BESKONAČNO MALA SAVIJANJA

REBRASTIH CILINDROIDA

Doktorska disertacija

Milice Ilić-Dajović

Beograd

1965.

I. Uvod

Diferencijalna geometrija u celom je ona oblast diferencijalne geometrije u kojoj se krive, površi i višedimenzione mnogostrukosti neposredno proučavaju kao celine. Za takva proučavanja često nije dovoljan uobičajeni aparat ~~xxfx~~ klasične diferencijalne geometrije, već se koriste i primenjuju razmatranja, ideje i rezultati topologije, teorije funkcija i teorije ljusaka.

Prvi rezultati iz diferencijalne geometrije u celom pripadaju K. F. Gausu, koji je svojim kapitalnim delom "Disquisitiones aritmeticae circa superficies curvas" (1827.) postavio osnove dubokom proučavanju površi (v. npr. Blaschke [1]). Otada problemi diferencijalne geometrije u celom nisu prestali da privlače pažnju matematičara; tako je A. Cauchy dokazao jednoznačnu definisanost konveksnog poliedra (v. npr. [2]), G. Darboux je krajem prošlog veka došao do niza značajnih rezultata koje je objavio u svojoj "Théorie des surfaces" [3] itd. Iako su se stalno javljali novi rezultati, diferencijalna geometrija u celom se kao posebna oblast diferencijalne geometrije, sa svojim sopstvenim metodama i problemima, počela sistematski razvijati tek pre pedesetak godina, kad se znatan broj matematičara pretežno ili skoro isključivo posvetio istraživanju u toj oblasti geometrije. Od tog vremena počeli su se isticati pojedini pravci u diferencijalnoj geometriji u celom, koji se oblikuju karakterističnim načinom prilaženja problemima i povezivanjem istraživanja sa drugim oblastima matematike.

Ne zadržavajući se na mnogobrojnim naučnim rezultatima u toj oblasti i na imenima matematičara koji su ih postigli došli, istaći ćemo samo to da su se problemima diferencijalne geometrije u celom bavili i . Hilbert [4] , H. Weyl [5] , S. Cohn-Vossen, [6] , W. Blaschke [1] , H. Minkowski [1] , H. Liebmann [8] , a u poslednjih trideset godina značajne rezultate u toj oblasti dali su i daju A. D. Aleksandrov [9] , I. N. Vekua [10] , A. Fembs [11] , N. V. Jefimov [12] , A. V. Pogorelov [13] i drugi.

U diferencijalnoj geometriji u celom teorija beskonačno malih savijanja predstavlja posebno područje koje je, s jedne strane, vezano s prvim fundamentalnim rezultatima obe stignutim u toj oblasti geometrije, a s druge strane uzajamno se prožima s najnovijim istraživanjima u teoriji parcijalnih jednačina (I. N. Vekua. I. N. Bakeljman, B. J. Bojarski), teoriji ljuska (I. N. Vekua, A. V. Pogorelov) i varijacionom računu. I pored ne malog broja dosad dobijenih rezultata, teorija beskonačno malij savijanja površi ima još mnogo nerešenih pitanja i, u poređenju s klasičnom geometrijom, nema još ni izdaleka tako bogat fond naučno ispitanih i dokazanih činjenica.

Već i sama klasifikacija površi na osnovu njihove Gausove krivine nametnula je izvesno grupisanje problema u teoriji beskonačno malih savijanja površi prema vezanosti tih problema za površi čija je Gausova krivina $K > 0$, $K < 0$ ili $K = 0$. Mogućnost dobijanja rezultata u tom istraživanjima bitno zavisi od toga do kakvih se parcijalnih diferencijalnih jednačina dolazi; to je u znatnoj meri uticalo na usmeravanje pažnje istraživača prvenstveno na regularne površi, dok su neregularne površi daleko manje proučavane (v. npr. Aleksandrov [9; 2]).

Medju svim površima Gausove krivine $K = 0$, dosad su proučavane samo regularni cilindroidi (v. npr. E. Rembs [11; 4], N.V. Jefimov [12; 4], E. G. Poznjak [14; 1], I. G. Iljin [15]), cilindrični žlebovi (E. G. Poznjak) i neke obrtne površi, dok neregularne cilindrične površi sa singularnim linijama nisu još proučavane. Medjutim, upravo ove površi predstavljaju veoma interesantan objekt istraživanja jer, s jedne strane, u i izvesnom smislu predstavljaju generalizaciju odgovarajućih regularnih površi, a s druge, raznolikošću svojih modaliteta pružaju mogućnosti za dublje upoznavanje svojstava unutrašnje strukture takvih površi.

Iz tog razloga predmet istraživanja u ovom radu čine dve klase dosad neproučavanih neregularnih površi Gausove krivine $K = 0$. Dobijeni rezulzazi pokazuju da je zaista bilo opravdan proučavati beskonačno mala savijanja takvih neregularnih površi i da je ovo istraživanje dalo jedan nov prilog opštoj teoriji beskonačno malih savijanja površi Gausove krivine $K = 0$.

II. O beskonačno malom savijanju površi

2.1. Beskonačno malo savijanje I reda

Ovde ćemo izložiti one činjenice opšte teorije beskonačno malih savijanja površi na koje ćemo sa u ovom radu pozivati. Pri tom ćemo se ograničiti isključivo na beskonačno malo savijanje I reda, koje smo proučavali kod rebrastih cilindroida i bicilindroida.

Neka je $S(\varepsilon)$ jednoparametarska porodica površi kojoj, za $\varepsilon = 0$, pripada površ S. Neprekidno i uzajamno jednoznačno preslikavanje površi S u porodicu $S(\varepsilon)$ nazivamo deformacijom; ako su pri tom sve površi porodice $S(\varepsilon)$ izometrične, deformaciju nazivamo savijanjem.

Za razliku od savijanja u običnom smislu, pri kojem dužina ma koje krive na površi S ostaje invarijantna (i samim tim su i uglovi izmedju odgovarajućih krivih jednaki), ovde ćemo posmatrati beskonačno malo savijanje pri kojem se dužina luka deformisane krive na površi $S(\varepsilon)$ razlikuje od dužine luka odgovarajuće krive na datoj površi S za beskonačno malu višeg reda u odnosu na parametar deformacije.[1]

---

[1] To je u stvari beskonačno malo savijanje I reda, što u daljem izlaganju nećemo više izričito isticati. Beskonačno malo savijanje drugog reda definišemo kao deformaciju pri kojoj se dužina luka l_ε na deformisanoj površi razlikuje od dužine odgovarajućeg luka l na datoj površi S za beskonačno malu višeg reda u odnosu na kvadrat parametra deformacije.

Na odgovarajući način definišu se i beskonačno mala savijanja čiji je red viši od drugog.

Neka je

$$(2.1.1) \qquad \bar{x} = \bar{x}(u,v)$$

vektorska jednačina površi S, za koju ćemo pretpostaviti da je u svakoj svojoj tački regularna (to jest da je u svakoj tački $[\bar{x}_u, \bar{x}_v] \neq 0$), i neka se ona neprekidno i uzajamno jednoznačno preslikava u površ

$$(2.1.2) \qquad \bar{x}_\varepsilon \equiv \bar{x}(u,v,\varepsilon) = \bar{x}(u,v) + \varepsilon\bar{z}(u,v),$$

gde je ε parametar deformacije, a $\bar{z}(u,v)$ polje brzinâ promene položaja tačaka date površi S. Pretpostavimo da su vektorske funkcije $\bar{x}(u,v)$ i $\bar{z}(u,v)$ i njihovi parcijalni izvodi I i II reda neprekidni na celoj površi S. Kako je iz (2.1.2)

$$d\bar{x}_\varepsilon^2 = d\bar{x}^2 + 2\varepsilon\, d\bar{x}\, d\bar{z} + \varepsilon^2 d\bar{z}^2,$$

za element luka ds_ε krive l_ε imamo

$$ds^2 = ds^2 + 2\varepsilon\, d\bar{x}\, d\bar{z} + \varepsilon^2 d\bar{z}^2,$$

a deformacija (2.1.2) biće beskonačno malo savijanje ako je [6; 4]

$$(2.1.3) \qquad d\bar{x}\, d\bar{z} = 0,$$

gde je $d\bar{x}$ diferencijal u proizvoljnom pravcu na površi S. Parcijalna diferencijalna jednačina (2.1.3) je osnovna jednačina beskonačno malog savijanja (v. npr. [6; 4]), koju treba da zadovoljava polje brzinâ $\bar{z}(u,v)$ na površi S; ona je ekvivalentna sistemu jednačina

$$(2.1.4)\quad \begin{cases} \bar{x}_u\bar{z}_u = 0, \\ \bar{x}_u\bar{z}_v + \bar{x}_v\bar{z}_u = 0, \\ \bar{x}_v\bar{z}_v = 0 \end{cases}$$

iz kojeg neposredno izvodimo zaključak da pri posmatranoj deformaciji mora postojati vektor $\bar{y}(u,v)$ koji je ortogonalan na $\bar{z}_u$ i $\bar{z}_v$ i, prema tome, zadovoljava jednačinu

$$(2.1.5)\qquad d\bar{z} = [\bar{y}, d\bar{x}].$$

S druge strane, ma koje vektorsko polje $\bar{y}(u,v)$ i odgovarajuće polje $\bar{z}(u,v)$ takvo da je zadovoljena jednačina (2.1.5) ili ovoj ekvivalentan sistem

$$(2.1.6)\qquad \begin{cases} \bar{z}_u = [\bar{y}, \bar{x}_u]; \\ \bar{z}_v = [\bar{y}, \bar{x}_v] \end{cases}$$

povlače za sobom zaključak da $\bar{z}(u,v)$ zadovoljava i jednačine (2.1.4) i da je to, dakle, polje brzinâ nekog beskonačno malog savijanja. Na osnovu ovog rasudjivanja zaključujemo da, ako smo za datu površ $\bar{x}(u,v)$ našli vektorsko polje $\bar{y}(u,v)$, tada se zadatak odredjivanja deformacije (2.1.2) svodi na odredjivanje polja $\bar{z}(u,v)$ iz parcijalne diferencijalne jednačine (2.1.5) ili iz sistema (2.1.6). Time bi osnovni zadatak teorije beskonačno malih savijanja i reda bio rešen.

Beskonačno malo savijanje nazivamo trivijalnim ako je $\bar{y} = \text{const.}$; tada je, iz (2.1.5),

$$\bar{z} = \bar{a} + [\bar{b}, \bar{x}],$$

gde su $\bar{a}$ i $\bar{b}$ konstantni vektori, polje brzinâ površi S kao krutog tela; površ S nazivamo u tom slučaju krutom.

Ako pak polje $\bar{y}(u,v)$ nije konstantno, beskonačno malo savijanje je netrivijalno; tada je $\bar{y}(u,v)$ vektor trenutne rotacije svakog pramena linijskih elemenata površi S.

Iz jednačina (2.1.6) se, uzimajući u obzir jednakost $\bar{z}_{uv} = \bar{z}_{vu}$, dobija uslov

$$[\bar{y}_v, \bar{x}_u] = [\bar{y}_u, \bar{x}_v],$$

koji znači da vektori $\bar{y}_u$ i $\bar{y}_v$ leže u tangentnoj ravni površi S, to jest da postoje takve skalarne funkcije $\alpha(u,v)$, $\beta(u,v)$ i $\gamma(u,v)$ da je

$$\text{(2.1.7)} \qquad \begin{cases} \bar{y}_u = \alpha\,\bar{x}_u - \beta\,\bar{x}_v, \\ \bar{y}_v = \gamma\,\bar{x}_u - \alpha\,\bar{x}_v. \end{cases}$$

Da bi se ove funkcije odredile, a samim tim da bi se odredilo najpre polje $\bar{y}(u,v)$, a zatim i polje $\bar{z}(u,v)$ i time do kraja rešio problem odredjivanja netrivijalnog beskonačno malog savijanja date površi S, jednačine (2.1.7) treba diferencirazi po <u>v</u> (prvu) i po <u>u</u> (drugu), razložiti po vektorima $\bar{x}_u$, $\bar{x}_v$, $\bar{n}$ i uporediti. Na taj se način dobija sistem Gauss -Codazzi-evih jednačina

$$\text{(2.1.8)} \qquad \begin{cases} L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0, \\ \alpha_v - \beta_u = \Gamma_{11}^{1}\gamma - 2\Gamma_{12}^{1}\alpha + \Gamma_{22}^{1}\beta, \\ \alpha_u - \beta_v = \Gamma_{11}^{2}\gamma - 2\Gamma_{12}^{2}\alpha + \Gamma_{22}^{2}\beta, \end{cases}$$

u kojima su L, M i N koeficijenti II kvadratne forme površi

S, a Γ^i_{jk} (i, j, k = 1, 2) su Christoffel-ovi simboli I vrste (v. npr.[1;1]):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{+GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2}, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2W^2},$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2W^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2W^2},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2W^2}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{+EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2},$$

gde su E, F, G koeficijenti metričke forme površi S, a $W^2 = EG - F^2$.

