UNUTRAŠNJA NAPREZANJA KONTINUUMA SA NEKOMPATIBILNIM

DEFORMACIJAMA KOJE SU ZADANE SAMO ROTOROM DISTORZIJA

Beograd, 24. IV 1964.

Luka Vujošević, asistent
Mašinskog fakulteta

Poslije višegodišnje saradnje sa dr. Ratkom Stojanovićem, docentom za mehaniku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu, i saradnje u grupi za reologiju, čiji je on rukovodilac, pri odjeljenju za mehaniku Matematičkog instituta, uslijedilo je i ovaj rad.

Dužnost mi je da istaknem da me je u ovu naučnu problematiku uveo dr. RATKO STOJANOVIĆ i da me je pri izradi ovoga rada krajnje nesebično i ljudski vodio.

U v o d

Uloga kompatibilnih deformacija u mehanici kontinuuma je postala jasna prije svega u termo-elastičnosti. Pri izvodjenju DUHAMEL-ovog zakona ([1] i [2]) linearne teorije termo-elastičnosti uvidjelo se da ukupna deformacija u opštem slučaju ima dvije komponente: termičku i elastičnu, i da je rezultujuća deformacija kompatibilna dok su ove dvije inkompatibilne deformacije.

S druge strane, u poslednje vrijeme postalo je vrlo aktuelno proučavanje fizike čvrstog stanja pomoću teorije elastičnosti. Naime, u kristalnoj strukturi materijala praktično uvijek postoje defekti koji na odredjen način dovode tijelo u napregnuto stanje koje se razlikuje od odgovarajućeg stanja izazvanog spoljašnjim uzrocima. Tako je u teoriji neprekidno rasporedjenih dislokacija (npr. [3]) uočeno da su one izvori inkompatibilnosti u materijalu i kao takve izvori unutrašnjih napona. Osim toga postoje indikacije da se inkompatibilne deformacije javljaju kao izvori unutrašnjih naprezanja u nizu drugih slučajeva (npr. neki elektro-mehanički efekti i tsl.)

Sa stanovišta klasične teorije elastičnosti nije pravljena nikakva razlika izmedju kompatibilnih i inkompatibilnih defformacija kao izvor naprezanja u materijalu, već su korišćene uobičajene veze izmedju napona i deformacije (Hukov zakon) i iz njih za poznate deformacije odredjivalo naprezanje. Ovo važi kako za linearnu tako i za nelinearnu teoriju elastičnosti. Medjutim, u materijalima gdje postoje izvori inkompatibilnosti poremećeni su uslovi kompatibilnosti tako da se problemu ne može prići preko polja pomjeranja, tj. uslovi kompatibilnosti nijesu zadovoljeni u neposrednoj okolini izvora inkompatibilnosti, dok su zadovoljeni dalje od izvora. Tako se sa isključivanjem tačkastih (pojedinačnih, izolovanih) izvora mogu primijeniti uslovi kompatibilnosti [4] ,ali u slučaju neprekidno rasporedjenih izvora inkompatibilnosti nužno je na neki poseban način tretirati problem odredjivanja unutrašnjih napresanja, jer se usled činjenice da uslovi kompatibilnosti nijesu zadovoljeni javlja matematička neodredjenost problema: broj jednačina je manji od broja nepoznatih veličina.

Inkompatibilne deformacije nijesu do sada nigdje sistematski tretirane i jedini (koliko je autoru poznato) radovi u kojima se inkompatibilne deformacije uopšte, posebno tretiraju su vezani za dislokacije (npr. KRÖNER i SEEGER [5], KRÖNER [6], KONDO [7], BILBY, BULLOUGH i SMITH [8], BILBY i SMITH [9] i drugi).

Osnovni cilj ovoga rada je da se sistematski prouče inkompatibilne deformacije u elastičnoj sredini. Pri tome smo se oslonili na model koji je korišćen sa jedne strane u radovima ([5], [6] i [10]) koji se odnose na teoriju dislokacija, a sa druge strane na izračunavanje konačnih termičkih deformacija [11]. Ovaj model je zasnovan na činjenici da su inkompatibilne deformacije odredjene tzv. distorzijama, koje preuzimaju ulogu gradijenata kompatibilnih deformacija. Naime, dok kompatibilne deformacije preslikavaju jednu oblast euklidskog prostora u neku drugu oblast, u slučaju inkompatibilnih deformacija to nije moguće, već distorzije uspostavljaju lokalnu korespodenciju izmedju euklidskog i nekog neeuklidskog linearno povezanog prostora.

U prvom poglavlju je proučena kinematika inkompatibilnih deformacija i ukazano na odstupanja u poredjenju sa odgovarajućim izrazima za kompatibilne deformacije: objašnjen je model, uvedene su mjere inkompatibilnih deformacija (po modelu) i dati izrazi za brzinu deformacije kao linearne funkcije materijalnih izvoda distorzija.

Drugo poglavjle je posvećeno pitanju veze izmedju napona i inkompatibilne deformacije. KRONER [12] je ukazao da su za dislokacije vezani nesimetrični tenzor napona i naponski spregovi. Ovdje smo pošli od ptedpostavke da naponski spregovi (pored napona) postoje uvijek u slučaju inkompatibilnih deformacija. Polazeći od u mehanici kotinuuma uobičajenih energetskih razmatranja izveli smo veze izmedju napona, naponskih spregova i deformacije i pokazali da te veze nijesu identične sa vezama u materijalu sa kompatibilnom deformacijom, kakve je, za materijale sa naponskim spregovima, izveo R. TOUPIN [13]. Pokazano je dalje da su naponski spregovi vezani za promjenu strukture prostora, što je u slučaju inkompatibilnih deformacija nesumnjivo činjenica. Prema tome polazna predpostavka da naponski spregovi uopšte u inkompatibilno deformisanoj sredini prate deformaciju pokazala se opravdanom.

Izvodene konstitutivne jednačine su linearizovane i struktura linearnih veza je eksplicitno proučena za izotropnu sredinu. Pokazano je da u izotropnoj sredini linearne veze sadrže još tri koeficijenta u izrazu za naponski spreg pored dvije elastične konstante u izrazu za simetričan dio napona. Poznato je da su u svojoj linearizaciji TOUPIN-ovih konstitutivnih jednačina MINDLIN i TIERSTEN [14] dobili svega dvije konstante u izrazu za naponski spreg. Pokazano je dalje da se naš izraz svodi na njihov za slučaj kompatibilnosti, pri čemu je jedan njihov koeficijent (konstanta) zbir dva od naša tri koeficijenta.

Problem odredjivanja naponskog stanja obradjen je u trećem poglavlju. Ovdje je ukazano na objektivne teškoće na koje se nailazi usled nedovoljnog broja raspoloživih jednačina, kojih je manje od broja nepoznatih veličina. Medjutim, prisustvo naponskih spregova u inkompatibilno deformisanoj sredini ukazalo nam je na mogućinost nalaženja rešenja u izvjesnim slučajevima pomoću jedne dopunske predpostavke o strukturi linearno povezanog prostora,koji je ovdje prostor inkompatibilno deformisane konfiguracije. Osnovna ideja te predpostavke je u tome da se inkompatibilnim deformacijama ne mijenja metrika:metrika ostaje euklidska i u konformnoj je korespodenciji sa metrikom napregnute euklidske konfiguracije tijela,ali se pojavljuje torzija prostora.Uvedena predpostavka ne važi u opštem slučaju,ali je pokazano pod kojim je uslovom ona dopustiva.U slučaju kada su dobiveni uslovi ispunjeni moguće je egzaktno rešenje problema,jer je tada u potpunosti moguće odrediti elastične distorzije,apreko njih(prema izvedenim jednačinama u drugom poglavlju) i same napone.

G L A V A I

1. KINEMATIKA INKOMPATIBILNIH DEFORMACIJA

1.1. Priroda inkompatibilnih deformacija

Niz pojava u mehanici kontinuuma je takve prirode da se naponsko stanje može da konstatuje i ako na eksplicitan način nijesmo u mogućnosti da konstatujemo deformaciju koja je dovela do takvog naponskog stanja. Uzroci takvog naprezanja u materijalu su poremećaji u strukturi materijala, ili su neke druge nemehaničke prirode. U takve uzroke spadaju u prvom redi dislokacije i nehomogena temperaturska polja unutar nekog tijela.

Napregnuto stanje u materijalu može da se konstatuje samo naručavanjem neprekidnosti, pri čemu se manifestuje, prije svega, elastična komponenta naprezanja, koja izaziva, pri narušenom kontinuumu, neposredno i spontano kretanje pojedinih djelova tijela u kome se akumulirana elastična energija pretvara u rad dovodeći tijelo u neku novu ravnotežnu konfiguraciju.

Potpuno oslobadjanje nekog materijala takvih unutrašnjih naprezanja moglo bi se izvesti jedino sječenjem tijela na beskonačno male zapreminske elemente, koji bi se pod dejstvom uzroka uočenog naponskog stanja mogli slobodno i potpuno nezavisno jedan od drugog deformisati.

Ovakav zamišljeni eksperiment u potpunosti prevodi tijelo u neko diskontnualno stanje. Kako svaki zapreminski element može za sebe da se deformiše, izmedju prvobitno posmatrane napregnute konfiguracije u kojoj materijal obrazuje kontinuum i konfiguracije slobodnih zapreminskih elemenata, nije moguće uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje izraženo bilo poljem kakvog vektora pomjeranja, bilo nekim analitičnim punktualnim transformacijama.

Neka je napregnuta konfiguracija materijala opisana u odnosu na neki euklidski sistem koordinata (u opštem slučaju krivolinijskih) x^i, $(i = 1, 2, 3)$, sa osnovnim metričkim tenzorom b_{ij}, i neka je neka nenapregnuta konfiguracija istog materijala opisana na neki sistem koordinata X^K, sa osnovnim metričkim tenzorom a_{KL}. U slučaju da postoji analitička transformacija koja bi preslikavala jednu kokfiguraciju u drugu sa

(1) $$x^k = x^k(X), \qquad X^K = X^K(x)$$

Košijev tenzor deformacije bi bio

(2) $$c_{ij} = g_{KL} X^K_{,i} X^L_{,j},$$

a odgovarajući tenzor relativne deformacije bio bi odredjen izrazom

(3) $$2\varepsilon_{ij} = b_{ij} - c_{ij}.$$

Medjutim, usled nepostojanja deformacije (1) tenzor c_{ij} nije moguće defonisati izrazom (2), što znači da jednačine (2), shvaćene kao parcijalne jednačine za odredjivanje transformacije (1), kada su zadane koordinate tenzora deformacije c_{ij}, ne dopuštaju rešenja.

Uslovi integrabilnosti jednačine (2) se svode na zahtjev da Riman-Kristofel-ov tenzor krivine nekog prostora sa metrikom

(4) $$c_{ij} = b_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$$

bude jednak nuli, t.j.

(5) $$c_{ijk} = 2[\partial_i c^l_{jk} + c^l_{is} c^s_{jk}]_{[ij]} = 0,$$

gdje je c^l_{jk} Kristofelov simbol druge vrste za tenzor c_{ij}.

(6) $$c^l_{jk} = c^{lt} c_{jkt}$$

i

$$c_{jkt} = \frac{1}{2}(\partial_j c_{kt} + \partial_k c_{jt} - \partial_t c_{jk})$$

odredjuje Kristofelov simbol prve vrste.

Medjutim, zbog nepostojanja transformacije metrika c_{ij} nije euklidska i uslovi (5) ne mogu biti zadovoljeni.

Prema tome,sa geometrijske tačke gledišta,pitanje deformacija koje bi odgovarale unutrašnjim naprezanjima u nekom tijelu jeste, assuštini,pitanje veza izmedju euklidskog i nekog neeuklidskog prostora u kome bi tijelo bilo oslobodjeno unutrašnjih napresanja. Takav neeuklidski prostor je prostor u kome bi tijelo,i ako je njegov kontinuitet prilikom oslobadjanja od napresanja sa euklidske tačke gledišta narušen,sačuvalo neprekidnost a oslobodjeno je napresanja.

Aako izmedju euklidske i neeuklidske konfiguracije tijela postoje izvjesne veze predpostavićemo da svakom elementarnom rastojanju izmedju dvije tačke u euklidskoj konfiguraciji,odredjenom diferencijalom koordinata dx^k,odgovara u neeuklidskoj konfiguraciji rastojanje odredjeno nekom razlikom koordinata dX^K,a veza izmedju tih rastojanja odredjena je izrazima

(7) $$dx^k = \theta_K^k dX^K, \quad dX^K = \theta_k^K dx^k .$$

Za koeficijente transformacije θ_K^k i θ_k^K predpostavljamo da nijesu gradijenti nikakve konačne deformacije,te zbog toga predstavljaju skup od 9 koordinata nekog dvostrukog tenzorskog polja.   je kontravarijantni vektor u odnosu na neeuklidski prostor, a kovarjantni u odnosu na euklidski,dok je θ_K^k recipročna veličina. Izmedju ovih koeficijenata postoji veza

(8) $$\theta_K^k \cdot \theta_p^K = \delta_p^k , \quad \theta_R^k \theta_k^K = \delta_R^K$$

a predpostavlja se

$$Det(\theta_K^k) \neq 0 .$$

Transformacije (7) predstavljaju dakle neintegrabilnu vezu izmedju infinitezimalnih pomjeranja u dva različita ptostora. Zbog toga su koeficijenti transformacije θ_K^k i θ_k^K distorzije koje karakterišu neintegrabilnost zavisnosti (7).

Poznato je da se u slučaju naponskog stanja uslovljenog spoljašnjim opterećenjima koeficijenti transformacije gradijenti deformacije, a tako nastale deformacije zadovoljavaju uslove kompatibilnosti, tj. uslove integrabilnosti jednačina (2). Ti linearni uslovi su

$$\epsilon^{jmn}\,\epsilon^{ikl}\,\partial_m\partial_k\,\varepsilon_{nl} = 0\,, \tag{9}$$

gdje je ϵ^{pqr} Ričijev potpuno antisimetrični tenzor koji je jednak +1 , -1 , ili 0 , prema tome dali indeksi predstavljaju, parnu, neparnu ili nikakvu permutaciju brojeva 1 , 2 , 3.

Medjutim, ako su u pitanju unutrašnja naprezanja, deformacije ne zadovoljavaju jednačine (9), već je

$$\epsilon^{jnm}\,\epsilon^{ikl}\,\partial_n\partial_k\,\varepsilon_{ml} = \eta^{ij} \neq 0\,. \tag{10}$$

Izraz sa lijeve strane može se označiti kao operator Ink(inkompatibilnost) primijenjen na tenzor*

$$\eta = \mathrm{Ink}\,\varepsilon = \nabla\times\varepsilon\times\nabla\,,$$

pa se uslovi kompatibilnosti izražavaju jednačinom

$$\mathrm{Ink}\,\varepsilon = 0\,.$$

Funkcija η^{ij} naziva se, po Kröner-u [6], "tenzorom inkompatibilnosti". Inkompatibilnost je ustvari, izvorna funkcija polja deformacija, koja je jednaka nuli u "dobrom" materijalu i može opisivati koje bilo polje unutrašnjih naprezanja i deformacije, a posebno stanje izazvano egzistencijom dislokacija u materijalu.

U praksi se stanje unutrašnjih naprezanja može predstaviti sledećim eksperimentom:

Iz nekog napregnutog materijala isječemo jedan elementaran dio i posmatramo ponašanje ovog dijela i ostalog materijala. Oblik i dimenzije isječenog elementa će se promijeniti, tj. on će sam po sebi pretrpjeti neku deformaciju i osloboditi se naprezanja. Ponovimo li ovu operaciju u svakoj tački tijela x^i, dobićemo polje

* od tenzora drugoga reda izostavljeni su indeksi i usvojene Lagali-jeve oznake

deformacije ε_{ij} koje karakteriše stanje unutrašnjih naprezanja. Ova deformacija je jednaka po veličini a suprotna po znaku sa deformacijom koja je za unutrašnja naprezanja vezana Hukovim zakonom) Za razliku od polja deformacija uslovljenog spoljašnjim silama ove deformacije ne zadovoljavaju uslove (9), inkompatibilne su.

Ovaj eksperiment je jasniji ako se razmatranje sprovede obrnutim redosledom, isječimo tijelo, koje je nenapregnuto, na elementarne djelove i deformišemo svaki od njih za deformaciju ε^{*}_{ij} tako da polje ε^{*} (neprekidne) ima prve i druge izvode. Za takvo polje nijesu zadovoljeni uslovi (9), ali jesu uslovi (10), tj.

