МИЛАН С. НЕДИЋ

АЛГЕБРА

ЗА СЕДМИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

— ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ —

Препоручена од Главног Просветног Савета и одобрена за уџбеник одлуком Господина Министра Просвете С. Н. Бр. 25631 од 27. јула 1929. год.

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1. Кнез Михаилова улица 1.
1929.

БЕОГРАД
ШТАМПАРИЈА „ПРИВРЕДНИК“ КНЕЗ МИХАИЛОВА 3.
1929.

АЛГЕБРА

ЗА

СЕДМИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ОД ПРОФЕСОРА М. С. НЕДИЋА.

I — КВАДРАТНИ ТРИНОМ.

РАСТАВЉАЊЕ НА ЧИНИТЕЉЕ.

Општи облик квадратног тринома. — Ошти облик полинома другог степена с једном променљивом јесте овај трином:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Он има један члан с променљивом на другом степену, један члан с променљивом на првом степену и независан члан. Такав трином зове се квадратни трином.

Растављање квадратног тринома на чинитеље. — Ако квадратни трином уједначимо с нулом, добијемо познату квадратну једначину с једном непознатом:

(1) $$ax^2 + bx + c = 0.$$

Знамо да она има два корена: x_1 и x_2. Знамо да се њен полином може написати у овоме облику:

(2) $$a(x - x_1)\ (x - x_2) = 0.$$

Знамо даље да постоје и ови односи:

(3) $$-a\,(x_1 + x_2) = b$$ и

(4) $$ax_1x_2 = c$$

Како (1) и (2) представљају исту једначину, можемо да ставимо:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\ (x - x_2).$$

Одавде се види како се квадратни трином раставља на чинитеље.

Уједначимо га с нулом. Решимо добивену квадратну једначину. Од добивених корена образујемо корене чинитеље $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$. Ставимо их у облику чинитеља и још помножимо са a.

Пример 1. — Раставити на чинитеље трином:

$$2x^2 - 11x + 5.$$

Најпре образујемо квадратну једначину:

$$2x^2 - 11x + 5 = 0$$

Решимо је и добијемо $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Образујемо корене чинитеље $(x - 5)$ и $(x - \frac{1}{2})$.

Стављамо напред $a = 2$ (због именитеља 2) и пишемо сва три чинитеља:

$$2x^2 - 11x + 5 \equiv 2(x - 5)\ (x - \frac{1}{2})$$

И збиља је:

$$2(x - 5)\ (x - \frac{1}{2}) = 2x^2 - 10x - x + 5 = 2x^2 - 11x + 5.$$

Пример 2. — Раставити на чинитеље трином:

$$3x^2 - 4x - 4$$

Најпре квадратна једначина:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Она даје: $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = 2$.

Отуда је:

$$3x^2 - 4x - 4 \equiv 3(x + \frac{2}{3})\ (x - 2).$$

Пример 3. — Раставити на чинитеље трином:

$$x^2 - 4x + 1.$$

Најпре квадратна једначина:

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Она даје: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Отуда је:

$$x^2 - 4x - 1 \equiv (x - 2 - \sqrt{3})\ (x - 2 + \sqrt{3})$$

Пример 4. — Раставити на чинитеље трином:

$$x^2 - 6x + 25.$$

Најпре једначина:

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

Она даје: $x_1 = 3 + 4i$ и $x_2 = 3 - 4i$.

Отуда је:

$$x - 5x + 25 \equiv (x - 3 - 4i)\ (x - 3 + 4i).$$

ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА КВАДРАТНОГ ТРИНОМА.

АЛГЕБАРСКО ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА.

Знак квадратног тринома. — Понекад нам је потребно да знамо, какав ће бити по знаку квадратни трином за извесну вредност *икса*. Н. пр.: Одредити знак тринома:

$$2x^2 - 9x + 4$$

за $x = 3$.

Пошто овај трином садржи једну променљиву (x), то ће извесно постојати нека вредност за x, која ће вредност горњег тринома свести на нулу. То нам даје права да горњи трином уједначимо с нулом. На тај начин добијамо једначину:

$$2x^2 - 9x + 4 = 0.$$

Али ми знамо да тај трином можемо написати у овоме облику:

$$2(x - x_1)\ (x - x_2) = 0.$$

Ако решимо горњу једначину, имаћемо:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Према томе њен трином можемо овако написати:

$$2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Пошто је први чинитељ позитиван, имамо да испитамо само друга два.

Чинитељ $(x - 4)$ биће позитиван, ако *иксу* дајемо вредности веће од 4.

Чинитељ $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ биће позитиван, ако *иксу* дајемо вредности веће од $\frac{1}{2}$.

Наш производ ће бити позитиван ако су оба чинитеља

$(x - 4)$ и $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ позитивни

То ће бити, ако је $x > 4$, то јест ***веће од већег корена.***

Али наш производ ће бити позитиван, ако оба чинитеља буду негативни. То ће бити ако је

$$x < 4 \quad \text{и} \quad x < \frac{1}{2}$$

Кад је $x < \frac{1}{2}$, мора бити и $x < 4$.

Наш производ ће бити позитиван

ако *иксу* дајемо вредности веће од већег корена, или мање од мањег корена.

Кад ће наш производ бити негативан? Биће негативан онда, ако су му чинитељи $(x - 4)$ и $(x - 0{,}5)$ *неједнако означени.*

Нека је $(x - 4)$ негативно, онда је $x < 4$. Ако је $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ позитивно, значи да је $x > \frac{1}{2}$. То јест, наш производ је тада негативан. Да би наш производ био негативан иксу можемо давати вредности од $\frac{1}{2}$ до 4.

Али наш производ може бити негативан и ако је

$$x-4>0 \quad \text{а} \quad x-\frac{1}{2}<0.$$

А ово би значило да је $x>4$ и $x<\frac{1}{2}$. То не може да буде. Отуда излази ово:

наш трином је негативан само у том случају, ако иксу дајемо вредности *између корена*.

Према томе, ако *иксу* дамо вредност 3, наш трином мора бити негативан. И збиља је

$$2 \cdot 3^2-9 \cdot 3+4=18-27+4=22-27=-5<0.$$

Вратимо се сад општем облику:

$$a(x-x_1)\ (x-x_2)=0.$$

Узмимо да је $x_2>x_1$

Овде могу да наступе два случаја.

1. случај: a је позитивно.

Ако су оба чинитеља $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ позитивни или негативни, цео *трином је позитиван*. А то ће бити ако је

1°.	$x>x_2$
јер је онда и	$x>x_1$.
2°.	$x<x_1$
јер је онда и	$x<x_2$

Према томе трином има исти знак као и коефицијенат a.

Ако је један чинитељ позитиван, а други негативан, трином ће бити негативан. То може да наступи, ако је $x<x_2$ и $x>x_1$ то јест, ако за x узмемо вредност *између корена*. Тада ће трином имати супротни знак знаку коефицијента a.

2. случај: a негативно.

Да би сад наш цео производ био позитиван, мора делимични производ

$$(x-x_1)\ (x-x_2)$$

да буде негативан, а то ће бити, ако за x узимамо вредности између корена.

Да би наш цео производ био негативан, треба да је делимични производ $(x-x_1)$ $(x-x_2)$ позитиван, а то ће бити, ако за y узимамо вредности мање од мањег корена, или веће од већег корена.

Отуда ова

Теорема. — *Трином другог степена има знак коефицијента првога члана изузев случаја, кад иксу дајемо вредности између корена.*

Напомена — Ако су оба корена једнака

$$x_1=x_2$$

наш трином добија овај облик:

$$a(x-x_1)\ (x-x_1)=a(x-x_1)^2.$$

Пошто је квадрат неког стварног броја увек позитиван, и наш ће трином *увек* имати знак коефицијента a.

Пример. 1. — Одредити знак тринома

$$2x^2-7x+3.$$

Једначина $2x^2-7x+3=0$

има ове корене: $x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$.

Пошто је овде $a=+2$, овај ће трином бити негативан само за вредности *икса* од $\frac{1}{2}$ до 3. узмимо $x=2$.

$$2 \cdot 2^2-7\ 2+3=8-14+3=11-14=-3.$$

Пример 2. — Одредити знак тринома

$$-x^2-8x-7.$$

Корени једначине $-x^2-8x-7=0$ јесу:

$$x_1=-1,\ x_2=-7.$$

Горњи ће трином увек бити негативан, изузев за вредности x од -1 до -7. Узмимо за x вредност (-3).

$$-(-3)^2-8(-3)-7=-9+24-7=-16+24=+8.$$

Пример 3. — Одредити знак тринома

$$x^2-14x+49.$$

Корени једначине $x^2-14x+49$ су:

$$x_1=x_2=7.$$

Према томе горњи трином је позитиван за *све* вредности *икса*. Узмимо $x=0$

$$0^2-14 \cdot 0+49=+49.$$

Узмимо $x=-2$

$(-2)^2-14\ (-2)+49=4+28+49$ и т. д.

ГРАФИЧКО ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА КВАДРАТНОГ ТРИНОМА.

Знак квадратног тринома можемо одредити и графички. Како се то ради показаћемо на примерима.

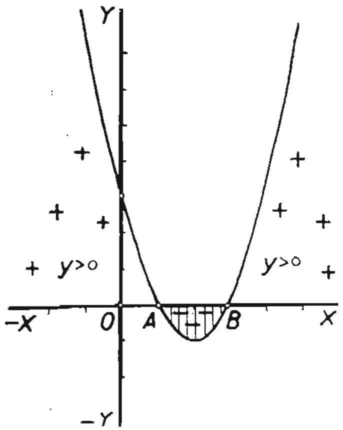
Пример 1. — Одредити знак тринома x^2-4x+3.

Пошто је овај трином функција икса, можемо ставити:

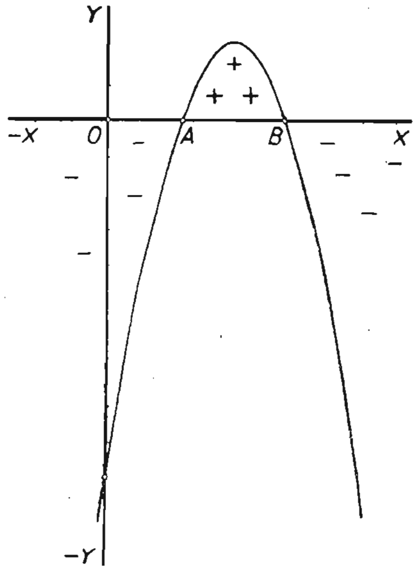
$$x^2-4x+3=y.$$

Кад нацртамо, имамо параболу са слике 1.

Кад ће наш трином бити позитиван? Онда кад y буде позитивно.



Сл. 1.



Сл. 2.

Оно је позитивно за све тачке лево од A и десно од B. Значи наш трином ће бити позитиван кад је $x < 1$, или кад је $x > 3$.

Пример 2. — Одредити знак тринома

$$-x^2 + 7x - 10.$$

Ставићемо $y = -x^2 + 7x - 10$. Добијамо параболу са слике 2. Ординате су позитивне само од A до B. Значи, наш трином је увек негативан, сем за вредности икса између 2 и 5. Дакле трином је позитиван за

$$2 < x < 5.$$

ВЕЖБАЊА.

Раставити на чинитеље ове триноме:

1. $x^2 - 8x + 15$
2. $x^2 - 10x + 9$
3. $x^2 - 13x + 22$
4. $x^2 - 7x + 12$
5. $x^2 - 12x + 35$
6. $x^2 + 7x + 6$
7. $x^2 - 4x - 21$
8. $x^2 - 4x - 60$
9. $5x^2 + 22x - 15$
10. $9x^2 + 15x - 104$
11. $25x^2 - 65x - 464$
12. $1225x^2 - 455x - 420$
13. $7x^2 - 67x - 434$
14. $x^2 - 2x - 2$
15. $x^2 + 10x + 29$
16. $x^2 - 12x + 85$

Скратити разломке:

17. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$ (Најпре растави и бројитељ и именитељ на чинитеље.)
18. $\frac{x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 6}$
19. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
20. $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$
21. $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 4x + 3}$
22. $\frac{x^2 - 2x - 80}{x^2 - 11x + 10}$
23. $\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - x - 12}$
24. $\frac{4x^2 - 13x + 10}{x^2 - 9x + 14}$
25. $\frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 - 10x + 9}$
26. $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 6x + 8}$
27. $\frac{x^2 - 21x + 20}{x^2 - 11x - 180}$
28. $\frac{x^2 - 21x + 110}{x^2 + x - 110}$
29. $\frac{7x^2 - 5x + 7}{x^2 - 2x - 35}$
30. $\frac{x^2 + 12x - 64}{x^2 + 20x + 64}$
31. $\frac{x^2 + 6x - 216}{x^2 + 30x + 216}$
32. $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 2x - 35}$

Одреди знак овим триномима:

33. $x^2 - 11x + 30$
34. $x^2 - 12x + 35$
35. $x^2 - 9x + 18$
36. $x^2 + 21x + 38$
37. $x^2 + 14x + 33$
38. $x^2 + 16x + 64$
39. $x^2 + 5x - 6$
40. $3x^2 - 7x - 6$
41. $5x^2 + 17x - 12$
42. $8x^2 + x - 33$
43. $x^2 + 2x - 7$
44. $4x^2 - 3x - 7$
45. $x^2 - x - 1$
46. $x^2 - 6x + 9$
47. $x^2 + 8x + 16$
48. $x^2 + 3x + 2$
49. $x^2 + 6x + 25$
50. $x^2 - 2x + 26$

За које вредности икса ови корени дају стваран, а за које уображени број:

51. $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$
52. $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$
53. $\sqrt{x^2 - 2x - 6}$
54. $\sqrt{4x^2 + 15x + 6}$
55. $\sqrt{3x^2 - 14x + 5}$
56. $\sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$
57. $\sqrt{2x^2 - 3x - 4}$
58. $\sqrt{x^2 - 14x + 40}$
59. $\sqrt{-x^2 - x - 1}$
60. $\sqrt{-2x^2 - 3x - 4}$
61. $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$
62. $\sqrt{x^2 - 10x + 21}$
63. $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{4}}$
64. $\sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}}$

(*У* вежбањима 51.—64. сети се, да квадратни корен даје стваран број, ако је подкорена количина позитивна, а уображен број, ако је подкорена количина негативна.

II. — НЕЈЕДНАКОСТИ И НЕЈЕДНАЧИНЕ.
НЕЈЕДНАЧИНЕ I СТЕПЕНА С 1 НЕПОЗНАТОМ.

Неједнакости. — Кад покажемо однос који постоји између двеју неједнаких количина, добићемо *неједнакост*.

$$4 > 3.$$

Али чим је четири веће од три, знамо да је три мање од четири. Одатле се види, да једна *неједнакост добија два облика ако је прочитамо најпре с лева надесно, а затим с десна налево* (или обрнуто).

Ако нашу неједнакост читамо с лева надесно имамо „четири *веће* од три“, а ако је читамо с десна налево имамо „три мање од четири“. То можемо овако изразити:

$$4 > 3$$
$$3 < 4.$$

Одавде се одмах види, да *неједнакост мења знак, ако њене стране промене места.*

Бројеви на осовини. — Раније смо видели да је *a веће* од *b*, ако је *разлика (a—b) позитивна.*

$$4 - 3 = +1$$

отуда: $4 > 3$

$$3 - 4 = -1$$

отуда: $3 < 4$.

Одузети негативан број значи додати позитиван број. То знамо из претходног учења. Кад од позитивна броја одузимамо негативан број, добијамо у ствари два позитивна сабирка.

$$(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7.$$

Збир два позитивна сабирка је увек позитиван, а то значи да је *разлика позитивна и негативна броја увек позитивна.* То даље значи да је *сваки позитиван број већи од сваког негативног броја.*

Узмимо $(+1)$ и (-2).

Ако је $(+1)$ веће од (-2), онда њихова разлика мора бити позитивна.

$$(+1) - (-2) = (+1) + (+2) = +3.$$

Како је разлика позитивна, значи да је

$$(+1) > (-2).$$
$$(-3) - (-10) = (-3) + (+10) = +7.$$

Дакле:

$$-3 > -10.$$

Већи је онај негативни број чија је апсолутна вредност мања.
Посматрајмо сад 0 и $+a$, где је $a > 0$

$$0 - (+a) = -a.$$

Разлика је негативна. То значи да је *нула мања* од сваког позитивног броја $0 < (+a)$.

Посматрајмо сад 0 и $(-a)$

$$0 - (-a) = +a.$$

Пошто је разлика позитивна, значи да је *нула већа од сваког негативног броја.*

$$0 < (+a)$$
$$0 > (-a)$$

То значи: *бројеви на осовини расту с лева надесно, а опадају с десна налево.*

Промене на неједнакости. — Узмимо неједнакост:

$$a > b.$$

То значи да је

$$a - b > 0.$$

Додајмо и једном и другом броју један број *c*. Биће:

$$(a+c) - (b+c) = a - b.$$

Разлика се није променила, што значи да је:

$$(a+c) - (b+c) > 0$$

Одатле је (1) $a + c > b + c.$

Исто тако знамо да се разлика не мења, кад се и од умањеника и од умањитеља одузме један исти број:

$$5 - 3 = 2$$
$$(5-1) - (3-1) = 2.$$

Отуда, кад је $a > b$ мора бити:

$$a - b > 0$$
$$(a-c) - (b-c) > 0$$

(2) $a - c > b - c.$

Из (1) и (2) неједнакости излази ова

Теорема I. — *Неједнакост се не мења, кад се и једној и другој страни алгебарски дода исти број.*

$$a > b$$
$$a \pm c > b \pm c.$$

Будући је $40 > 30$

онда је и $80 > 60$

Исто тако будући је $40 > 30$

онда је и $4 > 3$.

Отуда ова:

Теорема II. — *Неједнакост се не мења, кад јој се обе стране, помноже или поделе позитивним бројем.*

Узмимо сад неједнакост:

$$(+3) > (-4).$$

Знамо да је *сваки позитиван број већи од сваког негативног броја.* Ако оба члана горње неједнакости помножимо са (-1), чланови неједнакости ће променити знак:

$$-3 \text{ и } +4.$$

Како је *сваки негативан број мањи од сваког позитивног броја,* биће $(-3) < (+4)$.

Исто то са дељењем:

$$(+30) > (-40)$$

Поделимо са (-10):

$$(-3) < (+4).$$

Отуда ова:

Теорема III. — *Неједнакост мења свој знак, ако је помножимо или поделимо негативним бројем.*

Неједначина. — Неједнакост у којој се налази једна или више промењљивих (непознатих) зове се *неједначина.*

$$3x - \frac{5x-7}{6} < 10x + 5$$
$$x^2 + y^2 > 25.$$

Неједначина првог степена с једном непознатом. — Ако се у неједнакости налази једна непозната (промењљива) на првом степену, имаћемо *неједначину првог степена с једном непознатом.*

Неједначине се решавају на сличан начин као и једначине. Само треба добро водити рачуна о малопређашњим трима теоремама.

Пример. — Решити неједначину:

$$5x - 2 - \frac{3x-7}{2} > 4x - 7$$

$$10x - 4 - 3x + 7 > 8x - 14$$

(Цела неједначина множена са $+2$)

$$7x + 3 > 8x - 14$$
$$7x - 8x > -14 - 3$$

(Најпре је од обеју страна одузето 8 x, а затим 3)

$$-x > -17.$$

Да бисмо добили $+x$, морамо обе стране множити са -1, те ће неједначина променити свој знак:

$$x < 17.$$

Узмимо сад један број мањи од 17 и сменимо га у горњој неједначини. Рецимо $+6$

$$5 \cdot 6 - 2 - \frac{3 \cdot 6 - 7}{2} \quad \text{и} \quad 4 \cdot 6 - 7$$
$$30 - 2 - \frac{11}{2} \quad \text{и} \quad 24 - 7$$
$$28 - \frac{11}{2} \quad \text{и} \quad 17$$
$$28 - 5\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 17$$
$$22\frac{1}{2} \quad > \quad 17.$$

Неједначина је задовољена за вредност $x = 6 < 17$.

Узмимо сад за x једну вредност већу од 17. Рецимо $+20$

$$5 \cdot 20 - 2 - \frac{3 \cdot 20 - 7}{2} \quad \text{и} \quad 4 \cdot 20 - 7$$
$$100 - 2 - \frac{53}{2} \quad \text{и} \quad 80 - 7$$
$$98 - 26\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 73$$
$$71\frac{1}{2} \quad < \quad 73.$$

Неједначина *није* задовољена за вредност $x = 20 > 17$.

ВЕЖБАЊА.

Решити ове неједначине:

1. $3x - 3 > 5x - 5.$
2. $4x - 8 > 8x - 3.$
3. $\frac{2}{3}x - 3 > 2x + \frac{3}{7}.$
4. $\frac{3000 + x}{6} < 1000 + \frac{x - 1000}{7} - \frac{3000 + x}{49} + \frac{10}{7}.$
5. $ax - b > cx - d.$

6. $\frac{c - qx}{a} < \frac{a - bx}{c}$.

7. $a - b - 1 < \frac{ax - bx}{a + b}$.

8. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} > \frac{1}{10}$.

9. $\frac{2\,(3x - 2)}{3\,(2x + 3)} < 2$.

10. $\frac{2x - 3}{4x - 5} > \frac{2}{7}$.

11. $\frac{5x}{7} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15} < \frac{9}{25} - \frac{2x}{35}$.

12. $3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}$.

13. $\frac{2x}{5} - 23 < 2x - 16$.

ГРАФИЧКО ПРЕДСТАВЉАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ ПРОМЕНЉИВОМ.

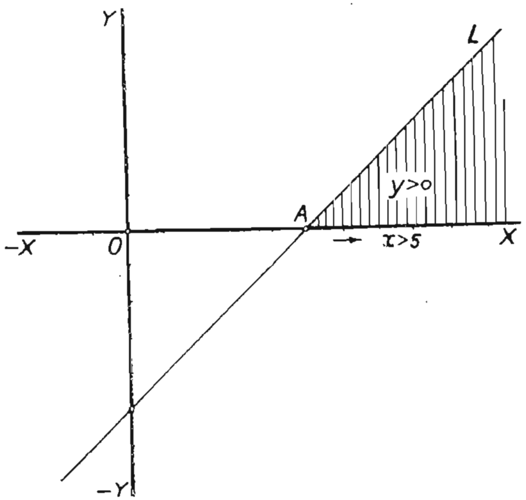
Пример I. — Представити графички неједначину:

$$x - 5 > 0.$$

Бином $x - 5$ је једна функција икса. Зато можемо ставити:

$$y = x - 5 > 0.$$

Нацртаћемо праву $x - 5$. То је права L (сл. 3.). Наша неједначина каже да треба да је $y > 0$. То значи да узмемо позитивне ординате. Ординате ће бити позитивне за апсцисе десно од тачке A.



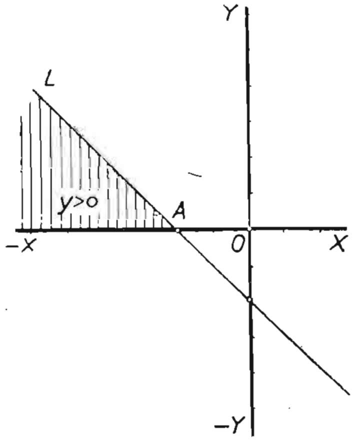
Сл. 3

Шта представља наша неједначина? Представља ординате праве L за апсцисе десно од A.

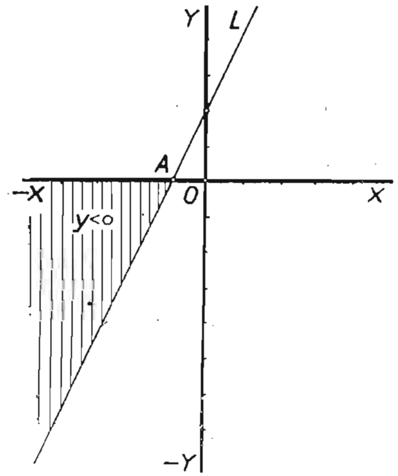
Други пример. — Шта представља неједначина $4 - x > 6$?

Написаћемо је овако: $-x - 2 > 0$.

Сад $y = -x - 2 > 0$. Нацртаћемо праву $y = -x - 2$. То је права L са слике 4. Наша неједначина каже да треба да су ординате веће од нуле. То значи да ординате треба да буду позитивне. Оне ће бити позитивне за апсцисе лево од тачке A. Наша неједначина представља ординате праве L за апсцисе лево од A.



Сл. 4.



Сл. 5.

Трећи пример. — Шта представља неједначина $2x + 1 < -1$?

Написаћемо је у облику $2x + 2 < 0$.

Ставимо $y = 2x + 2$. Цртамо ту праву. То је права L са слике 5. Наша неједначина каже да ординате треба да буду негативне. Са слике се види да су ординате негативне за све тачке леве од А.

Наша неједначина представља ординате наше праве лево од тачке А.

(Да ли наведене неједначине могу представљати ординате још којих правих, сем ових што смо ми нацртали? Које су те праве?).

ВЕЖБАЊА.

Шта представљају ове неједначине:

1. $2x - 1 > 1$
2. $3x + 4 < -2$
3. $\frac{x}{2} - 1 > 3$
4. $4x - 5 < 6$
5. $2 - x < 1$
6. $3 - 2x > 5$
7. $7 - 4x < 1$
8. $x - 3 > -4$
9. $2 - x < 8$
10. $1 - x < 1$
11. $1 + x > -1$
12. $x - 2 > 0$
13. $x - (1 - x) < 0$
14. $2 - 3x < 5x + 1$
15. $1 - x > 3x + 2$

НЕЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА.

Општи облик. — Општи облик неједначине другог степена јесте:

(1) $ax^2 + bx + c > 0$ и

(2) $ax^2 + bx + c < 0$.

Ако обе стране прве неједначино помножимо са —1, добићемо други њен облик:

$$-a^2x - bx - c < 0.$$

Решавање неједначине другог степена. — Да бисмо решили неједначину:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

ми ћемо леву страну ставити да је равна нули и решити по x. Ту могу да наступе ова 3 случаја:

1. случај. — Једначина $ax^2 + bx + c > 0$ има два неједнака корена: x_1 и x_2. Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a(x-x_1)(x-x_2) > 0.$$

Ако је a позитивно, тада ће горња неједначина остати у важности за све вредности веће од већег корена и мање од мањег корена.

Ако је $x_2 > x_1$ тада је за $a > 0$:

$$x > x_2 > x_1 \text{ или:}$$
$$x < x_1 < x_2$$

Ако је $a < 0$, тада је горња неједначина у важности само ако је x између корена:

$$x_1 < x < x_2$$

2. случај. — Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има двојни корен (два једнака корена). Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a(x - x_1)^2 > 0$$

Пошто је квадрат сваког стварног броја позитиван, то ће наша неједначина, док је $a > 0$, важити за све вредности *икса*, изузев $x = x_1$, када се своди на једначину $(x - x_1)^2 = 0$.

Ако је $a < 0$, нема решења. Зашто?

3. случај. — Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има уображене корене. Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a\,[x - (p + qi)]\,[x - (p - qi)] > 0 \quad \text{то јест.}$$
$$a\,[(x - p) - qi]\,[(x - p) + qi] > 0$$

а то је најзад:

$$a\,[(x - p)^2 + q^2] > 0.$$

Квадрати стварних бројева су увек позитивни, те ће израз у средњој загради бити позитиван за *сваку* вредност икса.

Ако је $a > 0$, наша неједначина важи за *све* вредности икса.

Ако је $a < 0$ наша неједначина не важи ни за једну вредност икса. Нема решења, пошто ће због негативног a израз на левој страни бити увек негативан, то јест *мањи од нуле*.

Примери решавања неједначине 2 степена. — *Пример 1.* — *Решити неједначину:*

$$2x^2 - 7x + 3 > 0,$$

Ставимо:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Одатле је:

$$x_1 = 3,\; x_2 = \frac{1}{2}.$$

Горњу неједначину можемо овако написати:

$$2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Овде је $a = 2 > 0$. За све вредности веће од 3 и мање од $\frac{1}{2}$, горња неједначина постоји. Н. пр. за $x = 5$:

$$2\,.\,25 - 35 + 3 = 50 - 35 + 3 = 18 > 0.$$

Пример 2. — Решити неједначину:

$$-25x^2 + 30x - 9 < 0,$$

Помножимо је са — 1:

$$25x^2 - 30x + 9 > 0.$$

Ставимо: $25x^2 - 30x + 9 = 0.$

Одатле је:

$$x_1 = \frac{3}{5} \qquad x_2 = \frac{3}{5}.$$

Пошто је овде $a = 25 > 0$, ова неједначина важи за све вредности *икса*, сем за $x = \frac{3}{5}$.

И збиља је, н. пр. за $x = 0$,

$$-9 < 0.$$

за $x = 10$:

$$-2500 + 300 - 9 < 0.$$

Пример 3. — Решити неједначину:

$$-3x^2 + 6x - 15 > 0.$$

Ставимо: $-3x^2 + 6x - 15 = 0$.

Одатле је: $x_1 = 1 + 2i$, $\quad x_2 = 1 - 2i$

Нашу неједначину можемо овако написати:

$$-3\,[x - (1 + 2i)]\,[x - (1 - 2i)] > 0$$

а то је даље:

$$-3\,[(x - 1) - 2i]\,[(x - 1) + 2i] > 0$$

$$-3\,[(x - 1)^2 - (2i)^2] > 0$$

$$-3\,[(x - 1)^2 + 2^2] > 0.$$

Квадрати у загради су увек позитивни. Помножени негативним бројем (—3) дају увек негативан број на левој страни. Негативан број је увек мањи од нуле, те наша неједначина нема решења. Пробај!

ВЕЖБАЊА.

Решити ове неједначине:

1. $2x^2 - 5x + 2 > 0$
2. $3x^2 - 16x + 5 > 0$
3. $10x^2 - 11x + 1 < 0$
4. $x^2 - 4x + 4 < 0$
5. $-x^2 + 6x - 9 < 0$
6. $-x^2 + 10x - 25 > 0$
7. $-4x^2 + 10x - 4 > 0$
8. $3x^2 + 5x + 7 > 0$
9. $-2x^2 + 5x - 9 > 0$
10. $-8x^2 + 7x - 20 > 0$
11. $x^2 - 5x + 6 > 0$
12. $4x^2 - 5x + 6 < 0$
13. $2x^2 - 3x + 4 < 0$
14. $3x^2 - 2x - 1 > 0$
15. $6x^2 - 4x - 2 < 0$
16. $5x^2 + 6x - 7 < 0$
17. $8x^2 - 5x - 3 < 0$
18. $4x^2 - 4x - 1 > 0$
19. $9x^2 - 5x - 1 > 0$
20. $7x^2 - 5x - 3 < 0$
21. $x^2 - 10x + 9 < 0$
22. $x^2 - 10x + 9 < 0$

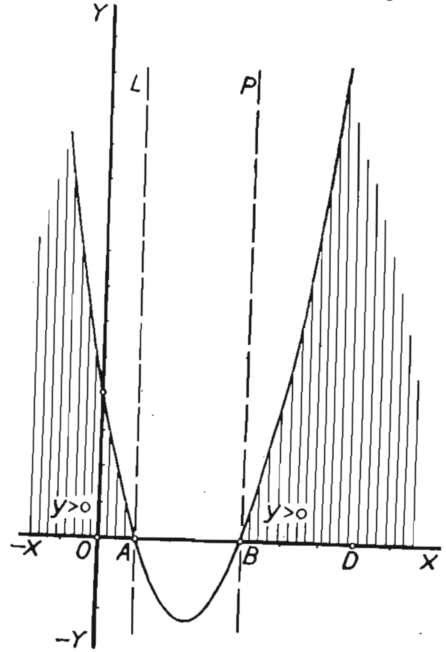
ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ ПРОМЕНЉИВОМ.

Пример I. — Испитати шта представља неједначина.

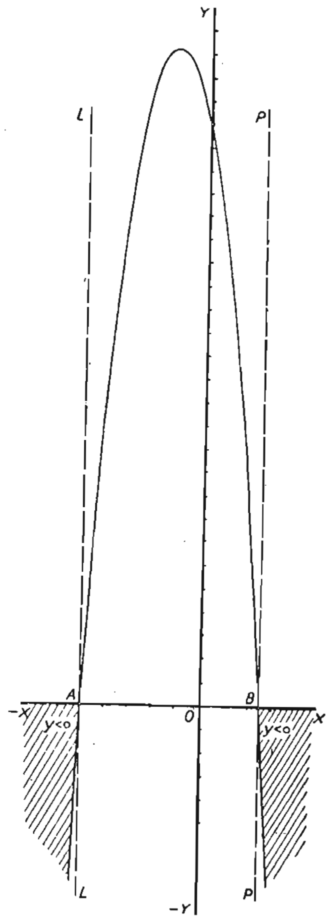
$$x^2 - 5x - 4 > 0.$$

Ставимо $y = x^2 - 5x + 4$. Конструишимо криву $y = x^2 - 5x + 4$. То је парабола са слике 6. Она сече апсцисну осовину у тачкама A (1,0) и B (4,0). Наша неједначина каже да ординате

треба да буду позитивне. Оне су позитивне за све тачке наше криве лево од праве L и десно од праве P.



Сл. 6.



Сл. 7.

Наша неједначина представља ординатне наше криве за апсцисе лево од A и десно од B. Тако имамо одређен низ тачака чије апсцисе задовољавају дату неједначину. Да ли само ординате наше криве задовољавају дату неједначину? Има ли још тачака, чије ће ординате бити позитивне, кад подесно изаберемо x? Где леже те тачке? Да ли бисмо могли рећи, да наша неједначина важи за апсцисе свих тачака у пољу DBP? А у пољу OAL? Да ли бисмо онда имали одређене низове тачака? Како бисмо израчунали y за дато x?

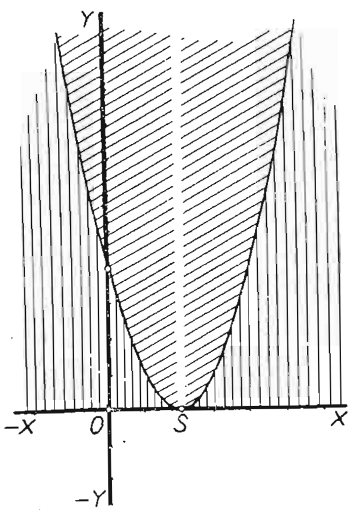
Пример II. — Шта представља неједначина.

$$-2x^2 - 5x + 25 < 0?$$

Ставићемо $y = -2x^2 - 5x + 25$ и нацртати криву $y = -x^2 - 5x + 25$. То је парабола са слике 7. Она сече апсцисну осовину у тачкама A $(-5{,}0)$ и B $(+2\frac{1}{2}, 0)$. Наша неједначина представља ординате наше параболе за апсцисе лево од A и десно од B.

Пример III. — Испитати шта представља неједначина

$$x^2 - 4x + 4 > 0.$$



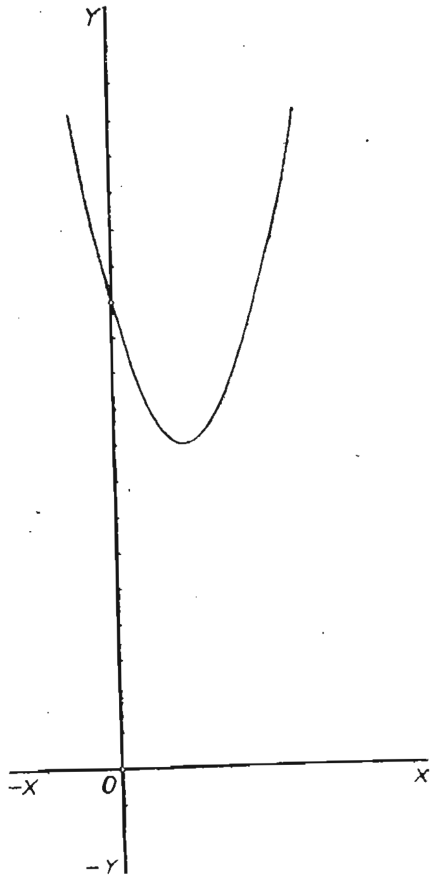
Сл. 8.

Ставићемо $y = x^2 - 4x + 4$ и нацртати ту криву. То је паробола са слике 8. Она *додирује* апсцисну осовину у тачци S (2,0).

Наша неједначина представља све ординате наше параболе, сем ординате тачке S.

Пример IV. — Испитати шта представља неједначина.

$$x^2 - 4x + 13 < 0.$$



Сл. 9.

Нацртаћемо криву $y = x^2 - 4x + 13$. То је парабола са слике 9. Види се да су све ординате позитивне. Негативних ордината нема. Она нити сече, нити додирује апсцисну осовину. Наша неједначина нема решења, јер слика казује да ова парабола *нема* негативних ордината.

ВЕЖБАЊА.

Испити шта представљају ове неједначине:

1.	$x^2 - 3x + 2 > 0$	9.	$x^2 + 5x + 6 < 0$
2.	$x^2 - 8x + 16 > 0$	10.	$x^2 - 2x - 15 > 0$
3.	$3x^2 - 7x - 6 < 0$	11.	$x^2 - 3x - 5 > 0$
4.	$x^2 - 4x + 5 < 0$	12.	$x^2 + 6x + 25 > 0$
5.	$x^2 - 8x + 15 < 0$	13.	$x^2 + 6x + 8 < 0$
6.	$x^2 - 10x + 25 > 0$	14.	$x^2 - 6x - 16 < 0$
7.	$5x^2 + 17x - 12 > 0$	15.	$x^2 - 7x - 9 < 0$
8.	$x^2 - 8x + 17 > 0$	16.	$x^2 - 8x + 25 > 0.$

III. — ЈЕДНАЧИНЕ 3., 4. И ВИШЕГ СТЕПЕНА КОЈЕ СЕ МОГУ РЕШИТИ ПОМОЋУ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА. — ИЗЛОЖИТЕЉНА ЈЕДНАЧИНА.

БИНОМНЕ ЈЕДНАЧИНЕ 3. И 4. СТЕПЕНА.

Биномне једначине уопште јесу оне једначине, чији је полином од два члана. Њихов општи облик је;

$$ax^n + b = 0.$$

Биномне једначине 3. степена. — Општи облик биномне једначине 3. степена је ово:

$$ax^3 + b = 0.$$

Поделићемо је са a, да би смо добили чист куб у првом изразу:

$$x^3 + \frac{b}{a} = 0.$$

Ми знамо, да можемо раставити на чинитеље збир кубова облика $p^3 + q^3$. Зато ћемо израз $\frac{b}{a}$ написати у облику куба

$$x^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3 = 0$$

а то је даље:

$$\left\{x + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right\}\left\{x^2 - x\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right\} = 0.$$

Овде имамо два чинитеља чији је производ раван нули. Значи да један од њих *мора* бити раван нули, а могу и оба:

$$x + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$$

$$x^2 - x\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0.$$

Кад решимо те две једначине, добијемо 3 корена:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{\left\{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right\}^2 - 4\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}}}{2}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}}}{2}$$

Пример 1. — Решити једначину $x^3 + 8 = 0$.
Овде је $a = 1$, $b = 8$.

$$x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt{-3\sqrt[3]{64}}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-12}}{2} = 1 + \sqrt{-3} = 1 + 3\,i$$

$$x_3 = 1 - 3\,i.$$

И збиља је:

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x_1 = -2$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ а одатле је:}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

$$x_2 = 1 + 3\,i$$
$$x_3 = 1 - 3\,i.$$

Пример 2. — Решити једначину:

$$4x^3 - 108 = 0$$

Овде је:

$$a = 4,\ b = -108,\ \frac{b}{a} = -27,\ \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = -3,\ \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2 = 9.$$

Према томе је:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{-3\,.\,9}}{2} = \frac{-3 + 3\,i\sqrt{3}}{2}$$
$$x_3 = \frac{-3 - 3\,i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3. — Решити једначину

$$3x^3 + 4 = 0.$$

Овде је

$$a = 3,\ b = 4,\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3},\ \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}},\ \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}.$$

Према томе је:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}} + \sqrt{-3\sqrt[3]{\frac{16}{9}}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt{-3\sqrt[3]{\frac{16}{9}}}}{2}$$

Биномне једначине 4. степена. — Биномна једначина 4. степена овако изгледа, кад је поделимо коефицијентом уз x^4: и други члан бинома напишемо у облику четвртог степена:

$$x^4 + a^4 = 0.$$

Њу можемо написати овако:

$$(x^2)^2 - (a^2 i)^2 = 0$$

а то се може даље раставити на два чинитеља другог степена:

$$(x^2 + a^2 i)(x^2 - a^2 i) = 0.$$

Сваки од ових чинитеља даје два корена, те ће бити:

$$x_1 = a\sqrt{-i},\ x_2 = -a\sqrt{-i},\ x_3 = a\sqrt{i},\ x_4 = -a\sqrt{i}.$$

Ако је биномна једначина 4. степена дата у облику разлике: имаћемо:

$$x^4 - a^4 = 0$$

$$(x^2)^2 - (a^2)^2 = 0$$

$$(x^2 + a^2) = 0 \text{ и } (x^2 - a^2) = 0$$

Из прве једначине имамо:

$$x_1 = ai, \; x_2 = -ai.$$

Из друге једначине имамо:

$$x_3 = a, \; x_4 = -a.$$

Пример 1. — Решити једначину:

$$x^4 + 16 = 0.$$

Ову једначину можемо редом овако писати:

$$(x^2)^2 - (4i)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4i)(x^2 - 4i) = 0$$

$x^2 + 4i = 0$ даје ове корене: $x_1 = 2\sqrt{-i}$ и $x_2 = -2\sqrt{-i}$

$x^2 - 4i = 0$ даје ове корене: $x_3 = 2\sqrt{i}$ и $x_4 = -2\sqrt{i}$.

