МИЛАН С. НЕДИЋ

АЛГЕБРА

ЗА ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

— ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ —

Препоручена од Главног просветног савета и одобрена
за уџбеник одлуком господина Министра просвете
С. н. бр. 25631 од 27 јула 1929 год.

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1, Кнез Михаилова улица 1.

ОД ИСТОГ ПИСЦА

ГЕОМЕТРИЈА

за пети разред средњих школа

(друго издање по новоме програму).

ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ГЕЦЕ КОНА, Београд

ШТАМПА: „ПРИВРЕДНИК“ — 1930 год.

АЛГЕБРА

ЗА

ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ОД ПРОФЕСОРА М. С. НЕДИЋА

I — ПРВЕ ЧЕТИРИ РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С МОНОМИМА

Сабирање и одузимање монома

Мономи. — Да се сетимо монома, навешћу неколико примера.

Примери:

$$2a,\ 3x,\ -4y,$$

Наведени мономи значе ово:

$$2a = a + a$$
$$3x = x + x + x$$
$$-4y = (-y) + (-y) + (-y) + (-y)$$

Посебни бројеви у моному сви заједно зову се **сачинитељ** или **коефициент.** Сви општи бројеви у моному (писмена) зову се **главна количина**.

У наведеним примерима су

сачинитељи:	2	3	— 4
главне количине:	a	x	y

Једноимени мономи. — Мономи који имају једнаке главне количине зову се једноимени мономи.

Примери једноимених монома:

I	$2x$	$3x$	$-4x$	$-\frac{3}{5}x.$
II	$-3xy$	$-\frac{2}{3}xy$	$-10xy$	$7xy.$

Једноимени мономи зову се још и *слични мономи.*

Сабирање монома. — Да додамо моному 2a моном 3a.

$$\begin{array}{l} 2a = a + a \\ 3a = a + a + a \\ \hline 2a + 3a = a + a + a + a + a \end{array}$$

Једноимени се мономи сабирају, кад се збир сачинитеља помножи главном количином.

Одузимање монома. — Од монома 6x да одузмемо моном 2x.

$$\begin{array}{l} 6x = x + x + x + x + x + x \\ 2x = x + x \\ \hline 6x - 2x = x + x + x + x + x + x - x - x \\ 6x - 2x = 4x \end{array}$$

Једноимени мономи одузимају се, кад се разлика сачинитеља помножи главном количином.

Напомена. — За сабирање разноимених монома немамо правила. Њихово сабирање само се означи. Н. пр., кад хоћемо да кажемо да треба на 3x додати 2y, ми то само овако означимо: $3x + 2y$.

ВЕЖБАЊА

1. $2x + 3x + 4x$
3. $4x + 3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3}x$
5. $7y + 2y + 3\frac{1}{4}y + 2\frac{7}{12}y$
7. $3\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{5}x + 7x + 0{,}02x$
9. $5ax + 2ax + 3{,}5ax + \frac{1}{4}ax$
11. $7x - 3x$
13. $12\frac{1}{2}y - 10y$
15. $8{,}7z - 4z$
16. $9\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab$
17. $19\frac{1}{3}xy - 6\frac{1}{2}xy$
18. $7\frac{5}{6}m - 4\frac{1}{3}m$

2. $2a + 5a + 7a + 8a$
4. $0{,}5x + 2{,}7x + 3{,}8x$
6. $1\frac{1}{3}xy + 2\frac{1}{5}xy + 0{,}7\,xy$
8. $2z + 0{,}2z + 2{,}02z + 2{,}002z$
10. $4by + 8by + 3\frac{1}{3}by - 9\frac{1}{4}by$
12. $7y - 2y$
14. $4{,}72 - 2a$
19. $0{,}7x - 1\frac{1}{3}x$
20. $18\frac{2}{5}m - 11{,}4\,m$
21. $12\frac{3}{4}n - 13\,n$
22. $(3a + 4a) - 5a$
23. $(4x + 9x) - 7x$

24. $(2x + 3x + 7x) - (2x + 8x + 9x)$
25. $(3\frac{1}{2}y + 9\frac{1}{3}y + 7y) + (17y - 8\frac{1}{3}y)$

Полином. — Збир од неколико монома зове се полином:

$$3x + 4y + 5z + 8a$$

Сваки такав сабирак — моном — зове се члан полинома, Наш горњи полином има четири члана.

И ово је полином:

$$5x - 3y + 5z - 9a$$

Њега можемо овако да напишемо у облику збира:

$$2x + (-3y) + 5z + (-9a)$$

Сад се јасно виде његови чланови. Они су:

$$+2x, \; -3y, \; +5z, \; -9a.$$

На то добро обрати пажњу! Кад хоћеш да одређујеш чланове једног полинома, мораш тај полином написати у облику збира, па ћеш тек онда имати јасно изражене све чланове полинома. Добро се извежбај у томе! Види вежбања из овог одељка!

Свођење полинома. — Да би полином добио простији облик ми скупљамо једноимене мономе у један члан. Тај посао зове се свођење полинома.

Пример. — Свести полином.

$$3x^2 + 4x + 7 - 9x^2 + 9x + 8x^2 - 10 + 2x + 5$$

Најпре скупимо чланове са x^2

$$3x^2 - 9x^2 + 8x^2 = 2x^2$$

Затим чланове са x:

$$4x + 9x + 2x = 15x$$

Најзад чланове без x:

$$7 - 10 + 5 = 2$$

Кад сведемо дати полином, он овако изгледа:

$$2x^2 + 15x + 2$$

Он није променио вредност. Да се уверимо! Нека је $x = 3$ Тада дати полином добија ову вредност:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 7 - 9 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 3^2 - 10 + 2 \cdot 3 + 5 = \\ = 27 + 12 + 7 - 81 + 27 + 72 - 10 + 6 + 5 = 27 + 12 + 7 + \\ \quad + 27 + 72 + 6 + 5 - 81 - 10 = 156 - 91 = 65 \end{array}$$

Да му израчунамо вредност за $x = 3$ у сведеноме облику.

Биће: $2x^2 + 15x + 2$

$2 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 2 = 18 + 45 + 2 = 65.$ Тачно је.

Степен полинома. — Ако хоћемо да одредимо степен полинома по извесноме писмену, морамо *најпре свести полином*; затим одредити степене свих монома у полиному по томе писмену. *Највећи степен монома јесте степен полинома.*

Пример. — Дат је полином

$$3xy^2 - 4x^2z - 3x^3yz - 4xy^2 + 5x^2z.$$

После свођења, наш полином добија овај облик

$$-xy^2 + x^2z - 3x^3yz.$$

Степени од x су

1 2 3.

Према томе овај полином је *трећег* степена по x. Степени од y су: 2 0 1.

Према томе овај полином је *другог* степена по y. Степени од z су: 0 1 1.

Према томе овај полином је *првог* степена по z.

Степени од x и y јесу:

(1 + 2) (2 + 0) (3 + 1)

то јест 3 2 4

Према томе овај полином је *четвртог* степена по x и y.

Степени од x и y и z су:

(1 + 2 + 0) (2 + 0 + 1) (3 + 1 + 1)

то јест 3 3 5.

Према томе овај полином је *петог* степена по x и y и z.

Хомогени полиноми. — Ако сви чланови једног полинома имају исти степен, полином је *хомоген*, а тај степен је *степен хомогености*.

Пример I. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

степени су (3 + 0) (2 + 1) (1 + 2) (0 + 3).

Сви чланови су 3 степена; значи да је полином хомоген и да му је степен хомогености 3.

Пример II.

$$5x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 - 5xy^3 + 4y^4.$$

Ово је хомогени полином 4 степена хомогености.

Полином с једном промењљивом. — При доцнијем раду видећемо да нам је неко писмо у полиному веома важно. Таква писмена обично обележавамо са x, y, z, u, v, w и зовемо их *непознате или промењљиве*. Све апсолутне бројеве и остала писмена која се у мономима нађу уз *промењљиву*, сматрамо као њен сачинитељ. Полином који садржи једну такву промењљиву у разним степенима зове се *полином с једном промењљивом*.

Ако се промењљива ни у једноме члану полинома не налази у именитељу, полином је *цео по тој промењљивој*.

Степен полинома је највиши степен непознате која се појављује у томе полиному.

Пример I.

$$2x^4 - 3x^3 - 5x - 7x^2 + 8x + 2x^3 - 2x^4 + 5.$$

Кад га сведемо и уредимо видимо да је то полином:

$$-x^3 - 7x^2 + 3x + 5.$$

Овај полином је полином трећег степена и *цео по иксу*.

Пример II.

$$ax^3 - \frac{b}{x} + 2x^2 + 7.$$

Овај полином *није* цео по иксу, јер се непозната (x) налази у једноме члану у именитељу.

Општи облици полинома. — Служећи се писменима, можемо изразити опште облике полинома с једном промењљивом свију степена. Тако израз

$ax + b$	представља општи облик полин. *првог* степ.
$ax^2 + bx + c$	„ „ „ „ *другог* „
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	„ „ „ „ *трећег* „
$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + ax + q$	„ „ „ „ *ентог* „

Корени једног полинома по x. — Оне вредности икса за које се полином своди на нулу, зову се *корени тога полинома*.

Пример I.

$$P = 5x - 10$$

Ако сменимо x са 2, имаћемо

$$P = 5 \,.\, 2 - 10 = 0$$

горњи полином P је сведен на нулу. То значи да је 2 *корен* горњег полинома.

Пример II.

$$P = 4x^2 - 13x + 3.$$

Ако ставимо за x вредност 3, добићемо:

$$P = 4 \,.\, 9 - 13 \,.\, 3 + 3 = 36 - 39 + 3 = -3 + 3 = 0.$$

Значи да је 3 *корен* горњег полинома.

Ако ставимо за x вредност $\frac{1}{4}$, добићемо:

$$P = 4\,.\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 13\,.\,\frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{4} - \frac{13}{4} + 3 = \frac{1}{4} - \frac{13}{4} + \frac{12}{4} =$$

$$= -\frac{12}{4} + \frac{12}{4} = 0.$$

Значи да је и $\frac{1}{4}$ *корен* горњег полинома.

Одређивање корена једног полинома јесте један веома важан задатак Алгебре. Тиме ћемо се бавити мало доцније.

ВЕЖБАЊА

Кажи сваки члан посебице у овим полиномима, па онда сведи.

1. $3x + 4 - 7x + 8 - 9\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4}x$
2. $3x^3 + 5x - 7 + 8x + 9 - 11x^2 - 9$
3. $2\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{7}x^2 - 9 - 8\frac{1}{2}x - 9x^2 - 7$
4. $3{,}3x + 8x^2 - 9x + 10 - 11x^2 + 12 - 13x + 7{,}4x^2$
5. $8x^3 + 9x + 7x - 8x^2 + 12 - 17x + 8x^3 + 9x^2 - 11$
6. $3x^4 - 8x + 9x^3 - 5x^2 - 7x + 8x^2 - 9x^4 + 10x^3 - 2$
7. $4y - 7y^4 - 9y - 8y^3 + 9y^2 - 7y^4 + 8y^3 + 12 - 12y - 7y^4 + 8y^3$
8. $3x^2 - 7 + 8y^2 - 9 + 5y^2 - 7y^2 + 8x^2 - 9$
9. $3x^2 + 96 - 7y^2 + 5x - 9y + 17 - 20 + 5y + 7y^2 - 3 + 8y^2$
10. $19x + 13y + 7y^3 - 8x^2 + 19 - 7x^2 + 9y^2 - 7x + 8y - 9y^2 + 7y$

Множење монома

Моном се множи мономом, кад се производ сачинитеља помножи производом главних количина.

Примери:

I $2x\,.\,3x = 2\,.\,3\,.\,x\,.\,x = 6x^2$

II $(-x)\,(-2x)\,(-3y) = (-1)\,(-2)\,(-3)\,xxy = -6x^2y$

III $(-3x)\,(-4y)\,.\,4y^2 = (-3)\,(-4)\,(+4)\,xyy^2 = 48xy^3$

IV $(-3x^2)\,(-4y^3) = 12x^2y^3$

V $(-4y^3)\,.\,2y^4 = -8y^7$

ВЕЖБАЊА

Помножи ове мономе:

1. x^2 и x^4.
2. a^2 и a^9
3. $\frac{1}{2}ax$ и $4x^2$.
4. $\frac{3by}{4}$ и $\left(-\frac{4ay^3}{9}\right)$.
5. ax и $(-\frac{1}{2}bx^2)$.
6. $\frac{xy^2}{4}$ и $\left(-\frac{12xyz^2}{9}\right)$

7. $\frac{3}{5}a^4x^3\,.\,\frac{-a^2x^4}{3}\,.\,\frac{-a^3x^7}{6}\,.\,\frac{2\,abx^2}{7}$.
8. $-\frac{5a^2x^4}{6}\,.\,\frac{3abcx^7y}{4}\,.\,\frac{-4a^2c^2y^3}{4}\,.\,\frac{-3\,xy^3}{4}$.
9. $a^2b\,.\,b^2c\,.\,c^2d$.
10. $abx\,,\,(-bcx)\,.\,(-acx)$
11. $-\frac{3ax^2}{5\sqrt{3}}\,.\,\frac{5\sqrt{3}}{3ax^2}$
12. $-\frac{\sqrt{7}\,xy}{9}\,.\,\frac{9}{\sqrt{7}\,xy}$

Дељење монома

Моном се дели мономом, кад се количник сачинитеља помножи количником главних количина.

Примери:

I $4x^5 : 2x^2 = (4 : 2)\,(x^5 : x^2) = 2x^3$

II $(-8x^7) : (-6x^3) = [(-8) : (-6)]\,(x^7 : x^3) = \frac{4}{3}x^4$

III $25a^3b^2 : (-5\,ab) = -5a^2b$.

IV $(-5a^2x^3) : 3a^2x = \frac{-5a^2x^3}{3a^2x} = -\frac{5}{3}x^2$

У количнику нема више писмена a; оно је ишчезло, јер му је изложитељ $2 - 2 = 0$. Кад један моном има једно слово са изложитељем нула, значи да се то слово појављује *нула пута као чинитељ*, то јест *не* појављује се као чинитељ, — нема га. У осталом, јасно се види да се горњи разломак може скратити са a^2.

ВЕЖБАЊА

Подели ове мономе:

1. $b^6 : b^3$.
2. $-7\,xy^2z^3 : yz$
3. $5x^3 : (-x^2)$
4. $3x^5 : (-5x^3)$
5. $8a^3b : (-2ba^3)$,
6. $-3x^2y^2z^2 : 3xyz$.
7. $-33x^2yz^3 : 5xz^2$.
8. $\frac{7}{3}x^3y^4 : (-\frac{3}{7}xy^3)$.
9. $\frac{\sqrt{3}\,ab^2}{7} : \left(-\frac{7\,ab^2}{\sqrt{3}}\right)$.
10. $\frac{3\,ab\,c^3d^4}{8} : \left(-\frac{bcd}{3}\right)$.

II РАД СА ПОЛИНОМИМА

Сабирање и одузимање полинома

Додавање збира. — Збир се додаје неком броју, кад се томе броју додаду појединачно сви чланови тога збира.

Узми да је $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, па се увери да је

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Кад радимо усмено, увек се служимо тим правилом Н.пр. $32 + 26 = 32 + (20 + 6) = (32 + 20) + 6$

Додавање разлике. — Некоме броју додаје се разлика, кад му се дода умањеник, а одузме умањитељ.

$$a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c$$

Нека је $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Тада је $a + (b - c) = 5 + + (4 - 3) = 5 + 1 = 6$

Израз $(a + b) - c$ постаје $(5 + 4) - 3 = 9 - 3 = 6$.

Одузимање збира. — Од некога броја одузима се збир, кад се од њега појединачно одузму сви сабирци.

$$a - (b + c) = (a - b) - c = a - b - c$$

Узмимо да је $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

Тада је $a - (b + c) = 2 - (3 + 4) = 2 - 7 = -5$

Даље је $2 - 3 - 4 = -1 - 4 = -5$.

Одузимање разлике. — Од некога се броја одузима разлика, кад се одузме умањеник, а дода умањитељ.

$$a - (b - c) = (a - b) + c = a - b + c$$

Узмимо да је $a = 1$, $b = 10$, $c = 8$.

Биће $a - (b - c) = 1 - (10 - 8) = 1 - 2 = -1$.

Даље је $a - b + c = 1 - 10 + 8 = -9 + 8 = -1$.

Скидање заграда. — Из горњих примера види како се скидају заграде пред полиномом.

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Кад је пред заградом знак плус (+) одбацује се и тај знак и заграда, а чланови полинома се ређају са својим знацима.

Кад је пред заградом знак минус (—), одбацује се и тај знак и заграда, а чланови полинома се ређају са супротним знацима.

Сабирање и одузимање полинома. — За сабирање и одузимање полинома постоји ово правило:

Кад је дато више полинома да се саберу или одузму, треба све заграде пред којима је знак (+) просто скинути заједно са знацима +, а чланове тога полинома исписати са њиховим знацима уз чланове предњег полинома. Ако је пред полиномом знак минус, треба скинути знак и заграду, а чланове тога полинома исписати са супротним знацима. Тако добивени једач полином треба затим свести и уредити. Ако пред заградом нема знака, сматрамо да стоји знак +.

Пример. — Извршити означене радње:

$$(4x^4y+5x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4 - 8y^5) - (4x^4y - 5x^3y^2 + $$
$$+ 6x^2y^3 - 7xy^4 + 8y^5) - (x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5) +$$
$$+ (6x^4y - 5x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3xy^4 + 2y^5) =$$

$$\begin{array}{r}
4x^4y + 5x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4 - 8y^5 \\
-4x^4y + 5x^3y^2 - 6x^2y^3 + 7xy^4 - 8y^5 \\
-x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 \\
6x^4y - 5x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3xy^4 + 2y^5 \\
\hline
5x^4y + 6x^3y^2 - 4x^2y^3 + 10xy^4 - 13y^5
\end{array}$$

Множење полинома

Множење полинома мономом. — Узмимо пример

$$(a + b - c) \cdot 2$$

Помножити неки број са 2, значи узети га два пута као сабирак:

$$(a + b - c) + (a + b - c) = a + a + b + b - c - c = 2a + 2b - 2c$$

Кад бисмо множили општим бројем, изгледало би овако:

$(a + b - c)n = (a + b + c) + (a + b - c) + \ldots\ldots$ (*n* пута).

Имали бисмо *n* сабирака. У свакоме има по једно *a*. Дакле *an*. У свакоме има и по једно *b*. Дакле *bn*. У свакоме има и по једно — *c*. Дакле — *cn*. Отуда:

$$(a + b - c)\,n = an + bn - cn$$

Полином се множи мономом, кад се сваки члан полинома помножи тим мономом, па се добивени производи саберу.

Овим правилом си се служио још у основној школи, ма да ниси ништа знао о њему. Кад си множио *напамет* н. пр. број 234 са 2 радио си ово:

$$\begin{array}{r}
200 \cdot 2 = 400 \\
30 \cdot 2 = 60 \\
4 \cdot 2 = 8 \\
\hline
234 \cdot 2 = 468
\end{array}$$

Шта си радио овде? Раставио си број 234 на три сабирка, па си тај збир множио са 2 по горњем правилу:

$$234 \cdot 2 = (200 + 30 + 4)\, 2 = 200 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 4 \cdot 2.$$

Пошто производ не мења своју вредност, ако чинитељи промене места, одмах је јасно и обрнуто правило: *моном се множи полиномом, кад се моном помножи сваким чланом полинома и добивени резултати саберу.*

Пример. — Помножити полином

$$3x^3 + 5x^2 - 7x + 6 \quad \text{са} \quad (-3ax)$$

Биће:

$$3x^3.(-3ax)+5x^2(-3ax)+(-7x)\ (-3ax)+6\ (-3ax)=$$
$$=-9ax^4-15ax^3+21ax^2-18ax.$$

Множење полинома полиномом. — Нека су дата ова два полинома да се међусобно помноже:

$$(x^2-3x+6) \quad и \quad (x^2-2x+4)$$

Означимо други полином са P_2. Тада ће бити:

$$(x^2-3x+6)\,P_2=x^2P_2-3xP_2+6P_2$$

Ако сад сменимо P_2 његовом вредношћу, биће:

$$x^2(x^2-2x+4)-3x(x^2-2x+4)+6(x^2-2x+4)=$$
$$x^4-2x^3+4x^2-3x^3+6x^2-12x+6x^2-12x+24=x^4-$$
$$-5x^3+16x^2-24x+24$$

Из свега овога можемо извести ово

Правило. — *Полином се множи полиномом, кад се сваки члан једног полинома помножи сваким чланом другог полинома, па се добивени производи саберу.*

Напомена. — Кад знамо ово правило, можемо горњи задатак израдити много брже овако, пишући сличне мономе један испод другога:

$$\begin{array}{lrrrrr}
(x^2-3x+6)(x^2-2x+4)= & x^4 & -3x^3 & +6x^2 & & \\
 & & -2x^3 & +6x^2 & -12x & \\
 & & & +4x^2 & -12x & +24 \\
\hline
 & x^4 & -5x^3 & +16x^2 & -24x & +24
\end{array}$$

Квадрат бинома. — Знамо да је квадрат производ два једнака чинитеља:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

Кад извршимо горње множење добијамо:

$$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Значи да је

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Одатле ово

Правило за дизање бинома на квадрат. — Квадрат бинома је једнак са збиром квадрата првога члана, удвојеног производа оба члана и квадрата другога члана.

Први пример. — Развити овај квадрат: $\left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y\right)^2$

Први члан бинома $\frac{2}{3}x$

Други члан бинома $\left(-\frac{4}{5}y\right)$

$$\left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y\right)^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^2+2.\frac{2}{3}x\ .\left(-\frac{4}{5}y\right)+\left(-\frac{4}{5}y\right)^2=$$
$$=\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{15}xy+\frac{16}{25}y^2$$

Други пример. — Развити овај квадрат: $\left(\frac{3}{4}x+\frac{4}{9}y\right)^2$

$$\left(\frac{3}{4}x+\frac{4}{9}y\right)^2=\left(\frac{3}{4}x\right)^2+2.\frac{3}{4}x.\frac{4}{9}y+\left(\frac{4}{9}y\right)^2=$$
$$=\frac{9}{16}x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{16}{81}y^2$$

Куб бинома. — Знамо да је куб производ три једнака чинитеља:

$$(a+b)^3=(a+b)\ (a+b)\ (a+b)$$

Кад извршимо горње множење, добијамо:

$$(a+b)\ (a+b)\ (a+b)=(a^2+2ab+b^2)\ (a+b)=a^3+2a^2b+$$
$$+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Значи да је:

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Одатле ово

Правило за дизање бинома на куб. — Куб бинома је једнак са збиром куба првога члана, троструког производа квадрата првога члана и другога члана, троструког производа првога члана и квадрата другога члана и најзад куба другога члана.

Први пример. — Дићи на куб бином $(3a+2b)$.

I Куб првога члана: $(3a)^3=27a^3$

Квадрат првога члана: $(3a)^2 = 9a^2$

Производ квадрата првога члана и другога члана: $9a^2\ .\ 2b=18a^2b$

II Троструки производ квадрата првога члана и другога члана: $18a^2b\ .\ 3=54a^2b$

Квадрат другога члана: $(2b)^2=4b^2$

Производ првога члана и квадрата другога члана: $3a\ .\ 4b^2=12ab^2$

III Троструки производ првога члана и квадрата другога члана $12ab^2\ .\ 3=36ab^2$

IV Други члан на куб: $(2b)^3=8b^3$

Збир ова 4 делимична разултата је тражени куб датога бинома

$$(3a+2b)^3=27a^3+54a^2b+36ab^2+27b^3$$

Други пример. — Развити овај куб: $(2a - b)^3$.

$$(2a - b)^3 = (2a)^3 + 3 \,.\, (2a)^2 \,.\, (-b) + 3 \,.\, 2a \,.\, (-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

Трећи пример. — Израчунати куб бинома $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)$.

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + 3 \,.\left(\frac{2}{3}x\right)^2 .\left(-\frac{3}{4}y\right) + 3 \,.\, \frac{2}{3}\, x \,.$$
$$.\left(-\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}y\right)^3 = \frac{8}{27}\, x^3 - x^2y + \frac{9}{8}\, xy^2 - \frac{27}{64}\, y^3$$

Дељење полинома

Дељење збира. — Збир се дели неким бројем, кад се сви његови сабирци поделе тим бројем, па се добивени количници саберу.

$$(a + b + c + d) : 3 = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$$

Наш полином треба да постане три пута мањи. Он ће то постати, ако му сваки сабирак постане три пута мањи.

Нека је $a = 1,\ b = 2,\ c = 4,\ d \quad 5$.

Тада је $(a + b + c + d) : 3 = 4$

Даље је $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$(a + b + c + d) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{n}{d}$ (Сваки сабирак је постао n пута мањи).

Дељење полинома мономом. — Полином се дели мономом кад се сваки члан тога полинома подели тим мономом, па се добивени количници саберу.

$$(3x^3 + 6x^2 - 9x) : (-3x) = [3x^3 : (-3x\ ] + [6x^2 : (-3x)] +$$
$$+ [(-9x) : (-3\,x)] = -x^2 - 2x + 3$$

При практичном раду увек је боље те делимичне количнике означавати у облику разломака.

Пример.

$$(6ax^4 - 8a^2x^3 + 14a^3x^2 - 16a^4x + 12a^5) : (-2a) =$$
$$= \frac{6ax^4}{-2a} + \frac{-8a^2x^3}{-2a} + \frac{14a^3x^2}{-2a} + \frac{-16a^4x}{-2a} + \frac{12a^5}{-2a} =$$
$$= -3\,x^4 + 4ax^3 - 7\,a^2x^2 + 8\,a^3x - 6a^4.$$

Ученик треба да се извежба толико, да може одмах писати резултат, а да не мора претходно да пише разломке.

Да видимо сад шта бива кад полином није дељив мономом. На пример: $(3a^3x^2 + 5a^2x^2 + 6ax^4 + 7x^5) : bc$.

$$\frac{3a^3x^2}{bc} + \frac{5a^2x^2}{bc} + \frac{6ax^4}{bc} + \frac{7x^5}{bc}.$$

Јесмо ли извршили дељење? Нисмо; ми смо га *само означили*. Добили смо један полином састављен из *разломака*.

Разломак, чији су бројитељ и именитељ полиноми или мономи, зове се **општи разломак**.

При дељењу полинома мономом, ми веома често добијемо полином састављен од општих разломака. *Тај случај наступа, кад сви чланови полинома нису дељиви датим мономом, то јест кад дати полином није дељив датим мономом.*

Дељење полинома полиномом. — На примерима ћемо се потсетити како се дели полином полиномом.

Пример I.

$$(6 + x^2 - 5x) : (x - 2) =$$

Најпре се оба полинома уреде по опадним степенима:

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) =$$

Прво се дели први члан дељеников првим чланом делитељевим

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x \qquad\qquad x^2 : x = x$$

Затим се добивеним количником помножи делитељ и добивени производ одузме од дељеника.

$$(x - 2)\ x = x^2 - 2x$$

$$\begin{array}{l} (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ \quad -3x \end{array}$$

Спусти се даљи члан из дељеника и уреди са чланом који је преостао. Први члан тако добивенога остатка дели се првим чланом делитељевим;

$$\begin{array}{l} (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ \quad -3x + 6 \end{array} \qquad (-3x) : x = -3$$

Добивеним количником множи се делитељ и добивени производ одузме од пређашњег остатка:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\
\underline{\pm x^2 \mp 2x} \\
\qquad - 3x + 6 \\
\qquad \underline{\mp 3x \pm 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array} & (x-2)(-3) = -3x+6
\end{array}$$

Тај посао се наставља све дотле, док се не добије остатак нула, или док се не добије остатак нижег степена него што је делитаљ, или докле је нама потребно.

Пример II

$$\begin{array}{l}
(2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 13x + 12) : (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) = 2x^2 + x - 3 \\
\underline{\pm 2x^5 \mp 4x^4 \pm 6x^3 \mp 8x^2} \\
\qquad x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 13x \\
\quad \underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2 \mp \ \ 4x} \\
\qquad\quad - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 12 \\
\qquad\quad \underline{\mp 3x^3 \pm 6x^2 \mp 9x \pm 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Спустили смо само члан — 13*x*, јер имамо свега 4 члана у делитељу.

Пример III

$$\begin{array}{l}
(3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 16x - 3) : (x^2 + 2x - 1) = 3x^2 - 4x + 5 \\
\underline{\pm 3x^4 \pm 6x^3 \mp 3x^2} \\
\qquad - 4x^3 - 3x^2 + 16x \\
\qquad \underline{\pm 4x^3 \mp 8x^2 \pm \ \ 4x} \\
\qquad\qquad 5x^2 + 12x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 5x^2 \pm 10x \mp 5} \\
\qquad\qquad\qquad 2x + 2
\end{array}$$

При дељењу полинома полиномом, ако деоба не може да се изврши без остатка, добијамо **општи разломак.**

Ако дељеников полином обележимо са P_1, делитељев са P_2 а количников полином са Q, имаћемо у другом примеру

$$\frac{P_1}{P_2} = Q$$

Ако остатак обележимо са R имаћемо у трећем примеру

$$\frac{P_1}{P_2} = Q + \frac{R}{P_2}$$

$\frac{R}{P_2}$ је **општи разломак.**

Он у трећем примеру овако изгледа:

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}$$

пошто је

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 16x - 3}{x^2 + 2x - 1} = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}$$

То је исто што и ово:

$$\begin{array}{l}
21 : 4 = 5 \\
\overline{1}
\end{array}$$

Отуда је:

$$\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$$

Пример IV

$$\begin{array}{l}
1 \qquad : (1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 \\
\underline{\pm 1 \pm x} \\
\quad - x \\
\quad \underline{\mp x \mp x^2} \\
\qquad\quad x^2 \\
\qquad \underline{\pm x^2 \pm x^3} \\
\qquad\quad - x^3 \\
\qquad\quad \underline{\mp x^3 \mp x^4} \\
\qquad\qquad + x^4
\end{array}$$

Види се да ово дељење неће никад да се сврши, пошто у остацима изложитељ од *x* једнако расте.

Одавде се види једна занимљива ствар. Види се да количник $\frac{1}{1 + x}$ можемо да претставимо као збир од бескрајно много сабирака. Низу тих сабирака нема краја. Он иде у бесконачност. Ми то у Математици кажемо, да смо способни да израз $\frac{1}{1 + x}$ развијемо у **бесконачан ред.**. У томе реду можемо задржати колико нам треба чланова То пишемо овако:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$$

Тачкице показују да се тај низ протеже у бесконачност. Ако нам је потребно да имамо пет чланова, можемо их лако написати, кад најпре пажљиво загледамо горњи ред. Види се да су у њему парни чланови негативни, а непарни чланови позитивни. (Значи, позитивни су ови чланови: први, трећи, пети...; негативни су: други, четврти, шести...) Види се да је у сваком члану степен за 1 мањи од реднога броја тога члана. (Други члан има редни број 2, а степен му је $2 - 1 = 1$. Трећи члан има редни број 3, а степен му је $3 - 1 = 2$).

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \; . \; . \; .$$

Потребан нам је пети члан. Он је позитиван и степен му је $5 - 1$, тј. 4. Дакле пети члан је $+ x^4$.

Исто тако лако одређујемо и остале чланове.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \; . \; . \; .$$

Ако хоћемо тачну вредност овога разломка, пишемо овако:

$$\frac{1}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \frac{x^7}{1+x}$$

ВЕЖБАЊА УЗ II ОДЕЉАК

1\. — Броју x додај збир $(1 + x)$. Проба за $x = 4$.

2\. — „ y „ „ $(4 + y)$ „ „ $y = -1$.

3\. — „ z „ „ $(3 + z)$ „ „ $z = \frac{1}{4}$

4\. — „ a „ „ $(2a + 3b + 2c)$ „ „ $a = 1, b = 0, c = 6\frac{1}{3}$

5\. — „ m „ „ $(3m + 2n + 1)$ „ „ $m = \frac{1}{3}, n = 2$

6\. — Броју a додај разлику $(m - n)$. Проба за $a = 1,\ m = 3,\ n = 2$.

7\. — „ x „ „ $(2a - 3b)$ „ „ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3},\ x = 5$.

8\. — „ x „ „ $(3x - 1)$ „ „ $x = \frac{2}{3}$

9\. — „ x „ „ $(4\frac{1}{3} - 6x)$ „ „ $x = -\frac{1}{12}$

10\. — „ y „ „ $(\frac{2}{3} - 3y)$ „ „ $y = -\frac{2}{3}$

11\. — Од броја a одузми збир $(2a + 7)$. Проба за $a = 1$.

12\. — „ „ b „ „ $(3b + a + 8)$ „ „ $a = 1,\ b = 2$.

13\. — „ „ y „ „ $(2x + 3y + 9)$ „ „ $x = y = 2$.

14\. — „ „ x „ „ $(4x + 5y + 8)$ „ „ $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{5}$

15\. — „ „ m „ „ $(3m + 2n + 5)$ „ „ $m = 2,\ n = -3$.

16\. — „ „ x „ разлику $(x - 1)$ „ „ $x = 2$.

17\. — „ „ m „ „ $(4 - 3m)$ „ „ $m = -\frac{1}{3}$

18\. — „ „ x „ „ $(4x - 3y)$ „ „ $x = y = 8$.

19\. — Од броја a одузми разлику $(5a - 6b)$ Проба за $a = 3,\ b = 4$.

20\. — „ „ x „ „ $(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y)$ „ „ $x = 3,\ y = -5$.

21\. — Сабрати ове полиноме:
$(3x^2 + ax + b) + (-5x + 3ax^2 + c + b) + (-8ax + 5x^3 + c^2 + b)$
па добивени резултат уредити по x.

22\. — Сабрати ове полиноме:
$(5x^3 + axy^3 + 5bx - c) + (4x^2 - 3x^3 - 4c - 12bx) + (9cx^2 + 12a^3 + 5bx + 15)$
па добивени резултат уредити по x.

23\. — Извршити означене радње:
$(3xy^4 - 4x^2y^2 + 5x^3y^3 - 6x^4y + 7x^5 - 9) - (-10 + x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - 4x^2y^3 + 5xy^4) +$
$+ (-3x^3y^2 + 4x^4y - 5x^5 + 10 - 7x^2y^3 + 8xy^4)$
па добивени резултат уредити по y.

24\. — Извршити означене радње:
$(-4y^3z + 3y^2z^2 - 2yz^3 + z^4 - 5) - (-6 + 5yz^3 - 4z^4 + 3y^2z^2 - 2y^2z) +$
$+ (5y^3z - 4yz^3 - 9)$
па добивени резултат уредити по y.

25\. — Извршити означене радње:

$$\left(\frac{-x^4}{4} + \frac{4x^2}{3} + \frac{5x^2}{6} - 8x + 9\right) - \left(\frac{x^4}{4} - 5x^3 + \frac{5x^2}{6} - 8x + 5\right) +$$
$$+ \left(1{,}5 - 0{,}5x^2 + \frac{3}{4}x^3 - 7y^4\right).$$

26\. — Изврши означене радње:
$(5x^3 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) - [-(-5 - 4x) - (-3x^2 + 2x^3)] + 7$
па добивени резултат уреди по x.

27\. $(5x - 7 + 8y) - \{3x - [2 - (4 - x - y)]\} - (2x + 9y + 6)$

28\. $3 - (x - 3) - \{3 - [-x - (1 - x)]\} - (1 - x)$

29\. $(5 - 14x - 9) - (3 - x - y) - [(x - y) - (y - x)] + (x - 1)$

30\. $(x + 2y + 3) - (3 - 2y - x) - [-1 - (3y - x - 3)]$

31\. $x - \{-1 - [-1 - (1 - x)]\}$

32\. $1 - [(x - 1) + 1] - [1 - (1 - x)] - \{(a + bx) - (c + ax) - [1 - (c + ax)]\}$

33\. $(3x - 2y) - (2y - 3x) - (2y - 3x) + (-2y - 3x)$

34\. $(3x^2 - 1) - (1 - 3x) - (1 - 2x^2) - (1 + 3x) - (4 - 2x^2)$

35\. $(2x^2 - 3y^2) - (2x - 3y) - (4 - 2x^2) + (5 - 3y^2) - (4x - 2y)$

36\. $(4x - 3y) \,.\, (-2)$ 37. $(2x - y)\ (-5)$ 38. $(2x + y -)\ (-4x)$

39\. $(-x^2 + y^3 - 1)\ (-1)$ 40. $(3x^2 - 2xy + y^2)\ (-3xy)$

41\. $(\frac{-x^3}{3} - y^2 + 1)\ (-3x)$ 42. $(2x^2 - 3x + 1)\ (-2x)$

43 $\left(\frac{x^2}{5} + \frac{xy}{10} - \frac{2}{8} y^2\right) (-30x)$

44. $(2x^2 + 3xy + y^2) . (- xy)$.

45. $(3x^2 - 4x^3 + 5x - 7) . \left(- \frac{x}{3}\right)$.

46. $(1{,}5 - 2x + 3x^2) . (- 0{,}5x^2)$

(Овде добивени резултат уреди по x).

47. $(x + 1) (x - 1)$

48. $(x - \frac{3}{4}) (x - 8)$

49. $(x - \frac{1}{3}) (x - \frac{1}{2})$

50. $(x^2 - 3x + 2) (x - 1)$

51. $(x - 5) (x - \frac{1}{4})$

52. $(4x^2 - 3x - 8) (x - 3)$

53. $(4y^2 - 5y + 1) (2y^2 - 3y + 5)$

54. $(-3y^3 + 9y - 1) (2 y^2 - \frac{y}{9} - 1)$

55. Помножи

$$(abx + a^2y + b^2x) (aby + a^2x - o^2)$$

и уреди по x.

56. — Помножи

$$(3x^3 - 5x^2 + 6x - 7) (2x^2 - 6x + 5)$$

Најбрже ћеш то урадити, ако будеш потписао један полином под други тако, да једноимени мономи стоје један испод другога.

$$\begin{array}{rrrrrr}
3x^3 & -5x^2 & +6x & -7 & & \\
 & 2x^2 & -6x & +5 & & \\
\hline
6x^5 & -10x^4 & +12x^3 & -14x^2 & & \\
 & -18x^4 & +30x^3 & -36x^2 & +42x & \\
 & & +15x^3 & -25x^2 & +30x & -35 \\
\hline
\end{array}$$

Сад је лако сабрати, кад су лепо потписани једноимени мономи један испод другога.

57. — Помножи

$$(2x^2 - 6x + 4) (3 - 8x + 4x^2).$$

Најпре уреди други полином по опадним степенима по x, па онда множи.

58. — Помножи

$$(x^2 - b^2 + 2ax + a^2) (b^2 + x^2 + 2bx - 3ab - a^2).$$

Најпре уреди!

59. — Помножи

$$(ax^2 + bx + c) (a' x^2 + b' x + c).$$

Не заборави да $3a$ и $3a'$ *нису* једноимени мономи!
Знај да $(a + a')$ није равно ни $2a$, ни $2a'$!

60. — Помножи

$$(ax^2 + 2a^2x^2 + 6a^2x - a^4) (x^2 - 5ax + 0{,}5a^2).$$

61. — Израчунај квадрат од $(a + b)$. Упамти резултат!
62. — „ „ „ $(a - b)$. Упамти резултат!
63. — „ „ „ $(3a - 4b)$.
64. — „ „ „ $\left(\frac{3}{7} x - y\right)$
65. — . „ „ $\left(x - \frac{2}{3} y\right)$.

66. — Израчунај крадрат од $\left(- \frac{2}{7} - \frac{3}{8} y\right)$.
67. — „ „ . $(0{,}04x - 0{,}1y)$.
68. — „ „ . $\left(0{,}5a - \frac{2}{3} c\right)$.
69. — „ „ „ $\left(\frac{2}{5} a - 0{,}4b\right)$.
70. — „ куб „ $(a + b)$. Упамти резултат!
71. — „ „ „ $(a - b)$. Упамти резултат!
72. — „ „ „ $(2a - 7b)$.
73. — „ „ „ $(3a - 0{,}4c)$.
74. — „ „ „ $\left(\frac{3}{7}x - 1\right)$.
75. — „ „ „ $(8 - 0{,}1y)$.
76. — „ „ „ $\left(y - \frac{3}{7}\right)$.
77. — „ „ „ $\left(\frac{2}{5} x + 0{,}2y\right)$.
78. — „ четврти степен од $(a + b)$.
79. — „ „ „ „ $(a - b)$.
80. — Израчунај квадрат, куб, четврти степен од $(1 + x)$ и од $(1 -- x)$.
81. — Јесу ли хомогени добивени полиноми у вежбањима 78 — 80?
82. — Израчунати квадрат од $(a + b + c)$.
83. — Израчунати куб од $(a + b + c)$.
84. — Израчунати квадрат од $(a + b + c + d)$.
85. — Израчунати квадрат од $(x + y - z - u)$.
86. — Добивени резултат у вежбању 82 уреди овако: најпре стави квадрате датих бројева a, b, c по азбучном реду, а затим све остале чланове уреди опет азбучним редом. Из тако уређена полинома прочитај *практично правило за дизање полинома на квадрат*.
87. — По добивеном практичном правилу одмах дигни на квадрат полином из вежбања 84., а затим нађи множењем квадрат од $(a + b + c + d)$, па провери да ли си тачно казао правило!

По практичном правилу из вежбања 86 дигни на квадрат ове полиноме:

88. $3x^2 - 5x + 4$
89. $2x^2 - 6x + 5$
90. $3x + 5y - 9$
91. $8x + 3y - 5$

(Добивене резултате провери множењем!)

92. — Помножи: $(a + b) (a - b)$.
93. — Помножи: $(a^2 + ab + b^2) (a - b)$.
94. — Помножи: $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) (a - b)$.
95. — Помножи: $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) (a - b)$.

Какве закључке можеш извести, кад добро загледаш резултате свих вежбања 92 до 95?

96. — Помножи: $(a^2 - ab + b^2)$ са $(a + b)$.
97. — Помножи: $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ са $(a + b)$

Какве закључке можеш извести из резултата задатака 96 и 97?

Какве закључке можеш извести кад упоредиш задатке 92 — 97 и добивене резултате у њима?

98. $(3x + 9y - 12) : 3$
99. $(4x - 6y + 2) : (-2)$.
100. $(3a - 9b) : (-3)$.
101. $(-4a + 16b) : (-4)$.
102. $(2x - 3x) : x$
103. $(3y^2 - 6y) : (-y)$
104. $(5x^2y^7z^5 - 10x^4y^3z^3) : x^3y^3z^2$.
105. $(-6a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 8a) : (-2a)$.
106. $(15ax^2 - 5axy + 10ax^3) : (-5ax)$.
107. $(2{,}5x^3y^2z - 1{,}5x^2y^3z^2 + 0{,}5x^2y^3z^3) : (-0{,}5x^2y^2z^2)$.
108. $(8x^2y^3z - 6x^3yz^2 + 10xyz^3) : (-2x^2y^2z^2)$.
109. $(5x^3y^3 - 4x^3y^2 - 5x^4y + 5y^5) : (-xy)$.
110. Подели $a^2 + 2ab + b^2$ са $(a + b)$.
111. Подели $a^2 - 2ab + b^2$ са $(a - b)$.
112. Подели $a^2 - b^2$ са $(a + b)$.
113. Подели $a^3 + b^3$ са $(a + b)$.
114. Подели $a^3 - b^3$ са $(a - b)$.
115. Подели $a^4 + b^4$ са $(a + b)$.
116. Подели $a^4 - b^4$ са $(a - b)$.
117. Подели $a^5 + b^5$ са $(a + b)$.
118. Подели $a^5 - b^5$ са $(a - b)$.

Ако је $a : b = c$, онда је $a = bc$. На основи тога видиш како се биноми из вежбања 112—118 могу *раставити на чинитеље*. Напиши биноме 112—118 у облику производа два чинитеља. Загледај добро, па ћеш лако упамтити чинитеље горњих бинома.

119. $(x^2 - 7x + 10) : (x - 2)$.
120. $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$.
121. $(x^2 + x - 2) : (x + 2)$.
122. $(x^2 + 8x + 16) : (x + 8)$.
123. $(2x^2 + 8x - 3) : (x + 3)$.
124. $(2y^2 + 7y - 4) : (y - \frac{1}{2})$.
125. $(6z^2 + 5z) : (z - \frac{1}{3})$.
126. $(5y^2 - 51y - 10) : (y + \frac{1}{5})$.
127. $(2x^3 - 7x^2 - 2) : (x - \frac{1}{2})$.
128. $(5x^3 - 26x^2 + 35x - 6) : (x^2 - 5x + 6)$.
129. $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 21x + 18) : (3x^3 - 4x^2 + 5x - 6)$.
130. $(6x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 5x - 6) : (2x^2 - 3x - 2)$.
131. $(x^5 - 2x^4 - x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$.
132. $(3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (x^3 - x^2 + 3x - 4)$.
133. $1 : (1 - x)$. Заустави се код петог члана у количнику и покажи чему је равно $\frac{1}{1 - x}$.

134. $2 : (1 - x)$. Заустави се код шестог члана у количнику и кажи чему је равно $\frac{2}{1 - x}$.
135. $3 : (1 + x)$. Упреди с IV примером у одељку дељења полинома полиномом!
136. $x : (x - 1)$. Кад добијеш трећи члан у количнику, престани да делиш, па без дељења продужи да пишеш остале чланове у количнику!
137. $x : (x + \ )$. Кад добијеш трећи члан у количнику, продужи да пишеш и остале, али без дељења!
138. $(1 + x) : (1 - x)$
139. $(x - 1) : (x + 1)$
140. $(1 - x) : (1 + x)$
141. $(x + 1) : (x - 1)$.

III — РАСТАВЉАЊЕ НА ЧИНИТЕЉЕ

Раставити један алгебарски израз на чинитеље значи написати га у облику производа два или више алгебарских израза или бројева.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $6a^2b$.

Овај се израз може на неколико начина раставити на чинитеље. $6a^2b = 6.\ a^2.\ b$ или $6a^2b = 6.\ a.\ a.\ b.$ или $6a^2b = 2.\ 3\ a.\ a.\ b$ или

$$6a^2b = 2a.\ 3ab \text{ или } 6a^2b = 2a^2.\ 3b. \text{ И т. д.}$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $4a^2 - 9b^2$.

Овај израз нас потсећа на разлику квадрата два броја:

$$4a^2 = (2a)^2$$
$$9b^2 = (3b)^2$$

Збиља је горњи израз разлика квадрата израза $2a$ и $3b$.

$$4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)\ (2a - 3b).$$

Горњи израз $4a^2 - 9b^2$ раставлли смо на два чинитеља. Први је $(2a + 3b)$, а други чинитељ је $(2a - 3b)$.

Мономи

Растављање монома на просте чинитеље. — Моном се растављa на просте чинитеље, кад му се и сачинитељ и главна количина раставе на просте чинитеље.

Први пример. — Раставити на просте чинитеље израз $12a^2b^3$

$$12 = 2\ .\ 2\ .\ 3$$
$$a^2 = a\ .\ a$$
$$b^3 = b\ .\ b\ .\ b$$
$$12a^2b^3 = 2\ .\ 2\ .\ 3\ .\ a\ .\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ b$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $15x^2y^2$

$$15 = 3 . 5$$
$$x^2 = x . x$$
$$y^2 = y . y$$
$$15x^2y^2 = 3 . 5 . x . x . y . y.$$

Полиноми

Извлачење заједничког чинитеља. — Кад сви чланови једнога полинома имају неки заједнички чинитељ, полином се може раставити на чинитеље на тај начин, што се из свих монома извуче тај заједнички чинитељ. На тај је начин полином растављен на чинитеље.

Први пример. — Раставити на чинитеље бином $2x^2 + 3x$.

Оба монома горњег полинома имају у себи x. Зато ћемо горњи полином поделити са x:

$$2x + 3$$

и помножити са x, да би остао непромењен:

$$x\ (2x + 3)$$
$$2x^2 + 3x = x\ (2x + 3)$$

Дати бином је растављен на два чинитеља. Извукли смо заједнички чинитељ x .

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $3x^2y + 6xy^2$.

$$3x^2y + 6xy^2 = 3xy\ (x + 2y)$$

Трећи пример. Раставити на чинитеље израз: $4ax^2y + 6ay$

$$4ax^2y + 6ay = 2ay\ (2x^2 + 3)$$

Четврти пример. — Раставити на чинитеље израз $4ax^2 + 6axy + 8ax^2y^2$.

$$4ax^2 + 6axy + 8ax^2y^2 = 2ax\ (2x + 3y + 4xy^2)$$

Пети пример. — Раставити на чинитеље израз $a\ (2 + x) + b\ (2 + x) + c\ (2 + x)$.

$$a\ (2 + x) + b\ (2 + x) + c\ (2 + x) = (2 + x)\ (a + b + c).$$

Изрази облика $a^2 + 2ab + b^2$. — Израз $(a^2 + 2ab + b^2)$ зове се **квадрат бинома.** И збиља је он квадрат бинома $(a + b)$.

Триноми горњег облика могу се раставити на два једнака чинитеља. Зато кад су у триному два монома квадрати, треба одмах испитати је ли тај трином квадрат бинома, па ако јесте, може се раставити на два једнака чинитеља.

Први пример. — Раставити на чинитеље трином $a^2 + 6ab + 9b^2$.

Први члан a^2 је квадрат броја a

Трећи члан $9b^2$ је квадрат израза $3b$. $9b^2 = (3b)^2$

Сад само треба пробати је ли израз $6ab$ двоструки производ броја a и израза $3b$.

$$a . 3b = 3ab$$
$$2 . a . 3b = 6ab$$

Значи да је горњи трином квадрат бинома $(a + 3b)$.

$$(a^2 + 6ab + 9b^2) = (a + 3b)^2$$
$$(a^2 + 6ab + 9b^2) = (a + 3b)\ (a + 3b)$$

Други пример. — Раставити на чинитеље трином $\frac{4}{9} x^2 + \frac{2}{3} xy + \frac{y^2}{4}$

И овде имамо два квадрата: $\frac{4}{9} x^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$ и $\frac{y^2}{4} = \left(\frac{y}{2}\right)^2$.

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{2}{3}x$$
$$\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{y}{2}$$
$$2 . \frac{2}{3}x . \frac{y}{2} = \frac{2}{3}xy$$

Значи овај трином је квадрат бинома $\left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)$.

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)^2$$
$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље трином $4x^2 + 5xy + y^2$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$
$$\sqrt{9y^2} = 3y$$

Да видимо сад је ли удвојени производ израза $2x$ и $3y$ раван изразу $5xy$.

$$2 . 2x . 3y = 12xy.$$

Значи горњи трином није квадрат бинома. Не можемо га раставити на два једнака чинитеља.

Изрази облика $a^2 - 2ab + b^2$. — Овај се израз зове **квадрат разлике.** И збиља је он квадрат разлике $(a - b)$:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)\ (a - b).$$

Први пример. — Раставити на чинитеље трином $4x^2-12x+9$.

$$\sqrt{4x^2}=2x$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$2\,.\,2x\,.\,3=12x$$

Добили смо средњи члан $12x$, али са знаком $+$. Значи, овде је *разлика* дигнута на квадрат, пошто горе стоји — $12x$.

$$4x^2-12x+9=(2x-3)(2x-3).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{4}{25}x^2-\frac{4xy}{5}+y^2$

$$\sqrt{\frac{4}{25}x^2}=\frac{2}{5}x \qquad \mathrm{I}$$
$$\sqrt{y^2}=y \qquad \mathrm{II}$$

Удвојен производ I и II треба да дâ средњи члан $-\frac{4}{5}xy$.

Пре свега један од та два члана морамо узети са знаком минус. Узмимо други члан.

$$2\,.\,\frac{2}{5}x\,.\,(-y)=-\frac{4}{5}xy$$

Добили смо средњи члан. Зато можемо писати:

$$\frac{4x^2}{25}-\frac{4xy}{5}+y^2=\left(\frac{2}{5}\,x-y\right)\left(\frac{2}{5}\,x-y\right).$$

Изрази облика a^2-b^2. — Овакав се израз зове разлика квадрата. Знамо да је

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b).$$

Ако су у датој разлици оба члана квадрати, она се може раставити на два чинитеља.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $9a^2-4b^2$.

$$9a^2=(3a)^2$$
$$4b^2=(2b)^2$$
$$9a^2-4b=(3a)^2-(2b)^2$$
$$9a^2-4b=(3a-2b)(3a+2b).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$

$$\frac{x^2}{4}=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\frac{y^2}{9}=\left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)$$

Изрази облика a^3+b^3. — Овакав се израз зове **збир кубова**. Знамо да је:

$$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2).$$

Збир кубова може се раставити на два чинитеља. Зато кад имаш бином чији су чланови кубови, можеш да га раставиш на два чинитеља по горњем обрасцу.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $27x^3+8y^3$.

$$27x^3=(3x)^3$$
$$8y^3=(2y)^3$$
$$27x^3+8y^3=(3x+2y)\,[(3x)^2-3x\,.\,2y+(2y)^2]$$
$$27x^3+8y^3=(3x+2y)\,(9x^2-6xy+4y^2).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $2x^3+54y^3$.

Ова разлика личи на збир кубова. Да испитамо оба члана.

Је ли 2 куб некога целога броја? Није.

Је ли 54 куб некога целога броја? Није.

Али ми можемо извући заједнички чинитељ 2.

$$2x^3+54y^3=2\,(x^3+27y^3).$$

Сад имамо у загради збир кубова:

$$x^3=(x)^3$$
$$27y^3=(3y)^3$$
$$x^3+27x^3=(x)^3+(3y)^3=(x+3y)\,[x^2-3xy+(3y)^2]$$
$$x^3+27y^3=(x+3y)\,(x^2-3xy+9y^2)$$

Наш израз може бити растављен на три чинитеља:

$$2x^3+54y^3=2(x+3y)\,(x^2-3xy+9y^2)$$

Изрази облика a^3-b^3. Овакав се израз зове **разлика кубова**. Знамо да је

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2).$$

Разлика кубова може се раставити на два чинитеља. Зато кад имаш бином чији су чланови кубови, можеш га раставити на чинитеље по горњем обрасцу.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $125x^3-y^3$

$$125x^3=(5x)^3$$
$$y^3=(y)^3$$
$$125x^3-y^3=(5x-y)\,[(5x)^2+5x\,.\,y+y^2]$$
$$125x^3-y^3=(5x-y)\,(25x^2+5xy+y^2).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{125}$

$$\frac{x^3}{8} = \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$\frac{y^3}{125} = \left(\frac{y}{5}\right)^3$$

$$\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{125} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right) \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{5} + \left(\frac{y}{5}\right)^2\right]$$

$$\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{125} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right) \left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{10} + \frac{y^2}{25}\right)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље израз $3x^2 - 375$.

Број 3 није куб целога броја. Зато ћемо најпре извући заједнички чинитељ 3:

$$3x^3 - 375 = 3\,(x^3 - 125) = 3\,(x^3 - 5^3)$$

$$3x^3 - 375 = 3\,(x - 5)\,(x^2 + 5x + 25).$$

Груписање чланова. — Понекад се полином може раставити на чинитеље подесним груписањем чланова. Како се то ради показаћемо на примерима.

Први пример. — Раставити на чинитеље полином $ab - bc - ac + c^2$.

Овде није ниједан од 6 показаних случајева. Кад боље загледамо, видимо да два и два члана имају заједнички чинитељ. Ми ћемо извући заједнички чинитељ b из првог и другог и заједнички чинитељ *c* из трећег и четвртог.

$$ab - bc - ac + c^2 = b\,(a - c) - c\,(a - c)$$

Наш полином добио је облик бинома. Из оба члана можемо сад извући заједнички чинитељ $(a - c)$:

$$ab - bc - ac + c^2 = (a - c)\,(b - c).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y$.

Из прва два члана не можемо извући заједнички чинитељ.

Да пробамо да извучемо заједнички чинитељ из првог и четвртог *засебно*, а из другог и трећег *засебно*.

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = y^2 - ax^2y + bx^2y - abx^4$$

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = y\,(y - ax^2) + bx^2\,(y - ax^2)$$

Сад можемо извући заједнички чинитељ $(y - ax^2.)$

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = (y - ax^2)\,(y + bx^2)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље израз $6\,(x^2 + 2)yz + x\,(8y^2 + 9z^2)$.

Наш израз је написан у облику бинома. Види се да први и други члан овога бинома немају заједничких чинитеља. Зато ћемо

извршити означена множења, па ћемо покушати да их групишемо друкчије

$$6\,(x^2 + 2)\,yz + x\,(8y^3 + 9z^2) = 6x^2yz + 12yz + 8xy^2 + 9xz^2$$

Видимо да није корисно извлачити заједнички чинитељ засебно из прва два и засебно из последња два. Да пробамо сад да их групишемо тако, да дође последњи члан уз први.

$$6x^2yz + 12yz + 8xy^2 + 9xz^2 = 6x^2yz + 9xz^2 + 12yz + 8xy^2$$

Да извучемо сад заједнички чинитељ из прва два, па из друга два:

$$3xz\,(2xy + 3z) + 4y\,(3z + 2xy)$$

Овако груписање било је добро, пошто сад можемо да извучемо заједнички чинитељ $(2xy + 3z)$.

$$6\,(x^2 + 2)\,yz + x\,(8y^2 + 9z^2) = (2xy + 2z)\,(3xz + 4y).$$

Изрази облика $x^2 + bx + c$. — Овакав трином има само један квадрат. И њега је често лако раставити на чинитеље.

Да бисмо то видели, загледајмо резултат оваквог производа.

$$(x + 2)\,(x + 3).$$

$$(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Када смо помножили ова два бинома, добили смо један трином.

Сачинитељ 6 је **производ** бројева 2 и 3, а сачинитељ 5 је **збир** тих истих бројева.

Да би смо израз $x^2 + bx + c$ могли раставити на производ два бинома, мора сачинитељ *c* бити раван производу два броја, а сачинитељ *b* збиру иста та два броја.

Нека су ти бројеви *p* и *q*. Тада мора бити

$$c = p \cdot q$$

$$b = p + q$$

Кад то знамо, лако ћемо видети, можемо ли дати трином раставити на чинитеље.

Први пример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 + 9x + 14$.

Ми ћемо гледати да раставимо 14 на два броја *p* и *q* тако да буде $p + q = 9$.

$$14 = 2 \cdot 7 \qquad\qquad 2 + 7 = 9$$

Значи, можемо горњи трином раставити на чинитеље.

$$(x^2 + 9x + 14) = (x + 2)\,(x + 7).$$

И збиља је

$$(x + 2)\,(x + 7) = x^2 + 2x + 7x + 14 = x^2 + 9x + 14$$

Други пример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 - 3x - 10$

$$-10 = (+2)\,(-5) \text{ или } -10 = (-2)\,(+5).$$

$(+2) + (-5) = -3$. Добро је.

Овде је $p = +2 \qquad q = -5.$

$$x^2 - 3x - 10 = (x + p)\ (x + q) = (x + 2)\ (x - 5)$$

И збиља је

$$(x + 2)\ (x - 5) = x^2 + 2x - 5x - 10 = x^2 - 3x - 10$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 + 12x + 20$

Овај трином има облик $x^2 + bx + c$.

$$x^2 + bx + c = (x + p)\ (x + q)$$

Сада само треба одредити p и q.

Знамо да мора да буде

$$p \,.\, q = c \text{ то јест } p \,.\, q = 20.$$

Раставимо 20 на просте чинитеље:

$$20 = 2 \,.\, 2 \,.\, 5$$

Али пошто морају бити два чинитеља, мора бити:

или $20 = 1 \,.\, 20$ или $20 = 2 \,.\, 10$ или $20 = 4 \,.\, 5$

Ми знамо да мора бити

$$p + q = 12$$

Да пробамо сад чинитеље 2 и 10.

$2 + 10 = 12$. Добро је.

Дакле биће:

$$x^2 + 12x + 20 = (x + 2)\ (x + 10).$$

ВЕЖБАЊА УЗ III ОДЕЉАК

Растави на чинитеље ове изразе:

1. $18a^3b$
2. $24a^4b^3$
3. $27a^3b^3$
4. $48x^4y^2$
5. $36ax^2y^8$
6. $60a^2b^3c^4$
7. $32av^4y^3z^4$
8. $42a^2b^3c^4x^3y$
9. $(-4x^3y^3z^3)$
10. $(-12a^3b^4x)$
11. $(-18a^2b^3x^4$
12. $(-4x^2y^2)$
13. $(-24x^3y^3)$
14. $(-38xy^3)$
15. $(-32x^3y^4)$

Растави на чинитеље ове изразе:

16. $x^2 + x$
17. $x^2y + 2y$
18. $ac + mc + nc$
19. $x^3 + x^2 + x$
20. $abc + c^3$
21. $4ax + 6a^2x^2 + 8a^3x^2 + 10a^3x + 2ax^2$
22. $(x + y)^2 + (x + y)$
23. $(x + 1)^2 + (x + 1)$
24. $x\,(x + 2y) + y\,(x + 2y)$
25. $x\,(3 + 2y) + 2z\,(3 + 2y)$
26. $4a^3b - 5a^2b^3$
27. $9x^5 - 3x^3$
28. $x^4y^3z^2 + x^2y^3z^4$
29. $8x^3 + 2x^2 - 4x$
30. $x^3y^2z + xy^3z^2 - x^2yz^3$
31. $5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4$

Растави на чинитеље ове изразе:

32. $4a^2 + 20ab + 25b^2$
33. $9x^2 + 48xy + 64y^2$

34. — Раставити на чинитеље израз $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$
35. — „ „ „ „ $x^2 + 5x + 6\frac{1}{4}$
36. — „ „ „ „ $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9}$
37. — „ „ „ „ $4 + 4y + y^2$
38. — „ „ „ „ $y^2 + 3y + 2\frac{1}{4}$
39. — „ „ „ „ $4y^2 + 12yz + 9z^2$
40. — „ „ „ „ $25x^2 + 30xy + 9y^2$
41. — „ „ „ „ $\frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 1$
42. — „ „ „ „ $4 - 1\frac{1}{3}x + \frac{x^2}{9}$
43. — „ „ „ „ $36 - 12x + x^2$
44. — „ „ „ „ $1 - \frac{2}{5}x + \frac{x^2}{25}$
45. — „ „ „ „ $\frac{x^2}{9} - 2x + 9$
46. — „ „ „ „ $a^2x^2 - 2abx + b^2$
47. — „ „ „ „ $a^2b^2x^2 - 2abx + 1$
48. — „ „ „ „ $4x^2 - 9y^2$
49. — „ „ „ „ $25x^2 - 9z^2$
50. — „ „ „ „ $4x^2 - 4$
51. — „ „ „ „ $18y^2 - 8z^2$
52. — „ „ „ „ $32x^2 - 2$
53. — „ „ „ „ $81a^2b^2 - 16c^2$
54. — „ „ „ „ $25x^2y^2 - 1$
55. — „ „ „ „ $8x^3 + 1$
56. — „ „ „ „ $27y^3 + 8$
57. — „ „ „ „ $125 + 64x^3$
58. — „ „ „ „ $\frac{8}{27}x^3 + 1$
59. — „ „ „ „ $\frac{8}{125} + \frac{27}{64}y^{\varepsilon}$
60. — „ „ „ „ $27 - y^3$
61. — „ „ „ „ $a^3b^3 - 8x^3$
62. — „ „ „ „ $125 - \frac{8}{345}y^3$
63. — „ „ „ „ $1 - \frac{27}{8}a^3x^3$
64. — „ „ „ „ $\frac{x^3}{8} - 125$
65. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^3}{8} - 2$

(Број 2 можеш овако написати у облику куба $2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$. На тај начин добијаш разлику кубова).

66. — Растави на чинитеље израз $27x^3 - 5$

67. — „ „ „ „ $x^2 - 3$.

68. — „ „ „ „ $4y^2 - 7$.

69. — Раставити на чинитеље полином $13m - 5\,an + 13n - 5am$.

(Ако скупимо у један збир чланове са m, а у други чланове са n, биће:

$$(13m - 5am) + (13n - 5an)$$
$$(13 - 5a)\ m + (13 - 5a)\ n.$$

Ако сад из обадва члана извучемо пред заграду $13 - 5a$, биће:

$$(13 - 5a)\ (m + n).$$

На тај начин горњи полином је растављен на чинитеље).

Растави на чинитеље ове полиноме:

70. $7ax + a - 7bx - b$.
71. $3ax + 3ay - 4x + 4y$
72. $31m^3 + 62n + 5m^2 + 10mn$.
73. $33x^2 - 39xy - 11xz + 13zy$
74. $x^2 - ax + bx - ab$
75. $ax^2 - ax + bx - b$
76. $x^2 - x + 7x - 7$
77. $x^2 - 4x + ax - 4a$
78. $ab + bc + ac + c^2$
79. $x^2 + xy - 3x - 3y$
80. $2xy - 3ax + 10ay - 15a^2$
81. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
82. $a\ (x^2 + y^2) + (a^2 + 1)\ xy$
83. $a^2\ (b + c) + b^2\ (a + c) + c^2\ (a + b) + 3abc$
84. $a\ (a + c) - b\ (b + c)$
85. $x^2 - 3x + 2$
86. $x^2 - 5x + 6$
87. $x^2 - 6x + 5$
(Стави $5 = 1\ .\ 5$)
88. $x^2 - x - 6$
89. $x^2 + x - 20$
90. $x^2 + 8x + 12$
91. $x^2 - 19x + 18$
92. $x^2 - 16xy + 64y^2$
93. $x^2 + 4x + 3$
94. $x^2 + 4x + 4$
95. $x^2 - 6x + 8$
96. $x^2 - 9x + 8$
97. $y^2 + 10y + 9$
98. $y^2 - 11xy + 24x^2$
99. $x^2 + 10x + 21$
100. $x^2 - 8x + 15$
101. $y^2 - 9y + 20$

102. — Провери ову идентичност:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4\ ab.$$

Можемо је проверити на два начина:

1) Узмимо произвољне вредности за a и b и сменимо их у горњим идентичним изразима.

Нека је $a = 2$, $b = 1$.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = (2 + 1)^2 - (2 - 1)^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$
$$4ab = 4\ .\ 2\ .\ 1 = 8$$
$$8 \equiv 8.$$

2) Извршимо означене радње на левој страни:

$$a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$
$$4\ ab.$$

Леви израз се свео на $4\ ab$, а толики је и израз на десној страни

$$4ab \equiv 4ab.$$

103. — Провери ову идентичност:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2\ (x^2 + y^2).$$

104. — Провери ову идентичност:

$$(a^2 + b^2)\ (a'^2 + b'^2) \equiv (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2$$

105. — Провери ову идентичност:

$$(x - y)\ (x^2 + xy + y^2) \equiv x^3 - y^3.$$

106. — Провери ову идентичност:

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)\ (x^2 - x + 1).$$

IV — НАЈВЕЋА ЗАЈЕДНИЧКА МЕРА — НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАТЕЉ

Највећа заједничка мера

Шта је највећа заједничка мера. — Највећа заједничка мера за два или више бројева је онај највећи број, који се у свима њима садржи без остатка.

Примери.

I — За бројеве 12 18 и 30 мере су ови бројеви:
1, 2, 3, 6.

Највећи од ових бројева — број 6 — јесте највећа заједничка мера за та три броја.

II — За изразе $16a^2x^3$ $12ax^2$ $20a^3x^2$ заједничке мере су ови бројеви и изрази:

1 2 4 -1 -2 -4
a x $2a$ $2x$ $4a$ $4x$ $-a$ $-x$
$-2a$ $-2x$ $-4a$ $-4x$
ax $2ax$ $4ax$ $-ax$ $-2ax$ $-4ax$
ax^2 $2ax^2$ $4ax^2$ $-ax^2$ $-2ax^2$ $-4ax^2$

Ако је a позитиван број, највећа од ових мера је $4ax^2$. Ако је a негативан број, највећа од ових мера је $-4ax^2$

Напомена. — Највећу заједничку меру ћемо скраћено обележавати са M.

Одређивање највеће заједничке мере. — Нека су дата два броја P и Q да им одредимо M.

Раставимо их на просте чинитеље. Нека је

$$P = a.\ b.\ c.\ d. \qquad и\ Q = a.\ a.\ b.\ b.\ p$$

У обадва броја јављају се ови чинитељи:

a, b, c, d и p.

Од њих имамо да саставимо M.

Узмимо a. Њиме су дељиви и P и Q. Можемо ли га узети два пута? Не можемо, пошто P није дељив са a^2.

Дакле: $M = a\ .\ .\ .$

Узмимо *b*. Види се да и њега можемо узети свега једанпут због P.

$M = a\ .\ b\ ..$

Чинитеље *c* и *d* не можемо узети због Q. Чинитељ p не можемо узети због P. Остаје:

$M = a\ .\ b.$

Шта то значи? Значи да је M производ само оних чинитеља једнога броја, који су у исто време чинитељи и другога броја.

$P = a\ .\ b\ .\ c\ .\ d$

$Q = a\ .\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ p$

M је производ заједничких чинитеља. $M = ab.$

Загледај овде израђене примере, размисли, па сам кажи правило за одређивање M!

Пример I — Одреди M за

$3ax^2y^2 \qquad 6a^2x^2y \qquad 9a^3xy^2$

Растављамо на чинитеље сва три израза:

$3ax^2y^2 = 3\ .\ a\ .\ x\ .\ x\ .\ y\ .\ y$

$6a^2x^2y = 2\ .\ 3\ .\ a\ .\ a\ .\ x\ .\ x\ .\ y$

$9a^3xy^2 = 3\ .\ 3\ .\ a\ .\ a\ .\ a\ .\ x\ .\ y\ .\ y$

Од чинитеља првога израза $3ax^2y^2$ ови се налазе у сва три:

$3, \quad a, \quad x$ и y Отуда је $M = 3axy$.

Пример II $\quad x^2-3x+2$ и x^2-5x+6

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$M = x - 2$$

Најмањи заједнички садржатељ

Шта је најмањи заједнички садржатељ. — Најмањи заједнички садржатељ за два или више бројева (или израза) јесте најмањи број (или израз), који је дељив свима тим датим бројевима (или изразима).

Н.пр. за бројеве 6, 10, 15 н. з. с. је број 30.

Најмањи заједнички садржатељ нам је потребан при сабирању и одузимању *разноимених* разломака

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{15}=\frac{5}{30}+\frac{4}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10} \qquad \frac{1}{6}-\frac{2}{15}=\frac{5}{30}-\frac{4}{30}=\frac{1}{30}$$

Одређивање најмањег заједничког садржатеља. — Узмимо да одредимо најмањи заједнички садржатељ за два броја A и C.

Раставимо их на просте чинитеље. Нека је

$A = a\ .\ b\ .\ c\ .\ c \qquad C = a\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d$

Тражимо најмањи број у коме се садрже *A* и *C*. Чинитељи наших бројева су

$a \qquad b \qquad c$ и d

Означимо н. з. с. са *H*. Да би се *A* садржало у *H*, мора *H* имати све чинитеље броја *A*. Да би се *C* садржало у *H*, мора *H* имати све чинитеље броја *C*. Значи, *H* мора имати све чинитеље које *A* и *C* и то

Чинитељ *a* мора имати два пута због *C*:

$a\ .\ a.\ .\ .$

Чинитељ *b* мора имати једанпута и због *A* и због *C*:

$a\ .\ a\ .\ b.\ .\ .\ .$

Чинитељ *c* мора имати два пута због *A*:

$a\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ c\ .\ .\ .$

Чинитељ *d* мора имати због *C*:

$a\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ c\ .\ d \qquad H = a\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ c\ .\ d$

Најмањи заједнички садржатељ има све чинитеље који се јављају у датим бројевима и то сваки чинитељ онолико пута, колико пута се он највише јавља.

Пример I — Одредити н. з. с. за p^2-p, p^2-1 и $p + 1$

$$p^2-p = p(p - 1)$$

$$p^2-1 = (p - 1)(p + 1)$$

$$p + 1 = p + 1$$

$$N = p(p+1)(p - 1).$$

Пример II — Одредити н. з. с. за x^2-x-2 и x^2-4

$$x^3-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$$

$$N=(x-2)(x+1)(x+2).$$

ВЕЖБАЊА УЗ IV ОДЕЉАК

Одреди н. з. м. (М) за ове бројеве и изразе:

1. 18, 24, 30
2. 25, 30, 50.
3. 180, 120, 204.
4. 105, 207, 306.
5. $2ab^3c$ и $3abc$.
6. $4ab^3c$ и $8ab^2c$.
7. $12a^3b^2c$ и $14ab^4$.
8. $3ax^2$ и $6ax$.
9. $14ax^3$ и $18a^3x$ и $16a^2x^2$.
10. $25ax^3$ и $7ay^2$ и $8bz^3$.
11. $x^2 - 1$ и $x - 1$.
12. $x^2 - 4$ и $x + 2$.
13. $x^3 - 1$ и $x - 1$.
14. $x^3 + 1$ и $x^2 - x + 1$.
15. $x^2 - 9$ и $x + 3$.
16. $6x^2 + 3x - 9$ и $3x - 6$.
17. $x^2 - 5x$ и $x - 5$.
18. $x^3 - 2x^2 + x$ и $x^2 - 2x + 1$.

19. $x^2 - 4x + 4$ и $x - 2$.
20. $3x^2 - 12$ и $2x + 4$.
21. $3x^3 - 24$ и $5x - 10$.
22. $2y^2 - 2$ и $y - 1$.
23. $2x^2 - 5x + 2$ и $x^2 - 4$.

Напомена уз **23**. $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - x - 4x + 2 = (2x^2 - x) - 2(2x - 1)$ и т. д.

24. $x^2 - 8x - 9$ и $x + 1$.
25. $x^2 - 6x + 9$ и $2x - 6$.
26. $3x^2 + 20x - 7$ и $2x + 14$.
27. $x^2 - 4x + 3$ и $2x - 6$.
28. $x^2 - 6x + 5$ и $3x + 15$.

Одреди н. з. с. за ове бројеве и изразе:

29. 46 50
30. 32 48
31. 30 45 60
32. 12 14 21 22
33. 45 75 105
34. 102 126 140 330
35. 42 63 98
36. 24 32 40 72
37. 14 28 56 63
38. 12 18 24 32 50
39. 52 78 117 143
40. 30 40 50 70
41. $2ax \quad 3ay$
42. $4ax \quad 6ax^2$
43. $8ax^2 \quad 2a^2x^2$
44. $6xy \quad 8ax^2y$
45. $2x \quad 3x^2y$
46. $4a^2x^3 \quad 9ax$
47. $14x^2 - 7 \quad x - 1 \quad 3x + 3$
48. $x^2 - 7x + 10 \quad x^2 - 25$
49. $x^3 - 27 \quad 4x - 12$
50. $x^2 - y^2 \quad x + y \quad 2x - 2y$
51. $ab + b^2 \quad a^2 + ab \quad a^2 - b^2$
52. $x^2 + xy \quad y^2 + xy \quad x^2 - 2xy + y^2$
53. $ab - b^2 \quad ab + b^2 \quad a^2 - b^2$
54. $x^4 - 9y^2 \quad 2x^2 - 6y^2$
55. $x^2 + 2x + 1 \quad 2x^2 - 2$
56. $x^2 + 3x + 2 \quad x^2 - 4$
57. $2x^2 - 21x + 10 \quad x^2 - 8x - 20$
58. $2x^3 - 16 \quad x^2 - 9x + 14$
59. $x^2 + 6x + 9 \quad x^2 - 9$
60. $3x - 12 \quad x^2 - 5x + 4$

V — ОПШТИ РАЗЛОМЦИ И РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С ЊИМА

Вредност општег разломка

Општи разломак. — Разломак коме је неки алгебарски израз бројитељ или именитељ, или су му и бројитељ и именитељ алгебарски изрази, зове се општи разломак.

Н. пр.: $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{x^2+2}{1+x}$, $\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$

Вредност општег разломка. — Вредност општег разломка можемо израчунати, ако су нам дате вредности општих бројева у њему.

Пример I — Израчунати вредност разломка $\frac{x-1}{2}$ за вредност $x = 5$.

Ставимо место x његову вредност 5, па ће бити:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Пример II — Израчунати вредност разломка $\frac{1}{x-3}$ за $x = 6$

Тада је:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$$

Пример III — Израчунати вредност разломка

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7} \text{ за } x = 3$$

Биће:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7} = \frac{9 - 9 + 5}{9 - 7} = 2\frac{1}{2}$$

Промене вредности општег разломка. — Општи разломак мења своју вредност, чим се промене вредности општих бројева у њему.

Н. пр. разломак $\frac{1}{x}$ за $x = 1$ вреди 1
„ $x = 2$ „ $\frac{1}{2}$
„ $x = -10$ „ $-\frac{1}{10}$ и т. д.

Разломак $\frac{x}{3}$ за $x = 3$ вреди 1
„ $x = 6$ „ 2
„ $x = -9$ „ -3 и т. д.

Разломак $\frac{x-1}{y+2}$ за $x = 1$ и $y = 1$ вреди 0
„ $x = 2$ „ $y = 1$ „ $\frac{1}{3}$
„ $x = 2$ „ $y = 2$ „ $\frac{1}{4}$
„ $x = 4$ „ $y = 4$ „ $\frac{1}{2}$
„ $x = 4$ „ $y = 5$ „ $\frac{3}{7}$

Видиш да разломак мења своју вредност чим се промене бројитељ и именитељ. То значи да његова вредност зависи и од бројитеља и од именитеља. То даље значи да је вредност општег разломка **функција** и његовог бројитеља и његовог именитеља.

Општи разломак зависи од свога бројитеља. — У разломку $\frac{x}{y}$ пустимо да се x мења, а y да има једну сталну вредност. Рецимо да је $y = 10$. Тада је $\frac{x}{y} = \frac{x}{10}$.

Ако x расте, почевши, рецимо од 1, имаћемо овакве разломке:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{4}{10}, \quad \frac{5}{10}, \quad \frac{6}{10}, \quad \dots$$

I Види се да наш разломак расте, кад му расте бројитељ.

Кад погледамо горњи низ с десна налево, видимо да бројитељ опада. У исто време опада и вредност нашега разломка.

Разломак расте кад му расте бројитељ, а опада кад му опада бројитељ.

Општи разломак зависи од свога именитеља. — У разломку $\frac{x}{y}$ дајмо сад иксу једну сталну вредност, рецимо $x = 1$, а пустимо именитељ да стално расте, рецимо од 2. Тада ћемо имати низ

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \dots$$

Види се да наш разломак опада. Што је именитељ све већи, разломак је све мањи.

Кад горњи низ погледамо с десна налево, видимо да именитељ опада, али да разломак расте.

II Разломак опада кад му расте именитељ, а расте, кад му опада именитељ.

Општи разломак зависи и од бројитеља и од именитеља. — Узмимо сад да се у разломку $\frac{x}{y}$ мењају и бројитељ и именитељ. Нека се равномерно мењају: за колико се промени бројитељ, за толико нека се промени и именитељ.

1 *случај*: прави разломак.

$$\text{I} \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \dots$$

$$\text{II} \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{5}{6}, \quad \dots$$

У првоме низу равномерно расту и бројитељ и именитељ. Разломак расте. У другоме низу равномерно опадају и бројитељ и именитељ. Разломак опада.

Прави разломак расте, ако му равномерно расту бројитељ и именитељ. III

Прави разломак опада, ако му равномерно опадају бројитељ и именитељ.

2 *случај:* неправи разломак.

$$\text{I} \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{7}{6}, \quad \dots$$

$$\text{II} \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{8}{7}, \quad \frac{7}{6}, \quad \frac{6}{5}, \quad \dots$$

Неправ разломак опада, ако му равномерно расту бројитељ и именитељ. IV

Неправ разломак расте, кад му равномерно опадају бројитељ и именитељ.

Узмимо сад да се бројитељ и именитељ произвољно мењају. Да видимо ту само два случаја.

1 случај: бројитељ расте, именитељ опада.

Кад се именитељ не би мењао, већ само бројитељ растао, V разломак би растао. Како и именитељ опада, разломак тим пре расте.

Кад бројитељ расте а именитељ опада, разломак ће расти.

2 случај: бројитељ опада, именитељ расте.

Кад би само бројитељ опадао, разломак би опадао. Како још и именитељ расте, разломак ће тим пре опадати.

Разломак опада, кад бројитељ опада, а именитељ расте. VI

Разломак $\frac{m}{0}$. — Узмимо разломак $\frac{1}{5 - x}$. Шта бива с тим разломком, кад x расте од 0? Нека је x најпре 0, па 1, па 2, па 3, па 4, па 5. Тада је $\frac{1}{5 - x}$ најпре $\frac{1}{5}$, па $\frac{1}{4}$, па $\frac{1}{3}$, па $\frac{1}{2}$, па $\frac{1}{1}$ и најзад $\frac{1}{0}$.

Колико је $\frac{1}{0}$?

Узмимо један разломак $\frac{1}{a}$ где a једнако опада. Нека је најпре $a = 1000\,000$, затим $100\,000$, па $10\,000$, па све десет пута мање.

$$\frac{1}{100000} > \frac{1}{1000000}$$

$$\frac{1}{10000} > \frac{1}{100000}$$

$$\frac{1}{1000} > \frac{1}{10000}$$

$$\frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{10}} > \frac{1}{1} \qquad \left(\text{јер је } \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10\right)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{100}} > \frac{1}{\frac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1000}} > \frac{1}{\frac{1}{100}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1000000}} > \frac{1}{\frac{1}{100000}}$$

У левоме низу именитељ је једнако опадао. Зато је разломак једнако растао. Ако наш првобитни именитељ 1000 000 опадне на 0,000001, наш разломак ће порасти од 0,000001 на 1000 000. Види се да ће разломак

$$\frac{1}{a}$$

имати све већу вредност, што a буде све мање. Именитељ једнако опада. Он и даље бива све мањи. Можемо га начинити мањим од сваког веома малога броја који би нам био дат. Н.пр. даду нам као вредност за a број 0,000000001. То је веома мали број. Али ми можемо узети једно a такво, да буде мање и од тога броја. Н.пр. можемо нашем a дати ову вредност: 0,0000000001. Кад је a таква количина, да може бити мања од сваке ма како мале унапред дате количине, ми кажемо да a тежи нули. То пишемо овако: $a \rightarrow 0$. Таква количина која тежи нули зове се **бесконачно мала количина**. Наше променљиво a је овде једна бесконачно мала количина.

Али док a тежи нули, разломак $\frac{1}{a}$ постаје већи од ма како великог броја који би нам био унапред дат. Ми тада кажемо да $\frac{1}{a}$ тежи бесконачноме. То пишемо овако: $\frac{1}{a} \rightarrow \infty$. Таква количина која тежи бесконачноме, зове се **бесконачно велика количина.**

Кад a постане нула, $\frac{1}{a}$ постаје бесконачно (∞).

$$\frac{1}{a} = \infty \text{ за } a = 0 \quad , \quad \frac{1}{5 - x} = \infty \text{ за } x = 5 \quad , \quad \frac{m}{0} = \infty$$

Рачунске радње с општим разломцима

Сабирање општих разломака. — За сабирање општих разломака важе сва она правила за сабирање разломака која смо досад научили. Ако немају једнаке именитеље, треба их довести на једнаке именитеље, па сабрати бројитеље, а потписати заједнички именитељ.

Све именитеље треба раставити на чинитеље, па склопити *најмањи заједнички садржатељ* на тај начин, што ће се узети све врсте чинитеља и то онолико пута колико се највише појављују.

Пример I.

$$\frac{3c}{4a^4b} + \frac{4d}{5ab^2} + \frac{5m}{6bc^3}$$

$4 = 2 \,.\, 2$
$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$
$5 = 5$
$b^2 = b \,.\, b$
$6 = 2 \,.\, 3$
$c^3 = c \,.\, c \,.\, c$

Врсте чинитеља:	2, 3, 5, a, b, c,	
Појављују се највише:	2	два пута
„ „ „	3	једанпут
„ „ „	5	„
„ „ „	a	четири пута
„ „ „	b	два пута
„ „ „	c	три „

Најмањи заједнички садржатељ биће:

$$2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, a^4 \,.\, b^2 \,.\, c^3 = 60a^4b^2c^3.$$

Према томе горње сабирке можемо написати овако:

$$\frac{3c \,.\, 15bc^3}{60a^4b^2c^3} + \frac{4d \,.\, 12a^3c^3}{60a^4b^2c^3} + \frac{5m \,.\, 10a^4b}{60a^4b^2c^3} = \frac{45bc^4 + 48a^3c^3d + 50a^4bm}{60a^4b^2c^3}$$

Пример II.

$$\frac{3b}{ax^4 - abx^3} + \frac{4b}{c^2x^5 - bc^2x^4}$$

У биному $ax^4 - abx^3$, појављују се и a и x, у обадва члана. Тај бином можемо овако написати:

$$ax^4 - abx^3 = ax^3\,(x - b).$$

У биному $c^2x^5 - bc^2x^4$ појављују се c и x у обадва члана. Види се одмах да можемо *извући испред заграде* израз c^2x^4, те ће бити:

$$c^2x^5 - bc^2x^4 \equiv c^2x^4 (x - b).$$

Врсте чинитеља: $a, c, x, (x - b)$.
Н. з. с. је: $ac^2x^4 (x - b)$.
Према томе горње сабирке можемо овако написати:

$$\frac{3b \,.\, c^2x}{ac^2x^4 \,(x - b)} + \frac{4d \,.\, a}{ac^2x^4 \,(x - b)} = \frac{3bc^2x + 4ad}{ac^2x^4 \,(x -- b)}.$$

Извлачење з. ч. пред заграду служи нам за скраћивање разломака.

Пример. — Скрати разломак:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 + 15x}{6x^2 + 18x}$$

Кад раставимо и бројитељ и именитељ биће:

$$\frac{3x\,(x^2 - 2x + 5)}{6x\,(x + 3)} = \frac{x^2 - 2x + 5}{2\,(x + 3)}$$

Добивени облик је простији од задатог облика.

Одузимање општих разломака. — За одузимање важи исто што и за сабирање, пошто је свака разлика у ствари *алгебарски збир*.

$$a - b = a + (- b).$$

Ипак ћемо навести један пример.

$$\frac{a}{x^2 - 1} - \frac{b}{x + 1} = \frac{a - b\,(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{a - bx + b}{x^2 - 1}$$

Множење општих разломака. — За множење важе иста правила која смо до сада видели код множења обичних разломака.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Дељење општих разломака. — И за дељење важе иста правила која смо до сада видели код дељења обичних разломака.

$$\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{am}{bn} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Овде ћемо само да поменемо и већ познате *сложене или двојне разломке*. То су разломци чији је бројитељ или именитељ разломак, или су разломци и бројитељ и именитељ. Ту треба најпре упростити бројитељ и именитељ засебно, па затим поделити упрошћени бројитељ упрошћеним именитељем.

$$\frac{\dfrac{a}{b} - c}{\dfrac{c}{a} - b} = \frac{\dfrac{a - bc}{b}}{\dfrac{c - ab}{a}}$$ Сад треба делити:

$$\frac{a - bc}{b} : \frac{c - ab}{a} = \frac{a - bc}{b} \cdot \frac{a}{c - ab} = \frac{a\,(a - bc)}{b\,(c -- ab)}.$$

ВЕЖБАЊА УЗ V ОДЕЉАК

Могу ли ови разломци мењати своје вредности? Услед чега могу наступити промене? (Услед бројитеља, или услед именитеља?)

1. $\frac{2x + 1}{8}$
2. $\frac{7}{x -- 2}$
3. $\frac{5}{x + 3}$
4. $\frac{5x - 2}{1 + x}$
5. $\frac{4x - 1}{x - 5}$

6. — За x = 4 израчунај вредност разломка из вежбања 1.
7. — „ x = 3 „ „ „ „ „ 2.
8. — „ x = 0 „ „ „ „ „ 3.
9. — „ x = 3 „ „ „ „ „ 4.
10. — „ x = 10 „ „ „ „ „ 5.

Шта бива са овим разломцима кад x расте, а шта кад x опада? Објасни зашто то бива. Ово су ти разломци:

11. $\frac{3x + 1}{7}$
12. $\frac{3x - 1}{8}$
13. $\frac{10 - x}{3}$
14. $\frac{1}{x + 10}$
15. $\frac{1}{2x - 5}$
16. $\frac{6}{7x + 1}$
17. $\frac{4}{4 - x}$
18 $\frac{9}{3 - 2x}$
19. $\frac{2x + 1}{x + x}$
20. $\frac{2x - 9}{3x - 4}$

21. $\frac{x-1}{x-2}$ 22. $\frac{x+1}{x-1}$

Испитај промене ових разломака за означене промене икса:

23. $\frac{5-x}{2}$ за промене икса од 0 до 5.

24. $\frac{6+2x}{3}$ „ „ „ „ 0 до -3.

25. $\frac{x-5}{3}$ „ „ „ „ 0 до 5.

26. $\frac{3x+5}{2}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{3}$ до $-\frac{5}{3}$

27. $\frac{5+2x}{4}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{2}$ до $-\frac{5}{2}$

28. $\frac{5}{x-4}$ „ „ „ „ 0 до 4.

29. $\frac{5}{2x-6}$ „ „ „ „ 0 до 3.

30. $\frac{3}{7x-1}$ за промене икса од $\frac{5}{7}$ до $\frac{1}{7}$

31. $\frac{7}{3x+4}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{3}$ до $-\frac{4}{3}$

Израчунај вредност ових разломака за дату вредност икса:

32. $\frac{4}{x-3}$ за $x = 3$.

33. $\frac{5}{x^2-3x+2}$ за $x = 1$ и $x = 2$.

34. $\frac{6}{x^2-5x+6}$ за $x = 2$ и $x = 3$.

35. $\frac{7}{x^2-8}$ за $x = 2$.

36. $\frac{6}{x^2+27}$ за $x = -3$.

Упрости ове разломке;

37. $\frac{4a^2bcx}{2a^2c^2y^2}$, 39. $\frac{15a^5bc^2xyz}{12abc^5y^2}$, 41. $\frac{a^4-a^4}{a^3-b^3}$

38. $\frac{15a^3bc^2xy}{50aacx^2z}$, 40. $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$, 42. $\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}$

43. — Нађи збир ових разломака:

$$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}.$$

Знамо да је $a \equiv -(-a)$.

Према томе је $b-a \equiv -[-(b-a)] \equiv -(-b+a) \equiv -(a-b)$.

Кад горње имениоце раставимо на чинитеље имаћемо:

$a-b = a-b$ $b-a = (-1)(a-b)$.

Према томе је *н. з. с.* $(-1)(a-b) \equiv (b-a)$.

$$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{-a+b}{-(a-b)}=\frac{b-a}{b-a}=1.$$ (Може ли и брже?)

Изврши означене рачунске радње:

44. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}$

Разломак $-\frac{x}{1-x}$ можемо овако написати:

$$-\frac{x}{-(x-1)}=\frac{x}{x-1}.$$

45. $1+\frac{x+y}{x-y}$, 46. $\frac{x}{x-y}-\frac{x-y}{y-x}$

Кад раставимо на чинитеље горње имениоце имаћемо:

$x-y \equiv x-y$ $y-x \equiv (-1)(x-y)$ Н. з. с. је $(-1)(x-y)$

$$\frac{x}{x-y}-\frac{x-y}{y-x}=\frac{x(-1)}{(x-y)(-1)}-\frac{(x-y)\cdot 1}{(-1)(x-y)}=$$

$$=\frac{-x-(x-y)}{(-1)(x-y)}=\frac{-x-x+y}{y-x}=\frac{y-2x}{y-x}.$$

Зашто испред израза $x-y$ мора да се стави заграда у бројитељу другога разломка?

Кад је пред разломком знак минус, треба при свођењу на један именитељ *ставити заграду* испред бројитеља, ако је бројитељ полином.

У другоме разломку било је минус напред:

$$-\frac{x-y}{y-x}$$

Кад смо оба разломка довели на један именитељ ставили смо заграду *испред* бројитеља тога разломка:

$$\frac{-x-(x-y)}{(-1)(x-y)}$$

→ На то добро обратити пажњу! ←

47. $\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$.

48. $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}-\frac{b^2}{a^2+ab}$.

49. $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}-\frac{vb-b^2}{a^2+ab}-\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

50. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x^2-a^2}{a^2-ax}$.

51. $\frac{1}{3x-a}+\frac{a}{a^2-9x^2}$

$a^2-9x^2 \equiv a^2-(3x)^2$.

52. $\frac{9x^2}{x^4-9a^2}-\frac{3}{3a+x^2}+\frac{5}{6a-2x^2}$

$x^4-9a^2 \equiv (x^2)^2-(3a)^2$.

53. $\frac{4x^2}{x^4-1}-\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

54. $\frac{1}{2a^2}-\frac{a-b}{3a^3b}+\frac{2a-3}{6ab^2}$.

55. $\frac{x-y}{x^2-xy}-\frac{x+y}{xy-y^2}-\frac{4xv}{x^2-y^2}$.

56. $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x^3+y^3}-\frac{1}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^3-y^3}$

57. $\frac{x^2-1}{(x+1)^3}+\frac{x^2-6x+6}{x^2-4x+4}+\frac{1}{x-1}$

(x^2-4x+4 можемо овако написати: $x^2-2\cdot 2x+2^2$.)

58. $\frac{ax}{y}+\frac{by}{x}-\frac{ab+a^2-b^2+3a-5b}{xy}$

59. $\frac{a^2x}{y}+\frac{by}{x}-\frac{(a^2+b^2)y^2}{x^2}-\frac{3abx^2}{y^2}$

Изврши означено множење и упрости добивени резултат:

60. $\frac{12a^2bc}{36ab^3}\cdot\frac{24ab^3c}{9abc^3}$

(Добро је увек пре множења и дељења разломака упростити их колико год се може. Овде ће бити

$$\frac{12a^2bc}{36ab^3}=\frac{ac}{3b^2}$$

$$\frac{24\,ab^3c}{9\,abc^3} = \frac{8b^2}{3c^2}$$

$$\frac{ac}{3b^2} \cdot \frac{8b^2}{3c^3} = \frac{8a}{9c}.$$

61. $\frac{7x^2y^3z}{13ax^5yz^2} \cdot \frac{26ax^3yz^2}{21x^8y^2}$

62. $\frac{81\,abc^2}{54x^2y^2z} \cdot \frac{9\,xyz^2}{18\,abc}$

63. $\frac{3\,a_3b^2c}{4a^2b^6c^4} \cdot \frac{12\,a^8b^4c^7}{6\,a^3b^7c}$

64. $\frac{5a^3b^5c}{7m^2n^4} \cdot \frac{14a^9m^7}{25n^5b^{11}} \cdot \frac{5\,n^{11}m^6}{6\,a^{15}b^{13}}$

65. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{a^2 + xy}$ ✓

66. $\frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$

67. $(x^2 - 1)\left[\frac{1}{x - 1} - \left(\frac{1}{x + 1} + 1\right)\right]$

(Овде треба најпре да упростиш израз у загради, да би од њега добио један разломак).

68. — Изврши означене рачунске радње:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

(Прво израчунај производ у четвртом члану и испред тога производа стави заграду и знак минус).

69. — Изврши означено дељење и упрости добивене резултате:

$\frac{81abc^2}{54x^2y^2z} : \frac{9a^2b^2c^2}{6xyz^2}$

70. $\frac{x^3z}{y^3z} : \frac{z^2x^3}{y^4z^4}.$

71. $\frac{3x^2 + 3xy}{x^2 - y^2} : \frac{3\,(x + y)}{x^2 - 2xy + y^2}.$

72. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4a^3 - 4ab^2} : \frac{3a + 3b}{a^2 - 2ab + b^2}.$

73. $\left[\frac{5a^2x}{b} - \frac{5aby}{cx} + 5ad - \left(ax + \frac{b^2y}{c}\right) - bd\right] : \left(\frac{ax}{b} - \frac{by}{c} + d\right).$

(Најбоље је свршити означене радње у заградама, па тек онда делити добивене разломке).

74. $\left(\frac{m^5}{32\,n^{10}} - \frac{32p^5}{243}\right) : \left(\frac{m}{2\,n^2} - \frac{2p}{3}\right).$

Упрости ове сложене разломке:

75. $\dfrac{1 - \frac{1}{1 + a}}{\frac{1}{1 + a}}$

76. $\dfrac{\frac{a}{x} + \frac{x}{a}}{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}$

77. $\dfrac{\frac{1}{a - x} + \frac{a}{a + 1}}{\frac{a}{a - 2} - \frac{a}{a + x}}$

78. $\dfrac{3x}{x - \frac{1}{4}}$

79. $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2}}$

80. — Провери идентичност:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \equiv \frac{1}{2a\,(x - a)} - \frac{1}{2a\,(x + a)}$$

81. — Провери идентичност:

$$\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}} : \dfrac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a + c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a + c}} \equiv \frac{2\,c}{a + c - b} - 1.$$

82. — Провери идентичност:

$$\frac{1}{(x - a)\ (x - b)} \equiv \frac{1}{b - a}\ \left(\frac{1}{x - b} - \frac{1}{x - a}\right).$$

83. — Ако се бројитељу и имепитељу позитивног разломка дода исти број, разломак добија већу вредност ако је био мањи од јединице, а смањује се ако је био већи од јединице. Докажи!

(Узми један разломак $\frac{a}{b}$. Ако бројитељу и имениитељу додаш неки број m, горњи разломак ће постати

$$\frac{a + m}{b + m}.$$

Ми смо раније видели, да је број, рецимо s, већи од t, ако је $s - t > o$ (то јест, ако је разлика *позитивна)*.

Направи ову разлику:

$$\frac{a}{b} - \frac{a + m}{b + m}.$$

па види каква је по знаку та разлика, ако је $a > b$, а каква је, ако је $a < b$).

84. — Кад постоји овај услов:

$1 \leqq a < b$

где су a и b цели бројеви, испитати шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се од бројитеља и од именитеља одузме исти број.

85. — Кад су a и b цели бројеви, па је $a < o < b$, шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се и бројитељу и имеиитељу дода исти позитивни број?

86. — Кад су a и b цели бројеви, па је $b < o < a$, шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се и бројитељу и именитељу дода исти негативан број?

87. — Коју вредност не смемо дати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{3}{x - 3}$$

има коначну вредност?

88. — Које вредности не смемо давати иксу, ако желимо да наш рзз ломак

$$\frac{x - 3}{4}$$

буде позитиван број?

89. — Које вредности смемо давати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{3}{x + 4}$$

буде коначан негативан број?

90. — Коју позитивну вредност не смемо дати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{2}{x - 2}$$

буде стално коначан и позитиван?

91. — Које вредности не смемо давати ипсилону, ако желимо да разломак

$$\frac{y + 1}{y - 1}$$

буде увек коначан и позитиван?

92. — Које вредности не смемо давати ипсилону, ако наш разломак

$$\frac{y - 1}{2 - y}$$

мора увек да буде негативан?

93. — Које вредности смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{1 + x}$$

мора бити увек позитиван?

94. — Које вредности не смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{1 + x}$$

мора да буде увек негативан?

95. — Које вредности смемо давати ипсилону, ако разломак

$$\frac{1 + v}{2 - y}$$

мора да буде увек коначан и позитиван?

96. — Које вредности не смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{x - 1}$$

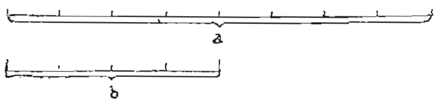
мора да буде увек негативан?

(Пази добро! Види вежбање 43.)

VI — РАЗМЕРЕ И ПРОПОРЦИЈЕ

Размере

Ако смо мерили две количине *исте* врсте (рецимо ширину и дужину собе, или два џака брашна), можемо увек, помоћу мерних бројева тих количина, да кажемо *колико је пута већа* једна количина од друге. Да бисмо могли то рећи, морамо да *упоредимо* мерне бројеве тих количина; морамо *да их поставимо један према другоме:* морамо да нађемо њихов *однос.*



Сл. 1.

Узмимо да *упоредимо* величине двеју дужи (сл. 1.) Мерећи дуж *a* нашли смо да она има 8 поделака; мерећи дуж *b* нашли смо да она има 4 подеока. Ако хоћемо

да видимо колико пута је дуж *a* већа од дужи *b*, имамо да видимо колико се пута мерни број дужи *b* садржи у мерноме броју дужи *a*. Како је 8 : 4 = 2, *однос* ових двеју дужи биће:

$$a : b = 2.$$

Овако означени *однос* двеју количина зовемо *размера* и читамо га: „*a према b* равно је 2.“

Овде је *a први члан размере, b други члан размере*, а 2 *количник размере.*

Скраћивање размере. — Размера је дата у облику количника. Ми знамо да се количник не мења, ако и бројитељ и именитељ поделимо истим бројем. Према томе *можемо оба члана размере поделити истим бројем, а да количник остане исти.*

Пример. — Скратити размеру

$$80 : 65.$$

Ако оба члана ове размере поделимо са 5 имаћемо:

$$16 : 13.$$

Размера 16 : 13 је *простија* од размере 80 : 65.

Проширење размере. — Количник се не мења, ако и дељеник и делитељ помножимо истим бројем. Према томе *количник размере ће остати исти, ако оба члана размере помножимо истим бројем.*

Пример. — Ако хоћемо да нађемо однос између ширине и дужине собе, треба да упоредимо мерне бројеве дужина и ширине. Нека је ширина $5\frac{1}{2}$ *m*, а дужина 6 *m*. Размера дужине и ширине биће:

$$6 : 5\frac{1}{2}$$

$$6 : \frac{11}{2}$$

Ако оба члана размере помножимо са 2, добићемо размеру:

$$12 : 11$$

у којој сад нема разломака.

Географске карте. — Размере се употребљавају за цртање географских карата и планова. Кад измеримо растојање између двеју тачака у природи, ми га не можемо нацртати на карти у истој дужини. Морамо га смањити. То значи морамо утврдити *однос* (размеру) између дужине на карти и дужине у природи. Без тога односа ми не бисмо могли читати карту. Због тога је на свакој карти означена *размера* у којој је карта израђена. Она показује *колико пуйа већа* је једна дужина у природи од своје дужине на карти.

Сл. 2*.

Наша слика 2 показује један део карте наше отаџбине. Карта је израђена у размери

$$1 : 750\,000.$$

Количник те размере је $\frac{1}{750\,000}$. То значи да је једна дужина у природи 750 000 *пуйа већа* од своје дужине на карти и обрнуто, да је једна дужина на карти 750 000 пута мања од своје дужине у природи. Кад то знамо лако нам је читати нашу карту.

Пример I — Колико је далеко Топчидер од Београда у правој линији?

На карти се види да је та даљина 5 *mm*. У природи мора бити 750 000 *пуйа већа*. То значи да је праволиниска даљина Београд—Топчидер оволика:

$$5 \times 750\,000\, mm = 3\,750\,000\, mm = 3750\, m = 3\,\frac{3}{4}\, km.$$

Пример II — Кад су Космај и Авала далеко једна од друге $24\,\frac{3}{4}$ *km* у правој линији, колико морају бити раздалеко на карти те две планине?

Њихова раздаљина на карти мора бити $\frac{1}{750\,000}$ њихове праволиниске дужине у природи.

$$\frac{24\,\frac{3}{4}}{750\,000} = \frac{\frac{99}{4}}{750\,000} = \frac{99}{750\,000\,.\,4} = \frac{99}{3\,000\,000}\, km.$$

Ако 99 *km*. претворимо у милиметре, имаћемо:

$$\frac{99\,000\,000}{3\,000\,000} = 33\, mm.$$

Космај и Авала морају бити раздалеко 33 *mm* на карти.

За читање карата потребно је одмах утврдити шта значи у природи један милиметар са карте. Пошто је наша размера 1 : 750 000,

---

* Ово је један део карте Србије и Црне Горе од пок. професора Цвијића, а у издању Геце Кона.

значи да 1 *mm* са карте значе 750000 *mm.* у природи, то јест 750 *m.* или 0,75 *km* или $\frac{3}{4}$ *km.* Кад то знамо лако је утврдити растојање које било тачке на карти до друге неке тачке. Треба број милиметара са карте помножити са $\frac{3}{4}$ и то је број километара у природи. Према томе биће праволиниско растојање Београд—Топчидер:

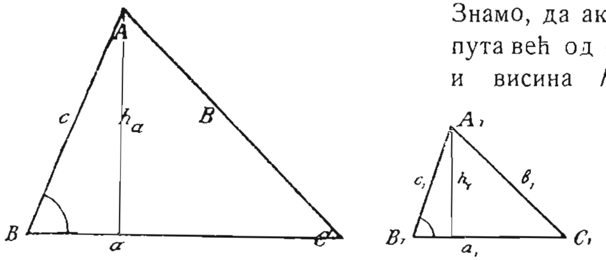
$$5 \times \frac{3}{4}\ km = \frac{15}{4} km. = 3\frac{3}{4}\ km,$$

што смо већ горе нашли.

Ако хоћемо да одредимо криволиниско растојање двеју тачака на нашој карти (рецимо растојање путем којим се долази до тих двеју тачака), треба положити конац по тој кривој линији, затим тај део конца опружити крај лењира да се види колико има милиметара. Добивени број милиметара треба помножити са $\frac{3}{4}$ и то је број километара. За мерење криволиниских растојања на карти постоји једна нарочита справа, о којој ће говорити наставник географије.

Пропорције

Две једнаке размере. — Сећамо се да је код *сличних* слика сталан однос ма којих двеју хомологих дужи. Узмимо основице и висине два *слична* троугла. Знамо, да ако је основица a два пута већ од основице a_1, мора и висина h_a бити два пута већа од висине h_1 (сл. 3).



Сл. 3.

То значи:

$$a : a_1 = 2$$
$$h_a : h_1 = 2$$

Како ове две размере имају *исти* количник, *једнаке* су. Две једнаке размере везане знаком једнакости дају *пропорцију:*

$$a : a_1 = h_a : h_1.$$

Пропорција има *четири члана* бројећи с лева на десно: *први, други, трећи и четврти.*

Пропорција има два *спољашња члана*: први и четврти и два *унутрашња члана*: други и трећи.

Пропорцији одговарају два једнака производа. — Узмимо две размере које имају исти количник

$$a : b = q \qquad c : d = q.$$

Од њих се може образовати пропорција.

$$a : b = c : d.$$

Ако ову пропорцију напишемо у облику разломка, имаћемо ову једнакост:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ако ту једнакост помножимо са bd имаћемо:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$
$$ad = bc.$$

Ако добивену једнакост загледамо мало боље, видећемо да она казује ово: *у свакој је пропорцији производ спољашњих чланова једнак с производом унутрашњих.*

Ми знамо да се производ не мења, ако чинитељи промене своја места. То значи да се *пропорција не мења, ако унутрашњи чланови међусобно и спољашњи чланови међусобно промене своја места.*

$$\left.\begin{aligned} a : b &= c : d \\ a : c &= b : d \\ d : b &= c : a \\ d : c &= b : a \end{aligned}\right\}$$

У све ове четири пропорције је
$ad = bc$

Пошто чланови b и c образују један производ, а a и d други, свеједно је који ће од њих бити унутрашњи, а који спољашњи чланови. Главно је да *чинитељи истог производа морају бити на истоименим местима,* то јест или оба спољашњи, или оба унутрашњи.

Кад сад то применимо на нашу пропорцију, имаћемо:

$$\left.\begin{aligned} b : a &= d : c \\ b : d &= a : c \\ c : a &= d : b \\ c : d &= a : b \end{aligned}\right\}$$

И у ове четири пропорције постоји једнакост
$ad = bc.$

То значи *да се једна пропорција може написати у 8 разних облика.*

Из свега овога се види да свакој пропорцији одговарају два једнака производа.

Та њена особина служи нам за *проверавање тачности* једне пропорције.

Да четири броја начине пропорцију потребан је и довољан услов да се од њих могу начинити два једнака производа од 2 чинитеља.

Пример I — Може ли се начинити пропорција од бројева 1, 2, 3 и 4?

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &\neq 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 &\neq 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 4 &\neq 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Не може.

Пример II — Може ли се начинити пропорција од бројева 1, 3, 5 и 15?

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 &\neq 5 \cdot 15 \\ 1 \cdot 5 &\neq 3 \cdot 15 \\ 1 \cdot 15 &= 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Од горња четири броја може се начинити пропорција, у којој чинитељи једнога производа морају стојати на једноименим местима. Дакле.

$$1 : 3 = 5 : 15 \qquad\qquad 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5.$$

Пример III — Је ли тачна пропорција:

$$\begin{aligned} 3 : 4 &= 20 : 28 \\ 3 \cdot 28 &\neq 4 \cdot 20. \end{aligned}$$

Горња пропорција није тачна.

Скраћивање и проширење пропорција. — Пошто пропорција претставља у ствари једнакост два двочинитељна производа јасно нам је:

1 да се пропорција не мења, ако *један* спољашњи и *један* унутрашњи члан помножимо или поделимо истим бројем;

2 да се пропорција не мења, ако *све* чланове помножимо или поделимо истим бројем.

$$ad = b \cdot c$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{n} \cdot d &= \frac{b}{n} \cdot c \\ a \cdot \frac{d}{n} &= b \cdot \frac{c}{n} \\ \frac{a}{n} \cdot \frac{d}{n} &= \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{n} \end{aligned}\right\} \text{Зашто?}$$

$$\left.\begin{aligned} (an) \cdot d &= (bn) \cdot c \\ a \cdot (dn) &= b \cdot (cn) \\ an \cdot dn &= bn \cdot cn \end{aligned}\right\} \text{Зашто?}$$

Овом особином пропорције служимо се кад хоћемо да је скратимо, то јест кад хоћемо да нам чланови буду *мањи* бројеви, или кад хоћемо *да се ослободимо разломака* у пропорцији.

