	0,230	0,285	0,333
$P_4(\tau)$	0,0909	0,1664	0,2289	0,2784	0,3125

Tabela 3.

Varijantom uprošćenja pod a) (3.7) dobro je obuhvaćen domen $t_1/T \leq 0{,}4$, razume se, sa većom tačnošću, ukoliko je ovaj odnos što manji.

Varijantom pod b) tačnost rezultata u domenu $t_1/T \leq 0{,}4$ je poboljšana, a i sama gornja granica domena se može pomeriti nešto iznad vrednosti $t_1/T = 0,4$.

Još dublje proširenje granice domena t_1/T bi se moglo postići varijantom c). Medjutim, mora se misliti i na broj univerzalnih funkcija u budućem rešenju dopunskog graničnog sloja koji je baš u vezi sa redom veličine stepena vremena "t_1" aproksimativnog polinoma. Zato, zaustavimo se, za sada, na ovoj varijanti, koja pokriva i dovoljno prostrano i interesantno polje vrednosti t_1/T.

Ostaje još da se reši pitanje kako uzeti faktor $(t_1/t)^2$. Da li, možda, uzeti ceo kvadrat izraza (3.9), ili, pak, samo deo tog kvadrata zaključno sa četvrtim stepenom promenljive? Ispitajmo, prvo, eventualnu primenljivost ove druge mogućnosti:

$$\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \frac{\tau^2}{1+2\tau+\tau^2} \approx \tau^2 - 2\tau^3 + 3\tau^4 = \Pi_4(\tau) \qquad (3.10)$$

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\left(\frac{t_1}{t}\right)^2$	0,0081	0,0256	0,0529	0,0812	0,1109
$\Pi_4(\tau)$	0,0083	0,0280	0,0600	0,1088	0,1875

Tabela 4.

Analiziranjem tabele 4. konstatujemo da su odstupanja dosta velika i da moramo ići na prvu od citiranih mogućnosti:

$$\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \frac{\tau^2}{1+2\tau+\tau^2} \approx \tau^2 - 2\tau^3 + 3\tau^4 - 4\tau^5 + 3\tau^6 - 2\tau^7 + \tau^8 = \Pi_8(\tau) \qquad (3.11)$$

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\left(\frac{t_1}{t}\right)^2$	0,0081	0,0256	0,0529	0,0812	0,1109	0,1406
$\Pi_8(\tau)$	0,0082	0,0276	0,0524	0,0775	0,0976	0,1456
$\Pi_6(\tau)$	0,0082	0,0277	0,0528	0,0802	0,1094	0,1450

Tabela 5.

U tabeli 5. se nalaze rezultati ispitivanja relacije (3.11). U rubrici naznačenoj sa $\Pi_8(\tau)$ su vrednosti proračunate direktno po formuli (3.11) i slaganje sa tačnim vrednostima $(t_1/t)^2$ je dobro. Ali, zaustavljajući se na šestom stepenu polinoma (3.11) slaganje postaje još bolje, što se vidi iz uporedjenja vrednosti $\Pi_6(\tau)$ i $(t_1/t)^2$ u tabeli 5.:

$$\Pi_6(\tau) = \tau^2 - 2\tau^3 + 3\tau^4 - 4\tau^5 + 3\tau^6 \tag{3.12}$$

Dakle, polinom (3.12) zadovoljavajuće aproksimira funkciju $(t_1/t)^2$ pri $t_1/T \leqslant 0{,}6$. Ukoliko polinom (3.9) dopunimo sa još dva člana odgovarajućeg geometrijskog reda:

$$P_6(\tau) = \tau - \tau^2 + \tau^3 - \tau^4 + \tau^5 - \tau^6 \tag{3.13}$$

postićićemo da polinom $P_6(\tau)$, uspešno zamenjuje funkciju (3.6) u istom domenu $t_1/T \leqslant 0{,}6$ što je očigledno iz tabele 5′ :

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\frac{\tau}{1+\tau}$	0,090	0,166	0,230	0,285	0,333	0,370
$P_6(\tau)$	0,0909	0,1666	0,2306	0,2845	0,3300	0,3600

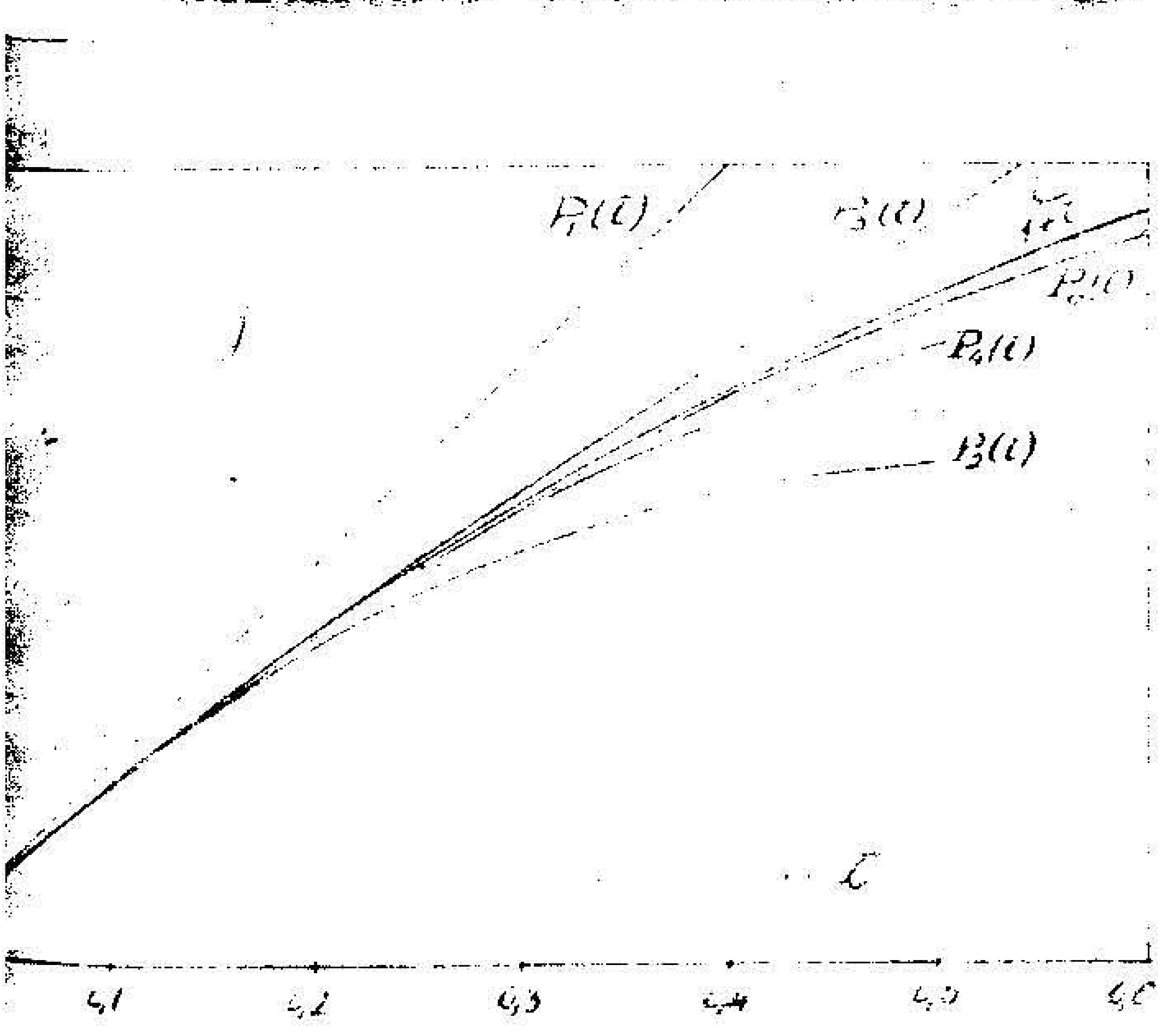
Tabela 5′ .

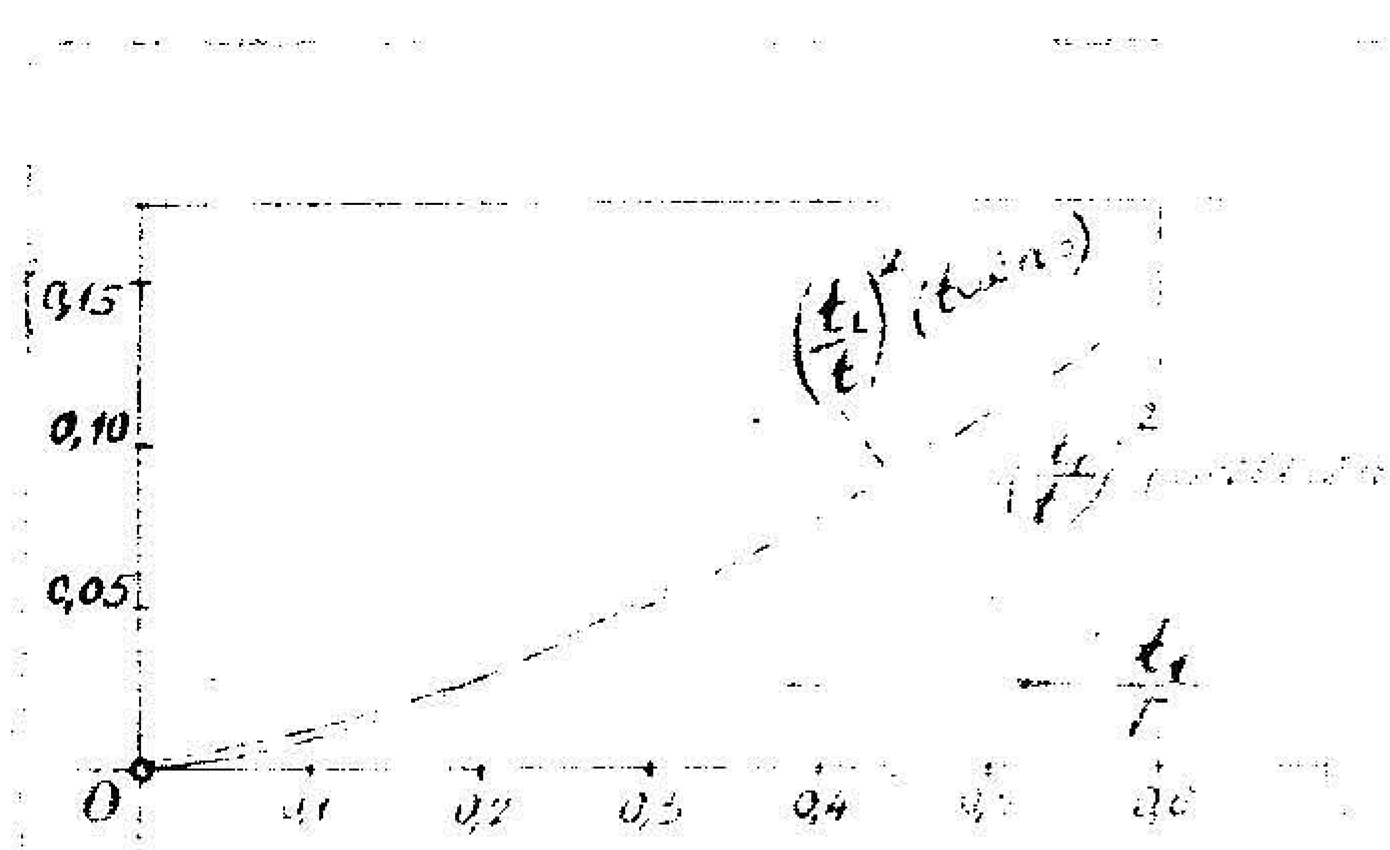
Može se dakle, zaključiti da u intervalu $t_1/T \leqslant 0{,}6$ sa dovoljno tačnosti važe uprošćenja:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t_1}{t} &\approx \left(\frac{t_1}{T}\right) - \left(\frac{t_1}{T}\right)^2 - \left(\frac{t_1}{T}\right)^3 - \left(\frac{t_1}{T}\right)^4 - \left(\frac{t_1}{T}\right)^5 - \left(\frac{t_1}{T}\right)^6 \\ \left(\frac{t_1}{t}\right)^2 &\approx \left(\frac{t_1}{T}\right)^2 - 2\left(\frac{t_1}{T}\right)^3 + 3\left(\frac{t_1}{T}\right)^4 - 4\left(\frac{t_1}{T}\right)^5 + 3\left(\frac{t_1}{T}\right)^6 \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Rezultati ovih analiza mogu se prikazati slikovito graficima

alitet aproksimacija lakše proce-





Sl. 7.

Smenjujući izraze (3.14) u (3.5), a potom u (3.1) dobićemo, konačno, prilagodjenu funkciju "u_0" za rešavanje dopunskog graničnog sloja:

$$\frac{u_s}{U_s} = \omega_0 + \omega_1 \frac{t_1}{t} + \omega_2 \left(\frac{t_1}{t}\right)^2 + \omega_3 \left(\frac{t_1}{t}\right)^3 + \omega_4 \left(\frac{t_1}{t}\right)^4 + \omega_5 \left(\frac{t_1}{t}\right)^5 + \omega_6 \left(\frac{t_1}{t}\right)^6 \qquad (3.15)$$

gde su koeficijenti $\omega_i(\overline{\eta})$ poznate funkcije:

$$\omega_0 = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\,\overline{\eta},\ \omega_1 = \frac{8}{5\sqrt{\pi}}\left(\overline{\eta} - \frac{1}{9}\overline{\eta}^3\right),\ \omega_2 = \frac{-8}{5\sqrt{\pi}}\left(\overline{\eta} + \frac{2}{9}\overline{\eta}^3\right),\ \omega_3 = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{5}\overline{\eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9}\overline{\eta}^3\right),\ \omega_4 = \frac{-8}{5\sqrt{\pi}}\left(\overline{\eta} + \frac{8}{9}\overline{\eta}^3\right),\ \omega_5 = \frac{8}{5\sqrt{\pi}}\left(\overline{\eta} + \frac{11}{9}\overline{\eta}^3\right),\ \omega_6 = \frac{-8}{5\sqrt{\pi}}\left(\overline{\eta} + \frac{8}{9}\overline{\eta}^3\right). \qquad (3.16)$$

Napominje se da se izraz $\sqrt{\frac{t_1}{t}} = \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}}$ ne može razviti u Maklorenov red po promenljivoj " τ ", jer članovi reda postaju beskonačni pri $\tau = 0$. Zbog toga se pribeglo izloženom postupku.

Postoji jedna interesantna pojava kod nestacionarnih graničnih slojeva, koja u ovim okolnostima, kada se nemože izbeći razvijanje u red i zadržavanje konačnog broja čalanova, može imati važnu ulogu. Naime, poznato je da jedan od graničnih uslova označava da se na beskrajnom rastojanju od konture tela izjednačuju brzina u graničnom sloju i spoljašnja potencijalna brzina. Ovo je, i u slučaju kretanja cilindričnog tela iz stanja mirovanja, i u slučaju kretanja ravanske konture iz stanja izvesnog prethodnog nestacionarnog kretanja - uslovilo pojavu beskonačne vrednosti nestacionarne promenljive η , odnosno $\overline{\eta}$, u jednom od graničnih uslova. To je, preko mere, raširilo polje vrednosti nestacionarne promenljive. Zna se da ovakav uslov ima čisto teorijski karakter, a da je praktično debljina graničnog sloja mala, reda veličine nekoliko milimetara, o čemu je već bilo reči. Kod nestacionarnih graničnih slojeva je debljina graničnog sloja u početku kretanja minimalna, a kasnije sa vremenom raste.

Ispitajući ovu pojavu kod Blazijusovih rešenja nestacionarnog graničnog sloja pri kretanju iz stanja mirovanja [14] , došlo se do konkretnih podataka. Pošto se tu za univerzalne funkcije uvek dobiju linearne nehomogene diferencijalne jednačine drugoga reda, opšte rešenje sadrži dve konstante, koje treba odrediti iz graničnih uslova, za dve vrednosti promenljive: $\eta = 0$ i $\eta = \infty$, bez obzira da li se radi o prvom, ili o drugom približenju brzine.

U slučaju kretanja trzajem [14, str. 191] za prvo približenje brzine u graničnom sloju, pri odredjivanju odgovarajuće univerzalne funkcije:

$$\zeta_0''' + 2\eta\, \zeta_0'' = 0$$

$$\zeta_0'(\eta) = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\nu^2} d\nu + C_2$$

$$\zeta_0'(0) = 0, \quad \zeta_0'(\infty) = 1,$$

dobijene su vrednosti konstanata: $C_1 = 1{,}128$, $C_2 = 0$,

a za drugo približenje:

$$\zeta_1''' + 2\eta\, \zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4(\zeta_0'^2 - \zeta_0 \zeta_0'' - 1)$$

$$\zeta_1'(\eta) = C_1(1+2\eta^2) + C_2\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+2\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \eta e^{-\eta^2}\right] + \frac{1}{2}(2\eta^2-1)\,\mathrm{Erf}^2\eta + \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2}\,\mathrm{Erf}\,\eta + 1 - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2}$$

$$\zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0,$$

$C_1 = -1{,}212$ $\qquad$ $C_2 = 0{,}804$

Pri kretanju stalnim ubrzanjem [14, str. 198], za prvo približenje brzine:

$$\zeta_1''' + 2\eta\, \zeta_1'' - 4\zeta_1' = -4$$

$$\zeta_1'(\eta) = C_1(1+2\eta^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\eta e^{-\eta^2}\right] + 1$$

$$\zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 1,$$

dobiju se, prema navedenim graničnim uslovima, vrednosti konstanata: $C_1 = 0$ $\qquad$ $C_2 = -4{,}0$

Medjutim, postupimo u duhu ideje o konačnosti graničnog sloja, koja je praktički opravdana. Znači, zadržimo za jedan granični uslov nultu vrednost nestacionarne promenljive $\eta = 0$, ali uzmimo pri drugom graničnom uslovu konačnu vrednost promenljive, tj. neku konstantu. Ovom prilikom proučen je slučaj kada na gornjoj granici graničnog sloja nestacionarna promenljiva ima vrednost $\eta = 2$.

Sada integracione konstante imaju vrednosti:
pri trzaju iz stanja mirovanja, za prvo približenje: $C_1 = 1{,}133$, $C_2 = 0$; a za drugo približenje: $C_1 = -1{,}212$, $C_2 = 0{,}802$;
pri jednako-ubrzanom kretanju iz mirovanja integracione konstante sada imaju vrednosti: $C_1 = 0{,}0004$, $C_2 = -4{,}0016$.

Poredjenjem zaključujemo da su razlike u vrednostima konstanata pri $\eta = \infty$ i pri $\eta = 2$ minimalne. Kod svih navodenih slučajeva relativna odstupanja vrednosti konstanata ne premašuju 0,44%.

Napominje se da je ista osobina u principu ispitana i dokazana i za rešenja dopunskog graničnog sloja pri svim varijantama kratkotrajnih prethodnih nestacionarnih kretanja.

Na osnovu ove analize mogaće je zaključiti da je interval vrednosti promenljive η, za koji se razvija nestacionarni granični sloj upravno na konturu tela u toku vremena ograničen. Slobodnije rečeno, sve što treba da se menja u graničnom sloju, obaviće se u konačnom intervalu promenljive η. Sa dovoljno tačnosti to će biti obuhvaćeno razmakom $0 \leq \eta \leq 2$ (pa čak i intervalom $0 \leq \eta \leq 1{,}25$, sa odstupanjem od tačne vrednosti za svega 7%). To je, dakle, polje vrednosti na koje se mora obratiti sva pažnja i pri razlaganju u red funkcije "u_s" pri prilagodjavanju okolnostima dopunskog kretanja. Za ovaj interval je i stepen tačnosti zadržavanja na drugom članu naizmeničnog konvergentnog reda (3.3) dobar.

Principijelno istovetna konfiguracija nestacionarnih promenljivih prethodnog i dopunskog graničnog sloja :

$$\frac{\text{y - koordinata}}{(\text{kinematska viskoznost x vreme})^{1/2}}$$

i citirana ograničenost prethodne nestacionarne promenljive, upućuju nam mogućnost rešavanja i dopunsog graničnog sloja pri sličnoj ograničenosti dopunske nestacionarne promenljive.

Dakle izraz (3.15) predstavlja traženi neophodni oblik funkcije "u_s" radi rešavanja jednačina dopunskog graničnog sloja

Suština ovog postupka je u sledećem: u nekom trenutku pri $t > T$ nama treba brzina predhodnog graničnog sloja "u_s", jer je ona deo ukupne brzine u graničnom sloju. Razume se, tu brzinu možemo direktno i tačno izračunati iz veze (3.1). Ali da bi smo odredili i onaj dogradjeni deo brzine u graničnom sloju usled izvesnog dopunskog kretanja cilindričnog tela, mi smo morali pronaći odgovarajući oblik (3.15), inače poznate funkcije

(31) , koji je približan. Koliko smo uspeli u ovome, zavisi od mogućnosti izraza (3.15) da prikaže isto ono što i izraz (3.1).

Ako se sa $(u_s/U_s)_\eta$ obeleže tačne vrednosti nadjene preko formule (31), a sa $(u_s/U_s)_{\bar{\eta}}$ vrednosti brzina prema izrazu (3.15) može se obaviti provera odstupanja ovih dveju vrednosti u pojedinim trenucima iz važećeg razmaka vremena t_1/T. Pri pripremanju podataka za sledeće tabele korišćena je i veza $\eta = \bar{\eta}\sqrt{\frac{t_1}{t}}$

1° $t_1/T = 0,2$ $\bar{\eta} = 2,449\,\eta$

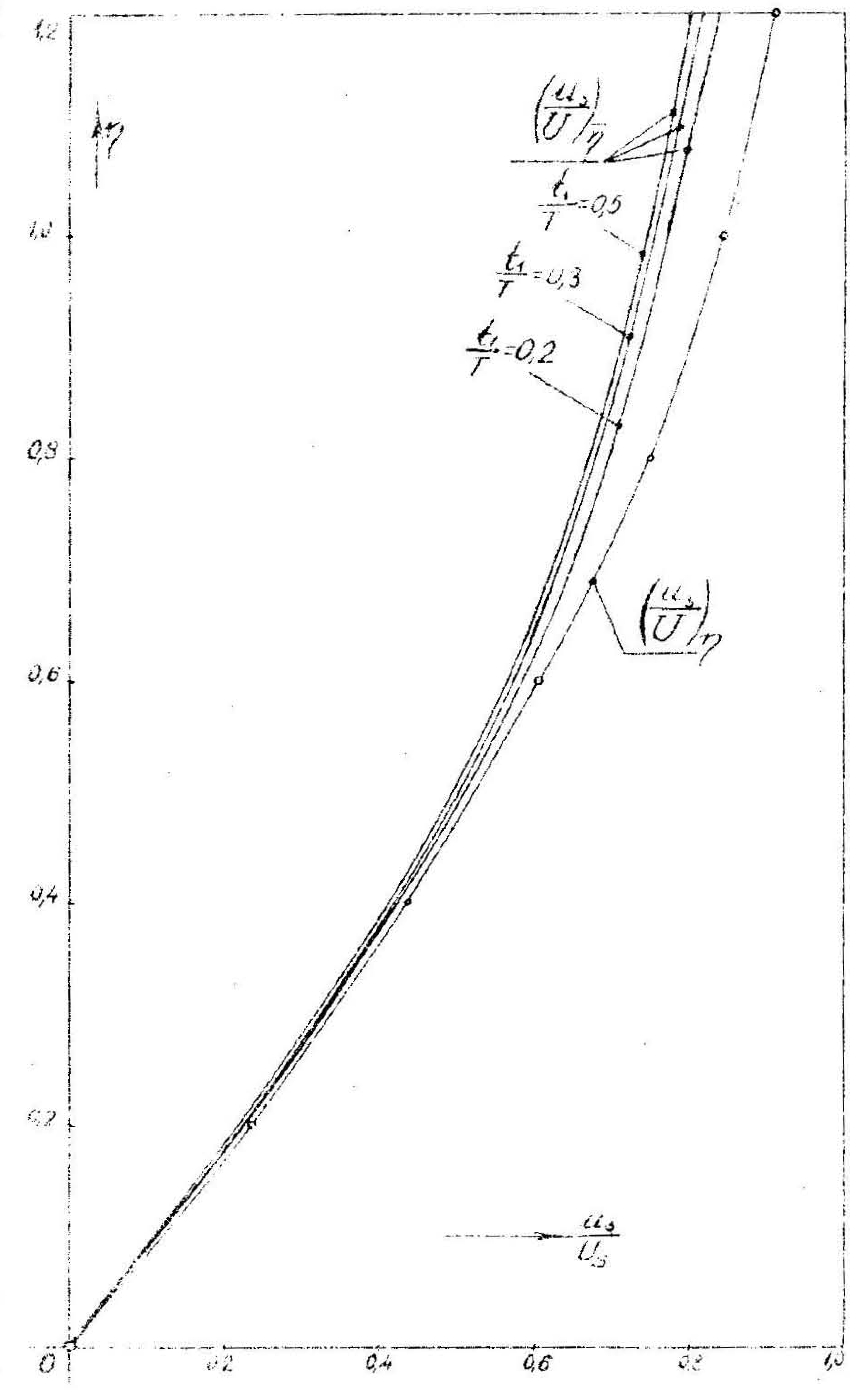
η	$\bar{\eta}$	ω_0	ω_1	$-\omega_2$	ω_3	$-\omega_4$	ω_5	$-\omega_6$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_\eta$	δ%
0,2	0,4898	0,1469	0,4302	0,4656	0,5008	0,5366	0,5720	0,5366	0,2200	0,2227	2,3
0,4	0,9796	0,2939	0,7897	1,0726	1,3556	1,6384	1,9213	1,6384	0,4176	0,4284	2,5
0,6	1,4694	0,4408	1,0074	1,9631	2,9188	3,8744	4,8300	3,8744	0,5822	0,6038	3,5
0,8	1,9592	0,5877	1,0129	3,2781	5,5430	7,8083	10,0734	7,8083	0,7000	0,7421	5,0
1,0	2,4490	0,7347	0,7351	5,1597	9,5844	14,0090	18,4337	14,0090	0,7550	0,8427	10,0
1,2	2,9388	0,8816	0,1045	7,7460	15,3895	22,9705	30,6950	22,9705	0,8600	0,9100	6,0

2° $t_1/T = 0,3$ $\bar{\eta} = 2,08\,\eta$

η	$\bar{\eta}$	ω_0	ω_1	$-\omega_2$	ω_3	$-\omega_4$	ω_5	$-\omega_6$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_\eta$	δ%
0,2	0,4160	0,1252	0,3682	0,3898	0,4115	0,4331	0,4548	0,4331	0,2100	0,2227	5,0
0,4	0,8320	0,2504	0,6930	0,8663	1,0396	1,2128	1,3861	1,2128	0,4073	0,4284	6,0
0,6	1,2480	0,3756	0,9304	1,5178	2,1053	2,6927	3,2802	2,6927	0,5801	0,6038	5,0
0,8	1,6640	0,5010	1,0429	2,4191	3,7959	5,1713	6,5475	5,1713	0,7050	0,7421	6,0
1,0	2,080	0,6261	0,9747	3,6816	6,3885	9,0954	11,8024	9,0954	0,7800	0,8427	8,0
1,2	2,4960	0,7820	0,9025	4,0785	8,8670	16,7210	21,7800	18,2340	0,8160	0,9100	10,0

3^{o} $t_1/T = 0,5$ $\bar{\eta} = 1,732\ \eta$:

η	$\bar{\eta}$	ω_0	ω_1	$-\omega_2$	ω_3	$-\omega_4$	ω_5	$-\omega_6$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$	δ %
0,2	0,3464	0,1043	0,3085	0,3206	0,3335	0,3457	0,3553	0,3457	0,2090	0,2227	5,0
0,4	0,6428	0,2086	0,6204	0,6330	0,6493	0,6616	0,6778	0,6616	0,4116	0,4286	4,0
0,6	1,0392	0,3128	0,8250	1,1602	1,5025	1,8352	2,1786	1,8352	0,5700	0,5988	5,0
0,8	1,3856	0,4171	0,9870	1,7726	2,5678	3,3494	4,1489	3,3494	0,6710	0,7421	9,5
1,0	1,73[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9,2
1,2	2,07[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	10,0



Tabele i dijagrami pokazuju da će u razmaku $0 \le \eta \le 1{,}25$ izraz (3.15) uspešno zamenjivati tačnu vrednost (3.1) sa maksimalnim odstupanjem od 10%. Za $\eta > 1{,}25$ važiće drugo aproksimativno rešenje. Naime, može se dokazati da se za gornju granicu granicu promenljive η može uzeti $\eta = 1{,}25$, umesto $\eta = 2$ sa dovoljno tačnosti. Tako je sada za domen $0 \le \eta \le 1{,}25$, stepen tačnosti zadržavanja na drugom članu naizmeničnog konvergentnog reda (3.3) još bolji.