Пример 2. — Решити једначину:

$$x^4 - 81 = 0.$$

$$(x^2)^2 - (3^2)^2 = 0$$

$$(x^2)^2 - 9^2 = 0$$

$$(x^2 + 9)(x^2 - 9) = 0$$

$x^2 + 9 = 0$ даје ове корене: $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$

$x^2 - 9 = 0$ даје ово корене: $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

БИКВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Биквадратне једначине су једначине, у чијем се полиному појављује непозната свега у два члана али тако, да је степен непознате у једноме члану два пута већи од степена непознате у другоме члану.

Њихов тип је:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Решавају се сменом $x^n = y$.

Кад се та смена изврши, добије се:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Кад се нађе y, треба наћи x из једначине $x^n = y$.

Пример. — Решити једначину

$$3x^6 - 2x^3 - 1 \;\; 0$$

$$x^3 = y$$

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x^3 = 1 \qquad (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Ова једначина даје три корена:

$$x_1 = 1, \; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ако узмемо $y_2 = -\frac{1}{3}$, имаћемо:

$$x^3 = -\frac{1}{3}$$

$$x^3 + \left\{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right\}^3 = 0$$

$$x^3 + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)^3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)\left(x^2 - \frac{x}{3}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right) = 0$$

а одатле још три корена:

$$x_4 = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}. \qquad x_5 = \frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} + \sqrt{-\sqrt[3]{3}}}{2}$$

$$x_6 = \frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} - \sqrt{-\sqrt[3]{3}}}{2}$$

СИМЕТРИЧНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Симетричне једначине су оне једначине, у чијем полиному једнаки коефициенти симетрично леже према средини полинома.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + cx^2 + bx + a = 0.$$

Симетрична једначина 3. **степена**. — Ово је општи облик једначине 3. степена:

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

Да би она била симетрична, треба да је:

$$A_0 = A_3 \text{ и } A_1 = A_2.$$

Према томе симетрична једначина 3. степена овако изгледа:

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_1x + A_0 = 0.$$

Ради лакшег рачунања, ми ћемо је овако писати:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Пример: $3x^3 - 4x^2 - 4x + 3 = 0.$

$$a = 3, \ b = -4$$

Решавање симетричних једначина 3. степена. — Симетрична једначина 3. степена има у ствари свега 2 коефицијента: *a* и *b*. Зато се она лако и решава.

Нека нам је дато да решимо ову симетричну једначину:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Скупићемо уједно изразе са истим коефицијентима;

$$a\,(x^3 + 1) + bx\,(x + 1) = 0.$$

Растављањем израза $(x^3 + 1)$ добићемо:

$$a\,(x + 1)\,(x^2 + x + 1) + bx\,(x + 1) = 0$$

а то је даље:

$$(x + 1)\,[a\,(x^2 + x + 1) + bx] = 0.$$

Кад је производ два израза раван нули, *мора* један од њих бити раван нули, а можемо их оба ставити да су равни нули:

$$x + 1 = 0 \text{ и } [ax^2 + (a + b)\,x + a] = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$$x_1 = -1.$$

Из друге:

$$x = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{-(a + b) \pm \sqrt{-3a^2 + 2ab + b^2}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(a + b) + \sqrt{-3a^2 + 2ab + b^2}}{2a}$$

$$x_3 = \frac{-(a + b) - \sqrt{-3a^2 + 2ab + b^2}}{2a}$$

Пример 1. — Решити једначину:

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(3x^3 + 3) + 4x^2 + 4x = 0$$
$$3(x^3 + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$
$$3\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)\,[3(x^2 - x + 1) + 4x] = 0$$
$$(x + 1)\,(3x^2 + x + 3) = 0$$

$x + 1 = 0$ а одатле: $x_1 = -1$

$3x^2 + x + 3 = 0$ а одатле: $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{-35}}{6}$ $x_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{-35}}{6}$

Пример 2. — Решити једначину:

$$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$$

Ова једначина није симетрична, пошто јој нису једнаки коефицијенти који су подједнако удаљени од крајева полинома ове једначине.

$$+2 \neq -2$$
$$-5 = +5.$$

Али пошто симетрично положени коефицијенти имају једнаке апсолутне вредности, можемо и ову једначину решити на исти начин као и симетричне једначине. Решићемо је скупљањем чланова чији су сачинитељи једнаки по апсолутној вредности.

$$(2x^3 - 2) - (5x^2 - 5x) = 0$$
$$2\,(x - 1)\,(x^2 + x + 1) - 5x\,(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)\,[2x^2 + 2x + 2 - 5x] = 0$$
$$(x - 1)\,(2x^2 - 3x + 2) = 0$$

И сад:

$x - 1 = 0$ а одатле: $x_1 = 1$

и $2x^2 - 3x + 2 = 0$ а одатле: $x_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{i}{4}\sqrt{7}$

$$x_3 = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{7}$$

Симетричне једначине четвртог степена. — Њихово решавање показаћемо на једноме примеру.

Решити једначину:

$$2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0.$$

Скупимо у један збир симетричне чланове

$$(2x^4 + 2) + (x^3 + x) + x^2 = 0.$$

Поделимо целу једначину са x^2:

$$\left(2x^2 + \frac{2}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Ако ставимо $z = x + \dfrac{1}{x}$ имаћемо:

$$z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Према томе је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = z^2 - 2.$

Извршимо те две смене, па ћемо имати:

$$2(z^2 - 2) + z + 1 = 0$$

а одатле

$$2z^2 - 4 + z + 1 = 0$$

или:

$$2z^2 + z - 3 = 0.$$

Ова једначина даје за z две вредности: $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{3}{2}$.

Свако z даће нам по две вредности за x:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ а одатле: } x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \text{ а одатле: } x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{7} \text{ и } x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{7}.$$

Напомена. Симетричне једначине зову се још и реципрочне једначине.

ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Ирационалне једначине су оне једначане, код којих се под једним или под више корена налазе функције икса. Н. пр.:

$$\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{f_1(x)} = \sqrt[p]{f_2(x)} + f_3(x)$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 6} + \sqrt{x^4 - 7x + 8} = \sqrt[5]{x^2 - 3x + 9}.$$

Решавање ирационалних једначина. — Ми ћемо узети само најпростији случај, где су сви корени квадратни.

Ирационалне једначине решавају се *степеновањем.* Знамо да су степеновање и кореновање две супротне радње. Кад корен степенујемо кореновим изложитељем, добићемо подкорену количину.

Пре него што се пређе на степеновање једначине треба урадити ово:

1). Ако је полином једначине бином са једним или два корена, треба корене раздвојити, један на једну, а други на другу страну једначине. На тај начин се само *једним* степеновањем ослобођавамо корена.

2). Ако је полином једначине трином са једним кореном, тај корен треба оставити сам на једној страни.

Ако је полином једначине трином са два корена, свеједно је како ћемо делити тај трином. Главно је да један члан тринома пређе на десну страну.

Напомене 1. — После сваког степеновања треба вршити ново груписање. Ако је остао само један корен, треба га оставити самог на једној страни, па опет степеновати.

2. — Кад се нађе корен, треба га увек пробати у задатој једначини. Дешава се да смо сасвим правилно решили једначину, а добивени корен ипак не задовољава једначину. У томе случају корен задовољава једначину у којој је пред кореном супротни знак.

Пример. — Решити једначину

$$\sqrt{3x + 4} = 3\sqrt{x} - 2$$

$$(\sqrt{3x + 4})^2 = (3\sqrt{x} - 2)^2$$

$$3x + 4 = 9x - 12\sqrt{x} + 4$$

$$-6x = -12\sqrt{x}$$

$$x = 2\sqrt{x}$$

Сад ћемо опет степеновати са 2:

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

Решења су: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Кад у задатој једначини сменимо прво решење, добијамо:

$$\sqrt{0 + 4} = 3\sqrt{0} - 2$$

$$2 = -2.$$

Добивено решење не одговара задатој једначини, али одговара једначини

$$-\sqrt{3x + 4} = 3\sqrt{x} - 2$$

Зашто је то тако?

Кад сменимо $x_2 = 4$, добијамо:

$$\sqrt{16} = 3 \cdot 2 - 2$$

$$4 = 6 - 2.$$

ИЗЛОЖИТЕЉНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Дефиниција. — Ми смо већ видели изложитељне *функције* овога облика: a^x. Знамо да је изложитељна функција она функција, чија се независно променљива налази у изложитељу. *Изложитељна једначина је она једначина, чија се непозната налази у изложитељу.*

Изложитељ се зове и *експонент.* Зато се и изложитељне једначине зову још и *експоненцијалне једначине.*

Примери изложитељних једначина.

I $2^{2x+1} = 8$

II $a^{2x-1} = b^{3x-7}$

III $a^{2x} + 4a^x = b$

РЕШАВАЊЕ ИЗЛОЖИТЕЉНИХ ЈЕДНАЧИНА.

Решавање непосредним логаритмовањем. — Видели смо да се могу логаритмовати само мономи. Знамо уз то да се изложитељ познате степене количине може израчунати само логаритмовањем. Зато се изложитељне једначине решавају тиме, што се логаритмише с обе стране, *ако су на обема странама једначине мономи.*

Пример 1. — Решити једначину $a^{2x+3} = a^9$

На обема странама су мономи, те се може логаритмовати:

$$\log a^{2x+3} = \log a^9$$

$$(2x+3) \log a = 9 \log a.$$

Скраћујемо са *log a*:

$$2x + 3 = 9$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

(Да ли смо ову једначину могли решити и без логаритама ?)

Пример 2. — Решити једначину $10^{5x-2} = 100000.$

Можемо логаритмисати па ће бити:

$$(5x-2) = 5$$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Пример 3. — Решити једначину $5^{x^2-3x} = 625.$

Можемо опет одмах логаритмисати:

$$(x^2-3x) \log 5 = \log 625$$

$$x^2 - 3x = \frac{\log 625}{\log 5}$$

Али $625 = 25 \,.\, 25 = 5^2 \,.\, 5^2 = 5^4.$

Зато је:

$$x^2 - 3x = \frac{\log 5^4}{\log 5}$$

$$x^2 - 3x = \frac{4 \log 5}{\log 5}$$

$$x^2 - 3x = 4.$$

Одатле је:

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1.$$

Решавање посредним логаритмисањем. — Има случајева где на обема странама нису мономи, те се не може одмах, непосредно, логаритмисати. На пр. у једначини

$$4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$$

не можемо одмах логаритмовати. У томе случају ми се трудимо да извршимо неку подесну смену, или да полиноме на странама једначине напишемо у облику монома, те да га можемо логаритмовати.

Пример 1. — Решити једначину $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257.$

Да се ослободимо разломака:

$$4x \,.\, 4^{x+1} + 64 = 257 \,.\, 4^x$$

То је даље:

$$4^{2x+1} + 64 = 257 \,.\, 4^x$$

Не можемо да логаритмујемо, пошто је на левој страни бином. Али можемо да извршимо једну корисну смену:

$$4^x = y$$

Добијамо једначину:

$$y^2 \,.\, 4 + 64 = 257y \quad \text{или}$$

$$4y^2 - 257y + 64 = 0$$

Одатле је $\qquad y_1 = 64 \qquad y_2 = \frac{1}{4}$

Имаћемо две једначине:

(1) $\qquad 4^x = 64 \qquad$ и $\qquad 4^x = \frac{1}{4} \qquad$ (2)

Сад можемо одмах логаритмовати:

$$\log 4^x = \log 64$$

$$x \log 4 = \log 64,$$

Али ми знамо да је $64 = 4^3$, те ће бити:

$$x = \frac{\log 4^3}{\log 4}$$

$$x = \frac{3 \log 4}{\log 4}$$

$$x_1 = 3.$$

То је прво решење. Друго решење добићемо из једначине (2):

$$4^x = \frac{1}{4}$$

$$x \log 4 = 0 - \log 4$$

$$x \log 4 = -\log 4$$

$$x = -\frac{\log 4}{\log 4}$$

$$x_2 = -1.$$

Пример 2. — Решити једначину $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363.$

Горњу једначину можемо написати и у овоме облику:

$$3^x + \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} + \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 363.$$

Не може одмах да се логаритмује, пошто је на левој страни полином. Али ми можемо да напишемо леву страну у облику производа

$$3^x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right) = 363.$$

Можемо сад израчунати вредност збира у загради:

$$3^2 = 9$$
$$3^3 = 27$$
$$3^4 = 81$$

Зато ће бити:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{81} = \frac{121}{81}$$

Дакле:

$$3^x \,.\, \frac{121}{81} = 363.$$

Одатле је:

$$3^x = \frac{363 \,.\, 81}{121} \qquad \frac{363}{121} = 3$$

$$3^x = 3 \,.\, 81$$
$$3^x = 3 \,.\, 3^4$$
$$3^x = 3^5$$
$$x \log 3 = 5 \log 3$$
$$x = 5.$$

(Може ли ова једначина да се реши и без логаритама?)

ВЕЖБАЊА.

Реши ове биномне једначине:

1. $x^3 + 27 = 0$
2. $x^3 - 8 = 0$
3. $2x^3 - 128 = 0$
4. $125x^3 + 8 = 0$
5. $2x^3 + 27 = 0$
6. $x^3 + 8 = 0$
7. $3x^3 - 18 = 0$
8. $6x^3 - 8 = 0$
9. $4x^3 + 500 = 0$
10. $17x^3 + 1 = 0$
11. $x^3 - 1 = 0$
12. $x^3 - 11 = 0$
13. $x^4 + 625 = 0$
14. $2x^4 - 32 = 0$
15. $3x^4 + 243 = 0$
16. $5x^4 - 5 = 6$
17. $2x^4 - 1 = 0$
18. $5x^4 + 1 = 0$
19. $x^4 - 8 = 0$
20. $2x^4 + 2 = 0$
21. $x^4 - 500 = 0$
22. $2592 - x^4 = 0$
23. $6 - 6x^4 = 0$
24. $-10x^4 = 10$
25. $10 - 9x^4 = 0$
26. $16x^4 - 25 = 0$
27. $81x^4 + 4 = 0$

Реши ове биквадратне једначине:

28. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
29. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
30. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
31. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
32. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
33. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
34. $x^4 - 5x^2 - 668 = 0$
35. $16x^4 + \frac{7}{x^2} 113 = 0$
36. $25x^2 - \frac{4}{x^2} - 9\frac{3}{4} = 0$
37. $9x^4 - \frac{16}{x^2} + 32 = 0$
38. $15x^4 + \frac{4}{x^2} - 15\frac{2}{3} = 0$
39. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
40. $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
41. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
42. $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$
43. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$
44. $x^6 + x^3 = 2$
45. $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$
46. $3x^6 - 2x^3 - 176 = 0$
47. $x^6 - 7x^3 + 12 = 0$
48. $x^6 + 3x^3 - 10 = 0$
49. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
50. $2x^6 + x^3 - 1 = 0$
51. $3x^6 - 80x^3 - 27 = 0$

Реши ове симетричне (реципрочне) једначине:

52. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$
53. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$
54. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
55. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
56. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
57. $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$
58. $12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0$
59. $12x^3 + 37x^2 + 37x + 12 = 0$
60. $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 + 0$
61. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$
62. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$
63. $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$
64. $x^4 - 4\frac{2}{x}x^3 + 7\frac{5}{12}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 1 = 0$
65. $x^4 - 4\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 4\frac{1}{2}x + 1 = 0$
66. $x^4 - 5\frac{5}{6}x^3 + 10\frac{1}{3}x^2 - 5\frac{5}{6}x + 1 = 0$
67. $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$
68. $x^4 + 2\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$
69. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$
70. $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$
71. $12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12 = 0$
72. $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$
73. $18x^4 + 21x^3 - 94x^2 + 21x + 18 = 0$
74. $24x^4 - 10x^3 - 77x^2 - 10x + 24 = 0$
75. $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$
76. $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$
77. $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0$
78. $3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0$
79. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$
80. $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$
81. $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$
82. $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

Реши ове ирационалне једначине:

83. $\sqrt{x+4}=7$

84. $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$

85. $x+\sqrt{25-x^2}=0$

86. $x-\sqrt{25-x^2}=1$

87. $x-\sqrt{169-x^2}=17$

88. $x+\sqrt{5x+10}=8$

89. $x+\sqrt{10x+6}=8$

96. $\sqrt{3x^2-7x+5}-\sqrt{x-8}=0$

97. $3x-7\sqrt{x}+2=0$

98. $\sqrt{x+5}=x-1$

99. $x+\sqrt{x+3}=4x-1$

100. $1-6x+\sqrt{5(x+4)}=0$

101. $2x-\sqrt{2x-1}=x+2$

102. $3x-4\sqrt{x-7}=2(x+2)$

103. $x-10=\frac{2}{3}(x-1)-\sqrt{2x-1}$

104. $a+\sqrt{a^2-x^2}=x$

90. $4x+\sqrt{5-4x}=5$

91. $\sqrt{1+\sqrt{x^4+x^2}}=x-1$

92. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

93. $3x+\sqrt{6x+10}=35$

94. $\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}=-2$

95. $\sqrt{2+3x}+5=0$

105. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$

106. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$

107. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$

108. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$

109. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

110. $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}$

111. $\sqrt{9x+1}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{19x+30}$

112. $3\sqrt{5x+4}+2\sqrt{3x}=6\sqrt{2x-5}$

113. $x(x+3)=\sqrt{346+3x(x+3)}-2$

[У вежбању 113 изврши ову смену: $x(x+3)=y$]

114. $\sqrt{\frac{5}{x^2}+49}-\sqrt{\frac{5}{x^2}-49}=7$

[У вежбању 114 изврши ову смену: $\frac{5}{x^2}+49=y$. Тада је $\frac{5}{x^2}-49=y-98$].

115. $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}+\frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2\frac{1}{5}$

116. $\sqrt{3x+2}+\sqrt{7+6x}=\sqrt{7x+72}$

117. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+1}$

118. $\sqrt{5+\sqrt{x}}+\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{2(6+\sqrt{x})}$.

Реши ове једначине:

119. $3^x=3^5$

120. $a^x=a^4$

121. $a^{x+5}=a^7$

122. $a^{8x-1}=a^{3x+14}$

123. $a^{\frac{4}{5}x+3}=a^{2x-3}$

124. $a^{0,65x+1,72}=a^{2,27+0,4x}$

125. $a^{(x+3)^{x-3}}=a^{(x+4)^{x+2}}$

126. $a^{17x+18}\cdot a^{5x-23}=a^{29x-13}\cdot a^{127-14x}$

127. $(3^{67-18x})^2\cdot(3^{11x-9})^3=(3^{5x+7})^4\cdot 3^{86-24x}$

128. $(a^{8x-5})^{8x-9}(a^{5x+3})^{8x-1}=(a^{6x-5})^{3x+2}(a^{6x-5})^{4x-3}$

129. $10^{5x-2}=1000000$

130. $2^{-x}=\frac{1}{8}$

131. $\sqrt[3]{a^{5x+3}}=a^{12}$

132. $8^{-x}=\frac{1}{2}$

133. $2^{x-4}\cdot 4^{2x-3}=8^{x+2}$

134. $\sqrt[4]{a^{7x-5}}=\sqrt{a^{3x+4}}$

135. $2^{5x-2}-2^{5x-3}+2^{5x-1}=68$

136 $2^{3x+5}+4^{1\frac{1}{2}x+3}-8^{x-1}=352$

137. $2^5\cdot(a^{2x-1})^{3x-2}\cdot(4^x)^{3x-1}=(8^{7-x})^{x+7}\cdot 16^{4x}$

138. $3\log x=2\log 8$

139. $\frac{1}{3}\log x^6=\frac{1}{2}\log 81$

140. $\log 16x-\log 8x^2=2\log 4x^2-\log 8x$

141. $19^x=65$

142. $\sqrt[3x]{34,123}=\sqrt{\frac{252}{115}}$

143. $(4^{3-x})^{2-x}=1$

144. $(10^{5-x})^{6-x}=1000$

145. $\sqrt[x]{a}=a^x$

146. $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

147. $2^{x+2}+9^{x+1}=810$

148. $3^x=177147$

149. $\left(\frac{3}{4}\right)^x=51\frac{1}{2}$

150. $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29$

151. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$

152. $5^{2x}-7\cdot 5^x-450=0$

153. $2^{3x-5}=228$

154. $100\cdot 10^x=\sqrt[x]{1000^5}$

155. $2^{x+1}+4^x=80$

156. $2^x+4^x=272$

157. $3^{\frac{x}{2}}=768$

158. $24^{3x-1}=10\,000$

159. $5\cdot 3^{2x}-7\cdot 3^x-3456=0$

160. $3^{x+1}+3^{x-2}-3^{x-3}+3^{x-4}=750$

161. $3^{2x}\cdot 2^{2x-3}=7^{x-1}\cdot 4^{x+3}$

162. $3\cdot 2^{x+3}=192\cdot 3^{x+3}$

IV. — КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ВИШЕ НЕПОЗНАТИХ. — ПРОБЛЕМИ У ВЕЗИ СА СИСТЕМОМ ДРУГОГ СТЕПЕНА. — ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ДРУГОГ СТЕПЕНА.

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ВИШЕ НЕПОЗНАТИХ.

Систем квадратних једначина. — Две или више квадратних једначина, за које претпостављамо да су задовољене истим вредностима за непознате, чине *систем квадратних једначина*.

Пример. — Систем квадратних једначина:

$$3x^2+4y^2-5x=14$$
$$5x^2-y^2-3y=-5.$$

Обе ове квадратне једначине задовољавају се вредностима $x = 1$, $y = 2$:

$$3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1 = 14$$
$$5 \cdot 1^2 - 2^2 - 3 \cdot 2 = -5.$$

Систем квадратних једначина с двема непознатима. — Систем квадратних једначина може бити од две, три и више једначина. Ми ћемо показати само неколико врсти система с двема непознатима.

I. — *Систем у коме је једна једначина линеарна* (првог степена):

$$x^2 - y^2 = 32$$
$$x - 2y = 2.$$

II. — *Систем у коме једна једначина има све изразе другог степена:*

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$
$$x^2 + 3x + y^2 - 4y = 1$$

III. — *Систем у коме једна једначина садржи неки познати образац:*

$$x^2 - 2xy + y^2 = a$$
$$x^2 - y^2 = b.$$

IV. — *Систем у коме се једна једначина може раставити на чинитеље првог степена:*

$$3x^2 - xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 5y - 19 = 0.$$

Прву једначину можемо овако написати:

$$3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0.$$

Овако ћемо је раставити на чинитеље:

$$3x\ (x - y) + 2y\ (x - y) - 7\ (x = y) = 0$$
$$(x - y)\ (3x + 2y - 7) = 0$$

Види се да смо је раставили на два чинитеља првога степена.

Решавање система квадратних једначина с двема непознатима. — Пре него што се пређе на решавање система, треба образовати полином обеју једначина (ослободити се заграда и разломака, пребацити све изразе на леву страну, свести и уредити полином).

Општи облик квадратне једначине с двема непознатима овако изгледа:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Кад се уреде оба полинома према овоме општем облику, треба загледати да није код нашег система који од 4 горе поменута случаја. Ако јесте, онда систем треба овако решавати:

Једна једначина у систему је линеарна. — Нека нам је дат систем:

(1) $$x^2 - y^2 - 5x - 2 = 0$$
(2) $$2x - 3y - 6 = 0.$$

Линеарну једначину (2) решићемо по иксу и добивену вредност сменити у квадратној једначини (1):

(3) $$x = \frac{6 + 3y}{2}$$

$$\frac{36 + 36y + 9y^2}{4} - y^2 - 6 \cdot \frac{6 + 3y}{2} - 2 = 0.$$

Кад се ова једначина упрости, добије се:

$$5y^2 + 6y - 32 = 0$$

а одатле:

$$y_1 = 2,\ y_2 = -3{,}2$$

Ако добивене вредности сменимо у (3) добићемо:

$$x_1 = 6,\ x_2 = -1{,}8.$$

Решења нашег система јесу:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -1{,}8$$
$$y_1 = 2 \quad y_2 = -3{,}2.$$

Овај начин на који смо сад радили зове се *метод замене.*

Хомогена једначина у систему другог степена. — Једначина је *хомогена* по x и y, ако су јој сви изрази истог степена. Нека нам је дат систем:

(1) $$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$
(2) $$x^2 + 3x + y^2 - 4y = 1.$$

Прва једначина је *хомогена.* Извршимо ову смену у (1) једначини:

$$y = tx$$

где је t произвољан број.

(1) $$2x^2 - 5x \cdot tx + 3\ (tx)^2 = 0$$
$$2x^2 - 5x^2t + 3x^2t^2 = 0.$$

Избацимо из ње x^2:

$$2 - 5t + 3t^2 = 0.$$

Одавде је:

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{2}{3}.$$

Пошто смо одредили t, имаћемо:

$$y = t \cdot x, \quad \text{то јест} \quad y = x.$$

Ову вредност за y сменимо у једначини (2):

(2) $$x^2 + 3x + \overset{x}{\cancel{y}}{}^2 - 4x = 1$$
$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Одавде је:

$$x_1 = 1,\; x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Пошто је $y = x$, то ће бити:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Другу вредност за t нећемо смењивати.

Систем у коме једна једначина (или обе) садржи неки познати образац. — Нека нам је дат систем:

(1) $$x^2 - 2xy + y^2 + 3 = 12$$
(2) $$x^2 - y^2 + 15 = 0:$$

Ове две једначине могу овако да се напишу:

(1) $$(x - y)^2 = 9$$
(2) $$(x - y)(x + y) = -15$$

Из прве имамо:

(3) $$x - y = \pm 3.$$

Узмимо прву вредност (+ 3), па је сменимо у другој једначини:

$$3(x + y) = -15$$

а одатле:

(4) $$x + y = -5.$$

Једначине (3) и (4) дају систем двеју линеарних једначина. Из њега имамо:

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -4.$$

Из једначине (3) узмимо другу вредност (— 3), па је сменимо у (2). Добићемо овај систем.

$$x + y = 5$$
$$x - y = -3.$$

Он даје ово решење:

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 4.$$

Растављање на линеарне чинитеље. — Нека је дат систем:

(1) $$3x^2 + xy - 2y^2 - 21x + 14y = 0$$
(2) $$x^2 + 2y^2 - 5y - 19 = 0.$$

У првој једначини пада у очи, да неки коефициенти имају заједничких чинитеља: 3 и — 21, — 2 и 14.

Напишимо те изразе један уз други:

$$3x^2 - 21x - 2y^2 + 14y + xy = 0.$$

Смета само xy. Али њега можемо раставити на два сабирка тако, да је први дељив са 3, а други са 2:

$$3x^2 - 21x - 2y^2 + 14y + 3xy - 2xy = 0$$

а то је даље:

$$3x^2 + 3xy - 21x - 2y^2 - 2xy + 14y = 0$$
$$3x(x + y - 7) - 2y(y + x - 7) = 0$$
(1) $$(x + y - 7)(3x - 2y) = 0.$$

Један од ова два чинитеља *мора* бити раван нули. Узмимо

(3) $$(x + y - 7) = 0$$

Одатле је $y = 7 - x$. Сменом у једначини (2) добијамо:

$$x^2 + 2(7 - x)^2 - 5(7 - x) - 19 = 0.$$

Та једначина даће нам x, а једначина (3) даће нам y, кад у њој ставимо добивену вредност за (x)

Кад се у задатом систему не појави ниједан од ових случајева, онда треба комбиновати полиноме датих једначина тако, да испадне једна непозната.

Комбиновање полинома једначина. — Дат је систем:

(1) $$x^2 - 3xy + 3y^2 - 5x + 6y - 9 = 0 \;|$$
(2) $$5x^2 - 6xy + 6y^2 - 8x + 12y - 9 = 0 \;| - 2.$$

Поделимо доњу једначину са (—2), па ће бити:

(1) $$x^2 - 3xy + 3y^2 - 5x + 6y - 9 = 0$$
(2) $$-\frac{5}{2}x^2 + 3xy - 3y^2 + 4x - 6y + \frac{9}{2} = 0$$

Саберимо их, па ћемо добити:

$$\left(1 - \frac{5}{2}\right)x^2 - x + \frac{9}{2} - 9 = 0.$$

Одатле је лако наћи x. Кад сменимо нађено x у ма којој од задатих једначина, моћи ћемо наћи y.

Какво је ово комбиновање једначина?

Кад ни тај поступак не помаже, морамо употребити *метод замене*, који је најтежи, али нас увек доводи до резултата. При томе методу обично се добија једначина 3. или 4. степена по x или по y. Због тога нам је он сада најмање подесан, ако ниједна једначина у систему није линеарна.

Пример. — Нека нам је дат систем:

(1) $$x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 7y - 11 = 0$$
(2) $$5x^2 - 7xy - 4y^2 - 13x + 17y - 19 = 0.$$

Метод замене састоји се у овоме: треба једну једначину решити по једној непознатој, па добивену вредност сменити у другој једначини:

$$x^2 - 3xy - 4x + 5y^2 - 7y - 11 = 0$$
$$x^2 - x(3y + 4) + 5y^2 - 7y - 11 = 0$$
$$x = \frac{(3y + 4) \pm \sqrt{(3y + 4^2) - 4(5y^2 - 7y - 11)}}{2}$$
$$(3) \qquad x = \frac{(3y + 4) \pm \sqrt{-11y^2 + 5y + 60)}}{2}$$

Сменимо ову вредност у једначини (2):

$$5 \cdot \frac{9y^2 + 24y\,16 + (-11y^2 + 52y + 60) + 2(3y+4)\sqrt{-11y^2 + 52y + 60}}{2}$$
$$-4y^2 + 17y - 19 - \frac{21y^2 + 28y + 7y\sqrt{-11y^2 + 52y + 60}}{2}$$
$$-\frac{39y + 52 + 13\sqrt{-11y^2 + 52y + 60}}{2} = 0.$$

Кад се ослободимо разломака и оставимо само корене на левој страни, а десну страну сведемо, имаћемо:

$$(16y + 14)\sqrt{-11y^2 + 52 + 60} = 68y^2 - 314y + 70$$

а одатле:

$$(8y + 7)^2(-11y^2 + 52 + 60) = (34y^2 - 157y + 35)^2.$$

Ово је једначина 4. степена. Њена решења треба сменити у нађеној вредности за x у једначини (3).

На страни 37. видео си да је метод замене веома користан кад је једна једначина линеарна. Као што си видео на предњем примеру, метод замене нам није користио. Он нас је довео до једне једначине четвртог степена коју ми још не умемо да решимо. Како се решавају такве једначине учићеш на вишим школама.

Зато је најбоље, кад су у систему све јадначине квадратне, да решиш систем неком подесном комбинацијом, ако се може, а не заменом.

Систем са више непознатих. — Њих треба увек свести на систем од две једначине на један од горе побројаних начина.

Проблеми у вези са системом квадратних једначина.

За њих важи оно исто што смо рекли за проблеме уопште. Зато ћемо ми овде само навести неколико примера.

Пример 1. — Збир квадрата два броја за 1 је већи од двоструког производа та два броја; разлика квадрата та два броја је 5. Који су ти бројеви?

Нека је први број x, а други y. Кад изразимо алгебарски њихове особине, добићемо ове две једначине:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 2xy$$
$$(2) \qquad x^2 - y^2 = 5$$

Оне се могу написати и у овоме облику:

$$(1) \qquad (x - y)^2 = 1$$
$$(2) \qquad (x - y)(x + y) = 5.$$

Решавање оваквог система показано је на стр. 38.

Наш систем даје ова два пара решења:

$$x_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -3$$
$$y_1 = 2 \qquad\quad y_2 = -2.$$

Пример 2. — Неки путник пређе известан пут за 4 часа. Други путник за то исто време пређе 8 километера мање. Зна се да другоме путнику треба 42 минута више него првоме, па да пређе пут од 28 километара. Колином брзином се крећу ови путници?

Нека је: брзина првога x

брзина другога y.

За 4 часа први је путник прешао 4x километара.

„ 4 „ други „ „ „ 4y „

Та два пута се разликују за 8 километара:

$$(1) \qquad 4x - 8 = 4y.$$

Пут од 28 километара прећи ће први путник за $\frac{28}{x}$ часова.

Исти ће пут прећи други путник за $\frac{28}{y}$ часова. Та два времена се разликују за 42 минута. Кад се сетимо да је минут $\frac{1}{60}$ од часа, имаћемо:

$$(2) \qquad \frac{28}{y} \quad \frac{28}{x} = \frac{42}{60}.$$

Добијамо овај систем:

$$(1) \qquad x - y - 2 = 0$$
$$(2) \qquad xy - 40x + 40y + 0.$$

Ако x из прве једначине $x = y + 2$ сменимо у (2), добићемо:

$$y^2 + 2y - 80 = 0$$

а одатле $y_1 = 8 \quad y_2 = -10$

а затим $x_1 = 10 \quad x_2 = -8.$

Први путник се креће брзином од 10 километара на час, а други брзином од 8 километара. Негативна решења одбацујемо. (Зашто?)

Графичко решавање система другог степена.

За графичко решавање система другог степена узећемо само најпростији случај.

Општи облик једначине другог степена с двема непознатима је

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ми ћемо узети систем:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ &D_1x + E_1y + F_1 = 0. \end{aligned} \right. \\ &(2) \end{aligned}$$

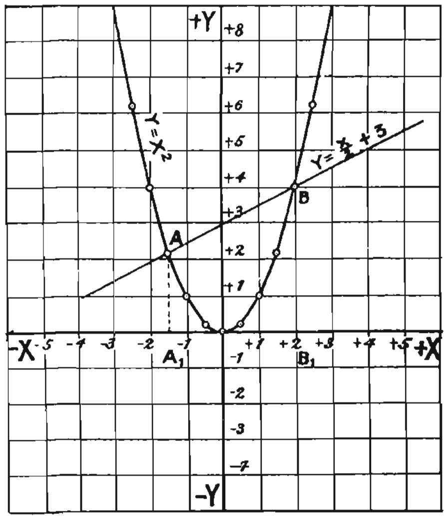
Све једначине облика (1) представљају *параболу*, а једначине облика (2) *праву линију*.

Решавање система $Ax^2 + Ey = 0$ и $D_1x + E_1y + F_1 = 0$. — Нека нам је дат овај систем

(3) $$y - x^2 = 0.$$

(4) $$2y - x - 6 = 0.$$

Једначина (3) $y = x^2$ представља параболу, коју ми већ веома добро познајемо.



Сл. 10.

Једначина (4) представља праву линију која одсеца на координатним осовинама одсечке — 6 и + 3.

Кад нацртамо параболу и праву, добијемо слику 10. Са ње се види да се наше две линије секу у тачкама A и B, чије су координате:

$$A\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right) \text{ и } B(+2, +4).$$

Добили смо ова два пара вредности:

$$A\,\mathrm{I}\left\{\begin{aligned} x_1 &= -1\frac{1}{2} \\ y_1 &= 2\frac{1}{4} \end{aligned}\right. \qquad B\,\mathrm{II}\left\{\begin{aligned} x_2 &= 2. \\ y_2 &= 4. \end{aligned}\right.$$

Задатак смо решили добро само тако, ако парови вредности I и II испуњавају ова два услова:

1) представљају координате пресечних тачака на слици

2) задовољавају обе дате једначине.

На слици видимо да горње вредности I и II за x и y представљају збиља координате тачака A и B, у којима се секу наше криве. (Праву линију зовемо „крива првог степена"). Како тачке A и B леже на обема кривама, њихове координате морају задовољавати обе дате једначине. И збиља је:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{1}{4} - \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ 2\,.\,2\frac{1}{4} - \left(-1\frac{1}{2}\right) - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ за први пар}$$

и

$$\left.\begin{aligned} 4 - 2^2 &= 0 \\ 2\,.\,4 - 2 - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ за други пар.}$$

Решавање система $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ и $D_1x + E_1y + F_1 = 0$. — Нека нам је дат систем.

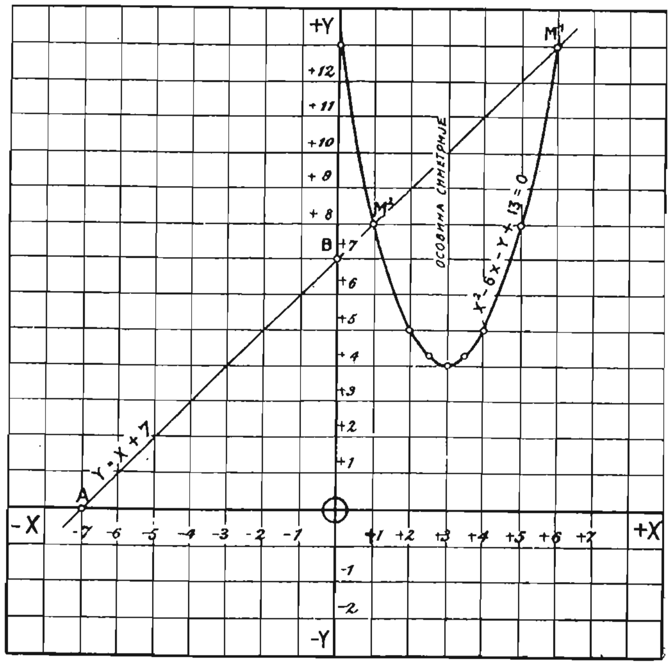
(1) $$x^2 - 6x - y + 13 = 0$$

(2) $$y - x - 7 = 0.$$

Прва једначина представља параболу:

$$y - 4 = (x - 3)^2$$

чију смо једначину написали у каноничном облику. Координате темена су јој $x = +3$, $y = +4$ (слика 11). Осовина симетрије



Сл. 11.

је права $x = 3$. Ту параболу можемо сад лако конструисати.

Права $y - x - 7 = 0$ пресеца координатне осовине у тачкама $A\,(-7{,}0)$ и $B\,(0, +7)$.

И њу нам је лако конструисати.

Са слике се види да се те две криве секу у тачкама M_1 и M_2, чије су координате:

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 6 \\ y_2 = 13 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

Ако ове вредности за x и y унесемо у наше задате једначине, имаћемо:

$$\left.\begin{array}{r} 6^2 - 6 \;.\; 6 - 13 + 13 = 0 \\ 13 - \;\;6 - \;\;7 = 0 \end{array}\right\} \text{ за координате тачке } M_1$$

$$\left.\begin{array}{r} 1^2 - 6 \;.\; 1 - \;\;8 + 13 = 0 \\ 8 - \;\;1 - \;\;7 = 0 \end{array}\right\} \text{ за координате тачке } M_2$$

Према томе, ми смо цртежем нашли ово решење нашег система:

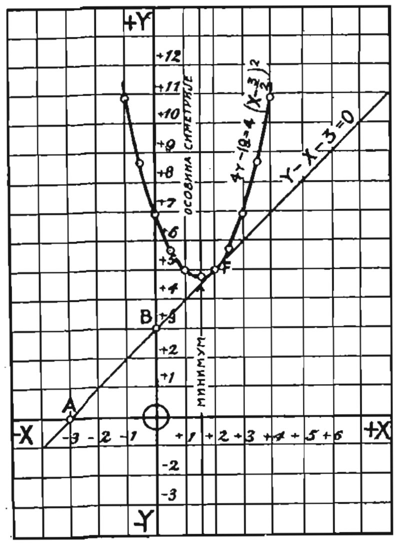
$$x_1 = 6,\; y_1 = 13 \qquad \text{и} \qquad x_2 = 1,\; y_2 = 8.$$

Узмимо сад овај систем:

$$(1) \qquad 4\,y - 19 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$(2) \qquad y - x - 3 = 0.$$

Прва једначина представља параболу, а друга праву линију (слика 12.)



Сл. 12.

Са слике се види да је права AB тангента на параболи у тачци $F\,(+2, +5)$. Кад у горњем систему сменимо x са 2, а y са 5. имаћемо:

$$4 \,.\, 5 - 19 = 4\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$5 - 2 - 3 = 0$$

$$20 - 19 = 4 \,.\, \left(+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0 = 0$$

$$1 = 4 \,.\, \frac{1}{4}$$

$$1 = 1$$

$$0 = 0.$$

Обе једначине су задовољне вредностима $x = 2$, $y = 5$.

Ако другу једначину решимо по y и сменимо је у (1), у добићемо квадратну једначину

$$x^2 - 4\,x + 4 = 0$$

која има *два једнака корена* $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$. То значи да се две пресечне тачке ових кривих поклапају. А то даље, значи, да права није сечица ове параболе, већ *тангента*. То слика потврђује.

ВЕЖБАЊА УЗ ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

Решити системе:

1. $x + y = 7.5$, $xy = 14$
2. $x - y = 2$, $xy = 63$
3. $3x - 2y = 0$, $xy = 13{,}5$
4. $2x - y = 5$, $xy = 42$
5. $x + y = 7$, $x^2 - y^2 = 21.$
6. $x - y = 5$, $x^2 + y^2 = 37$
7. $x + y = 8$, $x^2 + y^2 = 34$
8. $x - y = 1$, $3x^2 + y^2 = 31$
9. $3x - y = 1$, $5x^2 - y^2 = -5$
10. $2x + y = 7$, $x^2 + y^2 = 13$
11. $3x^2 - 5xy + 4y^2 + 2x - 3y = 7$, $4x - 3y = 5$
12. $x^2 + xy + y^2 = 19$, $xy = 6$
13. $x^2 + 2xy + y^2 = 25$, $x + y = 5$
14. $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 - xy = 3$
15. $x^2 + \frac{8}{3}xy - y^2 = 0$, $2x^2 + 3y = 26$
16. $16x^2 + 5xy - y^2 = 0$, $y^2 - 10x = 26$
17. $x + y = 5$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
18. $x + y = \frac{21}{8}$, $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}$
19. $3x - 2y = 10$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1{,}25$
20. $2x - y = 3$, $4x^2 - 5y^2 = 3x + 5$
21. $3x^2 - 2xy = 8$, $2x^2 - 3y^2 = 11$
22. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $x + y = 13$

(У вежбању 22. прву једначину степенуј са 2, затим остави само корен на левој страни, па опет степенуј са 2).