Пример. — Скратити пропорцију

$$60\,000 : 30\,000 = 40\,000 : 20\,000.$$

Делимо све чланове ове пропорције са 10 000

$$6 : 3 = 4 : 2.$$

Поделимо сад I и II са 3

$$2 : 1 = 4 : 2$$

а III и IV са 2

$$2 : 1 = 2 : 1$$

Пример. — Ослободи се разломака у пропорцији:

$$15 : 10 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}.$$

Најмањи заједнички садржатељ за 2 и 3 је 6. Ако њиме помножимо III и IV члан, биће:

$$15 : 10 = 3 : 2$$

Изналажење непознатог члана. — Ако нам је један члан пропорције непознат, обележавамо га обично са x.

$$8 : 6 = x : 3.$$

Затим изразимо да је производ спољашних једнак с производом унутрашњих чланова.

Добијамо једначину првог степена:

$$6x = 8 \cdot 3$$

Из ње одређујемо тражено x:

$$x = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$$

$$6 \cdot 4 = 8 \cdot 3.$$

Од 4 *произвољно* дата броја *не* можемо увек начини пропорцију.

Сабирање неких чланова. — На пропорцији се могу изводити многе промене, али ћемо ми извести овде само најпотребнију.

Ако постоји пропорција

$$(1) \qquad a : b = c : d$$

Постоји и ова:

$$(2) \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Пропорција (2) биће тачна, ако је количник леве размере једнак с количником десне.

Размера $\frac{a}{b}$ мора имати свој количник. Нека је он q. Тада ће бити:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$ Отуда је $a = bq$ и $c = dq$. Сменом у (2) добијамо:

$$(2') \quad \frac{bq}{bq+b} = \frac{dq}{dq+d} \text{ т. ј.}$$

$$\frac{bq}{b(q+1)} = \frac{dq}{d(q+1)}, \text{ т. ј.}$$

$$\frac{q}{q+1} = \frac{q}{q+1}$$

У једначини (2) једнаке су стране. Значи, кад постоји пропорција

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

постоји и пропорција:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Кад добивену пропорцију $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ упоредимо с нашом пропорцијом:

$$a : b = c : d$$

видимо да излази ово правило:

Први члан према збиру прва два има се као трећи члан према збиру друга два члана пропорције.

Ово правило служи при одређивању састојака смесе (легуре).

Пример: — Нека сребрна смеса има $92^{0}/_{0}$ сребра и $8^{0}/_{0}$ бакра. Колико има чиста сребра у смеси тешкој 115 кгр.?

Пошто на свака 92 грама сребра, долази 8 грама бакра, количине чиста сребра и чиста бакра стоје у размери као

$$92 : 8.$$

Сребро се у хемији обележава *Ag* (argentum), а бакар са *Cu* (cuprum), те ћемо имати:

$$Ag : Cu = 92 : 8.$$

Пре свега да скратимо III и IV члан са 4:

$$Ag : Cu = 23 : 2.$$

Ако сад употребимо малопређашње правило, биће:

$$\frac{Ag}{Ag+Cu} = \frac{23}{23+2}$$

Збир $(Ag + Cu)$ је сама та смеса чија је тежина 115 кгр.

$$\frac{Ag}{115} = \frac{23}{25}.$$

А одатле

$$Ag = \frac{23}{25} \cdot 115 = \frac{23}{5} \cdot 23 = 105{,}8 \text{ кгр.}$$

Бакра ће бити:

$$Cu = 115 - 105{,}8 = 9{,}2 \text{ кгр.}$$

Горње правило употребљава се и у трговачким рачунима. Ми ћемо навести један пример.

Пример. — Два лица уложе у један посао и то: лице *А* 30000 динара, а лице *В* 90000 динара. После извесног времена зараде 24000 динара. Како ће поделити добит?

Добити чине пропорцију са улозима. Ако добит првог лица обележимо са *А*, а добит другога са *В*, биће:

$$A : B = 30\,000 : 90\,000$$

или

$$A : B = 1 : 3$$

$$\frac{A}{A+B} = \frac{1}{1+3}$$

$$A+B = 24\,000$$

$$\frac{A}{24000} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{24000}{4} = 6000 \text{ динара}$$

Према томе лице *В* добиће:

$$24000 - 6000 = 18000 \text{ динара.}$$

Непрекидна пропорција. — Кад су унутрашњи чланови једне пропорције једнаки, она се зове *непрекидна пропорција*, а тај члан који се понавља зове се *средња пропорционала*.

Примери.

$$a : b = b : c$$

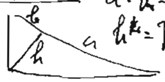
$$18 : 6 = 6 : 2$$

Је ли непрекидна она пропорција у којој су спољашњи чланови једнаки?

Непрекидну пропорцију добијамо веома често у Геометрији. Знамо да је, на пример, хипотенузина висина у правоуглом троуглу средња пропорционала за оба хипотенузина отсечка.

$a : h = h :$

$h^{k} = \sqrt{ab}$



Нађи још примера!

Продужена пропорција. — Ако уједначимо више од две једнаке размере, имаћемо *продужену* пропорцију.

$$6 : 3 = 2$$

$$8 : 4 = 2$$

$$10 : 5 = 2$$

Онда је

$$6 : 3 = 8 : 4 = 10 : 5$$
$$a : b = 2$$
$$c : d = 2$$
$$e : f = 2.$$

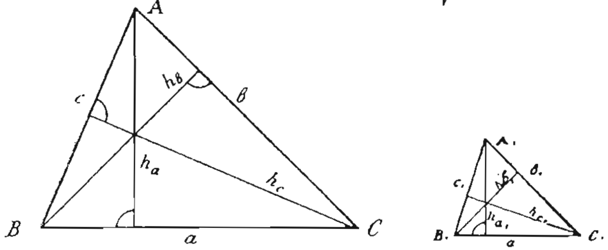
Онда је

$$a : b = c : d = e : f$$

Први чланови размера (a, c, e) зову се *први чланови* продужене пропорције; други чланови размера (b, d, f) зову се *други чланови* продужене пропорције.

Продужена пропорција пише се у ова два разна облика:

$$a : b = c : d = e : f$$
или
$$a : c : e = b : d : f.$$



Сл. 4.

Продужену пропорцију имамо код сличних слика. Знамо да је код њих размера хомологих дужи стална.

Са наше слике (сл. 4) биће:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{h_a}{h_{a^1}} = \frac{h_b}{h_{b^1}} = \frac{h_c}{h_{c^1}}$$

И на продуженој пропорцији могу се вршити многе промене. Споменућемо само најважнију: *збир свих првих чланова према збиру свих других чланова има се као ма који први према своме другом.*

(1) $$a : b = c : d = e : f.$$

(2) $$\frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Нека је q количник размера (1). Биће:

$$a = bq$$
$$c = dq$$
$$e = fq$$

Ако ове вредности сменимо у (2), добићемо:

$$\frac{bq + dq + fq}{b + d + f} = \frac{(b + d + f)\,q}{b + d + f} = q.$$

Пошто и размера

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = q$$

има количник q, значи да је продужена пропорција (2) тачна.

Продужена пропорција се употребљава и за трговачке рачуне. Ми ћемо навести један пример.

Ако три лица уложе у један трговачки посао и то A 25 000, B 50 000, C 60 000 дин., и зараде после извесног времена 67 500 дин., како ће поделити?

$$A : B : C = 25\,000 : 50\,000 : 60\,000.$$
$$A : B : C = 25 : 50 : 60$$
$$A : B : C = 5 : 10 : 12$$
$$\frac{A + B + C}{5 + 10 + 12} = \frac{A}{5} = \frac{B}{10} = \frac{C}{12}$$
$$A = \frac{A + B + C}{27}\,.\,5 = \frac{67\,500}{27}\,.\,5$$
$$B = \frac{67\,500}{27}\,.\,10$$
$$C = \frac{67\,500}{27}\,.\,12.$$

Да видимо колико пропорција можемо добити из једне ма које продужене пропорције.

Можемо их добити много, али нама је важно да знамо колико *независних* пропорција можемо добити. Две пропорције су независне кад се никаквом рачунском радњом не могу извести једна из друге.

Пример.

(1) $a : b = c : d$

(2) $a : b = e : f.$

Никаквом рачунском радњом не може се извести прва пропорција из друге, ни друга из прве.

Ако сад напишемо пропорцију;

(3) $c : d = e : f.$

видимо одмах да се она може извести из првих двеју, ако им уједначимо десне стране. Пропорција (3) није независна; она је *изведена.*

Ако је n број размера у једној продуженој пропорцији, од ње се могу добити свега (n — 1) независних пропорција.

Да покажемо то само на једном примеру.

$$a : b = c : d = e : f$$

Да спојимо све размере са свима:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad a : b = c : d\\
&(2)\quad a : b = e : f\\
&(3)\quad c : d = a : b\\
&(4)\quad c : d = e : f\\
&(5)\quad e : f = c : d\\
&(6)\quad e : f = a : b
\end{aligned}
$$

Кад добро загледамо овај низ пропорција, видимо да претстављају једну исту пропорцију пропорције (1) и (3), (2) и (6), (4) и (5). Ако према томе избацимо пропорције (3), (5) и (6), остаће нам пропорције

$$
\begin{aligned}
&\text{I}\quad a : b = c : d\\
&\text{II}\quad a : b = e : f\\
&\text{IV}\quad c : d = e : f
\end{aligned}
$$

Али пропорција IV се добија, кад се уједначе десне стране пропорција I и II, те и она мора да отпадне, пошто *није независна.*

Остају дакле свега 2 пропорције. Тиме је наше горње тврђење доказано, јер је наша пропорција имала $n = 3$ размере, а ми смо добили $(n - 1) = (3 - 1) = 2$ независне пропорције.

На ово ученик треба добро да обрати пажњу, пошто се ту много греши.

Ако нам је дата оваква продужена пропорција са *трима* непознатима

$$x : y : z = a : b : c$$

можемо из ње начинити само *две* једначине:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$

или

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Из продужене пропорције добијају се најлакше *све* независне пропорције кад се прва размера спаја са свима редом.

Пример. Напиши све *независне* пропорције из ове продужене пропорције:

$$x : y : z : u = a : b : c : d.$$

Најбоље је најпре написати ову продужену пропорцију овако:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$$

па онда прићи послу:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{u}{d}.$$

ПРИМЕНА ПРОПОРЦИЈА

Просто правило тројно

Задатак I — Кад два килограма шећера стају 30 динара, шта стају 7 килограма?

Овде су две врсте количина: килограми и динари. Од прве врсте (килограми) дата су два броја: 2 и 7. Од друге врсте (динари) само један број 30. Тражи се из друге врсте (динари) број који одговара броју из прве врсте (броју 7).

Да видимо како се понашају међу собом бројеви из тих двеју врста количина.

2 кгр. шећера	30 дин.
4 „ „	60 „
6 „ „	90 „

Кад расту бројеви прве врсте, расту и бројеви друге врсте. Колико пута порасту једни, толико пута порасту и други. Онда мора бити

2 : 4 = 30 : 60   4.30 = 2.60   пропорција постоји.

Овакве две врсте количина су **управно пропорционалне.** Кад то знамо, лако ћемо решити малопређашњи задатак.

IV	2 кгр.	30 дин.	II
III	7 кгр.	x дин.	I

x : 30 = 7 : 2

Одатле је лако наћи *x*.

Задатак II — Кад 10 радника сврше неки посао за 18 дана, колико треба радника да се тај посао сврши за 15 дана?

Радници	Дани
10	18.
x	15.

Како се понашају ове две врсте количина?

Ако један посао раде 10 радника 18 дана
онда „ 20 „ 9 „

Бројеви прве врсте расту, а друге опадају. Колико пута је први број из прве врсте (10) порастао (20, т. j. постао 2 пута већи), толико пута је број у другој врсти опао (од 18 спао на 9).

Такве две врсте количина су **обрнуто пропорционалне.**

Да пробамо да направимо пропорцију.

10р. 18д.
20р. 9д.
$20 : 10 = 9 : 18$
$10 \,.\, 9 \neq 18 \,.\, 20$ Није добро.

Прва размера нам казује како да начинимо пропорцију.

$20 : 10$ Напред је већи члан. Онда и другој размери мора напред доћи већи члан. Овако $18 : 9$.

Да пробамо сад. $20 : 10 = 18 : 9.$
$20 \,.\, 9 = 10 \,.\, 18.$ Добро је.

Пропорцију смо добили, кад смо размеру количина прве врсте уједначили са обрнутом размером количина друге врсте. Зашто с обрнутом другом размером? Зато што су ове две врсте количина *обрнуто пропорционалне.*

Сад можемо решити малопређашњи задатак,

$$\begin{array}{ll} \text{II } 10\text{р.} & \text{III } 18\text{д.} \\ \text{I } x\text{р.} & \text{IV } 15\text{д.} \\ \hline \end{array}$$

$$x : 10 = 18 : 15.$$

Одатле је лако наћи x.

Правило које казује како се одређује четврти број кад су дата три броја из двеју *пропорционалних количина* зове се **просто правило тројно.**

Ми смо сад израдили два задатка из простог правила тројног.

Сложено правило тројно

Кад је дато више од две врсте пропорционалних количина па су од сваке врсте дата по два броја, а од једне врсте само један број, ако тражимо други број те врсте, радимо задатак из сложеног правила тројног.

Како се решавају ти задаци показаћемо на примерима.

Задатак. — Кад 12 радника, радећи дневно 8 часова, сврше неки посао за 15 дана, за колико дана ће се свршити исти такав посао, кад се на њему може радити само пола дана, (4 часа), а употребе се 18 радника?

12 рад. 8 час. 15 дана
18 „ 4 „ x „

Обележимо са y број дана који је потребан да тај посао сврше 12 радника за 4 часа место за 8.

Сад задатак гласи овако:

Кад известан број радника, радећи дневно 8 часова, сврше неки посао за 15 дана, за које време би га свршили да раде само 4 часа дневно?

$$\begin{array}{ll} 8 \text{ час.} & 15 \text{ дана} \\ 4 \text{ „} & y \text{ „} \\ \hline \end{array}$$

(1) $y : 15 = 8 : 4$

Одатле је $y = \frac{15 \cdot 8}{4}$

Сад задатак гласи овако:

Кад 12 радника сврше неки посао за y дана, за колико ће га дана свршити 18 радника?

$$\begin{array}{ll} 12 \text{ р.} & y \text{ дана} \\ 18 \text{ р.} & x \text{ „} \\ \hline \end{array}$$

(2) $x : y = 12 : 18$

Из (1) имамо

$$y = \frac{15 \cdot 18}{4}$$

Кад то сменимо у (2), биће:

$$x : \frac{15 \cdot 8}{4} = 12 : 18$$

(3) $$x = \frac{\frac{15 \cdot 8}{4} \,.\, 12}{18} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 18} = \frac{15 \,.\, 4 \,.\, 2}{6} = \frac{5 \,.\, 4}{1} = 20$$

Практично упутство.

$$\begin{array}{lll} 12 \text{ рад.} & \left(\begin{array}{l} 8 \text{ час.} \\ 4 \text{ час.} \end{array}\right) & \begin{array}{l} 15 \text{ д.} \\ x \end{array} \\ 18 \text{ рад.} & & \\ \hline \end{array}$$

(1) $x : 15 = 12 : 18$

сад $$\begin{array}{lll} \left(\begin{array}{l} 12 \text{ рад.} \\ 18 \text{ рад.} \end{array}\right) & \begin{array}{l} 8 \text{ час} \\ 4 \text{ час} \end{array} & \begin{array}{l} 15 \text{ д.} \\ x \end{array} \\ \hline \end{array}$$

(2) $x : 15 = 8 : 4.$

$$\begin{array}{lrl} (1) & x : 15 = & 12 : 18 \\ (2) & = & 8 : 4 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{15 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 18} = 20$$

(Производ свих унутрашњих подељен производом свих спољашњих).

ВЕЖБАЊА УЗ VI ОДЕЉАК

Скрати ове размере:

1. abc : adc
2. bcd : bcf
3. amn : mnp
4. 18 : 24
5. $60abc : 120b^2c$
6. $75a^2b^3c : 15abc$.

Ослободи се разломака у овим размерама:

7. $\frac{2}{3} : \frac{3}{2}$.
8. $\frac{4}{7} : \frac{3}{14}$.
9. $\frac{a}{4b} : \frac{b}{6a}$.
10. $\frac{1}{a^2 - b^2} : \frac{1}{a^3 + 2ab + a^2}$.
11. $\frac{1}{x^3 + 8} : \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$.
12. $3\frac{7}{9}x^2 : 4\frac{5}{27}x^3$.

На слици 2 израчунај праволиниску даљину:

13. од Београда до Гроцке
14. „ „ „ Панчева
15. „ „ „ Авале
16. „ „ „ Остружнице.

17. — Исти задатак само што ће се сад даљина рачунати путем којим се долази до тих места.

18. — Узми план Београда, па израчунај праволиниско удаљење од своје куће до школе.

19. — Кад знаш за колико минута стижеш од куће до школе, израчунај којом се брзином крећеш.

(Узми план своје вароши, нађи на њему своју улицу; на улици приближно обележи тачком свој стан. Од те тачке па до школе вуци црте улицама којима пролазиш. Све те дужи пренеси на једну праву линију и види колика је у природи дужина коју претставља збир тих дужи. Затим употреби образац $s = ct$ за једнако кретање).

Од датих пропорција начини два једнака производа:

20. $2 : 4 = 16 : 32$
21. $12 : 6 = 100 : 50$
22. $14 : 10 = 7 : 5$
23. $18 : 9 = 6 : 3$
24. $7 : 8 = 9 : 10\frac{2}{7}$
25. $4 : 3 = 18 : 13\frac{1}{2}$.
26. $5\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = 7 : \frac{12}{17}$

Може ли се образовати пропорција од ова четири броја:

27. 2, 3, 4, 6.
28. 1, 3, 5, 7.
29. 2, 4, 6, 8.
30. $\frac{2}{5}$ 1, $\frac{4}{3}$, 2 (Најпре сва четири броја доведи на заједнички именитељ).

Од ових једнаких производа начини пропорције:

31. $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$
32. $7 \cdot 6 = 14 \cdot 3$
33. $9 \cdot 8 = 12 \cdot 6$
34. $8 \cdot 6 = 12 \cdot 4$
35. $18 \cdot 12 = 8 \cdot 27$
36. $a \cdot h_b = b \cdot h_a$
37. $b \cdot h_c = c \cdot h_b$

38. — Напиши још седам разних облика ове пропорције:

$$p : q = m : n.$$

39. — Исти задатак за пропорцију

$$5 : 1 = 20 : 4.$$

40. — Исти задатак за пропорцију

$$a : a_1 = h : h_1.$$

Провери тачност ових пропорција:

41. $8 : 4 = 6 : 3$
42. $3 : 2 = 6 : 4$
43. $7 : 9 = 8 : 6$
44. $5 : 6 = 3 : 7$
45. $8 : 5 = 18 : 12$
46. $18 : 37 = 4 : 105$

Скрати пропорције:

47. $8 : 4 = 6 : 3$
48. $10 : 5 = 8 : 4$
49. $20 : 8 = 10 : 4$
50. $12 : 14 = 6 : 7$
51. $15 : 6 = 5 : 2$
52. $110 : 20 = 11 : 2$

Доведи на најпростији облик ове пропорције:

53. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} : \frac{15}{16}$
54. $a : b = \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$
55. $m : n = 1 : \frac{3}{4}$
56. $4,2 : 1,4 = 2,5 : \frac{5}{6}$
57. $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{4} = 7 : 9\frac{3}{4}$
58. $3\frac{1}{2} : 4 = 7 : 8$
59. $5,1 : 2,4 = 1,7 : 0,8$
60. $\frac{3}{4} : 0,21 = \frac{3}{7} : 0,12$

Нађи непознати члан у пропорцијама:

61. $7,6 : x = 3,6 : 8,1$
62. $x : 1\frac{1}{5} = 5\frac{1}{4} : 4\frac{2}{7}$
63. $0,28 : x = 2,8 : 96$
64. $4\frac{1}{7} : 7\frac{1}{4} = 5 : x$
65. $0,24 : 5 = 14,4 : x$
66. $5,4 : 3,3 = x : 1,2$
67. $6,3 : x = 3,6 : 0,26$
68. $7,2 : 6,4 = x : 1,6$
69. $9,4 : x = 1,3 : 2,8$
70. $x : \frac{2}{5} = 15\frac{1}{3} : 8\frac{1}{9}$

71. — Нађи број који са бројевима 1, 2, 9 може образовати пропорцију у којој чланови иду редом 1, 2, 9 . . .

72. — Нађи број који са бројевима $1\frac{1}{2}$, 2, 8 може образовати пропорцију у којој ће 2 бити први члан, а 8 четврти.

73. — Исто за бројеве $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, 5, где је 5 други члан, а $2\frac{1}{3}$ трећи

74. Исто за бројеве 4,5 $3\frac{1}{8}$ 1 где је 1 трећи члан, а $4\frac{1}{2}$ први.

75. „ „ „ 2 5 0,07, где је 2 први члан, а 5 трећи.

76. „ „ „ 0,28 0,12 0,4 где је 0,4 други члан, а 0,28 и 0,14 спољни чланови.

77. „ „ „ 2 4 $3\frac{1}{8}$ где је 2 четврти члан, а $3\frac{1}{8}$ други.

78. „ „ „ 4 5 $7\frac{1}{3}$ где је 4 први члан, а 5 други.

79. — Дата је пропорција:

$$a : b = c : d.$$

Докажи да је тачна и пропорција:

$$\frac{a}{a - b} = \frac{c}{c - d}.$$

80. — Исто за пропорцију:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Исто за пропорције:

81. $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$ **82.** $\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$

83. $\frac{a \pm b}{c \pm d}=\frac{b}{d}.$

84. — Бронза се састоји из 80 делова бакра и 20 делова калаја. Колико треба бакра, да би се израдило звоно од 2000 кгр.?

85. — Вода се састоји из водоника (H) и кисеоника (O); они стоје у размери као 2 : 16. Колико има кисеоника у 2 литра воде?

86. — Амонијак се састоји из азота (N) и водоника (H), који стоје у размери као 14 : 3. Колико има азота у 800 грама амонијака?

87. — Кухинска со се састоји из два проста тела: натријума (Na) и хлора (Cl), који стоје у размери као 23 : 35,5. Колико има натријума у 3,5 кгр. соли?

88. — Златник од 20 динара тежак је 6,451 грама. Он се састоји из 900 делова злата и 100 делова бакра. Колико има злата у 15 таквих златника?

89. — У вези са задатком 82 нађи вредност за y у овој пропорцији

$$3 : 4 = (5 - y) : y$$

90. — Исто за вредност x пропорције:

$$3 : 3 = (x + 1) : x$$

91. — Два лица уложе у један посао и то: A 50 000 динара, а B 30 000 динара. Како ће поделити зараду од 24 000 динара?

92. — Нађи средњу пропорционалу за бројеве 2 и 32.

93. — Исто за бројеве 3 и 12 4 и $6\frac{1}{4}$, 8 и $6\frac{1}{8}$.

94. — Колике су стране правога угла у правоуглом троуглу, у коме хипотенузина висина дели хипотенузу на два отсечка: од 4 *cm* и од 25 *cm*?

95. — Хипотенуза једног правоуглог троугла је 10 *cm*. Њена висина је дели на отсечке који стоје у размери 1 : 4. Колике су стране правога угла?

96. — Колики је полупречник описаног круга око правоуглог троугла, чија је хипотенузина висина 4 *cm*, а једна страна правога угла 5 *cm*?

(Где лежи центар тога круга? Шта је то „угао у полукругу"?)

97. — Капитали K_1 и K_2 доносе *под истим процентом* годишњи интерес i_1 и i_2. Образуј пропорцију од те четири количине!

Од двеју датих пропорција начини једну продужену пропорцију:

~~**98.**~~ $2 : 4 = 3 : 6$
$2 : 4 = 4 : 8$

99. $10 : 2 = 40 : 8$
$10 : 2 = 20 : 4$

100. $a : b = c : d$
$a : b = m : n$

101. $a : a_1 = b : b_1$
$a : a_1 = c : c_1$

102. $a : b = p : q$
$c : d = p : q$

103. $3 : 6 = 2 : 4$
$18 : 10 = 9 : 5$

(Напиши овако: 9 : 18 = 5 : 10. Јесу ли сад количници размера у другој пропорцији једнаки са количницима размера у првој?)

104. $9 : 21 = 3 : 7$
$7 : 15 = 2\frac{1}{3} : 5$

105. $3 : 2 = 9 : 6$
$4 : 2 = 6 : 3$

106. — Три лица уложе у једно предузеће и то A 20 000 динара, B 50 000 и C 40 000 динара. Како ће поделити добит од 22 000 динара?

Изведи све *независне* пропорције из дате продужене пропорције.

107. $x : y : z = 1 : 2 : 3.$

108. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4.$

109. $a : a_1 : a_2 = h : h_1 : h_2$

110. $a:b:c : h_a : h_b = a_1 : b_1 : c_1 : ha_1 : ha_2$

111. — Два правоугаоника имају једнаке површине. Основице су им у размери 2 : 3. У којој су размери висине?

(У којој су размери површине?)

112. — Површине два троугла су једнаке. Основице су им у односу 3 : 4. У коме су односу висине?

113. — Стране једнога троугла су у односу 2 : 4 : 5. У коме су односу висине?

114. — Кад 3,50 м. неког штофа стају 650 дин., шта стају 22,50 м.?

115. — Кад је за комад платна од 18 м. плаћено 324 дин., шта ће стати 280 метара тога платна?

116. — Један воз је прешао 240 км. за 5 ч. Колики пут ће прећи за 12 часова?

117. — На једну славину истеку 36 л. воде за 2 минута. Колико ће воде истећи за $1^1/_4$ часа?

118. — На једну славину истече 15 л. воде за 1,5 секунд. Колико треба времена да се на њој напуни велика боца од 5 л.?

119. — Један басен је дугачак 12,5 м., широк 10 м., а дубок 80 см. За које време ће бити у њему воде до пола, кад на славину истеку 184,5 л. за 2 минута и 3 секунда?

120. — Са 8 хектара земљишта добивено је 200 хектолитара пшенице. Колико ће се пшенице добити са једне њиве од 6 ари?

121. — Једна ливница је потрошила 17000 кгр. угља док је излила 6285 кгр. гвожђа. Колико треба угља, кад морају да се излију 11812 кгр. гвожђа?

122. — У једној варошици издато је за исхрану војника 3807 кгр. хлеба за 27 дана. Колико треба хлеба, да се ти војници хране 75 дана?

123. — Прелазећи 60 км. на час један воз пређе за 6 часова пут између двеју вароши. Колико километара би требао да прелази на час, па да пређе тај пут за 5 часова?

124. — Једна славина даје 60 л. воде за 1 минут. Она може да напуни један базен за 6 часова. За које време би напунила тај базен друга једна славина, која даје 150 л. воде у минуту?

125. — Један преписивач на машини може да препише један рукопис за 12 дана, кад би радио по 4 часа дневно. Али кад препис мора да буде готов за 9 дана, колико часова дневно мора да ради?

126. — Један зид су сазидали 24 зидара за 45 дана. Колико је зидара потребно да се такав зид подигне за 27 дана?

127. — Неки посао сврше 7 радника за 40 дана. За колико ће дана свршити тај посао 20 радника?

128. — Кад 10 радника радећи дневно по 8 и по часова, сврше неки посао за 16 дана, колико треба радника, па да сврше тај посао за 10 дана са 8 часова дневнога рада?

129. — Од 36,40 м. неке тканине широке 0,75 м. начињено је 8 дечијих хаљиница. Колико треба метара друге једне тканине, широке 0,80 метара да се начине 12 таквих хаљиница?

130. — Од 12 кгр. неке вуне добијају се 66 м. тканине, широке 1 м. Колико метара те тканине могу да се добију од 15 кгр. исте вуне, кад тканина мора да буде широка 1,50 м?

131. — Један канал дуг 1950 м. ископају 50 радника за 78 дана. Колико треба радника да ископају канал од 1250 метара дужине за 50 дана кад је земљиште исте врсте?

132. — Неки посао сврше 18 радника за 16 дана са радним временом од 10 часова. Колико часова дневно морају да раде 24 радника, да би свршили тај посао за 10 дана?

133. — Кад 10 људи једу по 1 и по кгр. хлеба дневно, имаће хлеба за 4 и по месеца. Колико смеју да једу дневно 12 људи, да би им иста количина хлеба трајала 6 месеци?

134. — Једна количина зоби може да траје 25 дана за 14 коња, кад се свакоме коњу дају дневно по 6 кгр. Колико ће дана трајати зоб, кад се свакоме коњу дају дневно по 5 кгр., а дођу још 5 коња?

VII — ФУНКЦИЈЕ — ЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Функција

Знамо да површина квадрата зависи од величине његове стране: кад се промени квадратова страна, промени се и површина.

Видели смо да површина круга зависи од његовог полупречника: чим се промени полупречник, мења се и површина.

Видели смо да површина облице зависи од њене висине: чим се промени висина, промени се и површина.

Знамо да запремина коцке зависи од њене ивице: чим се промени ивица, мења се и запремина.

Решавали смо и овакве задатке из правила тројног:

Пошто су 5 килограма брашна, кад два килограма стају 10 динара?

Сећамо се да смо том приликом овако размишљали:

што више килограма, *то више* динара има да се плати.

Тиме смо казали да *те две врсте количина зависе једна од друге*. То нам је јасно одмах, јер знамо, да ћемо за *већу* количину новца добити *већу* количину килограма, а за *мању* количину новца *мању* количину килограма. То значи, *чим се једна количина измени промени се и количина друге врсте*. Ако за 20 динара добијемо 4 килограма брашна, за 7·5 динара *нећемо* добити *исту* количину килограма брашна: место 4 килограма, добићемо сад само 1,5 кг.

Имали смо исто тако и овакав задатак:

Кад један капитал донесе 100 динара интереса за 2 године, колико ће интереса донети за 6 година под истим процентом?

И ту знамо да ће за *више* година, исти капитал донети *више* интереса под истим процентом. То значи, *кад се време променило, мора се променити и интерес*. И збиља, за промењено време 6 година, промењени интерес биће 300 динара.

Решавали смо и овакве задатке:

Кад 8 радника сврше један посао за 16 дана, за које време ће свршити тај посао 16 радника?

Чим се *промени* број радника, *мења се* и време за које се тај посао свршава. Ако тај посао морамо да свршимо за 10 дана, морамо узети више радника; ако може да се ради 20 дана, можемо узети мање радника.

У Физици смо познали многе друге врсте количина које су *везане једна за другу тако, да с променом једне, наступа промена оне друге врсте количина.*

Ако о један еластичан конац обесимо терет, конац ће се истезати. Дужина конца зависиће од величине терета који смо на његовом доњем крају обесили.

Знамо да су гасови стишљиви. Штогод смањујемо запремину једног гаса, он све више притискује на зидове суда у коме је. Притисак водене паре је све већи, што је температура већа. Знамо да пара одигне поклопац са лонца, кад је вода много загрејана.

Знамо да ће путник прећи све већи пут, што више времена путује. И т. д. и т. д.

У свима овим примерима видимо да су две количине у таквом односу, да промена једне зависи од промене оне друге количине.

Рекли смо да су такве две количине **функција** једна друге.

Површина квадрата је *функција* квадратове стране.

Површина круга је *функција* кружног полупречника.

Површина облице је *фунцкија* њене висине.

Запремина коцке је *функција* њене ивице.

Количина плаћеног *новца* за једну робу *функција* је количине те *робе*.

Интерес је *функција* времена за које је капитал лежао под интересом.

Време за које ће се израдити један посао јесте *функција* броја *радника* (зависи од броја радника).

Дужина еластичног конца је *функција* тежине обешене на његовом крају.

Притисак гаса је *функција* његове запремине.

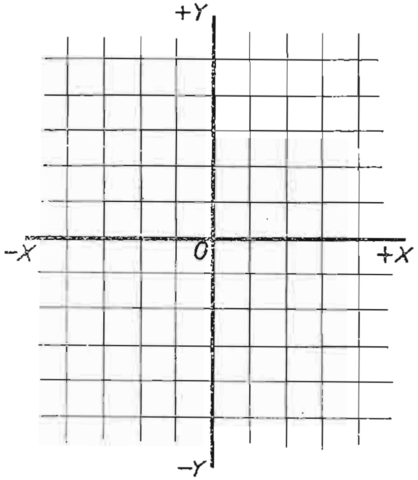
Притисак водене паре је *функција* температуре.

Координатни систем. — Да бисмо јасније видели функције Математика их црта, т. ј. представља их графички.

Ми смо већ мало видели како се то ради. Узму се две осовине. Узимамо две осовине јер смо видели да морају бити бар две врсте количина да би било функције.

Те две осовине ми узимамо под правим углом (сл. 5) и обадве делимо на *једнаке*, али *произвољне* подеоке. Овакву једну слику с двема осовинама под правим углом зовемо *правоугли координатни систем*.

Осовину паралелну са правцем писања зовемо *апсцисна осовина* и обележавамо је са X, а осовину управну на апсцисној осовини зовемо *ординатна осовина* и обележавамо је са У. Пресек осовина обележавамо са О и зовемо га *координатни почетак*. Дужине које преносимо по апсцисној осовини зовемо *апсцисе*, а дужине по ординатној осовини *ординате*. *Апсцисе* су *позитивне* десно од координатног почетка, а *негативне* лево од координатног почетка. *Ординате* су *позитивне* изнад координатног почетка, а *негативне* испод координатног почетка.



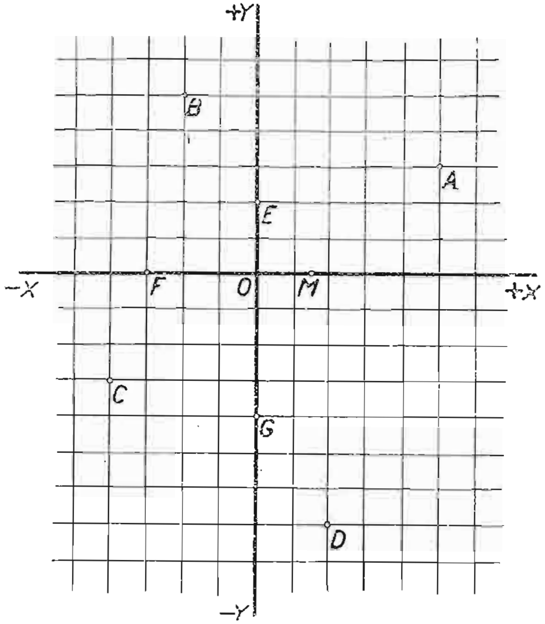
Сл. 5.

Сад кад имамо координатни систем можемо да одредимо положај сваке тачке у нашој равни цртања. Треба да видимо колико је та тачка далеко од обе осовине. Раздаљина од апсцисне осовине је *ордината* те тачке, а раздаљина од ординатне осовине је *апсциса*. Апсциса и ордината су *координате* једне тачке. Кад знамо апсцису и ординату можемо одмах нацртати тачку. Тачку обележавамо на тај начин, што напишемо њено велико слово, а крај њега у загради најпре апсцису, па запету, па ординату.

Примери. — Нацртај тачку *A* (5, 3).

Ово (5, 3) крај слова *A* значи да та тачка *A* има апсцису 5 и ординату 3 (сл. 6).

Одбројмо на апсцисној осовини + 5, а на ординатној осовини + 3. Из тих поделака дигнимо управне на осовине и у пресеку тих управних добићемо тачку *A*.



Сл. 6.

И збиља тачка *A* је удаљена: од ординатне осовине за 5 поделака, а од апсцисне осовине за 3 подеока.

Тачку *A* ћемо још брже одредити, ако из подеока + 5 на апсцисној осовини дигнемо управну и на њој одбројимо + 3 подеока.

Тачка *B* има координате $x = -2,\ y = +5$.
„ *C* „ „ $x = -4,\ y = -3$.
„ *D* „ „ $x = +2,\ y = -7$.
„ *E* „ „ $x = 0,\ y = +2$.
„ *F* „ „ $x = -3,\ y = 0$.
„ *G* „ „ $x = 0,\ y = -4$.
„ *M* „ „ $x = +1\frac{1}{2},\ y = 0$.

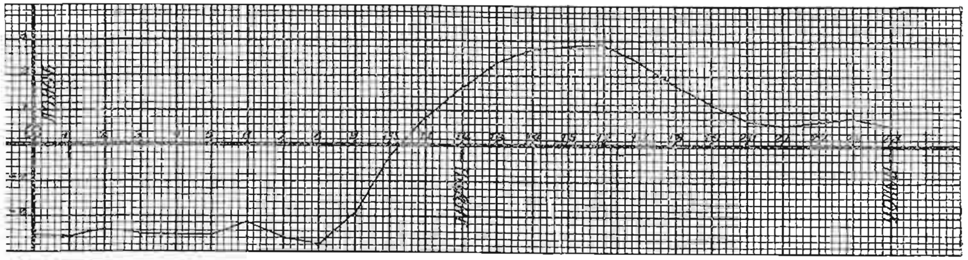
Девојчице су се већ служиле координатним системом и ако нису знале ништа о њему. Ђерђеф за вежење („штиковање“) је један координанти систем.

Кад хоће да се почне један узор („мустра“), морају се на јути одбројати крстићи од обе гране ђерђефа, које стоје под правим углом.

Кад хоћеш да препишеш неки акт тачно како је написан, мораш да одбројиш редове од горње ивице и од леве ивице, па тек онда да почнеш. На тај начин одређујеш положај почетног слова на координатном систему који претстављају ивице табака.

Ако хоћеш да исправиш неку штампарску грешку у једном слову, мораш бројати редове оздо или озго, и слова сдесна или слева. Ивице отштампаног текста претстављају координатни систем.

Координатни систем је веома подесан за претстављање температуре. Ако часове преносимо по апсцисној осовини, а температуру мерену у тим часовима бележимо као ординате, имаћемо једну изломљену линију, која јасно претставља температуру извесног дана.



Сл. 7.

Наша слика 7 претставља температуру у Београду бележену од поноћи између 29 и 30 јануара 1922 год. до поноћи између 30 и 31 јануара. Часови су бележени од 1 до 24 како се сад бележи на железницама у већини земаља. Поноћ је обележена нулом.

Кад загледамо горњу слику видимо да је тога дана било најхладније у 8 час. ујутру, а најтоплије од 3 до 4 часа по подне (од 15 до 16). Видимо и то да је температура нагло расла од 8 до 10 часова.

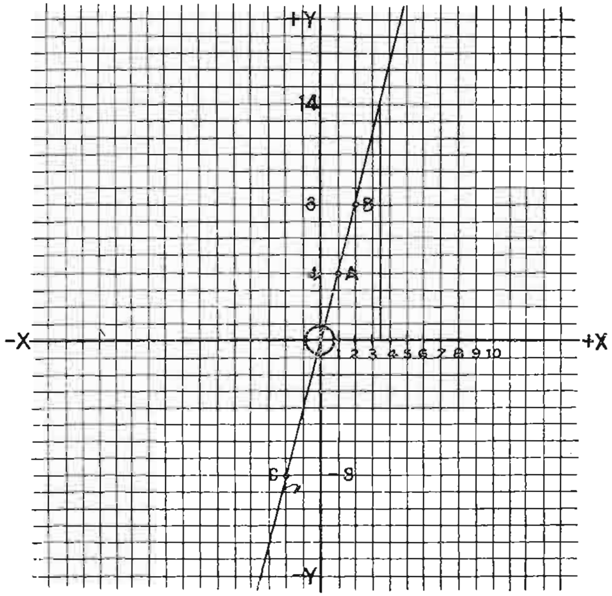
Ако бележимо температуру свакога часа, ми ћемо увек на нашој слици имати јасно означену највишу и најнижу температуру. Знамо да је после ручка топлије него ујутру. То показује изломљена линија са слике 7.

Лекари се редовно служе линијама да претставе ток болести. По апсцисној осовини преносе дане, а по ординатној осовини измерену температуру. На тај начин добију једну криву линију. Сваки лекар кад погледа такву линију, зна да ли се болест развијала правилно, или није.

Претстављање кретања на координатном систему. —

Задатак. — Графички претставити кретање путника који полази у подне из неког места и прелази сваког часа по 4 км.

Узмимо на апсцисној осовини часове, а на ординатној километре. Нека нам поделак на апсцисној осовини претставља 1 час, а поделак на ординатној осовини 1 км. (сл. 8).



Сл. 8.

На подне је наш путник у *O*. Пошто иде брзином од 4 км., он ће до 1 часа по подне прећи 4 км. и ми ћемо добити тачку *A*, која одговара времену од 1 часа и пређеном путу од 4 км. До 2 часа по подне наш путник ће прећи још 4 км., и ми ћемо добити тачку *B*, која одговара времену од 2 часа и пређеном путу од 8 км. Према томе права *OA* биће тражена слика.

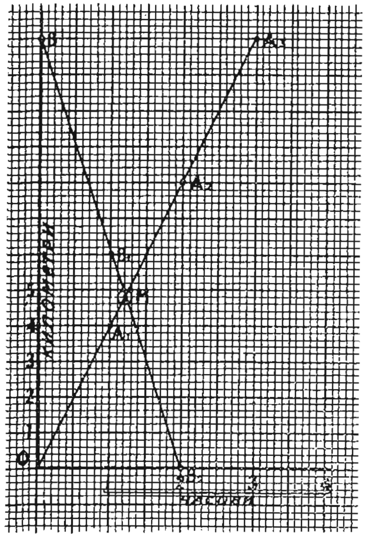
Она нам показује да је путник до 4 часа по подне прешао 16 км. Исто тако са ње видимо да је било 3 часа и 30 минута, кад је наш путник стигао у место које је далеко 14 км. од полазног места.

За овакве цртеже најбоље је служити се т. зв. „милиметарском хартијом“ каквом смо се ми послужили за сл. 7.

А где је био наш путник у 10 часова пре подне?

Почели смо да бројимо време од подне. 10 часова то је *прошло време* према нашем почетку. То прошло време обележавамо *негативним бројевима*. Наше питање постаје сад овако: Где је био путник у (—2) часа?

Време означавамо на апсцисној осовини. Узмимо налево апсцису — 2. Дигнимо и позитивну и негативну ординату. Позитивна ордината не сече нашу праву *AB* која нам претставља пут нашег путника. Негативна ордината сече је у тачци *C*. И ми читамо да је у 10 часова пре подне наш путник био далеко 8 км од места у које је стигао у подне. То место је удаљено 8 км. од полазног места и у њ се може стићи из нашег полазног места, ако идемо 8 км. у *обрнутом смислу*. Зато тачка *C* показује (—8) км



Сл. 9.

Други задатак. — Из два места удаљена 12 км. полазе у подне два путника један другом у сусрет. Брзине 4 км. и 6 км. Где ће се и кад **срести?**

Обележимо време по апсцисној осовини, а километре по ординатној. Нека нам 1 см. претставља на апсцисној осовини 1 час, а на ординатној 2 км.

Путник из *O* нека иде брзином од 4 км. После једног часа он ће прећи 4 км., што на нашој слици даје тачку *A*; (сл. 9), после 2 часа 8 км., што даје тачку A_2 и најзад после 3 часа 12 км., што ће дати тачку A_3. Права AO_3 претстављаће нам пут првога путника. Права BB_2 претстављаће нам пут другога путника. Тачка *M* претстављаће *време и место* њихова сусрета. Кад загледамо слику, видимо да *M* претставља 4,8 км. и 1 час и 12 минута.

Да проверимо то.

После једног часа и 12 минута (то јест после $1\frac{1}{5}$ часа) први путник је прешао пут:

$$4 \,.\, 1\frac{1}{5} = \frac{24}{5} \text{ км.}$$

После $1\frac{1}{5}$ часа други је путник прешао пут од

$$6 \,.\, 1\frac{1}{5} = \frac{36}{5} \; km$$

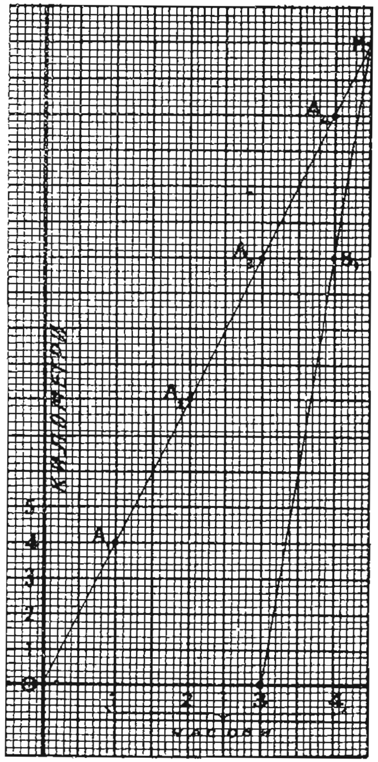
Саберимо та два пута, па ћемо добити растојање полазних тачака:

$$\frac{24}{5} + \frac{36}{5} = \frac{60}{5} = 12 \; km.$$

То значи да су се путници збиља срели после 1 часа 12 мин.

Трећи задатак. — Из једног места полази један путник у подне и иде брзином од 4 km. на час. У 3 часа по подне полази други путник колима из истог места. Кола иду брзином од 12 km. на час. Кад ће кола **стићи** *пешака и на коме месту?*

Да нам слика не би била велика, ми ћемо узећи, да нам на ординатној осовини 1 *cm.* претставља 2 *km.*



Сл. 10.

Пошто кола полазе у 3 часа, на нашој ће слици (сл. 10) њихов пут почети од 3 на апсцисној осовини. Пешаков пут биће претстављен правом *OM*, а пут кола правом B_1M.

Те се две праве секу у *M*. Тачка *M* показује $4\frac{1}{2}$ часа по подне и 18 *km*. Кола стижу пешака у 4 ч. 30 м. по подне.

Да проверимо то.

До $4\frac{1}{2}$ час по подне пешак је прешао $4 \,.\, 4\frac{1}{2} = 18$ *km*. До $4\frac{1}{2}$ часа по подне кола су прешла:

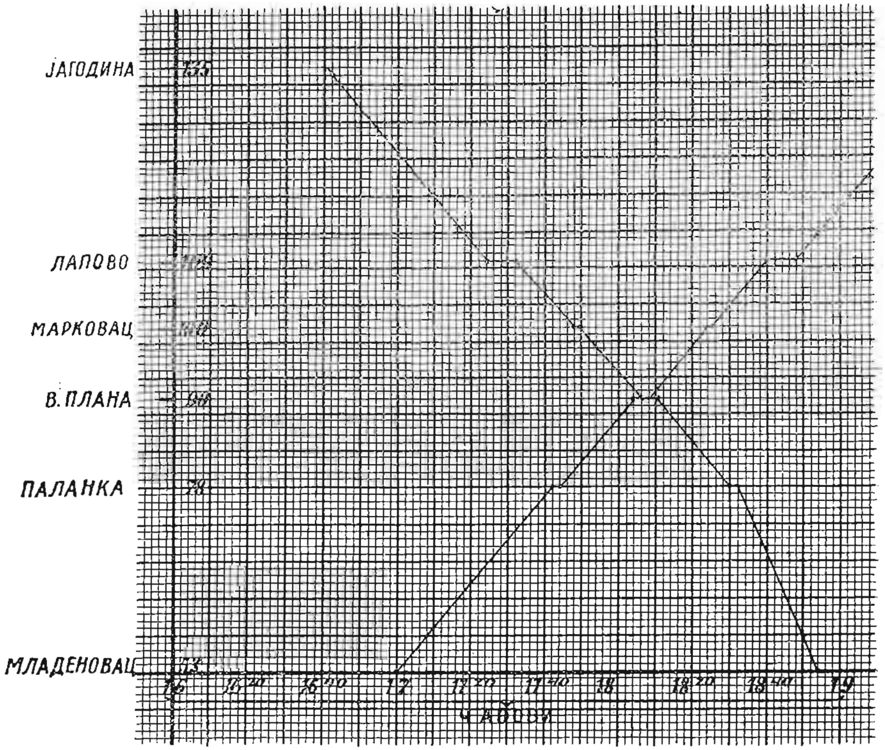
$$12 \,.\, 1\frac{1}{2} = 18 \; km.$$

Пошто су кола исто толико далеко од полазне тачке као и пешак, значи да су *стигла* пешака у 4 часа и 30 мин. по подне.

Помоћу координатног система прави се и такозвани „графикон кретања“ за возове. Тим се графиконом одређује стизање возова у станице и укрштање.

Узмимо само један пример.

По реду вожње од 1 јуна 1921. год. полазио је брзи воз из Младеновца за Ниш у 17 час. Из Јагодине за Београд полазио је брзи воз у 16 часова и 42 мин. Оба воза крећу се просечном брзином од 36 *км*. Где ће се и кад срести? На којој станици треба да се укрсте? Застанци возова су ови: у Лапову 8 минута, у Марковцу 1 минут, у Великој Плани 4 минута, у Паланци 2 минута.



Сл. 11.

Станице се налазе на овим километрима (рачунајући од Београда): Младеновац 53, Паланка 78, В. Плана 90, Марковац 100, Лапово 109, Јагодина 135.

Слика 11 показује путеве тих возова. Да бисмо нацртали пут од Младеновца до Паланке, ми ћемо овако размишљати:

Наш брзи воз прелази 1 километар за $\frac{60}{36}$ минута. Од Младеновца до Паланке има 25 *км*. Значи да ће воз од М. до П. провести на путу

$$\frac{60}{36}\cdot 25=\frac{5}{3}\cdot 25=\frac{125}{3}=41 \text{ минут и } 40 \text{ секунди.}$$

Ми ћемо узети 42 мин. До 17^{42} наша линија се пење. Од 17^{42} до 17^{44} наша линија је положена, јер ту пролази само време, а пут се не прелази (воз стоји 2 минута у станици).

Од 17^{44} линија се пење, јер се воз креће. Од Паланке до Велике Плане има 12 km. Њих ће наш воз прећи за

$$\frac{5}{3}\cdot 12=20 \text{ мин.}$$

Значи, биће 18^{04} кад воз буде стигао у В. Пл. Због тога се наша линија пење све до 18^{04}, па ту постаје опет положена, јер воз стоји у станици 4 минута.

Кад нацртамо пут воза из Јагодине, видећемо да се наша два брза воза морају укрстити у Великој Плани. Најпре улази у станицу београдски воз, да ту сачека нишки воз. Први одлази из станице београдски воз у 18^{08}, а два минута доцније одлази за Београд нишки воз у 18^{10}.

На стварном реду вожње одласци и доласци возова су нешто мало друкчији.

Једначина I степена с једном непознатом

Једначина као претставник функције. — Ми знамо да је једначина она једнакост у којој се налази једна непозната, или једнакост у којој се налазе више непознатих.

Њоме се веома лепо може показати веза која постоји између двеју променљивих количина. Узмимо нашу слику 8 и задатак који је на њој израђен. Кад добро загледамо слику, видећемо да свака тачка на правој AB има ову особину: ордината је увек четири пута већа од апсцисе. Како ординате обележавамо са *y*, а апсцисе са *x*, можемо написати кратко овако:

$$y = 4x$$

Ако сад *иксу* дајемо *произвољне* вредности, добићемо *одређене* вредности за *ипсилон*.

Како нам x претставља време, а *y* пређени пут, знаћемо увек пут кад знамо време.

Ако је x = 0, онда је

$$y = 4\cdot 0$$
$$y = 0.$$

Шта значи то? То значи да је на подне (ту смо узели да је време нула), путник био у самоме полазноме месту (био је од њега удаљен нула метара). Ако сад *иксу* дајемо разне вредности, добијаћемо за сваку такву вредност *једну одређену* вредност за *ипсилон*. Имаћемо овакву једну таблицу:

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	2
1	4
$1\frac{1}{2}$	6
2	8
$-\frac{1}{2}$	-2
$-1\frac{1}{2}$	-6
-2	-8

Ако узмемо исте подеоке на апсцисној и на ординатној осовини као на слици 8, па нацртамо тачке M_0 (0,0), $M_1\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$, M_2 (1,4) и т. д, добићемо једну праву, која ће се поклопити са правом AB на слици 8, ако поклопимо наша два координатна система.

Овде смо имали *две променљиве* количине x и y. Једној од њих давали смо произвољне вредности и њу ћемо звати *независно променљива.* Узели смо да је x независно променљива. То значи да тој независно-променљивој можемо давати *произвољне* вредности. Она друга променљива зове се *функција.* Она *зависи* сад од вредности коју смо дали *иксу.* Јер ако узмемо да је $x = 1$ у нашој једначини, онда y мора бити само 4. Ако смо узели да је $x = 1$, онда не можемо произвољно узети да је $y = 5$, пошто два израза везана знаком једнакости неће више бити једнака, ако сменимо у једначини $y = 4x$ произвољно узете вредности и за x и за y:

$$5 \neq 4.1.$$

Одатле се види, да *једначина постоји само за извесне вредности променљивих количина у њој.*

$$y = 4x$$

$$\text{За}\left\{\begin{array}{l} y = 1,\ x = 2\\ y = 2,\ x = 2\\ y = 3,\ x = 2\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{не постоји}\\ \text{једначина}\end{array}\ \left\{\begin{array}{l} 1 \neq 4\ .\ 2\\ 2 \neq 4\ .\ 2\\ 3 \neq 4\ .\ 2\end{array}\right.$$

$$\text{Тек за}\ \left.\begin{array}{l} y = 4,\ x = 1\\ y = 8,\ x = 2\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{постоји јед-}\\ \text{начина}\end{array}\ \begin{array}{l} 4 = 4\ .\ 1\\ 8 = 4\ .\ 2\end{array}$$

Те вредности променљивих количина, за које једначина постоји, зову се *корени једначине.*

У горњем примеру корене једначине $y = 4x$ даје нам малопређашња таблица.

Алгебарске једначине. — Главни задатак Алгебре јесте да проучава функције које се могу претставити сабирањем, одузимањем, множењем, дељењем, степеновањем и кореновањем. Такве функције зову се *алгебарске функције,* а једначине које их претстављају, зову се *алгебарске једначине.*

Примери алгебарских једначина с једном и више непознатих:

$$2x + 7 = 9;$$
$$3x - 5 = 8 - 2x;$$
$$3xy = 1$$
$$\frac{x}{y} = 5;$$
$$x^2 + 3x + 7 = 9;$$
$$\sqrt{x + 5} + y^2 = 0.$$

Подела алгебарских једначина. — Алгебарске једначине деле се на једначине с једном непознатом и једначине с више непознатих.

Обе те врсте једначина могу бити првог, другог, трећег и n-тог степена, према степену највишег члана у њој.

Једначине с једном непознатом. — Једначина која садржи само једну променљиву количину зове се *једначина с једном непознатом.* Према највишем степену непознате одређује се степен једначине.

$x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$ јесте једначина с једном непознатом 3 степена
$x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$ „ „ „ „ „ 4 „

. . . .

$x^n + 5x^{n-1} + ... + 5x + 7 = 0$ { јесте једначина с једном непознатом n-тог степена.

Једначине првог степена с једном променљивом (непознатом)

Општи облик. — Видели смо раније, да је општи облик полинома првог степена с једном променљивом:

$$ax + b.$$

Ако тај израз ставимо да је једнак нули, добићемо *општи облик једначине првог степена с једном непознатом:*

$$ax + b = 0.$$

Значи да се полином сваке једначине с једном променљивом може свести на један бином. У томе биному један члан садржи променљиву, а други не садржи.

Н. пр. једначина

$$3x - 4 - 8x - 9 = 13x - 8 - 22x - 10$$

своди се на ово:

$$(1) \qquad 4x + 5 = 0.$$

Има свега два члана у полиному. Први (4x) садржи x, а други (5) не садржи га.

Кад гледамо на општи облик једначине и на једначину (1), видимо да је у нашој једначини $a = 4$, $b = 5$.

Члан b у коме нема непознате зове се **независан члан.** Зове се тако што не зависи од x, јер ако гледамо само бином $4x + 5$, ево шта бива:

Нека је $x = 1$. Тада је

$$4x = 4 \quad \text{а} \quad 5 = 5.$$

Нека је $x = 2$. Тада је

$$4x = 8 \quad \text{а} \quad 5 = 5. \qquad \text{И т. д.}$$

У биному $4x + 5$ други се члан не мења, као се мења x.

Корен једначине. — Онај број који своди на нулу полином једначине, зове се корен једначине. Он се зове још и *решење једначине.*

За нашу једначину $4x + 5 = 0$. Корен је број $-\frac{5}{4}$.

Кад њега ставимо место икса, полином наше једначине своди се на нулу. И збиља је:

$$4 . \left(-\frac{5}{4}\right) + 5 =$$
$$-5 + 5 = 0$$

Број $-\frac{5}{4}$ је корен или решење једначине $4x + 5 = 0$.

Број корена у једној једначини. — *Свака алгебарска једначина степена m има m корена.*

Ми нећемо доказивати ову теорему, али ученик треба да је упамти. Њен доказ ће ученик видети доцније, кад се буде добро упознао с једначинама.

Решавање општих једначина. — *Решити једначину значи наћи све њене корене.*

Ми смо видели како се решавају једначине I степена у којима сем икса нема других писмена. Сад ћемо видети како се решавају једначине првога степена с једном непознатом у којима сем икса има и других писмена.

Задатак 1. — Из обрасца за површину троугла $p = \frac{ch}{2}$ израчунати површину кад је $c = 10cm.$, $h = 5$ cm. биће:

$$p = \frac{10.5}{2}$$
$$p = 25cm^2$$

Задатак 2. — Из обрасца за површину троугла

$$p = \frac{ch}{2}$$

израчунати висину, кад је $p = 20$ cm., $c = 5$ cm.

$$\frac{5h}{2} = 20$$
$$5h = 40$$
$$h = 8$$

У обадва задатка применили смо исти образац. Где је рад био бржи? У првоме задатку. Зато што смо у првоме задатку имали само да сменимо дате вредности, па да одмах израчунамо вредност израза на десној страни. У другоме задатку то нисмо могли. Најпре смо сменили дате вредности, па смо онда ослобођавали *h* од свих бројева око њега. Трудили смо се да *h* остане само на једној страни. Значи, *решавали смо* једначину по *h*. У првоме задатку рад је био бржи, јер је једначина већ *била решена* по *p*.

Ако из једног обрасца хоћемо да нађемо једну количину, морамо умети да решимо једначину тога обрасца по свакоме слову у њему. То значи морамо се вежбати да решавамо једначине у којима сем непознате има и других слова. (И других општих бројева).

Такве једначине зову **се опште једначине**. Такве су једначине, н. пр. ове

$$p = \frac{cx}{2}$$
$$x + a = b$$
$$ax + c = dx$$

Оне се решавају исто као и једначине у којима сем непознате нема других слова. Како? Овако: непозната мора остати сама на једној страни тако, да јој изложитељ буде $+ 1$, именитељ $+ 1$, и сачинитељ $+ 1$. Како се то ради, показаћемо на примерима.

Пример I — Решити једначину

$$2cx - 5 = dx - c$$

Чланови са *x* на једну страну, остали на другу:

$$2cx - dx = 5 - c$$

Извлачимо заједничко *x* на левој страни:

$$x\,(2c - d) = 5 - c$$

Сачинитељ уз *x* мора да буде $+ 1$. Зато леву страну делимо са $(2c - d)$. Али тада морамо то исто урадити и с десном страном:

$$x = \frac{5 - c}{2c - d}$$

Пример II — Решити једначину

$$a - mx + b = c$$

Ни овде нема ни заграда ни разломака. Зато одмах чланове са *x* на једну страну, остале на другу.

$$-mx = c - a - b$$

Сачинитељ уз *x* мора да буде + 1. Да бисмо га добили, делимо обе стране са — m

$$\frac{-mx}{-m} = \frac{c - a - b}{-m}$$

$$x = \frac{a + b - c}{m}$$

Пример III — Решити једначину

$$(a - b)\ (x - c) + (a + b)\ (x + c) = 2\ (bx + ad)$$

Најпре ћемо се ослободити заграда:

$$ax - bx - ac + bc + ax + bx + ac + bc = 2\ bx + 2\ ad$$

Сад чланове са *x* на једну страну, остале на другу:

$$ax - bx + ax + bx - 2\ bx = 2\ ad + ac - bc - ac - bc$$

Сад сводимо на обема странама:

$$2\ ax - 2\ bx = 2\ ad - 2\ bc$$

Нама је потребно само *x*. Пошто више не може да се своди извући ћемо *x* из свих чланова. Уз *x* извлачимо и све остало што може да се извуче као заједнички чинитељ:

$$2x\ (a - b) = 2\ (ad - bc)$$

Икс има да остане само на једној страни:

$$x = \frac{2\ (ad - bc)}{2\ (a - b)}$$

$$x = \frac{ad - bc}{a - b}$$

Пример IV — Решити једначину

$$\frac{2x - a}{b} - \frac{b - 2x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Најпре се ослобађамо разломака. Н. з. и. јесте *ab*.

$$(2x - a)\ a - (b - 2x)\ b = a^2 + b^2$$

$$2ax - a^2 - b^2 + 2bx = a^2 + b^2$$

$$2ax + 2\ bx = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$$

$$2x\ (a + b) = 2a^2 + 2b^2$$

$$x = \frac{2(a^2 + b^2)}{2(a + b)}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Пример V — Решити једначину

$$\frac{a^2}{b}\ (x - a) - \frac{b + c}{ab}\ (a - 2x) = \frac{b^2}{a}\ (a - x) + \frac{b + c}{b}$$

Ослобођавамо се заграда:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^3}{b} - \frac{b + c}{b} + \frac{2x\ (b + c)}{ab} = b^2 - \frac{b^2x}{a} + \frac{b + c}{b}$$

Ослобођавамо се разломака. Н. з. и. јесте *ab*.

$$a^3x - a^4 - (b + c)\ a + 2\ bx + 2\ cx = ab^3 - b^3x + ab + ac$$

Опет се ослобођавамо заграда. Ако се може, ми узгред и сводимо:

$$a^3x - a^4 - ab - ac + 2bx + 2cx = ab^3 - b^3x + ab + ac$$

Чланови са икс на једну страну, остали на другу:

$$a^3x + 2bx + 2cx + b^3x = ab^3 + ab + ac + a^4 + ab + ac$$

Извлачимо заједнички чинитељ и најзад добијамо *x*:

$$x\ (a^3 + b^3 + 2b + 2c) = a\ (a^3 + b^3 + 2b + 2c)$$

$$x = a$$

Дискусија једначине I степена с једном непознатом

Дискутовати једначину

$$ax + b = 0$$

значи испитати све случајеве који могу да се појаве за разне вредности општих бројева *a* и *b*.

У добивеноме решењу у првоме примеру:

$$x = \frac{5 - c}{2c - d}$$

вредност икса зависиће од вредности *c* и *d*. Узмимо неколико случајева.

I — Ако је $c = 4$, $d = 1$

биће $$x = \frac{5 - 4}{2.\,4 - 1} = \frac{1}{7}$$

II — Ако је $c = 5$, $d = 1$

биће $$x = \frac{5 - 5}{2.\,5 - 1} = \frac{0}{9} = 0$$

III Ако је $c = 3$, $d = 2$

биће $$x = \frac{5 - 3}{2.\,3 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

IV — Ако је $c = 3$, $d = 7$

биће $$x = \frac{5 - 3}{2.\,3 - 7} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Видимо да могу наступити разни случајеви.

Узмимо најпростији облик наше једначине:

$$ax + b = 0.$$

Могу наступити ови случајеви:

I случај: $a \neq 0$. — У томе случају имамо *увек* један број који помножен са *a* даје — *b*: добијамо *једно* решење и таква једначина је *одређена*.

Примери.

$$1) \quad 5x - 7 = 0 \qquad x = \frac{7}{5}$$

$$2) \quad -3x + 4 + 13x - 4 = 0. \qquad x = 0$$

II случај: $a = 0$, $b \neq 0$.

Ако у решењу

$$x = -\frac{b}{a}$$

узмемо да *a* једнако опада, вредност $\frac{b}{a}$ једнако ће расти.

У изразу $x = -\frac{b}{a}$

што је *a све мање*, $\frac{b}{a}$ бива све *веће* а *x* све *мање*. (Пошто је *x негативно*). Кад је *a веома мало*, *x* ће постати *веома мало*, јер $\frac{b}{a}$ постаје веома велико.

Кад *a* постане *нула*, $\frac{b}{a}$ постаје *бескрајно велико*, а *x* постаје *бескрајно мало*, пошто је *x* овде негативно и *бескрајно велико* по апсолутној вредности. Такво решење обележавамо са

$$x = -\infty.$$

Решење не постоји у коначности.

Пример:

$$3x - (5 + 2x) = 0.$$
$$3x - 5 - 3x = 0.$$
$$(3 - 3)x = 5.$$
$$0 \, . \, x = 5.$$

Једначина је у том случају *немогућна*.

III случај: $a = 0$, $b = 0$.

Тада је

$$x = \frac{0}{0}.$$

Тај израз је неодређен, те је и цела *једначина неодређена*.

Пример.

$$2cx - 5 = dx - c.$$

за $c = 5$, $d = 10$.

Тада наша једначина овако изгледа:

$$10x - 5 = 10x - 5.$$

Стави коју хоћеш вредност за *x*, једначина ће бити задовољена: Оваква једначина има *безброј решења*.

за $x = 0$ биће: $0 - 5 = 0 - 5$

„ $x = 1$ „ $10 - 5 = 10 - 5$

„ $x = \frac{1}{5}$ „ $2 - 5 = 2 - 5$ и т. д. и т. д.

ВЕЖБАЊА УЗ VII ОДЕЉАК

1. — На координатном систему нађи положај ових тачака:

(4, 5), (4, 4], (4, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 0,5), (4, 0,1), (4, 0,01).

Шта бива са тачком кад почне ордината да јој опада?

2. — На координатном систему нађи положај ових тачака:

(4,3), (3,3), (2,3), (1,3), $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{10}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{100}, 3\right)$.

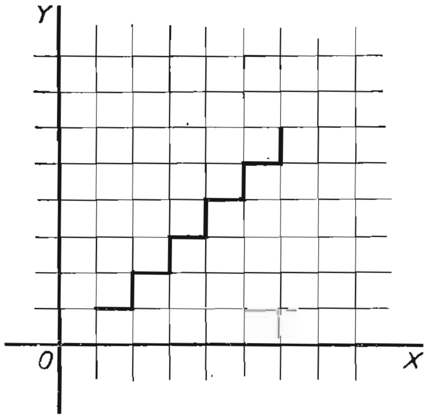
Шта бива са тачком кад јој апсциса опада?

3. — Где леже тачке:

(0,3), (0, — 5), (4,0), (— 6, 0).

4. — Ако сваке недеље уштедиш по 2 динара, претстави линијом своје уштеде (сл. 12). На апцисној осовини један поделак ће ти претстављати једну недељу, а на ординатној осовини 2 динара. Зашто је та линија изломљена?

5. — Отац поклони своме вредноме сину штедионицу и у њој 10 динара. Ако син сваке суботе спушта у штедионицу по 5 динара, како ћеш на координатном систему претставити штедњу тога дечка?



Сл. 12.

Сад се на ординатној осовини мораш помаћи за два подеока, јер на њој има већ два подеока. Поделак на ординатној осовини претставља 5 динара.

6. — Отац има два сина и обојици поклони по штедионицу једне недеље. Старији син одмах спусти у њу 4 динара и продужи редовно сваке недеље спуштати по 4 динара. Млађи син није две недеље спуштао ништа у штедионицу, али се треће недеље реши и он да штеди и почне редовно спуштати по 5 динара. Ко има више после 10 недеља, откако су добили штедионице?

Један поделак на ординатној осовини нека претставља 2 динара.

7. — Два дечка добију за Оцеве ручне штедионице од свога оца. У штедионицама је било по 10 динара. У наредну недељу био је Божић. Старији син спусти у штедионицу 2 динара и продужи то да ради сваке недеље. Млађи син почне штедети тек 5 фебруара. Да би достигао свога брата, он почне редовно спуштати у штедионицу по 4 динара сваке недеље. Кад ће им уштеде бити једнаке?

8. — Претстави цртежем ово кретање:
Аутомобил путује 3 часа и сваког часа прелази по 60 km.
Поделак на ординатној осовини да претставља 30 km.

9. — Нацртај изломљену линију температуре сутрашњег дана од подне до 6 час. увече, бележећи температуру свако пола часа.

Реши цртањем ове задатке:

10. — Два пешака су удаљени један од другога 18 *km*. *А* иде брзином од 5 *km*. а *В* брзином од 6 *km*. Где ће се и кад срести?

11. — Из једног места пођу кола у подне и крећу се брзином од 8 *km*. Пред вече, у 6 часова, пође у истом смислу аутомобил који је прелазио 60 *km* на час. Кад ће и где он стићи кола?

12. — Из два места удаљена 80 *km* крену једновремено један пешак и један путник на аутомобилу. Путник иде брзином од 5 *km*, а аутомобил брзином од 60 *km*. Где ће се и кад срести?

13. — Из једног места пође пешак на подне. У 3 часа по подне пође коњаник за њим. Где ће га и кад стићи, кад коњаник иде брзином од 10 *km*., а пешак брзином од 5 *km*.

14. — Два воза иду један другоме у сусрет из двају места удаљених 240 *km*. Први иде брзином од 60 *km*. а други брзином од 36 *km*. Где ће се и кад срести?

15. — Из једног места полази у подне воз који иде брзином од 30 *km*. а у 4 часа воз који иде брзином од 50 *km*. Кад ће овај други воз стићи онај први? На којој раздаљини од полазне станице?

16. — Из једног места полази воз у подне и иде брзином од 36 *km*. У два часа по подне полази из истог места други воз, који треба да стигне први воз на 288 *km*. од полазне станице. Кад ће га стићи? Којом брзином мора ићи овај други воз?

17. — Трећа београдска гимназија имала је ученика:

Године	У почетку године	На крају године
1902/3	488	393
1903/4	402	372
1904/5	423	357
1905/6	424	374
1906/7	617	468
1907/8	639	507
1908/9	719	520
1909/10	741	576
1910/11	577	492

Изради линију статистичкога кретања ученика.

Напомена. — Поделак на апсцисној осовини нека претставља 1 годину. Тада ће $\frac{5}{12}$ тога подеока претстављати крај школске године (крај маја). а $\frac{8}{12}$ почетак школске године (крај августа). Један поделак на ординантној основи нека претставља 100 ученика. Кад нацрташ изломљену линију, прочитај са ње све о статистичком кретању ученика за тих девет година.

Направи таблицу за *x* и *y*, дај иксу произвољне вредности, па *израчунај y*. Добивени парови за *x* и *y* претстављају координате тачака у равни. Обележи све те тачке помоћу координатног система, спој их и види каква се линија добија од ових једначина:

18. $y = x + 3$
19. $y = x - 2$
20. $y = 3x - 2$
21. $y = - x + 4.$
22. $x - y = 0$
23. $x + y = 0$
24. $x + y = 1$
25. $x - y = 1$
26. $y - 2x - 4 = 0$
27. $x + y = 2$
28. $x + 2y = 3$
29. $2x + 3y = 4$
30. $4x + 2y = 5$
31. $3x + 4y = 5$
32. $x = 2y$

При давању вредности *иксу* треба почети од нуле. Лако ћеш видети тражене линије, ако *иксу* будеш давао ове вредности које показује таблица вредности. Колико ти је тачака било потребно? Колико тачака одређују једну праву линију?

x	y	тачка
0	?	M_0
$+ 1$	?	M_1
$- 1$	?	M_2
$+ 2$	?	M_3
$- 2$	?	M_4
$+ 3$	?	M_5
И т. д.		

Одреди степен овим једначинама:

33. $x + y = 3.$
34. $3x + y^2 = 7.$
35. $3x^2 - 2xy^2 = 7.$
36. $4x^2y^2 - 5x^3 = 9.$
37. $3x^5 + 4x^2 - 5xy + 6y^2 - 7y^3 = 9.$
38. $4x^4 - 3xy^3 - 4y^5 - 2x^4 - 5x^2y^2 = 2x^4.$

Реши ове једначине:

39. $2x + m = n$
40. $ax - b = c$
41. $a^2x - a^2b = a^3$
42. $x + a - b = c + d$
43. $x - (a - b) = c + b$

44. $a - bx = c$

45. $2a - mx = c + nx$

46. $a - (b - cx) = c + b$

47. $a (x - b) = c$

48. $b (c - x) = c$

49. $a (x - b) = b (a - x)$

50. $p = \frac{bx}{2}$

51. $v = r^2\pi x$

52. $2r^2\pi + 2r\pi x = P$

53. $a (x - 1) - (5a - x) = a - x$

54. $ax - bx - m (x - a) = b$

55. $a (b - x) + b (c - x) = b (a - x) + cx$

56. $3 (x - 2a) + 4 (x - a) = 5x$

57. $x (a + b - c) - x (a - b - c) = 4b^2$

58. $(x - b) (a + b) = (x + b) (a - b)$

59. $x (a - b) = a (b - x) - 1$

60. $1 - x (a - 1) - b (1 - x) - c (a - x) = 0$

61. $(x - 1) (a - b) - 2 (a - b) (x + a) - (a - b) x = 1$

62. $(a + bx) (a - b) - (ax - b) (a + b) = ab (x + 1)$

63. $(x - a) (b + a) = b^2 - a^2$

64. $3 (a - x) - 2 (x - a) = 5 (x + a)$

65. $5ax + 3b - 2 - (3ax - 2b + 4) = 2ax - 3b + 3$

66. $x - [x - (x - a)] = 3 (x - 1) [x - 3 (x - b)]$

67. $(a + x) : b = (c - x) : d$ 68. $(a + x) : (b + x) = c : d$

69. $(a - x) : (b - a) = (a + b) : b$ 70. $(a - b) : (a + b) = a : x$

71. $ax - (bx - a) - b (a - x) a - (b - x) = 0$

72. $(a - b) x - (b - a) x = (a - b) - x (a + 1)$

73. $\frac{ax}{b} = c$ 74. $\frac{a}{x} = b$

75. $2 = \frac{cx}{p}$ 76. $\frac{x}{a} - 1 = b$

77. $\frac{ax}{b} - b = a$ 78. $\frac{ax}{b} - \frac{x}{b} + \frac{cx}{a} = 1$

79. $a - \frac{x}{a} = 1$ 80. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = a$

81. $\frac{ax}{b} - \frac{cx}{q} = m$ 82. $\frac{ax}{b} - 1 = \frac{bx}{a} + 1$

83. $b - \frac{ax}{b} = ax - \frac{b}{a}$ d 84. $1 + \frac{a}{x} = b - (1 - \frac{x}{b})$

85. $a + \frac{x - a}{b} = b - \frac{x - b}{a}$ d 86. $\frac{a - x}{bc} + \frac{b - x}{ac} - \frac{c - x}{ab} = 0$

87. $\frac{a}{a - x} = \frac{b}{x + b}$ 88. $\frac{ab}{a - x} - \frac{1}{x - b} = 0$

89. $\frac{a}{x - a} = \frac{b}{x - b}$ 90. $\frac{a}{a - x} + \frac{b}{x - a} = \frac{a}{x + a}$

91. $\frac{b}{x^2 + 4ax + 4a^2} - \frac{a}{x + 2a} = 0$ 92. $\frac{1}{x^2 - 6ax + 9a^2} + \frac{a}{x - 3a} = 0$ d

93. $\frac{a}{a^3 - x^3} - \frac{1}{a^2 + ax + x^2} = \frac{a + b}{a^3 - x^3}$

94. $\frac{a}{b(x^2 - a^2)} - \frac{b}{a (a + x)} + \frac{a}{b (a - x)} = 0$

95. $\frac{a}{x} - a \left\{ \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \left[x - (a - \frac{a}{x})\right] - a \right\} = a$

96. $1 - \frac{a - 1}{x} - \left\{ \frac{1 - a}{x} - \frac{x}{a} [1 - (a - x)] - \frac{a}{x} \right\} = 2a - \frac{x - a}{x} + x(\frac{1}{a} -$
$- 1 + \frac{x}{a})$

97. $\frac{(a + b) (x - b)}{ab} + (a - b) x = \frac{a^3 - b^3}{a + b} + \frac{a}{b}$ d

98. $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a + b} = \frac{a^2 - b^2}{ab} x$

99. $\frac{(a - b) x}{a} + 1 - \frac{(b - a) x}{a - b} - \frac{(a + b) x}{b} = \frac{(a + 1) x}{a - b} - \frac{1 - b}{a}$

100. $\frac{1}{x^2 - a^2} - \frac{a}{x - a} + \frac{b}{a + x} = \frac{a + b}{a^2 - x^2} - \frac{1}{x - a}$

101. $1 - \frac{x - (1 - a)}{x + a} - \frac{a - (x - 1)}{a + x} = \frac{a^2 + 2ax + x}{a + x}$

102. $\frac{a (2x - 1)}{b} - \frac{b (x - 3)}{a} - \frac{ax + b}{a - b} + 2 = 0$

103. $\frac{a (x - 3)}{b} + \frac{b (x - 3)}{a} + \frac{a (x - 1)}{b} + \frac{b (x - 1)}{a} = 10$

104. $\frac{a - b}{b} (x - a) + \frac{a + b}{a} (x - b) = 2a (b - x + 2a)$

105. $\frac{1 - x}{a} - \frac{x - a}{b} - \frac{1 - (x - b)}{a} = \frac{(a - b) - (x - 1)}{ab} - 2$

Реши ове једначине, па дискутуј добивене вредности за x:

106. $x + a = 4$ 107. $2x + a = 1$

108. $3x + 2a = 5$ 109. $x + a = b$

110. $ax + b = 1$ 111. $ax = 3 - 2x$

112. $a - \frac{b}{x} = b$ 113. $(a - b) x = (1 + x) b$

114. $ax + b = a - bx$ 115. $a + \frac{1 - a^2}{x} = 1$

116. $(c - x) d = (c - d) (- x)$ 117. $px + q = pqx$

118. $\frac{a - bx}{a} - \frac{b - ax}{b} - a + b$ 119. $n^2 + px = p^2 - nx$

120. $\frac{x}{b} + \frac{x}{b} - x = 1$ 121. $ax - 3 = mx - a - m$

122. $\frac{x}{a} + \frac{a (x - b)}{b} = \frac{x}{b} - \frac{b (x - a)}{a}$

123. $a^2x + b^2 = b^2x + a^2 - 1$ 124. $2ax - 1 = bx + 1$

125. $a^2x - 1 = ax + 2$

126. $1 - \frac{x - a}{b - x} = \frac{a + b}{a}$ 127. $- \frac{b}{a} - 1 = \frac{a - x}{b + x} + 1$

128. $ax - 1 = bx$ (Какво је решење кад је $a = b$?)

129. $2x + b = a$ (Какви треба да су a и b, па да корен ове једначине буде нула?)

130. $1 - \frac{a - x}{b + x} = \frac{a + b}{b + x} + \frac{ab + ax + a}{a(b + x)}$

131. $1 - \frac{x - a}{b + x} = \frac{a + b}{b + x} + \frac{ab - ax - a}{ab + ax}$ (За које ће вредности a и b корени ове једначине бити нула?)

Шта ће бити н. з. и? Пази добро! Може ли најпре нешто да се упрости?

У доњим задацима прегледај рад да видиш је ли тачан, па га објасни:

132.
$$\begin{array}{l} 2 = 3 - 1 \\ \underline{4 = 3 + 1} \\ 2 \,.\, 4 = (3 - 1)\ (3 + 1) \end{array}$$

133.
$$\begin{array}{r} 2m = 200\ cm \\ \underline{3m = 300\ cm} \\ 2m \,.\, 3m = 200\ cm \,.\, 300\ cm \\ 6m^2 = 60000\ cm^2 \end{array}$$

134.
$$\begin{array}{l} 4m^2 = 400\ dm^3 \\ \underline{2m\ = 20\ dm} \\ 8m^3 = 8000\ dm^3 \end{array}$$

135.
$$\begin{array}{l} 3\ kgr = 3000\ gr \\ \underline{2\ kgr = 2000\ gr} \\ 6\ kgr = 6000000\ gr \end{array}$$

VIII — СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ СТЕПЕНА — ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ СТЕПЕНА

Систем једначина првог степена

Систем једначина. — Узмимо да су нам дате ове једначине:

$$2x + 3y = 8$$

$$3x - \frac{y}{2} = 2.$$

Ми претпостављамо да можемо наћи један број за x и један број за y тако, да обе дате једначине буду задовољене тим бројевима.

Две или више једначина, за које претпостављамо да су задовољене истим вредностима за непознате у њима, сачињавају *систем једначина.*

Наше две једначине чине *систем једначина првог степена.*

Решење система. — Узмимо да у обема једначинама сменимо

$$x = 1$$
$$y = 2$$

биће:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 = 8 \\ 3 \,.\, 1 - \frac{2}{2} = 2. \end{array}\right\}$$ Обе једначине су задовољене.

Вредности

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

сачињавају *решење нашег система једначина.*

РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА СТЕПЕНА

Ми смо видели како се решава систем једначина првога степена. Сад ћемо да прегледамо како се решава систем од двеју *општих једначина.* Систем од двеју таквих једначина решава се као и систем једначина које смо раније видели. Зато ћемо то сад показати само на примерима. Узећемо само два метода за решавање.

Метод замене

Пример 1 — Решити систем:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & ax + by = c \\ \text{II} & cy + ax = b \end{array}$$

Решићемо другу једначину по y:

$$\text{II}\ \boxed{y = \frac{b - ax}{c}}$$

Добивену вредност за y смењујемо у I једначини:

$$\text{I}\ ax + b \,.\, \frac{b - ax}{c} = c$$ Ослобођавамо се разломака:

$$\text{I}\ acx + b^2 - abx = c^2$$ Сад даље:

$$ax\ (c - b) = c^2 - b^2$$

$$x = \frac{(c - b)\ (c + b)}{a\ (c - b)}$$

$$x = \frac{b + c}{a}$$

$$y = \frac{b - ax}{c}$$

Најпре:

$$ax = a \,.\, \frac{b + c}{a} = b + c$$

Сад даље:

$$y = \frac{b - (b + c)}{c} = \frac{b - b - c}{c} = -\frac{c}{c} = -1$$

Решење система:

$$x = \frac{b + c}{a}, \qquad y = -1$$

Пример 2 — Решити систем:

$$\text{I} \quad \frac{x}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a}{a-b} = \frac{y}{a-b} + \frac{b}{a+b}$$

$$\text{II} \quad \frac{y}{a+b} - \frac{x}{a-b} - \frac{4ab}{a^2-b^2} = 0$$

Ослобођавамо се разломака:

$$\text{I} \quad (a-b)\,x - (a^2+b^2) + a\,(a+b) = (a+b)\,y + b\,(a-b)$$

$$\text{II} \quad (a-b)\,y - (a+b)\,x - 4ab = 0$$

Чланове са *x* и *y* на једну страну:

$$\text{I} \quad (a-b)\,x - (a+b)\,y = a^2 + b^2 - a^2 - ab + ab - b^2$$

$$\text{II} \quad (a-b)\,y - (a+b)\,x = 4ab$$

$$\text{I} \quad (a-b)\,x - (a+b)\,y = 0$$

$$\text{II} \quad (a-b)\,y - (a+b)\,x = 4ab$$

Из I решавамо по x:

$$\boxed{x = \frac{(a+b)\,y}{a-b}}$$

Добивену вредност за *x* смењујемо у II:

$$(a-b)\,y - (a+b).\frac{(a+b)\,y}{a-b} = 4ab$$

Ослобођавамо се разломака:

$$(a-b)^2\,y - (a+b)^2\,y = 4ab\,(a-b)$$

$$y\,[(a-b)^2 - (a+b)^2] = 4ab\,(a-b)$$

$$y = \frac{4ab\,(a-b)}{(a-b+a+b)\,(a-b-a-b)}$$

$$y = \frac{4ab\,(a-b)}{2a\,.\,(-2b)}$$

$$y = -(a-b)$$

$$y = (b-a)$$

$$x = \frac{(a+b)\,y}{a-b}$$

$$x = \frac{a+b}{a-b}\,(b-a)$$

$$x = \frac{a+b}{-(b-a)}\,.\,(b-a)$$

$$x = -(a+b)$$

Решење система:

$$x = -(a+b), \qquad y = b-a$$

Метод супротних сачинитеља или метод линеарне комбинације

Ми смо већ учили како се решава систем методом супротних сачинитеља. Сад ћемо то мало боље да учврстимо.

Линеарна комбинација. — Ако све изразе у једној једначини пребацимо на једну страну, добићемо *полином једначине.*

$$2x + 3y = 8$$

$$2x + 3y - 8 = 0.$$

Ако тај полином обележимо са P_1, моћи ћемо целу једначину обележити овако:

$$P_1 = 0,$$

Узмимо систем од двеју једначина:

$$2x + 3y - 8 = 0$$

$$5y - x - 9 = 0.$$

Можемо их краће обележити овако:

$$(1) \qquad \begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решење горњег система је:

$$x = 1$$

$$y = 2.$$

Ако горње полиноме P_1 и P_2 помножимо *ма којим* сталним бројевима који нису нуле, решење система се неће изменити. Помножимо први са *a*, други са *b*.

Систем

$$(2) \qquad \begin{aligned} a\,P_1 &= 0 \\ b\,P_2 &= 0 \end{aligned}$$

имаће исто решење као и систем (1). То се види одмах, али се може објаснити и овако:

Ако у полиному P_1 сменимо вредности $x = 1$, $y = 2$, он ће се свести на нулу. Исто ће бити са полиномом P_2. То значи да за $x = 1$, $y = 2$, леве стране система (2) су збиља равне нули, што значи, да систем (*2*) има исто решење као и систем (1). Кад два система имају исто решење они су *еквивалентни.*

Помножимо прву једначину у систему

$$(a) \qquad \begin{aligned} 2x + 3y - 8 &= 0 \\ 5y - x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

са 2, а другу са — 1. Добићемо:

$$(b) \qquad \begin{aligned} 4x + 6y - 16 &= 0 \\ x - 5y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Системи (*a*) и (*b*) имају исто решење. Ако у систему (*b*) сменимо $x = 1$ $y = 2$, имаћемо:

$$4 \,.\, 1 + 6 \,.\, 2 - 16 = 0$$
$$1 - 5 \,.\, 2 + 9 = 0.$$

То значи да су системи (*a*) и (*b*) *еквивалентни*.

Узмимо да у систему (2) саберемо леве стране. Добићемо

$$\text{(3)} \qquad a\,P_1 + b\,P_2 = 0.$$

Једначина (3) задовољена је решењем система (1), јер је за то решење $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, те је и у једначини (3) збиља лева страна равна нули.

У систему (*b*) саберимо леве стране, па ће бити:

$$\text{(c)} \qquad 5x + y - 7 = 0.$$

Сменимо вредности $x = 1$, $y = 2$, па ће бити:

$$5 \,.\, 1 + 2 - 7 = 0.$$

То значи да вредности за x и y које задовољавају дати систем (*a*) задовољавају и ову комбинацију (*c*).

Кад нам је дат систем

$$P_1 = 0$$
$$P_2 = 0$$

па обадва полинома помножимо *произвољним* бројевима који нису нуле, рецимо са *a* и *b*, па добивене резултате саберемо, добићемо

$$a\,P_1 + b\,P_2 = 0.$$

Оваква комбинација једначина зове се *линеарна комбинација*.

Она нам је потребна због тога, што се она задовољава вредностима за x и y које претстављају решење система.

Бројеви *a* и *b* којима множимо једначине, сасвим су произвољни; они могу бити и равни јединици, али морају бити *константе (стални бројеви)*. Сем тога они не смеју бити нуле.

Узмимо систем

$$x + y - 5 = 0$$
$$y - x - 1 = 0$$

Помножимо обе са $+1$, то јест оставимо их као што су и саберимо их:

$$2y - 6 = 0.$$

Горњи систем је задовољен овим решењем

$$x = 2$$
$$y = 3$$

Линеарна комбинација

$$2y - 6 = 0$$

је такође задовољена за вредност $y = 3$, јер је

$$2 \,.\, 3 \cdot 6 = 0$$

И ово је линеарна комбинација:

$$\frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} = o \qquad (a \neq o,\, b \neq o).$$

Значи, можемо оба полинома датих једначина *поделити произвољним сталним бројевима који нису нуле*, па сабрати.

Линеарну комбинацију употребљавамо за решавање система једначина. Подесном линеарном комбинацијом можемо увек избацити једну непознату и добити *једну једначину с једном непознатом*.

Узмимо систем

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ми смо до сада све изразе у једначини пребацивали на једну страну пре почетка комбиновања. То не мора да буде. Можемо једначине оставити као што су, помножити произвољним бројевима обе стране једначина, па сабрати леву с левом, десну с десном страном. Тако ћемо сад да радимо. Помножимо прву једначину са b_2, а другу са $(-b_1)$ и затим образујмо линеарну комбинацију

$$\begin{array}{rcl|r} a_1x + b_1y & = & c_1 & b_2 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 & -\,b_1 \\ \hline a_1b_2x + b_1b_2y & = & b_2c_1 & \\ -\,a_2b_1x - b_1b_2y & = & -\,b_1c_2 & \\ \hline a_1b_2x - a_2b_1x & = & b_2c_1 - b_1c_2 & \end{array}$$

Добили смо *једну једначину с једном непознатом*. Ако из ње потражимо вредност за x, наћи ћемо:

$$\boxed{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Ако прву једначину решимо по y, добићемо:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

или

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} \,.\, x \,.$$

Ако добивену вредност за x сменимо у решењу за y, добићемо:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2c_2 - b_1c_2}{a_1b_1 - a_2b_1}.$$

Даљим упрошћавањем израза на десној страни, имаћемо:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{c_1\,(a_1b_2 - a_2b_1) - a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

$$y = \frac{a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{b_1(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{b_1(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Израз $a_1b_2 - a_2b_1$ зове се *детерминанта система.*

До истог решења долазимо ако прву задату једначину помножимо са $(-a_2)$, а другу са a_1 па начинимо линеарну комбинацију.

Решавање система помоћу линеарне комбинације зове се **метод линеарне комбинације** или **метод супротних сачинитеља**.

Примери:

Први пример. — Дат је систем једначина:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4 &= 0 \\ 2x + 3y - 19 &= 0 \end{aligned}$$

Хоћемо да избацимо y. Ми ћемо прву једначину помножити са b_2 то јест са 3, а другу са b_1, то јест са $+$ 2.

$$\begin{array}{rl} & 9x - 6y + 12 = 0 \\ & 4x + 6y - 38 = 0 \\ \hline \textit{Линеарна комбинација:} & 13x \quad\;\; - 26 = 0 \\ & 13x - 26 = 0 \\ & 13x = 26 \\ & x = \frac{26}{13} = 2. \quad \boxed{x = 2} \end{array}$$

Другу једначину решимо по y. Добивену вредност за x сменимо у II једначини решеној по y. (Сасвим је свеједно у којој ћемо једначини извршити ову смену):

$$y = \frac{19 - 2x}{3}$$

$$y = \frac{19 - 2 \,.\, 2}{3} = \frac{19 - 4}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Други пример. — Решити систем:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 2 \\ 5y - 6x &= 1 \end{aligned}$$

Да га решимо помоћу малопређашњих образаца.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_3 - a_2b_1}$$

Овде је: $a_1 = 3,\ b_1 = -2,\ c_1 = 2,\ a_2 = -6,\ b_2 = 5,\ c_2 = 1$

Сад само смењујемо

$$x = \frac{5 \,.\, 2 - (-2) \,.\, 1}{3 \,.\, 5 - (-6) \,.\, (-2)} \qquad y = \frac{3 \,.\, 1 - (-6) \,.\, 2}{15 - 12}$$

Одатле је:

$$x = \frac{10 + 2}{3} \qquad y = \frac{3 + 12}{3}$$

То је даље: $x = 4,\ y = 5.$

Да узмемо сад систем од двеју општих једначина.

Трећи пример. — Решити систем:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}\ \ ax - by = a - 1 \\ &\mathrm{II}\ \ aby + x = b + 1 \end{aligned}$$

Да га решимо по обрасцима. Овде је

$a_1 = a,\ b_1 = -b,\ c_1 = a - 1,\ a_2 = 1,\ b_2 = ab,\ c_2 = b + 1.$

Зато је:

$$x = \frac{ab \,.\, (a - 1) - (-b) \,.\, (b + 1)}{a \,.\, ab - 1 \,.\, (-b)} \qquad y = \frac{a \,.\, (b + 1) - 1 \,.\, (a - 1)}{a^2b + b}$$

$$x = \frac{a^2b - ab + b^2 + b}{a^2b + b} \qquad y = \frac{ab + a - a + 1}{a^2b + b}$$

$$x = \frac{b(a^2 - a + b + 1)}{b(a^2 + 1)} \qquad y = \frac{ab + 1}{b(a^2 + 1)}$$

$$x = \frac{a^2 - a + b + 1}{a^2 + 1} \qquad y = \frac{ab + 1}{b(a^2 + 1)}$$

Да га решимо сад без образаца.

Помножимо другу једначину са $-$ a:

$$\mathrm{II}\ \ -a^2by - ax = -ab - a$$

Сад јој додајмо прву једначину да добијемо *линеарну комбинацију*:

$$\begin{aligned} &\mathrm{III}\ \ -by(1 + a^2) = a - 1 - ab - a \\ &\mathrm{III}\ \ -by(1 + a^2) = -1 - ab \end{aligned}$$

$$y = \frac{1 + ab}{b(1 + a^2)}$$

Добивену вредност сменимо у I:

$$\mathrm{I} \qquad ax - \frac{1 + ab}{1 + a^2} = a - 1$$

Ослободимо се разломака:

$$a(1 + a^2)x - 1 - ab = (a - 1)(1 + a^2)$$

$$x = \frac{a - 1 + a^3 - a^2 + 1 + ab}{a(1 + a^0)}$$

То је даље: $x = \frac{a^3 - a^2 + a + ab}{a(1 - a^2)}$

Најзад је: $x = \frac{a^2 - a + 1 + b}{1 + a^2}$

Ради како је теби лакше!

Четврти пример. — Решити систем.

I $ab^2x - by = ab$

II $a^2y - a^2bx = 1$

Помножићемо прву са *a*, другу са *b*, па сабрати. Тада добијамо ову *линеарну комбинацију.*

$aby(a - 1) = b(a^2 + 1)$ Из ње је

$$y = \frac{a^2 + 2}{a(a - 1)}$$

Добивену вредност сменимо у I:

I $ab^2x - \frac{b(a^2 + 1)}{a(a - 1)} a = b$ Делимо обе стране са b:

I $abx - \frac{a^2 + 1}{a(a - 1)} = a$ Сад даље:

I $abx = a + \frac{a^2 + 1}{a(a - 1)}$

I $abx = \frac{a^2(a - 1) + a^2 + 1}{a(a - 1)}$

$$x = \frac{a^3 - a^2 + a^2 + 1}{a^2b(a - 1)}$$

$$x = \frac{a^3 + 1}{a^2b(a - 1)}$$

Дискусија система првог степена

Први случај: *детерминанта система није једнака нули.* — Сваки систем једначина првог степена с двема непознатима може се свести на овај општи облик:

$$a_1x + b_2y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

те се може дати и овај општи облик решења система:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Решења су претстављана *разломцима.* Загледај их добро!

Узмимо најпре да именитељ тога разломка није нула, то јест претпоставимо да *дертиминатна система* $a_1b_2 - a_2b_1$ није једнака нули:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

То значи да оба сачинитеља уз x (a_1 и a_2) не могу бити једновремено једнаки нули, као ни сачинитељи уз *y* (b_1 и b_2).

Ако је $a_1 = a_2 = 0$, онда је

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \,.\, b_2 - 0 \,.\, b_1 = 0 - 0 = 0$$

а ми претпостављамо да $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Исто тако за $b_1 = b_2 = 0$ биће

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1 \,.\, 0 - a_2 \,.\, 0 = 0 - 0 = 0$$

а ми претпостављамо да $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

То значи да могу бити једнаки нули само ова два и два сачинитеља

a_1 и b_2

или

a_2 и b_1

Ако је $a_1 = b_2 = 0$

онда је израз

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 - a_2b_1 = - a_1b_2 \neq 0$$

Ако је $a_2 = b_1 = 0$

онда је израз

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$$

Посматрајмо сад бројитеље израза *x* и *y*

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_1b_2} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Кад именитељи ова два разломка нису равни нули, бројитељи могу бити ма какви, увек ћемо добити за *x* и y *једно и одређено решење.*

Даке, кад *детерминанта система* није једнака нули, систем има **једно** и **одређено решење**. Такав се систем зове **одређени систем.**

Други случај — *детерминанта система је једнака нули:*

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

Овде могу да наступе два потслучаја. Ми ћемо посматрати само вредност за *x.*

Први потслучај:

(1) $$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Узмимо да није једнак нули израз $c_1b_2 - c_2b_1$:

$$c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0.$$

Једначину (1) можемо написати овако:

(2) $$\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{0} \,.\, x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Израз на десној страни није нула. Међутим једначина (2) нам казује да треба неки број *x* помножити нулом, па да се опет не добије нула. Ми знамо да је то немогућно. Према томе овде је *немогућно решење*.

Овакав се систем зове **немогућан систем**.

Пример таквог система:

$$2x - 3y = 1$$
$$2x - 3y = 2$$
$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2(-3) - 2(-3) = -6 + 6 = 0$$
$$c_1b_2 - c_2b_1 = 1(-3) - 2(-3) = -3 + 6 = 3$$

Пробај да решиш горњи систем.

Други потслучај. — Узмимо сад да је за $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \text{ али } b_2 \neq 0$$

Тада једначина (2) значи ово:

$$0 \,.\, x = 0.$$

Ма који број да ставимо место *x*, увек ће лева страна бити једнака нули. Према томе ово је *неодређено решење*.

Ако сада дамо иксу ма какву вредност, рецимо *m*, и сменимо је у другој једначини система

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

добићемо:

$$a_2m + b_2y = c_2$$

а одатле

$$y = \frac{c_2 - a_2m}{b_2}$$

Како смо претпоставили да $b_2 \neq 0$, увек ћемо за *y* имати *једну одређену вредност*, кад иксу дамо произвољну вредност.

То значи да је ово *проста неодређеност*, јер она постоји само за једну непознату.

Овакав систем зове се **просто неодређен систем**.

Пошто је овде

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

значи да је

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

а одатле

$$(1) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Пошто је и

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0$$

значи да је

$$c_1b_2 = c_2b_1$$

а одатле

$$(2) \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Како су у једнакостима (1) и (2) десне стране једнаке, морају бити и леве, па ће бити

$$(3) \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Из једнакости (1), (2) и (3) добијамо ову продужену пропорцију

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Пример. — Испитати систем:

$$y + 8 = \frac{3}{5}x$$
$$5y + 40 = 3x.$$

Овде су сачинитељи:

$$\begin{array}{lll} a_1 = -\dfrac{3}{5} & b_1 = 1 & c_1 = -8 \\ a_2 = -3 & b_2 = 5 & c_2 = -40 \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{5} & \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{1}{5} & \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{1}{5} \end{array}$$

а одатле

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$ Систем је *просто неодређен*.

Кад загледамо боље у горњи систем, видимо да је друга једначина *изведена* из прве множењем са 5, што значи да ове две једначине *нису независне*.

Ево још два примера таквих система:

$$2x + 3y = 4 \qquad\qquad 6y - 3x = 1$$
$$4x + 6y = 8 \quad \text{и} \quad 2y - x = \frac{1}{3}$$

Трећи случај. — Претпоставимо сад да је

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$b_2 = 0.$$

Овде могу да наступе три потслучаја.

1 потслучај. — Претпоставимо да је

$$c_1 \neq 0 \qquad c_2 \neq 0.$$

Тада би систем имао овако да изгледа:

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c_1$$
$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c_2$$

То би значило да је

$$0 = c_1$$
$$0 = c_2$$

а то се противи претпоставци.

Овакав је систем **немогућан.** Његово је *решење немогућно.*

Пример таквог система:

$$3x - 5y = 3x - 5y + 7$$
$$2x - 3y = 2x - 3y + 4$$

2 потслучај.

$$c_1 = 0 \qquad c_2 \neq 0$$

Тада би систем имао овако да изгледа:

$$0 \cdot x + 0 \,.\, y = 0$$
$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c_2.$$

Како је

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = 0$$

а $c_2 \neq 0$, овакав је *систем* **немогућан** и *решење је немогућно.*

Пример таквог система:

$$x + y = x + y$$
$$2x - y = 2x - y + 3$$

3 потслучај. — Претпоставимо да је

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Тада наш систем овако изгледа:

$$0 \,.\, x + 0\, y = 0$$
$$0 \,.\, x + 0\, y = 0.$$

Он је **двогубо неодређен** и решење је *двогубо неодређено.* То значи да *x* и *y* можемо смењивати сасвим произвољним вредностима.

Примери таквог система:

$$3x - y + 4 = 3x - y + 4$$
$$x + y - 1 = x + y - 1$$

Систем једначина првог степена са три и више непознатих

Решавање заменом. — Узмимо овај систем:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y - z = 4 \\ \text{II} & -5x + 3y + 2z = -7 \\ \text{III} & x - 2y + 2z = 1. \end{array}$$

Ако прву једначину решимо по *x*, имаћемо:

$$(1) \qquad x = 4 - y + z.$$

Ако сад ту вредност за x сменимо у II и III, имаћемо:

$$-5(4 - y + z) + 3y + 2z = -7$$
$$\underline{4 - y + z \quad 2y + 2z = 1.}$$

Ако ове две једначине упростимо, добићемо овај *систем од две једначине*:

$$\begin{array}{ll} \text{II}' & 8y - 3z = 13 \\ \text{III}' & y - z = 1. \end{array}$$

Из III′ једначине имаћемо

$$(2) \qquad y = 1 + z.$$

Сменом у II′ једначини добијамо:

$$8(1 + z) - 3z = 13$$
$$8 + 8z - 3z = 13$$
$$5z = 5$$
$$(3) \qquad z = 1.$$

Ако у решењу (2)

$$y = 1 + z$$

сменимо добивену вредност за *z*, имаћемо:

$$y = 1 + 1$$
$$y = 2.$$

Ако сад у решењу (1) сменимо добивене вредности за y и *z*, имаћемо:

$$x = 4 - 2 + 1$$
$$x = 3$$

Решавање линеарним комбинацијама. — Узмимо систем

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x + 3y - 5z = 0 \\ \text{II} & 3x - 5y - 2z = -4 \\ \text{III} & x + y - 4z = -2. \end{array}$$

Од ових трију једначина гледаћемо да добијемо *линеарном комбинацијом* две једначине с двема непознатима.

У том циљу помножимо I са 5, а II са 3.

$$\begin{array}{lr} & 10x + 15y - 25z = 0 \\ + & \underline{9x - 15y - 6z = -12} \\ (1) & 19x \qquad - 31z = -12. \end{array}$$

Добили смо једну једначину са x и z. Морамо се постарати да добијемо још једну једначину са *истим* непознатима *x* и *z*. Створимо линеарну комбинацију од II и III једначине.

Помножимо трећу са 5. Тада ће у овим једначинама II и III сачиниоци уз ипсилон бити *супротни бројеви*. Знамо да супротни бројеви у збиру дају нулу.

$$(3x - 5y - 2z) + (5x + 5y - 20z) = -4 - 10$$

$$8x - 22z = -14$$

$$(2) \qquad 4x - 11z = -7.$$

Једначине (1) и (2) дају *систем од две једначине*:

$$19x - 21z = -12$$

$$4x - 11z = -7\cdot$$

Ако решимо прву једначину по *x*, а другу по *z*, имаћемо:

$$(a) \qquad x = \frac{31z - 12}{19} \text{ т. ј. } x = \frac{31}{19}\, z - \frac{12}{19}$$

$$(b) \qquad z = \frac{4x + 7}{11}$$

Сменом вредности (*b*) у (*a*) имаћемо:

$$x = \frac{31}{19} \cdot \frac{4x + 7}{11} - \frac{12}{19}$$

А то је даље:

$$19 \,.\, 11x = 31 \,.\, 4x + 31 \,.\, 7 - 12 \,.\, 11$$

$$209x = 124x + 217 - 132$$

$$85x = 85$$

$$x = 1.$$

Сменом у (*b*) имаћемо:

$$z = \frac{4 \,.\, 1 + 7}{11} = \frac{11}{11} = 1.$$

Ако добивене вредности за *x* и *z* сменимо у I једначини која је најпростија, имаћемо:

$$2 + 3y - 5 = 0$$

$$3y = 3$$

$$y = 1.$$

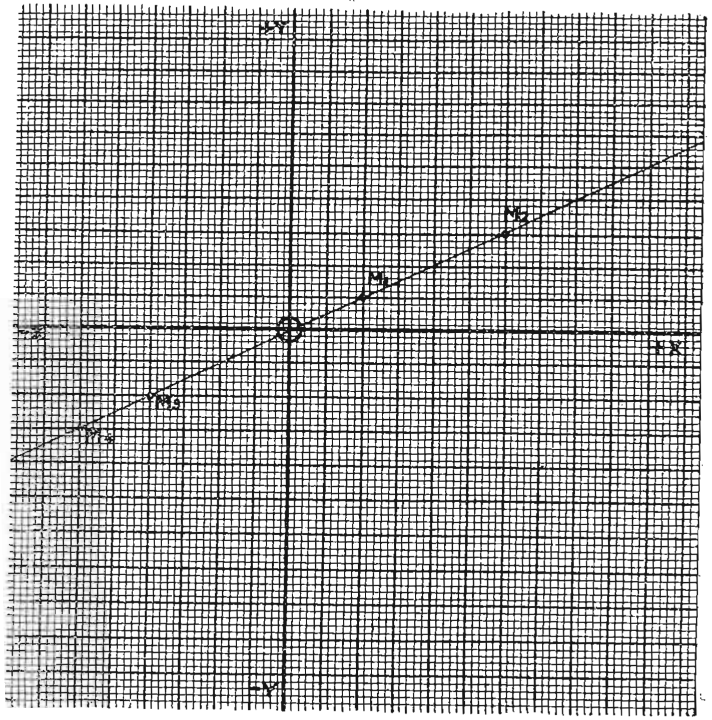
Напомена. — Постоје још неки методи за решавање система I степена, али се они ређе употребљавају.

ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА

Једначина праве линије

Повуцимо кроз координатни почетак једну праву линију (сл. 13). Узмимо на њој најпре тачку M_1, чије су координате $x_1 = 10$, $y_1 = 5$. Размера ординате према апсциси биће:

$$y_1 : x_1 = \frac{1}{2}.$$



Сл. 13.

Узмимо сад тачку M_2. Њене су координате: $x_2 = 30$, $y_2 = 15$ Њихова размера биће:

$$y_2 : x_2 = \frac{1}{2}\cdot$$

Пошто те две размере имају исти количник, једнаке су, те ће бити:

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2\cdot$$

Та пропорција ће постојати за *ма које* две тачке на овој правој. Узмимо тачке M_3 и M_4. Биће:

$$x_3 = -20 \qquad x_4 = -30$$

$$y_3 = -10 \qquad y_4 = -15$$

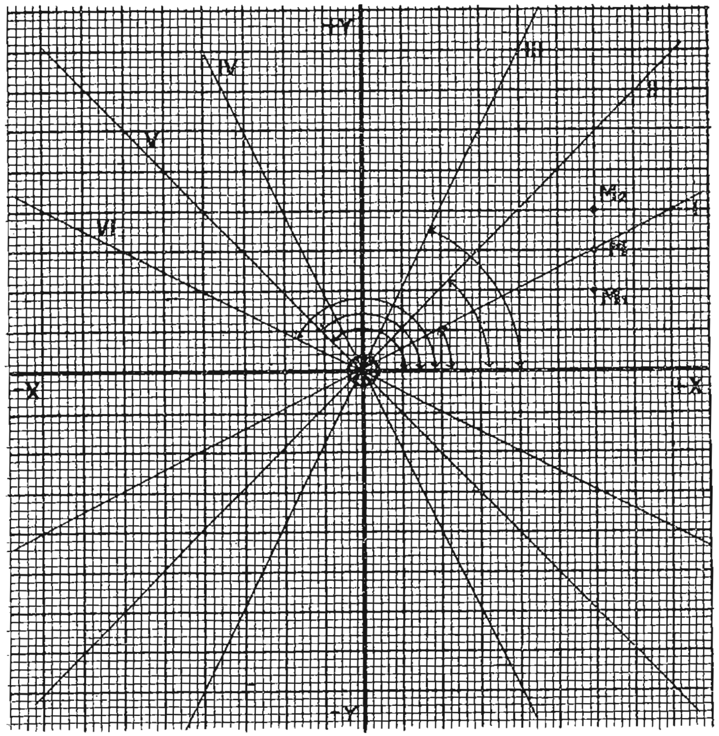
$$y_3 : x_3 = \frac{1}{2}$$

$$y_4 : x_4 = \frac{1}{2}$$

А одатле:

$$y_3 : x_3 = y_4 : x_4.$$

Шта претставља размера $y : x$ на правој линији? Она претставља *пад* праве линије. Пошто је *пад* праве линије *сталан*, то и однос ординате према апсциси ма које тачке мора бити сталан. Узмимо неколико правих (сл. 14). Посматрајмо их редом.



