DUŠAN D. ADAMOVIĆ

S P O R O P R O M E N L J I V E F U N K C I J E

U T E O R I J I T R I G O N O M E T R I J S K I H R E D O V A

S A D R Ž A J

Strana

I D E O

SPORO PROMENJIVE FUNKCIJE I NJIHOVE OSOBINE

U V O D

U ovom radu na prvom mestu izlažu se autorove generalizacije grupe stavova A. Zygmund-a, B. Sz. - Nagy-a i R.P. Boas-a o vezi izmedju integrabilnosti i konvergencije kod sinusnih i kosinusnih trigonometrijskih redova, kao i izvesna njegova zapažanja u vezi sa asimptotskim ponašanjem sinusnih i kosinusnih trigonometrijskih redova. Ove generalizacije dobijene su pomoću t.zv. sporo promenjivih funkcija u smislu Karamate, tj. za $x \geqslant o$ pozitivnih funkcija sa osobinom da je za svako $\lambda > o$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Neke od tih generalizacija i dopuna ranijih rezultata izvršene su i u drugim pravcima, a ne samo uvodjenjem sporo promenjivih funkcija.

Drugi cilj autora je da u jednom relativno potpunom obliku izloži osnovne činjenice o sporo promenjivim funkcijama i o njihovim primenama u teoriji trigonometrijskih redova. Izvesna opsežnost ovog uvodnog dela rada (I deo) posledica je autorovog nastojanja da dokaze svih fundamentalnih stavova izloži sa punom preciznošću i svim potrebnim objašnjenjima. I ovaj deo protkan je izvesnim originalnim autorovim rezultatima, kao što je na primer teorema VI, i izvesnim doprinosima pojednostavljenju i sistematizaciji izvodjenja.

Da bi se originalni rezultati razlikovali od ostalih, svi su oni formulisani u obliku teorema ili lema jedinstveno numerisanih kroz ceo rad rimskim brojevima.

Na kraju je naveden spisak literature, sa svim publikacijama na koje se rad poziva.

1. DEFINICIJA SPORO PROMENJIVE FUNKCIJE

Nadovezujući se na ranija razmatranja i rezultate E.Landau-a [26], G. Polya-a [29,30] i R.Schmidt-a [31], J. Karamata je 1930. godine [24,25] dao sledeću definiciju pojma sporo promenjive funkcije:

Definicija 1. Realna funkcija[1] $L(x)$ naziva se sporo promenjivom, ako je pozitivna za $x \geqslant 0$ i ako

$$(1)\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$$

za svako $\lambda > 0$.

Kaže se i da je funkcija $L(x)$ sporo promenljiva u tački $x = +\infty$.

Jasno je kako se može analogno definisati pojam sporo promenjive funkcije u nekoj drugoj tački iz $[0, +\infty]$.

Navedimo nekoliko jednostavnih primera sporo promenjivih funkcija:

$L(x) = \log(x+2)$, $(x \geqslant 0)$;

$L(x) = [\log(x+2)]^{\alpha}$ $(x \geqslant 0;\ \alpha$ realno$)$;

$L(x) = (\log_k x)^{\alpha}$ (x dovoljno veliko; α realno; $\log_k x$ je k-ta iteracija logaritma);

$L(x) = \log(x+2) + \sin x$ $(x \geqslant 0)$;

$L(x)$ za $x \geqslant 0$ pozitivna funkcija koja teži pozitivnoj konačnoj granici kod $x \to +\infty$;

$$L(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1 + |\log t|} \qquad (x \geqslant 0);$$

$$L(x) = \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)\log(x+2) + \cos[x] \qquad (x > 0).$$

---

[1] Ovde realnom funkcijom nazivamo funkciju koja je definisana na skupu R svih realnih brojeva ili na njegovom delu i uzima vrednosti u R (dakle, samo konačne). Kako su sve funkcije o kojima je u ovom radu reč realne u ovom smislu, u buduće će se za svaku funkciju koja se pominje to implicitno podrazumevati.

Iz ovih primera vidi se da sporo promenjiva funkcija može ali ne mora biti monotona za dovoljno veliko $\underline{x}$ i da može težiti pozitivnoj beskonačnosti, nuli ili pozitivnoj konačnoj granici kad $x \to +\infty$. Kasnije ćemo pokazati da ona može i oscilirati, čak sa beskonačnim intervalom oscilacije.

U onome što sledi L(x) svuda označava sporo promenjivu funkciju.

2. UNIFORMNOST GRANIČNOG PROCESA U PRETHODNOJ DEFINICIJI

Za teoriju i primene sporo promenjivih funkcija od fundamentalnog značaja je sledeća teorema:

(0). <u>Neka je funkcija L(x) pozitivna za $x \geq 0$ i merljiva na $[0, +\infty]$. Ako jednakost (1) važi za svako $\lambda \in E$, gde je skup $E \subset (0, +\infty)$ pozitivne mere, tada (1) važi za svako $\lambda > 0$ i pri tome</u>

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1 \qquad (x \to +\infty)$$

<u>uniformno po λ u svakom intervalu $[a, b]$ sa $0 < a < b < +\infty$</u>.

Za specijalan slučaj kad je funkcija L(x) neprekidna i skup E interval teoremu je dokazao <u>J. Karamata</u> [24,25] , izvodeći je iz teoreme o reprezentaciji sporo promenjive funkcije (v. § 3). Kasnije su <u>T.van Aarden-Ehrenfest</u>, <u>N.G. de Bruijn</u> i <u>J. Korevar</u> u radu [1] dokazali teoremu direktno i za opšti slučaj merljive funkcije, ali zadržavajući drugu ograničavajuću pretpostavku (da je E interval). Direktan dokaz bez ovog ograničenja dali su <u>H.Delange</u> [18] i <u>W. Matuscewska</u> [27] .

Dokaz koji ovde izlažemo zasniva se na rasudjivanjima na str. 2-3 i 8-10 u [14].

Pre nego što predjemo na dokaz, napominjemo sledeće:

2.1. Teorema (0) ima ova dva ekvivalentna oblika:

(0_1) <u>Neka je funkcija l(x) definisana i merljiva na $[0, +\infty]$</u>

Ako

(2) $\qquad l(\lambda x) - l(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty)$

<u>za svako $\lambda \in E$, gde je skup $E \subset (0, +\infty)$ pozitivne mere, tada (2) važi za svako $\lambda > 0$ i to uniformno po λ u svakom intervalu $[a, b]$ sa $0 < a < b < +\infty$.</u>

(0_2). <u>Neka je funkcija $k(x)$ definisana i merljiva na $(-\infty, +\infty)$. Ako</u>

$$(3) \qquad k(y + \mu) - k(y) \to 0 \qquad (y \to +\infty)$$

<u>za svako $\mu \in E_1$, gde je skup $E_1 \subset (-\infty, +\infty)$ pozitivne mere, tada (3) važi za svako realno μ i to uniformno po μ u svakom intervalu $[a_1, b_1]$ sa $-\infty < a_1 < b_1 < +\infty$.</u>

Ekvivalencije iskaza (0) i (0_1) i iskaza (0_1) i (0_2) jednostavno se dokazuju stavljajući u prvom slučaju

$$l(x) = \log L(x) \qquad (x \geq 0),$$

a u drugom

$$k(y) = l(e^y) \qquad (y \text{ realno}),$$

i uočavajući, u drugom slučaju, da funkcija e^y direktno i inverzno preslikava skupove pozitivne mere na skupove pozitivne mere.

2.2. Teorema (0) ima sledeću posledicu:

<u>Na $[0, +\infty]$ merljiva sporo promenjiva funkcija $L(x)$ ograničena je, za dovoljno veliko $a > 0$, na svakom konačnom intervalu $[a, b]$ $(b > a)$. Ona je, dakle, u Lebesgue-ovom smislu integrabilna na svakom takvom intervalu.</u>

Zaista, prema (0) postoji $a_0 > 0$ takvo da je za svako $a \geq a_0$

$$\left| \frac{L(\lambda a)}{L(a)} - 1 \right| \leq 1 \qquad (1 \leq \lambda \leq 2),$$

tj.

$$0 \leq L(x) \leq 2\,L(a) \qquad (a \leq x \leq 2a).$$

Za $a \geq a_0$ je $L(x)$, dakle, ograničeno u intervalu $[a, 2a]$ i odatle u svakom intervalu $[2^{k-1}a, 2^k a]$ $(k=1,2,\ldots)$, tj. u svakom intervalu $[a, b]$ $(a_0 \leq a < b < +\infty)$.

U primenama obično se koriste samo merljive (i stoga, prema prethodnom rezultatu, na konačnim i od nule dovoljno udaljenim intervalima integrabilne) sporo promenjive funkcije. Sem toga, po pravilu je u poznatim primenama bitno jedino ponašanje sporo promenjive funkcije za dovoljno velike vrednosti nezavisno promenjive. To u potpunosti važi za drugi deo ovog rada, kao i za večinu rezultata u prvom delu posle paragrafa 4. Ovim je obrazložena sledeća

Konvencija. Počev od paragrafa 5. prvog dela svuda ćemo pod sporo promenjivom funkcijom razumeti sporo promenjivu funkciju u smislu definicije 1 koja je uz to merljiva na $[0, +\infty)$ i ograničena na svakom intervalu $[0, a]$ $(0 < a < +\infty)$, sem u nekoliko slučajeva gde će biti izričito napomenuto da se sporo promenjiva funkcija uzima u smislu definicije 1.

2.3. Dokaz teoreme (O). Prvo dokazujemo jednu modifikaciju poznatog rezultata H. Steinhans-a [32] :

2.3.1. Za svaki skup $E \subset (0, +\infty)$ pozitivne mere postoji $\lambda_0 > 1$ takvo da je za svako $\lambda \in [1, \lambda_0]$

$$E \cap \lambda E \neq \emptyset$$

($\emptyset$ prazan skup; $\lambda E \overset{def}{=} \{\lambda x : x \in E\}$).

Dokaz koji sledi potiče od H. Schaerf-a (v. [14], str. 9, gde je on nešto konciznije izložen).

Pre svega, lako se proverava činjenica da merljivost skupa D povlači, za $\lambda > 0$, merljivost skupa λD i jednakost $m(\lambda D) = \lambda m(D)$. Tvrdjenje propozicije dovoljno je dokazati za slučaj zatvorenog skupa F pozitivne mere, jer svaki skup pozitivne mere sadrži jedan zatvoren skup pozitivne mere. Neka je O otvoren skup koji ispunjava uslove

$$F \subset O \quad , \qquad m(O) \leq \frac{3}{2}\, m(F).$$

Postoji onda unija O_0 konačnog skupa onih disjunktnih otvorenih intervala iz kojih se skup O sastoji za koju je

$$m(O) - m(O_0) = m(O \setminus O_0) < \frac{1}{4}\, m(F).$$

Skup $F_o = F \cap O_o$ je očigledno zatvoren i pri tome, zbog $F \setminus F_o \subset O \setminus O_o$,

$m(F)-m(F_o) = m(F \setminus F_o) \leq m(O \setminus O_o) < \frac{1}{4}\, m\,(F)$,

tj. $m\,(F) < \frac{4}{3}\, m\,(F_o)$, i odatle

(4) $m(O_o) \leq m(O) < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\, m\,(F_o) = 2m\,(F_o)$.

Jasno je, s obzirom na strukturu skupova O_o i F_o, da postoji $\lambda_o > 1$ takvo da je $\lambda F_o \subset O_o$ za svako $\lambda \in [1, \lambda_o]$. Ako bi za neko $\lambda \in (1, \lambda_o]$ bilo $F_o \cap \lambda Fo = \emptyset$, imalo bi se

$$m(O_o) \geq m\,(F_o \cup \lambda F_o) = m\,(F_o) + m\,(\lambda F_o)$$

$$= (1 + \lambda)\, m\,(F_o) > 2\, m\,(F_o),$$

u suprotnosti sa (4). Dakle,

$$\emptyset \neq F_o \cap \lambda F_o \subset F \cap \lambda F \qquad (1 \leq \lambda \leq \lambda_o),$$

što je trebalo dokazati.

Sledeća propozicija predstavlja analogon teoreme (O_1), a biće primenjena u paragrafu 4 .

2.3.2. Neka je funkcija $l(x)$ definisana i merljiva na $[0, +\infty)$. Ako je

(5) $\qquad l(\lambda x) - l(\lambda x) = o\,(1) \qquad (x \to +\infty)$

za $\lambda \in E$, gde je skup E pozitivne mere, tada (5) važi za svako $\lambda > 0$ i to uniformno po λ u svakom konačnom intervalu $[a, b]$ sa $0 < a < b < +\infty$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da postoji $\lambda_o > 1$ takvo da (5) važi uniformno u intervalu $[1, \lambda_o]$. Zaista, u tom slučaju (5) očigledno važi uniformno u intervalima $[\lambda_o^{k-1}, \lambda_o^k]$ $(k= 0, \pm 1,2,\ldots)$ i odatle u svakom intervalu $[a,b]$ $(0<a<b<+\infty)$.

Može se pretpostaviti da je $E \subset [0, b_o]$ sa $0 < b_o < +\infty$, jer skup E svakako ima deo pozitivne mere koji je sadržan u ovakvom intervalu. Stavimo

$$E_{n,\nu} \overset{\text{def}}{=} \{\lambda\ |l(\lambda x)-l(x)| \leq \nu\ (x \geq n),\ \lambda \in E\}\ (n,\nu=1,2,\ldots).$$

Prema pretpostavci, $E = \bigcup_{n,\nu=1}^{\infty} E_{n,\nu}$. Merljivost funkcije $l(x)$ povlači merljivost skupova $E_{n,v}$ $(n,v = 1,2,\ldots)$. Zbog $m(E) > 0$, postoje onda $n_o, \nu_o \in \{1,2,\ldots\}$ tako da je

$$m = (E_{n_o, v_o}) > 0,$$

pa imamo

$$|l(\lambda x) - l(x)| \leq v_o \qquad (x \geqslant n_o, \lambda \in E_{n_o,v_o}).$$

Neka je $\lambda_o > 1$ za skup E_{n_o,v_o} broj čiju egzistenciju tvrdi propozicija 2.3.1. i neka je, za $\lambda \in [1, \lambda_o]$, $\lambda_1 \in E_{n_o,v_o} \cap \lambda E_{n_o,v_o}$. To znači da $\lambda_1 = \lambda\lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in E_{n_o,v_o})$.

Tada je

$$|l(\lambda x) - l(x)| = \left| l\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x\right) - l(x) \right|$$

$$\leq \left| l\left(\lambda_1 \frac{x}{\lambda_2}\right) - l\left(\frac{x}{\lambda_2}\right) \right| + \left| l\left(\lambda_2 \frac{x}{\lambda_2}\right) - l\left(\frac{x}{\lambda_2}\right) \right|$$

$$\leq \quad 2\nu_o \qquad (x \geqslant n_o . b_o),$$

jer $\lambda_1 \in E_{n_o,\nu_o}$, $\frac{x}{\lambda_2} \geqslant n_o$ $(x \geqslant n_o . b_o, \lambda_2 \in E_{n_o,\nu_o})$.-

2.3.3. Na sličan način dokazuje se varijanta (O_1) teoreme (O). Neka funkcija $l(x)$ ispunjava sve uslove teoreme (O_1) i neka je, prema odgovarajućoj primedbi u prethodnom dokazu, $E \subset [o, b_o]$. Uz isto obrazloženje kao gore, dovoljno je dokazati uniformno važenje relacije (2) pod 2.1. u nekom intervalu $[1, \lambda_o]$, gde je $\lambda_o > 1$. Stavimo

$$D_{n,v} \overset{def}{=} \{ \lambda : | \; l(\lambda x) - l(x) | < \tfrac{1}{v} \quad (x \geqslant n), \lambda \in E) \; (n, =1,2$$

Prema pretpostavci, za svako fiksirano v niz skupova $D_{n,\nu}$ $(n=1,2,\ldots)$ monotono teži skupu E. Stoga za svako $v=1,2,\ldots$, postoji $n(v)$ takvo da je

$$m(E) - m(D_{n(v),v}) = m(E \setminus D_{n(v),v}) < \frac{1}{2^{v+1}} \cdot m(E).$$

Skup

$$D \stackrel{def}{=\!=} \bigcap_{v=2}^{\infty} D_{n(v),v} \tag{6}$$

sadržan je u E i pozitivne je mere, jer

$$m(E)-m(D) = m(E \setminus D) = m\,(E \setminus \bigcap_{v=2}^{\infty} D_{n(v),v})$$

$$= m\,(\bigcup_{v=2}^{\infty} (E \setminus D_{n(v),v}) \leq \sum_{v=2}^{\infty} m\,(E \setminus D_{n(v),v})$$

$$< \frac{1}{2}\; m\;(E)\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} = \frac{1}{2}\; m\;(E)$$

i odatle $m(D) > \frac{1}{2}\; m\;(E)$. Neka je $\lambda_o > 1$ za skup D broj čiju egzistenciju tvrdi 2.3.1. i neka je za $\lambda \in [1, \lambda_o]$, $\lambda_1 \in D \cap \lambda D$, tj. $\lambda_1 = \lambda\lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in D)$. Ako je $\varepsilon > o$ proizvoljno izabrano, neka je $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ za prirodan broj $\underline{v}$. Onda je, prema (6),

$$|l(\lambda y) - l(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (y \geq n(v),\ \lambda \in D)$$

i odatle

$$|l(\lambda x) - l(x)| \leq \left|l\left(\lambda_1 \frac{x}{\lambda_2}\right) - l\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)\right| + \left|l\left(\lambda_2 \frac{x}{\lambda_2}\right) - l\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)\right|$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad (x \geq b_o . n(v),\ \lambda \in [1, \lambda_o]).$$

Može se primetiti da je u izloženom dokazu iskorišćena ista ideja kao u dokazu poznate teoreme Egorov-a.

Napominjemo i da se zahtev teoreme (0) da (1) važi za svako $\lambda \in E$, gde je skup E pozitivne mere, može zameniti zahtevom da je samo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(2x)}{L(x)} = 1$$

ukoliko se pretpostavi da funkcija L(x) ne opada (v. [28], str. 94, problem br. 150).

2.4. Uslov da je funkcija L(x) merljiva na $[o, +\infty)$, odnosno na $(-\infty, +\infty)$, bitan je za teoremu (0), odnosno za njene varijante (0_1) i (0_2). Važi, naime, sledeći iskaz:

<u>Postoji funkcija $k(x)$ koja je definisana za svako realno x i takva je da</u>

$$k(x+\mu) - k(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

<u>važi za svako realno μ, ali ne važi uniformno po μ ni u jednom konačnom intervalu $[a, b]$.</u>

<u>Dokaz.</u> Neka R označava aditivnu grupu svih realnih brojeva i neka je a_n $(n = 1,2,\ldots)$ niz racionalnih brojeva sa sledećim svojstvom: ni za jedno $n \geq 2$ element a_n nije linearna kombinacija sa celim koeficijentima elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Takav niz svakako postoji (može se dobiti isključujući iz niza svih racionalnih brojeva sve one racionalne brojeve koji su linearne kombinacije prethodnih) i očigledno nije konačan. Stavimo $A = R_a \setminus \{0\}$, $B = R \setminus A$, gde je sa R_a označena aditivna grupa svih racionalnih brojeva. Pomoću <u>Zorn-ove</u> leme lako se dokazuje da skup B ima maksimalnu podgrupu G_o. Ako $g_o \in G_o$ i $r \in R_a$, tada $r\, g_o \in G_o$. Zaista, u suprotnom slučaju postojali bi brojevi $g_o' \in G_o$, $a \in A$ i ceo broj m tako da je $g_o + mr\, g_o = a$ i odatle $g_o + m\, \frac{p}{q}\, g_o = a$, tj. $q\, g_o' + mp\, g_o = q\, a$, sa celim brojevima p i $q \neq 0$. Poslednje bi, medjutim, značilo da $q\, a \in G_o$, što nije slučaj.

Adjunkcijom grupi G_o elemenata skupa A dobija se R, u oznaci

$$G_o\,(A) = R.$$

Ovde $G_o\,(A)$, ustvari, označava minimalnu grupu koja sadrži $G_o \cup A$. Zaista, ako $g \in R \setminus G_o$, tada, kao i u prethodnom rasudjivanju, postoje $g_o \in G_o$, $a \in A$ i ceo broj $m \neq 0$ tako da je $g_o + mg = a$ i odatle $g = -\frac{1}{m}\, g_o + \frac{1}{m}\, a \in G_o\,(A)$, jer $-\frac{1}{m}\, g_o \in G_o$, prema prethodnom, i $\frac{1}{m}\, a \in A$, stoga što je $\frac{1}{m}\, a$ racionalan broj.

Dakle,

$$R = G_o\,(A) = G_o\,(a_1, a_2, \ldots),$$

pa ako se stavi $G_1 = G_o\,(a_1)$, $G_2 = G_1\,(a_2), \ldots$, dobija se

$$R = \bigcup_{n=o}^{\infty} G_n\,. \tag{7}$$

Jasno je da $G_{n-1} \subset G_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. G_{n-1} je, medjutim, pravi deo skupa G_n, jer $a_n \in G_n \setminus G_{n-1} = H_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Svaki od skupova $G_o = H_o$, $H_1, H_2, \ldots$ je svuda gust na R. Zaista, skup G_o je neprebrojiv, jer bi u suprotnom slučaju iz (7) sledilo da je skup R prebrojiv. Odatle izlazi da G_o sadrži bar dva linearno nezavisna elementa g_o i g_o'. Tada je skup svih brojeva oblika $m\,g_o + m' g_o'$, gde su brojevi m i m' celi, svuda gust na R. Ovo poslednje se lako izvodi iz činjenice da, za svako iracionalno $\underline{a}$, niz $na - [na]$ $(n = 1,2,\ldots)$ ima nulu kao tačku nagomilavanja (v.na pr. [8] str. 908). Tako je tvrdjenje dokazano za $G_o = H_o$. Ono onda važi i za svako H_n $(n = 1,2,\ldots)$ stoga što $g_o \in G_o$ povlači $g_o + a_n \in H_n$.