23. $x^2 + y^2 = 20$, $\frac{x}{y} = 2$
24. $x + y = 2{,}5$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4{,}25$

25. $x^2 + y^2 + x + y = 62$
$x^2 - y^2 + x - y = 50$

26. $(7 + x)(6 + y) = 80$
$x + y = 5$

27. $x^2 + y^2 = 89$
$x^2 - y^2 = 39$

28. $3x^2 - 5y^2 = 353$
$7x^2 - 4y^2 = 56$

29. $ax^2 + by^2 = c$
$dx^2 - cy^2 = f$

37. $x + \sqrt{3y^2 - 2} = 10$
$2x - 3y = 1$

38. $4 - \sqrt{5x^2 + 2} = 1$
$5y - 3x = 38$

39. $7x + 4y = 57$
$xy = 14$

40. $ax + by = c$
$xy = d$

41. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 18$
$12xy = 1$

30. $5y + 3xy = 114$
$xy = 33$

31. $\sqrt{x + 13} = \sqrt{2y^2 - 1}$
$\sqrt{2x^2 - 8} = \sqrt{y^2 + 39}$

32. $\sqrt{3x^2 + 16} = \sqrt{4y^2 - 36}$
$\sqrt{5x^2 - 1} = \sqrt{3y^2 - 6}$

33. $\sqrt{3x^2 + 16} = \sqrt{4y^2 - 36}$
$\sqrt{5x^2 + 1} = \sqrt{3y^2 + 6}$

34. $xy + y = 28$
$2x - 3y = 0$

35. $y - \sqrt{3x - 3} = 6$
$4x + 3y = 35$

36. $x + \sqrt{2y + 4} = 9$
$3x - 2y = 3$

42. $\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1$
$xy = 10$

43. $\frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1$
$xy = 3$

44. $7x^2 - 3y^2 = 27\frac{1}{4}$
$xy = 1$

45. $x^2 + y^2 = 73$
$xy = 24$

46. $x^2 + + y^2 = 97$
$xy = 36.$

Решићемо систем 45.

Ставимо $x + y = z$ и $x - y = v$. Тада ће бити: $x = \frac{v + z}{2}$, $y = \frac{z - v}{2}$. Сменом у датоме систему добијамо:

$$\left(\frac{v + z}{2}\right)^2 + \left(\frac{v - z}{2}\right)^2 = 73$$
$$\frac{v + z}{2} \cdot \frac{v - z}{2} = 24$$

а то је даље:

$$v^2 + 2vz + z^2 + v^2 - 2vz + z^2 = 292$$
$$v^2 - z^2 = 96$$

а то је даље:

$$v^2 + z^2 = 146$$
$$v^2 - z^2 = 96$$

Одатле је:

$$2v^2 = 242$$
$$v^2 = 121$$
$$v = \pm 11 \text{ и } z^2 = 146 - 121 \text{ т. ј. } z^2 = 25 \text{ или}$$
$$z = \pm 5$$

Кад знаш v и z, добијаш ове системе првога степена:

$x + y = 5$, $x - y = 11$ и $x + y = -5$, $x - y = -11$ и $x + y = -5$, $x - y = 11$ и $x + y = 5$, $x + y = -11$

Из њих ћеш добити вредности за x и y:

$x_1 = +8$, $y_1 = +3$; $x_2 = -8$, $x_2 = -3$

47. $x^2 + y^2 = a$
$xy = b$

48. $x^2 + y^2 = \frac{25}{36}$
$axy = 2$

Систем 47. можемо решити и без горе показане смене у вежбању 45. Овако $y = \frac{b}{x}$. Сменом у првој једначини имамо:

$x^2 + \left(\frac{b}{x}\right)^2 = a$, а одавде једначина:

$x^4 + b^2 = ax^2$. Сад изврши ову смену: $x^2 = z$, па ради даље! Ради како ти је лакше

49. $3x^2 - 2y^2 = 6(x - y)$
$xy = 0$

50. $4x^2 - 9y^2 = 0$
$4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

51. $(x + 4)(y - 3) = 0$
$(x + 7)(y - 7) = 0$

52. $x^2y = a$
$xy^2 = b$

(У вежбању 52. подели леву страну левом, а десну десном, па ћеш добити једну простију једначину).

53. $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0$
$4x^2 - 5xy + 6y^2 - 7 = 6y - 1$

54. $5y^2 - 6x^2 - 13xy = 0$
$4y^2 + 2xy - 7x^2 = 4$

55. $xy = a$
$\frac{x}{y} = b$

56. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$
$x^2 - y^2 = -1$

57. $x^2 - 2xy + y^2 = 9$
$x_2 - y^2 = 9$

58. $x^2 - xy = a$
$x^2y - xy^2 = b$

(У вежбању 58. растави на чинитеље полиноме на левим странама, па подели леву с левом десну с десном страном).

59. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$
$x - y = 0,3$

60. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$
$x^2 + y^2 = 160$

61. $x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = a$
$y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = b$

62. $\frac{x + 1}{y + 1} = 2$
$\frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} = 5$

63. $x + y = a$
$x^3 + y^3 = b$

64. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$
$x + y = b$

(У вежбању 63. подели доњу једначину горњом. Затим реши прву од датих једначина по y, па смени у добивеној квадратној једначини.

У вежбању 64. изврши ову смену: $x = z^3$, $y = v^3$).

65. $\sqrt{x - 5} + \sqrt{y + 2} = 5$
$x + y = 16$

66. $\sqrt{5 - 3x + x^2} + \sqrt{5 - 3y + x^2} = 6$
$x + y = 3$

67. $\sqrt{3 - x + \frac{1}{5}x^2} + \sqrt{3 - y + \frac{1}{4}y^2} = 3$
$x + y = 4$

68. $\sqrt{x(1 - y)} + \sqrt{y(1 - x)} = a$
$x + y = b$

69. $x^2 + y^2 = xy$
$x + y = xy$

70. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{y}$
$x + y = 10$

71. $27x^2 + 46xy - 73y^2 = 0$
$3x^2 - 4xy + y^2 + 7 = 8(x + y) - 11$

72. $x^3 + y^3 = 7xy$
$28(x + y) = 7xy$
(Види вежбање 63)

73. $\begin{aligned} x^2 &= y^2 + z^2 \\ x + y + z &= 24 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2000. \end{aligned}$ **74.** $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 6 \\ x + y &= 3. \end{aligned}$

(У вежбању 73. сабери 1. и 3. једначину, па ћеш добити једну једначину по x. Ту вредност смени у другим двема једначинама, па ћеш добити систем од 2 једначине. Или реши 2. једначину по z, па добивену вредност за z смени у 1. и 3. једначини.

У вежбању 74. реши трећу једначину по y, па смени у 1. и 2. једначини).

75. $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z &= 25 \\ x^2 + z^2 &= 34 \\ y^2 + z^2 &= 41 \end{aligned}$ **77.** $\begin{aligned} xy &= 56 \\ xz &= 24 \\ yz &= 21 \end{aligned}$

76. $\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 &= 107 \\ 4x^2 - 5z^2 &= 83 \\ 3y^2 + 2z^2 &= 44 \end{aligned}$ **78.** $\begin{aligned} x + y + z &= 30 \\ 3x - y + z &= 34 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 &= 84 \end{aligned}$

79. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 10 \\ x - 3y + 2z &= -5 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 350 \end{aligned}$ **84.** $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 35 \\ xy &= 6 \\ x + y &= z \end{aligned}$

80. $\begin{aligned} 2x + 4y - 9z &= 2 \\ 3x - 8y + 6z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 29 \end{aligned}$ **85.** $\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ xy &= 108 \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}$

81. $\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= 59 \\ yz &= 20 \\ x + y + z &= 19 \end{aligned}$ **86.** $\begin{aligned} x + y + z &= 132 \\ x^2 &= y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6050 \end{aligned}$

82. $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 50 \\ xy + xz + yz &= 47 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}$ **87.** $\begin{aligned} x + y + z &= 29 \\ x^2 + y^2 &= 289 \\ xy &= 72 \end{aligned}$

83. $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 40 \\ xy &= z \\ x + y &= 8 \end{aligned}$ **88.** $\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 12 \\ xy + xz + yz &= 11 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$

(Задатак из вежбања 88. имали су да раде кандидати на вишем течајном писменом испиту у Другој Мушкој Београдској Гимназији 11. јуна 1925. године.

Радићеш га овако:

Другу једначину помножи са 2; трећу једначину дигни на квадрат; у њој смени $2xy + 2yz + 2xz = 22$, па је одузми од прве једначине. Добићеш једну једначину по z. Сад ради сам даље!).

89. — Подели број 27 на два дела тако, да четвороструки квадрат првога дела увећан за петоструки квадрат другога, даје 1620.

90. — Два броја стоје у размери као 3 : 13. Производ им је 735. Нађи те бројеве.

91. — Растави број 100 на два дела тако, да збир њихових квадрата буде 5882.

92. — Нађи два узастопна парна броја чији је производ 224.

93. — Збир два броја је a, а збир њихове размере и реципрочне (обрнуте) вредности њихове размере је b. Који су то бројеви? Дискусија. Примена: $a = 13$, $b = 2{,}225$.

94. — Нађи двоцифрени број који има ове особине: кад се он подели збиром својих цифара, добије се количник 4, а остатак нула; кад се производу његових цифара дода 19, добије се број са истим цифрама, али обрнутим редом.

95. — Збир два броја је 34. Троструки њихов производ већи је од збира њихових квадрата за 284. Који су то бројеви?

96. — Збир квадрата два броја повећан за први број даје 205, а повећан за други даје 200. Који су то бројеви?

97. — Производ два броја повећан за први број даје 170, а повећан за други даје 176. Који су?

98. — Производ два броја већи је за 91 од десетострукот првога броја, а за 51 већи од десетострукот другог броја. Који су то бројеви?

99. — Збир два броја додан збиру квадрата та два броја даје 686. Разлика та два броја додана разлици њихових квадрата даје 74. Који су то бројеви?

100. — Збир квадрата два броја је 360. Да је први већи за 1, а други за 3, збир њихових квадрата био би 500. Који су то бројеви?

101. — Ако се једноме двоцифреном броју дода 9, добије се број са истим цифрама, али у обрнутоме реду. Ако се тражени број подели производом својих цифара, добије се 6. Који је тај број?

102. — Две цеви утичу у један басен. Кад је отворена само прва, њој треба 2 часа више него другој да напуни басен. Кад су обе отворене, басен се напуни за 2 часа и 24 минута. Колико времена је потребно свакој цеви посебице да напуни басен?

103. — Две цеви могу да напуне један басен за 18 часова; за које време би напунила басен свака од њих посебице, кад се зна, да првој треба 27 часова више него другој, па да сама напуни басен.

104. — Два радника за 25 часова сврше половину једнога посла, кад га ради сваки посебице; али кад раде заједно, сврше цео посао за 12 часова. Колико је часова би требало свакоме посебице, па да сврши цео посао?

105. — Два радника приме за један посао: први 80 динара, а други 45. Први је радио 5 часова више од другога. Да је први радио онолико часова колико је радио други, а други колико први, примили би исту суму. Пита се колико часова сваки радио и колико се свакоме плаћа на час.

106. — Један комад тканине продат је за 1800 динара. Купац примети да му је погрешно послата тканина која је јефтинија 2,20 дин. по метру, али да у послатоме комаду има 15 метара више него у ономе што га је он поручио. Он се реши да га задржи, пошто и тај погрешно послати комад стаје 1800 динара. Пита се колико је било метара у послатоме комаду и пошто је метар.

107. — Један трговац прода два мала комада чоје. Први прода за 1200 динара, а други, који има 2 метра више, за 1300 динара. Да је први комад продао по цени по којој је продао други и обрнуто, продао би оба комада за 2540 динара. Колико је било метара у сваком комаду?

(Означи са x цену првог, са y цену другог, а са z број метара у првоме комаду).

108. — Неко има 27000 динара; ту суму разделио је на два дела и дао посебице под интерес по истом проценту. Први део ће са интересом бити после 6 месеци 12 300 динара, а други после 8 месеци 15 500 динара. Како је разделио свој капитал и под који проценат га је дао под интерес?

109. — Два капитала су дата под интерес. Оба заједно износе 60000, а збир процената је 12. Први доноси 1300 динара, а други 2340 динара интереса годишње. Који су то капитали?

110. — Два капитала су дата под интерес по разним процентима. Први доноси годишње 500 динара интереса, а већи је од другога за 4000 дин. Други доноси годишње 390 дин. интереса, али је дат под интерес за $^3/_2\%$ више него први. Који су то капитали?

111. — Два разна капитала су дата под интерес по 6%. Оба износе заједно 30000 дин. Први је био 4 месеца дуже под интересом и донео је свега 1280 дин. интереса. Други је донео 840 дин. Који су то капитали?

112. — Кад се споје средине узастопних страна једнога правоугаоника, добије се ромб чији је обим 40 cm., а површина 96 cm². Колике су стране тога правоугаоника?

113. — Над истом хипотенузом леже два правоугла троугла. Управне стране првога разликују се за 9 cm., а другога за 13 cm. Колике су стране тих троуглова кад њихове површине заједно износе 90 cm².?

114. — У кругу полупречника $r = 15$ cm., кроз тачку M повучене су две тетиве тако, да им је производ одсечака 200. Колико је далеко тачка M од центра?

115. — Две тетиве се секу у кругу; једна је од 22 m, а одсечци на оној другој су 12 m и 8 m. Колики су одсечци оне прве?

116. — Одредити стране једнога правоуглога троугла, кад се зна да су њихови мерни бројеви три узастопна цела броја.

117. — Наћи површину једнога равнокрако-правоуглога троугла, чији је обим $2s$. Дискусија!

118. — Стране једног троугла су три цела узастопна броја, а површина му је 84 cm². Наћи стране.

(Сети се Хероновог обрасца $p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$!)

119. — Површина једнога правоугаоника је p, а дужина му је за d већа од висине. Наћи стране. Дискусија!

Примена: $p = 3200$ m.², $d = 14$ m.

120. — У кругу полупречника $r = 25$ *m*²., уписати правоугаоник чије се стране разликују за 17 *m*.

121. — Израчунати дужину управних страна једнога правоуглога троугла чија је површина 54 *m*²., а хипотенуза 15 *m*.

122. — Израчунати стране једнога правоуглога троугла чији је обим 36 *m*., а површина 54 *m*².

123. — Висина једне праве призме је 10 *cm*., основице су правоугаоници чија је ширина половина дужине. Површина призме је 216 *cm*². Израчунати: површине основица и површине страна.

124. — Израчунати ивице правоугла паралелепипеда, кад му је површина 180 *m*²., дијагонала на основици 20 *m*., а збир свих његових димензија 17 *m*.

125. — Два велосипедиста иду један другоме у сусрет са места удаљених 180 *km*. Први је пошао 1 час доцније, али је прелазио 3 *km*. на час више него други. Колико километара је прелазио на час први, а колико други, кад су се срели на средини пута? Колико времена је путовао први, а колико други?

126. — На кружној стази дугој 700 *m*. полазе два велосипедиста са почетка стазе у истоме смислу. Први је пошао 16 секунди доцније, а прелазио је у секунди $1\frac{1}{2}$ *m*. више од другога. Којом брзином и за које време се кретао први, кад је морао да обиђе круг, па да стигне другога?

Решити графички ове системе:

127. $y = x^2$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

128. $y = (x-1)^2$
$x + y = 1$

129. $y = 2\,(x+1)^2$
$x - y = 0$

130. $y - 1 = 3\,(x-2)^2$
$3x - 2y = 1$

131. $y - 5 = (x-1)^2$
$5x - 4y = 3$

132. $y = x^2 - 4x + 4$
$4x - 4y = 1$

133. $y = 4\,(x-3)^2 - 1$
$y - 1 = x - 2$

134. $y - 8 = 3\,(x-5)^2$
$y - x = 8$

135. $2y = 4\,(x-7)^2$
$7x - 6y = 0$

136. $x^2 - 3x - 7 = y - 1$
$x - y = 9$

137. $y = -3\,(x-1)^2$
$3y - 3x = 4$

138. $y - 1 = -2\,(x-4)^2$
$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$

139. $x^2 - 3x + 5 = y$
$x + y = 2$

140. $3x + 4y = 1$
$x^2 + 5x - 7 = y - 12$

141. $3y - 2x = 2$
$4x^2 - 5x - 6 = y$

142. $\frac{x-y}{3} = 1$
$2x^2 - 3x - 37 = y + 40.$

V. — МАТЕМАТИЧКИ РЕДОВИ.

АРИТМЕТИЧКИ РЕДОВИ.

Општа дефиниција редова. — Математички *ред* је низ бројева који се ређају по извесном *правилу* тако, да кад знамо неколика узастопна броја из тога реда, можемо продужити писање и осталих бројева.

На пример: 1, 2, 3, 4 . . . .

Овај низ бројева можемо продужити и надесно и налево, јер видимо да је то *природни низ бројева* са наше осовине. Дакле:

. . . . — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. . . . .

Исто тако можемо продужити и овај ред:

. . . — 2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

јер видимо да је то низ *парних* бројева.

Зашто смо могли продужити низ наша два горња реда? Зато што смо уочили *правило* по коме се они ређају.

Можемо ли продужити овај низ бројева:

$$1,\ \frac{3}{5},\ 7,\ -8,\ 9,\ -\frac{7}{9} \qquad ?$$

Не можемо, пошто не може никако да се уочи *правило* по коме се нижу ови наши брвјеви. Овај низ није математички ред.

Бројеви који сачињавају један ред зову се *чланови* тога реда.

Дефиниција аритметичког реда. — За један низ бројева кажемо да *граде аритметички ред*, или да *се налазе у аритметичком реду*, кад је *разлика* између два узастопна члана *стална*. Праћећи ту разлику увек одузимамо претходни члан од наредног. Горе смо већ имали два аритметичка реда:

$$\ldots\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ldots \quad \text{и}$$
$$\ldots\ldots -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\ \ldots\ldots$$

У првом реду је $(-1) - (-2) = 0 - (-1) = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 1.$

У другом реду је $0 - (-2) = 2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2.$

Ту сталну разлику обележаваћемо са d.

Ако *чланове* обележимо са $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ у аритметичком реду ће бити

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots \ldots\ldots = a_n - a_{n-1}.$$

Грађење аритметичког реда. — Кад знамо ма који члан једног аритметичког реда и разлику, можемо увек *начинити* ред. Ред градимо на тај начин, што познатоме члану додамо разлику; тако добивеном члану опет додајемо разлику и т. д.

Напомена 1. Аритметички ред зове се још и *аритметичка прогресија*. Ми ћемо подједнако употребљавати оба израза.

Напомена 2. — Аритметички ред је *неограничен* и налево и надесно. Међутим при рачунању нама се увек каже које чланове реда да узмемо у обзир. Тај члан којим почињемо зове се *први члан* и ми ћемо га обележавати са a_1. Члан којим се завршава наша прогресија зваћемо *последњи* или *енти члан* и обележаваћемо га са a_n.

Пример 1. — Начинити аритметичку прогресију од пет чланова, чији је први члан 3 и разлика 3.

$$3,\ (3+3),\ (3+3+3),\ (3+3+3+3),\ (3+3+3+3+3)$$

или

$$3, \qquad 6, \qquad 9, \qquad 12 \qquad 15.$$

Овде је $a_1 = 3$, $d = 3$, $a_n = 15$.

Пример 2. — Начинити аритметички ред од 7 чланова, кад је први члан — 9, а разлика + 5.

Биће:

$$(-9),\ (-9+5),\ (-9+5+5),\ (-9+5+5+5),$$
$$(-9+5+5+5+5),\ (-9+5+5+5+5+5),$$
$$(-9+5+5+5+5+5+5).$$

или

$$-9, \qquad -4, \qquad +1, \qquad 6, \qquad 11, \qquad 16, \qquad 21.$$

Овде је $a_1 = -9$, $d = 5$, $a_n = 21$.

Пример 3. — Начинити аритметичку прогресију од 4 члана чији је први члан — 7, а разлика — 4.

Биће:

$$-7,\ [-7+(-4)],\ [-7+(-4)+(-4)],\ [-7+(-4)+(-4)+(-4)]$$

или

$$-7, \qquad -11, \qquad -15, \qquad -19.$$

Овде је $a_1 = -7$, $d = -4$, $a_n = -19$.

Израчунавање последњег члана. — Некад нам је потребно да знамо вредност последњег члана a_n. Да бисмо га израчунали, ми ћемо најпре потсетити ученика на начин, на који постају чланови аритметичке прогресије. Из досадањих дефиниција и примера знамо да је:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$
$$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d = a_1 + 5d \text{ и т. д.}$$

Кад загледамо мало пажљивије у казаљке наших чланова на левој страни и сачинитеље уз d на крају десне стране, видимо, да је *сачинитељ уз d увек за 1 мањи од казаљке.*

То ћемо овако разумети. Узмимо један ред од 5 чланова.

$$2, \qquad 5, \qquad 8, \qquad 11, \qquad 14.$$

Између свака два члана празнину попуњава разлика 3:

$$2\underbrace{\overbrace{\qquad\quad}^{3}}_{d}5\underbrace{\overbrace{\qquad\quad}^{3}}_{d}8\underbrace{\overbrace{\qquad\quad}^{3}}_{d}11\underbrace{\overbrace{\qquad\quad}^{3}}_{d}14.$$

Ако на бројној линији узмемо бројеве 2 и 14, видећемо, да ћемо од 2 доћи до 14, ако пренесемо 4 пута d. Значи да је

$$14 = 2 + 4d \quad \text{Нацртај!}$$

Како увек има *за 1 мање* празнина него што има чланова у реду, биће:

$$(1) \qquad \boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d} \qquad \text{Упамти овај образац!}$$

Пример. — Израчунати последњи члан прогресије од 10 чланова, чији је први члан 6, а разлика 5.

Овде је $n = 10$, пошто прогресија има 10 чланова. Према томе је на основи обрасца (1):

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \quad \text{а то је даље:}$$
$$a_{10} = 6 + 9 \cdot 5$$
$$a_{10} = 6 + 45$$
$$a_{10} = 51.$$

И збиља је тај ред:

6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51.

Као што се види, *десети* члан је збиља 51, а он је *последњи* члан, пошто прогресија има свега *десет* чланова.

Збир аритметичке прогресије. — Често нам је потребно да знамо колико износе сви чланови једне прогресије заједно. Да бисмо дошли до обрасца који нам даје *збир* свих чланова прогресије, радићемо овако. Најпре ћемо означити са S (сума) збир свих чланова једне прогресије, а затим ћемо написати тај збир:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Збир се не мења ако сабирци промене места и ми ћемо због тога моћи да напишемо наш збир на ова два начина:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1.$$

Пошто у једном и у другом збиру има исти број сабирака, кад саберемо леву страну с левом, десну с десном, добићемо на десној страни n парова, које ћемо ставити у заграде:

(a) $$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-3} + a_4) + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Међутим сви ови збирови у заградама су једнаки и равни сваки посебице са $(a_1 + a_n)$. То долази отуда, што је у аритметичком реду *сталан* збир чланови који *симетрично* леже према средини реда.

Узмимо ред

1 4 7 | 10 | 13 16 19.

Средина реда је члан 10. Симетрично према њему (т. ј. подједнако удаљени десно и лево) леже чланови: 7 и 13, 4 и 16, 1 и 19. Међутим ми видимо да је

$$7 + 13 = 4 + 16 = 1 + 19 \qquad \text{Нацртај!}$$

Као што се види, збир симетричних чланова је раван двогубом производу средњег члана: $20 = 2 \cdot 10$.

То се може овако објаснити. Ако је средњи члан a_m, онда су му први наредни симетрични чланови·

$$a_m - d \text{ (лево) и } a_m + d \text{ (десно).}$$

А њихов збир је, види се, $2a_m$.

У реду

6, 11, 16, 21, 26, | 31, 36, 41, 46, 51

средина је на средини празнине између 26 и 31, а то је 28,5.

Према томе збир два и два симетрична члана је

$$2a_m = 2 \cdot 28{,}5 = 57.$$

И збиља је

$$6 + 51 = 11 + 46 = 16 + 41 = 21 + 36 = 26 + 31 = 57. \text{ Нацртај!}$$

Пошто у једнакости (*a*) имамо n збирова симетричних чланова, можемо цео тај низ сабирака сменити производом $n\ (a_1 + a_n)$. Отуда.

$$2S = n\ (a_1 + a_n).$$
$$S = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n).$$

Збир обично обележавамо казаљком n, која нам казује, да смо при сабирању узели n чланова нашег реда. Зато ћемо горњи образац за збир обележити овако:

(2) $$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n).}$$

Пример· — *Колики је збир чланове аритметичке прогресије од 10 чланова, чији је први члан 6, а последњи 51?*

Овде је $n = 10$
$a_1 = 6$
$a_n = 51$

Према томе ће збир бити:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\ (6 + 51) = 5 \cdot 57 = 285.$$

Испиши све чланове овог реда, па сабери, да се увериш, да му збир збиља износи 285.

Али нама се ретко даје последњи члан; обично нам се даје први члан и разлика. Зато ћемо извести још један образац за збир аритметичке прогресије.

Ако вредност за a_n из обрасца (1) сменимо у обрасцу (2), имаћемо.

$$S_n = \frac{n}{2}\left\{ a_1 + [a_1 + (n-1)\, d] \right\} \quad \text{а то је даље:}$$

(2′) $$S_n = \frac{n}{2}\ [2a_1 + (n-1)\, d].$$

Пример. — *Израчунати збир чланова аритметичке прогресије од 6 чланова, чији је први члан 0, а разлика 10.*

Овде је: $n = 6$
$a_1 = 0$
$d = 10.$

Према томе је:

$$S_6 = \frac{6}{2}\,[2 \,.\, 0 + (6 - 1) \,.\, 10] = 3 \,.\, 50 = 150.$$ Увери се!

Геометриски редови.

Дефиниције. — За један низ бројева кажемо да *чине геометриски ред* (*геометриску прогресију*) или да стоје у *геометриском реду*, ако је *количник* свака два узастопна броја *сталан*. При образовању количника увек делимо наредни члан претходним. Количник обежавамо са q.

Пример:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

Овде је:

$$\underline{\underline{q}} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = \frac{243}{81} = \frac{729}{243}$$

Грађење геометриске прогресије. — Из горњег примера, и из дефиниције излази, да се наредни члан добија, кад се претходни помножи количником:

$1 \qquad 1 \,.\, 3 \qquad (1 \,.\, 3) \,.\, 3 \qquad [(1 \,.\, 3) \,.\, 3] \,.\, 3$
$\{[(1 \,.\, 3) \,.\, 3] \,.\, 3\}$ и т. д.

Напомена. — И код геометриске прогресије обично нам је да само *извесшан* број чланова. Број којим почиње таква прогресија јесте *први* члан (a_1), а број којим се завршава јесте *последњи* члан (a_n) или n-ти члан. Члан a_n се у обема прогресијама зове још и *општи члан*. Зашто?

Израчунавање последњег члана. — Размишљајући слично ономе код израчунавања *последњег* (општег) члана у аритметичкој прогресији, имаћемо за геометриску прогресију:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \,.\, q$$
$$a_3 = a_2 \,.\, q = a_1 \,.\, q \,.\, q = a_1 \,.\, q^2$$
$$a_4 = a_3 \,.\, q = a_1 \cdot q^2 \,.\, q = a_1 \,.\, q^3$$
$$a_5 = a_4 \,.\, q = a_1 \,.\, q_1 \,.\, q = a_1 \,.\, q^4$$
— — — — — — — — — — —

(1) $$\boxed{\underline{\underline{a_n}} = a_1 \,.\, q^{n-1}.}$$ Упамти добро овај образац!

Пример. — У геометриској прогресији, чији је први члан 1, а количник 3, израчунати *пети* члан.

Овде је:

$$n = 5$$
$$a_1 = 1$$
$$q = 3.$$

Према томе је:

$$a_5 = 1 \,.\, 3^4 = 1 \,.\, 81 = 81.$$

Збир чланова геометриске прогресије. — Испишимо један збир:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots\ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Помножимо обе стране са q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots\ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Одузмимо горњи збир од доњег:

$$qS_n - S_n = -a_1 + (a_1q - a_1q) + (a_1q^2 - a_1q^2) + (a_1q^3 - a_1q^3) + \\ + \ldots + (a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}) + a_1q_n$$

$$S_n\,(q - 1) = a_1q^n - a_1$$

(2) $$\boxed{\underline{\underline{S_n}} = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}.}$$ Упамти добро овај образац!

Али прогресија може да *расте*:

1, 5, 25, 125, 625

или да *опада*:

$$1000,\ 200,\ 40,\ 8,\ \frac{8}{5},\ \frac{8}{25},\ \frac{8}{125}.$$

Прогресија која расте зове се *порастна прогресија*. Прогресија која опада зове се *опадна прогресија*.

Код *порастне* прогресије је $q > 1$, а
код *опадне* прогресије је $q < 1$

Према томе и добивени збирни образац (2) има два облика: један подесан за порастну прогресију, а један за опадну.

Ако је прогресија *порастна*, тада је $q > 1$, те је самим тим и $q^n - 1 > 1$. Према томе и бројитељ и именитељ разломка у обрасцу (2) су позитивни. Зато за *порастну* прогресију задржавамо облик (2) збирног обрасца:

$$S_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Овај образац се пише и у овоме облику:

(2) $$\boxed{S_n = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.}$$

За *опадну* прогресију је $q < 1$ $\left(\text{на пр. } q = \frac{1}{5}\right)$, те је самим тим и $q^n - 1 < 1$. Да не бисмо имали негативан бројитељ и именитељ, помножимо их оба са — 1, па ће збирни образац за *опадну* прогресију добити овај облик:

(2′)
$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.}$$
Упамти добро овај образац!

Пример 1. — Израчунати збир геометриске прогресије од 5 чланова, кад је први члан 1, а количник 5.

Пошто је $q > 1$, значи да је ово *порастна* прогресија, те ћемо применити образац (2).

Овде је:
$$a_1 = 1$$
$$q = 5$$
$$n = 5$$

Према томе је:
$$S_5 = 1 \cdot \frac{5^5 - 1}{5-1} = \frac{3125-1}{4} = \frac{3124}{4} = 781.$$
Увери се.

Пример 2. — Израчунати збир геометриске прогресије од 4 члана, чији је први члан 1000, а количник $\frac{1}{5}$.

Пошто је овде $q < 1$, ово је опадна прогресија, те ћемо употребити образац (2′).

Овде је
$$a_1 = 1000$$
$$q = \frac{1}{5}$$
$$n = 4 \quad \text{те је:}$$

$$S_4 = 1000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1-\frac{1}{5}} = 1000 \cdot \frac{1-\frac{1}{625}}{\frac{4}{5}} = 1000 \cdot \frac{\frac{624}{625}}{\frac{4}{5}} =$$
$$= 1000 \cdot \frac{624}{4 \cdot 125} = 1000 \cdot \frac{624}{500} = 2 \cdot 624 = 1248.$$

Збирни образац бесконачне опадне прогресије. — Прво да напоменемо да се *опадна* прогресија зове још и *конвергентна*, а *порастна дивергентна*.

Узмимо једну конвергентну прогресију:
$$256,\ 64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{1024},\ \frac{1}{4096} \dots$$

Тачкице на десној страни показују, да та прогресија није коначна; она се бескрајно протеже и *стално опада*.

Да видимо шта бива с њеним општим чланом a_n.

Штогод је n веће, ми се све више удаљујемо надесно; штогод се више удаљујемо надесно, чланови опадају и постају све мањи и мањи. Последњи члан дат је обрасцем:

$$S_n = \frac{1\cdot(1-5^5)}{1-5^2}$$

$$a_n = a_1\, q^{n-1}$$

Ако га применимо на наш конвергентни ред, биће:

$S_n =$

$$a_n = 256 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 256 \cdot \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Штогод је n веће, наш разломак на десној страни има све *већи* именитељ, то јест сâм разломак постаје све мањи и мањи. Кад је *n веома велико*, разломак
$$\frac{1}{4^{n-1}}$$
постаје *веома мали.*

$$S_4 = \frac{1000\,(1-}{1-\frac{1}{5}}$$

На пр. хиљадити члан био би:
$$a_{1000} = 256 \cdot \frac{1}{4^{999}}.$$

Наш разломак се толико смањио, да је већ *пришао нули.* Ако још *повећамо n*, наш разломак се и даље *смањује* и све ближе прилази нули. Најзад ако узмемо $n = \infty$, степен
$$4^{\infty}$$
постаје бескрајно велики, а разломак
$$\frac{1}{4^{\infty}}$$
постаје бескрајно мали, то јест нула.

Према томе и наш члан a_n, који лежи бескрајно далеко од првог члана, постаје:
$$a_n = 256 \cdot 0 = 0.$$
$$\text{за } n = \infty.$$

Ако хоћемо да саберемо све чланове једног *бесконачног* конвергентног реда, морамо узети бесконачно много чланова, пошто се наш ред свршава у бесконачности. То значи, да у обрасцу (2′) треба да ставимо $n = \infty$. Али тада ће бити, ако је $q = \frac{1}{m}$,
$$q^{\infty} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\infty} = \frac{1}{m^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Према томе образац:
$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
постаје
$$S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q}$$
то јест:

(2″)
$$S_n = a_1 \frac{1}{1-q}.$$

Пример. — Израчунати збир бесконачног реда чији је први члан 100, а количник $\frac{1}{10}$.

Овде је:

$$a_1 = 100$$
$$q = \frac{1}{10}$$
$$n = \infty.$$

Према томе је збир овог *конвергентног бесконачног* реда:

$$S_n = a_1 \frac{1}{1-q}$$

$$S_\infty = 100 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 100 \cdot \frac{10}{9} = \frac{1000}{9}.$$

Као што се види, *збир бесконачног конвергентног геометриског реда је коначан број*. Је ли тако и са дивергентним геометриским редом? Да ли код бесконачних аритметичких редова има дивергентних и конвергентних редова? Може ли код аритметичког реда n-ти члан тежити нули? Може ли нула бити члан геометриског реда? Зашто?

Периодични разломци. — Леп пример за збирове бесконачних конвергентних геометриских редова дају нам *периодични* разломци.

Просто-периодични разломци. — Израчунати вредност просто-периодична разломка 0,(5).

Знамо да то значи ово,

$$0,(5) = 0,555555\ldots\ldots.$$

Међутим овај бескрајни разломак можемо представити овим конвергентним бесконачним редом:

$$\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000}\ldots\ldots.$$

Количник овог реда је $q = \frac{1}{10}$. (Због тога ред и опада).

Збир ће бити:

$$0,(5) = S_\infty = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}.$$

Према томе ће бити:

$$0,(4) = \frac{4}{9}, \qquad 0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad 2,(7) = 2\frac{7}{9} \text{ и т. д.}$$

Изведи правило!

Мешовито-периодични разломак. — Израчунати вредност мешовито-периодична разломка 0,23(4).

Биће:

$$0,23(4) = 0,234 + 0,0004 + 0,00004 + 0,000004 + \ldots\ldots$$

а то је даље:

$$0,23(4) = 0,23 + 0,004 + 0,0004 + 0,00004 + \ldots\ldots$$

а то је опет даље:

$$0,23(4) = \frac{23}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{100000} + \ldots\ldots$$

Као што се види, први сабирак на десној страни није члан прогресије, пошто

$$\frac{4}{1000} : \frac{23}{100} \neq \frac{4}{10000} : \frac{4}{1000}.$$

Зато ћемо горњи мешовито-периодични разломак написати овако:

$$0,23(4) = \frac{23}{100} + \left[\frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{100000} + \ldots\ldots\right].$$

Прогресија у загради има количник $q = \frac{1}{10}$. Према томе горњи разломак биће даље:

$$0,23(4) = \frac{23}{100} + \frac{4}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

а одатле је:

$$0,23(4) = \frac{23}{100} + \frac{4}{1000} \cdot \frac{10}{9} = \frac{23}{100} + \frac{4}{900} = \frac{207+4}{900} = \frac{211}{900}.$$

Пошто је 211 = 234 — 23, изведи правило!

Логаритми.

Ми смо раније већ видели једну дефиницију логаритама. Сад ћемо видети још једну.

Два наспрамна реда. — Пре него што кажемо саму дефиницију узмимо један аритметички ред који почиње нулом и један геометриски ред који почиње јединицом:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.\ldots\ldots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\ \ldots\ldots$$

Кад их пажљиво загледамо, видимо, да су чланови аритметичког реда *изложитељи* степена 2^n, а чланови геометријског реда *вредности тога степена* чија је *основа* 2:

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32.$$

Узмимо друга два реда од којих се аритметички почиње нулом, а геометриски јединицом:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10.\ldots\ldots$$
$$1,\ 5,\ 25,\ 125, 625,\ 3125.\ldots\ldots$$

Пошто нам аритметички ред даје изложитеље, а геометријски ред вредности степена, имаћемо:

$$x^2 = 5.$$

Стављамо x, јер не знамо основу. Горња једначина даје за x:

$$x = \sqrt{5}.$$

И збиља, кад добро загледамо горња два реда видимо:

$$(\sqrt{5})^0 = 1,\ (\sqrt{5})^2 = 5,\ (\sqrt{5})^4 = 25,\ (\sqrt{5})^6 = 125$$

Опет се показало, да су чланови аритметичког реда *изложитељи*, а геометриског реда *степени* за извесну основу.

Узмимо још један пример:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. . . . .
1, 10, 100, 1000, 10000, 100 000, 1 000 000. . . . .

Мора да је 10 степен неке основе, где је изложитељ 1. Означимо ту основу са x:

$$x^1 = 10$$

а одатле $x = 10$.

Значи да горњи ред представља изложитеље, а доњи степене, за основу 10.

И збиља је:

$$10^0 = 1,\ 10^1 = 10,\ 10^2 = 100,\ 10^3 = 1000,\ 10^4 = 10\,000$$

Ако сад узмемо опште бројеве имаћемо ова два реда:

0, d, 2d, 3d, 4d, 5d. . . . .
1, q, q^2, q^3, q^4, q^5. . . . . .

Логаритам. — Сваки члан аритметичког реда је *логаритам* наспрамног члана из геометријског реда. Н. пр. 2d је *логаритам* од d^2, 5d је *логаритам* од q^5. Обрнуто: чланови геометријског реда су *антилогаритми* наспрамних чланова аритметичког реда. Н. пр. b^2 је *антилогаритам* од 2d.

Разни системи логаритама. — Пошто можемо изабрати *разне* редове: један аритметички који почиње нулом и други геометриски који почиње јединицом, *има разних система логаритама*, Ми смо видели такозване *вулгарне логаритме* или *Бригсове логаритме*. Код њих логаритму 1 одговара антилогаритам 10. Према томе његови редови овако изгледају

0, **1**, 2, 3. . . . .
1, **10**, 100, 1000.

ВЕЖБАЊА УЗ V. ОДЕЉАК.

Аритметички редови.

1. — Начинити аритметичку прогресију од 6 чланова, кад је први члан 10, а разлика 4.

2. — Начинити аритметичку прогресију од 10 чланова чији је први члан 100, а разлика — 3.

3. — Начинити аритметичку прогресију од 5 чланова, чији је први члан 12, а разлика — 6.

4. — Начинити аритметичку прогресију чија је разлика $-\frac{2}{3}$. Колико има таквих прогресија? Зашто?

5. — Начинити аритметичку прогресију чија је разлика $-\frac{5}{6}$.

6. — Начинити аритметичку прогресију у којој је један члан 9, а разлика — 2.

7. — Начинити ове две аритметичке прогресије: у првој је један члан 99 а разлика 2; у другој је један члан 153, а разлика — 2. Упореди те две две прогресије!

8. — Написати аритметичку прогресију од 9 чланова, у којој је последњи члан $\frac{1}{2}$, а разлика $2\frac{7}{8}$.

Продужи ове аритметичке редове:

9. $2\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{4}$ 4 . . . . .
10. — 5 — 2,5 0, ...
11. a $2a$ $3a$ . . . . .
12. m $m - 4c$ $m - 8c$
13. $n + 4b$ $n + 2b$ n, ...

14. — Израчунати 16. члан прогресије у којој је први члан 2, а разлика 3.

15. — Израчунати 10. члан прогресије у којој је први члан 7, а разлика — 7.

16. — Израчунати 8. члан прогресије у којој је први члан $9\frac{1}{2}$, а разлика $-\frac{3}{2}$

17. — Израчунати 12. члан прогресије у којој је први члан $2\frac{1}{2}$, а разлика $\frac{2}{3}$.

18. — Први члан једне аритметичке прогресије је 100, а разлика — 0,1. Колики је 100. члан?

19. — Нађи први члан аритметичке прогресије, чији је 12. члан $105\frac{1}{4}$, а разлика $9\frac{1}{2}$.

20. — Аритметичка прогресија почиње са $\frac{1}{2}$, а завршава се са $-1\frac{7}{8}$. Колика је разлика, кад прогресија има 20 чланова? (Употреби образац за a_n !)

21. — Између 12 и 20 уметни 3 броја тако, да они са 12 и 20 чине аритметичку прогресију.

(Кад то будемо урадили, имаћемо аритметичку прогресију од 5 чланова, у којој је први члан 12, а пети 20. Треба да нађемо *разлику* наше нове прогресије.

$$a_5 = a_1 + 4d.$$

Овде је $a_5 = 20$ $a_1 = 12$, те је

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{20 - 12}{4} = 2$$

Тражена прогресија је 12, 14, 16, 18 и 20.