Sistem jednačina (2.1.8) dobija svoj konkretan oblik zavisno od površi S. Na primer, za cilindrični pojas presečen dvema paralelnim ravnima definisan vektorskom jednačinom

$$\bar{x} = \bar{x}(s) + v\,\bar{a}(s),$$

gde je s luk jednog ruba tog pojasa (i to onog ruba u čijoj se ravni nalazi koordinatni početak i čija je vektorska jednačina, prema tome, $\bar{x} = \bar{x}(s)$), $\bar{a}(s)$ je vektor na njegovoj izvodnici, a $v \in [0, 1]$, imamo da je u prvoj od jednačina (2.1.8)

$$M = N = 0,$$

a pod pretpostavkom da rubovi tog pojasa ne sadrže pravolinijskih odsečaka je

$$L \neq 0 \quad \text{i, prema tome,} \quad \gamma = 0;$$

pored toga je

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{\lambda(s)}{1 + v\lambda(s)}, \qquad \Gamma_{22}^{1} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^{2} = 0, \qquad \Gamma_{22}^{2} = 0,$$

gde je $\lambda = \lambda(s)$ skalarna funkcija takva da je $1 + \lambda(s) > 0$ i $\bar{a}'(s) = \lambda(s)\bar{x}$.

Na taj se način dobija sistem jednačina (v. npr. [12;4])

$$\begin{cases} \alpha_v = -\dfrac{2\lambda(s)}{1 + v\lambda(s)}\,\alpha \\ \alpha_s - \beta_v = 0, \end{cases}$$

iz kojeg se odredjuju funkcije $\alpha(s,v)$ i $\beta(s,v)$, a pomoću ovih se iz sistema (2.1.7) odredjuje polje rotacija $\bar{y}(s,v)$ cilindričnog pojasa.

Za beskonacno malo savijanje površi važno je, kao jednu od karakteristika te deformacije, istaći da usled tog savijanja površi svaki njen linijski element dobija nenegativan priraštaj koji je infinitezimala II reda u odnosu na parametar deformacije [10;1]; to znači da beskonačno malo savijanje nije praćeno nikakvim sažimanjem.

2.2. Rezultati ispitivanja beskonačno malog savijanja rebrastih cilindroida i bicilindroida

Predmet ovog rada je ispitivanje beskonačno malog savijanja prvog reda dveju novih klasa neregularnih površi Gausove krivine $K = 0$ – rebrastih cilindroida i bicilindroida;

i jedna i druga klasa površi u ovom radu se prvi uvode kao objekt istraživanja diferencijalne geometrije. Ispitivanje beskonačno malog savijanja rebrastih cilindroida obuhvaćeno je u IV poglavlju, a V poglavlje je posvećeno beskonačno malom savijanju bicilindroida; pre toga je, u III poglavlju, proučeno beskonačno malo savijanje neregularnih krivih koje su sastavljene od glatkih lukova i koje takodje nisu dosad proučavane u diferencijalnej geometriji. – U tim trima poglavljima izloženi su rezultati ~~xm~~ koje smo u tom ispitivanju dobili.

U III poglavlju, u razdelu 3.1, ispituje se beskonačno malo savijanje klase A i klase B neregularnih deo po deo glatkih krivih kojima pripadaju rubovi rebrastih cilindroida tipa A i tipa B. Za beskonačno malo savijanje krive L_A klase A, čije su singularne tačke prelomne, dokazuje se

T e o r e m a I. – Ako je pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju krive L_A varijacija I reda dužine ma kojeg njenog glatkog luka l_i jednaka nuli i krivina se ni na kojem od lukova l_i ne smanjuje, tada je netrivijalna komponenta polja brzinâ tog savijanja ortogonalna na ravan krive L_A.

Za beskonačno malo savijanje krive L_B klase B, čije su singularne tačke povratne, dokazuje se u razdelu 3.2 teorema II, čija je formulacija analogna formulaciji teoreme I, ali ~~xxxx~~ se njen dokaz, uslovljen karakterom singularnih tačaka krive L_B, bitno razlikuje od dokaza teoreme I. U istom razdelu dokazuje se i teorema III, koja se odnosi na neregularne krive čije su singularne tačke delom prelomne, a delom povratne i koja, kao svoje posebne slučajeve, obuhvata prethodne dve teoreme.

Teorema I., teorema II i teorema III ulaze u osnove na kojima se temelji ispitivanje beskonačno malog savijanja rebrastih cilindroida tipa A, odnosno tipa B i mešovitog tipa.

Rebrasti cilindroid je deo po deo regularna površ Gausove krivine K = 0; homeomorfan je cilindričnom pojasu, a njegovi rubovi su krive klase A ili krive klase B, prema čemu i razlikujemo rebraste cilindroide tipa A i tipa B. Rubovi običnih rebrastih cilindroida leže u paralelnim ravnima; takve površi su, u stvari, posebni slučajevi opštih rebrastih cilindroida, čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima koje se seku van cilindroida.

Za beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida C_A tipa A dokazuje se u IV poglavlju, u razdelu 4.1,

T e o r e m a IV. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_A, na njegovim rubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

Za beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida C_B tipa B dokazuje se u razdelu 4.2 teorema V, koja je po svojoj formulaciji analogna teoremi IV (jer se odnosi na isto svojstvo beskonačno malog savijanja), ali je njen dokaz bitno drugačiji.

Teorema IV i teorema V obuhvaćene su opštom teoremom VI, koja, slično prvim dvema, utvrdjuje dovoljan uslov za netrivijalno beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida mešovitog tipa, to jest takvih čije su singularne linije delom tipa A delom tipa B.

U razdelu 4.3 ispituju se opšti rebrasti cilindroidi, to jest oni čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima. Za ove površi se, na osnovu poznatih svojstava njihovog projektivnog preslikavanja u rebraste cilindroide s ~~paralelnim~~ rubovima u paralelnim ravnima i na osnovu prethodno dokazanih teorema IV, V i VI, dokazuje

T e o r e m a VII. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju opštih rebrastih cilindroida, na njihovim rubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

Zatim se u razdelu 4.4 posmatraju zatvoreni rebrasti cilindroidi. Kao posledica prethodnih teorema navodi se teorema VIII, kojom se utvrdjuje da takva površ u celom dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje, a potom se dokazuje

T e o r e m a IX. - Omotač zatvorenog rebrastog cilindroida ne dopušta beskonačno malo netrivijalno savijanje.

U V poglavlju je obradjeno beskonačno malo savijanje bicilindroida. Bicilindroidi su takodje deo po deo regularne površi Gausove krivine K = 0, ali dok je rebrasti cilindroid sastavljen od konačno mnogo ~~žl~~ cilindričnih žlebova slepljenih duž slobodnih izvodnica, dotle je bicilindroid sastavljen od dva obična cilindroida slepljena duž zajedničkog ruba; razume se, bicilindroid, isto kao ni rebrasti cilindroid, nema samopreseka.

Za beskonačno malo savijanje bicilindroida najpre se, u razdelu 5.1, dokazuje

T e o r e m a X. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju bicilindroida, na njegovim slobodnim rubbovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

Uopštenje teoreme X je teorema XI, koja se odnosi na beskonačno malo savijanje bicilindroida čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima.

Za zatvorene bicilindroide se, u razdelu 5.2, kao posledica prethodnih teorema navodi teorema XII, a naposletku se dokazuje

T e o r e m a XIII. - Omotač zatvorenog bicilindroida ne dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje.

Time se ispitivanje beskonačno malog savijanje rebrastih cilindroida i bicilindroida završava.

III. Beskonačno malo savijanje I reda krivih klase A i krivih klase B

3.1. Beskonačno malo savijanje krivih klase A

D e f i n i c i j a. 1. - Za krivu L_A govorićemo da pripada klasi A ako je L_A

1) ravna kriva homeomorfna krugu i

2) sastavljena od konačno mnogo glatkih lukova l_1, l_2, ..., l_n (pri čemu je, u opštem slučaju, L_A u celom nekonveksna) koji nemaju pravolinijskih odsečaka i sastaju se u prelomnim tačkama s_1, s_2, ..., s_n krive L_A.

Za beskonačno malo savijanje krive L_A u celom, dakle deo po deo glatke zatvorene, u opštem slučaju nekonveksne krive, dokazaćemo sledeću teoremu[17; 1,2]:

T e o r e m a I. - Ako je pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju krive L_A varijacija I reda dužine ma kojeg njenog glatkog luka l_i jednaka nuli i krivina se ni na kojem od lukova l_i ne smanjuje, tada je netrivijalna komponenta polja brzinâ tog savijanja ortogonalna na ravan krive L_A [2).]

Pri tome ćemo krivinu k(s) shvatiti kao modul izvoda drugog reda vektorske funkcije $\vec{r}(s)$ kojom se odnosni luk defini-

---

1) U teoremi I navedene su samo varijacije I reda dužine luka jer nam za beskonačno malo savijanje I reda varijacije višeg reda nisu potrebne. Razume se, teorema I se može formullisati i dokazati i za beskonačno mala seavijanja višeg reda krive L_A; pri tom bi se, u iskazu teoreme, varijacije I reda dužine luka morale zameniti odgovarajućim varijacijama višeg reda.

san, dakle

$$k(s) = \sqrt{\left(\frac{d^2\bar{x}}{ds^2}\right)^2} \geqslant 0,$$

a varijaciju dužine luka uzimaćemo polazeći od tačke u kojoj je krivina k(s) veća od nule.

D o k a z. – Neka je

$$\bar{x} = \bar{x}(s)$$

vektorska jednačina krive L_A, pri čemu je početak vektora $\bar{x}(s)$ u ravni krive L_A, <u>s</u> je dužina krive L_A, a $\bar{x}(s)$ je neprekidna periodična funkcija s periodom jednakim dužini krive L_A. Ne ograničavajući opštost daljih rasudjivanja, posmatraćemo krivu L_A sastavljenu od dva glatka luka l_1 i l_2; vektorska jednačina krive L_A je tada

$$\bar{x}(s) = \begin{cases} \overset{1}{\bar{x}}(s), & s_o \leqslant s \leqslant s_1, \\ \overset{2}{\bar{x}}(s), & s_1 \leqslant s \leqslant s_2, \quad s_2 \equiv s_o, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

gde su s_o i s_1 ($s_2 \equiv s_o$) singularne tačke te krive, a kraj vektora $\bar{x} = \overset{i}{\bar{x}}(s)$ opisuje odgovarajući luk l_i krive L_A.

Kriva L_A je definisana tako da, očigledno, pripada klasi krivih sa ograničenom varijacijom zaokreta u smislu Pogorelova [13; 1], sa konačno mnogo prelomnih tačaka. Pogorelov je dokazao da krive sa ograničenom varijacijom zaokreta imaju u svakoj svojoj tački levu i desnu polutangentu i da su rektificibilne. Na osnovu tog prvog stava, za regularne vektorske funkcije $x(s)$ pretpostavićemo da dopuštaju regularna produženja preko krajeva s_{i-1} i s_i lukova l_i ($i = 1, 2$), a drugi stav iskoristićemo kasnije, prilikom integracije.

Očigledno, u singularnim tačkama s_i krive L_A je

$$\overset{1}{\bar{x}}(s_o) = \overset{2}{\bar{x}}(s_2), \qquad \overset{1}{\bar{x}}(s_1) = \overset{2}{\bar{x}}(s_1) \qquad (s_2 \equiv s_o),$$

a na osnovu definicije krive L_A, to jest na osnovu prirode njenih singularnih tačaka s_i je

$$\left[\overset{1}{x}'(s_o^+), \overset{2}{x}'(s_o^-) \right] \neq 0,$$

$$\left[\overset{1}{x}'(s_1^-), \overset{2}{x}'(s_1^+) \right] \neq 0,$$

gde su sa $\overset{1}{x}'(s_o^+)$, $\overset{2}{x}'(s_1^+)$, $\overset{1}{x}'(s_o^-)$, $\overset{2}{x}'(s_o^-)$ obeleženi desni, odnosno levi izvodi funkcijâ $\overset{i}{x}(s)$ u tačkama $s_o \equiv s_2$ i s_1. Kako se lako može videti, jedinični vektor binormale jednoznačan je u svakoj tački krive L_A.

