ВЛАСТИМИР СТАЈИЋ

АЛГЕБРА

ЗА VI РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај уџбеник препоручио је Главни просветни савет Сбр. 343 од 13 јула 1934 год. и одобрио г. Министар просвете одлуком Снбр. 24579 од 11 августа 1934 год.

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1934

ПРЕДГОВОР

1. Ученику се препоручује да ову књигу добро чува и одржава у исправном стању, пошто ће следећих година често бити упућиван на поједине ставове из ње.

2. Кад ученик рачуна на табли мора непрестано да говори и да сваки поступак објашњава. Ћутање на табли је чамотиња у разреду.

Графичко предузеће „ПРОСВЕТА“ А. Д., Београд, Цара Уроша ул. 8.

ДЕО ПРВИ

ГЛАВА I

Ирационални бројеви

Бројење и број

1. — Ако више ствари, које се могу сматрати као сродне, саставимо у једну целину, од њих ћемо образовати *скупину*. Скупине чине ученици у учионици, књиге на столу, гомиле динара, јабуке у корпи итд. Поједине ствари у скупини зову се *јединице*.

2. — Две скупине A и B могу бити упоређене по величини, кад свакој јединици скупине A приредимо само по једну јединицу скупине B. На овај начин можемо установити да ли је $A \gtreqless B$.

3. — Као што се новац може узети као роба, која нам даје меру за вредност сваке друге робе, тако је и у *броју* створена једна скупина, која може да замени све друге скупине, које имају подједнако јединица.

4. — Основа науке о бројевима јесте сам број. У сваком језику утврђен је један низ речи за бројеве. У српскохрватском језику је тај низ: један, два, три итд. Овим речима одговара низ знакова, цифара, који се као међународни знаци употребљавају близу четири столећа. Постали су вероватно од почетних слова индијанских речи за бројеве. Ти су знаци доспели међу западне народе Европе, пошто су претрпели неке измене код Арабљана. Зову се погрешно *арапске цифре*, а требале би да се зову *индијанске*. О њиховом поступном развитку у 12, 13 и 14 столећу ученик се може обавестити у Аритметици за I разред стр. 149.

5. — Основна радња *бројење* састоји се у томе, да се редом сваком комаду скупине прида по једна бројна реч.

Последња реч узима се као мера за број предмета у скупини. И имена и знаци за поједине бројеве могу бити потпуно произвољни. *Резултат бројења, број, независан је од реда бројених јединица.*

6. — Први члан у низу бројева је један. Сваки следећи постаје даљим додавањем јединице. Тако *бројећи*, добијамо *природне бројеве*

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... итд.

7. — Скуп свих природних бројева има ове особине:

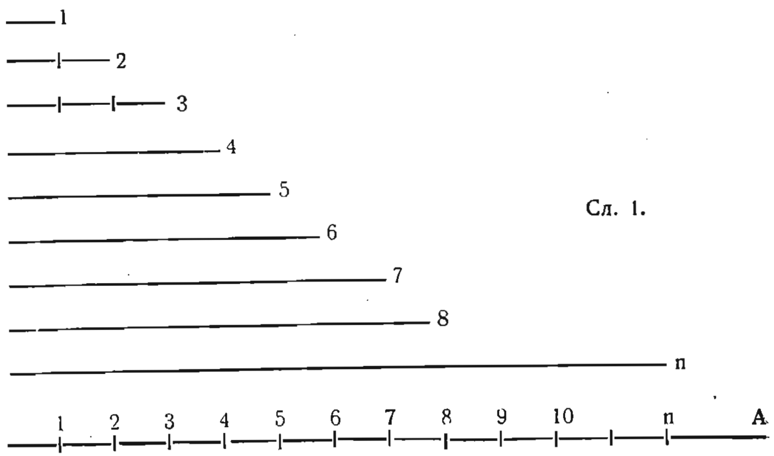
1. Бројеви су од времена и простора независни, тј. резултат једног исправног бројења остаје исти вечито и на сваком месту.

2. Низ чланова надесно је неограничен, тј. додавањем јединице сваком броју следује један нов број.

3. Сваки знак за број одређује (броји) своје место у уређеном низу. На пр. број „седамнаест“ казује да у уређеном низу заузима седамнаесто место и да са претходним бројним знацима образује скупину од 17 јединица.

Од ма која два броја могућно је једнозначно утврдити који од њих у уређеном низу стоји раније, а који доцније, и који отуда означава већу скупину.

8. Очигледно претстављање бројева дужима. — Нацртајмо више дужи, тако да нам прва претставља јединицу, друга две јединице, трећа три јединице итд. Једна од њих да претставља дужину *од ма колико* — од *n* јединица.



Сл. 1.

Тако можемо добити слику о величини појединих бројева.

9. Бројни врак. — Ово очигледно претстављање бројева може да се упрости. Уместо много линија узећемо само једну. На ту једну пренећемо све дужи које смо раније нацртали. При том ћемо пазити да почетне тачке падну све у једну тачку, на слици у тачку О.

Тада је број 2 претстављен дужином О2, број 8 дужином О8, број *n* дужином О*n* итд.

Из слике се види да сваком броју у бројном реду одговара по једна потпуно одређена тачка на *бројној линији*, наиме крајња тачка пренетих горњих дужи. Ове тачке дају нам *слику* о *величини* и о *месту* или *рангу* броја у бројном реду. Тако је бројни ред *очигледно претстављен.*

Рачунати значи из датих бројева по утврђеним законима васпоставити један нов број, резултат рачунске радње.

10. — За бројеве преко 10 постоји врло практичан начин писања помоћу *система месне вредности* или *позиционог система.* Пошто свака цифра на сваком месту има потпуно одређену вредност, велики бројеви се сразмерно просто пишу. На пр.

76, 12 039, 888.

Згодно је да се са овим начином упореди римско писање. Последњи од горњих бројева пише се римским цифрама

DCCCLXXXVIII.

Рачунске радње првог ступња

11. Сабирање. — Искуство нам казује да је збир два природна броја увек опет природни број. Ако су *a*, *b*, *c* и s природни бројеви, онда важи уопште

$$a + b = s.$$

Даље нас искуство учи да за природне бројеве важе и ове једначине

$$a + b = b + a \qquad (1)$$

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c). \qquad (2)$$

Једначина (1) исказује *комутативни* закон сабирања (закон промене места), једначина (2) исказује *асоцијативни* закон сабирања (закон спајања, везивања сабирака).

12. Одузимање. — Упоређивање двеју скупина, или разлагање једне скупине у два дела, или још и *смањивање* једне скупине за једну другу, доводи до рачунске радње *одузимања.*

Одузимање иде одмах са сабирањем. Каже се сабирање и одузимање иду руку под руку. Јер

$$s - a = b \qquad (3)$$

не значи ништа друго, неголи

$$b + a = s. \qquad (3а)$$

Једновремено постојање једначина (3) и (3а) за исте три величине, садржи у себи и *правило о пренашању* чланова једне једначине с једне стране на другу. Један сабирак може прећи на другу страну као умањилац, или умањилац може да се пренесе на другу страну као сабирак.

13. — Ако вредност за b пренесемо из (3) у (3а) добијамо дефинициону једначину одузимања:

$$(s - a) + a = s. \qquad (4)$$

Како се исказује речима ова дефиниција?

Из дефиниције одузимања следује даље:

$$(s + a) - a = s. \qquad (5)$$

Речима исказати!

Једначине (4) и (5) обухваћене су једним правилом: *сабирање и одузимање су обрнуте радње.*

14. — Спајање сабирања и одузимања изражено је следећим познатим правилима:

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= (a + b) - c \\ a - (b - c) &= (a - b) + c \qquad (6) \\ a - (b + c) &= (a - b) - c \\ a - b &= (a - n) - (b - n). \end{aligned}$$

Исказати их речима!

Сви ови обрасци могу се извести из дефиниције одузимања и претходних образаца од (1) до (5).

15. — Како смо у претходним обрасцима (6) на десној страни заградили или први сабирак или умањеник, то заграде можемо изоставити без икаквих опасности од забуна, па једначину (2) и прве три једначине из (6) можемо и овако написати.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + b + c \\ a + (b - c) &= a + b - c \qquad (7) \\ a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c. \end{aligned}$$

16. — Према дефиницији одузимања умањеник је збир, чији је један сабирак умањилац. С друге стране је збир већи од свакога сабирка. Због тога везивање два једнака природна броја знаком *минус* није никакав природни број, ма да има облик разлике.

Одавде почињемо да се придржавамо *Ханкеловог принципа о перманенцији (о сталности, о непромењљивости) рачунских закона: Оставља се да стари закони важе за све нове бројеве.* Другим речима закон се и овако исказује:

1. *Стара или дотадања рачунска правила примењују се непромењено на сваки спој бројева, који не претставља никакав дотле дефинисани број. Такав је спој на пр.* $(a-a)$ *у области природних бројева.*

2. *Такав спој дефинише се као нови број и тиме појам броја прошири.*

Принцип о перманенцији неки зову и *принцип о безизузетности.*

17. — Четврти образац из (6)

$$a - a = (a - n) - (a - n)$$

казује још да су све разлике једнаке, којима су умањеник и умањилац једнаки. За такве једнаке разлике уведен је сталан знак 0 (нула). Али како нула није никакав резултат бројења, то је појам броја увођењем нуле у језик алгебре добио једно проширење.

Из дефиниције

$$a - a = 0$$

произилази како треба поступити са нулом при сабирању и одузимању

$$\begin{aligned} &a - a = 0; \quad a + 0 = a; \quad 0 + a = a; \qquad (8) \\ &a - 0 = a; \quad 0 + 0 = 0; \quad 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

18. Негативан број. — Кад је у $(a - b)$ умањеник a мањи од умањиоца b, онда $(a - b)$ не претставља никакав природни број. По принципу перманенције уводимо и за овај спој нове бројеве.

Настаје питање како ћемо обележавати ове бројеве. Нека је

$$b = a + p.$$

Тада према правилу о одузимању збира добијамо

$$a - b = a - (a + p) = (a - a) - p = 0 - p. \quad (9)$$

Могли бисмо $(0 - p)$ изабрати као знак за нове бројеве. У пракси још се и нула изоставља и нови број се пише у облику

$$-p.$$

Дакле, кад је $b > a$ имамо

$$a - b = -p = -(b - a). \quad (10)$$

Нови бројеви названи су *негативни бројеви*. Супротно овоме природни бројеви зову се *позитивни бројеви*. И испред њих се често ставља позитиван знак $+$.

Бројеви испред којих стоје знаци $+$ или $-$ зову се једним именом *релативни бројеви*. Ако једном релативном броју прецртамо знак, добијамо *апсолутну вредност* тог релативног броја.

19. — Како је

$$b - a = p$$

то је $\qquad a = b - p,$

па стављањем у (10) добијамо:

$$(b - p) - b = -p.$$

Из овога следује на основу дефиниције одузимања

$$b + (-p) = b - p. \quad (11)$$

Из $\qquad b - a = p$

следује $\qquad b = a + p.$

Заменом ове вредности у (10) добија се:

$$a - (a + p) = (-p).$$

Из овога следује на основу дефиниције одузимања:

$$a - (-p) = a + p. \quad (12)$$

Једначине (11) и (12) казују нам како се негативан број додаје и одузима.

С друге стране омогућује нам једначина (11) да један агрегат претворимо у збир све самих релативних бројева. На пр.

$$a - b + c - d - e = a + (-b) + (+c) + (-d) + (-e).$$

Такав један збир зове се алгебарски збир, а релативни бројеви који га сачињавају чланови збира.

20. — Од два природна броја a и b је

$$a > b$$

кад је $\qquad a - b > 0,$

кад је дакле њихова разлика позитивна.

Ову дефиницију проширујемо и на негативне бројеве. Ако су $(-p)$ и $(-q)$ два негативна броја, и ако је

$$(-p) > (-q),$$

то мора бити

$$(-p) - (-q) > 0,$$

или $\qquad (-p) + q > 0$

или $\qquad q - p > 0.$

Али пошто су q и p природни бројеви, то следује из

$$q - p > 0$$

$$q > p.$$

Од два негативна броја већи је, дакле, онај који има мању апсолутну вредност.

Рачунске радње другог ступња

21. — Из дефиниције множења помоћу једначине:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a}_{b \text{ сабирака}} \quad (13)$$

следује да множеник a може бити ма какав релативан број, али да множилац b може бити само један природан број.

Ако је a један природан број, лако је доказати да и за множење важи комутативан закон:

$$a \cdot b = b \cdot a. \quad (14)$$

По закону о перманенцији узимамо да (14) важи, кад су a и b нуле и негативни бројеви. Из (13) и (14) следује тада.

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0; (-p) \cdot a = a \cdot (-p) = -(p \cdot a);$$
$$(-p) \cdot (-q) = -[p \cdot (-q)] = -[-(p \cdot q)] = +p \cdot q. \tag{15}$$

22. — Из (13) и из ранијих образаца следује

$$(a+b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$$
$$(a-b) \cdot n = a \cdot n - b \cdot n. \tag{16}$$

Ове једначине исказују *дистрибутивни закони множења* (закон поделе).

Из (16) и (14) следује напослетку асоцијативни закон множења

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot b \cdot c. \tag{17}$$

Из (16) изводи се и правило о множењу два алгебарска збира или полинома.

23. — Решење једначине

$$a \cdot b = p \tag{18}$$

по b, пише се у облику

$$b = p{:}a \text{ или } b = \frac{p}{a} \cdot \tag{19}$$

Једначине (18) и (19) које важе за исте три величине садрже у себи *друго правило о премештању* у једначини. Можемо један чинилац пренети на другу страну као делилац, или један делилац може прећи на другу страну као чинилац.

24. — Ако ставимо b из (19) у (18) добија се дефинициона једначина за дељење:

$$\frac{p}{a} \cdot a = p. \tag{20}$$

Из дефиниције дељења следује даље

$$\frac{a \cdot p}{a} = p. \tag{21}$$

Оба обрасца ученик да искаже речима!

Полазећи од дефинције дељења изводи се и правило о знацима код дељења:

$$\frac{+(a \cdot p)}{+a} = +p; \qquad \frac{+(a \cdot p)}{-a} = -p;$$
$$\frac{-(a \cdot p)}{+a} = -p; \qquad \frac{-(a \cdot p)}{-a} = +p. \tag{22}$$

25. — При једном дељењу $\frac{p}{a}$ имамо да водимо рачуна о двема стварима.

1. Да би $\frac{p}{a}$ имало смисла, мора p да буде садржалац од a, или a мора бити чинилац броја p. Ако p није никакав садржалац броја a, јавља се потреба за увођењем нових бројева — *разломака*.

2. a несме бити нула.

26. — Из једначине

$$0 \cdot a = 0,$$

где је a ма какав релативан број следује обртањем:

1. $\frac{0}{a} = 0$, тј. кад се нула подели ма којим бројем (изузев нуле), опет се добија нула.

2. $\frac{0}{0} = a$. Количник $\frac{0}{0}$ је по томе сваки произвољан број. Он је многозначан.

Спој $\frac{p}{0}$ је истоветан са питањем: који број помножен нулом даје релативан број p. Нема ни једног од досада дефинисаних бројева, који има ту особину. Ово питање јавиће се и у каснијим партијама.

27. — Рекли смо у чланку 25, да $\frac{p}{a}$ не води ниједном од досада дефинисаних бројева, ако p није садржалац броја a. Сад ми ову тешкоћу отклањамо проглашавањем споја $\frac{p}{a}$ за број и онда, кад p није садржалац броја a. Нови број називамо *разломак*.

p се зове бројилац, a именилац разломка $\frac{p}{a}$.

За нове бројеве важи дефиниција

$$\frac{p}{a} \cdot a = p. \tag{23}$$

Насупрот разломцима досада дефинисани бројеви зову се *цели бројеви.*

28. — Према нашој дефиницији могу бројилац и именилац разломка

$$\frac{p}{a}$$

бити ма који цели релативни бројеви. Из образаца (22) тада можемо прочитати следеће: Ако p и a имају исте знаке, то је број $\frac{p}{a}$ позитиван; ако p и a имају супротне знаке, број $\frac{p}{a}$ је негативан. Тиме ми разликујемо позитивне и негативне разломке.

Пример.

$$\frac{+3}{+5}=+\frac{3}{5} \qquad \frac{-3}{-5}=+\frac{3}{5}$$

$$\frac{+3}{-5}=-\frac{3}{5} \qquad \frac{-3}{+5}=-\frac{3}{5}.$$

Досада дефинисани цели бројеви и разломци, заједно са нулом, обухваћени су једним именом **рационални бројеви.**

29. — Веза дељења са сабирањем, одузимањем и множењем прeтстављена је овим обрасцима:

$$\text{I}\quad \frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m} \qquad \text{II}\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$$

$$\text{III}\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \qquad \text{IV}\quad \frac{a}{b\cdot c}=\frac{a}{b}:c$$

$$\text{V}\quad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\cdot c \qquad \text{VI}\quad \frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m} \qquad (24)$$

$$\text{VII}\quad \frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n} \qquad \text{VIII}\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\text{IX}\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Са алгебарског превести на обичан језик!

Једнакост обеју страна доказује се множећи их једним истим бројем и применом дефиниције (23) и ранијих образаца. Увек се добију на обема странама једнаки изрази.

Пошто обрасци употребљени за доказивање важе и за разломке, обрасци (24) не подлеже никаквим ограничењима.

Рачунске радње трећега ступња

30. — Из дефиниције степеновања помоћу једначине

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot a}_{n \text{ чинилаца}} \qquad (25)$$

следује да основа a може бити ма какав рационалан број. Али изложилац n може бити само природан број. $n = 1$ даје $a^1 = a$, ако се a^1 схвати као производ од једног чиниоца.

Ако је основа један негативан број $a=-p$, из (25) следује:

$$(-p)^{2n} = +p^{2n}; \qquad (-p)^{2n+1} = -p^{2n+1} \qquad (26)$$

31. — Из дефиниције (25) могу се извести следећих „пет закона“ за степеновање:

I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

IIa $a^m : a^n = a^{m-n}$ у случају кад је $m > n$

IIb $a^m : a^n = 1$ „ „ „ „ $m = n$

IIc $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ „ „ „ „ $m < n$ (27)

III $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

IV $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

V $(a^m)^n = a^{m\cdot n} = (a^n)^m$.

Обрасци I и II претстављају *дистрибутивни закон степеновања са једнаким основама*, обрасци III и IV *дистрибутивни закон степеновања са једнаким изложиоцима*, образац V *асоцијативни закон степеновања.*

Код степеновања не постоји комутативни закон, ако не водимо рачуна о специјалном случају

$$4^2 = 2^4.$$

32. — У обрасцу II разликовали смо три случаја. То разликовање је, разуме се, могућно само кад су изложиоци одређени бројеви. При рачунању са општим бројевима то разликовање често није могућно. У том случају настаје питање да ли би био довољан само образац IIa.

Ако рачунамо у случају IIb по IIa, добијамо:

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^0 \qquad \text{за } m = n.$$

Ми добијамо по обрасцу IIb само тада исправан резултат кад дефинишемо

$$a^0 = 1. \qquad (28)$$

Ако рачунамо у случају IIc по IIa добијамо:

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)} \qquad \text{за } n > m.$$

Ми добијамо дакле по IIc само тада исправан резултат, ако дефинишемо

$$a^{-d} = \frac{1}{a^d} \qquad (29)$$

где је $\qquad d = n - m.$

Помоћу образаца (28) и (29) *дали смо смисао степеновању нулом и негативним изложиоцем.*

Може се помоћу образаца (28) и (29) показати да обрасци (27) важе и тада, кад су изложиоци нуле и негативни бројеви.

33. — Настаје питање шта ће бити ако је изложилац n степена a^n разломак. Узмимо да је

$$n = \frac{q}{p},$$

где су q и p цели бројеви. Тада горњи степен постаје

$$a^{\frac{q}{p}},$$

па треба да објаснимо какво значење има.

Ако допустимо да по принципу о перманенцији правило V из образаца (27) (степеновање степена) важи и за степене са разломљеним изложиоцима, можемо написати

$$\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p = a^{\frac{q}{p} \cdot p} = a^q. \qquad (30)$$

Према томе $a^{\frac{q}{p}}$ значи онај број, који треба да ставимо p пута као чинилац, да се добије a^q.

Слично овоме је $a^{\frac{1}{n}}$ онај број, који треба узети n пута као чинилац да се добије a. Ако вредност $a^{\frac{1}{n}}$ означимо са x њу ћемо добити решењем једначине

$$x^n = a. \qquad (31)$$

Питамо се који број треба степеновати са n да се добије a.

Један разломљени изложилац доводи према томе до обрнуте радње степеновању.

34. — Како за степеновање не важи комутативни закон, то степеновање има две обрнуте радње, према томе да ли се тражи основа или изложилац.

Из једначине

$$a^n = p$$

следују ове три рачунске радње:

1. Кад је дато a и n, а тражи се p имамо *степеновање*, $p = a^n$.

2. Кад је познато p и n, а тражи се a, имамо *кореновање*, $a = \sqrt[n]{p}$, што се чита n — ти корени из p.

3. Кад је дато a и p, а тражи се n, имамо *логаритмовање*, $n = \log p_{(a)}$. Чита се n је једнако логаритму броја p за основу a.

35. — Решење једначине

$$x^n = a \qquad (31)$$

пишемо дакле у облику

$$x = a^{\frac{1}{n}}$$

или $\qquad x = \sqrt[n]{a}.$

Одавде следује дефинициона једначина за кореновање

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \qquad (32)$$

На основу ове дефиниције имамо такође и

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \qquad (33)$$

Постојање једначина (32) и (33) за исте величине исказује се само једним правилом: степеновање и кореновање са истим изложиоцем су обрнуте рачунске радње.

36. — Из дефиниције кореновања и помоћу закона изведених за степеновање добијају се следећих „пет закона“ кореновања:

$$\text{I} \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\text{II} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{III} \quad \sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{m}{n}} \qquad (34)$$

$$\text{IV} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\text{V} \quad \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Обрасци I и II претстављају *дистрибутивни закон кореновања*, обрасци III и IV *асоцијативни закон кореновања.*

Увођење разломљених изложилаца код степеновања учинило је да кореновање постане само један специјалан случај степеновања. Обрасци (34) изводе се непосредно из образаца (27), чим се узму разломци као изложиоци.

О рачунској радњи логаритмовању биће говора касније.

Бројне области

37. — Бројењем почев од један добијамо природне бројеве. Скуп свих природних бројева зваћемо *бројна област.* Поједини бројеви биће *елементи* области. Област природних бројева назваћемо још *област I.*

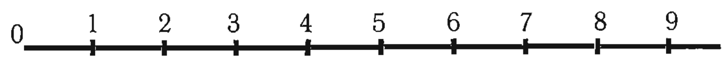
У области I сабирање a + b ма која два елемента даје за резултат опет елемент из I. Пошто је множење само један специјалан случај сабирања, то је и резултат сваког множења a · b између два елемента области I опет један елемент из I. Због тога кажемо: сабирање и множење у области I је *увек изводљиво.*

38. — Ако хоћемо да извршимо одузимање a — b ма која два елемента I, то се у свима случајевима a > b добија као разлика један од елемената I. Чим је a < b, рачун није више изводљив. Чак нисмо у могућности да изразимо и резултат задатка a — a. Јасно увиђамо да одузимање у области I није изводљиво у свима случајевима.

Изузеци се лако отклањају, кад *проширимо* бројну област I. То проширење извршили смо увођењем *негативних бројева.* Тако добијамо *област свих целих бројева,* коју ћемо означити као *област II.* После овога *област I може се назвати и област целих позитивних бројева.* Јасно је сад да свако одузимање у области II има као резултат елемент који припада истој области. Другим речима одузимање је у области II *увек изводљиво.*

39. — Сад ћемо поновити геометриско претстављање бројева, пошто ће нам бити потребно за даље излагање.

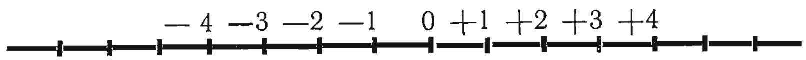
Све природне бројеве, елементе I, претстављамо као тачке на једном зраку, при чему узимамо једну згодну дужину за јединицу, сл. 2.



Сл. 2.

Зрак се овде јавља као *носилац* тачака, које су означене са 1, 2, 3, итд. *Само* ове тачке имају смисла као слика бројева. Отсечци зрака између обележених тачака су засада без значаја. Они имају да се сматрају просто као празнине, шупљине.

После проширења области I у област II добија се као претставник свих бројева области II слика 3. Отсечци између обележених тачака и овде се имају сматрати као празнине.



Сл. 3.

40. — Прелазимо на дељење елемената у области II. Примери као 30 : 6, 18 : (— 3), (— 14) : 2, (— 56) : (— 8) показују да у појединим случајевима добијамо као резултат опет елементе области II. Ипак се дељење у области II не може увек извести, на пример $\frac{10}{3}$. Знамо да се изузеци могу отклонити новим проширењем. Уводимо разломке позитивне и негативне, па скуп свих досада добијених елемената називамо *рационални бројеви.* Овако добијену област зваћемо *обласӣ III.* Четири основне рачунске радње су у области III *увек, без изузеѿка, изводљиве.*

41. — Ако хоћемо елементе III геометриски да претставимо, то одмах увиђамо да ће слике разломљених бројева пасти у малочас споменуте празнине на бројној линији. Па како је број разломака између два узастопна цела броја произвољно велики, то имамо себи да претставимо да се множина разломака између два цела броја може да згусне произвољно много. Ова околност доводи до једног врло значајног питања.

Ако изаберемо између 0 и 1 на пр. два разломка чији су имениоци 1000, рецимо $\frac{7}{1000}$ и $\frac{8}{1000}$, који се могу написати у облику 0,007 и 0,008, то се између њих могу уметнути разломци 0,0071, 0,0072, 0,0073.....0,0079. Сваком од ових бројева одговара по једна тачка између тачака 0,007 и 0,008. Између ма која два разломка овога низа могу се уметнути нови разломци на пр. 0,00731, 0,00732, 0,00733.......0,00739. И за сваки од ових бројева постоји по једна тачка, као њихова слика. На овај начин добија се на сваком месту области III једно неограничено згушњавање. Ако истакнемо питање да ли сваки рационалан број има своје место на правој линији, морамо праву себи да претставимо као непрекидну, континуирну. По једном аксиому сваки рационалан број има своју слику, своју тачку, на бројној линији. Сада се јавља и обрнуто питање да ли област III уопште обухвата све тачке бројне линије. Ово последње питање нека овде остане још отворено.

Ирационални бројеви

42. — Степеновање једног рационалног броја ма каквим позитивним или негативним изложиоцем даје као резултат један рационалан број. И радња степеновање је у области III *увек изводљива.*

У области III могу се наћи и такви елементи, такви рационални бројеви a, да радња $\sqrt[n]{a}$ буде изводљива. На пример:

$$\sqrt[4]{16},\quad \sqrt[3]{27},\quad \sqrt[5]{-32},\quad \sqrt[3]{-\tfrac{27}{125}} \text{ итд.}$$

Резултат $\sqrt[n]{a}$ припада извесно области III, кад је a n-ти степен једног рационалног броја.

За квадратни корен је већ у Алгебри за III разред стр. 95 и 117 показано да $\sqrt{a}$ *уоӣшѿе* није рационалан број. На сличан начин може се доказати, кад је a цео број и није никакав n-ти степен, да $\sqrt[n]{a}$ није никакав рационалан број.

Доказ. — Кад је a цео број, а није n-ти степен, питамо се да ли се може наћи какав рационалан број, какав разломак $\frac{p}{q}$, који узет n пута као чинилац, даје број a. Морало би дакле бити

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p}{q}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{q}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\frac{p}{q} = a.$$

Ако узмемо да је разломак $\frac{p}{q}$ доведен на најпростији облик, тј. да p и q немају заједничких чинилаца, тада је јасно да се у горњем производу имениоци q не могу уклонити, па се као резултат не може добити цео број. Елементи области III нису, дакле, довољни, да се међу њима извлачење корена може увек извести.

Ми проширујемо бројну област поново и називамо елементе који се морају придодати *ирационални бројеви.* Скуп свих рационалних и ирационалних бројева зове се *обласѿ реалних бројева,* област IV.

43. — Тиме што ми и у случајевима, у којима се $\sqrt[n]{a}$ не може рационално изразити, говоримо о једном „резултату“ и уводимо нове бројеве, проблем је решен, али само формално. Ми имамо уопште тек да утврдимо, на који ћемо начин нове елементе прикључити систему III.

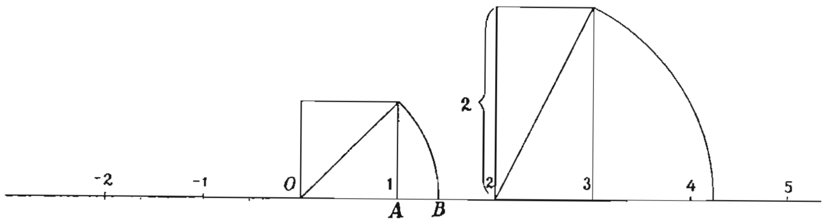
Изграђивање области II и III показује се због тога тако просто, што ми на бројној линији лако налазимо места за нове елементе и лако их сврставамо. Није исти случај са елементима IV. Пошто низ рационалних бројева може бити произвољно густ, јавља се питање, да ли још имамо могућности да систему III придодамо нове елементе.

Другим речима да ли на бројној линији има места за нове, ирационалне бројеве.

Лако се може показати да и при неограничено продуженом згушњавању рационалних бројева на бројној линији увек још остају празнине.

Ово најпре следује непосредно из самог појма згушњавања. Свако уметања рационалних вредности између два роционална броја, размак, интервал, се за известан део смањи, али у сваком случају известан интервал остаје и даље.

Геометриски постају очигледне празнине рационалног низа следећом конструкцијом. Нацртамо квадрат са страном 1, па дијагоналу пренесемо на бројну линију, као што се види на слици 4 (OB).

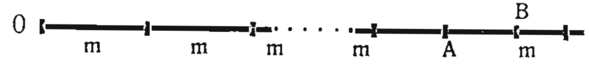


Сл. 4

Пошто дијагонала има дужину $\sqrt{2}$ то на бројној линији тачки B треба да одговара „број" $\sqrt{2}$. И пошто ми вредност $\sqrt{2}$ не можемо претставити никаквим рационалним бројем (види Алгебру за III р. стр. 117!) долазимо до закључка, да тачка B не може бити никад достигнута рационалним згушњавањем. Она мора лежати у једној празнини рационалног низа.

Друга конструкција на сл. 4 претставља вредност $2+\sqrt{5}$.

44. — Чињеница да рационалан низ има празнине је у тесној вези са мерљивошћу дужи. При мерењу једне дужи постављамо меру рецимо m толико пута почев од O, док завршна тачка мере не падне на тачку B.



Сл. 5.

Кад то не успе са једном употребљеном мером, на пр. са једним метром без поделе, онда узимамо метар са поделом (на dm, cm и mm). Али се може десити да ни са једном мером не успемо да измеримо дату дужину. То се врло лепо може да види на горњој сл. 5. Јединицом OA не можемо измерити дужину OB. Можемо узети колико хоћемо мали део m од OA, увек ће се десити да завршна тачка мере m падне или испред тачке B, или иза ње. Дужи OB и OA зову се *несамерљиве* дужи.

45. — Малопређашња извођења прећутно су везана за претпоставку да *вредност* $\sqrt{2}$ одиста *постоји*. Ова претпоставка довела је до изградње нових за модерну математику важних појмова.

Опоменимо се поступка, по коме се одређују приближне вредности за један ирационалан број, на пр. како се „извлачи" $\sqrt{2}$. Ми добијамо тада поступно

Р. бр.	a	A
1.	$1 < \sqrt{2} <$	2
2.	1,4	1,5
3.	1,41	1,42
4.	1,414	1,415
5.	1,4142	1,4143
6.	1,41421	1,41422
7.	1,414213	1,414214
8.	1,4142135	1,4142136

и тд.

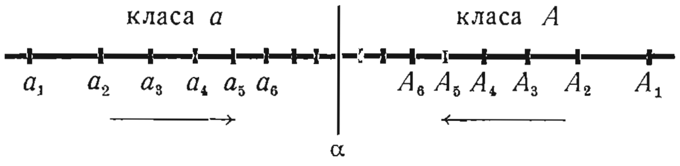
На тај начин добијамо два, овим рачунским поступком потпуно дефинисана, низа рационалних бројева a и A са овим особинама:

1. Сваки број a мањи је од сваког броја A.

2. Бројеви a расту непрестано, али не постоји ни један највећи број a.

3. Бројеви A стално опадају; не постоји најмањи број A.

Тада ми узимамо да постоји један једини број $\sqrt{2}$ који раздваја обе класе a и A.



Сл. 6.

Слика 6 приказује рационално приближавање једном ирационалном броју.

Класу a зваћемо још и *доња класа*, класу A *горња класа*. Кад би у доњој класи постојао један највећи број a, онда би горње тврђење било очевидно. Али у случају, кад у доњој класи не постоји ни један највећи, а у горњој ни један најмањи број, горње тврђење се не може доказати. Узима се као *аксиом*.

Број α који раставља обе класе зове се *пресек*. Пресек се краће пише у овом облику

$$\alpha = (a|A).$$

46. — Ако у доњој класи постоји највећи број на пр. ако се доња класа састоји од свих бројева мањих од 5 и од броја 5 као највећег, онда такав пресек дефинише један рационалан број, у овом случају 5. У класи A тада нема најмањег броја.

Исти је случај ако у горњој класи постоји најмањи број, тј. ако се, рецимо, та класа састоји од свих бројева већих од 5 и од броја 5 као најмањег. Онда у класи a не постоји највећи број.

Ова два случаја можемо спојити у један, ако кажемо да смо све рационалне бројеве раставили у три класе. Једну класу чини сам рационалан број, који је тим растављањем одређен, другу сви рационални бројеви мањи, а трећу сви бројеви већи од њега.

Растављање у две класе, које дефинише ирационалан број, зваћемо још и *прво растављање*, а растављање у три класе, које дефинише рационалан број, зваћемо *друго растављање*.

Пресек који дефинише ирационалан број зваћемо *ирационалан пресек*, пресек који дефинише рационалан број зваћемо *рационалан пресек*.

Као што видимо појам ирационалног броја овако претстављеног много се разликује од појма целог броја и од појма разломка.

47. — Овај начин закључивања први је извео *Дедекинд*. Он је пошао од претстава и потреба геметрије, формулишући најпре овај аксиом о *непрекидности* праве линије.

Ако поделимо све тачке једне праве у две класе, рецимо у тачке a и тачке A, тако да свака тачка припада само једној од ових класа, и ако даље ова подела има особину да свака тачка a лежи лево од сваке тачке A, то на правој постоји једна потпуно одређена тачка која има особину, да обе класе раздваја једну од друге. Ова тачка лежи, ако припада класи a најдаље надесно од свих тачака класе; или ако припада класи A лежи најдаље налево од свих тачака класе.

Како свакој тачки одговара по један број, ми смо на пр. у малопређашњем случају ($\sqrt{2}$) све рационалне бројеве поделити у две класе: једној класи (доњој) припадају сви негативни бројеви, нула и сви позитивни бројеви чији су квадрати мањи од 2; другој (горњој) класи припадају сви бројеви чији су квадрати већи од 2. Бројеве прве класе обележили смо са a, бројеве друге класе са A.

Ово разлагање рационалних бројева има особине:

1. *Свака класа уопште садржи бројеве.*

2. *Овим растављањем исцрпљени су* сви рационални бројеви, тј. сваки број припада или класи a, или класи A.

3. *Свако A веће је од сваког a.*

4. *Не постоји ни једно a које би било највеће.*

5. *Не постоји најмање A.*

Овакво разлагање области рационалних бројева у два дела зове се, као што већ споменусмо, један пресек у области рационалних бројева. *Овакав пресек дефинише ирационалан број.*

48. — Једно овако раздвајање бројева у класе познато нам је из геометрије, из науке о кругу. Ако израчунамо обим o_n једног у кругу уписаног правилног n-тоугла и обим O_n око истог круга описаног правилног n-тоугла, то добијамо, кад број страна n неограничено расте низ o_n који непрестано расте и низ O_n који непрестано опада, при чему је свака вредност o_n мања од сваке вредности O_n.

Израчунавање ирационалних бројева

49. — Поред поступка који смо већ имали, извлачење корена, има и других начина, да се одреде низови бројева, који дефинишу један ирационалан број $\alpha = (a|A)$. При том мора бити испуњен услов, да је пресек $(a|A)$ потпуно дат, тј. ми морамо бити у могућности да одлучимо за сваки рационалан број да ли припада класи a или класи A. Поред тога морамо знати бар један број из класе a и један из класе A.

Узмимо да су нам познати бројеви a_1 и A_1. Одмах знамо да сви бројеви мањи од a_1 припадају класи a, и да сви бројеви већи од A_1 припадају класи A. Само о бројевима између a_1 и A_1 не можемо ништа одлучити. Протезање тих бројева износи $(A_1 - a_1)$. Сад образујемо израз

$$\frac{a_1 + A_1}{2}$$

и испитамо да ли припада класи a или A. У првом случају пишемо

$$a_2 = \frac{a_1 + A_1}{2} \qquad A_2 = A_1,$$

у другом

$$a_2 = a_1 \qquad A_2 = \frac{a_1 + A_1}{2}.$$

У оба случаја биће

$$A_2 - a_2 = \frac{A_1 - a_1}{2}.$$

Област бројева за које се не може одлучити да ли припадају класи a или A је овим смањена за половину.

Овај поступак може произвољно да се продужи и област бројева за које се не можемо одлучити којој класи припадају да се произвољно смањи тј. да буде облика

$$\frac{A_1 - a_1}{2^n},$$

где n може бити велико колико хоћемо.

50. — Узећемо да наш ранији пример $(\sqrt{2})$, да пресек који је дефинисан условима

$$a^2 < 2 \text{ и } A^2 > 2$$

одредимо тачно на $\frac{1}{1000}$. Почећемо тиме, што ћемо узети да нула припада класи a, а број 2 класи A. Тада образујемо

$$\frac{0+2}{2} = 1$$

и видимо да припада класи a. Затим образујемо

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Овај број припада класи A. Продужујући тако добијамо следећи рачун:

		$a_1 = 0$	$A_1 = 2$
$1^2 < 2$	дакле	$a_2 = 1$	$A_2 = 2$
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2$		$a_3 = 1$	$A_3 = \frac{3}{2}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^2 < 2$		$a_4 = \frac{5}{4}$	$A_4 = \frac{6}{4}$
$\left(\frac{11}{8}\right)^2 < 2$		$a_5 = \frac{11}{8}$	$A_5 = \frac{12}{8}$
$\left(\frac{23}{16}\right)^2 > 2$		$a_6 = \frac{22}{16}$	$A_6 = \frac{23}{16}$
$\left(\frac{45}{32}\right)^2 < 2$		$a_7 = \frac{45}{32}$	$A_7 = \frac{46}{32}$
$\left(\frac{91}{64}\right)^2 > 2$		$a_8 = \frac{90}{64}$	$A_8 = \frac{91}{64}$

$$\left(\frac{181}{128}\right)^2 < 2 \qquad a_9 = \frac{181}{128} \qquad A_9 = \frac{182}{128}$$

$$\left(\frac{363}{256}\right)^2 > 2 \qquad a_{10} = \frac{362}{256} \qquad A_{10} = \frac{363}{256}$$

$$\left(\frac{725}{512}\right)^2 > 2 \qquad a_{11} = \frac{724}{512} \qquad A_{11} = \frac{725}{512}$$

$$\left(\frac{1449}{1024}\right)^2 > 2 \qquad a_{12} = \frac{1448}{1024} \qquad A_{12} = \frac{1449}{1024}$$

Тражени ирационални број $(\sqrt{2})$ је овим одређен тачно на хиљадите делове.

51. Херонов начин. — Други један поступак за одредбу $\sqrt{2}$ помоћу два низа бројева јесте *Херонов поступак*. Основна мисао његова је у овоме:

Ако на пр. хоћемо да одредимо $\sqrt{2}$, претставићемо број 2 као производ два рационална броја A и a, где ћемо узети још да је $A > a$. Из ових бројева образоваћемо два нова броја A_1 и a_1, тако да је и њихов производ $A_1 \cdot a_1 = 2$, само да се ови бројеви један од другога мање разликују неголи A и a, тј. да буде

$$A_1 - a_1 < A - a, \text{ итд.}$$

За практичан рачун најлакше је образовање ових бројева помоћу аритметичке средине.

$$A \qquad a \qquad A \cdot a = 2 \qquad A > a$$

$$A_1 = \frac{A + a}{2.} \qquad a_1 = \frac{2}{A_1} \qquad A_1 \cdot a_1 = 2$$

$$A_2 = \frac{A_1 + a_1}{2} \qquad a_2 = \frac{2}{A_2} \qquad A_2 \cdot a_2 = 2$$

$$A_3 = \frac{A_2 + a_2}{2} \qquad a_3 = \frac{2}{A_3} \qquad A_3 \cdot a_3 = 2$$

итд.

На пример $\quad A = 2, \ a = 1;$

$$A_1 = \frac{2+1}{2} \qquad a_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

$$A_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} \qquad a_2 = \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17} \quad \frac{17}{12} \cdot \frac{24}{17} = 2$$

и тд.

Кад образујемо A_4, већ имамо $\sqrt{2}$ тачно на 5 децимала.

Треба само показати да низови бројева A и a претстављају пресек.

Јасно је да смо добили два низа бројева

I $a, a_1, a_2, a_3, a_4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ II $A, A_1, A_2, A_3, A_4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

где је $A > a$, $A \cdot a = A_1 \cdot a_1 = A_2 \cdot a_2 = \cdot \cdot = 2$.

Ови низови даље имају ову особину

1. $A > A_1 > A_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$; $a < a_1 < a_2 < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

јер је $\qquad A - A_1 = \dfrac{A - a}{2} > 0,$

исто тако и $\qquad A_1 - A_2 = \dfrac{A_1 - a_1}{2} > 0 \qquad$ и тд.

дакле $\qquad A > A_1 > A_2 \qquad$ итд.

Даље је $a - a_1 = \dfrac{2}{A} - \dfrac{2}{A_1} = 2\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{A_1}\right) < 0,$

исто тако и $a_1 - a_2 = 2\left(\dfrac{1}{A_1} - \dfrac{1}{A_2}\right) < 0$, дакле

$$a < a_1 < a_2 \quad \text{и тд.}$$

Доказали смо да бројеви a расту, а да бројеви A опадају.

Пошто се Херонов поступак може продужити докле хоћемо, то не постоји ни један број a који је највећи, нити број A који је најмањи.

2. Разлике $A_1 - a_1$, $A_2 - a_2$ и тд. бивају све мање и мање. Јер ако образујемо разлику $A_1 - a_1$ имаћемо:

$$A_1 - a_1 = \frac{A + a}{2} - \frac{4}{A + a} = \frac{A + a}{2} - \frac{2A \cdot a}{A + a}$$

пошто је $A \cdot a = 2$. Ако извршимо одузимање и даље, добићемо:

$$A_1 - a_1 = \frac{A - a}{A + a} \cdot \frac{A - a}{2}$$

а одатле

$$0 < A_1 - a_1 < \frac{1}{2}(A - a),$$

пошто је

$$\frac{A - a}{A + a} < 1.$$

Слично томе је

$$0 < A_2 - a_2 < \frac{1}{2}(A_1 - a_1) < \frac{1}{4}(A - a).$$

Доказали смо да разлике одговарајућих чланова оба низа, са растућим индексом, постају произвољно мале, и да је сваки члан низа II већи од сваког члана низа I.

Оваква два низа, дакле дефинишу један пресек, у овом случају пресек $\sqrt{2}$.

Упоређивање ирационалних бројева

52. Једнакост ирационалних бројева. — Ако смо на два разна начина одредили по један пресек у области рационалних бројева, на пр.

$$\alpha = (a|A) \qquad \beta = (b|B)$$

и ако су тако дефинисани бројеви α и β ирационални, то кажемо да су ови бројеви α и β само тада *једнаки*, ако је свако a у исто време и једно b, и свако A једновремено и B. Тада је и обрнуто свако b једновремено и a, и свако B у исто време и A.

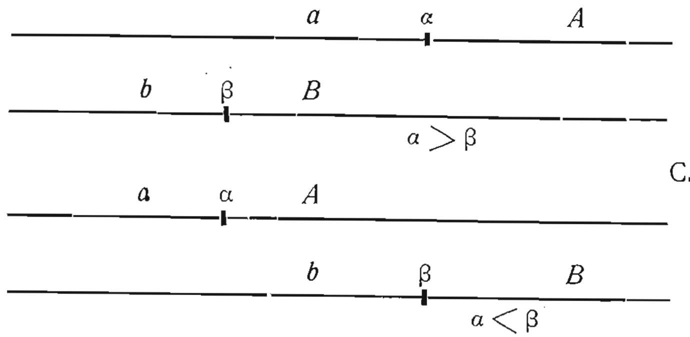
А и кад знамо да је свако a у исто време и b, и свако b у исто време и једно a, можемо закључити једнакост за α и β. Јер кад је свако b и једно a, не може никакво A бити b; тада мора свако A бити једно B, пошто је по претпоставци сваки рационалан број или једно b или једно B.