(11) $$\eta(\varepsilon^{*}) = J_{nk}\,\varepsilon^{*} \neq 0 .$$

Djelujući sada na ove elemente takvim silama da oni dobiju prvobitni oblik i dimenzije i da se ponovo spoje u jednu cjelinu, i udaljavajući ove sile poslije toga, dolazi se do dopunske deformacije koja zadovoljava uslove (9), tj.

(12) $$\eta(\varepsilon') = J_{nk}\,\varepsilon' = 0$$

Sada, poslije ovog procesa, u tijelu vlada naponsko stanje koje je Hukovim zakonom vezano za deformaciju

(13) $$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{*}_{ij} + \varepsilon'_{ij} \, ,$$

koje zadovoljava relaciju

(14) $$J_{nk}\,\varepsilon = J_{nk}(\varepsilon^{*} + \varepsilon').$$

Ova je zavisnost ekvivalentna sa uslovom (10), jer je, s obzirom na (12), Ink $\varepsilon^{*} \neq 0$. Iz jednačine (14), s obzirom na (12), slijedi da, ako se unutrašnjoj deformaciji doda deformacija izazvana spoljašnjim silama, koja je zbog toga odredjena izvodima pomjeranja, inkompatibilnost η^{ij} se neće promijeniti. Zbog toga tenzor inkompatibilnosti η^{ij} dijeli deformaciju na unutrašnju i spoljašnju, tj. η^{ij} je izvorna funkcija za unutrašnja naprezanja. To znači, da kada je poznata funkcija η^{ij} moguće je, u principu, naći deformaciju ε_{ij} kao rešenje jednačine (13), odnosno (14), u obliku

$$\varepsilon_{ij}(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\eta_{ij}(r') - \eta_{kk}(r')\delta_{ij}}{|r-r'|}\, dV, \tag{15}$$

pod uslovom da je η_{ij}, ili u krajnjem slučaju, normalna komponenta $\eta_{ij}n^j$ jednaka nuli na površini tijela u beskonačnosti. Rešenju (15) dodaje se rešenje koje daju uslovi kompatibilnosti (9), pa se iz zbirne deformacije $\varepsilon^*_{ij} + \varepsilon'_{ij}$, preko Hukovog zakona, odredjuje naponsko stanje. Ovaj postupak odredjivanja unutrašnjeg naponskog stanja, pri poznatoj inkompatibilnosti η^{ij}, je mnogo prostiji ako se sprovodi metodom funkcije napona, pri čemu je funkcija napona u istoj zavisnosti sa tenzorom napona kao deformacija sa tenzorom inkompatibilnosti, na čemu se ovdje nećemo zadržavati s obzirom da nam je bio cilj da opravdamo, pri ovom objašnjenju, samo naziv " izvorna funkcija " za funkciju η^{ij}.

Kakav je fizički smisao inkompatibilnosti η^{ij} ?

Deformacije uslovljene spoljašnjim silama odredjene su poljem pomjeranja u_i, za linearan slučaj, relacijom

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{16}$$

Obrtanje u tački medjutim, definisano je takodje preko polja pomjeranja izrazom

$$w^i = -\frac{1}{2}\in^{ijk} u_{jk} , \tag{17}$$

što se može predstaviti antisimetričnim tenzorom

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right), \tag{18}$$

pri čemu su w_k i w_{ij} vezani relacijom

$$w_{ij} = -\in_{ijk} w^k \tag{19}$$

ili, riješeno po w^k, se

$$w^k = -\frac{1}{2}\in^{ijk} w_{ij} \tag{20}$$

Izmedju tenzorskih polja w_{ij} i ε_{ij} postoji zavisnost

(21) $$w_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}$$

koja se dobija iz (16) i (18). Ovu zavisnost možemo predstaviti u drugom obliku. Naime, ako diferenciramo jednačinu (20), tj.

$$w^{l}_{,k} = -\frac{1}{2} \in^{ijl} w_{ij,k}$$

i uzmemo u obzir (21), dobijamo

$$w^{l}_{,k} = -\frac{1}{2} \in^{ijl} (\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i})_{[ij]} ,$$

tj.

(22) $$w^{l}_{k} = - \in^{ijl} \varepsilon_{ki,j} .$$

Relacija (22) daje potreban uslov da tenzorska polja w_{ij} i ε_{ij} predstavljaju deformaciju i obrtanje. Medjutim, ovi uslovi nijesu i dovoljni. Da bi postojalo polje pomjeranja mora linearan integral, koji odredjuje razliku obrtanja u dvijema konačno udaljenim tačkama P i Q, tj.

(23) $$w^{l}_{(Q)} - w^{l}_{(P)} = -\int_{P}^{Q} \in^{lij} \varepsilon_{ki,j} \, dx^{k}$$

biti nezavisan od krive koja spaja te dvije tačke, ili što je isto, mora rotor podintegralne funkcije biti jednak nuli, naime $\eta^{ij} = 0$, gdje je

(24) $$\eta^{ij} = \in^{jmn} \in^{ilk} \partial_l \partial_m \varepsilon_{kn} .$$

Ovo su potrebni i dovoljni uslovi za postojanje polja pomjeranja u kontinuumu. Medjutim, ovi uslovi nisu ispunjeni ako polja pomjeranja nijesu jednoznačna, što je slučaj u blizini izvora unutrašnjih naprezanja gdje je stanje okarakterisano inkompatibilnošću η^{ij}. Prema tome, ako posmatramo integral (23) po zatvorenoj krivoj L u oblasti gdje je $\eta^{ij} = 0$, biće $\Delta w^{l} = 0$. U oblasti gdje je $\eta^{ij} \neq 0$, medjutim, stvari stoje drugačije. Naime, ako iskoristimo Stoksovu teoremu o pretvaranju krivolinijskog integrala u površinski, koja je data izrazom

$$\oint_{L} v^{i} dx_{i} = \oint_{S} \in^{ijk} v_{j,k} \, ds_{i} ,$$

gdje je ds_i orijentisani element površine ograničene krivom L.

primjenjujući je na integral

$$\Delta W^l = \oint_L \epsilon^{ljk}\, \varepsilon_{ij,k}\, dx^i ,$$

imaćemo, s obzirom da je rotor podintegralne funkcije ovog integrala upravo odredjen tenzorom η^{ij}, tj. sa (24),

$$\Delta W^l = -\oint_L \epsilon^{ljk}\, \varepsilon_{ij,k}\, dx^i = \oint_S \eta^{ln}\, dS_n .$$

Posmatrajmo, primjera radi, stanje ravne deformacije kada je samo komponenta η^{33} tenzora inkompatibilnosti različita od nule. U ovom slučaju gornji integral se svodi na

$$\Delta W^3 = \oint_S \eta^{33}\, dS_3 .$$

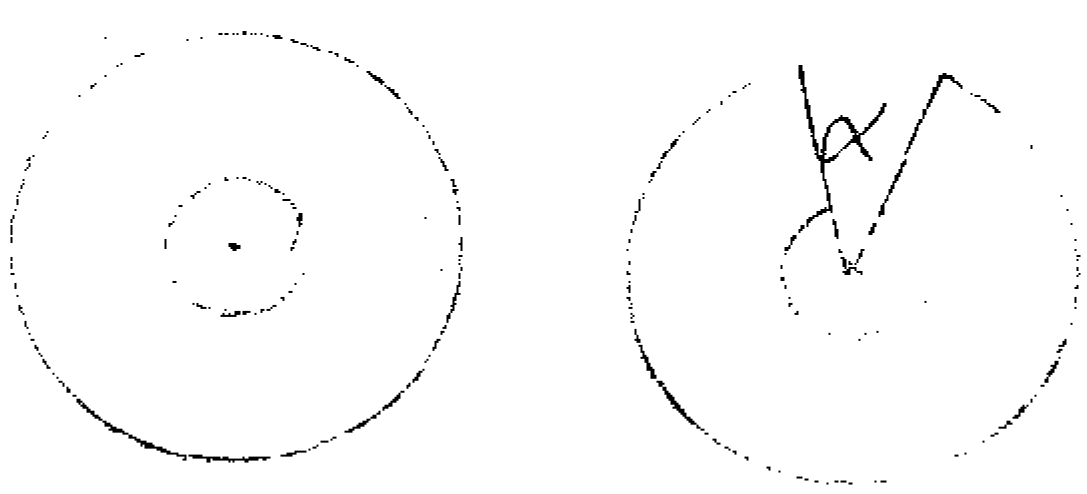
Ako se sad uzme da je $\eta^{33} = 0$ svuda sem u vrlo maloj oblasti u blizini izvora tako da je

$$\eta^{33} = -\alpha\, \delta(x_1)\, \delta(x_2) ,$$

gdje je $\delta(x_1, x_2)$ tzv. Dirakova delta-funkcija, imaćemo

$$\Delta W^3 = -\oint_S \alpha\, \delta(x_1)\, \delta(x_2)\, dS_3 = -\alpha .$$

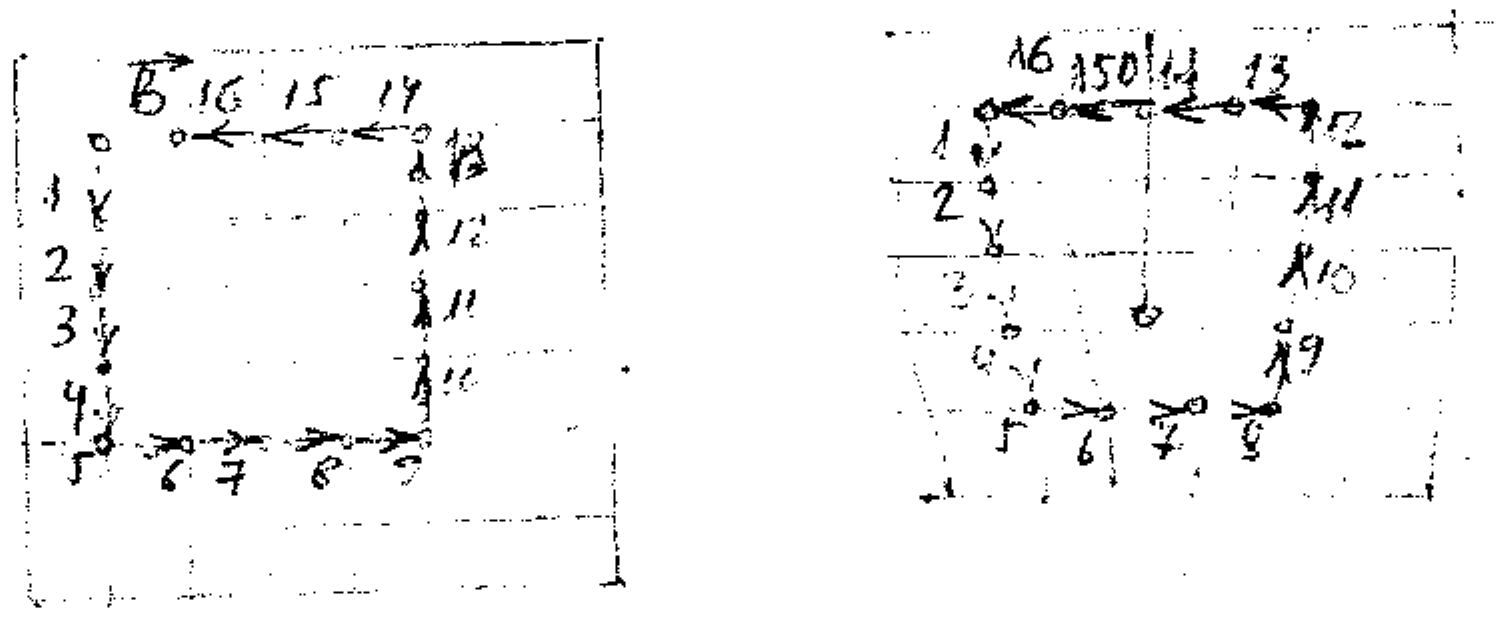
Dobiveni izraz opisuje stanje unutrašnje deformacije, koje nastaje kada se iz materijala (napr. kružnog prstena) izreže klin ugla α pri vrhu (sl.1), pa se spoljašnjom prinudom prsten zatvori. Dakle, ako imamo kružni prsten koji je unutrašnje napregnut, bez obzira na koji način, pa ga rasječemo u njemu će nastupiti oslobadjanje napona i otvoriti će se za neki ugao α kako smo gore dobili.



Sl.1

Ovaj efekat ekvivalentan je sa Burgersovom konturom u kristalu sa dislokacijom. Naime, povučemo konturu u "dobrom" materijalu koja okružava defekt - dislokaciju i posmatramo uporedo idealan kristal i realan sa defektima. Pri svakom pomjeranju za jedno medjuatomsko rastojanje duž konture u realnom kristalu to učinimo i u idealnom koji posmatramo uporedo. Kad u realnom kristalu stignemo u polaznu tačku u idealnom će medjutim ostati još jedan korak, još jedno medjuatomsko rastojanje,što znači da će u idealnom kristalu ostati otvorena kontura (sl.2). Ovo je moguće posmatrati i bez uporednog kristala ako se iz realnog kri stala isječe kontura koja okružava dislokaciju, pa se ona prekine. U ovakvoj prekinutoj niti nastupiće oslobadjanje od napona i ona će odgovarati otvorenoj konturi u idealnom kristalu.

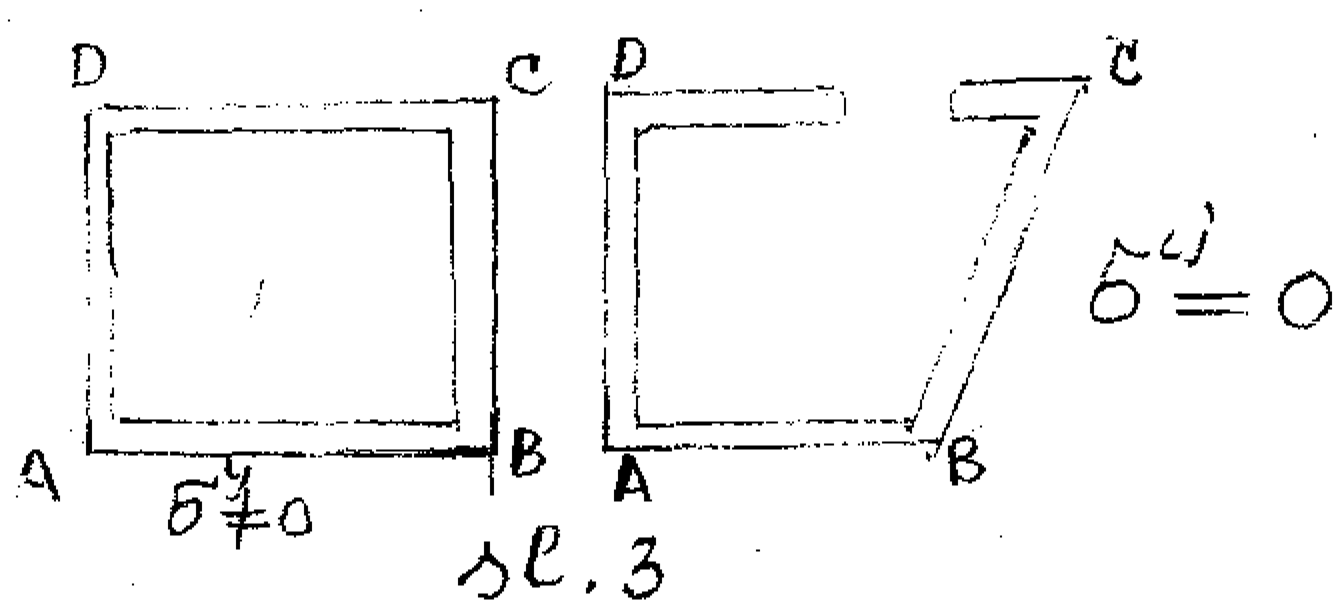
Dakle, zatvorenom napregnutom prstenu odgovara zatvorena kontura u realnom kristalu, koja okružava dislokaciju,a rasječeni nenapregnut prsten otvorenoj konturi u idealnom kristalu.



Sl. 2

Ako se uzme u posmatranje umjesto makakve konture, recimo štap ABCD oblika paralelograma, koji je napregnut, pa se rasječe onda će se poslije oslobadjanja od napona deformisati tako da paralelne strane neće biti jednake u prirodnoj konfiguraciji (sl.3).