Сл. 14.

Прва права има пад $\frac{1}{2}$. Значи, да за све њене тачке важи ово:

I $$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

За другу праву биће:

II $$\frac{y}{x} = 1$$

За трећу праву биће:

III $$\frac{y}{x} = 2$$

Пошто је пад једнак у свима тачкама једне праве линије, та размера ординате и апсцисе претставља једну особину свију тачака праве линије, то јест претставља особину праве линије. Кад ту особину изразимо једначином добићемо *једначину праве линије која пролази кроз координатни почетак.*

Да проверимо то.

Узмимо I праву.

Њена једначина је

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}.$$

Тачка M лежи на тој правој. Њене координате су $x = 30$, $y = 15$. Сменимо их у горњој једначини, па ће бити:

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Као што се види, *једначина је задовољена* координатама тачке M. Како једначина

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

претставља једну праву линију, то се и тачка M, чије су координате (30, 15), *мора* налазити на тој правој.

Узмимо тачку M_1 (30, 10). Ако њене координате унесемо у једначину

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

биће

$$\frac{10}{30} \neq \frac{1}{2}$$

Једначина није задовољена координатама тачке M_1, што значи да та тачка *не* лежи на правој

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

Узмимо тачку M_2 (30, 20). За њу ће бити:

$$\frac{20}{30} \neq \frac{1}{2}$$

Ни она не лежи на правој I, што се и на слици види.

Узмимо сад праве IV, V и VI,

За њих ће бити:

IV $$\frac{y}{x} = -2$$

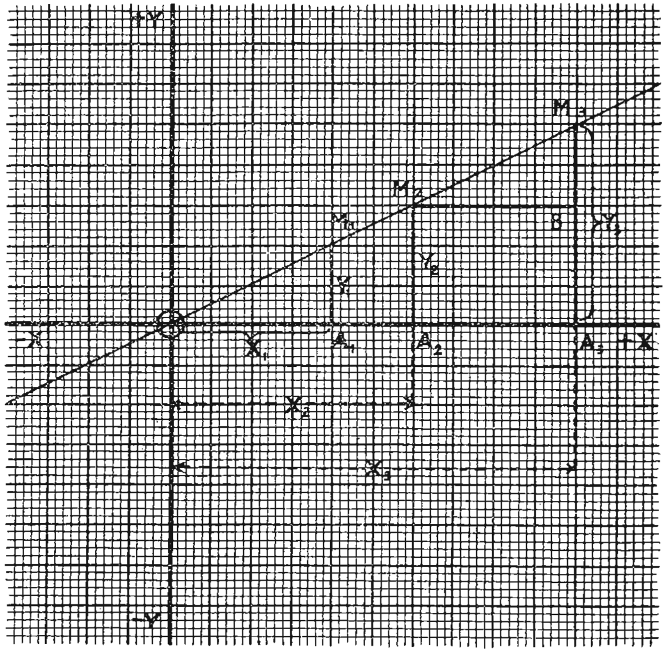
V $$\frac{y}{x} = -1$$

VI $$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$$

Из једначина ових 6 наведених правих линија види се ово:

1) Једначина праве линије која пролази кроз координатни почетак добија се, кад се размером ординате и апсцисе *ма које* њене тачке изрази њен *пад*.

2) Пад је изражен *позитивним* бројем, ако права заклапа *оштар* угао с позитивним смислом апсцисне осовине, а *негативним* бројем, ако права заклапа *туп* угао с позитивним смислом апсцисне осовине.



Сл. 15.

3) Кад нам је дата једначина праве која пролази кроз координатни почетак, довољно је претставити њен *пад*, па ћемо одмах имати нацртану праву.

Пример: Нацртати праву чија је једначина:

$$y = \frac{x}{2}$$ Најпре ћемо показати њен пад:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

Значи треба узети произвољну апсцису, па подићи ординату која је пола те апсцисе. На слици 15 узећемо апсцису $OA_1 = 20$

и ординату $A_1M_1 = 10$. Добијамо тачку M_1. Добивену тачку спојићемо с координатним почетком и то је та тражена права. Наша права биће права OM_1 са слике 15.

Линеарна функција. — Видели смо да једначина овога облика

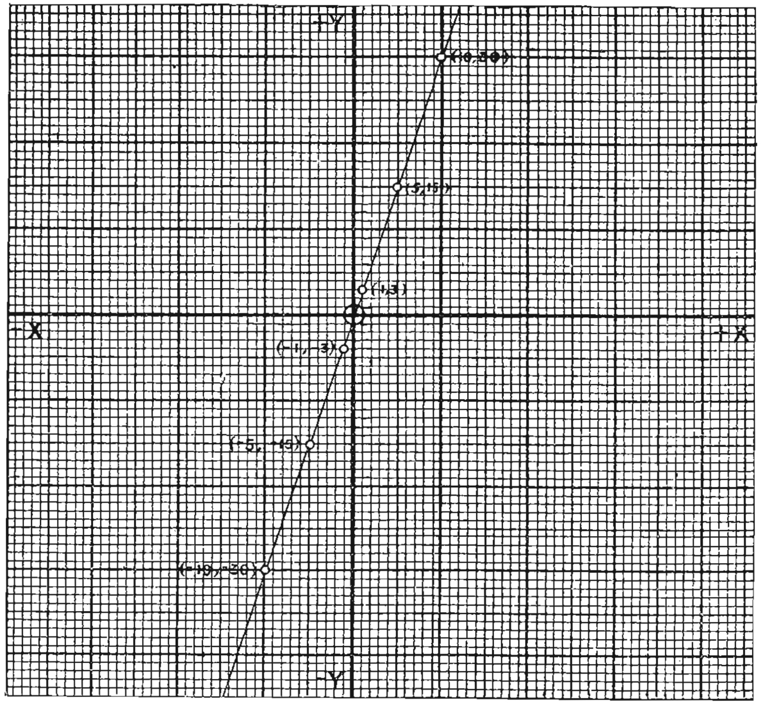
$$y = ax$$

претставља праву линију која пролази кроз координатни почетак.

Узмимо једначину

$$y = 3x$$

Овде ипсилом зависи од икса. Ипсилон је функција икса. Знамо да ова функција претставља праву линију. Знамо даље да је права линија одређена двема тачкама. Зато нам је довољно да узмемо само две вредности за *x*, па да израчунамо припадне вредности за ипсилон.

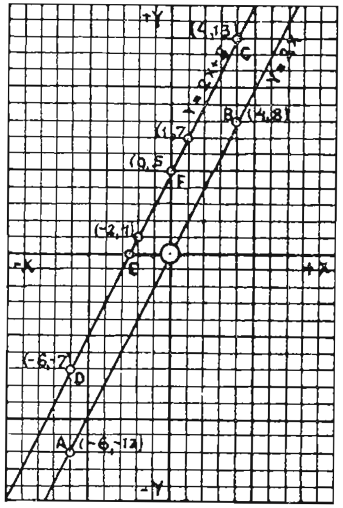


Сл. 16.

x	y
0	0
5	15

Добили смо координате двеју тачака: координатног почетка (0,0) и још једне тачке (5, 15). Кад кроз њих повучемо једну праву линију, добијамо праву коју претставља слика 16.

Као што смо видели, оваква се функција претставља правом линијом и за то се зове *линеарна функција* (од латинске речи linea, права линија).



Сл. 17.

Моном $3x$ на десној страни једначине $y = 3x$ зове се *моном линеарне функције.*

Кад је функцијин моном првог степена по x, функција претставља праву која пролази кроз координатни почетак.

Бином линеарне функције. — Нека нам је дата једначина

$$y = 2x + 5$$

x	y
−6	−7
−2	+1
0	5
1	7
4	13

Ова је функција изражена биномом $2x + 5$.

Да нема онога 5, једначина $y = 2x$ претстављала би праву AB са слике 17. Да видимо шта претставља једначина $y = 2x + 5$.

Дајмо иксу неколико вредности и израчунајмо припадне вредности за y. Добићемо једну таблицу.

Добили смо тачке које показује слика 17. Кад их спојимо, добијамо *праву линију DC.*

И ова је функција претстављена правом линијом. И она је *линеарна функција*. Њен бином $2x + 5$ јесте *бином* линеарне функције.

Одавде видимо да *једначина с двема непознатима првога степена претставља праву линију.*

Конструкција линеарне функције. — Биномне линеарне функције најлакше је овако конструисати:

Најпре стави $x = 0$, па израчунај y и обележи ту тачку. Затим стави $y = 0$, па израчунај x и обележи ту тачку. Кроз те две тачке повуци праву линију.

Пример. — *Конструисати линеарну функцију* $y = 2x + 5$

За $x = 0$ имамо $y = +5$.

То је тачка $F(0, +5)$ на слици 17.

За $y = 0$ имамо $x = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$

То је тачка $E\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$ на слици 17.

Наша биномна линеарна функција $y = 2x + 5$ претставља праву EF са слике 17.

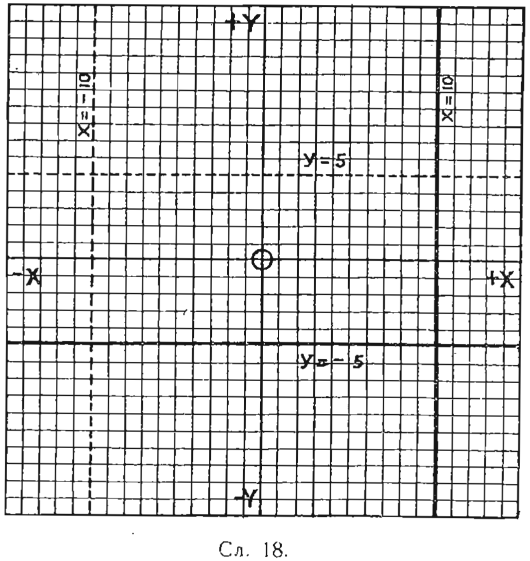
Графичко претстављање једначина првога степена с једном непознатом. — Нека је дата једначина

$$2x = 20$$

Одатле је

$$x = 10$$

Шта то значи? То значи да је то права линија чије све тачке имају једну исту апсцису 10. То је права паралелна са ординатном осовином на растојању + 10 поделака од почетка (сл. 18).



Сл. 18.

Слика 18 показује у исто време шта значе једначине

$$x = -10$$
$$y = 5$$
$$y = -5$$

Из ових огледа видимо да и једначина првога степена с једном непознатом претставља праву линију.

Порастне, опадне и сталне функције. — Узмимо праву *DC* (сл. 17).

Њена је једначина

$$y = 2x + 5$$

Пођимо од *D* ка *C*. Кад се у томе смислу крећемо по нашој правој, *апсцисе расту*: у тачци *D* је $x = -6$, у *E* је $x = -2{,}5$ у *F* је $x = 0$, у *C* је $x = +4$. Да видимо шта за то време бива са функцијом *y*. Она је

у тачци *D*: $y = 2 \,.\, (-6) + 5 = -7$
„ „ *E*: $y = 2 \,.\, (-2{,}5) + 5 = 0$
„ „ *F*: $y = 2 \,.\, 0 + 5 = +5$
„ „ *C*: $y = 2 \,.\, 4 + 5 = +13.$

Видимо *да кад x расте, расте и y*. То значи да *кад расте* I *независно променљива, расте и функција*.

Оваква функција зове се *порастна функција*.

Ми смо ово рашћење посматрали на слици. Апсциса у тачци *E* је већа од апсцисе у тачци *D*, јер је *њихова разлика* позитивна:

$$(-2{,}5) - (-6) = -2{,}5 + 6 = +3{,}5.$$

Видели смо да онда и функција *y* расте.

Одавде видимо ово

практично правило: ако хоћемо да видимо како се мења функција између двеју вредности независно променљиве, треба образовати израз

$$x_2 - x_1$$

па видети шта бива у томе случају са

$$y_2 - y_1$$

Ако су обе разлике једновремено позитивне или једновремено негативне, *функција је порастна*.

Да то проучимо на једначини:

$$y = 2x + 5$$

Узмимо две тачке чије су координате

$$x_1y_1 \text{ и } x_2y_2.$$

Ако сменимо координате x_2y_2 имаћемо:

$$y_2 = 2x_2 + 5.$$

Ако сменимо координате x_1y_1 имаћемо:

$$y_1 = 2x_1 + 5$$

Одузимањем добијамо:

$$y_2 - y_1 = 2\ (x_2 - x_1)$$

пошто $+ 5$ и $- 5$ дају нулу.

Узмимо сад две произвољне вредности за x:

$$x_1 = -6 \qquad x_2 = +4.$$

Образујмо израз $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = 2\ (x_2 - x_1)$$

па ће бити:

$$y_2 - y_1 = 2\,[4 - (-6)] \qquad x_2 - x_1 = +10$$
$$y_2 - y_1 = 2\,(4 + 6) \qquad y_2 - y_1 = +20.$$

Ако сад погледамо на слику 17, на којој је претстављена наша права

$$y = 2x + 5$$

видећемо да од тачке *D*, чија је апсица (— 6) до тачке *C*, чија је апсица + 4, *функција расте*. Пошто *крива линија првог степена*, то јест, *права линија*, не мења свој правац, то ће *линеарна функција увек расти ако утврдимо да расте између ма којих двеју тачака.*

Узмимо сад функцију

x	y
— 5	+ 15
— 3	+ 11
— 1	+ 7
0	+ 5
+ 1	+ 3
+ 2	+ 1
+ 2,5	0
+ 3	— 1
+ 4	— 3
итд.	

$$y = -2x + 5$$

Образујемо израз $y_2 - y_1$:

$$y_2 = -2x_2 + 5$$
$$y_1 = -2x_1 + 5$$
$$y_2 - y_1 = -2\,(x_2 - x_1).$$

Ако је $x_2 - x_1 > 0$ то јест позитивно, $y_2 - y_1$ биће негативно. То значи да је

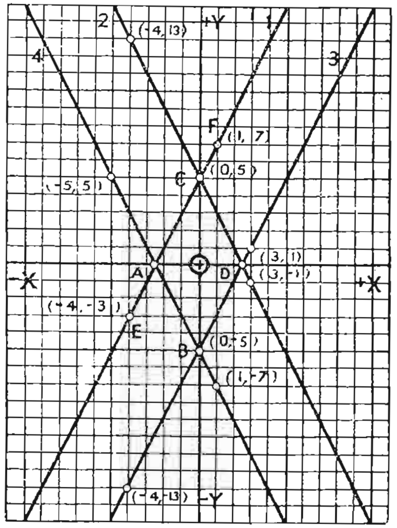
$$x_2 > x_1$$
$$\text{а} \quad y_2 < y_1$$

Док *x* расте, *y* опада. Функција је *опадна*. Ова се функција лепо види на слици 19, на правој CD. Док *x* једнако расте, функција *y* једнако опада (види приложену таблицу и сл. 19).

Узмимо сад функцију

$$y = 5$$

Овде је *y стално*; не зависи ни од једне променљиве количине. Оваква се функција зове *стална* функција. Она нити расте, нити опада. Њена вредност је стална. Ова функција је претстављена једном правом линијом (сл. 18) која је паралелна са апсцисном осовином на растојању $+5$ од апсцисне осовине. Са слике се види да ординате свих тачака те праве остају стално $+5$, па ма како се мењала апсциса.



Сл. 19.

Графичко решавање једначина

Графичко решавање система од двеју једначина I степена. — Видели смо да једначина првог степена с двема непознатима претставља једну праву линију. Према томе, кад су дате две једначине ми имамо у ствари две праве линије; координате њихова пресека морају задовољавати обе једначине, пошто пресечна тачка лежи и на једној и на другој правој.

Узмимо да решимо систем једначина:

(1) $$y+2x=-5$$

(2) $$y-2x=-5.$$

Прва је функција претстављена правом *AB* (сл. 19.), а друга правом *BD*. Са слике се види да се те две праве секу у тачци *B*, чије су координате

$$x=0$$
$$y=-5.$$

Према томе, то је решење горњег система.

И збиља је:

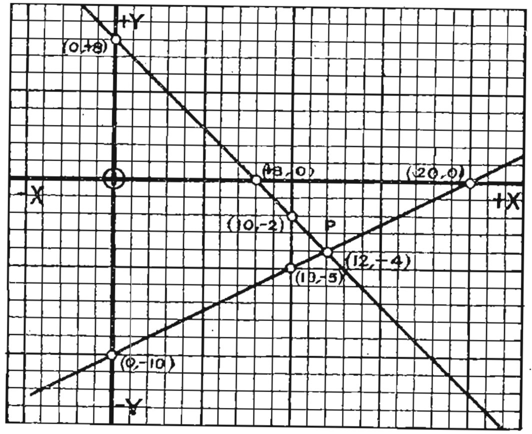
$$-5+2\,.\,0=-5$$
$$-5-2\,.\,0=-5.$$

Узмимо сад овај систем:

(1) $$y+x=8$$

(2) $$x-2y=20$$

Кад конструишемо те две праве добићемо слику 20. Оне се секу у тачци *P*, чије су координате:



Сл 20.

$$x=12$$
$$y=-4.$$

То је решење нашег система.

Збиља је:

$$-4+12=8$$
$$12-2(-4)=20.$$

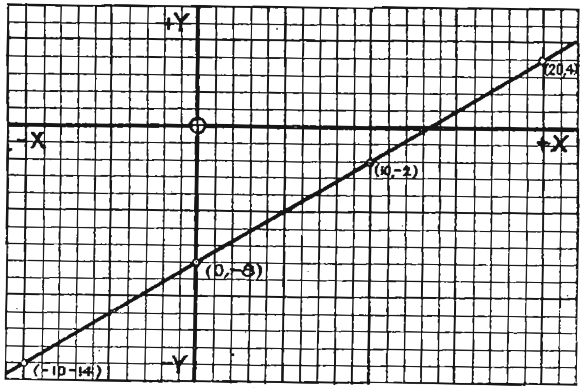
Узмимо овај систем:

$$5y+40=3x$$
$$y+8=\frac{3}{5}x.$$

Кад конструишемо те две функције, видећемо да је то једна иста права претстављена на слици 21.

Горњи систем можемо овако написати:

$$-3x+5y=-40$$
$$-\frac{3}{5}x+y=-8.$$



Сл. 21.

Кад загледамо мало боље, видимо да је ово други потслучај другог случаја, који се појављује при дискусији система једначина. (Види страну 100).

Узмимо сад овај систем:

$$y - 2x = 5$$
$$y - 2x = -5.$$

Кад конструишемо обе праве, имаћемо праве *AC* и *BD* на слици 19. Оне су паралелне, те према томе немају заједничких тачака. Систем је немогућан. Ово је први потслучај другог случаја у дискусији система једначина (стр. 99).

Узмимо систем:

I и II

$y - x = 3$ $\quad$ $x + y + 5 = 0$

Конструишимо прву праву:

за $y = 0$

$x = -3$

То је тачка A (сл. 22).

за $x = 0$

$y = 3$

То је тачка B (сл. 22).

Нашу једначину претставља права *AB* (сл. 22).

Конструишимо другу праву:

за $y = 0$

$x = -5$

То је тачка D (сл. 22).

за $x = 0$

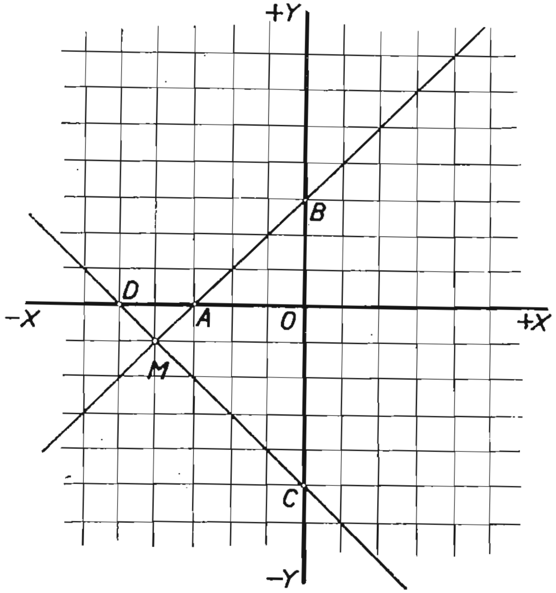
$y = -5$

То је тачка C (сл. 22).

Нашу једначину претставља права *CD* (сл. 22).

Ове се две праве секу у тачци *M*, чије су координате:

$$x = -4$$
$$y = -1$$



Сл. 22.

То је решење горњег система.

Узмимо систем:

I $\quad y - 2x - 6{,}5 = 0$

II $\quad 2\,\frac{4}{7}x - 5{,}5y + 14\,\frac{1}{7} = 0$

Конструишимо прву праву (сл. 23):

за $x = 0$

$y = 6{,}5$

за $y = 0$

$x = -3{,}25$

Конструишимо другу праву:

за $x = 0$

$y = 2\,\frac{4}{7}$

за $y = 0$

$x = -5{,}5$

Секу се у тачци M (− 2,6 + 1,4).

Решење система је:

$$x \approx -2{,}6$$
$$y \approx 1{,}4$$

Графичко решавање једначина I степена с једном непознатом. — Узмимо да нам је дато да решимо једначину:

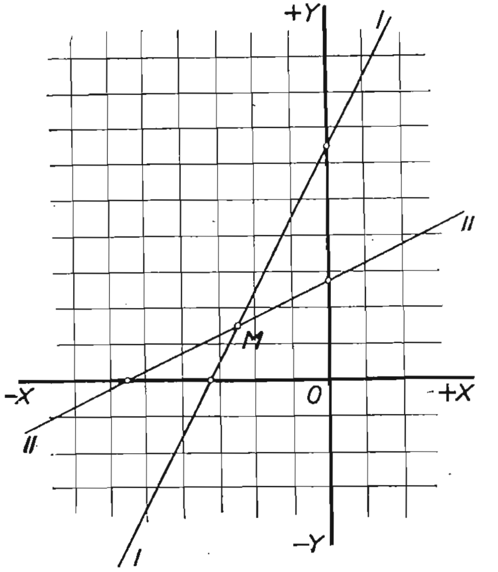
$$7 - \frac{4x + 5}{5} = x - 3$$

Ставимо:

(1) $$y = 7 - \frac{4x + 5}{5}$$

и

(2) $$y = x - 3.$$



Сл. 23.

Једначину прве праве напишимо у овоме облику:

$$y = 7 - \frac{4x}{5} - \frac{5}{5}$$

и тај облик упростимо:

$$y = 7 - \frac{4}{5} x - 1$$

$$y = 6 - \frac{4}{5} x$$

$$y = - \frac{4}{5} x + 6$$ ✓

Видимо да је то права AB (сл. 24).

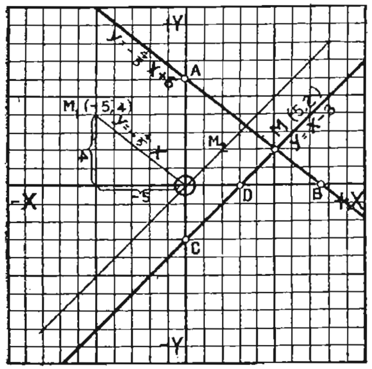
Друга права

$$y = x - 3$$

јесте права *CD*.

Наше праве *AB* и *CD* секу се у тачци *M* чија је апсциса

$$x = 5$$



Сл. 24.

и то је *решење* горње једначине првог степена.

И збиља је:

$$7 - \frac{4 . 5 + 5}{5} \qquad 5 - 3$$

$$7 - 5 \quad 5 - 3$$

$$2 = 2.$$

Узмимо једначину:

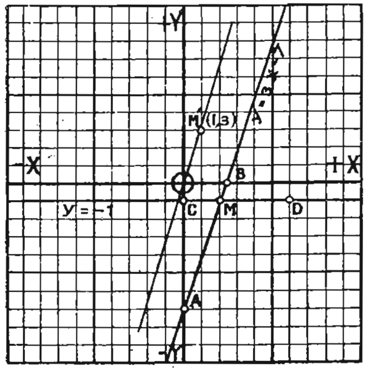
$$3x - 7 = - 1$$

Овде ће бити:

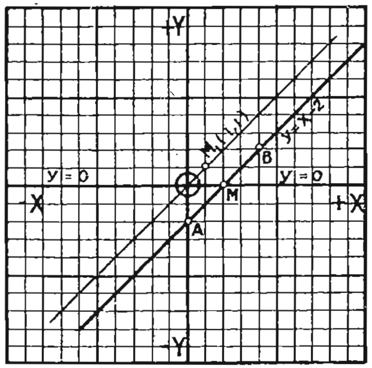
(1) $$y = 3x - 7$$

(2) $$y = - 1$$

Прва је права права *AB* (сл. 25).



Сл. 25



Сл. 26.

Друга је права претстављена *сталном функцијом;* ордината јој је — 1 у свима тачкама. То је права *CD* која је паралелна са апсцисном основном.

Праве *AB* и *CD* секу се у тачци M, чије су кординате $x = 2$, $y = - 1$. Према томе *решење* горње једначине је:

$$x = 2.$$

И збиља је:

$$3 . 2 - 7 \qquad - 1$$

$$6 - 7 \qquad - 1$$

$$- 1 = - 1.$$

Узмимо једначину:

$$x - 2 = 0.$$

Овде је

(1) $y = x - 2$

(2) $y = 0.$

Прва права јесте права AB (сл. 26).

Друга је права сама *айсцисна осовина*, јер су на њој све ординате равне нули.

Пресек наше праве AB са апцисном осовином је у M, чија је апсциса

$$x = 2.$$

То је *решење* горње једначине.

Изведи *йрактично йравило* за графичко решавање система и посебних једначина!

ВЕЖБАЊА УЗ VIII ОДЕЉАК

1. $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = 1$
$\frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2$

2. $2x - y = \frac{3}{5}$
$x + y = \frac{5}{7}$

3. $2(2x + 3y - 5) = \frac{5}{8}(x + 3) + \frac{3}{4}(y - 4)$
$x + y = 1$

4. $2x - y = 3\left(x - 5 + \frac{2}{3}y\right)$
$6x + y = \frac{3}{4}(1 + x - y)$

5. $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$
$3(x - 2) + 5(y - 1) = 19$

6. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y + 1) = 1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}y = 4{,}5$

7. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}(y + 1) = 1$
$\frac{1}{3}(x + 1) + \frac{3}{4}(y - 1) = 9$

8. $0{,}7x - 0{,}9y = 1$
$0{,}3y = 0{,}2x - 0{,}2$

9. $0{,}6x + 1{,}3y = 0{,}7$
$0{,}8x = 1{,}7x - 0{,}14$

10. $25{,}9x - 60{,}1y = 1$
$24{,}1x - 55{,}9y = 1$

11. $\frac{0{,}9x - 0{,}7y + 7{,}3}{13x - 15y + 17} = 0{,}2$
$\frac{1{,}2x - 0{,}2y + 8{,}9}{13x - 15y + 17} = 0{,}3$

12. $(2x + y - 1) : (3x + 2y + 11) = 1:2$
$(5x + 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 3:4$

13. $(x + y - 4) : (2x + y + 1) = 1:2$
$(2x + y - 9) : (x + 2y + 7) = 3:4$

14. $(x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4)$
$(x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1)$

15. $(x + 3)(y + 5) = (x + 1)(y + 8)$
$(2x - 3)(5y + 7) = 2(5x - 6)(y + 1)$

16. $(x - 8)(5y - 3) = (5x - 1)(y + 2)$
$(x - 9)(3 - y) = (2 - y)(x + 2)$

17. $\frac{3x + 4y}{12} - \frac{5y - 3x}{9} = \frac{2x + 3y}{6} - \frac{3y - 1x}{3}$
$\frac{1}{4}(x + 4) + \frac{1}{10}(y - 3) = \frac{3x}{4} - \frac{y - 11}{2}$

18. $(6x - 9)(12y + 13) - (4y + 5)(18x - 31) = 2(3x + 7y)$
$(6x - 9)(9y + 8) + (2x - 3)(5 - 27y) = 5(x - 6y) - 11$

19. $4x(15y - 41) + 12y(18 - 5x) = 7(13y - 19)$
$9x(5y - 1) - 15y(3x - 5) = 12(8x + 5)$

20. $\frac{7x + 8y}{6} = 7 + \frac{4y}{3}$
$\frac{5x - 3y}{4} - (2x - 13) = \frac{7x - y}{3} + y - 4$

21. $2x - 3y = a + b$
$3x - 2y = a - b$

22. $a - x = b + y$
$x - 2 = b - 2y$

23. $2x - 3y = -5a$
$3x - 2y = -5b$

24. $5x + 3y = 4a + b$
$3x + 5y = 4a - b$

25. $2x - 3a = 3y + 2a$
$4x + 5b = 2y + 3a$

26. $4x - a = 5y + b$
$5y + a = 2x - b$

27. $x + y = \frac{1}{2}(5a + b)$
$x - y = \frac{1}{2}(a + 5b)$

28. $2x + y = a + b$
$y - 2x = 2a - b$

29. $x - 2a = y + 3b$
$2a - 3y = b + ax$

30. $2x - ay = b - a$
$bx - ay = a + b$

31. $4x - 3a = 2y + b$
$y + 2x = 3a + 4b$

32. $4x - 5b = 6y + 7y$
$7x - 6y = 5a - 2a + b$

33. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$bx + ay = 0$

34. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1$

35. $x + y = a + b$
$bx + y = 2ab.$

36. $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a$
$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = b$

37. $(a + c)x - by = c$
$x + y = a + b$

38. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$
$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$

39. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$
$\frac{x + 1}{y + 1} = \frac{c}{b}$

40. $\frac{x + 1}{y} = a$
$\frac{y + 1}{x} = b$

41. $\frac{x - c}{y - c} = \frac{a}{b}$
$x - a = y + b$

42. $\frac{x - a}{y - b} = \frac{a}{b}$
$\frac{x + a}{y + b} = \frac{b}{a}$

43. $\frac{a - x}{y} = \frac{a}{a - b}$
$\frac{b - x}{y} = \frac{b}{a}$

44. $\frac{2a + x}{a} - 1 = \frac{a - b}{y}$
$\frac{a - 2b}{x} + 1 = \frac{a + b}{x}$

45.
$$\begin{gathered}\frac{2x-b}{a-x}-\frac{a-b}{b}+1=\frac{y-b}{a-x}\\ \frac{3y+a}{b-x}+\frac{a+x}{a}-1=\frac{x+b}{b-x}\end{gathered}$$

46.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a\\ \frac{x-y}{2ab}=\frac{x+y}{a^2+b^2}\end{gathered}$$

47.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{4ab}{b^2-a^3}\\ \frac{x+y}{a+b}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\end{gathered}$$

48.
$$\begin{gathered}a(x+y)+b(x-y)=1\\ a(x-y)+b(x+y)=1\end{gathered}$$

49.
$$\begin{gathered}\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}=0\\ \frac{x+y-b}{a}+\frac{x-y-a}{b}=0\end{gathered}$$

50.
$$\begin{gathered}(x+y):(x-y)=a:(b-c)\\ (x+c):(y+b)=(a+b):(a+c)\end{gathered}$$

51.
$$\begin{gathered}(x-a):(y-a)=(a-b):(a+b)\\ x:y=(a^3-b^3):(a^3+b^3)\end{gathered}$$

52.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=a+b\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2a\end{gathered}$$

53.
$$\begin{gathered}(a+c)x-(a-c)y=2ab\\ (a+b)y-(a-b)x=2ac\end{gathered}$$

54.
$$\begin{gathered}(a+b)x-(a-b)y=4ab\\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2\end{gathered}$$

55.
$$\begin{gathered}(a+b)x+(a-b)y=2ab\\ (a+c)x+(a-c)y=2ac\end{gathered}$$

56.
$$\begin{gathered}(a+2b)x-(a-2b)y=6ac\\ (a+2c)x-(y-3c)x=4ab\end{gathered}$$

57.
$$\begin{gathered}mx+ny=c\\ x:y=a:b\end{gathered}$$

58.
$$\begin{gathered}ax+by=2a\\ x+y=\frac{a^2+b^2}{ab}\end{gathered}$$

59.
$$\begin{gathered}(a-b)x+(a+b)y=a+b\\ \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}\end{gathered}$$

60.
$$\begin{gathered}\frac{x-y+1}{x+y-1}=a\\ \frac{x+y+1}{x-y-1}=b\end{gathered}$$

61.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\\ -\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a-b}=\frac{4a^2b^2}{(a-b^2)^2}\end{gathered}$$

Решити и дискутовати ове системе:

62.
$$\begin{gathered}x+y=a\\ x-y=b\end{gathered}$$

63.
$$\begin{gathered}ax+y=c\\ mx-ny=0\end{gathered}$$

64.
$$\begin{gathered}ax+by=c\\ dx-cy=0\end{gathered}$$

65.
$$\begin{gathered}ax+cy=a^2\\ bx+cy=b^2\end{gathered}$$

66.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\\ bx-ay=0\end{gathered}$$

67.
$$\begin{gathered}x+y=a+b\\ bx+ay=2ab\end{gathered}$$

68.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\end{gathered}$$

69.
$$\begin{gathered}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c}\\ \frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1+\frac{y}{c}\end{gathered}$$

70.
$$\begin{gathered}x+y=\frac{1}{2}(5a+b)\\ x-y=\frac{1}{2}(a+5b)\end{gathered}$$

71.
$$\begin{gathered}2x-3y=-5a\\ 3x-2y==5b.\end{gathered}$$

72. — Решити систем:
$$\begin{gathered}(1+\lambda)x+(3+\lambda)y=3+\lambda\\ \lambda x+(5+\lambda)y=4+\lambda.\end{gathered}$$

Дискутовати добивено решење, кад се λ мења од $-\infty$ до $+\infty$

73. — Исто за систем:
$$\begin{gathered}(a+\lambda)x+(b+\lambda)y=c+\lambda\\ (1+\lambda)x+(2+\lambda)y=3+\lambda.\end{gathered}$$

Решити ове системе:

74.
$$\begin{gathered}x+y=37\\ x+z=25\\ y+z=24\end{gathered}$$

75.
$$\begin{gathered}x+y+z=100\\ 3x-2z=4\\ 5y=4z\end{gathered}$$

76.
$$\begin{gathered}x+y+z=3\\ x-y+z=6\\ x-y-3z=12\end{gathered}$$

77.
$$\begin{gathered}x-y+2z=\frac{3}{4}\\ x+y+z=0\\ x-y-4z=2\end{gathered}$$

78.
$$\begin{gathered}3x-2y+4z=9\\ 5x-4y-6z=1\\ x+y-3z=1\end{gathered}$$

79.
$$\begin{gathered}5x-3y+2z=19\\ 4x+5y-3z=31\\ 3x+7y-4z=31\end{gathered}$$

80.
$$\begin{gathered}\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58\\ \frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}\end{gathered}$$

81.
$$\begin{gathered}1{,}5x-2{,}5y+2z=2{,}5\\ 3{,}5x+y\ 1{,}5z=1\\ 2x+1{,}5y-0{,}4z=3{,}5\end{gathered}$$

82.
$$\begin{gathered}y+\frac{x}{2}=41\\ x+\frac{z}{4}=\frac{41}{2}\\ y+\frac{z}{5}=34\end{gathered}$$

83.
$$\begin{gathered}x+y+z=11\\ 2x-y+z=5\\ 3x+2y+z=24\end{gathered}$$

84.
$$\begin{gathered}x-y+z=7\\ x+y-z=1\\ y+z-x=3\end{gathered}$$

85.
$$\begin{gathered}x+y-6z=9\\ x-y+4z=5\\ 3y-2x-z=4\end{gathered}$$

86.
$$\begin{gathered}x+2y-0{,}7z=21\\ 3x+0{,}2y-z=24\\ 0{,}9x+7y-2z=27\end{gathered}$$

87.
$$\begin{gathered}x+y=1\frac{1}{2}z=8\\ x+z=2\frac{2}{3}y-14\\ y+z=3\frac{3}{4}x-32\end{gathered}$$

88.
$$\begin{gathered}\frac{3x+y}{z+1}=2\\ \frac{3y+z}{x+1}=2\\ \frac{3z+x}{y+1}=2\end{gathered}$$

89.
$$\begin{gathered}0{,}6x+0{,}8y=5\\ 0{,}3z-0{,}4x=0{,}3\\ y+1.2z=10\end{gathered}$$

90.
$$\begin{aligned}0.5x + 0{,}3y &= 0{,}65\\ 0{,}4x - 0{,}2z &= 0{,}22\\ 0.3x + 0{,}4z &= 0{,}57\end{aligned}$$

91.
$$\begin{aligned}\frac{3x}{4} + \frac{2z}{9} &= 13\\ \frac{5x}{6} - \frac{3y}{5} &= 5\\ \frac{4x}{3} - \frac{5z}{6} &= 5\end{aligned}$$

92.
$$\begin{aligned}\frac{x + 2y}{5x + 6z} &= \frac{1}{9}\\ \frac{3y + 4z}{x + 2y} &= \frac{8}{7}\\ x + y + z &= 128\end{aligned}$$

93.
$$\begin{aligned}8(5z - 6x) - 9(5x - 4y) &= 1\\ 4(7y - 4z) - 2(5x - 4y) &= 2\\ 12(7y - 4z) - 7(5z - 5x) &= 3\end{aligned}$$

94.
$$\begin{aligned}x + y + z &= 1\\ ax - by + z &= b\\ x - y + cz &= c\end{aligned}$$

95
$$\begin{aligned}4x - 3y + 5z &= a\\ ax + by + z &= b\\ x - y - z &= c\end{aligned}$$

96.
$$\begin{aligned}ax + by - cz &= 2az\\ by + cz - ax &= 2bc\\ cz - ax - by &= 2ac\end{aligned}$$

97.
$$\begin{aligned}x - y + z &= 0\\ (a + b)x - (a + c)y + (b + c)z &= 0\\ abc - acy + bcz &= 1.\end{aligned}$$

98.
$$\begin{aligned}bx + ay &= 0\\ cy + bz &= 0\\ cx + az &= 1.\end{aligned}$$

99.
$$\begin{aligned}x + y + z + a(x + y) + a^2x &= a^3\\ x + y + z + b(x + y) + b^2x &= b^3\\ x + y + z + c(x + y) + c^2x &= c^3\end{aligned}$$

Овде можеш извршити ову смену:

$$x + y + z = u \qquad x + y = v$$

па ћеш добити систем од трију простијих једначина. Тај систем ће ти дати вредности за *x*, *v* и *u*. Чим знаш *x* и *v*, ти знаш одмах *y*; а чим знаш *x*, *y*, *u*, знаш и *z*.)

100.
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0\\ \frac{ab}{x} + \frac{bc}{y} + \frac{ac}{z} &= 0\end{aligned} \qquad \frac{1}{(a - b)x} + \frac{1}{(b - c)y} + \frac{1}{(c - a)z} = \frac{a + b + c}{abc}$$

(Другу једначину можемо овако написати:

$$ab\left(\frac{1}{x}\right) + bc\left(\frac{1}{y}\right) + ac\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

а трећу:
$$\frac{1}{a - b}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{(b - c)}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{(c - a)}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + b + c}{abc}.$$

Загледај мало боље, па ћеш брзо видети какву смену треба извршити пре него што се пређе на решавање горњег система).

101.
$$\begin{aligned}x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a\\ z + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b\\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c\end{aligned}$$

102.
$$\begin{aligned}\frac{x}{a + c} + \frac{y}{c + a} &= b - a\\ \frac{x}{b + c} + \frac{y}{c + b} &= c - b\\ \frac{y}{c + a} = \frac{z}{a + b} &= c - b\end{aligned}$$

103.
$$\begin{aligned}\frac{x + y}{2z} &= \frac{a}{b}\\ \frac{x - 2z}{y} &= \frac{a + b}{a + b}\\ \frac{x - a^2}{b} + \frac{y + b^2}{a} &= \frac{az + bz}{ab}\end{aligned}$$

104.
$$\begin{aligned}x + y &= d\\ ax &= y\\ bx &= z.\end{aligned}$$

(Шта бива са x, y, z, кад је a=—1, a b и d нису равни нули?)

105.
$$\begin{aligned}4x - 3z + u &= 10\\ 5y + z - 4u &= 1\\ 3y + u &= 17\\ x + 2y + 3u &= 25\end{aligned}$$

106.
$$\begin{aligned}3x + 6y - 2z + 9u &= 6\\ 4y - 5x + 5z - 6u &= 5\\ 2z - 3x + 8y - 3u &= 3\\ 9u + 10y + 3z - 4x &= 9\end{aligned}$$

107.
$$\begin{aligned}x - 2y - 3z - 4u &= -8\\ y - 2z + 3y - 4x &= 6\\ z - 2u + 3x - 4y &= -8\\ u - 2x + 3y - 4z &= -2\end{aligned}$$

108.
$$\begin{aligned}3x - 4y &= 4\\ 6y - 5z &= 5\\ z - u &= 2\\ 2u - x &= 2\end{aligned}$$

109.
$$\begin{aligned}5x - 2z &= 18\\ y + 4u &= 9\\ u - 5z &= -5\\ 2x + 3u &= 8\end{aligned}$$

110.
$$\begin{aligned}2x + 3y &= 5\\ 4y - 3z &= 1\\ 5u + 3x &= 8\\ 2x + 4z &= 6\end{aligned}$$

111.
$$\begin{aligned}x + y + 2v + 3z &= 18\\ x + 2y + v + z &= 17\\ y + 3v - 4z &= 8\\ v - z &= 2\end{aligned}$$

(Из последње једначине имаш z = v — 2. Том вредношћу смени z у трима горњим једначинама.).

112.
$$\begin{aligned}x + 3y - z - u &= 0\\ x - y + z + u &= 6\\ x - \frac{1}{2}y - z &= -3\\ x + u &= 5.\end{aligned}$$

(Најпре линеарна комбинација с I и II једначином.)

113.
$$\begin{aligned}x + y + 3z + v &= 14\\ 4x + 2y + z + v &= 15\\ 2x + y + 3x - v &= 16\\ 5x - 4y - z + v &= 7\end{aligned}$$

(Направи линеарне комбинације од 1 и 3, 2 и 3, 3 и 4! Добићеш систем с трима непознатима.).

114.
$$\begin{aligned}x + 3(y + z + v) &= 26\\ 2y + 3(x + z + v) &= 29\\ z + 3(x + y + v) &= 24\\ v + 3(x + y + z) &= 22.\end{aligned}$$

Конструисати ове праве линије:

115. $y = x.$

116. $y = 2x.$

117. $y = 3x.$

118. $y = 10x.$

119. $y = \frac{x}{2}.$

120. $y = -x$

121. $y = -2x$

122. $y = -3x.$

123. $y = -10x$

124. $y = -\frac{x}{2}.$

125. $x = 4$

(Једначина у вежбању 125 претставља праву линију на којој све тачке имају апсцису 4, то јест све тачке те праве (подједнако) су удаљене за 4 од ординатне осовине. Где леже такве тачке?)

126. $x = -1.$

127. $x = -1{,}5$

128. $y = 3{,}75$

129. $x = \frac{1}{2}$

130. $x = 0.$

131. $y = 1.$

132. $y = 0.$

133. $y = -3.$

134. $y = -\frac{3}{5}.$

(На милиметарској хартији узми да ти је један поделак на осовинама од 5 mm. за вежбање 134).

135. $y = -\frac{3}{7}$

136. $y = -\frac{3}{4}$

(На милиметарској хартији узми да ти је један поделак на осовинама од 7 mm. за вежбање 135).

137. $x = -5{,}25$

138. $x = -4.$

139. $x = -6.$

140. $x = -\frac{11}{12}.$

141. — Посматрај функцију дату овим биномом
$y = x + 1.$

142. — Исто за функцију
$y = -x + 1.$

143. — Исто за функцију
$y = -x + 2.$

144 — Исто за функцију
$y = -x - 1.$

Конструиши ове праве линије:

145. $y = 2x + 3.$

146. $y = -2x + 3.$

147. $y = 2x - 3.$

148. $y = -2x - 3.$

149. $y = -x - 1.$

150. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y + 6 = 0.$

151. $-\frac{3}{7}x + \frac{5}{15}y - 1 = 0$

152. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y - 1 = 0.$

153. $\frac{x-y}{3} + \frac{y-x}{4} = 1.$

154. $\frac{3}{5}(x-y) + \frac{5}{3}(y-x) = 6.$

155. $5(x - y - 1) + 2(x + y) = 0.$

156. $\frac{x-y}{x} + 5 = 0.$

---

157. $\frac{y-x}{5x} + 3 = 0.$

158. $x(m-2) + m(y-1) = 1$
за $m = 4.$

(Изабери m тако, да ова права буде паралелна са апсцисном осовином.)

159. $m(x-1) + y(m-n) = 1$
за $m = 1,\ n = 0.$

(Шта бива са овом правом кад буде $m = n$?)

160. — Испитати функцију
$y = \frac{3}{2}x - 3$
од $x_1 = -1$, до $x_2 = 3.$

161. Испитати функцију
$y = \frac{x}{3} + 1$
од $x_1 = -2$ до $x_2 = +2$

162. — Испитати функцију
$y = -\frac{2}{3}x + 1$
од $x_1 = -1$ до $x_2 = 2.$

163. — Испитати функцију
$y = -\frac{x}{3} - 2$
од $x_1 = 10$ до $x_2 = 1.$

164. — Решити цртањем овај систем
$x + y = z$
$x + y = 1.$

Решити графички (цртањем) ове системе једначина:

165. $2x + 3y = 5$
$3x + 2y = 7$

166. $2x + y = 7$
$5x + 3y = 12.$

167. $y = 2x$
$x + y = 3.$

168. $3x + 2y = 14$
$5x - 8y = 12.$

169. $\frac{x}{y} = 2$
$x + 2y = 12.$

170. $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 2$
$\frac{3x}{4} - \frac{2y}{5} = 2$

171. $0{,}5x + 0{,}1y = 1{,}9$
$\frac{2x}{3} + \frac{3}{4}y = -1$

172. $5x - 4y = 0$
$\frac{2x}{5} + \frac{y}{2} = 4{,}1.$

(Стално се служи милиметарском хартијом.)

173. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
$2x + 3y - 6 = 0.$

(Који је овде случај из дискусије система од две једначине?)

174. $\frac{x}{2}(m-1) + \frac{y}{3}(1-n) = 2$
$\frac{m}{2}(x-1) - \frac{n}{3}(y-2) = 3$
за $m = 2,\ n = 3.$

(Шта бива са овим двема правама кад је $m = n = 0$?)

175. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 2$
$\frac{x}{2} - \frac{2y}{5} = 7$

176. $y = \frac{2}{3}x - 2$
$2x - 3y + 9 = 0.$

177. — Решити графички ову једначину:

$$3x - 18 = 54.$$

Пошто су у једначини стране једнаке, можемо их означити истим бројем. Ако их означимо са y, биће:

$$y = 3x - 18 \text{ и } y = 54.$$

Узми 1 *mm* за поделак на осовинама, па ћеш видети да се ове наше две праве секу у тачци чија је апсциса $x = 24$.

178. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{6x - 3}{7} + 4 = 2x - \frac{x}{7}.$$

Наше две праве биће: $y = \frac{6x - 3}{7} + 4$ и $y = 2x - \frac{x}{7}$.

Конструиши их и нађи апсцису пресечене тачке. За поделак узми дужину од 7 *mm*.

179. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{2x - 3}{4x - 5} = \frac{3}{7}.$$

Ако узмеш да је прва права $y = 7\,(2x - 3)$, како ћеш изразити једначину оне друге праве?

180. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{x - 5}{3} = 4\left(\frac{x}{5} - 2\right) - 3.$$

181. — Исто за једначину:

$$\frac{5x + 3}{19} + \frac{41 - 3x}{5} = \frac{5x - 11}{4}.$$

182. — Исто за једначину:

$$\frac{15}{2x - 3} = \frac{39}{5x - 7}.$$

(Овде стави $y = 15\,(5x - 7)$ и т. д.)

183. — Исто за једначину:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{5}{6} = 0.$$

(Овде можеш ставити $y = \frac{x}{3}$ и $y = \frac{5}{6} - \frac{x}{2}$.)

184. — Исто за једначину:

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x + \frac{5}{6}x + x = 12.$$

IX — ПРОБЛЕМИ ПРВОГА СТЕПЕНА

Шта је то проблем. — Под *проблемом* подразумевамо у Алгебри такав задатак, где је најпре потребно наћи **однос** између датих количина које се траже, па тек онда приступити израчунавању.

Пример I — Колико је 5 пута 4? Ово *није проблем*, јер нам је одмах речено какав рачун треба да вршимо.

II — Израчунати површину троугла чија је основица 5 cm., а висина 4 cm.

Ни ово *није проблем*, јер нам је одмах речено да треба да нађемо половину производа бројева 5 и 4.

III. — Један број увећан за 4 даје 7. Који је то број? Овде морамо тражити *однос* тога траженога броја према бројевима 4 и 7. Ово је проблем.

Врсте проблема. — Проблеми се деле према томе каквим се једначинама могу претставити. Ако се проблем може претставити једначинама првог степена, то је *проблем првог степена;* ако се он може претставити једначинама другог степена, то је *проблем другог степена*. Колико ће бити једначина зависи од тога колико ћемо непознатих узети; један исти проблем може често да се реши с једном или са више непознатих. То ће ученик видети на другом примеру у низу примера који следују. Ученик треба толико да ради проблеме, док се не извежба да их ради са што мање непознатих.

Читање једначина. — Сваку једначину можемо прочитати као проблем. На пр. једначину

$$2x + 5 = 11$$

можемо овако прочитати: „Који је тај број, чијој двогубој вредности треба додати 5, па да се добије 11?“

Систем

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7x \\ 5y - 9y &= 1 \end{aligned}$$

можемо прочитати овако: „Кад се један број утроји, па се томе дода удвојен други неки број, добије се седмострука вредност првог броја. Кад се од петоструког другог броја одузме деветоструки први број, добије се јединица.“

Ступњеви проблема. — Сваки проблем има ових пет ступњева:

1. — Избор непознатих.

2. — Склапање једначина. — То значи да се однос између познатих и непознатих изражава једначинама, то јест проблем се преводи на алгебарски језик.

3. — Решавање једначина.
4. — Дискусија једначина.
5. — Дискусија проблема.

Пошто се проблеми могу проучити само тако, ако ученик изради *веома* много задатака, ми ћемо све показати на примерима.

Решени примери проблема првог степена

Први пример. — *Неки број увећан за 4 даје 1. Који је то број?*

Избор непознате. — Сам задатак каже да је овде непозната баш та количина, која сабрана са 4 даје 7. Њу ћемо обележити са *x*.

Склапање једначина. — Имамо свега једну непознату. *Проблем мора да је такав, да можемо написати онолико једначина, колико има непознатих.* Ако то није, онда је проблем *неодређен.*

Овде имамо *једну* непознату; треба нам дакле свега *једна* једначина. Да бисмо је склопили, пођимо за самим проблемом. Прочитајмо проблем поново! Он каже да нашу количину x треба сабрати са 4:

$$x + 4$$

па ће се добити 7:

$$x + 4 = 7.$$

Решавање једначине. — Ово је једначина I степена с једном променљивом

$$x + 4 = 7$$
$$x = 3.$$

Дискусија једначине. — Горња једначина има једно одређено решење

$$x = 3$$

Дискусија проблема. — Проблем је увек могућан, јер се увек могу наћи два броја чији ће збир бити 7. Добивено решење задовољава проблем, јер је збиља

$$3 + 4 = 7$$

Други пример. — *Збир цифара једног двоцифреног броја је 5; кад се од тога двоцифреног броја одузме 9, добије се опет двоцифрен број са истим цифрама, али у обрнутом реду. Који је тај двоцифрени број?*

Најпре ћемо да покажемо једну мрежу за бројеве и на њој ћемо исписати неколико бројева, да бисмо потсетили ученика на *декадни систем целих бројева.*

Нацртајмо неколико стубаца и у њих унесимо разне цифре. Та мрежа је и налево и надоле неограничена, али ми ћемо се зауставити код седмог вертикалног ступца у коме су милиони. Унесимо у ову мрежу 7 разних бројева, почевши једноцифреним па завршујући седмоцифреним. Горње бројеве можемо изразити на неколико начина. Узмимо, рецимо, број 876 из трећег хоризонталног ступца.

7	6	5	4	3	2	1
милиони	стотине хиљада	десетице хиљада	јединице хиљада	стотине	десетице	јединице
						4
					3	5
				8	7	6
			9	1	0	3
		8	7	6	5	4
	7	6	5	3	1	2
8	7	6	8	5	2	9
					3 *x*	2 *y*
					y	*x*

Тај број можемо овако написати:

$$8 . 100 + 7 . 10 + 6 . 1$$

или: $8 . 10^2 + 7 . 10^1 + 6 . 10^0$

или просто: $876 . 10^0$

то јест: $876 . 1$

а то је: 876

Кад погледамо на горњу мрежу, видимо да наш број има 8 стотина и 76 јединица, те га можемо овако написати:

$$8 . 100 + 76 . 1.$$

Даље видимо да он има 87 десетица и 6 јединица, те га можемо и овако написати:

$$87 . 10 + 6$$

Ако извrнемо цифре, имаћемо број 678. Шта је било сад? Сад су шестице стотине, седмице су и даље десетице, а осмице су јединице:

$$6 . 100 + 7 . 10 + 8 . 1$$

Ако цифру јединица ставимо пред ове друге две цифре, биће:

наш број 876

наш број после промене: 687.

Сад су шестице стотине, а 87 су јединице:

$$6 . 100 + 87 . 1$$

Вратимо се сад своме задатку.

Наш број је двоцифрен.

Избор непознате. — Сваки двоцифрен број заузима два места на нашој мрежи. Та два места заузимају две његове цифре. Да бисмо склопили наш број, ми треба да му знамо обе цифре. *То ће бити наше непознате.* Обележимо са x цифру на месту десетица, а са y цифру јединица и унесимо то у нашу мрежу!

Наш тражени број је

$$x . 10 + y . 1$$

Склапање једначина. — Чим имамо две непознате, морамо имати и *две* једначине. Прочитајмо сад наш проблем!

Збир цифара једног двоцифреног броја је 5. Цифре нашег броја су x и y. Дакле:

$$x + y = 5.$$

Сад треба од нашег двоцифреног броја да одузмемо 9.

наш број: $x . 10 + y . 1$

од њега одузет број 9: $(x . 10 + y . 1) - 9$

Према нашем проблему цифре треба сад да промене места. Погледај сад у девети хоризонтални стубац на мрежи! Добили смо број

$$y . 10 + x . 1$$

Према томе је

$$(x . 10 + y . 1) - 9 = y . 10 + x . 1.$$

То нам је друга једначина, те имамо систем:

$$x + y = 5$$
$$10x + y - 9 = 10y + x.$$

Решавање једначина. — Овде имамо систем I степена с двема промењљивима.

Решење нашег система је:

$$x = 3$$
$$y = 2.$$

Дискусија система. — Горњи систем даје једно одређено решење.

Дискусија проблема. — Најпре проба добивених резултата.

Наш двоцифрени број има на месту десетица цифру 3, а на месту јединица цифру 2, т. ј. има 3 десетице и 2 јединице:

$$3 . 10 + 2 . 1.$$

То је број 32.

Ако од тога броја одузмемо 9 добићемо

$$32 - 9 = 23$$

а 23 има исте цифре као и 32, само у обрнутом реду. Збир цифара је збиља 5:

$$3 + 2 = 5$$

Сад проба самога проблема. Из задатка се види да тражени број остаје двоцифрен и кад му цифре промене места. Значи цифра јединица траженога броја не може бити нула. Види се даље да број *промени вредност* кад му цифре промене места. Значи проблем је могућан само у томе случају, кад у решењу горњег система ни x ни y нису нуле и кад имају разне вредности. Дакле, мора бити:

$$x \neq 0 \qquad y \neq 0 \qquad x \neq y.$$

Проблем је могућан само у томе случају, ако је тај двоцифрени број склопљен из двеју *различитих* цифара. Иначе он не може постојати.

Овај проблем можемо решити и једном једначином.

Кад је збир цифара тога броја 5, нека му је цифра на месту десетица x. Онда је друга цифра $(5 - x)$.

$$[x . 10 + (5 - x) . 1] - 9 = (5 - x) . 10 + x . 1$$

а одатле: $x = 3$

Цифра на месту јединица је $5 - x$, дакле $5 - 3 = 2$.

Трећи пример. — *Мати има a година, а син b година. Кад ће мати бити 3 пута старија од сина?*

Избор непознате. — Пошто мати није *сад* 3 пута старија од сина, треба да протекне *извесно* време док то буде. Које време? Ми га не знамо. Ето наше непознате! Обележимо је са x.

Склапање једначине. — Пошто имамо свега једну непознату, имаћемо и једну једначину. Ево како ћемо је склопити:

Мати има сад година a

Мати ће имати после x година $(a + x)$ година.

Син има сад година b

Син ће имати после x година $(b + x)$ година

После x година, материн број година биће 3 пута већи од броја синовљевих година. Изразимо то!

$$a + x = 3\ (b + x).$$

То је наша једначина.

Решење једначине:

$$x = \frac{a - 3b}{2}$$

Дакле, после $\frac{a - 3b}{2}$ година мати ће бити 3 пута старија од сина.

Дискусија једначине. — Пошто је именитељ горњег разломка посебан број 2, то вредност *икса* може да се мења само са променом бројитеља

$$a - 3b$$

Како су бројеви a и b *коначни* (јер претстављају људски век, који је ограничен), то ћемо *увек* имати *једно одређено* решење па ма какви били коначни бројеви a и b.

Израз $\frac{a - 3b}{2}$

може бити позитиван, нула, или негативан, према томе да ли је

$$\left.\begin{array}{ll} & a - 3b > 0 \\ \text{или} & \\ & a - 3b = 0 \\ \text{или} & \\ & a - 3b < 0. \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \text{ је позитивно} \\ \\ x \text{ је } \textit{нула} \\ \\ x \text{ је негативно.} \end{array}$$

Дискусија проблема. — Решавајући горњу једначину дошли смо до овога резултата: кад протекну $\frac{a - 3b}{2}$ године, мати ће бити три пута старија од сина. Да видимо колико ће тада бити година мајци, а колико сину.

После x година мати ће имати година:

$$a + x = a + \frac{a - 3b}{2}.$$

После x година син ће имати година:

$$b + x = b + \frac{a - 3b}{2}$$

Израз

$$a + \frac{a - 3b}{2}$$

можемо и овако написати:

$$\frac{3a - 3b}{2}$$

то јест:

$$\frac{3\ (a - b)}{2}$$

или још боље:

$$\frac{3}{2}\ (a - b).$$

Израз

$$b + \frac{a - 3b}{2}$$

можемо овако написати: $\frac{1}{2}(a - b)$.

Кад је x *позитивно,* наш проблем има смисла. Значи да ће мати после извесног броја година постати 3 пута старија од сина.

[Рецимо матери је сада 35 година, а сину 9. После + 4 године, матери ће бити 39 година, а сину 13, те ће, види се, мати бити 3 пута старија од еина]

Мати ће тада имати

$$\frac{3}{2}(a - b) \text{ година.}$$

Пошто је x позитивно, значи да је

$$a - 3b > 0$$

према томе је

$$a > 3b$$

те је и

$$a > b.$$

Значи да је мати старија од сина, што је сасвим природно.

Кад је x *равно нули,* тада је

$$a = 3b.$$

Мати је већ сад 3 пута старија од сина.
Наш проблем опет има смисла.
Имамо једно решење у садашњости.

Рецимо, матери 39, а сину 13 година

Кад је x *негативно,* тада је

$$a - 3b < 0$$

то је

$$a < 3b.$$

Мати ће имати после x година:

$$\frac{3}{2}\ (a - b) \text{ година.}$$

Како за a постоји само једно ограничење (да мора бити мање од $3b$), то могу овде наступити три случаја.

1 случај. $a > b$.

Тада је

$$b < a < 3b.$$

У овоме случају наша једначина нам даје једно негативно решење, које има смисла: мати је већ била три пута старија од сина. Н. пр. матери је 44 године, а сину 18. Пре пет година матери је било 39, а сину 13, те је мати била 3 пута старија од сина. Ту је време негативно (— 5), пошто се тражени догађај десио у прошлости. Проблем има смисла, јер је мати старија од сина.

2 случај. $a < 3b$

или $a = b$.

Овај случај нема смисла, јер мати и син не могу бити истих година.

3 случај. $a > 3b$

или $a < b$.

Овај случај опет нема смисла, јер би мати имала *негативан број* година после времена x:

$$\frac{3}{2}(a - b) < 0.$$

а ми знамо да се године једног лица могу претставити само позитивним бројем. Уз то израз

$$a < b$$

би показивао, у нашем проблему, једну очиту немогућност по којој би мати била млађа од сина.

Свођење дискусије проблема. — Ако су a и b позитивни и коначни, наш проблем увек има смисла и даје једно одређено решење, сем кад је

$$a = b \text{ или } a < b.$$

Четврти пример. — *У првом разреду има 3 ученика више него у другом, а у другом 18 ученика више него у трећем. У првом разреду има два пута више ученика него у трећем. Колико има ученика у сваком од та три разреда?*

Шта ћемо овде узети за непознату? Да узмемо број ученика у *првом* разреду. Тада ће бити овај број ученика;

I разред: x
II „ $x - 3$
III „ $(x - 3) - 18.$ (Откуда ово?)

Сад да изразимо и последњи услов, по коме у првом разреду има два пута више ученика него у трећем. Дакле:

$$x = 2\,[(x - 3) - 18].$$

Одатле је

$$x = 42.$$

Према томе има ученика:

I разред: 42
II „ 39
III „ 21
$42 = 2 \cdot 21$

Изаберимо сад број ученика у *другом* разреду за непознату. Прочитајмо проблем! Кад га претставимо алгебарским изразима, биће:

I разред: $x + 3$
II „ x
III „ $x - 18$

И последњи услов:

$$x + 3 = 2\,(x - 18).$$

Одавде је:

$$x = 39$$

Према томе разреди имају овај број ученика:

II 39, I 42, III 21.

То смо нашли и малочас.

Изаберимо сад за непознату број ученика у *трећем* разреду. Прочитајмо проблем. Кад га претставимо алгебарским изразима, биће:

III разред: x
II „ $x + 18$
I „ $x + 18 + 3.$

Последњи услов из проблема биће изражен овом једначином:

$$(x + 18 + 3) = 2x.$$

Одавде је

$$x = 21.$$

Било је ученика:

III 21
II 39
I 42
$42 = 2 \cdot 21$

Опет смо добили исто решење.

Где смо најзгодније изабрали непознату и зашто? Да ли нас је сâм проблем упућивао коју количину да изаберемо за непознату?

Горњи проблем можемо решити и са *три непознате*.

Означимо број ученика у појединим разредима овако:

$$\text{I } x,\ \text{II } y,\ \text{III } z.$$

Сад прочитајмо проблем и оно што нам он говори пишимо алгебарским изразима. (Преводимо на алгебарски језик).

Проблем каже: у првом разреду има 3 ученика више него у другом.	Ми то изражавамо алгебарским изразима овако. Пошто први разред има три ученика више него други, они ће имати *исти број* ученика, ако из првог разреда уклонимо три ученика. Дакле: $x - 3 = y$
Проблем каже: у другом разреду има 18 ученика више него у трећем.	Ми то изражавамо алгебарским изразима овако: $y - 18 = z.$
Проблем каже: у првом разреду има два пута више ученика него у трећем.	Одатле једначина: $x = 2z.$

Добили смо систем од три једначине који гласи:

$$x - 3 = y$$
$$y - 18 = z$$
$$x = 2z$$

Кад решимо овај систем, добијамо:

$$x = 42, \quad y = 39, \quad z = 21.$$

Опет смо добили исто решење:

I разред 42 ученика
II „ 39 „
III „ 21 ученик.

Који је начин решавања најзгоднији?

Пети пример. — *Две суме, једна од 3000 дин., а друга од 2000, донеле су за 6 месеци исти интерес. Кад је прва сума дата по $6^0/_0$, под који је проценат дата друга сума?*

Знамо да је образац за интерес:

$$i = \frac{k.\ p.\ t.}{1200}$$

пошто је овде време дато у месецима.

Да бисмо израчунали интерес, треба да знамо количине *k*, *p* и *t* За први капитал све то знамо. За други означимо проценат са *x*.

Према томе биће:

$$i_1 = \frac{3000.6.6,}{1200} \qquad i_2 = \frac{2000.x.6.}{1200}$$

Али наш проблем каже да је

$$i_1 = i_2$$

те отуда ова једначина

$$\frac{2000\ .\ x\ .\ 6}{1200} = \frac{3000\ .\ 6\ .\ 6}{1200}$$

а одатле:

$$2x = 18$$
$$x = 9.$$

Друга (мања) сума дата је по $9^0/_0$ под интерес.

Шести пример. — *Винар има 250 литара неког вина које продаје по 15 динара литар. Колико литара једног простијег вина од 10 динара може да помеша са тим бољим вином, да би, без губитка, могао продавати добивену смешу по 12 динара литар?*

Нека од другог вина узме *x* литара.

Кад би 250 литара продавао засебно по 15 динара литар, он би примио: (250 . 15) динара. Кад би (опет засебно) продавао *x* литара другог (слабијег вина) по 10 динара, он би примио: (*x* . 10) динара. Правећи смешу он добија (250+*x*) литара и продаје их по 12 динара. За смешу он добије: (250+*x*) . 12 динара. Како он неће ништа да изгуби, он добија за смешу ону исту суму новаца коју би добио, да је сваку врсту вина засебно продавао. Отуда ова једначина:

$$(250+x)\ .\ 12 = (250\ .\ 15) + 10\ .\ x$$

Одатле је

$$x = 375.$$

Седми пример. — *На подне полази један воз из станице B и креће се ка станици C брзином од 45 километара (сл. 27). У 3 часа по подне полази воз из станице A, која је испред B 60 километара, опет ка станици C, прелазећи на сат 75 километара. На којој даљини од станице A морају ти возови да се стигну? У колико сати ће се стићи?*

Сл. 27.

Овде се морамо сетити обрасца који показује пут тела које се креће *једнаким кретањем*. Тај образац гласи:

$$s = ct$$

(где је s пут, c стална брзина, а t време за које тело пређе пут s).

У проблему се тражи да кажемо на којој ће се даљини од A стићи возови A и B. Да бисмо знали пут воза A, ми морамо знати сем његове брзине још и време које је он провео на путу до стизања. Зато ћемо прво одговорити на друго питање у нашем проблему.

Нека је воз A провео на путу до сустижне N станице x часова, B воз y часова.

Тада је пут AN воза A:

$$s_a = x \cdot 75$$

а пут BN воза B:

$$s_b = y \cdot 45.$$

Та два пута се разликују за 60 километара, јер је воз A прешао 60 километара више од воза B. Да би ти путеви били једнаки (јер нам треба једначина), ми ћемо од пута воза A одбити 60 километара:

$$x \cdot 75 - 60 = y \cdot 45.$$

Наш проблем нам каже да је воз B био на путу 3 сата више од воза A. Дакле:

$$y = x + 3$$

Кад решимо систем

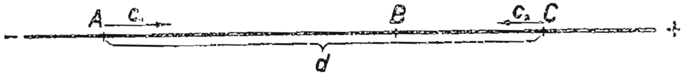
$$75x - 60 = 45y$$
$$x + 3 = y$$

добићемо

$$x = 6 \text{ ч. } 30 \text{ мин.}$$
$$y = 9 \text{ ч. } 30 \text{ мин.}$$

Дакле возови се стижу у 9 ч. 30 мин., у станици $N.$, која је од станице A удаљена 487,5 *km*. (јер је воз A провео на путу $6\frac{1}{2}$ час. а прелази на сат 75 *km*, те је $6^1/_2 \cdot 75 = 487^1/_2$).

Осми пример. — *Два воза полазе једновремено један другоме у сусрет из станица А и С (сл. 28), чије је растојање d; воз А иде брзином c_1, а воз С брзином c_2. Где и кад ће се срести? Дискутовати проблем!*



Сл 28.

Они ће се срести после x часова. Нека се сретну у B. Знамо да ће тада бити:

$$AB + BC = AC$$

AC знамо; то је d. CB је пут воза C, AB је пут воза A. Имаћемо:

$$s_a = c_1 \cdot x$$
$$s_c = c_2 \cdot x.$$

Према томе једнакост $AB + CD = AC$ можемо изразити овом једначином: $c_1x + c_2x = d$

Одатле је:

$$x = \frac{d}{c_1 + c_2}$$

Дискусија проблема. — Посматрајмо пут воза A. Он ће бити

$$s_a = c_1 \cdot x = \frac{c_1 d}{c_1 + c_2}$$

Ако бројитељ и именитељ овог разломка поделимо са c_1 добићемо:

$$s_a = \frac{d}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

Посматрајмо сад промене предности s_a, док се мења c_1.

Ако је $c_1 = 0$, тада је разломак $\frac{c_2}{c_1}$ бескрајно велики, те је и вредност $\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)$ бескрајно велика. Кад се коначан број d подели бескрајно великим бројем добићемо бескрајно мали број. То значи, штогод је c_1 ближе нули и s_a је све ближе нули. Кад c_1 постане нула и s_a постаје нула. Шта то значи? То значи да се наши возови неће срести нигде између A и C, већ у A, пошто се воз A не креће. Да то проверимо путем s_c!

$$s_c = c_2 \cdot x$$

$$s_c = c_2 \cdot \frac{d}{c_1 + c_2}.$$

А одатле $s_c = \dfrac{d}{\frac{c_1}{c_2} + 1}$.

Кад је $c_1 = 0$, а $c_2 \neq 0$, тада је $\frac{c_1}{c_2} = 0$, те је

$$s_c = d.$$

То значи да воз C мора прећи цело растојање d станица A и C и доћи у A да се сретне с возом A.

Имамо

$$s_a = \frac{d}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

Кад c_1 почиње да расте, разломак $\frac{c_2}{c_1}$ опада и ми имамо да делимо d све мањим бројем. То значи да је s_a све веће.

Шта бива тада са s_c?

$$s_c = \frac{d}{\frac{c_1}{c_2} + 1}$$

Кад c_1 расте, разломак $\frac{c_1}{c_2}$ расте и s_c опада, те се тачка сусрета B све више удаљава од A.

Кад постане по апсолутној вредности $c_1 = c_2$, тада је

$$s_a = \frac{d}{2} \quad \text{и} \quad s_c = \frac{d}{2}.$$

Возови ће се срести на средини између станица A и C.

Ако c_1 и даље расте, док c_2 остаје стално, разломак $\frac{c_2}{c_1}$ опадаће и s_a ће расти, а разломак $\frac{c_1}{c_2}$ ће расти и s_c ће опадати. Значи да ће се сусретна тачка све више ближити тачци C.

Кад c_1 постане веома велико према c_2 разломак $\frac{c_2}{c_1}$ постаје веома мали и s_a се ближи вредности d; разломак $\frac{c_1}{c_2}$ постаје веома велики и вредност s_c се ближи нули. То значи да ће сусрет бити близу тачке C. (То ће бити у случају, ако воз из A иде, на пример, брзином од 120 *km*, а воз из C, рецимо, само брзином од 10 *km*.)

ВЕЖБАЊА УЗ IX ОДЕЉАК

$x + y = 14$

$0x + y + 27 = 2(10x + y) - 32$

1. — Збир цифара једног двоцифреног броја је 14; ако му се дода 27, добија се број који је за 32 мањи од удвојеног траженог броја.

Дискусија проблема!

2. — Збир цифара једног двоцифреног броја је 10; ако му се дода 10, добија се број са истим цифрама, али у обрнутом реду.

Дискусија проблема! Објасни ову немогућност!

(Што бива са целим бројем кад му додамо 10? Која цифра се мења? А је ли то овде случај?)

$x + y = 10$

$10x + y$ [illegible] $= 10y + x$

3. — Један часовник увек иде напред 10 минута за 24 часа; на подне је дотеран на тачно време. Колико је стварно часова, кад је на овом часовнику 6 часова по подне?

4. — Наћи такав двоцифрени број да му разлика цифара буде 2, а цифра десетица да буде $\frac{3}{4}$ цифре јединица.

5. — Поделити број 46 на два дела тако, да збир $\frac{1}{7}$ првога дела и $\frac{1}{3}$ другога износи 10.

6. — Уопштити предњи задатак! Дискутовати!

(То значи поставити га овако: „Број a поделити на два броја тако, да збир m- тог дела првога броја и n- тога дела другога боја буде s“).

7. — Јован има 327 динара, а Марко 237 динара. Колико динара треба Марко да да̄ Јовану, па да Јован има три пута толико колико је Марку остало?

8. — Цифре једнога двоцифреног броја стоје у размери као m: n. Ако се томе двоцифреном броју дода број a, добија се број чије цифре иду обрнутим редом. Који је тај број? Дискутовати.

9. — У једначини $ax + b = cx + 4$ изабрати за a, b и c такве вредности, да x буде позитивно.

10. — Исти задатак само са условом да x буде негативно.

11. — Исти задатак само са условом да x буде нула.

У овим једначинама наћи вредности a за које ће x бити: a) позитивно b) негативно, c) нула:

12. $x(a - 3) = 5(x - 1) + 6$

13. $5(x + 1) + a = a(x + 2) + 5$

14. $\frac{a(x + 2) - 3(a - 1)}{x + 1} = 2$

15. $\frac{6(a - 1) - 5(a + 2x)}{ax + 1} = -1.$

16. — Збир три разломка је 1; разлика првог и другог је равна разлици другог и трећег; први је три пута већи од трећег. Који су то разломци?

17. — Исти задатак само што је збир та три разломка a. Дискусија.

18. — Растави број 176 на два дела тако, да стоје у размери као 5 према 6.

19. — Уопшти проблем из претходног вежбања! Дискутовати!

(То значи поставити га сад овако: „Растави број a на два дела тако, да ти делови стоје у размери као m према n“)

20. — Наћи број чије $\frac{2}{7}$ увећане за 0,291 дају 0,0027.

21. — Наћи таква два броја, да им збир износи $\frac{2}{3}$ првога броја, а разлика да им је 1.

22. — Поделити број 200 на два дела тако, да кад се први подели са 16, а други са 10, разлика добивених количника да је 6.

23. — Уопшти задатак из претходног вежбања! Дискутовати!

(Сад би вежбање 22 могло овако да гласи: „Подели број a на два дела тако, да кад се први део подели са m, а други са n, разлика добивених количника да је d“).

24. — Наћи таква два броја, да је количник њихов 4, а остатак при дељењу 60 Разлика та два броја је 495.

25. — Наћи димензије једног правоугаоника кад се зна ово: ако му се повећа основица за 8 m, а висина за 5 m, површина се повећава за 180 m^2; међутим ако се основица повећа за 3 m, а висина смањи за 4 m, површина се смањи за 30 m^2.

26. — Наћи површину једног троугла чији је обим 30 cm, кад се зна да је најмања страна већа за 6 cm од разлике других двеју страна, а мања за 14 cm. од њиховог збира.

27. — Три места A, $Б$ и $В$ леже на теменима једног троугла. Пут од A до $В$ преко $Б$ 4 пута је дужи од пута који води право из A у $В$; пут од $Б$ до A преко $В$ за 5 km је дужи од пута што води право из $Б$ у A; пут који из $В$ преко A води у $Б$ дуг је 85 km. Наћи растојање тих места.

(Нацртај најпре слику и на њој означи непознате! Затим опет читај проблем и стално гледај у слику!)

28. — Дат је један троугао ABC, који уписани круг додирује у тачкама P, Q и R на странама BC, CA и AB. Дате су стране a, b, c. Израчунати дужине од темена до додирних тачака.

(Нацртај слику и сети се да су тангенте повучене на круг из исте тачке једнаке. Дискусија.)

29. — У једном троуглу један је угао већи од другога за 40', а други већи од трећега за 20g. Колики су углови? Овде се мораш сетити да при рачунању морамо увек пазити да све мерене количине буду изражене истом јединицом.

30. – Лица A и $Б$ имају заједно $\frac{2}{3}$ онога што има лице $В$; $Б$ и $В$ заједно имају 5 пута више него A; а кад би $Б$ имао 68 000 динара више него што има, његов капитал би био колико све оно што имају A и $Б$. Колико има сваки од њих?

31. — Пет лица поделе 8 591 динар. Колико је свако лице добило, кад је друго лице примило $\frac{3}{4}$ онога што је примило прво лице, а треће лице $\frac{3}{4}$ онога што је примило друго и т. д.? (Део сваког лица износи $\frac{3}{4}$ дела претходног лица.)

32. — За три месеца израдила је једна фабрика оружја 59 900 пушака. Колико је пушака израдила првога, колико другога, колико трећега месеца, кад је сваког месеца израдила $\frac{17}{10}$ броја пушака из претходног месеца?

33. — Уочи једне битке бројеви бораца једне и друге војске стојали су у размери као 5 према 6. У битци прва војска изгуби 14 000 војника, а друга 6 000. После битке бројеви њихових војника стоје у размери као 1:2. Колико војника је било у једној, а колико у другој војсци пре битке?

34. – Три лица A, $Б$ и $В$ имају заједно 69 година; пре 10 година $Б$ је имао половину збира година A и $В$; кроз 10 година збир година $Б$ и $В$ биће за 31 већи од броја година лица A. Колико је сад година свакоме?

35. — Отац, мати и син имају заједно a година; отац је старији n пута од сина, а мати ће тек после 10 година имати n пута толико година колико син има сад. Колико је година свакоме од њих? Дискусија.

36. — Оцу је 27 година, а сину 3. Кад ће број синовљевих година бити $\frac{1}{4}$ броја очевих година?

37. — Оцу је m година, а сину n година. Кад ће број синовљевих година бити $\frac{1}{4}$ броја очевих година? Дискусија!

38. — Оцу је 40 година, а сину 12. Кад је отац био 5 пута старији од сина?

39. — Синовљеве године су данас $\frac{1}{5}$ очевих година, а пре 5 година износиле су само $\frac{1}{9}$ очевих година. Колико година је оцу, а колико сину?

40. — Аврам има данас 19 година, а Војислав 30. Кад ће број њихових година бити у размери као m према n? Дискусија!

41. — Пре 18 година Милан је био два пута старији од Ранка; кроз 9 година број Миланових година биће само $\frac{5}{4}$ Ранкових година. Колико им је сад година?

42. — Наћи троцифрени број који има ове особине: 1) Збир цифара му је 6; 2) цифра десетица је полузбир оних других двеју цифара; 3) ако се томе троцифреном броју дода 198 добија се троцифрени број са истим цифрама, али са обрнутим редом цифара.

43. — Наћи троцифрени број чији је збир цифара 12; цифра стотина је $\frac{1}{15}$ двоцифреног броја који образују оне друге две цифре; а цифра десетица $\frac{1}{76}$ броја који се добија, кад се у траженом троцифреном броју цифра десетица смени нулом, па од јединица тако добивеног броја одузме 1.

44. — Растави 110 на три дела тако, да кад се први део подели другим, добије се количник 5 и остатак 2, а кад се дели други трећим, добије се количник 2, а остатак 3

Сети се: $\frac{21}{1} : 5 = 4$ а одатле: $21 = 5 . 4 + 1$.

45. — Неки број дељен узастопце са 2, 3 и 4 даје остатке a, b и 3 тако, да је збир три количника раван траженоме броју. Наћи тај број. Дискусија. Примедба као уз претходни задатак.

46. — Три радника имају да сврше један посао. Ако раде први и други заједно, свршиће тај посао за 12 дана; ако раде други и трећи заједно, свршиће тај посао за 20 дана; а први и трећи за 15 дана. За колико ће дана свршити тај поса сваки од њих кад сам ради?

(Решење: први би радник сам свршио тај посао за *20 дана*, други за *30 дана*, трећи за *60 дана).*

Напомена. — Ако означимо цео посао са t, а време за које би први радник сам свршио тај посао са x, видећемо да тај радник сврши дневно $\frac{t}{x}$ део посла. Слично томе други сврши дневно $\frac{t}{x}$ део посла, а трећи $\frac{t}{z}$. За пет дана први сврши $5 . \frac{t}{x}$ посла и т. д. Треба се сетити да кад радници сврше посао, они су израдили количину t.)

47. — Кад два радника раде заједно, свршиће један зид за 12 дана. Ако први ради два дана, а други 3 дана, свршиће $\frac{1}{5}$ зида. За које би време сваки од њих сам свршио тај зид?

48. — У неки басен утичу три цеви. Кад су отворене прве две, басен се пуни водом за 1 час и 10 минута; кроз прву и трећу он се пуни за 1 час 24 минута, а кроз другу и трећу за 2 часа и 20 минута. Све три цеви су отворене у 4 часа ујутру, али се прва поквари после 10 минута и не може да се оправи то пре подне. Кад ће се напунити басен?

Напомена — Сети се да ако једна цев пуни басен (чија запремина нека је v) за x минута, она за један минут пуни $\frac{v}{x}$. Ако све три заједно пуне басен за m минута, биће·

$$\frac{v}{x}.\,m + \frac{v}{y}.\,m + \frac{v}{z}.\,m = v.$$

Ако избациш v, добићеш све саме реципрочне вредности непознатих:

$$\left(\frac{1}{x}\right) m + \left(\frac{1}{y}\right) m + \left(\frac{1}{z}\right) m = 1.$$

Сад ако извршимо ову смену:

$$\frac{1}{x} = \alpha,\ \frac{1}{y} = \beta,\ \frac{1}{z} = \gamma \text{ добићемо:}$$

$$\alpha m + \beta m + \gamma m = 1 \text{ или:}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{m}.$$

У наредном проблему наићи ћеш на нешто слично овоме објашњењу.

49. — У један басен утичу 2 цеви. Ако 15 минута утиче вода из обеју цеви, напуни се само $\frac{1}{6}$ басена. Ако прва стоји отворена 12 минута, а друга 20, напуни се $\frac{1}{5}$ басена. За које би време напунила басен свака од тих цеви посебице? За које ће се време басен напунити, ако се отворе обе цеви?

50. — Басен од 450 кубних метара може да се напуни водом двема цевима. Кад је прва отворена 3 минута, а друга 1 минут, у басен се улије 40 m^3 воде. Али ако је прва цев отворена 1 минут, а друга 7 минута, улије се 60 m^3. Колико кубних метара воде даје свака цев у минуту и колико минута треба обе цеви да буду отворене, па да се басен напуни?

51. — У један басен утичу три цеви. Прва и друга цев заједно напуне га за 50 минута. За које време би свака од тих цеви могла сама да напуни басен, а за које би га напуниле све три заједно? Је ли проблем одређен? Зашто?

52. — У један басен утичу три цеви: прва и друга га пуне за a *часова* прва и трећа за b часова; друга и трећа за c часова. Колико литара у *секунду* улива свака цев у басен? Дискусија.

53. — Два басена се пуне водом сваки из своје засебне цеви. Запремина првог басена је v_1, а запремина другог v_2. Први може да се напуни за m часова, а други за n. Пошто је у први басен текла вода p минута, отворе цев и у другом басену. После колико ће часова у оба басена бити иста количина воде? Дискусија. Има ли смисла овај задатак, ако је $m < n$?

54. — Неко је разделио свој новац на три дела; први је део дао под интерес по $6^0/_0$; други по $5^0/_0$; трећи по $4^0/_0$ и на тај начин има годишње прихода 20000 динара. Тај исти приход би имао, да је сав свој новац дао по $5^0/_0$ под интерес. Сем тога зна се да део који је дат по $6^0/_0$ доноси 3000 динара више прихода него део који је дат по $4^0/_0$. Колики је капитал тога лица?

55. — Који број треба додати и бројитељу и именитељу разломка $\frac{a}{b}$, да би се добио разломак $\frac{m}{n}$? Ако је $0 < m < n$, какви морају бити a и b, па да буде $x > 0$? Дискусија.

56. — У a литара морске воде има b килограма соли. Колико чисте воде треба досути, да би у $2a$ литара такве разблажене морске воде било c килограма соли? Дискусија.

57. — Једна сребрна смеса тешка је a килограма и има финоћу f. Колико сребра финоће f_1 треба смешати са том смесом, да се добије сребро финоће f_2? Дискусија.

Напомена. — Збир количина чистог сребра из појединих састојака мора бити раван количини чиста сребра у ново-добивеној смеси. *Финоћа* је број који показује колико јединица племенитог метала има у 1000 јединица смесе.

58. — Једне врсте вина има a литара и цена му је b дин. литар; друге врсте цена је c динара по литру. Колико литара ове друге врсте треба узети, па да се добије n литара мешавине, која би се могла продавати по d динара литар?

59. — Из трију врста кафе направљене су две смеше: једна има 10 кгр. нафиније врсте и 5 кгр. средње врсте и стаје 33 динара килограм; друга има 15 кгр. средње врсте и 9 кгр. најпростије врсте и стаје 27,50 дин. килограм. Пошто је свака врста кафе посебице, кад се зна да је средња цена све три врсте $29\frac{2}{3}$ динара?

60. — Имамо три металне смесе од злата, сребра и бакра. Прва има 500 гр. злата, 1,500 гр. сребра и 3 кгр. бакра; друга 2 кгр. злата, 2,8 кгр. сребра и 4,8 кгр. бакра; трећа 1,2 кгр. злата, 3,9 кгр. сребра и 2,4 кгр. бакра. По колико грама треба узети из сваке смесе, па да нова смеса буде од 1 кгр. злата, 2,3 кгр. сребра и 2,6 кгр. бакра?

61. — Постоје три смесе злата и сребра; у првој је однос злата према сребру 9, у другој 11, у трећој 14. Ако се смешају прва и друга, добија се смеса у којој ће бити 10 пута више злата него сребра; ако се смешају прва и трећа, злата ће бити 12 пута више него сребра. Колико је посебице тешка свака смеса ако је трећа 100 грама тежа од друге две заједно?

62. — Једна смеса злата и сребра тежи 1320 грама. Колико има у њој сребра, а колико злата, кад сребро из те смесе вреди колико и злато?

(1 грам злата је $15\frac{1}{2}$ пута скупљи од 1 грама сребра.)

63. — Дате су две смесе исте тежине, али разне финоће. Ако се слије прва смеса са $\frac{1}{4}$ друге, добије се смеса финоће 0,936; ако се слије прва смеса са $\frac{1}{2}$ друге, добије се смеса финоће 0,920. Колика је финоћа једне смесе, а колика друге?

64. — Сиракуски владар Херон био је поручио златну круну. Била је тешка 7465 грама. Да би сазнао колико је златар метнуо злата у њу, Херон је дâ чувеноме математичару Архимеду, да је испита. Архимед загњури круну у воду и утврди да је у води лакша 467 грама. Колико је било злата, а колико сребра у тој круни, кад се зна да злато у води губи од своје тежине $\frac{52}{1000}$, а сребро $\frac{95}{1000}$?

65. — Број који показује годину када је Гутенберг пронашао штампу састоји се од 4 цифре. Наћи тај број, кад се зна да му је збир цифара 14, цифра десетица је половина цифре јединица, цифра стотина једнака збиру цифара хиљада и десетица, а ако се траженоме броју дода број 4 905, добија се број чије цифре иду обрнутим редом.

66. — У два слична троугла збирови хомологих страна су 15 *cm*, 24 *cm* и 32 *cm*; наћи стране већег троугла, кад се зна да је његов обим за 18 *cm* већи од обима мањег троугла.

Напомена: — Ако су стране једног троугла a, b, c, а другог a', b', и c', тада је: $a + a' = 16$, $b + b' = 24$, $c + c' = 32$. Сети се основне особине сличних слика!

67. — Код једног троцифреног броја цифра јединица за 2 је већа од цифре стотина; ако се тај број подели са 30, добија се остатак 8; ако се одбаци цифра јединица, добија се двоцифрен број који је 3 пута већи од количника у малопређашњем дељењу; ако се одбаци цифра стотина, добија се број који стоји према малопређашњем количнику као 2 : 5. Који је тај троцифрен број?

Напомена: — Ако број a подељен бројем b даје количник c и остатак d можемо написати: $a = bc + d$. [*Решење:* 608.]

68. — У једноме заводу има 600 питомаца на 4 спрата заводске зграде. Они су овако размештени: на четвртом спрату има 2 пута више питомаца него на првом; на другом и трећем заједно има их исто толико колико на првом и четвртом заједно; на другом спрату број питомаца износи $\frac{5}{7}$ броја питомаца на трећем спрату. Како су бројно размештени по спратовима?

69. — У једној школи има 4 разреда. У првом разреду број ученика је $\frac{1}{5}$ броја свих ученика, у другоме $\frac{11}{40}$, а у трећем $\frac{1}{4}$. Колико је ученика у свакоме разреду, кад их у четвртоме разреду има 55?

70. — Места B, B, C и D леже на једном меридијану. Наћи њихове географске ширине, кад се зна ово: разлика ширина места B и A је 80°; ширина од A до C иста је као од B до D; трострука ширина места A једнака је с трећином ширине места B, а ширина места B једнака је са збиром ширина места A и D увећаним за 40°.

Кад решиш задатак, нацртај ова четири места на осовини, узимајући да је почетак апсциса место чија је ширина 0°.

71. — Наћи два проста разломка од којих се први претвара у $\frac{1}{2}$ ако од његовог бројитеља одузмемо бројитељ другог разломка, а од именитеља именитељ другог разломка; први разломак постаје $\frac{5}{8}$ ако му као и горе додамо бројитељ и именитељ другога разломка; разлика збирова бројитеља и именитеља ових разломака је — 3; ако се збир именитеља подели збиром бројитеља, добиће се количник 1 и остатак 3.

(Пажљиво изабери непознате! Сваки од ова два разломка има два састојка.

Загледај добивене једначине! Јесу ли независне? Јесу ли ово независне једначине:

$$x + y = 3 \text{ и } 2x + 2y = 6?$$

Може ли се друга добити из прве? А прва из друге? Јесу ли ово две независне једначине:

$$x - y = 3 \text{ и } y - x - 3 = 0?$$

Да ли трећи и четврти услов у проблему казују једно исто? Зашто? Знаш ли ти о траженим бројевима још нешто сем онога што је речено у задатку? Могу ли именитељи тражених разломака бити разломци? А нуле? А јединице? Може ли бројитељ првога разломка бити 1? Колико решења има н. пр. оваква једначина, кад w и z морају да буду цели бројеви?

$$w + z = 5$$

Направи таблицу

w	z
0	5
1	4

итд.

72. — Обим једног трапеза је 28 см. Наћи му стране, кад се о њему зна ово: разлика паралелних страна једнака је с разликом непаралелних страна; већа паралелна страна за 2 је мања од збира непаралелних страна; збир трију страна 6 пута је већи од најмање стране.

Напомена. — Најпре нацртај произвољан разнокраки трапез и обележи на њему са x, y z . . . дужине које си рад да тражиш. При састављању једначина једнако гледај у слику. Кад решиш задатак, пробај да конструишеш један такав трапез.

73. — У неком четвороуглу угао A је $\frac{2}{3}$ збира углова B и C, а за 100° је већи од њихове разлике; полузбир та три угла већи је од угла D за 90°. Наћи сва четири угла.

Колики је збир углова у четвороуглу? Добивено решење провери конструкцијом!

74. — Два броја стоје у размери као $p : q$, а збир им је једнак са n-тоструким неким трећим бројем. Збир сва три броја је a. Колики је сваки напосе? Дискусија!

Примена: $a = 45$, $p = 4$, $q = 5$, $n = 4$.

75. — Одредити четири броја тако, да кад узимамо по три броја, добијамо ове збирове: 9 10 11 и 12.

76. — Неко прима месечно 1040 динара интереса од свога уложенога новца који је уложио под интерес на три разна места. Половина његовога капитала доноси $\frac{1}{2}$% мање него $\frac{1}{3}$ његовог капитала, а 1% мање него остатак капитала. Да је дао на штедњу сваки од тих улога по $\frac{1}{2}$% више, примао би 120 динара интереса месечно више. Колики су капитали и проценти?

77. — Два капитала доносе једнак интерес. Први капитал је већи за 4000 дин. од другог, али други је дат за $\frac{1}{2}\,^0/_0$ скупље под интерес. Кад би први био дат под процентом под којим је други капитал, а други под процентом првога, први капитал би донео 380 динара више интереса него други. Колико су ти капитали и под којим процентом су били?

78. — Неко има два капитала под интересом: први по $5\frac{1}{2}\,^0/_0$, други по $4\,\frac{1}{2}\,^0/_0$. Да је први $4\,\frac{1}{2}\,^0/_0$, а други по $5\,\frac{1}{2}\,^0/_0$ он би имао тачно толико испод 1 000 динара интереса, колико сад има преко 1 000. Први капитал му доноси 291 динар интереса више од другога. Колики су ти капитали?

79. — Један правоугаоник има стране од 30 *cm* и 20 *cm*. Наћи стране сличног правоугаоника, чији је обим 360 *cm*.

(Сети се односа хомологих страна?)

80. — Два тела крећу се по првој линији из двеју тачака A и B. Наћи растојање од A до B и брзине та два тела, кад се зна ово: 1) тела се крећу једнаким кретањем; 2) кад се крећу једно другоме у *сусрет*, сретну се после t јединица времена ако пођу једновремено; ако тело које се креће спорије пође t' јединица времена пре другог дела, срешће се после t_1 јединица времена рачунајући од поласка бржег тела; 3) ако иду у итом смислу и једновремено се крену, после t_2 јединица времена растојање између њих је d. Дискусија!

Примена: $t = 12\frac{1}{2}$, $t' = 6$, $t_1 = 10$, $t_2 = 5$, $d = 20$.

81. — Два велосипедиста се крећу у истом смислу по кружној стази дужине 500 *m*: крећу се једнаким кретањем; бржи промиче поред другога сваких 5 минута; онда један од њих крене у супротном смислу истом брзином (по апсолутној вредности); и сад се они укрштају свака 24 секунда; колико километара на сат прелази сваки од њих?

82. — Два се тела крећу по једној осовини брзинама c_1 и c_2; у почетку времена њихове апсцисе су a и b; пита се кад ће се срести ако иду једно другоме у сусрет, или кад ће се стићи, ако иду једно за другим. Дискутовати.

Примена: $c_1 = 3$ *km*, $c_2 = 2$ *km*, $a = -50$ *km*, $b = 35$. *km*.

83. — Два велосипедиста се крећу у истом смислу једнаким кретањем по кружној стази дужине a; бржи промиче крај другога сваких n секунди; они затим јуре у супротном смислу истим брзинама (по апсолутној вредности) једнаким кретањем по кружној стази дужине b; на тој стази они се сад укрштају сваких p секунада. Изречунати им брзине на сат. Дискутовати.

84. — Један колски точак има у обему 4 *m*; неко га фотографски сними у кретању; снимање је трајало $\frac{1}{10}$ секунде. На слици се види да се, док је трајало снимање, сваки паоц обрнуо за половину угла који граде два узастопна паоца; кад точак има 12 паоца, пита се којом брзином су се кретала кола.

Напомена. — Ако је периферија точка a, а точак се обрне n пута у минуту, кола се крећу брзином од an метара у минуту.

85. — Две количине стоје у размери a:b; свака од њих је за толико смањена, да је збир остатака n, а однос тако смањених количина $p : q$; одбивени делови стоје у размери $c : d$. Наћи та два броја. Дискусија.

Примена: $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$, $d = 13$, $p = 0{,}6$, $q = 1$, $n = 40$.

(*Решење*: 55 и 77).

86. — Ако се у горњем задатку узме да та два броја претстављају суме које имају два лица, а одбици њихове расходе, израчунати преостали укупни новац, кад је $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c=6$, $d=7$, $p=2$, $q=3$, $n = 250$.

87. — Број n раставити на три таква дела, да кад се први део подели са a други са b, трећи са c, добије се исти количник, а остатак је увек за d мањи од делитеља. Дискусија.

Примена: $n = 33$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$.

88. — Из једне вароши пође на подне на југ воз који прелази 50 *km*. на час. После три часа пође на север воз који прелази 80 *km*. на час. Кад ће они бтти удаљена један од другога 420 *km*?

89. — Два велосипедиста пођу један другоме у сусрет једновремено из два места удаљена 222 *km*. После три часа били су далеко један од другога 123 *km*. Први се тада одмарао један час, а други $\frac{1}{2}$ часа. Колико километара прелази на час сваки од њих, кад су се срели после $7\,\frac{1}{2}$ часова од поласка?

90. — Ако воз из A за B повећа своју прописану брзину за 5 *km*. на час, стигне у B 20 минута раније; ако је смањи за 5 *km*. одоцни 25 минута Која му је прописана брзина? Колика је раздаљина од A до B?

X — СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

Степеновање

Дефиниције. — *Степен* је производ једнаких чинитеља. Нпр. $a \cdot a, 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ и т. д. Горњи *производи једнаких чинитеља* добијају *облик степена* кад их овако напишемо:

$$a^2,\ 2^3,\ 3^4,\ b^5,\ \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Број који се понавља као чинитељ, зове се *основа*, а број који показује колико се пута основа јавља као чинитељ зове се *изложитељ* или *експонент*. Основа са својим изложитељем зове се *степен*. Горње степене бисмо овако прочитали: „a на други“, или „a на квадрат“; „два на трећи“, или „два на куб“: „три на четврти“, „b на пети“; „две трећине на шести“.

1.) **Израчунавање вредности степена.** — Кад су и основа и изложитељ посебни бројеви, вредност степена се израчунава кад се изврши означено множење које показује изложитељ.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{729}.$$

Степен расте или опада са променом изложитеља. — Да видимо најпре шта бива са степеном

$$1^n$$

кад се n мења од 1 ка $+ \infty$.

$$1^1 = 1.$$

(Према горњој дефиницији степена, 1^1 значи да 1 треба узети једанпут као чинитељ).

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (n \text{ пута}) = 1.$$

2.) *Степен чија је основа јединица увек је једнак јединици, ма за какву коначну вредност изложитеља од 1 ка ∞.*

Исто тако и $0^n = 0$ ма за какво n које није нула.

Узмимо сад малопређашњи степен 2^3.

Видимо да је

$$2^2 > 2^1$$

$$2^3 > 2^2$$

$$2^4 > 2^3 \text{ (то јест } 16 > 8) \text{ и т. д.}$$

Исто тако са степеном 3^4:

$$3^2 > 3^1$$

$$3^3 > 3^2$$

$$3^4 > 3^3$$

Значи: *кад је основа већа од јединице, вредност степена расте кад изложитељ расте од јединице ка* $+ \infty$. Обрнуто: *степен чија је основа већа од јединице опада*, кад изложитељ *опада од* $+ \infty$ *до* $+ 1$.

Колико је, 2^{∞}, 3^{∞}, и т. д.?

Посматрајмо сад рашћење ова два степена: 2^n и 3^n, кад n расте од јединице.

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64$$

$$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243,\ 3^6 = 729.$$

Који степен брже расте?

Узмимо сад степен $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ и пустимо n да расте од јединице.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{32}{243}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \frac{64}{729} \qquad \text{и т. д.}$$

Видели смо да 3^n *брже расте* од 2^n, кад n почне да расте. Према томе именитељ нашег разломка $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ брже расте него бројитељ. Како је $3 > 2$, *значи да ће наш разломак стално опадати.*

И збиља је

$$\frac{4}{9} < \frac{2}{3},\ \frac{8}{27} < \frac{4}{9} \text{ и т. д.}$$

(Доведи на заједнички именитељ, па сѐ увери!)

Отуда се види да *степен расте са изложитељем, ако је основа већа од јединице, а опада кад изложитељ расте, ако је основа мања од јединице.* 3.)

Знак степена — О овоме смо говорили још код множења. Овде само укратко да споменемо.

Изложитељ може бити паран, или непаран. Ако наш степен развијемо у производ, имаћемо: за парни изложитељ известан број парова чинитеља, а за непарни изложитељ остаће увек један чинитељ без свога парњака.

$$a^6 = \underbrace{a \,.\, a}_{1} \,.\, \underbrace{a \,.\, a}_{2} \,.\, \underbrace{a \,.\, a}_{3} \qquad \text{(три пара)}$$

$$b^7 = \underbrace{b \,.\, b}_{1} \,.\, \underbrace{b \,.\, b}_{2} \,.\, \underbrace{b \,.\, b}_{3} \,.\, b \qquad \text{(три пара и један чинитељ без свога парњака).}$$

Пар једнаких чинитеља је увек позитиван, па били чинитељи позитивни, или негативни.

$$(+2) \,.\, (+2) = (+4)$$

$$(-3) \,.\, (-3) = (+9).$$

Како су парови једнаких чанитеља увек позитивни, то ће *степен с парним изложитељем бити увек позитиван, била основа позитивна или негативна.*

Знак степена са непарним изложитељем зависи увек од знака основе. Н.пр. у горњем степену b^7 сви су парови позитивни, те ако је b позитивно и сâм степен b^7 биће позитиван и обрнуто. Види се да *степен са непарним изложитељем има увек знак своје основе.* То се да изразити овим обрасцима:

$$(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$$
$$(\pm a)^{(2n\pm 1)} = \pm a^{(2n\pm 1)}.$$

Зависност степена од основе. — На малопређашњим примерима видели смо да се вредност степена 2^n мења, кад се n мења. Исто тако видели смо да је

$$\begin{array}{c|c|c} 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 \\ 3^2 = 9 & 3^3 = 27 & 3^4 = 81 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} & \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \end{array}$$

Видимо да се степен мења кад му мењамо основу. За исти изложитељ 3 добијамо три вредности 8, 27, $\frac{8}{27}$, кад узмемо три различите основе. То значи ово: *вредност степена се мења променом основе;* или: *вредност степена зависи од вредности основе,* а то обоје значи: *степен је функција основе.* Ту дакле имамо *две променљиве количине:* основу коју *произвољно* мењамо и вредност степена који добија своју *одређену вредност* за сваку *произвољну* промену основе. Означимо овако те *две променљиве количине:* основу са x, а вредност степена са y. Узмимо најпре изложитељ 2. *Наше две променљиве биће тада везане оваквом једном једначином:*

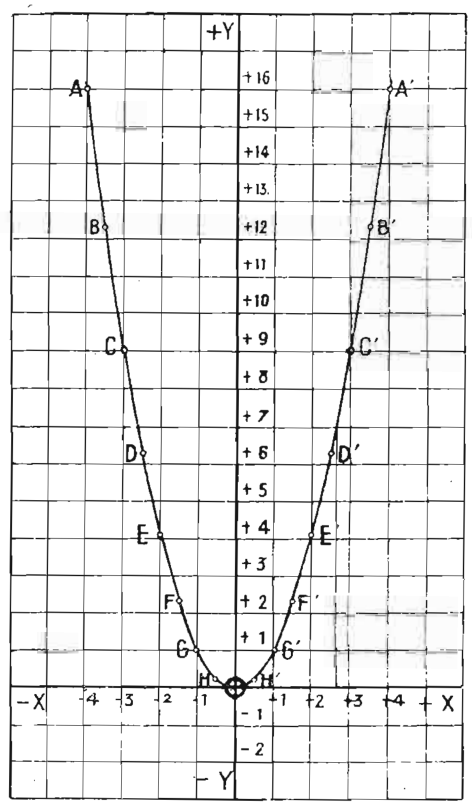
$$y = x^2$$

Узмимо сад да се x мења. Чим се x мења, мењаће се и y. *Икс* мењамо *ми произвољно, а једначина ће нам показати како се при томе мења ипсилон.*

Добићемо ову таблицу вредности за x и y:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3\frac{1}{2}$	$+4$
y	$+16$	$+\frac{49}{4}$	$+9$	$+\frac{25}{4}$	$+4$	$+\frac{9}{4}$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	$+1$	$+\frac{9}{4}$	$+4$	$+\frac{25}{4}$	$+9$	$+\frac{49}{4}$	$+16$

Ако сад употребимо координатни систем, сваки пар горњих вредности даће нам по једну тачку (сл. 29.).



Сл. 29.

$$A\begin{cases} -4 \\ 16 \end{cases} \quad B\begin{cases} -3\frac{1}{2} \\ +\frac{49}{4} \end{cases} \quad H\begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{4} \end{cases} \quad O\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad H'\begin{cases} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{4} \end{cases} \quad B'\begin{cases} +3\frac{1}{2} \\ +\frac{49}{4} \end{cases} \quad A'\begin{cases} +4 \\ +16 \end{cases}$$

Кад спојимо све ове тачке, видећемо да једначина

$$y = x^2$$

претставља једну криву линију.

Када загледамо слику видимо ово:

1°. — наш крива је сва над апсцисном осовином,

2°. — пролази кроз координатни почетак,

3°. — најнижа тачка јој је O,

4°. — и десно и лево од те најниже тачке *ординате расту*,

5. ова два крака наше криве имају осовину симетрије, која је овде осовина OY,

6. — оба крака иду у бесконачност, а једнако се удаљују од осовине *ОУ*.

Ова крива која претставља функцију $y = x^2$ зове се **парабола.**

Са ње видимо да *два ма која супротна броја имају исте квадрате.*

Пример: $(+ 4)^2 = (- 4)^2$ јер апсцисама $(+ 4)$ и $(- 4)$ одговарају на нашој кривој две једнаке ординате $(+ 16)$ и $(+ 16)$ у тачкама *A* и *A'* (сл. 29).

Зашто тачке *A* и *A' B* и *B'* . . . *F* и F' леже симетрично према *ОУ?*

Зависност степена од изложитеља. — Функција $y = 2^x$. — Ми смо већ видели да се степен мења кад се изложитељ мења. Значи, *степен је функција изложитеља.* Функције $y = x^2$ и $y = x^3$ су *алгебарске функције*, док се функције $y = 2^x$ и $y = 3^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ итд., где је изложитељ променљив, зову *изложитељне фунције.* Изложитељне функције *нису* алгебарске функције; оне долазе у ред *трансцендентних функција.*

I

Посматрајмо сад функцију

$$y = 2^x$$

Дајмо *иксу* произвољне вредности, почевши од 1, па ћемо имати ову таблицу:

$y = 2^x$

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	8	16	32	64

Кад нацртамо на координатном систему тачке из горње таблице, па те тачке спојимо, добићемо криву линију коју показује сл. 30.

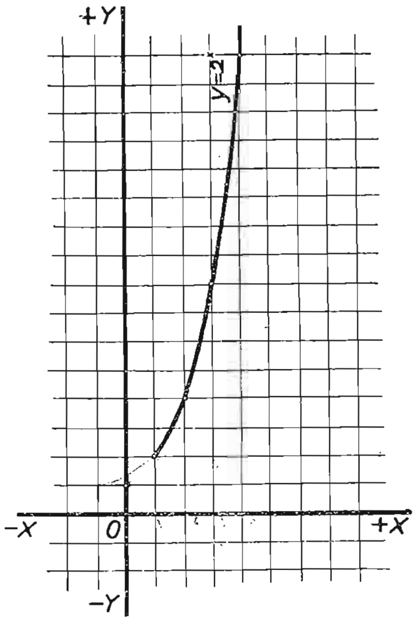
Кад погледамо ову криву, видимо да степен опада, кад му изложитељ опада. Кад пођемо по позитивном краку апсцисне осовине ка координатном почетку, видимо да су ординате све мање: наша крива тежи ка апсцисној осовини. Да ли пресеца ординатну осовину? Ми то још не знамо, пошто не знамо да степенујемо бројем мањим од јединице. Ми за сада стајемо код тачке чија је апсциса $(+ 1)$. Вратићемо се на нашу криву доцније кад будемо видели шта значи степен чији је изложитељ мањи од јединице (н. пр. $2^{\frac{1}{2}}$, 3^{-2} и т. д.)

Сабирање и одузимање степена. — Знамо да се могу алгебарски сабрати само слични мономи: $2a$ и $3a$, $5x$ и $(-6x)$ и т. д. Према томе a^3 и a^2 *не могу се ни сабирати ни одузимати*, јер су им сачинитељи 1 и 1, али им главне количине a^3 и a^2 нису једнаке. Ми знамо да a^3 и a^2 није једно исто, а *сабирати можемо* само *једноимене количине.*

Степени код којих нису једновремено једнаке и основе и изложитељи, не могу се сабирати, пошто *не* претстављају *сличне мономе.*

Не могу се сабирати н. пр.: a^3 и a^2, x^3 и y^2 и т. д.

Могу се сабирати: $a^2 + 2a^2 = 3a^2$, $a^3 + a^3 = 2a^3$ и т. д.



Сл. 30.

Узмимо сад да саберемо x^2 и x^2.

$$x^2 + x^2 = 2x^2.$$

Да видимо како изгледа функција

$$y = 2x^2.$$

Код ове функције се одмах види да су све ординате 2 пута веће од ордината криве $y = x^2$.

Начинимо нашу таблицу вредности за *x* и *y*!