53. — Неједнакост ирационалних бројева. Ирационалан број дефинисан пресеком $(a|A)$ већи је од сваког броја a и мањи од сваког броја A.

Ако су два ирационална броја

$$\alpha = (a|A) \qquad \beta = (b|B)$$

неједнака, то мора постојати или једно a, које је у исто време B, или једно A, које је у исто време b. У првом случају број α је *већи* од броја β у другом је број α мањи од β (Сл. 7.)



Сл. 7.

53. Позитивни и негативни ирационални бројеви. — Један ирационалан број је *позитиван*, кад је већи од нуле, *негативан* кад је мањи од нуле.

За два ирационална броја

$$\alpha = (a|A) \qquad \beta = (b|B)$$

кажемо да су *супротни*

$$\alpha = -\beta$$

кад је свако a супротно једном B и свако A супротно једном b. Тада можемо писати

$$\alpha = (a|A) = (-B|-b) = -\beta$$

или

$$\beta = (b|B) = (-A|-a) = -\alpha.$$

Под апсолутном вредношћу једног позитивног ирационалног броја разумемо сам тај број, под апсолутном вредношћу једног негативног ирационалног броја разумемо њему супротан позитиван број.

Основне рачунске радње са ирационалним бројевима

55. Сабирање — Нека су α и β два ирационална броја дефинисана пресецима $(a|A)$ и $(b|B)$. Ми можемо од доњих класа a и b образовати класу бројева $a+b$. Исто тако од горњих класа A и B можемо образовати нову класу $A+B$. Јасно је одмах да је увек

$$a+b<A+B.$$

Затим бројеви $a+b$ расту, а не постоји ни један највећи, исто тако бројеви $A+B$ опадају и не постоји ни један најмањи. Према томе низ бројева $a+b$ и $A+B$ дефинише један пресек

$$(a+b|A+B).$$

Ирационални број γ који смо овим пресеком дефинисали зовемо збир ирационалних бројева α и β. Можемо писати

$$(a|A)+(b|B)=(a+b|A+B),$$

или

$$\alpha+\beta=\gamma.$$

На пример збир ирационалних бројева $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ дефинисан је овим низом:

a	b		A	B
1,7	$+$ 1,4	$<\sqrt{3}+\sqrt{2}<$	1,8	$+$ 1,5
1,73	$+$ 1,41		1,74	$+$ 1,42
1,732	$+$ 1,414		1,733	$+$ 1415
1,7320	$+$ 1,4142		1,7321	$+$ 1,4143
1,73205	$+$ 1,41421		1,73206	$+$ 1,41422

и тд.

или

$a+b$		$A+B$
3,1	$<\sqrt{3}+\sqrt{2}<$	3,3
3,14		3,16
3,146		3,148
3,1462		3,1464
3,14626		3,14628

и тд.

56. — **Одузимање** једног ирационалног броја β од броја α дефинисаћемо као *додавање супротног броја*. Ако је

$$\beta=(b|B)$$

то је супротни број

$$-\beta=(-B|-b),$$

па је према горњој једначини за збир

$$(a|A)-(b|B)=(a-B|A-b),$$

или

$$\alpha-\beta=\gamma,$$

ако са γ обележимо пресек

$$(a-B|A-b).$$

На пример разлика $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ доводи до овога двоструког низа:

a	B		A	b
1,7	$-$ 1,5	$<\sqrt{3}-\sqrt{2}<$	1,8	$-$ 1,4
1,73	$-$ 1,42		1,74	$-$ 1,41
1,732	$-$ 1,415		1,733	$-$ 1,414
1,7320	$-$ 1,4143		1,7321	$-$ 1,4142

и тд.

или

$a-B$		$A-b$
0,2	$<\sqrt{3}-\sqrt{2}<$	0,4
0,31		0,33
0,317		0,319
0,3178		0,3179

и тд.

57. **Множење.** — Најпре претпостављамо да су бројеви α и β, претстављени пресецима $(a|A)$ и $(b|B)$ позитивни. Затим узимамо да је један од пресека рецимо β ограђен с леве стране једним позитивним бројем h. То значи да је h међу бројевима b најмањи. Овим се ништа не мења биће пресека. Нека је дакле

$$\alpha=(a|A)\qquad \beta\underset{h}{=}(b|B).$$

Ми можемо од доњих класа a и b образовати нову класу ab. Исто тако од горњих класа A и B може се образовати класа AB. Одмах видимо да је свака вредност ab мања од сваке вредности AB. Вредности ab расту и не постоји ни једна вредност ab која би била највећа. Исто тако не постоји ни једна најмања вредност AB. Према томе низ бројева ab и AB одређује пресек

$$(ab|AB).$$

Ирационални број γ који је одређен овим пресеком зовемо производ ирационалних бројева α и β тј. пишемо

$$(a|A)\cdot(b|B)=(ab|AB),$$

или

$$\alpha\cdot\beta=\gamma.$$

Ова размишљања остају у важности и кад је један чинилац нула. За $\alpha=0$ имамо узети такав пресек, чију леву страну сачињавају сви негативни рационални бројеви и нула, а десну сви позитивни рационални бројеви. Тада ће ако опет ставимо $\beta={}_h(b|B)$ и $(ab|AB)$ бити исти такав пресек као и α, дакле ће бити и $\gamma=0$.

Множење негативних ирационалних бројева може се објаснити на исти начин, помоћу пресека, који су с једне ограђени. Али је простије да пустимо по принципу о перманенцији, да и за ове бројеве важе иста правила, као и за раније, према чему ће бити

$$(-\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(-\beta)=-\alpha\beta$$

$$(-\alpha)\cdot(-\beta)=+\alpha\beta.$$

Пример. Ученик да одреди производ ирационалних бројева $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ једним двоструким низом.

58. Дељење. — Један пресек ${}_h(b|B)_{h'}$ ограђен са обе стране са два позитивна броја h и h' дефинише један позитиван број β. При том бројеви b и B могу имати све рационалне вредности између h и h', па према томе и бројеви $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{b}$ све рационалне вредности између $\frac{1}{h'}$ и $\frac{1}{h}$. Још је свако $\frac{1}{B}<\frac{1}{b}$. Ови бројеви одређују дакле један пресек који је с обе стране ограничен:

$$\frac{1}{h'}\left(\frac{l}{B}\,\middle|\,\frac{l}{b}\right)\frac{1}{h}.$$

Број дефинисан овим пресеком зовемо *реципрочна вредност* броја β и обележавамо га са $\frac{1}{\beta}$.

Производ бројева β и $\frac{1}{\beta}$ претстављен је пресеком

$$\left(\frac{b}{B}\,\middle|\,\frac{B}{b}\right).$$

Овај пресек дефинише број 1. Зашто?

После овога дефинишемо количник два броја

$$\alpha:\beta$$

као производ бројева α и $\frac{1}{\beta}$ тј. као производ бројева

$$(a|A) \text{ и } \left(\frac{1}{B}\,\middle|\,\frac{1}{b}\right),$$

тј. као пресек $\quad \gamma=\left(\frac{a}{B}\,\middle|\,\frac{A}{b}\right),$

или $\quad \frac{\alpha}{\beta}=\gamma.$

За дељење негативних ирационалних бројева треба да важе правила изведена за негативне рационалне бројеве

$$\frac{-\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta};\qquad \frac{-\alpha}{-\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Делилац никад несме бити једнак нули.

Пример. Да се помоћу двоструког низа рационалних бројева претстави количник бројева $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

59. — Овако дефинисане четири основне рачунске радње за ирационалне бројеве изгледају чисто теориске, а оне за нас треба да имају и практичну вредност. То се постиже следећим *правилом о непрекидности*:

Нека су α и β два произвољна броја, увек са оградом да је при дељењу $\frac{\alpha}{\beta}$, вредност $\beta=0$ искључена, и нека

$$f(\alpha,\beta)=\rho$$

значи резултат ма које од четири радње $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\cdot\beta$ и $\frac{\alpha}{\beta}$, даље нека је

$$f(a, b) = r$$

резултат одговарајуће радње са рационалним бројевима a, b. Даље нека су два произвољна рационална броја h и h' таква да је

$$h < \rho < h'.$$

Можемо ове бројеве узети тако да разлика

$$h' - h$$

постане произвољно мала. Тада се могу бројеви

$$a_1, A_1, b_1, B_1,$$

тако одредити, да буде

$$a_1 < \alpha < A_1 \qquad b_1 < \beta < B_1$$

и да за сваки рационални пар бројева који задовољава услове

$$a_1 < a < A_1 \qquad b_1 < b < B_1$$

постоји неједначина

$$h < r < h'.$$

Или другим речима казано:

Може се резултату једног рачуна $f(\alpha, \beta)$ са ирационалним бројевима прићи произвољно близу истим таквим рачуном са рационалним бројевима, кад се само рационални бројеви a, b узму довољно близу бројева α и β.

Такви бројеви a, b зову се *приближне вредности* бројева α и β.

На пример $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$ производ њихов је

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

Можемо узети $\quad a_1 = 1{,}73 \qquad A_1 = 1{,}74$

$$b_1 = 1{,}41 \qquad B_1 = 1{,}42$$

$$1{,}73 < \alpha < 1{,}74$$

$$1{,}41 < \beta < 1{,}42$$

$$1{,}73 < a < 1{,}74$$

$$1{,}41 < b < 1{,}42.$$

Узимамо $a = 1{,}732$, $b = 1{,}414$!

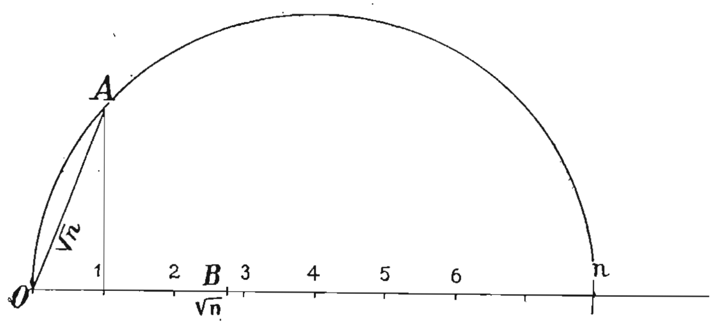
Производ $ab = 2{,}449048$ може се узети као приближна вредност производа $\alpha \cdot \beta$. $\sqrt{6}$ на 6 децимала износи

$$2{,}449469.$$

Уосталом, ми у геометрији врло често употребљавамо уместо $\sqrt{3}$ приближну вредност 1,73, место $\sqrt{2}$ приближну вредност 1,41.

60. — Ово правило не обезбеђује само сигурност, да се при практичном рачунању, а према природи задатка, може постићи сваки степен тачности, него даје и важан теориски резултат: *да једна једначина или неједначина која важи као исправна за рационалне бројеве, важи и за ирационалне бројеве.*

61. Геометриска конструкција ирационалних квадратних корена. — Ирационални квадратни корени могу се конструисати, кад се над дужи, којом је претстављен број n, као над пречником, конструише полукруг и у тачки 1 подигне нормала на бројној линији до пресека са полукругом. (Сл. 8.)



Сл. 8.

Тада је $0A^2 = 01 \cdot 0n = 1 \cdot n$, или $0A = \sqrt{n}$.

Ова се дуж може пренети на бројну линију, тако да тачки B одговара вредност $\sqrt{n}$. (Види Алгебру за V р. стр. 185!).

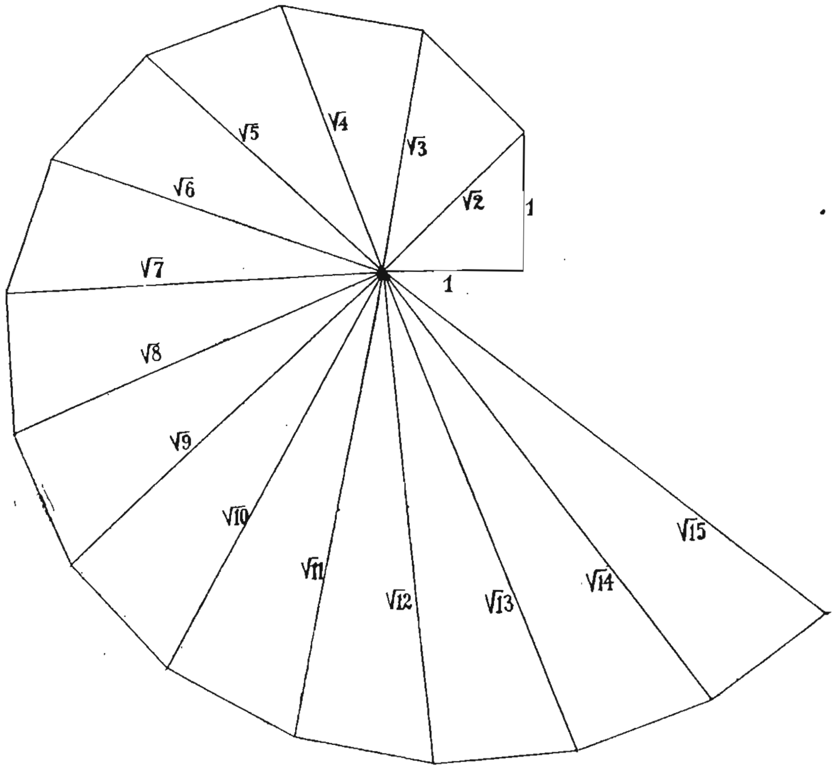
Занимљиво је геометриско претстављање квадратних корена из целих бројева помоћу корене спирале (сл. 9) непрестаном применом Питагориног правила.

62. — Израз $\sqrt[n]{a}$ је решење једначине

$$x^n = a \text{ или } x^n - a = 0,$$

једне специјалне једначине n-тог степена.

Док су за решења свих једначина I степена довољни елементи области рационалних бројева, области III, решавање једначина вишег степена скопчано је са извлачењем корена и условљава увођење ирационалних бројева.



Сл. 9.

Општа једначина n-тог степена има облик

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Ако су у њој коефициенти a_0, a_1, a_2 .... рационални бројеви, то се сваки број x, који задовољава ову једначину, зове један *алгебарски број*.

Али ни сви алгебарски бројеви не испуњују потпуно и непрекидно низ бројева. Има извесних задатака, који се не могу решити у области алгебарских бројева. Због тога

смо принуђени, да и даље уводимо нове бројеве, који задовољавају друге неке једначине, које нису истог типа, као алгебарске. Ти нови бројеви су *трансцендентни бројеви*. Њима припада на пр. број $\pi = 3{,}14159$ ..... Исто тако су у већини трансцендентни бројеви и логаритми, које видимо у логаритамским таблицама, а са којима ћемо се ове године упознати.

Скуп свих досада посматраних бројева чини област *реалних* бројева. Уметањем бескрајно много трансцендентних бројева међу алгебарске, бројни низ је постао непрекидан онако исто као што је непрекидан низ тачака на правој линији.

За писмено вежбање

1. Одреди конструкцијом на бројној линији тачке које одговарају квадратним коренима почев од 2 до 10!

2. Конструиши на бројној линији тачке: $3+\sqrt{10}$, $3-\sqrt{10}$, $2+\sqrt{17}$, $-2-\sqrt{17}$!

3. Конструиши на бројној линији тачке: $1+\sqrt{13}$, $-1-\sqrt{13}$, $\sqrt{5}+\sqrt{8}$, $-\sqrt{5}-\sqrt{8}$!

4. Конструиши на бројној линији тачке:

$$2\sqrt{3}+3\sqrt{2},\quad \frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{5}},\quad \frac{1}{2+\sqrt{3}}!$$

5. Нацртај квадрат чија је страна 1dm! Покушај да одредиш за дијагоналу и страну квадрата највећу заједничку меру (чинилац) по поступку сличном верижном дељењу! (Види аритметику за II р. стр. 24 и Алгебру за V р. стр. 25!)

6. Одреди по 5 чланова двоструког низа рационалних бројева, који дефинишу ирационалне бројеве: $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{18}$. Извлачењем корена!

7. Одреди по 4 члана двоструког низа рационалних бројева, који дефинишу ирационалне бројеве: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$! Извлачењем корена!

8. Да се одреде 5 чланова двоструког низа рационалних бројева, који дефинише збир $\sqrt{12}+\sqrt{14}$, $\sqrt{9}+\sqrt[3]{12}$. Извлачењем корена!

9. Да се одреди двоструки низ који дефинише: $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5}$. (Четири члана.)

10. Да се одреди двоструким низом рационалних бројева производ $\alpha \cdot \beta$, кад је $\alpha = \sqrt{14}$, $\beta = \sqrt{15}$; кад је $\alpha = \sqrt{12}$, $\beta = \sqrt{3}$! (По пет чланова!)

11. Да се одреди извлачењем корена количник бројева α и β двоструким низом од по 5 чланова, кад је $\alpha = \sqrt{18}$, $\beta = \sqrt{2}$; $\alpha = \sqrt[3]{24}$, $\beta = \sqrt[3]{9}$; $\alpha = \sqrt[3]{32}$, $\beta = \sqrt[3]{16}$!

12. Да се Хероновим поступком одреде прве четири приближне вредности $\sqrt{6}$ са почетним вредностима $A = 6$, $a = 1$; $A = 3$, $a = 2$; $A = 4$, $a = \frac{3}{2}$; $A = 5$, $a = \frac{6}{5}$; $A = 8$, $a = \frac{3}{4}$. Све вредности претвори у децималне бројеве и упореди њихов степен тачности, са којим одређују $\sqrt{6}$! (Види чланак 59!)

13. Исти задатак за $\sqrt{10}$ кад је $A = 10$, $a = 1$; $A = 5$, $a = 2$; $A = 8$, $a = \frac{5}{4}$; $A = 20$, $a = \frac{1}{2}$; $A = 100$, $a = 0{,}1$.

14. Да се по Хероновом поступку одреди на 5 децимала $\sqrt{30}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{42}$!

15. Докажи да бројеви 3, 7, 14 не могу бити квадрати никаквих рационалних бројева!

16. Са шестаром и лењиром може се $\sqrt{n}$ и овако конструисати: над дужи $n+1$, на бројној линији, као над пречником конструише се полукруг. У тачки 1 подигне се нормала до пресека са полукругом. Дужина те нормале је $\sqrt{n}$. Да се на овај начин конструише $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{0{,}5}$!

17. У Хероновом спису „Μετρικά“ налази се ово место: Пошто 720 нема никакав рационални квадратни корен, то ми налазимо квадратни корен, који се најмање разликује од правога, на следећи начин: пошто је броју 720 најближи квадрат 729 са страном 27, то ми поделимо 720 са 27. Добијамо $26\frac{2}{3}$. Томе

додамо 27 добија се $53\frac{2}{3}$; половина од тога једнака је $26\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; дакле је најближи корен из 720 једнак $26\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Јер $26\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ помножено самим собом даје $720\frac{1}{36}$, тако да разлика износи само за $\frac{1}{36}$. Ако бисмо хтели да добијемо још мању разлику, онда бисмо требали да обновимо исти поступак, само место броја 729 да узмемо $720\frac{1}{36}$. Кад то учинимо, видећемо да је разлика много мања од $\frac{1}{36}$.

Ученик да покаже да је овај поступак исто што и раније изложени Херонов поступак.

18. Херон је одредио приближну вредност за $\sqrt{3}$ разломак $\frac{26}{15}$, а Архимед $\frac{1351}{780}$. Како се могу ове приближне вредности да одреде по Хероновом поступку, кад се пође од приближне вредности $a = \frac{5}{3}$?

19. У старим рачуницама налазе се следеће приближне вредности квадратних корена: $\sqrt{7}$ приближно једнако $2\frac{4}{3}$, $\sqrt{108}$ приближно једнако $10\frac{2}{5}$. Израчунати су по приближном обрасцу $\sqrt{m^2+n} = m + \frac{n}{2m}$. Провери горње резултате и покажи да се ови резултати могу добити по Хероновом поступку као прва приближна вредност $A_1 = \frac{A+a}{2}$! Како онда треба изабрати A и a?

ГЛАВА II

Имагинарни бројеви

63. Имагинарна јединица. — Као што су све до 16 столећа разлике, у којима је умањилац већи од умањеника, одбациване као „немогуће“ (fictae, falsae), исто тако су у 18 столећу квадратни корени из негативних бројева, на које се наилазило при решавању квадратних једначина, сматрани као „немогући“, јер се нису могли изразити ниједним од дотада познатих бројева. Такве сметње у извођењу простих рачунских радњи у математици се не трпе дуго. Уклањају се проширивањем бројних области, увођењем „нових бројева“. Раније смо већ објаснили да се најчешће назначена, неизводљива радња, прогласи за нов број.

Једначину

$$x^2 = -1$$

решавамо извлачењем квадратног корена из обеју страна:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

или

$$x = \sqrt{-1}. \qquad (1)$$

$\sqrt{-1}$ сматра се као нов број и зове се *имагинарна јединица*. Она се означава са i, а дефинисана је једначином

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1. \qquad (1a)$$

64. Имагинарни бројеви. — Једначина

$$x^2 + a^2 = 0$$

доводи до резултата

$$x = \sqrt{-a^2}. \qquad (2)$$

Узето је затим да правило

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

које важи за позитивне радиканде, важи и у горњем резултату (2) па је,

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = a\sqrt{-1} = ai. \qquad (3)$$

Овако дефинисани бројеви $+ai$ или $-ai$ зову се *имагинарни (уображени) бројеви* за разлику од досадашњих бројева, које смо назвали *реални (стварни) бројеви* (позитивни и негативни цели бројеви и разломци, ирационални и трансцендентни).

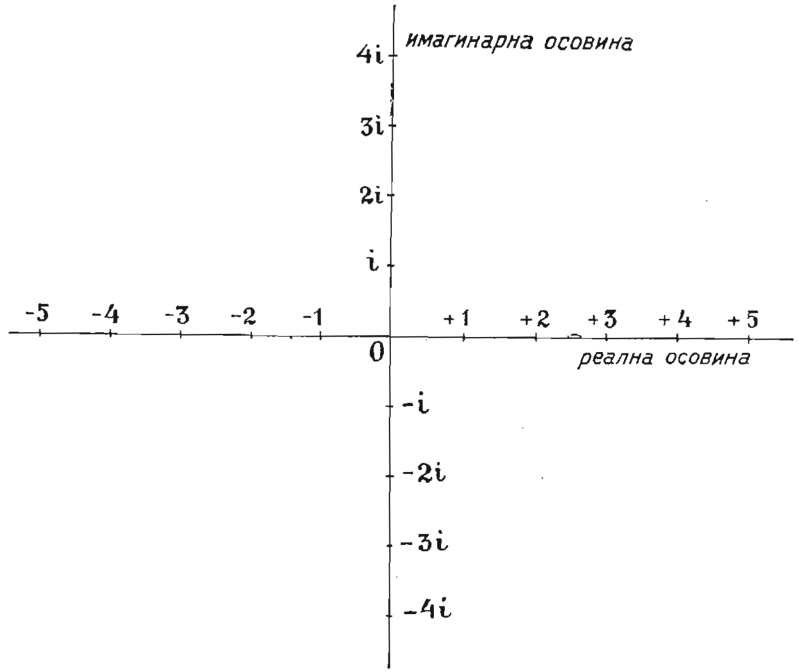
65. Сабирање и одузимање имагинарних бројева. — Помоћу јединице i, коју смо дефинисали једначином (1a) могу се образовати сви имагинарни бројеви, онако исто као што смо од јединице 1 образовали реалне бројеве. При том још

узимамо да закони постављени за сабирање и одузимање реалних бројева важе и за сабирање и одузимања имагинарних бројева. На пример

$$2i + 3i = 5i$$
$$ai + bi = (a + b)i$$
$$7i - 4i = 3i$$
$$ai - bi = (a - b)i$$
$$ai - ai = 0.$$

66. Графичко претстављање имагинарних бројева. — Са овом особином је у исто време дата и могућност да се имагинарни бројеви очигледно претставе.

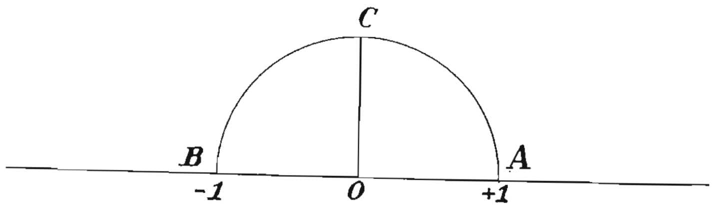
Подигнемо на правој линији, која је досада служила као графички претставник реалних бројева, у нултој тачки,



Сл. 10.

управну и преносимо на њој, почев од нулте тачке на обе стране, дужине једнаке јединици (сл. 10). Ако обележимо тако добијене тачке навише са i, $2i$, $3i$... итд. а наниже са $-i$, $-2i$, $-3i$ ... итд. и ако узмемо да додавање једне имагинарне јединице значи бројење унапред, а одузимање бројење уназад, то смо тиме добили једно очигледно претстављање имагинарних бројева, које потпуно одговара претстављању реалних бројева на хоризонталној бројној линији.

Напомена. — На мисао о оваквом графичком претстављању имагинарних бројева дошло се на овај начин. Нацртан је полукруг са центром у нултој тачки, а полупречником $r=1$ (сл. 11).



Сл. 11.

Из геометрије знамо да је

$$OC^2 = OA \cdot OB$$

или $$OC = \sqrt{(+1)\cdot(-1)}$$

или $$OC = \sqrt{-1} = i.$$

67. Множење имагинарних бројева. — При множењу и дељењу са имагинарним бројевима морамо, поред захтева да се са i поступа као са реалним чиниоцем, још водити рачуна да је

$$i^2 = -1.$$

Тако је на пример

$$2i \cdot 3i = 6i^2 = -6;$$

$$ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

Уопште важи правило: *један производ од више чинилаца је реалан или имагинаран према томе, да ли садржи паран или непаран број имагинарних чинилаца.*

68. Степеновање. — За степеновање броја i добија се, према ономе што смо већ утврдили

$$i^1 = \sqrt{-1} = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = +i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -\sqrt{-1} = -i \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1 \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = +1$$

итд.

Уопште

$$i^{4n} = (i^4)^n = +1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = +i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i,$$

при чему је n један произвољан цео број.

Последњи резултати да се искажу речима.

69. Дељење. — Дељење је, као и код реалних бројева, обрнута радња множења. Врло лако се рачуна кад се дељење пише у облику разломка. Рачунање са разломцима, где су бројиоци реални бројеви, а имениоци имагинарни, бива најпростије проширивањем једним згодним степеном од i или множењем са i^4.

Пример 1.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i.$$

Пример 2.

$$\frac{8}{\sqrt{-3}} = \frac{8}{i\sqrt{3}} = \frac{8i\sqrt{3}}{(i\sqrt{3})^2} = \frac{8i\sqrt{3}}{-3} = -\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot i.$$

Из $$i^{-1} = -i$$

следује уопште

$$i^{-n} = (-i)^n,$$

при чему n сме бити произвољан позитиван или негативан цео број.

Комплексни бројеви

70. — Бројни изрази у којима је један реалан број везан сабирањем или одузимањем са једним имагинарним бројем зову се комплексни бројеви. Њихов општи облик је

$$a + bi$$

где су a и b, као и сва друга слова изузев i, реални бројеви са произвољним знаком.

Бројеви облика $a + bi$ обухватају све досада познате бројеве. Кад је $b = 0$, добија се реалан број a. Кад је $a = 0$, добија се имагинаран број bi. Реални и имагинарни бројеви јављају се, дакле, као специјални случајеви комплексних бројева.

71. Сабирање и одузимање комплексних бројева. — Са комплексним бројевима рачуна се као са обичним збировима. Сабирање и одузимање врши се увек по обрасцима.

$$(a+bi) \pm (c+di) = a \pm c + (b \pm d)i,$$

или речима: *два комплексна броја сабирају се или одузимају, кад се засебе саберу или одузму реални делови, а засебе имагинарни.*

Пример. $5 + (2 + 3i) - (4 - 5i) = 3 + 8i.$

72. Једнакост комплексних бројева. — Два комплексна броја

$$a + bi \text{ и } c + di$$

могу бити једнака само кад је

$$a = c \text{ и } b = d.$$

Једначину

$$a + bi = c + di$$

можемо написати и у облику

$$a - c = (d - b) \cdot i.$$

Ова једначина казује да је један реалан број једнак једном имагинарном. Али то је могућно само кад су оба броја једнака нули, тј. ако је

$$a = c \text{ и } b = d.$$

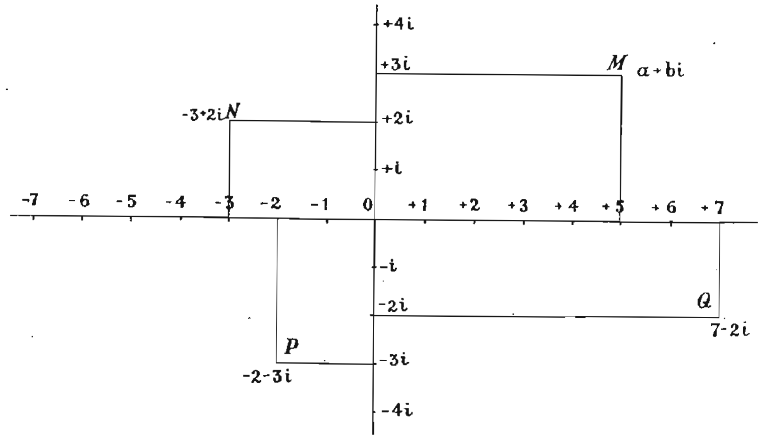
Као специјалан случај овога што смо рекли произилази закључак да један комплексан број може бити једнак нули само кад је једнак нули реални део и имагинарни део, тј. биће

$$a + bi = 0,$$

кад је

$$a = 0 \text{ и } b = 0.$$

73. — Графичко претстављање комплексних бројева. Гаусова раван. — Начин графичког претстављања реалних и имигинарних бројева доводи и до једног графичког претстављања комплексних бројева. Да бисмо одредили слику



Сл. 12.

броја $a + bi$, претставимо најпре број a на обичној бројној линији, на осовини реалних бројева, затим број bi на „осовини имагинарних бројева". Тако добијене тачке „слике" и нулта тачка одређују један правоугаоник, чије четврто теме узимамо за слику броја $a + bi$ (сл. 12). Другим речима број $a + bi$ има за слику једну одређену тачку у равни чија је апсциса a, ордината b.

На овај начин бројна област је проширена *у бројну раван*, у *Гаусову раван*. Свакон комплексном броју одговара по једна тачка у бројној равни, и обрнуто свакој тачки бројне (Гаусове) равни одговара по један комплексан број.

74. Коњуговани комплексни бројеви. — То су комплексни бројеви, који се разликују само по знаку имагинарног дела, дакле бројеви облика

$$a + bi \text{ и } a - bi.$$

Тачке, њихове слике, леже симетрично у односу на апсцисну осовину.

75. Множење комплексних бројева. — За множење комплексних бројева важи исто што смо рекли и за сабирање. Множе се као обични збирови, само мора бити испуњен услов да је $i^2 = -1$.

Пример 1. $(4 + 3i) \cdot (5 - 2i) = 20 + 15i - 8i - 6i^2 = 20 + 7i - 6 \cdot (-1) = 26 + 7i.$

Пример 2. $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$

Пример 3. $(a + bi)^2 = a^2 + 2bi - b^2.$

Производ два комплексна броја је уопште опет комплексан број. Као специјалан случај имамо производ два коњугована комплексна броја:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

76. Дељење комплексних бројева. — Дељење се као и код реалних и чисто имагинарних бројева дефинише као обрнута радња множењу. Вредност једног количника или разломка, кад је именилац комплексан број, одређује се рационализацијом имениоца.

Пример 1. $\dfrac{4 + \sqrt{-25}}{2\sqrt{-1}} = \dfrac{4 + 5i}{2i} = \dfrac{4i + 5i^2}{2i^2} = \dfrac{4i - 5}{-2} = \dfrac{5}{2} - 2i.$

Пример 2. $\dfrac{2 + \sqrt{-9}}{4 - 5\sqrt{-1}} = \dfrac{2 + 3i}{4 - 5i} = \dfrac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \dfrac{8 + 22i + 15i^2}{16 - 25i^2} = \dfrac{-7 + 22i}{41}.$

Пример 3. $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$

Количник два комплексна бројâ биће уопште опет комплексан број.

Ученик из једначине у примеру 3 да одреди у ком ће случају количник два комплексна броја бити реалан број.

77. Степеновање комплексних бројева. — Из чланка 75 следује да ћемо и степеновањем једног комплексног броја уопште добити опет комплексан број.

Разуме се да ће се и овде наићи на случајеве као и код радњи првог и другог ступња, да се као резултат добије и реалан и чисто имагинаран број. На пр. $(1 + i)^4$ је реалан број, $(1 + i)^6$ је чисто имагинаран број. То не треба ништа да нас чуди, јер смо већ утврдили да су реални и чисто имагинарни бројеви само специјални случајеви комплексних бројева. Важно је да су *све досада споменуте рачунске радње у области комплексних бројева изводљиве.*

78. Кореновање комплексних бројева. — Да бисмо показали да је и квадратни корен из једног комплексног броја опет комплексан број, претпоставимо најпре да је

$$\sqrt{a + bi} = c + di.$$

Показаћемо да се за c и d могу увек добити реални бројеви. Из горње једначине следује квадрирањем

$$a + bi = (c^2 - d^2) + 2\,cdi.$$

Да би комплексни бројеви на левој и десној страни били једнаки, морају њихови реални и имагинарни делови бити једнаки, мора дакле бити

$$c^2 - d^2 = a$$

$$2cd = b.$$

Добили смо две једначине за две непознате по c и d. Њиховим решењем добијају се за c и d увек реалне вредности:

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \qquad d = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

тј. $$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Тиме смо показали да је квадратни корен једног комплексног броја опет комплексан број.

Напомена. — Као што видимо задатак извлачења квадратног корена из комплексног броја своди се на решавање квадратних једначина, које ћемо тек касније проучавати.

Ученик засада може ове задатке решавати помоћу обрасца:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

За писмено вежбање

Следећи корени да се напишу у најпростијем облику:

1. $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-36}$; $\sqrt{-49}$; $2\sqrt{-144}$; $7\sqrt{-400}$.

2. $\sqrt{-x^2}$; $\sqrt{-16b^4}$; $\sqrt{-m^6}$; $\sqrt{-9t^2n^4}$.

3. $\sqrt{-28}$; $\sqrt{-63}$; $\sqrt{-8}$; $\sqrt{-a^5}$.

4. Неко је овако закључивао:

$i^2=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{+1}=\pm 1$;

један други овако:

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{+1}=\pm 1.$$

Ученик да објасни у чему је заблуда.

5. Претстави графички следеће имагинарне бројеве: $4i$; $-7i$; $0{,}5i$; $\frac{3}{5}i$; $-\frac{3}{4}i$.

6. $\sqrt{-9}+\sqrt{-25}+\sqrt{8-9}-\sqrt{2-11}-\sqrt{10-19}=$

7. $i-i=$; $2i-6i=$; $6{,}8i+4{,}5i-11{,}3i=$

8. $\sqrt{-x^2}+\sqrt{-x^3}-\sqrt{(-x)^3}-\sqrt{(-x)^2}+\sqrt{-x^4}+\sqrt{(-x)^4}=$

9. $\frac{i}{6}-\frac{i}{8}=$; $\frac{i}{2}+\frac{i}{3}+\frac{i}{4}-i=$; $\frac{2i}{5}-\frac{3i}{8}=$

10. Да се графички претставе следећи комплексни бројеви: $2+3i$; $-3+2i$; $-4+5i$; $4-5i$.

11. $(-3+\sqrt{-16})+(-1-\sqrt{-9})+(-7+\sqrt{-25})-(4+3\sqrt{-49})=$

12. $(8-\sqrt{-64})-(20-\sqrt{-400})+(-10-\sqrt{-100})-19+2i=$

13. $5i\cdot i=$; $2i\cdot 8i=$; $-ai\cdot bi=$; $9\cdot 16i\cdot 0{,}1i=$

14. $3i\cdot 7i+2i\cdot 3i+5i\cdot 6i+4i\cdot 8i\cdot i^2+2i^3\cdot 3i^3=$

15. $19i\cdot i^3+10i\cdot 2i\cdot i^4-8i\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5=$

16. $\left(\frac{1}{3}i\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}i\right)=$; $\left(-\frac{ai}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2bi^5}{3}\right)=$

17. $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-1}=$; $\sqrt{-a^2}\cdot\sqrt{-b^2}=$; $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}=$; $\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}=$

18. $i\cdot(-i)+(-i)^2-i^3-(-i)^3+i^4-(-i)^4=$

19. $3(3+\sqrt{-1})=$; $-2(1+0{,}4\sqrt{-1})=$;, $-a(b+c\sqrt{-1})=$

20. $\frac{1}{3}(3-\sqrt{-1})=$; $\frac{4}{5}\left(\frac{15}{28}-\frac{5}{4}\sqrt{-1}\right)=$; $0{,}2(10+5\sqrt{-1})=$

21. $(4\sqrt{-20}-3\sqrt{-45}-8\sqrt{-125})\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}=$

22. $(2i\sqrt{5}+3i\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{-4}-\sqrt{-9})\cdot 5\cdot\sqrt{-4}=$

23. $\sqrt{-0{,}16}\cdot\sqrt{-0{,}0025}+\sqrt{-7\frac{9}{16}}\cdot\sqrt{\frac{121}{16}}\cdot\sqrt{-0{,}01}$

24. $n\sqrt{-4m^3n^2}\cdot\sqrt{-9m^5n^4}-m^2n\sqrt{-16m^{-7}n^{-3}}\cdot\sqrt{-25m^{11}n^9}=$

25. $(2+\sqrt{-1})(3-\sqrt{-1})=$; $(2+3\sqrt{-1})(4-\sqrt{-1})=$

26. $(5+7\sqrt{-1})(3-4\sqrt{-1})=$; $(8-9\sqrt{-1})(11+10\sqrt{-1})=$

27. $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{-1}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{-1}\right)=;\ \left(1\frac{1}{3}-2\sqrt{-1}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)=$

28. $(0{,}4+4\sqrt{-1})(5-0{,}1\sqrt{-1})=;\ (-0{,}6+0{,}8\sqrt{-1})(5-5\sqrt{-1})=$

29. $(1+\sqrt{-1})\cdot(1-\sqrt{-1})=;\ (2+\sqrt{-1})\cdot(2-\sqrt{-1})=;\ (1+3i)(1-3i)=$

30. $(5+6\sqrt{-1})(5-6\sqrt{-1})=;\ (7+9\sqrt{-1})\cdot(7-9\sqrt{-1})=;\ (3+i)(3-i)=$

31. $(3+\sqrt{-9})(3-\sqrt{-9})=;\ (8+\sqrt{-4})\cdot(8-\sqrt{-4})=;\ (4-\sqrt{-12})(4+\sqrt{-12})=$

32. $(i\sqrt{5}+i\sqrt{6})(i\sqrt{5}-i\sqrt{6})=;(0{,}4i\sqrt{2}+0{,}5i\sqrt{3})(0{,}4i\sqrt{2}-0{,}5i\sqrt{3})=$

33. $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}i\right)=;\ \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}i\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}i\right)=$

34. $(1+\sqrt{-1})^2=;(1-\sqrt{-1})^2=;(1-\sqrt{-4})^2=$

35. $(3+\sqrt{-5})^2=;(4-\sqrt{-3})^2=;(9-\sqrt{-12})^2=$

36. $(1+2\sqrt{-1})^2=;(1-4\sqrt{-1})^2=;(2+\sqrt{-9})^2=$

37. $(4+5\sqrt{-3})^2=;(5-6\sqrt{-2})^2=;(9-7\sqrt{-5})^2=$

38. $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}i\right)^2=;\ \left(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}i\right)^2=;\ \left(\sqrt{-4}-\frac{5}{6}\right)^2=$

39. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=$

40. $(2+5i)^2-(2-5i)^2=;\ \left(\frac{1}{2}i+\frac{2}{3}\sqrt{-8}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i-\frac{2}{3}\sqrt{-8}\right)^2=$

41. $(1+i\sqrt{3})^3-(1-i\sqrt{3})^3=;\ (\sqrt{-4}+\sqrt{-16})^3-(\sqrt{-4}-\sqrt{-16})^3=$

42. $(1-\sqrt{-3})\cdot\sqrt{1+\sqrt{-3}}=;(i-2)\cdot\sqrt{i+2}=$

43. $1+i\sqrt{2}+\frac{1}{i\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{i}-\frac{1}{i\sqrt{3}}=$

44. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}}\cdot\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}\cdot\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}}\cdot\sqrt{3}-\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}\cdot\sqrt{-1}=$

45. $\frac{1}{\sqrt{0{,}03-0{,}07}}-\frac{\sqrt{0{,}1}}{\sqrt{-0{,}01}}-\sqrt{0{,}04-0{,}13}-\frac{\sqrt{0{,}53-0{,}04}}{\sqrt{0{,}05-0{,}04}}=$

46. $(\sqrt{-1})^{13}-(\sqrt{-1})^{19}+(\sqrt{-1})^{37}-(\sqrt{-1})^{53}-i^{63}=$

47. $i^{117}+i^{243}-i^{318}+i^{403}-i^{546}=$

48. $(\sqrt{-2})^3=;\ (\sqrt{-2})^7=;\ (\sqrt{-3})^3=;\ (\sqrt{-3})^5=;\ (\sqrt{-5})^3=;\ (\sqrt{-5})^4=$

49. $(2i\sqrt{2})^3=;\ (5i\sqrt{2})^4=;\ (4i\sqrt{3})^3=;\ (0{,}4i)^5=$

50. $(i\sqrt{2})^2+(i\sqrt{2})^3+(i\sqrt{2})^4+(i\sqrt{2})^5-(i\sqrt{2})^6-(i\sqrt{2})^7+(i\sqrt{2})^9=$

51. $\frac{ai}{\sqrt{-a^3}}=;\ \frac{2i^3}{\sqrt{-5}}=;\ \frac{\sqrt{-a^2}}{i^3}=;\ \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=;\ \frac{a-b}{\sqrt{b-a}}=$

52. $\frac{ai^7}{\sqrt{-a^5}}=;\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=;\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4=;\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6=$

53. $\left(\frac{4}{\sqrt{-1}}\right)^2-\left(\frac{3}{\sqrt{-2}}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{-8}}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}\right)^7=$

54. Колико је i^0; i^{-1}; i^{-2}; i^{-3}; i^{-4}; i^{-5}; i^{-6}; i^{-7}?

55. $\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^7}=$; $\frac{1}{i^8}-\frac{1}{i^6}=$; $\frac{a i^2}{i^3}=$; $\frac{(bi)^2}{i^9}=$

У следећим разломцима да се уклоне корени из именилаца, тј. да се имениоци рационализирају.

56. $\frac{1}{\sqrt{-5}}=$; $\frac{a}{\sqrt{-b}}=$; $\frac{2}{\sqrt{-2}}=$; $\frac{8}{3\sqrt{-1}}=$

57. $\frac{1}{1+\sqrt{-1}}=$; $\frac{3}{1-\sqrt{-1}}=$; $\frac{4}{3+\sqrt{-4}}=$;

$\frac{1+5\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=$

58. $\frac{2i}{1+\sqrt{-9}}=$; $\frac{3}{2-i\sqrt{3}}=$; $\frac{1}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{4}}}=$

59. $\frac{2+3i}{3-4i}=$; $\frac{1}{a-bi}=$; $\frac{1}{a+bi}=$

60. $\frac{3+\sqrt{-1}}{(2-\sqrt{-1})^2}=$; $\frac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}=$; $\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{-5}}=$

61. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{-3}+\sqrt{-5}}=$; $\frac{2-17i\sqrt{2}}{5-3i\sqrt{2}}=$; $\frac{3+2i\sqrt{5}}{\sqrt{3}-5i\sqrt{5}}=$

62. $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}=$; $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=$

63. $\frac{x+yi}{x-yi}=$; $\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{a-bi}{a+bi}=$

64. $\frac{a+i\sqrt{1-a^2}}{a-i\sqrt{1-a^2}}$ $(a<1)$; $\frac{a+bi}{c+di}+\frac{a-bi}{c-di}=$

65. $\frac{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1-x}+i\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-i\sqrt{1+x}}=$

66. $\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{-1}}}=$; $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{-1}}}=$; $\frac{1}{\sqrt{4+3\sqrt{-1}}}=$

67. Покажи у следећим примерима да је реципрочна вредност датих бројева њихова комплексна коњугована вредност:

1) $\frac{3+4i}{5}$ 2) $\frac{1+i\sqrt{48}}{7}$ 3) $\frac{2+3i}{\sqrt{13}}$!

Одреди још који пример таквих бројева који дакле испуњавају услов

$$\frac{1}{a+bi}=a-bi!$$

68. Нека је $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Да се израчуна 1) $z^2, z^3, z^4, \ldots$ 2) $1+z+z^2$.

69. Према обрасцу

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

да се раставе на два комплексна чиниоца изрази:

x^2+y^2; a^2+4b^2; $9a^2+b^2$; $9x^2+16y^2$; $\frac{m^2}{4}+n^2$; $a+b$;

$m+1$; $5=(2^2+1)$; 10; 13; 17; 29; 37; 53; 65; 101.