Dodatak 1. Ako se uzme i treći član naizmeničnog konvergetnog reda (3.3) tačnost proračuna će se moći poboljšati u odnosu na prethodni slučaj. Pripremimo odgovarajući novi prilagodjeni oblik funkcije $(u_s/U_s)_{\bar{\eta}}$, analogan ranijem (3.15). Tada je:

$$\mathrm{Erf}\,\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\eta - \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{1}{10}\eta^5\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\bar{\eta} - \frac{1}{3}\bar{\eta}^3\frac{t_1}{t} + \frac{1}{10}\bar{\eta}^5\left(\frac{t_1}{t}\right)^2\right]\sqrt{\frac{t_1}{t}}$$

što posredstvom analiziranog izraza (3.4) postaje:

$$\mathrm{Erf}\,\eta \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{4}{15}\bar{\eta} + \left(\frac{4}{5}\bar{\eta} - \frac{4}{45}\bar{\eta}^3\right)\frac{t_1}{t} + \left(\frac{2}{75}\bar{\eta}^5 - \frac{4}{15}\bar{\eta}^3\right)\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 + \frac{2}{25}\bar{\eta}^5\left(\frac{t_1}{t}\right)^3\right]$$

pošto pri $\tau \le 0{,}6$ dobru tačnost daje izraz

$$\left(\frac{t_1}{t}\right)^3 = \tau^3 - 3\tau^4 + 6\tau^5 - 10\tau^6 + 13\tau^7 - 15\tau^8 + 16\tau^9 = P_9^3(\tau)$$

što potvrdjuje sledeća tabela:

τ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\left(t_1/t\right)^3$	0,00075	0,00460	0,0123	0,02330	0,0380
$P_9^3(\tau)$	0,00075	0,00463	0,0122	0,02335	0,0388

ovo, uz pomoć ranije dokazanih formula (.14), daje konačno prilagodjeni oblik funkcije u_s/U_s:

$$\frac{u_s}{U_s} \approx \lambda_0(\bar{\eta}) + \lambda_1(\bar{\eta})\frac{t_1}{t} + \lambda_2(\bar{\eta})\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 + \lambda_3(\bar{\eta})\left(\frac{t_1}{t}\right)^3$$

$$\lambda_0(\bar{\eta}) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta}, \quad \lambda_1(\bar{\eta}) = \frac{8}{5\sqrt{\pi}}\left(\bar{\eta} - \frac{1}{9}\bar{\eta}^3\right),$$

$$\lambda_2(\bar{\eta}) = \frac{4}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{5}\bar{\eta}^5 - 2\bar{\eta}^3\right), \quad \lambda_3(\bar{\eta}) = \frac{4}{25\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5$$

Proverimo da li ovaj oblik daje bolju tačnost od ranijeg (3.15):

1° $t_1/T = 0,2$

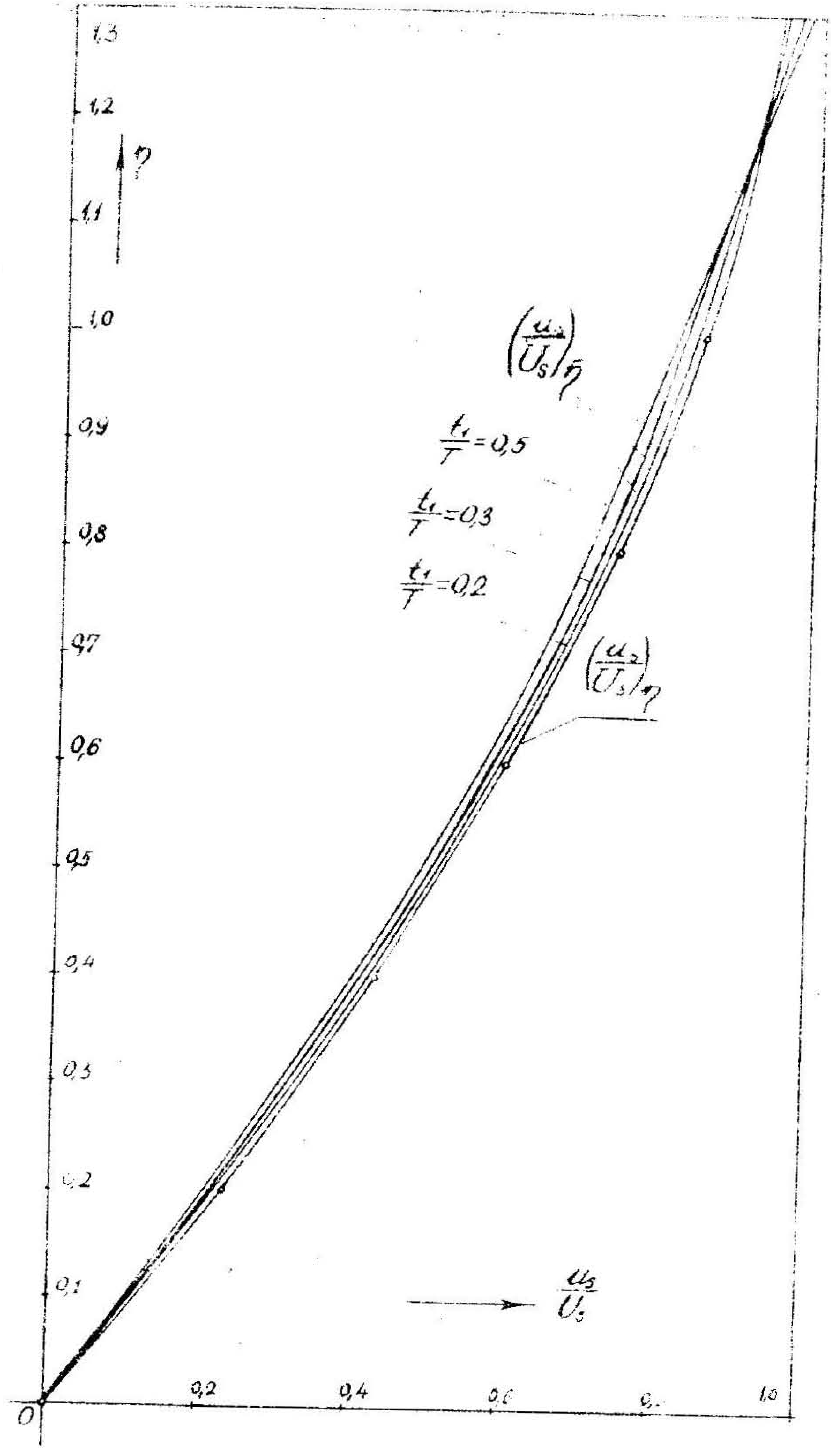
η	$\bar{\eta}$	λ_0	λ_1	$-\lambda_2$	λ_3	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$	δ%
0,2	0,4898	0,1469	0,43017	0,0344	0,00254	0,2177	0,2227	2,0
0,4	0,9796	0,2939	0,7897	0,2551	0,08135	0,4188	0,4284	2,0
0,6	1,4694	0,4408	1,0074	0,7471	0,01789	0,5908	0,6038	2,0
0,8	1,9592	0,5877	1,0129	1,3911	2,60373	0,7300	0,7421	2,0
1,0	2,4490	0,7347	0,7351	1,7643	7,94605	0,8450	0,8427	0,3
1,2	2,9388	0,8816	0,1045	1,0337	19,76796	0,9600	0,9100	5,0

2° $t_1/T = 0,3$

η	$\bar{\eta}$	λ_0	λ_1	$-\lambda_2$	λ_3	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$	δ%
0,2	0,4160	0,1252	0,3682	0,02121	0,00117	0,2100	0,2227	5,0
0,4	0,8320	0,2504	0,6930	0,16095	0,03545	0,4020	0,4284	6,0
0,6	1,2480	0,3756	0,9304	0,49438	0,27455	0,5664	0,6038	6,0
0,8	1,6640	0,5010	1,0429	0,99424	1,13478	0,7023	0,7421	5,0
1,0	2,080	0,6261	0,9747	1,53330	3,49920	0,8121	0,8427	4,0
1,30	2,7040	0,8112	0,4665	1,60020	12,91400	0,9916	0,9480	5,0

3° $t_1/T = 0,5$

η	$\bar{\eta}$	λ_0	λ_1	$-\lambda_2$	λ_3	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$	δ%
0,2	0,3464	0,1043	0,3085	0,0123	0,00044	0,2100	0,2227	6,0
0,4	0,6928	0,2086	0,6204	0,0137	0,00207	0,4119	0,4284	4,0
0,6	1,0392	0,3128	0,8250	0,3010	0,10251	0,5680	0,6038	6,0
0,8	1,3856	0,4171	0,9870	0,6382	0,45044	0,7008	0,7421	6,0
1,0	1,7320	0,5214	1,0438	1,0885	1,34479	0,8020	0,8427	5,0
1,3	2,2516	0,6755	0,8895	1,6874	5,18931	0,9910	0,9480	5,0



Tačnost je očigledno, sada, poboljšana, jer maksimalno odstupanje približnog u odnosu na tačni izraz iznosi 6%, u razmacima $0 \leq \eta \leq 1,3$, $0 < \frac{t_1}{T} < 0,6$. Napominje se da vrednost $\eta = 1,3$ u ulozi gornje granice predhodnog graničnog sloja daje odstupanje od tačnog rezultata (pri $\eta = \infty$) takodje od 6%.

Naime, opšte rešenje odgovarajuće diferencijalne jednačine prvog približenja predhodnog graničnog sloja glasi:

$$f_1' = C_1\int_0^{\eta} e^{-r^2}dr + C_2$$

Za tačne granične uslove $f_1'(0)=0,\ f_1'(\infty)=1$ su vrednosti konstanata $C_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=1{,}128;\ C_2=0,$ i odavde nastaje poznato rešenje (3.2). A za približne granične uslove $f_1'(0)=0,\ f_1'(1{,}3)=1,$ su $C_1 = 1{,}189$ i $C_2 = 0$. Dakle, odstupanje iznosi svega:

$$\frac{1{,}189 - 1{,}128}{1{,}128}\,100\% < 6\%$$

Znači, za $\eta > 1{,}3$ važiće pouzdano drugo aproksimativno rešenje.

Prema tome, novi prilagodjeni oblik glasi:

$$u_s = U_s\left[\Omega_0+\Omega_1\frac{t_1}{T}+\Omega_2\left(\frac{t_1}{T}\right)^2+\Omega_3\left(\frac{t_1}{T}\right)^3+\Omega_4\left(\frac{t_1}{T}\right)^4+\Omega_5\left(\frac{t_1}{T}\right)^5+\Omega_6\left(\frac{t_1}{T}\right)^6+\Omega_7\left(\frac{t_1}{T}\right)^7+\Omega_8\left(\frac{t_1}{T}\right)^8+\Omega_9\left(\frac{t_1}{T}\right)^9\right]$$

$$\Omega_0=\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta},\ \Omega_1=\frac{8}{5\sqrt{\pi}}\left(\bar{\eta}-\frac{1}{9}\bar{\eta}^3\right),\ \Omega_2=\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\left(-2\bar{\eta}-\frac{4}{9}\bar{\eta}^3+\frac{1}{15}\bar{\eta}^5\right),$$

$$\Omega_3=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{5}\bar{\eta}+\frac{2}{9}\bar{\eta}^3+\frac{1}{75}\bar{\eta}^5\right),\ \Omega_4=\frac{-8}{5\sqrt{\pi}}\left(\bar{\eta}+\frac{8}{9}\bar{\eta}^3+\frac{1}{5}\bar{\eta}^5\right),$$

$$\Omega_5=\frac{8}{5\sqrt{\pi}}\left(\bar{\eta}+\frac{11}{9}\bar{\eta}^3+\frac{7}{15}\bar{\eta}^5\right),\ \Omega_6=-\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\left(2\bar{\eta}+\frac{16}{9}\bar{\eta}^3+\frac{9}{5}\bar{\eta}^5\right),$$

$$\Omega_7=\frac{52}{25\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5,\quad \Omega_8=-\frac{12}{5\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5,\quad \Omega_9=\frac{64}{25\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5.$$

&3. Prethodno kretanje trzajem, dopunsko kretanje trzajem

Cilindrično telo je pokrenuto trzajem $[U_s = U(x)]$ normalno na pravac svojih izvodnica. U jednom trenutku $t = T$ istom telu je saopšten dopunski trzaj istoga smera $[U_d = U(x)]$. Ako smenimo ove vrednosti i izraz (3.15) u jednačinu (1.27), dobićemo za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja parcijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1}-\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=2UU'(1-\omega_0)-t_1\frac{2UU'}{T}\omega_1-t_1^2\frac{2UU'}{T^2}\omega_2-t_1^3\frac{2UU'}{T^3}\omega_3-$$
$$-t_1^4\frac{2UU'}{T^4}\omega_4-t_1^5\frac{2UU'}{T^5}\omega_5-t_1^6\frac{2UU'}{T^6}\omega_6 \qquad (3.17)$$

Ukoliko predpostavimo rešenje ove jednačine u obliku

$$u_0=U\zeta_0'(\bar{\eta})+t_1 2UU'\zeta_1'(\bar{\eta})+t_1^2\frac{2UU'}{T}\zeta_2'(\bar{\eta})+t_1^3\frac{2UU'}{T^2}\zeta_3'(\bar{\eta})+t_1^4\frac{2UU'}{T^3}\zeta_4'(\bar{\eta})+$$
$$+t_1^5\frac{2UU'}{T^4}\zeta_5'(\bar{\eta})+t_1^6\frac{2UU'}{T^5}\zeta_6'(\bar{\eta})+t_1^7\frac{2UU'}{T^6}\zeta_7'(\bar{\eta}) \qquad (3.18)$$

za nepoznate koeficijente, funkcije od promenljive $\bar{\eta}$, dobićemo obične diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
&J_0''' + 2\bar{\eta}\, J_0'' = 0\\
&J_1''' + 2\bar{\eta}\, J_1'' - 4J_1' = 4(\omega_0 - 1)\\
&J_2''' + 2\bar{\eta}\, J_2'' - 8J_2' = 4\omega_1\\
&J_3''' + 2\bar{\eta}\, J_3'' - 12J_3' = 4\omega_2\\
&J_4''' + 2\bar{\eta}\, J_4'' - 16J_4' = 4\omega_3\\
&J_5''' + 2\bar{\eta}\, J_5'' - 20J_5' = 4\omega_4\\
&J_6''' + 2\bar{\eta}\, J_6'' - 24J_6' = 4\omega_5\\
&J_7''' + 2\bar{\eta}\, J_7'' - 28J_7' = 4\omega_6
\end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

Na desnim stranama jednačina (3.19) su poznate funkcije (3.16).

Opšta rešenja linearnih diferencijalnih nehomogenih jednačina drugoga reda (3.19) su:

1° $J_0' = C_1 \int_0^{\bar{\eta}} e^{-s^2} ds + C_2$

2° $J_1' = C_1(1+2\bar{\eta}^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar{\eta}^2)\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar{\eta}\, e^{-\bar{\eta}^2}\right] - \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta} + 1$

3° $J_2' = C_1(1+4\bar{\eta}^2+\frac{4}{3}\bar{\eta}^4) + C_2\left[\frac{1}{32}(1+4\bar{\eta}^2+\frac{4}{3}\bar{\eta}^4)\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{24\sqrt{\pi}}(\bar{\eta}^3+\frac{5}{2}\bar{\eta})e^{-\bar{\eta}^2}\right] + \frac{16}{45\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{32}{45\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$

4° $J_3' = C_1(1+6\bar{\eta}^2+4\bar{\eta}^4+\frac{8}{15}\bar{\eta}^6) + C_2\left[\frac{1}{384}(1+6\bar{\eta}^2+4\bar{\eta}^4+\frac{8}{15}\bar{\eta}^6)\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{720\sqrt{\pi}}(\bar{\eta}^5+7\bar{\eta}^3+\frac{33}{4}\bar{\eta})e^{-\bar{\eta}^2}\right] + \frac{32}{135\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 + \frac{176}{225\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$

5° $J_4' = C_1(1+8\bar{\eta}^2+8\bar{\eta}^4+\frac{32}{15}\bar{\eta}^6+\frac{16}{105}\bar{\eta}^8) + C_2\left[\frac{1}{6144}(1+8\bar{\eta}^2+8\bar{\eta}^4+\frac{32}{15}\bar{\eta}^6+\frac{16}{105}\bar{\eta}^8)\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{40320}(\frac{1}{2}\bar{\eta}^7+\frac{27}{4}\bar{\eta}^5+\frac{185}{8}\bar{\eta}^3+\frac{279}{16}\bar{\eta})\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\right] - \frac{16}{45\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{64}{105\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$

6° $J_5' = C_1(1+10\bar{\eta}^2+\frac{40}{3}\bar{\eta}^4+\frac{16}{3}\bar{\eta}^6+\frac{16}{21}\bar{\eta}^8+\frac{32}{945}\bar{\eta}^{10}) + C_2\left[\frac{1}{122880}(1+10\bar{\eta}^2+\frac{40}{3}\bar{\eta}^4+\frac{16}{3}\bar{\eta}^6+\frac{16}{21}\bar{\eta}^8+\frac{32}{945}\bar{\eta}^{10})\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{3628800}(\frac{1}{2}\bar{\eta}^9+11\bar{\eta}^7+\frac{147}{2}\bar{\eta}^5+165\bar{\eta}^3+\frac{2895}{32}\bar{\eta})\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\right] + \frac{128}{315\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 + \frac{464}{945\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$

$$7^\circ\ \zeta_6' = C_1\left(1 + 12\bar{\eta}^2 + 20\bar{\eta}^4 + \frac{32}{3}\bar{\eta}^6 + \frac{16}{7}\bar{\eta}^8 + \frac{64}{315}\bar{\eta}^{10} + \frac{64}{10395}\bar{\eta}^{12}\right) + C_2\Big[\frac{1}{2949120}\left(1 + 12\bar{\eta}^2 + 20\bar{\eta}^4 + \frac{32}{3}\bar{\eta}^6 + \frac{16}{7}\bar{\eta}^8 + \frac{64}{315}\bar{\eta}^{10} + \frac{64}{10395}\bar{\eta}^{12}\right)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{479001600}\left(\frac{1}{2}\bar{\eta}^{11} + \frac{65}{4}\bar{\eta}^9 + \frac{711}{4}\bar{\eta}^7 + \frac{6279}{8}\bar{\eta}^5 + \frac{41685}{32}\bar{\eta}^3 + \frac{35685}{64}\bar{\eta}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\Big] - \frac{176}{405\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{608}{1485\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

$$8^\circ\ \zeta_7' = C_1\left(1 + 14\bar{\eta}^2 + 28\bar{\eta}^4 + \frac{56}{3}\bar{\eta}^6 + \frac{16}{3}\bar{\eta}^8 + \frac{32}{45}\bar{\eta}^{10} + \frac{64}{1485}\bar{\eta}^{12} + \frac{128}{135135}\bar{\eta}^{14}\right) + C_2\Big[\frac{1}{82575360}\left(1 + 14\bar{\eta}^2 + 28\bar{\eta}^4 + \frac{56}{3}\bar{\eta}^6 + \frac{16}{3}\bar{\eta}^8 + \frac{32}{45}\bar{\eta}^{10} + \frac{64}{1485}\bar{\eta}^{12} + \frac{128}{135135}\bar{\eta}^{14}\right)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{87178291200}\left(\frac{1}{2}\bar{\eta}^{13} + \frac{45}{2}\bar{\eta}^{11} + \frac{2915}{8}\bar{\eta}^9 + \frac{10575}{4}\bar{\eta}^7 + \frac{278019}{32}\bar{\eta}^5 + \frac{364665}{32}\bar{\eta}^3 + \frac{509985}{128}\bar{\eta}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\Big] + \frac{128}{495\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 + \frac{656}{2145\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

Svako od ovih rešenja je tako napisano da su uz konstante partikularni integrali homogenog dela odgovarajuće diferencijalne jednačine (3.19) kao činioci, a da ostatak predstavlja partikularno rešenje dotične nehomogene jednačine.

Neminovnost da se sa tačnog oblika (3.1) predje na približan (3.15), ma koliko on dobar bio, ima za posledicu to da se za odredjivanje dveju integracionih konstanata ne može koristiti uslov $\bar{\eta} = \infty$, kao što se to moglo učiniti pri kratkotrajnim predhodnim kretanjima. Naime, tamo su bili očuvani oblici koji su sadržali kombinacije eksponencijalnih funkcija i funkcije grešske, dakle, takvi, koji povoljno"primaju" vrednost $\bar{\eta} = \infty$, pa su se svuda dovijale konačne i realne vrednosti. Medjutim, ovde su ti oblici delimično eksplicitno izgubljeni, razbijeni. Uglavnom, vrednosti partikularnih integrala nehomogenih jednačina čine da opšta rešenja nepovoljno "primaju" vrednost $\bar{\eta} = \infty$.

Interesantno je da jedino rešenje prve jednačine sistema (3.19) može biti odredjeno i sa uobičajenim graničnim uslovom $\bar{\eta} = \infty$. Za sva druga rešenja mora še koristiti granični uslov pri $\bar{\eta} = k$. Račun se može uspešno dovršiti pri ma kojoj realnoj i konačnoj vrednosti konstante k. Pošto prva univerzalna funkcija stoji uz U(x) u rešenju (3.18), što je baš sadržano u običajenom graničnom uslovu za $\bar{\eta}=\infty$, pomenuta okolnost daje formalno povoljniji ton čitavoj pojavi. Jer, onda se može smatrati da u najvažnijem intervalu $0 \leq \bar{\eta} \leq k$ (u okolini cilindričnog tela) sve univerzalne funkcije udruženo prikazuju stanje brzina u graničnom sloju, a da, nadalje, pri $k < \bar{\eta} \leq \infty$ ceo "teret" pada na prvu univerzalnu funkciju, dok se sve druge gase. Tako bi se, formalno, održao i ovde klasični granični uslov: u = U(x), za $\bar{\eta}=\infty$. Bojazan da će ova dvoznačnost(u smislu: dve vrednosti) promenljive $\bar{\eta}$, kao veštačke tvorevine prirodnih veličina: koordinate, viskoznosti i vremena, u istom rešenju – uneti nelogičnosti i netačnosti u problem, nije opravdana. Jer, ova dvoznačnost promenljive $\bar{\eta}$ imaće samo formalni karakter. Kao što je dokazano u prethodnom paragrafu, ako se umesto $\bar{\eta}=\infty$, u graničnom uslovu uzme $\bar{\eta}=2$, učini se minimalna greška u vrednosti integracionih konstanata, za prvu univerzalnu funkciju, od svega 0,44%). Pošto interval $0 \leq \bar{\eta} \leq 2$ odgovara i najboljoj dobroti izraza (3.15), opredelićemo se za brojnu vrednost k =2 Tada su i granični uslovi za pojedine univerzalne funkcije i vrednosti integracionih konstanata u opštim rešenjima sledeće:

1° $\zeta_0'(0)=0, \quad \zeta_0'(\infty)=1,$

$C_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}, C_2=0.$

2° $\zeta_1'(0)=0, \quad \zeta_1'(2)=0,$

$C_1=-1, \quad C_2=4{,}091.$

3° $\zeta_2'(0)=0, \quad \zeta_2'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-0{,}670$

4° $\zeta_3'(0)=0, \quad \zeta_3'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-6{,}090.$

5° $\zeta_4'(0)=0, \quad \zeta_4'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=41{,}875.$

6° $J_5'(0)=0, \quad J_5'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-356,119.$

7° $J_6'(0)=0, \quad J_6'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=3845,40$

8° $J_7'(0)=0, \quad J_7'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-31363,070.$

U tabeli 6. su proračunate univerzalne funkcije u najvažnijem području vrednosti promenljive $\bar{\eta}$, što je prikazano grafikom na sl. 9.

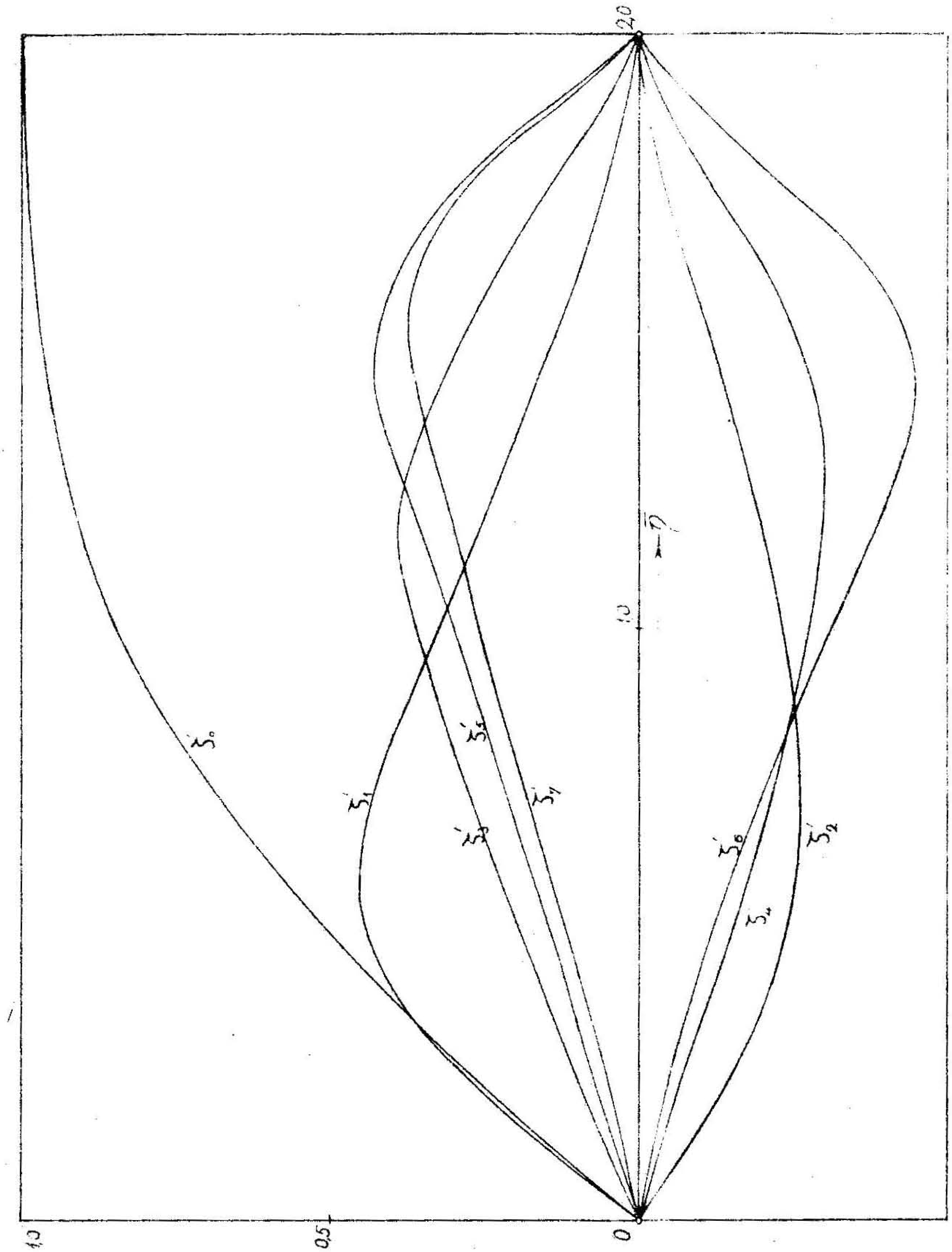
$\bar{\eta}$	$J_0'(\bar{\eta})$	$J_1'(\bar{\eta})$	$-J_2'(\bar{\eta})$	$J_3'(\bar{\eta})$	$-J_4'(\bar{\eta})$	$J_5'(\bar{\eta})$	$-J_6'(\bar{\eta})$	$J_7'(\bar{\eta})$
0,25	0,2763	0,3134	0,1136	0,0962	0,0814	0,0692	0,0594	0,0448
0,50	0,5205	0,4470	0,2145	0,2321	0,1843	0,1551	0,1385	0,1019
0,75	0,7111	0,4606	0,2885	0,2910	0,2762	0,2709	0,2526	0,1850
1,0	0,8427	0,4074	0,3300	0,3825	0,3821	0,4181	0,4168	0,2923
1,50	0,9601	0,2166	0,2715	0,4515	0,4370	0,6896	0,7385	0,5350
1,75	0,9867	0,0998	0,1665	0,3330	0,1998	0,6021	0,6583	0,5043
1,95	0,9948	0,0250	0,0400	0,0800	0,0505	0,0140	0,0150	0,0130

Tabela 6.