Funkciju $k(x)$ definišemo na sledeći način:

$$k(x) = e^{-\frac{x}{n+1}} \qquad (x \in H_n;\ n = o,1,2,\ldots).$$

Neka je μ fiksirani realan broj. Možemo se, očigledno, ograničiti na slučaj kad je $\mu > 0$ i neka je $\mu \in H_k$ $(k \in \{o,1,2,\ldots\})$. Ako je $x \in H_n$ sa $n > k$, tada $x + \mu \in H_n$ i stoga

$$|k(x+\mu) - k(x)| = \left| e^{-\frac{x+\mu}{n+1}} - e^{-\frac{x}{n+1}} \right|$$

$$(8) \quad = e^{-\frac{x}{n+1}} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{n+1}}\right) \leq \frac{\mu}{n+1}\, e^{-\frac{x}{n+1}} \leq \frac{\mu}{e^{x}}.$$

Ako je $x \in H_n$ sa $n < k$, tada $x + \mu \in H_k$, a ako $x \in H_k$, tada $x + \mu \in H_i$ gde $i \leq k$.

U oba poslednja slučaja dobija se

$$k(x+\mu) \leq e^{-\frac{x+\mu}{k+1}}, \quad k(x) \leq e^{-\frac{x}{k+1}}$$

i odatle

$$(9) \quad |k(x+\mu) - k(x)| \leq 2\, e^{-\frac{x}{k+2}}.$$

Prema (8) i (9), za svako $\mu > o$, pa i za svako μ realno, važi

$$k(x+\mu) - k(x) \to o \quad (x \to +\infty).$$

Neka je, s druge strane, $-\infty < a < b < +\infty$. Tada za svako $n = 1,2,\ldots$ postoje $x_n \in [n,n+1] \cap H_0$ i $\mu_n \in [a,b] \cap H_n$, pa $x_n \to +\infty (n \to \infty)$, $\mu_n \in [a,b]$ $(n = 1,2,\ldots)$, ali

$$k(x_n + \mu_n) - k(x_n) = e^{-\frac{x_n + \mu_n}{n+1}} - e^{-x_n} \to e^{-1} \quad (n \to \infty).$$

3. REPREZENTACIJA SPORO PROMENJIVE FUNKCIJE

Jedan od osnovnih rezultata o sporo promenjivim funkcijama je i sledeća teorema reprezentacije.

(R). Na $[o, +\infty)$ merljiva funkcija $L(x)$ je sporo promenjiva ako i samo ako je

$$(10) \qquad L(x) = c(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \qquad (x \geq o),$$

gde je $c(x)$ na $[o, +\infty)$ pozitivna i merljiva funkcija takva da je $\lim\limits_{x \to +\infty} c(x) = c > o$, a $\mathcal{E}(x)$ je za $x \geq o$ neprekidna funkcija sa osobinom $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{E}(x) = o$.

Iz ove teoreme neposredno sledi teorema reprezentacije neprekidne sporo promenjive funkcije:

(R_1) Na $[o, +\infty)$ neprekidna funkcija $L(x)$ je sporo promenjiva ako i samo ako je

$$L(x) = c(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \qquad (x \geq o),$$

gde je $c(x)$ za $x \geq o$ pozitivna i neprekidna funkcija takva da je $\lim\limits_{x \to +} c(x) = c > o$, a $\mathcal{E}(x)$ je za $x \geq o$ neprekidna funkcija sa osobinom $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{E}(x) = o$.

Teoremu (R_1) dokazao je Karamata [24,25], a teoremu (R) 1949. T. van Aarden-Ehrenfest, N.G. de Bruijn i J. Korevaar 1 i 1959. N.G. de Bruijn [15], čiji ćemo jednostavan dokaz izložiti.

<u>Dokaz</u>. Neka je funkcija $L(x)$ na $[o,+\infty)$ merljiva i sporo promenjiva. Onda, prema teoremi (O) ili (O_2) iz § 2, funkcija $k(t) = \log L(e^t)$ zadovoljava relaciju

$$k(t+\mu) - k(t) \to o \qquad (t \to +\infty)$$

uniformno po $\mu \in [o,1]$. Može se konstruisati neprekidno diferencijabilna funkcija $k_1(t)$ takva da je:

$$k_1(n) = k(n) \qquad (n = 1,2,\dots);$$

$$k_1'(t) \to o, \; k_1(t) - k(t) \to o \qquad (t \to +\infty).$$

Može se, naime, uzeti da je

$$k_1(t) = k(n)+6\,[k(n+1) - k(n)] \int_0^{t-n} u(1-\mu)du \qquad (n \le t \le n+1;\; n=o,1,2,\dots).$$

Ova funkcija je, što se neposredno proverava, dobro definisana za $t \geq o$ i ima za $n < t < n+1$ izvod

$$k_1(t) = 6\,[k(n+1)- k(n)] \qquad (t-n) \quad (n+1-t);$$

za $t = n$ oba njena jednostrana izvoda jednaka su nuli. Daklė, funkcija $k_1(t)$ ima za svako $t > o$ neprekidan izvod. Pri tome je za $n \le t \le n+1$:

$$|k_1'(t)| = 6\,|k(n+2)-k(n)| \,(t-n)\,(n+1-t)$$

$$\le \frac{3}{2}\,|k(n+2) - k(n)|.$$

$$|k_1(t)- k(t)| \le |k(t)- k(n)| + 6\,|k(n+1)- k(n)|\,\left|\int_0^{t-n} u(1-\mu)du\right|$$

$$= |k(t) - k(n)| + |k(n+2)- k(n)| \quad (t-n)^2 \quad (2n+3-2t)$$

$$\le |k(t) - k(n)| + 3\,|k(n+1) - k(n)|,$$

što znači, s obzirom na napred rečeno o funkciji $k(t)$, da

$$k_1'(t) \to o, \quad k_1(t) - k(t) \to o \qquad (t \to +\infty).$$

Funkcija k_1 $(\log x)$ ima neprekidan izvod za $x \geq 1$ pa je stoga

$$(11) \qquad k_1(\log x) = \int_1^x \varphi(t)dt + \text{const},$$

gde je funkcija (x) neprekidna za $x \geq 1$. Diferenciranjem se dobija

$$\frac{k_1'(\log x)}{x} = \varphi(x) \qquad (x \geq 1),$$

pa prema prethodno ustanovljenom,

$$(12) \qquad \varphi(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} \qquad (x \geq 1)$$

sa funkcijom $\varepsilon(x)$ koja je za $x \geq 1$ neprekidna i teži nuli kad $x \to +\infty$. Prema (11) i (12), dobijamo

$$L_1(x) = e^{k_1(\log x)} = C\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}.$$

Iz prethodnog izlazi i da

$$c(x) = \frac{L_1(x)}{L(x)} = \frac{c\,e^{k_1(\log x)}}{e^{k(\log x)}} = c\,e^{k_1(\log x) - k(\log x)}$$

$$\to c \qquad (x \to +\infty).$$

Time je dokazano da svaka merljiva sporo promenjiva funkcija ima reprezentaciju (10). Obrnuto, svaka funkcija $L(x)$ sa reprezentacijom (10) pre svega je merljiva na $[0, +\infty)$, a zatim, za svako $\lambda > 0$,

$$\left|\frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1\right| = \left| e^{\int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} - 1\right| \leq e^{\max_{t \geq x}\{|\varepsilon(t)|\}|\log \lambda|} - 1$$

$$\to 0 \quad (x \to +\infty).$$

3.1. Poslednji korak prethodnog dokaza pokazuje da se iz teoreme (R) lako može izvesti teorema (O).

4. PRAVILNO PROMENJIVE FUNKCIJE

Jedno prirodno uopštenje pojma sporo promenjive funkcije je pojam pravilno promenjive funkcije.

Definicija 2. Za funkciju $p(x)$ kaže se da je pravilno promenjiva ako je definisana i pozitivna za $x \geq 0$ i ako

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(\lambda x)}{p(x)} = h(\lambda)$$

ima konačnu vrednost za svako λ o.

Poznata je sledeća Canchy-ova teorema:

Ako je funkcija $q(x)$ ograničena na intervalima dužine 1 i proizvoljno velike donje granice, tada

(13) $$q(x+1) - q(x) \to q \qquad (x \to +\infty)$$

povlači

(14) $$\frac{q(x)}{x} \to q \qquad (x \to +\infty),$$

pri čemu q može biti konačno ili $\pm\infty$.

Da je uslov o ograničenosti funkcije $q(x)$ na intervalima dužine 1 i proizvoljno velike donje granice neophodan za tačnost tvrdjenja pokazuje primer funkcije

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - [x]} + x & (x \text{ nije ceo broj}) \\ x & (x \text{ ceo broj}). \end{cases}$$

koja ima osobinu (13) za $q=1$, a nema osobinu (14).

Iz ove teoreme, stavljajući $r(y) = q(\mu x)$, $\mu x = y$, $q = \rho(\mu)$ $(\mu \neq 0)$ i oslanjajući se na iskaz 2.3.1., jednostavno se izvodi sledeća propozicija:

Neka je funkcija $r(y)$ definisana za svako y (ili za dovoljno veliko y) i neka je merljiva na $(-\infty, +\infty)$ (ili na nekom intervalu oblika $(y_0, +\infty)$). Ako

$$r(y+\mu) - r(y) \to g(\mu) \qquad (y \to +\infty),$$

sa konačnim $P(\mu)$, za svako realno μ, tada

$$\frac{r(y)}{y} \to \frac{\rho(\mu)}{\mu} = a \quad (y \to +\infty)$$

za svako $\mu \neq 0$. Dakle, tada $\rho(\mu) = a\mu$ za μ realno.

Iz prethodnog rezultata izvodi se stavljajući

$$\log p(e^y) = r(y), \quad \lambda = e^{\mu}, \quad \log h(e^{\mu}) = \rho(\mu),$$

sledeća osnovna teorema o pravilno promenjivoj funkciji:

(P) Neka je funkcija $p(x)$ pravilno promenjiva i na $[0, +\infty)$ merljiva. Tada postoji realan broj a takav da

$$\frac{p(\lambda x)}{p(x)} \to \lambda^{a} \quad (x \to +\infty; \quad 0)$$

i pri tome

$$\frac{\log p(x)}{\log x} \to a \quad (x \to +\infty).$$

Prema tome, na $[0, +\infty)$ merljiva pravilno promenjiva funkcija za $x > 0$ ima reprezentaciju

$$p(x) = x^a L(x),$$

gde je a realan broj, a $L(x)$ sporo promenjiva funkcija.

Prema § 3, za merljive pravilno promenjive funkcije $p(x)$ može se dati i sledeća reprezentacija:

$$p(x) = x^a c(x) \, e^{\int_{1}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \quad (x > 0),$$

gde za $c(x)$ i $\varepsilon(x)$ važi isto što i pod § 3.

5. NEKOLIKO OSNOVNIH OSOBINA SPORO PROMENJIVIH FUNKCIJA

5.1. U daljim izvodjenjima koristimo sledeće varijante L'Hospital - Stolz-ove teoreme (prva i treća su u suštini stavovi 8.1. i 8.3. u [35] (I, str. 31-32). Prve dve teoreme odnose se na Lebesgue-ove integrale, a treća na redove.

5.1.1. Neka su funkcije h(x) i l(x) definisane i L-integrabilne u svakom konačnom intervalu $[a,x]$ $(x > a)$ i neka je $l(x) > 0$ $(x \geq a)$. Tada je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_a^x h(t)dt}{\int_a^t l(t)dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{l(x)},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji, kao konačna vrednost ili kao $\pm\infty$, i da $\int_a^{+\infty} l(t)dt \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

5.1.1.1. Posledica. Ako funkcija l(x) ispunjava sve uslove prethodne teoreme, a funkcija H(x) ima za $x \geq a$ konačan izvod koji je integrabilan u svakom intervalu $[a,x]$ $(x > a)$, tada je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{H(x)}{\int_a^x l(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{H'(x)}{l(x)},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji.

5.1.2. Neka su funkcije h(x) i l(x) definisane i L-integrabilne u svakom intervalu $[a, x]$ $(x > a)$, neka je $h(t) \geq 0$ $(t \geq a)$ i postoje

$$\int_a^{+\infty} h(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x h(t)dt \quad \text{i} \quad \int_a^{+\infty} l(t)dt,$$

pri čemu se za drugi integral ne mora unapred pretpostaviti da je Lebesgue-ov. Tada je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} h(t)dt}{\int_x^{+\infty} l(t)dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{l(x)},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji, kao konačna vrednost ili kao $\pm\infty$.

5.1.2.1. Posledica. Ako funkcija $l(x)$ ispunjava sve uslove prethodne teoreme a funkcija $H(x)$ teži konačnoj granici H kod $x \to +\infty$ i ima za $x \geqq a$ konačan izvod koji je integrabilan u svakom intervalu $[a, x]$ $(x > a)$, tada je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{H - H(x)}{\int_x^{\infty} l(t)dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{H'(x)}{x(x)},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji.

Dokaz. U ovom slučaju je

$$H(x) = \int_a^x H'(t)dt + C, H = \int_a^{\infty} H(t)dt + C,$$
$$H - H(x) = \int_x^{\infty} H'(t)\, dt,$$

tako da se, prema 5.1.2, dobija

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{H - H(x)}{\int_x^{\infty} l(t)dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{\infty} H'(t)dt}{\int_x^{\infty} l(t)dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{H'(x)}{l(x)}.$$

5.1.3. Neka je $b_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ i neka redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju. Tada

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu}}{\sum_{\nu=n}^{\infty} b_{\nu}} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

pod uslovom da poslednji limes postoji, kao konačna vrednost ili kao $\pm \infty$.

Teorema 5.1.1 - 3. dokazuju se slično kao pomenuti stavovi u [35], a mogu se i iz njih izvesti.

5.2. Ako je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija a funkcija $L^{+}(x)$ je pozitivna za $x \geqq 0$ i takva da $L^{+}(x) \sim L(x)$ $(x \to +\infty)$, tada je i funkcija $L(x)$ sporo promenjiva.

Ovde pojam sporo promenjive funkcije treba uzeti u najopštijem smislu definicije 1. (Podsećamo da se, u saglasnosti sa konvencijom 22, odavde pa nadalje za svaku sporo promenjivu funkciju podrazumeva da je na $[0, +\infty)$ merljiva i na svakom konačnom intervalu ograničena, ukoliko drugo nije izričito rečeno).

Gornje tvrdjenje je očigledno.

5.3. Ako je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija i $\alpha > 0$, tada

$$x^{\alpha} L(x) \to +\infty , \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Dokaz. Neka je $\alpha > 0$ i neka je u reprezentaciji (10) sporo promenjive funkcije $L(x)$

$$\mathcal{E}(t) < \frac{\alpha}{2} \qquad (x \geq x_0 \geq 1).$$

Tada je za $\quad x \geq x_0$

$$0 < x^{-\alpha} L(x) = c(x) \, e^{-\alpha \log x + \int_1^x \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt}$$

$$= c(x) \, e^{\int_1^{x_0} \frac{\mathcal{E}(t)-\alpha}{t} dt + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathcal{E}(t)-\alpha}{t} dt}$$

$$\leq c(x) \, e^{\int_1^{x_0} \frac{\mathcal{E}(t)-\alpha}{t} dt} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} \log \frac{x}{x_0}} \to 0 \ (x \to +\infty).$$

Kako je i $\frac{1}{L(x)}$ sporo promenjiva funkcija, iz prethodnog izlazi da

$$x^{-\alpha} \frac{1}{L(x)} \to 0 \qquad (x \to +\infty),$$

tj. da

$$x^{\alpha} L(x) \to +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

5.4. Sledeća teorema obuhvata činjenice koje će u daljem izlaganju biti često korišćene.

Teorema I. 1° Ako $\alpha < 1$, tada

$$\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} L(x) \sim \int_1^X t^{-\alpha} L(t) dt \sim \sum_{\nu \leq X} \nu^{-\alpha} L(\nu) \ (x \to +\infty).$$

Posledica. Za $\alpha < 1$,

$$L(x) = o\left(\int_1^x t^{-\alpha} L(t)\,dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

2° Ako $\alpha > 1$, tada

$$\frac{1}{\alpha-1}\, x^{1-\alpha} L(x) \sim \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \sum_{\nu \geq x} \nu^{-\alpha} L(\nu) \qquad (x \to +\infty)$$

Posledica. Za $\alpha > 1$,

$$\int_x^{\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt = o\,(L(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

3° Red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ i integral $\int_1^{\infty} t^{-1} L(t)\,dt$

istovremeno konvergiraju.

4° Uvek je

$$L(x) = o\left(\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

5° Neka je

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty, \quad S(x) \overset{\text{def}}{=} \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt, \quad S^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu \leq x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Tada

$$S(x) \sim S^*(x) \qquad (x \to +\infty).$$

6° Neka je

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) < +\infty, \quad R(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{\infty} t^{-1} L(t)\,dt, \quad R^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu \geq x} \nu^{-1} L(\nu)$$

Tada

$$L(x) = o\,(R(x)), \quad R(x) \sim R^*(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Prve relacije u tvrdjenjima 1° i 2° navode se bez dokaza, u nešto drukčijem obliku, u [13]. Tvrdjenja 3° - 6° dokązana su u [35] (I, str. 3o2), ali za t.zv. Zygmund-ovu klasu sporo promenjivih funkcija (v. § 6) i to metodom koja bitno koristi monotoniju.

Napominjemo da iz tvrdjenja 1° neposredno izlazi

$$\sum_{v=1}^{n} v^{\alpha-1} L(v) \sim \frac{1}{\alpha} n^{\alpha} L(n) \qquad (n \to \infty;\ \alpha > 0),$$

dok se lemom (VII) u [5] (str.72) tvrdi samo da je

$$0 < A.\ n^{\alpha} L(n) \leq \sum_{v=1}^{n} v^{\alpha-1} L(v) \leq B\ n^{\alpha} L(n) \qquad \text{(A,B konačne konstante)}$$

i to za slučaj neprekidne sporo promenjive funkcije.

Sva tvrdjenja teoreme dokazujemo jedinstvenom metodom u kojoj se, pored reprezentacije sporo promenjive funkcije i teoreme (0), sistematski koriste teoreme 5.1. Jedino pri dokazu tvrdjenja 3° koristimo i osobinu 5.5. sporo promenjive funkcije, za čije su izvodjenje, medjutim, dovoljna tvrdjenja 1° i 2° (v. narednu tačku 5.5.).

Dokaz. 1° Prema 5.3, za $\alpha < 1$ integral $\int_1^{\infty} t^{-\alpha} L(t)dt$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} L(n)$ divergiraju. Stoga se, koristeći teoremu reprezentacije (R) i 5.1.1.1, dobija, prvo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} L(x)}{\int_1^x t^{-\alpha} L(t)\, dt} = \frac{c}{1-\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{\int_1^x t^{-\alpha} L(t)\, dt}$$

$$= \frac{c}{1-\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-\alpha)\, x^{-\alpha}\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} + \varepsilon(x) x^{-\alpha}\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{x^{-\alpha}\, C(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \to +\infty} \left[1-\alpha + \varepsilon(x) \right] = 1,$$

a zatim, prema Stolz-ovoj teoremi za nizove,

$$(13)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_1^n t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\sum_{v=1}^{n} v^{-\alpha} L(v)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n-1}^{n} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{n^{-\alpha} L(n)},$$

pod pretpostavkom da poslednji limes postoji. Stavljajući

$$A(n) = \inf_{n-1\leq t\leq n} L(t), \qquad B(n) = \sup_{n-1\leq t\leq n} L(t),$$

dobija se

$$(14)\qquad \frac{A(n)}{L(n)}\, n^{\alpha} \frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{\int_{n-1}^{n} t^{-\alpha} L(t)dt}{n^{-\alpha} L(n)} \leq \frac{B(n)}{L(n)}\, n^{\alpha} \frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Prema teoremi (O) u § 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{L(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{B(n)}{L(n)} = 1.$$

Stoga se, puštajući da u (14) $n\to\infty$, dobija

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n-1}^{n} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{n^{-\alpha}\, L(n)} = 1.$$

Ovo zajedno sa (13) daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_1^n t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\sum_{v=1}^{n} v^{-\alpha} L(v)} = 1.$$

Ostaje još da se dokaže relacija

$$\int_1^x t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \int_1^{[x]} t^{-\alpha} L(t)\,dt \qquad (x\to+\infty).$$

Imamo

$$\int_1^x t^{-\alpha} L(t)\,dt = \int_1^{[x]} t^{-\alpha} L(t)\,dt + \int_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)\,dt,$$

gde je

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\int_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)dt}{\int_1^x t^{-\alpha} L(t)dt} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{x-1}^{x} t^{-\alpha} L(t)dt}{\int_1^x t^{-\alpha} L(t)dt}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{\int_1^{x-1} t^{-\alpha} L(t)dt}{\int_1^x t^{-\alpha} L(t)dt} \right] = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^{-\alpha} L(x-1)}{x^{-\alpha} L(x)} = 0.$$

2° Prema 5.3, za $\alpha > 1$ integral $\int_1^{\infty} t^{-\alpha} L(t)dt$ i red $\sum_{v=1}^{\infty} v^{-\alpha} L(v)$ konvergiraju. Stoga je, prema 5.1.2.1. i teoremi (R),

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)}{\frac{1}{\alpha-1} x^{1-\alpha} L(x)} = \frac{1}{(\alpha-1)^{-1}} \cdot \frac{1}{c} \lim_{x \to \infty} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt}{x^{1-\alpha} \cdot e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)^{-1}} \frac{1}{c} \lim_{x \to \infty} \frac{- x^{-\alpha} L(x)}{\left[(1-\alpha)x^{-\alpha} + x^{-\alpha} \varepsilon(x)\right] e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}} =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^{-1}} \frac{1}{c} \lim_{x \to \infty} \frac{c(x)}{1-\alpha + \varepsilon(x)} = 1.$$

Na osnovu 5.3, imamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_n^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\sum_{v=n}^{\infty} v^{-\alpha} L(v)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{v=n}^{\infty} \int_v^{v+1} t^{-\alpha} L(t)\, dt}{\sum_{v=n}^{\infty} v^{-\alpha} L(v)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\int_n^{n+1} t^{-\alpha} L(t)}{n^{-\alpha} L(n)} = 1.$$

pri čemu se poslednja jednakost dokazuje na isti način kao slična jednakost pod 1°.

