УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Д-р ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

ТЕОРИЈА ВЕКТОРА

ПРОСВЕТА
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1947

Југословенско штампарско предузеће у Београду

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник је написан, пре свега, за потребе студената. С обзиром на намену желео сам да га учиним приступачним почетницима, да би се они могли што лакше, некад и сами, упутити у теорију вектора и тако оспособити за коришћење научне и техничке литературе изложене помоћу теорије вектора.

Из тих разлога је излагање сасвим елементарно и нешто опширније, а при доказивању је прилично коришћена геометриска очигледност. Дат је и приличан број решених примера, а приложени задаци не претстављају неке нарочите проблеме већ треба само да послуже за продубљивање и увежбавање материјала. У истом циљу су врло често навођена и по два разна начина извођења а векторски изрази писани и у скаларном облику. Осим тога на крају књиге дата су грчка и готска слова, која се у књизи употребљују.

Сматрам још за потребно да подвучем да на жалост добар део слика у овој књизи има доста техничких недостатака.

Писац

САДРЖАЈ

АЛГЕБРА

УВОД

ГЛАВА I

СЛОБОДНИ ВЕКТОРИ

ГЛАВА II.

ВЕЗАНИ ВЕКТОРИ

АНАЛИЗА

ГЛАВА III.

ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ СКАЛАРНИХ ПРОМЕНЉИВИХ

ГЛАВА IV.

ПРИМЕНА ТЕОРИЈЕ ВЕКТОРА У ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

ГЛАВА V

ТЕОРИЈА ПОЉА

АЛГЕБРА

УВОД

1. Основни појмови

У примени алгебре и анализе на геометриске, механичке и физичке величине и на формулисање веза између њих, одмах се може утврдити, да тих величина има разних врста.

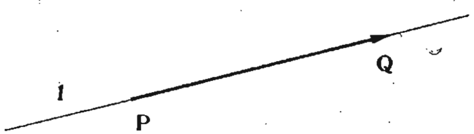
У прву врсту спадају све оне величине које су потпуно одређене једним реалним бројем као мерним бројем. Све такве величине се могу при изабраној јединици мерења — претставити на скали и стога се зову *скаларне величине* или кратко *скалари*. Такве су величине: запремина, време, маса, густина, рад, енергија, температура, отпор проводника, електрични капацитет итд. Има неких од ових величина, којима по самој њиховој природи одговарају само позитивни бројеви, као густини и маси, а има их које се могу изразити и позитивним и негативним бројевима као рад, температура итд. И сами реални бројеви се сматрају као скалари.

У другу врсту спадају оне величине које се не могу одредити само једним бројем. На пр. две силе могу имати исту јачину па да се ипак разликују у свом дејству, зато што се разликују по правцу и смеру. Према томе је познавање само њихових мерних бројева недовољно за њихово одређивање. Исти је случај са брзинама. Мерни број брзине, на пр., 100 km на час, очигледно је недовољан за потпуно одређивање брзине, јер нема података о њеном правцу и смеру. То исто важи и за многе друге геометриске, механичке и физичке величине, за чије је потпуно одређивање потребно, поред *мерног броја*, познавање *правца* и *смера*. Такве су величине: померање тачке (vehere, vectum = носити, померати) и стога се све овакве величине, као на пр.: транслација чврстог тела, брзина, убрзање, сила итд. зову *векторске*.

Постоје, међутим, још сложеније величине, за чије одређивање није довољно знати само мерни број, правац и смер, него треба још података У такву врсту величина спада, на пр., деформација тела. То је свакако физичка величина, али се за њено потпуно описивање мора узети више података — мора се, на пр., посматрати деформисање у три различита правца одређених смерова, који нису у једној равни, и одредити мерне бројеве свих тих појединих деформација. Такве величине се зову *тензори* или, за специјалан случај нашег примера, и *афинори*.

Како су скаларне величине одређене реалним бројевима са њима се рачуна као са обичним бројевима. Њихове везе се могу претставити у оквиру обичне анализе као функционалне зависности њихових промењљивих мерних бројева. Са векторским величинама ствар стоји друкчије. За директне операције са њима, за примене метода алгебре и анализе на векторске величине, треба тек утврдити правила. То је оно што желимо да постигнемо. Ради остварења тога циља уводи се појам вектора.

Вектор је оријентисана дуж (дуж са стрелицом на једном крају која обележава смер — сл. 1). Права l чији је



Сл. 1

отсечак дуж вектора зове се *основа* или *носач* вектора. Од две граничне тачке вектора једна P се зове *почетак*, а друга Q, где је стрелица, зове се *крај* вектора.

На основу дефиниције вектора, очигледно је за његово одређивање потребно знати ове елементе:

1. *интензитет (апсолутна вредност, модул).* То је његова дужина, мерена одређеном јединицом;

2. *правац* који је одређен правом на којој је вектор — основом вектора;

3. *смер*, који се означује стрелицом;

4. *почетак* вектора.

Вектор јединичне дужине зове се *јединични вектор* или *орт*.

Како вектор има све битне особине векторских величина може се, према томе, употребити за њихово претстављање. Да бисмо неку векторску величину претставили помоћу вектора, треба прво изабрати јединичну дужину, на пр., 1 cm и утврдити који део векторске величине претставља јединична дужина. На пр., 1 cm претставља јачину силе од 1 kg и т. сл. Из ових разлога се и саме векторске величине називају векторима. Тако се каже: вектор брзине, вектор силе итд. У физици је уобичајено да се основа вектора силе зове *нападна линија*, а почетак силе *нападна тачка*, па се ти називи покаткад употребљују као називи основе и почетка и код других вектора.

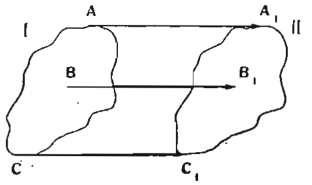
Векторе ћемо обележавати једним готским словом $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\ldots$, а њихов интензитет односним латинским словом или стављањем ознаке вектора између две црте, на пр. $A, B, a, b, \ldots\ldots$, или $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, |\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}|, \ldots\ldots$ Јединичне векторе ћемо обележавати малим готским словима са индексом $_0$, на пр. $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{n}_0, \ldots\ldots$ Понекад ћемо обележавати векторе и са два велика латинска слова — прво на почетку друго на крају вектора — са стрелицом изнад њих, на пр., $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ}, \ldots$ Тада ћемо интензитет означавати са иста два слова само без стрелице или са цртицом изнад њих, на пр. $AB, CD, PQ, \ldots$ или $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{PQ}, \ldots\ldots$

Поред овог начина обележавања вектора, у литератури се наилази и на друге начине. Тако се често вектори обележавају великим и малим латинским словима са стрелицом изнад слова, на пр. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$, а њихов интензитет истим словом само без стрелице $A, B, a, b, \ldots$ Јединични вектор се онда бележи малим латинским словом са индексом и са стрелицом изнад слова, на пр. $\vec{a}_0, \vec{n}_0, \ldots$ Вектори се још пишу и као разлика крајње и почетне тачке, тј. између великих латинских слова која обележавају крајњу и почетну тачку стави се знак минус, на пр. (слика 1) $Q - P$. У том случају се интензитет и орт вектора бележе обично на претходни начин. Најзад се вектори често штампају масним слогом за разлику од скалара. Тада се интензитет штампа односним латинским словом обичног слога, а орт масним слогом нарочитих малих слова или масним слогом малих слова са индексом. У овом случају се при писању руком користи обично писање вектора латинским словима са стрелицом.

2. Врсте вектора

Нису ни све векторске величине исте врсте.

Посматрајмо, на пр., транслацију чврстог тела — прелаз из положаја I у положај II (сл. 2). Такво кретање је окарактерисано тиме, као што знамо, што се померање свих тачака чврстога тела одређује векторима исте дужине, истога правца и смера. Према томе и померање целога тела, као и ма које његове тачке, потпуно је одређено *ма којим* од вектора $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ итд. без обзира на положај њихових почетака.

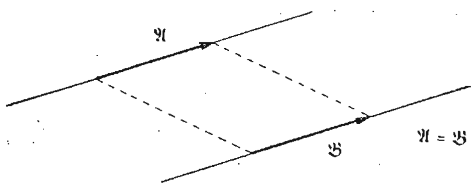


Сл. 2

С друге стране посматрајмо дејство силе, изражене вектором $\mathfrak{F}$, на неко чврсто тело са нападном тачком Q у чврстом телу. Знамо из физике да се нападна тачка силе може померати само дуж праве силе, тј. њен вектор дуж основе вектора, без промене дејства, уколико се не промени интензитет и смер силе. И овде имамо посла са вектором чији се почетак може изабрати са неком, иако не потпуном, произвољношћу.

Најзад, вектор електричне силе битно је везан за почетну тачку. Јер, ако се нападна тачка помери добија се, у општем случају, други вектор и по интензитету и по правцу и по смеру.

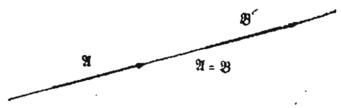
Према томе за сваки вектор су битни: вредност интензитета, правац (све паралелне праве дефинишу исти правац) и смер. То се не може рећи за почетак вектора и стога, према различитим врстама векторских величина, постоје ова три типа вектора:



Сл. 3

a) слободни вектори или просто *вектори*. Такав је вектор транслација. Они су једнаки, ако имају једнаке интензитете, исте смерове, а правци су им исти (паралелни), без обзира на положај почетка. Такви једнаки вектори се увек могу паралелним померањем довести до поклапања (сл. 3).

b) вектори везани за праву. Такав је вектор сила која делује на чврсто тело. Они су једнаки, ако су им једнаки интензитети и смерови и ако су на истој основи. Сам почетак може се дуж основе вектора по вољи померати (сл. 4).



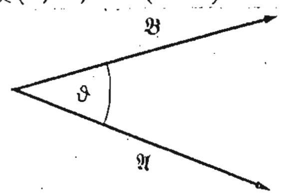
Сл. 4

c) вектори везани за тачку. Такви су вектори: електрична сила, брзина честице течне масе итд. Они су једнаки само ако су им једнаки: интензитети, правци и смерови и ако имају исти почетак. Они су, дакле, једнаки само кад се поклапају.

Проучаваћемо прво слободне векторе. Реч вектор означаваће увек слободни вектор, ако ништа друго није наглашено.

3. Угао два вектора

Под углом два вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ у равни разуме се угао $\sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \vartheta$ (сл. 5) за који треба обрнути први вектор $\mathfrak{A}$ у директном (позитивном) смеру да би прешао у положај другог вектора $\mathfrak{B}$. Под директним смером обртања као и увек, разуме се, смер супротан кретању казаљке на часовнику. Прелаз вектора $\mathfrak{A}$ у положај вектора $\mathfrak{B}$ директним смером обртања дефинише, очигледно, не само угао ϑ, већ и сви углови $\vartheta + 2k\pi$, где је k цео број. То значи да вектор $\mathfrak{A}$ и вектор $\mathfrak{B}$ имају исти положај не само после обртања за ϑ него и даље, сваки пут, после целог броја пуних обрта. Ако се $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ размене и обртање врши у индиректном смеру, онда угао ϑ мења знак, тј.



Сл. 5

$$\sphericalangle(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = -\sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = -\vartheta .$$

Уколико при нашем проучавању можемо одредити само косинус угла два вектора, као угао два вектора довољно је сматрати угао који одговара прелазу једнога вектора у положај другога најкраћим путем, без обзира на смер, пошто косинус одређује само апсолутну вредност угла, јер је

$$\cos\vartheta = \cos(-\vartheta).$$

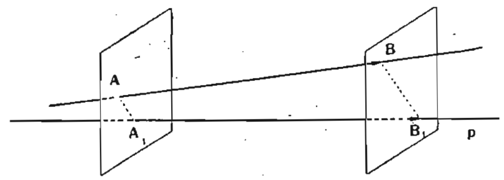
Свака *оса* (оријентисана права) је по правцу и смеру одређена ортом. Према томе под углом који неки вектор чини са датом осом разуме се угао између орта те осе и вектора.

И под углом који чине два вектора у простору, разуме се угао који одговара прелазу једнога вектора директним путем у положај другога. Тешкоћа је, међутим, у томе што свака раван у простору има две стране, те, ако се раван, одређена са посматраним векторима гледа са једне стране имамо директан смер, а ако се гледа са друге стране имамо као директан смер — смер супротан првобитном. Да бисмо разликовали једну од друге стране ми ћемо раван оријентисати. Оријентисати раван значи из неке њене тачке повући орт нормалан на раван са смером на једну страну равни. Као позитивна (лице) сматра се она страна равни која одговара делу простора камо је уперен орт. Супротна страна је негативна (наличје). У том случају се угао који чине два вектора може и у простору једнозначно дефинисати. Тако, ако се гледа у лице равни, угао је позитиван, ако се обртање врши у директном смеру; напротив, ако се гледа у наличје равни, онда је угао позитиван кад се обртање врши у индиректном смеру. На овај начин је одређен и у простору знак угла. Наравно, ако се може одредити само косинус угла који чине два вектора у простору, онда је довољно као угао између вектора сматрати угао који одговара најкраћем прелазу из положаја једнога вектора у положај другога, без обзира на смер. У том случају се може увек тај угао тако изабрати да буде позитиван а величине између 0 и π.

4. Пројекција вектора

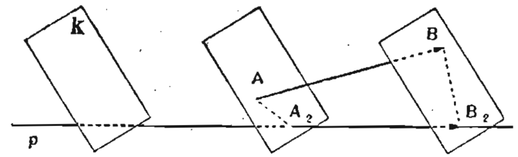
Нека у простору буде дат вектор $\overrightarrow{AB}$ и права p. *Пројекција вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на праву* p зове се вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ који спаја подножја нормала спуштених из крајњих тачака вектора $\overrightarrow{AB}$ на праву p (сл. 6). Према томе је пројекција вектора на праву опет вектор, чији је интензитет махом мањи а највише једнак интензитету вектора $\overrightarrow{AB}$. Из саме дефиниције је очигледно да су пројекције вектора на све паралелне праве једнаке и да пројекција у ствари зависи само од одређеног правца. Овако дефинисана пројекција вектора на праву зове

се, тачније, ***нормална пројекција***. Може се, међутим, дефинисати општа *паралелна пројекција* вектора на дату праву на овај начин. Из крајњих тачака вектора $\overrightarrow{AB}$ повуку се пара-



Сл. 6

лелно некој равни k, две равни које секу дату праву у тачкама A_2 и B_2 (сл. 7). Тада је вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ паралелна пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ на праву p. Ми ћемо у даљем излагању искоришћавати углавном нормалну пројекцију, те ће се, према томе, реч пројекција у даљем излагању односити на нормалну пројекцију уколико супротно није наглашено.



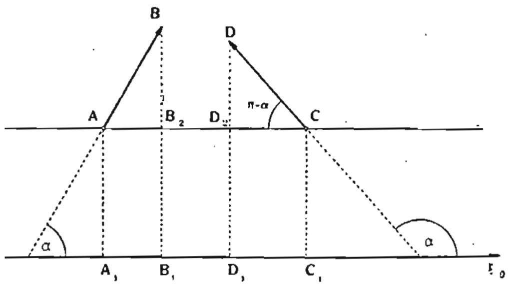
Сл. 7

Као *пројекција вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на неку осу* $\mathfrak{x}_0$ сматра се дужина пројекције (скалар) тог вектора на праву осе или ма на коју њој паралелну праву са одређеним знаком. Она се сматра као позитивна, ако је смер пројекције исти као и смер осе, а негативна, ако је смер пројекције супротан смеру осе. Тако је (сл. 8) A_1B_1 позитивно, а C_1D_1 негативно. Ако се повуче права паралелна са датом осом кроз почетак вектора $\overrightarrow{AB}$, онда је $AB_2 = A_1B_1$, па из троугла ABB_2 следује

$$A_1B_1 = AB\cos\alpha,$$

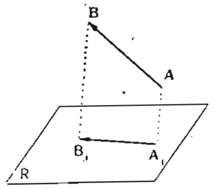
где је α угао који вектор $\overrightarrow{AB}$ чини са осом $\mathfrak{x}_0$. Ако је угао $\alpha > \frac{\pi}{2}$, као у случају вектора $\overrightarrow{CD}$, из троугла CDD_2, на исти начин, добија се, с обзиром на дефиницију, пошто је $CD_2 = C_1D_1$,

$$C_1D_1 = -CD\cos(\pi - \alpha) = CD\cos\alpha.$$



Сл. 8

Према томе је увек: пројекција вектора ма на коју осу скалар, једнак производу интензитета вектора и косинуса угла који вектор чини са осом.



Сл. 9

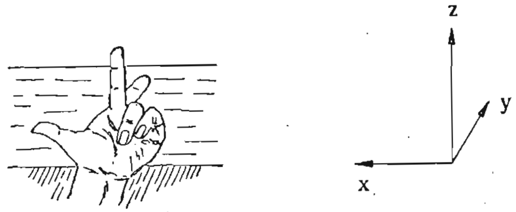
Под пројекцијом вектора $\overrightarrow{AB}$ на неку раван R (сл. 9) разуме се вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ који има почетак у пројекцији почетка A вектора $\overrightarrow{AB}$ на раван R, а крај у пројекцији његова краја B. Дакле, пројекција вектора на раван је опет вектор.

5. Координате вектора. Аналитичка дефиниција вектора. Основни ортови. Вектор положаја

Сваки вектор је потпуно одређен са две тачке — почетком и крајем. Међутим, како се почетак вектора може пренети паралелним померањем ма у коју тачку простора, може се замислити да се он налази у почетку неког координатног система. У том случају је вектор одређен само положајем свога краја, а овај је у простору одређен са три броја — три координате. Бројеви, који одређују вектор, зову се *координате* вектора. Оне зависе од избора координатног система.

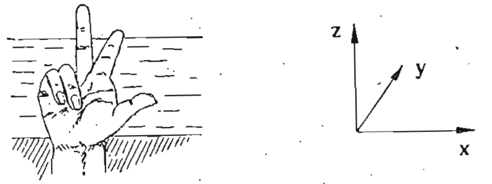
Нека буде дат Декартов правоугли координатни систем. Њих има два различита према оријентацији оса. Код једнога

је триједар оса распоређен као палац (x), кажипрст (y) и велики прст (z) леве руке, и зато се зове *леви* (сл. 10). Други триједар се зове *десни*, јер су измењана места осама x и y,



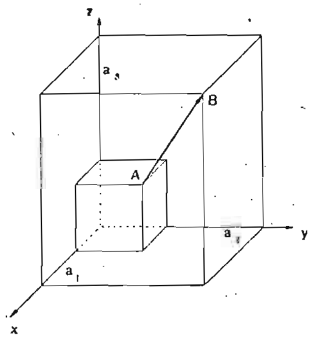
Сл. 10

па стоје као палац (x), кажипрст (y) и велики прст (z) десне руке (сл. 11).



Сл. 11

Ми ћемо се у току даљег извођења служити углавном десним правоуглим системом. Нека сад буде дат вектор $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ (сл. 12) и правоугли триједар оса $\overset{\ast}{O}xyz$, и нека почетак вектора буде ма у којој тачки A простора. Тада су пројекције вектора $\mathfrak{a}$ на осе



Сл. 12

$$a_1 = x_2 - x_1;\quad a_2 = y_2 - y_1;\quad a_3 = z_2 - z_1,$$

ако су координате почетка вектора $A(x_1, y_1, z_1)$ и краја $B(x_2, y_2, z_2)$. Ова три броја a_1, a_2, a_3 потпуно одређују вектор $\mathfrak{a}$ и једнаки су координатама краја вектора $\mathfrak{a}$, кад се вектор доведе у координатни почетак. Ако вектор $\mathfrak{a}$ чини са координатним осама углове $\sphericalangle(x\mathfrak{a}) = \alpha$, $\sphericalangle(y\mathfrak{a}) = \beta$ и $\sphericalangle(z\mathfrak{a}) = \gamma$, по дефиницији пројекције вектора на осу, биће

(1) $a_1 = a\cos\alpha;\quad a_2 = a\cos\beta;\quad a_3 = a\cos\gamma.$

Одавде се квадрирањем и сабирањем добија

(2) $$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

пошто је увек

(3) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Из (2) се за интензитет вектора $\mathfrak{a}$ добија

(4) $$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

при чему се пред кореном узима само позитиван знак, јер је, како смо рекли, интензитет вектора увек позитиван. Косинуси углова које вектор образује са осама одређени су једначинама

(5) $$\cos\alpha = \frac{a_1}{a},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{a},\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{a}.$$

На тај начин су, помоћу координата вектора, одређени интензитет, правац и смер вектора $\mathfrak{a}$.

Дакле, у односу на Декартов правоугли тријиедар оса, сваки вектор је одређен са три координате — три реална броја. Мора се само знати тачно којој оси одговара поједини од тих бројева и стога се они увек пишу у одређеном реду, тако да први одговара x-оси, други y-оси, а трећи z-оси. Кад се ово утврди, може се вектор дефинисати аналитички помоћу правоуглог координатног система, као скуп од три уређена броја, три његове координате у односу на тај систем и пише се

(6) $$\mathfrak{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}.$$

Оваква дефиниција вектора има само ту предност пред ранијом очигледном дефиницијом што се може уопштити и на простор од више димензија. У том случају би, на пр., вектор

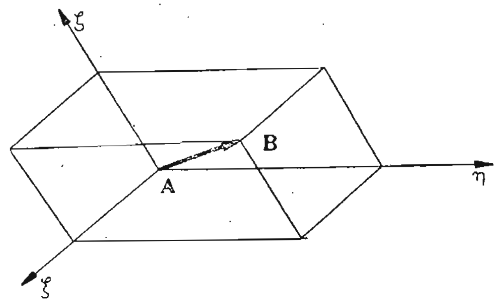
(7) $$\mathfrak{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots,\ a_n\}$$

претстављао вектор у простору од n димензија.

Поред правоуглог координатног система могу се за одређивање вектора употребити и други координатни системи.

a) У косоуглом систему координата (сл. 13) $A\xi\eta\zeta$ вектор је опет одређен са три броја (координате). Ове координате се сад могу добити паралелном пројекцијом вектора на осе, увек паралелно једној од координатних равни. Координате истога вектора $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ биће сад нека друга три броја $a'_1,\ a'_2,\ a'_3$.

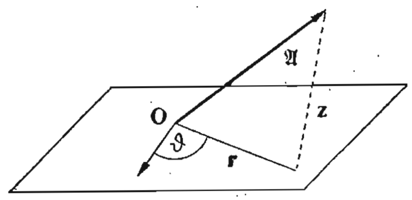
b) У цилиндричном поларном систему (сл. 14) вектор $\mathfrak{A}$ је одређен мерним бројевима потега r и коте z и углом ϑ.



Сл. 13

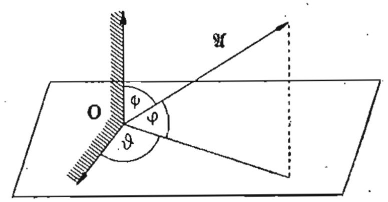
c) У сферном поларном систему вектор $\mathfrak{A}$ је одређен својом дужином ρ и угловима ϑ и φ. Место φ може се узети и угао $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (сл. 15).

Ако се вектор посматра у некој равни, онда је он у тој равни одређен са два броја, са две координате у односу на неки координатни систем у равни.



Сл. 14

Најзад, ако вектор лежи на некој оси, он је одређен само једним позитивним или негативним бројем, према томе, да ли су вектор и оса истог или супротног смера. Тај број, који је у овом случају довољан за одређивање вектора, је координата вектора и зове се још и *алгебарска вредност* вектора.

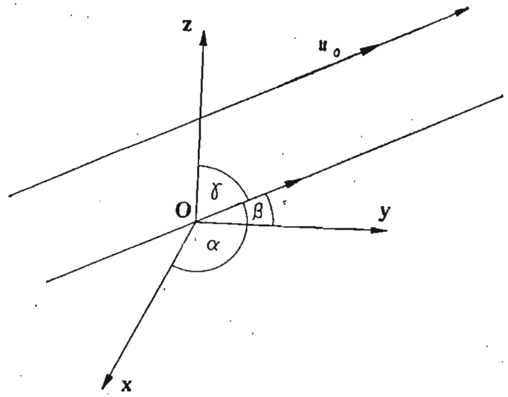


Сл. 15

Свака оса је по правцу и по смеру одређена ортом, на пр., $\mathfrak{u}_0$ (сл. 16). Нека су пројекције орта $\mathfrak{u}_0$ на осе Декартова правоуглог тријиедра $u_1,\ u_2,\ u_3$; између њих постоји веза (2) тј.

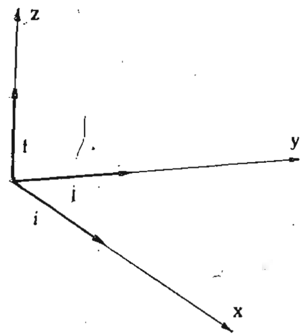
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

јер је интензитет орта једнак јединици. Ове пројекције орта очигледно су једнаке косинусима углова α, β и γ које орт гради са осама и само су две независне. Према томе, правац и смер сваке осе је одређен са два броја.



Сл. 16

Сваки координатни систем, са своје стране, је потпуно одређен, ако је дат његов почетак и три орта $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ и $\mathfrak{e}_3$ који одређују његове осе. Ови ортови се зову *основни ортови.* Ако се ради о Декартову правоуглом триједру, онда се основни ортови обично обележавају са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, (сл. 17). Њихове координате у односу на сам триједар који одређују дате су обрасцима



Сл. 17

$$\mathfrak{i} = \{1, \quad 0, \quad 0\},$$
$$\mathfrak{j} = \{0, \quad 1, \quad 0\},$$
$$\mathfrak{k} = \{0, \quad 0, \quad 1\}.$$

Положај тачке у односу на неки координатни систем може се, место са три броја, одредити и вектором чији је почетак у координатном почетку а крај у посматраној тачки. Уопште, положај сваке тачке у простору у односу на неки одређени пол може се одредити вектором чији је почетак у полу а крај у посматраној тачки. Такав вектор се зове *вектор положаја* тачке у односу на одређени пол.

Кратак историски преглед

Између метода и начина расуђивања у алгебри и геометрији разлика је очигледна. Основна разлика између једне и друге методе је у томе, што алгебра располаже поступцима (алгоритмима) који обухватају читаве класе проблема и који олакшавају њихово решавање. У геометрији ствар стоји друкчије, скоро сваки задатак захтева индивидуално решење и тражи увођење помоћних геометриских елемената: тачака, линија и површина.

Почев још од Грка па све до XVII века у свим случајевима, где су се јављале геометриске величине, радило се непосредно са њима. Постојала је истина увек тежња да се алгебарске методе искористе у геометрији, али је та тежња остварена у извесној форми тек проналаском аналитичке геометрије од стране Декарта (Descartes 1638 год.). После проналаска аналитичке геометрије и, у вези са њом, инфинитезималног рачуна настпа у току XVIII века незапамћени напредак математике и механике. Аналитичка геометрија је, дакле, омогућила искоришћавање алгебарских метода у геометрији, али је тиме оперисање са чисто геометриским величинама потпуно занемарено. И у механици је, пошто је Лагранж (Lagrange) створио аналитичку механику, непосредно рачунање са геометриским величинама механике било замењено рачунањем са бројевима.

Међутим, методе аналитичке геометрије имале су и својих недостатака, од којих су главни: 1) што се у току рачунања са геометриским величинама не може увек имати геометриски садржај задатка пред очима и тиме губи могућност геометриске контроле, и 2) што је за коришћење ове методе неопходно увођење координатног система који је сасвим стран посматраном проблему.

Интересантно је напоменути, да је у доба процвата аналитичке геометрије велики математичар Лајбниц (Leibniz) био свестан потребе, да се са геометриским величинама рачуна непосредно на начин алгебре, не сводећи задатке помоћу координатног система на рачунање са бројевима. Он је потребу таквог рачуна нагласио у једном писму Хајгенсу (Huyghens). Крупни успеси аналитичке методе, међутим, засенили су таква мишљења и онемогућили даљи рад у том правцу у оно време.

Почетком XIX века појављује се неопходност за непосредним рачунањем са геометриским величинама. Проналазак нацртне геометрије и развитак теориске физике и технике изазвали су реакцију против чисто аналитичке методе, чија је примена постала и сувише сложена. Тако је основана пројективна геометрија (Poncelet, Chasles, Möbius, Plücker), чији је корен још у XVII веку (Pascal и Desargues). Међутим, пројективна геометрија, тесно везана са аналитичком, није задовољавала постављени захтев. Тек око средине XIX века математичар Грасман (Grassmann, 1804—1877) и астроном и физичар Хамилтон (Hamilton, 1805—1865) уводе, сваки на свој начин, директно рачунање са геометриским величинама. Њихове основне концепције су различите, али се у тим њиховим непосредним рачунима са геометриским величинама појављује појам вектора. Од Хамилтона потиче и назив „вектор“. Из њихових радова створен је у другој половини XIX века самосталан векторски рачун.

Творци векторског рачуна су углавном и пре свега физичари. Прву заокругљену слику векторског рачуна, у данашњем смислу, дао је физичар Гибз (Gibbs). Даље развијање и популарисање теорије вектора потиче опет не од математичара него од физичара и техничара као: Месквел (Maxwell), Лоренц (Lorentz), Абрахам (Abraham), Хевисајд (Haeviside), Фепл (Föppl) итд. Уопште су математичари са неповерењем гледали на векторски рачун у почетку његова развитка. Једини математичар који је учествовао у стварању теорије вектора је Грасман, али Грасмана његови савременици нису разумели и гледали су на његов рад са скепсом. Тако је створен векторски рачун.

Ова нова, векторска метода оперисања са геометриским величинама може се употребити у теориској физици, механици, техници, геометрији итд. Она дозвољава и увођење нових, од вектора компликованијих величина, као дијада, афинора, тензора итд. То је у ствари нова математичка метода да се оперише са читавим низом физичких величина геометриског карактера директно и без икаквих вештачких помоћних средстава. Тиме је омогућено: 1) да се примене методе алгебре и анализе на величине које нису бројеви и тако искористи велики капитал који имају алгебра и анализа, и 2) да се избегне свођење рачунања са геометриским величинама на рачунање са бројевима и на тај начин губљење геометриске очигледности.

ГЛАВА I

СЛОБОДНИ ВЕКТОРИ

6. Једнакост вектора. Колинеарни и супротни вектори.

Дефинисали смо нове величине — векторе. Видели смо, да је сваки вектор у тродимензионалном простору одређен са три броја. Подвлачимо да не би било никакве користи од увођења појма вектора, ако би се опет морало рачунати са бројевима. Стога сад треба дефинисати непосредне операције са векторима које би биле аналогне аритметичким и алгебарским операцијама.

У том циљу треба, пре свега, имати непрестано пред очима дефиницију *једнакости* два вектора. Да поновимо. Вектори су једнаки, ако имају једнаке интензитете и смерове, а правце паралелне. Из ове дефиниције следује, како смо већ видели, да су сви вектори који се паралелним померањем могу довести до поклапања једнаки. Према томе, у свакој тачки простора може се конструисати вектор (и то на један једини начин) који је једнак датом вектору и чији је почетак у тој тачки. То даље значи да се сви вектори могу паралелним померањем довести на заједнички почетак.

Односи $>$ и $<$ нису код вектора дефинисани и, према томе, место три односа $>$, $=$, $<$ који постоје код реалних бројева, код вектора постоје само два $=$ и $\neq$.

Ако два или више вектора, кад се доведу на заједнички почетак, леже на истој правој, онда се зову *колинеарни*. Колинеарни вектори се могу разликовати по интензитету и смеру. Отуда следује да су сви вектори истога правца (који леже на паралелним носачима) колинеарни и стога се као ознака колинеарности употребљује знак $\|$, тј. $\mathfrak{a} \| \mathfrak{b}$ и чита се: вектор $\mathfrak{a}$ колинеаран са вектором $\mathfrak{b}$.

У специјалном случају, кад колинеарни вектори имају једнаке интензитете и супротне смерове зову се *супротни* вектори. Као вектор супротан вектору $\mathfrak{a}$ дефинише се вектор $-\mathfrak{a}$.

Ако су два вектора дефинисана аналитички помоћу бројева, тј. ако је дато

$$\mathfrak{a} = \{ a_1, a_2, a_3 \},$$

$$\mathfrak{b} = \{ b_1, b_2, b_3 \},$$

онда је

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

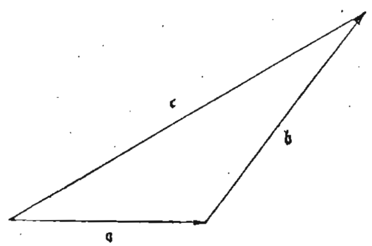
кад је

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3.$$

7. Сабирање вектора

При дефиницији сабирања вектора мора се водити рачуна о двема стварима: 1) да за то сабирање важе закони сабирања бројева (комутативни и асоцијативни), и 2) да се у случајевима где се ради о физичким величинама (сили, брзини, итд.) као резултат добијају физичке величине.

С обзиром на ове услове сабирање вектора се дефинише на овај начин. Ако су дата два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, онда се један може надовезати на други, а то значи: поклопити почетак једног вектора са крајем другог. Вектор $\mathfrak{c}$ (сл. 18) који тада спаја почетак првог вектора $\mathfrak{a}$ са крајем другог вектора $\mathfrak{b}$ зове се *збир* вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и пише се



Сл. 18

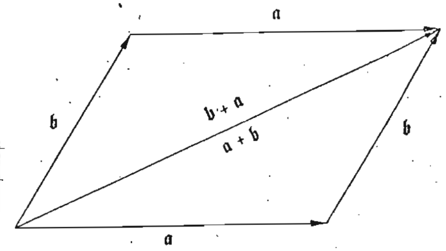
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}. \tag{1}$$

Ово правило сабирања вектора зове се и „правило троугла“, пошто вектори образују троугао.

У случају колинеарних вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ ово правило се своди на рачунање са релативним бројевима. У том случају, кад се вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ надовежу један на други, вектор збира има интензитет једнак збиру, одн. разлици интензитета

вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, према томе да ли су ти вектори истог или супротног смера, а за смер — смер већег вектора (по интензитету) и заједнички правац.

Ако су вектори-сабирци супротни вектори, применом правила троугла долази се до вектора чији се почетак и крај поклапају. Потпуности ради сматраћемо и овај збир као вектор и зваћемо га *вектор нула*. Сви вектори нуле једнаки су међу собом и имају *неодређени* правац и смер. Они су колинеарни са сваким другим вектором.



Сл. 19

Сад се поставља питање, да ли за овако дефинисано сабирање важе закони сабирања бројева. Показаћемо да комутативни закон важи.

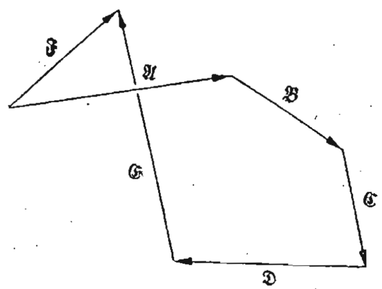
Да бисмо то доказали, повући ћемо из почетка вектора $\mathfrak{a}$ вектор $\mathfrak{b}$ и на њега надовезати вектор $\mathfrak{a}$ (сл. 19). Очигледно је да ћемо, према дефиницији вектора као оријентисане дужи, добити паралелограм у коме је вектор $\mathfrak{c}$ дијагонала. Стога је

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},$$

што је и требало доказати. Дакле, сабирање вектора се може и овако дефинисати. Ако се оба вектора доведу на заједнички почетак, онда се вектор збира поклапа са дијагоналом паралелограма конструисана над тим векторима са почетком у заједничком почетку вектора („правило паралелограма“). Видимо, дакле, да, с једне стране, важи комутативни закон као и за сабирање реалних бројева, а, с друге стране, овако дефинисано сабирање је познато правило за сабирање сила, брзина, померања итд. (паралелограм сила, паралелограм брзина итд.). Стога се сабирање вектора зове још и *слагање* вектора, сабирци — *компоненте*, а збир — *резултанта*.

Кад знамо како се добија збир два вектора лако се може добити збир више вектора, на овај начин. Нека су дати вектори $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, који не морају бити у истој равни. Њихов збир се добија ако се саберу прво два, па њихов збир са трећим и тако настави. То се међутим своди на ово правило:

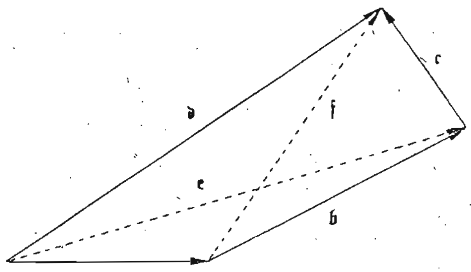
Треба све векторе надовезати један на други пошав од произвољне тачке простора и вектор збира је онда онај вектор $\mathfrak{F}$ (сл. 20) који спаја почетак првог вектора са крајем последњег вектора („правило полигона“). Ако надовезани вектори чине затворену изломљену линију у простору, њихов збир је једнак нули.



Сл. 20

Остаје још да се покаже да важи и асоцијативни закон, као код сабирања бројева. То ћемо показати, да не компликујемо рад, пошто користимо геометриску очигледност, само на примеру три вектора. Узмимо, дакле, три вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, који су већ надовезани један на други (сл. 21). Нека је њихов збир $\mathfrak{d}$, тј.

(2) $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.



Сл. 21

Ако се саберу прво вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и њихов збир означи са $\mathfrak{e}$, тј. $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, збир сва три вектора је

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{e} + \mathfrak{c}.$$

Али, са слике је јасно да ћемо исти вектор $\mathfrak{d}$ добити и ако саберемо прво векторе $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ и тај збир означимо са $\mathfrak{f}$, па је онда

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{f}.$$

Према томе збир више вектора не зависи од начина како се сабирци групишу, тј. асоцијативни закон важи.

У случају три вектора, који не леже у истој равни, може се довођењем на исти почетак конструисати паралелепипед на тим векторима и онда је њихов вектор збира претстављен дијагоналом тог паралелепипеда са почетком у заједничком почетку вектора сабирака („правило паралелепипеда“).

Однос интензитета резултанте и интензитета вектора сабирака дат је изразом

(3) $$|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots| \leqq |\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|+|\mathfrak{c}|+|\mathfrak{d}|+\cdots,$$

који је, с обзиром на дефиницију, очигледан и где знак једнакости важи само у случају колинеарних вектора истога смера.

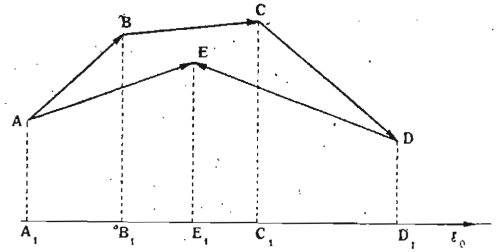
Из досадашњег излагања би се могао стећи утисак: 1) да су све величине које се на неки начин могу претставити помоћу вектора заиста векторске величине; и 2) да су све величине одређене са три броја, који би се могли узети за њихове координате, такође векторске величине. То међутим није тачно. Јер, поред могућности да се нека величина може претставити помоћу вектора, морају бити испуњени још неки услови који су увек прећутно претпостављени. Такви су ови услови: 1) да двема једнаким вредностима дате величине морају одговарати једнаки вектори и 2) да збиру две вредности те величине мора одговарати вектор који је збир она два вектора који одговарају тим величинама, при чему треба да важе закони сабирања.

Тако се ротација око неке осе за одређени коначни угао може претставити као вектор са правцем осе, смером на страну одакле се гледано обртање врши у директном смеру и са интензитетом једнаким величини угла ротације мерена радијанима. Па ипак се ротација за коначни угао не сме сматрати као векторска величина, јер горњи услови нису сви задовољени.

С друге стране, све величине које су одређене са три броја могле би се претставити помоћу вектора, рецимо, помоћу вектора положаја, но ипак се не смеју увек сматрати као вектори. Само ако се дати бројеви трансформишу при промени координатног система као што се трансформишу координате оријентисане дужи — вектора, могу се дати бројеви сматрати као координате векторске величине и сама величина као вектор одређен тим бројевима. У свима другим случајевима то не би било тачно.

8. Пројекција збира вектора на осу

Пројекција резултанте више вектора на неку осу $\mathfrak{x}_0$ једнака је алгебарском збиру пројекција појединих вектора на исту осу.



Сл. 22

Нека буде дата оса одређена ортом $\mathfrak{x}_0$ (сл. 22) и збир вектора

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

Пројекција резултанте $\overrightarrow{AE}$ је, према дефиницији пројекције вектора на осу, A_1E_1, тј.

$$AE\cos\left(\overrightarrow{AE},\ \mathfrak{x}_0\right)=A_1E_1.$$

С друге стране, збир пројекција појединих вектора на ту осу дат је изразом

$$AB\cos\left(\overrightarrow{AB},\mathfrak{x}_0\right)+BC\cos\left(\overrightarrow{BC},\mathfrak{x}_0\right)+CD\cos\left(\overrightarrow{CD},\mathfrak{x}_0\right)+$$

$$+DE\cos\left(\overrightarrow{DE},\mathfrak{x}_0\right)=A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1-D_1E_1=A_1E_1,$$

пошто је пројекција вектора $\overrightarrow{DE}$ на дату осу негативна. Тиме је став доказан.

Из овог правила следује да су, у односу на неки Декартов правоугли триједар, координате вектора $\mathfrak{A}$, који је дат векторском једначином

(1) $$\mathfrak{A}=\sum_i \mathfrak{a}_i,$$

такође једнаке збиру координата појединих вектора збира у односу на одговарајуће осе триједра. Дакле, ако је

$$\mathfrak{a}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}\quad \text{и}\quad \mathfrak{A}=\{X,\ Y,\ Z\},$$

онда се добија

(2) $$X=\sum_i x_i,\quad Y=\sum_i y_i,\quad Z=\sum_i z_i,$$

те, према томе, једној векторској једначини (1) одговарају три скаларне једначине (2). Другим речима је

(3) $$\mathfrak{A}=\{\sum_i x_i,\quad \sum_i y_i,\quad \sum_i z_i\}.$$

Ова једначина дефинише сабирање вектора, ако су вектори одређени бројевима. Из те једначине је лако извести и при таквој дефиницији тачност комутативног и асоцијативног закона сабирања вектора.

9. Одузимање вектора

Нека од вектора $\mathfrak{A}$ треба одузети вектор $\mathfrak{B}$, тј.

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{A}-\mathfrak{B},$$

где је $\mathfrak{A}$ — умањеник, $\mathfrak{B}$ — умањилац, а $\mathfrak{x}$ — разлика; треба,

дакле, наћи такав вектор $\mathfrak{x}$ да буде

(1) $$\mathfrak{x}+\mathfrak{B}=\mathfrak{A}.$$

Ако овој једначини додамо лево и десно вектор $-\mathfrak{B}$ добијамо

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{B}+(-\mathfrak{B})=\mathfrak{A}+(-\mathfrak{B}).$$

Збир два супротна вектора $\mathfrak{B}+(-\mathfrak{B})$, на левој страни, потире се, те се добија

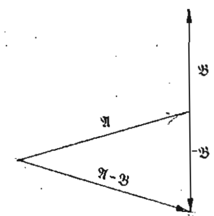
(2) $$\mathfrak{x}=\mathfrak{A}+(-\mathfrak{B}),$$

и ова вредност $\mathfrak{x}$ идентички задовољава једначину (1). Према томе је

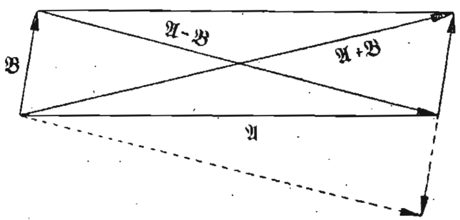
$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\mathfrak{A}+(-\mathfrak{B}),$$

дакле, одузети вектор $\mathfrak{B}$ значи исто што и додати супротни вектор $-\mathfrak{B}$, и операција одузимања се своди на сабирање.

Дакле, разлика вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ је вектор који спаја почетак вектора $\mathfrak{A}$ са крајем вектора $-\mathfrak{B}$ надовезана на



Сл. 23



Сл. 24

вектор $\mathfrak{A}$ (сл. 23). Ако су вектори који се одузимају доведени на заједнички почетак (сл. 24), вектор разлике иде од краја вектора који се одузима (умањиоца) до краја вектора од кога се одузима (умањеника). Кад се над векторима $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са заједничким почетком конструише паралелограм овај даје и збир и разлику тих вектора. Вектор збира се поклапа са дијагоналом што пролази кроз заједнички почетак оба вектора, а разлика је друга дијагонала. Јасно је да овде речи умањеник и умањилац немају никакве везе са смањењем интензитета вектора.

У координатама се разлика вектора

$$\mathfrak{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}\quad \text{и}\quad \mathfrak{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$$

дефинише као вектор

$$\mathfrak{c}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\}.$$

10. Множење вектора скаларом

Узмимо, као код бројева, да је множење вектора целим, позитивним бројем специјалан случај сабирања и ставимо

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2\mathfrak{a} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=3\mathfrak{a}$$

и, уопште,

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\cdots+\mathfrak{a}=n\mathfrak{a},$$

где је n број једнаких вектора сабирака. Према томе, производ целог и позитивног броја n и вектора $\mathfrak{a}$ — вектор $n\mathfrak{a}$, има интензитет n пута већи од интензитета вектора $\mathfrak{a}$, исти правац и смер са тим вектором. Ако утврдимо да производ $(-k^2)\mathfrak{a}$ претставља вектор $-(k^2\mathfrak{a})$, помножити вектор $\mathfrak{a}$ негативним бројем $-k^2$ значи наћи вектор k^2 пута већег интензитета, истог правца а супротног смера са вектором $\mathfrak{a}$.

У вези с овим може се, уопште, множење вектора скаларом дефинисати на овај начин. Нека је дат *ма koju* реални број λ и нека његова апсолутна вредност буде $|\lambda|$, онда се под производом вектора $\mathfrak{a}$ и скалара λ разуме вектор

$$\lambda\mathfrak{a} \quad \text{или} \quad \mathfrak{a}\lambda,$$

чији је интензитет

$$|\lambda\mathfrak{a}|=|\lambda|\cdot|\mathfrak{a}|,$$

правац исти као код вектора $\mathfrak{a}$, а смер исти као код вектора $\mathfrak{a}$, кад је $\lambda>0$, а супротан, кад је $\lambda<0$.

Према томе из саме дефиниције следује да за ово множење важи комутативни закон.

Ако је један од чинилаца било λ било $\mathfrak{a}$ једнак нули, производ је вектор нула. Обрнуто, ако је овај производ једнак нули један од чинилаца мора бити једнак нули.

Сад се сваки вектор може претставити у једном новом облику, као производ интензитета и орта, тј.

$$\mathfrak{a}=a\,\mathfrak{a}_0,$$

где је $\mathfrak{a}_0$ орт вектора $\mathfrak{a}$, а a његов интензитет.

Ако је вектор дат помоћу својих координата у односу на неки Декартов правоугли триједар, тј.

$$\mathfrak{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},$$

онда је

$$\lambda\mathfrak{a}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\},$$

што одмах следује из дефиниције пројекције вектора на осу.

Поред комутативног закона за ово множење важе и остали закони: асоцијативни и дистрибутивни. Тако је, на пр., увек

$$m(n\mathfrak{a})=(mn)\mathfrak{a}=n(m\mathfrak{a}).$$

Заиста, интензитети ова три вектора одређени су изразима

$$|m|\,|(n\mathfrak{a})|=|m|(|n|\,|\mathfrak{a}|),$$
$$|(mn)|\,|\mathfrak{a}|=(|m|\,|n|)\,|\mathfrak{a}|,$$
$$|n|\,|(m\mathfrak{a})|=|n|(|m|\,|\mathfrak{a}|),$$

а десне стране ових израза су једнаке, као производи бројева за које важи асоцијативни закон. Према томе су интензитети добијених вектора једнаки. Правци сва три ова вектора су увек исти као код вектора $\mathfrak{a}$. Што се тиче смера, сва три вектора су истовремено или истога смера као вектор $\mathfrak{a}$, кад су m и n исто означени, или супротнога смера, кад су m и n различито означени. Ово правило важи и кад је ма који од чинилаца производа једнак нули, тј. ако су обе стране вектори нуле.

Тачност дистрибутивног закона мора се показати за два случаја: кад се вектор множи збиром скаларних чинилаца и кад се скалар множи збиром вектора. У првом случају треба, на пр., доказати тачност једначине

$$(m+n)\mathfrak{a}=m\mathfrak{a}+n\mathfrak{a}. \tag{1}$$

За то ћемо овако поступити. Узећемо да су m и n позитивни бројеви, јер ће доказ и у свим осталим случајевима бити потпуно аналоган овом доказу. У том случају на левој страни једначине (1) налази се вектор чији је интензитет $|(m+n)|\,|\mathfrak{a}|$, а правац и смер исти као код вектора $\mathfrak{a}$. На десној страни је збир колинеарних вектора $m\mathfrak{a}$ и $n\mathfrak{a}$ истога смера. По дефиницији је интензитет збира таквих вектора једнак збиру интензитета вектора сабирака, тј. $|m|\,|\mathfrak{a}|+|n|\,|\mathfrak{a}|=(|m|+|n|)\,|\mathfrak{a}|$. Дакле, интензитет тог вектора је, с обзиром на претпоставку о бројевима m и n, исти као код вектора на левој страни једначине (1). Његов правац и смер су такође исти као код вектора $\mathfrak{a}$, тј. исти као код вектора на левој страни једначине. Тиме је доказано да дистрибутивни закон важи и за случај оваквог множења.

Ако збир два вектора треба помножити скаларом, онда треба доказати тачност једначине

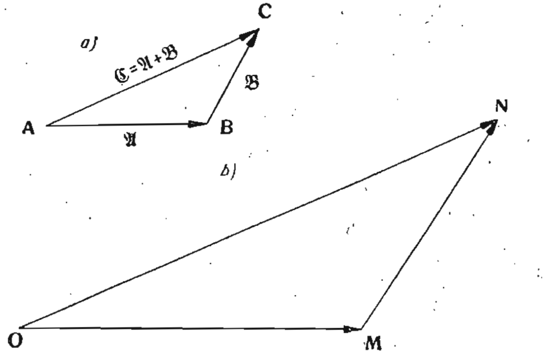
$$m(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = m\mathfrak{A} + m\mathfrak{B}. \tag{2}$$

Ради доказа надовежимо један на други векторе $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ почев од тачке A и саберимо их (сл. 25a). Добија се вектор

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Узмимо затим векторе $\overrightarrow{OM} = m\mathfrak{A}$ и $\overrightarrow{MN} = m\mathfrak{A}$, надовежимо их један на други и спојимо O са N. Тада је (сл. 25b)

$$\overrightarrow{ON} = m\mathfrak{A} + m\mathfrak{B}. \tag{3}$$



Сл. 25

Међутим је $\triangle ABC \sim \triangle OMN$, јер су им стране AB и OM, BC и MN пропорционалне и паралелне. Стога је и ON паралелно са AC и $ON = m\,AC$, тј.

$$\overrightarrow{ON} = m(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}). \tag{4}$$

Из једначина (3) и (4) следује

$$m(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = m\mathfrak{A} + m\mathfrak{B},$$

што је и требало доказати. Слика 25b нацртана је за случај $m > 0$, међутим све остаје у важности и за случај $m < 0$, само се слика мења.

11. Дељење вектора скаларом. Однос колинеарних вектора

Операција дељења вектора бројем дефинише се као инверзна операција множења вектора бројем, тј. поделити неки вектор $\mathfrak{a}$ бројем λ ($\lambda \neq 0$) значи наћи вектор $\mathfrak{x}$ који, помножен

са λ, даје вектор $\mathfrak{a}$

$$\lambda\mathfrak{x} = \mathfrak{a}.$$

Ако се обе стране ове једначине помноже са $\frac{1}{\lambda}$ и искористи асоцијативни закон множења, добија се

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{a}.$$

Овај резултат показује да се дељење бројем своди на већ познату операцију множења вектора бројем. Другим речима, поделити неки вектор бројем различитим од нуле исто је што и помножити га реципрочном вредношћу тога броја. Дакле,

$$\mathfrak{a} : \lambda = \mathfrak{a}\frac{1}{\lambda}.$$

Вектор (резултат дељења вектора бројем) има интензитет $|\lambda|$ пута мањи, правац исти као и вектор $\mathfrak{a}$, а смер исти или супротан, према томе да ли је $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$. Основне особине дељења, изражене једначинама

$$\frac{\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}}{\lambda} = \frac{\mathfrak{a}}{\lambda} \pm \frac{\mathfrak{b}}{\lambda}, \quad (\mathfrak{a}:\lambda):\mu = (\mathfrak{a}:\mu):\lambda = \mathfrak{a}:(\lambda\mu), \quad \frac{\mathfrak{a}}{\lambda} = \frac{\mathfrak{a}\mu}{\lambda\mu};$$

могу се лако доказати свођењем дељења на множење.

Досад доказане особине операција са векторима пружају нам могућност да од вектора и бројева образујемо линеарне комбинације и да са њима оперишемо као са бројевима, тј. да се ослобађамо заграда, да сводимо сличне чланове итд. На пр.

$$3\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - 2(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}) = 3\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - 2\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} - 4\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + 3\mathfrak{b} - 5\mathfrak{c}.$$

Поред дељења вектора скаларом, може се као инверзна операција множења вектора скаларом дефинисати и операција која из вектора производа даје скаларни чинилац. Како су при множењу вектора скаларом векторски чинилац и вектор производа увек колинеарни, то се, значи у овом случају тражи однос колинеарних вектора. Према томе симбол

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{B} \quad \text{или} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

у овом случају, обележава однос колинеарних вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и има смисла само кад је $\mathfrak{B} \neq 0$. Резулат те операције је број, и то позитиван или негативан према томе да ли су вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истога или супротнога смера, а апсолутна вредност тог броја показује однос њихових интензитета.

12. Растављање вектора у компоненте. Компланарни вектори

Сваки вектор може се претставити као збир два или више других вектора. Само док је резултат сабирања два или више вектора увек потпуно одређени вектор, обрнуто — *раставлање* или *разлагање* вектора у компоненте може, у општем случају, као и код бројева, да се изврши на бесконачно много начина.

Пре но што пређемо на посматрање појединих случајева дефинишемо: три или више вектора зову се *компланарни*, ако, доведени на исти почетак, леже у истој равни. На пр., сви вектори који леже у паралелним равнима компланарни су. Два вектора су, наравно, увек компланарна. Растављање датог вектора у n са њим колинеарних компонената своди се на растављање датог броја (алгебарске вредности вектора) на n сабирака. То ће разлагање бити одређено, ако се зна $(n-1)$ сабирака, или, уопште, ако је познато $(n-1)$ услова за компоненте.

Ако се ради о разлагању вектора у са њим компланарне компоненте, онда од n компонената треба опет знати $(n-1)$ компоненту или неких $(n-1)$ услова за одређивање ових компонената. У специјалном случају, кад се траже две компоненте, које нису колинеарне, довољни су за одређивање тих компонената ови подаци:

1) једна компонента по величини, правцу и смеру; или

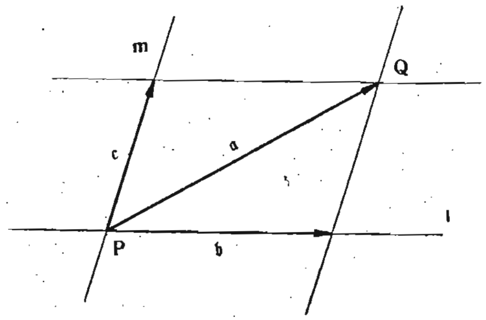
2) правци обе компоненте; или

3) величине обе компоненте (под условом да је $a+b \geq c$, ако су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ компоненте и $\mathfrak{c}$ резултанта); или

4) величина једне компоненте и правац друге (овај задатак није увек једнозначно одређен нити увек могућ).

Да су ови подаци заиста довољни очигледно је на основу геометриске конструкције.

На пр., ако су дата два правца l и m (сл. 26) повучена кроз почетак P датог вектора $\mathfrak{a}$, конструкција се своди на геометриску конструкцију паралелограма са познатом дијагоналом и угловима које она гради са странама. Наиме, тада се компоненте $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ вектора $\mathfrak{a}$ у тим правцима добијају повлачењем паралела правцима l и m кроз крај Q вектора. Те паралеле отсецају на правама l и m тражене компоненте.



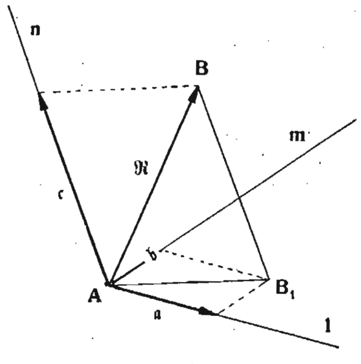
Сл. 26

Као последица ових правила могу у општем случају бити дате $(n-2)$ компоненте по величини, правцу и смеру, а остале две на један од ова четири начина.

Најзад, ако неки вектор треба раставити у n компонената које не леже у истој равни, онда је задатак опет одређен само, ако је познато $(n-1)$ компонената по величини, правцу и смеру или неких $(n-1)$ услова који их потпуно одређују.

Вектор се може раставити у *најмање три* компоненте, које нису у истој равни, јер само две морају (правило троугла) увек лежати у истој равни са резултантом. У специјалном случају, дакле, разлагања вектора у три некомпланарне компоненте, може се задатак решити на један једини потпуно одређени начин и кад су дата три некомпланарна правца. Замислимо сва три правца кроз једну тачку, тада свака два правца одређују по једну раван, укупно три равни. Ако се онда кроз крај вектора, кад је почетак вектора у заједничкој тачки сва три правца, поставе три равни паралелне овим равнима оне одређују на датим правцима три тражене компоненте потпуно једнозначно (правило паралелепипеда). Ако су та три правца узајамно ортогонални, односне компоненте вектора зову се *ортогоналне* компоненте вектора.

На пр., нека буду дата три некомпланарна правца l, m и n (сл. 27). Конструкција компонената датог вектора $\mathfrak{R}$ у овим правцима изводи се овако. Кроз крај B датог вектора $\mathfrak{R}$ повуче се права паралелна, на пр., са правом n до продора B_1 равни одређене правцима l и m. Затим се у тој равни, кроз тачку B_1, повуку праве паралелне правцима l и m. Те паралеле отсецају на правцима l и m компоненте $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Ако се још кроз тачку B повуче права паралелна са AB_1, она ће на правој n отсећи трећу тражену компоненту $\mathfrak{c}$.



Сл. 27

13. Линеарна зависност вектора

Видели смо у т. 11 да се од вектора и бројева могу образовати линеарне комбинације. На пр. од n вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ и n ма којих стварних бројева $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ може се образовати линеарна комбинација

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathfrak{a}_i = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n .$$

Ако у таквом случају постоји једначина

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathfrak{a}_i = 0,$$

и при том нису сви $\lambda_i (i=1, \ldots, n)$ једнаки нули, каже се да су вектори $\mathfrak{a}_i (i=1, 2, \ldots, n)$ *линеарно зависни*. Напротив, ако за дате векторе не постоји ни једна таква једначина, они су *линеарно независни*. Према томе, ако једначина облика (1) постоји, а познато је да су вектори $\mathfrak{a}_i (i=1, 2, \ldots, n)$ линеарно независни, мора бити

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0 .$$

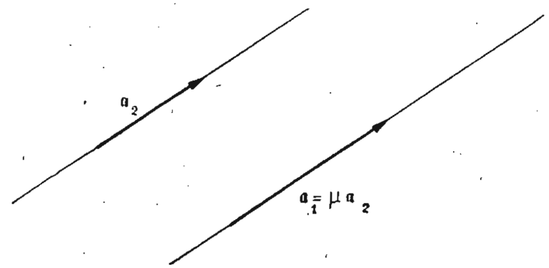
Ако између два вектора постоји једначина

$$(2) \qquad \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_2 = 0,$$

вектори $\lambda_1\mathfrak{a}_1$ и $\lambda_2\mathfrak{a}_2$ морају бити *колинеарни* (и то супротни), па према томе и вектори $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ морају бити колинеарни. Из једначине (2) следује (сл. 28)

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathfrak{a}_2 = \mu\mathfrak{a}_2,$$

тј. вектори $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ су колинеарни истог или супротног смера, према томе да ли је $\mu > 0$ или $\mu < 0$. Два вектора су стога



Сл. 28

линеарно зависни само ако су колинеарни, иначе не. Другим речима, збир два неколинеарна вектора различита од нуле не може никад бити једнак нули.

Ако су дата три вектора, па постоји једначина

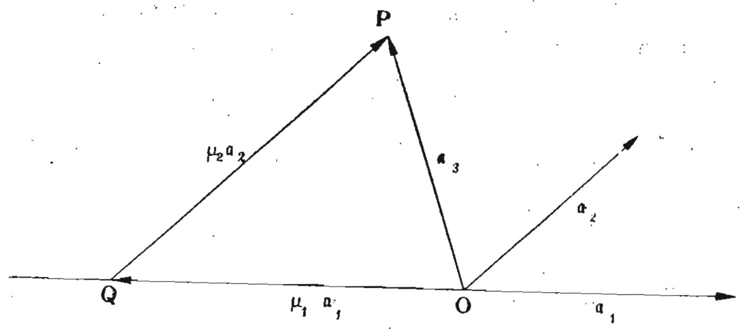
$$(3) \qquad \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3 = 0,$$

она на основу дефиниције сабирања, казује: да, ако се на крај вектора $\lambda_1\mathfrak{a}_1$ надовеже вектор $\lambda_2\mathfrak{a}_2$, тада вектор $\lambda_3\mathfrak{a}_3$ спаја крај вектора $\lambda_2\mathfrak{a}_2$ са почетком вектора $\lambda_1\mathfrak{a}_1$. Та три вектора чине, дакле, стране троугла (ако нису колинеарни), према томе они су сва три паралелни једној равни, тј. компланарни су. То значи, да су три вектора линеарно зависни само — кад су компланарни.

Из једначине (3) добија се, решавањем по вектору $\mathfrak{a}_3$,

$$\mathfrak{a}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathfrak{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathfrak{a}_2 = \mu_1\mathfrak{a}_1 + \mu_2\mathfrak{a}_2,$$

дакле, један вектор може се израчунати помоћу остала два. Линеарна зависност три компланарна вектора може се и геометриски очигледно показати. Нека вектори $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ буду компланарни и нека се доведу на заједнички почетак (сл. 29). Тада се кроз крај P, рецимо, вектора $\mathfrak{a}_3$ може повући



Сл. 29

увек паралела PQ са вектором $\mathfrak{a}_2$, тако да сече основу вектора $\mathfrak{a}_1$ у тачки Q. Сад је, услед колинеарности,

$$\overrightarrow{QP}=\mu_2\mathfrak{a}_2 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OQ}=\mu_1\mathfrak{a}_1,$$

па стога и

$$\mathfrak{a}_3=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\mu_1\mathfrak{a}_1+\mu\mathfrak{a}_2.$$

Одавде следује даље, да збир три некомпланарна вектора различита од нуле не може никад бити једнак нули.

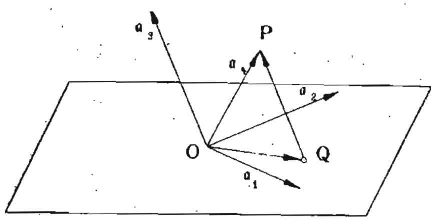
У простору од три димензије увек постоје три некомпланарна правца одређена са три независна орта. Четири вектора су у тродимензионалном простору увек линеарно зависни, тј. један се може изразити као збир остала три. Према томе за четири вектора $\mathfrak{a}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ увек постоји једначина

$$\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2+\lambda_3\mathfrak{a}_3+\lambda_4\mathfrak{a}_4=0, \tag{4}$$

одакле је, на пр.,

$$\mathfrak{a}_4=-\frac{\lambda_1}{\lambda_4}\mathfrak{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_4}\mathfrak{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\mathfrak{a}_3=\mu_1\mathfrak{a}_1+\mu_2\mathfrak{a}_2+\mu_3\mathfrak{a}_3.$$

И ово се може геометриски очигледно потврдити. Нека вектори буду доведени на заједнички почетак O (сл. 30).



Сл. 30

Кроз крај P вектора $\mathfrak{a}_4$ повуче се паралела PQ са вектором $\mathfrak{a}_3$ до пресека Q са равни коју одређују вектори $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$. Тада је са слике

$$\overrightarrow{QP}=\mu_3\mathfrak{a}_3,$$

а за $\overrightarrow{OQ}$, пошто је компланаран са $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$, може се написати

$$\overrightarrow{OQ}=\mu_1\mathfrak{a}_1+\mu_2\mathfrak{a}_2.$$

Тако се, најзад, добија

$$\mathfrak{a}_4=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\mu_1\mathfrak{a}_1+\mu_2\mathfrak{a}_2+\mu_3\mathfrak{a}_3.$$

Уопште, више од три вектора су увек линеарно зависни, јер се, на пр., од пет вектора, на основу претходног, ма која четири могу сматрати као линеарно зависни и свести на три, тако да опет имамо после са четири вектора итд.

Сад се може доказати да се, у тродимензионалном простору, сваки вектор може на један једини начи раставити у три компоненте ма у која три некомпланарна правца, одређена са три независна орта $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, који одређују неки координатни систем. Тада за вектор $\mathfrak{a}$ имамо

$$\mathfrak{a}=A\mathfrak{e}_1+B\mathfrak{e}_2+C\mathfrak{e}_3. \tag{5}$$

Вектори $A\mathfrak{e}_1$, $B\mathfrak{e}_2$, $C\mathfrak{e}_3$, колинеарни са осама, су компоненте, а скалари A, B, C, су координате вектора $\mathfrak{a}$ у односу на тај систем координатних оса. Ако би, међутим, постојао још један начин претстављања вектора $\mathfrak{a}$ помоћу истих ортова, онда бисмо имали, на пр.,

$$\mathfrak{a}=A_1\mathfrak{e}_1+B_1\mathfrak{e}_2+C_1\mathfrak{e}_3. \tag{6}$$

Одузимањем ове једначине од једначине (5) добија се

$$(A-A_1)\mathfrak{e}_1+(B-B_1)\mathfrak{e}_2+(C-C_1)\mathfrak{e}_2=0,$$

а то значи или су ортови линеарно зависни, што се противи претпоставци, или мора бити

$$A-A_1=0, \quad B-B_1=0, \quad C-C_1=0,$$

одакле се види да су координате, па стога и компоненте непромењене.

Из ових разматрања следује, да је вектор само онда нула, ако су све његове координате у односу ма на који координатни систем од три некомпланарне осе једнаке нули. Вектори су једнаки, ако су им једнаке све одговарајуће координате у односу на исти систем. Према томе, једној векторској једначини одговарају увек три скаларне, без обзира на координатни систем који је у питању.

Ако је дат Декартов правоугли систем, ортогоналне компоненте вектора $\mathfrak{a}$ су

$$\mathfrak{a}_x=a_1\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{a}_y=a_2\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{a}_z=a_3\mathfrak{k};$$

дакле,

(7) $$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}.$$

Из једначине

(8) $$\mathfrak{a} = m\mathfrak{b},$$

која показује да су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ колинеарни, следује да су све координате вектора $\mathfrak{a}$ и $m\mathfrak{b}$, у односу ма на који систем, једнаке, тј.

$$a_1 = mb_1, \quad a_2 = mb_2, \quad a_3 = mb_3,$$

па стога

(9) $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = m,$$

тј. два вектора су само онда колинеарна, ако су им координате у односу ма на који координатни систем пропорционалне.

С друге стране, из једначине

(10) $$\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c} = 0,$$

која показује да су вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ компланарни, следују ове три скаларне једначине

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0$$
$$\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0$$
$$\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0.$$

Међутим, да би овај систем имао решења по α, β, γ различита од нуле мора детерминанта коефицијената бити једнака нули, тј.

(11) $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Дакле, да би три вектора била компланарна мора детерминанта њихових координата, у односу ма на који систем координата бити једнака нули.

14. Примери

1. Одредити интензитет, правац и смер вектора $\mathfrak{a} = \{3, 4, 5\}$ одређена у односу на Декартов правоугли триједар.

На основу једначина (4) и (5) — т *5.* добија се за интензитет $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, а за косинусе углова: $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ и $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и $\alpha = 64^0 54'$; $\beta = 55^0 33'$; $\gamma = 45^0$.

2. Који вектор образује троугао са векторима

$$3\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} - \mathfrak{c} \quad \text{и} \quad -\mathfrak{a} + 3\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}?$$

Ако су дати вектори надовезани један на други, троугао са њима образује вектор $\mathfrak{d} = \pm[(3\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + (-\mathfrak{a} + 3\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c})]$, а ако су доведени на заједнички почетак, онда је то вектор $\mathfrak{e} = \pm[(3\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) - (-\mathfrak{a} + 3\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c})]$.

3. Доказати да се дијагонале у паралелограму полове.

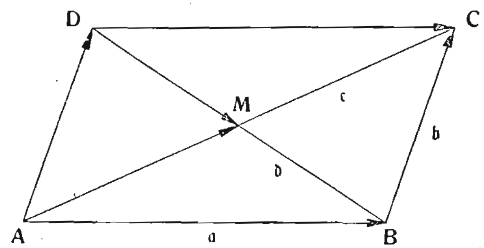
Узмимо (сл. 31) да вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ претстављају две стране које полазе из истог темена паралелограма $ABCD$. Тада су дијагонале

(1) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \quad \text{и} \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}.$$

Нека M буде пресек дијагонала. Тада је

(2) $$\overrightarrow{AM} = \lambda\mathfrak{c},$$

јер је вектор $\overrightarrow{AM}$ колинеаран са вектором $\mathfrak{c}$. Ту је λ неки засад неодређени број. С друге стране је вектор



Сл. 31

(3) $$\overrightarrow{DM} = \mu\mathfrak{d},$$

опет због колинеарности, где је μ такође неодређени број. Према томе је са слике

(4) $$\overrightarrow{AM} = \mathfrak{b} + \mu\mathfrak{d},$$

одакле се изједначењем израза (2) и (4) добија условна једначина за λ и μ, тј.

$$\lambda\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mu\mathfrak{d}.$$

Уношењем вредности (1) за векторе $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ добија се једначина

$$\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} + \mu(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}),$$

или

$$(\lambda - \mu)\mathfrak{a} + (\lambda + \mu - 1)\mathfrak{b} = 0.$$

Међутим, како су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ линеарно независни, јер нису колинеарни, иначе не би могли бити стране паралелограма, мора бити:

$$\lambda - \mu = 0, \quad \lambda + \mu - 1 = 0,$$

одакле је

$$\lambda = \frac{1}{2}, \qquad \mu = \frac{1}{2}.$$

Дакле,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}; \qquad \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\mathfrak{b},$$

што је и требало доказати.

4. Дати су вектори

$$\mathfrak{a} = \{-3, 0, 2\}; \quad \mathfrak{b} = \{2, 1, -4\}; \quad \mathfrak{c} = \{11, -2, -2\}.$$

a) Показати да су ови вектори компланарни.

b) Разложити сваки од ових вектора у правцу два остала вектора.

На основу једначине (11), т. 13 ови вектори су компланарни, јер је детерминанта њихових координата једнака нули, тј.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 11 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Према томе важи једначина

$$\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c} = 0. \tag{1}$$

За одговор на друго питање треба ову једначину решити по оном вектору који желимо да разложимо у правцу два остала и одредити коефицијенте. На пр.

$$\mathfrak{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathfrak{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{b}, \tag{2}$$

па треба само одредити $-\frac{\alpha}{\gamma}$ и $-\frac{\beta}{\gamma}$.

Векторској једначини (1) одговарају три скаларне

$$\begin{aligned} -3\alpha + 2\beta + 11\gamma &= 0 \\ \beta - 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha - 4\beta - 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Решењем овог система хомогених једначина добија се одмах

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 5, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = 2$$

и заменом у (2), најзад,

$$\mathfrak{c} = -5\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b}.$$

5. Одредити растојање две тачке у простору.

Нека две тачке A и B у простору буду дате својим векторима положаја $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ у односу на почетак неког Декартова правоуглог триједра, наиме

$$\mathfrak{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$$
$$\mathfrak{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Дужина AB вектора

$$\overrightarrow{AB} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

одређује тада тражено растојање, тј.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

6. Написати једначину праве кроз тачку A, паралелне датом вектору $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \neq 0)$.

Нека тачка A буде дата вектором положаја $\mathfrak{r}_1$. Тада (сл. 32) тражена једначина гласи

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \lambda\mathfrak{a},$$

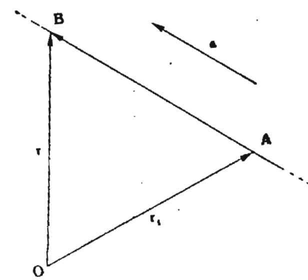
где је $\mathfrak{r}$ вектор положаја ма које тачке B на траженој правој а λ променљив параметар, пошто вектор $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$ мора бити колинеаран са $\mathfrak{a}$.

У скаларном облику се добија

$$x - x_1 = \lambda a_1, \quad y - y_1 = \lambda a_2,$$
$$z - z_1 = \lambda a_3,$$

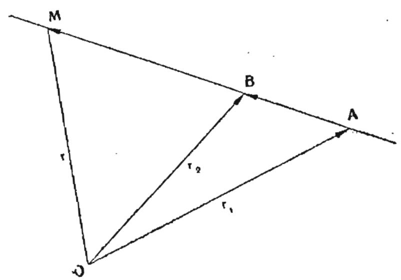
одн.

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}.$$



Сл. 32

7. Написати једначину праве кроз две дате тачке A и B одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$.



Сл. 33

Ма где на правој узели тачку M одређену вектором положаја $\mathfrak{r}$ морају вектори $\overrightarrow{AM} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$ и $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ бити колинеарни (сл. 33). Према томе тражена једначина може се написати у облику

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \lambda(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1),$$

одн.

$$\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}_2 + (1 - \lambda)\mathfrak{r}_1,$$

где је λ променљив параметар.

Одавде се одмах без тешкоће добија једначина праве кроз две тачке у скаларном облику

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

8. Нека буду дата три вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Доказати да њихови крајеви леже на једној правој, кад се они доведу на заједнички почетак, ако су испуњени услови:

$$1)\ \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c} = 0,$$

$$2)\ \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

а коефицијенти α, β и γ нису сви једнаки нули.

На основу услова 1) вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ морају бити компланарни. Осим тога, ако се узме, на пр. $\gamma \neq 0$, онда се из услова 2) добија

$$\gamma = -(\alpha + \beta).$$

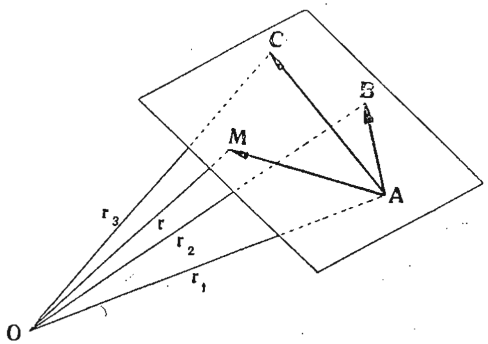
Стога се решавањем једначине (1) по $\mathfrak{c}$ добија

$$\mathfrak{c} = \frac{\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}}{\alpha + \beta} = \mathfrak{a} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}).$$

Одавде је јасно, на основу претходног задатка, да, или крај вектора $\mathfrak{c}$ лежи на правој одређеној крајевима вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ или, ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ једнаки, онда су крајеви сва три вектора у истој тачки.

9. Написати једначину равни одређене са три тачке A, B, C, које нису на истој правој.

Нека тачке A, B, C буду одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ и нека је тачка M ма која тачка тражене равни са вектором положаја $\mathfrak{r}$ (сл. 34). Тада



Сл. 34

вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ морају бити компланарни за све тачке M равни, дакле

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \alpha(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + \beta(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1),$$

где су α и β променљиви параметри. У скаларном облику имамо три једначине

$$x - x_1 = \alpha(x_2 - x_1) + \beta(x_3 - x_1),$$

$$y - y_1 = \alpha(y_2 - y_1) + \beta(y_3 - y_1),$$

$$z - z_1 = \alpha(z_2 - z_1) + \beta(z_3 - z_1),$$

одакле се елиминацијом параметара α и β добија једначина равни у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

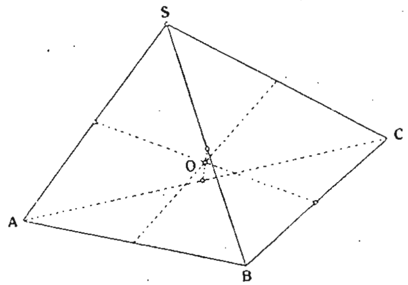
10. Доказати да се у сваком тетраедру дужи које спајају средине наспрамних укрштених ивица секу у једној тачки и узајамно полове.

Нека у том циљу темена тетраедра $SABC$ буду одређена векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ и $\mathfrak{r}_4$. Вектори положаја средина ивица SA и BC (сл. 35) које су супротне и укрштене имају вредности

$$\frac{\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_4}{2}.$$

Вектор положаја средине дужи која спаја средине ових ивица износи

$$\frac{\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_4}{4},$$



Сл. 35

а толика је и вредност вектора положаја средина других двеју дужи које спајају оне остале средине супротних и укрштених ивица: SB и AC и SC и AB. Тиме је тврђење доказано.

Задаци

1. Дати су вектори $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$. Конструисати векторе $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

2. Одредити Декартове правоугле координате вектора $\mathfrak{a}$ чији је интензитет 20, а са осама x и y гради углове од 60^0.

3. Одредити вектор. $\mathfrak{x}$, ако су познате две његове Декартове правоугле координате $x_1=3$ и $x_2=-9$ и интензитет $x=12$.

4. Одредити Декартове правоугле координате вектора $\mathfrak{a}$ интензитета 3, чији је почетак у координатном почетку и који са негативним смером x-осе, позитивним смером y-осе и негативним смером z-осе гради једнаке углове.

5. Под којим условима су вектори $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ колинеарни?

6. Вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ доведени су на исти почетак. Који услов морају задовољавати неколинеарни вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, да вектор $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ дели угао између њих на два једнака дела.

7. Ако су вектори $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ претстављени дијагоналама паралелограма, наћи услов који морају задовољавати вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ да буде $|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|=|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|$.

8. У троуглу ABC повучене су тежишне линије AD, BE и CF. Показати да је $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

9. Израчунати орт вектора $\mathfrak{a}=\{5, -2, 4\}$, дата у односу на Декартов правоугли trijedar.

10. Ако су вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ колинеарни ($\mathfrak{b}\neq 0$, $\mathfrak{c}\neq 0$) доказати да је

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\cdot\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}.$$

11. Показати да су вектори

$$\mathfrak{a}=\left\{3\frac{3}{5},\ -3,\ 4\frac{1}{2}\right\} \text{ и } \mathfrak{b}=\left\{-10,\ 8\frac{1}{3},\ -12\frac{1}{2}\right\},$$

дати у односу на Декартов правоугли триједар, колинеарни.

12. Нека вектори $\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{i}+5\mathfrak{j}-\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{b}=3\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\gamma\mathfrak{k}$ буду колинеарни, израчунати коефицијенте α и γ.

13. Раставити вектор $\mathfrak{c}=4\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ у две компоненте у правцу вектора $\mathfrak{a}=4\mathfrak{i}+6\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{b}=-3\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}$.

14. Одредити α тако, да вектори

$$\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{i}+4\mathfrak{j}+2\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b}=2\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+7\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{c}=\alpha\mathfrak{i}-6\mathfrak{j}+3\mathfrak{k}$$

буду компланарни.

15. Проверити да ли су вектори

$$\mathfrak{a}=3\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{b}=2\mathfrak{i}+5\mathfrak{j}-\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{c}=6\mathfrak{i}+17\mathfrak{j}-\mathfrak{k},$$

линеарно зависни или не.

16. Нека је $\overrightarrow{OM}=6\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+4\mathfrak{k}$ и $\overrightarrow{ON}=-2\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$. Показати, да вектор $\overrightarrow{MN}$ лежи у равни zOx.

17. Наћи величину и правац резултанте вектора

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{i}+2\mathfrak{j}+3\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{b}=-2\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}-4\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{c}=3\mathfrak{i}-4\mathfrak{j}+5\mathfrak{k}.$$

18. Нека стране троугла ABC буду вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Изразити тежишне линије помоћу вектора страна и одредити однос у коме се тежишне линије узајамно деле.

19. Ако се једно теме неког паралелограма споји са средином једне стране која не полази од тог темена, доказати да ова дуж дели дијагоналу, која не пролази кроз ово теме, у односу $1:2$.

20. Одредити координате тежишта троугла: *a*) кад су темена троугла дата векторима положаја у односу на неки пол; и *b*) кад је троугао одређен са два вектора са заједничким почетком.

21. Доказати векторски да дужи које спајају средине узастопних страна ма ког четвороугла чине паралелограм.

22. Дате су две тачке A и B, одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$. Одредити вектор положаја тачке која дату дуж AB дели у односу $m:n=\lambda$.

23. Дати су вектори

$$\mathfrak{a}=\{\ 3,\ -1,\ \ 2\},$$
$$\mathfrak{b}=\{-5,\ \ 0,\ -2\},$$
$$\mathfrak{c}=\{\ 1,\ -2,\ \ 2\},$$

у односу на неки Декартов правоугли триједар.

a) Доказати да су ови вектори компланарни.

b) Раставити вектор $\mathfrak{a}$ у компоненте у правцима вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.

24. Написати једначину равни која пролази кроз дату тачку M одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_1$ и која је паралелна са два дата неколинеарна вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

25. Написати једначину равни која пролази кроз две дате тачке A и B одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$, а паралелна је датом вектору $\mathfrak{a}$.