Уметање нових бројева између два члана неке прогресије зове се *интерполовање* или *интерполација)*.

22. — Између 7 и 35 уметни 6 бројева, који би са два дата броја сачињавали аритметичку прогресију.

23. — Између 10 и 100 уметни на исти начин 17 бројева.

24. — Између бројева 2 и 5 уметни на исти начин 25 бројева.

25. — Написати ред бројева који се добија, кад у изразу $2 + 3x$ почне x да расте од 1 до 10, а узимамо само целе бројеве за x. Какав је ред?

26. — Написати ред бројева, који се добија, кад се у изразу $\frac{5-x}{3}$ смењује x целим бројевима 0 до 19. Какав је ред?

27. — Колико чланова има аритметичка прогресија, у којој су крајњи чланови 10 и $7\frac{1}{5}$, а разлика — 0,4?

$$[a_n = a_1 + (n-1)\ d.]$$

28. — Колико чланова има аритметичка прогресија, у којој је први члан 10, последњи 110, а разлика 10?

29. — У једној аритметичкој прогресији од 12 чланова први члан је 3, последњи 5,25. Колики је збир целе прогресије?

30. — Нађи збир свих целих бројева од 1 до 100 закључно.

31. — Нађи збир свих целих бројева од 10 до — 20.

32. — Први члан аритметичке прогресије је 2,6; збир првих 5 чланова је 1,75. Нађи пети члан.

33. — Нађи последњи члан аритметичке прогресије од 20 чланова, у којој је разлика $\frac{1}{2}$, а збир свих чланова износи 39.

34. — Један аритметички ред има 55 чланова. Последњи је 5,8; збир два последња члана је 11,5. Нађи збир свих 55 чланова.

35. — Једна аритметичка прогресија има 20 чланова; њихов збир је 860; последњи члан је — 14. Колики је претпоследњи члан?

($a_{n-1} = a_n - d$. Шта треба прво израчунати?)

36. — Разлика једне аритметичке прогресије је 2; последњи члан 35; збир свих чланова 320. Којим чланом почиње прогресија?

37. — Колико има чланова прогресија чији су први, други и последњи члан: 3, $3\frac{1}{4}$ и 9?

38. — Два тела била су у почетку кретања на међусобном растојању од 573,75 m. Крену се истим правцем, а супротним смислом. Брзина првог тела у првој секунди била је 25 метара и сваког секунда порасте за $\frac{1}{4}$ метра. Брзина другог тела у првој секунди била је 30 метара и расте у свакој секунди за $\frac{1}{2}$ метра. Кад ће се срести?

39. — Колико удараца откуца часовник за 24 часа, кад откуцава само часове?

40. — Нађи углове једнога правоуглога троугла, кад се зна да они чине аритметички ред. (Колики је збир тих углова?)

41. — Једно тело пада и у првој секунди пређе пут од 4,9 m., а пут који пређе у другој секунди већи је за 9,8 m. него пут у другој секунди. Пита се који пут ће прећи ово тело у десетој секунди и са које је висине пало, кад је ударило о земљу после 10 секунада? (Какво је ово кретање? Какав ред чине путеви што их тело прелази у свакој секунди?)

42. — Од воза који је пошао узбрдицом откачи се један вагон и у првој секунди пређе 0,30 m., у другој $3 \times 0{,}30$, у трећој $5 \times 0{,}30$, у четвртој $7 \times 0{,}30$, у петој $9 \times 0{,}30$ и т. д. Заустави се после 1 минута. Колики је пут прешао?

(Кад почнеш даређаш путеве, видећеш један низ бројева такав, да се из свих чланова може извући заједничко 0,30, а у загради да остане један аритметички ред).

43. — Нађи потребне и довољне услове, да збир аритметичког реда буде нула.

44. — Нађи аритметички ред чији 2. и 7. члан дају збир 92, а 4. и 11. дају збир 71.

45. — Збир четири средња члана једног аритметичког реда од 12 чланова износи 96. Збир спољних чланова је 48. Који је тај ред?

(Који су по реду ти средњи чланови? А спољни? Је ли задатак одређен? Зашто? Колико има таквих редова? Је ли код сваког аритметичког реда од 12 чланова збир спољних чланова једнак полу збиру 4 средња члана? Зашто?)

46. — Нађи аритметички ред од 11 чланова, кад је збир тих чланова 176, а разлика крајњих чланова 30.

47. — Три броја чине аритметички ред. Збир им је 33, а производ 1287. Који су то бројеви?

48. — Три броја чине аритметички ред. Збир им је 22, а збир њихових квадрата 166.

49. — Пет бројева чине аритметички ред. Збир им је s, а производ p. Који су то бројеви?

(Означи средњи члан са x!)

50. — Пет бројева чине аритметички ред. Збир им је 45, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{137}{180}$. Који су тих 5 бројева?

(Ако је средњи члан a_3, а разлика d, тада цео овај аритметички низ можемо овако да напишемо:

$$(a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d).$$

Види се да је збир $s = 5a_3$. Како је збир 45, значи да је средњи члан $\frac{45}{5} = 9$. И т. д.)

51. — Један службеник има 24000 динара годишње плате. Сваке године добија 100 динара годишње повишице. Колика му је месечна плата у двадесетој години службе?

52. — Један велосипедист пређе првога часа 20 км., а свакога часа смањује своју брзину за $\frac{3}{4}$ км. Колико километара је свега прешао, кад је последњег часа прешао 17 км.?

53. — У планинским пределима опада температура за 0,7° Целзијевих (приближно) на сваких 100 m. висине. Један путник крене уз једно брдо у 11 часова пре подне, када је температура износила 26°. Пошто је ишао неко време, види да је сада на термометру 14,8°. На коју се висину попео?

54. — Шеснаест лица треба да поделе 1000 динара тако, да свако наредне лице прими 5 динара више од претходног. Колико ће свако да добије?

ГЕОМЕТРИСКИ РЕДОВИ.

1. — Начинити геометриску прогресију од 7 чланова, кад је 1. члан 1. а количник 10.

2. — Начинити геометриску прогресију од 10 чланова, кад је први члан 256 а количник $\frac{1}{2}$.

3. — Начинити геометриску прогресију с количником 15. Колико има таквих прогресија?

4. — Начинити геометриску прогресију чији је први члан $\frac{1}{3}$, а количник 0,3

5. — Начинити геометриску прогресију чији је први члан $\frac{3}{2}$, а количник $\frac{2}{3}$.

6. — Начинити произвољну аритметичку прогресију са почетним чланом нула и једну геометриску с почетним чланом нула. Упоредити их!

7. — Написати једну аритметичку и једну геометриску прогресију чији је први члан 1. Која брже расте? Зашто?

8. — Написати једну аритметичку прогресију чији је први члан 3, а разлика 1 и једну геометриску прогресију са истим почетним чланом и са количником 1. Загледај!

9. — Начини две прогресије: аритметичку и геометриску тако, да је у обема први члан 2; у аритметичкој разлика — 3, а у геометриској количник — 3 Упореди их!

10. — Колики је 5. члан геометриске прогресије чији је први члан 10, а количник 2.

11. — Израчунај a_n кад је

a_1	q	n
2	3	4
4	5	6
7	8	9
9	10	12

У геометриском реду

12. — Наћи 11. члан, кад су му прва три члана: 5 10 20

13. — „ 7. „ „ „ „ „ „ „ : 2 6 18

14. — „ 8. „ „ „ „ „ „ „ : 3 — 6 + 12

15. — „ 6. „ „ „ „ „ „ „ : 18 5,4 1,62

16. — „ 10. „ „ „ „ „ „ „ : $\frac{32}{81}$ $\frac{16}{27}$ $\frac{8}{9}$

У геометриском реду

17. — Наћи количник кад је први члан 9, а пети члан 144.

18. — „ „ „ „ „ „ 5, а осми „ 10935.

19. — „ „ „ „ „ „ 2, а девети „ $\frac{512}{6561}$.

20. — „ „ „ „ „ „ 2048, а дванаести „ 64.

21. — „ „ „ „ „ „ 81, а једанаести „ $\frac{64}{9}$.

22. — „ „ „ „ „ „ 2, крајњи члан 512, а број чланова 9.

23. — Наћи количник кад је први члан $\frac{64}{243}$, крајњи члан $\frac{243}{16}$, а број чланова 11.

24. $a_n = 27,2$, $a_{n-1} = 25,9$ $n = 5$.

25. $a_n = 385$, $a_{n-1} = 366,7$ $n = 15$.

26. $a_n = 47,5$, $a_{n-1} = 55,8$ $n = 16$.

27. $a_n = 0,75$, $a_{n-1} = 0,91$ $n = 12$.

Наћи број чланова једног геометриског реда, кад је:

28. $a_1 = 6$ $a_2 = 12$ $a_n = 3072$.

29. $a_1 = 25$ $a_2 = 75$ $a_n = 2025$.

30. $a_4 = 13$ $a_6 = 117$ $a_n = 9477$.

31. $a_5 = 7$ $a_9 = 4375$ $a_n = 546\,875$.

32. $a_1 = 37,5$ $q = 1,8$ $a_n = 24099$.

33. $a_1 = 6344$ $q = -0,43$ $a_n = -7,415$

34. $a_1 = 23,75$ $q = -0,925$ $a_n = -7,375$.

35. — Колики је збир чланова геометриске прогресије која почиње са 5, количник јој 3, а има 5 чланова?

36. — Исто питање за $a_1 = 2$, $q = 3$, $n = 4$.

37. — „ „ „ $a_1 = 7$, $q = 5$, $n = 3$.

38. — „ „ „ $a_1 = 10$, $q = \frac{1}{10}$, $n = 10$

39. — „ „ „ $a_1 = -\frac{1}{10}$, $q = 10$, $n = 10$.

40. — „ „ „ $a_1 = 5$, $q = \frac{2}{5}$, $n = 4$.

41. — „ „ „ $a_1 = 5$, $q = 2$, $n = 11$.

42. — „ „ „ $a_1 = 25$, $q = -4$, $n = 7$.

43. — „ „ „ $a_1 = 3750$, $q = -0,4$, $n = 6$.

44. — У једноме геометрискоме реду је 4. члан 135, а 7. члан 3645. Колики је збир првих дванаест чланова?

45. — Кад је $a_1 = 2$, $q = 3$, $n = 5$, наћи a_n и S.

46. — Кад је $a_n = 1280$, $a_1 = 5$, $n = 9$, наћи q и S.

47. — Кад је $a_n = 384$, $q = 2$, $n = 8$, наћи a_1 и S.

48. — Кад је $q = \frac{1}{4}$, $S = 2730$, $a_1 = 1$, наћи a_n.

49. — У једноме геометрискоме реду од 10 чланова два члана што леже у средини реда су 48 и 96. Колики је збир тога реда?
(Која су по реду та два члана што леже у средини?)

50. — У једноме геометриском реду од 16 чланова два члана што леже у средини реда су $\frac{7}{3}$ и $\frac{7}{9}$. Колики су први и последњи члан?

51. — У једноме геометрискоме реду износи збир 3. и 5 члана 90, а збир 6. и 8. члана 2430. Који је то ред?

$$(aq^2 + aq^4) = 90$$
$$(aq^5 + aq^7) = 2430$$

Или:

$$aq^2\,(1 + q^2) = 90$$
$$aq^5\,(1 + q^2) = 2430.$$

Сад подели доњу једначину горњом! И т. д. }

52. — У једноме геометриском реду је збир 2., 4. и 7. члана 370, а збир 3., 5. и 8. члана је 740. Који је то ред?

53. — У једноме геометриском реду износи збир 2., 3. и 4. члана 220, а *разлика* 2. и 1. члана 33. Који је тај ред?

54. — У једноме геометриском реду износи збир 2., 3. и 4. члана 2335, а *разлика* 3. и 6. члана 372. Који је то ред?

Израчунај збир ових бескрајних редова:

55. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$

56. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\cdots$

57. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \cdots\cdots$

58. $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots\cdots$

59. $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots\cdots$

Израчунај вредност ових периодичних разломака:

60. 0,(7)
61. 2,(3)
62. 4,(5)
63. 18,(2)
64. 3,(8)
65. 2,3(4)
66. 0,(56)
67. 0,1(7)
68. 0,3(5)
69. 0,3(54)
70. 0,4(567)

71. — Нађи геометриски конвергентан бесконачан ред, чији је целокупан збир 6, а збир прва два члана 4,5.

72. — Нађи геометриски конвергентан бесконачан ред, чији је целокупан збир $\frac{4}{9}$, а збир прва два члана је $\frac{11}{25}$.

73. — У коцку је уписана лопта, а у њу опет коцка, а у ову лопта и т. д. Колики је збир површина првих 6 лопти, кад је ивица највеће коцке $a = 262$ cm.?

74. — У једноме месту биле су у рату порушене многе куће. Један предузимач је хтео да подигне 20 кућа, али да му се на згаришту прве куће остави 10 динара, на другоме 20, на трећем 40, на четвртоме 80 динара и т. д. Колико је он просечно рачунао цену сваке куће?

75. — Запремина једног правоуглог паралелипеда је 3 375 cm^3. Нађи му ивице, кад им је збир 65 *cm.*, а оне стоје у геометриском реду.

76. — Дат је геометриски ред 1 8 64 . . . . Између свака два члана уметнути још по 2 броја тако, да нов низ бројева буде опет геометриски.

(Кад између првога и другога члана 1 и 8 уметнемо 2 члана, имаћемо ред од 4 члана:

$$1 \quad a_2 \quad a_3 \quad 8.$$

Овде је $a_1 = 1$, $a_4 = 8$.

$$a_4 = a_1\, q^3$$
$$8 = 1 \cdot q^3 \qquad q = 2$$

Дакле:

$$\mathbf{1} \quad 2 \quad 4 \quad \mathbf{8} \quad 16 \quad 32 \quad \mathbf{64} \ldots\ldots)$$

77. — Између чланова реда 1, 2, 4, 8 и т. д. уметнути још по 1 број тако, да се опет добије геометриски ред.

78. — Између 1 и 7 уметнути 6 бројева тако, да се добије геометриски ред од 8 чланова.

79. — Између a^8 и b^8 уметнути још 7 чланова тако, да се добије геометриски ред.

80. — Између 4 и 972 уметнути 4 члана тако, да се добије геометриски ред.

Логаритми.

1. — За коју *основу* представљају логаритме и нумерусе ова два реда:

0	2	4	6	8 . . . . .
1	4	16	64	256 . . . . .

2. — Исто питање за ова два реда:

0	3	6	9 . . . . .
1	27		

3. — Исто питање за ове редове:

0	1	2	3	4 . . . .
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$ . . . .

4. — Напиши аритметички и геометриски ред за систем логаритама чија је основа 5, а у геометриском реду један члан је 25.

5. — За коју основу представљају логаритме и антилогаритме ови редови:

0	2	4 . . . . .
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$ . . . . .

6. — Исто питање за:

0	1	2	3 . . . . .
1	5	25	125 . . . . .

7. — Исто питање за:

0	1	2 . . . . .
1	7	49 . . . . .

8. — Исто питање за:

0	2	4 . . . . .
1	81	6561 . . . . .

9. — Исто питање за:

0	3	5 . . . . .
1	0,001	0,00001

10. — Исто питање за:

0	2	4 . . . . .
1	0,0001	0,00000001.

VI. — СЛОЖЕН ИНТЕРЕСНИ РАЧУН. — АНУИТЕТ. — АМОРТИЗАЦИЈА. — РЕНТА. — ОСИГУРАЊЕ.

Прост интересни рачун. — Ми знамо образац за израчунавање простог интереса:

$$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$$

Капитал је дат под *прост* интерес, ако се на крају извесне периоде времена (рецимо после 6 месеци или после годину дана) интерес од тога капитала исплаћује сопственику капитала.

Сложен интересни рачун.

Сложен интересни рачун. — Ако се интерес после извесне периоде времена не исплаћује сопственику капитала, већ се додаје капиталу, да и сам доноси интерес, онда је капитал дат под *сложен* интерес.

Садања и будућа вредност капитала. — Сваки капитал има две вредности: *садању и будућу.*

Почетна или *садања вредност* капитала је капитал који сопственик има у тренутку кад га даје под интерес. Њу ћемо обележавати са *к.*

Крајња или *будућа вредност* капитала је вредност на коју капитал нарасте после t времена заједно са својим интересом. Њу ћемо обележавати са *К.*

Крајња вредност капитала датог под прост интерес за *n* година биће:

$$K = k + \frac{k \cdot p \cdot n}{100}$$

или у облику који се лакше памти:

$$K = k\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

Одатле ћемо лако израчунати ма коју од ових количина из обрасца, кад су нам све остале познате.

Пример. — Колики је био капитал, који је по 8% нарастао за 6 година под *простим* интересом на 5920 дин.?

Овде је:

$K = 5920$, $p = 8$, $n = 6$. Означимо са x почетну вредност капитала и применимо малопређашњи образац:

$$K = k\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

$$5920 = x\left(1 + \frac{48}{100}\right)$$

$$5920 = x \cdot 1{,}48$$

$$x = \frac{5920}{1{,}48} = \frac{592000}{148} = 4000$$

Напомена. — После годину дана крајња вредност капитала *k* датог под p% под интерес, биће:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \text{Зашто?}$$

Будућа вредност капитала датог под **сложени интерес** израчунава се овако.

Нека је почетна вредност капитала *k.* Нека је он дат под *сложени* интерес по p%.

На крају *прве* године биће:

$$K_1 = k + \frac{k \cdot p \cdot 1}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

На крају друге године биће:

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

На крају треће године биће:

$$K_3 = K_2 + \frac{K_2 p}{100} = K_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

На крају четврте године биће:

$$K_4 = K_3 + \frac{K_3 p}{100} = K_3\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4.$$

После *n* година биће:

$$(1) \qquad \boxed{K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.}$$

Интересни чинитељ. — Израз $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ јесте крајња вредност *једног* динара на крају једне године.

Нека је капитал дат по 6% под интерес. То значи да 100 динара за годину дана донесу 6 динара интереса. *Један* динар донеће за једну годину сто пута мање интереса: $\frac{6}{100}$. *Један* динар на крају *једне* године биће:

$$1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$$

Ако је капитал дат по $p^0/_0$ имаћемо ово:

100 динара донесу за 1 годину p динара интереса

1 динар донесе „ 1 „ $\frac{p}{100}$ „ „

Према томе на крају године *један* динар имаће ову вредност:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Будућу вредност *једног* динара за *једну* годину зовемо *интересни чинитељ* и обележавамо га са q. Према томе образац (1) можемо написати у овоме облику:

$$(2) \qquad \boxed{K_n = k \cdot q^n .}$$

Капиталисовање. — Уношење интереса у капитал зове се *капитализовање.* Оно може да се врши *крајем године, крајем пола године, крајем тромесечја.*

Да видимо како ће изгледати наш образац, (1), ако се капитализовање врши крајем пола године.

Рецимо да је капитал дат по $12^0/_0$. После пола године један динар ће изгледати овако:

$$1 + \frac{1 \cdot 12 \cdot 6}{1200} = 1 + \frac{\mathbf{6}}{100}.$$

пошто за *пола* године, капитал доноси *пола* годишњег интереса.

Капитализорање се врши *два пута* годишње. Зато у нашем обрасцу за вредност динара *на крају рока* узимамо *пола* датога процента.

Како изгледа један динар после три месеца?

$$1 + \frac{1 \cdot 12 \cdot 3}{1200} = 1 + \frac{\mathbf{3}}{100}$$

пошто за $\frac{1}{4}$ године капитал доноси $\frac{1}{4}$ годишњег интераса $\left(3 = \frac{12}{4}\right)$

Капитализовање се врши *четири пута* годишње. Зато у нашем обрасцу за вредност динара на крају *рока капитализовања* узимамо *једну четвртину* датога процента.

Узмимо да је **рок** капитализовања тромесечје, а проценат *p*. Тромесечје је $\frac{1}{4}$ године, те ће бити:

$$K_{\frac{1}{4}} = k + \frac{k \cdot p \cdot 3}{100 \cdot 12} = k\left(1 + \frac{p \cdot 3}{12 \cdot 100}\right) = k\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right).$$

На крају пола године биће:

$$K_{\frac{2}{4}} = K_{\frac{1}{4}} + \frac{K_{\frac{1}{4}} \cdot p \cdot 3}{1200} = K_{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{p \cdot 3}{1200}\right) =$$

$$= K_{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right) = k\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right)\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right) = k\left(1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}\right)^2.$$

Ако је *рок капитализовања* један *m*-ти део године, будућа вредност капитала за *n* година биће:

$$(3) \qquad K_n = k\left\{1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right\}^{mn}.$$

Одавде правило:

Ако је *рок капитализовања* $\frac{1}{m}$ *део године, треба узети m-ти део процента, а m пута већи број година.*

Сва три обрасца скупићемо у ову прву групу образаца:

$$\text{I.} \left| \begin{array}{ll} (1) & \boxed{K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \\ (2) & \boxed{K_n = k \cdot q^n} \\ (3) & \boxed{K_n = k\left\{1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right\}^{mn}} \end{array} \right.$$

Пример 1. — Наћи крајњу вредност капитала од 60000 динара, кад је он дат под сложен интерес по $8^0/_0$ за 10 година.

Напомена. — Кад се нарочито не нагласи *рок капитализовања* подразумева се да се капитализовање врши на крају године.

$$K_{10} = k \cdot q^{10}$$

$$q = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$$

$$K_{10} = 60000 \cdot 1{,}08^{10}$$

$$\log K_{10} = \log 60000 + 10 \log 1{,}08$$
$$\log K_{10} = 4{,}77815 + 10 \cdot 0{,}03342$$
$$\log K_{10} = 4{,}77815 + 0{,}33420$$
$$\log K_{10} = 5{,}11232$$
$$K_{10} = N\overline{5{,}11232} = 129\,515 \text{ динара.}$$

Пример 2. — *Неко има данас да плати 35000 динара дуга. Кад се он задужио пре 4 године по 10°/₀ колику суму је био узео под сложен интерес?*

Овде је непозната почетна вредност дуга, који је нарастао на 35000 динара.

$$K = kq^n$$

$$35000 = x \cdot q^n \qquad q = 1 + \frac{10}{100} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}10$$

$$35000 = x \cdot (1{,}10)^4$$

$$x = \frac{35000}{(1{,}10)^4}$$

$$\log x = \log 35000 - 4 \log 1{,}10$$
$$\log x = 4{,}54407 - 4 \times 0{,}04139$$
$$\log x = 4{,}37851$$
$$x = N\overline{4{,}37851} = 23\,906 \text{ динара.}$$

Пример 3. — *Неко је узео на зајам извесну суму новаца с тим, да плати после 3 године са 12°/₀ сложеног интереса 20000 дин. После 2 године он дође до новаца и хоће да исплати свој дуг. Колико треба мање да плати?.*

Дужник неће платити суму од 20000 динара, пошто није држао новац 3 године.

Он ће платити ону суму, која ће после годину дана под сложеним интересом нарасти на 20000 динара.

Дисконт. — Разлика између крајње вредности дуга и његове вредности ма у ком ранијем добу зове се *дисконт*. Наш дужник обавезао се да плати K_3 динара после *три* године. После *две* године плаћа суму смањену за *дисконт* за годину дана. Овде је *дисконт*:

$$D = K_3 - K_2.$$

Овде знамо да је $K_3 = 20000$. Треба да нађемо K_2

$$K_2 = k \cdot q^2 \qquad q = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$$

$$K_2 = k \cdot (1{,}12)^2$$

Да бисмо нашли K_2, требало би најпре да тражимо k.

Али ми можемо то и простије да нађемо:

$$K_3 = K_2\, q \qquad 20000 = K_2 \cdot 1{,}12$$

А одатле:

$$K_2 = \frac{20000}{1{,}12} = \frac{5000}{0{,}28} = \frac{1250}{0{,}07}$$

$$\log K_2 = \log 1250 + \text{colog } 0{,}07$$
$$\log K_2 = 3{,}09691 + 1{,}15490$$
$$\log K_2 = 4{,}25181$$
$$K_2 = \text{anlog } 4{,}25181$$
$$K_2 = 17858$$

Место 20000, дужник ће платити 17 858 дин. Платиће 2142 динара мање. *Дисконт* је 2142 динара.

Пример 4. — *Капитал од 6000 динара нарасте за 5 година на 8029,20 динара. Под којим процентом је био дат под сложен интерес?*

$$K = k \cdot q^n$$
$$8029{,}20 = 6000 \cdot q^5$$

Пошто се проценат p налази у интересном чинитељу q, ми ћемо најпре наћи q.

$$q^5 = \frac{8029{,}20}{6000} = 1{,}338$$

$$5 \log q = \log 1{,}338$$

$$\log q = \frac{\log 1{,}338}{5}$$

$$\log q = \frac{0{,}12646}{5}$$

$$\log q = 0{,}02529$$

$$q \approx 1{,}06$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad \text{или} \quad \frac{p}{100} = q - 1$$

$p = 100\,(q - 1)$, а то је у нашем задатку:

$$p = 100\,(1{,}06 - 1)$$

$$p = 100 \cdot \frac{6}{100} = 6.$$

Капитал је био под интересом по 6°/₀.

Пример 5. — *Једнога студента, управо кад је напунио 21 годину, позове једна банка и исплати му 20699 динара. У банци му је речено, да је његов отац некада уложио 5000 динара у банку и наредио да се сума, на коју буде нарастао тај капитал под 7°/₀ сложеног интереса, исплати његовом сину кад буде пунолетан. Кад је отац уложио тај новац?*

$$K = k \cdot q^n$$
$$20699 = 5000 \cdot 1{,}07^x$$
$$1{,}07^x = \frac{20699}{5000}$$
$$1{,}07^x = \frac{20{,}699}{5}$$
$$1{,}07^x = 4{,}139$$
$$x \log 1{,}07 = \log 4{,}139$$
$$x = \frac{\log 4{,}139}{\log 1{,}07}$$
$$x = \frac{0{,}61690}{0{,}02938}$$
$$x = \frac{61690}{2938}$$
$$x = \frac{30845}{1469}$$

Да не бисмо делили ова два разломка, ми ћемо овај количник израчунати помоћу логаритама:

$$\log x = \log 30845 + \text{colog } 1469$$
$$\log x = 4{,}48919 + \bar{4}{,}83297$$
$$\log x = 1{,}32217$$
$$x = 21.$$

Отац је уложио 5000 динара оног дана кад му се син родио.

АНУИТЕТ.

Ануитет је сума која се плаћа редовно сваког одређеног рока, било да се *уплати* известан капитал, било да се *исплати* известан дуг.

Неко хоће да уплаћује почетком сваке године извесну суму новаца, да би после n година примио A динара. Колико треба да уплаћује годишње, кад се на уплате плаћа $p^0/_0$ сложеног интереса?

Означимо тај *ануитет* са a.

Последња уплата стоји свега 1 годину и изнеће на крају n-те године:

$$aq.$$

Претпоследња уплату стоји 2 године и изнеће на крају n-те године:

$$aq^2$$

Прва уплата стоји n година под интересом и изнеће на крају n година;

$$aq^n$$

Друга стоји $(n - 1)$ година под интересом и изнеће на крају n година:

$$aq^{n-1}$$

Сви ануитети (уплате) вредеће после n година:

$$A = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

а то је даље:

$$A = aq\,(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}).$$

У загради имамо *геометриску прогресију* чији је први члан 1, количник q, а број чланова n. Према томе **уплаћени капитал** после n година биће:

$$\boxed{A = aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \qquad (4)$$

а одатле је **ануитет a:**

$$\boxed{a = \frac{A\,(q - 1)}{(q^n - 1)\,q}} \qquad (5)$$

Да бисмо израчунали колико је једнаких уплата (ануитета) потребно да се уплати капитал A, израчунаћемо n из обрасца (4).

$$q^n = \frac{A\,(q-1)}{aq} + 1$$
$$q^n = \frac{A\,(q-1) + aq}{aq}$$
$$n \log q = \log\,[A\,(q - 1) + aq] + \text{colog } a + \text{colog } q$$
$$\boxed{n = \frac{\log\,[A\,(q - 1) + aq] + \text{colog } a + \text{colog } q}{\log q}} \qquad (6)$$

Можемо ли израчунати q, кад је познато A, a и n?

Сва три обрасца код ануитета скупићемо уједно:

$$\text{II} \quad \boxed{\begin{array}{ll} (4) & A = aq \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \\ (5) & a = \dfrac{A\,(q - 1)}{(q^n - 1)\,q} \\ (6) & n = \dfrac{\log\,[A\,(q - 1) + aq] + \text{colog } a + \text{colog } q.}{\log q} \end{array}}$$

Ученик треба да упамти само образац (4), а остале му је лако извести.

Пример 1. — Колику ће суму имати да прими неко после 10 година, кад је сваког 1. јануара и 1. јула носио у банку по 600 динара, која на уложени новац плаћа $6^0/_0$ камате? Капиталисање полугодишње.

Овде има 20 уплата, али ће проценат бити 3, пошто је капиталисање полугодишње.

$$A = 600 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03}$$

$$A = 618 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03}$$

Најпре треба израчунати вредност за $1{,}03^{20}$.

$$x = 1{,}03^{20}$$
$$\log x = 20 \log 1{,}03$$
$$x = N\sqrt{0{,}25680} = 1{,}806$$
$$A = 618 \cdot \frac{1{,}806 - 1}{0{,}03}$$
$$A = 618 \cdot \frac{0{,}806}{0{,}03} = 618 \cdot \frac{806}{30} = 20{,}6 \cdot 806$$
$$\log A = \log 20{,}6 + \log 806$$
$$\log A = 1{,}31387 + 2{,}90634$$
$$\log A = 4{,}22021$$
$$A = N\sqrt{4{,}22021}$$
$$A = 16604 \text{ динара.}$$

Пример 2. — Неко хоће да уплати са 20 годишњих анунтета 50000 динара. Колики ће бити анунтет, кад банка плаћа 6% на уложени новац?

Овде ћемо употребити образац (5) из групе II.

$$a = \frac{A\,(q - 1)}{(q^{20} - 1)\,q}$$
$$a = \frac{50\,000 \cdot 0{,}06}{(1{,}06^{20} - 1)\,1{,}06}.$$

Најпре ћемо израчунати вредност за $1{,}06^{20}$, да бисмо могли логаритмовати.

$$x = 1{,}06^{20}$$
$$\log x = 20 \cdot \log 1{,}06 = 20 \cdot 0{,}02531 = 0{,}50620$$
$$x = N\sqrt{0{,}50620} = 3{,}208$$
$$a = \frac{3000}{1{,}06 \cdot 2{,}208}$$
$$\log a = \log 3000 + \operatorname{colog} 1{,}06 + \operatorname{colog} 2{,}208$$
$$\log a = 3{,}10781$$
$$a = N\sqrt{3{,}10781} = 1282 \text{ динара.}$$

Сви обрасци за *анунтет* важе и за *осигурање*.

АМОРТИЗОВАЊЕ.

Кад се неко задужи извесну своту новаца D, с тим да је исплати извесним бројем n једнаких отплата, за n једнаких рокова, такво одуживање зове се *амортизовање* дуга, или гашење дуга. Те

једнаке отплате зову се *анунтети*. Анунтет се означава са a. Њиме се плаћа интерес и права, чиста отплата, за колико се дуг стварно смањује. Разлика између анунтета и интереса за један рок на стварни износ дуга зове се *амортизација*. То је сума за коју се стварно *смањује* дуг.

Анунтет је сталан. Са сваким роком *амортизација* расте, дуг се смањује и интерес се смањује. Анунтет се плаћа *увек* само на крају рока.

Основни образац код амортизовања. — Неко узајми извесну своту D (дуг) и хоће да је исплати за n година.

Отплата почиње *крајем* прве године од дана задужења, а дуг престаје у тренутку последње отплате, то јест крајем n-те године. Проценат је p. Сталне годишње отплате су a.

Замислимо сад да дужник не носи отплате у банку, из које је узео зајам, већ своје отплате a носи на штедњу у другу банку. Шта бива онда за n година? Његове уштеде се гомилају у једној банци, а *дуг расте* у другој банци. Кад ће он моћи да исплати дуг својим уштедама? Онда када његове уштеде нарасту на ону суму, на коју је нарастао његов дуг крајем n-те године.

Његових уштеда има n. Прва је стојала под интересом $(n - 1)$ годину, друга $(n - 2)$, трећа $(n - 3)$, четврта $(n - 4)$ и т. д. Последња уплата није ни стојала под интересом, јер кад дужник однесе *последњу* уплату, његов дуг престаје.

Зашто прва уплата стоји $(n - 1)$ г. под интересом? Зато што прва отплата почиње, кад протекне годину дана од n година за које време дужник има да исплати дуг.

Дужникове уштеде у другој банци биће:

$$a \cdot q^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \cdots + aq^3 + aq^2 + aq + a$$

Вредности ових уплата чине геометриски ред од n чланова. За први члан можемо узети a, и онда је количник q.

Вредност свих уштеда (уплата) биће:

$$\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Док дужник улаже на штедњу, да би отплатио крајем n-те године свој дуг D, његов дуг расте и постаје крајем n-те године:

$$Dq^n$$

Дужник се одужио онда, када вредност свих његових уштеда достигне вредност на коју је нарастао његов дуг:

$$\boxed{\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n} \quad (7)$$

То је *основни образац амортизације.*

Из њега можемо лако израчунати количине a, D и n, ако нам је која од њих непозната:

Израчунавање првобитне вредности дуга:

$$\boxed{D = \frac{a\,(q^n - 1)}{(q-1)q^n}} \tag{8}$$

Израчунавање величине ануитета:

$$\boxed{a = \frac{Dq^n\,(q-1)}{q^n - 1}} \tag{9}$$

Израчунавање времена за које може да се исплати позајмљена сума (дуг) D једнаким отплатама a:

$$aq^n - a = Dq^n\,(q-1)$$
$$aq^n - a = Dq^{n+1} - Dq^n$$
$$aq^n - Dq^{n+1} + Dq^n = a.$$
$$q^n\,(a - Dq + D) = a$$
$$q^n = \frac{a}{a - Dq + D.}$$
$$n \log q = \log a - \log\,[a - D\,(q-1)]$$

$$\boxed{n = \frac{\log a - \log\,[a \quad D\,(q-1)]}{\log q}} \tag{10}$$

Како су стварни само логаритми позитивних бројева, $a - D\,(q - 1)$ мора бити *позитивно*, то јест мора бити:

$$a - D\,(q-1) > 0$$

то јест

$$a > D\,(q-1).$$

Шта је D (q — 1)?

$$D\,(q-1) = D\left(1 + \frac{p}{100} - 1\right) = \frac{D\,.\,p}{100}$$

Кад се сетимо обрасца за прост интерес:

$$i = \frac{k\,.\,p\,.\,t}{100}$$

видимо, да је D (q—1) интерес на узајмљену суму D за 1 годину. Дакле, ако дужник хоће да амортизира свој дуг (да га отплати једнаким отплатама), његова *отплата (ануитет) мора бити већа од годишњег интереса на првобитну узајмљену суму.*

Шта је a — D (q — 1)?

То је разлика између ануитета и интереса на првобитни капитал за први рок. То је амортизација којом свотом се смањује дуг на крају првога рока

Ако величину прве амортизације обележимо са α, друге са α_1 . . . . n-те са α_n, ово ће бити интерес који се плаћа на крају првог, другог . . . . n-тог рока.

Интерес на крају првог рока $\quad a - \alpha_1$

„ „ „ другог „ $\quad a - \alpha_2$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Интерес на крају n-тога рока: $\quad a - \alpha_n$.

Одатле се види да су ануитети овако састављени:

Ануитет на крају првога рока: $a = D\,(q - 1) + \alpha_1$

„ „ „ другога „ : $a = (D - \alpha_1)(q - 1) + \alpha_2$

„ „ „ трећег „ : $a = (D - \alpha_1 - \alpha_2)(q - 1) + \alpha_3$

„ „ „ четвртог „ : $a = (D - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(q - 1) + \alpha_4$

— —

Ануитет на крају n-тог рока:

$$a = (D - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1 - \ldots\ldots - \alpha_{n-1})\,(q - 1) + \alpha_n$$

Овде су леве стране једнаке, па морају бити једнаке и десне. Из две и две узастопне једнаке стране излази:

Из I и II:

$$D\,(q-1) + \alpha_1 = (D - \alpha_1)\,(q-1) + \alpha_2$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 q$$

Из II и III:

$$\alpha_3 = \alpha_2 q = \alpha_1 q^2$$

И најзад:

$$\boxed{\alpha_n = \alpha_1 q^{n-1}}$$

То је образац за одређивање ма које амортизације кад нам је позната прва (α_1).

Прва амортизација (α_1) одређује се овако. Дуг D мора бити једнак са збиром свих амортизација:

$$D = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n.$$

$$D = \alpha_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = q, \qquad \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = q$$

Одатле је

$$\alpha_1 = \frac{D\,(q-1)}{q^n - 1} \tag{1}$$

Знамо да је

$$\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n \qquad \text{Одатле је}$$

$$D = \frac{a\,(q^n - 1)}{(q - 1)\,q^n}. \qquad \text{Сменом у (1) добијамо:}$$

$$\alpha_1 = \frac{a\,(q^n - 1)}{(q - 1)q^n} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = \frac{a}{q^n}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{a}{q^n}}$$

То је образац за израчунавање прве амортизације.

Све обрасце за амортизацују скупићемо у ову трећу таблицу образаца:

$$\text{III}\left\{\begin{array}{lll} (7) & & \dfrac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n \\ (8) & & D = \dfrac{a\,(q^n - 1)}{(q - 1)\,q^n} \\ (9) & & a = \dfrac{Dq^n\,(q-1)}{q^n - 1} \\ (10) & & n = \dfrac{\log a - \log\,[a - D\,(q - 1)]}{\log q} \\ (11) & & \alpha_1 = \dfrac{a}{q^n} \\ (12) & & \alpha_n = \alpha_1 q^{n-1} \end{array}\right.$$

Пример. — *Неко је на више места дужан 20 000 динара. Пошто му је то тешко плаћати, он хоће да изврши* **конверзију** *својих дугова.* **Конверзија** *значи скупљање свих дугова код једнога повериоца. Он може да добије зајам од 20 000 динара, али му банка тражи да јој тај дуг амортизира за 5 година у годишњим једнаким отплатама. Може ли дужник примити обавезу тога зајма, кад он може годишње да даје 4200 динара на име отплате свога дуга, а банка наплаћује 12% на позајмљен новац, а 5% плаћа на уложени новац?*

Морамо наћи колики је *ануитет* потребан, пада се измири интерес и исплати овај дуг:

$$\frac{a\,(1{,}05^5 - 1)}{0{,}05} = 20\,000 \,.\, 1{,}12^5 \qquad \text{(образац 7.)}$$

$$a = \frac{20\,000 \,.\, 1{,}12^5 \,.\, 0{,}05}{1{,}05^5 - 1}.$$

Да бисмо могли логаритмовати, морамо најпре израчунати вредност за $1{,}05^5$. (Да бисмо уклонили *разлику* у именитељу, коју не умемо да логаритмујемо):

$$x = 1{,}05^5.$$

После логаритмовања и вађења нумеруса, добијамо:

$$x = 1{,}05^5 = 1{,}276$$

$$1{,}05^5 - 1 = 0{,}276$$

$$\log a = \log 20\,000 + 5 \log 1{,}12 + \log 0{,}05 + \text{colog}\ 0{,}276$$

$$\log a = 3{,}80529$$

$$a = \text{anlog}\ 3{,}80529$$

$$a = 6387 \text{ динара.}$$

Дужник не може да прими ову обавезу, пошто може годишње да плаћа свега 4200 динара.

Рента.

Рента је стална сума коју неко прима одређеног сталног рока за известан број година n, пошто је пре тога улагао свој новац у банку за известан низ година, или уложио једном за свагда.

Она се може стећи на два начина.

I. — Може неко улагати m година у почетку сваке године сталну суму a, да би по навршетку m-те године примао сталну суму r за n година, у почетку сваке године.

Док се наврши крај m-те године дешава се ово:

Последња уплата стоји годину дана под интересом (од почетка m-те године, кад се даје последња уплата, до краја m-те године, кад почиње исплата ренте). Она ће према томе бити: aq. *Претпоследња уплата* стоји 2 године под интересом, те ће бити на крају m-те године: aq^2. *Прва уплата* стоји m година под интересом, те ће њена вредност крајем m-те године бити: aq^m. Све уплате укупно износиће крајем m-те године:

$$aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{m-2} + aq^{m-1} + aq^m = aq\,\frac{(q^m - 1)}{q - 1}.$$

Кад сопственик не би од те суме узимао ништа, она би до почетка n-те године (када се узима последња рента) нарасла на

$$\frac{aq\,(q^m - 1)}{q - 1} \,.\, q^{n-1}$$

Међутим сопственик почетком сваке године, узима за n година по r динара своје ренте. Он изузме од почетка $m + 1$ године до почетка $(m + n)$-те године за n година:

$$\frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Он губи право на ренту, кад изузме све што је уложио, то јест, кад не остане више ничега од суме на коју су нарасли његови улози за ($m + n - 1$) годину:

(13) $$\boxed{\frac{aq\,(q^m - 1)}{q - 1} \cdot q^{n-1} - \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1} = 0.}$$

Из тога обрасца можемо лако израчунати све количине: r, a и n:

Израчунавање ануитета за ренту r:

$$\frac{aq\,(q^m - 1)}{q - 1} \cdot q^{n-1} = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

(14) $$\boxed{a = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q^m - 1)}.}$$

Израчунавање ренте r на коју се стиче право за n година после m ануитета a:

(15) $$\boxed{r = \frac{aq^n\,(q^m - 1)}{q^n - 1}}$$

Израчунавање броја година n за које се може примати рента r кад се m година улаже сума a:

Из обрасца (15) излази:

$$rq^n - r = aq^n \cdot q^m - aq^n$$
$$rq^n - aq^n \cdot q^m + aq^n = r$$
$$q^n\,[r - a\,(q^m - 1)] = r$$
$$q^n = \frac{r}{[r - a\,(q^m - 1)]}$$

$$n \log q = \log r + \operatorname{colog}\,[r - a\,(q^m - 1)]$$

(16) $$\boxed{n = \frac{\log r + \operatorname{colog}\,[r - a\,(q^m - 1)]}{\log q}}$$

Израчунавање дроја година m, за које треба улагати суму a. да би се n година после улагања могла примати рента r:

Из обрасца (14) излази:

$$aq^n\,q^m = rq^n - r + aq^n$$
$$aq^n\,q^m = q^n\,(r + a) - r$$
$$q^m = \frac{q^n\,(r + a) - r}{aq^n}$$

$$m \log q = \log\,[q^n\,(r + a) - r] + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} q^n$$

(17) $$\boxed{m = \frac{\log\,[q^n\,(r + a) - r] + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} q^n}{\log q}}$$

II. — Неко хоће сад да уложи извесну суму с тим, да она стоји под интересом m година, па да му се у почетку ($m + 1$). године почне исплаћивати годишња рента r, која има да траје до почетка ($m + n$) године.