70. $\sqrt{5+12i}=$; $\sqrt{7-24i}=$; $\sqrt{13-12i}=$;

$\sqrt{-24+70i}=$

71. $\sqrt{-3+8i}=$; $\sqrt{-13+84i}=$; $\sqrt{-21-220i}=$;

$\sqrt{39-8i}=$

72. $\sqrt{\frac{5}{36}+\frac{1}{3}i}=$; $\sqrt{\frac{5}{16}-\frac{1}{4}i}=$; $\sqrt{\frac{65}{36}+2i}=$;

$\sqrt{0{,}03-0{,}04\,i}=$

73. $\sqrt{i}=$; $\sqrt{-i}=$; $\sqrt{2i}=$; $\sqrt{3i}=$

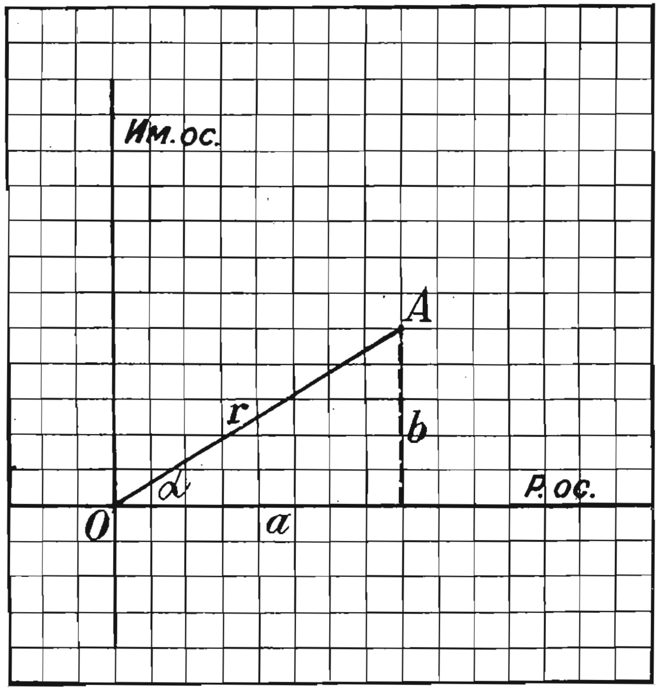
Угловни облик комплексног броја

79. — Положај тачке A у Гаусовој равни, која одговара комплексном броју $a+bi$ (сл. 13.) може бити утврђен уместо правоуглим координатама (a, b) још и помоћу тзв. *поларних координата* (r, α). r је отстојање тачке A од почетка, α угао који OA захвата са позитивним правцем реалне бројне осовине.

За r имамо назив *величина, дужина* или *модуо* комплексног броја. α се зове *коефицијент правца,* или *аргумент* комплексног броја.

80. — Из слике се види да је

$$a = r\cos\alpha \qquad (1)$$
$$b = r\sin\alpha.$$



Сл. 13.

Стављајући ове вредности у $a + bi$ добијамо

$$a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \qquad (2)$$

Лева страна у једначини (2) зове се *основни облик* или и *Гаусов облик* комплексног броја. Десна страна зове се *угловни облик,* или и *Кошијев облик.*

Често ћемо имати задатак, да из једног облика пређемо на други и обрнуто. Дакле разликоваћемо два случаја.

Први случај. — Да се из основног облика $a + bi$ пређе на угловни облик $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Треба да одредимо r и α. Ако у једначинама (1) подигнемо на квадрат обе стране, добићемо

$$a^2 = r^2\cos^2\alpha$$
$$b^2 = r^2\sin^2\alpha.$$

Сабирањем ових једначина добијамо

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

И како је $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

то је $\quad r^2 = a^2 + b^2 \quad$ или

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (3)$$

што се непосредно види и из саме слике.

Из овог обрасца (3) одређује се r, кад знамо a и b.

Други случај. — Да се из угловног облика одреди основни облик.

То се постиже помоћу једначина (1).

81. **Графичко сабирање комплексних бројева.** — Ако нам је дато да саберемо два комплексна броја $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ збир ће бити

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Ако графички претставимо број који претставља збир, добијамо тачку чије су координате $(a + c, b + d)$.

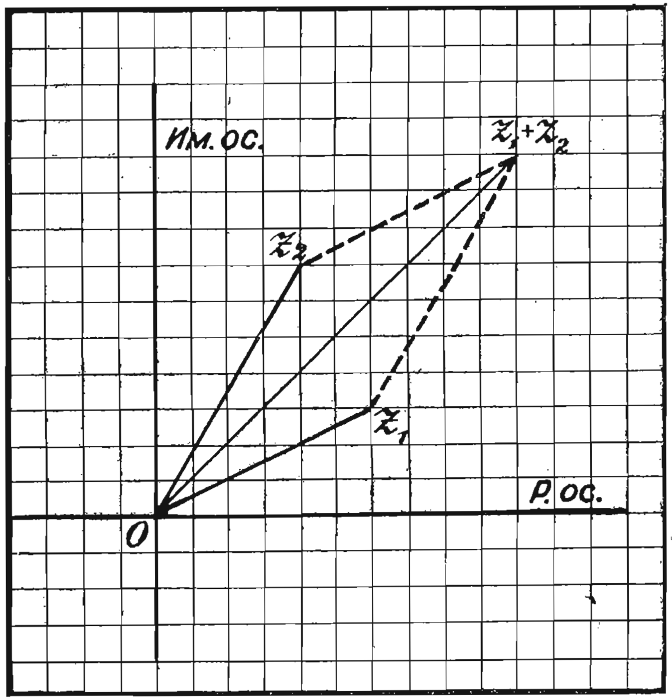
Као што се види из слике 14, граде тачке z_1, z_2, $z_1 + z_2$ заједно са почетком 0 један паралелограм. Величина збира $z_1 + z_2$ је једна дијагонала паралелограма. Величине сабирака су стране паралелограма. Комплексни бројеви играју овде улогу управљених величина. Овакво сабирање можемо да сравнимо са одређивањем резултанте двеју сила које дејствују на једну тачку под углом.

На слици је извршено графичко сабирање комплексних бројева $z_1 = 6 + 3i$ и $z_2 = 4 + 7i$. Као што се види резултат је $z_1 + z_2 = 10 + 10i$.

82. **Графичко одузимање.** — Разлику два комплексна броја $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ имамо у облику

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

При графичком претстављању можемо одузимање схватити као обрнуту радњу сабирања. Разлика $z_1 - z_2$ је тада друга страна једног паралелограма чија је једна дијагонала умањеник z_1 и чија је једна страна умањилац z_2. Удобније је да се разлика $z_1 - z_2$ схвати као збир $z_1 + (-z_2)$. Број $(-z_2)$ може се лако нацртати. Тада има још да се сабере z_1 и $(-z_2)$.



Сл. 14

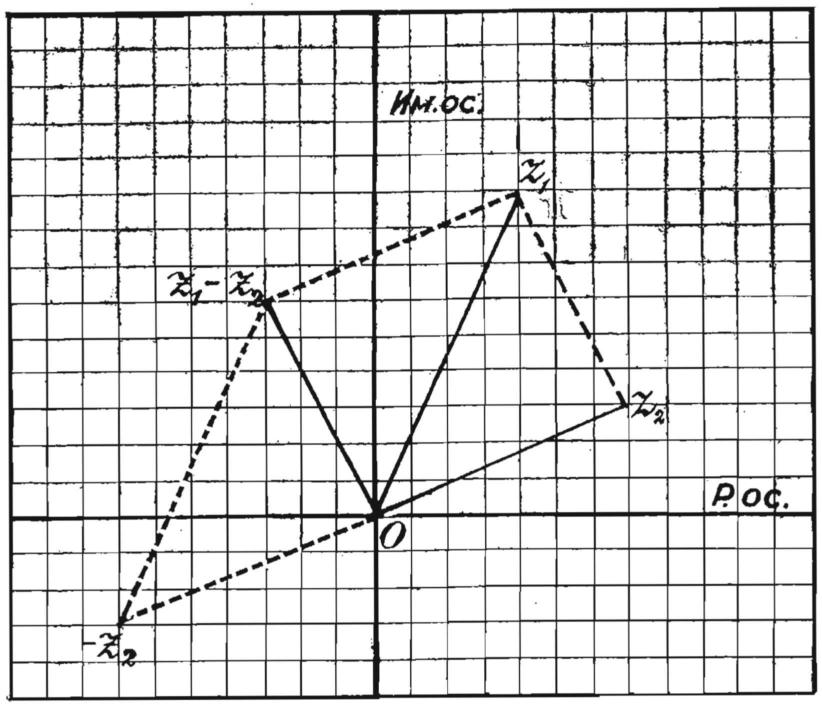
На слици 15 је приказано одузимање комплексних бројева $z_1=4+9i$ и $z_2=7+3i$. Резултат је $z_1 - z_2 = -3+6i$.

Овако графички, из угловног облика, могу се комплексни бројеви врло удобно множити, делити, степеновати, кореновати итд. Али је за то потребно више знања из тригонометрије, неголи што знају ученици VI разреда.

За писмено вежбање

Да се рачунски и графички одреди збир $z_1 + z_2$ и разлика $z_1 - z_2$ следећих комплексних бројева z_1 и z_2:

1. $z_1=2+3i$	$z_2=2-3i$
2. $z_1=-4-3i$	$z_2=6+2i$
3. $z_1=3{,}5+1{,}6i$	$z_2=-2{,}7+3{,}4i$
4. $z_1=5-i$	$z_2=1{,}2+2{,}3i$
5. $z_1=1-8i$	$z_2=8-i$
6. $z_1=4{,}8+3{,}4i$	$z_2=-5{,}5-2{,}2i$
7. $z_1=17-25i$	$z_2=33-13i$



Сл. 15.

ГЛАВА III

Рачуни са приближним вредностима

Скраћени бројеви

83. — Већ смо за ирационалне бројеве рекли да их у рачунима замењујемо њиховим приближним вредностима.

Ми у пракси, у обичном животу, највише рачунамо са целим и децималним бројевима. Знамо још да је рачунање са децималним бројевима врло слично рачунању са целим бројевима.

Радећи са децималним бројевима ми их врло често заокругљујемо. Место да рачунамо са тачним бројевима, ми узимамо и за њих њима приближне бројеве. То долази отуда, што децимални бројеви, са којима тренутно радимо, могу имати велики број децимала. Овај број децимала знатно се повећава у рачунима, на пр. при множењу. Тада последње децималне цифре могу претстављати јединице тако мале, да оне нису ни од каквог интереса у пракси.

На пример, ако хоћемо да одредимо обим једног округлог стола, чији је пречник $0^m, 85$, треба овај број да помножимо бројем $\pi = 3, 14159$. Резултат је

$$0 = 2^m, 6703515,$$

из кога се обим може прочитати на десете делове *микрона*. Ми смо пречник мерили на сантиметре, на стоте делове од метра, а у резултату имамо и десетмилионите делове. Очевидно је да цифре десно од стотих (03515) немају никаквог смисла.

84. — Ови резултати могу још више уливати неповерење, кад произлазе из података, који су и сами приближни.

Због несавршености наших справа за мерење и због тога што и наше око не може да разликује сувише ситне поделе на справама, *ни код једног мерења не добијамо тачне резултате*. Све вредности које добијамо мерењем више или мање су *несигурне*. Природно је да и резултати, које добијамо рачуном из бројева добијених мерењем, нису такође сигурни. Још треба имати увек у виду чињеницу да се рачуном степен тачности никад не може побољшати.

85. — Узмимо да смо број $4^m,32$ добили мерењем. Мерили смо до на сантиметре. При том се сигурно десило да смо занемарили неки милиметар. Дакле о хиљадитим деловима, о милиметрима, не знамо ништа. Али овде ни цифра 2 не може више бити тачна. Она ће лежати између $1^{cm},5$ и $2^{cm},5$. Горња дужина је према томе

$$(4,32 \pm 0,005)\text{m}.$$

Неки пишу цифре које нису сигурне ситније од осталих цифара, у овом примеру 4^m, 3_2.

86. — Површина правоугаоника чија је дужина $4^m,34$, а ширина $1^m,42$ једнака је метара квадратних

$$4,34 \cdot 1,42 = 6^{m^2},1628 = 616^{dm^2},28 = 61\,628 \text{ cm}^2.$$

Стране правоугаоника мерене су овде тачно само на сантиметре. Због тога горњи подаци могу бити нетачни највише за $\frac{1}{2}$ cm. Нетачност ширине проузрокује у површини нетачност од једне пруге, чија је дужина 434 cm, а ширина $\frac{1}{2}$ cm, дакле округло 220 cm². Исто тако повлачи нетачност дужине једну несигурност у површини око 70 cm²? Укупна грешка може изнети око (220 + 70) cm², дакле око 3dm². Горњи резултат површине на cm² очевидно нема никаквог смисла. Резултат треба да гласи на dm².

$$6^{m^2},16 = 616 \text{ dm}^2 = 61600 \text{ cm}^2.$$

Морамо још имати у виду да је и овде последња цифра (6) нешто мало несигурна.

87. — За један број кажемо да је *потпун,* ако су нам познате све његове цифре. Број је *непотпун*, или *скраћен*, ако знамо само неке његове цифре на вишим местима. Остале цифре непотпуног броја могу бити или непознате, или намерно изостављене.

88. — Заокругљивање децималних бројева. — Практично упутство: *Кад је прва цифра од оних које треба изоставити мања од 5, цифре се просто изоставе без икаквих даљих промена; ако је она 5 или већа од 5, треба последњу цифру која остаје повећати за 1.*

У оба случаја грешка не може бити већа од половине јединице последњег задржаног места (или од 5 јединица првог изостављеног места).

Пример. 2,3416835 биће заокругљено на 2,34, ако се траже два десетна места. На 4 децимала биће 2,3417. У првом случају грешка је 0,0016835, дакле мања од 0,005; у другом 0,0000165, мања од 0,00005.

За писмено вежбање

1. Следећи децимални бројеви да се заокругле на број децимала назначених у заградама:
0,30103 (4 д); 0,47712 (4 д); 0,60206 (4 д);
1,49136 (3 д); 8,755 (1 д); 6,81291 (3 д);
0,11394 (3 д); 6,666 (2 д); 0,146 (2 д).

2. Изрази у парама следећи број динара:
8,251; 16,849; 1,488; 6,8665; 5,976!

3. Да се изрази у mm: $3^m, 41462$; $8^m, 3456$; $0^m, 1234$.

4. Колико cm су: $2^m, 516$; $0^m, 182$; $3^{dm}, 49$; $8^{cm}, 368$; $0^{cm}, 84$; 93 mm; 88 mm; $2^{km}, 123456$?

5. Колико су m^2: $0^a, 572$; $0^{ha}, 2481382$; 168527 cm^2; 268 dm^2; 3165 dm^2; $0^{m^2}, 8888$?

6. $0^l, 2478 = cm^3$; $0^{m^3}, 6282 = dm^3$?

7. Претвори у минуте на 3 дец. 1 секунд; 9 сек; 37 сек!

8. Претвори у дане на 3 дец. 2 часа; 17 часова; 23 часа!

9. Претвори у часове на 5 дец. 1 сек; 7 сек; 43 сек!

10. Претвори у дане на 5 дец. 11 мин; 29 мин; 53 мин!

11. Претвори 1′, 1″, 5′, 26″, 101′, у степене (4 дец.)!

12. Претвори 11′, 32″, 51″, 5°7′, 2°5′, 3″ у степене (5 дец.)!

13. Колико су секунада: $0^{mn}, 01$; $0^{mn}, 08$; $0^{mn}, 35$; $0^{mn}, 001$; $0^{mn}, 006$; $0^{mn}, 015$; $0^h, 0001$; $0^h, 0008$; $0^h, 0019$?

У задацима 14 и 15 да се дељење продужи до тачног броја mm.

14. 9 m: 16 = m; 890 m: 300 = m; 1 km: 3000 = m?

15. 150 cm: 23 = m; 2^m,8: 17 = m; 0^m, 56:300 = mm?

16. Дужина једног правоугаоника је (на последњем месту несигурно) 2^m,58, ширина 1^m,76. Колика је површина? Хоће ли резултат бити на 4 децимала?

89. Заокругљивање целих бројева. — Заокругљивање се често врши и код целих бројева, а нарочито кад су ти бројеви велики. То се на пример дешава при изражавању површина земаља, код броја становника земаља и градова, код великих дужина и даљина, као што је дужина земљиног пречника, меридијана, или даљина месеца, сунца итд.

Кад бројеве заокруглимо, постају нам прегледнији и лакше их памтимо.

Практично упутство гласи: *Кад је по рангу највиша цифра од оних које треба изоставити мања од 5, изостављене цифре се просто замене нулама; кад је ова цифра 5, или већа од 5, то се она испред ње повећа за 1.* (Види Алгебру за IV р. стр. 50!)

Пример. — Број становника Управе града Београда је 288 918. Округло на хиљаде је 289 000.

Ученик да објасни зашто је бесмислено писати јединице, десетице, па и стотине код бројева становника.

За писмено вежбање

1. Да се изрази у стотинама:
32 604; 4 218; 924; 36 591; 229 062.

2. Да се узрази у хиљадама:
55 606; 2 863; 59 040; 4 796; 219; 253.

3. Следећи бројеви да се изразе у милионима:

	површине у km^2	становништво
Европа	9 897 151	443 520 000
Азија	44 163 670	955 478 000
Африка	30 057 498	138 215 000
Америка	39 000 648	174 844 000
Аустралија	8 954 421	7 467 000

4. Висине следећих висова да се заокругле на стотине: Дурмитор 2522m, Комови 2480m, Љуботен 2496m, Перистер 2600m; Кајмакчалан 2521m, Копаоник 2017, Велики Штурац 1170m, Караванке (Стол) 2558m.

5. Следеће дужине да се изразе најпре у хиљадама, затим у милионима:
средњи земљин полупречник 6 368 150m;
дужина земљиног меридијана 40 003 423m;
дужина једног степена на екватору 111 306,6m.

Грешке у резултату

90. Апсолутне грешке. — Разлика $(a - a')$ између тачне вредности једнога броја a и његове приближне вредности a' назива се *апсолутна грешка* приближног броја a'. Пошто се број a обично пише у облику децималног броја, то према томе што смо малочас рекли о заокругљивању бројева, грешка учињена код приближне вредности a', ако се ова вредност узме на n децимала биће мања од

$$\frac{1}{2 \cdot 10^n}.$$

На пример ако за број π узмемо приближну вредност

$$\pi' = 3{,}14,$$

апсолутна грешка, коју ћемо обележити са d, јесте

$$d = 0{,}0015926 \ldots < \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}005.$$

Мања је, дакле, од половине јединице последње задржане цифре.

Ако је приближан број a' резултат каквог мерења, онда ми никад не можемо знати тачну вредност a, па ни разлику $(a - a')$. Једино што можемо знати, то је да разлика $(a - a')$ по својој апсолутној вредности не прелази један одређен број на пр. ε.

Овај број ε зваћемо *горња граница грешке.*

Као што малочас рекосмо, граница грешке једнака је половини јединице последњег задржаног места.

91. Терминологија и ознаке. — Ако је приближна вредност a' мања од тачне вредности a, зваћемо је *доња приближна вредност*, или *приближна вредност мања*; ако је већа од a зваћемо је *горња приближна вредност*, или *приближна вредност већа.*

Разлику $(a - a')$ бележићемо са Δa (чита се „делта" a). Грчко слово Δ се врло често употребљава за ознаку разлике или диференције.

Слово Δ у изразу

$$a - a' = \Delta a$$

никако не значи чинилац, него служи само као знак за разлику бројева a и a'.

Ако је $\Delta a > 0$ a' је доња приближна вредност.

Ако је $\Delta a < 0$ a' је горња приближна вредност.

92. Основни задаци. — Ако имамо један израз

$$x = f(a, b, c \cdot \cdot \cdot \cdot)$$

састављен од бројева $a, b, c \cdot \cdot \cdot \cdot$ који су везани простим рачунским знацима, и ако нисмо у могућности да имамо тачне

вредности $a, b, c \cdot \cdot \cdot \cdot$, онда нам се јављају два основна задатка:

1. Ако место $a, b, c \cdot \cdot \cdot \cdot$ ставимо приближне вредности $a', b', c' \cdot \cdot \cdot \cdot$ да се нађе граница грешке коју смо учинили при операцији

$$x' = f(a', b', c' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot).$$

2. Са коликом приближношћу треба узети $a, b, c \cdot \cdot \cdot \cdot$ да грешка учињена у x' буде мања од једног датог броја.

93. Грешка при сабирању. — Нека је

$$x = a + b$$

збир два броја a и b, чију вредност не можемо тачно знати. Нека су a' и b' доње приближне вредности бројева a и b.

$$a' = a - \Delta a \quad b' = b - \Delta b \qquad \Delta a > 0 \qquad \Delta b > 0.$$

Приближна вредност

$$x' = a' + b'$$

је доња приближна вредност и грешка је

$$\Delta x = a + b - (a - \Delta a) - (b - \Delta b),$$

или

$$\Delta x = \Delta a + \Delta b.$$

Граница грешке збира добија се, кад се саберу границе грешака појединих сабирака.

94. Грешка при одузимању. — Нека је

$$x = a - b$$

и нека су a' и b' приближне вредности бројева a и b. Овде ћемо само претпоставити да је a доња приближна вредност, а b горња, тако да је

$$\Delta a > 0 \qquad \Delta b < 0.$$

Приближна вредност

$$x' = a' - b'$$

је тада доња приближна вредност и грешка је

$$\Delta x = a - b - (a - \Delta a) + (b - \Delta b),$$

или

$$\Delta x = \Delta a - \Delta b \tag{2}$$

где је

$$\Delta a > 0 \qquad \Delta b < 0 \qquad \Delta x > 0.$$

Ако обележимо са δ (мало делта) апсолутну вредност једне грешке Δ, можемо написати

$$\delta\, x = \delta\, a + \delta\, b. \qquad (2a)$$

Граница грешке разлике добија се, кад се саберу границе грешака умањеника и умањиоца.

95. Грешка при множењу. — Нека је

$$x = ab$$

и a', b' приближне доње вредности за a и b. Апсолутна грешка доње приближне вредности

$$x' = a'b'$$

јесте
$$\Delta x = ab - (a - \Delta a)(b - \Delta b)$$
$$\Delta x = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a - \Delta a \cdot \Delta b.$$

Ако изоставимо производ $\Delta a \cdot \Delta b$, онда се десна страна последње једначине још мало повећа, па је граница помакнута још мало навише, те имамо

$$\Delta x_1 = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \qquad (3)$$

где је $\qquad \Delta a > 0$ и $\Delta b > 0$.

Овај образац омогућује нам решење постављеног задатка, када је непозната x производ.

95. Грешка при дељењу. — Нека је

$$x = \frac{a}{b},$$

a' доња приближна вредност броја a,
b' горња приближна вредност броја b.
Вредност

$$x' = \frac{a'}{b'}$$

је доња приближна вредност броја x и њена апсолутна грешка је

$$\Delta x = \frac{a}{b} - \frac{a - \Delta a}{b - \Delta b}, \quad \Delta a > 0, \quad \Delta b < 0,$$

или

$$\Delta x = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b\,(b - \Delta b)}.$$

Како је Δb негативно, десна страна се повећа, ако изоставимо Δb у имениоцу. Дакле једна горња граница за Δx је $\Delta_1 x$

$$\Delta_1 x = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}, \quad \Delta a > 0 \quad \Delta b < 0 \quad \Delta x > 0 \qquad (4)$$

Овај образац омогућује решење задатка у случају кад је x количник.

Ако и овде обележимо са δ апсолутну вредност једне грешке Δ, можемо написати

$$\delta_1 x = \frac{b\delta a + a\delta b}{b^2}. \qquad (4a)$$

Овај образац се употребљава у пракси.

97. — Погрешка учињена при степеновању. — Нека је најпре

$$x = a^2 = a \cdot a.$$

Образац (3) даје онда

$$x = 2a \cdot \Delta a \qquad \Delta a > 0.$$

Уопште ако је

$$x = a^n \qquad (n \text{ цео број})$$

излази поступно идући од степена до степена

$$\Delta x = na^{n-1} \cdot \Delta a. \qquad (5)$$

98. Грешке при извлачењу квадратног корена. — Нека је

$$x = \sqrt{a}$$

и a' горња приближна вредност, тј. $\Delta a < 0$. Ако место Δ узмемо апсолутну вредност δ биће

$$x' = \sqrt{a + \delta a} \qquad \delta a > 0.$$

Грешка горње приближне вредности x' биће

$$\delta x = \sqrt{a + \delta a} - \sqrt{a},$$

која се друкчије може написати

$$\delta\, x = \frac{\delta a}{\sqrt{a + \delta a} + a}, \qquad \delta\, a > 0.$$

Ако у имениоцу изоставимо δa, десна страна још мало порасте, дакле једна горња граница за δx је

$$\delta_1 x = \frac{\delta a}{2\sqrt{a}}.$$

Напомена. — На други основни задатак из чланка 92 одговорићемо следећим скраћеним рачунима.

Скраћено рачунање

99. Скраћено сабирање и одузимање. —

Пример 1. — Да се израчуна тачно на десиметре $8^m,432 + 6^m,538 + 9^m,67 + 2^m,586$.

Решење. —

$$\begin{array}{r} 8,432 \\ 6,538 \\ 9,67 \\ 2,586 \\ \hline 27,226. \end{array}$$

Кад заокруглимо на dm резултат је

$$27^m,2.$$

Ми смо овде радили и један излишан посао. Сабирали смо милиметре и сантиметре. Могли смо тај посао себи уштедети заокругљивањем сабирака пре сабирања. Горњи рачун би тада овако изгледао:

$$\begin{array}{r} 8,4 \\ 6,5 \\ 9,7 \\ 2,6 \\ \hline 27,2. \end{array}$$

Ради веће сигурности обично се узима један децимал више, кад је број сабирака мањи од десет.

$$\begin{array}{r} 8,43 \\ 6,54 \\ 9,67 \\ 2,59 \\ \hline 27,2|3 = 27,2. \end{array}$$

Овде су сабирци били потпуни бројеви. Да би смо добили збир на 1 децимал, ми смо сваки сабирак заокруглили на 2 децимала.

Уопште ако хоћемо збир на n децимала, треба сваки сабирак скратити на $(n+1)$ децимала. У збиру се $(n+1)$ — во место узме за поправку.

Напомена. — Ако је број сабирака већи од десет, а мањи од сто, сабирци се скраћују на $(n+2)$ децимала итд.

Пример 2. Да се израчуна на 3 децимала

$$4,86971 + 3,21102 + 8,88888 + 0,00964 + 2,0790 + 0,23$$

Решење. Сваки сабирак скратићемо на 4 децимала:

$$\begin{array}{r} 4,8697 \\ 3,2110 \\ 8,8889 \\ 0,0096 \\ 2,0790 \\ 0,2300 \\ \hline 19,288|2 = 19,288. \end{array}$$

Пример 3. Нека имамо да извршимо сабирање
$9,3642\ldots + 0,29\ldots + 74,536\ldots + 10,0513\ldots\ldots$

Тачке иза бројева значе да су то непотпуни бројеви.

Зашто овде сабирање хиљадитих и десетхиљадитих нема никаквог смисла?

На колико само децимала се може рачунати?

Скратићемо све бројеве на 2 децимала:

$$\begin{array}{r} 9,36 \\ 0,29 \\ 74,54 \\ 10,05 \\ \hline 94,24. \end{array}$$

Овде ни цифра стотих није сигурна. Због тога њу употребимо за поправку. Резултат је

$$94,2.$$

Као што смо видели код потпуних бројева могли смо сами одређивати коју тачност треба да достигне резултат. Код непотпуних бројева резултат не може имати више десетних места од сабирка, који их има најмање.

У рачуними са непотпуним бројевима најчешће се поставља задатак *да се резултат одреди са највећом тачношћу.*

Да се одреди граница грешке у резултату према чл. 93!

Пример 4. — Да се одреди разлика бројева 0,785683 и 0,537285 на три децимала.

Решење. — Најпре се умањеник и умањилац скрате на 4 децимала

$$\begin{array}{r} 0{,}7857 \\ \underline{0{,}5373} \\ 0{,}2484. \end{array}$$

Кад резултат заокруглимо за још једно место добијамо

0,248.

Пример 5. — Да се одреди разлика бројева 6,527... и 0,06587... са највећом могућом тачношћу.

Решење. — И умањеник и умањилац узмемо са 3 децимала:

$$\begin{array}{r} 6{,}527 \\ \underline{0{,}066} \\ 6{,}461. \end{array}$$

Пошто ни последња цифра није поуздана, то њу узимамо за поправку. Резултат је

6,46.

Да се одреди граница грешке према чл. 94!

За писмено вежбање

У задацима од 1—3 да се најпре изврши сабирање са свима децималима, па резултати заокругле на 2 децимала. Затим да се сабирци претходно скрате на 2 децимала, па потом изврши сабирање. Најзад да се види за колико се разликују збирови.

1.	2.	3.
2,578	1,038	8,00943
3,489	0,3814	0,8943
1,3962	2,5692	3,984
4,0361	0,083	8,349

За колико постају у примерима 1—3 тачнији резултати друге врсте, када се најпре изврши скраћивање сабирака на 3 децимала, па по свршеном сабирању одбаци још по једна цифра?

Следећи збирови да се одреде на 2 децимала:

4.	5.	6.
3,207	4,3592	3,86143
5,4418	8,600	6,0973
6,16309	2,710	7,9909
0,67978	2,71148	4,8040
0,426	2,715	5,841

Следећи збирови да се одреде на 3 децимала:

7.	8.	9.
7,4763	7,61412	2,79991
0,98481	9,84309	6,47212
2,93456	0,77485	8,00343
3,76555	3,6400	9,64804
1,84677	5,5555	0,19897

Следећи збирови да се одреде са највећом могућом тачношћу.

10.	11.	12.
8,5482 ...	7,3	3,96
0,27 ...	84,736 ...	10,888 ...
8,46 ...	66,45 ...	9,4
3,87 ...	0,7666 ..	24,007 ...
0,763 ...	4,489 ...	0,333 ...

13.	14.	15.
382,53 ...	79000	76,537 ...
39,666 ...	45000	8500
100,37 ...	4380	456960
81,438	12600	972400
28,8 ...	3840	512,91 ...
0,5	52834	

У следећим примерима да се резултати одреде са тачношћу која је назначена у загради.

16. $\frac{5}{7}+\frac{7}{9}+\frac{5}{12}+\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{5}{11}$ (3 дец.)

17. $12\frac{5}{6}+9\frac{3}{8}+15\frac{7}{13}+\frac{5}{9}+1\frac{3}{8}+17\frac{7}{25}$ (3 дец.)

18. $\frac{6}{7}\,m+15^{m}\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\,m+1^{m}\frac{6}{11}+3^{m}\frac{7}{12}$ (на mm)

19. $\frac{3}{5}\text{kg}+\frac{7}{15}\text{kg}+\frac{5}{13}\text{kg}+\frac{1}{12}\text{kg}+\frac{1}{8}\text{kg}+\frac{1}{9}\text{kg}$ (на g)

20. Изврши на 4 дец. $\pi+\sqrt{10}$!

21. Сабери $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ на 3 децимала!

22. Израчунај $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ на 2 децимала!

23. Одреди на 3 децимала $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}$.

24. Одреди на 5 децимала $\pi+e$, где је $e=$ $=2{,}718281828\ldots\ldots$!

25. У малопређашњем задатку број e одређен је оваквим низом бројева:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots\ldots$$ Низ бројева може се продужити докле хоћемо.

Одреди на овај начин број e на 9 децимала, узевши 13 првих чланова овога низа! Следећи чланови низа, разуме се, лако се могу погодити.

26. За колико ће следеће разлике бити погрешне, кад смо умањеник скратили за једно место:

а) 3,456 — 2,09; 0,0732 — 0,037; 0,853 — 0,58;

б) 1,2999 — 0,92; 3,75 — 2,9; 0,7455 — 0,47?

27. За колико ће бити погрешне следеће разлике кад само умањилац заокруглимо за једно место:

а) 2,5 — 1,35 ; 6,42 — 0,143 ; 1,007 — 0,1705;

b) 3,835 — 1,3582 ; 0,39 — 0,246 ; 1,47 — 0,908 ?

27а. За колико ће бити погрешне следеће разлике, ако и умањеник и умањилац заокруглимо за по једно место:

а) 0,382 — 0,252 ; 9,8733 — 8,7953 ; 1,37 — 0,47 ;

b) 22,68 — 14,98 ; 0,0358 — 0,0177; 1,237 — 0,326 ;

c) 4,66 — 3,29 ; 0,00737 — 0,00049 ; 1,345 — 0,3425 ;

d) 0,934 — 0,493 ; 17,82 — 8,74; 3,765 — 3,576 ?

Следеће разлике да се одреде на 2 децимала:

28.	29.	30.
42,60513	957,713	577,778
17,79642	13,5994	0,544

Следеће разлике да се одреде на 3 децимала:

31.	32.	33.
2,93456	8,45983	8,009936
0,98481	5,94725	3,216343

34. Израчунај на 4 децимала: 0,092438 — 0,029834!

35. Одреди на стотине: 3587256 — 784326!

36. Одреди тачно на хиљаде: 14392730 — 13429307!

Следеће разлике да се одреде са назначеном тачношћу:

37. $8^m{,}473 - 0^m{,}8473$ (на cm)

38. $0^m{,}3924 - 0^m{,}2943$ (на mm)

39. $20^{hl}{,}8735 - 2^l{,}5368$ (на l)

40. $9^{hl}{,}098284 - 8^{hl}{,}2946$ (на cm³)

41. $3^h\ 4^{mn}\ 41^{sec} - 2^h\ 26^{mn} 51^{sec}$ (на $\frac{1}{10}$ mn)

42. $5^m\frac{9}{10} - 1^m\frac{5}{17}$ (на mm)

43. $5^{ha}\frac{16}{17} - 1^{ha}\frac{13}{14}$ (на m²)

44. $\frac{15}{34}-\frac{9}{65}$ (на 3 д); $16\frac{7}{24}-3\frac{17}{28}$ (на 3д.)

45. $\frac{1}{96}-\frac{1}{97}$ (на 6 д); $\frac{1}{74}-\frac{1}{75}$ (на 6 д).

Да се израчуна са највећом могућом тачношћу:

46. 9,53456 . . — 4,2789 . . ; 2,346 . . . — 0,98465 . . .

47. 137,452 . . . — 98,66 . . . ; 98,342 . . . — 4,5092 . . .

48. 147,32 . . . — 72,333 . . . ; 25,67 — 3,325 . . .

49. 153400 — 37380 ; 269000 — 150000

50. 215 318 — 49600; 564100 — 263700.

51. 43,861 . . + 15,042 . . . + 38,287 . . . — 41,766 . . . — — 9,128 . . . =

52. 23,75 . . . + 8,87 . . . — 19,91 . . . + 17,48 . . . + + 23,86 . . . =

53. 23,64 . . . + 5,2 . . . — (16,77 . . . — 9,43 . . .) — — 18,91 . . . =

54. 11,345 . . . — (3,16 . . . — 2,8 . . .) + (4,3218 — — 2,3108) =

55. За одредбу броја π може се употребити бескрајни ред:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-+\dots$$

Овај ред зове се *Лајбницов ред*. Уколико више чланова реда узимамо у рачун, утолико ћемо ближе прићи правој вредности броја π.

Ред се може и овако написати:

$$\frac{\pi}{4}=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{13}-\frac{1}{15})+\dots$$

Колика се приближна вредност добија, кад се узму 8 оваких заграда? (На 5 децимала!)

56. За одредбу броја π употребљава се и *Ојлеров ред*:

$$\frac{\pi}{4}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\frac{1}{3}(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\frac{1}{5}(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5})-+\dots$$

Овај ред је згоднији од Лајбницовог, јер од Лајбницовог реда треба узети у рачун врло много чланова.

Да се одреди приближна вредност π из горње три заграде на 5 децимала!

120. Скраћено множење. —

Пример 1. Да се одреди производ бројева, 3,7461 и 2,8324 на 2 децимала.

Решење. Најпре ћемо извести рачун као и обично с тим да множење отпочне са највишом цифром множиоца:

$$\begin{array}{r}
3{,}7461\\
2{,}8324\\
\hline
7\,4922\\
2\,99688\\
112383\\
74922\\
149844\\
\hline
10{,}61045364.
\end{array}$$

Резултат је на 2 децимала 10,61.

Како нам је потребан резултат само на 2 децимала, то су овде нека множења излишна. На пример непотребно је множити 2 хиљадита са 6 хиљадитих, јер тај производ даје

милионите делове, који ни мало не утичу на резултат са 2 децимала. Исто тако излишно је множити их са 3 стота итд.

Сви децимали десно од црте су излишни. Могли смо узети у обзир још и оне прве иза црте за поправку, пошто они могу утицати на претходну цифру у делимичним производима.

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{3{,}7461}\\
\multicolumn{2}{c}{2{,}8324}\\
\hline
749 & 22\\
299 & 688\\
11 & 2383\\
 & 74922\\
 & 149844\\
\hline
10{,}61 & 045364
\end{array}$$

Према томе могли смо овако поступити. Пошто резултат треба да буде на 2 децимала, треба да помножимо стоте множеника са цифром јединица множиоца, тј. 4 стота множимо са 2 и добијамо 8 стотих. Ради поправке множимо и 6 хиљадитих са 2, па добијамо 12 хиљадитих. Одавде један стоти део преносимо на 8 стотих и добијамо 9 стотих, које и пишемо у делимичном производу. Цифру 1 десетхиљадитих и не узимамо у обзир. Затим са 2 множимо све цифре улево. Тако добијамо први делимични производ који износи

749.

Да бисмо и у другом делимичном производу добили само стоте, множимо са 8 десетих множиоца 7 десетих множеника. Добијамо 56 стотих. Ради поправке множимо и 4 стота са 8 десетих и добијамо 32 хиљадита. Одавде 3 стота додајемо на 56 стотих и добијемо 59 стотих. Множеникове цифре 6 и 1 више не узимамо у обзир. Множећи даље цифре множеника улево, добијамо други делимичан производ, који опет даје стоте:

299.

Даље множимо 3 цела множеника са 3 стота множиоца и добијамо 9 стотих. Ради поправке помножимо и 7 десетих са 3 стота, добијамо 21 хиљадити. Два стота одавде пренесемо на 9 стотих, па добијамо као делимични производ опет стоте делове:

11.

Кад помножимо 3 јединице множеника са 2 хиљадита множиоца добијамо 6 хиљадитих. Њих употребимо за поправку и добијамо 1 стоти. Цифра десетхиљадитих (4) множиоца не узима се у обзир.

```
 3,7461
 2,8324
-------
 749
 299
  11
   1
-------
10,60.
```

При том се говори: 2 пута 6, 12, **1** за поправку; 2 пута 4,8 и **1**,**9**; 2 пута 7, 14, **4** пишем а 1 задржавам:, 2 пута 3,6, и **1**,**7**. 8 пута 4,32, **3** за поправку; 8 пута **7**, **56** и 3,**59**; 8 пута 3, 24 и 5,**29**. Итд.

Делимични производи се овако потписују, јер сви претстављају стоте делове.

Ради лакшег рачуна цифре множиоца напишу се обрнутим редом, и то јединице множиоца испод стотих множеника.

```
 3,7461
42 382
-------
 749
 299
  11
   1
-------
10,60.
```

Овај резултат не слаже се са ранијим, који је 10,61. Због тога кад се производ тражи на 2 децимала, треба га одредити на три (на један више него што се тражи,) па трећи децимал употребити за поправку

```
 3,7461
42 382
-------
 7492
 2997
  112
    7
    1
-------
10,60|9 = 10,61.
```


Пример 2. Да се одреди производ бројева 473,8942 и 0,0315 на 3 децимала.

Решење. Производ ћемо најпре одредити на 4 децимала. Тога ради најпре испитамо коју цифру множеника треба да помножимо највишом цифром множиоца, да се добије тражено децимално место, тј. да се добију десетхиљадити. Треба са 3 стота множиоца помножити 9 стотих множеника, да се добију десетхиљадити. Треба, дакле, највишу важећу цифру множиоца потписати испод стотих множеника.

```
473,8942
  5 13
--------
142168
  4739
  2369
--------
14,927|6 = 14,928.
```

Пример 3. — Колико је 0,4326 · 38,634 на 2 децимала?

Решење. — Производ ћемо одредити на 3 децимала. Због тога треба највишом цифром множиоца, десетицама, да помножнимо најнижу цифру множеника, десет-хиљадите, да бисмо добили хиљадите, тј. трећи децимал. Потписаћемо десетице множиоца испод десетхиљадитих множеника.

```
0,4326
4 3683
------
1 2978
  3461
   259
    13
     2
------
16,71|3 = 16,71.
```

Пример 4. Да се одреди производ бројева 4,26... и 3,14159...

Решење. — При множењу непотпуних бројева за множиоца се узима онај непотпуни број, који је тачнији. Само још треба видети шта је мерило за **тачност**.

Под **тачношћу** једног непотпуног броја разумемо количник из тог броја и границе грешке, са којом је дат тај број. Према томе од два непотпуна броја тачнији је онај, код кога је овај количник већи. Тако у нашем примеру број 3,14159... тачнији је од броја 4,26..., јер је

$$\frac{3{,}14159}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}} = \frac{2\cdot 3{,}14159}{0{,}00001} = 628318$$

веће од

$$\frac{4{,}26}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2}} = \frac{2\cdot 4{,}26}{0{,}01} = 852.$$

Другим речима, кад хоћемо да упоредимо два непотпуна броја, треба да прецртамо запете, па да осмотримо који је број већи.

Напомена. — Један потпун број тачнији је од сваког непотпуног броја.

Зашто у нашем примеру нема смисла одредити производ на више од 2 децимала?

Рачунање изгледа овако

$$\begin{array}{r} 4{,}26 \\ 9514\,13 \\ \hline 12\,78 \\ 43 \\ 17 \\ \hline 13{,}38. \end{array}$$

Како је овде и други децимал несигуран, то га употребимо за поправку, па је резултат

13,4.

Колика је граница грешке по чл. 95?

За писмено вежбање

Следећи производи да се одреде на 2 децимала:

1. 45,6 · 0,38; 64,23 · 73,94; 97,3 · 5,34.
2. 2,94 · 2,492; 1,873 · 0,36; 20,48 · 9,59.
3. $8{,}43^2$; $2{,}178^2$; $0{,}93^2$; $0{,}0065^2$.

Следећи производи да се одреде на 3 децимала:

4. 456,25 · 7,39; 0,456 · 3,741; 7,391 · 0,08.
5. 0,09874 · 3,18; 9,274 · 2,835; 0,42763 · 0,9648.
6. $39{,}37^2$; $3{,}863^2$; $0{,}9648^2$; $0{,}05346^2$.

Да се одреди на 4 децимала:

7. 0,070 · 0,00853; 0,00573 · 0,03751.
8. 34,641 · 0,173205; 1,9105 · 11,463; 0,3937 · 0,42763; 0,2316 · 0,0546.
9. $5{,}492^2$; $0{,}07563^2$; $5{,}75346^2$; $83{,}246\,163^2$.

Да се израчуна са бројем децимала, како је назначено у загради.

10. 1,3459 · 4 (1 д); 0,7964 · 0,9 (4 д).
11. 237,4 · 0,003 (3 д); 0,435 · 23,625 (3 д).
12. 93854 · 0,72 (С); 238 471 · 0,63 (Х).
13. 584 · 2,8347 (2д); 492,18 · 0,34 (1д).
14. 0,5431 · 1,904 (4д); 473,8924 · 0,315 (3д).
15. 21 796 · 0,09358 (4д); 0,57826 · 3956 (Ј)

Следећи производи да се одреде са највећом могућом тачношћу:

16. 3,84 . . . × 2,38 . . . ; 2,734 . . . × 3,56 . . .
17. 5,34 . . . × 2,867 . . . ; 38,42 . . . × 247,3566 . . .
18. 5,2727 . . . × 7,054 . . . ; 52,11223 . . . × 81,324 . . .
19. 8,545454 . . . × 2,413 . . . ; 856700 × 257860 . . .
20. $(14{,}142\ldots)^2$; $(1{,}7321\ldots)^2$; $(2{,}2361\ldots)^2$
21. $(0{,}234234234\ldots)^2$; $(15{,}363363\ldots)^2$
22. 22,9022 . . . × 32,493 . . . ; 185,193 . . . × 32,16994 . . .
23. 1,21 . . . × 1,44 . . . × 1,728 . . .
24. 10,7521 . . . × 17,646 . . . × 2,5298 . . .
25. $(2{,}36\ldots)^3$; $(4{,}248\ldots)^3$; $(3{,}0604\ldots)^3$.
26. Килограм шећера је $14^{\text{дин}},25$, колико треба да се плати за $3,^{\text{kg}}675$?
27. Колика је површина правоугаоника, коме је дужина $231^{\text{m}},89$, ширина $117^{\text{m}},94$?
28. Колика је површина троугла, кад је основица $497^{\text{m}},34$, висина $38^{\text{m}},47$?
29. Да се одреди површина и запремина правоуглог паралелопипеда, чије су димензије $a = 17^{\text{m}},234$, $b = 14,^{\text{m}}142$, $c = 22^{\text{m}},360$.
30. Да се одреди запремина коцке, чија је ивица $a = 8^{\text{dm}},06$; $a = 0^{\text{dm}},48$; $a = 1^{\text{dm}},42$; $a = 2^{\text{dm}},325$.