S druge strane, poznato je da u prostorima sa torzijom nije mogiće konstruisati elementarni paralelogram. Naime, posmatrajmo u nekoj tački P nekog linearno povezanog prostora L_3, dva vektora d_1x^i i d_2x^i, tako da tačke $Q_1(x+dx)$ i $Q_2(x+dx)$ budu različitei vrlo bliske tački $P(x)$.



sl. 3

Izvršimo paralelno pomjeranje vektora d_1x^i u tačku Q_2, tj.

$$\overline{d_1x^i} = d_1x^i - \Gamma^i_{jk} d_1x^j d_2x^k$$

Paralelnim pomjeranjem vektora d_2x^i u tačku Q_1 dobićemo

$$\overline{d_2x^i} = d_2x^i - \Gamma_{jk} d_2x^j d_1x^k.$$

Ovdje su Γ^i_{jk} koeficijenti linearne povezanosti posmatranog prostora. Krajevi vektora $\overline{d_1x^i}$, odnosno $\overline{d_2x^i}$ odrediće tačke R_1 i R_2 (sl.4) sa koordinatama

$$x^i_{R_1} = x^i d_1x^i + d_2x^i - \Gamma^i_{jk} d_2x^j d_1x^k,$$

odnosno

$$x^i_{R_2} = x^i d_2x^i + d_1x^i - \Gamma^i_{jk} d_1x^j d_2x^k,$$

čija je razlika

$$x^i_{R_2} - x^i_{R_1} = -\Gamma^i_{jk} d_1x^j d_2x^k + \Gamma^i_{jk} d_2x^j d_1x^k,$$

tj.

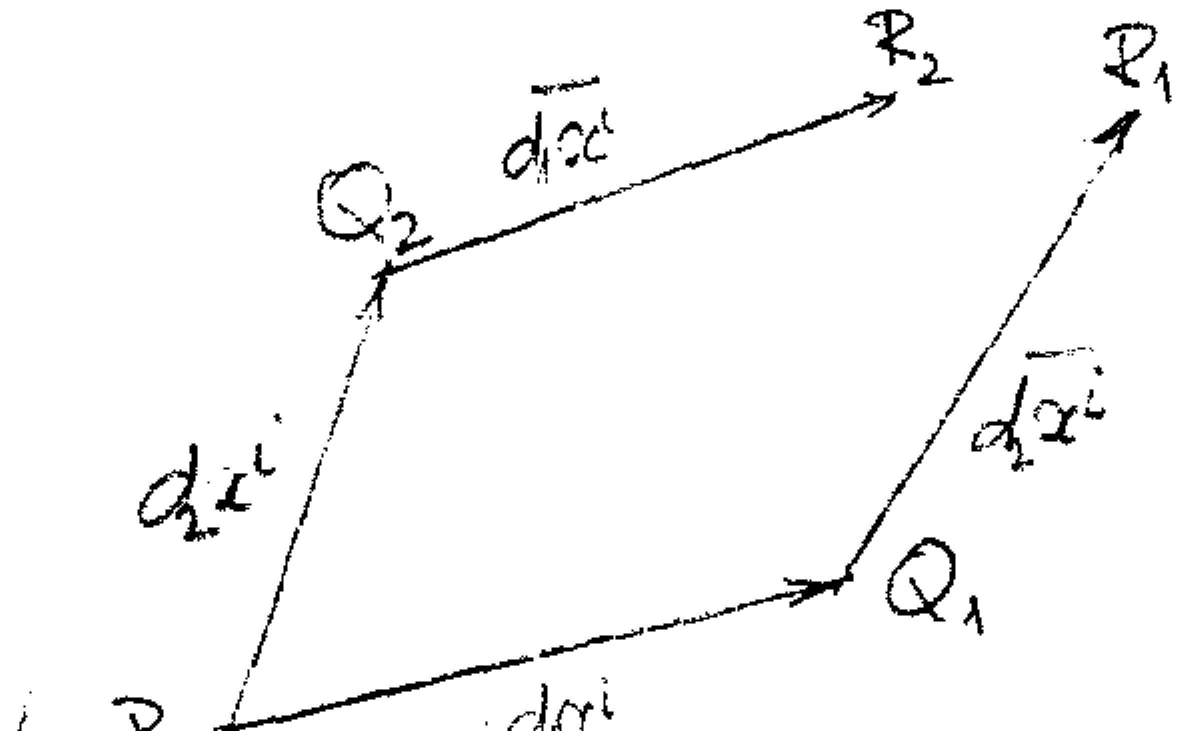
$$\Delta x^i = \Gamma^i_{kj} d_1x^j d_2x^k - \Gamma^i_{jk} d_1x^j d_2x^k = 2S_{jk}^{\cdot\cdot i} d_2x^j d_1x^k,$$

gdje je

$$S_{jk}^{\cdot\cdot i} = \Gamma^i_{[jk]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right),$$

torzija posmatranog prostora.

Prema tome, nije moguće konstruisati paralelogram u prostoru sa torzijom, jer će se tačke R_1 i R_2 poklopiti samo ako je torzija jednaka nuli. Ako se sada posmatraju gornje slike vidi se da otvorenoj konturi, otvorenom prstenu, odgovara nezatvoren paralelogram u nekom linearno povezanom prostoru sa torzijom. Dakle, nenapregnuta konfiguracija je u opštem slučaju, neki linearno povezan prostor L_n sa torzijom.



sl.4.

Oslobadjanjem unutrašnjih napona narušava se neprekidnost tjela, ali u nekom linearno povezanom prostoru sa torzijom neprekidnost ostaje očuvana, a tjelo je oslobodjeno naprezanja.

1.2. Model

Svaki materijal u kome se iz bilo kojih razloga javljaju unutrašnja naprezanja izazvana inkompatibilnim deformacijama, može da se posmatra u tri konfiguracije. U prvoj konfiguraciji posmatramo ga kao nenapregnuto nedeformisano tjelo u euklidskom prostoru. U drugoj konfiguraciji to isto tjelo je napregnuto ali se nalazi opet u euklidskom prostoru.

Zamišljenim eksperimentima koji su opisani u prethodnom odjeljku, tjelo se dovodi u nenapregnutu konfiguraciju inkompatibilnim deformacijama, koje sa tačke gledišta euklidskog prostora narušavaju neprekidnost sredine. Medjutim, postoji neki neeuklidski linearno povezani prostor L_3 u kome materijal ostaje neprekidan, a oslobodjen je unutrašnjih naprezanja.

Obilježimo početnu konfiguraciju materijala sa (I), krajnju (napregnutu) sa (D), a neeuklidsku nenapregnutu konfiguraciju sa (N). Cio proces deformacije može se lako sagledati na primjeru nehomogeno zagrejane ravni. Konfiguracija (I) je euklidska ravan. Usled nehomogenog zagrijevanja pojedini elementi ravni pretrpjeće različite dilatacije i ravan će se izvitoperiti. Na taj način tjelo dospijeva u konfiguraciju (N), koja očigledno više nije ravan. Ako se sada na bilo koji način izvitoperena površina (napr. djelovanjem spoljašnjih sila) povrati u ravan, elementi će pretrpjeti naknadnu deformaciju, ravan će dospjeti u konfiguraciju (D), a izvori naprezanja u toj konfiguraciji su upravo inkompatibilne deformacije kojima je neeuklidski dvodimenzioni prostor pretvoren u euklidski.

Analogan eksperiment se može zamisliti i na trodimenziono tjelo. Pri tome u trodimenzionom euklidskom prostoru tjelo ne može da napusti taj prostor u kome se nalazi, već zadržavajući kontinuitet materije prelazi iz konfiguracije (I) u konfiguraciju (D). Tek rasjecanjem tjela možemo ga osloboditi naprezanja ali istovremeno, u analogiji sa izvitoperenom ravni u prethodnom eksperimentu, možemo zamisliti da postoji neki neeuklidski linearno povezani prostor L_3 u kome je tjelo očuvalo neprekidnost, a oslobodjeno je naprezanja.

Konfiguracija (I) se može opisati u odnosu na neki proizvoljno izbrani, u euklidskom prostoru dopustivi sistem koordinata X^K, ($K = 1,2,3$) sa osnovnim metričkim tenzorom a_{KL}. Konfiguracija (D) se može opisati takodje u odnosu na neki proizvoljno izbrani sistem koordinata x^k, ($k = 1,2,3$), euklidskog prostora, sa osnovnim metričkim tenzorom b_{kl}. Kako su obje konfiguracije euklidske, izmedju ova dva poznata sistema mora da postoji obostrano jednoznačna korenspondencija

(1) $$x^k = x^k (X^1, X^2, X^3)$$

odnosno

(2) $$X^K = X^K (x^1 , x^2 , x^3).$$

Ove transformacije redstavljaju ustvari ukupnu (totalnu) deformaciju tjela.

Bilo iz konfiguracije (I), bilo iz konfiguracije (D) u konfiguraciju (N) tjelo ne može prijeći analitičkim transformacijama oblika (1) i (2). Medjutim, možemo predpostaviti da tačkama X^K i $X^K + dX^K$ tjela u konfiguraciji (I) odgovaraju u konfiguraciji (N) tačke $\vec{u}$ i $\vec{u} + d\vec{u}$, tako da izmedju diferencijala dX^K i du postoji veza

(3) $$du^\lambda = \theta^{(\lambda)}_K \, dX^K$$

odnosno

(4) $$dX^K = \theta^K_{(\lambda)} \, du^\lambda$$

uz predpostavku da je $$D (\theta^\lambda_K) \neq 0 ,$$

sličnu vezu možemo uspostaviti izmedju x^k i $x^k + dx^k$ i tačaka u i $u + du$ konfiguracija (D) i (N):

(5) $$du^\lambda = \Phi^{(\lambda)}_k dx^k, \quad (\mathrm{Det}\, \Phi^\lambda_k \neq 0),$$

odnosno

(6) $$dx^k = \Phi^k_{(\lambda)} du^\lambda .$$

Iz jednačina totalne deformacije (1) i (2) slijedi

(7) $$dX^K = X^K_{;k}\, dx^k$$

i

(8) $$dx^k = x^k_{;K}\, dX^K ,$$

gdje su $X^K_{;k}$ i $x^k_{;K}$

gradijenti totalne deformacije, tj.

(9) $$X^K_{;k} = \frac{\partial X^K}{\partial x^k}, \quad x^k_{;K} = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} .$$

Uporedjenjem izraza (7) i (8) sa (3), (4), (5) i (6) vidi se da je

(10) $$X^K_{;k} = \Theta^K_{(\lambda)} \Phi^{(\lambda)}_k , \quad x^k_{;K} = \Phi^k_{(\lambda)} \Theta^{(\lambda)}_K$$

Uslovi integrabilnosti jednačina (3) i (5) su

(11) $$\partial_L \Theta^{(\lambda)}_K - \partial_K \Theta^{(\lambda)}_L = 0 \quad i \quad \partial_l \Phi^{(\lambda)}_k - \partial_k \Phi^{(\lambda)}_l = 0 .$$

Ako bi ovi uslovi bili ispunjeni jednačine (3), (4), (5) i (6) bi bile integrabilne a u bi bile prave, odnosno dopustive koordinate u euklidskom prostoru. Medjutim, kako je konfiguracija (N) materijala, po predpostavci neeuklidska, uslovi (11) nijesu zadovoljeni u slučaju inkompatibilnih deformacija, pa koeficijenti Θ i Φ nijesu gradijenti nekih deformacija već predstavljaju distorzije kojima odgovaraju inkompatibilne deformacije.

Predpostavićemo da deformacija (I) $\to$ (D) ne povlači za sobom promjenu mehaničkih osobina materijala, niti utiče na materijalne simetrije (u opštem slučaju na karakter anizotropije) i s toga ćemo tu deformaciju zvati <u>plastičnom</u>.

U posmatranom materijalu, prema tome, totalna deformacija (I) $\to$ (S) se sastoji iz plastične i elastične (S) $\to$ (D). Obje ove deformacije su inkompatibilne. Totalna deformacija (I) → (N) je kompatibilna i sačinjavaju je plastična i elastična deformacija zajedno.

Inkompatibilnost deformacija, odnosno neintegrabilnost linearnih diferencijalnih izraza (3), (4), (5) i (6) usko je povezana upravo sa geometrijskom strukturom linearno povezanog prostora L_3 prirodne konfiguracije (N), materijala.

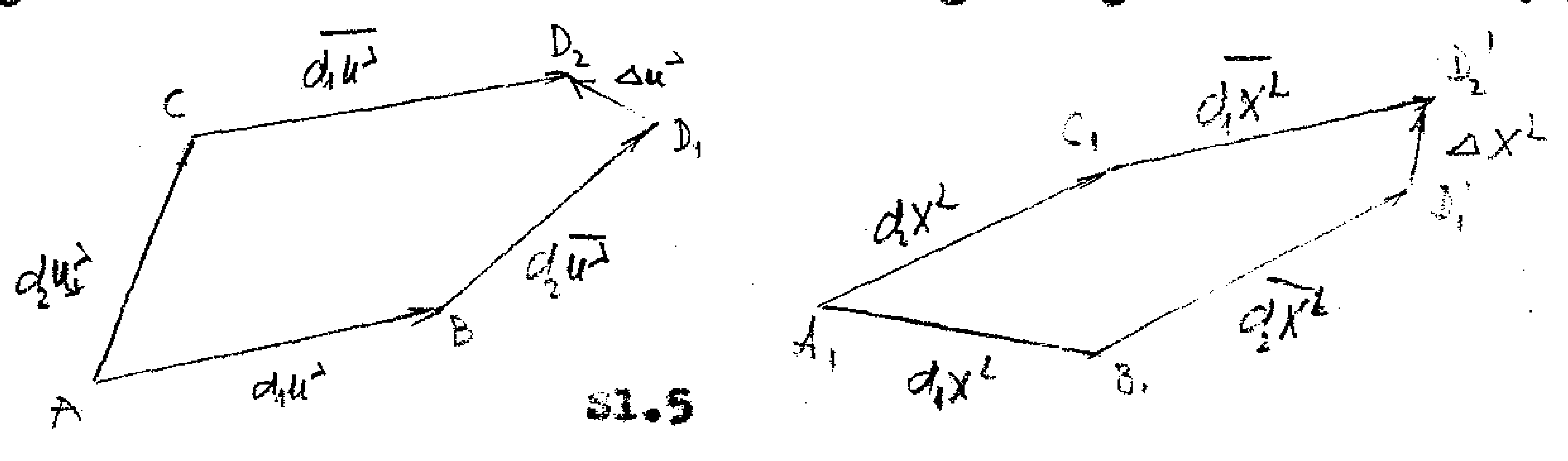
Posmatrajmo jednovremeno konfiguracije (I) i (N) nekog inkompatibilno deformisanog materijala. U konfiguraciji (N), u nekoj tački A, posmatramo dva infinitezimalna vektora d_1u^λ i d_2u^λ. U odgovarajućoj tački A_1, konfiguracije (I) posmatramo dva odgovarajuća vektora

$$d_1X^L = \theta^L_{\lambda}\, d_1u^\lambda \qquad i \qquad d_2X^L = \theta^L_{\lambda}\, d_2u^\lambda$$

Ako se izvrši paralelno pomjeranje vektora d_1u preko vektora d_2u^λ u tačku C konfiguracije (N), kraj paralelno pomjerenog vektora $\overline{d_1u^\lambda}$ odredjuje neku tačku D_2, a kraj paralelno pomjerenog vektora $\overline{d_2u^\lambda}$ preko vektora d_1u^λ odredjivaće neku tačku D_1. Kako je prostor konfiguracije (N) u opštem slučaju neki linearno povezani prostor sa torzijom, prema onome što je rečeno na kraju prethodnog odjeljka, ovakvim paralelnim pomjeranjem neće se dobiti neki elementarni paralelogram. Tačke D_1 i D_2 se neće poklopiti i vektor Δu^λ, koji odredjuje relativni položaj tačaka D_1 i D_2 odredjen je torzijom prostora L_3, tj.