Нека он уложи сад суму a. До почетка ($m + n$) године она нарасте на

$$aq^{m+n-1}$$

Вредност ренте у почетку ($m + n$) године биће (пошто је трајала n година):

$$\frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Сопственик губи право на ренту, када изузме тачно онолико, нâ колико је нарастао његов улог:

(18) $$\boxed{aq^{m+n-1} = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Израчунавање ренте:

(19) $$\boxed{r = \frac{aq^{m+n-1}(q - 1)}{q^n - 1}}$$

Израчунавање улога:

(20) $$\boxed{a = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^{m+n-1}(q - 1)}}$$

Израчунавање година за које траје рента:

Из обрасца 19 излази:

$$rq^n - r = aq^{m+n} - aq^{m+n-1}$$
$$rq^n - aq^m \cdot q^n + aq^{m-1}q^n = r$$
$$q^n\,(r - aq^m + aq^{m-1}) = r$$
$$q^n = \frac{r}{r - aq^m + aq^{m-1}}$$

(21) $$\boxed{n = \frac{\log r + \operatorname{colog}\,[r - a\,(q^m - q^{m-1})]}{\log q}}$$

Садашња вредност ренте. — Неко има да прима n година ренту r. Њему је потребан новац и он хоће да прода другоме право на своју ренту. Шта вреди сад његова рента?

Од данас па за једну годину он има права да прими r динара (своју прву ренту). Шта вреди она данас? Ми знамо да сума r за m година нарасте на rq^{m}. Пошто је овде $m = -1$, то ће сума r за годину дана *назад* вредети *данас*:

$$rq^{-1}.$$

Од данас па за 2 године он има да прими опет ренту r. Она ће *данас* (две године назад) вредети:

$$rq^{-2}$$

Трећа рента:

$$rq^{-3}.$$

Рента r коју он има да прими после n година вредеће *данас:*

$$rq^{-n}$$

Све његове ренте r од n година вреде данас:

$$rq^{-1} + rq^{-2} + rq^{-3} + \ldots\ldots + rq^{-n+2} + rq^{-n+1} + rq^{-n}.$$

То је даље:

$$rq^{-1}(1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots\ldots + q^{-n+3} + q^{-n+2} + q^{-n+1}).$$

А кад саберемо геометриску прогресију у загради, имаћемо

$$rq^{-1}.\ \frac{(q^{-1})^{n} - 1}{q^{-1} - 1}$$

а то је даље, ако са R_s означимо садашњу вредност ренте r:

$$R_s = rq^{-1}\frac{q^{-n} - 1}{q^{-1} - 1} = rq^{-1}\frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = rq^{-1}\frac{\frac{1 - q^n}{q^n}}{\frac{1 - q}{q}}$$

$$R_s = rq^{-1}\frac{(1 - q^n)\,q}{(1 - q)\,q^n} =$$

То је даље:

$$(22) \qquad \boxed{R_s = \frac{r\,(1 - q^n)}{(1 - q)\,q^n}}$$

Садашња вредност ренте зове се још и *продајна цена* ренте.

Ако неко има да ужива n година ренту у почетку године, али рента почиње тек после m година, па хоће да је прода, овако ћемо наћи продајну цену те ренте:

Садашња вредност прве ренте r која има да се прими после m година биће: rq^{-m}

(јер се враћамо m година назад и време је негативно).

Садашња вредност друге ренте после $(m + 1)$ године биће:

$$rq^{-m-1}.$$

Треће ренте:

$$rq^{-m-2}.$$

Последње ренте;

$$rq^{-m-n}.$$

Садашња вредност *целокупне ренте* биће:

$$R_s = rq^{-m} + rq^{-m-1} + rq^{-m-2} + \ldots\ldots + rq^{-m-n}$$
$$R_s = rq^{-m}(1 + q^{-1} + \ldots\ldots + q^{-n})$$

$$R_s = rq^{-m}\frac{(q^{-1})^n - 1}{q^{-1} - 1} = rq^{-m}\frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = rq^{-m}\frac{\frac{1 - q^n}{q^n}}{\frac{1 - q}{q}} =$$

$$= rq^{-m}\frac{(1 - q^n)q}{(1 - q)q^n} = rq^{-m}\frac{(q^n - 1)q}{(q-1)q^n} =$$

$$= \frac{r(q^n - 1)q}{q^m \,.\, q^n\,(q - 1)} = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^{m+n-1}(q-1)}$$

ОСИГУРАЊЕ.

Осигурања има веома много врста, али ми ћемо овде поменути само две најпростије.

1\. — Неко хоће да улаже сваке године извесну суму a, да би крајем n-те године примио суму K.

II\. — Неко хоће да улаже m година извесну суму a, да би после примао n године по суму r сваке године.

Ти обрасци су већ обухваћени ранијим обрасцима код ануитета и ренте, те их овде нећемо изводити.

Напомена: — За све рачуне из овога одељка постоје и нарочито састављене таблице за практичну употребу у банкарским радњама и код друштава за осигурање.

ВЕЖБАЊА УЗ VI. ОДЕЉАК.

1. — На коју суму нарасте капитал од 30 000 динара за 10 година по 5%? Шта би било, да је то прост интерес?

2. — Исто питање за капитал од 6 000 дин. за 20 год. по 4%.

3. — Исто питање за 7 000 динара по 6% за 21 годину.

4. — Исто питање за 150 динара по 7% за 10 година.

5. — Исто питање за капитал од 11 058,20 динара за 6 година по 5%.

6. — Исто питање за капитал од 120 000 динара по 8% за 15 година са полугодишње капитализовањем.

7. — На коју суму ће да нарасте капитал од 15 000 динара дат под сложен интерес по $7\frac{1}{2}\%$ за 20 година, кад је полугодишње капитализовање?

8. — Која сума је била дата под сложен интерес по 6%, кад је за 20 година постала 20 645 динара?

9. — Колика је сума уложена пре 15 година под сложен интерес по $4{,}5\%$, кад је данас примљено са интересом 7742 динара?

10. — Исто питање, кад је данас примљено са интересом 7683, а капитал је био 10 година под сложеним интересом по 4%.

11. — Исто питање, кад је после 10 година примљено са сложеним интересом 4800 динара; проценат је био 5, а капитализовање свака 3 месеца.

12. — Један човек прода једно имање за 140 000 динара и ту суму да под сложен интерес по 4%. Кад ће имати 200 000 динара?

13. — Капитал од 275 000 динара нарастао је под сложеним интересом по 12% на динара 433 099. Колико година је био под интересом?

14. — Капитал од 35 000 динара нарастао је под сложеним интересом за 5 година на суму од 51 424 динара. Колики је био проценат?

15. — После колико година ће нарасти 20 000 динара по $4{,}5\%$ на 37 038?

16. — Исто питање за суму од 8760 динара која по $5\frac{1}{2}\%$ нарасте на 25 000.

17. — Сума од 10 500 динара дата је под сложен интерес по $3\frac{1}{2}\%$ пре двадесет година. Колико износи сад тај капитал?

18. — После колико година могу 15 000 динара донети 8 750 динара сложеног интереса по 5%?

19. — Кад ће се утројити капитал од k динара по $p\%$ сложеног интереса? *Примена*: $k = 10\,000$, $p = 8$.

20. — Исто питање, али полугодишње капитализовање.

21. — Исто питање, али капитализовање свака 3 месеца.

22. — Под којим процентом је била под сложеним интересом сума од 20 000 динара, кад је за 14 година донела 17 038,90 динара интереса?

23. — Под којим процентом је био капитал од 2 514 динара, кад је за 12 година донео 2 000 динара сложеног интереса?

24. — Кад је неко примио 12 000 динара за 7 025 динара што их је уложио пре 10 година под сложен интерес, колики је био проценат?

25. — На колику суму нарасте капитал од 2 000 динара по 8% сложеног интереса за 3 године и 7 месеци?

Треба израчунати за 3 године, па на ту суму *прост* интерес за 7 месеци. Тај прост интерес треба додати вредности, на коју капитал нарасте за 3 године.

Ако је капиталисање полугодишње, треба израчунати крајњу вредност капитала за $3 \times 2 + 1 = 7$ полгођа, па на ту суму израчунати прост интерес за 1 месец

У обрасцу $K = kq^n$ овде је $n = 7$, али је $q = 1 + \frac{4}{100}$.

26. — Неко има да плати после 5 година суму од 45 000 динара. Кад је проценат 6%, може ли он исплатити данас тај дуг сумом од 30 000 динара, кад се задужио пре две године?

27. — Неко се задужи 21 000 динара с тим да их по 5% сложеног интереса плати после 7 година. Којом сумом може он исплатити тај дуг после 3 године и 4 месеца?

28. — Неко узајми 10 000 динара с тим, да их врати после 8 година са 8% сложеног интереса. После 6 година и 5 месеца он дође до новаца. Има 13 000 динара. Може ли исплатити свој дуг?

29. — Колико треба времена да се капитал дат под сложен интерес по 7% увећа за своју половину?

(Ако је тај капитал k, после траженога времена биће $\frac{3}{2}\,k$. То је будућа вредност капитала k.)

30. — На коју суму нарасте капитал од 100 000 динара за 8 год. и 8 месеци по 11% сложеног интереса?

(Види вежбање 25).

31. — Коју суму треба дати под сложен интерес по 8%, па да се после 18 година прими 120 000 динара?

32. — Под колики проценат треба дати један капитал под сложен интерес, па да се учетворостручи за 31 годину?

33. — Сума од 150 000 динара дата је са $4{,}5\%$ под *сложен* интерес за 20 година. Колико година би требала да стоји та сума под *простим* интересом по 5%, па да нарасте на исту вредност?

34. — Сума од 80 000 динара дата је под *сложен* интерес по 5% за 12 година. Коју суму би требало дати под *прост* интерес по $5{,}5\%$, те да се за исто време прими исти интерес?

35. — Сума од 400 000 динара дата је под сложен интерес. Да је дата под интерес за годину дана мање, њена крајња вредност би била за 22 050 динара мања. Да је дата под интерес годину дана *више*, крајња вредност би јој била већа за 23 152 дин. Наћи проценат и време за које је капитал био дат под интерес.

36. — Један човек има две суме за давање под сложен интерес: једну од 6000 динара, другу од 5000 динара. Он израчуна, да би после 4 године примио за обе 13 141 динара, ако би већу дао под већи проценат, а мању под мањи проценат; међутим ако би већу суму дао под мањи проценат, а мању под већи, примио би свега 13 096 динара. Који су то проценти?

37. — Кад је требало дати под сложен интерес по 5% један динар, па да се данас прими капитал од 1000000 динара?

38. — У почетку сваке године улаже се 800 динара. Колико ће вредети сви ти улози на крају двадесете године, кад се плаћа сложен интерес $4{,}5\%$?

39. — Два детета се роде 1. јануара. Отац првог детета уложи у банку 4000 динара с тим да се његовом детету исплати тај улог са интересом, кад му буде 21 година. Други отац почне улагати од рођен-дана свога детета па у почетку сваког шестомесечја по 80 динара. Кад банка плаћа на уложени новац 6%, а капиталише интерес сваких шест месеци, које од та два детета има више да прими кад буде пунолетно?

40. — Неко носи у банку по 600 динара сваког првог јануара. Колико ће имати крајем десете године, кад је сложен интерес по 7%?

41. — Неко данас прими 46 880 динара за новац који је 12 година улагао почетком сваке године. Кад је проценат 4%, колики су били ти улози?

42. — Неко је преко целе године штедео и крајем сваке године носио у банку своју уштеду и давао под сложен интерес по 5%. Сваке године штедео је исту суму. Кад се навршило 10 година како је почео да штеди ради улога, прими из банке 4087 динара. Колико је штедео просечно сваког месеца?

43. — Коју суму би требало улагати почетком сваке године, да би се после 20 година примило 6000 дин? Проценат 5.

44. — Неко лице има да исплати свој дуг годишњим ануитетом од 2 500 динара, који има да се плаћа за 6 година. Којом сумом може сад да се одужи? Проценат 4,5.

(Треба наћи капитал k, који би за 6 година по $4{,}5\%$ нарастао на исту суму, на коју нарасту оних 6 ануитета).

45. — Једна општина може да плаћа годишње 50 000 динара ануитета у току 40 година, за зајам који мисли да начини. Кад је проценат 5, колику суму може добити на зајам?

46. — Пре 10 година отац је уложио за свога сина суму од 25 000 динара под сложен интерес по $7\frac{1}{2}\%$. Данас је банка јавила да смањује проценат на 7%. Отац уложи још 12 000 динара и кад је син постао пунолетан, дође да прими новац. Колику суму ће примити?

47. — Кад му се кћи родила, отац уложи у банку извесну суму, која је за 24 године имала да нарасте по 8% сложеног интереса на 200 000 динара. Кад је банка после 12 година смањила проценат на 7, а отац због тога уложио у банку још 20 000 динара, колико има кћи да прими, кад наврши 23. годину?

48. — Отац остави 698 000 динара с тим, да се крајем сваке године за његовог сина даје из банке 30 000 динара. Колико му је још остало у банци крајем 21 године, кад је проценат $6\frac{1}{2}$?

49. — Који је тај дуг, који је исплаћен за 12 година једнаким годишњим отплатама крајем сваке године по 1 500 динара, кад је интерес $7\frac{1}{2}\%$?

50. — Неко хоће да купи кућу. Сопственик му тражи, да положи одмах 83 500 динара и да му од дана куповине па за 6 година *почетком* сваке године плаћа по 83 500 динара. Купац нуди сад 50 000 динара и да *крајем* сваке године плаћа по 86 000 динара. Кад је интерес 5%, пошто сопственик хоће да прода, а пошто купац хоће да купи?

(Нађи прво вредност свих тих улога крајем шесте године. Затим нађи обема тим сумама садашњу вредност по обрасцу $k = \frac{K}{q^n}$).

51. — Колико година би требало улагати по 1 200 динара годишње, па да се после тога времена прими 20 000 динара, кад је интерес по 5%?

52. — Неко хоће да осигура своме десетогодишњем синчићу 50 000 динара кад му буду 23 године. Колико треба да улаже сваке године, па да му осигура ту суму, кад је интерес по 6%?

53. — Један младић прими данас 30 000 динара. Ту суму му је осигурао отац, који је почетком сваке године улагао по 2 400 динара. Пре колико година је отац почео уплаћивати ту суму, кад је интерес по 6%?

54. — Неко се задужи 315 000 динара с тим, да тај дуг исплати за 12 година плаћајући крајем сваке године једнаке суме. Колике морају бити отплате, кад је интерес по 12%, на узајмљени новац, а 6% на уложени?

55. — Колико година мора крајем сваке године да се плаћа по 4 000 динара, да би се отплатио дуг од 20 202,75 динара кад је интерес 10%?

56. — У отплату једног дуга од 62 100 динара плаћа се крајем сваке године по 10 000 динара. Кад ће дуг да се исплати, кад је интерес 6%?

57. — Један човек се задужио 100 000 динара по 4% сложеног интереса. Сваке године даје 5 679 динара отплате. Кад ће се одужити?

58. — Неко се задужи 100 000 динара и исплати дуг у две годишње отплате по 52 765 динара. Колики је проценат?

59. — Један човек пита колику суму би требао да улаже под сложен интерес по 7% почетком сваке године, од навршене 20., до навршене 55., да би тада имао суму од 300 000 динара?

60. — Један пушач је трошио од своје 20. до 60. године по 8 динара дневно за цигарете. Пита се, колико би примио по навршетку своје 60. године, да је крајем сваке године улагао под сложен интерес по 7% суму од 2 920 динара, колико га годишње стаје та штетна навика.

61. — У једној држави становништво се увећа сваке године за свој $\frac{1}{50}$ део. Пита се кад ће се удвојити.

(Колики је овде проценат?)

62. — Једна варошица има 8000 становника. Примећено је да се у њој становништво смањи сваке године просечно за 160 становника. Ако се то тако продужи, кад ће она спасти на 5000 становника?

63. — Који дуг би се могао исплатити годишњим отплатама крајем сваке године за 7 година по 20 000 динара, кад је сложен интерес по 5%?

64. — Две суме, једна од 18 000 динара, а друга од 12 000 динара дате су под сложен интерес: прва по 4%, друга по $4{,}5\%$. Кад ће се оне изједначити?

65. — Неко се задужио 15 000 динара с тим, да тај дуг плати у 12 једнаких отплата крајем сваке године. Колика је отплата, кад је сложен интерес по 5%?

66. — За колико година са сложеним интересом по 12% могу 5 000 динара да постану 100 000 динара?

67. — Сума од 150 000 динара дата је под сложен интерес по 12%. Кад се крајем сваке године изузима сума од 20 000 динара, колико ће још остати после 15 година?

68. — Неко је дао у банку под сложен интнрес по 7% суму од 600 000 динара и крајем сваке године узима по 84 000 динара. Колико година ће му трајати тај новац?

69. — Један човек се задужи 160 000 динара по 10% сложенога интереса, да отвори једну радњу. После 3 године врати своме повериоцу 50 000 динара, а опет после 3 године још 100 000 динара. Две године после другога плаћања он хоће да исплати сав свој дуг. Колико има још да плати?

70. — На колику суму се осигурао неко, који се обавезао, да плаћа почетком сваке године по 1200 динара, а осигурање има да прими после 20 година? Интерес 5%.

71. — Који дуг може да се исплати за 8 година, кад се крајем сваке године плаћа по 20 000 динара, а интерес је 6%?

72. — Једно имање је купљено за 250 000 динара. При куповини се исплати 87 000 динара, а остатак има да се исплати у 15 једнаких отплата крајем сваке године. Колико мора да се плаћа годишње, кад је интерес 8%?

73. — Неко је дужан 14 720 динара. Крајем сваке године плаћа по 2 000 динара. Кад ће се одужити, кад је интерес 6%?

74. — Колико година је улагао неко крајем сваке године по 3 000 динара, кад је крајем последње године примио 46 880 35? Интерес је 4%.

75. — Неко је некорисно трошио сваке године за 25 година бар по 1 500 динара. Да је то поклањао неком добротворном друштву, колико би то друштво имало сад, кад је интерес 6%?

76. — Неко отплаћује свој дуг од 100 000 динара полугодишњим ануитетом од 5 000 динара. Кад отплата дуга има да траје 25 година, колико банка плаћа интереса на улоге кад дужнику рачуна 5,5% на његове уплате? Колико тај дужник стварно дугује крајем 10 године?

77. — Дужник има да плаћа 8 000 динара полугодишњег ануитета за 12 година, да би исплатио свој дуг. Колики му је дуг, кад банка плаћа 6% на уложени новац, а наплаћује 11,5% на позајмљени новац?

Колика је десета амортизација?

78. — Неко је дужан 100 000 динара. Колики је полугодишњи ануитет, кад дуг мора да се исплати за 12 година, а банка даје на уплате 5% интереса, а наплаћује 11% на позајмице? Којом сумом може тај дуг да се исплати крајем 5 године?

79. — Неко дугује 16 000 динара и исплаћује их тромесечним ануитетима за 20 година. Банка плаћа 5% интереса, а наплаћује 12%. Колика је прва амортизација? А десета?

80. — Неко хоће да исплати свој дуг од 300 000 динара полугодишњим ануитетима од 30 000 динара. Банка плаћа 4% интереса, а наплаћује 8%. Колико година ће трајати отплаћивање тога дуга? Колика је пета амортизација?

81. — Неко дугује 220 000 динара. Дуг исплаћује полугодишњим ануитетима од 12 000 динара. Банка плаћа 5% интереса, а наплаћује 12%. Крајем 6 године дужник положи банци 5000 динара место 3000 динара. Кад ће се одужити?

82. — Колико дугује једно лице, које је обавезно да плаћа полугодишње ануитете од 10 000 динара за 10 година, кад банка плаћа 4%, а наплаћује 9% интереса? Колико дугује то лице крајем 8 године (после положеног 16 ануитета)?

83. — Једно лице може да плаћа 8 година полугодишње ануитете од 15 000 динара. Може ли примити дуг од 260 000 динара за кућу коју жели да купи с тим, да дуг са ње исплати за 8 година поменутим ануитетима, кад банка плаћа 4,5%, а наплаћује 10%? Колика му је шеста амортизација?

84. — Која сума мора да се улаже 25 година сваке године у банку која плаћа 5% интереса, да би се осигурала рента за 20 година од 7 000 динара с тим, да се прва рента прими годину дана после последњег улога?

85. — Неко је 20 година улагао у банку по 4 700 динара годишње. Интерес је 5%. После тих 20 година он је рад да троши годишње по 18 000 динара, а да не улаже ништа. Колико година ће му трајати та рента?

86. — Неко је улагао 25 година сваке године по 3 600 динара у банку, која плаћа 6,5% интереса. После тога времена он престаје уплаћивати. Он хоће да ужива ренту од 12 000 динара. Колико година може да је ужива?

87. — Неко хоће да ужива ренту од 15 000 динара годишње 20 година. Колико треба да улаже годишње за 25 година, кад је интерес 5%?

88. — Неко има право на годишњу ренту од 24 000 динара за 15 година. За колико треба да смањи своју ренту, кад хоће да му она траје 25 година а интерес је 5,5%?

89. — Неко је израчунао, да после 10 година има да потроши сав свој капитал, ако узима годишње 30 000 динара. Колико година ће моћи уживати ту своју ренту, ако узима годишње само по 20 000 динара, кад је интерес $6\frac{1}{4}$%?

90. — Један човек има права на 30-годишњу ренту од 24 000 динара. Кад је интерес 5%, колико он може добити сад за ту ренту?

VII. — КОМБИНАТОРИКА. — БИНОМНИ ОБРАЗАЦ.

КОМБИНАТОРИКА.

Дефиниције. — Кад имамо више ствари, па се питамо: *На који начин можемо да их размештамо и здружујемо?* — улазимо у *комбинаторику* или *науку о комбинацијама.*

Један прост пример ће нам то одмах објаснити. За једним столом има *шест места.* Може нам се поставити овако питање: *На колико разних начина могу да се разместе шест лица за тим столом?* Или: Кад је *десет* присутних лица, *колико разних друштванаца од шест лица могу да саставе тих десет лица?* Или: На колико начина могу сва та друштванца од *шест* лица (која су састављена од *десет* присутних лица) да се поразмештају за тим столом?

Ако одговарамо на прво питање, ми ћемо вршити *пермутовање*; ако одговарамо на друго питање, вршићемо *комбиновање*; а ако одговарамо на треће питање, вршићемо *варирање.*

Дате ствари (или лица) које имамо да ређамо или да здружујемо, зову се *основци*, или *елементи.* Више основака заједно узетих зову се *слог.* Слог од једног основка је *слог прве класе*, од два основака *слог друге класе*, од три основка *слог треће класе* и т. д.; слог од n основака јесте слог n-те класе.

Основке обележавамо на разне начине. Можемо их обележавати писменима из азбуке: $a, b, c, d, \ldots$ Можемо их све обележавати цифрама: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Можемо их све обележити истим писменом, али разним казаљкама.

Примери:

Слогови друге класе: *ab, cd, mn, rs, pq, xy* ....
12, 33, 56, 78, 89, 67 ....
$a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8, a_4a_5$ ....

Слогови треће класе: *abc, cde, def, efg, ghj, klm, mnp* ....
123, 345, 567, 893, 567, 786 ....
$a_1a_2a_3, a_3a_4a_5, a_6a_7a_8, a_2a_3a_5$ ....
и т. д. и т. д.

Од два основка *виши* је онај који је представљен доцнијом цифром или доцнијим писменом у азбуци, или има већу казаљку.

Примери.

d је виши основак од *a*
4 „ „ „ „ 3
a_5 „ „ „ „ a_2

Од два слога *виши* је онај, код кога пре наилазимо на виши основак идући у слогу с лева на десно.

Примери:

abmnpc је виши од abcmpn
4156 „ „ „ 1456
$a_1a_3a_2a_4$ „ „ „ $a_1a_2a_3a_4$.

Пермутације.

Дефиниција. — Кад нам је дато неколико основака, па нам се тражи, да их *све* разместимо на све могуће начине, ми ћемо добити известан број слогова. Тај посао зове се *пермутовање*, а сваки добивени слог зове се *пермутација*.

Пример. Дата су нам *три* основка *a, b,* и *c.*

Поређајмо најпре *a* и *b*. Биће:

ab и ba.

У сваком од ова два слога можемо ставити *c* на три места: с десна, у средини, или с лева. Дакле:

abc bac
acb bca
cab cba

На тај начин смо изређали 3 дата основка на све могуће начине. Добили смо 6 *пермутација* 3. класе.

У сваку пермутацију улазе сви задати основци. Затим је број класе код пермутовања увек једнак с бројем задатих основака.

Пермутације без понављања и пермутације с понављањем. — Ако су у једноме слогу сви основци различити, то је *пермутација без понављања.* Ако у слогу има два или више једнаких основака, то је *пермутација с понављањем.*

Примери.

Пермутације без понављања: 2345, 6923, *abcd, amcb,* $a_1a_3a_4a_2$....
„ с понављањем: 2324, 3345, *abad, bbca,* $a_1a_2a_1a_3$....

Грађење пермутација. — Нека су нам дата неколика основка. Да бисмо од њих добили све могуће пермутације, треба радити овако:

Гради се најпре *најнижи слог.* То је онај слог, код кога је први с лева најнижи основак, а први с десна највиши, а остали основци иду редом *растући.* У том најнижем слогу пође се с десна на лево и гледа, који се основак може повисити. Тај основак се повиси следећим већим с десна, основци испред њега се не дирају, а основци десно од њега се поређају природним редом. Тај посао — *пермутовање* — понавља се, док се не добије *највиши слог.* Највиши слог је онај, у коме је с лева први основак највиши, а с десна први најнижи, а остали основци иду природним редом *опадајући.*

Примери. — Начинити све пермутације 4. класе од основака 1, 2, 3, 4 и *a*, b, *c*, *d* и 1, 1, 2 3.

1) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321,

2) abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

3. 1123, 1132, 1213, 1231, 1312, 1321.
2113, 2131, 2311.
3112, 3121, 3211.

Број пермутација. — Да бисмо видели колико пермутација можемо направити од **n** основака, радићемо овако:

Узмимо два основка: *a* и *b*.

Пермутације друге класе биће свега *две*:

ab и ba.

Свака од њих има 3 места на која можемо ставити трећи основак *c*, као што смо већ видели. На тај начин ћемо од сваке пермутације друге класе добити 3 пермутације 3. класе. Пошто имамо 1 пермутацију I. класе, а 2 пермутације 2. класе, биће:

број пермутација 1. класе: $P_1 = 1$

" " 2. " $P_2 = 2$

" " 3, " $P_2 \times 3 = 2 \,.\, 3 = 6.$

Свака пермутација 3. класе има 4 места где можемо ставити 4. основак *d*.

abcd, abdc, adbc, dabc.

Значи да ћемо од сваке пермутације 3. класе, добити 4 пермутације 4 класе. Према томе биће:

број пермутација четврте класе: $P_4 = P_3 \times 4 = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$

Свака пермутација 4. класе има 5 места где можемо ставити 5. основак **e:**

abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd.

Према томе, свака пермутација 4. класе даје 5 пермутација 5. класе. Отуда ће бити:

број пермутација 5. класе: $P_5 = P_4 \times 5 = 24 \,.\, 5 = 120$

Како имамо свега једну пермутацију прве класе, можемо писати:

$P_1 = 1$

$P_2 = 1 \,.\, 2$

$P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$

$P_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$

$P_5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$

$P_6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (n-3) \,.\, (n-2) \,.\, (n-1) \,.\, n$

Ово је производ од *n узастопних бројева*, почевши од јединице. Такав производ пишемо скраћено овако:

$$n!$$

и читамо: *„ен факторијел"*.

Ако у наших **n** основака има *m* међусобно *једнаких*, можемо најпре те основке сматрати различним, па ћемо добити

$$n!$$

пермутација. Ако те пермутације поделимо сад у групе тако, да у једну групу ставимо само оне пермутације, у којима се неједнаки основци (има их **n — m**) не померају са својих места, онда ће у свакој групи бити *m*! пермутација. Према томе број свих тих група биће $\frac{n!}{m!}$. У ствари слогови исте групе биће једнаки, те ће број

пермутација бити онолики, колики је број група. Према томе број пермутација је:

$$\frac{n!}{m!}$$

ако у *n* основака има *m* једнаких.

Ако у *n* основака има *m* једнаких једне врсте, *p* једнаких друге врсте, а *q* једнаких треће врсте, биће број свих пермутација:

$$\frac{n!}{m!\; p!\; q!} \qquad \text{Зашто?}$$

Примери. — 1) На колико начина могу да се разместе 6 лица за једним столом?

$$P_6 = 6! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 720.$$

2) Колико пермутација могу да се направе од ових основака:

1, 1, 2, 3.

Овде имамо 4 основка, од којих су 2 *једнака*

Дакле n = 4, m = 2. Према томе је

$$P'_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} = 12.$$

Овај пример смо већ израдили. Са P′ означаваћемо број *пермутација с понављањем.*

Комбинације.

Дефиниције. — *Комбиновати* значи од *n* датих основака направити све слогове r-те класе, али тако, да не буду нигде у два слога сви основци једнаки. Тако добивени слогови зову се *комбинације*. Комбинације могу бити *с понављањем* и *без понављања*. Ако су у једноме слогу сви основци различити, комбинација је без понављања; ако у слоговима има и по два и више једнаких основака, комбинација је с понављањем.

Комбинацију *r*-те класе од *n* основака обележаваћемо са ${}_rC_n$, ако је без понављања, а са ${}_rC'_n$, ако је с понављањем.

Грађење комбинација. — Да бисмо добили све комбинације *без понављања* *r*-те класе од *n* елемената, треба радити овако. Образује се *најнижи слог* од *r* основака изабраних између *n* датих основака. У томе слогу иде се с десна на лево и замењује се првим вишим основком онај основак, који се може заменити преосталим основцима, а основци десно од њега поређају се природним редом. Тај посао се понавља доклегод је могуће повишавати основке.

Примери. — 1. — Начинити све комбинације без понављања друге класе од 4 основка *a, b, c, d.*

Најнижи слог друге класе биће овде:

ab.

Основак b се може заменити са c:

ac.

Основак c се може заменити са d:

ad.

Основак d се више не може замењивати, јер је међу датим основцима a, b, c и d он највиши основак. Али може се заменити основак a. Његов је први виши b. Кад место a ставимо b, морамо друго место попунити природним редом, дакле са c:

bc.

И сад даље:

bd, cd.

Све комбинације 2. класе од 4 основка, а без понављања, биће:

ab, ac, ad, bc, bd, cd.

2. — Начинити све комбинације без понављања 3. класе од основака 1, 2, 3, 4, 5.

123
124
125
134
135
145
234
235
245
345

Да бисмо добили *све* комбинације r-те класе од n елемената *с понављањем*, треба радити овако. Образује се слог r-те класе од *најнижег основка* (узетог r пута). Затим се с десна крајњи основак замењује првим вишим. Први виши основакређа се с десна, док се не попуне свих r места. Тако се ради док се не дође до слога састављеног само од *највишег* основка.

Примери. — 1) Начинити све комбинације *с понављањем* 3. класе од ових основака: 1, 2, 3, 4, 5.

1)	2)	3)	4)
111	134	234	355
112	135	235	444
113	144	244	445
114	145	245	455
115	155	255	555.
122	222	333	
123	223	334	
124	224	335	
125	225	344	
133	233	345	

2) Начинити све комбинације *с понављањем* 2. класе од основака a,b,c и d.

1)	2)	3)	
aa	ad	bd	
ab	bb	cc	dd.
ac	bc	cd	

Број свих комбинација r-те класе од n основака. — 1) *Без понављања.* — Узмимо најпре да видимо број комбинација *2. класе* од n основака.

Да бисмо добили ма коју комбинацију 2. класе, треба ма који од n основака да вежемо са једним од (n — 1) преосталих. Да бисмо добили *све* комбинације 2. класе, треба сваки основак да вежемо са свима осталима. Док један основак везујемо са свима осталима добићемо (n — 1) комбинацију. А кад тај посао обавимо n пута (јер има n основака), добићемо n пута по (n — 1) комбинацију. Према томе број комбинација 2. класе био би n (n — 1). Јест, али при томе послу свака комбинација се јавља *два* пута. (Кад везујемо a са b и b са a, b са c и c са b). Зато горњи број треба поделити са 2. Према томе, број комбинација 2. класе од n елемената без понављања биће:

$$ {}_2C_n = \frac{n\,(n-1)}{2}. $$

Ако хоћемо сад да добијемо све комбинације 3. класе, треба све комбинације 2. класе да вежемо са свима преосталим основцима. При томе ће се свака *комбинација јавити три пута.* Ако све комбинације 2. класе вежемо са свима (n — 2) преосталим основцима, добићемо

${}_2C_n \times (n-2)$ комбинације.

Али како се свака комбинација јавља три пута, горњи број треба поделити са 3, те ће ово бити број свих комбинација 3. класе без понављања:

$$_3C_n = \frac{n\ (n-1)\ \ (n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

Да се свака комбинација јавља 3 пута при спајању комбинација 2 класе с преосталим основцима, види се из овога:

	a	*b*	*c*	*d*
	ab и	*c* дају	*abc*	
али и	*ac* и	*b* дају	*acb*	
и	*bc* и	*a* дају	*bca*	

а ове три комбинације 3 класе представљају *једну исту* комбинацију 3. класе *без* понављања.

Ако исто размишљање продужимо, видећемо да је

$$_4C_n = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$$

Одатле лако можемо извести овај образац за број комбинација *r*-те класе од *n* основака без понављања:

$$_rC_n = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (n-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r}$$

Горњи се образац скраћено пише овако:

$$_rC_n = \binom{n}{r}$$

и чита се: *„ен* над *ер"*.

Пример. — 1) Израчунати број комбинација 2 класе од 4 основка без понављања. Биће:

$$_2C_4 = \binom{4}{2} = \frac{4\ .\ .\ .\ .}{1\ .\ 2}$$

Бројитељ се почиње са 4, а треба да се заврши са:

$$4 - 2 + 1 = 3$$

према томе ће тражени број комбинација бити:

$$_2C_4 = \binom{4}{2} = \frac{4\ .\ 3}{1\ .\ 2} = 6$$

Видели смо при грађењу комбинација, да је ово тачно.

2) Израчунати број комбинација 3. класе од *пет* основака без понављања.

$$_3C_5 = \binom{5}{3} = \frac{5\ .\ .\ .}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .}$$

Бројитељ се почиње чинитељем 5, а треба да се заврши чинитељем:

$$5 - 3 + 1 = 3$$

те ће бити:

$$_3C_5 = \binom{5}{3} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3}{1\ .\ 2\ .\ 3} = 10.$$

При грађењу комбинација видели смо да је ово тачно.

2) *Број комбинација с понављањем.*

Узмимо најпре да направимо све комбинације друге класе *с понављањем* од 3 основка: 1, 2, 3.

11, 12, 13, 22, 23, 33.

Ако основцима у сваком члану додамо посебице редом првоме нулу, а другоме 1, добићемо: 1 + 0, 1 + 1, то јест 12, па ће бити:

12, 13, 14, 23, 24, 34.

Добијамо, као што се види, све *комбинације без понављања*, 2 класе од 4 елемената (1, 2. 3, 4). Сад имамо *исти број* комбинација у оба случаја. Како је

$$_2C_4 = \binom{4}{2},$$

то мора бити:

$$_2C'_3 = {_2C_4} = \binom{4}{2}.$$

Ако начинимо све комбинације 3. класе од 4 елемента 1, 2, 3, 4, имаћемо (с понављањем):

111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134,
144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334,
344, 444.

Ако основцима у свима овим комбинацијама додамо редом 0, 1, 2, добићемо:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156,
234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

А ово су комбинације 3. класе од 6 елемената без понављања. Њих има: $_3C_6 = \binom{6}{3}$. Како је једних и других комбинација *исти број*, то ће бити:

$$_3C'_4 = {_3C_6} = \binom{6}{3}.$$

Ако тако будемо и даље размишљали, добићемо:

$$_4C'_5 = {_4C_8} = \binom{8}{4}.$$

Како ћемо познати од колико елемената ће бити нове комбинације, кад додамо 0, 1, 2, 3 .... основцима у свима комбинацијама? Ако је комбинација с понављањем 5. класе од 7 основака додаћемо 0, 1, 2, 3, 4. Ако крајњем основку 7 додајемо редом 0, 1, 2, 3, 4, видећемо ово. Он се не мења, ако му додамо нулу. Мењаће се, ако додамо један од она друга четири основка. Значи имаћемо 5 — 1 нових основака. Било их је већ 7, те ће их свега бити 7 + 5 — 1. Ако је комбинација *r* класе од *n* основака, кад највишем основку од *n* основака додајемо редом: 0, 1, 2, 3, 4 .....

r — 1, добићемо (r — 1) нових основака. Сад ће комбинације без повљања бити од [n + (r — 1)] основака. Према томе ће бити:

$${}_rC'_n = {}_rC_{n+(r-1)} = \binom{n+r-1}{r}.$$

То је општи образац за број комбинација *с понављањем*.

Пример. Нађи број свих комбинација 2. класе од 5 основака с понављањем.

$${}_2C'_5 = {}_2C_{5+2-1} = {}_2C_6 = \binom{6}{2} = \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2} = 15.$$

Варијације.

Пермутоване комбинације. — Нека су нам дате 4 цифре: 1, 2, 3 и 4 да од њих начинимо све могуће двоцифрене бројеве неједнаких цифара.

Начинићемо све комбинације друге класе без понављања:

(a) 12 13 14 23 24 34

Али то нису сви тражени бројеви. Од цифара 1 и 2 можемо добити и број 21, а њега нема у горњем низу. Број 21 добијамо кад извршимо пермутацију у првоме слогу:

од 12 правимо 21.

Кад извршимо пермутације у свима слоговима низа (a), добијамо све тражене бројеве:

	12	13	14	23	24	34
(b)	21	31	41	32	42	43.

Слогови из низа (a) су комбинације без понављања. Слогови из низа (b) су пермутоване комбинације. Пермутоване комбинације зову се **варијације**. Слогови из низа (b) су **варијације**. Како се у њима основци не понављају, ово су варијације без понављања. Све су то варијације II класе без понављања.

Грађење варијација без понављања. — Од основака a, b, c и d начинити све варијације без понављања треће класе.

I. начин — Начинимо све комбинације треће класе без понављања. То су:

abc abd acd bcd.

Сад од њих све варијације:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

II. начин. — Најпре начинимо најнижу комбинацију треће класе без понављања. То је комбинација *abc*. Сад с десна на лево смењујемо први основак који се може повисити једним од датих основака. Основке десно од њега узимамо из датих основака и ређамо их природним низом (најнижи, па све већи.)

a b c d

Најнижа комбинација без понављања је *abc*. abc

Повишујемо основак *c*: abd

Сад смењујемо основак *b* основком *c*:

ac.

Остају нам основци *b* и *d*. Празно место у нашем слогу попуњавамо са *b*: acb

Даље: acd

Сад смењујемо основак c основком *d*:

ad.

Остају нам основци *b* и *c*. Узимамо *b*: adb

Даље је:

adc	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc	cab
cad	cba	cbd	cda	cdb	dab	dac	dba
dbc	dca	dcb					

Број варијација без понављања. — Да израчунамо број варијација без понављања r-те класе од **n** елемената.

Број комбинација r-те класе без понављања биће:

$$\binom{n}{r}$$

Свака комбинација даће r пермутација. Зато ће свега варијација r-те класе од n елемената, без понављања, бити:

$${}_rV_n = \binom{n}{r}\,.\,r! \qquad \text{То је даље:}$$

$${}_rV_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots(n-r+1).$$

Пример 1. — Израчунај број варијација без понављања 2. класе од 3 елемента

$${}_2V_3 = \binom{3}{2}\,.\,2! = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\,.\,1\,.\,2 = 6.$$

Пример 2. — Израчунај број варијација без понављања 4. класе од 5 основака.

$${}_4V_5 = \binom{5}{4}\,.\,4! = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4 = 120.$$

Пример 3. — Израчунај број варијација без понављања 3. класе од 3 елемента.