Ако су ове коцке од месинга, да се израчуна и њихова тежина, кад је специфична тежина месинга 8,243.

31. Полупречник земље износи географских миља $888\frac{2}{5}$. Колика је његова дужина у километрима, кад је једна географска миља $= 7^{km},421$?

32. $1 dm^3$ олова тежи $0^t,01135$. Колико теже $8,^{dm^3}225$?

33. Литар нафте тежи $0^{kg},836$. Колико теже $10\frac{1}{2}$ l?

34. Колико су тешка 2hl 18 l живе, кад један литар тежи $13,^{kg}596$?

35. Један воз прелази за један сат $47^{km},55$, колики пут пређе за $3^h\ 27^{mn}35^{sec}$?

36. Колика је површина квадрата кад му је страна

a) 1 географска миља $= 7^{km},421$ (на ha)

b) 1 морска миља $= 1^{km},852$ (на a)

c) 1 јарда $= 0^m,91438$ (на cm^2)

d) 1 врста $= 1^{km},0668$ (на a)

e) 1 енглеска стопа $= 0^m,3047945$ (на cm^2)

37. Колики је обим сваког од претходних квадрата (на 3 дец.)?

38. Колико ha би била површина једне коцке, чија би ивица била једна географска миља?

Колика би била њена запремина у кубним километрима (на 3 дец.)?

39. Да се одреди обим и површина круга кад је пречник: —

a) $1,^m 101$; b) $45,^m 724$; c) $0,^m 028271$
d) $6^m,341$; e) $9^{cm},8$; f) $5^{km},216$; g) $6^{mm},25$;

(све на mm, одн. cm^2)

h) 12740 km (пречник земље);
m) 3275 km (пречник месеца).

40. Да се одреди на 3 дец. производ $\pi\sqrt{5}$.

41. Број 2,5495 је приближна вредност једног броја *a*. Знајући да су све цифре тачне, одредити са колико тачних цифара можемо имати квадрат.

42. Да се одреди на 3 дец. $\sqrt{2} + \pi\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

101. Скраћено дељење. — Основна мисао скраћеног дељења је у томе, што се остацима не дописују нуле, него се у делиоцу редом изоставља по једна цифра, и са тако скраћеним делиоцима по реду деле остаци.

Пример 1. Да се одреди количник броја 8753,6 и 4912.

Обично дељење	Скраћено дељење
8753,6 : 4912 = 1,78208	8753,6 : 4912 = 1,7821
38416	38416
40320	4032 : 491
10240	102 : 49
41600	4 : 4

Код скраћеног дељења други делимични дељеник добили смо, кад смо уз први остатак спустили шестицу. Другом остатку 4032 не дописујемо нулу, него у делиоцу изоставимо цифру 2, па делимо са 491. Цифра 2 се узима само за поправку, тј. добијеном цифром количника множи се најпре изостављена цифра делиоца, па се тако добијени резултат узме као поправка за производ из скраћеног делиоца и дотичне цифре количника.

Трећем остатку такође не дописујемо нулу, већ у делиоцу изостављамо још једну цифру, па делимо са 49. Изостављену цифру 1 употребимо за поправку.

Четвртом остатку 4 не дописујемо нулу, него у делиоцу поново изоставимо једну цифру, па делимо са 4. Изостављену цифру 9 употребимо за поправку. Иако 4 : 4 даје количник 1, ипак због поправке, коју добијамо од цифре 9, не можемо узети да је следећа цифра количника 1, већ нула. У том случају бисмо поново добили остатак 4. То би био у исто време последњи остатак. Али *чим је последњи остатак већи од половине последњег делиоца, последња цифра количника се повећа за 1.* Тако место да количник буде 1,7820, биће 1,7821.

При том се говори после завршеног *обичног дељења*: остатку 4032 не дописујем нулу, него у делиоцу изоставим једну цифру, па делим са 491: 491 у 4032 садржи се 8 пута; 8 пута 2,16, узимам **2** за поправку; 8 пута 1,8 и 2,10 и **2**,12; 8 пута **9**,72 и **1**,73 и **нула** 73; 8 пута 4,32 и 7,39 и 1,40. Остатак 102 делим са 49; 49 у 102 садржи се 2 пута; 2 пута 1,2, нема ништа за поправку; 2 пута 9,18 и **4**,22; 2 пута 4,8 и 2,10 и **0**,10; остатак 4 делимо са 4 итд. (Види горње објашњење о последњој цифри количника!)

Ако бисмо хтели скраћен количник, рецимо само на 1 децимал, тј. да количник има само две цифре, ми ћемо и у дељенику и у делиоцу такође узети само по две цифре.

$$88 : 49 = 1{,}8$$
$$39 : 4$$
$$0$$

При том се говори: 49 у 88 садржи се 1 пута; 1 пута 9,9 и 9,18; 1 пута 4,4 и 1,5 и 3,8; остатак 39 делим са 4; 4 у 39 садржи се 9 пута; 9, пута 9,81, 8 за поправку; 9 пута 4,36 и 8,44; 9 је сувише велико; пробам 8; 8 пута 9,72,7 за поправку; 8 пута 4,32 и 7,39 и 0,39.

Тражени количник на 1 децимал износи 1,8.

Напомена. — Обично се количник одреди на 1 децимал више, па се последњи децимал употреби за поправку.

Пример 2. Да се одреди на 2 децимала количник 8,7941 : 3,856.

Решење. — Најпре ћемо одредити месну вредност највише цифре количника. Кад се јединице поделе јединицама добијају се опет јединице. Највиша цифра количника претставља дакле јединице. Тражи се количник на два децимала. Ми ћемо га одредити на три децимала. Број важећих цифара у количнику биће свега 4. Узећемо и дељеник и делилац са исто толико цифара.

$$8794 : 3856 = 2{,}281$$
$$1082 : 385$$
$$311 : 38$$
$$3 : 3$$

Количник је 2,28.

Пример 3. Обим једнога круга је $297{,}^{m}3548$. Да се одреди пречник на 2 децимала.

Решење. Треба обим поделити бројем π. Број π узећемо на 4 децимала, па има да се изврши скраћено делење

$$297{,}3548 : 3{,}1416$$

на два децимала.

Увек се најпре одреди месна вредност највише цифре количника. Кад се стотине поделе јединицама, добијају се опет стотине. Али како је овде прва цифра делиоца (3) већа од прве цифре дељеника (2), то се као прва цифра количника не добијају стотине, већ десетице, тј. кад се 200 подели са 3, не добијају се стотине него десетице. Количник ће дакле имати 2 целе цифре и 3 децимала, свега 5 цифара. Толико исто цифара ћемо узети за делилац, а за дељеник једну цифру више. *Кадгод је прва цифра делиоца већа од прве цифре дељеника, у дељенику се узима једна цифра више.*

$$297\,355 : 31416 = 94{,}651$$
$$14\,611 : 3141$$
$$2\,045 : 314$$
$$160 : 31$$
$$3 : 3$$

Пречник је $94^{m}{,}65$.

Пример 4. — Да се израчуна на 3 децимала количник 0,5317 : 8,423.

Решење. — Најпре одредимо месну вредност највише цифре количника. Кад се десети поделе јединицама, добијају се опет десети. Али како је почетна цифра (8) делиоца већа од почетне важеће цифре дељеника (5), то ће највиша цифра количника претстављати стоте. Број важећих цифара у количнику биће свега три (цифре стотих, хиљадитих и десетхиљадитих), пошто ћемо количник прво одредити на 4 децимала.

Узећемо од делиоца 3 цифре, а од дељеника 4 важеће цифре.

$$5317 : 842 = 0{,}0631$$
$$265 : 84$$
$$12 : 8$$
$$4$$

Количник је 0,063.

Напомена 1. — Важеће цифре једнога броја су све цифре тога броја изузев позиционих нула, које се налазе с леве или десне стране од важећих цифара. На пр. бројеви 5,67; 56,7; 5,67; 0,567; 0,0567; 5670; 56700 имају важеће цифре 5,6 и 7.

Бројеви 5607; 5,607; 0,005607; 56,07 имају четири важеће цифре 5,6, 0 и 7.

Кад кажемо да је број људи једног одреда војске 23000, или кад кажемо да отстојање земље од сунца износи 23000 земљиних полупречника, нуле које се налазе десно у броју очевидно замењују неке цифре које нису познате или које смо занемарили. Овде су важеће цифре 2 и 3.

Напомена 2. — Треба ммати у виду да покаткад и нула на завршетку може бити важећа цифра. Ово зависи од степена тачности при мерењу. На пример 15m значи да је једна дужина мерена тачно на метре. Десиметри при том мерењу нису узети у обзир. Број 15 има с тога две важеће цифре. Али кад би дужина била мерена тачно на dm, па ако бисмо нашли резултат мерења $15^m,0$, онда број има три важеће цифре.

Тачно мерење на cm, изражено помоћу $15^m,00$ даје 4 важеће цифре.

Кад кажемо да је 0,30 приближна вредност броја $\frac{10}{33}$ на два децимала, или кад кажемо да је једна дужина приближно 30cm, цифре 3 и 0 имају се сматрати као важеће.

Напомена 3. — Рекли смо да је број важећих цифара количника и делиоца увек једнак. Број цифара дељеника или је исти као код делиоца и количника, или је за 1 већи. Ово друго наступа, кад је прва цифра делиоца већа од прве цифре дељеника. Ако су ове цифре једнаке, посматрају се друге цифре по реду итд.

Пример 5. — Да се одреди на два децимала количник
634,7648 : 2,49.

Решење. — Овде ће прва цифра количника претстављати стотине. Пошто количник треба најпре одредити на 3 децимала, то ће он имати 6 важећих цифара. Како делилац не може имати 6 важећих цифара, (нуле не смемо дописивати), то ћемо у почетку делити *обично,* па касније наставити скраћено.

$$\begin{array}{l}
63476{,}5 : 249 = 254{,}926 \\
\underline{}1367 \\
1226 \\
2305 \\
64 : 24 \\
14 : 2
\end{array}$$

Количник је 254,93.

Напомена. — Препоручљиво је за почетнике да у свима рачунима са непотпуним бројевима изврше пробу помоћу обичног рачунања.

Пример 6. Да се одреди са највећом могућом тачношћу количник 8,9875... : 2,376...

Решење. — Израчунаћемо количник на онолико децимала, колико има мање тачни делилац.

$$\begin{array}{r}
8988 : 2376 = 3{,}783 \\
1860 : 237 \phantom{= 3{,}783} \\
197 : 23 \phantom{= 3{,}783} \\
7 : 2 \phantom{= 3{,}783}
\end{array}$$

Последња цифра ни овде није поуздана. Због тога ћемо је употребити за поправку. Резултат је

3,78.

Колика је граница грешке по чл. 96?

За писмено вежбање

Следећи количници да се одреде на 2 децимала:

1. $\frac{4{,}159}{0{,}831}$ 2. $\frac{0{,}811}{5{,}8434}$ 3. $\frac{0{,}934}{8{,}432}$

4. $\frac{5{,}7285}{6{,}3419}$ 5. $\frac{2{,}3419}{29{,}584}$ 6. $\frac{0{,}0431}{0{,}4289}$

Код следећих дељења да се узму делилац и количник са по 3 важеће цифре:

7. $\frac{438{,}92}{45{,}1482}$ 8. $\frac{0{,}7468}{64{,}09}$ 9. $\frac{358{,}68}{0{,}04753}$

10. $\frac{9{,}274}{2{,}835}$ 11. $\frac{18{,}4762}{3{,}4567}$ 12. $\frac{0{,}42763}{0{,}9648}$

13. $\frac{1}{85711}$ 14. $\frac{2\,000\,000}{7{,}496}$ 15. $\frac{705580}{5877}$

У следећим примерима да се узму за делилац и количник по 4 важеће цифре:

16. $\frac{189{,}35}{19{,}455076}$ 17. $\frac{7{,}0128}{16{,}7484925}$

18. $\frac{39{,}666\ldots}{23{,}3606798}$ 19. $\frac{8{,}333\ldots}{22{,}3606798}$

20. $\frac{20}{3{,}16228}$ 21. $\frac{31}{39{,}37}$

22. $\frac{15}{3{,}873}$ 23. $\frac{99}{4{,}3749372}$

Да се одреде са највећом могућом тачношћу следећи количници:

24. $\dfrac{6,4567\ldots}{97,34\ldots}$ 25. $\dfrac{93,624\ldots}{5,278\ldots}$ 26. $\dfrac{86,52\ldots}{9,671\ldots}$

27. $\dfrac{34,56\ldots}{7,21\ldots}$ 28. $\dfrac{5753,4\ldots}{9,5634\ldots}$ 29. $\dfrac{654,73\ldots}{5,653\ldots}$

30. $\dfrac{8726_{00}}{493,572}$ 31. $\dfrac{92,687\ldots}{4,59523\ldots}$ 32. $\dfrac{0,05349\ldots}{684_{0}}$

33. $\dfrac{9,4935\ldots}{7,5\ldots}$ 34. $\dfrac{2,9463}{0,04\ldots}$ 35. $\dfrac{4865,6}{92268}$

36. Један правоугаоник површине једнога ара дугачак је $13^{m},12$. Колика је његова ширина?

37. За $7^{kg},325$ брашна плаћено је $30^{дин},75$, пошто је један kg брашна?

38. Специфична тежина бакра је 8,95. Колика је запремина једне бакарне жице, чија је тежина $20^{g},45$?

39. Један литар концентрисане сумпорне киселине тежак је $1^{kg},843$. Колико hl сумпорне киселине има 1t?

40. Један килограм ваздуха заузима простор $0^{m^3},7734$. Колико је тежак ваздух у једном балону, чија је запремина $800m^3$?

41. Специфична тежина чистог алкохола је 0,794. Колико cm^3 алкохола има 1g?

42. Полупречник земље има дужину 6370 km. Изрази ову дужину у *географским миљама* и у *врстама*. (Види у претходном чланку зад. 36!)

43. Обим земљиног меридијана има отприлике 40 милиона метара. Да се одавде одреди пречник земље (тачно на десетице).

44. Да се одреди полупречник круга, чији је обим $3^{m},528$; $98^{km},696$; $0^{km},321$; $4^{m},00$.

45. Колики пут начини једна тачка на земљином екватору за 1 секунд услед обртања земље око осовине? (Тачно на m.)

46. Колики пут пређе земља за 1 дан на њеном путу око сунца, кад је полупречник земљине путање отприлике 149 милиона километара, а време обилажења траје $365,^{дана}24222$? Колики пут пређе за 1 секунд?

47. Сунце је од земље удаљено 148 675 800 km. Светлост пређе овај пут за $8,^{mn}22$. Колики пут пређе светлост за 1 секунд? (Тачно на хиљаде.)

48. Да се израчуна $1:\pi$ на 4 децимала.

49. Колико је $1:\pi^2$ на 2 децимала?

50. $\dfrac{57,65 + 39,76}{673,34} =$ (1д) 50a. $\dfrac{7,534}{5,892 + 0,563}$ (2д)

51. $\dfrac{3,162278 \cdot 0,2236068}{28,284271}$ (3д)

52. $(3,754 + 0,8976) \cdot (3,754 - 0,8976) =$ (2д)

53. $76,36^2 - 9,7664^2 =$ (2д)

54. $19,85^2 + 2 \cdot 19,85 \cdot 6,304 + 6,304^2 =$ (2д)

55. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{5}} =$ (2д) 55a. $\pi + \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} - \sqrt{17}$ (3д)

56. $\dfrac{\pi}{e}$ (6д) 57. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ (3д)

(За број *e* види чл. 99, задатак 24 и 25!)

Најпростије рачунске радње са малим величинама

102. — Рачуни са заокругљеним бројевима могу се много упростити, кад су ти бројеви мали. Примера за ово има много у физици. Ту се у рачунима, који би били веома тешки и дугачки, може приближни резултат одмах написати, јер се производи малих бројева и њихови степени могу занемаривати. Тако на пр. ако је коефициент линеарног истезања месинга приближно

$$\alpha = 0,000019$$

тада је $\alpha^2 = 0,000\ 000\ 000\ 361.$

При једном сабирању $\alpha + \alpha^2$ нема никаквог смисла број α^2 додати броју α. Чак ни $1000\alpha^2$ нема смисла додати. То још у јачој мери важи за више степене од α.

Имајући ово у виду можемо извести следећа важна упрошћивања, која се у пракси често јављају.

103. Множење. — Ако са δ и ε означимо мале величине, онда имамо

$$(1 + \delta) \cdot (1 + \varepsilon) = 1 + \delta + \varepsilon$$

пошто се члан $\delta \cdot \varepsilon$ може занемарити.

Пример. 1,002 · 1,003 = 1,005.

Обичним множењем добија се производ 1,005006. Како чиниоци имају по 4 важеће цифре, производ са 7 важећих цифара нема никаквог смисла. Последња 3 децимална места су дакле излишна.

Знаци величина δ и ε могу бити и негативни.

Пример. $0{,}997 \cdot 1{,}001 = (1 - 0{,}003) \cdot (1 + 0{,}001) =$
$= 1 - 0{,}003 + 0{,}001 = 0{,}998.$

За писмено вежбање

1. 1,003 · 1,005; 1,012 · 1,004; 1,0006 · 1,007.
2. 1,008 · 0,996; 0,998 · 1,002; 1,016 · 0,990.
3. 0,96 · 0,97; 1,08 · 0,96; 1,07 · 0,93.
4. 1,000008 · 1,000009; $(1{,}000011)^2$; $(1{,}0000023)^2$.

104. Дељење. — Ако извршимо обично дељење

$$\frac{1}{1+\varepsilon}$$

добијамо
$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon,$$

ако смемо занемарити следеће чланове $+\varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \ldots$ (Види алгебру за IV р. стр. 16, зад. 51!)

Исто тако је $\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon.$

Пример 1. $\frac{1}{1{,}03} = 0{,}97.$

Пример 2. $\frac{1}{0{,}998} = \frac{1}{1-0{,}002} = 1 + 0{,}002 = 1{,}002.$

За писмено вежбање

1. $\frac{1}{1{,}004}$; $\frac{1}{1{,}003}$; $\frac{1}{1{,}012}$; $\frac{1}{1{,}023}$.
2. $\frac{1}{0{,}999}$; $\frac{1}{0{,}997}$; $\frac{1}{0{,}9994}$; $\frac{1}{0{,}983}$.
3. $\frac{1}{0{,}98}$; $\frac{1}{0{,}9984}$; $\frac{1}{1{,}000019}$; $\frac{1}{1{,}000008}$.
4. $\frac{1}{1{,}000012}$; $\frac{1}{1{,}999985}$; $\frac{1}{1{,}000033}$; $\frac{1}{1{,}0000099}$.

105. Степеновање — Имамо

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon,$$

ако смемо да занемаримо ε^2; слично томе је

$$(1+\varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon,$$

ако $3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ не утичу на резултат.

Пример 1. $1{,}006^2 = 1{,}012.$

Пример 2. $0{,}997^3 = (1 - 0{,}003)^3 = 1 - 3 \cdot 0{,}003 =$
$= 1 - 0{,}009 = 0{,}991.$

У опште је приближно

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n \cdot \varepsilon,$$

где ε може бити и позитиван и негативан број.

За писмено вежбање

1. $1{,}04^2$; $1{,}08^2$; $1{,}008^2$; $1{,}0007^2$.
2. $1{,}00003^2$; $1{,}00012^2$; $1{,}000029^2$; $1{,}000015^2$.
3. $0{,}98^2$; $0{,}997^2$; $0{,}0996^2$; $0{,}99993^2$.
4. $1{,}05^3$; $1{,}006^3$; $1{,}0007^3$; $1{,}00008^3$.
5. $0{,}95^3$; $0{,}991^3$; $0{,}9994^3$; $0{,}99992^3$.

106. Кореновање. — Према претходном чланку је

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon.$$

Ако из обе стране ове једначине извучемо квадратни корен, добијамо

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Исто тако је $\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$

Слично овоме добијамо

$$\sqrt[3]{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sqrt[3]{1-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Уопште

$$\sqrt[n]{1 \pm \varepsilon} = 1 \pm \frac{\varepsilon}{n}.$$

Пример 1. $\sqrt{1,014} = 1,007.$

Пример 2. $\sqrt[3]{0,997} = \sqrt[3]{1 - 0,003} = 1 - 0,001 = 0,999.$

Пример 3. $\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = \sqrt{36\left(1+\frac{1}{36}\right)}$

$$= 6\sqrt{1+\frac{1}{36}} = 6 \cdot \left(1+\frac{1}{72}\right) = 6 + \frac{1}{12} = 6,083.$$

За писмено вежбање

1. $\sqrt{1,0042}$; $\sqrt{0,94}$; $\sqrt{1,004}$; $\sqrt{1,000022}$.
2. $\sqrt{0,996}$; $\sqrt{0,9998}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{82}$.
3. $\sqrt[3]{1,015}$; $\sqrt[3]{1,0036}$; $\sqrt[3]{1,000024}$; $\sqrt[3]{217}$.
4. $\sqrt{145}$; $\sqrt{65}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt[3]{65}$; $\sqrt[3]{730}$.
5. $\sqrt{325}$; $\sqrt{1850}$; $\sqrt[3]{1001}$; $\sqrt[3]{1220}$.

Тачно рачунање са периодичним десетним разломцима

107. Сабирање периодичних десетних разломака. Ради краткоће писаћемо један периодичан разломак на пример

$$2,345345345\ldots..$$

овако $2,\dot{3}4\dot{5}$,

тј. писаћемо период једанпут, а означити тачкама изнад почетне и завршне цифре периода његову дужину.

И поред овога можемо један периодичан разломак писати на више начина. У малопређашњем периодичном разломку $2,\dot{3}4\dot{5}$ можемо узети да је период

345, или 453, или 534,

тј, можемо писати

$$2,\dot{3}4\dot{5}, \quad 2,3\dot{4}5\dot{3} \text{ или } 2,34\dot{5}3\dot{4}.$$

После овога можемо прећи на сабирање.

Пример 1. Сабрати $3,4\dot{1}\dot{2}$, $0,\dot{5}3\dot{9}$ и $8,32\dot{4}$.

Решење. — Најпре ћемо децимале тако променити да период почне са истим децималним местом, овде са трећим, код свих сабирака. Тако добијамо:

$$3,41\dot{2}\dot{1}\ ;\ 0,53\dot{9}5\dot{3}\ ;\ 8,32\dot{4}.$$

Ако сад продужимо децимале до осмог места,

3,41212121
0,53953953
8,32444444

видећемо да ће девети стубац од запете бити исти као и трећи, десети исти као и четврти, итд. Па опет петнаести стубац исти као трећи и девети, шеснаести исти као четврти и десети, итд. Видимо да ће се *ступци* понављати у периодима од шест. Збир који добијамо такође ће бити периодичан. Дужина његовог периода биће исто тако шест цифара.

Шта више види се да је број стубаца који се понавља, па према томе и број цифара периода у резултату, у ствари најмањи заједнички садржалац бројева цифара у периодима датих сабирака.

Ако се при сабирању задржимо код осмог ступца, треба ради поправке узети и девети стубац, пошто цифре овога ступца могу утицати на цифре последњег ступца. После свршеног сабирања девета цифра се изостави.

Кад горње десетне разломке саберемо, добијамо:

$$\begin{array}{r} 3,412121212 \\ 0,539539539 \\ 8,324444444 \\ \hline 12,276105195 \end{array}$$

Резултат је $12,27\dot{6}1051\dot{9}$.

Пример 2. Сабрати $2,5\dot{4}6\dot{2}$, $3,251$ и $0,34\dot{7}\dot{2}$.

Решење. — Узећемо да период почиње од четвртог децимала и радимо као у претходном примеру.

$$\begin{array}{l} 2,5462462462 \\ 3,251 \\ 0,3472727272 \\ \hline 6,1445189734 \end{array}$$

Резултат је $6,144\dot{5}1897\dot{3}$.

Напомена. — Две ствари треба увек имати у виду:

1. Збир од ма колико десетних разломака опет је десетни разломак.

2. Број цифара у периоду збира је увек н. з. с. бројева цифара у периодима појединих сабирака.

Један збир добијен на овај начин може да се напише покаткад и у простијем облику. Тако, ако су све цифре периода 9, бескрајан периодични разломак прелази у коначан.

За писмено вежбање

1. $0,\dot{3} + 0,\dot{6} + 0,1\dot{2} =$ 2. $0,\dot{6}4\dot{8} + 2,\dot{6}2\dot{1} + 0,\dot{1}0\dot{8} =$

3. $0,00\dot{5} + 0,\dot{1}\dot{8} + 0,\dot{4}\dot{2} =$ 4. $0,\dot{7}64\dot{1} + 1,\dot{1}88\dot{1} + 6,\dot{7}67\dot{1} =$

5. $2,\dot{1}88\dot{1} + 0,0\dot{8} + 3,\dot{1}\dot{6} =$ 6. $7,5\dot{0}\dot{0}\dot{1} + 0,800\dot{2}\dot{0} + 0,7\dot{1}\dot{2} =$

7. $2,1\dot{0}\dot{1} + 24,318\dot{3} + 0,12\dot{3}\dot{6} + 45,2\dot{9} + 85,1\dot{2} =$

8. $0,0\dot{3}\dot{6} + 5,015 + 0,0\dot{5}\dot{9} =$ 9. $0,\dot{6}4\dot{8} + 0,0\dot{2} + 1,006 =$

10. $193,\dot{0}9\dot{0} + 0,\dot{4}07\dot{1} + 35,13 + 76,\dot{5} =$

11. $0,\dot{6}4\dot{8} + 0,0\dot{1}\dot{6} + 3,\dot{5}\dot{6} =$ 12. $6,\dot{5}6\dot{3} + 1,\dot{5}\dot{6} + 0,0\dot{1}\dot{8} =$

13. $2,003\dot{5}\dot{8} + 0,8\dot{3}899\dot{4} + 35,1612 + 1,00\dot{6} =$

14. $32,0\dot{1}01\dot{1} + 76,0\dot{9}1\dot{4} + 5,1\dot{3}7\dot{5} + 98,86\dot{3} =$

15. $3,\dot{7}67\dot{1} + 0,0\dot{6}2\dot{1} + 0,\dot{0}1\dot{6} + 0,24 =$

108. Одузимање периодичних разломака. — При одузимању периодичних десетних разломака поступамо на исти начин, као код сабирања

Пример 1. — Да се одузме број $2,4\dot{6}21\dot{6}$ од $9,\dot{2}1\dot{4}$.

Решење. — Узећемо да код оба разломка период почне од друге цифре. У једном периоду имамо 4 цифре, у другом 3. У периоду резултата биће 12 цифара.

$$\begin{array}{r} 9,21421421421421 \\ 2,46216621662166 \\ \hline 6,75204799759255 \end{array}$$

Резултат је $6,\dot{7}52047997592\dot{5}$.

За писмено вежбање

1. $43,1\dot{5} - 9,1\dot{4} =$ 2. $20,\dot{3}\dot{1} - 17,\dot{2}\dot{5} =$

3. $6,\dot{4} - 5,\dot{5} =$ 4. $174,\dot{1} - 143,0\dot{2}\dot{9} =$

5. $18,8\dot{7}\dot{6} - 13,251 =$ 6. $32,\dot{1}8\dot{1} - 25,\dot{2}08\dot{6} =$

7. $76,23\dot{5}6\dot{4} - 5,7\dot{1}\dot{6}\dot{4} =$ 8. $39,5\dot{1} - 15,28364\dot{8}\dot{4} =$

9. $3 - 2,763210\dot{9}\dot{4} =$ 10. $36,6\dot{5}7142\dot{8} - 23,6\dot{9}\dot{1} =$

11. $3,1\dot{8}5\dot{3} - 1,6\dot{3}\dot{4} =$ 12. $3,2085625 - 1,2012\dot{5}6\dot{1} =$

13. $0,87654\dot{8}9\dot{2} - 0,354218 =$ 14. $10,\dot{1}\dot{0} - 0,3\dot{5}06\dot{1} =$

109. Множење једног периодичног разломка једним целим бројем или једним коначним децималним бројем. — Кад се један периодичан десетни разломак помножи једним целим бројем, или једним децималним бројем, добије се као резултат опет периодичан десетни разломак, са истом дужином периода.

Пример 1. Да се помножи $3,1\dot{5}3\dot{2}$ са 7.

Решење. — Као и код сабирања, ставићемо 1 цифру иза последњег места периода ради поправке.

$$\begin{array}{r} 3,1\dot{5}3\dot{2}5 \\ 7 \\ \hline 22,0727\underline{|5} \end{array}$$

Резултат је $22,0\dot{7}2\dot{7}$.

Пример 2. Да се помножи $1,8\dot{4}\dot{7}$ са 6,3185.

Решење. — Множимо редом цифрама као и у претходном примеру, само не исписујемо резултате множења цифре, коју у множенику дописујемо ради поправке, него усмено извршимо поправку.

Затим пре неголи што извршимо сабирање делимичних производа, ми сваки од њих продужимо дописивањем периода, да би збир био потпуно коректан.

$$\begin{array}{r} 1,8\dot{4}\dot{7}4 \\ 6,3185 \\ \hline 92\dot{3}\dot{7} \\ 147\dot{7}\dot{9} \\ 18\dot{4}\dot{7} \\ 55\dot{4}\dot{2} \\ 110\dot{8}\dot{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,8\dot{4}\dot{7}4 \\ 6,3185 \\ \hline 92373 \\ 1477979 \\ 1847474 \\ 55424242 \\ 1108484848 \\ \hline 1167326916 \end{array}$$

Број децимала до завршетка првог периода мора бити $3 + 4 = 7$. Због тога имамо да одвојимо 7 места. Тражени производ је

$$11,67326\dot{9}\dot{1}.$$

За писмено вежбање

1. Помножи $4,\dot{6}$ са 4,6,8.
2. $0,\dot{2}\dot{4}$ помножи са 2,3,5,7.
3. $1,0\dot{8} \cdot 365 =$
4. $7,36\dot{7}\dot{4} \cdot 560 =$
5. $0,00\dot{7}0\dot{4} \cdot 834 =$
6. $0,008\dot{3}7\dot{6} \cdot 762 =$
7. $0,52\dot{3}80\dot{9} \cdot 7,62 =$
8. $0,764\dot{3}2\dot{1} \cdot 5,625 =$
9. $3,\dot{0}9\dot{7} \cdot 0,0061 =$
10. $6,34\dot{2}87 \cdot 5,01723 =$
11. $0,0\dot{3}2147\dot{2} \cdot 0,00182 =$
12. $45,620\dot{1}\dot{8} \cdot 28,31 =$

110. Дељење периодичног десетног разломка целим или коначним децималним бројем. — Да бисмо поделили један периодичан десетни разломак целим или коначним децималним бројем, поступамо као при обичном дељењу, само уместо да остацима дописујемо нуле, ми дописујемо редом цифре периода.

Пример 1. $15,7\dot{6}20\dot{3} : 5$

Решење. $15,7620362036203\ldots : 5 = 3,1524072407240\ldots$

Количник је $3,1\dot{5}240\dot{7}$

Пример 2. $38,0\dot{6}9\dot{4} : 0,025 =$

Решење $38069,469469\ldots : 25 = 1522,778$

```
130
 56
  69
  194
   196
    219
     19
```

Количник је $1522,\dot{7}7\dot{8}$.

За писмено вежбање

1. $0,\dot{4} : 4;8;12$
2. $0,332\dot{5} : 5;25;125.$
3. $37,\dot{0}8\dot{7} : 5;9;45.$
4. $0,10\dot{1}0\dot{1} : 18;\ 0,00036.$
5. $0,2\dot{0}0\dot{1} : 1001;\ 100,01;\ 1,001$
6. $20,13\dot{9}7\dot{2} : 42,1.$
7. $645,75367\dot{3}\dot{6} : 14,155$
8. $31,8235520\dot{6}3\dot{9} : 10,03446.$

111. Множење и дељење периодичним десетним разломком. — Кад је делилац периодичан десетни разломак, и кад су и множеник и множилац оба периодични, морамо их претворити у обичне разломке, ако желимо да добијемо тачне резултате.

Пример 1. Да се помножи $0,\dot{3}$ са $1,\dot{0}\dot{6}$

Решење. $0,\dot{3} \cdot 1,\dot{0}\dot{6} = \frac{3}{9} \cdot 1\frac{6}{99} = \frac{1}{3} \cdot \frac{105}{99} = \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{33} = \frac{35}{99} =$

$= 0,\dot{3}\dot{5}.$

Пример 2. Да се одреди количник $0,\dot{3} : 1,\dot{0}\dot{6}$.

Решење. $0,\dot{3} : 1,\dot{0}\dot{6} = \frac{3}{9} : 1\frac{6}{99} = \frac{1}{3} : \frac{105}{99} = \frac{1}{3} \cdot \frac{33}{35} =$

$= \frac{11}{35} = 0,3\dot{1}4285\dot{7}.$

За писмено вежбање

1. $0,\dot{6} : 0,\dot{7} =$
2. $0,0\dot{5}\dot{4} : 00\dot{2} =$
3. $0,01\dot{8} : 0,0\dot{3} =$
4. $0,0\dot{8}9 \cdot 0,02\dot{8} =$
5. $0,\dot{5} \cdot 0,\dot{4} =$
6. $0,00\dot{0}\dot{9} : 0,0\dot{9}0\dot{9} =$
7. $0,000\dot{6} : 1,8\dot{7} =$
8. $6,8\dot{3}5\dot{1} \cdot 0,\dot{7} =$
9. $0,3\dot{9}3611\dot{7} : 0,\dot{1}\dot{8} =$
10. $0,01\dot{3}72\dot{6} : 0,33\dot{2}\dot{7}$
11. $0,0000\dot{1}\dot{8} : 0,00\dot{5}0\dot{4} =$

ДЕО ДРУГИ

ГЛАВА IV

Квадратне једначине

112. Дефиниција. — Ако је у једној једначини највиши степен непознате њен квадрат, та једначина зове се **квадратна једначина,** или **једначина другог степена.** Такве су на пр. једначине:

$$x^2 + 4x - 6 = 0$$
$$4 - 18y = 3y^2$$
$$5x^2 - 7 - 9x = mx^2 + 4$$
$$z^2 - 9 = 0 \text{ итд.}$$

113. Најчешће се квадратна једначина уређује по падајућим степенима непознате, тако да десна страна буде једнака нули. У том случају горње једначине могу се овако уредити:

$$x^2 + 4x - 6 = 0$$
$$-3y^2 - 18y + 4 = 0$$
$$(5 - m)x^2 - 9x - 11 = 0$$
$$z^2 - 9 = 0.$$

114. Општа квадратна једначина. — Кад се квадратна једначина уреди по падајућим степенима од x, она може увек добити облик

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где су a, b и c ма какви стварни бројеви или алгебарски изрази. Једино a не сме бити једнако нули, пошто би се у том случају квадратна једначина свела на једначину I степена.

Бројеви a, b и c зову се једним именом *коефицијенти* једначине.

Овакав облик квадратне једначине зове се њен **општи облик**, или кажемо једначина

$$ax^2 + bx + c = 0$$

је **општа квадратна једначина** или **општа једначина другог степена**.

Њена лева страна, као што видимо, има три члана. Први члан ax^2 зовемо *квадратни члан*, други bx *линеарни*, а трећи c стални или *независни члан*.

Трином $ax^2 + bx + c$ зовемо *квадратни трином* једначине, или просто *квадратни трином*.

Чисте квадратне једначине

115. — У једначини

$$ax^2 + bx + c = 0$$

могу b и c бити једнаки нули. Тако ако је

$$b = 0$$

једначина добија облик

$$ax^2 + c = 0.$$

Таква једначина зове се *чиста квадратна једначина*. Она је и најлакша за решавање.

116. — Узмимо један пример. Неко је $a = 1$, $c = -9$. Тада ће чиста квадратна једначина добити облик

$$x^2 - 9 = 0 \qquad (1)$$

или

$$x^2 = 9.$$

Ова једначина има два решења $x_1 = +3$ и $x_2 = -3$. Јер кад сваку од ових вредности ставимо место x једначина (1) ће бити идентички задовољена. И кад смо графички претставили функцију

$$y = x^2$$

видели смо да ординати 9 одговарају две апцисе $x_1 = +3$ и $x_2 = -3$.

Решења једначине $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$ зову се и *корени* једначине.

117. — Слично овоме ако посматрамо једначину

$$x^2 = m^2,$$

имаћемо два решења или два корена

$$x_1 = m$$
$$x_2 = -m,$$

тако да у општем случају имамо:

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$
$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{или} \quad -\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

што се пише и $\quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

и изговара плус или минус кв. корен из $-\frac{c}{a}$,

или још $\quad x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Пример 1. $25x^2 - 16 = 0.$

Решење. $25x^2 = 16$

$$x^2 = \frac{16}{26}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$x = \pm\frac{4}{5}$$

$$x_1 = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = -\frac{4}{5}.$$

Напомена. — Неко се може питати зашто при извлачењу квадратног корена из обе стране не стављамо знаке $\pm$ испред оба квадратна корена, тј. зашто не пишемо

$$\pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

или

$$\pm x = \pm\frac{4}{5}.$$

Међутим пробањем се можемо уверити, да и кад тако поступимо, долазимо до истих резултата. Могу да наступе четири случаја, четири комбинације.

Ако на обема странама узмемо исте знаке, тј. ако ставимо

$$+x = +\frac{4}{5}$$

$$-x = -\frac{4}{5}$$

у оба случаја добијамо исти резултат

$$x = \frac{4}{5}.$$

Ако на левој страни оставимо негативан знак, а на десној позитиван, или на левој позитиван, а на десној негативан, имаћемо

$$-x = +\frac{4}{5}$$

$$+x = -\frac{4}{5}.$$

Ова оба случаја дају исти резултат

$$x = -\frac{4}{5}.$$

Дакле излишно је стављати знак $\pm$ и на левој страни.

Пример 2. $x^2 - 3 = 0.$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

$$x_1 = 1{,}73\ldots$$

$$x_2 = -1{,}73\ldots$$

Овде је корен ирационалан број. Треба га приближно одредити на известан број децимала, обично на два децимала.

Пример 3. $x^2 + 4 = 0.$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

У овом случају корени су имагинарни.

За усмено вежбање

Решити следеће једначине:

1. $x^2 = 81$; $x^2 = 169$; $x^2 = 324$; $x^2 = 625$; $x^2 = 2{,}25$.
2. $x^2 = \frac{289}{400}$; $x^2 = 0{,}01$; $x^2 = 2\frac{14}{25}$; $x^2 = 0{,}0001$.
3. $x^2 = 0{,}0016$; $x^2 = 0{,}000121$; $x^2 = 0{,}000004$.
4. $x^2 = 9^4$; $x^2 = 3^2$; $x^2 = 2^{-10}$; $x^2 = 8^{\frac{2}{3}}$.
5. $2x^2 = 98$; $5x^2 = 180$; $0{,}1x^2 = 6{,}4$; $0{,}01x^2 = 1{,}44$.
6. $\frac{x^2}{30} = 120$; $\frac{5}{8}x^2 = 40$; $\frac{2}{3}x^2 = \frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}x^2 = \frac{27}{4}$.

7. $\frac{a}{b}x^2 = \frac{b^3}{a^3}$; $11x^2 = \frac{396}{25}$; $0{,}5x^2 = 3{,}125$; $0{,}5x^2 = 2{,}205$.

8. $3x^2 + 2 = 50$; $6x^2 + 5x^2 = 704$; $12x^2 - 5 = 4x^2 + 3$.

9. $3(x^2 - 1) = 45$; $100 = 92 + \frac{9x^2}{2}$; $(x-4)(x+4) = 9$.

10. $x = \frac{36}{x}$; $25x = \frac{1}{x}$; $\frac{9x}{8} = \frac{50}{x}$; $(3x)^2 + (5x)^2 = 136$.

11. $x^2 = x$; $(x - 3{,}5) \cdot (x + 3{,}5) = 8$; $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}$.

12. $a^2 + b^2 = 4x^2 - 2ab$; $a^2 - x^2 = 2ab - b^2$; $9a^2 - 4x^2 = 6ab - b^2$.

13. $3 : x = x : 12$; $(x - 2) : 7 = 3 : (x + 2)$.

14. $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 50$; $40bc + 9a^2x^2 = 16b^2 + 25c^2$.

15. $(x - 6)^2 = 0$. **Напомена**. — Решење ове једначине $x = 6$ показује да она има само један корен. Међутим узима се да и овде једначина има два корена, па кажемо једначина има *два једнака корена*, или један *двоструки корен*.

Потпуна квадратна једначина

118. — У потпуној квадратној једначини постоји и квадратни члан и линеарни члан. Такве једначине решаваћемо на три разна начина.

Први начин. Растављањем квадратног тринома на чиниоце. —

Пример 1. Ако је у једначини

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$c = 0,$$

она добија облик $\qquad ax^2 + bx = 0.$

Леву страну можемо написати у облику

$$x\,(ax + b).$$

Производ на левој страни биће једнак нули, ако је $x = 0$, јер је

$$0 \cdot (ax + b) = 0,$$

или ако је $ax + b = 0$, јер је

$$x \cdot 0 = 0,$$

тј. *да би један производ био једнак нули, мора један чинилац бити једнак нули.* Дакле решења горње једначине добијамо, кад ставимо да је

$$x = 0$$

$$ax + b = 0.$$

Од квадратне једначине добили смо две линеарне једначине. Кажемо квадратна једначина распала се у две линеарне једначине.

Корени су:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Пример 2. $x^2 - 4 = 0$. Ову квадратну једначину можемо решити растављањем леве стране, разлике квадрата, на чиниоце:

$$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0.$$

Сад да би производ на левој страни био једнак нули, треба један чинилац да буде једнак нули, дакле

или је $x - 2 = 0$

или $\quad x + 2 = 0.$

У првом случају имамо

$$x_1 = 2,$$

у другом $\quad x_2 = -2.$

Пример 3. Може ли овај метод да се примени и на једначину

$$(x - 1) \cdot (x + 4) = 0?$$

Који су овде корени једначине?

Пример 4. Можемо ли исти метод применити и на једначину

$$x^2 + 5x + 6 = 0?$$

Треба знати раставити на чиниоце израз

$$x^2 + 5x + 6.$$

Ми смо ово растављање учили у Алгебри за V р. стр. 30. Тамо смо научили да растављамо на чиниоце квадратни трином

$$x^2 + px + q,$$

кад је q производ два броја, а p алгебарски збир та два броја.

У датом примеру $x^2 + 5x + 6$

$$q = 6 = 2 \cdot 3$$

$$p = 5 = 2 + 3,$$

па је $$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3),$$

те се дата једначина може да напише у облику

$$(x + 2) \cdot (x + 3) = 0.$$

Ова једначина се распада у две линеарне једначине

$$x + 2 = 0$$

$$x + 3 = 0,$$

чија су решења $x_1 = -2$

$$x_2 = -3.$$

Ово су разуме се корени квадратне једначине

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Ученик да изврши пробу!

Изрази $(x + 2)$ и $(x + 3)$ чиниоци квадратног тринома $x^2 + 5x + 6$ зову се још и *корени чиниоци*. Њихов општи облик је

$$x - x_1 \text{ и } x - x_2$$

где су x_1 и x_2 корени квадратне једначине.

119. Нормалан облик квадратне једначине. — Ако у општој квадратној једначини

$$ax^2 + bx + c = 0$$

поделимо обе стране са a, добићемо

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \qquad (1)$$

И ако ради лакшег писања ставимо

$$\frac{b}{a} = p$$

$$\frac{c}{a} = q$$

једначина (1) добија облик

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ово је *нормалан облик* квадратне једначине. Кад је квадратна једначина написана у овом облику, она је врло згодна за решавање и за разна испитивања.

Кад хоћемо квадратну једначину да решавамо растављањем на чиниоце, треба увек да је доведемо на нормалан облик. При том треба најпре посматрати члан q.

За усмено вежбање

1. $(x - 2) \cdot (x - 3 = 0$ 2. $(x - 4)(x + 4) = 0$
3. $(x - 5)(x - 5) = 0$ 4. $x \cdot (x - 5) = 0$
5. $(x - a)(x - b) = 0$ 6. $(x - 2a) \cdot (x + 3b) = 0$
7. $x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ 8. $\left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$
9. $\left(x - \frac{a}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{b}{3}\right) = 0$ 10. $[x + (a + b)]\,[x - (a - b)] = 0$
11. $[x - (2a + 3b)]\,[x - (3b - 2a)] = 0$ 12. $(5x - 1)(x + 1) = 0$
13. $(4x - 6) \cdot (2x + 3) = 0$ 14. $(ax + b) \cdot (ax - b) = 0$
15. $x^2 - 6x + 9 = 0$ 16. $x^2 + 8x + 16 = 0$
17. $4x^2 - 12x + 8 = 0$ 18. $x^2 - 7x + 12 = 0$
19. $x^2 - 7x + 10 = 0$ 20. $x^2 - 7x - 8 = 0$
21. $x^2 - 11x + 18 = 0$ 22. $x^2 - 9x + 18 = 0$
23. $x^2 - 19x + 18 = 0$ 24. $x^2 - 3x + 2 = 0$
25. $x^2 + 4x + 4 = 0$ 26. $x^2 + 4x - 5 = 0$
27. $x^2 - 8x + 15 = 0$ 28. $x^2 - 2x - 15 = 0$
29. $x^2 - x - 2 = 0$ 30. $(x - 2)^2 \cdot (x - 5) = 0$
31. $x(x + 6)(x - 7) = 0$ 32. $x^2(x - 10) = 0$
33. $x(x + 2) \cdot (4x - 9) = 0$
34. $19(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$
35. $ab(2x - 1)(3x + 1)(mx + n)(mx - n) = 0$
36. $(x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$ 37. $x - 8 = x(x - 8)$

Напомена. — У овој последњој једначини можемо обе стране поделити са $(x - 8)$, па је један корен једначине

$x = 1$. Али ако ставимо $x - 8 = 0$, једначина је такође задовољена јер је $0 = x \cdot 0$. Тако добијамо још једно решење $x_2 = 8$.