26. Изразити услове, које морају задовољавати тачке M_1, M_2 и M_3, одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}_3$, па да леже на једној правој, у векторском и скаларном облику.

27. Одредити пресек две праве дате векторским једначинама $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1 t$ и $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}_2+\mathfrak{b}_2\tau$.

28. Наћи векторску једначину праве — симетрале угла који чине вектори $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$.

29. Написати векторску једначину равни која је одређена тачком M са вектором положаја $\mathfrak{r}_1$ и правом $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$.

30. Одредити положај тежишта тетраедра и доказати да се тежишне линије тетраедра деле у односу 3 : 1, кад је:

a) тетраедар одређен векторима положаја својих темена; и

b) тетраедар одређен са три вектора који полазе из исте тачке.

15. Множење вектора вектором

И при дефинисању множења вектора са вектором мора се водити рачуна о томе да по могућству закони множења бројева остану очувани и да се као резултат добију неке механичке, физичке и геометриске величине. У вези с тим треба приметити да између множења и сабирања постоји битна разлика. Она је у томе што се операција сабирања стварно може извршити (а не само назначити) само са једнородним величинама и резултат је величина истог рода. Дакле, ако су сабирци бројеви и збир је број, ако су сабирци вектори и збир је вектор. Код множења, међутим, чиниоци могу бити разнородне величине, а резултат може бити нека трећа величина. Према томе се може дефинисати множење два вектора тако да резултат (производ) буде скалар и да буде вектор или нека трећа величина одређена са два вектора, јер је множење бројева као и множење вектора и скалара већ дефинисано.

Даље, док су код рачунских радњи сабирања и одузимања са векторима сви закони односних радњи са бројевима у потпуности очувани, код множења се то у потпуности не може постићи, па ће према томе између множења бројева и вектора увек постојати већа или мања разлика и отступање, као што ћемо видети.

15. 1 Скаларни или унутрашњи производ два вектора

Прво постављамо задатак дефинисања множења два вектора које ће за резултат имати скалар. У вези с тим се поставља питање, постоје ли такве скаларне величине које би биле одређене са два вектора. Видећемо одмах да такве величине заиста постоје.

Имали смо (т. 5, једн. 1) да је пројекција вектора $\mathfrak{a}$ на неку осу одређену ортом $\mathfrak{u}$ дата са

$$A_u = a\cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}).$$

Према томе, ако треба наћи пројекцију вектора $\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}_0$ на осу одређену вектором $\mathfrak{b} = b\mathfrak{b}_0$, добија се

$$A_b = a\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0).$$

Обрнуто, пројекција вектора $\mathfrak{b}$ на осу одређену вектором $\mathfrak{a}$ има вредност:

$$B_a = b\cos(\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a}_0).$$

Како је

$$\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0) = \cos[-(\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a}_0)] = \cos(\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a}_0),$$

то је

(1) $$A_b b = B_a a = ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0).$$

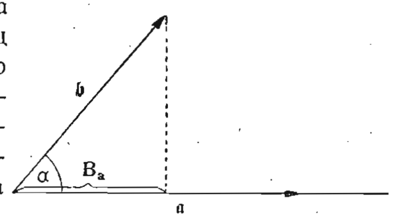
Дакле, скалар $ab\cos(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0)$ одређен је са два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Тај скалар се зове *скаларни* или *унутрашњи производ* два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и пише се

(2) $$ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b},$$

што се чита: $\mathfrak{a}$ тачка $\mathfrak{b}$.

Поред ове ознаке за скаларни производ два вектора, коју је увео Гибз и која се најчешће употребљује, има и других обележавања. Тако се скаларни производ два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ обележава по Лоренцу, стављањем вектора у малу заграду, тј. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, са или без запете између њих. Хевисајд је скаларни производ назначавао тиме што је просто писао векторе један крај другога без икаквог знака између њих, на пр. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; најзад Бурали-Форти и Марколонго обележавају скаларни производ стављањем косог крста између вектора, тј. $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$.

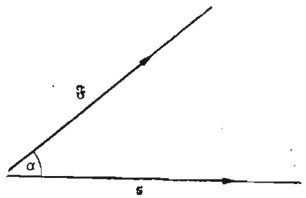
Производ се зове скаларни зато што је резултат скалар, а унутрашњи, по Грасману, из овог разлога. Ако се, на пр. вектор $\mathfrak{b}$ растави у компоненте у правцу вектора $\mathfrak{a}$ и нормално на тај правац (сл. 36), дефинисани скалар једнак је производу интензитета a вектора $\mathfrak{a}$ и интензитета B_a компоненте вектора $\mathfrak{b}$ у правцу вектора $\mathfrak{a}$ — „унутрашње" компоненте.



Сл. 36

Према томе је скаларни производ два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$: 1) производ три броја — интензитета оба вектора и косинуса угла међу њима; или 2) производ два броја — интензитета једнога вектора и пројекције другога на правац првога.

Потражимо неку физичку величину која је скалар, а одређена је са два вектора. Посматрајмо рад силе $\mathfrak{F}$ на путу $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{s}$ (праволиниско померање нападне тачке силе) (сл. 37). Ако правац померања и правац силе нису исти, механички рад силе дат је, као што знамо, изразом



Сл. 37

$$R = Fs \cos \alpha,$$

где је α угао који правац силе гради са правцем пута. Овде се ради о једној физичкој величини — раду, која је потпуно одређена са два вектора, вектором силе и вектором померања нападне тачке, те се може написати

$$R = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}.$$

Из дефиниције скаларног производа следују ове особине:

1) Ако је скаларни производ два вектора једнак нули, тј.

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0,$$

онда мора бити или $\mathfrak{a} = 0$, или $\mathfrak{b} = 0$, или најзад $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, тј. $\cos(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0) = 0$. Управо, пошто вектор нула може имати сваки правац, могу се и прва два услова обухватити последњим, тако да се може рећи, да из $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ следује $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. Према томе је

(3) $$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$$

услов ортогоналности два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

У односу на множење два обична броја овде имамо *прву разлику*, а та је, да скаларни производ два вектора може бити једнак нули и кад ниједан од чинилаца није једнак нули, што је код обичних бројева немогуће.

2) Ако је скаларни производ два вектора различит од нуле, из дефиниционе једначине (2) следује, пошто су a и b позитивни бројеви, да скаларни производ може бити позитиван и негативан број према томе, да ли је $\cos(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0) > 0$ или $\cos(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0) < 0$. То значи, да је скаларни производ два вектора позитиван или негативан, према томе да ли вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ чине оштар или туп угао. У механици се каже, на пр., да сила врши рад (сила врши кретање), кад је рад $R > 0$; рад се врши против силе (сила се противи кретању), кад је рад $R < 0$.

Уопште, како је увек

$$|\cos(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0)| \leq 1,$$

мора бити

(4) $$|\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}| \leq |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|,$$

где знак једнакости важи само у случају колинеарности вектора.

3) Производ два колинеарна вектора једнак је производу њихових интензитета и то са знаком + или −, према томе, да ли су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ истосмерни $\sphericalangle(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0$ или супротносмерни $\sphericalangle(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \pi$. Обрнуто, ако је скаларни производ два вектора једнак по апсолутној вредности производу њихових интензитета вектори су колинеарни. Ово се може сматрати као *услов колинеарности* два вектора.

4) Ако је у скаларном производу један од вектора орт, скаларни производ једнак је пројекцији другог вектора на осу одређену ортом. На пр., нека буде $|\mathfrak{u}_0| = 1$, онда је

(5) $$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{u}_0 = a \cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}_0) = A_u,$$

што је и требало доказати. Одавде следује, да се пројекција вектора на осу одређену ортом може сад дефинисати и као скаларни производ вектора и орта дате осе.

5) Скаларни производ два орта једнак је косинусу њима захваћеног угла, тј.

(6) $$\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0 = \cos(\mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0).$$

6) У случају два једнака вектора $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ скаларни производ има вредност

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = a \cdot a \cdot 1 = a^2.$$

Дакле, скаларни производ два једнака вектора једнак је квадрату интензитета вектора који се множи. Код јединичних вектора је

$$\mathfrak{u}_0 \cdot \mathfrak{u}_0 = 1, \quad \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = 1 \text{ итд.}$$

За скаларни производ два једнака вектора пише се понекад, као и код обичних бројева, вектор на квадрат, тј.

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 = a^2.$$

При употреби ове ознаке треба бити обазрив, јер се: 1) не може уопштити, пошто су, на пр., изрази $\mathfrak{a}^3$ и $\mathfrak{a}^4$ за нас у смислу скаларног множења без садржаја и 2) са $\mathfrak{a}^2$ се не сме оперисати као код бројева, јер

$$\sqrt{\mathfrak{a}^2} \neq \mathfrak{a},$$

већ је само

$$\sqrt{\mathfrak{a}^2} = a.$$

Дакле, не важи кореновање као обрнута радња степеновања.

Како сви вектори истог интензитета имају исти квадрат, симбол квадратног корена употребљује се у горњем смислу свуда где хоћемо да се ослободимо правца и смера вектора и где се води рачуна само о његову интензитету.

7) Из дефиниције скаларног производа следује за угао који чине вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$

$$\cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{ab}; \tag{7}$$

за пројекцију вектора $\mathfrak{a}$ на правац вектора $\mathfrak{b}$ имамо

$$A_b = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{b}$$

и, најзад, за однос пројекције A_b и интензитета b вектора $\mathfrak{b}$

$$\frac{A_b}{b} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}}.$$

Видели смо да се компоненте вектора $\mathfrak{a}$ дуж оса Декартова правоуглог триједра (т. 13, једн. 7) могу изразити са

$$a_1\,\mathfrak{i},\quad a_2\,\mathfrak{j},\quad a_3\,\mathfrak{k},$$

где су a_1, a_2, a_3 ортогоналне координате вектора $\mathfrak{a}$ у односу на Декартов триједар оса. Сад смо у стању да компоненте вектора у правцу датих оса изразимо директно у алгебарском облику помоћу самог вектора и ортова оса без координата. Наиме, по дефиницији је

$$a_1 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i},\qquad a_2 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{j},\qquad a_3 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{k}, \tag{8}$$

те је, према томе,

$$a_1\mathfrak{i} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i})\mathfrak{i},\qquad a_2\mathfrak{j} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{j})\mathfrak{j},\qquad a_3\mathfrak{k} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{k})\mathfrak{k},$$

тј.

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{j})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}. \tag{9}$$

За вектор положаја

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

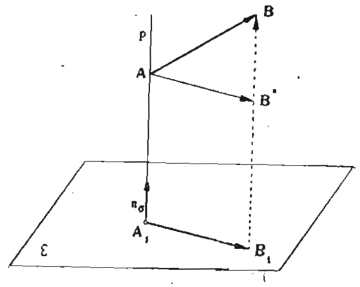
може се сад написати

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{j})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}. \tag{10}$$

Јасно је да су само у правоуглом координатном систему координате једнаке скаларним производима датог вектора са ортовима оса.

Нека буде дата раван ε и вектор $\overrightarrow{AB}$, па се нађе његова пројекција $\overrightarrow{A_1B_1}$ на раван онда се вектор $\overrightarrow{AB}$ увек може раставити у две компоненте: једну у равни ε и другу у правцу праве p нормалне на датој равни (сл. 38). Са слике се види да је тада

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB''} + \overrightarrow{B''B} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B''B}.$$



Сл. 38

Ако се за орт нормале p узме $\mathfrak{n}_0$ (ма који од два могућа), онда је

$$B''B = \overrightarrow{AB}\cdot\mathfrak{n}_0$$

и

$$\overrightarrow{B''B} = (\overrightarrow{AB}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0.$$

Према томе пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ на раван ε може се овако изразити

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0. \tag{11}$$

15.2 Алгебарске особине скаларног производа два вектора

Остаје још да се са математичке тачке гледишта оправда назив множења за ову операцију са векторима, а то значи треба показати да и за овако дефинисано скаларно множење вектора важе бар донекле закони множења.

Важност комутативног закона непосредно следује из дефиниције. Наиме

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$

$$\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} = ba\cos(\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a}_0),$$

али пошто је

$$\cos(\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{a}_0) = \cos[\,-(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0)] = \cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$

то је

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}, \tag{12}$$

што је и требало доказати.

Што се тиче асоцијативног закона, подвлачимо, да је скаларни производ дефинисан само за два вектора, те се према томе о асоцијативном закону не може ни говорити. Производи пак

$$(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{a},\qquad (\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\quad \text{и}\quad (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$$

претстављају у општем случају различите изразе. Ти изрази су увек вектори колинеарни са вектором којим се множи скаларни производ и, према томе, могу бити једнаки само у случају колинеарних вектора. Наравно да је увек, на пр.,

$$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}=(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a})\,\mathfrak{c}.$$

Друга разлика између скаларног производа вектора и множења бројева је баш у томе што није дефинисан скаларни производ од три или више чинилаца.

Асоцијативни закон код скаларног множења важи само, ако је трећи чинилац или остали чиниоци — скалар одн. скалари. На пр. увек је

(13) $$\lambda\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=(\lambda\,\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cdot(\lambda\,\mathfrak{b}).$$

Доказаћемо да је

(14) $$\lambda\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=(\lambda\,\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}.$$

На основу дефиниције следује

$$\lambda\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=\lambda\,a\,b\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$
$$(\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}=|\lambda\mathfrak{a}|\,b\cos(\lambda\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$

па ако је $\lambda>0$, онда је, дакле,

$$|\lambda\mathfrak{a}|\,b\cos(\lambda\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0)=\lambda ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$

јер су вектори $\mathfrak{a}_0$ и $\lambda\mathfrak{a}_0$ истога правца и смера. Ако је $\lambda<0$, добија се

$$|\lambda\mathfrak{a}|\,b\cos(\lambda\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0)=-|\lambda|\,ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0)=\lambda ab\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0),$$

јер су вектори $\mathfrak{a}_0$ и $\lambda\mathfrak{a}_0$ супротног смера, па је

$$\cos(\lambda\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b})=-\cos(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0).$$

Ово показује тачност једначине (14) у оба случаја. Исто се може и овако доказати

$$\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=\lambda(A_b\,b)=(\lambda\,A_b)b=(\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}.$$

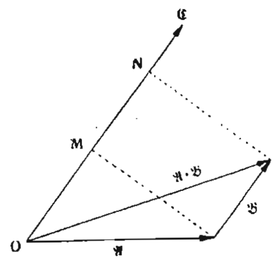
За скаларни производ вектора важи дистрибутивни закон, тј.

(15) $$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}.$$

По дефиницији скаларног производа је

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C}=ON\cdot C=(OM+MN)\cdot C=OM\cdot C+MN\cdot C=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C},$$

што је требало доказати и где је ON пројекција збира $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, а OM и MN пројекције вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на правац вектора $\mathfrak{C}$ (сл. 39).



Сл. 39

Важност ових закона множења довољна је да се линеарне комбинације вектора могу, не само сабирати и одузимати и множити бројем, него и скаларно множити једна другом. Ипак потпуна аналогија са множењем бројева не постоји.

Тако се може израчунати

$$(3\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(5\mathfrak{c}-\mathfrak{b})=15(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})+5(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})-3(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})-(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}),$$

или

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=a^2-b^2,$$

али се, на пр., не може израчунати

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}),$$

јер није дефинисан производ од више од два векторска чиниоца.

Трећа разлика између скаларног множења вектора и множења обичних бројева је у томе што из

(16) $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c},$$

где је $\mathfrak{a}$ одређени вектор, *не следује*

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{c},$$

већ само

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}=0$$
$$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})=0,$$

тј.

(17) $$\mathfrak{a}\perp\mathfrak{b}-\mathfrak{c}.$$

Једино, ако за сваки вектор $\mathfrak{x}$ произвољног правца и смера важи једначина

(18) $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{x},$$

може се закључити да је

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b},$$

јер, кад би вектор $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ био различит од нуле, онда би он морао бити нормалан ма на ком вектору $\mathfrak{x}$, а то је немогуће.

Може се даље поставити захтев, да се из познатог скаларног производа α два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{x}$ и једног познатог чиниоца $\mathfrak{a}$ нађе други непознати чинилац $\mathfrak{x}$, тј. из

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}=\alpha, \tag{19}$$

нађи $\mathfrak{x}$. Другим речима да се дефинише операција обрнута скаларном множењу.

Таква операција не постоји (то је *четврта разлика* у односу на множење бројева), јер једначини (19) одговара бесконачно много решења. Наиме, прво се може наћи вектор $\mathfrak{x}_1$ који је колинеаран са $\mathfrak{a}$, тј.

$$\mathfrak{x}_1=k\,\mathfrak{a}.$$

Тада је, после смене у (19),

$$k\,a^2=\alpha \quad \text{и} \quad k=\frac{\alpha}{a^2}.$$

Према томе је

$$\mathfrak{x}_1=\frac{\alpha}{a^2}\,\mathfrak{a}.$$

Међутим, скаларни производ $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}$ се не мења ако се вектору $\mathfrak{x}_1$ дода ма који вектор нормалан на $\mathfrak{a}$, на пр., $\mathfrak{n}\perp\mathfrak{a}$, те је према томе, опште решење једначине (19)

$$\mathfrak{x}=\frac{\alpha}{a^2}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{n}. \tag{20}$$

15. 3 Скаларни производ два вектора изражен у координатама

Прво ћемо на основу дефиниције одредити скаларне производе основних ортова Декартова правоуглог триједра. Схема показује резултате тог множења

(1)

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	1	0	0
$\mathfrak{j}$	0	1	0
$\mathfrak{k}$	0	0	1

Ако сад желимо да изразимо скаларни производ вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ помоћу Декартових правоуглих координата, онда ћемо их раставити у компоненте па, на основу дистрибутивног закона, измножити. Нека буде

$$\mathfrak{a}=a_1\,\mathfrak{i}+a_2\,\mathfrak{j}+a_3\,\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{b}=b_1\,\mathfrak{i}+b_2\,\mathfrak{j}+b_3\,\mathfrak{k},$$

онда је

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=(a_1\mathfrak{i}+a_2\mathfrak{j}+a_3\mathfrak{k})\cdot(b_1\mathfrak{i}+b_2\mathfrak{j}+b_3\mathfrak{k})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{2}$$

Ако су вектори дефинисани бројевима у односу на неки Декартов правоугли триједар, на пр.

$$\mathfrak{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\},$$

њихов скаларни производ могао би се дефинисати и као израз

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

При оваквој дефиницији скаларног производа два вектора може се образовати и скаларни производ у простору од више димензија. Тако, ако је

$$\mathfrak{a}=\{a_i\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}=\{b_i\}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{3}$$

онда је

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i. \tag{4}$$

И у случају кад су вектори дефинисани у односу на неки триједар оса, те њихове координате зависе од избора координатног система, сâм скаларни производ по својој дефиницији не зависи од избора система; он је инваријанта у односу на координатни систем. При томе инваријанта не значи уопште непромењљиву величину – константу, већ само величину која се при извесним одређеним операцијама не мења, на пр., при трансформацији координатног система и слично.

Из (2) се за скаларни производ два једнака вектора добија већ од раније (тач. 5, једн. 2) познати образац за квадрат интензитета вектора

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=a^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2. \tag{5}$$

Даље је, на основу т. 15. 1, једн. 7 и претходне једначине

$$\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{6}$$

Са друге стране, како је према тач. 5, једн. 5,

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{a_1}{a},\ \cos\alpha_2 = \frac{a_2}{a},\ \cos\alpha_3 = \frac{a_3}{a},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} = \frac{b_1}{b},\ \cos\beta_2 = \frac{b_2}{b},\ \cos\beta_3 = \frac{b_3}{b},$$

где су α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3, углови које вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ граде са осама Декартова правоуглог триједра, то је

$$\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3. \tag{8}$$

То је, с једне стране косинус угла два вектора, а, с друге стране, образац за одређивање косинуса угла две праве у простору које са осама граде поменуте углове.

Како се сваки вектор може на један једини начин разложити у компоненте дуж три ма које некомпланарне осе, одређене, на пр., ортовима $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, то се вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ могу овако изразити

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= A_1\mathfrak{e}_1 + A_2\mathfrak{e}_2 + A_3\mathfrak{e}_3,\\ \mathfrak{b} &= B_1\mathfrak{e}_1 + B_2\mathfrak{e}_2 + B_3\mathfrak{e}_3.\end{aligned} \tag{9}$$

Тада се за скаларни производ, изражен помоћу координата вектора у односу ма на који триједар оса, добија

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = {} & A_1B_1(\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_1) + A_1B_2(\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_2) + A_1B_3(\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_3) +\\ & + A_2B_1(\mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e}_1) + A_2B_2(\mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e}_2) + A_2B_3(\mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e}_3) +\\ & + A_3B_1(\mathfrak{e}_3\cdot\mathfrak{e}_1) + A_3B_2(\mathfrak{e}_3\cdot\mathfrak{e}_2) + A_3B_3(\mathfrak{e}_3\cdot\mathfrak{e}_3).\end{aligned} \tag{10}$$

Ако ставимо, краткоће ради,

$$\lambda_{ij} = (\mathfrak{e}_i\cdot\mathfrak{e}_j), \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

онда је

$$\lambda_{ij} = 1,\ \text{за}\ i = j,$$
$$\lambda_{ij} < 1,\ \text{за}\ i \neq j.$$

Осим тога је

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Према томе се скаларни производ (10) вектора (9) може написати у облику симетричне билинеарне форме

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \sum_{ij}\lambda_{ij}A_iB_j. \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Квадрат вектора $\mathfrak{a}$ тада има вредност

$$\mathfrak{a}^2 = \sum_{ij}\lambda_{ij}A_iA_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

и, према томе, претставља реалну, симетричну и позитивно дефинитну квадратну форму.

15.4 Примери

1. Извести косинусну и Питагорину теорему.

Из троугла ABC (сл. 40) имамо

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{c}.$$

Дакле,

$$a^2 = (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})\cdot(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = b^2 + c^2 - 2(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

а то је косинусна теорема. У случају

$$\mathfrak{b}\perp\mathfrak{c},\ \text{тј.}\ \alpha = \frac{\pi}{2}\ \text{добија се}$$

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

а то је Питагорина теорема.

Из једначине

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$$

следује за интензитет резултанте $\mathfrak{b}$ вектора $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}$

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2ca\cos(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}),$$

одн.

$$b = \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})},$$

где је $\sphericalangle(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) = \pi - \beta$.

2. Извести теорему о пројекцијама троуглових страна.

Из троугла ABC (сл. 40) имамо везу

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}.$$

Ако се ова једначина помножи скаларно вектором $\mathfrak{b}$ добија се

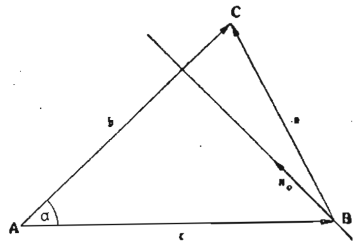
$$b^2 = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b},$$

$$b^2 = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma,$$

тј.

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,$$

што је и требало извести.



Сл. 40

3. Извести синусну теорему.

Ако се, на пр., кроз теме B троугла ABC (сл. 40) повуче права нормална на страни AC и на тој правој узме ма који орт $\mathfrak{n}_0$, рецимо са смером ка AC, очигледно је

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}_0 = -\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{n}_0.$$

Ови скаларни производи претстављају пројекције вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{c}$ на осу одређену ортом $\mathfrak{n}_0$, а знак минус на десној страни долази отуда што је друга пројекција негативна, јер вектор $\mathfrak{c}$ гради са вектором $\mathfrak{n}_0$ туп угао. Међутим је

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n}_0 = a\cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_0) = a\sin\gamma,$$

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{n}_0 = c\cos(\mathfrak{c}\,\mathfrak{n}_0) = c\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -c\sin\alpha.$$

Према томе је

$$a\sin\gamma = c\sin\alpha,$$

одакле

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

итд. следује синусна теорема.

4. Сила од 10 kg чини са сваким од три некомпланарна правца угао од 30° при чему ти правци граде међу собом једнаке углове. Одредити интензитете компонената дуж та три правца.

Нека орт силе буде $\mathfrak{e}$, а ортови датих праваца $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ и $\mathfrak{e}_3$, онда из разлога симетрије све три компоненте имају исти интензитет p, па се може написати

$$10\mathfrak{e} = p\,(\mathfrak{e}_1+\mathfrak{e}_2+\mathfrak{e}_3).$$

Ако се ова једначина помножи скаларно ортом силе $\mathfrak{e}$ добија се

$$(1) \qquad 10 = \frac{3\sqrt{3}}{2}p,$$

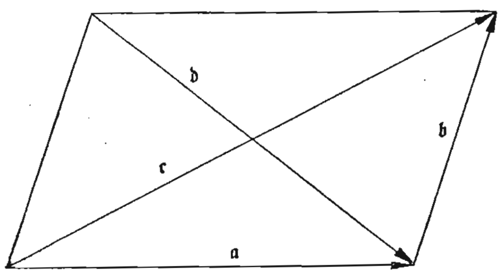
пошто је

$$\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_3\cdot\mathfrak{e} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из једначине (1) добија се најзад

$$p = \frac{20\sqrt{3}}{9}\,\text{kg}.$$

5. Доказати да је у сваком паралелограму збир квадрата дијагонала једнак двоструком збиру квадрата непаралелних страна.



Сл. 41

Нека су непаралелне стране вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (сл. 41). Тада су дијагонале

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \quad \text{и} \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a}-\mathfrak{b}.$$

Према томе је

$$c^2 = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 = a^2+b^2+2(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$$

$$d^2 = (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2 = a^2+b^2-2(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}),$$

одакле се сабирањем добија

$$c^2+d^2 = 2\,(a^2+b^2),$$

што је и требало доказати.

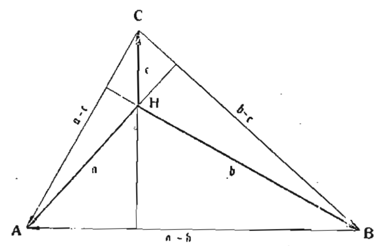
Поред тога, одузимањем се добија и ова веза

$$c^2-d^2 = 4(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = 4ab\cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}).$$

6. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки.

У троуглу ABC (сл 42) се две висине, на пр., оне кроз темена A и B увек секу у једној тачки, јер су линеарно независне као вектори. Нека њихов пресек буде H и нека буде

$$\overrightarrow{HA} = \mathfrak{a},\quad \overrightarrow{HB} = \mathfrak{b},\quad \overrightarrow{HC} = \mathfrak{c}.$$



Сл. 42

Међутим је

$$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = 0$$

$$\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}) = 0,$$

тј. $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ су, као вектори колинеарни са висинама на стране BC и CA, које су дате векторима $\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}-\mathfrak{c}$, нормални на њима. Ако се горње једначине одузму једна од друге, добија се

$$\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = 0.$$

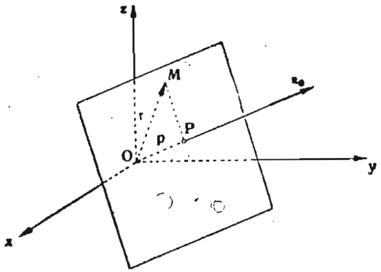
То значи да је спојница тачке H са трећим теменом колинеарна са вектором висине из тачке C, — што је и требало доказати.

7. Извести нормални облик једначине равни.

Нека буде дато растојање равни од пола O и то $OP = p$ и нека то растојање буде оријентисано од пола ка равни у случају $p>0$ и одређено ортом $\mathfrak{n}_0$ (сл. 43). Нека, даље, тачка M буде ма која тачка равни одређена вектором положаја $\mathfrak{r}$, чије су правоугле координате x, y, z. Како су координате орта $\mathfrak{n}_0$ дате са $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то из векторске једначине

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0=p$$

следује позната једначина равни у нормалном облику



Сл. 43

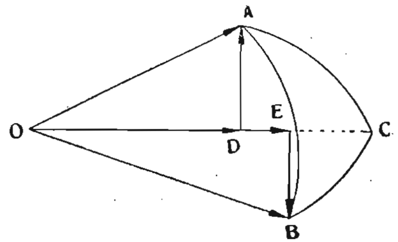
$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

У случају $p=0$ смер нормале се узима по вољи.

8. Извести косинусну теорему за стране сферног троугла.

Нека стране сферног троугла ABC (сл. 44) буду a, b и c, а углови A, B и C. Ако се темена сферног троугла споје са центром јединичне сфере O и повуку $AD\perp OC$ и $BE\perp OC$, онда је

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA};$$
$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}.$$



Сл. 44

Одавде се скаларним множењем добија

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}),$$

$$\cos c=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EB},$$

јер су вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ јединични, а вектори $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{DA}$ као и вектори $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{EB}$ нормални.

Даље је

$$OD=\cos b,\quad OE=\cos a,\quad DA=\sin b,\quad EB=\sin a.$$

Вектори $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ су колинеарни, а вектори $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{EB}$ чине угао C.

Тако се најзад добија

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,$$

што је и требало извести.

9. Доказати Коши-Шварцову (Cauchy-Schwarz) неједначину.

Увек је

(1) $$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2=a^2b^2\cos^2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\leqq\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2=a^2b^2.$$

Према томе, ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ дати својим правоуглим координатама, тј. ако је

$$\mathfrak{a}=\{x_1,x_2,x_3\};\quad \mathfrak{b}=\{y_1,y_2,y_3\},$$

онда је, на основу неједначине (1), за све вредности координата

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqq(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2).$$

Ова неједначина се зове Коши-Шварцова. Знак једнакости важи само за колинеарне векторе, тј., кад је

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=k.$$

10. Трансформација координата.

Нека буду дати основни ортови $\mathfrak{e}_l\,(l=1,2,3)$ неког Декартова правоуглог триједра и вектори $\mathfrak{E}_k$ дефинисани једначинама

(1) $$\mathfrak{E}_k=\sum_{l=1}^{3}a_{kl}\mathfrak{e}_l.\qquad (k=1,2,3)$$

Ако су задовољени услови

$$\mathfrak{E}_k\cdot\mathfrak{E}_l\begin{cases}=1, & \text{за } k=l\\ =0, & \text{за } k\neq l\end{cases}$$

тј.

$$\sum_l a_{kl}^2=1;\quad \sum_l a_{\lambda l}a_{\mu l}=0\quad(\lambda,\mu,l,k=1,2,3;\ \lambda\neq\mu)$$

и

$$a_{kl}=\mathfrak{E}_k\mathfrak{e}_l,$$

онда су вектори $\mathfrak{E}_k$ такође ортогонални ортови и једначине (1) дефинишу трансформацију ортова $\mathfrak{E}_k$ у ортове $\mathfrak{e}_l$.

Како су четири вектора увек линеарно зависни, то се сваки од ортова $\mathfrak{e}_l$ опет може линеарно изразити помоћу ортова $\mathfrak{E}_k$, тј., сигурно постоје такви бројеви A_{kl} да буде

$$\mathfrak{e}_l=\sum_{k=1}^{3}A_{kl}\mathfrak{E}_k.$$

Одавде је, међутим,

$$A_{kl}=\mathfrak{e}_l\mathfrak{E}_k=a_{lk},$$

па дакле

(2) $$\mathfrak{e}_l=\sum_k a_{kl}\mathfrak{E}_k.$$

Како су $\mathfrak{e}_l$ ортогонални ортови, то је опет

$$\mathfrak{e}_k \cdot \mathfrak{e}_l \begin{cases} = 1, \text{ за } k = l \\ = 0, \text{ за } k \neq l \end{cases}$$

тј. сада је

$$\sum_k a_{kl}^2 = 1; \quad \sum a_{k\lambda} a_{k\mu} = 0. \qquad (\lambda \neq \mu)$$

За трансформацију координата неког вектора $\mathfrak{x}$ у односу на триједар оса $\mathfrak{e}_l$ у координате у односу на триједар $\mathfrak{E}_k$, поћи ћемо од једначине

$$\mathfrak{x} = \sum_k X_k \mathfrak{E}_k = \sum_l x_l \mathfrak{e}_l, \tag{3}$$

која се добија изједначењем израза за вектор $\mathfrak{x}$ у оба координатна система. Из ове једначине (3), с обзиром на (2), следује

$$\sum_k X_k \mathfrak{E}_k = \sum_l x_l \sum_k a_{kl} \mathfrak{E}_k,$$

одакле се за израчунавање нових координата x_k вектора $\mathfrak{x}$ помоћу старих добијају скаларним множењем једначина ортовима $\mathfrak{E}_k$ обрасци

$$X_k = \sum_l a_{kl} x_l. \tag{4}$$

Најзад за трансформацију координата неке тачке из једног правоуглог система у други треба знати, поред ортова оса и почетке оба система. Нека почетак триједра ортова $\mathfrak{e}_l$ буде O, а триједра $\mathfrak{E}_l$ тачка A. Нека буде дата тачка P и нека буде

$$\overrightarrow{OP} = \mathfrak{x} = \Sigma x_l \mathfrak{e}_l; \quad \overrightarrow{AP} = \mathfrak{X} = \Sigma X_k \mathfrak{E}_k; \quad \overrightarrow{AO} = \mathfrak{a} = \Sigma a_k \mathfrak{E}_k. \tag{5}$$

Тада је

$$\mathfrak{X} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \Sigma a_k \mathfrak{E}_k + \Sigma x_l \mathfrak{e}_l.$$

Одавде, с обзиром на (2), следује

$$\mathfrak{X} = \Sigma X_k \mathfrak{E}_k = \Sigma a_k \mathfrak{E}_k + \sum_l x_l \sum_k a_{kl} \mathfrak{E}_k$$

и, најзад, после скаларног множења ортовима $\mathfrak{E}_k$, нове координате тачке P

$$X_k = a_k + \sum_l a_{kl} x_l. \tag{6}$$

Ако се загледају обрасци (4) и (6) који служе за трансформације координата вектора и координата тачке, види се

одмах да се и координате вектора и координате тачке у односу на нови систем помоћу старих координата одређују истом трансформацијом којом се одређују ортови новога триједра оса помоћу ортова старога триједра, тј. *коградијентно* (сагласно) са трансформацијом ортова.

Задаци

1. Израчунати скаларни производ вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ чији су интензитети познати и који чине угао од 30°.

2. Вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ са интензитетима $|\mathfrak{a}| = a$ и $|\mathfrak{b}| = 2a$ чине угао $\alpha = 150^0$. Израчунати њихов скаларни производ.

3. Одредити скаларни производ $(\mathfrak{a}+k\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}+k\mathfrak{b})$, кад је $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ и $b = 2a$.

4. Дат је вектор $\mathfrak{a}$. Одредити све оне векторе $\mathfrak{b}$ који имају ту особину да је пројекција вектора $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{b}$ једнака пројекцији вектора $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{a}$.

5. Који угао чине вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, ако је истовремено $(2\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \perp (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ и $(\mathfrak{a}-2\mathfrak{b}) \perp (2\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

6. Под којим условима је $(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}-\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{c}$?

7. Доказати да се симетрале страна у троуглу секу у једној тачки.

8. Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели супротну страну на два дела пропорционална суседним странама и израчунати дужину симетрале од темена до пресека са супротном страном помоћу две стране и захваћеног угла из чијег темена полази тражена симетрала.

9. Нека буде дат паралелограм $OACB: \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \mathfrak{a}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \mathfrak{b}$. Дати геометриско тумачење образаца

a) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2 = 2(a^2+b^2)$,

b) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2 - (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2 = 4ab$,

c) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = a^2 - b^2$.

Шта претставља последња од ових једначина за ромб?

10. Доказати ортогоналност вектора $\mathfrak{a} = \{3, 2, 1\}$ и $\mathfrak{b} = \{2, -3, 0\}$.

11. Одредити угао који чине вектори:

a) $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}P \cos\varphi + \mathfrak{j}P \sin\varphi$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}S \cos\varphi + \mathfrak{j}S \sin\varphi$;

b) $\mathfrak{c} = 3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{d} = 2\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$.

12. Одредити скаларни производ две просторне дијагонале јединичне коцке. Одредити угао који те дијагонале чине међу собом.

13. Основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ одређују коцку запремине 1. Образовати скаларни производ две дијагонале страна које полазе из координатног почетка.

14. Колика је вредност збира

$$S = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F}$$

ако вектор $\mathfrak{C}$ чини са векторима $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ троугао?

15. Нека буде дат неки пол O и вектори положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{R}$ центра сфере полупречника ρ, неке тачке P на њеној површини и неке тачке M на тангентној равни сфере у тачки P. Који однос мора постојати између $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{R}$?

16. Нападна тачка силе $\mathfrak{r}=\{5, 10, 15\}$ kg помера се од тачке $A(1, 0, 3)$ cm до тачке $B(3, -1, -6)$ cm. Израчунати рад у mkg.

17. Неки вектор $\mathfrak{a}$ пројициран је на вектор $\mathfrak{r}=\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$. Израчунати пројекцију.

18. Наћи орт $\mathfrak{n}_0$ који је истовремено нормалан на вектору $\mathfrak{a}=\{3, 6, 8\}$ и на апсцисној оси.

19. Дати су вектори $\mathfrak{a}=\{2, 1, 1\}$ и $\mathfrak{b}=\{-1, 3, 2\}$. Траже се координате основних ортова онога левога Декартова правоуглог триједра чија x-оса има правац и смер вектора $\mathfrak{a}$, а y-оса лежи у равни вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ са смером на ону страну од вектора $\mathfrak{a}$ на којој је вектор $\mathfrak{b}$.

20. Одредити бројеве y и z тако да вектор $\mathfrak{a}=2\mathfrak{i}+y\mathfrak{j}+z\mathfrak{k}$ стоји нормално на векторима $\mathfrak{b}=-\mathfrak{i}+4\mathfrak{j}+2\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{c}=3\mathfrak{i}-3\mathfrak{j}-\mathfrak{k}$. Колика је дужина тог вектора и који угао гради са векторима $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$?

21. Одредити скаларне производе $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ вектора $\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{i}+\beta\mathfrak{j}+\gamma\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}=\beta\mathfrak{i}+\gamma\mathfrak{j}+\alpha\mathfrak{k}$, $\mathfrak{c}=\gamma\mathfrak{i}+\alpha\mathfrak{j}+\beta\mathfrak{k}$ и утврдити правилност која постоји.

22. Вектору $\mathfrak{a}$ треба додати неки мултипл вектора $\mathfrak{b}$, тако да збир $\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$ буде вектор нормалан на вектору $\mathfrak{c}$. Колико λ се мора узети? (бројни пример: $\mathfrak{a}=6\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}=3\mathfrak{j}-\mathfrak{k}$, $\mathfrak{c}=-2\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+5\mathfrak{k}$).

23. Извести нормалну једначину праве линије.

24. Кроз тачку O на оси одређеној ортом $\mathfrak{n}_0$ постави се нормална раван R. Одредити вектор положаја $\mathfrak{r}_1=\overrightarrow{OP_1}$ тачке P_1 која се добија огледањем на равни R дате тачке P са вектором положаја $\mathfrak{r}$.

25. Кроз тачку A одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_1=\{-1, 5, 5\}$ и кроз тачку B одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_2=\{-3, 0, 6\}$ поставе се равни нормалне на вектору $\mathfrak{a}=\{8, -1, -4\}$. Написати једначине ових равни у нормалном облику и одредити растојање обе равни.

26. Доказати важност комутативног и асоцијативног закона за скаларни производ два вектора, ако су вектори дефинисани бројевима.

27. Дати су вектори $\overrightarrow{OA}=\mathfrak{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\mathfrak{r}_2$ и $\overrightarrow{OC}=\mathfrak{r}_3$. Ако је $AB=BC$ показати да су вектори $2\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_3$ и $\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1$ узајамно нормални.

28. Наћи пројекцију вектора $2\mathfrak{a}-3\mathfrak{b}$ на неку осу, кад су дате дужине a и b вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и углови α и β које ти вектори чине са том осом.

29. Одредити угао између симетрале угла xOy и праве која гради једнаке углове са позитивним смеровима координатних оса.

30. Нека $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ буду основни ортови неког Декартовог правоуглог триједра.

a) Показати да су вектори

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+2\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{b}=\mathfrak{i}+2\mathfrak{j}-\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{c}=3\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k},$$

линеарно независни.

b) Одредити углове између тих вектора.

c) Израчунати дужине вектора

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{a}-2\mathfrak{b}+\mathfrak{c} \quad \text{и} \quad \mathfrak{y}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}$$

и угао који ова два вектора чине.

31. Нека буду дата два вектора $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ и нека њихова резултанта $\mathfrak{R}$ има интензитет једнак интензитету вектора $\mathfrak{P}$, тј. $R=P$. Доказати да је вектор $2\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}$ нормалан на $\mathfrak{Q}$ (нацртати слику).

32. Резултанта две силе $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ има интензитет P једнак интензитету силе $\mathfrak{P}$, а резултанта силе $2\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ има опет интензитет P. Одредити интензитет Q силе $\mathfrak{Q}$ и угао ϑ који те две силе чине међу собом.

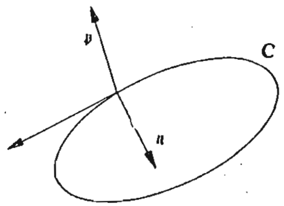
33. У неком тетраедру укрштају се два пара наспрамних ивица под правим углом. Доказати да се у таквом тетраедру и трећи пар ивица укршта под правим углом.

15.5 Равне површине као вектори

У тродимензионалном простору свака раван одређује само један правац који је нормалан на тој равни. Према томе, може се свака равна, просто повезана површина (као величина) претставити као вектор. *Просто повезана* или *просто конексна* се зове она површина која има особину да се свака затворена линија повучена на њој може непрекидном деформацијом свести на тачку а да не изађе из области површине. На пр., нека површина са отвором није просто конексна, јер се свака затворена линија која опкољава отвор не може непрекидном деформацијом свести на тачку а да се не изађе са површине. Нека P буде нека таква, равна површина, ограничена кривом C или ма каквом контуром (сл. 45). На кривој C се по договору одреди позитиван смер ма на који начин и у том смеру оријентише тангента криве C у некој тачки M. У тој тачки M се узме затим орт нормале на криву са смером у унутрашњу област криве. Нека орт тангенте буде $\mathfrak{t}$, а орт нормале $\mathfrak{n}$. Тада се може узети да тако оријентисана површина претставља вектор $\mathfrak{p}$ који испуњава услове:

1) правац вектора је правац нормале $\mathfrak{N}_0$ на површини;
2) смер је одређен тиме да вектори $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{p}$ чине десни триједар;
3) интензитет је бројно једнак величини површине.

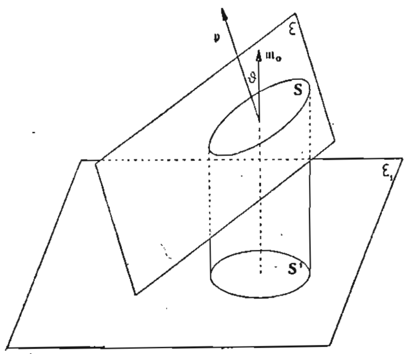
Обично се смер вектора који претставља равну површину узима тако, да кад се површина на Земљи обилази, на пр., тако да остаје с леве стране, онда је смер нормале навише, а ако се обилази тако да остаје с десне стране, онда је смер односног вектора наниже.



Сл. 45

Ако се изабере позитиван смер нормале на некој равни, онда је, као што знамо, та раван оријентисана. Нека се на тој оријентисаној равни налази нека ограничена оријентисана површина P, онда се сматра да је та површина позитивна или негативна (у односу на оријентисану раван), према томе да ли вектор који претставља равну површину има исти смер као нормала на равни или супротан смер.

Показаћемо још да се оријентисане равне површине не само могу претставити помоћу вектора на горњи начин него и да се оне заиста могу сматрати као вектори.



Сл. 46

Нека буде S нека оријентисана површина у равни ε исте оријентације (сл. 46) и нека буде дата нека друга оријентисана раван ε_1, па треба одредити пројекцију површине S на раван ε_1. Угао ϑ између две оријентисане равни једнак је углу који чине њихове позитивне нормале. Знамо да је пројекција површине S из равни ε на раван ε_1 једнака S' и то

$$S' = S \cos \vartheta .$$

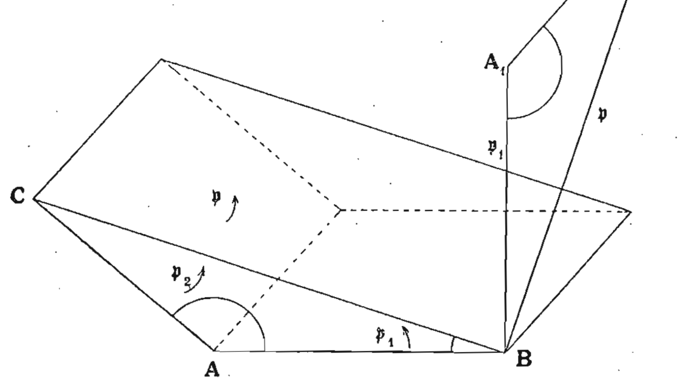
Ако је, дакле, $\mathfrak{m}_0$ орт равни ε_1, а $\mathfrak{p}$ вектор који претставља равну површину S онда је

$$S' = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}_0 .$$

Према оријентацији површине S биће S' позитивно или негативно у потпуној сагласности са горе уведеним појмовима.

Даље, збир две оријентисане равне површине даје такву оријентисану равну површину која је одређена вектором збира она два вектора који претстављају површине сабирака.

Нека буду, у том циљу, дате две оријентисане равне површине $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ у облику правоугаоника са заједничком страном једнаком јединици. Површине ма ког облика се могу претворити у правоугаонике. Тада је (сл. 47)



Сл. 47

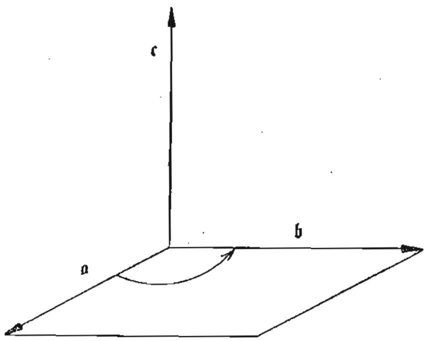
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 .$$

Очигледно је да је површина $\mathfrak{p}$ претстављена трећом страном троугла ABC, тј. са BC, по бројној вредности, где прве две стране AB и CA претстављају бројно површине вектора сабирака. Наиме, троугао BA_1C_1, који чине вектори који претстављају односне површине, конгруентан је са троуглом ABC и добија се из њега ротацијом за 90^0.

15.6 Векторски или спољашњи производ два вектора

Сад ћемо дефинисати производ два вектора који је опет вектор. Наравно да опет треба, бар унеколико, да за такво множење важе закони множења бројева и да се тим производом одређују механичке и физичке величине.

Под векторским или спољашњим производом два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ разуме се трећи вектор $\mathfrak{c}$ који је потпуно одређен на овај начин (сл. 48):



Сл. 48

1) интензитет вектора $\mathfrak{c}$ једнак је производу интензитета вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и синуса угла α међу њима тј.

$$c = ab \sin\alpha,$$

при чему се као угао α између вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ дефинише $\sphericalangle(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$. Другим речима, интензитет вектора $\mathfrak{c}$ бројно је једнак површини паралелограма конструисана са векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ као страницама.

2) правац вектора $\mathfrak{c}$ је правац нормале на равни одређеној векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (у први мах се претпоставља да вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нису колинеарни).

3) смер вектора $\mathfrak{c}$ је такав да триједар $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ буде десни у наведеном реду.

Управо, векторски производ вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ је вектор који претставља оријентисану равну површину паралелограма одређена векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ у смислу дефиниције у претходном параграфу. Векторски производ два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ бележи се

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \tag{1}$$

и чита: $\mathfrak{a}$ крст $\mathfrak{b}$.

И векторски производ се означује у литератури на разне начине. Поред начина који ми употребљујемо и који потиче од Гибза, наилази се и на друге ознаке. Тако, Лоренц означује векторски производ два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ стављањем тих вектора у угласту (средњу) заграду, тј. пише $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ са или без запете између вектора. Хевисајд и са њим Фепл пишу за векторски производ $\vee\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ и, најзад, Бурали–Форти и Марколонго пишу $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$.

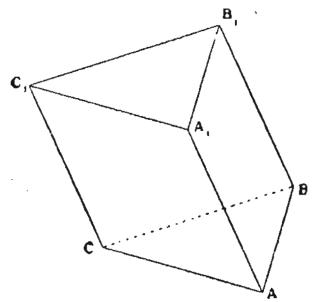
Може се увек на основу дефиниције написати

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = ab \sin\alpha\, \mathfrak{n}_0, \tag{2}$$

где је $\mathfrak{n}_0$ орт равни одређене векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, кад $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}_0$ чине десни триједар.

Овако дефинисани производ два вектора зове се, по Грасману, и *спољашњи* стога што је интензитет дефинисаног вектора једнак производу интензитета вектора $\mathfrak{a}$ и интензитета компоненте вектора $\mathfrak{b}$ у правцу нормалном на правцу вектора $\mathfrak{a}$ — „спољашње“ компоненте (сл. 36).

Много питања из механике и физике своди се на векторе образоване од друга два вектора по закону векторског множења. Тако, замислимо неки полиједар (на пр. тространу призму сл. 49) потопљен у течност. У случају тзв. идеалне течности и за тело довољно малих размера тело трпи притисак, који је 1) нормалан на странама полиједра и 2) по величини пропорционалан величини стране. Ако се величина притиска на јединицу површине („хидростатички притисак“) обележи са p, могу се притисци течности на поједине стране полиједра изразити помоћу векторских производа на овај начин. Притисак $\mathfrak{p}_1$ на страну ABB_1A_1 одређен је векторским производом



Сл. 49

$$\mathfrak{p}_1 = p\left(\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{AB}\right);$$

притисак $\mathfrak{p}_2$ на страну $A_1B_1C_1$, пак, одређен је са

$$\mathfrak{p}_2 = \frac{1}{2}\, p\left(\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{C_1B_1}\right) \text{ итд.}$$

Више примера за улогу векторског производа у механици и физици видећемо касније.

Из дефиниције векторског производа следују ове особине:

1. Кад је векторски производ два вектора једнак нули

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0, \tag{3}$$

онда, пошто је $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = ab \sin\alpha$, може бити $a = 0$, $b = 0$ или $\sin\alpha = 0$, тј. $\alpha = 0$ или π. Према томе је једначина (3) задовољена, кад је $\mathfrak{a} = 0$, или $\mathfrak{b} = 0$ или кад су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ колинеарни. Отуда се (3) може сматрати као *услов колинеарности* два вектора. Овај резултат следује и директно из дефиниције, пошто у случају колинеарности вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ не може уопште да се образује паралелограм, одн. његова површина је нула. Дакле, и код векторског производа вектора, из једнакости производа са нулом не следује нужно да мора један од вектора чинилаца бити једнак нули, што је код бројева увек случај.

2. У специјалном случају једнаких чинилаца, према претходном, увек је

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}=0, \tag{4}$$

па се према томе овде не може говорити ни о каквом квадрату.

3. Ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нормални један на другом, онда је

$$|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|=ab, \tag{5}$$

па се то може сматрати као *услов ортогоналности* два вектора.

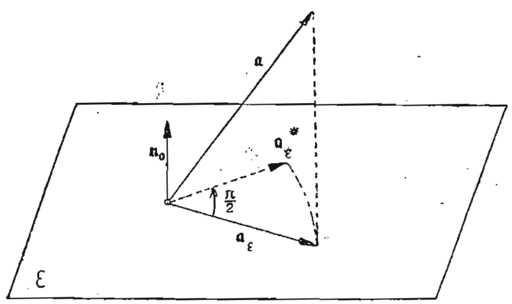
4. Кад је $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\neq 0$, и кад су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ сталних одређених интензитета, онда интензитет вектора $\mathfrak{c}$ варира у границама од 0, кад су вектори колинеарни, па до ab, кад су вектори нормални. Увек је, дакле,

$$|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|\leq ab. \tag{6}$$

5. Посматрајмо оријентисану раван ε, одређену ортом $\mathfrak{n}_0$ и неки вектор $\mathfrak{a}$ чији је почетак пренет у ту раван. Тада је вектор $\mathfrak{a}_\varepsilon$ компонента вектора $\mathfrak{a}$ у равни ε (сл. 50). По дефиницији је $\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}\perp\mathfrak{a}$, а осим тога (теорема о три управне) мора бити и

$$\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}\perp\mathfrak{a}_\varepsilon\,.$$

Дакле, векторски производ $\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}$ се добија ротацијом у



Сл. 50

директном смеру компоненте $\mathfrak{a}_\varepsilon$ вектора $\mathfrak{a}$ у равни ε за $\frac{\pi}{2}$ пошто је интензитет те пројекције једнак интензитету векторског производа $\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}$. Наиме,

$$|\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}|=a\sin\alpha \quad \text{и} \quad |\mathfrak{a}_\varepsilon|=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=a\sin\alpha\,,$$

где је $\alpha=\sphericalangle(\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_0)$. Отуда је

$$\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^*_\varepsilon\,, \tag{7}$$

где је звездицом означено да компоненту $\mathfrak{a}_\varepsilon$ треба обрнути у равни ε у директном смеру за $\frac{\pi}{2}$.

15.7 Алгебарске особине векторског производа

Да бисмо за овако дефинисану операцију са векторима, оправдали назив множења, треба показати да ли и уколико овај производ има особине производа бројева.

Прво наилазимо на разлику. *Комутативни закон не важи.* Заиста, векторски производи $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}$ имају, по дефиницији, исти интензитет и правац но супротне смерове, јер је обртање од вектора $\mathfrak{b}$ ка вектору $\mathfrak{a}$ супротно обртању вектора $\mathfrak{a}$ ка вектору $\mathfrak{b}$. Стога за векторски производ важи

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=-\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}, \tag{1}$$

закон *алтернације*, како га је назвао Хајд (Hyde). Дакле, код векторског производа је ред чинилаца важан и не сме се занемарити.

Асоцијативни закон важи за случај кад поред два векторска чиниоца имамо и скаларне чиниоце и то у овом облику:

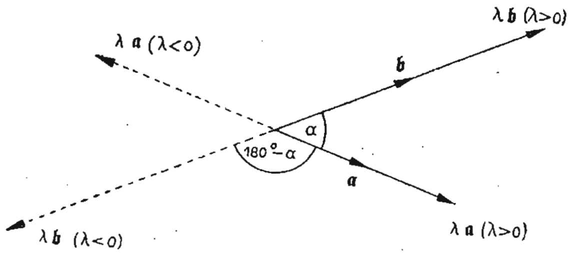
$$(\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\times(\lambda\mathfrak{b})=\lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}), \tag{2}$$

тј. ако се ма који од вектора чинилаца помножи бројем, онда се тим бројем множи и цео производ. Наравно да ово важи и ако се оба чиниоца истовремено помноже неким бројевима p и q.

Доказ, става (2) је врло прост и лак. Узмимо, прво, да је $\lambda>0$. Тада је

$$|(\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b})|=|\lambda\mathfrak{a}|\,b\sin(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\lambda ab\sin(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}),$$
$$|\mathfrak{a}\times(\lambda\mathfrak{b})|=a\,|\lambda\mathfrak{b}|\sin(\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{b})=\lambda ab\sin(\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{b}),$$
$$|\lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|=\lambda ab\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Према томе, сва три вектора имају исти интензитет, јер је за $\lambda > 0$, $\sin(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sin(\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}) = \sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = \sin\alpha$, пошто се множењем вектора $\mathfrak{a}$ или вектора $\mathfrak{b}$ са $\lambda > 0$ угао који чине вектори уопште не мења (сл. 51).



Сл. 51

Пошто су вектори $\lambda\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}$, као и $\lambda\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}$ колинеарни, то $\lambda\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ и $\lambda\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одређују исту раван, па према томе и вектори одређени њиховим векторским производима (2) имају исти правац. Најзад како смер векторског производа зависи од оријентације вектора чинилаца, а она се множењем позитивним бројем не мења, то вектори одређени векторским производима (2) имају и исти смер.

Тиме је правило доказано за случај $\lambda > 0$.

У случају $\lambda < 0$, интензитети вектора из (2) остају непромењени, јер је сад

$$|(\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}| = |\lambda|\, ab \sin(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

$$|\mathfrak{a}\times(\lambda\mathfrak{b})| = |\lambda|\, ab \sin(\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}),$$

$$|\lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})| = |\lambda|\, ab \sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}),$$

а $\sin(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sin(\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{b}) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$. Правац добијених вектора се не мења, јер, без обзира на $\lambda < 0$, вектори $\mathfrak{a}$ и $\lambda\mathfrak{a}$, с једне и вектори $\mathfrak{b}$ и $\lambda\mathfrak{b}$, с друге стране, остају колинеарни.

Што се тиче смера — сва три вектора опет имају исти смер, који је супротан смеру у случају $\lambda > 0$. Наиме, множењем вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ негативним бројем мења се његов смер. Исто тако вектори $(\lambda\mathfrak{a})\times\mathfrak{b}$ и $(\mathfrak{a}\times\lambda\mathfrak{b})$ имају у односу на вектор $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ супротне смерове, јер су триједри односних вектора супротно оријентисани; на пр. триједар вектора $\lambda\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ је супротно оријентисан у односу на триједар $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ у случају $\lambda < 0$.

Најзад, став (2) важи и за случај $\lambda = 0$, јер су тада сва три векторска производа, по дефиницији, једнака нули.

Дистрибутивни закон важи под условом да се због закона алтернације ред чинилаца при множењу не мења. Доказаћемо га, ради краткоће и боље прегледности, само за случај збира два вектора помножена трећим вектором, тј. да је

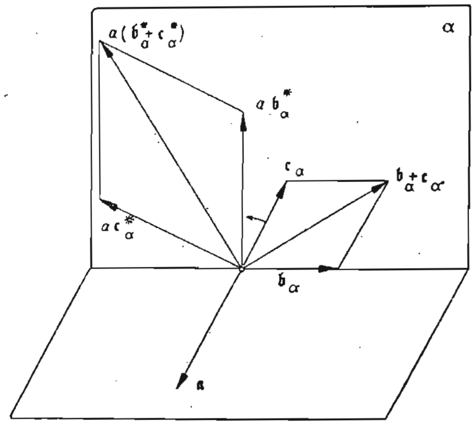
$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\times\mathfrak{c}. \tag{3}$$

С обзиром да је $\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*_\varepsilon$ (т. 15.6, једн. 7), може се написати

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = a\,(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}) = a\,\mathfrak{b}^*_\alpha\,,$$

где је $\mathfrak{b}^*_\alpha$ компонента вектора $\mathfrak{b}$ у равни α нормалној на вектору $\mathfrak{a}$ (сл. 52), обрнута за $\frac{\pi}{2}$ у директном смеру у равни α. Ако се још узме у обзир да је пројекција паралелограма (на пр. онога који чине вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ са дијагоналом $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$) ма на коју раван α опет паралелограм који чине компоненте ових вектора у равни α, онда важи

$$(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})_\alpha = \mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{c}_\alpha\,.$$



Сл. 52

С друге стране, ротација паралелограма у његовој равни обрће дијагоналу (збир) за исти угао као и стране (сабирке), дакле, са нашим ознакама

$$(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{c}_\alpha)^* = \mathfrak{b}^*_\alpha + \mathfrak{c}^*_\alpha\,.$$

Према томе се може написати

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = a\,[\mathfrak{a}_0\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})] = a\,(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})^*_\alpha = a\,(\mathfrak{b}_\alpha+\mathfrak{c}_\alpha)^* = a\,(\mathfrak{b}^*_\alpha+\mathfrak{c}^*_\alpha) =$$

$$= a\mathfrak{b}^*_\alpha + a\mathfrak{c}^*_\alpha = a\,(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}) + a\,(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{c},$$

што је и требало доказати.

Према томе, на основу доказаних особина векторског производа могу се линеарне комбинације вектора множити векторски, као што се множе и линеарне комбинације бројева искоришћујући иста правила. Све то важи само под једним условом, да се при множењу не врши размена места чиниоцима или, ако се места размене, да се пази да се и знак промени. На пр.

$$(2\mathfrak{a}-3\mathfrak{b})\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})=2(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})-3(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})+2(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})-3(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})=$$
$$=3(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})+2(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})-3(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}).$$

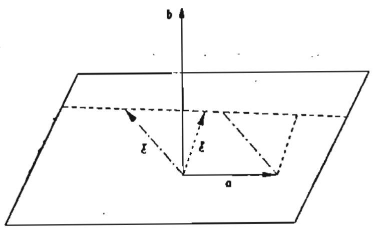
Поред осталих разлика, векторски производ разликује се од множења обичних бројева и тиме што нема дељења као обрнуте рачунске радње. Наиме, ако из производа

(4) $$\mathfrak{a}\times\mathfrak{x}=\mathfrak{b},$$

где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ познати вектори, треба наћи вектор $\mathfrak{x}$ који, векторски помножен вектором $\mathfrak{a}$, даје вектор $\mathfrak{b}$, тај је задатак или немогућ или неодређен. Прво, ако $\mathfrak{b}$ није нормално на $\mathfrak{a}$, задатак уопште нема решења — он је немогућ. Друго, ако је услов $\mathfrak{b}\perp\mathfrak{a}$ испуњен, задатак није одређен и има бесконачно много решења. Тада, ако је $\mathfrak{x}_1$ једно решење и сваки вектор $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1+\lambda\mathfrak{a}$, где је λ произвољан параметар, решење је, јер је

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{x}_1+\lambda\mathfrak{a})=\mathfrak{a}\times\mathfrak{x}_1+\lambda(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})=\mathfrak{a}\times\mathfrak{x}_1.$$

Геометриски то значи да вектор $\mathfrak{x}$ треба да буде нормалан на $\mathfrak{b}$ и да са $\mathfrak{a}$ чини паралелограм чија је површина бројно једнака b. Таквих паралелограма има међутим много (задатак еквивалентан геометриском задатку да се конструише паралелограм дате површине и дате основице), (сл. 53). На слици се види да се темена тог паралелограма (крајеви вектора) морају налазити на растојању $\frac{b}{a}$ од $\mathfrak{a}$ са односним смером у равни нормалној на $\mathfrak{b}$.



Сл. 53

15.8 Векторски производ два вектора изражен у координатама

Нека вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ буду дати својим правоуглим координатама

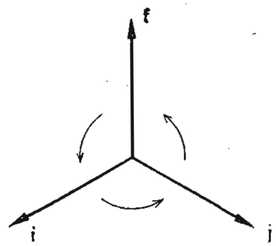
(1) $$\mathfrak{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\quad \mathfrak{b}=\{b_1,b_2,b_3\},$$

онда, да бисмо израчунали векторски производ $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, треба израчунати

(2) $$(a_1\mathfrak{i}+a_2\mathfrak{j}+a_3\mathfrak{k})\times(b_1\mathfrak{i}+b_2\mathfrak{j}+b_3\mathfrak{k}),$$

а то је векторски производ две линеарне комбинације основних ортова $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$.

Стога треба прво одредити векторске производе ортова оса Декартова правоуглог триједра. Вредности тих производа, по дефиницији, дати су нам овом схемом (сл. 54)



Сл. 54

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	0	$\mathfrak{k}$	$-\mathfrak{j}$
$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{k}$	0	$\mathfrak{i}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{i}$	0

Дакле: 1) векторски производ два различита орта Декартова правоуглог триједра увек је једнак трећем орту са знаком плус или минус према смеру; 2) чланови главне дијагонале схеме једнаки су нули, као векторски производи истих вектора; 3) чланови схеме су антисиметрични, што се слаже са правилом алтернације.

Ако се векторско множење, назначено у (2), изврши, добиће се

$$a_1b_1(\mathfrak{i}\times\mathfrak{i})+a_1b_2(\mathfrak{i}\times\mathfrak{j})+a_1b_3(\mathfrak{i}\times\mathfrak{k})+a_2b_1(\mathfrak{j}\times\mathfrak{i})+a_2b_2(\mathfrak{j}\times\mathfrak{j})+$$
$$+a_2b_3(\mathfrak{j}\times\mathfrak{k})+a_3b_1(\mathfrak{k}\times\mathfrak{i})+a_3b_2(\mathfrak{k}\times\mathfrak{j})+a_3b_3(\mathfrak{k}\times\mathfrak{k})=$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\mathfrak{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathfrak{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathfrak{k}.$$

Према томе векторски производ има координате

(3) $$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\{a_2b_3-a_3b_2,\quad a_3b_1-a_1b_3,\quad a_1b_2-a_2b_1\}=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Из претходног је очигледно, да се векторски производ изражен правоуглим координатама вектора чинилаца може написати у облику детерминанте која се лако памти

(4) $$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

За практично израчунавање координата векторског производа довољно је написати правоугле координате вектора чинилаца $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ у облику схеме (матрице)

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{Bmatrix}.$$

Тада се изражавање координата врши на овај начин: за прву координату изостави се прва колона матрице, па израчуна вредност преостале детерминанте другог реда. За другу координату изостави се друга колона, па израчуна вредност преостале детерминанте и узме са промењеним законом и, најзад, трећу координату одређујемо просто израчунавањем детерминанте која се добија изостављањем треће колоне у матрици.

Ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ колинеарни, онда је $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=0$, а то значи

(5) $$\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0,$$

што је идентично са раније добијеним условима, да су координате колинеарних вектора пропорционалне.

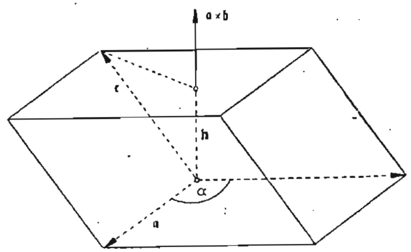
Ако су вектори дефинисани бројевима (1), (3) се може сматрати као дефиниција векторског производа два вектора. Овако дефинисан векторски производ се не може генерализати за простор од више димензија, док се и сама дефиниција унеколико не промени.

15.9 Скаларни производ вектора и векторског производа друга два вектора
(мешовити производ три вектора)

Скаларни производ векторског производа $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ и вектора $\mathfrak{c}$, који се обележава

(1) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c},$$

као и сваки скаларни производ два вектора, је скалар и бројно је једнак запремини паралелепипеда конструисана са датим векторима као ивицама. Да бисмо то доказали претпоставимо, прво, да вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ нису компланарни, тј. да се са њима може конструисати паралелепипед и да они чине десни триједар (сл. 55).



Сл 55.

Узмимо за основу паралелепипеда паралелограм конструисан на векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и обележимо површину тог паралелограма са P. Тада је

$$P=|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$$

и запремина паралелепипеда

$$V=Ph.$$

Међутим вектор $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ има правац висине паралелепипеда и оријентисан је на исту страну паралелограма основе на којој је и вектор $\mathfrak{c}$, пошто вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ са вектором $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ чине такође десни триједар. Стога се висина h паралелепипеда може добити пројицирањем вектора $\mathfrak{c}$ на правац вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, одређена, рецимо, ортом $\mathfrak{n}_0$, тј.

$$h=\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{c}.$$

Отуда се добија најзад

(2) $$V=Ph=|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|\,h=ab\sin\alpha\,(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{c})=(ab\sin\alpha\,\mathfrak{n}_0)\cdot\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c},$$

што је и требало доказати.

Дакле, ако три вектора чине десни триједар, онда је мешовити производ позитиван број, јер вектори $\mathfrak{n}_0$ и $\mathfrak{c}$, у том случају, не могу градити туп угао.

У случају да три вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ чине леви тријед ар, вектори $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ одн. $\mathfrak{n}_0$ и $\mathfrak{c}$ су оријентисани на супротне стране од равни одређене векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и стога граде туп угао, дакле

$$\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{c} = -h,$$

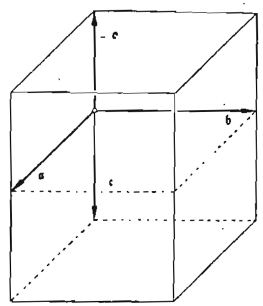
па је

$$(3)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = ab\sin\alpha\,(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{c}) = -Ph = -V.$$

Тачност овог закључка може се показати и на овај начин. Ако вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ чине леви тријед ар, вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $-\mathfrak{c}$ чине десни, па је (сл. 56)

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(-\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = -V,$$

где V опет бројно претставља запремину паралелепипеда конструисана на векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.



Сл. 56

Дакле, мешовити производ $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$ три вектора је по апсолутној вредности једнак запремини паралелепипеда конструисана са векторима, а његов знак даје оријентацију тријед ра $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.

Сад се може нешто казати и о могућности мењања места чиниоцима мешовитог производа. Наиме, пошто апсолутна вредност производа, према његовом геометриском значењу, не може да се промени ако се промени ред чинилаца, то се може променити само знак. Тако сви производи који се из $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$ добијају цикличком пермутацијом имају позитиван знак производа, а остали негативан Отуда је

$$(4)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} =$$
$$= -(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{b} = -(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{c} = -(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{a},$$

јер прва три чине десне тријед ре, а последња три леве.

Како је увек

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\cdot\mathfrak{a},$$

то се, при промени места чиниоцима скаларног производа у производу на десној страни добија *правило размене* скаларног и векторског множења у мешовитом производу, тј.

$$(5)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}).$$

Ово правило показује, да је у мешовитом производу свеједно која ће се два вектора узети у векторски производ — прва

два или последња два. Стога се, пошто је важан само ред вектора, а не где се налази знак векторског множења, пише мешовити производ од три вектора често и овако

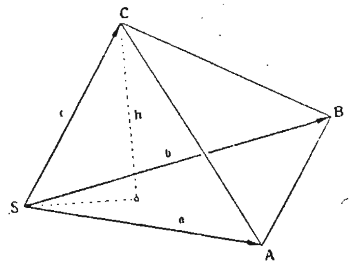
$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = [\mathfrak{abc}].$$

Три некомпланарна вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ одређују и тетраедар $SABC$ (сл. 57) чија је запремина

$$V_1 = \frac{1}{3}P_\Delta h = \frac{1}{6}\,|\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\,|\,h = \frac{1}{6}[\mathfrak{abc}],$$

где је P_Δ површина троугла одређена векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, а h висина која одговара том троуглу као основи тетраедра. Ако се са $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{c}_0$ обележе ортови вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, онда се може написати

$$(6)\qquad V_1 = \frac{1}{6}abc\,[\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0],$$



Сл. 57

где се мешовити производ $[\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0]$ зове, по von Staudt-у, *синус тријед ра* у аналогији са површином троугла $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ab|\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}_0|$.

Мешовити производ, иако скалар, зависи од оријентације тријед ра вектора. Прави скалари, међутим, не зависе уопште од неке оријентације. Стога, неки аутори зову мешовити производ три вектора *псеудоскалар*, јер мења знак са променом оријентације тријед ра.

Ако је мешовити производ три вектора једнак нули, тј.

$$(7)\qquad [\mathfrak{abc}] = 0,$$

онда: 1) или је бар један од чинилаца једнак нули; 2) или су два ма која од три вектора колинеарна, јер се могу узети у векторски производ који је услед колинеарности вектора једнак нули, и најзад 3) или сва три вектора леже у једној равни — компланарни су.

На пр. из

$$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = 0$$

следује, ако ниједан вектор није једнак нули и ако нема колинеарних вектора, да је $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\perp\mathfrak{a}$. Како је, међутим, према дефиницији векторског производи још $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\perp\mathfrak{b}$ и $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\perp\mathfrak{c}$, сва три вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ паралелни су равни нормалној на вектору

$\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$ и, према томе, компланарни. Исти закључак следује и из геометриског значења мешовитог производа, јер три различита вектора образују само онда паралелепипед запремине нула, ако леже у једној равни.

Према томе *услов компланарности* три вектора дат је и изразом

$$(8)\qquad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]=0.$$

Кад су вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ дати својим правоуглим координатама

$$\mathfrak{a}=\{a_1, a_2, a_3\};\quad \mathfrak{b}=\{b_1, b_2, b_3\};\quad \mathfrak{c}=\{c_1, c_2, c_3\},$$

мешовити производ тих вектора може се написати у облику детерминанте, тј.

$$(9)\qquad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Наиме, у правоуглим координатама је

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\},$$

$$\mathfrak{c}=\{c_1, c_2, c_3\},$$

па је вредност скаларног производа дата изразом

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}=c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

што је и требало доказати.

Отуда, ако су вектори дати својим координатама, услов компланарности гласи

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0,$$

који је већ раније изведен на други начин (т. 13, једнач. 11).

Овај услов је испуњен, наравно, и у случају кад су елементи ма које врсте сви једнаки нули, што одговара једном вектору чиниоцу нули, или кад су елементи две ма које врсте пропорционални, што одговара колинеарности ма која два од вектора.

15. 10 Векторски производ вектора и векторског производа друга два вектора

Двоструки векторски производ има облик

$$(1)\qquad \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}).$$

Одмах је јасно, с обзиром на дефиницију векторског множења, да за овај производ не важи комутативни закон. Осим тога, јасно је да је, у општем случају,

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\neq(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$$

и да, према томе, за овај производ од три вектора не важи асоцијативни закон у наведеном смислу.

Резултат двоструког векторског множења (1) очигледно је, опет, вектор и лако се може показати да је тај вектор компланаран са векторима $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, тј. да је

$$(2)\qquad \mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})=\alpha\mathfrak{b}+\beta\mathfrak{c},$$

где су α и β параметри које треба одредити. Ово следује отуда што је вектор $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\perp(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$, а по дефиницији је $\mathfrak{b}\perp(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ и $\mathfrak{c}\perp(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$, па су, према томе, вектори $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ нормални на истом вектору $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$ и стога компланарни, што је и требало доказати.

Да бисмо нашли тачан израз за (2), одн. да бисмо нашли образац за развијање двоструког векторског производа треба одредити вредности коефицијената α и β.

То се може постићи на разне начине.

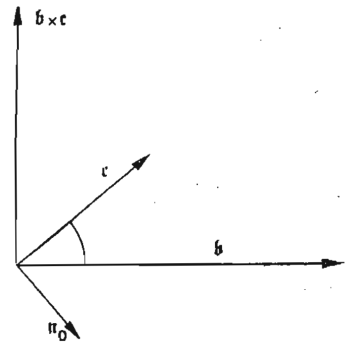
1. У равни вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ узме се орт $\mathfrak{n}_0$ нормалан на вектору $\mathfrak{c}$ са смером на ону страну[1] где се налази вектор $\mathfrak{b}$ (сл. 58). Ако се сад тим ортом помножи једначина (2) скаларно, добиће се

$$(3)\qquad [\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{n}_0=\alpha(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0),$$

јер је

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{n}_0=0,$$

пошто је, по претпоставци, $\mathfrak{n}_0\perp\mathfrak{c}$. Производ на левој страни једначине (3) може се цикличком пермутацијом чинилаца, која је у мешовитом производу дозвољена, овако трансформисати



Сл. 58

$$[\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{n}_0=\mathfrak{a}\cdot[(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{n}_0].$$

1) смер вектора n_0 изабран је тако да се смер вектора $[[b\,c]\,n_0]$ поклапа са смером вектора c, што је увек могуће учинити.

$= (\mathfrak{b}\mathfrak{n}_0)(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \Big| = \alpha(\mathfrak{b}\mathfrak{n}_0)$

При томе су правац и смер вектора $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{n}_0$ исти као и вектора $\mathfrak{c}$, што је очигледно са слике, а његов интензитет $bc\sin\alpha$, где је α угао који чине вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, пошто је $\mathfrak{n}_0 \perp (\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ и $|\mathfrak{n}_0| = 1$.

Дакле,

$$(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{n}_0 = bc\sin\alpha\,\mathfrak{c}_0,$$

где је $\mathfrak{c}_0$ орт вектора $\mathfrak{c}$, па се најзад може написати

(4) $$(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\times\mathfrak{n}_0 = b\sin\alpha\cdot\mathfrak{c}.$$

Међутим је

$$b\sin\alpha = b\cos(\mathfrak{n}_0\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0$$

и заменом у (4)

$$(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{n}_0 = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{c}.$$

Уношењем ове вредности у образац (3) добија се

$$(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0)(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) = \alpha(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0);$$ 1

и најзад, одатле, после скраћивања са $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}_0$,

(5) $$\alpha = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}.$$

Сад се једначина (2) може написати овако

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) + \beta\mathfrak{c}.$$

Ако се ова помножи скаларно вектором $\mathfrak{a}$, на левој страни се, услед колинеарности 2 два вектора, добија нула, па је

$$0 = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) + \beta(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}).$$

После скраћивања са $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}$ добија се

(6) $$\beta = -\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Тако се дефинитивно добија

(7) $$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$$

или, у облику детерминанте,

(8) $$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} \end{vmatrix}.$$

На исти се начин добија

(9) $$\mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}),$$

(10) $$\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}).$$

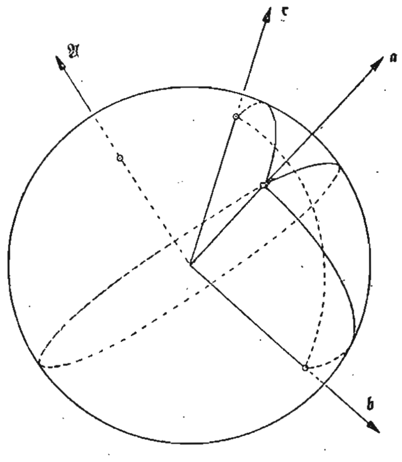
2) вектор $[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] \perp \mathfrak{a}$

Према томе, може се казати: Двоструки векторски производ једнак је средњем вектору помноженом скаларним производом два крајња вектора мање други вектор у векторском производу помножен скаларним производом два остала вектора.

Сабирањем једначина (7), (9) и (10) добија се веза

(11) $$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) + \mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = 0.$$

Ова једначина се може овако геометриски протумачити. Три вектора, претстављена са три двострука производа у збиру (11) означићемо краткоће ради са $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{C}$. Они су, на основу једначине (11), компланарни. Сваки од њих лежи у једној равни триједра који чине вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ и стоји нормално на трећем (сл. 59). Висине сферног троугла одређена триједром вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, кроз темена која одговарају тим векторима, леже у равнима чији су полови одређени векторима $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, и према томе се висине сферног троугла секу у тачки која је пол равни одређене тим векторима.



Сл. 59

2. Развијање двоструког векторског производа може се извести и друкчије.

Показаћемо још један начин.

Множењем једначине (2) скаларно са $\mathfrak{a}$ добија се на левој страни, услед колинеарности два вектора, нула и стога је

$$\alpha(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) + \beta(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) = 0.$$

Одавде се види да се може узети да је

$$\alpha = \gamma(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) \quad \text{и} \quad \beta = -\gamma(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}),$$

где је само γ неодређено, те треба да се одреди. Дакле, једначина (2) може се сад написати

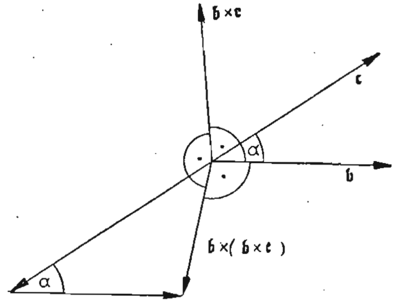
$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \gamma\{\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\}.$$

Помножимо обе стране ове једначине вектором $\mathfrak{b}$ скаларно, па се на левој страни добија

(12) $$[\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{b} = [(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})\times\mathfrak{b}]\cdot\mathfrak{a} = -[(\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{a},$$

а на десној

(13) $$\gamma\{(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})-(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\}.$$



Сл. 60

Међутим је

$$|\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})| = b^2c\sin\alpha,$$

где је α угао који чине вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, пошто је вектор $\mathfrak{b}$ нормалан на вектору $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$. Раставимо сад вектор $\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ у компоненте у правцу вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ (сл. 60), тј.

$$\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = b^2c\sin\alpha\ \mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathfrak{b}_0 - \frac{b^2c\sin\alpha}{\sin\alpha}\mathfrak{c}_0,$$

одн.

$$\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = b^2c\cos\alpha\,\mathfrak{b}_0 - b^2c\,\mathfrak{c}_0 = bc\cos\alpha\,\mathfrak{b} - b^2\mathfrak{c} = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c},$$

где су $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{c}_0$ ортови вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.

Тако се добија

$$-\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})\mathfrak{c} - (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\mathfrak{b}$$

и најзад за израз (11)

$$-[\mathfrak{b}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}).$$

Изједначењем израза (12) и (13) добија се

$$\gamma = 1,$$

дакле опет

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \begin{vmatrix}\mathfrak{b} & \mathfrak{c}\\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}\end{vmatrix}.$$

Двоструки векторски производ (1) једнак је нули: 1) кад је један од чинилаца једнак нули; 2) кад су вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ колинеарни, тј. $\mathfrak{b}=\lambda\mathfrak{c}$, и 3) кад је вектор $\mathfrak{a}$ колинеаран са вектором $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, тј. $\mathfrak{a}=\lambda(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$. У сва та три случаја важи образац (7) за развијање двоструког векторског производа.

Раније смо казали да је

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) \neq \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}).$$

Сад смо у стању да међу овим изразима успоставимо одређену везу. Наиме, пошто је

$$\mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}),$$

имамо

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) + \mathfrak{c}\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}).$$

Помоћу двоструког производа може се наћи и најопштије решење векторске једначине

$$\mathfrak{r}\times\mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ дати вектори, а $\mathfrak{r}$ непознати вектор, који се тражи и $\mathfrak{b}\perp\mathfrak{a}$. Ако се ова једначина помножи векторски с леве стране вектором $\mathfrak{a}$ добиће се

$$\mathfrak{a}\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}.$$

После развијања леве стране имамо

$$a^2\mathfrak{r} - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b},$$

одакле се за вектор $\mathfrak{r}$ добија

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{a^2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) + \lambda\mathfrak{a}_0,$$

где је $\lambda=\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{r}$ произвољан параметар. Заменом овако добијене вредности $\mathfrak{r}$ ма за које λ, наша једначина је идентички задовољена.