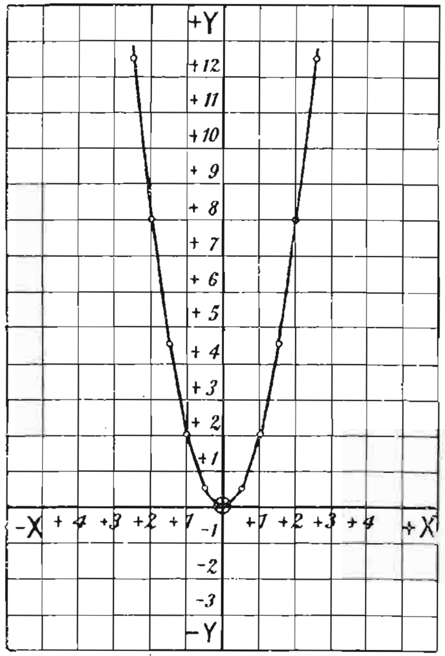
x	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$
y	$+\frac{25}{2}$	$+8$	$+\frac{9}{2}$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+2$	$+\frac{9}{2}$	$+8$	$+\frac{25}{2}$

Уцртајмо све ове тачке на координатном систему и спојмо их. Добићемо опет *параболу* (сл. 31), која има две гране симетричне према *ОУ* осовини.

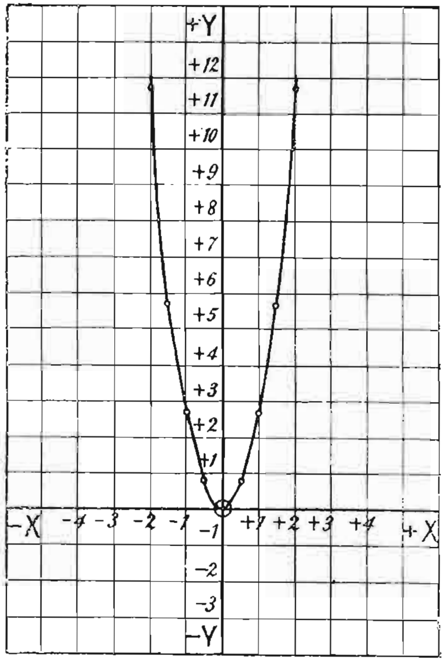
Узмимо сад функцију

$$y = x^2 + x^2 + x^2, \text{ то јест}$$

$$y = 3x^2.$$



Сл. 31.



Сл. 32.

Ако дајемо *иксу* произвољне вредности, па израчунавамо y, добићемо ову таблицу вредности за x и y:

x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$
y	$+12$	$+\frac{27}{4}$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	0	$+\frac{3}{4}$	$+3$	$+\frac{27}{4}$	$+12$

Кад нацртамо све ове тачке и вежемо их, добићемо опет *параболу* (сл. 32).

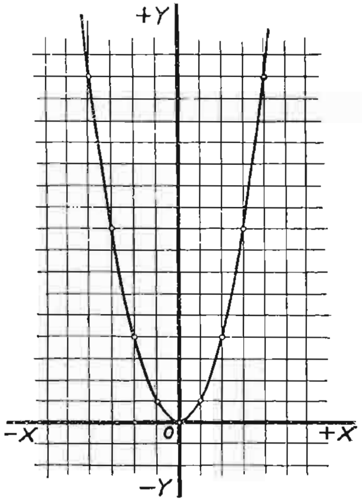
Уопште функција

$$y = ax^2$$

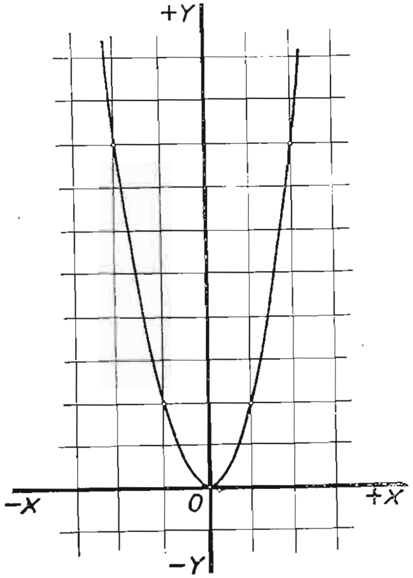
биће претстављена *једном параболом.*

Ми смо на нашим сликама 29, 31, 32 узели исти поделак на координатним осовинама, док смо цртали ове три параболе:

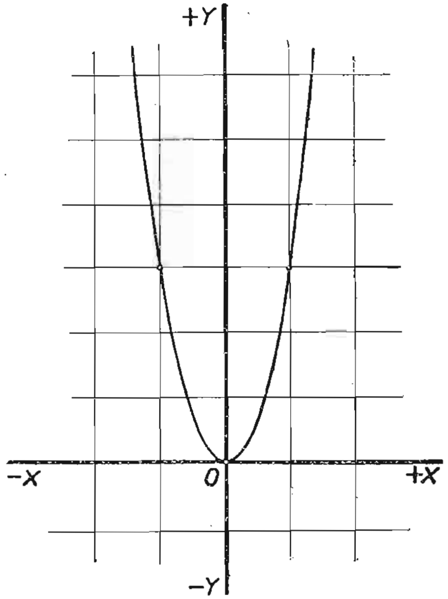
$$y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad \text{и} \quad y = 3x^2$$



Сл. 33.



Сл. 34.



Сл. 35.

и оне су на нашим сликама различите. Ако за параболу $y = x^2$ узмемо за поделак 3 *mm*, (сл. 33)., за параболу $y = 2x^2$ поделак 3 . 2 = 6 *mm* (сл. 34)., а за параболу $y = 3x^2$ поделак од 3 . 3 = 9 *mm* (сл. 35)., ове три једначине

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = 3x^2$$

претстављаће нам *једну исту параболу.*

Неопходно је потребно да и сам извршиш ову пробу, јер је ово *једна важна особина параболе.*

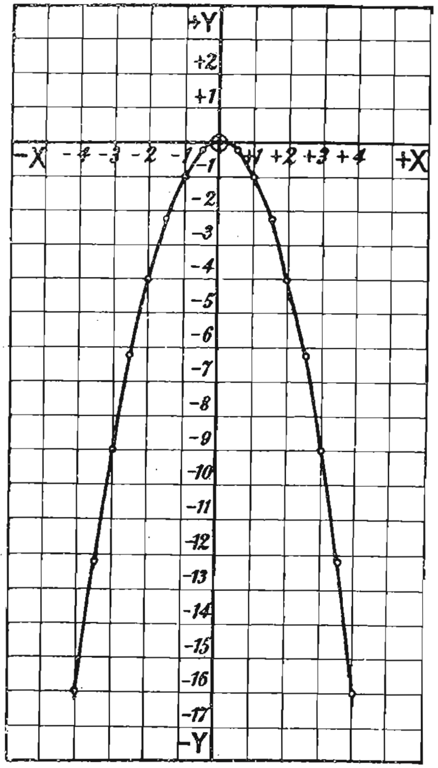
Да видимо сад шта значи функција

$$y = -x^2.$$

Поступимо као до сад: дајмо *иксу* произвољне вредности, па израчунајмо припадне вредности за *у*. Тако радећи добићемо ову таблицу:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3\frac{1}{2}$	$+4$
y	-16	$-\frac{49}{4}$	-9	$-\frac{25}{4}$	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	$-\frac{25}{4}$	-9	$-\frac{49}{4}$	-16

Кад нацртамо координате свих ових тачака, па добивене тачке спојимо, добијамо параболу, али *отворену наниже* (сл. 36). И она има две гране, али *симетричне према негативном краку ординатне осовине*.



Сл. 36.

Множење степена. —

Два степена могу имати:

1^0. — само основе једнаке,

1^0. — само изложитеље једнаке,

3^0. — једнаке и основе и изложитеље.

1^0. — *Множење степена истих основа.*

Нађи производ

$$a^3 \,.\, a^2.$$

Развијмо оба степена:

$$a^3 = a \,.\, a \,.\, a.$$
$$a^2 = a \,.\, a.$$

Између оба степена знак је множења, те ће бити:

$$a^3 \,.\, a^2 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$$

а ми знамо да је то a^5. Према томе је

$$a^3 \,.\, a^2 \,. = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^5 = a^{2+3}$$

Исто би тако било:

$$a^m \,.\, a^н = \underbrace{\underbrace{a \,.\, a \,.\, . \,.\, . \,.\, . \,.\, a}_{m\ пута} \,.\, \underbrace{a \,.\, a \,.\, . \,.\, . \,.\, . \,.\, a}_{n\ пута}}_{a \,.\, a \,.\, . \,.\, . \,.\, . \,.\, . \,.\, . \,.\, a\,(m+n)\ пута}$$

а то је:

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

Отуда ова

Теорема 1. — *Степени истих основа множе се, кад се заједничка основа степенује збиром изложитеља.*

Ако једнакост $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ прочитамо с десна улево:

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$$

изиће обрнута теорема теореми 1:

Теорема 2. — *Број се степенује збиром, кад се најпре степенује једним сабирком, затим другим, па се добивени степени помноже.*

2^0 — *Множење степена истих изложитеља.*

Нађи производ

$$a^3 \,.\, b^3.$$

Ако развијемо ове степене, имаћемо:

$$a^3 \,.\, b^3 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b.$$

Али ми знамо да производ не мења своју вредност, ако његови чинитељи промене места. Зато горњи производ можемо овако написати:

(1) $a^3 \,.\, b^3 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b = a \,.\, b \,.\, a b \,.\, a b = (ab) \,.\, (ab) \,.\, (ab) = (ab)^3$

Одавде излази ова

Теорема 3. — *Степени истих изложитеља множе се, кад се производ основа степенује заједничким изложитељем.*

Ако једнакост (1) читамо с десна улево, изаћи ће теорема 4, која је обрнута теореми 3.

Теорема 4. — *Производ се степенује неким бројем, кад се сваки чинитељ тога производа степенује тим бројем, па се добивени степени помноже.*

3^0 — *Множење степена истих основа и изложитеља.*

Нађи производ

$$a^3 \,.\, a^3.$$

Пошто су оба чинитеља *једнака*, ово је у ствари *степеновање степена*, о коме ћемо мало доцније говорити.

Дељење степена. — И овде имамо горња три случаја:

1^0 — *Дељење степена истих основа.* — Нађи количник:

$$a^5 : a^2.$$

Напишимо овај количник у облику разломка и раставимо горње степене на чинитеље

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, a}{a \, . \, a}.$$

Знамо да се једнаки чинитељи из бројитеља и именитеља скраћују, те ће бити:

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, a}{a \, . \, a} = \frac{a \, . \, a \, . \, a}{1} = a \, . \, a \, . \, a = a^3 = a^{5-2}.$$

Отуда ова:

Теорема 5. — *Степени истих основа деле се, кад се заједничка основа степенује разликом изложитеља.*

Обрнута теорема:

Теорема 6. — *Број се степенује разликом, кад се степенује умањеником, па умањитељем и добивени степени поделе.*

2⁰. — *Дељење степена истих изложитеља.* — Наћи количник

$$a^4 : b^4$$

Напишимо горњи количник у облику разломка и развијмо степене у производе.

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a}{b \, . \, b \, . \, b \, . \, b}$$

Из овога што смо научили код разломака знамо да ће ово даље бити овако:

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a}{b \, . \, b \, . \, b \, . \, b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Отуда ова:

Теорема 7. — *Степени истих изложитеља деле се, кад се количник основа степенује заједничким изложитељем.*

Обрнута

Теорема 8. — *Разломак се степенује неким бројем, кад се и бројитељ и именитељ степенују тим бројем, па се степен бројитеља подели степеном именитеља.* IV

Степеновање степена. — Наћи вредност степена:

$$(a^3)^2$$

Ако овај степен развијемо у производ, биће:

$$(a^3)^2 = a^3 \, . \, a^3$$

а ми знамо да је то даље:

$(a^3)^2 = a^3 \, . \, a^3 = a^{3+3} = a^6$ (пошто су им исте основе).

Али је $6 = 3 \, . \, 2$, те горњи степен степена можемо овако написати:

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2}.$$

Исто тако је

$$(a^m)^n = a^m \, . \, a^m \, . \, a^m \, . \, . \, . \, . \, . \, a^m \text{ (n пута)}$$

а то је даље:

$$(a^m)^n = a^{m + m + m + \, . \, . \, . \, . \, . \, + m \text{ (n пута)}} = a^{mn}.$$

Отуда ова

Теорема 9. — *Степен се степенује, кад се основа степенује производом изложитеља.*

Обрнута

Теорема 10. — *Број се степенује производом, кад се најпре степенује једним чинитељем, па добивени степен степенује другим чинитељем.*

Напомена: Овде треба запазити ова два степена:

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ и } (a^n)^m = a^{mn}.$$

То значи, кад имамо да степенујемо производом, сасвим је свеједно којим ћемо редом степеновати. *Пример:*

$$2^{3 \cdot 2} = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$
$$2^{3 \cdot 2} = (2^2)^3 = 4^3 = 64.$$

Нула као изложитељ. — Да видимо сад шта значи

$$a^0.$$

Нулу можемо претставити као разлику два једнака произвољна броја:

$$a^0 = a^{m-m}$$

А ми знамо (теорема 6) да је то даље:

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Пошто ни a ни m нисмо нарочито бирали, то ће исти резултат бити ма какво било a. Отуда ова

Теорема 11. — *Сваки број степенован нулом даје јединицу.* VI

Негативни изложитељ. — Да видимо сад шта значи:

$$a^{-3}$$

Према дефиницији степеновања ово не би имало смисла. Али ако се сетимо да се сваки негативан број може претставити разликом два позитивна броја, горњи израз има смисла.

Знамо да је $-1 = 4 - 5$, $\quad -2 = 6 - 8$ и т. д.

Отуда ћемо лако развити горњи израз:

$$a^{-3} = a^{7-10} = \frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^3} = \frac{1^3}{a^3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3.$$

И овде добијамо две теореме обрнуте једна другој:

Теорема 12. — *Број се степенује негативним изложитељем, кад се његова изврнута вредност степенује позитивним изложитељем.*

Пошто је

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1^3}{a^3} = 1 \,.\, \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 1 \,.\, a^{-3} = \frac{a^{-3}}{1}$$

то важи и ова

Теорема 13. — *Број може прећи из бројитеља у именитељ, или из именитеља у бројитељ, ако му изложитељ промени знак.*

Примери: $\frac{a^3}{b^4} = \frac{b^{-4}}{a^{-3}} = \frac{a^3 \,.\, b^{-4}}{1} = a^3 \,.\, b^{-4} = \frac{1}{a^{-3} b^4}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2^1}{3^1} = 2 \,.\, 3^{-1} = \frac{1}{2^{-1} \,.\, 3}$$

$$\frac{1}{x^2} = 1 \,.\, x^{-2} = x^{-2}$$

$$\frac{2a}{x^3} = 2 \,.\, a \,.\, x^{-3} = 2ax^{-3}$$

(Сад наш малопређашњи разломак има облик целог броја). На теорему 13 обрати нарочиту пажњу!

Изложитељна функција с негативним изложитељем. — Ми смо већ посматрали изложитељну функцију $y = 2^x$, узимајући за најмању вредност *икса* + 1.

На слици 30. видели смо да ординате наше криве опадају до $x = 1$.

Ако почнемо и даље смањивати x, добићемо функцију с разломљеним изложитељем, рецимо

$$y = 2^{\frac{1}{2}}$$

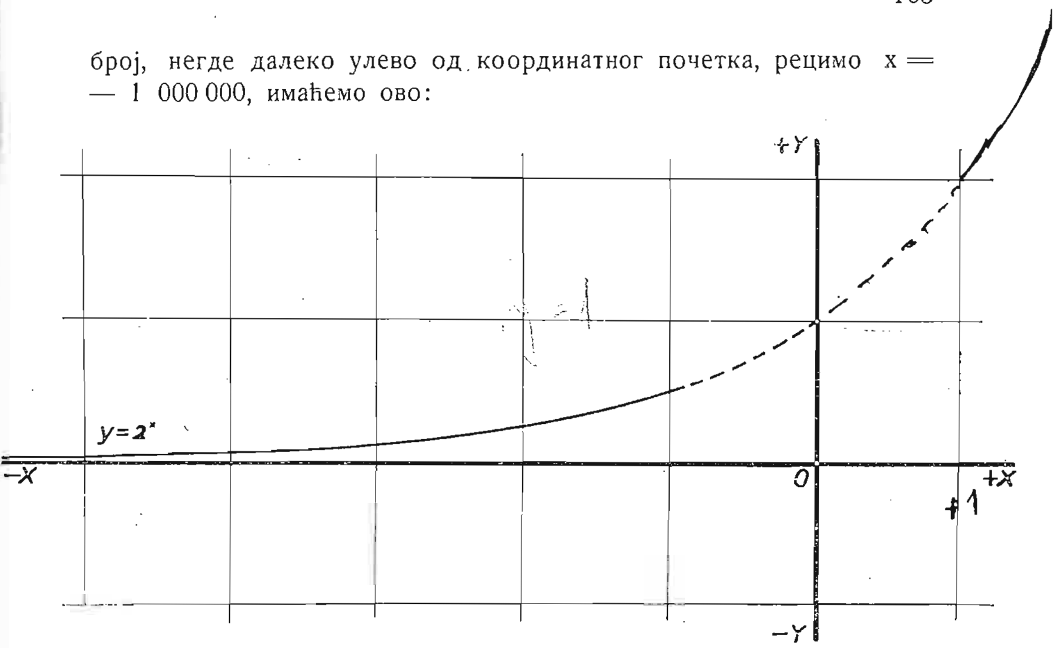
Засад још не знамо да степенујемо *разломљеним* изложитељима. Зато ћемо прећи на *целе* негативне бројеве. Добићемо ову таблицу.

$y = 2^x$

x	-1	-2	-3	-4	-5
y	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{32}$

Ако нацртамо ове тачке, моћи ћемо да продужимо нашу криву са сл. 30. Добићемо слику 37.

Видимо да наша крива *тежи* ка апсцисној осовини и ближи јој се све више и више. Ако узмемо неки веома велики негативан број, негде далеко улево од координатног почетка, рецимо $x = -1\,000\,000$, имаћемо ово:



Сл. 37.

за $x = -1\,000\,000$ $\qquad y = 2^{-1\,000\,000} = \frac{1}{2^{1\,000\,000}}$

Разломак на десној страни *веома је мали и налази се веома близу нуле.* Али он је *позитиван.* То значи да наша крива има једнако позитивну ординату и кад се одмакне веома далеко од ординатне осовине. То даље значи да наша крива на *веома великој* даљини лево од координатног почетка има *веома малу* раздаљину од апсцисне осовине, али је не додирује. *Растојање између наше криве и апсцисне осовине једнако опада и тежи нули.* Кад се једна права овако понаша према једној кривој, ми кажемо да је она **асимптота** те криве линије. Апсцисна осовина је *асимптота* за нашу криву са сл. 37. Наша крива и апсцисна осовина *сливају се негде у бесконачности*, јер ординате тачака наше криве најзад постају нуле у бескрајности, то јест, у бескрајности тачке апсцисне осовине и наших кривих поклапају се

$$y = 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Једначина апсцисне осовине је $y = 0$.

Али и ако смо пустили апсцису да иде у бесконачност, *нисмо добили негативну ординату.* То значи *да наша крива не прелази* *испод апсцисне осовине. То долази отуда што се увек добија позитиван број кад се позитивна основа степенује ма каквим изложитељем.*

Узмимо сад криву

$$y = 1^x$$

Ма какво било x, увек ће бити

$$y = 1.$$

То је права која је на отстојању $+ 1$, паралелна са апсцисном осовином (сл. 38).

Да видимо сад да ли се секу ове две криве:

$$(1) \qquad y = 2^x \qquad \text{и} \qquad y = 1. \qquad (2)$$

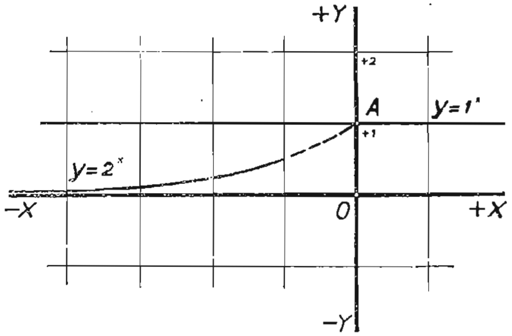
Ако у једначини (1) сменимо вредност за y из (2), добићемо:

$$1 = 2^x.$$

а одатле $x = 0$

Значи да се криве $y = 1$ (крива првог степена)[*] и $y = 2^x$ секу у тачци A, чије су координате $x = 0$, $y = 1$.

$$y = 2^x \quad \text{за } x = 0 \quad y = 1$$



Сл. 38.

Степеновање посебних бројева. — Пошто је ученик у нижим разредима учио степеновање посебних бројева, ми ћемо га овде само потсетити неколиким примерима.

Пример 1. — Израчунати 3067^2

$$\begin{array}{r}
3067^2 \\
\hline
3^2 = 9 \\
60 \,.\, 0 = 000 \\
606 \,.\, 6 = 3636 \\
6127 \,.\, 7 = 42889 \\
\hline
9406489
\end{array}$$

---

[*] Ми називамо у Алгебри праву линију „крива линија првог степена“.

Пример 2. — Израчунати $23{,}4^2$

$$\begin{array}{r}
23{,}4^2 \\
\hline
2^2 = 4 \\
43 \,.\, 3 = 129 \\
464 \,.\, 4 = 1856 \\
\hline
547{,}56
\end{array}$$

Степеновање полинома. — И ово је ученик учио раније, те ћемо га овде само потсетити неколиким примерима.

Пример 1. — Израчунати $(a + b - c + d)^2$

$$(a + b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + d^2 + 2a \,.\, b + 2a \,.\, (-c) + 2a \,.\, d +$$
$$+ 2b\,(-c) + 2bd + 2\,(-c)\,d =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac + 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

Пример 2. — Израчунати $(a + b - c)^3$

$$(a + b - c)^3 = a^3 + 3 \,.\, a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,(-c) +$$
$$+ 3\,(a + b)\,(-c)^2 + (-c)^3.$$

Кореновање

Дефиниција. Вратимо се нашој функцији y датој у облику:

$$y = x^2$$

Видели смо да је она претстављена једном параболом (сл. 29), За *сваку* вредност *икса* можемо добити *припадну* вредност *ипсилона* на овај начин. Рецимо да нам се тражи y за $x = 2$. Нацртаћемо нашу криву, па из тачке $x = 2$ на апсцисној осовини подићи позитивну управну. Дизаћемо је дотле, док не дође до наше криве. То је тачка E'. Из ње ћемо спустити управну на ординатну осовину и прочитати број 4. То значи кад узмемо основу 2, изложитељ 2, степен ће бити 4.

Узмимо сад обрнут задатак: *Који је тај број који степенован са 2 даје 9?* Наша крива (сл. 29) даје нам све степене за све основе. Степени су ординате, а основе су апсцисе.

Дат нам је *степен* 9, па се тражи *основа* за изложитељ 2. То на нашој слици значи ово: дата је ордината 9, па се тражи њена апсциса. Пођимо по ординатној осовини до тачке 9. Из те тачке повуцимо паралелну са апсцисном осовином. На тај начин доћи ћемо до тачака C и C'. Из њих спустимо управне на апсцисну осовину и добићемо $- 3$ и $+ 3$. Дакле, при изложитељу 2, кад је степен 9, основа може бити и $- 3$ и $+ 3$. И збиља је

$$9 = (+ 3)^2$$
$$9 = (- 3)^2.$$

Овај посао зове се *кореновање*. Кад су дати степен и изложитељ, па се тражи основа, да бисмо нашли ту основу, морамо *кореновати* степен. Знак за кореновање је скраћено латинско *r (radix* =

корен). Ако смо степен добили степеновањем са 2, при тражењу основе имаћемо *други* (или *квадратни*) *корен*; при тражењу основе трећег степена, имаћемо *трећи* (или *кубни*) *корен* и т. д.

$$(\pm 3)^2 = 9 \qquad \sqrt{9} = \pm 3$$

$$(+ 2)^3 = 8 \qquad \sqrt[3]{8} = + 2$$

$$(- 2)^3 = - 8 \qquad \sqrt[3]{-8} = - 2.$$

Код кореновања имамо: *поткорену количину* (или *радиканд*). То је наш малопређашњи степен (на нашим примерима + 9, + 8, — 8); *коренов изложитељ* (на нашим примерима 2 и 3), који је једнак са степеновим изложитељем; *корен*, који је једнак са основом (на нашим примерима + 3, — 3, + 2, — 2).

Кад посматрамо нашу параболу (сл. 29). видимо да *две супротне апсцисе код квадратне параболе имају једнаке ординате*. То значи да сваки квадратни корен даје две једнаке вредности супротно означене. Пошто ординате претстављају поткорене количине, видимо да *поткорена количина квадратног корена мора бити позитивна*.

$$\text{Н. пр.} \ \sqrt{-16} = ?$$

Ми немамо на сл. 29 ниједне негативне ординате, те према томе *овај квадратни корен за нас нема смисла*.

Из ових дефиниција се види ово: *степеновање и кореновање су две супротне математичке радње*.

$$4^2 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4.$$

Знамо из ранијег да *један број остаје непромењен кад на њему изврšимо истим бројем две супротне математичке радње*.

$$(a + b) - b = a$$

$$(a \,.\, m) : m = a$$

Зато ће и овде бити:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[3]{(2)^3} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Сабирање и одузимање корена. — Овде важи оно исто што смо рекли и код сабирања степена: корени се могу сабирати и одузимати само онда, кад су им једнаке и поткорене количине и изложитељи.

Могу се сабирати и одузимати:

$$2 \sqrt[3]{a} + 3 \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a} = 4 \sqrt[3]{a}$$

$$a \sqrt[n]{m} - b \sqrt[n]{m} + c \sqrt[n]{m} - d \sqrt[n]{m} = (a - b + c - d \sqrt[n]{m}$$

Не могу се сабирати ни одузимати:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[n]{a} + \sqrt[4]{a} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[n]{a} + \sqrt[4]{a}$$

Множење корена. — Овде могу наступити три случаја:

1°. — Корени имају исте изложитеље,

2°. — корени имају исте поткорене количине,

3°. — корени имају исте поткорене количине и исте изложитеље.

1°. *Корени имају исте изложитеље.* — Израчунати $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$

Ставимо: $\sqrt[n]{a} = x$, $\sqrt[n]{b} = y$, па ће бити:

$$(\sqrt[n]{a})^n = x^n$$

$$(\sqrt[n]{b})^n = y^n \,.$$

Пошто су на бројевима a и b вршене две супротне радње са n, они ће остати непромењени:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, (\sqrt[n]{b})^n = b.$$

а отуда $\qquad a = x^n \,,\ b = y^n$

Помножимо ова два степена, па ће бити:

$x^n \,.\, y^n = ab$, а одатле:

$$(xy)^n = ab$$

$$xy = \sqrt[n]{ab}.$$

Сменимо сад x и y њиховим вредностима, па ће бити:

$$(1) \qquad \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Одатле имамо две теореме. Кад читамо образац (1) с лева надесно:

Теорема 1. — *Корени истих изложитеља множе се кад се производ радиканада коренује заједничким изложитељем.*

Пример. — Израчунати $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4}.$

$$\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Кад читамо образац (1) с десна налево:

Теорема 2. — *Производ се коренује неким бројем кад се сваки чинитељ коренује тим бројем, па се добивени корени помноже.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{8 \,.\, 64}$

$$\sqrt[3]{8 \,.\, 64} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{64} = 2 \,.\, 4 = 8$$

Пример 2. — Израчунати $\sqrt[3]{54}$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \,.\, 2} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Пример 3. — Израчунати $\sqrt[3]{a^4b^5c^6}$

$$\sqrt[3]{a^4b^5c^6} = \sqrt[3]{a^3 \,.\, a \,.\, b^3 \,.\, b^2 \,.\, c^3 \,.\, c^3} = \sqrt[3]{a^3 \,.\, b^3 \,.\, c^3 \,.\, c^3 \,.\, a \,.\, b^2} =$$

$$= \sqrt[3]{a^3} \,.\, \sqrt[3]{b^3} \,.\, \sqrt[3]{c^3} \,.\, \sqrt[3]{c^3} \,.\, \sqrt[3]{ab^2} =$$

$$= a \,.\, b \,.\, c \,.\, c \,.\, \sqrt[3]{ab^2} = abc^2 \sqrt[3]{ab^2}.$$

Напомена. — Ово што смо показали у примерима 2 и 3 зове се *извлачење пред корен.* То извлачење нам служи да поткорену количину упростимо што можемо више.

Изведи сам правило за *извлачење пред корен!*

Како се множе корени у она друга два поменута случаја видећемо мало доцније.

Дељење корена. — Нека су дата два корена истих изложитеља:

Поделити $\sqrt[n]{a}$ са $\sqrt[n]{b}$.

Ставимо и овде:

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad \sqrt[n]{b} = y$$

$$a = x^n \qquad b = y^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$$

а одатле: $\dfrac{x}{y} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, а то је даље:

$$(1) \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Одавде опет две теореме:

Теорема 3. — *Корени истих изложитеља деле се кад се количник радиканада коренује заједничким изложитељем.*

Кад горњи образац (1) читамо с десна налево, излази ова обрнута

Теорема 4. — *Разломак се коренује, кад се и бројитељ и именитељ коренују, па се добивени корени поделе.*

Пример. — Израчунати

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = (\pm 2).$$

Степеновање корена. — Нека нам је дато да покажемо шта значи

$$(\sqrt[3]{5})^4.$$

Ми умемо да напишемо степен у облику производа:

$$(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5}.$$

Пошто ови корени имају исте изложитеље, биће ово даље:

$$(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 . 5 . 5 . 5} = \sqrt[3]{5^4}$$

Исто тако биће:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Одавде ова теорема:

Теорема 5. — *Корен се степенује кад се поткорена количина степенује.*

Пример. — Израчунати:

$$(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Кореновање степена. — Нека нам је дато:

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Кад будемо извукли корен из ове степене количине добићемо опет неки степен од a.

Н. пр.

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^3 \,.\, 2^3} = \sqrt[3]{2^3} \,.\, \sqrt[3]{2^3} = 2 \,.\, 2 = 2^2.$$

Добили смо други степен од 2.

$$\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{a^4 . a^4 . a^4} = a \,.\, a \,.\, a = a^3.$$

Рецимо да добијемо степен p. Тада можемо ставити:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^p.$$

Ако обе стране степенујемо са *n*, биће:

$$a^m = (a^p)^n = a^{np}.$$

Кад два једнака степена имају исте основе, морају и изложитељи бити једнаки. Према томе је:

$$m = np$$

а одатле

$$p = \frac{m}{n}.$$

Према томе је

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \tag{2}$$

Отуда ова

Теорема 6. — *Степен се коренује кад се основа степенује количником изложитеља у коме је бројитељ степенов изложитељ.*

Пример. — Израчунати

$$\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27.$$

Пример.

$$\sqrt[3]{a^7b^8c^9d^{10}} = \sqrt[3]{a^6 . a . b^6 . b^2c^9 . d^9 . d} = \sqrt[3]{a^6 . b^6 . c^9 . d^9 . a . b^2d} =$$

$$= a^{\frac{6}{3}} . b^{\frac{6}{3}} . c^{\frac{9}{3}} . d^{\frac{9}{3}} . \sqrt[3]{ab^2d} = a^2b^2c^3d^3 \sqrt[3]{ab^2d}.$$

Разломљени изложитељи. — Кад образац (2) прочитамо с десна налево, имамо:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Отуда ова

Теорема 7. — *Број се степенује разломком кад се степенује бројитељем, па добивени степен коренује именитељем.*

Кад знамо како се степенује разломљеним изложитељем, можемо да довршимо наше слике 30., 37. и 38. за функцију

$$y = 2^x$$

Нека нам је $x = \frac{1}{2}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414 \ldots\ldots$$

Нека је $x = \frac{1}{3}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = \sqrt[3]{2} = 1{,}259 \ldots.$$

Нека је $x = \frac{1}{10}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = \sqrt[10]{2} = 1{,}071 \ldots.$$

Види се да се *y* ближи јединици кад се *x* ближи нули.

Исто тако за негативне разломљене вредности *икса* имаћемо

	$x = -\frac{1}{10}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{2}$
$y = 2^x$	$y = 2^{-\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} =$ $= \sqrt[10]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$	$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Овде се види да *y* стално опада, што се више одмичемо од координатног почетка од *x = 0* до *x = — 1*.

Дакле наша линија је *непрекидна*, пролази кроз тачку $x = 0$, $y = +1$ и има за асимптоту апсцисну осовину.

Скраћивање и проширење корена. — Довођење на заједнички корени изложитељ. — Сваки се корен може написати у облику степена и сваки степен у облику корена, на основи теорема 6 и 7.

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{3}}; \qquad a^5 = a^{\frac{5}{1}} = \sqrt[1]{a^5}.$$

Пошто се сваки корен може написати у облику степена, можемо на корену извести ове преображаје:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \ldots = \sqrt[np]{a^{mp}} \tag{2}$$

пошто се разломак не мења кад се бројитељ и именитељ поделе или помноже једним истим бројем.

Из ових образаца (1) и (2) изводимо ову теорему:

Теорема 8. — *Корен не мења своју вредност, ако коренов изложитељ и изложитељ поткорене количине помножимо или поделимо истим бројем.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{a^6} =$

$$\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[1]{a^2} = a^2.$$

Пример 2. $\sqrt[5]{a^{11}} = \sqrt[5]{a^{10+1}} = a^{\frac{10+1}{5}} = a^{2+\frac{1}{5}} = a^2 . a^{\frac{1}{5}}$

$$= a^2 \sqrt[5]{a}.$$

Пример 3. $\sqrt[6]{b^{21}} = \sqrt{b^7}.$

Пример 4. $\sqrt[10]{c^6} = \sqrt[5]{c^3}.$

Поделити оба изложитеља значи *скратити корен.*

Пример 5. — Израчунати вредност

$$\sqrt{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt{a^3} . \sqrt[3]{a}.$$

Ови корени не могу да се помноже док се не доведу на *заједнички корен изложитељ.* Најмањи заједнички садржатељ за 2 и 3 је *6*. Према томе множићемо изложитеље овако:

$$\sqrt[2.3]{a^{1 \cdot 3}} . \sqrt[3.2]{a^{2 \cdot 2}} . \sqrt[2.3]{a^{3 \cdot 3}} . \sqrt[3.2]{a^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^9} . \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^{18}} = a^{\frac{18}{6}} = a^3.$$

Кореновање корена. — Да видимо на шта ће се свести један овакав израз:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Корен $\sqrt[m]{a}$ можемо овако написати: $a^{\frac{1}{m}}$, те ће даље бити:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{\frac{1}{m}}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Теорема 9. — *Корен се коренује неким бројем кад се поткорена количина коренује производом корених изложитеља.*

Теорема 10. — *Број се коренује производом кад се коренује једним чинитељем, добивени корен другим чинитељем и т. д.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^6}} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

Пример 2. — Израчунати $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{36}}}} = \sqrt[18]{a^{36}} = a^{\frac{36}{18}} = a^2.$

Пример 3. — Израчунати $\sqrt[6]{729}.$

Ми још не знамо да израчунавамо корене са изложетељем већим од 3. Зато морамо некако свести све наше корене на квадратне и кубне корене, ако се може.

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[2.3]{729} = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Напомена — Којим редом ћемо кореновати сасвим је свеједно, пошто је 3 . 2 = 2 . 3.

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{\pm 27} = \pm 3$$

Кореновање негативним изложитељем. — Из теореме 8 излази ово као последица:

$$\sqrt[-m]{a} = \sqrt[(-m)(-1)]{a^{1 . (-1)}} = \sqrt[m]{a^{-1}} = \sqrt[m]{\left(\frac{1}{a}\right)^1} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}.$$

Отуда

Теорема 11. — *Број се коренује негативним изложитељем кад се његова реципрочна вредност коренује позитивним изложитељем.*

Пример 1.

$$\sqrt[-2]{\frac{1}{4}} = \sqrt{4} = \pm 2.$$

Пример 2.

$$\sqrt[-3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Извлачење квадратног и кубног корена. — Ово ћемо показати на неколико примера.

Пример 1. — Извући овај квадратни корен: $\sqrt{9\,406\,489}.$

Најпре га треба поделити у класе с десна налево, хватајући по две цифре

$$\begin{array}{l} \sqrt{9|40\,|\,6\,4\,|89} = 3067 \\ \pm\ 3^2 \\ \hline \quad 4|\underline{0} : 60.0 \\ \hline \quad 4\,0\,6|\underline{4} : 606.6 \\ \hline \quad 4\,2\,8\,8|\underline{9} : 6127.7 \\ \hline \quad 0\,0000 \end{array}$$

Пример 2. — Извући квадратни корен из броја 547,56.

Најпре га треба поделити у класе од две цифре, почевши од десетне запете, надесно и налево:

$$\begin{array}{l} \sqrt{5|4\,7,|56} \quad = 23{,}4 \\ \pm 4 \\ \hline \quad 1\,4|\underline{7} : 43.3 \\ \hline \quad 1\,85|\underline{6} : 464.4 \\ \hline \quad 0\,00 \end{array}$$

Пример 3. — Извући кубни корен из броја 2236,5578.

Најпре га треба поделити у класе од 3 цифре, почевши од десетне запете удесно и улево:

$$2|236,|457|8.$$

Друга класа децимала није потпуна. Њу морамо допунити двема нулама.

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{2|2\,36,|\,457\,|\,800} & = 13{,}07 \\ \pm 1 & \\ \hline \quad 1\,2|36: & 3.1^2\,3 \\ \quad 9 \quad : & 3.1.\,3^2 \\ \quad 2\,7 & 3^3 \\ \quad 2\,7 & \\ \hline \quad 394|\underline{57} : & 3.\ 13^2.0 \\ \hline \quad 394\,57\,8|00 : & 3\,.\,130^2.\,7 \\ \quad 354\,90\,0 & 3\,.\,130\,.\,7^2 \\ \quad 1\,91\,1\,0 & \\ \quad 3\,43 & 7^3 \\ \hline \quad 37\,763\,57 & \end{array}$$

Од броја 1236 одвоје се две цифре с десна, па се образује троструки квадрат прве добивене цифре: 3 . 1² . =3. Тиме се дели 12. 12 : 3 = 4. Ми ипак не узимамо цифру 4, већ мању цифру 3, пошто од 1236 имају да се одузму још два производа. Потписивање делимичних производа је овако: први до црте, други једно место десно од црте, а трећи испод крајње цифре од 1236.

Пример 4.

$$\sqrt{25x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 12x^5 + 4x^6} = ?$$

Најпре треба поткореии полином уредити по спадним степенима:

$$\begin{array}{l} \sqrt{4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 24x^3 + 16x^2} = 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ \pm\ (2x^3)^2 \\ \hline \quad (-\ 12x^5 + 25x^4) : 2\ .\ 2x^3 \\ \\ \quad (-\ 12x^5 + 25x^4) : (4x^3 - 3x^2)\ (-\ 3x^2) \\ \quad \mp 12x^5 \pm\ 9x^4) \\ \hline \qquad (16x^4 - 24x^3 + 16x^2) : (4x^3 - 6x^2) \\ \\ \quad (16x^4 - 24x^3 + 16x^2) : (4x^3 - 6x^2 + 4x)\ (+\ 4x) \\ \quad \pm 16x^4 \mp 24x^3 + 16x^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

Сад ово: $(-\ 12x^5) : (+\ 4x^3) = -\ 3x^2$ То је сад други члан полинома у извученом корену. Кад нађемо $(-\ 3x^2)$ дописујемо га и уз $2x^3$ и уз $4x^3$.

Сад имамо $16x^4 : 4x^3 = 4x$

Ирационални бројеви

Ирационални бројеви. — Када смо до сада кореновали бројеве и разне изразе видели смо да корена нестане само тада, ако је радикандов изложитељ садржатељ коренова изложитеља.

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{n}} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

$$\sqrt[m]{a^{3m}} = \frac{3m}{a^m} = a^3$$

Али корен остаје и даље овде:

$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3\,.\,a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$ јер 5 није дељиво са 3

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{2^2\,.\,2} = 2\sqrt[2]{2}$ јер 3 није дељиво са 2

$\sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{6^1} = \sqrt{6}$ јер 1 није дељиво са 2

Наша слика 39 показује нам да је $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, $\sqrt{4} = 2$. Кад загледамо ове наше корене, видимо да су поткорене количине све други степени и то $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, $\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $4 = 2^2$, те је из њих могуће извући корен према ономе што смо горе рекли.

Да видимо где је на нашој слици $\sqrt{7}$.

Нацртај слику 39 на милиметарској хартији, узимајући 10 mm. за поделак на осовини. Ми то нисмо могли учинити, јер простор књиге не допушта.

Ординате 9 и 4 (тачке *C′* и *E′* на слици 39) имају апсцисе $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{4} = 2$. Наша ордината 7 је између ордината 9 и 4, те и њена апсциса мора бити између $\sqrt{9}$ и $\sqrt{4}$, то јест између 2 и 3,

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

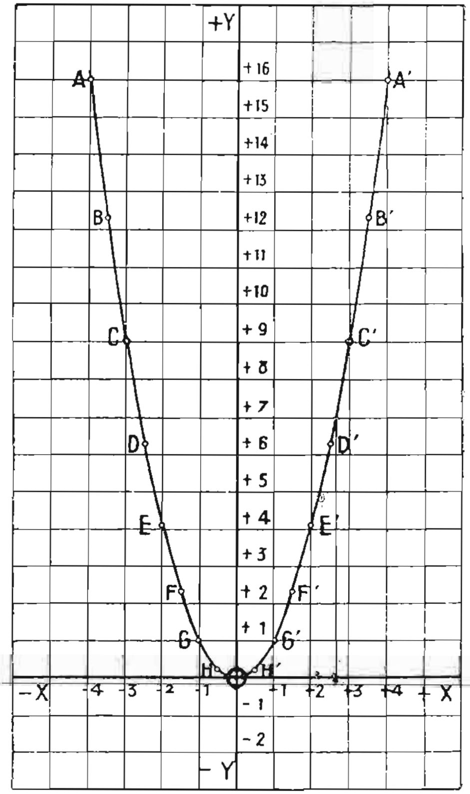
Може ли $\sqrt{7}$ бити цео број? *Не може*, јер се налази између два узастопна цела броја 2 и 3, а ту више нема места ни за једаи цео број.

Може ли $\sqrt{7}$ бити неки разломак? Да видимо. Нека је

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b}.$$

Ако је тако, мора бити

$$7 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\,.\,a}{b\,.\,b}.$$



Сл. 39.

Чим је $\frac{a}{b}$ разломак, не можемо скратити са b. (Јер ако би се a могло поделити са b, онда би $\frac{a}{b}$ био у ствари цео број, а ми смо претпоставили да је разломак). Кад a и b не могу да се скрате са b, не може њихов количник бити цео број. То даље значи да

$$7 \mp \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{то јест} \quad \sqrt{7} \mp \frac{a}{b}.$$

Дакле $\sqrt{7}$ није ни цео број, ни разломак. Ако почнемо да извлачимо квадратни корен, добићемо:

$$\begin{array}{l} \underline{\sqrt{7}} = 2{,}6 \\ \;\underline{300}:46\,.\,6 \\ \;\;24 \end{array}$$

Је ли $\sqrt{7} = 2{,}6$? Није, јер нисмо извукли корен без остатка. Узмимо сад ове квадрате:

$$2^2 = 4 \quad 2{,}6^2 = 6{,}76.$$

Али наш број је 7. Према томе 2,6 *није* квадратни корен из 7, јер је

$$6{,}76 < 7.$$

Ако продужимо да извлачимо корен из 7, добићемо

$$\sqrt{7} = 2{,}64\ .\ .\ .$$
$$2{,}64^2 = 6{,}9696.$$

Вредност 2,64 већ боље одговара броју $\sqrt{7}$, јер је његов квадрат $2{,}64^2 = 6{,}9696$ ближи седмици, него број 6,76.

Продужимо извлачење трећег децимала. Добићемо

$$\sqrt{7} = 2{,}645\ .\ .\ . \qquad \text{али опет са остатком.}$$

Ако сад овај број дигнемо на квадрат, добићемо:

$$2{,}645^2 = 6{,}996025.$$

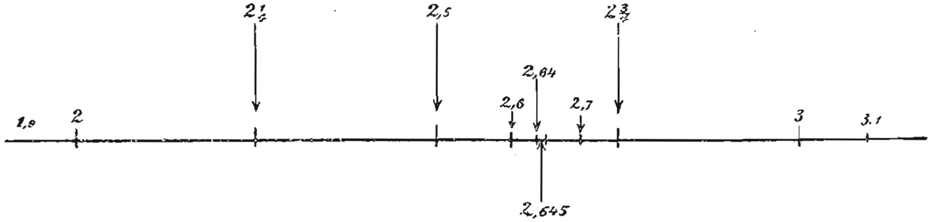
Овај број 6,996025 је већ доста близу нашег броја 7, али ипак није 7.

Испишимо сад наше квадрате:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 2{,}6^2 &= 6{,}76 \\ 2{,}64^2 &= 6{,}9696 \\ 2{,}645^2 &= 6{,}996025. \end{aligned}$$

Можемо и даље продужити извлачење корена из броја 7, али никад нећемо добити број који дигнут на квадрат даје 7.

Ми имамо овде 4 приближне вредности за $\sqrt{7}$. Да их нацртамо на бројној линији (сл. 40).



Сл. 40.

Наш $\sqrt{7}$ био је најпре 2,6. Кад смо дигли на квадрат 2,6 видели смо да то није 7. Кад смо продужили кореновање добили смо 2,64. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7. Кад смо продужили кореновање, добили смо 2,645. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7.

Из свега видимо да наш број $\sqrt{7}$ лежи између 2,645 и 2,646. Види се да му се једнако *сужавају границе:* најпре је $\sqrt{7}$ лежао између 2 и 3, па између 2,6 и 2,7, па између 2,64 и 2,65, па између 2,645 и 2,646.

То *сужавање граница* између којих се налази $\sqrt{7}$ показује да он лежи на бројној линији, само му се место не може *рачунски тачно* одредити, као што се може одредити целим бројевима и разломцима: на пр. 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3 итд.

Овакав број зове се *ирационалан број.* Он се не да претставити ни целим, ни разломљеним бројем; он се децималним бројем може претставити само *приближном вредношћу.*

Ирационалан број је корен из броја који није степен чији би изложитељ био дељив кореновим изложитељем.

$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$ је ирационалан број, јер изложитељ 5 поткорене количине није дељив кореновим изложитељем.

Али $\sqrt[3]{8}$ *није* ирационалан број, јер је 8 трећи степен од 2:

$$8 = 2^3$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Конструкција ирационалних израза. — Апсцисе изражене ирационалним бројевима могу се конструисати. Узмимо да конструишемо апсцису $a = \sqrt{7}.$

Нека је нека дуж $a = \sqrt{7}$ cm. Хоћемо да је узмемо у отвор шестара. Послужићемо се Питагориним правилом.

$$a = \sqrt{7}$$
$$a^2 = 7$$
$$a^2 = 4 + 3$$
$$a^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$$

Значи да је a хипотенуза у правоуглом троуглу, чије су управне стране $b = 2$ cm, $c = \sqrt{3}$ cm.

Дуж од 2 cm. можемо узети у отвор шестара. Како ћемо узети у отвор шестара дуж c?

$$c = \sqrt{3}$$
$$c^2 = 3$$
$$c^2 = 4 - 1$$
$$c^2 = 2^2 - 1^2$$

Значи c је страна правога угла у правоуглом троуглу чија је хипотенуза $m = 2$ cm., а мања страна правога угла $n = 1$ cm. Тај троугао можеш лако конструисати. Већа страна правога угла биће у њему $c = \sqrt{3}.$ Узми је у отвор шестара, па конструиши правоугли троугао чије су управне стране $b = 2$ cm., $c = \sqrt{3}.$ Хипотенуза тога троугла биће $a = \sqrt{7}$ cm.

Према овоме видиш да се *ирационалан број може тачно обележити на бројној линији.* Узмеш га у отвор шестара, забодеш шестар у почетну тачку, па на осовини отсечеш десно, ако је број позитиван, а лево, ако је твој ирационални број негативан.

Нацртај ове дужи:

$a = \pm\sqrt{5},\ b = \pm\sqrt{20},\ c = \pm\sqrt{17},\ d = \pm\sqrt{27}.$

$(5 = 4 + 1,\ \sqrt{20} = 2\sqrt{5},\ \sqrt{17} = \sqrt{16+1},\ \sqrt{27} = \sqrt{25 + (\sqrt{2})^2}$

Нацртај ове дужи:

$a = \sqrt{35},\ b = \sqrt{94},\ c = \sqrt{163},\ d = \sqrt{275}.$

$94 = 100 - 6 = 10^2 - (\sqrt{6})^2.$

Сад засебно дуж $m = \sqrt{6}.$

$\sqrt{6} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}.$

Сад опет засебно дуж $n = \sqrt{2}$:

$$n = \sqrt{2}$$
$$n = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$n^2 = 1^2 + 1^2$$

Сад је овако:

$$b^2 = 10^2 - m^2$$
$$m^2 = 2^2 + n^2$$
$$n^2 = 1^2 + 1^2$$

Уклањање ирационалних именитеља. — Узмимо разломак

$$\frac{21}{\sqrt{7}}$$

Видели смо да је $\sqrt{7}$ један ирационалан број. Ако хоћемо што тачнију вредност горњег разломка, морамо узети велики број децимала. Знамо да је тешко делити бројем који има много децимала. Зато ћемо уклонити ирационалан број из именитеља.

Зашто је $\sqrt{7}$ ирационалан број? Зато што 7 није квадрат ниједнога целог броја. Треба нам под кореном квадрат. То ћемо постићи овако: помножићемо поткорену количину са 7. Шта то значи?

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{7 . 7} = \sqrt{7} . \sqrt{7}.$$

Значи да смо именитељ помножили са $\sqrt{7}.$ Да се разломак не би променио, морамо помножити и бројитељ *истим* бројем:

$$\frac{21}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{21\;.\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}}=\frac{21\;.\sqrt{7}.}{7}=3\sqrt{7}.$$

Опет је остао ирационалан број. Само је сад лакше, јер не делимо њиме, већ множимо.

Пример 1. — Уклонити ирационалан број из именитеља:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\;.\sqrt{b}}{\sqrt{b}\,.\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}=\frac{a}{b}\sqrt{b}.$$

Пример 2.

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5}}=\frac{10\;\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^1}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{10\;\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^{1+2}}}=\frac{10\;\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{10\;\sqrt[3]{25}}{5}=2\sqrt[3]{25}.$$

Пример 3.

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}}=\frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}}.$$

Поткорена количина је на 1 степену. У изложитељу јој недостаје још 1, па да буде 2, те да се може извући корен. Зато:

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}}=\frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}}=\frac{a\sqrt{(b-c)^1}}{\sqrt{(b-c)^1}\cdot\sqrt{(b-c)^1}}=\frac{a\sqrt{b-c}}{\sqrt{(b-c)^2}}=$$

$$=\frac{a}{b-c}\sqrt{b-c}\,.$$

Пример 4.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}}$$

Поткореној количини недостаје 2 у изложитељу, па да буде 5, те да се може извући корен. Дакле:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}}=\frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^3}\cdot\sqrt[5]{(b+c)^2}}=\frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^5}}=\frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{b+c}=$$

$$=\frac{a}{b+c}\sqrt[5]{(b+c)^2}\;.$$

Пример 5.

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Да би ови корени били квадрати, морамо помножити разликом:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\;(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{m\;(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=$$

$$=\frac{m\;(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=\frac{m}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

Пример 6.

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\,.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a\;(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{a\;(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=$$

$$=\frac{a\;(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}=\frac{a}{b-c}(\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Пример 7.

$$\frac{x}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=\frac{x\;(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})\;(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}=$$

$$=\frac{x\;(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x})^2-(2\sqrt{y})^2}=\frac{x\;(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{9\,x-4\,y}$$

Комплексни бројеви

Уображени бројеви. — Видели смо да је квадрат и позитивна и негативна броја увек позитиван:

$$(+3)^2=+9\qquad\qquad(-3)^2=+9.$$

Према томе $\sqrt{-9}$ не може бити ни позитиван, ни негативан. Међутим сви бројеви које смо до сада видели, или су нула, или позитивни, или негативни. $\sqrt{-9}$ није нула, јер $0^2 \neq -9$, те према томе овај број $\sqrt{-9}$ не постоји на нашој бројној линији. Исту ову појаву видећемо увек, кад извлачимо паран корен из негативног броја, пошто се сви ти корени своде на квадратни корен:

$$\sqrt[6]{-a}=\sqrt[3]{\sqrt{-a}}\qquad\qquad\sqrt[10]{-b}=\sqrt[5]{\sqrt{-b}}\text{ и т. д.}$$

Све ове корене можемо увек раставити на производ два корена:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\,.\,(-1)}=\sqrt{9}\;.\sqrt{-1}=\pm\,3\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-a}=\sqrt{a\,.\,(-1)}=\sqrt{a}\;.\sqrt{-1}.$$

Код свију парних корена из негативна броја појављује се $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt[14]{-5}=\sqrt[7]{\sqrt{-5}}=\sqrt[7]{\sqrt{5(-1)}}=\sqrt[7]{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1}} \text{ и т. д.}$$

Међутим знамо да је

$$(+1)^2 = \pm 1, \text{ и } (-1)^2 = \pm 1.$$

Према томе квадратни корен негативна броја не можемо одредити као што смо бар приближно одређивали ирационалне бројеве.

Бројеве које смо до сада видели на нашој осовини зовемо *стварни бројеви* (реални). Квадратни корен из негативна броја зовемо *уображен број*, или *имагинаран број*.

Пошто се сваки квадратни корен негативна броја може свести на производ из једног стварног броја и $\sqrt{-1}$, ми ћемо израз $\sqrt{-1}$ обележити једним нарочитим знаком. Израз $\sqrt{-1}$ зовемо *имагинарна јединица* и обележавамо га првим писменом речи *имагинаран*: **i**.

Према томе, сад можемо лако обележавати уображене бројеве:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9(-1)}=\sqrt{9}\,.\,\sqrt{-1} = \pm 3\,i$$
$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{5}$$
$$\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,.\,i=\pm i\sqrt{a}.$$

До сад смо на нашој бројној осовини имали читав низ стварних бројева целих, разломљених и ирационалних. Ако сад те бројеве множењем вежемо са имагинарном јединицом, добићемо нови низ: **низ имагинарних бројева:**

$$\ldots\,.\; -3\,i\ldots -\sqrt{7}\,i\ldots -2\,i\ldots -i\ldots -\frac{1}{2}i\ldots 0i\ldots +\frac{1}{2}i\ldots +i\ldots +$$
$$+2\,i\ldots +\sqrt{7}\,i\ldots +3\,i\ldots$$

Комплексни бројеви. — Број састављен од једног стварног и једног уображеног броја зове се *комплексан број*.

Примери:

$2+2\,i,\ 2-7\,i,\ -5+4\,i,\ -a+b\,i,\ -c-d\,i,\ a-b\,i$ и т. д.

Њихов општи облик је

$$\pm a \pm bi.$$

Реални део је $(\pm a)$, а имагинарни $(\pm bi)$.

Два комплексна броја који се разликују само знацима пред уображеним бројем, зову се *спрегнуто (коњуговано) комплексни бројеви*. На њих ћемо наићи код квадратних једначина.

Примери:

$(3+4i)$ и $(3-4i)$, $(-5+2i)$ и $(-5-2i)$, $(a+bi)$ и $(a-bi)$ и т. д.

Бројна осовина уображених бројева. — Стварне бројеве смо претстављали тачкама на нашој апсцисној осовини. Где ћемо претстављати уображене бројеве? Види се да и они чине један непрекидан низ. Али где су? Да бисмо добили одговор на то питање, рећи ћемо одмах да њихова осовина има исту нулу као и наша стварна осовина, јер је

$$0\,i = 0$$

Узмимо сад један стварни број, рецимо $+3$. Помножимо га са i. Добијамо $+3\,i$. Још не знамо где ћемо обележити тај уображени број. Помножимо $3\,i$ са i. Добићемо $3\,i\,.\,i = 3\,i^2 = 3\,(\sqrt{-1})^2 = 3\,(-1) = -3$. Шта је било? Кад смо извршили два једнака множења, наша тачка $+3$ извршила је пут од 180⁰ и пала у -3 (сл. 41).

Продужимо множење:

$$-3\,.\,i = -3i,\ (-3i)\,.\,i = -3i^2 = -3\,(\sqrt{-1})^2 = -3\,(-1) = +3.$$

Кад смо извршили *четири једнака* множења, наша тачка $+3$ извршила је једно кружно кретање од 360⁰. Значи, да множењем само са i, тачка прелази пут од 90⁰. Множењем са $(i\,.\,i\,.\,i)$ тачка прелази пут од 270⁰. Пошто положаји $3\,i$ и $-3\,i$ леже на правцима који с позитивним краком стварне осовине заклапају углове од 90⁰ и 270⁰, значи да *тачке уображених бројева леже на једној правој, која је управна у 0 на осовини реалних бројева.*

Комплексне бројеве обележавамо са z и то овако: реални део са x, а сачинитељ уз i са y:

$$z = x + yi$$

пошто иначе реални део преносимо по апсцисној осовини, а коефицијенат уз i по ординатној осовини. Према томе и они су претстављени тачкама, али само што њихове тачке не леже ни на једној осовини.

Примери:

1) $z_1 = 3 + 2i$

Овде је $x = +3,\ y = +2$. Пренесимо $+3$ по X-осовини, а $+2$ по Y-осовини, па ћемо добити тачку z_1, која претставља комплексни број z_1 (сл. 41).

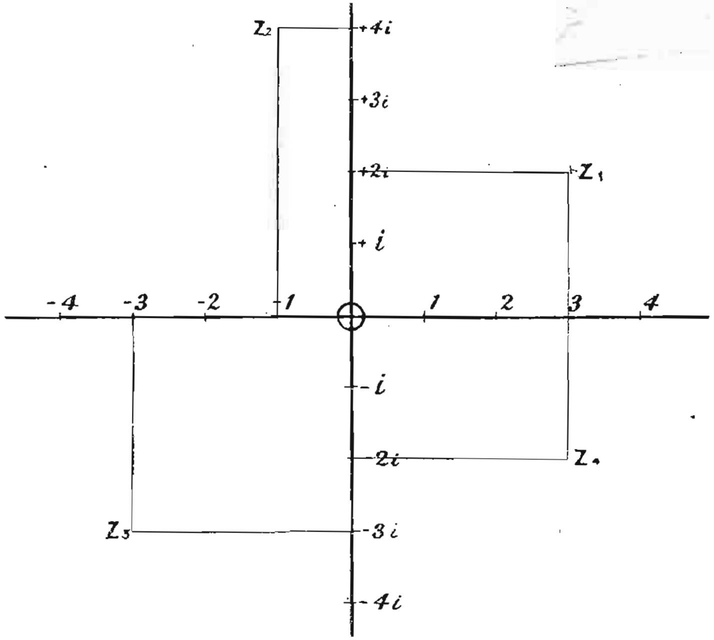
2) $z_2 = -1 + 4i.$

Овде је $x = -1,\ y = +4.$

3) $z_3 = -3 - 3i.$

Овде је $x = -3,\ y = -3.$

X



Сл. 41.

4) $z_4 = 3 - 2i.$

Овде је $x = 3$, $y = - 2$.

Бројеви z_1 и z_4 су коњуговано-комплексни бројеви и леже на једној правој линији.

Збир два коњуговано-комплексна броја је стваран број:

$$(3 + 2i) + (3 - 2i) = 6.$$

Производ два коњуговано-комплексна броја је стваран број:

$$(3 + 2i)\ (3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 2^2 .\ i^2 = 9 - 4i^2 =$$
$$= 9 - .4\ (- 1) = 9 + 4 = 13.$$

Због ове особине коњуговано-комплексних бројева једначина вишег, степена од 1 са *стварним* сачинитељима може да има *уображене* корене.

Степени од i. — Ово су 4 узастопна степена од i:

$$i^1 = i,\ i^2 = - 1,\ i^3 = - i,\ i^4 = + 1.$$

Да видимо сад како ћемо израчунати који било степен од i. Рецимо i^{17}. Увек треба дати степен раставити тако, да један чинитељ буде i^4, пошто је $i^4 = 1$

$$17 = 4 . 4 + 1$$

Према томе ће бити:

$$i^{17} = i^{4 \cdot 4} . i^1 = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 . i = 1 . i = i.$$

Узмимо сад да израчунамо вредност i^{2345}

$$\frac{2345}{1} : 4 = 586 \text{ са остатком } 1$$

$$2345 = 586 . 4 + 1$$
$$i^{2345} = (i^4)^{586} \cdot i = (1)^{586} . i = 1 . i = i$$
$$i^0 = 1.$$

Рачунске радње с комплексним бројевима. — Сваку рачунску радњу с комплексним бројевима лако ћеш разумети, ако комплексни број сматраш као бином и водиш рачуна о степенима од i. Како се ради видећеш на примерима.

$i = \sqrt{-1} =$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = +1$

Пример 1. Сабрати z_1 и z_2, кад је $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 + 5i$.

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + 5i) = (1 + 4) + (2i + 5i) = 5 + 7i.$$

Пример 2. — Од z_1 одузети z_2, кад је

$$z_1 = 2 - 3i \qquad z_2 = 6 - 9i.$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (6 - 9i) = 2 - 3i - 6 + 9i = (2 - 6) + (- 3i + 9i) = - 4 + 6i.$$

Пример 3. — Помножити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 2 + 5i \qquad z_2 = 1 - 4i.$$

$$z_1\ z_2 = (2 + 5i)\ (1 - 4i) = 2 + 5i - 8i - 20i^2 = 2 - 3i + 20 = 22 - 3i.$$

Пример 4. — Поделити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 26 + 7i \qquad z_2 = 4 + 3i$$

Нека је $z = \frac{z_1}{z_2}$, где је $z = x + yi$ Онда мора *бити:*

$$z_1 = zz_2 \qquad \text{То значи}$$
$$26 + 7i = (x + yi)\ (4 + 3i)$$
$$26 + 7i = 4x + 4yi + 3xi - 3y = (4x - 3y) + (4y + 3x)i$$

Два комплексна броја су једнака, кад су засебно једнаки стварни делови а засебно уображени.

Видели смо да је

$$26 + 7i = (4x - 3y) + (4y + 3x)i$$

Зато мора бити:

I $4x - 3y = 26$
II $4y + 3x = 7$

Одатле треба наћи x и y.

I $x = \frac{26 + 3y}{4}$

II $4y + \frac{78 + 9y}{4} = 7$

II $16y + 78 + 9y = 28$
$25y = - 50$
$y = - 2$
$x = 5$

Тражени количник је $z = 5 - 2i$

Проба: $(4 + 3i)\ (5 - 2i) = 20 + 15i - 8i + 6 = 26 + 7i$

Пример 5. — Поделити z_1 са z_2 кад је

$$z_1 = 1 + 2i \qquad z_2 = 7 + 8i$$

Узећемо опет да је количник $z = x + yi$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \text{ т. j. } \qquad x + yi = \frac{1 + 2i}{7 + 8i}.$$ Отуда je

$$7x + 7yi - 8xi - 8y = 1 + 2i$$

$$(7x - 8y) + (7y - 8x)\, i = 1 + 2i$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 7x - 8y = 1 \\ \text{II} & 7y - 8x = 2 \\ \text{I} & 56x - 64y = 8 \\ \text{II} & 49y - 56x = 14 \\ \hline & -15y = 22 \end{array}$$

$$y = -\frac{22}{15}$$

$$x = \frac{1 + \frac{176}{15}}{7} \qquad\qquad x = \frac{15 + 176}{105}$$

$$x = \frac{191}{105}$$

$$x = 1\frac{86}{105}$$

Тражени количник je:

$$z = 1\frac{86}{105} - \frac{22}{15}\, i$$

ДЕКАДНИ БРОЈНИ СИСТЕМ

Знамо да je

$$27 = 2 \,.\, 10 + 7 = 2 \,.\, 10^1 + 7 \,.\, 10^0$$

$$348 = 3 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10^1 + 8 \,.\, 10^0$$

$$9546,7 = 9 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10^1 + 6 \,.\, 10^0 + 7\ 10^{-1}$$

$$0,25 = 0,2 + 0,05 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 2 \,.\, 10^{-1} + 5 \,.\, 10^{-2}$$

Бројеви којима се служимо у свакидањем животу праве се од основе 10. Како? Узму се разни степени од 10 онолико пута колико хоћемо, па се сви степени саберу.

Да видимо неколико степена од десет. Да почнемо од изложитеља — 4.

. . . .

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & 10^{-4} = \frac{1}{10^4} & = \frac{1}{10000} & = 0,0001 \\ \text{II} & 10^{-3} = \frac{1}{10^3} & = \frac{1}{1000} & = 0,001 \\ \text{III} & 10^{2-} = \frac{1}{10^2} & = \frac{1}{100} & = 0,01 \\ \text{IV} & 10^{-1} = \frac{1}{10^1} & = \frac{1}{10} & = 0,1 \\ \text{V} & 10^0 = 1 \\ \text{VI} & 10^1 = 10 \\ \text{VII} & 10^1 = 100 \\ \text{VIII} & 10^3 = 1000 \\ \text{IX} & 10^4 = 10000 \end{array}$$

. . . .

Нека нам je речено да саставимо један број који ми хоћемо. Ми ћемо то радити овако.

Узмимо три јединице из другог реда:

0,003

Узмимо 4 јединице из четвртог реда:

0,4

Узмимо 5 јединица из петог реда:

5

Узмимо 7 јединица из осмог реда:

7000

Кад скупимо све што смо узели, добијамо свој број:

$$\begin{array}{r} 0,003 \\ 0,4 \\ 5 \\ 7000 \\ \hline 7005,403 \end{array}$$

Сви бројеви из такозваног природног низа бројева начињени су помоћу разних степена исте основе 10. Зато се такав систем бројева зове декадни бројни систем.

ПОТСЕТНИК БРОЈЕВА

Да се сетимо сад свих бројева које смо до сад видели.

I Стварни бројеви

a) *Позитивни стварни бројеви:*

Позитивни рационални
- 1) *Стварни позитивни цели бројеви*: 3, 4, 5, 6, . . . 150 . . . + 200 . . .
- 2) „ „ *разломљ. броj.*: $\frac{3}{4} \cdots \frac{5}{7} \ldots 0,6 \ldots 3\frac{2}{3} \ldots 15\frac{2}{7} \ldots$

3) „ „ *ирацион.броj.*: $\sqrt{2} \ldots \sqrt{3} \ldots \sqrt{5} \ldots \sqrt{7} \ldots \sqrt{\frac{500}{33}} \ldots$

b) *Негативни стварни бројеви:*

негативни рационални
- 4) *Стварни негат. цели броj.*: —3, —4, —5, —6, —150, —200.
- 5) „ „ *разл. броj.*: $-\frac{3}{4}, -\frac{5}{7}, -0,6, -3\frac{2}{3}, -10\frac{3}{8}\ -15\frac{2}{7},$

6) „ „ *ирацион. бр.*: $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -\sqrt{7}, -\sqrt{\frac{500}{53}},$

II Уображени бројеви

a) *Позитивни уображени бројеви*

7) *Уображени позитивни цели бројеви*: 3i, 4i, 5i, —6i, 150i 2000i

8) „ „ *раз. бројеви*: $\frac{3}{4}i\ \ \frac{5}{7}i - 0,6i\ 3\frac{2}{3}i\ \ 15\frac{2}{7}i$

9) „ „ *ирацион. бројеви*: $-i\sqrt{2}\ \ i\sqrt{3}\ \ i\sqrt{5}\ \ i\sqrt{7}\ \ i\sqrt{\frac{500}{53}}$

b) *Негативни уображени бројеви.*

10) *Уображени негат. цели броj.*: —3i, —4i, —5i, —6, —150 200i

11) „ „ *разл. броj.*: $-\frac{3}{4}i - \frac{5}{7}i - 0,6i - 10\frac{3}{8}i - 15\frac{2}{7}i$

12) *Уображени негаш. ирацион.броj.*: $-i\sqrt{2}$ $-i\sqrt{3}$ $-i\sqrt{5}$ $-i\sqrt{7}$ $-i\sqrt{\frac{3}{5}}$.

c) *Комплексни бројеви*:
$1+i,\ 1-i,\ 3-2i,\ -4+5i.$

d) *Коњуговано-комплексни бројеви*:
$3+4i$ и $3-4i$, $-2+5i$ и $-2-5l$.

ВЕЖБАЊА УЗ X ОДЕЉАК

Израчунај вредност ових степена:

①	12^3	3.	$(0,05)^3$	5.	11^3	7.	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$
2.	$(0,05)^2$	4	$(0,901)^2$	6.	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	8.	$\left(\frac{2}{5}\right)$
9.	$\left(\frac{5}{2}\right)^2$	10.	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$				

11. — Изради таблицу квадрата узастопних бројева од 1 до 20 и упамти их.
12. — Изради таблицу кубова узастопних бројева од 1 до 11 и упамти их.
13. — Ако се n мења од 1 до 5, који брже расте од ова два степена: $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ и $\left(\frac{5}{3}\right)^n$? Зашто?

Израчунај вредност вих степена:

14.	$(-2)^3$	15.	$(-3)^2$
16.	$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	17.	$\left(-\frac{1}{3}\right)^4$
18.	$(-0,05)^3$	19.	$\left(-\frac{1}{20}\right)^2$
20.	$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$		

Какво треба да буде *n*, па да вредност ових степена буде позитивна, кад је *n* цео број:

21.	$(-2)^{n+2}$	22.	$(-3)^{n-1}$
23.	$(-2)^{2n-2}$	24.	$(-5)^{3n+1}$
25.	$(-3)^{4n-1}$	26.	$(-4)^{n-4}$
27.	$(-3)^{2n+3}$	28.	$(-1)^{-n-1}$
29.	$(-2)^{n-5}$		

Претстави функцију $y=x^2$ на координатном систему, где су подеоци на осовинама:

30.	од 1 mm.	31.	од 2 mm.
32.	од 3 mm.	33.	од 4 mm.
34.	од 1 cm.	35.	од 5 cm.

Пошто вредност *y* зависи од *x*, пошто је *y функција* икса, то се горња функција у вежбањима 30—35 може и овако написати:

$$f(x)=x^2$$

36. — Исти задатак за функцију

$$f(x)=x^3$$

(Независно промењљиву *x* преносимо по апсцисној осовини, а функцију *y* [или *f* (*x*)] по ординатној осовини. Подела на осовини нека је 2 *mm*.

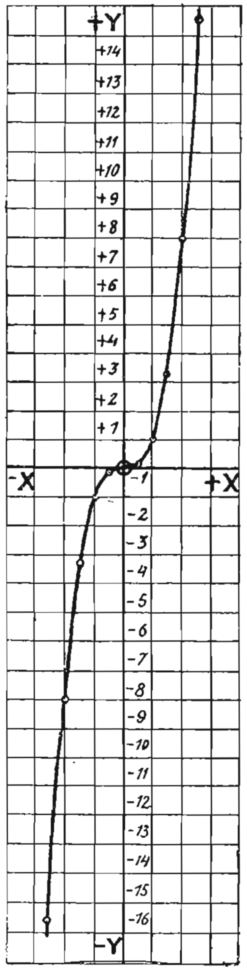
37. — Да ли слика 42 претставља криву $y=x^3$? Провери на неколико тачака!

Крива коју претставља слика 41 зове се **кубна парабола**. Она претставља кретање кубова.

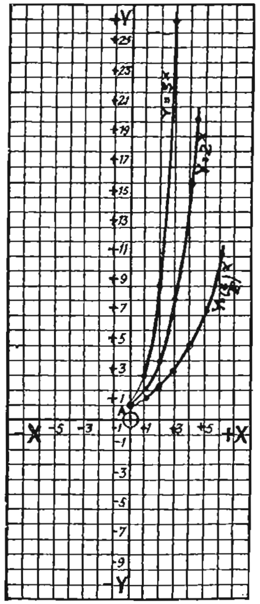
Да ли њене гране леже симетрично према ординатној осовини? Имају ли њене гране центар симетрије? Шта би требало урадити, па да лева грана постане симетрична сдесном према ординатној осовини? Какво је и колико је кретање које би имала да изврши лева грана?

38. — Претстави графички функцију $f(x)=3^x$ сл. 43.

Начини таблицу као за функцију $y=2^x$ на ст. 156. Добивене координате тачака унеси у цртеж, па их спој.



Сл. 42.



Сл. 43.

39: — Претстави графички функцију $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, слика 43.

40. — Претстави графички(цртањем) ову функцију: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ кад се x мења од 1 ка $+\infty$, узимајући само целе вредности за x.

41. — Исти задатак за функцију $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Напомена. — Изрази $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ значе једно исто. Они оба показују да се извесне количине добијају, кад се $\frac{1}{2}$ степенује једним бројем који се произвољно мења. Оба горња израза према томе значе да вредности једног степена зависе од промене неког броја x.

42. — Исти задатак за функцију $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Сабери ове степене:

43. $3a^3, \; -2a^3, \; +\frac{3}{4}a^3, \; -\frac{5}{4}a^3, \; +\frac{1}{2}a^3.$

44. $4a^3b^2, \; -3a^3b^2, 5a^3b^2, -\frac{2}{3}a^3b^2, -\frac{3}{2}a^3b^2.$

45. $-\frac{3}{4}a^3bc, \; -5a^3bc, +\frac{4}{3}a^3bc, \; -\frac{a^3bc}{3}$

46. $2abc^3, \; -3abc^3, \; 5abc^3, \; \frac{3}{4}abc^3, \; -\frac{5abc^3}{3}, \; 6abc^3.$

47. $4ax, \; 3ax, \; +5ax, \; -7ax, \; -10ax, \; 7ax.$

48. $3ax$ и $-4ax^2$.

Зашто не може? Кад мономи нису слични, али имају нечег заједничког, онда се из њиховог збира из сваког члана извуче оно што је заједничко и стави пред заграду, Овако:

$$3ax + (-4ax^2) = 3ax - 4ax^2 = ax(3 - 4x).$$

49. $3ax^3, \; -4ax^2, \; -4x^2, \; -5x, \; +7a$

(Да ли се овде из збира ових монома може нешто извући пред заграду као у вежбању 48? Зашто?)

Изврши означене рачунске радње:

50. $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 + 13^3 + 16^3 + 20^3$

51. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$

52. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^2 + (+a)^4 + (+a)^5$ (Види вежбање 48).

53. $(-3)^4 - (+4)^3$

54. $(-8)^3 - (-1)^3$

55. $(-14)^2 - (-13)^2$

56. $(-5)^2 - (-2)^5$

57. $(\;\;2)^4 - (-3)^2$

58. $(-9)^3 - (+3)^3$

59. — Нацртај ове функције:

$y = x^2, \quad f(x) = 2x^2, \quad y = 3x^2, \quad y = 4x^2, \quad f(x) = 5x^2$

узимајући за прву поделак од 1 *mm.* на координатним осовинама, за другу од 2 *mm.*, за трећу од 3 *mm.*, за четврту од 4 *mm*, за пету од 5 *mm*. Најбоље је да пробаш ово на *милиметарској хартији*. Какав је резултат? Колико си разних парабола добио?

60. — Нацртај функцију $y = \frac{2}{3}x^2$.

61. — „ „ $y = \frac{3}{2}x^2$.

62. — „ „ $f(x) = 10x^2$.

63. — На координатним осовинама узми поделак од 1 *mm.*, па нацртај параболу $y = x^2$; затим узми поделак од 1 *cm.* и на *истом* координатном систему нацртај параболу $y = 10x^2$. Загледај добивене слике!

64. — Нацртај функцију $y = -3x^2$

65. — Исто за функцију $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$.

66. — Исто за функцију $f(x) = -4x^2$.

67. — Исти задатак као у вежбању 63. само сад за функције $y = -x^2$ и $y = -10x^2$.

68. — Како леже једна према другој параболе $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$?

69. — Како леже једна према другој параболе $y = 3x^2$ и $y = 4x^2$?

70. — Нацртај на истом координатном систему ове три параболе овим редом: $y = 4x^2$, $y = 5x^2$ и $y = 6x^2$.

71. — Код трију парабола из вежбања 70, код које најбрже расте функција (ордината)?

72. — Ако функције $f_1(x) = ax^2$ и $f_2(x) = bx^2$ претстављају две параболе, па је $b > a$, која функција ће брже расти?

73. — Посматрај три параболе из вежбања 70, па кажи шта бива с параболом $y = ax^2$, кад a почне да расте.

74. — Нацртај узастопце ове три параболе: $y = 2x^2$, $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$, па реци шта бива са параболом $y = ax^2$, кад a почне опадати.

75. — Узми на координатним осовинама поделак од 1 cm. па нацртај параболу $y = \frac{x^2}{10}$, а затим параболу $y = \frac{x^2}{20}$. Код прве је $a = \frac{1}{10}$, а код друге $a = \frac{1}{20}$ Којој осовини прилази парабола кад a стане опадати?

76. — Узми на координатним осовинама поделак од 1 *dm*. па нацртај параболе $y = x^2$, $y = \frac{1}{10}x^2$, $y = \frac{1}{100}x^2$. Ово ћеш најлакше урадити на школској табли. Видиш ли како је парабола толико раширена, да иде скоро уз саму X-осовину? Шта ће бити с нашом параболом, ако a постане *веома мало*, н. пр. $\frac{1}{100\,000}$? А ако a постане бесконачно мало т. ј. $\frac{1}{\infty} = 0$? Тада наша једначина постаје $y = \frac{1}{\infty}x^2$, т. ј. $y = 0 \,.\, x^2$, т. ј. $y = 0$. Шта претставља једначина $y = 0$?

Извршити означена множења:

77. $a^4 \,.\, a^7$

78 $b^3 \,.\, q^3$

79. $x^8 \,.\, x^2$

80. $2x^4 \,.\, 3x^2$

81. $y^4 \,.\, y$

82. $a^n \,.\, a^{m+1}$

83. $a^{n-1} \,.\, a^{n-1}$

84. $y^{n-1} \,.\, y$

85. $y^{3n-1} \,.\, y^{2-3n}$

86. $c^{x-4} \,.\, c^5$

87. $a^x \,.\, a^{5-2x}$

88. $y^{n-1} \,.\, y^{7-n}$

89. $(-a)^{2n} \,.\, a$

90. $(-a)^{2n} \,.\, (-a)^3$

91. $(-a)^{2n-1} \cdot (-a)^{2n+1}$

92. $\frac{5}{9}a^2bx \cdot \frac{6}{7}ax^3y^2 \cdot \frac{4}{5}a^n bx^n y$

93. $\frac{3}{4}a\,mbx^3 \cdot \frac{4}{5}ab^m x \cdot \frac{5}{6}a^2x^5$

94. $a^{2x-3}y \cdot a^{3x+2y}$

95. $(n+1)^4 \cdot (n+1)$

Шта је основа степена $(n+1)^3$?

96. $(1+a)^6 \cdot 6(a+1)^5 \cdot 5(1+a)$

97. $a^{n+1} \cdot a^{n-1}$

98. $b^{a+1} \cdot b^{1-a}$

99. $c^{4d-1} \cdot + 4 \cdot c^{1-d}$

100. $(m+1)^3 \cdot (m+1)^{a-13} \cdot (m+1)^{1-a}$

101. $(d-1)^3 \cdot (1-d)^3$

Овде се треба сетити да је $(a-b) = -(b-a)$, те је према томе
$(a-b)^2 = [-(b-a)]^2 = (b-a)^2$
$(a-b)^{2n+1} = [-(b-a)]^{2n+1} =$
$= -(b-a)^{2n+1}$

102. $(p-q)^5 \cdot (q-p)^4$

103. $(a-b)^6 \cdot (b-a)^4 \cdot (a-b)^2$

104. $(c-d)^3 \cdot (d-c)^5 \cdot (d-c)^2$

105. $(1-a)^{2n} \cdot (a-1)^{2n+1}$

106. $(a-b)^2\,(b-a)^3\,(b-a)^4\,(a-b)^5$

107. $a^{m-n}b^p c^{q+1} \cdot b^{n-p}c^{p-q} \cdot a^{m+1}b^{2-n}c^{p-1}$

108. $(-3a^2b^{n-1})\,(-5a^{n-3}c^{n+1})\,(-4abc^{x-n})$

109. $(-a)^n b^{3-x} \cdot (-a)^{2n-3}b^{4+x}c^{n-1} \cdot (-a)^{4-n}b.$

Растави ове степене на чинитеље:

110. a^{b+c}

111. b^{p+q}

112. c^{3p+q}

113. m^{a+b+c}

114. q^{m+n+1}

115. x^{n+2}

116. y^{2n+3}

117. z^{3n+1}

118. e^{5n+1}

119. a^{n+m+1}

Изврши означена дељења:

120. $p^r : p^s$

121. $\frac{a^8}{a^6}$

122. $\frac{a^n}{a^4}$

123. $a^3 : a^{x+2}$

124. $\frac{x^3}{x^{n-4}}$

125. $a^{2n} : a^{n-x}$

126. $\frac{a^{5-x}}{a^{3-2x}}$

131. $q^{4n+1} : q^{1+n}$

132. $a^{3m-1} : a^{2m+2}$

133. $a^{n-m} : a^{2m-n}$

134. $(ab)^{4-n} : (ab)^{3+n}$

139. $\frac{a^{n+2}}{a^{2-n}}$

140. $\frac{x^{n-2}}{x^{m+4}}$

127. $\frac{a^4b^4}{a^6b^6}$

128. $\frac{a^{m+1}b}{ab^{m+1}}$

129. $\frac{49x^{n-1}b^{n+2}}{9x^{n+5}b^{3-n}}$

130. $\frac{6x^{m-1}y^{n-2}}{x^{2m+2}y^{3n-3}}$

135. $(abc)^{4m-1} : (abc)^{4-m}$

136. $(ab)^{mn} : ab^{np}$

137. $a(bc)^4 : (bc)^3$

138. $(ab)^3 : ab^3$ Пази!

141. $\frac{a^{4-x}}{a^{5-x}}$

142. $\frac{x^{2m-2}y^{8n-5}}{x^{2n+5}y^{2m-1}}$

143. $\frac{3x^{2m+n}y^m}{4x^m y^{2m-n}}$

144. $\frac{5a^{3x\;\;7}b^5}{3a^{7x+3}b^{2x-1}}$

146. $a^7 : a^5$

147. $(a-b)^3 \cdot (a-b)$

148. $a^3 : b^3$

149. $c^4 ; d^3$

150. $(a^2-b^2)^3 : (a-b)^3$

151. $(a^3+2ab+b^2)^3 : (a+b)^2$

145. $\frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-4}}$

152. $(c-d)^{n-1} : (c-d)^{1-n}$

153. $(a-b)^{2n+1} : (b-a)^{2n}$

154. $(d-a)^{2n} : (a-d)^{2n}$

155. $(aq)^7 : \left(\frac{b}{a}\right)^7$

156. $(a^3-b^3)^4 : (a^2+ab+b^2)^2$

157. $(a^2-4c^2)^2 : (a+2c)^2$

Претвори ове степене у разломак:

158. c^{3-n}

159. d^{2n-5}

160. a^{2n-3}

161. $a^{2-n}b^{n-2}$

162. $2a^2x^{n-2}y^{2-n}$

163. a^{m-n}

164. b^{7-n}

165. x^{n-5}

166. $a^{3-n}b^{n-3}x^3$

167. $4a^{2-x}b^{3x-2}$

Ове разломке напиши у облику целих бројева:

168. $\frac{b}{a^2}$

169. $\frac{ax}{y}$

170. $\frac{ax^2}{y^3}$

171. $\frac{by^2}{a^x}$

172. $\frac{ba^x}{b^{-x}}$

173. $\frac{a}{x^n}$

174. $\frac{1}{a^{2+x}}$

175. $\frac{1}{a^{-x}}$

176. $\frac{15a}{2x^2y}$

177. $\frac{4ax}{aby}$

Изврши означено степеновање:

178. $(a^2)^3$

179. $\left(\frac{a^2b^4}{a^2b^3}\right)^2$

180. $(-a^3)^2$

181. $\frac{(3 \cdot 4^2)^3}{12^2}$

182. $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$

183. $(a^{2n})^3$

184. $(3ab^{n-1})^5$

Изврши степеновање и остале радње:

185. $\left[\frac{(a-b)\,(c-d)}{(d-c)\,(b-a)}\right]^3$

186. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2.$

187. $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)$

188. $\left[\frac{a^2-(b-a)^2}{a-b}\right]^3.$

189. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)$

190. $(a^2)^5$

191. $[(-a)^2]^3 \cdot [(-a)^3]^2$

192. $[(-3a)^2]^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{3a}\right)^3\right]^4$

193. $[(-a)^3]^4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{12}.$

194. $(-a^{2n})^2$

195. $[(a^3)^3]^3$

196. $\frac{(s-r)^{-11} \cdot (r-s)^{-5}}{(r-s)^{-3}}$

197. $\frac{4a^8b^{-5}c^0}{x^{-1}yz^{-1}}$

198. $\frac{36a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$

199. $\frac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \frac{a^4-b^5}{x^0y^{-3}}$

200. c^{mn}

201. $d^{a(b-1)}$

202. $m^{(p-q)(p-q)}$

203. $(a - b)^{2n (m + 1)}$

204. $a^{0} . a^{2}$

206. $a^{n} : a^{0}$

207. $a^{n+1} : (-a)^{0}$

208. $[(m + 1)^{0}]^{7}$

209. $a^{0} . b^{0} . c^{1}$

210. $a^{-4} . a^{4}$

211. $p^{8} . p^{-3} . pq$

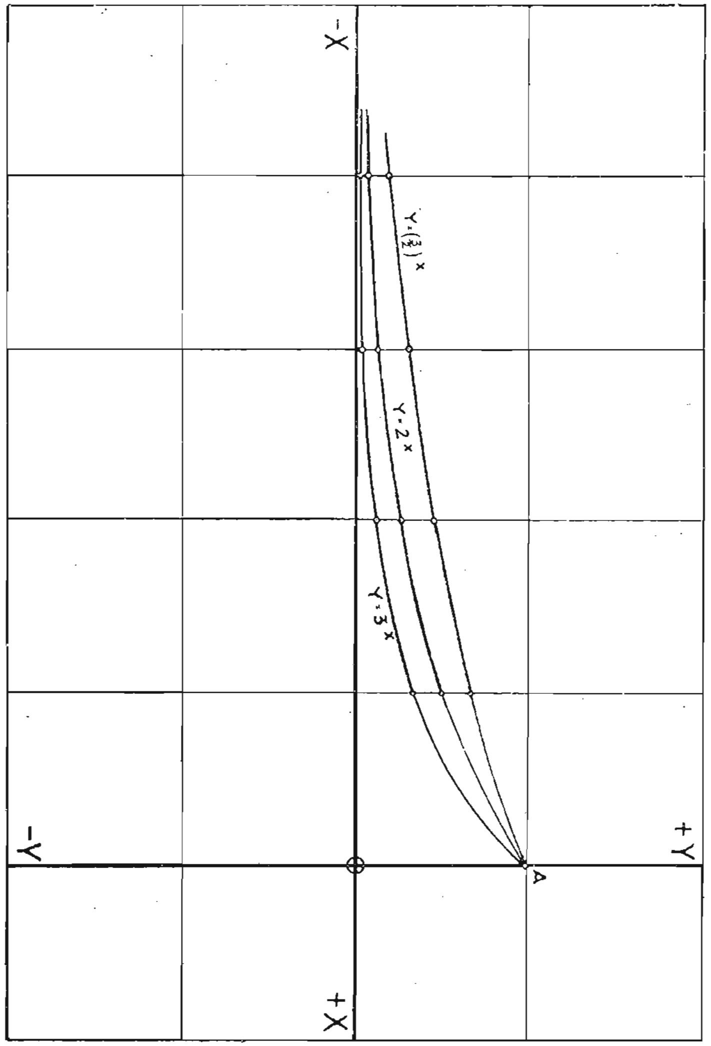
212. $(m + 1)^{-3} (m + 1)^{3}$

213. $\frac{(g + h)^{5} (g + h)^{-7}}{(g + h)^{-2}}$

214. $\frac{(r-s)^{-7} . (s-r)^{-8} . (r-p)^{-3}}{(r-s)^{-2} . (s-r)^{-5} . (r-p)^{-4}}$

215. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{5} . \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} . \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-3}$

216. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} . \frac{1}{(x-y)^{-5}} . (x-y)^{-3}$



Сл. 44.

217. — Претстави графички ову функцију $y = 3^{x}$, узимајући за x само целе негативне вредности.

218. — Претстави графички ову функцију $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ узимајући за x само целе негативне вредности (сл. 44.).

219. — Да ли је апсцисна осовина асимптота и за криву $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$. Докажи.

Извршити ова степеновања:

220. 15^{3}

221. 23^{2}

222. 203^{2}

223. $1,001^{2}$

224. $101,10^{2}$

225. $\left(\frac{12}{13}\right)^{2}$

226. $\left(\frac{7}{6}\right)^{2}$

227. $\left(2\frac{2}{5}\right)^{2}$

228. $\left(14\frac{2}{7}\right)^{2}$

229. $(2,0002)^{2}$

230. $(4,0080)^{3}$

231. $(101,0001)^{2}$

232. $(40,404)^{3}$

233. $(7,05505)^{3}$

234. $(705,0301)^{2}$

235. $(1,35)^{3}$

236. $(14,014)^{3}$

237. $(0,0401)^{3}$

238. $(22,222)^{3}$

239. $(0,0021)^{3}$

240. $\left(3\frac{1}{2}\right)^{3}$

241. $\left(4\frac{1}{7}\right)^{3}$

242. $\left(5\frac{1}{5}\right)^{3}$

Степеновати ове полиноме:

243. $(a - b)^{2}$

244. $(2a - 3b)^{2}$

245. $\left(2\frac{1}{3}a - 3\frac{1}{4}b\right)^{2}$

246. $\left(x - \frac{y}{3}\right)^{3}$

247. $\left(0,5x - 2\frac{1}{3}y\right)^{3}$

248. $\left(3\frac{3}{4}x - 4\frac{1}{3}y\right)^{2}$

249. $(a - 2b - 0,4c)^{2}$

250. $\left(2a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right)^{2}$

251. $\left(2a - 3b - \frac{3}{4}c\right)^{2}$

252. $(a - b + c - d)^{3}$

253. $\left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4}\right)^{2}$

254. $\left(a - \frac{2}{3}b + \frac{c}{4} - \frac{d}{5}\right)^{2}$

255. $(a - b + c)^{2}$

256. $\left(\frac{2}{3}a - \frac{4}{5}b\right)^{2}$

257. $(0,5a - 2,1b)^{3}$

258. $\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{c} + \frac{c}{6}\right)^{2}$

259. $(x^{3} - ax^{2} + bx)^{3}$

260. $(ax + bx^{2} - cx^{3} + dn^{4})^{3}$

261. $(1,5x - 3,2y + 5z)^{2}$

262. $\left(a - 2b - \frac{c}{4} - d\right)^{3}$

263. $(x - y + cz - 1)^{3}$

264. — Сабери ове корене:

$$\sqrt{2}, -\sqrt{6}, +\sqrt{18}, -\sqrt{20}, +\sqrt{24}, -4\sqrt{20}.$$

Напомена. — Кадгод поткорена количина није потпун степен неког броја, треба је увек по могућству раставити на чинитеље, од којих ће један бити потпун степен. У горњем примеру можемо извршити ово:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 . 9} = \sqrt{2} . \sqrt{9} = \sqrt{2} . 3 = 3\sqrt{2}$$ и т. д.

265\. — Сабери корене:

$\sqrt{7}, - 3\sqrt{14}, + \sqrt{63}, - \sqrt{84}.$

266\. $8\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

267\. $9\sqrt{3} - 8\sqrt{54} + 10\sqrt{27}$

268\. $6\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{3x} - 2\sqrt{4x} + \sqrt{12x} - \sqrt{18x}$

269\. $7\sqrt{4x} + 4\sqrt{9x} + 3\sqrt{45x} - 5\sqrt{36x} - 2\sqrt{18x}$

270\. $4\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

271\. $7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}$

Измножи ове корене:

272\. $\sqrt{3} . \sqrt{6}$

273\. $\sqrt[4]{n} . \sqrt[4]{n^3} . \sqrt[4]{n^5}$

274\. $\frac{2}{5}\sqrt[5]{x^4} . \frac{3}{8}\sqrt[5]{x^3} . 6\frac{2}{3}\sqrt[5]{-\frac{a^7}{x}}$

275\. $5\sqrt[3]{12a^2} . 0,14\sqrt[3]{\frac{x}{a}} \cdot \frac{10}{21}\sqrt[3]{18a^8}$

276\. $0,8\sqrt[3]{5a^2b^4} . 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{11}{3}a^2b^7}$

277\. $\sqrt[n-1]{a^{n+5} . b^{5-n} c^n} . \sqrt[n-1]{a^{1-n} b^{n-3} . c^{2(1-n)}} . \sqrt[n-1]{a^{n-7} b^{2(n-1)} c^{n-2}}$

278\. $\sqrt[3]{\frac{3ab}{4}} . 5\sqrt[3]{\frac{a}{3}+\frac{5}{b}}$

279\. $\sqrt[3]{\frac{a^2 - 2ax}{ax - 3x^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ax - 2x^2}{a^2 - 3ax}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 - x^2}{2 - a}}$

Изврши ово кореновање:

280\. $\sqrt[3]{a^5 b^5 c^6}$

281\. $\sqrt[5]{a^7 b^8 c^{10}}$

282\. $\sqrt[n]{a^{2n} b^{n+3} c^{3n-1}}$

283\. $\sqrt[2n]{a^{6n} b^{4n} c^{3n}}$

284\. $\sqrt[3]{27 . 64 . 125 . (-729)}$

285\. $\sqrt{9 . 5 . 36 . 64 . 81 . 50}$

Подели ове корене:

286\. $\sqrt{72} : \sqrt{0,5}$

287\. $9\sqrt{\frac{1}{45}} : 1,5\sqrt{2\frac{2}{5}}$

288\. $\sqrt[3]{-\frac{7}{8} a^5 x^2} : 0,25\sqrt[3]{8a^2x^5}$

289\. $\sqrt[n]{a^2 x^{-1}} : 0,2a\sqrt[n]{a^{2-n} n^{-5} x^{-1}}$

290\. $\sqrt[3]{2x^3} : \sqrt[3]{1,6x}$

291\. $\frac{x^n}{b^2}\sqrt[n]{a^{2n-1} b^{n-5}} : \frac{a}{bx}\sqrt[n]{\frac{b^{-5}}{ax^{-5}}}$

292\. $\sqrt[7]{\frac{2a . x}{a + x}} : \sqrt[n]{1 \frac{x}{a + x}}$

293\. $\sqrt[3]{704} : 4\sqrt[3]{33}$

294\. $\sqrt[4]{9an - 15bn} : \sqrt[4]{48an - 80bn}$

295\. $\sqrt[6]{\frac{2a - 2b^7}{nx}} . \sqrt[6]{\frac{a - b^2}{2bx}}$

Изврши означене радње:

296\. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

297\. $(\sqrt[n]{4xp^{n-1}})^2$

298\. $\sqrt[3]{\frac{a^2 b^3 c^9}{m^3 n^{12}}}$

299\. $\sqrt[n]{\frac{a^{2n} b^{n-1} c^{n+1}}{m^n p^{n+3}}}$

300\. $\sqrt{\frac{(a - b)^6 (c - d)^8}{(b - a)^8 (b - c)^6}}$

301\. $(\sqrt[r]{ab})$

302\. $\left(a - 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{nx^{-2}}} . \sqrt[4]{\frac{nx^2}{a^3}}\right)^{-4}$

303\. $\sqrt[n]{a^{2nd}}$

304\. $\sqrt[6]{12^{12}}$

305\. $\sqrt[p]{\frac{x^{pn}}{a^p c^{2p}}}$

306\. $\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right)^{n-1}$

307\. $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{a - x}}\right)^6$

308\. $(\sqrt[x]{a^n})^{10x}$

309\. $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[3]{a^3c}}\right)^{10}$

310\. $\sqrt{-\frac{243a^5x^{10}}{b^5z^{20}}}$

311\. $\sqrt{\frac{a^{12} b^{-2} c^6}{64n^{18} x^{-4}}}$

312\. $\sqrt[6]{a^{-6(n-1)} x^{-3(2n-4)}}$

313\. $a^{\frac{1}{n}}$

314\. $a^{\frac{3p}{b}}$

315\. $b^{\frac{7}{8}}$

316\. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

317\. $\left(\frac{4}{9}\right)^{1\frac{1}{3}}$

318\. $n^{2,5}$

319\. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

320\. $125^{\frac{1}{2}}$

321\. $32^{\frac{1}{5}}$

322\. $243^{0,6}$

323\. $1000^{\frac{2}{3}}$

324\. $(0,25)^{0,5}$

325\. $100^{\frac{1}{2}}$

326\. $(0,27)^{\frac{2}{3}}$

Напиши ове корене у облику степена:

327\. $\sqrt[3]{x^7}$

328\. $a\sqrt[4]{x}$

329\. $a\sqrt[n]{x}$

330\. $b\sqrt{3ax^3}$

331\. $\sqrt[3]{2ax^4}$

Напиши ове изразе без разломачке црте и без кореног знака, а да им се вредност не промени;

332. $\frac{\sqrt{x}}{y}$

333. $\frac{a}{\sqrt{x}}$

334. $\frac{c}{x^2\sqrt{xy\sqrt{xy_3}}}$

335. $\frac{axy}{\sqrt{xy\sqrt{xy}}}$

336. $\frac{4ax}{\sqrt{x\sqrt{x+1}}}$

337. — Посматрати функцију $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ од $x_1 = -1$ до $x_2 = +1$. Узми $x = -\frac{9}{10}$ па $x = -\frac{8}{10}$, $x = -\frac{7}{10}$. . . . .

338. — Посматрати функцију $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ од $x_1 = -1$ до $x_2 = +1$.

339. — Посматрати функцију $y = \left(2\frac{1}{2}\right)^x$ од $x = -1$ до $x = +1$.

Извршити означене радње:

340. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$

341. $\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt[6]{12}$

342. $\sqrt[10]{a^2b^0}\cdot\sqrt[6]{a^5b^7}$

343. $\sqrt[x-1]{a^{x+1}}\cdot\sqrt[x+1]{a^{q-1}}$

344. $\sqrt[m]{a^{m\ \ n}}\sqrt[u]{a^{n\ \ 1}}$

345. $\sqrt[2x]{n} : \sqrt[3x]{a^x n\ \ 1}$

346. $\sqrt[3]{-8} : \sqrt[2]{8}$

347. $\sqrt{\frac{3a^3}{8b^2}} : \frac{a}{b}\sqrt{2a^{\ \ 1}b}$

348. $\sqrt[q]{\sqrt[p]{2x^n}}$

349. $\sqrt[r]{\sqrt[n]{n^r}}$

350. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16a^4}}$

351. $\sqrt{\sqrt[3]{x^{10}}}$

352. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{15}}}$

353. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^{13}}}}$

354. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

(У вежбању 354. треба најпре увући a под други корен. Знамо да је $a = \sqrt{a^2}$
Према томе ће бити:

$$a\sqrt{a} = \sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{a} = \sqrt{a^3}.$$

Отуда:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt{a}.\Big)$$

355. $\sqrt{a^2\sqrt{x}}$

356. $\sqrt{-ab^2\sqrt[3]{a}}$

(Овде треба ставити:
$-ab^2 = \sqrt[3]{(-ab^3)^3}$)

357. $\sqrt[5]{2500\sqrt{50}}$

358. $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}}$

Скрати корен:

361. $\sqrt[3]{\frac{a^6b^9c^{12}}{m^6n^{18}}}$

362. $\sqrt[9]{\frac{m^{12}n^{21}}{x^{24}}}$

363. $\sqrt[5]{\frac{y^6b^7}{c^{10}}}$

Изврши ово кореновање:

368. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{8}}}}$

369. $\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{a^{-1}x^{-1}\sqrt{\frac{x^3}{a}}}}$

370. $\sqrt{256787}$

371. $\sqrt[4]{a^2x\sqrt[3]{\frac{1}{a^{10}x^{10}}}}$

378. $\sqrt{0{,}0003785}$

379. $\sqrt{0{,}7128}$

380. $\sqrt{0{,}00070128}$

381. $\sqrt{24567{,}89014}$

382. $\sqrt[3]{9261}$

383. $\sqrt[3]{68921}$

384. $\sqrt[3]{373248}$

385. $\sqrt[3]{0{,}000343}$

386. $\sqrt[3]{480{,}048687}$

387. $\sqrt[3]{0{,}000050653}$

359. $\sqrt{2\sqrt[3]{2x^2}\,.\,\sqrt[6]{2x^{-1}}}$

360. $\sqrt[3]{8\sqrt{2\sqrt{2}}}$

364. $\sqrt[4]{\frac{x^5y^7}{z^8}}$

365. $\sqrt[6]{\frac{x^{32}y^{15}}{z^8}}$

366. $\sqrt[3]{x^6(-y^9z^3)}$

367. $\sqrt[4]{x^8y^0z^3}$

372. $\sqrt{23456789}$

373. $\sqrt{345678}$

374. $\sqrt{45678964}$

375. $\sqrt{6001270809}$

376. $\sqrt{9820611810}$

377. $\sqrt{0{,}099}$

388. $\sqrt[3]{0{,}005240822553}$

389. $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$

390. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

391. $\sqrt[4]{64}$

(Сети се да је $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$)

392. $\sqrt[4]{0{,}0016}$

393. $\sqrt[4]{0{,}81}$

394. $\sqrt[4]{8{,}1}$

Извуци квадратни корен из ових полинома

395. $4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$

396. $9x^2 + 4y^2 + 1 - 12xy + 6x - 4y$

397. $1 + 16x^2 + 25y^2 - 8x + 10y - 4xy$

398. $a^2 + 4x^2 + y^2 - 4bx + 2bcy - 4cxy$

399. $b^2 + 4x^2 + c^2y^2 - 4bx + 2bcy - 4cxy$
400. $40xy + 16xz + 20yz + 16x^2 + 25y^2 + 4z^2$
401. $12a + 24x - 6y - 16ax + 4ay - 8xy + 9 + 4a^2 + 16x^2 + y^2$
402. $1\frac{1}{2}x^{12} + 15a^{16} + \frac{x^8}{256} - 8x^{14} - \frac{4}{9}x^{10}$

(Најпре уреди полином!)

403. $12{,}5x^4y^4 + 0{,}0625x^8 - 54x^2y^6 + 81y^8 - 1{,}5x^6y^2$
404. $24\,a^{6n-8}\,b^6 + a^{4n-12}\,b^8 + 16\,a^{8n-4}\,b^4 - 8\,a^{5n-10}\,b^7 - 32a^{7n-5}\,b^6$

405. — Нађи на бројној осовини приближно место ирационална броја $\sqrt{5}$

406. — Исто за $\sqrt{17}$
407. — Исто за $\sqrt{26}$
408. — Исто за $\sqrt{37}$
409. — Исто за $\sqrt{48}$
410. — Исто за $\sqrt{75}$
411. — Исто за $\sqrt{163}$

Напомена. — При вежбањима 405 до 411 границе између којих лежи ирационалан број сузи до 3 децимала тачно.

Ирационалним бројевима из вежбања 405 до 409 одреди *тачно* место на осовини.

Уклони ирационале бројеве из именитеља ових разломака:

412. $\frac{an}{\sqrt{n}}$
413. $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{c}}$
414. $\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{b}}$
415. $\frac{2\sqrt{3-a}}{3\sqrt{6}}$
416. $\frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{a}}$
417. $\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4}}$

[Овде треба приметити да $a^2 - 4$ није степен ниједног до сад нама познатог рационалног израза. Према томе га треба замислити на првоме степену: $(a^2 - 4)^1$. До квадрата му недостаје чинитељ $(a^2 - 4)^1$].

418. $\frac{a}{\sqrt[3]{x}},\ \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}},\ \frac{a}{\sqrt[4]{x}},\ \frac{a}{\sqrt[4]{x^3}},\ \frac{a}{\sqrt[7]{x^4}},$
419. $\frac{5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$
420. $\frac{3\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ (Може ли се скратити са 3?)
421. $\frac{6}{\sqrt{3} - 5}$
422. $\frac{a\sqrt{a}}{a + \sqrt{2a}}$
423. $\frac{11 - 4\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}$
424. $\frac{1\frac{1}{2} - 0{,}8\sqrt{2}}{3 - 4\sqrt{\frac{1}{2}}}$
425. $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$
426. $\frac{0{,}6\sqrt{5} - 0{,}4\sqrt{2}}{0{,}2\sqrt{5} - 0{,}3\sqrt{2}}$

427. — Нађи на координатном систему ове бројеве:
$2 + 3i,\ 2 - 3i,\ 3 + 5i,\ -4 + 6i,\ -9 + 3i.$

428. — Исто за бројеве:
$4 + i,\ 3 + 5i,\ 2 + 3i,\ 1 + 4i,\ \frac{1}{2} + 5i.$

429. — Исто за бројеве:
$1 - i,\ 2 - 2i,\ 3 - 3i,\ 4 - 4i,\ 4 - 5i,\ 5 - 4i,\ 5 - 3i,\ 5 - 2i.\ 5 - i.$

Нађи вредност ових степена од i:

430. i^{25} 431. i^{37} 432. i^{53} 433. i^{60}
434. i^{20} 435. i^{28} 436. i^{50} 437. i^{1111}
438. i^{1074} 439. i^{17846} 440. ^{2567}

Сабери ова два комплексна броја:

441, $17 + 18i$ и $12 - 14i$
442. $10 + 12$ и $14 - 7i$
443. $2i - 17$ и $14i + 9$
444. $4i - 5$ и $5 - 3i$
445. $1 - 2i$ и $3i + 4$
446. $7i - 9$ и $6 + 8i$

447. — Од броја $7 + 3i$ одузми број $4 - 5i$.
448. „ „ $2 + 5i$ „ „ $6 - 7i$.
449. „ „ $4 - 7i$ „ „ $8 + i$.
450. „ „ $5 - 3i$ „ „ $5 + 3i$.
451. „ „ $7 + 4i$ „ „ $3i + 5$.
452. „ „ $8 + 9i$ „ „ $4i - 3$.

453. — Помножи број $3i - 7$ бројем $4 - 9i$.
454. „ „ $2i + 6$ „ $3i - 2$.
455. „ „ $4 + 2i$ „ $4 - 3i$.
456. „ „ $3 + 2i$ „ $4 - 5i$.
457. „ „ $2 + 3i$ „ $7 - 8i$.
458. „ „ $4 + 5i$ „ $9 + 3i$.
459. „ „ $7 + i$ „ $i - 5$.
460. „ „ $1 + i$ „ $1 - 12i$.

461. — Број $11 + 10i$ подели бројем $2 + 3i$.
462 — „ $-32 - i$ „ „ $i - 1$.
463. „ $18 - 2i$ „ „ $5 + 4i$
464. „ $23 - 2i$ „ „ $4 + 5i$.
465. „ $7 - i$ „ „ $2 + 3i$.
466. Број $4 + 5i$ подели бројем $5 - 4i$.
467. „ $7 + 8i$ „ „ $8 - 9i$.
468. „ $6 - 3i$ „ „ $5 + 2i$.
469. „ $8 - 7i$ „ „ $i + 8$
370. „ $4 + 3i$ „ „ $3i - 2$.

Напиши ове бројеве у облику збира степена од 10:

471. 34 475. 2007 479. 0,356 483. 1,036
472. 549 476. 43256 480. 0,234789 484. 15,02307
473. 703 477. 0,3 481. 0,0027 485. 405.306
474. 1206 478. 0,45 482. 0,4005 486. 405070,70809
487. 230450,003 488. 4000050002,00708001

Шта претстављају ови полиноми:

489. $a \cdot 10 + b \cdot 10^0$
490. $a \cdot 10 + c$
491. $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \cdot 10^0$
492. $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$
493. $a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + g\,.$

Имамо десет знакова за писање бројева: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Првих десет су вредносне цифре. Десета (нула) је цифра без вредности. Она само попуњава празна места.

Колико бројних знакова је потребно да се напише овакав број:
(кад су a, b, c, d, e и f једноцифрени бројеви)

494. $a \cdot 10^3 + b.$ (Напиши један такав број.)
495. $a \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + e.$ „ „ „ „
496. $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c.$ „ „ „ „
497. $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f.$

(Напиши један такав број. Ако је $b = c = d = 0$, колико вредносних цифара морамо употребити да напишемо тај број?)

Објасни ове бројеве:

498. $a \cdot 10 + b$ и $b \cdot 10 + a$ Напиши два таква броја.
499. — Исто за $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ и $c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$.
500. — Докажи ово: „Број је дељив бројем 10, ако му је на крају нула“.
501. — „ „ „ „ „ „ 5, „ „ „ „ „ 0 или 5“.
502. — „ „ „ „ „ „ 2, „ „ „ „ „ 0, или парна цифра.
503. — „ „ „ „ „ „ 9, ако му је збир цифара дељив са 9“

САДРЖАЈ.

МИЛАН С. НЕДИЋ

АЛГЕБРА

ЗА ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

— ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ —

Препоручена од Главног просветног савета и одобрена
за уџбеник одлуком господина Министра просвете
С. н. бр. 25631 од 27 јула 1929 год.

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1, Кнез Михаилова улица 1.