Уопште кад је могућно обе стране једначине поделити једним изразом $(ax + b)$, можемо ставити да је тај израз једнак нули и одатле добити једно решење једначине.

Још један *пример*: $3x(3x - 4) - 5(3x - 4) = 0$. Пошто можемо поделити са $(3x - 4)$, можемо одмах ставити

$$3x - 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}.$$

После деобе са $(3x - 4)$ горња једначина постаје

$$3x - 5 = 0$$

и одатле $$x_2 = \frac{5}{3}.$$

За писмено вежбање

1. $x^2 + 16x + 15 = 0$
2. $40 = 3x + x^2$
3. $x^2 + 225 = 30x$
4. $103x = x^2 + 102$
5. $x(x - 4) = 5$
6. $x^2 = 4(x + 8)$
7. $x^2 - 4x = 4(x - 4)$
8. $4x(x + 1) + 1 = 0$
9. $x + \frac{1}{x} = 2$
10. $x - \frac{9}{2} + \frac{2}{x} = 0$
11. $x^2 - 3{,}12x + 0{,}36 = 0$
12. $x - 1 = \frac{2}{x}$
13. $2x^2 + \frac{13}{2}x = 6$
14. $(2x - 1)(3x + 1) = 11$
15. $13x^2 - 6x - 7 = 0$
16. $150x^2 = 299x + 2$
17. $(5x - 3)(3x + 1) = 1$
18. $3(2x - 7) - \frac{2}{x}(2x - 7) = 0$
19. $x + 25 = 70x^2$
20. $9x^2 = 18x + 16$
21. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{35}$

220. Други начин. Решавање квадратних једначина образовањем потпуног квадрата. —

Пример 1. $$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Ако стални члан пребацимо на десну страну добијамо:

$$x^2 - 6x = -8.$$

Сад треба леву страну $x^2 - 6x$ допунити да постане потпун квадрат.

Ако обема странама додамо по 3^2, тј. **квадрат половине коефициента линеарног члана** $\left(\frac{6}{2} = 3\right)$, добијамо

$$x^2 - 6x + 3^2 = -8 + 9.$$

Тако је лева страна једначине постала потпун квадрат, па имамо

$$(x - 3)^2 = 1.$$

Даље је
$$x - 3 = \pm 1$$
$$x = 3 \pm 1$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 2.$$

Напомена.— И овде није потребно стављати знак $\pm$ испред $(x - 3)$, јер иако га ставимо, добијамо исти резултат.

Пример 2. $$(x - 1)(x + 1) = \frac{7x}{12}.$$

Пошто извршимо множење на левој страни, једначина постаје

$$x^2 - 1 = \frac{7x}{12},$$

или кад уредимо $x^2 - \frac{7x}{12} = 1$.

Ако обема странама додамо *квадрат половине коефицијента линеарног члана* $\left(\frac{7}{24}\right)$ добијамо

$$x^2 - \frac{7}{12}x + \left(\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576}$$

или $$\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 = \frac{576 + 49}{576} = \frac{625}{576}.$$

$$x - \frac{7}{24} = \pm \frac{25}{24}$$

$$x_1 = \frac{7}{24} + \frac{25}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{7}{24} - \frac{25}{24} = \frac{-18}{24} = \frac{-3}{4}.$$

За усмено вежбање

Следећи изрази да се допуне до потпуног квадрата:

1. $x^2 - 2ax$; $x^2 + 2ax$; $x^2 - 4x$; $x^2 + 8x$.
2. $x^2 + 3x$; $x^2 - 5x$; $x^2 + ax$; $x^2 - px$.
3. $x^2 + \frac{1}{2}x$; $x^2 - \frac{1}{3}x$; $x^2 + \frac{a}{6}x$; $x^2 - 5ax$.

За писмено вежбање

Пре него што се приступи решавању, једначину треба довести на нормалан облик

$$x^2 + px + q = 0.$$

1. $x^2 - 2x = 24$ 2. $x^2 - 4x = 32$
3. $x^2 - 6x = 40$ 4. $x^2 - 318x = 35 - 352$
5. $x^2 + 11x - 152 = 0$ 6. $x^2 + 51x + 50 = 0$
7. $x^2 - 2\frac{3}{4}x + 1\frac{7}{8} = 0$ 8. $x^2 + 6\frac{1}{10}x = 10\frac{1}{2}$
9. $6x^2 = 2 - x$ 10. $1 - 26x^2 = 11x$
11. $x + 1 = 156x^2$ 12. $5x^2 = 4x + 1$
13. $3x^2 + 10 = 17x$ 14. $7x^2 + 32x = 15$
15. $2(x^2 + 1) - 5x = 0$ 16. $3(x - 1)(x + 1) = 8x$
17. $9\frac{3}{5}x - 21\frac{15}{16} = x^2$ 18. $x^2 = 1\frac{1}{2}x + 3\frac{7}{9}$
19. $x^2 - 0{,}8x - 9{,}45 = 0$ 20. $x^2 - 0{,}07x + 0{,}0012 = 0$
21. $x^2 + 6, 64x + 10{,}3335 = 0$ 22. $x^2 - 0{,}333x - 0{,}056088 = 0$
23. $\frac{2}{3x-3} - \frac{3}{2x+1} = \frac{1}{15}$ 24. $\frac{x(x-1)}{1-3x} + \frac{2x^2}{1-3x} = 1 + 3x$

121. Трећи начин. Решавање квадратних једначина помоћу обрасца. — Узмимо да решимо општу квадратну једначину

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Најпре пребацимо стални члан на десну страну

$$ax^2 + bx = -c.$$

Затим поделимо обе стране са a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Леву страну употпунимо до потпуног квадрата додавањем квадрата половине коефицијента линеарног члана

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ако извучемо квадратни корен из обе стране, добијамо

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

или

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Овај образац омогућује нам да одредимо оба корена квадратне једначине помоћу коефицијената. Он може да се употреби за решавање сваке квадратне једначине.

При том још могу наступити три случаја:

1. $b^2 - 4ac < 0$. У том случају $\sqrt{b^2 - 4ac}$ је имагинаран број, па кажемо да квадратна једначина нема стварних корена.

2. $b^2 - 4ac = 0$. Тада је решење једначине

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Једначина има само један корен. Али је усвојено да се у том случају каже једначина има *два једнака корена*, или једначина има *двоструки корен*.

3. $b^2 - 4ac > 0$. Једначина има два различита корена

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Израз $b^2 - 4ac$ зовемо *дискриминанта* квадратне једначине. Обично се бележи са D тј. пише се

$$D = b^2 - 4ac.$$

Пример 1. $5x^2 - 3x + 2 = 0.$

Решење. Дискриминанта је

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 40 < 0.$$

Корени једначине су имагинарни. Не треба их ни тражити.

Пример 2. $x^2 - 8x + 16 = 0.$

Решење. $D = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0.$

Једначина има два једнака корена.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 4.$$

Пример 3. $12x^2 - 17x + 6 = 0.$

Решење. $D = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \cdot 12 \cdot 6 = 289 -$
$- 288 > 0.$

$$x = \frac{17 \pm 1}{24}$$

$$x_1 = \frac{17 + 1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{17 - 1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Пример 4. $6x^2 + 7x - 3 = 0.$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{12} = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}.$$

Пример 5. $8(16 - x) = x^2.$

Кад извршимо множење и све чланове пренесемо на леву страну имамо:

$$-x^2 - 8x + 128 = 0.$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 512}}{-2}$$

$$x = \frac{8 \pm 24}{-2}$$

$$x_1 = \frac{8 + 24}{-2} = \frac{32}{-2} = -16$$

$$x_2 = \frac{8 - 24}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8.$$

Пример 6. $6x^2 - (3a + 2b)x + ab = 0.$

$$x = \frac{3a + 2b \pm \sqrt{9a^2 + 12ab + 4b^2 - 24ab}}{12}$$

$$x = \frac{3a + 2b \pm (3a - 2b)}{12}$$

$$x_1 = \frac{3a + 2b + 3a - 2b}{12} = \frac{6a}{12} = \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{3a + 2b - 3a + 2b}{12} = \frac{4b}{12} = \frac{b}{3}.$$

Пример 7. $\frac{3x + 1}{4x - 6} + \frac{7x + 2}{6x + 9} = \frac{8x^2 - 3x + 3}{4x^2 - 9}$ (1)

Н. з. с. за све именице је $2 \cdot 3 \cdot (2x+3)(2x-3)$. Њиме треба помножити леву и десну страну једначине. При том, да не бисмо множили нулом, морамо унапред узети да несме бити

$$2x+3=0$$

нити $$2x-3=0,$$

тј. не сме бити $$x=-\frac{3}{2}$$

нити $$x=\frac{3}{2}.$$

Кад извршимо назначено множење и уредимо једначину, добијамо

$$-2x^2+17x-21=0 \qquad (2)$$

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{289-168}}{-4}$$

$$x=\frac{-17\pm 11}{-4}$$

$$x_1=\frac{-17+11}{-4}=\frac{-6}{-4}=+\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-17-11}{-4}=\frac{-28}{-4}=+7.$$

Према ономе што смо у почетку рекли, $+\frac{3}{2}$ не могу бити корен дате једначине (1), иако је овај број корен једначине (2).

Пример 8. $\sqrt{x+6}-\sqrt{3x-5}=\sqrt{2x-5}.$

Ако обе стране дигнемо на квадрат, добијамо

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(3x-5)}+3x-5=2x-5$$

$$2x+6=2\sqrt{3x^2+13x-30}$$

$$x+3=\sqrt{3x^2+13x-30}$$

$$x^2+6x+9=3x^2+13x-30$$

$$-2x^2-7x+39=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+312}}{-4}$$

$$x=\frac{7\pm 19}{-4}$$

$$x_1=\frac{7+19}{-4}=\frac{26}{-4}=-\frac{13}{2}$$

$$x_2=\frac{7-19}{-4}=\frac{-12}{-4}=3.$$

Пример 9. $3\sqrt{\frac{x-5}{x+3}}+2\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=7$

Ставимо $$\sqrt{\frac{x-5}{x+3}}=y! \qquad (1)$$

Тада горња једначина постаје

$$3y+\frac{2}{y}=7$$

или $$3y^2-7y+2=0.$$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}$$

$$y=\frac{7\pm 5}{6}$$

$$y_1=\frac{12}{6}=2$$

$$y_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Ако ове вредности сменимо у једначини (1) добијамо:

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+3}}=2$$

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+3}}=\frac{1}{3}.$$

Решењем ових једначина добијамо корене првобитне једначине:

$$x_1 = -\frac{17}{3}$$

$$x_2 = 6.$$

Напомена 1. — Образац

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

може да се упрости, кад је b паран број. Ако ставимо

$$b = 2b',$$

горњи образац постаје

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Као што видимо и дискриминанта $b^2 - 4ac$ добија простији облик $b'^2 - ac$.

Пример. $\qquad 8x^2 - 14x + 3 = 0.$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{8}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{8}$$

$$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Напомена 2. — Слично претходном може се извести образац за квадратну једначину

$$x^2 + px + q = 0.$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (2)$$

$$\text{или} \qquad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \qquad (2a)$$

Образац (1) је згоднији за употребу. Образац (2) треба користити само кад је p паран број. Ако ставимо

$$p = 2p',$$

образац (2) постаје

$$x = -p' \pm \sqrt{p'^2 - q}.$$

Пример. $\qquad x^2 - 6x + 8 = 0.$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$x = 3 \pm 1.$$

Дискусија квадратне једначине

122. Још једна веза између корена и коефицнјента квадратне једначине. — Кад хоћемо да решимо квадратну једначину

$$ax^2 + bx + c = 0$$

растављањем на чиниоце, ми најпре извршимо деобу са a и добијемо облик

$$x^2 + px + q = 0.$$

Затим потражимо чиниоце члана q и пробамо да ли је збир чинилаца једнак броју p. На пример

$$x^2 + 10x + 24 = 0.$$

Чиниоци броја 24 јесу 1 и 24, 2 и 12, 3 и 8,4 и 6. Пошто је $q = 24$, позитиван број, то су чиниоци једнако означени, или оба позитивна или оба негативна. Треба наћи оне чији је збир $p = +10$. То су очевидно бројеви $+4$ и $+6$. Према теме горња једначина постаје

$$(x + 4)(x + 6) = 0.$$

Корени једначине су $x_1 = -4$, $x_2 = -6$.

Ако образујемо производ корена и њихов збир биће:

$$x_1 \cdot x_2 = (-4) \cdot (-6) = 24$$

$$x_1 + x_2 = (-4) + (-6) = -10,$$

или у опште $\qquad x_1 \cdot x_2 = q$

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Одавде имамо врло **важно правило, Виетово правило: у једначини $x^2 + px + q = 0$ производ корена једнак је сталном члану, а њихов збир негативном коефициенту линеарног члана.**

Ако је једначина дата у општем облику

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

онда је $\qquad q = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b}{a},$

па је $\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

До ових резултата смо могли доћи и непосредно из образаца за корене:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ако саберемо леве и десне стране горњих једначина, добићемо

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Ако их помножимо, добијамо

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

123. Образовање квадратне једначине, кад су корени познати. На основу ових веза између корена и коефицијената можемо решити задатак: *да се образује квадратна једначина, кад су познати њени корени.*

Пример 1. Нека су корени квадратне једначине $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, да се напише једначина.

Решење. Тражена квадратна једначина, као и свака друга, има облик

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где је $\qquad a$ произвољно

$$b = -a \cdot (x_1 + x_2)$$

$$c = a \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Коефициент a је произвољан и треба га бирати тако, да једначина буде ослобођена разломака. Овде ће бити $a = 12$.

$$b = -12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) = -4 + 9 = 5,$$

$$c = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -3.$$

Једначина је

$$12x^2 + 5x - 3 = 0.$$

Ученик да провери решавањем једначине!

Пример 2. Корени $x_1 = 5$, $x_2 = -8$.

Решење. Тражена једначина је облика

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$a =$ произвољно $= 1.$

$$b = -a \cdot (x_1 + x_2) = -(5 - 8) = 3$$

$$c = a \cdot x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-8) = -40.$$

Једначина је облика:

$$x^2 + 3x - 40 = 0.$$

Пример 3. Корени $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}.$

Решење. Једначина је облика

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$a = 1$$

$$b = -(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = -2$$

$$c = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1.$$

Тражена једначина је облика

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Ученик да изврши пробу решавањем!

Пример 4. $x_1 = 2 + 5i,\ x_2 = 2 - 5i.$

Једначина је облика

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$a = 1$$

$$b = -(2 + 5i + 2 - 5i) = -4$$

$$c = (2 + 5i)(2 - 5i) = 4 + 25 = 29.$$

Тражена једначина има облик

$$x^2 - 4x + 29 = 0.$$

Проба решавањем!

124. Распознавање корена на самој једначини. — Код сваке квадратне једначине најпре се интересујемо да ли су корени стварни или уображени.

Корени ће бити стварни ако је дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac > 0.$$

Биће имагинарни ако је

$$D = b^2 - 4ac < 0.$$

Биће стварни и једнаки ако је $D = b^2 - 4ac = 0.$

Посматрањем коефициената можемо закључити и о знаку корена квадратне једначине.

Ако је производ корена негативан, тј. ако је

$$\frac{c}{a} < 0$$

корени су различито означени.

Ако је $$\frac{c}{a} > 0$$

корени су једнако означени. Остаје још у овом другом случају да видимо да ли су позитивни или негативни. Због тога образујемо њихов збир

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

И, очевидно, ако је тај збир позитиван, корени су позитивни, ако је збир негативан, корени су негативни.

Пример 1. $15x^2 + 32x - 7 = 0.$

Дискримината је

$$D = b^2 - 4ac = 1024 + 420 > 0.$$

Корени су стварни.

Производ корена означићемо са P.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-7}{15} < 0.$$

Корени су различито означени.

Увери се решавањем једначине!

Пример 2. $2x^2 - 3x + 1 = 0.$

$D = 9 - 8 > 0$, корени су стварни.

$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$, корени су једнако означени.

Збир корена означићемо са S.

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} > 0$, корени су позитивни.

Напомена.— Кад је производ корена негативан, тј. кад је

$$\frac{c}{a} < 0,$$

онда је и $ac < 0,$

па је и $4ac < 0,$

а $-4ac > 0.$

С тога кадгод је $\frac{c}{a} < 0$

дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ *је позитивна.*

Па можемо рећи: *једначина* $ax^2 + bx + c = 0$ *увек има стварне корене, ако су први и трећи коефицијент, тј. ако су* a *и* c *различито означени.*

Пример: $3x^2 - 4x - 5 = 0.$

Ова једначина има стварне корене.

125. Случај кад је a једнако нули. — Досада смо узимали да је у квадратној једначини први коефициент a увек различит од нуле. Рекли смо још у почетку да a не сме бити нула, јер онда и немамо квадратну једначину. Ипак од интереса је да видимо шта ће бити кад пустимо да a бива врло мало, да тежи нули. Најпре ћемо посматрати један пример:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Корени ове једначине су

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2.$$

Овде је $a = 1$. Узмимо да сад a буде 0,001. Једначина тада гласи

$$0{,}001x - x - 6 = 0.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 0{,}024}}{0{,}002}$$

$$x_1 = \frac{1 + 1{,}011928}{0{,}002} = 1\,005{,}96$$

$$x_2 = \frac{1 - 1{,}011928}{0{,}002} = -5{,}96.$$

Видимо да је један корен (x_2) врло близу решењу једначине I ст. ($-x - 6 = 0$), која се добија кад се у датој једначини изостави члан са x^2, други корен је врло велики.

Ако бисмо узели једначину

$$0{,}000\,001x^2 - x - 6 = 0,$$

где је a још мање, нашли бисмо корене

$$x_1 = 1000005{,}97$$

$$x_2 = -5{,}97.$$

Корен x_1 бива све већи и већи, корен x_2 све више се приближује броју -6.

Тако долазимо на мисао: *кад коефицијент a тежи нули, а b остане различито од нуле, један корен бескрајно расте, а други се примиче решењу једначине*

$$bx + c = 0.$$

До овог резултата могли смо доћи и користећи познату везу између корена и коефицијената.

Посматрамо једначину

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Ако a постане нула, а b остане различито од нуле, апсолутна вредност збира $x_1 + x_2$ постаје бескрајно велика (тј. у толико већа по апсолутној вредности, уколико је a мање).

Према томе бар један од корена постаје врло велики по апсолутној вредности. Ми тврдимо да је један корен бескрајно велики, али не види се сигурно да и други корен није бескрајно велики. Да би смо видели да је у овом случају само један корен бескрајно велики, узећемо у посматрање и другу везу корена и коефицијената:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

па одбацујући случај кад је $c = 0$, у ком случају је очевидно један корен нула, образујемо количник из збира и производа корена

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b}{c},$$

тј.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}.$$

Ако би оба корена била бескрајно велика, оба сабирка на левој страни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ би била врло мала, па и њихов збир такође врло мали, тежио би нули. Али на десној страни имамо израз $-\frac{b}{c}$ који није нула. Значи само један корен може бити бескрајно велики. Ако је то x_1 онда је $\frac{1}{x_1}$ утолико мање, уколико је и a мање. Имамо

$$\frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c} - \frac{1}{x_1}.$$

Дакле кад a бива врло мало, $\frac{1}{x_2}$ постаје по вредности врло блиско изразу $\frac{-b}{c}$, тј. x_2 приближава се вредности $-\frac{c}{b}$ уколико се a приближава нули. Кажемо дакле за $a=0$,

$$x_2 = -\frac{c}{b},\ x_1 = \infty.$$

126. Случај кад је $a=0$ и $b=0$. — У случају кад је $b=0$ у исто време кад је и $a=0$, једначина се своди на

$$c=0,$$

и ако c није нула имамо случај *противречности*. Лако се увиђа да у овом случају два корена постају бескрајно велика тј. постају утолико већи, уколико се a и b приближују нули.

Производ корена $\frac{c}{a}$ постаје по апсолутној вредности врло велики, бескрајно велики. Из тога излази да један од корена мора бити бескрајно велики.

С друге стране имамо збир

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{-b}{c}.$$

који мора бити врло мали, управо тежити нули, пошто b тежи нули. Из овога услова следује да и $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ морају тежити нули, да би њихов збир тежио нули. Из тога пак произилази да не може само један корен бити бескрајно велики. Морају то бити оба корена.

Дакле имамо закључак: *квадратна једначина ax^2+bx+ $+c=0$ има два бескрајно велика корена по апсолутној вредности, кад је $a=0$ и $b=0$.*

Напослетку ако је

$$a=0,\ b=0,\ c=0,$$

једначина постаје

$$0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$$

и задовољена је за сваку вредност x. Једначина је *неодређена*.

127. Резиме дискусије. — Све досадашње резултате можемо сложити у следећу табелу:

<table>
<tr><td colspan="3">Дискусија једначине
$ax^2+bx+c=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a\neq 0$</td><td>$\frac{c}{a}<0$</td><td>2 корена, један позитиван други негативан.</td></tr>
<tr><td>$\frac{c}{a}>0$</td><td>$b^2-4ac>0$: $-\frac{b}{a}>0$, 2 позит. корена; $-\frac{b}{a}<0$, 2 негат. корена
$b^2-4ac=0$ 1 двостр. корен $x=\frac{-b}{2a}$
$b^2-4ac<0$ корени имагинарни.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c=0$, 1 корен нула, други $\frac{-b}{a}$.</td></tr>
<tr><td>$a=0$
$b\neq 0$</td><td colspan="2">Један корен бескрајно велики, други корен $\frac{-c}{b}$.</td></tr>
<tr><td>$a=0$
$b=0$
$c\neq 0$</td><td colspan="2">2 корена бескрајно велика, једначина немогућа.</td></tr>
<tr><td>$a=0$
$b=0$
$c=0$</td><td colspan="2">Једначина неодређена, сваки број је корен.</td></tr>
</table>

За писмено вежбање

На основу Виетовог правила да се провери да ли су тачна решења следећих једначина:

1. $x^2+12x+32=0$ $\quad x_1=4\ x_2=8$
2. $x^2-8x-180=0$ $\quad x_1=18\ x_2=-10$
3. $x^2+\frac{5}{6}x-1=0$ $\quad x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-1$
4. $x^2+11\,x+24=0$ $\quad x_1=-3\ x_2=-8$

5. $x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad x_1 = 2 + \sqrt{3} \quad x_2 = 2 - \sqrt{3}$

Код следећих једначина познат је један корен, да се одреди други помоћу Виетовог правила:

6. $x^2 + 18x + 65 + 0 \qquad x_1 = -5$
7. $x^2 - 5x - 36 = 0 \qquad x_1 = 9$
8. $x^2 + 19x + 84 = 0 \qquad x_1 = -7.$
9. $x^2 - 1{,}7x + 0{,}42 = 0 \qquad x_1 = 0{,}3$
10. $x^2 - 0{,}4x - 0{,}32 = 0 \qquad x_1 = -0{,}4$

Да се напишу једначине чији су корени:

11. 8 и -7; -5 и 11; -13 и -4; -10 и 0,1.
12. $\frac{2}{9}$ и $\frac{1}{3}$; $-\frac{6}{7}$ и 2; $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{3}$ и $\frac{8}{9}$.
13. 0,2 и 0,3; 2,8 и $-0{,}1$; 0,25 и -40.
14. a и $\frac{1}{a}$; a и a; $3a$ и $4a$; $-a$ и $-\frac{1}{a}$.
15. $a + 2b$ и $a - 2b$; $m^2 - n^2$ и $m^2 + n^2$.
16. $a + b\sqrt{2}$ и $a - b\sqrt{2}$; $a + bi$ и $a - bi$.
17. $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$; $\frac{2}{a+b}$ и $\frac{2}{a-b}$.
18. Зашто једначина $x^2 + x + 9 = 0$ нема стварних решења?
19. Зашто једначина $x^2 - 14x + 49$ има два једнака корена?
20. Зашто једначина $x^2 + px - 1 = 0$ има два стварна корена?

Код следећих једначина да се најпре прочитају све особине корена на самим једначинама, па потом да се реше растављањем на чиниоце.

21. $x^2 + 20x + 91 = 0$ 22. $x^2 + 16x + 55 = 0$
23. $x^2 - 21x + 108 = 0$ 24. $x^2 - 47x + 90 = 0$
25. $x^2 + 14x - 72 = 0$ 26. $x^2 - 23x - 210 = 0$
27. $x^2 + 5x = 24$. Ова једначина налази се у Арабљанским књигама.

У следећим једначинама да се m одреди тако да корени буду једнаки.

28. $x^2 - 3x + m = 0$ 29. $x^2 - x - m = 0$
30. $x^2 - 10x + m = 0$ 31. $x^2 + 10x + m = 0$
32. $3x^2 - 6x + 2m = 0$ 33. $5x^2 + 12x - 4m = 0$

34. $x^2 - 2mx + 4 = 0$ 35. $4x^2 + mx - 1 = 0$
36. $mx^2 - 8x - 3 = 0$ 37. $2mx^2 - 5x - 6{,}25 = 0$

Помоћу Виетовог правила да се одреди q и други корен једначине:

38. $x^2 - 9x + q = 0 \qquad x_1 = 10$
39. $x^2 + 9x + q = 0 \qquad x_1 = 10$
40. $x^2 - 3x + q = 0 \qquad x_1 = -1$
41. $x^2 - 3x + q = 0 \qquad x_1 = -\frac{3}{2}$
42. $x^2 - 18x + q = 0 \qquad x_1 = 10$
43. $x^2 - 2x + q = 0 \qquad x_1 = -4$
44. $x^2 + 2x + q = 0 \qquad x_1 = -4.$

Да се реше следеће једначине.

45. $2(x-1)^2 + 40{,}5$ 46. $(3x-4)^2 = (2x+1)^2$
47. $5(x-1{,}4)^2 + 53 = 7(x-1{,}4)^2 - 45$
48. $x^2 + 4x - 12 = 0$ 49. $y^2 + 8y - 209 = 0$
50. $z^2 + 0{,}4z - 1{,}3 = 0$ 51. $u^2 - 8u + 10{,}24 = 0$
52. $v^2 - 24v + 143 = 0$ 53. $t^2 + 2{,}8t - 18{,}29 = 0$
54. $p^2 + 3p - 28 = 0$ 55. $r^2 - 7r + 4 = 0$
56. $n^2 + 13n + 40 = 0$ 57. $q^2 - 11q + 28 = 0$
58. $a^2 - 55a + 700 = 0$ 59. $y^2 + 0{,}1y - 0{,}06 = 0$
60. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ 61. $3z^2 - 5z - 250 = 0$
62. $2t^2 + 5t + 1 = 0$ 63. $5n^2 + 7n - 2 = 0$
64. $10000x^2 - 700x + 12 = 0$ 65. $6b^2 - 7b + 2 = 0$
66. $9y^2 + 900y + 20000 = 0$ 67. $8z^2 + 6z + 1 = 0$
68. $63x^2 - 130x + 63 = 0$ 69. $25t^2 - 70t + 13 = 0$
70. $p^2 - 3p\sqrt{2} + 4 = 0$ 71. $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$
72. $s^2 - 1{,}2s + 12 = 0$ 73. $49a^2 - 266a + 345 = 0$
74. $0{,}06x^2 - 0{,}31x + 0{,}4 = 0$ 75. $4\pi^2 + 39\pi - 162 = 0$. Ова историски значајна једначина даје приближну вредност за број π.
76. $x^2 - 2ax + a^2b^2 = 0$ 77. $x^2 - 2ax + a^2 - 4b^2 = 0$
78. $x^2 - 2ab = b^2 + 2ax$ 79. $x^2 + ab = ax + bx$
80. $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$
81. $abx^2 + (a^3 - b^3)x - a^2b^2 = 0$
82. $a^2b^2x^2 + (a^3 + b^3)x + ab = 0$
83. $2abx^2 - (4a^2 - b^2)x - 2ab = 0$
84. $b^3x^2 + ab(ab+1)x + a^3 = 0$
85. $abx^2 - (a^2 + b^2)x - a^2 + b^2 = 0$

86. $x^2 - (m^2 + n^2)\,x - mn(m^2 - n^2) = 0$
87. $abx^2 - (a^2 + b^2)\,x + a^2 + 3ab + b^2 = 0$
88. $x^2 - 5(a - b)x + 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$
89. $5x^2 + 10 = 17x - x^2$
90. $3x^2 + x + 7 = 4x + 2x^2 + 5$
91. $3x\,(x + 2) + x = 2x(x + 10) + 5(x - 10) - 27$
92. $(3x - 1) : (4x + 7) = (5x - 3) : (9x - 7)$
93. $(5x + 7)(2x - 3) - 8x^2 - 1 = 0$
94. $3(x^2 - 1) - (x + 2)\,(x - 3) = 3$
95. $(2 - x)^2 = 4\,(26 - x)$
96. $(2x + 3)^2 - (x - 4)^2 = 88$
97. $(3x - 1)\,(x + 4) - (5x + 1)^2 = 91$
98. $(y - 3)^2 + (y + 4)^2 - (y - 5)^2 - 17y - 24 = 0.$
99. $(2x + 3)^3 - (2x - 5)^3 = 738$
100 $(x + 2a)^2 - (3x - a)^2 = 5a^2$
101. $(x - 8a)^2 - (5x - 2a)^2 = (10a)^2$
102. $x : (a - b) = a : (x - b)$
103. $x : (1 - a) = (1 + a) : (x - 2a)$
104. $abx^2 - 1 = (a - b)x$
105. $a(x^2 - 1) = (1 - a^2)x$
106. $ab(x - 1)^2 = (a - b)^2x$
107. $(a^2 - b^2)(x^2 - 1) = 4abx$
108. $(x - b)^2 + b\,(x + c) = b^2 + cx$
109. $(x - a)^2 + (x - b)^2 + 2(x - a)(x - b) = x^2$
110. $(x - a - b)^2 + a\,(x - a) = ab$
111. $(ax - b)^2 + (a - bx)^2 + 2x(a^2 + b^2) = 4ab$
112. $(x + a)^3 - (x - a)^3 + 14x^2 - 7x\,(a^2 + 2x) = 0$
113. $(x - a)^2 - 2ab = 2b^2 + (a - b)(x - a) - 2a$
114. $(a^2 - b^2)x^2 - 4abx = a^2 - b^2$
115. $(a^2 - b^2)x^2 + 6abx = a^2 - 4b^2$

116. $(x - 4)^2 + \dfrac{x - 4}{3} + (x - 7) = \dfrac{x - 4}{4} - x + 1$

117. $\dfrac{5}{x - 7} + 7 - x + \dfrac{20}{x - 7} = 0$ 118. $x + \dfrac{4}{x} = 5$

119. $\dfrac{x}{45} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{5}$ 120. $\dfrac{21}{x} = \dfrac{16}{x^2} + 6\dfrac{3}{4}$

121. $\dfrac{5x - 1}{9} + \dfrac{3x - 1}{5} = \dfrac{2}{x} + x - 1$

122. $\dfrac{5x - 7}{9} + \dfrac{3x - 1}{5} = \dfrac{2}{x} + x - 1$

123. $\dfrac{3x + 4}{x - 4} + 1 = 10 - \dfrac{x - 2}{2}$

124. $\dfrac{16 - x}{4} - \dfrac{2\,(x - 11)}{x - 6} = \dfrac{x - 4}{12}$

125. $\dfrac{x + 1}{9} + \dfrac{12}{x + 4} = \dfrac{x - 4}{4} + \dfrac{x - 2}{6}$

126. $\dfrac{1{,}2(x - 0{,}7)}{0{,}7x} = \dfrac{1{,}2}{0{,}7} - \dfrac{x}{1{,}2}$

У следећим примерима да се један корен најпре одреди простим посматрањем.

127. $x + \dfrac{1}{x} = a + \dfrac{1}{a}$ 128. $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} - a$

129. $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ 130. $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{a - b}{a + b} + \dfrac{a + b}{a - b}$

131. $\dfrac{2\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{x}} = 1$ 132. $\dfrac{a + \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{x}} = 1$

Да се реше следеће једначине:

133. $\dfrac{x}{x + 60} = \dfrac{7}{3x - 5}$ 134. $\dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 5} = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

135. $\dfrac{2x + 5}{x - 2} = \dfrac{x + 7}{x - 3} - 1$ 136. $\dfrac{40}{x - 5} + \dfrac{27}{x} = 13$

137. $\dfrac{8x}{x + 2} - 6 = \dfrac{20}{3x}$ 138. $\dfrac{48}{x + 3} = \dfrac{165}{x + 10} - 5$

139. $\dfrac{7x - 20}{15x - 35} - \dfrac{2(x - 3)}{28x - 35} = \dfrac{3x + 1}{12x - 28} - \dfrac{23}{20}$

140. $\frac{2x-5}{12x+3}-\frac{3x-2}{20x-5}=\frac{177-173x}{480x^2-30}$

141. $\frac{7x+4}{4x^2-9}-\frac{3x-1}{8x-12}=\frac{9x+7}{10x+15}-\frac{10x+11}{20x-30}$

142. $\frac{2x-3}{12x+20}-\frac{4x-5}{9x-15}=\frac{103-24x-45x^2}{108x^2-300}$

143. $\frac{7x+2}{24x-16}-\frac{5x-4}{20x-28}=\frac{21x^2-67x+50}{9(15x^2-31x+14)}$

144. $\frac{x-3}{50x+100}-\frac{x-4}{25x-50}+\frac{x+1}{4x^2-16}=\frac{8}{100x^2-400}$

145. $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{6}{7-x}=0$

146. $\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-3}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$

147. $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{x^2-4}{a^2-x^2}$

148. $\frac{1}{a-bx}-\frac{1}{a+bx}=\frac{x^2-8b^2}{a^2-b^2x^2}$

149. $x^2=\frac{b(1+x)}{a}-\frac{a(1-x)}{a}$

150. $\frac{x(x+2)}{a+b}-\frac{a-b}{ab}=\frac{(a+b)x}{ab}$

151. $\left(\frac{4x}{a+b}\right)^2=4x-ab$

152. $(b+c)^2\left(\frac{1}{cx}-\frac{1}{bx}\right)=\frac{x}{b^2c-bc^2}+\frac{4}{c-b}$

153. $\frac{x-b}{b}+\frac{5a}{x+5a}=\frac{6a(a+b)}{b(x+5a)}$

154. $\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x}=0$ 155. $x^3-4a^2x=0$

156. $5x^3+15x^2-50x=0$ 157. $4x^3+17x^2-15x=0$

158. $\frac{x+2}{x-5}-\frac{x-5}{x+2}=1\frac{1}{2}$ Стави $\frac{x+2}{x-5}=y$!

159. $\frac{2+x}{1-2x}-\frac{1-2x}{2+x}=\frac{8}{3}$

160. $5\,\frac{x+a}{x-a}-4\,\frac{x-a}{x+a}=8$

161. $\frac{x+a}{x-2a}+\frac{x-2a}{x+a}=3\frac{1}{3}$

162. $\frac{3x-9}{2x-4a}+\frac{2x-4a}{3x-9}=a+\frac{1}{a}$

163. $\frac{x-a+b}{x+a-b}-\frac{x+a-b}{x-a+b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

164. $x+\sqrt{x}=110$ Стави $\sqrt{x}=y$!

165. $x+\sqrt{x}=30$ 166. $\sqrt{x}-x=\frac{3}{16}$

167. $x+5\sqrt{x}=9{,}75$ 168. $6x-285=7\sqrt{x}$

169. $\sqrt{x+2}=x-4$ Стави $\sqrt{x+2}=y$!

170. $x+\sqrt{x+4}=16$ 171. $x-\sqrt{x+4}=8$

172. $(x-3)(x-4)(x+7)-x(x-4)(x-1)=18$

173. $(x-2)(x+5)(x-6)-x(x+3)(x-5)+80=0$

174. $(x-7)(x-4)(x+2)-x(x-3)(x-5)+134=0$

175. $4x^4-41x^2+100=0$ Стави $x^2=y$! Једначина има 4 корена.

176. $9x^4-82x^2+9=0$ 177. $4x^4-73x^2+144=0$

178. $144x^4-337x^2+144=0$ 179. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$

Ирационалне једначине које се своде на квадратне једначине.

128.— Најпре да скренемо пажњу на једну важну ствар, која се често јавља при решавању једначина.

Једначина $x^2-x-2=0$ има корене $x_1=2$, $x_2=-1$. Ако леву и десну страну ове једначине помножимо још са $(x-3)$, то нова једначина

$$(x^2-x-2)(x-3)=0$$

или

$$x^3-4x^2+x+6=0$$

има корене $x_1=2$, $x_2=-1$ и $x_3=3$.

Кад се једначина помножи чиниоцем који садржи x, добија тиме већи опсег. Њен степен постане виши. И она може сад садржавати и корене, који јој стварно не припадају. Ако хоћемо да једначина садржи само оне корене, који само њој припадају, не смемо је множити никаквим страним чиниоцем, јер ће она садржати после множења и оне корене, који се добијају, кад се овај страни чинилац стави да је једнак нули.

На ово треба пазити при ослобађању од именилаца. Обе стране једначине треба множити најмањим заједничким садржаоцем свих именилаца. Ако бисмо множили већим садржаоцем, ушао би и неки даљи чинилац, који би проузроковао корене, који су датој једначини страни.

129. — Код ирационалних једначина ослобађамо се квадратних корена *квадрирањем,* или уопште *степеновањем.* При том треба имати у виду да квадрирањем добијена једначина има већи опсег од дате. Дакле може садржати и корене, који њој не припадају.

Пример: $x - 3 = \sqrt{x-1}.$

Ако обе стране дигнемо на квадрат, добијамо нову једначину

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1.$$

Њени корени су $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Од њих први задовољава дату једначину, а други не. Други корен би задовољио једначину, кад би $\sqrt{x-1}$ имао негативан знак.

130. — Једначина

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1$$

коју смо добили квадрирањем обеју страна, и којом смо заменили дату једначину, може се написати и у овом облику

$$(x-3)^2 - (\sqrt{x-1})^2 = 0,$$

или $$\left(x - 3 - \sqrt{x-1}\right)\left(x - 3 + \sqrt{x-1}\right) = 0.$$

Она садржи, дакле, дату једначину само као један чинилац. Због тога има већи опсег од ње, и добија због другог чиниоца $\left(x - 3 + \sqrt{x-1}\right)$ још и њој страни корен $x_2 = 2$.

Напомена 1. — У примерима које ће ученик имати да решава, често пута ће моћи да одреди један корен простим посматрањем.

Напомена 2. — После решења ирационалне једначине треба извршити пробу, да се види које решење задовољава једначину.

За писмено вежбање

1. $\sqrt{x+1} = x - 3$ 2. $\sqrt{3x+4} = x - 2$

3. $x - x^{\frac{1}{2}} = 42$ 4. $x^{\frac{1}{2}} - x = \frac{2}{9}$

5. $3x - 5\sqrt{x} = 2$ 6. $4x - \sqrt{x+3} = x - 5$

7. $9x - \sqrt{9x+1} = 2x - 1$ 8. $3\sqrt{3x-4} + 4x = 10(x-1)$

9. $\sqrt{5x + 9 - \sqrt{3x+4}} = 5$ 10. $\sqrt{x + 1 + \sqrt{5(x+2)}} = 3$

11. $x + a = \sqrt{a^2 + x\sqrt{2x^2 - a^2}}$

12. $\sqrt[3]{2x + 7 + 6\sqrt{3x^2 + 8x - 2}} = 3$

13. $\sqrt{x+3} = \dfrac{3}{x\sqrt{x+3}}$ 14. $\dfrac{14}{\sqrt{3x+4}} = \dfrac{\sqrt{2x+6}}{3}$

15. $\dfrac{1}{2x + \sqrt{9 - 5x^2}} + \dfrac{1}{2x - \sqrt{9 - 5x^2}} = \dfrac{x}{10}$

16. $x^{\frac{1}{2}} - (x-3)^{\frac{1}{2}} = 1{,}5$ 17. $\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-5} = 2$

18. $2\sqrt{3x-1} - 3\sqrt{2x-1} = 1$

19. $\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x} = 4\sqrt{x}$

20. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{5x} = 0$

21 $(x+7)^{\frac{1}{2}} + (2x+7)^{\frac{1}{2}} = (8x+9)^{\frac{1}{2}}$

22. $\sqrt{3x+4} - \sqrt{5x-11} = \sqrt{x-3}$

23. $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{4x+1} - 3\sqrt{6x} = 0$

24. $3\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{3x} = 6\sqrt{2x-5}$

25. $2\sqrt{x-3} - 7\sqrt{3x-5} + 6\sqrt{5x-19} = 0$

26. $(x+a)^{\frac{1}{2}} + (x+b)^{\frac{1}{2}} - (x+c)^{\frac{1}{2}} = 0$

27. $\sqrt{x+\sqrt{10}} + \sqrt{x-\sqrt{10}} = \sqrt{6x-11}$

28. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{3x-5} + \sqrt{2x+3}$

29. $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{x}}$

30. $\dfrac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}} + \dfrac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2,5$

31. $5\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt[3]{x} - 44 = 0$ Стави $\sqrt[3]{x} = y$!

32. $x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{5}} = 6$ 33. $2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} = 1$

34. $\sqrt[5]{x^4} - 7\sqrt[5]{x^2} = 144$ 35. $(9-x)^{\frac{1}{3}} + (9-x)^{\frac{1}{6}} = 2$

36. $\sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{2x-1} = 3$ *Упутство.* — Примени образац: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$!

37. $\sqrt[3]{5x+17} + \sqrt[3]{18-5x} = 5$

38. $\sqrt[3]{x+17} - \sqrt[3]{x+2} = 1$

39. $\sqrt[3]{3x+104} - \sqrt[3]{6+3x} = 2$

40. $\sqrt[3]{2x+5} + \sqrt[3]{67-2x} = 7.$

ГЛАВА V

Проблеми II степена са једном непознатом

131. — Проблеми II степена су они проблеми, који се своде на решавање квадратних једначина. Све оно што смо рекли о решавању проблема у Алгебри за V р. важи и за проблеме II степена. Имамо три момента:

1. Избор непознате и постављање једначине.
2. Решавање једначине.
3. Дискусија резултата.

За избор непознате и постављање једначине нема ништа ново да се дода. Решавање квадратних једначина смо већ проучили. Једино у дискусију имамо да унесемо нове елементе.

Само ни дискусија се не може изводити у потпуности, док се не проуче особине квадратног тринома и решавање неједначина II степена, што остаје за идућу годину. Због тога ћемо узети један прост пример, на коме се дискусија може извести и са овим, што смо досада проучили.

Пример. Збир два два броја је 12, њихов производ 35, који су ти бројеви?

Решење. — Ако један број обележимо са x, други ће бити $12 - x$, а њихов преизвод

$$x(12 - x) = 35.$$

Овим смо добили и једначину која решава задатак. Кад је уредимо добијамо

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Корени ће бити стварни, јер је $D = b'^2 - ac = 36 - 35 > 0$.

Они су $x_1 = 7$

$x_2 = 5.$

132. — Овај проблем смо могли решити и на други начин. Ако непознате бројеве обележимо са x_1 и x_2, онда је

$$x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 35.$$

По Виетовом правилу о вези корена и коефицијената квадратне једначине, можемо тражену једначину одмах написати:

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

133. — Сад ћемо узети исти овај проблем, само *општи*. Да се одреде два броја чији је збир s, а производ p.

Решење. — Према ономе што смо већ рекли тражени бројеви су корени квадратне једначине

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Корени ће бити стварни, тј. они ће постојати, само ако је

$$D = s^2 - 4p > 0,$$

или ако је
$$D = s^2 - 4p = 0.$$

Ако је
$$D > 0,$$

тражени бројеви су

$$x_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$x_2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Ако је $D = 0$, једначина има два једнака корена, па су оба тражена броја једнака броју

$$\frac{s}{2}.$$

Ако је $D < 0$, проблем је немогућан.

134. На овим резултатима могли бисмо се зауставити. Али ако дискусију још мало наставимо, доћи ћемо до врло занимљивих и важних резултата.