(12) $$\Delta u^\lambda = u^\lambda_{D_2} - u^\lambda_{D_1} = 2S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\, d_2u^\mu d_1u^\nu$$

Razlici koordinata u euklidskom prostoru, u konfiguraciji (I) odgovaraće neka razlika koordinata odgovarajućih tačaka u (N)(sl.5)



Sl.5

(13) $$\Delta X^L = X^L_{D_2'} - X^L_{D_1'}$$

Tačka D_1 je odredjena poljem vektora d_2X^L sa napadnom tačkom B_1, a tačka D_2 poljem vektora d_1X^L sa napadnom tačkom C_1 na kraju vektora d_2X^L,

(14) $$\begin{aligned} X^L_{D_2'} &= X^L_{A'} + (d_2X^L)_{A'} + (d_1X^L)_{C'} = \\ &= X^L + \theta^L_{(\lambda)} d_2u^\lambda + \theta^L_{(\lambda)}(X+d_2X) d_1u^\lambda \\ &\approx X^L + \theta^L_{(\lambda)} d_2u^\lambda + \theta^L_{(\lambda)} d_1u^\lambda + \frac{\partial\theta^L_{(\lambda)}}{\partial X^K} d_2X^K d_1u^\lambda . \end{aligned}$$

Slično tome za tačku D_1' biće

$$X^L_{D_1'} = X^L + d_1X^L + \theta^L_{(\lambda)} d_2u^\lambda + \partial_K \theta^L_{(\lambda)} d_1X^K d_2u^\lambda .$$

Razlika koordinata ovih dvaju tačaka može da se izrazi u obliku

(15) $$\Delta X^L = 2\theta^L_{(\lambda)} \partial_{[K}\theta^{(\lambda)}_{M]} d_1X^K d_2X^M$$

Razlici koordinata tačaka D_1 i D_2 u prostoru L_3 odgovara razlika koordinata odgovarajućih tačaka D_1 i D_2 u E_3, tj.

(16) $$\Delta u^\lambda = \theta^{(\lambda)}_L \Delta X^L$$

Unošenjem u ovaj izraz vrijednosti u i X^L iz (12) i (15) dobiće se

(17) $$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\, \theta^{(\nu)}_K \theta^{(\mu)}_L d_2X^L d_1X^K = \theta^{(\lambda)}_L \theta^L_{(\pi)} \partial_{[K}\theta^{(\pi)}_{L]} d_1X^K d_2X^L$$

Vektori d_1u^λ i d_2u^λ, odnosno d_1X^K i d_2X^K potpuno su proizvoljno izabrani, pa prema tome mora da važi relacija izmedju parcijalnih izvoda distorzija i torzije prostora L_3

(18) $$\partial_{[K}\theta^{\lambda}_{L]} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\, \theta^{(\mu)}_L \theta^{(\nu)}_K$$

Kako je torzija prostora L_3 tenzor, to možemo taj tenzor da izrazimo u odnosu na koordinate X^K izrazom

(19) $$\theta^M_{(\lambda)} \partial_{[K}\theta^{(\lambda)}_{L]} = S_{KL}^{\cdot\cdot M} ,$$

pa je zakon transformacije tenzora torzije prostora L_3, izraženog u odnosu na koordinate u^λ i X^L, identički zadovoljen

$$S_{KL}^{\cdot\cdot M} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\,\theta_{(\lambda)}^{M}\,\theta_{L}^{(\mu)}\,\theta_{K}^{(\nu)} \tag{20}$$

Iz izraza (19) i (20) je očigledno da je torzija neeuklidskog prostora L_3 neposredna posledica neintegrabilnosti deformacija, odnosno njihove inkompatibilnosti. Kada je prostor L_3 simetričan deformacije automatski postaju integrabilne.

1.3. Mjere deformacije

Pitanje koje ovdje tretiramo je čisto geometrijske prirode, te pri njegovom razmatranju uopšte nijesu bitni uzroci deformacije niti pak zakon po kome se sama sredina opire deformaciji.

U mehanici kontinuuma je ustvari od osnovnog interesa poznavanje kriterijuma kojim mjerimo relativno kretanje materijalnih čestica prema susjednim česticama. Pri tome, naravno, dolazi do relativne promjene dužine i pravca koji spaja dvije čestice u kontinuumu, što predstavlja deformaciju. Zbog toga je deformacija vezana za promjene dužina i uglova, pri čemu metrička forma i osnovni metrički tenzor igraju najvažniju ulogu.

Neka su metričke forme konfiguracija, prema našem modelu opisanom u prethodnom odjeljku: $dS^2_{(I)}$, $dS^2_{(N)}$ i $dS^2_{(D)}$, gdje indeksima (I), (N) i (D) označavamo odgovarajuća stanja, t.j. neka su

$$\begin{aligned} dS^2_{(I)} &= a_{KL}\, dX^K dX^L \\ dS^2_{(N)} &= g_{\lambda\mu}\, du^\lambda du^\mu \\ dS^2_{(D)} &= b_{kl}\, dx^k dx^l . \end{aligned} \tag{1}$$

Ovdje su a_{KL}, $g_{\lambda\mu}$ i b_{kl} odgovarajući osnovni metrički tenzori, a X^K, u^λ i x^k odgovarajuće dopustljive koordinate. Deformaciju definišemo razlikom metrika dveju konfiguracija. Tu relativnu deformaciju posmatraćemo, prema modelu, u svim konfiguracijama u sledećim fazama:

Plastična deformacija (I) → (N) odredjena je razlikom

(2) $$\Delta^P = ds^2_{(N)} - ds^2_{(I)} = g_{\lambda\mu}\, du^\lambda du^\mu - a_{KL}\, dX^K dX^L$$

S obzirom na jednačine transformacije (2.3) i (2.4) ova razliku možemo pisati u obliku

$$\Delta^P = \left(g_{\lambda\mu}\, \theta^\lambda_L \theta^\mu_M - a_{KL}\right) dX^L dX^M$$

ili

$$\Delta^P = \left(g_{\lambda\mu} - a_{KL}\, \theta^L_{(\lambda)} \theta^M_{(\mu)}\right) du^\mu du^\lambda$$

Kako su relacijama

(3) $$C^P_{LM} \equiv g_{\lambda\mu}\, \theta^\lambda_L \theta^\mu_M \quad i \quad c^P_{\lambda\mu} \equiv a_{KL}\, \theta^L_\lambda \theta^M_\mu$$

definisani Košijev i Grinov tenzor relativne deformacije gornje razlike se svode na oblik

(4) $$\Delta^P = \left(C^P_{LM} - a_{LM}\right) dX^M dX^L,$$

odnosno

(5) $$\Delta^P = \left(g_{\lambda\mu} - c^P_{\lambda\mu}\right) du^\lambda du^\mu .$$

Sada su odgovarajući tenzori relativne plastične deformacije izraženi u koordinatama konfiguracija (I) i (N) dati relacijama

(6) $$2E^P_{LM} = C^P_{LM} - a_{LM}$$

i

(7) $$2\varepsilon^P_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - c^P_{\lambda\mu}$$

Elastična deformacija (N) → (D) biće odredjena razlikom

(8) $$\Delta^E = ds^2_{(I)} - ds^2_{(N)} = b_{kl}\, dx^k dx^l - g_{\lambda\mu}\, du^\lambda du^\mu .$$

Ako se uzmu u obzir jednačine deformacije (2.5) i (2.6) iz (8) proističe

(9) $$\Delta^E = \left(C^E_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}\right) du^\lambda du^\mu$$

ili

(10) $$\Delta^E = \left(b_{lm} - c_{lm}\right) dx^l dx^m$$

Ovdje su $C^E_{\lambda\mu}$ i c^E_{lm} Grinov i Košijev tenzor deformacije definisani jednačinama

(11) $$\overset{E}{C}_{\lambda\mu} \equiv b_{lm}\,\Phi^{l}_{(\lambda)}\,\Phi^{m}_{(\mu)}$$

i

(12) $$\overset{E}{\not{c}}_{lm} \equiv g_{\lambda\mu}\,\Phi_{m}^{(\mu)}\,\Phi_{l}^{(\lambda)}$$

Tenzori relativne elastične deformacije, posmatrani u (I) i (D) konfiguraciji, su sada

(13) $$2\overset{E}{E}_{\lambda\mu} = \overset{E}{C}_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu}$$

odnosno

(14) $$2\overset{E}{\mathcal{E}}_{lm} = b_{lm} - \overset{E}{\not{c}}_{lm}\,.$$

Totalna relativna deformacija odredjena je razlikom

(15) $$\Delta = ds^{2}_{(D)} - ds^{2}_{(I)} = b_{ml}\,dx^{m}dx^{l} - a_{ML}\,dX^{M}dX^{L}$$

Kako su jednačine ove deformacije date sa (2.1) i (2.2), a s obzirom na zavisnosti (2.7), (2.8), (2.10) i (1[illegible]) gornja jednačina se svodi na oblik

(16) $$\Delta = \left(b_{ml} - \overset{P}{\not{c}}_{ml}\right)dx^{m}dx^{l}$$

gdje je

(17) $$\overset{P}{\not{c}}_{lm} \equiv \overset{P}{\not{C}}_{\lambda\mu}\,\Phi_{m}^{(\mu)}\,\Phi_{l}^{(\lambda)}$$

Košijev tenzor deformacije.

Ako deformaciju (15) izrazimo preko koordinata konfiguracije (I) imaćemo

(18) $$\Delta = \left(\overset{E}{C}_{LM} - a_{LM}\right)dX^{L}dX^{M}$$

Ovdje je

(19) $$\overset{E}{C}_{LM} \equiv \overset{E}{C}_{\mu\lambda}\,\Theta_{L}^{\lambda}\,\Theta_{M}^{\mu}$$

Grinov tenzor deformacije.

Jednačinama (18) proističe iz zavisnosti (2.1), (2.2), (2.7), (2.10) i (11). Iz (15) i (18) slijede odgovarajući tenzori deformacije

(20) $$2E_{LM} = \overset{E}{C}_{LM} - a_{LM}$$

i

(21) $$2\mathcal{E}_{lm} = b_{lm} - \overset{P}{\not{c}}_{lm}$$

Prema našem modelu totalna deformacija je kompatibilna a rezultira kao zbir dveju inkompatibilnih deformacija: plastične (I) - (N) i elastične (N) - (D). Zato bi morale biti $E_{LM}=E^P_{LM}+E^E_{LM}$, posmatrano u odnosu na početnu konfiguraciju, odnosno $\mathcal{E}_{lm}=\mathcal{E}^P_{lm}+\mathcal{E}^E_{lm}$ posmatrano u deformisanom napregnutom prostornom koordinatnom sistemu.

Zaista, ako jednačinu (13) pomnožimo sa $\theta^\lambda_L\ \theta^\mu_M$ dobijamo

(22) $$2E^E_{LM} = C^E_{LM} - g_{LM} .$$

Zamjenom tenzora C^E_{LM} iz (22) u (20) slijedi

(23) $$2E_{LM} = 2E^E_{LM} + g_{LM} - a_{LM} .$$

Kako je

$$g_{LM} = g_{\lambda\mu}\,\theta^{(\lambda)}_L\theta^{(\mu)}_M \equiv C^P_{LM}$$

i korišenjem (6), iz (23) se dobija konačno

(24) $$E_{LM} = E^P_{LM} + E^E_{LM}$$

Na potpuno analogan način dobijemo i odgovarajući izraz za totalnu deformaciju u prostornim koordinatama

(25) $$\mathcal{E}_{lm} = \mathcal{E}^P_{lm} + \mathcal{E}^E_{lm} .$$

1.4. Brzina inkompatibilne deformacije

Neka je neeuklidska konfiguracija opisana koordinatama u, koje ćemo označiti kao materijalne te kao takve karakterišu individualne čestice materije, zbog čega su konstantne za vrijeme kretanja sredine. Ova konfiguracija nije fiksna te se može mijenjati savremenom.

Euklidska napregnuta konfiguracija neka je opisana prostornim koordinatama x^1. Ove koordinate nazivaju se prostornim zbog toga što, za razliku od materijalnih, ne karakterišu materijalnu česticu posmatranog kontinuuma već konkretnu tačku euklidskog prostora. Niz materijalnih čestica sredine u procesu deformacije zauzimaju jedan isti položaj u prostoru u toku vremena, pa imaju u ovom (prostornom) sistemu iste koordinate.

Veza između ove dvije konfiguracije je data neintegrabilnom transformacijom (2.5), odnosno (2.6), gdje koeficijenti transformacije - distorzije, zadovoljavaju odnos $\Phi_\ell^\lambda \phi_\lambda^\omega = \delta_\ell^\omega$. Distorzije mogu biti funkcije od x^1 i u a predpostavićemo da ne zavise eksplicitno od vremena.

Neka su P i Q dvije tačke u konfiguraciji (E). Vektor infinitezimalnog pomjeranja od P do Q je dat sa

(1) $$dx^k = x_Q^k - x_P^k .$$

Kad se euklidska konfiguracija mijenja u toku vremena mijenjaće se i prostorne koordinate pojedinih čestica, dok se koordinate neeuklidske konfiguracije u^λ pri tome ne mijenjaju. Diferenciranjem jednačine (1) po vremenu dobićemo brzinu promjene razlike dx^k, koja je jednaka razlici brzina u tačkama P i Q,

(2) $$\frac{d}{dt}(dx^k) = \dot{x}_Q^k - \dot{x}_P^k = v_Q^k - v_P^k = \partial_\ell v^k dx^\ell .$$

S druge strane, materijalni izvod razlike (1) po vremenu dat je sa

(3) $$\dot{\overline{dx^k}} = \frac{d}{dt}(dx^k) + b_{\ell m}^k dx^\ell v^m ,$$

gdje je b_{lm}^k Kristofelov simbol druge vrste u odnosu na metrički tenzor b_{kl}, a tačka iznad nadvučene crte označava materijalni izvod. Iz (2) i (3) direktno slijedi

(4) $$\dot{\overline{dx^k}} = \partial_\ell v^k dx^\ell + b_{\ell m}^k x^\ell v^m = v^k{}_{,\ell}\, dx^\ell ,$$

gdje je zarezom označen kovarijantni izvod u odnosu na metriku b_{kl}.

Ako posmatramo transformaciju (2.5) i tražimo materijalni izvod imaćemo

$$\dot{\overline{dx^k}} = \dot{\overline{\phi_\lambda^k du^\lambda}} = \dot{\Phi}_\lambda^k du^\lambda .$$

Odavde, a s obzirom na (2.6) proističe

(5) $$\overline{\dot{dx^k}} = \dot{\overline{\phi}}{}^k_\lambda \, \phi^\lambda_l \, dx^l .$$

Uporedjenjem (4) i (5) očigledno imamo

(6) $$v^k{}_{,l} = \dot{\overline{\phi}}{}^k_\lambda \, \phi^\lambda_l$$

Rešenjem ove jednačine po materijalnom izvodu distorzije imamo

(7) $$\dot{\overline{\phi}}{}^k_\lambda = v^k{}_{,l} \, \phi^l_\lambda$$

Izraz (6) predstavlja gradijent brzine pri inkompatibilnim deformacijama, a (7) brzinu promjene distorzije.

Brzinu inkompatibilne deformacije dobijamo kao materijalni izvod metričke forme konfiguracije (D),

$$\overline{\dot{ds^2_{(D)}}} = b_{kl}\left(\overline{\dot{dx^k}}\, dx^l + dx^k\, \overline{\dot{dx^l}}\right)$$

Korišćenjem (5) i (7) poslije malo sredjivanja proističe

$$\overline{\dot{ds^2_{(D)}}} = 2 d_{kl} \, dx^k dx^l \; ,$$

gdje je d_{kl} tenzor brzine inkompatibilne deformacije u konfiguraciji (D), odredjen sa

(8) $$d_{kl} = v_{(kl)} = \dot{\phi}{}^m_{(\lambda)} \, \phi^{(\lambda)}_{(k} b_{l)m} \;)$$

koji je formalno isti kao i u slučaju kompatibilnih deformacija.