ОД ИСТОГ ПИСЦА

ГЕОМЕТРИЈА

за пети разред средњих школа
(друго издање по новоме програму).

ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ГЕЦЕ КОНА, Београд

ШТАМПА: „ПРИВРЕДНИК“ — 1930 год.

АЛГЕБРА

ЗА
ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА
ОД ПРОФЕСОРА М. С. НЕДИЋА

I — ПРВЕ ЧЕТИРИ РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С МОНОМИМА

Сабирање и одузимање монома

Мономи. — Да се сетимо монома, навешћу неколико примера.

Примери:

$$2a, \; 3x, \; -4y,$$

Наведени мономи значе ово:

$$2a = a + a$$
$$3x = x + x + x$$
$$-4y = (-y) + (-y) + (-y) + (-y)$$

Посебни бројеви у моному сви заједно зову се **сачинитељ** или **коефицconfiguration**. Сви општи бројеви у моному (писмена) зову се **главна количина**.

У наведеним примерима су

сачинитељи:	2	3	— 4
главне количине:	a	x	y

Једноимени мономи. — Мономи који имају једнаке главне количине зову се једноимени мономи.

Примери једноимених монома:

I $\quad 2x \qquad 3x \qquad -4x \qquad -\frac{3}{5}x.$

II $\quad -3xy \qquad -\frac{2}{3}xy \qquad -10xy \qquad 7xy.$

Једноимени мономи зову се још и *слични мономи*.

Сабирање монома. — Да додамо моному 2a моном 3a.

$$\begin{array}{r} 2a = a + a \\ 3a = a + a + a \\ \hline 2a + 3a = a + a + a + a + a \end{array}$$

Једноимени се мономи сабирају, кад се збир сачинитеља помножи главном количином.

Одузимање монома. — Од монома 6x да одузмемо моном 2x.

$$\begin{array}{l} \quad 6x = x + x + x + x + x + x \\ \quad 2x = x + x \\ \hline 6x - 2x = x + x + x + x + x + x - x - x \\ 6x - 2x = 4x \end{array}$$

Једноимени мономи одузимају се, кад се разлика сачинитеља помножи главном количином.

Напомена. — За сабирање разноимених монома немамо правила. Њихово сабирање само се означи. Н. пр., кад хоћемо да кажемо да треба на 3x додати 2y, ми то само овако означимо: $3x + 2y$.

ВЕЖБАЊА

1. $2x + 3x + 4x$
2. $2a + 5a + 7a + 8a$
3. $4x + 3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3}x$
4. $0{,}5x + 2{,}7x + 3{,}8x$
5. $7y + 2y + 3\frac{1}{4}y + 2\frac{7}{12}y$
6. $1\frac{1}{3}xy + 2\frac{1}{5}xy + 0{,}7\,xy$
7. $3\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{5}x + 7x + 0{,}02x$
8. $2z + 0{,}2z + 2{,}02z + 2{,}002z$
9. $5ax + 2ax + 3{,}5ax + \frac{1}{4}ax$
10. $4by + 8by + 3\frac{1}{3}by - 9\frac{1}{4}by$
11. $7x - 3x$
12. $7y - 2y$
13. $12\frac{1}{2}y - 10y$
14. $4{,}72 - 2a$
15. $8{,}7z - 4z$
16. $9\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab$
17. $19\frac{1}{3}xy - 6\frac{1}{2}xy$
18. $7\frac{5}{6}m - 4\frac{1}{3}m$
19. $0{,}7x - 1\frac{1}{3}x$
20. $18\frac{2}{5}m - 11{,}4\,m$
21. $12\frac{3}{4}n - 13\,n$
22. $(3a + 4a) - 5a$
23. $(4x + 9x) - 7x$

24. $(2x + 3x + 7x) - (2x + 8x + 9x)$
25. $(3\frac{1}{2}y + 9\frac{1}{3}\cancel{3}y + 7y) + (17y - 8\frac{1}{3}y)$

Полином. — Збир од неколико монома зове се полином:

$$3x + 4y + 5z + 8a$$

Сваки такав сабирак — моном — зове се члан полинома, Наш горњи полином има четири члана.

И ово је полином:

$$5x - 3y + 5z - 9a$$

Њега можемо овако да напишемо у облику збира:

$$2x + (-3y) + 5z + (-9a)$$

Сад се јасно виде његови чланови. Они су:

$$+2x, \ -3y, \ +5z, \ -9a.$$

На то добро обрати пажњу! Кад хоћеш да одређујеш чланове једног полинома, мораш тај полином написати у облику збира, па ћеш тек онда имати јасно изражене све чланове полинома. Добро се извежбај у томе! Види вежбања из овог одељка!

Свођење полинома. — Да би полином добио простији облик ми скупљамо једноимене мономе у један члан. Тај посао зове се свођење полинома.

Пример. — Свести полином.

$$3x^2 + 4x + 7 - 9x^2 + 9x + 8x^2 - 10 + 2x + 5$$

Најпре скупимо чланове са x^2

$$3x^2 - 9x^2 + 8x^2 = 2x^2$$

Затим чланове са x:

$$4x + 9x + 2x = 15x$$

Најзад чланове без x:

$$7 - 10 + 5 = 2$$

Кад сведемо дати полином, он овако изгледа:

$$2x^2 + 15x + 2$$

Он није променио вредност. Да се уверимо! Нека је $x = 3$ Тада дати полином добија ову вредност:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 7 - 9 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 3^2 - 10 + 2 \cdot 3 + 5 = \\ &= 27 + 12 + 7 - 81 + 27 + 72 - 10 + 6 + 5 = 27 + 12 + 7 + \\ &+ 27 + 72 + 6 + 5 - 81 - 10 = 156 - 91 = 65 \end{aligned}$$

Да му израчунамо вредност за $x = 3$ у сведеноме облику.

Биће: $2x^2 + 15x + 2$

$2 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 2 = 18 + 45 + 2 = 65.$ Тачно је.

Степен полинома. — Ако хоћемо да одредимо степен полинома по извесноме писмену, морамо *најпре свести полином*; затим одредити степене свих монома у полиному по томе писмену. *Највећи степен монома јесте степен полинома.*

Пример. — Дат је полином

$$3xy^2 - 4x^2z - 3x^3yz - 4xy^2 + 5x^2z.$$

После свођења, наш полином добија овај облик

$$-xy^2 + x^2z - 3x^3yz.$$

Степени од x су

1 2 3.

Према томе овај полином је *трећег* степена по x. Степени од y су: 2 0 1.

Према томе овај полином је *другог* степена по y. Степени од z су: 0 1 1.

Према томе овај полином је *првог* степена по z.

Степени од x и y јесу:

$(1 + 2)$ $(2 + 0)$ $(3 + 1)$

то јест 3 2 4

Према томе овај полином је *четвртог* степена по x и y.

Степени од x и y и z су:

$(1 + 2 + 0)$ $(2 + 0 + 1)$ $(3 + 1 + 1)$

то јест 3 3 5.

Према томе овај полином је *петог* степена по x и y и z.

Хомогени полиноми. — Ако сви чланови једног полинома имају исти степен, полином је *хомоген*, а тај степен је *степен хомогености*.

Пример I. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

степени су $(3 + 0)$ $(2 + 1)$ $(1 + 2)$ $(0 + 3)$.

Сви чланови су 3 степена; значи да је полином хомоген и да му је степен хомогености 3.

Пример II.

$$5x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 - 5xy^3 + 4y^4.$$

Ово је хомогени полином 4 степена хомогености.

Полином с једном променљивом. — При доцнијем раду видећемо да нам је неко писмо у полиному веома важно. Таква писмена обично обележавамо са x, y, z, u, v, w и зовемо их *непознате или променљиве*. Све апсолутне бројеве и остала писмена која се у мономима нађу уз *променљиву*, сматрамо као њен сачинитељ. Полином који садржи једну такву променљиву у разним степенима зове се *полином с једном променљивом.*

Ако се променљива ни у једноме члану полинома не налази у имениотељу, полином је *цео по тој променљивој.*

Степен полинома је највиши степен непознате која се појављује у томе полиному.

Пример I.

$$2x^4 - 3x^3 - 5x - 7x^2 + 8x + 2x^3 - 2x^4 + 5.$$

Кад га сведемо и уредимо видимо да је то полином:

$$-x^3 - 7x^2 + 3x + 5.$$

Овај полином је полином трећег степена и *цео по иксу.*

Пример II.

$$ax^3 - \frac{b}{x} + 2x^2 + 7.$$

Овај полином *није* цео по иксу, јер се непозната (x) налази у једноме члану у имениотељу.

Општи облици полинома. — Служећи се писменима, можемо изразити опште облике полинома с једном променљивом свију степена. Тако израз

$ax + b$	представља општи облик полин.	*првог* степ.
$ax^2 + bx + c$	„ „ „ „	*другог* „
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	„ „ „ „	*трећег* „
$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + ax + q$	„ „ „ „	*ентог* „

Корени једног полинома по x. — Оне вредности икса за које се полином своди на нулу, зову се *корени тога полинома.*

Пример I.

$$P = 5x - 10$$

Ако сменимо x са 2, имаћемо

$$P = 5\,.\,2 - 10 = 0$$

горњи полином P је сведен на нулу. То значи да је 2 *корен* горњег полинома.

Пример II.

$$P = 4x^2 - 13x + 3.$$

Ако ставимо за x вредност 3, добићемо:

$P = 4\,.\,9 - 13\,.\,3 + 3 = 36 - 39 + 3 = -3 + 3 = 0.$

Значи да је 3 *корен* горњег полинома.

Ако ставимо за x вредност $\frac{1}{4}$, добићемо:

$$P = 4 \,.\, \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 13 \,.\, \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{4} - \frac{13}{4} + 3 = \frac{1}{4} - \frac{13}{4} + \frac{12}{4} =$$

$$= - \frac{12}{4} + \frac{12}{4} = 0.$$

Значи да је и $\frac{1}{4}$ *корен* горњег полинома.

Одређивање корена једног полинома јесте један веома важан задатак Алгебре. Тиме ћемо се бавити мало доцније.

ВЕЖБАЊА

Кажи сваки члан посебице у овим полиномима, па онда сведи.

1. $3x + 4 - 7x + 8 - 9\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4}x$
2. $3x^2 + 5x - 7 + 8x + 9 - 11x^2 - 9$
3. $2\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{7}x^2 - 9 - 8\frac{1}{2}x - 9x^2 - 7$
4. $3{,}3x + 8x^2 - 9x + 10 - 11x^2 + 12 - 13x + 7{,}4x^2$
5. $8x^3 + 9x + 7x - 8x^2 + 12 - 17x + 8x^3 + 9x^2 - 11$
6. $3x^4 - 8x + 9x^3 - 5x^2 - 7x + 8x^2 - 9x^4 + 10x^3 - 2$
7. $4y - 7y^4 - 9y - 8y^3 + 9y^2 - 7y^4 + 8y^3 + 12 - 12y - 7y^4 + 8y^3$
8. $3x^2 - 7 + 8y^2 - 9 + 5y^2 - 7y^2 + 8x^2 - 9$
9. $3x^2 + 96 - 7y^2 + 5x - 9y + 17 - 20 + 5y + 7y^2 - 3 + 8y^2$
10. $19x + 13y + 7y^3 - 8x^2 + 19 - 7x^2 + 9y^2 - 7x + 8y - 9y^2 + 7y$

Множење монома

Моном се множи мономом, кад се производ сачинитеља помножи производом главних количина.

Примери:

I $2x \,.\, 3x = 2 \,.\, 3 \,.\, x \,.\, x = 6x^2$

II $(-x)\,(-2x)\,(-3y) = (-1)\,(-2)\,(-3)\,xxy = -6x^2y$

III $(-3x)\,(-4y) \,.\, 4y^2 = (-3)\,(-4)\,(+4)\,xyy^2 = 48xy^3$

IV $(-3x^2)\,(-4y^3) = 12x^2y^3$

V $(-4y^3) \,.\, 2y^4 = -8y^7$

ВЕЖБАЊА

Помножи ове мономе:

1. x^2 и x^4.
2. a^2 и a^9
3. $\frac{1}{2}ax$ и $4x^2$.
4. $\frac{3by}{4}$ и $\left(-\frac{4ay^3}{9}\right)$.
5. ax и $(-\frac{1}{2}bx^2)$.
6. $\frac{xy^2}{4}$ и $\left(-\frac{12xyz^2}{9}\right)$

---

7. $\frac{3}{5}a^4x^3 \,.\, \frac{-a^2x^4}{3} \,.\, \frac{-a^3x^7}{6} \,.\, \frac{2abx^2}{7}$.
8. $-\frac{5a^2x^4}{6} \,.\, \frac{3abcx^7y}{4} \,.\, \frac{-4a^2c^2y^3}{4} \,.\, \frac{-3xy^3}{4}$.
9. $a^2b \,.\, b^2c \,.\, c^2d$.
10. $abx \,,\, (-bcx) \,.\, (-acx)$
11. $-\frac{3ax^2}{5\sqrt{3}} \,.\, \frac{5\sqrt{3}}{3ax^2}$
12. $-\frac{\sqrt{7}\,xy}{9} \,.\, \frac{9}{\sqrt{7}\,xy}$

Дељење монома

Моном се дели мономом, кад се количник сачинитеља помножи количником главних количина.

Примери:

I $4x^5 : 2x^2 = (4 : 2)\,(x^5 : x^2) = 2x^3$

II $(-8x^7) : (-6x^3) = [(-8) : (-6)]\,(x^7 : x^3) = \frac{4}{3}x^4$

III $25a^3b^2 : (-5\,ab) = -5a^2b.$

IV $(-5a^2x^3) : 3a^2x = \frac{-5a^2x^3}{3a^2x} = -\frac{5}{3}x^2$

У количнику нема више писмена a; оно је ишчезло, јер му је изложитељ $2 - 2 = 0$. Кад један моном има једно слово са изложитељем нула, значи да се то слово појављује *нула пута као чинитељ*, то јест *не* појављује се као чинитељ, — нема га. У осталом, јасно се види да се горњи разломак може скратити са a^2.

ВЕЖБАЊА

Подели ове мономе:

1. $b^6 : b^3$.
2. $-7\,xy^2z^3 : yz$
3. $5x^3 : (-x^2)$
4. $3x^5 : (-5x^3)$
5. $8a^3b : (-2ba^2)$,
6. $-3x^2y^2z^2 : 3xyz$.
7. $-33x^2yz^3 : 5xz^2$.
8. $\frac{7}{3}x^3y^4 : (-\frac{3}{7}xy^3)$.
9. $\frac{\sqrt{3}\,ab^2}{7} : \left(-\frac{7\,ab^2}{\sqrt{3}}\right)$.
10. $\frac{3\,ab\,c^3d^4}{8} : \left(-\frac{bcd}{3}\right)$.

II РАД СА ПОЛИНОМИМА

Сабирање и одузимање полинома

Додавање збира. — Збир се додаје неком броју, кад се томе броју додаду појединачно сви чланови тога збира.

Узми да је $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, па се увери да је

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Кад радимо усмено, увек се служимо тим правилом Н.пр. $32 + 26 = 32 + (20 + 6) = (32 + 20) + 6$

Додавање разлике. — Некоме броју додаје се разлика, кад му се дода умањеник, а одузме умањитељ.

$$a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c$$

Нека је $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Тада је $a + (b - c) = 5 + (4 - 3) = 5 + 1 = 6$

Израз $(a + b) - c$ постаје $(5 + 4) - 3 = 9 - 3 = 6.$

Одузимање збира. — Од некога броја одузима се збир, кад се од њега појединачно одузму сви сабирци.

$$a - (b + c) = (a - b) - c = a - b - c$$

Узмимо да је $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

Тада је $a - (b + c) = 2 - (3 + 4) = 2 - 7 = -5$

Даље је $2 - 3 - 4 = -1 - 4 = -5.$

Одузимање разлике. — Од некога се броја одузима разлика, кад се одузме умањеник, а дода умањитељ.

$$a - (b - c) = (a - b) + c = a - b + c$$

Узмимо да је $a = 1$, $b = 10$, $c = 8$.

Биће $a - (b - c) = 1 - (10 - 8) = 1 - 2 = -1.$

Даље је $a - b + c = 1 - 10 + 8 = -9 + 8 = -1.$

Скидање заграда. — Из горњих примера види како се скидају заграде пред полиномом.

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c \\ a + (b - c) &= a + b - c \\ a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c \end{aligned}$$

Кад је пред заградом знак плус (+) одбацује се и тај знак и заграда, а чланови полинома се ређају са својим знацима.

Кад је пред заградом знак минус (—), одбацује се и тај знак и заграда, а чланови полинома се ређају са супротним знацима.

Сабирање и одузимање полинома. — За сабирање и одузимање полинома постоји ово правило:

Кад је дато више полинома да се саберу или одузму, треба све заграде пред којима је знак (+) просто скинути заједно са знацима +, а чланове тога полинома исписати са њиховим знацима уз чланове предњег полинома. Ако је пред полиномом знак минус, треба скинути знак и заграду, а чланове тога полинома исписати са супротним знацима. Тако добивени једач полином треба затим свести и уредити. Ако пред заградом нема знака, сматрамо да стоји знак +.

Пример. — Извршити означене радње:

$$(4x^4y + 5x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4 - 8y^5) - (4x^4y - 5x^3y^2 + 6x^2y^3 - 7xy^4 + 8y^5) - (x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5) + (6x^4y - 5x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3xy^4 + 2y^5) =$$

$$\begin{array}{r} 4x^4y + 5x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4 - 8y^5 \\ -4x^4y + 5x^3y^2 - 6x^2y^3 + 7xy^4 - 8y^5 \\ -x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 \\ 6x^4y - 5x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3xy^4 + 2y^5 \\ \hline 5x^4y + 6x^3y^2 - 4x^2y^3 + 10xy^4 - 13y^5 \end{array}$$

Множење полинома

Множење полинома мономом. — Узмимо пример

$$(a + b - c) \cdot 2$$

Помножити неки број са 2, значи узети га два пута као сабирак:

$$(a + b - c) + (a + b - c) = a + a + b + b - c - c = 2a + 2b - 2c$$

Кад бисмо множили општим бројем, изгледало би овако:

$(a + b - c)n = (a + b + c) + (a + b - c) + \ldots\ldots$ (n пута).

Имали бисмо n сабирака. У свакоме има по једно a. Дакле an. У свакоме има и по једно b. Дакле bn. У свакоме има и по једно $-c$. Дакле $-cn$. Отуда:

$$(a + b - c)\,n = an + bn - cn$$

Полином се множи мономом, кад се сваки члан полинома помножи тим мономом, па се добивени производи саберу.

Овим правилом си се служио још у основној школи, ма да ниси ништа знао о њему. Кад си множио *напамет* н. пр. број 234 са 2 радио си ово:

$$\begin{array}{r} 200 \cdot 2 = 400 \\ 30 \cdot 2 = 60 \\ 4 \cdot 2 = 8 \\ \hline 234 \cdot 2 = 468 \end{array}$$

Шта си радио овде? Раставио си број 234 на три сабирка, па си тај збир множио са 2 по горњем правилу:

$$234 \cdot 2 = (200 + 30 + 4)\,2 = 200 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 4 \cdot 2.$$

Пошто производ не мења своју вредност, ако чинитељи промене места, одмах је јасно и обрнуто правило: *моном се множи полиномом, кад се моном помножи сваким чланом полинома и добивени резултати саберу.*

Пример. — Помножити полином

$$3x^3 + 5x^2 - 7x + 6 \quad \text{са} \quad (-3ax)$$

Биће:

$$3\,x^3 . (-3\,ax) + 5\,x^2\,(-3\,ax) + (-7\,x)\;(-3\,ax) + 6\;(-3\,ax) =$$
$$= -9\,ax^4 - 15\,ax^3 + 21\,ax^2 - 18\,ax.$$

Множење полинома полиномом. — Нека су дата ова два полинома да се међусобно помноже:

$$(x^2 - 3\,x + 6) \quad \textit{и} \quad (x^2 - 2\,x + 4)$$

Означимо други полином са P_2. Тада ће бити:

$$(x^2 - 3\,x + 6)\,P_2 = x^2\,P_2 - 3x\,P_2 + 6\,P_2$$

Ако сад сменимо P_2 његовом вредношћу, биће:

$$x^2\,(x^2 - 2\,x + 4) - 3\,x\,(x^2 - 2x + 4) + 6\,(x^2 - 2\,x + 4) =$$
$$x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 - 3\,x^3 + 6\,x^2 - 12\,x + 6\,x^2 - 12\,x + 24 = x^4 -$$
$$- 5\,x^3 + 16\,x^2 - 24\,x + 24$$

Из свега овога можемо извести ово

Правило. — *Полином се множи полиномом, кад се сваки члан једног полинома помножи сваким чланом другог полинома, па се добивени производи саберу.*

Напомена. — Кад знамо ово правило, можемо горњи задатак израдити много брже овако, пишући сличне мономе један испод другога:

$$\begin{array}{rl} (x^2 - 3x + 6)\;(x^2 - 2x + 4) = & x^4 - 3x^3 + 6x^2 \\ & \quad\; - 2x^3 + 6x^2 - 12x \\ & \qquad\qquad + 4x^2 - 12x + 24 \\ \hline & x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 24x + 24 \end{array}$$

Квадрат бинома. — Знамо да је квадрат производ два једнака чинитеља:

$$(a + b)^2 = (a + b)\;(a + b)$$

Кад извршимо горње множење добијамо:

$$(a + b)\;(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Значи да је

$$\boxed{\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}}$$

Одатле ово

Правило за дизање бинома на квадрат. — Квадрат бинома је једнак са збиром квадрата првога члана, удвојенога производа оба члана и квадрата другога члана.

Први пример. — Развити овај квадрат: $\left(\frac{2}{3}\,x - \frac{4}{5}\,y\right)^2$

Први члан бинома $\frac{2}{3}\,x$

Други члан бинома $\left(-\frac{4}{5}\,y\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\,x - \frac{4}{5}\,y\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\,x\right)^2 + 2 . \frac{2}{3}\,x\;.\;\left(-\frac{4}{5}\,y\right) + \left(-\frac{4}{5}\,y\right)^2 =$$
$$= \frac{4}{9}\,x^2 - \frac{16}{15}\,xy + \frac{16}{25}\,y^2$$

Други пример. — Развити овај квадрат: $\left(\frac{3}{4}\,x + \frac{4}{9}\,y\right)^2$

$$\left(\frac{3}{4}\,x + \frac{4}{9}\,y\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\,x\right)^2 + 2 . \frac{3}{4}x . \frac{4}{9}\,y + \left(\frac{4}{9}\,y\right)^2 =$$
$$= \frac{9}{16}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{16}{81}y^2$$

Куб бинома. — Знамо да је куб производ три једнака чинитеља:

$$(a + b)^3 = (a + b)\;(a + b)\;(a + b)$$

Кад извршимо горње множење, добијамо:

$$(a + b)\;(a + b)\;(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)\;(a + b) = a^3 + 2a^2b +$$
$$+ ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Значи да је:

$$\boxed{\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$$

Одатле ово

Правило за дизање бинома на куб. — Куб бинома је једнак са збиром куба првога члана, троструког производа квадрата првога члана и другога члана, троструког производа првога члана и квадрата другога члана и најзад куба другога члана.

Први пример. — Дићи на куб бином $(3a + 2b)$.

I Куб првога члана: $(3a)^3 = 27a^3$

Квадрат првога члана: $(3a)^2 = 9a^2$

Производ квадрата првога члана и другога члана: $9a^2 . 2b = 18a^2b$

II Троструки производ квадрата првога члана и другога члана: $18a^2b\;.\;3 = 54a^2b$

Квадрат другога члана: $(2b)^2 = 4b^2$

Производ првога члана и квадрата другога члана: $3a . 4b^2 = 12ab^2$

III Троструки производ првога члана и квадрата другога члана $12ab^2\;.\;3 = 36ab^2$

IV Други члан на куб: $(2b)^3 = 8b^3$

Збир ова 4 делимична разултата је тражени куб датога бинома

$$(3a + 2b)^3 = 27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 27b^3$$

Други пример. — Развити овај куб: $(2a - b)^3$.

$$(2a - b)^3 = (2a)^3 + 3 \,.\, (2a)^2 \,.\, (- b) + 3 \,.\, 2a \,.\, (- b)^2 + (- b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

Трећи пример. — Израчунати куб бинома $\left(\frac{2}{3} x - \frac{3}{4} y\right)$.

$$\left(\frac{2}{3} x - \frac{3}{4} y\right)^3 = \left(\frac{2}{3} x\right)^3 + 3 \,.\, \left(\frac{2}{3} x\right)^2 \,.\, \left(- \frac{3}{4} y\right) + 3 \,.\, \frac{2}{3} x \,.$$
$$.\, \left(- \frac{3}{4} y\right)^2 + \left(- \frac{3}{4} y\right)^3 = \frac{8}{27} x^3 - x^2y + \frac{9}{8} xy^2 - \frac{27}{64} y^3$$

Дељење полинома

Дељење збира. — Збир се дели неким бројем, кад се сви његови сабирци поделе тим бројем, па се добивени количници саберу.

$$(a + b + c + d) : 3 = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$$

Наш полином треба да постане три пута мањи. Он ће то постати, ако му сваки сабирак постане три пута мањи.

Нека је $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d \quad 5$.

Тада је $(a + b + c + d) : 3 = 4$

Даље је $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$(a + b + c + d) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{n}{d}$ (Сваки сабирак је постао n пута мањи).

Дељење полинома мономом. — Полином се дели мономом кад се сваки члан тога полинома подели тим мономом, па се добивени количници саберу.

$$(3x^3 + 6x^2 - 9x) : (- 3x) = [3x^3 : (- 3x\ ] + [6x^2 : (- 3x)] +$$
$$+ [(- 9x) : (- 3\,x)] = - x^2 - 2x + 3$$

При практичном раду увек је боље те делимичне количнике означавати у облику разломака.

Пример.

$$(6ax^4 - 8a^2x^3 + 14a^3x^2 - 16a^4x + 12a^5) : (-2a) =$$
$$= \frac{6ax^4}{-2a} + \frac{-8a^2x^3}{-2a} + \frac{14a^3x^2}{-2a} + \frac{-16a^4x}{-2a} + \frac{12a^5}{-2a} =$$
$$= - 3\,x^4 + 4ax^3 - 7\,a^2x^2 + 8\,a^3x - 6a^4.$$

Ученик треба да се извежба толико, да може одмах писати резултат, а да не мора претходно да пише разломке.

Да видимо сад шта бива кад полином није дељив мономом. На пример: $(3a^3x^2 + 5a^2x^2 + 6ax^4 + 7x^5) : bc$.

$$\frac{3a^3x^2}{bc} + \frac{5a^2x^2}{bc} + \frac{6ax^4}{bc} + \frac{7x^5}{bc}.$$

Јесмо ли извршили дељење? Нисмо; ми смо га *само означили*. Добили смо један полином састављен из *разломака*.

Разломак, чији су бројитељ и именитељ полиноми или мономи, зове се **општи разломак**.

При дељењу полинома мономом, ми веома често добијемо полином састављен од општих разломака. *Тај случај наступа, кад сви чланови полинома нису дељиви датим мономом, то јест кад дати полином није дељив датим мономом.*

Дељење полинома полиномом. — На примерима ћемо се потсетити како се дели полином полиномом.

Пример I.

$$(6 + x^2 - 5x) : (x - 2) =$$

Најпре се оба полинома уреде по опадним степенима:

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) =$$

Прво се дели први члан дељеников првим чланом делитељевим

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x$$

$$x^2 : x = x$$

Затим се добивеним количником помножи делитељ и добивени производ одузме од дељеника.

$$(x - 2)\ x = x^2 - 2x$$

$$\begin{array}{l} (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ \quad - 3x \end{array}$$

Спусти се даљи члан из дељеника и уреди са чланом који је преостао. Први члан тако добивенога остатка дели се првим чланом делитељевим;

$$\begin{array}{l} (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ \quad - 3x + 6 \end{array}$$

$$(- 3x) : x = - 3$$

Добивеним количником множи се делитељ и добивени производ одузме од пређашњег остатка:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\
\underline{\pm x^2 \mp 2x} \qquad\qquad\qquad\quad \\
-3x + 6 \qquad\qquad\qquad\quad \\
\underline{\mp 3x \pm 6} \qquad\qquad\qquad\quad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array} & (x-2)(-3) = -3x+6
\end{array}$$

Тај посао се наставља све дотле, док се не добије остатак нула, или док се не добије остатак нижег степена него што је делитаљ, или докле је нама потребно.

Пример II

$$\begin{array}{l}
(2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 13x + 12) : (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) = 2x^2 + x - 3 \\
\underline{\pm 2x^5 \mp 4x^4 \pm 6x^3 \mp 8x^2} \\
\qquad x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 13x \\
\quad \underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2 \mp 4x} \\
\qquad\qquad -3x^3 + 6x^2 - 9x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 3x^3 \pm 6x^2 \mp 9x \pm 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Спустили смо само члан — 13*x*, јер имамо свега 4 члана у делитељу.

Пример III

$$\begin{array}{l}
(3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 16x - 3) : (x^2 + 2x - 1) = 3x^2 - 4x + 5 \\
\underline{\pm 3x^4 \pm 6x^3 \mp 3x^2} \\
\qquad -4x^3 - 3x^2 + 16x \\
\qquad \underline{\mp 4x^3 \mp 8x^2 \pm 4x} \\
\qquad\qquad\quad 5x^2 + 12x - 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\pm 5x^2 \pm 10x \mp 5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x + 2
\end{array}$$

При дељењу полинома полиномом, ако деоба не може да се изврши без остатка, добијамо **општи разломак.**

Ако дељеников полином обележимо са P_1, делитељев са P_2 а количников полином са Q, имаћемо у другом примеру

$$\frac{P_1}{P_2} = Q$$

Ако остатак обележимо са R имаћемо у трећем примеру

$$\frac{P_1}{P_2} = Q + \frac{R}{P_2}$$

$\frac{R}{P_2}$ је **општи разломак.**

Он у трећем примеру овако изгледа:

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}$$

пошто је

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 16x - 3}{x^2 + 2x - 1} = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}$$

То је исто што и ово:

$$\begin{array}{l}
21 : 4 = 5 \\
\underline{}\!\!1
\end{array}$$

Отуда је:

$$\frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$$

Пример IV

$$\begin{array}{l}
\quad 1 \qquad\qquad : (1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 \\
\underline{\pm 1 \pm x} \\
\qquad -x \\
\qquad \underline{\mp x \mp x^2} \\
\qquad\qquad x^2 \\
\qquad\qquad \underline{\pm x^2 \pm x^3} \\
\qquad\qquad\qquad -x^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\mp x^3 \mp x^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + x^4
\end{array}$$

Види се да ово дељење неће никад да се сврши, пошто у остацима изложитељ од *x* једнако расте.

Одавде се види једна занимљива ствар. Види се да количник $\frac{1}{1 + x}$ можемо да претставимо као збир од бескрајно много сабирака. Низу тих сабирака нема краја. Он иде у бесконачност. Ми то у Математици кажемо, да смо способни да израз $\frac{1}{1 + x}$ развијемо у **бесконачан ред.** У томе реду можемо задржати колико нам треба чланова То пишемо овако:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$$

Тачкице показују да се тај низ протеже у бесконачност. Ако нам је потребно да имамо пет чланова, можемо их лако написати, кад најпре пажљиво загледамо горњи ред. Види се да су у њему парни чланови негативни, а непарни чланови позитивни. (Значи, позитивни су ови чланови: први, трећи, пети...; негативни су: други, четврти, шести...) Види се да је у сваком члану степен за 1 мањи од реднога броја тога члана. (Други члан има редни број 2, а степен му је 2 — 1 = 1. Трећи члан има редни број 3, а степен му је 3 — 1 = 2).

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ . \ . \ .$$

Потребан нам је пети члан. Он је позитиван и степен му је 5 — 1, тј. 4. Дакле пети члан је $+ x^4$.

Исто тако лако одређујемо и остале чланове.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \ . \ . \ .$$

Ако хоћемо тачну вредност овога разломка, пишемо овако:

$$\frac{1}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x} \qquad \text{или:}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \frac{x^7}{1+x}$$

ВЕЖБАЊА УЗ II ОДЕЉАК

1\. — Броју x додај збир $(1 + x)$. Проба за $x = 4$.

2\. — „ y „ „ $(4 + y)$ „ „ $y = -1$.

3\. — „ z „ „ $(3 + z)$ „ „ $z = \frac{1}{4}$

4\. — „ a „ „ $(2a + 3b + 2c)$ „ „ $a = 1, b = 0, c = 6\frac{1}{3}$

5\. — „ m „ „ $(3m + 2n + 1)$ „ „ $m = \frac{1}{3}, n = 2$

6\. — Броју a додај разлику $(m - n)$. Проба за $a = 1,\ m = 3,\ n = 2$.

7\. — „ x „ „ $(2a - 3b)$ „ „ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3},\ x = 5$.

8\. — „ x „ „ $(3x - 1)$ „ „ $x = \frac{2}{3}$

9\. — „ x „ „ $(4\frac{1}{3} - 6x)$ „ „ $x = -\frac{1}{12}$

10\. — „ y „ „ $(\frac{2}{3} - 3y)$ „ „ $y = -\frac{2}{3}$

11\. — Од броја a одузми збир $(2a + 7)$. Проба за $a = 1$.

12\. — „ „ b „ „ $(3b + a + 8)$ „ „ $a = 1,\ b = 2$.

13\. — „ „ y „ „ $(2x + 3y + 9)$ „ „ $x = y = 2$.

14\. — „ „ x „ „ $(4x + 5y + 8)$ „ „ $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{5}$

15\. — „ „ m „ „ $(3m + 2n + 5)$ „ „ $m = 2,\ n = -3$.

16\. — „ „ x „ разлику $(x - 1)$ „ „ $x = 2$.

17\. — „ „ m „ „ $(4 - 3m)$ „ „ $m = -\frac{1}{3}$

18\. — „ „ x „ „ $(4x - 3y)$ „ „ $x = y = 8$.

19\. — Од броја a одузми разлику $(5a - 6b)$ Проба за $a = 3,\ b = 4$.

20\. — „ „ x „ „ $(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y)$ „ „ $x = 3,\ y = -5$.

21\. — Сабрати ове полиноме:
$(3x^2 + ax + b) + (-5x + 3ax^2 + c + b) + (-8ax + 5x^3 + c^2 + b)$
па добивени резултат уредити по x.

22\. — Сабрати ове полиноме:
$(5x^3 + axy^3 + 5bx - c) + (4x^2 - 3x^3 - 4c - 12bx) + (9cx^2 + 12a^3 + 5bx + 15)$
па добивени резултат уредити по x.

23\. — Извршити означене радње:
$(3xy^4 - 4x^2y^2 + 5x^3y^2 - 6x^4y + 7x^5 - 9) - (-10 + x^5 - 2x^4y + 3x^3y^2 - 4x^2y^3 + 5xy^4, +$
$+ (-3x^3y^2 + 4x^4y - 5x^5 + 10 - 7x^2y^3 + 8xy^4)$
па добивени резултат уредити по y.

24\. — Извршити означене радње:
$(-4y^3z + 3y^2z^2 - 2yz^3 + z^4 - 5) - (-6 + 5yz^3 - 4z^4 + 3y^2z^2 - 2y^2z) +$
$+ (5y^3z - 4yz^3 - 9)$
па добивени резултат уредити по y.

25\. — Извршити означене радње:

$$\left(\frac{-x^4}{4} + \frac{4x^2}{3} + \frac{5x^2}{6} - 8x + 9\right) - \left(\frac{x^4}{4} - 5x^3 + \frac{5x^2}{6} - 8x + 5\right) +$$
$$+ \left(1{,}5 - 0{,}5x^2 + \frac{3}{4}x^3 - 7y^4\right).$$

26\. — Изврши означене радње:
$(5x^3 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) - [-(-5 - 4x) - (-3x^2 + 2x^3)] + 7$
па добивени резултат уреди по x.

27\. $(5x - 7 + 8y) - \{3x - [2 - (4 - x - y)]\} - (2x + 9y + 6)$

28\. $3 - (x - 3) - \{3 - [-x - (1 - x)]\} - (1 - x)$

29\. $(5 - 14x - 9) - (3 - x - y) - [(x - y) - (y - x)] + (x - 1)$

30\. $(x + 2y + 3) - (3 - 2y - x) - [-1 - (3y - x - 3)]$

31\. $x - \{-1 - [-1 - (1 - x)]\}$

32\. $1 - [(x - 1) + 1] - [1 - (1 - x)] - \{(a + bx) - (c + ax) - [1 - (c + ax)]\}$

33\. $(3x - 2y) - (2y - 3x) - (2y - 3x) + (-2y - 3x)$

34\. $(3x^2 - 1) - (1 - 3x) - (1 - 2x^2) - (1 + 3x) - (4 - 2x^2)$

35\. $(2x^2 - 3y^2) - (2x - 3y) - (4 - 2x^2) + (5 - 3y^2) - (4x - 2y)$

36\. $(4x - 3y) \cdot (-2)$ 37. $(2x - y)\ (-5)$ 38. $(2x + y -)\ (-4x)$

39\. $(-x^2 + y^3 - 1)\ (-1)$ 40. $(3x^2 - 2xy + y^2)\ (-3xy)$

41\. $(\frac{-x^3}{3} - y^2 + 1)\ (-3x)$ 42. $(2x^2 - 3x + 1)\ (-2x)$

43 $\left(\frac{x^2}{5}+\frac{xy}{10}-\frac{2}{8}y^2\right)(-30x)$

44. $(2x^2 + 3xy + y^2) . (-xy)$.

46. $(1,5 - 2x + 3x^2) . (-0,5x^2)$

47. $(x + 1)(x - 1)$

49. $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

51. $(x - 5)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

53. $(4y^2 - 5y + 1)(2y^2 - 3y + 5)$

45. $(3x^2 - 4x^3 + 5x - 7) . \left(-\frac{x}{3}\right)$.

(Овде добивени резултат уреди по x).

48. $\left(x-\frac{3}{4}\right)(x - 8)$

50. $(x^2 - 3x + 2)(x - 1)$

52. $(4x^2 - 3x - 8)(x - 3)$

54. $(-3y^3+9y-1)\left(2y^2-\frac{y}{9}-1\right)$

55. Помножи

$$(abx + a^2y + b^2x)(aby + a^3x - o^2)$$

и уреди по x.

56. — Помножи

$$(3x^3 - 5x^2 + 6x - 7)(2x^2 - 6x + 5)$$

Најбрже ћеш то урадити, ако будеш потписао један полином под други тако, да једноимени мономи стоје један испод другога.

$$\begin{array}{rrrrrr}
3x^3 & -5x^2 & +6x & -7 & & \\
 & 2x^2 & -6x & +5 & & \\
\hline
6x^5 - 10x^4 & +12x^3 & -14x^2 & & & \\
-18x^4 & +30x^3 & -36x^2 & +42x & & \\
 & +15x^3 & -25x^2 & +30x & -35 & \\
\hline
\end{array}$$

Сад је лако сабрати, кад су лепо потписани једноимени мономи један испод другога.

57. — Помножи

$$(2x^2 - 6x + 4)(3 - 8x + 4x^2).$$

Најпре уреди други полином по опадним степенима по x, па онда множи.

58. — Помножи

$$(x^2 - b^2 + 2ax + a^2)(b^2 + x^2 + 2bx - 3ab - a^2).$$

Најпре уреди!

59. — Помножи

$$(ax^2 + bx + c)(a' x^2 + b' x + c).$$

Не заборави да $3a$ и $3a'$ *нису* једноимени мономи!

Знај да $(a + a')$ није равно ни $2a$, ни $2a'$!

60. — Помножи

$$(ax^2 + 2a^2x^2 + 6a^2x - a^4)(x^2 - 5ax + 0,5a^2).$$

61. — Израчунај квадрат од $(a + b)$. Упамти резултат!
62. — „ „ „ $(a - b)$. Упамти резултат!
63. — „ „ „ $(3a - 4b)$.
64. — „ „ „ $\left(\frac{3}{7}x - y\right)$
65. — „ „ „ $\left(x - \frac{2}{3}y\right)$.

66. — Израчунај крадрат од $\left(-\frac{2}{7}-\frac{3}{8}y\right)$.
67. — „ „ „ $(0,04x - 0,1y)$.
68. — „ „ „ $\left(0,5a - \frac{2}{3}c\right)$.
69. — „ „ „ $\left(\frac{2}{5}a - 0,4b\right)$.
70. — „ куб „ $(a + b)$. Упамти резултат!
71. — „ „ „ $(a - b)$. Упамти резултат!
72. — „ „ „ $(2a - 7b)$.
73. — „ „ „ $(3a - 0,4c)$.
74. — „ „ „ $\left(\frac{3}{7}x - 1\right)$.
75. — „ „ „ $(8 - 0,1y)$.
76. — „ „ „ $\left(y - \frac{3}{7}\right)$.
77. — „ „ „ $\left(\frac{2}{5}x + 0,2y\right)$.
78. — „ четврти степен од $(a + b)$.
79. — „ „ „ „ $(a - b)$.
80. — Израчунај квадрат, куб, четврти степен од $(1 + x)$ и од $(1 - x)$.
81. — Јесу ли хомогени добивени полиноми у вежбањима 78 — 80?
82. — Израчунати квадрат од $(a + b + c)$.
83. — Израчунати куб од $(a + b + c)$.
84. — Израчунати квадрат од $(a + b + c + d)$.
85. — Израчунати квадрат од $(x + y - z - u)$.
86. — Добивени резултат у вежбању 82 уреди овако: најпре стави квадрате датих бројева a, b, c по азбучном реду, а затим све остале чланове уреди опет азбучним редом. Из тако уређена полинома прочитај ***практично правило за дизање полинома на квадрат.***
87. — По добивеном практичном правилу одмах дигни на квадрат полином из вежбања 84., а затим нађи множењем квадрат од $(a + b + c + d)$, па провери да ли си тачно казао правило!

По практичном правилу из вежбања 86 дигни на квадрат ове полиноме:

88. $3x^2 - 5x + 4$ 89. $2x^2 - 6x + 5$
90. $3x + 5y - 9$ 91. $8x + 3y - 5$

(Добивене резултате провери множењем!)

92. — Помножи: $(a + b)(a - b)$.
93. — Помножи: $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$.
94. — Помножи: $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$.
95. — Помножи: $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.

Какве закључке можеш извести, кад добро загледаш резултате свих вежбања 92 до 95?

96. — Помножи: $(a^2 - ab + b^2)$ са $(a + b)$.
97. — Помножи: $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ са $(a + b)$

Какве закључке можеш извести из резултата задатака 96 и 97?

Какве закључке можеш извести кад упоредиш задатке 92 — 97 и добивене резултате у њима?

98. $(3x + 9y - 12) : 3$
99. $(4x - 6y + 2) : (- 2)$.
100. $(3a - 9b) : (- 3)$.
101. $(- 4a + 16b) : (- 4)$.
102. $(2x - 3x) : x$
103. $(3y^2 - 6y) : (- y)$
104. $(5x^2y^7z^5 - 10x^4y^3z^3) : x^3y^2z^2$.
105. $(- 6a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 8a) : (- 2a)$.
106. $(15ax^2 - 5axy + 10ax^3) : (- 5ax)$.
107. $(2{,}5x^3y^2z - 1{,}5x^2y^3z^2 + 0{,}5x^2y^3z^3) : (- 0{,}5x^2y^2z^2)$.
108. $(8x^2y^3z - 6x^3yz^2 + 10xyz^3) : (- 2x^2y^2z^2)$.
109. $(5x^3y^3 - 4x^3y^2 - 5x^4y + 5y^5) : (- xy)$.
110. Подели $a^2 + 2ab + b^2$ са $(a + b)$.
111. Подели $a^2 - 2ab + b^2$ са $(a - b)$.
112. Подели $a^2 - b^2$ са $(a + b)$.
113. Подели $a^3 + b^3$ са $(a + b)$.
114. Подели $a^3 - b^3$ са $(a - b)$.
115. Подели $a^4 + b^4$ са $(a + b)$.
116. Подели $a^4 - b^4$ са $(a - b)$.
117. Подели $a^5 + b^5$ са $(a + b)$.
118. Подели $a^5 - b^5$ са $(a - b)$.

Ако је $a : b = c$, онда је $a = bc$. На основи тога видиш како се биноми из вежбања 112—118 могу *раставити на чинитеље*. Напиши биноме 112—118 у облику производа два чинитеља. Загледај добро, па ћеш лако упамтити чинитеље горњих бинома.

119. $(x^2 - 7x + 10) : (x - 2)$.
120. $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$.
121. $(x^2 + x - 2) : (x + 2)$.
122. $(x^2 + 8x + 16) : (x + 8)$.
123. $(2x^2 + 8x - 3) : (x + 3)$.
124. $(2y^2 + 7y - 4) : (y - \frac{1}{2})$.
125. $(6z^2 + 5z) : (z - \frac{1}{3})$.
126. $(5y^2 - 51y - 10) : (y + \frac{1}{5})$.
127. $(2x^3 - 7x^2 - 2) : (x - \frac{1}{2})$.
128. $(5x^3 - 26x^2 + 35x - 6) : (x^2 - 5x + 6)$.
129. $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 21x + 18) : (3x^3 - 4x^2 + 5x - 6)$.
130. $(6x^4 - 13x^3 + 6x^2 - 5x - 6) : (2x^2 - 3x - 2)$.
131. $(x^5 - 2x^4 - x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$.
132. $(3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (x^3 - x^2 + 3x - 4)$.
133. $1 : (1 - x)$. Заустави се код петог члана у количнику и покажи чему је равно $\frac{1}{1 - x}$.

134. $2 : (1 - x)$. Заустави се код шестог члана у количнику и кажи чему је равно $\frac{2}{1 - x}$.
135. $3 : (1 + x)$. Упреди с IV примером у одељку дељења полинома полиномом!
136. $x : (x - 1)$. Кад добијеш трећи члан у количнику, престани да делиш, па без дељења продужи да пишеш остале чланове у количнику!
137. $x : (x + \ )$. Кад добијеш трећи члан у количнику, продужи да пишеш и остале, али без дељења!
138. $(1 + x) : (1 - x)$
139. $(x - 1) : (x + 1)$
140. $(1 - x) : (1 + x)$
141. $(x + 1) : (x - 1)$.

III — РАСТАВЉАЊЕ НА ЧИНИТЕЉЕ

Раставити један алгебарски израз на чинитеље значи написати га у облику производа два или више алгебарских израза или бројева.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $6a^2b$.

Овај се израз може на неколико начина раставити на чинитеље.
$6a^2b = 6.\ a^2.\ b$ или $6a^2b = 6.\ a.\ a.\ b.$ или $6a^2b = 2.\ 3\ a.\ a.\ b$ или
$6a^2b = 2a.\ 3ab$ или $6a^2b = 2a^2.\ 3b$. И т. д.

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $4a^2 - 9b^2$.

Овај израз нас потсећа на разлику квадрата два броја:

$$4a^2 = (2a)^2$$
$$9b^2 = (3b)^2$$

Збиља је горњи израз разлика квадрата израза $2a$ и $3b$.

$$4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)\ (2a - 3b).$$

Горњи израз $4a^2 - 9b^2$ раставлли смо на два чинитеља. Први је $(2a + 3b)$, а други чинитељ је $(2a - 3b)$.

Мономи

Растављање монома на просте чинитеље. — Моном се раставља на просте чинитеље, кад му се и сачинитељ и главна количина раставе на просте чинитеље.

Први пример. — Раставити на просте чинитеље израз $12a^2b^3$

$$12 = 2\ .\ 2\ .\ 3$$
$$a^2 = a\ .\ a$$
$$b^3 = b\ .\ b\ .\ b$$
$$12a^2b^3 = 2\ .\ 2\ .\ 3\ .\ a\ .\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ b$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $15x^2y^2$

$$15 = 3 . 5$$
$$x^2 = x . x$$
$$y^2 = y . y$$
$$15x^2y^2 = 3 . 5 . x . x . y . y.$$

Полиноми

Извлачење заједничког чинитеља. — Кад сви чланови једнога полинома имају неки заједнички чинитељ, полином се може раставити на чинитеље на тај начин, што се из свих монома извуче тај заједнички чинитељ. На тај је начин полином растављен на чинитеље.

Први пример. — Раставити на чинитеље бином $2x^2 + 3x$.

Оба монома горњег полинома имају у себи x. Зато ћемо горњи полином поделити са x:

$$2x + 3$$

и помножити са x, да би остао непромењен:

$$x\ (2x + 3)$$
$$2x^2 + 3x = x\ (2x + 3)$$

Дати бином је растављен на два чинитеља. Извукли смо заједнички чинитељ x .

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $3x^2y + 6xy^2$.

$$3x^2y + 6xy^2 = 3xy\ (x + 2y)$$

Трећи пример. Раставити на чинитеље израз: $4ax^2y + 6ay$

$$4ax^2y + 6ay = 2ay\ (2x^2 + 3)$$

Четврти пример. — Раставити на чинитеље израз $4ax^2 + 6axy + 8ax^2y^2$.

$$4ax^2 + 6axy + 8ax^2y^2 = 2ax\ \ (2x + 3y + 4xy^2)$$

Пети пример. — Раставити на чинитеље израз $a\ (2 + x) + b\ (2 + x) + c\ (2 + x)$.

$$a\ (2 + x) + b\ (2 + x) + c\ (2 + x) = (2 + x)\ \ (a + b + c).$$

Изрази облика $a^2 + 2ab + b^2$. — Израз $(a^2 + 2ab + b^2)$ зове се **квадрат бинома.** И збиља је он квадрат бинома $(a + b)$.

Триноми горњег облика могу се раставити на два једнака чинитеља. Зато кад су у триному два монома квадрати, треба одмах испитати је ли тај трином квадрат бинома, па ако јесте, може се раставити на два једнака чинитеља.

Први пример. — Раставити на чинитеље трином $a^2 + 6ab + 9b^2$.

Први члан a^2 је квадрат броја a

Трећи члан $9b^2$ је квадрат израза $3b$. $9b^2 = (3b)^2$

Сад само треба пробати је ли израз $6ab$ двоструки производ броја a и израза $3b$.

$$a . 3b = 3ab$$
$$2 . a . 3b = 6ab$$

Значи да је горњи трином квадрат бинома $(a + 3b)$.

$$(a^2 + 6ab + 9b^2) = (a + 3b)^2$$
$$(a^2 + 6ab + 9b^2) = (a + 3b)\ (a + 3b)$$

Други пример. — Раставити на чинитеље трином $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{4}$

И овде имамо два квадрата: $\frac{4}{9}x^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$ и $\frac{y^2}{4} = \left(\frac{y}{2}\right)^2$.

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{2}{3}x$$
$$\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{y}{2}$$
$$2 . \frac{2}{3}x . \frac{y}{2} = \frac{2}{3}xy$$

Значи овај трином је квадрат бинома $\left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)$.

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)^2$$
$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{y}{2}\right)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље трином $4x^2+5xy+y^2$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$
$$\sqrt{9y^2} = 3y$$

Да видимо сад је ли удвојени производ израза $2x$ и $3y$ раван изразу $5xy$.

$$2 . 2x . 3y = 12xy.$$

Значи горњи трином није квадрат бинома. Не можемо га раставити на два једнака чинитеља.

Изрази облика $a^2 - 2ab + b^2$. — Овај се израз зове **квадрат разлике.** И збиља је он квадрат разлике $(a - b)$:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)\ (a - b).$$

Први пример. — Раставити на чинитеље трином $4x^2-12x+9$.

$$\sqrt{4x^2}=2x$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$2\,.\,2x\,.\,3=12x$$

Добили смо средњи члан $12x$, али са знаком $+$. Значи, овде је *разлика* дигнута на квадрат, пошто горе стоји $-12x$.

$$4x^2-12x+9=(2x-3)\,(2x-3).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{4}{25}x^2-\frac{4xy}{5}+y^2$

$$\sqrt{\frac{4}{25}x^2}=\frac{2}{5}x \qquad \text{I}$$
$$\sqrt{y^2}=y \qquad \text{II}$$

Удвојен производ I и II треба да дâ средњи члан $-\frac{4}{5}xy$.

Пре свега један од та два члана морамо узети са знаком минус. Узмимо други члан.

$$2\,.\,\frac{2}{5}x\,.\,(-y)=-\frac{4}{5}xy$$

Добили смо средњи члан. Зато можемо писати:

$$\frac{4x^2}{25}-\frac{4xy}{5}+y^2=\left(\frac{2}{5}x-y\right)\left(\frac{2}{5}x-y\right).$$

Изрази облика a^2-b^2. — Овакав се израз зове **разлика квадрата.** Знамо да је

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b).$$

Ако су у датој разлици оба члана квадрати, она се може раставити на два чинитеља.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $9a^2-4b^2$.

$$9a^2=(3a)^2$$
$$4b^2=(2b)^2$$
$$9a^2-4b=(3a)^2-(2b)^2$$
$$9a^2-4b=(3a-2b)(3a+2b).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$

$$\frac{x^2}{4}=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$\frac{y^2}{9}=\left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)$$

Изрази облика a^3+b^3. — Овакав се израз зове **збир кубова**. Знамо да је:

$$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2).$$

Збир кубова може се раставити на два чинитеља. Зато кад имаш бином чији су чланови кубови, можеш да га раставиш на два чинитеља по горњем обрасцу.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $27x^3+8y^3$.

$$27x^3=(3x)^3$$
$$8y^3=(2y)^3$$
$$27x^3+8y^3=(3x+2y)\,[(3x)^2-3x\,.\,2y+(2y)^2]$$
$$27x^3+8y^3=(3x+2y)\,(9x^2-6xy+4y^2).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $2x^3+54y^3$.

Ова разлика личи на збир кубова. Да испитамо оба члана.

Је ли 2 куб некога целога броја? Није.

Је ли 54 куб некога целога броја? Није.

Али ми можемо извући заједнички чинитељ 2.

$$2x^3+54y^3=2\,(x^3+27y^3).$$

Сад имамо у загради збир кубова:

$$x^3=(x)^3$$
$$27y^3=(3y)^3$$
$$x^3+27x^3=(x)^3+(3y)^3=(x+3y)\,[x^2-3xy+(3y)^2]$$
$$x^3+27y^3=(x+3y)\,(x^2-3xy+9y^2)$$

Наш израз може бити растављен на три чинитеља:

$$2x^3+54y^3=2(x+3y)\,(x^2-3xy+9y^2)$$

Изрази облика a^3-b^3. Овакав се израз зове **разлика кубова**. Знамо да је

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2).$$

Разлика кубова може се раставити на два чинитеља. Зато кад имаш бином чији су чланови кубови, можеш га раставити на чинитеље по горњем обрасцу.

Први пример. — Раставити на чинитеље израз $125x^3-y^3$

$$125x^3=(5x)^3$$
$$y^3=(y)^3$$
$$125x^3-y^3=(5x-y)\,[(5x)^2+5x\,.\,y+y^2]$$
$$125x^3-y^3=(5x-y)\,(25x^2+5xy+y^2).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{125}$

$$\frac{x^3}{8} = \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$\frac{y^3}{125} = \left(\frac{y}{5}\right)^3$$

$$\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{125} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right) \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{5} + \left(\frac{y}{5}\right)^2\right]$$

$$\frac{x^3}{8} - \frac{y^3}{125} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right) \left(\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{10} + \frac{y^2}{25}\right)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље израз $3x^2 - 375$.

Број 3 није куб целога броја. Зато ћемо најпре извући заједнички чинитељ 3:

$$3x^3 - 375 = 3\,(x^3 - 125) = 3\,(x^3 - 5^3)$$

$$3x^3 - 375 = 3\,(x - 5)\,(x^2 + 5x + 25).$$

Груписање чланова. — Понекад се полином може раставити на чинитеље подесним груписањем чланова. Како се то ради показаћемо на примерима.

Први пример. — Раставити на чинитеље полином $ab - bc - ac + c^2$.

Овде није ниједан од 6 показаних случајева. Кад боље загледамо, видимо да два и два члана имају заједнички чинитељ. Ми ћемо извући заједнички чинитељ b из првог и другог и заједнички чинитељ *c* из трећег и четвртог.

$$ab - bc - ac + c^2 = b\,(a - c) - c\,(a - c)$$

Наш полином добио је облик бинома. Из оба члана можемо сад извући заједнички чинитељ $(a - c)$:

$$ab - bc - ac + c^2 = (a - c)\,(b - c).$$

Други пример. — Раставити на чинитеље израз $y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y$.

Из прва два члана не можемо извући заједнички чинитељ.

Да пробамо да извучемо заједнички чинитељ из првог и четвртог *засебно*, а из другог и трећег *засебно*.

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = y^2 - ax^2y + bx^2y - abx^4$$

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = y\,(y - ax^2) + bx^2\,(y - ax^2)$$

Сад можемо извући заједнички чинитељ $(y - ax^2.)$

$$y^2 - abx^4 + bx^2y - ax^2y = (y - ax^2)\,(y + bx^2)$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље израз $6\,(x^2 + 2)yz + x\,(8y^2 + 9z^2)$.

Наш израз је написан у облику бинома. Види се да први и други члан овога бинома немају заједничких чинитеља. Зато ћемо извршити означена множења, па ћемо покушати да их групишемо друкчије

$$6\,(x^2 + 2)\,yz + x\,(8y^3 + 9z^2) = 6x^2yz + 12yz + 8xy^2 + 9xz^2$$

Видимо да није корисно извлачити заједнички чинитељ засебно из прва два и засебно из последња два. Да пробамо сад да их групишемо тако, да дође последњи члан уз први.

$$6x^2yz + 12yz + 8xy^2 + 9xz^2 = 6x^2yz + 9xz^2 + 12yz + 8xy^2$$

Да извучемо сад заједнички чинитељ из прва два, па из друга два:

$$3xz\,(2xy + 3z) + 4y\,(3z + 2xy)$$

Овако груписање било је добро, пошто сад можемо да извучемо заједнички чинитељ $(2xy + 3z)$.

$$6\,(x^2 + 2)\,yz + x\,(8y^2 + 9z^2) = (2xy + 2z)\,(3xz + 4y).$$

Изрази облика $x^2 + bx + c$. — Овакав трином има само један квадрат. И њега је често лако раставити на чинитеље.

Да бисмо то видели, загледајмо резултат оваквог производа.

$$(x + 2)\,(x + 3).$$

$$(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Када смо помножили ова два бинома, добили смо један трином.

Сачинитељ 6 је **производ** бројева 2 и 3, а сачинитељ 5 је **збир** тих истих бројева.

Да би смо израз $x^2 + bx + c$ могли раставити на производ два бинома, мора сачинитељ *c* бити раван производу два броја, а сачинитељ *b* збиру иста та два броја.

Нека су ти бројеви *p* и *q*. Тада мора бити

$$c = p\,.\,q$$

$$b = p + q$$

Кад то знамо, лако ћемо видети, можемо ли дати трином раставити на чинитеље.

Први иример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 + 9x + 14$.

Ми ћемо гледати да раставимо 14 на два броја *p* и *q* тако да буде $p + q = 9$.

$$14 = 2\,.\,7 \qquad\qquad 2 + 7 = 9$$

Значи, можемо горњи трином раставити на чинитеље.

$$(x^2 + 9x + 14) = (x + 2)\,(x + 7).$$

И збиља је

$$(x + 2)\,(x + 7) = x^2 + 2x + 7x + 14 = x^2 + 9x + 14$$

Други пример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 - 3x - 10$

$$-10 = (+2)\,(-5) \text{ или } -10 = (-2)\,(+5).$$

$(+2) + (-5, = -3$. Добро је.

Овде је $p = +2 \qquad q = -5.$

$$x^2 - 3x - 10 = (x + p)\ (x + q) = (x + 2)\ (x - 5)$$

И збиља је

$$(x + 2)\ (x - 5) = x^2 + 2x - 5x - 10 = x^2 - 3x - 10$$

Трећи пример. — Раставити на чинитеље трином $x^2 + 12x + 20$

Овај трином има облик $x^2 + bx + c$.

$$x^2 + bx + c = (x + p)\ (x + q)$$

Сада само треба одредити p и q.

Знамо да мора да буде

$$p\ .\ q = c \text{ то јест } p\ .\ q = 20.$$

Раставимо 20 на просте чинитеље:

$$20 = 2\ .\ 2\ .\ 5$$

Али пошто морају бити два чинитеља, мора бити:

или $20 = 1\ .\ 20$ или $20 = 2\ .\ 10$ или $20 = 4\ .\ 5$

Ми знамо да мора бити

$$p + q = 12$$

Да пробамо сад чинитеље 2 и 10.

$$2 + 10 = 12. \text{ Добро је.}$$

Дакле биће:

$$x^2 + 12x + 20 = (x + 2)\ (x + 10).$$

ВЕЖБАЊА УЗ III ОДЕЉАК

Растави на чинитеље ове изразе:

1. $18a^3b$
2. $24a^4b^3$
3. $27a^3b^3$
4. $48x^4y^2$
5. $36ax^2y^8$
6. $60a^2b^3c^4$
7. $32av^4y^3z^4$
8. $42a^2b^8c^4x^3y$
9. $(-4x^3y^3z^3)$
10. $(-12a^3b^4x)$
11. $(-18a^2b^3x^4$
12. $(-4x^2y^2)$
13. $(-24x^3y^3)$
14. $(-38xy^3)$
15. $(-32x^3y^4)$

Растави на чинитеље ове изразе:

16. $x^2 + x$
17. $x^2y + 2y$
18. $ac + mc + nc$
19. $x^3 + x^2 + x$
20. $abc + c^3$
21. $4ax + 6a^2x^2 + 8a^3x^2 + 10a^2x + 2ax^2$
22. $(x + y)^2 + (x + y)$
23. $(x + 1)^2 + (x + 1)$
24. $x\ (x + 2y) + y\ (x + 2y)$
25. $x\ (3 + 2y) + 2z\ (3 + 2y)$
26. $4a^3b - 5a^2b^3$
27. $9x^5 - 3x^3$
28. $x^4y^3z^2 + x^2y^3z^4$
29. $8x^3 + 2x^2 - 4x$
30. $x^3y^2z + xy^3z^2 - x^2yz^3$
31. $5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4$

Растави на чинитеље ове изразе:

32. $4a^2 + 20ab + 25b^2$
33. $9x^2 + 48xy + 64y^2$

34. — Раставити на чинитеље израз $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$
35. — „ „ „ „ $x^2 + 5x + 6\frac{1}{4}$
36. — „ „ „ „ $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{y^2}{9}$
37. — „ „ „ „ $4 + 4y + y^2$
38. — „ „ „ „ $y^2 + 3y + 2\frac{1}{4}$
39. — „ „ „ „ $4y^2 + 12yz + 9z^2$
40. — „ „ „ „ $25x^2 + 30xy + 9y^2$
41. — „ „ „ „ $\frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 1$
42. — „ „ „ „ $4 - 1\frac{1}{3}x + \frac{x^2}{9}$
43. — „ „ „ „ $36 - 12x + x^2$
44. — „ „ „ „ $1 - \frac{2}{5}x + \frac{x^2}{25}$
45. — „ „ „ „ $\frac{x^2}{9} - 2x + 9$
46. — „ „ „ „ $a^2x^2 - 2abx + b^2$
47. — „ „ „ „ $a^2b^2x^2 - 2abx + 1$
48. — „ „ „ „ $4x^2 - 9y^2$
49. — „ „ „ „ $25x^2 - 9z^2$
50. — „ „ „ „ $4x^2 - 4$
51. — „ „ „ „ $18y^2 - 8z^2$
52. — „ „ „ „ $32x^2 - 2$
53. — „ „ „ „ $81a^2b^2 - 16c^2$
54. — „ „ „ „ $25x^2y^2 - 1$
55. — „ „ „ „ $8x^3 + 1$
56. — „ „ „ „ $27y^3 + 8$
57. — „ „ „ „ $125 + 64x^3$
58. — „ „ „ „ $\frac{8}{27}x^3 + 1$
59. — „ „ „ „ $\frac{8}{125} + \frac{27}{64}y^3$
60. — „ „ „ „ $27 - y^3$
61. — „ „ „ „ $a^3b^3 - 8x^3$
62. — „ „ „ „ $125 - \frac{8}{343}y^3$
63. — „ „ „ „ $1 - \frac{27}{8}a^3x^3$
64. — „ „ „ „ $\frac{x^3}{8} - 125$
65. — Раставити на чинитеље израз $\frac{x^3}{8} - 2$

(Број 2 можеш овако написати у облику куба $2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$. На тај начин добијаш разлику кубова).

66. — Растави на чинитеље израз $27x^3 - 5$

67. — „ „ „ „ $x^2 - 3$.

68. — „ „ „ „ $4y^2 - 7$.

69. — Раставити на чинитеље полином $13m - 5\,an + 13n - 5am$.

(Ако скупимо у један збир чланове са m, а у други чланове са n, биће:

$$(13m - 5am) + (13n - 5an)$$
$$(13 - 5a)\,m + (13 - 5a)\,n.$$

Ако сад из обадва члана извучемо пред заграду $13 - 5a$, биће:

$$(13 - 5a)\,(m + n).$$

На тај начин горњи полином је растављен на чинитеље).

Растави на чинитеље ове полиноме:

70. $7ax + a - 7bx - b.$
71. $3ax + 3ay - 4x + 4y$
72. $31m^3 + 62n + 5m^3 + 10mn.$
73. $33x^2 - 39xy - 11xz + 13zy$
74. $x^2 - ax + bx - ab$
75. $ax^2 - ax + bx - b$
76. $x^2 - x + 7x - 7$
77. $x^2 - 4x + ax - 4a$
78. $ab + bc + ac + c^2$
79. $x^2 + xy - 3x - 3y$
80. $2xy - 3ax + 10ay - 15a^2$
81. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
82. $a\,(x^2 + y^2) + (a^2 + 1)\,xy$
83. $a^2\,(b + c) + b^2\,(a + c) + c^2\,(a + b) + 3abc$
84. $a\,(a + c) - b\,(b + c)$
85. $x^2 - 3x + 2$
86. $x^2 - 5x + 6$
87. $x^2 - 6x + 5$
(Стави $5 = 1\,.\,5$)
88. $x^2 - x - 6$
89. $x^2 + x - 20$
90. $x^2 + 8x + 12$
91. $x^2 - 19x + 18$
92. $x^2 - 16xy + 64y^2$
93. $x^2 + 4x + 3$
94. $x^2 + 4x + 4$
95. $x^2 - 6x + 8$
96. $x^2 - 9x + 8$
97. $y^2 + 10y + 9$
98. $y^2 - 11xy + 24x^2$
99. $x^2 + 10x + 21$
100. $x^2 - 8x + 15$
101. $y^2 - 9y + 20$

102. — Провери ову идентичност:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4\,ab.$$

Можемо је проверити на два начина:

1) Узмимо произвољне вредности за a и b и сменимо их у горњим идентичним изразима.

Нека је $a = 2$, $b = 1$.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = (2 + 1)^2 - (2 - 1)^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$
$$4ab = 4\,.\,2\,.\,1 = 8$$
$$8 \equiv 8.$$

2) Извршимо означене радње на левој страни:

$$a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$
$$4\,ab.$$

Леви израз се свео на $4\,ab$, а толики је и израз на десној страни

$$4ab \equiv 4ab.$$

103. — Провери ову идентичност:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2\,(x^2 + y^3).$$

104. — Провери ову идентичност:

$$(a^2 + b^2)\,(a'^2 + b'^2) \equiv (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2$$

105. — Провери ову идентичност:

$$(x - y)\,(x^2 + xy + y^2) \equiv x^3 - y^3.$$

106. — Провери ову идентичност:

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)\,(x^2 - x + 1).$$

IV — НАЈВЕЋА ЗАЈЕДНИЧКА МЕРА — НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАТЕЉ

Највећа заједничка мера

Шта је највећа заједничка мера. — Највећа заједничка мера за два или више бројева је онај највећи број, који се у свима њима садржи без остатка.

Примери.

I — За бројеве 12 18 и 30 мере су ови бројеви:
1, 2, 3, 6.

Највећи од ових бројева — број 6 — јесте највећа заједничка мера за та три броја.

II — За изразе $16a^2x^3$ $12ax^2$ $20a^3x^2$
заједничке мере су ови бројеви и изрази:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad -1 \quad -2 \quad -4$$
$$a \quad x \quad 2a \quad 2x \quad 4a \quad 4x \quad -a \quad -x$$
$$-2a \quad -2x \quad -4a \quad -4x$$
$$ax \quad 2ax \quad 4ax \quad -ax \quad -2ax \quad -4ax$$
$$ax^2 \quad 2ax^2 \quad 4ax^2 \quad -ax^2 \quad -2ax^2 \quad -4ax^2$$

Ако је a позитиван број, највећа од ових мера је $4ax^2$. Ако је a негативан број, највећа од ових мера је $-4ax^2$

Напомена. — Највећу заједничку меру ћемо скраћено обележавати са M.

Одређивање највеће заједничке мере. — Нека су дата два броја P и Q да им одредимо M.

Раставимо их на просте чинитеље. Нека је

$$P = a.\ b.\ c.\ d. \qquad и \quad Q = a.\ a.\ b.\ b.\ p$$

У обадва броја јављају се ови чинитељи:

a, b, c, d и p.

Од њих имамо да саставимо M.

Узмимо a. Њиме су дељиви и P и Q. Можемо ли га узети два пута? Не можемо, пошто P није дељив са a^2.

Дакле: $M = a \, . \, . \, .$

Узмимо b. Види се да и њега можемо узети свега једанпут због P.

$M = a \, . \, b \, . \, .$

Чинитеље c и d не можемо узети због Q. Чинитељ p не можемо узети због P. Остаје:

$M = a \, . \, b.$

Шта то значи? Значи да је M производ само оних чинитеља једнога броја, који су у исто време чинитељи и другога броја.

$P = a \, . \, b \, . \, c \, . \, d$

$Q = a \, . \, a \, . \, b \, . \, b \, . \, p$

M је производ заједничких чинитеља. $M = ab$.

Загледај овде израђене примере, размисли, па сам кажи правило за одређивање M!

Пример I — Одреди M за

$3ax^2y^2 \qquad 6a^2x^2y \qquad 9a^3xy^2$

Растављамо на чинитеље сва три израза:

$3ax^2y^2 = 3 \, . \, a \, . \, x \, . \, x \, . \, y \, . \, y$

$6a^2x^2y = 2 \, . \, 3 \, . \, a \, . \, a \, . \, x \, . \, x \, . \, y$

$9a^3xy^2 = 3 \, . \, 3 \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, x \, . \, y \, . \, y$

Од чинитеља првога израза $3ax^2y^2$ ови се налазе у сва три: 3, a, x и y Отуда је $M = 3axy$.

Пример II $\quad x^2 - 3x + 2 \quad$ и $\quad x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

$M = x - 2$

Најмањи заједнички садржатељ

Шта је најмањи заједнички садржатељ. — Најмањи заједнички садржатељ за два или више бројева (или израза) јесте најмањи број (или израз), који је дељив свима тим датим бројевима (или изразима).

Н.пр. за бројеве 6, 10, 15 н. з. с. је број 30.

Најмањи заједнички садржатељ нам је потребан при сабирању и одузимању *разноимених* разломака

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \qquad \frac{1}{6} - \frac{2}{15} = \frac{5}{30} - \frac{4}{30} = \frac{1}{30}$$

Одређивање најмањег заједничког садржатеља. — Узмимо да одредимо најмањи заједнички садржатељ за два броја A и C. Раставимо их на просте чинитеље. Нека је

$A = a \, . \, b \, . \, c \, . \, c \qquad C = a \, . \, a \, . \, b \, . \, c \, . \, d$

Тражимо најмањи број у коме се садрже A и C. Чинитељи наших бројева су

$a \qquad b \qquad c \quad$ и $\quad d$

Означимо н. з. с. са H. Да би се A садржало у H, мора H имати све чинитеље броја A. Да би се C садржало у H, мора H имати све чинитеље броја C. Значи, H мора имати све чинитеље које A и C и то

Чинитељ a мора имати два пута због C:

$a \, . \, a. \, . \, .$

Чинитељ b мора имати једанпута и због A и због C:

$a \, . \, a \, . \, b. \, . \, . \, .$

Чинитељ c мора имати два пута због A:

$a \, . \, a \, . \, b \, . \, c \, . \, c \, . \, . \, .$

Чинитељ d мора имати због C:

$a \, . \, a \, . \, b \, . \, c \, . \, c \, . \, d \qquad H = a \, . \, a \, . \, b \, . \, c \, . \, c \, . \, d$

Најмањи заједнички садржатељ има све чинитеље који се јављају у датим бројевима и то сваки чинитељ онолико пута, колико пута се он највише јавља.

Пример I — Одредити н. з. с. за $p^2 - p$, $p^2 - 1$ и $p + 1$

$p^2 - p = p(p - 1)$

$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

$p + 1 = p + 1$

$N = p(p+1)(p - 1).$

Пример II — Одредити н. з. с. за $x^2 - x - 2$ и $x^2 - 4$

$x^3 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

$N = (x - 2)(x + 1)(x + 2).$

ВЕЖБАЊА УЗ IV ОДЕЉАК

Одреди н. з. м. (M) за ове бројеве и изразе:

1. 18, 24, 30
2. 25, 30, 50.
3. 180, 120, 204.
4. 105, 207, 306.
5. $2ab^3c$ и $3abc$.
6. $4ab^3c$ и $8ab^2c$.
7. $12a^3b^2c$ и $14ab^4$.
8. $3ax^2$ и $6ax$.
9. $14ax^3$ и $18a^3x$ и $16a^2x^2$.
10. $25ax^3$ и $7ay^2$ и $8bz^3$.
11. $x^3 - 1$ и $x - 1$.
12. $x^2 - 4$ и $x + 2$.
13. $x^3 - 1$ и $x - 1$.
14. $x^3 + 1$ и $x^2 - x + 1$.
15. $x^2 - 9$ и $x + 3$.
16. $6x^2 + 3x - 9$ и $3x - 6$.
17. $x^2 - 5x$ и $x - 5$.
18. $x^3 - 2x^3 + x$ и $x^2 - 2x + 1$.

19. $x^2 - 4x + 4$ и $x - 2$.
20. $3x^2 - 12$ и $2x + 4$.
21. $3x^3 - 24$ и $5x - 10$.
22. $2y^2 - 2$ и $y - 1$.
23. $2x^3 - 5x + 2$ и $x^2 - 4$.

Напомена уз **23**. $2x^3 - 5x + 2 = 2x^2 - x - 4x + 2 = (2x^2 - x) - 2\,(2x - 1)$ и т. д.

24. $x^2 - 8x - 9$ и $x + 1$.
25. $x^2 - 6x + 9$ и $2x - 6$.
26. $3x^2 + 20x - 7$ и $2x + 14$.
27. $x^2 - 4x + 3$ и $2x - 6$.
28. $x^2 - 6x + 5$ и $3x + 15$.

Одреди н. з. с. за ове бројеве и изразе:

29. 46 50
30. 32 48
31. 30 45 60
32. 12 14 21 22
33. 45 75 105
34. 102 126 140 330
35. 42 63 98
36. 24 32 40 72
37. 14 28 56 63
38. 12 18 24 32 50
39. 52 78 117 143
40. 30 40 50 70
41. $2ax \quad 3ay$
42. $4ax \quad 6ax^2$
43. $8ax^2 \quad 2a^2x^2$
44. $6xy \quad 8ax^2y$
45. $2x \quad 3x^2y$
46. $4a^2x^3 \quad 9ax$
47. $14x^2 - 7 \quad x - 1 \quad 3x + 3$
48. $x^2 - 7x + 10 \quad x^2 - 25$
49. $x^3 - 27 \quad 4x - 12$
50. $x^2 - y^2 \quad x + y \quad 2x - 2y$
51. $ab + b^2 \quad a^2 + ab \quad a^2 - b^2$
52. $x^2 + xy \quad y^2 + xy \quad x^2 - 2xy + y^2$
53. $ab - b^2 \quad ab + b^2 \quad a^2 - b^2$
54. $x^4 - 9y^2 \quad 2x^2 - 6y^2$
55. $x^2 + 2x + 1 \quad 2x^2 - 2$
56. $x^2 + 3x + 2 \quad x^2 - 4$
57. $2x^2 - 21x + 10 \quad x^2 - 8x - 20$
58. $2x^3 - 16 \quad x^2 - 9x + 14$
59. $x^2 + 6x + 9 \quad x^2 - 9$
60. $3x - 12 \quad x^2 - 5x + 4$

V — ОПШТИ РАЗЛОМЦИ И РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С ЊИМА

Вредност општег разломка

Општи разломак. — Разломак коме је неки алгебарски израз бројитељ или именитељ, или су му и бројитељ и именитељ алгебарски изрази, зове се општи разломак.

Н. пр.: $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{x^2 + 2}{1 + x}$, $\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$

Вредност општег разломка. — Вредност општег разломка можемо израчунати, ако су нам дате вредности општих бројева у њему.

Пример I — Израчунати вредност разломка $\frac{x - 1}{2}$ за вредност $x = 5$.

Ставимо место x његову вредност 5, па ће бити:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Пример II — Израчунати вредност разломка $\frac{1}{x - 3}$ за $x = 6$

Тада је:

$$\frac{1}{x - 3} = \frac{1}{6 - 3} = \frac{1}{3}$$

Пример III — Израчунати вредност разломка

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7} \text{ за } x = 3$$

Биће:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7} = \frac{9 - 9 + 5}{9 - 7} = 2\,\frac{1}{2}$$

Промене вредности општег разломка. — Општи разломак мења своју вредност, чим се промене вредности општих бројева у њему.

Н. пр. разломак $\frac{1}{x}$ за $x = 1$ вреди 1
„ $x = 2$ „ $\frac{1}{2}$
„ $x = -10$ „ $-\frac{1}{10}$ и т. д.

Разломак $\frac{x}{3}$ за $x = 3$ вреди 1
„ $x = 6$ „ 2
„ $x = -9$ „ -3 и т. д.

Разломак $\frac{x - 1}{y + 2}$ за $x = 1$ и $y = 1$ вреди 0
„ $x = 2$ „ $y = 1$ „ $\frac{1}{3}$
„ $x = 2$ „ $y = 2$ „ $\frac{1}{4}$
„ $x = 4$ „ $y = 4$ „ $\frac{1}{2}$
„ $x = 4$ „ $y = 5$ „ $\frac{3}{7}$

Видиш да разломак мења своју вредност чим се промене бројитељ и именитељ. То значи да његова вредност зависи и од бројитеља и од именитеља. То даље значи да је вредност општег разломка **функција** и његовог бројитеља и његовог именитеља.

Општи разломак зависи од свога бројитеља. — У разломку $\frac{x}{y}$ пустимо да се x мења, а y да има једну сталну вредност.

Рецимо да је $y = 10$. Тада је $\frac{x}{y} = \frac{x}{10}$.

Ако x расте, почевши, рецимо од 1, имаћемо овакве разломке:

$$\frac{1}{10},\quad \frac{2}{10},\quad \frac{3}{10},\quad \frac{4}{10},\quad \frac{5}{10},\quad \frac{6}{10},\ \ldots$$

Види се да наш разломак расте, кад му расте бројитељ. I

Кад погледамо горњи низ с десна налево, видимо да бројитељ опада. У исто време опада и вредност нашега разломка.

Разломак расте кад му расте бројитељ, а опада кад му опада бројитељ.

Општи разломак зависи од свога именитеља. — У разломку $\frac{x}{y}$ дајмо сад иксу једну сталну вредност, рецимо $x = 1$, а пустимо именитељ да стално расте, рецимо од 2. Тада ћемо имати низ

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\ \ldots$$

Види се да наш разломак опада. Што је именитељ све већи, разломак је све мањи.

Кад горњи низ погледамо с десна налево, видимо да именитељ опада, али да разломак расте.

II Разломак опада кад му расте именитељ, а расте, кад му опада именитељ.

Општи разломак зависи и од бројитеља и од именитеља. — Узмимо сад да се у разломку $\frac{x}{y}$ мењају и бројитељ и именитељ. Нека се равномерно мењају: за колико се промени бројитељ, за толико нека се промени и именитељ.

1 *случај*: прави разломак.

$$\text{I}\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\ \ldots$$

$$\text{II}\quad \frac{9}{10},\quad \frac{8}{9},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{6}{7},\quad \frac{5}{6},\ \ldots$$

У првоме низу равномерно расту и бројитељ и именитељ. Разломак расте. У другоме низу равномерно опадају и бројитељ и именитељ. Разломак опада.

Прави разломак расте, ако му равномерно расту бројитељ и именитељ. III

Прави разломак опада, ако му равномерно опадају бројитељ и именитељ.

2 *случај:* неправи разломак.

$$\text{I}\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{6}{5},\quad \frac{7}{6},\ \ldots$$

$$\text{II}\quad \frac{9}{8},\quad \frac{8}{7},\quad \frac{7}{6},\quad \frac{6}{5},\ \ldots$$

Неправ разломак опада, ако му равномерно расту бројитељ и именитељ. IV

Неправ разломак расте, кад му равномерно опадају бројитељ и именитељ.

Узмимо сад да се бројитељ и именитељ произвољно мењају. Да видимо ту само два случаја.

1 случај: бројитељ расте, именитељ опада.

Кад се именитељ не би мењао, већ само бројитељ растао, разломак би растао. Како и именитељ опада, разломак тим пре расте. V

Кад бројитељ расте а именитељ опада, разломак ће расти.

2 случај: бројитељ опада, именитељ расте.

Кад би само бројитељ опадао, разломак би опадао. Како још и именитељ расте, разломак ће тим пре опадати.

Разломак опада, кад бројитељ опада, а именитељ расте. VI

Разломак $\frac{m}{0}$. — Узмимо разломак $\frac{1}{5 - x}$. Шта бива с тим разломком, кад x расте од 0? Нека је x најпре 0, па 1, па 2, па 3, па 4, па 5. Тада је $\frac{1}{5 - x}$ најпре $\frac{1}{5}$, па $\frac{1}{4}$, па $\frac{1}{3}$, па $\frac{1}{2}$, па $\frac{1}{1}$ и најзад $\frac{1}{0}$.

Колико је $\frac{1}{0}$?

Узмимо један разломак $\frac{1}{a}$ где a једнако опада. Нека је најпре $a = 1000\,000$, затим $100\,000$, па $10\,000$, па све десет пута мање.

$$\frac{1}{100000} > \frac{1}{1000000}$$
$$\frac{1}{10000} > \frac{1}{100000}$$
$$\frac{1}{1000} > \frac{1}{10000}$$
$$\frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{100} \qquad\qquad \frac{1}{\frac{1}{100}} > \frac{1}{\frac{1}{10}}$$
$$\frac{1}{1} > \frac{1}{10} \qquad\qquad \frac{1}{\frac{1}{1000}} > \frac{1}{\frac{1}{100}}$$
$$\frac{1}{\frac{1}{10}} > \frac{1}{1} \quad (\text{јер је } \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10) \quad \frac{1}{\frac{1}{1000000}} > \frac{1}{\frac{1}{100000}}$$

У левоме низу именитељ је једнако опадао. Зато је разломак једнако растао. Ако наш првобитни именитељ 1000 000 опадне на 0,000001, наш разломак ће порасти од 0,000001 на 1000 000. Види се да ће разломак

$$\frac{1}{a}$$

имати све већу вредност, што a буде све мање. Именитељ једнако опада. Он и даље бива све мањи. Можемо га начинити мањим од сваког веома малога броја који би нам био дат. Н.пр. даду нам као вредност за a број 0,000000001. То је веома мали број. Али ми можемо узети једно a такво, да буде мање и од тога броја. Н.пр. можемо нашем a дати ову вредност: 0,0000000001. Кад је a таква количина, да може бити мања од сваке ма како мале унапред дате количине, ми кажемо да a тежи нули. То пишемо овако: $a \to 0$. Таква количина која тежи нули зове се **бесконачно мала количина**. Наше променљиво a је овде једна бесконачно мала количина.

Али док a тежи нули, разломак $\frac{1}{a}$ постаје већи од ма како великог броја који би нам био унапред дат. Ми тада кажемо да $\frac{1}{a}$ тежи бесконачноме. То пишемо овако: $\frac{1}{a} \to \infty$. Таква количина која тежи бесконачноме, зове се **бесконачно велика количина.**

Кад a постане нула, $\frac{1}{a}$ постаје бесконачно (∞).

$$\frac{1}{a} = \infty \text{ за } a = 0 \quad , \quad \frac{1}{5 - x} = \infty \text{ за } x = 5 \quad , \quad \frac{m}{0} = \infty$$

Рачунске радње с општим разломцима

Сабирање општих разломака. — За сабирање општих разломака важе сва она правила за сабирање разломака која смо досад научили. Ако немају једнаке именитеље, треба их довести на једнаке именитеље, па сабрати бројитеље, а потписати заједнички именитељ.

Све именитеље треба раставити на чинитеље, па склопити *најмањи заједнички садржатељ* на тај начин, што ће се узети све врсте чинитеља и то онолико пута колико се највише појављују.

Пример I.

$$\frac{3c}{4a^4b} + \frac{4d}{5ab^2} + \frac{5m}{6bc^3}$$

$4 = 2 \,.\, 2$	Врсте чинитеља:	2, 3, 5, a, b, c,	
$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$	Појављују се највише:	2	два пута
$5 = 5$	„ „ „	3	једанпут
$b^2 = b \,.\, b$	„ „ „	5	„
$6 = 2 \,.\, 3$	„ „ „	a	четири пута
$c^3 = c \,.\, c \,.\, c$	„ „ „	b	два пута
	„ „ „	c	три „

Најмањи заједнички садржатељ биће:

$$2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, a^4 \,.\, b^2 \,.\, c^3 = 60a^4b^2c^3.$$

Према томе горње сабирке можемо написати овако:

$$\frac{3c \,.\, 15bc^3}{60a^4b^2c^3} + \frac{4d \,.\, 12a^3c^3}{60a^4b^2c^3} + \frac{5m \,.\, 10a^4b}{60a^4b^2c^3} = \frac{45bc^4 + 48a^3c^3d + 50a^4bm}{60a^4b^2c^3}$$

Пример II.

$$\frac{3b}{ax^4 - abx^3} + \frac{4b}{c^2x^5 - bc^2x^3}$$

У биному $ax^4 - abx^3$, појављују се и a и x, у обадва члана. Тај бином можемо овако написати:

$$ax^4 - abx^3 = ax^3 (x - b).$$

У биному $c^2x^5 - bc^2x^4$ појављују се c и x у обадва члана. Види се одмах да можемо *извући испред заграде* израз c^2x^4, те ће бити:

$$c^2x^5 - bc^2x^4 = c^2x^4\ (x - b).$$

Врсте чинитеља: a, c, x, $(x - b)$.

Н. з. с. је: $ac^2x^4\ (x - b)$.

Према томе горње сабирке можемо овако написати:

$$\frac{3b\ .\ c^2x}{ac^2x^4\ (x - b)} + \frac{4d\ .\ a}{ac^2x^4\ (x - b)} = \frac{3bc^2x + 4ad}{ac^2x^4\ (x - b)}.$$

Извлачење з. ч. пред заграду служи нам за скраћивање разломака.

Пример. — Скрати разломак:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 + 15x}{6x^2 + 18x}$$

Кад раставимо и бројитељ и именитељ биће:

$$\frac{3x\ (x^2 - 2x + 5)}{6x\ (x + 3)} = \frac{x^2 - 2x + 5}{2\ (x + 3)}$$

Добивени облик је простији од задатог облика.

Одузимање општих разломака. — За одузимање важи исто што и за сабирање, пошто је свака разлика у ствари *алгебарски збир*.

$$a - b = a + (- b).$$

Ипак ћемо навести један пример.

$$\frac{a}{x^2 - 1} - \frac{b}{x + 1} = \frac{a - b\ (x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{a - bx + b}{x^2 - 1}$$

Множење општих разломака. — За множење важе иста правила која смо до сада видели код множења обичних разломака.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Дељење општих разломака. — И за дељење важе иста правила која смо до сада видели код дељења обичних разломака.

$$\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{am}{bn} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Овде ћемо само да поменемо и већ познате *сложене или двојне разломке*. То су разломци чији је бројитељ или именитељ разломак, или су разломци и бројитељ и именитељ. Ту треба најпре упростити бројитељ и именитељ засебно, па затим поделити упрошћени бројитељ упрошћеним именитељем.

$$\frac{\frac{a}{b} - c}{\frac{c}{a} - b} = \frac{\frac{a - bc}{b}}{\frac{c - ab}{a}}$$ Сад треба делити:

$$\frac{a - bc}{b} : \frac{c - ab}{a} = \frac{a - bc}{b} \cdot \frac{a}{c - ab} = \frac{a\ (a - bc)}{b\ (c - ab)}.$$

ВЕЖБАЊА УЗ V ОДЕЉАК

Могу ли ови разломци мењати своје вредности? Услед чега могу наступити промене? (Услед бројитеља, или услед именитеља?)

1. $\frac{2x + 1}{8}$

2. $\frac{7}{x - 2}$

3. $\frac{5}{x + 3}$

4. $\frac{5x - 2}{1 + x}$

5. $\frac{4x - 1}{x - 5}$

6. — За $x = 4$ израчунај вредност разломка из вежбања 1.
7. — „ $x = 3$ „ „ „ „ „ 2.
8. — „ $x = 0$ „ „ „ „ „ 3.
9. — „ $x = 3$ „ „ „ „ „ 4.
10. — „ $x = 10$ „ „ „ „ „ 5.

Шта бива са овим разломцима кад x расте, а шта кад x опада? Објасни зашто то бива. Ово су ти разломци:

11. $\frac{3x + 1}{7}$

12. $\frac{3x - 1}{8}$

13. $\frac{10 - x}{3}$

14. $\frac{1}{x + 10}$

15. $\frac{1}{2x - 5}$

16. $\frac{6}{7x + 1}$

17. $\frac{4}{4 - x}$

18 $\frac{9}{3 - 2x}$

19. $\frac{2x + 1}{x + x}$

20. $\frac{2x - 9}{3x - 4}$

21. $\frac{x - 1}{x - 2}$ 22. $\frac{x + 1}{x - 1}$

Испитај промене ових разломака за означене промене икса:

23. $\frac{5 - x}{2}$ за промене икса од 0 до 5.

24. $\frac{6 + 2x}{3}$ " " " " 0 до — 3.

25. $\frac{x - 5}{3}$ " " " " 0 до 5.

26. $\frac{3x + 5}{2}$ " " " " $-\frac{1}{3}$ до $-\frac{5}{3}$

27. $\frac{5 + 2x}{4}$ " " " " $-\frac{1}{2}$ до $-\frac{5}{2}$

28. $\frac{5}{x - 4}$ " " " " 0 до 4.

29. $\frac{5}{2x - 6}$ " " " " 0 до 3.

30. $\frac{3}{7x - 1}$ за промене икса од $\frac{5}{7}$ до $\frac{1}{7}$

31. $\frac{7}{3x + 4}$ " " " " $-\frac{1}{3}$ до $-\frac{4}{3}$

Израчунај вредност ових разломака за дату вредност икса:

32. $\frac{4}{x - 3}$ за $x = 3$.

33. $\frac{5}{x^2 - 3x + 2}$ за $x = 1$ и $x = 2$.

34. $\frac{6}{x^2 - 5x + 6}$ за $x = 2$ и $x = 3$.

35. $\frac{7}{x^2 - 8}$ за $x = 2$.

36. $\frac{6}{x^2 + 27}$ за $x = -3$.

Упрости ове разломке;

37. $\frac{4a^2bcx}{2a^2c^2y^2}$,

38. $\frac{15a^3bc^2xy}{50aacx^2z}$,

39. $\frac{15a^5bc^2xyz}{12abc^5y^2}$,

40. $\frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$,

41. $\frac{a^4 - a^4}{a^3 - b^3}$

42. $\frac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3}$

43. — Нађи збир ових разломака:

$$\frac{a}{a - b} + \frac{b}{b - a}.$$

Знамо да је $a \equiv -(-a)$.

Према томе је $b - a \equiv -[-(b - a)] \equiv -(-b + a) \equiv -(a - b)$.

Кад горње имените раставимо на чинитеље имаћемо:

$a - b = a - b \qquad b - a = (-1)(a - b)$.

Према томе је *н. з. с.* $(-1)(a - b) \equiv (b - a)$.

$$\frac{a}{a - b} + \frac{b}{b - a} = \frac{-a + b}{-(a - b)} = \frac{b - a}{b - a} = 1. \qquad \text{(Може ли и брже?)}$$

Изврши означене рачунске радње:

44. $\frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{x}{x + 1} - \frac{x}{1 - x} + \frac{1}{x}$

Разломак $-\frac{x}{1 - x}$ можемо овако написати:

$$-\frac{x}{-(x - 1)} = \frac{x}{x - 1}.$$

45. $1 + \frac{x + y}{x - y}$, 46. $\frac{x}{x - y} - \frac{x - y}{y - x}$

Кад раставимо на чинитеље горње имените имаћемо:

$x - y \equiv x = y \quad y - x \equiv (-1)(x - y)$ Н. з. с. је $(-1)(x - y)$

$$\frac{x}{x - y} - \frac{x - y}{y - x} = \frac{x(-1)}{(x - y)(-1)} - \frac{(x - y) \cdot 1}{(-1)(x - y)} =$$

$$= \frac{-x - (x = y)}{(-1)(x - y)} = \frac{-x - x + y}{y - x} = \frac{y - 2x}{y - x}.$$

Зашто испред израза $x - y$ мора да се стави заграда у бројитељу другога разломка?

Кад је пред разломком знак минус, треба при свођењу на један именитељ *ставити заграду* испред бројитеља, ако је бројитељ полином.

У другоме разломку било је минус напред:

$$-\frac{x - y}{y - x}$$

Кад смо оба разломка довели на један именитељ ставили смо заграду *испред* бројитеља тога разломка:

$$\frac{-x - (x - y)}{(-1)(x - y)}$$

→ На то добро обратити пажњу! ←

47. $\frac{2xy}{x^2 - y^2} - \frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y}$.

48. $\frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + ab}$.

49. $\frac{a^2 + ab}{ab - b^2} - \frac{vb - b^2}{a^2 + ab} - \frac{4ab}{a^2 - b^2}$.

50. $\frac{x + a}{x - a} - \frac{x^2 - a^2}{a^2 - ax}$.

51. $\frac{1}{3x - a} + \frac{a}{a^2 - 9x^2}$

$a^2 - 9x^2 \equiv a^2 - (3x)^2$.

52. $\frac{9x^2}{x^4 - 9a^2} - \frac{3}{3a + x^2} + \frac{5}{6a - 2x^2}$

$x^4 - 9a^2 \equiv (x^2)^2 - (3a)^2$.

53. $\frac{4x^2}{x^4 - 1} - \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

54. $\frac{1}{2a^2} - \frac{a - b}{3a^3b} + \frac{2a - 3}{6ab^2}$.

55. $\frac{x - y}{x^2 - xy} - \frac{x + y}{xy = y^2} - \frac{4xv}{x^2 - y^2}$.

56. $\frac{1}{x - y} + \frac{1}{x^3 + y^3} - \frac{1}{x - y} - \frac{x^2 + y^2}{x^3 - y^3}$

57. $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^3} + \frac{x^2 - 6x + 6}{x^2 - 4x + 4} + \frac{1}{x - 1}$

($x^2 - 4x + 4$ можемо овако написати: $x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2$.)

58. $\frac{ax}{y} + \frac{by}{x} - \frac{ab + a^2 - b^2 + 3a - 5b}{xy}$

59. $\frac{a^2x}{y} + \frac{by}{x} - \frac{(a^2 + b^2)y^2}{x^2} - \frac{3abx^2}{y^2}$

Изврши означено множење и упрости добивени резултат:

60. $\frac{12\,a^2bc}{36\,ab^3} \cdot \frac{24\,ab^3c}{9\,abc^3}$

(Добро је увек пре множења и дељења разломака упростити их колико год се може. Овде ће бити

$$\frac{12\,a^2bc}{36ab^3} = \frac{ac}{3b^2}$$

$$\frac{24\,ab^3c}{9\,abc^3} = \frac{8b^2}{3c^2}$$

$$\frac{ac}{3b^2} \cdot \frac{8b^2}{3c^2} = \frac{8a}{9c}.$$

61. $\frac{7x^2y^3z}{13ax^5yz^2} \cdot \frac{26ax^3yz^2}{21x^3y^2}$

62. $\frac{81\,abc^2}{54x^2y^2z} \cdot \frac{9\,xyz^2}{18\,abc}$

63. $\frac{3\,a_3b^2c}{4a^2b^6c^4} \cdot \frac{12\,a^8b^4c^7}{6\,a^3b^7c}$

64. $\frac{5a^3b^5c}{7m^2n^4} \cdot \frac{14a^9m^7}{25n^5b^{11}} \cdot \frac{5n^{11}m^6}{6a^{15}b^{13}}$

65. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{a^2 + xy}$ ✓

66. $\frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$

67. $(x^2 - 1)\left[\frac{1}{x - 1} - \left(\frac{1}{x + 1} + 1\right)\right]$

(Овде треба најпре да упростиш израз у загради, да би од њега добио један разломак).

68. — Изврши означене рачунске радње:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

(Прво израчунај производ у четвртом члану и испред тога производа стави заграду и знак минус).

69. — Изврши означено дељење и упрости добивене резултате:

$\frac{81abc^2}{54x^2y^2z} : \frac{9a^2b^2c^2}{6xyz^2}$

70. $\frac{x^3z}{y^3z} : \frac{z^2x^3}{y^4z^4}.$

71. $\frac{3x^2 + 3xy}{x^2 - y^2} : \frac{3\,(x + y)}{x^2 - 2xy + y^2}.$

72. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4a^3 - 4ab^2} : \frac{3a + 3b}{a^2 - 2ab + b^2}.$

73. $\left[\frac{5a^2x}{b} - \frac{5aby}{cx} + 5ad - \left(ax + \frac{b^2y}{c}\right) - bd\right] : \left(\frac{ax}{b} - \frac{by}{c} + d\right).$

(Најбоље је свршити означене радње у заградама, па тек онда делити добивене разломке).

74. $\left(\frac{m^5}{32\,n^{10}} - \frac{32p^5}{243}\right) : \left(\frac{m}{2n^2} - \frac{2p}{3}\right).$

Упрости ове сложене разломке·

75. $$\frac{1 - \frac{1}{1 + a}}{\frac{1}{1 + a}}$$

76. $$\frac{\frac{a}{x} + \frac{x}{a}}{\frac{a}{x} - \frac{x}{a}}$$

77. $$\frac{\frac{1}{a - x} + \frac{a}{a + 1}}{\frac{a}{a - 2} - \frac{a}{a + x}}$$

78. $$\frac{3x}{x - \frac{1}{4}}$$

79. $$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2}}$$

80. — Провери идентичност:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a\,(x - a)} - \frac{1}{2a\,(x + a)}$$

81. — Провери идентичност:

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}} : \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a + c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a + c}} \equiv \frac{2\,c}{a + c - b} - 1.$$

82. — Провери идентичност:

$$\frac{1}{(x - a)\ (x - b)} \equiv \frac{1}{b - a}\left(\frac{1}{x - b} - \frac{1}{x - a}\right).$$

83. — Ако се бројитељу и именитељу позитивног разломка дода исти број, разломак добија већу вредност ако је био мањи од јединице, а смањује се ако је био већи од јединице. Докажи!

(Узми један разломак $\frac{a}{b}$. Ако бројитељу и именитељу додаш неки број m, горњи разломак ће постати

$$\frac{a + m}{b + m}.$$

Ми смо раније видели, да је број, рецимо s, већи од t, ако је $s - t > o$ (то јест, ако је разлика *позитивна)*.

Направи ову разлику:

$$\frac{a}{b} - \frac{a + m}{b + m}.$$

па види каква је по знаку та разлика, ако је $a > b$, а каква је, ако је $a < b$).

84. — Кад постоји овај услов:

$1 \leqslant a < b$

где су a и b цели бројеви, испитати шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се од бројитеља и од именитеља одузме исти број.

85. — Кад су a и b цели бројеви, па је $a < o < b$, шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се и бројитељу и именитељу дода исти позитивни број?

86. — Кад су a и b цели бројеви, па је $b < o < a$, шта бива с разломком $\frac{a}{b}$, кад се и бројитељу и именитељу дода исти негативан број?

87. — Коју вредност не смемо дати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{3}{x - 3}$$

има коначну вредност?

88. — Које вредности не смемо давати иксу, ако желимо да наш рззломак

$$\frac{x - 3}{4}$$

буде позитиван број?

89. — Које вредности смемо давати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{3}{x + 4}$$

буде коначан негативан број?

90. — Коју позитивну вредност не смемо дати иксу, ако желимо да разломак

$$\frac{2}{x - 2}$$

буде стално коначан и позитиван?

91. — Које вредности не смемо давати ипсилону, ако желимо да разломак

$$\frac{y + 1}{y - 1}$$

буде увек коначан и позитиван?

92. — Које вредности не смемо давати ипсилону, ако наш разломак

$$\frac{y - 1}{2 - y}$$

мора увек да буде негативан?

93. — Које вредности смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{1 + x}$$

мора бити увек позитиван?

94. — Које вредности не смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{1 + x}$$

мора да буде увек негативан?

95. — Које вредности смемо давати ипсилону, ако разломак

$$\frac{1 + v}{2 - y}$$

мора да буде увек коначан и позитиван?

96. — Које вредности не смемо давати иксу, ако разломак

$$\frac{1 - x}{x - 1}$$

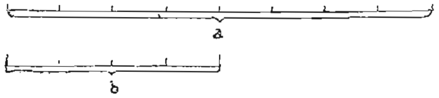
мора да буде увек негативан?

(Пази добро! Види вежбање 43.)

VI — РАЗМЕРЕ И ПРОПОРЦИЈЕ

Размере

Ако смо мерили две количине *исте* врсте (речимо ширину и дужину собе, или два џака брашна), можемо увек, помоћу мерних бројева тих количина, да кажемо *колико је пута већа* једна количина од друге. Да бисмо могли то рећи, морамо да *упоредимо* мерне бројеве тих количина; морамо *да их поставимо један према другоме:* морамо да нађемо њихов *однос.*



Сл. 1.

Узмимо да *упоредимо* величине двеју дужи (сл. 1.) Мерећи дуж a нашли смо да она има 8 поделака; мерећи дуж b нашли смо да она има 4 подеока. Ако хоћемо да видимо колико пута је дуж a већа од дужи b, имамо да видимо колико се пута мерни број дужи b садржи у мерноме броју дужи a. Како је 8 : 4 = 2, *однос* ових двеју дужи биће:

$$a : b = 2.$$

Овако означени *однос* двеју количина зовемо *размера* и читамо га: „*a према b* равно је 2.“

Овде је *a први члан размере, b други члан размере,* а 2 *количник размере.*

Скраћивање размере. — Размера је дата у облику количника. Ми знамо да се количник не мења, ако и бројитељ и именитељ поделимо истим бројем. Према томе *можемо оба члана размере поделити истим бројем, а да количник остане исти.*

Пример. — Скратити размеру

$$80 : 65.$$

Ако оба члана ове размере поделимо са 5 имаћемо:

$$16 : 13.$$

Размера 16 : 13 је *простија* од размере 80 : 65.

Проширење размере. — Количник се не мења, ако и дељеник и делитељ помножимо истим бројем. Према томе *количник размере ће остати исти, ако оба члана размере помножимо истим бројем.*

Пример. — Ако хоћемо да нађемо однос између ширине и дужине собе, треба да упоредимо мерне бројеве дужина и ширине. Нека је ширина $5\frac{1}{2}$ m, а дужина 6 m. Размера дужине и ширине биће:

$$6 : 5\frac{1}{2}$$

$$6 : \frac{11}{2}$$

Ако оба члана размере помножимо са 2, добићемо размеру:

$$12 : 11$$

у којој сад нема разломака.

Географске карте. — Размере се употребљавају за цртање географских карата и планова. Кад измеримо растојање између двеју тачака у природи, ми га не можемо нацртати на карти у истој дужини. Морамо га смањити. То значи морамо утврдити *однос* (размеру) између дужине на карти и дужине у природи. Без тога односа ми не бисмо могли читати карту. Због тога је на свакој карти означена *размера* у којој је карта израђена. Она показује *колико пута већа* је једна дужина у природи од своје дужине на карти.

Сл. 2*.

Наша слика 2 показује један део карте наше отаџбине. Карта је израђена у размери

$$1 : 750\,000.$$

Количник те размере је $\frac{1}{750\,000}$. То значи да је једна дужина у природи 750 000 *пута већа* од своје дужине на карти и обрнуто, да је једна дужина на карти 750 000 пута мања од своје дужине у природи. Кад то знамо лако нам је читати нашу карту.

Пример I — Колико је далеко Топчидер од Београда у правој линији?

На карти се види да је та даљина 5 *mm*. У природи мора бити 750 000 *пута већа*. То значи да је праволиниска даљина Београд—Топчидер оволика:

$$5 \times 750\,000\,mm = 3\,750\,000\,mm = 3750\,m = 3\,\frac{3}{4}\,km.$$

Пример II — Кад су Космај и Авала далеко једна од друге $24\,\frac{3}{4}$ *km* у правој линији, колико морају бити раздалеко на карти те две планине?

Њихова раздаљина на карти мора бити $\frac{1}{750\,000}$ њихове праволиниске дужине у природи.

$$\frac{24\,\frac{3}{4}}{750\,000} = \frac{\frac{99}{4}}{750\,000} = \frac{99}{750\,000\,.\,4} = \frac{99}{3\,000\,000}\,km.$$

Ако 99 *km*. претворимо у милиметре, имаћемо:

$$\frac{99\,000\,000}{3\,000\,000} = 33\,mm.$$

Космај и Авала морају бити раздалеко 33 *mm* на карти.

За читање карата потребно је одмах утврдити шта значи у природи један милиметар са карте. Пошто је наша размера 1 : 750 000,

---

* Ово је један део карте Србије и Црне Горе од пок. професора Цвијића, а у издању Геце Кона.

значи да 1 *mm* са карте значе 750000 *mm.* у природи, то јест 750 *m.* или 0,75 *km* или $\frac{3}{4}$ *km.* Кад то знамо лако је утврдити растојање које било тачке на карти до друге неке тачке. Треба број милиметара са карте помножити са $\frac{3}{4}$ и то је број километара у природи. Према томе биће праволиниско растојање Београд—Топчидер:

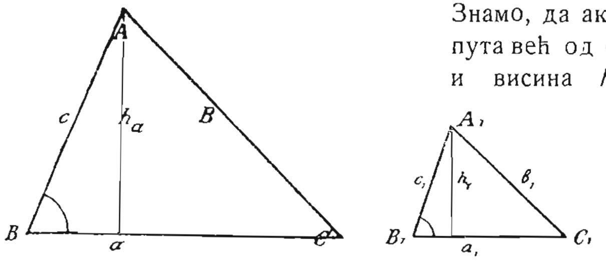
$$5 \times \frac{3}{4}\ km = \frac{15}{4} km. = 3\frac{3}{4}\ km,$$

што смо већ горе нашли.

Ако хоћемо да одредимо криволиниско растојање двеју тачака на нашој карти (рецимо растојање путем којим се долази до тих двеју тачака), треба положити конац по тој кривој линији, затим тај део конца опружити крај лењира да се види колико има милиметара. Добивени број милиметара треба помножити са $\frac{3}{4}$ и то је број километара. За мерење криволиниских растојања на карти постоји једна нарочита справа, о којој ће говорити наставник географије.

Пропорције

Две једнаке размере. — Сећамо се да је код *сличних* слика сталан однос ма којих двеју хомологих дужи. Узмимо основице и висине два *слична* троугла. Знамо, да ако је основица a два пута већ од основице a_1, мора и висина h_a бити два пута већа од висине h_1 (сл. 3).



Сл. 3.

То значи:

$$a : a_1 = 2$$
$$h_a : h_1 = 2$$

Како ове две размере имају *исти* количник, *једнаке* су. Две једнаке размере везане знаком једнакости дају *пропорцију:*

$$a : a_1 = h_a : h_1.$$

Пропорција има *четири члана* бројећи с лева на десно: *први, други, трећи* и *четврти.*

Пропорција има два *спољашња члана*: први и четврти и два *унутрашња члана*: други и трећи.

Пропорцији одговарају два једнака производа. — Узмимо две размере које имају исти количник

$$a : b = q \qquad c : d = q.$$

Од њих се може образовати пропорција.

$$a : b = c : d.$$

Ако ову пропорцију напишемо у облику разломка, имаћемо ову једнакост:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ако ту једнакост помножимо са bd имаћемо:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$
$$ad = bc.$$

Ако добивену једнакост загледамо мало боље, видећемо да она казује ово: *у свакој је пропорцији производ спољашњих чланова једнак с производом унутрашњих.*

Ми знамо да се производ не мења, ако чинитељи промене своја места. То значи да се *пропорција не мења, ако унутрашњи чланови међусобно и спољашњи чланови међусобно промене своја места.*

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : c = b : d \\ d : b = c : a \\ d : c = b : a \end{array}\right\} \text{У све ове четири пропорције је } ad = bc$$

Пошто чланови b и c образују један производ, а a и d други, свеједно је који ће од њих бити унутрашњи, а који спољашњи чланови. Главно је да *чинитељи истог производа морају бити на истоименим местима*, то јест или оба спољашњи, или оба унутрашњи.

