СВЕТ. МИХАИЛОВИЋ,
професор

МИХАИЛО СИМИЋ,
директор гимназије

АЛГЕБРА

ЗА VI РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ИЗДАЊЕ, ШТАМПА И ПОВЕЗ
ИЗДАВАЧКОГ ПРЕДУЗЕЋА „НАРОДНА ПРОСВЕТА", БЕОГРАД

Ирационални имагинарни и комплексни бројеви

Ирационални бројеви

Знамо да се при дељењу често дешава да се рачун никад не може да сврши. То се исто дешава и при кореновању. У оба случаја као резултат се добија децималан број са неограниченим бројем децимала, само што се децимални бројеви, који се добијају кореновањем знатно разликују од оних, до којих се долази дељењем. Код децималног броја са неограниченим бројем децимала, који се добија дељењем, јасно се разликују групе цифара, које се непрестано понављају, и у којима се све цифре ређају истим редом. Свака таква група цифара, која се у једном децималном броју непрестано понавља, назива се **период,** а сами децимални бројеви, у којима се јављају такве групе цифара, називају се **периодични децимални бројеви.** Тако је на пр.:

$$45 : 37 = 1{,}216216 \ldots .$$

Код овог броја група цифара 216 непрестано се понавља и зато можемо лако да одредимо ма који децимал тога броја. Напротив код бројева који се добијају кореновањем знамо само оне децимале који су израчунати. Тако је на пр.:

$$\sqrt{41} = 6{,}4031242 \ldots .$$

Овде се, као што видимо, поједине цифре понављају, али не истим редом. Дакле овај корен није периодичан децималан број, и зато код њега не можемо знати ниједан од оних децимала који нису израчунати.

Сваки овакав број до кога се долази кореновањем, и који има неограничен број децимала назива се **ирационалан број.** Има и таквих ирационалних бројева до којих се не долази кореновањем. Такав је на пр. број π, који претставља размеру обима и пречника ма кога круга. Његова је приближна вредност са шест децимала:

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

Цели бројеви, обични разломци и периодични децимални бројеви, насупрот ирационалним бројевима, називају се **рационални бројеви.**

Из свега што је напред речено излази: **да се ирационалан број не може написати у виду обичног разломка.**

И изрази (бројни или алгебарски) могу бити ирационални. За неки израз казаћемо да је ирационалан, ако садржи један или више корена, а при том се никаквим преображајима не може довести на такав облик, да се сви корени изгубе. Ирационални су изрази на пр.:

$$3\sqrt{2}+1,\quad \sqrt{a-3},\quad \sqrt[n]{x^n+y^n},\quad \frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} \text{ итд.}$$

Напротив изрази $\sqrt{a^2-2a+1}$ и $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ нису ирационални јер је

$$\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}=(a-1),$$

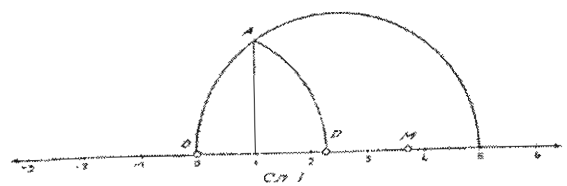
$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[3]{27}=3.$$

Напомена. Знамо да се сваки корен може написати у виду степена с разломљеним изложиоцем. Зато су и изрази, у којима се јављају степени са разломљеним изложиоцима, ирационални под напред изложеним условима.

Ирационални бројеви на бројној линији

Видели смо да сваки цео број има своје тачно одређено место на бројној линији. То исто важи и за обичне разломке. На пр. обичном разломку $\frac{11}{3}$ одговарала би на бројној линији (сл. 1) тачка M, која има своје тачно одређено место, јер и разломак $\frac{11}{3}$ има своју тачно одређену бројну вредност.

Да видимо сад да ли на бројној линији има места за ирационалне бројеве. Ми смо видели да никад не можемо да добијемо тачну бројну вредност ирационалног броја, пошто се његови децимали не ређају неким утврђеним редом, а при том је број његових децимала неограничен. Али ми смо раније показали (Алгебра за V разред стр. 112) да се ирационални бројеви могу тачно одређивати графички.



Сл. 1

Помоћу конструкције која се види на сл. 1 одређујемо графички $\sqrt{5}$, који нам претставља дуж OA. Ако ту дуж пренесемо на бројну линију од тачке O на десно, онда ће тачка P тачно одређивати место, које на бројној линији одговара ирационалном броју $\sqrt{5}$. Јасно је да тачка P не може одговарати ниједном рационалном броју. Ако бисмо претпоставили да тачка P одговара на пр. неком обичном разломку, онда би тај разломак морао бити једнак ирационалном броју $\sqrt{5}$, а то је немогуће.

Рачунање са ирационалним бројевима и изразима

Ирационални бројеви могу се сабирати, одузимати, множити, делити, степеновати и кореновати како у вези са рационалним бројевима тако и међу собом. При томе се као резултат рачунске радње добија у већини случајева ирационалан број, а само у изузетним случајевима резултат може бити рационалан број. При рачунању поступак може бити двојак. Тај поступак приказаћемо на два задатка.

Први задатак. Израчунати бројну вредност ирационалног израза $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$.

1) Ако $\sqrt{2}$ заменимо његовом приближном вредношћу са два децимала рачун ће изгледати овако:

$$(2+1{,}41)(2-1{,}41)=3{,}41\cdot 0{,}59=2{,}0119.$$

2) Не замењујући $\sqrt{2}$ његовом приближном вредношћу можемо рачунати и овако на други начин:

$$(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2.$$

Овај други резултат несумњиво је тачан. Зато нам је јасно да се код резултата, који смо добили рачунајући на први начин, јавља грешка која износи 0,0119.

Други задатак. Израчунати бројну вредност ирационалног израза $(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

Овде ћемо применити поступак који нас је код првог задатка довео до тачног резултата. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{aligned}(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) &= 5\cdot 2 - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2\\ &= 10 + 3\sqrt{3} - 3\\ &= 7 + 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Пошто смо на овај начин дати израз довели на његов најпростији облик, сад ћемо заменити $\sqrt{3}$ његовом приближном вредношћу и довршити рачун:

$$\begin{aligned}7+3\sqrt{3} &= 7 + 3\cdot 1{,}73\\ &= 10{,}73.\end{aligned}$$

Из резултата до којих смо дошли решавајући ова два задатка излази:

1) **Да при рачунању са ирационалним изразима не треба назначене корене замењивати њиховим приближним вредностима још у почетку рачуна.**

2) **Да се ирационални корени могу заменити својим приближним вредностима при крају рачуна, пошто су извршене све претходне радње, при којима се са ирационалним коренима рачунало као са општим бројевима.**

Као што знамо при извлачењу квадратног корена из неког броја или израза добијају се два резултата: један са знаком + и други са знаком —. Међутим квадратни корени који се јављају у бројним изразима обично се узимају као апсолутни бројеви. Ако би се код неког израза сваки квадратни корен узео са двоструким знаком ±, онда би се могло десити

да се срачунавањем тога израза добије велики број различитих резултата. Тако на пр. израз

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

дао би нам ова четири резултата:

1) $1{,}41\ldots + 1{,}73\ldots = 3{,}14\ldots$

2) $1{,}41\ldots - 1{,}73\ldots = -0{,}32\ldots$

3) $-1{,}41\ldots + 1{,}73\ldots = 0{,}32\ldots$

4) $-1{,}41\ldots - 1{,}73\ldots = -3{,}14\ldots$

Примери.

1) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{b} - \dfrac{b+a\sqrt{x}}{a} = \dfrac{a^2+ab\sqrt{x}-b^2-ab\sqrt{x}}{ab} =$

$= \dfrac{a^2-b^2}{ab}.$

3) $(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7}) = 3^2 - (\sqrt{7})^2 = 9 - 7 = 2.$

4) $\left(\sqrt[3]{10} - \sqrt[6]{20}\right) : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{2} - \sqrt[6]{20} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10:2} -$

$- \sqrt[6]{20} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{20:4} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5}$

5) $\left(\sqrt{2} - \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \left[\sqrt{2} - \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right]^2 =$

$= \left(\sqrt{2} - \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2-1}\right)^2 = (\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2)^2 = (2-\sqrt{2})^2 =$

$= 6 - 4\sqrt{2}.$

6) $\sqrt{x^{2n+1} - 2x^{n+1} + x} = \sqrt{x^{2n}\cdot x - 2x^n\cdot x + x} =$

$= \sqrt{(x^{2n} - 2x^n + 1)\,x} = \sqrt{(x^n)^2 - 2x^n + 1}\cdot\sqrt{x} =$

$= \sqrt{[\pm(x^n - 1)]^2}\cdot\sqrt{x} = \pm(x^n - 1)\sqrt{x}$

Преображаји ирационалних израза

Ирационалним изразима можемо мењати облик помоћу разних преображаја. Разуме се да су ти преображаји корисни само у том случају, ако се помоћу њих ирационални изрази могу да упросте. Ми ћемо посматрати два важна облика, у којима се често јављају ирационални изрази, и проучићемо услове, под којима се ти изрази могу упростити.

Изрази облика $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$. Изрази овог облика могу се преобразити на овај начин:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a+\sqrt{b} \pm 2\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} + a - \sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}$$

На овај начин долазимо до образаца:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}$$

Ако бројеви **a** и **b** имају такве вредности, да је $a^2 - b$ квадрат неког броја или алгебарског израза, онда ће се изрази на десној страни ових образаца јавити у простијем облику. При томе се може десити да код израза на десној страни ишчезну оба корена, тако да се као крајњи резултат добије рационалан број или израз.

Примери.

1) $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2\cdot 2 - 2\sqrt{2^2-3}} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

2) $\sqrt{11+4\sqrt{7}} + \sqrt{11-4\sqrt{7}} = \sqrt{11+\sqrt{112}} + \sqrt{11-\sqrt{112}}$

$$= \sqrt{22+2\sqrt{121-112}}$$

$$= \sqrt{22+6}$$

$$= \sqrt{28}.$$

3) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}}$

$$= \sqrt{2a+2b}$$

4) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}$

$$= \sqrt{14-2\sqrt{49-24}}$$

$$= \sqrt{14-10}$$

$$= 2$$

Код овог последњег примера резултат преображаја је, као што видимо, рационалан број. По томе се види да ни сам дати израз $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$ није ирационалан. За такве изразе, који су само дати у ирационалном облику, а у ствари су рационални, казаћемо да су **привидно ирационални.**

Изрази облика $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Да бисмо извели обрасце, помоћу којих се могу вршити преображаји израза овог облика, поћи ћемо од ових образаца које смо раније извели:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Ако најпре саберемо па затим одузмемо леве и десне стране ових образаца, долазимо до ових нових образаца, помоћу којих се могу вршити преображаји израза облика $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

У којим нам случајевима ови обрасци могу бити од користи показаћемо на неколико примера.

Примери:

1) $\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{36-20}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}+1$

2) $\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{17-\sqrt{288}} = \sqrt{\frac{17+\sqrt{289-288}}{2}} -$

$- \sqrt{\frac{17-\sqrt{289-288}}{2}} = 3-\sqrt{8}$

3) $\sqrt{2x+y+2\sqrt{x^2+xy}} = \sqrt{2x+y+\sqrt{4x^2+4xy}}$

$= \sqrt{\frac{2x+y+\sqrt{(2x+y)^2-(4x^2+4xy)}}{2}} +$

$+ \sqrt{\frac{2x+y-\sqrt{(2x+y)^2-(4x^2+4xy)}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2x+y+y}{2}} + \sqrt{\frac{2x+y-y}{2}}$

$= \sqrt{x+y}+\sqrt{x}.$

4) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \sqrt{2+\sqrt{9+\sqrt{80}}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-80}}{2}} + \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-80}}{2}}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{5}+2}$

$= \sqrt{4+\sqrt{5}}.$

Задаци за вежбање

Срачунати изразе:

1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$

2) $\sqrt{9x}+\sqrt{4x}+\sqrt{x}.$

3) $3\sqrt[3]{a}+\sqrt{x}-\sqrt[3]{a}-3\sqrt{x}$

4) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{ab} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}.$

5) $\frac{5-2\sqrt{7}}{6} - \frac{3-\sqrt{7}}{4}.$

6) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a^5})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{a})$

7) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}):\sqrt[6]{a}.$

8) $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a})(\sqrt{a}-1).$

9) $(x-1):(\sqrt{x}-1).$

10) $(\sqrt{7}-1)^2.$

11) $(2\sqrt{5}+5)^2.$

12) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^3.$

13) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2.$

14) $\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{c}}\right)^2.$

Код ових израза најпре усавршити именноце, па затим извршити назначене рачунске радње:

15) $\frac{3-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{3-5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$

16) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$

17) $\frac{5+3\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} - \frac{5-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$

18) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[6]{a}.$

19) $\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}}.$

20) $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}.$

Ове изразе упростити:

21) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}.$

22) $\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}.$

23) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$

24) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$

25) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}.$

26) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}-\sqrt{9-2\sqrt{14}}.$

27) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}.$

28) $\sqrt{4-\sqrt{15}}.$

29) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

30) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

31) $(\sqrt{3}+1)\sqrt{4-\sqrt{12}}$.

32) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$.

33) $\sqrt{7+2\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

34) $\sqrt{a+\sqrt{b+2c\sqrt{b-c^2}}}$.

Имагинарни бројеви

Знамо већ да парном корену из негативног броја не одговара никакав број: ни цео ни децималан, ни позитиван ни негативан, ни рационалан ни ирационалан. Међутим при решавању задатака често се добијају као решења изрази, који садрже један или више парних корена из негативног броја. У том случају ми ћемо казати да такав задатак нема решења. Али то није довољно. Пошто овакви изрази имају велику примену у математици, ми ћемо морати с њима мало ближе да се упознамо.

Пре свега, да бисмо дошли до једног важног закључка, посматраћемо ова три квадратна корена с негативним радикандом:

$$\sqrt{-9}, \quad \sqrt{-5}, \quad \sqrt{-a^2-1}.$$

Те корене ми можемо да преобразимо на овај начин:

1) $\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\,.\,\sqrt{-1}=3\sqrt{-1}$,

2) $\sqrt{-5}=\sqrt{5\,.\,(-1)}=\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1}$,

3) $\sqrt{-a^2-1}=\sqrt{-(a^2+1)}=\sqrt{(a^2+1)\cdot(-1)}=$
$=\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{-1}$.

Као што видимо сваки од ова три корена могли смо да напишемо у виду производа, чији је један чинилац $\sqrt{-1}$. Јасно је да ћемо на овај начин моћи да преобразимо сваки квадратни корен са негативним радикандом.

Из резултата до којих смо овде дошли изводимо

Закључак. Сваки квадратни корен са негативним радикандом може се написати у виду производа, чији је један чинилац број или израз који не садржи ниједан корен са негативним радикандом, а други је чинилац $\sqrt{-1}$.

Напред смо споменули да парном корену из негативног броја не одговара никакав број. Паран корен може бити: други, четврти, шести итд. Ми ћемо се засад задржати на квадратном корену и посматраћемо овај низ квадратних корена:

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt{-9}, \quad \sqrt{-16} \text{ итд.}$$

Ти се корени могу на показани начин написати овако у виду производа:

$$\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-9}=3\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-16}=4\sqrt{-1} \text{ итд.}$$

Јасно је да се овде $\sqrt{-1}$ може узети као нека врста јединице. Али како та јединица не претставља никакав нама познати број, то се њој даје нарочити назив. Она се назива **имагинарна (уображена) јединица.** Имагинарна јединица обично се краткоће ради означава словом **i**, тј. узима се да је $\sqrt{-1}=i$. Тада је даље:

$$\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}=2i, \quad \sqrt{-9}=3\sqrt{-1}=3i,$$
$$\sqrt{-16}=4\sqrt{-1}=4i.$$

Сад нам је јасно да сваки од корена: $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$ итд. претставља извесну множину имагинарних јединица. И као што множина обичних јединица претставља обичан број, исто тако и множина имагинарних јединица претставља број нарочите врсте, који се назива **имагинаран (уображен) број.**

Бројеви с којима смо до сад радили (цели и децимални, позитивни и негативни, рационални и ирационални) насупрот имагинарним бројевима називају се **реални бројеви (стварни).**

Код имагинарних бројева $2i$, $3i$, $4i$ итд. бројеви 2, 3, 4 итд. јављају се као сачиниоци пред имагинарном јединицом. Јасно је да ти сачиниоци могу бити не само цели већ и макакви реални бројеви или изрази. Тако су на пр. имагинарни бројеви:

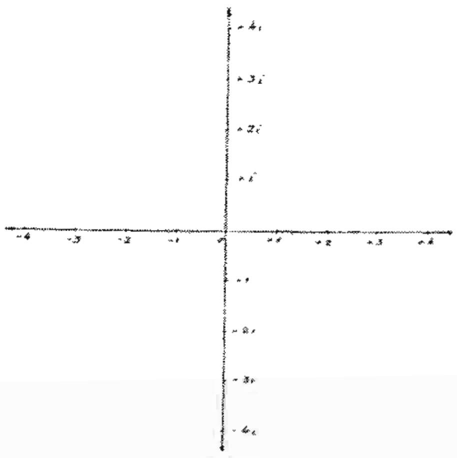
$$-5i, \ \tfrac{3}{4}i, \ (a-b)i \text{ итд.}$$

Ако се деси да је сачинилац пред имагинарном јединицом корен из неког броја или израза, онда се имагинарна јединица пише испред кореновог знака. На пр.:

$$\sqrt{-7}=\sqrt{7\cdot(-1)}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{7}.$$

Бројна линија имагинарних бројева

Видели смо да свакоме од оних бројева које смо назвали реалним одговара на бројној линији по једна тачно одређена тачка. Исто тако и обратно: свакој тачки на бројној линији одговара по један реалан број. По томе се види да на бројној линији нема места за имагинарне бројеве. Зато се за имагинарне бројеве мора узети нова бројна линија. Дакле за претстављање свих досад познатих бројева служиће нам две бројне линије: **бројна линија реалних бројева и бројна линија имагинарних бројева.** Усвојено је да се бројна линија имагинарних бројева постави тако, да пролази кроз нулту тачку бројне линије реалних бројева и да на тој линији стоји нормално (сл. 2). На тај начин ове две бројне линије имају исти положај као и координатне осовине. Поред тога оне имају као и координатне осовине свака свој позитиван и свој негативан део. Зато се њима често дају краћи називи: **реална осовина и имагинарна осовина.** Као што видимо на реалној осовини налазе се позитивни бројеви десно а негативни лево од нуле, а на имагинарној осовини позитивни су бројеви изнад а негативни испод нуле.



Сл. 2

Рачунање са имагинарним бројевима

За рачунање са имагинарним бројевима остају у важности иста правила, која важе и за рачунање са реалним бројевима. Али одмах морамо напоменути да би нас проста примена правила за рачунање у извесним случајевима могла довести до погрешног резултата, ако не бисмо водили рачуна

о једном важном услову. Наиме при рачунању са имагинарним бројевима треба водити рачуна о томе да увек мора бити

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Одмах ћемо показати како се може учинити грешка ако се не води рачуна о томе услову. Узмимо на пр. да нам је задато да извршимо множење:

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$$

Ако бисмо се послужили познатим правилом о множењу корена са истим изложиоцем, ми бисмо тај задатак могли да решимо овако:

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} \cdot 3\sqrt{-1} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} =$$
$$= 2 \cdot 3\sqrt{(-1)(-1)} = 6\sqrt{1} = 6.$$

Међутим овај резултат није тачан. Грешка је настала отуда што нисмо водили рачуна о услову да мора бити $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1$. Ту грешку избећи ћемо ако оба чиниоца, пре него што отпочнемо множење изразимо имагинарном јединицом i. Тада ћемо рачунати овако:

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \cdot 3i = 6i^2 = 6 \cdot (-1) = -6.$$

Одавде изводимо

Закључак. При рачунању са имагинарним бројевима не треба почињати никакав рачун пре него што се сваки квадратни корен са негативним радикандом изрази имагинарном јединицом i.

Сабирање и одузимање имагинарних бројева

Пре свега јасно је да се сабирање не може извршити ако је један сабирак реалан а други имагинаран број. Исто тако није могуће извршити ни одузимање ако треба од реалног броја одузети имагинаран или од имагинарног реалан. Дакле имагинарни бројеви могу се само међу собом сабирати и одузимати. При томе се поступа као при сабирању и одузимању сличних израза.

Примери:

1) $5i + 2i + 8i = 15i$

2) $\sqrt{-36} + \sqrt{-9} = 6i + 3i = 9i$

3) $\sqrt{-5} + \sqrt{-3} + \sqrt{-1} = i\sqrt{5} + i\sqrt{3} + i =$
$(\sqrt{5} + \sqrt{3} + 1)\, i = \dots$

4) $14i - 5i = 9i$

5) $ai - bi = (a - b)\, i$

6) $\sqrt{-49} - 2\sqrt{-3} - \sqrt{-25} + 5\sqrt{-3} = 7i - 2i\sqrt{3} -$
$- 5i + 5i\sqrt{3} = 2i + 3i\sqrt{3} = (2 + 3\sqrt{3})\, i$

7) $\frac{2}{3}\, i + \frac{5}{6}\, i = \frac{2i}{3} + \frac{5i}{6} = \frac{4i}{6} + \frac{5i}{6} = \frac{9i}{6} = \frac{3}{2}\, i$

8) $\frac{3}{5}\, i - 2\, i + \frac{5}{6}\, i = \frac{18i - 60i + 25i}{30} = -\frac{17}{30}\, i$

Као што видимо при сабирању и одузимању имагинарних бројева као резултат се добија увек имагинаран број. У изузетном случају кад је умањеник једнак умалитељу резултат би био нула, али ми знамо да се и нула налази на бројној линији имагинарних бројева.

Множење и дељење имагинарних бројева

Један имагинаран број помножити једним реалним целим бројем значи имагинаран број узети толико пута као сабирак, колико реалан број има у себи јединица. На пр.:

$$7i \cdot 4 = 7i + 7i + 7i + 7i = 28i.$$

Ми видимо да се производ 28i може добити, ако се сачинилац 7 испред имагинарне јединице помножи бројем 4. На исти начин можемо израчунати производ и ако множитељ није цео већ ма какав реалан број. Уопште би било

$$ai \cdot n = ani.$$

Раније смо показали да се имагинарни бројеви могу множити и међу собом. Тако је на пр.:

$$5i \cdot 2i = 10i^2 = 10 \cdot (-1) = -10,$$

или уопште

$$ai \cdot bi = abi^2 = ab \cdot (-1) = -ab.$$

Закључак. Производ једног реалног и једног имагинарног броја увек је имагинаран, а производ два имагинарна броја увек је реалан број.

На основу овог закључка можемо написати једнакости:

$$ai \cdot b = ci, \qquad mi \cdot ni = p.$$

Одавде излази да је

$$\frac{ci}{b} = ai, \qquad \frac{ci}{ai} = b, \qquad \frac{p}{mi} = ni.$$

Закључак. Количник чији је дељеник имагинаран а делитељ реалан, или дељеник реалан а делитељ имагинаран број, увек је имагинаран, а количник два имагинарна броја увек је реалан број.

Примери:

1) $(-3i)\, 8i = -24i^2 = (-24)\,(-1) = 24.$

2) $\frac{20i}{5} = \frac{20}{5}\, i = 4i.$

3) $\frac{8}{6i} = \frac{8 \cdot i}{6i \cdot i} = \frac{8i}{6i^2} = \frac{4i}{-3} = -\frac{4}{3}\, i.$

Степеновање имагинарних бројева

Ради степеновања имагинарних бројева потребно је да најпре проучимо степеновање имагинарне јединице. Пре свега је

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1.$$

Затим је даље

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \text{ итд.}$$

Као што видимо овде се као резултат степеновања јављају бројеви: i, -1, $-i$, 1, који се периодично понављају. Ако продужимо израчунавање степена виших од осмог, лако ћемо се уверити да је

1) $i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = \ldots = i$

2) $i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \ldots = -1$

3) $i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \ldots = -i$

4) $i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \ldots = 1$

или

1) $i^{4+1} = i^{4 \cdot 2+1} = i^{4 \cdot 3+1} = - - - - = i$

2) $i^{4+2} = i^{4 \cdot 2+2} = i^{4 \cdot 3+2} = - - - - = -1$

3) $i^{4+3} = i^{4 \cdot 2+3} = i^{4 \cdot 3+3} = - - - - = -i$

4) $i^4 \quad = i^{4 \cdot 2} \quad = i^{4 \cdot 3} \quad = - - - - = 1.$

Уопште, ако са n означимо какав цео број, биће:

1) $i^{4n+1} = i$, 2) $i^{4n+2} = -1$, 3) $i^{4n+3} = -i$,

4) $i^{4n} = 1$.

Сад можемо лако да одредимо ма колики степен ма кога имагинарног броја. Тако је на пр.:

$$(2i)^9 = 2^9 \cdot i^9 = 512i, \quad \left(-\frac{2}{3}i\right)^6 = \frac{2^6}{3^6} i^6 = \frac{64}{729} \cdot (-1) = -\frac{64}{729}.$$

Степени имагинарне јединице јављају се и код сваког производа чији су чиниоци имагинарни бројеви. На пр.

$$9i \cdot 2i \cdot 4i = 9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot i^3 = 72 \cdot (-i) = -72i,$$

$$7i \cdot 5i \cdot 2i \cdot 11i = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 \cdot i^4 = 770.$$

Закључак. Сваки непарни степен имагинарног броја или производ непарног броја имагинарних чинилаца мора бити имагинаран број. Сваки парни степен имагинарног броја или производ парног броја имагинарних чинилаца мора бити реалан број.

Напомена. Како се врши кореновање имагинарног броја показаћемо доцније.