Analogno se može definisati i tenzor inkompatibilnog vrtloženja relacijom

(9) $$\omega_{kl} = v_{[k,l]} = \dot{\phi}{}^m_{(\lambda)} \, \phi^{(\lambda)}_{[k} b_{l]m} .$$

Posmatrajmo sada brzinu promjene (I) konfiguracije u odnosu na (D). U tom cilju odredimo materijalni izvod metričke forme $(3.1)_1$ uzimajući u obzir (2.7), pa imamo

$$\overline{\dot{ds^2_{(I)}}} = \overline{c_{kl}\, dx^k dx^l}\, , \quad c_{kl} = a_{KL} X^K{}_{;k} X^L{}_{;l} \; ,$$

gdje je c_{kl} Košijev tenzor deformacije. Odavde neposredno slijedi

$$\overline{\dot{ds^2_{(I)}}} = d^*_{kl} \, dx^k dx^l$$

pri čemu je

(10) $$d^*_{kl} = \dot{c}_{kl} + c_{km} \dot{x}^m{}_{,l} + c_{ml} \dot{x}^m{}_{,k} .$$

Tenzor odredjen jednačinom (10) predstavlja brzinu promjene referene tne konfiguracije (I) u odnosu na (D). Ako diferenciramo (3.21) po vremenu i uzmemo u obzir (10) dobijamo

(11) $$2\dot{\mathcal{E}}_{ij} = -2\, d^{*}_{ij} + c_{jk}\, v^{k}_{,i} + c_{ki}\, v^{k}_{,j}$$

Zamjenjujući u (11) c_{jk} i c_{ik} sa odgovarajućim izrazima datim sa (3.21) poslije kratkog i jednostavnog računa proističe

(12) $$\dot{\mathcal{E}}_{ij} = d_{ij} - d^{*}_{ij} - \left(\mathcal{E}_{jk}\, v^{k}_{,i} + \mathcal{E}_{ki}\, v^{k}_{,j}\right)$$

što predstavlja egzaktan izraz za brzinu prostorne mjere deformacije. U relacijama (10) - (12) figurišu gradijenti i njihovi izvodi po vremenu a ne distorzije, što u ostalom mora biti jer je deformacija (I) - (D) kompatibilna.

Odredimo drugi kovarijantni izvod brzine $v^{i}_{;jk} = (v^{i}_{;j})_{;k}$. Ovaj izvod možemo napisati u obliku u kojem će materijalni izvod distorzije figurisati linearno. Iz (6) imamo

$$v^{i}_{,jk} = \phi^{(\lambda)}_{j,k}\, \dot{\phi}^{i}_{(\lambda)} + \phi^{(\lambda)}_{j}\, \dot{\phi}^{i}_{(\lambda),k} .$$

Pošto je

$$\dot{\phi}^{i}_{(\lambda),k} = \left(\phi^{i}_{(\lambda),m}\, v^{m}\right)_{,k} = \overline{\dot{\phi}^{i}_{(\lambda),k}} + \phi^{i}_{(\lambda),m}\, v^{m}_{,k}$$

konačno dobijamo

(13) $$v^{i}_{,jk} = \phi^{(\lambda)}_{j,k}\, \dot{\phi}^{i}_{(\lambda)} + \phi^{(\lambda)}_{j}\, \phi^{i}_{(\lambda),m}\, \phi^{(\mu)}_{k}\, \dot{\phi}^{m}_{(\mu)} + \phi^{(\lambda)}_{j}\, \overline{\dot{\phi}^{i}_{(\lambda),k}}$$

G L A V A II

KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA INKOMPATIBILNE DEFORMACIJE

2.1. Jednačina ravnoteže energije

Neka su u konfiguraciji (D) $\ddot{x}^i = \dot{v}^i$-koordinate ubrzanja djelića, $\dot{x}^i = v^i$-koordinate brzine djelića, f^i-zapreminska sila, σ^{ij}-napon, ρ -gustina, m^{ijk}-naponski spreg i l^{ij}-zapreminski spreg.

Podjimo od Košijevih jednačima kretanja kontinuuma u konfiguraciji (D), koje su oblika

(1) $$\rho \ddot{x}^i = \sigma^{ij}_{,j} + f^i,$$

a za slučaj da je napon nesimetričan i od jednačina

(2) $$\sigma^{[ij]} = m^{ijk}_{,k} + l^{ij}.$$

Množeći jednačinu (1) skalarno sa kovarijantnom brzinom $\dot{x}_i$ i integraleći preko neke oblasti V-tijela, ograničene površinom A, dobiće se $$\int_V \rho \ddot{x}^i \dot{x}_i dV = \int_V \sigma^{ij}_{,j} \dot{x}_i dV + \int_V f^i \dot{x}_i dV,$$

što se može napisati u obliku

(3) $$\int_V \rho \ddot{x}^i \dot{x}_i dV + \int_V \sigma^{ij} \dot{x}_{i,j} dV = \oint_A \sigma^{ij} \dot{x}_i dA_j + \int_V f^i \dot{x}_i dV.$$

Izraz na desnij strani ove jednačine predstavlja efekat rada sila : površinskih (napona) na A i zapreminskih sila u V. Prvi član sa lijeve strane predstavlja brzinu promjene kinetičke energije E_k

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_V \rho \dot{x}^i \dot{x}_i dV\right),$$

dok drugi član sa lijeve strane, u slučaju simetričnog napona, predstavlja brzinu promjene unutrašnje energije E_u

$$\int_V \sigma^{ij} d_{ij} dV = \frac{dE_u}{dt}$$

gdje je $d_{ij} = \dot{x}_{(i,j)}$ a izraz predstavlja snagu napona. Ako je je napon nesimetričan $\sigma^{ij} = \sigma^{[ij]} + \sigma^{(ij)}$

onda je prema (2)

$$\sigma^{ij}\dot{x}_{i,j} = \sigma^{ij}\dot{x}_{(i,j)} + \sigma^{[ij]}\dot{x}_{[i,j]} = \sigma^{ij}d_{ij} + m^{ijk}{}_{,k}\,\omega_{ij} + l^{ij}\omega_{ij} .$$

Sada je

$$\int_V \sigma^{ij}\dot{x}_{i,j}\,dV = \int_V (\sigma^{ij}d_{ij} - m^{ijk}\omega_{ij,k})\,dV + \int_V l^{ij}\omega_{ij}\,dV + \oint_A m^{ijk}\omega_{ij}\,dA_k ,$$

pa jednačinu (3) možemo napisati u obliku

(4)
$$\int \rho\dot{x}^i\dot{x}_i\,dV + \int_V (\sigma^{(ij)}d_{ij} - m^{ijk}\omega_{ij,k})\,dV = \oint_A (\sigma^{ik}\dot{x}_i - m^{ijk}\omega_{ij})\,dA_k + \int_V (f^i\dot{x}_i - l^{ij}\omega_{ij})\,dV .$$

Ovdje će izraz

(5)
$$\frac{dE_u}{dt} = \int_V (\sigma^{ij}d_{ij} - m^{ijk}\omega_{ij,k})\,dV ,$$

predstavljati brzinu promjene unutrašnje (mehaničke) energije. Kako je unutrašnja energija funkcija stanja ona ne smije zavisiti od načina na koji je posmatrani sistem dospio u to (trenutno) stanje. Zbog toga dE_u mora biti totalni diferencijal. Ako stavimo da je

$$E_u = \int_V \rho e\,dV$$

gdje je e gustina unutrašnje energije, biće

(6)
$$\frac{dE_u}{dt} = \int_V \rho\dot{e}\,dV$$

Jednačinu (4) možemo pisati u obliku

(7)
$$\frac{dE_K}{dt} + \frac{dE_u}{dt} = \oint_A (\sigma^{ij}\dot{x}_i - m^{ijk}\omega_{ij})\,dA_k + \int_V (f^i\dot{x}_i - l^{ij}\omega_{ij})\,dV .$$

Ovo je integralni oblik jednačine energetske ravnoteže. Iz (7) a s obzirom na (1), (2) i (6) i kako je oblast V sasvim proizvoljna, poslije malo sredjivanja imadćemo jednačinu uravnoteženosti energije u obliku

(8)
$$\rho\dot{e} = \sigma^{ij}d_{ij} - m^{ijk}\omega_{ij,k} .$$

U ovom obliku jednačina uravnoteženosti energije važi za svaku vrstu deformacije, tako da nije bitno da li su d_{ij} i ω_{ij} vezani za kompatibilne ili za inkompatibilne deformacije. Medjutim, mi ćemo jednačinu uravnoteženosti energije napisati u obliku koji sadrži materijalne izvode <u>distorzija</u>. Kako je

$$\sigma^{(ij)} d_{ij} = b_{il} \sigma^{ij} v^{l}_{,j} \qquad (\dot{x}^{l}_{,j} \equiv v^{l}_{,j})$$

i

$$m^{ijk} \omega_{ij,k} = m_{i}^{\cdot jk} v^{i}_{,jk}$$

a na osnovu (1.4 - 8.9 i 13) proističe

$$\sigma^{ij} d_{ij} = b_{il} \phi^{(\lambda)}_{j} \dot{\phi}^{l}_{(\lambda)}$$

$$m^{ijk} \omega_{ij,k} = m_{i}^{\cdot jk} \left(\phi^{(\lambda)}_{jk} \dot{\phi}^{i}_{(\lambda)} + \phi^{(\lambda)}_{j} \phi^{i}_{(\lambda)m} \phi^{(\mu)}_{k} \dot{\phi}^{m}_{(\mu)} + \phi^{(\lambda)}_{j} \overline{\dot{\phi}^{i}_{(\lambda),k}} \right)$$

Ako se ovi izrazi zamijene u jednačinu (8), s obzirom da se tu javljaju kao sabirci, dobićemo jednačinu uravnoteženosti energije u obliku prilagodjenom inkompatibilnim deformacijama.

$$\rho \dot{e} = \left(b_{il} \sigma^{ij} \phi^{(\lambda)}_{j} - m_{i}^{\cdot jk} \phi^{(\lambda)}_{jk} - m_{i}^{\cdot jk} \phi^{(\mu)}_{j} \phi^{i}_{(\mu),l} \phi^{(\lambda)}_{k} \right) \overline{\dot{\phi}^{l}_{,(\lambda)}} - \tag{9}$$

$$- m_{i}^{\cdot jk} \phi^{(\lambda)}_{j} \overline{\dot{\phi}^{l}_{(\lambda),k}} .$$

Radi kratkoće ovu jednačinu ćemo pisati u obliku,

$$\rho \dot{e} = H^{(\lambda)}_{l} \dot{\phi}^{l}_{(\lambda)} + H^{(\lambda)}_{l} \overline{\dot{\phi}^{l}_{(\lambda),k}} \quad , \tag{10}$$

gdje je

$$H^{(\lambda)k}_{l} \equiv - m_{l}^{\cdot jk} \phi^{(\lambda)}_{j} \tag{11}$$

i

$$H^{(\lambda)}_{l} \equiv b_{il} \sigma^{ij} \phi^{(\lambda)}_{j} - m_{l}^{\cdot jk} \phi^{(\lambda)}_{jk} - m_{i}^{\cdot jk} \phi^{(\mu)}_{j} \phi^{i}_{(\mu),l} \phi^{(\lambda)}_{k} . \tag{11$_1$}$$

Izraz

$$H^{(\lambda)}_{l} \dot{\phi}^{l}_{(\lambda)} + H^{(\lambda)k}_{l} \overline{\dot{\phi}^{l}_{(\lambda),k}} \quad , \tag{12}$$

predstavlja mehanički rad

Iskoristićemo sada drugi zakon termodinamike (sledeći [15]) u obliku

$$\rho \dot{e} = \rho \Theta \dot{\eta} + \rho \tau^{\sigma z} \dot{v}_{\sigma z}$$

gdje je $v_{\sigma z}$ - termodinamički parametar stanja, $\tau^{\sigma z}$ - termodinamički napon, Θ - temperatura i η - gustina entropije.

Razlika

$$H^{(\lambda)}_{l} \dot{\phi}^{l}_{(\lambda)} + H^{(\lambda)k}_{l} \overline{\dot{\phi}^{l}_{(\lambda),k}} - \rho \tau^{\sigma z} \dot{v}_{\sigma z} \tag{13}$$

predstavlja višak mehaničkog rada nad povratnim. Uzimajući da je nepovratni dio mehaničkog rada dat disipativnim dijelom ukupnog napona ${}_D\sigma^{ij}$ i naponskog sprega ${}_D\mathfrak{M}^{ijk}$, možemo pisati

(14)
$$H_l^{(\lambda)}\dot{\phi}^{\,l}_{(\lambda)} + H_l^{(\lambda)k}\dot{\overline{\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}} - \rho\dot{e} + \rho\theta\dot{\eta} = {}_D H_l^{(\lambda)}\dot{\phi}^{\,l}_{(\lambda)} + {}_D H_l^{(\lambda)k}\dot{\overline{\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}}$$

gdje su ${}_D H_l^{(\lambda)}$ i ${}_D H_l^{(\lambda)k}$ potpuno analogni sa odgovarajućim izrazima u (11) s tim što sadrže samo tenzore disipativnog napona ${}_D\sigma^{ij}$ i naponskih spregova ${}_D\mathfrak{M}^{ijk}$.

Za unutrašnju energiju možemo učiniti neke predpostavke. Predpostavićemo da je unutrašnja energija funkcija 9 distorzija $\phi^{\,l}_{\lambda}$, 27 kovarijantnih izvoda $\phi^{\,l}_{(\lambda),k}$ i gustine entropije η.

(15)
$$e = e(\phi^{\,l}_{\lambda};\ \phi^{\,l}_{\lambda,k};\ \eta)$$

Materijalni izvod gustine energije po vremenu sada će biti

(16)
$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda)}}\dot{\phi}^{\,l}_{(\lambda)} + \frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}\dot{\overline{\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}} + \frac{\partial e}{\partial\eta}\dot{\eta}\ .$$

Prema (14) jednačina (16) može da se napiše u obliku

(17)
$$\left(H_l^{(\lambda)} - {}_D H_l^{(\lambda)} - \rho\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda)}}\right)\dot{\phi}^{\,l}_{(\lambda)} + \left(H_l^{(\lambda)k} - {}_D H_l^{(\lambda)k} - \rho\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}\right)\dot{\overline{\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}} + \rho\left(\theta - \frac{\partial e}{\partial\eta}\right)\dot{\eta} = 0$$

Ova će jednačina biti zadovoljena ako su koeficijenti uz materijalne izvode $\dot{\phi}^{\,l}_{(\lambda)}$, $\dot{\overline{\phi^{\,l}_{(\lambda)k}}}$ i $\dot{\eta}$ identički jednaki nuli, pod predpostavkom da ove smatramo medjusobno nezavisnim, dakle

(18)
$$H_l^{(\lambda)} - {}_D H_l^{(\lambda)} - \rho\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda)}} = 0$$
$$H_l^{(\lambda)k} - {}_D H_l^{(\lambda)k} - \rho\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda),k}} = 0$$
$$\rho\left(\theta - \frac{\partial e}{\partial\eta}\right) = 0\ .$$

Eliminacijom naponskih spregova iz $(18)_1$ preko $(18)_2$, a s obzirom na (11) dobićemo konstitutivne jednačine u obliku

(19)
$$\sigma^{ij} - {}_D\sigma^{ij} = \rho b^{il}\left(\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda)}}\phi^{\,j}_{(\lambda)} + \frac{\partial e}{\partial\phi^{\,l}_{(\lambda),k}}\phi^{\,j}_{(\lambda)k} - \frac{\partial e}{\partial\phi^{\,k}_{(\lambda),j}}\phi^{\,k}_{(\lambda),l}\right.$$
$$\mathfrak{M}_i^{\ \cdot jk} - {}_D\mathfrak{M}_i^{\ \cdot jk} = -\rho\frac{\partial e}{\partial\phi^{\,i}_{(\lambda),k}}\phi^{\,j}_{(\lambda)}$$
$$\theta = \frac{\partial e}{\partial\eta}\ .$$

Prva od ovih jednačina predstavlja uopštenje konstitutivnih jednačina za kontinuum sa inkompatibilnim deformacijama. Za svodjenje jednačine $(19)_1$ na oblik koji odgovara kompatibilnim deformacijama treba samo distorzije $\phi^{\ell}_{(\lambda)}$ zamijeniti gradijentima deformacije $x^{\ell}_{;\lambda}$, a kovarijantni izvodi distorzija po prostornim koordinatama $\phi^{\ell}_{(\lambda)k}$ postaju totalni kovarijantni izvodi po prostornim koordinatama. Ustvari, kovarijantni izvodi distorzija mogu biti izraženi u obliku gradijenata deformacije i materijalnih gradijenata deformacije, jer je

$$\phi^{\ell}_{(\lambda),k} = -\phi^{\ell}_{(\mu)}\phi^{m}_{(\lambda)}\phi^{(\mu)}_{m,k} = \mu^{\mu}_{,k}\, x^{\ell}_{,\lambda\mu} .$$

Prema tome za slučaj kompatibilnih deformacija unutrašnja energija je funkcija 9 gradijenata deformacije, 18 materijalnih gradijenata $x^{l}_{;\lambda\mu}$ ($= x^{l}_{;\mu\lambda}$) deformacije i gustine entropije η - svega 28. Što znači da uslovi kompatibilnosti ograničavaju na neki način slobodu unutrašnje energije, svodeći je od 37 na 28 funkcionalnih stepeni slobode.