Sabirajući izraze (3.1) i (3.18) dobiće se ukupna brzina u graničnom sloju:

$$u=Uf_1'(\eta)+U\Big[J_0'(\bar{\eta})+t_1 2U'J_1'(\bar{\eta})+t_1^2\frac{2U'}{T}J_2'(\bar{\eta})+t_1^3\frac{2U'}{T^2}J_3'(\bar{\eta})+$$
$$+t_1^4\frac{2U'}{T^3}J_4'(\bar{\eta})+t_1^5\frac{2U'}{T^4}J_5'(\bar{\eta})+t_1^6\frac{2U'}{T^5}J_6'(\bar{\eta})+t_1^7\frac{2U'}{T^6}J_7'(\bar{\eta})\Big] \quad (3.20)$$

Smenom ove vrednosti u jednačinu za tačku odvajanja graničnog sloja $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0$ dobiće se jednačina:



1,0
0,5
0
10
20

$$\frac{4}{15} f_1''(0) + J_0''(0) + t_1\left[\frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T} + 2U' J_1''(0)\right] + t_1^2\left[2U'\frac{J_2''(0)}{T} - \frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T^2}\right] +$$
$$+ t_1^3\left[2U'\frac{J_3''(0)}{T^2} + \frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T^3}\right] + t_1^4\left[2U'\frac{J_4''(0)}{T^3} - \frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T^4}\right] + t_1^5\left[2U'\frac{J_5''(0)}{T^4} +\right.$$
$$\left.+ \frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T^5}\right] + t_1^6\left[2U'\frac{J_6''(0)}{T^5} - \frac{4}{5}\frac{f_1''(0)}{T^6}\right] + t_1^7 2U'\frac{J_7''(0)}{T^6} = 0 \qquad (3.21)$$

Iz ove jednačine može se izračunati trenutak odvajanja graničnog sloja u svakoj tački na konturi cilindričnog tela pri odredjenoj vrednosti konstante T.

Primer: kružni cilindar radijusa $R = 50$ cm, pokrenut je trzajem $U_\infty = 10$ cm/s, a zatim u trenutku $T = 3/2$ sec njemu je saopšten dopunski trzaj $U_\infty = 10$ cm/s. Kada će se odvojiti granični sloj u zadnjoj zaustavnoj tački?

Proverimo, nije li se možda granični sloj u zadnjoj zaustavnoj tački već odvojio zbog prethodnog trzaja. Koristeći Blazijusovo rešenje $t_s = 0,351\ R/U_\infty$ doznajemo da bi se odvajanje tu desilo u momentu $t_s = 1,755$ sec, a to je veće od uzete vrednosti $T = 3/2$ sec. Kako je za kružni cilindar potencijalna brzina $U = 2U_\infty \sin x/R$, pri $x = R\pi$ biće $U' = -2/5$.

Nulte vrednosti drugih izvoda univerzalnih funkcija mogu se izračunati:

$$f_1''(0) = J_0''(0) = 1,128,\quad J_1''(0) = 1,7057,\quad J_2''(0) = -0,4650,\quad J_3''(0) = 0,3839,$$
$$J_4''(0) = -0,3157,\quad J_5''(0) = 0,2638,\quad J_6''(0) = -0,2245,\quad J_7''(0) = 0,1705.$$

Smenom u jednačinu (3.21) dobiće se:

$$0,045 t_1^7 + 0,208 t_1^6 - 0,290 t_1^5 + 0,388 t_1^4 - 0,490 t_1^3 +$$
$$+ 0,574 t_1^2 + 2,861 t_1 - 5,358 = 0 \qquad (3.22)$$

Pišući jednačinu (3.22) u obliku

$$f_1(t_1) = f_2(t_1)$$

gde je $f_2(t_1) = -0,574 t_1^2 - 2,861 t_1 + 5,360$.

i rešavajući je grafički dobiće se da, od momenta kada se saopšti dopunski trzaj, do trenutka odvajanja graničnog sloja u zadnjoj zaustavnoj tački prodje vreme od

$$t_1 = 1,35 \text{ sec.} \qquad (3.23)$$

Dakle, umesto da se granični sloj odvoji posle 0,255 sec. , pojavom dopunskog trzaja to se desilo kasnije, kroz 1,35 sec.

Izraz (3.20) predstavlja brzinu u graničnom sloju na konturi cilindričnog tela. Pomoću njega može se proračunati brzina graničnog sloja na odredjenom mestu konture, a uraznim trenucima; kao i u jednom trenutku, a na različitim mestima na konturi tela. Ispitivanja ovo vrste biće navedena sada:

1° Profili brzina u istom trenutku $t_1 = 1$ sec, a na raznim mestima konture kružnog cilindra $R = 50$ cm, ako su $U_\infty = 10$ cm/s i $T = 2$ sec.

a) x/R = 90°, $u = 2U_\infty(\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta})$

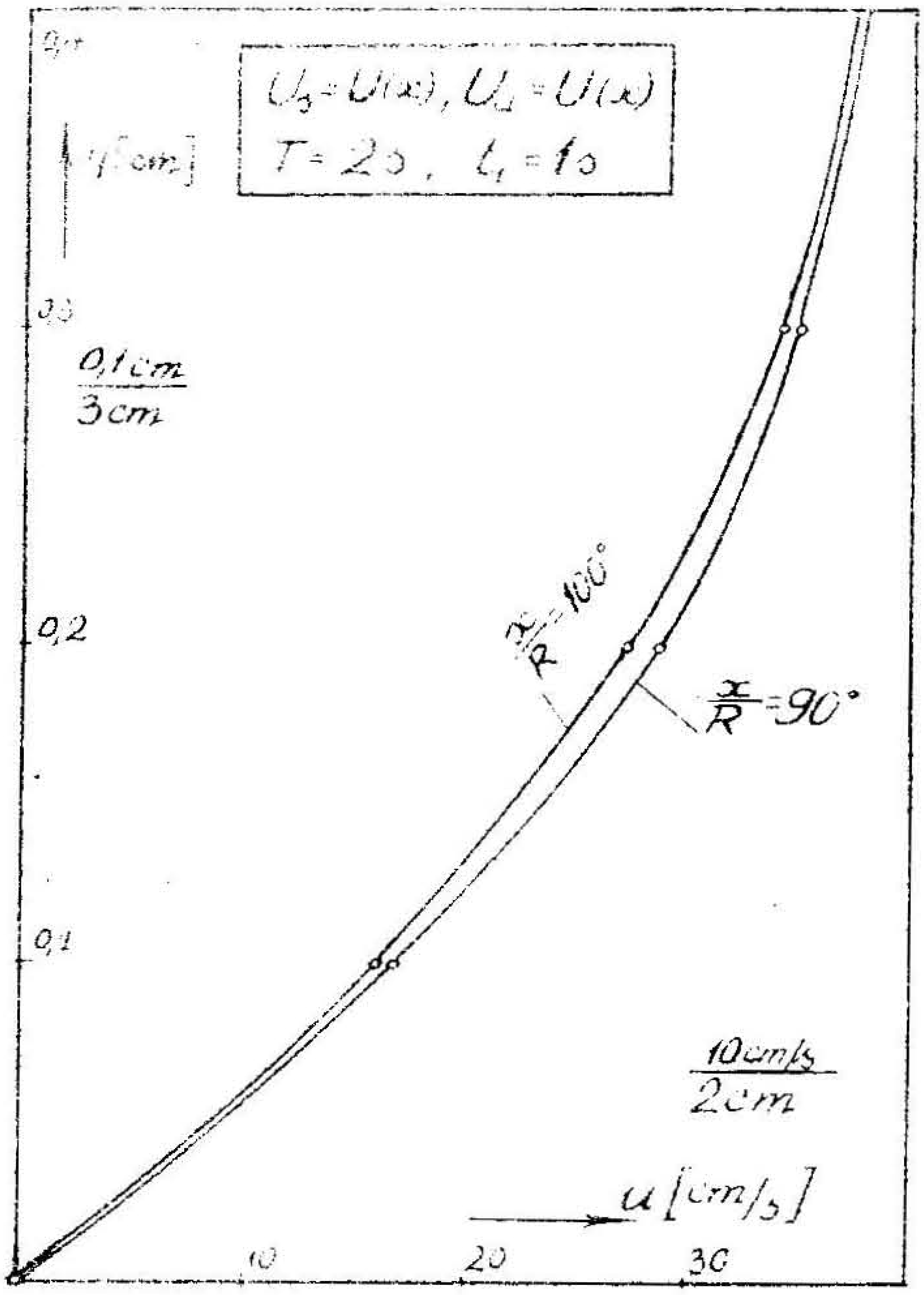
y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$\mathrm{Erf}\,\eta$	$\mathrm{Erf}\,\bar{\eta}$	$\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta}$	u [$\frac{cm}{s}$]
0,05	0,25	0,1440	0,2763	0,1600	0,4363	8,7260
0,10	0,50	0,2890	0,5205	0,3150	0,8355	16,7100
0,15	0,75	0,4330	0,7111	0,4550	1,1601	23,3220
0,20	1,0	0,5780	0,8427	0,5800	1,4227	28,4540
0,30	1,50	0,8670	0,9661	0,7800	1,7401	34,9220
0,40	2,0	1,1560	0,9953	0,9000	1,8953	37,9060

Tabela 7.

b) x/R = 100°, $u = 19{,}7(\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta}) - 2{,}73\,J_1' - 1{,}37\,J_2' - 0{,}68\,J_3' - 0{,}34\,J_4' - 0{,}17\,J_5' - 0{,}085\,J_6' - 0{,}043\,J_7'$

y [cm]	$\bar{\eta}$	$19{,}7(\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta})$	$2{,}37J_1'$	$-1{,}37J_2'$	$0{,}68J_3'$	$-0{,}34J_4'$	$0{,}17J_5'$	$-0{,}085J_6'$	$0{,}043J_7'$	u [$\frac{cm}{s}$]
0,05	0,25	8,6680	0,7347	0,1507	0,0653	0,0275	0,0117	0,0050	0,00019	8,0376
0,10	0,50	16,3510	1,0665	0,2877	0,1564	0,0625	0,0263	0,0117	0,0044	15,4593
0,15	0,75	22,8520	1,0902	0,3973	0,1972	0,0938	0,0461	0,0215	0,0079	22,0232
0,20	1,0	27,9740	0,9717	0,4521	0,2584	0,1322	0,0711	0,0354	0,0125	27,2800
0,30	1,50	34,4750	0,5214	0,3699	0,3060	0,1486	0,1171	0,0627	0,0230	34,0887
0,40	2,0	37,2330	0	0	0	0	0	0	0	37,2330

Tabela 8



Sl. 10.

Rezultati proračuna navedenih u tabelama 7. i 8., prikazani su i dijagramom na sl. 10. Oblici profila brzina u graničnom sloju sa sl. 10 su prirodni. Postepeno nagrizanje profila brzina ukoliko smo bliži zoni prvog odvajanja graničnog sloja – tu je očigledno.

2^0 Profili brzina graničnog sloja na istom mestu, a u raznim trenucima vremena

Najpre, neka je:

$$\frac{x}{R} = 100^0 \qquad R = 50 \text{ cm},$$
$$T = 2{,}5 \text{ sec};$$

a) $t_1 = 1$ sec,

$$u = 19{,}70(Erf\,\eta + Erf\,\bar{\eta}) - 2{,}73\,J_1' - 1{,}09\,J_2' - 0{,}44\,J_3' - 0{,}17\,J_4' - 0{,}07\,J_5' - 0{,}028\,J_6' - 0{,}011\,J_7'$$

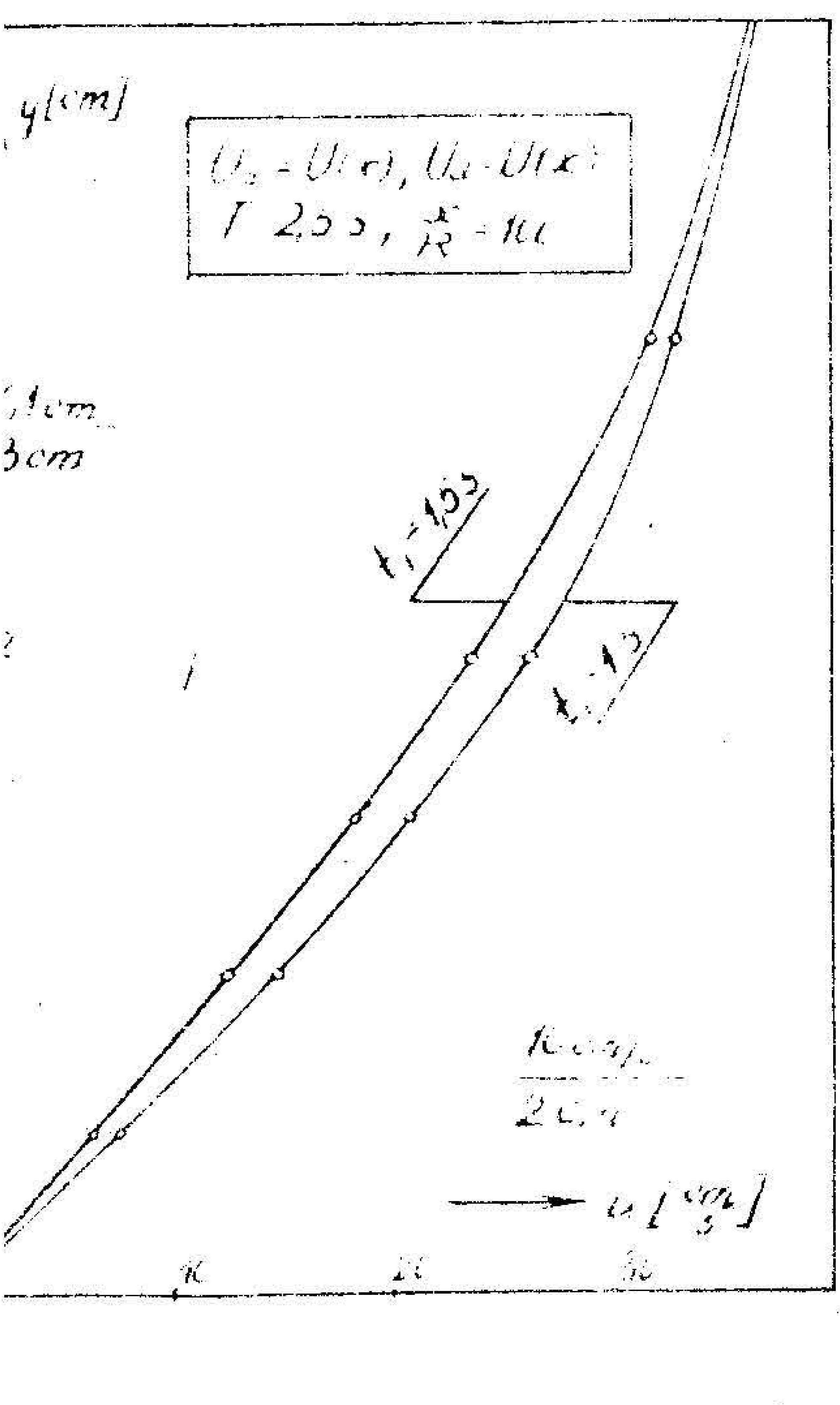
y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$19{,}7(Erf\,\eta + Erf\,\bar{\eta})$	$2{,}73\,J_1'$	$-1{,}09\,J_2'$	$0{,}44\,J_3'$	$-0{,}17\,J_4'$	$0{,}07\,J_5'$	$-0{,}028\,J_6'$	$0{,}011\,J_7'$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,05	0,25	0,134	8,3922	0,8545	0,1238	0,0423	0,0138	0,0048	0,0016	0,00049	7,6293
0,10	0,50	0,267	16,0653	1,2203	0,2332	0,1021	0,0313	0,0108	0,0038	0,00112	14,9993
0,15	0,75	0,401	22,2807	1,2558	0,3132	0,1280	0,0469	0,0189	0,0071	0,00203	21,2439
0,20	1,0	0,535	27,3436	1,1111	0,3597	0,1681	0,0661	0,0293	0,0117	0,00321	26,4694
0,30	1,50	0,802	33,7067	0,5897	0,2954	0,1986	0,0743	0,0483	0,0206	0,00588	33,2545
0,40	2,0	1,070	36,7996	0	0	0	0	0	0	0	36,7996

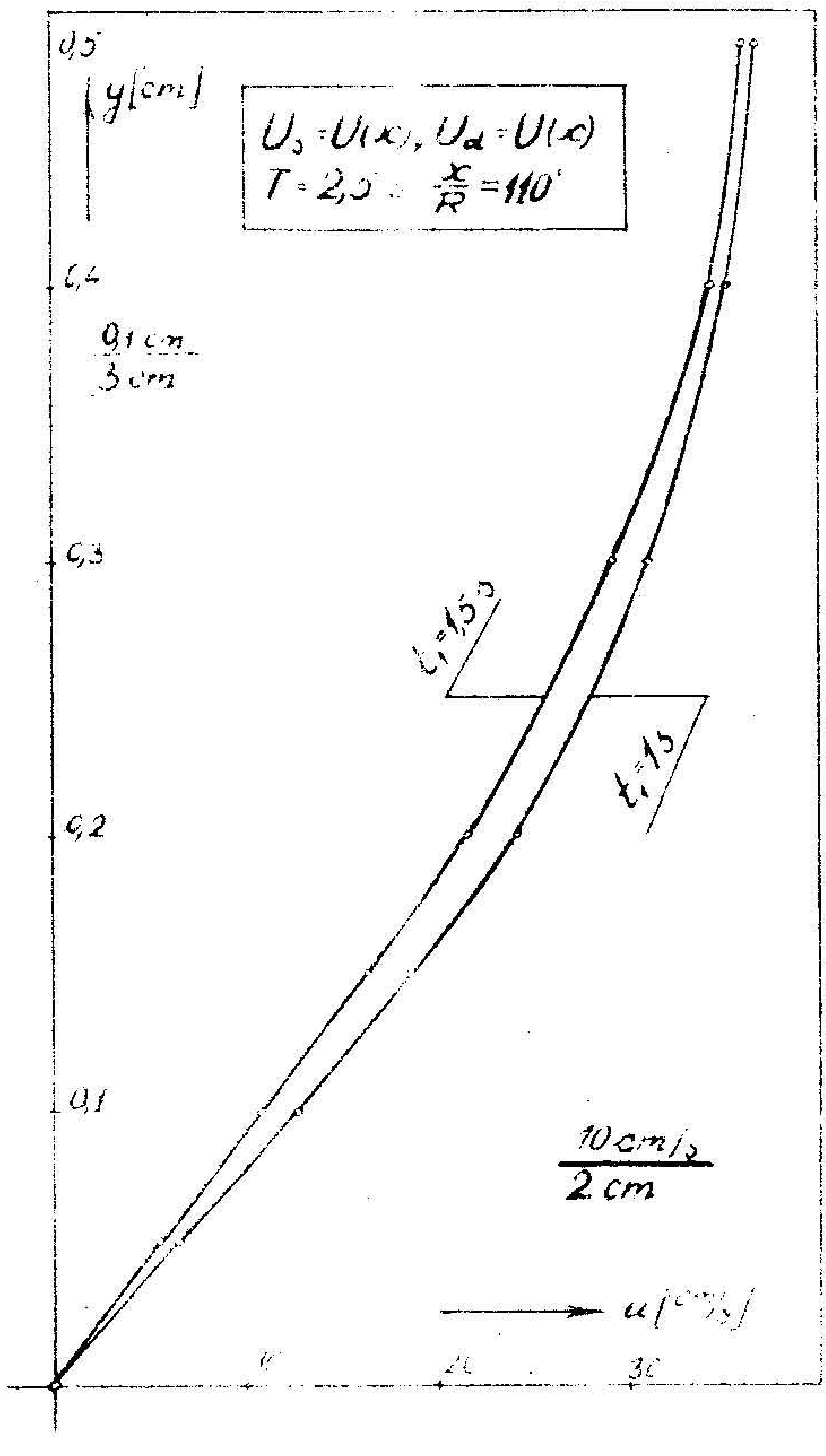
Tabela 9.

b) $t_1 = 1{,}5$ **sec**

$$u = 19{,}7(\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta}) - 4{,}1 J_1' - 2{,}45 J_2' - 1{,}48 J_3' - 0{,}86 J_4' - 0{,}53 J_5' - 0{,}32 J_6' - 0{,}188 J_7'$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$19{,}7(\mathrm{Erf}\,\eta + \mathrm{Erf}\,\bar{\eta})$	$4{,}10 J_1'$	$-2{,}45 J_2'$	$1{,}48 J_3'$	$-0{,}86 J_4'$	$0{,}53 J_5'$	$-0{,}32 J_6'$	$0{,}188 J_7'$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,05	0,205	0,125	7,0526	1,0660	0,2205	0,1336	0,0602	0,0318	0,0160	0,0056	6,1123
0,10	0,410	0,250	13,8885	1,7220	0,4287	0,2524	0,1247	0,0662	0,0352	0,0141	12,4224
0,15	0,615	0,375	19,7000	1,9270	0,6002	0,3638	0,1935	0,1060	0,0608	0,0254	18,1323
0,20	0,820	0,500	25,2160	1,8655	0,7350	0,4752	0,2752	0,1590	0,0944	0,0395	23,7814
0,30	1,230	0,750	32,1327	1,3325	0,8452	0,6682	0,3741	0,3074	0,1856	0,0780	31,1515
0,40	1,640	1,0	35,9072	0,6150	0,5267	0,5940	0,2795	0,3498	0,2336	0,1025	35,8860





Profili brzina na sl. 11. prema tabelama 9. i 10., opet pokazuju normalan razvoj brzine graničnog sloja u toku vremena.

Ili, neka je x/R = 110°, R = 50 cm, T = 2,5 sec;

a) t_1 = 1 sec

$$u = 18{,}8\,\mathrm{Erf}\,\eta + 18{,}8\,J_0' - 5{,}144\,J_1' - 2{,}057\,J_2' - 0{,}823\,J_3' - 0{,}330\,J_4' - 0{,}132\,J_5' - 0{,}053\,J_6' - 0{,}021\,J_7'$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$18{,}8\,\mathrm{Erf}\,\eta$	$18{,}8\,J_0'$	$5{,}144\,J_1'$	$-2{,}057\,J_2'$	$0{,}823\,J_3'$	$-0{,}33\,J_4'$	$0{,}132\,J_5'$	$-0{,}053\,J_6'$	$0{,}021\,J_7'$	$u\,[\frac{cm}{s}]$
0,05	0,25	0,134	2,820	5,1888	1,5946	0,2263	0,0790	0,0264	0,0092	0,0032	0,0009	6,5810
0,10	0,50	0,268	5,5460	9,7760	2,3148	0,4319	0,2093	0,0607	0,0205	0,0074	0,0021	13,2753
0,15	0,75	0,401	7,8960	13,3668	2,3662	0,5924	0,2387	0,0910	0,0356	0,0132	0,0039	19,3150
0,20	1,0	0,535	10,2460	15,7920	2,0576	0,6788	0,3127	0,1283	0,0554	0,0212	0,0061	24,4345
0,30	1,5	0,802	14,0060	18,1608	1,1316	0,5554	0,3703	0,1442	0,0911	0,0392	0,0112	31,3016
0,40	2,0	1,070	16,4164	18,7060	0	0	0	0	0	0	0	35,1224

Tabela 11.

b) t_1 = 1,5 sec

$$u = 18{,}8\,\mathrm{Erf}\,\eta + 18{,}8\,J_0' - 7{,}716\,J_1' - 4{,}630\,J_2' - 2{,}777\,J_3' - 1{,}670\,J_4' - 0{,}987\,J_5' - 0{,}60\,J_6' - 0{,}360\,J_7'$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$18{,}8\,\mathrm{Erf}\,\eta$	$18{,}8\,J_0'$	$7{,}716\,J_1'$	$-4{,}63\,J_2'$	$2{,}777\,J_3'$	$-1{,}67\,J_4'$	$0{,}987\,J_5'$	$-0{,}60\,J_6'$	$0{,}36\,J_7'$	$u\,[\frac{cm}{s}]$
0,05	0,205	0,125	2,5380	4,1924	2,0061	0,4167	0,2499	0,1169	0,0592	0,0300	0,0108	4,9680
0,10	0,410	0,250	5,1888	8,0840	3,2407	0,8334	0,4721	0,2338	0,1184	0,0660	0,0252	10,5496
0,15	0,615	0,375	7,4260	11,2800	3,6265	1,1112	0,6665	0,3674	0,1974	0,1140	0,0504	15,7618
0,20	0,820	0,50	9,7760	14,2880	3,4722	1,3890	0,8886	0,5010	0,2961	0,1740	0,0756	21,3955
0,30	1,230	0,750	13,3668	17,2960	2,4691	1,5742	1,2496	0,7348	0,5724	0,3480	0,1476	28,8811
0,488	2,0	1,220	17,2960	18,7060	0	0	0	0	0	0	0	36,0020

Tabela 12.

Grafik na sl. 12., isto tako, odražava prirodan razvitak brzine graničnog sloja u toku vremena nagoveštavajući mogućnost trenutka odvajanja graničnog sloja na tom mestu konture cilindra.

Napomena: Ako se sastavi parcijalna jednačina prvoga približenja brzine dopunskog graničnog sloja (1.27) sa izrazom (1.15′) navedenom u Dodatku 1., umesto sa ranijim izrazom (1.15), – za slučaj dopunskog trenja $\left[U_d = U(x)\right]$, iza prethodnog kretanja trzajem $\left[U_s = U_0(x)\right]$, dobiće se:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 2UU'(1-\Omega_0) - t_1\frac{2UU'}{T}\Omega_1 - t_1^2\frac{2UU'}{T^2}\Omega_2 - t_1^3\frac{2UU'}{T^3}\Omega_3 - t_1^4\frac{2UU'}{T^4}\Omega_4 - t_1^5\frac{2UU'}{T^5}\Omega_5 - t_1^6\frac{2UU'}{T^6}\Omega_6 - t_1^7\frac{2UU'}{T^7}\Omega_7 - t_1^8\frac{2UU'}{T^8}\Omega_8 - t_1^9\frac{2UU'}{T^9}\Omega_9$$

i njeno rešenje potražimo u obliku:

$$u_0 = U\zeta_0'(\eta) + t_1 2UU'\zeta_1'(\eta) + t_1^2\frac{2UU'}{T}\zeta_2'(\eta) + t_1^3\frac{2UU'}{T^2}\zeta_3'(\eta) + t_1^4\frac{2UU'}{T^3}\zeta_4'(\eta) + t_1^5\frac{2UU'}{T^4}\zeta_5'(\eta) + t_1^6\frac{2UU'}{T^5}\zeta_6'(\eta) + t_1^7\frac{2UU'}{T^6}\zeta_7'(\eta) + t_1^8\frac{2UU'}{T^7}\zeta_8'(\eta) + t_1^9\frac{2UU'}{T^8}\zeta_9'(\eta) + t_1^{10}\frac{2UU'}{T^9}\zeta_{10}'(\eta)$$

dobiće se, umesto sistema (3.19), sledeće diferencijalne jednačine

$$\zeta_0''' + 2\eta\zeta_0'' = 0$$

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4(\Omega_0 - 1).$$

$$\zeta_2''' + 2\eta\zeta_2'' - 8\zeta_2' = 4\Omega_1$$

$$\zeta_3''' + 2\eta\zeta_3'' - 12\zeta_3' = 4\Omega_2$$

$$\zeta_4''' + 2\eta\zeta_4'' - 16\zeta_4' = 4\Omega_3$$

$$\zeta_5''' + 2\eta\zeta_5'' - 20\zeta_5' = 4\Omega_4$$

$$\zeta_6''' + 2\eta\zeta_6'' - 24\zeta_6' = 4\Omega_5$$

$$\zeta_7''' + 2\eta\zeta_7'' - 28\zeta_7' = 4\Omega_6$$

$$\zeta_8''' + 2\eta\zeta_8'' - 32\zeta_8' = 4\Omega_7$$

$$\zeta_9''' + 2\eta\zeta_9'' - 36\zeta_9' = 4\Omega_8$$

$$\zeta_{10}''' + 2\eta\zeta_{10}'' - 40\zeta_{10}' = 4\Omega_9$$

Ove jednačine su istoga tipa kao i već rešene jednačine (3.19). Računski posao oko njihovog rešavanja je ogroman, a tačnost rešenja, u odnosu na rešeni slučaj, nebi se znatnije popravila. Zato se i ne navode rešenja ovih jednačina.