Примери:

1) $(2i)^4 \cdot (6i)^2 = 16 \cdot i^4 \cdot 36i^2 = -576.$

2) $\frac{3i}{8} \cdot \frac{2i}{5} \cdot 0{,}96i = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot 0{,}96\, i^3 = -\frac{18}{125}\, i.$

3) $\sqrt{-75} \cdot (\sqrt{-12})^3 \cdot (\sqrt{-2})^5 =$

$= 5i\sqrt{3} \cdot (2i\sqrt{3})^3 \cdot (i\sqrt{2})^5 = 1440\, i\sqrt{2}.$

4) $12i^6 \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right)^3 \left(-\frac{\sqrt{-3}}{3}\right) = 12i^6 \cdot \left(-\frac{1}{8i^3}\right) \cdot \left(-\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) =$

$= \frac{12i^6 \cdot i\sqrt{3}}{24i^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Комплексни бројеви

Раније смо показали да се један реалан и један имагинаран број не могу ни сабрати ни одузети. Али при решавању неких задатака дешава се, да се као резултат добија израз, код кога се један реалан и један имагинаран број јављају као сабирци или као умањеник и умалитељ (или уопште као чланови алгебарског збира). Такви би били на пр. изрази:

$$2 + 5i, \quad 7 - 3i, \quad -1 - 2i, \quad a + bi, \quad x - yi \text{ итд.}$$

Ако би се неки израз оваквог облика јавио као резултат при решавању неког задатка, јасно је да ћемо онда казати да тај задатак нема решења. Али то није довољно. Овакви изрази имају велику примену у математици, и зато ћемо морати с њима мало ближе да се упознамо.

Пошто се ниједан од напред написаних израза, као и уопште ниједан од израза таквог облика, не може срачунати (тј. написати у простијем облику), то смо принуђени да сваки такав израз сматрамо као **један број.** Међутим јасно је да се такви бројеви не могу уврстити ни у реалне ни у имагинарне бројеве. Зато се узима да они образују једну нову врсту бројева, који се називају **комплексни бројеви.** Сваки комплексан број има свој **реални** и свој **имагинарни део.** На пр. код комплексног броја $7 - 3i$ реални је део 7, а имагинарни део $-3i$. Ако се два комплексна броја разликују само знаком својих имагинарних делова, онда се они називају **коњуговани комплексни бројеви.** Такви су бројеви на пр.:

$$7 + 3i \text{ и } 7 - 3i$$

или уопште

$$a + bi \text{ и } a - bi.$$

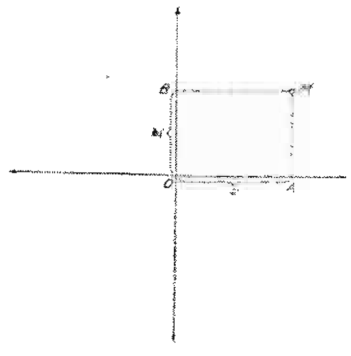
Јасно је да два комплексна броја могу бити једнаки само у том случају, ако су им једнаки посебно реални а посебно имагинарни делови. Тако на пр. ако је $a + bi = c + di$, онда мора бити $a = c$ и $b = d$.

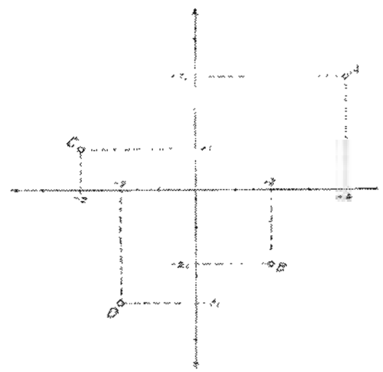
Бројна раван

Пошто комплексни бројеви нису ни реални ни чисто имагинарни, то за њих нема места ни на реалној ни на имагинарној бројној линији. Уосталом за графичко претстављање комплексних бројева није ни довољна једна бројна линија. Један једини реалан број можемо довести у везу са сваким могућим имагинарним бројем. На тај начин постају разни комплексни бројеви који одговарају једном једином реалном броју, и нама је јасно да тих комплексних бројева има толико, да они могу испунити читаву једну бројну линију. На тај би начин свакомпојединoм реалном броју одговарала читава једна бројна линија комплексних бројева. Дакле за графичко претстављање комплексних бројева не би нам био довољан ни ма колико велики број бројних линија. Зато се за графичко претстављање комплексних бројева узима читава једна раван. То је управо она раван коју одређују реална и имагинарна бројна линија и која се назива **бројна раван** (сл. 3).

Ако у бројној равни узмемо једну произвољну тачку M, па из те тачке спустимо нормале на обе бројне линије, онда ће подножним тачкама A и B тих нормала одговарати један реалан и један имагинаран број. Узмимо да је реалан број **a** а

имагинаран **bi**. Знамо већ да збир та два броја чини комплексан број **a + bi**. Тај комплексан број тачно је одређен тачком M, а исто тако и обратно: тај комплексан број својим реалним и својим имагинарним делом тачно одређује положај тачке M. Зато се узима да тачка M претставља графички комплексан број **a + bi**.


Сл. 3


Сл. 4

Као што видимо једну тачку која графички претставља неки комплексан број, одређују реалан и имагинаран део тога броја на исти начин, као што једну тачку у координатном систему одређују њене координате.

На сл. 4 видимо графички претстављене комплексне бројеве: $4 + 3i$(A), $2 - 2i$(B), $-3 + i$(C), $-2 - 3i$(D).

Рачунање с комплексним бројевима

Комплексни бројеви могу се сабирати и одузимати како међу собом тако и у вези са реалним или имагинарним бројевима. У ствари при томе се сабирају или одузимају само реални бројеви међу собом а имагинарни међу собом.

Примери:

1) $(1 + 4i) + (3 + 2i) = 4 + 6i$

2) $(5 + 9i) + (2 - 11i) = 7 - 2i$

3) $(4 + 3i) - (2 + 3i) = 4 + 3i - 2 - 3i = 2$

4) $(8 - 5i) - 5 = 3 - 5i$

5) $14i - (5 + 9i) + (5 - 7i) = -2i$

6) $(2a + bi) - (a - 2bi) = a + 3bi$

7) $(x - yi) + y - i) = x + y - yi - i =$

$(x + y) - (y + 1)\, i$

8) $(2 - i\sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 3i) + (1 - i) = 2 - \sqrt{2} + 1 - i$

$\sqrt{3} + 3i - i = (3 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3})\, i \cdot$

Ако треба израчунати производ два комплексна броја, онда се поступа као при множењу бинома биномом. Исто тако и степен комплексног броја израчунава се као степен бинома. При множењу комплексног броја реалним или комплексног имагинарним бројем поступићемо као при множењу бинома мономом. Какви се резултати добијају у појединим случајевима показаћемо на примерима.

Примери:

1) $(4 - 7i)\,(3 + 4i) = 12 - 21i + 16i - 28i^2 =$

$= 12 - 5i - 28 \cdot (-1) = 40 - 5i.$

2) $(6 + 4i)\,(9 - 6i) = 54 + 36i - 36i - 24i^2 = 78$

3) $(4 + 6i)\,(3 + 2i) = 12 + 18i + 8i + 12i^2 = 26i$

4) $(a + bi)\,(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$

5) $(7 - 12i) \cdot 3 = 21 - 36i.$

6) $(a - bi) \cdot xi = axi - bxi^2 = axi + bx.$

7) $(4 + 3i)^2 = 16 + 24i + 9i^2 = 7 + 24i.$

8) $(x - yi)^3 = x^3 - 3x^2yi + 3xy^2i^2 - y^3i^3 =$

$= x^3 - 3xy^2 - 3x^2yi + y^3i.$

Ако треба комплексан број поделити реалним или имагинарним бројем, онда се поступа као при дељењу бинома мономом. Ако се комплексан број јави као делитељ онда се дељење обично не може извршити непосредно. Да би се и у том случају омогућило дељење, морају се дељеник и делитељ помножити комплексним бројем који је коњугован делитељу. Тада делитељ постаје реалан број и дељење се може извршити. Код разломака чији су имениоци комплексни бројеви може се извршити **усавршавање** именица на сличан начин као и код

разломака са ирационалним имениоцем. Како се у појединим случајевима извршују све потребне радње, показаћемо на примерима.

Примери:

1) $(12 - 8i) : 4 = 3 - 2i.$

2) $(7 + 4i) : 2i = \frac{7}{2i} + \frac{4i}{2i} = \frac{7 \cdot i}{2i \cdot i} + 2 = \frac{7i}{-2} + 2 = 2 - \frac{7i}{2}$

3) $5 : (2 - i) = \frac{5}{2 - i} = \frac{5\,(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5\,(2 + i)}{4 - i^2} =$

$= \frac{5\,(2 + i)}{5} = 2 + i$

4) $\frac{18i}{1 + 3i} = \frac{18i\,(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{18i - 54i^2}{10} = 5{,}4 + 1{,}8i$

5) $\frac{5 - i}{7 - i} = \frac{(5 - i)(7 + i)}{(7 - i)(7 + i)} = \frac{36 - 2i}{50} = 7{,}2 - 0{,}04i$

6) $\frac{11 + 2i}{11 - 2i} = \frac{(11 + 2i)(11 + 2i)}{(11 - 2i)(11 + 2i)} = \frac{117 + 44i}{125}$

Закључак. **При рачунању с комплексним бројевима добија се као резултат уопште комплексан број. Само у изузетним случајевима резултат може бити реалан или имагинаран број. Производ два коњугована комплексна броја увек је реалан број.**

Напомена. Кореновање комплексног броја проучићемо доцније.

Задаци за вежбање

Изразити имагинарном јединицом:

1) $\sqrt{-72}$

2) $\sqrt{-1089}$

3) $\sqrt{-2a^2}$

4) $\sqrt{-27x^4}$

5) $\sqrt{12^2 - 42^2}$

6) $\sqrt{\left(\frac{10}{11}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2}$

7) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}$

8) $\sqrt{(a - b)\,b - (a + b)\,a}$

9) $\sqrt{(2a^2 - 1)^2 - (2a^2 + 1)^2 + 4a^2}$

10) $(-x^2 - 2x - 1)^{\frac{1}{2}}$

Срачунати:

11) $18i - 30i - 5i + 14i + 9i$.

12) $15i - (7i - 9i)$.

13) $8i + i\sqrt{3} - 11i$.

14) $6i - [(2i - i\sqrt{5}) - (i - 3i\sqrt{3})]$.

15) $\sqrt{-100} + 3\sqrt{-36} - 2\sqrt{144} - \sqrt{-25}$

16) $\sqrt{-18} + \sqrt{-50}$

17) $i\sqrt{2} + 2i\sqrt{7} - 3i\sqrt{5}$

18) $2i\sqrt{2} + 5i\sqrt{3} - i\sqrt{8} - 2i\sqrt{48}$

19) $\sqrt{-18} + \sqrt{-8} + \sqrt{-2}$

20) $\sqrt{-8} - \sqrt{-12} + \sqrt{-32} - \sqrt{-75}$.

21) $\sqrt{-54} - \sqrt{-45} + \sqrt{-24} - \sqrt{-20}$.

22) $4\sqrt{-45} - 5\sqrt{-20}$.

23) $\frac{2}{3}i - \frac{3}{4}i + \frac{2}{5}i$.

24) $\frac{3}{4}i - \frac{5}{8}i + \frac{7}{12}i - \frac{11}{18}i$.

25) $12i \cdot 25i$.

26) $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-36}$.

27) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$.

28) $14i \cdot 0{,}05$.

29) $0{,}025 \cdot 0{,}4i$.

30) $\sqrt{-2{,}56} \cdot \sqrt{3{,}61}$.

31) $7\sqrt{-4} \cdot 2\sqrt{-9}$.

32) $\sqrt{-0{,}0009} \cdot \sqrt{-5{,}2}$.

33) $\frac{28i}{4}$.

34) $\frac{\sqrt{-54}}{3}$.

35) $\frac{24i}{90i}$.

36) $\frac{3}{5i}$.

37) $0{,}2i \cdot 0{,}5i \cdot \left(-\frac{3}{4}i\right)$.

38) $12i \cdot 0{,}4i \cdot 3i \cdot 0{,}5i \cdot 7i$.

39) $2i \cdot 5i - 3i \cdot 4i$.

40) $\frac{2}{i} - \frac{3}{2i}$.

41) i^{54}.

42) i^{137}.

43) i^{-1}.

44) i^{-13}.

45) $i^3 - 3i^5 + 2i^7$.

46) $\sqrt[-2]{-2}$.

Проверити једнакости:

47) $\sqrt{(a^2 + b^2)^3 - (a^3 - b^3)^2 - 4a^2b^2(a^2 + ab + b^2)} = ab(a + b)i$.

48) $\sqrt{(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 - 4a^2b^2(a^2 - ab + b^2)} = ab(a - b)i$.

49) $\sqrt[-2]{(x^3 - 1)^2 - (x^2 + 1)^2} = -\frac{i}{2x}$.

50) $\frac{3\sqrt{-32}}{2\sqrt{-72}} = 1$.

Срачунати:

51) $(6 - 11i) + (3 + 8i)$.

52) $(7 - \sqrt{-9}) - (12 - \sqrt{-25})$.

53) $3(2 + 7i) - 5(1 + 4i)$.

54) $6(2 - i) + 3(1 + 7i)$.

55) $(7 - 10i) - (5 + 2i) - (1 + 3i)$.

56) $\frac{2 - 3i}{2} - \frac{3 - 2i}{3}$.

57) $\frac{8 + 3i}{4} - \frac{5 + 9i}{6} - \frac{11 + 3i}{12}$.

58) $(5 + 3i)(1 - 2i)$.

59) $(4 - 3i)(2 - i)$.

60) $(3 + \sqrt{-4})(2 + \sqrt{-9})$.

61) $(7 + i)(7 - i)$.

62) $(3 - i)(1 + 2i)(1 - i)$.

63) $(11 - 3i)(9 + 2i) - (10 + 7i)(7 - 4i)$.

64) $a(b + i) - b(a + i)$.

65) $(3 - i)^2$.

66) $(2 + i)^2(3 - 4i)$.

67) $(\sqrt{-3} - 1)^4$.

68) $(2 - \sqrt{-2})^3$.

69) $\dfrac{7-i}{1+i}$.

70) $\dfrac{2(4-7i)}{5+i}$.

71) $\dfrac{3-i}{3+4i}$.

72) $\dfrac{(7+5i)(11-i)}{3-i}$.

73) $\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{1}{1+i}$.

74) $\dfrac{1+2i}{2-i}-\dfrac{1-2i}{2+i}$.

75) $(1-ai)i-(a-i)a$.

76) $[a+(a-1)i][a-(a+1)i]$.

77) $\dfrac{x+yi}{y-xi}$.

78) $\dfrac{ai}{a+i}-\dfrac{1}{a-i}$.

79) $\dfrac{x+1}{x+i}-\dfrac{x-1}{x-i}$.

80) $\left(\dfrac{1}{a-i}-\dfrac{1}{a+i}\right)\cdot\dfrac{1}{2i}$.

Проверити једнакости:

81) $\dfrac{3-4i}{1+2i}=-(1+2i)$.

82) $\dfrac{1}{1+i^3}-\dfrac{i}{1-i^5}=1$.

83) $\dfrac{3+i}{1-3i}\cdot\dfrac{1-5i}{5+i}=1$.

84) $\sqrt{(8+15i)(8-15i)}=1$.

85) $\sqrt{\dfrac{(3-i)3i-(5+i)i}{1+i}}=2$

86) $\dfrac{(a+bi)(b+ai)+2abi}{a+b}=(a+b)i$.

87) $\dfrac{a+bi}{b-ai}=i$.

88) $\dfrac{a-bi}{b+ai}=i^3$.

89) Који број треба поделити са $7-3i$, да би количник био $1-i$?

90) Којим бројем треба поделити $5-i$, да би количник био $1+i$?

91) Који број треба помножити са $\dfrac{1+i}{2}$, да би производ био $2-i$?

92) Којим бројем треба помножити $(2-i)^3$, да би производ био 39?

Које посебне вредности треба дати општим бројевима у овим изразима да би ти изрази били једнаки:

93) $(a+b-1)+(a-b+3)i$ и $(2a-b+5)+(3a-2b+3)i$?

94) $\dfrac{x+2y+i}{x-2y-i}$ и $\dfrac{3+2i}{2+3i}$?

95) Коју посебну вредност треба дати општем броју **a** у изразу $\dfrac{a-i}{2a+i}-\dfrac{3+2i}{2-i}$, да би тај израз био а) реалан, b) имагинаран?

96) Које посебне вредности треба да имају **x** и **y** у изразу $\dfrac{2x+3-yi}{1+i}+\dfrac{2x-1+3yi}{1-i}$, да би тај израз био једнак 0?

Скраћено рачунање с непотпуним бројевима

Знамо да се ирационалан број никад не може тачно претставити једним децималним бројем. То исто важи и за периодичне децималне бројеве. Такве бројеве ми обично пишемо са извесним ограниченим бројем децимала, и јасно је да при томе чинимо извесну грешку. На пр. ако узмемо да је

$$\sqrt{3} = 1,73$$

онда ми чинимо грешку, јер изостављамо све децимале који долазе после другог децимала. Зато нам је јасно да ни горња једнакост није тачна. Ми можемо казати само да је $\sqrt{3}$ **приближно једнак** 1,73. Зато ћемо ми у сваком оваквом случају, кад треба везати знаком једнакости две бројне величине, које су само приближно једнаке, поред једне од тих величина стављати (пр.). Тако ћемо на пр. писати

$$\sqrt{3} = 1,73 \text{ (пр.)}$$

и то ћемо читати: $\sqrt{3}$ **једнак је приближно** 1,73. У овом случају број 1,73, који нам претставља приближну вредност квадратног корена из 3, назива се **непотпун број.** Исто тако непотпуни су бројеви:

$$3,14 \text{ (пр.)} = \pi, \qquad 0,4545 \text{ (пр.)} = \frac{5}{16} \quad \text{итд.}$$

Цели и крајњи децимални бројеви, чија је вредност тачно одређена, насупрот непотпуним бројевима називају се **потпуни бројеви.** Да би се непотпуни бројеви разликовали од потпуних обично се код непотпуног броја иза његове последње цифре ставља неколико тачкица. Тако на пр. $\sqrt{2}$ са четири децимала пишемо овако:

$$1,4142\ldots$$

Ове тачкице треба употребити код сваког непотпуног броја, ако се иначе не би знало да је то непотпун број. У противном случају те се тачкице могу и изоставити.

При рачунању с непотпуним бројевима ми ћемо претпоставити да је последња цифра сваког непотпуног броја узета с поправком за случај да је прва занемарена цифра 5 или већа од 5. Како се врши поправка познато нам је још из другог разреда. На пр. број π са пет децимала пишемо овако

$$\pi = 3,14159 \text{ (пр.)}.$$

Али ако нам је потребан број π са четири децимала ми не можемо просто да изоставимо последњи децимал 9, већ морамо

у исто време четврти децимал 5 да повећамо за 1. То чинимо ради тога да би грешка била што мања. Јер ако просто изоставимо пети децимал ми чинимо грешку која је већа од 0,00009, а ако у накнаду за изостављени пети децимал четврти децимал повећамо за 1, онда ће грешка бити мања од 0,00001. За то се узима да је са четири децимала

$$\pi = 3,1416 \text{ (пр.)}.$$

Ако неки непотпун број узмемо најпре са два па затим са четири децимала, онда је друга вредност тачнија од прве. На пр. $\sqrt{17}$ има приближну вредност:

1) са 2 децимала . . . . . 4,12 . . . .
2) са 3 децимала . . . . . 4,123 . . . .

Код прве вредности најниже су јединице стоти а код друге хиљадити. Према томе прва вредност има 412 својих најнижих јединица, док друга вредност има 4123 своје најниже јединице. Ми кажемо да је друга вредност тачнија од прве, јер је број њених најнижих јединица већи од броја најнижих јединица прве вредности. На исти начин могу се упоређивати по тачности и ма која два непотпуна броја. На пр. број 3074,8 . . . . тачнији је од броја 81,25 . . . ., јер је

$$30748 > 8125.$$

Уопште важи:

Правило. Од два непотпуна броја тачнији је онај који има већи број својих најнижих јединица.

При рачунању с непотпуним бројевима обично се поставља један од ова два услова:

1) Да се израчуна резултат са одређеним бројем децимала.

2) Да се израчуна резултат са највећом могућном тачношћу. У оба случаја скраћивање рачуна постиже се тиме, што се не рачуна с цифрама које не могу осетно утицати на жељени резултат.

Скраћено сабирање

Како се врши скраћено сабирање показаћемо на неколико задатака.

Први задатак. Израчунати збир бројева 0,74098 . . . . 3,52214 . . . ., 1,26946 . . . . и 0,30177 . . . . са два децимала.

Решење. Нама је потребан збир са два децимала, али зато ипак не смемо почети сабирање од стотих, пошто цифра, која се јавља у збиру на месту стотих, зависи од хиљадитих. Зато ћемо почети сабирање од хиљадитих, пошто претходно извршимо поправку сваке цифре на месту хиљадитих, ако је цифра која долази за њом већа од 4. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 0,741 \\ 3.522 \\ 1,269 \\ 0,302 \\ \hline 5,834. \end{array}$$

Последња цифра послужила би нам за поправку кад би била већа од 4, али пошто та цифра није већа од 4 просто ћемо је изоставити, и тражени збир биће

5,83.

Да смо рачунали са свима цифрама нашли бисмо да збир износи

5,83435.

Ова два збира разликују се дакле за

0.00435,

што значи да је грешка мања од 5 хиљадитих или, што је исто, од пола јединице последњег задржаног места. Али та грешка може бити и већа од пола јединице последњег задржаног места. То ћемо показати на овоме другом задатку.

Други задатак. Израчунати збир непотпуних бројева: 1,3349 . . . ., 3,1038 . . . . и 2,0146 . . . . са једним децималом.

Решење. Овде ћемо сабирање почети од стотих, иначе ћемо поступити као код првог задатка. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 1,33 \\ 3,10 \\ 2,01 \\ \hline 6,44. \end{array}$$

Пошто одбацимо последњи децимал резултат ће бити

6,4.

Да смо рачунали са свима цифрама резултат би био

6,4533.

Као што видимо ова се два збира разликују за

0,0533.

Дакле грешка је већа од 5 стотих, тј. од пола јединице последњег задржаног места. При великом броју сабирака ова грешка може бити и знатно већа, али, ако број сабирака није већи од 12, она у сваком случају мора бити мања од једне јединице последњег задржаног места.

При сабирању потпуних бројева са одређеним бројем децимала може се поступити на исти начин као и при сабирању непотпуних бројева.

Трећи задатак. Израчунати збир непотпуних бројева 12,7149 . . . ., 0,58 . . . ., 9,316 . . . . и 1,66 . . . . с највећом могућном тачношћу.

Решење. Пре свега јасно је да нема смисла сабирати цифре на оним местима, која нису заступљена у свима сабирцима. Зато ћемо почети сабирање од стотих, а хиљадити ће нам послужити само за поправку. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 12,71 \\ 0,58 \\ 9,32 \\ 1,66 \\ \hline 24,27. \end{array}$$

Цифру 7, која се јавља у збиру на месту стотих, не можемо сматрати за сигурну, и зато ћемо ту цифру употребити само за поправку десетих. Дакле тражени збир биће:

24,3.

Четврти задатак. Израчунати збир бројева: 2,74685 . . . ., 5,208 . . . ., 3,7115 и 1,25 с највећом могућном тачношћу.

Решење. Овде имамо да сабирамо два непотпуна и два потпуна броја. Ми ћемо почети сабирање од оног места, на коме се налази несигурна цифра највеће месне вредности. То је цифра 8 код другог сабирка која се налази на месту хиљадитих. Дакле почећемо сабирање од хиљадитих и рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 2{,}747 \\ 5{,}208 \\ 3{,}712 \\ 1{,}25 \\ \hline 12{,}917 \end{array} \approx 12{,}92 \text{ (пр.)}.$$

Скраћено одузимање

Први задатак. Израчунати разлику бројева 3,50933 .... и 1,72249 са два децимала.

Решење. Да бисмо добили разлику са два децимала довољно је да почнемо одузимање од стотих. При томе нам хиљадити могу послужити само за поправку. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 3{,}51 \\ -1{,}72 \\ \hline 1{,}79. \end{array}$$

Да смо почели одузимање од хиљадитих резултат би био

$$1{,}787.$$

Ова се два резултата разликују за

$$0{,}003.$$

Дакле грешка је мања од пола јединице последњег задржаног места. У нарочитим случајевима грешка може бити и већа, али у сваком случају она мора бити мања од једне јединице последњег задржаног места.

Рачун се може извршити и без поправке децимала од којих се почиње одузимање. Често се дешава да се у том случају добија резултат са мањом грешком него при одузимању с поправком. Тако на пр. разлика бројева 6,3744 .... и 2,5439 .... са једним децималом износила би

1) с поправком: $6{,}4 - 2{,}5 = 3{,}9$

2) без поправке: $6{,}3 - 2{,}5 = 3{,}8.$

Са два децимала разлика би била

$$6{,}37 - 2{,}54 = 3{,}83.$$

Као што видимо разлика без поправке приближнија је разлици са два децимала него разлика с поправком.

Други задатак. Израчунати разлику бројева 17,282 .... и 9,35786 .... с највећом могућном тачношћу.

Решење. Пре свега јасно је да нема смисла увлачити у рачун децимале на оним местима, која су заступљена само код умалитеља или само код умањеника. Зато ћемо овде рачунати са три децимала, колико их има умањеник. Али како се претпоставља да је вредност последње цифре умањеникове одређена према првој занемареној цифри, то ћемо и код умалитеља трећи децимал морати да узмемо с поправком. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{r} 17{,}282 \\ -9{,}358 \\ \hline 7{,}924. \end{array}$$

Често се при одузимању као и при сабирању ради веће сигурности по извршеном одузимању последња цифра узима само за поправку.

Скраћено множење

Скраћено множење

Први задатак. Израчунати производ бројева 3,8573 .... и 12,416 .... са једним децималом.