$_3V_3 = n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\,(n-r+1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

Је ли исти толики и број пермутација $P_3 = \dots$? Зашто је то тако?

Варијације с понављањем. — Варијација је с понављањем онда, ако се у њеним слоговима понављају основци.

Грађење варијација с понављањем.

I. начин. — Начинити све варијације с понављањем друге класе од ових основака: a b c d.

Начинићемо све комбинације друге класе с понављањем:

aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd

Сад ћемо пермутовати оне које се даду пермутовати:

Од ab	добијамо	ba	Не могу се пермутовати:
„ ac	„	ca	aa
„ ad	„	da	bb
„ bc	„	cb	cc
„ bd	„	db	dd
„ cd	„	dc	

Добили смо све варијације с понављањем друге класе од 4 дата основка.

II. начин. — Начинимо најнижи слог од једнаких основака. То је слог *aa*. Први основак с десна који се да заменити замењујемо вишим основком, а остале узимамо из датог низа, почињући од најмањег. При томе узимању не прескачемо ни основак који већ имамо.

Основци: a b c d.

Варијације друге класе с понављањем:

aa ab ac ad ba bb bc bd ca cb cc cd
da db dc dd.

Број варијација с понављањем. — Образац за број варијација с понављањем извешћемо на примерима. Број варијација *r*-те класе с понављањем од *n* елемената обележаваћемо са $_rV'_n$.

Пример I. — Колики је број варијација с понављањем друге класе од 3 основка?

Основци: a b c.

Тражене варијације:

aa ab ac ba bb bc ca cb cc.

Број варијација је 9. То значи 3^2.

$$_2V'_3 = 3^2$$

Пример II. — Колики је број варијација с понављањем 3. класе од 2 основка?

Основци: a b .

Варијације:

aaa aab aba abb baa bab bba bbb,

$$_3V'_2 = 8 = 2^3.$$

Пример III. — Колики је број варијација с понављањем 3 класе од 3 основка?

Основци: a b c .

Варијације:

aaa	aab	aac	aba	abb	abc	aca	acb	acc
baa	bab	bac	bba	bbb	bbc	bca	bcb	bcc
caa	cab	cac	cba	cbb	cbc	cca	ccb	ccc

$$_3V'_3 = 27 = 3^3.$$

Пример IV. — Колики је број варијација с понављањем 2. класе од 4 основка?

Њих смо већ градили. Видели смо да их је 16

$$_2V'_4 = 16 = 4^2.$$

Пример V. — Колики је број варијација с понављањем 4. класе од 2 основка?

Нека су основци: 1 2.

Тада су ово све те варијације:

1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222
2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222.

$$_4V_2' = 16 = 2^4.$$

Из примера видиш да је

$$_r\mathbf{V'}_n = \mathbf{n^r}\,.$$

Тај образац се може извести и овако:

Узмимо 4 основка *a b c d.*

Број варијација прве класе биће: 4.

Ако сваку ту варијацију спојимо са сваким основком, добићемо све варијације друге класе с понављањем.

Број варијација прве класе: 4

„ „ друге „ $4 \cdot 4 = 4^2$.

Све варијације треће класе с понављањем добићемо, ако сваку варијацију друге класе спојимо са сваким основком. Свака варијација даје још 4 нове. Према томе број варијација треће класе с понављањем биће:

$_3V_4' = 4^2 \cdot 4 = 4^3$. И т. д.

Биномни образац.

Производ бинома који се разликују само другим чланом. — Веома често нам је потребно да множимо биноме код којих је једнак први члан:

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c)\;.\;.\;.\;.\;.\;(x + n).$$

Узмимо свега два таква бинома:

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab.$$

Узмимо три таква бинома:

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c) = x^3 + (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x + abc$$

Кад погледамо коефициенте уз x, видимо да је коефицијент првога члана, 1, а осталих чланова збир *комбинација без понављања*. Те збирове комбинација обележићемо грчким писменом сигма:

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + \Sigma\,{}_1C_2x + \Sigma\,{}_2C_2$$

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c) = x^3 + \Sigma\,{}_1C_3x^2 + \Sigma\,{}_2C_3x + \Sigma\,{}_3C_3.$$

За n таквих бинома биће:

$$(1)\quad (x + a)(x + b)\;.\;.\;.\;.\;(x + n) = x^n + \Sigma\,{}_1C_n\,x^{n-1} + \Sigma\,{}_2C_n\,x^{n-2} + \;.\;.\;.\;.\; + \Sigma\,{}_nC_n\,.$$

(n чинитеља)

Пример. — Наћи производ

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) &= x^4 + \Sigma\,{}_1C_4x^3 + \Sigma\,{}_2C_4x^2 + \Sigma\,{}_3C_4 + \Sigma\,{}_4C_4\\ &= x^4 + (1 + 2 + 3 + 4)\,x^3 + (1\,.\,2 + 1\,.\,3 + 1\,.\,4 + 2\,.\,3 + 2\,.\,4 + 3\,.\,4)\,x^2\\ &\quad + (1\,.\,2\,.\,3 + 1\,.\,2\,.\,4 + 1\,.\,3\,.\,4 + 2\,.\,3\,.\,4)\,x + 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\\ &= x^4 + 10x^3 + (2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12)\,x^2 + (6 + 8 + 12 + 24)\,x + 24\\ &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24.\end{aligned}$$

Биномни образац. — Ако у обрасцу (1) ставимо $a = b = c = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = n$, добићемо бином $(x + a)$ на n-ти степен. У томе случају наше комбинације постају све једнаке и овако изгледају:

a, aa, aaa, aaaa, ...

или

$a,\; a^2,\; a^3,\; a^4,\; .\;.\;.\;.\;.\;.\; a^n\,.$

Њихов број је број комбинација *без* понављања:

$${}_1C_n = \binom{n}{1} = n$$

$${}_2C_n = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}$$

$${}_3C_n = \binom{n}{3} = \frac{n\,(n - 1)\,(n - 2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

— — — — — — — —

$${}_nC_n = \binom{n}{n} = 1.$$

Према томе производ једнаких чинитеља ће овако изгледати:

$$(x \pm a)\,(x \pm a)\,(x \pm a)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; n \text{ пута}$$

а то је даље:

$$(2)\quad (x \pm a)^n = x^n \pm na\;x^{n-1} + \frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}\,a^2x^{n-2} \pm \;.\;.\;.\;.\; \pm a^n$$

то је *биномни образац*.

Пример. — Развити овај степен: $(x + a)^5$

$$\begin{aligned}(x + a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\,a^2x^3 + \frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3x^2 + \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^4x + \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,a^5 =\\ &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.\end{aligned}$$

Кад се боље загледа у образац (2) и у овај пример, види се ово:

1) Изложитељ првог члана бинома (x) *опада* од n до 0.

2) „ другог „ „ (a) *расте* „ 0 „ n.

3) Коефицијенти су једнаки код чланова једнако удаљених од крајева развијеног бинома.

4) Знаци су сви $+$, ако бином представља збир, а наизменично $+$ и $-$, ако бином представља разлику.

ВЕЖБАЊА УЗ СЕДМИ ОДЕЉАК.

1. — Напиши све пермутације од речи *соба.*

2. — Исто за реч *школа.*

3. — Исто за реч *Авала.*

4. — Напиши све пермутације свога имена.

5. — Исто за бројеве 125, 1 567, 85 679, 8 819, 1 888.

6. — Напиши све троцифрене бројеве које се могу написати овим трима цифрама: 1, 2, 7.

7. — Колико има свега пермутација од речи *Космај*?

8. — Исто за реч *Јагодња.*

9. — У једном купеу у вагону има 6 места. На колико начина могу да се размештају 6 лица тако, да никад једно лице не седи на истом месту?

10. — Међу свима пермутацијама цифара броја 456, колико бројева се почињу са 5?

11. — Колико троцифрених бројева могу да се напишу овим трима цифрама 2, 2 и 4?

12. — Колико четвороцифрених бројева могу да се напишу цифрама 1, 2, 8, 9?

13. — Исто питање за цифре 2, 3, 7, 8?

14. — На колико начина могу три ученика да седе у једној клупи?

15. — Колико има пермутација које почињу са *m*, кад су грађене од основака *i m n*?

16. — Колико има пермутација које почињу са *ma* од основака *a, m, n*?

17. — Колико има пермутација од основака *i, l, m, n,* које почињу са *mil*?

18. — Која је пермутација по реду реч *Јован* од основака *а, в, ј, н, о*? (Колико има пермутација које ту почињу са *а*?

„ „ „ „ „ „ „ *в*?

„ „ „ „ „ „ „ *ја*?

„ „ „ „ „ „ „ *јв*?

„ „ „ „ „ „ „ *јн*?

„ „ „ „ „ „ „ *јоа*?

„ „ „ „ „ „ „ *јов*? И т. д.).

19. — Како гласи пета пермутација од основака *а, д, р*? (Колико их има са *а* на почетку? Колико њих почињу са *д*? И т.д.).

20. — Како гласи 10. пермутација од основака *а, в, е, р*? (Колико њих почињу са *а*? Јеси ли већ дошао до десете пермутације?)

Колико их има што почињу са *v*? Да ниси већ прешао 10. пермутацију? Врати се.

Колико их има што почињу са *ва*? Колико их има свега до сад? Оних са *а* . . . ; оних са *ва* = . . . Свега прошло пермутација . . . И т. д.).

21. — Како гласи 87. пермутација од основака *е, п, с, у, х*?

22. — Како гласи 708. пермутација од основака *а б, д, е о п*, ?

23. — Колико двоцифрених бројева могу да се напишу од цифара, 2, 5, 7. 8, али тако, да нигде два броја немају исте цифре? Испиши их!

24. — Написати све двоцифрене бројеве, који се могу образовати од цифара 1, 2, 3, 4, али тако, да им цифре не буду једнаке. Испиши их!

25. — Од десет кандидата са одличним условима, могу добити места свега двојица. На колико начина може да се учини распоред?

26. — Означено је 15 тачака тако, да нигде не леже три на једној правој Са колико правих могу међусобно да се вежу све те тачке по две и две?

27. — Колико дијагонала могу да се повуку у тридесетоуглаонику?

28. — Број комбинација 3 класе од извесног броја основака стоји према броју комбинација 5. класе, као 5 : 3. Колико има тих основака, кад су комбинације без понављања?

29. — Колико разних застава могу да се начине од ових трију боја: *плаве, беле* и *црвене*?

30. — У једној кеси налазе се 8 белих и 6 црвених лоптица. На колико начина могу из ње да се изваде 10 лоптица?

31. — Колико троцифрених бројева разних цифара могу да се напишу од цифара 6 4 0 3?

32. — Од извесног броја основака број комбинација треће класе без понављања два пута је мањи од броја таквих комбинација друге класе. Колико има свега тих основака?

33. — Колико има комбинација 2 класе с понављањем од елемената *a, b* и *c*?

34. — „ „ „ 3. класе од истих основака? (С понављањем.)

35. — „ „ „ 4. класе од истих основака? (С понављањем)

36. — „ „ „ 5. класе с понављањем од основака *m,n,p* и *q*?

37. — Од колико основака су грађене комбинације друге класе без понављања, кад их има свега 21?

38. Начинити све варијације 2. класе од ових основака: *a b*.

39. — „ „ „ „ „ „ „ „ : *a b. c*.

40. — „ „ „ „ „ „ „ „ : *a, b, c, d* и *e*.

41. — Колики је број варијација друге класе од 4 основка?

42. — „ „ „ „ треће „ „ 5 основака?

43. — „ „ „ „ четврте „ „ „ „ ?

44. — „ „ „ „ пете „ „ „ „ ?

45. — „ „ „ „ прве „ „ „ „ ?

46. — Је ли исто ${}_3V_4$ и ${}_4V_8$?

47. — Начинити све двоцифрене бројеве од цифара 1 и 2. Колико их има?

48. — „ „ „ „ „ „ 1, 2 и 3. „ „ „ ?

49. — „ „ „ „ „ „ 0, 1 и 4. „ „ „ ?

50. — „ „ троцифрене „ „ „ 2, 4 и 6. „ „ „ ?

51. — „ „ четвороцифрене бројеве од цифара 1 и 2. Колико их има?

52. — „ „ троцифрене бројеве од цифара 7 и 8. Колико их има?

53. — „ „ „ „ „ „ 0, 3 и 9. „ „ „ ? (Пази.)

54. — Колико четвороцифрених бројева могу да се начине од 1 и 5?

55. — Колико има свега двоцифрених бројева?

56. — „ „ „ троцифрених бројева?

57. — Колико има троцифрених бројева чије су све цифре парне?

58. — „ „ четвороцифрених бројева чије су све цифре непарне?

59. — „ „ петоцифрених „ „ „ „ „ „ ?

Изврши означено множење скраћеним путем:

60. $(x+1)\ (x+2)\ (x+3)$.

61. $(x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-4)$.

62. $(x-1)\ (x-3)\ (x-4)\ (x-5)$.

63. $(x-1)\ (x-2)\ (x-5)\ (x-6)\ (x-7)$.

Развиј по биномном обрасцу ове степене:

64. $(a+b)^6$.

65. $(a+b^2)^5$.

66. — Нађи 3. члан развијеног степена $(a-b)^9$.

67. — Исто за 7. члан $(a-b)^{15}$.

68. — У развијеном степену $(x^2-m)^{24}$ написати 9. члан.

69. — У развијеном степену $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z})^7$ нађи место члана у коме је z на четвртом степену.

70. — Одреди члан у коме су коефициенти и изложитељи међусобно једнаки, кад се развије бином $(a+b)^{19}$.

VIII. — РАЧУН ВЕРОВАТНОЋЕ С НАЈПРОСТИЈОМ ПРИМЕНОМ.

Вероватно и невероватно. — У обичном животу вероватно је оно што мислимо да се може десити, а ми очекујемо да се то деси. Невероватно је оно што мислимо да се не може десити и што не очекујемо да се деси.

Повољни догађаји и неповољни догађаји. — Догађај је повољан, ако желимо да се он деси. Догађај је неповољан, ако не желимо да се он деси.

Математичка вероватноћа. — У једној кеси имамо 10 лоптица једнаке величине, начињене од истог материјала. Од њих су 6 беле и 4 црвене. Ако завучемо руку у ту кесу са намером да из ње извучемо једну лоптицу, може нам се десити да извучемо белу, или црвену. Колика је вероватноћа да ћемо извући белу? Математика овако одговара на то питање:

Вероватноћа је однос броја повољних случајева према броју свих могућих случајева.

Ми хоћемо да извучемо белу лоптицу. За нас је тада повољан случај ако извучемо белу. Белих лоптица има 6. Лоптица има свега 10. Значи има 10 могућих случајева. Математичка вероватноћа за тај случај биће:

$$\frac{6}{10}, \text{ т. ј. } \frac{3}{5}.$$

Немогућан догађај. — Догађај је немогућан, ако се не може десити. Н. пр. у кеси имамо 10 белих лоптица. Колика је вероватноћа да из те касице извучемо црвену лоптицу, кад вадимо једну лоптицу из ње? Види се да је немогуће оно што желимо. Догађај који очекујемо немогућан је. Колика му је вероватноћа? Означимо број повољних случајева са p, број неповољних случајева са n, број свих могућих случајева са m, а вероватноћу са v. Тада је вероватноћа:

за повољан случај: $\frac{p}{m}$ за неповољан случај $\frac{n}{m}$.

$$v = \frac{p}{m} \qquad v = \frac{n}{m}$$

Колико има овде могућих случајева? Имамо 10 лоптица. Дакле $m = 10$. Колико имамо повољних случајева? Црвених лоптица нема. Дакле, $p = 0$. Колика је вероватноћа?

$$v = \frac{0}{10} = 0.$$

Вероватноћа немогућег догађаја је нула. Обрнуто: *Кад је вероватноћа једног случаја нула, он је немогућан.*

Сигуран догађај. — Из кесе у којој су 10 белих једнаких лоптица хоћемо да извучемо једну белу лоптицу. *Сигурно* је да ћемо извући белу лоптицу, пошто других и нема. Колика је вероватноћа?

$$v = \frac{p}{m}.$$

Колико је могућих случајева? Има десет лоптица. Зато је $m = 10$. Колико има повољних случајева? Желимо белу лоптицу. Њих има 10. Зато је $p = 10$. Колика је вероватноћа?

$$v = \frac{p}{m} = \frac{10}{10} = 1.$$

Вероватноћа сигурног догађаја је 1. Обрнуто: *Кад је вероватноћа 1, догађај је сигуран.*

Између нуле и јединице. — Код свих догађаја крајности су: немогућан догађај и сигуран догађај. Сви остали догађаји су између њих. Према томе и њихове вероватноће ће бити између 0 и 1. Између нуле и јединице нема целих бројева. Како вероватноћу изражавамо разломком, вероватноћа свих догађаја који нису ни сигурни ни немогући, биће неки прави разломак.

Збир повољне и неповољне вредноће. — У једној кесици имамо 3 беле и 2 црвене лоптице. Колика је вероватноћа да ћемо, кад извлачимо једну куглицу, извући баш белу?

Тај догађај је повољан по нас. Вероватноћу повољног догађаја обележаваћемо са V_p, а вероватноћу неповољног догађаја са V_n. Овде је

$$V_p = \frac{3}{5}$$

Колика је вероватноћа да ћемо извући црвену лоптицу?

$$V_n = \frac{2}{5}.$$

Колики је збир обе те вероватноће?

$$V_p + V_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Збор иовољне и неповољне вероватноће је 1.

То можемо и овако да докажемо.

$$m = p + n. \quad \text{Одатле је} \quad n = m - p.$$

$$V_p + V_n = \frac{p}{m} + \frac{n}{m} = \frac{p}{m} + \frac{m - p}{m} = \frac{p + m - p}{m} = \frac{m}{m} = 1.$$

ПРОСТА ВЕРОВАТНОЋА.

Вероватноћа је проста, кад показује вероватноћу само једног догађаја. Н. пр. имамо коцку чије су стране обележене редним бројевима од 1 до 6. Колика ће бити вероватноћа да горе буде страна 3, кад само једампут бацимо ту коцку?

Могуће је да се горе појави свака од 6 страна. Могућих случајева има 6. Колико их је повољних? Свега 1. Вероватноћа је: $V = \frac{1}{6}$. То је проста вероватноћа. Она важи само за један догађај.

СЛОЖЕНА ВЕРОВАТНОЋА.

Збир вероватноћа. — Вероватноћа је сложена, ако важи одједном за два или више догађаја. Н. пр.: Колика је вероватноћа да ћемо при бацању коцке добити горе 2 или 3?

Вероватноћа да добијемо 2 јесте: $\frac{1}{6}$. Вероватноћа да ћемо добити 3 је опет $\frac{1}{6}$. Вероватноћа да ћемо добити 2 или 3 је:

$$V_p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

О томе се можеш уверити овако:

$m = 6,\quad p = 2$ (страна 2, страна 3, а обе повољне).

$$V_p = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}. \quad \left(V_p = \frac{1}{3}\right)$$

Овде имамо сложену вероватноћу, пошто важи и за догађај 2, и за догађај 3.

Сложена вероватноћа је равна збиру посебних вероватноћа, кад су догађаји такви, да ће се појавити **или** један, **или** други.

Производ вероватноћа. — Сложена вероватноћа је равна производу посебних вероватноћа, кад су догађаји такви, да се очекује да се деси **и** један **и** други.

Пример. — У двема кесицама су по 3 беле и по 2 плаве лоптице. Из сваке вучем по једампут. Колика је вероватноћа, да ћу из обе извући белу?

Вероватноћа да ћу из прве извући белу је: $\frac{3}{5}$.

Вероватноћа да ћу из друге извући белу је опет $\frac{3}{5}$.

Колика је вероватноћа да ће оба пута бити беле?

Могући случајеви:

I кеса		II кеса
1 бела	На њу може доћи:	1 бела
		1 бела
		1 бела
		1 плава
		1 плава

На сваку лоптицу из I кесе може доћи ма која лоптица из друге кесе. Према томе, свакој лоптици из I кесе одговарају 5 могућих лоптица из II кесе. У I кеси има 5 лоптица. Свакој могу да се појаве 5 из II кесе. Отуда је ово број могућих случајева:

$5 \,.\, 5 = 25 \qquad m = 25.$

Повољни случајеви:

1 бела. На њу може доћи ма која од три беле. Повољних случајева 3
1 „ „ „ „ „ ма која од три беле. Повољних случајева 3
1 „ „ „ „ „ ма која од три беле. Повољних случајева 3
Свега повољних случајева . . . 9

Свега повољних случајева 9

$$p = 9.$$

$$V_p = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

ПРИМЕРИ.

I. *У једној кеси имамо 5 лоптица: белу, плаву, црвену, зелену и жуту. Извлачићемо редом једну по једну. Колика је вероватноћа да ће куглице излазити редом којим су поменуте?*

У колико разних редова могу да се појаве куглице?

б п ц з ж
ж ц п б з и т. д.

Колико ће бити таквих редова? Онолико на колико разних начина могу да се поређају горња слова. А на колико начина то може бити? На онолико начина, колико има пермутација без понављања од 5 основака. Могућих случајева има:

$$m = 5! = 125.$$

Колико повољних? Свега 1. Вероватноћа да ће он наићи, јесте:

$$V_p = \frac{1}{125}.$$

II. — *У кеси су 6 белих и 4 црвене лоптице. Извлачимо по три одједампут. Колика је вероватноћа да одмах извучемо 3 беле?*

Колико има могућих случајева? Онолико, колико има комбинација треће класе од 10 основака, без понављања. Њих има:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 120. \qquad m = 120$$

Колико има повољних случајева?

Замислимо да су беле лоптице обележене од 1 до 6. Ако ми се деси да извучем све три беле лоптице, то може бати овако:

1 2 3
3 5 4 и т. д.

Колико има таквих случајева? Онолико колико има комбинација треће класе без понављања од 6 елемената. (Јер има 6 белих лоптица.). Тих комбинација има

$$\binom{6}{3} = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20 \qquad p = 20$$

Вероватноћа је $\quad V = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$

III. — *Колика је вероватноћа да се двема коцкама баци збир 7?*

Да видимо кад можемо добити збир 7?

1	6	или	6	1
2	5	или	5	2
3	4	или	4	3

Свега има 6 повољних случајева. А колико има могућних случајева?

Кад са прве коцке падне 1, може с друге коцке бити:

I	II
1	1 или 2, или 3, или 4, или 5, или 6.

За сваку страну прве коцке има 6 могућих случајева друге коцке. Колико је онда свега могућих случајева?

$$m = 6\,.\,6 = 36. \qquad p = 6.$$

$$V_p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

IV. — Три пута бацам коцку. Колика је вероватноћа да ћу сва три пута добити страну 5?

Кад први пут бацам, $\quad V_1 = \frac{1}{6}.$

Кад други пут бацам, $\quad V_2 = \frac{1}{6}.$

Кад трећи пут бацам, $\quad V_3 = \frac{1}{6}.$

Какви су ово догађаји? Ту се може десити *и* један *и* други *и* трећи због тога ће бити.

$$V_p = V_1\,.\,V_2\,.\,V_3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Статистичке таблице.

У свима напредним земљама врши се редовно попис становништва и бележе сва рођења и сви смртни случајеви. Из тих података се састављају таблице. Из тих таблица се види како се становништво развија. Из таблице коју смо ми узели примера ради, а која важи за једну страну земљу, види се да од 100000 лица која имају 20 година њих 71831 доживе 50. годину. Таквим таблицама служе се осигуравајућа друштва. Из њих виде вероватноћу да неко доживи одређен број година. Како се то ради, показаћемо на примерима.

Године старости	Број становника тих година	Број умрлих за годину дана
20	100000	919
21	99081	908
22	98173	887
23	97286	861
24	96425	835
25	95590	816
26	94774	804
27	93970	797
28	93173	795
29	92378	800
30	91578	808
31	90770	818
32	89952	831
33	89121	841
34	88280	856
35	87424	873
36	86551	889
37	85662	906
38	84756	928
39	83828	950
40	82878	975
41	81903	1006
42	80897	1035
43	79862	1063
44	78799	1092
45	77707	1117
46	76590	1140
47	75450	1169
48	74281	1204
49	73077	1246
50	71831	1303
51	70528	1362
52	69166	1425
53	67741	1490
54	66251	1556
55	64695	1621
56	63074	1691

Године старости	Број становника тих година	Број умрлих за годину дана
57	61383	1759
58	59624	1832
59	57792	1906
60	55886	1976
61	53910	2038
62	51878	2097
63	49781	2149
64	47632	2197
65	45435	2246
66	43189	2302
67	40887	2355
68	38532	2399
69	36133	2432
70	33701	2452
71	31249	2455
72	28794	2436
73	26358	2406
74	23952	2360
75	21592	2290
76	19292	2210
77	17083	2103
78	14980	1982
79	12998	1848
80	11150	1730
81	9420	1599
82	7821	1443
83	6378	1264
84	5114	1080
85	4034	896
86	3138	715
87	2423	566
88	1857	442

Вероватноћа доживљавања. — То је број који казује колика је вероватноћа да ће неко доживети неку одређену годину.

Пример I. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година доживети 70 годину?

Из таблице се види да у 20. години има 100000 лица. Сва та лица могу доживети 70. годину. Дакле, $m = 100000$. Колико њих доживе 70. годину? Њих 33701. То су повољни случајеви. Зато је овде $p = 33701$.

$$V_p = \frac{33701}{100000} = 0{,}33701$$

Вероватноћа умирања. — То је број који казује колика је вероватноћа да ће неко умрети у некој одређеној години.

Пример II. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година умрети у 70. години?

Па то је неповољна вероватноћа горњег случаја.

$$V_n = 1 - V_p = 1 - 0{,}33701 = 0{,}66299.$$

Види се да је већа вероватноћа да ће умрети у 70. години, него да ће доживети ту годину.

Пример III. — Колика је вероватноћа да ће старац од 84 године доживети идућу годину.

Да израчунамо вероватноћу умирања. Она је:

$$V_n = \frac{1080}{5114} = 0{,}21119.$$

Вероватноћа да ће доживети идућу годину је:

$$V_p = 1 - 0{,}21119 = 0{,}78881.$$

ВЕЖБАЊА.

1. — Кад бацамо метални новац на земљу, колика је вероватноћа да дође круна горе?

2. — Два пута ће бити бачен новац. Колика је вероватноћа да ће лице бити горе?

3. — При бацању коцке, колика је вероватноћа да у 2 бацања добијемо једампут 4?

4. — Исто. Колика је вероватноћа да у два бацања добијемо оба пута по 5?

5. — Исто. Колика је вероватноћа да у два бацања добијемо збир 9?

6. — Исто. „ „ „ „ „ три бацања добијемо збир 20?

7. — Бацамо три коцке. Сваку једампут. Колика је вероватноћа да добијемо збир 12?

8. — Бацамо 4 коцке. Сваку једампут. Колика је вероватноћа да добијемо збир 22?

9. — Бацамо једну коцку. Колика је вероватноћа да ћемо 5 пута узастопце добити страну 4?

10. — У кесици су 3 беле, 2 црвене и 4 плаве лоптице. Колика је вероватноћа да једним потезом извучемо две беле и једну црвену?

11. — Исто. Колика је вероватноћа да извучемо само три беле одједампут?

12. — Два пута бацамо коцку. Колика је вероватноћа да оба пута изађе 1?

13. — Две коцке. Бацамо сваку једампут. Колика је вероватноћа да ћемо оба пута добити 1? (Је ли иста вероватноћа као и у вежбању 12? Зашто?)

14. — Три пута бацамо коцку. Колика је вероватноћа да никако не изађе 2?

15. — Два пута бацамо коцку. Да ли је већа вероватноћа да оба пута добијемо по 6, или да једампут добијемо 2, а други пут 3?

16. — У кесици су 5 црвених лоптица, 6 жутих и 7 белих. Колика је вероватноћа да једним потезом извучемо 1 црвену, 1 жуту и 1 белу?

17. — На једној лутрији има 120000 бројева, а 2 згодитка. Колика је вероватноћа добитака кад играч има једну срећку? А кад има 5?

18. — Исто за 100 срећака.

19. — Ако играч из вежбања 17 узме 3 пута више срећака, хоће ли и вероватноћа добитка бити 3 пута већа?

20. — У кесици су 4 црвене лоптице и 7 зелених. Колика је вероватноћа да се првим потезом извуку 2 црвене и 2 зелене заједно?

21. — Колика је вероватноћа да из кесице из претходног вежбања три пута вучемо по једну лоптицу и да никако не изађе црвена?

22. — Колика је вероватноћа, да ћемо, бацајући коцку, бацити од три пута 1, или 2, или 3?

23. — Од 20000 срећака са 400 згодитака једне лутрије играч има једну срећку. Да ли је већа вероватноћа да ће добити, или да неће?

24. — Бацамо две коцке. Колика је вероватноћа да ни на једној неће изаћи 5?

25. — Бацамо три коцке. Колика је вероватноћа да ће на двема изаћи по 4, а на једној 1?

26. — Бацамо две коцке. Сваку 2 пута. Колика је вероватноћа да ће на једној изаћи 3 и 3, а на другој 2 и 2?

27. — У кесици су три беле лоптице и две жуте. Вадимо их једну по једну. Колика је вероватноћа да ће најпре изаћи све беле? Колика је вероватноћа да ће најпре изаћи све жуте?

28. — У кесици су 3 беле, 3 плаве и 3 црвене лоптице. Извлачимо их све по три.

Колика је вероватноћа да ће излазити увек 1 бела, 1 плава и 1 црвена?

29. — У кесици су 4 беле, 8 зелених и 12 плавих. Извлачимо све по 3. Колика је вероватноћа да ће најпре излазити 1 бела, 1 зелена и 1 плава (4 пута), па 1 зелена и 2 плаве (4 пута)?

30. — Бацамо три коцке. Сваку 2 пута. Калика је вероватноћа да никад не изађе збир 10? (Бацамо одједампут све три, па по други пут све три.).

31. — Колика је вероватноћа да ће човек од 50 година доживети 60. год.?

32. — „ „ „ „ „ „ „ 40 „ „ 50. „ ?

33. — Колика је вероватноћа да ће старац од 70 година доживети идућу годину?

34. — „ „ „ „ „ „ „ 80 „ „ 86. год.?

35. — „ „ „ „ „ младић „ 20 „ „ 86. год.?

36. — „ „ „ „ „ „ „ 20 „ „ идућ. год.?

„ „ „ „ „ старац „ 78 „ „ идућ. год.?

Јесу ли те две вероватноће једнаке?

37. — Колика је вероватноћа да ће човек од 33 године живети још 50 год.?

38. — „ „ „ „ „ „ „ 60 „ „ „ 10 год.?

39. — Да ли се помоћу рачуна вероватноће може утврдити на таблици са стране 15 ко ће пре умрети: старац од 60 година, или младић од 21 године? А мора ли то тако да буде? Зашто?

40. — Колика је вероватноћа да ће идуће године умрети човек од 40 година?

IX. ИЗВОДИ.

ФУНКЦИЈА.

Ми смо до сад видели функцију много пута. Знамо да је функција једна количина (рецимо y) која зависи од вредности једне или више промењљивих количина (x, z и др.).

Површина p једнога квадрата јесте функција његове стране a.

$$p = a^2 \qquad p = f\,(a).$$

Површина ваљка P је функција његове висине и полупречника његове основице:

$$P = 2r\pi\,(r + h) \qquad P = f\,(r, h).$$

Запремина коцке је функција њене ивице a:

$$V = a^3 \qquad V = f\,(a).$$

Видели смо и многе друге. Знамо да ордината једне тачке на правој линији зависи од њене апсцисе. Рецимо:

$$y = 3x + 1. \qquad y = f\,(x).$$

Знамо да ордината једне тачке на параболи зависи од њене апсцисе. Рецимо:

$$y = x^2 - 5x + 5 \qquad y = f\,(x)$$

Ако алгебарским изразима изразимо да једна количина зависи од друге, добијамо једну једначину. Н. пр.:

$$y = 4x - 1 \qquad y = x^2 + 2 \quad \text{и т. д.}$$

Узмимо један суд у облику ваљка. Сипамо у њега воде до врха. Колика ће бити запремина воде у њему?

$$V = r^2\,\pi\,h.$$

Може ли се мењати та запремина? Може. Од чега зависи? Од тога докле сипамо воде, т. ј, од висине воденог стуба у суду. Ако се мења висина воденог стуба у суду, мењаће се и запремина воде. Да напишемо то сад овако:

$$V = r^2\,\pi\,x.$$

Независно промењљива. — Ми можемо мењати висину воденог стуба како ми хоћемо. Значи, x можемо мењати по својој вољи. Таква промењљива коју ми можемо мењати по својој вољи, зове се независно променљива. Овде је висина x воденога стуба та независно променљива.

Зависно променљива. — А колика ће бити запремина, кад се мења x? Она ће бити онаква, како то прописује образац за запремину ваљка!

$$y = r^2 \pi x$$

Н. пр. кад узмемо да је $r = 5$ см., па мењамо x, биће:

за $x = 1$ см. $y = 5^2 . 3{,}14 . 1$
за $x = 2$ см. $y = 5^2 . 3{,}14 . 2$
за $x = 3$ см. $y = 5^2 . 3{,}14 . 3$ И т. д.

Икс се мења како ми хоћемо, а y се мења онако како то прописује једначина којом је изражена веза између x и y. Икс се мења како хоћемо. Ипсилон се мења како мора да се мења. Његове промене зависе од дате једначине, у коју уносимо разне вредности икса. Ипсилон зависи од икса онако, како то прописује образац $r^2\pi x$. Зато се ипсилон зове зависно променљива. Зависно променљива зове се још и **функција**.

Стална количина. — Сталне количине су оне количине које се не мењају. Н. пр. у обрасцу за обим круга $y = 2\pi x$ мењају се кружни полупречник x и кружни обим y. Сталне су количине 2 и $\pi = 3{,}1415$..... Оне свуда, у свима рачунима, имају увек исте вредности.

Апсолутно стална количина. — Количина која не може да се мења и кад бисмо ми то хтели, зове се апсолутно стална количина. Н. пр. у обрасцу за кружни обим $y = 2\pi r$ апсолутно сталне количине су 2 и π. Оне се овде не мењају. Али оне и не могу да се мењају. Оне увек имају своіе сталне вредности.

Релативно сталне количине. — Имају ли сви ваљкасти судови исто дно? Немају. Може ли се мењати полупречник ваљкове основе? Може. Ми смо у горњем примеру узели да сипамо воде увек у исти суд само до разних висина. Тада се мењала висина воденог стуба. Задржали смо исти суд. Значи, полупречник се није мењао. При сипању воде у ваљкасти суд биле су променљиве висина и запремина. Сталне количине су биле r и π. Оне се нису мењале. Само што π није ни могло да се мења. Оно је апсолутно стална количина. Али r је могло да се мења, а није се мењало. Зато се у нашем примеру r зове релативно стална количина.

Зависност од више променљивих. — Узмимо сад овај случај. Имамо ваљкасте судове разних основица, па сипамо у њих воде. Тада се независно мења полупречник x. (Јер ми сами бирамо суд у који ћемо сипати воде). Независно се мења и висина y (јер ми сипамо воде докле хоћемо.). Зависно се мења запремина z (јер оно зависи и од x и од y по обрасцу $V = r^2\pi h$, т. ј. овде $z = \pi x^2 y$.). Овде је сад z функција двеју независно променљивих: икса и ипсилона:

$$z = \pi x^2 y.$$

Ми то пишемо и овако: $z = f\ (x, y)$ или $f\ (x, y) = \pi x^2 y$.

Математичке функције. — Математичке функције су оне функције, где је веза између независно променљиве и зависно променљиве дата неким математичким изразом. Н. пр.:

$$y = x \qquad y = x + 4 \qquad y = x^2 + 5 \qquad y = 2\pi x \qquad y = \pi x^2$$

Емпиричке функције. — Али једна променљива количина може зависити од неке друге променљиве количине тако, да ми ту зависност не умемо изразити никаквим математичким изразом. Ако, н. пр. меримо температуру у једном одређеном месту у току од 24 часа, имаћемо у свакоме моменту x једну одређену температуру y. Температура зависи од момента у коме је меримо. Температура је функција времена. Ми је можемо прочитати на термометру. Можемо у свакоме часу између 0 и 24 часа записати температуру која му одговара. Међутим нема математичког израза којим би се изразила веза између ових двеју променљивих количина (времена и температуре).

Код оваквих функција можемо пратити промене и зависно променљиве и функције. Њихову зависност можемо утврдити само искуством. Зато се такве функције зову *емпиричке функције*. Наука се труди да у Механици, Физици, Хемији и др. претвори емпиричке функције у математичке функције. Она се труди да уочену зависност изрази неким математичким изразом, те да тако математички изрази закон посматране природне појаве. Зашто?

Експлицитне функције. — Функцију изражавамо једначином. Ако је та једначина решена по функцији, такву функцију зовемо експлицитна функција. Такве су н. пр. ове функције:

$$y = 2x + 3 \qquad y = 2x^2 - 7 \qquad y = 3x^3 \text{ и т.д.}$$

Али горње једначине могу бити решене и по иксу. Тада би оне овако изгледале:

$$x = \frac{y-3}{2} \qquad x = \sqrt{\frac{y+7}{2}} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{y}{3}}$$

Тада ми кажемо да су то експлицитне функције ипсилона и пишемо овако:

$$x = f(y).$$

Имплицитне функције. — Ако једначина којом је изражена функција није решена ни по једној променљивој, такву функцију зовемо имплицитна функција. Такве су н. пр. ове функције:

$$2x + 3y - 6 = 0 \qquad y - 2x^2 + 4 = 0 \qquad y - 2x^3 = 0.$$

Такве функције обележавамо овако:

$$f(x, y) = 0.$$

Алгебарске функције. — Функције су алгебарске, ако су изражене коначним бројем ступњева једне од ових алгебарских радњи:

Сабирањем: $z = 3x + 2y$ (свега два сабирка)
Одузимањем: $z = 5x - 6y$ (два члана)
Множењем: $z = 3x \,.\, 2y$ (свега два чинитеља)

Дељењем: $z = \frac{x}{y}$

Степеновањем сталним, рационалним изложитељем:

$$f(x) = x^3. \qquad f(x) = y^{-\frac{2}{3}}$$

Алгебарске функције деле се на:

1. — *Рационалне алгебарске функције*:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ово је цела алгебарска рационална функција.

b) $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x + c}$. Ово је разломљена алгебарска рационална функција.

2. — *Ирационалне алгебарске функције:*

То су оне алгебарске функције, код којих има разломљених изложитеља:

$$f(x) = 3\,(x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{3}}$$

Трансцендентне функције. — То су оне функције које се не могу изразити ниједном од побројаних алгебарских радњи. Такве су функције н. пр. ове функције:

$$f(x) = \log x, \quad y = x^{\sqrt{2}}$$

$f(x)$ — $\operatorname{tg} x$, $f(x) = \sin x$ и т. д.

Граница.

Дељење нулом нема смисла. — Поделити број *a* бројем *b* значи наћи такав број *c*, који помножен са *b* даје *a*.

$$a : b = c \qquad \text{значи} \qquad bc = a.$$

Шта би значило ово:

$$a : 0 = \qquad ?$$

Треба наћи један број који помножен нулом даје један број који није нула. Ми знамо да такав број не постоји. (Пошто сваки број помножен нулом даје нулу, а не неки други број.) Види се да дељење нулом нема смисла.

Граница. — Али ми смо често пута приморани да видимо шта значи један количник у коме је делитељ нула. То ћемо показати на примеру. Н.пр. нацртати функцију

$$y = \frac{1}{x - 3}$$

Начинимо као и до сад таблицу неколико вредности за x и y.

x	10	9	8	7	6	5	4	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{10}$	3,01	3,001
y	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	10	100	1000

x	3,0001	3,00001	3,000001	3,0000001
y	10000	100000	1000000	10000000

Овде се x приближава броју 3. Оно *тежи* да постане 3. Ми то пишемо овако : $x \to 3$.

Можемо ли израчунати колико је *y*, кад је $x = 3$? Не можемо, јер нема смисла делити нулом. Али ми можемо тачно одредити куда тежи *y*, кад *x* тежи вредности 3. Ми можемо одредити **границу** за *y*, кад *x* тежи ка 3. Видимо да *y* једнако и веома брзо расте, кад се *x* приближава броју 3. Што је *x* све ближе броју 3, *y* је све веће. Ми можемо учинити да разлика $x - 3$ постане мања од сваког, ма како малог броја датог унапред. Н. пр. да учинимо да $x - 3$ буде мање од 0,000000001. Ставићемо $x = 3{,}0000000001$, па ће бити: $x - 3 = 3{,}0000000001 - 3 < 0{,}000000001$. А колико је тада *y*? Оно је $y = 10\,000\,000\,000$. Икс бива све мање и све ближе уз 3, а ипсилон постаје веће од сваког ма како великог унапред датог броја. Знамо да се тада каже за $x - 3$ да је **бесконачно**

мало, а за овакво y да је **бесконачно велико**. Ето томе тежи у, кад x тежи ка 3. Нашли смо **границу** за y. Ми то пишемо овако:

$$\lim_{x \to 3} y = \infty$$

То читамо: „Лимес ипсилон равно бесконачно, кад икс тежи ка три."