Najzad,

$$\int_1^{\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt = \int_{[X]}^{\infty} t^{-\alpha} L(t)\, dt - \int_{[X]}^{X} t^{-\alpha} L(t)\, dt,$$

gde je

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \frac{\int_{[x]}^{x} t^{-\alpha}L(t)dt}{\int_{x}^{\infty} t^{-\alpha}L(t)dt} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{x-1}^{x} t^{-\alpha}L(t)dt}{\int_{x}^{\infty} t^{-\alpha}L(t)dt}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\int_{x-1}^{\infty} t^{-\alpha}L(t)\ dt}{\int_{x}^{\infty} t^{-\alpha}L(t)\ dt} - 1 \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^{-\alpha}L(x-1)}{x^{-\alpha}L(x)} - 1$$

$= 0.$

3° Stavimo $C(x) = \sup\limits_{x\leq t\leq+\infty} \left\{ t^{-\frac{1}{2}} L(t) \right\}$. Kako

$C(x)\searrow$, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n)$$

i integral

$$\int_{1}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)dt$$

istovremeno konvergiraju. Kako (prema sledećoj tački 5.5.)

$$C(x) \sim x^{-\frac{1}{2}} L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

isto se može reći za redove

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n),$$

kao i za integrale

$$\int_{1}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)\ dt \quad \text{i} \quad \int_{1}^{\infty} t^{-1} L(t)\ dt.$$

Odatle neposredno izlazi tvrdjenje.

4^o Ako $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty$, imamo, prema 5.1.1.,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt} = C \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp\left\{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt}$$

$$= c \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-1} \varepsilon(x) e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt}}{x^{-1} L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0 .$$

U suprotnom slučaju tvrdjenje trivijalno sledi iz 6^o.

5^o se dokazuje slično kao 1^o, a 6^o slično kao 2^o.

Oznake $\sum$, $S(x)$, $S^*(x)$, $R(x)$, $R^*(x)$, uvedene formulacijom teoreme I, upotrebljavaćemo stalno dalje sa istim značenjem.

5.5.1^o Neka je funkcija $L(x)$ sporo promenjiva i neka je, za $\alpha > 0$.

$$\overline{L_1}(x) = x^{-\alpha} \sup_{0 \le t \le x} \left\{ t^{\alpha} L(t) \right\}, \quad \overline{L_2}(x) = x^{\alpha} \sup_{x \le t < +\infty} \left\{ t^{-\alpha} L(t) \right\}$$

$$(x \geq 0),$$

$$\underline{L_1}(x) = x^{\alpha} \inf_{0 \le t \le x} \left\{ t^{-\alpha} L(t) \right\}, \quad \underline{L_2}(x) = x^{-\alpha} \inf_{x \le t < +\infty} \left\{ t^{\alpha} L(t) \right\}$$

gde se svakoj od ovih funkcija za $x = 0$ pripisuje vrednost $L(0)$. Tada su sve funkcije $\underline{\overline{L}}_{\nu}(x)$ $(\nu = 1,2)$ sporo promenjive i važe relacije:

$$\underline{\overline{L}}_{\nu}(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty \; ; \; \nu = 1,2).$$

2^o Neka je funkcija $L(x)$ za $x \geq 0$ merljiva i pozitivna. Tada iz relacija

$$\overline{L_1}(x) \sim L(x), \quad \overline{L_2}(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

ili iz relacija

$$\underline{L_1}\ (x) \sim L(x), \quad \underline{L_2}\ (x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

izlazi da je funkcija L(x) sporo promenjiva.

Napominjemo da su u slučaju kad je funkcija L(x) neprekidna takve i sve funkcije $\underline{L}_\nu(x)$ $(\nu = 1,2)$.

Dokaz. 1^o Neka je L(x) sporo promenjiva funkcija. Iz tvrdjenja 1 teoreme I u 5.4. izlazi da za $\alpha > 0$

$$(15) \qquad \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} L(t)\, dt \sim x^{\alpha} L(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Odatle, za unapred dato ε (o,1) postoji $x_\varepsilon > 1$ takvo da je

$$x^{\alpha} L(x) < (1+\varepsilon) \int_1^x t^{\alpha-1} L(t)\, dt \qquad (x > x_\varepsilon)$$

i odatle

$$\sup_{x_\varepsilon \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\} \le (1+\varepsilon)\, \alpha \int_1^x t^{\alpha-1} L(t)\, dt \qquad (x > x_\varepsilon).$$

Odavde izlazi

$$x^{\alpha} L(x) \le \sup_{o \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\} \le \sup_{o \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\} + \sup_{x_\varepsilon \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\}$$

$$\le \sup_{o \le t \le x_\varepsilon} \{t^{\alpha} L(t)\} + (1+\varepsilon)\, \alpha \int_1^x t^{\alpha-1} L(t) dt \qquad (x > x_\varepsilon),$$

tj.

$$1 \le \frac{\sup_{o \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\}}{x^{\alpha} L(x)} \le \frac{\sup_{o \le t \le x} \{t^{\alpha} L(t)\}}{x^{\alpha} L(x)} + (1+\varepsilon)\, \frac{\alpha \int_1^x t^{\alpha-1} L(t) dt}{x^{\alpha} L(x)}$$

$$(x > x_\varepsilon).$$

Puštajući prvo da $x \to +\infty$, pa potom da $\varepsilon \to 0$, dobija se odavde, s obzirom na (15),

$$\sup_{0 \le t \le x} \left\{ t^{\alpha} L(t) \right\} \sim x^{\alpha} L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

odakle izlazi

$$\overline{L_1}(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Relacija $\overline{L_2}(x) \sim L(x)$ $(x \to +\infty)$ dokazuje se na sličan način, korišćenjem tvrdjenja 2° teoreme I. Kako su funkcije $\overline{L_\nu}(x)$ $(\nu = 1,2)$ pozitivne za $x \geqslant 0$ i merljive na $[0, +\infty)$, odatle izlazi, prema 5.2, da su one obe sporo promenjive.

Zajedno sa funkcijom $L(x)$ i funkcija $\frac{1}{L(x)}$ je sporo promenjiva. Odatle, prema prethodno ustanovljenom, sledi da je

$$x^{-\alpha} \sup_{0 \le t \le x} \left\{ t^{\alpha} \frac{1}{L(t)} \right\} \sim \frac{1}{L(x)} \qquad (x \to +\infty),$$

$$x^{\alpha} \sup_{x \le t < +\infty} \left\{ t^{-\alpha} \frac{1}{L(t)} \right\} \sim \frac{1}{L(x)} \qquad (x \to +\infty).$$

Kako je

$$(16) \quad \begin{cases} \sup\limits_{0 \le t \le x} \left\{ t^{\alpha} \frac{1}{L(t)} \right\} = \sup\limits_{0 \le t \le x} \left\{ \frac{1}{t^{-\alpha} L(t)} \right\} = \inf\limits_{0 \le t \le x} \left\{ t^{-\alpha} L(t) \right\}, \\[2ex] \sup\limits_{x \le t < +\infty} \left\{ t^{-\alpha} \frac{1}{L(t)} \right\} = \inf\limits_{x \le t < +} \left\{ t^{\alpha} L(t) \right\}, \end{cases}$$

prethodne dve asimptotske relacije povlače

$$\underline{L_1}(x) = x^{\alpha} \inf_{0 \le t \le x} \left\{ t^{-\alpha} L(t) \right\} \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

$$\underline{L_2}(x) = x^{-\alpha} \inf_{x \le t < +\infty} \left\{ t^{+\alpha} L(t) \right\} \sim L(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Prema (16), funkcije $L_\nu(x)$ $(\nu = 1,2)$ su za $x \geqslant 0$ pozitivne i na $[0, +\infty)$ merljive. I one su, dakle, sporo promenjive.

2^0 Neka je funkcija $L(x)$ za $x \geqslant 0$ pozitivna i merljiva i neka, za svako $\alpha > 0$, važe relacije

$$L(x) \sim L_\nu(x) \qquad (x \to +\infty \;;\; \nu = 1,2).$$

To znači da je

$$L(x) = C_1(x)\, x^{-\alpha} \varphi_1(x) = C_2(x) x^{\alpha} \varphi_2(x) \qquad (x \geqslant 0),$$

gde $C_\nu(x) \to 1$ $(x \to +\infty \;;\; \nu = 1,2)$; $\varphi_1(x) \nearrow$, $\varphi_2(x) \downarrow$ $(x \geqslant 0)$. Odavde izlazi, sa $\lambda > 1$,

$$\frac{C_1(\lambda x)}{C_1(x)} \lambda^{-\alpha} \leq \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \leq \frac{C_2(\lambda x)}{C_2(x)} \lambda^{\alpha}$$

i odatle

$$\lambda^{-\alpha} \leq \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \leq \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \leq \lambda^{\alpha}.$$

Puštajući da $\alpha \to 0$, dobija se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1,$$

što zajedno sa gore rečenim dovodi do zaključka da je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija.

5.5.1. Iz prethodnog rezultata i dokaza njegove tačke 2^0 izvodi se da važi i sledeća propozicija:

<u>Neka je funkcija $L(x)$ merljiva i pozitivna na $[0, +\infty)$. Da bi ona bila sporo promenjiva potrebno je i dovoljno da za</u>

svako $\alpha > o$ postoje dve funkcije $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ takve da je

$$x^{\alpha} L(x) = \varphi_1(x) \nearrow, \quad x^{-\alpha} L(x) = \varphi_2(x) \searrow \quad (x \geqq o).$$

6. DALJI STAVOVI O SPORO PROMENJIVIM FUNKCIJAMA

6.1. Nekoliko elementarnih osobina sporo promenjivih funkcija, na čije eksplicitno navodjenje nismo naišli u poznatoj literaturi, formulišemo u obliku sledeće teoreme:

Teorema II. 1^{o} Ako su $L_{\nu}(x)$ ($\nu = 1,2,\dots,n$) sporo promenjive funkcije i $R(x_1, x_2, \dots x_n)$ je racionalna funkcija čiji su svi koeficijenti pozitivni, tada je i funkcija

$$L(x) = R(L_1(x), \ L_2(x), \dots, \ L_n(x))$$

sporo promenjiva.

2^{o} Ako je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija a $r(x)$ racionalna funkcija koja zajedno sa x preko pozitivnih vrednosti teži beskonačnosti, tada se funkcija $L_1(x)$ definisana za dovoljno veliko x jednakošću

$$L_1(x) = L(r(x)).$$

može za ostale vrednosti $x \geqq o$ tako definisati da bude sporo promenjiva.

3^{o} Ako je $L_1(x)$ neprekidna sporo promenjiva funkcija, a $L_2(x)$ sporo promenjiva funkcija koja teži pozitivnoj beskonačnosti kad $x \to +\infty$, tada je i funkcija $L(x) = L_1(L_2(x))$ sporo promenjiva. Prema tome, skup neprekidnih sporo promenjivih funkcija koje zajedno sa x teže pozitivnoj beskonačnosti zatvoren je u odnosu na operacije $+$, $\cdot$ i o (o množenje funkcija).

4^{o} Sporo promenjiva funkcija može kad $x \to +\infty$, oscilirati i to sa konačnim ili beskonačnim intervalom oscilacije.

5° Ako je funkcija $L(x)$ sporo promenjiva, tada su i funkcije

$$K_1(x) = \begin{cases} x^{-1}\int_1^x L(t)dt & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

i

$$K_2(x) = \begin{cases} \int_1^x t^{-1} L(t)dt & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

sporo promenjive. U slučaju kada je

$$\lim_{x \to +\infty} K_2(x) < +\infty$$

i funkcija

$$K_3(x) = \int_x^{+\infty} t^{-1}L(t)\, dt$$

je sporo promenjiva.

6° Ako je funkcija $L(x)$ sporo promenjiva, funkcije

$$K_4(x) = \int_1^x L(t)dt \quad \text{i} \quad K_5(x) = L'(x)$$

ne mogu biti sporo promenjive.

Primetimo da tvrdjenje 1° važi (u dve varijante) kako za opšti slučaj sporo promenjive funkcije (definicija 1), tako i za sporo promenjive funkcije u smislu naše konvencije u 2.2.

Dokaz. 1° Očigledno je da su proizvod i količnik dve sporo promenjive funkcije takodje sporo promenjive funkcije. To isto, medjutim, važi i za zbir. Neka su, naime, $L_1(x)$ i $L_2(x)$ sporo promenjive funkcije i neka je $L(x)=L_1(x)+ + L_2(x)$. Za fiksirano $\lambda > 0$ imamo

$$L_\nu(\lambda x) = L_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x) L_\nu(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2).$$

Stavimo li $\varepsilon_3(x) = \max\left\{|\varepsilon_1(x)|, |\varepsilon_2(x)|\right\}$, dobijamo

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + \frac{\varepsilon_1(x) L_1(x) + \varepsilon_2(x) L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)}$$

$$= 1 + \varepsilon(x),$$

gde

$$|\varepsilon(x)| \leqq \frac{|\varepsilon_1(x)| L_1(x) + |\varepsilon_2(x)| L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)}$$

$$\frac{{}_3(x) L_1(x) + {}_3(x) L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)} = \varepsilon_3(x) \to 0 \quad (x \to +\infty);$$

dakle,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Iz prethodnog se lako izvodi tvrdjenje 1°, u obe varijante.

2° Pod formulisanim pretpostavkama, $r(x) \sim a\, x^n (x \to +\infty)$; $a > 0$, n prirodan broj), što znači da je

$$r(x) = c(x)\, a x^n, \text{ gde } \lim_{x \to +\infty} c(x) = 1.$$

Stoga, za fiksirano $\lambda > 0$, kad je x dovoljno veliko imamo

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} = \frac{L(r(\lambda x))}{L(r(x))} = \frac{L((c(\lambda x) a \lambda^n x^n)}{L(c(x) a\, x^n)}$$

$$\frac{L\left\{\frac{c(\lambda x)}{c(x)} \lambda^n \cdot a\, c(x) x^n\right\}}{L(a\, c(x)\, x^n)} \to 1 \qquad (x \to +\infty),$$

prema teoremi (0), jer je za dovoljno veliko x

$$\frac{1}{2}\lambda^n < \frac{c(\lambda x)}{c(x)}\ \lambda^n < 2\lambda^n \quad .$$

3^o Pod formulisanim uslovima funkcija $L(x)$ je difinisana, pozitivna i merljiva na $[o, +\infty)$. Neka je $\lambda > o$ fiksirano. Tada postoji $x_o \geq o$ takvo da je za $x \geq x_o$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} \leq 2.$$

Onda je, s obzirom na činjenicu da $L_2(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ i na teoremu (0),

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{L_1\left(\frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} \cdot L_2(x)\right)}{L_1(L_2(x))} = 1.$$

4^o Tvrdjenje da sporo promenjiva funkcija može oscilirati (ne težiti odredjenoj konačnoj ili beskonačnoj granici) dokazaćemo primerom sporo promenjive funkcije

$$L(x) = e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} \qquad (x > 1),$$

sa

$$\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{1 + \log x},$$

gde je funkcija $\eta(x)$ odredjena na sledeći način. Neka je

$$x_1 = 3,\ x_{n+1} = e^{e-1}(x_n+1)^e + 1;$$

tada $x_n > x_1 = 3$, pa

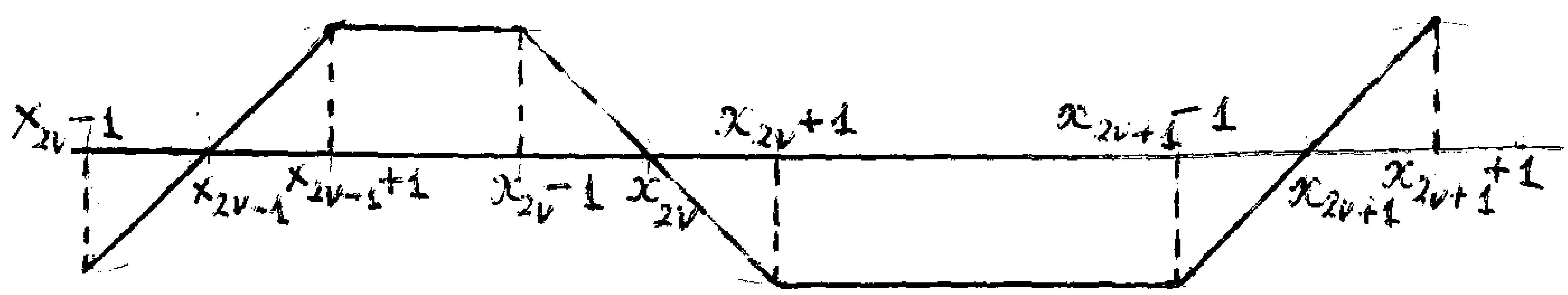
$$x_{n+1} - x_n = x_n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) > 3.\ (e^{e-1} - 1)$$

$$(17) \qquad > 3 \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Stavljamo

$$\eta(x) = \begin{cases} x - x_{2\nu-1} & (x_{2\nu-1} - 1 < x < x_{2\nu-1} + 1) \\ 1 & (x_{2\nu-1} + 1 \leq x \leq x_{2\nu-1}) \\ -x - x_{2\nu+1} & (x_{2\nu} - 1 < x < x_{2\nu} + 1) \\ -1 & (x_{2\nu} + 1 < x \leq x_{2\nu+1} - 1) \\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots). & \end{cases}$$

Ova definicija je, s obzirom na (17), neprotivrečna. Grafik funkcije $\eta(x)$ u intervalu $x_{2\nu-1} - 1$, $x_{2\nu+1} + 1$ prikazan je na slici.



Funkcija $\eta(x)$ je očigledno neprekidna

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\eta(t)|\, dt}{t(1+\log t)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\int_{x_n+1}^{x_{n+1}-1} \frac{dt}{t(1+\log t)} + \left(\int_{x_n}^{x_n+1} + \int_{x_{n+1}-1}^{x_{n+1}} \right) \frac{|\eta(t)|}{t(1+\log t)}\, dt \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\log \frac{1 + \log(x_{n+1} - 1)}{1 + \log(x_n + 1)} + \alpha_n \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \alpha_n) \qquad (\alpha_n \downarrow 0, \quad n \to \infty)$$

oscilira izmedju konačnih granica: on ima dve tačke nagomilavanja: α i $1 + \alpha$, gde je stavljeno

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n \qquad (> 0).$$

Odatle izlazi da i funkcija $L(x)$ oscilira. Izvesnom modifikacijom izloženog primera može se formirati sporo promenjiva funkcija koja oscilira izmedju beskonačnih granica kad $x \to +\infty$,

4° Funkcije $K_\nu(x)$ $(\nu = 1,2)$ definisane su na $[0,+\infty)$ i neprekidne za $x>0$. Prema t. 5.1. i 5.4. imamo za $\lambda > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{K_1(\lambda x)}{K_1(x)} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^{\lambda x} L(t)\, dt}{\int_1^{x} L(t)\, dt}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Slično,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{K_2(\lambda x)}{K_2(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^{\lambda x} t^{-1} L(t)\, dt}{\int_1^{x} t^{-1} L(t)\, dt}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^{-1} L(\lambda x)}{x^{-1} L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1,$$

ukoliko $K_2(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$. U suprotnom slučaju je $\lim\limits_{x \to +\infty} K_2(x)$ pozitivan i konačan broj i stoga je $K_2(x)$ ponovo sporo promenjiva. U poslednjem slučaju se na osnovu teoreme 5.5.1., slično kao u prethodnim slučajevima, dokazuje da je funkcija $K_3(x)$ sporo promenjiva.

6° Kako

$$x^{-\frac{1}{2}} \quad K_4(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad K_1(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty),$$

funkcija $K_4(x)$, prema 5.4., ne može biti sporo promenjiva.

Ako bi funkcija $K_5(x) = L'(x)$ bila sporo promenjiva, ona bi bila za svako $x \geqslant o$ konačna i integrabilna u svakom konačnom podintervalu intervala $[o, +\infty)$. Onda bi se imalo

$$(18) \qquad L(x) = \int_1^x K_5(t)\, dt + L(1),$$

gde, prema prethodnom rezultatu, za $x > 1$ pozitivna funkcija $K_5(t)$ dt ne bi bila sporo promenjiva. Onda ni funkcija $L(x)$, prema (18), ne bi mogla biti sporo promenjiva.

6.1.1. Primetimo da iz tvrdjenja 4° prethodne teoreme izlazi da, specijalno, <u>sporo promenjiva funkcija ne mora biti asimptotski jednaka nekoj monotonoj funkciji</u>. Ovo je u [24] (str.46) dokazano posebnim primerom.