15.11 Скаларни производ два векторска производа

Скаларни производ два векторска производа може се врло лако развити на овај начин. Нека је дато

(1) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}).$$

Ако се привремено стави $\mathfrak{e}=\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}$, па онда у мешовитом производу $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{e}$ вектори циклички пермутују, добија се $(\mathfrak{b}\times\mathfrak{e})\cdot\mathfrak{a}$. Ако се сад поново унесе вредност вектора $\mathfrak{e}$, двоструки векторски производ $\mathfrak{b}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})$ развије и изврши, напослетку, скаларно множење вектором $\mathfrak{a}$ добиће се

(2) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}),$$

или, у облику детерминанте,

(3) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}) = \begin{vmatrix}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}\\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}\end{vmatrix}.$$

До истог резултата дошли бисмо и кад бисмо, место вектора $\mathfrak{e}$, увели вектор $\mathfrak{f}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ у почетку и поновили цео поступак као у претходном случају.

За $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}=\mathfrak{d}$ добија се из обрасца (2) квадрат векторског производа $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, тј.

(4) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2 = a^2b^2-(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2,$$

а то је тзв. *Лагранжев идентитет*, чија је вредност у координатама

(5) $$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 = \\ =(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

У облику детерминанте израз (4) се може написати овако

(6) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2=\begin{vmatrix}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}\end{vmatrix}=a^2b^2\sin^2(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=P^2,$$

где је P површина паралелограма одређена векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Детерминанта (6), која претставља квадрат те површине, зове се *Гремова (Gram) детерминанта* другог реда образована од вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Према томе Гремова детерминанта првог реда би била $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$, тј. квадрат вектора $\mathfrak{a}$, који претставља квадрат дужине одређене тим вектором. Значење Гремових детерминаната вишега реда видећемо касније.

15. 12 Векторски производ два векторска производа

Векторски производ друга два векторска производа, тј.

(1) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})$$

може се развити на два начина. Прво, обележимо за тренутак $\mathfrak{e}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, па се после развијања по правилу о двоструком векторском производу (15. 10 једн. 7) добија

$$\mathfrak{e}\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})=\mathfrak{c}(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})-\mathfrak{d}(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{c})$$

и, после увођења праве вредности за вектор $\mathfrak{e}$,

(2) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})=\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]-\mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}].$$

Обележимо ли, пак, за тренутак $\mathfrak{f}=\mathfrak{c}\times\mathfrak{d}$, па тако добијени двоструки векторски производ развијемо и $\mathfrak{f}$ сменимо његовом правом вредношћу, добићемо

(3) $$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{d})=\mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]-\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}].$$

Изједначењем десних страна једначина (2) и (3) добија се једначина

(4) $$\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]-\mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]=\mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]-\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}],$$

одн.

$$\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]-\mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]+\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]-\mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]=0,$$

што је нов пример да су четири вектора у простору од три димензије линеарно зависни.

Према томе, на основу једначина (2) и (3), векторски производ два друга векторска производа претставља вектор који је компланаран, с једне стране, са векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ а, с друге стране, са векторима $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$, тј. он лежи у пресеку равни одређених векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.

15. 13 Производ два мешовита производа вектора. Гремова детерминанта трећег реда

Узмимо векторски производ $(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{a}_1)\times(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3)$ и развијмо га према претходном параграфу на два начина, па ћемо добити

(1) $$\mathfrak{b}_1[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]-\mathfrak{a}_1[\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]-\mathfrak{a}_2[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3]-\mathfrak{a}_3[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1]=0.$$

Ако се ова једначина реши по првом члану $\mathfrak{b}_1[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]$ и, на десној страни, допуштеном цикличком пермутацијом чланова у мешовитим производима, удеси да свуда вектор $\mathfrak{b}_1$ буде на првом месту, добија се израз

(2) $$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]\mathfrak{b}_1=[\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]\mathfrak{a}_1+[\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1]\mathfrak{a}_2+[\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2]\mathfrak{a}_3.$$

Ставимо у овом изразу, место вектора $\mathfrak{b}_1$, свуда векторски производ $\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2$ па добијамо

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3](\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)=(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3)\,\mathfrak{a}_1+ \\ +(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1)\,\mathfrak{a}_2+(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{a}_3$$

и кад се та једначина помножи скаларно са $\mathfrak{b}_3$ добија се најзад

(3) $$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3][\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3]=(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3)(\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_3)+ \\ +(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_3)+(\mathfrak{b}_1\times\mathfrak{b}_2)\cdot(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_3).$$

Ако се скаларни производи од по два векторска у сваком члану на десној страни претставе у облику детерминанте добиће се најзад

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3][\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3]=\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_2\\ \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_2\end{vmatrix}(\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_3)+ \\ +\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_2\\ \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_2\end{vmatrix}(\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_3)+\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_2\\ \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_2\end{vmatrix}(\mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_3),$$

одакле је очигледно

$$(4) \qquad [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3][\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3] = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_3 \end{vmatrix}.$$

Ова једначина нам, с једне стране, показује како се добија производ два мешовита производа вектора, а, с друге стране, претставља Лапласов (Laplace) закон множења детерминаната трећег реда, јер су изрази на левој страни детерминанте трећег реда, кад се вектори изразе координатама.

Напослетку, ако је $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{c}$, из једначине (4) се добија

$$(5) \qquad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \end{vmatrix} = V^2,$$

где је V запремина паралелепипеда конструисана на векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Израз (5) је Гремова детерминанта трећег реда, образована помоћу вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ на исти начин као и Гремова детерминанта другог реда помоћу два вектора.

Из израза Гремове детерминанте трећег реда и њеног значења лако је написати Гремову детерминанту неког вишег реда, од више линеарно независних вектора у простору од више димензија, и дати њено значење.

Помоћу Гремове детерминанте може се лако одредити синус триједра одређена векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ помоћу његових ивичних углова. Наиме, на основу једначине (5) је

$$(6) \qquad [\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0]^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0 & \mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{c}_0 \\ \mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{a}_0 & \mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_0 \\ \mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{a}_0 & \mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{b}_0 & \mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

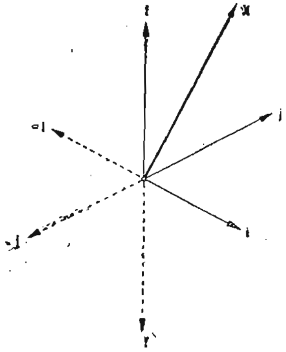
где је

$$\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \alpha, \quad \sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = \beta, \quad \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \gamma.$$

На тај начин смо у стању да одредимо, рецимо, запремину V косоуглог паралелепипеда, ако су му познате дужине ивица из једног темена и ивични углови триједра са тим теменом. Тада је

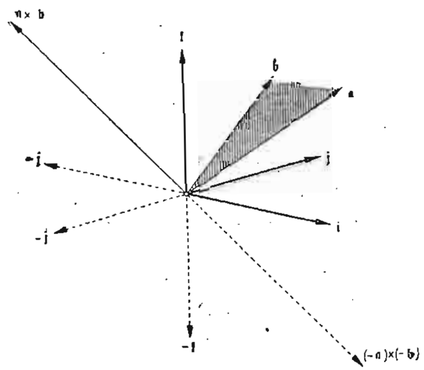
$$(7) \qquad V^2 = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]^2 = a^2 b^2 c^2 [\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0]^2, \text{ итд.}$$

Као што међу скаларима постоје извесне разлике (прави скалари и псеудоскалари), постоје и међу векторима неке формалне разлике. Тако, ако се вектор $\mathfrak{A}$ посматра у односу на неки правоугли Декартов триједар оса $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, па се изврши трансформација система у систем супротних оса $-\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{j}$, $-\mathfrak{k}$, (огледање — промена оријентације система), координате нашег вектора мењају знак. У односу на нови триједар наш вектор постаје $-\mathfrak{A}$. Ово не значи да се вектор $\mathfrak{A}$, услед ове трансформације, ма у чему геометриски променио, већ само да је његова оријентација у односу на нови триједар супротна првобитној, тј. ако је, на пр., у односу на први триједар, био наперен у први октант у односу на други он је наперен у октант супротан првом (сл. 61). Овакви вектори зе зову *поларни* вектори. Такви су сви вектори са одређеном физичком оријентацијом као сила, брзина итд.



Сл. 61

Међутим, ако се посматра векторски производ два вектора, на пр. $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, ствар је друкчија. Променом смера осама триједра он од десног постаје леви и обрнуто. Вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ прелазе у векторе $-\mathfrak{a}$ и $-\mathfrak{b}$, али се знак вектора $\mathfrak{c}$ уопште не мења. Он не зависи од промене оријентације триједра у простору. Он зависи само од смера у коме се обилази контура коју чине вектори чиниоци. То значи да је вектор $\mathfrak{c}$, који одговара векторском производу, при промени оријентације оса и сам променио оријентацију и, у односу на нови триједар, има исти положај који је имао у односу на први триједар оса (сл. 62). Овакви вектори се зову *аксијални*. Такви су они вектори који немају одређену физичку оријентацију, као угаона брзина итд.



Сл. 62

Збир и разлика и, уопште, линеарна комбинација поларних вектора је поларни вектор. Производ псеудоскалара и поларног вектора је аксијални вектор итд.

15. 14 Гибзов образац. Конјуговани (реципрочни) системи основних вектора. Контраваријантни и коваријантни вектори

Нека три некомпланарна вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ (тј. $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]=\Delta\neq 0$), чине неки основни триједар вектора. Нека буде дат и неки вектор $\mathfrak{b}_1$, који треба разложити у компоненте дуж ова три вектора. У том циљу поћи ћемо од једначине (2) у претходном параграфу и решићемо је по вектору $\mathfrak{b}_1$, што је услед $\Delta\neq 0$ могуће. Тако се добија

$$\mathfrak{b}_1=\left(\mathfrak{b}_1\cdot\frac{\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3}{\Delta}\right)\mathfrak{a}_1+\left(\mathfrak{b}_1\cdot\frac{\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1}{\Delta}\right)\mathfrak{a}_2+\left(\mathfrak{b}_1\cdot\frac{\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2}{\Delta}\right)\mathfrak{a}_3 \tag{1}$$

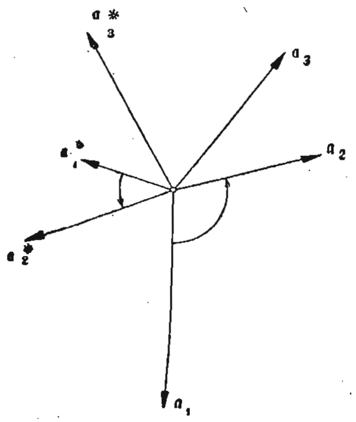
и, ако се још стави

$$\mathfrak{a}_1^*=\frac{\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3}{\Delta},\qquad \mathfrak{a}_2^*=\frac{\mathfrak{a}_3\times\mathfrak{a}_1}{\Delta},\qquad \mathfrak{a}_3^*=\frac{\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2}{\Delta}, \tag{2}$$

добија се најзад *Гибзов образац* за разлагање вектора у три некомпланарна правца, тј.

$$\mathfrak{b}_1=(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}_1^*)\,\mathfrak{a}_1+(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}_2^*)\,\mathfrak{a}_2+(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{a}_3^*)\,\mathfrak{a}_3. \tag{3}$$

Што се тиче вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, и $\mathfrak{a}_3^*$, они, пошто је $\Delta\neq 0$, чине нов триједар вектора. Сваки од вектора новога триједра нормалан је на равни коју чине два вектора првога триједра са разним индексима (сл. 63). Осим тога, скаларни производи вектора са истим индексима дају јединицу, а са различитим индексима нулу, што се схематски може овако претставити



Сл. 63

(4)

	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{a}_1^*$	1	0	0
$\mathfrak{a}_2^*$	0	1	0
$\mathfrak{a}_3^*$	0	0	1

Односи изражени схемом (4) могу се сматрати као дефиниција вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$. Наиме, из једначина

$$\mathfrak{a}_1^*\cdot\mathfrak{a}_1=1,\quad \mathfrak{a}_1^*\cdot\mathfrak{a}_2=0,\quad \mathfrak{a}_1^*\cdot\mathfrak{a}_3=0,$$

следује одмах да је вектор $\mathfrak{a}_1^*$ колинеаран са вектором $\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3$, тј.

$$\mathfrak{a}_1^*=\lambda\,(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3)$$

а, после скаларног множења вектором $\mathfrak{a}_1$, добија се

$$\lambda=\frac{1}{[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]}=\frac{1}{\Delta},$$

што је и требало показати.

Поред правца и интензитета, једначине (2) одређују потпуно једнозначно и смер вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$, тако да сваки од њих чини са два вектора првога триједра десни триједар, при чему су индекси циклички поређани (на пр. вектори $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$, $\mathfrak{a}_1^*$ чине десни триједар).

Према правилу (4) из претходног параграфа, за множење два мешовита производа, добија се сад

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3]\,[\mathfrak{a}_1^*\mathfrak{a}_2^*\mathfrak{a}_3^*]=\begin{vmatrix}\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_1^* & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2^* & \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_3^*\\ \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{a}_1^* & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{a}_2^* & \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{a}_3^*\\ \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{a}_1^* & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{a}_2^* & \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{a}_3^*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

и према томе је запремина Δ^* паралелепипеда који чине вектори $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$ и $\mathfrak{a}_3^*$ реципрочна вредност запремине Δ паралелепипеда који чине вектори $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$, тј.

$$\Delta\cdot\Delta^*=1. \tag{5}$$

Из једначина

$$\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_1^*=1,\quad \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2^*=0,\quad \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_3^*=0,$$

које се могу написати из односа (4) следује

$$\mathfrak{a}_1=\mu\,(\mathfrak{a}_2^*\times\mathfrak{a}_3^*)$$

и, ако се обе стране ове једначине помноже скаларно вектором $\mathfrak{a}_1^*$, добиће се

$$\mu=\frac{1}{[\mathfrak{a}_1^*\mathfrak{a}_2^*\mathfrak{a}^*]}=\frac{1}{\Delta^*}.$$

Дакле, основном триједру вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ одговара основни триједар вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. Поред тога из једначине (5) је јасно да су оба триједра или десни или оба леви истовремено. Стога се основни триједри вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ и $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ зову *конјуговани* или *реципрочни*, јер на исти начин један другом одговарају.

Основни триједар правоуглих ортова $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ реципрочан је сам себи, што је очигледно из

$$\mathfrak{i}^* = \frac{\mathfrak{j}\times\mathfrak{k}}{[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]} = \frac{\mathfrak{i}}{1} = \mathfrak{i},$$

пошто је $[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]=1$, итд. То следује и из саме дефиниције, без икаквог рачунања. Сад се директном применом Гибзова обрасца може вектор $\mathfrak{r}$ раставити у компоненте у правцу оса Декартова триједра, тј. написати

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{j})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k})\,\mathfrak{k},$$

што смо већ извели на други начин у 15.1 једн. 10.

Показаћемо примену Гибзова обрасца и на израчунавање вектора $\mathfrak{x}$, кад су познати његови скаларни производи са три дата некомпланарна вектора (или у специјалном случају пројекције на три некомпланарне осе), тј.

$$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{a} = \alpha; \quad \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{b} = \beta; \quad \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{c} = \gamma, \tag{6}$$

где су $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ дати вектори, а α, β и γ дати скалари.

Тада је по Гибзову обрасцу одмах

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}^* + (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}^* + (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{c}^*,$$

где су $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, вектори реципрочног триједра. Према томе је, с обзиром на једначине (6),

$$\mathfrak{x} = \alpha\,\mathfrak{a}^* + \beta\,\mathfrak{b}^* + \gamma\,\mathfrak{c}^*. \tag{7}$$

Кад се узме у обзир правило како се одређују вектори реципрочног триједра, добија се најзад решење постављеног задатка у облику

$$\mathfrak{x} = \frac{\alpha\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \beta\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) + \gamma\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}. \tag{8}$$

Сваки вектор $\mathfrak{r}$ може се, како смо раније показали, само на један начин разложити у компоненте дуж три некомпланарна правца одређена триједром основних вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ и написати у облику

$$\mathfrak{r} = x_1\,\mathfrak{a}_1 + x_2\,\mathfrak{a}_2 + x_3\,\mathfrak{a}_3. \tag{9}$$

Ако су основни вектори $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ ортови, онда су x_1, x_2 и x_3 координате вектора $\mathfrak{r}$ у односу на дати триједар ортова. Оне су, у општем случају косоуглог триједра, различите од пројекција вектора $\mathfrak{r}$ на осе тог триједра. Кад се неки вектор изрази на овај начин помоћу триједра вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$

за њега се каже да је, у односу на основни триједар $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *контраваријантан*.

Међутим, триједар вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ одређује једнозначно други триједар вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ који је првом реципрочан. Према томе исти вектор $\mathfrak{r}$ може се и у односу на нови триједар вектора раставити у компоненте на један једини начин, наиме у облику

$$\mathfrak{r} = x_1^*\,\mathfrak{a}_1^* + x_2^*\,\mathfrak{a}_2^* + x_3^*\,\mathfrak{a}_3^*, \tag{10}$$

где је на основу Гибзова обрасца

$$x_1^* = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_1; \quad x_2^* = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_2; \quad x_3^* = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_3$$

и према томе су x_1^*, x_2^*, x_3^* нормалне пројекције вектора $\mathfrak{r}$ на осе триједра $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. За вектор $\mathfrak{r}$ изражен овако помоћу вектора $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ реципрочног триједра каже се да је, у односу на триједар $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, *коваријантан*.

Очигледно је, на основу реципрочности триједара $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ и $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$, да је вектор $\mathfrak{r}$ у односу на триједар $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$, $\mathfrak{a}_3^*$ написан у облику (10) контраваријантан, а у облику (9) коваријантан.

Према томе, иако су изрази на десној страни једначина (9) и (10) у општем случају различити, изрази контраваријантни и коваријантни вектор не значе разне векторе него само различито описивање или претстављање једног истог вектора. Кад је вектор претстављен на један начин лако је наћи одмах други начин.

Скаларни производ два вектора од којих је један у контраваријантном облику, тј.

$$\mathfrak{a} = \alpha_1\,\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\,\mathfrak{a}_3, \tag{11}$$

а други у коваријантном облику

$$\mathfrak{b} = \beta_1\,\mathfrak{a}_1^* + \beta_2\,\mathfrak{a}_2^* + \beta_3\,\mathfrak{a}_3^*, \tag{12}$$

износи

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \tag{13}$$

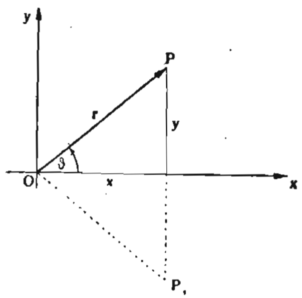
што је лако проверити, без обзира на то да ли су триједар вектора $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ и његов реципрочни ортогонални или не.

16. Комплексни бројеви и вектори у равни

Сваком комплексном броју

(1) $$z = x + iy$$

одговара у равни комплексних бројева xOy нека тачка P чија је апсциса x, а ордината y (сл. 64). Ако се комплексни број изрази помоћу поларних координата r и ϑ, добија се



Сл. 64

(2) $$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r\,e^{i\vartheta},$$

где је r *модул (апсолутна вредност)* комплексног броја z, а ϑ његов *аргумент (аркус)*. При томе је

(3) $$r = +\sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

и

(4) $$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x},$$

одн.

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc} z.$$

За комплексни број $x - iy$ каже се да је конјугован комплексном броју $z = x + iy$. Он се обично обележава са $\bar{z}$ и има исти модул r као и комплексни број z, а аргумент му је супротан, тј. $-\vartheta$. Њему у равни комплексних бројева одговара тачка P_1 симетрична тачки P у односу на x-осу.

Сви комплексни бројеви којима одговарају тачке на јединичном кругу одређени су само аргументом ϑ и зову се *комплексне јединице*, јер су им модули једнаки јединици. Комплексне јединице обухватају и реалну јединицу (пресек јединичног круга и позитивне x-осе) и имагинарну јединицу i (пресек јединичног круга и позитивне y-осе). У општем облику комплексна јединица изгледа

(5) $$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Свака тачка P комплексне равни може се одредити и вектором положаја

(6) $$\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}.$$

Овај вектор има исти модул (интензитет) као и комплексни број који му одговара, а угао који овај вектор чини

са x-осом једнак је аргументу комплексног броја или се од њега може разликовати за $\pm 2k\pi$, где је k цео и позитиван број. Комплексној јединици (5) одговара јединични вектор (орт) $\mathfrak{a}_0$ одређен углом ϑ са x-осом, тј.

(7) $$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{i}\cos\vartheta + \mathfrak{j}\sin\vartheta.$$

Сваки комплексни број z је, на основу претходног, одређен са два реална броја у одређеном реду, тј. комплексни број се може написати и као уређени пар реалних бројева

(8) $$z = \{x,\ y\}.$$

Вектор положаја тачке P која одговара овом комплексном броју такође је одређен са иста два броја (координате) према (6) и у истом реду, тј.

(9) $$\mathfrak{r} = \{x,\ y\}.$$

Но, иако су комплексни број z и вектор положаја $\mathfrak{r}$ исте тачке еквивалентни у односу на одређивање положаја те тачке, они се не смеју изједначити. Наиме, комплексни број

$$\{x, 0\} = x$$

је реални број. Дакле, реални бројеви су специјалан случај комплексних бројева. Међутим, вектор

$$\{x, 0\} \neq x,$$

него је

$$\{x, 0\} = x\,\mathfrak{i},$$

а то је опет вектор. Другим речима, никад се реални број (скалар) не може сматрати као специјална вредност неког вектора.

Али, како се комплексни бројеви могу увек претставити векторима у равни, упоредићемо укратко рачунање са комплексним бројевима и рачунање са векторима у равни и на тај начин доћи до неких нових резултата теорије вектора у равни. При томе, како се вектори могу паралелно померати, а да се бројеви који их одређују не промене, то се може сматрати да сви вектори одређују исти комплексни број, кад имају једнаке координате или су им једнаки модули и чине исти угао са x-осом.

Сабирање два комплексна броја

(10) $$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + i\,y_1 = r_1\,e^{i\vartheta_1} = \{x_1, y_1\},\\ z_2 &= x_2 + i\,y_2 = r_2\,e^{i\vartheta_2} = \{x_2, y_2\},\end{aligned}$$

дефинисано је једначином

(11) $$z_1+z_2=x_1+x_2+i\,(y_1+y_2).$$

Збир вектора

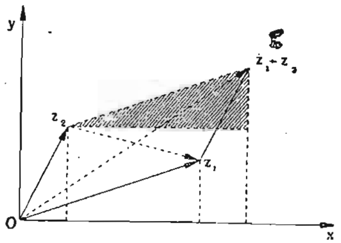
(12) $$\mathfrak{r}_1=x_1\,\mathfrak{i}+y_1\,\mathfrak{j}=\{x_1,y_1\},\qquad \mathfrak{r}_2=x_2\,\mathfrak{i}+y_2\,\mathfrak{j}=\{x_2,y_2\},$$

који одговарају претходним комплексним бројевима, одређен је, како знамо, изразом

(13) $$\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2=(x_1+x_2)\,\mathfrak{i}+(y_1+y_2)\,\mathfrak{j}.$$

Дакле, потпуно је свеједно, сабирали ми комплексне бројеве или векторе који им одговарају, добиће се еквивалентни резултати.

Ова чињеница је и геометриски очигледна. Наиме, тачка која одговара збиру два комплексна броја има координате једнаке збиру односних координата сабирака. Та тачка се може конструисати, ако се од тачке z_1 (сл. 65) пренесе дуж исте величине, у истом правцу и смеру као и дуж повучена од координатног почетка до тачке z_2. Тада крај ове дужи одговара тачки z_1+z_2. До исте тачке бисмо дошли, наравно, и ако бисмо од тачке z_2 пренели дуж исте величине, у истом правцу и смеру, као и дуж повучена од координатног почетка до тачке z_1.



Сл. 65

Према томе, у суштини збир два комплексна броја добија се по правилу за сабирање вектора (правило троугла и правило паралелограма). Врло је лако показати да све што је речено за два сабирка важи и за произвољан број комплексних сабирака и вектора који им одговарају. За сабирање комплексних бројева и за сабирање вектора важе сви закони сабирања реалних бројева.

Одузимање комплексних бројева (10) дефинисано је једначином

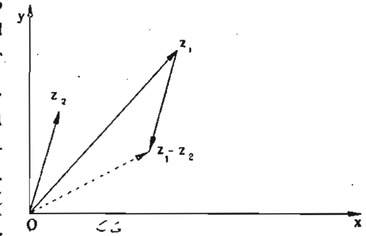
(14) $$z_1-z_2=x_1-x_2+i\,(y_1-y_2),$$

а разлика вектора (12), који им одговарају, дата је једначином

(15) $$\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2=(x_1-x_2)\,\mathfrak{i}+(y_1-y_2)\,\mathfrak{j}.$$

Дакле, резултати операције одузимања комплексних бројева дају исте резултате као и кад се те операције изврше са векторима који одговарају овим комплексним бројевима.

Тачка која одговара комплексном броју z_1-z_2 конструише се геометриски на овај начин. Од тачке z_1 пренесе се дуж исте величине и правца, но у супротном смеру дужи повучене од координатног почетка до тачке z_2 (сл. 66). Тада крај те дужи одговара траженом комплексном броју. То је, очигледно, еквивалентно одузимању односних вектора. Чак, ако разлику вектора положаја тачака z_1 и z_2 образујемо и повлачењем вектора од тачке z_2 до тачке z_1 (друге дијагонале паралелограма — сл. 65), тај вектор, са почетком у координатном почетку, одређује тачку z_1-z_2.



Сл. 66

Дакле, операције сабирања и одузимања комплексних бројева потпуно су еквивалентне операцијама са векторима који им одговарају.

Код множења, међутим, треба водити рачуна о томе, да скаларни производ вектора одређује неки скалар, а векторски производ опет вектор који лежи изван посматране равни — нормално на њој. Алгебарски производ комплексних бројева пак одређује опет комплексни број, коме одговара одређени вектор положаја у истој равни. Треба, стога, утврдити, како зависи вектор, који одговара алгебарском производу комплексних бројева z_1z_2, од полазних вектора који одговарају комплексним бројевима z_1 и z_2, па, на основу тога, дефинисати алгебарско множење вектора — нови производ вектора.

Ако, дакле, посматрамо два комплексна броја (10) и векторе положаја који им одговарају, дате једначинама (12), алгебарски производ комплексних бројева z_1 и z_2, као што знамо, дефинисан је једначином

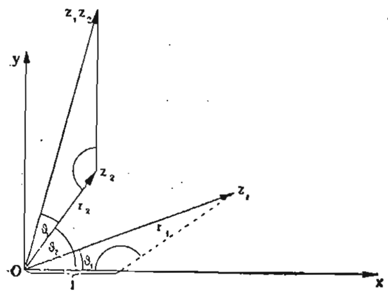
(16) $$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

или, у поларним координатама,

(17) $$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}=re^{i\vartheta},$$

где је $r=r_1r_2$ и $\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2$.

Према томе, алгебарском производу два комплексна броја одговара опет комплексни број са модулом једнаким производу модула чинилаца и аргументом једнаким збиру аргумената чинилаца. Ако се потражи вектор који одговара овом новом комплексном броју, видеће се да се он добија ако се вектор $\mathfrak{r}_2$ обрне за ϑ_1, у директном смеру, и помножи интензитетом вектора $\mathfrak{r}_1$, или, што је исто, ако се вектор $\mathfrak{r}_1$ обрне за угао ϑ_2, у директном смеру, и помножи интензитетом вектора $\mathfrak{r}_2$.



Сл. 67

Положај тачке која одговара производу комплексних бројева z_1z_2 конструише се на овај начин. Прво се на оси x одреди положај тачке која одговара броју 1. Затим се троуглу O 1 z_1 конструише слични троуао, са теменима у тачкама O и z_2, тако да теме O одговара темену O, а теме z_2 темену 1. Тада треће теме тако конструисана троугла одговара комплексном броју z_1z_2, јер је свака страна новог троугла у односу на хомологну страну првога троугла увећана у размери $r_1 : 1$ (сл. 67).

Према томе алгебарском производу два комплексна броја одговара *продужење* (одн. *скраћење*) и *обртање* вектора. Кад се множи комплексном јединицом (5), имамо после са чистом ротацијом за угао ϑ у директном смеру. На пр., кад се жели ротација за $\frac{\pi}{2}$ у директном смеру, множи се са $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, а за ротацију од π треба множити са $z = e^{i\pi} = -1$, итд. Напротив, ако се жели само продужење (скраћење), множи се позитивним реалним бројем.

У вези са претходним разматрањима дефинисаћемо нови производ два вектора $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ који одговарају комплексним бројевима z_1 и z_2 тако, да се као резултат добије вектор који одговара алгебарском производу z_1z_2 комплексних бројева. Тај производ вектора назваћемо *алгебарски* производ вектора и бележићемо га

$$r_1 \wedge r_2,$$

што се чита: $\mathfrak{r}_1$ пута $\mathfrak{r}_2$. За $\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{r}$ не треба писати $\mathfrak{r}^2$ да не би било забуне и мешање са скаларним производом.

Нека вектори $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ буду дати изразима (12), онда се алгебарски производ тих вектора, с обзиром на једначину (16) која дефинише алгебарско множење комплексних бројева, дефинише аналогном једначином

(18) $$\mathfrak{r}_1 \wedge \mathfrak{r}_2 = (x_1x_2 - y_1y_2)\,\mathfrak{i} + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathfrak{j}.$$

Оваквом множењу вектора у равни одговара наредна схема за множење основних ортова $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ вектора у равни

(19)

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$
$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{i}$.

Дакле, сад је множење са ортом (7) еквивалентно чистој ротацији вектора у директном смеру за угао ϑ. Множење вектора ортом $\mathfrak{i}$ уопште не мења вектор, а алгебарско множење вектора ортом $\mathfrak{j}$ значи само обртање вектора у директном смеру за $\frac{\pi}{2}$. За овако дефинисано алгебарско множење вектора важе сви закони множења комплексних бројева.

Овај производ се може проширити и на више од два чиниоца и, према томе, за њега важи, поред комутативног и дистрибутивног и асоцијативни закон множења реалних бројева. Природно је да се при овом множењу може говорити и о степеновању вектора.

Тачност комутативног закона је очигледна из једначине (18) којом је множење дефинисано. Лако је доказати и тачност асоцијативног закона и дистрибутивног закона. Овде ћемо доказати тачност асоцијативног закона за случај три чиниоца, тј.

(20) $$(\mathfrak{r}_1 \wedge \mathfrak{r}_2) \wedge \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 \wedge (\mathfrak{r}_2 \wedge \mathfrak{r}_3),$$

а доказ дистрибутивног закона, који се изводи потпуно аналогно, остављамо читаоцу.

Дакле, нека вектори $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ буду дати изразима (12), а нека буде

(21) $$\mathfrak{r}_3 = x_3\mathfrak{i} + y_3\mathfrak{j} = \{x_3,\ y_3\}.$$

Тада је, по дефиницији,

(22) $$\begin{aligned}(\mathfrak{r}_1 \wedge \mathfrak{r}_2) \wedge \mathfrak{r}_3 &= [(x_1x_2 - y_1y_2)\mathfrak{i} + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathfrak{j}] \wedge (x_3\mathfrak{i} + y_3\mathfrak{j}) = \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3]\mathfrak{i} + \\ &\quad + [(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1)]\mathfrak{j}.\end{aligned}$$

С друге стране је

$$(23)\quad \mathfrak{r}_1 \wedge (\mathfrak{r}_2 \wedge \mathfrak{r}_3) = (x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j}) \wedge [(x_2x_3 - y_2y_3)\mathfrak{i} + (x_2y_3 + x_3y_2)\mathfrak{j}] =$$
$$= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2)]\mathfrak{i} +$$
$$+ [x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3 - y_2y_3)y_1]\mathfrak{j}.$$

Упоређивањем израза (22) и (23) види се да је једначина (20) тачна, а то је и требало доказати.

Поред осталих особина које алгебарски производ вектора има као и производ комплексних бројева подвлачимо нарочито: да алгебарски производ два вектора може бити једнак нули само — ако је један од чинилаца једнак нули.

Дељење комплексних бројева (10) одређено је у Декартовим координатама на овај начин

$$(24)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

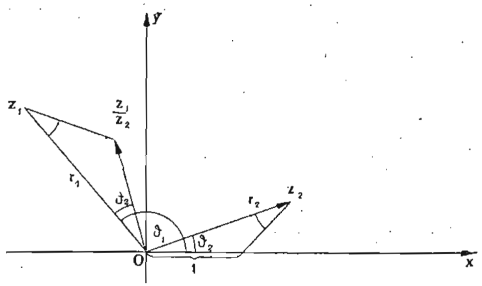
а у поларним координатама

$$(25)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)},$$

тј. модули се деле, а аргументи одузимају.

Са векторског гледишта је то опет ротација вектора $\mathfrak{r}_1$ који одговара комплексном броју z_1 за угао ϑ_2, но сад у индиректном смеру и продужење у реципрочном односу, тј. $\frac{1}{r_2}$ (сл. 68).

Геометриска конструкција тачке која одговара количнику $\frac{z_1}{z_2}$ датих комплексних бројева изводи се на овај начин. На оси x одреди се опет положај тачке 1 и конструише троугао сличан троуглу $O\ 1\ z_2$ са теменима у тачкама O и z_1, тако да тачки O одговара тачка O, а тачки z_2 тачка z_1. Треће теме овако конструисаног троугла очигледно одређује тачку која одговара комплексном броју $\frac{z_1}{z_2}$.



Сл. 68

Нека буду сад дати вектори (12), онда се може показати да алгебарском множењу вектора одговара дељење као инверзна операција. Другим речима постоји увек вектор $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$ за који важи

$$(26)\quad \mathfrak{r}_2 \wedge \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1,$$

одн.

$$(27)\quad x_2x - y_2y = x_1;\quad x_2y + xy_2 = y_1,$$

ако је задовољен услов $\mathfrak{r}_2 \neq 0$.

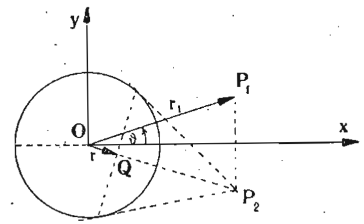
Из једначина (27), међутим, пошто је $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, због $\mathfrak{r}_2 \neq 0$, добија се

$$(28)\quad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Показаћемо још како се конструише вектор $\mathfrak{r}$ који одговара реципрочној вредности неког вектора $\mathfrak{r}_1$, тј.

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathfrak{r}_1}.$$

Нека буде $\mathfrak{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ (сл. 69). Повуче се $OP_2 = OP_1$ под углом $-\vartheta$ према x-оси, ако вектор $\mathfrak{r}_1$ гради угао ϑ са x-осом. Затим се конструкцијом поларе за тачку P_2 у односу на круг јединичног полупречника добија тачка Q у пресеку поларе са OP_2. Тада је $\overrightarrow{OQ} = \mathfrak{r}$ тражени вектор.



Сл. 69

При овако уведеним операцијама са векторима у равни може се дефинисати и кореновање вектора на начин сличан кореновању комплексних бројева.

Алгебарско множење и дељење вектора у овом облику не може се применити, без увођења нових појмова, на векторе у простору од три димензије.

17. Кватерниони

Ако се посматра збир скалара a и вектора $\mathfrak{a}$, тј.

$$(1)\quad a + \mathfrak{a},$$

види се да је то, у општем случају, сигурно нова величина, јер резултат није ни скалар ни вектор. Ако се вектор $\mathfrak{a}$

изрази помоћу његових Декартових правоуглих координата a_1, a_2, a_3, нова величина се може написати у облику

(2) $$a + a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$

и, пошто је одређена са четири броја, зове се, по Хамилтону, *кватернион.*

Кватернион се не може као вектор просто геометриски претставити, јер би нам биле потребне четири осе (једна за скалар и три за вектор), што се наравно не може претставити. Кватернион (1) се за $a = 0$ своди на вектор $\mathfrak{a}$, а за $\mathfrak{a} = 0$ на скалар a. Према томе, кватернион обухвата скаларе и векторе као специјалне вредности. Другим речима, сваки реални број и сваки вектор могу се сматрати као кватерниони.

Два кватерниона су једнака само онда, кад су им једнаки скаларни делови за себе и векторски за себе, тј. из

(3) $$a + \mathfrak{a} = b + \mathfrak{b},$$

следује

(4) $$a = b, \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

Ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ дати помоћу Декартових правоуглих координата, тј.

(5) $$\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, a_3\}; \quad \mathfrak{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

једнакост два кватерниона своди се на четири скаларне једнакости, и то

(6) $$a = b, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3.$$

Очигледно је да се сабирање и одузимање кватерниона своди на сабирање и одузимање скаларних и векторских делова, тј.

(7) $$(a \pm \mathfrak{a}) \pm (b + \mathfrak{b}) = (a \pm b) + (\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})$$

и да се, као резултат, добија опет кватернион, који се, за специјалне вредности скалара и вектора, може свести на скалар или на вектор.

Питање дефиниције множења кватерниона је, међутим, од основног значаја. При дефинисању множења кватерниона захтева се, поред уобичајеног услова да важи што више закона множења обичних бројева, још и: 1) да производ два кватерниона буде у општем случају кватернион, и 2) да постоји обрнута операција множењу — дељење. Другим речима, захтева се да кватерниони у односу на множење образују, како се то каже, *групу.*

У математици се каже да скуп неких објеката образује групу или има групну особину у односу на неку операцију, ако су задовољени ови услови: 1) да се применом те операције на ове објекте добија опет објект исте врсте, 2) да за примену те операције важи асоцијативни закон, и 3) да тој операцији одговара обрнута операција. Комутативни закон не мора важити.

Да бисмо дошли до потребног правила за множење кватерниона, посматрајмо два кватерниона

(8) $$Q_1 = a + \mathfrak{a}; \quad Q_2 = b + \mathfrak{b}.$$

Ова два кватерниона измножићемо чисто формално, као да су обични бројеви, водећи само рачуна о реду чинилаца за сваки случај. Тада се добија

(9) $$(a + \mathfrak{a})\ (b + \mathfrak{b}) = ab + a\mathfrak{b} + \mathfrak{a}b + \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

У овом резултату су нам, међутим, производи бројева и производи броја и вектора потпуно познати и тачно дефинисани. За ове операције важи, уосталом, и комутативни закон, те није потребно никакво ограничење у погледу реда чинилаца. При томе је ab скалар, $a\mathfrak{b} - \mathfrak{a}b$ вектор.

Остаје, дакле, само производ вектора $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, који треба дефинисати тако, да постављени услови буду задовољени. Јасно је да се после тога множења мора добити величина која се своди на скаларе и векторе, да би укупан резултат био кватернион.

Као дефиницију за производ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ усвојићемо, по Хамилтону, једначину

(10) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Овај производ вектора зваћемо *кватернионски* и бележићемо га одсад $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ (и читати $\mathfrak{a}$ пута $\mathfrak{b}$). Из ове дефиниције следује одмах за кватернионско множење основних ортова Декартова правоуглог триједра ова схема

(11)

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	-1	$\mathfrak{k}$	$-\mathfrak{j}$
$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{k}$	-1	$\mathfrak{i}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{i}$	-1

Према томе: 1) једнаки ортови се множе по правилу скаларног множења, са том разликом само што имају промењен знак, и 2) различити ортови множе се тачно по правилу векторског множења. У дефинисању кватернионског множења вектора може се поћи и обрнутим путем, тј. може се прво дефинисати множење основних ортова, па извести резултат (10).

Кватернионски производ два вектора је инваријантан у односу на трансформацију координата, што је из израза (10) очигледно, јер су у односу на положај координатног система инваријантна оба сабирка на десној страни. Он се своди само на скалар $-\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ колинеарни, и само на вектор $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нормални један на другом. Ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ једнаки, њихов кватернионски производ је $-\mathfrak{a}^2$.

Заменом вредности кватернионског производа (10) у израз (9) добија се за производ кватерниона Q_1 и Q_2 кватернион

$$Q_3 = c + \mathfrak{c},$$

тј.

(12) $$(a+\mathfrak{a})(b+\mathfrak{b}) = ab - \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + a\mathfrak{b} + \mathfrak{a}b + \mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = c + \mathfrak{c},$$

где је

(13) $$c = ab - \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b};\quad \mathfrak{c} = a\mathfrak{b} + \mathfrak{a}b + \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}.$$

На тај начин, при овако изабраној дефиницији, задовољен је услов да резултат множења кватерниона буде кватернион.

Што се тиче закона множења, очигледно је да закон комутације не важи, јер вредност векторског производа у резултату мења знак са променом места векторима у кватернионском производу, али не важи ни закон алтернације, пошто остали део не мења знак. Према томе, множењем два кватерниона могу се образовати друга два кватерниона, који се један од другога разликују знаком пред векторским производом вектора. Ако посматрамо кватернионе (8), онда је у општем случају

(14) $$Q_1 \wedge Q_2 \neq Q_2 \wedge Q_1.$$

Дакле, ако се кватернион Q_1 множи кватернионом Q_2 здесна, добија се један, а кад се множи исти кватернион истим кватернионом само слева добија се други резултат.

Комутативни закон важи само за множење кватерниона са колинеарним векторским члановима, јер векторски производ у резултату тада једнак нули Кватерниони са колинеарним члановима зову се *коаксијални*.

Посматрајмо два коаксијална кватерниона у облику $a_1 + b_1\mathfrak{a}_0$ и $a_2 + b_2\mathfrak{a}_0$, где је $\mathfrak{a}_0$ орт. Тада је

(15) $$(a_1 + b_1\mathfrak{a}_0)\wedge(a_2 + b_2\mathfrak{a}_0) = a_1a_2 + a_1b_2\mathfrak{a}_0 + b_1a_2\mathfrak{a}_0 + b_1b_2\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{a}_0.$$

Међутим је

$$\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{a}_0 = -\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_0\times\mathfrak{a}_0 = -1,$$

па се најзад добија

(16) $$(a_1 + b_1\mathfrak{a}_0)\wedge(a_2 + b_2\mathfrak{a}_0) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathfrak{a}_0.$$

Овај резултат, прво, потврђује да је овакав производ комутативан, а друго, он је идентичан са резултатом множења два комплексна броја, код којих, место $\mathfrak{a}_0$ стоји i То се може мирно сматрати само као формална разлика и према томе се комплексни број може сматрати као коаксијални кватернион

Производ два кватерниона једнак је нули само кад је један од чинилаца једнак нули.

Закон дистрибуције и закон асоцијације важе и за множење кватерниона. На пр., да закон дистрибуције важи можемо се лако уверити простим израчунавањем производа $Q_1\wedge(Q_2+Q_3)$ и $Q_1\wedge Q_2 + Q_1\wedge Q_3$, где смо са Q_1, Q_2 и Q_3 обележили неке кватернионе. Упоређивањем резултата уверићемо се у тачност тврђења.

Важност асоцијативног закона следује из важности асоцијативног закона за множење основних ортова на основу дефиниције, само под условом да се ред чинилаца не мења. Наиме, имамо увек

(17) $$\mathfrak{i}\wedge\mathfrak{j}\wedge\mathfrak{k}\wedge = (\mathfrak{i}\wedge\mathfrak{j})\wedge\mathfrak{k} = \mathfrak{i}\wedge(\mathfrak{j}\wedge\mathfrak{k}) = -1 \text{ итд.}$$

Ако је кватернион дат у кординатном облику (2), израз

(18) $$a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = N$$

зове се *норма* или *тензор* кватерниона, а израз

(19) $$+\sqrt{N} = r,$$

у аналогији са векторима и комплексним бројевима *модул* тог кватерниона.

Два коаксијална кватерниона који се разликују само знаком пред векторским делом, на пр., $a+\mathfrak{a}$ и $a-\mathfrak{a}$ зову се *конјуговани*. Очигледно је да конјуговани кватерниони имају једнаке норме. Заједничка норма два конјугована кватерниона једнака је њихову производу, тј.

(20) $$N = (a+\mathfrak{a})\wedge(a-\mathfrak{a}) = a^2 + \mathfrak{a}^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Кватернион са нормом једнаком јединици зове се *јединични кватернион*.

Сваки јединични кватернион може се претставити у облику

$$\cos\vartheta + \mathfrak{a}_0 \sin\vartheta, \tag{21}$$

где је $\mathfrak{a}_0$ орт, пошто је норма оваквих кватерниона увек јединица.

Сваки кватернион после деобе модулом постаје јединични. На пр. кватернион

$$a+\mathfrak{a},$$

после деобе са $\sqrt{N}$, постаје

$$\frac{a}{\sqrt{N}}+\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{N}},$$

а, с обзиром на (20), норма овог кватерниона је јединица. Другим речима, сваки кватернион може се написати у облику

$$Q = a+\mathfrak{a} = \sqrt{N}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}+\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{N}\,(\cos\vartheta+\mathfrak{a}_0\sin\vartheta), \tag{22}$$

где је $\mathfrak{a}_0$ орт вектора $\mathfrak{a}$ и где је ϑ одређено једначинама

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{N}},\quad \sin\vartheta = \frac{|\mathfrak{a}|}{\sqrt{N}}.$$

Норма производа два кватерниона може се одредити на овај начин. Посматрајмо кватернионе Q_1 и Q_2 чије су норме N_1 и N_2 и њихов производ Q, тј.

$$Q = Q_1 \wedge Q_2 .$$

Лако је утврдити да је тада

$$\overline{Q} = \overline{Q_2} \wedge \overline{Q_1},$$

где црте изнад ознаке кватерниона обележавају конјуговане кватернионе, па је према томе норма N кватерниона Q дата изразом

$$\begin{aligned} N = Q\wedge\overline{Q} &= (Q_1\wedge Q_2)\wedge(\overline{Q_2}\wedge\overline{Q_1}) = Q_1\wedge(Q_2\wedge\overline{Q_2})\wedge\overline{Q_1} = \\ &= Q_1\wedge N_2\wedge\overline{Q_1} = (Q_1\wedge\overline{Q_1})N_2 = N_1 N_2 . \end{aligned} \tag{22}$$

Дакле, норма производа два кватерниона једнака је производу норми кватерниона чинилаца и не зависи од реда чинилаца. Према томе је производ јединичних кватерниона јединични кватернион.

Приметимо и то да се скаларни и векторски производ два вектора могу изразити помоћу кватернионског производа на овај начин. Наиме, из кватернионских производа

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b} &= -\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}\wedge\mathfrak{a} &= -\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \end{aligned} \tag{23}$$

следује одмах сабирањем и одузимањем

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{a}}{2} \tag{24}$$

и

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}-\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{a}}{2}. \tag{25}$$

Да бисмо дефинисали дељење кватерниона одредићемо прво реципрочну вредност датог кватерниона

$$Q_1 = a+\mathfrak{a} = a+a_1\mathfrak{i}+a_2\mathfrak{j}+a_3\mathfrak{k}. \tag{26}$$

То значи потражићемо кватернион

$$Q = u+\mathfrak{x} = u+x_1\mathfrak{i}+x_2\mathfrak{j}+x_3\mathfrak{k}, \tag{27}$$

да буде

$$Q_1\wedge Q = 1. \tag{28}$$

Према томе

$$Q_1\wedge Q = au - \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}+a\mathfrak{x}+\mathfrak{a}u+\mathfrak{a}\times\mathfrak{x} = 1, \tag{29}$$

одакле је

$$\begin{aligned} au-\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} &= 1 \\ a\mathfrak{x}+\mathfrak{a}u+\mathfrak{a}\times\mathfrak{x} &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Да бисмо одредили скалар u помножићемо прву од ових једначина скаларом a, а другу скаларно вектором $\mathfrak{a}$. Тада се добијају једначине

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^2u - a(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}) &= a \\ \mathfrak{a}^2u + a(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

јер је у другој једначини $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{x})=0$. Сабирањем ових једначина добија се одмах

$$a^2u+\mathfrak{a}^2u = a,$$

одакле

$$u = \frac{a}{a^2+\mathfrak{a}^2} = \frac{a}{N}. \tag{32}$$

За одређивање вектора $\mathfrak{x}$ треба другу од једначина (30) помножити векторски, рецимо здесна, вектором $\mathfrak{a}$, па се добија

$$a(\mathfrak{x}\times\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}\times\mathfrak{x})\times\mathfrak{a} = 0,$$

јер је $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})u = 0$. Ако се у првом члану у овој једначини замени векторски производ својом вредношћу из друге од једначина (30) и двоструки векторски производ у другом члану развије, добиће се

$$a^2\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{a}^2\mathfrak{x} - \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}) = 0.$$

Ако се још из прве од једначина (30) унесе вредност за скаларни производ $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}$ добија се

$$a^2\mathfrak{x} + \mathfrak{a}^2\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = 0,$$

одакле је најзад

(33) $$\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{a}}{a^2+\mathfrak{a}^2} = -\frac{\mathfrak{a}}{N}.$$

Према томе за реципрочну вредност Q кватерниона Q_1 добија се

(34) $$Q = \frac{a-\mathfrak{a}}{a^2+\mathfrak{a}^2} = \frac{a-\mathfrak{a}}{N} = \frac{\overline{Q}_1}{N}.$$

Посматрањем овог резултата могу се одмах уочити две ствари. Прво, пошто је реципрочна вредност датог кватерниона увек са њим коаксијални кватернион те је стога

(35) $$Q_1 \wedge Q = Q \wedge Q_1 = 1,$$

постоји само једна потпуно одређена реципрочна вредност датог кватерниона Q_1, коју ћемо бележити $Q_1^{-1} = \frac{1}{Q_1}$. Друго, реципрочна вредност датог кватерниона је неодређена и не може се одредити само у случају $Q_1 = 0$, тј. $a = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Пређимо сад на општи проблем дељења. Ако треба израчунати количник

(36) $$\frac{Q_1}{Q_2},$$

може се написати

(37) $$\frac{Q_1}{Q_2} = Q_1 \wedge \frac{1}{Q_2} = Q_1 \wedge Q_2^{-1},$$

или

(38) $$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{Q_2} \wedge Q_1 = Q_2^{-1} \wedge Q_1,$$

и проблем дељења се своди на множење реципрочном вредношћу делиоца (имениоца). Међутим, како знамо, производи (37) и (38) св, у општем случају, различити и, према томе, закључујемо да количник два кватерниона у општем случају има две вредности. Обе ове вредности добијају се множењем дељеника реципрочном вредношћу делиоца и то једном здесна и једном слева. Отуда следује да се не може делити нулом као ни код обичних бројева.

Ако треба, међутим, из датог производа кватерниона и једног познатог чиниоца, кад се зна ред чинилаца, одредити други чинилац, решење је једнозначно одређено. На пр. из

(39) $$Q_1 \wedge Q_2 = Q_3$$

следује, на основу закона асоцијације, после множења здесна са Q_2^{-1}

(40) $$Q_1 = Q_3 \wedge Q_2^{-1},$$

а после множења слева са Q_1^{-1}

(41) $$Q_2 = Q_1^{-1} \wedge Q_3,$$

дакле, потпуно одређени резултати, ако су Q_1 и Q_2 различити од нуле.

Ако треба поделити два кватерниона који се своде на векторе, тј. поделити нека два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, довољно је, с обзиром на горња општа излагања, одредити вредност израза $\frac{1}{\mathfrak{b}}$. Дакле, на основу једначине (34)

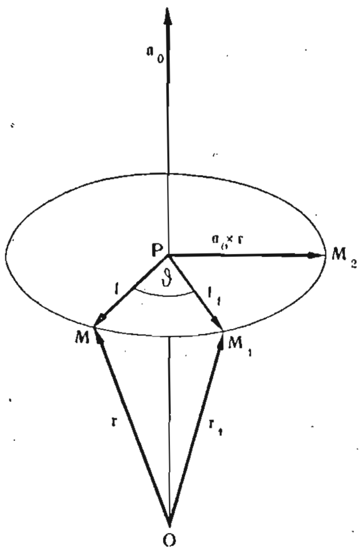
(42) $$\frac{1}{\mathfrak{b}} = -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}^2}.$$

Како смо видели раније, нема дељења као обрнуте радње скаларном и векторском производу, према томе, дељење вектора постоји само као обрнута операција кватернионском производу вектора.

17.1 Примена кватерниона

Најзад ћемо показати примену кватерниона при проучавању ротације чврстог тела око непомичне осе.

Нека се неко чврсто тело, везано за неку непомичну осу, обрне око ове осе у позитивном смеру за угао ϑ. Нека та оса буде одређена ортом $\mathfrak{a}_0$ и нека пролази кроз сталну тачку простора O. Свака тачка M чврстог тела описује при том лук MM_1 круга чија је раван нормална на оси, а његов центар P лежи на оси (сл. 70).



Сл. 70

Вектор $\overrightarrow{OM} = \mathfrak{r}$ прелази услед те ротације у вектор $\overrightarrow{OM_1} = \mathfrak{r}_1$, при чему је $\sphericalangle MPM_1 = \vartheta$. Наш задатак је да вектор $\mathfrak{r}_1$ изразимо помоћу вектора $\mathfrak{r}$, угла ротације ϑ и орта осе $\mathfrak{a}_0$. При томе је очигледно:

(1) $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})$

(2) $\overrightarrow{PM} = \mathfrak{l} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})$

(3) $\overrightarrow{PM_1} = \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})$

(4) $\overrightarrow{PM_2} = \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}$,

где је M_2 тачка на кругу са полупречником PM са центром у P, у коју прелази тачка M после ротације у директном смеру за $\frac{\pi}{2}$. Вектор $\mathfrak{l}_1$ може се разложити у компоненте дуж вектора $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}$, па се добија

(5) $$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l} \cos\vartheta + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}) \sin\vartheta .$$

Ако се у овај израз унесу вредности вектора $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{l}_1$ из једначина (2) и (3), добија се

$$\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r}) = [\mathfrak{r} - \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})] \cos\vartheta + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}) \sin\vartheta$$

и, најзад,

(6) $$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} \cos\vartheta + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}) \sin\vartheta + \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})(1 - \cos\vartheta),$$

што смо и хтели да изведемо.

Образац (6) претставља у векторском облику познате Ојлерове (Euler) обрасце за одређивање положаја дате тачке после ротације за угао ϑ око одређене непомичне осе. И заиста, ако се замисли Декартов триједар $Oxyz$ са почетком у тачки O и ако су координате тачке $M(x, y, z)$ и тачке

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, а косинуси праваца осе $\mathfrak{a}_0(\alpha, \beta, \gamma)$, добијају се из (6) Ојлерови обрасци

(7) $$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\vartheta + (\beta z - \gamma y)\sin\vartheta + \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos\vartheta), \\ y_1 &= y\cos\vartheta + (\gamma x - \alpha z)\sin\vartheta + \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos\vartheta), \\ z_1 &= z\cos\vartheta + (\alpha y - \beta x)\sin\vartheta + \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos\vartheta). \end{aligned}$$

Ако се узме у обзир да је

$$\mathfrak{a}_0 \times (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}) = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r}) - \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{r},$$

онда се у једначини (6) може ставити

$$(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r})\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}_0 \times (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r}),$$

па ће она добити облик

(8) $$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r})\sin\vartheta + \mathfrak{a}_0 \times (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r})(1 - \cos\vartheta).$$

Ставимо ли још

$$\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$1 - \cos\vartheta = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

и уведемо вектор

(9) $$\mathfrak{a}_0 \sin\frac{\alpha}{2} = \mathfrak{a},$$

једначина (6) може се написати

(10) $$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + 2(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})\cos\frac{\vartheta}{2} + 2\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}).$$

Према томе, ротација вектора $\mathfrak{r}$ око осе одређене ортом $\mathfrak{a}_0$ за угао ϑ дата је скаларом

(11) $$a = \cos\frac{\vartheta}{2}$$

и вектором

(12) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \sin\frac{\vartheta}{2},$$

односно кватернионом

(13) $$a + \mathfrak{a} = \cos\frac{\vartheta}{2} + \mathfrak{a}_0 \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Овај кватернион је очигледно јединични и стога образац

(14) $$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + 2(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})a + 2\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})$$

одређује ротацију, кад је испуњен услов $a^2 + \mathfrak{a}^2 = 1$, тј. ако је кватернион $a + \mathfrak{a}$ јединични.

Обрнуто, сваком јединичном кватерниону $a+\mathfrak{a}$ одговара ротација око осе одређене вектором $\mathfrak{a}$ за угао ϑ. При томе се угао ϑ и орт осе ротације могу израчунати из једначина (11) и (12), ако је $\mathfrak{a} \neq 0$. Очигледно је да се a и $\mathfrak{a}$ не мењају, ако се истовремено промени смер осе ротације и знак угла ϑ.

Образац (14) за ротацију добија много згоднији облик, ако се напише у облику кватернионског производа и уједно показује механичко значење кватернионског множења.

Да бисмо образац (14) написали помоћу кватернионског множења, изразићемо векторске производе помоћу кватернионских на основу једначине (25) и т. 17, тј.

$$(15) \qquad \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a})$$

и

$$(16) \qquad \mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}) = \frac{1}{4}\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}) - \frac{1}{4}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{a} =$$

$$= \frac{1}{4}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}).$$

Међутим, како је $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} = -\mathfrak{a}^2$ скалар, може се слободно премештати, па се може написати

$$(17) \qquad \mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}).$$

Ако се изрази (15) и (17) унесу у једначину (14) и узме у обзир да је

$$a^2 + \mathfrak{a}^2 = a^2 - \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} = 1,$$

добија се

$$\mathfrak{r}_1 = (a^2 - \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{r} + a(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} - \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}).$$

После свођења и премештања скаларних фактора добија се

$$\mathfrak{r}_1 = a\mathfrak{r}a + \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r}a - a\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a} =$$
$$= (a+\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{r}a - (a+\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a} =$$
$$= (a+\mathfrak{a}) \wedge (\mathfrak{r}a - \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}),$$

одакле, најзад, за ротацију

$$(18) \qquad \mathfrak{r}_1 = (a+\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{r} \wedge (a-\mathfrak{a}).$$

Ако се изврши ротација за $\vartheta = \pi$ (*огледање, симетрија*), онда је $\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, тј. скаларни део кватерниона $a = 0$,

а $\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, дакле $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$. У том случају образац (18) постаје

$$(19) \qquad \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{r} \wedge (-\mathfrak{a}_0) = -\mathfrak{a}_0 \wedge \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{a}_0 = 2\,\mathfrak{a}_0(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{r}) - \mathfrak{r}.$$

У специјалном случају, кад је $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{a}_0$, добија се из обрасца за ротацију у облику (6) одмах

$$(20) \qquad \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}\cos\vartheta + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{r})\sin\vartheta = (\cos\vartheta + \mathfrak{a}_0 \sin\vartheta) \wedge \mathfrak{r} =$$
$$= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \mathfrak{a}_0 \sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \wedge \mathfrak{r} = (a+\mathfrak{a})^2 \wedge \mathfrak{r},$$

где смо са $(a+\mathfrak{a})^2$ обележили кватернионски производ $(a+\mathfrak{a}) \wedge (a+\mathfrak{a})$, пошто су то коаксијални кватерниони и пошто нема опасности од забуне.

Претпоставимо сад да треба извршити две узастопне ротације око две различите осе које само пролазе кроз тачку O. Нека треба извршити прво ротацију одређену јединичним кватернионом $a_1 + \mathfrak{a}_1$, па затим ротацију одређену јединичним кватернионом $a_2 + \mathfrak{a}_2$. Тада се на основу обрасца (18) може написати

$$(21) \qquad \mathfrak{r}_1 = (a_1 + \mathfrak{a}_1) \wedge \mathfrak{r} \wedge (a_1 - \mathfrak{a}_1)$$

и

$$(22) \qquad \mathfrak{r}_2 = (a_2 + \mathfrak{a}_2) \wedge \mathfrak{r}_1 \wedge (a_2 - \mathfrak{a}_2).$$

Заменом вредности $\mathfrak{r}_1$ из (21) у једначину (22) добија се с обзиром на важност асоцијативног закона

$$(23) \qquad \mathfrak{r}_2 = (a_2 + \mathfrak{a}_2) \wedge [(a_1 + \mathfrak{a}_1) \wedge \mathfrak{r} \wedge (a_1 - \mathfrak{a}_1)] \wedge (a_2 - \mathfrak{a}_2) =$$
$$= [(a_2 + \mathfrak{a}_2) \wedge (a_1 + \mathfrak{a}_1)] \wedge \mathfrak{r} \wedge [(a_1 - \mathfrak{a}_1) \wedge (a_2 - \mathfrak{a}_2)].$$

Ако се стави

$$(24) \qquad (a_2 + \mathfrak{a}_2)(a_1 + \mathfrak{a}_1) = a + \mathfrak{a},$$

мора бити

$$(25) \qquad (a_1 - \mathfrak{a}_1)(a_2 - \mathfrak{a}_2) = a - \mathfrak{a},$$

што је лако и проверити. Према томе долазимо поново до обрасца (18) који одређује једну ротацију дату јединичним кватернионом $a + \mathfrak{a}$. Да је $a + \mathfrak{a}$, као производ јединичних кватерниона, заиста јединични кватернион, показали смо раније.

То значи да се две ротације око оса које пролазе кроз тачку O могу заменити једном ротацијом око неке треће осе одређене производом јединичних кватерниона датих ротација. Из некомутативности кватернионског производа (24) следује да слагање ротација није комутативно и да се, према томе, у општем случају, променом реда ротација добијају разни положаји тела. Осим тога треба обратити пажњу да се, при одређивању кватерниона који одговара резултату обеју ротација, мора у кватернионском производу на првом месту узети јединични кватернион који одговара другој ротацији по реду према једначини (24). Слагање ротација је комутативно само у скоро тривијалном случају кад се ротација врши око исте осе, што следује одмах из једначине (24), јер су само коаксијални кватерниони комутативни.

Ова разматрања о ротацији око непомичне осе показују зашто се, што смо већ раније тврдили, коначна ротација не може сматрати као вектор.

Како се сваки кватернион може, деобом модулом, претворити у јединични, то сваки кватернион одређује неку ротацију. Уочимо кватернион Q чија је норма $N \neq 1$, онда ротација вектора $\mathfrak{r}$ коју он одређује изгледа

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{Q}{\sqrt{N}} \wedge \mathfrak{r} \wedge \frac{\overline{Q}}{\sqrt{N}} = Q \wedge \mathfrak{r} \wedge \frac{\overline{Q}}{N} = Q \wedge \mathfrak{r} \wedge Q^{-1}. \tag{26}$$

Ако, поред ротације, вектор $\mathfrak{r}$ треба и продужити N пута, из (26) одмах следује

$$\mathfrak{R}_1 = N \mathfrak{r}_1 = Q \wedge \mathfrak{r} \wedge \overline{Q}. \tag{27}$$

Према томе, помножити вектор $\mathfrak{r}$ слева кватернионом Q и здесна конјугованим кватернионом $\overline{Q}$ значи обрнути овај вектор око осе одређене вектором кватерниона за угао који је одређен скаларом кватерниона и продужити га у односу норме кватерниона.

18. Примери

1. Нека буде $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$. Показати да су у том случају вектори $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$ колинеарни.

Одузимањем условних једначина с обзиром на дистрибутивност векторског множења добија се

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) - (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = 0$$

и, најзад,

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = 0,$$

чиме је колинеарност вектора $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$ доказана.

2. Израчунати површину троугла одређена векторима

$$\mathfrak{a} = 3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

Површина P троугла одређена је обрасцем

$$P = \frac{1}{2} |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|,$$

па треба израчунати само интензитет векторског производа

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\mathfrak{i} - 8\mathfrak{j} - 8\mathfrak{k},$$

тј. $\mathfrak{a} | \times \mathfrak{b} | = 8\sqrt{3}$ и, најзад,

$$P = 4\sqrt{3}.$$

До истог резултата се долази и полазећи од

$$P^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \frac{1}{4} [a^2 b^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2] = 48,$$

одакле је

$$P = 4\sqrt{3}.$$

3. Израчунати запремину тетраедра $SABC$ чије су координате темена дате: $S(x_1, y_1, z_1)$, $A(x_2, y_2, z_2)$, $B(x_3, y_3, z_3)$, $C(x_4, y_4, z_4)$.

Ако се ивице из темена S узму као вектори, онда је

$$\overrightarrow{SA} = \{x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{SB} = \{x_3 - x_1, \quad y_3 - y_1, \quad z_3 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{SC} = \{x_4 - x_1, \quad y_4 - y_1, \quad z_4 - z_1\}.$$

Према томе по 15. 9 образац 6 за запремину тетраедра се добија израз

$$V = \frac{1}{6} \left[\overrightarrow{SA}\ \overrightarrow{SB}\ \overrightarrow{SC}\right] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} D.$$

Детерминанта D трећег реда може се на познати начин ивичењем написати у облику детерминанте четвртог реда и, после трансформације, довести на симетричан облик згодан за памћење. Наиме, очигледно се за D може написати

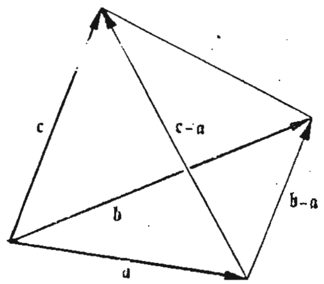
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тако се најзад за запремину тетраедра може написати

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}.$$

Очигледно је да $D=0$ претставља услов да четири тачке S, A, B, C леже у једној равни.

4. Ако се стране тетраедра претставе векторима оријентисаним у спољашњи простор, збир тих вектора је једнак нули. Доказати.



Сл. 71

Нека $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ буду ивице тетраедра које полазе из истог темена, поређане тако да чине десни триједар (сл. 71). Тада вектори

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}),\quad \frac{1}{2}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b}),\quad \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}),$$

претстављају површине оне три стране тетраедра које се стичу у полазном темену. Четврта страна је тада одређена вектором

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})\times(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})=\frac{1}{2}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})-\frac{1}{2}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{c})-\frac{1}{2}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}),$$

одакле је очигледно да је збир сва четири вектора једнак нули.

Овај став важи и за сваки полиједар и може се врло лако доказати разлагањем полиједра у тетраедре.

5. Израчунати вектор $\mathfrak{x}$, кад је дато

$$(1)\qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}=\alpha \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}\times\mathfrak{x}=\mathfrak{b},$$

где су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и скалар α познате величине.

Ако се обе стране друге од једначина (1) помноже векторски, рецимо здесна, вектором $\mathfrak{a}$, добија се

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{x})\times\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}.$$

После развијања леве стране добија се

$$\mathfrak{x}\,a^2-\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x})=\mathfrak{b}\times\mathfrak{a},$$

одакле, с обзиром на прву од једначина (1), следује

$$\mathfrak{x}=\frac{1}{a^2}\{\alpha\,\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{a}\}.$$

6. Нека буде дат неки вектор $\mathfrak{r}$ и оријентисана раван, одређена ортом $\mathfrak{n}_0$. Разложити вектор $\mathfrak{r}$ у две компоненте — једну нормалну на датој равни (колинеарну са ортом $\mathfrak{n}_0$) и другу у равни (нормално на $\mathfrak{n}_0$). Одредити огледалску слику $\mathfrak{r}_1$ вектора $\mathfrak{r}$ на датој равни, ако му је почетак у равни.

На основу т. 15.1 једн. 11 компонента вектора $\mathfrak{r}$ нормално на $\mathfrak{n}_0$ одређена је изразом

$$\mathfrak{r}-(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0.$$

Овај се израз може сад даље трансформисати на овај начин

$$\mathfrak{r}-(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0=\mathfrak{r}\,(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{n}_0)-(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0=\mathfrak{n}_0\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}_0).$$

Дакле,

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{n}_0\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}_0)+(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0.$$

Огледалска слика вектора $\mathfrak{r}$ на равни са ортом $\mathfrak{n}_0$ (сл. 38) је вектор $\mathfrak{r}_1$ који се од вектора $\mathfrak{r}$ разликује тиме само што му је компонента нормална на равни супротна компоненти вектора $\mathfrak{r}$, тј.

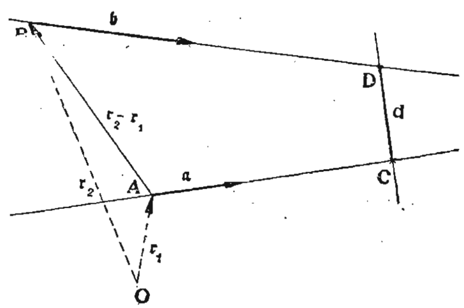
$$\mathfrak{r}_1=\mathfrak{n}_0\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{n}_0)-(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,\mathfrak{n}_0.$$

7. Дате су у простору две праве векторским једначинама

$$(1)\qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\mathfrak{a}\,t \quad \text{и} \quad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_2+\mathfrak{b}\,t,$$

где је t произвољни параметар, које се укрштају, тј. за које важи $\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2\neq 0$ и $(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\neq 0$. Наћи најкраће растојање ових правих.

Нека вектор $\mathfrak{r}_1$ буде вектор положаја тачке A на једној правој, а $\mathfrak{r}_2$ вектор положаја тачке B на другој правој (сл. 72). Заједничка нормала мора бити колинеарна са вектором $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, јер треба да буде нормална на оба вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одн на обе дате праве.



Сл. 72

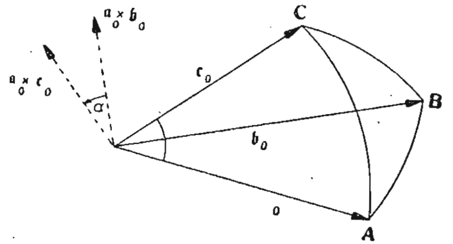
Најкраће растојање d је тада очигледно пројекција вектора $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ на правац вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ заједничке нормале, тј.

(2) $$d = CD = \frac{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})}{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|}.$$

Ако је $\mathfrak{r}_1 = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$; $\mathfrak{r}_2 = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$; $\mathfrak{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$; $\mathfrak{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, онда се образац (2) може у скаларном облику написати

(3) $$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}}.$$

Најкраће растојање правих може бити позитивно и негативно, према томе која се права узме као прва, а која као друга.



Сл. 73

8. Извести синусну теорему сферне тригонометрије.

Нека $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{c}_0$ буду ортови који својим крајевима одређују сферни троугао ABC (сл. 73). На основу т. 15. 12 једн. 2 имамо

$$(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}_0)\times(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{c}_0) = \mathfrak{a}_0\,[\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{c}_0].$$

Међутим је

$$(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}_0)\times(\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{c}_0) = \sin b \sin c \sin\alpha\cdot\mathfrak{a}_0$$

и, према томе,

(1) $$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{[\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0]}{\sin a\ \sin b\ \sin c}.$$

Исте такве изразе добијамо и за $\dfrac{\sin\beta}{\sin b}$ и $\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$ развијањем израза

$$(\mathfrak{b}_0\times\mathfrak{c}_0)\times(\mathfrak{b}_0\times\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{b}_0[\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0] = \mathfrak{b}_0[\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}]$$

и

$$(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{a}_0)\times(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{b}_0) = \mathfrak{c}_0[\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0] = \mathfrak{c}_0[\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0].$$

Према томе је

(2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c},$$

што је и требало извести.

9. Дат је триједар основних ортова $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, који међу собом чине углове од 60^0 и вектор

$$\mathfrak{x} = 2\mathfrak{e}_1 - 2\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3.$$

Изразити вектор $\mathfrak{x}$ у коваријантном облику.

Ако векторе конјугованог триједра обележимо са $\mathfrak{e}_1^*$, $\mathfrak{e}_2^*$, $\mathfrak{e}_3^*$, онда је по Гибзову обрасцу (т. 15.14 једн. 3)

$$\mathfrak{x} = \frac{3}{2}\,\mathfrak{e}_1^* - \frac{1}{2}\,\mathfrak{e}_2^* + \mathfrak{e}_3^*.$$

10. Дати су комплексни бројеви $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Изразити $\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ у најпростијем облику помоћу вектора положаја $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ који одговарају тачкама z_1 и z_2.

Одмах се добија

$$\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2}\,[(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)] =$$
$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 = \mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{r}_2.$$

11. Показати да је резултат две симетрије у односу на две осе које пролазе кроз исту тачку O еквивалентан ротацији за двоструки угао између датих оса, а око осе кроз O нормалне на равни одређеној датим осама.

Како смо већ видели (т. 17. 1 једн. 19), симетрија у односу на осу одређена је ортом осе и, према томе, вектор положаја $\mathfrak{r}$, после прве симетрије у односу на осу $\mathfrak{a}_0$, прелази у

$$\mathfrak{r}_1 = -\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{r}\wedge\mathfrak{a}_0,$$

а после друге симетрије у односу на осу $\mathfrak{b}_0$ вектор $\mathfrak{r}_1$ прелази у

$$\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{r}_1\wedge\mathfrak{b}_0.$$

Према томе је

$$\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{b}_0\wedge[-\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{r}\wedge\mathfrak{a}_0]\wedge\mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{a}_0)\wedge\mathfrak{r}\wedge(\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{b}_0).$$

Ако се стави $\sphericalangle(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0) = \vartheta$, онда је $\mathfrak{b}_0\wedge\mathfrak{a}_0 = -\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}_0 = -\cos\vartheta - \mathfrak{n}_0\sin\vartheta$, где је $\mathfrak{n}_0$ орт вектора $\mathfrak{a}_0\times\mathfrak{b}_0$. С друге стране је $\mathfrak{a}_0\wedge\mathfrak{b}_0 = -\cos\vartheta + \mathfrak{n}_0\sin\vartheta$, па дакле

$$\mathfrak{r}_2 = (-\cos\vartheta - \mathfrak{n}_0\sin\vartheta)\wedge\mathfrak{r}\wedge(-\cos\vartheta + \mathfrak{n}_0\sin\vartheta) =$$
$$= (\cos\vartheta + \mathfrak{n}_0\sin\vartheta)\wedge\mathfrak{r}\wedge(\cos\vartheta - \mathfrak{n}_0\sin\vartheta).$$

То значи да $\mathfrak{r}$ прелази у $\mathfrak{r}_2$ директно после ротације за угао 2ϑ око осе $\mathfrak{n}_0$. Ова ротација је одређена јединичним кватернионом $\cos\vartheta + \mathfrak{n}_0 \sin\vartheta$.

Задаци

1. Написати израз $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ у облику једног векторског производа.

2. Под којим условима важи $\mathfrak{a}\times\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, ако је $\mathfrak{c}\neq 0$?

3. Показати да је $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\times(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=2(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$ и објаснити геометриски смисао те једначине, претстављајући векторе $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ дијагоналама паралелограма.

4. Наћи површину паралелограма чије су стране вектори:

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{i}-3\mathfrak{j}+\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{b}=2\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+3\mathfrak{k}.$$

5. Ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ чине десни триједар. Коју оријентацију има онда триједар вектора $\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}+\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$?

6. Израчунати запремину V косоуглог паралелепипеда, који је одређен векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ истог интензитета a, кад вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ чине угао од 60°, а исти толики угао и вектор $\mathfrak{c}$ са вектором $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$.

7. Израчунати запремину косоуглог паралелепипеда чије су ивице јединични вектори $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ који међу собом чине углове 60°.

8. Вектори $\mathfrak{r}_1=\{6, 3, 1\}$; $\mathfrak{r}_2=\{3, 6, 1\}$; $\mathfrak{r}_3=\{1, 3, 6\}$ полазе од координатног почетка. Израчунати површину троугла одређеног њиховим крајевима.

9. Израчунати $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})-\mathfrak{c}\times[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{b}]$.

10. Показати да су вектори $\mathfrak{a}=\{3,4,5\}$; $\mathfrak{b}=\{1,2,2\}$; $\mathfrak{c}=\{9,14,16\}$ компланарни.

11. Дата су темена тетраедра $ABCD: A(0,0,0); B(3,4,-1); C(2,3,5); D(6,0,-3)$. Израчунати запремину тетраедра и његову висину из темена A.

12. Проверити и геометриски протумачити израз

$$\left[\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}\,\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}\,\frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{a}}{2}\right]=\frac{1}{4}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}].$$

13. Показати да тачке $A(-3,2,4)$; $B(6,5,10)$; $C(9,-3,4)$ и $D(3,-1,0)$ леже у једној равни.

14. Написати једначину равни која пролази кроз три дате тачке, одређене векторима положаја, кад тачке не леже на истој правој. (Два начина: искористити линеарну зависност компланарних вектора и услов компланарности помоћу мешовитог производа).

15. Из геометриски очигледног израза $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2\leq a^2b^2c^2$ извести једну особину детерминаната за детерминанте трећег реда.

16. Одредити растојање тачке A, одређене вектором положаја $\mathfrak{r}_1$, од праве $(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0)\times\mathfrak{a}=0$.

17. Доказати да се услов колинеарности три тачке A, B и C, одређене векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ и $\mathfrak{r}_3$, може написати у облику

$$(\mathfrak{r}_2\times\mathfrak{r}_3)+(\mathfrak{r}_3\times\mathfrak{r}_1)+(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)=0.$$

18. Израчунати најкраће растојање праве која пролази кроз тачку $A(2, 1, -1)$ а паралелна је вектору $\mathfrak{a}=\{1, 1, 1\}$ и праве кроз тачку $B(-1, 0, 5)$ паралелне вектору $\mathfrak{b}=\{2, -2, 4\}$.

19. Нека $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{b}_0$ буду два орта у равни xOy и нека са ортом $\mathfrak{i}$ чине угао α одн. β. Посматрајући скаларни и векторски производ ових ортова извести тригонометриске обрасце за $\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$.

20. Ивице четворостране пирамиде претстављене су векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ са заједничким почетком у врху. Претставити стране пирамиде и основу са векторима оријентисаним у спољашњи простор и сабирањем показати да је збир тих вектора једнак нули.

21. Нека косинуси праваца оса два Декартова правоугла триједра чији су ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ у односу један на други, буду дати са $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_1, \ldots$. Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

22. Извести образац (т. 15.10 једн. 7) за развијање двоструког векторског производа претстављајући векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ помоћу координата.

23. Написати векторски производ $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ у неким косоуглим координатама и изразити га у коваријантном облику.

24. Написати једначину праве линије која пролази кроз тачку A, одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_1$, и која је нормална на два линеарно независна вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

25. Израчунати $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{b})+\mathfrak{c}\cdot[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{b}]$.

26. Израчунати $[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\times(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})]\cdot(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})$.

27. Израз $[\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})]\cdot\mathfrak{d}$ претставити: *a*) као скаларни производ два вектора и *b*) помоћу скаларних производа.

28. Претставити $B=[\mathfrak{n}_0\times(\mathfrak{a}\times\mathfrak{n}_0)]^2$ као квадрат једног простог векторског производа, ако је $\mathfrak{n}_0$ орт.

29. За триједар вектора $\mathfrak{e}_1=\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $\mathfrak{e}_2=\mathfrak{k}+\mathfrak{i}$, $\mathfrak{e}_3=\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ наћи конјуговани триједар вектора.

30. Одредити косинус угла између праве $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\lambda\mathfrak{a}$ и равни $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0=k$.

31. Нека буде $\mathfrak{r}=\mathfrak{i}-\mathfrak{j}$. Како треба изабрати вектор $\mathfrak{x}$, па да буде $(\mathfrak{i}-\mathfrak{j})\wedge\mathfrak{x}=2\mathfrak{j}$?

32. Равностран троугао уписан је у јединичном кругу са центром у координатном почетку тако, да му је једно теме на y-оси. Одредити векторе положаја сва три темена.

33. Нека буде у равни дат вектор $\vec{AB}=2\mathfrak{i}+4\mathfrak{j}$. Одредити у истој равни вектор нормалан на овом вектору са два пут већим интензитетом.

34. Дати су у равни вектори $\mathfrak{a}=\{2, 3\}$ и $\mathfrak{b}=\{1, 2\sqrt{3}\}$ једнаких интензитета. За који угао треба обрнути вектор $\mathfrak{b}$ у позитивном смеру, па да се поклопи са вектором $\mathfrak{a}$?

35. Нека темена троугла ABC буду одређена векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ у равни. Показати да се услов да троугао буде равностран може изразити у облику

$$\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{b}+\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{c}-\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}-\mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}=0.$$

36. Поделити вектор $\mathfrak{a}=2\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}-4\mathfrak{k}$ вектором $\mathfrak{b}=\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$.

37. Одредити реципрочну вредност кватерниона $Q=1+3\mathfrak{i}-2\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$.

38. Одредити количник кватерниона

$$Q_1=4+3\mathfrak{i}+2\mathfrak{j}-\mathfrak{k} \quad \text{и} \quad Q_2=-1+\mathfrak{i}-5\mathfrak{j}-2\mathfrak{k}.$$

39. Показати да се две узастопне симетрије око исте осе поништавају.

40. Показати да су две узастопне симетрије око две осе кроз исту тачку само онда комутативне, ако су те осе узајамно управне.

41. Показати да се свака ротација око непомичне осе за угао α може на бесконачно много начина свести на две симетрије око оса које чине угао $\frac{\alpha}{2}$.

42. Сложити две ротације око оса које пролазе кроз тачке O_1 и O_2 при услову да углови ротације нису супротни.

ГЛАВА II

ВЕЗАНИ ВЕКТОРИ

19. Одређивање везаног вектора

Вектор везан за праву може, како смо рекли, да клизи само дуж основе на којој је, као, на пр., вектор силе која делује на неко чврсто тело. Такви вектори су, кад леже на истој основи, *једнаки* ако имају једнаке интензитете и исти смер, а *директно супротни* ако су им интензитети једнаки а смерови супротни. Вектор $\mathfrak{A}$ везан за праву l обележаваћемо кратко са $\mathfrak{A}^{(l)}$.

За одређивање вектора везаног за праву потребно је одредити положај основе вектора у простору и затим сам вектор на тој основи. Права у простору, у најопштијем случају, одређена је једначинама

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &= mx+n\,, \\ z &= px+q\,. \end{aligned}$$

На тај начин положај основе и њена оријентација у односу на изабрати Декартов триједар одређени су са четири броја. За одређивање самог вектора на основи потребан је само један број (алгебарска вредност вектора) Према томе, за одређивање вектора везаног за праву потребно је *пет* бројева.