Neka je dvaput neprekidna diferencijabilna vektorska funkcija $z(s)$ polje brzinâ beskonačno malog savijanja krive L_A; deformisana kriva L_{A_ε} odredjena je tada vektordkom jednačinom

$$(3.1.2) \qquad \bar{x}_\varepsilon \equiv \bar{x}(s, \varepsilon) = \bar{x}(s) + \varepsilon \bar{z}(s),$$

gde je ε parametar tog savijanja, a $\bar{z}(s)$ je periodična vektorska funkcija s periodom jednakim dužini krive L_A.

U slučaju beskonačno malog savijanja krive L_A, za svaki njen gladak luk l_i važi diferencijalna jednačina

$$(3.1.3) \qquad d\bar{x}\, d\bar{z} = 0,$$

na osnovu koje dobijamo uslov koji treba da zadovoljava polje brzinâ $\bar{z}(s)$ tog savijanja:

$$(3.1.4) \qquad d\bar{z} = [\bar{y}, d\bar{x}];$$

pri tom je vektorska funkcija $\bar{y}(s)$ polje rotacijâ tog beskonačno malog savijanja. Dakle, na svakom glatkom luku l_i polje brzinâ $\bar{z}(s)$ mora zadovoljavati uslov (3.1.3), koji možemo napisati i u obliku

$$\bar{t}\,\bar{z}' = 0,$$

gde je $\bar{t}(s)$ jedinični vektor tangente luka l_i.

Kako je iz (3.1.2)

$$\frac{d\bar{x}_\varepsilon}{ds} = \frac{d\bar{x}}{ds} + \varepsilon\frac{d\bar{z}}{ds},$$

$$\frac{d^2\bar{x}_\varepsilon}{ds^2} = \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} + \varepsilon\frac{d^2\bar{z}}{ds^2},$$

pri čemu treba imati u vidu da je

$$\sqrt{\left(\frac{d^2\bar{x}}{ds^2}\right)^2} = k(s), \qquad \sqrt{\left(\frac{d^2\bar{x}_\varepsilon}{ds^2}\right)^2} = k_\varepsilon(s),$$

neposredno dobijamo da je

$$\left(\frac{d^2\bar{x}_\varepsilon}{ds^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2\bar{x}}{ds^2}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{d^2\bar{x}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\bar{z}}{ds^2} + \varepsilon^2\left(\frac{d^2\bar{z}}{ds^2}\right)^2$$

ili

$$\left[k_\varepsilon(s)\right]^2 = \left[k(s)\right]^2 + 2\varepsilon\,\bar{x}''\bar{z}'' + \varepsilon^2(\bar{z}'')^2,$$

gde ćemo sabirak $\varepsilon^2(\bar{z}'')^2$ zanemariti. S obzirom na pretpostavku teoreme I da se krivina $k(s)$ ne umanjuje ni na kojem glatkom luku krive L_A, iz gornje relavcije proizlazi da je na svakom glatkom luku krive L_A

$$k_\varepsilon^2 - k^2 \geqslant 0,$$

to jest

(3.1.5) $$\bar{x}''\bar{z}'' \geqslant 0.$$

Lako je videti da polje brzinâ beskonačno malog savijanja c e l e krive L_A mora takodje zadovoljavati uslov (3.1.3).

Naime, ako je vektorsko polje $\bar{z}(s)$ trivijalno, tada polje rotacijâ $\bar{y}(s)$ mora biti konstantno, recimo $\bar{y}(s) = \bar{c}$ (gde je $\bar{c}$ konstantan vektor). U tom slučaju integracija diferencijalne jednačine (3.1.4) duž svakog luka l_i daje odgovarajuće polje

$$\bar{z}(s) = \bar{a} + \left[\bar{c}, \bar{x}(s)\right],$$

u kojem je $\bar{a}$ takodje konstantan vektor i koje je, zbog

$$\overset{1}{\bar{x}}(s_i) = \overset{2}{\bar{x}}(s_i) \qquad (i = 1, 2),$$

jednoznačno na celoj krivoj L_A.

Ako, pak, vektorsko polje $\bar{z}(s)$ nije trivijalno, - a nas upravo taj slučaj interesuje, - ono će imati i jednu netrivijalnu komponentu $\overset{*}{\bar{z}}(s)$ takvu da je

$$(3.1.6) \qquad \bar{z}(s) = \bar{a} + \left[\bar{c}, \bar{x}(s)\right] + \overset{*}{\bar{z}}(s).$$

Prema tome, i trivijalno i netrivijalno polje brzinâ beskonačno malog savijanja krive L_A u celom jednoznačno je na celoj krivoj L_A i zaista zadovoljava uslov (3.1.3); stoga je jednačina (3.1.3) diferencijalna jednačina beskonačno malog savijanja te krive.

S druge strane, kako vektorsko polje $\bar{z}(s)$ mora, po pretpostavci teoreme I, zadovoljavati uslove (3.1.3) i (3.1.5), očigledno je da u slučaju netrivijalnog beskonačno malog savijanja mora i vektorska funkcija $\overset{*}{\bar{z}}(s)$ zadovoljavati te uslove. Naime,

$$d\bar{x}\, d\bar{z} = 0 \implies d\bar{x}\left[\bar{c}, d\bar{x}\right] + d\bar{x}\, d\overset{*}{\bar{z}} = 0,$$

te je zaista

$$d\bar{x}\, d\overset{*}{\bar{z}} = 0,$$

a s druge strane

$$\bar{x}''\bar{z}'' \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}''\{[\bar{c}, \bar{x}''] + \overset{*}{\bar{z}}\} \geqslant 0,$$

tako da je zaista

$$\bar{x}''\overset{*}{\bar{z}}'' \geqslant 0.$$

Stoga umesto (3.1.3) i (3.1.5) možemo pisati

(3.1.3') $$\bar{x}'\overset{*}{\bar{z}}' = 0,$$

odnosno

(3.1.5') $$\bar{x}''\overset{*}{\bar{z}}'' \geqslant 0,$$

ili

(3.1.7) $$\bar{t}\,\overset{*}{\bar{z}}' = 0,$$

(3.1.8) $$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}'' \geqslant 0,$$

gde je $\bar{t} = \bar{t}(s)$ jedinični vektor tangente, a $\bar{n} = \bar{n}(s)$ jedinični vektor normale krive L_A, a kako je $\bar{x}'' = k\bar{n}$ i, po pretpostavci, kriva L_A ne sadrži pravolinijskih odsečaka (što znači da nule funkcije $k(s)$ ne ispunjavaju nijedan odsečak) i krivinu $k(s)$ smatramo nenegativnom, imamo prava da umesto (3.1.5') napišemo (3.1.8).

Ako sa $\overset{i}{\bar{t}}$ obeležimo jedinični vektor tangente luka l_i, iz (3.1.7) ćemo za $s = s_i$ imati istovremeno

(3.1.7') $$\overset{1}{t}(s_i)\,\overset{*}{\bar{z}}'(s_i) = 0, \qquad \overset{2}{t}(s_i)\,\overset{*}{\bar{z}}'(s_i) = 0, \qquad (i = 1, 2)$$

Kako je, na osnovu definicije krive L_A,

$$\left[\overset{1}{\bar{t}}(s_i),\ \overset{2}{\bar{t}}(s_i)\right] \neq 0$$

(to jest, s_i su prelomne tačke krive L_A), iz jednačinâ (3.1.7) zaključujemo da je u tačkama s_i $(i = 1, 2)$ krive L_A vektor $\overset{*}{\bar{z}}'(s)$ ortogonalan na ravan krive L_A.

S obzirom na to da je $\bar{n}' = -k\bar{t}$ (gde je $k = k(s)$ krivina krive), levu stranu relacije (3.1.8) možemo napisati u obliku

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}'' = (\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}') - \bar{n}'\overset{*}{\bar{z}}' = (\bar{n}\overset{*}{\bar{z}}')' + k\bar{t}\,\overset{*}{\bar{z}}',$$

a kako je, po definiciji beskonačno malog savijanja, unutar svakog luka l_i, a po prethodno izvedenom zaključku takodje i na krajevima svakog luka l_i

$$\bar{t}\,\overset{*}{\bar{z}}' = 0,$$

dobijamo da je na celoj krivoj L_A

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}'' = (\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')'.$$

Stoga ćemo umesto relacije (3.1.8) pisati

$$(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}')' \geqslant 0,$$

ili, što je isto,

$$d(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}') \geqslant 0.$$

Integracijom ovog diferencijala duž luka l_i dobijamo

(3.1.9) $$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}' = 0,$$

jer je, na primer duž luka $(s_1,\ s_2)$,

$$(3.1.10) \qquad \int_{s_1}^{s_2} d(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}{}') = (\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}{}')\Big|_{s_1}^{s_2},$$

a kako je u tačkama s_i $(i = 1, 2)$ vektor $\overset{*}{\bar{z}}{}'$ ortogonalan na ravan krive L_A, on mora biti ortogonalan i na $\bar{n}(s)$, tako da je zaista

$$\bar{n}(s_i)\cdot\overset{*}{\bar{z}}{}'(s_i) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

te je, prema tome, integral

$$\int_{s_1}^{s_2} d(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{z}}{}') = 0.$$

Iz (3.1.8) neposredno zaključujemo da je u svim tačkama lukova l_i vektor $\overset{*}{\bar{z}}{}'$ ortogonalan na ravan krive L_A, što znači da ga možemo napisati u obliku

$$(3.1.11) \qquad \overset{*}{\bar{z}}{}' = g(s)\,\bar{b},$$

gde je $\bar{b}$ konstantni jedinični vektor binormale, a $g(s)$ je neprekidna periodična funkcija s periodom jednakim dužini kr krive L_A.

Integracijom diferencijalne jednačine (3.1.10) dobijamo vektorsku funkciju $\bar{z}(s)$ takvu da traženo jednoznačno vektorsko polje $\bar{z}(s)$, to jest jednoznačno polje brzinâ netrivijalnog beskonačno malog savijanja cele krive L_A, dobija oblik

$$\bar{z}(s) = \bar{a} + [\bar{c}, \bar{x}(s)] + h(s)\,\bar{b}.$$

– Teorema je dokazana.

N a p o m e n a. – Kao svoj poseban slučaj teorema I obuhvata odgovarajuću teoremu N.V. Jefimova [12, 2], koja se odnosi isključivo na glatke krive.

3.2. Beskonačno malo savijanje krivih klase B

Slično krivim L_A definisaćemo još jednu klasu deo po deo glatkih krivih čija ćemo beskonačno mala savijanja ispitivati.

D e f i n i c i j a 2. - Za krivu L_B govorićemo da pripada klasi B krivih ako je L_B

1) ravna kriva homeomorfna krugu i

2) sastavljena od konačno mnogo glatkih lukova l_1, l_2, ..., l_n (pri čemu je L_B u celom nekonveksna kriva) koji ne sadrže nijedan pravolinijski odsečak i sastaju se u povratnim tačkama s_o, s_1, ..., $s_n \equiv s_o$ krive L_B.

Za beskonačno malo savijanje takvih krivih ovde ćemo dokazati sledeću teoremu:

T e o r e m a II. - Ako je pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju deo po deo glatke krive L_B varijacija I reda dužine ma kojeg njenog glatkog luka l_i jednaka nuli i krivina se ni na kojem od lukova l_i ne smanjuje, tada je netrivijalna komponenta polja brzinâ tog savijanja ortogonalna na ravan krive L_A.

Razume se, i u ovom slučaju varijaciju dužine luka uzimaćemo polazeći od tačke u kojoj je krivina veća od nule, a krivinu k(s) ćemo, kao i u 3.1, shvatiti kao moduo drugog reda vektorske funkcije $\bar{x}(s)$ kojom je odnosni luk definisan.

D o k a z. - Kako krive L_B predstavljaju u izvesnom smislu granični slučaj krivih L_A koje smo definisali u 3.1, za njih će u izvesnoj meri važiti ono što je već izvedeno u dokazu teoreme I; stoga ćemo se sada zadržati samo na karakterističnim momentima dokaza koji su različiti od odgovarajućih momenata u dokazu teoreme I.