Узмимо да је s непроменљиво, а пустимо да се p мења. Још претпоставимо да су s и p увек позитивни. Тада ће дискриминанта $D = s^2 - 4p$ бити позитивна све док је

$$p < \frac{s^2}{4}.$$

Највећа вредност коју p сме достићи јесте

$$p = \frac{s^2}{4},$$

што можемо још написати

$$p = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}.$$

Ово можемо речима овако исказати: *производ два позитивна броја, чији је збир сталан, највећи је, кад су та два броја једнака.*

Ако ово правило протумачимо геометриски, можемо рећи: *од свих правоугаоника, који имају исти обим, највећу површину има квадрат.*

135. — Узимамо сад обрнуто да је производ p непроменљив, а збир s да се мења, с тим још да s и p остану увек позитивни. Тада је $D = s^2 - 4p$ позитивно све док је

$$s^2 > 4p.$$

Најмања вредност коју, дакле, s може имати јесте

$$s = 2\sqrt{p},$$

или
$$s = \sqrt{p} + \sqrt{p}.$$

Речима: *збир два позитивна броја, чији је производ сталан, је најмањи, кад су ови бројеви једнаки.*

Ако ово протумачимо геометриски, можемо рећи: *од свих правоугаоника, који имају исту површину, најмањи обим има квадрат.*

Тако, ако имамо на расположењу, на пример, жицу извесне дужине, па ако хоћемо њоме да оградимо један правоугли терен највеће могуће величине, том терену треба да дамо облик квадрата.

За писмено вежбање

Напомена 1. — У многим примерима остављено је ученику, да сам постави питање.

Напомена 2. — Слова у заградама иза бројева значе да проблем треба да се реши и са општим бројевима. Дискусију треба извести колико је могућно.

Напомена 3. — Увек проверити, да ли резултати одговарају проблему.

1. Производ два узастопна непарна броја је 323.
2. Збир квадрата два узастопна броја је 313 (a).
3. Производ из трећине и петине једнога броја је 135 (a).
4. Наћи два броја чији је производ 1600 (p), а количник 4 (q).
5. Два броја разликују се за 5 (d), њихов производ је 104 (p).

6. Два броја разликују се за 4 (d), збир њихових квадрата је 586 (s^2).

7. Збир квадрата три узастопна броја је 365. Који су ти бројеви?

8. Петнаестоструки један број већи је од свог квадрата за 56.

9. Збир од једног броја и његове реципрочне вредности је 2,9.

10. Збир два броја је 20(a). Збир њихових реципрочних вредности $\frac{5}{24}$(b). Који су ти бројеви?

11. За колико треба повећати сваки од чинилаца производа $12 \cdot 15$, да производ постане већи за 280?

12. Ако број 593 поделимо извесним бројем, добија се за количник троструки делилац и остатак 5. Колики је делилац?

13. Збир од једнога броја и реципрочне вредности за 5 умањеног броја износи 25,05.

14. Један број и квадратни корен за 5 повећаног броја дају збир 131.

15. Од два броја један лежи толико испод 25, колико други изнад. Збир квадратних корена оба броја износи $7\sqrt{2}$.

16. Два броја су у размери 5 : 6. Њихов производ је 750. Који су ти бројеви?

17. Збир цифара једнога броја је 13. Ако се број подели производом његових цифара, добија се за 8 мање, него ли кад се подели првом цифром.

18. Збир цифара једног двоцифреног броја је 13. Ако се број подели производом његових цифара, добија се количник 2 и остатак 22.

19. Прва цифра једног двоцифреног броја је за 5 већа од друге. Производ овог броја и броја који се добија, кад цифре напишемо обрнутим редом, је 3154.

20. Цифра десетица једнога броја је квадрат јединица, а збир цифара је 12.

21. Један двоцифрен број има цифру јединица 2. Ако се од његовог квадрата одузме квадрат броја, који се добија обртањем његових цифара, добија се 495. Који је тај број?

22. Ако се један троцифрен број, чији је збир цифара 21, и коме је прва цифра за 3 мања од збира других двеју, подели производом ових двеју цифара, добије се количник 27 и остатак 30.

23. У ком се бројном систему декадни број 83 пише са 123?

24. У ком систему има број 132 декадну вредност 56?

25. Један декадни број написан је у извесном систему са 121; у другом систему, чија је основа за 2 већа, написан је са 51. Да се одреди број и основе оба система.

26. Један декадни број написан је у једном систему са 71, а у другом, чија је основа за 6 мања са 221. Да се одреди тај број и обе основе.

27. Да се одреде основе бројних система у којима су следеће радње правилно извршене:

a) $13 \cdot 25 = 347$
b) $21 \cdot 14 = 324$
c) $48 \cdot 21 = 988$
d) $53 \cdot 37 = \varepsilon\, 51$
e) $554 : 16 = 32$

ε је цифра која стоји наместо 15.

28. Разлика два броја је 3. Разлика њихових кубова је 2169.

29. Збир два броја је 7. Разлика њихових кубова је 117.

30. Кубни корен из једног за 100 повећаног броја већи је за 2 од кубног корена тог истог за 2 повећаног броја.

31. Шестоструки кубни корен из квадрата једнога броја умањен за 25-струки кубни корен из тог истог броја даје 25.

Проблеми из геометрије

Квадрат и правоугаоник

32. Дијагонала једног квадрата дужа је од стране за d. Колика је страна? $d = 10$cm; $d = \frac{1}{20}$m; $d = \frac{3}{2}$dm.

33. Ако се страна једног квадрата повећа за $d$cm, његова површина порасте за $m$cm². $d = 5, m = 105$; $d = 7, m = 189$.

34. Ако се страна једног квадрата повећа за 3m, његова површина порасте за 21%.

35. Дужина једног правоугаоника је за $d$cm већа од ширине, а површина је $p$cm. $d = 9, p = 52$.

36. Ако се дужина једног квадрата повећа за $2\frac{1}{2}$ m, а ширина смањи за толико исто, добијени правоугаоник ће изнети само $\frac{3}{4}$ квадрата.

37. Три квадрата, од којих сваки следећи имао за 2m већу страну од претходног, заједно имају површину 251m^2.

38. Ако се раздели један квадрат повлачењем паралелних са странама у квадрате са страном 1m $\frac{3}{4}$, добија се 45 900 квадрата више, неголи кад га разделимо у квадрате са страном $2\frac{1}{2}$ m. Колика је страна датог квадрата?

39. Од једног комада жице, дугог 84cm, отсечена је једна дужина од $8x$ cm и тако савијена у облику правоугаоника, да је једна страна 3 пута веће од друге. Остатак је савијен у квадрат. Нађи димензије правоугаоника и квадрата, ако је комбинована површина 217cm^2.

40. Стране једног правоугаоника су a и b. За коју дуж морамо једну повећати, а другу смањити, да површина буде p? $a = 12$, $b = 8$, $p = 75$; $a = 4$, $b = 7$, $p = 24$.

41. Једна дуж a треба да се подели у два дела, да правоугаоник из њих буде b^2? $a = 15$, $b = 6$; $a = 26$, $b = 12$; $a = 25$, $b = 24$.

42. Стране једног правоугаоника су у размери $m:n$. Колике су стране, кад је дијагонала d? $m = 3$, $n = 4$, $d = 25$; $m = 5$ $n = 12$, $d = 26$.

43. У један правоугаоник са странама a и b треба уписати један други n пута мањи. Стране унутрашњег правоугаоника свуда су подједнако удаљене од страна спољашњег. Колико је ово отстојање? $a = 10$, $b = 6$, $n = 0{,}5$; $a = 160$, $b = 120$, $n = 0{,}5$; $a = b$.

44. Једно правоугаоно поље дужине 422,^{m}6 и ширине 27^m,4 треба да се замени за једно друго. У овом другом пољу дужина према ширини је у размери као 9 : 4. Колико дугачко и колико широко мора бити ово друго поље?

45. Дуж a треба тако поделити да правоугаоник из делова буде једнак збиру квадрата делова.

Како изгледа решење, ако правоугаоник треба да буде једнак половини збира квадрата?

Троугао

46. Збир катета једног правоуглог троугла је 51cm, а хипотенуза је за 3cm дужа од веће катете. Нађи све три стране!

47. У једном правоуглом троуглу је већа катета за 30cm мања од хипотенузе, а за толико исто већа од друге катете. Колике су стране тог троугла?

48. У једном правоуглом троуглу је разлика катета d. Обим троугла је s. Колике су стране? $d = 7$, $s = 30$; $d = 5$, $s = 60$; $d = 9$, $s = 108$.

49. Разлика катета у једном правоуглом троуглу је 21cm, хипотенуза је већа од дуже катете за 3cm. Колике су стране троугла?

50. У једном равнокраком троуглу крак је 25cm. Основица је 10cm дужа од висине. Да се одреде основица и висина.

51. У једном равнокраком троуглу основица је за 1cm дужа од крака, а крак за 1cm дужи од висине. Да се одреде стране овог троугла.

52. У једном равнокраком троуглу обим је 64 cm. Висина је за 4 cm краћа од крака. Колике су стране?

53. Обим једног равнокраког троугла је 128 cm. Основица је за 16cm дужа од висине. Колике су стране?

54. У једном правоуглом троуглу хипотенуза је c, а катете су у размери као $m:n$. Колике су катете? $m = 15$, $n = 8$, $c = 10{,}2$; $m = 7$, $n = 24$, $c = 75$.

55. У једном правоуглом троуглу је једна катета 13,^{m}2, док се хипотенуза односи према другој катети као 13 : 5. Колика је свака страна?

56. Једна катета правоуглог троугла је 20cm. Хипотенузини отсечци разликују се за 10cm. Израчунај стране!

57. Основица и висина једног троугла разликују се за 10cm. Површина је 2 пута већа од квадрата са страном 10cm.

58. У једном троуглу чија је површина $108 cm^2$ збир двеју страна је 42cm, а збир висина које њима одговарају, 21cm. Колике су ове две стране и висине?

59. У једном троуглу чија је површина $36 cm^2$, збир двеју страна је 30cm, а разлика висина, које одговарају овим странама је 2cm. Колике су ове две стране и висине?

60. У једном троуглу, чија је површина $60 cm^2$, разлика двеју страна је 5cm, а разлика одговарајућих висина је 4cm. Колике су ове две стране и висине?

61. Један равностран троугао има страну $a = 12$cm. Један правоугаоник има n пута већу површину и m пута већи обим, неголи овај троугао. Да се одреде стране правоугаоника. $n = 8$, $m = 4$; $n = 12$, $m = 6$; $n = 1$, $m = 1$.

62. Једну дуж $a = 8$cm треба тако поделити, да правоугаоник, сграђен од делова дужи, буде n пута већи од равностраног троугла, конструисаног над целом дужи. $n = 0{,}5$; $n = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

63. Једна дуж $a = 10$cm треба тако да се подели, да квадрат над једним отсечком буде n пута већи од равностраног троугла, нацртаног над другим отсечком. $n = 1$; $n = 3$; $n = 0{,}5$.

Трапез и ромб

64. Површина једног трапеза је $240 cm^2$. Разлика паралелних страна је 8 cm. Висина је за 4 cm краћа од мање паралелне стране. Да се одреде стране и висина трапеза.

65. Збир дијагонала једнога ромба је 452 mm. Једна страна је 170 mm. Колике су дијагонале?

66. Ромб чија је страна 35 cm има површину $1008 cm^2$. Колике су дијагонале?

67. Један ромб има површину $96 cm^2$. Обим правоугаоника, који се добија, кад се споје средине ромбових страна, износи 28 cm. Одреди дијагонале!

Многоугао

68. Који многоугао има n дијагонала? $n = 9$; $n = 20$.

69. У ком полигону је број дијагонала једнак броју страна?

70. Који полигон има 5 пута више дијагонала неголи страна?

71. Известан број тачака, од којих увек само две леже на једној правој линији, дају n спојних линија. Колико има тачака? $n = 35$; $n = 54$; $n = 65$; $n = 120$.

72. Код ког полигона је број дијагонала за d већи од броја страна? $d = 18$; $d = 42$; $d = 150$.

73. Број страна једног многоугла према броју страна једног другог је као 2 : 3. Други многоугао има 34 дијагонале више од првог. Који су ови многоугли?

74. У једном правилном полигону сваки угао је $1\frac{1}{9}$ пута већи од сваког угла другог правилног полигона који има једну страну мање.

Подела дужи

75. **Златни пресек.**— Једну дуж a треба тако поделити, да већи део буде средња пропорционала између целе дужи и мањег дела. $a = 1$m; $a = 17$cm; $a = 12$cm; $a = 20$cm; $a = 75$cm. (Дужина руке човека средњега раста је 75cm. Сматра се да је лактом подељена по златном пресеку.)

76. Већи отсечак дужи подељене по златном пресеку је b. Колика је дуж? $b = 8$cm; $b = 12$cm; $b = 45$cm; $b = 80$cm.

77. Мањи отсечак дужи подељене по златном пресеку је c. Колика је сама дуж? $c = 10$cm; $c = 24$cm; $c = 30$cm.

78. Дуж a треба за један комад тако продужити, да она постане средња пропорционала између тако увећане дужи и продужетка. $a = 12$cm; $a = 18$cm; $a = 20$cm.

Круг

79. Кад се полупречник једнога круга повећа за $1{,}^{cm}5$, површина му се удвостручи.

80. Средишна раздаљина једне тетиве је c cm. Сама тетива већа је од полупречника за d cm. Колики је полупречник и тетива? $c = 15$, $d = 6$; $c = 5$, $d = 2$; $c = 9$, $d = 39$; $c = 63$, $d = 33$.

81. Две тетиве AB и CD секу се у једној тачки M у кругу. Ако је AM = 3cm, BM = 4cm, CD = 9cm, нађи CM и MD!

82. Из једне тачке повучена је на круг тангента и сечица. Тангента је дугачка 48cm, а тетива која припада сечици 7,cm2. Колика је дужина сечице?

83. На један круг ($r = 20$cm) повучене су тангенте, чија је додирна тетива дугачка 24cm. Колике су тангете?

84. Једна тангента повучена на круг из тачке чија је средишна раздаљина 12,cm2, већа је од полупречника за 9,cm6. Колики је полупречник?

85. Додирна тетива двеју тангената повучених из тачке чија је средишна раздаљина 50cm је 48cm. Колики је полупречник?

86. У једном кругу ($r = 10$ cm) нацртана је тетива дужине $2t = 8$ cm. Кроз средину ове тетиве треба да се повуче једна друга, која је 2 пута већа од ње. Да се израчунају отсечци ове друге тетиве.

87. Једна тачка у унутрашњости круга ($r = 6$ cm) има средишну раздаљину $c = 3$ cm. Кроз ову тачку треба повући једну тетиву, тако да разлика оба тетивина отсечка буде једнака једној датој дужи l. Да се одреде њени отсечци. $l = 2$; $l = 4$.

88. На један круг ($r = 10$ cm) повучена је из једне тачке M тангента дужине $t = 6$ cm. Из M треба повући једну сечицу, тако да њен спољашњи отсечак буде за 2 cm дужи од тетиве, коју сечица гради у кругу.

89. Кад се полупречник круга подели по златном пресеку, већи отсечак је страна уписаног правилног десетоугла. Колика је страна десетоугла, када је полупречник r? $r = 4$cm; $r = 10$ cm; $r = 15$ cm; $r = 25$ cm.

Проблеми из стереометрије

90. Две коцке имају заједно запремину 2331 cm³. Збир њихових ивица је 21 cm.

91. Разлика запремина двеју коцки јесте 2044 cm³. Разлика њихових ивица је 4 cm.

92. Кад се ивица тетраедра повећа за 3 cm, запремина се повећа за $\frac{171\sqrt{2}}{4}$ cm³.

93. Кад се ивица октаедра смањи за 4 cm, запремина ће се смањити за $\frac{784}{3}\sqrt{2}$ cm³.

94. Дужина једног правоуглог паралелопипеда је 30cm. Ширина је мањи а висина већи отсечак дужине подељене по златном пресеку. Одреди најпре дужину и ширину, а затим површину и запремину правоуглог паралелопипеда!

95. Ако полупречник основе једне равностране облице порасте за 2cm, запремина порасте за 436 cm³.

96. У једном равнокраком троуглу је крак за 1cm дужи, а висина за 1cm краћа од основице. Да се одреди површина и запремина купе, која се добија обртањем овог равнокраког троугла око висине.

97. У једном равнокраком троуглу висина према основици је у размери као 3:4. Да се одреди површина купе, која се добија обртањем троугла око висине, кад је крак 10cm.

98. Површина једног правоуглог троугла је 270cm². Катете стоје у размери као 5:12. Да се одреди површина и запремина тела, које се добија обртањем троугла око хипотенузе.

99. Дијагонале једнога ромба су једна за 7cm, друга за 3cm веће од страна. Да се одреди површина и запремина тела, које се добија обртањем око веће дијагонале.

Проблеми кретања

100. Један воз се креће 5 километара брже неголи један други, и због тога му је потребно 1 час мање да пређе пут од 150km. Одреди брзине ових возова!

101. А прелази четврт километара за сат више неголи B, и због тога му је потребно четврт сата мање, да пређе 15km. Нађи брзине обојице!

102. Два пешака удаљена 45km крену у исто време један другом у сусрет и сретну се после 5 часова. Колика је њихова брзина, кад је првом потребно 3 минута мање да пређе 1km неголи другом?

103. Два друга крену једновремено на два места један другом у сусрет и сретну се после 3 часа. За које време

би први прешао цео пут, кад је за то другом потребно $1^h\,6^{mn}$ мање неголи првом?

104. Један човек весла 1km уз воду, па се врати, употребив за све укупно 40 минута. Ако је његова брзина по мирној води x километара на час, и ако је брзина реке 2km на час, да се одреди x.

105. Од мог досадањег стана треба ми 1 час хода до Топчидера. Али да бих од мог новог стана стигао за 1 час до Топчидера, требало би ми да 1 километар прелазим за време 3 минута краће неголи досада, пошто је сад пут 1km дужи. Колико километара има до Топчидера?

106. Од два јахача, првоме је потребно да пређе једну кружну стазу 15 секунада мање, неголи другом. Они крену једновремено из исте тачке у супротним правцима и сретну се после 56 секунада. По колико је секунада потребно сваком да претрчи стазу?

107. По обиму једнога круга од 300m крећу се два тела. Прво прелази за секунд 1m мање од другога и потребно му је за једно обилажење 10 секунада више неголи другоме. По колико метара прелази свако тело у секунду?

108. Два воза, од којих један прелази у сваком секунду 6(d)m мање од другога, укрсте се, пошто је први прешао 86,4(s), а други 259,4(s') километара. Колика је брзина сваког од ових возова, кад је последњи кренуо 2(t) часа раније од првога? Дискусија!

109. Два тела крећу се од тачака А и В, које су удаљене 540m. Отпочне ли А своје кретање 6 минута пре В, то се тела сретну у средини путање. Крену ли једновремено, то су она после 16 минута још 120m удаљена једно од другога. Колико је времена потребно сваком телу да пређе целу путању?

110. Два тела се крећу од тачака А и В, које су удаљене 720m, једно другом у сусрет. В прелази у сваком секунду 1m више од А. Крене ли А 1mn пре В, то се они сретну у средини пута. Колики пут прелази свако тело у секунду?

111. Два тела крећу се једнако по једној путањи. Она крену једновремено од исте тачке и у истом правцу. А треба за прелаз целог пута $1\frac{1}{2}$mn дуже од В. Због тога тело В стигне А први пут после 18mn. За које време пређе свако од њих цео пут?

112. Један пешак иде из места А у место В и сретне се у 5 часова са једним бициклистом који долази из В. Од њега он сазна да је кренуо из В пре једног часа и да ће у исто време стићи у А, кад пешак стигне у В, при чему пешак сме још и да се одмори пола часа. Колико има још В да путује до А?

113. Један пароброд креће се од места А низ воду. У исто време један други од места В уз воду. Кад су се срели, прешао је први брод 20km више од другога. Од тада првом броду треба још 4 часа до В, а другом још 9 часова до А. Колико је далеко од А до В?

114. По крацима једног правог угла крећу се две тачке једнаком брзином почев од темена. Колика је брзина, кад прва тачка отпочне своје кретање 3 секунда после друге, и после 9 секунда је од ње удаљена 225cm?

115. По крацима једног правог угла крећу се две тачке брзином 5cm, односно 3cm, у секунду ка темену правог угла, од кога су оне у почетку кретања удаљене свака по 85 сантиметара. После колико ће секунада њихово отстојање бити 34cm?

116. Две тачке А и В крећу се по крацима једног правог угла. А је сада удаљена од темена 99cm, В 200cm. А се креће брзином 11cm у секунду од темена, В брзином 8cm према темену. После колико секунада су ове тачке удаљене једна од друге 241cm?

117. Два круга чији су полупречници r_1 и r_2 крећу се са њиховим центрима по крацима једног правог угла према темену. Центар једнога је у почетку кретања удаљен од од темена за дужину a и креће се брзином c_1 у секунду. Центар другога је у почетку удаљен од темена за дужину b и креће се брзином c_2 у секунду. Кад ће се кругови додирнути споља, а кад изнутра? $r_1 = 30$cm, $r_2 = 20$cm, $a = 124$cm, $c_1 = 7$cm, $b = 102$cm, $c_2 = 6$cm.

Проблеми цеви и базена

118. Један човек може да сврши један посао за x дана, други за $x + n$ дана. Који део од посла могу они свршити

за један дан, ако раде заједно? Ако је обојици потребно да сврше тај посао t дана, колико ће времена требати свакоме засебно, да сврши тај исти посао? $n = 12$, $t = 8$; $n = -3$, $t = 6\frac{2}{3}$.

119. Један базен могу да напуне две цеви за t часова. Једна цев сама могла би да напуни базен за n часова брже неголи друга. Наћи време за које ће свака од ових цеви сама напунити базен. $t = 1\frac{1}{3}$, $n = 2$; $t = 12, n = -10$; $t = 9$, $n = 7\frac{1}{2}$.

120. Две цеви дају заједно 121 l у минуту. По колико даје свака од њих у минуту, кад је слабијој потребно за пуњење једног резервоара од 420 литара 24 минута више?

121. Две цеви пуне заједно један базен. Самој првој потребно је 48 часова више, самој другој 12 часова више, неголи обема заједно. За које ће време обе цеви заједно напунити базен?

Процентни рачуни

122. Неко пласира 9000 динара са извесним процентом. После једне године узме од своје имовине 1140 динара, а остало остави још једну годину под истим условима. По истеку друге године он има 8904 динара. Колики је био процент?

123. Неко је имао свој новац у једном предузећу и добио од тога прве године $x^0/_0$. Тако зарадом увећани капитал остави предузећу и друге године. У другој години добије $5^0/_0$ више него у претходној. Његова имовина је тиме порасла за $26{,}5^0/_0$. За колико је процената порасла његова имовина прве године?

124. Једна роба прво се попела у вредности, а затим поново пала за исто толико процената, за колико се била попела. Кад је она сад за $4^0/_0$ јевтинија неголи у почетку, за колико се процената попела?

125. Једна меница која је гласила на 12000 динара продата је за 11685 динара, кад је дисконт рачунат за $2\frac{1}{2}$ мање од броја месеца, колико меница још треба да чека. Колико је $^0/_0$ дисконта рачунато?

126. Један трговац прода једну робу са 1 200 динара добити. За оно што је примио купи другу робу, коју прода за 14 520 динара. На овој другој роби он заради исто толико процената колико и на првој. Пошто је купио прву робу?

127. Један трговац прода једну робу са добити 2 720 динара. За суму коју је примио купи другу робу, коју прода за 33 660 динара. При том је зарадио $2\frac{1}{2}{}^0/_0$ више неголи на првој роби.

128. Један књижар начини две куповине књига. Прва је изнела 4000 динара више од друге. И при првој и при другој куповини добије по 1600 динара рабата. Колико је износила прва куповина, кад је њен рабат изнео $2^0/_0$ мање неголи што је изнео код друге куповине?

129. Неко купи робу за извесну суму новаца. При том још има $4^0/_0$ других трошкова. Он робу прода за 195 динара и заради толико процената, колико је 5-ти део од куповне цене. Колика је била куповна цена?

Разно

130. Кад се цена грожђа повећа за 2 динара од килограма, добије се за 60 динара 1 килограм мање. Колика је цена грожђа?

131. Један радник заради за известан број дана 450 динара. Други један, који дневно добије 15 динара мање, заради, кад ради $1\frac{1}{2}$ дана више, исто толико. Колика је надница свакога од њих?

132. Један отац остави својим синовима 82 500, да поделе на једнаке делове. Али после његове смрти погину му 2 сина на бојном пољу. Због тога сваки од осталих синова наследи 11 000 динара више. Колико је било синова пре очеве смрти?

133. Један излет начине ученици и професори заједно. Било је свега 46 лица. За заједнички ручак плати сваки професор 5 динара више од сваког ученика. На ученике је ипак пала за 360 динара већа сума, неголи на професоре. Цео рачун изнео је 420 динара. Колико је било професора, а колико ученика?

134. Да пређе једну стазу од 1800 метара, мора предњи точак једних кола, чији је обим за 1m мањи од обима задњег точка, да начини 150 обрта више од овога. По колико пута се окрене сваки точак на целом путу?

135. За 1800 комада потребно је раднику А 20 дана мање неголи раднику В, јер радник А израђује 6 комада дневно више од В. По колико је дана потребно свакоме?

136. Један пивар имао је две врсте буради. Од прве врсте хвата свако буре 6 литара мање, неголи буре друге врсте. Због тога му је потребно за 6hl пет бурета од прве врсте више, него што би му требало од друге врсте. Колико хвата свако буре?

137. Један мајстор и један ученик израде заједно 11 комада дневно. За 3000 комада потребују 3 радника и 2 ученика 20 дана мање рада, неголи два радника и три ученика. По колико комада уради сваки дневно?

138. Лице А црпе судом који је за два литра мањи од суда, којим располаже лице В, и потребно му је, пошто за минут црпе 15 пута, а има да исцрпе 66hl, пет минута мање неголи лицу В, које црпе 14 пута у минуту, и има да исцрпе 84hl. Колика је свака црпка?

139. У каквом односу стоје два броја чија је аритметичка средина једнака њиховој геометријској средини?

140. Хипотенуза c једног правоуглог троугла подељена је висином по непрекидној пропорцији. Колике су катете?

141. Два лица А и В уложе у заједничко предузеће 88 000 динара. Добит лица А износи 12-ти део од улога лица В. Добит лица В је већи за 800 динара од добити лица А. Колики је улог и добит сваког од њих?

142. Један сељак прода известан број оваца за 4800 динара. Другипут он прода 10 оваца више, али и поред тога добије 300 динара мање, пошто је сваку овцу продао 30 динара јевтиније.

143. Један отац остави тестаментом својој деци 480 000 динара. Било је осморо деце. Синови добију половину и кћери половину. Због тога свако женско дете добије по 32 000 динара више од сваког мушког.

144. Да се одреди дубина бунара, кад се звук од камена, који је пуштен у воду бунара, чује после t секунада? $t = 3$; $t = 4$; $t = 5$; $t = 9$.

Стари проблеми

Од Индијанца *Баскаре Акарије* око 1100 г. после Хр. потичу ови задаци:

145. Квадратни корен из половине броја пчела једнога роја полетео на цвет јасмина; $\frac{8}{9}$ целога роја остало је код куће, једна сама полетела за другом самом, која зуји у цвету лотоса, куда је запала ноћу, привучена пријатним мирисом, и из кога она не може изићи, пошто се цвет затворио. Кажи ми број пчела у роју!

146. Лепа девојко, са сјајним очима, реци ми који је то број, који помножен са 3, затим повећан за $\frac{3}{4}$ производа, па подељен са 7, смањен за $\frac{1}{3}$ количника, помножен самим собом, смањен за 52, извлачење квадратног корена, додавање броја 8 и дељење са 10 даје 2.

147. Осми део једног стада мајмуна подигнут на квадрат скакуташе по једној дубрави и играше се весело, осталих 12 могли су се видети на једном брежуљку где ћаскају. Колико је било велико стадо?

148. Квадрат за 3 повећаног петог дела једног стада мајмуна беше сакривено у једној пећини. Могао се видети један мајмун, који се беше успузао на једно дрво. Колико их је било свега?

У аритметици Diofanta из Александрије налази се овај задатак:

149. За два дата броја, 200 и 5, треба да се одреди трећи број који помножен првим даје један квадрат, а помножен другим даје квадратни корен овога квадрата.

У алгебри Мухамеда ибн Мусе Алхваризмија налазе се ови задаци:

150. Један квадрат повећан за 21 даје десетоструки квадратни корен тог истог квадрата.

151. Један квадрат и 10 његових квадратних корена даје 39.

Из Liber Abaci Леонарда из Пизе:

152. $\frac{19}{20}$ једнога броја једнаке су квадратном корену тог истог броја.

Из књиге: Arithmetica Intengra (Autore Michaele Stifelio):

153. Querantur duo numeri sub proportione sesquialtere quorum multiplicatio inter se facit 864 (sesquialter $= 1\frac{1}{2}$).

Из „Минхенског рукописа" из 15 столећа:

154. Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi.

155. Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte frangatur, ut summitas eius extremitati aquae iungatur.

156. Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quot descendit in muro.

Из књиге „Die Coss" Христофа Рудолфа:

157. Имам три броја који се односе као 1 : 2 : 4. Збир њихових квадрата је 189. Који су ти бројеви?

158. Потражи један број: Кад од његовог квадрата одузмем 3, затим његовом квадрату додам 3, па умањени помножим увећаним, добије се 72.

159. Имам један троугао (са једним правим углом a). Сама страна bc дугачка је 20 стопа, а друге две заједно износе 28 стопа. Колика је свака страна?

Из дела Ојлера:

160. Неко купи коња за известан број талира, а препрода га за 119 талира. При том заради толико исто процената, колико је плаћен коњ; питање је сада, пошто је купљен.

161. Две сељанке однесу 100 комада јаја на пијацу. Једна је имала више од друге, али ипак добију за јаја подједнаке суме новаца. Сад рече прва другој: „Да сам имала твоја јаја, добила бих 15 крајцара". На то одговори друга: „Да сам ја имала твоја јаја, добила бих 6 крајцара и $\frac{2}{3}$. Колико је свака имала?

ГЛАВА VI

Квадратне једначине са две непознате

136. Општа квадратна једначина са две непознате има облик

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Да бисмо могли одредити x и y, треба да имамо још једну једначину поред ове. Најпростији случај је, кад је ова друга једначина I степена. Ми ћемо се само овим случајем позабавити.

Пример. $3x^2 - 10xy + 2y^2 - 4x + 5y + 23 = 0 \qquad (1)$

$$2x - 3y + 5 = 0 \qquad (2)$$

Решење. — У сваком случају је најлакше употребити метод замене. Из друге једначине имамо:

$$x = \frac{3y - 5}{2}. \qquad (3)$$

Ако ову вредност ставимо на место x у првој једначини, добијамо

$$3 \cdot \left(\frac{3y - 5}{2}\right)^2 - \frac{10y\,(3y - 5)}{2} + 2y^2 - 4 \cdot \frac{3y - 5}{2} + 5y + 23 = 0$$

Кад се ова једначина упрости, добија се

$$25y^2 - 6y - 207 = 0.$$

Решењем ове једначине имамо

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = -\frac{69}{25}.$$

Из једначине (3) имамо

за $y_1 = 3 \qquad x_1 = 2$

за $y_2 = -\frac{69}{25}\ x_2 = -\frac{166}{25}$.

Згодно је да се резултат овако претстави:

x	2	$-\frac{166}{25}$
y	3	$-\frac{69}{25}$

За писмено вежбање

1. $x^2 + y^2 = 82$, $x = 9$
2. $x^2 + y^2 = 20$, $x + y = 6$
3. $x^2 + 2y^2 = 9$, $2x + y = 4$
4. $3x^2 + y^2 = 7$, $x + 5y = 11$
5. $4x - y = 4$, $15x^2 - y^2 = 44$
6. $y^2 = 2x + 3$, $x + y + 2 = 0$
7. $x + 2y = 18$, $xy = 40$
8. $5x - 3y = 3$, $xy = 12$
9. $x + y = a$, $xy = b$
10. $x - y = a$, $xy = b$
11. $x + y = 2a$, $xy = a^2$
12. $x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 19$, $xy = 90$

Следеће једначине да се реше применом Виетовог правила о вези корена и коефицијената.

13. $x^2 - 11x + 30 = 0$
14. $x^2 - 11x + 28 = 0$
15. $x^2 - 4x - 32 = 0$
16. $x^2 - 6x - 91 = 0$
17. $x^2 + 10x - 1200 = 0$
18. $x^2 - \frac{5x}{12} + \frac{1}{24} = 0$
19. $7x^2 + 6y^2 = 229$, $3x = 5y$
20. $2x^2 - 3y^2 = 6$, $x + y = 5$
21. $3x^2 - xy - y^2 = 12$, $2x - y = 6$
22. $x^2 + 5xy = y + 13$, $4x - y = 1$
23. $2x^2 + 5xy - 4x + 5y = 7;\ 4x + 5y = 1.$

24. $x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0;\ 3x = 4y - 17$
25. $x^2 - 2y^2 - 2x + 3y = 1;\ x + y = 3$
26. $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6y = 18;\ 5x - 4y = 11$
27. $\frac{6}{x} - \frac{3}{y} = \frac{1}{2}$, $3y - 2x = 1$
28. $\frac{5x - 3y}{11x - 7y} = \frac{4}{7}$, $y^2 - x^2 = 32$
29. $3x^2 + 4y^2 = 4(35 + 4y) - 18x;\ 3x = 2(y + 1)$
30. $(x - 1)(y - 1) = 24;\ x + y = 12$
31. $x + y = 18;\ (x - 7)(y + 3) = 48$
32. $(x - 8)(y - 6) = 0;\ x + y = 13$
33. $(x - 3)(y - 4) = 0;\ 4x + 3y = 36$
34. $5(x - 4)^2 - 2(y + 3)^2 = -3;\ x + y = 2$
35. $3x + \sqrt{5y + 6} = -5$, $2y - 3x = 13$
36. $y - \sqrt{3x^2 - 12} = -8$, $2x + 3y = 2$
37. $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - y^2 = 7$ Метод једнаких коефицијената!
38. $2x^2 + 5y^2 = 38$, $3x^2 - 4y^2 = 11$
39. $6x^2 + 5y^2 = 29$, $7x^2 - 3y^2 = 25$
40. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $xy = 9$
41. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$, $xy = 36$
42. $x^3 - y^3 = 19$, $x - y = 1$
43. $x^3 + y^3 = 28$, $x + y = 4$

44. Случај хомогених једначина. $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$, $3x + xy + 2y = 9$

Решење. — Прва једначина овог система је хомогена, јер су у њој сви чланови другог степена. Ако ову једначину поделимо са y^2, добићемо

$$2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x}{y} + 1 = 0.$$

Ову једначину можемо сматрати као квадратну по $\frac{x}{y}$. Њеним решењем добијамо

$$\frac{x}{y} = 1 \quad \text{и}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

Тако смо добили линеарне једначине

$$x = y$$

и

$$2x = y.$$

Довођењем у везу ових једначина са другом једначином датог система добијамо једанпут

$$x = y$$
$$3x + xy + 2y = 9;$$

другипут
$$2x = y$$
$$3x + xy + 2y = 9.$$

У првом случају имамо решења

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2} \qquad y_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{5 + \sqrt{61}}{2} \qquad y_2 = -\frac{5 + \sqrt{61}}{2}.$$

У другом

$$x_3 = 1 \qquad y_3 = 2$$

$$x_4 = -\frac{9}{2} \qquad y_4 = -9.$$

45. $3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$
$8x^2 + 5xy + 2y^2 = 20$

46. $10x^2 + 7xy - 3y^2 = 0$
$6x^2 - 5xy - 10y^2 = 1$

47. $x^2 - 6xy - 10y^2 = 30$
$2x^2 + 3xy - 15y^2 = 5$

48. $5x^2 - xy - 2y^2 = 8$
$4x^2 + xy - y^2 = 1$

49. $x^2 + xy + y^2 = 13$
$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$

50. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$
$2x^2 - 3xy - y^2 = 5$

Проблеми II степена са две непознате

1. Геометриска средина два броја је 6 (a), аритметичка средина 7,5 (b).

2. Размера два броја је 2 : 3. Њихов производ је 216.

3. Збир квадрата два броја је 50, њихова разлика 6.

4. Разлика квадрата два броја је 32. Кад се од троструког првог одузме двоструки други, добије се 13.

5. Двоструки производ два броја умањен за квадрат мањег даје 45. Кад се од већег одузме пети део мањег остаје 2.

6. Квадрат једног броја смањен за петоструки квадрат другог даје 20. Кад се првом броју дода троструки други, добије се 38.

7. Десетице једног двоцифреног броја су квадрат јединица, а њихов збир је 6.

8. Геометриска средина два броја који се разликују за 5 јесте 12.

9. Збир квадрата два броја је 325. Ако се први повећа за 2, други за 5, збир њихових квадрата биће 544.

10. Збир цифара једног двоцифреног броја је 5. Збир квадратних корена обеју цифара је 3.

11. Два броја разликују се за 5, а њихови кубови за 2375.

12. Збир два броја је 30, збир њихових кубова 8190.

13. Број 18 648 да се растави на два сабирка, да збир њихових кубних корена буде 42.

14. Аритметичка средина два броја је 9, хармониска средина између та два иста броја је $8\frac{8}{9}$. (Види Алгебру за V р. стр. 146, зад. 16!)

15. Разлика два броја је 9, њихова хармониска средина $8\frac{4}{7}$.

16. Аритметичка средина два броја је за 7 већа од геометриске средине. Њихова хармониска средина износи $5\frac{7}{13}$.

17. У једном мешовитом броју цели су већи од разломка 30 пута. Бројилац разломка је 1, а именилац је за 1 мањи од броја целих.

18. У једном кругу полупречника $r = 26$ cm, кроз тачку чија је средишна раздаљина 10cm, повучена је тетива дужине 50cm. Колики су отсечци ове тетиве?

19. У једном кругу полупречника $r = 10$cm, повучена је тетива дужине 12cm. Колика је средишна раздаљина тачке у којој се секу тангенте које додирују круг у крајњим тачкама тетиве?

20. Средишна раздаљина два круга који се додирују изнутра јесте 4cm. Разлика њихових површина 200cm²,96. Колики су полупречници ова два круга? ($\pi = 3,14$).

21. Дата су два концентрична круга полупречника R и r. Да се повуче заједничка тетива али тако, да комад који пада у унутрашњост мањег круга изнесе $\frac{2}{5}$ од целе тетиве.

Колика је цела тетива и колика је њена средишна раздаљина? $R = 25$cm, $r = 17$cm.

22. Изван круга ($r = 21$cm) лежи тачка чија је средишна раздаљина 29cm. Од ње треба да се повуче на круг сечица, тако да унутарња тетива буде 9cm.

23. У једном троуглу две стране су 21cm и 28cm. Симетрала угла који ове стране захватају дели супротну страну на два отсечка, тако да правоугаоник састављен од тих отсечака износи 300cm^2. Да се одреде отсечци.

24. Симетрала једног угла у троуглу дели супротну страну на отсечке који су дугачки 65cm и 156cm. Колике су друге две стране, кад је збир квадрата над све три стране 97 682cm^2?

25. Стране троугла које захватају један угао разликују се за 7cm. Трећа страна је 35cm. Симетрала угла која полови тај угао дели супротну страну на два отсечка. Да се одреде отсечци, кад је збир квадрата свих страна 2450cm^2.

26. На путу од четврт километара предњи точак на једним колима начини 11 обрта више од задњег. Кад би обим задњег точка био за 3dm дужи него што је сада, предњи точак окренуо би се 16 пута више од задњег. Наћи обим сваког точка.

27. Један бициклист прелази 3km више кад иде низ брдо неголи кад иде уз брдо и потребно му је исто толико времена да пређе 22km низ брдо и 48km уз брдо, колико и да пређе 50km низ брдо и 27km уз брдо. Колика је његова брзина уз брдо?

28. Један човек упитан колико му је година одговори: Ако помножите обе цифре мојих година, добијени број биће моја старост од пре 22 године. А ако саберете све цифре оба броја, имаћете једну трећину моје садашње старости.

29. Два човека крену једновремено из два места један другом у сусрет и сретну се после 6 минута. Они се мимоиђу, сваки идући ка месту, одакле је други пошао. Један од њих стигне 5 минута пре другога. По колико је минута сваки употребио на том путу?

30. Два тела А и В крећу се по обиму једног круга. Ако се крећу једно према другом, сретну се сваких 40 секунда. Да обиђе цео круг потребно је телу А 18 секунада

мање, неголи телу В. По колико прелази свако тело у секунду, кад је обим круга 1080 метара?

31. По крацима једног правог угла крену се две тачке једновремено правцем од темена. Њихово отстојање пре почетка кретања је 17cm. Прва прелази у секунду 23 cm, друга 24cm. После три секунда њихова међусобна раздаљина била је 116 cm. На ком отстојању од темена су се налазиле тачке пре почетка кретања?

32. Један веслач је утврдио да број минута који му је потребан, да пређе уз воду 4km, за 31 мањи од броја минута, који му је потребан за исти пут по мирној води. Међутим потребно му је свега 20 минута, да пређе 4km низ воду. Да се одреди брзина реке.

33. Један човек стигне на железничку станицу, која је била најближа до његовог пољског добра, на сат и по раније, него што је јавио да дођу кола да га сачекају. Он уместо да чека кола, пође пешице брзином 4km на сат и сретне своја кола, кад су она већ прешла 2km. Пошто се попне у кола, стигне кући сат раније, неголи што би стигао, да је чекао кола у станици. Колико је далеко његова кућа од станице и којом су брзином ишла кола?

34. Један батаљон војника кад се построји у пун квадрат има с фронта 16 војника мање, неголи кад се построји у један квадрат, који је у средини празан, а кога дебљина оквира износи 4 човека. Колики је број војника?

35. Две цеви кад теку заједно напуниће један базен за $6^{mn}\frac{2}{3}$. Кад би једној цеви било потребно један минут мање да сама напуни базен, а другој два минута више за исту ствар, тада би обе цеви, заједно, напуниле базен за 7 минута. Да се одреди за које ће време свака од ових цеви напунити базен кад тече сама.

ГЛАВА VII

Графичко решавање квадратних једначина

Графичко претстављање функције II реда

137.— Квадратна функција.— Најпростија квадратна функција је

$$y = x^2.$$

У Алгебри за V р. стр. 181 — 184 ми смо проучавали ову функцију. Да не би увек цртао криву линију, која одговара овој функцији, тачку по тачку, ученик треба што је могуће тачније да је конструише на картону и да је пажљиво изреже. Тако добијени *шаблон* моћи ће у даљем раду да користи.

1. Шта је графички претставник ове функције?
2. Какав је ток ове функције?
3. Је ли парабола симетрична крива линија?
4. Како се из параболе $y = x^2$ може добити $y = ax^2$?
5. Какво значење има коефицијент a за ток криве, а какво знак испред коефицијента?

Осовина симетрије пароболе зове се просто *осовина йараболе*. Пресек осовине са кривом зове се *теме йараболе*.

За писмено вежбање

1. Конструиши тачку по тачку линију

$$y = x^2 + 2.$$

Решење. — Користећи следећу табелу

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 0,1	± 0,5	± 0,7	± 0,9	± 1,2	± 1,5	± 2,5	± 3,5
y	2	3	6	11	18	2,01	2,25	2,49	2,81	3,44	4,25	8,25	14,25

добијамо слику 16.

Видимо да је то у ствари парабола $y = x^2$ померена за 2 навише, паралелно са ординатном осовином.

До исте слике ми смо могли доћи много лакше да смо се послужили шаблоном за параболу $y = x^2$. Шаблон бисмо подигли за 2 јединице навише.

2. Конструиши криве

$$y = x^2 + 2{,}5$$
$$y = x^2 - 5!$$

Које су координате темена?

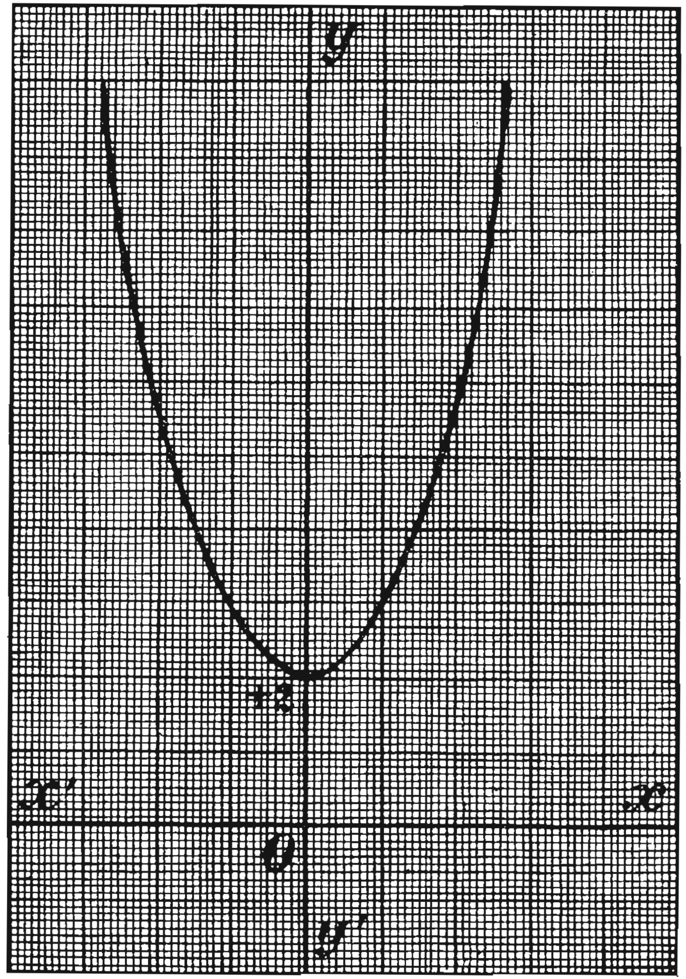
3. Помери параболу $y = x^2$ за 1,5, за 3,8 навише; за 2,5, за 2 наниже.