6.2. <u>Teorema III. Neka je funkcija $\varphi(x)$ neopadajuća i sa donje strane ograničena u intervalu (o, δ) $(\delta > o)$ i neka je $\alpha > o$. Tada:</u>

1° <u>Konačnost jednog od integrala</u>

$$(19) \qquad \int_o^\delta x^\alpha L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \qquad \underline{i} \qquad \int_o^\delta x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx$$

<u>povlači konačnost drugog od njih i</u>

$$(20) \qquad \varphi(x) \int_o^x t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \to o \qquad (x \to +o).$$

2^o Pod uslovom

$$\int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt < +\infty ,$$

konačnost jednog od integrala

$$(21) \qquad \int_0^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) d\,\varphi(x) \qquad i \qquad \int_0^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx$$

povlači konačnost drugog od njih i

$$R\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x) \to o \qquad (x \to +0).$$

Za $L(x) \equiv 1$ tvrdjenje 1^o svodi se na specijalan slučaj leme B.Sz.-Nagy-a u [9].

Dokaz. 1^o Može se pretpostaviti da je $\varphi(x) \geq o$, $(0 < x \leq \delta)$, jer su, kad je $\varphi(x)$ konstanta, automatski oba integrala (19) konačna i važi (20).

Prema tvrdjenju teoreme I pod 2^o (u 5.4),

$$\int_0^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\alpha-1} L(t) dt$$

$$\sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \to +o).$$

Odavde izlazi ekvikonvergencija integrala

$$\int_0^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \qquad i \qquad \int_0^{\delta} \left[\int_0^{x} t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\,\varphi(x).$$

S druge strane, za $o < \varepsilon < \delta$ dobija se parcijalnom integracijom

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\int_0^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\left[-\varphi(x)\right] = -\varphi(\delta) \int_0^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ \varphi(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx$$

$$\leq \int_0^\delta x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)dx - \varphi(\alpha) \int_0^\delta x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)dx.$$

Odatle izlazi ekvikonvergencija integrala

$$\int_0^\delta \left[\int_0^\alpha t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\left[-\varphi(x)\right] \quad \text{i} \quad \int_0^x t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)dx$$

i dalje, zbog prethodnog rezultata, ekvikonvergencija integrala (19). Odatle, najzad, sledi da konvergencija jednog od ta dva integrala povlači

$$0 \leq \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right)dx \leq \int_0^\varepsilon x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0).$$

2° I u ovom slučaju se, uz isto obrazloženje kao pod 1°, može pretpostaviti da je $\varphi(x) \geq 0 \quad (0 < x \leq \delta)$. Za $0 < \varepsilon < \alpha$ onda imamo

$$\int_\varepsilon^\delta R\left(\frac{1}{x}\right) d\left[-\varphi(x)\right] = R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varphi(\varepsilon) - R\left(\frac{1}{\delta}\right)\varphi(\delta)$$

$$(22) \qquad + \int_\varepsilon^\delta x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x)\, dx \geq \int_\varepsilon^\delta x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)dx - R\left(\frac{1}{\delta}\right)\varphi(\delta).$$

Odavde se izvodi da konvergencija prvog integrala (21) povlači konvergenciju drugog. Konvergencija drugog integrala (21), medjutim, povlači

$$0 \leq R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \int_{1/\varepsilon}^\infty t^{-1} L(t)dt$$

$$= \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right)dt \leq \int_0^\varepsilon t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) \varphi(t)dt$$

$$\to 0 \qquad (\varepsilon \to +0)$$

i dalje, prema (22), konvergenciju prvog integrala (21).

6.3. U [4] Aljančić, Bojanić i Tomić dokazali su sledeću lemu:

Ako je $L(x)$ proizvod dve monotone sporo promenjive funkcije $L^{(1)}(x)$ i $L^{(2)}(x)$ (ili dve sporo promenjive funkcije $L^{(1)}(x)$ i $L^{(2)}(x)$ takve da $L^{(1)}(n) \nearrow$, a $L^{(2)}(n) \searrow$) i $\alpha > o$, tada je

$$(23) \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \nu^{-\alpha} L(\nu) - (\nu+1)^{-\alpha} L(\nu+1) \right| \leq M(\alpha)\, n^{-\alpha} L(n)$$

$$(n = 1,2,3,\ldots).$$

Njihov dokaz reprodukujemo sa jednom manjom izmenom.

Dokaz. Stavimo $L_n = L(n)$, $L^{(1)}(n) = a_n$,

$L^{(2)}(n) = b_n$. Tada je, za $p > n$,

$$\sum_{\nu=n}^{p} \left| \nu^{-\alpha} L_\nu - (\nu+1)^{-\alpha} L_{\nu+1} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=n}^{p} L_\nu \left[\nu^{-\alpha} - (\nu+1)^{-\alpha} \right] + \sum_{\nu=n}^{p} (\nu+1)^{-\alpha} \left| L_\nu - L_{\nu+1} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=n}^{p} L_\nu \left[\nu^{-\alpha} (\nu+1)^{-\alpha} \right] + \sum_{\nu=n}^{p} (\nu+1)^{-\alpha} b_\nu (a_{\nu+1} - a_\nu)$$

$$+ \sum_{\nu=n}^{p} (\nu+1)^{-\alpha} a_{\nu+1} (b_\nu - b_{\nu+1}) = S_1 + S_2 + S_3.$$

Prema teoremi I pod 2^o (u 5.4) i nejednakosti

$$1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\alpha} < \frac{\alpha}{\nu} \qquad (\nu > o),$$

imamo

$$S_1 = \sum_{\nu=n}^{p} \nu^{-\alpha} L(\nu) \left[1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\alpha} \right]$$

$$(24) \quad \alpha \sum_{\nu=n}^{p} \nu^{-\alpha-1} L(\nu) \leq M_1(\alpha)\, L(n).$$

Primenom parcijalne sumacije i rezultata (24) dobija se

$$S_2 \leq b_n \sum_{\nu=n}^{p} (\nu+1)^{-\alpha} \, (a_{\nu+1} - a_\nu)$$

$$\leq b_n \sum_{\nu=n}^{p} \left[\nu^{-\alpha} - (\nu+1)^{-\alpha}\right] a_\nu + b_n \, (p^{-\alpha} a_p - n^{-\alpha} a_n)$$

$$\leq b_n \sum_{\nu=n}^{p} \left[\nu^{-\alpha} - (\nu+1)^{-\alpha}\right] a_\nu + p^{-\alpha} a_p \, b_n.$$

$$(25) \leq M_2(\alpha) \; n^{-\alpha} L_n + p^{-\alpha} a_p \, b_n.$$

Najzad, korišćenje osobine 5.5. sporo promenjive funkcije daje

$$S_3 = \sum_{\nu=n}^{p} (\nu+1)^{-\alpha} a_{\nu+1} \, (b_\nu - b_{\nu+1})$$

$$\leq \sup_{n \leq t < +\infty} \left\{ t^{-\alpha} L^{(1)}(t) \right\} \sum_{\nu=n}^{\infty} (b_\nu - b_{\nu+1})$$

$$(26) \leq M_3(\alpha) \; n^{-\alpha} L^{(1)}(n) \, b_n = M_3(\alpha) \, n^{-\alpha} L_n.$$

Prema (24, (25) i (26), dobija se

$$\sum_{\nu=n}^{p} \left| \nu^{-\alpha} L_\nu - (\nu+1)^{-\alpha} L_{\nu+1} \right| \leq M(\alpha) n^{-\alpha} L_n + p^{-\alpha} a_p \, b_n$$

i konačno nejednakost (23) puštajući da $p \to \infty$.

6.4. Sledeću lemu iskoristili su autori za dokaz inverznog dela svog stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova (v. [6] i § 1 u II delu ovog rada).

Neka je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija, $c_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ i neka, za neko $\alpha > 0$, $n^{-\alpha} c_n \downarrow$ $(n = 1,2,\ldots)$. Tada

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sim C n^{\beta} L(n) \qquad (n \to \infty), \tag{27}$$

sa $C > 0$, $\beta > 0$, povlači

$$c_n \sim C \beta n^{\beta-1} L(n) \qquad (n \to \infty).$$

Dokaz. Neka je $\delta > 0$ i $m = [n + \delta n]$.

Tada je, prema (27),

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} c_\nu = C \left[m^{\beta} L(m) - n^{\beta} L(n) \right] + o\,(m^{\beta} L(m))$$

$$+ o(n^{\beta} L(n)) = C n^{\beta} L(n) \left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} \frac{L(m)}{L(n)} - 1 \right]$$

$$+ o\,(n^{\beta} L(n)).$$

Kako, s jedne strane,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\beta} \frac{L(m)}{L(n)} = \left[1 + \delta + o(1)\right]^{\beta} \frac{L\,((1+\delta+o(1))n)}{L\,(n)}$$

$$\to (1+\delta)^{\beta} \qquad (n \to \infty), \tag{28}$$

a s druge strane, za $n < \nu \leq m$,

$$c_\nu \leq \left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha} c_n \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha} c_n \quad (1+\delta)^{\alpha} c_n,$$

to dobijamo

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} c_\nu \leq (m-n)\,(1+\delta)^\alpha\, c_n \leq n\,\delta\,(1+\delta)^\alpha\, c_n$$

i dalje, prema (28),

$$n\,\delta\,(1+\delta)^\alpha\, c_n \geq C n^\beta L(n) \left[(1+\delta)^\beta - 1 \right] + o\,(n^\beta L(n)).$$

Odatle se dobija

$$\varliminf_{n \to \beta} \frac{c_n}{n^{\beta-1} L(n)} \geq C\, \frac{(1+\delta)^\beta - 1}{\delta(1+\delta)^\alpha}$$

i dalje, puštajući da $\delta \to +\ 0$,

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{c_n}{n^{\beta-1} L(n)} \geq C_\beta \ .$$

Na sličan način, polazeći od grupe članova levo od c_n, dobija se

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{c_n}{n^{\beta-1} L(n)} \leq C_\beta \ ;$$

dakle,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{n^{\beta-1} L(n)} = C_\beta \ .$$

6.5. Rezultat koji sledi, izmedju ostalog, ima za posledicu da se u svim rasudjivanjima u II delu ovog rada i njima analognim može, bez smanjenja opštosti, pretpostaviti da svaka sporo promenjiva funkcija L(x) o kojoj je reč ima za $x \geq 0$ onoliko izvoda koliko se želi, kao i da je, kadgod se uvodi uslov monotonije ili konveksiteta u vezi sa L(x), svejedno da li se njemu podvrgava funkcija u pitanju ili samo odgovarajući niz celobrojnih vrednosti.

<u>Teorema IV.</u> <u>Za svaku sporo promenjivu funkciju L(x) postoji za $x \geq 0$ beskrajno diferencijabilna sporo promenjiva funkcija $L_0(x)$ sa osobinama:</u>

1° $L_o(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty)$.

2° $L_o(n) = L(n) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$.

3° Ako je funkcija $L(x)$ monotona, za $x \geqslant 0$ ili za dovoljno veliko x, onda to isto svojstvo ima i $L_o(x)$.

4° Odgovarajuće tvrdjenje važi i za konveksitet.

Dokazujemo najpre dve leme.

Lema I. Neka je $a < b$, $A < B$. Tada postoji funkcija $F(x)$ koja je:

1° svuda beskrajno diferencijabilna,

2° u intervalu $[a,b]$ strogo monotona,

3° sa osobinama

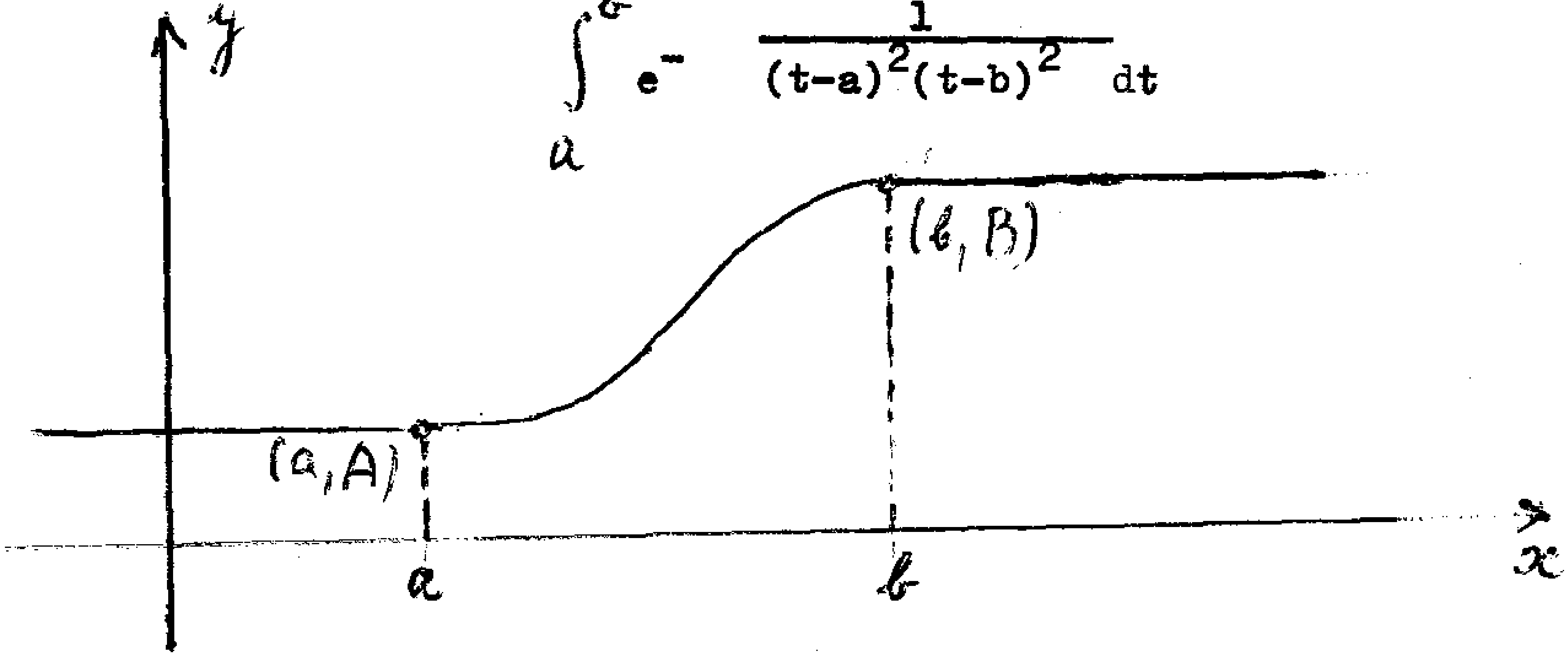
$$F(x) = A \quad (x \leqslant a), \quad F(x) = B \qquad (x \geqslant b).$$

Dokaz. Ova svojstva ima funkcija

$$F(x) = \begin{cases} A & (x < a) \\ G(x) & (a \leqslant x \leqslant b) \\ B & (x > b), \end{cases}$$

gde je

$$G(x) = (B-A)\frac{\displaystyle\int_a^x e^{-\frac{1}{(t-a)^2(t-b)^2}}\,dt}{\displaystyle\int_a^b e^{-\frac{1}{(t-a)^2(t-b)^2}}\,dt} + A.$$



Lema II. Neka je $a < b$,

$\alpha < \dfrac{B - A}{b - a} < \beta$. Tada postoji funkcija $H(x)$ koja je:

1° svuda beskrajno diferencijabilna,

2° u intervalu $[a, b]$ konveksna,

3° sa osobinama

$$H(x) = A + \alpha(x-a) \quad (x < a), \quad H(x) = B + \beta(x-b) \qquad (x > b).$$

Dokaz. Stavimo

$$K(x) = \gamma \int_a^x dt \int_c^t e^{-\frac{1}{(u-a)^2(u-b)^2}} du + \delta \int_a^x e^{-\frac{1}{(t-a)^2(t-b)^2}} dt + \varepsilon \quad (c < a).$$

Ova funkcija je svuda beskrajno diferencijabilna. Konstante γ, δ, ε i c odredjujemo iz uslova:

$$K(a) \equiv \varepsilon = A, \quad (29) \; K(b) \equiv \gamma \int_a^b dt \int_c^t e^{-\frac{1}{(u-a)^2(u-b)^2}} du + \delta \int_a^b e^{-\frac{1}{(t-a)^2(t-b)^2}} dt + \varepsilon = B,$$

$$(30) \quad K'(a) \equiv \gamma \int_c^a e^{-\frac{1}{(u-a)^2(u-b)^2}} du = \alpha$$

$$(31) \quad K'(b) = \gamma \int_c^b e^{-\frac{1}{(u-a)^2(u-b)^2}} du = \beta .$$

Dobijamo:

$$\varepsilon = A;$$

bar jedan od brojeva α i β je $\neq 0$; neka je to, na primer, α; tada $c \neq a$, $\gamma \neq 0$, pa se deobom (31) sa (30) dobija

$$\frac{\int_c^b}{\int_c^a} = \frac{\beta}{\alpha},$$

tj.

$$(32) \qquad \frac{\int_a^b}{\int_c^a} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$$

Kako je leva strana za c $\neq$ o neprekidna funkcija i za c $\geq$ a uzima sve negativne, a za c $\leq$ a sve pozitivne vrednosti, postoji broj c koji zadovoljava jednačinu (32). Onda se γ odredjuje iz (3o), potom δ iz (29). Postupak je sličan u slučaju kada je α = o, $\beta \neq$ o.

Sa ovako odredjenim konstantama,

γ, δ, ε, c, K(x), dakle, ispunjava uslove

$$K(a) = A, \quad K(b) = B, \quad K'(a) = \quad , \quad K'(b) = \beta .$$

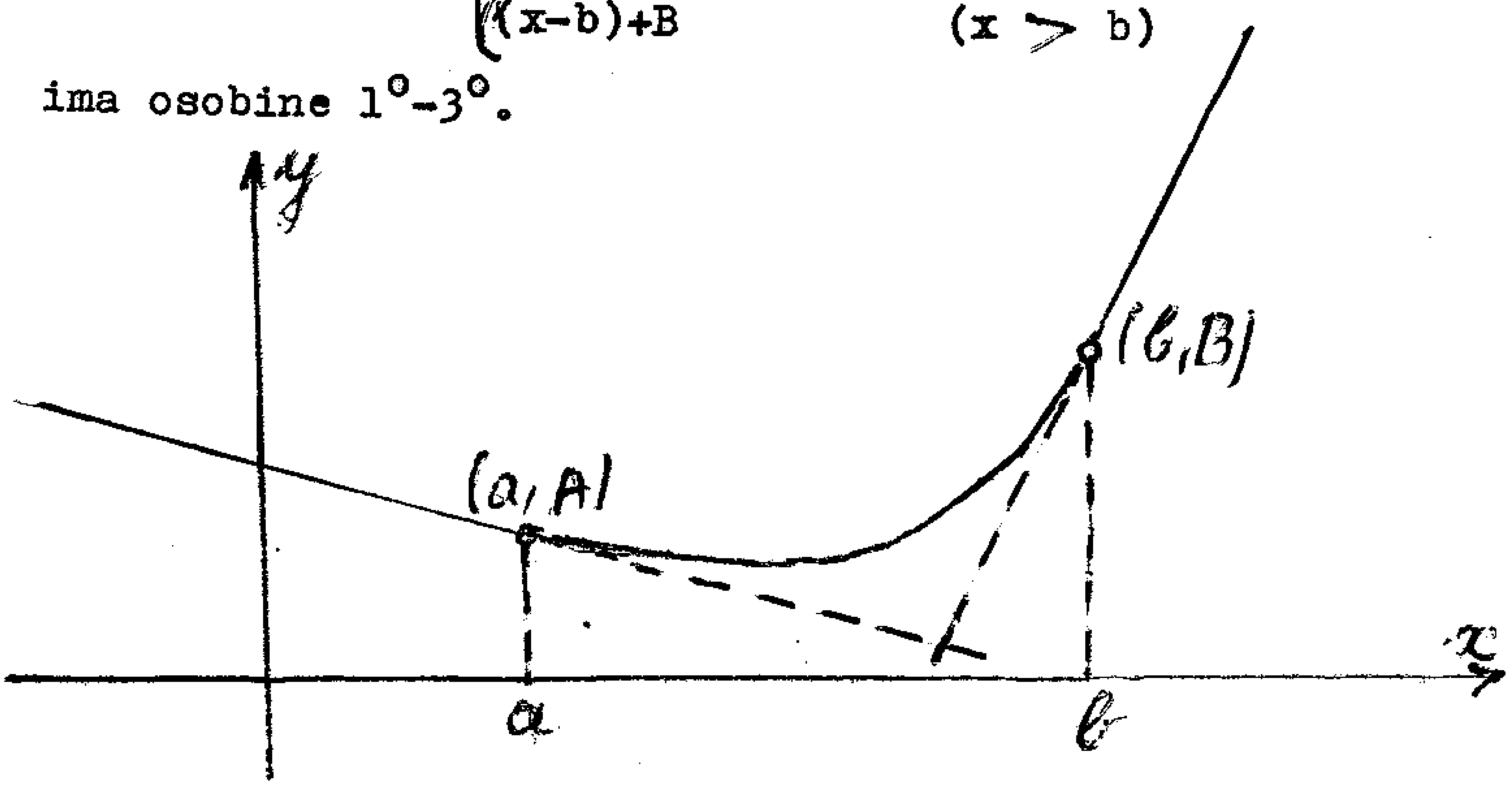
Sem toga je

$$K^{(\nu)}(a) = K^{(\nu)}(b) = 0 \quad (\nu = 2,3,\ldots).$$

Posle ovoga jasno je da funkcija

$$H(x) = \begin{cases} \alpha(x-a) + A & (x < a) \\ k(x) & (a \leq x \leq b) \\ \beta(x-b) + B & (x > b) \end{cases}$$

ima osobine 1^o-3^o.