34. Zatečeno kretanje - trzajem, dopunsko - - stalnim ubrzanjem

Prema ranije uvedenim oznakama, priroda kretanja obeležena je ovom prilikom izrazima: $U_s = U(x)$, $U_d = t_1 W(x)$. Jednačina za prvo približenje brzine graničnog sloja (1.27), posle smenjivanja ovih izraza i veze (3.15) postaje:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = W + t_1 F(1-\omega_0) - t_1^2 \frac{E}{T}\omega_1 - t_1^3 \frac{E}{T^2}\omega_2 - t_1^4 \frac{E}{T^3}\omega_3 - t_1^5 \frac{E}{T^4}\omega_4 - t_1^6 \frac{E}{T^5}\omega_5 - t_1^7 \frac{E}{T^6}\omega_6 \tag{3.24}$$

gde je $\quad F = UW' + U'W$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku

$$u_0 = t_1 W \zeta_0'(\bar\eta) + t_1^2 F \zeta_1'(\bar\eta) + t_1^3 \frac{E}{T}\zeta_2'(\bar\eta) + t_1^4 \frac{E}{T^2}\zeta_3'(\bar\eta) + t_1^5 \frac{E}{T^3}\zeta_4'(\bar\eta) + t_1^6 \frac{E}{T^4}\zeta_5'(\bar\eta) + t_1^7 \frac{E}{T^5}\zeta_6'(\bar\eta) + t_1^8 \frac{E}{T^6}\zeta_7'(\bar\eta) \tag{3.25}$$

za nepoznate funkcije od promenljive $\bar\eta$, dobićemo:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0''' + 2\bar\eta \zeta_0'' - 4\zeta_0' &= -4 \\
\zeta_1''' + 2\bar\eta \zeta_1'' - 8\zeta_1' &= 4(\omega_0 - 1) \\
\zeta_2''' + 2\bar\eta \zeta_2'' - 12\zeta_2' &= 4\omega_1 \\
\zeta_3''' + 2\bar\eta \zeta_3'' - 16\zeta_3' &= 4\omega_2 \\
\zeta_4''' + 2\bar\eta \zeta_4'' - 20\zeta_4' &= 4\omega_3 \\
\zeta_5''' + 2\bar\eta \zeta_5'' - 24\zeta_5' &= 4\omega_4 \\
\zeta_6''' + 2\bar\eta \zeta_6'' - 28\zeta_6' &= 4\omega_5 \\
\zeta_7''' + 2\bar\eta \zeta_7'' - 32\zeta_7' &= 4\omega_6
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

gde su na desnim stranama poznate funkcije (3.16).

Opšta rešenja linearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugoga reda (3.26) su:

$$1^\circ \ \zeta_0' = C_1(1+2\bar\eta^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\bar\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}\right] + 1$$

$$2^\circ \ \zeta_1' = C_1\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right) + C_2\left[\frac{1}{32}\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^3+\frac{5}{2}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\right] - \frac{16}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta + \frac{1}{2}$$

$$3^\circ\ J_2' = C_1\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right)+C_2\Big[\frac{1}{384}\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\right.$$
$$\left.+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+\frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^5+7\bar\eta^3+\frac{33}{4}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\Big]+\frac{16}{135\sqrt{\pi}}\bar\eta^3-\frac{128}{225\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$4^\circ\ J_3' = C_1\left(1+8\bar\eta^2+8\bar\eta^4+\frac{32}{15}\bar\eta^6+\frac{16}{105}\bar\eta^8\right)+C_2\Big[\frac{1}{6144}\left(1+8\bar\eta^2+\right.$$
$$\left.+8\bar\eta^4+\frac{32}{15}\bar\eta^6+\frac{16}{105}\bar\eta^8\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+\frac{1}{40320}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^7+\frac{27}{4}\bar\eta^5+\frac{185}{8}\bar\eta^3+\right.$$
$$\left.+\frac{279}{16}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big]+\frac{32}{225\sqrt{\pi}}\bar\eta^3+\frac{272}{525\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$5^\circ\ J_4' = C_1\left(1+10\bar\eta^2+\frac{40}{3}\bar\eta^4+\frac{16}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{21}\bar\eta^8+\frac{32}{945}\bar\eta^{10}\right)+C_2\Big[\frac{1}{122880}\left(1+\right.$$
$$\left.+10\bar\eta^2+\frac{40}{3}\bar\eta^4+\frac{16}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{21}\bar\eta^8+\frac{32}{945}\bar\eta^{10}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+\frac{1}{3628800}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^9+11\bar\eta^7+\right.$$
$$\left.+\frac{147}{2}\bar\eta^5+165\bar\eta^3+\frac{2895}{32}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big]-\frac{16}{63\sqrt{\pi}}\bar\eta^3-\frac{416}{945\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$6^\circ\ J_5'(\bar\eta) = C_1\left(1+12\bar\eta^2+20\bar\eta^4+\frac{32}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{7}\bar\eta^8+\frac{64}{315}\bar\eta^{10}+\frac{64}{10395}\bar\eta^{12}\right)+$$
$$+C_2\Big[\frac{1}{2949120}\left(1+12\bar\eta^2+20\bar\eta^4+\frac{32}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{7}\bar\eta^8+\frac{64}{315}\bar\eta^{10}+\frac{64}{10395}\bar\eta^{12}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+$$
$$+\frac{1}{479001600}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^{11}+\frac{65}{4}\bar\eta^9+\frac{711}{4}\bar\eta^7+\frac{6279}{8}\bar\eta^5+\frac{41685}{32}\bar\eta^3+\right.$$
$$\left.+\frac{35685}{64}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big]+\frac{128}{405\sqrt{\pi}}\bar\eta^3+\frac{112}{297\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$7^\circ\ J_6'(\bar\eta) = C_1\left(1+14\bar\eta^2+28\bar\eta^4+\frac{56}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{3}\bar\eta^8+\frac{32}{45}\bar\eta^{10}+\frac{64}{1485}\bar\eta^{12}+\frac{128}{135135}\bar\eta^{14}\right)$$
$$+C_2\Big[\frac{1}{82575360}\left(1+14\bar\eta^2+28\bar\eta^4+\frac{56}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{3}\bar\eta^8+\frac{32}{45}\bar\eta^{10}+\frac{64}{1485}\bar\eta^{12}+\right.$$
$$\left.+\frac{128}{135135}\bar\eta^{14}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+\frac{1}{87178291200}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^{13}+\frac{45}{2}\bar\eta^{11}+\frac{2915}{8}\bar\eta^9+\frac{10575}{4}\bar\eta^7+\right.$$
$$\left.+\frac{278019}{32}\bar\eta^5+\frac{364665}{32}\bar\eta^3+\frac{509985}{128}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big]-\frac{16}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta^3-\frac{64}{195\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$8^\circ\ J_7' = C_1\left(1+16\bar\eta^2+\frac{112}{3}\bar\eta^4+\frac{448}{15}\bar\eta^6+\frac{32}{3}\bar\eta^8+\frac{256}{135}\bar\eta^{10}+\frac{256}{1485}\bar\eta^{12}+\right.$$
$$\left.+\frac{1024}{135135}\bar\eta^{14}+\frac{256}{2027025}\bar\eta^{16}\right)+C_2\Big[\frac{1}{2642411520}\left(1+16\bar\eta^2+\frac{112}{3}\bar\eta^4+\right.$$
$$+\frac{448}{15}\bar\eta^6+\frac{32}{3}\bar\eta^8+\frac{256}{135}\bar\eta^{10}+\frac{256}{1485}\bar\eta^{12}+\frac{1024}{135135}\bar\eta^{14}+$$
$$\left.+\frac{256}{2027025}\bar\eta^{16}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta+\frac{1}{20922789888000}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^{15}+\frac{119}{3}\bar\eta^{13}+\right.$$
$$+\frac{5343}{8}\bar\eta^{11}+\frac{115005}{16}\bar\eta^9+\frac{1245915}{32}\bar\eta^7+\frac{6506325}{64}\bar\eta^5+$$
$$\left.+\frac{14073885}{128}\bar\eta^3+\frac{8294895}{256}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big]+\frac{128}{585\sqrt{\pi}}\bar\eta^3+\frac{752}{2925\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

Kompletna analiza sa istim objašnjenjima bi se mogla ponoviti i ovde, kao i u slučaju ptethodnog i dopunskog trzaja. S toga, primenjujući rezultate onih ispitivanja možemo doći do vrednosti integracionih konstanata u opštim rešenjima:

1° $J_0'(0)=0, \quad J_0'(\infty)=1,$

$C_1=0, \quad C_2=-4$

2° $J_1'(0)=0, \quad J_1'(2)=0,$

$C_1=0{,}00007, \quad C_2=-16{,}028.$

3° $J_2'(0)=0, \quad J_2'(2)=0,$

$C_1=0{,}00087, \quad C_2=-0{,}336$

4° $J_3'(0)=0, \quad J_3'(2)=0,$

$C_1=-0{,}00364, \quad C_2=22{,}777$

5° $J_4'(0)=0, \quad J_5'(2)=0.$

$C_1=0, \quad C_2=244{,}776$

6° $J_5'(0)=0, \quad J_5'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-2935{,}550.$

7° $J_6'(0)=0, \quad J_6'(2)=0.$

$C_1=0, \quad C_2=41125{,}0$

8 $J_7'(0)=0, \quad J_7'(2)=0,$

$C_1=0, \quad C_2=-416297{,}26.$

Sabiranjem izraza (3.1) i (3.25) dobiće se rezultujuća brzina u graničnom sloju:

$$u = U f_1'(\eta) + t_1 W J_0'(\bar{\eta}) + t_1^2 F J_1' + t_1^3 \frac{F}{T} J_2' + t_1^4 \frac{F}{T^2} J_3' + t_1^5 \frac{F}{T^3} J_4' + t_1^6 \frac{F}{T^4} J_5' + t_1^7 \frac{F}{T^5} J_6' + t_1^8 \frac{F}{T^6} J_7' \qquad (3.27)$$

Smenjujući vrednost (3.27) u uslov odvajanje graničnog sloja $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0$, dobiće se jednačina:

$$t_1^8\frac{J_7''(0)}{T^6}+t_1^7\frac{J_6''(0)}{T^5}+t_1^6\left[\frac{J_5''(0)}{T^4}+\frac{f_1''(0)}{T^6}\right]+t_1^5\left[\frac{J_4''(0)}{T^3}-\frac{f_1''(0)}{T^5}\right]+$$
$$+t_1^4\left[\frac{J_3''(0)}{T^2}+\frac{f_1''(0)}{T^4}\right]+t_1^3\left[\frac{J_2''(0)}{T}-\frac{f_1''(0)}{T^3}\right]+t_1^2\left[J_1''(0)+\right.$$
$$\left.+\frac{f_1''(0)}{T^2}\right]+t_1\left[-\frac{5}{4}J_0''(0)-\frac{f_1''(0)}{T}\right]-\frac{1}{3}f_1''(0)=0 \qquad (3.28)$$

Iz relacije (3.28) može se izračunati trenutak odvajanja graničnog sloja u svakoj tački na konturi cilindričnog tela.

Primer: Kružni cilindar, radijusa $R = 50$ cm, pokrenut je trzajem $U_\infty = 10$ cm/s, a zatim u trenutku $T = 3/2$ sec njemu je saopšteno dopunsko konstantno ubrzanje $V_o = 10$ cm/s^2.

Pošto se još uvek granični sloj nije odvojio u zadnjoj zaustavnoj tački zbog prethodnog kretanja trzajem, interesantno je ispitati kada će se posle pojave dopunskog kretanja stalnim ubrzanjem odvojiti granični sloj u zadnjoj zaustavnoj tački. Kako je za kružni cilindar potencijalna brzina $U = 2U_\infty \sin x/R$ i $W = 2V_o \sin x/R$, pri $x = R\pi$ biće: $U/F = -5/4$, $W/F = -5/4$, pa jednačina (3.28) postaje:

$$0{,}0126\,t_1^8-0{,}024\,t_1^7+0{,}140\,t_1^6-0{,}820\,t_1^5+0{,}344\,t_1^4-$$
$$-0{,}546\,t_1^3=-1{,}807\,t_1^2+3{,}570\,t_1+0{,}376 \qquad (3.29)$$

Rešavajući jednačinu (3.29) grafički:

$$f_1(t_1)=f_2(t_1)$$

gde je: $f_2(t_1)=-1{,}807\,t_1^2+3{,}570\,t_1+0{,}376$

dobiće se da, od momenta kada se saopšti dopunsko jednako-ubrzano kretanje, do pojave tačke odvajanja u zadnjoj zaustavnoj tački prodje vreme od :

$$t_1 = 1{,}80 \text{ sec} \qquad (3.30)$$

Koristeći izraz(3.27) može se i ovde obaviti proračun brzine u graničnom sloju. Izgled profila brzine može poslužiti kao pokazatelj kvaliteta postupka koji je primenjen.

Proračunajmo brzine na nekoliko mesta na konturi kružnog cilindra u trenutku $t_1 = 1$ sec, ako su:

$T = 2$ sec, $R = 50$ cm, $U_\infty = 10$ cm/s, $V_o = 10$ cm/s^2

a) $x/R = 90^\circ$

$$u = 20\left[f_1'(\eta)+J_0'(\eta)\right]$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$f_1'(\eta)$	$J_0'(\bar{\eta})$	$f_1'(\eta)+J_0'(\bar{\eta})$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,05	0,25	0,144	0,160	0,450	0,610	12,200
0,10	0,50	0,288	0,315	0,719	1,034	20,680
0,15	0,75	0,433	0,455	0,868	1,323	26,460
0,20	1,0	0,578	0,580	0,944	1,524	30,480
0,30	1,50	0,867	0,780	0,991	1,771	35,420
0,40	2,0	1,156	0,900	0,998	1,899	37,998

Tabela 13.

b) $x/R = 100^0$

$$u = 19{,}7\,\mathrm{Erf}\,\eta + 19{,}7\,J_0' - 2{,}734\,J_1' - 1{,}367\,J_2' - 0{,}683\,J_3' -$$
$$- 0{,}342\,J_4' - 0{,}171\,J_5' - 0{,}085\,J_6' - 0{,}043\,J_7'$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	$19{,}7\,\mathrm{Erf}\,\eta$	$19{,}7\,J_0'$	$2{,}734\,J_1'$	$-1{,}367\,J_2'$	$0{,}68\,J_3'$	$-0{,}34\,J_4'$	$0{,}17\,J_5'$	$-0{,}085\,J_6'$	$0{,}043\,J_7'$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,05	0,25	3,1520	8,8650	0,6178	0,1066	0,0476	0,0209	0,0092	0,0041	0,0016	11,4724
0,10	0,50	6,2055	14,1643	0,8311	0,2050	0,0972	0,0454	0,0209	0,0097	0,0037	19,6770
0,15	0,75	8,9635	17,0996	0,8393	0,2802	0,1557	0,0757	0,0372	0,0181	0,0068	25,3981
0,20	1,0	11,4260	18,5968	0,7846	0,3322	0,2067	0,1122	0,0404	0,0298	0,0110	29,4543
0,30	1,50	15,3660	19,5227	0,5440	0,3007	0,0825	0,1732	0,1021	0,0568	0,0210	34,6698
0,40	2,0	17,7300	19,6803	0	0	0	0	0	0	0	37,4103

Tabela 14.

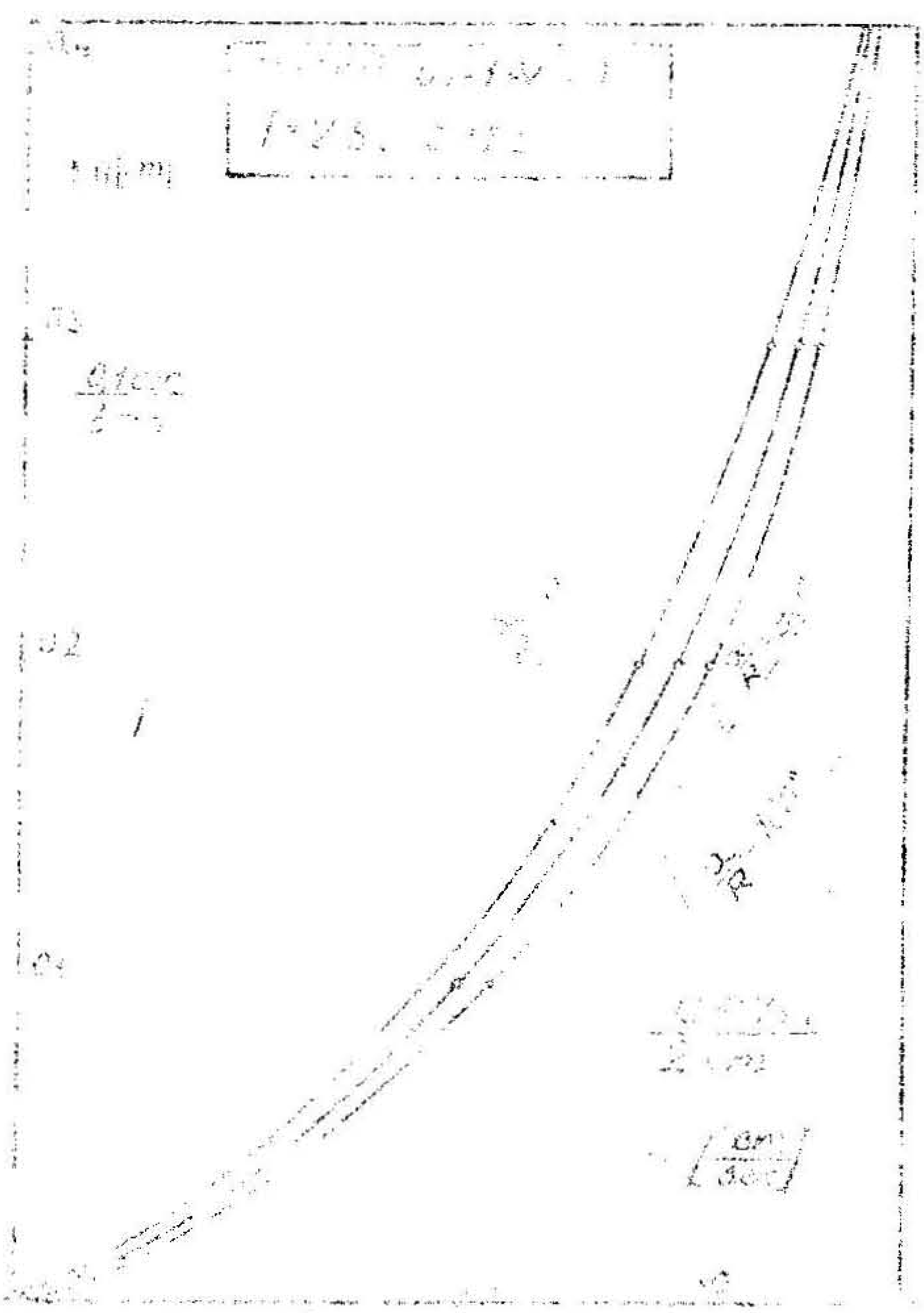
c) $x/R = 110^0$

$$u = 18{,}8\,\mathrm{Erf}\,\eta + 18{,}8\,J_0' - 5{,}144\,J_1' - 2{,}572\,J_2' -$$
$$- 1{,}286\,J_3' - 0{,}643\,J_4' - 0{,}320\,J_5' - 0{,}160\,J_6' - 0{,}080\,J_7'.$$

y [cm]	η	$18,8\,\mathrm{Erf}\,\eta$	$18,8\,J_0'$	$5,144\,J_1'$	$-2,57\,J_2'$	$1,28\,J_3'$	$-0,64\,J_4'$	$0,32\,J_5'$	$-0,16\,J_6'$	$0,08\,J_7'$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,05	0,25	3,0080	8,4600	1,1625	0,2005	0,0896	0,0394	0,0174	0,0078	0,0030	10,4432
0,10	0,50	5,9220	13,5360	1,5638	0,3815	0,1792	0,0854	0,0394	0,0182	0,0070	18,1537
0,15	0,75	8,5540	16,3560	1,5792	0,5268	0,2944	0,1426	0,0700	0,0340	0,0126	23,6572
0,20	1,0	10,9040	17,7472	1,4763	0,6245	0,3891	0,2112	0,0761	0,0560	0,0204	27,5810
0,30	1,50	14,6640	18,6120	1,0236	0,5654	0,1536	0,3264	0,1922	0,1070	0,0390	32,8664
0,40	2,0	16,9200	19,7812	0	0	0	0	0	0	0	36,7012

Tabela 15

Rezultati proračuna navedeni u tabelama 13., 14. i 15. prikazani su i dijagramom na sl. 13. Oblici krivih za brzine u graničnom sloju na ova tri mesta, pokazuju očekivani tok razvoja graničnog sloja na konturi cilindra. Očigledno je da postoji nagrizanje profila brzine pri približavanju zoni prvog odvajanja graničnog sloja, što je prirodno.



Sl. 13.

§5. Slučaj prethodnog kretanja - stalnim ubrzanjem iz stanja mirovanja

U slučaju prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem granični sloj na cilindričnom telu odredjen je Blasijusovim rešenjem

$$u_s = U(x)\, f_1'(\eta) \tag{3.31}$$

gde je

$$f_1'(\eta) = (1+2\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta\, e^{-\eta^2} - 2\eta^2 \tag{3.32}$$

Zbog ranije uvedene veze (1.40), funkcija (3.32), koju treba preračunati na odgovarajući oblik zavistan od novih promenljivih, glasi:

$$f_1' = \mathrm{Erf}\,\bar\eta\sqrt{\frac{t_1}{t}} + 2\bar\eta^2\frac{t_1}{t}\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta\sqrt{\frac{t_1}{t}} + 2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\bar\eta\sqrt{\frac{t_1}{t}}\,e^{-\bar\eta^2\frac{t_1}{t}} - 2\bar\eta^2\frac{t_1}{t} \tag{3.33}$$

Ako uvedemo oznaku $\tau = \frac{t_1}{T}$, tada faktor t_1/t, koji se u sva četiri sabirka veze (3.33) pojavljuje, postaje

$$\frac{t_1}{t} = \frac{\tau}{1+\tau}$$

Ispitivanja u cilju prilagodjavanja funkcije (3.33) novim okolnostima, obavljena su tako što je svaki od četiri sabirka izraza (3.33) ponaosob izražavan u vidu polinoma po "τ", a sa koeficijentima zavisnim od "$\bar\eta$", baš kao što je činjeno i u drugom paragrafu treće glave, i potom za svaki sabirak posebno, proveravano područje promenljive "τ" u kome prilagodjeni, približni oblik daje isto, što i tačni oblici pojedinih sabiraka, prema izrazu (3.33). Rezultat analize je takav, da u glavnom polju vrednosti nestacionarne promenljive $0 \le \bar\eta \le 2$, a za $\tau \le 0{,}4$, zadovoljavajuće slaganje sa tačnim izrazom (3.33), daje izraz:

$$f_1' \approx \lambda_0(\bar\eta) + \lambda_1(\bar\eta)\frac{t_1}{T} + \lambda_2(\bar\eta)\left(\frac{t_1}{T}\right)^2 + \lambda_3(\bar\eta)\left(\frac{t_1}{T}\right)^3 + \lambda_4(\bar\eta)\left(\frac{t_1}{T}\right)^4 \tag{3.34}$$

gde su poznati koeficijenti - funkcije:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_0(\bar\eta) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\,\bar\eta\,; \quad \lambda_1(\bar\eta) = \frac{16}{45\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^3 + \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\,\bar\eta - 2\bar\eta^2;\\
&\lambda_2(\bar\eta) = -\frac{4}{45\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^5 + \frac{32}{45\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^3 - \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\,\bar\eta + 2\bar\eta^2;\\
&\lambda_3(\bar\eta) = -\frac{4}{45\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^5 - \frac{16}{9\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^3 + \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\,\bar\eta - 2\bar\eta^2;\\
&\lambda_4(\bar\eta) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^5 + \frac{128}{45\sqrt{\pi}}\,\bar\eta^3 - \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\,\bar\eta + 2\bar\eta^2.
\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

Prema tome, izraz (3.34) odredjuje traženi neophodan oblik funkcije (3.31), da bi se mogle rešavati jednačine dinamskog graničnog sloja (1.27) i (1.31).

[illegible] Prethodno kretanje – stalnim ubrzanjem, dopunsko – trzajem

Cilindrično telo je pokrenuto stalnim ubrzanjem $\left[U_s = tW(x)\right]$ normalno na pravac svojih izvodnica. U trenutku $t = T$, istom telu je saopšten dopunski trzaj istoga smera $\left[U_d = U(x)\right]$. Ako smenimo ove vrednosti i izraze (3.31), odnosno ((3.34) u jednačinu (1.27), dobićemo za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja jednačinu:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = TF(1-\lambda_0) + t_1 F(1-\lambda_0-\lambda_1) - t_1^2 \frac{F}{T}(\lambda_1+\lambda_2) - t_1^3 \frac{F}{T^2}(\lambda_2+\lambda_3) - t_1^4 \frac{F}{T^3}(\lambda_3+\lambda_4) - t_1^5 \frac{F}{T^4}\lambda_4 \tag{3.36}$$

Potražimo njeno rešenje u vidu:

$$u_0 = U J_0'(\bar\eta) + t_1 TF J_1'(\bar\eta) + t_1^2 F J_2'(\bar\eta) + t_1^3 \frac{F}{T} J_3'(\bar\eta) + t_1^4 \frac{F}{T^2} J_4'(\bar\eta) + t_1^5 \frac{F}{T^3} J_5'(\bar\eta) + t_1^6 \frac{F}{T^4} J_6'(\bar\eta) \tag{3.37}$$

Za koeficijente, funkcije od promenljive "$\bar\eta$" dobićemo obične diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
&J_0''' + 2\bar\eta J_0'' = 0\\
&J_1''' + 2\bar\eta J_1'' - 4J_1' = 4(\lambda_0 - 1)\\
&J_2''' + 2\bar\eta J_2'' - 8J_2' = 4(\lambda_0 + \lambda_1 - 1)\\
&J_3''' + 2\bar\eta J_3'' - 12J_3' = 4(\lambda_1 + \lambda_2)\\
&J_4''' + 2\bar\eta J_4'' - 16J_4' = 4(\lambda_2 + \lambda_3)\\
&J_5''' + 2\bar\eta J_5'' - 20J_5' = 4(\lambda_3 + \lambda_4)\\
&J_6''' + 2\bar\eta J_6'' - 24J_6' = 4\lambda_4
\end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Opšta rešenja ovih linearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina drugoga reda su:

1° $J_0' = C_1 \int_0^{\bar\eta} e^{-\varsigma^2} d\varsigma + C_2$

2° $J_1' = C_1(1+2\bar\eta^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}\right] - \frac{32}{15\sqrt{\pi}}\bar\eta + 1$

$$3^\circ\quad J_2' = C_1\left(1+4\bar\eta^2+\tfrac{4}{3}\bar\eta^4\right) + C_2\Big[\tfrac{1}{32}\left(1+4\bar\eta^2+\tfrac{4}{3}\bar\eta^4\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \tfrac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^3+\tfrac{5}{2}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\Big] - \tfrac{32}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 + 2\bar\eta^2 - \tfrac{160}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta + 1$$

$$4^\circ\quad J_3' = C_1\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\tfrac{8}{15}\bar\eta^6\right) + C_2\Big[\tfrac{1}{384}\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\tfrac{8}{15}\bar\eta^6\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \tfrac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^5+7\bar\eta^3+\tfrac{33}{4}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\Big] + \tfrac{8}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta^5 - \tfrac{16}{135\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 - \tfrac{16}{225\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$5^\circ\quad J_4' = C_1\left(1+8\bar\eta^2+8\bar\eta^4+\tfrac{32}{15}\bar\eta^6+\tfrac{16}{105}\bar\eta^8\right) + C_2\Big[\tfrac{1}{6144}\left(1+8\bar\eta^2+8\bar\eta^4+\tfrac{32}{15}\bar\eta^6+\tfrac{16}{105}\bar\eta^8\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \tfrac{1}{40320}\left(\tfrac{1}{2}\bar\eta^7+\tfrac{27}{4}\bar\eta^5+\tfrac{185}{8}\bar\eta^3+\tfrac{279}{16}\bar\eta\right)\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big] + \tfrac{64}{225\sqrt{\pi}}\bar\eta - \tfrac{448}{675\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 + \tfrac{16}{135\sqrt{\pi}}\bar\eta^5$$

$$6^\circ\quad J_5' = C_1\left(1+10\bar\eta^2+\tfrac{40}{3}\bar\eta^4+\tfrac{16}{3}\bar\eta^6+\tfrac{16}{21}\bar\eta^8+\tfrac{32}{945}\bar\eta^{10}\right) + C_2\Big[\tfrac{1}{122880}\left(1+10\bar\eta^2+\tfrac{40}{3}\bar\eta^4+\tfrac{16}{3}\bar\eta^6+\tfrac{16}{21}\bar\eta^8+\tfrac{32}{945}\bar\eta^{10}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \tfrac{1}{3628800}\left(\tfrac{1}{2}\bar\eta^9+11\bar\eta^7+\tfrac{147}{2}\bar\eta^5+165\bar\eta^3+\tfrac{2895}{32}\bar\eta\right)\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big] - \tfrac{8}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta^5 - \tfrac{176}{315\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 - \tfrac{176}{945\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$7^\circ\quad J_6' = C_1\left(1+12\bar\eta^2+20\bar\eta^4+\tfrac{32}{3}\bar\eta^6+\tfrac{16}{7}\bar\eta^8+\tfrac{64}{315}\bar\eta^{10}+\tfrac{64}{10395}\bar\eta^{12}\right) + C_2\Big[\tfrac{1}{2949120}\left(1+12\bar\eta^2+20\bar\eta^4+\tfrac{32}{3}\bar\eta^6+\tfrac{16}{7}\bar\eta^8+\tfrac{64}{315}\bar\eta^{10}+\tfrac{64}{10395}\bar\eta^{12}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \tfrac{1}{479001600}\left(\tfrac{1}{2}\bar\eta^{11}+\tfrac{65}{4}\bar\eta^9+\tfrac{711}{4}\bar\eta^7+\tfrac{6279}{8}\bar\eta^5+\tfrac{41685}{32}\bar\eta^3+\tfrac{35685}{64}\bar\eta\right)\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\Big] - \tfrac{16}{105\sqrt{\pi}}\bar\eta^5 - \tfrac{2272}{2835\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 - \tfrac{2}{5}\bar\eta^2 + \tfrac{3776}{10395\sqrt{\pi}}\bar\eta - \tfrac{1}{30}$$ [illegible]