Знак *lim* долази од латинске речи *limes*, која значи *граница*,

2. — Границу смо сретали много пута до сад. Знамо шта бива са обимом правилног полигона уписаног у кругу, кад му број страна непрекидно расте. Тај обим ми не можемо постепено израчунавати, јер је бесконачан низ рачунских радњи које бисмо требали да извршимо. (Треба најпре обим, рецимо, уписаног квадрата, па обим уписаног осмоугаоника, па обим уписаног шеснаестоугаоника, па обим уписаног правилног тридесетдвоугаоника и т. д. Тај низ никад не бисмо довршили.) Али ми видимо ово: што је већи број страна тога многоугаоника, његов обим се све мање разликује од круга. Обележимо обим тога ентоугаоника са $2s$, а обим круга у коме је он уписан са $2S$. Где је граница ширењу обима $2s$? Кружни обим му је граница.

$$\lim_{n \to \infty} 2s = 2S.$$

3. — Имамо правилну призму чија је основица уписана у кругу. Онда можемо узети да је таква призма уписана у ваљку. Нека сад њен број страна n једнако расте. Шта је граница запремине такве правилне призме? То је ваљак исте висине, у коме је уписана та призма. Обележимо запремину призме са V_n, а запремину ваљка са V. Тада можемо написати:

$$\lim_{n \to \infty} V_n = V.$$

4. Правилан полигон је описан око круга. Број страна му једнако расте. Где му је граница? Граница му је круг око кога је он описан.

Па шта је граница једне функције? То је вредност коју не можемо израчунати постепеним рачунским радњама, али можемо тачно одредити, кад пустимо независно промењљиву да тежи вредности којој је пошла.

5. — Да израчунамо вредност периодичног разломка 0,(5)

$$0,(5) = S_n = 0,5 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \ldots.$$

Можемо ли постепеним рачунањем израчунати тачну вредност овога збира? Не можемо, јер је његов збир сабирака бесконачан. Ми ћемо га написати овако:

$$S_n = \frac{0,5\,(1 - q^n)}{1 - q}$$

Ако је n = 2, биће:

$$S_2 = \frac{0,5\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2\right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,5}{0,9}(1 - 0,01) = \frac{5}{9} \cdot 0,99 = 5 \,.\, 0,11 = 0,55$$

Је ли то вредност нашег разломка 0, (5)? Није.

Узмимо n = 3. Тада је

$$S_3 = \frac{0,5}{0,9}\,(1 - 0,001) = \frac{5}{9} \cdot 0,999 = 5 \,.\, 0,111 = 0,555$$

Добили смо мало тачнију вредност. Је ли то вредност нашег разломка 0, (5) ? Није. Онда узмимо n = 4. Тада ће бити:

$$S_4 = \frac{5}{9} \,.\, 0,9999 = 5 \,.\, 0,1111 = 0,5555.$$

Добили смо још тачнију вредност, али ни она није вредност нашег разломка 0, (5).

Видимо да се то постепеним рачунањем не може одредити. Али видимо и ово:

1. У изразу $0,5 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$ мења се само n, јер је

$$0,5 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q} = \frac{5}{9} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$$

2) n једнако расте и тежи да постане веће од ма како велике количине. Значи $n \to \infty$. Остаје нам да одредимо чему тежи $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ за $n \to \infty$. Али ми знамо да је $\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n}$. Бројитељ се не мења, а именитељ једнако расте. Знамо да разломак опада кад му именитељ расте. Али именитељ постаје све већи и тежи бесконачноме. Тада разломак бива све мањи. Он се све мање разликује од нуле. Он бива мањи од сваке ма како мале унапред дате мале количине. Знамо да је онда $\frac{1}{10^n}$ бесконачно мала количина. Па где јој је граница? Не може опадати даље од нуле, пошто је позитивна. Ево њене границе:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{10^n} = 0.$$

А шта бива са S_n ? И оно достиже своју границу.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{5}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{5}{9}\ (1 - 0) = \frac{5}{9}$$

Отуда је $0,(5) = \frac{5}{9}$.

6. — Одредити границу израза

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{за } x \to 2$$

Написаћемо га у облику

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Сад ћемо пустити да $x \to 2$. Сада је:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

7. — *Одредити границу израза* $\frac{x + 3}{x}$ за $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

8. — *Одредити границу израза* $\frac{5 - x}{x}$ за $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5 - x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{x} - 1\right) = \infty - 1 = \infty.$$

9. — *Одредити границу израза*

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 3} \quad \text{за } x \to 3.$$

Пустићемо да x тежи тројци растући и опадајући.

x	1	2	2,25	2,5	2,75	2,9	2,99	2,9999
f (x)	—1,5	—10	—17	—35,25	—91	—263,81	—2873,09	—26993

x	5	4	3,75	3,5	3,75	3,9	3,99	3,9999
f (x)	63,5	66	72,9	89,75	179,5	613,1 . .	6552,1 .	6419660,004 . .

Види се ово:

Кад x расте и тежи ка 3, функција је негативна и једнако расте по апсолутној вредности. Што је x ближе тројци, функција

је све већа по апсолутној вредности. Пошто можемо учинити да разлика $x-3$ буде по вољи мала, можемо дотерати функцију да има већу вредност од сваке унапред дате ма како велике вредности. Значи функција тежи бесконачноме.

Исто је то у другом случају, само што је функција позитивна. Отуда је:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3.} \frac{x^3 + 2}{x - 3} = \pm \infty$$

10. — *Одредити* $\lim_{x \to \infty.} (x^2 + 3x + 7)$.

Написаћемо овако:

$$\lim_{x \to \infty.} (x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

Тада је

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = + \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{7}{x^2} = 0.$$

Отуда је

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = \infty \cdot (1+0+0) = \infty .\ 1 = +\infty$$

11. Одредити $\lim_{x \to \infty.} \frac{1}{x + 1.}$)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0 \cdot 1 = 0$$

12. — *Одредити*

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

То је даље

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{\sin x \cos x + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{6 \sin x}{\sin 2x + 2 \cos x} = \frac{0}{0+2\ .\ 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Изводи.

Прираштај. — Видели смо до сад да се са променом независно променљиве мења и функције.

$$y = 2x - 1 \qquad \text{I} \quad x = 3 \qquad y = 5$$
$$\text{II} \quad x = 5 \qquad y = 9$$

Вредност за коју порасте независно променљива зове се прираштај независно променљиве. Њега ћемо обележити са h, или са Δx. То читамо: „Делта икс“. У нашем примеру је $h = 2$. (Од 3 порасло до 5). Вредност за коју порасте функција кад порасте независно променљива зове се прираштај функције. Њега ћемо обележити са Δy. То читамо: „Делта ипсилон“. Овде је прираштај функције 4. (Од 5 порасла на 9.). Прираштај функције можемо овако израчунати:

$$f(x) = 2x - 1$$
$$f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9.$$
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$
$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(3+2) - f(3) = f(5) - f(3) = 9 - 5 = 4.$$

Прираштај може бити позитиван, или негативан.

Пример. — $f(x) = x^2 + 4x + 2$

$$\text{I} \quad f(2) = 4 + 8 + 2 = 14$$
$$\text{II} \quad f(1) = 1 + 4 + 2 = 7$$

Овде је прираштај независно променљиве $h = 1 - 2 = -1$.

„ функције $\Delta y = 7 - 14 = -7$

Оба прираштаја су негативна.

Може се десити да прираштај независно променљиве буде позитиван, а прираштај функције негативан.

$$y = \frac{1}{x} \qquad f(1) = 1) \qquad f(2) = \frac{1}{2}$$

Прираштај независно променљиве $\quad h = 2 - 1 = +1.$

Прираштај функције $\quad \Delta y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Може се десити да прираштај независно променљиве буде негативан, а прираштај функције позитиван.

$$y = x^2 \qquad f(1) = 1 \qquad f(-3) = 9$$

Прираштај независно променљиве $\quad h = (-3) - (-1) = -2$

Прираштај функције $\quad \Delta y = 9 - 1 = +8$

Непрекидна функција. — Функција y независно променљиве x је непрекидна на месту $x = m$, ако испуњава овај услов:

Кад прираштај h независно променљиве, који је она добила код вредности m (То значи постала $m + h$) тежи нули, и прираштај функције Δy тежи нули.

Н. пр. функција $y = x^2 + 1$ је непрекидна на месту $x = 1$. Да се уверимо. Дајмо независно променљивој прираштај h. Тада ће бити:

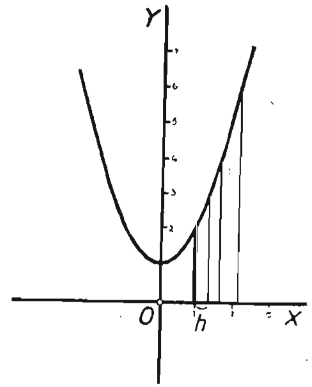
$$\Delta y = (x + h)^2 + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + 2hx + h + 1 + x^2 - 1 =$$
$$= 2hx + h^2. \qquad \text{За } x = 1 \text{ биће:}$$
$$\Delta y = 2h + h^2$$

Пустимо сад да h тежи нули.

$$\lim_{h \to 0} yy = \lim_{h \to 0} (2h + h^2) = 0 + 0.$$

Функција је непрекидна за $x = 1$. Са слике *13* се то лепо види. Кад се x постепено мења од $x = 1$, функција се постепено мења. То значи кад се x постепено, лагано мења око вредности $x = 1$, тако исто се мења и функција. Функција не скаче с једне вредности на другу. Она не прави скокове.

Прекидна функција. — Функција је прекидна за вредност $x = m$, кад не испуњава горе постављени услов. Узмимо функцију $y = \frac{1}{x-2}$ · Она је одређена свуда, сем на месту $x = 2$, јер тада наш разломак нема смисла. Ми хоћемо да испитамо каква је та функција баш на томе месту $x = 2$.



Сл. 13.

Дајмо иксу прираштај h. Тада је прираштај функције

$$\Delta y = \frac{1}{x + h - 2} - \frac{1}{x - 2} \quad \text{или} \quad \Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}$$

Ако сад пустимо прираштај h да тежи нули, именитељ у прераштају функције тежи да постане $(x - 2)^2$ докле је год x различито од 2. Зато и прираштај функције (Δy) тежи да постане $\frac{0}{(x-2)^2} = 0$. То значи да је функција $\frac{1}{x-2}$ непрекидна у свакоме месту за $x \neq 2$. Али за $x = 2$, кад прираштај h тежи нули, онда у вредности Δy

$$\Delta y = \frac{1}{x + h - 2} - \frac{1}{x - 2}$$

оба именитеља постају нуле. У Δy овако написаном

$$\Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}$$

и бројитељ и именитељ постају у исти мах нуле, кад h тежи нули.

Отуда је за

$$\Delta y = \frac{1}{x+h-2} - \frac{2}{x-2}$$

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = \infty - \infty$$

за $x = 2$

$$\Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}$$

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = -\frac{0}{0}.$$

за $x = 2$

Добивени изрази за границу прираштаја функције *нису нуле*. Они су неке друге вредности у неодређеноме облику ($\infty - \infty$ или $-\frac{0}{0}$). То значи да функција $\frac{1}{x-2}$ може бити прекидна у месту $x = 2$.

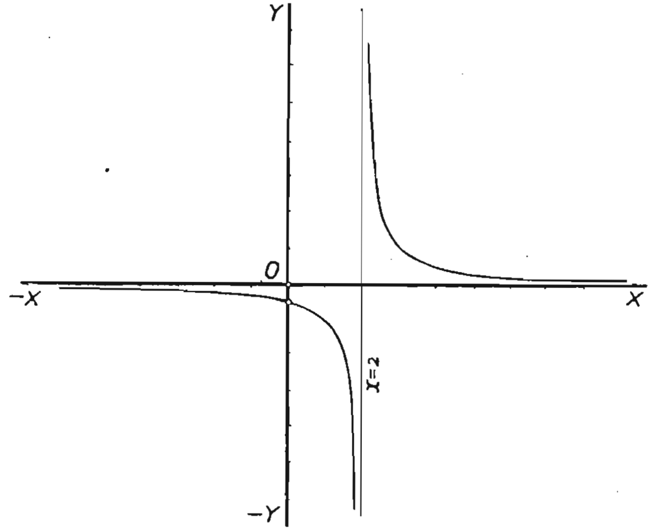
За вредност икса бескрајно мало мању од 2, у функцији $\frac{1}{x-2}$ именитељ добија бескрајно малу негативну вредност, те функција има негативну бескрајно велику вредност ($-\infty$). Ако се за x узме број бескрајно мало већи од 2, у функцији $\frac{1}{x-2}$ именитељ добија бескрајно малу позитивну вредност, те функција $\frac{1}{x-2}$ добија позитивну бескрајно велику вредност ($+\infty$). На самоме месту $x = 2$ задата функција скаче са $-\infty$ на $+\infty$. Она је на томе месту *прекидна*.

Види се да прираштај наше функције не тежи нули, кад h тежи нули. Наша функција је прекидна на месту $x = 2$.

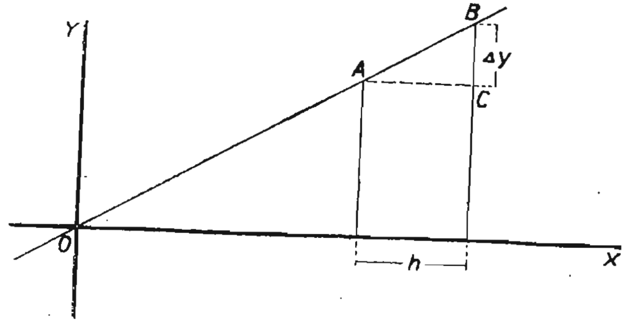
Кад је нацртамо (сл. 14). видимо да је то тачно. У тачци $x = 2$ функција прави скок од $-\infty$ до $+\infty$. Она је ту прекидна.

Пад између двеју тачака праве линије. — Видели смо код праве линије $y = ax + b$ да a представља пад те линије. А шта је пад између двеју тачака на правој линији? То је однос ординате и прираштаја апсцисе (сл. 15):

$$a = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{h}.$$



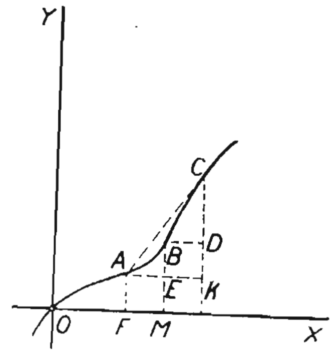
Сл. 14.



Сл. 15.

Код праве линије пад је свуда исти. Кад га одредимо једном између двеју тачака, немамо потребе да га одређујемо и на неком другом месту.

Пад на кривој линији — На кривој линији није пад свуда исти. На (сл. 16) се види даје.



Сл. 16.

пад између тачака O и A $\frac{AF}{OF} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

пад између тачака A и B $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{1} = 1$

пад између тачака B и C $\frac{CD}{BD} = \frac{2}{1} = 2$

пад између тачака A и C $\frac{CK}{AK} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

Пад између двеју тачака иа правој линији *тачно* нам казује како се та линија креће између двеју тачака. А пад на кривој линији? Н. пр. од A до C пад је 1,5, али од A до B је 1, а од B до C је 2. Значи, од A до C пад није свуда 1,5. Пад између двеју тачака на кривој линији ми зовемо **средњи пад** Зашто? Зато што је то просечни пад. Он не показује сасвим тачно кретање криве линије између двеју тачака. Добили смо да је пад од A до C 1,5. Тачније би било да уметнемо између A и C још једну тачку, рецимо B, па да кажемо да је пад од A до B 1, а од B до C 2. Тада видимо да се крива најпре доста благо дизала до B, па се одатле нагло дизала до C.

Пад на кривој одредићемо све тачније, што будемо ближе узели две тачке на тој кривој.

А како одређујемо средњи пад? Начинимо количник прираштаја функције и прираштаја независно промењиве. Н. пр. пад од A до B.

Координате тачке A: $x_1 = OF$ $y_1 = AF$

Координате тачке B: $x_2 = OM$ $y_2 = BM$:

Средњи пад је:

$$Q = \frac{BE}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{прираштај функције}}{\text{прираштај независно промењиве}}$$

$$Q = \frac{\Delta y}{h}$$

Тај количник неће бити свуда исти. Он *зависи* од размака у коме посматрамо кретање криве линије. То значи да тај количник зависи од размака двеју тачака између којих одређујемо средњи пад. Наше Q зависи од прираштаја h независно промењиве x. Кад је било $h = 2$ (од O до F), имали смо:

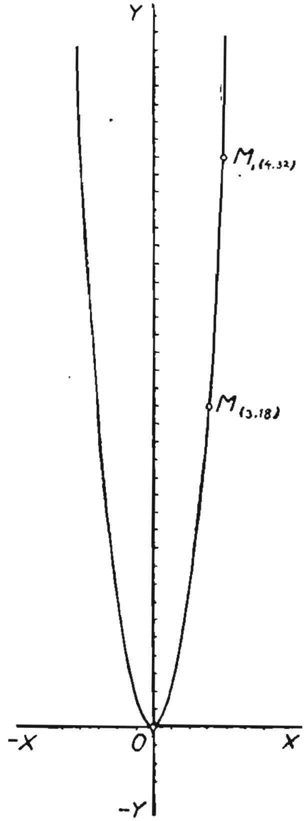
$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Кад је било $h = 1$ (од A до B), имали смо:

$$Q = \frac{\Delta y}{1} = \frac{y_2 - y_1}{1} = \frac{2 - 1}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Наш количник Q ипак донекле показује како се понаша наша крива у извесним размацима. Он нам то казује све тачније, што ми узимамо h мање.

Извод. — Узмимо тачку M_1 на кривој $y = 2x^2$ (сл. 17.) Њене су координате $x_1 = 4$, $y = 32$. Хоћемо да видимо како се понаша



Сл 17.

та крива, кад по њој прилазимо тачци M_1 од тачке M (3,18). Тражићемо количник прираштаја.

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_1 - y}{h} = \frac{32 - 18}{1} = \frac{14}{1} = 14$$

Приђимо ближе тачци M_1. Узмимо $x = 3\frac{1}{2}$. Тада је:

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{32 - 24{,}5}{0{,}5} = \frac{7{,}5}{0{,}5} = \frac{75}{5} = 15$$

Приђимо још ближе тачци M_1. Узмимо $x = 3{,}99$. Тада је:

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_1 - y}{0{,}01} = \frac{32 - 31{,}8402}{0{,}01} = \frac{0{,}1598}{0{,}01} = \frac{15{,}98}{1} = 15{,}98.$$

Види се да можемо утврдити промену функције у свакоме размаку. Тај размак можемо по вољи смањивати. Ми се све више ближимо тачци M. Можемо јој се приближити колико ми хоћемо. Значи можемо начинити оно наше h малим колико хоћемо. Можемо га учинити мањим од ма како малог броја датог унапред. То значи кад се ми ближимо тачци M_1, наше h тежи нули. Али кад h тежи нули, и наш количник Q тежи својој граници:

$\lim Q = \lim \frac{\Delta y}{h}$. Видели смо да је Q све ближе броју 16.

Да одредимо ту границу за горњу функцију $y = 2x^2$.

Најпре да одредимо оба прираштаја.

Прираштај независно промењиве биће h. Тада ће прираштај функције бити:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = 2(x + h)^2 - 2x^2 = 2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2 = 4hx + 2h^2 = 2h(2x + h)$$

Количник прираштаја биће:

$$Q = \frac{2h(2x + h)}{h} = 2(2x + h).$$

Види се да наш количник прираштаја зависи од размака h. Али ми хоћемо да се оспособимо да одређујемо пад криве линије без обзира на тај размак. Значи, треба да се ослободимо онога h. Ако хоћемо да га се ослободимо, треба да пустимо да h тежи нули. Тада ће и Q тежити извесноме броју. Тај број биће његова **граница**.

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} 2(2x + 0) = 2 \cdot 2x = 4x.$$

Гранична вредност нашег количника Q зависи сад само од x.

Гранична вредност количника прираштаја функције и прираштаја независно промењиве, кад h тежи нули, зове се **извод**

Извод се обележава овако:

y' и чита се „ипсилон прим", или „први извод"

$f'(x)$ и чита се „еф прим од икс", или „први извод од икс".

$\lim Q = f'(x) = y'$.

За нашу функцију је:

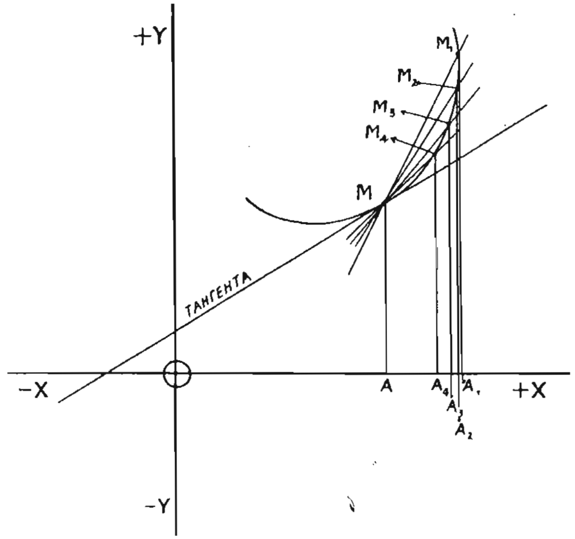
$$y = 2x^2$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = 4x.$$

За нашу тачку M_1 (4, 32) биће:

$$y' = 4x = 4.4 = 16.$$

Тангента. — Узимо једну сечицу MM_1 на некој произвољној кривој (сл. 18). Претпоставимо да се једно тело кретало од M. У тачци M је независно промењива била $x = OA$. Кад је тело дошло у M_1, независно промењива је добила овај прираштај:



Сл. 18.

$$h = OA_1 - OA.$$

Прираштај функције је:

$$\Delta y = M_1 A_1 - MA.$$

Тада је количник прираштаја:

$$Q = \frac{M_1A_1 - MA}{OA_1 - OA}$$

Кад загледамо у слику, видимо да је то пад праве MM_1.

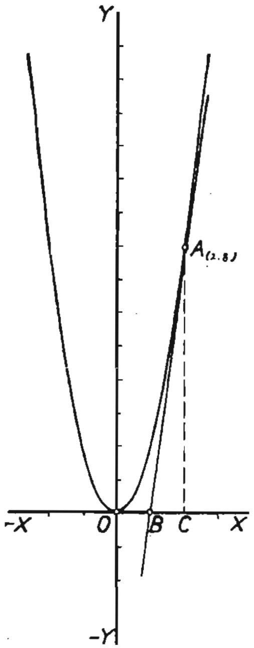
Ако се сад тело креће по нашој кривој из M_1 ка M, прираштаји ће опадати. Кад тело, идући од M_1 ка M, дође у тачку M_2, прираштаји ће бити: $h = OA_2 - AO$, $\Delta y = M_2A_2 - MA$.

Њихов количник ће бити:

$$Q = \frac{M_2A_2 - MA}{OA_2 - OA}$$

Овај количник сад представља пад праве MM_2.

Штогод тело ближе прилази тачци M, прираштаји су све мањи, а њихов однос стално показује пад сечица MM_3, MM_4, и т. д. Најзад, прираштаји ће бити веома мали, кад тело пређе сасвим близу тачке *М*. И у колико тело све више тежи тачци *М*, прираштаји теже нули тако, да кад се обе веома блиске тачке наше сечице поклопе у *М*, наша сечица постаје тангента, а количник прираштаја достиже своју границу и постаје **извод**. Он тада представља пад тангенте.



Сл. 19

Према томе, **извод функције *y* за извесну вредност икса представља пад тангенте у тачци чија је апсциса икс.**

Пример: — Дата је парабола y $2\,x^2$. (сл. 19.):

Нашли смо да је њен извод.

$$y' = 4x.$$

Узмимо једну њену тачку А. Њена је апсциса $x = 2$. Вредност првога извода за ту апсцису биће: $y' = 4x = 8$. То значи да је у тој тачци А пад тангенте 8. Кад погледамо на слику, видимо да је пад тангенте ВА ово: $\frac{AC}{BC} = \frac{8}{1} = 8.$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИЗВОДА.

I. Изводи неких алгебарских функција.

1. — Алгебарска цела функција I степена.

$$y = ax + b$$

Најпре њени прираштаји:

$$\Delta\, x = h$$

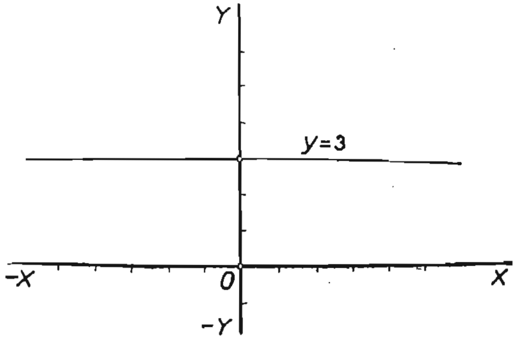
$$\Delta\, y = [a\,(x + h) + b] - (ax + b) = ah.$$

$$Q = \frac{ah}{h} = a.$$

Као што се види, количник прираштаја не зависи од икса. Он је сталан и раван *a*. Према томе, извод ће бити раван *a*, пошто се то *a* не мења.

$$y' = a.$$

Узмимо функцију $y = 3$. Она представља једну праву (сл. 20).



Сл. 20.

Колики је њен пад? Њен пад је нула, пошто она не сече апсцисну осовину. Дакле:

$$y' = 0.$$

Извод сталне количине је нула.

2. — Алгебарска цела функција II степена.

$$y = ax^2\,?$$

Прираштај независно промењиве: $\Delta x = h$.

Прираштај функције:

$$\Delta y = a\,(x + h)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ahx + ah^2 - ax^2 = 2ahx + ah^2 = $$
$$= ah\,(2x + h).$$

$$Q = \frac{ah\,(2x+h)}{h} = a\,(2x + h).$$

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} a\,(2x + h) = 2ax$$

Узмимо сад функцију $y = ax^2 + bx + c$.

Прираштај независно промењиве: $\Delta\, x = h$.

Прираштај функције:

$$\Delta\, y = [a\,(x + h)^2 + b\,(x + h) + c] - (ax^2 + bx + c) = ax^2 +$$
$$+ 2ahx + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c = 2ahx + ah^2 + bh =$$
$$= h\,(2ax + ah + b)$$

$$Q = \frac{h\,(2ax + ah + b)}{h} = 2ax + ah + b$$

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b) = 2ax + b$$

3. — Алгебарска цела функција трећег степена.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = [a\,(x + h)^3 + b\,(x + h)^2 + c\,(x + h) + d] - (ax^3 + bx^2 +$$
$$+ cx + d) =$$

$$= ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch +$$
$$+ d - ax^3 - bx^2 - cx - d =$$
$$= 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + 2bxh + bh^2 + ch =$$
$$= h(3ax^2 + 3axh + ah^2 + + 2bx + bh + c)$$
$$Q = 3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c$$
$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} (3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Кад загледамо довде показане изводе, видимо ова два **правила**

I. — **Извод степена** једнак је производу изложитеља и степена исте основе, али са изложитељем умањеним за 1.

$$y = ax^2 \qquad y' = 2ax^1 = 2ax.$$
$$y = ax^3 \qquad y' = 3ax^2.$$
$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1}.$$

II. **Извод полинома** раван је збиру извода свих његових чланова. Можемо и засебно доказати да је за $y = x^m \quad y' = mx^{m-1}$.

$$\Delta x = h$$
$$\Delta y = (x + h)^m - x^m = \frac{mhx^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)h^2x^{m-2}}{1 \,.\, 2} + \ldots\ldots + h^m.$$
$$Q = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)hx^{m-2}}{1 \,.\, 2} + \frac{m(m-1)(m-2)h^2x^{m-3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots + h^{m-1}$$
$$\lim_{h \to 0} m = y' = mx^{m-1}$$

4. — *Извод функције* $y = \frac{1}{x}$.

Написаћемо је у овоме облику: $y = x^{-1}$. Отуда је

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. — *Извод функције облика* $y = \sqrt[n]{x^m}$

Написаћемо је у облику: $y = x^{\frac{m}{n}}$. Отуда је:

$$y' = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n} \,.\, x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Примери.

I. — Наћи извод функције $y = 3x + 5$.
$$y' = 3.$$

II. — Наћи извод функције $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.
$$f'(x) = 6x - 4$$

III. — Наћи извод функције $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.
$$y' = 9x^2 - 4x + 1.$$

IV. — Наћи извод функције $y = \sqrt{x}$.

Написаћемо је у овоме облику: $y = x^{\frac{1}{2}}$. Сад ћемо наћи извод.

$$y' = \frac{1}{2} \,.\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

V. — Наћи извод функције $y = \sqrt{x^3}$. Написаћемо $y = x^{\frac{3}{2}}$.

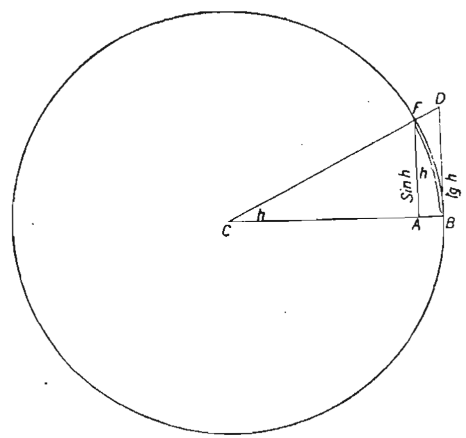
$$y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2} - 1} = \frac{3}{2} \,.\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}.$$

Изводи тригонометриских функција.

1. — Извод функције $y = \sin x$.

Најпре ћемо одредити вредност за $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$.

Да бисмо одредили ову границу, нацртаћемо један круг, узети један лук h, његов синус и његову тангенту. На слици 21. је лук $BF = h$, дуж $AF = \sin h$, дуж $BD = \operatorname{tg} h$. Површина кружног исечка CBF је већа од површине троугла CAF, а мања од површине троугла CBD. Површина троугла ACF је $\frac{AC \,.\, AF}{2}$, т. ј. $\frac{r \cos h \,.\, \sin h}{2}$



Сл. 21.

Површина исечка је $\frac{hr}{2}$.

Површина троугла CBD је $\frac{CB \,.\, BD}{2} = \frac{r \operatorname{tg} h}{2}$.

$\frac{r \cos h \sin h}{2} < \frac{hr}{2} < \frac{r \operatorname{tg} h}{2}$ Делимо скроз са $\frac{r}{2}$.

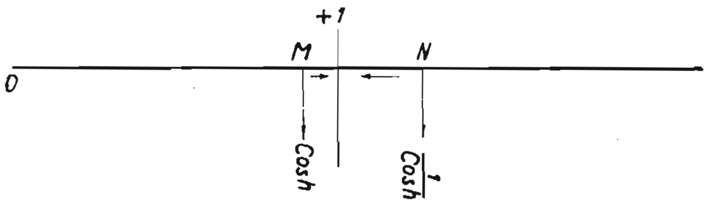
$\cos h \sin h < h < \operatorname{tg} h$ Делимо скроз са $\sin h$:

$\cos h < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$. Узимамо сад реципрочне вредности:

$$\frac{1}{\cos h} > \frac{\sin h}{h} > \cos h$$ *Тада се мењају знаци неједнакости*

Значи да се $\frac{\sin h}{h}$ налази између двеју вредности: између $\cos h$

од које је већа и између $\frac{1}{\cos h}$ од које је мања. То можемо и на-



Сл, 22.

цртати (сл. 22). Кад h почне да опада, $\cos h$ расте, а $\frac{1}{\cos h}$ опада. На нашој слици M се ближи ка 1, али и N се ближи ка 1. Разлика између M и N бива све мања. Али $\frac{\sin h}{h}$ је увек између M и N. Најзад, кад cosh и $\frac{1}{\cos h}$ достигну своје граничне вредности, постаје

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1.$$

$\frac{\operatorname{Sin} h}{h}$ је увек између тих двеју вредности. Кад се оне поклопе, и $\frac{\sin h}{h}$ се поклопи с њима:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Сад можемо тражити извод функције $y = \sin x$.

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x$$

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x$$

$$Q = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$Q = \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right\}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = 1 \cos x$$

$$y' = \cos x$$

Овако је сад:

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x$$

2\. — Извод функције $y = \cos x$.

$$x = h$$

$$y = \cos(x+h) - \cos x$$

$$Q = \frac{-2 \cdot \sin\frac{2x+h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = y' = -\sin(x + 0) \cdot 1$$

$$y' = -\sin x.$$

Дакле овако: $\begin{cases} f(x) = \cos x \\ f'(x) = -\sin x. \end{cases}$

Напомена. — Чим радиш са изводима, сви углови се мере *радијанима.*

Извод производа.

Наћи извод функције $y = (x + 1)(x - 1)$.

Ставимо $u(x) = x + 1 \qquad v(x) = x - 1$.

Тада је $y = u(x) \cdot v(x) \qquad \triangle x = h$

$$\Delta y = u(x + h) \cdot v(x + h) - u(x) v(x)$$

$$Q = \frac{u(x+h)\, v(x+h) - u(x)\, v(x)}{h}$$

Написаћемо горњи израз тако, да се види количник прираштаја функције *u* и количник прираштаја функције *v*. Бројитељу ћемо додати и одузети израз $u(x)\,v(x+h)$

$$Q = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Сад из прва два члана у бројитељу извлачимо заједнички чинитељ и из друга два, па радимо даље.

$$Q = \frac{[u(x+h)-u(x)]v(x+h)+u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$Q = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \cdot v(x+h) + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \cdot u(x)$$

$$\lim_{h \to 0} Q = y' = u' \,.\, v(x) + v' \,.\, u(x)$$

Овако $y = uv$, где су u и v функције икса. Тада је:

$$y' = u'.v + u.v'$$

Сад можемо наћи извод функције $y = (x+1)(x-1)$.

Ставимо $u = x+1$ $\quad v = x-1$. Тада ће бити:

$u' = 1$ $\quad v' = 1$.

$$y' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$$

$$y' = 1 \,.\, (x-1) + (x+1) \,.\, 1 = x-1+x+1 = 2x.$$

Да је тачно, можеш се и овако уверити:

$y = (x+1)(x-1)$

$y = x^2 - 1$

$y' = 2x$.

Извод количника.

Наћи извод функције $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$

Наша функција y је количник двеју функција: оне у бројитељу и оне у именитељу. Обележимо те две функције овако: $u = 3x - 1$, $v = x^2 + 2$. Тада можемо да напишемо:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Сад ћемо тражити извод.

$\Delta x = h$

$$\Delta y = \frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x+h)}{v(x+h)\,v(x)}$$

Сад ћемо од бројитеља одузети количину $u(x)\,v(x)$ и додати му ту исту количину.

$$\Delta y = \frac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x) + u(x)\,v(x) - u(x)\,v(x+h)}{v(x+h)\,v(x)}$$

Сад ћемо из прва два члана засебно, а из друга два члана засебно, извући заједнички чинитељ.

$$\Delta y = \frac{[u(x+h)\;u(x)]\,v(x) - u(x)\,[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)\,v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{1}{v(x+h)\,v(x)}\left\{[u(x+h)-u(x)]\,v(x) - u(x)[v(x+h)-v(x)]\right\}$$

$$Q = \frac{1}{v(x+h)\,v(x)} \cdot \frac{[u(x+h)-u(x)]\,v(x) - u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$Q = \frac{1}{v(x+h)\,v(x)}\left\{\frac{[u(x+h)-u(x)]\,v(x)}{h} - \frac{u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}\right\}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = \frac{1}{v(x)\,v(x)} \cdot (u' \,.\, v - u\,v') \,.$$

Нашли смо извод функције $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Њен извод је:

$$y' = \frac{u' \,.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$$

Сад можемо наћи извод и функције $y = \dfrac{3x-1}{x^2+2}$, коју смо били узели у почетку.

$u = 3x - 1$ $\quad v = x^2 + 2$

$u' = 3.$ $\quad v = 2x.$

$$y' = \frac{3(x^2+2) - (3x-1)\,2x}{(x^2+2)^2}. \text{ Одатле је}$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 2x + 6}{(x^2+2)^2}$$

ИЗВОД ФУНКЦИЈА TGX И COTGX.

1. — *Наћи извод функције $y = tgx$.*

$y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Стављамо: $\sin x = u \quad u' \quad \cos x$; $\cos x = v \quad v' \quad -\sin x$

Сад је даље

$$y' = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. — *Наћи извод функције* $y = cotgx$.

Ставићемо:

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\cos x = u \qquad u' = -\sin x$

$\sin x = v \qquad v' = \cos x$

$$y' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \,.\, \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Изводи изложитељне и логаритамске функције.

Њих ћемо само поменути:

$y = c^x \qquad y' = c^x \text{ lognat} c$, или краће: $y' = c^x \ln c$.

$y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$

$y = \log_{(a)} x \qquad y' = \frac{1}{x \ln c}$.

Функција функције.

Посредна функција — Узмимо функцију $y = 3u$, где је $u = 2x+5$. Овде је y функција од u. Али она је функција и од x, јер чим се мења x, мења се и u, а тада се мења и u. Овде је u функција икса тек преко функције u. Зато се овде u зове посредна функција, или функција функције.

Извод посредне функције. — Нека је $y = f(u)$, где је $u = \varphi(x) \,.\, \varphi$

$$Q = \frac{\Delta y}{\Delta u} \,.\, \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = \lim Q = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \,.\, \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$h \to 0 \qquad \Delta u \to 0 \qquad \Delta x \to 0.$$

$y' = f'(u) \,.\, u'$

Пример. — Наћи извод функције $y = (3x^2 + 4x - 7)^2$.

Ставићемо $3x^2 + 4x - 7 = u$. Тада је $u' = 6x+4$, а $y = u^2$. Зато је:

$y' = 2u \,.\, (6x + 4)$

$y' = 2(3x^2 + 4x - 7)(6x+4)$. То је даље $y' = 36x^3 + 72x^2 - 32x - 64$.

Пример 2. — Наћи извод функције $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$.

Ставићемо $3x^2 - 4x + 2 = u$. Тада је

$$y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = 6x - 4.$$

Сад је даље:

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (6x - 4).$$

$$y' = u^{-\frac{1}{2}} (3x - 2)$$

$$y' = \frac{3x - 2}{\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{(3x - 2)}{\sqrt{3x^2 - 4x + 2}}.$$

МАКСИМУМ И МИНИМУМ

МАКСИМУМ

Узмимо функцију

$$y = -5x^2 - 30 - 47.$$

Напишимо је у каноничном облику:

$$y = -5 \left[(x + 3)^2 + \frac{2}{5}\right]$$

Начинимо овакву таблицу:

x	$-\infty$	-10	-9	негативно, расте	-4	-3	-2	-1	негативно, расте
y	$-\infty$	-247	-182	негативно, расте	-7	-2	-7	-22	негативно, опада

x	0	$+1$	$+2$	позитивно, расте	$+\infty$
y	-47	-82	-127	негативно, опада	$-\infty$

Види се ово:

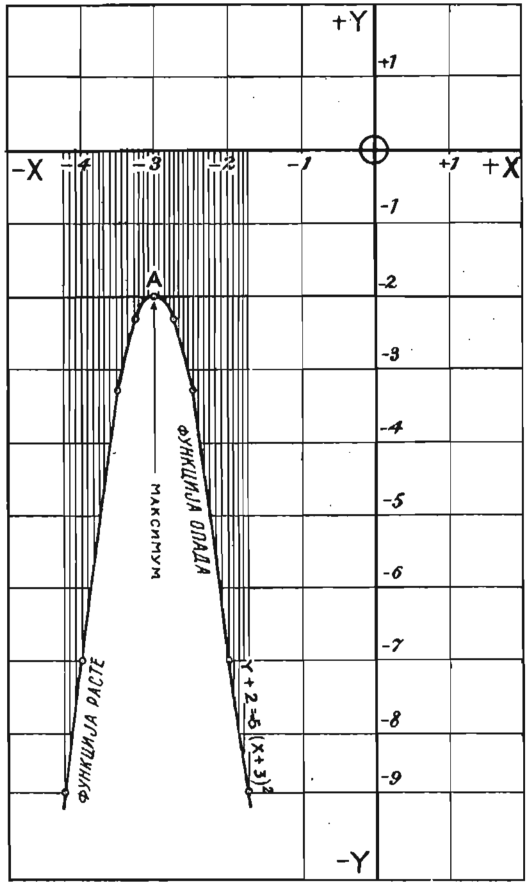
1) Функција је *расла* за све вредности *икса* од $x = -\infty$ до

$x = -3$. Одатле је почела да *опада* и стално је даље опадала.

2) **Највећа вредност** наше функције јесте

$$y = -2 \text{ за } x = -3$$

Кад нацртамо нашу криву линију, добијемо слику 23,



Сл. **23.**

Она нам казује да је наша крива достигла своју највећу вредност у тачци А (— 3, — 2).

Највећу вредност једне функције зовемо **максимум**.

За нашу функцију рећи ћемо да *достиже максимум* у тачци А.

Максимум *је вредност функције* **већа** *од претходне и следеће њене вредности, обе те вредности функције узете* **у најближој околини** *тачке максимума.*

У тачци *A* функција има ову вредност:

$$f(-3) = -2.$$

У оближњим тачкама лево и десно она има **мање** вредности:

$$f(-2{,}9) = -2{,}05$$
$$f(-3{,}1) = -2{,}05$$

Види се да је

$$f(-3) > f(-2{,}9)$$
$$f(-3) > f(-3{,}1)$$

Код тачке максимума **функција мења свој начин кретања;** до максимума **расте,** а од максимума **опада.**

МИНИМУМ

Узмимо функцију

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$

Напишимо је у каноничном облику:

$$y = 2\left[(x-2)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

x	$-\infty$	-10	-9	негативно, расте	$+0$	позитивно, расте	$+2$	позитивно, расте	$+\infty$
y	$+\infty$	$+289$	$+243$	позитивно, опада	$+9$	позитивно, опада	$+1$	позитивно, расте	$+\infty$

Види се ово:

1) Функција је **опадала** за све вредности икса од $x = -\infty$ до $x = +2$. Одатле је почела да расте и стално је даље расла.