<u>Dokaz teoreme IV</u>. Označimo sa $G_n(x)$ funkciju $G(x)$ iz dokaza leme 1, sa $a = n$, $b = n+1$,

$$A = \operatorname{Min}\{L(n),\ L(n+1)\}, \qquad B = \operatorname{Max}\{L(n),\ L(n+1)\},$$

pod uslovom da $L(n) \neq L(n+1)$. Stavimo

$$L_o(x) = \begin{cases} G_n(x) & (\text{ako } L(n) < L(n+1)) \\ L(n) & (\text{ako } L(n) = L(n+1)) \\ G_n(2n+1-x) & (\text{ako } L(n) > L(n+1)). \end{cases} \quad \begin{matrix}(n \leq x \leq n+1; \\ n = o,1,2,\ldots).\end{matrix}$$

Ova funkcija očigledno ispunjava uslov 2^o i strogo monotono raste, konstantna je, odnosno strogo monotono opada u intervalu $[n,\ n+1]$ prema tome da li je $L(n) < L(n+1)$, $L(n) = L(n+1)$ ili $L(n) > L(n+1)$. Odatle izlazi da ona ispunjava uslov 3^o i da je, za $x \geq o$,

$$A(x) \overset{def}{=\!=} \inf_{[x] \leq t \leq [x]+1} \{L(t)\} \leq L_o(x) \leq \sup_{[x] \leq t \leq [x]+1} \{L(t)\} \overset{def}{=\!=} B(x),$$

tj.

$$\frac{A(x)}{L(x)} \leq \frac{L_o(x)}{L(x)} \leq \frac{B(x)}{L(x)},$$

odakle, prema teoremi (O), izlazi da $\dfrac{L_o(x)}{L(x)} \to 1 \ (x \to +\infty)$,

tj. da $L_o(x)$ ima i osobinu 1^o. Funkcija $L_o(x)$ je, sem toga, prema lemi I, i beskonačno diferencijabilna.

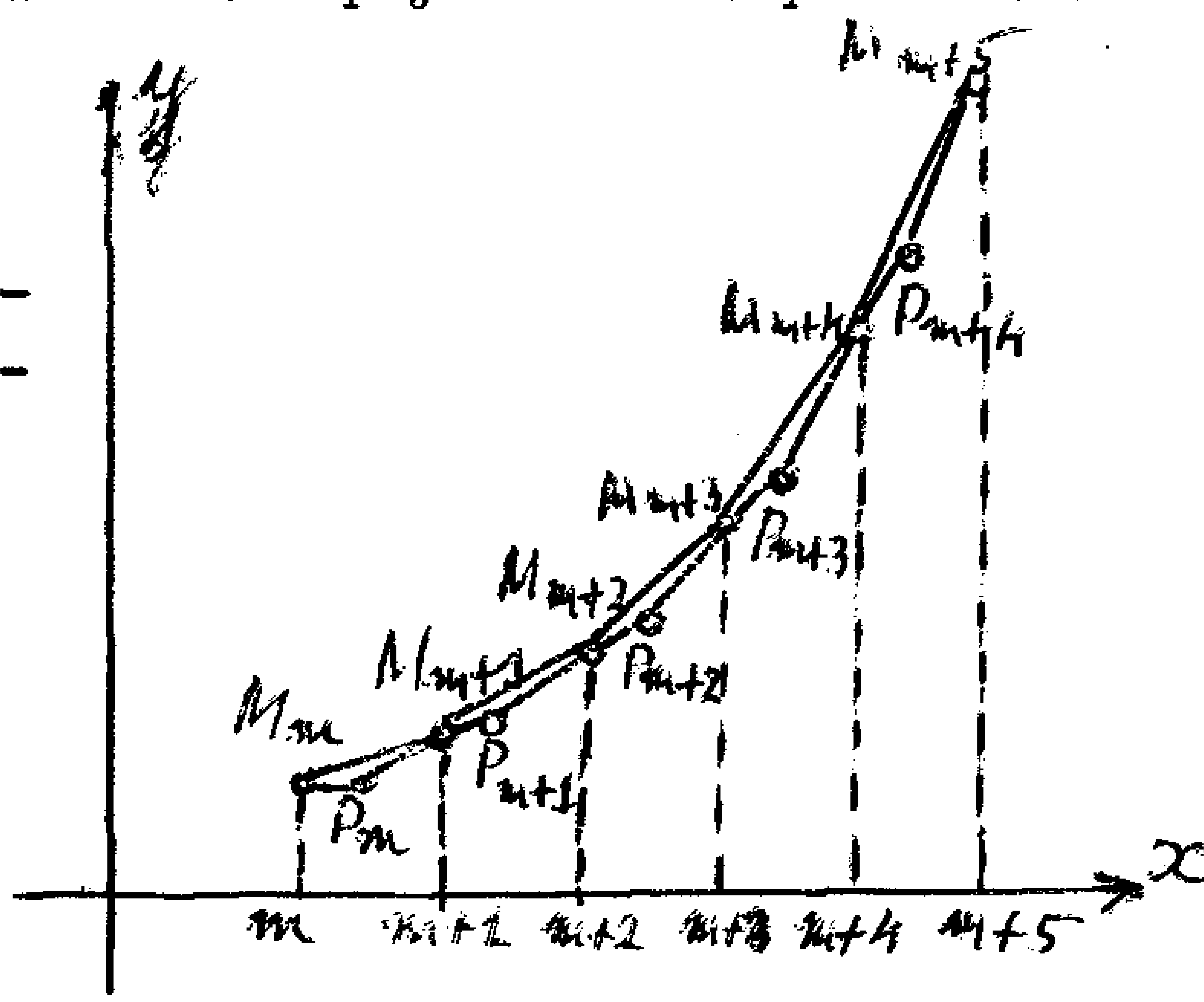
Ako je funkcija $L(x)$ konveksna i monotona[1] za $x \geq m$ (m prirodan broj ili nula) i funkcija $L_o(x)$ će biti konveksna za $x \geq m$, uz zadržavanje ostalih osobina, ukoliko se za $x \geq m$ konstruiše na sledeći način. Pretpostavimo da je u pitanju stroga konveksnost funkcije $L(x)$ za $x \geq m$.

Stavimo $M_\nu = (\nu, L(\nu))$ ($\nu = o,1,2,\ldots$) i kroz tačku Mm povucimo

---

[1] Konveksitet za dovoljno veliko x povlači monotoniju za dovoljno veliko x.

pravu p_m koja se desno od prave $x = m$ nalazi ispod prave $M_m M_{m+1}$ i penje se ili spušta zajedno s njom. Ako se na p_m uzme, izmedju prave $x = m$ i $x = m+1$, tačka P_m dovoljno bliska tački M_m, duži $M_m M_{m+1}$ i $M_{m+1} M_{m+2}$ nalaze se sa iste strane prave $P_m M_{m+1}$ i penju se ili spuštaju zajedno sa njom. Uzimajući na poslednjoj pravoj, u pojasu izmedju pravih $x = m+1$ i $x = m+2$, tačku P_{m+1} dovoljno blisku tački M_{m+1} postiže se da se duži $M_{m+1}M_{m+2}$ i $M_{m+2} M_{m+3}$ nalaze se iste strane prave $P_{m+1}M_{m+2}$. Produžujući ovako, dobija se poligonalna linija C: $M_m P_{m+1} P_{m+2} \dots$ koja za $x \geq m$ predstavlja grafik funkcije $l(x)$ sa osobinama $1^o - 4^o$, što se lako može u pojedinostima proveriti. "Zaobljujući" liniju C kod temena $P_m, P_{m+1}, \dots$ dovoljno malim krivolinijskim delovima, u smislu leme 2, dobiće se kriva koja predstavlja grafik beskonačno diferencijabilne funkcije $L_o(x)$ $(x \geq m)$ sa osobinama 1^o-4^o. Na sličan način može se postupiti u slučaju kad konveksnost nije stroga.



6.6. Iz grupe rezultata o asimtotskom ponašanju jedne klase odredjenih integrala koje su Aljančić, Bojanić i Tomić dokazali u [3] , navodimo sledeća tri osnovna:

6.6.1. <u>Neka je L(x) sporo promenjiva funkcija i neka je</u>

$$\int_{+0}^{b} x^{-\eta} |f(x)| < dx < +\infty$$

<u>za neko $\eta > 0$.</u>

<u>Tada</u>

$$\int_{+0}^{b} (x)L(\lambda x)dt \sim L(\lambda) \int_{+0}^{b} f(x)dx \qquad (\lambda \to +\infty),$$

<u>pod pretpostavkom da postoji integral na levoj strani.</u>

6.6.2. Neka je L(x) sporo promenjiva funkcija i neka je

$$\int_a^{\infty} x^{\eta} |f(x)| \, dx < +\infty$$

za neko $\eta > 0$.

Tada integral

$$\int_a^{\infty} f(x) \, L(\lambda x) \, dx$$

postoji i

$$\int_a^{\infty} f(x) \, L(\lambda x) \, dx \sim L(\lambda) \int_a^{\infty} f(x) \, dx \qquad (\lambda \to +\infty).$$

6.6.3. Neka je L(x) sporo promenjiva funkcija i neka je

$$\int_{+0}^{\infty} x^{\eta} \, |f(x)| \, dt < +\infty$$

za $-\alpha < \eta < \beta \ (\alpha, \beta > 0)$.

Tada,

$$\frac{1}{\lambda} \int_{+0}^{\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) L(x) \, dx \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) \, dx \qquad (\lambda \to +\infty).$$

7. NEKE KLASE SPORO PROMENJIVIH FUNKCIJA

Označimo klasu svih sporo promenjivih funkcija sa $\mathcal{K}$. Pojedine njene podklase obeležavaćemo istim ovim slovom sa dodatnim indeksima.

7.1. Zygmund-ova klasa sporo promenjivih funkcija . Sledećoj klasi funkcija, koju A. Zygmund definiše i koristi u [35] (str.299 i dalje), R.Bojanić i J. Karamata u [13] daju naziv Zygmund-ova klasa sporo promenjivih funkcija. Ovaj naziv i mi usvajamo.

Definicija. Za funkciju $K(x)$ koja je za $x \geq o$ svojstvo da, za svako $\delta > o$,

$$x^{\delta} K(x) \nearrow \quad \text{kad je } x \text{ dovoljno veliko,}$$

$$x^{-\delta} K(x) \searrow \quad \text{kad je } x \text{ dovoljno veliko,}$$

kaže se da pripada Zygmund-ovoj klasi sporo promenjivih funkcija ili da je sporo promenjiva u Zygmund-ovom smislu. Zygmund-ovu klasu sporo promenjivih funkcija označavamo sa $\mathcal{K}o$.

7.7.1. Prethodne nazive opravdava činjenica da je

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$$

Zaista, neka $K(x) \in \mathcal{K}o$ i neka je $\lambda > 1$. Tada za svako $\delta > o$ imamo, ukoliko je x dovoljno veliko,

$$\lambda^{-\delta} \leq \lambda^{-\delta} \frac{(\lambda x)^{\delta} K(\lambda x)}{x^{\delta} K(x)} = \frac{K(\lambda x)}{K(x)} = \lambda^{\delta} \frac{(\lambda x)^{-\delta} K(\lambda x)}{x^{-\delta} K(x)} \leq \lambda^{\delta}.$$

Odatle,

$$\lambda^{-\delta} \leq \varliminf_{x \to +\infty} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} \leq \lambda^{\delta}$$

i dalje, puštajući da $\delta \to + o$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} = 1.$$

Odavde i iz činjenice da je funkcija $K(x)$ očigledno merljiva izlazi da je ona sporo promenjiva u smislu naše konvekcije u 2.2 (pa samim tim i u smislu definicije 1).

7.1.2. $\mathcal{K}o$ je prava podklasa klase $\mathcal{K}$. Preciznije, važe sledeća tvrdjenja:

Teorema V. 1° Postoji sporo promenjiva funkcija $L_1(x)$ takva da ni za jedno $\delta > o$ ne važi ni

(33) $\quad x^{\delta} L_1(x) \nearrow \qquad$ (x dovoljno veliko) ,

ni

(34) $\quad x^{-\delta} L_1(x) \searrow \qquad$ (x dovoljno veliko).

2^o Postoji monotono rastuća sporo promenjiva funkcija $L_2(x)$ takva da ni za jedno $\delta > o$ ne važi (34).

3^o Postoje sporo promenjive funkcije takve da (33) ili (34) za neke vrednosti $\delta > o$ važi, a za neke ne važi.

Dokaz. 1^o Sve sporo promenjive funkcije oblika

$$L_1(x) = (1 + x^{-1} \sin x^2) \; e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \qquad (x > o),$$

gde je $\varepsilon(x)$ neprekidna funkcija koja teži nuli kad $x \to +\infty$, imaju osobinu o kojoj je ovde reč. Zaista, ni sa jednim $\alpha \neq o$

$$\left[x^{\alpha} L_1(x)\right]' = \left[(x^{\alpha} + x^{\alpha-1} \sin x^2) \; e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}\right]'$$

$$= x^{\alpha-1}\left[\alpha + 2x \cos x^2 + o(1)\right] \; e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}$$

nije stalnog znaka za dovoljno veliko x.

2^o Neka je, za $n = 1,2,3,\ldots$,

$$\eta(x) = \begin{cases} n^{\frac{1}{2}} & (n^2 \leq x \leq n^2 + 1) \\ 0 & (n^2 + 1 < x < (n+1)^2), \end{cases}$$

$$c(x) = e^{\int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt} \quad (x \geq 1), \quad L_2(x) = c(x) \log x \quad (x \geq 1).$$

Funkcija $L_2(x)$ je očigledno pozitivna i strogo rastuća i kako je

$$c(x) \leq e^{\underbrace{\sum_{\nu^2 \leq x-1} \sqrt{\nu} \int_{\nu^2}^{\nu^2+1} \frac{dt}{t}}} < e^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\nu} \log\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)} < +\infty \quad (x \geq 1),$$

tj. $\lim_{x \to +\infty} c(x) = c$ je pozitivan i konačan, zaključujemo da je funkcija $L_2(x)$ sporo promenjiva i strogo rastuća. Sa bilo kojim fiksiranim $\delta > 0$,

$$\left[x^{-\delta} L_2(x)\right]' = -\delta x^{-\delta-1} L_2(x) + x^{-\delta} \frac{\eta(x)}{x} L_2(x) + x^{-\delta-1} c(x)$$

$$= x^{-\delta-1} L_2(x) \left[\eta(x) - \delta + \frac{1}{\log x}\right]$$

uzima oba znaka za proizvoljno velike vrednosti x.

3° Tvrdjenje dokazuje sporo promenjiva funkcija

$$L(x) = (a + x^{-1} \sin x) \cdot e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \qquad (x \text{ dovoljno veliko}; \ a > 0).$$

Ako je $\delta > a^{-1}$ za dovoljno veliko x

$$x^{-\delta} L(x) \searrow \quad \text{i} \quad x^{\delta} L(x) \nearrow ,$$

a ako je $\delta < a^{-1}$ nijedna od prethodnih relacija neće važiti za dovoljno veliko x.

7.2. U radu [13] date su sledeće definicije i karakterizacije još dve klase sporo promenjivih funkcija, t.zv. klase <u>čistih kvazi monotonih</u> i <u>klase kvazi monotonih sporo promenjivih funkcija</u>, za koje ćemo redom upotrebljavati oznake $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$.

7.2.1. Za sporo promenjivu funkciju L(x) kaže se da je kvazi monotona ako je, za neko $\delta > 0$.

$$\int_0^x t^{\delta} \left| d L(t) \right| = O(x^{\delta} L(x)) \qquad (x \to +\infty),$$

a da je čista kvazi monotona funkcija ako za neko o

$$\int_0^x t^{\delta} \left| d L(t) \right| = o(x^{\delta} L(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

7.2.2.

7.2.2.1. Sporo promenjiva funkcija L(x) je kvazi monotona ako i samo ako postoje dve pozitivne neopadajuće funkcije $\varphi_{\nu}(x)$ ($\nu = 1,2$) sa osobinama

$$\varphi_{\nu}(2x) = O(\varphi_{\nu}(x)) \qquad (x \to +\infty;\ \nu = 1,2).$$

tako da je

$$L(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}.$$

7.2.2.2. Sporo promenjiva funkcija L(x) je čista kvazi monotona funkcija ako i samo ako postoje dve neopadajuće sporo promenjive funkcije $L_{\nu}(x)$ ($\nu = 1,2$) takvo da je

$$L(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x)}.$$

Poslednji uslov može se formulisati kao uslov da je L(x) proizvod dve monotone sporo promenjive funkcije.

7.3. Teoreme 7.2.2.1. i 7.2.2.2. dokazane su u [13]. U istom radu dokazana je sledeća karakterizacija Zygmund-ove klase sporo promenjivih funkcija $\mathcal{K}_0$:

Pozitivna funkcija $L(x)$ pripada klasi $\mathcal{K}_0$ ako i samo ako je

$$-\infty < D_+L(x) \leq D^+L(x) < +\infty \qquad (x \text{ dovoljno veliko})$$

i

$$x\,D_+\,L(x) = o\,(L\,(x)\,),\; x\,D^+L(x) = o\,(L(x)) \qquad (x \to +\infty\,).$$

7.4. Što se tiče odnosa izmedju klasa $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$, očigledno je, pre svega, da važi inkluzija

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2.$$

U [13] je dokazana inkluzija

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1.$$

Iz teoreme V u 7.1.2. izlazi (kao i iz kontraprimera na str.35-36 u [13]) da je klasa $\mathcal{K}_0$ pravi deo klase $\mathcal{K}_1$.

7.4. Na kraju prvog dela dokazujemo jednu teoremu o klasi $\mathcal{K}_0$.

Teorema VI. Svaka za dovoljno veliko x konveksna[1)] sporo promenjiva funkcija pripada Zygmund-ovoj klasi sporo promenjivih funkcija.

Dokaz. Neka je sporo promenjiva funkcija $L(x)$ konveksna nadole za $x > x_0$. Tada je

$$-\infty < L_+'\,(x) < +\infty \qquad (x > x_0),$$

$$L_+'\,(x) \leq \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leq L_+'\,(x+h) \qquad (h > 0,\; x > x_0),$$

1) Konveksnost se ne uzima u strogom smislu.

odakle, specijalno, sledi da je $L_+'(x)$ stalnog znaka za dovoljno veliko x.

S druge strane, ako je $\lambda > 1$ fiksirano, za proizvoljno dato $\varepsilon > 0$ postoji $x_\varepsilon \geq x_0$ takvo da je

$$(35) \qquad |L(\lambda x) - L(x)| < \varepsilon L(x) \qquad (x > x_\varepsilon).$$

Ako je $L_+'(x) \geq 0$ za dovoljno veliko x, iz (35), s obzirom na prethodno, izlazi

$$|L_+'(x)| \leq \left|\frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x}\right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{x}$$

$$(\quad x > x_\varepsilon \quad \text{i dovoljno veliko}),$$

tj.

$$\frac{x|L_+'(x)|}{L(x)} < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \qquad (x > x_\varepsilon \quad \text{i dovoljno veliko}).$$

Ako je $L_+'(x) < 0$ za dovoljno veliko x, tada se, prema (35), dobila

$$|L_+'(\lambda x)| \leq \left|\frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x}\right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} L(x)$$

$$(x > x_\varepsilon \quad \text{i dovoljno veliko}),$$

tj.

$$\frac{\lambda x\, |L_+'(\lambda x)|}{L(\lambda x)} < \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \frac{L(x)}{L(\lambda x)} .$$

U prvom slučaju se dobija

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x|L_+'(x)|}{L(x)} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda - 1},$$

a u drugom

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x|L_+'(x)|}{L(x)} = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\lambda x|L_+'(\lambda x)|}{L(\lambda x)} \leq \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Puštajući da $\varepsilon \to 0$, dolazi se u oba slučaja do zaključka

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x|L_+'(x)|}{L(x)} = 0.$$

Odavde i iz karakterizacije 7.3. klase $\mathcal{K}_0$ neposredno sledi da

$$L(x) \in \mathcal{K}_0.$$

II DEO

RAZLIČITE PRIMENE SPORO PROMENJIVIH FUNKCIJA U TEORIJI TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

Pojam sporo promenjive funkcije i njena svojstva u početku su našli primene u uopštavanju teorema Abelovog i Tauberovog tipa. U novije vreme one se pokazuju plodnim i u teoriji trigonometrijskih redova.

Ovde se, sumarno klasifikujući, javljaju tri grupe rezultata teorije sinusnih i kosinusnih trigonometrijskih redova koji se mogu generalizovati pomoću sporo promenjivih funkcija.

1° Ako se posmatraju redovi

$$(1)\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{i} \quad f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

sa $a_n \downarrow o$, $b_n \searrow o$ $(n\to\infty)$, koji definišu za $o < x < \pi$ neprekidne, ali ne obavezno i u Lebesgue-ovom smislu na (o, π) integrabilne funkcije, može se ispitivati veza izmedju L-integrabilnosti na (o, π) funkcije

$$x^{-\gamma} g(x), \text{ odnosno } x^{-\gamma} f(x),$$

i konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1} b_n, \text{ odnosno} \sum n^{\gamma-1} a_n,$$

gde je γ realna konstanta koja pripada pogodnim intervalima, kao i modifikovane varijante ove veze u graničnim slučajevima. U tom pravcu su u radu [5] uopšteni raniji rezultati R.P. Boas-a [10], P.Heywood-a [23] i W.H.Young-a [33].

2° Postoji veliki broj klasičnih i novijih rezultata o asimptotskom ponašanju redova (1), pod navedenim uslovima monotonije koeficijenata ili nekim njima analognim uslovima. I ovi rezultati se adekvatno generališu i kompletiraju uvodjenjem sporo promenljivih funkcija.