U svim ovim izrazima, činioci uz konstante su partikularni integrali homogenih jednačina, a ostaci su partikularna rešenja odgovarajućih nehomogenih jednačina. (3.4[illegible])

Baziraјući se na istoj pojavi u vezi sa [illegible] lovima, objašnjenoj ranije, možemo doći do brojnih [illegible] integracionih konstanata: [illegible]

$$1^\circ\quad J_0'(0)=0,\quad J_0'(\infty)=1,$$
$$C_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad C_2=0.$$

$$2^\circ\quad J_1'(0)=0,\quad J_1'(2)=0,$$
$$C_1=0{,}1625,\quad C_2=-4{,}650.$$

$3^\circ\ \zeta_2'(0)=0,\quad \zeta_2'(2)=0,$

$C_1=-0{,}0413,\ C_2=-30{,}726.$

$4^\circ\ \zeta_3'(0)=0,\quad \zeta_3'(2)=0,$

$C_1=-0{,}0212,\ C_2=8{,}1457.$

$5^\circ\ \zeta_4'(0)=0,\quad \zeta_4'(2)=0,$

$C_1=0,\quad C_2=-99{,}80.$

$6^\circ\ \zeta_5'(0)=0,\quad \zeta_5'(2)=0,$

$C_1=0,\quad C_2=885{,}074.$

$7^\circ\ \zeta_6'(0)=0,\quad \zeta_6'(2)=0,$

$C_1=0{,}0333,\quad C_2=-86896{,}825.$

Tako je dopunska brzina graničnog sloja sa tačnošću do prve aproksimacije (3.37), potpuno odredjena. Sabirajući izraze (3.31) i (3.37), dobiće se ukupna brzina u graničnom sloju:

$$u=(T+t_1)Wf_1'(\eta)+U\zeta_0'+t_1TF\zeta_1'+t_1^2F\zeta_2'+$$
$$+t_1^3\frac{F}{T}\zeta_3'+t_1^4\frac{F}{T^2}\zeta_4'+t_1^5\frac{F}{T^3}\zeta_5'+t_1^6\frac{F}{T^4}\zeta_6'. \qquad (3.39)$$

Iz uslova odvajanja graničnog sloja dolazi se do veze:

$$t_1^6\frac{\zeta_6''(0)}{T^4}+t_1^5\left[\frac{\zeta_5''(0)}{T^3}+\frac{f_1''(0)}{T^4}\right]+t_1^4\frac{\zeta_4''(0)}{T^2}+t_1^3\frac{\zeta_3''(0)}{T}+$$
$$+t_1^2\zeta_2''(0)+t_1\left[T\zeta_1''(0)-\frac{4}{3}f_1''(0)\right]-\frac{5}{4}\zeta_0''(0)-\frac{1}{3}Tf_1''(0)=0 \qquad (3.40)$$

odakle se može izračunati trenutak odvajanja graničnog sloja u svakoj tački na konturi cilindričnog tela, pri odredjenoj vrednosti konstante T, budući da su nulte vrednosti drugih izvoda univerzalnih funkcija poznate:

$f_1''(0)=2{,}256,\ \zeta_0''(0)=1{,}128,\ \zeta_1''(0)=1{,}419,\ \zeta_2''(0)=0{,}883,$
$\zeta_3''(0)=-0{,}1167,\ \zeta_4''(0)=0{,}0935,\ \zeta_5''(0)=-0{,}072,\ \zeta_6''(0)=0{,}0573.$

Primer: kružni cilindar radijusa R = 50 cm pokrenut je stalnim ubrzanjem V_o = 10 cm/s^2, a onda u trenutku T = 2 sec njemu je saopštom dopunski trenj $U_\infty = 10$ cm/s. Proverimo da li se granični sloj već odvojio već u zadnjoj zaustavnoj tački zbog prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem. Koristeći Blasijusovo rešenje

$$t_s = \sqrt{1{,}1\frac{R}{V_0}} = 2{,}345 \text{ sec}$$

dozhajemo da se, u momentu pojave dopunskog trenja ($T = 2$ sec) granični sloj još nije odvojio u zadnjoj zaustavnoj tački. Interesantno je, s toga, pitanje pojave tačke odvajanja tu, iza nastanka dopunskog kretanja.

Kako su za kružni cilindar poznate funkcije:

$$U(x) = 2U_\infty \sin\frac{x}{R}, \quad W(x) = 2V_0 \sin\frac{x}{R},$$

iz jednačine (3.40), za $x = R\pi$ dobiće se:

$$0{,}036\, t_1^6 + 1{,}32\, t_1^5 + 0{,}234\, t_1^4 - 0{,}58\, t_1^3 = -8{,}83\, t_1^2 + 1{,}70\, t_1 + 29{,}14 \qquad (3.41)$$

Rešavajući jednačinu (3.41) grafički:

$$f_1(t_1) = f_2(t_1)$$

gde je: $f_2(t_1) = -8{,}83\, t_1^2 + 1{,}70\, t_1 + 29{,}14$, dobiće se da, od momenta kada se saopšti dopunski trenj, do pojave tačke odvajanja u zadnjoj zaustavnoj tački, protekne vreme:

$$t_1 = 1{,}533 \text{ sec} \qquad (3.42)$$

Znači, umesto da se granični sloj odvoji posle 0,345 s. u odnosu na $T = 2$ sec, od prethodnog jednako ubrzanog kretanja — pojavom dopunskog trenja ovaj trenutak nastao je kasnije (posle 1,533 sec). Etapa kretanja bez odvajanja graničnog sloja produžena je, što je za praksu značajno.

§7. Prethodno kretanje stalnim ubrzanjem, dopunsko — stalnim ubrzanjem

Izraze $U_e = (T + t_1)W(x)$ i $U_d = t_1 W(x)$, koji odražavaju prirodu ovih kretanja, kao i vrednosti (3.31), odnosno (3.34), ubacimo u jednačinu (1.27) i dobićemo:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = W + t_1 2TWW'(1-\lambda_0) + t_1^2\, 2WW'(1-\lambda_0-\lambda_1) - t_1^3\frac{2WW'}{T}(\lambda_1+\lambda_2) -$$
$$- t_1^4\frac{2WW'}{T^2}(\lambda_2+\lambda_3) - t_1^5\frac{2WW'}{T^3}(\lambda_3+\lambda_4) - t_1^6\frac{2WW'}{T^4}\lambda_4 \qquad (3.43)$$

Potražimo rešenje ove jednačine u vidu:

$$u_0 = t_1 W\zeta_0'(\bar\eta) + t_1^2\, 2TWW'\zeta_1'(\bar\eta) + t_1^3\, 2WW'\zeta_2'(\bar\eta) + t_1^4 \frac{2WW'}{T}\zeta_3'(\bar\eta) +$$

$$+ t_1^5 \frac{2WW'}{T^2}\zeta_4'(\bar\eta) + t_1^6 \frac{2WW'}{T^3}\zeta_5'(\bar\eta) + t_1^7 \frac{2WW'}{T^4}\zeta_6'(\bar\eta) \qquad \mathbf{(3.44)}$$

Za nepoznate funkcije od promenljive "$\bar\eta$" dobiće se obične diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_0''' + 2\bar\eta\zeta_0'' - 4\zeta_0' = -4 \\
&\zeta_1''' + 2\bar\eta\zeta_1'' - 8\zeta_1' = 4(\lambda_0 - 1) \\
&\zeta_2''' + 2\bar\eta\zeta_2'' - 12\zeta_2' = 4(\lambda_0 + \lambda_1 - 1) \\
&\zeta_3''' + 2\bar\eta\zeta_3'' - 16\zeta_3' = 4(\lambda_1 + \lambda_2) \\
&\zeta_4''' + 2\bar\eta\zeta_4'' - 20\zeta_4' = 4(\lambda_2 + \lambda_3) \\
&\zeta_5''' + 2\bar\eta\zeta_5'' - 24\zeta_5' = 4(\lambda_3 + \lambda_4) \\
&\zeta_6''' + 2\bar\eta\zeta_6'' - 28\zeta_6' = 4\lambda_4
\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(3.45)}$$

Opšta rešenja jednačina (3.45) su:

$$1^\circ\ \zeta_0' = C_1(1+2\bar\eta^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\bar\eta) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}\right] + 1$$

$$2^\circ\ \zeta_1' = C_1\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right) + C_2\left[\frac{1}{32}\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^3 + \frac{5}{2}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\right] - \frac{32}{45\sqrt{\pi}}\bar\eta + \frac{1}{2}$$

$$3^\circ\ \zeta_2' = C_1\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right) + C_2\left[\frac{1}{384}\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{8}{15}\bar\eta^6\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\bar\eta^5 + 7\bar\eta^3 + \frac{33}{4}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\right] -$$

$$- \frac{32}{135\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 + \bar\eta^2 - \frac{416}{225\sqrt{\pi}}\bar\eta + \frac{1}{2}$$

$$4^\circ\ \zeta_3' = C_1\left(1+8\bar\eta^2+8\bar\eta^4+\frac{32}{15}\bar\eta^6+\frac{16}{105}\bar\eta^8\right) + C_2\left[\frac{1}{6144}\left(1+8\bar\eta^2 + \right.\right.$$

$$\left. + 8\bar\eta^4 + \frac{32}{15}\bar\eta^6 + \frac{16}{105}\bar\eta^8\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{1}{40320}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^7 + \frac{27}{4}\bar\eta^5 + \frac{185}{8}\bar\eta^3 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{279}{16}\bar\eta\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2}\right] + \frac{8}{135\sqrt{\pi}}\bar\eta^5 - \frac{208}{675\sqrt{\pi}}\bar\eta^3 - \frac{208}{1575\sqrt{\pi}}\bar\eta$$

$$5^\circ\ \zeta_4' = C_1\left(1+10\bar\eta^2+\frac{40}{3}\bar\eta^4+\frac{16}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{21}\bar\eta^8+\frac{32}{945}\bar\eta^{10}\right) +$$

$$+ C_2\left[\frac{1}{122880}\left(1+10\bar\eta^2+\frac{40}{3}\bar\eta^4+\frac{16}{3}\bar\eta^6+\frac{16}{21}\bar\eta^8+\frac{32}{945}\bar\eta^{10}\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \right.$$

$$+ \frac{1}{3628800}\left(\frac{1}{2}\bar\eta^9 + 11\bar\eta^7 + \frac{147}{2}\bar\eta^5 + 165\bar\eta^3 + \right.$$

$$+\frac{2895}{32}\bar{\eta}\Big)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\Big]+\frac{16}{225\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5+\frac{128}{315\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3+\frac{128}{945\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

$$6^\circ\ \zeta_5'=C_1\Big(1+12\bar{\eta}^2+20\bar{\eta}^4+\frac{32}{3}\bar{\eta}^6+\frac{16}{7}\bar{\eta}^8+\frac{64}{315}\bar{\eta}^{10}+$$
$$+\frac{64}{10395}\bar{\eta}^{12}\Big)+C_2\Big[\frac{1}{2949120}\Big(1+12\bar{\eta}^2+20\bar{\eta}^4+\frac{32}{3}\bar{\eta}^6+$$
$$+\frac{16}{7}\bar{\eta}^8+\frac{64}{315}\bar{\eta}^{10}+\frac{64}{10395}\bar{\eta}^{12}\Big)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta}+\frac{1}{479001600}\Big(\frac{1}{2}\bar{\eta}^{11}+$$
$$+\frac{65}{4}\bar{\eta}^9+\frac{711}{4}\bar{\eta}^7+\frac{6279}{8}\bar{\eta}^5+\frac{41685}{32}\bar{\eta}^3+\frac{35685}{64}\bar{\eta}\Big)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\Big]-$$
$$-\frac{8}{63\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5-\frac{1072}{2835\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3-\frac{1072}{10395\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

$$7^\circ\ \zeta_6'=C_1\Big(1+14\bar{\eta}^2+28\bar{\eta}^4+\frac{56}{3}\bar{\eta}^6+\frac{16}{3}\bar{\eta}^8+\frac{32}{45}\bar{\eta}^{10}+\frac{64}{1485}\bar{\eta}^{12}+$$
$$+\frac{128}{135135}\bar{\eta}^{14}\Big)+C_2\Big[\frac{1}{82575360}\Big(1+14\bar{\eta}^2+28\bar{\eta}^4+\frac{56}{3}\bar{\eta}^6+\frac{16}{3}\bar{\eta}^8+\frac{32}{45}\bar{\eta}^{10}+$$
$$+\frac{64}{1485}\bar{\eta}^{12}+\frac{128}{135135}\bar{\eta}^{14}\Big)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta}+\frac{1}{87178291200}\Big(\frac{1}{2}\bar{\eta}^{13}+\frac{45}{2}\bar{\eta}^{11}+$$
$$+\frac{2915}{8}\bar{\eta}^9+\frac{10575}{4}\bar{\eta}^7+\frac{278019}{32}\bar{\eta}^5+\frac{364665}{32}\bar{\eta}^3+\frac{509985}{128}\bar{\eta}\Big)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar{\eta}^2}\Big]-$$
$$-\frac{16}{135\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5-\frac{928}{1485\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3-\frac{1}{2}\bar{\eta}^2+\frac{448}{1287\sqrt{\pi}}\bar{\eta}-\frac{1}{42}.$$

Granični uslovi i vrednosti integracionih konstanata su:

1° $\zeta_0'(0)=0,\quad \zeta_0'(\infty)=1,$
$C_1=0,\quad C_2=-4{,}0.$

2° $\zeta_1'(0)=0,\quad \zeta_1'(2)=0,$
$C_1=0{,}0106,\quad C_2=-16{,}3652.$

3° $\zeta_2'(0)=0,\quad \zeta_2'(2)=0,$
$C_1=-0{,}0082,\quad C_2=-189{,}1360.$

4° $\zeta_3'(0)=0,\quad \zeta_3'(2)=0,$
$C_1=0{,}0014,\quad C_2=-4{,}3733.$

5° $\zeta_4'(0)=0,\quad \zeta_4'(2)=0,$
$C_1=0,\quad C_2=-487{,}7313.$

6° $\zeta_5'(0)=0,\quad \zeta_5'(2)=0,$
$C_1=0,\quad C_2=6523{,}50.$

7° $\zeta_6'(0)=0,\quad \zeta_6'(2)=0,$
$C_1=0{,}0238,\quad C_2=-1853436{,}2080.$

Ako saberemo izraze (3.31) i (3.44) imaćemo rezultujuću podužnu projekciju brzine u graničnom sloju:

$$u=(T+t_1)Wf_1'(\eta)+t_1W\zeta_0'(\eta)+t_1^2\,2TWW'\zeta_1'(\eta)+t_1^3\,2WW'\zeta_2'(\eta)+$$
$$+t_1^4\frac{2WW'}{T}\zeta_3'(\eta)+t_1^5\frac{2WW'}{T^2}\zeta_4'(\eta)+t_1^6\frac{2WW'}{T^3}\zeta_5'(\eta)+t_1^7\frac{2WW'}{T^4}\zeta_6'(\eta) \qquad (3.46)$$

Koristeći uslov odvajanja graničnog sloja $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0$ doći će se do jednačine:

$$\frac{1}{3}Tf_1''(0)+t_1\left[\frac{5}{4}\zeta_0''(0)+\frac{4}{3}f_1''(0)\right]-t_1^2T\zeta_1''(0)-t_1^2\zeta_2''(0)-$$
$$-t_1^4\frac{\zeta_3''(0)}{T}-t_1^5\left[\frac{\zeta_4''(0)}{T^2}+\frac{f_1''(0)}{T^4}\right]-t_1^6\frac{\zeta_5''(0)}{T^3}-t_1^7\frac{\zeta_6''(0)}{T^4}=0 \qquad (3.47)$$

Primer: kružni cilindar radijusa R = 50 cm, pokrenut je stalnim ubrzanjem V_0 = 10 cm/s^2, a zatim u momentu T = 2 sec, njemu je saopšteno dopunsko ubrzanje V_0 = 10 cm/s^2.

Pošto se u zadnjoj zaustavnoj tački granični sloj još nije odvojio zbog prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem, pogledajmo kada će se to odigrati, ako se doda i dopunsko kretanje konstantnim ubrzanjem. Ako se pronadju nulte vrednosti drugih izvoda univerzalnih funkcija:

$$f_1''(0)=2{,}256,\quad \zeta_0''(0)=2{,}256,\quad \zeta_1''(0)=1{,}1373,\quad \zeta_2''(0)=0{,}7352,$$
$$\zeta_3''(0)=-0{,}0709,\quad \zeta_4''(0)=0{,}0581,\quad \zeta_5''(0)=-0{,}0471,\quad \zeta_6''(0)=0{,}0753$$

i iskoristi poznata funkcija $V=2V_0\sin x/R$, jednačina (3.47) primenjena na zadnju zaustavnu tačku $x=R\pi$, postaje:

$$0{,}0047t_1^7-0{,}0059t_1^6+0{,}1555t_1^5-0{,}0354t_1^4+0{,}7352t_1^3=$$
$$=-2{,}2746t_1^2+5{,}8280t_1+1{,}5040 \qquad (3.48)$$

Ako rešimo jednačinu (3.48) grafički, crtajući grafike obeju strana jednačine:

$$f_1(t_1)=f_2(t_1)$$

gde su: $f_1(t_1)=0{,}0047t_1^7-0{,}0059t_1^6+0{,}1555t_1^5-0{,}0354t_1^4+0{,}7352t_1^3,$

$$f_2(t_1)=-2{,}2746\,t_1^2+5{,}8280\,t_1+1{,}5040.$$

dobićemo da realno i pozitivno rešenje jednačine (3.48), koje odgovara našem problemu, ima vrednost:

$$t_1 = 1{,}643 \text{ sec} \qquad (3.49)$$

Period kretanja cilindra u kome nema odvajanja graničnog sloja, ovom prilikom još duže traje, nego u prethodnom slučaju.

Dodatak 2. Izraz (3.34) je aproksimirao funkciju (3.32) sa jednom tačnošću. Razume se, ova tačnost može se popraviti uzimanjem novih članova odgovarajućih redova, čime se proračun graničnog sloja računski komplikuje.

Pripremimo, ipak, još jedan tačniji aproksimativni oblik funkcije (3.32).

Funkcija (3.32) u obliku opšteg rešenja odgovarajuće diferencijalne jednačine Blazijusovih rešenja, glasi:

$$f_1'(\eta)=C_1(1+2\eta^2)+C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\eta^2)(1-\mathrm{Erf}\,\eta)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta\,e^{-\eta^2}\right]+1$$

Ako se iskoriste tačni granični uslovi:

$$f_1'(0)=0, \quad f_1'(\infty)=1,$$

dobiće se vrednosti konstanata:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -4,0$$

odnosno, upravo, vrednost (3.32).

Ako se postupi u duhu ideje o konačnosti graničnog sloja i iskoriste uslovi

$$f_1'(0)=0, \quad f_1'(1{,}25)=1,$$

dobiće se: $C_1 = 0{,}005$, $C_2 = -4{,}02$, čime se odstupilo od tačnih vrednosti konstanata samo za 0,5%. Čak i ako se uzmu uslovi: $f_1'(0) = 0$, $f_1'(1{,}0) = 1$, dobiće se: $C_1 = 0{,}019$, $C_2 = -4{,}077$ i, prema tome, učiniti odstupanje od tačnih vrednosti za svega 1,93%. Znači, razmak $0\leq\eta\leq 1{,}0$ može se uzeti kao merodavni razmak promene univerzalne funkcije (3.32) sa dovoljno tačnosti. Pri $\eta>1$, vrednost univerzalne funkcije (3.32) se više ne menja i tu postaje primenljivo drugo aproksimativno rešenje.

Razvijajući funkciju greške " $\mathrm{Erf}\,\eta$ " i eksponencijalnu funkciju " $e^{-\eta^2}$ " u redove i zadržavajući se na petom stepenu promenljivih dobiće se umesto (3.32) približan izraz:

$$f_1'(\eta)\approx\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(2\eta+\frac{2}{3}\eta^3-\frac{1}{15}\eta^5\right)-2\eta^2$$

koji, u aktuelnom domenu $0\leq\eta\leq 1{,}0$, zamenjuje tačnu funkciju (3.32) sa dobrom tačnošću: za $\eta = 0{,}5$ su: $f_1'(0{,}5) = 0{,}719$, a $f_1'(0{,}5)\approx 0{,}71965$, greška svega 0,09%, pa čak i za $\eta = 1$:

$f_1'(1) = 0{,}9432$, a $f_1'(1) \approx 0{,}933$, odstupanje je minimalno: 1,08%

Smenjujući u zadnji izraza $\eta = \bar{\eta}\sqrt{\frac{t_1}{t}}$ i koristeći već ispitanu vezu (3.4) dobiće se:

$$f_1' \approx p_0(\bar{\eta}) + p_1(\bar{\eta})\frac{t_1}{t} + p_2(\bar{\eta})\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 + p_3(\bar{\eta})\left(\frac{t_1}{t}\right)^3$$

gde su:

$$p_0(\bar{\eta}) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta}, \quad p_1(\bar{\eta}) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}\bar{\eta} - 2\bar{\eta}^2 + \frac{16}{45\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3,$$

$$p_2(\bar{\eta}) = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{8}{225\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5, \quad p_3(\bar{\eta}) = \frac{8}{75\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^5.$$

A ako se umesto t_1/t, $(t_1/t)^2$ i $(t_1/t)^3$ uzmu ispitani oblici (u Dodatku 1 i formule 3.14), koji važi za :

$$\frac{t_1}{t} = \tau - \tau^2 + \tau^3 - \tau^4 + \tau^5 - \tau^6$$

$$\left(\frac{t_1}{t}\right)^2 = \tau^2 - 2\tau^3 + 3\tau^4 - 4\tau^5 + 3\tau^6$$

$$\left(\frac{t_1}{t}\right)^3 = \tau^3 - 3\tau^4 + 6\tau^5 - 10\tau^6 + 13\tau^7 - 15\tau^8 + 16\tau^9$$

dobiće se, dakle, konačan i odgovarajući uprošćeni oblik funkcije (3.32), kojim će se moći rešiti jednačine (1.27) i (1.31).

Proverimo tačnost ovog novog oblika u nekoliko konkretnih slučajeva:

1° $t_1/T = 0{,}2$

$$\bar{\eta} = 2{,}449\,\eta$$

η	$\bar{\eta}$	$p_0(\bar{\eta})$	$p_1(\bar{\eta})$	$p_2(\bar{\eta})$	$p_3(\bar{\eta})$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$
0,2	0,4898	0,2946	0,4274	0,07018	0,00169	0,36776	0,37734
0,4	0,9796	0,5893	0,0355	0,64803	0,05438	0,61341	0,63009
0,6	1,4694	0,8840	-1,0343	1,77397	0,41303	0,76274	0,79088
0,8	1,9592	1,1786	-2,6417	3,95140	1,74045	0,85600	0,89198
1,0	2,4490	1,4733	-4,6416	7,08375	5,31149	0,92100	0,94400

2° $t_1/T = 0{,}3$

$$\bar{\eta} = 2{,}08\,\eta$$

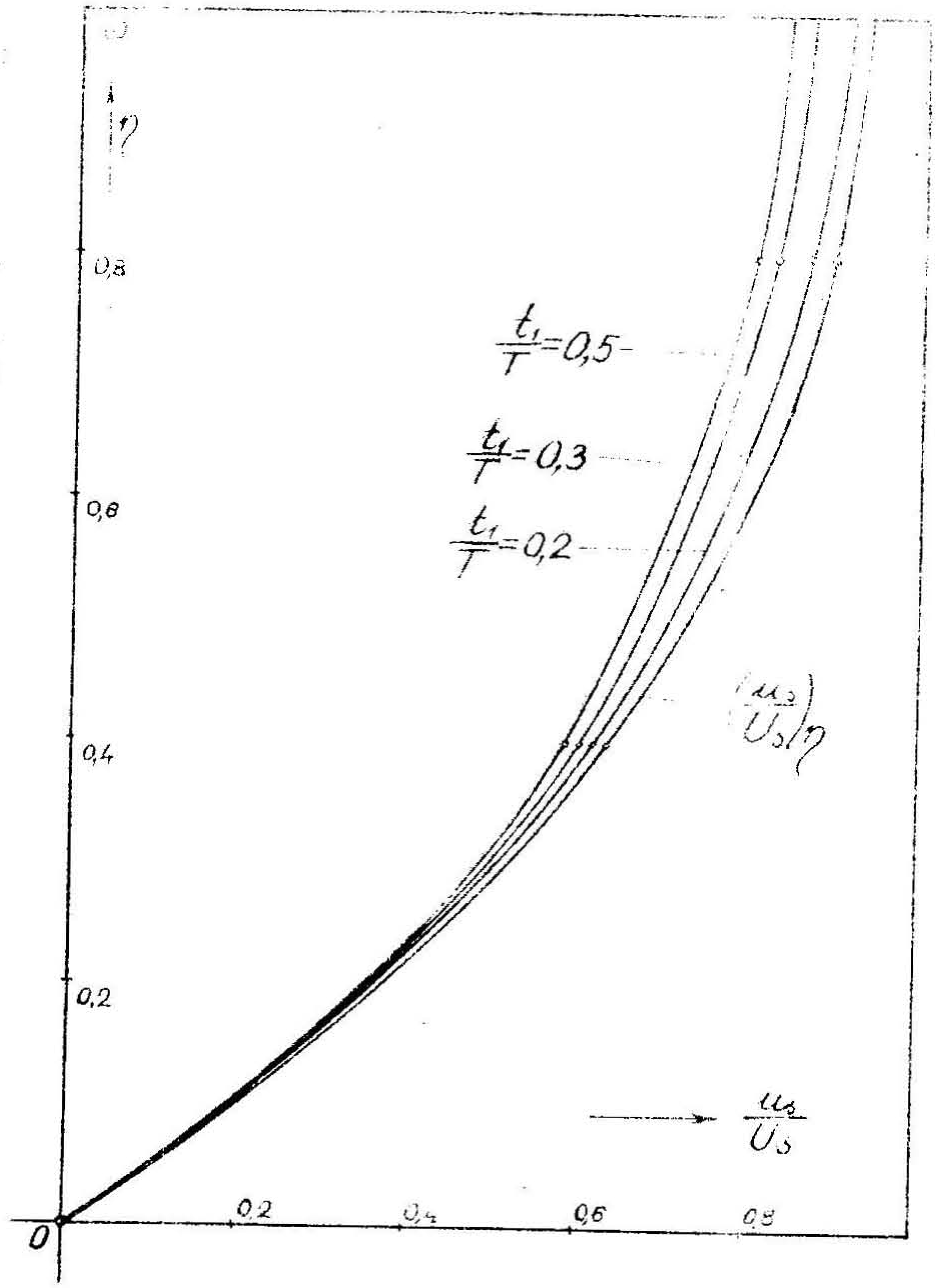
η	$\bar{\eta}$	$\mu_0(\bar{\eta})$	$\mu_1(\bar{\eta})$	$\mu_2(\bar{\eta})$	$\mu_3(\bar{\eta})$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$
0,2	0,4160	0,25026	0,41928	0,04305	0,00078	0,3600	0,37734
0,4	0,8320	0,50053	0,23914	0,33858	0,02370	0,6000	0,63009
0,6	1,2480	0,75080	-0,48076	1,11391	0,18352	0,7125	0,79088
0,8	1,6640	1,00106	-1,59748	2,50015	0,75854	0,8221	0,89198
1,0	2,0800	1,25133	-3,09780	4,63620	2,33902	0,8515	0,94400

3° $t_1/T = 0.5$, $\bar{\eta} = 1,732\ \eta$:

$\bar{\eta}$	$\bar{\eta}$	$\mu_0(\bar{\eta})$	$\mu_1(\bar{\eta})$	$\mu_2(\bar{\eta})$	$\mu_3(\bar{\eta})$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\bar{\eta}}$	$\left(\frac{u_s}{U_s}\right)_{\eta}$
0,2	0,3464	0,2100	0,4100	0,0248	0,00030	0,3550	0,37734
0,4	0,6928	0,4200	0,3155	0,0296	0,00140	0,5700	0,63009
0,6	1,0392	0,6240	-0,0178	0,6525	0,07340	0,7080	0,79088
0,8	1,3856	0,8314	-0,7474	1,4821	0,30110	0,8050	0,89198
1,0	1,732	1,0420	-1,8204	2,8184	0,93250	0,8250	0,94400

U ovim tabelama $(u_s/U_s)_{\bar{\eta}}$ označava vrednost sračunatu preko novog približnog izraza, a $(u_s/U_s)_{\eta}$ tačnu vrednost prema (3.31). Medjusobna odstupanja nisu velika, što pokazuje i dijagram na sledećoj slici, nacrtan prema ovim tabelama.