Ne ograničavajući mogućnost izvodjenja opštih zaključaka, dokaz ćemo izvesti za krivu L_B s dvema povratnim tačkama ($\Theta_1 = \Theta_2 = \pi$). Za beskonačno malo savijanje svakog glatkog luka l_i krive L_A važi diferencijalna jednačina

(3.2.1) $$d\bar{x}\, d\bar{z} = 0,$$

pri čemu je, u netrivijalnom slučaju, vektorsko polje brzinâ tog savijanja

(3.2.2) $$\bar{z}(s) = \bar{a} + [\bar{c}, \bar{x}(s)] + \overset{*}{\bar{z}}(s),$$

gde su $\bar{a}$ i $\bar{c}$ konstantni vektori, a $\overset{*}{\bar{z}}(s)$ je netrivijalna komponenta polja $\bar{z}(s)$, koja, očigledno, zadovoljava uslov

(3.1.1′) $$d\bar{x}\, d\overset{*}{\bar{z}} = 0.$$

Kako je u povratnim tačkama s_i

$$d\overset{i-1}{\bar{x}}(s_i^-) = -d\overset{i}{\bar{x}}(s_i^+)\ ^{3)},$$

to uslov (3.1.12), ili (3.1.12′) iz 3.1. važi i u tačkama s_i, pa, prema tome, i na celoj krivoj L_B. Dakle, vektor $\overset{*}{\bar{z}}{}'(s)$ je duž cele krive L_B ortogonalan na vektor $\bar{x}'(s)$ tangente te krive:

(3.1.1′′) $$\bar{t}\, \overset{*}{\bar{z}}{}' = 0.$$

---

3) Pretpostavljaćemo da se funkcije $\bar{x}(s)$ mogu regularno produžiti preko tačaka s_i.

S druge strane, na svakom luku l_i važi uslov

$$(3.2.2) \qquad \bar{n}\,\overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}'' \geqslant 0,$$

koji se, kao što je pokazano u 3.1, može izraziti u obliku

$$(3.1.14') \qquad d(\bar{n}\,\overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}') \geqslant 0$$

i koji, zajedno sa uslovom (3.1.12''), treba da zadovoljava funkcija $\overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}'(s)$.

Ako se u relaciji

$$\bar{\bar{z}}'(s) = [\bar{c}, \bar{x}'(s)] + \overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}'(s)$$

konstantni vektor $\bar{c}$ odredi tako da je u povratnim tačkama s_i $(i = 1, 2)$

$$(3.2.3) \qquad \overset{*}{\bar{\bar{z}}}(s_i) = 0,$$

tada nam pod tim graničnim uslovima integracija diferencijala (3.1.14') duž luka l_i daje

$$\bar{n}\,\overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}' = 0,$$

što, kad se uzme u obzir i (3.1.12''), znači da je vektor $\overset{*}{\bar{\bar{z}}}{}'$ ortogonalan na ravan krive L_B. Na isti način kao i u dokazu teoreme I izvodimo sada zaključak da je tada jednoznačna[4] netrivijalna komponenta $\overset{*}{\bar{\bar{z}}}$ beskonačno malog savijanja krive L_B ortogonalna na ravan krive L_B, što je i trebalo dokazati.

N a p o m e n a 1. - U slučaju da kriva L_B ima samo jednu singularnu povratnu tačku $s_o = s_1$, integracija diferen-

---

4) Lako je videti da je u povratnim tačkama krive jedinični vektor $\bar{b}$ binormale jednoznačan.

cijala $d(\bar{n}\,\bar{z}')$ duž cele krive daje, bez ikakvih graničnih uslova, $\bar{n}\,\bar{z}' = 0$, odakle se izvodi ortogonalnost vektora $\bar{z}'(s)$ na ravan krive L_B.

N a p o m e n a 2. – Za ravne deo po deo glatke i homeomerfne krugu krive L_{AB} koje imaju konačno mnogo prelomnih i povratnih tačaka u smislu naših definicija 1 i 2, očigledno je da važi

T e o r e m a III. – Ako je pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju krive L_{AB} varijacija I reda dužine ma kojeg njenog glatkog luka l_i jednaka nuli i krivina se ni na kojem od lukova l_i ne smanjuje, tada je netrivijalna komponenta polja brzinâ tog savijanja ortogonalna na ravan krive L_{AB}.

D o k a z ove teoreme zasniva se na korišćenju odgovarajućih elemenata dokaza teoreme I i teoreme II, te iz tog razloga nema potrebe da ga ovde izvodimo.

Teorema III obuhvata kao svoje posebne slučajeve teoremu I i teoremu II.

IV. Beskonačno malo savijanje I reda otvorenih i zatvorenih rebrastih cilindroida tipa A i tipa B

4.1. Beskonačno malo savijanje rebrastih cilindroida tipa A

D e f i n i c i j a 3. – Otvorenim rebrastim cilindroidom ili, kratko, rebrastim cilindroidom zvaćemo površ C Gausove krivine $K = 0$, koja je sastavljena od konačno mnogo regularnuh delova i ima sledeća svojstva:

1) homeomorfna je cilindričnom pojasu;

2) ograničena je dvema zatvorenim krivim L^1 i L^2 koje leže u paralelnim ravnima, nemaju pravolinijskih odsečaka i sastavljene su od konačno mnogo glatkih lukova;

3) rebra površi C, to jest linije σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ duž kojih su sastavljeni njeni susedni regularni delovi, u stvari su generatrise površi C.

D e f i n i c i j a 4. – Rebrasti cilindroid C_A takav da duž njegovih rebara σ_i njegove tangentne ravni uglove θ_i različite od 0 i od π pripada klasi površi koje ćemo zvati rebrastim cilindroidima tipa A.

Površ C_A je razvojna; posmatrana u celom, ona je neregularna, rektificibilna u Lebegovom smislu[5] i, u opštem

---

[5] Lebegova definicija rektificibilne površi glasi: Površ S koja je jednačinom $\overset{0}{x} = \bar{x}(u,v)$ definisana u datoj oblasti D ravni (u,v) nazivamo rektificibilnom ako svakoj rektificibilnoj krivoj u oblasti D odgovara rektificibilna kriva na površi S.

slučaju, nekonveksna; njeni rubovi su krive klase A, za koje smo u 3.1. dokazali teoremu I.

Za rebraste cilindroide tipa A dokazaćemo sledeću teoremu: [17; 1,2],

T e o r e m a IV. - <u>Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_A, na njegovim rubovima L_A^1 i L_B^2 postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.</u>

D o k a z. - Teoremu IV ćemo dokazati za površ C_A koja ima samo dva rebra σ_1 i σ_2, štò nimalo neće ograničiti mogućnost da se iz tog dokaza izvedu opšti zaključci za beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida koji ima više od dva rebra.

Neka je

$$(4.1.1) \qquad \bar{x}(s,v) = \begin{cases} \bar{x}_1(s) + v\,\bar{a}(s), & s_0 \leqslant s \leqslant s_1, \\ \bar{x}_1(s) + v\,\bar{a}(s), & s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \end{cases}$$
$$(0 \leqslant v \leqslant 1, \quad s_2 \equiv s_0)$$

vektorska jednačina površi C_A, gde se pretpostavlja da se početak vektora $\bar{x}(s,v)$ nalazi u ravni krive L_A^1 i da regularne funkcije $\overset{i}{\bar{x}}_1(s)$ $(i = 1, 2)$ dopuštaju regularna produženja, a $\bar{a}(s)$ je neprekidna periodična funkcija s periodom jednakim dužini krive L_A^1. Za $v = 0$ i $v = 1$, jednačina(4.1.1) definiše rubove L_A^1 i L_A^2 površi C_A, a za $s = s_i$ $(i = 1, 2)$ ona definiše rebra σ_1 i σ_2 te površi. Očigledno je

$$(4.1.2) \qquad \overset{1}{\bar{x}}_1(s_i) = \overset{2}{\bar{x}}_1(s_i),$$

što znači da je vektorska funkcija $\bar{x}(s,v)$ neprekidna, a na osnovu definicije površi C_A, to jest na osnovu prirode singularnih tačaka krivih $\overset{1}{L}_A$ i $\overset{2}{L}_A$ je

$$(4.1.3)\quad \begin{cases} \left[\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_1^-),\ \overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_1^+)\right] \neq 0, \\ \left[\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_2^+),\ \overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_o^-)\right] \neq 0, \end{cases}$$

gde su $\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_o^+)$, $\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_1^-)$, $\overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_1^+)$, $\overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_2^-)$ respektivno desni i levi izvodi funkcijâ $\bar{x}_1(s)$ u tačkama s_i ($i = 1, 2$; $s_2 \equiv s_o$).

Za razvojnu površ C_A je

$$(4.1.4)\qquad \bar{a}'(s) = \lambda(s)\, \overset{i}{\bar{x}}{}_1'(s),$$

gde je neprekidna periodična skalarna funkcija $\lambda(s)$ takva da je $1 + \lambda(s) > 0$ i, za $s = s_i$,

$$\bar{a}'(s_i^-) = \lambda(s_i)\, \overset{i}{\bar{x}}{}'(s_i^-),$$
$$\bar{a}'(s_i^+) = \lambda(s_i)\, \overset{i}{\bar{x}}{}'(s_i^+).$$

Neka je $\bar{z} = \bar{z}(s,v)$ polje brzinâ, a $\bar{y} = \bar{y}(s,v)$ polje rotacijâ beskonačno malog savijanja površi C_A. Kao što je poznato [9; 2], na svakom regularnom delu površi C_A vektorska funkcija $\bar{z}(s,v)$ zadovoljava jednačinu oblika

$$(4.1.5)\qquad d\bar{x}\, d\bar{z} = 0,$$

iz koje proizlaze jednačine

$$(4.1.6)\qquad d\bar{z} = \left[\overset{i}{\bar{y}},\ d\overset{i}{\bar{x}}\right] \qquad (i = 1, 2),$$

gde su $\overset{i}{\bar{x}}(s,v) = \overset{i}{\bar{x}}_1(s) + v\,\bar{a}(s)$ vektorske funkcije koje definišu odgovarajuće regularne delove površi C_A, a $\bar{y}(s,v)$ su polja rotacijâ na tim delovima.

Na osnovu opšte teorije beskonačno malih savijanja (v. 2.1), vektori $\overline{y}_s$ i $\overline{y}_v$ - izvodi vektora rotacije $\overline{y}(s,v)$ - leže u tangentnoj ravni površi C_A, tako da ih, za svaki regularan deo površi C_A, možemo odrediti iz odgovarajućeg sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$(4.1.7)\qquad \begin{cases} \overset{i}{\overline{y}}_s = \overset{i}{\alpha}\,\overset{i}{\overline{x}}_s - \overset{i}{\beta}\,\overset{i}{\overline{x}}_v, \\ \overset{i}{y}_v = \overset{i}{\gamma}\,\overset{i}{\overline{x}}_s - \overset{i}{\alpha}\,\overset{i}{\overline{x}}_v, \end{cases} \qquad (i = 1, 2);$$

diferencijabilne skalarne funkcije $\overset{i}{\alpha}(s,v)$, $\overset{i}{\beta}(s,v)$ i $\overset{i}{\gamma}(s,v)$, koje se u njima javljaju, određuju se iz odgovarajućeg sistema Gaus-Kodacijevih jednačina

$$(4.1.8)\qquad \begin{cases} \overset{i}{L}\overset{i}{\gamma} - 2\overset{i}{M}\overset{i}{\alpha} + \overset{i}{N}\overset{i}{\beta} = 0, \\ \overset{i}{\alpha}_v - \overset{i}{\gamma}_s = \overset{i}{\gamma}\overset{i}{\Gamma}{}^1_{11} - 2\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\Gamma}{}^1_{12} + \overset{i}{\beta}\overset{i}{\Gamma}{}^1_{22}, \\ \overset{i}{\alpha}_s - \overset{i}{\beta}_v = \overset{i}{\gamma}\overset{i}{\Gamma}{}^2_{11} - 2\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\Gamma}{}^2_{12} + \overset{i}{\beta}\overset{i}{\Gamma}{}^2_{22}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

gde su $\overset{i}{L}$, $\overset{i}{M}$, $\overset{i}{N}$ koeficijenti II kvadratne forme regularnih delova rebrastog cilindroida C_A. Kako površ C_A ima Gausovu krivinu $K = 0$, koeficijenti $\overset{i}{M}$ i $\overset{i}{N}$ su identički jednaki nuli, te se prve od jednačinâ (4.1.8) svode na

$$\overset{i}{L}\,\overset{i}{\gamma} = 0 \qquad (i = 1, 2);$$

s obzirom na to da krive L_A^1 i L_B^2 ne sadrže pravolinijske odsečke, iz gornje jednačine se neposredno zaključuje da koeficijenti $\overset{i}{L}$ ne mogu biti jednaki nuli, tako da preostaje $\overset{i}{\gamma} \equiv 0$. Usled toga se sistemi (4.1.8) svode na dva sledeća sistema:

$$(4.1.9)\qquad \begin{cases} \overset{i}{\alpha}_v = -\dfrac{2\lambda(s)}{1+v\lambda(s)}\overset{i}{\alpha}, \\ \overset{i}{\alpha}_s - \overset{i}{\beta}_v = 0, \end{cases}$$

čijom se integracijom dobija opšti integral

$$(4.1.10)\qquad \overset{i}{\bar{y}}(s,v) = \int_{s_{i-1}}^{s}\left\{A_i(s)\,\bar{x}'(s) - B_i(s)\,\bar{a}(s)\right\}ds - \frac{v\,A_i(s)}{1+v\lambda(s)}\bar{a}(s) + \bar{c}_i$$

$$(s_{i-1} < s \leqslant s_i;\quad i = 1, 2),$$

u kojem su $A_i(s)$ i $B_i(s)$ proizvoljne skalarne funkcije, a $\bar{c}_i$ je konstantan vektor.