3° Najzad, polazeći od funkcija g(x) i f(x), sa izvesnim specijalnim osobinama, mogu se posmatrati njihovi uopšteni Fourier-ovi ili Fourier-ovi sinusni odnosno kosinusni redovi

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ i } f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

i ispitivati veza izmedju integrabilnosti na (o, π) funkcije

$$x^{\gamma-1} g(x), \text{ odnosno } x^{\gamma-1} f(x),$$

i konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n, \text{ odnosno } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n.$$

I u ovoj oblasti mogu se pomoću sporo promenjivih funkcija dobiti opštiji rezultati.

Pitanjima pod 1° mi se ovde nećemo baviti. U oblasti rezultata 2°, pored pregleda glavnih poznatih rezultata, iznećemo nekoliko zaključnih i dopunskih primedbi u obliku teorema VII i VIII. Najzad, što se tiče pitanja pod 3°, dajemo niz generalizacija rezultata Zygmund-a, B.Sz.- Nagy-a i Boas-a, od kojih neke poboljšavaju ranije autorove rezultate. Napominjemo da u § 3 ne vršimo samo generalizacije uvodjenjem sporo promenjivih funkcija, već proširujemo poznate rezultate i u drugim pravcima.

U onome što sledi za svaku funkciju označenu sa L(x) podrazumevaće se da je sporo promenjiva i na to neće više biti izričito ukazivano. S obzirom na teoremu IV iz prvog dela i na karakter rezultata o čijim je generalizacijama reč, može se predpostaviti da L(x) ima onoliko izvoda koliko se želi.

Integrabilnost funkcije f(x) u Lebesgue-ovom smislu na intervalu (o, π) svuda ćemo označavati sa

$$f(x) \in \mathcal{L}(o, \pi).$$

1. ASIMPTOTSKO PONAŠANJE SINUSNIH I KOSINUSNIH TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

Polaznim rezultatima u ovoj oblasti mogu se smatrati formule

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx &\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \sin nx &\sim x^{\gamma-1}\,(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad (x \to +0;\ 0<\gamma<1).$$

(Za dokaz videti, na primer, [35], str. 298-299).

Što se tiče sinusnih redova

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

Hardy [19] je 1928. g. dokazao da, pod predpostavkom $b_n \searrow 0$, za $0<\gamma<1$ relacija

$$(2) \qquad b_n \sim n^{-\gamma} \qquad (n \to \infty)$$

povlači relaciju

$$(3) \qquad g(x) \sim x^{\gamma-1}\,(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2} \qquad (x \to +0).$$

1931. g. Hardy [20] je ustanovio da, pod istim uslovima, i obrnuto (3) povlači (2). Kasnije je ovaj rezultat proširen na čitav interval $0<\gamma<2$. Analogni rezultati mogu se dobiti za kosinusne redove.

Aljančić, Bojanić i Tomić u radovima [4] i [6] uopštili su navedeni rezultat za sinusni red, dokazujući sledeće:

Neka je $0<\gamma<2$, $b_n \searrow 0$. Tada iz

$$(4) \qquad b_n \sim n^{-\gamma} L(n) \qquad (n \to \infty)$$

sledi

$$(5) \qquad g(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2} \quad (x \to +0)$$

i obrnuto, (5) povlači (4). Za $1<\gamma<2$ oba tvrdjenja važe čim su koeficijenti b_n ($n=1,2,\dots$) samo pozitivni. Za $0<\gamma\leq 1$ važi (5) i kad je

$$b_n = n^{-\gamma} L(n),$$

gde je $L(x)$ proizvod dve monotone sporo promenjive funkcije.

Nas ovde interesuje samo direktan deo ove teoreme tj. formulacije dovoljnih uslova za (5). U vezi s tim može se, s obzirom na dokaz teoreme, dodati da za $1<\gamma<2$ sam uslov (4) odnosno uslov

$$b_n = n^{-\gamma} L(n)$$

povlači (5).

Pod nešto drukčijim uslovima važe analogna tvrdjenja i za kosinusni red

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

gde

$$a_n = n^{-\gamma} L(n) \qquad (0 \qquad 1).$$

Aljančić, Bojanić i Tomić su u [4] i [6] preneli, uz pomoć sporo promenjive funkcije, i direktan i inverzan iskaz na slučaj sinusnog reda sa $\gamma = 0$. Direktan deo njihovog stava glasi:

Neka je $L(x)$ konveksna sporo promenjiva funkcija koja teži nuli kad $x \to +\infty$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

A. Zygmund u monografiji [35], operišući užim pojmom sporo promenjive funkcije, naime pojam funkcije iz klase $\mathcal{K}_0$ (v.7.1 iz I dela), proširuje stavove ovog tipa, za sinusne i kosinusne redove, na slučajeve $\gamma = 0$, $\gamma = 1$, pa dalje, "integracijom", koju ne obrazlaže bliže, i na druge intervale i celobrojne vrednosti za γ. Može se, medjutim, primetiti da se, uz izvesne izmene i dopune odgovarajućih dokaza u radovima navedenih autora, svi

Zygmund-ovi rezultati mogu formulisati sa opštim pojmom sporo promenjive funkcije i sa drugim varijantama uslova koje sadrže rezultati Aljančića, Bojanića i Tomića. Pri tome se prenošenju rezultata na sve intervale i celobrojne vrednosti za γ (ne idući levo od tačke $\gamma = o$) može, totalnom indukcijom, dati zatvoren oblik.

Sve predhodne rezultate i primedbe obuhvata i kompletira

Teorema VII. Sa oznakama

$$(6)\quad f_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \cos nx, \quad g_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx,$$

važe sledeća tvrdjenja:

1° Ako je sporo promenjiva funkcija $L(x)$ konveksna i teži nuli kad $x \to + o$, tada

$$g_o(x) \sim x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to + o);$$

ako je još $x\left[L(x) - L(x+1)\right]$ sporo promenjiva funkcija, tada

$$f_o(x) \sim \frac{\pi}{2} x^{-2} \left[L\left(\frac{1}{x}\right) - L\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right].$$

$$\left[\sim -\frac{\pi}{2} x^{-2} L'\left(\frac{1}{x}\right), \text{ ako je } -xL'(x) \text{ s.p.f.}\right] \quad (x \to + o).$$

2° Za $\gamma \in (2k, 2k+1) \cup (2k+1, 2k+2) \quad (k = o,1,2,\ldots)$

$$(7)\quad g_\gamma(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{+1-2\nu}(o)$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi\gamma}{2} \quad (x \to + o);$$

za $\gamma \in (o,1)$

$$(8)\quad f_\gamma(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}\gamma \quad (x \to + o);,$$

a za $\gamma \in (2k-1, 2k) \cup (2k, 2k+1) \quad (k=1,2,3,\ldots)$

$$(9)\quad f_\gamma(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{\gamma-2\nu}(o)^{1)}$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}\gamma \quad (x \to + o);$$

1) Za k=o ova suma se ne piše.

pri tome, relacije (7) za $\gamma \in (2k+1, 2k+2)$ $(k = 0,1,2,\dots)$ i relacije (9) za $\gamma \in (2k, 2k+1)$ $(k = 1, 2, 3\dots)$ važe čim je $L(x)$ sporo promenjiva funkcija a relacije (7) za $\gamma \in (2k, 2k+1)$ $(k = 0, 1, 2,\dots)$, relacije (8) i relacije (9) za $\gamma \in (2k-1, 2k)$ $(k = 1,2, 3\dots)$ ako je još ispunjen jedan od sledeća dva uslova:

(U_1) $x^{-\gamma} L(x) \searrow$;

(U_2) $L(x)$ je proizvod dve monotone sporo promenljive funkcije.

3° Sa oznakom

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n),$$

pod jednim od uslova (U_i) $(i=1,2)$:

$$g_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \quad (10)^{1)}$$

$$f_{2k}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^{k} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-2)!} L\left(\frac{1}{x}\right); \quad (11)$$

ako $\Sigma = +\infty$:

$$g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} S\left(\frac{1}{x}\right) \quad (12)^{1)}$$

$$f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} S\left(\frac{1}{x}\right) \quad (13)^{1)}$$

ako $\Sigma < +\infty$:

$$g_{2k}(x) \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} R\left(\frac{1}{x}\right); \quad (14)$$

$$f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} R\left(\frac{1}{x}\right) \quad (15)$$

$(x \to +0;\ k = 1,2,3,\dots)$.

1) U (10), (12) i (13) za k=1 sume se ne pišu.

4^o Pod uslovom (U_2) redovi (6) sa $o < \gamma \leq 1$ konvergiraju uniformno u svakom intervalu $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(o < \delta < \pi)$.

Napominjemo da je specifični uslov drugog tvrdjenja pod 2^o ispunjen ako je $- xL'(x)$ sporo promenljiva funkcija.

U predhodno navedenim rezultatima A.B.T i Zygmund-a sadržano je prvo tvrdjenje pod 1^o, zatim relacija (7) za $\gamma \in (o,1) \cup (1,2)$ i relacija (lo) za k=1, i to pod navedenim odgovarajućim uslovima, i najzad tvrdjenje 4^o. Drugo tvrdjenje pod 1^o i relacije (8): (9) za $\gamma \in (o,1) \cup (1,2)$;(11), (12) i (14) za k=2;(13) i (15 za k=1 - dokazane su u Zygmund-ovoj knjizi, ali pod užim predpostavkama nego u teoremi koju dokazujemo. Pri tome, u drugom tvrdjenju pod 1^o kod Zygmund-a predpostavke su uže stoga što je za funkciju L(t) predpostavljeno da je sporo promenljiva u smislu šire, a ne u smislu Zygmund-ove definicije, jer, prema teoremi (6), konveksnost sporo promenjive funkcije L(x) ima za posledicu da L(x) pripada Zygmund-ovoj klasi sporo promenljivih funkcija, nego stoga što se funkcija -kL(x) zamenjuje funkcijom $x[L(x)-L(x+1)]$ i za ovu poslednju predpostavljamo samo da je sporo promenljiva (u širem smislu).

S druge stranem predpostavka da je funkcija -xL (x) sporo promenljiva u Zygmund-ovom smislu povlači, kao što je kod Zygmund-a pokazano, konveksnost niza L(n). Zaista, tada, je funkcija $-L'(x)=x^{-1}[-xL\ (x)]$ nerastuća, što znači da je funkcija L(x) konveksna.

Dokaz. Ono što je ostalo da se dokaže dokazaćemo u sledećem redosledu:

a) tvrdjenje 4^o;
b) drugo tvrdjenje pod 1^o;
c) relacija (8) (pod odgovarajućim uslovima);
d) relaciju (7) za k=1,2,... i relacije (9);
e) relacije (13) i (15) za k=1;

f) preostale slučajeve relacija (1o) - (15).

a) Pod uslovom (U_2) i sa fiksiranim $\alpha\in(o,1)$, primenjujući parcijalno sumaciju i koristeći lemu 6.3 iz I dela dobijamo za $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$ $(o<\delta<\pi)$

$$\left|\sum_{\nu=m+1}^{p} L(\nu)\ \sin\nu x\right| =$$

$$=\left|\sum_{\nu=m+1}^{p-1}\left[\nu^{-\alpha} L(\nu)-(\nu+1)^{-\alpha} L(\nu+1)\right]\ \frac{\cos (m+1/2)x-\cos(\nu+1/2)x}{2\sin\frac{x}{2}} +\right.$$

$$\left.+\quad p^{-\alpha}L(p)\ \frac{\cos(m+1/2)x-\cos(p+1/2)\ x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{\nu=m+1}^{p-1}\left|\nu^{-\alpha} L(\nu) - (\nu+1)^{-\alpha} L(\nu+1)\right| + p^{-\alpha} L(p)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\left[M(\alpha)\ (m+1)^{-\alpha} L(m+1) + p^{-\alpha} L(p)\right].$$

Ista ova majoranta dobija se, na sasvim sličan način, u slučaju kosinusnog reda. Pomenuta majoranta, medjutim, ne zavisi od x i teži nuli kad $m,p\to\infty$.

b) Po pretpostavki o funkciji $L(x)$ izlazi da ona za dovoljno veliko x monotono teži nuli i da je stoga

$$(16)\qquad \sum_{n=n_0}^{\infty}\left|L(n)-L(n+1)\right| = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left[L(n)-L(n+1)\right] < +\infty\ .$$

Parcijalnom sumacijom dobija se onda $(o<x<\pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\cos nx = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} L(n)\ \cos nx =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{m-1}\left[L(n)-L(n+1)\right]\ \frac{\sin(n+1/2)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin x/2} + L(m)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin x/2}\right.$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[L(n)-L(n+1)\right]\ \left(\frac{\sin nx\ \ \cos x/2 + \cos nx\ \sin x/2}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (2\ \mathrm{tg}\ \ x/2)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[L(n)-L(n+1)\right]\ \sin nx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[L(n)-L(n+1)\right](\cos nx - 1)$$

$$(17) \quad = (2 \operatorname{tg} \tfrac{x}{2})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} . n \left[L(n) - L(n+1) \right] \sin nx + O(1),$$

jer, prema (16),

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[L(n) - L(n+1) \right] (\cos nx - 1) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} L(n) - L(n+1) + \quad .$$

Kako je, prema predpostavki, $x \left[L(x) - L(x+1) \right]$ sporo promenljiva funkcija i kako

$$n^{-1} . n \left[L(n) - L(n+1) \right] = L(n) - L(n+1) \downarrow \quad ,$$

to, prema tvrdjenju (1o) za k=1, poslednja suma u (17) ima kad x +o asimptotsko ponašanje funkcije $x^{-1} \left[L(\frac{1}{x}) - L(\frac{1}{x} + 1) \right] \frac{\pi}{2}$. Iz (17) onda izlazi tvrdjenje koje dokazujemo.

c) Prema navedenoj formuli, za $o < \gamma < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx \sim x^{\gamma - 1} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma \quad (x \to +o),$$

što se može napisati u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx = x^{\gamma - 1} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma + o(x^{\gamma-1}), \quad (x \to + \quad o).$$

Odatle je, za $o < \gamma < 1$,

$$\frac{x^{1-\gamma}}{L(\frac{1}{x})} \sum_{n=1}^{\infty} \left[L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx - \Gamma\, (1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma = \right.$$

$$= x^{1-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right] n^{-\gamma} \cos nx \quad + o\ (1) =$$

$$= T(x) + \ o(1) \qquad (x \to o),$$

tako da je dovoljno dokazati da $T(x) \to o \qquad (x \to +o)$.

Sa $o < \delta < 1 < \Delta < + \infty$, dobijamo

$$|T(x)| \ = x^{1-\gamma} \left(\sum_{n \leq \frac{\delta}{x}} + \sum_{\frac{\delta}{x} < n \leq \frac{\Delta}{x}} + \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} \right) \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right] \quad n^{-\gamma} \cos nx \leq$$

$$\leq \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \quad \left| \sum_{n \leq \frac{\delta}{x}} L(n) n^{-\gamma} \cos \ nx \quad + x^{1-\gamma} \sum_{n \leq \frac{\delta}{x}} n^{-\gamma} \cos \ nx \right| +$$

$$+ x^{1-\gamma} \left| \sum_{\frac{\delta}{x} \leq n < \frac{\Delta}{x}} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right] n^{-\gamma} \cos nx \right| +$$

$$+\ \frac{x^{1-\gamma}}{L(\frac{1}{x})}\left|\sum_{n>\frac{\Delta}{x}} L(n)n^{-\gamma}\cos nx\right| + x^{1-\gamma}\left|\sum_{n>\frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma}\cos nx\right|$$

$$(18)\qquad = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Imamo, dalje, sa 1,

$$T_1 \leq \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\sum_{n\leq\frac{\delta}{x}} L(n)\, n^{\beta-\gamma}\cdot n^{-\beta}|\cos nx|$$

$$\leq \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\max_{0\leq t\leq\frac{\delta}{x}}\left\{t^{\beta-\gamma}L(t)\right\}\sum_{n\leq\frac{\delta}{x}} n^{-\beta}$$

$$\leq M_1'\frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\beta-\gamma}L\left(\frac{\delta}{x}\right)\int_0^{\frac{\delta}{x}} t^{-\beta}dt$$

$$(19)\qquad \leq M_1'\,\delta^{1-\gamma}\frac{L(\delta x^{-1})}{L(x^{-1})},$$

i kao specijalan slučaj predhodnog,

$$(2o)\qquad T_2 \leq M_2\delta^{1-\gamma}.$$

Dalje se dobija $T_3 \leq x^{1-\gamma}\sum_{\frac{\delta}{x}\leq n<\frac{\Delta}{x}}\left|\frac{L(n)}{L(x^{-1})}-1\right|n^{-\gamma}|\cos nx|$

$$\leq x^{1-\gamma}\max_{\frac{\delta}{x}\leq t\leq\frac{\Delta}{x}}\left|\frac{L(t)}{L(x^{-1})}-1\right|\sum_{\frac{\delta}{x}<n\leq\frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \leq x^{1-\gamma}\max_{\frac{\delta}{x}\leq t\leq\frac{\Delta}{x}}\left|\frac{L(t)}{L(x^{-1})}-1\right|\int_{\frac{\delta}{x}-1}^{\frac{\Delta}{x}} t^{-\gamma}dt$$

$$(21)\qquad \leq M_3\frac{\Delta^{1-\gamma}-\delta^{1-\gamma}}{1-\gamma}\cdot\max_{\frac{\delta}{x}\leq t\leq\frac{\Delta}{x}}\left|\frac{L(t)}{L(\frac{1}{x})}-1\right|$$

Na osnovu već izvršene procene pod a) (slučaj sa kosinusima, kao što smo rekli, sasvim je analogan slučaju sa sinusima), imamo

$$T_4 = \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}\left|\sum_{n>\frac{\Delta}{x}} L(n)n^{-\gamma}\sin nx\right| \leq \frac{M_4'}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})}L\left([\Delta x^{-1}]+1\right)\left([\Delta x^{-1}]+1\right)^{-\gamma}$$

$$(22)\qquad \leq M_4\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{x^{-\gamma}}{L(x^{-1})}L(\Delta x^{-1})(\Delta x^{-1})^{-\gamma} = M_4\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\,\Delta^{-\gamma}\frac{L(x^{-1}\Delta)}{L(x^{-1})}$$

$$(22) \qquad = M_4 \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \Delta^{-\gamma} \frac{L(x^{-1}\Delta)}{L(x^{-1})}$$

i kao specijalan slučaj predhodnog

$$(23) \quad T_5 \leq M_5 \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma}$$

Prema nejednakostima (13), (14)-(18) i odgovarajućim osobinama sporo promenjive funkcije, puštajući da $x \to o$, dobija se

$$\overline{\lim_{x\to+o}} |T(x)| \leq (M_1+M_2)\delta^{1-\gamma} + (M_4+M_5)\Delta^{1-\gamma},$$

a puštajući potom da $\delta \to +o$, $\Delta \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+o} T(x) = o.$$

d) Prema predhodnom, važe relacije (2) sa k=o i to za $\gamma \in (o,1)$ pod jednim od uslova (U_i) (i=1,2), a za $\gamma \in (1,2)$ bez posebnih uslova. Odakle se, za $\gamma \in (o,1) \cup (1,2)$ i pod odgovarajućim uslovima za svaki interval, integracijom od o do $x \in (o,2\pi)$ dobija

$$f_{\gamma+1}(x) - f_{\gamma+1}(0) \sim \frac{x^{\gamma}}{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi}{2}\gamma$$

tj. sa $\gamma \in (1,2) \cup (2,3)$ $\qquad (x\to+0;\ \gamma\in(0,1)\cup(1,2))$

$$f_{\gamma}(x) - f_{\gamma}(0) \sim -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}\Gamma(1+1-\gamma)\cos\frac{\pi}{2}(\gamma-1)L\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\left(-\sin\frac{\pi}{2}\gamma\right)L\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma)L\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{\pi}{2}\gamma,$$

pri čemu ovo važi pod uslovima (U_i) (i=1,2) za $\gamma \in (1,2)$, a bez njih za $\gamma \in (2,3)$. Tvrdjenja (7) i (9) važe, dalje, za k=o odnosno za k=2. Ako se predpostavi da one važe za neki prirodan broj k, na isti način kao napred, integracijom od o do x i korišćenjem leme III, ustanovljava se njihovo važenje za prirodan broj k+1 i to pod odgovarajućim uslovima. Tako se preostala tvrdjenja pod 2° dokazuju totalnom indukcijom.

e) Pod predpostavkom da je ispunjen jedan od uslova (U_i) (i=1,2), ako je $\sum = +\infty$, imamo, prema 5.5. iz I dela,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\cos nx = \sum_{n\leq\frac{1}{x}} n^{-1} L(n) -$$

$$-\sum_{n\le \frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)+\sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)\cos nx = S^*\left(\frac{1}{x}\right)+\Sigma_1+\Sigma_2$$

$$(24)\quad = S\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\Sigma_1+\Sigma_2\,;$$

kako je

$$|\Sigma_1| = \left|-\sum_{n\le\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right| \le \frac{1}{2}x^2\sum_{n\le\frac{1}{x}} nL(n)$$

$$\le \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\max_{0\le t\le\frac{1}{x}}\{tL(t)\}\le P_1 L\left(\frac{1}{x}\right)=o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

zatim, prema proceni u a),

$$|\Sigma_2| \le \frac{P_2}{\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}L\left(\frac{1}{x}\right)=O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right)=o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

i kako u ovom slučaju $S(\frac{1}{x})\to+\infty\,(x\to+0)$ iz (24) izlazi tvrdjenje (13) za k=1.