Ako bi se umesto na ranijim (3.34), na ovim izrazom potražilo rešenje jednačina (1.27), dobila bi se nešto bolja tačnost, ali bi se račun preko mere iskomplikovao.



29. Uporedjivanja i zaključci

Ovom prilikom razmatrane su dve vrste prethodnog kretanja formiranog iz stanja mirovanja: trzajem i stalnim ubrzanjem, i dve vrste dopunskog kretanja, koja su se u jednom trenutku vremena superponirala na postojeća prethodna kretanja. Dopunska kretanja su, takodje, vršena trzajem i stalnim ubrzanjem.

Analiza na primeru kružnog cilindra, a kroz rezultate (3.23), (3.30), (3.42) i (3.49), pokazuje da je vreme odvajanja graničnog sloja:

- veće pri $U_s = U$, $U_d = tW$, no pri $U_s = U_d = U$
- veće pri $U_s = tW$, $U_d = tW$, no pri $U_s = tW$, $U_d = U$.

Kod ovakvih kretanja sa konačnom vremenskom defazovanošću T, do punog izražaja dolazi značaj prirode prethodnog kretanja i stanja u graničnom sloju koje vlada u momentu otvaranja dopunskog kretanja. Tako su, u načelu, vremena odvajanja graničnog sloja, veća kada je prethodno kretanje stalnim ubrzanjem, nego kada je ono trzajem, bez obzira na to da li se dopunsko kretanje izvodi trzajem, ili stalnim ubrzanjem.

Iz svega ovoga rezultuje činjenica, da će se trajanje kretanja cilindra bez pojave odvajanja graničnog sloja najviše produžiti kada se, uoči trenutka kada bi se na konturi cilindra granični sloj prvi put odvojio zbog prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem, cilindru saopšti dopunsko kretanje stalnim ubrzanjem.

Primećuje se da je zajednička pojava kod svih varijanti prethodnog i dopunskog kretanja - zadržavanje na prvoj aproksimaciji brzine dopunskog graničnog sloja (1.27). Pošto su se naša ispitivanja, uglavnom, odnosila na relativno kratak vremenski period do trenutka početka odvajanja graničnog sloja, i prva aproksimacija je dala dovoljno pouzdane rezultate. Inače, u principu, moguće je rešiti i jednačinu drugog približenja (1.31). Medjutim, računski posao oko toga je izvanredno veliki. Tako, recimo, u slučaju dopunskog trzaja iza prethodnog kretanja trzajem, valja rešiti preko šezdeset diferencijalnih jednačina da bi se odredilo drugo približenje brzine graničnog sloja. Otuda, u ovom radu, nije bilo reči o drugim aproksimacijama brzine.

Što se tiče konvergencije rešenja za brzine u graničnom sloju, moguće je jedino, na osnovu prirodnosti proračunatih vrednosti vremena i puta odvajanja, kao i profila brzina u pojedinim slučajevima, utvrditi postojanje "fizičke konvergencije".

Opadanje vrednosti zapisanih po pojedinim kolonama tabela 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 i 15, u smeru: s levo na desno, odnosno, minimalne vrednosti u predzadnjim kolonama ovih tabela, koje predstavljaju poslednje članove izraza za brzine u graničnom sloju - znak su da je "finička konvergencija", pri navedenim ograničenjima promenljivih, obezbedjena.

IV. ANALIZA DOSADAŠNJIH REZULTATA

Sumirajući dosadašnje rezultate proučavanja nestacionarnog graničnog sloja na telima pokrenutim iz stanja izvesnog prethodnog nestacionarnog kretanja, može se izvesti jedinstveni zaključak o tome, da se ovakvim kombinovanjem predhodnih i dopunskih kretanja, postiže duži vek trajanja jednog povoljnijeg stanja u graničnom sloju na telu, stanja u kome još nije došlo do odvajanja graničnog sloja. Razume se ovo tvrdjenje ima smisla za slučajeve kada se dopunsko kretanje ostvari pre pojave prvog odvajanja graničnog sloja usled predhodnog nestacionarnog kretanja.

Ako bi se dopunsko kretanje formiralo u periodu posle prvog odvajanja graničnog sloja na cilindričnom telu, izvedene jednačine za dopunsko kretanje graničnog sloja, davale bi pouzdane rezultate samo do položaja tačke odvajanja u tom trenutku. Ovaj zaključak je u duhu poznate činjenice da jednačine graničnog sloja daju najbolje rezultate u prostoru do tačke odvajanja graničnog sloja.

Položaj tačke odvajanja na cilindru uoči pojave dopunskog kretanja, može se lako odrediti preko poznate teorije Blasijusa i Vatsona za proračun nestacionarnog graničnog sloja na telu pokrenutom iz stanja mirovanja. Kao što je poznato, ona se iz zadnje zaustavne tačke gde se radja, u toku vremena pomera po konturi uzvodno, težeći onoj fiksnoj poziciji pri stacionarnom graničnom sloju.

Razmotrimo detaljnije efekat maksimalnog produženja perioda kretanja cilindra bez pojave odvajanja graničnog sloja. Ispitivanja osnovnog podatka nestacionarnog graničnog sloja - vremena prvog odvajanja na konturi cilindra, pri krajnjim prethodnim kretanjima i pri predhodnim i dopunskim kretanjima konačne vremenske defazovanosti T - omogućuju izvesne zaključke, i to:

- pri istovodnim prethodnim i dopunskim kretanjima ($U_s = U_d = U$, $U_s = U_d = tW$) vreme odvajanja je duže kada se dopunsko kretanje izvrši u poznoj etapi predhodnog kretanja, uoči prvog odvajanja graničnog sloja zbog predhodnog kretanja.
- pri raznorodnim predhodnim i dopunskim kretanjima ($U_s = U$, $U_d = tW$; $U_s = tW$, $U_d = U$), medjutim, vreme odvajanja je duže, ako se dopunsko kretanje izmenove u ranoj etapi predhodnog kretanja (sa kratkotrajnim predhodnim kretanjima).

Pri konačnim defazovanostima vremenskig predhodnih i dopunskih kretanja - predhodnom graničnom sloju se ostavlja dovoljno vremena da se obrazuje, da bi u momentu stvaranja dopunskog kretanja delovao kao jedno oformljeno stanje, utičući na dopunska kretanja ravnopravna i ostavljajući dopunskim kretanjima da ona ličnim preimućstvima, jednih u odnosu na druga, formiraju i rezultujuća preimućstva, stvarajući tako optimalnu kombinaciju predhodnog i dopunskog kretanja.

Tako, recimo, ako predhodnom kretanju trzajem, na izmaku vremena predhodnog odvajanja (t_s = 1,775) , t.j. u trenutku T = 1,5 sec, superponiramo dopunska kretanja trzajem, u prvom slučaju, ili stalnim ubrzanjem, u drugom, dobićemo - prema očekivanju - duže ukupno vreme odvajanja graničnog sloja u drugom (t_r = 3,30 sec), nego u prvom slučaju (t_r = 2,85 sec). Ali, trenutak prvog odvajanja prethodnog graničnog sloja je i suviše blizu (t_s = 1,775 sec), da bi se, makar i pogodnijim jednakoubrzanim dopunskim kretanjem znatnije produžila etapa kretanja cilindra bez pojave odvajanja graničnog sloja. Dakle, jednakoubrzano kretanje je i pod ovako "teškim" okolnostima pokazalo svoju prednost nad trzajem. Ako bi ma se pripremio bolji teren ako bi ono "zateko" bolju situaciju u graničnom sloju u trenutku kada nailazi, ono bi i iza sebe ostavilo bolje rezultate. Upravo, podatak da je t_s = 3,4 s pri kratkotrajnom prethodnom trzaju, a da je $t_r = T + t_1$ = 3,30 sec, pri T = 1,5 sec, to i potvrdjuje.

Bolje je ako se, uoči momenta odvajanja graničnog sloja (t_s = 2,345 sec) zbog predhodnog kretanja stalnim ubrzanjem, tj. u trenutku T = 2 sec - cilindru saopšti dopunsko jednako-ubrzano kretanje (t_r = 3,645 sec), umesto trzaja (t_r = 3,533 sec). jer kako rekosmo, sada predhodno kretanje stalnim ubrzanjem dejstvuje kao jedno oformljeno stanje (analogno onom stanju mirovanja kod Blazijusa), za razliku od slučaja kratkotrajnog predhodnog stalnog ubrzanja, o čemu je ranije bilo reči.

Ako se naknadni trzaj saopšti telu u ranijoj fazi predhodnog kretanja stalnim ubrzanjem, rezultat će biti bolji, nego ako neposredno uoči odvajanja graničnog sloja zbog predhodnog kretanja stalnim ubrzanjem dodje do dopunskog trzaja, tim pre što trzaj uvek zaostaje za stalnim ubrzanjem u pogledu pozitivnih efekata nestacionarnog graničnog sloja (misli se na veličine puta i vremena odvajanja). Poredjenje vrednosti t_r= 3,533 s. i t_s = 4,197 sec, iz ove tabele, govori pozitivno o gornjim predvidjanjima.

Način kretanja cilindr. tela	Vreme prvog odv. gran. sloja pri kratkotrajnim preth. kretanjima	T [sec]	$(t_1)_{odv}$	$t_r = T+(t_1)_{odv}$ [sec]
$U_s=U, U_d=U$.	2,50 sec	1,5	1,35	2,850
$U_s=U, U_d=tW$	3,40 "	1,5	1,80	3,300
$U_s=tW, U_d=U$.	4,197 "	2,0	1,533	3,533
$U_s=tW, U_d=tW$.	2,886 "	2,0	1,645	3,645

Poredjenjem ovih rezultata po "horizontali", može se reći da se, za vremenske defazovanosti T, manje od vremena predhodnog odvajanja graničnog sloja, sa izvesnom tačnošću može koristiti i teorija kratkotrajnih prethodnih kretanja (misli se na proračun graničnog sloja pri ovim kretanjima). U prilog ovome ide činjenica da je razlika izmedju vremena odvajanja, za pojedine kombinacije kretanja, po horizontali, u najgorem slučaju, svega 3,645 - 2,886 = 0,759 sec (pri U_s=U, U_d = tW, čak i 0,1 sec), a i proračuni brzina u graničnom sloju na istim mestima i u istim trenucima, na oba načina, potvrdili su minimalna odstupanja.

Posebno se može istaći jedna sličnost koja postoji izmedju dva postupka primenjena u ovom radu i u Blazijusovom redu, a koji su, i tu i tamo, od centralnog značaja.

Kao što je poznato, G.Blazijus [12] razlaže brzinu potencijalnog strujanja u stepeni red po koordinati "x", koja se duž konture cilindričnog tela meri od prednje zaustavne tačke. Raspored brzina u graničnom sloju, on isto tako traži u vidu stepenog reda po koordinati "x", a sa koeficijentima koji su funkcije od koordinate "y", koje je L.Howart uspeo učiniti univerzalnim. Izvestan broj ovih univerzalnih funkcija tabulisali su K.Hiemenc, L.Howart, N.Froessling i A.Urlih.

Slično se moralo postupiti i u ovom radu. Umesto potencijalne brzine, ovde je razlagana brzina prethodnog graničnog sloja "u_s" u red po promenljivoj "τ", a sa koeficijentima zavisnim od promenljivih "η" i "x". Kasnije je rešenje parcijalnih jednačina traženo u vidu reda po promenljivoj "τ", dok su koeficijenti sadržali i univerzalne funkcije zavisne od promenljive "η".

Pri primeni Blazijusovog reda, potencijalna brzina se razlaže u stepeni red, pa se postepenim uzimanjem članova reda, ispituju i crtaju grafici odgovarajućih polinoma dok se ne nadje najbolja "zamena" za tačan izraz potencijalne brzine. Slično se postupalo i u ovom radu u odnosu na brzinu prethodnog graničnog sloja "u_s".

Ova sličnost sa priznatim Blazijusovim redom, doprinosi pozitivnom utisku o postupku koji je primenjen ovde.

V. DRUGO APROKSIMATIVNO REŠENJE DOPUNSKOG GRANIČNOG SLOJA

Najpre je nadjeno prvo aproksimativno rešenje dopunskog graničnog sloja, koje odgovara slučaju "kratkotrajnih" prethodnih nestacionarnih kretanja.

Potom se prešlo na analizu dopunskih graničnih slojeva nastalih iza prethodnih nestacionarnih kretanja konačnog trajanja. Tada je glavnu ulogu u čitavoj analizi imala brzina predhodnog graničnog sloja "u_s". Analiza je pokazala da je neophodno izvršiti prilagodjavanje funkcije "u_s" novim promenljivim dopunskog graničnog sloja (x, $\bar{\eta}$, t_1). Pri pomenutom prilagodjavanju značajna je činjenica da preračunavanja na nove promenljive mora da se obave samo u jednom činiocu iz sastava funkcije "u_s". Taj činilac je univerzalna funkcija predhodnog nestacionarnog graničnog sloja, zavisna jedino od promenljive "η".

Ispitivanja univerzalnih funkcija predhodnog graničnog sloja otkrila su da se sve univerzalne funkcije menjaju samo u kratkom rasmaku promenljive "η", dok su u ostalom ogromnom prostoru definisanosti, te promene zaista minimalne, te se sa dovoljno tačnosti, može uzeti da su tu univerzalne funkcije predhodnog graničnog sloja, konstantne.

U radu je uzeto da taj razmak iznosi: $0 \leq \eta \leq 2{,}0$, mada se dokazuje da dovoljnu tačnost za praktičnu upotrebu, obezbedjuje i interval $0 \leq \eta \leq 1{,}25$.

Ova činjenica je doprinela da se i sa samo dva člana uniformno - konvergentnog reda, kojim se mogla izraziti univerzalna fukcija - dobije zadovoljavajuća tačnost transformisanog, "prilagodjenog" oblika funkcije "u_s".

Tako je rešen i ovaj slučaj. Dobijeni su, mada računski komplikovani, suštinski prirodni rezultati. Profili brzina u graničnom sloju, proračunati na ovaj način, imaju, kako pokazuju dijagrami navedeni u radu, očekivani oblik.

Jedino je gornje delove, u odnosu na konturu tela, ovih profila brzina, bilo teško potpuno dovršiti da asimptotski teže brzini spoljašnjeg strujanja u posmatranoj tački konture cilindra. Pošto poprečna promenljiva "y" deluje na rešenje nestacionarnog graničnog sloja jedino implicitno kroz promenljive "η" i "$\bar{\eta}$", njihovo ograničavanje neminovno je moralo dovesti do ovog utiska o nedovršenosti dopunskog graničnog sloja u gornjoj zoni poprečnog pravca.

Dovršavanje rešenja nestacionarnog dopunskog graničnog sloja u "y" - pravcu treba obaviti sledećim potezom, zastupajući ono "u_s", koje je van raspona $0 \leq \eta < 1,25$. Ispitujući Blazijusova rešenja za "u_s" [12] u intervalu $1,25 \leq \eta < \infty$, dokazuje se da se drugo aproksimativno rešenje dopunskog graničnog sloja može tražiti uzimajući približnost $u_s \approx U_s$. Tada se iz jednačina prvoga i drugoga približenja dopunskog graničnog sloja (1.27) i (1.31), dobijaju sledeće jednačine sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U_d}{\partial t_1} \\ &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\ &u_0 = 0,\ y = 0;\ u_0 = U_d(x, t_1),\ y = \infty . \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U_d \frac{\partial U_d}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(U_s U_d) - (U_s + u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x} - \\ - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - u_0 \frac{\partial U_s}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \\ u_1 = 0,\ y = 0;\ u_1 = 0,\ y = \infty . \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Ove jednačine će nam poslužiti za odredjivanje prvog i drugog približenja brzine dopunskog graničnog sloja kod "drugog aproksimativnog rešenja".

Može se napomenuti da ovaj postupak i nema, u punom smislu reči, aproksimativan karakter. Naime, računskim putem je utvrdjeno, da "u_s" posle kratkog područja promenljive "η" ($0 \leq \eta \leq 1,25$) postaje, zaista, veoma malo različito od "U_s".

zbog navedene osobine univerzalnih funkcija. A pošto "u_o" može postati jednako sa "U_o" jedino na odgovarajućoj udaljenosti od tela - ceo postupak dobija smisao dovršavanja rešenja u "y" - pravcu, čime i dopunski nestacionarni granični sloj stiče osobinu asimptotskog nestacionarnog graničnog sloja.

Proračunavanjem profila brzina u graničnom sloju će se kasnije sve to i konkretno potvrditi.

81. Dopunski trzaj iza prethodnog kretanja trzajem

Cilindrično telo se kretalo trzajem iz stanja mirovanja $[U_s = U(x)]$. U jednom trenutku njemu je saopšten dopunski trzaj$[U_d = U(x)]$. Jednačina (5.1) za prvo približenje sada postaje:

$$\frac{\partial u_o}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} = 0$$

sa sledećim graničnim uslovima:

$$u_o = 0, \quad y = 0; \quad u_o = U(x), \quad y = \infty.$$

Tražeći rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_o = U(x)\, \zeta_o'(\bar{\eta}) \tag{5.3}$$

za nepoznatu funkciju $\zeta_o'(\bar{\eta})$ dobijamo jednačinu:

$$\zeta_o''' + 2\bar{\eta}\,\zeta_o'' = 0$$

sa graničnim uslovima:

$$\zeta_o(0) = \zeta_o'(0) = 0, \qquad \zeta_o'(\infty) = 1.$$

Njeno rešenje, koje zadovoljava navedene granične uslove je:

$$\zeta_o'(\bar{\eta}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{\eta}} e^{-\gamma^2} d\gamma = \operatorname{Erf} \bar{\eta} \tag{5.4}$$

Iz jednačine kontinuiteta za prvo približenje brzine:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} = 0$$

može se izračunati i druga komponenta "v_o":

$$v_o = -2\sqrt{\nu t_1}\, U'\, \zeta_o(\bar{\eta}) \tag{5.5}$$

gde je poznata funkcija:

$$\zeta_o(\bar{\eta}) = \bar{\eta} \operatorname{Erf} \bar{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-\bar{\eta}^2}\right) \tag{5.6}$$

Smenjujući vrednosti (5.3) i (5.5) u jednačinu (5.2) dobiće se parcijalna jednačina koja odredjuje drugo približenje brzine:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = UU'(3 - 2\zeta_0' - \zeta_0'^2 + \zeta_0\zeta_0'') \tag{5.7}$$

Ako potražimo rešenje jednačine (5.7) u vidu

$$u_1 = t_1 UU' \zeta_1'(\eta) \tag{5.8}$$

za nepoznatu funkciju $\zeta_1'(\eta)$ nastaće jednačina:

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = -4(3 - 2\zeta_0' - \zeta_0'^2 + \zeta_0\zeta_0'') \tag{5.9}$$

sa graničnim uslovima:

$$\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0 \tag{5.10}$$

Ubacujući izraze (5.4) i (5.6) u jednačinu (5.9) dobiće se:

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = -4(\Pi_1 \mathrm{Erf}^2\eta + \Pi_2 \mathrm{Erf}\,\eta + \Pi_3) \tag{.511}$$

gde su

$$\Pi_1 = -1, \quad \Pi_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - 2,$$

$$\Pi_3 = \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} - \frac{2}{\pi} e^{-\eta^2} + 3.$$

Potražimo partikularni integral ove nehomogene diferencijalne jednačine u obliku:

$$\zeta_{1p}'(\eta) = X(\eta)\,\mathrm{Erf}^2\eta + Y(\eta)\,\mathrm{Erf}\,\eta + S(\eta) \tag{5.12}$$

Ovde su X, Y, S nepoznate funkcije koje će se odrediti rešavanjem sledećih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} &X'' + 2\eta X' - 4X = 4 \\ &Y'' + 2\eta Y' - 4Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}} X' e^{-\eta^2} - 4\Pi_2 \\ &S'' + 2\eta S' - 4S = -\frac{8}{\pi} X e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} Y' e^{-\eta^2} - 4\Pi_3 \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Rešenje prve jednačine rekurzivnog sistema (5.13) je

$$X(\eta) = K_1(1 + 2\eta^2) - 1$$

gde je K_1 proizvoljna konstanta

Zamenjujući ovu vrednost u desnu stranu druge jednačine sistema (5.13) dobićemo:

$$Y'' + 2\eta Y' - 4Y = \left(-\frac{32}{\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{8}{\sqrt{\pi}}\right)\eta e^{-\eta^2} + 8$$

Njeno jedno rešenje koje odgovara ovome problemu, glasi:

$$Y(\eta) = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}K_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\eta e^{-\eta^2} - 2$$

Na kraju, rešavajući treću jednačinu sistema (5.13):

$$S'' + 2\eta S' - 4S = \left[\left(\frac{16}{\pi}K_1 + \frac{8}{\pi}\right)\eta^2 - \left(\frac{24}{\pi}K_1 + \frac{4}{\pi}\right)\right]e^{-2\eta^2} + \frac{8}{\pi}e^{-\eta^2} - 12.$$

dokazuje se, da se rešenje ove jednačine, u zatvorenom obliku, može naći samo ako konstanta K_1 ima vrednost:

$$K_1 = 1/2$$

Tako se, konačno, došlo do odgovarajućih rešenja jednačina (5.13):

$$\left.\begin{aligned} x(\eta) &= \eta^2 - \frac{1}{2} \\ y(\eta) &= \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,\eta\, e^{-\eta^2} - 2 \\ s(\eta) &= \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + 3 \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Time partikularni integral (5.12) postaje potpuno odredjen. Pošto su partikularna rešenja homogenog dela diferencijalne jednačine (5.11):

$$(\zeta'_{1h})_1 = 1 + 2\eta^2$$

$$(\zeta'_{1h})_2 = \frac{1}{4}(1+2\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\eta\, e^{-\eta^2}$$

može se formirati opšte rešenje polazne jednačine:

$$\zeta'_1(\eta) = C_1 (\zeta'_{1h})_1 + C_2 (\zeta'_{1h})_2 + \zeta'_{1p}(\eta) \tag{5.15}$$

Koristeći granične uslove (5.10) dolazi se do vrednosti konstanata:

$$C_1 = -\frac{2}{3\pi} - 3, \qquad C_2 = \frac{8}{3\pi} + 10$$

Sabirajući izraze (5.3) i (5.8) dolazi se do brzine dopunskog graničnog sloja:

$$u_d = U\zeta'_0(\eta) + t_1 U U' \zeta'_1(\eta) \tag{5.16}$$

Pošto je brzina prethodnog graničnog sloja poznata [12

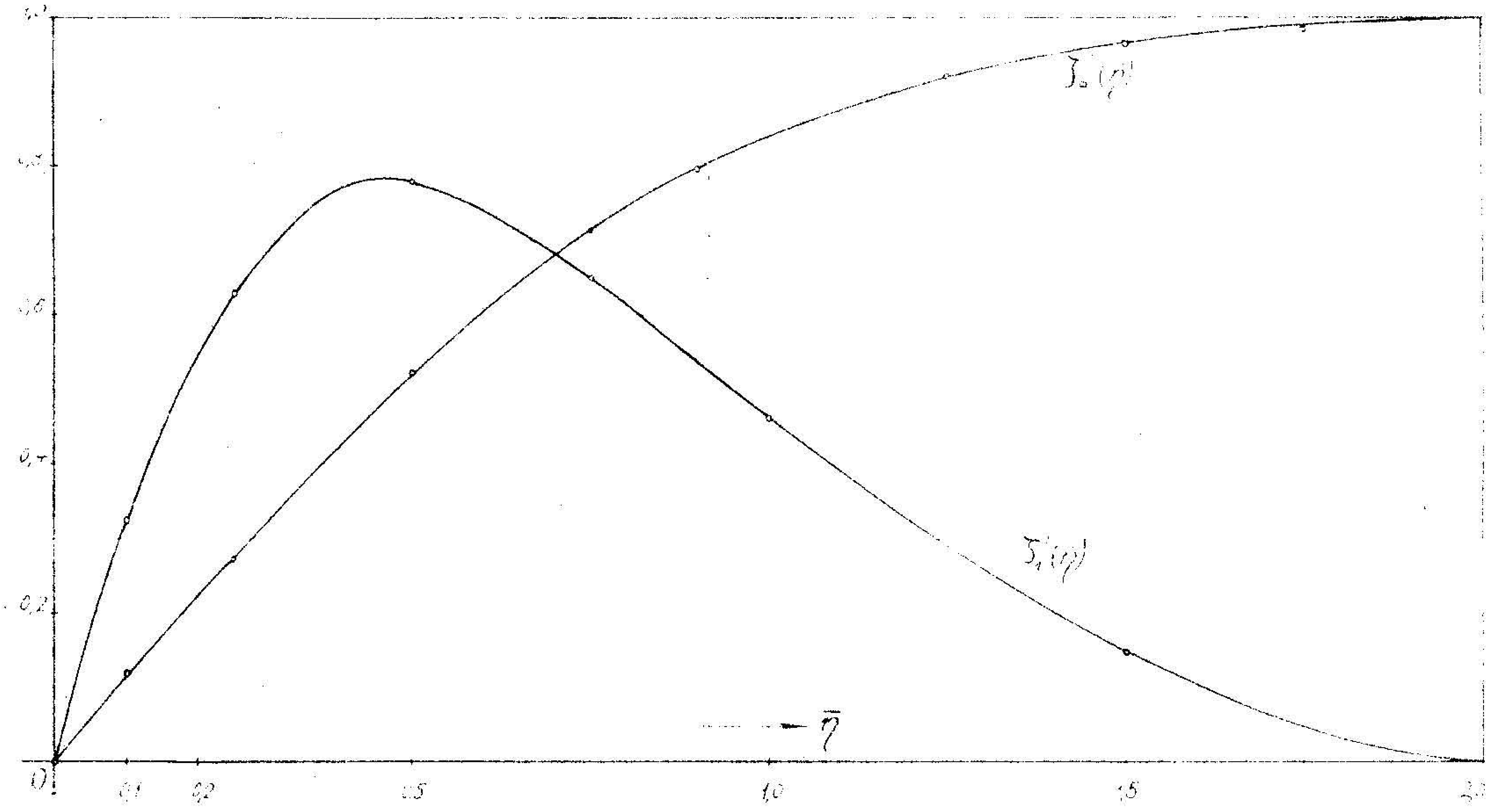
$$u_s = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-r^2} dr = U f'_1(\eta)$$

ukupna brzina u graničnom sloju iznosi:

$$u = U f'_1(\eta) + U\zeta'_0(\eta) + t_1 U U' \zeta'_1(\eta) \tag{5.17}$$

Univerzalne funkcije (5.4) i (5.15) su i proračunate i nekoliko njihovih vrednosti su date u tabeli 16 . Iste funkcije su prikazane i grafički na sl. 14 .