Решење. Да би нам поступак при скраћеном множењу био јаснији ми ћемо најпре извршити множење рачунајући са свима цифрама:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3,8573\ldots \\
 & 12,416\ldots \\
\hline
2 & 31\,438 \\
3 & 85\,73 \\
1\,54 & 29\,2 \\
7\,71 & 46 \\
38\,57 & 3 \\
\hline
47,89 & 22\,368\ldots
\end{array}
$$

На овај начин добили смо резултат са седам децимала, али пошто су последње цифре код множеника и множитеља непоуздане, то су непоуздане и поједине цифре у резултату. То нарочито важи за последњи децимал и за неколико децимала испред њега. Али нама је потребан резултат са једним децималом. Усправна линија која дели цифре делимичних производа у две групе постављена је зато, да одвоји цифре које не утичу осетно на први децимал резултата. Јасно је да су то оне цифре које се налазе десно од линије. Зато ћемо потражити начина да уштедимо себи сувишан труд око израчунавања тих цифара. Како су нама потребне само цифре лево од линије ми ћемо само њих и рачунати, а цифре у првом ступцу десно од линије могу нам послужити само за поправку. Међутим цифре у првом ступцу лево од линије добијају се у главном при множењу десетих десетим, или стотих јединицама, или хиљадитих десетицама. Зато ћемо, да не бисмо погрешили при одређивању месне вредности појединих делимичних производа, написати множитељ испод множеника тако да множитељеве јединице (2) дођу испод множеникових стотих делова (5), па ћемо затим остале цифре множитељеве поређати поред јединица обрнутим редом. Дакле множеник и множитељ (без десетне запете) биће овако написани:

$$
\begin{array}{c}
3,8573 \\
61421.
\end{array}
$$

Кад су множеник и множитељ овако написани, онда се множењем сваке две цифре које су једна испод друге добијају стоти. Сад ћемо сваком цифром множитељевом помножити цифру над њом и све множеникове цифре лево од ње, пошто претходно помножимо и прву цифру десно од ње само ради поправке. Ако се при израчунавању поправке добије једноцифрен број већи од 4, онда се за поправку узима 1, а ако се добије двоцифрен број онда се за поправку узима прва цифра за случај да је друга цифра мања од 5, или прва цифра повећана за 1 за случај да је друга цифра већа од 4. Јасно је да се поједини делимични производи морају потписивати тако да им последње цифре дођу једна испод друге. Цео рачун изводи се овако:

$$
\begin{array}{r}
3,8573 \\
61\,421 \\
\hline
3\,857 \\
771 \\
154 \\
4 \\
2 \\
\hline
47,88 = 47,9 \text{ (пр.)}.
\end{array}
$$

Јасно је да број децимала у резултату зависи од тога како је потписан множитељ испод множеника. Померањем множитеља улево број децимала би се смањио; напротив, померањем множитеља удесно број децимала би се повећао. Али множитељ се никако не сме потписати тако, да се његова крајња цифра налази десно од последње цифре множеникове, јер се тада над крајњом цифром множитељевом не би налазила одговарајућа цифра множеникова, од које треба отпочети множење. На пр. потписивање множитеља не би се смело извршити овако:

$$
\begin{array}{l}
3,8573 \\
\;\;61421
\end{array}
$$

Напомена. При множењу потпуних бројева, ако се тражи производ са одређеним бројем децимала, може се поступити на исти начин као и при множењу непотпуних бројева.

Други задатак. Израчунати производ бројева 6,254... и 5,02... с највећом могућном тачношћу.

Решење. Од два дата броја тачнији је први, али су код оба броја последњи децимали непоуздани. Да бисмо извели правилан поступак при израчунавању траженог производа извешћемо множење на два начина: 1) узимајући тачнији број за множеник, 2) узимајући тачнији број за множитељ. У оба случаја да бисмо добили производ са што већим бројем децимала, потписивање ћемо извршити тако, да прва цифра множитељева дође испод последње цифре множеникове, па ћемо затим, поступајући као код првог задатка, рачунати овако:

$$
\begin{array}{lr}
1) & 6,254 \\
 & 205 \\
\hline
 & 31270 \\
 & 125 \\
\hline
 & 31,395
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
2) & 5,02 \\
 & 4526 \\
\hline
 & 3012 \\
 & 100 \\
 & 25 \\
 & 2 \\
\hline
 & 31,39.
\end{array}
$$

Код првог множења најнижи су делови хиљадити, јер су множитељеве јединице (5) потписане испод множеникових хиљадитих (4), а код другог множења најнижи су делови стоти, јер су множитељеве јединице (6) потписане испод множеникових стотих (2). Пошто су код оба множења последња цифра множеника и прва цифра обрнуто написаног множитеља непоуздане, то ће и у појединим делимичним производима бити непоуздане цифре, које постају од тих цифара. Те су непоуздане цифре у главном оне, које својим збиром дају код првог производа стоте и хиљадите, а код другог производа стоте. Дакле код првог производа имамо једну непоуздану цифру више него код другог производа. Зато је боље да рачунамо на други начин, тј. да тачнији производ узмемо за множитељ. Код израчунатог производа последњу цифру (пошто је већа од 4) употребићемо само за поправку. Према томе тражени производ биће:

$$31,4.$$

Напомена. Ако се тражи да се израчуна производ са одређеним бројем децимала, онда се тај број децимала не може узимати по вољи. Јасно је да тај број не сме бити већи од броја децимала, који се могу добити при одређивању производа с највећом могућном тачношћу. Зато се и у случају, кад

се тражи производ са одређеним бројем децимала, увек узима тачнији број за множитељ.

Трећи задатак. Израчунати производ бројева 3,7254. . . и 2,25 с највећом могућном тачношћу.

Решење. Овде имамо да множимо један непотпун и један потпун број. Пошто је сваки потпун број тачнији од ма кога непотпуног броја, то ћемо потпун број узети за множитељ. Иначе рачунаћемо као и при множењу непотпуних бројева:

$$
\begin{array}{r}
3,7254 \\
522 \\
\hline
74508 \\
7451 \\
1863 \\
\hline
8,3822 = 8,382.
\end{array}
$$

Скраћено дељење

Први задатак. Израчунати количник бројева 3,35398. . . и 3,21. . . са два децимала.

Решење. Најпре ћемо рачунати као при обичном дељењу:

$$9,35398 : 3,21 = 935,|398 : 321 = 2,914$$

$$
\begin{array}{r|l}
293 & 3 \\
\hline
4 & 49 \\
\hline
1 & 288 \\
\hline
 & \;\;4
\end{array}
$$

Другу цифру количника (9) добили смо кад смо делитељем 321 поделили други делимични деленик 2933. Али ми ту цифру можемо добити и на други начин. Ако и код делитеља и код другог делимичног деленика изоставимо последње цифре па извршимо дељење са тако скраћеним бројевима, количник ће опет бити 9. Другим речима другу цифру количника можемо добити, ако код делитеља одбацимо последњу цифру, па затим тако скраћеним делитељем поделимо први остатак 293 (не спуштајући наредну цифру 3). Пошто смо на овај начин одредили другу цифру количника, сад треба да одредимо други остатак. Ако не бисмо водили рачуна о одбаченој последњој цифри делитељевој (1), нови остатак израчунали бисмо овако:

$$32 \cdot 9 = 288, \qquad 293 - 288 = 5.$$

Овај остатак не слаже се са цифром 4 (лево од усправне линије), на чије место треба да дође. Ова грешка дошла је отуда, што нисмо водили рачуна о изостављеној последњој цифри делитељевој. Да бисмо исправили ову грешку помножићемо са 9 и одбачену цифру делитељеву (1), па ћемо добивени производ употребити само за поправку. Дакле рачунаћемо овако: 9 пута 1, 9; 1 за поправку; 9 пута 2, 18 и 1, 19 и 4, 23. И тако је сад нови остатак 4.

Помоћу овог остатка можемо сад одредити трећу цифру количникову на сличан начин као што смо одредили и другу цифру. Ради тога треба сад да одбацимо и другу цифру делитељеву (2), па да тако скраћеним делитељем (3) поделимо други остатак (4). Најзад, ако хоћемо да одредимо и последњи остатак, поступићемо на исти начин као при одређивању другог остатка. Одбачена цифра 2 и овде би нам послужила само за поправку, али како је у овом случају производ за поправку

$$2 \cdot 1 = 2 < 5,$$

то се овде поправка не врши.

Према свему напред изложеном цео рачун изводи се овако:

935 : 321 = 2,91
293
4
1.

Као што видимо ми смо у дељенику задржали само онолико првих цифара, колико је потребно да се добије први делимични дељеник. Затим смо после сваког делимичног дељења одбацили по једну делитељеву цифру. Јасно је да се на овај начин мора добити количник са онолико цифара колико их има делитељ. Усправна линија коју смо употребили при обичном

дељењу, одваја цифре које су непотребне при скраћеном рачунању.

Други задатак. Израчунати количник бројева 3,5184... и 4,1527... са три децимале.

Решење. Пре свега, пошто је делитељ већи од дељеника, јасно је да у количнику неће бити целих. Према томе количник ће имати свега три цифре. То значи да и делитељ треба да има три цифре. Зато ћемо код делитеља одбацити последње две цифре с тим да прву одбачену цифру (2) употребимо само за поправку при израчунавању првог остатка. Разуме се да и први делимични дељеник треба да одредимо према троцифреном делитељу. Дакле рачунаћемо овако:

3,5184 : 4,1527 = 351,84 : 415,27 = 351,8|4 : 415,|27 = 0,847.
196
30
1.

Трећи задатак. Израчунати количник бројева 1,38074... и 0,252... с највећом могућном тачношћу.

Решење. Пре свега јасно је да код дељеника треба задржати само онолико првих цифара, колико је потребно за први делимични дељеник. Према томе први делимични дељеник био би (без обзира на десетну запету) 1380. Али како је прва одбачена цифра 7, то ћемо последњу цифру првог делимичног дељеника повећати за 1. Дакле рачунаћемо овако:

1,38074 : 0,252 = 1381 : 252 = 5,48
121
20
0.

Последњи делитељ 2 садржао би се 10 пута у последњем дељенику 20, кад се не би увела у рачун поправка. Али због поправке количник је у ствари 8.

Четврти задатак. Израчунати количник бројева 3,529... и 4,7274... са највећом могућном тачношћу.

Решење. Код делитеља, који је тачнији од дељеника, треба задржати онолико првих цифара, колико је потребно да би дељеник био у исто време и први делимични дељеник. Према томе код делитеља ћемо задржати три прве цифре. Прву одбачену цифру 7 употребићемо само за поправку при израчунавању првог остатка. Дакле рачунаћемо овако:

$$
\begin{array}{l}
3{,}529 : 4{,}72|74 = 352{,}9 : 472|7 = 0{,}746 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 220 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \ 31 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

Како је овде последњи остатак 3 већи од половине последњег делитеља 4, то би при обичном дељењу наредна цифра количника свакако била већа од 4. Зато треба последњу цифру количника повећати са 1. Према томе количник ће бити

0,747.

Скраћено дељење може се применити и на потпуне бројеве. При томе се потпуним бројевима у случају потребе могу дописивати нуле. На пр.:

$$
\begin{array}{l}
25 : 3{,}14\ldots = 2500 : 314\ldots = 7{,}96 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ 302 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ 19 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Задаци за вежбање

Израчунати са два децимала:

1) $0{,}28557\ldots + 2{,}37924\ldots$
2) $3{,}75064\ldots + 2{,}05228\ldots$
3) $10{,}7496 + 3{,}251355\ldots$
4) $12{,}965048\ldots + 7{,}3497\ldots + 102{,}50096\ldots$
5) $0{,}075 + 0{,}4 + 0{,}0528$
6) $9{,}40275\ldots + 0{,}352973\ldots + 2{,}6137\ldots$

Израчунати с једним децималом:

7) $5{,}88029\ldots + 23{,}51946\ldots + 0{,}3705\ldots$
8) $49{,}02492\ldots + 105{,}744725\ldots + 66{,}2345\ldots + 7{,}112\ldots$
9) $218{,}942 + 22{,}7065 + 156{,}257$
10) $0{,}20651\ldots + 6{,}37 + 11{,}5288\ldots + 0{,}835 + 3{,}975.$

Израчунати са три децимала:

11) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ 12) $\frac{7}{11} + \frac{11}{15} + \frac{15}{19}$

Израчунати са два децимала:

13) $\sqrt{3}\,\sqrt{23}$ 14) $\sqrt{14} + \sqrt{80} + \sqrt{111}$

Израчунати са једним децималом:

15) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ 16) $\frac{15}{17} + \sqrt{30} + \sqrt[3]{45}.$

Израчунати с највећом могућном тачношћу:

17) $79{,}308\ldots + 15{,}74552\ldots + 27{,}9406\ldots$
18) $0{,}00774\ldots + 2{,}0582\ldots + 5{,}96$
19) $118{,}249\ldots + 40{,}182254\ldots + 9{,}592\ldots + 25{,}74\ldots$
20) $15{,}7 + 96{,}3804\ldots + 7{,}25.$
21) $0{,}02848\ldots + 3{,}265 + 1{,}3176\ldots$
22) $1{,}58\ldots + \sqrt{\frac{1}{2}}$
23) $0{,}76\ldots + 1{,}257 + \sqrt{1{,}6} + \sqrt{2{,}5}$
24) $\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} + 7{,}202\ldots$ (претходно усавршити именилац)

Израчунати са два децимала:

25) $7{,}31586\ldots - 3{,}22574\ldots$
26) $18{,}05526\ldots - 17{,}23499\ldots$

27) 0,96051... — 0,372

28) 3,74059 — 5,2064

29) 12,8845... — (5,2736... + 1,9824...)

30) 9,70432... — (7,9658 — 3,246).

Израчунати с једним децималом:

31) $28\frac{5}{18} - 9\frac{8}{29}$

32) $\sqrt{109} - \sqrt{71}$

33) $\sqrt[3]{3} - \frac{31}{44}$

34) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi$

Израчунати с највећом могућном тачношћу:

35) 45,27381... — 37,998...

36) 4,75 — 0,9248...

37) 3,05249... — 0,2257... — 1,463...

38) (7,74065... — 3,59928...)—(8,3796... — 8,744726...).

39) (1,92994... + 5,25) — (3,252 + 3,3096...).

40) 11,512... — ($\sqrt{38} + \sqrt{21}$).

41) $\sqrt{10} - 3\frac{1}{12}$ + 0,714...

42) 0,61... — $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (претходно усавршити именилац).

Израчунати са једним децималом:

43) 11,5265... × 2,0872...

44) 2741,0554... × 24,62809...

45) 9,0507... × 2,134...

46) 28,5725 × 3,0864

47) 14,2874... × 0,0539...

48) 5,82 × 3,7024...

49) 57,4... × 0,6442...

50) 0,5263... × 0,31...

Израчунати са два децимала:

51) 3,8261... × 2,7405...

52) 5,26254... × 0,0748...

53) 4,72652... × 0,68.

54) 2,2745... × 0,4617...

55) 7,4116 × 2,572

56) 10,502 × 2,924

57) $\frac{2.15}{2}$ ($\sqrt{5}$ — 1

58) 3) — $\sqrt{3}$) (2 — $\sqrt{2}$)

Израчунати са четири децимала:

59) 0,52047... × 0,00326...

60) 0,74416... × 0,00092...

Израчунати с највећом могућном тачношћу:

61) 0,7738... × 23,423...

62) 0,39205... × 0,813...

63) 5,7103... × 8,12.

64) 4,715... × 0,62...

65) 7,25406... × 3,1681...

66) 0,085... × 5,382...

67) 0,066... × 0,259.

68) 0,0394... × 0,0255...

69) 28,308... × 1,724... × 0,526.

70) 9,1036... × 0,35825... × 15,274...

71) (6,08197... + 3,3722...) · 0,338...

72) (4,3082... — $\sqrt{7}$) · 1,274...

73) $(3\frac{5}{7}$ + 2,774...) $(1\frac{9}{11}$ — 0,9428...).

74) ($\sqrt{6}$ — 1,516...) ($\sqrt{2}$ — 0,632...).

Израчунати са два децимала:

75) 7,2584... : 3,1708...

76) 15,2852... : 6,317...

77) 91,4415. . . : 3,5086. . . 78) 0,5925 : 1,275.

79) 3,814 : 2,5527. . . 80) 27,32 : 19,258.

Израчунати са једним децималом:

81) 8,0189. . . : 3,26. 83) 77,926. . . : 0,53229. . .

82) 0,75062. . . : 0,04185. . 84) 107,205 : 2,384. . .

Израчунати с највећом могућом тачношћу:

85) 12,256. . . : 9,317. . . 89) 306,38. . . : 15,2747. . .

86) 5,96104. . . : 0,724. 90) 0,58244. . . : 3,2736. . .

87) 20,5274. . . : 3,271. . . 91) 0,0206. . . : 0,753. . .

88) 48,59 : 18,3654. . . 92) 2,8566. . . : 0,038. . .

93) $\dfrac{9,2574\ldots \times 3,0269\ldots}{5,3547\ldots}$, 95) $\dfrac{3,1758\ldots + \sqrt{3}}{3,1758\ldots - \sqrt{3}}$

94) $\dfrac{21,522 + 17,38}{19,924\ldots}$ 96) $\dfrac{(\sqrt{5} + 0,773\ldots) \cdot 2,8}{\sqrt{6} - 1,524\ldots}$.

Једначине и проблеми другог степена

Квадратне једначине с једном непознатом

Познато нам је да се разликују врсте једначина према степену непознате. Свака једначина која садржи бар један члан са другим степеном непознате, али не садржи ниједан члан са трећим или вишим степеном непознате, назива се **једначина другог степена** или краће **квадратна једначина.** Квадратне су једначине на пр.:

$$3x^2 + 8x + 4 = x^2 - 5, \quad m^2x^2 + 2nx - 1 = x^2 - 2mx - n^2 \text{ итд.}$$

Свакој квадратној једначини можемо равним преображајима мењати облик. На пр. на двема горњим једначинама можемо извршити ове преображаје:

$$3x^2 - x^2 + 8x + 4 + 5 = 0$$
$$2x^2 + 8x + 9 = 0$$
$$m^2x^2 - x^2 + 2nx + 2mx - 1 + n^2 = 0$$
$$(m^2 - 1)x^2 + 2(m + n)x + (n^2 - 1) = 0.$$

Као што видимо, ми смо ове две једначине довели на такав облик, да им је десна страна 0, а лева страна садржи три члана, од којих је први са непознатом на другом степену, други са непознатом на првом степену и трећи без непознате. Јасно је да на овај начин можемо поступити са сваком квадратном једначином. Уопште ако ма какву квадратну једначину преобразимо тако, да се она јави у облику

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

онда кажемо да смо ту једначину **уредили** или да смо је **довели на уређен облик.**

Трином

$$ax^2 + bx + c,$$

који чини леву страну уређене квадратне једначине назива се **трином квадратне једначине.** Трећи члан (c) тринома квадратне једначине обично се назива **независан члан.** Општи бројеви **b** и **c** у нарочитим случајевима могу имати разне посебне вредности па и вредности **0,** али број **a** никако не сме бити једнак нули, јер у том случају једначина више не би била другог степена.

За случај да је $b = 0$ или $c = 0$ или у исто време $b = 0$ и $c = 0$, једначина се јавља у једном од ова три облика:

I . . . . . $ax^2 + c = 0$,

II . . . . . $ax^2 + bx = 0$,

III . . . . . $ax^2 = 0$.

Једначине оваквог облика називају се **непотпуне квадратне једначине.** Напротив једначине код којих је $b \neq 0$ и $c \neq 0$ називају се **потпуне квадратне једначине.**

Решавање непотпуних квадратних једначина

Непотпуна квадратна једначина облика

$$ax^2 + c = 0$$

обично се назива **чиста квадратна једначина.** Да бисмо решили ову једначину треба да извршимо ове радње:

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Као што видимо чиста квадратна једначина има два корена исте апсолутне вредности али супротно означена. Ти су корени:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}\,, \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Ако су **a** и **c** два супротно означена релативна броја, корени су оба реални, а у противном случају корени су имагинарни.

Непотпуну квадратну једначину облика

$$ax^2 + bx = 0$$

решавамо растављањем леве стране на просте чиниоце:

$$x(ax + b) = 0.$$

Јасно је да производ $x(ax + b)$ може бити једнак нули само под једним од ова два услова:

1) Ако је $x = 0$,

2) Ако је $ax + b = 0$.

Први услов даје нам један корен једначине:

$$x_1 = 0,$$

а други услов, који је у ствари једна једначина првог степена, даје нам други корен:

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Као што видимо један је корен ове једначине увек нула, а други је увек реалан.

Ако се узме да је у чистој квадратној једначини $c = 0$ (или у другој непотпуној једначини $b = 0$), онда оба корена имају исту вредност:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0.$$

Јасно је да су то корени непотпуне квадратне једначине $ax^2 = 0$.

Примери:

1) Решити једначину $3x^2 - 5 = x^2 + 3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^2 - x^2 = 5 + 3 & \\
2x^2 = 8, & x_1 = +2 \\
x^2 = 4, & x_2 = -2 \\
x = \pm 2. &
\end{array}$$

2) Решити једначину $\dfrac{2x - a}{x} = \dfrac{x + 2a}{a}$.

$$\begin{array}{l|l}
2ax - a^2 = x^2 + 2ax, & \\
x^2 = -a^2, & x_1 = +ai \\
x = \pm\sqrt{-a^2}\,, & x_2 = -ai. \\
x = \pm ai &
\end{array}$$

3) Решити једначину $2(x^2 - 7) + 3(x + 5) = 1$.

$$\begin{array}{l|l}
2x^2 - 14 + 3x + 15 = 1, & \\
2x^2 + 3x = 0, & \\
x(2x + 3) = 0, & x_1 = 0 \\
x = 0 & x_2 = -\dfrac{3}{2} \\
2x + 3 = 0, & \\
x = -\dfrac{3}{2} &
\end{array}$$

4) Решити једначину $\frac{ax+b}{x-b} = \frac{bx+a}{x-a}$.

$$ax^2+bx-a^2x-ab=bx^2-b^2x+ax-ab.$$

$$ax^2-bx^2+bx-a^2x-ax+b^2x=0,$$

$$x(ax-bx+b-a^2-a+b^2)=0,$$

$$x=0,$$

$$ax-bx+b-a^2-a+b^2=0,$$

$$(a-b)x=a^2-b^2+a-b,$$

$$x=\frac{(a-b)(a+b)+(a-b)}{a-b},$$

$$x=\frac{(a-b)(a+b+1)}{a-b},$$

$$x=a+b+1.$$

$$x_1=0$$

$$x_2=a+b+1.$$

Решавање потпуних квадратних једначина

Свака потпуна квадратна једначина коју треба решити мора се претходно довести на уређен облик. Видели смо да се свака уређена једначина другог степена с једном непознатом може претставити једначином

$$ax^2+bx+c=0.$$

Зато се ова једначина назива **општа једначина другог степена с једном непознатом.** Том општом једначином ми ћемо се послужити да бисмо показали како се поступа при решавању квадратних једначина с једном непознатом. Пре свега независан члан пребацићемо на десну страну, па ћемо затим обе стране једначине помножити са **4a.** Тако ћемо добити једначину

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Лако се можемо уверити да леву страну ове једначине чине управо први и други члан развијеног квадрата бинома

$$2ax+b.$$

Према томе трећи члан развијеног квадрата овог бинома био би b^2. Сад видимо да лева страна последње једначине може по-

стати потпун квадрат бинома ако јој се дода b^2. Зато ћемо левој и десној страни последње једначине додати b^2 и тако ћемо добити једначину

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Пошто је овде лева страна једначине потпун квадрат бинома, то се једначина може написати и овако:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Сад ћемо даље извршити још ове радње, које ће нас довести до решења

$$\sqrt{(2ax+b)^2}=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Двоструки знак који се јавља испред корена показује нам да непозната може имати две различите вредности:

$$\text{I} \; \ldots\ldots \; x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{II} \; \ldots\ldots \; x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Према томе: **свака потпуна једначина другог степена с једном непознатом има два корена.**

Јасно је да при решавању квадратних једначина не морамо увек понављати цео показани поступак. Решење

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

до кога смо дошли решавајући општу једначину може нам послужити као образац, у коме ћемо у појединим посебним случајевима замењивати опште бројеве **a, b** и **c** датим посебним вредностима.

Алгебарски израз b^2-4ac који се јавља под кореним знаком може имати разне бројне вредности, па према томе може бити и негативан. У томе случају $\sqrt{b^2-4ac}$ јавио би се у облику имагинарног броја, а корени једначине били би два коњугована комплексна броја. Као што видимо алгебарски израз b^2-4ac важан је због тога, што својом вредношћу одлучује о природи корена квадратне једначине. Тај се израз назива **дискриминанта квадратне једначине.**

С обзиром на бројну вредност дискриминанте могу се разликовати ова три главна случаја:

1) $b^2-4ac>0$

2) $b^2-4ac=0$

3) $b^2-4ac<0$.

У првом случају једначина има два различита реална корена.

У другом случају једначина има два једнака реална корена.

У трећем случају једначина има два различита корена, који су увек коњуговани комплексни бројеви.

Образац за решавање потпуних квадратних једначина може нам послужити и при решавању непотпуних квадратних једначина. Како се при томе поступа показаћемо на примерима.

Примери:

1) Решити једначину $3x^2+10x-8=0$.

Овде је $a=3$, $b=10$, $c=-8$. Према томе је

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}=$$

$$=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{6}=\frac{-10\pm14}{6}.$$

$$x_1=\frac{2}{3},\qquad x_2=-4.$$

2) Решити једначину $9x^2-12x+4=0$.

$a=9$, $b=-12$, $c=4$;

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot9\cdot4}}{2\cdot9}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{18};$$

$$x_1=x_2=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

3) Решити једначину $3x^2+9x+7=0$.