Кад сад то применимо на нашу пропорцију, имаћемо:

$$\left.\begin{array}{l} b : a = d : c \\ b : d = a : c \\ c : a = d : b \\ c : d = a : b \end{array}\right\} \text{И у ове четири пропорције постоји једнакост } ad = bc.$$

То значи *да се једна пропорција може написати у 8 разних облика.*

Из свега овога се види да свакој пропорцији одговарају два једнака производа.

Та њена особина служи нам за *проверавање тачности* једне пропорције.

Да четири броја начине пропорцију потребан је и довољан услов да се од њих могу начинити два једнака производа од 2 чинитеља.

Пример I — Може ли се начинити пропорција од бројева 1, 2, 3 и 4?

$$1 \cdot 2 \neq 3 \cdot 4$$
$$1 \cdot 3 \neq 2 \cdot 4$$
$$1 \cdot 4 \neq 2 \cdot 3$$

Не може.

Пример II — Може ли се начинити пропорција од бројева 1, 3, 5 и 15?

$$1 \cdot 3 \neq 5 \cdot 15$$
$$1 \cdot 5 \neq 3 \cdot 15$$
$$1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$$

Од горња четири броја може се начинити пропорција, у којој чинитељи једнога производа морају стојати на једноименим местима. Дакле.

$$1 : 3 = 5 : 15 \qquad 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5.$$

Пример III — Је ли тачна пропорција:

$$3 : 4 = 20 : 28$$
$$3 \cdot 28 \neq 4 \cdot 20.$$

Горња пропорција није тачна.

Скраћивање и проширење пропорција. — Пошто пропорција претставља у ствари једнакост два двочинитељна производа јасно нам је:

1 да се пропорција не мења, ако *један* спољашњи и *један* унутрашњи члан помножимо или поделимо истим бројем;

2 да се пропорција не мења, ако *све* чланове помножимо или поделимо истим бројем.

$$ad = b \cdot c$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a}{n} \cdot d = \dfrac{b}{n} \cdot c \\ a \cdot \dfrac{d}{n} = b \cdot \dfrac{c}{n} \\ \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{d}{n} = \dfrac{b}{n} \cdot \dfrac{c}{n} \end{array}\right\} \text{Зашто?}$$

$$\left.\begin{array}{r} (an) \cdot d = (bn) \cdot c \\ a \cdot (dn) = b \cdot (cn) \\ an \cdot dn = bn \cdot cn \end{array}\right\} \text{Зашто?}$$

Овом особином пропорције служимо се кад хоћемо да је скратимо, то јест кад хоћемо да нам чланови буду *мањи* бројеви, или кад хоћемо *да се ослободимо разломака* у пропорцији.

Пример. — Скратити пропорцију

$$60\,000 : 30\,000 = 40\,000 : 20\,000.$$

Делимо све чланове ове пропорције са 10 000

$$6 : 3 = 4 : 2.$$

Поделимо сад I и II са 3

$$2 : 1 = 4 : 2$$

а III и IV са 2

$$2 : 1 = 2 : 1$$

Пример. — Ослободи се разломака у пропорцији:

$$15 : 10 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}.$$

Најмањи заједнички садржатељ за 2 и 3 је 6. Ако њиме помножимо III и IV члан, биће:

$$15 : 10 = 3 : 2$$

Изналажење непознатог члана. — Ако нам је један члан пропорције непознат, обележавамо га обично са x.

$$8 : 6 = x : 3.$$

Затим изразимо да је производ спољашњих једнак с производом унутрашњих чланова.

Добијамо једначину првог степена:

$$6x = 8 \cdot 3$$

Из ње одређујемо тражено x:

$$x = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$$
$$6 \cdot 4 = 8 \cdot 3.$$

Од 4 *произвољно* дата броја *не* можемо увек начини пропорцију.

Сабирање неких чланова. — На пропорцији се могу изводити многе промене, али ћемо ми извести овде само најпотребнију.

Ако постоји пропорција

$$(1) \qquad a : b = c : d$$

Постоји и ова:

$$(2) \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Пропорција (2) биће тачна, ако је количник леве размере једнак с количником десне.

Размера $\frac{a}{b}$ мора имати свој количник. Нека је он q. Тада ће бити:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$ Отуда је $a = bq$ и $c = dq$. Сменом у (2) добијамо:

$$(2') \quad \frac{bq}{bq+b} = \frac{dq}{dq+d} \text{ т. ј.}$$

$$\frac{bq}{b(q+1)} = \frac{dq}{d(q+1)}, \text{ т. ј.}$$

$$\frac{q}{q+1} = \frac{q}{q+1}$$

У једначини (2) једнаке су стране. Значи, кад постоји пропорција

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

постоји и пропорција:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Кад добивену пропорцију $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ упоредимо с нашом пропорцијом:

$$a : b = c : d$$

видимо да излази ово правило:

Први члан према збиру прва два има се као трећи члан према збиру друга два члана пропорције.

Ово правило служи при одређивању састојака смесе (легуре).

Пример: — Нека сребрна смеса има 92% сребра и 8% бакра. Колико има чиста сребра у смеси тешкој 115 кгр.?

Пошто на свака 92 грама сребра, долази 8 грама бакра, количине чиста сребра и чиста бакра стоје у размери као

$$92 : 8.$$

Сребро се у хемији обележава *Ag* (argentum), а бакар са *Cu* (cuprum), те ћемо имати:

$$Ag : Cu = 92 : 8.$$

Пре свега да скратимо III и IV члан са 4:

$$Ag : Cu = 23 : 2.$$

Ако сад употребимо малопређашње правило, биће:

$$\frac{Ag}{Ag+Cu} = \frac{23}{23+2}$$

Збир $(Ag + Cu)$ је сама та смеса чија је тежина 115 кгр.

$$\frac{Ag}{115} = \frac{23}{25}.$$

А одатле

$$Ag = \frac{23}{25} \cdot 115 = \frac{23}{5} \cdot 23 = 105{,}8 \text{ кгр.}$$

Бакра ће бити:

$$Cu = 115 - 105{,}8 = 9{,}2 \text{ кгр.}$$

Горње правило употребљава се и у трговачким рачунима. Ми ћемо навести један пример.

Пример. — Два лица уложе у један посао и то: лице *A* 30000 динара, а лице *B* 90000 динара. После извесног времена зараде 24000 динара. Како ће поделити добит?

Добити чине пропорцију са улозима. Ако добит првог лица обележимо са *A*, а добит другога са *B*, биће:

$$A : B = 30\,000 : 90\,000$$

или

$$A : B = 1 : 3$$

$$\frac{A}{A+B} = \frac{1}{1+3}$$

$$A+B = 24\,000$$

$$\frac{A}{24000} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{24000}{4} = 6000 \text{ динара}$$

Према томе лице *B* добиће:

$$24000 - 6000 = 18000 \text{ динара.}$$

Непрекидна пропорција. — Кад су унутрашњи чланови једне пропорције једнаки, она се зове *непрекидна пропорција*, а тај члан који се понавља зове се *средња пропорционала*.

Примери.

$$a : b = b : c$$

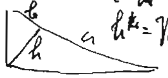
$$18 : 6 = 6 : 2$$

Је ли непрекидна она пропорција у којој су спољашњи чланови једнаки?

Непрекидну пропорцију добијамо веома често у Геометрији. Знамо да је, на пример, хипотенузина висина у правоуглом троуглу средња пропорционала за оба хипотенузина отсечка.

$a : h = h : b$

$h = \sqrt{ab}$



Нађи још примера!

Продужена пропорција. — Ако уједначимо више од две једнаке размере, имаћемо *продужену* пропорцију.

$$6 : 3 = 2$$

$$8 : 4 = 2$$

$$10 : 5 = 2$$

Онда је

$$6 : 3 = 8 : 4 = 10 : 5$$

$$a : b = 2$$

$$c : d = 2$$

$$e : f = 2.$$

Онда је

$$a : b = c : d = e : f$$

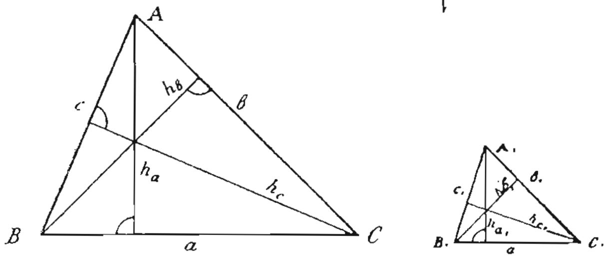
Први чланови размера (a, c, e) зову се *први чланови* продужене пропорције; други чланови размера (b, d, f) зову се *други чланови* продужене пропорције.

Продужена пропорција пише се у ова два разна облика:

$$a : b = c : d = e : f$$

или

$$a : c : e = b : d : f.$$



Сл. 4.

Продужену пропорцију имамо код сличних слика. Знамо да је код њих размера хомологих дужи стална.

Са наше слике (сл. 4) биће:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{h_a}{h_{a^1}} = \frac{h_b}{h_{b^1}} = \frac{h_c}{h_{c^1}}.$$

И на продуженој пропорцији могу се вршити многе промене. Споменућемо само најважнију: *збир свих првих чланова према збиру свих других чланова има се као ма који први према своме другом.*

$$(1) \qquad a : b = c : d = e : f.$$

$$(2) \qquad \frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Нека је q количник размера (1). Биће:

$$a = bq$$

$$c = dq$$

$$e = fq$$

Ако ове вредности сменимо у (2), добићемо:

$$\frac{bq + dq + fq}{b + d + f} = \frac{(b + d + f)\,q}{b + d + f} = q.$$

Пошто и размера

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = q$$

има количник q, значи да је продужена пропорција (2) тачна.

Продужена пропорција се употребљава и за трговачке рачуне. Ми ћемо навести један пример.

Ако три лица уложе у један трговачки посао и то A 25 000, B 50 000, C 60 000 дин., и зараде после извесног времена 67 500 дин., како ће поделити?

$$A : B : C = 25\,000 : 50\,000 : 60\,000.$$

$$A : B : C = 25 : 50 : 60$$

$$A : B : C = 5 : 10 : 12$$

$$\frac{A + B + C}{5 + 10 + 12} = \frac{A}{5} = \frac{B}{10} = \frac{C}{12}$$

$$A = \frac{A + B + C}{27}.\ 5 = \frac{67\,500}{27}.\ 5$$

$$B = \frac{67\,500}{27}.\ 10$$

$$C = \frac{67\,500}{27}.\ 12.$$

Да видимо колико пропорција можемо добити из једне ма које продужене пропорције.

Можемо их добити много, али нама је важно да знамо колико *независних* пропорција можемо добити. Две пропорције су независне кад се никаквом рачунском радњом не могу извести једна из друге.

Пример.

$$(1) \quad a : b = c : d$$

$$(2) \quad a : b = e : f.$$

Никаквом рачунском радњом не може се извести прва пропорција из друге, ни друга из прве.

Ако сад напишемо пропорцију;

$$(3) \quad c : d = e : f.$$

видимо одмах да се она може извести из првих двеју, ако им уједначимо десне стране. Пропорција (3) није независна; она је *изведена*.

Ако је n број размера у једној продуженој пропорцији, од ње се могу добити свега (n — 1) независних пропорција.

Да покажемо то само на једном примеру.

$$a : b = c : d = e : f$$

Да спојимо све размере са свима:

(1) $a : b = c : d$
(2) $a : b = e : f$
(3) $c : d = a : b$
(4) $c : d = e : f$
(5) $e : f = c : d$
(6) $e : f = a : b$

Кад добро загледамо овај низ пропорција, видимо да претстављају једну исту пропорцију пропорције (1) и (3), (2) и (6), (4) и (5). Ако према томе избацимо пропорције (3), (5) и (6), остаће нам пропорције

I $a : b = c : d$
II $a : b = e : f$
IV $c : d = e : f$

Али пропорција IV се добија, кад се уједначе десне стране пропорција I и II, те и она мора да отпадне, пошто *није независна.*

Остају дакле свега 2 пропорције. Тиме је наше горње тврђење доказано, јер је наша пропорција имала $n = 3$ размере, а ми смо добили $(n - 1) = (3 - 1) = 2$ независне пропорције.

На ово ученик треба добро да обрати пажњу, пошто се ту много греши.

Ако нам је дата оваква продужена пропорција са *трима* непознатима

$$x : y : z = a : b : c$$

можемо из ње начинити само *две* једначине:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$

или

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Из продужене пропорције добијају се најлакше *све* независне пропорције кад се прва размера спаја са свима редом.

Пример. Напиши све *независне* пропорције из ове продужене пропорције:

$$x : y : z : u = a : b : c : d.$$

Најбоље је најпре написати ову продужену пропорцију овако:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$$

па онда прићи послу:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$
$$\frac{x}{a} = \frac{u}{d}.$$

ПРИМЕНА ПРОПОРЦИЈА

Просто правило тројно

Задатак I — Кад два килограма шећера стају 30 динара, шта стају 7 килограма?

Овде су две врсте количина: килограми и динари. Од прве врсте (килограми) дата су два броја: 2 и 7. Од друге врсте (динари) само један број 30. Тражи се из друге врсте (динари) број који одговара броју из прве врсте (броју 7).

Да видимо како се понашају међу собом бројеви из тих двеју врста количина.

2 кгр. шећера	30 дин.
4 „ „	60 „
6 „ „	90 „

Кад расту бројеви прве врсте, расту и бројеви друге врсте. Колико пута порасту једни, толико пута порасту и други. Онда мора бити

2 : 4 = 30 : 60 4.30 = 2.60 пропорција постоји.

Овакве две врсте количина су **управно пропорционалне.** Кад то знамо, лако ћемо решити малопређашњи задатак.

IV	2 кгр.	30 дин.	II
III	7 кгр.	x дин.	I

x : 30 = 7 : 2

Одатле је лако наћи *x*.

Задатак II — Кад 10 радника сврше неки посао за 18 дана, колико треба радника да се тај посао сврши за 15 дана?

Радници	Дани
10	18.
x	15.

Како се понашају ове две врсте количина?

Ако један посао раде 10 радника 18 дана
онда „ 20 „ 9 „

Бројеви прве врсте расту, а друге опадају. Колико пута је први број из прве врсте (10) порастао (20, т. ј. постао 2 пута већи), толико пута је број у другој врсти опао (од 18 спао на 9).

Такве две врсте количина су **обрнуто пропорционалне.**

Да пробамо да направимо пропорцију.

10р. 18д.
20р. 9д.
$20 : 10 = 9 : 18$
$10 . 9 \neq 18 . 20$ Није добро.

Прва размера нам казује како да начинимо пропорцију.

$20 : 10$ Напред је већи члан. Онда и другој размери мора напред доћи већи члан. Овако $18 : 9$.

Да пробамо сад. $20 : 10 = 18 : 9.$
$20 . 9 = 10 . 18.$ Добро је.

Пропорцију смо добили, кад смо размеру количина прве врсте уједначили са обрнутом размером количина друге врсте. Зашто с обрнутом другом размером? Зато што су ове две врсте количина *обрнуто пропорционалне*.

Сад можемо решити малопређашњи задатак,

II 10р. III 18д.
I xр. IV 15д.

$$x : 10 = 18 : 15.$$

Одатле је лако наћи x.

Правило које казује како се одређује четврти број кад су дата три броја из двеју *пропорционалних количина* зове се **просто правило тројно.**

Ми смо сад израдили два задатка из простог правила тројног.

Сложено правило тројно

Кад је дато више од две врсте пропорционалних количина па су од сваке врсте дата по два броја, а од једне врсте само један број, ако тражимо други број те врсте, радимо задатак из сложеног правила тројног.

Како се решавају ти задаци показаћемо на примерима.

Задатак. — Кад 12 радника, радећи дневно 8 часова, сврше неки посао за 15 дана, за колико дана ће се свршити исти такав посао, кад се на њему може радити само пола дана, (4 часа), а употребе се 18 радника?

12 рад. 8 час. 15 дана
18 „ 4 „ x „

Обележимо са y број дана који је потребан да тај посао сврше 12 радника за 4 часа место за 8.

Сад задатак гласи овако:

Кад известан број радника, радећи дневно 8 часова, сврше неки посао за 15 дана, за које време би га свршили да раде само 4 часа дневно?

8 час. 15 дана
4 „ y „

$$(1) \qquad y : 15 = 8 : 4$$

Одатле је $y = \frac{15 \cdot 8}{4}$

Сад задатак гласи овако:

Кад 12 радника сврше неки посао за y дана, за колико ће га дана свршити 18 радника?

12 р. y дана
18 р. x „

$$(2) \qquad x : y = 12 : 18$$

Из (1) имамо

$$y = \frac{15 \cdot 18}{4}$$

Кад то сменимо у (2), биће:

$$x : \frac{15 \cdot 8}{4} = 12 : 18$$

$$(3) \qquad x = \frac{\frac{15 \cdot 8}{4} . 12}{18} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 18} = \frac{15 . 4 . 2}{6} = \frac{5 . 4}{1} = 20$$

Практично упутство.

$$\begin{array}{lc} 12 \text{ рад.} \left(\begin{array}{l} 8 \text{ час.} \\ 4 \text{ час.} \end{array}\right) & 15 \text{ д.} \\ 18 \text{ рад.} & x \end{array}$$

$$(1) \qquad x : 15 = 12 : 18$$

$$\text{сад} \quad \left(\begin{array}{l} 12 \text{ рад.} \\ 18 \text{ рад.} \end{array}\right) \begin{array}{l} 8 \text{ час} \\ 4 \text{ час} \end{array} \quad \begin{array}{l} 15 \text{ д.} \\ x \end{array}$$

$$(2) \qquad x : 15 = 8 : 4.$$

$$\begin{array}{lrl} (1) & x : 15 = & 12 : 18 \\ (2) & = & 8 : 4 \end{array}$$

$$x = \frac{15 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot 18} = 20$$

(Производ свих унутрашњих подељен производом свих спољашњих).

ВЕЖБАЊА УЗ VI ОДЕЉАК

Скрати ове размере:

1. $abc : adc$
2. $bcd : bcf$
3. $amn : mnp$
4. $18 : 24$
5. $60abc : 120b^2c$
6. $75a^2b^3c : 15abc$.

Ослободи се разломака у овим размерама:

7. $\frac{2}{3} : \frac{3}{2}$.
8. $\frac{4}{7} : \frac{3}{14}$.
9. $\frac{a}{4b} : \frac{b}{6a}$.
10. $\frac{1}{a^2 - b^2} : \frac{1}{a^3 + 2ab + b^2}$.
11. $\frac{1}{x^3 + 8} : \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$.
12. $3\frac{7}{9}x^2 : 4\frac{5}{27}x^3$.

На слици 2 израчунај праволиниску даљину:

13. од Београда до Гроцке
14. „ „ „ Панчева
15. „ „ „ Авале
16. „ „ „ Остружнице.

17\. — Исти задатак само што ће се сад даљина рачунати путем којим се долази до тих места.

18\. — Узми план Београда, па израчунај праволиниско удаљење од своје куће до школе.

19\. — Кад знаш за колико минута стижеш од куће до школе, израчунај којом се брзином крећеш.

(Узми план своје вароши, нађи на њему своју улицу; на улици приближно обележи тачком свој стан. Од те тачке па до школе вуци црте улицама којима пролазиш. Све те дужи пренеси на једну праву линију и види колика је у природи дужина коју претставља збир тих дужи. Затим употреби образац $s = ct$ за једнако кретање).

Од датих пропорција начини два једнака производа:

20. $2 : 4 = 16 : 32$
21. $12 : 6 = 100 : 50$
22. $14 : 10 = 7 : 5$
23. $18 : 9 = 6 : 3$
24. $7 : 8 = 9 : 10\frac{2}{7}$
25. $4 : 3 = 18 : 13\frac{1}{2}$
26. $5\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = 7 : \frac{12}{17}$

Може ли се образовати пропорција од ова четири броја:

27. 2, 3, 4, 6·
28. 1, 3, 5, 7.
29. 2, 4, 6, 8.
30. $\frac{2}{5}$ 1, $\frac{4}{3}$, 2 (Најпре сва четири броја доведи на заједнички именитељ).

Од ових једнаких производа начини пропорције:

31. $3 . 4 = 2 . 6$
32. $7 . 6 = 14 . 3$
33. $9 . 8 = 12 . 6$
34. $8 . 6 = 12 . 4$
35. $18 . 12 = 8 . 27$
36. $a . h_b = b . h_a$
37. $b . h_c = c . h_b$

38\. — Напиши још седам разних облика ове пропорције:

$$p : q = m : n.$$

39\. — Исти задатак за пропорцију

$$5 : 1 = 20 : 4.$$

40\. — Исти задатак за пропорцију

$$a : a_1 = h : h_1.$$

Провери тачност ових пропорција:

41. $8 : 4 = 6 : 3$
42. $3 : 2 = 6 : 4$
43. $7 : 9 = 8 : 6$
44. $5 : 6 = 3 : 7$
45. $8 : 5 = 18 : 12$
46. $18 : 37 = 4 : 105$

Скрати пропорције:

47. $8 : 4 = 6 : 3$
48. $10 : 5 = 8 : 4$
49. $20 : 8 = 10 : 4$
50. $12 : 14 = 6 : 7$
51. $15 : 6 = 5 : 2$
52. $110 : 20 = 11 : 2$

Доведи на најпростији облик ове пропорције:

53. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} : \frac{15}{16}$
54. $a : b = \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$
55. $m : n = 1 : \frac{3}{4}$
56. $4,2 : 1,4 = 2,5 : \frac{5}{6}$
57. $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{4} = 7 : 9\frac{3}{4}$
58. $3\frac{1}{2} : 4 = 7 : 8$
59. $5,1 : 2,4 = 1,7 : 0,8$
60. $\frac{3}{4} : 0,21 = \frac{3}{7} : 0,12$

Нађи непознати члан у пропорцијама:

61. $7,6 : x = 3,6 : 8,1$
62. $x : 1\frac{1}{5} = 5\frac{1}{4} : 4\frac{2}{7}$
63. $0,28 : x = 2,8 : 96$
64. $4\frac{1}{7} : 7\frac{1}{4} = 5 : x$
65. $0,24 : 5 = 14,4 : x$
66. $5,4 : 3,3 = x : 1,2$
67. $6,3 : x = 3,6 : 0,26$
68. $7,2 : 6,4 = x : 1,6$
69. $9,4 : x = 1,3 : 2,8$
70. $x : \frac{2}{5} = 15\frac{1}{3} : 8\frac{1}{9}$

71\. — Нађи број који са бројевима 1, 2, 9 може образовати пропорцију у којој чланови иду редом 1, 2, 9 . . .

72\. — Нађи број који са бројевима $1\frac{1}{2}$, 2, 8 може образовати пропорцију у којој ће 2 бити први члан, а 8 четврти.

73\. — Исто за бројеве $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, 5, где је 5 други члан, а $2\frac{1}{3}$ трећи

74\. Исто за бројеве 4,5 $3\frac{1}{8}$ 1 где је 1 трећи члан, а $4\frac{1}{2}$ први.

75\. „ „ „ 2 5 0,07, где је 2 први члан, а 5 трећи.

76\. „ „ „ 0,28 0,12 0,4 где је 0,4 други члан, а 0,28 и 0,14 спољни чланови.

77\. „ . „ 2 4 $3\frac{1}{8}$ где је 2 четврти члан, а $3\frac{1}{8}$ други.

78\. „ „ „ 4 5 $7\frac{1}{3}$ где је 4 први члан, а 5 други.

79\. — Дата је пропорција:

$$a : b = c : d.$$

Докажи да је тачна и пропорција:

$$\frac{a}{a - b} = \frac{c}{c - d}.$$

80. — Исто за пропорцију:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Исто за пропорције:

81. $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$ **82.** $\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$

83. $\frac{a \pm b}{c \pm d}=\frac{b}{d}.$

84. — Бронза се састоји из 80 делова бакра и 20 делова калаја. Колико треба бакра, да би се израдило звоно од 2000 кгр.?

85. — Вода се састоји из водоника (H) и кисеоника (O); они стоје у размери као 2 : 16. Колико има кисеоника у 2 литра воде?

86. — Амонијак се састоји из азота (N) и водоника (H), који стоје у размери као 14 : 3. Колико има азота у 800 грама амонијака?

87. — Кухинска со се састоји из два проста тела: натријума (Na) и хлора (Cl), који стоје у размери као 23 : 35,5. Колико има натријума у 3,5 кгр. соли?

88. — Златник од 20 динара тежак је 6,451 грама. Он се састоји из 900 делова злата и 100 делова бакра. Колико има злата у 15 таквих златника?

89. — У вези са задатком 82 нађи вредност за y у овој пропорцији

$$3 : 4 = (5 - y) : y$$

90. — Исто за вредност x пропорције:

$$3 : 3 = (x + 1) : x$$

91. — Два лица уложе у један посао и то: A 50 000 динара, а B 30 000 динара. Како ће поделити зараду од 24 000 динара?

92. — Нађи средњу пропорционалу за бројеве 2 и 32.

93. — Исто за бројеве 3 и 12 4 и $6\frac{1}{4}$, 8 и $6\frac{1}{8}$.

94. — Колике су стране правога угла у правоуглом троуглу, у коме хипотенузина висина дели хипотенузу на два отсечка: од 4 *cm* и од 25 *cm*?

95. — Хипотенуза једног правоуглог троугла је 10 *cm*. Њена висина је дели на отсечке који стоје у размери 1 : 4. Колике су стране правога угла?

96. — Колики је полупречник описаног круга око правоуглог троугла, чија је хипотенузина висина 4 *cm*, а једна страна правога угла 5 *cm*?

(Где лежи центар тога круга? Шта је то „угао у полукругу.“?)

97. — Капитали K_1 и K_2 доносе *под истим процентом* годишњи интерес i_1 и i_2. Образуј пропорцију од те четири количине!

Од двеју датих пропорција начини једву продужену пропорцију:

98. $2 : 4 = 3 : 6$
$2 : 4 = 4 : 8$

99. $10 : 2 = 40 : 8$
$10 : 2 = 20 : 4$

100. $a : b = c : d$
$a : b = m : n$

101. $a : a_1 = b : b_1$
$a : a_1 = c : c_1$

102. $a : b = p : q$
$c : d = p : q$

103. $3 : 6 = 2 : 4$
$18 : 10 = 9 : 5$

(Напиши овако: 9 : 18 = 5 : 10. Јесу ли сад количници размера у другој пропорцији једнаки са количницима размера у првој?)

104. $9 : 21 = 3 : 7$
$7 : 15 = 2\frac{1}{3} : 5$

105. $3 : 2 = 9 : 6$
$4 : 2 = 6 : 3$

106. — Три лица уложе у једно предузеће и то A 20 000 динара, B 50 000 и C 40 000 динара. Како ће поделити добит од 22 000 динара?

Изведи све *независне* пропорције из дате продужене пропорције.

107. $x : y : z = 1 : 2 : 3.$

108. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4.$

109. $a : a_1 : a_2 = h : h_1 : h_2$

110. $a : b : c : h_a : h_b = a_1 : b_1 : c_1 : ha_1 : ha_2$

111. — Два правоугаоника имају једнаке површине. Основице су им у размери 2 : 3. У којој су размери висине?

(У којој су размери површине?)

112. — Површине два троугла су једнаке. Основице су им у односу 3 : 4. У коме су односу висине?

113. — Стране једнога троугла су у односу 2 : 4 : 5. У коме су односу висине?

114. — Кад 3,50 м. неког штофа стају 650 дин., шта стају 22,50 м.?

115. — Кад је за комад платна од 18 м. плаћено 324 дин., шта ће стати 280 метара тога платна?

116. — Један воз је прешао 240 км. за 5 ч. Колики пут ће прећи за 12 часова?

117. — На једну славину истеку 36 л. воде за 2 минута. Колико ће воде истећи за $1^1/_4$ часа?

118. — На једну славину истече 15 л. воде за 1,5 секунд. Колико треба времена да се на њој напуни велика боца од 5 л.?

119. — Један басен је дугачак 12,5 м., широк 10 м., а дубок 80 см. За које време ће бити у њему воде до пола, кад на славину истеку 184,5 л. за 2 минута и 3 секунда?

120. — Са 8 хектара земљишта добивено је 200 хектолитара пшенице. Колико ће се пшенице добити са једне њиве од 6 ари?

121. — Једна ливница је потрошила 17000 кгр. угља док је излила 6285 кгр. гвожђа. Колико треба угља, кад морају да се излију 11812 кгр. гвожђа?

122. — У једној варошици издато је за исхрану војника 3807 кгр. хлеба за 27 дана. Колико треба хлеба, да се ти војници хране 75 дана?

123. — Прелазећи 60 км. на час један воз пређе за 6 часова пут између двеју вароши. Колико километара би требао да прелази на час, па да пређе тај пут за 5 часова?

124. — Једна славина даје 60 л. воде за 1 минут. Она може да напуни један базен за 6 часова. За које време би напунила тај базен друга једна славина, која даје 150 л. воде у минуту?

125. — Један преписивач на машини може да препише један рукопис за 12 дана, кад би радио по 4 часа дневно. Али кад препис мора да буде готов за 9 дана, колико часова дневно мора да ради?

126. — Један зид су сазидали 24 зидара за 45 дана. Колико је зидара потребно да се такав зид подигне за 27 дана?

127. — Неки посао сврше 7 радника за 40 дана. За колико ће дана свршити тај посао 20 радника?

128. — Кад 10 радника радећи дневно по 8 и по часова, сврше неки посао за 16 дана, колико треба радника, па да сврше тај посао за 10 дана са 8 часова дневнога рада?

129. — Од 36,40 м. неке тканине широке 0,75 м. начињено је 8 дечијих хаљиница. Колико треба метара друге једне тканине, широке 0,80 метара да се начине 12 таквих хаљиница?

130. — Од 12 кгр. неке вуне добијају се 66 м. тканине, широке 1 м. Колико метара те тканине могу да се добију од 15 кгр. исте вуне, кад тканина мора да буде широка 1,50 м?

131. — Један канал дуг 1950 м. ископају 50 радника за 78 дана. Колико треба радника да ископају канал од 1250 метара дужине за 50 дана кад је земљиште исте врсте?

132. — Неки посао сврше 18 радника за 16 дана са радним временом од 10 часова. Колико часова дневно морају да раде 24 радника, да би свршили тај посао за 10 дана?

133. — Кад 10 људи једу по 1 и по кгр. хлеба дневно, имаће хлеба за 4 и по месеца. Колико смеју да једу дневно 12 људи, да би им иста количина хлеба трајала 6 месеци?

134. — Једна количина зоби може да траје 25 дана за 14 коња, кад се свакоме коњу дају дневно по 6 кгр. Колико ће дана трајати зоб, кад се свакоме коњу дају дневно по 5 кгр., а дођу још 5 коња?

VII — ФУНКЦИЈЕ — ЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Функција

Знамо да површина квадрата зависи од величине његове стране: кад се промени квадратова страна, промени се и површина.

Видели смо да површина круга зависи од његовог полупречника: чим се промени полупречник, мења се и површина.

Видели смо да површина облице зависи од њене висине: чим се промени висина, промени се и површина.

Знамо да запремина коцке зависи од њене ивице: чим се промени ивица, мења се и запремина.

Решавали смо и овакве задатке из правила тројног:

Пошто су 5 килограма брашна, кад два килограма стају 10 динара?

Сећамо се да смо том приликом овако размишљали:

што више килограма, *то више* динара има да се плати.

Тиме смо казали да *те две врсте количина зависе једна од друге*. То нам је јасно одмах, јер знамо, да ћемо за *већу* количину новца добити *већу* количину килограма, а за *мању* количину новца *мању* количину килограма. То значи, *чим се једна количина измени промени се и количина друге врсте*. Ако за 20 динара добијемо 4 килограма брашна, за 7·5 динара *нећемо* добити *исту* количину килограма брашна: место 4 килограма, добићемо сад само 1,5 кг.

Имали смо исто тако и овакав задатак:

Кад један капитал донесе 100 динара интереса за 2 године, колико ће интереса донети за 6 година под истим процентом?

И ту знамо да ће за *више* година, исти капитал донети *више* интереса под истим процентом. То значи, *кад се време променило, мора се променити и интерес*. И збиља, за промењено време 6 година, промењени интерес биће 300 динара.

Решавали смо и овакве задатке:

Кад 8 радника сврше један посао за 16 дана, за које време ће свршити тај посао 16 радника?

Чим се *промени* број радника, *мења се* и време за које се тај посао свршава. Ако тај посао морамо да свршимо за 10 дана, морамо узети више радника; ако може да се ради 20 дана, можемо узети мање радника.

У Физици смо познали многе друге врсте количина које су *везане једна за другу тако, да с променом једне, наступа промена оне друге врсте количина.*

Ако о један еластичан конац обесимо терет, конац ће се истезати. Дужина конца зависиће од величине терета који смо на његовом доњем крају обесили.

Знамо да су гасови стишљиви. Штогод смањујемо запремину једног гаса, он све више притискује на зидове суда у коме је. Притисак водене паре је све већи, што је температура већа. Знамо да пара одигне поклопац са лонца, кад је вода много загрејана.

Знамо да ће путник прећи све већи пут, што више времена путује. И т. д. и т. д.

У свима овим примерима видимо да су две количине у таквом односу, да промена једне зависи од промене оне друге количине.

Рекли смо да су такве две количине **функција** једна друге.

Површина квадрата је *функција* квадратове стране.

Површина круга је *функција* кружног полупречника.

Површина облице је *фунцкија* њене висине.

Запремина коцке је *функција* њене ивице.

Количина плаћеног *новца* за једну робу *функција* је количине те *робе*.

Интерес је *функција* времена за које је капитал лежао под интересом.

Време за које ће се израдити један посао јесте *функција* броја *радника* (зависи од броја радника).

Дужина еластичног конца је *функција* тежине обешене на његовом крају.

Притисак гаса је *функција* његове запремине.

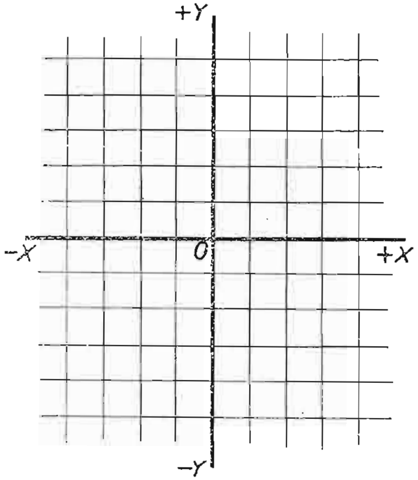
Притисак водене паре је *функција* температуре.

Координатни систем. — Да бисмо јасније видели функције Математика их црта, т. ј. представља их графички.

Ми смо већ мало видели како се то ради. Узму се две осовине. Узимамо две осовине јер смо видели да морају бити бар две врсте количина да би било функције.

Те две осовине ми узимамо под правим углом (сл. 5) и обадве делимо на *једнаке*, али *произвољне* подеоке. Овакву једну слику с двема осовинама под правим углом зовемо *правоугли координатни систем.*

Осовину паралелну са правцем писања зовемо *апсцисна осовина* и обележавамо је са X, а осовину управну на апсцисној осовини зовемо *ординатна осовина* и обележавамо је са У. Пресек осовина обележавамо са O и зовемо га *координатни почетак.* Дужине које преносимо по апсцисној осовини зовемо *апсцисе*, а дужине по ординатној осовини *ординате.* *Апсцисе* су *позитивне* десно од координатног почетка, а *негативне* лево од координатног почетка. *Ординате* су *позитивне* изнад координатног почетка, а *негативне* испод координатног почетка.



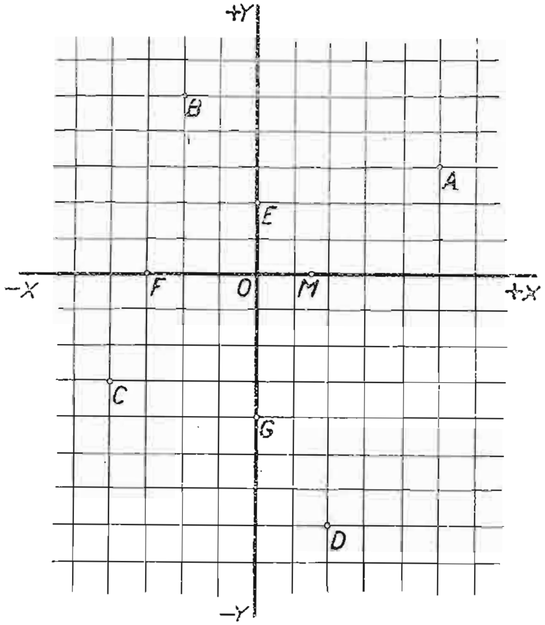
Сл. 5.

Сад кад имамо координатни систем можемо да одредимо положај сваке тачке у нашој равни цртања. Треба да видимо колико је та тачка далеко од обе осовине. Раздаљина од апсцисне осовине је *ордината* те тачке, а раздаљина од ординатне осовине је *апсциса.* Апсциса и ордината су *координате* једне тачке. Кад знамо апсцису и ординату можемо одмах нацртати тачку. Тачку обележавамо на тај начин, што напишемо њено велико слово, а крај њега у загради најпре апсцису, па запету, па ординату.

Примери. — Нацртај тачку *A* (5, 3).

Ово (5, 3) крај слова *A* значи да та тачка *A* има апсцису 5 и ординату 3 (сл. 6).

Одбројмо на апсцисној осовини + 5, а на ординатној осовини + 3. Из тих поделака дигнимо управне на осовине и у пресеку тих управних добићемо тачку *A*.



Сл. 6.

И збиља тачка *A* је удаљена: од ординатне осовине за 5 поделака, а од апсцисне осовине за 3 подеока.

Тачку *A* ћемо још брже одредити, ако из подеока + 5 на апсцисној осовини дигнемо управну и на њој одбројимо + 3 подеока.

Тачка *B* има координате x = — 2, y = + 5.
„ *C* „ „ x = — 4, y = — 3.
„ *D* „ „ x = + 2, y = — 7.
„ *E* „ „ x = 0, y = + 2.
„ *F* „ „ x = — 3, y = 0.
„ *G* „ „ x = 0, y = — 4.
„ *M* „ „ x = + 1$\frac{1}{2}$, y = 0.

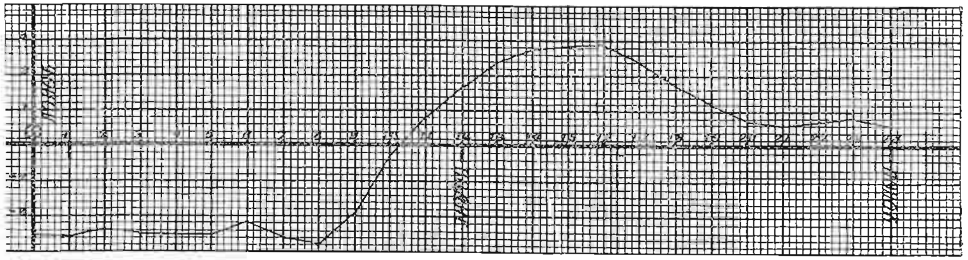
Девојчице су се већ служиле координатним системом и ако нису знале ништа о њему. Ђерђеф за вежење („штиковање“) је један координанти систем.

Кад хоће да се почне један узор („мустра“), морају се на јути одбројати крстићи од обе гране ђерђефа, које стоје под правим углом.

Кад хоћеш да препишеш неки акт тачно како је написан, мораш да одбројиш редове од горње ивице и од леве ивице, па тек онда да почнеш. На тај начин одређујеш положај почетног слова на координатном систему који претстављају ивице табака.

Ако хоћеш да исправиш неку штампарску грешку у једном слову, мораш бројати редове оздо или озго, и слова сдесна или слева. Ивице отштампаног текста претстављају координатни систем.

Координатни систем је веома подесан за претстављање температуре. Ако часове преносимо по апсцисној осовини, а температуру мерену у тим часовима бележимо као ординате, имаћемо једну изломљену линију, која јасно претставља температуру извесног дана.



Сл. 7.

Наша слика 7 претставља температуру у Београду бележену од поноћи између 29 и 30 јануара 1922 год. до поноћи између 30 и 31 јануара. Часови су бележени од 1 до 24 како се сад бележи на железницама у већини земаља. Поноћ је обележена нулом.

Кад загледамо горњу слику видимо да је тога дана било најхладније у 8 час. ујутру, а најтоплије од 3 до 4 часа по подне (од 15 до 16). Видимо и то да је температура нагло расла од 8 до 10 часова.

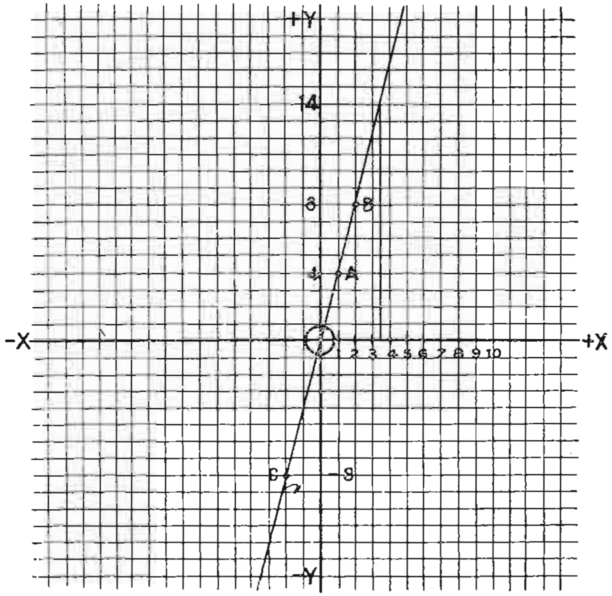
Ако бележимо температуру свакога часа, ми ћемо увек на нашој слици имати јасно означену највишу и најнижу температуру. Знамо да је после ручка топлије него ујутру. То показује изломљена линија са слике 7.

Лекари се редовно служе линијама да претставе ток болести. По апсцисној осовини преносе дане, а по ординатној осовини измерену температуру. На тај начин добију једну криву линију. Сваки лекар кад погледа такву линију, зна да ли се болест развијала правилно, или није.

Претстављање кретања на координатном систему. —

Задатак. — Графички претставити кретање путника који полази у подне из неког места и прелази сваког часа по 4 км.

Узмимо на апсцисној осовини часове, а на ординатној километре. Нека нам поделак на апсцисној осовини претставља 1 час, а поделак на ординатној осовини 1 км. (сл. 8).



Сл. 8.

На подне је наш путник у *O*. Пошто иде брзином од 4 км., он ће до 1 часа по подне прећи 4 км. и ми ћемо добити тачку *A*, која одговара времену од 1 часа и пређеном путу од 4 км. До 2 часа по подне наш путник ће прећи још 4 км., и ми ћемо добити тачку *B*, која одговара времену од 2 часа и пређеном путу од 8 км. Према томе права *OA* биће тражена слика.

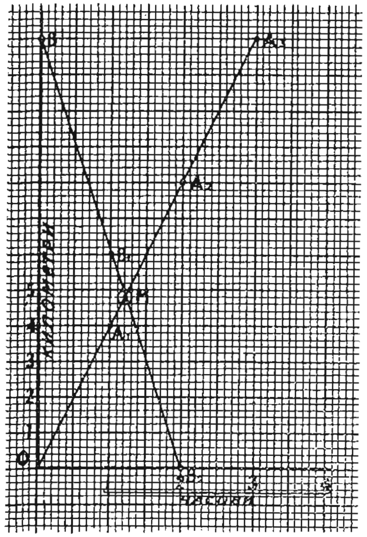
Она нам показује да је путник до 4 часа по подне прешао 16 км. Исто тако са ње видимо да је било 3 часа и 30 минута, кад је наш путник стигао у место које је далеко 14 км. од полазног места.

За овакве цртеже најбоље је служити се т. зв. „милиметарском хартијом“ каквом смо се ми послужили за сл. 7.

А где је био наш путник у 10 часова пре подне?

Почели смо да бројимо време од подне. 10 часова то је *прошло време* према нашем почетку. То прошло време обележавамо *негативним бројевима*. Наше питање постаје сад овако: Где је био путник у (—2) часа?

Време означавамо на апсцисној осовини. Узмимо налево апсцису — 2. Дигнимо и позитивну и негативну ординату. Позитивна ордината не сече нашу праву AB која нам претставља пут нашег путника. Негативна ордината сече је у тачци C. И ми читамо да је у 10 часова пре подне наш путник био далеко 8 км од места у које је стигао у подне. То место је удаљено 8 км. од полазног места и у њ се може стићи из нашег полазног места, ако идемо 8 км. у *обрнутом смислу*. Зато тачка C показује (—8) км



Сл. 9.

Други задатак. — Из два места удаљена 12 км. полазе у подне два путника један другом у сусрет. Брзине 4 км. и 6 км. Где ће се и кад **срести?**

Обележимо време по апсцисној осовини, а километре по ординатној. Нека нам 1 см. претставља на апсцисној осовини 1 час, а на ординатној 2 км.

Путник из O нека иде брзином од 4 км. После једног часа он ће прећи 4 км., што на нашој слици даје тачку A; (сл. 9), после 2 часа 8 км., што даје тачку A_2 и најзад после 3 часа 12 км., што ће дати тачку A_3. Права AO_3 претстављаће нам пут првога путника. Права BB_2 претстављаће нам пут другога путника. Тачка M претстављаће *време и место* њихова сусрета. Кад загледамо слику, видимо да M претставља 4,8 км. и 1 час и 12 минута.

Да проверимо то.

После једног часа и 12 минута (то јест после $1\frac{1}{5}$ часа) први путник је прешао пут:

$$4 \,.\, 1\frac{1}{5} = \frac{24}{5} \text{ км.}$$

После $1\frac{1}{5}$ часа други је путник прешао пут од

$$6 \,.\, 1\frac{1}{5} = \frac{36}{5}\ km$$

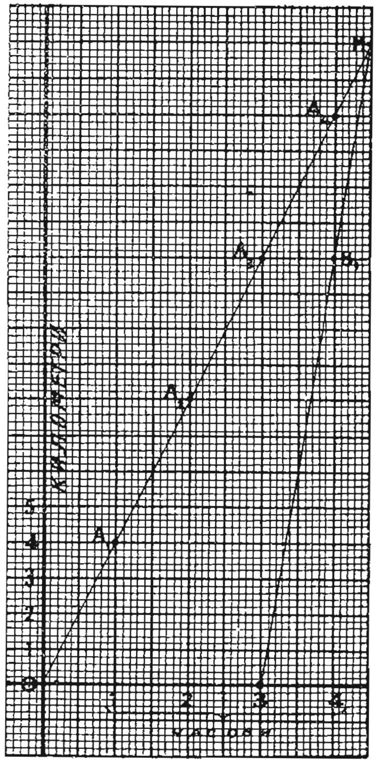
Саберимо та два пута, па ћемо добити растојање полазних тачака:

$$\frac{24}{5} + \frac{36}{5} = \frac{60}{5} = 12\ km.$$

То значи да су се путници збиља срели после 1 часа 12 мин.

Трећи задатак. — Из једног места полази један путник у подне и иде брзином од 4 km. на час. У 3 часа по подне полази други путник колима из истог места. Кола иду брзином од 12 km. на час. Кад ће кола **стићи** *пешака и на коме месту?*

Да нам слика не би била велика, ми ћемо узећи, да нам на ординатној осовини 1 *cm.* претставља 2 *km.*



Сл. 10.

Пошто кола полазе у 3 часа, на нашој ће слици (сл. 10) њихов пут почети од 3 на апсцисној осовини. Пешаков пут биће претстављен правом OM, а пут кола правом B_1M.

Те се две праве секу у M. Тачка M показује $4\frac{1}{2}$ часа по подне и 18 *km*. Кола стижу пешака у 4 ч. 30 м. по подне.

Да проверимо то.

До $4\frac{1}{2}$ час по подне пешак је прешао $4 \,.\, 4\frac{1}{2} = 18$ *km*. До $4\frac{1}{2}$ часа по подне кола су прешла:

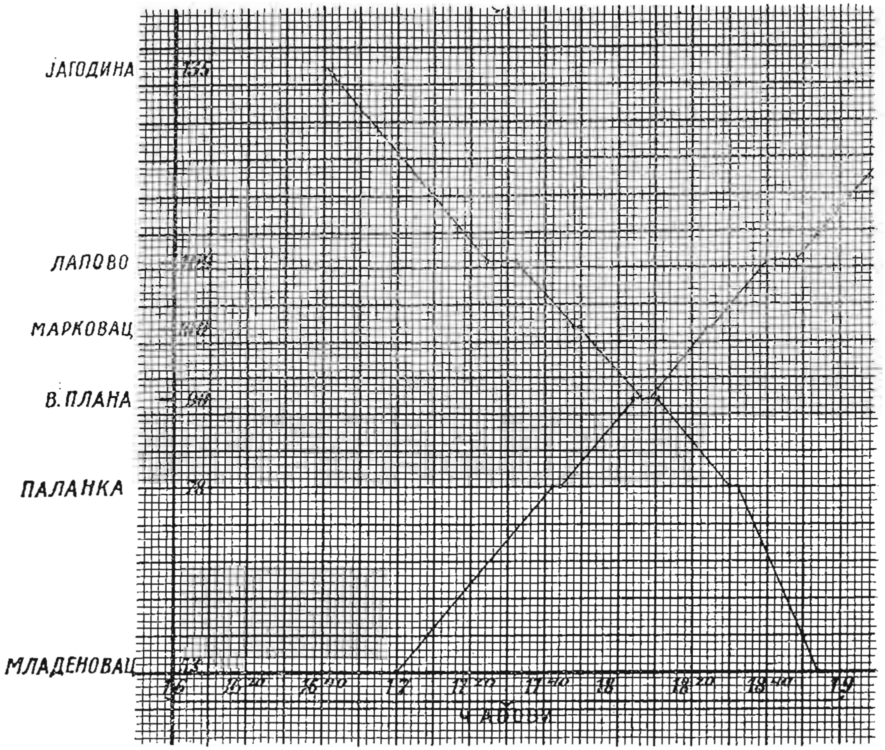
$$12 \,.\, 1\frac{1}{2} = 18\ km.$$

Пошто су кола исто толико далеко од полазне тачке као и пешак, значи да су *стигла* пешака у 4 часа и 30 мин. по подне.

Помоћу координатног система прави се и такозвани „графикон кретања“ за возове. Тим се графиконом одређује стизање возова у станице и укрштање.

Узмимо само један пример.

По реду вожње од 1 јуна 1921. год. полазио је брзи воз из Младеновца за Ниш у 17 час. Из Јагодине за Београд полазио је брзи воз у 16 часова и 42 мин. Оба воза крећу се просечном брзином од 36 *км*. Где ће се и кад срести? На којој станици треба да се укрсте? Застанци возова су ови: у Лапову 8 минута, у Марковцу 1 минут, у Великој Плани 4 минута, у Паланци 2 минута.



Сл. 11.

Станице се налазе на овим километрима (рачунајући од Београда): Младеновац 53, Паланка 78, В. Плана 90, Марковац 100, Лапово 109, Јагодина 135.

Слика 11 показује путеве тих возова. Да бисмо нацртали пут од Младеновца до Паланке, ми ћемо овако размишљати:

Наш брзи воз прелази 1 километар за $\frac{60}{36}$ минута. Од Младеновца до Паланке има 25 *км*. Значи да ће воз од М. до П. провести на путу

$$\frac{60}{36} \cdot 25 = \frac{5}{3} \cdot 25 = \frac{125}{3} = 41 \text{ минут и } 40 \text{ секунди.}$$

Ми ћемо узети 42 мин. До 17^{42} наша линија се пење. Од 17^{42} до 17^{44} наша линија је положена, јер ту пролази само време, а пут се не прелази (воз стоји 2 минута у станици).

Од 17^{44} линија се пење, јер се воз креће. Од Паланке до Велике Плане има 12 km. Њих ће наш воз прећи за

$$\frac{5}{3} \cdot 12 = 20 \text{ мин.}$$

Значи, биће 18^{04} кад воз буде стигао у В. Пл. Због тога се наша линија пење све до 18^{04}, па ту постаје опет положена, јер воз стоји у станици 4 минута.

Кад нацртамо пут воза из Јагодине, видећемо да се наша два брза воза морају укрстити у Великој Плани. Најпре улази у станицу београдски воз, да ту сачека нишки воз. Први одлази из станице београдски воз у 18^{08}, а два минута доцније одлази за Београд нишки воз у 18^{10}.

На стварном реду вожње одласци и доласци возова су нешто мало друкчији.

Једначина I степена с једном непознатом

Једначина као претставник функције. — Ми знамо да је једначина она једнакост у којој се налази једна непозната, или једнакост у којој се налазе више непознатих.

Њоме се веома лепо може показати веза која постоји између двеју променљивих количина. Узмимо нашу слику 8 и задатак који је на њој израђен. Кад добро загледамо слику, видећемо да свака тачка на правој AB има ову особину: ордината је увек четири пута већа од апсцисе. Како ординате обележавамо са *y*, а апсцисе са *x*, можемо написати кратко овако:

$$y = 4x$$

Ако сад *иксу* дајемо *произвољне* вредности, добићемо *одређене* вредности за *ипсилон*.

Како нам x претставља време, а *y* пређени пут, знаћемо увек пут кад знамо време.

Ако је x = 0, онда је

$$y = 4 \cdot 0$$
$$y = 0.$$

Шта значи то? То значи да је на подне (ту смо узели да је време нула), путник био у самоме полазноме месту (био је од њега удаљен нула метара). Ако сад *иксу* дајемо разне вредности, добијаћемо за сваку такву вредност *једну одређену* вредност за *ипсилон*. Имаћемо овакву једну таблицу:

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	2
1	4
$1\frac{1}{2}$	6
2	8
$-\frac{1}{2}$	-2
$-1\frac{1}{2}$	-6
-2	-8

Ако узмемо исте подеоке на апсцисној и на ординатној осовини као на слици 8, па нацртамо тачке M_0 (0,0), $M_1\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, M_2 (1,4) и т. д, добићемо једну праву, која ће се поклопити са правом AB на слици 8, ако поклопимо наша два координатна система.

Овде смо имали *две променљиве* количине x и y. Једној од њих давали смо произвољне вредности и њу ћемо звати *независно променљива*. Узели смо да је x независно променљива. То значи да тој независно-променљивој можемо давати *произвољне* вредности. Она друга променљива зове се *функција*. Она *зависи* сад од вредности коју смо дали *иксу*. Јер ако узмемо да је $x = 1$ у нашој једначини, онда y мора бити само 4. Ако смо узели да је $x = 1$, онда не можемо произвољно узети да је $y = 5$, пошто два израза везана знаком једнакости неће више бити једнака, ако сменимо у једначини $y = 4x$ произвољно узете вредности и за x и за y:

$$5 \neq 4.1.$$

Одатле се види, да *једначина постоји само за извесне вредности променљивих количина у њој.*

$$y = 4x$$

$$\begin{array}{rlcl}
\text{За} & \left\{\begin{array}{l} y = 1,\ x = 2 \\ y = 2,\ x = 2 \\ y = 3,\ x = 2 \end{array}\right\} & \begin{array}{c}\text{не постоји} \\ \text{једначина}\end{array} & \left\{\begin{array}{l} 1 \neq 4 \,.\, 2 \\ 2 \neq 4 \,.\, 2 \\ 3 \neq 4 \,.\, 2 \end{array}\right. \\
\text{Тек за} & \left.\begin{array}{l} y = 4,\ x = 1 \\ y = 8,\ x = 2 \end{array}\right\} & \begin{array}{c}\text{постоји јед-} \\ \text{начина}\end{array} & \begin{array}{l} 4 = 4 \,.\, 1 \\ 8 = 4 \,.\, 2 \end{array}
\end{array}$$

Те вредности променљивих количина, за које једначина постоји, зову се *корени једначине*.

У горњем примеру корене једначине $y = 4x$ даје нам малопређашња таблица.

Алгебарске једначине. — Главни задатак Алгебре јесте да проучава функције које се могу претставити сабирањем, одузимањем, множењем, дељењем, степеновањем и кореновањем. Такве функције зову се *алгебарске функције*, а једначине које их претстављају, зову се *алгебарске једначине*.

Примери алгебарских једначина с једном и више непознатих:

$$2x + 7 = 9;$$
$$3x - 5 = 8 - 2x;$$
$$3xy = 1$$
$$\frac{x}{y} = 5;$$
$$x^2 + 3x + 7 = 9;$$
$$\sqrt{x + 5} + y^2 = 0.$$

Подела алгебарских једначина. — Алгебарске једначине деле се на једначине с једном непознатом и једначине с више непознатих.

Обе те врсте једначина могу бити првог, другог, трећег и n-тог степена, према степену највишег члана у њој.

Једначине с једном непознатом. — Једначина која садржи само једну променљиву количину зове се *једначина с једном непознатом*. Према највишем степену непознате одређује се степен једначине.

$x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$ јесте једначина с једном непознатом 3 степена
$x^4 + 5x^3 + 3x + 9 = 0$ „ „ „ „ „ 4 „

. . . .

$x^n + 5x^{n-1} + ... + 5x + 7 = 0$ $\Big\{$ јесте једначина с једном непознатом n-тог степена.

Једначине првог степена с једном променљивом (непознатом)

Општи облик. — Видели смо раније, да је општи облик полинома првог степена с једном променљивом:

$$ax + b.$$

Ако тај израз ставимо да је једнак нули, добићемо *општи облик једначине првог степена с једном непознатом*:

$$ax + b = 0.$$

Значи да се полином сваке једначине с једном променљивом може свести на један бином. У томе биному један члан садржи променљиву, а други не садржи.

Н. пр. једначина

$$3x - 4 - 8x - 9 = 13x - 8 - 22x - 10$$

своди се на ово:

$$(1) \qquad 4x + 5 = 0.$$

Има свега два члана у полиному. Први (4x) садржи x, а други (5) не садржи га.

Кад гледамо на општи облик једначине и на једначину (1), видимо да је у нашој једначини $a = 4$, $b = 5$.

Члан b у коме нема непознате зове се **независан члан**. Зове се тако што не зависи од x, јер ако гледамо само бином $4x + 5$, ево шта бива:

Нека је $x = 1$. Тада је

$$4x = 4 \quad \text{а} \quad 5 = 5.$$

Нека је $x = 2$. Тада је

$$4x = 8 \quad \text{а} \quad 5 = 5. \qquad \text{И т. д.}$$

У биному $4x + 5$ други се члан не мења, као се мења x.

Корен једначине. — Онај број који своди на нулу полином једначине, зове се корен једначине. Он се зове још и *решење једначине.*

За нашу једначину $4x + 5 = 0$. Корен је број $-\frac{5}{4}$.

Кад њега ставимо место икса, полином наше једначине своди се на нулу. И збиља је:

$$4.\left(-\frac{5}{4}\right)+5=$$
$$-5+5=0$$

Број $-\frac{5}{4}$ је корен или решење једначине $4x + 5 = 0$.

Број корена у једној једначини. — *Свака алгебарска једначина степена m има m корена.*

Ми нећемо доказивати ову теорему, али ученик треба да је упамти. Њен доказ ће ученик видети доцније, кад се буде добро упознао с једначинама.

Решавање општих једначина. — *Решити једначину значи наћи све њене корене.*

Ми смо видели како се решавају једначине I степена у којима сем икса нема других писмена. Сад ћемо видети како се решавају једначине првога степена с једном непознатом у којима сем икса има и других писмена.

Задатак 1. — Из обрасца за површину троугла $p = \frac{ch}{2}$ израчунати површину кад је $c = 10\text{cm.}$, $h = 5\text{ cm.}$ биће:

$$p = \frac{10.5}{2}$$
$$p = 25\text{cm}^2$$

Задатак 2. — Из обрасца за површину троугла

$$p = \frac{ch}{2}$$

израчунати висину, кад је $p = 20\text{ cm.}$, $c = 5\text{ cm.}$

$$\frac{5h}{2} = 20$$
$$5h = 40$$
$$h = 8$$

У обадва задатка применили смо исти образац. Где је рад био бржи? У првоме задатку. Зато што смо у првоме задатку имали само да сменимо дате вредности, па да одмах израчунамо вредност израза на десној страни. У другоме задатку то нисмо могли. Најпре смо сменили дате вредности, па смо онда ослобођавали *h* од свих бројева око њега. Трудили смо се да *h* остане само на једној страни. Значи, *решавали смо* једначину по *h*. У првоме задатку рад је био бржи, јер је једначина већ *била решена* по *p*.

Ако из једног обрасца хоћемо да нађемо једну количину, морамо умети да решимо једначину тога обрасца по свакоме слову у њему. То значи морамо се вежбати да решавамо једначине у којима сем непознате има и других слова. (И других општих бројева).

Такве једначине зову **се опште једначине**. Такве су једначине, н. пр. ове

$$p = \frac{cx}{2}$$
$$x + a = b$$
$$ax + c = dx$$

Оне се решавају исто као и једначине у којима сем непознате нема других слова. Како? Овако: непозната мора остати сама на једној страни тако, да јој изложитељ буде + 1, именитељ + 1, и сачинитељ + 1. Како се то ради, показаћемо на примерима.

Пример I — Решити једначину

$$2cx - 5 = dx - c$$

Чланови са *x* на једну страну, остали на другу:

$$2cx - dx = 5 - c$$

Извлачимо заједничко *x* на левој страни:

$$x\,(2c - d) = 5 - c$$

Сачинитељ уз *x* мора да буде + 1. Зато леву страну делимо са (2c — d). Али тада морамо то исто урадити и с десном страном:

$$x = \frac{5 - c}{2c - d}$$

Пример II — Решити једначину

$$a - mx + b = c$$

Ни овде нема ни заграда ни разломака. Зато одмах чланове са *x* на једну страну, остале на другу.

$$-mx = c - a - b$$

Сачинитељ уз *x* мора да буде + 1. Да бисмо га добили, делимо обе стране са — m

$$\frac{-mx}{-m} = \frac{c - a - b}{-m}$$

$$x = \frac{a + b - c}{m}$$

Пример III — Решити једначину

$$(a - b)\ (x - c) + (a + b)\ (x + c) = 2\ (bx + ad)$$

Најпре ћемо се ослободити заграда:

$$ax - bx - ac + bc + ax + bx + ac + bc = 2\ bx + 2\ ad$$

Сад чланове са *x* на једну страну, остале на другу:

$$ax - bx + ax + bx - 2\ bx = 2\ ad + ac - bc - ac - bc$$

Сад сводимо на обема странама:

$$2\ ax - 2\ bx = 2\ ad - 2\ bc$$

Нама је потребно само *x*. Пошто више не може да се своди извући ћемо *x* из свих чланова. Уз *x* извлачимо и све остало што може да се извуче као заједнички чинитељ:

$$2x\ (a - b) = 2\ (ad - bc)$$

Икс има да остане само на једној страни:

$$x = \frac{2\ (ad - bc)}{2\ (a - b)}$$

$$x = \frac{ad - bc}{a - b}$$

Пример IV — Решити једначину

$$\frac{2x - a}{b} - \frac{b - 2x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Најпре се ослобађамо разломака. Н. з. и. јесте *ab*.

$$(2x - a)\ a - (b - 2x)\ b = a^2 + b^2$$

$$2ax - a^2 - b^2 + 2bx = a^2 + b^2$$

$$2ax + 2\ bx = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$$

$$2x\ (a + b) = 2a^2 + 2b^2$$

$$x = \frac{2(a^2 + b^2)}{2(a + b)}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Пример V — Решити једначину

$$\frac{a^2}{b}\ (x - a) - \frac{b + c}{ab}\ (a - 2x) = \frac{b^2}{a}\ (a - x) + \frac{b + c}{b}$$

Ослобођавамо се заграда:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^3}{b} - \frac{b + c}{b} + \frac{2x\ (b + c)}{ab} = b^2 - \frac{b^2x}{a} + \frac{b + c}{b}$$

Ослобођавамо се разломака. Н. з. и. јесте *ab*.

$$a^3x - a^4 - (b + c)\ a + 2\ bx + 2\ cx = ab^3 - b^3x + ab + ac$$

Опет се ослобођавамо заграда. Ако се може, ми узгред и сводимо:

$$a^3x - a^4 - ab - ac + 2bx + 2cx = ab^3 - b^3x + ab + ac$$

Чланови са икс на једну страну, остали на другу:

$$a^3x + 2bx + 2cx + b^3x = ab^3 + ab + ac + a^4 + ab + ac$$

Извлачимо заједнички чинитељ и најзад добијамо *x*:

$$x\ (a^3 + b^3 + 2b + 2c) = a\ (a^3 + b^3 + 2b + 2c)$$

$$x = a$$

Дискусија једначине I степена с једном непознатом

Дискутовати једначину

$$ax + b = 0$$

значи испитати све случајеве који могу да се појаве за разне вредности општих бројева *a* и *b*.

У добивеноме решењу у првоме примеру:

$$x = \frac{5 - c}{2c - d}$$

вредност икса зависиће од вредности *c* и *d*. Узмимо неколико случајева.

I — Ако је $c = 4,\ d = 1$

биће $x = \frac{5 - 4}{2.4 - 1} = \frac{1}{7}$

II — Ако је $c = 5,\ d = 1$

биће $x = \frac{5 - 5}{2.5 - 1} = \frac{0}{9} = 0$

III Ако је $c = 3,\ d = 2$

биће $x = \frac{5 - 3}{2.3 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

IV — Ако је $c = 3,\ d = 7$

биће $x = \frac{5 - 3}{2.3 - 7} = \frac{2}{-1} = -2.$

Видимо да могу наступити разни случајеви.

Узмимо најпростији облик наше једначине:

$$ax + b = 0.$$

Могу наступити ови случајеви:

I случај: $a \neq 0$. — У томе случају имамо *увек* један број који помножен са *a* даје — *b*: добијамо *једно* решење и таква једначина је *одређена*.

Примери.

1) $5x - 7 = 0$ $\qquad x = \frac{7}{5}$

2) $-3x + 4 + 13x - 4 = 0.$ $\qquad x = 0$

II случај: $a = 0$, $b \neq 0$.

Ако у решењу

$$x = -\frac{b}{a}$$

узмемо да *a* једнако опада, вредност $\frac{b}{a}$ једнако ће расти.

У изразу $\quad x = -\frac{b}{a}$

што је *a све мање*, $\frac{b}{a}$ бива све *веће* а *x* све *мање*. (Пошто је *x негативно*). Кад је *a веома мало*, *x* ће постати *веома мало*, јер $\frac{b}{a}$ постаје веома велико.

Кад *a* постане *нула*, $\frac{b}{a}$ постаје *бескрајно велико*, а *x* постаје *бескрајно мало*, пошто је *x* овде негативно и *бескрајно велико* по апсолутној вредности. Такво решење обележавамо са

$$x = -\infty.$$

Решење не постоји у коначности.

Пример:

$$3x - (5 + 2x) = 0.$$
$$3x - 5 - 3x = 0.$$
$$(3 - 3)x = 5.$$
$$0 \,.\, x = 5.$$

Једначина је у том случају *немогућна*.

III случај: $a = 0$, $b = 0$.

Тада је

$$x = \frac{0}{0}.$$

Тај израз је неодређен, те је и цела *једначина неодређена*.

Пример.

$$2cx - 5 = dx - c.$$

за $c = 5$, $d = 10$.

Тада наша једначина овако изгледа:

$$10x - 5 = 10x - 5.$$

Стави коју хоћеш вредност за *x*, једначина ће бити задовољена: Оваква једначина има *безброј решења*.

за $x = 0$ биће: $0 - 5 = 0 - 5$
„ $x = 1$ „ $10 - 5 = 10 - 5$
„ $x = \frac{1}{5}$ „ $2 - 5 = 2 - 5$ и т. д. и т. д.

ВЕЖБАЊА УЗ VII ОДЕЉАК

1. — На координатном систему нађи положај ових тачака:

(4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 0,5), (4, 0,1), (4, 0,01).

Шта бива са тачком кад почне ордината да јој опада?

2. — На координатном систему нађи положај ових тачака:

(4,3), (3,3), (2,3), (1,3), $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{10}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{100}, 3\right)$.

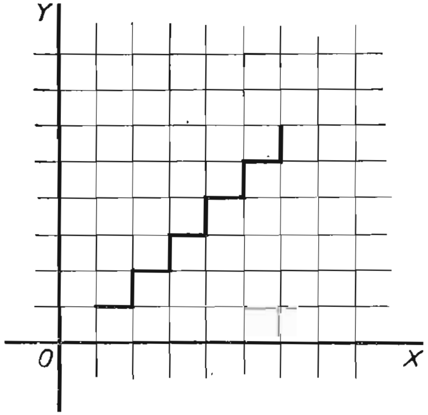
Шта бива са тачком кад јој апсциса опада?

3. — Где леже тачке:

(0,3), (0, — 5), (4,0), (— 6, 0).

4. — Ако сваке недеље уштедиш по 2 динара, претстави линијом своје уштеде (сл. 12). На апцисној осовини један поделак ће ти претстављати једну недељу, а на ординатној осовини 2 динара. Зашто је та линија изломљена?

5. — Отац поклони своме вредноме сину штедионицу и у њој 10 динара. Ако син сваке суботе спушта у штедионицу по 5 динара, како ћеш на координатном систему претставити штедњу тога дечка?



Сл. 12.

Сад се на ординатној осовини мораш помаћи за два подеока, јер на њој има већ два подеока. Поделак на ординатној осовини претставља 5 динара.

6. — Отац има два сина и обојици поклони по штедионицу једне недеље. Старији син одмах спусти у њу 4 динара и продужи редовно сваке недеље спуштати по 4 динара. Млађи син није две недеље спуштао ништа у штедионицу, али се треће недеље реши и он да штеди и почне редовно спуштати по 5 динара. Ко има више после 10 недеља, откако су добили штедионице?

Један поделак на ординатној осовини нека претставља 2 динара.

7. — Два дечка добију за Оцеве ручне штедионице од свога оца. У штедионицама је било по 10 динара. У наредну недељу био је Божић. Старији син спусти у штедионицу 2 динара и продужи то да ради сваке недеље. Млађи син почне штедети тек 5 фебруара. Да би достигао свога брата, он почне редовно спуштати у штедионицу по 4 динара сваке недеље. Кад ће им уштеде бити једнаке?

8. — Претстави цртежем ово кретање:
Аутомобил путује 3 часа и сваког часа прелази по 60 km.
Поделак на ординатној осовини да претставља 30 km.

9. — Нацртај изломљену линију температуре сутрашњег дана од подне до 6 час. увече, бележећи температуру свако пола часа.
Реши цртањем ове задатке:

10. — Два пешака су удаљени један од другога 18 *km*. А иде брзином од 5 *km*. а *В* брзином од 6 *km*. Где ће се и кад срести?

11. — Из једног места пођу кола у подне и крећу се брзином од 8 *km*. Пред вече, у 6 часова, пође у истом смислу аутомобил који је прелазио 60 *km* на час. Кад ће и где он стићи кола?

12. — Из два места удаљена 80 *km* крену једновремено један пешак и један путник на аутомобилу. Путник иде брзином од 5 *km*, а аутомобил брзином од 60 *km*. Где ће се и кад срести?

13. — Из једног места пође пешак на подне. У 3 часа по подне пође коњаник за њим. Где ће га и кад стићи, кад коњаник иде брзином од 10 *km*., а пешак брзином од 5 *km*.

14. — Два воза иду један другоме у сусрет из двају места удаљених 240 *km*. Први иде брзином од 60 *km*. а други брзином од 36 *km*. Где ће се и кад срести?

15. — Из једног места полази у подне воз који иде брзином од 30 *km*. а у 4 часа воз који иде брзином од 50 *km*. Кад ће овај други воз стићи онај први? На којој раздаљини од полазне станице?

16. — Из једног места полази воз у подне и иде брзином од 36 *km*. У два часа по подне полази из истог места други воз, који треба да стигне први воз на 288 *km*. од полазне станице. Кад ће га стићи? Којом брзином мора ићи овај други воз?

17. — Трећа београдска гимназија имала је ученика:

Године	У почетку године	На крају године
1902/3	488	393
1903/4	402	372
1904/5	423	357
1905/6	424	374
1906/7	617	468
1907/8	639	507
1908/9	719	520
1909/10	741	576
1910/11	577	492

Изради линију статистичкога кретања ученика.

Напомена. — Поделак на апсцисној осовини нека претставља 1 годину. Тада ће $\frac{5}{12}$ тога подеока претстављати крај школске године (крај маја). а $\frac{8}{12}$ почетак школске године (крај августа). Један поделак на ординантној основи нека претставља 100 ученика. Кад нацрташ изломљену линију, прочитај са ње све о статистичком кретању ученика за тих девет година.

Направи таблицу за *х* и *у*, дај иксу произвољне вредности, па *израчунај у*. Добивени парови за *х* и *у* претстављају координате тачака у равни. Обележи све те тачке помоћу координатног система, спој их и види каква се линија добија од ових једначина:

18. $y = x + 3$
19. $y = x - 2$
20. $y = 3x - 2$
21. $y = - x + 4.$
22. $x - y = 0$
23. $x + y = 0$
24. $x + y = 1$
25. $x - y = 1$
26. $y - 2x - 4 = 0$
27. $x + y = 2$
28. $x + 2y = 3$
29. $2x + 3y = 4$
30. $4x + 2y = 5$
31. $3x + 4y = 5$
32. $x = 2y$

При давању вредности *иксу* треба почети од нуле. Лако ћеш видети тражене линије, ако *иксу* будеш давао ове вредности које показује таблица вредности. Колико ти је тачака било потребно? Колико тачака одређују једну праву линију?

x	y	тачка
0	?	M_0
+ 1	?	M_1
— 1	?	M_2
+ 2	?	M_3
— 2	?	M_4
+ 3	?	M_5
И т. д.		

Одреди степен овим једначинама:

33. $x + y = 3.$
34. $3x + y^2 = 7.$
35. $3x^2 - 2xy^2 = 7.$
36. $4x^2y^2 - 5x^3 = 9.$
37. $3x^5 + 4x^2 - 5xy + 6y^2 - 7y^3 = 9.$
38. $4x^4 - 3xy^3 - 4y^5 - 2x^4 - 5x^2y^2 = 2x^4.$

Реши ове једначине:

39. $2x + m = n$
40. $ax - b = c$
41. $a^2x - a^2b = a^3$
42. $x + a - b = c + d$
43. $x - (a - b) = c + b$

44. $a - bx = c$
45. $2a - mx = c + nx$
46. $a - (b - cx) = c + b$
47. $a (x - b) = c$
48. $b (c - x) = c$
49. $a (x - b) = b (a - x)$
50. $p = \frac{bx}{2}$
51. $v = r^2 \pi x$
52. $2r^2\pi + 2r\pi x = P$
53. $a (x - 1) - (5a - x) = a - x$
54. $ax - bx - m (x - a) = b$
55. $a (b - x) + b (c - x) = b (a - x) + cx$
56. $3 (x - 2a) + 4 (x - a) = 5x$
57. $x (a + b - c) - x (a - b - c) = 4b^3$
58. $(x - b) (a + b) = (x + b) (a - b)$
59. $x (a - b) = a (b - x) - 1$
60. $1 - x (a - 1) - b (1 - x) - c (a - x) = 0$
61. $(x - 1) (a - b) - 2 (a - b) (x + a) - (a - b) x = 1$
62. $(a + bx) (a - b) - (ax - b) (a + b) = ab (x + 1)$
63. $(x - a) (b + a) = b^2 - a^2$
64. $3 (a - x) - 2 (x - a) = 5 (x + a)$
65. $5ax + 3b - 2 - (3ax - 2b + 4) = 2ax - 3b + 3$
66. $x - [x - (x - a)] = 3 (x - 1) [x - 3 (x - b)]$
67. $(a + x) : b = (c - x) : d$ 68. $(a + x) : (b + x) = c : d$
69. $(a - x) : (b - a) = (a + b) : b$ 70. $(a - b) : (a + b) = a : x$
71. $ax - (bx - a) - b (a - x) a - (b - x) = 0$
72. $(a - b) x - (b - a) x = (a - b) - x (a + 1)$

73. $\frac{ax}{b} = c$
74. $\frac{a}{x} = b$
75. $2 = \frac{cx}{p}$
76. $\frac{x}{a} - 1 = b$
77. $\frac{ax}{b} - b = a$
78. $\frac{ax}{b} - \frac{x}{b} + \frac{cx}{a} = 1$
79. $a - \frac{x}{a} = 1$
80. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = a$
81. $\frac{ax}{b} - \frac{cx}{q} = m$
82. $\frac{ax}{b} - 1 = \frac{bx}{a} + 1$
83. $b - \frac{ax}{b} = ax - \frac{b}{a}$ d
84. $1 + \frac{a}{x} = b - (1 - \frac{x}{b})$
85. $a + \frac{x - a}{b} = b - \frac{x - b}{a}$ d
86. $\frac{a - x}{bc} + \frac{b - x}{ac} - \frac{c - x}{ab} = 0$
87. $\frac{a}{a - x} = \frac{b}{x + b}$
88. $\frac{ab}{a - x} - \frac{1}{x - b} = 0$
89. $\frac{a}{x - a} = \frac{b}{x - b}$
90. $\frac{a}{a - x} + \frac{b}{x - a} = \frac{a}{x + a}$
91. $\frac{b}{x^2 + 4ax + 4a^2} - \frac{a}{x + 2a} = 0$
92. $\frac{1}{x^2 - 6ax + 9a^2} + \frac{a}{x - 3a} = 0$ d
93. $\frac{a}{a^3 - x^3} - \frac{1}{a^2 + ax + x^2} = \frac{a + b}{a^3 - x^3}$

94. $\frac{a}{b(x^3 - a^2)} - \frac{b}{a (a + x)} + \frac{a}{b (a - x)} = 0$
95. $\frac{a}{x} - a \left\{ \frac{x}{a} - \frac{1}{a} [x - (a - \frac{a}{x})] - a \right\} = a$
96. $1 - \frac{a - 1}{x} - \left\{ \frac{1 - a}{x} - \frac{x}{a} [1 - (a - x)] - \frac{a}{x} \right\} = 2a - \frac{x - a}{x} + x(\frac{1}{a} -$
$- 1 + \frac{x}{a})$
97. $\frac{(a + b) (x - b)}{ab} + (a - b) x = \frac{a^3 - b^3}{a + b} + \frac{a}{b}$ d
98. $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a + b} = \frac{a^2 - b^2}{ab} x$
99. $\frac{(a - b) x}{a} + 1 - \frac{(b - a) x}{a - b} - \frac{(a + b) x}{b} = \frac{(a + 1) x}{a - b} - \frac{1 - b}{a}$
100. $\frac{1}{x^2 - a^2} - \frac{a}{x - a} + \frac{b}{a + x} = \frac{a + b}{a^2 - x^2} - \frac{1}{x - a}$
101. $1 - \frac{x - (1 - a)}{x + a} - \frac{a - (x - 1)}{a + x} = \frac{a^2 + 2ax + x}{a + x}$
102. $\frac{a (2x - 1)}{b} - \frac{b (x - 3)}{a} - \frac{ax + b}{a - b} + 2 = 0$
103. $\frac{a (x - 3)}{b} + \frac{b (x - 3)}{a} + \frac{a (x - 1)}{b} + \frac{b (x - 1)}{a} = 10$
104. $\frac{a - b}{b} (x - a) + \frac{a + b}{a} (x - b) = 2a (b - x + 2a)$
105. $\frac{1 - x}{a} - \frac{x - a}{b} - \frac{1 - (x - b)}{a} = \frac{(a - b) - (x - 1)}{ab} - 2$

Реши ове једначине, па дискутуј добивене вредности за x:

106. $x + a = 4$
107. $2x + a = 1$
108. $3x + 2a = 5$
109. $x + a = b$
110. $ax + b = 1$
111. $ax = 3 - 2x$
112. $a - \frac{b}{x} = b$
113. $(a - b) x = (1 + x) b$
114. $ax + b = a - bx$
115. $a + \frac{1 - a^2}{x} = 1$
116. $(c - x) d = (c - d) (- x)$
117. $px + q = pqx$
118. $\frac{a - bx}{a} - \frac{b - ax}{b} - a + b$
119. $n^2 + px = p^2 - nx$
120. $\frac{x}{b} + \frac{x}{b} - x = 1$
121. $ax - 3 = mx - a - m$
122. $\frac{x}{a} + \frac{a (x - b)}{b} = \frac{x}{b} - \frac{b (x - a)}{a}$
123. $a^2x + b^2 = b^2x + a^2 - 1$
124. $2ax - 1 = bx + 1$
125. $a^2x - 1 = ax + 2$
126. $1 - \frac{x - a}{b - x} = \frac{a + b}{a}$
127. $- \frac{b}{a} - 1 = \frac{a - x}{b + x} + 1$
128. $ax - 1 = bx$ (Какво је решење кад је $a = b$?)
129. $2x + b = a$ (Какви треба да су a и b, па да корен ове једначине буде нула?)

130. $$1 - \frac{a - x}{b + x} = \frac{a + b}{b + x} + \frac{ab + ax + a}{a(b + x)}$$

131. $$1 - \frac{x - a}{b + x} = \frac{a + b}{b + x} + \frac{ab - ax - a}{ab + ax}$$ (За које ће вредности a и b корени ове једначине бити нула?)

Шта ће бити н. з. и? Пази добро! Може ли најпре нешто да се упрости?

У доњим задацима прегледај рад да видиш је ли тачан, па га објасни:

132. $$\begin{array}{c} 2 = 3 - 1 \\ 4 = 3 + 1 \\ \hline 2 \,.\, 4 = (3 - 1)\ (3 + 1) \end{array}$$

133. $$\begin{array}{c} 2m = 200\ cm \\ 3m = 300\ cm \\ \hline 2m \,.\, 3m = 200\ cm \,.\, 300\ cm \\ 6m^2 = 60000\ cm^2 \end{array}$$

134. $$\begin{array}{l} 4m^2 = 400\ dm^3 \\ 2m\ = 20\ dm \\ \hline 8m^3 = 8000\ dm^3 \end{array}$$

135. $$\begin{array}{l} 3\ kgr = 3000\ gr \\ 2\ kgr = 2000\ gr \\ \hline 6\ kgr = 6000000\ gr \end{array}$$

VIII — СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ СТЕПЕНА — ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ СТЕПЕНА

Систем једначина првог степена

Систем једначина. — Узмимо да су нам дате ове једначине:

$$2x + 3y = 8$$

$$3x - \frac{y}{2} = 2.$$

Ми претпостављамо да можемо наћи један број за *x* и један број за *y* тако, да обе дате једначине буду задовољене тим бројевима.

Две или више једначина, за које претпостављамо да су задовољене истим вредностима за непознате у њима, сачињавају *систем једначина.*

Наше две једначине чине *систем једначина првог степена.*

Решење система. — Узмимо да у обема једначинама сменимо

$$x = 1$$
$$y = 2$$

биће:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 = 8 \\ 3 \,.\, 1 - \frac{2}{2} = 2. \end{array}\right\}$$ Обе једначине су задовољене.

Вредности

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

сачињавају *решење нашег система једначина.*

РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА СТЕПЕНА

Ми смо видели како се решава систем једначина првога степена. Сад ћемо да прегледамо како се решава систем од двеју *општих једначина.* Систем од двеју таквих једначина решава се као и систем једначина које смо раније видели. Зато ћемо то сад показати само на примерима. Узећемо само два метода за решавање.

Метод замене

Пример 1 — Решити систем:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & ax + by = c \\ \text{II} & cy + ax = b \end{array}$$

Решићемо другу једначину по *y*:

$$\text{II}\ \boxed{y = \frac{b - ax}{c}}$$

Добивену вредност за *y* смењујемо у I једначини:

$$\text{I}\ ax + b \,.\, \frac{b - ax}{c} = c$$ Ослобођавамо се разломака:

$$\text{I}\ acx + b^2 - abx = c^2$$ Сад даље:

$$ax\ (c - b) = c^2 - b^2$$

$$x = \frac{(c - b)\ (c + b)}{a\ (c - b)}$$

$$x = \frac{b + c}{a}$$

$$y = \frac{b - ax}{c}$$

Најпре:

$$ax = a \,.\, \frac{b + c}{a} = b + c$$

Сад даље:

$$y = \frac{b - (b + c)}{c} = \frac{b - b - c}{c} = -\frac{c}{c} = -1$$

Решење система:

$$x = \frac{b + c}{a}, \qquad y = -1$$

Пример 2 — Решити систем:

$$\text{I} \quad \frac{x}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a}{a-b} = \frac{y}{a-b} + \frac{b}{a+b}$$

$$\text{II} \quad \frac{y}{a+b} - \frac{x}{a-b} - \frac{4ab}{a^2-b^2} = 0$$

Ослобођавамо се разломака:

$$\text{I} \ (a-b)\,x - (a^2+b^2) + a\,(a+b) = (a+b)\,y + b\,(a-b)$$
$$\text{II} \ (a-b)\,y - (a+b)\,x - 4ab = 0$$

Чланове са x и y на једну страну:

$$\text{I} \ (a-b)\,x - (a+b)\,y = a^2 + b^2 - a^2 - ab + ab - b^2$$
$$\text{II} \ (a-b)\,y - (a+b)\,x = 4ab$$
$$\text{I} \ (a-b)\,x - (a+b)\,y = 0$$
$$\text{II} \ (a-b)\,y - (a+b)\,x = 4ab$$

Из I решавамо по x:

$$\boxed{x = \frac{(a+b)\,y}{a-b}}$$

Добивену вредност за x смењујемо у II:

$$(a-b)\,y - (a+b).\frac{(a+b)\,y}{a-b} = 4ab$$

Ослобођавамо се разломака:

$$(a-b)^2\,y - (a+b)^2\,y = 4ab\,(a-b)$$
$$y\,[(a-b)^2 - (a+b)^2] = 4ab\,(a-b)$$
$$y = \frac{4ab\,(a-b)}{(a-b+a+b)\,(a-b-a-b)}$$
$$y = \frac{4ab\,(a-b)}{2a\,.\,(-2b)}$$
$$y = -(a-b)$$
$$y = (b-a)$$
$$x = \frac{(a+b)\,y}{a-b}$$
$$x = \frac{a+b}{a-b}\cdot(b-a)$$
$$x = \frac{a+b}{-(b-a)}\,.\,(b-a)$$
$$x = -(a+b)$$

Решење система:

$$x = -(a+b), \qquad y = b - a$$

Метод супротних сачинитеља или метод линеарне комбинације

Ми смо већ учили како се решава систем методом супротних сачинитеља. Сад ћемо то мало боље да учврстимо.

Линеарна комбинација. — Ако све изразе у једној једначини пребацимо на једну страну, добићемо *полином једначине.*

$$2x + 3y = 8$$
$$2x + 3y - 8 = 0.$$

Ако тај полином обележимо са P_1, моћи ћемо целу једначину обележити овако:

$$P_1 = 0,$$

Узмимо систем од двеју једначина:

$$2x + 3y - 8 = 0$$
$$5y - x - 9 = 0.$$

Можемо их краће обележити овако:

$$(1) \qquad \begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решење горњег система је:

$$x = 1$$
$$y = 2.$$

Ако горње полиноме P_1 и P_2 помножимо *ма којим* сталним бројевима који нису нуле, решење система се неће изменити. Помножимо први са a, други са b.

Систем

$$(2) \qquad \begin{aligned} a\,P_1 &= 0 \\ b\,P_2 &= 0 \end{aligned}$$

имаће исто решење као и систем (1). То се види одмах, али се може објаснити и овако:

Ако у полиному P_1 сменимо вредности $x = 1$, $y = 2$, он ће се свести на нулу. Исто ће бити са полиномом P_2. То значи да за $x = 1$, $y = 2$, леве стране система (2) су збиља равне нули, што значи, да систем (*2*) има исто решење као и систем (1). Кад два система имају исто решење они су *еквивалентни.*

Помножимо прву једначину у систему

$$(a) \qquad \begin{aligned} 2x + 3y - 8 &= 0 \\ 5y - x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

са 2, а другу са — 1. Добићемо:

$$(b) \qquad \begin{aligned} 4x + 6y - 16 &= 0 \\ x - 5y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Системи (*a*) и (*b*) имају исто решење. Ако у систему (*b*) сменимо $x = 1$ $y = 2$, имаћемо:

$$4 . 1 + 6 . 2 - 16 = 0$$
$$1 - 5 . 2 + 9 = 0.$$

То значи да су системи (*a*) и (*b*) *еквивалентни.*

Узмимо да у систему (2) саберемо леве стране. Добићемо

$$a\,P_1 + b\,P_2 = 0. \tag{3}$$

Једначина (3) задовољена је решењем система (1), јер је за то решење $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, те је и у једначини (3) збиља лева страна равна нули.

У систему (*b*) саберимо леве стране, па ће бити:

$$5x + y - 7 = 0. \tag{c}$$

Сменимо вредности $x = 1$, $y = 2$, па ће бити:

$$5 . 1 + 2 - 7 = 0.$$

То значи да вредности за x и y које задовољавају дати систем (*a*) задовољавају и ову комбинацију (*c*).

Кад нам је дат систем

$$P_1 = 0$$
$$P_2 = 0$$

па обадва полинома помножимо *произвољним* бројевима који нису нуле, рецимо са *a* и *b*, па добивене резултате саберемо, добићемо

$$a\,P_1 + b\,P_2 = 0.$$

Оваква комбинација једначина зове се *линеарна комбинација.*

Она нам је потребна због тога, што се она задовољава вредностима за x и y које претстављају решење система.

Бројеви *a* и *b* којима множимо једначине, сасвим су произвољни; они могу бити и равни јединици, али морају бити *константе (стални бројеви).* Сем тога они не смеју бити нуле.

Узмимо систем

$$x + y - 5 = 0$$
$$y - x - 1 = 0$$

Помножимо обе са $+ 1$, то јест оставимо их као што су и саберимо их:

$$2y - 6 = 0.$$

Горњи систем је задовољен овим решењем

$$x = 2$$
$$y = 3$$

Линеарна комбинација

$$2y - 6 = 0$$

је такође задовољена за вредност $y = 3$, јер је

$$2 . 3 \cdot 6 = 0$$

И ово је линеарна комбинација:

$$\frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{b} = 0 \qquad (a \neq 0, b \neq 0).$$

Значи, можемо оба полинома датих једначина *поделити произвољним сталним бројевима који нису нуле*, па сабрати.

Линеарну комбинацију употребљавамо за решавање система једначина. Подесном линеарном комбинацијом можемо увек избацити једну непознату и добити *једну једначину с једном непознатом.*

Узмимо систем

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ми смо до сада све изразе у једначини пребацивали на једну страну пре почетка комбиновања. То не мора да буде. Можемо једначине оставити као што су, помножити произвољним бројевима обе стране једначина, па сабрати леву с левом, десну с десном страном. Тако ћемо сад да радимо. Помножимо прву једначину са b_2, а другу са $(- b_1)$ и затим образујмо линеарну комбинацију

$$\begin{array}{l|r} a_1x + b_1y = c_1 & b_2 \\ \underline{a_2x + b_2y = c_2} & - b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ \underline{- a_2b_1x - b_1b_2y = - b_1c_2} \\ a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2 \end{array}$$

Добили смо *једну једначину с једном непознатом.* Ако из ње потражимо вредност за x, наћи ћемо:

$$\boxed{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Ако прву једначину решимо по y, добићемо:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

или

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} . x .$$

Ако добивену вредност за x сменимо у решењу за y, добићемо:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2c_2 - b_1c_2}{a_1b_1 - a_2b_1} .$$

Даљим упрошћавањем израза на десној страни, имаћемо:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{c_1\,(a_1b_2 - a_2b_1) - a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2}{b_1\,(a_1b_2 - a_2b_1)} .$$

$$y = \frac{a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{b_1(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{b_1(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Израз $a_1b_2 - a_2b_1$ зове се *детерминанта система.*

До истог решења долазимо ако прву задату једначину помножимо са $(-a_2)$, а другу са a_1 па начинимо линеарну комбинацију.

Решавање система помоћу линеарне комбинације зове се **метод линеарне комбинације** или **метод супротних сачинитеља**.

Примери:

Први пример. — Дат је систем једначина:

$$3x - 2y + 4 = 0$$
$$2x + 3y - 19 = 0$$

Хоћемо да избацимо y. Ми ћемо прву једначину помножити са b_2 то јест са 3, а другу са b_1, то јест са + 2.

$$\begin{array}{rrrrl} & 9x & -\ 6y & +\ 12 & = 0 \\ & 4x & +\ 6y & -\ 38 & = 0 \\ \hline \textit{Линеарна комбинација:} & 13x & & -\ 26 & = 0 \end{array}$$

$$13x - 26 = 0$$
$$13x = 26$$
$$x = \frac{26}{13} = 2. \qquad \boxed{x = 2}$$

Другу једначину решимо по y. Добивену вредност за x сменимо у II једначини решеној по y. (Сасвим је свеједно у којој ћемо једначини извршити ову смену):

$$y = \frac{19 - 2x}{3}$$

$$y = \frac{19 - 2 . 2}{3} = \frac{19 - 4}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Други пример. — Решити систем:

$$3x - 2y = 2$$
$$5y - 6x = 1$$

Да га решимо помоћу малопређашњих образаца.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_3 - a_2b_1}$$

Овде је: $a_1 = 3,\ b_1 = -2,\ c_1 = 2,\ a_2 = -6,\ b_2 = 5,\ c_2 = 1$

Сад само смењујемо

$$x = \frac{5 . 2 - (-2) . 1}{3 . 5 - (-6) . (-2)} \qquad y = \frac{3 . 1 - (-6) . 2}{15 - 12}$$

Одатле је:

$$x = \frac{10 + 2}{3} \qquad y = \frac{3 + 12}{3}$$

То је даље: $x = 4,\ y = 5.$

Да узмемо сад систем од двеју општих једначина.

Трећи пример. — Решити систем:

$$\text{I} \quad ax - by = a - 1$$
$$\text{II} \quad aby + x = b + 1$$

Да га решимо по обрасцима. Овде је

$$a_1 = a,\ b_1 = -b,\ c_1 = a - 1,\ a_2 = 1,\ b_2 = ab,\ c_2 = b + 1.$$

Зато је:

$$x = \frac{ab . (a - 1) - (-b) . (b + 1)}{a . ab - 1 . (-b)} \qquad y = \frac{a . (b + 1) - 1 . (a - 1)}{a^2b + b}$$

$$x = \frac{a^2b - ab + b^2 + b}{a^2b + b} \qquad y = \frac{ab + a - a + 1}{a^2b + b}$$

$$x = \frac{b(a^2 - a + b + 1)}{b(a^2 + 1)} \qquad y = \frac{ab + 1}{b(a^2 + 1)}$$

$$x = \frac{a^2 - a + b + 1}{a^2 + 1} \qquad y = \frac{ab + 1}{b(a^2 + 1)}$$

Да га решимо сад без образаца.

Помножимо другу једначину са — a:

$$\text{II} \quad -a^2by - ax = -ab - a$$

Сад јој додајмо прву једначину да добијемо *линеарну комбинацију*:

$$\text{III} \quad -by(1 + a^2) = a - 1 - ab - a$$
$$\text{III} \quad -by(1 + a^2) = -1 - ab$$

$$y = \frac{1 + ab}{b(1 + a^2)}$$

Добивену вредност сменимо у 1:

$$\text{I} \qquad ax - \frac{1 + ab}{1 + a^2} = a - 1$$

Ослободимо се разломака:

$$a(1 + a^2)x - 1 - ab = (a - 1)(1 + a^2)$$

$$x = \frac{a - 1 + a^3 - a^2 + 1 + ab}{a(1 + a^0)}$$

То је даље: $x = \dfrac{a^3 - a^2 + a + ab}{a(1 - a^2)}$

Најзад је: $x = \dfrac{a^2 - a + 1 + b}{1 + a^2}$

Ради како је теби лакше!

Четврти пример. — Решити систем.

$$\text{I} \quad ab^2x - by = ab$$
$$\text{II} \quad a^2y - a^2bx = 1$$

Помножићемо прву са *a*, другу са *b*, па сабрати. Тада добијамо ову *линеарну комбинацију*.

$$aby\,(a - 1) = b\,(a^2 + 1)$$ Из ње је

$$y = \frac{a^2 + 2}{a(a - 1)}$$

Добивену вредност сменимо у I:

$$\text{I} \qquad ab^2x - \frac{b\,(a^2 + 1)}{a\,(a - 1)}\,a = b$$ Делимо обе стране са b:

$$\text{I} \qquad abx - \frac{a^2 + 1}{a\,(a - 1)} = a$$ Сад даље:

$$\text{I} \qquad abx = a + \frac{a^2 + 1}{a\,(a - 1)}$$

$$\text{I} \qquad abx = \frac{a^2\,(a - 1) + a^2 + 1}{a\,(a - 1)}$$

$$x = \frac{a^3 - a^2 + a^2 + 1}{a^2b\,(a - 1)}$$

$$x = \frac{a^3 + 1}{a^2b\,(a - 1)}$$

Дискусија система првог степена

Први случај: *детерминанта система није једнака нули.* — Сваки систем једначина првог степена с двема непознатима може се свести на овај општи облик:

$$a_1x + b_2y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

те се може дати и овај општи облик решења система:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Решења су претстављана *разломцима*. Загледај их добро!

Узмимо најпре да именитељ тога разломка није нула, то јест претпоставимо да *дертиминатна система $a_1b_2 - a_2b_1$* није једнака нули:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

То значи да оба сачинитеља уз x (a_1 и a_2) не могу бити једновремено једнаки нули, као ни сачинитељи уз y (b_1 и b_2).

Ако је $a_1 = a_2 = 0$, онда је

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0\,.\,b_2 - 0\,.\,b_1 = 0 - 0 = 0$$

а ми претпостављамо да $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Исто тако за $b_1 = b_2 = 0$ биће

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1\,.\,0 - a_2\,.\,0 = 0 - 0 = 0$$

а ми претпостављамо да $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

То значи да могу бити једнаки нули само ова два и два сачинитеља

a_1 и b_2
или
a_2 и b_1

Ако је $a_1 = b_2 = 0$

онда је израз

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 - a_2b_1 = - a_1b_2 \neq 0$$

Ако је $a_2 = b_1 = 0$

онда је израз

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 \neq 0$$

Посматрајмо сад бројитеље израза *x* и *y*

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_1b_2} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Кад именитељи ова два разломка нису равни нули, бројитељи могу бити ма какви, увек ћемо добити за *x* и y *једно и одређено решење*.

Даке, кад *детерминанта система* није једнака нули, систем има **једно** и **одређено решење**. Такав се систем зове **одређени систем.**

Други случај — *детерминанта система је једнака нули:*

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

Овде могу да наступе два потслучаја. Ми ћемо посматрати само вредност за *x*.

Први потслучај:

(1) $$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Узмимо да није једнак нули израз $c_1b_2 - c_2b_1$:

$$c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0.$$

Једначину (1) можемо написати овако:

(2) $$\underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{0.}\,.\,x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Израз на десној страни није нула. Међутим једначина (2) нам казује да треба неки број x помножити нулом, па да се опет не добије нула. Ми знамо да је то немогућно. Према томе овде је *немогућно решење*.

Овакав се систем зове **немогућан систем**.

Пример таквог система:

$$2x - 3y = 1$$
$$2x - 3y = 2$$
$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2(-3) - 2(-3) = -6 + 6 = 0$$
$$c_1b_2 - c_2b_1 = 1(-3) - 2(-3) = -3 + 6 = 3$$

Пробај да решиш горњи систем.

Други потслучај. — Узмимо сад да је за $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \text{ али } b_2 \neq 0$$

Тада једначина (2) значи ово:

$$0 \, . \, x = 0.$$

Ма који број да ставимо место x, увек ће лева страна бити једнака нули. Према томе ово је *неодређено решење*.

Ако сада дамо иксу ма какву вредност, рецимо m, и сменимо је у другој једначини система

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

добићемо:

$$a_2m + b_2y = c_2$$

а одатле

$$y = \frac{c_2 - a_2m}{b_2}$$

Како смо претпоставили да $b_2 \neq 0$, увек ћемо за y имати *једну одређену вредност*, кад иксу дамо произвољну вредност.

То значи да је ово *проста неодређеност*, јер она постоји само за једну непознату.

Овакав систем зове се **просто неодређен систем**.

Пошто је овде

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

значи да је

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

а одатле

$$\text{(1)} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Пошто је и

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0$$

значи да је

$$c_1b_2 = c_2b_1$$

а одатле

$$\text{(2)} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Како су у једнакостима (1) и (2) десне стране једнаке, морају бити и леве, па ће бити

$$\text{(3)} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Из једнакости (1), (2) и (3) добијамо ову продужену пропорцију

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} .$$

Пример. — Испитати систем:

$$y + 8 = \frac{3}{5} x$$
$$5y + 40 = 3 x.$$

Овде су сачинитељи:

$$a_1 = -\frac{3}{5} \qquad b_1 = 1 \qquad c_1 = -8$$
$$a_2 = -3 \qquad b_2 = 5 \qquad c_2 = -40$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{5} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{5} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{5}$$

а одатле

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} .$$ Систем је *просто неодређен.*

Кад загледамо боље у горњи систем, видимо да је друга једначина *изведена* из прве множењем са 5, што значи да ове две једначине *нису независне*.

Ево још два примера таквих система:

$$2x + 3y = 4 \qquad 6y - 3x = 1$$
$$4x + 6y = 8 \quad \text{и} \quad 2y - x = \frac{1}{3}$$

Трећи случај. — Претпоставимо сад да је

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$b_2 = 0.$$

Овде могу да наступе три потслучаја.

1 потслучај. — Претпоставимо да је

$$c_1 \neq 0 \qquad c_2 \neq 0.$$

Тада би систем имао овако да изгледа:

$$\begin{aligned} 0 \,.\, x + 0 \,.\, y &= c_1 \\ 0 \,.\, x + 0 \,.\, y &= c_2 \end{aligned}$$

То би значило да је

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 0 &= c_2 \end{aligned}$$

а то се противи претпоставци.

Овакав је систем **немогућан.** Његово је *решење немогуће.*

Пример таквог система:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 3x - 5y + 7 \\ 2x - 3y &= 2x - 3y + 4 \end{aligned}$$

2 потслучај.

$$c_1 = 0 \qquad c_2 \neq 0$$

Тада би систем имао овако да изгледа:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \,.\, y &= 0 \\ 0 \,.\, x + 0 \,.\, y &= c_2. \end{aligned}$$

Како је

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = 0$$

а $c_2 \neq 0$, овакав је *систем* **немогућан** и *решење је немогуће.*

Пример таквог система:

$$\begin{aligned} x + y &= x + y \\ 2x - y &= 2x - y + 3 \end{aligned}$$

3 потслучај. — Претпоставимо да је

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Тада наш систем овако изгледа:

$$\begin{aligned} 0 \,.\, x + 0\, y &= 0 \\ 0 \,.\, x + 0\, y &= 0. \end{aligned}$$

Он је **двогубо неодређен** и решење је *двогубо неодређено.* То значи да *x* и *y* можемо смењивати сасвим произвољним вредностима.

Примери таквог система:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 3x - y + 4 \\ x + y - 1 &= x + y - 1 \end{aligned}$$

Систем једначина првог степена са три и више непознатих

Решавање заменом. — Узмимо овај систем:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x + y - z &=& 4 \\ \text{II} & -5x + 3y + 2z &=& -7 \\ \text{III} & x - 2y + 2z &=& 1. \end{array}$$

Ако прву једначину решимо по *x*, имаћемо:

$$(1) \qquad x = 4 - y + z.$$

Ако сад ту вредност за x сменимо у II и III, имаћемо:

$$\begin{aligned} -5(4 - y + z) + 3y + 2z &= -7 \\ 4 - y + z \quad 2y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

Ако ове две једначине упростимо, добићемо овај *систем од две једначине*:

$$\begin{array}{lrcl} \text{II}' & 8y - 3z &=& 13 \\ \text{III}' & y - z &=& 1. \end{array}$$

Из III′ једначине имаћемо

$$(2) \qquad y = 1 + z.$$

Сменом у II′ једначини добијамо:

$$\begin{aligned} 8(1 + z) - 3z &= 13 \\ 8 + 8z - 3z &= 13 \\ 5z &= 5 \\ (3) \qquad z &= 1. \end{aligned}$$

Ако у решењу (2)

$$y = 1 + z$$

сменимо добивену вредност за z, имаћемо:

$$\begin{aligned} y &= 1 + 1 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Ако сад у решењу (1) сменимо добивене вредности за y и z, имаћемо:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2 + 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Решавање линеарним комбинацијама. — Узмимо систем

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x + 3y - 5z &=& 0 \\ \text{II} & 3x - 5y - 2z &=& -4 \\ \text{III} & x + y - 4z &=& -2. \end{array}$$

Од ових трију једначина гледаћемо да добијемо *линеарном комбинацијом* две једначине с двема непознатима.

У том циљу помножимо I са 5, а II са 3.

$$\begin{array}{lrcl} & 10x + 15y - 25z &=& 0 \\ + & 9x - 15y - 6z &=& -12 \\ \hline (1) & 19x \qquad - 31z &=& -12. \end{array}$$

Добили смо једну једначину са x и z. Морамо се постарати да добијемо још једну једначину са *истим* непознатима *x* и *z*. Створимо линеарну комбинацију од II и III једначине.

Помножимо трећу са 5. Тада ће у овим једначинама II и III сачиниоци уз ипсилон бити *супротни бројеви*. Знамо да супротни бројеви у збиру дају нулу.

$$(3x - 5y - 2z) + (5x + 5y - 20z) = -4 - 10$$

$$8x - 22z = -14$$

$$(2) \qquad 4x - 11z = -7.$$

Једначине (1) и (2) дају *систем од две једначине*:

$$19x - 21z = -12$$

$$4x - 11z = -7\cdot$$

Ако решимо прву једначину по *x*, а другу по *z*, имаћемо:

$$(a) \qquad x = \frac{31z - 12}{19} \text{ т. ј. } x = \frac{31}{19} z - \frac{12}{19}$$

$$(b) \qquad z = \frac{4x + 7}{11}$$

Сменом вредности (*b*) у (*a*) имаћемо:

$$x = \frac{31}{19} \cdot \frac{4x + 7}{11} - \frac{12}{19}$$

А то је даље:

$$19 \,.\, 11x = 31 \,.\, 4x + 31 \,.\, 7 - 12 \,.\, 11$$

$$209x = 124x + 217 - 132$$

$$85x = 85$$

$$x = 1.$$

Сменом у (*b*) имаћемо:

$$z = \frac{4 \,.\, 1 + 7}{11} = \frac{11}{11} = 1.$$

Ако добивене вредности за *x* и *z* сменимо у I једначини која је најпростија, имаћемо:

$$2 + 3y - 5 = 0$$

$$3y = 3$$

$$y = 1.$$

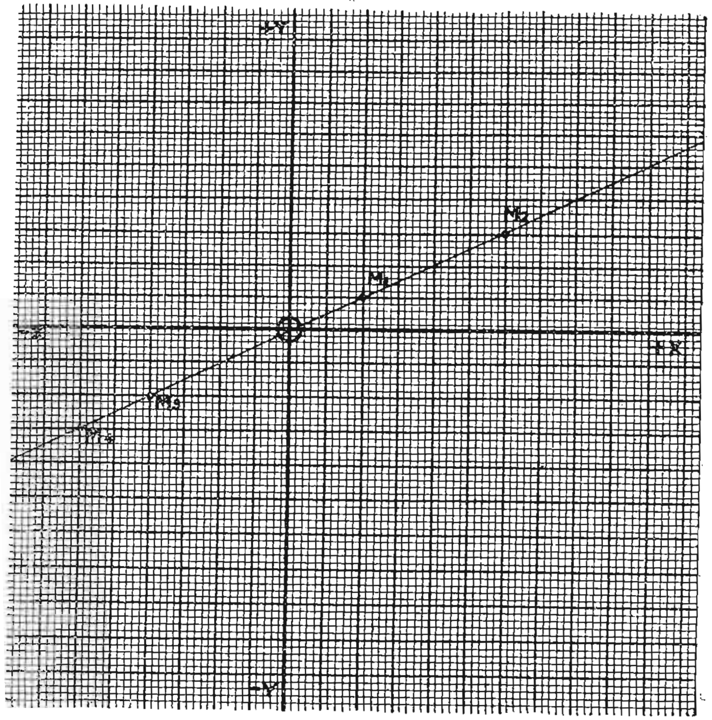
Напомена. — Постоје још неки методи за решавање система I степена, али се они ређе употребљавају.

ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА

Једначина праве линије

Повуцимо кроз координатни почетак једну праву линију (сл. 13). Узмимо на њој најпре тачку M_1, чије су координате $x_1 = 10$, $y_1 = 5$. Размера ординате према апсциси биће:

$$y_1 : x_1 = \frac{1}{2}.$$



Сл. 13.