Ako je $\Sigma<+\infty$,

$$f_1(0)-f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)$$

$$=\sum_{n\le\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)+R^*\left(\frac{1}{x}\right)-$$

$$(25)\quad -\sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)\cos nx = R\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\Sigma_3-\Sigma_4,$$

pri čemu se ponovo, na isti način kao napred, dobija

$$|\Sigma_3| = O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad |\Sigma_4| = o\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

tj.

$$|\Sigma_3| = o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad |\Sigma_4| = o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Odatle i iz (25) izlazi tvrdjenje (15) sa k=1.

f) Prema predhodnom, pod jednim od uslova $(U_i)(i=1,2)$ relacije (1o), (13) i (15) važe za k=1 .Integracijom, na osnovu leme III, relacije (1o) sa $\gamma=1$ od o do $\underline{x}$, dolazi se do

$$f_2(x)-f_2(0)=-\frac{\pi}{2}xL\left(\frac{1}{x}\right)\qquad(x\to+0)$$

tj. do relacije (11) za k=1 . Integracijom relacije (13) i (15), pod odgovarajućim uslovima, dolazi se do relacija

$$g_2(x)\sim xS\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to+0;\ \Sigma=+\infty)$$

$$g_2(x) - x f_1(x) \sim -x R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0;\ \Sigma < +\infty)$$

tj. do relacije (12) i (14) za k=1. Tako su dokazane sve relacije (1o) - (15) za k=1. Na sličan način, integracijom od o do x i korišćenjem leme III , iz predpostavke da sva tvrdjenja (1o) do (15) važe za prirodan broj k izvodi se zaključak da one važe i za k+1, pa se na taj način totalnom indukcijom dokazuje važenja svih tvrdjenja pod 3°.

Ovim je dokaz teoreme završen.

1.1. U predhodnom dokazu na više mesta koristi se sledeći iskaz:

Lema III. Neka je funkcija $\varphi(x)$ integrabilna (u Lebesgue-ovom smislu) na svakom intervalu oblika (ε, π) i neka je $\gamma > 0$. Tada relacije

$$\varphi(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0), \tag{26}$$

$$\varphi(x) \sim x^{\gamma-1} S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0), \tag{27}$$

$$\varphi(x) \sim x^{\gamma-1} R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0) \tag{28}$$

(v. teoremu I u 5.2 iz I dela) redom povlače relacije

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Specijalno, za $\gamma > 0$ je

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^x t^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\int_0^x t^{\gamma-1} S\left(\frac{1}{x}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} S\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\int_0^x t^{\gamma-1} R\left(\frac{1}{t}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} R\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} (x \to +0)$$

Dokaz. (26) povlači

$$\varphi(x)=\alpha(x)\,x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right),$$

gde $\lim\limits_{x\to+0}\alpha(x)=1$ i funkcija $\alpha(x)$ je integrabilna na $[\varepsilon,\pi]$. Onda dobijamo, na osnovu odgovarajućih rezultata iz I dela,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x t^{\gamma-1}\alpha(t)L\left(\frac{1}{t}\right)dt}{\frac{1}{\gamma}x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\gamma-1}\alpha(x)L\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\gamma}x^{\gamma-1}c(x)\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\int\limits_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=1.$$

Na sličan način se dokazuju tvrdjenja za relacije (27) i (28).

1.2. Prethodnim rezultatima o alimptotskom ponašanju sinusnog reda priključujemo sledeću procenu reda modula članova reda $g_2(x)$:

Teorema VIII. Važi relacija

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}L(n)|\sin nx|\sim\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}L(n)\sin nx\qquad(x\to+0)$$

Dokaz. neka je $\sum=+\infty$ (v. teoremu I). Tada imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}L(n)|\sin nx|\le\sum_{n\le\frac{1}{x}}+\sum_{n>\frac{1}{x}}$$

$$\le x\sum_{n\le\frac{1}{x}}n^{-1}L(n)+\sum_{n>\frac{1}{x}}n^{-3/2}\cdot n^{-1/2}L(n)$$

$$\le x\,S^*\left(\frac{1}{x}\right)+O\left(x^2L\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=x\,S^*\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1))=x\,S\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1)),$$

Kako je, s druge strane, prema teoremi VII,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}L(n)|\sin nx|\ge\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}L(n)\sin nx\sim x\,S\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to+0),$$

dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \,|\sin nx| \sim x\, S(\tfrac{1}{x}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \sin nx \qquad (x \to +o).$$

Ako je $\sum < +\infty$, dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \,|\sin nx| \leq x \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n) = x \sum$$

i odatle, kako s druge strane, prema teoremi VII,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \,|\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \sin nx \sim x \sum$$

dobijamo i u tom slučaju

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \,|\sin nx| \sim x \sum \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n) \sin nx \qquad (x \to +o).$$

1.2.1. Na sličan način kao nejednakosti dobijene u predhodnom dokazu, mogu se izvesti sledeće dve procene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}L(n) \,|\sin nx| \leq \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-1}\, x^{\gamma-1}\, L(\tfrac{1}{x}) \tag{29}$$

($\varepsilon > o$ proizvoljno; x dovoljno malo; $1 < \gamma < 2$);

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}L(n) \,|\sin nx| \leq x \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\gamma}L(n) \qquad (\gamma > 2).$$

2. GENERALIZACIJA TEOREMA ZYGMUND-a I B.Sz.NAGY-a

U ovom odeljku za funkcije $g(x)$ i $f(x)$ predpostavlja se da su neopadajuće i sa donje strane ograničene i intervalu (o,π) i da

$$x\, g(x) \in \mathcal{L}(o,\pi),\quad f(x) \in \mathcal{L}(o,\pi)$$

Sa b_n $(n=1,=,3,\ldots)$ su označeni koeficijenti sinusnog reda funkcije $g(x)$, a sa a_n $(n=o,1,2,\ldots)$ koeficijenti kosinusnog reda funkcije $f(x)$. Dakle

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx\, dx \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx\, dx \qquad (n=o,1,2,\ldots).$$

Ovde su brojevi a_n Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f(x)$, a brojevi b_n ne moraju to biti (u običnom smislu) za funkciju $g(x)$.

Od A.Zygmund-a [34] i B.Sz.Nagy-a [9] potiču sledeće dve teoreme:

(A) Neka je $0<\gamma\leq 1$. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}\, b_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako

$$x^{\gamma-1} g(x) \in \mathcal{L}(o,\pi).$$

(B) Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}\, a_n \tag{3o}$$

apsolutno konvergira ako i samo ako

(31) $$x^{\gamma-1} \quad f(x) \in \mathcal{L}(o, \pi),$$

odnosno ako i samo ako

(32) $$f(x) \log x \in \mathcal{L}(o, \pi),$$

prema tome da li je $o < \gamma < 1$ ili $\gamma = 1$.

Ovi rezultati za slučaj $\gamma = 1$ potiču od A.Zygmund-a [34], a za opšti slučaj od B.Sz.-Nagy-a [9] .

B.Sz.-Nagy dokazao je u [9] i da već (C,1)-zbirljivost reda (3o) povlači, prema slučaju, (31) ili (32).

Prethodne rezultate uopštavaju sledeće teoreme, u kojima se javlja sporo promenljiva funkcija L(x):

Teorema IX. Neka je $o < \gamma \leq 1$. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako

$$x^{\gamma-1} L(\tfrac{1}{x})\, g(x) \in \mathcal{L}(o, \pi).$$

Teorema X. Neka je $o < \gamma < 1$. Red

(33) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako

(34) $$x^{\gamma-1} L(\tfrac{1}{x})\, f(x) \in \mathcal{L}(o, \pi).$$

Teorema XI. Neka je $o < \gamma < 1$.

Ako

$x^{-1-\gamma} L(x) \downarrow$ za dovoljno veliko x, tada konvergacija (obična) reda (33) povlači (34).

Ako $x^{-\gamma} L(x) \downarrow$ za dovoljno veliko x, tada (C,1)-zbirljivost reda (33) povlači (34).

<u>Teorema XII.</u> <u>Red</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)a_n$$

<u>apsolutno konvergira ako i samo ako</u>

$$(35)\quad S(\tfrac{1}{x})\, f(x) \in \mathscr{L}(0,\pi),\quad S(x) \overset{\text{def}}{=} \int_1^x t^{-1} L(t)dt.$$

<u>Teorema XIII. Relacija (35) izlazi iz (obične) konvergencije ili iz (C,1) - zbirljivosti reda (33) prema tome da li je, za x dovoljno veliko, samo $x^{-2}L(x)$ ili već $x^{-1}L(x)$ nerastuća funkcija.</u>

Za $L(x)\equiv 1$ teorema IX svodi se na teoremu (A), teoreme X i XII svode se na teoremu (B), a teoreme XI i XIII na dopunsku primedbu <u>B. Sz.- Nagy-a.</u>

Predhodnim teoremama priključujemo sledeću teoremu o sinusnom redu koje se odnosi na slučaj $\gamma = 0$, nezahvaćen <u>Zygmund</u>ovim i <u>B.Sz.-Nagy-</u>ovim rezultatima.

<u>Teorema XIV.</u> <u>Neka je funkcija L(x) konveksna i takva da</u>

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) < +\infty .$$

<u>Tada red</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n L(n)$$

<u>apsolutno konvergira ako i samo ako</u>

$$x^{-1} L(\tfrac{1}{x})\, g(x) \in \mathscr{L}(0,\pi).$$

U radu [2] autor je 1958. godine dao nešto drukčiju varijantu generalizacije teorema (A) i (B) i primedbe <u>B.Sz.Nagy-a</u>. Ova generalizacija je, naime, sadržala neizmenjene navedene iskaze teorema X, XI i XIV, a umesto teorema IX, XII i XIII u njoj su redom figurisale teoreme:

IX* <u>Neka je $o < \gamma < 2$. Red</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

<u>apsolutno konvergira ako i samo ako</u>

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathcal{L}(o,\pi).$$

XII* <u>Neka je</u>

$$(35') \quad 0 < A\, L(x) \log x < \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt < B L(x) \log x \qquad (x > 1)$$

<u>(A i B konstante). Tada red</u>

$$(33) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n$$

<u>apsolutno konvergira ako i samo ako</u>

$$(35'') \qquad L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x}\, f(x) \in \mathcal{L}(o,\pi).$$

XIII* <u>Neka je</u>

$$(35''') \qquad t^{-1} L(t)dt > A L(x) \log x > 0 \qquad (x > 1).$$

<u>Tada (35'') izlazi iz konvergencije ili iz (C,1)- sbirljivosti reda (33) prema tome da li je, za x dovoljno veliko, samo $x^{-2} L(x)$ ili već $x^{-1} L(x)$ nerastuća funkcija.</u>

U [2] je, kao što se vidi, teorema (A) bila teoremom IX* (u [2] označenom sa 1) uopštena u dva pravca: uvodjenjem sporo promenljive funkcije i proširenjem intervala za γ na (0,2). Za interval (1,2) <u>R.P. Boas</u> je, medjutim, kasnije (1962.g.) dobio rezultat koji je, u slučaju $L(x) \equiv 1$, opštiji od ovog autorovog proširenja. Autoru je uspelo (v. sledeći paragraf) da dalje, pomoću sporo promenljive funkcije, uopšti <u>Boas-ov</u> rezultat i stoga je ovde generalizacija teoreme (A), teorema IX, ponovo formulisana samo za $0 < \delta \leq 1$. - Zatim, teorema XII (teorema 4 u [2]) sadržala je ograničavajuću pretpostavku (35'), a teorema XIII' (teorema 5 u /2/) pretpostavku (35''') i u obe ove teoreme umesto relacije (35) figurisala je relacija (35"). Jasno je da su teoreme XII i XIII redom <u>opštije</u> od teorema XII' i XIII'. Iz njih su, naime, izostavljeni pomenuti ograničavajući uslovi za sporo promenjivu funkciju $L(x)$, a u slučaju kad je prvi odnosno drugi od tih uslova ispunjen, (35") je ekvivalentno sa (35) odnosno implicira (35).- Dalje, <u>dokaz</u> teoreme XIV (teoreme 6) nije u [2] bio korektan. I svi ostali dokazi koje ovde dajemo u većoj ili manjoj meri kraći su nego odgovarajući dokazi izloženi u [2].

2.1. Pre nego što predjemo na dokaze teorema IX - XIV, na pomenimo da je teoreme (A) i (B) uopštio i <u>Chen-Yung-Ming</u> /16,17/, dokazujući da:

$$(B')\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \ \underline{\text{ako i samo ako}}\ \ \frac{f(x)}{\psi(x)} \in \mathcal{L}(0, \pi);$$

$$(A')\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \ \underline{\text{ako i samo ako}}\ \ \frac{g(x)}{\psi(x)} \in \mathcal{L}(0, \pi);$$

gde je funkcija $\psi(x)$ definisana u (o,π) i ispunjava uslove:

1° $\psi(x) > o$ $\quad (o < x < \pi)$;

2° $\psi(x) \nearrow$ $\quad (o < x < \pi)$;

3° $x^{\delta-1}\psi(x)$ $\quad (o < x \; \pi \;)$ ako je $\delta > o$ dovoljno malo.

Stavljajući $\psi(x) = x^{1-\gamma}$ $(o < \gamma < 1)$ teoreme (B^{I}) i (A^{I}) svode se redom na teoreme (B) i (A), sa $o < \gamma < 1$. Pokazaćemo sada da teoreme (B) i (A) ne sadrže redom teoreme X i IX, sa $o < \gamma < 1$. Zaista, da bi ih sadržale bilo bi potrebno (i dovoljno) da funkcija

$$h(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\frac{1}{x}\right)},$$

sa $o < \gamma < 1$, zadovoljava zahteve 1° -3° čim je $L(x)$ sporo promenljiva funkcija. To, medjutim, nije slučaj, kao što pokazuje primer sporo promenljive funkcije

$$L(x) = \log x + \sin x \qquad (x \text{ dovoljno veliko}).$$

Naime, za dovoljno veliko x, stavljajući

$$\omega(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{h\left(\frac{1}{x}\right)} = x^{1-\gamma} \, (\sin x + \log x),$$

dobija se

$$\omega^{I}(x) = x^{1-\gamma}\left[\cos x + \frac{1+(1-\gamma)(\sin x+\log x)}{x}\right] = x^{1-\gamma}\left[\cos x + o(1)\right] \quad (x \to +\infty$$

što znači da funkcija $h(x)$ nije monotona ni u jednom intervalu oblika (o,a) $(a > o)$.

Isto tako, teorema XIV nije sadržana u (A^{I}). Zaista, sporo promenljiva funkcija

$$L(x) = \frac{1}{\log^2 x} \qquad \text{(x dovoljno veliko)}$$

ispunjava uslove koje joj nameće teorema XIV, dok

$$h(x) = \frac{x}{L(\frac{1}{x})} = x \log^2 x \qquad \text{(x dovoljno veliko)}$$

ne ispunjava uslov 3^o.

2.2. Dokazi teorema IX-XIV.

2.2.1. Dokaz teoreme IX. Bez ograničenja opštosti, može se predpostaviti da je $g(\pi-o)=o$. Naime, u suprotnom slučaju može se funkcija $g(x)$ zameniti funkcijom $g(x) - g(\pi-o)$, jer aditivna konstanta ne utiče na važenje teoreme IX, budući da su oba uslova čija se ekvivalencija ovom teoremom tvrdi, automatski ispunjena za $g(x)=$ const.

Pod ovom predpostavkom je

$$(36) \qquad b_n = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} (1-\cos nx)\, dg(x) \geq 0.$$

Zaista, prema tvrdjenju 1^o teoreme III (6.2 u prvom delu; specijalan slučaj $L(x)\equiv 1$),

$$x\, g(x) \in \mathscr{L}(o,\pi)$$

povlači konačnost integrala

$$\int_0^{\pi} x^2\, dg(x)$$

i relaciju

$$x^2\, g(x) \to o \qquad (x \to o)$$

i stoga konačnost integrala

$$\int_0^{\pi} (1-\cos nx)\, dg(x)$$

i relaciju

$$(1-\cos nx) g(x) \to 0 \qquad (x \to +0).$$

Prema tome, vodeći računa o predpostavci $g(\pi-0)$, parcijalnom integracijom dobija se

$$b_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[- \lim_{x \to +0} g(x)\,(1-\cos nx) - \int_0^{\pi} (1-\cos nx) dg(x) \right]$$

$$= - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (1 - \cos nx)\, dg(x).$$

Prema (36) i s obzirom na stav Beppo - Levi-a, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) b_n = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} L(n) n^{-1-\gamma} \int_0^{\pi} (1-\cos nx)\, dg(x)$$

$$= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n)\, (1-\cos nx)\, dg(x) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A(x)\, dg(x)$$

konvergira ako i samo ako je ovaj poslednji integral konačan.

Relacije (9) i (11) teoreme VII daju

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n)\, (1-\cos nx) \sim C\, x^{-\gamma} L(\tfrac{1}{x}) \quad (x \to +0;\ 0 < \gamma \leq 1;\ C = \mathrm{const}).$$

Odatle izlazi ekvikonvergencija pomenutog integrala i integrala

$$\int_0^{\pi} x^{\gamma}\, L(\tfrac{1}{x})\, dg(x),$$

što, s obzirom na teoremu III (6.2. iz prvog dela), povlači tvrdjenje teoreme IX.

2.2.2. Dokazi teorema X i XI. Na sličan način kao na početku predhodnog dokaza, može se izvesti, koristeći teoremu III, formula

(37) $$a_n = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin nx \, d\, f(x),$$

koja važi bez ikakvih ograničenja (bez predpostavke $f(\pi-0)=0$).

Prvo ćemo dokazati da (34) povlači apsolutnu konvergenciju reda (33). Zatim dokazujemo drugo, pa prvo tvrdjenje teoreme XI i, najzad, da apsolutna konvergencija reda (33) povlači (34).

Prema (37) i proceni (29),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}L(n) \quad |a_n| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma}L(n) \quad |\sin nx|\, d\left[-f(x)\right]$$

$$\le B\int_0^{\pi} x^{\gamma} \quad L(\tfrac{1}{x}) \quad d\left[-f(x)\right] \qquad (0<\gamma<1).$$

Odatle se, na osnovu teoreme III, izvodi zaključak da (34) povlači apsolutnu konvergenciju reda (33).

Predpostavimo da je red (33) (C,1) - zbirljiv, tj. da niz

$$\sum_{\nu=1}^{n}(1-\frac{\nu}{n})\nu^{-\gamma}L(\nu) \quad a_{\nu} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}(1-\frac{\nu}{n})\nu^{-1-\gamma}L(\nu)\sin\nu x \; d\, f(x)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P_n(x)\, df(x)$$

teži konačnoj granici nad $n\to\infty$ i da je $x^{-\gamma}L(x)$ neopadajuća funkcija za $x \geqq m$ (m priredan broj). Stavimo

$$s_{\nu}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1-\cos(2\nu+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (\nu = 1,2,3,\ldots).$$

Tada

$$P_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}(1-\frac{\nu}{n})\nu^{-1-\gamma}L(\nu)\sin\nu x$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(1-\frac{\nu}{n})\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (1-\frac{\nu+1}{n})(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right]\left[s_{\nu}(x)-s_0(x)\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(1-\frac{\nu}{n})\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (1-\frac{\nu+1}{n})(\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right] \quad s_{\nu}(x)$$

$$- (1-\tfrac{1}{n})\, L(1)\, S_o(x) \geq \sum_{\nu=m}^{m-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{m-1} \quad -L(1) \quad s_o(x) \right]$$

$$(38) = P_n^{(1)}(x) + p^{(1)}(x).$$

Niz
$$\omega_{n,\nu} = (1-\tfrac{\nu}{n})\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (1-\tfrac{\nu+1}{n})\,(\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)$$

$$= \nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)$$

$$- \tfrac{1}{n}\left[\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-\gamma} L(\nu+1)\right] \qquad (\nu \leq n-1)$$

pozitivan je za $\nu \geq n$ i, za fiksirano $\nu \geq n$, ne opada kao jednostruki niz promenjljivog indeksa n; sem toga,

$$\omega_{n,\nu} \to \omega_\nu = \nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1) \qquad (n \to \infty).$$

Odatle se zaključuje, koristeći činjenicu da je $s(x) \geq 0$, $(0 \leq x \leq \pi)$, da su funkcije niza $P_n^{(1)}(x)$ negativne za $0 \leq x \leq \pi$ i da ovaj niz konvergira ka

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=m}^{n-1} \omega_{n,\nu} s_\nu(x) = \sum_{v=m} \omega_\nu s_\nu(x).$$

Poslednja nejednakost, s obzirom na predhodno, važi ustvari na osnovu sledeće činjenice, koji se lako dokazuje:

Ako $0 \leq \alpha_{n,\nu} \nearrow \alpha_\nu$ $(n \to \infty; \nu = m, m+1, m+2, \ldots)$, tada

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v=m}^{\infty} \alpha_{n,\nu} = \sum_{v=m}^{\infty} \alpha_\nu.$$

Prema (38),

$$(39) \quad \int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\, d\left[-f(x)\right] \leq \left| \int_0^\pi P_n(x)\, d f(x) \right| + \left| \int_0^\pi p^{(1)}(x)\, df(x) \right|.$$

Kako je, prema predpostavci,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x) \quad d f(x)$$

konačno i kako je funkcija $p^{(1)}(x)$, prema teoremi III, integrabilna u odnosu na $f(x)$ u intervalu $(0,\pi)$, iz (38) izvodi se, vodeći računa o nenegativnosti funkcija $P_n^{(1)}(x)$, da je funkcija $P(x)$ integrabilna u odnosu na $f(x)$ u $(0, \pi)$.