$a=3$, $b=9$, $c=7$;

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-4\cdot3\cdot7}}{2\cdot3}=\frac{-9\pm\sqrt{81-84}}{6}=$$

$$=\frac{-9\pm\sqrt{-3}}{6}=\frac{-9\pm i\sqrt{3}}{6};$$

$$x_1=\frac{-9+i\sqrt{3}}{6}$$

$$x_2=\frac{-9-i\sqrt{3}}{6}.$$

4) Решити једначину $\frac{x^2-3x}{2}-\frac{x^2-2x}{3}=11$.

Најпре доводимо једначину на уређен облик:

$$3x^2-9x-2x^2+4x=66,$$

$$x^2-5x-66=0.$$

Сад је $a=1$, $b=-5$, $c=-66$, па је према томе по обрасцу

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-66)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25+264}}{2}=$$

$$=\frac{5\pm17}{2}$$

$$x_1=11,\ x_2=-6.$$

5) Решити једначину $mx^2-(m+n)x+n=0$.

Овде је $a=m$; $b=-(m+n)$; $c=n$. Зато је по обрасцу

$$x=\frac{m+n\pm\sqrt{(m+n)^2-4mn}}{2m}=$$

$$=\frac{m+n\pm\sqrt{m^2+2mn+n^2-4mn}}{2m}=$$

$$=\frac{m+n\pm\sqrt{m^2-2mn+n^2}}{2m}=\frac{m+n\pm\sqrt{(m-n)^2}}{2m}=$$

$$= \frac{m + n \pm (m - n)}{2m}.$$

$$x_1 = 1, \qquad x^2 = \frac{n}{m}.$$

6) Решити једначину $\frac{rx - 2}{r} + \frac{2x - 1}{x} + \frac{x}{r} = o$

Најпре доводимо једначину на уређен облик:

$$rx^2 - 2x + 2rx - r + x^2 = 0$$

$$(r + 1)\, x^2 + 2(r - 1)x - r = 0.$$

Сад је $a = r + 1$, $b = 2(r - 1)$, $c = -r$. Према томе је

$$x = \frac{-2(r - 1) \pm \sqrt{4(r - 1)^2 + 4(r + 1)r}}{2(r + 1)} =$$

$$= \frac{-2(r - 1) \pm \sqrt{8r^2 - 4r + 4}}{2(r + 1)} =$$

$$= \frac{-2(r - 1) \pm \sqrt{4(2r^2 - r + 1)}}{2(r + 1)} = \frac{-2(r - 1) \pm 2\sqrt{2r^2 - r + 1}}{2(r + 1)} =$$

$$= \frac{-(r - 1) \pm \sqrt{2r^2 - r + 1}}{r + 1}.$$

$$x_1 = \frac{-(r - 1) + \sqrt{2r^2 - r + 1}}{r + 1},$$

$$x_2 = \frac{-(r - 1) - \sqrt{2r^2 - r + 1}}{r + 1}.$$

7) Решити једначину $x(3x + 1) = x - 6$.

$$3x^2 + x = x - 6,$$

$$3x^2 + 6 = 0,$$

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{6}{3} = 0.$$

$$x^2 + 2 = 0.$$

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 2.$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{-8}}{2} =$$

$$= \frac{\pm 2i\sqrt{2}}{2} = \pm i\sqrt{2}.$$

$$x_1 = i\sqrt{2}, \qquad x_2 = -i\sqrt{2}.$$

8) Решити једначину $\frac{z - 1}{n} = \frac{1}{z - n}$.

$$z^2 - nz - z + n = n,$$

$$z^2 - (n + 1)z = 0.$$

$$a = 1,\ b = -(n + 1),\ c = 0.$$

$$z = \frac{n + 1 \pm \sqrt{(n + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{n + 1 \pm (n + 1)}{2}$$

$$z_1 = n + 1,\ z_2 = 0.$$

Обрасци за решавање квадратних једначина нарочитог облика

Како је десна страна опште једначине другог степена нула, то се трином те једначине увек може помножити или поделити ма каквим бројем или алгебарским изразом који не садржи непознату. Према томе, ако трином опште једначине другог степена поделимо са **a**, та ће се једначина јавити у облику

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Овде се сачинилац $\frac{b}{a}$ и независан члан $\frac{c}{a}$ јављају у облику разломка, али јасно је да они могу бити и цели бројеви. У сваком случају ми можемо извршити замену

$$\frac{b}{a} = p, \qquad \frac{c}{a} = q.$$

На тај начин доводимо општу једначину другог степена на облик

$$x^2 + px + q = 0,$$

који се обично назива **нормални облик** једначине другог степена.

Образац за решавање ове једначине нормалног облика лако ћемо извести из општег обрасца. Пре свега, пошто смо узели да је

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

биће

$$b = ap, \; c = aq.$$

Затим је даље

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-ap \pm \sqrt{a^2p^2 - 4a^2q}}{2a}$$

$$= \frac{-ap \pm \sqrt{a^2(p^2 - 4q)}}{2a}$$

$$= \frac{-ap \pm a\sqrt{p^2 - 4q}}{2a}$$

$$= \frac{a(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})}{2a}$$

$$= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Овај се образац (увођењем имениоца 2 под коренов знак) лако може довести и на овај облик:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

За случај да су сачиниоци **a** и **b** и независан члан **c** цели бројеви, а при том је још и **b** паран број, могу се при израчунавању корена постићи знатне рачунске олакшице. У томе случају, ако се узме да је

$$b = 2b_1,$$

општа једначина јавиће се у облику

$$ax^2 + 2b_1x + c = 0,$$

а образац за решавање те једначине може се лако извести из општег обрасца на овај начин:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b_1 \pm 2\sqrt{b_1^2 - ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}.$$

Дакле извели смо образац

$$= \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ab}}{a},$$

који је, као што ћемо видети на примерима, практичнији од општег обрасца. Јасно је да се свака квадратна једначина множењем њеног тринома једним згодно изабраним бројем, може довести на такав облик, да јој сачинилац другог члана буде паран број. Према томе, ако се узме да се само једначине оваквог облика сматрају као уређене, онда се последњи образац може сматрати као општи.

Примери:

1) Решити једначину $x^2 - 17x + 71 = 0$.

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 71}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$x_1 = 9{,}62\ldots, \quad x_2 = 7{,}38\ldots$$

2) Решити једначину $x^2 - 2ax + 2a^2 = 0$.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2} = a \pm \sqrt{-a^2} = a \pm ai;$$

$$x_1 = a(1 + i), \quad x_2 = a(1 - i).$$

3) Решити једначину $6x^2 - 20x + 14 = 0$.

Пре свега скратићемо једначину са 2:

$$\frac{6x^2}{2} - \frac{20x}{2} + \frac{14}{2} = 0, \quad 3x^2 - 10x + 7 = 0.$$

Ако ову последњу једначину напишемо у облику:

$$3x^2 + 2\cdot(-5)x + 7 = 0,$$

види се да је $a = 3$, $b_1 = -5$, $c = 7$. Према томе биће

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 3\cdot 7}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{5 \pm 2}{3};$$

$$x_1 = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}, \qquad x_2 = \frac{5-2}{3} = 1.$$

4) Решити једначину $ar^2 - 2(a+1)r + a - 1 = 0$, где је r непозната.

a) $a = a$, $b = -2(a+1)$, $c = a - 1$,

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(a+1) \pm \sqrt{4(a+1)^2 - 4a(a-1)}}{2a} =$$

$$= \frac{2(a+1) \pm 2\sqrt{(a+1)^2 - a(a-1)}}{2a} =$$

$$= \frac{2(a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - a^2 + a})}{2a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{3a+1}}{a}.$$

b) $a = a$, $b_1 = -(a+1)$, $c = a - 1$;

$$r = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - a(a-1)}}{a} =$$

$$= \frac{a+1 \pm \sqrt{3a+1}}{a}.$$

Задаци за вежбање

1) $x^2 - 27 = 0.$

2) $x^2 + 16 = 0.$

3) $x^2 - \sqrt{5} = 0.$

4) $x^2 + \sqrt[3]{2} = 0.$

5) $12x^2 - 3 = 0.$

6) $3{,}6x^2 - 9 = 0.$

7) $x^2 + 6x = 0.$

8) $5x^2 - 8x = 0.$

9) $4x^2 + \frac{3}{2}x = 0.$

10) $0{,}04x^2 - 2{,}8x = 0.$

11) $x^2 - 10x + 21 = 0.$

12) $x^2 - 11x + 18 = 0.$

13) $x^2 - 5x - 84 = 0.$

14) $x^2 - 4x - 7 = 0.$

15) $x^2 - 6x + 10 = 0.$

16) $x^2 - 18x + 77 = 0.$

17) $x^2 - 33x - 784 = 0.$

18) $x^2 - 14x + 42 = 0.$

19) $x^2 - 32x + 175 = 0.$

20) $x^2 + 16x + 10 = 0.$

21) $x^2 + 28x + 187 = 0.$

22) $4x^2 + 21x - 25 = 0.$

23) $6x^2 - 23x + 7 = 0.$

24) $2x^2 - 6x + 73 = 0.$

25) $8x^2 - 12x + 1 = 0.$

26) $9x^2 - 30x + 29 = 0.$

27) $21x^2 - 52x + 32 = 0.$

28) $49x^2 - 168x + 135 = 0.$

29) $x^2 - 2ax + b(2a - b) = 0.$

30) $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$

31) $x^2 - (a + b)^2x + ab(a + b)^2 = 0.$

32) $(a + 1)x^2 + (a - 1)x = 2.$

33) $(a - 1)x^2 + (a + 1)x = 2a.$

34) $m^2z^2 = m(m - n)z + mn.$

35) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0.$

36) $(n^2 + 1)x^2 - 2(n^2 - 1)x + n^2 + 1 = 0.$

37) $(x - 3)(3x + 1) = (x + 2)(2x - 1).$

38) $(y - 1)(y + 3) = 4(3y - 7).$

39) $(x + 9)(x - 1) - 8(x + 2) = 11.$

40) $(5x - 1)(5x - 2) = 25x - 14.$

41) $(x + a)(x - 3a) = (3x + a)(x - a).$

42) $(ax + b^2)(bx - a^2) = (x + ab)(x - ab).$

43) $x(x + 2m) = n(2x + m).$

44) $(x - r)(x - 2r) = 6r^2.$

45) $(ay - 2b^2)y - (by + 2a^2)y + (a - b)^2 = 0.$

46) $x^2 - \frac{3x - 5}{8} = 2$

47) $\frac{x^2 - 1}{6} - \frac{x + 5}{8} = 1$

48) $\frac{3x + 4}{x + 2} - \frac{x - 2}{x} = \frac{5}{2}$

49) $\frac{x - 12}{x + 18} = \frac{3x - 14}{2x + 21}$

50) $\frac{x + 18}{10} - \frac{2}{x - 1} + \frac{x + 2}{4} = 4$

51) $\frac{x}{x - 1} - \frac{x + 1}{x} = \frac{1}{6}$

52) $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x + 1}{x - 1} = 1\frac{1}{3}$

53) $\frac{3}{4(x - 7)} + \frac{x + 8}{11} = 2.$

54) $\frac{3}{x-9}+\frac{x+6}{6}-\frac{x+1}{4}=0$

55) $\frac{1}{4x^2-9}-\frac{1}{2x-3}=\frac{3}{8}$

56) $\frac{x+1}{x-1}-2\frac{x-1}{x+2}=1$

57) $\frac{x+2}{x-2}+5\frac{x-2}{x+2}-4=0$

58) $\frac{x^2+x+2}{x^2-x-2}+\frac{x+2}{x-2}=5\frac{1}{5}$

59) $\frac{x}{x+2}-\frac{x^2-x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$

60) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\sqrt{3}$

61) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}=1$

62) $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2-2x}+$

$+\frac{6}{x^2-4}$

63) $\frac{3x(x-a)}{a^2}-\frac{x+a}{2}+$

$+\frac{3(a-4)}{2}=0$

64) $\frac{r}{x-r}+rx=2r^2+1$

65) $\frac{x-a}{x}+\frac{2x}{x+a}+3=0$

66) $\frac{x-2a}{2a-1}=\frac{a-2}{2x-a}$

67) $\frac{x+n}{x-n}+\frac{x+3n}{x-3n}=-2$

68) $\frac{x^2+1}{a^2-1}-\frac{2(x+1)}{a-1}+1=0$

69) $\frac{c}{c^2-x^2}+\frac{1}{c-x}=\frac{2}{c}$

70) $\frac{z}{z-a}-\frac{z+a}{z}=\frac{z-2a}{2z}$

71) $\frac{a}{x-a}+\frac{a^2}{x^2-ax}=\frac{x+a}{x}$

72) $\frac{a^2}{x^3-a^2x}-\frac{2a}{x^2+ax}=\frac{1}{x}$.

Односи између корена и познатих бројева квадратне једначине

Ако је квадратна једначина дата у нормалном облику

$$x^2+px+q=0,$$

њени су корени

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Сабирањем ова два корена налазимо да је

$$x_1+x_2=-p$$

или

$$p=-(x_1+x_2).$$

Исто тако множењем корена квадратне једначине налазимо да је

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\\ &=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2\\ &=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\\ &=q, \end{aligned}$$

или

$$q=x_1x_2.$$

Закључак. Ако је квадратна једначина дата у нормалном облику онда је

1) сачинилац другог члана једнак збиру корена узетом са супротним знаком

2) независан члан једнак производу корена.

Кад се знају ови односи може се лако написати свака квадратна једначина ако су познати њени корени.

Примери:

1) Корени су једне квадратне једначине: $x_1=3$, $x_2=-8$. Која је то једначина?

$$p=-(x_1+x_2)=-[3+(-8)]=-3+8=5,$$
$$q=x_1x_2=3\cdot(-8)=-24;$$
$$x^2+5x-24=0.$$

2) Која квадратна једначина има корене: $x_1=\frac{3}{8}$, $x_2=\frac{1}{3}$?

$$p=-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{17}{24};$$

$$q=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8};$$

$$x^2-\frac{17}{24}x+\frac{1}{8}=0, \qquad 24x^2-17x+3=0.$$

3) Одредити квадратну једначину чији су корени: $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$.

$$p = -(a + bi + a - bi) = -2a,$$
$$q = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2;$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$$

4) Збир корена једне квадратне једначине износи 5, а збир квадрата њених корена износи 53. Која је то једначина?

$$p = -(x_1 + x_2) = -5,$$
$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,$$
$$5^2 = 53 + 2x_1x_2,$$
$$x_1\,x_2 = \frac{25 - 53}{2} = -14,$$
$$q = x_1x_2 = -14,$$
$$x^2 - 5x - 14 = 0.$$

Дискусија квадратне једначине

Раније смо показали како природа корена квадратне једначине зависи од дискриминанте. Сад ћемо видети како се помоћу сачиниоца **p** и независног члана **q** тринома квадратне једначине нормалног облика могу унапред одредити и знаци оба корена за случај да су они реални.

Пре свега из односа

$$q = x_1x_2$$

и образаца

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

излази

1) **Да ће корени бити једнако означени ако је $q > 0$.**
2) **Да ће корени бити супротно означени ако је $q < 0$.**
3) **Да ће бар један корен бити позитиван ако је $p < 0$.**

4) **Да ће бар један корен бити негативан ако је $p > 0$.**

У опште сви закључци, који се могу извести о знацима корена као и о природи корена с обзиром на дискриминанту, виде се из овог прегледа:

$\frac{p^2}{4} - q > 0$	$q > 0,\ p < 0$	Оба су корена позитивни бројеви.
	$q > 0,\ p > 0$	Оба су корена негативни бројеви.
	$q < 0,\ p > 0$	Негативни корен има већу апсолутну вредност.
	$q < 0,\ p < 0$	Позитивни корен има већу апсолутну вредност
	$p = 0$	Корени су супротни бројеви.
$\frac{p^2}{4} - q = 0$	$p < 0$	Корени су једнаки и позитивни.
	$p > 0$	Корени су једнаки и негативни.
$\frac{p^2}{4} - q < 0$	$p \neq 0$	Корени су комплексни бројеви.
	$p = 0$	Корени су имагинарни бројеви.

У случају кад је $\frac{p^2}{4} - q = 0$ или $\frac{p^2}{4} - q < 0$ јасно је да ни у ком случају не може бити $q < 0$.

Примери:

1) Које се посебне вредности могу давати општем броју **n** у једначини

$$x^2 + 3x + n + 1 = 0,$$

да би њени корени били негативни и неједнаки?

Овде треба да буду задовољени услови:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad q > 0, \quad p > 0.$$

Међутим последњи је услов већ задовољен (јер је $p = 3$). Дакле остају још ова два услова:

$$\frac{3^2}{4} - (n + 1) > 0, \quad n + 1 > 0.$$

Да би ове две неједначине биле задовољене у исто време треба да буде

$$n < \frac{5}{4} \text{ и } n > -1.$$

Последња два услова пишу се уједно овако:

$$\frac{5}{4} > n > -1.$$

Значи да се броју n могу давати вредности које се налазе између -1 и $+\frac{5}{4}$.

2) Под којим ће условима корени једначине

$$x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a - 2b = 0$$

бити супротни (реални) бројеви?

Овде треба да буду испуњени услови

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad p = 0.$$

Али како је $p = 0$, то се први услов своди на

$$-q > 0 \text{ или } q < 0.$$

Дакле у овом случају биће

$$-(a^2 - 4a + 3) = 0, \quad a - 2b < 0.$$

Ми ћемо најпре да решимо једначину $a^2 - 4a + 3 = 0$:

$$a = 2 \pm \sqrt{4 - 3},$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 1.$$

Сад даље из условне неједначине $a - 2b < 0$ излази да је

1) за $a = 3 \ldots . b > \frac{3}{2}$,

2) за $a = 1 \ldots . b > \frac{1}{2}$.

Задаци за вежбање

Одредити квадратне једначине чији су корени:

1) 2 и 7.

2) 5 и -11.

3) -4 и 9.

4) -1 и -15.

5) $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$.

6) $\frac{1}{2}$ и $-1\frac{1}{2}$.

7) 1,2 и 2,5.

8) $-0{,}25$ и $0{,}32$.

9) $3 + \sqrt{7}$ и $3 - \sqrt{7}$

10) $-2 + \sqrt{3}$ и $-2 - \sqrt{3}$

11) $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

12) $1 + 8i$ и $1 - 8i$.

13) $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$

14) $2i$ и $-2i$.

15) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$

61) $\frac{4 + 3i}{5}$ и $\frac{4 - 3i}{5}$

17) $1 + i\sqrt{3}$ и $1 - i\sqrt{3}$

18) $\frac{2 + i\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{2 - i\sqrt{5}}{3}$

19) $a + 1$ и $a - 3$.

20) $\frac{1}{n + 1}$ и $\frac{1}{n - 1}$.

21) $(a + 1)(b - 1)$ и $(a - 1)(b + 1)$.

22) $a + \sqrt{a^2 - 1}$ и $a - \sqrt{a^2 - 1}$

23) $n + (n^2 - 1)i$ и $n - (n^2 - 1)i$.

24) $a + b + i\sqrt{a^2 - b^2}$ и $a + b - i\sqrt{a^2 - b^2}$

25) Одредити квадратну једначину чији су корени квадрати корена једначине $x^2 - 7x + 10 = 0$.

26) Одредити квадратну једначину чији су корени квадрати корена једначине $x^2 - 6x + 10 = 0$.

27) Одредити квадратну једначину чији су корени за 1 већи од корена једначине $x(x + 1) = 12(x - 2)$.

28) У једначини $x^2 - 2x - q = 0$ одредити q тако, да разлика корена буде $2\sqrt{5}$.

29) Каквог ће облика бити једначина чији су корени реципрочне вредности корена једначине $ax^2 + bx + c = 0$?

30) Збир реципрочних вредности корена једне квадратне једначине износи 3, а производ корена је 2. Која је то једначина?

31) Збир квадрата корена једне квадратне једначине износи 6, а производ корена је 5. Која је то једначина?

32) Одредити две квадратне једначине нормалног облика које задовољавају услове: 1) да су корени једне реципрочне вредности корена друге једначине, 2) да збир сачинилаца који се јављају поред непознате на првом степену износи $-\frac{8}{3}$, 3) да збир независних чланова износи $-\frac{10}{3}$.

Код ових једначина одредити знаке и природу корена не решавајући саме једначине:

33) $x^2 - 5x + 7 = 0$.

34) $x^2 - 5x + 2 = 0$.

35) $x^2 + 8x - 11 = 0$.

36) $x^2 + 10x + 6 = 0$.

37) $x^2 + 6x + 10 = 0$.

38) $2x^2 - 8x - 3 = 0$.

39) $9x^2 - 48x + 64 = 0$.

40) $7x^2 + 1 = 0$.

41) $x^2 - 27 = 0$.

42) $49x^2 + 70x - 25 = 0$.

43) Под којим ће условом једначина $x^2 + (n - 3)x - 5 = 0$ имати различито означене корене, тако да позитивни корен има већу апсолутну вредност?

44) Под којим ће условом једначина $(x - 2)^2 - 2x(x + n) = 0$ имати различито означене корене, тако да негативни корен има већу апсолутну вредност?

45) Под којим ће условом корени једначине $x^2 - 4x + n - 3 = 0$ бити позитивни и неједнаки?

46) Под којим ће условом корени једначине $x(x + 5) - 2(x - n) = 4(n - 1)$ бити негативни и неједнаки?

У овим једначинама одредити **m** тако, да корени буду супротни бројеви:

47) $x^2 - (m + 4)x + 12 = 0$.

48) $x^2 - 3x - \frac{(m^2 - 4)x}{m} = 1$.

49) $(x + 2m)(2x - m) = m^2x$.

50) $\frac{x - 2m}{3x - 4} = \frac{4x - 3m}{2x - 1}$.

У овим једначинама одредити **k** тако, да бар један корен буде једнак нули:

51) $2x(x + 3k) = \frac{8k + 5}{3}$

52) $(x + k - 1)(x - k + 1) = x - 2k + 3$.

53) У једначини $(x - c)^2 - 2(x - 2c) = 4$ одредити **c** тако да јој корени буду једнаки.

54) У једначини $(x + c)(x - c) = (c + 1)(x - 1)$ одредити **c** тако да јој корени буду једнаки.

У овим једначинама одредити **p** и **q** тако да им оба корена буду једнака нули:

55) $x^2 - (2x - 1)(p + 2) + (x + 2)(q - 1) = 5$.

56) $\frac{px - 2q + 3}{3qx + 2p - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Ирационалне једначине

Често се дешава да се у некој једначини непозната јавља под кореновим знаком. Једначине таквог облика називају се **ирационалне једначине.** Да бисмо такву једну једначину решили морамо је ослободити свих корена под којима се јавља непозната. Како се при томе поступа показаћемо на неколико задатака.

Први задатак. Решити једначину $\sqrt{x^2 - 11} + 4 = 2x - 3$.

Решење. Ако други члан леве стране једначине пребацимо на десну страну, тако да на левој страни остане само корен, па затим извршимо свођење на десној страни, једначина ће се јавити у облику

$$\sqrt{x^2 - 11} = 2x - 7.$$

Ову једначину лако ћемо ослободити корена ако обе њене стране подигнемо на квадрат. Тако добијамо једначину

$$x^2 - 11 = 4x^2 - 28x + 49,$$

чији су корени:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{10}{3}.$$

Лако се можемо уверити да дату једначину не задовољавају оба корена већ само први.

Други задатак. Решити једначину $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 2} = 5$.

Решење. Ову једначину не можемо ослободити оба корена само једним степеновањем. Ипак једначина се може ослободити корена помоћу два степеновања на овај начин:

$$\sqrt{x-3} = 5 + \sqrt{x+2},$$

$$(\sqrt{x-3})^2 = (5 + \sqrt{x+2})^2,$$

$$x - 3 = 25 + 10\sqrt{x+2} + x + 2,$$

$$-30 = 10\sqrt{x+2},$$

$$-3 = \sqrt{x+2},$$

$$(-3)^2 = (\sqrt{x+2})^2,$$

$$9 = x + 2.$$

Дакле са два степеновања дошли смо до једначине првог степена чији је корен

$$x = 7.$$

Али овај корен, као што се можемо лако уверити, не задовољава првобитну једначину. Међутим да смо решавали једначину

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5.$$

која се од дате једначине разликује само знаком испред једног од корена, добили бисмо исти корен $x = 7$, који ову последњу једначину задовољава. Као што видимо решавањем првобитно дате и ове последње једначине долазимо до истог корена, који међутим задовољава само последњу једначину. Што се тиче дате једначине она уопште нема корена.

Раније смо показали (Алгебра за V разред) да је множење обе стране једначине неким изразом који садржи непознату радња која није увек допуштена. Тада се често дешава да изведеној једначини припада један или више корена, који нису и корени првобитне једначине. Исти случај имамо у исто време и при степеновању обе стране једначине. Зато се при решавању ирационалних једначина мора увек испитати да ли добивени корени задовољавају једначину.

Задаци за вежбање

Решити једначине:

1) $\sqrt{4x-3} + 7 = 12.$

2) $\sqrt{x^2-3x+8} - 5 = 1.$

3) $\sqrt{3x+22} + 2 = x$

4) $\sqrt{x+10} = x - 10.$

5) $\sqrt{2x+21} = 2x - 21.$

6) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+7} = 4.$

7) $\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x-3} = 2.$

8) $\sqrt{5x-9} - \sqrt{3x-5} = 2.$

9) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2.$

10) $\sqrt{x + \sqrt{2x+9}} = 3\sqrt{3}.$

11) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} = 2.$

12) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2} = 1.$

13) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{3x} + \sqrt{5}.$

14) $\sqrt{7x-41} + \sqrt{3x+31} = 8.$

15) $\sqrt{\frac{x+3}{2}} - \sqrt{\frac{x-2}{3}} = 1.$

16) $2\sqrt{x-7} - \sqrt{x+4} = \sqrt{\frac{x}{2}}$

17) $\sqrt{6x + \sqrt{2x-7}} = \sqrt{7x-3}.$

18) $\sqrt{3x-7} + \sqrt{2} = \sqrt{x+5}.$

19) $\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x-1} = 1.$

20) $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{5x+1}.$

21) $\sqrt{x^2-4x+3} +$
$+ \sqrt{x^2-3x+4} = 2.$

22) $\sqrt{x+2c} - \sqrt{2x-c} = \sqrt{c}.$

23) $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a+b}.$

24) $\sqrt{x^2+ax+a^2} +$
$+ \sqrt{x^2-ax-a^2} = a.$

25) $\sqrt{x + \sqrt{2x+a}} = \sqrt{a}.$

26) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}.$

27) $\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = 1.$

28) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = 1.$

29) $\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x} = 2$

30) $\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} = 4.$

Квадратне једначине са две непознате

Квадратне једначине могу садржати и две или више непознатих. Раније смо показали како се одређује степен једначине са две непознате (Алгебра за V разред). Једна једначина са две непознате биће другог степена ако садржи бар један члан са другим степеном једне од непознатих или с производом непознатих. Такве би биле на пр. једначине:

$$x^2 - 2y - 9 = 0, \qquad xy - x + y = a,$$

$$x^2 - 4y^2 - 3x + 6y = 15 \text{ итд.}$$

Ако треба решити систем једначина са две непознате онда се могу разликовати два случаја:

1) Обе су једначине другог степена.