Navešćemo samo nekoliko poteza te integracije za jedan od regularnih delova rebrastog cilindroida C_A. Najpre je iz jednačina (4.1.9)

$$\overset{i}{\alpha}(s,v) = \frac{A_i(s)}{(1+v\lambda(s))},$$

$$\overset{i}{\beta}(s,v) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{v\,A_i(s)}{1+v\lambda(s)} + B_i(s)\right\},$$

s proizvoljnim skalarnim funkcijama $A_i(s)$ i $B_i(s)$. Na osnovu (4.1.7) i uzimajući u obzir da je $\overset{i}{\gamma} = 0$ i $\bar{a}'(s) = \lambda(s)\bar{x}_1'(s)$ (u regularnim tačkama), imamo

$$(4.1.7')\qquad \begin{cases} \overset{i}{\bar{y}}_s = \overset{i}{\alpha}\,(1+v\lambda(s))\,\overset{i}{\bar{x}}{}_1' - \overset{i}{\beta}\,\bar{a}, \\ \overset{i}{\bar{y}}_v = -\overset{i}{\alpha}\,\bar{a}, \end{cases}$$

tako da nam integracija totalnog diferencijala

$$d\overset{i}{\bar{\bar{y}}} = \overset{i}{\bar{\bar{y}}}_s ds + \overset{i}{\bar{\bar{y}}}_v dv$$

daje već ranije navedeni opšti integral

$$\overset{i}{\bar{y}}(s,v) = \int_{s_{i-1}}^{s} \left\{ A_i(s)\,\bar{x}'(s) - B_i'(s)\,\bar{a}(s) \right\} ds - $$

$$- \frac{v\,A_i(s)}{1 + v\lambda(s)}\,\bar{a}(s) + \bar{c}_i$$

$$(s_{i-1} < s \leq s_i; \quad i = 1, 2)$$

- polja rotacijā na regularnim delovima površi C_A, koja su netrivijalna za $c \neq 0$. Polje brzinā $\bar{z}(s,v)$ biće jednoznačno na celoj površi C_A ako je duž σ_i

$$\left[\overset{2}{\bar{\bar{y}}},\ d\overset{2}{\bar{\bar{x}}}\right] = \left[\overset{1}{\bar{\bar{y}}},\ d\overset{1}{\bar{\bar{x}}}\right],$$

gde su sa $\overset{i}{\bar{x}} = \overset{i}{\bar{\bar{x}}}(s,v)$ obeleženi vektori $\bar{x}(s,v)$ koji opisuju odgovarajuće regularne delove površi C_A. Kako je duž σ_i

$$d\overset{2}{\bar{\bar{x}}} = d\overset{1}{\bar{\bar{x}}} = \overset{i}{\bar{\bar{x}}}_v dv = \bar{a}(s_i)dv,$$

prethodnu relaciju možemo napisati u obliku

$$\left[\overset{2}{\bar{\bar{y}}} - \overset{1}{\bar{\bar{y}}},\ \bar{a}\right] = 0 \qquad (\text{duž } \sigma_i), \tag{4.1.11}$$

ili, pošto stavimo $\overset{2}{\bar{y}} - \overset{1}{\bar{y}} = \bar{y}$, u obliku

$$\left[\bar{y}, \bar{a}\right] = 0 \qquad (\text{duž } \sigma_i). \tag{4.1.12}$$

Prema tome, duž rebara σ_i vektor rotacije $\bar{y}(s,v)$ kolinearan je s vektorom ~~ja s vektorom~~ $\bar{a}(s)$, ili, što je isto, kolinearan je s jediničnim vektorom tangente duž izvodnice površi C_A u tački s_i:

$$(4.1.13) \qquad \bar{\overset{2}{y}}(s_i,v) - \bar{\overset{1}{y}}(s_i,v) = \nu(s_i)\,\bar{t}(s_i,v).$$

Da bismo dokazali teoremu IV, treba da iz opšteg integrala (4.1.10) odredimo vektorsku funkciju $\bar{y}(s,v)$ koja predstavlja polje rotacijâ onog netrivijalnog beskonačno malog savijanja površi C_A pri kojem se na krivim L_A^1 i L_A^2 rastojanja tačaka povećavaju. Izvešćemo indirektan dokaz polazeći od pretpostavke da se pri traženom netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_A sve tetive njegovih rubova L_A^1 i L_A^2 smanjuju ili su stacionarne. Tada se, kao što je dokazao N.V. Jefimov [12; 2], na regulatnim lukovima ovih krivih krivina nigde ne smanjuje i, na osnovu naše teoreme I, na rubovima L_A^1 i L_A^2 rebrastog cilindroida C_A polje brzinâ ima netrivijalnu komponentu ortogonalnu na ravan krive L_A^1 (ili, što je isto, ortogonalnu na ravan krive L_A^2). Ovo, medjutim, znači da na tim krivim vektor rotacije $\bar{y}(s,v)$ mora ležati u njihovoj ravni, što, kad se još uzmu u obzir relacije (4.1.7) ili (4.1.7'), koje izražavaju činjenicu da se u regularnim tačkama površi C_A vektori $\bar{y}_s$ i $\bar{y}_v$ nalaze u tangentnoj ravni površi, dovodi do zaključka da je

$$(4.1.14) \qquad \beta(s,0) = \beta(s,1) = 0.$$

Na taj način dobili smo konturne uslove koji su nam potrebni za odredjivanje vektorske funkcije $\bar{y}(s,v)$ koja zadovoljava polaznu pretpostavku.

Dakle, iz (4.1.9') je

$$A_i(s) = c(1 + \lambda(s)), \qquad B_i(s) = 0, \qquad (i = 1,\ 2)$$

te se iz (4.1.10) sada dobija

$$\bar{y}(s,v) = c\left\{\int_{s_{i-1}}^{s}(1+\lambda(s))\,\bar{x}_1'(s)\,ds - \frac{v(1+\lambda(s))}{1+v\lambda(s)}\,\bar{a}(s)\right\} + \bar{c}_i$$

$$(s_{i-1} < s \leqslant s_i;\quad i = 1,\ 2),$$

odakle je, zbog $(1+\lambda(s))\,\bar{x}_1'(s) = \bar{x}_2'(s)$ i $\bar{x}_2(s) = \bar{x}_1(s) + \bar{a}(s)$,

$$(4.1.15)\qquad \bar{y}(s,v) = c\left\{\bar{x}_1(s) + \frac{1-v}{1+v\lambda(s)}\,\bar{a}(s)\right\} + \bar{c}_i$$

$$(i = 1,\ 2).$$

Ovo su polja rotacijâ za regularne delove površi C_A; očigledno, ta polja su netrivijalna za $c \neq 0$.

Na svakom rebru σ_i, na primer na rebru σ_0 (za $s = s_0 \equiv s_2$), imamo da je

$$(4.1.16)\quad \begin{cases} \bar{y}(s_0,v) = c\left\{\bar{x}_1(s_0) + \dfrac{1-v}{1+v\lambda(s_0)}\,\bar{a}(s_0)\right\} + \bar{c}_1 \\[2ex] \bar{y}(s_0,v) = c\left\{\bar{x}_1(s_0) + \dfrac{1-v}{1+v\lambda(s_0)}\,\bar{a}(s_0)\right\} + \bar{c}_2. \end{cases}$$

Duž svakog rebra σ_i je, na osnovu (4.1.12), vektor rotacije $\bar{y}(s,v)$ kolinearan sa odgovarajućim vektorom $\bar{a}(s)$; prema (4.1.11) i s obzirom na (4.1.16) i (4.1.2), taj vektor rotacije je u ovom slučaju

$$(4.1.17)\qquad \bar{y} = \overset{2}{\bar{y}} - \overset{1}{\bar{y}} = \bar{c}_2 - \bar{c}_1 = \bar{c};$$

ako vektori $a(s_1)$ i $a(s_2)$ nisu kolinearni, iz (4.1.12) i (4.1.17) proizlazi da je duž σ_i $\bar{y}(s,v) = 0$.

Uslov (4.1.17) možemo, s obzirom na (4.1.13), predstaviti u obliku

$$\overset{2}{\bar{y}} - \overset{1}{\bar{y}} = \bar{c} = \nu \bar{t} \quad (\nu = \text{cost.}) \quad (\text{duž } \sigma_i),$$

koji ima odredjeno geometrijsko značenje. Naime, kako je $\bar{t} = \bar{t}(s_i, v)$ jedinični vektor tangente duž izvodnice površi C_A u tački s_i, to je

$$\nu = \frac{d\theta_i}{d\varepsilon}$$

brzina rotacije jedne tangentne ravni duž te izvodnice u odnosu na drugu tangentnu ravan.

Ako se ima u vidu činjenica da na krivim L_A^1 i L_A^2 vektor $\bar{y}(s,v)$ mora ležati u ravni ovih krivih, tada, na osnovu prethodnog, neposredno zaključujemo da je na rebrima površi C_A vektor rotacije $\bar{y}(s,v) = 0$. Prema tome, bez obzira na to da li su rebra rebrastog cilindroida paralelna ili to nisu, pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju ove površi ona se kreću kao kruto telo. Na taj način, jednoznačnost polja rotacije na celoj površi C_A obezbedjena je ako je

(4.18) $$\bar{y}(s_i, v) = 0 \qquad (i = 1,2),$$

a to znači da je duž svake izvodnice $= 0$, to jest ugao θ_i izmedju tangentnih ravni stacionaran.

S druge strane, za $v = 1$ je iz (4.1.15)

$$\bar{y} = c\bar{x}_1,$$

gde smo stavili $\bar{c}_1 = 0$; pri tom u tačkama s_i vektor $\bar{y}$ mora biti jednak nuli, a to znači da je na celoj površi

(4.1.19) $$\bar{y}(s,v) = 0,$$

to jest, pod učinjenom pretpostavkom, na površi C_A ne postoji netrivijalno beskonačno malo savijanje.

Prema tome, pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_A ~~xxx~~ tetive njegovih rubova L_A^1 i L_A^2 se povećavaju, što je i trebalo dokazati. - Teorema je dokazana.

N a p o m e n a. - Netrivijalnom vektorskom polju rotacijâ (4.1.10)

$$\bar{y}(s,v) = \int_{s_{i-1}}^{s}\left\{A(s)\bar{x}_1' - B'(s)\bar{a}\right\}ds - \frac{v\,A(s)}{1 + v\lambda(s)}\,\bar{a},$$

gde smo, jednostavnosti radi, stavili $\bar{c}_i = 0$, daje nam jednoznačno polje brzinâ $\bar{z}(s,v)$. Ovo polje se dobija integracijom totalnog diferencijala

$$d\bar{z} = \left[\bar{y},\, d\bar{x}\right],$$

gde je

$$d\bar{x} = d\bar{x}(s,v) = \bar{x}_s ds + \bar{x}_v dv,$$

to jest, za površ C_A,

$$d\bar{x} = (1 + v\lambda(s))\bar{x}_1' ds + \bar{a}\,dv,$$

a $\bar{y}(s,v)$ je prethodno nadjeno polje rotacijâ. Dakle je

$$\bar{z}(s,v) = \int_{s_{i-1}}^{s}\left[\bar{y}(s,0),\, \bar{x}_s(s,o)\right]ds + \int_{o}^{v}\left[\bar{y}(s,v),\, \bar{x}_v(s,v)\right]dv + \bar{C}$$

ili

$$\bar{z}(s,v) = \int_{s_{i-1}}^{s}\left[\int_{s_{i-1}}^{s}\left\{A(s)\bar{x}_1' - B'(s)\bar{a}\right\}ds,\, \bar{x}_1'\right]ds + \left[\int_{s_{i-1}}^{s}\left\{A(s)\bar{x}_1' - B'(s)\bar{a}\right\}ds,\, \bar{a}\right]v + \bar{C}.$$

4.2. Beskonačno malo savijanje rebrastih cilindroida tipa B

Polazeći od opšte definicije otvorenih rebrastih cilindroida (v. 4.1, definicija 1), definisaćemo sada rebraste cilindroide tipa B.