Које су координате темена?

4. Конструиши помоћу шаблона криву

$$y = x^2 - 4!$$

Какво значење имају апсцисе тачака, у којима криву сече X-осовина?



Сл. 16.

Како се на основу претходног задатка могу графички решити једначине:

5. $x^2 - 9 = 0$ 6. $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ 7. $x^2 - \frac{25}{4} = 0$

8. $x^2 - 1 = 0$ 9. $x^2 - 2 = 0$ 10. $x^2 - 3 = 0$
11. $x^2 + 2 = 0$ 12. $x^2 + 3 = 0$ 13. $x^2 + 4 = 0$?

14. Претстави графички следеће функције:

$$y = (x + 3)^2 \qquad y = (x - 3)^2$$
$$y = (x + 1)^2 \qquad y = (x - 1)^2$$

Како је ово могло лакше да се уради шаблоном?

Које су кординате темена? Како гласе једначине осовина?

15. Помери параболу $y = x^2$, задржавајући исти правац осовине, за 2, за 3,5 надесно; за 1,5, за 3 налево!

Колике су координате темена? Како гласи једначина осовине?

Како гласе функције које одговарају тим линијама?

Претстави графички функције:

16. $y = x^2 - 2x + 1$ 17. $y = x^2 - 4x + 4$
18. $y = x^2 - 6x + 9$ 19. $y = x^2 - 8x + 16$

20. Претстави графички следеће функције:
$y = (x - 2)^2 + 1$ $y = (x - 3)^2 - 2$ $y = (x + 4)^2 - 3$

Како је ово могло лакше да се уради помоћу шаблона?

Колике су координате темена? Како гласе једначине осовина?

21. Помери параболу $y = x^2$ задржавајући исти правац осовине за

a) 4 надесно, 2 навише b) 3 надесно, 1 наниже
c) 5 налево, 3 навише d) 2 налево, 3 наниже!

Да се одреде и координате темена и једначине осовина.

138. **Општи случај.** — Ако померимо параболу $y = x^2$, задржавајући увек исти правац осовине, у правцу X-не осовине за једну дужину m, у правцу Y-ске осовине за једну дужину n, то одговарајућа функција гласи

$$y = (x - m)^2 + n$$

или
$$y = x^2 - 2mx + m^2 + n$$

или
$$y = x^2 + px + q,$$

где су p и q позитивни или негативни бројеви, цели и разломци, а могу бити и нуле.

Из овога закључујемо: *једна функција облика*

$$y = x^2 + px + q$$

има увек за графичког претставника једну параболу.

139. — Кад хоћемо графички да претставимо квадратну функцију

$$y = x^2 + px + q \qquad (1)$$

најлакше ћемо то учинити, ако је доведемо на облик

$$y = (x - m)^2 + n, \qquad (2)$$

па се још и шаблоном послужимо.

Из једначине (1) добија се једначина (2) образовањем потпуног квадрата помоћу два прва члана.

m и n су у том случају координате темена параболе.

Пример. $y = x^2 - 5x + 3.$

Решење. $y = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3$

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4},$$

или $y = (x - 2{,}5)^2 - 3{,}25.$

Овде су координате темена $x = 2{,}5$, $y = -3{,}25$.

За писмено вежбање

Да се графички претставе следеће функције:

1. $y = x^2 + 8x + 7$ 2. $y = x^2 + 4x$
3. $y = x^2 - 4x - 12$ 4. $y = x^2 - 6x + 1$
5. $y = x^2 - 8x + 15$ 6. $y = x^2 + 3x + 2$

7. Паробола $y = x^2$ да се тако помера, задржавајући исти правац осовине, да теме добије доле назначене координате. При том још да се увек одреди одговарајућа функција.

Апсциса 0;	ордината -3	апсциса 0;	ордината 3
„ -3;	„ 0	„ $+3$;	„ 0
„ $+2$;	„ 5	„ $-2\frac{1}{2}$	„ $+4$
„ $+4\frac{1}{2}$;	„ $\frac{3}{4}$	„ $-3\frac{3}{4}$	„ $-2\frac{1}{2}$

Графичко решавање квадратних једначина

140. Чисте квадратне једначине. — Овај случај смо расправљали у чланку 137, у задацима од 4 — 13. Треба конструисати параболу

$$y^2 + m = 0$$

и одредити апсцисе њених пресека са апсцисном осовином. Те апсцисе су корени једначине.

141. Потпуне квадратне једначине. — Пошто се свака квадратна једначина

$$ax^2 + bx + c = 0$$

може да доведе на нормалан облик

$$x^2 + px + q = 0,$$

то ћемо засада, да би излагање било простије и јасније, узимати једначине у нормалном облику.

Једначини

$$x^2 + px + q = 0$$

одговара функција

$$y = x^2 + px + q.$$

За решење једначине сад се можемо двојако питати: **алгебарски:** *за које вредности x функција постаје нула;* **геометриски:** *у којим тачкама крива линија сече апсцисну осовину.*

Рачунско решавање нам је познато. За графичко ћемо показати три разна метода.

142. Први метод. — Треба једначину довести на нормалан облик

$$x^2 + px + q = 0,$$

па леву страну ставити да је једнака y, тј.

$$y = x^2 + px + q.$$

Затим се начини табела и нацрта одговарајућа крива. Апсцисе њених пресечних тачака са X-осовином су *стварни корени једначине.*

Пример. $\qquad x^2 + x - 6 = 0.$

Пресечним тачкама са X осовином одговарају апсцисе $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. (Сл. 17.)

Ученик да изврши пробу рачунским решавањем!

Напомена. — Много тачније и прегледније је графичко решавање квадратних једначина, кад се апсцисе узму 10 пута веће од ордината. (Види алгебру за V р. стр. 183!)

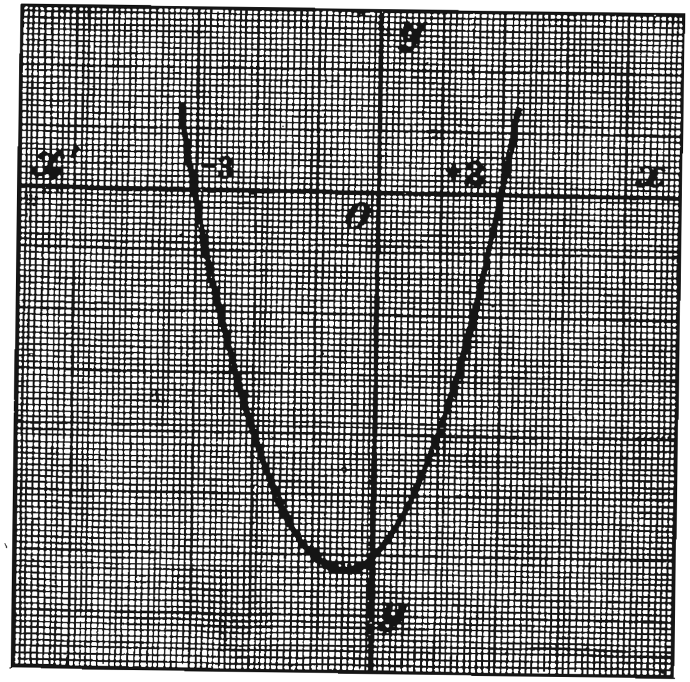
143. — Горњу функцију

$$y = x^2 + px + q$$

можемо довести и на облик

$$y = (x - m)^2 + n.$$

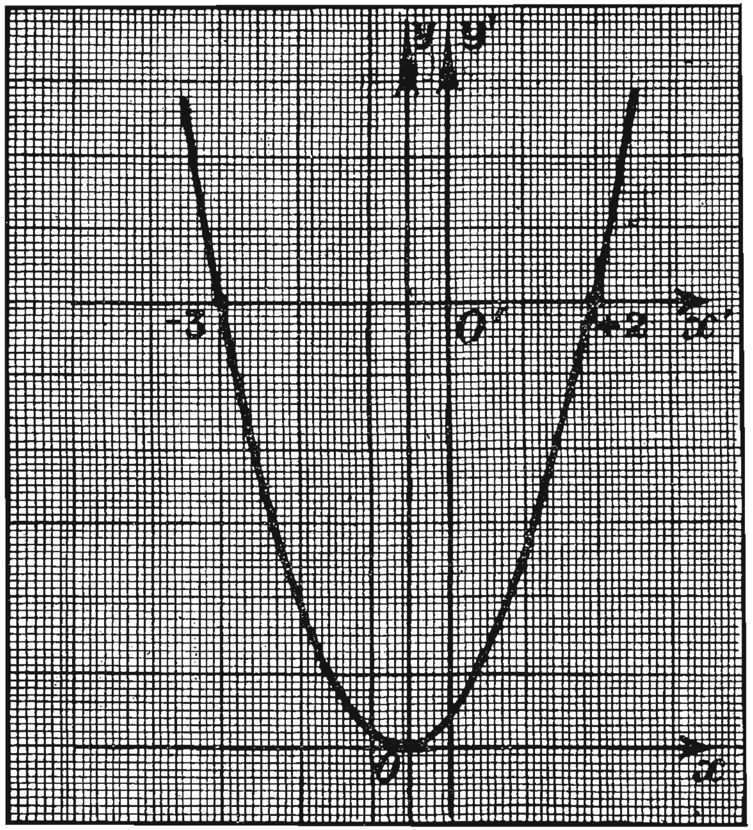
Као што нам је већ познато, из оваквог облика функције, крива се лакше конструише помоћу шаблона.



Сл. 17.

Напомена. — Рекли смо да параболу $y = x^2 + px + q$, довођењем на облик $y = (x - m)^2 + n$ конструишемо померањем основне параболе $y = x^2$ паралелно апсцисној и ординатној осовини за m и n. До истог резултата бисмо дошли ако, уместо да померамо параболу, тј. шаблон, ми померамо координатни систем, а параболу оставимо непомичну. Само још треба пазити да паралелно померање координатног система буде у супротном правцу, неголи што би требало да буде помицање шаблона параболе.

Узмимо исти пример, тј. да решимо једначину $x^2 + x - 6 = 0$. Кад је доведемо на облик $y = (x - m)^2 + n$,



Сл. 19.

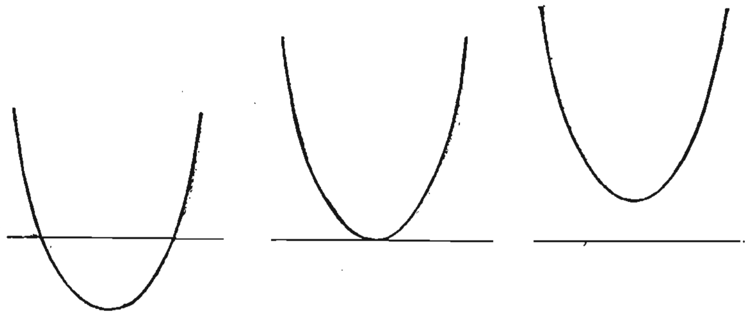
добијамо $$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

Одавде се види да координатни систем треба померити за $\frac{1}{2}$ у правцу апсцисне осовине, а за $\frac{25}{4}$ у правцу ординатне осовине. Решења су апсцисе пресечних тачака пароболе

$y = x^2$ и нове апсцисне осовине, тј. $x_1 = 2\ x_2 = -3$, што се лепо види из слике. Нови координатни систем је $X'O'Y'$.

Напомена. — Графичко решавање је много тачније и прегледније, кад се вредности за x узму 10 пута веће од вредности за y.

144. — Крива линија не сече увек апсцисну осовину. Парабола може имати следеће положаје:



Сл. 19.

1. Крива сече апсцисну осовину у двема тачкама. Једначина има два стварна корена.

2. Крива и апсцисна осовина имају само једну заједничку тачку. Апсцисна осовина додирује криву. Једначина има два стварна једнака корена.

3. Крива са апсцисном осовином нема ни једне заједничке тачке. Једначина нема стварних корена. Корени су имагинарни.

145. Други метод.— Ако нацртамо у истом координатном систему параболу, која одговара једначини
$$y = x^2 \qquad (1)$$
и праву линију, која одговара једначини
$$y + px + q = 0 \qquad (2)$$
то морају координате x и y једне њихове пресечне тачке M бити такве особине, да смењене задовољавају обе једначине (1) и (2), тј. за координате пресечне тачке важе једначине
$$y_0 = x_0^2$$
$$y_0 = -px_0 - q.$$

Из ових једначина одузимањем следује

$$x_0^2 + px_0 + q = 0,$$

тј. апсциса x задовољава једначину

$$x^2 + px + q = 0,$$

дакле она је један њен корен.

Одавде имамо ово **практично упутство** *за графичко решавање квадратних једначина: Ако је једначина дата у облику*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

треба се деобом ослободити коефицијента a и добити облик

$$x^2 + px + q = 0.$$

Тада ставимо

$$\text{I} \quad y = x^2$$

$$\text{II} \quad y + px + q = 0.$$

Једначина I претставља основну параболу. Њу треба цртати шаблоном, који треба израдити што је могуће тачније.

Једначина II је права линија. Од ње треба одредити две тачке M_1 и M_2 што је могућно удаљеније, унети их у цртеж параболе и спојити их. Апсцисе пресечних тачака P_1 и P_2 су стварни корени дате квадратне једначине.

Пример. $4x^2 + 4x - 15 = 0.$

Решење. Најпре ћемо уклонити коефицијент 4, па добијамо

$$x^2 + x - \frac{15}{4} = 0.$$

Ставимо

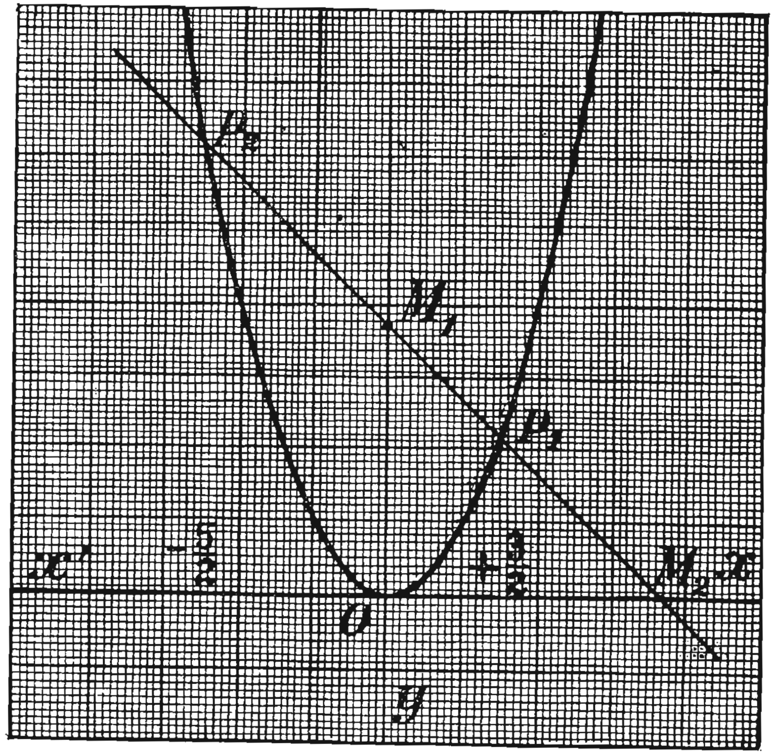
$$\text{I} \quad y = x^2$$

$$\text{II} \quad y + x - \frac{15}{4} = 0!$$

Нацртамо шаблоном параболу $y = x^2$. Затим одредимо две тачке за праву II M_1 $(0; 3\frac{3}{4})$ и M_2 $(3\frac{3}{4};\ 0)$. Права која спаја ове две тачке сече параболу у тачкама P_1 и P_2 чије су апсцисе

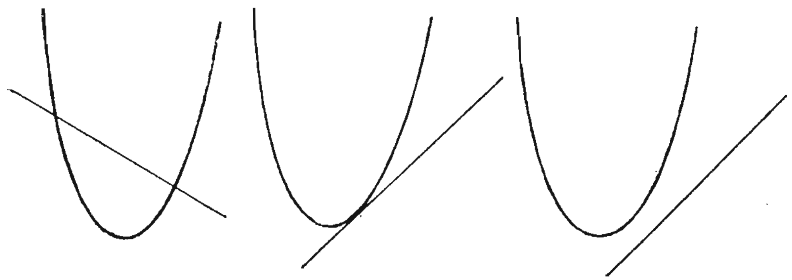
$$x_1 = 1{,}5 \text{ и } x_2 = -2{,}5$$

корени дате једначине, као што се и из слике види.



Сл. 20.

146. — И овде имамо сличну дискусију као и у чланку 144. Права линија не сече увек параболу. Права линија и парабола могу имати следеће положаје:



Сл. 21.

1. Права сече параболу у двема тачкама. Једначина има два стварна корена.

2. Права додирује параболу у једној тачки. Једначина има два једнака корена.

3. Права и парабола немају ни једне заједничке тачке. Једначина нема стварних корена. Корени су имагинарни.

147. Трећи метод. — Нека нам је опет дата квадратна једначина у нормалном облику

$$x^2 + px + q = 0$$

и напишимо Виетову везу између корена и коефициената

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Да би нам графичко решавање било угодније, први корен ћемо означити са x, а други са y, па горње једначине постају

$$x + y = -p \qquad (1)$$

$$xy = q. \qquad (2)$$

Ако у једначини (1) подигнемо на квадрат леву и десну страну, а у једначини (2) обе стране помножимо са 2, добићемо

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2 \qquad (3)$$

$$2xy = 2q. \qquad (4)$$

Ако даље једначину (4) одузмемо од једначине (3), добијамо

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q. \qquad (5)$$

Ставимо сад у један систем једначине (1) и (5), па добијамо

$$\text{I} \quad x + y = -p$$

$$\text{II} \quad x^2 + y^2 = p^2 - 2q.$$

148. Једначина круга. — Једначина I је права линија. Једначина II је другог степена и дата је у неразрешеном, имплицитном, облику, као што нам може бити дата права линија у облику $ax + by + c = 0$. Какву линију претставља једначина II одмах ћемо видети.

Узмимо као пример једначину

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Кад ову једначину решимо по y, добићемо

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Да бисмо функцију графички претставили, треба да образујемо табелу:

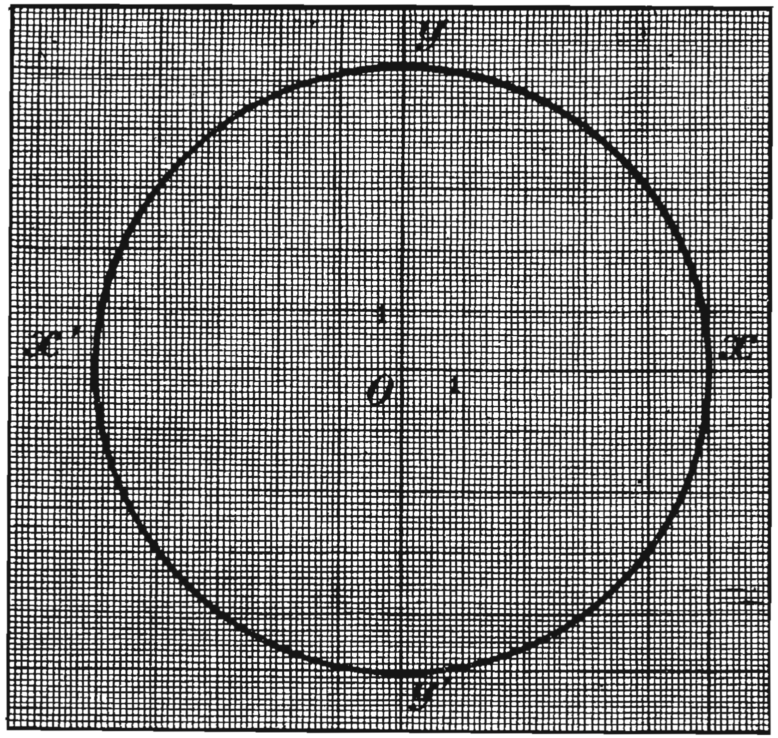
x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	± 5	$\pm 4{,}9$	$\pm 4{,}6$	± 4	± 3	0

Неке вредности за y су приближне.

Изузев прве и последње заграде, свака друга даје нам по 4 тачке.

Веће вредности за x од 5 и мање од -5 не могу се узети. Зашто?

Крива линија изгледа овако?



Сл. 22.

Каква је ово крива линија?

Колики је полупречник?

Где се налази центар круга?

Уопште једначина

$$x^2 + y^2 = r^2$$

је једначина круга, чији је центар у координатном почетку а полупречник r.

Задатак. У следећим једначинама да се одреди полупречник круга:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 2 \qquad x^2 + y^2 = 5.$$

149. — У систему који смо ми добили

$$x + y = -p$$
$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q$$

друга једначина је, дакле, једначина круга, чије је средиште у координатном почетку а полупречник

$$r = \sqrt{p^2 - 2q}.$$

Треба, око координатног почетка описати круг полупречником $r = \sqrt{p^2 - 2q}$ и конструисати праву $x + y = -p$. Апсцисе пресечних тачака праве и круга биће стварни корени дате квадратне једначине.

Отуда имамо ово **практично упутство** за решавање квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ *помоћу круга и праве: треба образовати систем једначина*

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q$$
$$x + y = -p.$$

Затим треба око координатног почетка описати круг полупречника

$$r = \sqrt{p^2 - 2q}$$

и конструисати праву

$$x + y = -p,$$

узимајући две њене тачке M_1 и M_2 што је могуће удаљеније.

Апсцисе пресечних тачака P_1 и P_2 праве и круга дају корене дате једначине.

Овај метод има то преимућство над осталима, што се све конструкције могу извршити помоћу шестара и лењира.

Пример. $x^2 - x - 6 = 0$.

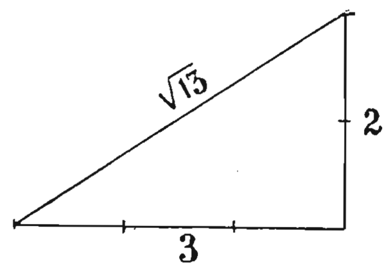
Решење. Најпре се образује систем

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (p^2 - 2q = 13)$$
$$x + y = 1. \qquad (p = -1)$$

Затим се око координатног почетка опише круг полупречника $r = \sqrt{13}$. Пошто је $\sqrt{13}$ ирационалан број, то га треба одредити конструкцијом. Пошто је

$$13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2,$$

то је $\sqrt{13}$ хипотенуза правоуглог троугла, чије су катете 3 и 2.



Сл. 23.

За праву линију узећемо тачке M_1 (5; — 4) и M_2 (— 4; 5).

Из слике 24 види се да су корени једначине

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2.$$

За јединицу узета је трострука страна квадратића.

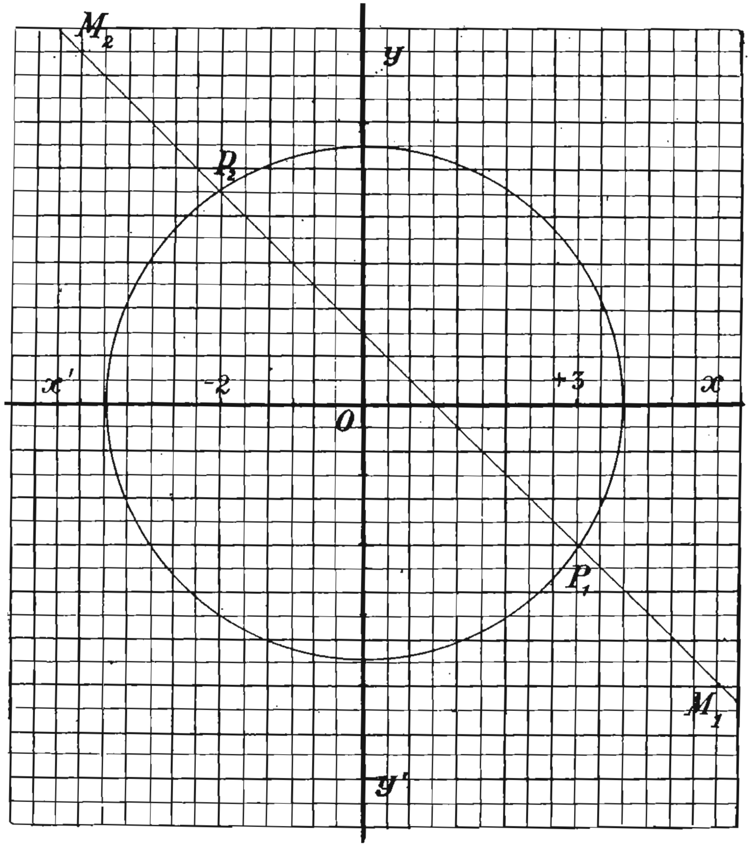
Напомена 1. — Полупречник круга најчешће ће бити ирационалан број. Због тога треба га увек одређивати једном од конструкција, које смо већ имали у чл. 61 или у Алгебри за V р. стр. 184 и 185.

Напомена 2. — Кад се $\sqrt{n}$ одређује графички помоћу Питагориног правила, десиће се да се број n претстави као збир од више квадрата. На пр.

$$19 = 9 + 9 + 1 = 3^2 + 3^2 + 1^2.$$

Тада се најпре одреди хипотенуза равнокраког троугла, коме су катете 3 и 3. Затим се овако добијена хипотенуза ($\sqrt{18}$) узме за катету новог правоуглог троугла, а друга катета је 1. Хипотенуза овог другог правоуглог троугла је тада $\sqrt{19}$.

Може ли се и код овог метода применити дискусија као у чланцима 144 и 146?



Сл. 24.

За писмено вежбање

Следеће једначине да се реше графички:

1. $2x^2 - 8 = 0$ 2. $4x^2 - 1 = 0$

3. $0{,}4x^2 - 2{,}5 = 0$ 4. $\frac{x^2}{2} - 8 = 0$

5. $(x + 1)(x - 1) = 8$ 6. $(2x + 3)(2x - 3) - 7 = 0$

7. $1 - 3x^2 = 6 + 2x^2$ 8. $5 + 4x^2 = x^2 - 22$

9. $4(x^2 - 3x) - 3(25 - 4x) + 23 = 0$

10. $x^2 - x - 6 = 0$ 11. $x^2 - x - 2 = 0$

12. $x^2 - x - 12 = 0$ 13. $x^2 - 3x + 2 = 0$

14. $x^2 - 9x + 20 = 0$ 15. $x^2 + x - 20 = 0$

16. $\frac{x^2}{4} - x - 2 = 0$ 17. $\frac{x^2}{2} + x - 3{,}5 = 0$

18. $\frac{x^2}{2} - x - 2 = 0$ 19. $\frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{2} = 0$

20. $\frac{x^2}{5} - 0{,}8x + 1 = 0$ 21. $\frac{x^2}{3} + x - 2 = 0$

22. $0{,}8x^2 + 2x - 3 = 0$ 23. $x^2 - 3x + 2\frac{1}{4} = 0$

24. $x^2 + 2{,}8x + 1{,}96 + 0$ 25. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = 0$

26. $0{,}2x^2 - 0{,}6x + 2{,}25 = 0$ 27. $\frac{x^2}{2} - 4x + 9\frac{1}{2} = 0$

28. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ 29. $x^2 - 0{,}7x + 0{,}12 = 0$

30. $\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} - 1 = 0$ 31. $x^2 + 1{,}1x - 0{,}8 = 0$

32. $4x^2 - 4x - 15 = 0$ 33. $-2x^2 + 5x - 1 = 0$

34. $x^2 - 0{,}1x - 0{,}12 = 0$ 35. $x^2 + x = 7$

36. $x^2 = 3x + 47$ 37. $9x^2 - 720 + 40x = 0$

38. $x^2 - \frac{3}{2}x = 2$ 39. $9x^2 = 60x - 225$

40. $x^2 + 4{,}8x + 5{,}76 = 0$ 41. $x^2 - 22x = -180$

42. $6x^2 - 23x + 21 = 0$ 43. $5x^2 - 3x - 16 = 0$

44. $4x^2 - 12x - 11 = 0$ 45. $9x^2 - 36x + 20 = 0$

46. $3x^2 + x - 10 = 0$ 47. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

48. $x^2 - 5x + 8 = 0$ 49. $3x^2 - 5x + 3 = 0$

ДЕО ТРЕЋИ

ГЛАВА VIII

Логаритми и њихова примена

150. Појам логаритма. — Елементарне рачунске радње сабирање и множење имају само по једну обрнуту радњу, јер једначине

$$a + b = s$$
и
$$c \cdot d = p$$

садрже само *две врсте* величина. У првом случају сабирке (a и b) и збир (s), у другом чиниоце (c и d) и производ (p).

Код степеновања

$$b^n = a \qquad (1)$$

јављају се три врсте величина: *основа* b, *изложилац* n и степен a. Однос између ове три величине може да се изрази на три разна начина, према томе које су две величине познате и која је трећа непозната.

1. Ако су дате величине b и n, а тражи се a, имамо степеновање изражено већ једначином (1).

2. Ако су познате величине a и n, b се добија кореновањем:

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

3. Ако су познати степен и основа, а непознат изложилац, ми изложилац не можемо израчунати ни једном од досада познатих рачунских радњи. Изложилац се одређује новом рачунском радњом *логаритмовањем.* Решење се пише у облику

$$n = \log a_{(b)} \qquad (2)$$

и чита се: n је једнако логаритму броја a за основу b.

a се зове **логаритманд** или **нумерус**, b **основа логаритма,** а резултат **логаритам.**

Логаритам је број који казује колико пута треба да се узме основа као чинилац, да се добије логаритманд, другим речима, **логаритам** *је* **изложилац,** *којим треба степеновати основу, да се добије логаритманд.*

151. — Ако вредност за n из (2) ставимо у једначину (1), добијамо

$$b^{\log a_{(b)}} = a \qquad (3)$$

тј. *кад се основа степенује логаритмом добија се логаритманд.*

Ова једначина је дефинициона једначина логаритмовања.

152. — Из појма о логаритмовању следују као специјални случајеви ови резултати:

$$\log b^m{}_{(b)} = m$$

$$\log b_{(b)} = 1$$

$$\log 1_{(b)} = 0.$$

Ови резултати важе за сваку коначну основу изузев нуле.

Примери.

$\log 8_{(2)} = 3$ јер је $2^3 = 8$

$\log 81_{(3)} = 4$ „ „ $3^4 = 81$

$\log \frac{1}{16}{}_{(2)} = -4$ „ „ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

$\log 2\frac{1}{4}{}_{(\frac{3}{2})} = 2$ „ „ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$\log 2\frac{1}{4}{}_{(\frac{2}{3})} = -2$ „ „ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$

$\log 5_{(25)} = \frac{1}{2}$ „ „ $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

$\log 2_{(8)} = \frac{1}{3}$ „ „ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\log \frac{1}{7}{}_{(49)} = -\frac{1}{2}$ „ „ $49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}.$

Напомена 1. — Овде смо узели згодне примере, где се логаритам лако може одредити. У безброј случајева поступак за одређивање логаритама је врло компликован. На пр.

$$\log 2_{(10)} \text{ или } \log 3_{(7)}.$$

Треба решити експоненцијалне једначине

$$10^x = 2 \text{ или } 7^x = 3.$$

Напомена 2. — Аксиом, помоћу кога решавамо једначине, *кад се на једнаким величинама изврше једнаке промене, добијају се једнаки резултати*, увођењем логаритама добија ново проширење: *кад се једнаке величине логаритмишу за исту основу, добијени логаритми ће бити једнаки.*

За усмено вежбање

1. $\log 81_{(9)} =$; $\log 27_{(3)} =$; $\log 125_{(5)} =$
2. $\log 64_{(4)} =$; $\log 343_{(7)} =$ $\log 32_{(2)} =$

3. $\log 1_{(2)} =$; $\log \frac{1}{2}_{(2)} =$; $\log \frac{1}{16}_{(2)} =$; $\log 1_{(3)} =$

4. $\log 729_{(9)} =$; $\log 243_{(3)} =$; $\log 265_{(5)} =$
5. $\log 256_{(4)} =$; $\log 2^{n}{}_{(2)} =$; $\log 3^{n}{}_{(3)} =$
6. $\log 13_{(13)} =$; $\log 123_{(123)} =$; $\log 1_{(18)} =$
7. $\log 1000_{(10)} =$; $\log 0{,}1_{(10)} =$; $\log 0{,}01_{(10)} =$
8. $\log 289_{(17)} =$; $\log 441_{(21)} =$; $\log 1_{(25)} =$

9. $\log \frac{1}{512}_{(2)} =$; $\log \frac{25}{4}_{\left(\frac{5}{2}\right)} =$; $\log \frac{4}{25}_{\left(\frac{5}{2}\right)} =$

10. $\log 2\frac{7}{9}_{\left(\frac{5}{3}\right)} =$; $\log 0{,}1_{(0{,}1)} =$; $\log 0{,}01_{(100)} =$

11. $\log 8_{\left(\frac{1}{2}\right)} =$; $\log 27_{\left(\frac{1}{3}\right)} =$; $\log 10_{(0{,}1)} =$

За писмено вежбање

За одредбу логаритма увек се питамо: чиме треба степеновати основу, да се добије логаритманд.

1. $\log 8_{(4)} =$; $\log 16_{(8)} =$; $\log 27_{(9)} =$; $\log 32_{(4)} =$
2. $\log 64_{(16)} =$; $\log 81_{(27)}$ — = ; $\log 100\,000_{(1000)} =$

3. $\log 7\frac{19}{32}_{\left(1\frac{1}{2}\right)} =$; $\log 7\frac{58}{81}_{\left(1\frac{2}{3}\right)} =$; $\log 0{,}1296_{(0{,}6)} =$

4. $\log 6\frac{1}{4}_{\left(\frac{2}{5}\right)} =$; $\log \frac{64}{729}_{\left(1\frac{1}{2}\right)} =$; $\log 4_{(0{,}5)} =$

5. $\log 16_{(0{,}25)} =$; $\log 64_{(0{,}125)} =$; $\log 50\frac{46}{81}_{(0{,}375)} =$

6. $\log 4_{(16)} =$; $\log 5_{(125)} =$; $\log 7_{(2401)} =$

7. $\log \frac{1}{2}_{(8)} =$; $\log \frac{1}{3}_{(81)} = \log 10_{(0{,}001)} =$

8. $\log b^{4}{}_{(b)} =$; $\log b^{6}{}_{(b^{2})} =$; $\log b^{10}{}_{(b^{5})} =$
9. $\log b^{2}{}_{(\sqrt{b})} =$; $\log b^{3}{}_{(\sqrt{b})} =$; $\log \sqrt{b}_{(b)} =$;

$\log \sqrt[3]{b^{2}}_{(b)} =$

10. $\log \frac{1}{\sqrt[3]{25}}_{(5)} =$; $\log \frac{1}{\sqrt[4]{27}}_{(3)} =$; $\log \frac{1}{\sqrt{32}}_{(2)} =$

11. $3^{\log 9(3)} =$; $4^{\log 64\,(4)} =$; $7^{\log 343\,(7)} =$
12. $6^{\log 12\,(6)} =$; $5^{\log 19\,(5)} =$; $8^{\log 5\,(8)} =$

13. $b^{\log a(b)} =$; $20^{\log x(20)} =$; $100^{\log m(100)} =$

Следеће једначине да се реше по x:

14. $\log x_{(2)} = 2$; $\log x_{(11)} = 2$
15. $\log x_{(2)} = 3$; $\log x_{(5)} = 3$; $\log x_{(10)} = 3$
16. $\log x_{\left(\frac{3}{4}\right)} = 3$; $\log x_{\left(\frac{5}{6}\right)} = 3$; $\log x_{(9)} = 3$
17. $\log 512_{(x)} = 9$; $\log 4096_{(x)} = 4$; $\log 1024_{(x)} = 5$.
18. $\log x_{(7)} = 4$; $\log x_{(243)} = 0{,}6$; $\log x_{\left(\frac{1}{8}\right)} = -\frac{5}{3}$.

153. Правила о логаритмима. —

1. Према дефиниционој једначини (3) у чланку 151 сваки број може да се напише у облику степена са произвољном основом. Тако на пр.

$$M = b^{\log M(b)} \qquad N = b^{\log N(b)} \qquad P = b^{\log P(b)}$$

(Види из претходног чланка задатке 11, 12, и 13 за писмено вежбање!)

Производ ових бројева је

$$M \cdot N \cdot P = b^{\log M(b) + \log N(b) + \log P(b)}.$$

Ако обе стране ове једначине логаритмишемо за основу b, имамо

$$\log M \cdot N \cdot P_{(b)} = \log M_{(b)} + \log N_{(b)} + \log P_{(b)}.$$

Одавде следује **I правило**: *Логаритам производа једнак је збиру логаритама појединих чинилаца.*

Пример. $\log 42 = \log\ 2 \cdot 3 \cdot 7 = \log 2 + \log\ 3 + \log\ 7$ (за ма коју основу).

2. Узмимо поново да је

$$M = b^{\log M(b)} \qquad N = b^{\log N(b)}$$

Дељењем добијамо:

$$\frac{M}{N} = b^{\log M(b)\ -\ \log N(b)}$$

и одатле

$$\log \frac{M}{N}_{(b)} = \log M_{(b)} - \log N_{(b)},$$

одакле следује **II правило**: *Логаритам количника једнак је разлици логаритама дељеника и делиоца.*

Пример 1. $\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2.$

Пример 2. $\log 3{,}8 = \log\frac{38}{10} = \log 38 - \log 10$. (Основа може бити ма која. Изостављена ради лакшег писања).

3. Нека је

$$M = b^{\log M(b)}$$

Ако обе стране степенујемо са n, добићемо

$$M^n = (b^{\log M(b)})^n = b^{n \log M(b)}$$

Ако сад обе стране логаритмишемо за основу b, добићемо

$$\log M^n{}_{(b)} = n \log M_{(b)},$$

па имамо **III правило**: *Логаритам степена добија се, кад се логаритам основе степена помножи изложиоцем.*

Напомена. — Ми смо ово треће правило могли добити и непосредно, кад степен претставимо као производ једнаких чинилаца.

$$M^n = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot M}_{n \text{ чинилаца}}$$

$$\log M^n = \underbrace{\log M + \log M + \log M + \cdot \cdot \cdot \cdot + \log M}_{n \text{ сабирака}}$$

$$\log M^n = n \log M.$$

Пример 1. $\log 2^3 = 3 \log 2$.

Пример 2. $\log (ab)^3 = 3 \log ab = 3 (\log a + \log b) = 3 \log a + 3 \log b$.

Пример 3. $\log\frac{ab^2}{(cd)^3} = \log ab^2 - \log (cd)^3 = \log a + 2 \log b - (3 \log c + 3 \log d)$.

4. Пођимо опет од једначине

$$M = b^{\log M(b)}$$

па коренујмо обе стране са n. Тада добијамо

$$\sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{b^{\log M(b)}} = b^{\frac{\log M(b)}{n}}$$

Ако обе стране логаритмишемо, имаћемо

$$\log \sqrt[n]{M}_{(b)} = \frac{\log M_{(b)}}{n}$$

IV правило гласи: *Логаритам корена добија се, кад се логаритам радиканда подели кореним изложиоцем.*

Пример 1. $\log \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3} \log 16$

Пример 2. $\log \sqrt[4]{a^3} = \frac{1}{4} \log a^3 = \frac{3}{4} \log a$.

Пример 3. $\log \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

Пример 4. $\log \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \log \sqrt[mn]{a} = \frac{1}{mn} \log a$.

Напомена. — Ученик да искаже обрнута правила од ових.

За писмено вежбање

У следећим задацима логаритми да се развију по правилима I-IV. Пошто ова правила важе за ма коју основу, то основа није ни стављана, да би писање било лакше и простије. Ако дођу у рачун одређени бројеви треба их растављати на просте чиниоце. Заграда се треба ослобађати, уколико је то могућно.

1. Дати су логаритми следећих бројева за основу 10: $\log 2 = 0{,}30103$, $\log 3 = 0{,}47712$, $\log 7 = 0{,}84510$, $\log 11 = 1{,}04139$, да се из ових логаритама израчунају логаритми следећих бројева:

a) 3; $5 = \frac{10}{2}$; 6; 8; 9; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 22; 24; 28; 30; 32; 33; 35; 36; 42; 44; 48; 56; 63; 84; 121; 176; 216; 286;

b) $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{16}{11}$; $3\frac{1}{8}$; $4\frac{4}{9}$; $6\frac{1}{8}$;

c) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[4]{21}$; $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt[3]{121}$; $\sqrt[5]{30}$.

Напомена. — Као што се код квадратног корена корени изложилац не пише, исто тако се код логаритама са основом 10, основа изоставља и при писању и при изговарању.

2. $\log abcd =$; $\log 14xyz =$; $\log(2a \cdot 3b) =$

3. $\log a(b+c) =$; $\log(a+b)(c+d) =$; $\log\ m \cdot m \cdot m =$
4. $\log(x^2-y^2) =$; $\log(a^4-b^4) =$; $\log\ ab(c^2-d^2) =$
5. $\log\frac{m}{n} =$; $\log\frac{ab}{c} =$; $\log\frac{ab}{cd} =$; $\log\frac{1}{xy} =$
6. $\log\frac{a+b}{c-d} =$; $\log\frac{abc}{def} =$; $\log\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} =$
7. $\log a^3b =$; $\log a^2b^3c =$; $\log (abc)^2 =$
8. $\log \sqrt[3]{x} =$; $\log \sqrt[4]{st} =$; $\log \sqrt[3]{a^5}$
9. $\log \sqrt{a-b} = \log \sqrt[3]{3a-2b} =$; $\log \sqrt[4]{(m-n)^3} =$
10. $\log \sqrt[3]{\frac{ab}{c}} =$; $\log \sqrt[3]{\frac{a^4b^5}{c^2}} =$; $\log \sqrt[m]{\frac{ax^3}{by}} =$
11. $\log \frac{1}{a^2b^3} =$; $\log \frac{x^{-1}y^{-2}}{z^3\ u^{-3}} =$; $\log \frac{6ab^2}{5cd^3} =$
12. $\log\left(\frac{13m^2x}{8ny^3}\right)^2 =$; $\log \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{x^3}} =$; $\log \frac{3a^3\sqrt[5]{b^4}}{4x^4\sqrt[3]{y^2}} =$
13. $\log \frac{(3+x)^{\frac{3}{2}}}{12} =$; $\log \sqrt{\frac{3x^4}{5y^7}} =$; $\log\ a^3\sqrt[5]{\frac{b-c}{d^3}}$
14. $\log \frac{1}{a}\sqrt[4]{\frac{a^{-3}}{b^{-1}}} =$; $\log\ x\sqrt{x\sqrt{x}} =$;

$\log x\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{\frac{a}{x}} =$

15. $\log \frac{x\sqrt{t^2-u^2}}{y^2\sqrt{t+y}} =$; $\log \frac{16a\sqrt{x}}{9x\sqrt{\frac{a}{x}}} =$; $\log \frac{(x\sqrt[3]{ax^2})^2}{(a\sqrt{ax})^3} =$
16. $\log \sqrt[5]{6a^2\sqrt[3]{b^2}} =$; $\log \sqrt[m]{\frac{\sqrt[n]{x}}{y}} =$; $\log \sqrt{\frac{7a}{\sqrt[3]{a^2}}} =$

17. $\log \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x}{\left(a\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^3}} =$; $\log \sqrt{ax\sqrt{\frac{a}{x}}\ \sqrt{\frac{x^2}{a}}} =$
18. $\log\ a\left[\frac{2}{x}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2\right]^3 =$; $\log \frac{ab\sqrt{ab}}{(a\sqrt{a\sqrt{b}})^3} =$

Покажи да је

19. $\log 16 + \log 9 = \log 48 - \log 3$
20. $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{a} = 0$
21. $\log \frac{49}{4} + \log \frac{9}{35} - \log \frac{21}{10} = \log \frac{3}{2}$
22. Упрости следеће изразе:

$\log x^2 + \log x^3$; $\frac{\log x^3}{\log x}$; $\frac{\log x^4}{\log x^7}$; $\frac{\log 1728}{\frac{1}{2}\log 36 + \frac{1}{3}\log 8}$

Који су изрази логаритмисани, кад су добијени следећи резултати:

23. $\log a + \log b + \log c$ 24. $\log a + \log b - \log c$
25. $\log m - \log n - \log p$ 26. $2\log x + 3\log y$
27. $5\log m - 2\log n$ 28. $2\log a - 3\log b + 4\log c$
29. $3\log x - 2\log y - 5\log z$
30. $6\log m - (5\log n + 2\log p)$
31. $\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b + \frac{1}{4}\log c$
32. $\frac{1}{3}\log a + \frac{1}{5}\log b - \frac{1}{2}\log c$
33. $\frac{2}{3}\log m - \frac{1}{2}\log n - \frac{4}{3}\log p$
34. $\frac{1}{5}\log x - \frac{3}{2}\log y + \frac{3}{4}\log z$
35. $\log(a+b) + \log(m+n) - \log(x+y)$
36. $2\log a - 3\log b + 4\log(a+b) - 3\log(a-b)$
37. $2\log m + \log(m-1) + 2\log(m+1)$

38. $2\log(a+1) + \frac{3}{2}\log(a-1) - 2[\log(a+1) +$

$+ \log(a-)]$

39. $2(\log x + \log y) - 3(\log x - \log y + \log z)$

40. $2(\log a + 3\log b) + 3(3\log a + 2\log b)$

41. $\frac{1}{3}(2\log a - \frac{1}{2}\log b) - \frac{1}{2}(5\log a - \log b)$

42. $\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b)\right] - \frac{1}{3}\left[\log(a+b) +\right.$

$\left. + \log(a-b)\right]$

43. $\frac{1}{2}\left\{\log a - \log x + \frac{1}{2}\left[\log a - \log x + \frac{1}{2}(\log a - \log x)\right]\right\}$

44. $\left|-2\log x + \frac{1}{3}\left\{-2\log x + \frac{1}{3}\left[-2\log x +\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.+ \frac{1}{3}(-2\log x)\right]\right\}\right|$

45. Наћи x, ако је $\log x = 2\log a + 3\log b$.