Тих пет потребних бројева могу се одабрати на разне начине. Тако је везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ (сл. 74) очигледно одређен слободним вектором $\mathfrak{A}$ који му је геометриски једнак и вектором положаја $\mathfrak{r}_1$ почетка Q_1. Вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{r}_1$ зову се *векторске координате* везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на тачку O.

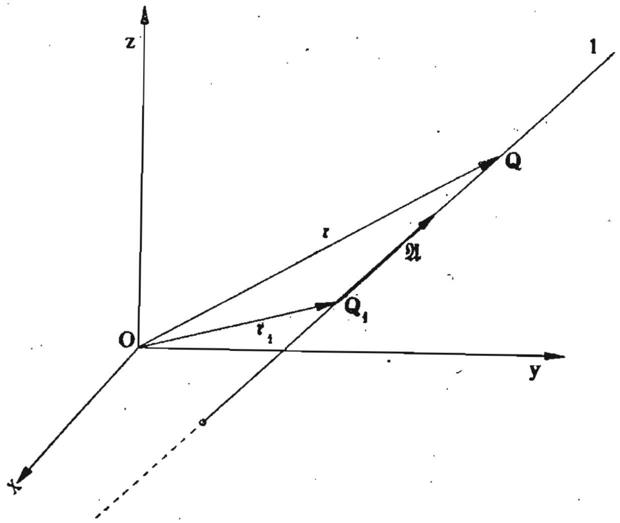
Како је у односу на дати Декартов триједар

$$\mathfrak{A}=\{A_1,\, A_2,\, A_3\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{r}_1=\{x_1,\, y_1,\, z_1\},$$

везани вектор има шест скаларних координата, тј.

$$\mathfrak{A}^{(l)}=\{\,A_1,\, A_2,\, A_3;\;\; x_1,\, y_1,\, z_1\,\}.$$

Од ових шест координата само је пет независних, јер почетак везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ може бити ма у којој тачки



Сл. 74

његове основе l. Према томе, вектор везан за праву одређен је у општем случају слободним вектором $\mathfrak{A}$ и вектором положаја $\mathfrak{r}$ ма које тачке Q на основи. Међутим, увек је

(2) $$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = k\,\mathfrak{A},$$

где је k ма који број, а то је векторска једначина основе — праве l. Ако је $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$, једначина (2) може се у скаларном облику написати овако

(3) $$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{A_2} = \frac{z - z_1}{A_3}.$$

Из ове једначине је очигледно да се, при прелазу од координата $\{A_1, A_2, A_3;\ x_1, y_1, z_1\}$ на неке друге координате $\{A_1, A_2, A_3;\ x, y, z\}$, може за једну од координата x, y, z унапред узети нека одређена вредност и тада су остале две потпуно одређене. Дакле, поред A_1, A_2, A_3, везаном вектору $\mathfrak{A}^{(l)}$ одговарају, у овом смислу, само још две одређене од три координате x, y, z.

За одређивање вектора везаног за тачку потребно је, поред, рецимо, правоуглих координата вектора као слободног знати и координате одређене тачке — почетка вектора —

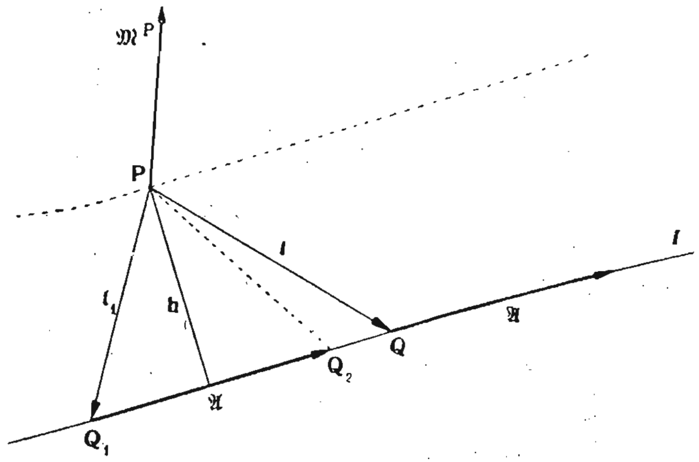
која сад није произвољна. Дакле, за одређивање вектора везаног за тачку потребно је *шест* бројева. Из разлога симетрије се, међутим, како смо показали, и вектор везан за праву одређује са шест бројева од којих је само пет независних.

У наредном тексту ће реч везани вектор увек означавати вектор везан за праву, уколико није нарочито наглашено да је везан за тачку.

20. Момент везаног вектора у односу на тачку

Нека $\mathfrak{A}^{(l)}$ буде везани вектор са основом l, Q_1 његов почетак и P ма која тачка простора узета као пол (сл. 75). Тада се векторски производ, вектора положаја $\mathfrak{l}_1 = \overrightarrow{PQ_1}$ почетка везаног вектора у односу на пол P и самог вектора $\mathfrak{A}$, зове *момент* везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на тачку (пол) P. Дакле,

(1) $$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{A},$$



Сл. 75

где је са $\mathfrak{M}^P$ обележен момент у односу на пол P. Ако треба назначити и вектор чији је момент написан, онда се за момент везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на пол P пише $\mathfrak{M}^P(\mathfrak{A})$.

Нека везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ клизи по својој основи и нека је Q нови положај почетне тачке, чији је вектор положаја $\mathfrak{l}$. Тада је момент везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$, у односу на исту тачку P као пол, дат једначином

$$(2)\qquad \mathfrak{M}^P = \mathfrak{l}\times\mathfrak{A} = (\mathfrak{l}_1 + k\,\mathfrak{A})\times\mathfrak{A} = \mathfrak{l}_1\times\mathfrak{A} + k\,\mathfrak{A}\times\mathfrak{A} = \mathfrak{l}_1\times\mathfrak{A},$$

јер је

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \overrightarrow{Q_1 Q} = \mathfrak{l}_1 + k\,\mathfrak{A}.$$

Према томе, момент везаног вектора не зависи од положаја почетка на основи вектора.

Појам момента вектора зависи од пола P, вектора $\mathfrak{A}$ и, поред тога, од положаја основе l према полу, те стога дефиниција момента нема смисла за слободне векторе.

Ако се са l_1, l_2, l_3, означе координате вектора $\mathfrak{l}_1 = \overrightarrow{PQ_1}$, а са A_1, A_2, A_3 координате вектора $\mathfrak{A}$, једначина (1) може се изразити у облику детерминанте

$$(3)\qquad \mathfrak{M}^P = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Пројекције вектора момента $\mathfrak{M}^P$ на осе Декартова правоуглог триједра, тј. његове правоугле координате M_1^P, M_2^P, M_3^P су

$$(4)\qquad M_1^P = \begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix},\quad M_2^P = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix},\quad M_3^P = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}.$$

Ако је пол у почетку координатног система, онда је $l_1 = x$, $l_2 = y$, $l_3 = z$, па се добија

$$(5)\qquad \mathfrak{M} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x & y & z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

и

$$(6)\qquad M_1 = \begin{vmatrix} y & z \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix},\quad M_2 = \begin{vmatrix} z & x \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix},\quad M_3 = \begin{vmatrix} x & y \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix},$$

где је са $\mathfrak{M}$ обележен момент у односу на почетак координатног система.

Ако се, међутим, тражи момент у односу на пол P (x_P, y_P, z_P), онда је

$$(7)\qquad l_1 = x_1 - x_P,\quad l_2 = y_1 - y_P,\quad l_3 = z_1 - z_P,$$

ако су координате тачке Q_1 дате са x_1, y_1, z_1.

Интензитет момента $\mathfrak{M}^P$, тј. $|\mathfrak{M}^P|$ бројно је једнак површини паралелограма конструисана на векторима $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{A}$ као страницама, или, што је исто, двострукој површини троугла PQ_1Q_2 (сл. 75) чија је основица вектор $\mathfrak{A}$, а висина h растојање пола од праве l — основе везаног вектора, тј.

$$(8)\qquad |\mathfrak{M}^P| = Ah = 2\,\Delta PQ_1Q_2,$$

где је интензитет вектора $\mathfrak{A}$ означен са A.

Растојање h зове се и *крак* везаног вектора у односу на дати пол.

У Декартовим правоуглим координатама је интензитет момента дат изразом

$$(9)\qquad |\mathfrak{M}^P| = \sqrt{\begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Поред наведених особина из дефиниције следују и ове особине момента:

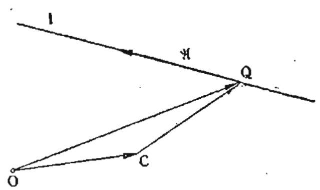
Моменат се не мења ако се пол помера дуж праве паралелне основи везаног вектора.

Једнаки везани вектори имају једнаке моменте, а директно супротни, супротне моменте у односу на исти пол.

Момент је једнак нули ако основа вектора пролази кроз пол. Заиста, ако се искључи тривијални случај $\mathfrak{A} = 0$, онда мора бити или $\mathfrak{l}_1 = 0$, тј. почетак везаног вектора мора бити у полу, или $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{A}$ морају бити колинеарни.

20.1 Зависност момента од избора пола

Из дефиниције је очигледно да момент везаног вектора зависи од избора пола и да се, у општем случају, мења са променом пола. Тако је момент везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на пол O (стари) (сл. 76) по дефиницији



Сл. 76

$$(1)\qquad \mathfrak{M}^O = \overrightarrow{OQ}\times\mathfrak{A},$$

а у односу на пол C (нови) момент је

$$(2) \qquad \mathfrak{M}^C = \overrightarrow{CQ} \times \mathfrak{A}.$$

Међутим је

$$(3) \qquad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ},$$

па према томе

$$\mathfrak{M}^O = \overrightarrow{OQ} \times \mathfrak{A} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}) \times \mathfrak{A} = \overrightarrow{OC} \times \mathfrak{A} + \overrightarrow{CQ} \times \mathfrak{A} = \overrightarrow{OC} \times \mathfrak{A} + \mathfrak{M}^C$$

Одатле се најзад добија веза између момената у односу на два разна пола у облику

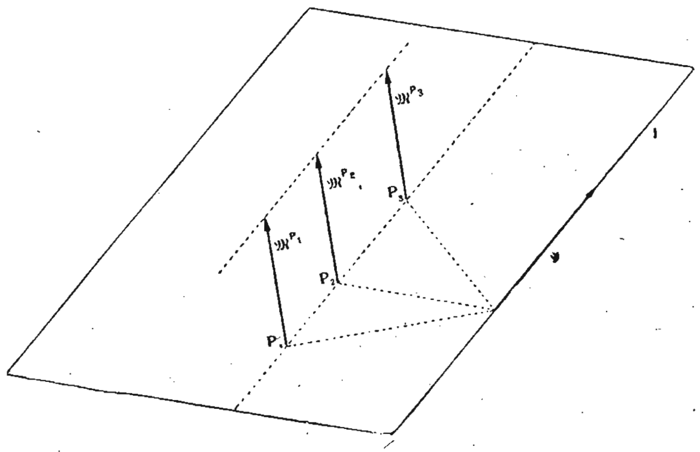
$$(4) \qquad \mathfrak{M}^C = \mathfrak{M}^O - \overrightarrow{OC} \times \mathfrak{A},$$

или

$$(5) \qquad \mathfrak{M}^C = \mathfrak{M}^O + \overrightarrow{CO} \times \mathfrak{A}.$$

Ова веза се речима изражава на овај начин:

Момент везаног вектора у односу на нови пол C једнак је моменту у односу на стари пол O више момент везаног вектора са нападном тачком у старом полу O у односу на нови пол C.



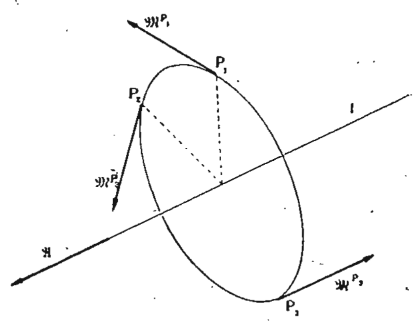
Сл. 77

Ова веза омогућује нам да израчунамо момент у односу ма на коју тачку простора као пол, ако знамо момент у

односу на координатни почетак и координате новог пола, одн. његов вектор положаја.

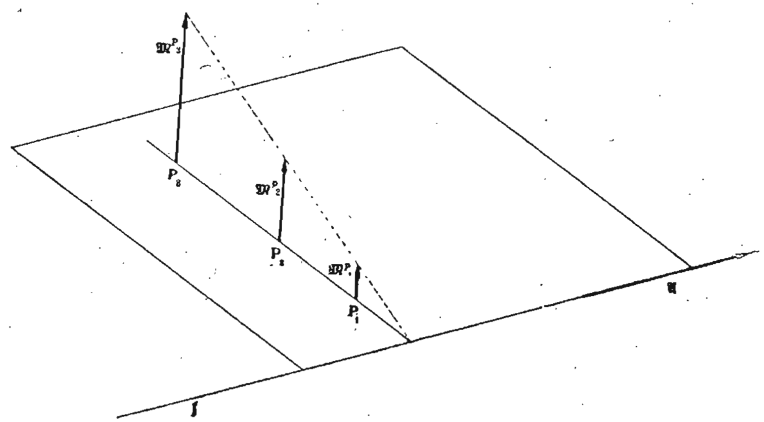
Свакој тачки простора одговара одређени момент датог везаног вектора и стога кажемо да је читав простор *моментно поље* вектора.

Моментно поље везаног вектора има ове особине: 1) за све тачке основе вектора моменти су једнаки нули; 2) за све тачке праве паралелне основи вектора моменти су једнаки (сл. 77); 3) за све тачке на кругу чија је раван нормална на основи везаног вектора, а центар му је на основи, моменти имају једнаке интензитете (сл. 78); 4) моментни вектор ма у којој тачки нормалан је на равни кроз тачку и основу везаног вектора, а његов интензитет је пропорционалан растојању тачке од основе (сл. 79).



Сл. 78

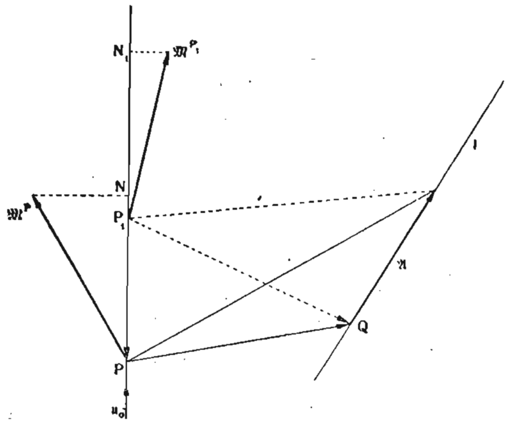
С друге стране сваки вектор који је нормалан на основи неког везаног вектора може се сматрати као момент тог вектора у односу на неки пол простора.



Сл. 79

21. Момент везаног вектора у односу на осу

Нека буде дат везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ за основом l и почетком Q. Нека осим тога буде дата нека оса у простору, одређена ортом $\mathfrak{u}_0$, и тачка P на тој оси (сл. 80).



Сл. 80

Тада је момент везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на тачку P дат изразом

$$\mathfrak{M}^P = \overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A}.$$

Пројекција момента $\mathfrak{M}^P$ на дату осу, тј.

$$(1) \qquad M_{\mathfrak{u}_0}^P = \mathfrak{u}_0 \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A}) = PN,$$

зове се *моменū* датог везаног вектора *у односу на осу* $\mathfrak{u}_0$. Момент везаног вектора у односу на осу је скалар, који може бити и позитиван и негативан, према томе, да ли $\mathfrak{u}_0$ $\overrightarrow{PQ}$ и $\mathfrak{A}$ чине десни или леви триједар, одн. да ли момент са осом чини оштар или туп угао.

Ако се координате орта $\mathfrak{u}_0$ обележе са u_1, u_2, u_3, координате вектора $\mathfrak{A}$ као слободног вектора са A_1, A_2, A_3 и најзад координате вектора $\overrightarrow{PQ}$ са $x-x_P$, $y-y_P$, $z-z_P$, где су x, y, z координате тачке Q, онда се у скаларном облику може написати

$$(2) \qquad M_{\mathfrak{u}_0}^P = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Момент везаног вектора у односу на осу не зависи од положаја почетка на основи вектора, јер од тога не зависи момент вектора у односу на изабрану тачку, како смо већ видели. Али, момент везаног вектора у односу на осу не зависи ни од избора тачке P на оси $\mathfrak{u}_0$. Ако, дакле, место тачке P, узмемо неку другу тачку P_1 на оси $\mathfrak{u}_0$, онда је (сл. 80)

$$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PQ} = k\mathfrak{u}_0 + \overrightarrow{PQ},$$

јер је вектор $\overrightarrow{P_1P}$ колинеаран са осом $\mathfrak{u}_0$. Према томе је

$$(3) \qquad PN = M_{\mathfrak{u}_0}^P = \mathfrak{u}_0 \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{u}_0 \cdot [(\overrightarrow{P_1Q} - k\mathfrak{u}_0) \times \mathfrak{A}] =$$

$$= \mathfrak{u}_0 \cdot (\overrightarrow{P_1Q} \times \mathfrak{A}) - \mathfrak{u}_0 \cdot (k\mathfrak{u}_0 \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{u}_0 \cdot (\overrightarrow{P_1Q} \times \mathfrak{A}) = M_{\mathfrak{u}_0}^{P_1} = P_1N_1,$$

јер је

$$\mathfrak{u}_0 \cdot (k\mathfrak{u}_0 \times \mathfrak{A}) = 0.$$

Тиме је наше тврђење доказано.

Моменти везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на осе Декартова правоуглог триједра су пројекције момента тог везаног вектора у односу на почетак координатног система (јер је избор тачке на оси произвољан) на осе система. Дакле, моменти везаног вектора у односу на Декартове осе су у ствари правоугле координате момента у односу на почетак координатног система као пол, тј. према једначини (2), пошто су координате орта $\mathfrak{i} = \{1, 0, 0\}$

$$(4) \qquad M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} = yA_3 - zA_2.$$

На исти начин

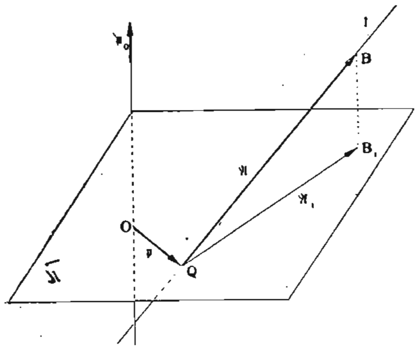
$$(5) \qquad M_2 = \begin{vmatrix} z & x \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} = zA_1 - xA_3; \qquad M_3 = \begin{vmatrix} x & y \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = xA_2 - yA_1.$$

Ако се ради о моментима вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на неке три осе ζ, η, ξ, које пролазе кроз тачку C (x_C, y_C, z_C), а које су паралелне координатним осама Декартова триједра, онда је

$$(6) \qquad M_1^C = \begin{vmatrix} y-y_C & z-z_C \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \qquad M_2^C = \begin{vmatrix} z-z_C & x-x_C \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix}, \qquad M_3^C = \begin{vmatrix} x-x_C & y-y_C \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}.$$

(и) нормала и права QB' одређују раван нормалну на праву OQ у којој леже и права QB₁, због тога је и она нормална на праву OQ

Момент везаног вектора у односу на осу биће једнак нули, ако су, према једначини (1), вектори $\mathfrak{u}_0$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\mathfrak{A}$ компланарни, а то значи, ако се изузме тривијални случај $\mathfrak{A}=0$, да су оса $\mathfrak{u}_0$ и основа l везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у истој равни (да се секу или да су паралелне).



Сл. 81

У изразу (1) могу се вектори $\overrightarrow{PQ}$ и $\mathfrak{A}$ заменити њиховим компонентама у равни нормалној на оси $\mathfrak{u}_0$, јер се онда векторски производ $\overrightarrow{PQ}\times\mathfrak{A}$ мења само за вектор који је нормалан на оси $\mathfrak{u}_0$ и, према томе, не утиче на вредност пројекције.* сврха 1 VI

Тако, ако се са $\mathfrak{p}$ обележи вектор $\overrightarrow{OQ}$ најкраћег растојања осе $\mathfrak{u}_0$ од основе l везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$, са $\mathfrak{A}_1$ пројекција вектора $\mathfrak{A}$ на раван нормалну на оси $\mathfrak{u}_0$ кроз O и Q, и са $\overrightarrow{B_1B}$ компоненту вектора нормалну на тој равни, онда је $\mathfrak{p}\perp\mathfrak{A}_1$ (и) (теорема о три управне) па се добија (сл. 81)

(7) $M_{\mathfrak{u}_0}=\mathfrak{u}_0\cdot(\mathfrak{p}\times\mathfrak{A})=\mathfrak{u}_0\cdot[\mathfrak{p}\times(\mathfrak{A}_1+\overrightarrow{B_1B})]=\mathfrak{u}_0\cdot(\mathfrak{p}\times\mathfrak{A}_1)=p\,|\mathfrak{A}_1|$,

јер је вектор $\mathfrak{p}\times\mathfrak{A}_1$ колинеаран са осом $\mathfrak{u}_0$, а $(\mathfrak{p}\times\overrightarrow{B_1B})\perp\mathfrak{u}_0$.

Дакле, момент везаног вектора у односу на осу једнак је производу најкраћег растојања p дате осе и основе вектора и интензитета $|\mathfrak{A}_1|$ пројекције вектора $\mathfrak{A}$ на раван нормалну на оси, са знаком према оријентацији триједра вектора $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}$.

22. Одређивање везаног вектора помоћу момента

Место да се везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ одређује вектором $\mathfrak{A}$ као слободним вектором и вектором положаја $\mathfrak{r}$ ма које тачке Q на основи посматраног везаног вектора, може се за векторске координате везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ узети други пар вектора. То су вектор $\mathfrak{A}$ као слободни вектор опет и момент $\mathfrak{M}^P$ везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на

[illegible] вектором $\mathfrak{A}^{(l)}$, где постављамо услов $[\mathfrak{r},\mathfrak{A}]=[\mathfrak{r}_1,\mathfrak{A}]$ који [illegible] било која тачка праве; [illegible] права одређена тачком и правцем.

одређену тачку P. Наиме, тада је везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ одређен, јер његова основа l мора лежати у равни постављеној кроз P нормално на вектору момента $\mathfrak{M}^P$; правац одређује вектор $\mathfrak{A}$ као слободни вектор, а смер обртања зависи од смера момента $\mathfrak{M}^P$. Удаљење основе од P је

$$h=\frac{|\mathfrak{M}^P|}{A},$$

где је A интензитет вектора $\mathfrak{A}$.

Да је везани вектор, ако постоји ($\mathfrak{A}\neq 0$), овим подацима једнозначно одређен, види се на овај начин. Посматрајмо две разне тачке Q и Q_1, одређене векторима положаја $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}_1$ у односу на дати пол P. Нека дати момент траженог везаног вектора остаје непромењен кад се почетак тог вектора премести из Q и Q_1, тј. нека буде

$$\mathfrak{M}^P=\mathfrak{r}\times\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{M}^P=\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{A}.$$

Ако у равни нормалној на $\mathfrak{M}^P$ изаберемо праву кроз P и на њој нормалну праву кроз P и на нормали одредимо од P вектор h с једне и с друге стране онда смер вектора $\mathfrak{M}^P$ одређује с које ће стране бити $\mathfrak{A}$

Из ових једначина следује после одузимања

$$(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1)\times\mathfrak{A}=0,$$

тј.

$$\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1=\lambda\,\mathfrak{A},$$

где је λ произвољан скалар, а то значи да све такве тачке морају лежати на истој правој — основи траженог вектора.

Везани вектор је, у скаларном облику, као и раније, одређен са шест бројева $\{A_1, A_2, A_3;\ M_1, M_2, M_3\}$, рецимо, у односу на осе неког Декартова триједра, ако се пол P узме за почетак таквог координатног система. Од ових шест координата, међутим, опет је само пет независних, пошто је увек задовољен услов

(1) $$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P=0,$$

због $\mathfrak{M}^P\perp\mathfrak{A}$. То значи да постоји веза

(2) $$A_1M_1+A_2M_2+A_3M_3=0.$$

Од једног система ових векторских координата везаног вектора у односу на дату тачку, рецимо P, може се лако прећи на други. На пр., при прелазу од векторских координата $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{r}$ на векторске координате $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$, треба само израчунати момент

(3) $$\mathfrak{M}^P=\mathfrak{r}\times\mathfrak{A}.$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} y_1-y_P & z_1-z_P \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} z_1-z_P & x_1-x_P \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} \quad M_3 = \begin{vmatrix} x_1-x_P & y_1-y_P \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

Кад је први систем координата дат у скаларном облику, тј. кад су дате координате $\{A_1, A_2, A_3;\ x, y, z\}$ треба само израчунати

$$(4)\qquad M_1 = \begin{vmatrix} y & z \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} z & x \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} x & y \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix},$$

ако је P у координатном почетку, пошто су координате A_1, A_2, A_3 у оба система исте.

При обрнутој трансформацији — прелазу од $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$, тј. од $\{A_1, A_2, A_3;\ M_1, M_2, M_3\}$ ка $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{r}$, тј. $\{A_1, A_2, A_3;\ x, y, z\}$ треба израчунати вектор положаја $\mathfrak{r}$ из једначине (3). Као што је познато, довољно је одредити вектор положаја ма које тачке Q на основи везаног вектора. Одредимо према томе вектор положаја $\mathfrak{r}_1$ тачке Q_1 за коју је $\mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{A}$, одн. $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r}_1 = 0$. У том циљу помножимо једначину (3) векторски слева вектором $\mathfrak{A}$, па се добија

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^P = \mathfrak{A}\times(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{A}).$$

После развијања двоструког векторског производа на десној страни следује

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^P = A^2\,\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r}_1) = A^2\,\mathfrak{r}_1$$

и, најзад,

$$(5)\qquad \mathfrak{r}_1 = \frac{1}{A^2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^P).$$

Овако одређени вектор $\mathfrak{r}_1$ задовољава једначину (3), али ту једначину наравно задовољавају и сви вектори положаја $\mathfrak{r}$ тачака које леже на основи вектора, тј. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda\,\mathfrak{A}$.

У скаларном облику за други систем координата треба из једначина (4) израчунати координате x, y, z. Једна од њих је неодређена, јер од три једначине (4) само су две независне због везе (2).

Права линија у простору одређена је са четири параметра и, према томе, може се одредити као и везани вектор, с том разликом, што дужина вектора није важна, те се векторске координате везаног вектора, тј. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$ могу помножити произвољним фактором пропорционалности. Вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$ који под тим условима одређују праву линију у простору зову се *хомогене Пликерове (Plücker) векторске координате* праве у простору.

Произвољни фактор пропорционалности може се избећи ако се за Пликерове векторске координате праве узме орт

праве $\mathfrak{u}_0(\alpha, \beta, \gamma)$ и момент орта $\mathfrak{m}^P\ (m_1, m_2, m_3)$ у односу, рецимо, на почетак координатног система P. При томе је увек

$$(6)\qquad \mathfrak{u}_0^{\,2} = 1, \qquad \mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{m}^P = 0.$$

Одавде је јасно, да су од шест координата $\{\alpha, \beta, \gamma;\ m_1, m_2, m_3\}$ само четири независне, јер између њих постоје две везе (6). Тако су, дакле, $\{\alpha, \beta, \gamma;\ m_1, m_2, m_3\}$ Пликерове координате праве у простору, ако су испуњени услови

$$(7)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1, \qquad \alpha\,m_1+\beta\,m_2+\gamma\,m_3 = 0,$$

где је

$$(8)\qquad m_1 = y\gamma - z\beta, \quad m_2 = z\alpha - x\gamma, \quad m_3 = x\beta - y\alpha.$$

Сад се може одредити момент везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)} = \{A_1, A_2, A_3;\ M_1, M_2, M_3\}$ и у односу на осу одређену Пликеровим координатама.

Нека момент датог везаног вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ у односу на тачку P_1, која лежи на датој правој, према т. 20.1 једн. 5, буде

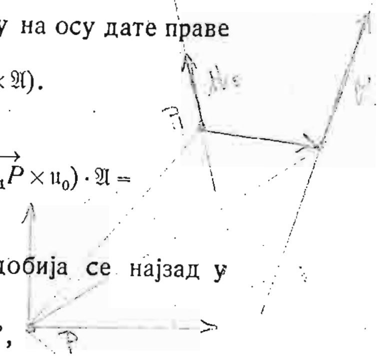
$$(9)\qquad \mathfrak{M}^{P_1} = \mathfrak{M}^P + (\overrightarrow{P_1P}\times\mathfrak{A}).$$

Тада је момент везаног вектора у односу на осу дате праве

$$(10)\qquad \mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{M}^{P_1} = \mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{M}^P + \mathfrak{u}_0\cdot(\overrightarrow{P_1P}\times\mathfrak{A}).$$

Али, како је

$$(11)\qquad \mathfrak{u}_0\cdot(\overrightarrow{P_1P}\times\mathfrak{A}) = (\mathfrak{u}_0\times\overrightarrow{P_1P})\cdot\mathfrak{A} = -(\overrightarrow{P_1P}\times\mathfrak{u}_0)\cdot\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\cdot(\overrightarrow{PP_1}\times\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{m}^P,$$



за тражени момент у односу на праву добија се најзад у векторском облику

$$(12)\qquad \mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{M}^{P_1} = \mathfrak{u}_0\cdot\mathfrak{M}^P + \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{m}^P,$$

или у скаларном облику

$$(13)\qquad M_{\mathfrak{u}_0} = \alpha M_1^P + \beta M_2^P + \gamma M_3^P + A_1 m_1 + A_2 m_2 + A_3 m_3.$$

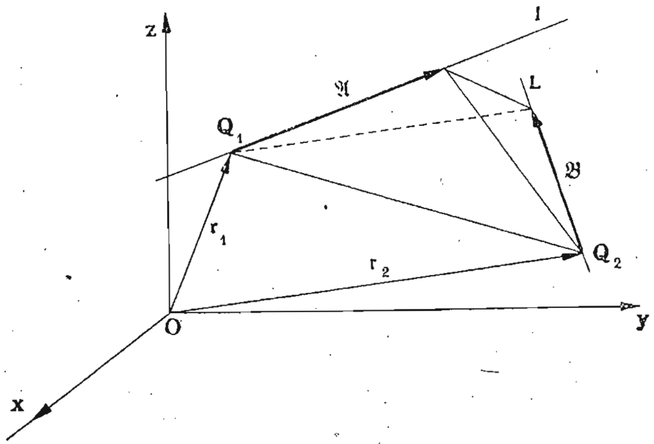
23. Узајамни момент два везана вектора

Узајамни момент или *комомент* два везана вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ и $\mathfrak{B}^{(L)}$ назива се скалар — производ интензитета једног вектора и момента другог вектора у односу на осу, која је основа првога вектора и која има исти смер са тим вектором.

(сл. 82). Ако се узајамни момент везаних вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ и $\mathfrak{B}^{(L)}$ означи симболом $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, онда је

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = A\, M_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Доказаћемо пре свега ону у називу поменуту узајамност,



Сл. 82

тј. да је

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = M(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

У том циљу изразићемо $M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ помоћу вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и помоћу вектора $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ који иде од почетка првог вектора ка почетку другог вектора. Тада је, с обзиром на т. 21 једн. 1,

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = A\, M_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{B}) = A\, \mathfrak{a}_0 \cdot (\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{B}), \tag{3}$$

где је $\mathfrak{a}_0$ орт вектора $\mathfrak{A}$, или

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cdot (\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{B}). \tag{4}$$

На исти начин налази се

$$M(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} \cdot (\overrightarrow{Q_2Q_1} \times \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Међутим, на основу правила о цикличкој пермутацији чинилаца у мешовитом производу, може се написати

$$\mathfrak{A} \cdot (\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{A} \times \overrightarrow{Q_1Q_2}), \tag{6}$$

па се, пошто је

$$\mathfrak{A} \times \overrightarrow{Q_1Q_2} = -(\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{A}) = \overrightarrow{Q_2Q_1} \times \mathfrak{A},$$

добија најзад

$$\mathfrak{A} \cdot (\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \cdot (\overrightarrow{Q_2Q_1} \times \mathfrak{A}),$$

што је и требало доказати.

Ако се дефиниција узајамног момента два везана вектора сматра као дата, на пр. једначином (4), момент везаног вектора у односу на осу може се и овако изразити: момент везаног вектора у односу на дату осу једнак је узајамном моменту вектора и орта осе.

Узајамни момент два везана вектора једнак је нули кад је један од два вектора једнак нули, или кад су вектори (једн. 4) $\mathfrak{A}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ и $\mathfrak{B}$ компланарни, тј. кад су основе датих везаних вектора у истој равни. Он је, дакле, различит од нуле само кад се основе везаних вектора укрштају.

Узајамни момент не зависи од померања једнога или другога вектора дуж њихових основа, па према томе не зависи од избора тачака Q_1 и Q_2 на њиховим основама.

Из једначине (4) види се још (т. 15.9, једн. 6), да је узајамни момент једнак шестострукој запремини тетраедра у коме су дати везани вектори $\mathfrak{A}^{(l)}$ и $\mathfrak{L}^{(L)}$ две супротне ивице. Тај скалар може бити и позитиван и негативан, према томе, да ли вектор $\mathfrak{A}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ и $\mathfrak{B}$ чине десни или леви триједар. Геометриски ово зависи од тога, да ли вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ чине својим правцима оштар или туп угао.

У скаларном облику се узајамни момент може изразити у облику детерминанте

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cdot (\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathfrak{B}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где су ознаке координата појединих вектора очигледне. Ова се детерминанта може, после краћег преображаја и ивичења, написати и симетричније овако

$$M(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Најзад, може се узајамни момент везаних вектора $\mathfrak{A}^{(l}$ и $\mathfrak{B}^{(L)}$ изразити и помоћу њихових векторских координата, и то, помоћу њихових момената у односу на координатни почетак O неког Декартова координатног система као пол и помоћу слободних вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

У том циљу се у једначини (4) замени вектор $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ разликом вектора положаја $\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1$ тачака Q_2 и Q_1. Тада се добија за узајамни момент

$$
\begin{aligned}
M(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \mathfrak{A}\cdot(\overrightarrow{Q_1Q_2}\times\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\cdot[(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)\times\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{r}_2\times\mathfrak{B}) - \\
(9)\qquad & -\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{r}_2\times\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{A}) = \\
& = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^O(\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{M}^O(\mathfrak{A}).
\end{aligned}
$$

Ако се још скаларни производи на десној страни изразе помоћу Декартових правоуглих координата, може се написати

$$(10)\qquad M(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = A_1M_1' + A_2M_2' + A_3M_3' + B_1M_1 + B_2M_2 + B_3M_3,$$

где су A_i, B_i $(i=1,2,3)$ координате вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, а M_i и M_i' $(i=1,2,3)$ координате момената везаних вектора $\mathfrak{A}^{(l)}$ и $\mathfrak{B}^{(L)}$ у односу на координатни почетак.

24. Вектори везани за тачку. Виријал

Раније смо већ казали да су вектори везани за тачку, на пр., вектор електричне силе, брзина честице течне масе итд. и да је такав вектор одређен са свих шест бројева. Сад ћемо показати да се за такве векторе, поред момента у односу на тачку и осу, може дефинисати нова величина — *виријал*, на овај начин.

Нека буде дат вектор $\mathfrak{A}=\overrightarrow{QT}$ (сл. 83) везан за тачку Q чији је вектор положаја у односу на неку тачку P као пол $\mathfrak{r}=\overrightarrow{PQ}$; онда је виријал вектора везана за тачку

$$(1)\qquad \mathcal{V}=\overrightarrow{PQ}\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}.$$

Виријал је дефинисао Клаузијус (Clausius), с том разликом што је он под виријалом разумео скаларни производ $\overrightarrow{QP}\cdot\mathfrak{A}$, тј. израз (1) са промењеним знаком.

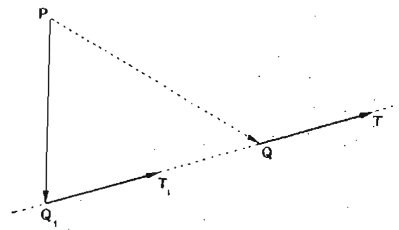
Очигледно је да дефиниција виријала има смисла само за векторе везане за тачку, јер се, и само померањем вектора по његовој основи, виријал мења.

Ако је пол P у координатном почетку, па је $\mathfrak{r}=\{x,y,z\}$, а $\mathfrak{A}=\{A_1,A_2,A_3\}$, онда се у скаларном облику за виријал може написати

$$(2)\qquad \mathcal{V}=A_1x+A_2y+A_3z.$$

Виријал се искоришћује при одређивању вектора везана за тачку. Вектор везан за праву је, како смо видели, одређен векторским координатама $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$, тј. моментом у односу на неку тачку P простора и вектором $\mathfrak{A}$ као слободним вектором. Ако је познат још и виријал тог вектора у односу на исти пол P, онда је одређен и почетак Q вектора $\mathfrak{A}$; он се не може више померати дуж своје основе као вектор везан за праву, он је везан за тачку Q.

Заиста, ако два вектора, који су једнаки као слободни вектори, одн. чије су Декартове правоугле координате једнаке, имају једнаке моменте и једнаке виријале у односу на исту тачку простора, морају имати и исти почетак (тј. једнаки су као вектори везани за тачку). Другим речима, вектор везан за тачку је на тај начин одређен.



Сл. 83

Претпоставимо да су $\overrightarrow{QT}$ и $\overrightarrow{Q_1T_1}$ (сл. 83) два таква вектора са разним почетним тачкама Q и Q_1. Како су им моменти у односу на исту тачку P једнаки, они се морају налазити на истој основи. Из једнакости виријала у односу на исти пол P следује

$$(3)\qquad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QT}=\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{Q_1T_1},$$

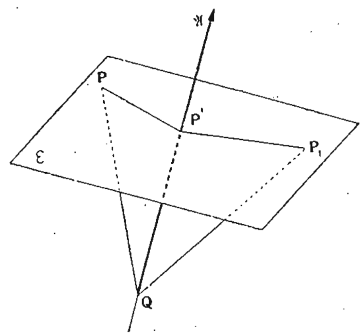
одакле, пошто су $\overrightarrow{QT}$ и $\overrightarrow{Q_1T_1}$ једнаки као слободни вектори, добијамо

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QT}-\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{Q_1T_1}=(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PQ_1})\cdot\overrightarrow{QT}=\overrightarrow{Q_1Q}\cdot\overrightarrow{QT}=0.$$

Одавде, међутим, следује $\overrightarrow{Q_1Q}=0$, тј. $Q\equiv Q_1$, што је требало доказати, јер су вектори $\overrightarrow{Q_1Q}$ и $\overrightarrow{QT}$ колинеарни, па не постоји могућност да је $\overrightarrow{Q_1Q}\perp\overrightarrow{QT}$.

Виријал је једнак нули ако је почетак вектора у полу P, тј. $\mathfrak{r}=0$, или ако је $\mathfrak{r}\perp\overrightarrow{QT}\,(\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{QT})$. Стога је вирјал вектора везана за тачку, у односу на све полове који леже у равни нормалној на датом вектору кроз почетак Q, једнак нули.

Уопште је виријал неког вектора везаног за тачку непромењив у односу на све тачке као полове у равни нормалној на правцу датог вектора и мења се према растојању такве равни од почетка вектора. Он ће бити негативан за све тачке као полове у равнима нормалним на правцу вектора које су удаљене од почетка вектора у смеру вектора, а позитиван за оне које су удаљене у супротном смеру. Виријал расте по апсолутној вредности истовремено са растојањем такве равни од почетка посматраног вектора и истовремено опада са приближавањем равни ка почетку вектора.



Сл. 84

То је очигледно стога (сл. 84) што је скаларни производ $\overrightarrow{PQ}\cdot\mathfrak{A}$ који дефинише виријал једнак производу унутрашње пројекције (пројекције на правац вектора $\mathfrak{A}$) вектора $\overrightarrow{PQ}$, тј. $P'Q$ и интензитета самог вектора $\mathfrak{A}$. Међутим, унутрашња пројекција $P'Q$ остаје непромењена за све векторе $\overrightarrow{PQ}$ чији су почеци P, на пр., у равни $\varepsilon\perp\mathfrak{A}$.

25. Системи вектора. Главни вектор. Главни момент. Еквивалентни системи

Скуп од n слободних вектора, исте природе, зове се *систем слободних вектора*. Нека $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ буду слободни вектори, тада се вектор

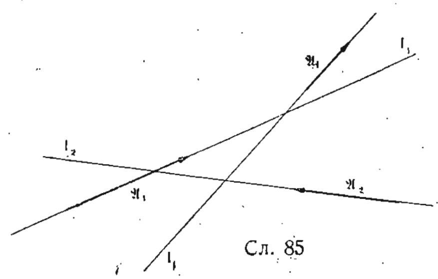
$$(1) \qquad \mathfrak{R}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i,$$

збир датих вектора, зове *главни вектор* или *резултанта* система.

Пројекције R_1, R_2, R_3 главног вектора на осе Декартова правоуглог триједра зову се *координате* система слободних вектора. Сваком систему слободних вектора одговара само један потпуно одређени главни вектор који не зависи од положаја координатног система, а може бити једнак и нули. На тај начин се може сматрати да главни вектор одређује систем слободних вектора. Еквивалентни системи слободних вектора су они са једнаким главним векторима.

Скуп вектора, исте природе, везаних за праве, зове се *систем везаних вектора*. На пр., више сила које делују на неко чврсто тело чине такав систем.

Нека посматрани систем $\mathfrak{S}$ везаних вектора чине вектори $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1,2,\dots,n)$ (сл. 85). Видели смо, међутим, да је сваки везани вектор одређен са два вектора: вектором $\mathfrak{A}_i$ као слободним вектором и моментом $\mathfrak{M}_i^O$ у односу на неку тачку простора O. Према томе систему везаних вектора одговарају два друга система вектора: систем слободних вектора $\mathfrak{A}_i$ и систем вектора момената $\mathfrak{M}_i^O$ у односу на исти пол.


Сл. 85

На тај начин, за сваки систем везаних вектора постоје два карактеристична вектора: вектор

$$(2) \qquad \mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i,$$

који се зове *главни вектор* система везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1,2,\dots,n)$ и вектор

$$(3) \qquad \mathfrak{M}^O=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i^O,$$

који се зове *главни момент* система у односу на пол O.

Сваком систему везаних вектора одговара један потпуно одређени главни вектор и исто тако потпуно одређени главни момент у односу на дату тачку. Према томе се може сматрати да је систем везаних вектора одређен главним вектором и главним моментом у односу на неки пол.

Декартове координате A_1, A_2, A_3; M_1, M_2, M_3 главног вектора (2) и главног момента (3) система зову се *скаларне координате* система везаних вектора. Сваки везани вектор $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ система има, међутим, своје координате као слободни вектор, тј.

$$\mathfrak{A}_i = \{A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}\}, \tag{4}$$

а његов момент у односу на пол O своје координате, тј.

$$\mathfrak{M}_i^O = \{M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}\}. \tag{5}$$

Према томе је

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} A_{i1}, \qquad A_2 = \sum_{i=1}^{n} A_{i2}, \qquad A_3 = \sum_{i=1}^{n} A_{i3}; \tag{6}$$

и

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} M_{i1}, \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n} M_{i2}, \qquad M_3 = \sum_{i=1}^{n} M_{i3}. \tag{7}$$

Како је

$$\mathfrak{M}_i^O = \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{A}_i, \tag{8}$$

где је $\mathfrak{r}_i$ вектор положаја неке тачке на основи везаног вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ у односу на пол O, а координате вектора $\mathfrak{r}_i$ су x_i, y_i, z_i, може се написати

$$M_{i1} = \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ A_{i2} & A_{i3} \end{vmatrix}, \quad M_{i2} = \begin{vmatrix} z_i & x_i \\ A_{i3} & A_{i1} \end{vmatrix}, \quad M_{i3} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ A_{i1} & A_{i2} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Најзад се добија

$$\begin{gathered} M_1 = \sum_{i=1}^{n} (y_i A_{i3} - z_i A_{i2}), \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n} (z_i A_{i1} - x_i A_{i3}), \\ M_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i A_{i2} - y_i A_{i1}). \end{gathered} \tag{10}$$

Главни момент система везаних вектора у односу на неку осу одређену ортом $\mathfrak{e}_0$ је пројекција главног момента система везаних вектора на ту осу, тј.

$$M_e(\mathfrak{S}) = \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{M}^O, \tag{11}$$

где смо са $M_e(\mathfrak{S})$ обележили тражени момент. На основу једначине (3) је стога

$$M_e(\mathfrak{S}) = \sum_{i=1}^{n} M_e(\mathfrak{A}_i). \tag{12}$$

Ако је главни момент система везаних вектора у односу на неку осу $\mathfrak{e}_0$ једнак нули, права те осе зове се *нулта права* система. Кроз сваку тачку простора O пролази бесконачно много нултих правих за сваки систем везаних вектора. Све оне леже у равни која је кроз O постављена нормално на вектор главног момента система у односу на тачку O. Само у случају $\mathfrak{M}^O = O$ све праве кроз O су нулте праве.

За два система везаних вектора $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1$ каже се да су *еквивалентни*, ако су им једнаки главни вектори и главни моменти у односу на исти пол. За систем чији су главни вектор и главни момент у односу ма на који пол једнаки нули каже се да је еквивалентан *нули* (у случају да се ради о систему сила, које делују на неко чврсто тело, каже се да је систем у *равнотежи*). Два система везаних вектора, чији су главни вектори и главни моменти у односу на неки пол директно супротни, зову се *директно супротни*. На пр., ако се сви везани вектори неког система замене директно супротним векторима, добијени систем биће директно супротан претходном.

25.1 Инваријанте система везаних вектора

Главни вектор система везаних вектора не зависи од избора пола, те остаје за сваку тачку простора исти. То значи, ако се, место координатног почетка O, за пол узме ма која тачка простора, главни вектор система остаје непромењен. Према томе је главни вектор $\mathfrak{A}$ *прва инваријанта* система везаних вектора у односу на промену пола. Прва инваријанта система везаних вектора зове се још и *векторска инваријанта* или *инваријантни вектор*.

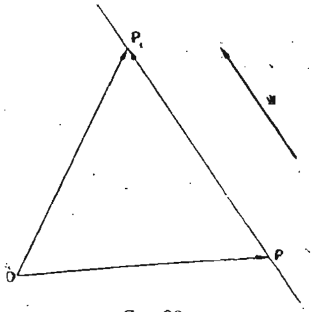
Међутим, главни момент система везаних вектора се мења и зависи од избора пола. Главни момент система у односу на нови пол C једнак је главном моменту у односу на стари пол O више момент главног вектора са почетком у старом полу у односу на нови пол. Овај се став може лако доказати.

На основу т. 20.1 једн. 5 имамо с обзиром на т. 25 једн. 3

$$\mathfrak{M}^C = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i^C = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{M}_i^O + \overrightarrow{CO} \times \mathfrak{A}_i) = \mathfrak{M}^O + \overrightarrow{CO} \times \mathfrak{A}, \tag{1}$$

што је требало доказати.

Одавде следује да је геометриско место тачака (полова) P са истим главним моментима $\mathfrak{M}^P$ права, која пролази кроз P, а која је паралелна главном вектору $\mathfrak{A}$.



Сл. 86

Заиста, нека основни пол буде тачка O, па узмимо као полове тачке P и P_1, с тим да је

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^{P_1}.$$

Тада је (сл. 86)

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^O + (\overrightarrow{PO} \times \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{M}^{P_1} = \mathfrak{M}^O + (\overrightarrow{P_1O} \times \mathfrak{A}),$$

одакле се, одузимањем доње једначине од горње, добија

$$(\overrightarrow{PO} \times \mathfrak{A}) - (\overrightarrow{P_1O} \times \mathfrak{A}) = 0,$$

или

$$(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{P_1O}) \times \mathfrak{A} = 0$$

и најзад

(2) $$\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{P_1O} = \overrightarrow{PP_1} = k\mathfrak{A},$$

где је k произвољни скаларни параметар, што је и требало доказати.

Како, дакле, главни момент система није инваријанта, посматраћемо скаларни производ главног вектора и главног момента, тј.

(3) $$S = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^O = A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3.$$

Показаћемо да је овај израз независан од избора пола. Наиме, ако се израз

$$\mathfrak{M}^C = \mathfrak{M}^O + \overrightarrow{CO} \times \mathfrak{A}$$

из једначине (1) помножи скаларно главним вектором $\mathfrak{A}$, добиће се

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^C = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^O + \mathfrak{A} \cdot (\overrightarrow{CO} \times \mathfrak{A}),$$

одакле је

(4) $$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^C = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^O,$$

што је требало доказати. Према томе, израз S је *друга инваријанта* система везаних вектора и зове се још *скаларна инваријанта* система.

Главни вектор и скаларна инваријанта S образују основне инваријанте система везаних вектора. Међутим, место те две инваријанте често се искоришћују и други системи инваријаната изведених из ових.

Тако се, на пр., врло често, место прве векторске инваријанте, користи као инваријанта, истина скаларна, квадрат главног вектора, тј.

(5) $$\mathfrak{A}^2 = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2,$$

јер ни тај израз не зависи од избора пола, пошто од тога не зависи главни вектор.

Даље, ако је $A \neq 0$, из (4) следује

$$A\,(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{M}^C) = A\,(\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{M}^O)$$

па, према томе,

(6) $$\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{M}^C = \mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{M}_O = \frac{A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = s.$$

Дакле, може се казати да је пројекција s главног момента система на правац главног вектора независна од избора пола, те се, према томе, s може сматрати као друга инваријанта система.

Најзад, поменућемо и овај систем инваријаната. Како је главни вектор инваријанта у односу на избор пола, а пројекција главног момента у односу ма на који пол на правац главног вектора такође инваријанта, то се као прва инваријанта система везаних вектора може користити компонента $\mathfrak{K}$ главног момента у правцу главног вектора, тј.

(7) $$\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}^O \cdot \mathfrak{a}_0)\,\mathfrak{a}_0 = \frac{(\mathfrak{M}^O \cdot \mathfrak{A})\mathfrak{A}}{A^2} = \sigma\,\mathfrak{A}.$$

Овде смо обележили

(8) $$\sigma = \frac{\mathfrak{M}^O \cdot \mathfrak{A}}{A^2} = \frac{A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \frac{S}{A^2},$$

а то је скалар, чија је димензија увек дужина, без обзира на значење везаних вектора. Тај скалар је очигледно инваријанта у односу на избор пола и користи се у овом случају као друга инваријанта. Он се зове *параметар* система везаних вектора.

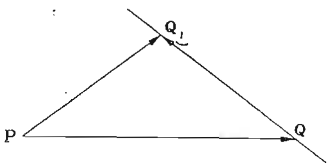
$\ldots = |\mathfrak{M}| \cos\alpha \ldots$
када се прође кроз P, то $|\mathfrak{M}^P|$ има најмању вредност за $\alpha = 0$

25.2 Централна оса

Нека буде дат систем $\mathfrak{S}$ везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и нека $\mathfrak{A}$ буде његов главни вектор, а $\mathfrak{M}^P$ главни момент у односу на неки пол P.

Ако се посматра вредност скаларне инваријанте $s=\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{M}^P$, очигледно је да главни момент система има најмањи интензитет у оним тачкама простора у којима је колинеаран са главним вектором, јер је пројекција вектора на осу највише једнака интензитету вектора по апсолутној вредности, и то у случају колинеарности, иначе је мања од њега. Према томе, може се тражити геометриско место оних тачака у простору за које је главни момент колинеаран са главним вектором или, што је исто, геометриско место тачака за које као полове главни моменти имају најмањи интензитет.

О колинеарности главног момента са главним вектором може се одређено говорити само у случају, кад је главни вектор $\mathfrak{A} \neq 0$. Нека се онда (сл. 87) траже тачке Q и Q_1 за које важи



Сл. 87

(1) $\quad \mathfrak{M}^Q \times \mathfrak{A} = 0; \quad \mathfrak{M}^{Q_1} \times \mathfrak{A} = 0.$

Одузимањем ових једначина добија се

(2) $\quad (\mathfrak{M}^Q - \mathfrak{M}^{Q_1}) \times \mathfrak{A} = 0.$

Међутим је (20.1 једн. 4)

$$\mathfrak{M}^Q = \mathfrak{M}^P - (\overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A}),$$
$$\mathfrak{M}^{Q_1} = \mathfrak{M}^P - (PQ_1 \times \mathfrak{A}),$$

одакле се одузимањем добија

(3) $$\mathfrak{M}^Q - \mathfrak{M}^{Q_1} = (PQ_1 - PQ) \times \mathfrak{A} = QQ_1 \times \mathfrak{A}.$$

Заменом овог израза у (2) добија се најзад

(4) $$(QQ_1 \times \mathfrak{A}) \times \mathfrak{A} = 0.$$

Из овог израза, пошто је $\mathfrak{A} \neq 0$ и пошто $\mathfrak{A}$ не може бити колинеарно са $QQ_1 \times \mathfrak{A}$, следује обавезно

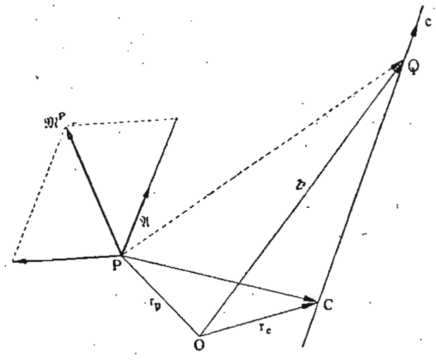
(5) $$QQ_1 = \lambda \mathfrak{A},$$

где је λ, као обично, произвољни параметар. Дакле, геометриско место тачака (полова) за које су главни моменти система колинеарни са главним вектором је права линија

паралелна главном вектору. Та права, оријентисана као главни вектор, заве се *централна оса* система везаних вектора.

Једначина централне осе система везаних вектора може се, кад је дат главни вектор $\mathfrak{A}$ система и главни момент $\mathfrak{M}^P$ система у односу на који одређени пол P у простору, извести у векторском облику на овај начин.

Нека Q буде нека тачка на централној оси c, одређена вектором положаја $\mathfrak{r}$ у односу на почетак O неког Декартова правоуглог триједра (сл. 88) и нека је са $\mathfrak{M}$ обележен главни момент система у односу тачку Q. Тада по дефиницији централне осе мора бити



Сл. 88

(6) $$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} = 0.$$

Међутим је, на основу т. 20.1 једн. 4,

(7) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^P - (\overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}^P - (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) \times \mathfrak{A},$$

где је са $\mathfrak{r}_P$ обележен вектор положаја тачке P. Ако се вредност за $\mathfrak{M}$ из једначине (7) замени у једначини (6) добија се

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}^P - \mathfrak{A} \times [(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) \times \mathfrak{A}] = 0,$$

одакле је

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}^P - A^2(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) + \mathfrak{A}[(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) \cdot \mathfrak{A}] = 0$$

и, најзад,

(8) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_P + \frac{1}{A^2}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}^P) + \frac{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) \cdot \mathfrak{A}}{A^2} \mathfrak{A}.$$

Ако се још за промењљиви скалар $\dfrac{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_P) \cdot \mathfrak{A}}{A^2}$ стави λ добија се једначина централне осе система у облику

(9) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_P + \frac{1}{A^2}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{M}^P) + \lambda \mathfrak{A}.$$

Свакој вредности λ одговара једна тачка на централној оси. Вредности $\lambda=0$, на пр., нека одговара на централној оси тачка C са вектором положаја $\mathfrak{r}_C$, тј. из једначине (9)

$$\mathfrak{r}_C=\mathfrak{r}_P+\frac{1}{A^2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^P). \tag{10}$$

Међутим, из

$$\lambda=\frac{(\mathfrak{r}_C-\mathfrak{r}_P)\cdot\mathfrak{A}}{A^2}=0,$$

за $\mathfrak{A}\neq 0$ и за све полове P који не леже на централној оси, тј. за $\mathfrak{r}_C-\mathfrak{r}_P\neq 0$, следује

$$\mathfrak{r}_C-\mathfrak{r}_P\perp\mathfrak{A},\quad \text{одн.}\quad \overrightarrow{PC}\perp\mathfrak{A}. \tag{11}$$

То значи да је тачка C подножје нормале спуштене из пола P на централну осу.

Дакле, узев у обзир израз (10), може се сад једначина централне осе написати

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_C+\lambda\mathfrak{A}. \tag{12}$$

Једначина централне осе у скаларном облику добија се пројицирањем ове једначине на осе Декартова правоуглог триједра и елиминацијом λ, тј.

$$\frac{x-x_C}{A_1}=\frac{y-y_C}{A_2}=\frac{z-z_C}{A_3}=\lambda, \tag{13}$$

где су x, y, z координате вектора положаја $\mathfrak{r}$ — текуће координате – A_1, A_2, A_3 координате главног вектора, као и увек, и најзад, координате вектора $\mathfrak{r}_C$, према једначини (10),

$$\begin{gathered} x_C=x_P+\frac{1}{A^2}(A_2M_3-A_3M_2),\quad y_C=y_P+\frac{1}{A^2}(A_3M_1-A_1M_3),\\ z_C=z_P+\frac{1}{A^2}(A_1M_2-A_2M_1). \end{gathered} \tag{14}$$

Кад се изабрани пол P налази у координатном почетку O, онда је $\mathfrak{r}_P=0$, па према томе

$$\mathfrak{r}_C=\frac{1}{A^2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^O), \tag{15}$$

одн.

$$\begin{gathered} x_C=\frac{1}{A^2}(A_2M_3-A_3M_2);\quad y_C=\frac{1}{A^2}(A_3M_1-A_1M_3),\\ z_C=\frac{1}{A^2}(A_1M_2-A_2M_1) \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\lambda=\frac{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}}{A^2}. \tag{17}$$

Из ових разматрања, пошто је из (10)

$$\mathfrak{r}_C-\mathfrak{r}_P=\overrightarrow{PC}=\frac{1}{A^2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}^P), \tag{18}$$

следује одмах геометриска конструкција централне осе.

Ако је дат главни вектор система, неки пол P и главни момент система у односу на тај пол, онда за конструкцију централне осе система треба само конструисати вектор $\overrightarrow{PC}$, који одређује једну тачку централне осе, што је довољно, пошто је она паралелна главном вектору. Вектор $\overrightarrow{PC}$ има на основу једн. 18: *1)* правац нормалан на равни одређеној главним вектором и главним моментом система; *2)* смер такав да са $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$ чини десни триједар; *3)* интензитет одређен изразом

$$PC=\frac{|\mathfrak{M}^P|\sin(\mathfrak{A},\mathfrak{M}^P)}{A}, \tag{19}$$

где је $|\mathfrak{M}^P|\sin(\mathfrak{A},\mathfrak{M}^P)$ интензитет компоненте главног момента у правцу нормалном на главном вектору (сл. 88).

До једначине централне осе може се доћи и ако се тражи геометриско место тачака $Q(x, y, z)$ у простору за које, како смо рекли, главни момент система има минимални интензитет.

Обележимо са $\mathfrak{M}$ главни момент система у односу на посматрану тачку простора Q и нека буде дат систем везаних вектора својим главним вектором $\mathfrak{A}$ и главним моментом $\mathfrak{M}^O$ у односу на почетак O неког Декартова координатног система. Тада је

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^O-(\overrightarrow{OQ}\times\mathfrak{A}), \tag{20}$$

а тражи се минимум израза

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^2&=[\mathfrak{M}^O-(\overrightarrow{OQ}\times\mathfrak{A})]^2=\\ &=(M_1-yA_3+zA_2)^2+(M_2-zA_1+xA_3)^2+(M_3-xA_2+yA_1)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Потребни услови да нека функција од три промењиве има екстремну вредност је, као што је познато, да парцијални изводи те функције по променљивима буду једнаки нули, тј. у нашем случају

$$
\begin{aligned}
&A_3(M_2 - zA_1 + xA_3) - A_2(M_3 - xA_2 + yA_1) = 0,\\
(22)\qquad &A_1(M_3 - xA_2 + yA_1) - A_3(M_1 - yA_3 + zA_2) = 0,\\
&A_2(M_1 - yA_3 + zA_2) - A_1(M_2 - zA_1 + xA_3) = 0.
\end{aligned}
$$

Из природе проблема очигледно је да је, у нашем случају, тражена екстремна вредност минимум.

Три једначине (22) у скаларном облику могу се претставити само једном векторском једначином и то

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{M} = 0,$$

и на тај начин се проблем одређивања једначине централне осе своди на претходни случај, јер је ово једначина (6). Међутим, из једначина (22) може се доћи и директним путем до једначине централне осе у облику (13) на овај начин. На пр. прва од једначина (22) може се, после измножавања, пребацивања неких чланова на десну страну и додавања левој и десној страни члана xA_1^2, написати у облику

$$A_3 M_2 - A_2 M_3 + xA_1^2 + xA_2^2 + xA_3^2 = A_1(xA_1 + yA_2 + zA_3),$$

одакле, после краће трансформације, следује

$$\frac{x - \dfrac{A_2 M_3 - A_3 M_2}{A^2}}{A_1} = \frac{xA_1 + yA_2 + zA_3}{A^2}.$$

На исти начин трансформишу се и остале две једначине, и, како се увек на десној страни добија исти израз, следује одмах, с обзиром на обрасце (16), једначина централне осе у облику (13), што је и требало извести.

Сва ова расуђивања не важе у случају $\mathfrak{A} = 0$. Тада је централна оса система неодређена, јер на основу 20.1 једн. (4) главни момент система за све тачке простора остаје непромењен — он је слободни вектор.

25.3 Распоред главних момената система у простору

Нека буде дат систем $\mathfrak{S}$, одређен коначним бројем везаних вектора, а тражи се прегледна сликара споредa главних момената система за разне тачке простора, тј. тражи се, како се то каже, *моментно поље* система.

$\mathfrak{M}^{C_2} = \mathfrak{M}^{C_1} + [\overrightarrow{C_2C_1}, \mathfrak{A}]$

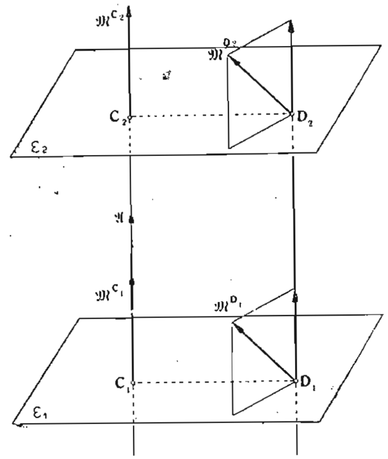
Претпоставићемо прво да главни вектор система није једнак нули и да ни главни момент није једнак нули за тачке централне осе као полове.

$\mathfrak{M}^{C_2} = \mathfrak{M}^{C_1}$

Сад, нека буду дате две паралелне равни ε_1 и ε_2 управне на централној оси c и нека су продорне тачке осе у тим равнима C_1 и C_2 (сл. 89). Тада је

(1) $\qquad \mathfrak{M}^{C_1} = \mathfrak{M}^{C_2},$

ако су $\mathfrak{M}^{C_1}$ и $\mathfrak{M}^{C_2}$ главни моменти система у односу на продорне тачке C_1 и C_2 као полове. Посматрајмо, даље, неку праву l паралелну централној оси c ($l \parallel c$). Нека она продире равни ε_1 и ε_2 у тачкама D_1 и D_2. Пошто је



Сл. 89

(2) $\qquad C_1 D_1 = C_2 D_2,$

то је и

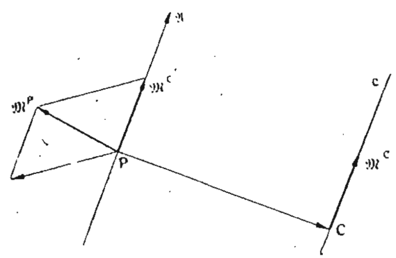
(3) $\qquad \mathfrak{M}^{D_1} = \mathfrak{M}^{D_2}.$

Ово је очигледно, пошто је

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{D_1} &= \mathfrak{M}^{C_1} - (\overrightarrow{C_1D_1} \times \mathfrak{A}),\\
\mathfrak{M}^{D_2} &= \mathfrak{M}^{C_2} - (\overrightarrow{C_2D_2} \times \mathfrak{A}),
\end{aligned}
$$

где је $\mathfrak{A}$ главни вектор система.

Из овога расуђивања следује да је распоред главних момената за све полове који леже у паралелним равнима, нормалним на централној оси, исти, те је стога довољно проучити распоред главних момената само за полове који леже ма у којој равни нормалној на централној оси.



Сл. 90

Моментно поље система има још једну важну особину. Наиме, кад се зна централна оса c система, главни момент за неку тачку P ван осе, а на растојању $d = CP$ од осе (сл. 90), дат је обрасцем

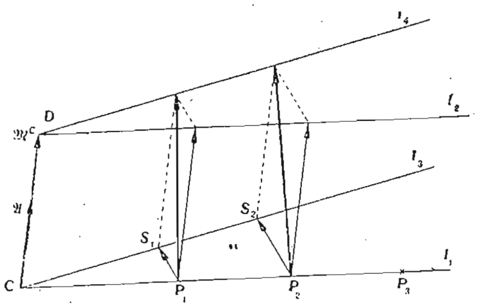
$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^C + (\overrightarrow{PC} \times \mathfrak{A}). \tag{4}$$

Како је $(\overrightarrow{PC} \times \mathfrak{A}) \perp \mathfrak{M}^C$, јер су $\mathfrak{M}^C$ и $\mathfrak{A}$ колинеарни, а осим тога $\overrightarrow{PC} \perp \mathfrak{A}$, то је

$$|\mathfrak{M}^P|^2 = |\mathfrak{M}^C|^2 + d^2 A^2. \tag{5}$$

Према томе, за све тачке на кружном цилиндру полупречника d, чија се оса поклапа са централном осом, главни моменти су једнаки по интензитету, а могу се разликовати по правцу и по смеру. Свака од изводница таквог цилиндра, као права паралелна централној оси, геометриско је место полова за које су главни моменти једнаки.

То значи, да се главни момент система везаних вектора мења само са удаљавањем од централне осе и обилажењем круга чија је раван управна на централној оси, а центар му на самој оси. Стога, да бисмо проучили распоред главних момената за полове ма у којој равни нормалној на централној оси, треба проучити промену главног момента у тој равни: 1) за полове дуж неке полуправе која полази од централне осе (радијално) и 2) дуж круга са центром на централној оси c. На тај начин добиће се потпуно јасна слика моментног поља система за посматрану раван, а то онда значи и — читавог поља.



Сл. 91

Дакле, уочимо неку тачку C на централној оси за коју је главни момент система $\mathfrak{M}^C$ (сл. 91). Узмимо полуправу Cl_1 нормално на централној оси и на овој полуправој низ полова P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ за које важи

$$\mathfrak{M}^{P_i} = \mathfrak{M}^C + (\overrightarrow{P_i C} \times \mathfrak{A}).$$

Ако се стави

$$\overrightarrow{P_i S_i} = \overrightarrow{P_i C} \times \mathfrak{A}, \tag{6}$$

онда је увек

$$\mathfrak{M}^{P_i} = \mathfrak{M}^C + \overrightarrow{P_i S_i}. \tag{7}$$

$\mathfrak{M}^C$ је, дакле, исти сабирак за све главне моменте система у односу на све полове P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ који леже на полуправој Cl_1. Зато, ако је тачка D крај главног момента $\mathfrak{M}^C$, полуправа Dl_2 која спаја крајеве тог сталног вектора сабирка за све полове биће паралелна полуправој Cl_1, тј. $Dl_2 \parallel Cl_1$. Интензитет вектора $\overrightarrow{P_i S_i}$ износи

$$P_i S_i = P_i C \cdot A, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

где је A интензитет главног вектора.

Сви вектори $\overrightarrow{P_i S_i}$ стоје нормално на равни одређеној правама l_1 и l_2 (на основу једн. 6) и њихове дужине су пропорционалне растојању од централне осе, тј. из једн. 8

$$A = \frac{P_1 S_1}{P_1 C} = \frac{P_2 S_2}{P_2 C} \cdots\cdots\cdots \tag{9}$$

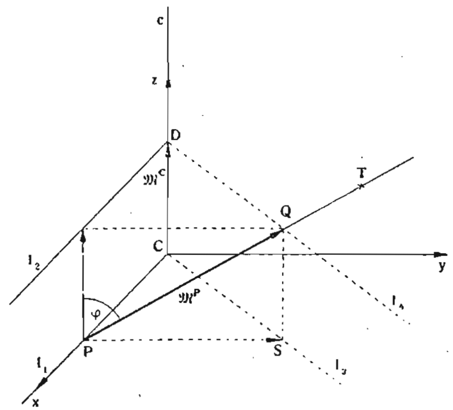
Стога крајеви свих вектора $\overrightarrow{P_i S_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ леже такође на некој полуправој Cl_3, јер су троуглови CP_1S_1, CP_2S_2, итд. слични.

Са слике је очигледно да сад и крајеви вектора главних момената система за полове P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такође леже на полуправој Dl_4 која је паралелна полуправој Cl_3.

Према томе, ако се претпостави да се пол креће дуж полуправе Cl_1 почевши од C, види се да крај вектора главног момента описује полуправу Dl_4, а основе главних момената извесну праволиниску површину. Како ове основе пролазе непрестано кроз две праве l_1 и l_4 и стално су паралелне једној равни — нормалној на равни $(l_1 l_2)$, та је површина хиперболички параболоид.

Дакле, за полове који леже дуж праве нормалне на централној оси интензитет главних момената система повећава се са растојањем, а основе главних момената чине хиперболички параболоид.

Да је површина коју описују основе главних момената заиста хиперболички параболоид може се и директно показати на овај начин. Узмимо тачку C на централној оси за



Сл. 92

почетак Декартова правоуглог координатног система, осу x дуж полуправе Cl_1, осу y у правцу и смеру вектора $\overrightarrow{P_i S_i}$ и најзад централну осу c за z-осу (сл. 92). Посматрајмо неку тачку P на x-оси као пол, онда су координате краја Q главног момента за тачку P одређене са

$$CP = x, \quad PS = y, \quad |\mathfrak{M}^C| = SQ = z_0 = \text{const.} \tag{10}$$

Ако се са φ обележи угао који гради главни момент система у некој тачки простора са правцем централне осе, онда је са слике, с обзиром на једн. 8, очигледно

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{PS}{|\mathfrak{M}^C|} = \frac{Ax}{z_0} = kx, \tag{11}$$

ако се константна величина $\dfrac{A}{z_0}$ обележи са k.

То значи да са удаљавањем пола од централне осе главни момент тежи положају нормалном на централну осу.

С друге стране, ма за коју тачку $T(x, y, z)$ на основи главног момента $\mathfrak{M}^P$ је

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{z}, \tag{12}$$

те, према томе, из (11) и (12) следује

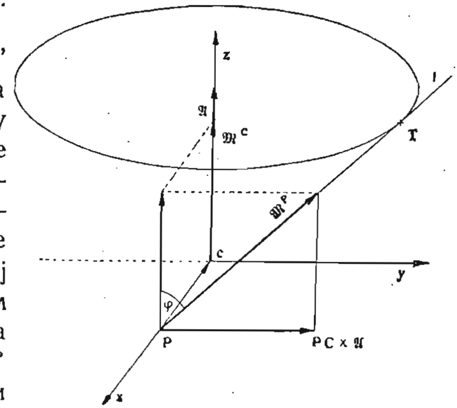
$$\frac{y}{z} = kx,$$

одн.

$$y = kxz. \tag{13}$$

Ово је доиста једначина хиперболичког параболоида, што се лако може показати (на пр. одређивањем пресека паралелних координатним равнима или на општи начин).

За све тачке P као полове на кругу у равни нормалној на централној оси, са центром на централној оси биће, као што смо видели, сви главни моменти једнаких интензитета. Из израза (4) следује (сл. 93), да вектор $\overrightarrow{PC} \times \mathfrak{A}$, управан на $\overrightarrow{PC}$ и $\mathfrak{A}$, има правац дирке на кругу који посматрамо. Ако се замисли кружни цилиндар чија је оса централна оса, а изводнице паралелне централној оси са полупречником $PC = a$, онда основа главног момента $\mathfrak{M}^P$ лежи у тангентној равни овог цилиндра. Интензитет вектора $\mathfrak{M}^C$ је константан, а исто тако и вектора $\overrightarrow{PC} \times \mathfrak{A}$. Интензитет овог вектора је aA, пошто је увек $\overrightarrow{PC} \perp \mathfrak{A}$.



Сл. 93

Према томе сада је

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{aA}{|\mathfrak{M}^C|} = k_1 = \text{const.}, \tag{14}$$

тј. угао који чини правац основа главних момената, чији су полови у тачкама посматраног круга, са z-осом (правцем главног вектора) је константан. Померањем пола по кругу, основе главних момената описују површину. Како је кретање основе ротација праве која чини сталан угао са осом z, око које се врши обртање и са којом није паралелна, то се, као што знамо, добија површина ротационог једнокрилног хиперболоида.

Заиста, основа l главног момента $\mathfrak{M}^P$ дата је очигледно једначинама

$$y = k_1 z, \quad x = a. \tag{15}$$

Површина коју ствара та права при ротацији око z-осе може се остварити и померањем круга

$$x^2 + y^2 = \alpha, \quad z = \beta, \tag{16}$$

промењљива полупречника са центром на z-оси, кад овај клизи по датој правој. Да би круг (16) и права (15) имали заједничку тачку мора за све промењљиве параметре α и β постојати систем вредности x, y, z које задовољавају обе једначине, тј. мора бити испуњен услов

$$(17) \qquad \alpha = k_1^2\beta^2 + a^2.$$

Једначина ротационе површине добија се онда елиминацијом параметара α и β из једначина (16) и (17) у облику

$$(18) \qquad x^2 + y^2 - k_1^2 z^2 = a^2,$$

а то је, као што је познато, једначина ротационог једнокрилног хиперболоида, чији је *грлићни круг*, дат једначином

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

баш круг у чијим тачкама посматрамо главне моменте система. До сада смо претпостављали да ни главни вектор, ни главни момент за тачке централне осе као полове, нису једнаки нули. Ако је, међутим, главни вектор једнак нули, онда су, како смо видели, главни моменти за све тачке простора као полове једнаки међу собом. У случају, пак, да је главни момент система за полове на централној оси једнак нули, а главни вектор различит од нуле, главни момент система за све тачке простора ван централне осе нормалан је на централној оси, јер је $\operatorname{tang} \varphi = \infty$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

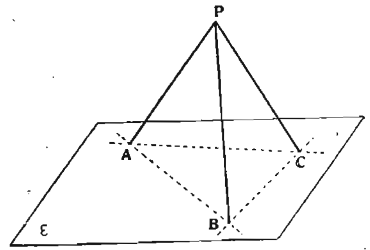
Дакле: 1) у случају $\mathfrak{A} = 0$, сви моментни вектори за разне тачке простора су колинеарни и, према томе, у моментном пољу система постоји само *један* линеарно независан вектор; 2) у случају $\mathfrak{M}^C = 0$, а $\mathfrak{A} \neq 0$, сви моментни вектори су паралелни једној равни нормалној на централној оси система и, према томе, могу се свести на *два* линеарно независна вектора, јер су компланарни; и 3) у општем случају, кад је и $\mathfrak{M}^C \neq 0$ и $\mathfrak{A} \neq 0$, моментни вектори сматрани као слободни вектори имају све могуће правце у простору од три димензије и, према томе, постоје у моментном пољу система *три* линеарно независна вектора.

Најмањи број линеарно независних вектора у моментном пољу неког система везаних вектора зове се *ранг* моментног поља. Ранг моментног поља је једнак *нули* ако су главни вектор и главни момент система једнаки нули за све тачке простора.

25.4 Одређивање система везаних вектора помоћу главних момената у односу на три тачке

Поред векторских и скаларних координата, систем везаних вектора одређују и главни моменти система ма у које три тачке простора које само не леже на истој правој.

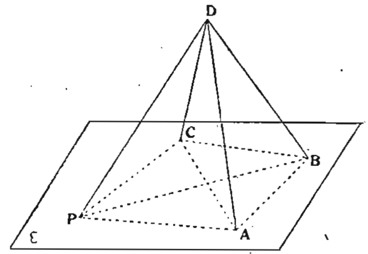
Нека, дакле, буду дати главни моменти $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^C$ неког система везаних вектора у односу на три тачке A, B и C које не леже на правој линији. Показаћемо, прво, да је у том случају потпуно одређен распоред главних момената система (моментно поље) за све тачке простора.



Сл. 94

Нека ε (сл. 94) буде раван одређена тачкама A, B и C. Узмимо ма коју тачку P ван равни ε, онда главни момент система у односу на тачку P има исту пројекцију на осу PA као и дати главни момент $\mathfrak{M}^A$ (моменти у односу на осу не зависе од избора тачке на оси), на осу PB исту пројекцију као и момент $\mathfrak{M}^B$ и, најзад, на осу PC исту пројекцију као главни момент $\mathfrak{M}^C$. То значи, да су од вектора $\mathfrak{M}^P$ који треба одредити, познате пројекције на три некомпланарна правца (то су скаларни производи вектора $\mathfrak{M}^P$ са ортовима односних оса). Међутим, по Гибзову обрасцу, вектор је потпуно одређен са своје три пројекције ма на које три некомпланарне осе, што је и требало доказати.

Ако се тачка P налази у равни ε, одређена је само компонента главног момента $\mathfrak{M}^P$ у равни ε, уколико сам вектор не лежи у тој равни. У том случају, дакле, уочи се прво нека помоћна тачка D ван те равни, одреди, на претходни начин, главни момент за њу, па тек онда одреди главни момент у односу на тачку P, помоћу главних момената у односу на тачке, на пр., A, B и D у чијој равни сад тачка P не лежи (сл. 95.)



Сл. 95

Тиме смо доказали да је моментно поље система везаних вектора одређено потпуно главним моментима система у односу на три неколинеарне тачке.

Ако се тражи распоред главних момената система везаних вектора дуж неке праве l, довољно је познавати главне моменте у односу ма на које две тачке те праве, рецимо, A и B, тј. $\mathfrak{M}^A$ и $\mathfrak{M}^B$.

Тада је

$$\mathfrak{M}^B = \mathfrak{M}^A + (\overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A}), \tag{1}$$

где је $\mathfrak{A}$ главни вектор датог система. Зато, ако се тражи главни момент система у односу ма на коју другу тачку P праве l, онда је

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^A + (\overrightarrow{PA} \times \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Али, како је

$$\overrightarrow{PA} = \lambda\, \overrightarrow{BA},$$

услед колинеарности оба вектора, то се може написати

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^A + \lambda\, (\overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Најзад, ако се у овај израз унесе вредност $\overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A}$ израчуната из једначине (1), добија се

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^A (1 - \lambda) + \lambda\, \mathfrak{M}^B. \tag{4}$$

То значи, да је за све тачке P на правој l увек

$$\mathfrak{M}^P = \alpha\, \mathfrak{M}^A + \beta\, \mathfrak{M}^B, \tag{5}$$

под условом да је

$$\alpha + \beta = 1.$$

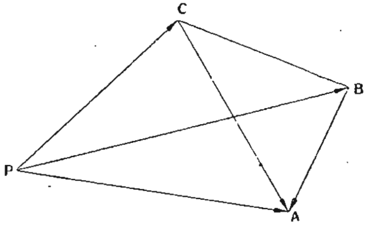
Тако смо доказали да је главни момент система за све тачке неке праве линије одређен само са главним моментима ма за које две различите тачке те праве.

Одавде се још једном види, што смо већ и раније показали, да главни момент неког система везаних вектора може бити дуж неке праве линије константан само ако је: 1) посматрана права паралелна главном вектору система, јер је тада

$$\overrightarrow{PA} \times \mathfrak{A} = \overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A} = 0,$$

или 2) главни вектор система једнак нули, тј. $\mathfrak{A} = 0$.

Ако се тражи распоред главних момената система у некој равни ε, морају се знати главни моменти система $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^C$ у односу на три различите тачке A, B и C равни које не леже на истој правој, као и у општем случају (сл. 96).