2) Једна је од једначина првог а друга другог степена. У оба случаја мора се пре свега елиминовати једна непозната да би се добила једна једначина с једном непознатом. Ова једначина, до које се долази елиминовањем, у првом случају може бити другог степена само у изузетним случајевима; иначе је она уопште четвртог степена. У другом случају та је једначина увек другог степена.

Ми ћемо засад решавати само оне системе који садрже једну једначину првог степена, а како се при томе поступа показаћемо на задацима.

Први задатак. Решити систем: $x^2+3xy+y^2=1$, $2x+y=5$.

Решење. Пре свега из друге једначине добијамо

$$y=5-2x.$$

Сад у првој једначини замењујемо **y** са $5-2x$:

$$x^2+3x(5-2x)+(5-2x)^2=1.$$

Ово је једначина другог степена с једном непознатом, коју лако доводимо на уређен облик

$$x^2+5x-24=0.$$

Корени су ове једначине:

$$x_1=3, \qquad x_2=-8.$$

Свакоме од ових корена одговара по једна вредност непознате **y**. Те вредности даће нам једначина $y=5-2x$, ако у њој заменимо **x** најпре са 3 па затим са -8. Тако налазимо да је

$$y_1=-1, \qquad y_2=21.$$

Други задатак. У једначини $x^2+px+6=0$ одредити **p** тако да разлика корена буде 1.

Решење. Пре свега види се да је $q=6$. Према томе, ако корене ове једначине означимо са **z** и **u**, биће

$$z-u=1$$
$$zu=6.$$

Поступајући као и код првог задатка налазимо корене:

$$z_1=3, \qquad z_2=-2;$$
$$u_1=2, \qquad u_2=-3.$$

Према томе биће

$$p_1=-(3+2)=-5, \qquad p_2=-(-2-3)=5.$$

Задаци за вежбање

Решити системе:

1) $x^2+y^2=1$
$2x+y=2.$

2) $x^2+y^2=28$
$x+y=4.$

3) $xy=17$
$x+y=2.$

4) $2x+3y=1$
$2x^2+3y^2=635.$

5) $3x-2y=1$
$2x^2-y^2=1.$

6) $x^2+xy+y^2=4\frac{1}{8}$
$2x+y=3.$

7) $x^2+y^2+14(x+y)=3$
$x-y=11.$

8) $3x+2y=1$
$3x^2-y^2-7x-5y=0.$

9) $(x-1)(y+1)=x^2-y^2$
$x+1=y-1.$

10) $3x(y-3)-2y(x-2)=21$
$3x+2y=5.$

11) $x^2-3xy-5y^2=25$
$\frac{x+2y}{4}=\frac{2x-y}{5}.$

12) $x(y-1)+y(x-1)=2$
$x-y=2\sqrt{5}.$

13) $(x-3)(y-3)=(x-5)(y-5)$
$xy=7.$

14) $\frac{x+y}{xy}=\frac{7}{30}$
$x-y=9.$

15) $\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{8}{3}$
$3x-5y=2.$

16) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$
$x-y=-\frac{2}{15}$

17) $\frac{x(y-1)+y(x-1)}{xy}=1$
$x-y=2.$

18) $x-y=\frac{4a}{a^2-1}$
$xy=1.$

19) $x^2-y^2=3(a^2-b^2)$

$2x-y=3a$.

20) $x^2-xy+y^2=a^2$

$x-y=2a$.

21) $\frac{x-1}{y+1}=\frac{a-1}{a+1}$

$x^2+xy=\frac{a(a+1)}{2}$.

22) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$

$x+y=2a$.

23) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=11$

$x+y=61$.

24) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2$

$2y-x=2$.

25) Одредити квадратну једначину нормалног облика, код које је збир корена 11, а независан члан је за 5 мањи од разлике квадрата оба корена.

26) Одредити квадратну једначину нормалног облика, код које збир реципрочних вредности оба корена износи 4, а разлика корена је $\sqrt{2}$.

27) У једначини $x^2+(a-b)x+a(a+b)=0$ одредити **a** и **b** тако, да збир корена износи -1, и да један корен буде реципрочна вредност другог корена.

28) У једначини $x^2+(m-2n)x+m(n-2m)=0$ одредити **m** и **n** тако, да збир корена буде -4, а збир реципрочних вредности оба корена да износи $\frac{2}{5}$

Проблеми другог степена

Често се дешава да нас решавање неког проблема доводи до једне или више једначина другог или вишег степена. Ако се при томе добије само једна једначина другог степена, или више једначина од којих је само једна другог а остале су првог степена, онда је то проблем другог степена. Ми ћемо засад решавати само оне проблеме другог степена, који се могу решити помоћу једне или две једначине.

Ако се при решавању неког проблема другог степена добију као решења имагинарни или комплексни бројеви, онда ћемо казати да тај проблем нема решења. Али често се дешава да добивена решења, и ако су реална, не задовољавају услове проблема или немају смисла. Тако на пр. ако се израчунава страна неког троугла, па се као решења добију два броја, од којих је један позитиван а други негативан, онда се негативно решење мора одбацити. У другој прилици према природи задатка, морало би се одбацити на пр. свако решење које није у исто време цео и позитиван број.

Уопште при решавању проблема другог степена поступа се на исти начин као и при решавању проблема првог степена. Сам поступак приказаћемо у потпуности на неколико задатака.

Први задатак. Извесном броју радника стављено је у дужност, да у одређеном року изради један ров дугачак 336 метара. Али, како су се 3 радника разболела, остали су се радници споразумели да сваки од њих прими на себе 2 метра рова више, како би посао био довршен на време. Колико је било радника?

Решење. Ако укупан број радника означимо са **x**, онда ће број радника који су стварно радили износити

$$x-3.$$

Према томе број метара који долази на једног радника изнео би:

1) на сваког од **x** радника .... $\frac{336}{x}$

2) на сваког од x—3 радника ... $\frac{336}{x-3}$

Међутим на једнога од x—3 радника долази 2 метра више него на једнога од **x** радника. Зато је

$$\frac{336}{x-3}-2=\frac{336}{x}.$$

Сад решавамо добивену једначину:

$$\frac{336}{x-3}-2=\frac{336}{x},$$

$$336x-2x^2+6x=336x-1008,$$

$$2x^2-6x-1008=0,$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+2016}}{2}$$

$$x_1=24, \qquad x_2=-21.$$

Негативно решење морамо одбацити; према томе радника је било 24.

Да бисмо испитали тачност овог решења нећемо нађени корен заменити у једначини, већ ћемо испитати да ли добивено решење задовољава услове проблема. Ради тога израчунаћемо колико метара рова долази на једног од 24 радника, а колико на једног од 21 радника:

$$336 : 24 = 14,$$

$$336 : 21 = 16.$$

Као што видимо други је количник одиста за 2 већи од првог

Други задатак. Места A и B удаљена су 36 километара. Из места A пође један пешак у B, а истовремено пође други пешак из B у A. Они су се срели после 4 часа хода, а кад је онај који је пошао из A стигао у B, други је пешак имао да путује још 1 ч. 48 м. па да стигне у A. Којим су се брзинама кретала та два пешака?

Решење. Брзину (тј. број километара пређених за 1 час) првог пешака означићемо са **x** а брзину другог пешака са **y**. Тада ће путеви, које су они прешли **до сусрета,** износити:

I . . . . . $4x$,

II . . . . . $4y$.

Али оба пређена пута износе укупно 36 километара. Зато је

$$4x + 4y = 36.$$

Даље знамо да се код једнаког кретања може израчунати време (број часова проведених на путу) ако се пређени пут подели брзином. Зато ће времена која су пешаци провели на целом путу, износити:

I . . . . . $\frac{36}{x}$

II . . . . . $\frac{36}{y}$

Али ми знамо да је други пешак провео на путу 1 ч. 48 м. више него први пешак. Ако минуте претворимо у часове, биће

$$1 \text{ ч. } 48 \text{ м.} = 1\frac{1}{5} \text{ ч.}$$

Према томе ће услов, да је други пешак путовао 1 ч. 48 м. више него први пешак, бити изражен једначином

$$\frac{36}{x} + 1\frac{4}{5} = \frac{36}{y}.$$

Сад имамо да решавамо систем:

$$4x + 4y = 36$$

$$\frac{36}{x} + 1\frac{4}{5} = \frac{36}{y}.$$

Његови су корени:

$$x_1 = 5, \qquad y_1 = 4;$$

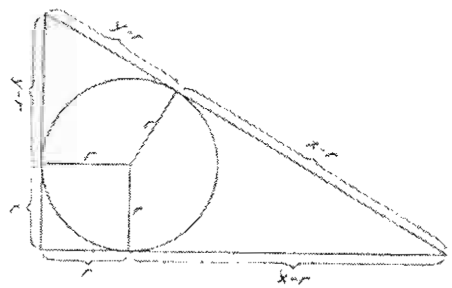
$$x_2 = -36, \qquad y_2 = 45.$$

Јасно је да се друго решење мора одбацити, а тачност првог решења лако се може проверити.

Трећи задатак. Дат је обим једног правоуглог троугла $2s = 40$ cm и полупречник круга који се може уписати у тај троугао $r = 3$ cm; израчунати катете.

Решење. Ако катете означимо са **x** и **y**, хипотенузу са **c** на слици видимо да је

$$c = x - r + y - r$$
$$= x + y - 2r,$$
$$2s = x + y + c$$
$$= x + y + x + y - 2r$$
$$= 2x + 2y - 2.$$



Сл. 5

Одавде је даље

$$s = x + y - r,$$
$$r + s = x + y$$

Ова последња једначина, пошто се у њој r и s замене датим бројним вредностима, лако се доводи на облик

$$x + y = 23.$$

Другу једначину даје нам Питагорино правило:

$$c^2 = x^2 + y^2,$$
$$(x + y - 2r)^2 = x^2 + y^2,$$
$$(x + y)^2 - 4r(x + y) + 4r^2 = x^2 + y^2,$$
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4r(x + y) + 4r^2 = x^2 + y^2,$$
$$2xy - 4r(x + y) + 4r^2 = 0,$$
$$xy - 6(x + y) + 18 = 0.$$

Како је $x + y = 23$ последња се једначина може још упростити:

$$xy - 6 \cdot 23 + 18 = 0,$$
$$xy = 120.$$

Сад имамо да решавамо систем:

$$x + y = 23$$
$$xy = 120.$$

Овај систем можемо решити елиминовањем једне непознате, али јасно је да се обе непознате могу добити као корени једначине

$$z^2 + pz + q = 0,$$

ако се узме да је у тој једначини

$$p = -23, \qquad q = 120.$$

Дакле непознате **x** и **y** могу се добити из једначине

$$z^2 - 23z + 120 = 0.$$

Корени су ове једначине:

$$z_1 = 15, \qquad z_2 = 8.$$

Према томе је

$$x = 15, \qquad y = 8,$$

или

$$x = 8, \qquad y = 15.$$

Дакле тражене су катете:

$$x_1 = 15 \text{ cm}, \qquad y_1 = 8 \text{ cm}$$
$$x_2 = 8 \text{ cm}, \qquad y_2 = 15 \text{ cm}.$$

Четврти задатак. Дати су полупречник основе **r** и висина **h** једне праве купе. У тој купи уписана је облица тако, да је њен омотач једнак с кружним прстеном, који образују основа купе и основа уписане облице. Израчунати полупречник основе и висину уписане облице.

Решење. Ако полупречник основе уписане облице означимо са **x** а њену висину са **y**, онда нам пре свега (сл. 6) слични троугли ABC и AOS дају сразмеру

$$(r - x) : y = r : h,$$

из које изводимо једначину

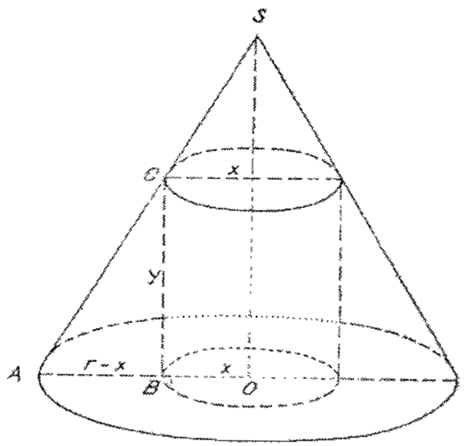
$$hx + ry = rh.$$

Даље нам услов, да је омотач облице једнак кружном прстену, даје једначину

$$r^2\pi - x^2\pi = 2x\pi y.$$

Ова се једначина, пошто се скрати са π, лако доводи на облик

$$x^2 + 2xy = r^2.$$



Сл. 6

Дакле имамо да решавамо систем

$$hx + ry = rh$$
$$x^2 + 2xy = r^2.$$

Ми ћемо елиминовати непознату **y** па ћемо затим решити добивену једначину:

$$y = \frac{rh - hx}{2},$$

$$x^2 + 2x\,\frac{rh - hx}{2} = r^2,$$

$$rx^2 + 2rhx - 2hx^2 = r^3,$$

$$(2h - r)x^2 - 2rhx + r^3 = 0,$$

$$x = \frac{rh \pm \sqrt{r^2h^2 - (2h - r)r^3}}{2h - r}$$

$$= \frac{rh \pm \sqrt{r^2(h^2 - 2rh + r^2)}}{2h - r}$$

$$= \frac{rh \pm r(h - r)}{2h - r},$$

$$x_1 = \frac{r^2}{2h - r}, \quad x_2 = r.$$

Најзад **y** добијамо из једначине

$$y = \frac{rh - hx}{r}$$

Пре свега је

$$y = \frac{rh - hx}{r} = h - \frac{h}{r}x \cdot$$

Затим је даље

$$y_1 = h - \frac{h}{r} \cdot \frac{r^2}{2h - r} = h - \frac{rh}{2h - r} = \frac{2h(h - r)}{2h - r},$$

$$y_2 = h - \frac{h}{r} \cdot r = h - h = 0.$$

Дискусија. Најпре ћемо се задржати на првом решењу:

$$x = \frac{r^2}{2h - r}, \qquad y = \frac{2h(h - r)}{2h - r}$$

Пре свега **r** и **h** морају се сматрати као апсолутне величине и према томе не могу бити негативни. Што се тиче непознатих x и y оне морају задовољити услове:

1) $x > 0$, 2) $x < r$, 3) $y > 0$, 4) $y < h$.

Према томе мора бити:

1) $\frac{r^2}{2h - r} > 0$, 2) $\frac{r^2}{2h - r} < r$,

3) $\frac{2h(h - r)}{2h - r} > 0$, 4) $\frac{2h(h - r)}{2h - r} < h$.

Прва неједначина, пошто је r^2 позитивно, своди се на неједначину

$$2h - r > 0$$

из које излази да је

$$h > \frac{r}{2}.$$

Пошто смо одредили знак израза $2h - r$ сад ћемо и остале три неједначине лако ослободити именитеља и решити:

2) $\frac{r^2}{2h - r}(2h - r) < r(2h - r)$,

$r^2 < r(2h - r)$,

$r < 2h - r$,

$2r < 2h$,

$r < h$.

3) $\frac{2h(h - r)}{2h - r} > 0$,

$2h(h - r) > 0$,

$h > r$.

4) $\frac{2h(h - r)}{2h - r} < h$,

$2h(h - r) < h(2h - r)$,

$2r > r$.

Као што видимо сви се услови своде на ова два:

$$h > \frac{r}{2} \text{ и } h > r.$$

Јасно је да ће оба услова бити задовољена ако је

$$h > r.$$

Према томе, да би проблем био могућ, треба да буде висина купе већа од полупречника основе.

Што се тиче другог решења $x = r$, $y = 0$ оно претставља специјалан случај у коме и кружни прстен и омотач облице ишчезавају (тј. своде се на круг).

Задаци за вежбање

1) Број 49 раставити на два сабирка чији ће производ бити 490.

2) Број **a** раставити на два сабирка чији ће производ бити **n** пута већи од самог броја **a**.

3) Одредити два броја чији је збир 6 и производ 6.

4) Ако се један број смањи за свој деветоструки квадратни корен добија се као разлика број 252. Одредити тај број.

5) Два разломка имају исти именилац, а бројиоци су: једног 5 а другог 11. Ако се именилац првог разломка смањи за 2, а именилац другог разломка повећа за 2, онда ће збир та два разломка износити $\frac{9}{7}$. Који су то разломци?

6) Разлика квадрата два броја износи 33, а њихов збир је за 1 мањи од четвороструке разлике. Који су то бројеви?

7) Два броја имају особину да је њихов збир једнак квадрату њихове разлике и да разлика између троструког већег и четвороструког мањег износи 3. Који су то бројеви?

8) Један број може се разложити на два сабирка који се разликују за 0,01 и чији је производ 0,06. Одредити тај број и оба сабирка.

9) Један двоцифрен број може се поделити збиром својих цифара, тако да се у количнику добије број, који је за 1 мањи од делитеља. Још се зна да је прва цифра тога броја за 5 већа од друге цифре. Одредити тај број.

10) Један двоцифрен број, подељен збиром својих цифара, даје за количник број, који је за 1 већи од збира цифара. Ако цифре размене своја места, па се тако добивени број подели збиром цифара, добија се као количник број који је за 2 мањи од збира цифара. Који је то број?

11) Збир цифара једног троцифреног броја износи 13. Кад се од треће цифре одузме производ прве и друге цифре, добија се друга цифра. Ако се на место друге цифре стави 0, па се нови број подели са 11, добија се у количнику број, који је једнак с крајњим двоцифреним делом непознатог броја. Који је то број?

12) Један двоцифрени број може се без остатка поделити својом другом цифром, тако да се у количнику добије број, који је једнак збиру његових цифара. Ако се томе броју допише с десне стране његова прва цифра, добија се број који је за 50 већи од осмоструког првобитног броја. Одредити непознати број.

13) Цифре су једног троцифреног броја узастопни бројеви тако да је прва цифра најмања а последња највећа. Ако се тај број помножи збиром својих цифара добија се као производ број 2106. Одредити тај број.

14) Прва цифра једног двоцифреног броја већа је за 2 од друге цифре. Још се зна да је квадрат збира цифара тога броја једнак броју, који се добија из првобитног броја, кад се свака његова цифра повећа за 1. Одредити непознати број.

15) Наследници једне заоставштине имали су да поделе 63000 дин., али се један од наследника одрекао свога дела, те су тако остали примили по 1500 д. више. Колико је било наследника?

16) Једна група излетника закупила је за излет један аутобус за 2400 дин., коју су суму сви излетници имали да плате солидарно. Али како је 5 излетника изостало остали су морали да плате по 16 дин. више. Колико је било излетника?

17) Места A и B удаљена су 96 километара. Један путник одвезе се од A до B колима а врати се аутомобилом. Ако се зна да је тај путник провео на путу свега 11 часова, и да је за 1 час прелазио аутомобилом 20 километара више него колима, колико му је било потребно времена за одлазак а колико за повратак?

18) Места A и B удаљена су 48 километара. Из A пође један пешак у B у исто време, када и један коњаник пође из B у A. Они се сретну на 3 часа после поласка, а кад је коњаник стигао у A, пешак је имао да путује још 8 часова до B. Колико је километара прелазио на сат коњаник а колико пешак?

19) Из једног места крене се један пешак у 5 часова а један бициклист у $9\frac{1}{2}$ часова. Бициклист је прелазио за 1 час 13,5 километара више него пешак и стигао је пешака кад је прешао 27 километара. Колико је километара на сат прелазио пешак?

20) Један моторни чамац, који се креће у мирној води брзином од 240 метара на минут, крене се једном реком узводно. Али, пошто је прешао 4800 метара, поквари му се мотор и вода га врати натраг до места одакле је пошао. Ако се зна да је од поласка до повратка чамца прошло 2 ч. 5 м., колика је брзина воде?

21) Два тркача обилазе једну кружну стазу крећући се у супротном смислу и сусрећу се сваких 30 секунада. Једноме од њих, да би обишао целу стазу, потребно је 11 секунада више него другом. За које време обилази стазу сваки појединитркач?

22) Два бициклиста обилазе једну кружну стазу крећући се у истом смислу. Први, који је бржи, сустиже другог свака 4 минута, јер другоме, да би обишао целу стазу, треба 12 секунада више него првом. За које време обиђе стазу сваки поједини бициклист?

23) Једном раднику потребно је 5 дана више да сврши неки посао него другом раднику. Ако оба радника раде заједно свршиће тај посао за 6 дана. За које време може да сврши тај посао сам први, а за које сам други радник?

24) Два радника радили су неки посао са неједнаким надницама, и зарађивали су укупно 56 дин. дневно. Један је од њих за све време посла зарадио 408 дин., а други, који је радио 3 дана више него први, зарадио је 640 дин. Колико је дана радио први а колико други радник и колике су им биле наднице?

25) Два су радника радила заједно са неједнаким надницама. На једном послу први је зарадио 750 дин., а други, који је радио 5 дана мање, зарадио је 500 дин. На другом послу

други је радник радио исто онолико времена, колико први радник на првом послу, док је сад први радник радио 6 дана мање. Међутим суме, које су они зарадили на другом послу, биле су једнаке. Колико је дана радио сваки од њих на првом а колико на другом послу, и колике су им биле наднице?

26) Један резервоар пуни се са две славине. Ако се пусте обе славине резервоар ће се напунити за 12 часова, а ако се пусти само мања славина, потребно је 7 часова више да се напуни резервоар, него ако се пусти само већа славина. За које ће се време резервоар напунити ако се пусти само мања славина?

27) Један резервоар има две славине од којих мања служи за пуњење а већа за пражњење. Да би се резервоар најпре напунио па затим испразнио потребно је укупно 45 минута. Ако је резервоар пун, па се отворе обе славине, резервоар ће се испразнити за 14 минута. За које ће се време резервоар напунити ако је отворена само мања славина, а за које ће се време испразнити ако је отворена само већа славина?

28) Колико страна има полигон који има 77 дијагонала?

29) Два полигона имају укупно 25 страна и 131 дијагоналу. Који су то полигони?

30) Која су то два полигона чији се број страна разликује за 2 а број дијагонала за 23?

31) Израчунати катете правоуглог троугла ако се знају хипотенуза $c = 17$ cm и обим $2s = 40$ cm.

32) Израчунати стране равнокраког троугла кад је дат његов обим **2s** и висина **h**.

33) Израчунати основну ивицу четворостране правилне призме чија је површина $p = 1392$ cm², а висина $h = 23$ cm.

34) Израчунати основну ивицу шестостране правилне призме чија је површина $p = 324$ cm², а висина $h = 8$ cm.

35) У кругу полупречника **r** уписан је правоугаоник, који је по обиму једнак равностраном троуглу, уписаном у истом кругу. Израчунати стране тога правоугаоника.

36) У кругу полупречника **r** уписан је квадрат, па је затим повучена једна тетива, која је паралелна с једном од дијагонала квадратових, и која има такав положај, да је двема

странама квадратовим подељена на три једнака дела. Одредити дужину те тетиве.

37) У квадрат је уписан равностран троугао тако, да се једно теме равностраног троугла поклапа с једним теменом квадратовим. Израчунати страну равностраног троугла ако је дата квадратова страна **a**.

38) Дати правоугаоник, чије су стране **a** и **b** поделити једном дужи, која је паралелна с мањом страном, на два слична правоугаоника. Под којим је условом задатак могућ?

39) Дата је површина четворостране правилне пирамиде $p = 360$ cm² и бочна висина $h = 13$ cm; израчунати основну ивицу.

40) Површина једне праве облице је $p = 5181$ cm², а висина јој је $h = 40$ cm; израчунати полупречник основе обличине.

41) Две облице имају једнаке површине. Једна има полупречник основе $r = 4$ cm и висину $h = 32$ cm, а друга има висину $h_1 = 10$ cm. Израчунати полупречник основе друге облице.

42) У квадрату чија је страна $a = 25$ cm уписан је правоугаоник, чије су стране паралелне с дијагоналама квадратовим. Ако је дата површина тога правоугаоника $p = 288$ cm² израчунати делове, на које су стране квадратове подељене теменима уписаног правоугаоника.

43) Дат је обим једног правоугаоника 2s. Још се зна да је површина тога правоугаоника једнака збиру површина два равнострана троугла, од којих један има страну једнаку с већом страном, а други са мањом страном датог правоугаоника. Израчунати стране правоугаоникове.

44) Дате су паралелне стране **a** и **b** једног правоуглог трапеза (са два права угла) у који се може уписати круг. Израчунати полупречник тога уписаног круга.

45) Дат је полупречник **r** једног круга. Одредити полупречник основе оне праве купе, чија је површина једнака с површином датог круга а висина са страном квадрата, уписаног у датом кругу.

46) Дати су полупречник основе **r** и страна **s** једне праве купе. Одредити полупречник основе оне праве облице, која је по површини једнака с датом купом, и чија је висина једнака са страном купином.

47) Једна права купа чија је страна $s = 5$ cm једнака је по површини с лоптом полупречника $r = 3$ cm. Израчунати полупречник основе те купе.