2.2. Veza izmedju napona i deformacije

Ograničimo ovdje naša razmatranja na potpuno reverzibilne procese. U tom slučaju je $_D\sigma^{ij}=0$ i $_D m^{ijk}=0$, pa se jednačine $(19)_{1,2}$ svode na eksplicitne relacije za napone i naponske spregove,

$$\sigma^{ij} = \rho b^{ij}\left(\frac{\partial e}{\partial \phi^{\ell}_{(\lambda)}}\phi^{j}_{(\lambda)} + \frac{\partial e}{\partial \phi^{\ell}_{(\lambda),k}}\phi^{j}_{(\lambda),k} - \frac{\partial e}{\partial \phi^{k}_{(\lambda),j}}\phi^{k}_{(\lambda),\ell}\right) \tag{1}$$

$$m_i^{\cdot jk} = \rho \frac{\partial e}{\partial \phi^{i}_{(\lambda),k}}\phi^{j}_{(\lambda)}$$

Na osnovu oblika ovih jednačina može se predpostaviti da je energija funkcija 36 nezavisno promjenljivih ϕ^{ℓ}_{λ} i $\phi^{\ell}_{\lambda,k}$, tj.

$$e = e\left(\phi^{\ell}_{(\lambda)};\ \phi^{\ell}_{(\lambda),k}\right). \tag{2}$$

Za svaki konkretan materijal struktura izraza za unutrašnju energiju odredjuje se ili iz eksperimentalnih podataka ili na osnovu izvjesnih hipoteza. Postavlja se pitanje da li unutrašnja energija može da zavisi od predpostavljenih nezavisno promjenljivih sasvim proizvoljno ili na neki odredjen način?

Jednačine (1) impliciraju neka ograničenja proizvoljnosti e . U njima figuriše simetričan dio tenzora napona i tenzor naponskog sprega koji je antisimetričan u odnosu na prva dva indeksa. Medjutim, desna strana jednačine $(1)_1$ nije identički simetrična niti je desna strana jednačine $(1)_2$ identički antisimetrična u odnosu na indekse i i j. Ovdje se nameće pitanje da li zahtjev da desne strane jednačina $(1)_1$ i $(1)_2$ budu saglasne osobinama tenzora sa lijeve strane daje odredjena ograničenja strukture izraza unutrašnje energije. Takav zahtjev možemo izraziti jednačinama

(3) $$\left[b^{il}\left(\frac{\partial e}{\partial \phi^{l}_{(\lambda)}}\phi^{j}_{(\lambda)}+\frac{\partial e}{\partial \phi^{l}_{(\lambda),k}}\phi^{j}_{(\lambda),k}-\frac{\partial e}{\partial \phi^{k}_{(\lambda),l}}\right)\right]_{[ij]}=0$$

(4) $$\left(b^{il}\frac{\partial e}{\partial \phi^{l}_{(\lambda),k}}\phi^{j}_{(\lambda)}\right)_{(ij)}=0 .$$

Tri jednačine (3) i 18 jednačina (4) predstavljaju sistem od 21 linearne parcijalne jednačine sa 36 nezavisno promjenljivih od kojih zavisi energija e. Prema tome sistem (3) i (4) ima 15 funkcionalno nezavisnih rešenja (36 - 21 = 15), pa je i opšte rešenje za e proizvoljna funkcija samo nezavisnih rešenja. Ta nezavisna rešenja možemo uzeti u obliku

$(5)_1$ $$C_{\lambda\mu}=b_{lm}\phi^{l}_{(\lambda)}\phi^{m}_{(\mu)}$$

i

$(5)_2$ $$D_{\lambda\mu\nu}=\left[b_{lm}\phi^{l}_{(\lambda)}\phi^{m}_{(\mu),n}\phi^{n}_{(\nu)}\right]_{[\lambda\mu]},$$

koji imaju simetrična svojstva

$$C_{\lambda\mu} = C_{\mu\lambda} \; ; \; D_{\lambda\mu\nu} = - D_{\mu\lambda\nu}$$

i sadrže 15 funkcionalno nezavisnih invarijanata u euklidskom prostoru.

Sada možemo zaključiti da je unutrašnja energija proizvoljna funkcija od η i 15 funkcionalno nezavisnih veličina

$$(6) \qquad e = e\,(C_{\lambda\mu} ; \; D_{\lambda\mu\nu} ; \; \eta).$$

Zamjenom e iz (6) u jednačine (1) dobićemo odnos napon - deformacija koji je sličan odgovarajućem odnosu kod kompatibilnih deformacija, tj.

$$(7) \qquad \sigma^{ij} = 2\rho\Big(\frac{\partial e}{\partial C_{\lambda\mu}}\phi^{i}_{(\lambda)}\phi^{j}_{(\mu)} + \frac{\partial e}{\partial D_{\lambda\mu\nu}}\phi^{i}_{[(\lambda)}\phi^{j}_{(\mu)];m}\phi^{m}_{(\nu)}\Big),$$

$$(8) \qquad \mathfrak{M}^{ijk} = -\rho\frac{\partial e}{\partial D_{\lambda\mu\nu}}\dot{\phi}^{i}_{[(\lambda)}\phi^{j}_{(\mu)]}\phi^{k}_{(\nu)}.$$

Veličine $C_{\lambda\mu}$ i $D_{\lambda\mu}$ su invarijantne u odnosu na transformaciju koordinata x^{l}, ali kako su u materijalne koordinate, ove veličine mogu biti smatrane kao neeuklidski materijalni tenzori.

Ako su deformacije kompatibilne, tenzori $C_{\lambda\mu}$ i $D_{\lambda\mu\nu}$ se svode na obične materijalne tenzore koje je dobio Tupin 13 . U tom slučaju jednačine (7) se svode direktno na Tupinove relacije.

Tenzor $C_{\lambda\mu}$, sa stanovišta konfiguracije (D), predstavlja neholonomne koordinate materijalnog tenzora, pa ga zato možemo tretirati kao Grinov materijalni tenzor deformacije, jer se na njega svodi kada su u pitanju kompatibilne deformacije i mjeri promjenu metrike uslovljenu deformacijom.

Tenzoru $D_{\lambda\mu\nu}$ je takodje moguće dati odgovarajuću geometrijska interpretaciju. Iz uslova koje zadovoljavaju koeficijenti transformacije (E) → (D) i obrnuto

$$\phi^{(\lambda)}_{l}\phi^{l}_{(\mu)} = \delta^{\lambda}_{\mu} \; ; \; \phi^{(\lambda)}_{l}\phi^{m}_{(\lambda)} = \delta^{m}_{l},$$

i ako izrazimo $\phi^{\nu}_{k,n}$ preko koeficijenata povezanosti prostora L_3 datog sa

(9) $$\Gamma^{m}_{\ell k} \equiv \phi^{(\mu)}_{k,\ell}\ \phi^{m}_{(\mu)}\ ,$$

dobijamo

(10) $$\phi^{m}_{\mu,n} = -\ \phi^{k}_{(\mu)}\left(\Gamma^{m}_{nk} - b^{m}_{nk}\right),$$

što daje

(11) $$D_{\lambda\mu\nu} = \left[b_{\ell m}\,\phi^{\ell}_{(\lambda)}\left(\Gamma^{m}_{nk} - b^{m}_{nk}\right)\phi^{k}_{(\mu)}\,\phi^{n}_{(\nu)}\right]_{[\lambda\mu]}.$$

Odavde se vidi da je tenzorom $D_{\lambda\mu\nu}$ u materijalnim koordinatama izražena razlika koeficijenata povezanosti dva prostora od kojih svaki karakteriše odgovarajuću konfiguraciju materijala. Kristofelovi simboli b^{n}_{ml} predstavljaju koeficijente povezanosti konfiguracije (D) dok koeficijenti povezanosti $\Gamma^{n}_{m\ell}$ karakterišu geometriju konfiguracije (N). Znači, ovaj tenzor mjeri promjenu povezanosti uslovljenu deformacijom, tj. karakteriše promjenu geometrijske strukture prostora. Ova promjena povezanosti može, ustvari, biti smatrana izvorom naponskih spregova.

Svaki metrički nesimetrični prostor karakterišu dva elementa: metrički tenzor i tenzor torzije prostora.

Koeficijenti povezanosti metrike linearno povezanog prostora L_3 dati su u najopštijem slučaju sa

(12) $$\Gamma^{m}_{nk} = b^{m}_{nk} + S_{nk}^{\cdot\cdot m} - S_{k\cdot n}^{\ m} + S^{m}_{\cdot nk}$$

gdje je $S_{nk}^{\cdot\cdot m}$ tenzor torzije prostora.

S obzirom na razliku povezanosti kojom je izražen tenzor $D_{\lambda\mu k}$ moguća su tri slučaja:

a) u najopštijem slučaju deformacija prouzrokuje promjenu metrike i uvodi torziju, što je slučaj koji ovdje proučavamo,

b) metrika ostaje nepromijenjena pri deformaciju ali postoji torzija

(13) $$b_{kl}^{\ \ m} = g^{n}_{kl}\ ; \qquad S_{kl}^{\ \cdot\cdot m} \neq 0;$$

c) metrika se mijenja pri deformaciji ali nema torzije (u ovom slučaju je deformacija kompatibilna)

$$\Gamma^{n}_{lm} = b^{n}_{ml}\ ; \qquad S_{nl}^{\ \cdot\cdot m} = 0$$

Vratimo se na slučaj b), tj. podjimo od toga da postoji (13), što možemo napisati u obliku

$$g^{nt} g_{klt} = b^{mn} b_{klm}$$

Množenjem ove relacije sa g_{sn} imamo

(14) $$g_{klt} = g_{nt}\, b^{mn} b_{klm}\,,$$

ili kad ovdje zamijenimo mjesta indeksima l i t,

(15) $$g_{ktl} = g_{nl}\, b^{mn} b_{ktm}\,.$$

Sabiranjem desnih i lijevih strana (14) i (15) proističe

(16) $$\partial_k g_{lt} = g_{nt}\, b^{mn} b_{klm} + g_{nl}\, b^{mn} b_{ktm}\,.$$

Ako sada (16) pomnožimo sa g^{lt} i tako dobijeni izraz sredimo lako će se dobiti

$$g^{lt}\partial_k g_{lt} = b^{lt}\partial_k b_{lt}$$

tj.

$$\partial_k \ln g = \partial_k \ln b$$

što konačno daje

(17) $$g = \mathrm{const}\cdot b\,.$$

Prema tome, u konfiguraciji (D), prema uslovu (13), imamo naponske spregove, što je prema (17) moguće i ako su metrike konfiguracija (n) i (D) u konformnom odnosu, a sa konstantnim faktorom proporcionalnosti

2.3. Linearizacija

Za unutrašnju energiju je bilo predpostavljeno da je proizvoljna funkcija argumenata. Sada ćemo predpostaviti:

a) da je energija polinomijalna funkcija argumenata,

b) da joj je za identičnu transformaciju ($\varphi^{\ell}_{\lambda} = \delta^{\ell}_{\lambda}$) vrijednost nula,

c) da je deformacija potpuno izentropska (η = const.),

d) da za identične transformacije naponi i naponski spregovi iščezavaju.

Tipičan član za polinomijalne funkcije energije ima oblik $K^{\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_p\beta_p\lambda_1\mu_1\nu_1\ldots\lambda_q\mu_q\nu_q} C_{\alpha_1\beta_1}\ldots C_{\alpha_p\beta_p} D_{\lambda_1\mu_1\nu_1}\ldots\theta_{\lambda_q\mu_q\nu_q}$,

gdje su $K^{\alpha_1\beta_1\ldots\lambda_1\mu_1\nu_1}$ komponente anizotropnog tenzora koji karakteriše materijalne simetrije materijala posmatranog tijela.

Infinitizimalna inkopatibilna deformacija može biti predstavljena distorzijom oblika

$$\varphi^{(\lambda)}_{\ell} = \delta^{\lambda}_{\ell} + v^{\lambda}_{\ell}, \tag{1}$$

gdje su v^{λ}_{ℓ} proizvoljno date neprekidne funkcije položaja, dovoljno male tako da se možemo uvijek zadržati na linearnom izrazu od -a. Recipročne distorzije su date u linearnoj aproksimaciji sa

(2)

gdje je v^{ℓ}_{λ} transponovana matrica od v^{λ}_{ℓ}.

Neka je

$$g_{\ell\mu} \equiv g_{\ell m}\delta^{m}_{\mu}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\ell\mu}\delta^{\ell}_{\lambda}$$

$$v_{\lambda\mu} \equiv g_{\ell\mu} v^{\ell}_{\lambda}; \quad v_{\ell m} \equiv g_{\ell\lambda} v^{\lambda}_{\cdot m} \tag{3}$$

$$2E_{\lambda\mu} = v_{\lambda\mu} + v_{\mu\lambda}; \quad 2\Omega_{\lambda\mu} = v_{\lambda\mu} - v_{\mu\lambda}.$$

Veličine $C_{\lambda\mu}$ i $D_{\lambda\mu\nu}$ mogu biti izražene u obliku

(4) $$C_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu} + 2E_{\lambda\mu}, \qquad D_{\lambda\mu\nu} = \Omega_{\lambda\mu,\nu},$$

pri čemu je
$$\Omega_{\lambda\mu\nu} \equiv \Omega_{\lambda\mu,n}\,\delta^n_\nu .$$

Zbog predpostavke o malim deformacijama iz izraza (1) i (2) za infinitezimalne distorzije proističe da se preko Kroneckerovih simbola svi grčki indeksi koji su vezani za konfiguraciju ([illegible]) mogu zamijeniti malim latinskim indeksima vezanim za konfiguraciju (D). Isto tako, zbog predpostavki učinjenih na početku ovoga paragrafa slijedi da je za dobijanje linearne zavisnosti izmedju napona i deformacije dovoljno aproksimirati energiju e homogenim kvadratnim polinomom

(5) $$e = K_1^{ijkp} C_{ij} C_{kp} + K_2^{ijlmn} C_{ij} D_{lmn} + K_3^{lmn.ij} C_{ij} D_{lmn} + K_4^{ijk.lmn} D_{ijk} D_{lmn}$$

Parcijalnim diferenciranjem ovog izraza za energiju $\underline{e}$ imamo

$$\frac{\partial e}{\partial C_{ij}} = M_1^{ijkp} C_{kp} + M_2^{ij.lmn} D_{lmn}$$

(6) $$\frac{\partial e}{\partial D_{lmn}} = M_2^{ijlmn} C_{ij} + M_3^{ijk\,lmn} D_{ijk},$$

gdje su koeficijenti M vezani sa koeficijente K relacijama

$$M_1^{ijkp} = M_1^{kpij} = M_1^{ijpk} = M_1^{jipk} = K_1^{ijkp} + K_1^{kpij}$$

(7) $$M_2^{ij.lmn} = M_2^{lmn.ij} = M_2^{jilmn} = -M_2^{ij.mln} \equiv K_2^{ij.lmn} + K_3^{lmn.ij}$$

$$M^{ijk.lmn} = M_3^{lmn.ijk} = -M_3^{jik.lmn} = K_4^{ijk.lmn} + K_4^{lmn.ijk} .$$

Izražavajući C_{ij} i D_{ijk} pomoću obrazaca (4) i korišćenjem (6) i (7) uzimajući u obzir učinjene predpostavke, relacije izmedju napona i deformacije (2.7) i (2.8) se svode na

$$\sigma^{ij} = M_1^{ijkl} \varepsilon_{kl} + M_2^{ijklm} \Omega_{kl,m}$$

(8) $$\mathfrak{M}^{ijk} = -\left(M_2^{ijk.lm} \varepsilon_{lm} + M_3^{ijk.lmn} \Omega_{lm,n}\right),$$

gdje smo stavili

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{\varkappa\lambda}\delta_k^{\varkappa}\delta_l^{\lambda}, \quad \Omega_{kl,m} = \Omega_{\varkappa\lambda,\mu}\delta_k^{\varkappa}\delta_l^{\lambda}\delta_m^{\mu}$$

(9)

$$M_1^{ijkl} = M_1^{\alpha\beta\varkappa\delta}\delta_\alpha^i\delta_\beta^j\delta_\varkappa^k\delta_\delta^l \quad \text{itd}$$

2.4. Izotropija

Za izotropne materijale je karakteristično da su konstitutivne jednačine invarijantne u odnosu na transformacije potpune ortogonalne grupe transformacije. Pipkin i Rivlin [16] su pokazali da anizotropni tenzori za takav materijal mogu biti samo parnoga reda i da su odredjeni kombinacijama spoljašnjih proizvoda Kronekerovih simbola (pod uslovom da je koordinatni sistem Dekartov).