D e f i n i c i j a 5. - Rebrasti cilindroid C_B takav da duž njegovih rebara σ_i njegove tangentne ravni grade uglove $\theta_i = \pi$ pripada klasi površi koje ćemo zvati rebrastim cilindroidima tipa B.

Kao i površ C_A, i rebrasti cilindroid C_B je razvojna površ koja je, posmatrana u celom, neregularna, rektificibilna u Lebegovom smislu i nekonveksna; njeni rubovi L_B^1 i L_B^2, koji leže u paralelnim ravnima, pripadaju klasi L_B, za koju smo u 3.2 dokazali teoremu II.

Jednostavnosti radi, a ne ograničavajući opštost daljih rasuđivanja, posmatraćemo rebrasti cilindroid C_B sa samo jednim rebrom σ_o. Vektorska jednačina takve površi je

$$\bar{x}(s,v) = \bar{x}_1(s) + v\,\bar{a}(s) \qquad (0 \leqslant v \leqslant 1),$$

pri čemu je

$$\bar{x} = \bar{x}_1(s)$$

jednačina ruba L_B^1 površi C_B (pretpostavili smo da se početak vektora $\bar{x}(s,v)$ nalazi u ravni krive L_B^1), a, po definiciji površi C_B, neprekidna periodična vektorska funkcija $\bar{x}_1(s)$, s periodom jednakim dužini krive L_B^1, takva je da je

$$\bar{x}_1'(s_o^-) = -\,\bar{x}_1'(s_o^+),$$

gde je s_o singularna tačka krive L_B^1.

Za beskonačno malo savijanje površi C_B dokazaćemo sledeću teoremu:

T e o r e m a V. – <u>Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_B, na njegovim rubovima L_B^1 i L_B^2 postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.</u>

D o k a z ove teoreme, uporedjen s dokazom odgovarajuće teoreme III, ima kao jedini bitno nov moment pozivanje na teoremu II umesto na teoremu I. I teoremu V, kao prethodno teoremu IV, dokazujemo polazeći od suprotne pretpostavke: da se pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju površi C_B na njenim rubovima L_B^1 i L_B^2 sve tetive smanjuju ili ostaju stacionarne. Ova pretpostavka, zajedno s teoremom II, dovodi do istih konturnih uslova koje smo dobili i za površ C_A i, na taj način, do analognih integrala $\bar{y}(s,v)$ koji predstavljaju polja rotacijâ na regularnim delovima površi C_B (ili, tačnije rečeno, u regularnim tačkama površi C_B). Zahtev da na celoj površi C_B polje rotacijâ $\bar{y}(s,v)$ bude jednoznačno dovodi do zaključka da je ne samo duž rebra σ_o nego i na celoj površi C_B

$$\bar{y}(s,v) = 0,$$

što znači da polazna pretpostavka ne dovodi ni do kakvog netrivijalnog polja rotacijâ, već da se, nasuprot tome, pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_B tetive njegovih rubova zaista povećavaju. – Time je teorema V dokazana.

2. Očigledno je da su teorema IV, kojom se iskazuje karakteristično svojstvo netrivijalnog beskonačno malog savijanja rebrastog cilindroida tipa A, i teorema V, kojom se iskazuje karakteristično svojstvo netrivijalnog beskonačno malog savijanja rebrastog cilindroida tipa B, obuhvaćene analognom opštom teoremom o beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_{AB} mešovitog tipa, tj. takvog rebrastog cilindroida čije su singularne tačke na rubovima delom prelomne, a delom povratne.

T e o r e m a VI. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida C_{AB}, na njegovim rubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

D o k a z teoreme VI, posle izvedenog dokaza teoreme IV i dokaza teoreme V, sastoji se u korišćenju elemenata oba ova dokaza, kao i u korišćenju teoreme III, koja se odnosi na beskonačno malo savijanje klase krivih kojoj pripadaju rubovi rebrastog cilindroida C_{AB} i koju smo dokazali u 3.1.

Ako se, jednostavnosti radi, ispituje površ C_{AB} koja ima samo dva rebra, i to jedno - σ_o - koje spaja prelomne tačke rubova i drugo - σ_1 - koje spaja povratne tačke rubova, tada se rebrasti cilindroid C_{AB} sastoji od dva regularna cilindrična žleba sastavljena izvodnicama tako da duž jedne od ovih tangentne ravni tih žlebova obrazuju ugao između 0 i π, a duž druge se te ravni poklapaju. Vektorska jednačina takve površi je

$$\bar{x}(s,v) = \begin{cases} \overset{1}{\bar{x}}_1(s) + v\,\bar{a}(s), & s_o \leqslant s \leqslant s_1, \\ \overset{2}{\bar{x}}_1(s) + v\,\bar{a}(s), & s_1 \leqslant s \leqslant s_2 \end{cases}$$

$$(0 \leqslant v \leqslant 1;\ s_2 \equiv s_o),$$

gde za vektorske funkcije $x_1(s)$ i $a(s)$ važi ono što smo istakli prilikom proučavanja beskonačno malog savijanja površi C_A u 4.1 i površi C_B u 4.1.1. U tački $s = s_o$ $(s_2 \equiv s_o)$ je

$$\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_o^+),\ \overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_o^-) \neq 0,$$

a u tački $s = s_1$

$$\left[\overset{1}{\bar{x}}{}_1'(s_1^-),\ \overset{2}{\bar{x}}{}_1'(s_1^+)\right] = 0.$$

Polje rotacijâ površi C_{AB} ima oblik analogan obliku polja rotacijâ površi C_A i površi C_B. Polazeći od pretpostavke suprotne onoj koja je teoremom iskazana, to jest tražeći ono beskonačno malo savijanje površi C_{AB} pri kojem se sve tetive njenih rubova smanjuju ili ostaju stacionarne, dolazimo, putem onih rasudjivanja kojima smo se koristili prilikom dokazivanja teoreme IV i teoremeV, do zaključka da, na osnovu teoreme III, za takvo savijanje moraju na rubovima površi C_{AB} važiti konturni uslovi oblika (4.1.14). Na taj način dobijamo za regularne delove površi C_{AB} polje rotacijâ $\bar{y}(s,v)$ u obliku

$$\bar{y}(s,v) = c\left\{\overset{i}{\bar{x}}_1(s) + \frac{1-v}{1+v\lambda(s)}\,\bar{a}(s)\right\} + \bar{c}$$

$$(i = 1,2)$$

koje je, kako se iz napisane formule vidi, netrivijalno za $c \neq 0$, ali koje je u stvari, na osnovu teoreme IV i teoreme V, zadovoljava polazni uslov samo za $c = 0$.

Prema tome, pri netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida mešovitog tipa C_{AB} (pa samim tim i pri takvom savijanju rebrastog cilindroida tipa A ili tipa B), tetive rubova ove površi ne mogu se smanjivati niti ostajati stacionarne. - Time je teorema VI dokazana.

N a p o m e n a. - Kao što se iz dokaza teorema IV, V i VI vidi, za egzistenciju netrivijalnog polja rotacije rebrastog cilindroida ma kojeg tipa dovoljno je da se samo na jednom njegovom rubu rastojanja proizvoljno bliskih tačaka povećavaju, dok tetive drugog ruba mogu biti stacionarne ili se mogu smanjivati. Na osnovu toga imamo sledeću posledicu navedenih teorema:

P o s l e d i c a. - Rebrasti cilindroid ma kojeg tipa čiji je jedan rub utvrdjen dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje samo ako na drugom njegovom rubu postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

4.3. Beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida čiji se rubovi nalaze u neparalelnim ravnima

D e f i n i c i j a 6. - Rebrasti cilindroid čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima predstavlja opšti oblik rebrastog cilindroida; medju takvim površima razlikujemo površi C_A^* tipa A, zatim površi C_B^* tipa B i površi mešovitog tipa C^*_{AB}.

Kao što su pokazali Darboux [3] i Sauer [16; 1], prilikom projektivnog preslikavanja površi polje rotacija i polje brzina te površi ostaju invarijantni. Primenjeno na površi koje ovde posmatramo, to znači da, ako se bilo koja od površi C^*_A, C^*_B i C^*_{AB} preslikava u površ istog tipa, ali sa rubovima u paralelnim ravnima, polje rotacija i polje brzina date površi ostaju invarijantni. Kao što je istakao Jefimov [12; 4], na taj način beskonačno malo savijanje površi ulazi u projektivnu geometriju kao nov objekt.

Za beskonačno malo savijanje rebrastog cilindroida sa rubovima u neparalelnim ravnima, koji ćemo, kad se radi o takvoj površi ma kojeg tipa, obeležavati sa C^*, dokazaćemo sledeću teoremu:

T e o r e m a VII. - <u>Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida bilo kojeg tipa sa rubovima u neparalelnim ravnima, na njegovim rubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.</u>

Očigledno, teorema VII predstavlja generalizaciju prethodno dokazanih teorema o beskonačno malom savijanju rebrastih cilindroida raznih tipova sa rubovima u paralelnim ravnima.

D o k a z ćemo, ne ponavljajući poznate korake, izvesti u nekoliko poteza. Ako, suprotno uslovu teoreme VII, pretpostavimo da površ C^* dopušta takvo netrivijalno beskonačno malo savijanje pri kojem se nijedna tetiva njegovih rubova ne povećava, tada takvom beskonačno malom savijanju odgovara na celoj površi jednoznačno netrivijalno vektorsko polje $\overline{y}^*$, a samim tim i jednoznačno netrivijalno polje brzina $\overline{z}^*$.

Kao što je pokazano u dokazu teoreme IV (razdeo 4.1), polje rotacija y na rubovima L^1 i L^2 te površi mora ležati u ravni odgovarajuće krive; takvo polje ima izvod $\overline{y}_s^*$ i pravcu tangente odgosnog ruba, a izvod $\overline{y}_v^*$ jednak je nuli. Prema tome, vektorsko polje $\overline{y}^*$ mora na rubovima površi C^* zadovoljavati konturne uslove

$$\beta^*(L^1) = 0, \qquad \beta^*(L^2) = 0.$$

Pri projektivnom preslikavanju površi C u rebrasti cilindroid C sa rubovima u paralelnim ravnima, navedeni konturni uslovi ostaju da važe i za polje rotacija $\overline{y}$ na površi C, to jest polje rotacija $\overline{y}^*$ se preslikava opet u polje rotacija, pri čemu za tačke na rubovima površi C ovo poslednje leži u ravni odnosnog ruba.

Sada možemo da na transformisanu površ primenimo ranije dobijene rezultate (v. teoreme IV, V i VI) i da utvrdimo da na ovoj površi, a samim tim i na rebrastom cilindroidu C_* sa rubovima u neparalelnim ravnima, ne može postojati netrivijalno beskonačno malo savijanje pri kojem se tetive rubova te površi ne povećavaju, već da, nasuprot tome, postoji samo takvo netrivijalno beskonačno malo savijanje pri kojem se rastojanja proizvoljno bliskih tačaka na rubovima površi C^* povećavaju. — Teorema je dokazana.

Ova teorema, kao i dogovarajuće teoreme IV, V i VI, koje se odnose na rebraste cilindroide sa rubovima u paralelnim ravnima, ima sledeću posledicu:

P o s l e d i c a. - Rebrasti cilindroid ma kojeg tipa sa rubovima u neparalelnim ravnima dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje i kad mu je jedan rub utvrdjen, samo ako na drugom rubu postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

N a p o m e n a. - Kao svoj poseban, a izvesnom smislu degenerativan slučaj, rebrasti cilindroidi sa rubovima u neparalelnim ravnima obuhvataju obične cilindroide sa slično postavljenim rubovima. Stoga teorema VII obuhvata kao svoj poseban ~~degenerativan~~ slučaj i odgovarajuću teoremu N. V. Jefimova [12; 4] o beskonačno malom savijanju običnih cilindroida čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima.

4.4. Beskonačno malo savijanje zatvorenog rebrastog cilindroida

D e f i n i c i j a 7. - Zatvorenim rebrastim cilindroidom nazivamo površ $\tilde{C}$ koja se dobija kad se otvoreni rebrasti cilindroid zatvori dvema ravnim osnovama; u opštem slučaju, te osnove su neparalelne.