48) Израчунати висину праве купе, ако се зна полупречник **R** њене основе и полупречник **r** уписане јој лопте.

49) Дата је висина једне шестостране правилне призме $h = 8$ cm. Израчунати њену основну ивицу, ако се зна да је она по површини једнака с правилним тетраедром, чија је ивица $a = 15$ cm.

50) Над кругом полупречника **r** налазе се полулопта и облица. Колика треба да буде висина облице, па да калота, што је од полулопте отсеца горња основа облице, буде једнака кружном прстену, што га од горње основе обличине отсеца полулопта?

51) На страни AB квадрата ABCD узета је тачка E и повучена дуж EC. Ако се квадрат обрће око стране AD, одредити положај тачке E тако, да обртне запремине трапеза AECD и троугла EBC буду једнаке.

52) Дата је хипотенуза једног правоуглог троугла $c = 11$ cm и полупречник у троуглу уписаног круга $r = 2$ cm. Израчунати полупречник круга, уписаног у другом правоуглом троуглу, који је по површини једнак с датим троуглом, и чија је хипотенуза $c_1 = 25$ cm.

53) Дат је обим правоуглог троугла **2s** и полупречник **r** у троуглу уписаног круга. Израчунати обе катете.

54) У дати правоугли троугао, чије су катете **a** и **b**, уписан је други правоугли троугао, тако да му се једно теме налази на хипотенузи, друго у темену правог угла и треће (теме правог угла) на катети **b**. Израчунати катете уписаног троугла ако се зна да је његова површина један **n**-ти део површине датог троугла. Која је најмања вредност, коју може имати **n**, да би задатак био могућ?

55) У кружни отсечак, који је отсечен страном равностраног троугла уписаног у круг полупречника **r**, уписана су два једнака круга који се узајамно додирују. Израчунати заједнички полупречник ова два уписана круга.

56) Круг је подељен на два исечка тако, да се од једног може склопити омотач праве купе, чија је основа по површини једнака с другим исечком. Колики су средишни углови ових исечака?

57) Дати правоугли троугао чије су катете **a** и **b** обрће се око осовине, која пролази кроз теме правог угла. Израчунати раздаљине темена оштрих углова од обртне осовине, ако се зна да су обртне површине катета једнаке.

58) Око датог квадрата чија је страна **a** описан је круг, га је у једноме од отсечака, чије су тетиве квадратове стране, уписан квадрат тако, да му два темена леже на квадратовој страни а два на кругу. Израчунати страну уписаног квадрата $\left(x = \frac{a}{5}\right)$.

Логаритмовање

Раније смо показали како се из степеновања изводи кореновање као обрнута рачунска радња на сличан начин, као што се из сабирања изводи одузимање и из множења дељење. Тада смо видели да се кореновањем може израчунати основа неког степена ако је познат степен и степенов изложилац. Али ми нисмо могли кореновањем да израчунамо изложилац неког степена ако је познат степен и његова основа. То нисмо могли због тога, што основа и изложилац не могу да размене своја места, па се зато непознати изложилац не може рачунати истом рачунском радњом, којом се рачуна непозната основа.

Ако треба израчунати изложилац неког степена кад је познат сам степен и његова основа, онда се тај задатак решава новом рачунском радњом, која се назива логаритмовање.

Да би нам однос између степеновања, кореновања и логаритмовања био јаснији ми ћемо те три рачунске радње посматрати упоредо. Ради тога послужићемо се једнакошћу

$$b^n = a.$$

У овој једнакости имамо три броја, од којих треба да нам буду позната два, да бисмо израчунали трећи. Према томе имамо ова три случаја:

1) Ако су нам познати бројеви **b** и **n**, онда израчунавамо **a** рачунском радњом која се назива **степеновање.**

2) Ако су нам познати бројеви **a** и **n**, онда израчунавамо **b** рачунском радњом која се назива **кореновање.**

3) Ако су нам познати бројеви **a** и **b**, онда израчунавамо **n** рачунском радњом која се назива **логаритмовање.**

Знамо да бројеви **a**, **b** и **n** имају сваки свој назив како код степеновања тако и код кореновања. Зато ћемо и код логаритмовања морати тим бројевима да дамо нарочите називе. Код логаритмовања ти се бројеви називају: **a логаритманд** (број, нумерус), **b основа** (база) и **n логаритам.** Логаритмовање се назначава овако:

$$\log_{(b)} a = n,$$

а чита се: логаритам **a** за основу **b** једнак је **n**.

Из свега напред реченог излази ова дефиниција логаритма: **Логаритам је број, којим треба степеновати један дати број, узет за основу, да би се добио други дати број као степен.**

Основна правила о логаритмима

Видели смо да се логаритмовање назначава овако:

$$\log_{(b)} a = n.$$

Али како је логаритмовање изведено из степеновања, то мора бити

$$b^n = a.$$

Ако се сад узме да је логаритманд (a) једнак основи (b), онда мора бити $n = 1$, јер је

$$b^1 = b.$$

Према томе је

$$\log_{(b)} b = 1.$$

Ако је логаритманд једнак јединици, онда мора бити $n = 0$, јер је

$$b^0 = 1.$$

Према томе је

$$\log_{(b)} 1 = 0.$$

Исто тако лако се може утврдити да је

$$\log_{(b>1)} 0 = -\infty\,.$$

Да видимо сад у каквој су узајамној зависности знаци логаритманда, основе и логаритма. Пре свега напомињемо да се за логаритамску основу никад не узима негативан број. Зато ћемо и ми претпоставити да је у једнакости $b^n = a$ увек $b > 0$. Јасно је да под овим условом, било да је $n > 0$, било да је $n < 0$, у сваком случају мора бити $a > 0$. То нам уосталом јасно показују ови бројни примери:

$$3^2 = 9, \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4, \quad 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}.$$

Као што видимо, ако је основа позитивна, не постоји никакав реалан број, који би био логаритам неког негативног броја.

Поред тога горњи нам примери показују да сваком броју одговара само један логаритам и сваком логаритму само један број.

Из резултата до којих смо овде дошли излазе

Правила:

1) **Логаритам броја који је једнак логаритамској основи једнак је јединици.**

2) **Логаритам броја 1 за коју било основу једнак** је нули.

3) **Логаритам нуле за основу већу од 1 једнак је** $-\infty$.

4) **За позитивну основу негативни бројеви немају логаритма.**

5) **Сваки позитиван број има само један свој логаритам, и сваком логаритму одговара само један број.**

Напомена. Ако се за логаритамску основу употребљава увек исти број, онда се основа подразумева, те се обично не пише. Тако на пр. ако се подразумева да је логаритамска основа b, онда се уместо

$$\log_{(b)} a = n$$

пише просто

$$\log a = n.$$

Општа правила о логаритмовању

Најпре ћемо извести правила о логаритмовању производа и количника (разломка). Ради тога поћи ћемо од једнакости

$$\log p = x, \qquad \log q = y,$$

где се подразумева да је логаритамска основа b. Из тих једнакости излази да је

$$p = b^x, \qquad q = b^y.$$

Затим је даље:

1) $pq = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$,

$\log pq = x + y = \log p + \log q.$

2) $\dfrac{p}{q} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$,

$\log \dfrac{p}{q} = x - y = \log p - \log q.$

Одавде излазе правила о логаритмовању производа и количника (разломка).

Прво правило. Логаритам производа једнак је збиру логаритама појединих чинилаца.

Друго правило. Логаритам количника (разломка) једнак је разлици логаритама дељеника (бројиоца) и делитеља (имениоца).

Сад ћемо применом ових правила лако извести и правила о логаритмовању степена и корена. Ради тога поћи ћемо од једнакости

$$1)\ x = a^n, \qquad 2)\ y = \sqrt[n]{a},$$

где ћемо опет узети да се као логаритамска основа подразумева b. Из тих једначина налази да је

1) $x = a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a$ (n пута),

$\log x = \log a + \log a + \log a + \ldots + \log a + \log a,$

$\log x = n \log a,$

$\log a^n = n \log a.$

2) $y^n = a,$

$\log y^n = \log a,$

$n \log y = \log a.$

$$\log y = \frac{\log a}{n},$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$$

Одавде изводимо правила о логаритмовању степена и корена.

Треће правило. Логаритам степена једнак је производу изложиоца и логаритма основе тога степена.

Четврто правило. Логаритам корена једнак је количнику (разломку), чији је дељеник (бројилац) логаритам радиканда, а делитељ (именилац) коренов изложилац.

Прва напомена. Ако треба логаритам помножити неким бројем, онда се тај број увек ставља испред логаритамског знака. Исто тако ако треба логаритам поделити неким бројем, онда се тај број пише као именилац, или се његова реципрочна вредност ставља испред логаритамског знака. Ако се укаже потреба да се број, којим треба логаритам помножити или поделити, постави иза логаритма, онда се логаритам мора ставити у заграду. Најзад логаритам се ставља у заграду и ако га треба степеновати. Тако је на пр.:

$$2 \log a = (\log a) \cdot 2, \qquad \frac{\log x}{3} = \tfrac{1}{3} \log x = (\log x) : 3,$$

$$\log c \cdot \log c = (\log c)^2.$$

Друга напомена. Ако је логаритманд полином (бином, трином) онда се логаритмовање не може извршити непосредно.

Примери.

1) $\log abx = \log ab + \log x$

$\qquad = \log a + \log b + \log x.$

2) $\log (a^2 - 9) = \log (a + 3)(a - 3)$

$\qquad = \log (a + 3) + \log (a - 3).$

3) $\log \dfrac{2x}{5y} = \log 2x - \log 5y$

$\qquad = \log 2 + \log x - (\log 5 + \log y)$

$\qquad = \log 2 + \log x - \log 5 - \log y.$

4) $\log \dfrac{1}{3a} = \log 1 - \log 3a$

$\qquad = 0 - (\log 3 + \log a)$

$\qquad = -\log 3 - \log a.$

5) $\log ax^3 = \log a + \log x^3$

$\qquad = \log a + 3 \log x.$

6) $\log \dfrac{a^4}{mn^3} = \log a^4 - \log mn^3$

$\qquad = 4 \log a - \log m - 3 \log n.$

7) $\log r\sqrt[3]{r} = \log r + \log \sqrt[3]{r}$

$\qquad = \log r + \dfrac{\log r}{3}$

8) $\log \dfrac{a}{2x^2}\sqrt[3]{a^2\sqrt{x}} = \log \dfrac{a}{2x^2} + \log \sqrt[3]{a^2\sqrt{x}}$

$\qquad = \log a - \log 2x^2 + \dfrac{\log a^2\sqrt{x}}{3}$

$$= \log a - \log 2 - \log x^2 + \frac{\log a^2 + \log \sqrt{x}}{3}$$

$$= \log a - \log 2 - 2 \log x +$$

$$\frac{2 \log a}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{\log x}{2}$$

$$= \log a - \log 2 - 2 \log x +$$

$$\frac{2 \log a}{3} + \frac{\log x}{6}$$

$$= \frac{10 \log a - 11 \log x - 6 \log 2}{6}$$

9) $\log a + \log b = \log ab.$

10) $\log x - \log y = \log \dfrac{x}{y}$

11) $\log a - \log x - \log y = \log a - (\log x + \log y)$

$$= \log a - \log xy$$

$$= \log \frac{a}{xy}$$

12) $n \log x = \log x^n.$

13) $\frac{2}{3} \log r = \log \sqrt[3]{r^2}$

14) $2 \log p - 3 \log q = \log p^2 - \log q^3$

$$= \log \frac{p^2}{q^3}$$

15) $\dfrac{\log ax}{4} - \log x + 2 \log a = \log \sqrt[4]{ax} + \log a^2 - \log x$

$$= \log \frac{a^2 \sqrt[4]{ax}}{x}$$

16) $n \log x - (n+1)\left(\dfrac{\log x}{n} + \log \dfrac{x}{n}\right) =$

$$= \log x^n - (n+1)\left(\log \sqrt[n]{x} + \log \frac{x}{n}\right)$$

$$= \log x^n - (n+1) \log \frac{x}{n} \sqrt[n]{x}$$

$$= \log x^n - \log \left(\frac{x}{n} \sqrt[n]{x}\right)^{n+1}$$

$$= \log \frac{x^n}{\left(\frac{x}{n} \sqrt[n]{x}\right)^{n+1}}$$

Задаци за вежбање

Одредити логаритме са назначеним основама:

1) $\log a^4{}_{(a)}$

2) $\log b^{\frac{2}{3}}{}_{(b)}$

3) $\log \sqrt[3]{b^2}{}_{(b)}$

4) $\log \sqrt{x}_{(x)}$

5) $\log \dfrac{1}{a}{}_{(a)}$

6) $\log \dfrac{1}{a^2}{}_{(a)}$

7) $\log 16_{(4)}$

8) $\log 16_{(2)}$

9) $\log 3_{(9)}$

10) $\log 16_{(2)}$

11) $\log \dfrac{1}{25}{}_{(5)}$

12) $\log \dfrac{1}{3}{}_{(9)}$

Логаритмовати изразе (не назначавајући основу):

13) $7ax$

14) $\dfrac{5xy}{n}$

15) $a(a-1)$

16) $\dfrac{2a}{a+1}$

17) $m^2 + 2m$

18) $x^2 - 9$

19) $r^2\pi$

20) $\dfrac{a^2b}{4}$

21) $\sqrt[3]{a^2}$

22) $\sqrt{2rh}$

23) $2x^2(a^2x)^3$

24) $4x^2\sqrt{3}$

25) a^{n+1}

26) $\dfrac{x^2}{2^x}$

27) $\dfrac{4r^3n}{3}$

28) $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

29) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

30) $\sqrt[3]{x\sqrt{y}}$

31) $\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}$

32) $\dfrac{2a^n}{2^{n-1}}$

33) $\dfrac{1}{r\sqrt{r}}$

34) $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}$

35) $\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{6}\sqrt{3a}}$

36) $\sqrt[n]{x^2\sqrt{x^n}}$

37) $\dfrac{\sqrt[x]{a^2}}{\sqrt{a^x}}$

38) $\dfrac{\sqrt[3]{r^2}}{\frac{r}{2}\sqrt{3}}$

39) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3b^2c}}{3a\sqrt{2b\sqrt{c}}}$

40) $\dfrac{a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}}\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$

41) $\sqrt{\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2}$

42) $x\sqrt{\dfrac{ax}{2\sqrt{2}}}$

Ове изразе свести у један логаритам:

43) $\log x + \log 4$

44) $\log n - \log (n - 1)$

45) $\log a + \log b + \log c$

46) $\log a + \log b - \log c$

47) $\log a - \log b + \log c$

48) $\log a - \log b - \log c$

49) $2 \log x + \log y$

50) $\log a - 3 \log x$

51) $2 \log a - 3 \log b + \log 6$

52) $\frac{\log m}{2} + \frac{\log n}{4}$

53) $\frac{1}{2} \log(a + b) + \frac{1}{2} \log(a - b)$

54) $\frac{\log x}{2} - \log \frac{x}{2}$

55) $\frac{1}{2} \log a - \frac{2}{3}(\log b + \frac{3}{4} \log c)$

56) $\frac{2 \log x + 3 \log y}{4} - \frac{1}{2} (\log x - \frac{2}{3} \log y)$

57) $\frac{1}{2}(\log a - 3 \log 2) - \frac{1}{3}(\log a - 2 \log 3)$

58) $(m + n) \log x - \frac{m \log x + n \log x}{2}$

Декадни и природни логаритми

Уређен скуп логаритама узастопних целих бројева за једну одређену основу назива се **систем логаритама.** Употребљавају се свега два система: **систем декадних (Бриксових) логаритама** и **систем природних (Неперових) логаритама.** Код система декадних логаритама узет је за основу број 10, док је код система природних логаритама основа један ирационалан број, који се кратко означава са **e** и чија приближна вредност са 9 децимала износи

$$2{,}718281828\ldots$$

Ми ћемо се служити декадним логаритмима, јер се природни логаритми обично употребљавају само у вишој математици, где се помоћу њих постижу знатна рачунска упрошћења.

За израчунавање логаритама појединих бројева постоје разни методи. Ако бисмо се ослонили на наша досад стечена знања из математике, онда би израчунавање логаритама претстављало дуг и заметан посао. Зато се ми нећемо упуштати у

израчунавање декадних логаритама. То би уосталом био и сувишан посао, пошто постоје логаритамске таблице у којима се налазе логаритми свих целих бројева обично до 10000 или до 15000. Ми ћемо се служити таблицама у којима се налазе логаритми бројева до 10000 израчунати са 5 децимала. Како се у тим таблицама налазе само логаритми бројева до 10000 то ће се логаритми осталих бројева морају израчунавати, само што је то израчунавање употребом логаритамских таблица знатно упрошћено.

Карактеристика и мантиса декадних логаритама

У систему декадних логаритама врло се лако израчунавају логаритми декадних јединица. Пре свега је за коју било логаритамску основу

$$\log 1 = 0.$$

Затим је даље за основу 10:

1) $\log 10 = 1,$

$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$

$\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$

итд.

2) $\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1,$

$\log 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2,$

$\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3$

итд.

Као што видимо логаритми виших декадних јединица сви су позитивни цели бројеви, док су логаритми нижих декадних јединица негативни цели бројеви. Још се види да је апсолутна вредност логартма неке декадне јединице једнака броју нула помоћу којих се пише та декадна јединица, при чему се код нижих декадних јединица рачуна и нула испред десетне запете.

Ако се изузму логаритми декадних јединица, онда су логаритми свих осталих бројева ирационални бројеви, који могу бити дати само са одређеним бројем децимала. Напред смо споменули да ћемо ми употребљавати логаритме са 5 децимала.

Низ логаритама декадних јединица показује нам да већој декадној јединици одговара већи логаритам и обратно. Јасно је да то мора да важи и за све остале бројеве, тако да уопште: **већем броју одговара већи логаритам.** Што се тиче знака логаритма видимо да су логаритми виших декадних јединица позитивни а логаритми нижих декадних јединица негативни. Но како је $\log 1 = 0$ јасно је да морају бити: 1) **логаритми свих бројева већих од 1 позитивни,** 2) **логаритми свих бројева мањих од 1 негативни.**

Однос између бројева и њихових логаритама прегледно је приказан у овој табели:

Бројеви	Логаритми	Бројеви	Логаритми
од 1 до 10	од 0 до 1	од 0,1 до 1	од −1 до 0
од 10 до 100	од 1 до 2	од 0,01 до 0,1	од −2 до −1
од 100 до 1 000	од 2 до 3	од 0,001 до 0,01	од −3 до −2
од 1 000 до 10 000	од 3 до 4	од 0,0001 до 0,001	од −4 до −3
од 10 000 до 100 000	од 4 до 5	од 0,00001 до 0,0001	од −5 до −4

Сваки негативан логаритам може се написати у виду бинома, чији је један члан негативан цео број, а други члан позитиван децималан број мањи од 1. Тако је на пр.

$$\begin{aligned}\log 0{,}022 &= -1{,}65758\\ &= 2 - 1{,}65758 - 2\\ &= 0{,}34242 - 2.\end{aligned}$$

Овај се логаритам обично пише овако у виду једног броја:

$$\bar{2}{,}34242.$$

На овај начин може се изразити логаритам сваког броја мањег од 1. Што се тиче логаритама бројева већих од 1 они

се пишу на обичан начин као позитивни децимални бројеви. Тако је на пр.

$$\log 10{,}6 = 1{,}02531.$$

У оба случаја логаритам се може разложити у два дела. Први део, који чине цели и који може бити позитиван или негативан, назива се **карактеристика,** а други део, који образују децимали и који је увек позитиван, назива се **мантиса** логаритма.

Сад ћемо, да бисмо дошли до извесних важних закључака, посматрати овај низ логаритама:

$$\begin{aligned}
\log 5740 &= 3{,}75891\\
\log 574 &= \log \frac{5740}{10} = \log 5740 - \log 10 =\\
&= 3{,}75891 - 1 = 2{,}75891\\
\log 57{,}4 &= \log \frac{574}{10} = \log 574 - \log 10 =\\
&= 2{,}75891 - 1 = 1{,}75891\\
\log 5{,}74 &= \log \frac{57{,}4}{10} = \log 57{,}4 - \log 10 =\\
&= 1{,}75891 - 1 = 0{,}75891\\
\log 0{,}574 &= \log \frac{5{,}74}{10} = \log 5{,}74 - \log 10 =\\
&= 0{,}75891 - 1 = \bar{1}{,}75891\\
\log 0{,}0574 &= \log \frac{0{,}574}{10} = \log 0{,}574 - \log 10 =\\
&= \bar{1}{,}75891 - 1 = \bar{2}{,}75891.
\end{aligned}$$

Овај низ логаритама показује нам:

1) да је **карактеристика позитивног логаритма за 1 мања од броја целих места код логаритманда.**

2) да је **карактеристика негативног логаритма по апсолутној вредности једнака броју нула које се јављају код логаритманда испред првог од оних децимала који су различити од нуле, рачунајући ту и нулу испред десетне запете.**

3) Да **логаритми бројева који постају један из другог множењем или дељењем неком декадном јединицом (помера-**

њем десетне запете, дописивањем нула, изостављањем крајњих нула) имају увек исту мантису.

Закључци до којих смо овде дошли показују нам на који се начин одређује карактеристика логаритма. Како одређивање карактеристике не задаје неке нарочите тешкоће, то се у логаритамским таблицама, ради уштеде простора, налазе само мантисе логаритама. Изузетно за целе бројеве до 100 обично се у почетку таблица налазе поред мантиса и карактеристике.

Дакле за бројеве веће од 100 у таблицама се могу наћи само мантисе. Управо рећи бројеви од 100 до 1000 уопште нису заступљени у таблицама, тако да се већ на другој страни табличног дела налазе мантисе бројева од 1000 па навише. Међутим из овог другог дела таблица, у коме се налазе мантисе логаритама бројева од 1000 до 10000, лако се могу одредити и мантисе логаритама бројева од 100 до 1000. То нам јасно показују ови примери:

$$\log 101 = \log \frac{1010}{10} = \log 1010 - \log 10 =$$
$$= 3{,}00432 - 1 = 2{,}00432.$$

$$\log 375 = \log \frac{3750}{10} = \log 3750 - \log 10 =$$
$$= 3{,}57403 - 1 = 2{,}57403.$$

Дакле мантису логаритма неког броја од 100 до 1000 добићемо ако томе броју допишемо нулу, па одредимо мантису логаритма тако добивеног броја.

Сад да видимо како се поступа при одређивању логаритма неког броја од 1000 до 10000. Прве три цифре броја чији се логаритам тражи налазимо у ступцу испод N, а последња је цифра при врху таблица. У истом реду, у коме су прве три цифре броја, у ступцу испод последње цифре налазе се последње три цифре мантисе, док су прве две цифре, које су заједничке многим мантисама исписане напред (у ступцу испод L) у истом реду са три последње цифре или у неком вишем реду. Изузетно, за случај да су последње три цифре мантисе означене звездицом, прве две цифре узимају се из првог нижег реда.

При одређивању логаритма децималног броја, пошто се на показани начин одреди карактеристика, изоставља се десетна запета, па се одређује мантиса као да је то цео број.

Примери.

1) Одредити логаритам броја 28.

На страни 1 (Таблице Ст. Давидовића) читамо непосредно:

$$\log 28 = 1{,}44716.$$

2) Одредити логаритам броја 3206.

Карактеристика је $4 - 1 = 3$. Мантису налазимо на стр. 7. У 21 реду у ступцу испод N налазимо прве три цифре броја (320), а у истом реду у ступцу испод 6 налазимо последње три цифре мантисе (596). Прве две цифре мантисе (50) налазе се у 18 реду у ступцу испод L. Према томе је

$$\log 3206 = 3{,}50596.$$

3) Одредити логаритам броја 42,68.

Овај број има два цела места и зато је његова карактеристика $2 - 1 = 1$. Сад изостављамо десетну запету и тражимо мантису логаритма бр. 4268. Овај је број на стр. 10 а његове су прве три цифре у 7 реду. У истом реду у ступцу испод 8 налазе се последње три цифре тражене мантисе (022). Звездица коју видимо испред тога дела мантисе показује нам да се прве две цифре тражене мантисе (63) налазе у следећем реду, у ступцу испод L. Према томе је

$$\log 42{,}68 = 1{,}63022.$$

4) Одредити логаритам броја 0,0076.

Овај број има три нуле испред првог од децимала који су различити од нуле (7). Зато је карактеристика његовог логаритма -3. Мантису (88081) налазимо на стр. 1 код логаритма броја 76. Према томе је

$$\log 0{,}0076 = \bar{3}{,}88081.$$

Ако се број, чији логаритам треба израчунати, не налази у таблицама, онда ни мантису његовог логаритма не можемо наћи непосредно у таблицама. У томе случају мантиса се може израчунати помоћу овог правила, које засад не можемо доказивати, али које се лако може проверити помоћу самих логаритамских таблица.

Правило. Прираштаји логаритама великих бројева приближно су сразмерни прираштајима самих бројева.

Сам поступак при израчунавању логаритама бројева који се не налазе у таблицама показаћемо на неколико примера.

Примери.

1) Израчунати логаритам броја 15206.