Реши једначине:

46. $\log 2_{(x)} + \log 4_{(x)} + \log 8_{(x)} = 12$

47. $\log x_{(4)} + \log x^2_{(4)} + \log x^3_{(4)} = 9$

48. Докажи да је $\log 1000_{(12)} = \frac{3}{\log 12_{(10)}}$! Затим према задатку 1 одреди $\log 1000_{(12)}$!

154. Систем логаритама. — *Скуп логаритама свих бројева за једну одређену основу зове се* **систем логаритама** *за ову основу.* Кад се израчунати логаритми уреде и сложе тако, да се могу лако налазити, добијамо *логаритамске таблице*.

Није сваки број згодан за основу логаритамског система. Тако ако бисмо узели за основу какав негативан број, степени од те негативне основе, кад су изложиоци цели бројеви, биће час позитивни, а час негативни. Ако су изложиоци разломци, степени могу бити имагинарни.

Исто тако није згодно узети ни број 1, јер су сви степени од 1 опет 1.

Степени од нуле или су опет нуле, или су неодређени или немогућни. Због тога се и нула не може узети за основу. Према томе за основу логаритамског система могу се узети само стварни, позитивни и од нуле различити бројеви.

Бриксови логаритми

155. — За рачунање помоћу логаритама најзгоднија је основа 10. Овај систем зове се декадни, или обични, или још и Бриксов. Енглески астроном Henry Briggs (1560—1630) први је израчунао логаритме за основу 10. У овом систему се основа 10 нити пише нити изговара.

Логаритми се израчунавају средствима више математике. Али занимљиво је видети како се могу одређивати и са оним знањем, којим ми располажемо. Показаћемо два начина.

Први начин. — Овај поступак потиче од самог оснивача. Брикс се наслања на следеће ставове:

1. *Геометриска средина два броја a и b је* $\sqrt{ab}$;

2. $\log\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ *тј. логаритам геометриске средине једнак је аритметичкој средини логаритама.*

Логаритам се не израчунава одмах, непосредно, него поступним приближавањем. Затвори се између два позната логаритма, између две границе, па се те границе поступно сужавају.

Узмимо на пр. да израчунамо логаритам броја 5. Број 5 налази се између бројева 1 и 10 чије логаритме познајемо. $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$. Логаритам броја 5 већи је од нуле, а мањи од 1, тј. налази се између 0 и 1.

Границе 0 и 1 могу да се сузе. Тога ради одредимо геометриску средину бројева 1 и 10. Она је $\sqrt{1 \cdot 10} = 3{,}162$ (на 3 дец.). Логаритам броја 3,162 је аритметичка средина логаритама бројева 1 и 10, тј. $\frac{1}{2}(0+1) = 0{,}5$.

Број 5 сада лежи између 3,162 и 10. Образујемо геометриску средину ова два броја $\sqrt{3{,}162 \cdot 10} = 5{,}623$. Логаритам ове геометриске средине је аритметичка средина бројева 0,5 и 1, тј. 0,75.

Даље број 5 лежи између 3,162 и 5,623. Значи треба образовати геометриску средину ових бројева $\sqrt{3{,}162 \cdot 5{,}623} = 4{,}217$, чији је логаритам аритметичка средива бројева 0,5 и 0,75, тј. 0,625. Овако се продужи даље по следећој табели:

Полазни бројеви a	b	геометр. средина $c=\sqrt{ab}$	логаритам геометр. ср. $\log c=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$
1	10	3,162	0,5000
3,162	10	5,623	0,7500
3,162	5,623	4,217	0,6250
4,217	5,623	4,869	0,6875
4,869	5,623	5,233	0,7187
4,869	5,233	5,048	0,7031
4,869	5,048	4,958	0,6953
4,958	5,048	5,002	0,6992
4,958	5,002	4,980	0,6975
4,980	5,002	4,991	0,6984
4,991	5,002	4,997	0,6988
4,997	5,002	4,499	0,6990

Границе броја чији се логаритам тражи бивају све уже. У дванаестом реду имамо за број 5 логаритам 0,6990. На 5 децимала логаритам броја 5 је 0,69897. Према овоме грешка је само 0,00003. На 4 децимала је $\log 5 = 0{,}6990$.

Други начин. — И њиме се служио Брикс. Овај метод сматра се као удобнији, јер се границе, између којих се налази логаритам, сужавају продуженим подизањем на квадрат, уместо извлачења квадратног корена.

Потражимо на пр. логаритам броја 9. Нека је тај логаритам x, па ће бити

$$10^x = 9. \qquad (1)$$

Број 9 већи је од 1, а мањи од 10. Његов логаритам већи је од нуле, а мањи од 1, што пишемо

$$0 < x < 1.$$

Ако леву и десну страну једначине (1) подигнемо на квадрат, добићемо

$$10^{2x} = 81. \qquad (2)$$

Број 81 већи је од 10, а мањи од 100. Његов логаритам већи је од 1, а мањи од 2, због тога је

$$1 < 2x < 2,$$

или

$$\frac{1}{2} < x < 1,$$

где је x логаритам броја 9. Као што видимо границе ако x су се сузиле.

Ако у једначини (2) извршимо поново квадрирање, добићемо

$$10^{4x} = 6561.$$

Број 6561 већи је од 1000, а мањи 10000. Његов логаритам већи је од 3, а мањи од 4, па је

$$3 < 4x < 4,$$

или

$$\frac{3}{4} < x < 1.$$

Границе су још уже.

Даљим квадрирањем добијамо

$$10^{8x} = 43\,046\,721,$$

па је

$$7 < 8x < 8$$

или

$$\frac{7}{8} < x < 1.$$

Да бисмо избегли бројеве са много цифара, даље ћемо заокругљивати и писати у облику степена. У овом случају можемо уместо 43 046 721 писати

$$43 \cdot 10{,}^6$$

тј. цифре иза милиона заменити нулама, што на рачун неће утицати.

Даљим квадрирањем добићемо дакле

$$10^{16x} = 43^2 \cdot 10^{12} = 1849 \cdot 10^{12}.$$

Овде је

$$15 < 16x < 16,$$

или

$$\frac{15}{16} < x < 1.$$

Ако овако продужимо квадрирање са евентуалним заокругљивањем, добијаћемо редом

$$10^{32x} = (185 \cdot 10^{13})^2 = 34225 \cdot 10^{26}$$

$$30 < 32x < 31 \qquad \frac{30}{32} < x < \frac{31}{32}.$$

$$10^{64x} = (34 \cdot 10^{29})^2 = 1156 \cdot 10^{58}$$

$$61 < 64x < 62 \qquad \frac{61}{64} < x < \frac{62}{64}.$$

$$10^{128x} = (12 \cdot 10^{60})^2 = 144 \cdot 10^{120}$$

$$122 < 128x < 123 \qquad \frac{122}{128} < x < \frac{123}{128}.$$

$$10^{256x} = (14 \cdot 10^{121})^2 = 196 \cdot 10^{242}$$

$$244 < 256x < 245 \qquad \frac{244}{256} < x < \frac{245}{256}.$$

$$10^{512x} = (20 \cdot 10^{243})^2 = 400 \cdot 10^{486}$$

$$488 < 512x < 489 \qquad \frac{488}{512} < x < \frac{489}{512}.$$

$$10^{1024x} = (4 \cdot 10^{488})^2 = 16 \cdot 10^{976}$$

$$977 < 1024x < 978 \qquad \frac{977}{1024} < x < \frac{978}{1024}$$

$$10^{2048x} = (16 \cdot 10^{976})^2 = 256 \cdot 10^{1952}$$

$$1954 < 2048x < 1955 \qquad \frac{1954}{2048} < x < \frac{1955}{2048}.$$

$$10^{4096x} = 65536 \cdot 10^{3904}$$

$$3908 < 4096x < 3909 \qquad \frac{3908}{4096} < x < \frac{3909}{4096}.$$

итд.

Ако се зауставимо код последњег резултата, имаћемо

$$\frac{3908}{4096} = 0{,}9541 \qquad \frac{3909}{4096} = 0{,}9543.$$

Логаритам броја 9 лежи између 0,9541 и 0,9543. На 5 децимала је $\log 9 = 0,\ 95\ 424$. Колика је грешка, ако бисмо узели горњу вредност 0,95430?

У Бриксовом систему логаритми скоро свих рационалних бројева нису рационални. Изузетак чине само степени од 10, где су изложиоци цели бројеви. Јер број 10 степенован ма којим рационалним бројем (изузев целих бројева) никад не даје рационалан број.

Логаритми, ови непериодични десетни разломци, су дати у скраћеном облику, обично на 4, 5, 6 и 7 децимала. Отуда је свако рачунање са логаритмима приближно, управо тачно рачунање на само један ограничен број децимала.

Ево једног исечка из таблица са Бриксовим логаритмима на 5 децимала:

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	005
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656

P. P.		
	29	28
1	2,9	2,8
2	5,8	5,6
3	8,7	8,4
4	11,6	11,2
5	14,5	14,0
6	17,4	16,8
7	20,3	19,6
8	23,2	22,4
9	26,1	25,2

156. — Пошто је у овом систему $\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \log 10000 = 4, \log 10^n = n$, и пошто кад расте логаритманд расте и логаритам то лежи

логаритам сваког једноцифреног броја између 0 и 1,
" " двоцифреног " " 1 и 2,
" " троцифреног " " 2 и 3,
итд.

Логаритам сваког n-тоцифреног броја тј. једног таквог броја, који има n цифара испред десетне запете, лежи између $n - 1$ и n, састоји се дакле из $n - 1$ јединица и једног правог разломка.

157. Кад је $\log 154{,}72 = 2{,}18955$, онда је

$$\log 1547{,}2 = \log 154{,}72 \cdot 10 = \log 154{,}72 + \log 10 = 2{,}18955 + 1 = 3{,}18955$$
$$\log 15472 = \log 154{,}72 \cdot 100 = 2{,}18955 + 2 = 4{,}18955$$
$$\log 15472000 = 2{,}18955 + 5 = 7{,}18955$$
$$\log 15{,}472 = \log 154{,}72 : 10 = \log 154{,}72 - \log 10 = 2{,}18955 - 1 = 1{,}18955$$
$$\log 1{,}5472 = \log 154{,}72 : 100 = 2{,}18955 - 2 = 0{,}18955 \text{ итд.}$$

Кад два броја имају исте цифре које иду и истим редом, може се из једног добити други множењем једним чиниоцем, који је неки степен од 10, са позитивним или негативним изложиоцем. Овај чинилац даје при логаритмисању за основу 10 један цео број јединица, који се тада још има да дода логаритму првог броја, или да се од њега одузме. *Према томе логаритми два броја који се само разликују по месту запете, разликују се само за целе јединице.*

Логаритам сваког броја састоји се дакле из два дела. Из једног целог броја (евентуално и 0) и једног десетног разломка. Цели део зове се **карактеристика**. Она зависи само од места запете. Десетни разломак зове се **мантиса**. Она не зависи од места запете, већ од реда цифара логаритманда. Њена вредност се узима из логаритамских таблица.

158. $\log 0{,}15472 = \log 154{,}72 : 1000 = 2{,}18955 - 3 = -0{,}81045$ је негативан.

Логаритам сваког правог разломка $\frac{a}{b}$ *(где је дакле* $a < b$*) је негативан.* Јер ако је $a < b$, то је и $\log a < \log b$, и пошто је $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, то је ова разлика негативна.

Само негативан логаритам не пише се у горњем облику $-0{,}81045$, већ се тако удеси, *да мантиса (са 0 целих) остане позитивна*, док би од ње имало да се одузме један цео број јединица. Пише се дакле

$$\log 0{,}15472 = 0{,}18955 - 1.$$

Слично је

$$\log 0{,}015472 = \log 1{,}5472 : 100 = 0{,}18955 - 2$$
$$\log 0{,}0015472 = \log 1{,}5472 : 1000 = 0{,}18955 - 3$$
$$\log 0{,}000015472 = \log 1{,}5472 : 10^5 : 0{,}18955 - 5$$

итд.

Ове негативне јединице, које зависе само од места запете, зову се такође *карактеристика* (негативна).

Из свих ових примера изводимо ово *практично упутство* за одредбу карактеристике:

1°. *Код једног неправог десетног разломка је карактеристика за 1 мања од броја цифара испред запете.*

2°. *Један прави десетни разломак има негативну карактеристику од толико јединица, колики је број нула, које стоје испред важећих цифара, при чему се броји и нула испред запете.*

За писмено вежбање

Да се у таблицама нађу логаритми следећих бројева:

1. 2, 3, 7, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 17, 22, 38, 42, 53, 66, 124' 408, 527, 606, 700, 834, 866, 903, 996.
2. 1,3; 2,1; 3,6; 14,4; 39,4; 40,5; 6,28; 7,09.
3. 7,29; 51,8; 2,16; 0,421; 5340; 648300; 0,019.
4. 254600; 0,963; 0,0048; 0,00486; 0,0000627.
5. 1023; 6729; 8457; 2192; 3004; 7025; 9008.
6. 4076; 6281; 2009; 4788; 6458; 7003; 9999.
7. 2,034; 39,88; 471,5; 0,9335; 0,07643.
8. 0,0008517; 500600; 676800000; 1,001.
9. 100 000 000; 1000000; 10000; 100; 10; 1; 0.

Интерполација

159. — Логаритам једнога броја са више од четири цифре не налази се у таблицама. На пр. 1536,8. Овај број лежи између 1536,0 и 1537,0. Због тога мора његов логаритам лежати између 3,18639 и 3,18667. Кад разлика није сувише велика, можемо изрећи ово правило:

Разлике логаритама су пропорционалне разликама логаритманада.

(Геометриски: уместо једног кратког комадића криве линије можемо приближно узети одговарајућу тетиву.)

Бројеви 1536,0 и 1537,0 разликују се за 1, њихови логаритми 3,18639 и 3,18667 за 0,00028. Бројеви 1536,0 и 1536,8 разликују се за 0,8, разлику њихових логаритама одредићемо према малопређашњем помоћу простог правила тројног.

Кад се бројеви разликују за

1 логаритми се разл. за 0,00028

0,8 „ „ „ x

$$\frac{x}{0{,}00028} = \frac{0{,}8}{1}$$

$$x = 0{,}00028 \cdot 0{,}8 = 0{,}00022\lfloor 4 = 0{,}00022.$$

Треба дакле логаритму броја 1536,0 додати 0,00022 да се добије логаритам броја 1536,8.

$$\begin{array}{r} 3{,}18639 \\ \underline{0{,}00022} \\ 3{,}18661 \end{array}$$

Задаци: Да се одреде логаритми бројева: 3273,4; 4016.5; 1385,79; 1845,48; 2477,53; 3219,27; 4074,68; 5899,98; 1027,35; 2000,35; 2070,82; 3719,18; 4679,99; 502,468.

Напомена 1. — У малопређашњем примеру, у пракси се, уместо 0,00028, рачуна са 28, а води рачуна да су то јединице последњега реда.

Дакле $28 \cdot 0{,}8 = 22{,}4$

па се 22 дода као стохиљадити. Број 28 зове се „таблична разлика“.

Напомена 2. — Ово множење може још простије да се изведе помоћу табелице, која се налази у ступцу логаритамских таблицама означеном са P. P. У нашем примеру таблична разлика је 28. Са стране у табелици изнад које стоји 28 налазе се готови производи $28 \cdot 0{,}1$; $28 \cdot 0{,}2$; $28 \cdot 0{,}3$ итд. Нама је требало $0{,}8 \cdot 28$. Ми према осмици и налазимо производ 22,4. Ако је потребно табличну разлику множити и стотим деловима, то се врши померањем запете улево.

Ако има да се изврши интерполација само за једно место, ученик да се вежба, да то изврши усмено, без икаквих споредњих радњи.

Задатак. Да се помоћу табелице P. P. одреде логаритми следећих бројева: 17,5396; 2,94875; 0,107986; 26158900; 0,00000377254; 0,0711529.

Одређивање нумеруса

160. — Најпре се одреди место запете обртањем правила о карактеристици. Цифре броја које ћемо прочитати у таблицама означе се тачкама. На пр.

$$\log x = 2{,}04125 \qquad \log y = 0{,}35633 - 4$$
$$x = \ldots, \ldots \qquad x = 0{,}000\ldots\ldots$$

Први пример даје као „табличну разлику" 39. Разлика од најближег мањег логаритма 04100, који се налази у таблицама, и коме припада нумерус 1099 износи 25. С тога имамо просто правило тројно: кад се логаритми разликују за

39	бројеви се разликују за	1
25	„ „ „ „	x

$$x = \frac{1 \cdot 25}{39} = 0{,}6(4)$$

Треба нађеном броју додати још 0,6

$$\begin{array}{r} 1099 \\ 0{,}6 \\ \hline x = 109{,}96. \end{array}$$

Слично овоме имамо у другом примеру
$$y = 0{,}00022716.$$

И овде се може дељење изводити простије помоћу табелица „пропорционалних делова." У првом примеру је „таблична разлика„ 39, „наша разлика" 25. У табелици 39 нема производа 25. Најближи мањи производ је 23, 4. Њему припада 6 десетих! Разлика је 25—23,4 = 1,6. Али пошто сад треба интерполирати и стоте последњег места, морамо ову разлику помножити са 10. Добијамо 16. Овај број је најближи броју 15,6, коме одговара 4.

Напомена 1. — За нумерус се по правилу интерполује само једно место. Следећа места нису више сигурна. Ученик треба да се вежба да ово место налази усмено.

Напомена 2. — Ученик по таблицама несме ништа да шара и да подвлачи. У случају потребе има да се служи малим прстом и кажипрстом леве руке.

Напомена 3. — У свима добрим логаритамским таблицама налазе се опширна упутства, како треба из тих таблица узимати логаритме и обрнуто одређивати нумерусе.

За писмено вежбање

Колико је x, кад је дат $\log x$:

1. 0,89182; 1,97025; 5,77815; 0,09307—1; 0,60206—5.
2. 0,94411; 1,83036; 1,68039; 4,02640; 7,45275.
3. 0,75033 — 1; 0,55637 — 2; 0,34700 — 4; 0,30109 — 7 0,9000—3.
4. 1,00009; 0,001 — 1; 6,5; 0,1 — 8; 0,69997.

Израчунавање бројних израза помоћу логаритама

161. — Применом правила из чл. 153 могу се израчунати и бројни изрази, чије би израчунавање обичним путем било тешко, дуго, или шта више и немогуће. Да би се пак један израз могао логаритмисати *сме да садржи само чиниоце и делиоце, који сами могу бити степени и корени.* При том још треба и на ово пазити.

1°. *Један збир или разлика сме се тек онда логаритмисати, пошто се израчуна њихова бројна вредност спајањем појединих чланова.*

2°. *Негативни бројеви немају никакав (реалан) логаритам.*

3°. *Карактеристика мора увек остати цео број.*

162. — Пошто су мантисе које имамо у логаритамским таблицама све позитивне, то треба, *чим логаритам постане негативан*, овога додавањем једног згодног целог броја тако преобразити, *да мантиса постане позитивна, а карактеристика негативна.*

$$\textit{Примери}:\ 1.\ \log\frac{1}{7} = \overset{+1}{0} \overset{-1}{-}\ 0{,}84510 = 0{,}15490 - 1$$

$$2.\ \log\frac{1}{3657} = \overset{+4}{}\overset{-4}{-}\ 3{,}56312 = 0{,}43688 - 4$$

$$3.\ \log\frac{3}{7432} = \log 3 - \log 7432 = \overset{+4}{0{,}47712} - \overset{-4}{3{,}87111}.$$

У трећем примеру, уместо да смо најпре одредили негативну разлику, па тек онда извршили трансформисање, ми смо одмах додали и одузели 4, тако да се 3,87111 може одузети.

$$\log \frac{3}{7432} = 0{,}60601 - 4.$$

163. — Ако има да се *извуче корен из једног правог разломка*, логаритам правог разломка биће негативан, дакле облика 0, ... минус један цео број a. Пошто треба да се извуче n-ти корен, мора овај логаритам да се подели са n. Одатле би произишао, кад n није делилац броја a, један разломак $\frac{a}{n}$ као карактеристика. Да би сад карактеристика *постала један цео број*, дода се и одузме толико целих јединица, да се дељење са n сврши без остатка.

Пример. $\log \sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}\,(\log 3 - \log 7) = \frac{1}{3}\Big(\overset{+1}{0},47712 -$

$- 0{,}8451\overset{-1}{0}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\overset{+2}{0},63202 - \overset{-2}{1}\Big) = 0{,}87734 - 1.$

164. — Да бисмо један производ, количник, степен или корен израчунали помоћу логаритама, ми га најпре логаритмишемо по правилима, која смо већ проучили и извршимо назначене радње са појединим логаритмима. Тако ћемо добити један број, који ће претстављати логаритам датог израза. Нумерус овог логаритма, који ћемо из таблице прочитати је тражени резултат.

Пример 1. $4{,}348 \cdot 368{,}26 = x$

Решење.

$$\begin{aligned} \log 4{,}348 &= 0{,}63\ 729 \\ \log 368{,}26 &= 2{,}56\ 608 \\ & \phantom{=2{,}56\ 60}7 \\ \hline \log x &= 3{,}20\ 344 \\ x &= 1597{,}5. \end{aligned}$$

Пример 2. $\sqrt{\frac{5}{9}}$

$$\begin{aligned} \log 5 &= \overset{+1}{0},6989\overset{-1}{7} \\ \log 9 &= 0{,}95424 \\ \hline \log \frac{5}{9} &= \overset{+1}{0},74473 - \overset{-1}{1} = 1{,}74473 - 2 \\ \log \sqrt{\frac{5}{9}} &= 0{,}87237 - 1 \\ \sqrt{\frac{5}{9}} &= 0{,}74536(6). \end{aligned}$$

165. Кологаритам. — При рачунању логаритмима имамо велику олакшицу кад одузимање заменимо сабирањем, тј. ако, уместо да одузимамо логаритам једнога броја, ми додамо његов *кологаритам*.

Ако пођемо од једног простог примера, рецимо израза $\frac{ab}{c}$ и хоћемо да тај израз израчунамо помоћу логаритама, онда логаритмисањем добијамо:

$$\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c. \qquad (1)$$

Или ако количник $\frac{ab}{c}$ напишемо у облику $ab \cdot \frac{1}{c}$, имаћемо

$$\log ab \cdot \frac{1}{c} = \log a + \log b + \log \frac{1}{c}.$$

Дакле, уместо да одузмемо $\log c$, додаћемо $\log \frac{1}{c}$. Одмах имамо и дефиницију кологаритма: **кологаритам једнога броја је логаритам његове реципрочне вредности.**

Како је

$$\log \frac{1}{c} = -\log c,$$

то видимо да је *кологаритам једнога броја једнак негативној вредности логаритма тог броја.*

Тако се одмах види како се добија кологаритам. Треба узети негативну вредност логаритма. Али да би се кологаритам увео у рачун, мора се и он довести на облик логаритма, тј. да и он има своја два дела, карактеристику и мантису.

Да бисмо дошли до потребног практичног упутства, поступићемо на овај начин. Нека је дат број N чији нам је логаритам познат и дат у облику

$$\log N = c + m$$

где c значи карактеристику тј. цео позитиван или негативан број или нулу, *а* m мантису, разломак мањи од јединице. Кологаритам је једнак негативној вредности логаритма, па ћемо имати:

$$\text{colog } N = -(c + m)$$

или

$$\text{colog } N = -c - m.$$

Ако десној страни ове једначине одузмемо и додамо 1, имаћемо

$$\text{colog } N = -c - 1 + 1 - m$$

или

$$\text{colog } N = -(c + 1) + (1 - m).$$

Одавде се одмах може прочитати начин како се добија кологаритам: карактеристика логаритма повећа се за јединицу, па томе збиру промени знак; мантису треба одузети од 1.

Пример. Наћи кологаритам броја 5672.

Решење. У логаритамским таблицама са 5 децимала можемо прочитати:

$$\log 5672 = 3{,}75374.$$

Карактеристика кологаритма је

$$-(3 + 1) = -4,$$

а мантиса се добија, кад се 0,75374 одузме од 1, тј.

$$\begin{array}{r} 1 \\ -0{,}75\,374 \\ \hline =0{,}24\,626. \end{array}$$

Имамо, дакле,

$$\text{colog } 5672 = 0{,}24626 - 4.$$

Кад се код горњег одузимања мало боље загледа у цифре мантисе логаритма и кологаритма, у цифре које стоје једна испод друге, види се да се све оне допуњују до 9, само последња до 10. Тако се сада и цифре мантисе могу лако налазити. Отуда имамо ово **практично упутство** за одредбу кологаритма некога броја, кад је дат логаритам тога броја: *Карактеристика кологаритма добија се, кад се карактеристика логаритма повећа за 1, па томе збиру промени знак. Мантиса кологаритма добија се, кад се све цифре мантисе логаритма допуне до 9, а последња до 10.*

Напомена 1. — Ако се логаритам завршава једном или са више нула, онда се све цифре допуне до 9, последња различита од нуле до 10, а нуле просто препишу. На пример

$$\log 0{,}05781 = 0{,}67200 - 2$$
$$\text{colog } 0{,}05781 = 1{,}32800.$$

Напомена 2. — Ако је логаритам цео број, кологаритам је само његова негативна вредност. На пр.

$$\log 1000 = 3$$
$$\text{colog } 1000 = -3.$$

Пример. $\dfrac{46{,}07}{5{,}82 \cdot 618} = x$

Решење.

$$\begin{aligned} \log 46{,}07 &= 1{,}66342 \\ \text{colog} 5{,}82 &= 0{,}23508 - 1 \\ \text{colog} 618 &= \underline{0{,}20901} - 3 \\ \log x &= 0{,}10751 - 2 \\ x &= 0{,}012809. \end{aligned}$$

166. Природни логаритми. — Поред Бриксових логаритама употребљавају се у математици и *природни* или *Неперови* логаритми, којима је основа број $e = 2{,}7182818284\ldots$ Овај број се добија као граница израза

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

кад n бескрајно расте. Природне логаритме неки означавају само са l, а неки и са lognat. Ови логаритми употребљавају се у вишој математици.

Нека је α природни логаритам једног броја N, а β обични логаритам тог истог броја тј.

$$\text{lognat } N = \alpha$$
$$\log N = \beta.$$

Тада је

$$N = e^{\alpha}$$
$$N = 10^{\beta}.$$

Ако прву од ових једначина логаритмишемо за основу 10, биће

$$\log N = \alpha \log e.$$

И како је $\alpha = \operatorname{lognat} N$, биће

$$\log N = \operatorname{lognat} N \cdot \log e. \qquad (1)$$

Ако узмемо да је $N = 10$, ова једначина прелази у

$$1 = \operatorname{lognat} 10 \cdot \log e$$

или

$$\log e = \frac{1}{\operatorname{lognat} 10}. \qquad (2)$$

С обзиром на једначине (1) и (2) можемо писати

$$\log N = \frac{\operatorname{lognat} N}{\operatorname{lognat} 10} \qquad (3)$$

$$\operatorname{lognat} N = \frac{\log N}{\log e}. \qquad (4)$$

Помоћу једначине (3) може да се израчуна обичан логаритам једног броја, кад је познат његов природни логаритам. Помоћу једначине (4) може да се одреди природни логаритам једног броја, кад је познат обичан.

Број $\frac{1}{\operatorname{lognat} 10} = M$ зове се модуо обичног логаритма.

Он служи за прелажење из природних логаритама у декадне. Његова је вредност

$$M = 0{,}43\ 429\ 448...$$

Број $\frac{1}{\log e} = \frac{1}{M} = \operatorname{lognat} 10 = 2{,}30\ 258\ 509...$ је модуо за прелажење из декадних логаритама у природне.

Обрасци за ово прелажење у најпростијем облику јесу:

$$\log N = M \operatorname{lognat} N \qquad \operatorname{lognat} N = \frac{1}{M} \log N.$$

За писмено вежбање

1. $2{,}573 \cdot 37{,}13 \cdot 651{,}8 =$
2. $0{,}03825 \cdot 0{,}5947 \cdot 82{,}63 =$
3. $6{,}7294 \cdot 0{,}8294 \cdot 81{,}396 =$
4. $0{,}0073 \cdot 0{,}00028567 \cdot 0{,}94187 =$
5, $31{,}572 \cdot 0{,}741 \cdot 0{,}098296 =$
6. $0{,}93745 \cdot 100{,}985 \cdot 0{,}000498753 \cdot 74{,}6589 =$
7. $\frac{485{,}27}{56{,}14} =; \quad \frac{1}{0{,}5846} =; \quad \frac{0{,}00010945}{1{,}02457} =$
8. $\frac{0{,}95283}{0{,}07225} =; \quad \frac{0{,}00112079}{0{,}00095486} =; \quad \frac{1}{0{,}257\ 35} =$

9. $\frac{4652 \cdot 45{,}62}{512{,}4} =; \quad \frac{0{,}5279 \cdot 0{,}9125}{0{,}066 \cdot 40} =; \quad \frac{35{,}354}{8{,}592 \cdot 9{,}6425} =;$
10. $\frac{11{,}427 \cdot 0{,}068 \cdot 9{,}9058}{64{,}004 \cdot 10{,}872 \cdot 0{,}00041}$
11. $43{,}28^3 =; \ 26{,}285^2 =; \ 1{,}0575^6 =; \ 0{,}1742^{20} =$
12. $0{,}94253^8 =; \ 0{,}2894^2 =; \ 0{,}000\ 097\ 486^2 =$
13. $(4{,}634 \cdot 7{,}358)^2 =; \quad 2{,}5371^{10} \cdot 0{,}72865^8 =$
14. $0{,}100427^5 \cdot 1{,}0936^{21} \cdot 0{,}97025^4 =$
15. $(35{,}408 \cdot 0{,}1467 \cdot 1{,}3294)^3 =; \quad \frac{7{,}0042^2 \cdot 18{,}43^3 \cdot 0{,}0065}{2{,}86^4 \cdot 157{,}23 \cdot 0{,}8472^2} =$
16. $\left(\frac{16}{19}\right)^8 =; \quad \left(\frac{123{,}45}{7{,}1523}\right)^4 =; \quad \left(\frac{0{,}825 \cdot 29{,}4}{1{,}1425}\right)^6 =$
17. $\left(\frac{73{,}825 \cdot 0{,}25837}{82{,}574 \cdot 3{,}7528}\right)^2 =; \quad \left(\frac{5{,}0084 \cdot 0{,}69046}{0{,}87478 \cdot 3{,}0809}\right)^3 =$
18. $\left(\frac{16{,}208}{4{,}3926 \cdot 8{,}7258 \cdot 0{,}5629}\right)^4 =$
19. $\frac{1}{6{,}7852 \cdot 0{,}9563} \cdot \left(\frac{17{,}265}{4{,}3986}\right)^3 =$
20. $\left[\frac{(8{,}34^4 \cdot 0{,}0706^4)^2 \cdot 465{,}08^3}{(3{,}84 \cdot 0{,}000\ 6478)^3 \cdot 4{,}9522^6}\right]^8 =$
21. $\sqrt{15} =; \quad \sqrt[3]{4} =; \quad \sqrt[5]{30} =; \quad \sqrt[7]{534} =$
22. $\sqrt{0{,}0273} =; \quad \sqrt[3]{0{,}00995} =; \quad \sqrt[5]{0{,}000042768} =$
23. $\sqrt{0{,}00093} =; \quad \sqrt[3]{0{,}000\ 0042} =; \quad \sqrt[3]{0{,}000\ 000\ 004} =$
24. $\sqrt{0{,}84263} =; \quad \sqrt[3]{0{,}024853} =; \quad \sqrt[3]{0{,}0001} =$
25. $\sqrt[3]{-38{,}47} =; \quad \sqrt[5]{-564{,}83} \quad \sqrt[5]{0{,}000\ 000\ 000\ 026} =$
26. $\sqrt[5]{38{,}9^2 \cdot 6{,}47^3} =; \quad \sqrt{5{,}4279 \cdot \sqrt{7{,}8265}} =$
27. $\sqrt{487{,}63 \cdot \sqrt{886{,}4 \cdot 0{,}06856^3}} =$
28. $\sqrt{28{,}689 \cdot \sqrt{18{,}946} \cdot \sqrt[3]{46{,}685} \cdot \sqrt[4]{25{,}446}} =$
29. $\sqrt[4]{6{,}08^{\frac{3}{4}} \cdot 307{,}86^{\frac{2}{3}} \cdot 678{,}4^{\frac{2}{9}} \cdot 5{,}4085^{\frac{5}{3}}} =$

30. $\sqrt[3]{\dfrac{432{,}5}{675{,}8}}=;\quad \sqrt[3]{\dfrac{36{,}5^2 .\ 0{,}248^3}{0{,}97684}}=;\quad \left[\sqrt{\dfrac{31{,}45^3 .\ 0{,}748485}{5{,}739^2}}\right]^3=$

31. $\dfrac{68{,}456\cdot\sqrt{18{,}685}}{37{,}442\cdot\sqrt{54{,}876}}=:\quad \dfrac{47{,}796^2\cdot\sqrt[3]{0{,}42856}}{34{,}674^3\cdot\sqrt[3]{0{,}00764}}=$

32. $0{,}53428\cdot\sqrt[3]{0{,}47468\cdot\sqrt{0{,}0020879}}=$

33. $\sqrt{6{,}4863\cdot\sqrt{0{,}58749\cdot\sqrt[3]{0{,}27643}}}=$

34. $\sqrt{0{,}7\sqrt{0{,}2\sqrt{0{,}3\sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}8}}}}}=;\quad \sqrt{\dfrac{5\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{0{,}9}}}{48{,}6}}=$

35. $68100.\left(\dfrac{48{,}245}{57{,}387}\right)^2\sqrt[3]{\dfrac{0{,}048946}{\sqrt[4]{0{,}068285}}}=$

36. $0.56749^{\frac{3}{2}}\cdot 3{,}0548^{\frac{5}{8}}\cdot\sqrt{0{,}46826\cdot 5{,}0798^3}=$

37. $\dfrac{0{,}005\cdot 4064\cdot 0{,}029}{0{,}000\,004\,8875}+\dfrac{68{,}8\cdot 0{,}28456}{80{,}246}=$

38. $\dfrac{24{,}825^3-6{,}4864^4}{678{,}322}=;\quad \dfrac{78\cdot 0{,}083\cdot 405^4}{(068807^3-0{,}14888^2)^5}=$

39. $(0{,}54062^2-0{,}48675^3)^4-0{,}025058^3=$

40. $\sqrt{0{,}067462^3+0{,}978485^3-0{,}048586^3}=$

41. $\sqrt[3]{6{,}478\cdot\sqrt{24{,}667}+25{,}854\cdot\sqrt[3]{9{,}8468}}=$

42. $4{,}879^2\cdot 8{,}2468\cdot\left(\sqrt{6-\sqrt{6}}+5\sqrt{6}\right)=$

43. Површина квадрата је p. Колика је страна и дијагонала? $p=600^{m^2}$; $p=2,^{m^2}$; $p=0,^{m^2}6826$; $p=0,^{m^2}0075$.

44. Површина коцке је p. Колика је ивица, запремина и дијагонала? $p=8,^{m^2}15$; $p=6,^{m^2}25$; $p=0,^{m^2}48$.

45. Дијагонала квадрата је d. Колика је страна и површина? $d=10m$; $d=2,^{dm}3$; $d=0,^{m}052$; $d=216,^{m}45$.

46. Дијагонала коцке је d. Колика је површина и запремина? $d=1,^{m}6$; $d=6$dm; $d=143$cm; $d=0,^{m}082$.

47. Једна коцка од олова тешка је $14,^{kg}618$. Колика је њена ивица, кад је специфична тежина олова 11,25?

48. Једно тело тешко је у ваздуху $12,^{kg}964$, а у води на 4°C $11,^{kg}221$. Израчунај његову специфичну тежину!

49. Полупречници два концентрична круга су $5,^{m}324$ и $2,^{m}563$. Да се израчуна површина кружног прстена.

50. Полупречник круга је $0,^{m}45$. Колики је кружни исечак, чији је средишни угао $67^{0}20'$?

51. Колика је дужина тетиве у кругу полупречника r, кад је удаљена од центра за d. $r=0,^{m}274$, $d=0,^{m}095$.

52. Колики је полупречник круга, кад је тетива $0,^{dm}65$, а њена средишна раздаљина $0,^{dm}28$.

53. Страна равностраног троугла је a. Колика је површина, полупречник уписаног и описаног круга? $a=0,^{m}35$; $a=0,^{m}08$; $a=58,^{m}763$; $a=275,^{m}5$.

54. Висина равностраног троугла је $h=0,^{m}16$. Колика је површина?

55. Катета једног правоуглог троугла је $a=11,^{m}35$, њена пројекција на хипотенузу $p=6,^{m}4$. Да се одреди хипотенуза.

56. Полупречник једнога круга је $6,^{dm}8$. Колике су површине описаног и уписаног равностраног троугла?

57. Једна тетива од $13,^{cm}6$ продужена је за 18cm. Колика је тангента повучена из крајње тачке тетиве?

58. Дате су све три стране a, b, c. Да се одреди површина троугла, полупречник описаног круга R, полупречник уписаног круга r.

$a=2,^{m}40$	$b=3,^{m}20$	$c=4^{m}$
$a=185^{m}$	$b=444^{m}$	$c=481^{m}$
$a=49,^{m}63$	$b=58,^{m}643$	$c=29,^{m}863$.

59. Колика је површина трапеза, кад су дате све четири стране: основице $a=44,^{cm}25$ и $b=21,^{cm}75$, непаралелне стране $c=24,^{cm}75$ и $d=29,^{cm}25$?

60. У једном равностраном троуглу са страном $a=12,^{m}7$ уписан је круг. У овом кругу поново је уписан равностран троугао. Колика је површина овог равностраног троугла?

61. Да се сагради лопта површине 1m². Колики мора да буде полупречник?

62. Колики мора бити пречник једног луфтбалона, да би запремина била 1700m³? Колика је његова површина?

63. Да се одреди запремина лопте, кад је њена површина 4dm².

64. Да се одреди површина лопте, кад је њена запремина 10dm³.

65. Запремина једног равностраног ваљка је 100dm³. Колика је површина?

66. Површина равностране купе је $8 dm^2$. Колика је запремина?

67. Запремина једне равностране купе је $20 dm^3$. Колика је њена површина?

68. Да се израчуна површина и запремина земље, кад је полупречник 6 370 290m. (Претпоставимо да је земља лопта. Види Алгебру за V р. стр. 154!).

69. Колика је маса земље, кад је њена средња густина 5,77? Полупречник као у прошлом задатку. (Види Алгебру за V р. стр. 154 задатак 4 и 5!)

70. Колико пута је већа површина земље од површине Европе, кад је Европа $10\,049\,000 km^2$?

71. Да се израчуна тежина ваздуха у једној учионици дужине 8m, ширине $5,^m50$, висине $4,^m25$, кад $1 dm^3$ ваздуха тежи $1,^g 29306$.

72. Колику површину може да види осматрач са балона који лебди над земљом на висини од 300m? (Претпоставимо да је земља лопта полупречника као у зад. 68!)

73. Колико мора бити висока једна кула светиља, да би се видела са даљине од 35 km?

74. Колика је путања земље око сунца, ако претпоставимо да је она круг полупречника 149 500 000km?

Колика је брзина земље при том обилажењу, ако узмемо да је дужина године 365 дана $5^h 48^{mn} 48^s$? (Види Алгебру за V р. стр. 153!)

75. Колика је тежина камене масе Кеопсове пирамиде, кад се специфична тежина камена од кога је саграђена цени на 2,75? Висина пирамиде је 148m. Страна квадратне основе је 233m.

76. *Лошмитов број* $n = 28 \cdot 10^{18}$ казује колико има молекула у $1 cm^3$ гаса, који је под притиском од 1 атмосфере на 0^0. Гас испуњује сваки простор у коме се налази. Један кубни сантиметар могао би се толико разредити да заузме простор колико износи лопта, чији је полупречник једнак средњем отстојању земље од сунца (149 500 000 km). Колики просечни размак могу имати молекули у тако разређеном гасу?

77. Од Архимеда потичу следеће неједначине;

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71} \quad \text{и} \quad \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Провери да ли су исправне!

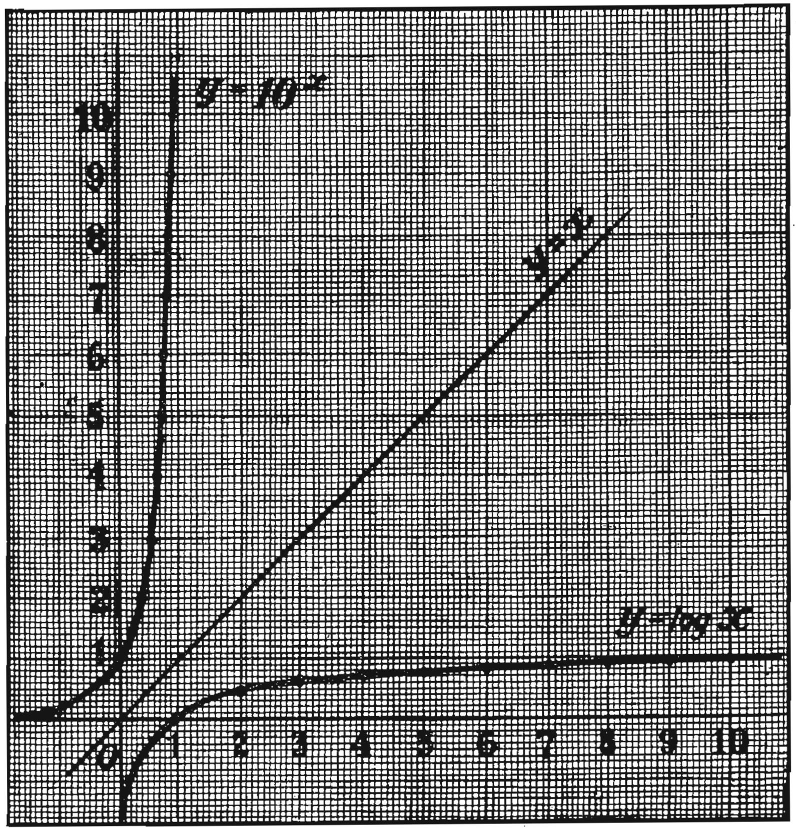
78. Поред одсталих за број π имамо и следеће приближне вредности:

$$\pi = \frac{5\,419\,351}{1\,725\,033}; \quad \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{105}{136}}; \quad \pi = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}}.$$

Колико је π у овим примерима?

167. Графичко претстављање функција $y = 10^x$ и $y = \log x$. Да бисмо графички претставили функцију $y = 10^x$, треба као и досада да образујемо табелу одговарајућих вредности за x и y. Кад x није цео број, вредности за y биће приближне. И како функција нагло расте (за $x = 2$, $y = 100$), то ћемо узети вредности за x између 0 и 1.

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
y	1	1,33	1,78	3,16	4,46	5,62	10	0,316	0,1



Сл. 25.

Ако тачке добијене из ове табеле спојимо добићемо криву линију $y = 10^x$.

За ток криве важи следеће:

1. Кад x расте, y такође расте. Кад x постане бесконачно велико и y постане бесконачно велико.

2. Кад x опада и y се смањује. Кад x тежи ка $-\infty$, y тежи нули.

Функција је растућа.

Крива $y = \log x$ може се после овога одмах конструисати. Треба у горњој табели разменити вредности x и y. Дакле оно што је било апсциса конструисати као ординату, а ординате унети као апсцисе. При том би се за x још могло узети на три децимала вредности 0,2; 0,3; 0,5; 0,75; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; и 10.

Још лакше се конструкција изводи, ако одредимо симетричну криву за $y = 10^x$ у односу на праву $y = x$, тј. ако криву $y = 10^x$ огледамо у правој $y = x$. Све се ово лепо види из слике.

Из слике се могу приближно читати логаритми бројеви 2, 3, 4...

Даље из слике видимо:

1. Бројевима између 0 и 1 одговарају негативни логаритми.

2. Кад се број смањује и тежи нули, крива се све више приближује ординатној осовини, логаритам тежи ка $-\infty$.

3. Логаритам броја 1 је једнак нули.

4. Кад број расте и логаритам расте. Само логаритам расте знатно спорије.

5. Негативни бројеви немају реалних логаритама.

САДРЖАЈ

ДЕО ПРВИ

ДЕО ДРУГИ

ДЕО ТРЕЋИ