2) **Најмања вредност** наше функције је

$$y = +1 \text{ за } x = +2.$$

Кад нацртамо нашу криву линију, добијемо слику 24.

Она нам показује да је наша крива достигла своју најмању **вредност** у тачци.

$$A(+2, +1).$$

Најмању вредност једне функције зовемо **минимум**.

За нашу функцију рећи ћемо да **достиже минимум** у тачци *A*.

Минимум је вредност *функције* **мања** *од претходне и наредне њене вредности, обе те вредности функције узете* **у најближој околини** тачке минимума.

У тачци *A* функција има ову вредност:

$$f(2) = +1$$

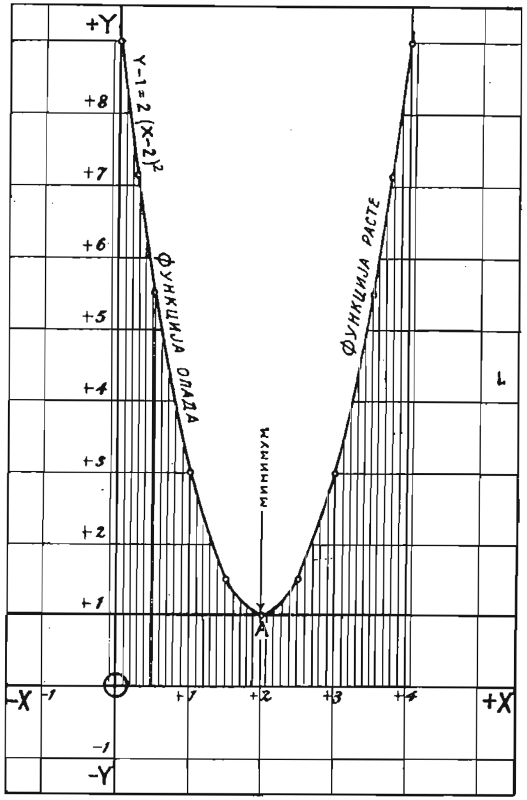
У оближњим тачкама лево и десно она има **веће** вреднести:

$$f(1{,}9) = 1{,}02$$
$$f(2{,}1) = 1{,}02.$$

Види се да је:

$$f(2) < f(1{,}9)$$
$$f(2) < f(2{,}1)$$

И код тачке минимума крива мења свој начин кретања. Само



Ск. 24.

овде бива обрнуто: до тачке минимума функција **опада**, а од тачке минимума функција **расте**. (сл. 24.)

АПСОЛУТНИ МАКСИМУМ И АПСОЛУТНИ МИНИМУМ.

Апсолутни максимум је *највећа* вредност коју функција достиже у целом своме току, у тачци где мења свој начин кретања.

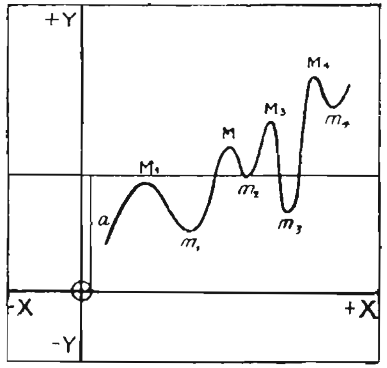
На слици 23 наша функција достиже свој **апсолутни максимум** у тачци A, пошто од те тачке функција стално опада.

На слици 25 крива достиже само *максимум* у тачци M_3, али **не** и *апсолутни максимум*, јер је после тачке M_3 опет почела да *расте* код тачке m_3.

Апсолутни минимум је најмања вредност коју функција достиже у целом своме току у тачци, где мења свој начин кретања.

На слици 24 наша функција достиже свој **апсолутни минимум** у тачци A, пошто од те тачке функција стално **расте**.

На слици 25 наша функција достиже само *минимум* у тачци m_2, али не и *апсолутни минимум*, јер је после тачке m_2 почела опет да опада од тачке M_3.



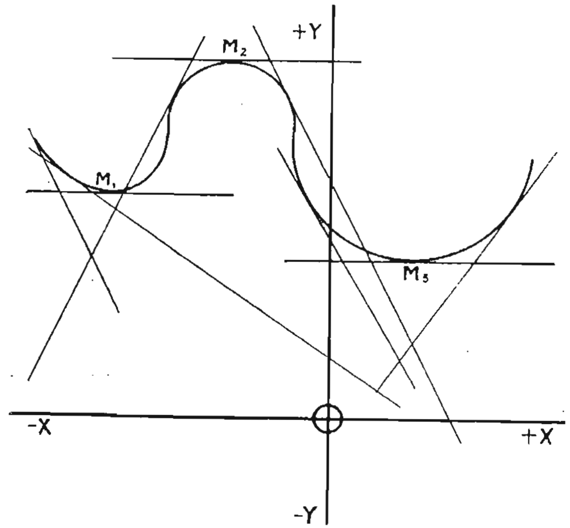
Сл. 25

После овакве дефиниције максимума и минимума, јасно, је да максимум може бити *мањи* од минимума. На слици 25 се види да су *минимуми* m_2 и m_4 *већи од максимума* M_1.

Може ли апсолутни максимум бити мањи од апсолутног минимума?

ОДРЕЂИВАЊЕ МАКСИМУМА И МИНИМУМА.

Тангента у тачкама максимума и минимума. — Видели смо да први извод представља *пад тангенте*. Кад погледамо на слику 26, видимо ово:



Кад функција опада, тангента наше криве има *негативан* пад; кад функција достигне **минимум**, пад тангенте је **нула**; кад функција почне да расте, пад тангенте је *позитиван*.

Кад функција расте, пад тангенте је позитиван; кад достигне **максимум**, пад тангненте је **нула**; кад почне опадати, пад тенгнете је *негативан*.

Кад функција *расте*, пад тангенте је *позитиван* зато, што тангента заклапа оштар угао с *позитивним смислом апсцисне осовине* (види тангенту лево од тачке M_2 и тангенту десно од тачке M_3.

У тачци максимума и минимума пад тангенте је *нула*, јер тангента *не* заклапа никакав угао (угао нула) са апсцисном осовином (види тангенте у тачкама минимума M_1 и M_3 и у тачци максимума M_2). У тачкама максимума и минимума тангента је *паралелна са апсцисном основицом*, те јој је *пад нула*.

Кад функција *опада*, пад тангенте је *негативан*, јер тангента заклапа оштар угао с *негативним смислом апсцисне осовине* (види тангенте лево од тачака M_2 и M_3 и десно од тачака M_2).

Према томе можемо ово закључити:

Кад је у извесном простору извод једне функције позитиван, она расте, а кад је негативан опада, сем извесних тачака, о којима ми овде нећемо говорити. Кад се извод не мења у извесном простору, функција је стална.

При посматрању функција помоћу извода треба увек ићи постепено, да не бисмо прескочили неки простор, где функција постаје бескрајна.

Одређивање максимума и минимума помоћу извода. — Из овога што смо до сада рекли види се, да се максимум или минимум појављују кад извод постане нула. Ако је пре те тачке извод био позитиван, а после ње негативан, то је *максимум*, а ако је пре те тачке извод био негативан, а после ње позитиван, онда је то *минимум*.

Практично правило за одређивање максимума и минимума.

Треба наћи извод функције. Тај извод треба ставити да је раван нули. Тако добивену једначину решити по x. Те вредности икса могу бити апсцисе тачака максимума или минимума. Сад треба узети две оближње вредности икса, мању и већу од x. Ако је извод позитиван, па негативан, значи да је максимум.

Пример 1. — *Од свију правоугаоника чији је обим 20, наћи онај који има највећу површину.*

Нека су стране правоугаоникове x и z. Обим ће бити:

$$2x + 2z = 20$$
$$x + z = 10$$

Површина је $x \, . \, z$.

$$z = 10 - x.$$

Према томе површина је:

$$x\,(10 - x).$$

Она је функција икса. Обележимо је са y:

$$y = 10x - x^2$$
$$y' = 10 - 2x$$
$$10 - 2x = 0$$
$$x = 5.$$

Функција $y = 10x - x^2$ може бити максимум или минимум за $x = 5$.

Напишимо извод y' у овоме облику:

$$y' = 2\,(5 - x).$$

Одавде се види да је *извод* позитиван за све вредности икса мање од 5. Значи до $x = 5$ извод је *позитиван*. Код $x = 5$, он је нула. За $x > 5$, извод је *негативан*. Значи, да за $x =$ функција достиже свој *максимум*.

Са y смо означили површину правоугаоника.

Стране ће му бити:

$$x + z = 10$$
$$5 + z = 10$$
$$z = 5.$$

Правоугаоник чији је збир страна 20, а има највећу површину од свих таквих правоугаоника, јесте *квадрат*, пошто су му стране једнаке: $x = z = 5$. Та највећа површина y је

$$y = 10x - x^2 = 50 - 25 = 25.$$

Нацртај неколико правоугаоника чији је збир страна 20, па упореди њихове површине са квадратом чија је страна 5.

Пример II. — Одредити максимум или минимум фунције

$$y = -5x^2 - 30x - 47.$$

Најпре први извод:

$$y' = -10x - 30.$$

Ставимо га да је раван нули, па решимо једначину:

$$-10x - 30 = 0.$$

Одатле је:

$$x = -3$$

Да видимо каква је вредност извода пре те тачке-

$$y' = -10(x + 3)$$

Види се да је извод позитиван, докле год је

$$x + 3 < 0$$
$$x < -3$$

Чим је $x > -3$ извод постаје *негативан*. Пошто је до тачке $x = -3$, извод *позитиван*, а од те тачке *негативан*, значи да у тој тачци наша крива достиже свој *максимум*.

У једначину криве

$$y = -5x^2 - 30x - 47$$

унесимо вредност $x = -3$, па ћемо добити вредност и друге координате. Биће:

за $$x = -3$$

$$y = -5(-3)^2 - 30(-3) - 47 = -2.$$

Значи наша крива достиже свој максимум у тачци чије су координате $x = -3$, $y = -2$.

То је тачка A са слике 23.

Трећи пример. — Одредити максимум или минимум криве $y = 2x^2 - 8x + 9$.

$$y' = 4x - 8$$

Стављамо $y' = 0$, т. ј.

$$4x - 8 = 0.$$

Одатле је

$$x = 2$$

Унесимо ту вредност у дату једначину криве линије

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$

да бисмо одредили *ипсилон*.

$$y = 2 . 4 - 8 . 2 + 9 = +1.$$

У тачци $x = 2$, $y = 1$ наша крива може имати максимум или минимум. Шта је у тој тачци? То ће нам рећи извод.

$$y' = 4(x - 2)$$

Извод је позитиван док је

$$x - 2 > 0 \qquad \text{т. ј. док је}$$
$$x > 2$$

Извод је негативан док је

$$x - 2 < 0 \qquad \text{т. ј. док је}$$
$$x < 2$$

Пошто је до тачке $x = 2$, $y = 1$ извод *негативан*, а од те тачке *позитиван*, значи да у тој тачци наша крива достиже свој *минимум*.

То је тачка A са слике 24.

ПОСМАТРАЊЕ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ИЗВОДА.

Изводи су веома корисни за посматрање тока неке функције. Како се то ради показаћемо на примерима.

Пример 1. — Испитати ток функције $y = x^2 - 5x + 6$.

Најпре да видимо има ли она одређену вредност за свако x и је ли непрекидна, или прекидна.

Видимо да за свако x можемо имати тачно одређено y. По чему видимо то? Видимо по овоме:

а) Кад нам је дато x, увек можемо тачно израчунати његов квадрат. Значи тада увек имамо тачну вредност за x^2.

б) Кад нам је дато x, увек можемо израчунати његову петоструку вредност $5x$.

Сем тога, кад се x поступно мења у коначним размацима, ипсилон се мења поступно и за коначне вредности икса имамо увек коначну вредност ипсилона. Значи да је наша функција непрекидна у целом своме току.

Сад тражимо њен извод:

$$y' = 2x - 5.$$

Да ли извод мења гдегод свој знак? То ћемо овако утврдити. Ставимо га да је раван нули.

$$2x - 5 = 0.$$

Одатле је

$$x = 2,5.$$

У тачци M

[$x = 2,5$ $\quad y = (2,5)^2 - 5 . 2,5 + 6 = 6,25 - 12,5 + 6 = -0,25$.

наша функција може имати максимум или минимум. Узмимо две оближње тачке уз M:

$$x = 2 \quad \text{и} \quad x = 3.$$

За

$$x = 2 \qquad y' = 4 - 5 = -1$$

За

$$x = 3 \qquad y' = 6 - 5 = 1$$

Значи да је у тачци M минимум.

Сад тражимо где крива пресеца апсцисну осовину. Стављамо $y = 0$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Одатле је

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3$$

Наша крива пресеца апсцисну осовину у тачкама A (2,0) и B(3,0), као што се види из горњег решења.

Сад начинимо овакву једну таблицу:

x	$-\infty$	негативно, расте	0	2	2,5	поз. расте	3	+ расте	$+\infty$
y'		негативан	негативан	—	0	+	+	+	
y	$+\infty$	позитивно опада	+ 6	0	$-\frac{1}{4}$(*мин.*)	поз. расте	0	+ расте	$+\infty$

Сад је лако нацртати ту криву (сл. 27.).

Пример 2. — Посматрати функцију

$y = 15x - 4x^2 - 4x^3$.

Види се да се за свако x може добити тачно одређена вредност за y. Исто тако лако је видети да је y коначно доклегод је x коначно. Крива је непрекидна и одређена у свима својим тачкама.

Сад извод.

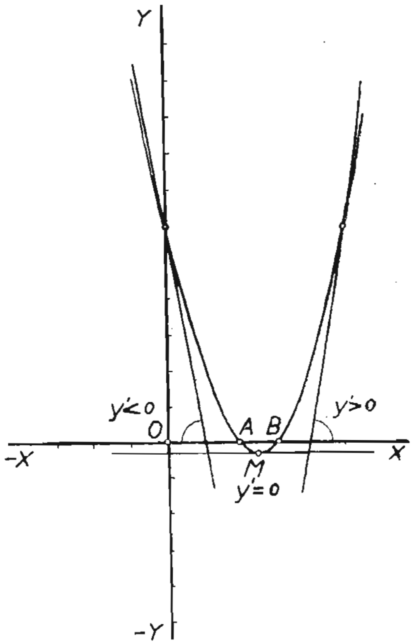
$y' = 15 - 8x - 12x^2$.

Ставимо $y' = 0$.

$y' = 15 - 8x - 12x^2 = 0$.

Ова једначина даје: $x_1 = -1,5$

и $x_2 = \frac{5}{6}$.



Сл. 27.

Да испитамо јесу ли то максимуми или минимуми.

I. — За $x = -1,5$. Узмимо две оближње тачке;

$$x = -1,6 \quad \text{и} \quad x = -1,4.$$

Тада је за:

$$x = -1,6 \quad y' = -2,92.$$
$$x = -1,4 \quad y' = +2,68.$$

У тачци ($-1,5$ $\;-18$) наша крива има свој **минимум**.

(У близини те тачке извод је најпре негативан, па позитиван.)

II. — За $x = \frac{5}{6}$. Узмимо две оближње вредности

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{и} \qquad x = \frac{6}{6} = 1.$$

Тада је за

$$x = \frac{2}{3} \quad y' = \frac{13}{3}$$

$$x = 1 \quad y' = -5$$

У тачци $(\frac{5}{6},\ 7\frac{11}{27})$ наша крива има свој **максимум**.

Да видимо сад где наша крива сече апсцисну осовину. Ставимо $y = 0$.

$$15x - 4x^2 - 4x^3 = 0$$
$$x(15 - 4x - 4x^2) = 0.$$

Одатле је

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1,5 \qquad x_3 = -2,5.$$

Сад начинимо таблицу:

x	∞	негативно, расте	$-2,5$	— расте	$-1,5$	— расте	0
y'		негативан	негативан	негат.	0	+	+
y	$+\infty$	позитивно, опада	0	— опада	—18 (мин.)	— расте	0

x	позитивно, расте	$\frac{5}{6}$	поз. расте	+ 1,5	+ расте	$+\infty$
y'	+	0	негативан	—	—	
y	позитивно расте	$7\frac{11}{27}$ (макс.)	поз. опада	0	— опада	$-\infty$

Сад је лако нацртати слику (сл. 28.)

Пример 3. — Посматрати функцију

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

Кад имаш разломљену функцију, увек обрати пажњу на именитељ. Зашто? Зато што разломак нема смисла кад је именитељ нула. Да видимо кад ће именитељ бити нула.

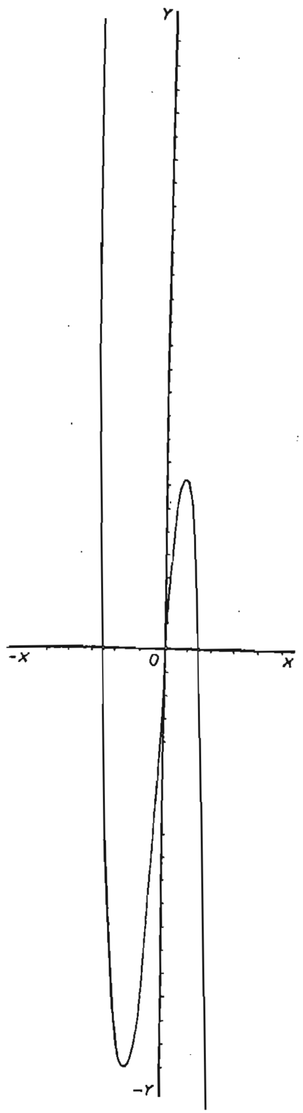
$$x - 2 = 0.$$

Одатле је $\qquad x = 2.$

Именитељ је нула за $x = 2$. Тада y нема смисла. Да видимо шта бива са y, кад x тежи ка 2.

$$\lim_{x \to 2} y = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \pm\infty$$

Граница је $+\infty$, ако x тежи ка 2 опадајући, а $-\infty$, ако x растући тежи ка 2.



Сл. 28.

Наша функција је прекидна у тачци $x=2$. У свима осталим тачкама функција је непрекидна; за свако x имамо одређену вредност за y.

Сад извод.

$$y' = \frac{1.\,(x-2) - (x+2).\,1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$$

Ставимо $y' = 0$.

$$\frac{-4}{(x-2)^2} = 0.$$

Одатле је $-4=0$. Ово нема смисла. Значи извод није никад раван нули. То се јасно видело из израза $\frac{-4}{(x-2)^2}$. Израз $(x-2)^2$ је увек позитиван, па ма како било x. Отуда је извод увек негативан. (Због -4). А кад је извод увек негативан, значи да је увек мањи од нуле. Кад је мањи од нуле, не можемо га уједначити с нулом. (Објасни зашто је горе изашло $-4=0$. Јесмо ли добро урадили, што смо обе стране једначине помножили са $(x-2)^2$? Чиме смемо множити обе стране једне једначине?)

Кад извод наше криве није никад нула, она нема ни максимума ни минимума.

Видимо још нешто. За све вредности икса наш извод је негативан. Значи да наша функција једнако опада.

Да видимо сад где наша крива сече апсцисну осовину. Ставимо $y=0$. Тада ће бити:

$$\frac{x+2}{x-2} = 0.\ \text{Одатле је}\ x=-2.$$

Наша крива сече апсцисну осовину у тачци чије су координате $x=-2$, $y=0$.

Начинимо сад таблицу.

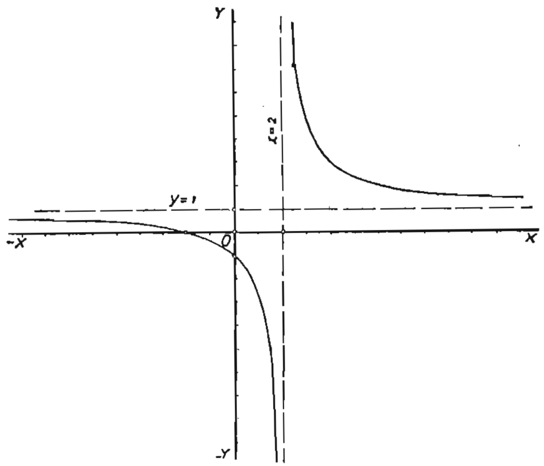
x	$-\infty$	$-$ расте	-2	$-$ расте	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+$ расте	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	
y		$+$опада	0	$-$опада	-1	-3	$\pm\infty$	$+5$	$+3$	$+2\frac{1}{3}$	$+$опада	

Овде имамо да одредимо три границе наше функције:

а) за $x=2$ б) за $x \to -\infty$ в) за $x \to +\infty$

Прву смо већ одредили: $\lim\limits_{x \to 2} y = \pm\infty$

Да бисмо видели шта бива нашом с функцијом за $x \to +\infty$ или за $x \to -\infty$, написаћемо дату функцију у другоме облику. Поделићемо бројитељ и именитељ са x: Кад то урадимо, добијамо:



Сл. 29.

$$(1) \qquad \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Види се да наша крива има две асимптоте. (Асимптоте смо видели у VI разреду). Асимптоте наше криве су ове две праве: $x=2$ и $y=1$. (сл. 29).

ДИФЕРЕНЦИЈАЛ.

Узмимо да израчунамо прираштај функције

$$y = \frac{x^2}{4}. \text{ (сл. 30.)}.$$

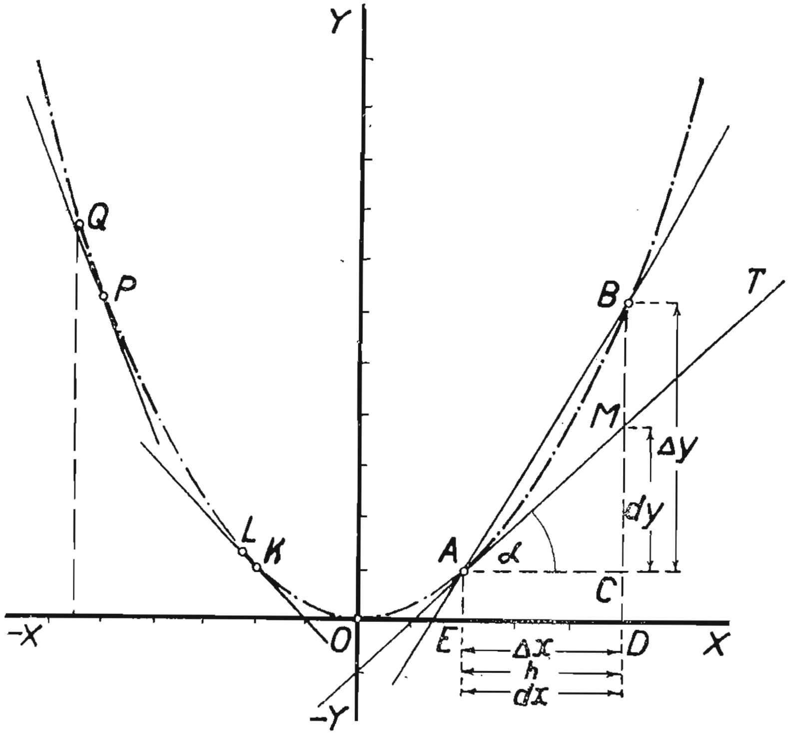
од $x_1 = 2$ до $x_2 = 5$,

$h = 5 - 2 = 3$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2+6x+9-x^2}{4} = \frac{6x+9}{4} = \frac{3}{4}(x+3)$$

Ставимо сад место икса његову почетну вредност $x = 2$. Добијамо:

$$\Delta y = \frac{3}{4}(2.2+3) = \frac{3}{4}.\ 7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$



Сл. 30.

Посао је дугачак. Много би нам било лакше, да смо имали да рачунамо приближну вредност *CM* прираштаја *CB*, да смо имали да рачунамо колико функција прирасте **до тангенте, место до**

криве. То значи, лакше би нам било да смо имали да рачунамо *CM* место *CB*.

Вредност CM бисмо израчунали из троугла ACM.

$$CM = AC.\ \mathrm{tg}\alpha.$$

Али ми знамо да је $\mathrm{tg}\alpha = y'$, а $AC = h$. Зато је

(1) $$CM = y'.\ h$$

$$y' = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}.$$

За $x = 2$ (почетна тачка A) биће

(2) $$y' = \frac{2}{2} = 1$$

$$CM = 1.\ h = h = 3.$$

Шта је ово CM? Је ли то прираштај функције? Није. То је прираштај функције само до дирке, а не до криве.

Тај прираштај функције до дирке зовемо **диференцијал функције** и пишемо га

$$dy.$$

$CM = dy$. (Читамо га „де ипсилон")

Видели смо горе да је $CM = y'.\ h$. Отуда је

(3) $$dy = y'.\ h \text{ или}$$

(4) $$dy = y'.\ \Delta x$$

Да би нам биле исте ознаке, кад употребимо диференцијал употребљавамо место ознаке Δx ознаку **dx** и пишемо:

(5) $$\mathbf{dy = y'.\ dx}$$

dx зовемо тада **диференцијал независно** промењливе.

То читамо: „Де ипсилон равно ипсилон прим де икс".

Диференцијал функције је проиввод извода и деференцијала независно промењливе.

Ако у (5) поделимо обе стране са **dx**, имаћемо:

(6) $$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{y'}.$$

Са слике се види да је то тачно, пошто је $y' = \mathrm{tg}\alpha = \frac{CM}{AC}.$

Сад видимо из (6) да је извод однос диференцајала функције и диференцијала независно промењливе.

Сад за извод имамо три ознаке:

y' („ипсилон први," или „ипсилон прим")

$f'(x)$ („еф први од икс“ или „еф прим од икс“).

$\frac{dy}{dx}$ (де ипсилон по де икс“).

Веома је подесно место прираштаја функције употребити њен диференцијал онде, где се дирка и крива веома мало разликују. Н. пр. од тачке P. до тачке Q на нашој слици 30.

Да видимо најпре прираштај функције.

$$h = -\frac{1}{2}.$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f(x) =$$

$$= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4} - x^2}{4} = \frac{-x+\frac{1}{4}}{4} = \frac{-(-5)+\frac{1}{4}}{4} =$$

$$= \frac{5+\frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{21}{4}}{4} = \frac{21}{16} = 1,3125$$

Сад диференцијал функције.

$$dy = y'dx$$
$$dx = -\frac{1}{2}$$
$$dy = \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

За $x = -5$ биће:

$$dy = \frac{-5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$dy = \frac{5}{4}$$
$$dy = 1,25$$

Диференцијал функције мањи је за 0,0625 од прираштаја функције.

Ако нам је допуштена грешка мања од 0,7, можемо овде узети диференцијал функције место њеног прираштаја. Помоћу диференцијала је ишло много брже.

Употребити диференцијал место прираштаја функције све је згодније, што је мањи прираштај независно променљиве. Узмимо тачке K и L са слике 30. Израчунаћемо прираштај и диференцијал

функције, да видимо је ли диференцијал подесна приближна вредност за прираштај функције.

$$h = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta y = \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - x^2}{4} = \frac{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - x^2}{4}$$

$$= \frac{-\frac{x}{2} + \frac{1}{16}}{4}$$

Пошто је почетна апсциса $x = -2$, биће:

$$\Delta y = \frac{1+\frac{1}{16}}{4} = \frac{\frac{17}{16}}{4} = \frac{17}{64} = 0,265\ldots$$

Сад ћемо израчунати диференцијал.

$dy = y'\,dx$

$dy = \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)$ Пошто је $x = -2$, биће:

$dy = (-1)\left(-\frac{1}{4}\right)$

$dy = \frac{1}{4} = 0,25.$

Прираштај функције и диференцијал разликују се за 0,015. . .

ИЗРАЧУНАВАЊЕ ГРЕШКЕ.

Диференцијал је веома подесан за израчунавање грешака. Како се то ради показаћемо на примерима.

Пример 1. — За страну једнога квадрата узета је дужина од 80 м. са грешком до 1 cm. Колика ће бити грешка у површини?

$p = a^2$. Површина је функција стране. Зато ћемо ставити: $y = x^2$.

Треба да нађемо прираштај функције y за прираштај независно променљиве x, кад је $h = 1cm$.

Пошто је овде h веома мало, место прираштаја функције узећемо њен диференцијал.

$dy = y'dx \quad dx = 0{,}01m., \quad y' = 2x = 2\times 80m. = 160\,m,$

$dy = 160\,m \,.\, 0{,}01\,m.$

$dy = 1{,}60\,m^2.$ Грешка је $1{,}60\,m^2$.

Да израчунамо сад тачну грешку помоћу прираштаја функције.

$\Delta y = f(x+h) - f(x) = (80 + 0{,}01)^2 - 80^2 = 160{,}01 \times 0{,}01 = 1{,}6001\,m^2,$

Прираштај функције показује да је грешка за 1cm.² већа од грешке коју смо ми израчунали помоћу диференцијала. То може овде да се занемари и да се узме да је грешка

$$dy = 1{,}60\ m^2$$

Из овога примера си могао видети како је диференцијал веома подесан, да послужи као довољна приближна вредност за прираштај функције. Пошто је њега много лакше израчунати него прираштај функције, он је веома користан.

Пример 11. — Измерена је ивица коцке a = 12cm. с грешком до 0,1mm. Колика је грешка у запремини?

Овде је h = 0,1mm. Пошто је та дужина веома мала према дужини од 12cm., ми ћемо употребити диференцијал место прираштаја функције.

$$y = x^3$$

$$dy = y'dx \qquad y' = 3x^2 = 3.12^2 = 3 \times 144 = 432$$

$$dx = 0{,}01cm.$$

$$dy = 432 \times 0{,}01$$

$$dy = 4{,}32cm^3.$$

Сад ћемо израчунати грешку помоћу прираштаја функције.

$$y = f(x+h) - f(x) = (12{,}01)^3 - 12^3 = 1732{,}323601 - 1728 = 4{,}323601\ cm^3.$$

Ако узмемо диференцијал место прираштаја функције, наш рачун није тачан за 0,003601cm³. То је приближно 4mm³. Према запремини ове коцке, ова четири кубна милиметра могу да се одбаце. Зато ћемо као тражену грешку узети оно, што смо добили као вредност диференцијала. Грешка је: 4,32cm³.

ВЕЖБАЊА.

1. — Изрази површину троугла као функцију основице.
2. — „ „ „ „ „ висине.
3. — „ „ „ „ „ од r.
4. — „ „ „ „ „ од *s* (полуобим).
5. — „ „ „ „ „ од *R*.
6. — „ „ „ „ „ једног његовог угла.
7. — „ „ ваљка „ „ од *r*.
8. — „ „ „ „ „ од *h*.
9. — „ „ круга „ „ од *r*.
10. — „ запремину праве купе као функцију од r.
11. — „ „ зарубљене купе као функцију од *r* и *R*.
12. — „ „ „ пирамиде као функцију од *b* и *B*.
13. — „ „ лопте као функцију од *R*.

14. — Изрази површину лопте као функцију од *R*.
15. — Наведи пример апсолутно сталне количине.
16. — Наведи пример релативно сталне количине.
17. — Наведи неки пример емпиричке функције.
18. — Напиши неколико експлицитних функција.
19. — Напиши неколико имплицитних функција.

За све ове функције кажи какве су (којој врсти припадају):

20. $y = \frac{x}{2}$
21. $\sqrt{x+1}$
22. $y = x^{0,(2)}$
23. $y = x^{\sqrt{5}}$
24. $y = 3tgx$
25. $y = \frac{x+1}{x}$

Граница.

Одреди границе ових функција:

26. $y = x + 1 \quad x \to 0$
27. $x = \frac{3}{x} \quad x \to \infty$
28. $y = 2x - 3 \quad x \to \infty$
29. $y = 3 + x \quad x \to 0$
30. $y = 4 - x \quad x \to 0$
31. $y = 2x - 1 \quad x \to 0$
32. $x = 1 + 3x \quad x \to 0$
33. $y = 2 + 5x + 3x^2 \quad x \to \infty$
34. $y = 4x^2 + 9x - 7 \quad x \to \infty$
35. $y = 2x^2 - 3x + 1 \quad x \to 0$
36. $y = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \quad x \to \infty$
37. $y = 2x^2 - 7x + 5 \quad x \to \infty$
38. $y = \frac{1}{x} \quad x \to 0$
39. $y = \frac{5}{x-5} \quad x \to 5$
40. $y = \frac{1}{\frac{1}{x}} \quad x \to 0$
41. $y = \frac{x+1}{x} \quad x \to \infty$
42. $y = \frac{1-2x}{x} \quad x \to \infty$
43. $y = \frac{1-x}{5-x} \quad x \to 5$
44. $y = \frac{x-x^2}{4x^3-7} \quad x \to \infty$
45. $y = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} \quad x \to 3$
46. $y = \frac{2}{1-\cos x} \quad x \to 0$
47. $y = \frac{1}{1-tgx} \quad x \to \frac{\pi}{4}$
48. $y = \frac{3}{\sin 2x + \cos x} \quad x \to \frac{\pi}{2}$
49. $x = \frac{4}{3\sin x + \operatorname{cotg} x} \quad x \to 0$
50. $y = \frac{7}{\cos\frac{x}{2} + 1} \quad x \to 2\pi$

Испитај јесу ли ове функције прекидне или непрекидне:

51. $y = 3x$
52. $y = \frac{1}{3x}$
53. $y = 1 - 3x$
54. $y = \frac{1}{1-3x}$
55. $y = \frac{1}{x^2}$
56. $y = 2 + \frac{4}{x}$
57. $y = x + \frac{4}{x}$

Изводи.

58. — Нађи извод функције:

$$y = 3x.$$

59. — Исто за $y = 3x - 4$
60. — Исто за $y = 3x - 7$
61. — Исто за $y - 4 = 5x - 6.$
62. — Исто за $y = 3x^2 + 5x - 7$
63. — Исто за $y = 5x^2 - 4x + 9.$
64. — Исто за $(y - 5) = 3\,(x^2 - 7.)$
65. — Исто за $y=4x^3+5x^2-7x+9.$
66. — Исто за $y = 4x^4 - 7x + 9.$
67. — Исто за $y = \frac{1}{x^3}$. Напиши овај разломак у облику степена од x, па онда тражи извод.
68. — Исто за $y = \frac{1}{3x^4}$.
69. — Исто за $y = \sqrt{x}$
70. $y = \sqrt[3]{x}$
71. $y = \sqrt[4]{x}$
72. $y = \sqrt[n]{x}$
73. $y = a\sqrt[n]{x^m}$
74. $y = a\sqrt[n]{ax^m}$
75. $y = b\sqrt[n]{x} + bx$
76. $y = a + x$
77. $y = x^3 - x^2 + 2x$
78. $y = \frac{ax^6}{5}$
79. $y = \frac{a}{x}$
80. $y = a\sqrt{x}$
81. $y = \sqrt[m]{{}^2x^n}$
82. $y = x^2\sqrt{x\sqrt{x^3}}$
83. $y = \frac{x-2}{5}$
84. $y = \frac{2x-7}{-19}$
85. $y = \frac{5x-6}{-5}$
86. $y = (2x + 5)\,(3x - 7)$
87. $y = (5x - 1)\,(1 - 4x)$
88. $y = (3x + 9)\,(9 - x)$
89. $y = (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 7)\,(x - 5)$
90. $y = (-8x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 7x + 9)\,(2x + 3)$
91. $y = \frac{4x-9}{4x}$
92. $y = \frac{3-5x}{-6x}$
93. $y = \frac{2-x}{-x}$

94. $y = \frac{3x+7}{4x-5}$
95. $y = \frac{3x+9}{7-2x}$
96. $y = \frac{x^2-5x+7}{2x-9}$
97. $y = \frac{x^3-4x^2+5x-7}{2x^2+3x-5}$
98. $y = \frac{7x^3+5x^2-6x+9}{x^2-7}$
99. $y = \frac{3x^4-3x^2-1}{x-1}$
100. $y = \frac{4x^2 \cdot 5x+8}{x^3-9x^2-7x+5}$
101. $y = \frac{1-x}{x^5-6x^4+3x^2-1}$
102. $y = (x + 2)^2$
103. $y = (x^3 + 3x - 4)^2$
104. $y = (2x^2 - 7)^3$
105. $y = (x^2 - 2x + 3)^4$
106. $y = \sqrt{4x^4+3x^2-7}$
107. $y = \sqrt[3]{2x+19}$
108. $y = \left(\frac{1}{x^3} - 7x + 1\right)^3$
109. $y = \left(\frac{x}{x^2-4x+7}\right)^4$
110. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2-3x+5}}$
111. $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^2}$
112. $y = 3\sin x$
113. $y = 4\cos x$
114. $y = 5\sin x - 1$
115. $y = 2 - 3\cos x$
116. $y = 6 - 4\sin x$
117. $y = \sin x\cos x$
118. $y = \frac{5\sin x\cos x}{2}$
119. $y = \sin x\cos 2x$
120. $y = \sin\frac{x}{2}$
121. $y = 3\sin 3x$
122. $y = 4\cos\frac{x}{4}$
123. $y = 5\sin 2x\cos\frac{x}{2}$
124. $y = 4\,\mathrm{tg}x$
125. $y = 5\,\mathrm{tg}\,2x$
126. $y = 3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$
127. $y = 4\,\mathrm{cotg}\,2x$
128. $y = 3\mathrm{tg}x\,\mathrm{cotg}2x$
129. $y = 3\sin 2x\,\mathrm{tg}x$
130. $y = \sin x\,\mathrm{cotg}\,3x$
131. $y = 4\sin x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$
132. $y = 2\log x$
133. $y = 3\log\frac{x}{2}$
134. $y = 3^{2x}$
135. $y = 2^{3x}$
136. $y = 4^{3x-1}$
137. $y = 2^{x+2}$
138. $y = 3\ln x$
139. $y = \ln\frac{x}{2}$
140. $y = 4\ln\frac{x}{3}$
141. $y = 5\log 2x.$

Максимум и минимум.

142. — Нађи максимум или минимум функције

$$y = 4x + x^2 + 5.$$

143. — Исто за функцију

$$y - x^2 = 4x + 5y - 7.$$

144. — Исто за функцију

$$x^2 - 4 = 5y - 6x + 9.$$

145. — Исто за функцију

$$y - 4 = 4\,(x - 3)^2.$$

146. — Наћи максимум или минимум функције

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

147. — Исто за функцију

$$y = 3x + \frac{27}{x}.$$

148. — Ито за функцију

$$y = x^2 + (x - 6)^2.$$

149. — Исто за функцију

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

150. — Исто за функцију

$$y = 4 - \frac{x - 1}{x}$$

151. — Исто за функцију

$$y = 3x^3 - 7x^2 + 9x$$

152. — Исто за функцију

$$y = 2x^4 - x$$

153. — Исто за функцију

$$y = \frac{3x - 4}{4 + 3x}$$

154. — Поделити 12 на два сабирка тако, да збир њихових квадрата буде максимум.

Ако је први део x, други је $12 - x$.

155. — Од свију правоугаоника чија је површина s, наћи онај, који има најмањи обим.

156. — Поделити 27 на два сабирка тако, да збир четвороструког квадрата, првог дела и петоструког квадрата другог дела буде што је могуће мањи.

Ако је први део x, други је $27 - x$.

$$y = 4x^2 + 5\,(27 - x)^2.$$

Нађи минимум те функције.

157. — Поделити 40 на два сабирка тако, да њихов производ буде максимум.

158. — Поделити број a на два сабирка тако, да њихов производ буде максимум

Посматрање функција.

159. — Наћи пад тангенте у тачци $x = 3$, $y = 5$ параболе $y = x^2 - 2x + 2$,

160. — Проучити функцију од $x_1 = -4$ до $x_2 = -3{,}5$

$$y = 5x^2 + 30x + 43.$$

Нађи извод. Затим гледај какав је од тачке $x_1 = -4$ до тачке $x_1 = -3\frac{1}{2}$.

161. — Проучити исту функцију од $x_1 = -3\frac{1}{4}$ до $-3\frac{1}{2}$.

162. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 2x + 2$$

од $x_1 = -1$ до $x_2 = +2$.

163. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 6x + 13$$

од $x_1 = -4$ до $x_2 = +2$

164. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 3x + 7$$

од $x_1 = -3$ до $x_2 = -1$.

165. — Проучити функцију $y = 1 - \frac{1}{x}$

166. — „ „ $y = 2x^4 - 1$

167. — „ „ $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$

168. — „ „ $y = 3x^4 + 2x^2 - 7$

169. — „ „ $y = \frac{1 + x}{1 - x}$

170. — „ „ $y = \frac{x}{1 - x}$

171. — „ „ $y = x^2 - x^4$

172. — „ „ $y = 3x^2 - \frac{x}{2}$

173. — „ „ $y = \frac{x^2 + 3x +}{x}$

174. — „ „ $y = \frac{4x^2 - 3x}{2 + x}$

175. — „ „ $y = \frac{2}{x} - 1$

Израчунавање грешке.

176. — Основица једног правоугаоника је a=17cm., а висина је 4cm. Висина је дата с грешком до 0,1 mm. Колика је могућа грешка у површини?

177. — Једна дужина мерена је мотком од 3m. Мотка је пренета 5 пута. При полагању мотке учињена је увек грешка до 2mm. Колика је целокупна могућа грешка?

178. — При мерењу димензија једнога правоугаоника нађено је да оне износе 42m и 17,5m, али друга с грешком до 5mm. Колика је могућа грешка у површини?

179. — Основица једног паралелепипеда је 2,43m²., а висина је 1,25m, с грешком до 1mm. Колика је могућа грешка у запремини?

180. — Колика је могућа грешка у површини равностраног троугла, кад му је страна a=14,7m. измерена с грешком до 0,1mm.?

181.— Колика је могућа грешка у површини круга, кад је полупречник r=18cm. измерен с грешком до 0,5mm.?

182. — Колика је могућа грешка у запремини лопте, кад је полупречник r=35mm. измерен с грешком до 0, 1mm.