Узмимо сад тачку M_2. Њене су координате: $x_2 = 30$, $y_2 = 15$ Њихова размера биће:

$$y_2 : x_2 = \frac{1}{2}\cdot$$

Пошто те две размере имају исти количник, једнаке су, те ће бити:

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2\cdot$$

Та пропорција ће постојата за *ма које* две тачке на овој правој. Узмимо тачке M_3 и M_4. Биће:

$$x_3 = -20 \qquad x_4 = -30$$

$$y_3 = -10 \qquad y_4 = -15$$

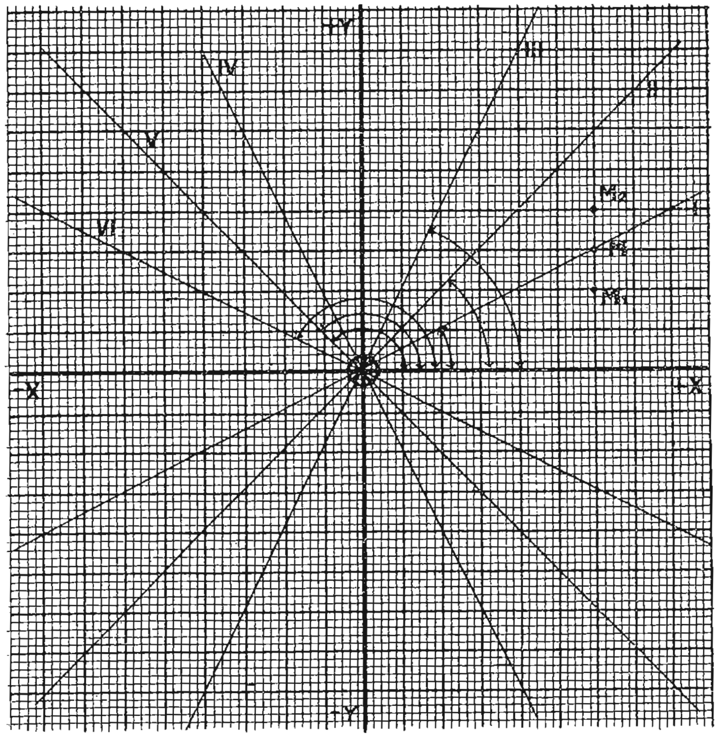
$$y_3 : x_3 = \frac{1}{2}$$

$$y_4 : x_4 = \frac{1}{2}$$

А одатле:

$$y_3 : x_3 = y_4 : x_4.$$

Шта претставља размера $y : x$ на правој линији? Она претставља *пад* праве линије. Пошто је *пад* праве линије *сталан*, то и однос ординате према апсциси ма које тачке мора бити сталан. Узмимо неколико правих (сл. 14). Посматрајмо их редом.



Сл. 14.

Прва права има пад $\frac{1}{2}$. Значи, да за све њене тачке важи ово:

I $$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

За другу праву биће:

II $$\frac{y}{x} = 1$$

За трећу праву биће:

III $$\frac{y}{x} = 2$$

Пошто је пад једнак у свима тачкама једне праве линије, та размера ординате и апсцисе претставља једну особину свију тачака праве линије, то јест претставља особину праве линије. Кад ту особину изразимо једначином добићемо *једначину праве линије која пролази кроз координатни почетак.*

Да проверимо то.

Узмимо I праву.

Њена једначина је

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}.$$

Тачка M лежи на тој правој. Њене координате су $x = 30$, $y = 15$. Сменимо их у горњој једначини, па ће бити:

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Као што се види, *једначина је задовољена* координатама тачке M. Како једначина

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

претставља једну праву линију, то се и тачка M, чије су координате (30, 15), *мора* налазити на тој правој.

Узмимо тачку M_1 (30, 10). Ако њене координате унесемо у једначину

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

биће

$$\frac{10}{30} \neq \frac{1}{2}$$

Једначина није задовољена координатама тачке M_1, што значи да та тачка *не* лежи на правој

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

Узмимо тачку M_2 (30, 20). За њу ће бити:

$$\frac{20}{30} \neq \frac{1}{2}$$

Ни она не лежи на правој I, што се и на слици види.

Узмимо сад праве IV, V и VI,

За њих ће бити:

IV $$\frac{y}{x} = -2$$

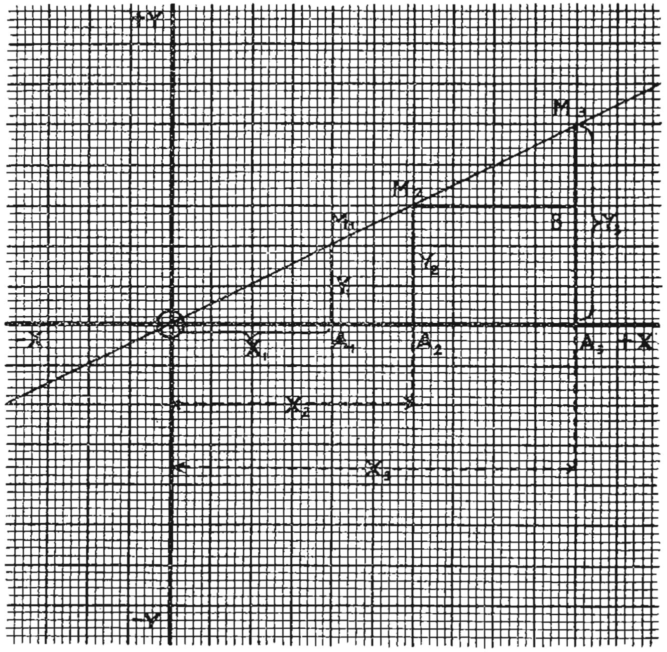
V $$\frac{y}{x} = -1$$

VI $$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$$

Из једначина ових 6 наведених правих линија види се ово:

1) Једначина праве линије која пролази кроз координатни почетак добија се, кад се размером ординате и апсцисе *ма које* њене тачке изрази њен *пад*.

2) Пад је изражен *позитивним* бројем, ако права заклапа *оштар* угао с позитивним смислом апсцисне осовине, а *негативним* бројем, ако права заклапа *туп* угао с позитивним смислом апсцисне осовине.



Сл. 15.

3) Кад нам је дата једначина праве која пролази кроз координатни почетак, довољно је претставити њен *пад*, па ћемо одмах имати нацртану праву.

Пример: Нацртати праву чија је једначина:

$$y = \frac{x}{2}$$ Најпре ћемо показати њен пад:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

Значи треба узети произвољну апсцису, па подићи ординату која је пола те апсцисе. На слици 15 узећемо апсцису $OA_1 = 20$

и ординату $A_1M_1 = 10$. Добијамо тачку M_1. Добивену тачку спојићемо с координатним почетком и то је та тражена права. Наша права биће права OM_1 са слике 15.

Линеарна функција. — Видели смо да једначина овога облика

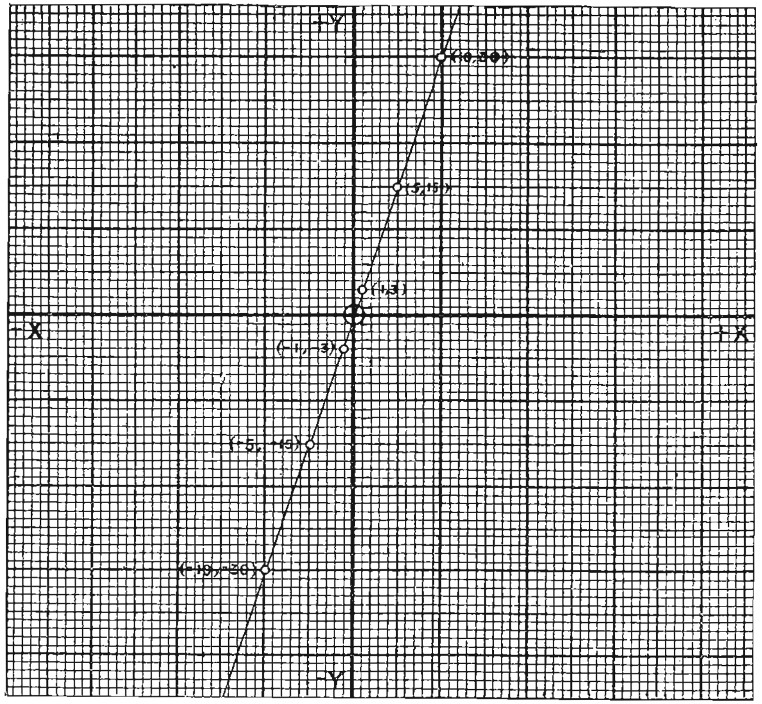
$$y = ax$$

претставља праву линију која пролази кроз координатни почетак.

Узмимо једначину

$$y = 3x$$

Овде ипсилом зависи од икса. Ипсилон је функција икса. Знамо да ова функција претставља праву линију. Знамо даље да је права



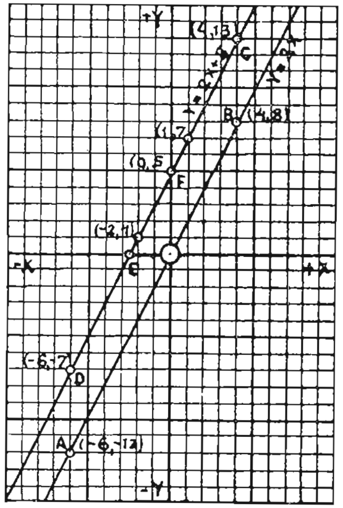
Сл. 16.

линија одређена двема тачкама. Зато нам је довољно да узмемо само две вредности за x, па да израчунамо припадне вредности за ипсилон.

x	y
0	0
5	15

Добили смо координате двеју тачака: координатног почетка (0,0) и још једне тачке (5, 15). Кад кроз њих повучемо једну праву линију, добијамо праву коју претставља слика 16.

Као што смо видели, оваква се функција претставља правом линијом и за то се зове *линеарна функција* (од латинске речи linea, права линија).



Сл. 17.

Моном 3x на десној страни једначине $y = 3x$ зове се *моном линеарне функције.*

Кад је функцијин моном првог степена по x, функција претставља праву која пролази кроз координатни почетак.

Бином линеарне функције. — Нека нам је дата једначина

$$y = 2x + 5$$

x	y
−6	−7
−2	+1
0	5
1	7
4	13

Ова је функција изражена биномом $2x + 5$.

Да нема онога 5, једначина $y = 2x$ претстављала би праву AB са слике 17. Да видимо шта претставља једначина $y = 2x + 5$.

Дајмо иксу неколико вредности и израчунајмо припадне вредности за y. Добићемо једну таблицу.

Добили смо тачке које показује слика 17. Кад их спојимо, добијамо *праву линију DC.*

И ова је функција претстављена правом линијом. И она је *линеарна функција.* Њен бином $2x + 5$ јесте *бином* линеарне функције.

Одавде видимо да *једначина с двема непознатима првога степена претставља праву линију.*

Конструкција линеарне функције. — Биномне линеарне функције најлакше је овако конструисати:

Најпре стави $x = 0$, па израчунај y и обележи ту тачку. Затим стави $y = 0$, па израчунај x и обележи ту тачку. Кроз те две тачке повуци праву линију.

Пример. — *Конструисати линеарну функцију* $y = 2x + 5$

За $x = 0$ имамо $y = + 5$.

То је тачка F (0, + 5) на слици 17.

За $y = 0$ имамо $x = - \frac{5}{2} = - 2\frac{1}{2}$

То је тачка E $(- 2\frac{1}{2}, 0)$ на слици 17.

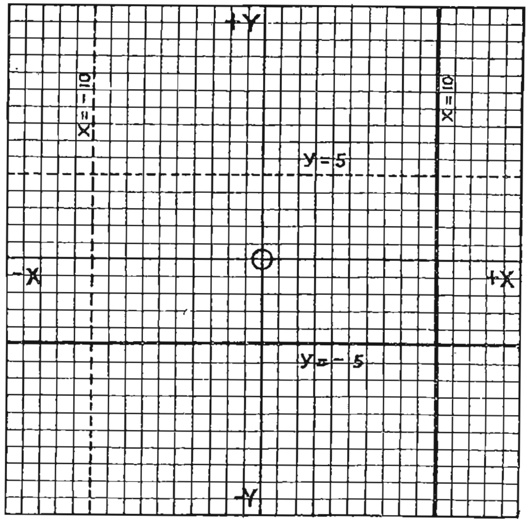
Наша биномна линеарна функција $y = 2x + 5$ претставља праву EF са слике 17.

Графичко претстављање једначина првога степена с једном непознатом. — Нека је дата једначина

$$2x = 20$$

Одатле је $$x = 10$$

Шта то значи? То значи да је то права линија чије све тачке имају једну исту апсцису 10. То је права паралелна са ординатном осовином на растојању + 10 поделака од почетка (сл. 18).



Сл. 18.

Слика 18 показује у исто време шта значе једначине

$$x = -10$$
$$y = 5$$
$$y = -5$$

Из ових огледа видимо да и једначина првога степена с једном непознатом претставља праву линију.

Порастне, опадне и сталне функције. — Узмимо праву *DC* (сл. 17).

Њена је једначина

$$y = 2x + 5$$

Пођимо од *D* ка *C*. Кад се у томе смислу крећемо по нашој правој, *апсцисе расту*: у тачци *D* је $x = -6$, у *E* је $x = -2,5$ у *F* је $x = 0$, у *C* је $x = +4$. Да видимо шта за то време бива са функцијом *y*. Она је

у тачци *D*: $y = 2 \,.\, (-6) + 5 = -7$
„ „ *E*: $y = 2 \,.\, (-2,5) + 5 = 0$
„ „ *F*: $y = 2 \,.\, 0 + 5 = +5$
„ „ *C*: $y = 2 \,.\, 4 + 5 = +13.$

I

Видимо *да кад x расте, расте и y*. То значи да *кад расте независно промењљива, расте и функција*.

Оваква функција зове се *порастна функција*.

Ми смо ово рашћење посматрали на слици. Апсциса у тачци *E* је већа од апсцисе у тачци *D*, јер је *њихова разлика* позитивна:

$$(-2,5) - (-6) = -2,5 + 6 = +3,5.$$

Видели смо да онда и функција *y* расте.

Одавде видимо ово

практично правило: ако хоћемо да видимо како се мења функција између двеју вредности независно промењљиве, треба образовати израз

$$x_2 - x_1$$

па видети шта бива у томе случају са

$$y_2 - y_1$$

Ако су обе разлике једновремено позитивне или једновремено негативне, *функција је порастна*.

Да то проучимо на једначини:

$$y = 2x + 5$$

Узмимо две тачке чије су координате

$$x_1y_1 \text{ и } x_2y_2.$$

Ако сменимо координате x_2y_2 имаћемо:

$$y_2 = 2x_2 + 5.$$

Ако сменимо координате x_1y_1 имаћемо:

$$y_1 = 2x_1 + 5$$

Одузимањем добијамо:

$$y_2 - y_1 = 2\ (x_2 - x_1)$$

пошто + 5 и − 5 дају нулу.

Узмимо сад две произвољне вредности за x:

$$x_1 = -6 \qquad x_2 = +4.$$

Образујмо израз $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = 2\ (x_2 - x_1)$$

па ће бити:

$$y_2 - y_1 = 2\,[4 - (-6)] \qquad x_2 - x_1 = +10$$
$$y_2 - y_1 = 2\,(4 + 6) \qquad y_2 - y_1 = +20.$$

Ако сад погледамо на слику 17, на којој је претстављена наша права

$$y = 2x + 5$$

видећемо да од тачке *D*, чија је апсица (− 6) до тачке *C*, чија је апсица + 4, *функција расте*. Пошто *крива линија првог степена*, то јест, *права линија*, не мења свој правац, то ће *линеарна функција увек расти ако утврдимо да расте између ма којих двеју тачака*.

Узмимо сад функцију

x	y
− 5	+ 15
− 3	+ 11
− 1	+ 7
0	+ 5
+ 1	+ 3
+ 2	+ 1
+ 2,5	0
+ 3	− 1
+ 4	− 3
итд.	

$$y = -2x + 5$$

Образујемо израз $y_2 - y_1$:

$$\begin{array}{l} y_2 = -2x_2 + 5 \\ y_1 = -2x_1 + 5 \\ \hline y_2 - y_1 = -2\,(x_2 - x_1). \end{array}$$

Ако је $x_2 - x_1 > 0$ то јест позитивно, $y_2 - y_1$ биће негативно. То значи да је

$$x_2 > x_1$$

а

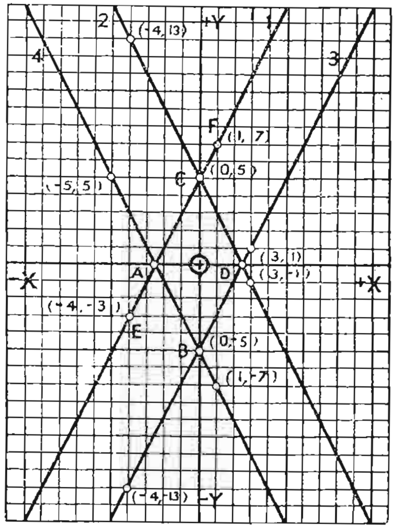
$$y_2 < y_1$$

Док *x* расте, *y* опада. Функција је *опадна*. Ова се функција лепо види на слици 19, на правој CD. Док *x* једнако расте, функција *y* једнако опада (види приложену таблицу и сл. 19).

Узмимо сад функцију

$$y = 5$$

Овде је *y стално*; не зависи ни од једне промењљиве количине. Оваква се функција зове *стална* функција. Она нити расте, нити опада. Њена вредност је стална. Ова функција је претстављена једном правом линијом (сл. 18) која је паралелна са апсцисном осовином на растојању + 5 од апсцисне осовине. Са слике



Сл. 19.

се види да ординате свих тачака те праве остају стално + 5, па ма како се мењала апсциса.

Графичко решавање једначина

Графичко решавање система од двеју једначина I степена. — Видели смо да једначина првог степена с двема непознатима претставља једну праву линију. Према томе, кад су дате две једначине ми имамо у ствари две праве линије; координате њихова пресека морају задовољавати обе једначине, пошто пресечна тачка лежи и на једној и на другој правој.

Узмимо да решимо систем једначина:

(1) $y + 2x = -5$

(2) $y - 2x = -5.$

Прва је функција претстављена правом *AB* (сл. 19.), а друга правом *BD*. Са слике се види да се те две праве секу у тачци *B*, чије су координате

$$x = 0$$
$$y = -5.$$

Према томе, то је решење горњег система.

И збиља је:

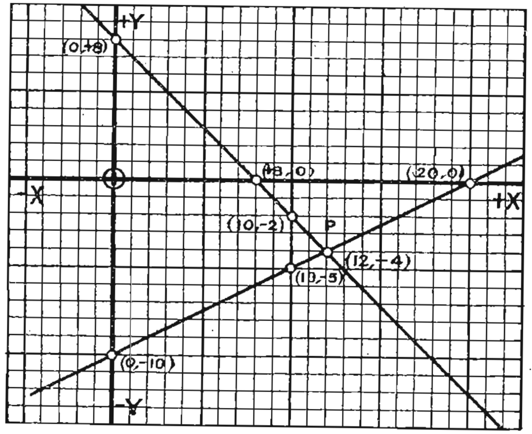
$$-5 + 2 \,.\, 0 = -5$$
$$-5 - 2 \,.\, 0 = -5.$$

Узмимо сад овај систем:

(1) $y + x = 8$

(2) $x - 2y = 20$

Кад конструишемо те две праве добићемо слику 20. Оне се секу у тачци *P*, чије су координате:



Сл 20.

$$x = 12$$
$$y = -4.$$

То је решење нашег система.

Збиља је:

$$-4 + 12 = 8$$
$$12 - 2\,(-4) = 20.$$

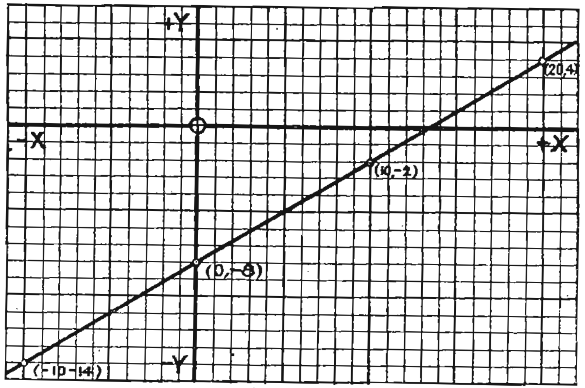
Узмимо овај систем:

$$5y + 40 = 3x$$
$$y + 8 = \frac{3}{5}\,x.$$

Кад конструишемо те две функције, видећемо да је то једна иста права претстављена на слици 21.

Горњи систем можемо овако написати:

$$-3x + 5y = -40$$
$$-\frac{3}{5}\,x + y = -8.$$



Сл. 21.

Кад загледамо мало боље, видимо да је ово други потслучај другог случаја, који се појављује при дискусији система једначина. (Види страну 100).

Узмимо сад овај систем:

$$y - 2x = 5$$
$$y - 2x = -5.$$

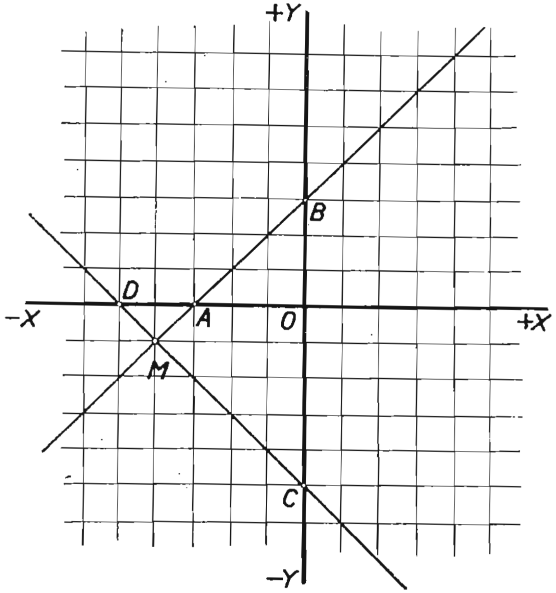
Кад конструишемо обе праве, имаћемо праве *AC* и *BD* на слици 19. Оне су паралелне, те према томе немају заједничких тачака. Систем је немогућан. Ово је први потслучај другог случаја у дискусији система једначина (стр. 99).

Узмимо систем:

I	и II
$y - x = 3$	$x + y + 5 = 0$
Конструишимо прву праву:	Конструишимо другу праву:
за $y = 0$ $x = -3$	за $y = 0$ $x = -5$
То је тачка A (сл. 22).	То је тачка D (сл. 22).
за $x = 0$ $y = 3$	за $x = 0$ $y = -5$
То је тачка B (сл. 22).	То је тачка C (сл. 22).
Нашу једначину претставља права *AB* (сл. 22).	Нашу једначину претставља права *CD* (сл. 22).

Ове се две праве секу у тачци *M*, чије су координате:

$$x = -4$$
$$y = -1$$



Сл. 22.

То је решење горњег система.

Узмимо систем:

I $\qquad y - 2x - 6{,}5 = 0$

II $\qquad 2\frac{4}{7}x - 5{,}5y + 14\frac{1}{7} = 0$

Конструишимо прву праву (сл. 23):	Конструишимо другу праву:
за $x = 0$ $y = 6{,}5$	за $x = 0$ $y = 2\frac{4}{7}$
за $y = 0$ $x = -3{,}25$	за $y = 0$ $x = -5{,}5$

Секу се у тачци *M* (− 2,6 + 1,4).

Решење система је:

$$x \approx -2{,}6$$
$$y \approx 1{,}4$$

Графичко решавање једначина I степена с једном непознатом. — Узмимо да нам је дато да решимо једначину:

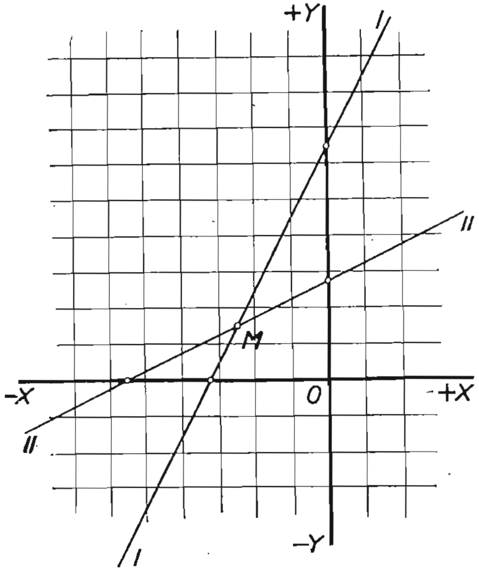
$$7 - \frac{4x+5}{5} = x - 3$$

Ставимо:

(1) $$y = 7 - \frac{4x+5}{5}$$

и

(2) $$y = x - 3.$$



Сл. 23.

Једначину прве праве напишимо у овоме облику:

$$y = 7 - \frac{4x}{5} - \frac{5}{5}$$

и тај облик упростимо:

$$y = 7 - \frac{4}{5}x - 1$$

$$y = 6 - \frac{4}{5}x$$

$$y = -\frac{4}{5}x + 6$$ ✓

Видимо да је то права AB (сл. 24).

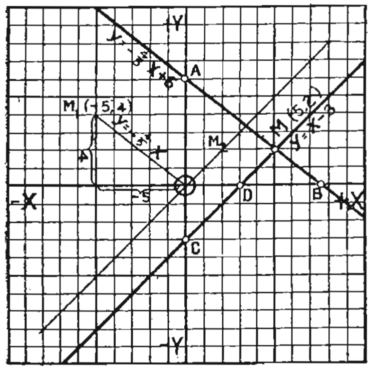
Друга права

$$y = x - 3$$

јесте права *CD*.

Наше праве *AB* и *CD* секу се у тачци *M* чија је апсциса

$$x = 5$$



Сл. 24.

и то је *решење* горње једначине првог степена.

И збиља је:

$$7 - \frac{4 \cdot 5+5}{5} \quad 5-3$$

$$7 - 5 \quad 5 - 3$$

$$2 = 2.$$

Узмимо једначину:

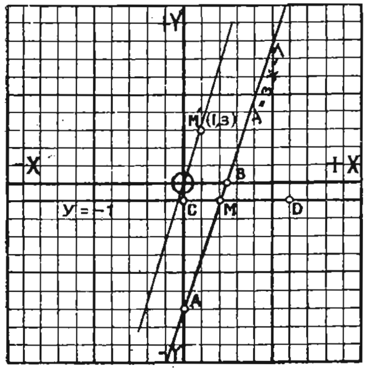
$$3x - 7 = -1$$

Овде ће бити:

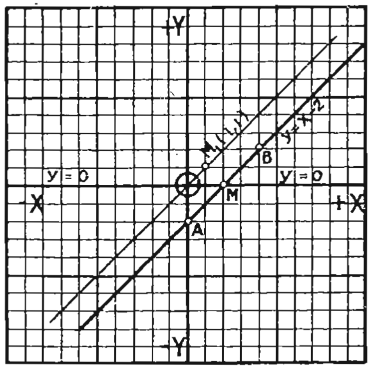
(1) $y = 3x - 7$

(2) $y = -1$

Прва је права права *AB* (сл. 25).



Сл. 25



Сл. 26.

Друга је права претстављена *сталном функцијом;* ордината јој је — 1 у свима тачкама. То је права *CD* која је паралелна са апсцисном основном.

Праве *AB* и *CD* секу се у тачци M, чије су кординате x=2, y = — 1. Према томе *решење* горње једначине је:

$$x = 2.$$

И збиља је:

$$3 \cdot 2 - 7 \quad -1$$

$$6 - 7 \quad -1$$

$$-1 = -1.$$

Узмимо једначину:

$$x - 2 = 0.$$

Овде је

(1) $y = x - 2$

(2) $y = 0.$

Прва права јесте права AB (сл. 26).

Друга је права сама *апсцисна осовина*, јер су на њој све ординате равне нули.

Пресек наше праве AB са апцисном осовином је у M, чија је апсциса

$$x = 2.$$

То је *решење* горње једначине.

Изведи *практично правило* за графичко решавање система и посебних једначина!

ВЕЖБАЊА УЗ VIII ОДЕЉАК

1. $\frac{3}{4} x + \frac{5}{6}y = 1$
$\frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2$

2. $2x - y = \frac{3}{5}$
$x + y = \frac{5}{7}$

3. $2 (2x + 3y - 5) = \frac{5}{8} (x + 3) + \frac{3}{4} (y - 4)$
$x + y = 1$

4. $2x - y = 3 (x - 5 + \frac{2}{3}y)$
$6x + y = \frac{3}{4} (1 + x - y)$

5. $5 (x + 2) - 3 (y + 1) = 23$
$3 (x - 2) + 5 (y - 1) = 19$

6. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{3} (y + 1) = 1 \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3} (x - 1) - \frac{1}{2}y = 4{,}5$

7. $\frac{3}{4} x - \frac{1}{2} (y + 1) = 1$
$\frac{1}{3} (x + 1) + \frac{3}{4} (y - 1) = 9$

8. $0{,}7x - 0{,}9y = 1$
$0{,}3y = 0{,}2x - 0{,}2$

9. $0{,}6x + 1{,}3y = 0{,}7$
$0{,}8x = 1{,}7x - 0{,}14$

10. $25{,}9x - 60{,}1y = 1$
$24{,}1x - 55{,}9y = 1$

11. $\frac{0{,}9x - 0{,}7y + 7{,}3}{13x - 15y + 17} = 0{,}2$
$\frac{1{,}2x - 0{,}2y + 8{,}9}{13x - 15y + 17} = 0{,}3$

12. $(2x + y - 1) : (3x + 2y + 11) = 1:2$
$(5x + 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 3:4$

13. $(x + y - 4) : (2x + y + 1) = 1:2$
$(2x + y - 9) : (x + 2y + 7) = 3:4$

14. $(x - 4) (y + 7) = (x - 3) (y + 4)$
$(x + 5) (y - 2) = (x + 2) (y - 1)$

15. $(x + 3) (y + 5) = (x + 1) (y + 8)$
$(2x - 3) (5y + 7) = 2 (5x - 6) (y + 1)$

16. $(x - 8) (5y - 3) = (5x - 1) (y + 2)$
$(x - 9) (3 - y) = (2 - y) (x + 2)$

17. $\frac{3x + 4y}{12} - \frac{5y - 3x}{9} = \frac{2x + 3y}{6} - \frac{3y - 1x}{3}$
$\frac{1}{4} (x + 4) + \frac{1}{10} (y - 3) = \frac{3x}{4} - \frac{y - 11}{2}$

---

18. $(6x - 9) (12y + 13) - (4y + 5) (18x - 31) = 2 (3x + 7y)$
$(6x - 9) (9y + 8) + (2x - 3) (5 - 27y) = 5 (x - 6y) - 11$

19. $4x (15y - 41) + 12y (18 - 5x) = 7 (13y - 19)$
$9x (5y - 1) - 15y (3x - 5) = 12 (8x + 5)$

20. $\frac{7x + 8y}{6} = 7 + \frac{4y}{3}$
$\frac{5x - 3y}{4} - (2x - 13) = \frac{7x - y}{3} + y - 4$

21. $2x - 3y = a + b$
$3x - 2y = a - b$

22. $a - x = b + y$
$x - 2 = b - 2y$

23. $2x - 3y = - 5a$
$3x - 2y = - 5b$

24. $5x + 3y = 4a + b$
$3x + 5y = 4a - b$

25. $2x - 3a = 3y + 2a$
$4x + 5b = 2y + 3a$

26. $4x - a = 5y + b$
$5y + a = 2x - b$

27. $x + y = \frac{1}{2} (5a + b)$
$x - y = \frac{1}{2} (a + 5b)$

28. $2x + y = a + b$
$y - 2x = 2a - b$

29. $x - 2a = y + 3b$
$2a - 3y = b + ax$

30. $2x - ay = b - a$
$bx - ay = a + b$

31. $4x - 3a = 2y + b$
$y + 2x = 3a + 4b$

32. $4x - 5b = 6y + 7y$
$7x - 6y = 5a - 2a + b$

33. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$bx + ay = 0$

34. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1$

35. $x + y = a + b$
$bx + y = 2ab.$

36. $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a$
$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = b$

37. $(a + c) x - by = c$
$x + y = a + b$

38. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$
$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$

39. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$
$\frac{x + 1}{y + 1} = \frac{c}{b}$

40. $\frac{x + 1}{y} = a$
$\frac{y + 1}{x} = b$

41. $\frac{x - c}{y - c} = \frac{a}{b}$
$x - a = y + b$

42. $\frac{x - a}{y - b} = \frac{a}{b}$
$\frac{x + a}{y + b} = \frac{b}{a}$

43. $\frac{a - x}{y} = \frac{a}{a - b}$
$\frac{b - x}{y} = \frac{b}{a}$

44. $\frac{2a + x}{a} - 1 = \frac{a - b}{y}$
$\frac{a - 2b}{x} + 1 = \frac{a + b}{x}$

45. $$\frac{2x-b}{a-x} - \frac{a-b}{b} + 1 = \frac{y-b}{a-x}$$
$$\frac{3y+a}{b-x} + \frac{a+x}{a} - 1 = \frac{x+b}{b-x}$$

46. $$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$$
$$\frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}$$

47. $$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{4ab}{b^2-a^3}$$
$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{x-y}{a-b} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

48. $$a(x+y) + b(x-y] = 1$$
$$a(x-y) + b(x+y) = 1$$

49. $$\frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0$$
$$\frac{x+y-b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0$$

50. $$(x+y) : (x-y) = a : (b-c)$$
$$(x+c) : (y+b) = (a+b) : (a+c)$$

51. $$(x-a) : (y-a) = (a-b) : (a+b)$$
$$x : y = (a^3-b^3) : (a^3+b^3)$$

52. $$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a$$

53. $$(a+c)x - (a-c)y = 2ab$$
$$(a+b)y - (a-b)x = 2ac$$

54. $$(a+b)x - (a-b)y = 4ab$$
$$(a-b)x + (a+b)y = 2a^2-2b^2$$

55. $$(a+b)x + (a-b)y = 2ab$$
$$(a+c)x + (a-c)y = 2ac$$

56. $$(a+2b)x - (a-2b)y = 6ac$$
$$(a+2c)x - (y-3c)x = 4ab$$

57. $$mx + ny = c$$
$$x : y = a : b$$

58. $$ax + by = 2a$$
$$x+y = \frac{a^2+b^2}{ab}$$

59. $$(a-b)x + (a+b)y = a+b$$
$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$$

60. $$\frac{x-y+1}{x+y-1} = a$$
$$\frac{x+y+1}{x-y-1} = b$$

61. $$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$
$$-\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a-b} = \frac{4a^2b^2}{(a-b^2)^2}$$

Решити и дискутовати ове системе:

62. $$x + y = a$$
$$x - y = b$$

63. $$ax + y = c$$
$$mx - ny = 0$$

64. $$ax + by = c$$
$$dx - cy = 0$$

65. $$ax + cy = a^2$$
$$bx + cy = b^2$$

66. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$
$$bx - ay = 0$$

67. $$x + y = a + b$$
$$bx + ay = 2ab$$

68. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

69. $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c}$$
$$\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{y}{c}$$

70. $$x + y = \frac{1}{2}(5a+b)$$
$$x - y = \frac{1}{2}(a+5b)$$

71. $$2x - 3y = -5a$$
$$3x - 2y = 5b.$$

72. — Решити систем:
$$(1+\lambda)x + (3+\lambda)y = 3+\lambda$$
$$\lambda x + (5+\lambda)y = 4+\lambda.$$

Дискутовати добивено решење, кад се λ мења од $-\infty$ до $+\infty$

73. — Исто за систем:
$$(a+\lambda)x + (b+\lambda)y = c+\lambda$$
$$(1+\lambda)x + (2+\lambda)y = 3+\lambda.$$

Решити ове системе:

74. $$x + y = 37$$
$$x + z = 25$$
$$y + z = 24$$

75. $$x + y + z = 100$$
$$3x - 2z = 4$$
$$5y = 4z$$

76. $$x + y + z = 3$$
$$x - y + z = 6$$
$$x - y - 3z = 12$$

77. $$x - y + 2z = \frac{3}{4}$$
$$x + y + z = 0$$
$$x - y - 4z = 2$$

78. $$3x - 2y + 4z = 9$$
$$5x - 4y - 6z = 1$$
$$x + y - 3z = 1$$

79. $$5x - 3y + 2z = 19$$
$$4x + 5y - 3z = 31$$
$$3x + 7y - 4z = 31$$

80. $$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$$
$$\frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{7z}{40} = \frac{147}{5}$$

81. $$1{,}5x - 2{,}5y + 2z = 2{,}5$$
$$3{,}5x + y\ 1{,}5z = 1$$
$$2x + 1{,}5y - 0{,}4z = 3{,}5$$

82. $$y + \frac{x}{2} = 41$$
$$x + \frac{z}{4} = \frac{41}{2}$$
$$y + \frac{z}{5} = 34$$

83. $$x + y + z = 11$$
$$2x - y + z = 5$$
$$3x + 2y + z = 24$$

84. $$x - y + z = 7$$
$$x + y - z = 1$$
$$y + z - x = 3$$

85. $$x + y - 6z = 9$$
$$x - y + 4z = 5$$
$$3y - 2x - z = 4$$

86. $$x + 2y - 0{,}7z = 21$$
$$3x + 0{,}2y - z = 24$$
$$0{,}9x + 7y - 2z = 27$$

87. $$x + y = 1\frac{1}{2}z = 8$$
$$x + z = 2\frac{2}{3}y - 14$$
$$y + z = 3\frac{3}{4}x - 32$$

88. $$\frac{3x+y}{z+1} = 2$$
$$\frac{3y+z}{x+1} = 2$$
$$\frac{3z+x}{y+1} = 2$$

89. $$0{,}6x + 0{,}8y = 5$$
$$0{,}3z - 0{,}4x = 0{,}3$$
$$y + 1.2z = 10$$

~~90.~~
$0.5x + 0,3y = 0,65$
$0,4x - 0,2z = 0,22$
$0.3x + 0,4z = 0,57$

91.
$\frac{3x}{4} + \frac{2z}{9} = 13$
$\frac{5x}{6} - \frac{3y}{5} = 5$
$\frac{4x}{3} - \frac{5z}{6} = 5$

92.
$\frac{x + 2y}{5x + 6z} = \frac{1}{9}$
$\frac{3y + 4z}{x + 2y} = \frac{8}{7}$

93.
$8 (5z - 6x) - 9 (5x - 4y) = 1$
$4 (7y - 4z) - 2 (5x - 4y) = 2$
$12 (7y - 4z) - 7 (5z - 5x) = 3$

$x + y + z = 128$

94.
$x + y + z = 1$
$ax - by + z = b$
$x - y + cz = c$

95
$4x - 3y + 5z = a$
$ax + by + z = b$
$x - y - z = c$

96.
$ax + by - cz = 2az$
$by + cz - ax = 2bc$
$cz - ax - by = 2ac$

97.
$x - y + z = 0$
$(a + b) x - (a + c) y + (b + c) z = 0$
$abc - acy + bcz = 1.$

98.
$bx + ay = 0$
$cy + bz = 0$
$cx + az = 1.$

99.
$x + y + z + a (x + y) + a^2x = a^3$
$x + y + z + b (x + y) + b^2x = b^3$
$x + y + z + c (x + y) + c^2x = c^3$

Овде можеш извршити ову смену:

$$x + y + z = u \qquad x + y = v$$

па ћеш добити систем од трију простијих једначина. Тај систем ће ти дати вредности за *x*, *v* и *u*. Чим знаш *x* и *v*, ти знаш одмах *y*; а чим знаш *x*, *y*, *u*, знаш и *z*.)

100.
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{ab}{x} + \frac{bc}{y} + \frac{ac}{z} = 0$
$\frac{1}{(a - b) x} + \frac{1}{(b - c) y} + \frac{1}{(c - a) z} = \frac{a + b + c}{abc}$

(Другу једначину можемо овако написати:

$$ab\left(\frac{1}{x}\right) + bc\left(\frac{1}{y}\right) + ac\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

а трећу:

$$\frac{1}{a - b}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{(b - c)}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{(c - a)}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + b + c}{abc}.$$

Загледај мало боље, па ћеш брзо видети какву смену треба извршити пре него што се пређе на решавање горњег система).

101.
$x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$z + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

102.
$\frac{x}{a + c} + \frac{y}{c + a} = b - a$
$\frac{x}{b + c} + \frac{y}{c + b} = c - b$
$\frac{y}{c + a} = \frac{z}{a + b} = c - b$

103.
$\frac{x + y}{2z} = \frac{a}{b}$
$\frac{x - 2z}{y} = \frac{a + b}{a + b}$
$\frac{x - a^2}{b} + \frac{y + b^2}{a} = \frac{az + bz}{ab}$

104.
$x + y = d$
$ax = y$
$bx = z.$

(Шта бива са x, y, z, кад je $a = -1$, a b и d нису равни нули?)

105.
$4x - 3z + u = 10$
$5y + z - 4u = 1$
$3y + u = 17$
$x + 2y + 3u = 25$

106.
$3x + 6y - 2z + 9u = 6$
$4y - 5x + 5z - 6u = 5$
$2z - 3x + 8y - 3u = 3$
$9u + 10y + 3z - 4x = 9$

107.
$x - 2y - 3z - 4u = - 8$
$y - 2z + 3y - 4x = 6$
$z - 2u + 3x - 4y = - 8$
$u - 2x + 3y - 4z = - 2$

108.
$3x - 4y = 4$
$6y - 5z = 5$
$z - u = 2$
$2u - x = 2$

109.
$5x - 2z = 18$
$y + 4u = 9$
$u - 5z = - 5$
$2x + 3u = 8$

110.
$2x + 3y = 5$
$4y - 3z = 1$
$5u + 3x = 8$
$2x + 4z = 6$

111.
$x + y + 2v + 3z = 18$
$x + 2y + v + z = 17$
$y + 3v - 4z = 8$
$v - z = 2$

(Из последње једначине имаш $z = v - 2$. Том вредношћу смени z у трима горњим једначинама.).

112.
$x + 3y - z - u = 0$
$x - y + z + u = 6$
$x - \frac{1}{2}y - z = - 3$
$x + u = 5.$

(Најпре линеарна комбинација с I и II једначином.)

113.
$x + y + 3z + v = 14$
$4x + 2y + z + v = 15$
$2x + y + 3x - v = 16$
$5x - 4y - z + v = 7$

(Направи линеарне комбинације од 1 и 3, 2 и 3, 3 и 4! Добићеш систем с трима непознатима.).

114.
$x + 3 (y + z + v) = 26$
$2y + 3 (x + z + v) = 29$
$z + 3 (x + y + v) = 24$
$v + 3 (x + y + z) = 22.$

Конструисати ове праве линије:

115. $y = x$.

116. $y = 2x$.

117. $y = 3x$.

118. $y = 10x$.

119. $y = \frac{x}{2}$.

120. $y = -x$

121. $y = -2x$

122. $y = -3x$

123. $y = -10x$

124. $y = -\frac{x}{2}$.

125. $x = 4$

(Једначина у вежбању 125 претставља праву линију на којој све тачке имају апсцису 4, то јест све тачке те праве (подједнако) су удаљене за 4 од ординатне осовине. Где леже такве тачке?)

126. $x = -1$.

127. $x = -1,5$

128. $y = 3,75$

129. $x = \frac{1}{2}$

130. $x = 0$.

131. $y = 1$.

132. $y = 0$.

133. $y = -3$.

134. $y = -\frac{3}{5}$.

(На милиметарској хартији узми да ти је један поделак на осовинама од 5 mm. за вежбање 134).

135. $y = -\frac{3}{7}$

136. $y = -\frac{3}{4}$

(На милиметарској хартији узми да ти је један поделак на осовинама од 7 mm. за вежбање 135).

137. $x = -5,25$

138. $x = -4$.

139. $x = -6$.

140. $x = -\frac{11}{12}$.

141. — Посматрај функцију дату овим биномом
$y = x + 1$.

142. — Исто за функцију
$y = -x + 1$.

143. — Исто за функцију
$y = -x + 2$.

144 — Исто за функцију
$y = -x - 1$.

Конструиши ове праве линије:

145. $y = 2x + 3$.

146. $y = -2x + 3$.

147. $y = 2x - 3$.

148. $y = -2x - 3$.

149. $y = -x - 1$.

150. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y + 6 = 0$.

151. $-\frac{3}{7}x + \frac{5}{15}y - 1 = 0$

152. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y - 1 = 0$.

153. $\frac{x - y}{3} + \frac{y - x}{4} = 1$.

154. $\frac{3}{5}(x - y) + \frac{5}{3}(y - x) = 6$.

155. $5(x - y - 1) + 2(x + y) = 0$.

156. $\frac{x - y}{x} + 5 = 0$.

---

157. $\frac{y - x}{5x} + 3 = 0$.

158. $x(m - 2) + m(y - 1) = 1$
за $m = 4$.

(Изабери m тако, да ова права буде паралелна са апсцисном осовином.)

159. $m(x - 1) + y(m - n) = 1$
за $m = 1$, $n = 0$.

(Шта бива са овом правом кад буде $m = n$?)

160. — Испитати функцију
$y = \frac{3}{2}x - 3$
од $x_1 = -1$, до $x_2 = 3$.

161. Испитати функцију
$y = \frac{x}{3} + 1$
од $x_1 = -2$ до $x_2 = +2$

162. — Испитати функцију
$y = -\frac{2}{3}x + 1$
од $x_1 = -1$ до $x_2 = 2$.

163. — Испитати функцију
$y = -\frac{x}{3} - 2$
од $x_1 = 10$ до $x_2 = 1$.

164. — Решити цртањем овај систем
$x + y = z$
$x + y = 1$.

Решити графички (цртањем) ове системе једначина:

165. $2x + 3y = 5$
$3x + 2y = 7$

166. $2x + y = 7$
$5x + 3y = 12$.

167. $y = 2x$
$x + y = 3$.

168. $3x + 2y = 14$
$5x - 8y = 12$.

169. $\frac{x}{y} = 2$
$x + 2y = 12$.

170. $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 2$
$\frac{3x}{4} - \frac{2y}{5} = 2$

171. $0,5x + 0,1y = 1,9$
$\frac{2x}{3} + \frac{3}{4}y = -1$

172. $5x - 4y = 0$
$\frac{2x}{5} + \frac{y}{2} = 4,1$.

(Стално се служи милиметарском хартијом.)

173. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
$2x + 3y - 6 = 0$.

(Који је овде случај из дискусије система од две једначине?)

174. $\frac{x}{2}(m - 1) + \frac{y}{3}(1 - n) = 2$
$\frac{m}{2}(x - 1) - \frac{n}{3}(y - 2) = 3$
за $m = 2$, $n = 3$.

(Шта бива са овим двема правама кад је $m = n = 0$?)

175. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 2$
$\frac{x}{2} - \frac{2y}{5} = 7$

176. $y = \frac{2}{3}x - 2$
$2x - 3y + 9 = 0$.

177. — Решити графички ову једначину:

$$3x - 18 = 54.$$

Пошто су у једначини стране једнаке, можемо их означити истим бројем. Ако их означимо са y, биће:

$$y = 3x - 18 \text{ и } y = 54.$$

Узми 1 *mm* за поделак на осовинама, па ћеш видети да се ове наше две праве секу у тачци чија је апсциса $x = 24$.

178. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{6x - 3}{7} + 4 = 2x - \frac{x}{7}.$$

Наше две праве биће: $y = \frac{6x - 3}{7} + 4$ и $y = 2x - \frac{x}{7}$.

Конструиши их и нађи апсцису пресечене тачке. За поделак узми дужину од 7 *mm*.

179. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{2x - 3}{4x - 5} = \frac{3}{7}.$$

Ако узмеш да је прва права $y = 7\ (2x - 3)$, како ћеш изразити једначину оне друге праве?

180. — Решити графички ову једначину:

$$\frac{x - 5}{3} = 4\left(\frac{x}{5} - 2\right) - 3.$$

181. — Исто за једначину:

$$\frac{5x + 3}{19} + \frac{41 - 3x}{5} = \frac{5x - 11}{4}.$$

182. — Исто за једначину:

$$\frac{15}{2x - 3} = \frac{39}{5x - 7}.$$

(Овде стави $y = 15\ (5x - 7)$ и т. д.)

183. — Исто за једначину:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{5}{6} = 0.$$

(Овде можеш ставити $y = \frac{x}{3}$ и $y = \frac{5}{6} - \frac{x}{2}$.)

184. — Исто за једначину:

$$\frac{2}{3} x - \frac{3}{2} x + \frac{5}{6} x + x = 12.$$

IX — ПРОБЛЕМИ ПРВОГА СТЕПЕНА

Шта је то проблем. — Под *проблемом* подразумевамо у Алгебри такав задатак, где је најпре потребно наћи **однос** између датих количина које се траже, па тек онда приступити израчунавању.

Пример I — Колико је 5 пута 4? Ово *није проблем*, јер нам је одмах речено какав рачун треба да вршимо.

II — Израчунати површину троугла чија је основица 5 cm., а висина 4 cm.

Ни ово *није проблем*, јер нам је одмах речено да треба да нађемо половину производа бројева 5 и 4.

III. — Један број увећан за 4 даје 7. Који је то број? Овде морамо тражити *однос* тога траженога броја према бројевима 4 и 7. Ово је проблем.

Врсте проблема. — Проблеми се деле према томе каквим се једначинама могу претставити. Ако се проблем може претставити једначинама првог степена, то је *проблем првог степена;* ако се он може претставити једначинама другог степена, то је *проблем другог степена*. Колико ће бити једначина зависи од тога колико ћемо непознатих узети; један исти проблем може често да се реши с једном или са више непознатих. То ће ученик видети на другом примеру у низу примера који следују. Ученик треба толико да ради проблеме, док се не извежба да их ради са што мање непознатих.

Читање једначина. — Сваку једначину можемо прочитати као проблем. На пр. једначину

$$2x + 5 = 11$$

можемо овако прочитати: „Који је тај број, чијој двогубој вредности треба додати 5, па да се добије 11?“

Систем

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7x \\ 5y - 9y &= 1 \end{aligned}$$

можемо прочитати овако: „Кад се један број утроји, па се томе дода удвојен други неки број, добије се седмострука вредност првог броја. Кад се од петоструког другог броја одузме деветоструки први број, добије се јединица.“

Ступњеви проблема. — Сваки проблем има ових пет ступњева:

1. — Избор непознатих.

2. — Склапање једначина. — То значи да се однос између познатих и непознатих изражава једначинама, то јест проблем се преводи на алгебарски језик.

3\. — Решавање једначина.
4\. — Дискусија једначина.
5\. — Дискусија проблема.

Пошто се проблеми могу проучити само тако, ако ученик изради *веома* много задатака, ми ћемо све показати на примерима.

Решени примери проблема првог степена

Први пример. — *Неки број увећан за 4 даје 1. Који је то број?*

Избор непознате. — Сам задатак каже да је овде непозната баш та количина, која сабрана са 4 даје 7. Њу ћемо обележити са x.

Склапање једначина. — Имамо свега једну непознату. *Проблем мора да је такав, да можемо написати онолико једначина, колико има непознатих.* Ако то није, онда је проблем *неодређен.*

Овде имамо *једну* непознату; треба нам дакле свега *једна* једначина. Да бисмо је склопили, пођимо за самим проблемом. Прочитајмо проблем поново! Он каже да нашу количину x треба сабрати са 4:

$$x + 4$$

па ће се добити 7:

$$x + 4 = 7.$$

Решавање једначине. — Ово је једначина I степена с једном промењљивом

$$x + 4 = 7$$
$$x = 3.$$

Дискусија једначине. — Горња једначина има једно одређено решење

$$x = 3$$

Дискусија проблема. — Проблем је увек могућан, јер се увек могу наћи два броја чији ће збир бити 7. Добивено решење задовољава проблем, јер је збиља

$$3 + 4 = 7$$

Други пример. — *Збир цифара једног двоцифреног броја је 5; кад се од тога двоцифреног броја одузме 9, добије се опет двоцифрен број са истим цифрама, али у обрнутом реду. Који је тај двоцифрени број?*

Најпре ћемо да покажемо једну мрежу за бројеве и на њој ћемо исписати неколико бројева, да бисмо потсетили ученика на *декадни систем целих бројева.*

Нацртајмо неколико стубаца и у њих унесимо разне цифре. Та мрежа је и налево и надоле неограничена, али ми ћемо се зауставити код седмог вертикалног ступца у коме су милиони. Унесимо у ову мрежу 7 разних бројева, почевши једноцифреним па завршујући седмоцифреним. Горње бројеве можемо изразити на неколико начина. Узмимо, рецимо, број 876 из трећег хоризонталног ступца.

7	6	5	4	3	2	1
милиони	стотине хиљада	десетице хиљада	јединице хиљада	стотине	десетице	јединице
						4
					3	5
				8	7	6
			9	1	0	3
		8	7	6	5	4
	7	6	5	3	1	2
8	7	6	8	5	2	9
					3 x	2 y
					y	x

Тај број можемо овако написати:

$$8 . 100 + 7 . 10 + 6 . 1$$
или: $8 . 10^2 + 7 . 10^1 + 6 . 10^0$
или просто: $876 . 10^0$
то јест: $876 . 1$
а то је: 876

Кад погледамо на горњу мрежу, видимо да наш број има 8 стотина и 76 јединица, те га можемо овако написати:

$$8 . 100 + 76 . 1.$$

Даље видимо да он има 87 десетица и 6 јединица, те га можемо и овако написати:

$$87 . 10 + 6$$

Ако изврнемо цифре, имаћемо број 678. Шта је било сад? Сад су шестице стотине, седмице су и даље десетице, а осмице су јединице:

$$6 . 100 + 7 . 10 + 8 . 1$$

Ако цифру јединица ставимо пред ове друге две цифре, биће:

наш број 876

наш број после промене: 687.

Сад су шестице стотине, а 87 су јединице:

$$6 . 100 + 87 . 1$$

Вратимо се сад своме задатку.

Наш број је двоцифрен.

Избор непознате. — Сваки двоцифрен број заузима два места на нашој мрежи. Та два места заузимају две његове цифре. Да бисмо склопили наш број, ми треба да му знамо обе цифре. *То ће бити наше непознате.* Обележимо са x цифру на месту десетица, а са y цифру јединица и унесимо то у нашу мрежу!

Наш тражени број је

$$x . 10 + y . 1$$

Склапање једначина. — Чим имамо две непознате, морамо имати и *две* једначине. Прочитајмо сад наш проблем!

Збир цифара једног двоцифреног броја је 5. Цифре нашег броја су x и y. Дакле:

$$x + y = 5.$$

Сад треба од нашег двоцифреног броја да одузмемо 9.

наш број: $x . 10 + y . 1$

од њега одузет број 9: $(x . 10 + y . 1) - 9$

Према нашем проблему цифре треба сад да промене места. Погледај сад у девети хоризонтални стубац на мрежи! Добили смо број

$$y . 10 + x . 1$$

Према томе је

$$(x . 10 + y . 1) - 9 = y . 10 + x . 1.$$

То нам је друга једначина, те имамо систем:

$$x + y = 5$$
$$10x + y - 9 = 10y + x.$$

Решавање једначина. — Овде имамо систем I степена с двема промењљивима.

Решење нашег система је:

$$x = 3$$
$$y = 2.$$

Дискусија система. — Горњи систем даје једно одређено решење.

Дискусија проблема. — Најпре проба добивених резултата.

Наш двоцифрени број има на месту десетица цифру 3, а на месту јединица цифру 2, т. ј. има 3 десетице и 2 јединице:

$$3 . 10 + 2 . 1.$$

То је број 32.

Ако од тога броја одузмемо 9 добићемо

$$32 - 9 = 23$$

а 23 има исте цифре као и 32, само у обрнутом реду. Збир цифара је збиља 5:

$$3 + 2 = 5$$

Сад проба самога проблема. Из задатка се види да тражени број остаје двоцифрен и кад му цифре промене места. Значи цифра јединица траженога броја не може бити нула. Види се даље да број *промени вредност* кад му цифре промене места. Значи проблем је могућан само у томе случају, кад у решењу горњег система ни x ни y нису нуле и кад имају разне вредности. Дакле, мора бити:

$$x \neq 0 \qquad y \neq 0 \qquad x \neq y.$$

Проблем је могућан само у томе случају, ако је тај двоцифрени број склопљен из двеју *различитих* цифара. Иначе он не може постојати.

Овај проблем можемо решити и једном једначином.

Кад је збир цифара тога броја 5, нека му је цифра на месту десетица x. Онда је друга цифра $(5 - x)$.

$$[x . 10 + (5 - x) . 1] - 9 = (5 - x) . 10 + x . 1$$

а одатле: $x = 3$

Цифра на месту јединица је $5 - x$, дакле $5 - 3 = 2$.

Трећи пример. — *Мати има a година, а син b година. Кад ће мати бити 3 пута старија од сина?*

Избор непознате. — Пошто мати није *сад* 3 пута старија од сина, треба да протекне *извесно* време док то буде. Које време? Ми га не знамо. Ето наше непознате! Обележимо је са x.

Склапање једначине. — Пошто имамо свега једну непознату, имаћемо и једну једначину. Ево како ћемо је склопити:

Мати има сад година a

Мати ће имати после x година $(a + x)$ година.

Син има сад година b

Син ће имати после x година $(b + x)$ година

После x година, материн број година биће 3 пута већи од броја синовљевих година. Изразимо то!

$$a + x = 3\ (b + x).$$

То је наша једначина.

Решење једначине:

$$x = \frac{a - 3b}{2}$$

Дакле, после $\frac{a - 3b}{2}$ година мати ће бити 3 пута старија од сина.

Дискусија једначине. — Пошто је именитељ горњег разломка посебан број 2, то вредност *икса* може да се мења само са променом бројитеља

$$a - 3b$$

Како су бројеви a и b *коначни* (јер претстављају људски век, који је ограничен), то ћемо *увек* имати *једно одређено* решење па ма какви били коначни бројеви a и b.

Израз $\frac{a - 3b}{2}$

може бити позитиван, нула, или негативан, према томе да ли је

$$\begin{array}{ll} & a - 3b > 0 \\ \text{или} & \\ & a - 3b = 0 \\ \text{или} & \\ & a - 3b < 0. \end{array} \left\} \begin{array}{l} x \text{ је позитивно} \\ \\ x \text{ је нула} \\ \\ x \text{ је негативно.} \end{array} \right.$$

Дискусија проблема. — Решавајући горњу једначину дошли смо до овога резултата: кад протекну $\frac{a - 3b}{2}$ године, мати ће бити три пута старија од сина. Да видимо колико ће тада бити година мајци, а колико сину.

После x година мати ће имати година:

$$a + x = a + \frac{a - 3b}{2}.$$

После x година син ће имати година:

$$b + x = b + \frac{a - 3b}{2}$$

Израз

$$a + \frac{a - 3b}{2}$$

можемо и овако написати:

$$\frac{3a - 3b}{2}$$

то јест:

$$\frac{3\ (a - b)}{2}$$

или још боље:

$$\frac{3}{2}\ (a - b).$$

Израз

$$b + \frac{a - 3b}{2}$$

можемо овако написати: $\frac{1}{2}(a - b)$.

Кад је x *позитивно*, наш проблем има смисла. Значи да ће мати после извесног броја година постати 3 пута старија од сина.

[Рецимо матери је сада 35 година, а сину 9. После + 4 године, матери ће бити 39 година, а сину 13, те ће, види се, мати бити 3 пута старија од сина]

Мати ће тада имати

$$\frac{3}{2}(a - b) \text{ година.}$$

Пошто је x позитивно, значи да је

$$a - 3b > 0$$

према томе је

$$a > 3b$$

те је и

$$a > b.$$

Значи да је мати старија од сина, што је сасвим природно.

Кад је x *равно нули*, тада је

$$a = 3b.$$

Мати је већ сад 3 пута старија од сина.
Наш проблем опет има смисла.
Имамо једно решење у садашњости.

Рецимо, матери 39, а сину 13 година

Кад је x *негативно*, тада је

$$a - 3b < 0$$

то је

$$a < 3b.$$

Мати ће имати после x година:

$$\frac{3}{2}\ (a - b) \text{ година.}$$

Како за a постоји само једно ограничење (да мора бити мање од $3b$), то могу овде наступити три случаја.

1 случај. $a > b$.

Тада је

$$b < a < 3b.$$

У овоме случају наша једначина нам даје једно негативно решење, које има смисла: мати је већ била три пута старија од сина. Н. пр. матери је 44 године, а сину 18. Пре пет година матери је било 39, а сину 13, те је мати била 3 пута старија од сина. Ту је време негативно (— 5), пошто се тражени догађај десио у прошлости. Проблем има смисла, јер је мати старија од сина.

2 случај. $a < 3b$
али $a = b$.

Овај случај нема смисла, јер мати и син не могу бити истих година.

3 случај. $a > 3b$
али $a < b$.

Овај случај опет нема смисла, јер би мати имала *негативан број* година после времена x:

$$\frac{3}{2}(a - b) < 0.$$

а ми знамо да се године једног лица могу претставити само позитивним бројем. Уз то израз

$$a < b$$

би показивао, у нашем проблему, једну очиту немогућност по којој би мати била млађа од сина.

Свођење дискусије проблема. — Ако су a и b позитивни и коначни, наш проблем увек има смисла и даје једно одређено решење, сем кад је

$$a = b \text{ или } a < b.$$

Четврти пример. — *У првом разреду има 3 ученика више него у другом, а у другом 18 ученика више него у трећем. У првом разреду има два пута више ученика него у трећем. Колико има ученика у сваком од та три разреда?*

Шта ћемо овде узети за непознату? Да узмемо број ученика у *првом* разреду. Тада ће бити овај број ученика;

I разред: x
II „ $x - 3$
III „ $(x - 3) - 18$. (Откуда ово?)

Сад да изразимо и последњи услов, по коме у првом разреду има два пута више ученика него у трећем. Дакле:

$$x = 2\,[(x - 3) - 18].$$

Одатле је

$$x = 42.$$

Према томе има ученика:

I разред: 42
II „ 39
III „ 21
$42 = 2 \,.\, 21$

Изаберимо сад број ученика у *другом* разреду за непознату. Прочитајмо проблем! Кад га претставимо алгебарским изразима, биће:

I разред: $x + 3$
II „ x
III „ $x - 18$

И последњи услов:

$$x + 3 = 2\,(x - 18).$$

Одавде је:

$$x = 39$$

Према томе разреди имају овај број ученика:
II 39, I 42, III 21.

То смо нашли и малочас.

Изаберимо сад за непознату број ученика у *трећем* разреду. Прочитајмо проблем. Кад га претставимо алгебарским изразима, биће:

III разред: x
II „ $x + 18$
I „ $x + 18 + 3$.

Последњи услов из проблема биће изражен овом једначином:

$$(x + 18 + 3) = 2x.$$

Одавде је

$$x = 21.$$

Било је ученика:

III 21
II 39
I 42
$42 = 2 \,.\, 21$

Опет смо добили исто решење.

Где смо најзгодније изабрали непознату и зашто? Да ли нас је сâм проблем упућивао коју количину да изаберемо за непознату?

Горњи проблем можемо решити и са *три непознате*.

Означимо број ученика у појединим разредима овако:

$$\text{I } x, \text{ II } y, \text{ III } z.$$

Сад прочитајмо проблем и оно што нам он говори пишимо алгебарским изразима. (Преводимо на алгебарски језик).

Проблем каже: у првом разреду има 3 ученика више него у другом.	Ми то изражавамо алгебарским изразима овако. Пошто први разред има три ученика више него други, они ће имати *исти број* ученика, ако из првог разреда уклонимо три ученика. Дакле: $x - 3 = y$
Проблем каже: у другом разреду има 18 ученика више него у трећем.	Ми то изражавамо алгебарским изразима овако: $y - 18 = z.$
Проблем каже: у првом разреду има два пута више ученика него у трећем.	Одатле једначина: $x = 2z.$

Добили смо систем од три једначине који гласи:

$$x - 3 = y$$
$$y - 18 = z$$
$$x = 2z$$

Кад решимо овај систем, добијамо:

$$x = 42, \quad y = 39, \quad z = 21.$$

Опет смо добили исто решење:

I разред 42 ученика
II „ 39 „
III „ 21 ученик.

Који је начин решавања најзгоднији?

Пети пример. — *Две суме, једна од 3000 дин., а друга од 2000, донеле су за 6 месеци исти интерес. Кад је прва сума дата по 6%, под који је проценат дата друга сума?*

Знамо да је образац за интерес:

$$i = \frac{k.\ p.\ t.}{1200}$$

пошто је овде време дато у месецима.

Да бисмо израчунали интерес, треба да знамо количине *k*, *p* и *t* За први капитал све то знамо. За други означимо проценат са *x*.

Према томе биће:

$$i_1 = \frac{3000.6.6,}{1200} \qquad i_2 = \frac{2000.x.6.}{1200}$$

Али наш проблем каже да је

$$i_1 = i_2$$

те отуда ова једначина

$$\frac{2000 \,.\, x \,.\, 6}{1200} = \frac{3000 \,.\, 6 \,.\, 6}{1200}$$

а одатле:

$$2x = 18$$
$$x = 9.$$

Друга (мања) сума дата је по 9% под интерес.

Шести пример. — *Винар има 250 литара неког вина које продаје по 15 динара литар. Колико литара једног простијег вина од 10 динара може да помеша са тим бољим вином, да би, без губитка, могао продавати добивену смешу по 12 динара литар?*

Нека од другог вина узме *x* литара.

Кад би 250 литара продавао засебно по 15 динара литар, он би примио: (250 . 15) динара. Кад би (опет засебно) продавао *x* литара другог (слабијег вина) по 10 динара, он би примио: (*x* . 10) динара. Правећи смешу он добија (250+*x*) литара и продаје их по 12 динара. За смешу он добије: (250+*x*) . 12 динара. Како он неће ништа да изгуби, он добија за смешу ону исту суму новаца коју би добио, да је сваку врсту вина засебно продавао. Отуда ова једначина:

$$(250+x) \,.\, 12 = (250 \,.\, 15) + 10 \,.\, x$$

Одатле је

$$x = 375.$$

Седми пример. — *На подне полази један воз из станице B и креће се ка станици C брзином од 45 километара (сл. 27). У 3 часа по подне полази воз из станице A, која је испред B 60 километара, опет ка станици C, прелазећи на сат 75 километара. На којој даљини од станице A морају ти возови да се стигну? У колико сати ће се стићи?*

Сл. 27.

Овде се морамо сетити обрасца који показује пут тела које се креће *једнаким кретањем*. Тај образац гласи:

$$s = ct$$

(где је s пут, c стална брзина, а t време за које тело пређе пут s).

У проблему се тражи да кажемо на којој ће се даљини од A стићи возови A и B. Да бисмо знали пут воза A, ми морамо знати сем његове брзине још и време које је он провео на путу до стизања. Зато ћемо прво одговорити на друго питање у нашем проблему.

Нека је воз A провео на путу до сустижне N станице x часова, B воз y часова.

Тада је пут AN воза A:

$$s_a = x \,.\, 75$$

а пут BN воза B:

$$s_b = y \,.\, 45.$$

Та два пута се разликују за 60 километара, јер је воз A прешао 60 километара више од воза B. Да би ти путеви били једнаки (јер нам треба једначина), ми ћемо од пута воза A одбити 60 километара:

$$x \,.\, 75 - 60 = y \,.\, 45.$$

Наш проблем нам каже да је воз B био на путу 3 сата више од воза A. Дакле:

$$y = x + 3$$

Кад решимо систем

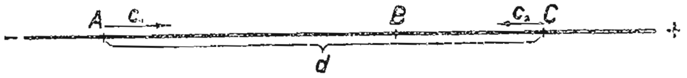
$$75x - 60 = 45y$$
$$x + 3 = y$$

добићемо

x = 6 ч. 30 мин.
y = 9 ч. 30 мин.

Дакле возови се стижу у 9 ч. 30 мин., у станици N., која је од станице A удаљена 487,5 *km*. (јер је воз A провео на путу $6\frac{1}{2}$ час. а прелази на сат 75 *km*, те је $6^1/_2 \,.\, 75 = 487^1/_2$).

Осми пример. — *Два воза полазе једновремено један другоме у сусрет из станица A и C (сл. 28), чије је растојање d; воз A иде брзином c_1, а воз C брзином c_2. Где и кад ће се срести? Дискутовати проблем!*



Сл 28.

Они ће се срести после x часова. Нека се сретну у B. Знамо да ће тада бити:

$$AB + BC = AC$$

AC знамо; то је d. CB је пут воза C, AB је пут воза A. Имаћемо:

$$s_a = c_1 \,.\, x$$
$$s_c = c_2 \,.\, x.$$

Према томе једнакост $AB + CD = AC$ можемо изразити овом једначином: $c_1x + c_2x = d$

Одатле је:

$$x = \frac{d}{c_1 + c_2}$$

Дискусија проблема. — Посматрајмо пут воза A. Он ће бити

$$s_a = c_1 \,.\, x = \frac{c_1 d}{c_1 + c_2}$$

Ако бројитељ и именитељ овог разломка поделимо са c_1 добићемо:

$$s_a = \frac{d}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

Посматрајмо сад промене предности s_a, док се мења c_1.

Ако је $c_1 = 0$, тада је разломак $\frac{c_2}{c_1}$ бескрајно велики, те је и вредност $\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)$ бескрајно велика. Кад се коначан број d подели бескрајно великим бројем добићемо бескрајно мали број. То значи, штогод је c_1 ближе нули и s_a је све ближе нули. Кад c_1 постане нула и s_a постаје нула. Шта то значи? То значи да се наши возови неће срести нигде између A и C, већ у A, пошто се воз A не креће. Да то проверимо путем s_c!

$$s_c = c_2 \,.\, x$$

$$s_c = c_2 \cdot \frac{d}{c_1 + c_2}.$$

А одатле $s_c = \dfrac{d}{\frac{c_1}{c_2} + 1}$.

Кад је $c_1 = 0$, а $c_2 \neq 0$, тада је $\frac{c_1}{c_2} = 0$, те је

$$s_c = d.$$

То значи да воз C мора прећи цело растојање d станица A и C и доћи у A да се сретне с возом A.

Имамо

$$s_a = \frac{d}{1 + \frac{c_2}{c_1}}$$

Кад c_1 почиње да расте, разломак $\frac{c_2}{c_1}$ опада и ми имамо да делимо d све мањим бројем. То значи да је s_a све веће.

Шта бива тада са s_c ?

$$s_c = \frac{d}{\frac{c_1}{c_2} + 1}$$

Кад c_1 расте, разломак $\frac{c_1}{c_2}$ расте и s_c опада, те се тачка сусрета B све више удаљава од A.

Кад постане по апсолутној вредности $c_1 = c_2$, тада је

$$s_a = \frac{d}{2} \quad \text{и} \quad s_c = \frac{d}{2}.$$

Возови ће се срести на средини између станица A и C.

Ако c_1 и даље расте, док c_2 остаје стално, разломак $\frac{c_2}{c_1}$ опадаће и s_a ће расти, а разломак $\frac{c_1}{c_2}$ ће расти и s_c ће опадати. Значи да ће се сусретна тачка све више ближити тачци C.

Кад c_1 постане веома велико према c_2 разломак $\frac{c_2}{c_1}$ постаје веома мали и s_a се ближи вредности d; разломак $\frac{c_1}{c_2}$ постаје веома велики и вредност s_c се ближи нули. То значи да ће сусрет бити близу тачке C. (То ће бити у случају, ако воз из A иде, на пример, брзином од 120 *km*, а воз из C, рецимо, само брзином од 10 *km*.)

ВЕЖБАЊА УЗ IX ОДЕЉАК

$x + y = 14$

$0x + y + 27 = 2(10x + y) - 32$

1. — Збир цифара једног двоцифреног броја је 14; ако му се дода 27, добија се број који је за 32 мањи од удвојеног траженог броја.

Дискусија проблема!

2. — Збир цифара једног двоцифреног броја је 10; ако му се дода 10, добија се број са истим цифрама, али у обрнутом реду.

Дискусија проблема! Објасни ову немогућност!

(Што бива са целим бројем кад му додамо 10? Која цифра се мења? А је ли то овде случај?)

$x + y = 10$

$10x +$ [illegible] $= 10y + x$

3. — Један часовник увек иде напред 10 минута за 24 часа; на подне је дотеран на тачно време. Колико је стварно часова, кад је на овом часовнику 6 часова по подне?

4. — Наћи такав двоцифрени број да му разлика цифара буде 2, а цифра десетица да буде $\frac{3}{4}$ цифре јединица.

5. — Поделити број 46 на два дела тако, да збир $\frac{1}{7}$ првога дела и $\frac{1}{3}$ другога износи 10.

6. — Уопштити предњи задатак! Дискутовати!

(То значи поставити га овако: „Број a поделити на два броја тако, да збир m- тог дела првога броја и n- тога дела другога боја буде s“).

7. — Јован има 327 динара, а Марко 237 динара. Колико динара треба Марко да да̄ Јовану, па да Јован има три пута толико колико је Марку остало?

8. — Цифре једнога двоцифреног броја стоје у размери као m: n. Ако се томе двоцифреном броју дода број a, добија се број чије цифре иду обрнутим редом. Који је тај број? Дискутовати.

9. — У једначини $ax + b = cx + 4$ изабрати за a, b и c такве вредности, да x буде позитивно.

10. — Исти задатак само са условом да x буде негативно.

11. — Исти задатак само са условом да x буде нула.

У овим једначинама наћи вредности a за које ће x бити: a) позитивно b) негативно, c) нула:

12. $x(a - 3) = 5(x - 1) + 6$

13. $5(x + 1) + a = a(x + 2) + 5$

14. $\dfrac{a(x + 2) - 3(a - 1)}{x + 1} = 2$

15. $\dfrac{6(a - 1) - 5(a + 2x)}{ax + 1} = -1.$

16. — Збир три разломка је 1; разлика првог и другог је равна разлици другог и трећег; први је три пута већи од трећег. Који су то разломци?

17. — Исти задатак само што је збир та три разломка a. Дискусија.

18. — Растави број 176 на два дела тако, да стоје у размери као 5 према 6.

19. — Уопшти проблем из претходног вежбања! Дискутовати!

(То значи поставити га сад овако: „Растави број a на два дела тако, да ти делови стоје у размери као m према n“)

20. — Наћи број чије $\frac{2}{7}$ увећане за 0,291 дају 0,0027.

21. — Наћи таква два броја, да им збир износи $\frac{2}{3}$ првога броја, а разлика да им је 1.

22. — Поделити број 200 на два дела тако, да кад се први подели са 16, а други са 10, разлика добивених количника да је 6.

23. — Уопшти задатак из претходног вежбања! Дискутовати!

(Сад би вежбање 22 могло овако да гласи: „Подели број a на два дела тако, да кад се први део подели са m, а други са n, разлика добивених количника да је d“).

24. — Наћи таква два броја, да је количник њихов 4, а остатак при дељењу 60 Разлика та два броја је 495.

25. — Наћи димензије једног правоугаоника кад се зна ово: ако му се повећа основица за 8 m, а висина за 5 m, површина се повећава за 180 m^2; међутим ако се основица повећа за 3 m, а висина смањи за 4 m, површина се смањи за 30 m^2.

26. — Наћи површину једног троугла чији је обим 30 cm, кад се зна да је најмања страна већа за 6 cm од разлике других двеју страна, а мања за 14 cm. од њиховог збира.

27. — Три места A, $Б$ и $В$ леже на теменима једног троугла. Пут од A до $В$ преко $Б$ 4 пута је дужи од пута који води право из A у $В$; пут од $Б$ до A преко $В$ за 5 km је дужи од пута што води право из $Б$ у A; пут који из $В$ преко A води у $Б$ дуг је 85 km. Наћи растојање тих места.

(Нацртај најпре слику и на њој означи непознате! Затим опет читај проблем и стално гледај у слику!)

28. — Дат је један троугао ABC, који уписани круг додирује у тачкама P, Q и R на странами BC, CA и AB. Дате су стране a, b, c. Израчунати дужине од темена до додирних тачака.

(Нацртај слику и сети се да су тангенте повучене на круг из исте тачке једнаке. Дискусија.)

29. — У једном троуглу један је угао већи од другога за 40', а други већи од трећега за 20g. Колики су углови? Овде се мораш сетити да при рачунању морамо увек пазити да све мерене количине буду изражене истом јединицом.

30. – Лица A и $Б$ имају заједно $\frac{2}{3}$ онога што има лице $В$; $Б$ и $В$ заједно имају 5 пута више него A; а кад би $Б$ имао 68 000 динара више него што има, његов капитал би био колико све оно што имају A и $Б$. Колико има сваки од њих?

31. — Пет лица поделе 8 591 динар. Колико је свако лице добило, кад је друго лице примило $\frac{3}{4}$ онога што је примило прво лице, а треће лице $\frac{3}{4}$ онога што је примило друго и т. д.? (Део сваког лица износи $\frac{3}{4}$ дела претходног лица.)

32. — За три месеца израдила је једна фабрика оружја 59 900 пушака. Колико је пушака израдила првога, колико другога, колико трећега месеца, кад је сваког месеца израдила $\frac{17}{10}$ броја пушака из претходног месеца?

33. — Уочи једне битке бројеви бораца једне и друге војске стојали су у размери као 5 према 6. У битци прва војска изгуби 14 000 војника, а друга 6 000. После битке бројеви њихових војника стоје у размери као 1:2. Колико војника је било у једној, а колико у другој војсци пре битке?

34. – Три лица A, $Б$ и $В$ имају заједно 69 година; пре 10 година $Б$ је имао половину збира година A и $В$; кроз 10 година збир година $Б$ и $В$ биће за 31 већи од броја година лица A. Колико је сад година свакоме?

35. — Отац, мати и син имају заједно a година; отац је старији п пута од сина, а мати ће тек после 10 година имати n пута толико година колико син има сад. Колико је година свакоме од њих? Дискусија.

36. — Оцу је 27 година, а сину 3. Кад ће број синовљевих година бити $\frac{1}{4}$ броја очевих година?

37. — Оцу је m година, а сину n година. Кад ће број синовљевих година бити $\frac{1}{4}$ броја очевих година? Дискусија!

38. — Оцу је 40 година, а сину 12. Кад је отац био 5 пута старији од сина?

39. — Синовљеве године су данас $\frac{1}{5}$ очевих година, а пре 5 година износиле су само $\frac{1}{9}$ очевих година. Колико година је оцу, а колико сину?

40. — Аврам има данас 19 година, а Војислав 30. Кад ће број њихових година бити у размери као m према n? Дискусија!

41. — Пре 18 година Милан је био два пута старији од Ранка; кроз 9 година број Миланових година биће само $\frac{5}{4}$ Ранкових година. Колико им је сад година?

42. — Нађи троцифрени број који има ове особине: 1) Збир цифара му је 6; 2) цифра десетица је полузбир оних других двеју цифара; 3) ако се томе троцифреном броју дода 198 добија се троцифрени број са истим цифрама, али са обрнутим редом цифара.

43. — Нађи троцифрени број чији је збир цифара 12; цифра стотина је $\frac{1}{15}$ двоцифреног броја који образују оне друге две цифре; а цифра десетица $\frac{1}{76}$ броја који се добија, кад се у траженом троцифреном броју цифра десетица смени нулом, па од јединица тако добивеног броја одузме 1.

44. — Растави 110 на три дела тако, да кад се први део подели другим, добије се количник 5 и остатак 2, а кад се дели други трећим, добије се количник 2, а остатак 3

Сети се: $\frac{21}{1} : 5 = 4$ а одатле: $21 = 5 . 4 + 1$.

45. — Неки број дељен узастопце са 2, 3 и 4 даје остатке a, b и 3 тако, да је збир три количника раван траженоме броју. Наћи тај број. Дискусија. Примедба као уз претходни задатак.

46. — Три радника имају да сврше један посао. Ако раде први и други заједно, свршиће тај посао за 12 дана; ако раде други и трећи заједно, свршиће тај посао за 20 дана; а први и трећи за 15 дана. За колико ће дана свршити тај поса сваки од њих кад сам ради?

(Решење: први би радник сам свршио тај посао за *20 дана*, други за *30 дана*, трећи за *60 дана).*

Напомена. — Ако означимо цео посао са t, а време за које би први радник сам свршио тај посао са x, видећемо да тај радник сврши дневно $\frac{t}{x}$ део посла. Слично томе други сврши дневно $\frac{t}{x}$ део посла, а трећи $\frac{t}{z}$. За пет дана први сврши $5 . \frac{t}{x}$ посла и т. д. Треба се сетити да кад радници сврше посао, они су израдили количину t.)

47. — Кад два радника раде заједно, свршиће један зид за 12 дана. Ако први ради два дана, а други 3 дана, свршиће $\frac{1}{5}$ зида. За које би време сваки од њих сам свршио тај зид?

48. — У неки басен утичу три цеви. Кад су отворене прве две, басен се пуни водом за 1 час и 10 минута; кроз прву и трећу он се пуни за 1 час 24 минута, а кроз другу и трећу за 2 часа и 20 минута. Све три цеви су отворене у 4 часа ујутру, али се прва поквари после 10 минута и не може да се оправи то пре подне. Кад ће се напунити басен?

Напомена — Сети се да ако једна цев пуни басен (чија запремина нека је v) за x минута, она за један минут пуни $\frac{v}{x}$. Ако све три заједно пуне басен за m минута, биће·

$$\frac{v}{x}.\, m + \frac{v}{y}.\, m + \frac{v}{z}.\, m = v.$$

Ако избациш v, добићеш све саме реципрочне вредности непознатих:

$$\left(\frac{1}{x}\right) m + \left(\frac{1}{y}\right) m + \left(\frac{1}{z}\right) m = 1.$$

Сад ако извршимо ову смену:

$$\frac{1}{x} = \alpha,\ \frac{1}{y} = \beta,\ \frac{1}{z} = \gamma \text{ добићемо:}$$

$$\alpha m + \beta m + \gamma m = 1 \text{ или:}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{m}.$$

У наредном проблему наићи ћеш на нешто слично овоме објашњењу.

49. — У један басен утичу 2 цеви. Ако 15 минута утиче вода из обеју цеви, напуни се само $\frac{1}{6}$ басена. Ако прва стоји отворена 12 минута, а друга 20, напуни се $\frac{1}{5}$ басена. За које би време напунила басен свака од тих цеви посебице? За које ће се време басен напунити, ако се отворе обе цеви?

50. — Басен од 450 кубних метара може да се напуни водом двема цевима. Кад је прва отворена 3 минута, а друга 1 минут, у басен се улије 40 m^3 воде. Али ако је прва цев отворена 1 минут, а друга 7 минута, улије се 60 m^3. Колико кубних метара воде даје свака цев у минуту и колико минута треба обе цеви да буду отворене, па да се басен напуни?

51. — У један басен утичу три цеви. Прва и друга цев заједно напуне га за 50 минута. За које време би свака од тих цеви могла сама да напуни басен, а за које би га напуниле све три заједно? Је ли проблем одређен? Зашто?

52. — У један басен утичу три цеви: прва и друга га пуне за a *часова* прва и трећа за b часова; друга и трећа за c часова. Колико литара у *секунду* улива свака цев у басен? Дискусија.

53. — Два басена се пуне водом сваки из своје засебне цеви. Запремина првог басена је v_1, а запремина другог v_2. Први може да се напуни за m часова, а други за n. Пошто је у први басен текла вода p минута, отворе цев и у другом басену. После колико ће часова у оба басена бити иста количина воде? Дискусија. Има ли смисла овај задатак, ако је $m < n$?

54. — Неко је разделио свој новац на три дела; први је део дао под интерес по 6%; други по 5%; трећи по 4% и на тај начин има годишње прихода 20000 динара. Тај исти приход би имао, да је сав свој новац дао по 5% под интерес. Сем тога зна се да део који је дат по 6% доноси 3000 динара више прихода него део који је дат по 4%. Колики је капитал тога лица?

55. — Који број треба додати и бројитељу и имениттељу разломка $\frac{a}{b}$, да би се добио разломак $\frac{m}{n}$? Ако је $o < m < n$, какви морају бити a и b, па да буде $x > o$? Дискусија.

56. — У a литара морске воде има b килограма соли. Колико чисте воде треба досути, да би у $2a$ литара такве разблажене морске воде било c килограма соли? Дискусија.

57. — Једна сребрна смеса тешка је a килограма и има финоћу f. Колико сребра финоће f_1 треба смешати са том смесом, да се добије сребро финоће f_2? Дискусија.

Напомена. — Збир количина чистог сребра из појединих састојака мора бити раван количини чиста сребра у ново-добивеној смеси. *Финоћа* је број који показује колико јединица племенитог метала има у 1000 јединица смесе.

58. — Једне врсте вина има a литара и цена му је b дин. литар; друге врсте цена је c динара по литру. Колико литара ове друге врсте треба узети, па да се добије n литара мешавине, која би се могла продавати по d динара литар?

59. — Из трију врста кафе направљене су две смеше: једна има 10 кгр. најфиније врсте и 5 кгр. средње врсте и стаје 33 динара килограм; друга има 15 кгр. средње врсте и 9 кгр. најпростије врсте и стаје 27,50 дин. килограм. Пошто је свака врста кафе посебице, кад се зна да је средња цена све три врсте $29\frac{2}{3}$ динара?

60. — Имамо три металне смесе од злата, сребра и бакра. Прва има 500 гр. злата, 1,500 гр. сребра и 3 кгр. бакра; друга 2 кгр. злата, 2,8 кгр. сребра и 4,8 кгр. бакра; трећа 1,2 кгр. злата, 3,9 кгр. сребра и 2,4 кгр. бакра. По колико грама треба узети из сваке смесе, па да нова смеса буде од 1 кгр. злата, 2,3 кгр. сребра и 2,6 кгр. бакра?

61. — Постоје три смесе злата и сребра; у првој је однос злата према сребру 9, у другој 11, у трећој 14. Ако се смешају прва и друга, добија се смеса у којој ће бити 10 пута више злата него сребра; ако се смешају прва и трећа, злата ће бити 12 пута више него сребра. Колико је посебице тешка свака смеса ако је трећа 100 грама тежа од друге две заједно?

62. — Једна смеса злата и сребра тежи 1320 грама. Колико има у њој сребра, а колико злата, кад сребро из те смесе вреди колико и злато?

(1 грам злата је $15\frac{1}{2}$ пута скупљи од 1 грама сребра.)

63. — Дате су две смесе исте тежине, али разне финоће. Ако се слије прва смеса са $\frac{1}{4}$ друге, добије се смеса финоће 0,936; ако се слије прва смеса са $\frac{1}{2}$ друге, добије се смеса финоће 0,920. Колика је финоћа једне смесе, а колика друге?

64. — Сиракуски владар Херон био је поручио златну круну. Била је тешка 7465 грама. Да би сазнао колико је златар метнуо злата у њу, Херон је дâ чувеноме математичару Архимеду, да је испита. Архимед загњури круну у воду и утврди да је у води лакша 467 грама. Колико је било злата, а колико сребра у тој круни, кад се зна да злато у води губи од своје тежине $\frac{52}{1000}$, а сребро $\frac{95}{1000}$?

65. — Број који показује годину када је Гутенберг пронашао штампу састоји се од 4 цифре. Наћи тај број, кад се зна да му је збир цифара 14, цифра десетица је половина цифре јединица, цифра стотина једнака збиру цифара хиљада и десетица, а ако се траженоме броју дода број 4 905, добија се број чије цифре иду обрнутим редом.

66. — У два слична троугла збирови хомологих страна су 15 *cm*, 24 *cm* и 32 *cm*; наћи стране већег троугла, кад се зна да је његов обим за 18 *cm* већи од обима мањег троугла.

Напомена: — Ако су стране једног троугла a, b, c, а другог a', b', и c', тада је: $a + a' = 16$, $b + b' = 24$, $c + c' = 32$. Сети се основне особине сличних слика!

67. — Код једног троцифреног броја цифра јединица за 2 је већа од цифре стотина; ако се тај број подели са 30, добија се остатак 8; ако се одбаци цифра јединица, добија се двоцифрен број који је 3 пута већи од количника у малопређашњем дељењу; ако се одбаци цифра стотина, добија се број који стоји према малопређашњем количнику као 2 : 5. Који је тај троцифрен број?

Напомена: – Ако број a подељен бројем b даје количник c и остатак d можемо написати: $a = bc + d$. [*Решење:* 608.]

68. — У једноме заводу има 600 питомаца на 4 спрата заводске зграде. Они су овако размештени: на четвртом спрату има 2 пута више питомаца него на првом; на другом и трећем заједно има их исто толико колико на првом и четвртом заједно; на другом спрату број питомаца износи $\frac{5}{7}$ броја питомаца на трећем спрату. Како су бројно размештени по спратовима?

69. — У једној школи има 4 разреда. У првом разреду број ученика је $\frac{1}{5}$ броја свих ученика, у другоме $\frac{11}{40}$, а у трећем $\frac{1}{4}$. Колико је ученика у свакоме разреду, кад их у четвртоме разреду има 55?

70. — Места B, B, C и D леже на једном меридијану. Наћи њихове географске ширине, кад се зна ово: разлика ширина места B и A је 80^0; ширина од A до C иста је као од B до D; троструке ширина места A једнака је с трећином ширине места B, а ширина места B једнака је са збиром ширина места A и D увећаним за 40^0.

Кад решиш задатак, нацртај ова четири места на осовини, узимајући да је почетак апсциса место чија је ширина 0^0.

71. — Наћи два проста разломка од којих се први претвара у $\frac{1}{2}$ ако од његовог бројитеља одузмемо бројитељ другог разломка, а од именитеља именитељ другог разломка; први разломак постаје $\frac{5}{8}$ ако му као и горе додамо бројитељ и именитељ другога разломка; разлика збирова бројитеља и именитеља ових разломака је — 3; ако се збир именитеља подели збиром бројитеља, добиће се количник 1 и остатак 3.

(Пажљиво изабери непознате! Сваки од ова два разломка има два састојка.

Загледај добивене једначине! Јесу ли независне? Јесу ли ово независне једначине:

$$x + y = 3 \text{ и } 2x + 2y = 6?$$

Може ли се друга добити из прве? А прва из друге? Јесу ли ово две независне једначине:

$$x - y = 3 \text{ и } y - x - 3 = 0?$$

Да ли трећи и четврти услов у проблему казују једно исто? Зашто? Знаш ли ти о траженим бројевима још нешто сем онога што је речено у задатку? Могу ли именитељи тражених разломака бити разломци? А нуле? А јединице? Може ли бројитељ првога разломка бити 1? Колико решења има н. пр. оваква једначина, кад w и z морају да буду цели бројеви?

$$w + z = 5$$

Направи таблицу

w	z
0	5
1	4

итд.

72. — Обим једног трапеза је 28 см. Наћи му стране, кад се о њему зна ово: разлика паралелних страна једнака је с разликом непаралелних страна; већа паралелна страна за 2 је мања од збира непаралелних страна; збир трију страна 6 пута је већи од најмање стране.

Напомена. — Најпре нацртај произвољан разнокраки трапез и обележи на њему са x, y z . . . дужине које си рад да тражиш. При састављању једначина једнако гледај у слику. Кад решиш задатак, пробај да конструишеш један такав трапез.

73. — У неком четвороуглу угао A је $\frac{2}{3}$ збира углова B и C, а за 100^0 је већи од њихове разлике; полузбир та три угла већи је од угла D за 90^0. Наћи сва четири угла.

Колики је збир углова у четвороуглу? Добивено решење провери конструкцијом!

74. — Два броја стоје у размери као $p : q$, а збир им је једнак са n-тоструким неким трећим бројем. Збир сва три броја је a. Колики је сваки напосе? Дискусија!

Примена: $a = 45$, $p = 4$, $q = 5$, $n = 4$.

75. — Одредити четири броја тако, да кад узимамо по три броја, добијамо ове збирове: 9 10 11 и 12.

76. — Неко прима месечно 1040 динара интереса од свога уложеног новца који је уложио под интерес на три разна места. Половина његовога капитала доноси $\frac{1}{2}\%$ мање него $\frac{1}{3}$ његовог капитала, а 1% мање него остатак капитала. Да је дао на штедњу сваки од тих улога по $\frac{1}{2}\%$ више, примао би 120 динара интереса месечно више. Колики су капитали и проценти?

77. — Два капитала доносе једнак интерес. Први капитал је већи за 4000 дин. од другог, али други је дат за $\frac{1}{2}$% скупље под интерес. Кад би први био дат под процентом под којим је други капитал, а други под процентом првога, први капитал би донео 380 динара више интереса него други. Колико су ти капитали и под којим процентом су били?

78. — Неко има два капитала под интересом: први по $5\frac{1}{2}$%, други по $4\frac{1}{2}$%. Да је први $4\frac{1}{2}$%, а други по $5\frac{1}{2}$% он би имао тачно толико испод 1 000 динара интереса, колико сад има преко 1 000. Први капитал му доноси 291 динар интереса више од другога. Колики су ти капитали?

79. — Један правоугаоник има стране од 30 *cm* и 20 *cm*. Наћи стране сличног правоугаоника, чији је обим 360 *cm*.

(Сети се односа хомологих страна!)

80. — Два тела крећу се по првој линији из двеју тачака A и B. Наћи растојање од A до B и брзине та два тела, кад се зна ово: 1) тела се крећу једнаким кретањем; 2) кад се крећу једно другоме у *сусрет*, сретну се после t јединица времена ако пођу једновремено; ако тело које се креће спорије пође t' јединица времена пре другог дела, срешће се после t_1 јединица времена рачунајући од поласка бржег тела; 3) ако иду у итом смислу и једновремено се крену, после t_2 јединица времена растојање између њих је d. Дискусија!

Примена: $t = 12\frac{1}{2}$, $t' = 6$, $t_1 = 10$, $t_2 = 5$, $d = 20$.

81. — Два велосипедиста се крећу у истом смислу по кружној стази дужине 500 *m*: крећу се једнаким кретањем; бржи промиче поред другога сваких 5 минута; онда један од њих крене у супротном смислу истом брзином (по апсолутној вредности); и сад се они укрштају свака 24 секунда; колико километара на сат прелази сваки од њих?

82. — Два се тела крећу по једној осовини брзинама c_1 и c_2; у почетку времена њихове апсцисе су a и b; пита се кад ће се срести ако иду једно другоме у сусрет, или кад ће се стићи, ако иду једно за другим. Дискутовати.

Примена: $c_1 = 3$ *km*, $c_2 = 2$ *km*, $a = -50$ *km*, $b = 35.$ *km*.

83. — Два велосипедиста се крећу у истом смислу једнаким кретањем по кружној стази дужине a; бржи промиче крај другога сваких n секунди; они затим јуре у супротном смислу истим брзинама (по апсолутној вредности) једнаким кретањем по кружној стази дужине b; на тој стази они се сад укрштају сваких p секунада. Израчунати им брзине на сат. Дискутовати.

84. — Један колски точак има у обему 4 *m*; неко га фотографски сними у кретању; снимање је трајало $\frac{1}{10}$ секунде. На слици се види да се, док је трајало снимање, сваки паоц обрнуо за половину угла који граде два узастопна паоца; кад точак има 12 паоца, пита се којом брзином су се кретала кола.

Напомена. — Ако је периферија точка a, а точак се обрне n пута у минуту, кола се крећу брзином од an метара у минуту.

85. — Две количине стоје у размери $a:b$; свака од њих је за толико смањена, да је збир остатака n, а однос тако смањених количина $p : q$; одбивени делови стоје у размери $c : d$. Наћи та два броја. Дискусија.

Примена: $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$, $d = 13$, $p = 0{,}6$, $q = 1$, $n = 40$.

(*Решење*: 55 и 77).

86. — Ако се у горњем задатку узме да та два броја претстављају суме које имају два лица, а одбици њихове расходе, израчунати преостали укупни новац, кад је $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c=6$, $d=7$, $p=2$, $q=3$, $n = 250$.

87. — Број n раставити на три таква дела, да кад се први део подели са a други са b, трећи са c, добије се исти количник, а остатак је увек за d мањи од делитеља. Дискусија.

Примена: $n = 33$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$.

88. — Из једне вароши пође на подне на југ воз који прелази 50 *km*. на час. После три часа пође на север воз који прелази 80 *km*. на час. Кад ће они бтти удаљена један од другога 420 *km*?

89. — Два велосипедиста пођу један другоме у сусрет једновремено из два места удаљена 222 *km*. После три часа били су далеко један од другога 123 *km*. Први се тада одмарао један час, а други $\frac{1}{2}$ часа. Колико километара прелази на час сваки од њих, кад су се срели после $7\frac{1}{2}$ часова од поласка?

90. — Ако воз из A за B повећа своју прописану брзину за 5 *km*. на час, стигне у B 20 минута раније; ако је смањи за 5 *km*. одоцни 25 минута Која му је прописана брзина? Колика је раздаљина од A до B?

X — СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

Степеновање

Дефиниције. — *Степен* је производ једнаких чинитеља. Нпр.

$$a \cdot a, 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

и т. д. Горњи *производи једнаких чинитеља* добијају *облик степена* кад их овако напишемо:

$$a^2,\ 2^3,\ 3^4,\ b^5,\ \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Број који се понавља као чинитељ, зове се *основа*, а број који показује колико се пута основа јавља као чинитељ зове се *изложитељ* или *експонент*. Основа са својим изложитељем зове се *степен*. Горње степене бисмо овако прочитали: „*a* на други“, или „*a* на квадрат“; „два на трећи“, или „два на куб“: „три на четврти“, „*b* на пети“; „две трећине на шести“.

1.) **Израчунавање вредности степена.** — Кад су и основа и изложитељ посебни бројеви, вредност степена се израчунава кад се изврши означено множење које показује изложитељ.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{729}.$$

Степен расте или опада са променом изложитеља. — Да видимо најпре шта бива са степеном

$$1^n$$

кад се n мења од 1 ка $+\infty$.

$$1^1 = 1.$$

(Према горњој дефиницији степена, 1^1 значи да 1 треба узети један пут као чинитељ).

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots\cdots (n \text{ пута}) = 1.$$

2.) *Степен чија је основа јединица увек је једнак јединици, ма за какву коначну вредност изложитеља од 1 ка* ∞.

Исто тако и $0^n = 0$ ма за какво n које није нула.

Узмимо сад малопређашњи степен 2^3.

Видимо да је

$$2^2 > 2^1$$

$$2^3 > 2^2$$

$$2^4 > 2^3 \text{ (то јест } 16 > 8) \text{ и т. д.}$$

Исто тако са степеном 3^4:

$$3^2 > 3^1$$

$$3^3 > 3^2$$

$$3^4 > 3^3$$

Значи: *кад је основа већа од јединице, вредност степена расте кад изложитељ расте од јединице ка* $+\infty$. Обрнуто: *степен чија је основа већа од јединице опада, кад изложитељ опада од* $+\infty$ *до* $+1$.

Колико је, 2^∞, 3^∞, и т. д.?

Посматрајмо сад рашћење ова два степена: 2^n и 3^n, кад n расте од јединице.

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64$$

$$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243,\ 3^6 = 729.$$

Који степен брже расте?

Узмимо сад степен $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ и пустимо n да расте од јединице.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \cdots\cdots = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \cdots\cdots = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \cdots\cdots = \frac{32}{243}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \cdots\cdots = \frac{64}{729} \qquad \text{и т. д.}$$

Видели смо да 3^n *брже расте* од 2^n, кад n почне да расте. Према томе именитељ нашег разломка $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ брже расте него бројитељ. Како је $3 > 2$, *значи да ће наш разломак стално опадати.*

И збиља је

$$\frac{4}{9} < \frac{2}{3},\ \frac{8}{27} < \frac{4}{9} \text{ и т. д.}$$

(Доведи на заједнички именитељ, па сѐ увери!)

Отуда се види да *степен расте са изложитељем, ако је основа већа од јединице, а опада кад изложитељ расте, ако је основа мања од јединице.* 3.)

Знак степена — О овоме смо говорили још код множења. Овде само укратко да споменемо.

Изложитељ може бити паран, или непаран. Ако наш степен развијемо у производ, имаћемо: за парни изложитељ известан број парова чинитеља, а за непарни изложитељ остаће увек један чинитељ без свога парњака.

$$a^6 = \underbrace{a \cdot a}_{1} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{3} \qquad \text{(три пара)}$$

$$b^7 = \underbrace{b \cdot b}_{1} \cdot \underbrace{b \cdot b}_{2} \cdot \underbrace{b \cdot b}_{3} \cdot b \qquad \text{(три пара и један чинитељ без свога парњака).}$$

Пар једнаких чинитеља је увек позитиван, па били чинитељи позитивни, или негативни.

$$(+2) \cdot (+2) = (+4)$$

$$(-3) \cdot (-3) = (+9).$$

Како су парови једнаких чанитеља увек позитивни, то ће *степен с парним изложитељем бити увек позитиван, била основа позитивна или негативна.*

Знак степена са непарним изложитељем зависи увек од знака основе. Н.пр. у горњем степену b^7 сви су парови позитивни, те ако је b позитивно и сâм степен b^7 биће позитиван и обрнуто. Види се да *степен са непарним изложитељем има увек знак своје основе.* То се да изразити овим обрасцима:

$$(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$$
$$(\pm a)^{(2n\pm 1)} = \pm a^{(2n\pm 1)}.$$

Зависност степена од основе. — На малопређашњим примерима видели смо да се вредност степена 2^n мења, кад се n мења. Исто тако видели смо да је

$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Видимо да се степен мења кад му мењамо основу. За исти изложитељ 3 добијамо три вредности 8, 27, $\frac{2}{27}$, кад узмемо три различите основе. То значи ово: *вредност степена се мења променом основе;* или: *вредност степена зависи од вредности основе,* а то обоје значи: *степен је функција основе.* Ту дакле имамо *две променљиве количине:* основу коју *произвољно* мењамо и вредност степена који добија своју *одређену вредност* за сваку *произвољну* промену основе. Означимо овако те *две променљиве количине:* основу са x, а вредност степена са y. Узмимо најпре изложитељ 2. *Наше две променљиве биће тада везане оваквом једном једначином:*

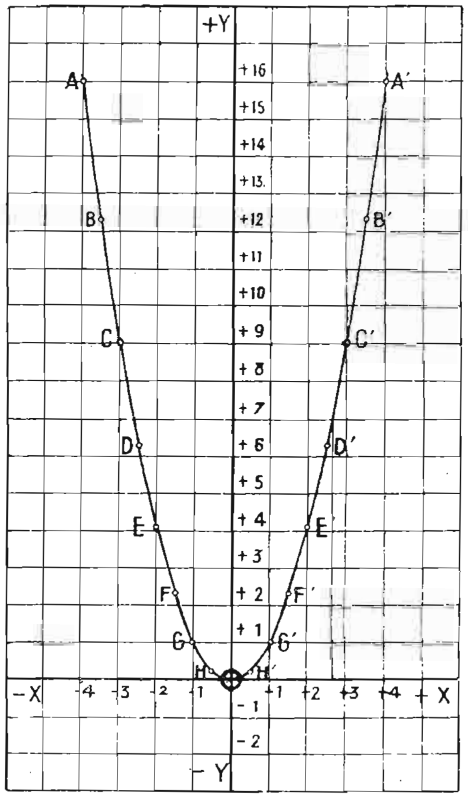
$$y = x^2$$

Узмимо сад да се x мења. Чим се x мења, мењаће се и y. *Икс* мењамо *ми произвољно, а једначина ће нам показати како се при томе мења ипсилон.*

Добићемо ову таблицу вредности за x и y:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3\frac{1}{2}$	$+4$
y	$+16$	$+\frac{49}{4}$	$+9$	$+\frac{25}{4}$	$+4$	$+\frac{9}{4}$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	$+1$	$+\frac{9}{4}$	$+4$	$+\frac{25}{4}$	$+9$	$+\frac{49}{4}$	$+16$

Ако сад употребимо координатни систем, сваки пар горњих вредности даће нам по једну тачку (сл. 29.).



Сл. 29.

$$A\begin{cases}-4\\16\end{cases}\quad B\begin{cases}-3\frac{1}{2}\\+\frac{49}{4}\end{cases}\quad H\begin{cases}-\frac{1}{2}\\+\frac{1}{4}\end{cases}\quad O\begin{cases}0\\0\end{cases}\quad H'\begin{cases}+\frac{1}{2}\\+\frac{1}{4}\end{cases}\quad B'\begin{cases}+3\frac{1}{2}\\+\frac{49}{4}\end{cases}\quad A'\begin{cases}+4\\+16\end{cases}$$

Кад спојимо све ове тачке, видећемо да једначина

$$y = x^2$$

претставља једну криву линију.

Када загледамо слику видимо ово:

1⁰. — наш крива је сва над апсцисном осовином,

2⁰. — пролази кроз координатни почетак,

3⁰. — најнижа тачка јој је O,

4⁰. — и десно и лево од те најниже тачке *ординате расту,*

5. ова два крака наше криве имају осовину симетрије, која је овде осовина OY,

6. — оба крака иду у бесконачност, а једнако се удаљују од осовине *ОУ*.

Ова крива која претставља функцију $y = x^2$ зове се **парабола.**

Са ње видимо да *два ма која супротна броја имају исте квадрате.*

Пример: $(+\ 4)^2 = (-\ 4)^2$
јер апсцисама (+ 4) и (— 4) одговарају на нашој кривој две једнаке ординате (+ 16) и (+ 16) у тачкама *A* и *A'* (сл. 29).

Зашто тачке *A* и *A'* *B* и *B'* . . . *F* и F' леже симетрично према *ОУ*?

Зависност степена од изложитеља. — Функција $y = 2^x$. — Ми смо већ видели да се степен мења кад се изложитељ мења. Значи, *степен је функција изложитеља.* Функције $y = x^2$ и $y = x^3$ су *алгебарске функције*, док се функције $y = 2^x$ и $y = 3^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ итд., где је изложитељ променљив, зову *изложитељне фунције.* Изложитељне функције *нису* алгебарске функције; оне долазе у ред *трансцендентних функција.*

I

Посматрајмо сад функцију

$$y = 2^x$$

Дајмо *иксу* произвољне вредности, почевши од 1, па ћемо имати ову таблицу:

$y = 2^x$

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	8	16	32	64

Кад нацртамо на координатном систему тачке из горње таблице, па те тачке спојимо, добићемо криву линију коју показује сл. 30.

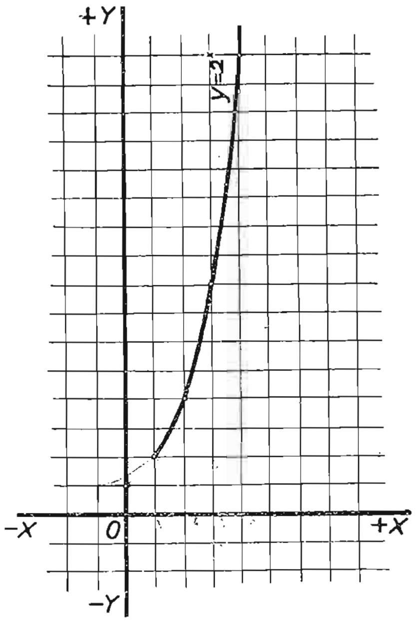
Кад погледамо ову криву, видимо да степен опада, кад му изложитељ опада. Кад пођемо по позитивном краку апсцисне осовине ка координатном почетку, видимо да су ординате све мање: наша крива тежи ка апсцисној осовини. Да ли пресеца ординатну осовину? Ми то још не знамо, пошто не знамо да степенујемо бројем мањим од јединице. Ми за сада стајемо код тачке чија је апсциса (+ 1). Вратићемо се на нашу криву доцније кад будемо видели шта значи степен чији је изложитељ мањи од јединице (н. пр. $2^{\frac{1}{2}}$, 3^{-2} и т. д.)

Сабирање и одузимање степена. — Знамо да се могу алгебарски сабрати само слични мономи: $2a$ и $3a$, $5x$ и $(-6x)$ и т. д. Према томе a^3 и a^2 *не могу се ни сабирати ни одузимати*, јер су им сачинитељи 1 и 1, али им главне количине a^3 и a^2 нису једнаке. Ми знамо да a^3 и a^2 није једно исто, а *сабирати можемо* само *једноимене количине.*

Степени код којих нису једновремено једнаке и основе и изложитељи, не могу се сабирати, пошто *не* претстављају *сличне мономе.*

Не могу се сабирати н. пр.: a^3 и a^2, x^3 и y^2 и т. д.

Могу се сабирати: $a^2 + 2a^2 = 3a^2$, $a^3 + a^3 = 2a^3$ и т. д.



Сл. 30.

Узмимо сад да саберемо x^2 и x^2.

$$x^2 + x^2 = 2x^2.$$

Да видимо како изгледа функција

$$y = 2x^2.$$

Код ове функције се одмах види да су све ординате *2* пута веће од ордината криве $y = x^2$.