Сл. 96

Тада је главни момент $\mathfrak{M}^P$, у односу ма на коју тачку P у посматраној равни, дат, рецимо, једначином

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^A + (\overrightarrow{PA} \times \mathfrak{A}), \tag{6}$$

где је $\mathfrak{A}$ опет главни вектор система. Међутим, како су три компланарна вектора увек линеарно зависни, може се према томе написати

$$\overrightarrow{PA} = \lambda\, \overrightarrow{BA} + \mu\, \overrightarrow{CA}, \tag{7}$$

тако да се уношењем те вредности за $\overrightarrow{PA}$ у једначину (6) добија

$$\mathfrak{M}^P = \mathfrak{M}^A + (\lambda\, \overrightarrow{BA} + \mu\, \overrightarrow{CA}) \times \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^A + \lambda\, (\overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A}) + \mu\, (\overrightarrow{CA} \times \mathfrak{A}). \tag{8}$$

Из једначине (1), међутим, следује

$$\overrightarrow{BA} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^B - \mathfrak{M}^A,$$

а исто тако и, из истих разлога,

$$\overrightarrow{CA} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^C - \mathfrak{M}^A.$$

Заменом ових вредности у једначини (8) добија се

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^P &= \mathfrak{M}^A + \lambda\, (\mathfrak{M}^B - \mathfrak{M}^A) + \mu\, (\mathfrak{M}^C - \mathfrak{M}^A) = \\ &= \mathfrak{M}^A (1 - \lambda - \mu) + \lambda\, \mathfrak{M}^B + \mu\, \mathfrak{M}^C. \end{aligned} \tag{9}$$

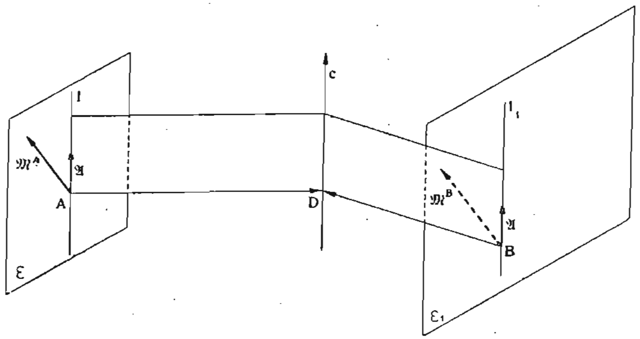
Дакле, за сваку тачку P у равни тачака A, B и C чији су моменти $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^C$ дати, важи

$$\mathfrak{M}^P = \alpha\, \mathfrak{M}^A + \beta\, \mathfrak{M}^B + \gamma\, \mathfrak{M}^C, \tag{10}$$

под условом да је

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Ипак, иако је распоред главних момената неког система везаних вектора одређен како смо видели, главним моментима система у три тачке простора, та три главна моментна вектора не могу се у општем случају произвољно изабрати. Они нису независни. А ево зашто. Ако се, на пр., за главни момент у тачки A (сл. 94) узме произвољно неки вектор $\mathfrak{M}^A$, тиме је већ одређена и пројекција главног момента система у тачки B, тј. $\mathfrak{M}^B$ на осу AB, јер та пројекција не зависи од избора тачке на оси и мора стога бити једнака односној пројекцији датог главног момента $\mathfrak{M}^A$ на исту осу (без обзира на њену оријентацију, тј. ма како је ми изабрали). Према томе слободне су само још две пројекције моментног вектора $\mathfrak{M}^B$ у тачки B, рецимо, на раван нормалну на AB кроз тачку B, те за његово потпуно одређивање треба свега две, место три координате, у општем случају. Из истих разлога су одређене пројекције главног момента система у тачки C на осе CA и CB. Овде је слободна само још једна пројекција, рецимо, на правац нормалан на равни ABC, одн. потребна је само још једна координата за потпуно одређивање тог момента. Дакле, од девет независних параметара потребних у општем случају за одређивање моментних вектора $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^C$ као слободних вектора, потребно је само шест параметара и стога се избор вектора главних момената система не може извршити произвољно. Другим речима, не одговара сваком произвољном избору од три главна моментна вектора увек стварно неки систем везаних вектора.



Сл. 97

Сад ћемо показати да три дата главна момента система везаних вектора одређују, не само распоред главних момената система у простору, него и централну осу система и главни вектор система.

Заиста, ако се ма за коју тачку простора A зна њен главни момент $\mathfrak{M}^A$ неког система везаних вектора и *само правац* l главног вектора $\mathfrak{A}$ тог система (сл. 97), онда је

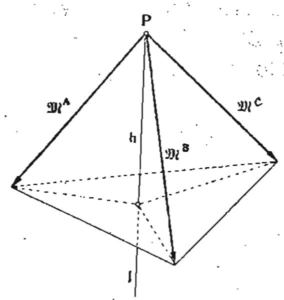
лако одредити раван у којој се мора налазити централна оса. Као што знамо, централна оса је тада паралелна правој l и сече нормалу AD на равни ε одређеној главним моментом и правом l. Другим речима, централна оса мора лежати у равни положеној кроз праву l нормално на равни ε. Зато, ако имамо два пола, A и B, са главним моментима $\mathfrak{M}^A$ $\mathfrak{M}^B$, и ако је дат правац главног вектора (одн. централне осе), треба само конструисати две односне нормалне равни, па ће се у њихову пресеку добити централна оса по положају. Смер главног вектора система (па наравно и централне осе) одређен је према т. 25.2 из услова да, на пр., вектори $\overrightarrow{AD}$, главни вектор $\mathfrak{A}$ и главни момент $\mathfrak{M}^A$ у тачки A чине десни триједар.

Свака наредна раван нормална на равни одређеној главним вектором у некој трећој тачки и правцем главног вектора мора пролазити кроз пресек прве две равни, услед тога што њен положај није потпуно независан од положаја прве две равни, јер су односни одредбени моменти међусобно зависни.

Ову конструкцију централне осе, помоћу главних момената у двема тачкама простора и помоћу правца главног вектора, дао је Понсле (Poncelet).

Остаје, наравно, да се покаже, како се одређује правац главног вектора, који се у претходној конструкцији искоришћује, помоћу главних момената у трима тачкама. То се лако постиже на овај начин.

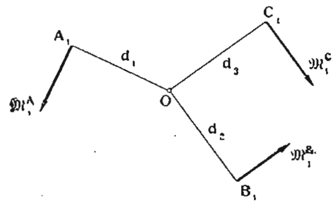
Правац главног вектора се карактерише тиме што су пројекције главних момената на тај правац константе за одређени систем везаних вектора (скаларна инваријанта s). Стога, ако се ма у којој тачки P простора конструише тетраедар чије су ивице, које полазе од те тачке, геометриски једнаке датим моментним векторима, висина h тог тетраедра, повучена из тачке M, једнака је по апсолутној вредности скаларној инваријанти s (сл. 98), а њен правац l је правац главног вектора $\mathfrak{A}$ система. Тако је потпуно одређен правац главног вектора система.



Сл. 98

Најзад, ради одређивања интензитета главног вектора треба конструисати раван ε нормалну на централној оси c

(сл. 99). Нека тада A_1, B_1 и C_1 буду пројекције датих тачака A, B и C на ту раван, и O продор централне осе кроз ту раван. Нека $\mathfrak{M}_1^A$, $\mathfrak{M}_1^B$ и $\mathfrak{M}_1^C$ буду пројекције главних момената $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$ и $\mathfrak{M}^C$ на ту раван ε, одн. компоненте посматраних главних момената, нормалне на правцу главног вектора. Дужи d_1, d_2, d_3 су растојања централне осе c од тачака A, B и C и оне се пројицирају у правој величини. Тада је очигледно интензитет компоненте главног момента која је нормална на правцу главног вектора, дат изразом



Сл. 99

(11) $$|\mathfrak{M}_1^A| = d_1 |\mathfrak{A}|.$$

Отуда следује

(12) $$|\mathfrak{A}| = \frac{|\mathfrak{M}_1^A|}{d_1}.$$

Наравно да се за одређивање интензитета главног вектора на овај начин може узети ма који од три дата вектора момента.

Из претходних разматрања следује тачност нашег тврђења да је сваки систем везаних вектора потпуно одређен ма са која три своја главна момента у односу на неке три тачке које само нису на истој правој.

Стога се може рећи да су два система везаних вектора еквивалентни и кад имају једнаке главне моменте ма у које три тачке простора које само не леже на истој правој.

25.5 Елементарне трансформације система везаних вектора

У систему сила које делују на неко чврсто тело могу се, како знамо, извршити неке промене, а да се дејство система на чврсто тело не промени. Такве исте промене извршене ма на којем систему везаних вектора зову се *елементарне трансформације* система. У случају система сила које делују на неко чврсто тело такве трансформације се зову и *статичке*.

Такве су трансформације:

1) померање везаног вектора дуж његове основе;

2) сабирање вектора са заједничким почетком у вектор са истим почетком;

3) разлагање вектора у компоненте са истим почетком;

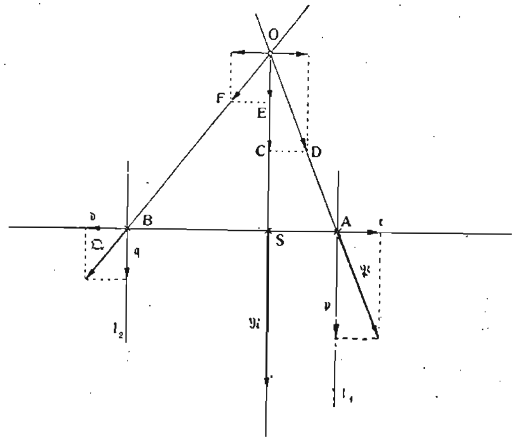
4) додавање систему или изостављање из система директно супротних вектора.

Везани вектори се не могу увек сабрати. Поред случаја кад имају заједнички почетак, везани вектори могу се сабрати и онда кад се елементарним трансформацијама могу довести на заједнички почетак. Збир два везана вектора са заједничким почетком образује се, као и код слободних вектора, по правилу паралелограма. Тако се, на пр., два везана вектора чије се основе секу увек могу, померањем дуж својих основа, довести на заједнички почетак. И ма који број везаних вектора чије основе пролазе кроз једну тачку може се заменити једним вектором, који одговара збиру свих тих вектора образованом по правилу полигона. Кад се везани вектори налазе на истој основи, њихова резултанта се добија алгебарским сабирањем њихових интензитета, узимајући интензитете једнога смера са знаком плус, а другога са знаком минус.

Два везана вектора, чије се основе укрштају (мимоилазе), наравно не могу се сабрати и заменити једним вектором. За таква два везана вектора каже се да чине *укрст*. Међутим, два везана вектора чије су основе паралелне, могу се елементарним трансформацијама довести на заједнички почетак и сабрати, изузев у случају кад су једнаких величина и супротних смерова.

Да то покажемо посматрајмо, прво, два везана вектора, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, са паралелним основама l_1 и l_2 ($l_1 \parallel l_2$) који су истога смера (сл. 100). Тада се додаду два директно супротна вектора $\mathfrak{c} = -\mathfrak{d}$ (четврта елементарна трансформација), чија је основа права l која пролази кроз нападне тачке A и B датих везаних вектора. По извршеном сабирању вектора $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{c}$, као и вектора $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{d}$, добијају се вектори $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, чије се основе секу у тачки O. Ове векторе доведемо померањем дуж њихових основа (прва елементарна трансформација) у заједнички почетак O, па их онда разложимо у компоненте (трећа елементарна трансформација) тако, да се у O добију два директно супротна вектора једнака векторима $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$. То је могуће учинити само на један начин, јер је по једна компонента дата потпуно по величини, правцу и смеру. Та два директно супротна вектора се изоставе, јер се потиру (четврта елементарна трансформација), па остају друга два вектора који имају исти смер и правац, а по интензитету су једнаки векторима $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$. Према томе је

(1) $$R = p + q,$$



Сл. 100

где је R интензитет резултанте $\mathfrak{R}$, а p и q интензитети паралелних компонената. Основа резултанте је права OS. Положај тачке S на правој l одређује се на овај начин. Из сличности троуглова OSA и OCD следује

(2) $$SA : CD = OS : OC,$$

а из сличности троуглова OSB и OEF следује

(3) $$SB : EF = OS : OE.$$

Деобом једначина (2) и (3), узев у обзир да је $CD = EF$ добија се најзад

(4) $$SA : SB = OE : OC = q : p.$$

Дакле, резултанта два паралелна везана вектора истога смера је везани вектор исте оријентације, чији је интензитет једнак збиру интензитета датих везаних вектора, а основа права, паралелна датим векторима. Основа дели растојање између њихових нападних тачака унутрашњом поделом на два отсечка обрнуто пропорционална интензитетима датих вектора.

Нападна тачка резултанте није одређена, јер се резултанта може померати дуж своје основе OS. Ипак, ако су нападне тачке вектора $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ изабране, онда се обично по договору за почетак резултанте узима баш тачка S. Тачка S је и иначе истакнута тачка. Њен положај се не мења ако се дати вектори $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ па наравно и њихова резултанта, остајући паралелни, обрну за исти угао у истом смеру око својих почетака A и B, јер, како смо видели, њен положај зависи само од положаја нападних тачака датих паралелних везаних вектора и од односа интензитета тих вектора. То значи да се положај тачке S не мења ни кад се векторима $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ тако промене интензитети да се њихов однос не промени. Тачка S се зове стога *центар паралелних везаних вектора* $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, чије су нападне тачке A и B.

Из једначине (4) следује одмах

(5) $$p : SB = q : SA = (p+q) : (SA + SB),$$

или најзад

(6) $$p : SB = q : SA = R : AB,$$

тј. интензитет свакога од три вектора $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{R}$ пропорционалан је растојању нападних тачака остала два вектора.

Ако има више паралелних везаних вектора са смером на исту страну, онда се могу, прво, сложити два, па резултанта ова два са трећим и тако даље.

Обрнуто, дати везани вектор $\mathfrak{R}$ може се увек раставити у две паралелне компоненте истога смера:

1) ако је познат почетак и величина p једне од компонената, под условом $p < R$;

2) ако су познати почеци компонената, који морају лежати са разних страна почетка резултанте.

И два везана вектора чије су основе паралелне, али им смерови супротни (антипаралелни везани вектори), ако су им величине различите могу се на сличан начин довести на заједнички почетак додавањем два директно супротна вектора. Међутим, до резултанте оваква два вектора долази се простије на овај начин. Вектор $\mathfrak{p}$ већег интензитета ($p > q$) разложи се у две компоненте тако, да једна компонента $\mathfrak{q}_1$ буде директно супротна вектору $\mathfrak{q}$ (сл. 101). Друга његова компонента $\mathfrak{R}$ одређује се по правилу о растављању везаног вектора у паралелне компоненте истога смера, тј. мора бити

(7) $$p = q_1 + R,$$

одн.

(8) $$R = p - q,$$

јер је, по претпоставци, $q_1 = q$. Даље мора бити, на основу једначине (6),

(9) $$AB : SA = R : q,$$

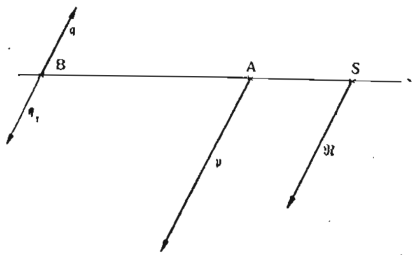
одакле се добија

(10) $$(AB + SA) : SA = (q + R) : q,$$

тј.

(11) $$SB : SA = p : q.$$

Према томе је резултанта везаних вектора $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ заиста везани вектор $\mathfrak{R}$, јер се директно супротни вектори $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}_1$ потиру.



Сл. 101

Пресечна тачка S основе резултанте и праве l, која пролази кроз почетке A и B датих везаних вектора, дели сад спољашњом поделом растојање између A и B у обрнутом односу величина датих вектора. Тачка S има исте особине као и у претходном случају, те се и даље зове *центар паралелних везаних вектора* $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$.

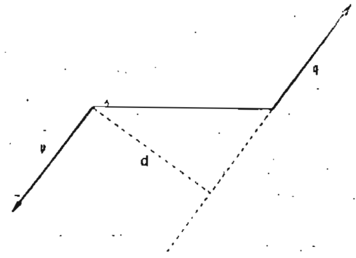
Наравно, дати везани вектор може се раставити и у две антипаралелне компоненте неједнаких величина, ако је:

1) потпуно дата једна од компонената, и то, ако је то она са смером датог вектора, мора бити већа по величини од вектора који се разлаже; ако је она са супротним смером, мора бити мања по величини од вектора који се разлаже;

2) познат положај почетка обе компоненте које сад треба да леже са исте стране почетка датог везаног вектора.

Два везана вектора чије су основе паралелне, смерови супротни, а величине једнаке не могу се довести на заједнички почетак и, према томе, не могу се сабрати, немају резултанту. Наиме, ако се замисли да се разлика у величинама два антипаралелна вектора смањује, из образаца (8) и (11) види се да они више немају смисла, јер резултанта таква два вектора тежи нули, а њена основа се удаљује у бесконачност. Ако бисмо покушали са додавањем ма која два директно супротна вектора нећемо ништа постићи, јер и накнадно изведени везани вектори остају паралелни и њихове основе се нигде не секу.

Према томе, два антипаралелна везана вектора, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, једнаких интензитета (сл. 102) не могу се свести на један вектор, већ образују нови облик који се зове *спрег везаних вектора* или, кратко, само *спрег* (на пр. спрег сила које теже да произведу ротацију чврстог тела). Растојање d основа вектора спрега зове се *крак спрега*.



Сл. 102

Елементарне трансформације система везаних вектора не мењају моментно поље тог система.

Наиме, из саме дефиниције момента везаног вектора у односу на пол јасно је да се моменти појединих вектора система неће, па, наравно, ни главни момент система променити услед померања везаних вектора дуж њихових основа (прва елементарна трансформација).

Осим тога, нека буду дата два везана вектора $\mathfrak{A}^{(l_1)}$ и $\mathfrak{B}^{(l_2)}$ са заједничким почетком Q и нека њихова резултанта буде $\mathfrak{C}^{(l)}$. Тада је

(12) $$\mathfrak{M}^P(\mathfrak{A}) + \mathfrak{M}^P(\mathfrak{B}) = \overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{A} + \overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{B} = \overrightarrow{PQ} \times (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \overrightarrow{PQ} \times \mathfrak{C},$$

тј. збир момената вектора сабирака $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ у односу на пол P једнак је моменту резултанте $\mathfrak{C}$ оба ова вектора у односу на исти пол. То значи да се главни момент система не мења ни при другој трансформацији, па наравно, ни при трећој, ни четвртој. Према томе, главни момент система $\mathfrak{S}$ од n везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тј.

(13) $$\mathfrak{M}^P(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}^P(\mathfrak{A}_1) + \mathfrak{M}^P(\mathfrak{A}_2) + \cdots + \mathfrak{M}^P(\mathfrak{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}^P(\mathfrak{A}_i)$$

је инваријантан у односу на елементарне трансформације. Међутим, елементарним трансформацијама се очигледно не мења ни главни вектор система везаних вектора. Стога се еквивалентност два система везаних вектора може и овако дефинисати.

Два система везаних вектора $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1$ су еквивалентни ако се елементарним трансформацијама могу свести један на други.

25.6 Спрег

Нека буде дат спрег везаних вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{AB} = \mathfrak{s}$; $\overrightarrow{CD} = -\mathfrak{s}$) и нека P буде ма која тачка на основи вектора $\overrightarrow{AB}$ (сл. 103), а Q ма која тачка на основи вектора $\overrightarrow{CD}$. Тада је момент спрега (главни момент система од два антипаралелна вектора једнаких интензитета) у односу ма на коју тачку O простора дат са

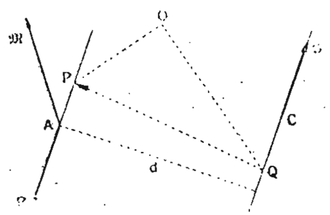
$$(1) \qquad \mathfrak{M}^O(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}\times\mathfrak{s} + \overrightarrow{OQ}\times(-\mathfrak{s}) = (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})\times\mathfrak{s} = \overrightarrow{QP}\times\mathfrak{s}.$$

Према томе момент спрега не зависи уопште од избора пола O, тј. момент спрега је слободни вектор.

Момент спрега зове се каткад и *осовина спрега* и његов интензитет је једнак производу интензитета једног од вектора спрега и крака спрега d, тј.

$$(2) \qquad |\mathfrak{M}| = s\,d,$$

што одмах следује из једначине (1). Геометриски, интензитет момента спрега претставља површина паралелограма $ABCD$, конструисана са векторима спрега. Правац вектора момента је правац нормале на равни одређеној векторима спрега, а смер такав да је обртање спрега у директном смеру.



Сл. 103

Момент спрега у односу на неку осу је пројекција моментног вектора на ту осу.

Ако је момент спрега познат, вектори спрега се очигледно могу одредити, ако су дате основе вектора спрега ма у којој равни нормалној на моменту. Тада се интензитет вектора спрега налази просто деобом интензитета момента растојањем датих основа, а смер вектора је одређен директним обртањем у односу на смер момента. Наравно да се, осим тога, вектори спрега као везани вектори могу по вољи померати дуж својих основа.

Исто тако, ако се зна момент спрега и само један вектор спрега, за одређивање другог вектора треба само одредити растојање основа d (крак спрега), а то се одмах постиже деобом интензитета момента интензитетом датог вектора, итд. При томе је само потребно да основе леже у равни нормалној на моменту, а иначе се могу налазити где било у простору, јер је момент спрега слободни вектор.

Према томе, геометриски говорено, сви спрегови који леже у паралелним равнима и чине паралелограме исте површине и исте оријентације у простору *еквивалентни* су (или, ако се ради о силама, *статички једнаки*).

Из ових разматрања следује:

1) Сваки спрег се може свести на други са њим еквивалентан, чији вектори леже на двема произвољно датим правама у његовој равни.

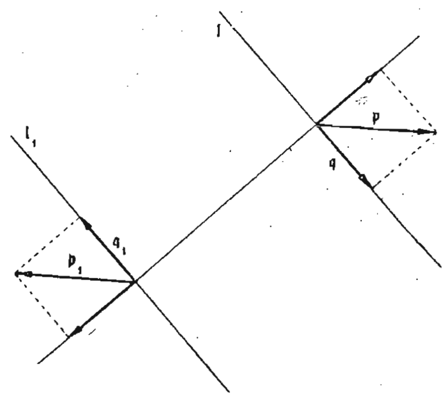
2) Два спрега су еквивалентна, ако се један из другога добијају паралелним померањем у простору.

3) Сваки спрег се може свести на други са њим еквивалентан, коме је један вектор ма који унапред дати вектор $\mathfrak{x}$, под условом само да његова основа лежи у равни нормалној на вектору момента.

Тачност ових ставова је очигледна, ако се спрег посматра као момент, а може се доказати директно и кад се полази од спрега као система два вектора, па искористе елементарне трансформације.

У том случају се претходни став 1) може овако доказати.

Нека буде дат спрег ($\mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}_1$), где је $\mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{p}$ и две произвољне паралелне праве l и l_1 у равни тог спрега. Узмимо, прво, да l и $\mathfrak{p}$ нису паралелни (сл. 104).



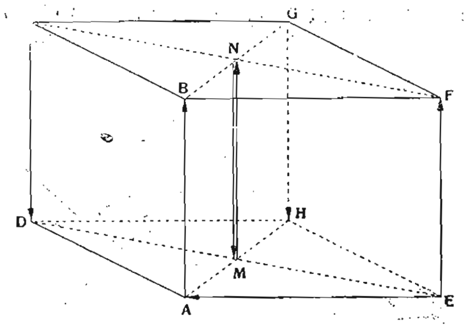
Сл. 104

Померањем вектора $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$ дуж њихових основа може се постићи да њихови почеци леже на датим правама l и l_1.

Разложимо тада векторе $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$ у компоненте у правцима l, одн. l_1 и у правцу праве одређене почецима вектора. Компоненте у правцу праве одређене почецима вектора директно су супротне и, према томе, могу се изоставити. Остаје, дакле, само спрег $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}_1$, чије су основе дате паралелне праве l и l_1. Ако се деси да су дате паралелне праве l и l_1 баш паралелне основама вектора спрега, онда треба повући, прво, две паралелне праве које нису паралелне векторима спрега, свести спрег на те праве као основе, па онда од њега прећи на првобитно дате праве са којима посреднички спрег неће више бити паралелан. Дакле, и у том случају свођење је могуће, а то значи, да се спрег може паралелно померати у својој равни.

За доказ другог става поступићемо овако.

Ако се спрег везаних вектора ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$) добија паралелним померањем спрега ($\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$) у простору, онда почеци и крајеви вектора тих спрегова чине осам темена неког паралелепипеда (сл. 105). Посматрајмо, тада, пресеке M и N дијагонала страна $ADHE$ и $BCGF$ нашег паралелепипеда. Ако се дуж праве MN додаду два директно супротна вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NM}$ који су једнаки по величини векторима $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$, онда се спрег ($\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{NM}$) може, према претходном ставу, паралелним померањем у својој равни свести на спрег ($\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{CD}$). Спрег ($\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{MN}$) своди се на исти начин на спрег ($\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{AB}$).

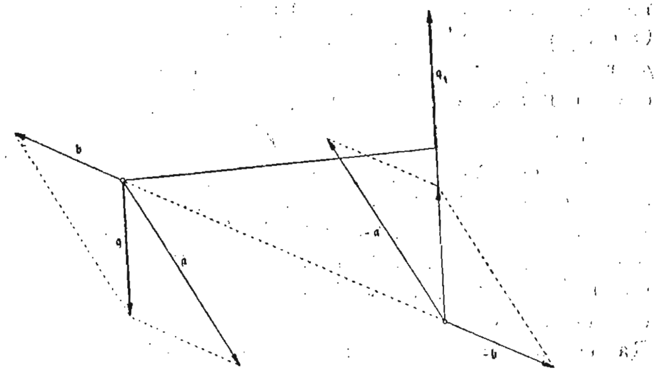


Сл. 105

Према томе је првобитни спрег ($\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$) сведен на два спрега ($\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{CD}$) и ($\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{AB}$), а они се очигледно своде на спрег ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$), пошто су $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NM}$ директно супротни вектори и могу се изоставити.

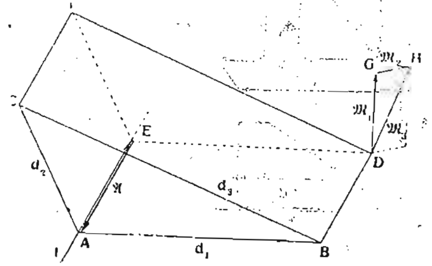
И трећи став се може и овако доказати.

Нека буде дат спрег ($\mathfrak{q}$; $\mathfrak{q}_1$), где је $\mathfrak{q}_1 = -\mathfrak{q}$ и произвољни вектор $\mathfrak{a}$ (сл. 106). Разложимо, на пр., вектор $\mathfrak{q}$ спрега у компоненте тако, да једна од њих буде дати вектор $\mathfrak{a}$, што


Сл. 106

је увек и само на један начин могуће. Нека друга компонента буде вектор $\mathfrak{b}$. Други вектор спрега $\mathfrak{q}_1$ померимо дуж његове основе тако, да му почетак падне у пресек његове основе са правцем вектора $\mathfrak{b}$. Тада се и вектор $\mathfrak{q}_1$ разложи у две компоненте, да једна од ових буде супротна датом вектору, тј. $-\mathfrak{a}$. У том случају ће друга компонента овог вектора бити супротна компоненти $\mathfrak{b}$, тј. $-\mathfrak{b}$. Како се вектори $\mathfrak{b}$ и $-\mathfrak{b}$, као директно супротни, потиру, остаје само спрег вектора ($\mathfrak{a}$; $-\mathfrak{a}$), што смо и хтели да докажемо.

Два спрега се могу сабрати (сложити) у један спрег. Ако сматрамо да су спрегови дати њиховим моментима, довољно је просто сабрати њихове моменте. Тачност овог тврђења може се показати и посматрањем самих спрегова као векторских парова. На пр., нека l буде нека права нормална на моментним векторима $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ оба дата спрега (било да су ови моментни вектори паралелни или не) (сл. 107). Нека даље $\mathfrak{A}$ буде ма који везани вектор на основи l.

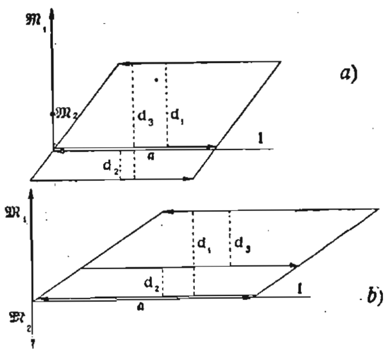


Сл. 107

Ако се сад један од посматраних спрегова сведе на спрег чији је један вектор баш вектор $\mathfrak{A}$, а други спрег на спрег чији је један вектор $-\mathfrak{A}$, а који је на истој основи l, онда се два директно супротна вектора потиру. Два преостала вектора $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{FC}$ су паралелна, јер су паралелни истој правој l. Они су једнаких интензитета и супротних смерова, па чине *резултантни спрег*. Резултантни спрег се може у извесним случајевима свести и на нулу, тј. на два директно супротна вектора.

Момент $\mathfrak{M}_3$ резултантног спрега је заиста векторски збир момената $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ оба дата спрега. Са слике се види, да је $\Delta DGH \sim \Delta BAC$, јер је $\mathfrak{M}_1 \perp ABDE$, $\mathfrak{M}_2 \perp AEFC$, па стога $\sphericalangle DGH = \sphericalangle BAC$. Затим је $DG = a\,d_1$ и $GH = a\,d_2$, где је a интензитет вектора $\mathfrak{A}$ а d_1 и d_2 краци датих спрегова. Отуда следује, да је $DH = ad_3$, где је d_3 крак резултантног спрега. Дакле, интензитет резултантног спрега једнак је интензитету векторског збира оба момента $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Обртањем у позитивном смеру троугла DGH за $\frac{\pi}{2}$, његове стране постају паралелне странама троугла BAC, јер су сви углови у оба троугла једнаки, па мора бити $\mathfrak{M}_3 \perp BDFC$ са односном оријентацијом.

У случају да се равни оба спрега, које треба сабрати, не секу, него су паралелне, они се могу паралелним померањем довести у једну раван, тако да им моменти имају заједнички почетак (сл. 108, *a* и *b*). Тада се опет повлачењем ма које нормалне праве l на заједнички правац оба момента своди један од спрегова на спрег коме је један вектор $\mathfrak{a}$ везан за дату праву l, а други на спрег који на датој правој као основи има вектор $-\mathfrak{a}$. Потирањем тих директно супротних вектора спрегови се своде на један спрег, који је збир оба дата спрега и чији је момент алгебарски збир момената оба дата спрега.



Сл. 108

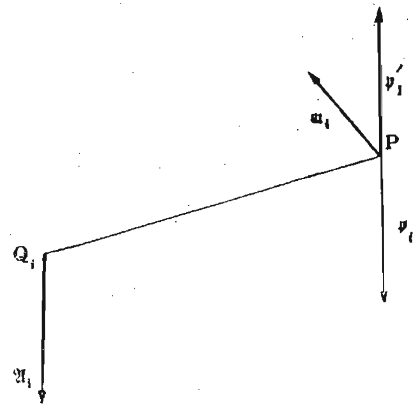
Интензитет момента збира једнак је, у случају да су моменти оба дата спрега истог смера (сл. *a*), збиру интензитета оба дата момента ($d_3 = d_1 + d_2$), јер су спрегови исте оријентације. Ако су пак спрегови супротне оријентације (сл. *b*), моменти су супротно оријентисани, интензитет резултанте једнак је разлици интензитета датих момената ($d_3 = d_1 - d_2$).

25.7 Редукција система везаних вектора. Динама

Један везани вектор, спрег везаних вектора и укрст везаних вектора су прости, даље несводљиви системи везаних вектора. Сад ћемо показати како се сваки систем везаних вектора своди на њих.

Прво, како је сваки систем везаних вектора одређен главним вектором и главним моментом у односу ма на коју тачку простора, очигледно је да се сваки систем везаних вектора може свести на један вектор, који је главни вектор система са нападном тачком ма у којој тачки простора, и на два вектора спрега, чији је момент главни момент система у односу на изабрану тачку P. Ово се свођење може стварно извести, на пр., на овај начин.

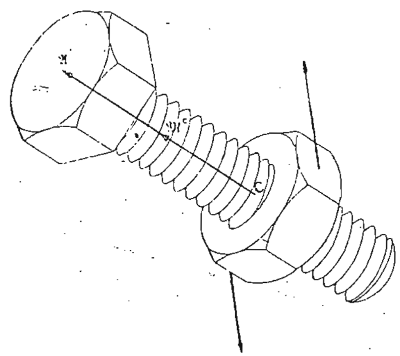
Посматрајмо систем везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ са нападним тачкама Q_i, и нека P буде ма која тачка простора (сл. 109). Овом систему се могу додати два директно супротна везана вектора, $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}_i'$, са почетком у тачки P, од којих је $\mathfrak{p}_i$ геометриски једнако вектору $\mathfrak{A}_i$. Тада везани вектори $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{p}_i'$ чине спрег момента $\mathfrak{m}_i$, који је нормалан на равни кроз тачку P и вектор $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ и; према томе, везани вектор $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ се може заменити спрегом $(\mathfrak{A}_i; \mathfrak{p}_i')$ момента $\mathfrak{m}_i$ и вектором $\mathfrak{p}_i$ са почетком у тачки P.



Сл. 109

Другим речима, сваки везани вектор $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ може се пренети ма у коју тачку простора као почетак, ако му се после преноса дода још његов момент у односу на ту тачку као пол, јер је момент добијеног спрега једнак моменту вектора у односу на нови почетак. Ако се сви везани вектори неког система доведу на овај начин на заједнички почетак, добиће се два система вектора: систем вектора $\mathfrak{p}_i$ и систем вектора $\mathfrak{m}_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$) са заједничком почетном тачком P. Збир вектора првога система је $\Sigma\mathfrak{p}_i=\Sigma\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}$ — главни вектор система и, очигледно, не зависи уопште од избора пола P. С друге стране се и сви спрегови ($\mathfrak{A}_i$; $\mathfrak{p}_i'$) ($i=1, 2, \ldots, n$) могу сложити сабирањем момената, па се добија резултантни спрег система, чији је момент $\Sigma\mathfrak{m}_i=\mathfrak{M}$. Ово је, међутим, главни момент система у односу на пол P. Сваком положају тачке P у општем случају одговара наравно други главни момент.

Ако се, при овом свођењу, за пол узме нека тачка C на централној оси система, онда је, после свођења, услед колинеарности главног момента $\mathfrak{M}^C$ и главног вектора $\mathfrak{A}$, раван добијеног спрега нормална на правцу централне осе, одн. главног вектора. Систем који чини главни вектор $\mathfrak{A}$ и вектори спрега, чији је момент $\mathfrak{M}^C$ колинеаран главном вектору зове се *завртањ* или *динама* по Пликеру или *торзор* по Болу (Ball) (сл. 110). Према томе, сваки систем везаних вектора може се у општем случају свести на динаму, само ако се за пол свођења узме нека тачка централне осе система. То даље значи да се, у општем случају, сваки систем везаних вектора може сматрати као динама.



Сл. 110

Параметар σ система везаних вектора зове се и *параметар динаме*. Компонента главног момента система ма за коју тачку P као пол у правцу главног вектора, тј.

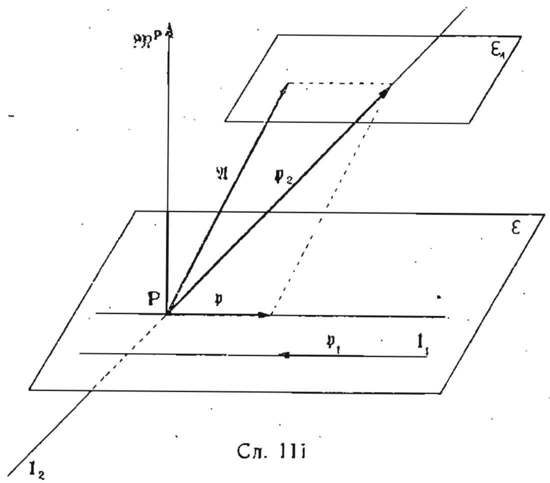
$$\mathfrak{K}=\sigma\mathfrak{A}=\mathfrak{M}^C, \tag{1}$$

зове се и *момент динаме*. Главни вектор динаме зове се понекад и *амплитуда динаме*, а његов интензитет *модул динаме*. Параметар динаме је у ствари однос момента и амплитуде динаме. Централна оса система је *оса динаме*.

Очигледно је да су две динаме једнаке, ако су им једнаки главни вектори и главни моменти у односу на исти пол. Операције са системима везаних вектора могу се у најопштијем случају увек свести на операције са динамама. Под збиром две динаме разуме се динама чији је главни вектор збир главних вектора датих динама, а главни момент у односу на неку тачку простора збир главних момената датих динама у односу на исту тачку простора.

Три вектора (главни вектор и два вектора спрега одређена главним моментом система) на које се у општем случају своди неки систем везаних вектора могу се даље свести на два укрштена вектора — укрст — на овај начин.

Нека P буде произвољна тачка простора, $\mathfrak{M}^P$ главни момент система везаних вектора у односу на ту тачку, а $\mathfrak{A}$



Сл. 111

главни вектор система. Нека буде даље $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P\neq 0$, тј. раван ε нормална на главном моменту $\mathfrak{M}^P$ није паралелна главном вектору. Нека систем буде већ сведен на главни вектор $\mathfrak{A}$ у тачки P и спрег, чији је један вектор $\mathfrak{p}$ неки произвољни вектор у равни ε са основом која пролази кроз тачку P (сл. 111). Тада је други вектор неки везани вектор $\mathfrak{p}_1$ у равни ε који је као слободни вектор једнак $-\mathfrak{p}$ и чија основа не иде кроз P. Сабирањем вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{p}$ са заједничким почетком у P добија се вектор $\mathfrak{p}_2$. Тако се цео систем своди на два вектора $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ чије су основе праве l_1 и l_2 које се укрштају (мимоилазе) и од којих l_2 пролази кроз пол P. Такве две праве l_1 и l_2 зову се *коњуговане праве* у односу на дати систем везаних вектора. Крај вектора $\mathfrak{p}_2$ лежи у равни ε_1 која је постављена кроз крај вектора $\mathfrak{A}$ паралелно равни ε. Како се вектор $\mathfrak{p}$ може произвољно узети у равни ε, то права l_2 може имати сваки правац изузев правца главног вектора и не може лежати у равни ε.

Према томе се један од два вектора може узети ма на којој правој простора која само није паралелна ни нултој правој ни централној оси. Наиме, ако се вектор $\mathfrak{p}$ смањује по интензитету, то се правац l_2 приближује централној оси, али зато растојање коњуговане праве l_1 расте у бесконачност. Обрнуто пак, ако се интензитет вектора $\mathfrak{p}$ повећава, права l_2 се приближује правој у равни ε, тј. нултој правој и коњугована права l_1 се приближује и тежи истој нултој правој, а величина вектора $\mathfrak{p}_1$ тежи бесконачности.

Како се види, под условом $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P \neq 0$, дати се систем везаних вектора може на бесконачно много начина свести на укрст два вектора. При томе се може узети произвољна тачка простора P за пол и неки произвољни правац кроз ту тачку за једну основу уз претходна ограничења. Наравно, у разним случајевима добијени вектори укрста се непрестано мењају и по величини, и по правцу и по смеру.

Ипак, ма како ми дати систем везаних вектора свели на два укрштена вектора $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$, Шалова (Chasles) теорема тврди, да узајамни момент тако добијених вектора остаје инваријантан у односу на избор пола и правца основе једног од вектора. Заиста, према т. 23, једн. 9, за узајамни момент два вектора $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ важи

(2) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_2) + \mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_1).$$

Ово се даље може написати у облику

(3) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2)\cdot[\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_1)+\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_2)],$$

јер се после измножавања добија израз (2). Наиме, скаларни производи $\mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_1)$ и $\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_2)$ једнаки су нули као мешовити производи три вектора са по два колинеарна вектора. Из (3) је одмах

(4) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P = S,$$

јер је $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2=\mathfrak{A}$ (главни вектор система), а $\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_1)+\mathfrak{M}^P(\mathfrak{p}_2)=\mathfrak{M}^P$ (главни момент система у односу на тачку P као пол).

Према томе, узајамни момент вектора укрста на који се своди неки систем везаних вектора зависи само од главног вектора и главног момента посматраног система. Он је једнак скаларној инваријанти S датог система. На тај начин Шалова теорема даје геометриску интерпретацију скаларне инваријанте S. Скаларна инваријанта S неког система везаних вектора једнака је шестострукој запремини тетраедра чије су наспрамне ивице вектори укрста на који се систем своди.

За узајамни момент укрста два вектора на који се своди неки систем везаних вектора важи и Мебијусова (Möbius) теорема која гласи: Узајамни момент укрста два вектора $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ на који се своди неки систем вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ једнак је збиру узајамних момената свих вектора система, тј.

(5) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} M(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}_\mu). \qquad (\nu\neq\mu)$$

Очигледно је да је укупан број сабирака на десној страни $\binom{n}{2}$.

Овај став се може доказати на овај начин. Једначина (4) може се написати у облику

(6) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P = \sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{A}_\nu\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{M}_\nu^P,$$

где су $\mathfrak{M}_\nu$ моменти појединих вектора система у односу на P. Ако се у овом изразу на десној страни изоставе сви производи са једнаким индексима као једнаки нули, добиће се израз

(7) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{A}_\mu\mathfrak{M}_\nu). \qquad (\nu\neq\mu)$$

Међутим, према једначини (2) израз у загради је узајамни момент вектора $\mathfrak{A}_\nu$ и $\mathfrak{A}_\mu$, па је према томе

(8) $$M(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} M(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}_\mu), \qquad (\nu\neq\mu)$$

што је и требало доказати.

Из ових разлога се узајамни момент укрста на који се дати систем своди зове и *аутомомент* датог система везаних вектора. У случају да је $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P = S = 0$, кад су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$ различити од нуле, из претходних је разматрања јасно, да оба вектора $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ морају лежати у равни ε и да су такви да се могу довести на заједнички почетак и свести на један вектор.

25.8 Класификација система везаних вектора

Систем везаних вектора који се, у општем случају, како смо видели, своди на динаму, може се у специјалним случајевима свести на нулу, један вектор и спрег. Да бисмо знали на који се прост и даље несводљив систем своди дати систем везаних вектора извршићемо класификацију система. Она се може извршити на разне начине.

Према моментном пољу разликују се системи са *константним* моментним пољем и системи са *променљивим* моментним пољем.

Системи са константним моментним пољем $\mathfrak{M}=\mathfrak{C}$, кад је $\mathfrak{C}\neq 0$ еквивалентни су спрегу и своде се на спрег, при чему је момент тог спрега дати вектор $\mathfrak{C}$; а еквивалентни су нули, кад је $\mathfrak{C}=0$.

Системи са променљивим моментним пољем еквивалентни су једном вектору, ако је моментно поље ранга 2, тј. ако у моментном пољу постоје највише два линеарно независна вектора; и еквивалентни укрсту одн. динами, ако је ранг моментног поља 3, тј. ако у моментном пољу постоје три линеарно независна вектора.

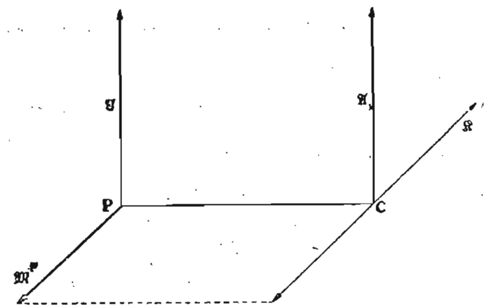
Важнија класификација система се врши према вредностима инваријаната система. При томе се за основу може узети који било пар од раније наведених инваријаната. Ми ћемо се овде задржати на векторској инваријанти $\mathfrak{A}$ и скаларној инваријанти $S=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P$.

1. Ако је $\mathfrak{A}=0$, онда је увек и $S=0$. У том случају је систем еквивалентан: или *a*) *нули*, кад је и $\mathfrak{M}^P=0$; или *b*) *спрегу*, кад је $\mathfrak{M}^P\neq 0$. Момент тога спрега је $\mathfrak{M}^P$.

2. Ако је $\mathfrak{A}\neq 0$, онда се разликују два случаја: *a*) $S=0$ и *b*) $S\neq 0$.

У првом случају систем је еквивалентан једном вектору. Услов *a*) је за то потребан и довољан. Заиста, ако се систем своди на један вектор, онда је главни момент система у односу на тачке основе тог вектора једнак нули и према томе $S=0$, јер је вредност инваријанте S иста за све тачке простора. Дакле, услов *a*) је потребан. Услов је и довољан. И то, ако је $\mathfrak{M}^P=0$, он је очигледан. Кад је $\mathfrak{M}^P\neq 0$, онда из $S=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}^P=0$ следује да је $\mathfrak{M}^P\perp\mathfrak{A}$. Тада се померањем од пола P у правцу и смеру вектора $\overrightarrow{PC}$, који са векторима

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^P$ чини десни триједар и стоји нормално на равни одређеној тим векторима (сл. 112), за $PC=\dfrac{|\mathfrak{M}^P|}{A}$ може доћи до тачке C у којој је главни момент једнак нули. Према томе систем ће бити еквивалентан једном вектору $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$ са почетком у тачки C која лежи на централној оси система, јер се може сматрати да је $\mathfrak{M}^C=0$ колинеарно са главним вектором. Наиме, тада је



Сл. 112

$$(1)\qquad \mathfrak{M}^C=\mathfrak{M}^P+\overrightarrow{CP}\times\mathfrak{A}.$$

Ако се стави $\mathfrak{K}=\overrightarrow{CP}\times\mathfrak{A}$, може се написати

$$(2)\qquad \mathfrak{M}^C=\mathfrak{M}^P+\mathfrak{K}.$$

Како је, међутим, $\mathfrak{M}^P=\overrightarrow{PC}\times\mathfrak{A}_1=\overrightarrow{PC}\times\mathfrak{A}=-\mathfrak{K}$, добија се

$$(3)\qquad \mathfrak{M}^C=0,$$

што је и требало доказати.

У другом случају, кад је, поред $\mathfrak{A}\neq 0$, и $S\neq 0$, систем се своди на динаму, одн. укрст. Заиста, систем који се састоји од вектора са почетком ма у којој тачки простора P и спрега $(\mathfrak{p}\,;\,\mathfrak{p}_1)$, чија је раван нормална на $\mathfrak{M}$ и чији је момент једнак $\mathfrak{M}^P$, очигледно је еквивалентан датом систему, јер има са њим једнак главни момент и главни вектор. Ако се, осим тога, пол P узме баш на централној оси, раван спрега ће бити нормална на централној оси, дакле, и на главном вектору $\mathfrak{A}$ и, према томе, систем је еквивалентан динами.

Ако је главни вектор $\mathfrak{A}$ система дат својим Декартовим правоуглим координатама A_1, A_2, A_3 и главни момент $\mathfrak{M}^P$ система у односу на координатни почетак својим координатама

M_1, M_2, M_3 тада се поједини случајеви свођења разликују на овај начин.

Систем везаних вектора еквивалентан је:

a) *нули*, кад је

(4) $$A_1 = A_2 = A_3 = M_1 = M_2 = M_3 = 0;$$

b) *спрегу*, кад је

(5) $$A_1 = A_2 = A_3 = 0;$$

M_1, M_2, M_3 нису сви једнаки нули;

c) *једном везаном вектору* коме је основа централна оса система, кад

A_1, A_2, A_3 нису сви једнаки нули;

(6) M_1, M_2, M_3 могу, но не морају сви бити једнаки нули, али мора бити

$$A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3 = S = 0;$$

d) *динами*, кад

A_1, A_2, A_3 нису сви једнаки нули;

(7) M_1, M_2, M_3, такође нису сви једнаки нули, и

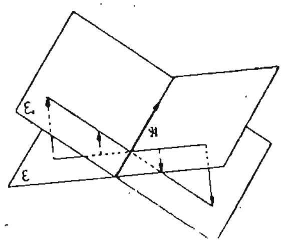
$$A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3 = S \neq 0.$$

26. Раван систем везаних вектора

Систем везаних вектора који сви леже у некој равни ε зове се *раван систем*. Главни вектор $\mathfrak{A}$ таква система мора лежати у самој равни ε, а главни момент $\mathfrak{M}^P$ у односу ма на коју тачку P равни стоји нормално на равни. Према томе је скаларна инваријанта $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^P = S = 0$ и систем је еквивалентан: *a*) *једном везаном вектору*, ако је главни вектор различит од нуле, без обзира на вредност главног момента; *b*) *спрегу*, кад је главни вектор једнак нули, али је главни момент различит од нуле; и *c*) *нули*, ако су главни вектор и главни момент у односу ма на који пол једнаки нули.

Ако се замисле конструисани главни моменти за све тачке равни у којој су вектори, онда је геометриско место крајева вектора главних момената увек раван, и то: за систем еквивалентан нули — сама раван у којој су вектори; за

систем еквивалентан спрегу — раван паралелна равни ε; и најзад за систем еквивалентан једном вектору — раван ε_1 која сече раван ε у којој су вектори по основи вектора на који се читав систем своди (по централној оси система) (сл. 113).



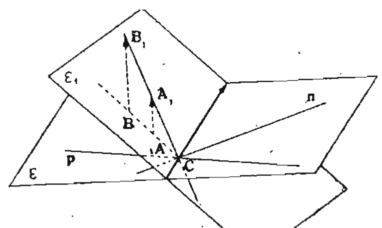
Сл. 113

На основу претходнога очигледно је да је раван систем везаних вектора одређен:

1) Главним моментима система у односу на три тачке равни ε које само нису на истој правој. Тачност овога тврђења је очигледна из претходних расматрања о геометриском месту крајева вектора главних момената у односу на разне тачке равни ε. Наиме, крајеви ова три дата главна момента потпуно одређују моментну раван. Моментна раван сече раван ε по централној оси система и онда је врло лако одредити вектор на који се систем своди, помоћу централне осе као основе траженог вектора и једног било којег од три дата главна момента. Ако су случајно сва три дата момента једнаки, моментна раван је паралелна равни ε, централна оса је у бесконачности. Систем се своди на спрег који је одређен ма којим од три дата момента. Ако су сва три дата главна момента једнака нули, онда је систем еквивалентан нули.

2) Кад су познати главни моменти система у односу ма на које две тачке A и B равни ε и пројекција главног вектора система ма на који правац p у равни ε, који само није нормалан на спојници AB.

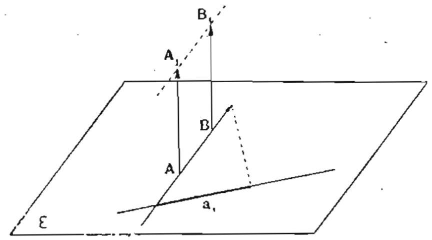
У овом случају одређују крајеви A_1 и B_1 главних момената у две тачке A и B равни ε ону праву A_1B_1 у моментној равни ε_1 чија је пројекција на раван ε права AB. Ако права A_1B_1 сече раван ε (сл. 114), мора је сећи у оној тачки централне осе кроз коју пролази и права AB. Тако се добија једна тачка C централне осе. У ту тачку C замисли се пренет



Сл. 114

главни вектор и растављен у две компоненте у правцу AB и нормално на правој AB. Компонента главног вектора у правцу n нормалном на AB одређена је главним моментом у тачки A или B. Тако смо у интензитету те компоненте добили још једну пројекцију главног вектора. Пројекције вектора на два неколинеарна правца у равни потпуно одређују тражени главни вектор. Тиме је постављени задатак у потпуности решен.

Ако су главни моменти у A и B једнаки, права A_1B_1 не сече раван ε. Тада разликујемо два случаја: *а*) ако је пројекција главног вектора на дати правац у равни једнака нули, централна оса је у бесконачности и систем је еквивалентан спрегу, чији је момент једнак главном моменту у тачки A или B; *b*) ако пројекција a_1 главног вектора на дати правац није једнака нули, централна оса мора бити паралелна правој AB. Према томе, може се одредити главни вектор $\mathfrak{A}$ система потпуно из познате пројекције a_1 и правца вектора који је одређен правцем централне осе, одн. правцем праве AB (сл. 115). Затим остаје само још да се одреди положај централне осе. Он се одређује помоћу главног момента у односу на тачку A или B и помоћу већ познатог главног вектора.



Сл. 115

3) Кад су дате пројекције главног вектора система ма на која два неколинеарна правца у равни система и главни момент у односу ма на коју тачку те равни.

У овом случају прво треба одредити главни вектор помоћу датих пројекција на два неколинеарна правца, па затим положај централне осе помоћу датог момента.

Ако се уведу Декартове правоугле координате, онда је раван систем везаних вектора одређен у односу на неки такав правоугли координатни систем Oxy у равни система у скаларном облику са само три координате, тј.

$$(1)\qquad A_1=\sum_{i=1}^{n}A_{i1},\quad A_2=\sum_{i=1}^{n}A_{i2},\quad M_3=M=\sum_{i=1}^{n}(x_iA_{i2}-y_iA_{i1}),$$

јер су остале три идентички једнаке нули.

Према томе за раван систем важи:

а) $A_1=A_2=M=0$ — систем нула;

b) $A_1=A_2=0,\ M\neq 0$ — спрег чији је момент M;

c) A_1 и A_2 не оба једнака нули — један вектор.

У последњем случају је главни момент система у односу ма на коју тачку $P(x, y)$ равни ε дат векторском једначином

$$(2)\qquad \mathfrak{M}^P=\mathfrak{M}^O-(\overrightarrow{OP}\times\mathfrak{A}),$$

одн., пошто знамо да је главни момент сад увек нормалан на равни Oxy, после пројицирања на z-осу, добијамо у скаларном облику

$$(3)\qquad M^P=M^O+yA_1-xA_2.$$

Како је за тачке централне осе у случају равног система $M^{(P)}=0$, једначина централне осе равног система дата је у скаларном облику једначином

$$(4)\qquad M^O+yA_1-xA_2=0,$$

где су x и y текуће координате. Ова једначина очигледно има смисла само у случају кад се раван систем своди на један вектор, тј. кад је бар једна од координата A_1 и A_2 главног вектора различита од нуле.

27. Систем паралелних везаних вектора. Центар система паралелних вектора

Нека буде дат систем везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ који су сви паралелни, и нека $\mathfrak{u}_0$ буде орт њихова правца, онда су сви вектори система дати са

$$(1)\qquad \mathfrak{A}_i=A_i\mathfrak{u}_0,$$

где су A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ позитивни и негативни скалари, чије су апсолутне вредности интензитети појединих вектора система.

Главни вектор $\mathfrak{A}$ оваква система дат је обрасцем

$$(2)\qquad \mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i=\mathfrak{u}_0\sum_{i=1}^{n}A_i=A\,\mathfrak{u}_0,$$

где је A једнако алгебарском збиру интензитета вектора система, тј.

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$

Главни момент овог система $\mathfrak{S}$ у односу на неку тачку O, ако је $\mathfrak{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$ вектор положаја почетка P_i вектора $\mathfrak{A}_i$, дат је изразом

(3) $$\mathfrak{M}^O(\mathfrak{S}) = \Sigma\,(\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{A}_i) = \Sigma\,(\mathfrak{r}_i \times A_i\,\mathfrak{u}_0) = (\Sigma\, A_i\,\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{u}_0).$$

Нека O_1 буде неки други произвољни пол, онда је

(4) $$\overrightarrow{O_1P_i} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{O_1O} + \mathfrak{r}_i.$$

Према томе је

(5) $$\mathfrak{M}^{O_1} = (\Sigma A_i\,\overrightarrow{O_1P_i}) \times \mathfrak{u}_0,$$

где је

(6) $$\Sigma\, A_i\,\overrightarrow{O_1P_i} = \Sigma\, A_i\,(\overrightarrow{O_1O} + \mathfrak{r}_i) = A\,\overrightarrow{O_1O} + \Sigma\, A_i\mathfrak{r}_i.$$

Вредност скаларне инваријанте S је нула, пошто је

(7) $$S = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}^O = A\,\mathfrak{u}_0 \cdot (\Sigma\, A_i\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{u}_0) = 0.$$

Према томе систем паралелних вектора $\mathfrak{A}_i$ може бити еквивалентан само једном вектору, или спрегу, или нули.

Претпоставимо, прво, да је $\mathfrak{A} \neq 0$, одн. $A = \Sigma\, A_i \neq 0$. Тада постоји централна оса са смером и правцем који је одређен ортом $\mathfrak{u}_0$. Ако произвољна тачка O није на централној оси, онда је $\mathfrak{M}^O \neq 0$ и стога, из (3), следује $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i \neq 0$. Кад је O на централној оси, онда је $\mathfrak{M}^O = 0$ и, према томе, из (3) следује

(8) $$\Sigma\, A_i\mathfrak{r}_i = \lambda\,\mathfrak{u}_0,$$

где је λ ма који реални број. Кад се узме ма која друга тачка O_1, опет на централној оси, онда је $\overrightarrow{O_1O} = \mu\,\mathfrak{u}_0$, где је μ ма који реални број. Тада на основу једначине (6) добијамо

(9) $$\Sigma\, A_i\,\overrightarrow{O_1P_i} = (\lambda + \mu A)\,\mathfrak{u}_0,$$

и ако се O_1 изабере тако на централној оси да је

$$\mu = -\frac{\lambda}{A},$$

што је увек могуће, онда се добија

(10) $$\Sigma\, A_i\,\overrightarrow{O_1P_i} = 0.$$

Према томе у систему паралелних вектора постоји само једна тачка $C \equiv O_1$ за коју важи

(11) $$\Sigma\, A_i\,\overrightarrow{CP_i} = 0,$$

тј. у односу на коју је збир вектора положаја почетака свих вектора система помножених интензитетима одговарајућих вектора једнак нули. Та тачка C се зове *центар система паралелних везаних вектора.* Дати систем се, дакле, своди на један вектор $\mathfrak{A} = A\,\mathfrak{u}_0$ са почетком у тачки C.

Како једначина (11), која одређује центар система паралелних вектора, не зависи од правца $\mathfrak{u}_0$ вектора система, то важи став: Ако се дати систем паралелних вектора обрне тако, да се сви вектори система обрну око својих почетака за исти угао и у истом смеру, то се за исти тај угао обрће и резултанта $\mathfrak{A}$ око тачке C која при том не мења свој положај.

Централне осе свих система који се један из другог добијају обртањем свих вектора неког система за исти угао, кад им почеци остају у истим тачкама, образују сноп правих са центром у C.

Кад се везани вектори померају дуж својих основа тако да се положај тачака P_i мења, онда се и положај тачке C на централној оси мења.

Ако се тачка C уведе као помоћни пол, може се написати

(12) $$\Sigma\, A_i\mathfrak{r}_i = \Sigma\, A_i(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_i}) = \overrightarrow{OC}\,\Sigma\, A_i + \Sigma\, A_i\,\overrightarrow{CP_i},$$

па, с обзиром на (11), следује

$$\Sigma\, A_i\,\mathfrak{r}_i = \overrightarrow{OC}\,\Sigma\, A_i,$$

одакле је

(13) $$\overrightarrow{OC} = \mathfrak{r}_C = \frac{\Sigma\, A_i\mathfrak{r}_i}{\Sigma\, A_i},$$

што се може сматрати као векторска једначина за одређивање положаја центра система паралелних вектора.

Нека за Декартов правоугли координатни систем са почетком у тачки O буду координате вектора: $\overrightarrow{OC} = \{x_C, y_C, z_C\}$; $\mathfrak{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, онда се (13) може написати у облику три скаларне једначине

(14) $$x_C = \frac{\Sigma\, A_i x_i}{\Sigma\, A_i}, \quad y_C = \frac{\Sigma\, A_i y_i}{\Sigma\, A_i}, \quad z_C = \frac{\Sigma\, A_i z_i}{\Sigma\, A_i},$$

које служе за аналитичко одређивање положаја центра система паралелних вектора.

Збир производа алгебарских вредности појединих вектора система и растојања њихових почетака од неке равни зове се *линеарни моменш* система у односу на ту раван. Ако се ради о систему сила које делују на чврсто тело, линеарни моменти таквог система зову се *сшашички моменши*. Према томе су

$$(15) \qquad \Sigma A_i x_i, \quad \Sigma A_i y_i, \quad \Sigma A_i z_i$$

линеарни моменти система везаних вектора у односу на координатне равни Декартова правоуглог координатног триједра. Тада из (14) следује став: Линеарни момент система паралелних везаних вектора у односу ма на коју раван једнак је линеарном моменту главног вектора (резултанте) тог система са почетком у центру система у односу на исту раван.

Видели смо раније (т. 25.5) где се и како налази положај центра за два паралелна везана вектора. За три геометриски једнака паралелна везана вектора, из претходних једначина је очигледно, центар се налази у тежишту троугла чија су темена почеци датих везаних вектора.

Посматрајмо сад случај кад је $A = \Sigma A_i = 0$. Тада је (једн. 6)

$$(16) \qquad \Sigma A_i \overrightarrow{O_1 P_i} = \Sigma A_i \mathfrak{r}_i = \Sigma A_i \overrightarrow{OP_i},$$

па према томе $\Sigma A_i \overrightarrow{OP_i}$ уопште не зависи од избора пола O.

Одатле следује да је моментно поље система константно. При томе могу наступити два случаја: *а*) вектор $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i$ није колинеаран са ортом $\mathfrak{u}_0$, онда је систем еквивалентан спрегу, чији је момент дат једначином (3). Ако се дати вектори померају по својим основама, еквивалентност спрегу остаје очувана. Нека $\mathfrak{l}_i$ буду нови вектори положаја почетака вектора нашег система, па је $\Sigma A_i \mathfrak{l}_i = A_i(\mathfrak{r}_i + \lambda_i \mathfrak{u}_0)$, а стога се вредност главног момента система (једн. 3) не мења; *b*) вектор $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i$ је колинеаран са $\mathfrak{u}_0$. Тада је систем еквивалентан нули, јер је, према једн. (3), и главни момент овог система једнак нули. У скаларном облику услов колинеарности вектора $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i$ и орта $\mathfrak{u}_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ изражава се помоћу једначина

$$(17) \qquad \frac{\Sigma A_i x_i}{u_1} = \frac{\Sigma A_i y_i}{u_2} = \frac{\Sigma A_i z_i}{u_3},$$

које су независне од положаја координатног система, јер, како смо видели, $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i$ не зависи од избора тачке O. Једначине (17) зависе од орта $\mathfrak{u}_0$, али су и од њега независне у случају да су сва три бројиоца једнака нули, тј. кад је $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i = 0$. У овом случају остаје систем еквивалентан нули, и ако се сви вектори система, задржавајући величину и

паралелност, обрну за неки угао око својих нападних тачака. За такав систем се каже да је *асшашички* еквивалентан нули.

Кад је $A = \Sigma A_i = 0$, а $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i \neq 0$ (случај спрега) не може се уопште говорити о центру посматраног система $\mathfrak{S}$, јер у том случају једначина (13) показује, да се тај центар не налази нигде у коначности већ да се удаљује у бесконачност. Међутим, у случају астатичке еквиваленције система са нулом, свака тачка простора се може сматрати као центар система. Тада је, наиме, вредност израза (13) неодређена. Систем паралелних вектора, који је еквивалентан нули, може се увек померањем вектора дуж њихових основа свести на астатички, са нулом еквивалентан, систем. Наиме, тада је увек $\Sigma A_i \mathfrak{r}_i = \lambda \mathfrak{u}_0$, и очигледно је да се померањем може постићи, да се овај израз промени за $-\lambda \mathfrak{u}_0$ тако, да буде задовољен услов астатичности система. Управо, довољно је и да се само један једини вектор система, на пр. $A_i \mathfrak{u}_0$, помери дуж своје основе за $-\dfrac{\lambda}{A_i}\mathfrak{u}_0$.

Положај центра система паралелних вектора је, како смо видели, инваријанта у односу на правац вектора $\mathfrak{A}_i$ система, но он не зависи ни од положаја координатног система.

Нека буде, рецимо, положај почетка P_i вектора $\mathfrak{A}_i$ у систему оса $Oxyz$ дат вектором положаја $\mathfrak{r}_i$, а у новом систему оса $O_1\zeta\eta\xi$ вектором $\mathfrak{R}_i$, тада је

$$(18) \qquad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{b} + \mathfrak{R}_i,$$

где је $\mathfrak{b}$ вектор положаја почетка O_1 новог система у односу на почетак O старог система. Тада из једначина (13) после краће трансформације, следује

$$(19) \qquad \mathfrak{r}_C = \frac{\Sigma A_i(\mathfrak{b} + \mathfrak{R}_i)}{\Sigma A_i} = \mathfrak{b} + \frac{\Sigma A_i \mathfrak{R}_i}{\Sigma A_i} = \mathfrak{b} + \mathfrak{R}_C.$$

Одатле је јасно, да се центар система паралелних вектора $(i = 1, 2, \ldots, n)$ избором новог координатног система није променио по положају у односу на положаје почетака вектора система.

Ако се уведе неки Декартов координатни систем тако, да му оса z има правац вектора система, а осе x и y да буду у некој равни нормалној на правцу вектора система, види се да је систем паралелних везаних вектора одређен са само три координате, тј.

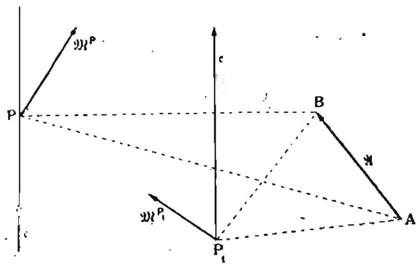
(20) $$A_3 = A = \sum_{i=1}^{n} A_i; \quad M_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i; \quad M_2 = -\sum_{i=1}^{n} A_i x_i .$$

Остале три су идентички једнаке нули.

Очигледно је какве морају бити вредности ових координата у разним случајевима редукције нашег система.

28. Примери

1. Одредити везу између момената везаног вектора $\mathfrak{A}$ у односу на две паралелне осе.



Сл. 116

Нека буду дате две паралелне осе одређене ортом $\mathfrak{e}$, једна кроз тачку P, а друга кроз тачку P_1 (сл. 116). Тада је

$$M_{\mathfrak{e}}^{P} = \mathfrak{M}^{P} \cdot \mathfrak{e}$$

момент везаног вектора $\mathfrak{A}$ у односу на осу $\mathfrak{e}$ кроз тачку P, а

(2) $$M_{\mathfrak{e}}^{P_1} = \mathfrak{M}^{P_1} \cdot \mathfrak{e}$$

момент тог истог вектора у односу на осу $\mathfrak{e}$ кроз тачку P_1. Међутим је с обзиром на т. 20.1 једн. 4

$$\mathfrak{M}^{P_1} = \mathfrak{M}^{P} - \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{A} ,$$

па је, према томе,

(3) $$M_{\mathfrak{e}}^{P_1} = M_{\mathfrak{e}}^{P} - (\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{e} ,$$

где је $\mathfrak{r}_1$ вектор положаја тачке P_1 у односу на тачку P, тј. $\mathfrak{r}_1 = \overrightarrow{PP_1}$. Ова веза између момената везаног вектора у односу на паралелне осе не зависи од положаја тачака P и P_1 на односним осама.

2. Одредити Пликерове координате праве

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4} .$$

У том циљу треба одредити координате орта $\mathfrak{u}_0$ дате праве као осе и координате момента овог орта са почетком, рецимо, у тачки $(1, -2, 3)$ кроз коју дата права пролази, у односу на координатни почетак.

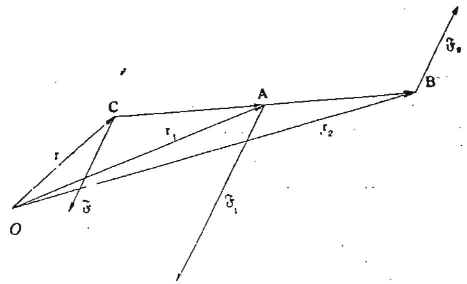
Координате траженог орта су у ствари косинуси углова које дата права чини са осама система, дакле,

$$\mathfrak{u}_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}} , \ \frac{3}{\sqrt{29}} , \ \frac{4}{\sqrt{29}} \right) .$$

Момент орта у односу на координатни почетак одређен је изразом

$$\mathfrak{m}^{O} = \left(-\frac{17}{\sqrt{29}} , \ \frac{2}{\sqrt{29}} , \ \frac{7}{\sqrt{29}} \right) .$$

3. Доказати директно, да за два антипаралелна везана вектора разних величина важи став, да је збир момената оба вектора у односу на неки пол једнак моменту резултанте та два вектора у односу на исти пол.



Сл. 117

Нека дати антипаралелни вектори буду $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ са нападним тачкама у A и B и нека њихова резултанта буде $\mathfrak{F}$ са нападном тачком у C (сл. 117). Тада је

(1) $$\mathfrak{M}^{O} = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{F}_2 = (\mathfrak{r} + \overrightarrow{CA}) \times \mathfrak{F}_1 + (\mathfrak{r} + \overrightarrow{CB}) \times \mathfrak{F}_2 =$$

$$= \mathfrak{r} \times (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) + \overrightarrow{CA} \times \mathfrak{F}_1 + \overrightarrow{CB} \times \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F} + \overrightarrow{CA} \times \mathfrak{F}_1 + \overrightarrow{CB} \times \mathfrak{F}_2 .$$

Међутим, како је $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{F_2}{F_1} = k$, а вектори $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ су колинеарни истога смера, док су вектори $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ колинеарни супротног смера, то је $\overrightarrow{CA} = k\, \overrightarrow{CB}$ и $\mathfrak{F}_2 = -k\, \mathfrak{F}_1$.

Стога је

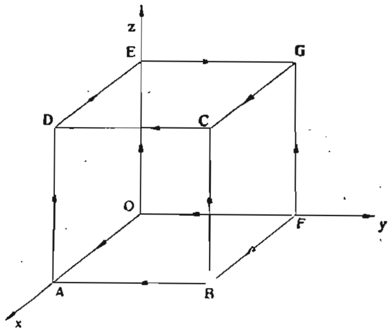
(2) $$\overrightarrow{CA} \times \mathfrak{F}_1 + \overrightarrow{CB} \times \mathfrak{F}_2 = k(\overrightarrow{CB} \times \mathfrak{F}_1) - k(\overrightarrow{CB} \times \mathfrak{F}_1) = 0$$

и према томе

$$\mathfrak{M}^O = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F},$$

што је и требало доказати.

4. Нека буде дат систем од дванаест вектора једнаких интензитета p, који су везани за праве ивица коцке и оријентисани као на приложеној слици (сл. 118). Дужина ивице коцке нека буде a.



Сл 118

a) Свести овај систем везаних вектора на најпростији облик.

b) Одредити једначину централне осе тог система.

Главни вектор датог система

$$\mathfrak{A} = \{ A_1, A_2, A_3 \}$$

одређен је са

$$A_1 = \Sigma A_{i_1} = 2p, \quad A_2 = \Sigma A_{i_2} = -2p, \quad A_3 = \Sigma A_{i_3} = 4p.$$

Према томе је $\mathfrak{A} \neq 0$.

Главни момент овог система у односу на координатни почетак O, тј.

$$\mathfrak{M}^O = \{ M_1, M_2, M_3 \}$$

одређен је са

$$M_1 = \Sigma(y_i A_{i_3} - z_i A_{i_2}) = 2\,ap,$$

$$M_2 = \Sigma(z_i A_{i_1} - x_i A_{i_3}) = -2\,ap,$$

$$M_3 = \Sigma(x_i A_{i_2} - y_i A_{i_1}) = -4\,ap.$$

Према томе је и главни момент овог система различит од нуле, тј. $\mathfrak{M}^O \neq 0$.

Вредност скаларне инваријанте S је

$$S = A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3 = -16\,ap^2 \neq 0.$$

Према томе, овај се систем своди на динаму одређену вектором $\mathfrak{A}$ и спрегом чији је момент

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}^O \cdot \mathfrak{a}_0)\mathfrak{a}_0 = -\frac{2}{3}\,ap\sqrt{6}\,\mathfrak{a}_0,$$

где је $\mathfrak{a}_0$ орт главног вектора система.

За једначину централне осе

$$\frac{x - x_C}{A_1} = \frac{y - y_C}{A_2} = \frac{z - z_C}{A_3}$$

треба само одредити координате тачке C, тј.

$$x_C = \frac{1}{A^2}(A_2 M_3 - A_3 M_2) = \frac{2\,a}{3}, \quad y_C = \frac{1}{A^2}(A_3 M_1 - A_1 M_3) = \frac{2\,a}{3},$$

$$z_C = \frac{1}{A^2}(A_1 M_2 - A_2 M_1) = 0.$$

Једначина централне осе, дакле, гласи

$$x - \frac{2\,a}{3} = \frac{y - \frac{2\,a}{3}}{-1} = \frac{z}{2}.$$

5. Доказати да се систем паралелних сила $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ са нападним тачкама у $(-a, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$ налази у астатичкој равнотежи, ако је $F_1 = F_2 = P$ и $F_3 = 2P$.

Да би овај систем паралелних сила био у астатичкој равнотежи мора бити испуњен услов

$$\Sigma F_i x_i = \Sigma F_i y_i = \Sigma F_i z_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(т. 27. једн. 17). Лако је проверити да је у нашем примеру овај услов заиста испуњен.

6. Нека буду дате две динаме амплитудама $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ и моментима $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ и њихова резултантна динама такође амплитудом $\mathfrak{A}$ и моментом $\mathfrak{M}$.

Кад се мењају амплитуде прве две динаме, а њихове осе и параметри σ' и σ'' остају непромењени, показати да се трећа — резултантна динама мења и да њена основа описује праволиниску површину која се по свом проналазачу зове *Болов цилиндроид*.

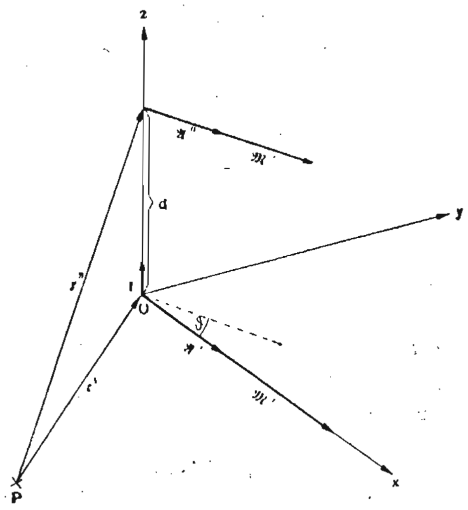
За резултантну динаму важи

$$(1) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''.$$

Ова једначина показује да је амплитуда резултантне динаме резултанта амплитуда компонентних динама и да су осе све три динаме паралелне истој равни. Ако са $\mathfrak{k}$ обележимо орт заједничке нормале прве две динаме (сл. 119), мора бити $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{k}$. Како је

$$\mathfrak{M}' = \sigma' \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{M}'' = \sigma'' \mathfrak{A}'',$$

$$\mathfrak{M} = \sigma \mathfrak{A},$$



Сл. 119

где смо са σ обележили параметар резултантне динаме, може се за главне моменте ових динама у односу на неки пол P који није на оси ниједне динаме написати

$$\mathfrak{M}'^P = \sigma' \mathfrak{A}' + \mathfrak{r}' \times \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{M}''^P = \sigma'' \mathfrak{A}'' + \mathfrak{r}'' \times \mathfrak{A}'', \tag{2}$$

$$\mathfrak{M}^P = \sigma \mathfrak{A} + \mathfrak{r} \times \mathfrak{A},$$

где су $\mathfrak{r}'$ и $\mathfrak{r}''$ вектори положаја оне две тачке на осама прве две динаме у којима их сече заједничка нормала и $\mathfrak{r}$ вектор положаја ма које тачке на оси резултантне динаме, јер се ти вектори положаја могу изабрати на свакој односној оси по вољи. Према томе је

$$\sigma \mathfrak{A} + \mathfrak{r} \times \mathfrak{A} = \sigma' \mathfrak{A}' + \sigma'' \mathfrak{A}'' + \mathfrak{r}' \times \mathfrak{A}' + \mathfrak{r}'' \times \mathfrak{A}'', \tag{3}$$

одн. с обзиром на једначину (1)

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{A} = \sigma' \mathfrak{A}' + \sigma'' \mathfrak{A}'' + d(\mathfrak{k} \times \mathfrak{A}'') + \mathfrak{r}' \times \mathfrak{A} - \sigma \mathfrak{A}, \tag{4}$$

где смо ставили

$$\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}' = d\mathfrak{k},$$

при чему је d најкраће растојање основа прве две динаме.

Ако се једначина (4) реши по $\mathfrak{r}$ на основу т. 15. 10 добија се

$$\mathfrak{r} = \frac{(\sigma'' - \sigma') \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'' + (\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''^2) d\mathfrak{k}}{A^2} + \lambda \mathfrak{A}, \tag{5}$$

где је λ произвољни параметар. Ова једначина претставља једначину осе резултантне динаме и из ње се види да оса резултантне динаме сече заједничку нормалу прве две динаме.

Нека се Декартов правоугли координатни систем постави као на слици, тј. да z-оса има правац заједничке нормале прве две динаме, да x-оса има правац и смер осе прве динаме и да y-оса има односни смер који одговара десном триједру. Почетак нека буде на оси прве динаме. Тада једначина (5) у скаларном облику даје ове три једначине које су параметарске једначине тражене површине

$$\begin{aligned} x &= (a' + a'' \cos \vartheta) \lambda, \\ y &= a'' \sin \vartheta \cdot \lambda, \\ z &= \frac{(\sigma'' - \sigma') a' a'' \sin \vartheta + d(a' a'' \cos \vartheta + a''^2)}{a'^2 + a''^2 + 2a' a'' \cos \vartheta}, \end{aligned} \tag{6}$$

где су a' и a'' интензитети амплитуда $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$, а ϑ угао који чине њихови правци.

Елиминацијом параметра λ из прве две једначине и променљивог односа $\dfrac{a'}{a''}$ из тако добијене две једначине следује најзад једначина Болова цилиндроида у облику

$$z = \frac{[(\sigma'' - \sigma')(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) + d(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)] y}{(x^2 + y^2) \sin \vartheta}. \tag{7}$$

Ако се још изврши транслација датог Декартова триједра у правцу z-осе и ротација за неки подесно изабран угао, он прелази у триједар оса O_1XYZ, а једначина (7) у једначину

$$Z = k \frac{XY}{X^2 + Y^2}, \tag{8}$$

где константа k зависи од $\sigma'' - \sigma'$, d и ϑ.

Задаци

1. Нека је везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)}$ одређен слободним вектором $\mathfrak{A} = \{2, 3, -4\}$ и својим моментом у односу на координатни почетак $\mathfrak{M}^O = \{1, 1, 1\}$. Одредити координате вектора положаја ма које тачке на основи везаног вектора.

2. Одредити главни вектор $\mathfrak{A}$ и инваријанту S за систем од три везана вектора $\mathfrak{A}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{-1, 4, -2\}$ и $\mathfrak{A}_3 = \{3, 0, 5\}$ чији су почеци у тачкама $(3, 1, 0)$, $(0, 0, -6)$ и $(1, -5, 0)$.

3. Објаснити разлику између главног момента система везаних вектора и момента главног вектора у односу на исти пол.

4. За два паралелна везана вектора истога смера доказати директно став, да је збир момената оба вектора у односу ма на који пол једнак моменту резултанте тих вектора у односу на исти пол.

5. Показати да се раван систем везаних вектора увек може свести на три вектора који у тој истој равни леже на трима произвољним правама које само не пролазе кроз заједничку тачку.

6. Дата су четири везана вектора $\mathfrak{A}_1^{(l_1)}$, $\mathfrak{A}_2^{(l_2)}$, $\mathfrak{A}_3^{(l_3)}$, $\mathfrak{A}_4^{(l_4)}$ слободним векторима $\mathfrak{A}_1=\{1,1,3\}$; $\mathfrak{A}_2=\{2,2,6\}$; $\mathfrak{A}_3=\{-1,-1,-3\}$; $\mathfrak{A}_4=\{3,3,9\}$ и почецима у $P_1(1,0,0)$, $P_2(-2,1,1)$, $P_3(4,-3,5)$ и $P_4(1,1,2)$.

Анализирати овај систем везаних вектора и свести га на најпростији облик.

7. Систем везаних вектора $\mathfrak{A}=8\mathfrak{i}$ са почетком у координатном почетку и $\mathfrak{B}=12\mathfrak{j}$ са почетком у тачки $(2,0,0)$ свести на најпростији облик и наћи једначину централне осе.

8. Три везана вектора $\mathfrak{A}_1^{(l_1)}$, $\mathfrak{A}_2^{(l_2)}$, $\mathfrak{A}_3^{(l_3)}$ леже у координатним равнима Декартова триједра. Први вектор лежи у равни zOx, паралелан је оси x, а почетак му је на z-оси удаљен за c од координатног почетка. Други је у равни xOy, паралелан y-оси, са почетком на x-оси а удаљен од O за a и најзад трећи лежи у равни yOz, паралелно z-оси, са почетком на y-оси са удаљењем b од O.

Који услов морају задовољавати интензитети тих вектора да би се систем свео на један вектор, а који услов, ако треба да се сведе на динаму чија централна оса пролази кроз координатни почетак O?

9. Нека темена неког тетраедра буду одређена векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$. Одредити вектор положаја центра уписане лопте. (Упут: Образовати површине страна тетраедра: $p_1=\frac{1}{2}\left|(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_2)\times(\mathfrak{r}_4-\mathfrak{r}_2)\right|$, итд., па скаларе p_i $(i=1,2,3,4)$ сматрати као интензитете система паралелних вектора. За овај систем одредити центар).

10. Два везана вектора налазе се на супротним укрштеним ивицама правилног тетраедра ивице a. Интензитети тих вектора бројно су једнаки дужини стране тетраедра.

a) Наћи узајамни момент та два вектора;

b) Одредити координате продорне тачке централне осе тог система у односу на Декартов координатни систем коме је раван xOy у равни основе тетраедра, а z-оса пролази кроз врх тетраедра.

11. Нека буду дата два система везаних вектора $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ својим главним векторима и главним моментима у односу ма на који пол тј. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{M}''$. Показати да је узајамни момент ова два система одређен једначином

$$M(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)=\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{M}''+\mathfrak{A}''\cdot\mathfrak{M}',$$

при чему се под узајамним моментом два система разуме збир узајамних момената од по два вектора од којих један припада једном, а други другом систему.

12. Неке две праве l_1 и l_2 буду одређене Пликеровим координатама у векторском облику, тј. са $(\mathfrak{u}_0', \mathfrak{m}_1^O)$ и $(\mathfrak{u}_0'', \mathfrak{m}_2^O)$ а тачка P вектором положаја $\mathfrak{r}$ у односу на тачку O – пол момената. Написати једначину праве која иде кроз P и сече обе дате праве.

13. Одредити услов да се две праве одређене Пликеровим координатама у векторском облику секу.