$U_s = U(x)$; $U_d = U(x)$



sl. 14

$\bar{\eta}$	$\zeta_0'(\bar{\eta})$	$\zeta_1'(\bar{\eta})$
0,10	0,1124	0,3279
0,25	0,2763	0,6346
0,50	0,5205	0,7774
1,0	0,8427	0,4648
1,50	0,9661	0,1449
2,0	0,9953	0,0031

Tabela 16

Interesantno je primeniti jednačinu (5.17) u istim trenucima vremena i na istim mestima na konturi kružnog cilindra, kao i u paragrafu trećem, treće glave, ovoga rada. Tako bi se moglo proveriti slaganje, odnosno odstupanje vrednosti dobivenih ovim načinom i ranijim načinom, i pratiti asimptotski tok profila brzine sa udaljavanjem od konture tela. Uzeće se kružni cilindar radijusa R = 50 cm., trzajem (U_∞ = 10 cm/s) pokrenut iza predhodnog trzaja (U_∞ = 10 cm/s) i izvršiće se proračuni brzina u graničnom sloju obrascem (5.17) u nekoliko tačaka na kružnom cilindru i u raznim trenucima:

1° $x/R = 100°$, $T = 2{,}5$ sec , $t_1 = 1$ sec;

$$u = 19{,}696\left[f_1'(\eta) + \zeta_0'(\bar{\eta})\right] - 0{,}683\,\zeta_1'(\bar{\eta})$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$19{,}7(f_1'+\zeta_0')$	$0{,}683\,\zeta_1'$	u [cm/s]
0,4	2,0	1,0696	36,7464	0,00210	36,7443
0,5	2,5	1,3370	38,2872	0,00123	38,2660
0,6	3,0	1,6044	38,9863	0,00041	38,9858
0,7	3,5	1,8718	38,9985	0,00034	38,9981
0,8	4,0	2,1392	38,9998	0,000303	38,9995
0,9	4,5	2,4066	39,1554	0,000130	39,1554
1,0	5,0	2,6740	39,3606	0,000070	39,3605

Tabela 17

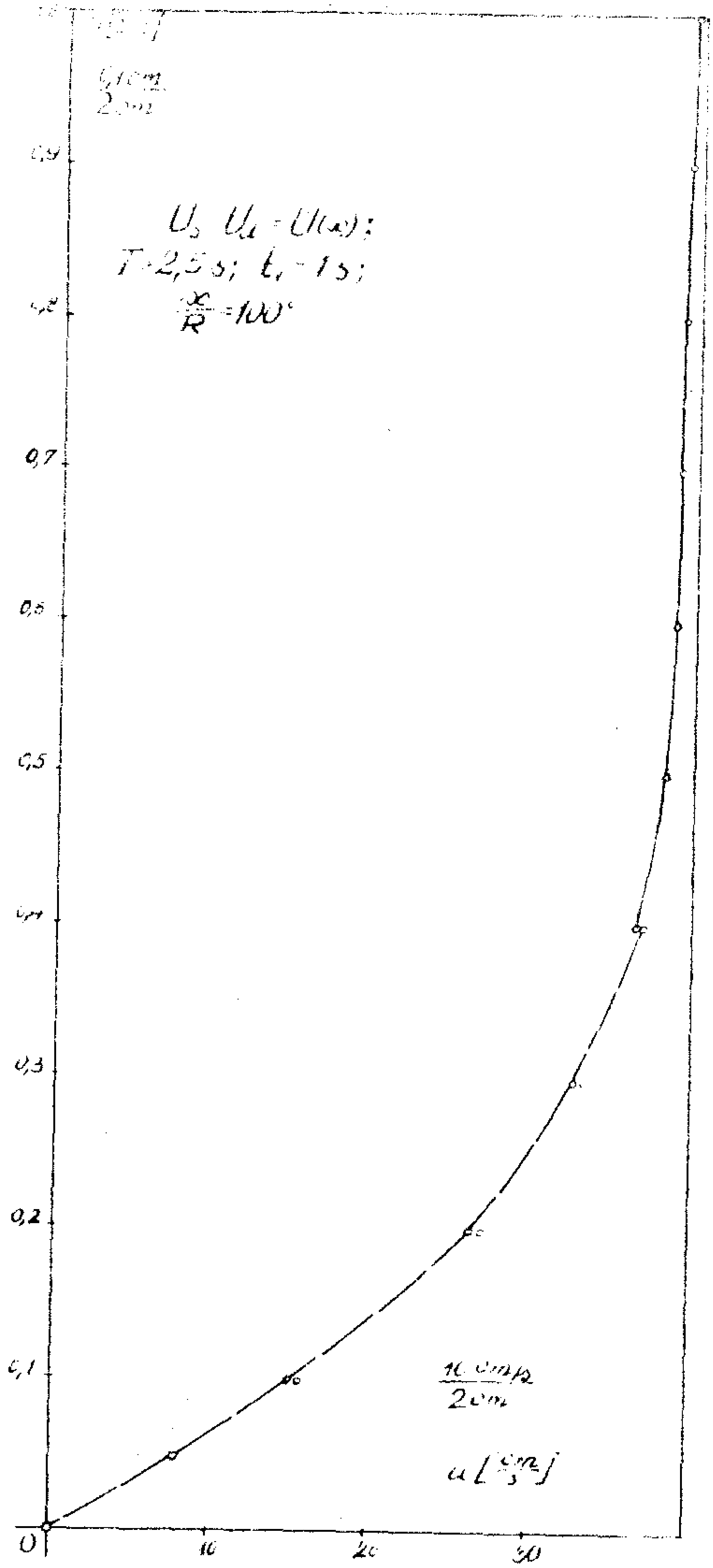
prikazani su

i gra... i ranijeg računa

iz ta... izrazu (5.17) i

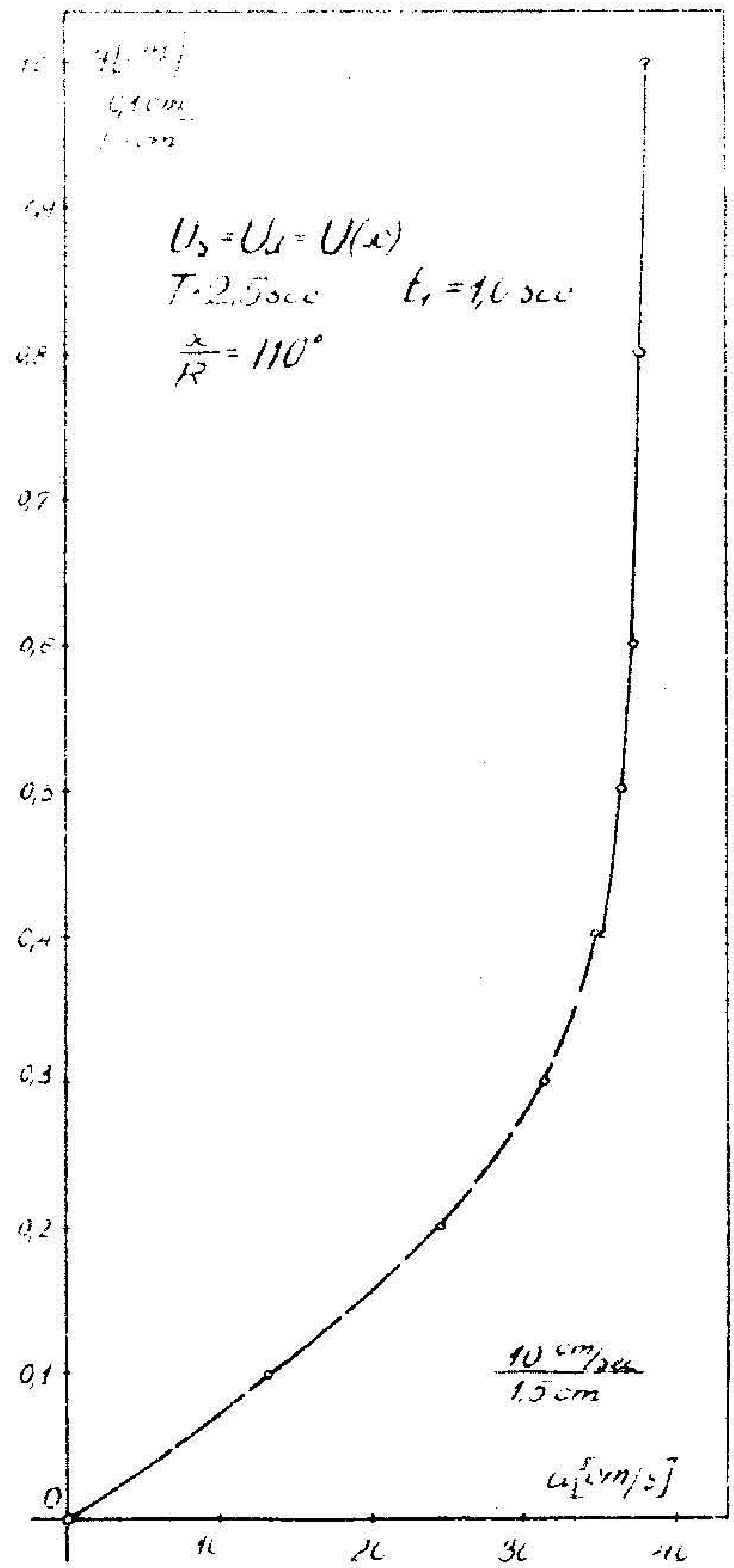
ranij... p.

2° x/...



0,6	3,0	1,6040	37,2052	0,0015	37,2037
0,8	4,0	2,1390	37,5173	0,0010	37,5163
1,0	5,0	2,6740	37,5624	0,0003	37,5621

Tabela 18



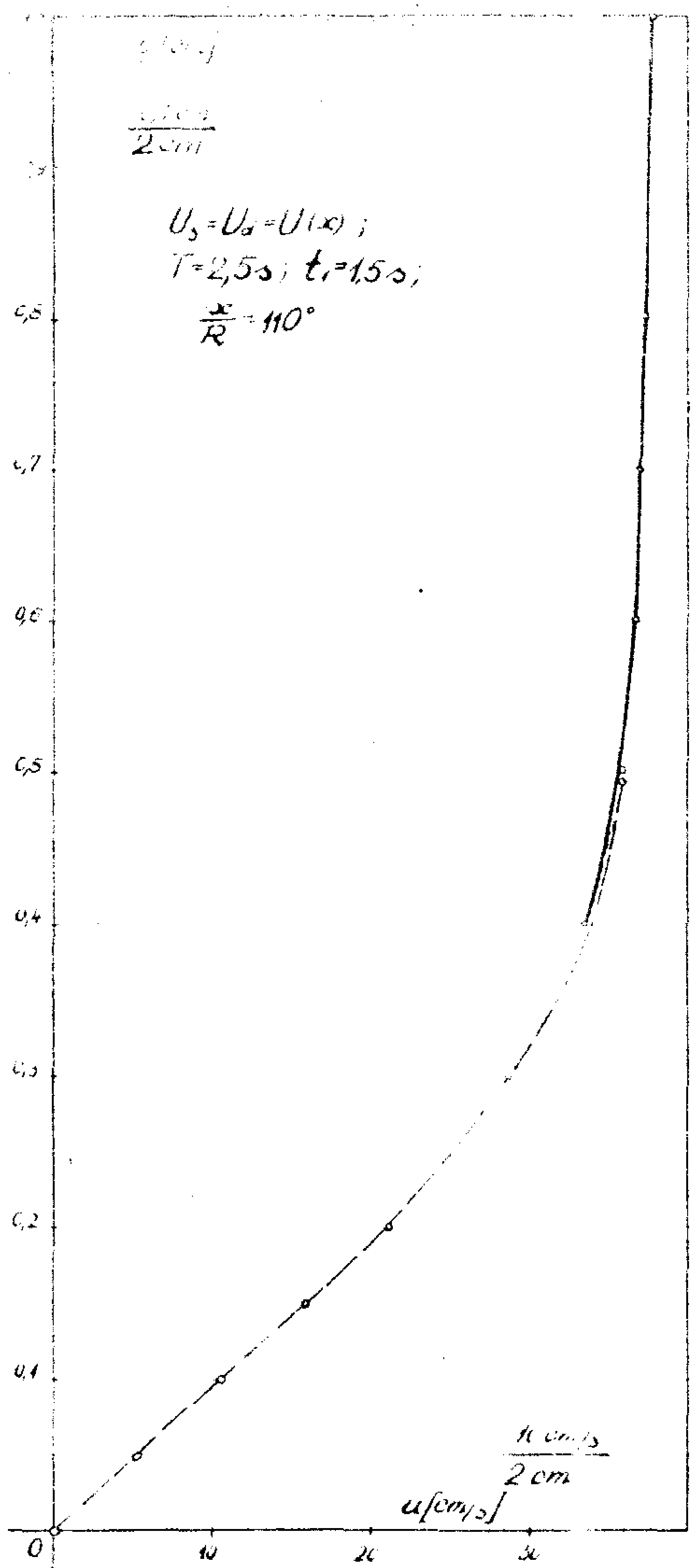
I ov… ranijih vred-
nosti iz tabel… ram) i ovih
prema tabeli 18 … h ovim i rani-
jim načinom na … %.

3° x/R = 110°.

$$u = 18,8\,[f_1'(\eta) + \zeta_1'(\bar{\eta})] - 3,858\,\zeta_1'(\bar{\eta})$$

y [cm]	$\bar{\eta}$	η	$18,8(f_1'+\zeta_1')$	$3,858\zeta_1'$	$u\,[\frac{cm}{s}]$
0,40	1,64	1.0	34,2668	0,3472	33,9196
0,50	2,05	1,25	36,0640	0,0116	36,0524
0,60	2,46	1.50	36,9157	0,0096	36,9061
0,70	2,87	1,75	37,3218	0,0069	37,3149
0,80	3,28	2,0	37,4910	0,0038	37,4872
1,0	4,10	2,50	37,5568	0,0019	37,5549

Tabela 19



Odg...

Na ... ko pribli-

žavanje profi... a spoljaš-

nje potencija... računatim

prema formuli... graničnog

sloja.

82. ... nog

Cilindričnom telu pokrenutom kretanjem, u jednom momentu $t_1 = 0$, saopštemo je dopunsko kretanje stalnim ubrzanjem.

Jednačina za prvo približenje, sada, glasi:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = W$$

$$u_0 = 0, \quad y = 0; \quad u_0 = t_1 W, \quad y = \infty .$$

Potražimo njeno rešenje u obliku:

$$u_0 = t_1 W \zeta_0'(\bar\eta) \tag{5.18}$$

Smenom izraza (5.18) u samu jednačinu, dobiće se za odredjivanje funkcije $\zeta_0'(\bar\eta)$ obična diferencijalna jednačina:

$$\zeta_0''' + 2\bar\eta\,\zeta_0'' - 4\zeta_0' = -4$$

sa graničnim uslovima:

$$\zeta_0(0) = \zeta_0'(0) = 0, \quad \zeta_0'(\infty) = 1.$$

Njeno rešenje koje ispunjava navedene uslove glasi:

$$\zeta_0'(\bar\eta) = (1+2\bar\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\bar\eta e^{-\bar\eta^2} - 2\bar\eta^2 \tag{5.19}$$

Preko jednačine kontinuiteta za prvo približenje, odredjuje se komponenta "v_0":

$$v_0 = -2t_1\sqrt{\nu t_1}\, W' \zeta_0(\bar\eta) \tag{5.20}$$

gde je

$$\zeta_0(\bar\eta) = \left(\frac{2}{3}\bar\eta^3 + \bar\eta\right)\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}(\bar\eta^2+1)e^{-\bar\eta^2} - \frac{2}{3}\bar\eta^3 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \tag{5.21}$$

Pošto jednačina za drugo približenje kraine ima oblik:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = t_1^2 WW'(1+\zeta_0\zeta_0'' - \zeta_0'^2) + t_1(UW' + U'W)(1-\zeta_0') \tag{5.22}$$

potražimo njeno rešenje u obliku:

$$u_1 = t_1^3 WW'\zeta_1'(\bar\eta) + t_1^2(UW' + U'W)\zeta_2'(\bar\eta) \tag{5.23}$$

Zamenom izraza (5.23) u jednačinu (5.22), pa uporedjivanjem obeju strana jednačine, dobićemo:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1''' + 2\bar\eta\zeta_1'' - 12\zeta_1' = -4(1+\zeta_0\zeta_0'' - \zeta_0'^2) \\ &\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = 0, \quad \zeta_1'(\infty) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_2''' + 2\bar\eta\zeta_2'' - 8\zeta_2' = -4(1-\zeta_0') \\ &\zeta_2(0) = \zeta_2'(0) = 0, \quad \zeta_2'(\infty) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Rešimo ove jednačine:

1° Pošto je:

$$\zeta_0'' = 4\bar\eta\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-\bar\eta^2} - 4\bar\eta$$

smenjujući ovu i vrednosti (5.19) i (5.21) u desnu stranu jednačine (5.24) dobiće se:

$$\zeta_1''' + 2\bar\eta\zeta_1'' - 12\zeta_1' = \pi_1\,\mathrm{Erf}^2\bar\eta + \pi_2\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta + \pi_3 \tag{5.26}$$

gde su:

$$\pi_1 = \frac{16}{3}\bar{\eta}^4 + 4, \quad \pi_2 = \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}\right)e^{-\bar{\eta}^2} - \frac{32}{3}\bar{\eta}^4 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

$$\pi_3 = \left(\frac{16}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^2 - \frac{32}{3\pi}\right)e^{-2\bar{\eta}^2} + \left(\frac{32}{3\pi} + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta} - \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3\right)e^{-\bar{\eta}^2} + \frac{16}{3}\bar{\eta}^4 - \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta} - 4$$

S obzirom na oblik desne strane jednačine (5.26), potražimo partikularni integral te jednačine u vidu:

$$J'_{1p}(\bar{\eta}) = X\,\mathrm{Erf}^2\bar{\eta} + Y\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + S \tag{5.27}$$

Radi kompletnog odredjivanja funkcije (5.27) treba rešiti diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} &X'' + 2\bar{\eta}X' - 12X = \pi_1 \\ &Y'' + 2\bar{\eta}Y' - 12Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\bar{\eta}^2} + \pi_2 \\ &S'' + 2\bar{\eta}S' - 12S = -\frac{8}{\pi}Xe^{-2\bar{\eta}^2} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}Y'e^{-\bar{\eta}^2} + \pi_3 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Zamenjujući rešenje prve jednačine sistema (5.28):

$$X = K_1\left(1 + 6\bar{\eta}^2 + 4\bar{\eta}^4 + \frac{8}{15}\bar{\eta}^6\right) - \frac{4}{3}\bar{\eta}^4 - 2\bar{\eta}^2 - \frac{2}{3}$$

u drugu jednačinu ovoga sistema, dobiće se:

$$Y'' + 2\bar{\eta}Y' - 12Y = \left[-\frac{128}{5\sqrt{\pi}}K_1\bar{\eta}^5 + \left(\frac{160}{3\sqrt{\pi}} - \frac{128}{\sqrt{\pi}}K_1\right)\bar{\eta}^3 + \left(\frac{64}{3\sqrt{\pi}} - \frac{96}{\sqrt{\pi}}K_1\right)\bar{\eta}\right]e^{-\bar{\eta}^2} - \frac{32}{3}\bar{\eta}^4 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

Rešenje ove jednačine je:

$$Y = \left[\left(\frac{44}{5\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{7}{3\sqrt{\pi}}\right)\bar{\eta} + \left(\frac{112}{15\sqrt{\pi}}K_1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\right)\bar{\eta}^3 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}}K_1\bar{\eta}^5\right]e^{-\bar{\eta}^2} + \frac{8}{3}\bar{\eta}^4 + 4\bar{\eta}^2 - \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta} + \frac{2}{3}$$

Smenom vrednosti za X i Y u treću jednačinu sistema (5.28) dobiće se jednačina:

$$S'' + 2\bar{\eta}S' - 12S = \left[\frac{64}{15\pi}K_1\bar{\eta}^6 + \left(\frac{32}{5\pi}K_1 - \frac{32}{3\pi}\right)\bar{\eta}^4 + \left(-\frac{336}{5\pi}K_1 + \frac{104}{3\pi}\right)\bar{\eta}^2 + \left(-\frac{216}{5\pi}K_1 + \frac{4}{\pi}\right)\right]e^{-2\bar{\eta}^2} + \left(-\frac{160}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 - \frac{64}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta} + \frac{224}{15\pi}\right)e^{-\bar{\eta}^2} + \frac{16}{3}\bar{\eta}^4 - \frac{32}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta} - 4$$

Predstavljajući partikularno rešenje ove jednačine u vidu zbira:

$$S_p(\bar{\eta}) = S_{p1}(\bar{\eta}) + S_{p2}(\bar{\eta}) + S_{p3}(\bar{\eta})$$

pri traženju prvog sabirka

$$S_{p1}(\bar{\eta}) = (a_0 + a_1\bar{\eta} + a_2\bar{\eta}^2 + a_3\bar{\eta}^3 + a_4\bar{\eta}^4)e^{-2\bar{\eta}^2}$$

dolazi se do uslova da konstanta K_1 mora imati vrednost:

$$K_1 = 5/12$$

da bi se ovaj deo partikularnog rešenja mogao naći u ovakvom obliku: Tako se dobija:

$$S_{p1}(\bar{\eta}) = \frac{1}{9\pi}(2\bar{\eta}^4 + \bar{\eta}^2 + 8)e^{-2\bar{\eta}^2}$$

Do druga dva dela partikularnog integrala jednačine za S, lakše se dolazi:

$$S_{p2}(\bar{\eta}) = \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta}^3 + \frac{7}{3\sqrt{\pi}}\bar{\eta} - \frac{16}{15\pi}\right)e^{-\bar{\eta}^2}$$

$$S_{p3}(\bar{\eta}) = -\frac{4}{3}\bar{\eta}^4 - 2\bar{\eta}^2 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\bar{\eta}$$

Ovim je, konačno, partikularno rešenje (5.27) jednačine (5.26) odredjeno.

Kako su dva partikularna integrala homogenog dela jednačine (5.26):

$$(\zeta'_{1k})_1 = 1 + 6\bar{\eta}^2 + 4\bar{\eta}^4 + \frac{8}{15}\bar{\eta}^6$$

$$(\zeta'_{1k})_2 = \frac{1}{384}\left(1 + 6\bar{\eta}^2 + 4\bar{\eta}^4 + \frac{8}{15}\bar{\eta}^6\right)(1 - \mathrm{Erf}\,\bar{\eta}) - \frac{1}{720\sqrt{\pi}}\left(\bar{\eta}^5 + 7\bar{\eta}^3 + \frac{33}{4}\bar{\eta}\right)e^{-\bar{\eta}^2}$$

opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine glasi:

$$\zeta'_1(\bar{\eta}) = C_1(\zeta'_{1k})_1 + C_2(\zeta'_{1k})_2 + \zeta'_{1p}(\bar{\eta}) \qquad (5.29)$$

Zbog graničnog uslova (5.24), konstante moraju imati vrednosti:

$$C_1 = -5/12, \qquad C_2 = 1024/15\pi + 288$$

2° Jednačina (5.25) uz pomoć izraza (5.19) postaje:

$$\zeta_2''' + 2\bar{\eta}\zeta_2'' - 8\zeta_2' = 4(1+2\bar{\eta}^2)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2} - 4(1+2\bar{\eta}^2) \qquad (5.30)$$

Ako se predpostavi partikularno rešenje jednačine (5.30) u obliku:

$$\zeta'_{2p}(\bar{\eta}) = X\,\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + S \qquad (5.31)$$

i reše diferencijalne jednačine za nepoznate funkcije X i S:

$$X'' + 2\bar{\eta}X' - 8X = 4(1+2\bar{\eta}^2)$$

$$S'' + 2\bar{\eta}S' - 8S = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}X'e^{-\bar{\eta}^2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2} - 4(1+2\bar{\eta}^2) \qquad (5.32)$$

dobiće se vrednosti:

$$X = -(1+2\bar{\eta}^2)$$

$$S = (1+2\bar{\eta}^2) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2}$$

sa kojima je partikularno rešenje (5.31) odredjeno.

Opšte rešenje jednačina (5.30) je:

$$\zeta_2'(\bar\eta)=C_1\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)+C_2\Big\{\frac{1}{32}\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)\left(1-\mathrm{Erf}\,\bar\eta\right)-$$
$$-\frac{1}{24\sqrt{\pi}}\left[\frac{5}{2}\bar\eta+\bar\eta^3\right]e^{-\bar\eta^2}\Big\}-(1+2\bar\eta^2)\,\mathrm{Erf}\,\bar\eta-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}+(1+2\bar\eta^2) \qquad (5.33)$$

Činioci uz konstante C_1 i C_2 su partikularna rešenja homogenog dela jednačine(5.30). Iz graničnih uslova, prema vezi (5.25), dobiće se:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -32.$$

Zbir izraza (5.18) i (5.23) predstavlja brzinu dopunskog graničnog sloja:

$$u_d = t_1 W\zeta_0'(\bar\eta)+t_1^3 WW'\zeta_1'(\bar\eta)+t_1^2(UW'+U'W)\zeta_2'(\bar\eta) \qquad (5.34)$$

a dodajući joj brzinu prethodnog graničnog sloja:

$$u_s = U\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\vartheta^2}d\vartheta = U f_1'(\eta)$$

imaćemo ukupnu brzinu u graničnom sloju:

$$u = U f_1'(\eta) + t_1 W\zeta_0'(\bar\eta) + t_1^2(UW'+$$
$$+U'W)\zeta_2'(\bar\eta)+t_1^3 WW'\zeta_1'(\bar\eta) \qquad (5.35)$$

Univerzalne funkcije (5.19), (5.29) i (5.33) konstruisane su i date grafički, a nekoliko njihovih vrednosti navedene su i u sledećoj tabeli.

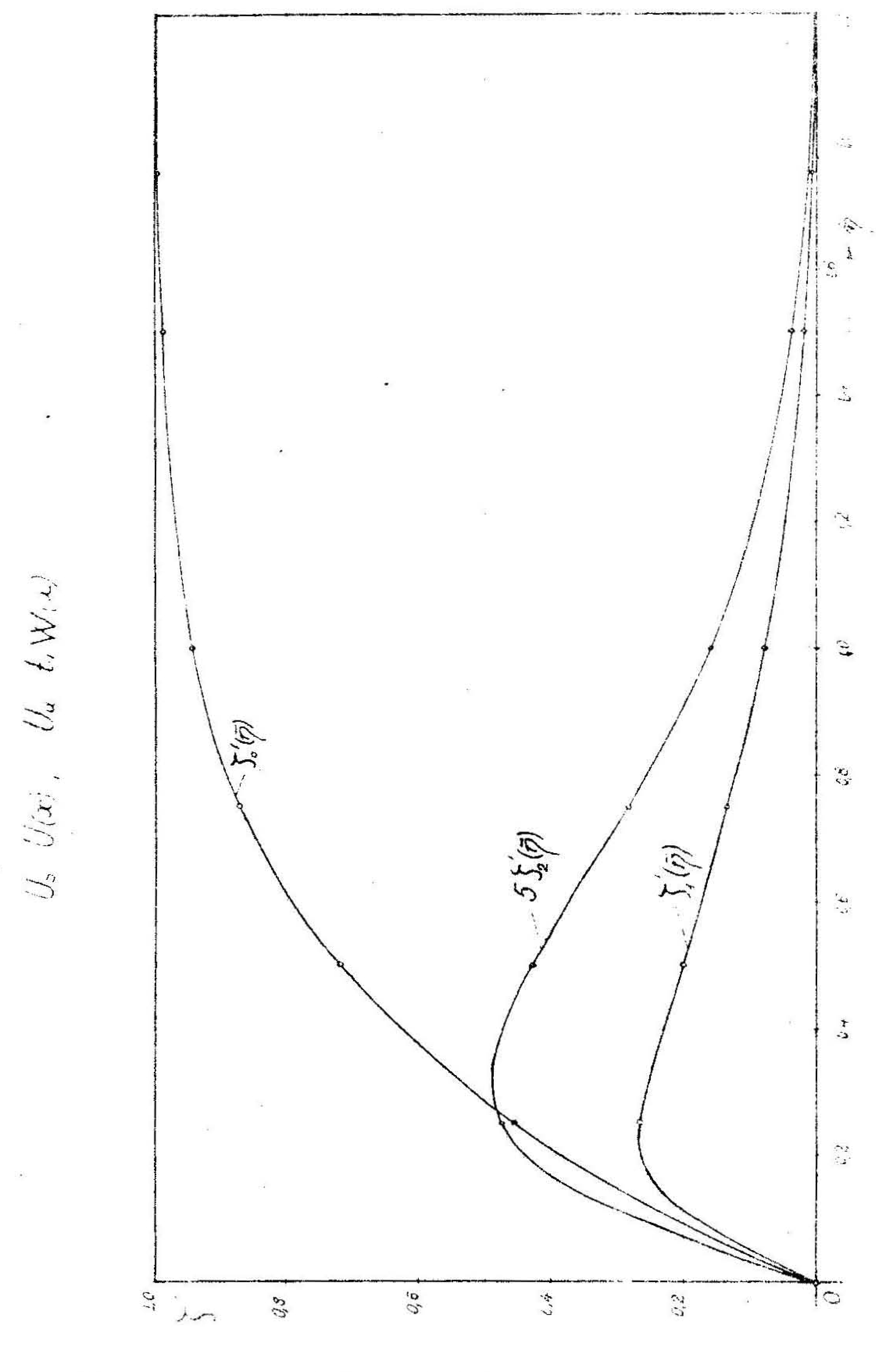
Primera radi proračunat je granični sloj na kružnom cilindru radijusa R, pokrenutom trzajem ($U = 2U_\infty \sin x/R$) a potom i dopunskim stalnim ubrzanjem ($W = 2V_0 \sin x/R$) – u tački $x/R = 100^\circ$, i u trenutku: $T = 2$ sec, $t_1 = 1$ sec. Ostali brojni podaci su: $U_\infty = 10$ cm/s, $V_0 = 10$ cm/s^2, $R = 50$ cm. Za ove podatke, iz izraza (5.35) dobije se, konačno:

$$u = 19{,}7\left[f_1'(\eta)+\zeta_0'(\bar\eta)\right]-2{,}734\,\zeta_2'(\bar\eta)-1{,}367\,\zeta_1'(\bar\eta)$$

Dalji proračun prikazan je tabelom 21, a potom je na sl. 19 nacrtan profil brzina gde su korišćeni i rezultati ranijeg računa, prema tabeli 14. Odstupanja vrednosti brzina prema izrazu (5.35) i ranijem načinu, prema kome je sračunata tabela 8., pri y = 0,4cm, iznosi oko 0,17%. Zadovoljavajuće spajanje ovih rešenja u okolini mesta y = 0,4 cm. i sa sl. 19 je očigledno.