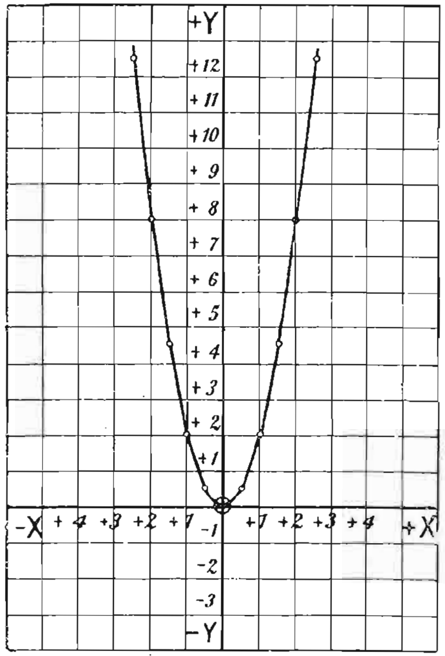
Начинимо нашу таблицу вредности за *x* и *y*!

x	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$
y	$+\frac{25}{2}$	$+8$	$+\frac{9}{2}$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+2$	$+\frac{9}{2}$	$+8$	$+\frac{25}{2}$

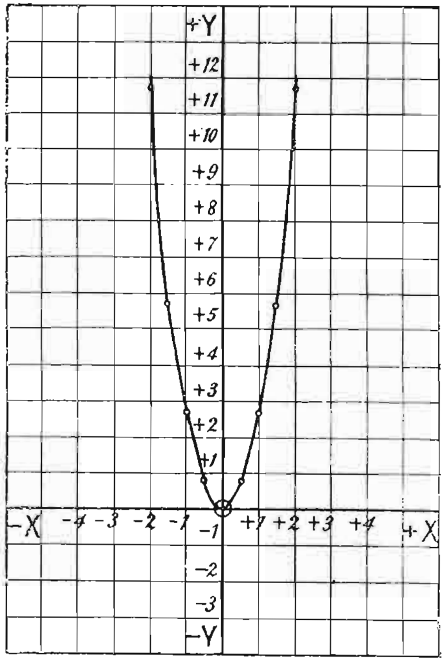
Уцртајмо све ове тачке на координатном систему и спојмо их. Добићемо опет *параболу* (сл. 31), која има две гране симетричне према *OY* осовини.

Узмимо сад функцију

$$y = x^2 + x^2 + x^2, \text{ то јест}$$
$$y = 3x^2.$$



Сл. 31.



Сл. 32.

Ако дајемо *иксу* произвољне вредности, па израчунавамо y, добићемо ову таблицу вредности за x и y:

x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$
y	$+12$	$+\frac{27}{4}$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	0	$+\frac{3}{4}$	$+3$	$+\frac{27}{4}$	$+12$

Кад нацртамо све ове тачке и вежемо их, добићемо опет *параболу* (сл. 32).

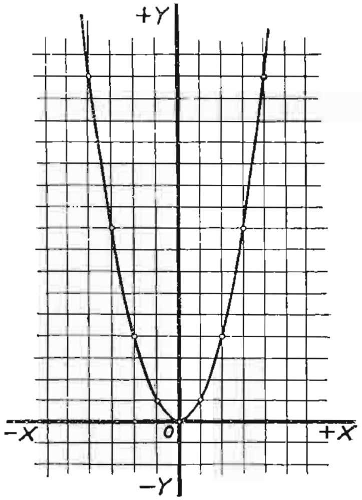
Уопште функција

$$y = ax^2$$

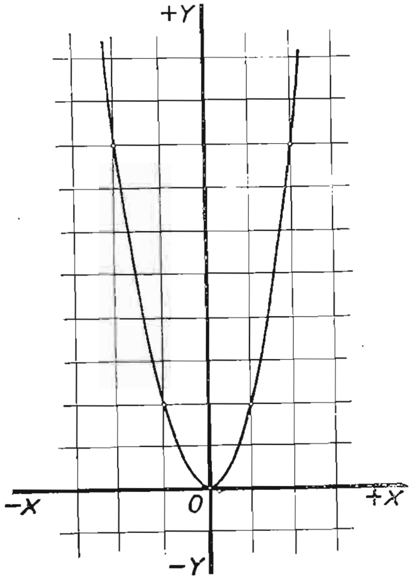
биће претстављена *једном параболом.*

Ми смо на нашим сликама 29, 31, 32 узели исти поделак на координатним осовинама, док смо цртали ове три параболе:

$$y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad \text{и} \quad y = 3x^2$$



Сл. 33.



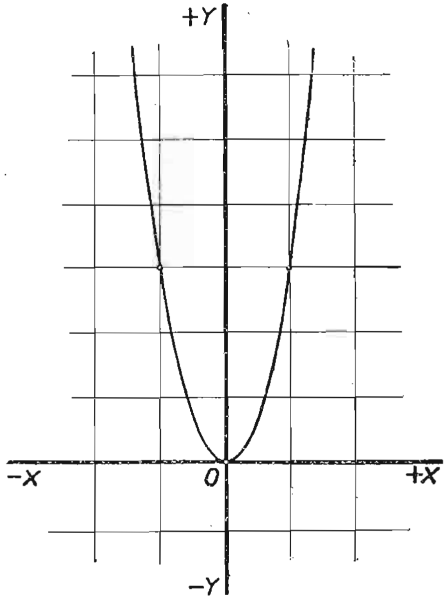
Сл. 34.

и оне су на нашим сликама различите. Ако за параболу $y = x^2$ узмемо за поделак 3 *mm*, (сл. 33)., за параболу $y = 2x^2$ поделак 3 . 2 = 6 *mm* (сл. 34)., а за параболу $y = 3x^2$ поделак од 3 . 3 = 9 *mm* (сл. 35)., ове три једначине

$$y = x^2, \qquad y = 2x^2, \qquad y = 3x^2$$

претстављаће нам *једну исту параболу.*

Неопходно је потребно да и сам извршиш ову пробу, јер је ово *једна важна особина параболе.*



Сл. 35.

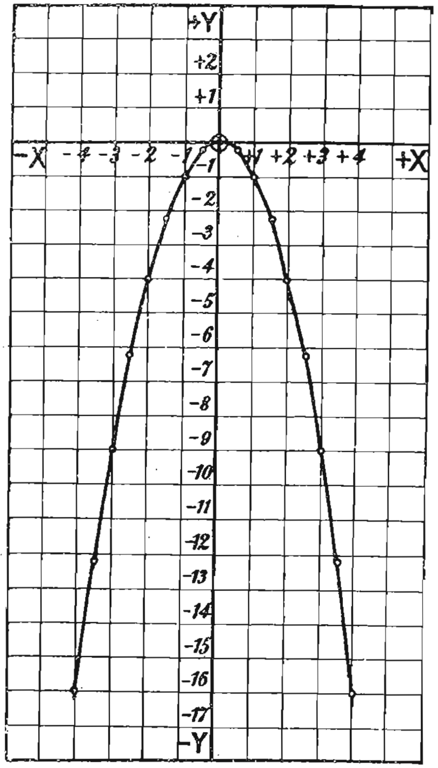
Да видимо сад шта значи функција

$$y = -x^2.$$

Поступимо као до сад: дајмо *иксу* произвољне вредности, па израчунајмо припадне вредности за *y*. Тако радећи добићемо ову таблицу:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3\frac{1}{2}$	$+4$
y	-16	$-\frac{49}{4}$	-9	$-\frac{25}{4}$	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4	$-\frac{25}{4}$	-9	$-\frac{49}{4}$	-16

Кад нацртамо координате свих ових тачака, па добивене тачке спојимо, добијамо параболу, али *отворену наниже* (сл. 36). И она има две гране, али *симетричне према негативном краку ординатне осовине.*



Сл. 36.

Множење степена. —

Два степена могу имати:

1⁰. — само основе једнаке,

1⁰. — само изложитеље једнаке,

3⁰. — једнаке и основе и изложитеље.

1⁰. — *Множење степена истих основа.*

Наћи производ

$$a^3 \,.\, a^2.$$

Развијмо оба степена:

$$a^3 = a \,.\, a \,.\, a.$$
$$a^2 = a \,.\, a.$$

Између оба степена знак је множења, те ће бити:

$$a^3 \,.\, a^2 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$$

а ми знамо да је то a^5. Према томе је

$$a^3 \,.\, a^2 \,.\, = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^5 = a^{2+3}$$

Исто би тако било:

$$a^m \,.\, a^{\text{н}} = \underbrace{\underbrace{a \,.\, a \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, a}_{m \text{ пута}} \,.\, \underbrace{a \,.\, a \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, a}_{n \text{ пута}}}_{a \,.\, a \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, a\,(m+n) \text{ пута}}$$

а то је:

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

Отуда ова

Теорема 1. — *Степени истих основа множе се, кад се заједничка основа степенује збиром изложитеља.*

Ако једнакост $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ прочитамо с десна улево:

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$$

изиће обрнута теорема теореми 1:

Теорема 2. — *Број се степенује збиром, кад се најпре степенује једним сабирком, затим другим, па се добивени степени помноже.*

2⁰ — *Множење степена истих изложитеља.*

Наћи производ

$$a^3 \,.\, b^3.$$

Ако развијемо ове степене, имаћемо:

$$a^3 \,.\, b^3 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b.$$

Али ми знамо да произод не мења своју вредност, ако његови чинитељи промене места. Зато горњи производ можемо овако написати:

(1) $a^3 . b^3 = a . a . a . b . b . b = a . b . a b . a b = (ab) . (ab) . (ab) = (ab)^3$

Одавде излази ова

Теорема 3. — *Степени истих изложитеља множе се, кад се производ основа степенује заједничким изложитељем.*

Ако једнакост (1) читамо с десна улево, изаћи ће теорема 4, која је обрнута теореми 3.

Теорема 4. — *Производ се степенује неким бројем, кад се сваки чинитељ тога производа степенује тим бројем, па се добивени степени помноже.*

3⁰ — *Множење степена истих основа и изложитеља.*

Наћи производ

$$a^3 \,.\, a^3.$$

Пошто су оба чинитеља *једнака*, ово је у ствари *степеновање степена*, о коме ћемо мало доцније говорити.

Дељење степена. — И овде имамо горња три случаја:

1⁰ — *Дељење степена истих основа.* — Наћи количник:

$$a^5 : a^2.$$

Напишимо овај количник у облику разломка и раставимо горње степене на чинитеље

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{a\,.\,a}.$$

Знамо да се једнаки чинитељи из бројитеља и именитеља скраћују, те ће бити:

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{a\,.\,a} = \frac{a\,.\,a\,.\,a}{1} = a\,.\,a\,.\,a = a^3 = a^{5-2}.$$

Отуда ова:

Теорема 5. — *Степени истих основа деле се, кад се заједничка основа степенује разликом изложитеља.*

Обрнута теорема:

Теорема 6. — *Број се степенује разликом, кад се степенује умањеником, па умањитељем и добивени степени поделе.*

2⁰. — *Дељење степена истих изложитеља.* — Наћи количник

$$a^4 : b^4$$

Напишимо горњи количник у облику разломка и развијмо степене у производе.

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b\,.\,b}$$

Из овога што смо научили код разломака знамо да ће ово даље бити овако:

$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b\,.\,b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Отуда ова:

Теорема 7. — *Степени истих изложитеља деле се, кад се количник основа степенује заједничким изложитељем.*

Обрнута

IV **Теорема 8.** — *Разломак се степенује неким бројем, кад се и бројитељ и именитељ степенују тим бројем, па се степен бројитеља подели степеном именитеља.*

Степеновање степена. — Наћи вредност степена:

$$(a^3)^2$$

Ако овај степен развијемо у производ, биће:

$$(a^3)^2 = a^3\,.\,a^3$$

а ми знамо да је то даље:

$(a^3)^2 = a^3\,.\,a^3 = a^{3+3} = a^6$ (пошто су им исте основе).

Али је $6 = 3\,.\,2$, те горњи степен степена можемо овако написати:

$$(a^3)^2 = a^{3\cdot 2}.$$

Исто тако је

$$(a^m)^n = a^m\,.\,a^m\,.\,a^m\,.\;.\;.\;.\;.\;.\,a^m \text{ (n пута)}$$

а то је даље:

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\;.\;.\;.\;.\;.\;+m\text{ (n пута)}} = a^{mn}.$$

Отуда ова

Теорема 9. — *Степен се степенује, кад се основа степенује производом изложитеља.*

Обрнута

Теорема 10. — *Број се степенује производом, кад се најпре степенује једним чинитељем, па добивени степен степенује другим чинитељем.*

Напомена: Овде треба запазити ова два степена:

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ и } (a^n)^m = a^{mn}.$$

То значи, кад имамо да степенујемо производом, сасвим је свеједно којим ћемо редом степеновати. *Пример:*

$$2^{3\cdot 2} = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$
$$2^{3\cdot 2} = (2^2)^3 = 4^3 = 64.$$

Нула као изложитељ. — Да видимо сад шта значи

$$a^0.$$

Нулу можемо претставити као разлику два једнака произвољна броја:

$$a^0 = a^{m-m}$$

А ми знамо (теорема 6) да је то даље:

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Пошто ни *a* ни *m* нисмо нарочито бирали, то ће исти резултат бити ма какво било *a*. Отуда ова

Теорема 11. — *Сваки број степенован нулом даје јединицу.* VI

Негативни изложитељ. — Да видимо сад шта значи:

$$a^{-3}$$

Према дефиницији степеновања ово не би имало смисла. Али ако се сетимо да се сваки негативан број може претставити разликом два позитивна броја, горњи израз има смисла.

Знамо да је $-1 = 4 - 5$, $\quad -2 = 6 - 8$ и т. д.

Отуда ћемо лако развити горњи израз:

$$a^{-3} = a^{7-10} = \frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^3} = \frac{1^3}{a^3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3.$$

И овде добијамо две теореме обрнуте једна другој:

Теорема 12. — *Број се степенује негативним изложитељем, кад се његова изврнута вредност степенује позитивним изложитељем.*

Пошто је

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1^3}{a^3} = 1 \,.\, \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 1 \,.\, a^{-3} = \frac{a^{-3}}{1}$$

то важи и ова

Теорема 13. — *Број може прећи из бројитеља у именитељ, или из именитеља у бројитељ, ако му изложитељ промени знак.*

Примери: $\frac{a^3}{b^4} = \frac{b^{-4}}{a^{-3}} = \frac{a^3 \,.\, b^{-4}}{1} = a^3 \,.\, b^{-4} = \frac{1}{a^{-3} b^4}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2^1}{3^1} = 2 \,.\, 3^{-1} = \frac{1}{2^{-1} \,.\, 3}$$

$$\frac{1}{x^2} = 1 \,.\, x^{-2} = x^{-2}$$

$$\frac{2a}{x^3} = 2 \,.\, a \,.\, x^{-3} = 2ax^{-3}$$

(Сад наш малопређашњи разломак има облик целог броја). На теорему 13 обрати нарочиту пажњу!

Изложитељна функција с негативним изложитељем. — Ми смо већ посматрали изложитељну функцију $y = 2^x$, узимајући за најмању вредност *икса* + 1.

На слици 30. видели смо да ординате наше криве опадају до $x = 1$.

Ако почнемо и даље смањивати x, добићемо функцију с разломљеним изложитељем, рецимо

$$y = 2^{\frac{1}{2}}$$

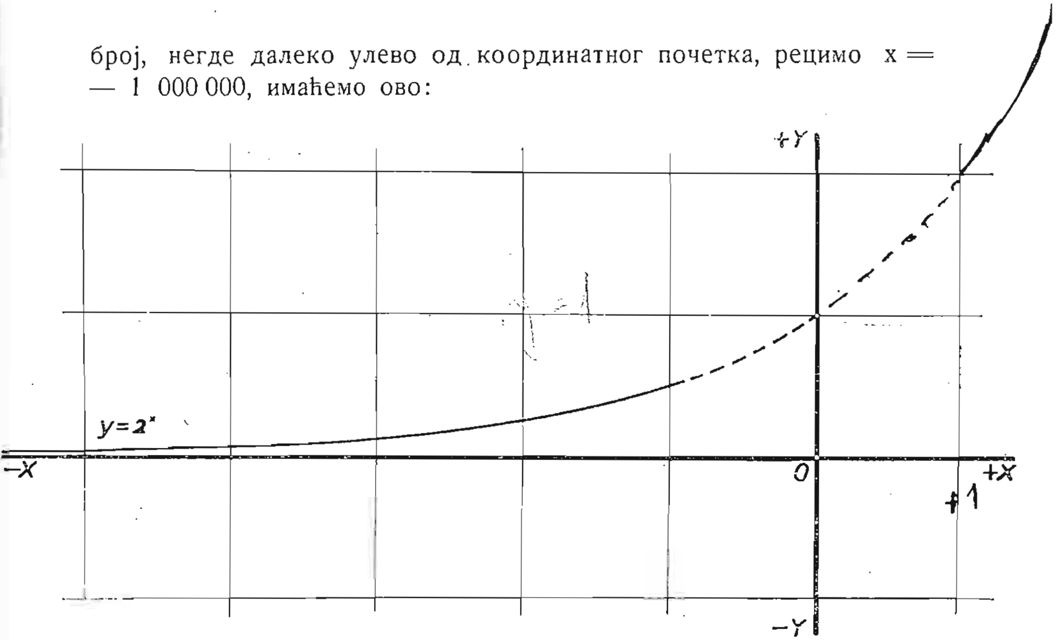
Засад још не знамо да степенујемо *разломљеним* изложитељима. Зато ћемо прећи на *целе* негативне бројеве. Добићемо ову таблицу.

$y = 2^x$

x	-1	-2	-3	-4	-5
y	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{32}$

Ако нацртамо ове тачке, моћи ћемо да продужимо нашу криву са сл. 30. Добићемо слику 37.

Видимо да наша крива *тежи* ка апсцисној осовини и ближи јој се све више и више. Ако узмемо неки веома велики негативан број, негде далеко улево од координатног почетка, рецимо $x = -1\,000\,000$, имаћемо ово:



Сл. 37.

$$\text{за } x = -1\,000\,000 \qquad y = 2^{-1\,000\,000} = \frac{1}{2^{1\,000\,000}}$$

Разломак на десној страни *веома је мали и налази се веома близу нуле.* Али он је *позитиван.* То значи да наша крива има једнако позитивну ординату и кад се одмакне веома далеко од ординатне осовине. То даље значи да наша крива на *веома великој* даљини лево од координатног почетка има *веома малу* раздаљину од апсцисне осовине, али је не додирује. *Растојање између наше криве и апсцисне осовине једнако опада и тежи нули.* Кад се једна права овако понаша према једној кривој, ми кажемо да је она **асимптота** те криве линије. Апсцисна осовина је *асимптота* за нашу криву са сл. 37. Наша крива и апсцисна осовина *сливају се негде у бесконачности*, јер ординате тачака наше криве најзад постају нуле у бескрајности, то јест, у бескрајности тачке апсцисне осовине и наших кривих поклапају се

$$y = 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Једначина апсцисне осовине је $y = 0$.

Али и ако смо пустили апсцису да иде у бесконачност, *нисмо добили негативну ординату.* То значи *да наша крива не прелази* *испод апсцисне осовине. То долази отуда што се увек добија позитиван број кад се позитивна основа степенује ма каквим изложитељем.*

Узмимо сад криву

$$y = 1^x$$

Ма какво било x, увек ће бити

$$y = 1.$$

То је права која је на отстојању + 1, паралелна са апсцисном осовином (сл. 38).

Да видимо сад да ли се секу ове две криве:

$$(1) \qquad y = 2^x \qquad \text{и} \qquad y = 1. \qquad (2)$$

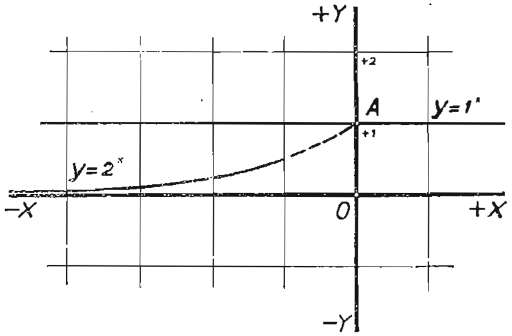
Ако у једначини (1) сменимо вредност за y из (2), добићемо:

$$1 = 2^x.$$

а одатле $x = 0$

Значи да се криве $y = 1$ (крива првог степена)* и $y = 2^x$ секу у тачци A, чије су координате $x = 0$, $y = 1$.

$$y = 2^x \quad \text{за } x = 0 \quad y = 1$$



Сл. 38.

Степеновање посебних бројева. — Пошто је ученик у нижим разредима учио степеновање посебних бројева, ми ћемо га овде само потсетити неколиким примерима.

Пример 1. — Израчунати 3067^2

3067^2

$3^2 = 9$

$60 . 0 = 000$

$606 . 6 = 3636$

$6127 . 7 = 42889$

9406489

---

* Ми називамо у Алгебри праву линију „крива линија првог степена".

Пример 2. — Израчунати $23{,}4^2$

$23{,}4^2$

$2^2 = 4$

$43 . 3 = 129$

$464 . 4 = 1856$

$547{,}56$

Степеновање полинома. — И ово је ученик учио раније, те ћемо га овде само потсетити неколиким примерима.

Пример 1. — Израчунати $(a + b - c + d)^2$

$$(a + b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + d^2 + 2a . b + 2a . (-c) + 2a . d +$$
$$+ 2b(-c) + 2bd + 2(-c)d =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac + 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

Пример 2. — Израчунати $(a + b - c)^3$

$$(a + b - c)^3 = a^3 + 3 . a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2(-c) +$$
$$+ 3(a + b)(-c)^2 + (-c)^3.$$

Кореновање

Дефиниција. Вратимо се нашој функцији y датој у облику:

$$y = x^2$$

Видели смо да је она претстављена једном параболом (сл. 29), За *сваку* вредност *икса* можемо добити *припадну* вредност *ипсилона* на овај начин. Рецимо да нам се тражи y за $x = 2$. Нацртаћемо нашу криву, па из тачке $x = 2$ на апсцисној осовини подићи позитивну управну. Дизаћемо је дотле, док не дође до наше криве. То је тачка E'. Из ње ћемо спустити управну на ординатну осовину и прочитати број 4. То значи кад узмемо основу 2, изложитељ 2, степен ће бити 4.

Узмимо сад обрнут задатак: *Који је тај број који степенован са 2 даје 9?* Наша крива (сл. 29) даје нам све степене за све основе. Степени су ординате, а основе су апсцисе.

Дат нам је *степен* 9, па се тражи *основа* за изложитељ 2. То на нашој слици значи ово: дата је ордината 9, па се тражи њена апсциса. Пођимо по ординатној осовини до тачке 9. Из те тачке повуцимо паралелну са апсцисном осовином. На тај начин доћи ћемо до тачака C и C'. Из њих спустимо управне на апсцисну осовину и добићемо — 3 и + 3. Дакле, при изложитељу 2, кад је степен 9, основа може бити и — 3 и + 3. И збиља је

$$9 = (+3)^2$$
$$9 = (-3)^2.$$

Овај посао зове се *кореновање.* Кад су дати степен и изложитељ, па се тражи основа, да бисмо нашли ту основу, морамо *кореновати* степен. Знак за кореновање је скраћено латинско *r (radix* =

корен). Ако смо степен добили степеновањем са 2, при тражењу основе имаћемо *други* (или *квадратни*) *корен*; при тражењу основе трећег степена, имаћемо *трећи* (или *кубни*) *корен* и т. д.

$$(\pm 3)^2 = 9 \qquad \sqrt{9} = \pm 3$$

$$(+2)^3 = 8 \qquad \sqrt[3]{8} = +2$$

$$(-2)^3 = -8 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Код кореновања имамо: *поткорену количину* (или *радиканд*). То је наш малопређашњи степен (на нашим примерима $+9$, $+8$, -8); *коренов изложитељ* (на нашим примерима 2 и 3), који је једнак са степеновим изложитељем; *корен*, који је једнак са основом (на нашим примерима $+3$, -3, $+2$, -2).

Кад посматрамо нашу параболу (сл. 29). видимо да *две супротне апсцисе код квадратне параболе имају једнаке ординате*. То значи да сваки квадратни корен даје две једнаке вредности супротно означене. Пошто ординате претстављају поткорене количине, видимо да *поткорена количина квадратног корена мора бити позитивна*.

$$\text{Н. пр. } \sqrt{-16} = ?$$

Ми немамо на сл. 29 ниједне негативне ординате, те према томе *овај квадратни корен за нас нема смисла*.

Из ових дефиниција се види ово: *степеновање и кореновање су две супротне математичке радње*.

$$4^2 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4.$$

Знамо из ранијег да *један број остаје непромењен кад на њему изврšимо истим бројем две супротне математичке радње*.

$$(a + b) - b = a$$

$$(a \,.\, m) : m = a$$

Зато ће и овде бити:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[3]{(2)^3} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Сабирање и одузимање корена. — Овде важи оно исто што смо рекли и код сабирања степена: корени се могу сабирати и одузимати само онда, кад су им једнаке и поткорене количине и изложитељи.

Могу се сабирати и одузимати:

$$2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a} = 4\sqrt[3]{a}$$

$$a\sqrt[n]{m} - b\sqrt[n]{m} + c\sqrt[n]{m} - d\sqrt[n]{m} = (a - b + c - d)\sqrt[n]{m}$$

Не могу се сабирати ни одузимати:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[n]{a} + \sqrt[4]{a} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[n]{a} + \sqrt[4]{a}$$

Множење корена. — Овде могу наступити три случаја:

1⁰. — Корени имају исте изложитеље,

2⁰. — корени имају исте поткорене количине,

3⁰. — корени имају исте поткорене количине и исте изложитеље.

1⁰. *Корени имају исте изложитеље.* — Израчунати $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$

Ставимо: $\sqrt[n]{a} = x$, $\sqrt[n]{b} = y$, па ће бити:

$$(\sqrt[n]{a})^n = x^n$$

$$(\sqrt[n]{b})^n = y^n.$$

Пошто су на бројевима a и b вршене две супротне радње са n, они ће остати непромењени:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, (\sqrt[n]{b})^n = b.$$

а отуда $\qquad a = x^n, \; b = y^n$

Помножимо ова два степена, па ће бити:

$x^n \,.\, y^n = ab$, а одатле:

$$(xy)^n = ab$$

$$xy = \sqrt[n]{ab}.$$

Сменимо сад x и y њиховим вредностима, па ће бити:

$$(1) \qquad \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Одатле имамо две теореме. Кад читамо образац (1) с лева надесно:

Теорема 1. — *Корени истих изложитеља множе се кад се производ радиканада коренује заједничким изложитељем.*

Пример. — Израчунати $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4}.$

$$\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Кад читамо образац (1) с десна налево:

Теорема 2. — *Производ се коренује неким бројем кад се сваки чинитељ коренује тим бројем, па се добивени корени помноже.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{8 \, . \, 64}$

$$\sqrt[3]{8 \, . \, 64} = \sqrt[3]{8} \, . \, \sqrt[3]{64} = 2 \, . \, 4 = 8$$

Пример 2. — Израчунати $\sqrt[3]{54}$

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \, . \, 2} = \sqrt[3]{27} \, . \, \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Пример 3. — Израчунати $\sqrt[3]{a^4b^5c^6}$

$$\sqrt[3]{a^4b^5c^6} = \sqrt[3]{a^3 \, . \, a \, . \, b^3 \, . \, b^2 \, . \, c^3 \, . \, c^3} = \sqrt[3]{a^3 \, . \, b^3 \, . \, c^3 \, . \, c^3 \, . \, a \, . \, b^2} =$$

$$= \sqrt[3]{a^3} \, . \, \sqrt[3]{b^3} \, . \, \sqrt[3]{c^3} \, . \, \sqrt[3]{c^3} \, . \, \sqrt[3]{ab^2} =$$

$$= a \, . \, b \, . \, c \, . \, c \, . \, \sqrt[3]{ab^2} = abc^2 \sqrt[3]{ab^2}.$$

Напомена. — Ово што смо показали у примерима 2 и 3 зове се *извлачење пред корен.* То извлачење нам служи да поткорену количину упростимо што можемо више.

Изведи сам правило за *извлачење пред корен!*

Како се множе корени у она друга два поменута случаја видећемо мало доцније.

Дељење корена. — Нека су дата два корена истих изложитеља:

Поделити $\sqrt[n]{a}$ са $\sqrt[n]{b}$.

Ставимо и овде:

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad \sqrt[n]{b} = y$$
$$a = x^n \qquad b = y^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$$

а одатле: $\dfrac{x}{y} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, а то је даље:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{1}$$

Одавде опет две теореме:

Теорема 3. — *Корени истих изложитеља деле се кад се количник радиканада коренује заједничким изложитељем.*

Кад горњи образац (1) читамо с десна налево, излази ова обрнута

Теорема 4. — *Разломак се коренује, кад се и бројитељ и именитељ коренују, па се добивени корени поделе.*

Пример. — Израчунати

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = (\pm 2).$$

Степеновање корена. — Нека нам је дато да покажемо шта значи

$$(\sqrt[3]{5})^4.$$

Ми умемо да напишемо степен у облику производа:

$$(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5}.$$

Пошто ови корени имају исте изложитеље, биће ово даље:

$$(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5} \, . \, \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.5.5.5} = \sqrt[3]{5^4}$$

Исто тако биће:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Одавде ова теорема:

Теорема 5. — *Корен се степенује кад се поткорена количина степенује.*

Пример. — Израчунати:

$$(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{8} \, . \, \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Кореновање степена. — Нека нам је дато:

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Кад будемо извукли корен из ове степене количине добићемо опет неки степен од a.

Н. пр.

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^3 \, . \, 2^3} = \sqrt[3]{2^3} \, . \, \sqrt[3]{2^3} = 2 \, . \, 2 = 2^2.$$

Добили смо други степен од 2.

$$\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{a^4 \, . \, a^4 \, . \, a^4} = a \, . \, a \, . \, a = a^3.$$

Рецимо да добијемо степен p. Тада можемо ставити:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^p.$$

Ако обе стране степенујемо са n, биће:

$$a^m = (a^p)^n = a^{np}.$$

Кад два једнака степена имају исте основе, морају и изложитељи бити једнаки. Према томе је:

$$m = np$$

а одатле

$$p = \frac{m}{n}.$$

Према томе је

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \tag{2}$$

Отуда ова

Теорема 6. — *Степен се корену је кад се основа степенује количником изложитеља у коме је бројитељ степенов изложитељ.*

Пример. — Израчунати

$$\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27.$$

Пример.

$$\sqrt[3]{a^7b^8c^9d^{10}} = \sqrt[3]{a^6 . a . b^6 . b^2c^9 . d^9 . d} = \sqrt[3]{a^6 . b^6 . c^9 . d^9 . a . b^2d} =$$

$$= a^{\frac{6}{3}} . b^{\frac{6}{3}} . c^{\frac{9}{3}} . d^{\frac{9}{3}} . \sqrt[3]{ab^2d} = a^2b^2c^3d^3 \sqrt[3]{ab^2d}.$$

Разломљени изложитељи. — Кад образац (2) прочитамо с десна налево, имамо:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Отуда ова

Теорема 7. — *Број се степенује разломком кад се степенује бројитељем, па добивени степен корену је именитељем.*

Кад знамо како се степенује разломљеним изложитељем, можемо да довршимо наше слике 30., 37. и 38. за функцију

$$y = 2^x$$

Нека нам је $x = \frac{1}{2}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414 \ldots\ldots$$

Нека је $x = \frac{1}{3}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = \sqrt[3]{2} = 1{,}259 \ldots.$$

Нека је $x = \frac{1}{10}$ биће:

$$\text{за } y = 2^x, \quad y = \sqrt[10]{2} = 1{,}071 \ldots.$$

Види се да се y ближи јединици кад се x ближи нули.

Исто тако за негативне разломљене вредности *икса* имаћемо

	$x = -\frac{1}{10}$	$x = -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{2}$
$y = 2^x$	$y = 2^{-\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} =$ $= \sqrt[10]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$	$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Овде се види да y стално опада, што се више одмичемо од координатног почетка од $x = 0$ до $x = -1$.

Дакле наша линија је *непрекидна*, пролази кроз тачку $x = 0$, $y = +1$ и има за асимптоту апсцисну осовину.

Скраћивање и проширење корена. — **Довођење на заједнички корени изложитељ.** — Сваки се корен може написати у облику степена и сваки степен у облику корена, на основи теоремâ 6 и 7.

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^1} = a^{\frac{1}{3}}; \qquad a^5 = a^{\frac{5}{1}} = \sqrt[1]{a^5}.$$

Пошто се сваки корен може написати у облику степена, можемо на корену извести ове преображаје:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = a^{\frac{\frac{m}{p}}{\frac{n}{p}}} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \ldots = \sqrt[np]{a^{mp}} \tag{2}$$

пошто се разломак не мења кад се бројитељ и именитељ поделе или помноже једним истим бројем.

Из ових образаца (1) и (2) изводимо ову теорему:

Теорема 8. — *Корен не мења своју вредност, ако коренов изложитељ и изложитељ поткорене количине помножимо или поделимо истим бројем.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{a^6}=$

$$\sqrt[3]{a^6}=\sqrt[1]{a^2}=a^2.$$

Пример 2. $\sqrt[5]{a^{11}}=\sqrt[5]{a^{10+1}}=a^{\frac{10+1}{5}}=a^{2+\frac{1}{5}}=a^2 . a^{\frac{1}{5}}$

$$=a^2\sqrt[5]{a}.$$

Пример 3. $\sqrt[6]{b^{21}}=\sqrt{b^7}.$

Пример 4. $\sqrt[10]{c^6}=\sqrt[5]{c^3}.$

Поделити оба изложитеља значи *скратити корен.*

Пример 5. — Израчунати вредност

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt{a^3}\,.\,\sqrt[3]{a}\,.$$

Ови корени не могу да се помноже док се не доведу на *заједнички корен изложитељ.* Најмањи заједнички садржатељ за 2 и 3 је *6.* Према томе множићемо изложитеље овако:

$$\sqrt[2.3]{a^{1\cdot3}}\,.\,\sqrt[3.2]{a^{2\cdot2}}\,.\,\sqrt[2.3]{a^{3\cdot3}}\,.\,\sqrt[3.2]{a^{1\cdot2}}=\sqrt[6]{a^3}\,.\,\sqrt[6]{a^4}\,.\,\sqrt[6]{a^9}\,.\,\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^{18}}=a^{\frac{18}{6}}=a^3.$$

Кореновање корена. — Да видимо на шта ће се свести један овакав израз:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\,.$$

Корен $\sqrt[m]{a}$ можемо овако написати: $a^{\frac{1}{m}}$, те ће даље бити:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}=a^{\frac{\frac{1}{m}}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

Теорема 9. — *Корен се коренује неким бројем кад се поткорена количина коренује производом корених изложитеља.*

Теорема 10. — *Број се коренује производом кад се коренује једним чинитељем, добивени корен другим чинитељем и т. д.*

Пример 1. — Израчунати $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}=\sqrt[6]{2^6}=2.$$

Пример 2. — Израчунати $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{36}}}}=\sqrt[18]{a^{36}}=a^{\frac{36}{18}}=a^2.$

Пример 3. — Израчунати $\sqrt[6]{729}.$

Ми још не знамо да израчунавамо корене са изложетељем већим од 3. Зато морамо некако свести све наше корене на квадратне и кубне корене, ако се може.

$$\sqrt[6]{729}=\sqrt[2.3]{729}=\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt{9}=\pm 3$$

Напомена — Којим редом ћемо кореновати сасвим је свеједно, пошто је 3 . 2 = 2 . 3.

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\pm 27}=\pm 3$$

Кореновање негативним изложитељем. — Из теореме 8 излази ово као последица:

$$\sqrt[-m]{a}=\sqrt[(-m)\,(-1)]{a^{1\,.\,(-1)}}=\sqrt[m]{a^{-1}}=\sqrt[m]{\left(\frac{1}{a}\right)^1}=\sqrt[m]{\frac{1}{a}}.$$

Отуда

Теорема 11. — *Број се коренује негативним изложитељем кад се његова реципрочна вредност коренује позитивним изложитељем.*

Пример 1.

$$\sqrt[-2]{\frac{1}{4}}=\sqrt{4}=\pm 2.$$

Пример 2.

$$\sqrt[-3]{\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Извлачење квадратног и кубног корена. — Ово ћемо показати на неколико примера.

Пример 1. — Извући овај квадратни корен: $\sqrt{9\,406\,489}.$

Најпре га треба поделити у класе с десна налево, хватајући по две цифре

$$\begin{array}{l}
\sqrt{9|40\,|\,6\,4\,|89} = 3067\\
\pm\ 3^2\\ \hline
4|\underline{0}\ :\ 60.0\\ \hline
4\ 0\ 6|\underline{4}\ :\ 606.6\\ \hline
4\ 2\ 8\ 8|\underline{9}\ :\ 6127.7\\ \hline
0\ 0000
\end{array}$$

Пример 2. — Извући квадратни корен из броја 547,56.

Најпре га треба поделити у класе од две цифре, почевши од десетне запете, надесно и налево:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{5|4\,7,|56} = 23,4\\
\pm 4\\ \hline
1\ 4|\underline{7} : 43.3\\ \hline
1\ 85|\underline{6}\ :\ 464.4\\ \hline
0\ 00
\end{array}$$

Пример 3. — Извући кубни корен из броја 2236,55 78.

Најпре га треба поделити у класе од 3 цифре, почевши од десетне запете удесно и улево:

$$2|236,|457|8.$$

Друга класа децимала није потпуна. Њу морамо допунити двема нулама.

$$\begin{array}{lll}
\sqrt[3]{2|2\,36,|\,457\,|\,800} & = 13,07 & \\
\pm 1 & & \\ \hline
1\ 2|36: & 3.1^2\,3 & \\
\ \ 9 & :\ 3.1.\,3^2 & \\
\ \ 2\,7 & \quad 3^3 & \\
\ \ 2\,7 & & \\ \hline
394|\underline{57} & :\ 3.\ 13^2.0 & \\ \hline
394\ 57\ 8|00 & :\ 3\ .\ 130^2.\,7 & \\
354\ 90\ 0 & \ \ 3\ .\ 130\ .\ 7^2 & \\
1\ 91\ 1\ 0 & & \\
\quad 3\ 43 & \quad 7^3 & \\ \hline
37\ 763\ 57 & &
\end{array}$$

Од броја 1236 одвоје се две цифре с десна, па се образује троструки квадрат прве добивене цифре: 3 . 1² . =3. Тиме се дели 12. 12 : 3 = 4. Ми ипак не узимамо цифру 4, већ мању цифру 3, пошто од 1236 имају да се одузму још два производа. Потписивање делимичних производа је овако: први до црте, други једно место десно од црте, а трећи испод крајње цифре од 1236.

Пример 4.

$$\sqrt{25x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 12x^5 + 4x^6} = ?$$

Најпре треба поткорени полином уредити по спадним степенима:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{4x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 24x^3 + 16x^2} = 2x^3 - 3x^2 + 4x\\
\pm\ (2x^3)^2\\ \hline
\quad (-\ 12x^5 + 25x^4) : 2\ .\ 2x^3\\
\\
\quad (-\ 12x^5 + 25x^4) : (4x^3 - 3x^2)\ (-\ 3x^2)\\
\quad \ \mp 12x^5 \pm\ 9x^4)\\ \hline
\qquad\qquad (16x^4 - 24x^3 + 16x^2) : (4x^3 - 6x^2)\\
\\
\quad (16x^4 - 24x^3 + 16x^2) : (4x^3 - 6x^2 + 4x)\ (+\ 4x)\\
\quad \pm 16x^4 \mp\ 24x^3 + 16x^2\\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Сад ово: $(-\ 12x^5) : (+\ 4x^3) = -\ 3x^2$ То је сад други члан полинома у извученом корену. Кад нађемо $(-\ 3x^2)$ дописујемо га и уз $2x^3$ и уз $4x^3$.

Сад имамо
$16x^4 : 4x^3 = 4x$

Ирационални бројеви

Ирационални бројеви. — Када смо до сада кореновали бројеве и разне изразе видели смо да корена нестане само тада, ако је радикандов изложитељ садржатељ коренова изложитеља.

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{n}} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

$$\sqrt[m]{a^{3m}} = \overline{a^m}^{\,3m} = a^3$$

Али корен остаје и даље овде:

$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3\,.\,a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$ јер 5 није дељиво са 3

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{2^2\,.\,2} = 2\sqrt[2]{2}$ јер 3 није дељиво са 2

$\sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{6^1} = \sqrt{6}$ јер 1 није дељиво са 2

Наша слика 39 показује нам да је $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, $\sqrt{4} = 2$. Кад загледамо ове наше корене, видимо да су поткорене количине све други степени и то $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, $\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $4 = 2^2$, те је из њих могуће извући корен према ономе што смо горе рекли.

Да видимо где је на нашој слици $\sqrt{7}$.

Нацртај слику 39 на милиметарској хартији, узимајући 10 mm. за поделак на осовини. Ми то нисмо могли учинити, јер простор књиге не допушта.

Ординате 9 и 4 (тачке *C′* и *E′* на слици 39) имају апсцисе $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{4} = 2$. Наша ордината 7 је између ордината 9 и 4, те и њена апсциса мора бити између $\sqrt{9}$ и $\sqrt{4}$, то јест између 2 и 3,

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

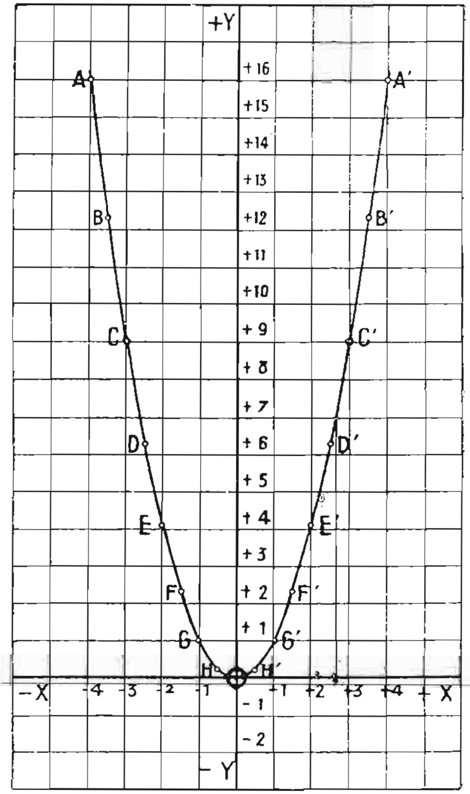
Може ли $\sqrt{7}$ бити цео број? *Не може*, јер се налази између два узастопна цела броја 2 и 3, а ту више нема места ни за један цео број.

Може ли $\sqrt{7}$ бити неки разломак? Да видимо. Нека је

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b}.$$

Ако је тако, мора бити

$$7 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)\,.\,\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\,.\,a}{b\,.\,b}.$$



Сл. 39.

Чим је $\frac{a}{b}$ разломак, не можемо скратити са b. (Јер ако би се a могло поделити са b, онда би $\frac{a}{b}$ био у ствари цео број, а ми смо претпоставили да је разломак). Кад a и b не могу да се скрате са b, не може њихов количник бити цео број. То даље значи да

$$7 \neq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad \text{то јест} \quad \sqrt{7} \neq \frac{a}{b}.$$

Дакле $\sqrt{7}$ није ни цео број, ни разломак. Ако почнемо да извлачимо квадратни корен, добићемо:

$$\begin{array}{l} \sqrt{7} = 2{,}6 \\ \overline{\ 300} : 46\ .\ 6 \\ \overline{\ \ 24} \end{array}$$

Је ли $\sqrt{7} = 2{,}6$? Није, јер нисмо извукли корен без остатка. Узмимо сад ове квадрате:

$$2^2 = 4 \quad 2{,}6^2 = 6{,}76.$$

Али наш број је 7. Према томе 2,6 *није* квадратни корен из 7, јер је

$$6{,}76 < 7.$$

Ако продужимо да извлачимо корен из 7, добићемо

$$\sqrt{7} = 2{,}64\ .\ .\ .$$

$$2{,}64^2 = 6{,}9696.$$

Вредност 2,64 већ боље одговара броју $\sqrt{7}$, јер је његов квадрат $2{,}64^2 = 6{,}9696$ ближи седмици, него број 6,76.

Продужимо извлачење трећег децимала. Добићемо

$\sqrt{7} = 2{,}645\ .\ .\ .$ али опет са остатком.

Ако сад овај број дигнемо на квадрат, добићемо:

$$2{,}645^2 = 6{,}996025.$$

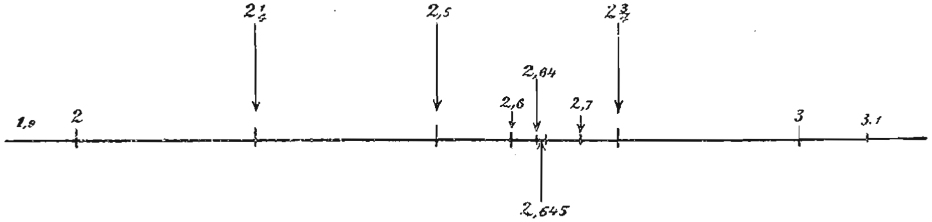
Овај број 6,996025 је већ доста близу нашег броја 7, али ипак није 7.

Испишимо сад наше квадрате:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 2{,}6^2 &= 6{,}76 \\ 2{,}64^2 &= 6{,}9696 \\ 2{,}645^2 &= 6{,}996025. \end{aligned}$$

Можемо и даље продужити извлачење корена из броја 7, али никад нећемо добити број који дигнут на квадрат даје 7.

Ми имамо овде 4 приближне вредности за $\sqrt{7}$. Да их нацртамо на бројној линији (сл. 40).



Сл. 40.

Наш $\sqrt{7}$ био је најпре 2,6. Кад смо дигли на квадрат 2,6 видели смо да то није 7. Кад смо продужили кореновање добили смо 2,64. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7. Кад смо продужили кореновање, добили смо 2,645. Кад смо тај број дигли на квадрат, видели смо да то још није 7.

Из свега видимо да наш број $\sqrt{7}$ лежи између 2,645 и 2,646. Види се да му се једнако *сужавају границе:* најпре је $\sqrt{7}$ лежао између 2 и 3, па између 2,6 и 2,7, па између 2,64 и 2,65, па између 2,645 и 2,646.

То *сужавање граница* између којих се налази $\sqrt{7}$ показује да он лежи на бројној линији, само му се место не може *рачунски тачно* одредити, као што се може одредити целим бројевима и разломцима: на пр. 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3 итд.

Овакав број зове се *ирационалан број.* Он се не да претставити ни целим, ни разломљеним бројем; он се децималним бројем може претставити само *приближном вредношћу.*

Ирационалан број је корен из броја који није степен чији би изложитељ био дељив кореновим изложитељем.

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$ је ирационалан број, јер изложитељ 5 поткорене количине није дељив кореновим изложитељем.

Али $\sqrt[3]{8}$ *није* ирационалан број, јер је 8 трећи степен од 2:

$$8 = 2^3$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Конструкција ирационалних израза. — Апсцисе изражене ирационалним бројевима могу се конструисати. Узмимо да конструишемо апсцису $a = \sqrt{7}$.

Нека је нека дуж $a = \sqrt{7}$ cm. Хоћемо да је узмемо у отвор шестара. Послужићемо се Питагориним правилом.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{7} \\ a^2 &= 7 \\ a^2 &= 4 + 3 \\ a^2 &= 2^2 + (\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

Значи да је a хипотенуза у правоуглом троуглу, чије су управне стране $b = 2$ cm, $c = \sqrt{3}$ cm.

Дуж од 2 cm. можемо узети у отвор шестара. Како ћемо узети у отвор шестара дуж c?

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{3} \\ c^2 &= 3 \\ c^2 &= 4 - 1 \\ c^2 &= 2^2 - 1^2 \end{aligned}$$

Значи c је страна правога угла у правоуглом троуглу чија је хипотенуза $m = 2$ cm., а мања страна правога угла $n = 1$ cm. Тај троугао можеш лако конструисати. Већа страна правога угла биће у њему $c = \sqrt{3}$. Узми је у отвор шестара, па конструиши правоугли троугао чије су управне стране $b = 2$ cm., $c = \sqrt{3}$. Хипотенуза тога троугла биће $a = \sqrt{7}$ cm.

Према овоме видиш да се *ирационалан број може тачно обележити на бројној линији.* Узмеш га у отвор шестара, забодеш шестар у почетну тачку, па на осовини отсечеш десно, ако је број позитиван, а лево, ако је твој ирационални број негативан.

Нацртај ове дужи:

$a = \pm\sqrt{5}$, $b = \pm\sqrt{20}$, $c = \pm\sqrt{17}$, $d = \pm\sqrt{27}$.

($5 = 4 + 1$, $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$, $\sqrt{27} = \sqrt{25 + (\sqrt{2})^2}$

Нацртај ове дужи:

$a = \sqrt{35}$, $b = \sqrt{94}$, $c = \sqrt{163}$, $d = \sqrt{275}$.

$94 = 100 - 6 = 10^2 - (\sqrt{6})^2$.

Сад засебно дуж $m = \sqrt{6}$.

$\sqrt{6} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}$.

Сад опет засебно дуж $n = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{2} \\ n &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ n^2 &= 1^2 + 1^2 \end{aligned}$$

Сад је овако:

$$\begin{aligned} b^2 &= 10^2 - m^2 \\ m^2 &= 2^2 + n^2 \\ n^2 &= 1^2 + 1^2 \end{aligned}$$

Уклањање ирационалних именитеља. — Узмимо разломак

$$\frac{21}{\sqrt{7}}$$

Видели смо да је $\sqrt{7}$ један ирационалан број. Ако хоћемо што тачнију вредност горњег разломка, морамо узети велики број децимала. Знамо да је тешко делити бројем који има много децимала. Зато ћемо уклонити ирационалан број из именитеља.

Зашто је $\sqrt{7}$ ирационалан број? Зато што 7 није квадрат ниједнога целог броја. Треба нам под кореном квадрат. То ћемо постићи овако: помножићемо поткорену количину са 7. Шта то значи?

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{7 . 7} = \sqrt{7} . \sqrt{7}.$$

Значи да смо именитељ помножили са $\sqrt{7}$. Да се разломак не би променио, морамо помножити и бројитељ *истим* бројем:

$$\frac{21 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7}\ \sqrt{7}} = \frac{21 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{21 \cdot \sqrt{7}.}{7} = 3\sqrt{7}.$$

Опет је остао ирационалан број. Само је сад лакше, јер не делимо њиме, већ множимо.

Пример 1. — Уклонити ирационалан број из именитеља:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}.$$

Пример 2.

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^1} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\ \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^{1+2}}} = \frac{10\ \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{10\ \sqrt[3]{25}}{5} = 2\sqrt[3]{25}.$$

Пример 3.

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}} = \frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}}.$$

Поткорена количина је на 1 степену. У изложитељу јој недостаје још 1, па да буде 2, те да се може извући корен. Зато:

$$\frac{a}{\sqrt{b-c}} = \frac{a}{\sqrt{(b-c)^1}} = \frac{a\ \sqrt{(b-c)^1}}{\sqrt{(b-c)^1} \cdot \sqrt{(b-c)^1}} = \frac{a\sqrt{b-c}}{\sqrt{(b-c)^2}} =$$

$$= \frac{a}{b-c}\sqrt{b-c}\ .$$

Пример 4.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}}$$

Поткореној количини недостаје 2 у изложитељу, па да буде 5, те да се може извући корен. Дакле:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{(b+c)^3}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^3} \cdot \sqrt[5]{(b+c)^2}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{\sqrt[5]{(b+c)^5}} = \frac{a\sqrt[5]{(b+c)^2}}{b+c} =$$

$$= \frac{a}{b+c}\sqrt[5]{(b+c)^2}\ .$$

Пример 5.

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Да би ови корени били квадрати, морамо помножити разликом:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{m\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{m\ (a-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{m\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{m}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

Пример 6.

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\ (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a\ (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} =$$

$$= \frac{a\ (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} = \frac{a}{b-c}(\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Пример 7.

$$\frac{x}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}} = \frac{x\ (3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})\ (3\sqrt{x}+2\sqrt{y})} =$$

$$= \frac{x\ (3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x})^2-(2\sqrt{y})^2} = \frac{x\ (3\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{9x-4y}$$

Комплексни бројеви

Уображени бројеви. — Видели смо да је квадрат и позитивна и негативна броја увек позитиван:

$$(+3)^2 = +9 \qquad\qquad (-3)^2 = +9.$$

Према томе $\sqrt{-9}$ не може бити ни позитиван, ни негативан. Међутим сви бројеви које смо до сада видели, или су нула, или позитивни, или негативни. $\sqrt{-9}$ није нула, јер $0^2 \neq -9$, те према томе овај број $\sqrt{-9}$ не постоји на нашој бројној линији. Исту ову појаву видећемо увек, кад извлачимо паран корен из негативног броја, пошто се сви ти корени своде на квадратни корен:

$$\sqrt[6]{-a} = \sqrt[3]{\sqrt{-a}} \qquad\qquad \sqrt[10]{-b} = \sqrt[5]{\sqrt{-b}} \text{ и т. д.}$$

Све ове корене можемо увек раставити на производ два корена:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}.$$

Код свију парних корена из негативна броја појављује се $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt[14]{-5}=\sqrt[7]{\sqrt{-5}}=\sqrt[7]{\sqrt{5(-1)}}=\sqrt[7]{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1}} \text{ и т. д.}$$

Међутим знамо да је

$$(+1)^2=\pm 1, \text{ и } (-1)^2=\pm 1.$$

Према томе квадратни корен негативна броја не можемо одредити као што смо бар приближно одређивали ирационалне бројеве.

Бројеве које смо до сада видели на нашој осовини зовемо *стварни бројеви* (реални). Квадратни корен из негативна броја зовемо *уображен број*, или *имагинаран број*.

Пошто се сваки квадратни корен негативна броја може свести на производ из једног стварног броја и $\sqrt{-1}$, ми ћемо израз $\sqrt{-1}$ обележити једним нарочитим знаком. Израз $\sqrt{-1}$ зовемо *имагинарна јединица* и обележавамо га првим писменом речи *имагинаран*: **i**.

Према томе, сад можемо лако обележавати уображене бројеве:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-9}&=\sqrt{9(-1)}=\sqrt{9}\,.\,\sqrt{-1}=\pm 3\,i\\
\sqrt{-5}&=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\,.\,\sqrt{-1}=\pm i\sqrt{5}\\
\sqrt{-a}&=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}=\sqrt{a}\,.\,i=\pm i\sqrt{a}.
\end{aligned}$$

До сад смо на нашој бројној осовини имали читав низ стварних бројева целих, разломљених и ирационалних. Ако сад те бројеве множењем вежемо са имагинарном јединицом, добићемо нови низ: **низ имагинарних бројева:**

$$\ldots\ -3\,i\ldots-\sqrt{7}\,i\ldots-2\,i\ldots-i\ldots-\frac{1}{2}i\ldots\,0i\ldots+\frac{1}{2}i\ldots+i\ldots+$$
$$+2\,i\ldots+\sqrt{7}\,i\ldots+3\,i\ldots$$

Комплексни бројеви. — Број састављен од једног стварног и једног уображеног броја зове се *комплексан број*.

Примери:

$2+2\,i,\ 2-7\,i,\ -5+4\,i,\ -a+b\,i,\ -c-d\,i,\ a-b\,i$ и т. д.

Њихов општи облик је

$$\pm a \pm bi.$$

Реални део је $(\pm a)$, а имагинарни $(\pm bi)$.

Два комплексна броја који се разликују само знацима пред уображеним бројем, зову се *спрегнуто (коњуговано) комплексни бројеви*. На њих ћемо наићи код квадратних једначина.

Примери:

$(3+4i)$ и $(3-4i)$, $(-5+2i)$ и $(-5-2i)$, $(a+bi)$ и $(a-bi)$ и т. д.

Бројна осовина уображених бројева. — Стварне бројеве смо претстављали тачкама на нашој апсцисној осовини. Где ћемо претстављати уображене бројеве? Види се да и они чине један непрекидан низ. Али где су? Да бисмо добили одговор на то питање, рећи ћемо одмах да њихова осовина има исту нулу као и наша стварна осовина, јер је

$$0\,i=0$$

Узмимо сад један стварни број, рецимо $+3$. Помножимо га са i. Добијамо $+3\,i$. Још не знамо где ћемо обележити тај уображени број. Помножимо $3\,i$ са i. Добићемо $3\,i\,.\,i=3\,i^2=3\,(\sqrt{-1})^2=$ $=3\,(-1)=-3$. Шта је било? Кад смо извршили два једнака множења, наша тачка $+3$ извршила је пут од 180° и пала у -3 (сл. 41).

Продужимо множење:

$$-3\,.\,i=-3i,\ (-3i)\,.\,i=-3i^2=-3\,(\sqrt{-1})^2=-3\,(-1)=+3.$$

Кад смо извршили *четири једнака* множења, наша тачка $+3$ извршила је једно кружно кретање од 360°. Значи, да множењем само са i, тачка прелази пут од 90°. Множењем са $(i\,.\,i\,.\,i)$ тачка прелази пут од 270°. Пошто положаји $3\,i$ и $-3\,i$ леже на правцима који с позитивним краком стварне осовине заклапају углове од 90° и 270°, значи да *тачке уображених бројева леже на једној правој, која је управна у 0 на осовини реалних бројева.*

Комплексне бројеве обележавамо са z и то овако: реални део са x, а сачинитељ уз i са y:

$$z=x+yi$$

пошто иначе реални део преносимо по апсцисној осовини, а коефицијенат уз i по ординатној осовини. Према томе и они су претстављени тачкама, али само што њихове тачке не леже ни на једној осовини.

Примери:

1) $z_1=3+2i$

Овде је $x=+3$, $y=+2$. Пренесимо $+3$ по X-осовини, а $+2$ по Y-осовини, па ћемо добити тачку z_1, која претставља комплексни број z_1 (сл. 41).

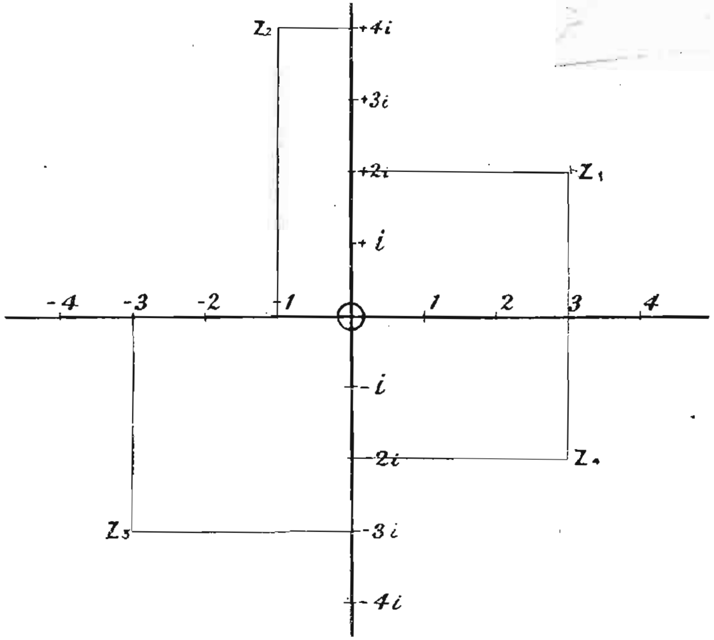
2) $z_2=-1+4i$.

Овде је $x=-1$, $y=+4$.

3) $z_3=-3-3i$.

Овде је $x=-3$, $y=-3$.

X



Сл. 41.

4) $z_4 = 3 — 2i.$

Овде је $x = 3$, $y = — 2$.

Бројеви z_1 и z_4 су коњуговано-комплексни бројеви и леже на једној правој линији.

Збир два коњуговано-комплексна броја је стваран број:

$$(3 + 2i) + (3 — 2i) = 6.$$

Производ два коњуговано-комплексна броја је стваран број:

$$(3 + 2i)\ (3 — 2i) = 3^2 — (2i)^2 = 9 — 2^2 .\ i^2 = 9 — 4i^2 =$$
$$= 9 — .4\ (— 1) = 9 + 4 = 13.$$

Због ове особине коњуговано-комплексних бројева једначина вишег, степена од 1 са *стварним* сачинитељима може да има *уображене* корене.

Степени од i. — Ово су 4 узастопна степена од i:

$$i^1 = i,\ i^2 = — 1,\ i^3 = — i,\ i^4 = + 1.$$

Да видимо сад како ћемо израчунати који било степен од i. Рецимо i^{17}. Увек треба дати степен раставити тако, да један чинитељ буде i^4, пошто је $i^4 = 1$

$$17 = 4 .\ 4 + 1$$

Према томе ће бити:

$$i^{17} = i^{4\ .\ 4} .\ i^1 = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 .\ i = 1\ .\ i = i.$$

Узмимо сад да израчунамо вредност i^{2345}

$$\underline{2345} : 4 = 586 \text{ са остатком } 1$$
$$1$$

$$2345 = 586\ .\ 4 + 1$$
$$i^{2345} = (i^4)^{586} \cdot i = (1)^{586} \cdot i = 1\ .\ i = i$$
$$i^0 = 1.$$

Рачунске радње с комплексним бројевима. — Сваку рачунску радњу с комплексним бројевима лако ћеш разумети, ако комплексни број сматраш као бином и водиш рачуна о степенима од i. Како се ради видећеш на примерима.

$i = \sqrt{-1} =$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = +1$

Пример 1. Сабрати z_1 и z_2, кад је $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 + 5i.$

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + 5i) = (1 + 4) + (2i + 5i) = 5 + 7i.$$

Пример 2. — Од z_1 одузети z_2, кад је

$$z_1 = 2 — 3i \qquad z_2 = 6 — 9i.$$
$$z_1 — z_2 = (2 — 3i) — (6 — 9i) = 2 — 3i — 6 + 9i = (2 — 6) + (— 3i + 9i) = — 4+6i.$$

Пример 3. — Помножити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 2 + 5i \qquad z_2 = 1 — 4i.$$
$$z_1\ z_2 = (2 + 5i)\ (1 — 4i) = 2 + 5i — 8i — 20i^2 = 2 — 3i + 20 = 22 — 3i.$$

Пример 4. — Поделити z_1 са z_2, кад је

$$z_1 = 26 + 7i \qquad z_2 = 4 + 3i$$

Нека је $z = \frac{z_1}{z_2}$, где је $z = x + y$i Онда мора *бити:*

$$z_1 = zz_2 \qquad \text{То значи}$$
$$26 + 7i = (x + yi)\ (4 + 3i)$$
$$26 + 7i = 4x + 4yi + 3xi — 3y = (4x — 3y) + (4y + 3x)i$$

Два комплексна броја су једнака, кад су засебно једнаки стварни делови а засебно уображени.

Видели смо да је

$$26 + 7i = (4x — 3y) + (4y + 3x)i$$

Зато мора бити:

I $\quad 4x — 3y = 26$
II $\quad 4y + 3x = 7$

Одатле треба наћи x и y.

I $\quad x = \frac{26 + 3y}{4}$

II $\quad 4y + \frac{78 + 9y}{4} = 7$

II $\quad 16y + 78 + 9y = 28$
$\quad 25y = — 50$
$\quad y = — 2$
$\quad x = 5$

Тражени количник је $z = 5 — 2i$

Проба: $(4 + 3i)\ (5 — 2i) = 20 + 15i — 8i + 6 = 26 + 7i$

Пример 5. — Поделити z_1 са z_2 кад је

$$z_1 = 1 + 2i \qquad z_2 = 7 + 8i$$

Узећемо опет да је количник $z = x + yi$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \text{ т. j.} \qquad x + yi = \frac{1 + 2i}{7 + 8i}.$$ Отуда је

$7x + 7yi - 8xi - 8y = 1 + 2i$

$(7x - 8y) + (7y - 8x)\, i = 1 + 2i$

I $\quad 7x - 8y = 1$

II $\quad 7y - 8x = 2$

I $\quad 56x - 64y = 8$

II $\quad 49y - 56x = 14$

$\quad - 15y = 22$

$$y = - \frac{22}{15}$$

$$x = \frac{1 + \frac{176}{15}}{l} \qquad\qquad x = \frac{15 + 176}{105}$$

$$x = \frac{191}{105}$$

$$x = 1\frac{86}{105}$$

Тражени количник је:

$$z = 1\frac{86}{105} - \frac{22}{15}\, i$$

ДЕКАДНИ БРОЈНИ СИСТЕМ

Знамо да је

$$27 = 2 \,.\, 10 + 7 = 2 \,.\, 10^{1} + 7 \,.\, 10^{0}$$

$$348 = 3 \,.\, 10^{2} + 4 \,.\, 10^{1} + 8 \,.\, 10^{0}$$

$$9546,7 = 9 \,.\, 10^{3} + 5 \,.\, 10^{2} + 4 \,.\, 10^{1} + 6 \,.\, 10^{0} + 7\ 10^{-1}$$

$$0,25 = 0,2 + 0,05 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^{2}} = 2 \,.\, 10^{-1} + 5 \,.\, 10^{-2}$$

Бројеви којима се служимо у свакидањем животу праве се од основе 10. Како? Узму се разни степени од 10 онолико пута колико хоћемо, па се сви степени саберу.

Да видимо неколико степена од десет. Да почнемо од изложитеља — 4.

. . . .

I $\quad 10^{-4} = \frac{1}{10^{4}} = \frac{1}{10000} = 0,0001$

II $\quad 10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \frac{1}{1000} = 0,001$

III $\quad 10^{2}- = \frac{1}{10^{2}} = \frac{1}{100} = 0,01$

IV $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10^{1}} = \frac{1}{10} = 0,1$

V $\quad 10^{0} = 1$

VI $\quad 10^{1} = 10$

VII $\quad 10^{2} = 100$

VIII $\quad 10^{3} = 1000$

IX $\quad 10^{4} = 10000$

. . . .

Нека нам је речено да саставимо један број који ми хоћемо. Ми ћемо то радити овако.

Узмимо три јединице из другог реда:

0,003

Узмимо 4 јединице из четвртог реда:

0,4

Узмимо 5 јединица из петог реда:

5

Узмимо 7 јединица из осмог реда:

7000

Кад скупимо све што смо узели, добијамо свој број:

$$\begin{array}{r} 0,003 \\ 0,4 \\ 5 \\ 7000 \\ \hline 7005,403 \end{array}$$

Сви бројеви из такозваног природног низа бројева начињени су помоћу разних степена исте основе 10. Зато се такав систем бројева зове декадни бројни систем.

ПОТСЕТНИК БРОЈЕВА

Да се сетимо сад свих бројева које смо до сад видели.

I Стварни бројеви

a) *Позитивни стварни бројеви:*

Позитивни рационални

1) *Стварни позитивни цели бројеви*: 3, 4, 5, 6, . . . 150 . . . + 200 . . .

2) „ „ *разломљ. број.*: $\frac{3}{4} \cdots \frac{5}{7} \ldots 0,6 \ldots 3\frac{2}{3} \ldots 15\frac{2}{7} \ldots$

3) „ „ *ирацион.број.*: $\sqrt{2} \ldots \sqrt{3} \ldots \sqrt{5} \ldots \sqrt{7} \ldots \sqrt{\frac{500}{33}} \ldots$

b) *Негативни стварни бројеви:*

негативни рационални

4) *Стварни негат. цели број.*: —3, —4, —5, —6, —150, —200.

5) „ „ *разл. број.*: $-\frac{3}{4}, - \frac{5}{7}, -0,6, - 3\frac{2}{3}, -10\frac{3}{8}\ -15\frac{2}{7},$

6) „ „ *ирацион. бр.*: $-\sqrt{2}, --\sqrt{3}, - \sqrt{5}, - \sqrt{7}, - \sqrt{\frac{500}{53}},$

II Уображени бројеви

a) *Позитивни уображени бројеви*

7) *Уображени позитивни цели бројеви*: 3i, 4i, 5i, —6i, 150i 2000i

8) „ „ *раз. бројеви*: $\frac{3}{4}i\ \ \frac{5}{7}i - 0,6i\ 3\frac{2}{3}i\ \ 15\frac{2}{7}i$

9) „ „ *ирацион. бројеви*: $-i\sqrt{2}\ \ i\sqrt{3}\ \ i\sqrt{5}\ \ i\sqrt{7}\ \ i\sqrt{\frac{500}{53}}$

b) *Негативни уображени бројеви.*

10) *Уображени негат. цели број.*: —3i, —4i, —5i, —6, —150 200i

11) „ „ *разл. број.*: $-- \frac{3}{4}i - \frac{5}{7}i - 0,6i - 10\frac{3}{8}i - 15\frac{2}{7}i$

12) *Уображени негат. ирацион.броj.:* $-i\sqrt{2}$ $-i\sqrt{3}$ $-i\sqrt{5}$ $-i\sqrt{7}$ $-i\sqrt{\frac{3}{5}}$.

c) *Комплексни бројеви:*

$1 + i,\ 1 - i,\ 3 - 2i,\ -4 + 5i.$

d) *Коњуговано-комплексни бројеви:*

$3 + 4i$ и $3 - 4i$, $-2 + 5i$ и $-2 - 5i$.

ВЕЖБАЊА УЗ X ОДЕЉАК

Израчунај вредност ових степена:

1. 12^3 3. $(0,05)^3$ 5. 11^3 7. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

2. $(0,05)^2$ 4 $(0,901)^2$ 6. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 8. $\left(\frac{2}{5}\right)$

9. $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 10. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

11. — Изради таблицу квадрата узастопних бројева од 1 до 20 и упамти их.

12. — Изради таблицу кубова узастопних бројева од 1 до 11 и упамти их.

13. — Ако се n мења од 1 до 5, који брже расте од ова два степена:

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ и $\left(\frac{5}{3}\right)^n$? Зашто?

Израчунај вредност ових степена:

14. $(-2)^3$ **15.** $(-3)^2$

16. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ **17.** $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

18. $(-0,05)^3$ **19.** $\left(-\frac{1}{20}\right)^2$

20. $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$

Какво треба да буде *n*, па да вредност ових степена буде позитивна, кад је *n* цео број:

21. $(-2)^{n+2}$ **22.** $(-3)^{n-1}$

23. $(-2)^{2n-2}$ **24.** $(-5)^{3n+1}$

25. $(-3)^{4n-1}$ **26.** $(-4)^{n-4}$

27. $(-3)^{2n+3}$ **28.** $(-1)^{-n-1}$

29. $(-2)^{n-5}$

Претстави функцију $y = x^2$ на координатном систему, где су подеоци на осовинама:

30. од 1 mm. **31.** од 2 mm.

32. од 3 mm. **33.** од 4 mm.

34. од 1 cm. **35.** од 5 cm.

Пошто вредност *y* зависи од *x*, пошто је *y функција* икса, то се горња функција у вежбањима 30—35 може и овако написати:

$$f(x) = x^2$$

36. — Исти задатак за функцију

$$f(x) = x^3$$

(Независно променљиву *x* преносимо по апсцисној осовини, а функцију *y* [или *f* (*x*)] по ординатној осовини. Поделак на осовини нека је 2 *mm*.

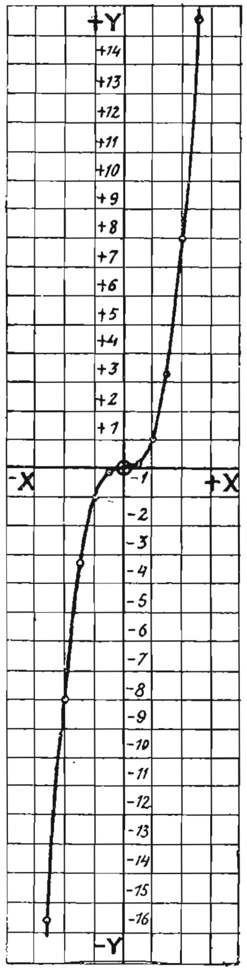
37. — Да ли слика 42 претставља криву $y = x^3$? Провери на неколико тачака!

Крива коју претставља слика 41 зове се **кубна парабола**. Она претставља кретање кубова.

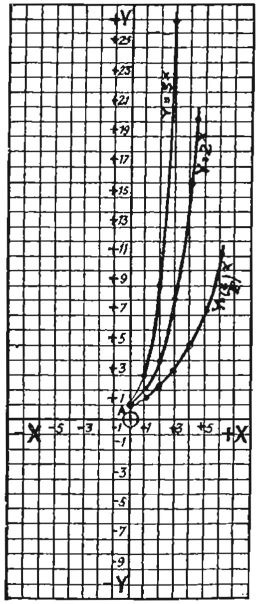
Да ли њене гране леже симетрично према ординатној осовини? Имају ли њене гране центар симетрије? Шта би требало урадити, па да лева грана постане симетрична сдесном према ординатној осовини? Какво је и колико је кретање које би имала да изврши лева грана?

38. – Претстави графички функцију $f(x) = 3^x$ сл. 43.

Начини таблицу као за функцију $y = 2^x$ на ст. 156. Добивене координате тачака унеси у цртеж, па их спој.



Сл. 42.



Сл. 43.

39: — Претстави графички функцију $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, слика 43.

40. — Претстави графички(цртањем) ову функцију: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ кад се x мења од 1 ка $+\infty$, узимајући само целе вредности за x.

41. — Исти задатак за функцију $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Напомена. — Изрази $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ значе једно исто. Они оба показују да се извесне количине добијају, кад се $\frac{1}{2}$ степенује једним бројем који се произвољно мења. Оба горња израза према томе значе да вредности једног степена зависе од промене неког броја x.

42. — Исти задатак за функцију $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Сабери ове степене:

43. $3a^3,\ -2a^3,\ +\frac{3}{4}a^3,\ -\frac{5}{4}a^3,\ +\frac{1}{2}a^3.$

44. $4a^3b^2,\ -3a^3b^2,\ 5a^3b^2,\ -\frac{2}{3}a^3b^2,\ -\frac{3}{2}a^3b^2.$

45. $-\frac{3}{4}a^3bc,\ -5a^3bc,\ +\frac{4}{3}a^3bc,\ -\frac{a^3bc}{3}$

46. $2abc^3,\ -3abc^3,\ 5abc^3,\ \frac{3}{4}abc^3,\ -\frac{5abc^3}{3},\ 6abc^3.$

47. $4ax,\ 3ax,\ +5ax,\ -7ax,\ -10ax,\ 7ax.$

48. $3ax$ и $-4ax^2$.

{ Зашто не може? Кад мономи нису слични, али имају нечег заједничког, онда се из њиховог збира из сваког члана извуче оно што је заједничко и стави пред заграду, Овако:

$$3ax + (-4ax^2) = 3ax - 4ax^2 = ax(3 - 4x).$$ }

49. $3ax^3,\ -4ax^2,\ -4x^2,\ -5x,\ +7a$

(Да ли се овде из збира ових монома може нешто извући пред заграду као у вежбању 48? Зашто?)

Изврши означене рачунске радње:

50. $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 + 13^3 + 16^3 + 20^3$

51. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$

52. $(-a)^7 + (-a)^8 + (-a)^2 + (+a)^4 + (+a)^5$ (Види вежбање 48).

53. $(-3)^4 - (+4)^3$

54. $(-8)^3 - (-1)^3$

55. $(-14)^2 - (-13)^2$

56. $(-5)^2 - (-2)^5$

57. $(\ \ 2)^4 - (-3)^2$

58. $(-9)^3 - (+3)^3$

59. — Нацртај ове функције:

$y = x^2,\quad f(x) = 2x^2,\quad y = 3x^2,\quad y = 4x^2,\quad f(x) = 5x^2$

узимајући за прву поделак од 1 *mm.* на координатним осовинама, за другу од 2 *mm.*, за трећу од 3 *mm.*, за четврту од 4 *mm*, за пету од 5 *mm.* Најбоље је да пробаш ово на *милиметарској хартији.* Какав је резултат? Колико си разних парабола добио?

60. — Нацртај функцију $y = \frac{2}{3}x^2$.

61. — „ „ $y = \frac{3}{2}x^2$.

62. — „ „ $f(x) = 10x^2$.

63. — На координатним осовинама узми поделак од 1 *mm.*, па нацртај параболу $y = x^2$; затим узми поделак од 1 *cm.* и на *истом* координатном систему нацртај параболу $y = 10x^2$. Загледај добивене слике!

64. — Нацртај функцију $y = -3x^2$

65. — Исто за функцију $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$.

66. — Исто за функцију $f(x) = -4x^2$.

67. — Исти задатак као у вежбању 63. само сад за функције $y = -x^2$ и $y = -10x^2$.

68. — Како леже једна према другој параболе $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$?

69. — Како леже једна према другој параболе $y = 3x^2$ и $y = 4x^2$?

70. — Нацртај на истом координатном систему ове три параболе овим редом: $y = 4x^2$, $y = 5x^2$ и $y = 6x^2$.

71. — Код трију парабола из вежбања 70, код које најбрже расте функција (ордината)?

72. — Ако функције $f_1(x) = ax^2$ и $f_2(x) = bx^2$ претстављају две параболе, па је $b > a$, која функција ће брже расти?

73. — Посматрај три параболе из вежбања 70, па кажи шта бива с параболом $y = ax^2$, кад a почне да расте.

74. — Нацртај узастопце ове три параболе: $y = 2x^2$, $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$, па реци шта бива са параболом $y = ax^2$, кад a почне опадати.

75. — Узми на координатним осовинама поделак од 1 cm. па нацртај параболу $y = \frac{x^2}{10}$, а затим параболу $y = \frac{x^2}{20}$. Код прве је $a = \frac{1}{10}$, а код друге $a = \frac{1}{20}$ Којој осовини прилази парабола кад a стане опадати?

76. — Узми на координатним осовинама поделак од 1 *dm.* па нацртај параболе $y = x^2$, $y = \frac{1}{10}x^2$, $y = \frac{1}{100}x^2$. Ово ћеш најлакше урадити на школској табли. Видиш ли како је парабола толико раширена, да иде скоро уз саму X-осовину? Шта ће бити с нашом параболом, ако a постане *веома мало*, н. пр. $\frac{1}{100\,000}$? А ако a постане бесконачно мало т. ј. $\frac{1}{\infty} = 0$? Тада наша једначина постаје $y = \frac{1}{\infty}x^2$, т. ј. $y = 0 \cdot x^2$, т. ј. $y = 0$. Шта претставља једначина $y = 0$?

Извршити означена множења:

77. $a^4 \cdot a^7$

78 $b^3 \cdot q^3$

79. $x^8 \cdot x^2$

80. $2x^4 \cdot 3x^2$

81. $y^4 \cdot y$

82. $a^n \cdot a^{m+1}$

83. $a^{n-1} \cdot a^{n-1}$

84. $y^{n-1} \cdot y$

85. $y^{3n-1} \cdot y^{2-3n}$

86. $c^{x-4} \cdot c^5$

87. $a^x \cdot a^{5-2x}$

88. $y^{n-1} \cdot y^{7-n}$

89. $(-a)^{2n} \cdot a$

90. $(-a)^{2n} \cdot (-a)^3$

91. $(-a)^{2n-1} \cdot (-a)^{2n+1}$
92. $\frac{5}{9}a^2bx \cdot \frac{6}{7}ax^3y^2 \cdot \frac{4}{5}a^n bx^n y$
93. $\frac{3}{4}a\,mbx^3 \cdot \frac{4}{5}ab^m x \cdot \frac{5}{6}a^2x^5$
94. $a^{2x-3}y \cdot a^{3x+2y}$
95. $(n+1)^4 \cdot (n+1)$
Шта је основа степена $(n+1)^2$?
96. $(1+a)^6 \cdot 6(a+1)^5 \cdot 5(1+a)$
97. $a^{n+1} \cdot a^{n-1}$
98. $b^{a+1} \cdot b^{1-a}$
99. $c^{4d-1} \cdot + 4 \cdot c^{1-d}$
100. $(m+1)^3 \cdot (m+1)^{a-13} \cdot (m+1)^{1-a}$

101. $(d-1)^3 \cdot (1-d)^3$
Овде се треба сетити да је $(a-b) = -(b-a)$, те је према томе
$(a-b)^3 = [-(b-a)]^2 = (b-a)^2$
$(a-b)^{2n+1} = [-(b-a)]^{2n+1} =$
$= -(b-a)^{2n+1}$
102. $(p-q)^5 \cdot (q-p)^4$
103. $(a-b)^6 \cdot (b-a)^4 \cdot (a-b)^2$
104. $(c-d)^3 \cdot (d-c)^5 \cdot (d-c)^2$
105. $(1-a)^{2n} \cdot (a-1)^{2n+1}$
106. $(a-b)^2\,(b-a)^3\,(b-a)^4\,(a-b)^5$

107. $a^{m-n}b^p c^{q+1} \cdot b^{n-p}c^{p-q} \cdot a^{m+1}b^{2-n}c^{p-1}$
108. $(-3a^2b^{n-1})\,(-5a^{n-3}c^{n+1})\,(-4abc^{x-n})$
109. $(-a)^n b^{3-x} \cdot (-a)^{2n-3}b^{4+x}c^{n-1} \cdot (-a)^{4-n}b.$

Растави ове степене на чиниоце:

110. a^{b+c}
111. b^{p+q}
112. c^{3p+q}
113. m^{a+b+c}
114. q^{m+n+1}

115. x^{n+2}
116. y^{2n+3}
117. z^{3n+1}
118. e^{5n+1}
119. a^{n+m+1}

Изврши означена дељења:

120. $p^r : p^s$
121. $\frac{a^8}{a^6}$
122. $\frac{a^n}{a^4}$
123. $a^3 : a^{x+2}$
124. $\frac{x^3}{x^{n-4}}$
125. $a^{2n} : a^{n-x}$
126. $\frac{a^{5-x}}{a^{3-2x}}$
131. $q^{4n+1} : q^{1+n}$
132. $a^{3m-1} : a^{2m+2}$
133. $a^{n-m} : a^{2m-n}$
134. $(ab)^{4-n} : (ab)^{3+n}$
139. $\frac{a^{n+2}}{a^{2-n}}$
140. $\frac{x^{n-2}}{x^{m+4}}$

127. $\frac{a^4b^4}{a^6b^6}$
128. $\frac{a^{m+1}b}{ab^{m+1}}$
129. $\frac{49x^{n-1}b^{n+2}}{9x^{n+5}b^{3-n}}$
130. $\frac{6x^{m-1}y^{n-2}}{x^{2m+2}y^{3n-3}}$
135. $(abc)^{4m-1} : (abc)^{4-m}$
136. $(ab)^{mn} : ab^{np}$
137. $a(bc)^4 : (bc)^3$
138. $(ab)^3 : ab^3$ Пази!
141. $\frac{a^{4-x}}{a^{5-x}}$
142. $\frac{x^{2m-2}y^{8n-5}}{x^{2n+5}y^{2m-1}}$

143. $\frac{3x^{2m+n}y^m}{4x^m y^{2m-n}}$
144. $\frac{5a^{3x}\ {}^{7}b^5}{3a^{7x+3}b^{2x-1}}$
146. $a^7 : a^5$
147. $(a-b)^3 \cdot (a-b)$
148. $a^3 : b^3$
149. $c^4 ; d^3$
150. $(a^2-b^2)^3 : (a-b)^3$
151. $(a^3+2ab+b^2)^3 : (a+b)^2$

145. $\frac{a^m b^{m-1}}{a^n b^{n-4}}$
152. $(c-d)^{n-1} : (c-d)^{1-n}$
153. $(a-b)^{2n+1} : (b-a)^{2n}$
154. $(d-a)^{2n} : (a-d)^{2n}$
155. $(aq)^7 : \left(\frac{b}{a}\right)^7$
156. $(a^3-b^3)^4 : (a^2+ab+b^2)^2$
157. $(a^2-4c^2)^2 : (a+2c)^2$

Претвори ове степене у разломак:

158. c^{3-n}
159. d^{2n-5}
160. a^{2n-3}
161. $a^{2-n}b^{n-2}$
162. $2a^2x^{n-2}y^{2-n}$

163. a^{m-n}
164. b^{7-n}
165. x^{n-5}
166. $a^{3-n}b^{n-3}x^3$
167. $4a^{2-x}b^{3x-2}$

Ове разломке напиши у облику целих бројева:

168. $\frac{b}{a^2}$
169. $\frac{ax}{y}$
170. $\frac{ax^2}{y^3}$
171. $\frac{by^2}{a^x}$

172. $\frac{ba^x}{b^{-x}}$
173. $\frac{a}{x^n}$
174. $\frac{1}{a^{2+x}}$
175. $\frac{1}{a^{-x}}$

176. $\frac{15a}{2x^2y}$
177. $\frac{4ax}{aby}$

Изврши означено степеновање:

178. $(a^2)^3$
179. $\left(\frac{a^2b^4}{a^2b^3}\right)^2$
180. $(-a^3)^2$
181. $\frac{(3 \cdot 4^2)^3}{12^2}$

182. $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^2}{(ab)^5}$
183. $(a^{2n})^3$
184. $(3ab^{n-1})^5$

Изврши степеновање и остале радње:

185. $\left[\frac{(a-b)\,(c-d)}{(d-c)\,(b-a)}\right]^3$
186. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2.$
187. $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)$
188. $\left[\frac{a^2-(b-a)^2}{a-b}\right]^3.$
189. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)$
190. $(a^2)^5$
191. $[(-a)^2]^3 \cdot [(-a)^3]^2$
192. $[(-3a)^2]^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{3a}\right)^3\right]^4$

193. $[(-a)^3]^4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{12}.$
194. $(-a^{2n})^2$
195. $[(a^3)^3]^3$
196. $\frac{(s-r)^{-11} \cdot (r-s)^{-5}}{(r-s)^{-3}}$
197. $\frac{4a^3b^{-5}c^0}{x^{-1}\,y\,z^{-1}}$
198. $\frac{36a^0\,b^{-4}}{24a^{-1}\,b^3\,c^{-4}}$
199. $\frac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \frac{a^4-b^5}{x^0y^{-3}}$
200. c^{mn}
201. $d^{a(b-1)}$
202. $m^{(p-q)(p-q)}$

203. $(a - b)^{2n\ (m+1)}$

204. $a^0 \cdot a^2$

206. $a^n : a^0$

207. $a^{n+1} : (-a)^0$

208. $[(m+1)^0]^7$

209. $a^0 \cdot b^0 \cdot c^1$

210. $a^{-4} \cdot a^4$

211. $p^8 \cdot p^{-3} \cdot pq$

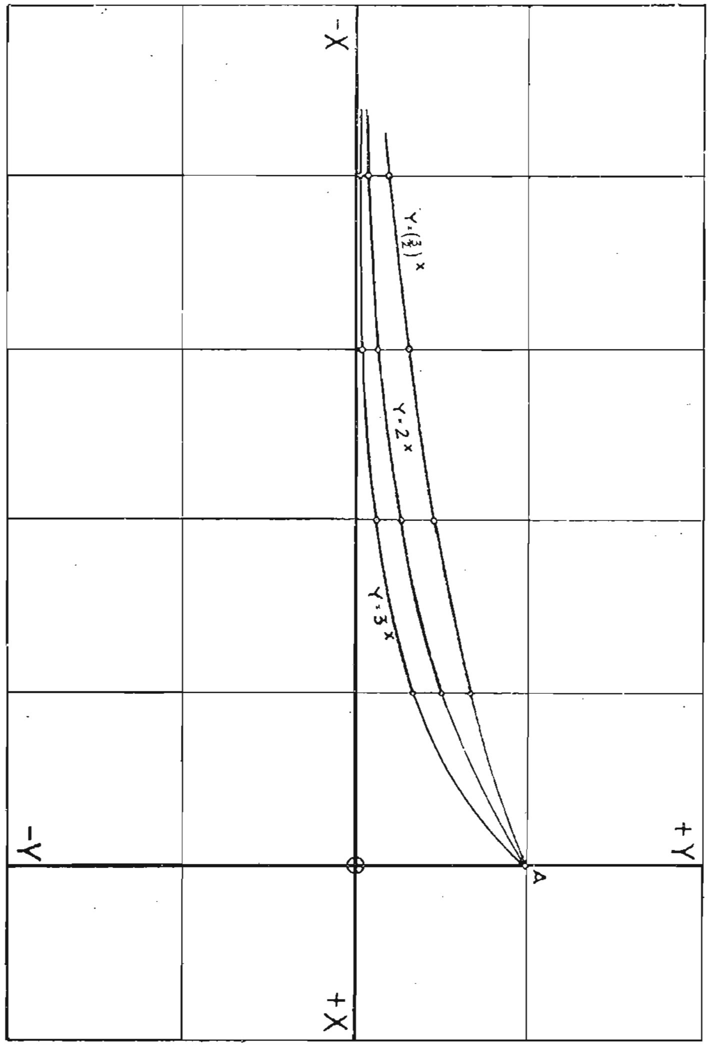
212. $(m+1)^{-3}\ (m+1)^3$

213. $\frac{(g+h)^5\ (g+h)^{-7}}{(g+h)^{-2}}$

214. $\frac{(r-s)^{-7} \cdot (s-r)^{-8} \cdot (r-p)^{-3}}{(r-s)^{-2} \cdot (s-r)^{-5} \cdot (r-p)^{-4}}$

215. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-3}$

216. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{(x-y)^{-5}} \cdot (x-y)^{-3}$



Сл. 44.

217. — Претстави графички ову функцију $y = 3^x$, узимајући за x само целе негативне вредности.

218. — Претстави графички ову функцију $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ узимајући за x само целе негативне вредности (сл. 44.).

219. — Да ли је апсцисна осовина асимптота и за криву $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Докажи.

Извршити ова степеновања:

220. 15^3

221. 23^2

222. 203^2

223. $1{,}001^2$

224. $101{,}10^2$

225. $\left(\frac{12}{13}\right)^2$

226. $\left(\frac{7}{6}\right)^2$

227. $\left(2\frac{2}{5}\right)^2$

228. $\left(14\frac{2}{7}\right)^2$

229. $(2{,}0002)^2$

230. $(4{,}0080)^3$

231. $(101{,}0001)^2$

232. $(40{,}404)^3$

233. $(7{,}05505)^3$

234. $(705{,}0301)^2$

235. $(1{,}35)^3$

236. $(14{,}014)^3$

237. $(0{,}0401)^3$

238. $(22{,}222)^3$

239. $(0{,}0021)^3$

240. $\left(3\frac{1}{2}\right)^3$

241. $\left(4\frac{1}{7}\right)^3$

242. $\left(5\frac{1}{5}\right)^3$

Степеновати ове полиноме:

243. $(a - b)^2$

244. $(2a - 3b)^2$

245. $\left(2\frac{1}{3}a - 3\frac{1}{4}b\right)^2$

246. $\left(x - \frac{y}{3}\right)^2$

247. $\left(0{,}5x - 2\frac{1}{3}y\right)^3$

248. $\left(3\frac{3}{4}x - 4\frac{1}{3}y\right)^2$

249. $(a - 2b - 0{,}4c)^2$

250. $\left(2a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}\right)^2$

251. $\left(2a - 3b - \frac{3}{4}c\right)^2$

252. $(a - b + c - d)^2$

253. $\left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4}\right)^3$

254. $\left(a - \frac{2}{3}b + \frac{c}{4} - \frac{d}{5}\right)^2$

255. $(a - b + c)^2$

256. $\left(\frac{2}{3}a - \frac{4}{5}b\right)^2$

257. $(0{,}5a - 2{,}1b)^3$

258. $\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{c} + \frac{c}{6}\right)^2$

259. $(x^3 - ax^2 + bx)^3$

260. $(ax + bx^2 - cx^3 + dn^r)^3$

261. $(1{,}5x - 3{,}2y + 5z)^2$

262. $\left(a - 2b - \frac{c}{4} - d\right)^3$

263. $(x - y + cz - 1)^3$

264. — Сабери ове корене:

$$\sqrt{2}, -\sqrt{6}, +\sqrt{18}, -\sqrt{20}, +\sqrt{24}, -4\sqrt{20}.$$

Напомена. — Кадгод поткорена количина није потпун степен неког броја, треба је увек по могућству раставити на чинитеље, од којих ће један бити потпун степен. У горњем примеру можемо извршити ово:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2} \text{ и т. д.}$$

265. — Сабери корене:

$\sqrt{7}, -3\sqrt{14}, +\sqrt{63}, -\sqrt{84}.$

266. $8\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

267. $9\sqrt{3} - 8\sqrt{54} + 10\sqrt{27}$

268. $6\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{3x} - 2\sqrt{4x} + \sqrt{12x} - \sqrt{18x}$

269. $7\sqrt{4x} + 4\sqrt{9x} + 3\sqrt{45x} - 5\sqrt{36x} - 2\sqrt{18x}$

270. $4\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

271. $7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}$

Измножи ове корене:

272. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

273. $\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{n^3} \cdot \sqrt[4]{n^5}$

274. $\frac{2}{5}\sqrt[5]{x^4} \cdot \frac{3}{8}\sqrt[5]{x^3} \cdot 6\frac{2}{3}\sqrt[5]{-\frac{a^7}{x}}$

275. $5\sqrt[3]{12a^2} \cdot 0{,}14\sqrt[3]{\frac{x}{a}} \cdot \frac{10}{21}\sqrt[3]{18a^8}$

276. $0{,}8\sqrt[3]{5a^2b^4} \cdot 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{11}{3}a^2b^7}$

277. $\sqrt[n-1]{a^{n+5} \cdot b^{5-n}\, c^n} \cdot \sqrt[n-1]{a^{1-n}\, b^{n-3} \cdot c^{2(1-n)}} \cdot \sqrt[n-1]{a^{n-7}\, b^{2(n-1)}\, c^{n-2}}$

278. $\sqrt[3]{\frac{3\,ab}{4}} \cdot 5\sqrt[3]{\frac{a}{3} + \frac{5}{b}}$

279. $\sqrt[3]{\frac{a^2 - 2ax}{ax - 3x^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{ax - 2x^2}{a^2 - 3ax}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 - x^2}{2 - a}}$

Изврши ово кореновање:

280. $\sqrt[3]{a^5\, b^5\, c^6}$

281. $\sqrt[5]{a^7\, b^8\, c^{10}}$

282. $\sqrt[n]{a^{2n}\, b^{n+3}\, c^{3n-1}}$

283. $\sqrt[2n]{a^{6n}\, b^{4n}\, c^{3n}}$

284. $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 125 \cdot (-729)}$

285. $\sqrt{9 \cdot 5 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 81 \cdot 50}$

Подели ове корене:

286. $\sqrt{72} : \sqrt{0{,}5}$

287. $9\sqrt{\frac{1}{45}} : 1{,}5\sqrt{2\frac{2}{5}}$

288. $\sqrt[3]{-\frac{7}{8}\, a^5 x^2} : 0{,}25\sqrt[3]{8\, a^2 x^5}$

289. $\sqrt[n]{a^2 x^{-1}} : 0{,}2a\sqrt[n]{a^{2-n}\, n^{-5}\, x^{-1}}$

290. $\sqrt[3]{2\,x^3} : \sqrt[3]{1{,}6\,x}$

291. $\frac{x^n}{b^2}\sqrt[n]{a^{2n-1}\, b^{n-5}} : \frac{a}{bx}\sqrt[n]{\frac{b^{-5}}{ax^{-5}}}$

292. $\sqrt[7]{\frac{2a \cdot x}{a + x}} : \sqrt[n]{1\frac{x}{a + x}}$

293. $\sqrt[3]{704} : 4\sqrt[3]{33}$

294. $\sqrt[4]{9an - 15bn} : \sqrt[4]{48an - 80bn}$

295. $\sqrt[6]{\frac{2a - 2b^7}{nx}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a - b^2}{2bx}}$

Изврши означене радње:

296. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

297. $(\sqrt[n]{4xp^{n-1}})^2$

298. $\sqrt[3]{\frac{a^2\, b^3\, c^9}{m^3\, n^{12}}}$

299. $\sqrt[n]{\frac{a^{2n}\, b^{n-1}\, c^{n+1}}{m^n\, p^{n+3}}}$

300. $\sqrt{\frac{(a - b)^6\, (c - d)^8}{(b - a)^8\, (b - c)^6}}$

301. $(\sqrt[r]{ab})$

302. $\left(a^{-3}\sqrt[3]{\frac{a^3}{nx^{-2}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{nx^2}{a^3}}\right)^{-4}$

303. $\sqrt[n]{a^{2nd}}$

304. $\sqrt[6]{12^{12}}$

305. $\sqrt[p]{\frac{x^{pn}}{a^p\, c^{2p}}}$

306. $\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right)^{n-1}$

307. $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{a - x}}\right)^6$

308. $(\sqrt[x]{a^n})^{10x}$

309. $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[3]{a^3c}}\right)^{10}$

310. $\sqrt{-\frac{243\, a^5\, x^{10}}{b^5z^{20}}}$

311. $\sqrt{\frac{a^{12}\, b^{-2}\, c^6}{64n^{18}\, x^{-4}}}$

312. $\sqrt[6]{a^{-6\,(n-1)}\, x^{-3\,(2n-4)}}$

313. $a^{\frac{1}{n}}$

314. $a^{\frac{3p}{b}}$

315. $b^{\frac{7}{8}}$

316. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

317. $\left(\frac{4}{9}\right)^{1\frac{1}{3}}$

318. $n^{2{,}5}$

319. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

320. $125^{\frac{1}{2}}$

321. $32^{\frac{1}{5}}$

322. $243^{0{,}6}$

323. $1000^{\frac{2}{3}}$

324. $(0{,}25)^{0{,}5}$

325. $100^{\frac{1}{2}}$

326. $(0{,}27)^{\frac{2}{3}}$

Напиши ове корене у облику степена:

327. $\sqrt[3]{x^7}$

328. $a\sqrt[4]{x}$

329. $a\sqrt[n]{x}$

330. $b\sqrt{3ax^3}$

331. $\sqrt[3]{2ax^4}$

Напиши ове изразе без разломачке црте и без кореног знака, а да им се вредност не промени;

332. $\frac{\sqrt{x}}{y}$

333. $\frac{a}{\sqrt{x}}$

334. $\frac{c}{x^2\sqrt{xy\sqrt{xy_3}}}$

335. $\frac{axy}{\sqrt{xy\sqrt{xy}}}$

336. $\frac{4ax}{\sqrt{x\sqrt{x+1}}}$

337. — Посматрати функцију $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ од $x_1=-1$ до $x_2=+1$. Узми $x=-\frac{9}{10}$, па $x=-\frac{8}{10}$, $x=-\frac{7}{10}$. . . . .

338. — Посматрати функцију $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ од $x_1=-1$ до $x_2=+1$.

339. — Посматрати функцију $y=\left(2\frac{1}{2}\right)^x$ од $x=-1$ до $x=+1$.

Извршити означене радње:

340. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$

341. $\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt[6]{12}$

342. $\sqrt[10]{a^2b^0}\cdot\sqrt[6]{a^5b^7}$

343. $\sqrt[x-1]{a^{x+1}}\cdot\sqrt[x+1]{a^{q-1}}$

344. $\sqrt[m]{a^{m\quad n}}\sqrt[u]{a^{n\quad 1}}$

345. $\sqrt[2x]{n}:\sqrt[3x]{axn\quad 1}$

346. $\sqrt[3]{-8}:\sqrt[2]{8}$

347. $\sqrt{\frac{3a^3}{8b^2}}:\frac{a}{b}\sqrt{2a\ {}^{1}b}$

348. $\sqrt[q]{\sqrt[p]{2x^n}}$

349. $\sqrt[r]{\sqrt[n]{n^r}}$

350. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16a^4}}$

351. $\sqrt{\sqrt[3]{x^{10}}}$

352. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{15}}}$

353. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^{13}}}}$

354. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

(У вежбању 354. треба најпре увући a под други корен. Знамо да је $a=\sqrt{a^2}$
Према томе ће бити:

$$a\sqrt{a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^3}.$$

Отуда:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^3}}=\sqrt{a}.)$$

355. $\sqrt{a^2\sqrt{x}}$

356. $\sqrt{-ab^2\sqrt[3]{a}}$

(Овде треба ставити:
$--ab^2=\sqrt[3]{(-ab^2)^3}$)

357. $\sqrt[5]{2500\sqrt{50}}$

358. $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}}$

359. $\sqrt{2\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[6]{2x^{-1}}}$

360. $\sqrt[3]{8\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Скрати корен:

361. $\sqrt[3]{\frac{a^6b^9c^{12}}{m^6n^{18}}}$

362. $\sqrt[9]{\frac{m^{12}n^{21}}{x^{24}}}$

363. $\sqrt[5]{\frac{y^6b^7}{c^{10}}}$

364. $\sqrt[4]{\frac{x^5y^7}{z^8}}$

365. $\sqrt[6]{\frac{x^{32}y^{15}}{z^8}}$

366. $\sqrt[3]{x^6(-y^9z^3)}$

367. $\sqrt[4]{x^8y^0z^3}$

Изврши ово кореновање:

368. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{8}}}}$

369. $\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{a^{-1}x^{-1}\sqrt{\frac{x^3}{a}}}}$

370. $\sqrt{256787}$

371. $\sqrt[4]{a^2x\sqrt[3]{\frac{1}{a^{10}x^{10}}}}$

372. $\sqrt{23456789}$

373. $\sqrt{345678}$

374. $\sqrt{45678964}$

375. $\sqrt{6001270809}$

376. $\sqrt{9820611810}$

377. $\sqrt{0{,}099}$

378. $\sqrt{0{,}0003785}$

379. $\sqrt{0{,}7128}$

380. $\sqrt{0{,}00070128}$

381. $\sqrt{24567{,}89014}$

382. $\sqrt[3]{9261}$

383. $\sqrt[3]{68921}$

384. $\sqrt[3]{373248}$

385. $\sqrt[3]{0{,}000343}$

386. $\sqrt[3]{480{,}048687}$

387. $\sqrt[3]{0{,}000050653}$

388. $\sqrt[3]{0{,}005240822553}$

389. $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$

390. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

391. $\sqrt[4]{64}$

(Сети се да је $\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$)

392. $\sqrt[4]{0{,}0016}$

393. $\sqrt[4]{0{,}81}$

394. $\sqrt[4]{8{,}1}$

Извуци квадратни корен из ових полинома

395. $4x^2+9y^2+1-12xy+4x-6y$

396. $9x^2+4y^2+1-12xy+6x-4y$

397. $1+16x^2+25y^2-8x+10y-4xy$

398. $a^2+4x^2+y^2-4bx+2bcy-4cxy$

399. $b^2 + 4x^2 + c^2y^2 - 4bx + 2bcy - 4cxy$

400. $40xy + 16xz + 20yz + 16x^2 + 25y^2 + 4z^2$

401. $12a + 24x - 6y - 16ax + 4ay - 8xy + 9 + 4a^2 + 16x^2 + y^2$

402. $1\frac{1}{2}x^{12} + 15a^{16} + \frac{x^8}{256} - 8x^{14} - \frac{4}{9}x^{10}$

(Најпре уреди полином!)

403. $12{,}5x^4y^4 + 0{,}0625x^8 - 54x^2y^6 + 81y^8 - 1{,}5x^6y^2$

404. $24\,a^{6n-8}\,b^6 + a^{4n-12}\,b^8 + 16\,a^{8n-4}\,b^4 - 8\,a^{5n-10}\,b^7 - 32a^{7n-5}\,b^6$

405. — Нађи на бројној осовини приближно место ирационална броја $\sqrt{5}$

406. — Исто за $\sqrt{17}$

407. — Исто за $\sqrt{26}$

408. — Исто за $\sqrt{37}$

409. — Исто за $\sqrt{48}$

410. — Исто за $\sqrt{75}$

411. — Исто за $\sqrt{163}$

Напомена. — При вежбањима 405 до 411 границе између којих лежи ирационалан број сузи до 3 децимала тачно.

Ирационалним бројевима из вежбања 405 до 409 одреди *тачно* место на осовини.

Уклони ирационале бројеве из именитеља ових разломака:

412. $\frac{an}{\sqrt{n}}$

413. $\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{c}}$

414. $\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{b}}$

415. $\frac{2\sqrt{3-a}}{3\sqrt{6}}$

416. $\frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{a}}$

417. $\frac{a-2}{\sqrt{a^2-4}}$

[Овде треба приметити да $a^2 - 4$ није степен ниједног до сад нама познатог рационалног израза. Према томе га треба замислити на првоме степену: $(a^2 - 4)^1$. До квадрата му недостаје чинитељ $(a^2 - 4)^1$].

418. $\frac{a}{\sqrt[3]{x}}, \quad \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \frac{a}{\sqrt[4]{x}}, \quad \frac{a}{\sqrt[4]{x^3}}, \quad \frac{a}{\sqrt[7]{x^4}},$

419. $\frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

420. $\frac{3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ (Може ли се скратити са 3?)

421. $\frac{6}{\sqrt{3}-5}$

422. $\frac{a\sqrt{a}}{a+\sqrt{2a}}$

423. $\frac{11 - 4\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}$

424. $\frac{1\frac{1}{2} - 0{,}8\sqrt{2}}{3 - 4\sqrt{\frac{1}{2}}}$

425. $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

426. $\frac{0{,}6\sqrt{5} - 0{,}4\sqrt{2}}{0{,}2\sqrt{5} - 0{,}3\sqrt{2}}$

427. — Нађи на координатном систему ове бројеве:

$2 + 3i, \quad 2 - 3i, \quad 3 + 5i, \quad -4 + 6i, \quad -9 + 3i.$

428. — Исто за бројеве:

$4 + i, \quad 3 + 5i, \quad 2 + 3i, \quad 1 + 4i, \quad \frac{1}{2} + 5i.$

429. — Исто за бројеве:

$1 - i, \quad 2 - 2i, \quad 3 - 3i, \quad 4 - 4i, \quad 4 - 5i, \quad 5 - 4i, \quad 5 - 3i, \quad 5 - 2i, \quad 5 - i.$

Нађи вредност ових степена од i:

430. i^{25} 431. i^{37} 432. i^{53} 433. i^{60}

434. i^{20} 435. i^{28} 436. i^{50} 437. i^{1111}

438. i^{1074} 439. i^{17846} 440. 2567

Сабери ова два комплексна броја:

441, $17 + 18i$ и $12 - 14i$

443. $2i - 17$ и $14i + 9$

445. $1 - 2i$ и $3i + 4$

442. $10 + 12$ и $14 - 7i$

444. $4i - 5$ и $5 - 3i$

446. $7i - 9$ и $6 + 8i$

447. — Од броја $7 + 3i$ одузми број $4 - 5i$.

448. „ „ $2 + 5i$ „ „ $6 - 7i$.

449. „ „ $4 - 7i$ „ „ $8 + i$.

450. „ „ $5 - 3i$ „ „ $5 + 3i$.

451. „ „ $7 + 4i$ „ „ $3i + 5$.

452. „ „ $8 + 9i$ „ „ $4i - 3$.

453. — Помножи број $3i - 7$ бројем $4 - 9i$.

454. „ „ $2i + 6$ „ $3i - 2$.

455. „ „ $4 + 2i$ „ $4 - 3i$.

456. „ „ $3 + 2i$ „ $4 - 5i$.

457. „ „ $2 + 3i$ „ $7 - 8i$.

458. „ „ $4 + 5i$ „ $9 + 3i$.

459. „ „ $7 + i$ „ $i - 5$.

460. „ „ $1 + i$ „ $1 - 12i$.

461. — Број $11 + 10i$ подели бројем $2 + 3i$.

462. — „ $-32 - i$ „ „ $i - 1$.

463. „ $18 - 2i$ „ „ $5 + 4i$

464. „ $23 - 2i$ „ „ $4 + 5i$.

465. „ $7 - i$ „ „ $2 + 3i$.

466. Број $4 + 5i$ подели бројем $5 - 4i$.

467. „ $7 + 8i$ „ „ $8 - 9i$.

468. „ $6 - 3i$ „ „ $5 + 2i$.

469. „ $8 - 7i$ „ „ $i + 8$

370. „ $4 + 3i$ „ „ $3i - 2$.

Напиши ове бројеве у облику збира степена од 10:

471. 34
472. 549
473. 703
474. 1206
475. 2007
476. 43256
477. 0,3
478. 0,45
479. 0,356
480. 0,234789
481. 0,0027
482. 0,4005
483. 1,036
484. 15,02307
485. 405.306
486. 405070,70809
487. 230450,003
488. 4000050002,00708001

Шта претстављају ови полиноми:

489. $a \,.\, 10 + b \,.\, 10^0$

490. $a \,.\, 10 + c$

491. $a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + c \,.\, 10^0$

492. $a \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + c \,.\, 10 + d$

493. $a \,.\, 10^6 + b \,.\, 10^5 + c \,.\, 10^4 + d \,.\, 10^3 + e \,.\, 10^2 + f \,.\, 10 + g \,.$

Имамо десет знакова за писање бројева: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Првих десет су вредносне цифре. Десета (нула) је цифра без вредности. Она само попуњава празна места.

Колико бројних знакова је потребно да се напише овакав број:

(кад су a, b, c, d, e и f једноцифрени бројеви)

494. $a \,.\, 10^3 + b.$ (Напиши један такав број.)
495. $a \,.\, 10^3 + c \,.\, 10^2 + e.$ „ „ „ „
496. $a \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + c.$ „ „ „ „
497. $a \,.\, 10^5 + b \,.\, 10^4 + c \,.\, 10^3 + d \,.\, 10^2 + e \,.\, 10 + f.$

(Напиши један такав број. Ако је $b = c = d = 0$, колико вредносних цифара морамо употребити да напишемо тај број?)

Објасни ове бројеве:

498. $a \,.\, 10 + b$ и $b \,.\, 10 + a$ Напиши два таква броја.
499. — Исто за $a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + c$ и $c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a.$
500. — Докажи ово: „Број је дељив бројем 10, ако му је на крају нула“.
501. — „ „ „ „ „ „ 5, „ „ „ „ „ 0 или 5“.
502. — „ „ „ „ „ „ 2, „ „ „ „ „ 0, или парна цифра.
503. — „ „ „ „ „ „ 9, ако му је збир цифара дељив са 9“

САДРЖАЈ.