14. Нека буде дат неки систем везаних вектора $\mathfrak{A}_i^{(l_i)}$ $(i=1,2,\ldots n)$ и нека буде $\mathfrak{B}$ неки одређени везани вектор, онда се збир узајамних момената свих вектора система и вектора $\mathfrak{B}$, тј.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(\mathfrak{A}_i,\mathfrak{B})=M_1(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})+M_2(\mathfrak{A}_2,\mathfrak{B})+\ldots M_n(\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}),$$

зове *карактеристична функција* система везаних вектора у односу на вектор $\mathfrak{B}$.

Доказати да су два система везаних вектора $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ еквивалентни, ако у односу на исти везани вектор $\mathfrak{B}$ имају једнаке карактеристичне функције и да је систем везаних вектора еквивалентан нули, ако је његова карактеристична функција у односу ма на који везани вектор $\mathfrak{B}$ једнака нули.

15. Дати су $\mathfrak{M}^A$, $\mathfrak{M}^B$, $\mathfrak{M}^C$, главни моменти неког система везаних вектора у три тачке A, B, C.

Показати да је ранг моментног поља овог система једнак нули или јединици, ако је задовољен услов $\mathfrak{M}^A=\mathfrak{M}^B=\mathfrak{M}^C$; и то једнак нули, кад су сва три главна момента једнака нули. Овај услов је потребан и довољан.

Кад је $\alpha=[\mathfrak{M}^A\mathfrak{M}^B\mathfrak{M}^C]\neq 0$ онда је ранг моментног поља три. Овај услов је довољан, али је потребан само у случају да је вектор

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{M}^A\times\mathfrak{M}^B+\mathfrak{M}^B\times\mathfrak{M}^C+\mathfrak{M}^C\times\mathfrak{M}^A\neq 0.$$

Ако је $\mathfrak{D}=0$, мора бити и $\alpha=0$ и у том случају је ранг поља два или три према томе да ли је вектор

$$\mathfrak{E}=(\overrightarrow{BC}\cdot\mathfrak{M}^A)\,\mathfrak{M}^A+(\overrightarrow{CA}\cdot\mathfrak{M}^A)\,\mathfrak{M}^B+(\overrightarrow{AB}\cdot\mathfrak{M}^A)\,\mathfrak{M}^C,$$

једнак нули или није. У изразу за вектор $\mathfrak{E}$ збир коефицијената једнак је нули и чинилац $\mathfrak{M}^A$ који се појављује у скаларним производима може се свуда заменити са $\mathfrak{M}^B$ или $\mathfrak{M}^C$.

Ако је најзад $\alpha\neq 0$ показати да је главни вектор дат изразом

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}^A\cdot\overrightarrow{AB}+\mathfrak{M}^B\cdot\overrightarrow{BC}+\mathfrak{M}^C\cdot\overrightarrow{CA}}$$

а параметар система изразом

$$\sigma=\frac{\alpha\,(\mathfrak{M}^A\cdot\overrightarrow{AB}+\mathfrak{M}^B\cdot\overrightarrow{BC}+\mathfrak{M}^C\cdot\overrightarrow{CA})}{\mathfrak{D}^2}.$$

АНАЛИЗА

ГЛАВА III

ВЕКТОРСКЕ ФУНКЦИЈЕ СКАЛАРНИХ ПРОМЕНЉИВИХ

29. Основни појмови и дефиниције

Скаларне и векторске величине могу бити променљиве и могу зависити једне од других. Од разних могућности на које се при томе наилази, случај кад скалар као функција зависи од скалара као независно променљивих претставља обичне функције математичке анализе. И сви остали случајеви претстављају функције које су у блиском сродству са функцијама обичне анализе и дозвољавају да се и на њих прошире појмови инфинитезималног рачуна. Променљив вектор који зависи од променљивог скалара или више променљивих скалара или од неког другог променљивог вектора, одн. више других променљивих вектора зове се *векторска функција* или, кратко, *вектор*, ако нема опасности од неспоразума. Такав променљив вектор може имати само интензитет променљив или само правац или само смер, а може бити и све променљиво у исти мах.

Ми ћемо се, за први мах, зауставити на посматрању само оних вектора чија промена зависи од промене једног или више скалара које ћемо сматрати као независно променљиве.

У т. 14, пример 6, имали смо за једначину праве, која пролази кроз тачку A одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_1$ и која је паралелна датом вектору $\mathfrak{a}$ $(\neq 0)$, израз

(1) $$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \lambda \mathfrak{a},$$

који се може написати и у облику

(2) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda \mathfrak{a},$$

где је $\mathfrak{r}$ вектор положаја ма које тачке на траженој правој, а λ променљив скаларни параметар. Из оба наведена облика је очигледно, да је вектор положаја $\mathfrak{r}$ ма које тачке M на правој функција променљивог скалара λ, тј.

(3) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\lambda).$$

Ако је нека крива у равни дата у поларним координатама, вектор положаја $\mathfrak{r}$ зависи од промене поларног угла ϑ. Наиме, правац и смер тога вектора одређени су углом ϑ, а његов интензитет са $r = f(\vartheta)$ из поларне једначине криве.

Даље, ако се посматрају параметарске једначине елипсе

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u,$$

где су x и y Декартове координате тачке на елипси, а u ексцентрична аномалија, онда, пошто је у равни увек

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j},$$

имамо

(4) $$\mathfrak{r} = a\mathfrak{i}\cos u + b\mathfrak{j}\sin u = \mathfrak{a}\cos u + \mathfrak{b}\sin u,$$

где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одређени вектори чији су интензитети једнаки полуосама елипсе. У једначини (4) вектор положаја $\mathfrak{r}$ тачке на елипси зависи од скалара u и описује целу елипсу, кад се u мења од 0 до 2π.

Поред ових примера векторских функција које зависе од скаларне променљиве из геометрије, постоје наравно такве векторске функције и у механици и физици. У кинематици тачке вектор положаја $\mathfrak{r}$ покретне тачке, њена брзина $\mathfrak{v}$ и убрзање $\mathfrak{w}$ редовно зависе од времена t на неки одређени начин.

Уопште, ако свакој вредности некога скалара u (у извесном интервалу) одговара одређена вредност (или више одређених вредности) неког вектора $\mathfrak{x}$, онда је $\mathfrak{x}$ векторска функција скалара u, *дефинисана* у том интервалу. Пише се

(5) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u).$$

Ако пак вредност неког вектора $\mathfrak{y}$ зависи од више скаларних променљивих $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, онда се пише

(6) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Као пример такве векторске функције може да послужи на пр., вектор силе, који може зависити од вектора положаја, брзине и времена итд.

Као ознака векторске функције обично се употребљује исто слово којим се обележава и сам вектор, да би се и на тај начин истакла специјална особина таквих функција. Тако се на пр., у случају вектора положаја $\mathfrak{r}$, вектора брзине $\mathfrak{v}$ и вектора убрзања $\mathfrak{w}$ као функција од времена t обично пише

(7) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t), \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}(t), \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{w}(t).$$

Видели смо раније, како се вектор може аналитички одредити помоћу скалара и како се према томе векторска алгебра може свести на обичну алгебру бројева. Исто тако се и посматрање и проучавање векторских функција може свести на проучавање обичних скаларних функција, јер је очигледно, да промена вектора позлачи за собом и промену координата (бар једне) тог вектора у односу на неки сталнитриједар, те су према томе и оне функције истих променљивих. Дакле, ако је дата векторска функција $\mathfrak{x}(u)$ са координатама x_1, x_2, x_3, онда је у општем случају

(8) $$x_1 = x_1(u), \quad x_2 = x_2(u), \quad x_3 = x_3(u).$$

У случају више променљивих (6) биће

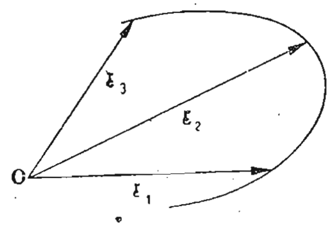
(9) $$y_1 = y_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad y_2 = y_2(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$y_3 = y_3(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где су y_1, y_2, y_3 координате променљивог вектора $\mathfrak{y}$.

Наш циљ је, међутим, да, као и у алгебри, изведемо правила за директну примену анализе на саме векторске величине, а не свођење проблема на обичну анализу.

30. Ходограф векторске функције

Векторска функција може бити слободни и везани вектор. Ако се, међутим, поједине вредности векторске функције сматрају као слободни вектори онда се по жељи могу довести на исти почетак. Тако, ако је дата векторска функција једне променљиве, на пр., $\mathfrak{x}(u)$ могу се све могуће њене вредности као вектори довести на заједнички почетак O (сл. 120). Тада крај таквог променљивог вектора $\mathfrak{x}$ описује неку, у општем случају, криву



Сл. 120

линију у простору. Ова крива зове се *ходограф* дате векторске функције, или, кратко, ходограф вектора. У нашем случају је свака вредност посматране векторске функције узета као вектор положаја неке тачке у односу на сталну тачку O, тј.

(1) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u).$$

Другим речима ходограф је дат векторском једначином (1) или, после пројицирања на осе Декартова триједра, параметарским једначинама

(2) $$x_1 = x_1(u), \quad x_2 = x_2(u), \quad x_3 = x_3(u),$$

где смо са x_1, x_2 и x_3 обележили координате векторске функције. Једначине (2) претстављају параметарске једначине неке криве линије у простору.

Наравно, ако се векторска функција $\mathfrak{x}$ при промени u уопште не мења ни по интензитету, ни по правцу, ни по смеру, она је *константна*. Њен ходограф је *тачка*.

Ако се посматра векторска функција, одређена линеарном векторском једначином

(3) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} u + \mathfrak{b},$$

где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ константни вектори, а u промењиви скалар, њен ходограф је *права линија*, што је очигледно с обзиром на т. 29. једн. 2. Исто тако ходограф векторске функције може бити у специјалним случајевима *равна крива линија*, као у примеру елипсе т. 29. једн. 4.

Међутим, ако је дата векторска функција од два промењива скалара, тј. $\mathfrak{y}(u_1, u_2)$, очигледно је да ће крајеви вектора који претстављају разне вредности ове векторске функције, доведени на заједнички почетак, лежати на некој површини. Наиме, векторска функција

(4) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u_1, u_2)$$

своди се, пројицирањем на осе Декартова триједра, на три скаларне једначине облика

(5) $$y_1 = y_1(u_1, u_2), \quad y_2 = y_2(u_1, u_2), \quad y_3 = y_3(u_1, u_2)$$

које одређују ходограф посматране векторске функције, а то су, као што знамо, једначине површине изражене помоћу тзв. Гаусових (Gauss) параметара.

Ходограф векторске функције од три независно промењива скалара, на пр., $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(u_1, u_2, u_3)$ очигледно чини неки

део Еуклидова простора итд. Ходограф векторске функције од више него три промењиве је, према изложеном, део простора од више димензија и не може се претставити очигледно.

Ако нам је дата зависност неке векторске функције од неког скалара, на пр. $\mathfrak{x}(u)$, онда се, место првог скалара, може ставити ма која функција новог параметра. Најчешће се као параметар употребљује у механици — време t, а у геометрији — лук криве s. Нека је, на пр., $u = f(s)$ где је s лук криве ходографа, онда је

(6) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u) = \mathfrak{x}[f(s)] = \mathfrak{X}(s).$$

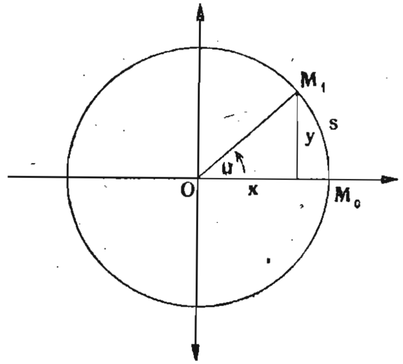
На пр. круг полупречника a дат је векторском једначином

(7) $$\mathfrak{r} = a(\mathfrak{i} \cos u + \mathfrak{j} \sin u),$$

где је u централни угао (сл. 121). Другим речима, ходограф векторске функције (7) је круг полупречника a. Ако желимо да векторску функцију (7) изразимо у зависности од лука s ходографа, онда, како је

$$u = \frac{s}{a},$$

имамо одмах



Сл. 121

(8) $$\mathfrak{r} = a\left(\mathfrak{i} \cos \frac{s}{a} + \mathfrak{j} \sin \frac{s}{a}\right).$$

Ако се дужина лука криве, или, кратко, лук криве s употребљује као параметар, *мора* се: 1. изабрати одређена јединица за мерење дужине. 2. узети ма која одређена тачка M_0 на кривој за почетак рачунања лучних дужина и 3. изабрати један од два смера кретања по кривој као позитиван.

На овај начин је положај сваке тачке M_1 на кривој одређен бројем s, чија је апсолутна вредност дужина лука M_0M_1, мерена изабраном јединицом, а знак + или − према томе, да ли се тачка M_1 почев од M_0 налази у позитивном или супротном смеру; s се у том случају зове *криволиниска координата* тачке M_1.

31. Гранична вредност (limes) векторске функције. Непрекидност

Основни појмови о граничној вредности и непрекидности лако се преносе на промењиве векторе (векторске функције) с тим да се апсолутна вредност броја замењује интензитетом вектора. Тада се *гранична вредност* вектора дефинише на овај начин. Нека је векторска функција $\mathfrak{x}(u)$ дефинисана у интервалу $u_1 \leqq u \leqq u_2$. Тада се каже да је константни вектор $\mathfrak{c}$ гранична вредност вектора $\mathfrak{x}(u)$ кад u тежи u_0, и пише

$$\mathfrak{c} = \lim_{u \to u_0} \mathfrak{x}(u), \tag{1}$$

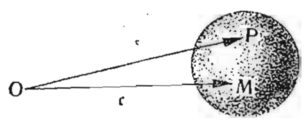
под овим условима: ако је унапред дат ма који произвољно мали позитивни број ε и постоји други позитивни број η (који може зависити од ε и u), такав, да за све вредности u у интервалу $u_1 \leqq u \leqq u_2$ за који важи неједначина

$$0 < |u - u_0| < \eta,$$

важи

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{x}(u)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Геометриски ово значи, да, ако се све вредности вектора $\mathfrak{x}(u)$ за вредности u у интервалу $0 < |u - u_0| < \eta$ доведу на заједнички почетак O са вектором $\mathfrak{c}$, онда крајеви P вектора $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{x}(u)$ леже у сфери полупречника ε са центром у крајњој тачки константног вектора $\mathfrak{c}$ (сл. 122). Ако такав константни вектор не постоји, не постоји ни limes вектора $\mathfrak{x}(u)$ кад u тежи u_0.



Сл. 122

Ако је limes неког вектора једнак нули

$$\lim_{u \to u_0} \mathfrak{x}(u) = 0, \tag{3}$$

тј. ако је унапред дат произвољно мали позитивни број ε и постоји други позитиван број η, тако да је за све u у интервалу $0 < |u - u_0| < \eta$

$$|\mathfrak{x}(u)| < \varepsilon,$$

такав вектор зове се и *бесконачно мали вектор*. То је, дакле, промењљив вектор чији крајеви леже на сфери полупречника ε са центром у почетној тачки O.

Сви ставови о граничним вредностима важе и у случају векторских функција скаларних промењљивих, ако се само под изразима сабирање и множење разуме оно што ти изрази значе у алгебри вектора. Према томе је

$$\begin{aligned}
&\lim |\mathfrak{x}| = |\lim \mathfrak{x}|,\\
&\lim (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} - \mathfrak{z}) = \lim \mathfrak{x} + \lim \mathfrak{y} - \lim \mathfrak{z},\\
&\lim (\lambda \mathfrak{x}) = \lim \lambda \lim \mathfrak{x},\\
&\lim (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) = \lim \mathfrak{x} \cdot \lim \mathfrak{y},\\
&\lim (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = \lim \mathfrak{x} \times \lim \mathfrak{y}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Примера ради доказаћемо тачност последње од ових једначина, али читаоцу саветујемо да изведе ради вежбе све доказе.

Нека буде $\lim\limits_{u \to u_0} \mathfrak{x}(u) = \mathfrak{x}_1$ и $\lim\limits_{u \to u_0} \mathfrak{y}(u) = \mathfrak{y}_1$, тј.

$$|\mathfrak{x}(u) - \mathfrak{x}_1| < \varepsilon, \quad \text{кад је} \quad 0 < |u - u_0| < \eta_1,$$

$$|\mathfrak{y}(u) - \mathfrak{y}_1| < \varepsilon, \quad \text{кад је} \quad 0 < |u - u_0| < \eta_2.$$

Да бисмо доказали тачност последње од једначина (4) треба, дакле, показати да је

$$|\mathfrak{x}(u) \times \mathfrak{y}(u) - \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{y}_1|$$

мање од сваког унапред датог произвољно малог позитивног броја за вредности u у интервалу $0 < |u - u_0| < \eta$, где је η мањи од два броја η_1 и η_2.

Према томе из идентичности

$$\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{x}_1 + [\mathfrak{x}(u) - \mathfrak{x}_1]$$

следује одмах

$$|\mathfrak{x}(u)| < |\mathfrak{x}_1| + \varepsilon \quad \text{за} \quad 0 < |u - u_0| < \eta_1,$$

и, из истих разлога,

$$|\mathfrak{y}(u)| < |\mathfrak{y}_1| + \varepsilon \quad \text{за} \quad 0 < |u - u_0| < \eta_2,$$

те стога за $0 < |u - u_0| < \eta$, следује

$$|\mathfrak{x}(u) \times \mathfrak{y}(u) - \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{y}_1| < \varepsilon(|\mathfrak{y}_1| + \varepsilon) + \varepsilon |\mathfrak{x}_1| = \varepsilon(|\mathfrak{x}_1| + |\mathfrak{y}_1| + \varepsilon), \tag{5}$$

кад се стави

$$\mathfrak{x}(u) \times \mathfrak{y}(u) - \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{y}_1 = [\mathfrak{x}(u) - \mathfrak{x}_1] \times \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{x}_1 \times [\mathfrak{y}(u) - \mathfrak{y}_1].$$

Десна страна неједначине (5) може се учинити мањом од којег хоћемо позитивног малог броја, ако се само узме за ε довољно мали позитивни број.

За векторску функцију $\mathfrak{x}(u)$ каже се да је *непрекидна* функција промењљиве u за $u = u_0$, ако су испуњена ова три услова:

1. $\mathfrak{r}(u)$ је дефинисано за $u=u_0$,

2. постоји гранична вредност векторске функције $\mathfrak{r}(u)$, кад u тежи u_0 и

3. $\lim \mathfrak{r}(u)=\mathfrak{r}(u_0)$, кад $u \to u_0$.

Ако ови услови нису испуњени векторска функција је *прекидна*. За функцију $\mathfrak{r}(u)$ каже се да је непрекидна функција од u у интервалу $u_1 \leqq u \leqq u_2$, ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала. Другим речима, ако са

$$(6) \qquad \Delta\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u+\Delta u)-\mathfrak{r}(u)$$

обележимо промену функције $\mathfrak{r}(u)$ за промену независно променљиве

$$\Delta u = u - u_0,$$

функција је непрекидна за $u=u_0$, ако је

$$|\Delta\mathfrak{r}|<\varepsilon,$$

што се пише и

$$\lim_{u\to u_0}\Delta\mathfrak{r}=0.$$

Дакле, бесконачно малом прираштају независно променљиве u одговара бесконачно мали прираштај непрекидне функције $\mathfrak{r}(u)$.

Ми ћемо одсад увек сматрати да су посматране функције непрекидне у уоченим областима уколико супротно није нарочито наглашено.

32. Извод вектора

Извод векторске функције $\mathfrak{r}(u)$ по u је limes количника прираштаја функције и прираштаја независно променљиве u (кад овај limes постоји), кад прираштај независно променљиве тежи нули, тј.

$$(1) \qquad \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathfrak{r}(u+\Delta u)-\mathfrak{r}(u)}{\Delta u}.$$

Овај извод се обележава

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{du} \text{ или } \dot{\mathfrak{r}}(u) \text{ или само } \dot{\mathfrak{r}}.$$

Ознака извода векторске функције може бити и $\mathfrak{r}'$ кад је потребно правити разлику између извода у односу на разне скаларе као независно променљиве.

Извод вектора $\mathfrak{r}(u)$ за вредност скалара $u=u_0$, одн. „у тачки u_0" је константни вектор одређен изразом

$$(3) \qquad \dot{\mathfrak{r}}(u_0)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathfrak{r}(u_0+\Delta u)-\mathfrak{r}(u_0)}{\Delta u}.$$

Ако је векторска функција $\mathfrak{r}(u)$ изражена помоћу координата у односу на неки стални правоугли триједар, одређен константним ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, тј.

$$(4) \qquad \mathfrak{r}(u)=x_1(u)\mathfrak{i}+x_2(u)\mathfrak{j}+x_3(u)\mathfrak{k},$$

тада је у општем случају

$$\mathfrak{r}(u+\Delta u)=x_1(u+\Delta u)\mathfrak{i}+x_2(u+\Delta u)\mathfrak{j}+x_3(u+\Delta u)\mathfrak{k}.$$

Према томе је

$$\frac{d\mathfrak{r}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathfrak{r}(u+\Delta u)-\mathfrak{r}(u)}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\left\{\frac{x_1(u+\Delta u)-x_1(u)}{\Delta u}\mathfrak{i}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_2(u+\Delta u)-x_2(u)}{\Delta u}\mathfrak{j}+\frac{x_3(u+\Delta u)-x_3(u)}{\Delta u}\mathfrak{k}\right\},$$

тј.

$$(5) \qquad \dot{\mathfrak{r}}=\frac{d\mathfrak{r}}{du}=\frac{dx_1}{du}\mathfrak{i}+\frac{dx_2}{du}\mathfrak{j}+\frac{dx_3}{du}\mathfrak{k}.$$

Извод вектора $\mathfrak{r}(u)$ има, дакле, као координате изводе координата вектора у односу на триједар непроменљивих ортова. Координате вектора извода су пројекције вектора извода на осе узетог Декартова триједра, тј.

$$(6) \qquad \begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}}\cdot\mathfrak{i}&=|\dot{\mathfrak{r}}|\cos(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{i})=\frac{dx_1}{du}=\dot{x}_1,\\ \dot{\mathfrak{r}}\cdot\mathfrak{j}&=|\dot{\mathfrak{r}}|\cos(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{j})=\frac{dx_2}{du}=\dot{x}_2,\\ \dot{\mathfrak{r}}\cdot\mathfrak{k}&=|\dot{\mathfrak{r}}|\cos(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{k})=\frac{dx_3}{du}=\dot{x}_3.\end{aligned}$$

Одавде је јасно да се и одређивање извода вектора може свести на одређивање извода скаларних величина.

Правила за налажење извода скаларних функција у случају збира и производа остају у важности и за случај векторских сабирака и разних производа, но само ако су вектори диференцијабилни, а то значи, уколико имају одређене и коначне изводе. Дакле,

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\ \frac{d}{du}(\mathfrak{x} \pm \mathfrak{y} \pm \mathfrak{z} \pm \cdots) = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \pm \frac{d\mathfrak{y}}{du} \pm \frac{d\mathfrak{z}}{du} \pm \cdots,\\
&(\mathrm{II})\ \frac{d}{du}(\lambda \mathfrak{x}) = \frac{d\lambda}{du}\mathfrak{x} + \lambda \frac{d\mathfrak{x}}{du},\\
&(\mathrm{III})\ \frac{d}{du}(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}) = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{du},\\
&(\mathrm{IV})\ \frac{d}{du}(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \times \frac{d\mathfrak{y}}{du},\\
&(\mathrm{V})\ \frac{d}{du}[\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}] = \left[\frac{d\mathfrak{x}}{du}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\right] + \left[\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{y}}{du}\mathfrak{z}\right] + \left[\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{z}}{du}\right],\\
&(\mathrm{VI})\ \frac{d}{du}[\mathfrak{x} \times (\mathfrak{y} \times \mathfrak{z})] = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \times (\mathfrak{y} \times \mathfrak{z}) + \mathfrak{x} \times \left(\frac{d\mathfrak{y}}{du} \times \mathfrak{z}\right) + \mathfrak{x} \times \left(\mathfrak{y} \times \frac{d\mathfrak{z}}{du}\right),
\end{aligned}
$$

где су $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ векторске функције, а λ скаларна функција промењљиве u.

У последња три обрасца ред чинилаца је од битне важности с обзиром на дефиниције таквих производа, и не сме се мењати. Доказ ових једначина може се извести на исти начин као код скаларних функција, ако се само узму у обзир примедбе које смо већ учинили у вези са одређивањем извода векторских функција. Примера ради извешћемо само образац (IV), али читаоцу саветујемо да, ради вежбања, изведе све доказе. За (IV) имамо по дефиницији

$$
\frac{d}{du}(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(\mathfrak{x} + \Delta \mathfrak{x}) \times (\mathfrak{y} + \Delta \mathfrak{y}) - \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}}{\Delta u} =
$$

$$
= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \times \Delta \mathfrak{y} + \Delta \mathfrak{x} \times \Delta \mathfrak{y}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta u} \times \mathfrak{y}\right) +
$$

$$
+ \lim_{\Delta u \to 0}\left(\mathfrak{x} \times \frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta u}\right) + \lim_{\Delta u \to 0}\left(\Delta \mathfrak{x} \times \frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta u}\right) = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \times \frac{d\mathfrak{y}}{du}.
$$

Кад је $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} = \text{const.}$, онда је $\dot{\mathfrak{a}} = 0$ и, према томе, кад је неки од чинилаца у обрасцима (II-VI) константан (иако је вектор) може се ставити изван (не увек испред) знака диференцирања, на пр.

$$
\frac{d}{du}(\lambda \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\frac{d\lambda}{du}, \quad \frac{d}{du}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}) = \mathfrak{a} \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{du}, \quad \frac{d}{du}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) = \mathfrak{a} \times \frac{d\mathfrak{x}}{du},
$$

$$
(8)\qquad \frac{d}{du}[\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{y}] = \left[\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{x}}{du}\mathfrak{y}\right] + \left[\mathfrak{a}\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{y}}{du}\right],
$$

$$
\frac{d}{du}[\mathfrak{a} \times (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})] = \mathfrak{a} \times \frac{d}{du}(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = \mathfrak{a} \times \left(\frac{d\mathfrak{x}}{du} \times \mathfrak{y}\right) + \mathfrak{a} \times \left(\mathfrak{x} \times \frac{d\mathfrak{y}}{du}\right).
$$

Ако се узме у обзир да мешовити производ, изражен помоћу координата вектора чинилаца, претставља детерминанту трећег реда, правило (V) даје начин за диференцирање детерминанте трећег реда, који се лако може уопштити и за детерминанте вишег реда.

Налажење извода сложене векторске функције врши се по истом правилу које важи за скаларне функције, тј., ако је

$$
(9)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u) \quad \text{и} \quad u = f(v),
$$

онда се може написати

$$
\mathfrak{x} = \mathfrak{x}[f(v)].
$$

Тада се, из идентичности

$$
\frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta v} = \frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v},
$$

при прелазу на граничну вредност за $\Delta v \to 0$ (тада и $\Delta u \to 0$, јер се $u = f(v)$ претпоставља као непрекидна функција), добија

$$
(10)\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dv} = \frac{d\mathfrak{x}}{du} \cdot \frac{du}{dv}.
$$

33. Геометриско и кинематичко значење извода вектора

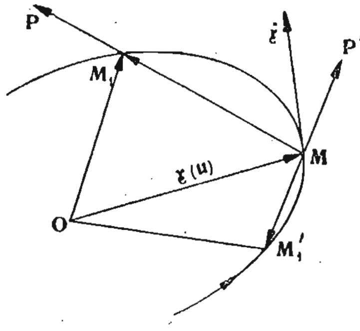
Посматрајмо ходограф векторске функције $\mathfrak{x}(u)$ (сл. 123). Нека тачки M, за вредност u скалара, на кривој ходографа одговара вектор положаја $\mathfrak{x}(u)$. За вредност скалара $u + \Delta u$ векторска функција ће имати другу вредност, $\mathfrak{x}(u + \Delta u)$, која одређује вектор положаја друге неке тачке M_1 на ходографу.

Вектор $\overrightarrow{MM_1} = \Delta \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u + \Delta u) - \mathfrak{x}(u)$, који се зове *прираштај* векторске функције, геометриски претставља тетиву MM_1 ходографа.

Ако рашћењу скалара u одговара смер показан на слици стрелицом, онда је за $\Delta u > 0$ тачка M_1 у смеру кретања даље од M, а ако се узме $-\Delta u < 0$, онда је односна тачка M_1' испред M у односу на смер кретања по ходографу.

Ако се сад вектор $\Delta\mathfrak{r}$, прираштај векторске функције, подели скаларом Δu, прираштајем независно променљиве, добија се вектор

(1) $$\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta u} = \overrightarrow{MP}.$$



Сл. 123

Овај вектор има исти правац као $\Delta\mathfrak{r} = \overrightarrow{MM_1}$, а смер увек од тачке са мањом ка тачки са већом вредношћу скалара. Да је ово тачно лако је показати. Узмимо зато $-\Delta u < 0$. Тада је $\mathfrak{r}(u - \Delta u)$ вектор положаја тачке M_1' испред тачке M и вектор

$$\overrightarrow{MM_1'} = \Delta_1\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u-\Delta u) - \mathfrak{r}(u)$$

има смер на страну куда скалар опада. Али ако се вектор $\Delta_1\mathfrak{r}$ подели негативним прираштајем $-\Delta u$, који му одговара, добија се

(2) $$\frac{\Delta_1\mathfrak{r}}{-\Delta u} = \frac{\overrightarrow{MM_1'}}{-\Delta u} = \frac{\overrightarrow{M_1'M}}{\Delta u} = \overrightarrow{MP'},$$

тј. смер вектора количника оба прираштаја супротан је смеру вектора прираштаја и, према томе, опет на страну куда скалар расте.

Интензитет вектора $\overrightarrow{MP}$ зависи од величине прираштаја и према томе може бити већи, мањи или једнак вектору $\overrightarrow{MM_1}$.

Ако се сад у изразу (1), одн. (2) пусти да Δu тежи нули, да бисмо добили извод, вектор $\overrightarrow{MP}$, одн. $\overrightarrow{MP'}$ мења и интензитет и правац и, обрћући се око тачке M, тежи неком константном вектору $\dot{\mathfrak{r}}$ као граничном вектору (под условом наравно да гранична вредност постоји). За случај $\Delta u > 0$ обртање је у једном смеру, а за $\Delta u < 0$ у другом, супротном смеру. Гранични пак положај је у оба случаја исти за сваку *обичну* тачку ходографа.

Како је гранични положај сечице MM_1 за $M_1 \to M$ тангента ходографа у тачки M, то гранична вредност вектора $\overrightarrow{MP}$, тј. вектор $\dot{\mathfrak{r}} = \frac{d\mathfrak{r}}{du}$, извод векторске функције $\mathfrak{r}$, *има правац тангенте* ходографа у тачки M са *смером* увек на ону страну куда скалар расте. Што се тиче *интензитета* тог вектора *он зависи од избора* скаларне независно променљиве. Заиста, ако је, рецимо, $u = \alpha v$, онда је

(3) $$\frac{d\mathfrak{r}}{dv} = \frac{d\mathfrak{r}}{du}\cdot\frac{du}{dv} = \alpha\frac{d\mathfrak{r}}{du},$$

тј. све вредности интензитета извода по новој променљивој добијају се множењем интензитета извода по старој променљивој константним скаларом α чију величину можемо бирати по вољи.

При таквим условима може се поставити захтев, да се уведе такав скалар као независно променљива, да интензитет извода векторске функције, на пр., $\mathfrak{r}(u)$ буде јединица, тј. да сам изводни вектор буде орт. Уведимо у том циљу, као нову променљиву, неки скалар s без обзира на његово конкретно значење, али само да буде

(4) $$\left|\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right| = 1.$$

Одавде следује

(5) $$\frac{d\mathfrak{r}^2}{ds^2} = 1, \quad \text{одн.} \quad ds^2 = d\mathfrak{r}^2 = dx^2+dy^2+dz^2,$$

ако је $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$. Пошто се из (5) види да је ds лучни елемент криве ходографа, то је s лук ходографа посматраног променљивог вектора.

Према томе, ако се лук ходографа неког вектора узме као независно променљива, онда ће извод тог вектора по луку ходографа као променљивој бити јединични вектор – *орт тангенте* $\mathfrak{t}$, тј.

(6) $$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t}.$$

Како лук ходографа као независно променљива игра нарочиту улогу, обележаваћемо изводе по луку цртом, тј.

(7) $$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{r}', \quad \text{али} \quad \frac{d\mathfrak{r}}{du} = \dot{\mathfrak{r}}.$$

Вектори $\mathfrak{r}'$ и $\dot{\mathfrak{r}}$ су увек колинеарни. Ако при прелазу од једне промењливе на другу треба изразити s у функцији u, онда је

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds}=\frac{d\mathfrak{r}}{du}\cdot\frac{du}{ds} \tag{8}$$

и, с обзиром на једначину (5),

$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)^2\cdot\left(\frac{du}{ds}\right)^2=1,$$

или

$$ds=\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)^2}\,du=\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$$

и најзад

$$s=\int_0^u\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du, \tag{9}$$

ако се лук рачуна од тачке која одговара вредности $u=0$.

Ако је независно промењливи скалар време t, ходограф векторске функције

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t) \tag{10}$$

је крива линија трајекторије неке покретне тачке чија је векторска једначина (10). Тада је извод вектора положаја по времену

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\dot{\mathfrak{r}}=\mathfrak{v}, \tag{11}$$

брзина којом се тачка креће по кривој у простору. То значи да извод векторске функције може да се схвати као брзина кретања тачке по ходографу. Према томе брзина у некој тачки трајекторије има увек правац тангенте у тој тачки, а за смер - смер кретања. Ако се уведе лук трајекторије као независно промењлива, онда, ако лук s истовремено расте кад и време t, кретање је *директно*, а ако лук s опада кад t расте кретање је *ретроградно*.

34. Зависност извода вектора од интензитета и правца. Извод орта. Пројекција извода вектора на промењлив правац

Сваки вектор $\mathfrak{x}(u)$, као што знамо, може се претставити као производ интензитета x и орта $\mathfrak{x}_0$, тј.

$$\mathfrak{x}=x\,\mathfrak{x}_0.$$

Стога је

$$\dot{\mathfrak{x}}=\frac{dx}{du}\mathfrak{x}_0+x\frac{d\mathfrak{x}_0}{du}. \tag{1}$$

Кад је правац и смер вектора константан, тј. $\mathfrak{x}_0=\text{const.}$, онда је $\dot{\mathfrak{x}}_0=0$, па је $\dot{\mathfrak{x}}=\frac{dx}{du}\mathfrak{x}_0$; а кад је интензитет константан, тј. $x=\text{const.}$, тада је $\frac{dx}{du}=0$, па имамо $\dot{\mathfrak{x}}=x\frac{d\mathfrak{x}_0}{du}$.

Да бисмо ближе одредили вектор $\dot{\mathfrak{x}}_0$ посматрајмо ма који вектор $\mathfrak{c}(u)$ константног интензитета c. Како је тада

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=c^2=\text{const.}, \tag{2}$$

диференцирањем по u добија се

$$\dot{\mathfrak{c}}\cdot\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\cdot\dot{\mathfrak{c}}=0,$$

односно, пошто су ови скаларни производи једнаки,

$$\dot{\mathfrak{c}}\cdot\mathfrak{c}=0. \tag{3}$$

Ово, међутим, значи, да је геометриски извод вектора константног интензитета нормалан на самом вектору, тј. $\dot{\mathfrak{c}}\perp\mathfrak{c}$. Како је орт $\mathfrak{x}_0$ вектор константног интензитета једнаког јединици, то је увек

$$\dot{\mathfrak{x}}_0\perp\mathfrak{x}_0.$$

Једначина (3) може се, са друге стране, сматрати као доказ да је тангента круга и сваке друге сферне линије (линије повучене на сфери) нормална на полупречнику круга, одн. сфере у посматраној тачки.

Сад је јасно из једначине (1) да извод неког вектора $\mathfrak{x}(u)$ има у општем случају две компоненте: једну у правцу самог вектора $\dot{x}\mathfrak{x}_0$ – *радијалну* која зависи од промене интензитета и једну нормалну на сам вектор $x\dot{\mathfrak{x}}_0$ – *трансверзалну* компоненту, која зависи од промене правца вектора.

Означимо ли орт неке осе са $\mathfrak{u}_0$, па диференцирамо скаларни производ $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{u}_0$ по u, сматрајући и $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{u}_0$ као функције скаларне промењливе u, дакле

$$\frac{d}{du}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{u}_0)=\dot{\mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{u}_0+\mathfrak{x}\cdot\dot{\mathfrak{u}}_0, \tag{4}$$

добија се

$$\dot{\mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{u}_0=\frac{d}{du}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{u}_0)-\mathfrak{x}\cdot\dot{\mathfrak{u}}_0. \tag{5}$$

У овом изразу лева страна претставља пројекцију извода $\dot{\mathfrak{x}}$ вектора $\mathfrak{x}$ на осу одређену промењливим ортом $\mathfrak{u}_0$ и она је једнака изводу пројекције вектора $\mathfrak{x}$ на исту осу мање скаларни производ вектора $\mathfrak{x}$ и извода $\dot{\mathfrak{u}}_0$ орта $\mathfrak{u}_0$.

Овај извод орта се зове *брзина скретања*, ако је променљиви скалар време t, јер тада показује брзину промене правца и смера посматраног орта. Ако је дати орт $\mathfrak{u}_0$ константан, онда је $\dot{\mathfrak{u}}_0 = 0$, па је, као што смо већ видели за случај непроменљива Декартова триједра, пројекција извода на осу једнака изводу саме пројекције вектора, тј.

$$(6) \qquad \dot{\mathfrak{r}}\cdot\mathfrak{u}_0 = \frac{d}{du}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}_0).$$

35. Делимични извод

У векторској функцији $\mathfrak{y}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ од више независно променљивих скалара могу се тренутно сматрати све независно променљиве као константе осим једне, u_i. У том случају промена векторске функције $\mathfrak{y}$ зависи само од независно променљиве u_i и њена се вредност,

$$(1) \qquad \Delta_i\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_i + \Delta u_i, \ldots, u_n) - \mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

може израчунати, тј. може се добити прираштај векторске функције $\mathfrak{y}$ који одговара прираштају само једне независно променљиве u_i. Ако се овај прираштај $\Delta_i\mathfrak{y}$ подели са Δu_i и узме гранична вредност кад $\Delta u_i \to 0$, онда се, ако постоји коначна и одређена гранична вредност, она зове *делимични* или *парцијални* извод векторске функције по променљивом скалару u_i и означује

$$\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u_i} \quad \text{или} \quad \mathfrak{y}_{u_i},$$

тј.

$$(2) \qquad \mathfrak{y}_{u_i} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u_i} = \lim_{\Delta u_i \to 0} \frac{\mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_i + \Delta u_i, \ldots, u_n) - \mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\Delta u_i}.$$

У случају векторске функције од два променљива скалара имамо

$$(3) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,(u, v)$$

и ходограф је, како смо видели, површина одређена Гаусовим параметрима. За $v = v_0 = \text{const.}$ добија се крива линија на тој површини дефинисана једначином

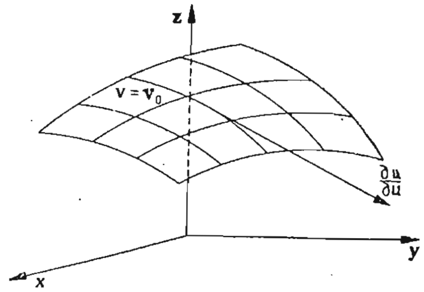
$$(4) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,(u, v_0).$$

Тада је

$$(5) \qquad \mathfrak{y}_u\,(u, v) = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u}$$

вектор који има правац тангенте на неку од кривих (4) према вредности v (сл. 124), интензитет му зависи од скалара u, а смер је онај у коме скалар u расте. То исто важи и за

$$(6) \qquad \mathfrak{y}_v\,(u, v) = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial v}.$$



Сл. 124

Диференцијација сложене векторске функције од више променљивих скалара врши се по истим правилима као код скаларних функција. Нека, на пр., буде $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(q_1, q_2, q_3)$, a $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, $q_3 = q_3(t)$, тада је

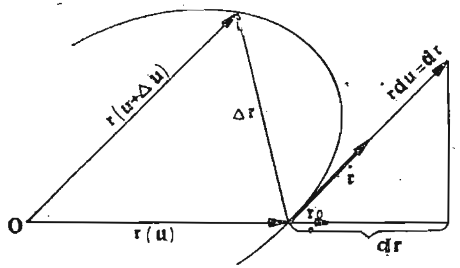
$$(7) \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}.$$

36. Диференцијали вектора

Диференцијал променљивог вектора, на пр., $\mathfrak{r}(u)$ зове се производ извода овог вектора и диференцијала независно променљивог скалара, тј.

$$(1) \qquad d\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}}\,du.$$

Ово је очигледно вектор који има исти правац као вектор $\dot{\mathfrak{r}}$ извода, а смер према знаку диференцијала независно променљиве (исти као извод за $du > 0$, а супротан за $du < 0$). Дакле, извод $\dot{\mathfrak{r}}$ и диференцијал $d\mathfrak{r}$ вектора $\mathfrak{r}$ увек су колинеарни. Што се тиче интензитета диференцијала вектора, он зависи, прво, од избора независно променљиве, јер од тога зависи интензитет извода, а зависи осим тога и од диференцијала независно променљиве. Само ако је извод векторске функције коначан и одређен, и диференцијал независно променљиве бесконачно мала величина биће и диференцијал $d\mathfrak{r}$ вектора $\mathfrak{r}$ бесконачно мали вектор. Очигледно је (сл. 125) да се прираштај вектора



Сл. 125

$\Delta\mathfrak{r}$ разликује од диференцијала вектора $d\mathfrak{r}$ не само по интензитету већ и по правцу и смеру. У овим разматрањима искључујемо тачке за које је $\dot{\mathfrak{r}}=0$.

Треба обратити пажњу на чињеницу да су интензитет диференцијала $|d\mathfrak{r}|$ и диференцијал интензитета dr вектора $\mathfrak{r}$ у општем случају различити (сл. 125), тј.

(2) $$|d\mathfrak{r}| \neq dr.$$

Заиста, из једначине

(3) $$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}=\mathfrak{r}^2=r^2,$$

која важи за сваки вектор, после диференцирања леве и десне стране следује

(4) $$\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r}=r\,dr.$$

Дакле, скаларни производ вектора и његова диференцијала једнак је производу интензитета вектора и диференцијала тог интензитета.

Једначина (4) може се написати и у облику

(5) $$dr=\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot d\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0\cdot d\mathfrak{r},$$

тј. диференцијал интензитета вектора увек је једнак пројекцији диференцијала вектора на правац самога вектора. Отуда следује да је увек

(6) $$dr\leqq|d\mathfrak{r}|,$$

при чему знак једнакости важи само за дату константну вредност орта посматраног вектора, одн. кад је правац вектора константан.

Ако је интензитет посматраног вектора константан, онда је $dr=0$, па је према томе

(7) $$\mathfrak{r}_0\cdot d\mathfrak{r}=0,$$

тј.

$$d\mathfrak{r}\perp\mathfrak{r}_0.$$

Дакле, ако вектор има сталан интензитет, његов диференцијал је нормалан на самом вектору. Ово важи, како смо већ помоћу извода видели, не само кад је ходограф вектора круг већ уопште ма која сферна крива линија.

У случају ако је дата векторска функција више променљивих, $\mathfrak{y}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, парцијални диференцијали такве функције су облика

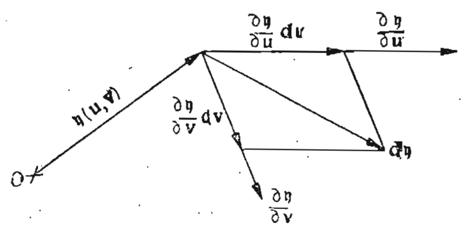
(8) $$d_i\mathfrak{y}=\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u_i}du_i. \qquad (i=1,2\ldots,n).$$

И ово су вектори.

Најзад, као *тотални (потпуни) диференцијал* векторске функције дефинише се збир свих делимичних диференцијала

(9) $$d\mathfrak{y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u_i}du_i.$$

На пр., код векторске функције од две независно променљиве, $\mathfrak{y}=\mathfrak{y}(u,v)$, парцијални изводи су $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u}$ и $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial v}$ (сл. 126). Помножимо ли вектор $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u}$ са du добићемо неки вектор $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial u}du$, који је делимични диференцијал од $\mathfrak{y}(u,v)$. Исто тако помножи се $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial v}$ са dv и добије делимични диференцијал $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial v}dv$ који одговара променљивој v.



Сл. 126

Ако се ова два вектора диференцијала саберу добиће се вектор $d\mathfrak{y}$, који је по дефиницији тотални диференцијал вектора $\mathfrak{y}$.

За израчунавање диференцијала вектора преносе се сва правила која важе за одређивање диференцијала скаларних функција, тј.

(10) $$\begin{aligned} &d(\mathfrak{x}\pm\mathfrak{y}\pm\mathfrak{z}\pm\ldots)=d\mathfrak{x}\pm d\mathfrak{y}\pm d\mathfrak{z}\pm\ldots,\\ &d(\lambda\mathfrak{x})=\lambda d\mathfrak{x}+\mathfrak{x}\,d\lambda,\\ &d(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})=d\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}+\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{y},\\ &d(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=d\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}+\mathfrak{x}\times d\mathfrak{y} \qquad \text{итд.}\end{aligned}$$

37. Виши изводи и диференцијали. Развијање векторских функција у Тејлоров ред

Први извод неке векторске функције $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u)$, тј. вектор $\dot{\mathfrak{x}}$ је, у општем случају, и сам векторска функција. Применимо ли на њега операцију извода добићемо други извод $\ddot{\mathfrak{x}}$ функције $\mathfrak{x}(u)$. Његове координате у односу на осе неког сталног Декартова триједра су други изводи координата векторске функције, тј.

(1) $$\ddot{\mathfrak{x}}=\{\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3\}.$$

Тако је, на пр., други извод вектора положаја $\mathfrak{r}$ покретне тачке по времену, тј.

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\ddot{\mathfrak{r}}, \tag{2}$$

убрзање покретне тачке која се креће по кривој у простору одређеној једначином

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t).$$

Уопште се применом оваквог поступног диференцирања може добити извод ма ког реда векторске функције који ћемо обележавати

$$\frac{d^n\mathfrak{x}}{du^n}=\mathfrak{x}^{(n)}, \tag{3}$$

чије су координате у односу на осе сталног Декартова триједра

$$\frac{d^n x_1}{du^n}=x_1^{(n)},\quad \frac{d^n x_2}{du^n}=x_2^{(n)},\quad \frac{d^n x_3}{du^n}=x_3^{(n)}. \tag{4}$$

Наравно, овде се претпоставља да векторска функција $\mathfrak{x}(u)$ има све изводе до n-тог реда и да се они могу израчунати.

Исто тако и парцијални извод $\dot{\mathfrak{y}}_{u_i}$ векторске функције $\mathfrak{y}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ у општем случају зависи од свих скаларних променљивих од којих зависи и сама функција, па се према томе може образовати парцијални извод од $\dot{\mathfrak{y}}_{u_i}$ поново ма по којој од променљивих. На пр., ако се поново сматра исти скалар u_i као променљива добиће се други парцијални извод векторске функције $\mathfrak{y}$ по u_i, тј.

$$\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u_i^2}=\ddot{\mathfrak{y}}_{u_i^2}. \tag{5}$$

Међутим, ако се у функцији $\dot{\mathfrak{y}}_{u_i}$ посматра промена само неког скалара u_j $(i \neq j)$, добија се други парцијални извод по u_i и u_j, тј.

$$\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u_i \partial u_j}=\ddot{\mathfrak{y}}_{u_i u_j}, \tag{6}$$

при чему је

$$\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u_i \partial u_j}=\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u_j \partial u_i}, \tag{7}$$

под истим условима као и у обичној анализи.

На тај начин могу се образовати парцијални изводи ма ког реда, само ако је векторска функција такве природе да ти изводи постоје.

Диференцијал другог реда или други диференцијал неке векторске функције $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u)$ дефинише се као производ другог извода $\ddot{\mathfrak{x}}$ векторске функције и квадрата du^2 диференцијала независно променљиве, тј.

$$d^2\mathfrak{x}=\ddot{\mathfrak{x}}\,du^2, \tag{8}$$

и, према томе, уопште за диференцијал ма ког реда важи

$$d^n\mathfrak{x}=\mathfrak{x}^{(n)}du^n. \tag{9}$$

Како се види, све ове дефиниције су аналогне односним дефиницијама обичне анализе. У том смислу може се, на пр., за тотални диференцијал другог реда неке векторске функције $\mathfrak{y}$ од две скаларне променљиве u и v написати

$$d^2\mathfrak{y}=\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial v^2}dv^2, \tag{10}$$

итд.

Векторске функције могу се развијати у редове као и скаларне под извесним условима. Нека, на пр., буде дата нека векторска функција $\mathfrak{x}(u)$ претстављена помоћу својих координата у односу на неки Декартов правоугли триједар, тј.

$$\mathfrak{x}(u)=x_1(u)\mathfrak{i}+x_2(u)\mathfrak{j}+x_3(u)\mathfrak{k}, \tag{11}$$

одакле је уопште

$$\mathfrak{x}^{(n)}=x_1^{(n)}\mathfrak{i}+x_2^{(n)}\mathfrak{j}+x_3^{(n)}\mathfrak{k}.$$

Ако се свака од скаларних функција $x_1(u)$, $x_2(u)$ и $x_3(u)$ може развити и развије у Тејлоров (Taylor) ред у околини u_0

$$\begin{aligned}
x_1(u)&=x_1(u_0)+(u-u_0)\frac{\dot{x}_1(u_0)}{1!}+(u-u_0)^2\frac{\ddot{x}_1(u_0)}{2!}+\cdots+\\
&\quad+(u-u_0)^n\frac{x_1^{(n)}(u_0)}{n!}+R_1(u),\\
x_2(u)&=x_2(u_0)+(u-u_0)\frac{\dot{x}_2(u_0)}{1!}+(u-u_0)^2\frac{\ddot{x}_2(u_0)}{2!}+\cdots+\\
&\quad+(u-u_0)^n\frac{x_2^{(n)}(u_0)}{n!}+R_2(u),\\
x_3(u)&=x_3(u_0)+(u-u_0)\frac{\dot{x}_3(u_0)}{1!}+(u-u_0)^2\frac{\ddot{x}_3(u_0)}{2!}+\cdots+\\
&\quad+(u-u_0)^n\frac{x_3^{(n)}(u_0)}{n!}+R_3(u),
\end{aligned} \tag{12}$$

па ове три једначине помноже редом за $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ и односни чланови саберу добиће се

$$(13) \qquad \mathfrak{r}(u) = \mathfrak{r}(u_0) + (u-u_0)\frac{\dot{\mathfrak{r}}(u_0)}{1!} + (u-u_0)^2\frac{\ddot{\mathfrak{r}}(u_0)}{2!} + \cdots +$$

$$+ (u-u_0)^n \frac{\mathfrak{r}^{(n)}(u_0)}{n!} + \mathfrak{R}(u),$$

где је

$$(14) \qquad \mathfrak{R}(u) = R_1(u)\mathfrak{i} + R_2(u)\mathfrak{j} + R_3(u)\mathfrak{k}.$$

Израз (13) претставља векторску функцију $\mathfrak{r}(u)$ развијену у Тејлоров ред.

Међутим, да би развијање скаларних функција (12) у Тејлорове редове имало смисла, мора, као што знамо, свака од њих имати коначне и одређене изводе до n-тог реда. Осим тога за довољно велико n, морају $|R_1|$, $|R_2|$ и $|R_3|$ бити мањи од неких унапред изабраних произвољно малих позитивних бројева ε_1, ε_2 и ε_3 који теже нули истовремено кад и n тежи бесконачности, и то за све вредности променљиве u, или бар за вредности променљиве u, у околини u_0, тј. за $|u-u_0|<\rho$, где је ρ одређени позитивни број. У том случају тежи и $\mathfrak{R}(u)$, остатак Тејлорова реда векторске функције $\mathfrak{r}(u)$, нули.

Према томе, да би се дата векторска функција $\mathfrak{r}(u)$ могла развити у бесконачни Тејлоров ред за вредности u у околини тачке u_0, она мора у тачки $u=u_0$ имати изводе до било кога реда и, осим тога, мора постојати неки начин да се утврди да остатак $\mathfrak{R}(u)$ тежи нули кад n тежи бесконачно.

За $u_0 = 0$ добија се из (13) ред

$$(15) \qquad \mathfrak{r}(u) = \mathfrak{r}(0) + u\frac{\dot{\mathfrak{r}}(0)}{1!} + u^2\frac{\ddot{\mathfrak{r}}(0)}{2!} + \cdots + u^n\frac{\mathfrak{r}^{(n)}(0)}{n!} + \mathfrak{R}(u),$$

а то је специјални облик Тејлорова реда за развијање функције у околини тачке $u=0$, познат под именом Меклоринова (Maclaurin) реда. Најзад, ако се у Тејлорову реду (13) стави, место u, израз $u+\Delta u$, а, место u_0, само u, — Тејлоров ред може се написати и у облику

$$(16) \qquad \mathfrak{r}(u+\Delta u) = \mathfrak{r}(u) + \frac{\dot{\mathfrak{r}}(u)\,\Delta u}{1!} + \frac{\ddot{\mathfrak{r}}(u)\,\Delta u^2}{2!} + \cdots$$

Како је $\mathfrak{r}(u+\Delta u) - \mathfrak{r}(u) = \Delta\mathfrak{r}$ прираштај векторске функције, а $\Delta u = du$, пошто је u независно променљива, то је $d\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}}\,du$, $d^2\mathfrak{r} = \ddot{\mathfrak{r}}\,du^2$, итд., па се најзад може написати

$$(17) \qquad \Delta\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} + \frac{1}{2!}d^2\mathfrak{r} + \frac{1}{3!}d^3\mathfrak{r} + \cdots$$

Овај израз објашњава везу између прираштаја векторске функције и диференцијала разнога реда те векторске функције. Очигледно је, да је

$$(18) \qquad \Delta\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}$$

са тачношћу до бесконачно малих другога реда само онда, кад је du бесконачно мала првога реда.

Ако се ds сматра као бесконачно мала величина, онда је с обзиром на једначину (6) т. 33

$$(19) \qquad \Delta\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}\,ds$$

и, према томе,

$$(20) \qquad |\Delta\mathfrak{r}| = |ds|$$

са тачношћу до бесконачно малих другога реда. Ово показује да се бесконачно мала тетива криве може сматрати као једнака бесконачно малом лучном елементу који јој одговара.

Сам вектор $d\mathfrak{r}$ који има интензитет $|ds|$ и оријентацију орта тангенте зове се *управљени елемент* криве линије.

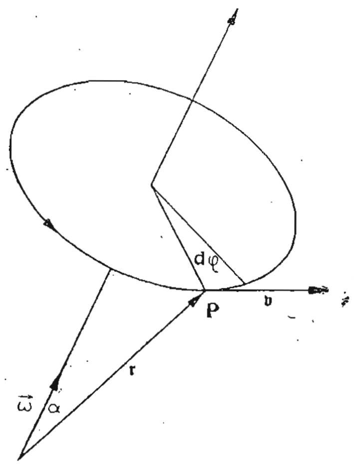
На крају подвлачимо да се остатак (14) Тејлорова реда код векторских функција, у општем случају, не може изразити у облику где се јавља извод $\mathfrak{r}^{(n+1)}[u_0 + \theta(u-u_0)]$ и $0 \leqq \theta \leqq 1$. Ово је, без дугачких објашњења, јасно већ отуда што величина θ у остацима R_1, R_2, R_3 скаларних функција (12) не мора да има исту вредност.

38. Извод векторске функције посматране у односу на покретни Декартов триједар. Сферно кретање чврстог тела

Досад смо посматрали векторске функције или директно, без обзира на координатни систем, или у односу на неки стални Декартов триједар. Иако је извод векторске функције, као што смо видели, потпуно природна величина која нема никакве везе и не зависи од координатног система, може се поставити питање: уколико се мења сам начин изражавања извода векторске функције, ако Декартов триједар није непокретан већ се и сам креће?

У том смислу одмах подвлачимо да транслација координатног система не мења ни у чему наша досадашња излагања о изводима векторских функција. Наиме, у случају транслације триједра оса основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ остају непромењени, а исто тако се не мењају ни Декартове правоугле координате посматране векторске функције $\mathfrak{v} = \{v_1 v_2, v_3\}$. Дакле, промене у изразу за извод могу наступити само у случају ротације основног trijедра. Да бисмо, међутим, написали извод векторске функције коју посматрамо у односу на неки триједар оса, који се обрће око непокретног почетка, извешћемо прво образац за брзину неке тачке чврстог тела у случају његова сферног кретања. Под *сферним* разумемо оно кретање чврстог тела, при којем је једна тачка тог тела непокретна. Разлог за назив је очигледан. Све тачке чврстог тела при таквом кретању могу описивати само сферне путање на сферама са центром у непокретној тачки.

У кинематици се показује да се, у том случају, чврсто тело може ма из ког положаја превести у други неки положај ротацијом око одређене осе за коначни угао, при чему та оса пролази кроз непокретну тачку. Наравно да се стварне путање појединих тачака при прелазу из I у II положај не морају поклапати са луком круга који та тачка описује при коначној ротацији. Каква ће бити путања (мора само бити сферна крива линија) зависи од начина кретања. Ипак, можемо замислити да се кретање чврстог тела остварује на овај начин. Елементарни лук стварне трајекторије неке тачке чврстог тела поклапа се са елементарним луком који се добија елементарном ротацијом око неке осе кроз непокретну тачку. Наредни лучни елемент добили бисмо опет елементарном ротацијом око неке друге осе кроз исту непокретну тачку итд. Према томе, може се замислити да се чврсто тело у сваком тренутку окреће око неке осе — *тренутне осе ротације* — која пролази стално кроз непокретну тачку O (сл. 127) и мења непрестано свој правац, према томе како се тачка креће.



Сл. 127

Дакле, *у датом тренутку* времена све тачке чврстог тела при сферном кретању врше елементарну ротацију око неке осе кроз непокретну тачку. При свакој ротацији, међутим, разне тачке тела имају различите брзине и те брзине се зову понекад и *линиске брзине* тачака за разлику од *угаоне брзине*, која је иста за све тачке чврстог тела у датом тренутку. Угаона брзина је једнака изводу угла обртања око дате тренутне осе по времену.

Нека се сад тражи брзина тачке P (сл. 127), одређене вектором положаја $\mathfrak{r}$ у односу на непокретну тачку O. Ако вектор $\mathfrak{r}$ чини се тренутном осом обртања угао α, онда је интензитет елементарног померања ds тачке P, при ротацији за бесконачно мали угао $d\varphi$, одређен изразом

(1) $$ds = r \sin \alpha \, d\varphi,$$

што је очигледно са слике. Интензитет брзине $\mathfrak{v}$ тачке P је стога дат изразом

(2) $$v = \omega r \sin \alpha,$$

где је $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ угаона брзина.

Ако се угаона брзина уведе као вектор $\vec{\omega}$ са правцем тренутне осе ротације, смером онамо одакле се види да је ротација у директном смеру и интензитетом једнаким ω, образац (2) може се написати у векторском облику и брзина $\mathfrak{v}$ ма које тачке чврстог тела одредити у облику

(3) $$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathfrak{r}.$$

При томе треба упамтити да је за одређени тренутак времена $\vec{\omega} = \mathrm{const.}$ и само $\mathfrak{r}$ промењливо и да, према томе, распоред брзина у чврстом телу при сферном кретању у одређеном тренутку зависи само од положаја.

Посматрајмо сад векторску функцију

4) $$\mathfrak{v} = v_1 \mathfrak{i} + v_2 \mathfrak{j} + v_3 \mathfrak{k},$$

у односу на Декартов правоугли триједар који се обрће и где су стога основни ортови и сами функције времена, тј.

(5) $$\mathfrak{i} = \mathfrak{i}(t), \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{j}(t), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}(t).$$

Сад ће бити

(6) $$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \dot{\mathfrak{v}} = \frac{dv_1}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dv_2}{dt}\mathfrak{j} + \frac{dv_3}{dt}\mathfrak{k} + v_1\frac{d\mathfrak{i}}{dt} + v_2\frac{d\mathfrak{j}}{dt} + v_3\frac{d\mathfrak{k}}{dt}.$$

Прва три члана на десној страни потичу од промене наше векторске функције коју она има у односу (релативно) на сам триједар, кад би он био непокретан. Ова компонента извода векторске функције $\mathfrak{v}$ зове се *релативни извод* векторске функције у односу на триједар покретних оса и пише

$$\frac{d\bar{\mathfrak{v}}}{dt}=\frac{du}{dt}\mathfrak{i}+\frac{dv}{dt}\mathfrak{j}+\frac{dw}{dt}\mathfrak{k}. \tag{7}$$

Ако се узме у обзир да се основни ортови $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ могу сматрати као вектори положаја тачака на односним осама на јединичном растојању од почетка, може се, с обзиром на једначину (3), написати

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\mathfrak{i},\quad \frac{d\mathfrak{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\mathfrak{j},\quad \frac{d\mathfrak{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\mathfrak{k}, \tag{8}$$

где је $\vec{\omega}$ вектор тренутне угаоне брзине при ротацији нашег триједра. Дакле, у вези са овим једначинама може се компонента извода векторске функције, одређена са три последња члана у изразу (6), овако трансформисати

$$v_1\frac{d\mathfrak{i}}{dt}+v_2\frac{d\mathfrak{j}}{dt}+v_3\frac{d\mathfrak{k}}{dt}=(\vec{\omega}\times v_1\mathfrak{i})+(\vec{\omega}\times v_2\mathfrak{j})+(\vec{\omega}\times v_3\mathfrak{k})= \tag{9}$$

$$=\omega\times(v_1\mathfrak{i}+v_2\mathfrak{j}+v_3\mathfrak{k})=\vec{\omega}\times\mathfrak{v}.$$

Ова компонента извода векторске функције је резултат промене векторске функције услед ротације триједра референције, и то, кад се векторска функција уопште не мења у односу на сам триједар. Из наведеног разлога ова компонента се зове *преносни извод* векторске функције. Дакле извод векторске функције, ако се она посматра у односу на неки триједар оса који се обрће, може се претставити као збир релативног и преносног извода, тј.

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{d\bar{\mathfrak{v}}}{dt}+\vec{\omega}\times\mathfrak{v}. \tag{10}$$

Сам извод векторске функције $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ зове се у овом случају и *апсолутни извод* векторске функције.

Очигледно је да се вектор који одређује извод неке векторске функције не мења због тога што се посматра у односу на овај или онај покретни или непокретни систем, или што смо га назвали апсолутни извод. Овај начин изражавања извода векторске функције је међутим, од користи нарочито у механици.

Показаћемо оправданост претпоставке да се тренутна угаона брзина може сматрати као вектор а, у вези с тим, и елементарна ротација, за разлику од коначне ротације за коју смо раније показали да се не може сматрати као вектор.

Посматрајмо у том циљу неко чврсто тело чија је само једна тачка непокретна. Нека вектор положаја ма које тачке тога тела у односу на непокретну тачку буде $\mathfrak{r}$. Тада је елементарно померање посматране тачке као резултат елементарне ротације око неке одређене осе кроз непокретну тачку дато изразом

$$d_1\mathfrak{r}=\mathfrak{v}_1\,dt=(\vec{\omega}_1\times\mathfrak{r})\,dt, \tag{11}$$

ако је са $\mathfrak{v}_1$ обележена брзина посматране тачке а са $\vec{\omega}_1$ њена тренутна угаона брзина у односу на ту осу. Ако после ове елементарне ротације извршимо другу, такође елементарну, ротацију око неке друге осе, која пролази кроз исту непокретну тачку, добићемо за елементарно померање из новог положаја

$$d_2(\mathfrak{r}+d_1\mathfrak{r})=\mathfrak{v}_2\,dt=[\vec{\omega}_2\times(\mathfrak{r}+d_1\mathfrak{r})]\,dt. \tag{12}$$

Ако се у овом изразу, на левој и десној страни, занемаре чланови у којима се налазе бесконачно мале величине вишега реда у односу на оне нижег реда, тј. ако се изоставе чланови $d_2(d_1\mathfrak{r})$ и $(\vec{\omega}_2\times d_1\mathfrak{r})\,dt$, добија се

$$d_2\mathfrak{r}=\mathfrak{v}_2\,dt=(\vec{\omega}_2\times\mathfrak{r})\,dt. \tag{13}$$

Укупно померање после обе ротације износи

$$d\mathfrak{r}=d_1\mathfrak{r}+d_2\mathfrak{r}=(\vec{\omega}_1\times\mathfrak{r})\,dt+(\vec{\omega}_2\times\mathfrak{r})\,dt=[(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2)\times\mathfrak{r}]\,dt. \tag{14}$$

Међутим, посматраној тачки при елементарном померању $d\mathfrak{r}$ одговара нека ротација угаоном брзином $\vec{\omega}$ око нове тренутне осе ротације, тј.

$$d\mathfrak{r}=(\vec{\omega}\times\mathfrak{r})\,dt. \tag{15}$$

Из упоређења образаца (14) и (15) следује

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2, \tag{16}$$

тј. резултантна угаона брзина је геометриски збир тренутних угаоних брзина обеју елементарних ротација; према томе угаоне брзине се сабирају као вектори, што смо и хтели да покажемо. Очигледно је да резултат не зависи од реда у коме се изводе обе елементарне ротације.

39. Извод система везаних вектора

Посматрајмо неки систем везаних вектора $\mathfrak{S}$. Нека векторске координате система, тј. његов главни вектор и главни момент у односу на неки непокретни пол O (на пр. координатни почетак Декартова правоуглог триједра), буду $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^O$. Тада се може ставити

(1) $$\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O).$$

Ако су везани вектори система $\mathfrak{S}$ функције неког промењљивог скалара u, онда ће од те исте промењљиве зависити и векторске координате $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^O$ посматраног система. Нека, дакле, вредности u скаларне промењљиве одговарају векторске координате $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^O$, а вредности $u + \Delta u$ скаларне промењљиве нека одговарају векторске координате $\mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}^O + \Delta\mathfrak{M}^O$. Другим речима, после промене скалара u за Δu систем везаних вектора $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O)$ постао је систем $(\mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O + \Delta\mathfrak{M}^O)$. При томе је очевидно, да систем $(\Delta\mathfrak{A}, \Delta\mathfrak{M}^O)$ претставља такав систем, који треба додати систему $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O)$ да би се добио систем $(\mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O + \Delta\mathfrak{M}^O)$. Стога се систем $(\Delta\mathfrak{A}, \Delta\mathfrak{M}^O)$ зове *прираштај променљивог система* $\mathfrak{S}$ који одговара прираштају Δu независно променљиве и обележава са $\Delta\mathfrak{S}$, тј.

(2) $$\Delta\mathfrak{S} = (\Delta\mathfrak{A}, \Delta\mathfrak{M}^O).$$

Ако се сад координате система $\Delta\mathfrak{S}$ поделе прираштајем Δu независно променљиве и пређе граници, кад Δu тежи нули, добија се систем везаних вектора одређен координатама $(\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{M}}^O)$. Овај систем се зове извод датог система $\mathfrak{S}$ и пише

(3) $$\dot{\mathfrak{S}} = (\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{M}}^O).$$

Према томе, ако је пол у односу на који се одређује главни момент система непокретан, векторске координате извода система везаних вектора су изводи координата датог система по промењљивом скалару.

Посматрајмо сад случај кад и сам пол, у односу на који се одређује главни момент система, мења свој положај као функција променљивог скалара од кога зависи промена целога система. Нека тај промењљиви пол буде Q. Према т. 20.1, једн. 4 нове координате посматраног система биће на овај начин у вези са старим координатама

(4) $$\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^Q) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O - \mathfrak{r}_Q \times \mathfrak{A}),$$

јер је $\mathfrak{M}^Q = \mathfrak{M}^O - \mathfrak{r}_Q \times \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{r}_Q$ означује вектор положаја новога у односу на стари пол.

Кад нови пол Q не би био променљив, извод система везаних вектора, одређеног главним вектором $\mathfrak{A}$ и главним моментом $\mathfrak{M}^O - \mathfrak{r}_Q \times \mathfrak{A}$ у односу на нови пол, био би дат, како смо рекли, изводом главног вектора и главног момента, тј.

(5) $$\dot{\mathfrak{S}} = (\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{M}}^O - \mathfrak{r}_Q \times \dot{\mathfrak{A}}),$$

где смо са $\underline{Q}$ назначили да се пол Q сматра непокретним. Међутим је за покретни пол

(6) $$\dot{\mathfrak{M}}^Q = \dot{\mathfrak{M}}^O - \mathfrak{r}_Q \times \dot{\mathfrak{A}} - \dot{\mathfrak{r}}_Q \times \mathfrak{A}.$$

Према томе, упоређењем једначина (5) и (6) добија се

(7) $$\dot{\mathfrak{M}}^O - \mathfrak{r}_Q \times \dot{\mathfrak{A}} = \dot{\mathfrak{M}}^Q + \dot{\mathfrak{r}}_Q \times \mathfrak{A}$$

и, најзад, за извод система у односу на покретни пол једначина

(8) $$\dot{\mathfrak{S}} = (\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{M}}^Q + \dot{\mathfrak{r}}_Q \times \mathfrak{A}).$$

Пол чији је вектор положаја једнак вектору $\dot{\mathfrak{r}}_Q$ зове се *изводни пол* пола Q, који је одређен вектором положаја $\mathfrak{r}_Q$.

Сад се израз (8) може овако изразити речима: Главни вектор извода система једнак је изводу главног вектора система, а главни момент извода система једнак је збиру извода главног момента основног система (у односу на пол Q) и момента главног вектора система, са нападном тачком у изводном полу пола Q, у односу на координатни почетак.

Овај допунски члан једнак је нули, не само кад је пол непокретан већ и кад се изводни пол за дату вредност независно променљиве налази у координатном почетку, или кад је вектор положаја $\dot{\mathfrak{r}}_Q$ изводног пола колинеаран са главним вектором $\mathfrak{A}$ система.

Ако је дат, место читавог система везаних вектора, само један везани вектор, све што је речено остаје у важности, само треба речи „главни вектор" и „главни момент" заменити речима „везани вектор" и „момент везаног вектора".

Разлог за ово објашњење извода система везаних вектора пре објашњења извода једног везаног вектора је у томе, што прираштај везаног вектора, према претходној дефиницији, у општем случају није везани вектор већ динама, одн. систем везаних вектора. Другим речима, везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O)$ прелази у везани вектор $\mathfrak{A}^{(l)} + \Delta\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} + \Delta\mathfrak{A}, \mathfrak{M}^O + \Delta\mathfrak{M}^O)$ после додавања динаме $\Delta\mathfrak{S} = (\Delta\mathfrak{A}, \Delta\mathfrak{M}^O)$.

40. Неодређени интеграл вектора по скаларној промењивој

Нека $\mathfrak{x}(u)$ буде извод векторске функције $\mathfrak{X}(u)$ по скалару u, тј.

$$\frac{d\mathfrak{X}(u)}{du}=\mathfrak{x}(u),$$

онда је, очигледно, вектор $\mathfrak{x}(u)$ извод и векторске функције $\mathfrak{X}(u)+\mathfrak{c}$, где је $\mathfrak{c}$ ма који константни вектор, тј.

$$(1)\qquad \frac{d[\mathfrak{X}(u)+\mathfrak{c}]}{du}=\mathfrak{x}(u).$$

По аналогији са обичном анализом, векторска функција $\mathfrak{X}(u)+\mathfrak{c}$ се тада зове *интегрална векторска функција* или *неодређени интеграл* вектора $\mathfrak{x}(u)$ и пише

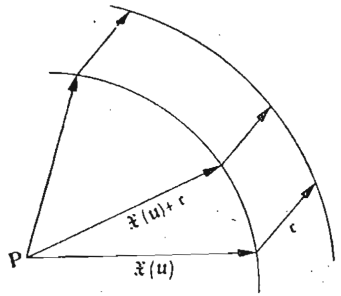
$$(2)\qquad \int \mathfrak{x}(u)\,du=\mathfrak{X}(u)+\mathfrak{c}.$$

Ходограф интегралне функције $\mathfrak{X}(u)+\mathfrak{c}$, услед произвољности константног вектора $\mathfrak{c}$, није потпуно одређен и претставља читаву породицу кривих (у општем случају у простору) које се добијају паралелним померањем једне из других (сл. 128).

Да бисмо добили одређени ходограф интегралне векторске функције, мора бити дата вредност те функције за неку одређену вредност u_0 скаларне промењиве u, на пр. $\mathfrak{X}(u_0)+\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$, где је $\mathfrak{b}$ одређени константни вектор. У овом случају је произвољни вектор $\mathfrak{c}$ одређен, тј.

$$(3)\qquad \mathfrak{c}=\mathfrak{b}-\mathfrak{X}(u_0),$$

и тада се добија потпуно одређени ходограф. Прописивање одређене вредности интегралне векторске функције ради потпуног одређивања ходографа зове се *почетни услов* задатка.



Сл. 128

Како се константни вектор може ставити испред знака диференцијације (т. 32, једн. 8), очигледно је да се, ако је $\mathfrak{a}$ неки константни вектор, може написати, на пр.

$$(4)\qquad \int \mathfrak{a}\,du=\mathfrak{a}\int du=\mathfrak{a}u+\mathfrak{c},$$

тј. константни вектор може се ставити и испред знака интеграције. При овоме треба само пазити да се не направи грешка и напише

$$(5)\qquad \mathfrak{a}\int du=\mathfrak{a}(u+c)=\mathfrak{a}u+\mathfrak{a}c,$$

јер тада константни вектор $\mathfrak{a}c$ не би био потпуно произвољан, што је нетачно.

Узмимо, на пр., да треба одредити векторску једначину криве линије трајекторије као ходограф вектора положаја покретне тачке у зависности од времена, кад је позната брзина тачке као константни вектор $\mathfrak{v}$, тј.

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{v}.$$

Тада је

$$\mathfrak{r}=\int \mathfrak{v}\,dt=\mathfrak{v}\int dt=\mathfrak{v}t+\mathfrak{c},$$

где је $\mathfrak{c}$ произвољни константни вектор. Нека је почетни услов да се, у тренутку $t=0$, тачка налази у положају коме одговара вектор $\mathfrak{r}_0$. Према томе $\mathfrak{r}_0=\mathfrak{c}$ и, најзад,

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\mathfrak{v}t,$$

а то је векторска једначина праве линије што пролази кроз тачку одређену вектором положаја $\mathfrak{r}_0$.

И диференцијалне једначине у којима се јављају, као непознате, векторске функције скаларне промењиве могу се решавати сличним методама као и у случају обичних скаларних функција.

На пр., узмимо да треба решити векторску линеарну диференцијалну једначину првога реда облика

$$(6)\qquad \frac{d\mathfrak{r}(t)}{dt}+f(t)\mathfrak{r}(t)=\mathfrak{p}(t),$$

где је $f(t)$ позната скаларна функција, $\mathfrak{p}(t)$ позната векторска функција, а $\mathfrak{r}(t)$ непозната векторска функција. Да бисмо нашли општи интеграл ове диференцијалне једначине, поступићемо као и у случају скаларних линеарних диференцијалних једначина првога реда, тј. ставићемо

$$(7)\qquad \mathfrak{r}(t)=F(t)\mathfrak{s}(t),$$

где су $F(t)$ и $\mathfrak{s}(t)$ засад неодређене функције. Заменом вредности (7) у једначини (6) добија се

$$(8)\qquad F(t)\dot{\mathfrak{s}}(t)+[F'(t)+f(t)F(t)]\,\mathfrak{s}(t)=\mathfrak{p}(t).$$

Одредимо сад $F(t)$ тако да буде

(9) $$F'(t)+f(t)F(t)=0.$$

Из ове једначине следује

(10) $$F(t)=e^{-\int f(t)\,dt}.$$

На основу једначина (9) и (10) добија се из једначине (8)

(11) $$\dot{\mathfrak{s}}(t)=\mathfrak{p}e^{\int f(t)\,dt}$$

и

(12) $$\mathfrak{s}(t)=\int \mathfrak{p}e^{\int f(t)\,dt}\,dt+\mathfrak{c}.$$

Најзад, уношењем у израз (7) вредности (10) и (12) добија се решење векторске линеарне диференцијалне једначине првога реда у облику

(13) $$\mathfrak{r}(t)=e^{-\int f(t)\,dt}(\mathfrak{c}+\int \mathfrak{p}e^{\int f(t)\,dt}\,dt),$$

где је $\mathfrak{c}$ произвољни константни вектор интеграције.

41. Одређени интеграл векторских функција скаларне промењиве

Одређени интеграл векторске функције скаларне промењиве дефинише се, као и код обичних функција, на овај начин.

Нека је дата векторска функција $\mathfrak{r}(u)$ неког скалара u, која је дефинисана у интервалу $\alpha \leq u \leq \beta$. Поделимо дати интервал ма на који начин на n делова

(1) $$u_0=\alpha,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{n-1},\ u_n=\beta,$$

тако да је апсолутна вредност сваког таквог подинтервала мања од неког унапред одређеног позитивног малог броја δ, тј.

(2) $$|\Delta u_i|=|u_i-u_{i-1}|<\delta.$$

Нека $\bar{u}_i$ буде ма која вредност промењивог скалара u у i-том подинтервалу или на граници тог подинтервала па образујмо

(3) $$\mathfrak{r}(\bar{u}_1)\,\Delta u_1+\mathfrak{r}(\bar{u}_2)\,\Delta u_2+\cdots+\mathfrak{r}(\bar{u}_n)\,\Delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{r}(\bar{u}_i)\,\Delta u_i.$$

Ако постоји гранична вредност овог збира, кад $n\to\infty$ (тј. $\delta\to 0$), која не зависи од начина поделе датог интервала на подинтервале, ни од избора вредности u_i скалара у таквом подинтервалу, онда се та гранична вредност зове *одређени*

интеграл векторске функција $\mathfrak{r}(u)$ у границама од α до β и пише

(4) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{r}(\bar{u}_i)\,\Delta u_i=\int_{\alpha}^{\beta}\mathfrak{r}(u)\,du.$$

Из дефиниције одређеног интеграла очигледно је да, ако се одређени интеграл неке векторске функције узме у границама од α до u, где је горња граница промењива, он мора бити функција те горње границе, тј.

(5) $$\int_{\alpha}^{u}\mathfrak{r}(u)\,du=\mathfrak{X}(u).$$

Тачност основног става интегралног рачуна (веза између одређеног и неодређеног интеграла), тј. да је и у овом случају

(6) $$\frac{d\mathfrak{X}(u)}{du}=\mathfrak{r}(u),$$

може се доказати на два начина.

Прво ћемо поћи од става, да се свака векторска функција скаларне промењиве може претставити помоћу три скаларне функције у облику

(7) $$\mathfrak{r}(u)=x_1(u)\,\mathfrak{i}+x_2(u)\,\mathfrak{j}+x_3(u)\,\mathfrak{k}.$$

Одавде је, пошто су $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ константни ортови

(8) $$\mathfrak{X}(u)=\int_{\alpha}^{u}\mathfrak{r}(u)\,du=\mathfrak{i}\int_{\alpha}^{u}x_1(u)\,du+\mathfrak{j}\int_{\alpha}^{u}x_2(u)\,du+\mathfrak{k}\int_{\alpha}^{u}x_3(u)\,du=$$
$$=X_1(u)\,\mathfrak{i}+X_2(u)\,\mathfrak{j}+X_3(u)\,\mathfrak{k},$$

где је

$$\int_{\alpha}^{u}x_1(u)\,du=X_1(u),\quad \int_{\alpha}^{u}x_2(u)\,du=X_2(u),\quad \int_{\alpha}^{u}x_3(u)\,du=X_3(u).$$

С друге стране је увек

(9) $$\frac{d\mathfrak{X}(u)}{du}=\frac{dX_1(u)}{du}\,\mathfrak{i}+\frac{dX_2(u)}{du}\,\mathfrak{j}+\frac{dX_3(u)}{du}\,\mathfrak{k},$$

па, како за скаларне функције важи

(10) $$\frac{dX_1}{du}=x_1,\quad \frac{dX_2}{du}=x_2,\quad \frac{dX_3}{du}=x_3,$$

то је

(11) $$\frac{d\mathfrak{X}(u)}{du}=\mathfrak{r}(u),$$

што је и требало доказати.

Дакле, одређени интеграл векторске функције скаларне промењиве, посматран као функција горње границе, је интегрална векторска функција (неодређени интеграл) интегранда и, према томе, могао би на основу (11), садржати и произвољну адитивну константу c. Међутим, тада се, из

(12) $$\int_{\alpha}^{u} \mathfrak{x}(u)\,du = \mathfrak{X}(u) + c$$

за $u = \alpha$, добија

(13) $$0 = \int_{\alpha}^{\alpha} \mathfrak{x}(u)\,du = \mathfrak{X}(\alpha) + c,$$

одакле је $c = -\mathfrak{X}(\alpha)$ и према томе за вредност одређеног интеграла

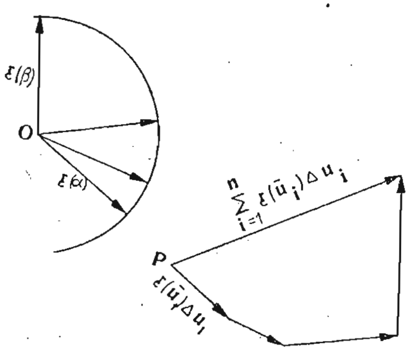
(14) $$\int_{\alpha}^{u} \mathfrak{x}(u)\,du = \mathfrak{X}(u) - \mathfrak{X}(\alpha).$$

За $u = \beta$ добија се

(15) $$\int_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{x}(u)\,du = \mathfrak{X}(\beta) - \mathfrak{X}(\alpha).$$

Остале особине одређених интеграла обичних скаларних функција лако се доказују и за ове функције.