$\bar{\eta}$	$J_0'(\bar{\eta})$	$J_1'(\bar{\eta})$	$J_2'(\bar{\eta})$
0,25	0,45050	0,26261	0,09282
0,50	0,71940	0,19558	0,08563
0,75	0,86810	0,12923	0,05584
1,0	0,94400	0,07073	0,03120
1,50	0,99150	0,02180	0,00454
1,75	0,99300	0,01130	0,00410
2,0	0,99600	0,00128	0,00006

Tabela 20

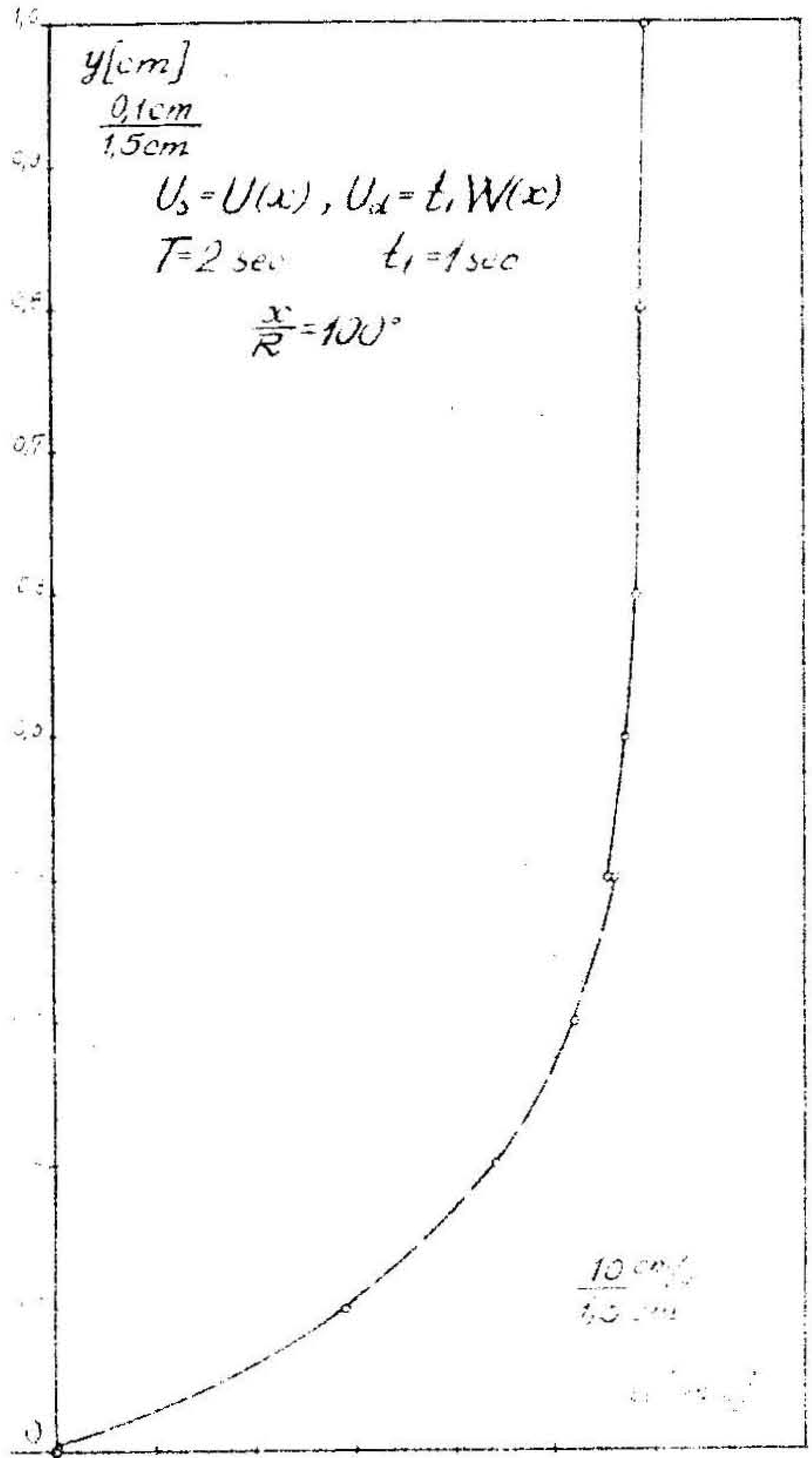


SL. 18

$\frac{x}{R} = 100^\circ$, $T = 2\,s$, $t_1 = 1\,s$:

y [cm]	η	$\bar{\eta}$	$f_1'(\eta)$	$\zeta_0'(\bar{\eta})$	$\zeta_1'(\bar{\eta})$	$\zeta_2'(\bar{\eta})$	$19{,}7(f_1' + \zeta_0')$	$1{,}367\zeta_1'$	$2{,}734\zeta_2'$	$u\left[\frac{cm}{s}\right]$
0,3	0,867	1,50	0,780	0,9915	0,0218	0,00454	34,8985	0,0298	0,01241	34,8563
0,4	1,156	2,0	0,900	0,9960	0,00128	0,00060	37,3512	0,00175	0,00164	37,3478
0,5	1,445	2,50	0,957	0,9980	0,00115	0,00005	38,5135	0,00157	0,00014	38,5118
0,6	1,734	3,0	0,988	0,9988	0,00110	0,00003	39,1349	0,00150	0,00008	39,1384
0,8	2,312	4,0	0,997	0,9990	0,00100	0,00002	39,3212	0,00137	0,00005	39,3198
1,0	2,890	5,0	0,998	0,9995	0,00050	0,00001	39,3507	0,00068	0,00003	39,3500

Tabela 21



Sl. 19

6.3. Trzaj iza jednako-ubrzanog kretanja

Cilindrično telo se kretalo stalnim ubrzanjem iz stanja mirovanja $\left[U_s = tW(x)\right]$. U jednom trenutku njemu je saopšten dopunski trzaj $\left[U_d = U(x)\right]$. Jednačina (5.1) za prvo približenje sada, glasi:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0$$

a granični uslovi su:

$$u_0 = 0,\ y = 0;\quad u_0 = U(x),\ y = \infty .$$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_0 = U(x)\,\zeta_0'(\eta) \tag{5.36}$$

funkcija $\zeta_0'(\eta)$ imaće vrednost (5.4). Druga komponenta brzine prvoga približenja ima vrednost (5.5), pa jednačina za drugo približenje (5.2) postaje:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = UU'\Pi_1(\eta) + T(U'W + UW')\Pi_2(\eta) + t_1(U'W + UW')\Pi_3(\eta) \tag{5.37}$$

gde su poznate funkcije:

$$\Pi_1 = 1 - \zeta_0'^2 + \zeta_0\zeta_0'',\quad \Pi_2 = \Pi_3 = 1 - \zeta_0' .$$

Tražeći rešenje jednačine (5.37) u obliku:

$$u_1 = t_1\left[UU'\zeta_1'(\eta) + T(UW' + U'W)\zeta_2'(\eta)\right] + t_1^2(U'W + UW')\zeta_3'(\eta) \tag{5.38}$$

iz jednačina (5.37) dobiće se:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1''' + 2\eta\,\zeta_1'' - 4\zeta_1' &= -4\Pi_1(\eta) \\ \zeta_2''' + 2\eta\,\zeta_2'' - 4\zeta_2' &= -4\Pi_2(\eta) \\ \zeta_3''' + 2\eta\,\zeta_3'' - 8\zeta_3' &= -4\Pi_3(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

sa graničnim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1(0) = \zeta_1'(0) &= \zeta_1'(\infty) = 0 \\ \zeta_2(0) = \zeta_2'(0) &= \zeta_2'(\infty) = 0 \\ \zeta_3(0) = \zeta_3'(0) &= \zeta_3'(\infty) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

Rešenje prve jednačine sistema (5.39):

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = 4\,\mathrm{Erf}^2\eta + \frac{8}{\pi}e^{-\eta^2} - \frac{8}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\mathrm{Erf}\,\eta - \frac{8}{\pi}e^{-2\eta^2} - 4$$

koje ispunjava odgovarajući granični uslov (5.40) je:

$$J_1''' + 2\bar{\eta} J_1'' - 4J_1' = -4\Pi_1(\bar{\eta})$$

$$J_1' = C_1(1+2\bar{\eta}^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar{\eta}^2)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2}\right] +$$

$$+(\bar{\eta}^2-\frac{1}{2})\mathrm{Erf}^2\bar{\eta} + \frac{3}{\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2}\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{2}{\pi}e^{-2\bar{\eta}^2} - \frac{4}{3\pi}e^{-\bar{\eta}^2} + 1$$

$$C_1 = -\frac{2}{3\pi} - 1, \quad C_2 = \frac{6}{3\pi} + 2.$$

Rešenje druge jednačine sistema (5.39):

$$J_2''' + 2\bar{\eta} J_2'' - 4J_2' = -4\Pi_2(\bar{\eta})$$

$$J_2' = C_1(1+2\bar{\eta}^2) + C_2\left[\frac{1}{4}(1+2\bar{\eta}^2)\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar{\eta}e^{-\bar{\eta}^2}\right] - \mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + 1$$

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 4,$$

a treće:

$$J_3''' + 2\bar{\eta} J_3'' - 8J_3' = -4\Pi_3(\bar{\eta})$$

$$J_3' = C_1(1+4\bar{\eta}^2+\frac{4}{3}\bar{\eta}^4) + C_2\left[\frac{1}{32}(1+4\bar{\eta}^2+\frac{4}{3}\bar{\eta}^4)(1-\mathrm{Erf}\,\bar{\eta}) - \frac{1}{24\sqrt{\pi}}(\frac{5}{2}\bar{\eta}+\bar{\eta}^3)e^{-\bar{\eta}^2}\right] - \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\,\bar{\eta} + \frac{1}{2}$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -16.$$

Zbir funkcija (5.36) i (5.38) odredjuje brzinu dopunskog graničnog sloja. Kako je, prema Blaziusu [12] brzina prethodnog graničnog sloja definisana izrazom

$$u_s = (T+t_1)W(x)f_1'(\eta)$$

rezultujuća brzina u graničnom sloju, u ovom slučaju, imaće vrednost:

$$u = (T+t_1)Wf_1'(\eta) + UJ_0'(\bar{\eta}) + t_1[UU'J_1'(\bar{\eta}) +$$

$$+T(UW'+U'W)J_2'(\bar{\eta})] + t_1^2(UW'+U'W)J_3'(\bar{\eta}) \tag{5.41}$$

§4. Jednako-ubrzano kretanje, iza prethodnog kretanja konstantnim ubrzanjem

U ovakvom slučaju funkcije U_s i U_d imaju vrednosti:

$$U_s = tW(x), \quad U_d = t_1W(x)$$

pa jednačina (5.1) za prvo približenje postaje:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = W$$

Njeno rešenje možemo naći u vidu:

$$u_0 = t_1W(x)J_0'(\bar{\eta}) \tag{5.42}$$

gde $J_0'(\bar{\eta})$ ima vrednost (5.19), a druga komponenta V_0 vrednost

Stoga jednačina za drugo približenje brzine u graničnom sloju ima oblik:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=t_1 2TWW'\Pi_1(\bar\eta)+t_1^2 WW'\Pi_2(\bar\eta)$$

gde su: $\Pi_1(\bar\eta)=1-\zeta_0'$, $\Pi_2(\bar\eta)=3-2\zeta_0'-\zeta_0'^2+\zeta_0\zeta_0''$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_1=t_1^2 2TWW'\zeta_1'(\bar\eta)+t_1^3 WW'\zeta_2'(\bar\eta) \tag{5.43}$$

nepoznate funkcije $\zeta_1'(\bar\eta)$ i $\zeta_2'(\bar\eta)$ zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{aligned}&\zeta_1'''+2\bar\eta\zeta_1''-8\zeta_1'=-4\Pi_1(\bar\eta)\\&\zeta_2'''+2\bar\eta\zeta_2''-12\zeta_2'=-4\Pi_2(\bar\eta)\end{aligned} \tag{5.44}$$

i graničnih uslova:

$$\begin{aligned}&\zeta_1(0)=\zeta_1'(0)=\zeta_1'(\infty)=0\\&\zeta_2(0)=\zeta_2'(0)=\zeta_2'(\infty)=0\end{aligned} \tag{5.45}$$

Rešenje prve jednačine sistema (5.44):

$$\zeta_1'''+2\bar\eta\zeta_1''-8\zeta_1'=(4+8\bar\eta^2)\operatorname{Erf}\bar\eta+\frac{8}{\sqrt\pi}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}-8\bar\eta^2-4$$

koje ispunjava odgovarajući uslov prema (5.45) je:

$$\zeta_1'=C_1\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)+C_2\left[\frac{1}{32}\left(1+4\bar\eta^2+\frac{4}{3}\bar\eta^4\right)(1-\operatorname{Erf}\bar\eta)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{24\sqrt\pi}\left(\frac{5}{2}\bar\eta+\bar\eta^3\right)e^{-\bar\eta^2}\right]-(1+2\bar\eta^2)\operatorname{Erf}\bar\eta-\frac{2}{\sqrt\pi}\bar\eta e^{-\bar\eta^2}+2\bar\eta^2+1$$

$$C_1=0,\quad C_2=-32$$

Rešenje druge jednačine sistema (5.44) je:

$$\zeta_2'(\bar\eta)=C_1\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right)+C_2\left[\frac{1}{384}\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right)(1-\operatorname{Erf}\bar\eta)-\frac{1}{720\sqrt\pi}\left(\bar\eta^5+7\bar\eta^3+\frac{33}{4}\bar\eta\right)e^{-\bar\eta^2}\right]+$$
$$+\left[K_1\left(1+6\bar\eta^2+4\bar\eta^4+\frac{8}{15}\bar\eta^6\right)-\frac{4}{3}\bar\eta^4-2\bar\eta^2-\frac{2}{3}\right]\operatorname{Erf}^2\bar\eta+$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{44}{5\sqrt\pi}K_1-\frac{7}{3\sqrt\pi}\right)\bar\eta+\left(\frac{112}{15\sqrt\pi}K_1-\frac{8}{3\sqrt\pi}\right)\bar\eta^3+\frac{16}{15\sqrt\pi}K_1\bar\eta^5\right]e^{-\bar\eta^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{8}{3}\bar\eta^4+2\bar\eta^2-\frac{16}{15\sqrt\pi}\bar\eta-\frac{1}{3}\right\}\operatorname{Erf}\bar\eta+\frac{1}{9\pi}\left(2\bar\eta^4+\bar\eta^2+8\right)e^{-2\bar\eta^2}+$$
$$+\left(\frac{8}{3\sqrt\pi}\bar\eta^3+\frac{1}{3\sqrt\pi}\bar\eta-\frac{16}{15\pi}\right)e^{-\bar\eta^2}-\frac{4}{3}\bar\eta^4+\frac{16}{15\sqrt\pi}\bar\eta+1$$

$$C_1=-K_1=-\frac{5}{12},\quad C_2=\frac{1024}{15\pi}-224$$

Prema tome, ovako odredjenim univerzalnim funkcijama, brzina u graničnom sloju postaje potpuno definisana:

$$u=(T+t_1)Wf_1'(\bar\eta)+t_1W\zeta_0'(\bar\eta)+t_1^2 2TWW'\zeta_1'(\bar\eta)+t_1^3WW'\zeta_2'(\bar\eta) \tag{5.46}$$

5.5. Stepeno-ubrzano kretanje, iza trzaja

U slučaju da se cilindrično telo prethodno kretalo trzajem $[U_s = U(x)]$, a zatim mu saopšteno dopunsko kretanje po zakonu $U_d = At_1^{\alpha} W(x)$, iz jednačine (5.1) za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja, dobija se:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A\alpha t_1^{\alpha-1} W \tag{5.47}$$

sa graničnim uslovima:

$$u_0 = 0, \ y = 0; \ u_0 = U_d, \ y = \infty.$$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku:

$$u_0 = At_1^{\alpha} W(x) \Phi_0'(\bar{\eta}) \tag{5.48}$$

za odredjivanje funkcije $\Phi_0'(\bar{\eta})$, smenjujući izraza (5.48) u (5.47), dobiće se diferencijalna jednačina:

$$\Phi_0''' + 2\bar{\eta} \Phi_0'' - 4\alpha \Phi_0' = -4\alpha \tag{5.49}$$

sa uslovima:

$$\Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = 0, \quad \Phi_0'(\infty) = 1. \tag{5.50}$$

Rešenje jednačina (5.49) koje ispunjava uslove (5.50) je:

$$\Phi_0'(\bar{\eta}) = 1 - 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha}(\bar{\eta}) \tag{5.51}$$

gde je

$$g_{\alpha}(\bar{\eta}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+1)} \int_{\eta}^{\infty} (\tau - \eta)^{2\alpha} e^{-\tau^2} d\tau \tag{5.52}$$

Kada se iz jednačine kontinuiteta $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$ odredi druga projekcija brzine:

$$v_0 = -At_1^{\alpha} W' 2\sqrt{\nu t_1}\, \Phi_0(\bar{\eta})$$

može se obrazovati jednačina za drugo približenje brzine u graničnom sloju:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = At_1^{\alpha}(UW' + U'W)(1 - \Phi_0') + A^2 t_1^{2\alpha} WW'(1 - \Phi_0'^2 + \Phi_0 \Phi_0'') \tag{5.53}$$

koju treba rešiti pri graničnim uslovima

$$u_1 = 0, \ y = 0; \ u_1 = 0, \ y = \infty.$$

Početni uslov će biti ispunjen ako rešenje jednačine (5.53) potražimo u vidu:

$$u_1 = At_1^{\alpha+1}(UW' + U'W)\Phi_1'(\bar{\eta}) + A^2 t_1^{2\alpha+1} WW' \Phi_2'(\bar{\eta}) \tag{5.54}$$

Tada iz jednačine (5.53) nastaju obične diferencijalne jednačina

$$\begin{aligned} &\Phi_1''' + 2\bar{\eta}\,\Phi_1'' - 4(\alpha+1)\Phi_1' = 4(\Phi_0' - 1) \\ &\Phi_2''' + 2\bar{\eta}\,\Phi_2'' - 4(2\alpha+1)\Phi_2' = 4(\Phi_0'^2 - \Phi_0\Phi_0'' - 1) \end{aligned} \tag{5.55}$$

koje treba rešiti pri uslovima

$$\begin{aligned} &\Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = \Phi_1'(\infty) = 0 \\ &\Phi_2(0) = \Phi_2'(0) = \Phi_2'(\infty) = 0 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Rešenja jednačina (5.55), koja zadovoljavaju uslove (5.56), glase: $\Phi_1'(\bar{\eta}) = -2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)\,g_{\alpha+1}(\bar{\eta}) + 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,g_\alpha(\bar{\eta})$

$$\Phi_2'(\bar{\eta}) = 2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\frac{1-\alpha}{1+\alpha}g_\alpha(\bar{\eta}) - 2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{5}{2})}g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\bar{\eta}) +$$

$$+ 2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+2}g_{\alpha-1}(\bar{\eta}) + 2^{4\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)\left[g^2_{\alpha+\frac{1}{2}}(\bar{\eta}) - g_\alpha(\bar{\eta})\,g_{\alpha+1}(\bar{\eta})\right] -$$

$$- 2^{4\alpha+2}\Gamma(2\alpha+2)\left[\frac{3-4\alpha}{2+2\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha+2} - \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{5}{2})} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\frac{3}{2})}\right]g_{2\alpha+1}(\bar{\eta})$$

Time je brzina u graničnom sloju za vreme trajanja dopunskog stepeno - ubrzanog kretanja, odredjena:

$$u = Uf_1'(\eta) + At_1^{\alpha}W\Phi_0'(\bar{\eta}) + At_1^{\alpha+1}(UW' + U'W)\Phi_1'(\bar{\eta}) + A^2 t_1^{2\alpha+1}WW'\Phi_2'(\bar{\eta}) \tag{5,57}$$

26. Stepeno-ubrzano kretanje, iza prethodnog kretanja stalnim ubrzanjem

Ako se cilindrično telo kretalo stalnim ubrzanjem $[U_s = tW]$, a potom mu saopšteno dopunsko kretanje po zakonu $U_d = At_1^{\alpha}\ V(x)$, iz jednačine (5.1) za prvo približenje brzine dopunskog graničnog sloja, dobiće se:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_1} - \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A\alpha t_1^{\alpha-1}V(x) \tag{5.58}$$

sa graničnim uslovima: $u_0 = 0,\ y = 0;\ u_0 = U_d,\ y = \infty.$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u formi:

$$u_0 = At_1^{\alpha}V(x)\,\Phi_0'(\bar{\eta}) \tag{5.59}$$

za odredjivanje funkcije $\Phi_0'(\bar{\eta})$, očigledno, dobiće se jednačina istovetna sa jednačinom (5.49), pa njeno rešenje ima vrednost (5.51)

Jednačina za drugo približenje brzine dopunskog graničnog sloja, tada postaje:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=ATt_1^{\alpha}(W'V+WV')(1-\Phi_0')+At_1^{\alpha+1}(W'V+$$
$$+WV')(1-\Phi_0')+A^2t_1^{2\alpha}VV'(1-\Phi_0'^2+\Phi_0\Phi_0'') \tag{5.60}$$

Granični uslovi su: $u_1=0,\ y=0;\ u_1=0,\ y=\infty.$

Zbog početnog uslova njeno rešenje treba tražiti u obliku:

$$u_1=ATt_1^{\alpha+1}(W'V+WV')\Phi_1'(\bar\eta)+At_1^{\alpha+2}(W'V+$$
$$+WV')\Phi_2'(\bar\eta)+A^2t_1^{2\alpha+1}VV'\Phi_3'(\bar\eta) \tag{5.61}$$

Zamenom izraza (5.61) u jednačinu (5.60) dobiće se obične diferencijalne jednačine:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1'''+2\bar\eta\,\Phi_1''-4(\alpha+1)\Phi_1'=-4(1-\Phi_0')\\
&\Phi_2'''+2\bar\eta\,\Phi_2''-4(\alpha+2)\Phi_2'=-4(1-\Phi_0')\\
&\Phi_3'''+2\bar\eta\,\Phi_3''-4(2\alpha+1)\Phi_3'=-4(1-\Phi_0'^2+\Phi_0\Phi_0'')
\end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

koje treba rešiti pri uslovima:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(0)=\Phi_1'(0)=\Phi_1'(\infty)=0\\
&\Phi_2(0)=\Phi_2'(0)=\Phi_2'(\infty)=0\\
&\Phi_3(0)=\Phi_3'(0)=\Phi_3'(\infty)=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

Rešenja jednačina (5.62) koja zadovoljavaju uslove (5.63) su:

$$\Phi_1'(\bar\eta)=2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\cdot g_\alpha(\bar\eta)-2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)\cdot g_{\alpha+1}(\bar\eta)$$

$$\Phi_2'(\bar\eta)=2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)\cdot g_\alpha(\bar\eta)-2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)\frac{g_\alpha(0)}{g_{\alpha+2}(0)}\cdot g_{\alpha+2}(\bar\eta)$$

$$\Phi_3'(\bar\eta)=2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot g_\alpha(\bar\eta)-2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+5/2)}\cdot g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\bar\eta)+$$
$$+2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha+2}g_{\alpha-1}(\bar\eta)+2^{4\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)\left[g^2_{\alpha+\frac{1}{2}}(\bar\eta)-g_\alpha(\bar\eta)\cdot g_{\alpha+1}(\bar\eta)\right]-$$
$$-2^{4\alpha+2}\Gamma(2\alpha+2)\left[\frac{3-4\alpha}{2+2\alpha}+\frac{2\alpha}{\alpha+2}-\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{5}{2})}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\frac{3}{2})}\right]g_{2\alpha+1}(\bar\eta)$$

Sabirajući brzinu prethodnog graničnog sloja sa izrazima (5.59) i (5.61), dobiće se ukupna brzina u graničnom sloju:

$$u=(T+t_1)Wf_1'(\eta)+At_1^{\alpha}V(x)\Phi_0'(\bar\eta)+ATt_1^{\alpha+1}(W'V+$$
$$+WV')\Phi_1'(\bar\eta)+At_1^{\alpha+2}(W'V+WV')\Phi_2'(\bar\eta)+A^2t_1^{2\alpha+1}VV'\Phi_3'(\bar\eta) \tag{5.64}$$

ZAKLJUČAK. Granični sloj na telu se teorijski prostire do beskonačne udaljenosti od tela. Praktično, medjutim, zna se da je debljina graničnog sloja ograničena i da iznosi svega nekoliko milimetara, o čemu je u radu bilo reči i konkretnih podataka. Pa ipak, rešenje asimptotskog graničnog sloja (koji se prostire do beskonačnosti) ima značaja, jer obuhvata ceo strujni prostor. Drugo aproksimativno rešenje učinilo je da se i dopunski granični sloj, poprečno na konturu cilindričnog tela, ne ograničava. Slaganje vrednosti brzina u graničnom sloju proračunatih ovim i ranijim putem u svim ispitivanim primerima u tački $y = 0{,}4$ cm, sa odstupanjem koje za sve primere ne premašuje 0,25%, govori da je spajanje i medjusobno nastavljanje ovih rešenja zadovoljavajuće.

Ovo opravdava formiranje drugog aproksimativnog rešenja, koje "pokriva" široki prostor oko tela, praktično od $y = 0{,}4$ cm. do $y = \infty$, sa dovoljnom tačnošću, kako su to pomenuti proračuni pokazali.

A nije nerealno smatrati da drugo aproksimativno rešenje predstavlja, u prvom približenju stvarnosti, rešenje nestacionarnog dopunskog graničnog sloja iza predhodnog stacionarnog kretanja.

L I T E R A T U R A

[1] Blasijus H., Zeitschr. f.Math. u. Phys. 56 (1908), 1-37.

[2] Goldstein S., Rosenhead L., Proc.of. the Cambr. Phil. Soc. 32 (1936), 392 - 401.

[3] Görtler H., Ing.- Archiv 14 (1944), 286 - 305.

[4] Watson E., Proceed. Roy. Soc., ser. A, 231 (1955), 1184.

[5] Goldstein S., Sovremenoje sostojanije gidroaerodinamiki vjazkoj židkosti, t.1, prev. sa engl.; I.I.,1948,foto 7-8.

[6] Struminskij V.V., Sbornik tjeoretičeskih rabot po aerodinamike CAGI, Obrongiz, 1957, str. 247 - 250.

[7] Rozin L.A., P.M.M., t. XXII, v.3, 1958.

[8] Targ S.M., Osnovnie zadači teoriji laminarnih tječenij, Gostehizdat, 1951, str. 210 - 224.

[9] Dobrišman E.M., P.M.M., t. XX v. 3, 1956.

[10] Struminskij V.V., Cit. zbornik, str. 232 - 247

[11] Rozin L.A., P.M.M., t. XXI, v.5, 1957.

[12] Lojcianskij L.G., Laminarnoj pograničnij sloj, Moskva 1962.

[13] Kočin N.E., Kibelj I.A., Roze N.V., Tjeoritičeskaja gidromehanika, Moskva 1963.

[14] Šlihting G., Teorija pograničnogo sloja, prevod sa nemačkog, Moskva 1956.

[15] Hütte I, 1 deo, str. 3, Beograd 1954.