Prema tome, zatvoreni rebrasti cilindroid $\tilde{C}$ sastavljen

je od jednog omotača C i dveju ravnih osnova S_1 i S_2. Posma-
trana u celom, površ $\tilde{C}$ je nekruta ako bar jedan od njenih s-
stavnih delova dopušta netrivijalno beskonačno malo savija-

Neposredno je jasno da ravna prosto povezana oblast S
učvršćenim rubom L dopušta samo takvo netrivijalno beskonač
malo savijanje pri kojem je na rubu L polje brzina $\bar{z}$ jed-
nako nuli (jednom rečju, trivijalno), a unutar krive L orto-
gonalno na S, jer takvo polje, očigledno, zadovoljava funda-
mentalnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu beskonačno ma-
log savijanja

$$d\bar{x}\, d\bar{z} = 0.$$

Prema tome, komad ravni učvršćena ruba nije krut, što
znači da osnove zatvorenog rebrastog cilindroida dopuštaju
netrivijalno beskonačno malo savijanje. Na osnovu toga ima-
sledeću teoremu:

T e o r e m a VIII. - Zatvoreni rebrasti cilindroid u
celokom dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanj-

N a p o m e n a 1. - Činjenica da komad ravni učvršće-
na ruba nije krut ukazuje na odnos običnog savijanja prema
beskonačno malom savijanju: pojam beskonačno malog savijan-
je širi od pojma savijanja u običnom smislu, jer površ koja
je kruta u običnom smislu, može dopuštati netrivijalno bes-
konačno malo savijanje.

N a p o m e n a 2. - Upravo zato što komad ravni nije
krut (u smislu beskonačno malog savijanja), u formulacija-

teorema o beskonačno malom savijanju otvorenih površi izričito se isključuje mogućnost da površ sadrži ravne delove; to smo i mi u ovom radu učinili zahtevajući da rubovi posmatranih rebrastih cilindroida ne sadrže ~~xxxxx~~ nijedan pravolinijski odsečak)pa samim tim ni odnosne površi ne sadrže nijedan ravan deo); na taj način isključuje se iz razmatranja pojava čiji nam je tok unapred poznat.

Medjutim, kad je reč o zatvorenim površima kao što su zatvoreni rebrasti cilindroidi, ima smisla navoditi teoremu VII već i samo zato što se odmah postavlja pitanje kako se ponaša omotač te površi, posmatran u sklopu cele površi, a ne izolovano, kao otvoreni rebrasti cilindroid, koji, kao što smo dokazali, dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje.

Za beskonačno malo savijanje zatvorenog rebrastog cilindroida dokazaćemo sledeću teoremu:

T e o r e m a IX. – Omotač zatvorenog rebrastog cilindroida $\widetilde{C}$ ma kojeg tipa ne dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje.

D o k a z je veoma jednostavan i oslanja se na prethodno dokazane činjenice. Posmatrajmo, jednostavnosti radi, zatvoreni rebrasti cilindroid $\widetilde{C}$ s paralelnim osnovama (u takvu površ možemo uvek projektivno preslikati zatvoreni rebrasti cilindroid s neparalelnim osnovama, i pri tom preslikavanju ostaje invarijantno polje rotacija $\bar{y}$, što znači da i konturni uslovi za integraciju sistema jednačina oblika (4.1.9) ostaju neizmenjeni).

Kao što je Iljin [15] pokazao, ako omotač običnog zatvorenog cilindroida dopušta beskonačno malo savijanje čije se polje brzina $\bar{z}$ može jednoznačno produžiti na svu zatvorenu površ, tada na rubovima omotača te površi vektor rotacije zadovoljava konturne uslove oblika

$$\beta(L_1) = 0, \qquad \beta(L_2) = 0,$$

što znači da, na rubovima L_1 i L_2 omotača, vektor rotacije leži u ravni ovih lrivih.

Nije teško videti da za zatvoreni rebrasti cilindroid važi odgovarajuće tvrdjenje, naime da se polje brzina može s sa omotača jednoznačno produžiti na celu površ jedino ako na rubovima L^1 i L^2 omotača vektor rotacije leži u ravni ovih krivih, to jest ako zadovoljava konturne uslove

$$\beta(L^1) = 0, \qquad \beta(L^2) = 0.$$

S obzirom na te uslove i na izraz (4.1.10), polje rotacija takvog beskonačno malog savijanja površi C ima oblik

$$(4.4.1) \quad \bar{y}(s,v) = c\left\{\dot{\bar{x}}_1(s) + \frac{1 - v}{1 + v\lambda(s)}\,\bar{a}(s)\right\} + \bar{c}.$$

Polje brzina tog beskonačno malog savijanja dobijamo integracijom totalnog diferencijala

$$d\bar{z} = \left[\bar{y},\, d\bar{x}\right]$$

koja duž zatvorene konture L^1 daje rezultat

$$\oint_{L^1} [\bar{y}, d\bar{x}] = 0$$

gde je L^1 onaj rub na kojem je $v = 0$. Uzimajući $\bar{y}(s,v)$ iz (4.4.1) i pretpostavljajući pri tom, razume se, da je $c \neq 0$, dobićemo da je

$$\oint_{L^1} [\bar{y}, d\bar{x}] = c \oint_{L^1} [\bar{x}_2, d\bar{x}_1],$$

a ovaj poslednji integral, za $c \neq 0$, nije jednak nuli, jer je, na osnovu teorije Bruna i Minkovskog [7], integral

$$\left| \oint_{L^1} [\bar{x}_2, d\bar{x}_1] \right| > 0,$$

jer predstavlja mešovitu površinu delova ravni ograničenih krivim L^1 i L^2. Dakle je

$$\left| \oint_{L^1} [\bar{y}, d\bar{x}] \right| > 0,$$

što znači da polje $\bar{z} = \int_{M_0 M} [\bar{y}, d\bar{x}]$ nije jednoznačno i da, suprotno prethodnom tvrdjenju, polje $\bar{y}(s,v)$ nije jednoznačno na celoj površi C.

Iz toga proizlazi da je jednoznačnost polja $\bar{z}(s,v)$ i polja $\bar{y}(s,v)$ na celoj površi C moguća jedino ako je $c = 0$ i, usled toga, $\bar{y} = const.$, a to znači da je beskonačno malo savijanje trivijalno. - Teorema je dokazana.

V. Beskonačno malo savijanje I reda otvorenih i zatvorenih bicilindroida tipa I i tipa II

5.1. Beskonačno malo savijanje bicilindroida tipa I i tipa II

Bicilindroid (kako ćemo kratko nazivati otvoreni bicilindroid) je deo po deo regularna površ sastavljena od dva regularna cilindroida C_1 i C_2 koji imaju jedan zajednički rub i, osim tačaka tog ruba, nemaju drugih zajedničkih tačaka. Prema tome da li se sastavni delovi bicilindroida nalaze sa raznih strana zajedničkog ruba ili se oba nalaze sa iste strane tog ruba, razlikovaćemo bicilindroide tipa I (ili raširene bicilindroide) i bicilindroide tipa II (ili posuvraćene bicilindroide).

D e f i n i c i j a 8. - Otvoreni bicilindroid, ili, kratko, bicilindroid je površ B Gausove krivine $K = 0$, koja ima sledeća svojstva:

1) homeomorfna je cilindričnom pojasu;

2) sastavljena je od dva cilindroida C_1 i C_2 koji imaju jedan zajednički rub L i, osim tačaka ovog ruba, nemaju drugih zajedničkih tačaka;

3) ograničena je dvema ravnim krivim L_1 i L_2 koje, zajedno s krivom L, leže u paralelnim ravnima; sve tri krive su homeomorfne krugu, glatke i ne sadrže nijedan pravolinijski odsečak.

D e f i n i c i j a 9. - Bicilindroid B_I čiji su sastavni delovi C_1 i C_2 sa raznih strana svog zajedničkog ruba L pripada klasi površi koje ćemo zvati bicilindroidima tipa I ili raširenim bicilindroidima.

D e f i n i c i j a 10. - Bicilindroid B_{II} čiji su sastavni delovi C_1 i C_2 sa iste strane svog zajedničkog ruba L pripada klasi površi koje ćemo zvati bicilindroidima tipa II ili posuvraćenim bicilindroidima.

Po definiciji, bicilindroid je neregularna površ bez samopreseka čiji rubovi L_1 i L_2 leže u paralelnim ravnima i čiji je obruč L u stvari jedan paralelan presek, a ugao izmedju tangentnih ravni cilindroidâ C_1 i C_2 duž obruča L je veći od 0, a manji od π.

Neka se koordinatni početak nalazi u ravni krive L; tada je vektorska jednačina ove krive

$$\bar{x} = \bar{x}(s), \tag{5.1.1}$$

a vektorske jednačine slobodnih rubova L_1 i L_2 su respektivno

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(s) &= \bar{x}(s) + \bar{a}_1(s), \\ \bar{x}_2(s) &= \bar{x}(s) + \bar{a}_2(s), \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

gde su $\bar{a}_1(s)$ i $\bar{a}_2(s)$ vektori na izvodnicama cilindroidâ C_1 i C_2. Vektorske funkcije $\bar{x}(s)$, $\bar{a}_1(s)$ i $\bar{a}_2(s)$ su neprekidne periodične funkcije s periodom jednakim dužini krive L; pretpostavićemo da su one dvaput neprekidno diferencijabilne. - Krive L, L_1 i L_2 su specijalan slučaj krivih klase A; usled toga, za njih važi opšte teorema I, koji smo u 3.1 dokazali za krive klase L_n.

Ako su P, P_1 i P_2 tačke koje na krivim L, L_1 i L_2 odgovaraju istoj vrednosti parametra s, tada su tangente ovih krivih u tim tačkama paralelne, jer su, po definiciji bicilindroida, ravni tih krivih paralelne, a C_1 i C_2 su razvojne površi. Stoga je

$$
(5.1.3) \qquad \begin{cases} \bar{x}_1'(s) = (1 + \lambda_1(s))\, \bar{x}'(s), \\ \bar{x}_2'(s) = (1 + \lambda_2(s))\, \bar{x}'(s), \end{cases}
$$

gde su periodične skalarne funkcije $\lambda_1(s)$ i $\lambda_2(s)$ takve da je

$$
1 + \lambda_1(s) > 0 \quad \text{i} \quad 1 + \lambda_2(s) > 0.
$$

Jednačinu bicilindroida B ma kojeg tipa napisaćemo u obliku

$$
(5.1.4) \qquad \bar{x}(s,v) = \begin{cases} \bar{x}(s) + v\, \bar{a}_1(s), \\ \bar{x}(s) + v\, \bar{a}_2(s). \end{cases} \qquad (0 \leq v \leq 1)
$$

Ako je $\bar{z}(s,v)$ polje brzinâ, a $\bar{y}(s,v)$ polje rotacija[7] beskonačno malog savijanja površi B, tada na svakom njenom regularnom delu funkcija $\bar{z}(s,v)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$
(5.1.5) \qquad d\bar{x}\, d\bar{z} = 0,
$$

iz koje dobijamo jednačine

$$
(5.1.6) \qquad d\bar{z} = [\bar{y},\, d\bar{x}_i] \qquad (i = 1, 2).
$$

gde su $\bar{x}_1(s,v)$ i $\bar{x}_2(s,v)$ vektorske funkcije koje definišu odgovarajuće regularne delove C_1 i C_2 bicilindroida B.