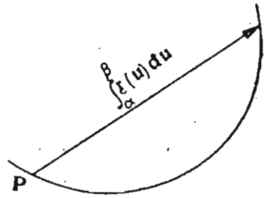
До истих резултата дошли бисмо и чисто геометриским размишљањем. Наиме, израз (3) претставља збир од n вектора колинеарних са векторима положаја ходографа векторске функције $\mathfrak{x}(u)$ за вредности u_i промењивог скалара u од α до β (сл. 129). Гранична вредност (4) овог збира за вредности промењивог скалара је, у посматраном интервалу, одређени вектор, који затвара лук *оријентисане криве* у што се, при све већем броју подинтервала претвара горњи збир (сл. 130).



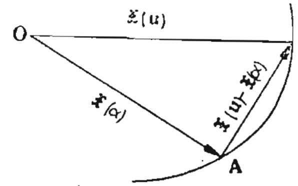
Сл. 129

Ако горња граница интервала у коме се мења скалар u није одређена већ промењива, онда вредност вектора збира зависи, како смо рекли од вредности u на којој се задржимо

и геометриски претставља тетиву ходографа који почиње у тачки A, одређеној вектором положаја $\mathfrak{X}(\alpha)$ у односу на



Сл. 130



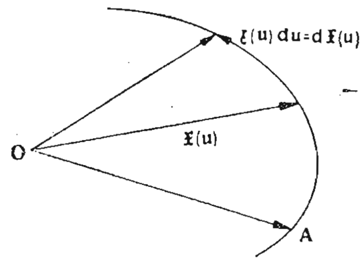
Сл. 131

произвољни пол O, јер се посматра промена скалара u почев од вредности α (сл. 131).

Сваки члан $\mathfrak{x}(\bar{u}_i)\Delta u_i$ збира (3) постаје, за $\Delta u_i \to 0$ (одн. $n \to \infty$), *управљени елеменѿ* оријентисане криве линије (ходографа векторске функције $\mathfrak{X}(u)$), тј.

(16) $$\lim_{\Delta u_i \to 0} \mathfrak{x}(\bar{u}_i)\Delta u_i = \mathfrak{x}(u_i)\,du,$$

дакле, вектор колинеаран са тангентом у тачки u_i. С друге стране, знамо да је управљени елемент ходографа векторске функције $\mathfrak{X}(u)$ једнак диференцијалу вектора $\mathfrak{X}(u)$, тј. $d\,\mathfrak{X}(u)$ (сл. 132).



Сл. 132

Према томе је

(17) $$d\,\mathfrak{X}(u) = \mathfrak{x}(u)\,du,$$

односно

(18) $$\frac{d\,\mathfrak{X}(u)}{du} = \mathfrak{x}(u),$$

што је и требало доказати.

Израз (15) за вредност одређеног интеграла у границама од α до β добија се сад на исти начин као и у претходном случају, и геометриски је претстављен сликом 130.

42. Примери

1. Доказати да је промењиви вектор $\mathfrak{x}(u) \neq 0$ константног правца, тј. $\mathfrak{x}_0 = \text{const.}$, ако је задовољен услов $\mathfrak{x} \times \dot{\mathfrak{x}} = 0$.

Заиста, из $\mathfrak{r} = x\mathfrak{r}_0$ следује

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{x}\mathfrak{r}_0 + x\dot{\mathfrak{r}}_0$$

и, према томе, ако се још узме у обзир дати услов, добија се

$$\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{r}} = x\mathfrak{r}_0\times(\dot{x}\mathfrak{r}_0 + x\dot{\mathfrak{r}}_0) = x\dot{x}(\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{r}_0 + x^2(\mathfrak{r}_0\times\dot{\mathfrak{r}}) = x^2(\mathfrak{r}_0\times\dot{\mathfrak{r}}_0) = 0.$$

Међутим је, с једне стране, увек $\mathfrak{r}_0 \perp \dot{\mathfrak{r}}_0$, као извод орта, а из нашег услова следује да је $\dot{\mathfrak{r}} \parallel \mathfrak{r}_0$. Ово је могуће само у случају $\dot{\mathfrak{r}}_0 = 0$, одн.

$$\mathfrak{r}_0 = \text{const.}$$

што је и требало доказати.

2. Нека $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ буду основни ортови неког Декартова правоуглог триједра који се обрће око почетка. Доказати да су, у том случају, вектори $\frac{d\mathfrak{i}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{j}}{dt}$ и $\frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ компланарни.

Да бисмо доказали компланарност поменутих вектора, треба доказати да је њихов мешовити производ једнак нули, тј. да је

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt}\cdot\left(\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right) = 0.$$

И заиста, на основу т. 38, једн. (8) и правила за развијање векторског производа друга два векторска производа следује, прво,

$$\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt} = (\vec{\omega}\times\mathfrak{j})\times(\vec{\omega}\times\mathfrak{k}) = [\vec{\omega}\mathfrak{j}\mathfrak{k}]\vec{\omega} - [\vec{\omega}\mathfrak{j}\vec{\omega}]\mathfrak{k} = [\vec{\omega}\mathfrak{j}\mathfrak{k}]\vec{\omega},$$

а, затим,

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt}\cdot\left(\frac{d\mathfrak{j}}{dt}\times\frac{d\mathfrak{k}}{dt}\right) = [\vec{\omega}\mathfrak{j}\mathfrak{k}]\vec{\omega}\cdot(\vec{\omega}\times\mathfrak{i}) = 0,$$

што је требало доказати.

3. Материјална тачка масе m креће се под дејством привлачне силе $-k^2\mathfrak{r}$, где је $k^2 = \text{const.}$ Одредити кретање.

Векторска диференцијална једначина кретања у овом случају гласи

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -k^2\mathfrak{r} \quad \text{или} \quad m\ddot{\mathfrak{r}} + k^2\mathfrak{r} = 0, \tag{1}$$

а то је хомогена линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима. Да бисмо избегли употребу комплексних бројева потражимо, као и у случају скаларне једначине оваквог типа, решење у облику

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\sin\alpha t, \tag{2}$$

где је $\mathfrak{A}$ произвољни константни вектор. Уношењем вредности (2) за $\mathfrak{r}$ у једначину (1) добија се, за одређивање α, једначина

$$(-m\alpha^2 + k^2)\sin\alpha t = 0, \quad \text{тј.} \quad -m\alpha^2 + k^2 = 0,$$

одакле је

$$\alpha = \frac{k}{\sqrt{m}}.$$

На тај начин се види да је вектор $\mathfrak{A}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right)$ решење наше диференцијалне једначине.

Исто тако се може утврдити да је и $\mathfrak{B}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right)$ решење исте диференцијалне једначине, при чему је $\mathfrak{B}$ такође неки произвољни константни вектор.

Према томе се опште решење диференцијалне једначине (1) може написати у облику

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) + \mathfrak{B}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right). \tag{3}$$

Неодређене константе интеграције $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одређује се из почетних услова, тј. помоћу вектора положаја $\mathfrak{r}_0$ у почетку кретања $t=0$ и почетне брзине $\mathfrak{v}_0$ у истом том тренутку. Ако, дакле, из једначине (3) одредимо брзину $\mathfrak{v}$, тј.

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{A}\frac{k}{\sqrt{m}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) - \mathfrak{B}\frac{k}{\sqrt{m}}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right), \tag{4}$$

из једначине (3) и (4) за $t=0$ добија се

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{m}}{k}\mathfrak{v}_0, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{r}_0$$

и, најзад, за коначну једначину кретања материјалне тачке при датим почетним условима

$$\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{m}}{k}\mathfrak{v}_0\sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right) + \mathfrak{r}_0\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right).$$

Ова једначина, уколико вектори $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ нису колинеарни, претставља, с обзиром на једн. 4 у т. 29., елипсу у равни вектора $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{v}_0$.

Задаци

1. Доказати да је $\lim [\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}] = [\lim \mathfrak{x} \lim \mathfrak{y} \lim \mathfrak{z}]$.

2. Ако постоји $\lim |\mathfrak{x}(u)|$, кад $u \to u_0$, може ли се отуда закључити да постоји и $\lim \mathfrak{x}(u)$, кад $u \to u_0$?

3. Да ли је извод орта увек јединични вектор?

4. Ако је $\frac{d}{du}(\mathfrak{v}+\mathfrak{w})=0$, тада је $(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w})^2 = c\,\mathfrak{v}^2$, где је c нека константа, кад је само вектор $\mathfrak{v}$ константног правца.

5. Дата је векторска функција $\mathfrak{x}(u) \neq 0$ која задовољава услове $\mathfrak{x}\times\dot{\mathfrak{x}} \neq 0$ и $[\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}]=0$. Доказати да је у том случају $\mathfrak{x}(u)$ стално паралелно некој утврђеној равни.

6. Нека буде $\mathfrak{r}(t) = r(\mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi)$, где су r и φ функције од t. Одредити пројекцију вектора $\dot{\mathfrak{r}} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ на правац вектора положаја и нормално на њега.

7. Израчунати пројекцију брзине $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ кретања тачке чија је коначна једначина $\mathfrak{r} = a\mathfrak{i}\sin\alpha t\cos\beta t + a\mathfrak{j}\sin\alpha t\sin\beta t + a\mathfrak{k}\cos\alpha t$, на променљив правац одређен ортом $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{i}\sin\gamma\cos\beta t + \mathfrak{j}\sin\gamma\sin\beta t + \mathfrak{k}\cos\gamma$, ако су a, α, β, γ константе.

8. Доказати да је $\frac{d}{du}\left(\frac{\mathfrak{x}(u)}{\lambda(u)}\right) = \frac{\lambda\frac{d\mathfrak{x}}{du} - \mathfrak{x}\frac{d\lambda}{du}}{\lambda^2}$, ако је $\lambda(u) \neq 0$.

9. Ако су за све вредности u вектори $\dot{\mathfrak{x}}(u)$ и $\ddot{\mathfrak{x}}(u)$ неколинеарни, али је вектор $\dddot{\mathfrak{x}}$ с њима компланаран, доказати да за произвољно n вектор $\mathfrak{x}^{(n)}$ лежи у равни прва два вектора.

10. Решити диференцијалну једначину $\ddot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}\times\mathfrak{H}$, где је $\mathfrak{H} = \text{const.}$ (кретање електрона у константном магнетном пољу).

11. Показати да су при произвољној вредности u вектори $\mathfrak{x}(u)$ и $\frac{1}{x^2}\frac{d\mathfrak{x}}{du} + \frac{d}{du}\frac{\mathfrak{x}}{x^2}$ узајамно нормални.

12. Показати да ако је $|\mathfrak{x}(u)| = \text{const.}$, мора бити $\mathfrak{x}\cdot\ddot{\mathfrak{x}} = -\dot{\mathfrak{x}}^2$.

13. Нека је $\mathfrak{e}(u)$ неки променљиви орт. Доказати да је у том случају увек $[\dot{\mathfrak{e}}\,\ddot{\mathfrak{e}}\,\dddot{\mathfrak{e}}]^2 = (\dot{\mathfrak{e}}\times\ddot{\mathfrak{e}})^2 - (\dot{\;}^2)^3$.

14. Нека буде дата векторска функција $\mathfrak{x}(u)$ која је у интервалу $a \leq u \leq b$ диференцијабилна. Доказати да постоји нека вредност c у поменутом интервалу за коју је вектор $\dot{\mathfrak{x}}(c)$ компланаран са векторима $\mathfrak{x}(a)$ и $\mathfrak{x}(b)$. Објаснити геометриски смисао овог тврђења.

15. Одредити коначчу једначину кретања одређеног диференцијалном једначином $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a}\times\mathfrak{r}$, где је $\mathfrak{a} = \text{const} \cdot \neq 0$.

16. Решити диференцијалну једначину $\dot{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{b}$, где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ константни вектори, кад је почетни услов $\mathfrak{r}(0) = \mathfrak{r}_0$.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНА ТЕОРИЈЕ ВЕКТОРА У ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

43. Тангента, нормала и лучни елемент равних кривих линија

Видели смо да је ходограф векторске функције једне скаларне променљиве нека крива линија. Обрнуто, свака крива линија може се сматрати као ходограф неке такве векторске функције.

Нека буде, дакле, равна крива линија дата векторском једначином

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u), \tag{1}$$

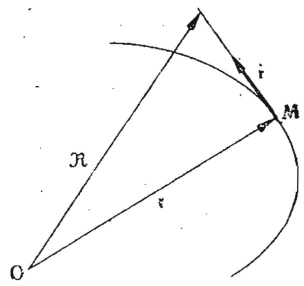
где променљиви скалар може бити и лук криве s. Овој векторској једначини одговарају две скаларне једначине облика

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \tag{2}$$

које се називају *параметарске једначине* равне криве линије.

Изводе по луку као променљивој обележаваћемо цртом ($'$), а по осталим скаларима као променљивима тачком ($\dot{}$).

Тада, према т. 33, вектор $\dot{\mathfrak{r}}$ одређује правац тангенте, па тиме наравно, и правац нормале на криву линију у посматраној тачки. Стога, ако се са $\mathfrak{R}$ обележи вектор положаја ма које тачке на тангенти криве линије у некој тачки те криве, која је одређена вектором $\mathfrak{r}$ (сл. 133), једначина



Сл. 133

тангенте равне криве у векторском облику очигледно се може овако написати

(3) $$\mathfrak{R}-\mathfrak{r}=\lambda\,\dot{\mathfrak{r}}$$

где је λ произвољни параметар, или, што је исто,

(4) $$\mathfrak{R}-\mathfrak{r}=\mu\, d\mathfrak{r},$$

пошто су $\dot{\mathfrak{r}}$ и $d\mathfrak{r}$ увек колинеарни и где је μ такође неки произвољни параметар.

Уколико посматрамо криве и у Декартовим координатама, сматраћемо да се вектори положаја рачунају у односу на координатни почетак. У том случају, ако су дате координате вектора, на пр. $\mathfrak{R}=\{X, Y\}$, $\mathfrak{r}=\{x, y\}$, $\dot{\mathfrak{r}}=\{\dot{x}, \dot{y}\}$ и $d\mathfrak{r}=\{dx, dy\}$ у односу на Декартов триједар, једначина тангенте може се написати и у скаларном облику

(5) $$\frac{X-x}{\dot{x}}=\frac{Y-y}{\dot{y}},$$

одн.

(6) $$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}.$$

Једначина нормале равне криве линије биће са истим ознакама, само ако сад $\mathfrak{R}$ означује вектор положаја ма које тачке на нормали криве (сл. 134), дата векторском једначином

(7) $(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot\dot{\mathfrak{r}}=0$, одн. $(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot d\mathfrak{r}=0$,

или, у Декартовим координатама,

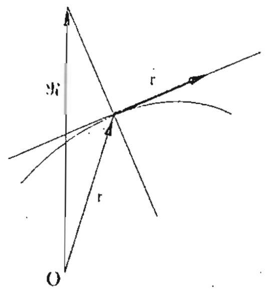
(8) $$(X-x)\,\dot{x}+(Y-y)\,\dot{y}=0,$$

одн.

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0.$$

Како је у равни

(9) $$\mathfrak{r}=\mathfrak{i}x+\mathfrak{j}y,$$



Сл. 134

имамо

(10) $$d\mathfrak{r}=\mathfrak{i}\,dx+\mathfrak{j}\,dy.$$

Одавде се, с обзиром на једн. (6) из т. 33, добија за квадрат лучног елемента равне криве линије израз

(11) $$d\mathfrak{r}^2=ds^2=dx^2+dy^2.$$

С друге стране, ако се крива посматра у функцији лука као параметра имаћемо (т. 33) да је $\mathfrak{r}'$ *орт тангенте* $\mathfrak{t}$ криве са смером у коме лук криве расте, тј.

(12) $$\mathfrak{r}'=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}=\mathfrak{t}.$$

Према томе је, с обзиром на једначину (9),

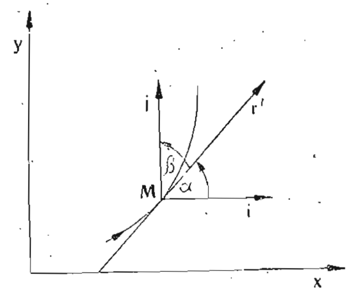
(13) $$\mathfrak{t}=\mathfrak{i}\frac{dx}{ds}+\mathfrak{j}\frac{dy}{ds}.$$

Из ове једначине се лако одређују косинуси углова које тангента чини са осама x и y (сл. 135). Наиме, множењем једначине (13) скаларно ортовима Декартових оса $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ добија се

$$\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{i}=\cos\alpha=\frac{dx}{ds},$$

(14)

$$\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{j}=\cos\beta=\sin\alpha=\frac{dy}{ds};$$

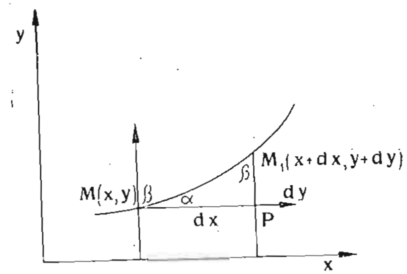


Сл. 135

ако се са α и β обележе углови тангенте са осама, а пошто скаларни производ два орта даје косинус захваћеног угла. Из једначина (14) деобом добија се познати израз за коефицијент правца тангенте равне криве, тј.

(15) $$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Метричка форма лучног елемента криве (11) и косинуси углова тангенте са осама x и y могу се врло лако одредити и са слике 136. Ако се ΔMPM_1 сматра као елементарни троугао и лук $MM_1=ds$ као део праве – дуж, са слике се одмах добијају тражени односи.



Сл. 136

У случају да је једначина равне криве дата у поларним координатама (сл. 137), тј.

(16) $$\rho=f(\varphi),$$

као једначина те криве у векторском облику може се сматрати једначина

(17) $$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(\varphi),$$

где је $|\mathrm{r}|=\rho$, $\mathrm{r}=\rho\,\mathrm{r}_0$, а r_0 орт вектора положаја. Тада је

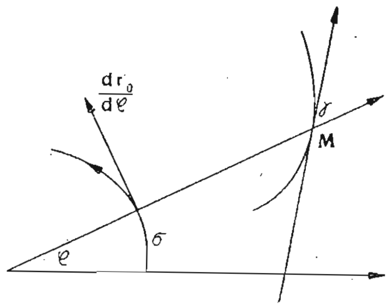
$$d\mathrm{r}=\mathrm{r}_0\,d\rho+\rho\frac{d\mathrm{r}_0}{d\varphi}d\varphi, \tag{18}$$

$$\mathrm{r}'=\mathrm{t}=\mathrm{r}_0\frac{d\rho}{ds}+\rho\frac{d\mathrm{r}_0}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{19}$$

Према томе из (18) се добија квадрат лучног елемента у поларним координатама у облику

$$d\mathrm{r}^2=ds^2=d\rho^2+\rho^2\,d\varphi^2, \tag{20}$$

јер је $\frac{d\mathrm{r}_0}{d\varphi}\perp\mathrm{r}_0$ као извод орта и $\left|\frac{d\mathrm{r}_0}{d\varphi}\right|=1$, пошто је $1.\varphi=\sigma$ лук ходографа орта r_0 те је стога његов извод по луку ходографа опет орт.



Сл. 137

Ако се једначина (19) помножи скаларно ортом r_0 добија се

$$\mathrm{t}\cdot\mathrm{r}_0=\cos\gamma=\frac{d\rho}{ds}, \tag{21}$$

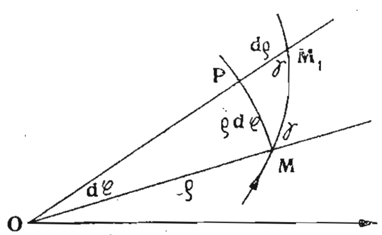
јер је $\frac{d\mathrm{r}_0}{d\varphi}\cdot\mathrm{r}_0=0$, а γ угао који тангента криве чини са потегом у посматраној тачки. Како је угао γ важан за проучавање равних кривих линија у поларним координатама, то, да би се избегло израчунавање лучног елемента ds при његову одређивању, може се овако поступити: одредити

$$\sin\gamma=\pm\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds^2}}=\pm\sqrt{\frac{\rho^2\,d\varphi^2}{ds^2}}=\pm\rho\frac{d\varphi}{ds},$$

па најзад деобом

$$\operatorname{tg}\gamma=\pm\rho\frac{d\varphi}{d\rho}, \tag{22}$$

где знак зависи од тога да ли потег ρ расте кад и поларни угао φ, или опада.



Сл. 138

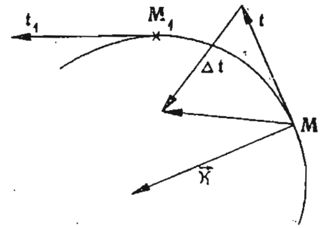
И ови се односи могу одредити на сличан начин, као и у Декартову систему, помоћу елементарног троугла PMM_1 (сл. 138), који је правоугли, ако се елементарни лукови PM и MM_1 сматрају као дужи. Код P је прав угао јер је $\rho\,d\varphi$ лук круга.

43.1 Кривина равних кривих линија. Полупречник кривине. Еволута. Еволвента

Посматрајмо криву линију L у равни (сл. 139). Нека ортови тангенте те криве у тачкама M и M_1 буду t и $\mathrm{t}_1=\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}$ и лук $MM_1=\Delta s$. Тада је, очигледно, количник

$$\left|\frac{\Delta\mathrm{t}}{\Delta s}\right|$$

мера за скретање правца тангенте — *средња кривина* криве између тачака M и M_1. Вектор



Сл. 139

$$\vec{\kappa}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathrm{t}}{\Delta s}=\frac{d\mathrm{t}}{ds}=\mathrm{t}'=\mathrm{r}'' \tag{1}$$

зове се *вектор кривине* посматране криве у тачки M.

Интензитет вектора кривине

$$\kappa=|\mathrm{r}''|=\sqrt{\mathrm{r}''^2}=\sqrt{x''^2+y''^2} \tag{2}$$

зове се *кривина* криве L у тачки M. Што се тиче правца вектора кривине мора бити $\vec{\kappa}\perp\mathrm{t}$, јер је $\frac{d\mathrm{t}}{ds}\perp\mathrm{t}$ као извод орта. Најзад, очигледно је да је смер вектора кривине увек ка конкавној страни криве линије, јер је увек ка тој страни оријентисан прираштај $\Delta\mathrm{t}$ орта тангенте криве.

Пошто је вектор кривине колинеаран са нормалом криве у посматраној тачки, за *орт нормале* n равне криве линије узећемо орт вектора кривине, тј,

$$\vec{\kappa}=\mathrm{t}'=\kappa\mathrm{n}=\mathrm{r}'', \tag{3}$$

одн.

$$\mathrm{n}=\frac{1}{\kappa}\mathrm{r}''. \tag{4}$$

Скаларним множењем ове једначине ортовима i и j добиће се за косинусе правца нормале криве линије изрази

$$\mathrm{n}\cdot\mathrm{i}=\cos(\mathrm{n}\,\mathrm{i})=\frac{1}{\kappa}x'',\qquad \mathrm{n}\cdot\mathrm{j}=\cos(\mathrm{n}\,\mathrm{j})=\frac{1}{\kappa}y''. \tag{5}$$

Ради даљих проучавања израчунаћемо и извод орта нормале $\mathfrak{n}$ по луку, тј. $\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = \mathfrak{n}'$. Наиме, из једначине $\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{n} = 0$, после диференцирања, следује

$$\mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{n}}{ds} + \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{n} = 0, \tag{6}$$

одакле, с обзиром на једначину (3), следује

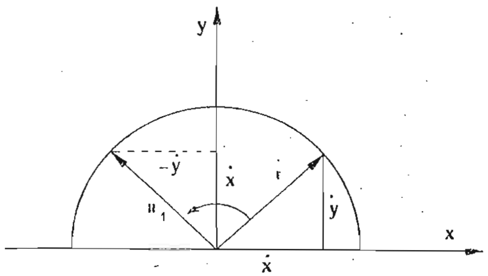
$$\mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{n}}{ds} + \kappa = 0 \quad \text{одн.} \quad \mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -\kappa. \tag{7}$$

Како је, међутим, поред $\mathfrak{t} \perp \mathfrak{n}$ и $\frac{d\mathfrak{n}}{ds} \perp \mathfrak{n}$ као извод орта, то су вектори $\mathfrak{t}$ и $\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$ колинеарни, јер осим тога леже у истој равни. Дакле,

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -\kappa \mathfrak{t}. \tag{8}$$

То значи да вектор $\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$ има интензитет једнак кривини криве а смер супротан смеру орта тангенте.

Кривина равне криве одређује се по обрасцу (2) само у случају, кад је једначина криве дата у зависности од лука s. Да бисмо извели образац за израчунавање кривине у случају ма којег другог скалара као промењиве, поћи ћемо од једначина



Сл. 140

$$\mathfrak{r}' = \dot{\mathfrak{r}} \frac{du}{ds}, \tag{9}$$

и

$$\mathfrak{r}'' = \ddot{\mathfrak{r}} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \dot{\mathfrak{r}} \frac{d^2u}{ds^2}, \tag{10}$$

где је према једначини (3) $\mathfrak{r}'' = \kappa \mathfrak{n}$.

Узмимо још да је $\frac{du}{ds} > 0$, тј. да скалар u расте кад и лук s, да не бисмо компликовали извођење проучавањем знака. Осим тога вектор $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}\dot{x} + \mathfrak{j}\dot{y}$ помножен алгебарски (т. 16)

ортом $\mathfrak{j}$ обрће се за $\frac{\pi}{2}$ у директном смеру и прелази у вектор $\mathfrak{n}_1$ (сл. 140), тј.

$$\mathfrak{n}_1 = \dot{\mathfrak{r}} \wedge \mathfrak{j} = -\dot{y}\mathfrak{i} + \dot{x}\mathfrak{j} = |\dot{\mathfrak{r}}|\, \mathfrak{n}. \tag{11}$$

Помножимо ли сад обе стране једначине (10) скаларно вектором $\mathfrak{n}_1$, добићемо

$$\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{r}'' = (\mathfrak{n}_1 \cdot \ddot{\mathfrak{r}}) \left(\frac{du}{ds} \right)^2, \tag{12}$$

пошто је $\mathfrak{n}_1 \perp \dot{\mathfrak{r}}$. Како је даље

$$\mathfrak{r}'^2 = \left(\frac{d\mathfrak{r}}{du} \right)^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1, \quad \text{одн.} \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}}, \tag{13}$$

то се из (12) добија

$$(|\dot{\mathfrak{r}}|\, \mathfrak{n}) \cdot \kappa \mathfrak{n} = \kappa |\dot{\mathfrak{r}}| (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}) = \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \ddot{\mathfrak{r}}}{\left(\sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}\right)^2}$$

и најзад

$$\kappa = \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \ddot{\mathfrak{r}}}{(\dot{\mathfrak{r}}^2)^{3/2}}. \tag{14}$$

Одавде се за произвољни параметар у скаларном облику за кривину добија

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \tag{15}$$

или, кад се све изрази у диференцијалима, што је врло згодно за прелаз ма на који параметар,

$$\kappa = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

У специјалном случају, кад је $u = x$, тј. кад је једначина равне криве дата у експлицитном облику $y = f(x)$ за кривину се добија из (15) познати израз

$$\kappa = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \tag{17}$$

Овај израз може бити и позитиван и негативан, што зависи само од положаја криве према координатном систему, а ни од какве природне њене особине.

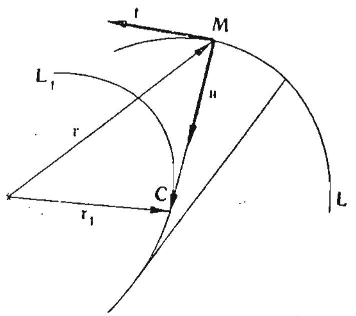
Реципрочна вредност кривине, тј.

(18) $$\rho = \frac{1}{\kappa},$$

зове се *полупречник кривине* наше криве линије.

Ако се од тачке M на кривој пренесе, у правцу нормале на конкавну страну криве линије, $MC = \rho$ добија се тачка C која се зове *центар кривине* дате криве за тачку M. Круг са центром у C и полупречником ρ зове се *круг кривине* наше криве у тачки M. Он пролази кроз тачку M криве, има са њом у тој тачки заједничку тангенту и апроксимира на свој начин криву линију у околини тачке M.

Ако се тачка M креће по кривој L и тачка C мења положај и описује неку криву линију L_1 која се зове *еволута* дате криве L (сл. 141). Дакле, еволута равне криве линије је геометриско место њених центара кривине.



Сл. 141

Нека $\mathfrak{r}$ и s буду вектор положаја неке тачке и лук криве L, а $\mathfrak{r}_1$ и s_1 то исто за криву L_1. Тада је

(19) $$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + \rho\mathfrak{n}.$$

Диференцирањем по s добија се

$$\frac{d\mathfrak{r}_1}{ds} = \mathfrak{t} + \frac{d\rho}{ds}\mathfrak{n} + \rho\frac{d\mathfrak{n}}{ds},$$

одакле, с обзиром на једначину (8) и (18), добијамо

(20) $$\frac{d\mathfrak{r}_1}{ds} = \mathfrak{t} + \frac{d\rho}{ds}\mathfrak{n} - \mathfrak{t} = \frac{d\rho}{ds}\mathfrak{n}.$$

Према томе, како је на десној страни вектор са правцем нормале криве L, а на левој вектор са правцем тангенте еволуте L_1 и оба пролазе кроз исту тачку C, они се поклапају. Другим речима, нормала криве L у тачки M додирује еволуту L_1 у тачки C.

Из једначине (20) може се одмах написати

(21) $$d\mathfrak{r}_1^2 = ds_1^2 = d\rho^2,$$

одакле је

(22) $$|ds_1| = |d\rho|$$

и у интервалу где величине ρ и s_1 расту биће

(23) $$ds_1 = d\rho.$$

То значи да је у интервалу монотоне измене полупречника кривине његов прираштај једнак прираштају лука еволуте између односних тачака.

Сама крива L у односу на своју еволуту L_1 зове се *еволвента* криве.

Најзад ћемо изразити кривину криве линије још на један начин, који обично служи као полазна дефиниција кривине у обичној анализи.

Наиме, на основу једначина (13) и (14) претходног параграфа може се написати

(24) $$\mathfrak{t} = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\sin\alpha.$$

Одатле диференцирањем по s следује

(25) $$\vec{\kappa} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} = -\mathfrak{i}\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \mathfrak{j}\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}.$$

Према томе

(26) $$\kappa^2 = \left(-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 \quad \text{одн.} \quad \kappa = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Угао $d\alpha$ који чине тангенте наше криве у две бесконачно блиске тачке зове се *угао контингенције*.

44. Тангента, нормална раван и лучни елемент кривих линија у простору

Векторска једначина криве линије у простору истог је облика као и у равни, тј.

(1) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$$

или, у скаларном облику, три *параметарске једначине*

(2) $$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u).$$

Пошто вектор $\dot{\mathfrak{r}}$ одређује правац тангенте, мора једначина *тангенте* бити, као и у равни

(3) $$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda\dot{\mathfrak{r}} \quad \text{одн.} \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \mu\, d\mathfrak{r},$$

где је $\mathfrak{R} = \{X, Y, Z\}$ вектор положаја ма које тачке на тангенти у тачки криве одређеној вектором положаја $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$ и где је λ, одн. μ произвољни параметар.

Из једначине (3) може се лако написати скаларна једначина тангенте криве линије у простору у облику

(4) $$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}};$$

одн.

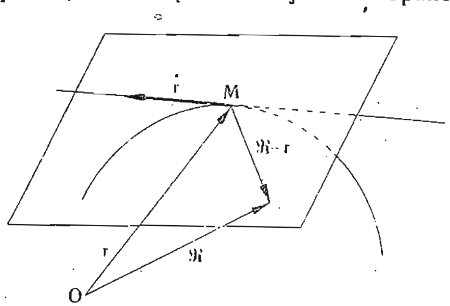
(5) $$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}.$$

Раван, нормална на тангенти у додирној тачки, зове се ***нормална раван*** криве линије у простору у датој тачки.

На основу дефиниције, једначина нормалне равни у векторском облику гласи

(6) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot\dot{\mathfrak{r}}=0 \quad \text{одн.} \quad (\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot d\mathfrak{r}=0,$$

где је сад $\mathfrak{R}$ вектор положаја ма које тачке у нормалној равни, $\mathfrak{r}$ вектор положаја посматране тачке на кривој линији (додирне тачке тангенте) и $\dot{\mathfrak{r}}$, одн. $d\mathfrak{r}$ вектор тангенте (сл. 142). Та једначина изражава услов да је свака дуж која лежи у нормалној равни и пролази кроз додирну тачку тангенте нормална на тангенти.



Сл. 142

У скаларном облику једначина нормалне равни гласи

(7) $$(X-x)\,\dot{x}+(Y-y)\,\dot{y}+(Z-z)\,\dot{z}=0,$$

одн.

(8) $$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0.$$

Како је у простору

(9) $$\mathfrak{r}=\mathfrak{i}x+\mathfrak{j}y+\mathfrak{k}z,$$

то је увек

(10) $$d\mathfrak{r}=\mathfrak{i}\,dx+\mathfrak{j}\,dy+\mathfrak{k}\,dz$$

и

(11) $$\mathfrak{t}=\mathfrak{r}'=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}=\mathfrak{i}\frac{dx}{ds}+\mathfrak{j}\frac{dy}{ds}+\mathfrak{k}\frac{dz}{ds}.$$

Из једначине (10) добија се одмах за квадрат лучног елемента криве линије у простору

(12) $$d\mathfrak{r}^2 = ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2,$$

а из једначине (11) скаларним множењем ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ добијају се косинуси углова које тангента гради са осама Декартова триједра, тј.

(13) $$\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{i}=\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \mathfrak{t}\cdot\mathfrak{j}=\cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \mathfrak{t}\cdot\mathfrak{k}=\cos\gamma=\frac{dz}{ds},$$

где су α, β и γ углови које тангента криве у простору чини са осама Декартова триједра.

44.1 Кривина кривих у простору. Главна нормала. Бинормала

Посматрајмо неку криву линију у простору и тангенте те криве у двема бесконачно блиским тачкама одређеним ортовима $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}+d\mathfrak{t}$. Тада се вектор

(1) $$\vec{\kappa}=\frac{d\mathfrak{t}}{ds}=\mathfrak{t}'=\mathfrak{r}''$$

зове као и у равни, *вектор кривине* криве линије у уоченој тачки, а

(2) $$\kappa=\left|\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\right|=|\mathfrak{r}''|=\sqrt{\mathfrak{r}''^2}$$

кривина или *флексија* криве у простору.

У скаларном облику се за кривину криве линије у простору, кад је лук s променљива, може из претходне једначине написати

(3) $$\kappa=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}.$$

Полупречник кривине ρ криве у простору дефинише се на исти начин као и за криве у равни, тј.

(4) $$\rho=\frac{1}{\kappa}.$$

Пошто је и сад и из истих разлога $\vec{\kappa}\perp\mathfrak{t}$, вектор кривине одређује у свакој тачки криве у простору једну од нормала криве у тој тачки. Обележимо ли опет са $\mathfrak{n}$ орт вектора кривине, тј.

$$\vec{\kappa} = \kappa\mathfrak{n}, \tag{5}$$

нормала криве одређена ортом $\mathfrak{n}$ зове се *главна нормала* криве. Она је увек оријентисана као $d\mathfrak{t}$, тј. на конкавну страну криве линије.

Из (5) и (1) се за орт главне нормале $\mathfrak{n}$ може одмах написати

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{\kappa}\mathfrak{r}'' = \rho\mathfrak{r}''. \tag{6}$$

Скаларним множењем ове једначине ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ Декартова правоуглог триједра добиће се косинуси углова које главна нормала криве у простору гради са осама тог триједра, тј.

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i} &= \cos\alpha_1 = \rho x'', \\ \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j} &= \cos\beta_1 = \rho y'', \\ \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k} &= \cos\gamma_1 = \rho z'', \end{aligned} \tag{7}$$

где смо са α_1, β_1 и γ_1 обележили углове које главна нормала гради са осама Декартова триједра.

Ако са $\mathfrak{R}$ обележимо вектор положаја ма које тачке на главној нормали криве, а са $\mathfrak{r}$ вектор положаја посматране тачке на кривој за једначину главне нормале, кад је лук криве s параметар, имамо очигледно

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r}'', \tag{8}$$

где је λ произвољни параметар, или у скаларном облику

$$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}. \tag{9}$$

Поред главне нормале издваја се и посматра нарочито и она нормала криве линије у простору која стоји нормално на главној нормали. Та нормала се зове *бинормала*. Она се увек оријентише тако да са тангентом ($\mathfrak{t}$) и главном нормалом ($\mathfrak{n}$) образује десни триједар, тј. да увек буде, ако је $\mathfrak{b}$ орт бинормале,

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\times\mathfrak{n}. \tag{10}$$

Према томе, с обзиром на једначину (11) претходног параграфа и једначину (6), може се за орт бинормале написати најзад

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{\kappa}(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'') = \rho(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''). \tag{11}$$

$\mathfrak{b} \parallel (\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'') \parallel (\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})$

Одавде се види да бинормала мења смер кад лук s промени знак, јер се тада мења знак само од $\mathfrak{r}'$, а не и од $\mathfrak{r}''$.

Скаларним множењем ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ Декартова правоуглог триједра добијају се и овде косинуси углова бинормале са осама тога триједра, тј.

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{i} &= \cos\alpha_2 = y'z'' - z'y'', \\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{j} &= \cos\beta_2 = z'x'' - x'z'', \\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{k} &= \cos\gamma_2 = x'y'' - y'x'', \end{aligned} \tag{12}$$

где смо са α_2, β_2, γ_2 обележили углове бинормале са осама датог триједра.

За једначину бинормале у некој тачки криве одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$ може се, с обзиром на (11), кад је лук s параметар, написати у векторском облику

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''), \tag{13}$$

где $\mathfrak{R}$ обележава вектор положаја ма које тачке на бинормали а λ, као и увек, произвољни параметар.

У скаларном облику ова једначина изгледа

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''} = \frac{Y-y}{z'x''-x'z''} = \frac{Z-z}{x'y''-y'x''}. \tag{14}$$

Ако једначина криве није одређена у зависности од лука s него ма од ког другог параметра u, изрази (2) и (3) за кривину и једначине главне нормале (8) и (9) и бинормале (13) и (14) добијају други изглед. Наиме, у случају произвољног скалара u као параметра имамо

$$\mathfrak{r}' = \dot{\mathfrak{r}}\frac{du}{ds} \quad \text{и} \quad \mathfrak{r}'' = \ddot{\mathfrak{r}}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \dot{\mathfrak{r}}\frac{d^2u}{ds^2}, \tag{15}$$

одакле је

$$\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'' = (\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})\left(\frac{du}{ds}\right)^3. \tag{16}$$

Међутим из једначине (11) имамо

$$\mathfrak{b}\kappa = \mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'',$$

тј. према (16),

$$\kappa = |\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''| = |\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|\left|\frac{du}{ds}\right|^3.$$

Како је, поред тога,

$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{одн.} \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}}, \tag{17}$$

може се за кривину криве у простору у векторском облику у случају ма којег параметра написати

(18) $$\kappa = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|}{|\dot{\mathfrak{r}}|^3} = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|}{(\dot{\mathfrak{r}}^2)^{3/2}}.$$

У скаларном облику је

(19) $$\kappa = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}},$$

где је

(20) $$A = \dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}, \quad B = \dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}, \quad C = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}.$$

Најзад, изражена у диференцијалима кривина криве у простору износи

(21) $$\kappa = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{ds^3},$$

где је сад

(22) $$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \quad C = dx\,d^2y - dy\,d^2x.$$

Преткорени знак се узима тако да с обзиром на знак ds даје позитивну вредност за кривину.

Пошто су, с обзиром на једначину (16), вектори $\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''$ и $\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}$ колинеарни може се за једначину бинормале у случају ма ког промењивог параметра написати

(23) $$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda_1(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}) \quad \text{одн.} \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \mu_1(d\mathfrak{r}\times d^2\mathfrak{r}),$$

где су λ_1 и μ_1 неки други произвољни параметри. У скаларном облику једначина бинормале изгледаће тада

(24) $$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C},$$

где A, B и C имају вредности одређене једначинама (20), одн. (22).

Једначина главне нормале може се одредити из услова, да је нормална на $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{t}$ и да са њима образује десни триједар, тј. да је

(25) $$\mathfrak{n} = \mathfrak{b}\times\mathfrak{t}.$$

Дакле, пошто је $\mathfrak{t}$ колинеаран са $\dot{\mathfrak{r}}$, а $\mathfrak{b}$ са $\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}$ мора главна нормала бити колинеарна са вектором $(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})\times\dot{\mathfrak{r}}$ и стога је њена једначина у векторском облику

(26) $$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda_1(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})\times\dot{\mathfrak{r}} \quad \text{одн.} \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \mu_1(d\mathfrak{r}\times d^2\mathfrak{r})\times d\mathfrak{r}.$$

Ако се стави, као и малочас, $\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}} = \{A, B, C\}$, једначина главне нормале у случају ма ког параметра као промењиве може се у скаларном облику овако написати

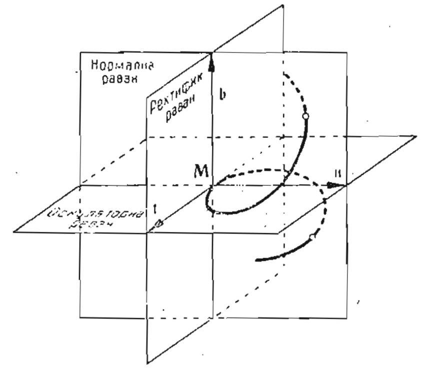
(27) $$\frac{X-x}{B\dot{z}-C\dot{y}} = \frac{Y-y}{C\dot{x}-A\dot{z}} = \frac{Z-z}{A\dot{y}-B\dot{x}},$$

или у диференцијалима

(28) $$\frac{X-x}{Bdz-Cdy} = \frac{Y-y}{Cdx-Adz} = \frac{Z-z}{Ady-Bdx}.$$

44. 2 Природни триједар. Оскулаторна и ректификациона раван

Триједар оса одређен ортовима $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$ зове се *основни* или *природни триједар* криве у простору. По две од тих оса одређују равни, и то: $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{n}$ *оскулаторну*, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$ *нормалну*, о којој је већ било речи, и најзад, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{t}$ *ректификациону* (сл. 143).



Сл. 143

Природни триједар оса има у општем случају различит положај за сваку тачку криве, тј. он, померањем тачке M (координатног почетка) дуж криве, поред транслације завија било у позитивном било у негативном смеру. Као позитиван смер завијања утврдићемо смер од главне нормале ка бинормали, кад се гледа из позитивног смера тангенте.

Ако са $\mathfrak{R}$ означимо вектор положаја ма које тачке у оскулаторној равни у тачки криве одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, може се из услова да је оскулаторна раван нормална на бинормали написати њена једначина у векторском облику

(1) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{b} = 0,$$

или, с обзиром на једначину (10) претходног параграфа,

(2) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot(\mathfrak{t}\times\mathfrak{n}) = 0.$$

Одавде се може одмах, на основу претходног параграфа, у случају лука s као параметра написати

(3) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')=0,$$

или у скаларном облику

(4) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0.$$

У случају произвољног параметра u из (2) се за једначину оскулаторне равни у векторском облику може одмах написати

(5) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})=0,$$

одн. у диференцијалима

(6) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r}\cdot(d\mathfrak{r}\times d^2\mathfrak{r})=0.$$

У вези са тиме имамо скаларне једначине

(7) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}=0,$$

одн.

(8) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

Ако је променљиви скалар време t, као што знамо, $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t)$ претставља једначину криве линије трајекторије покретне тачке у векторском облику. Вектори $\dot{\mathfrak{r}}$ и $\ddot{\mathfrak{r}}$ претстављају тада вектор брзине и убрзања. Како на основу претходних једначина ти вектори, без обзира на значење променљивог скалара, леже у оскулаторној равни може се тврдити да:

Вектор брзине и убрзања покретне тачке увек леже у оскулаторној равни криве линије трајекторије.

При томе је вектор брзине $\mathfrak{v}$ увек колинеаран са ортом тангенте, тј.

(9) $$\dot{\mathfrak{r}}=\mathfrak{v}=v\mathfrak{t},$$

где је v алгебарска вредност брзине, од чијег знака зависи хоће ли брзина имати смер исти као орт $\mathfrak{t}$ или супротан.

За убрзање се одмах налази

$$\ddot{\mathfrak{r}}=\dot{\mathfrak{v}}=\mathfrak{w}=\frac{dv}{dt}\mathfrak{t}+v\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

одакле, с обзиром на једначине (4) и (5) у т. 44.1, следује

(10) $$\mathfrak{w}=\frac{dv}{dt}\mathfrak{t}+\frac{v^2}{\rho}\mathfrak{n},$$

где је вектор убрзања разложен у тангентну и нормалну компоненту.

Оскулаторна раван се у посматраној тачки криве највише приљубљује уз криву од свих осталих равни које су положене кроз тангенту криве у тој тачки.

За равне криве линије оскулаторна раван је сама она раван у којој крива лежи. Орт бинормале је за равне криве линије константан. За праву линију оскулаторна раван је неодређена (управо свака раван која пролази кроз праву линију). У том случају је $\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}$ идентички једнако нули, пошто су вектори $\dot{\mathfrak{r}}$ и $\ddot{\mathfrak{r}}$ за све тачке колинеарни.

Једначина ректификационе равни може се у векторском облику написати овако

(11) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{t})=0,$$

где је $\mathfrak{R}$ вектор положаја ма које тачке у ректификационој равни и што изражава услов за компланарност вектора $\mathfrak{R}-\mathfrak{r}$, вектора бинормале $\mathfrak{b}$ и вектора тангенте $\mathfrak{t}$. Ако се вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{t}$ замене колинеарним векторима $\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''$ и $\mathfrak{r}'$, тада се, у случају да је лук s променљиви параметар, за једначину ректификационе равни у векторском облику добија

(12) $$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot[(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\times\mathfrak{r}']=0,$$

или у скаларном облику

(13) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ y'z''-z'y'' & z'x''-x'z'' & x'y''-y'x'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=0.$$

У случају произвољног параметра u из векторског облика

(14) $(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot[(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})\times\dot{\mathfrak{r}}]=0$, одн. $(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot[(d\mathfrak{r}\times d^2\mathfrak{r})\times d\mathfrak{r}]=0$

једначине ректификационе равни следују скаларне једначине

(15) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ A & B & C \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}=0,$$

одн. у диференцијалима

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ A & B & C \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

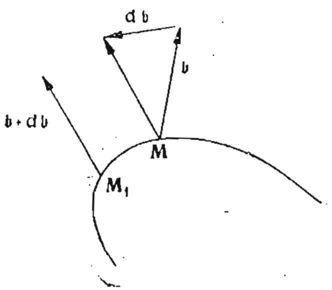
где A, B и C имају раније наведена значења.

44.3 Торзија кривих линија у простору

Нека су у две бесконачно блиске тачке M и M_1 неке криве у простору (сл. 144) ортови бинормале $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}+d\mathfrak{b}$; тада се вектор

$$(1)\qquad \vec{\tau} = \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \mathfrak{b}',$$

зове *вектор торзије* посматране криве линије. Тај вектор одређује отступање криве од равног облика.



Сл. 144

Из једначине (10) т. 44.1 следује после диференцирања

$$\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\times\mathfrak{n} + \mathfrak{t}\times\frac{d\mathfrak{n}}{ds},$$

а одатле

$$(2)\qquad \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \mathfrak{t}\times\frac{d\mathfrak{n}}{ds},$$

јер су вектори $\frac{d\mathfrak{t}}{ds}$ и $\mathfrak{n}$ колинеарни. Из ове једначине, међутим, следује да је $\frac{d\mathfrak{b}}{ds}\perp\mathfrak{t}$, а како је услед $|\mathfrak{b}|=1$ и $\frac{d\mathfrak{b}}{ds}\perp\mathfrak{b}$, то је $\frac{d\mathfrak{b}}{ds}$ колинеарно са $\mathfrak{n}$ те се може написати

$$(3)\qquad \mathfrak{b}' = \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\tau\mathfrak{n}.$$

Алгебарска вредност τ вектора торзије зове се *торзија* криве, а њена реципрочна вредност, тј.

$$(4)\qquad T = \frac{1}{\tau}.$$

зове се *полупречник торзије* и сматра се као релативна величина. Торзија τ може, дакле, насупрот кривини криве у простору бити и позитивна и негативна. То зависи од тога јесу ли вектори $d\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ за $ds>0$ супротног или истог смера (сл. 145). Сматраћемо по договору да је торзија позитивна ако су (сл. 145a) $d\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ супротног смера, другим речима да се, гледано од $\mathfrak{t}$, завијање природног триједра врши у директном смеру кад лук s расте, тј., кад је $ds>0$. Торзија се сматра као негативна ако су $d\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ (сл. 145 b) истог смера, тј. ако је завијање природног триједра у негативном смеру кад лук расте.

Да бисмо израчунали торзију поћи ћемо од једначине $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{b}=0$, одакле је, после диференцирања по луку,

$$\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{b} + \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{b}' = 0$$

и најзад с обзиром на једначину (3)

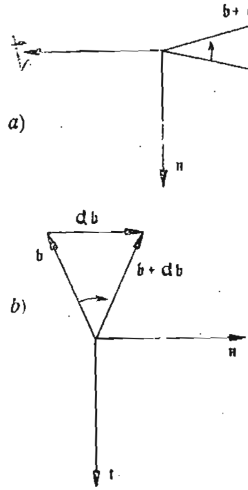
$$(5)\qquad \mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{b} = -\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{b}' = \tau.$$

После тога се на основу једначина (6) и (11) т. 44.1, кад је лук sпромењљива, за торзију добија

$$(6)\qquad \tau = \left[\frac{\mathfrak{r}'''}{|\mathfrak{r}''|} + \mathfrak{r}''\left(\frac{1}{|\mathfrak{r}''|}\right)'\right]\cdot\frac{\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''}{|\mathfrak{r}''|},$$

одакле је дефинитивно

$$(7)\qquad \tau = \frac{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot\mathfrak{r}'''}{|\mathfrak{r}''|^2} = \frac{\mathfrak{r}'\cdot(\mathfrak{r}''\times\mathfrak{r}''')}{|\mathfrak{r}''|^2}.$$



Сл. 145

Из овог резултата се види да је при овој конвенцији торзија позитивна, ако вектори $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ и $\mathfrak{r}'''$ образују десни триједар, а иначе негативна.

У скаларном облику биће

$$(8)\qquad \tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Ако није лук s променљива, него неки други скалар u, из једначине (7) може се лако доћи до једначине за торзију, кад је u променљива. Наиме, треба само $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ и $\mathfrak{r}''$ изразити изводима по новој променљивој. Тако је

$$\mathfrak{r}' = \dot{\mathfrak{r}}\frac{du}{ds}, \quad \mathfrak{r}'' = \ddot{\mathfrak{r}}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \dot{\mathfrak{r}}\frac{d^2u}{ds^2},$$

$$\mathfrak{r}''' = \dddot{\mathfrak{r}}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + 2\ddot{\mathfrak{r}}\frac{du}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} + \ddot{\mathfrak{r}}\frac{d^2u}{ds^2} + \dot{\mathfrak{r}}\frac{d^3u}{ds^3},$$

одакле је

$$(9)\quad \mathfrak{r}'\cdot(\mathfrak{r}''\times\mathfrak{r}''') = (\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot\mathfrak{r}''' = [(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})\cdot\dddot{\mathfrak{r}}]\left(\frac{du}{ds}\right)^6 = [\dot{\mathfrak{r}}\cdot(\ddot{\mathfrak{r}}\times\dddot{\mathfrak{r}})]\left(\frac{du}{ds}\right)^6.$$

Како је, даље, из једначине (18) у вези са једначином (17) у т. 44. 1

$$\varkappa^2 = \frac{(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})^2}{|\dot{\mathfrak{r}}|^6} = \frac{(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})^2}{\left(\dfrac{ds}{du}\right)^6},$$

може се за торзију у случају ма које променљиве u написати у векторском облику

$$(10)\qquad \tau = \frac{\dot{\mathfrak{r}}\cdot(\ddot{\mathfrak{r}}\times\dddot{\mathfrak{r}})}{(\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}})^2}.$$

У скаларном облику је торзија сад изражена обрасцем

$$(11)\qquad \tau = \frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2},$$

где A, B и C имају ранија значења, а Δ претставља детерминанту

$$(12)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}.$$

Торзија се може изразити и помоћу диференцијала, при чему остаје исти образац (11) у важности, само се A, B и C изражавају помоћу диференцијала, као и раније, а детерминанта Δ има вредност

$$(13)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

Напомињемо, да оријентација триједра $\dot{\mathfrak{r}}$, $\ddot{\mathfrak{r}}$, $\dddot{\mathfrak{r}}$ који одређује знак торзије не зависи од избора скалара као параметра, јер се при прелазу од променљиве s на други скалар u множи са $\left(\frac{du}{ds}\right)^6$ према једначини (9), што не мења оријентацију. Осим тога детерминанта Δ (једн. 12) очигледно геометриски претставља запремину паралелепипеда конструисана на векторима $\dot{\mathfrak{r}}$, $\ddot{\mathfrak{r}}$ и $\dddot{\mathfrak{r}}$ као ивицама.

Торзија равних кривих линија је нула, јер, због сталности оскулаторне равни, бинормала има константан правац.

Понекад се кривина зове „прва кривина“, а торзија „друга кривина“ криве линије у простору, те стога, нарочито у старијим књигама, постоји за просторне криве и назив „криве линије са двоструком кривином“.

44.4 Френеови обрасци. Тотална кривина

У теорији кривих у простору играју важну, управо основну улогу изводи ортова $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$ по луку. Ови се изводи изражавају разложени у компоненте дуж оса природног триједра. У т. 44.1 већ смо нашли $\mathfrak{t}' = \varkappa\mathfrak{n}$ (једн. 5) и у т. 44.3 $\mathfrak{b}' = -\tau\mathfrak{n}$ (једн. 3). Остаје, дакле, да се још одреди $\mathfrak{n}'$ разложен у компоненте дуж оса природног триједра. Како је

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{b}\times\mathfrak{t},$$

одатле следује после диференцирања по луку,

$$\mathfrak{n}' = \mathfrak{b}'\times\mathfrak{t} + \mathfrak{b}\times\mathfrak{t}'$$

и, с обзиром на вредности извода $\mathfrak{t}'$ и $\mathfrak{b}'$ најзад

$$(1)\qquad \mathfrak{n}' = \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -\varkappa\mathfrak{t} + \tau\mathfrak{b}.$$

Према томе *Френеови* (Frenet) *обрасци* за криву у простору гласе

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa\mathfrak{n} = \frac{1}{\rho}\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{n}' &= -\varkappa\mathfrak{t} + \tau\mathfrak{b} = -\frac{1}{\rho}\mathfrak{t} + \frac{1}{T}\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{b}' &= -\tau\mathfrak{n} = -\frac{1}{T}\mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Помоћу Френеових образаца може се извод вектора положаја по луку ма којег реда изразити помоћу $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$, чији ће коефицијенти бити функције лука s, кривине κ и торзије τ и њихових извода по луку.

У случају равне криве добијају се из Френеових образаца одмах, за $\tau=0$, обрасци (3) и (8) из т. 43.1.

Ако су дати косинуси правца тангенте, главне нормале и бинормале, тј.

$$\mathfrak{t}=\{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad \mathfrak{n}=\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \quad \mathfrak{b}=\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},$$

Френеови обрасци могу се написати у скаларном облику

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d\alpha}{ds}=\kappa\alpha_1, & \dfrac{d\beta}{ds}=\kappa\beta_1, & \dfrac{d\gamma}{ds}=\kappa\gamma_1, \\ \dfrac{d\alpha_1}{ds}=-\kappa\alpha+\tau\alpha_2, & \dfrac{d\beta_1}{ds}=-\kappa\beta+\tau\beta_2, & \dfrac{d\gamma_1}{ds}=-\kappa\gamma+\tau\gamma_2, \\ \dfrac{d\alpha_2}{ds}=-\tau\alpha_1, & \dfrac{d\beta_2}{ds}=-\tau\beta_1, & \dfrac{d\gamma_2}{ds}=-\tau\gamma_1. \end{array} \tag{3}$$

Најзад, ако се посматра угао који чине две главне нормале у бесконачно блиским тачкама просторне криве, може се дефинисати и трећа кривина k за криве линије у простору као израз

$$\left|\frac{d\mathfrak{n}}{ds}\right|=k=\frac{1}{K}. \tag{4}$$

Ова трећа кривина зове се и *тотална кривина*. K је полупречник тоталне кривине. За тоталну кривину важи Ланкреова (Lancret) теорема, која гласи

$$k^2=\kappa^2+\tau^2, \tag{5}$$

или

$$\frac{1}{K^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{T^2} \tag{6}$$

и речима: квадрат тоталне кривине просторне криве једнак је збиру квадрата кривине и торзије. Ланкреов став следује одмах из другог Френеова обрасца (2) скаларним множењем једначине саме собом.

45. Тангентна раван и нормала површине

Знамо да је ходограф векторске функције која зависи од два параметра нека површина те се, према томе, свака

површина може претставити једначином у векторском облику

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u, v), \tag{1}$$

или у скаларном са три једначине

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \tag{2}$$

где су параметри u и v *Гаусови параметри*.

Ако се мења само параметар u, добија се крива линија на површини дуж које је други параметар $v=\text{const.}$ За разне вредности параметра v добићемо све параметарске линије u и обрнуто, кад се само v мења добићемо све параметарске линије $u=\text{const.}$ Вектор $\dfrac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u}=\dot{\mathfrak{r}}_u$ одређује правац тангенте на кривој $v=\text{const.}$ по правцу и са смером онамо куда скалар u расте. Вектор $\dfrac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v}=\dot{\mathfrak{r}}_v$ одређује исто тако тангенту на кривој $u=\text{const.}$ Пошто су $u=\text{const.}$ и $v=\text{const.}$ две различите породице параметарских кривих линија на површини, то су вектори $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$ линеарно независни, тј. неколинеарни, те је према томе

$$\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v\neq 0. \tag{3}$$

Из (1) следује

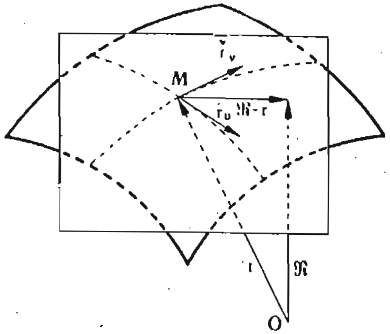
$$d\mathfrak{r}=\dot{\mathfrak{r}}_u\,du+\dot{\mathfrak{r}}_v\,dv \tag{4}$$

при чему $d\mathfrak{r}$ одређује правац тангенте криве повучене на површини ма у којој тачки. После деобе са du добија се из (4) вектор

$$\dot{\mathfrak{r}}_u+\dot{\mathfrak{r}}_v\frac{dv}{du}, \tag{5}$$

који је колинеаран са првим вектором, те према томе, такође одређује тангенту. Из (5) је очигледно да је, како $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$ зависе само од положаја тачке на површини (тј. од вредности u и v), правац тангенте на кривој линији повученој на површини ма у којој тачки, потпуно одређен односом $\dfrac{dv}{du}$.

Из (4) следује да је вектор $d\mathfrak{r}$ који одређује тангенту ма које криве линије на посматраној површини кроз тачку $M(u, v)$ компланаран са векторима $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$. Дакле, геометриско место тангената повучених на све криве кроз дату тачку на површини је раван одређена векторима $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$. Та раван зове се *тангентна раван* дате површине у посматраној тачки.



Сл. 146

Једначина тангентне равни дате површине у тачки M одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, ако је $\mathfrak{R}$ вектор положаја ма које тачке у њој (сл. 146), изгледа према томе

$$\mathfrak{R}-\mathfrak{r}=\alpha\,\dot{\mathfrak{r}}_u+\beta\,\dot{\mathfrak{r}}_v, \tag{6}$$

где су α и β произвољни променљиви параметри. Како једначина тангентне равни уствари изражава услов компланарности вектора $\mathfrak{R}-\mathfrak{r}$, $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$ може се написати и у облику

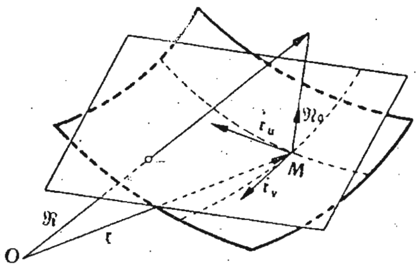
$$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\cdot(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v)=0 \tag{7}$$

или, у скаларном облику,

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Нормала у тачки M дате *површине* зове се права која стоји нормално на тангентној равни површине у датој тачки M (сл. 147). На основу претходнога орт $\mathfrak{R}_0$ нормале на површини $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u, v)$ може се изразити у облику

$$\mathfrak{R}_0=\frac{\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v}{|\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v|}. \tag{9}$$



Сл. 147

Ако сад са $\mathfrak{R}$ обележимо вектор положаја ма које тачке на нормали површине у тачки одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, једначина нормале гласи

$$\mathfrak{R}-\mathfrak{r}=\lambda\,(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v), \tag{10}$$

где је λ произвољни параметар, или, што је исто,

$$(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})\times(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v)=0. \tag{11}$$

У скаларном облику једначина нормале на површини одређеној Гаусовим параметрима изгледа

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}. \tag{12}$$

Оне тачке површине у којима је тангентна раван, па према томе и нормала, неодређена су *сингуларне тачке* површине. Међутим, ако је површина одређена Гаусовим параметрима, јасно је, из векторских једначина тангентне равни (7) и нормале површине (10), да тангентна раван, није дефинисана у оним тачкама површине у којима је

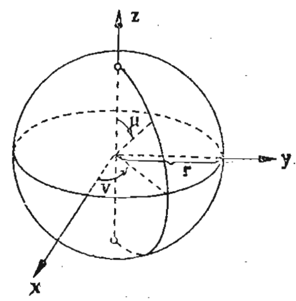
$$\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v=0. \tag{13}$$

Сам тај услов је, међутим, кад је површина на овај начин одређена, задовољен и у неким случајевима, кад тачка површине није сингуларна већ само постоји сингуларитет параметарског начина претстављања површине.

На пр., посматрајмо сферну површину полупречника r. Њена се једначина може у векторском облику написати на овај начин

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{i}\,r\sin u\cos v+\mathfrak{j}\,r\sin u\sin v+\mathfrak{k}\,r\cos u, \tag{14}$$

где је u „поларно растојање", а v „географска дужина" (сл. 148). Линије $u=\text{const.}$ су „упоредници", а линије $v=\text{const.}$ су „меридијани". При оваквом избору параметара u и v је $\dot{\mathfrak{r}}_v=0$ за полове $v=0$ и $v=\pi$ и, према томе, услов (13) задовољен, иако су и ти полови обичне тачке сфере.



Сл. 148

У свакој другој тачки сферне површине добија се према једначини (9) за орт нормале на површини, као што треба и очекивати, после краћег рачуна

$$\mathfrak{R}_0=\mathfrak{r}_0. \tag{15}$$

46. Праволиниске површине. Асимптотна раван

Нека буде дата у простору тачка A, одређена вектором положаја $\mathfrak{p}$, и кроз ту тачку нека права g, чији је правац одређен ортом $\mathfrak{e}$. Једначина те праве може се написати у облику

(1) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{p} + v\mathfrak{e},$$

где је v промењљив скалар, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{e}$ стални вектори и где $\mathfrak{r}$ означује вектор положаја ма које тачке M на правој g. Ако се узме да тачка A није стална већ мења свој положај у зависности од неког параметра u, тј. да је $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u)$ и да је за сваки положај тачке A везан односни орт $\mathfrak{e}$, који је такође функција истог параметра u, тј. $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(u)$, онда положај праве g зависи од параметра u. Из једначине

(2) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{p}(u) + v\mathfrak{e}(u) = \mathfrak{r}(u, v),$$

која претставља скуп свих правих за разне вредности скаларног параметра u очигледно је, да је геометриско место свих тих правих, чији правац зависи од једног параметра нека површина. Таква површина зове се *праволиниска површина*. Разни положаји праве g на површини су *генератрисе* или *изводнице* површине.

Из једначине (2) је очигледно да се, за константно $u = u_1$ а промењљиво v, добија у одређене вредности за векторе $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{e}$. Према томе, у том случају, једначина одређује ону генератрису површине која пролази, рецимо, кроз тачку A одређену са $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(u_1)$ и има правац одређен ортом $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(u_1)$. Ако је још $v = 0$, добија се сама тачка A. За промењљиво u, а $v = 0$, добија се крива линија $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}(u)$. Уопште за $v = \text{const.}$ или $v = f(u)$ добија се при промењљивом u нека крива линија на праволиниској површини.

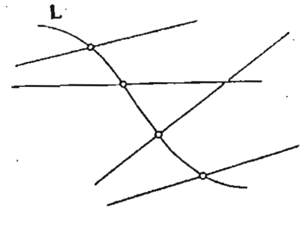
Према томе може се замислити и да праволиниска површина (сл. 149) постаје померањем праве (генератрисе) по некој кривој L као *водиљи*.

Праволиниских површина има безброј. Најпростије су, поред равни, цилиндричне и конусне површине, једнокрилни хиперболоид и хиперболички параболоид.

На праволиниској површини је на основу једначине (2)

(3) $$\dot{\mathfrak{r}}_u = \dot{\mathfrak{p}} + v\dot{\mathfrak{e}}$$
$$\dot{\mathfrak{r}}_v = \mathfrak{e}.$$

Како вектори $\dot{\mathfrak{r}}_u$ и $\dot{\mathfrak{r}}_v$ одређују тангентну раван то је, из (3), очигледно да вектор $v\dot{\mathfrak{e}}$, без обзира на вредност скалара v, лежи у тангентној равни посматране праволиниске површине у тачки M. То значи да она генератриса праволиниске површине која пролази кроз тачку M лежи сва у тангентној равни те тачке.



Сл. 149

Орт нормале површине у M је

(4) $$\mathfrak{N}_0 = \frac{(\dot{\mathfrak{p}} + v\dot{\mathfrak{e}}) \times \mathfrak{e}}{|\dot{\mathfrak{r}}_u \times \dot{\mathfrak{r}}_v|},$$

одн. нормала површине у M колинеарна је са вектором

(5) $$(\dot{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{e}) - v(\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}).$$

Ако је за све вредности скалара u задовољен услов $\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}} = 0$, тј. ако орт $\mathfrak{e}$ има сталан правац, све генератрисе наше праволиниске површине имају исти правац и добијају се паралелним померањем, рецимо, по кривој L чија је једначина $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}(u)$. Тада је праволиниска површина *цилиндрична*. Дуж целе неке дате генератрисе у том случају нормала има непромењљив правац, према једначини (5), јер не зависи више од v. Стога је и тангентна раван иста за све тачке дате генератрисе.

Ако се посматра вектор

(6) $$\frac{1}{v}(\dot{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{e}) - (\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}),$$

који је такође колинеаран са $\mathfrak{N}_0$, јер се из (5) добија дељењем скаларом v, онда за $v \to \infty$ овај вектор тежи вектору $-(\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}})$, као граници. Према томе правац нормале површине, па и положај тангентне равни тежи, неком граничном положају кад се тачка M удаљује у бесконачност по g. Тај гранични положај тангентне равни може се сматрати као тангентна раван посматране површине у бесконачно удаљеној тачки генератрисе g и зове се *асимптотна раван* праволиниске површине у односу на генератрису g. Она је нормална на вектору $\dot{\mathfrak{e}} \times \mathfrak{e}$.

У случају цилиндричних површина, код којих је $\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}} = 0$, ова раван је неодређена.

Потражимо сад на генератриси g ону тачку C у којој је тангентна раван површине нормална на односној асимптотној равни. Услов који при томе мора бити испуњен своди се на то да орт нормале $\mathfrak{N}_0$ у траженој тачки буде нормалан на вектору $\dot{\mathfrak{e}}\times\mathfrak{e}$. Према томе, нека буде $\overrightarrow{MC}=v_0\mathfrak{e}$. У тачки C онда мора бити

(7) $$\mathfrak{N}_0=\frac{(\dot{\mathfrak{p}}+v_0\dot{\mathfrak{e}})\times\mathfrak{e}}{|\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v|}$$

и

(8) $$(\dot{\mathfrak{e}}\times\mathfrak{e})\cdot\mathfrak{N}_0=0,$$

тј.

$$(\dot{\mathfrak{e}}\times\mathfrak{e})\cdot[(\dot{\mathfrak{p}}+v_0\dot{\mathfrak{e}})\times\mathfrak{e}]=0.$$

Одавде, после краћег рачуна, с обзиром да је $\mathfrak{e}$ орт, следује

$$\dot{\mathfrak{e}}\cdot\dot{\mathfrak{p}}+v_0\dot{\mathfrak{e}}^2=0,$$

одакле се за v_0 добија

(9) $$v_0=-\frac{\dot{\mathfrak{e}}\cdot\dot{\mathfrak{p}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}.$$

Тачка C је, дакле, одређена вектором положаја

(10) $$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}(u)-\frac{\dot{\mathfrak{e}}\cdot\dot{\mathfrak{p}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}\mathfrak{e}$$

и зове се *центар* или *стежна тачка* посматране генератрисе g.

Тангентна раван праволиниске површине у тачки C, која је по дефиницији нормална на асимптотној равни зове се *централна раван*. Геометриско место тачака C на праволиниској површини је крива линија која се зове *стрикциона* или *стежна линија* површине.

46.1 Шалова теорема. Развојне површине

Ако се при проучавању праволиниске површине као почетна тачка узме не ма која тачка M на генератриси већ баш односна тачка C (центар генератрисе), онда, како се скалар v рачуна од те тачке као почетне, мора бити $v_0=0$ и према томе на основу једначине (9) у т. 46

(1) $$\dot{\mathfrak{e}}\cdot\dot{\mathfrak{q}}=0,$$

где је са $\mathfrak{q}$ обележен вектор положаја тачке C. Услов (1), дакле, карактерише стежну тачку C генератрисе као почетну

тачку. У том случају је једначина односне генератрисе g

(2) $$\mathfrak{r}=\mathfrak{q}+v\mathfrak{e},$$

где се сад v рачуна од тачке C.

Из једначине (7) у т. 46 очигледно је, с обзиром на услов (1), да је нормала праволиниске површине у тачки C колинеарна и истог смера са вектором $\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e}$, јер је сад $v_0=0$. Како је, међутим, на основу (1) и пошто је $\mathfrak{e}$ орт,

$$\dot{\mathfrak{e}}\times(\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e})=\dot{\mathfrak{q}}(\dot{\mathfrak{e}}\cdot\mathfrak{e})-\mathfrak{e}(\dot{\mathfrak{e}}\cdot\dot{\mathfrak{q}})=0,$$

нормала праволиниске површине у тачки C колинеарна је и са вектором $\dot{\mathfrak{e}}$, па се може написати

(3) $$\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e}=\lambda\dot{\mathfrak{e}}.$$

Вредност скаларног фактора λ може се одмах одредити скаларним множењем обеју страна ове једначине са $\dot{\mathfrak{e}}$. Тада се добија

$$\dot{\mathfrak{e}}\cdot(\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e})=\lambda\dot{\mathfrak{e}}^2$$

и најзад

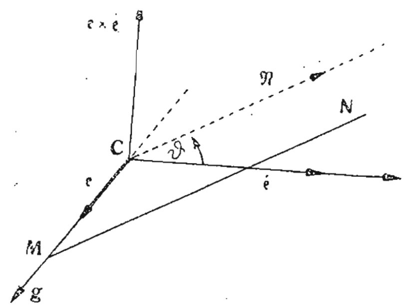
(4) $$\lambda=\frac{\dot{\mathfrak{e}}\cdot(\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e})}{\dot{\mathfrak{e}}^2}=\frac{(\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}})\cdot\dot{\mathfrak{q}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}.$$

Према томе из (3) следује

(5) $$\dot{\mathfrak{q}}\times\mathfrak{e}=\frac{(\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}})\cdot\dot{\mathfrak{q}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}\dot{\mathfrak{e}}.$$

Скаларни фактор λ је позитиван или негативан, према томе да ли $\mathfrak{e}$, $\dot{\mathfrak{e}}$ и $\dot{\mathfrak{q}}$ чине десни или леви триједар. У првом случају се смер нормале на површини поклапа са смером $\dot{\mathfrak{e}}$, а у другом случају му је супротан.

Посматрајмо сад триједар ортогоналних вектора $\mathfrak{e}$, $\dot{\mathfrak{e}}$ и $\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}}$ са почетком у тачки C (сл. 150). Одмах се види да је овај триједар десне оријентације, при чему $\mathfrak{e}$ одређује генератрису g кроз тачку C, а $\dot{\mathfrak{e}}$ нормалу на површини у тачки C.



Сл. 150

Нека MN буде нормала праволиниске површине у некој тачки M генератрисе g. Нека вектор положаја тачке M буде дат једначином (2). Тада је та нормала (према једн.

7 т. 46) одређена ортом

$$\mathfrak{N}_0 = \frac{\mathfrak{N}}{|\mathfrak{N}|},$$

где је

$$(6) \qquad \mathfrak{N} = \dot{\mathfrak{q}} \times e + \nu(\dot{e} \times e),$$

одакле је, с обзиром на (5),

$$(7) \qquad \mathfrak{N} = \frac{(e \times \dot{e}) \cdot \dot{\mathfrak{q}}}{\dot{e}^2}\, \dot{e} - \nu\,(e \times \dot{e}).$$

Дакле, нормала праволиниске површине ма у којој тачки M генератрисе g паралелна је равни одређеној векторима $\dot{e}$ и $e \times \dot{e}$. Ако са ϑ обележимо угао нормале $\mathfrak{N}$ у тачки M генератрисе са $\dot{e}$ тј. са нормалом површине у стежној тачки C те генератрисе [$\vartheta = \sphericalangle(\dot{e}, \mathfrak{N})$], онда је с обзиром на (7)

$$(8) \qquad \cos\vartheta = \frac{\dot{e} \cdot \mathfrak{N}}{|\dot{e}|\,|\mathfrak{N}|} = \frac{1}{|\dot{e}|\,|\mathfrak{N}|}\, \frac{(e \times \dot{e}) \cdot \dot{\mathfrak{q}}}{\dot{e}^2}\, \dot{e}^2 - \frac{\nu}{|\dot{e}|\,|\mathfrak{N}|}\, \dot{e} \cdot (e \times \dot{e}).$$

Дакле,

$$(9) \qquad \cos\vartheta = \frac{(e \times \dot{e})\dot{\mathfrak{q}}}{|\dot{e}|\,|\mathfrak{N}|},$$

јер је $\dot{e} \cdot (e \times \dot{e}) = 0$. С друге стране је увек $\sphericalangle(\mathfrak{N}, e \times \dot{e}) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ и, према томе,

$$(10) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta = \frac{\mathfrak{N} \cdot (e \times \dot{e})}{|\mathfrak{N}| \cdot |e \times \dot{e}|} = -\frac{\nu (e \times \dot{e})^2}{|\mathfrak{N}|\,|e \times \dot{e}|},$$

јер је, опет, $\dot{e} \cdot (e \times \dot{e}) = 0$.

Како је e орт, па $e \perp \dot{e}$, то је $|e \times \dot{e}| = |\dot{e}|$ и према томе

$$(11) \qquad \sin\vartheta = -\frac{\nu\,|\dot{e}|}{|\mathfrak{N}|}.$$

Деобом једначине (11) са (9) добија се

$$(12) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\nu\,|\dot{e}|^2}{(e \times \dot{e}) \cdot \dot{\mathfrak{q}}},$$

и ако се стави

$$(13) \qquad p = -\frac{(e \times \dot{e}) \cdot \dot{\mathfrak{q}}}{|\dot{e}|^2}$$

добија се коначно

$$(14) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\nu}{p}.$$

Овај образац изражава став који се зове *Шалов* (Chasles) *став*. Он даје везу између положаја тачке M на посматраној

генератриси g и правца нормале (положаја тангентне равни) у тој тачки. Он показује скретање (завијање) нормале при кретању дуж генератрисе почев од почетне тачке C. Величина p зове се по Шалу *параметар дистрибуције* генератрисе g. Он је релативан број и, према томе да ли је позитиван или негативан, нормала површине се при кретању у позитивном смеру генератрисе окреће у позитивном, одн. негативном смеру. Чим се знак p промени, промени се и смер ротације нормале, што значи да p карактерише природну особину праволиниске површине без обзира на оријентацију генератрисе.

Ми смо тачку C на генератриси g назвали и стежном тачком. Разлог за то је у овоме. Ми знамо да је вектор $e \times \dot{e}$ увек нормалан на генератриси одређеној ортом e у тачки C генератрисе. Може се доказати, међутим, да је тај вектор нормалан и на бесконачно блиској суседној генератриси која је одређена вектором $e + de$. И заиста, тада је

$$(e \times \dot{e}) \cdot (e + de) = (e \times \dot{e}) \cdot e + (e \times \dot{e}) \cdot de = 0,$$

јер је вектор de колинеаран са вектором $\dot{e}$. Према томе вектор $e \times \dot{e}$ одређује заједничку нормалу генератрисе g и њој суседне генератрисе. То значи да тачка C на генератриси g има најкраће растојање од суседних генератриса и отуда назив стежна тачка за тачку C.

Ако је за неку праволиниску површину параметар дистрибуције увек једнак нули, онда је за све тачке ма које генератрисе $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, изузев тачке C где је ϑ неодређено.

Према томе, у овом случају тангентна раван површине остаје непромењена у свима тачкама дате генератрисе и поклапа се са асимптотном равни, изузев центра генератрисе, где је неодређена. Овакве праволиниске површине зову се *развојне површине* или *торзе*.

Наиме, из $p = 0$, пошто је $|\dot{e}|^2 \neq 0$, следује на основу (13)

$$(15) \qquad (e \times \dot{e}) \cdot \dot{\mathfrak{q}} = 0.$$

Осим тога за тачку C увек важи и услов (1) и према томе може бити:

1. $\dot{\mathfrak{q}} = 0$, тј. тачка C је стална и иста за све генератрисе, јер не зависи од u. Таква је развојна површина *конусна површина* са теменом у тачки C.

2. $\dot{\mathfrak{q}} \perp \mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}$, одакле с обзиром на (1), тј. $\dot{\mathfrak{q}} \perp \dot{\mathfrak{e}}$, следује да је вектор $\dot{\mathfrak{q}}$ колинеаран са ортом $\mathfrak{e}$, одн. $\dot{\mathfrak{q}} = k\mathfrak{e}$, где је k произвољни скалар. Како вектор $\dot{\mathfrak{q}}$ одређује тангенту стрикционе линије у тачки C, значи да је генератриса праволиниске површине тангента стрикционе линије у посматраној тачки. У овом случају имамо посла са најопштијим развојним површинама, које су *тангентне површине* реалних кривих линија. Њихова једначина може се написати у облику

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}(u) + v\dot{\mathfrak{q}}(u), \tag{16}$$

где је $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(u)$ једначина стрикционе линије. Стрикциона линија ових површина зове се и *повратна линија* развојне површине, због тога што сваки раван пресек те површине има повратну тачку у односној тачки C, што овде нећемо доказивати.

3. $\dot{\mathfrak{e}} = 0$. То су *цилиндричне површине*. Параметар дистрибуције $p = \infty$, те се ове развојне површине могу сматрати као конусне површине чије је теме у бесконачности.

47. Прва и друга основна квадратна форма површине

Вектор $d\mathfrak{r}$ је управљени елемент ма које криве линије повучене на површини кроз посматрану тачку, и његов квадрат је квадрат лучног елемента те криве линије. Стога из једначине (5) т. 45 следује

$$ds^2 = d\mathfrak{r}^2 = \dot{\mathfrak{r}}_u^2\, du^2 + 2\,(\dot{\mathfrak{r}}_u \cdot \dot{\mathfrak{r}}_v)\, du\, dv + \dot{\mathfrak{r}}_v^2\, dv^2. \tag{1}$$

Ако по Гаусу уведемо скраћене ознаке

$$\begin{aligned} E &= \dot{\mathfrak{r}}_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \dot{\mathfrak{r}}_u \cdot \dot{\mathfrak{r}}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \dot{\mathfrak{r}}_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

онда се квадрат лучног елемента ма које криве повучене на површини $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ може изразити у облику

$$ds^2 = E\, du^2 + F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{3}$$

Овај израз се зове *прва основна квадратна форма површине* или *метричка форма површине*.

Са ознакама (2) може се изразити интензитет вектора $\dot{\mathfrak{r}}_u \times \dot{\mathfrak{r}}_v$, и после тога једначина (9) у т. 45 орта нормале, на други начин. Наиме, на основу Лагранжева идентитета добија се

$$(\dot{\mathfrak{r}}_u \times \dot{\mathfrak{r}}_v)^2 = \dot{\mathfrak{r}}_u^2\, \dot{\mathfrak{r}}_v^2 - (\dot{\mathfrak{r}}_u \cdot \dot{\mathfrak{r}}_v)^2 = EG - F^2, \tag{4}$$

а одатле

$$|\dot{\mathfrak{r}}_u \times \dot{\mathfrak{r}}_v| = \sqrt{EG - F^2}. \tag{5}$$

Тако се орт $\mathfrak{N}_0$ нормале на површини може сад изразити једначином

$$\mathfrak{N}_0 = \frac{\dot{\mathfrak{r}}_u \times \dot{\mathfrak{r}}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{6}$$

Из једначине (4) је очигледно да за реалне површине израз $EG - F^2$ не може никад бити негативан.