Пре свега карактеристика је 4. Што се тиче мантисе знамо да се она не мења кад се број помножи или подели ма којом декадном јединицом. Зато ћемо се ми за одређивање мантисе послужити бројем 1520,6. Овај се број налази између 1520 и 1521, што се кратко назначава овако:

$$1520 < 1520{,}6 < 1521.$$

Сад нам је јасно да се и логаритам броја 1520,6 мора налазити између логаритама бројева 1520 и 1521. Дакле биће

$$\log 1520 < \log 1520{,}6 < \log 1521.$$

Међутим бројеви 1520 и 1521 налазе се у таблицама, па зато и разлику њихових логаритама можемо лако израчунати. Дакле рачунаћемо овако:

$$\log 1521 - \log 1520 = 3{,}18213 - 3{,}18184 = 0{,}00029.$$

Као што видимо док број порасте за 1 његов логаритам порасте за 0,00029, тј. за 29 стохиљадитих. Међутим разлика између броја 1520,6 чији се логаритам тражи и броја 1520 износи 0,6. Према томе док број порасте за 0,6 његов ће логаритам порасти за

$$29 \text{ стохиљадитих} \times 0{,}6 = 17{,}4 \text{ стохиљадитих}.$$

Цифру 4, која у овом резултату значи милионите, занемарићемо (јер је мања од 5). Број 17 који смо на овај начин добили назива се **поправка** логаритма. Ту поправку треба да додамо логаритму броја 1520 потписујући је тако, да цифра 7 дође испод последњег децимала. На тај начин добијамо логаритам броја 1520,6:

$$\begin{array}{lr}
\log 1520 \ldots\ldots & 3.18184 \\
 & +\ 17 \\
\hline
\log 1520{,}6 \ldots\ldots & 3{,}18201
\end{array}$$

Али нама је потребан логаритам броја 15206, чију смо карактеристику одредили и за чију мантису знамо да је једнака мантиси логаритма броја 1520,6. Дакле најзад је

$$\log 15206 = 4{,}18201.$$

2) Израчунати логаритам броја 43,5178.

Овај број има два цела места и зато је његова карактеристика 1. За одређивање мантисе послужићемо се бројем 4351,78 који се налази између бројева 4351 и 4352. Сад ћемо даље рачунати као и код првог примера:

$$\begin{array}{lrl}
\log 4352 \ldots\ldots & 3{,}63869 & \\
-\log 4351 \ldots\ldots & -\ 3{,}63859 & \\
\hline
 & 0{,}00010 & \ldots\ldots 10 \cdot 0{,}78 = 7{,}8 = 8 \text{ (пр.)} \\
 & 3{,}63859 & \\
 & +\ 8 & \\
\hline
\log 4351{,}78 \ldots\ldots & 3{,}63867 & \\
\log 43{,}5178 \ldots\ldots & 1{,}63867. &
\end{array}$$

3) Израчунати логаритам броја 0,038925.

Овде је карактеристика — 2, а за израчунавање мантисе послужиће нам број 3892,5, који се добија из датог броја померањем десетне запете за пет места удесно. Дакле рачунаћемо овако:

$$\begin{array}{lrl}
\log 3893 \ldots\ldots & 3{,}59028 & \\
-\log 3892 \ldots\ldots & -\ 3{,}59017 & \\
\hline
 & 0{,}00011 & \ldots\ldots 11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5 = 6 \text{ (пр.)} \\
 & 3{,}59017 & \\
 & +\ 6 & \\
\hline
\log 3892{,}5 \ldots\ldots & 3{,}59023 & \\
\log 0{,}038925 \ldots\ldots & \bar{2}{,}59023. &
\end{array}$$

Одређивање нумеруса

Ако је дат логаритам неког непознатог броја, онда се може помоћу логаритамских таблица одредити и сам број, који се у овом случају обично назива **нумерус.** Ако треба одредити број чији је логаритам на пр. 2,55724, онда се то назначава овако:

$$N\overline{2{,}55724},$$

а чита се: нумерус логаритма 2,55724.

Јасно је да поступак при одређивању нумеруса мора бити обрнут поступку при одређивању логаритма. Могу се разликовати два случаја:

1) Мантиса датог логаритма налази се у таблицама.

2) Мантиса датог логаритма не налази се у таблицама.

Најпре ћемо се задржати на случају када се мантиса налази у таблицама. У томе случају прве три цифре траженог нумеруса прочитаћемо у ступцу испод N, у истом реду у коме се налазе и последње три цифре дате мантисе, а последњу цифру наћи ћемо при врху таблица изнад ступца у коме се налазе последње три цифре дате мантисе. Овако добивени број биће нумерус датог логаритма само у том случају, ако је карактеристика логаритма 3. Ако је карактеристика неки други број онда се код добивеног броја мора одредити број целих места према карактеристици.

Примери:

1) Одредити нумерус логаритма 3,28578.

У таблицама на стр. 4 налазимо прве две цифре мантисе (28), а мало ниже и последње три цифре (578). У истом реду у коме су последње три цифре мантисе читамо прве три цифре нумеруса (193), а изнад ступца у коме су последње три цифре мантисе налази се последња цифра траженог нумеруса (1). Према томе је

$$N\overline{3{,}28578} = 1931.$$

2) Одредити нумерус логаритма 0,07372.

Мантиса се налази на стр. 2. Њој одговара нумерус 1185 Али како је карактеристика датог логаритма 0, то у нумерусу треба одвојити само једно цело место. Дакле биће

$$N\overline{0{,}07372} = 1{,}185.$$

3) Одредити нумерус логаритма 5,54741.

Мантиси, која се налази на стр. 8, одговара нумерус 3527. Али карактеристика 5 показује нам да нумерус мора имати

шест целих места. Зато ћемо нумерусу дописати две нуле. Према томе биће

$$N\overline{5{,}54741} = 352700.$$

4) Одредити нумерус логаритма $\bar{2}$,74640.

Мантиси, која се налази на стр. 13, одговара нумерус 5577. Али карактеристика нам показује да нумерусу треба с леве стране дописати две нуле, па затим иза прве нуле ставити десетну запету. Према томе је

$$N\overline{\bar{2}{,}74640} = 0{,}05577.$$

Ако се мантиса датог логаритма не налази у таблицама онда се нумерус тога логаритма не може наћи у таблицама. Разлика између овог траженог нумеруса и најближег мањег нумеруса који се налази у таблицама назива се **поправка нумеруса.** Како се поступа при израчунавању те поправке показаћемо на примерима.

Примери:

1) Одредити нумерус логаритма 3,58118.

Мантиса овог логаритма не налази се у таблицама, али зато се у таблицама може наћи једна најближа мања и једна најближа већа мантиса. Те су две мантисе 58115 и 58127 (стр. 9, други ред). Њима одговарају нумеруси 3812 и 3813. Јасно је да се тражени нумерус налази између та два броја, и да ћемо га добити ако мањем броју (3812) додамо поправку нумеруса, коју треба претходно да израчунамо. Пошто смо раније утврдили да су прираштаји логаритама сразмерни прираштајима бројева, сад ћемо лако израчунати поправку помоћу правила тројног. Пре свега израчунавамо разлику између дате и најближе мање, па затим између најближе веће и најближе мање мантисе:

$$58118 - 58115 = 3, \qquad 58127 - 58115 = 12.$$

Ова последња разлика, која се назива **таблична разлика,** показује нам за колико се повећа логаритам (у стохиљадитим) док се нумерус повећа за 1.

Сад ћемо даље рачунати овако:

Док логаритам порасте за 12 стохиљадитих нумерус порасте за 1.

Док логаритам порасте за 1 стохиљадити нумерус порасте за $\frac{1}{12}$.

Док логаритам порасте за 3 стохиљадита нумерус порасте за $\frac{3}{12} = 0,25$.

Најзад, ако израчунату поправку додамо најближем мањем нумерусу (3812), добићемо тражени нумерус:

$$N\,\overline{3,58118} = 3812,25.$$

Као што видимо поправка нумеруса добија се ако се разлика између дате и најближе мање мантисе подели табличном разликом.

2) Израчунати нумерус логаритма 4,28452.

Најпре ћемо израчунати нумерус логаритма 3,28452 поступајући као код претходног примера, па ћемо затим померањем десетне запете код тако добивеног резултата за једно место удесно добити тражени нумерус. Све потребне радње ради добијања нумеруса практично ћемо извести овако:

I	II	III	IV
28452	28466	9 : 23 = 0,39	1925
— 28443	— 28443	90	0,39
9	23	210	1925,39
		3	

V

$$N\,\overline{4,28452} = 19253,9.$$

Рачунање с логаритмима

Видели смо да се логаритам често пута састоји из два супротно означена дела (негативне карактеристике и позитивне мантисе). Зато се при рачунању с логаритмима јављају извесне особености с којима се морамо претходно упознати.

Сабирање логаритама. При сабирању логаритама најпре се сабирају мантисе. Ако се при томе добије једна или више целих јединица те се јединице сабирају с карактеристикама, а карактеристике, које могу бити позитивне или негативне, сабирају се као релативни бројеви. На пр.:

$$\begin{array}{ll} \log 52,55 \; \ldots\ldots & 1,72056 \\ \log 3,816 \; \ldots\ldots & 0,58161 \\ \log 0,017 \; \ldots\ldots & \bar{2},23045 \\ \hline & 0,53262. \end{array}$$

Одузимање логаритама. Одузимање логаритама увек се може претворити у сабирање. Како се при томе поступа показаћемо на ова два примера:

1) $\log 3825 - \log 41,58 = 3,58263 - 1,61888$
$= 3,58263 + 2 - 1,61888 - 2$
$= 3,58263 + \bar{2},38112$
$= 1,96375.$

Јасно је да је овде

$$-\log 41,58 = \bar{2},38112,$$

тј. да је логаритам $\bar{2},38112$ број који је супротан логаритму броја 41,58. Сваки такав логаритам који је супротан логаритму неког броја назива се **кологаритам** тога броја. За означавање кологаритма употребљава се знак colog, тако да се пише

$$-\log a = \operatorname{colog} a.$$

У нашем примеру било би

$$-\log 41,58 = \operatorname{colog} 41,58 = -1,61888 = \bar{2},38112.$$

2) $\log 44,12 - \log 0,52 = 1,64464 - \bar{1},71600$
$= 1,64464 - (0,71600 - 1)$
$= 1,64464 + 1 - 0,71600$
$= 1,64464 + 0,28400$
$= 1,92864.$

Овде је

$$-\log 0{,}52 = \operatorname{colog} 0{,}52 = -\overline{1}{,}71600 = 0{,}28400.$$

Ако сад упоредимо логаритме

I . . . . 1,61888 II . . . . $\overline{1}$,71600

са њиховим кологаритмима

I . . . . $\overline{2}$,38112 II 0,28400

долазимо до ових закључака:

1) **Карактеристика кологаритма добија се ако се карактеристици логаритма промени знак, па се затим добивени број смањи за 1.**

2) **Мантиса кологаритма добија се ако се сваки децимал логаритма замени цифром, која се с тим децималом допуњује до 9, изузев последњи децимал, који се мора заменити својом допуном до 10. За случај да су код логаритма један или више крајњих децимала нуле те се нуле задржавају и у кологаритму. Тада се децимал који се налази непосредно испред ових крајњих нула замењује својом допуном до 10, а остали децимали својим допунама до 9.**

Множење логаритама. При множењу логаритама јављају се извесне особености у случају кад је карактеристика негативна или кад је множитељ негативан број. Како се поступа у тим случајевима показаћемо на ова два примера:

1) $3 \log 0{,}079 = \overline{2}{,}89763 \cdot 3$

$$= (0{,}89763 - 2) \cdot 3$$
$$= 2{,}69289 - 6$$
$$= \overline{4}{,}69289.$$

Дакле ако се при множењу појаве две карактеристике оне се своде у једну.

2) $-2 \log 24{,}83 = 2(-\log 24{,}83)$

$$= 2 \operatorname{colog} 24{,}83$$
$$= \overline{2}{,}60502 \cdot 2$$
$$= (0{,}60502 - 2) \cdot 2$$
$$= 1{,}21004 - 4$$
$$= \overline{3}{,}21004.$$

Овде смо уместо логаритма узели кологаритам да бисмо избегли множење негативним бројем, у коме би се случају у резултату појавила негативна мантиса.

Дељење логаритама. Ако логаритам с негативном карактеристиком поделимо целим бројем који се у карактеристици не садржи без остатка, онда при обичном рачунању морамо добити у резултату логаритам са две мантисе од којих је једна негативна. Како се поступа у овом случају да би се избегла негативна мантиса показаћемо на овом примеру:

$$\frac{\log 0{,}00307}{2} = \frac{\overline{3}{,}48714}{2}$$
$$= (0{,}48714 - 3) : 2$$
$$= (1{,}48714 - 4) : 2$$
$$= 0{,}74357 - 2$$
$$= \overline{2}{,}74357.$$

Овде смо дељеник написали у виду разлике, па смо затим и умањеник и умалитељ повећали за 1, тј. за онолико колико је потребно да би се делитељ садржао у умалитељу без остатка.

Примена логаритама

Срачунавање бројне вредности једног израза, који садржи вишецифрене бројеве са назначеним рачунским радњама вишег ступња, често пута претставља врло дуг и заметан посао. У сваком таквом случају рачуни се могу знатно упростити помоћу логаритмовања. То упрошћавање постиже се на тај начин, што се применом логаритама множење своди на сабирање, дељење на одузимање, степеновање на множење и кореновање на дељење. Ради израчунавања бројне вредности неког датог израза тај се израз најпре логаритмује, па се затим одређује нумерус израчунатог логаритма. Јасно је да тада добивени нумерус претставља бројну вредност датог израза.

Примери:

1) Израчунати бројну вредност израза $\dfrac{27{,}316 \cdot 0{,}5702}{6{,}925 \cdot 0{,}62248}$.

Ако тражену бројну вредност означимо са **x** биће:

$$\log x = \log 27{,}316 + \log 0{,}5702 - \log 6{,}925 - \log 0{,}62248$$
$$= \log 27{,}316 + \log 0{,}5702 + \operatorname{colog} 6{,}925 + \operatorname{colog} 0{,}62248;$$

$$\begin{array}{lr} \log\ 27{,}316 \ \ldots\ldots & 1{,}43642 \\ \log\ 0{,}5702 \ \ldots\ldots & \overline{1},75603 \\ \operatorname{colog}\ 6{,}925 \ \ldots\ldots & \overline{1},15958 \\ \operatorname{colog}\ 0{,}62248 \ \ldots\ldots & 0{,}20587 \\ \hline & 0{,}55790. \end{array}$$

$$x = \mathbf{N}\,\overline{0{,}55790} = 3{,}61325.$$

2) Израчунати бројну вредност израза $\sqrt[5]{\dfrac{5{,}287 \cdot 2{,}18^4}{0{,}3051}}$.

$$\log x = \frac{1}{5} \log 5{,}287 + \frac{4}{5} \log 2.18 + \operatorname{colog} 0{,}3051;$$

$$\begin{array}{lr} \frac{1}{5} \log 5{,}287 \ \ldots\ldots & 0{,}14464 \\ \frac{4}{5} \log 2{,}18 \ \ldots\ldots & 0{,}27077 \\ \operatorname{colog}\ 0{,}3051 \ \ldots & 0{,}51556 \\ \hline & 0{,}93097. \end{array}$$

$$x = \mathbf{N}\,\overline{0{,}93097} = 8{,}5304.$$

3) Израчунати бројну вредност израза $1{,}02^{14} - 1$.

Овај се израз не може логаритмовати јер је бином. Зато ћемо одвојено логаритмовати први члан тога бинома ($1{,}02^{14}$). Затим ћемо израчунати нумерус и од њега одузети 1. Дакле рачунаћемо овако:

$$\log 1{,}02^{14} = 14 \log 1{,}02$$
$$= 14 \cdot 0{,}00860$$
$$= 0{,}12040;$$
$$\mathbf{N}\,\overline{0{,}12040} = 1{,}31964.$$
$$1{,}02^{14} - 1 = 1{,}31964 - 1$$
$$= 0{,}31964.$$

Задаци за вежбање

Одредити логаритме бројева:

1) 4283.	5) 0,3108.	9) 40218.	13) 0,29262.
2) 392,5.	6) 0,007.	10) 351740.	14) 0,010096.
3) 773600.	7) 5239,4.	11) 1200600.	15) 0,000033.
4) 2,52.	8) 663,27.	12) 9,52744.	16) 0,00510248.

Одредити нумерусе логаритама:

17) 3,91603.	20) 0,60552.	23) 3,52599.	26) 5,65990.
18) 2,67550.	21) $\overline{1},71029$.	24) 1,11750.	27) $\overline{1},87270$.
19) 4,28012.	22) 3,89081.	25) $\overline{2},15593$.	28) $\overline{2},34017$.

Одредити кологаритме логаритама:

29) 3,52747.	30) $\overline{1},76588$.	31) 2,52900.	32) $\overline{3},94000$.

Одредити кологаритме бројева:

33) 6604.	34) 25,76.	35) 4,2954.	36) 0,42658.

Израчунати вредности бројних израза:

37) $14{,}27 \cdot 9{,}36 \cdot 70{,}58$.

38) $3{,}8029 \cdot 7{,}46483$.

39) $\dfrac{5284 \cdot 35.262}{174{,}029}$.

40) $\dfrac{7 \cdot 84{,}27 \quad 3{,}8252}{0{,}06667 \cdot 105{,}208}$.

41) $9{,}285^{2}$

42) $0{,}44718^{6}$

43) $\sqrt[7]{23{,}592}$

44) $\sqrt[12]{0{,}0074}$.

45) $8 \cdot 1{,}74^3 \sqrt[4]{0{,}2814}$.

46) $\dfrac{10562 \sqrt[3]{12{,}066}}{5{,}9092^2}$.

47) $\sqrt{\dfrac{2{,}57 \cdot \sqrt{0{,}4275}}{0{,}064 \cdot \sqrt{92{,}76}}}$.

48) $\dfrac{14{,}73^3}{192{,}51} \sqrt{\dfrac{0{,}29}{2{,}163^3}} \sqrt{\dfrac{1{,}16}{0{,}094}}$.

49) $2,0694^6 - 47,58$.

50) $\dfrac{3720 \cdot (1,04^{12}-1)}{0,04}$.

51) $\sqrt[7]{7-\sqrt[7]{7}}$.

52) $\sqrt[4]{\dfrac{1,06^{10}-1,5274}{0,285}}$.

53) Израчунати површину троугла чије су стране: $a = 2,742$ m, $b = 3,964$ m, $c = 4,086$ m (Херонов образац).

54) Израчунати површину коцке која је по запремини једнака правоуглом паралелопипеду чије су ивице: $a = 0,912$ m, $b = 2,756$ m, $c = 4,308$ m.

55) Израчунати запремину равностране купе чија је површина $p = 17,4253$ dm².

56) Решити једначину:

$$1,2852^4 x^2 - 2,396\,x - 5,16\sqrt{12,7049} = 0.$$

Графичко претстављање експоненцијалне и логаритамске функције са основом 10

Да бисмо функције $y = 10^x$ и $y = \log x_{(10)}$ претставили графички даваћемо независно промењивој **x** подесне бројне вредности и израчунаваћемо одговарајуће вредности функције **y**. Те вредности имамо у овим двема табелама:

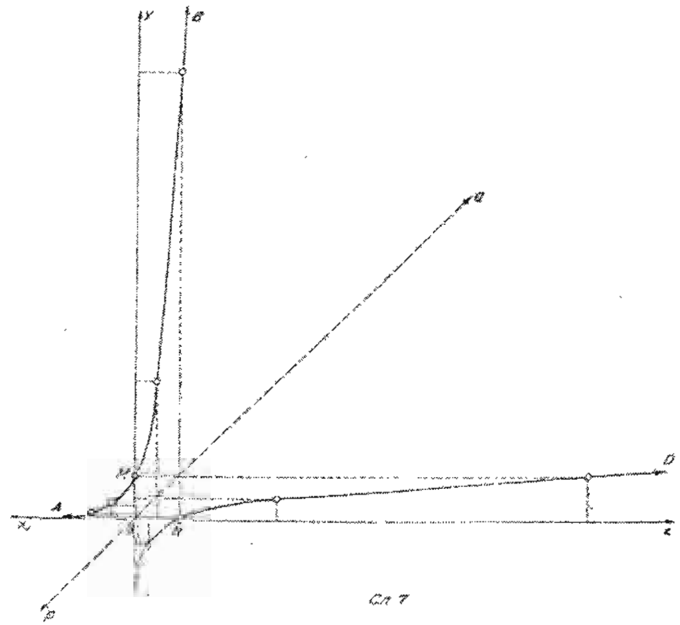
$y \quad 10^x$	x	. . . . .	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	. . . . .
	y	. . . . .	$\frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10	. . . . .

$y = \log x_{(10)}$	x	. . . . .	$\frac{1}{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	1	$\sqrt{10}$	10	. . . . .
	y	. . . . .	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	. . . . .

Ако сад узмемо вредности независно промењиве **x** за апсцисе а одговарајуће вредности функције **y** за ординате тачака, добићемо у координатном систему низове тачака које се

налазе на кривим линијама AB и CD (сл. 7). Јасно је да крива линија AB одговара експоненцијалној функцији $y = 10^x$ а крива линија CD логаритамској функцији $y = \log x_{(10)}$. Као што видимо на слици ове две криве линије налазе се: AB у првом и другом а CD у првом и четвртом квадранту.

Крива линија AB сече ординатну осу у тачки M чија је раздаљина од координатног почетка једнака јединици. Почев од тачке M та се линија у првом квадранту удаљује како од апсцисне тако и од ординатне осе, само од апсцисне осе све више а од ординатне осе све мање. Напротив у другом квадранту та се линија поступно приближује апсцисној оси док се од ординатне осе нагло удаљава. Ова се линија дакле стално приближује негативном делу апсцисне осе, али саму осу ни на којој даљини не пресеца. По томе се види да експоненцијална функција $y = 10^x$ никад не може бити негативна, док изложилац **x** може имати сваку позитивну или негативну вредност.



Сл. 7

Крива линија CD сече апсцисну осу у тачки N чија је раздаљина од координатног почетка једнака јединици. Почев од те тачке та се линија у првом квадранту удаљује од обе координатне осе, само од апсцисне осе све мање а од ординатне све више. У четвртом квадранту та се линија поступно приближује негативном делу ординатне осе, али саму осу ни на којој даљини не пресеца. По томе се види да логаритамска функција $y = \log x_{(10)}$ може имати сваку позитивну или негативну вредност, али да не постоји никаква вредност логаритамске функције, која би одговарала некој негативној вредности логаритманда x.

Као што видимо на кривим линијама AB и CD могу се проучити све особине експоненцијалне и логаритамске функције.

Ако кроз координатни почетак повучемо праву PQ ($x = y$), која полови први и трећи квадрант, видимо да су криве линије AB и CD симетрично положене према тој правој.

Додатак за реалке

Хомогене једначине другог степена

Ако су код неке једначине са две или више непознатих сви чланови истог степена, онда се за такву једначину каже да је **хомогена.** Такве би једначине биле на пр.:

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0, \qquad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4y^3 = 0 \text{ итд.}$$

Ми ћемо показати како се поступа при решавању једног система другог степена, са две непознате, ако је једна од једначина система хомогена, а друга ма каква једначина другог степена. Најопштији облик у коме се може јавити једна хомогена једначина другог степена са две непознате био би

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Ако леву страну ове једначине поделимо са y^2 она ће се јавити у облику

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\frac{x}{y} + c = 0.$$

Сад ћемо овде извршити замену $\frac{x}{y} = z$ и тако ћемо добити ову једначину другог степена с једном непознатом:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Корени су ове једначине

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ако сад наместо z поново ставимо $\frac{x}{y}$ добићемо ове две једначине првог степена:

$$\frac{x}{y} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Као што видимо дата хомогена једначина другог степена разлаже се у две једначине првог степена. По томе се види да се лако може решити сваки систем другог степена ако је једна од једначина система хомогена.

Пример. Решити систем:

$$x^2 + y^2 + 3x - 3y = 2, \qquad 2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0.$$

Ако леву страну друге једначине, која је хомогена, поделимо са y^2, па затим извршимо замену $\frac{x}{y} = z$, добићемо једначину

$$2z^2 + 7z - 4 = 0.$$

Корени су ове једначине

$$z_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad z_2 = -4.$$

Према томе је:

1) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $\quad y = 2x$; $\qquad$ 2) $\frac{x}{y} = -4$, $\quad x = -4y$.

Сад даље решавамо ова два система:

1) $x^2 + y^2 + 3x - 3y = 2$

$y = 2x.$

$x^2 + (2x)^2 + 3x - 3(2x) = 2,$

$x^2 + 4x^2 + 3x - 6x = 2,$

$5x^2 - 3x - 2 = 0;$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = -\frac{2}{5};$

$y_1 = 2x_1 = 2, \qquad y_2 = 2x_2 = -\frac{4}{5}.$

2) $x^2 + y^2 + 3x - 3y = 2$

$x = -4y.$

$(-4y)^2 + y^2 + 3(-4y) - 3y = 2,$

$16y^2 + y^2 - 12y - 3y = 2,$

$17y^2 - 15y - 2 = 0;$

$y_3 = 1, \qquad y_4 = -\frac{2}{17};$

$x_3 = -4y_3 = -4, \qquad x_4 = -4y_4 = \frac{8}{17}.$

Дакле корени су овог система:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{5}, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = \frac{8}{17};$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = -\frac{2}{17}.$$

Задаци за вежбање

Решити системе:

1) $x^2 + 3xy = 0$
$2x^2 + 5xy - y^2 = 8.$

2) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$
$x^2 - 3xy + y^2 = 4.$

3) $17x^2 - 22xy - 24y^2 = 0$
$3x^2 - 2xy = 8$

4) $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$
$x^2 + 2y - 3 = 0.$

5) $3x(x - y) - 2y(x + y) = 0$
$3x + 2y^2 - 3 = 0.$

6) $x^2 + y^2 + x + y = 3$
$3x^2 - 2xy - y^2 = 0.$

7) $x(x - 2) - y(y + 2) = 16$
$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0.$

8) $\frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = 1$
$x^2 + 2y^2 - 4(x + 2y) = 6.$

9) $x^2 - 2axy - 3a^2y^2 = 0$
$y^2 + 2x = 7a^2.$

10) $(x - 2b)y = a$
$x^2 - 2axy + b(2a - b)y^2 = 0.$

Графичко решавање једначина другог степена

Може се узети да је свака једначина другог степена са једном непознатом добивена као резултат елиминовања једне непознате при решавању неког система другог степена са две непознате, који садржи једну једначину првог степена. Тако на пр. из система

$$y = x^2, \qquad y = 2x - 8$$

изводимо елиминовањем непознате **у** ову једначину другог степена са једном непознатом:

$$x^2 = 2x - 8.$$

Јасно је да ову последњу једначину морају задовољити обе вредности непознате x, које се добијају решавањем прве две једначине. Међутим прве две једначине могу се претставити графички. Ми знамо да ће прва једначина графички бити претстављена једном параболом а друга једном правом линијом. Координате тачака у којима се секу ове две линије мораће да задовоље обе једначине датог система, па ће према томе апсцисе пресечних тачака морати да задовоље и последњу изведену једначину.