Kako u linearizovanom izrazu (3.5) za energiju deformacije figurišu anizotropni tenzori četvrtog, petog i šestog reda, iz predpostavke o izotropiji materijala proističe da koeficijenti petog reda neće postojati, pa će izraz za unutrašnju energiju, u linearnoj aproksimaciji, za izotropan materijal biti oblika

(1) $$e = M_1^{ijkl}C_{ij}C_{kl} + M_3^{ijk.mnp}D_{ijk}D_{mnp}\,.$$

Koeficijent M_1 biće u opštem slučaju neki tenzor strukture

(2) $$M_1^{ijkl} = \Lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + M\delta^{ik}\delta^{jl} + N\delta^{il}\delta^{jk},$$

dok je koeficijent M_3 kombinacija tri Kronekerova δ- simbola sa ukupno 15 sabiraka, odnosno 15 konstanti. Medjutim, zbog antisimetrije tenzora D_{ijk} u izrazu za energiju dolaze u obzir samo odredjene antisimetrične kombinacije tih sabiraka. Jednostavna ali malo duža analiza pokazuje da unutrašnja energija sadrži samo tenzor

(3) $$\begin{aligned} M_3^{ijklmn} = {} & \alpha(\delta^{ik}\delta^{jl}\delta^{mn} - \delta^{ik}\delta^{jm}\delta^{ln} - \delta^{jk}\delta^{il}\delta^{mn} + \delta^{jk}\delta^{im}\delta^{ln}) + \\ & + 2\beta(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{im}\delta^{jl}\delta^{kn}) + \\ & + \gamma(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jn}\delta^{kl} + \delta^{in}\delta^{jm}\delta^{kl})\,. \end{aligned}$$

Ovaj tenzor je antisimetričan u odnosu na indekse <u>ij</u> i <u>lm</u>. Zamjenom vrijednosti za M_1 i M_3 u vezama (3.8) izmedju napona i deformacije dobiće se linearizovani izraz za ove veze za izotropan materijal. Koristeći relacije (3.9) te će veze da glase

$$(4)\quad \sigma^{ij} = \Lambda \delta^{ij}\delta^{kl}\varepsilon_{kl} + M\varepsilon_{kl}\delta^{ik}\delta^{jl} + N\delta^{il}\delta^{jk}\varepsilon_{kl} = \Lambda \varepsilon_I \delta^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij} \quad (2\mu = M+N;\ \varepsilon_I = \delta^{kl}\varepsilon_{kl})$$

i

$$(5)\quad m^{ijk} = \alpha\delta^{k[i}\Omega^{j]l}{}_{,l} + 4\beta\delta^{kl}\Omega^{ij}{}_{,l} + \gamma\delta^{l[j}\Omega^{i]k}{}_{,l} \quad .$$

Dakle, u izrazu za napon figurišu dvije materijalne konstante, što se potpuno poklapa sa Hukovim zakonom za kompatibilne deformacije. Izraz za naponski spreg sadrži tri materijalne konstante. Za kompatibilne deformacije Mindlin i Tiersten [14] su pokazali da izraz za naponski spreg sadrži svega dvije materijalne konstante. Ako se u jednačinama (5) predpostavi da su deformacije kompatibilne, tj. da je

$$2\Omega_{ij} = v_{i,j} - v_{j,i}$$

gdje je v_i vektor infinitezimalnog pomjeranja, u dobivenom izrazu će se pojaviti takodje svega dvije konstante i to: $\eta = 2\beta + \frac{\gamma}{2}$, i α tako da se (5) može napisati u obliku

$$(6)\quad m^{ijk} = \alpha\delta^{k[i}\Omega^{j]l}{}_{,l} + 2\eta\Omega^{ij}{}_{,l}\delta^{kl} .$$

za kompatibilne deformacije, sem toga, naponski spreg je u konstitutivnim jednačinama odredjen samo simetričnim dijelom $m^{i(jk)}$. Ako se pored jednačina (6) uzmu u obzir i Lameove jednačine ravnoteže relacije (6) će se svesti na oblik u kome se pojavljuje samo $m^{i(jk)}$ i biće saglasne Mindlinovoj linearizaciji Tupinovih jednačina [13]

G L A V A III

UNUTRAŠNJI NAPONI

Problem odredjivanja unutrašnjih napona izazvanih inkompatibilnim deformacijama je u suštini složeniji od problema sa kompatibilnim deformacijama. Za tu složenost postoje dva osnovna uzroka:

1) Inkompatibilne deformacije su u opštem slučaju odredjene sa 9 distorzija $\phi_{m}^{(k)}$, dok se kompatibilne deformacije mogu izraziti pomoću svega tri analitičke funkcije, recimo koordinate pomjeranja.

2) Izvori inkompatibilnih deformacija su nemehaničke prirode, pa se pored jednačina mehanike mora voditi računa i o nemehaničkim osobinama materijala. Kod termičkih deformacija osnovnu ulogu igra sprovodljivost toplote materijala, kod naprezanja u elektro-magnetskom polju moraju se uzeti u obzir elektro-mehaničke osobine, a kod naprezanja izazvanih dislokacijama u suštini je bitna mikrostruktura materijala.

Ni za jednu od oblasti fizike koja razmatra pitanje složenih pojava ne može se reći da je došla do egzaktnih i definitivnih tumačenja, niti do tačnih fenomenoloških jednačina. Upravo iz tih razloga ni mi nijesmo u stanju da u ovome radu damo tačne odgovore na niz pitanja koja se sama po sebi nameću. Medjutim, u granicama današnjih saznanja u mogućnosti smo da na bazi napred izložene opšte teorije inkompatibilnih deformacija ukažemo na neke mogućnosti za rešavanje problema naponskog stanja. Pri tome će posebna pažnja biti posvećena slučaju da su distorzije zadane samo djelimično-rotorima osnovnih vektora distorzija. To pitanje je važno sa formalne tačke gledišta, stoga što se u načelu problem naponskog stanja, kad su distorzije potpuno zadane i kad su poznate odgovarajuće formalne zavisnosti, može se izvjesnom še još tačnošću da riješi, dok u našem slučaju to ipak (prema trenutnom stanju nauke) nije moguće.

Iz analize isključujemo pitanje napona kada su potpuno zadane elastične distorzije $\phi_\ell^{(\lambda)}$. Zamjenom zadanih vrijednosti tih distorzija u vezama (2.7 i 2.8 - II) izmedju napona i deformacije dobijaju se egzaktna rešenja.

3.1. Nesimetričan tenzor funkcija napona

Za odredjivanje unutrašnjih napona (u odsustvu zapreminskih sila) stoje na raspolaganju, u opštem slučaju, jednačine ravnoteže

(1) $$\sigma^{ij}_{,j} = 0$$

(2) $$\sigma^{[ij]} = m^{ijk}_{,k} .$$

Ako se u (1) tenzor napona σ^{ij} rastavi na simetričan i antisimetričan dio, $\sigma^{ij} = \sigma^{(ij)} + \sigma^{[ij]}$ i iskoristi uslov (2), preostaju tri ravnotežne jednačine

(3) $$\sigma^{ij}_{,j} + m^{ijk}_{,k} = 0 .$$

Metod funkcije napona može da se proširi na opšti slučaj nesimetričnog napona. Neka je χ_{mk} neki tenzor drugog reda. Posmatrajmo druge kovarijantne izvode $\chi_{mk,nl}$ ovog tenzora formirane s obzirom na metriku b_{ij} konfiguracije (0). Neposrednim računom se može provjeriti da je

(4) $$\sigma^{ij} = \epsilon^{ilk} \epsilon^{jnm} \chi_{mk,nl}$$

rešenje jednačine (1).

Ovo rešenje sadrži kao specijalan slučaj rešenje za simetričan tenzor napona. Ako je $\sigma^{ij}=\sigma^{(ij)}$, biće

$$(5)\qquad \sigma^{ij} = \in^{ilk} \in^{jnm} \chi_{(mk),nl} .$$

Odakle neposredno slijedi za nesimetričan dio napona

$$(6)\qquad \sigma^{[ij]} = \in^{ilk} \in^{jnm} \chi_{[mk],nl} .$$

Obrasci (5) i (6) mogu se takodje lako neposredno provjeriti.

3.2. Plastične distorzije

Plastične distorzije mogu biti zadane u odnosu na (I) konfiguraciju, tako da je

$$(1)\qquad \theta^{(\lambda)}_{L} = \theta^{(\lambda)}_{L} (X^1, X^2, X^3) .$$

Medjutim, naponsko stanje je odredjeno dopunskim elastičnim distorzijama $\phi^{(\lambda)}_{\ell}$ koje uspostavljaju vezu izmedju (N) i (D) konfiguracija. Ako je totalna deformacija (N) - (D) kompatibilna, prema (2.10 - I) biće

$$(2)\qquad \phi^{(\lambda)}_{\ell} = \theta^{(\lambda)}_{L} X^{L}_{;\ell} \qquad \phi^{\ell}_{(\lambda)} = \theta^{L}_{(\lambda)} x^{\ell}_{;L} ,$$

gdje su $X^L_{;\ell}$ i $x^{\ell}_{;L}$ gradijenti totalne deformacije odredjene sa (2.1 - I) i (2.2 - I).

Kada su poznate plastične distorzije (2) omogućavaju da se 9 nepoznatih distorzija izrazi pomoću svega tri nepoznate funkcije $X^L(x)$, odnosno $x^l(X)$.

S obzirom na jednačine (2) tenzori elastične deformacije $C_{\lambda\mu}$ i $D_{\lambda\mu\nu}$ mogu se izraziti u zavisnosti od gradijenata totalne deformacije

$$(3)\qquad C_{\lambda\mu} = b_{\ell m}\, x^{\ell}_{;L}\, x^{m}_{;M}\, \theta^{L}_{(\lambda)} \theta^{M}_{(\mu)} = C_{LM}\, \theta^{L}_{(\lambda)} \theta^{M}_{(\mu)} ;$$

$$(4)\qquad D_{\lambda\mu\nu} = b_{\ell m} \left[x^{\ell}_{;L} \left(x^{m}_{;MN}\, \theta^{M}_{(\mu)} + x^{m}_{;M}\, \theta^{M}_{(\mu),N} \right) \theta^{L}_{(\lambda)} \right]_{[\lambda\mu]} \theta^{N}_{(\nu)} .$$

Veze (2.7 i 2.8-II) izmedju napona i deformacije prilagodjene ovom slučaju glase

$$\sigma^{ij} = 2\rho\Big[\frac{\partial e}{\partial C_{\lambda\mu}}\theta^{L}_{(\lambda)}\theta^{M}_{(\mu)} x^{i}_{;L} x^{j}_{;M} +$$

(5)

$$+ \frac{\partial e}{\partial D_{\lambda\mu\nu}}\Big(\big(x^{(i}_{;L} x^{j)}_{;M}\, \theta^{L}_{[(\lambda)}\theta^{M}_{(\mu)]}\big)_{,\nu}\theta^{N}_{(\nu)} + \theta^{L}_{[(\lambda)}\theta^{M}_{(\mu)]}\theta^{N}_{(\nu)} x^{(i}_{;L} x^{j)}_{;MN}\Big)\Big]$$

(6) $$m^{ijk} = -\rho\frac{\partial e}{\partial D_{\lambda\mu\nu}}\theta^{L}_{[(\lambda)}\theta^{M}_{(\mu)]}\theta^{N}_{(\nu)} x^{i}_{;L} x^{j}_{;M} x^{k}_{;N}$$

Za odredjivanje naponskog stanja sada su nepoznate veličine: šest koordinata simetričnog napona $\sigma^{(ij)}$, devet koordinata naponskog sprega m^{ijk} i tri funkcije $x^i = x^i(X)$, što čini ukupno 18 nepoznatih veličina. Za njihovo odredjivanje imamo šest veza (5), devet veza (6) i tri jednačine ravnoteže (1.3) što čini 18 jednačina. Prema tome, bar sa formalne tačke gledišta problem je odredjen. Postupak posmatran u ovom odjeljku može se primijeniti na probleme termo-elastičnosti kao što je pokazano u [11].

3.3. Distorzije zadane rotorima

Polazeći od osnovnih veza (2.3,4,5,6,7,8-I) izmedju diferencijala koordinata X^L, u^λ i x^l u konfiguracijama (I),(N) i (D), predpostavićemo da su poznata jedino odstupanja tih veza od uslova integrabilnosti,

(1) $$\partial_L \theta^{(\alpha)}_M - \partial_M \theta^{(\alpha)}_L = \theta^{(\alpha)}_N S_{LM}^{\cdot\cdot N}$$

ili za elastične distorzije

(2) $$\partial_l \phi^{(\alpha)}_m - \partial_m \phi^{(\alpha)}_l = \phi^{(\alpha)}_n S_{lm}^{\cdot\cdot n}$$

Kao što je pokazano u odjeljku 2-I veličine $S_{LM}^{\cdot\cdot N}$ i $S_{lm}^{\cdot\cdot n}$ su koordinate tenzora torzije nekog linearno povezanog prostora L_3, koji odgovara konfiguraciji (N) inkompatibilno deformisanog materijala. Veličine $S_{LM}^{\cdot\cdot N}$ i $S_{lm}^{\cdot\cdot n}$ su koordinate istog tenzora $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ u L_3.

(3) $$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{LM}^{\cdot\cdot N}\theta^{L}_{(\lambda)}\theta^{M}_{(\mu)}\theta^{(\nu)}_{N} = S_{lm}^{\cdot\cdot n}\phi^{l}_{(\lambda)}\phi^{m}_{(\mu)}\phi^{(\nu)}_{n}$$

tako da postoji veza izmedju $S_{\alpha M}^{\cdot\cdot N}$ i $S_{lm}^{\cdot\cdot n}$ preko totalne deformacije

(4) $$S_{\alpha M}^{\cdot\cdot N} = S_{\lambda m}^{\cdot\cdot n}\, x^{\ell}_{;L}\, x^{m}_{;M}\, X^{N}_{;n} .$$

Prostor L_3 sa torzijom odredjenom formulama (1) ili (2) ima koeficijente linearne povezanosti odredjene sa

(5) $$\Gamma_{LM}^{N} = \theta^{N}_{(\alpha)}\, \partial_L\, \theta_M^{(\alpha)}$$

ili

(6) $$\Gamma_{\ell m}^{n} = \phi^{n}_{(\alpha)}\, \partial_\ell\, \phi_m^{(\alpha)}.$$

Iz strukture koeficijenata povezanosti neposredno se može zaključiti da je L_3 prostor sa apsolutnim paralelizmom, tj. Riman-Kristofelov tenzor u L_3 je nula tenzor

(7) $$\Gamma_{nm\ell}^{\cdot\cdot\cdot k} \equiv 2\left(\partial_n \Gamma_{m\ell}^{k} + \Gamma_{ns}^{k}\, \Gamma_{m\ell}^{s}\right)_{[nm]} .$$

Od tla slijedi da je L_3 meterički prostor. Sistem diferencijalnih jednačina za odredjivanje metrike,

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\ell\, g_{mn} \equiv \partial_\ell\, g_{mn} - \Gamma_{\ell m}^{s}\, g_{sn} - \Gamma_{\ell n}^{s}\, g_{ms}$$

dopušta g_{lm}, jer su uslovi integrabilnosti tog sistema

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_{[k}\, \overset{\Gamma}{\nabla}_{\ell]}\, g_{mn} = \Gamma_{k\ell(mn)} = 0$$

zbog (7) identički zadovoljeni.