Za beskonačno malo savijanje bicilindroida B ma kojeg tipa dokazaćemo sledeću teoremu:

T e o r e m a X. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju bicilindroida B, na njegovim slobodnim rubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

D o k a z. - Očigledno, polja rotacija $\bar{y}_1(s,v)$ i $\bar{y}_2(s,v)$ se, na osnovu opšte teorije beskonačno malih savijanja, na regularnim delovima C_1 i C_2 bicilindroida B odredjuju integracijom odgovarajućeg totalnog diferencijala

$$d\bar{y} = \bar{y}_s ds + \bar{y}_v dv, \tag{5.1.7}$$

gde su izvodi $\bar{y}_s$ i $\bar{y}_v$ vektorske funkcije $\bar{y}(s,v)$, kao što smo pokazali u 2.1, vektori u tangentnoj ravni površi C_1 ili površi C_2:

$$\begin{cases} \bar{y}_s = \alpha_i \bar{x}_s - \beta_i \bar{x}_v, \\ \bar{y}_v = \qquad\quad - \alpha_i \bar{x}_v; \end{cases} \qquad (i = 1, 2) \tag{5.1.8}$$

pri tom skalarne funkcije $\alpha_i(s,v)$ i $\beta_i(s,v)$ $(i = 1, 2)$ zadovoljavaju odgovarajući sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} \alpha_{1v} = -\dfrac{2\lambda_1'(s)}{1 + v\lambda_1(s)}, \\ \alpha_{1s} - \beta_{1v} = 0, \end{cases} \tag{5.1.9}$$

odnosno

$$(5.1.9)\quad \begin{cases} \alpha_{2v} = -\dfrac{2\lambda_2(s)}{1+v\lambda_2(s)}, \\ \alpha_{2s} = \beta_{1v} = 0. \end{cases}$$

Integracijom ovih sistema dobijamo skalarne funkcije $\alpha_i(s,v)$ i $\beta_i(s,v)$ $(i = 1,2)$, koje nam, na osnovu (5.1.8) omogućuju da iz (5.1.7) dobijemo polje rotacijâ površi B:

$$(5.1.10)\quad \bar{y}(s,v) = \begin{cases} \int_{s_0}^{s}\{A_1(s)\bar{x}' - B_1(s)\bar{a}_1\}ds + \dfrac{vA_1(s)}{1+v\lambda_1(s)}\bar{a}_1 + \bar{c}, \\ \int_{s_0}^{s}\{A_2(s)\bar{x}' - B_2'(s)\bar{a}_2\}ds + \dfrac{vA_2(s)}{1+v\lambda_2(s)}\bar{a}_2 + \bar{c}. \end{cases}$$

gde su $A_i(s)$ i $B_i(s)$ $(i = 1,2)$ proizvoljne skalarne funkcije.

Da bismo teoremu dokazali, mi ćemo, kao u dokazu analogne teoreme za rebrasti cilindroid, poći od suprotne pretpostavke: da se pri svakom netrivijalnom beskonačno malom savijanju bicilindroida B sve tetive njegovih slobodnih rubova L_1 i L_2 smanjuju ili ostaju stacionarne.

Pod takvom pretpostavkom, za polja rotacijâ $\bar{y}_1(s,v)$ i $\bar{y}_2(s,v)$ na rubovima L_1 i L_2 važe, kao što smo dokazali u 4.1, konturni uslovi

$$(5.1.11)\quad \beta_1(s,1) = 0, \qquad \beta_2(s,1) = 0,$$

koji omogućuju da se u vektorskoj funkciji (5.1.10), na način koji je izložen u 4.1, odrede proizvoljne skalarne funkcije $A_i(s)$ i $B_i(s)$ $(i = 1,2)$; za tako odredjene funkcije $A_i(s)$ i

$B_1(s,v)$ polje rotacijâ (5.1.10) dobija oblik

(5.1.12) $$\overline{y}(s,v) = \begin{cases} c\left\{\overline{x}(s) + \dfrac{1-v}{1+v\lambda_1(s)}\,\overline{a}_1(s)\right\} + \overline{c}, \\ c\left\{\overline{x}(s) + \dfrac{1-v}{1+v\lambda_2(s)}\,\overline{a}_2(s)\right\} + \overline{c}. \end{cases}$$

Polje brzinâ $\overline{z}(s,v)$ koje odgovara ovom polju rotacija dobija se integracijom percijalne diferencijalne jednačine (5.1.6); polje $\overline{z}(s,v)$ biće na celom bicilindroidu jednoznačno ako je duž zatvorene konture

$$\oint_L [\overline{y},\, d\overline{x}] = 0.$$

Međutim, s obzirom na (5.1.12), za regularne delove C_1 i C_2 je na krivoj L vektor $[\overline{y},\, d\overline{x}]$ jednak

$$[\overline{x}_1,\, d\overline{x}], \quad \text{odnosno} \quad [\overline{x}_2,\, d\overline{x}],$$

a kako su integrali

$$\oint_L [\overline{x}_1,\, d\overline{x}] \quad \text{i} \quad \oint_L [\overline{x}_2,\, d\overline{x}]$$

pomešane površine (sa znakom koji odgovara smislu obilaženja) delova ravni ograničenih krivim L_1 i L, odnosno krivim L_2 i L, i kao takvi ne mogu biti jednaki nuli [7]:

$$\left|\oint_L [\overline{x}_1,\, d\overline{x}]\right| > 0, \quad \text{odnosno} \quad \left|\oint_L [\overline{x}_2,\, d\overline{x}]\right| > 0,$$

zaključujemo da mora biti $c = 0$, što znači da, pod navedenom pretpostavkom, polje brzinâ $\overline{z}(s,v)$ ne može biti netrivijalno. Drugim rečima, to znači da na rubovima L_1 i L_2, pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju bicilindroida B, postoje tačke čije se rastojanje povećava. - Teorema je dokazana.

Kao što je u početku naglašeno, teorema X odnosi se i na raširene i na posuvraćene bicilindroide. Ona je formulisana nezavisno od toga da li se pri netrivijalnom beskonačno malom saVijanju bicilindroida B njegov obruč L takodje netrivijalno deformiše ili ostaje stacionaran. U ovom poslednjem slučaju, trivijalnost polja rotacijâ na obruču L znači da je ugao izmedju tangentnih ravni regularhih delova C_1 i C_2 bicilindroida na obruču L stacionaran.

Prema tome, netrivijalna beskonačno mala savijanja bicilindroida B_I i B_{II} uslovljavaju nestasionarnost ugla $\Theta(s,v)$ izmedju tangentnih ravni duž obruča L.

N a p o m e n a. - Na osnovu prethodnog zaključka, za bicilindroid sa stacionarnim uglom Θ duž obruča L kažemo da je to u Vekuinom smislu [10; 2] kruto sastavljena površ.

2. D e f i n i c i j a 11. - Bicilindroid B^* čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima i ne seku se niti seku obruč te površi predstavlja opšti oblik bicilindroida.

Na osnovu onog što je u razdelu 4.3 rečeno za rebraste cilindroide čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima, jasno je da se bicilindroid B^* projektivnim preslikavanjem transformiše u običan bicilindroid sa rubovima i obručem u paralelnim ravnima. Iz teoreme X o beskonačno malom savijanju običnog bicilindroida i teoreme VII o beskonačno malom savijanju rebrastog cilindroida čiji rubovi leže u neparalelnim ravnima proizlazi

T e o r e m a XI. - Pri ma kojem netrivijalnom beskonačno malom savijanju bicilindroida B^* sa rubovima u neparalelnim ravnima, na njegovim slobodnimrubovima postoje proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

Iz teoreme XI, a na osnovu teoreme VII i teoreme X, proizlazi sledeća

P o s l e f i c a. - Bicilindroid čiji su rubovi u neparalelnim ravnima dopušta netrivijalno beskonačme malo savijanje i kad su mu jadn slobodan rub i obruč utvrdjeni ili mu je samo jedan slobodan rub utvrdjen, a na drugom slobodnom rubu postije proizvoljno bliske tačke čije se rastojanje povećava.

5.2. Beskomačno malo savijanje zatvorenih bicilindroida

D e f i n i c i j a 12. - Zatvorenim bicilindroidom nazivamo površ $\widetilde{B}$ koja se dobija kad se jedan bicilindroid zatvori dvema paralelnim osnovama; u opštem slučaju, te osnove su neparalelne i, kad se radi o posuvraćenom bicilindroidu, nemaju zajedničkih tačaka.

Prema tome, zatvoreni bicilindroid $\widetilde{B}$ sastavljen je od jednog omotača B i dveju ravnih osnova S_1 i S_2. Na osnovu onog što smo utvrdili za beskonačno malo savijanje komada ravni učvršćena ruba (v. dokaz teoreme VIII), izvodimo zaključak da za beskonačno malo svaijanje zatvorenog bicilindroida važi

T e o r e m a XII. - Zatvoreni bicilindroid u celom dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje.

Što se tiče beskonačno malog savijanja ~~xxxx~~ omotača zatvorenog bicilindroida, posmatranog u sastavu ove površi, za to savijanje važi, analogno teoremi IX,

T e o r e m a XIII. - Omotač zatvorenog bicilindroida ne dopušta netrivijalno beskonačno malo savijanje.

D o k a z ove teoreme, u kojeme se ponavljaju rasudjivanja navedena u dokazu analogne teoreme IX, nećemo izvoditi.

B I B L I O G R A F I J A

[1] **W. Blashke**

1. Vorlesungen über Differentialgeometrie, I-II. Berlin, 1924-1927.
2. Kreis und Kugel. Leipzig 1916.
3. Die Starrheit der Eiflächen. Math. Ztschr. 1920.

[2] **A. Cauchy**

1. Sur les polygones et les polyèdres. J. de l'Ec. Polyt. 9 (1813)

[3] **G. Darboux**

1. Théorie des suefaces, I-IV. Paris 1887- 1896.

[4] **D. Hilbert**

1. Ueber Flächen von konstanter Gaussecher Krümmung (Grundlagen der Geometrie. 1909.)

[5] **H. Weyl**

1. Ueber die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Zürich 1916.

[6] **S. Cohn-Vossen**

1. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. Gött. Nachr. (1927).
2. Die parabolische Kurve. Math. Ann. 99 (1928).
3. Unstarre geschlossene Flächen. Math. Ann. 1o2 (1929).
4. Izgibaemost poverhnosti v celom. UMN 1 (1936).

[7] **H. Minkovski**

1. Gesammelte Abhandlungen (1912).

[8] **H. Liebmann**

1. Eine neue Eigenschaft der Kugel. Gött. Nachr. (1899).
2. Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung. Münch. Ber.)1919).
3. Bedingte Flächenverbiegungen. Münch. Ber. (1920).

[9] **A. D. Aleksandrov**

1. Novoe dokazateljstvo neegibaemosti šara. DAN, 1(1935).
2. O beskonečno malyh izgibaniah nereguljarnyh poverhnostej. Matem. sb., 1 (1936).

[9] 3. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей 1948. Sadrži, izmedju ostalog rezultate preko četrdese autorovih radova iz diferencijalne geometrije u celom.

4. О неизгибаемости [illegible] выпуклых поверхностей. Вестник [illegible] 8 (1955).

10 **I. N. Vekua**

1. Некоторые вопросы [illegible] в малом [illegible] поверхностей. ДАН 112 (1957).

2. Обобщенные аналитические функции М. 1959

11 **E. Rembs**

1. Ueber die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. Math. Ztschr. 36 (1932).
2. Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen. Math. Ztschr. 36 (1932).
3. Ueber Gleitverbiegung. Math. Ann. 111 (1935).
4. Zur Verbiegung von Torsflächen. Erlangen (1935).
5. Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. 7 (1952).
6. Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Math. Ann. 127 (1954)
7. Infinitezimale Verbiegung von Flächen in sich. Math. Nachr. (1957).

12 **N. V. Jefimov**

1. Исследование изгибания поверхности с точкой уплощения. Мат. сб. 19 (1946)
2. Исследование бесконечно малых изгибаний некоторых классов поверхностей. Мат. сб. 20 (1947)
3. О жесткости в малом ДАН (1948).
4. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей УМН, II, 2 (1948).
5. Исследование деформаций поверхности содержащей точку с нулевым значением гауссовой кривизны. Мат. сб. 21 (1948).
6. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости УМН, VII (1952).
7. Исследование полной поверхности отрицательной кривизны ДАН, 93 (1953).
8. Некоторые полной поверхностях отрицательной кривизны. УМН, x (1955).

13 **A. V. Pogorelov**

1. Однозначная определенность выпуклых поверхностей. Труды Мат. Ин. А.Н, 29 (1949)

13 2. О регулярности выпуклых поверхностей УМН, 5 (1950)
3. Поверхности ограниченной внешней кривизны. Харьк. 1956.
4. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Харьков 1960
5. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии. Харьков 1960

14 **E. G. Poznjak**
1. Бесконечно малые изгибания цилиндрического пояса
YMH, II (1947).
2. Бесконечно малые изгибания желобов
Мат. сб. 32 (1953)

15 **I. G. Iljin** О жесткости боковой поверхности замкнутого цилиндроида
1. .
YMH, V (1950).

16 **R. Sauer**
1. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen. Math. Ann. (1935).
2. Projektive Transformationen des Darbouxschen Flächenkranzens. Arch. d. Math. 1(1948).

17 **M. Ilić-Dajović**
1. Бесконечно малые изгиба одного класса ребристых цилиндроидов ДАН 157 (1964) №3
2. Sur les déformations infiniment petites des cylindroïdes aux arêtes de type A. Publ. Inst. Math. Belgrade 4 (1964).

S a d r ž a j