Као што видимо, да бисмо једначину $x^2 = 2x - 8$ решили графички, морамо пре свега да конструишемо параболу, која је графички претставник једначине $y = x^2$ и праву линију која је графички претставник једначине $y = 2x - 8$. Тада ће апсцисе тачака у којима се секу те две линије бити корени једначине $x^2 = 2x - 8$.

Примери:

1) Решити графички једначину $x^2 - x - 2 = 0$.

Пре свега дату једначину доводимо на облик

$$x^2 = x + 2.$$

Сад треба да конструишемо:

1) параболу која ће нам графички претстављати једначину

$$y = x^2$$

2) праву линију која ће претстављати једначину

$$y = x + 2.$$

Да бисмо конструисали параболу даћемо независно променљивој **x** неколико вредности и израчунаћемо одговарајуће вредности функције **y**. Те вредности имамо у овој табели:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

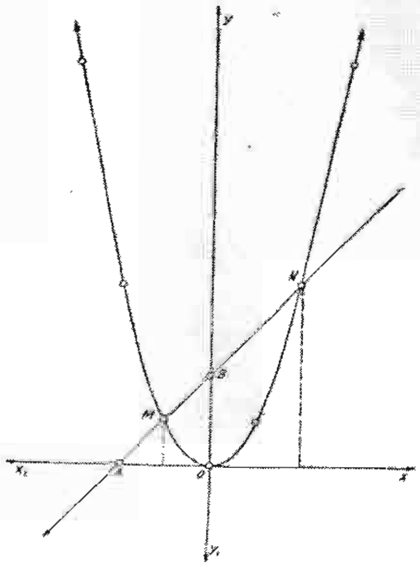
Помоћу ове табеле лако конструишемо низ тачака параболиних, па затим везивањем тих тачака добијамо и саму параболу која се види на сл. 8.

Праву линију најлакше ћемо конструисати ако узмемо да је најпре $y = 0$ па затим $x = 0$. Тако налазимо да права сече апсцисну осу у тачки A чија је апсциса — 2, а ординатну осу у тачки B чија је ордината 2. Спајањем тачака A и B добијамо тражену праву која сече параболу у тачкама M и N. Апсцисе су тих тачака

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 2,$$

а то су у исто време и корени једначине

$$x^2 - x - 2 = 0.$$



Сл. 8

2) Решити графички једначину $4x^2 - 3x - 1 = 0$.

Ако други и трећи члан тринома ове квадратне једначине пребацимо на десну страну, па затим обе стране поделимо са 4, једначина ће се јавити у облику

$$x^2 = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}.$$

Са овом једначином поступићемо као и код првог примера с том разликом, што праву нећемо конструисати помоћу отсечака на координатним осама, јер у том случају не бисмо могли рачунати на довољну тачност конструкције, пошто би права била одређена двема блиским тачкама. Зато ћемо овде праву, која је одређена једначином

$$y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4},$$

конструисати помоћу две довољно удаљене тачке, које ћемо изабрати тако да им координате буду цели бројеви. Такве су на пр. тачке

$$A(-3, -2) \qquad B(1, 1).$$

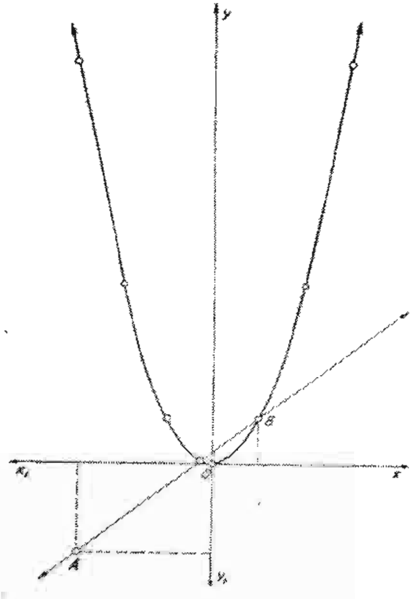
Права AB сече параболу у тачкама чије су апсцисе 1 и $-\frac{1}{3}$. Према томе корени су дате једначине

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Из ова два примера видимо да се при графичком решавању ма какве квадратне једначине можемо послужити увек истом параболом чија је једначина

$$y = x^2.$$

Зато се та парабола, пошто се једном конструише, може употребити код сваког задатка.



Сл. 7

Ако се деси да конструисана права додирује параболу, онда једначина има два једнака корена који су једнаки апсциси додирне тачке. Али у том случају не може се рачунати на довољну тачност конструкцијом одређеног корена, пошто се прави положај додирне тачке не може одредити с великом поузданошћу. Ако права не сече параболу онда то значи да су корени имагинарни или комплексни бројеви.

При графичком решавању квадратних једначина најбоље је послужити се милиметарском хартијом.

Задаци за вежбање

Ове једначине решити графички:

1) $x^2-2x-8=0$
2) $x^2+3x-10=0$
3) $x^2-4x+3=0$
4) $6x^2+x-2=0$
5) $x^2-6=0$
6) $x^2+1{,}5x-10=0$
7) $x^2-0{,}9x-3{,}6=0$
8) $0{,}6x^2-1{,}5x-0{,}9=0$

9) $2{,}5x^2-3x-4=0$
10) $x^2-2x\sqrt{2}+2=0$
11) $x^2\sqrt{2}-3x+\sqrt{2}=0$
12) $x^2-2x\sqrt{2}-2\sqrt{6}=0$.

Код последња три задатка при конструкцији праве могу се корени који се јављају у једначини праве одредити графички (Алгебра за V разред: стр. 112).

Однос између природних и декадних логаритама

Видели смо да се поред декадних употребљавају и природни логаритми код којих је за основу узет један ирационалан број који се кратко означава са **e**. Овај број добија се сабирањем бескрајног реда:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \ldots$$

У колико се више почетних чланова тога реда сабере, у толико ће се добити тачнија вредност броја **e**. Приближна вредност тога броја са пет децимала износи

$$2{,}71828\ldots$$

Природни логаритми обично се назначују са ln (или просто l), тако да се уместо $\log a_{(e)}$ пише

$$\ln a.$$

Између декадних и природних логаритама постоји један прост однос помоћу кога се могу претварати декадни логаритми у природне и природни у декадне. Да бисмо извели тај однос посматраћемо упоредо декадни и природни логаритам једног истог броја. Нека је на пр.:

1) $\log a = x$ 2) $\ln a = y$.

Тада ће бити:

1) $a = 10^x$,
$\ln a = x \ln 10$,
$\ln a = \log a \ln 10$.

2) $a = e^y$
$\log a = y \log e$,
$\log a = \ln a \log e$.

Ако се назначе логаритамске основе ови се односи могу написати овако:

1) $\log a_{(e)} = \log a_{(10)} \log 10_{(e)}$ 2) $\log a_{(10)} = \log a_{(e)} \log e_{(10)}$

Из ове две једнакости излази да је

$$\log 10_{(e)} \cdot \log e_{(10)} = 1,$$

одакле је опет даље:

$$\log 10_{(e)} = \frac{1}{\log e_{(10)}}, \quad \log e_{(10)} = \frac{1}{\log 10_{(e)}}.$$

Водећи рачуна о овим односима последње две једнакости под бр. 1) и 2) могу се написати овако:

1) $\log a_{(e)} = \log a_{(10)} \cdot \frac{1}{\log e_{(10)}}$ 2) $\log a_{(10)} = \log a_{(e)} \frac{1}{\log 10_{(e)}}$.

На овај смо начин добили обрасце помоћу којих ћемо моћи лако да претварамо декадне логаритме у природне и природне у декаде. Изрази $\frac{1}{\log e_{(10)}}$ и $\frac{1}{\log 10_{(e)}}$ могу се лако одредити помоћу логаритамских таблица. Њихове су приближне вредности са пет децимала:

$$\frac{1}{\log e_{(10)}} = 2,30259, \qquad \frac{1}{\log 10_{(e)}} = 0,43429.$$

Први број назива се **модул за претварање декадних логаритама у природне** а други број **модул за претварање природних логаритама у декадне.**

Примери:

1) Израчунати ln 854,8.

Пре свега је

$$\log 854,8 = 2,93186.$$

Овај декадни логаритам броја 854,8 треба сад да помножимо модулом 2,30259. Резултат можемо добити на два начина: 1) скраћеним множењем, 2) логаритмовањем. Ми ћемо код овог примера ради проверавања резултата рачунати на оба начина:

1)

2,30259
6 81392
4 60518
2 07233
6907
230
184
14
6,75086

2) log 2,30259 0,36222

log 2,93186 0,46714

log 2,30259 · 2,93186 . . . 0,82936

ln 854,8 = $N\overline{0,82936}$ . . 6,75086.

Последњи децимал који је непоуздан употребићемо само за поправку. Дакле биће

$$\ln 854,8 = 6,7509.$$

2) Одредити број чији је природни логаритам $\bar{1},25107$.

Пре свега, да бисмо дати природни логаритам претворили у декадни, треба да га помножимо модулом 0,43429. Према томе, ако тражени број означимо са x, биће:

$$\begin{aligned} \log x &= 0,43429 \cdot \ln x \\ &= 0,43429 \cdot \bar{1},25107 \\ &= 0,43429 \cdot (0,25107 - 1) \\ &= 0,43429 \cdot 0,25107 - 0,43429. \end{aligned}$$

Сад ћемо даље рачунати овако:

0,25107
92434
1 00428
7532
1004
50
23
0,109037 = 0,10904

$0,10904 - 0,43429 = 1,10904 - 0,43429 - 1 = \bar{1},67475.$

$N\overline{\bar{1},67475} = 0,47288.$

Задаци за вежбање

Ове декадне логаритме претворити у природне:

1) 0,27418. 2) 2,06705. 3) $\bar{1}$,38772. 4) $\bar{2}$,90064.

Ове природне логаритме претворити у декадне:

5) 7,21966. 6) 0,51146. 7) $\bar{2}$,09244. 8) $\bar{3}$,57298.

Одредити природне логаритме бројева:

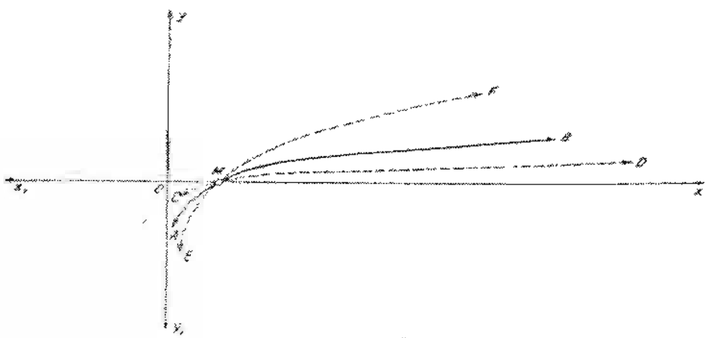
9) 2748. 11) 5,2172. 13) 0,962. 15) 0,77295.
10) 2,748. 12) 81,0598. 14) 0,01. 16) 0,0051.

Одредити бројеве чији су природни логаритми:

17) 8,03028. 19) 2,50204. 21) 0,03526. 23) $\bar{2}$,06681
18) 5,12777. 20) 1,07240. 22) $\bar{1}$,91147. 24) $\bar{1}$,52400.

Графичко претстављање функције $y = \log x_{(n)}$

Видели смо како се графички претставља функција $y = \log x_{(10)}$. На сл. 10 та је функција претстављена линијом AB. Али ми можемо узети да је логаритамска основа ма какав



Сл. 10

број. Узмимо на пр. да је у логаритамској функцији основа 10 замењена неким бројем n, за који претпостављамо да је већи од јединице. Тада ће се логаритамска функција јавити у облику

$$y = \log x_{(n)},$$

а разним посебним вредностима основе n одговараће разне криве линије. Све те линије пролазе кроз тачку M (1,0), јер ако се узме да је $x = 1$ онда мора бити $y = 0$ за ма коју вредност основе. Дајући независно промењивој x и друге вредности веће и мање од 1 можемо да конструишемо сваку од ових линија.

Од двеју кривих линија, које су на слици извучене тачкасто, линија CD одговара функцији код које је $n > 10$, а линија EF функцији код које је $n < 10$. Јасно је да се све ове криве линије налазе у првом и четвртом квадранту и у колико је код неке функције n веће, у толико је и линија која одговара тој функцији ближа координатним осама.

Експоненцијалне једначине

Свака једначина која је састављена из степена у чијим се изложиоцима јављају непознате количине назива се **експоненцијална (изложилачка) једначина.** Њих има неколико разних врста које се разликују по начину решавања.

I. Ако се експоненцијална једначина може довести на такав облик, да су обе њене стране степени једнаких основа, онда се таква једначина решава изједначавањем изложилаца.

Примери:

1) Решити једначину $a^{x-1} - a^{3x-4} = 0$.

Ако други члан пребацимо на десну страну једначина ће се јавити у облику

$$a^{x+1} = a^{3x-4}.$$

Сад су обе стране једначине степени са једнаким основама. Зато, да би ти степени били једнаки, морају бити једнаки њихови изложиоци. Према томе је

$$x + 1 = 3x - 4,$$
$$-2x = -5,$$
$$x = \frac{5}{2}.$$

2) Решити једначину $2^{x+3} = \sqrt[x]{16}$.

Радиканд 16 може се изразити као степен броја 2, а затим се и корен може написати у виду степена. Дакле биће:

$$2^{x+3} = \sqrt[x]{2^4},$$

$$2^{x+3} = 2^{\frac{4}{x}}$$

$$x + 3 = \frac{4}{x},$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -4.$$

3) Решити једначину $3^{x-1} + 2^{x-1} = 3^x - 2^x$.

Овде ћемо применити правило о степеновању разликом:

$$\frac{3^x}{3} + \frac{2^x}{2} = 3^x - 2^x,$$

$$2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 6 \cdot 3^x - 6 \cdot 2^x,$$

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x,$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$x = 2.$$

4) Решити систем једначина $a^x \cdot a^y = a^3$, $a^{2x+y} : a^{x-y} = a$.

Овде ћемо применити правила о множењу и дељењу степена једнаких основа:

$$a^{x+y} = a^3$$

$$a^{(2x+y)-(x-y)} = a^1$$

$$x + y = 3$$

$$2x + y - x + y = 1$$

$$x = 5, \qquad y = -2.$$

II. Неке од експоненцијалних једначина, које се не могу довести на такав облик да су им обе стране степени једнаких основа, могу се решити помоћу логаритмовања.

Примери:

1) Решити једначину $3 \cdot 2^x = 5^{x-1}$.

Ова се једначина не може довести на такав облик да јој лева и десна страна буду степени једнаких основа. Зато ћемо се помоћи логаритмовањем:

$$\log 3 + x \log 2 = (x - 1) \log 5,$$

$$\log 3 + x \log 2 = x \log 5 - \log 5,$$

$$x(\log 5 - \log 2) = \log 3 + \log 5,$$

$$x = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 5 - \log 2}.$$

2) Решити једначину $10^x = 2\sqrt[x]{10}$

Овде нас логаритмовање доводи до квадратне једначине:

$$x \log 10 = \log 2 + \frac{\log 10}{x},$$

$$x = \log 2 + \frac{1}{x},$$

$$x^2 = x \log 2 + 1,$$

$$x^2 - x \log 2 - 1 = 0,$$

$$x = \frac{\log 2 \pm \sqrt{(\log 2)^2 + 4}}{2}.$$

III. Има и таквих експоненцијалних једначина које се могу решити само увођењем нове непознате.

Примери:

1) Решити једначину $4^x + 2^x = \frac{3}{4}$.

Ову ћемо једначину пре свега довести на такав облик, да оба степена, који се јављају у њој имају исте основе:

$$(2^2)^x + 2^x = \frac{3}{4},$$

$$(2^x)^2 + 2^x = \frac{3}{4}$$

Сад ћемо заменом $2^x = y$ увести нову непознату и решити добивену квадратну једначину:

$$y^2 + y = \tfrac{3}{4},$$
$$4y^2 + 4y = 3,$$
$$y_1 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Најзад, водећи рачуна о извршеној замени, долазимо до ових простих експоненцијалних једначина:

$$2^x = \frac{1}{2}, \qquad 2^x = -\frac{3}{2}.$$

Другу једначину морамо одбацити пошто степен позитивног броја ни у ком случају не може бити негативан. Из прве једначине налазимо да је

$$x = -1.$$

2) Решити систем једначина: $2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = -6, \quad 9^x - 4^y = 17.$

Пре свега овај се систем може довести на облик:

$$2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = -6$$
$$(3^x)^2 - (2^y)^2 = 17.$$

Сад морамо увести нове непознате:

$$z = 3^x, \qquad u = 2^y.$$

На тај се начин дати систем експоненцијалних једначина претвара у овај систем другог степена:

$$2z - 3u = -6$$
$$z^2 - u^2 = 17.$$

Корени су овог система:

$$z_1 = 9, \quad u_1 = 8; \quad z_2 = -\frac{21}{5}, \quad u_2 = -\frac{4}{5}.$$

Негативне корене морамо одбацити, а позитивни корени дају нам ове две просте експоненцијалне једначине:

$$3^x = 9, \qquad 2^y = 8.$$

Из ових двеју једначина излази да је

$$x = 2, \qquad y = 3.$$

Задаци за вежбање

Решити једначине:

1) $4^{5x-1} = 4^{2x+5}$.

2) $a^{x+2} = a \cdot a^{2x-7}$.

3) $3^{2x+1} \cdot 3^{x-2} = 3^x \cdot 3^{3x}$.

4) $5^x = 15$.

5) $\sqrt[x]{8} = \sqrt{2}$.

6) $9 \cdot 3^x\, 3 = {}^{4x-1}$.

7) $\dfrac{2^{6-x}}{8} = 2^{3x+1}$.

8) $3{,}12^{x+1} = 6{,}24$.

9) $\sqrt[x+1]{2^x} = \sqrt[x]{3^{x-1}}$.

10) $5^{3x} = 5^{2+x}$.

11) $(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x = 1120$.

12) $3 \cdot 6^x + 6^x = \frac{1}{4}$.

13) $2^x = \sqrt{2^x + 4}$.

14) $\sqrt[x]{3} = 2\sqrt[x-2]{3}$.

15) $(a^{x-3})^2 = a^{x+3}$.

16) $1{,}7142^x = 100$.

17) $2^{x+2} \cdot 5^x = 8 \cdot 1{,}028^x$.

18) $3^{2x+3} + 3^{x+1} = 2$.

19) $2^{2x-2} - 2^{x+1} = 32$.

20) $b\sqrt{b^{x-1}} = 1$.

21) $2^{2(x-3)} = \frac{1}{4}$.

22) $8^{x+1} + 8^x = 36$.

23) $\sqrt{2^{x+3}} - \sqrt{2^x} = 8$.

24) $2\sqrt[x]{10^{x-1}} = 10^x$.

25) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = 0$.

26) $4^{x+2} - 2^{2x+2} = 120$.

27) $a^{2x} - 6a^{x+1} + 5a^2 = 0$.

28) $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$.

29) $3^{3+x} + 3^{3-x} = 730$.

30) $2^x + 2^{x-2} = 10$.

31) $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 5\frac{1}{4}$.

32) $2^{x+1} - 4^{x-1} = \frac{3}{4}$.

33) $3^x + 3 = \dfrac{8 \cdot 3^x}{3^x - 3}$.

34) $10 \cdot 2^{x+1} - 6 \cdot 5^{x+2} = 2^{x+4} - 5^{x+3}$.

35) $4^{2x+1} - 4^{2x} = 3^{4x+1} - 3^{4x}$.

36) $\sqrt[x]{12} - \sqrt[2x]{12} = 2$.

37) $\sqrt{4^{x+1}} + \sqrt{4^{3x-3}} = 1$.

38) $2\sqrt[x]{16} - 3\sqrt[x]{4} + 1 = 0.$

39) $\sqrt[x]{a^2} + 2\sqrt[x]{b^3} = 3\sqrt[x]{ab}.$

40) $(4^{x-2})^{x-3} =$
$= (x-2)^2 - x(x-4) - 3.$

Решити системе:

41) $r^x \cdot r^y = r^5$
$r^x : r^y = 1.$

42) $4^{3x-y} \cdot 4^{x+2y} = 16$
$9 \cdot 3^{x-y} = \frac{1}{3} \cdot 3^{x-2y}$

43) $9^{x-3} \cdot 3^{y+3} = \frac{1}{3}$
$9 \cdot 3^{y+1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{9}$

44) $2^{x-2y} \cdot 2^{3x+y} = 1$
$x^2 - 7y = 2.$

Логаритамске једначине

Свака једначина, која је састављена из логаритама у чијим се радикандима јављају непознате количине, назива се **логаритамска једначина.** Да бисмо решили једну логаритамску једначину треба пре свега да покушамо да је доведемо на такав облик, да сваку њену страну чини само по један логаритам. Кад се логаритамска једначина доведе на такав облик, онда се она решава изједначавањем логаритманада. Ако није могуће једначину непосредно довести на такав облик, онда се покушава да се она реши логаритмовањем или увођењем нове непознате.

Примери:

1) Решити једначину $2 \log (x+2) - \log (x - \frac{1}{2}) = 1.$

Најпре сводимо леву страну у један логаритам:

$$2 \log (x+2) - \log (x - \tfrac{1}{2}) = \log (x+2)^2 - \log (x - \tfrac{1}{2})$$
$$= \log \frac{(x+2)^2}{x - \frac{1}{2}}.$$

Затим и десну страну пишемо у виду логаритма:

$$1 = \log 10.$$

Сад се једначина јавља у облику

$$\log \frac{(x+2)^2}{x - \frac{1}{2}} = \log 10.$$

Ако изједначимо логаритманде добијамо једначину

$$\frac{(x+2)^2}{x - \frac{1}{2}} = 10$$

која се лако доводи на уређен облик

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Ова једначина има два једнака корена:

$$x_1 = x_2 = 3.$$

2) Решити једначину $x^{\log x} = 100.$

Ова се једначина може решити логаритмовањем:

$$\log x^{\log x} = \log 100,$$
$$\log x \cdot \log x = 2,$$
$$(\log x)^2 = 2,$$
$$\log x = \pm \sqrt{2},$$
$$\log x_1 = 1{,}41421, \qquad \log x_2 = \bar{2}{,}58579.$$
$$x_1 = \mathbf{N}\overline{1{,}41421} = 25{,}9544\ldots, \qquad x_2 = \mathbf{N}\overline{\bar{2}{,}58579} = 0{,}03853.$$

3) Решити једначину $2 \log x - \frac{1}{1 - \log x} = 5.$

Ову једначину решавамо увођењем нове непознате $y = \log x$.

$$2y - \frac{1}{1-y} = 5,$$
$$2y - 2y^2 - 1 = 5 - 5y,$$
$$2y^2 - 7y + 6 = 0.$$
$$y_1 = 2, \qquad y_2 = \frac{3}{2}$$

Сад је даље:

I. $\log x = 2, \qquad x = 100;$

II. $\log x = \frac{2}{3}, \qquad 2 \log x = 3, \qquad \log x^2 = \log 1000,$

$$x^2 = 1000, \qquad x = \pm \sqrt{1000}.$$

Задаци за вежбање

Решити једначине:

1) $\log(x+2)+\log 2=2.$

2) $\log(x-3)-\log(2x-5)+\log 3=0.$

3) $\log x-\log(x-1)=\log 2x-2\log 2.$

4) $\log x+\log(4x+3)=2\log(3-2x).$

5) $\log x+\log 4x=-2.$

6) $5\log x^2-3\log x^4=0{,}60206.$

7) $(\log x)^2-2\log x=15.$

8) $5\log x+\dfrac{4}{\log x}=12.$

9) $2\log(x-7)-\log(3x+19)=1.$

10) $2\log(x-1)-\log(3x-23)=1.$

11) $\log(x-2)+\log x=0.$

12) $\log(2^x+2)-x\log 2=\log 2.$

13) $\log(2^x+2)+x\log 2=\log 2.$

14) $\log\sqrt{x+7}-\log\sqrt{x+5}=\log 2.$

15) $\log\sqrt{x-2}+\log\sqrt{x+5}=\log 12.$

16) $x^{\log x}=10x.$

17) $x^{1+\log x}=100x^2.$

18) $(1+\log x)(2+\log x)=6.$

19) $\dfrac{2}{\log x}+\dfrac{1}{1+\log x}=2.$

20) $2^{\log x}=x^{1+\log x}.$

21) $\log\sqrt{x}-\dfrac{5}{\log\sqrt{x}}=4.$

22) $\dfrac{1-\log(x-1)}{1+\log(x-1)}=\log(x-1).$

23) $\dfrac{\log x}{\log x-1}-\dfrac{\log x+1}{\log x}=\dfrac{1}{12}.$

24) $x^{n+\log x}=2x^{n+1}.$

25) $\ln x+\log x=1.$

26) $\ln x+\log x=\ln 2-\log 2.$

Решити системе:

27) $3\log x-7\log y=27$
$6\log x+\log y=9.$

28) $\log x^2-\log y^2=\log 4$
$\log x+\log y=\log 2\sqrt{2}.$

29) $\log(x+4)-\log y=1-4\log 2$
$\log\sqrt{x}+\log\sqrt{y}=\log 3+4\log 2.$

30) $\log x+\log y=3$
$\log(x+5)-\log(y+5)=1.$

ПРЕГЛЕД САДРЖИНЕ

Ирационални, имагинарни и комплексни бројеви

Скраћено рачунање с непотпуним бројевима

Једначине и проблеми другог степена

Логаритмовање

Додатак за реалке