Koeficijenti povezanosti L_3 mogu se u opštem slučaju izraziti u obliku

(8) $$\Gamma_{m\ell}^{k} = \overset{\prime}{g}{}_{m\ell}^{k} + S_{m\ell}^{\cdot\cdot k} - S_{\ell\cdot m}^{\cdot k} + S^{k}_{\cdot m\ell} ,$$

ili

(9) $$\Gamma_{m\ell k} = \overset{\prime}{g}_{m\ell k} + S_{m\ell k} - S_{\ell k m} + S_{k m \ell} ,$$

gdje je $\overset{\prime}{g}{}^{k}_{ml} = g^{kt} g_{mlt}$ Kristofelovi simboli druge, odnosno prve vrste.

(10) $$g'_{MLK} = \frac{1}{2}(\partial_M g_{LK} + \partial_L g_{MK} - \partial_K g_{ML})$$

Izrazi analogni (7), (8), (9) i (10) mogu se napisati za koeficijente povezanosti Γ^{L}_{KM} vezane za materijalne koordinate X^K u (I) konfiguraciji.

Rotorima distorzija odredjena je samo torzija prostora L_3,

(11) $$h_{MLK} = S_{MLK} - S_{LKM} + S_{KML} ,$$

dok je metrika neodredjena.

Ako je zadana torzija u odnosu na konfiguraciju (I) biće

(12) $$\Gamma_{MLK} = g'_{MLK} + h_{MLK} .$$

Tenzor $g_{ML} = g_{\mu\lambda}\phi^{(\mu)}_{M}\phi^{(\lambda)}_{L}$ je prema (3.12 - I) Košijev tenzor c^{K}_{LM} elastične deformacije, a $G_{LM} = g_{\mu\lambda}\theta^{(\mu)}_{M}\theta^{(\lambda)}_{L}$ Grinov tenzor G_{ML} plastične deformacije odredjen sa (3.3 - I). Ako je zadana torzija $S^{\cdot\cdot K}_{ML}$, za odredjivanje napona moraju se odrediti rotacina i plastična deformacija pored elastične. Pokazano je da u tom slučaju problem ne dopušta jedinstvena rešenja bez nekih dopunskih podataka ili predpostavki. Stoga ćemo se ograničiti na slučaj kada je torzija prostora L_3 zadana u odnosu na napregnutu euklidsku konfiguraciju (D). Pod predpostavkom da je naponsko stanje odredjeno simetričnim tenzorom napona taj problem su tretirali sa stanovišta nelinearne teorije elastičnosti za neprekidno rasporedjene dislokacije, B.A.BILBY i R.BULLOUGH. [5]

%.

U odnosu na sistem koordinata x^i definisan u konfiguraciji (D) osnovne jednačine za odredjivanje unutrašnjih napona su pored konstitutivnih jednačina (3.5) i (3.6) još uslovi ravnoteže (1.1), (1.2) odnosno (1.3), i uslov (7) da je L_3 prostor krivine nule. Ovaj poslednji uslov prema [5] naziva se osnovnim geometrijskim jednačinama za odredjivanje unutrašnjih napona.

Prema tome, nepoznate veličine su sada: devet distorzija, $\phi_i^{(\lambda)}$, devet koordinata napona σ^{ij}, devet koordinata m^{ijk} naponskog sprega i šest koordinata $g_{\lambda\mu}$ metričkog tenzora u L_3, što čini ukupno 33 nepoznate veličine. Za njihovo odredjivanje imamo 15 konstitutivnih jednačina (3.5) i (3.6), devet jednačina (7), i tri uslova ravnoteže (1.3), što čini ukupno 27 jednačina. Dakle, manje jednačina od broja nepoznatih veličina, pa bez daljih pred-postavki i ovaj problem ostaje neodredjen.

Ovdje se moraju učiniti dvije napomene. Kröner i Seeger su posmatrali jednostavniji slučaj. Predpostavili su da je napon pli-nom po deformacijama i da je simetričan, pa su nepoznate veličine bile: šest koordinata elastične deformacije ε_{ij} (ili šest koordinata ε_{ij}), a za njihovo odredjivanje su raspolagali sa šest veza izmedju napona i deformacije, tri uslova ravnoteže napona i šest uslova da je simetrični dio $\Gamma^{(ij)}$ Ajnštajnovog tenzora Γ^{ij} u L_3 jednak nuli.* To znači da je u njihovom slučaju ukupno 15 jednačina za odredji-vanje 12 nepoznatih. Medjutim, napon izražavaju preko tri funk-cije napona tako da time izjednačavaju broj jednačina sa brojem nepo-znatih.

Druga napomena se odnosi na fizikalnu odredjenost problema. Kada su zadane torzije u L_3 (napr. dislokacijama) problem je odre-djen, što znači da se moraju uvesti i neke do sada nenavedene predpo-stavke koje će povećati broj jednačina, odnosno smanjiti broj nepoz-natih veličina. Upravo uvodjenje naponskih spregova u teoriju elasti-čnosti čini jednu takvu predpostavku mogućom.

Ako je T_{ij} neki simetričan tenzor i

$$T'_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i T_{jk} + \partial_j T_{ki} - \partial_k T_{ij}\right)$$

---

* Uslov $\Gamma^{[ij]}=0$ u teoriji dislokacija je identičnost koja predsta-vlja uslov da linije dislokacija unutar tijela ne mogu da budu ot-vorene linije.

odgovarajući Kristofelov simbol prve vrste, u odnosu na metriku b_{kl} može se pisati

$$T'_{ijk} = T_{ijk} + b_{ij}^{s} T_{ks}$$

gdje je

$$T_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\overset{b}{\nabla}_i T_{jk} + \overset{b}{\nabla}_j T_{ki} - \overset{b}{\nabla}_k T_{ij} \right)$$

Sa takvim oznakama možemo pisati

$$\Gamma_{mlk} = g_{mlk} + b_{ml}^{s} g_{slk} + h_{mlk} \tag{13}$$

gdje su g_{mlk} i h_{mlk} tenzori. Ako se sada stavi $g_{ij} = b_{ij} - 2\,\varepsilon_{ij}$, gdje je ε_{ij} elastična deformacija, očigledno je $g_{mlk} = -2\,\varepsilon_{mlk}$. Stavimo još

$$\overset{*}{\Gamma}_{mlk} \equiv -2\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}$$

gdje je $\overset{*}{\Gamma}_{mlk}$ tenzor. Jednostavan, premda nešto duži račun pokazuje da se kovarijentni Riman-Kristofelov tenzor krivine Γ_{nmlk} sada može napisati samo pomoću kovarijantnih izvoda tenzora $\overset{*}{\Gamma}_{mlk}$ i samog tog tenzora, tako da jednačine (7) postaju

$$\Gamma_{nmlk} = 2\left(\overset{b}{\nabla}_n \overset{*}{\Gamma}_{mlk} - g^{pq}\, \overset{*}{\Gamma}_{nkp}\, \Gamma_{mlq} \right)_{[nm]} = 0 \tag{14}$$

Pošto je tenzor Γ_{nmlk} antisimetričan u odnosu na indekse <u>nm</u> i <u>lk</u> možemo ga zamjeniti Ajnštajnovim tenzorom Γ^{ij},

$$\Gamma^{ij} = g^{im} g^{jl} \Gamma_{nml}^{\cdots n} - \frac{1}{2} g^{ij}\Gamma = \frac{1}{4}\epsilon^{ilk}\epsilon^{jnm}\Gamma_{nmlk}$$

tako da imamo devet jednačina oblika

$$\Gamma^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ilk}\epsilon^{jnm}\Big[\overset{b}{\nabla}_n(-2\varepsilon_{mlk} + h_{mlk}) - g^{pq}(-2\varepsilon_{nkp} + h_{nkp})(-2\varepsilon_{mlq} + h_{mlq}) \Big] = 0 \tag{15}$$

Inverzijom veza izmedju napona i deformacije Kröner i Seger u jednačinama $\Gamma^{ij} = 0$, uvode napone izražene preko funkcija napona i iteracijom rešavaju problem sa željenom tačnošću.
U opštem slučaju inverzija konstitutivnih jednačina nije moguća. Sa druge str ne postoji beskonačno mnogo prostora L_3 sa istom torzijom, pa samo jednačine (15) nijesu dovoljne za odredjivanje

bilo metrike g_{ij}, bilo deformacije ε_{ij}.

Mi ćemo ovdje učiniti jednu predpostavku. Predpostavimo da je naponsko stanje odredjeno rotorima elastičnih distorzija, odnosno torzijom $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ u L_3. Svi prostori sa povezanošću $\Gamma_{nlk} = g'_{nlk} + h_{nlk}$ su metrički kakav god bio tenzor g_{ij}. Predpostavimo da se unošenjem torzije $S_{ij}^{\cdot\cdot k}$ nije promijenila struktura metrike prostora, već je euklidskoj strukturi samo "dodana" torzija.

Kako je metrička struktura nekog prostora odredjena Kristofelovim simbolima druge vrste neposredna posledica naše predpostavke je jednačina

$$g_{ij}^{\prime k} = b_{ij}^{\prime k} \tag{16}$$

odnosno da su koeficijenti povezanosti prostora L_3

$$\Gamma_{ij}^{k} = b_{ij}^{\prime k} + S_{ij}^{\cdot\cdot k} - S_{j\cdot i}^{\cdot k} + S_{\cdot\cdot ij}^{k} . \tag{17}$$

Ovaj slučaj mi smo razmatrali u odjeljku 2 - II, gdje je nadjeno da se metrike prostora L_3 i E_3 odgovarajućih konfiguracija (a) i (b) mogu da razlikuju samo za konstantni množitelj, prema (2.17-II). Neka je taj konstantni množitelj (λ = const).

Zbog (17) tenzor deformacije $D_{\lambda\mu\nu}$, vezan za postojanje naponskih spregova, dobija vrlo jednostavan oblik

$$D_{\lambda\mu\nu} = h_{nkl} \Phi^{n}_{(\nu)} \Phi^{k}_{(\mu)} \Phi^{l}_{(\lambda)} , \tag{18}$$

odakle se vidi da su upravo rotori distorzija (tj. inkompatibilnosti distozrija) neposredni izvori naponskih spregova.

Pored (2.17-II) i (18) u opštem slučaju je potrebno odrediti i distorzije. Polazeći od jednačina (6), možemo sada pisati

$$\Gamma_{nm}^{l} \equiv \Phi^{l}_{(\alpha)} \partial_n \Phi_m^{(\alpha)} = b'^{l}_{nm} + h_{nm}^{\cdot\cdot l} , \tag{19}$$

gdje je desna strana poznata. Prema tome za odredjivanje distorzije imamo sistem parcijalnih jednačina

$$\partial_n \Phi_m^{(\alpha)} = \Phi_\ell^{(\alpha)} \Gamma_{nm}^{\ \ \ \ell} . \tag{20}$$

Preko ovih jednačina (njihovim rešavanjem) i korišćenjem konstitutivnih jednačina mogu naponi u prostoru da se odrede.

Egzistencija distorzija Φ_m^α zavisi od integrabilnosti sistema jednačina (20). Ako uslove integrabilnosti izrazimo u obliku

$$\partial_k \partial_n \Phi_m^{(\alpha)} - \partial_n \partial_k \Phi_m^\alpha = 0$$

i primijenimo ih na desnu stranu jednačine (20), ti se uslovi svode na oblik

$$\Phi_s^\alpha \Gamma_{knm}^{\ \ \ \ \ \cdots s} \equiv 0 ,$$

odnosno, zbog toga što ovaj uslov mora da bude identički zadovoljen, na

$$\Gamma_{knm}^{\ \ \ \ \ \cdots s} = 0 .$$

Kako su, u ovdje posmatranom slučaju, koeficijenti povezanosti oblika datog u (17), uslovi integrabilnosti se svode na

$$\overset{b}{\nabla}_k h_{nm}^{\ \ \cdot\cdot s} - \overset{b}{\nabla}_n h_{km}^{\ \ \cdot\cdot s} + h_{nm}^{\ \ \cdot\cdot t} h_{kt}^{\ \ \cdot\cdot s} - h_{nt}^{\ \ \cdot\cdot s} h_{kn}^{\ \ \cdot\cdot t} \equiv 0 . \tag{21}$$

Prema tome, ako rotori distorzija, odnosno tenzori torzije prostora L_3, identički zadovoljavaju uslov (21) metrički tenzor prostora L_3 je sigurno oblika (2.17 - II), i sigurno postoje elastične distorzije koje su rešenja jednačine (20), a koje prevode konfiguraciju (L) u konfiguraciju (Λ).

U linearnoj aproksimaciji se mogu staviti, kao i u odjeljku (3 - II)

$$\Phi_\ell^{(\lambda)} = \delta_\ell^\lambda + \mathcal{V}^\lambda_{\cdot \ell} \ ; \ \Phi_{(\lambda)}^\ell = \delta_\lambda^\ell - \mathcal{V}_{\cdot\lambda}^\ell$$

gdje su male veličine u poredjenju sa jedinicom. Ako su i h_{nml} male veličine (što moraju biti ako je linearna aproksimacija dopustiva), iz (18) se može napisati

$$D_{\lambda\mu\nu} \approx h_{nk\ell} \delta_\nu^n \delta_\mu^k \delta_\lambda^\ell . \tag{22}$$

Takodje, prema (3.4-11), za tenzor deformacije se može pisati u prvoj aproksimaciji

$$C_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + 2E_{\lambda\mu}$$

Medjutim, zbog predpostavke o redu veličine distorzija ∇_{e}^{λ} može se pisati

(23)

$$E_{\lambda\mu} = \varepsilon_{em}\, \phi^{e}_{(\lambda)}\, \phi^{m}_{(\mu)} \approx \varepsilon_{em}\, \delta^{e}_{\lambda}\, \delta^{m}_{\mu} \, .$$

Kako je

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{2}\left(b_{em} - g_{em}\right) = \frac{1-\lambda}{2}\, b_{em} \, ,$$

to je

(24)

$$E_{\lambda\mu} = \frac{1-\lambda}{2}\, b_{em}\, \delta^{e}_{\lambda}\, \delta^{m}_{\mu} .$$

Ovim su deformacije odredjene do na množitelj λ. Zamenom vrijednosti za $t_{\lambda\mu}$ i $C_{\lambda\mu}$ u linearizovanim konstitutivnim jednačinama mogu se u linearnoj teoriji u potpunosti odrediti naponi; konstantan množitelj λ može se odrediti iz graničnih uslova.

S a d r ž a j

Literature

1 [illegible], Mémoires scientifiques par savants, [illegible] Paris 18[illegible].

2 [illegible], Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper, Leipzig 1885.

3 [illegible], Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

4 [illegible], und [illegible], Z. Naturf. 14[illegible], 1[illegible]4 (19[illegible]).

5 [illegible] und [illegible], Arch. Rat. Mech. Anal. 3, [illegible]7-1[illegible] (1959).

6 [illegible], Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 273-334 (196[illegible]).

7 [illegible], [illegible] Memoire Vols 1, 2, 3. [illegible] [illegible]-kai, [illegible] 1955, 1959, 196[illegible].

8 [illegible] and [illegible], Proc. Roy. Soc. London, [illegible] 2[illegible], [illegible] (1955).

9 [illegible] and [illegible], Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 23[illegible], [illegible]-5[illegible] (1956).

10. [illegible], Physica Status Solidi 2, 566 (19[illegible]).

11. [illegible], [illegible], [illegible], Finite thermal deformations. [illegible] Arch. Appl. Mech.

12. [illegible], Int. J. Engng. 1, 261-272 (1963).

13. [illegible], Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 385-414 (19[illegible]).

14. [illegible] and [illegible], Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 415-44[illegible] (1962).

15. [illegible] and [illegible], Classical Field Theories. Handb. Phys. (Enc. Phys.) III/1, Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (196[illegible]).

16. [illegible] and [illegible], Arch. Rat. Mech. Anal. [illegible], [illegible] (1959)

Pored eksplicitno navedene literature u tekstu korišćena je i sledeća literatura:

1. TATOMIR P. ANDJELIĆ: Tenzorski račun. Naučna knjiga, Beograd 1952.

2. R. STOJANOVIĆ: Osnovi diferencijalne geometrije. Gradjevinska knjiga, Beograd-1963.

3. R. STOJANOVIĆ: Nelinearni kontinuum (skripta za treći stepen studija na Prirodno-matematičkom fakultetu)

4. V.V. NOVOŽILOV: Teorija elastičnosti, Lenjingard-1958.

5. DŽ. EŠELBI: Neprekidna teotrija dislokacija, prevod na ruskom, Moskva-1963.

6. VAN BJUREN: Defekti u kristalima, prevod na ruskom, Moskva-1962.