Pokazaćemo da je

$$(40)\qquad P(x) \geqq Mx^{\gamma}\, L(\tfrac{1}{x}) > 0 \qquad (0 < x < \pi,\ M\ \text{konstanta}),$$

što povlači konačnost integrala

$$x\, L(\tfrac{1}{x})\, d\, f(x),$$

tj., prema teoremi III,

$$x^{-1}\, L(\tfrac{1}{x})\ \ f(x) \in \mathcal{L}(0, \pi).$$

Da bi se ovaj deo dokazao završno, dovoljno je, dakle, dokazati (40). Za $\nu + \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{x}$

imamo

$$s_{\nu}(x) \geq \frac{2}{x}\, \left(\frac{2\nu+1}{2\pi}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}\, x\, (\nu + \tfrac{1}{2})^2$$

i odatle, prema 2. i 5.5 iz I dela, za dovoljno malo x,

$$P(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} s_{\nu}(x) \left[\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)\right]$$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2}\, x \sum_{m+\frac{1}{2} \leq \nu+\frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{x}} (\nu + \tfrac{1}{2})^2 \left[\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)\right]$$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2}\, x \int_{m}^{\frac{\pi}{x}-1} (t - \tfrac{1}{2})^2\, d\left[- t^{-1-\gamma} L(t)\right]$$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2}\, x \left[(t - \tfrac{1}{2})^2\, t^{-1-\gamma} L(t)\Big|_{\frac{\pi}{x}-1}^{m} + 2\int_{m}^{\frac{\pi}{x}-1} (t - \tfrac{1}{2}) t^{-1-\gamma} L(t)\, dt\right]$$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2}\, x \left[(m - \tfrac{1}{2})^2\, m^{-1-\gamma} L(m) - (\tfrac{\pi}{x} - \tfrac{3}{2})^2\, (\tfrac{\pi}{x} - 1)^{-1-\gamma} L(\tfrac{\pi}{x} - 1)\right]$$

$$+ 2\, M_1 \min_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{x}} \left\{t^{-\gamma/2}\, L(t)\right\} \int^{\pi/x-1} t^{-\gamma/2}\, dt$$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2}\, x \left\{2\, M_2\, L(\tfrac{1}{x})\, \frac{x^{\frac{\gamma}{2}}\, \pi^{-\frac{\gamma}{2}}}{1-\gamma/2} \left[(\tfrac{\pi}{x} - 1)^{1-\frac{\gamma}{2}} - m^{1-\frac{\gamma}{2}}\right] - \right.$$

$$- \left(\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{-1-\gamma} L\left(\frac{\pi}{x} - 1\right) \Big\}$$

$$\geq 2 \left(\frac{2 M_3}{1-\frac{\gamma}{2}} M_4\right) \pi^{-1-\gamma} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) = M x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) > o \quad (M \text{ konstanta}).$$

Ovde su konstante M_1, M_2 i M_3 pozitivne i manje od 1, a konstanta M_4 je veća od 1; sve četiri mogu biti onoliko bliske jedinici koliko se hoće.

Ako se predpostavi da red (33) konvergira, tj. da niz

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu) \, a_\nu = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x \, df(x)$$

teži konačnoj granici nad $n \to \infty$, dobija se, na sličan način kao gore, da

$$Q_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} {}^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left[\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)\right] . \, s_\nu(x) - L(1) \, s_o(x) + (n+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1) . s_{n+1}(x)$$

$$\geq \sum_{\nu=\ell}^{n} + \left[\sum_{\nu=1}^{\ell-1} - L(1) \quad s_o(x) \quad = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),\right.$$

gde je $Q_n^{(1)}(x)$ niz u (o, π) negativnih funkcija, i odatle se izvodi integrabilnost funkcije $P(x)$ u odnosu na $g(x)$ u (o, π). Odatle se ponovo dobija (31).

Neka je, najzad,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \, |a_n| = K < + \infty \quad .$$

Tada (v. 5.5. iz I dela)

$$K \geq \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu) q_o \geq \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Min}_{o \leq t \leq \nu} \left\{ t^{-\gamma} L(t) \right\} |a_\nu|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} \quad L_1(\nu) \, |a_\nu| \quad = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L_1(\nu) \left| \frac{2}{\pi \nu} \int_0^{\pi} \sin \nu x \, d \left[- f(x)\right] \right|$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma-1} L_1(\nu) \sin \nu x \quad d\left[-f(x)\right] \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} R_n(x)\, d\left[-f(x)\right]\right| .$$

Funkcija $x^{-\gamma}L_1(x)$ ne raste za $x > 0$. Stoga,

$$R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L_1(\nu) \sin \nu x$$

$$\geq \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\nu^{-1-\gamma} L_1(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L_1(\nu+1)\right] s_\nu(x) \qquad - L_1(1)\, s_0(x)$$

$$= R_n^{(1)}(x) - L_1(1)\, s_0(x),$$

gde je $R_n^{(1)}$ niz nenegativnih funkcija, a funkcija $s_0(x)$ je integrabilna u odnosu na $f(x)$ u $(0,\pi)$. Na sličan način kao gore dobija se

$$R_0(x) \geq M_5 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \qquad R_0(x) = \lim_{n\to\infty} R_n^{(1)}(x),$$

odakle, zbog 5.5 iz I dela, izlazi

$$R_0(x) \geq M_6\, x^{\gamma}\, L\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \qquad (M_6 \text{ konstanta}).$$

Odavde se dobija (34) koristeći teoremu III.

2.2.3. Dokaz teorema XII i XIII. Kako je opšti plan ovog dokaza isti kao plan prethodnog dokaza, daćemo ga samo u skici, ističući nekoliko karakterističnih momenata.

1° Sada se dobija, prema teoremi VIII, za x dovoljno malo,

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \left|\sin nx\right| \leq 2\, x\, S\left(\frac{1}{x}\right).$$

2° Iz dobijene nejednakosti, primenjujući teoremu III, u kojoj ulogu funkcije $L(x)$ igra sporo promenljiva funkcija $S(x)$, izvodi se da

$$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$$

povlači apsolutnu konvergenciju reda (33).

3° Ako je ispunjen uslov

$$x^{-2} L(x) \searrow \qquad (\text{ x dovoljno veliko}),$$

odnosno uslov

$$x^{-1}L(x)\searrow \qquad \text{(x dovoljno veliko)},$$

tada se, polazeći od odgovarajuće predpostavke o redu (33), na isti način kao u predhodnom dokazu, dolazi do izraza

$$\frac{2}{\pi^2}x\left[2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 m^{-2}L(m)-\left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-2}L\left(\frac{\pi}{x}-1\right)+2\int_m^{\frac{\pi}{x}-1} t^{-1}L(t)dt\right],$$

koji se sada može minorirati sa

$$(41)\quad \frac{2}{\pi^2}\, x \left[2M_6\, S\left(\frac{1}{x}\right) - M_7\, L\left(\frac{1}{x}\right)\right] \geq M_8\, x\, S\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

(M_6, M_7, M_8 pozitivne konstante). Ovde je iskorišćena relacija

$$L(x) = O\,(S(x)) \qquad (x \to +\infty)$$

(teorema I).

4° Pretpostavljajući apsolutnu konvergenciju reda (33), dobija se izraz na desnoj strani nejednakosti (41) u kome je $S(\frac{1}{x})$ zamenjeno sa $S_1(\frac{1}{x})$, gde je

$$S_1(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^x t^{-1}\, L_1(t)dt.$$

Kako

$$S_1\left(\frac{1}{x}\right) \sim S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

taj izraz se može ponovo minorirati desnom stranom nejednakosti (41) (sa drugom vrednošću konstante M_8).

5° Primena teoreme III, na isti način kao pod 2°, dokazuje onda da odgovarajuća predpostavka o redu (33) povlači (35).

2.2.4. <u>Dokaz teoreme XIV</u>. Iz pretpostavljenih osobina funkcije $L(x)$ izlazi da $L(x)$ teži nuli za x i da (teorema I)

$$\int_0^1 t^{-1}\, L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^\infty t^{-1}\, L(t)dt < +\infty,$$

tj. da

$$x^{-1}\, L\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{L}(0, \pi).$$

Odatle se izvodi zaključak da su oba uslova čija se ekvivalencija tvrdi teoremom XIV automatski ispunjena za $g(x) = \text{const}$, tako da se može, kao u dokazu teoreme IX, pretpostaviti, bez smanjenja opštosti, da je $g(\pi-0)=0$. Onda su, kao u dokazu teoreme I, koeficijenti b_n dati formulom (36) i stoga pozitivni i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)b_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)\right] dg(x)$$

(apsolutno) je konvergentan ako i samo ako je integral na desnoj strani konačan. Prema teoremi VII,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n)\ (1-\cos nx) \sim R(\tfrac{1}{x}) \qquad (x \to +0),$$

pa se, primenjujući tvrdjenje 2° teoreme III, dolazi do tvrdjenja teoreme XIV.

3. GENERALIZACIJA BOAS-OVIH TEOREMA

U radovima [10] i [11] R.P.Boas je dokazao sledeće teoreme, kojima se teorema (A) proširuje na interval $(1,2]$, uz oslabljenje uslova za taj slučaj i za tvrdjenje u jednom pravcu za slučaj $\gamma=1$, odnosno daje analogon teoreme (B) za uopštene kosinusne redove, koje Boas, pod pretpostavkom

$$x^2 f(x) \in \mathcal{L}(0,\pi),$$

definiše kao kosinusne redove sa koeficijentima

(41) $$a_n = -2\pi^{-1}\int_0^{\pi}(1-\cos nx)f(x)dx \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

(za objašnjenje videti [10,11]), U njima se ne pretpostavlja monotonija funkcija g(x) i f(x).

(C) Neka je $1<\gamma<2$ i

(42) $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\, dx \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Tada

(43) $$x^{\gamma-1} g(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$$

povlači apsolutnu konvergenciju reda

(44) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n.$$

(Napominjemo da se ovde čak ne predpostavlja $x\,g(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$, nego samo egzistencija svih integrala (42).

(D) Neka je $1<\gamma<2$, $g(x)\geq 0$ za $x \in (0,\pi)$, $x\,g(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$ i koeficijenti b_n su dati formulom (42). Tada (obična) konvergencija reda (44) povlači (43).

(E) Neka je $g(x) \geq 0$ za $x \in (0, \pi)$ i koeficijenti b_n su definisani sa (42). Tada (obična) konvergencija reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n$$

povlači

$$g(x) \in \mathcal{L}(0, \pi)$$

(F) Neka su koeficijenti b_n definisani sa (42). Tada:

1° $\qquad xg(x) \log \frac{1}{x} \in \mathcal{L}(0, \pi)$

(45)

povlači apsolutnu konvergenciju reda.

$$(45') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n.$$

2° Ukoliko je još $g(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$, konvergencija reda (45') povlači (45).

(G) Neka je $1 < \gamma < 3$, $x^2 f(x) \in \mathcal{L}(0, \pi)$, $f(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$ i koeficijenti a_n su dati formulama (41'). Tada red $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n\right)$ apsolutno konvergira ako i samo ako

$$x^{\gamma-1} f(x) \in \mathcal{L}(0, \pi).$$

Teoreme (C) - (G) uopštavamo sledećim teoremama, od kojih se poslednjom vrši generalizacija u dva pravca.

Teorema XV. Neka $1 < \gamma < 2$ i koeficijenti b_n su dati formulom (42). Tada

$$(45'') \qquad x^{\gamma-1} L(\tfrac{1}{x}) g(x) \in \mathcal{L}(0, \pi)$$

povlači apsolutnu konvergenciju reda

$$(45''') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

Teorema XVI. Neka je $1 < \gamma < 2$, $g(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$, $x\, g(x) \in (0, \pi)$, koeficijenti b_n su dati formulom (42) i $x^{1-\gamma} L(x) \downarrow$. Tada (obična) konvergencija reda (45''') povlači (45'').

Teorema XVII. Neka je $g(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$, koeficijent

b_n su definisani sa (42) i $L(x)\downarrow$. Tada obična konvergencija reda

(46) $$\sum_{n=1} n^{-1} L(n)\, b_n$$

povlači

$$L(\tfrac{1}{x})\, g(x) \in \mathcal{L}(0,\pi).$$

Teorema XVIII. Neka su koeficijenti b_n definisani sa (42). Tada:

1°

(47) $$x\, S(\tfrac{1}{x}) g(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$$

povlači apsolutnu konvergenciju reda

(48) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\, b_n.$$

2° Ukoliko je još $g(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$, $x^{-1}L(x)\downarrow$ (x dovoljno veliko) i

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty,$$

(obična) konvergencija reda (48) povlači (47).

Teorema XIX. Neka $x^2 f(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$, $f(x) \geq 0$ $(0 < x < \pi)$ i KOEFICIJENTI a_n su dati formulom (41'). Tada:

1° Za $1 < \gamma < 3$, red

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako

$$x^{\gamma-1} L(\tfrac{1}{x}) f(x) \in \mathcal{L}(0,\pi).$$

2° Ukoliko je $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty$, red

(49) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n)\, a_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako $x^2 S(\tfrac{1}{x}) f(x) \in \mathcal{L}(0,\pi)$.

3° Ako je $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) < +\infty$, tada red (49) apsolutno konvergira, a red

$$(50) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n$$

apsolutno konvergira ako i samo ako je

$$R(\tfrac{1}{x})\, f(x) \in \mathcal{L}\,(0,\pi).$$

3.1. Dokazi teorema XV - XIX.

3.1.1. Dokaz teoreme XV. Na osnovu Beppo -Levi-eve teoreme i procene (29),

$$\frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, |b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \int_0^{\pi} |g(x)|\, |\sin nx|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, |\sin nx|\, dx$$

$$\le M \int_0^{\pi} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)|\, dx,$$

gde je M konstanta. Odavde teorema neposredno sledi.

3.1.2. Dokaz teoreme XVI. Koristimo činjenicu da su sve parcijalne sume reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$$

pozitivne za $0 < x < \pi$ (dokaz se nalazi u [35]). Iz ovog rezultata izvodi se prvo, parcijalnom sumacijom, da je (predpostavljeno je da $x^{1-\gamma} L(x) \downarrow$)

$$(51) \qquad \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx > 0 \quad (0 < x < \pi;\ p = 1, 2, 3, \dots)$$

Kako je

$$\int_0^{\pi} g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \int_0^{\pi} g(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n)\, b_n,$$

na osnovu Fatou-ove leme i prema (51) dobija se

$$\int_0^{\pi} g(x) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx\, dx \le \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n)\, b_n.$$

Odavde i iz relacije (teorema VII)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \sim C x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (x \to +0;\ C \text{ konstanta})$$

sledi tvrdjenje teoreme XVI.

<u>Primedba. U stvari, dokazano je da ograničenost s donje strane niza parcijalnih suma reda (45) povlači (45").</u>

3.2.3. <u>Dokaz teoreme XVII</u>. Prema pretpostavci teoreme, parcijalne sume reda (51) sa $\gamma = 1$ su pozitivne. Odatle se, kao u predhodnom dokazu, izvodi da je

$$(52)\quad \int_0^\pi f(x)\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\sin nx\right]dx \leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{p} n^{-1} L(n) b_n < +\infty.$$

Odavde i iz relacije (teorema VII)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\sin nx \sim \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0)$$

izlazi tvrdjenje teoreme.

Može se dodati ista primedba kao na kraju 3.2.2.

3.2.4. <u>Dokaz teoreme XVIII</u>. 1° Prema <u>Beppo-Levi</u>-evoj teoremi i teoremi VII,

$$\frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)|b_n| \leq \frac{1}{2}\pi \int_0^\pi |g(x)|\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)|\sin nx|\right]dx$$

$$\leq M \int_0^\pi x\, S\left(\frac{1}{x}\right)|g(x)|\,dx.$$

Odavde neposredno izlazi tvrdjenje pod 1°.

2° U ovom slučaju predpostavka o L(x) povlači

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n)\sin nx > 0 \quad (0 < x < \pi;\ p = 1, 2, \ldots).$$

Stoga se, na osnovu <u>Fatou-ove</u> leme, iz

$$\int_0^\pi g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n)\sin nx\, dx = \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n$$

izvodi

$$\int_0^\pi g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n)\sin nx\, dx \leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) b_n.$$

Kako $\sum = +\infty$, to (teorema VII)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\sin nx \sim x\, S\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to 0).$$

Odavde sledi tvrdjenje pod 2°.

3.2.5. <u>Dokaz teoreme XIX</u>. 1° Zbog $1 - \cos nx \geq 0$ i prema teoremi <u>Beppo-Levi</u>-a,

$$\frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)|a_n| = \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)(1-\cos nx) f(x)\right]dx$$

Prema teoremi VII,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)(1-\cos nx) \sim M x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

(x ⟶ + o; M konstanta).

Odatle i iz predhodnog sledi tvrdjenje pod 1°.

2° Kao i u predhodnom slučaju,

$$(53) \qquad \frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) |a_n| = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n)(1-\cos nx)\right] |f(x)|\, dx.$$

Zbog $\sum = +\infty$, prema teoremi VII,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n)(1-\cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +0).$$

Odatle tvrdjenje sledi.

3° Deo tvrdjenja koji se odnosi na red (49) izlazi iz (53) i iz relacije (teorema VII), koja važi kad $\sum < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n)(1-\cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 \sum \quad (x \to +0),$$

a deo koji se odnosi na red (50) iz

$$\frac{1}{2}\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) |a_n| = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx) f(x)\, dx$$

i iz relacije (teorema VII),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)(1-\cos nx) \sim R\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

Napominjemo da su naši dokazi teorema XV - XIX nešto kraći nego Boas-ovi dokazi teorema (C)-(G).

LITERATURA

[1] T.van Aardenne-Ehrenfest, N.G. de Bruijn, J. Korevaar - A note on slowly oscillating functions, Nieuw Archief voor Wiskunde 23 (1949), 77-86.

[2] D.Adamović - Généralisation de deux théorèmes de Zygmund - B. Sz. - Nagy, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences, t.XII (1958),81-100.

[3] S.Aljančić, R. Bojanić, et M. Tomić - Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies, Publications de l'Institut mathématique, t.VII (1954), 81-94.

[4] ______ Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova, Zbornik radova SAN 4 (1955), 15-26.

[5] ______ Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques, Publications de l'Institut mathématiques, t.VIII (1955), 67-84.

[6] ______ Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones, Publications de l'Institut mathématique, t.X (1958), 101-120.

[7] S.Aljančić, J. Karamata - Pravilno promenjive funkcije i Frullani-ev integral, Zbornik radova Matematičkog instituta SAN, 5 (1956), 239-248.

[8] Н.К. БАРИ - Тригонометрические ряды Москва 1961.

[9] Bela Sz.-Nagy - Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées, Acta sc.matematicarum (Szeged), XIII (1949), 118-135.

[10] R.P. Boas - Integralility of trigonometric series III, Quart. J. of Math. (Oxford) (2), 5 (1954), 71-76.

[11] ____ Integrability of nonnegative trigonometric series, Tohaku Math. Journ. 14 (1962), 363-368.

[12] ____ Integrability of nonnegative trigonometric series, II, 16 (1964), 368-373.

[13] R. Bojanić and J. Karamata - On slowly varying functions and asymptotic relations, Technical Summary Report 432, Math. Research Center (1963).

[14] ____ On a class of functions of regular asymptotic behavior, Technical Sumary Report 436, Math. Research Center (1963).

[15] N.G. de Bruijn - Pairs of slowly oscillating functions occuring in asymptotic problems concerning the Laplace transform, Nieuw Archief voor Wiskunede 7 (1959),20-26.

[16] Chen Yung - Ming - Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems, Math. Zeitschr. 68 (1957), 227-244.

[17] Chen Yung - Ming - Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants, Math. Zeitschr. 69(1958),105-120.

[18] H. Delange - Sur un théoréme de Karamata, Bull. Sci. Math. (2) 79 (1955), 9-12.

[19] G.H. Hardy - A theorem concerning trigonometrical series, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 12-13.

[20] ____ Some theoreme concerning trigonometric series, Proc. London Math. Soc. 32 (1931), 441-448.

[21] G.H. Hardy and Rogosinski W.W. - Note of Fourier series (I). On sine series with positive coefficients, Journal London Math. Soc. 18 (1943),50.

[22] P.Heywood - A note on a theorem of Hardy on trigonometric series, Journal London Math. Soc. 29 (1954),373-378.

[23] ______ On the integrabilility of funczions defined by trigonometric series, Quart. J. of Math. (Oxford) (2), 5 (1954), 71-76.

[24] J. Karamata - Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Matematica (Cluj) 4 (1930), 38-53.

[25] ______ Sur un mode de croissance regulière, theorèmes fondamentaux, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55-62.

[26] E. Landau - Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Bull. Acad. royale de Belgique (1911), 443-472.

[27] W. Matuszewska - Regulary increasing functions in connection with the theory of L - spaces. Studia Mathematica 21 (1962), 317-344.

[28] Г. ПОЛИА И Г. СЕГЕ - ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА, МОСКВА 1956.

[29] G. Pólya - Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen, Göttingen Nachr. (1917), 149-159.

[30] ____ Bemerkung über unendliche Folgen und ganze Funktionen, Math. Ann. 88 (1923), 169-183.

[31] R. Schmidt - Über divergente Folgen und Lineare Mittelbildungen, Mathematische Zeitschrift 22 (1925),89-152.

[32] H.Steinhaus - Sur les distances des points des ansembles de mesure positive, Fundamenta Mathematica 1 (1920), 93-104.

[33] W.H. Young - On the Fourier Series of bounded functions, Proc. London, Math. Soc. 12 (1913), 41-70.

[34] A. Zygmund - Sur les fonctions conjugées, Fundamenta Math. 13 (1929), 284-303.

[35] А. ЗИГМУНД – ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ, МОСКВА 1965.