Скаларним множењем једначине (6) ортовима оса Декартова правоуглог триједра добијају се косинуси правца нормале на површини у односу на Декартов правоугли триједар, тј.

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathfrak{N}_0 \cdot \mathfrak{i} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right), \\ N_2 &= \mathfrak{N}_0 \cdot \mathfrak{j} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right), \\ N_3 &= \mathfrak{N}_0 \cdot \mathfrak{k} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Нека $\mathfrak{t} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{ds}$ буде орт тангенте неке криве линије на површини, онда дуж те криве важи идентитет

$$\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{N}_0 = 0, \tag{8}$$

где је $\mathfrak{N}_0$ орт нормале на површини. Ако се овај идентитет диференцира по луку криве добија се

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{N}_0 = -\,\mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{N}_0}{ds} = -\,\frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathfrak{N}_0}{ds},$$

па ако се стави, с обзиром на први Френеов образац

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \frac{\mathfrak{n}}{R},$$

где је $\mathfrak{n}$ орт главне нормале посматране криве линије, а R њен полупречник кривине, добија се најзад

$$\frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{N}_0}{R} = -\,\frac{d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N}_0}{ds^2}. \tag{9}$$

Израз

$$(10) \qquad -(d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{N}_0) = -(\dot{\mathfrak{r}}_u\,du + \dot{\mathfrak{r}}_v\,dv)\cdot(\dot{\mathfrak{N}}_{0u}\,du + \dot{\mathfrak{N}}_{0v}\,dv),$$

који се пише и у облику

$$(11) \qquad -(d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{N}_0) = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

зове се *друга основна квадратна форма површине.*

Према томе једначина (9) може се сад написати

$$(12) \qquad \frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}_0}{R} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Десна њена страна зависи само од положаја тачке на површини, тј. од u и v, и од правца тангенте који је одређен односом $\frac{dv}{du}$, јер је десна страна хомогена функција од du и dv нултог реда. Према томе десна страна има исту вредност за све криве кроз дату тачку са истом тангентом. Израз на левој страни једначине (12) зависи од положаја главне нормале, одн. оскулаторне равни посматране криве и њеног полупречника кривине.

Коефицијенти L, M и N друге основне форме могу се одредити из једначине (10) упоређивањем коефицијената тј.

$$(13) \qquad \begin{aligned} L &= -(\dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0u}),\\ 2M &= -(\dot{\mathfrak{r}}_u\,\dot{\mathfrak{N}}_{0v} + \dot{\mathfrak{r}}_v\,\dot{\mathfrak{N}}_{0u}),\\ N &= -(\dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v}). \end{aligned}$$

Ови изрази могу се и друкчије написати. Ако се идентитети

$$\dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\mathfrak{N}_0 = 0, \quad \dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\mathfrak{N}_0 = 0$$

диференцирају по u и v добијају се једначине

$$(14) \qquad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{r}}_{uu}\cdot\mathfrak{N}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0u} &= 0,\\ \ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\cdot\mathfrak{N}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v} &= 0,\\ \ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\cdot\mathfrak{N}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0u} &= 0,\\ \ddot{\mathfrak{r}}_{vv}\cdot\mathfrak{N}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v} &= 0. \end{aligned}$$

Из прве и четврте од ових једначина следује, с обзиром на (13),

$$(15) \qquad L = \ddot{\mathfrak{r}}_{uu}\cdot\mathfrak{N}_0, \quad N = \ddot{\mathfrak{r}}_{vv}\cdot\mathfrak{N}_0,$$

а из друге и треће, опет с обзиром на (13),

$$(16) \qquad M = -(\dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v}) = -(\dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0u}) = \ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\cdot\mathfrak{N}_0.$$

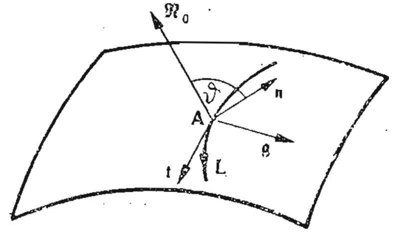
Ако се у једначине (15) и (16) унесе још вредност (6) за орт нормале $\mathfrak{N}_0$ на површини добиће се најзад

$$(17) \qquad \begin{aligned} L &= -(\dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0u}) = \frac{\ddot{\mathfrak{r}}_{uu}\cdot(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\\ M &= -(\dot{\mathfrak{r}}_u\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v}) = \frac{\ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\cdot(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \dots\dots\dots\dots\\ N &= -(\dot{\mathfrak{r}}_v\cdot\dot{\mathfrak{N}}_{0v}) = \frac{\ddot{\mathfrak{r}}_{vv}\cdot(\dot{\mathfrak{r}}_u\times\dot{\mathfrak{r}}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Величине E, F и G зову се *основне величине првога реда* теорије површина, а величине L, M и N *основне величине другога реда*, зато што се у првима јављају само први изводи вектора положаја по u и v, а у другима и други изводи по u и v. Њихове величине зависе једино од облика површине и од избора тачке на површини.

48. Нормална кривина кривих линија на површини. Менијеов и Ојлеров став

За проучавање кривих линија на површини употребљује се нарочити, природни триједар. Тај триједар (сл. 151) образују: 1) тангента посматране криве L у тачки A са смером на страну куда лук расте; 2) нормала криве линије у тангентној равни површине; 3) нормала на површини у посматраној тачки.



Сл. 151

Нормала у тангентној равни зове се *геодезиска нормала* криве линије на површини и оријентише се увек тако да са тангентом, као првом осом, и нормалом на површини, као трећом осом, чини десни триједар. Орт геодезиске нормале обележаваћемо са $\mathfrak{g}$. Како се види оријентација геодезиске нормале зависи од договора за оријентацију нормале на површини (на пр. код затворених површина нормала на површину се обично оријентише у спољашњи простор итд.).

Вектор кривине неке криве L повучене на површини $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u, v)$ дат је, као што је познато, изразом

$$\vec{\kappa}=\frac{\mathfrak{n}}{R}, \tag{1}$$

где је $\mathfrak{n}$ орт главне нормале криве L у тачки A, а R полупречник кривине посматране криве у тој тачки. Ако се обе стране ове једначине помноже скаларно ортом $\mathfrak{N}_0$, добиће се пројекција вектора кривине криве L на правац нормале на површину, што се зове *нормална кривина* криве L у тачки A дате површине, тј.

$$\kappa_n=\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}_0}{R}. \tag{2}$$

Према томе, с обзиром на једн. (12) у т. 47, имамо

$$\kappa_n=\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}_0}{R}=\frac{L\,du^2+2\,M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{3}$$

Израз на десној страни, како смо видели, зависи само од положаја тачке A на површини и правца тангенте криве L повучене кроз A, па је стога за све криве на површини које пролазе кроз тачку A и имају тамо заједничку тангенту

$$\kappa_n=\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}_0}{R}=\frac{\cos\vartheta}{R}=\text{const.}, \tag{4}$$

где је ϑ угао главне нормале криве линије са нормалом на површини. Ако посматране криве линије имају у тачки A и заједничку оскулаторну раван, онда је из (4) очигледно да морају имати и по апсолутној вредности једнаке нормалне кривине у тој тачки.

Под нормалним пресеком површине кроз тачку A разуме се крива која се добија пресеком површине са равни која садржи нормалу површине. За криву нормалног пресека угао ϑ је 0 или π, одн. $\cos\vartheta=\pm 1$, према томе, да ли се смер нормале на површини поклапа са смером главне нормале или не, јер су сад главна нормала криве и нормала на површини колинеарне.

Ако кривину нормалног пресека обележимо са $\frac{1}{\rho}$, једначина (4) може се написати

$$\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}_0}{R}=\frac{\cos\vartheta}{R}=\frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

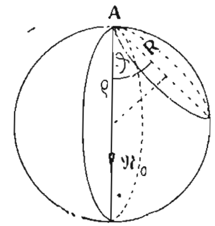
одакле се добија *Менијеова* (Meusnier) *теорема*

$$R=\rho\cos\vartheta, \tag{6}$$

тј. полупречник кривине ма које криве линије повучене на површини једнак је пројекцији полупречника кривине нормалног пресека на оскулаторну раван дате криве, ако нормални пресек има са датом кривом заједничку тангенту. При томе ће знак кривине показивати да ли се смерови главне нормале нормалног пресека и нормале површине поклапају или су супротни.

Менијеов став може се и мало друкчије формулисати, ако се жели да се јаче истакну услови под којима став важи. Прво, место свих кривих повучених на површини кроз тачку A са заједничком тангентом, могу се посматрати само оне које су равни пресеци дате површине одређени заједничким управљеним елементима свих кривих линија у питању. Друго, место полупречника кривине, можемо посматрати односне кругове кривине. Тада се Менијеов став може и овако формулисати (сл. 152).

Кругови кривине свих равних пресека површине одређених истим управљеним елементом на површини леже на истој сфери, чији је полупречник једнак полупречнику кривине нормалног пресека.



Сл. 152

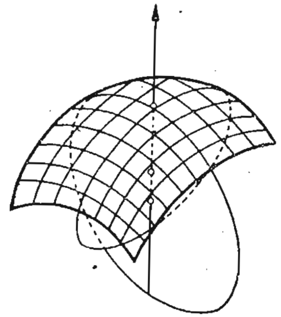
Једначина (5), с обзиром на једначину (12) претходног параграфа, може се написати

$$\frac{1}{\rho}=\frac{L\,du^2+2\,M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2}, \tag{7}$$

одакле је јасно да знак нормалне кривине зависи само од знака бројиоца израза на десној страни. Наиме, именилац израза на десној страни увек је позитивна величина, јер претставља ds^2.

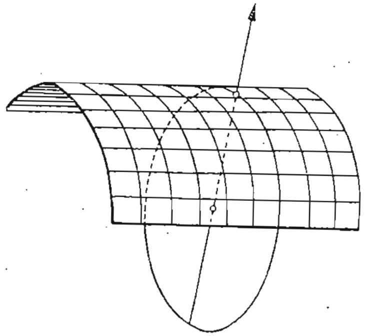
У проучавању знака нормалне кривине, према томе, могу наступити три случаја:

1. $M^2-LN<0$. У том случају бројилац не мења знак и кривина нормалних пресека у свима правцима има исти знак, одн. главне нормале нормалних пресека у свима правцима кроз дату тачку имају смер на исту страну. Такве тачке површине зову се *елиптичке тачке.* За површину се каже да у таквој тачки има *елиптичну кривину* (сл. 153). У таквим тачкама површине не постоји ни један правац коме би одговарао нормални пресек кривине нула. Знак кривине је стално + или стално − према знаку коефицијента L.



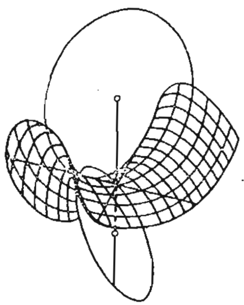
Сл. 153

2. $M^2 - LN = 0$. Тада је бројилац потпуни квадрат и не мења знак, но може бити за једну вредност $\frac{dv}{du}$ једнак нули. То значи кривина опет остаје стално истога знака у свима правцима, али постоји један правац у коме је кривина једнака нули (сл. 154). Овакве тачке површине зову се *параболичке*, а за површину се каже да у таквој тачки има *параболичну кривину*. Знак кривине нормалног пресека опет зависи од знака величине L.



Сл. 154

3. $M^2 - LN > 0$. Бројилац мења знак, тј. у посматраној тачки постоје главне нормале супротних смерова за нормалне пресеке разних правaца. Нормална кривина у истој тачки може у том случају за разне правце бити позитивна и негативна, а постоје два правца у којима је кривина нула, (сл. 155). Таква тачка површине зове се *хиперболичка*, а површина има у тој тачки *хиперболичну кривину*.



Сл. 155

Сва ова разматрања односе се увек на најближу околину посматране тачке. Као пример елиптичких тачака површине могу да послуже, на пр., све тачке сфере или елипсоида; пример параболичких тачака пружају, на пр., тачке кружног цилиндра; најзад, као пример тачке са хиперболичном кривином површине може послужити седло хиперболичког параболоида (сл. 155).

Оне елиптичке тачке површине у којима су кривине свих нормалних пресека једнаке — дакле — независне од правца зову се *сферне* или *пупчасте тачке* површине. Сфера и раван се састоје само од таквих тачака и то су једине површине такве врсте.

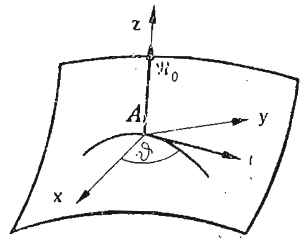
На истој површини могу се налазити тачке разних врста кривине у општем случају. Тако су на торусу све тачке на спољашњој страни елиптичке, све на унутрашњој (према отвору торуса) хиперболичке, а једне од других су одељене граничним упоредницима торуса, чије су све тачке параболичке.

Да бисмо продубили питање проучавања нормалне кривине површине у датој тачки, а да бисмо га истовремено упростили, искористићемо нарочите параметре, тј. $x = u$, $y = v$ и према томе $z = z(u, v)$. Као што се види то се уствари своди на то да се једначина површине узме у експлицитном облику. Осим тога, за почетак координатног система узећемо посматрану тачку A површине, а за xAy раван тангентну раван површине у тој тачки (сл. 156). Тада је

$$\dot{\mathfrak{r}}_x = \{1, 0, p\}, \quad \dot{\mathfrak{r}}_y = \{0, 1, q\},$$

$$\ddot{\mathfrak{r}}_{xx} = \{0, 0, r\}, \quad \ddot{\mathfrak{r}}_{xy} = \{0, 0, s\}, \tag{8}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}}_{yy} = \{0, 0, t\},$$



Сл. 156

где су

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

познате Монжове (Monge) ознаке.

Према томе, на основу образаца (2) и (17) претходног параграфа имамо

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$L = \frac{r}{1 + p^2 + q^2}, \quad M = \frac{s}{1 + p^2 + q^2}, \quad N = \frac{t}{1 + p^2 + q^2}. \tag{9}$$

Како је, даље, према положају нашег координатног система, у тачки A, $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{i}$ и $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{j}$, тј. $\mathfrak{N}_0 \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{N}_0 \cdot \mathfrak{j} = 0$, то је, с обзиром на прве две једначине (7) у претход. параграфу, за тачку A

$$p = q = 0 \tag{10}$$

и стога најзад

(11) $\qquad E=G=1,\quad F=0,\quad L=r,\quad M=s,\quad N=t.$

Ако се сад $z=z(x,y)$ развије у Меклоринов ред по степенима од x и y у близини тачке A, добија се, с обзиром на једначине (10),

$$z=\frac{1}{2}(r\,x^2+2\,s\,xy+t\,y^2)+\cdots\cdots \tag{12}$$

Како је у овом случају $M^2-LN=s^2-rt$, из ове једначине је очигледно, да ће наша функција $z=z(x,y)$ имату у тачки A максимум или минимум, кад је $s^2-rt<0$ (елиптичка тачка). Површина у том случају лежи стога само с једне стране тангентне равни у најближој околини посматране тачке. За $s^2-rt>0$ (хиперболичка тачка) нема ни максимума ни минимума, површина у најближој околини посматране тачке има тачака и с једне и с друге стране тангентне равни. Најзад за $s^2-rt=0$ не може се на основу само једначине (12) ништа закључити о положају површине према тангентној равни у околини тачке A.

Ако се вредности основних величина површине из једначине (11) унесу у израз (7) добиће се

$$\frac{1}{\rho}=\frac{r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2}{ds^2}. \tag{13}$$

Нека ϑ (сл. 156) буде угао који тангента посматране криве у тачки A чини са x-осом, тада је (једн. 14 у т. 43)

$$\frac{dx}{ds}=\cos\vartheta,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\vartheta,$$

пошто је тангента у равни xAy.

На тај начин се за нормалну кривину добија најзад израз

$$\varkappa_n=\frac{1}{\rho}=r\cos^2\vartheta+2s\sin\vartheta\cos\vartheta+t\sin^2\vartheta, \tag{14}$$

који показује да нормална кривина у датој тачки зависи само од угла ϑ који тангента чини са x-осом.

Начин промене нормалне кривине проучићемо помоћу првог извода, тј.

$$\frac{d\varkappa_n}{d\vartheta}=-(r-t)\sin 2\vartheta+2s\cos 2\vartheta. \tag{15}$$

Овај извод је идентички једнак нули само за $r=t$ и $s=0$. Тада је $\varkappa_n=\text{const.}$, тј. нормална кривина је независна од правца. Видели смо да у том случају имамо посла са сферним тачкама површине. Ако је, међутим, $r\neq t$, из услова за екстремну вредност нормалне кривине у зависности од правца,

$$-(r-t)\sin 2\vartheta+2s\cos 2\vartheta=0, \tag{16}$$

следује да је $\dfrac{d\varkappa_n}{d\vartheta}=0$, само за

$$tg\,2\vartheta=\frac{2s}{r-t}. \tag{17}$$

Ову једначину задовољавају две вредности угла ϑ (у интервалу од 0 до 2π), које се једна од друге разликују за $\dfrac{\pi}{2}$. Како се ограничавамо само на случајеве где се нормална кривина непрекидно мења, једна од тих вредности одговара максимуму, а једна минимуму. Положај оса x и y у тангентној равни може се сад тако изабрати да максимуму одговара угао $\vartheta=0$, тј. оса x је у правцу у коме је нормална кривина максимална, а да минимуму одговара правац y-осе, тј. угао $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$. У том случају, при таквом положају оса, из једначине (17) се види да је $s=0$ и једначина (14) добија облик

$$\varkappa_n=\frac{1}{\rho}=r\cos^2\vartheta+t\sin^2\vartheta, \tag{18}$$

одакле се за $\vartheta=0$ добија $\varkappa_1=r=\dfrac{1}{\rho_1}$, где ρ_1 означава полупречник максималне нормалне кривине и за $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$ добија се $\varkappa_2=t=\dfrac{1}{\rho_2}$, где је ρ_2 полупречник минималне нормалне кривине, па се може написати

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1}+\frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2}, \tag{19}$$

где је нормална кривина ма у којем правцу изражена помоћу екстремних нормалних кривина и угла који правац пресека гради са x-осом. Овај образац изражава познати *Ојлеров став.*

Полупречници кривине ρ_1 и ρ_2 зову се *полупречници главних кривина* у посматраној тачки површине, односне кривине

κ_1 и κ_2 зову се *главне кривине* површине. Правци вектора t за које је кривина кривих на површини екстремна зову се *главни правци*, а нормални равни пресеци површине који одговарају тим правцима су *главни пресеци*.

Ојлерова теорема важи и за сферне тачке површине ма да је изведена под претпоставком да посматрана тачка није таква. У том случају је само $\kappa_1 = \kappa_2$.

48.1 Линије кривине. Асимптотне линије. Геодезиска кривина. Геодезиске линије

Једначина (7) прет. пар. може се написати у облику

(1) $$(L\rho - E)\,du^2 + 2\,(M\rho - F)\,du\,dv + (N\rho - G)\,dv^2 = 0,$$

односно, ако поделимо са dv^2 и ставимо $z = \dfrac{du}{dv}$,

(2) $$(L\rho - E)\,z^2 + 2\,(M\rho - F)\,z + (N\rho - G) = \varphi\,(\rho, z) = 0.$$

Из ове једначине може се ρ израчунати у зависности од правца одређена са z. Како у главним правцима ρ има екстремну вредност, биће то они правци у којима је извод од ρ по z једнак нули, тј.

(3) $$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}} = -\frac{2\,(L\rho - E)\,z + 2\,(M\rho - F)}{L z^2 + 2\,M z + N} = 0.$$

Према томе, мора бити

(4) $$(L\rho - E)\,z + (M\rho - F) = 0,$$

одн.

(5) $$(L\rho - E)\,du + (M\rho - F)\,dv = 0.$$

Ако се једначина (1) подели са du^2 и сведе на једначину

(6) $$(N\rho - G)\,t^2 + (2\,M\rho - F)\,t + (L\rho - E) = 0,$$

где је $t = \dfrac{dv}{du}$, на потпуно исти начин долази се до новог услова за главне правце, који такође мора бити задовољен, у облику

(7) $$(M\rho - F)\,du + (N\rho - G)\,dv = 0.$$

Елиминацијом du и dv из једначина (5) и (7) добија се једначина

(8) $$\begin{vmatrix} L\rho - E & M\rho - F \\ M\rho - F & N\rho - G \end{vmatrix} = 0,$$

односно

(9) $$(EG - F^2)\,\frac{1}{\rho^2} - (EN - 2\,FM + GL)\,\frac{1}{\rho} + (LN - M^2) = 0,$$

чија су решења главне кривине $\dfrac{1}{\rho_1}$ и $\dfrac{1}{\rho_2}$ у посматраној тачки површине.

Из једначине (9) добија се одмах производ главних кривина површине у датој тачки, наиме

(10) $$\frac{1}{\rho_1\,\rho_2} = K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Производ главних кривина у датој тачки површине зове се *Гаусова кривина* површине у тој тачки.

Полузбир главних кривина у датој тачки површине обележава се са H и зове *средња кривина* површине у посматраној тачки. Из једначине (9) је очигледно

(11) $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2\,H = \frac{EN - 2\,FM + GL}{EG - F^2}.$$

Ако се једначине (5) и (7) напишу у облику

(12) $$\begin{aligned} &\rho\,(L\,du + M\,dv) - (E\,du + F\,dv) = 0,\\ &\rho\,(M\,du + N\,dv) - (F\,du + G\,dv) = 0, \end{aligned}$$

па елиминише ρ, добиће се квадратна једначина по $\dfrac{dv}{du}$ за одређивање главних праваца, тј.

(13) $$\begin{vmatrix} L\,du + M\,dv & E\,du + F\,dv \\ M\,du + N\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ова једначина може се написати и у облику

(14) $$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0$$

или, најзад, у облику детерминанте

(15) $$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Одавде се решењем по $\dfrac{dv}{du}$ добијају у општем случају две диференцијалне једначине првога реда

(16) $$\frac{dv}{du} = f_1\,(u, v), \quad \frac{dv}{du} = f_2\,(u, v),$$

из којих се може одредити v у функцији од u. Према томе те једначине одређују, у општем случају, кроз сваку тачку површине две криве линије, чије се тангенте у свакој тачки поклапају са главним правцима површине у тој тачки. Такве криве линије на површини зову се *линије кривине*. Оне су по дефиницији у свакој тачки узајамно нормалне и образују на површини ортогоналну мрежу кривих линија. Једначина (13), (14) или (15) је диференцијална једначина линија кривине на површини.

За специјалне параметре $u=x$, $v=y$, одн. за случај кад је површина дата једначином у експлицитном облику $z=z(x,y)$, диференцијална једначина линија кривине може се, рецимо, у облику детерминанте, написати, с обзиром на једначине (9) претходног параграфа, овако

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} dx^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0 .$$

Линије кривине се могу дефинисати и друкчије. Наиме, нормале површине у тачкама ма које криве линије L на површини образују неку праволиниску површину, али у општем случају она не мора бити развојна, тј. те нормале нису тангенте неке криве линије. Међутим, показаћемо да, ако се на површини узме таква крива да нормале површине дуж те криве образују неку тангентну површину, онда таква крива линија мора бити линија кривине на површини. Та особина линија кривине често се узима као полазна тачка за дефиницију линија кривине.

Заиста, нека $\mathfrak{R}$ буде вектор положаја оне тачке у којој нормала површине, у тачки површине одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, додирује повратну линију. Тада је

$$(18)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{r} + a\,\mathfrak{N}_0 ,$$

где је $\mathfrak{N}_0$ орт нормале површине, као увек, и a неки за сад неодређени скалар. Како је $d\mathfrak{R}$ колинеарно са ортом тангенте повратне линије, а орт нормале је колинеаран са тангентом повратне линије, то је

$$(19)\qquad d\mathfrak{R} = \sigma\,\mathfrak{N}_0 ,$$

где је σ неки произвољни скалар. Према томе диференцирањем из (18) следује

$$(20)\qquad d\mathfrak{r} + a\, d\,\mathfrak{N}_0 = \sigma\,\mathfrak{N}_0 ,$$

одакле, после скаларног множења са $\mathfrak{N}_0$, следује $\sigma=0$, пошто је $d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{N}_0=0$ и $d\mathfrak{N}_0\cdot\mathfrak{N}_0=0$.

Стога је

$$(21)\qquad d\mathfrak{r} + a\, d\mathfrak{N}_0 = 0 .$$

Ово је познати Родригов (Olinde Rodrigues) образац; он даје услов, који мора бити испуњен, ако нормале на површини образује развојну површину.

Кад се (21) напише у развијеном облику, добија се

$$\dot{\mathfrak{r}}_u\,du + \dot{\mathfrak{r}}_v\,dv + a(\dot{\mathfrak{N}}_{0u}\,du + \dot{\mathfrak{N}}_{0v}\,dv) = 0 ,$$

одакле, после скаларног множења са $\dot{\mathfrak{r}}_u$, одн. $\dot{\mathfrak{r}}_v$, следују за $a=\rho$ једначине (5) и (7). Одавде је очигледно значење скалара a који је у почетку био неодређен. Јасно је уосталом да се Родригов образац (21) може извести и из једначине (5) и (7). Према томе, нормале на површини дуж линије кривине образују развојну површину, и то: тангентну површину у општем случају; а ако повратна линија дегенерише у тачку, онда конусну или цилиндричну површину. Отсечак нормале од продорне тачке са површином до повратне линије једнак је једном од главних полупречника кривине у посматраној тачки.

Асимптотне линије површине су оне линије на површини у чијим се свима тачкама оскулаторна раван поклапа са тангентном равни површине, одн. бинормала криве и нормала површине су колинеарне у свима тачкама такве криве.

Једначина асимптотне линије може се одмах написати у векторском облику из услова који је одређен дефиницијом, тј.

$$(22)\qquad (d\mathfrak{r}\times d^2\mathfrak{r})\times\mathfrak{N}_0 = 0 ,$$

јер, како смо видели, $d\mathfrak{r}$ и $d^2\mathfrak{r}$ леже у оскулаторној равни за сваку криву линију.

Ако се двоструки векторски производ у једначини (22) развије и узме у обзир да је на површини увек $d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{N}_0=0$, добија се

$$-d\mathfrak{r}(d^2\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{N}_0) = 0$$

и једначина (22) се своди на

$$(23)\qquad \mathfrak{N}_0\cdot d^2\mathfrak{r} = 0 .$$

Кад се за орт $\mathfrak{N}_0$ нормале на површини унесе вредност (6) из т. 47 и $d^2\mathfrak{r}$ напише у развијеном облику, тј.

$$d\mathfrak{r}^2 = \ddot{\mathfrak{r}}_{uu}\,du^2 + 2\ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\,du\,dv + \ddot{\mathfrak{r}}_{vv}\,dv^2$$

добија се, пошто је $EG-F^2 \neq 0$, диференцијална једначина асимптотних линија у векторском облику

(24) $$[\ddot{\mathfrak{r}}_{uu}du^2+2\ddot{\mathfrak{r}}_{uv}\,du\,dv+\ddot{\mathfrak{r}}_{vv}\,dv^2,\ \dot{\mathfrak{r}}_u,\ \dot{\mathfrak{r}}_v]=0,$$

одн. у скаларном облику

(25) $$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$$

Дакле, асимптотне линије су такве линије на површини, дуж којих је друга основна форма површине једнака нули.

Нормални пресек површине, положен кроз тангенту ма у којој тачки асимптотне линије, има у тој тачки превојну тачку (кривина нула), те се стога асимптотне линије зову и превојне линије површине. Према знаку M^2-LN имаћемо две породице асимптотних линија, кад је $M^2-LN>0$. Кад је $M^2-LN=0$, обе породице асимптотних линија се поклапају и стварно постоји само једна породица асимптотних линија, а у случају $M^2-LN<0$ асимптотне линије су имагинарне.

Кад је површина дата једначином $z=z(x,y)$, онда је, како смо видели, $L=r$, $M=s$ и $N=t$ и диференцијална једначина асимптотних линија изгледа у том случају

(26) $$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0,$$

одн.

(27) $$r+2sy'+ty'^2=0.$$

Ако се једначина (1) претходнога параграфа помножи скаларно ортом геодезиске нормале, добиће се пројекција вектора кривине на правац геодезиске нормале, тзв. *геодезиска кривина*, тј.

(28) $$\kappa_g=\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{g}}{R}=\frac{\sin\vartheta}{R}=\text{const.}$$

За криве чија се оскулаторна раван поклапа са тангентном равни површине имамо

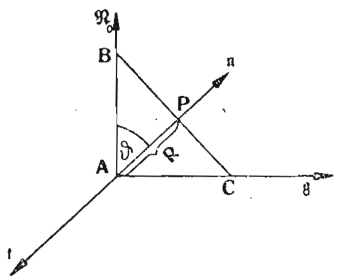
(29) $$\kappa_g=\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{g}}{R}=\frac{\sin\vartheta}{R}=\frac{1}{\rho_g},$$

где смо са $\frac{1}{\rho_g}$ обележили геодезиску кривину посматране криве у таквом случају. Према томе имамо, слично Менијеовој теореми,

(30) $$R=\rho_g\sin\vartheta,$$

где је ρ_g полупречник геодезиске кривине.

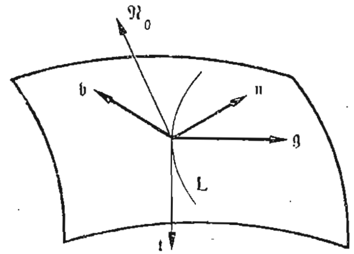
Веза између полупречника кривине R криве линије на површини, полупречника кривине нормалног пресека ρ и полупречника геодезиске кривине ρ_g може се геометриски претставити на овај начин (сл. 157).



Сл. 157

На главној нормали посматране криве одмери се $R=AP$ и повуче права $BC\perp AP$ кроз тачку P. Тада је $AB=\rho$, а $AC=\rho_g$, што је очигледно са слике.

Геодезиска кривина ма које криве повучене на површини може се одредити из обрасца (28) на овај начин.



Сл. 158

Наиме, увек је $\sphericalangle(\mathfrak{g}\,\mathfrak{n})=\sphericalangle(\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{b})$, где је, према ранијем, $\mathfrak{b}$ орт бинормале (сл. 158). Стога је

(31) $$\kappa_g=\frac{\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{n}}{R}=\frac{\mathfrak{N}_0\cdot\mathfrak{b}}{R}.$$

Међутим, ако узмемо, ради упрошћења извођења, да су параметри u и v функције лука s посматране криве L на површини, тј. $u=u(s)$ и $v=v(s)$, онда је $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ те, према једначини (11) у т. 44.1, имамо у том случају

$$\mathfrak{b}=\frac{\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''}{|\mathfrak{r}''|},$$

где је онда $|\mathfrak{r}''|=\frac{1}{R}$. Према томе

(32) $$\kappa_g=(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot\mathfrak{N}_0=[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}''\,\mathfrak{N}_0],$$

или, у скаларном облику,

(33) $$\kappa_g=\begin{vmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

где су N_1, N_2 и N_3 одређени једначинама (7) у т. 47.

Геодезиска кривина нормалнога пресека једнака је нули. Линије на површини у чијим је свима тачкама геодезиска кривина једнака нули зову се *геодезиске линије.* За њих се може још рећи да су то оне криве линије на површини, које имају особину да се у свакој њиховој тачки нормала на површини налази у оскулаторној равни. Отуда, ако се тај услов изрази, може се диференцијална једначина геодезиских линија у векторском облику одмах написати

$$(34) \qquad \mathfrak{N}_0 \cdot (d\mathfrak{r} \times d^2\mathfrak{r}) = 0,$$

где се $\mathfrak{N}_0$, $d\mathfrak{r}$ и $d^2\mathfrak{r}$ лако одређују из једначине површине $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$.

Диференцијална једначина геодезиских линија је, према томе, другог реда и одређује кроз сваки управљени елемент на површини само једну геодезиску линију.

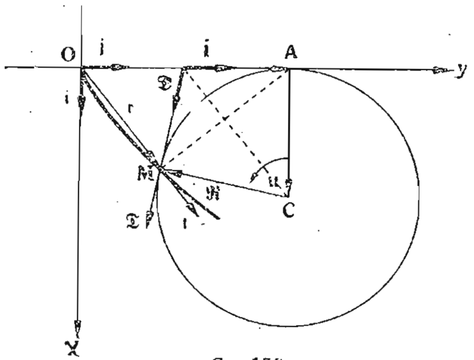
Из дубљих испитивања следује да су под извесним условима геодезиске линије најкраће спојнице двеју датих тачака на површини.

49. Примери

1. Циклоида

Крива линија коју описује тачка круга, кад се овај котрља без клизања по некој правој, зове се *циклоида.*

Узмимо да се круг полупречника a котрља без клизања по y оси (сл 159.) и да криву описује тачка M круга која се у почетку кретања налазила у координатном почетку O. Тада је са слике, очигледно,



Сл. 159

$$(1) \qquad \mathfrak{r} = a\mathfrak{i} + s_1\mathfrak{j} + \mathfrak{R},$$

где је $a\mathfrak{i} = \overrightarrow{AC} = \text{const.}$, $s_1\mathfrak{j} = \overrightarrow{OA}$, а s_1 је лук AM круга генератора и најзад $\mathfrak{R} = \overrightarrow{CM}$, вектор положаја тачке M круга генератора у односу на његов центар као пол.

Да бисмо одредили орт $\mathfrak{t}$ тангенте циклоиде треба једначину (1) диференцирати по луку s циклоиде, тј. образовати

$$(2) \qquad \mathfrak{r}' = \mathfrak{t} = \mathfrak{j}\frac{ds_1}{ds} + \frac{d\mathfrak{R}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}.$$

Како је $\dfrac{d\mathfrak{R}}{ds_1}$ извод вектора положаја тачке на кругу генератору по луку s_1 тога круга, тај извод одређује орт $\mathfrak{T}$ тангенте круга у тачки M, тј.

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{R}}{ds_1} = \mathfrak{T}.$$

Уношењем ове вредности у једначину (2) добија се за орт $\mathfrak{t}$ најзад израз

$$(4) \qquad \mathfrak{t} = (\mathfrak{j} + \mathfrak{T})\frac{ds_1}{ds}.$$

Ова једначина показује да је у свакој тачки циклоиде правац тангенте одређен симетралом угла ACM, одн. симетралом угла између праве по којој се круг генератор котрља и тангенте тог круга у односној тачки. То следује отуда што је, према једначини (4), орт $\mathfrak{t}$ збир два вектора једнаких интензитета који одређују ромб.

Ако се угао ACM обележи са u, са слике се одмах за интензитет збира $\mathfrak{j} + \mathfrak{T}$ добија

$$(5) \qquad |\mathfrak{j} + \mathfrak{T}| = \sqrt{(\mathfrak{j} + \mathfrak{T})^2} = \sqrt{2(1 - \cos u)} = 2\sin\frac{u}{2}.$$

Изједначењем интензитета леве и десне стране једначине (4) добија се

$$1 = 2\sin\frac{u}{2}\frac{ds_1}{ds},$$

одакле је

$$(6) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}.$$

За одређивање кривине циклоиде треба једначину (4) диференцирати још једном по луку s, па се добија

$$(7) \qquad \mathfrak{r}'' = \mathfrak{t}' = \kappa\mathfrak{n} = \frac{d\mathfrak{T}}{ds_1}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + (\mathfrak{j} + \mathfrak{T})\frac{d^2 s_1}{ds^2}.$$

Правац нормале циклоиде одређен је тетивом круга која спаја додирну тачку A са тачком M, јер је $\mathfrak{t}' \perp \mathfrak{t}$, одн., с обзиром на једначину (4), $\mathfrak{n} \perp (\mathfrak{j} + \mathfrak{T})$. Стога, ако једначину (7) помножимо скаларно ортом нормале $\mathfrak{n}$ добићемо за кривину

$$(8) \qquad \kappa = \left(\frac{d\mathfrak{T}}{ds_1} \cdot \mathfrak{n}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2.$$

Ако се узме у обзир да је

$$\frac{d\mathfrak{T}}{ds_1}=\frac{1}{a}\mathfrak{N},$$

вектор кривине круга генератора, где је $\mathfrak{N}$ орт нормале круга у тачки M, и унесе вредност за $\frac{ds_1}{ds}$ из једначине (6), може се најзад написати

(9) $$\varkappa=\frac{1}{4a\sin^2\frac{u}{2}}(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{n})=\frac{1}{4a\sin\frac{u}{2}}=\frac{1}{2\overline{MA}}.$$

Проучавање циклоиде може се извести и на једначини

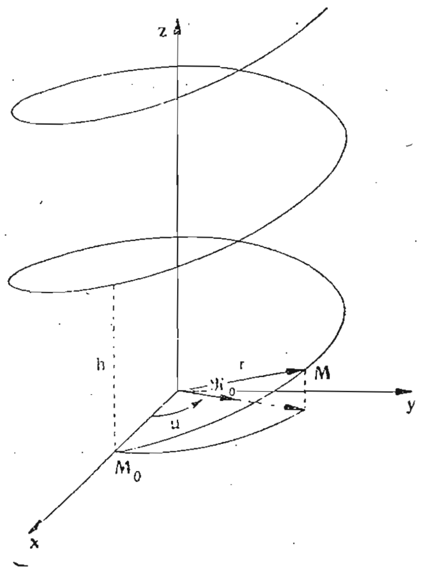
(10) $$\mathfrak{r}=a(u-\sin u)\mathfrak{i}+a(1-\cos u)\mathfrak{j},$$

која се добија из једначине (1), ако се узме у обзир да је

$$s_1=au \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}=-a\mathfrak{i}\cos u-a\mathfrak{j}\sin u.$$

2. Кружна завојна линија

Кружна завојна линија или *кружна хелиса* зове се геометриско место тачака на кружном цилиндру чије растојање од основе при обилажењу цилиндра расте пропорционално централном углу основног круга.



Сл. 160

Нека, на пр., z-оса буде оса цилиндра и нека почетак M_0 завојнице буде на x-оси, а завијање нека буде десно (сл. 160). Тада је вектор положаја ма које тачке M на кривој одређен изразом

(1) $$\mathfrak{r}=a\mathfrak{i}\cos u+a\mathfrak{j}\sin u+\mathfrak{k}bu,$$

где је a полупречник основног круга цилиндра, u централни угао основног круга рачунат од x-осе а b неки фактор пропорционалности.

Ако се са h обележи вредност координате z за $u=2\pi$, тада је

$$h=2\pi b, \quad \text{одн.} \quad b=\frac{h}{2\pi};$$

h се зове *висина хода* завојне линије.

Из једначине (1) следује

(2) $$d\mathfrak{r}=-\mathfrak{i}a\sin u\,du+\mathfrak{j}a\cos u\,du+\mathfrak{k}b\,du,$$

тј.

(3) $$d\mathfrak{r}^2=ds^2=(a^2+b^2)\,du^2,$$

а одавде, најзад,

(4) $$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Орт тангенте $\mathfrak{t}$ завојне линије добија се диференцирањем вектора положаја (1) по луку криве s, дакле, с обзиром на (4),

(5) $$\mathfrak{r}'=\mathfrak{t}=\frac{d\mathfrak{r}}{du}\frac{du}{ds}=-\mathfrak{i}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u+\mathfrak{j}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u+\mathfrak{k}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

одакле је

(6) $$\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{k}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Према томе, завојна линија сече све изводнице цилиндра под константним углом.

Да бисмо одредили кривину завојне линије и орт њене главне нормале треба одредити, као што знамо, други извод по луку вектора положаја, тј. с обзиром на једначину (4)

(7) $$\mathfrak{r}''=\mathfrak{t}'=\varkappa\mathfrak{n}=\frac{a}{a^2+b^2}(-\mathfrak{i}\cos u-\mathfrak{j}\sin u).$$

Дакле

(8) $$\varkappa=\frac{a}{a^2+b^2}$$

и

(9) $$\mathfrak{n}=-\mathfrak{i}\cos u-\mathfrak{j}\sin u.$$

То значи да је главна нормала паралелна орту $\mathfrak{N}_0$ вектора положаја пројекције посматране тачке на раван xOy и да има супротни смер.

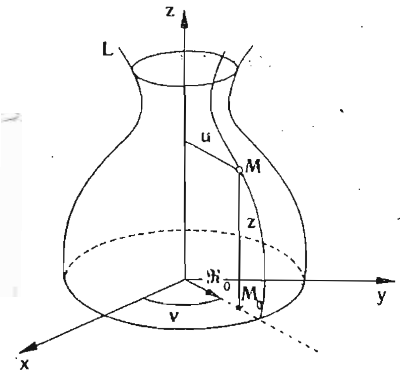
За торзију завојне линије добија се на основу једначина (5) и (7) према обрасцу (7) у т. 44.3 пошто се израчуна $\mathfrak{r}'''$, израз

(10) $$\tau=\frac{\mathfrak{r}'\cdot(\mathfrak{r}''\times\mathfrak{r}''')}{(\mathfrak{r}'')^2}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Према томе и кривина и торзија завојне линије су константне.

3. Обртна површина

Обртна или *ротациона површина* настаје ротацијом неке криве L (генератрисе) око осе која не сече криву (сл. 161). Све равни кроз осу ротације секу овакву површину по кривим линијама које су подударне са генератрисом L и зову се *меридијани* обртне површине. Све равни нормалне на оси секу обртну површину по круговима, у општем случају, различите величине чији су центри на оси. Ови кругови зову се *упоредници* обртне површине.



Сл. 161

Узмимо за осу ротације, као на слици, осу z и са u означимо растојање ма које тачке генератрисе L од осе z. Тада се једначина генератрисе може написати у облику $z=f(u)$.

Координате ма које тачке M на обртној површини могу се очигледно изразити на овај начин

(1) $$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=f(u),$$

где је v угао између равни криве која се обрће и неке почетне равни, на пр., равни xOz (види слику).

Дакле, векторска једначина обртне површине имаће облик

(2) $$\mathfrak{r}=\mathfrak{i}u\cos v+\mathfrak{j}u\sin v+\mathfrak{k}f(u),$$

где су u и v Гаусови параметри обртне површине.

Да бисмо проучили особине обртне површине треба одредити прве и друге парцијалне изводе вектора положаја $\mathfrak{r}$ по u и v, тј.

(3) $$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}}_u &= \mathfrak{i}\cos v+\mathfrak{j}\sin v+\mathfrak{k}f'(u), \\ \dot{\mathfrak{r}}_v &= -\mathfrak{i}u\sin v+\mathfrak{j}u\cos v, \\ \ddot{\mathfrak{r}}_{u^2} &= \mathfrak{k}f''(u), \\ \ddot{\mathfrak{r}}_{uv} &= -\mathfrak{i}\sin v+\mathfrak{j}\cos v, \\ \ddot{\mathfrak{r}}_{v^2} &= -\mathfrak{i}u\cos v-\mathfrak{j}u\sin v. \end{aligned}$$

Према томе, основне величине првог реда E, F и G и основне величине другог реда L, M и N дате су на основу образаца из т. 47 изразима

(4) $$\begin{aligned} &E=1+f'^2(u), \qquad F=0, \qquad G=u^2; \\ &L=\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}, \qquad M=0, \qquad N=\frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}. \end{aligned}$$

Параметарске линије $u=\mathrm{const.}$ су упоредници, а $v=\mathrm{const.}$ су меридијани обртне површине. Оне образују ортогоналну мрежу кривих линија на обртној површини, пошто је $F=0$.

Метричка форма обртне површине одређена је изразом

(5) $$ds^2=[1+f'^2(u)]\,du^2+u^2\,dv^2.$$

Орт нормале обртне површине ма у којој тачки дат је обрасцем

(6) $$\begin{aligned} \mathfrak{N}_0 &= \frac{-\mathfrak{i}f'(u)\cos v-\mathfrak{j}f'(u)\sin v+\mathfrak{k}}{\sqrt{1+f'^2(u)}}= \\ &= \frac{-f'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}}(\mathfrak{i}\cos v+\mathfrak{j}\sin v)+\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Међутим је очигледно

(7) $$\mathfrak{R}_0=\mathfrak{i}\cos v+\mathfrak{j}\sin v,$$

где је $\mathfrak{R}_0$ орт вектора положаја тачке M_0 пројекције тачке M на раван xOy.

Према томе орт нормале ма у којој тачки обртне површине лежи у односној меридијанској равни, јер се увек може изразити као линеарна комбинација орта $\mathfrak{R}_0$ и орта $\mathfrak{k}$.

Како нормале обртне површине секу осу ротације, све нормале дуж неког меридијана образују раван, дакле, развојну површину и, према томе, меридијани су линије кривине обртне површине. Како су упоредници нормални на меридијанима обртне површине, следује да је друга породица линија кривине на обртној површини дата упоредницима.

За Гаусову и средњу кривину обртне површине ма у којој тачки може се, на основу образаца (10) и (11) у т. 48.1 и једначина (4), одмах написати

(8) $$K=\frac{f'(u)f''(u)}{u[1+f'^2(u)]^2}; \qquad 2H=\frac{f'(u)[1+f'^2(u)]+uf''(u)}{u[1+f'^2(u)]^{3/2}}.$$

На пр., за кружни конус са врхом у координатном почетку биће $u = mz$ и, према томе,

(9) $$f'(u) = \frac{1}{m}, \qquad f''(u) = 0,$$

пошто је m константа. Дакле, за кружни конус

(10) $$K = 0, \quad 2H = \frac{1}{mz\sqrt{1+m^2}}.$$

4. Прав хеликоид

Нека водиља неке праволиниске површине буде права линија (па пр. оса z), тј. нека буде (т. 46)

(1) $$\mathfrak{p} = av\mathfrak{k},$$

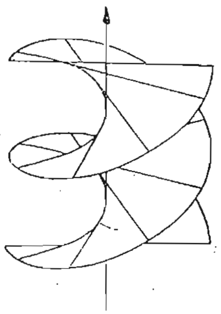
где је a нека константа, а v променљив параметар. Нека генератриса буде права која је стално нормална на водиљи и врши завојно кретање око ње, тј. нека је њен орт одређен једначином

(2) $$\mathfrak{e} = \mathfrak{i}\cos v + \mathfrak{j}\sin v.$$

Тада се једначина такве праволиниске површине може написати у векторском облику

(3) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{p} + \mathfrak{e}u = \mathfrak{i}\,u\cos v + \mathfrak{j}\,u\sin v + \mathfrak{k}\,av,$$

где је u нови промењљиви параметар. Параметар v очигледно претставља угао обртања генератрисе око осе z.



Сл. 162

Оваква површина (сл. 162) зове се *прав хеликоид* зато што је водиља права, иначе може се за водиљу узети ма која крива линија у простору.

Прво што је из једначине (3) очигледно, то је да су линије $u = \text{const.}$ обичне кружне завојне линије, а линије $v = \text{const.}$ праве линије.

Из једначине (3) одмах се добија

(4) $$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2, \qquad L = 0, \quad M = -\frac{a}{\sqrt{u^2+{}^2a}}, \quad N = 0.$$

Према томе метричка форма ове површине је

(5) $$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2,$$

дакле, параметарске линије u и v на овој површини образују ортогоналну мрежу те су праволиниске генератрисе нормале завојних линија.

За стежну линију се, према једначини (10) т. 46, добија

(6) $$\mathfrak{q} = av\mathfrak{k},$$

а то је z-оса. Средња кривина у свакој тачки ове површине једнака је нули. Све тачке на овој површини имају хиперболичку кривину.

Задаци

1. Доказати да је и за криве у простору $\varkappa = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, где је $d\alpha$ угао контингенције.

2. Доказати да је торзија криве $\tau = \frac{d\varepsilon}{ds}$, где је $d\varepsilon$ угао између бинормала у две бесконачно блиске тачке криве.

3. Доказати да је линија права, ако је њена кривина једнака нули.

4. Доказати да је крива линија равна, ако је торзија једнака нули.

5. Нека буде дата тачка M_0 неке криве $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$, одређена вектором положаја $\mathfrak{r}_0$ и њој бесконачно блиска тачка M на растојању ds. Показати да су растојања те тачке од нормалне, ректификационе и оскулаторне равни реда ds, ds^2 и ds^3.

6. Тачка се креће по кружној завојној линији брзином константног интензитета v. Наћи њено убрзање.

7. Тачка се креће једноликом брзином интензитета v по кругу полупречника r са центром у координатном почетку. Доказати да је њено убрзање

$$\mathfrak{w} = -\frac{v^2}{r^2}\,\mathfrak{r}.$$

8. Нека буде дата једначина параболоида $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$.

a) Одредити главне кривине;
b) Одредити линије кривине;
c) Одредити асимптотне линије.

9. Дата је крива L одређена једначином

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{i}\sin^2 u + \mathfrak{j}\left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{u}\right) + \mathfrak{k}\sin u.$$

a) Одредити лук криве у функцији од параметра u;
b) Одредити косинусе праваца тангенте, главне нормале и бинормале;
c) Одредити кривину и торзију.

10. Иста питања за криву

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}au^2 + \mathfrak{j}au^3 + \frac{9}{16}au^4\mathfrak{k}.$$

11. Нека буде дата крива линија у простору са константном кривином и торзијом. Израчунати за такву криву $\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$ и $\frac{d^2\mathfrak{n}}{ds^2}$ помоћу Френеових образаца.

Извести из тих резултата да је главна нормала такве криве паралелна сталној равни и показати да она мора бити кружна завојна линија.

12. Израчунати управљени површински елемент $d\mathfrak{f}$ и основне величине првог реда E, F и G за површину

$$\mathfrak{r}=(u+v^2)\,\mathfrak{i}+(v+u^2)\,\mathfrak{j}+uv\,\mathfrak{k}.$$

13. Написати једначину оскулаторне равни, главне нормале и бинормале и одредити кривину и торзију конусне завојне линије одређене једначином

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{i}\,u\cos u+\mathfrak{j}\,u\sin u+\mathfrak{k}\,a\,u.$$

14. Одредити Гаусову кривину обртне површине која се добија ротацијом трактрисе око њене асимптоте.

15. Показати да су све тачке развојне површине параболичке.

ГЛАВА V

ТЕОРИЈА ПОЉА

50. Функције положаја. Поље. Врсте поља

Геометриске, механичке и физичке величине могу зависити од положаја тачке у којој се посматрају. За такве се величине каже да су *функције положаја* или *функције тачке*.

Простор у коме сваком положају тачке одговара, по одређеном закону, само једна вредност неке величине зове се *поље* ове величине.

Поље може бити: 1. *просторно*, и то, *неограничено* (читав простор) као у случају температуре васионе или универзалне гравитације, или *ограничено* као, на пр., поље притиска Земљине атмосфере; 2. *површинско* (специјално *равно*), на пр., у случају неке неравномерно загрејане плоче или Земљина магнетизма посматрана на површини Земље; 3. *линиско*, у случају кад се вредност неке величине посматра и мења само дуж линије или дела линије, на пр., у случају јачине струје у проводној жици.

Према врсти посматране промењиве величине, која је функција положаја, поља могу бити: 1. *скаларна*, ако је скалар функција положаја (на пр., температура Земљине атмосфере, густина атмосфере, потенцијал неког електричног проводника итд.); 2. *векторска*, ако је посматрана функција положаја вектор (на пр., брзина ветра, Земљина тежа, електрична сила, магнетна сила итд.); 3. *тензорска*, ако се посматра тензор као функција положаја (на пр., деформација делића у непрекидној средини итд.) итд.

Ми ћемо се у овим излагањима ограничити само на проучавање скаларних и векторских поља. При томе ћемо имати посла са скаларним и векторским функцијама које зависе од вектора положаја, дакле, од векторске промењиве. Истина, овде је независно промењиви вектор — вектор положаја $\mathfrak{r}$, али то је практички најважнији случај. У сваком другом случају се и сваки други вектор као независно променљива може сматрати као вектор положаја. Свако природно поље се мења у току времена у општем случају, тј. посматрана величина је променљива и у времену. Ми се, међутим, ограничавамо углавном на посматрање само оних промена величина у пољу које зависе од положаја и које се зову *стационарне* промене.

51. Скаларно поље

За потпуно одређивање посматраних скалара у пољу мора се знати закон њихове зависности од положаја у математичком облику, тј. мора бити задат скалар као функција вектора положаја

$$U = U(\mathfrak{r}), \tag{1}$$

ако смо променљиви скалар обележили са U. Ова функција, с обзиром на конкретна значења и функције и поља, мора бити реална, а зависи од векторске променљиве. Према томе у случају скаларног поља имамо посла са скаларном функцијом од векторске променљиве.

Може се, наравно у посматраном пољу узети и неки Декартов координатни систем и скаларна функција положаја изразити као обична функција од три реалне скаларне независно променљиве x, y, z, тј.

$$U = U(x, y, z). \tag{2}$$

Скаларна функција положаја може се одредити и помоћу генералисаних координата. На пр. у пољу барометарског притиска Земљине атмосфере важи за притисак p на висини h изнад морског нивоа образац

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}, \tag{3}$$

где је p_0 нормални притисак на морском нивоу, g убрзање Земљине теже и ρ_0 густина ваздуха при нормалном притиску. Ако се са r обележи растојање посматране тачке од центра Земље, са R полупречник Земље, образац (3) може се изразити у облику

$$p = f(\vartheta, \varphi) e^{-\psi(\vartheta, \varphi)(r-R)} = F(r, \vartheta, \varphi), \tag{4}$$

где су ϑ и φ географска ширина и дужина, а p_0, g и ρ_0 зависе од њих. На тај начин је барометарски притисак изражен у функцији сферних координата.

Према томе, видимо, да се проучавање скаларних поља може свести на проучавање скаларних реалних функција од

три променљиве у општем случају. Међутим, при таквом начину проучавања не виде се лако величине, које су природно везане за само поље (које су инваријантне у односу на избор координатног система), као што је то случај при векторском проучавању, а да и не говоримо о већој прегледности рада. Ипак ћемо се често служити и координатама да бисмо с једне стране искористили већ познате резултате анализе, а с друге стране, да бисмо пружили могућност читаоцу да се оспособи за лако превођење аналитичких израза на очигледнији векторски облик.

Ако вектор положаја који одређује положај тачке у пољу није произвољан, већ треба да задовољава неку једначину $f(\mathfrak{r}) = 0$, онда је поље површина одређена том једначином. Исто тако, ако Декартове правоугле координате x, y, z, које одређују положај тачке у посматраном пољу, морају са своје стране задовољавати неку једначину облика $z = f(x, y)$, онда је поље површина одређена том једначином. У случају да те координате морају задовољавати две једначине облика $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$, онда је поље линија у простору одређена тим једначинама

На пр., ако се вредности скалара U одређена једначином (1) посматрају само у оним тачкама простора за које је пројекција вектора положаја $\mathfrak{r}$ на неки константни правац, одређен ортом $\mathfrak{n}$, извесна константна k, тј. ако је

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} = k,$$

поље је раван нормална на том константном правцу. С друге стране, ако се вредности скалара дата једначином (2) посматрају само у оним тачкама чије координате задовољавају једначину

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

поље је површина сфере полупречника R.

Ако координате посматране тачке морају задовољавати неку неједначину, поље је просторно, на пр. услов

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqq 0,$$

одређује као поље простор ограничен сфером полупречника R са центром у координатном почетку заједно са тачкама на самој сфери.

Векторска неједначина

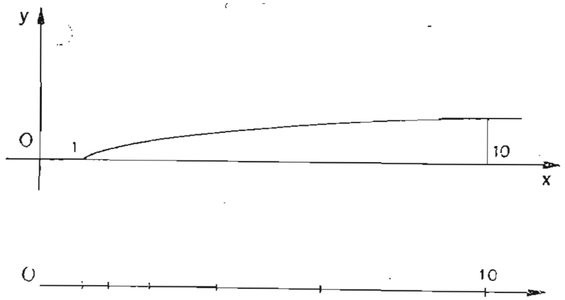
$$|\mathfrak{r}| \leqq a, \tag{5}$$

где је a нека позитивна константа, одређује такође као поље простор у унутрашњости сфере полупречника a са центром у координатном почетку заједно са тачкама на самој сфери. Ако, међутим, орт $\mathfrak{r}_0$ вектора положаја $\mathfrak{r}$ мора бити константан, рецимо, $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{i}$, неједначина (5) дефинише као поље само дуж $0 \leqq x \leqq a$. Најзад, ако пројекција вектора положаја $\mathfrak{r}$ на неки сталан правац мора бити константна, на пр. $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{k} = 0$, поље одређено неједначином (5) је кружна површина полупречника a са центром у координатном почетку, која, у овом случају, лежи у равни xOy, заједно са тачкама на периферији круга, итд.

У извесним случајевима, дати су поред једначине која одређује поље, и неки споредни услови који одређују границе посматраног поља.

52. Графичко претстављање скаларног поља. Еквискаларне површине. Еквискаларне линије

Поред учињених претпоставки, за скаларне функције положаја U увек се претпоставља да су непрекидне у свом пољу, тј. да је скаларно поље непрекидно. Скаларно поље је непрекидно у тачки M_0 поља ако, за произвољно узет мали позитивни број ε, постоји други позитивни број η тако, да за све тачке поља M које задовољавају неједначину $|\overrightarrow{M_0 M}| < \eta$ важи $|U(M) - U(M_0)| < \varepsilon$, где смо са $U(M)$ и $U(M_0)$ обележили вредност скаларне функције $U(\mathfrak{r})$ у тачкама M и M_0. Само поље је онда непрекидно, ако је непрекидно у свакој својој тачки. Осим непрекидности претпоставља се да посматрани променљиви скалар не може имати у некој коначној области поља идентички константну вредност.



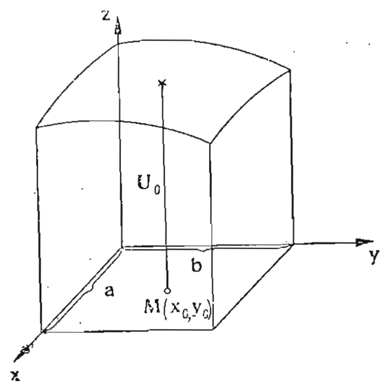
Сл. 163

Графичко претстављање поља своди се на графичко претстављање функција које га математички изражавају, но ипак ћемо подвући извесне чињенице.

1. Узмимо да се ради о линеарном пољу (дуж AB). Тада се скалар U може сматрати као функција од x, јер се посматрана дуж може узети на x-оси и положај тачака на дужи биће одређен вредностима x у интервалу од A до B. Тада је $U = U(x)$ за $a \leqq x \leqq b$. Геометриску слику о пољу скалара U можемо добити, ако за сваку тачку пренесемо односну вредност скалара као ординату и нацртамо криву $U = U(x)$ у координатном систему оса x и U у интервалу од A до B. На слици 163 нацртана крива претставља поље скалара $U = y = \log_{(10)} x$ у интервалу од 1 до 10.

Поред овог начина претстављања поља, где се излази из самог поља, постоји начин да се поље претстави графички очигледно и у самом пољу. Он се састоји у томе што се на x-оси у посматраном интервалу нацрта нарочита функционална скала, а она се састоји у овоме. За одређену вредност скалара $U(x) = U_0$ израчуна се односна вредност $x_0 = f(U_0)$, тј. вредности скалара U_0 одговара тачка са апсцисом x_0 итд. Поред те тачке на дужи која одређује наше поље напише се вредност скалара U коју он има у тој тачки. Тако се настави за низ вредности променљивог скалара које се једна од друге разликују за исту величину. За скаларну функцију $U = \log_{(10)} x$ имамо: за $U_0 = 0$, $x_0 = 1$, за $U_1 = 0,2$, $x_1 = 1,6$; за $U_2 = 0,4$, $x_2 = 2,5$; за $U_3 = 0,6$, $x_3 = 4$; за $U_4 = 0,8$, $x_4 = 6,3$; и за $U_5 = 1$, $x_5 = 10$ (сл. 163).

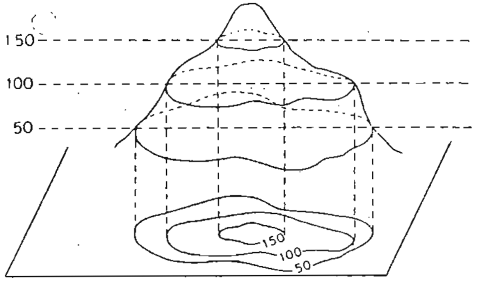
И са ове слике је очигледно исто оно што и са прве за ову скаларну функцију, а то је, да она све спорије расте. На првој слици се то види по све мањим прираштајима ордината (одн. скалара) за исту промену положаја, а на другој је то јасно отуда што истим разликама скаларне функције одговарају све већа растојања у нашем пољу (дужи).



Сл 164

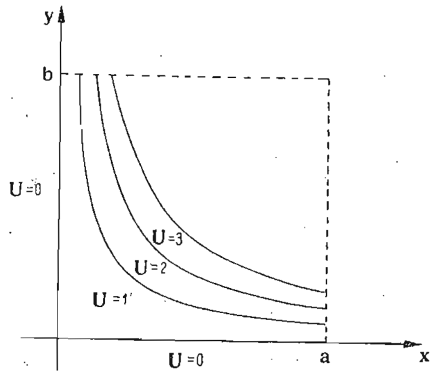
2. Ако се ради о неком равном пољу, онда се може узети да је оно у равни xOy неког Декартова правоуглог координатног система. Тада се скаларна функција $U=z=U(x, y)$ може претставити као део неке површине у простору, која се добија ако се вредност скаларне функције у свакој тачки (x, y) поља претстави као кота, на пр., за све тачке које леже у правоугаонику $0 \leqq x \leqq a$ и $0 \leqq y \leqq b$, ако је поље правоугаоник (сл. 164).

Међутим постоји и овде начин да се остане у самом пољу. Он је аналоган ономе за случај праволиниског поља и у суштини је исто што и топографско претстављање рељефа терена помоћу *изохипса* (линије исте висине) и *изобата* (линије исте дубине). Наиме, паралелно некој хоризонталној равни-површини мора-поставе се равни на истом растојању, и добијени пресеци пројицирају на основну хоризонталну раван ортогонално. Уз сваку од ових пројекција (сл. 165) обележи се њена надморска висина (са знаком +) или дубина (са знаком −). Са такве слике се лако може закључити о рељефу површине, јер је очигледно да је нагиб терена већи онде где су изохипсе гушће и обрнуто. Слика је утолико потпунија уколико је висински размак паралелних пресека мањи.



Сл. 165

На потпуно исти начин може се графички претставити и распоред ма којег скалара U у самом његовом пољу, кад је ово равно. На пр. за $U(x, y)=U_0$ добија се у равни xOy нека крива,



Сл 166

у чијим свима тачкама посматрани скалар има сталну вредност U_0. Ако се овакве линије нацртају за разне вредности скалара које се једна од друге разликују за исту величину, добиће се слика распореда скалара у посматраном пољу. И овде се скалар брже мења онде где су ове линије гушће. Ове линије у скаларном пољу, које се добијају простим спајањем тачака са истом вредношћу скалара, зову се општим именом *еквискаларне линије*. За екстремне вредности скалара у неком равном пољу еквискаларне линије могу дегенерисати у тачке. На (слици 166) је претстављено поље скалара $U=xy$ у границама $0 \leqq x \leqq a$ и $0 \leqq y \leqq b$.

Да се спајањем тачака у равном пољу са истим вредностима скалара добија заиста крива линија може се овако доказати. У близини сваке тачке поља у којој вредност скалара није екстремна мора, према претпоставкама, бити и мањих и већих вредности од вредности у посматраној тачки (јер је скаларна функција по претпоставци непрекидна и не може у коначном делу поља имати идентички константну вредност). Дакле, на *сваком* путу од једне такве мање ка већој вредности мора се налазити вредност једнака узетој вредности, чиме смо доказали да еквискаларна линија заиста постоји.

3. Посматрајмо најзад најопштији случај просторног поља. Већ у случају равног поља први начин графичког претстављања поља – цртање површине – практички је неизводљив, а за просторно поље је такав начин немогућ. Ми бисмо морали изаћи из простора од три димензије, а ван тога простора су наши појмови без садржаја. Према томе у простору је могућ само други начин графичког претстављања поља. Уочимо, дакле, у таквом пољу неку тачку M у којој је вредност посматраног скалара U_0 и ако та вредност (општи случај) није ни максимална ни минимална, онда ма у како малој околини тачке M мора бити тачака у којима ће вредност скалара бити мања и тачака у којима ће вредност скалара бити већа него у тачки M. Отуда, услед непрекидности скаларне функције U, у најближој околини тачке M мора бити и тачака са истом вредношћу скалара као и у тачки M, тј. U_0. На њих се свакако мора наићи при непрекидном прелазу од неке тачке са мањом вредношћу скалара ка тачки са већом вредношћу. Геометриско место свих таквих тачака је нека површина, јер је по претпоставци искључена могућност да вредност посматраног скалара U буде идентички константна у читавом коначном делу тродимензионалног простора. И заиста, једначина

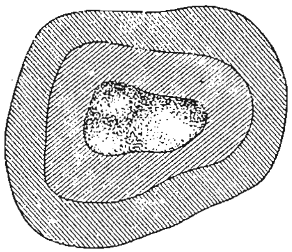
$$(1) \qquad U(\mathfrak{r}) = U_0 = U(\mathfrak{r}_0)$$

или у скаларном облику

$$(2) \qquad U(x, y, z) = U_0 = U(x_0, y_0, z_0),$$

где је $U_0 = \text{const.}$ одређује једначину неке површине.

Овакве површине, геометриско место тачака простора са истом вредношћу посматраног скалара, зову се, уопште, *еквискаларне* или *нивоске површине* скаларног поља. Оне могу у случајевима нарочитих скалара, имати и посебне називе. На пр., у пољу потенцијала неког електричног товара, те површине се зову и *еквипотенцијалне површине*, итд. Различитим вредностима скалара U одговарају различите еквискаларне површине, које не могу имати заједничких тачака, јер би тада функција U била у односној тачки вишезначна, што се противи претпоставци о функцији U. Распоред еквискаларних површина за низ вредности U са сталном разликом даје нам слику распореда скалара у његовом пољу (сл. 167). Онде где су еквискаларне површине ближе скалар се брже мења и обрнуто.



Сл. 167

Ако се еквискаларне површине пресеку неком равни или ма којом површином добијају се равне или просторне криве линије које се зову *еквискаларне линије* или *нивоске линије* скаларног поља у простору. На свакој од њих је вредност скалара константна. Уопште, свака линија која се повуче ма на којој еквискаларној површини је еквискаларна линија.

Међутим, ако је поље нека површина у простору, еквискаларне линије су само оне линије које спајају места са истом вредношћу скалара посматрана на тој површини. На пр., ако се у тачкама Земљине површине посматра: атмосферски притисак, деклинација и инклинација магнетне игле, интензитет хоризонталне компоненте Земљина магнетизма, температура итд., онда имамо посла са површинским пољем, у коме су односне еквискаларне линије: изобаре, изогоне, изоклине, изодинаме, изотерме итд.

Тако су у пољу скалара $U(\mathfrak{r}) = r$ еквискаларне површине концентричне сфере са центром у полу, равномерно распоређене. За $r = 0$ односна сфера дегенерише у тачку. Ако се иста функција положаја $U(\mathfrak{r}) = r$ посматра у неком равном пољу, еквискаларне линије су концентрични кругови са центром у полу итд.

Функција $U(\mathfrak{r}) = \dfrac{1}{r}$ дефинисана је у целом простору осим тачке $r = 0$. Еквискаларне површине у пољу ове функције су опет концентричне сфере. За случај $U = \infty$ добија се само тачка.

Функција $U(\mathfrak{r}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{r} = C$, где је $\mathfrak{c}$ константни вектор, дефинисана је у целом простору и еквискаларне површине су равни нормалне на правцу одређеном вектором $\mathfrak{c}$. Ако се ова скаларна функција посматра у неком равном пољу, еквискаларне линије су праве нормалне на правцу константног вектора $\mathfrak{c}$, итд.

Уопште, еквискаларне површине свих *централних* или *сферних* скаларних поља су концентричне сфере. Под централним скаларним пољем разуме се поље у коме вредност скалара зависи само од растојања r од пола, тј. кад је

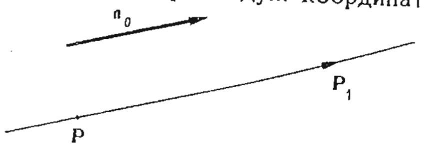
$$U = f(r).$$

Еквискаларне површине свих *цилиндричних* или *аксијалних* скаларних поља су коаксијални цилиндри. Под цилиндричним скаларним пољем разуме се поље у коме вредност скалара зависи само од нормалног растојања ρ од неке дате осе, тј. кад је

$$U = \varphi(\rho).$$

53. Извод скаларне функције у одређеном правцу. Дефиниција и особине градијента

Нека буде дата нека скаларна функција положаја $U(x, y, z)$. Њени парцијални изводи $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ који се добијају кад се по две од променљивих сматрају као константне, показују у ствари начин промене посматране функције у случају померања дуж координатних оса или у правцима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$. Природно је потражити начин промене, наћи извод посматране скаларне функције у *ком било правцу*.



Сл. 168

Узмимо неки правац одређен ортом $\mathfrak{a}_0$, и нека P и P_1 буду две тачке у пољу посматраног скалара, тако да буде

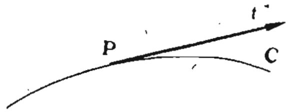
$$\overrightarrow{PP_1} = PP_1\,\mathfrak{a}_0 = \Delta s\,\mathfrak{a}_0,$$

где је $PP_1 = \Delta s$ (сл. 168). Нека, осим тога, вредности посматраног скалара у тим тачкама буду U и U_1. Тада се

$$(1) \qquad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{U_1 - U}{\Delta s} = \frac{dU}{ds}$$

зове *извод функције положаја* $U(x, y, z)$ *у правцу* $\mathfrak{a}_0$, ако тражена гранична вредност постоји.

Уочимо сад у пољу посматраног скалара, кроз дату тачку P, неку криву линију C (сл. 169) одређену векторском једначином



Сл. 169

$$(2) \qquad \mathfrak{r} = x(s)\,\mathfrak{i} + y(s)\,\mathfrak{j} + z(s)\,\mathfrak{k},$$

где је вектор положаја функција лука те криве као променљивог параметра и где је за основу наших посматрања узет Декартов правоугли триједар. Нека се тражи извод скалара U у правцу орта $\mathfrak{t}$ тангенте на ту криву у тачки P.

Како је у овом случају скалар U дуж криве C функција само од лука s те криве добија се

$$(3) \qquad \frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

што се, очигледно, може и овако написати

$$(4) \qquad \frac{dU}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\mathfrak{i} + \frac{dy}{ds}\mathfrak{j} + \frac{dz}{ds}\mathfrak{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k}\right).$$

Први вектор у скаларном производу на десној страни у овом изразу је орт $\mathfrak{t}$ тангенте наше криве C у тачки P (т. 44, једн. 11).

Други вектор на десној страни зависи само од положаја посматране тачке $P(x, y, z)$, а не зависи ни од избора променљивог скалара s ни од правца у коме се извод тражи,

што је очигледно из самог његова израза. То је вектор чије су координате у односу на Декартов правоугли триједар парцијални изводи скаларне функције U по x, y, z тј. $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Тај вектор се зове *градијент скалара* U или *градијент скаларног поља функције* U и пише

$$(5) \qquad \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k},$$

одн.

$$(6) \qquad \operatorname{grad} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}.$$

Реч „градијент“ прво се употребљавала у метеорологији и значила је брзину пада температуре или притиска Земљине атмосфере, дакле, показивала брзину промене неких физичких величина у њихову пољу, но само у смеру опадања. У новом смислу реч „градијент“ је прво употребио Мексвел.

Интензитет градијента помоћу његових Декартових координата износи

$$(7) \qquad |\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

а косинуси углова λ, μ, ν, које градијент чини са осама Декартова правоуглог триједра

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

$$(8) \qquad \cos\mu = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Према томе се за извод (4) скалара U ма у ком правцу одређеном ортом $\mathfrak{t}$ у његову пољу може сад написати

$$(9) \qquad \frac{dU}{ds} = \mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad} U.$$

Ако се углови које правац одређен ортом $\mathfrak{t}$ гради са осама Декартова правоуглог триједра обележе са α, β и γ, извод (9) функције U у правцу $\mathfrak{t}$ може се у скаларном облику написати

$$(10) \qquad \frac{dU}{ds} = \cos\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial U}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Извод скалара у одређеном правцу је опет скаларна величина.

Како је инфинитезимално померање у посматраном пољу дато на основу (т. 44, једн. 11) са $d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}\,ds$, промена скалара U при померању $d\mathfrak{r}$ у пољу добија се обрасцем

$$(11) \qquad dU = d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U.$$

Дакле, промена скалара у његову пољу зависи само од почетне и крајње тачке померања и вредности скалара у тим тачкама, а не од пута којим се прелази из прве у другу тачку. Извод у правцу одређеном тим двема тачкама зависи само од правца и према томе се не мења, ако се узме ма која од кривих линија кроз прву тачку P које у тој тачки имају исту тангенту, дакле, тамо дефинишу исти правац. Стога ds у изразу за извод скалара у одређеном правцу (9) није обичан диференцијал независно промењљиве већ линеарна диференцијална форма, која се може израчунати потпуно само ако је позната једначина одређене криве кроз посматрану тачку P, јер ds није одређено само крајњим тачкама померања.

Место d за ознаку извода у одређеном правцу употребљује се и ∂.

Градијент као вектор може се одредити на овај начин.

Ако се из посматране тачке P са вредношћу скалара U помери ма у ком правцу за $d\mathfrak{r}$ у самој еквискаларној површини која пролази кроз ту тачку, онда је односна промена скалара $dU = 0$ и према томе за сва померања у тангентној равни на еквискаларну површину у тачки P важи, на основу (11),

$$(12) \qquad d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U = 0,$$

одн.

$$(13) \qquad \operatorname{grad} U \perp d\mathfrak{r}.$$

То значи: 1) *да градијент има увек правац нормалан на еквискаларну површину у датој тачки поља.*

Ако се у посматраној тачки P поља замисли нормала на еквискаларну површину кроз ту тачку, са смером куда скалар расте, одређена ортом $\mathfrak{n}_0$, и посматра промена скалара у смеру нормале, може се ставити $d\mathfrak{r} = dn\mathfrak{n}_0$, где је dn елемент нормале. Тада се за такву промену скалара U може написати

$$(14) \qquad dU = dn\mathfrak{n}_0 \cdot \operatorname{grad} U = dn(\mathfrak{n}_0 \cdot \operatorname{grad} U).$$

Како је у овом случају $dU > 0$, пошто се посматра промена скалара у смеру његова рашћења, то је

$$(15) \qquad \mathfrak{n}_0 \cdot \operatorname{grad} U > 0,$$

а како су, осим тога, $\mathfrak{n}_0$ и $\operatorname{grad} U$ колинеарни вектори, то, на основу једначине (15), морају имати исти смер. Значи: 2) *да градијент увек има смер куда скалар U расте.* Дакле, градијент показује смер пораста скалара.

Најзад, из једначине (14) се добија

$$(16) \qquad \frac{dU}{dn} = \mathfrak{n}_0 \cdot \operatorname{grad} U = |\operatorname{grad} U|,$$

с обзиром на чињеницу да су орт $\mathfrak{n}_0$ и градијент колинеарни вектори. То значи: 3) *да је интензитет градијента увек једнак изводу скалара у правцу нормале на еквискаларну површину.* При томе се извод у правцу нормале од два могућа смера узима у смеру куда скалар расте.

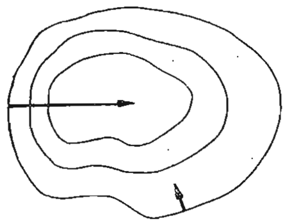
У случају равног скаларног поља треба свуда реч „еквискаларна површина“ заменити са „еквискаларна линија“ и све што је речено остаје у важности.

Интензитет градијента може се са довољном тачношћу одредити на овај начин. Уочимо неко елементарно померање Δn у правцу нормале у позитивном смеру и односну промену скалара ΔU, тада је

$$(17) \qquad |\operatorname{grad} U| \approx \frac{\Delta U}{\Delta n}.$$

Овако израчуната вредност интензитета градијента је утолико тачнија, наравно, што је мање уочено померање Δn.

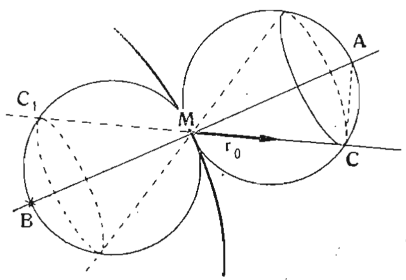
На основу изложенога може се о промени интензитета градијента у пољу посматраног скалара добити очигледна претстава на овај начин. Наиме, конструишу се еквискаларне површине које одговарају разним вредностима скалара U са сталном разликом ΔU, тј. U_0, $U_0 + \Delta U$, $U_0 + 2\Delta U, \ldots$ Како је на основу једначине (17) интензитет градијента на сваком месту поља обрнуто пропорционалан растојању Δn суседних еквискаларних површина на том месту у смеру рашћења скалара, то је густина еквискаларних површина (одн. еквискаларних линија) мерило интензитета градијента на том месту и брзине промене посматраног скалара (сл. 170).



Сл. 170

Вредности извода скалара у разним правцима од неке тачке M у пољу показују, по дефиницији, брзину промене скалара при померању у тим правцима. Брзина те промене, почев од исте тачке, није иста у свима правцима и може се геометриски овако претставити. На еквискаларну површину кроз посматрану тачку M поља (сл. 171) повуче се нормала и са обе стране тачке M пренесу дужи једнаке интензитету градијента у тој тачки према изабраној јединици, тј.

$$MA = MB = |\operatorname{grad} U|.$$



Сл. 171

Те дужи претстављају интензитет извода скалара у правцу нормале на еквискаларну површину у тачки M. На овим дужима, као над пречницима, конструишу се две сфере које у тачки M додирују еквискаларну површину. Уочимо сад у тачки M неки орт и нека је продор његова правца кроз прву сферу тачка C. Тада је

$$MC = MA \cos \sphericalangle (CMA),$$

јер је $\sphericalangle ACM = \frac{\pi}{2}$.

Са друге стране је извод скалара U у правцу орта $\mathfrak{r}_0$ дат изразом

$$\frac{dU}{dr} = \mathfrak{r}_0 \cdot \operatorname{grad} U = |\operatorname{grad} U| \cos(\mathfrak{r}_0, \operatorname{grad} U).$$

Међутим је, с обзиром на конструкцију,

$$\sphericalangle CMA = \sphericalangle (\mathfrak{r}_0, \operatorname{grad} U)$$

те је, према томе,

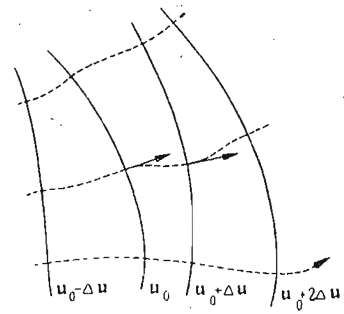
$$\frac{dU}{dr} = MC.$$

Дакле, извод у правцу $\mathfrak{r}_0$ је дат тетивом MC конструисане сфере. Променимо ли смер орта $\mathfrak{r}_0$ добићемо као продор његова правца са другом сфером тачку C_1 и величина извода би одговарала тетиви MC_1.

Према томе, извод у неком правцу у пољу скалара од тачке M има највећу вредност $|\operatorname{grad} U|$ у правцу нормале на еквискаларну површину кроз посматрану тачку, тј. скалар се најбрже мења пошав од неке тачке у пољу у правцу нормале на еквискаларну површину кроз ту тачку. У сваком другом правцу је вредност извода мања и једнака је по апсолутној вредности за све правце који пролазе кроз тачку M и чине исти угао са нормалом на еквискаларну површину (изводнице кружне конусне површине са теменом у тачки M). По апсолутној вредности најмању вредност има извод у правцу који лежи у тангентној равни еквискаларне површине и тада је једнак нули.

Очигледно је да све ово важи и у случају равнога поља, ако се само, место сфера узму, кругови итд.

Слика скаларног поља може се употпунити ако се, сем еквискаларних површина одн. линија, конструишу и *ортогоналне трајекторије* еквискаларних површина. Како смо рекли правац градијента је у свакој тачки поља нормалан на односној еквискаларној површини, па ће се правац градијента у свакој тачки поља поклапати са правцем који одређује таква ортогонална трајекторија (извучена цртасто на сл. 172). Такве ортогоналне трајекторије еквискаларних површина у скаларном пољу зову се *линије поља* или, због претходне особине, *линије градијента* скаларног поља, и дефинишу у свакој својој тачки правац односног градијента.



Сл. 172

Једначина линије градијента следује одмах из дефиниције да управљени елемент $d\mathfrak{r}$ такве линије мора бити колинеаран са градијентом у посматраној тачки, одн.

$$d\mathfrak{r} \times \operatorname{grad} U = 0, \tag{18}$$

или у скаларном облику систем симултаних диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}. \tag{19}$$

Према томе, ако је за неко скаларно поље конструисан систем еквискаларних површина заједно са ортогоналним трајекторијама, онда су у свакој тачки поља одређени: правац градијента — правцем односне линије градијента, интензитет градијента — густином еквискаларних површина (линија) на том месту и смер — смером пораста скаларне функције.

Из саме особине је очигледно да је градијент инваријанта скаларног поља у односу на избор координатног система. Он карактерише природну особину поља. Лако се уверити да градијент не зависи од избора координатног система и на овај начин. Промена dU скалара U у његову пољу нема никакве везе са избором координатног система, а то је случај и са инфинитезималним померањем $d\mathfrak{r}$. Према томе, ако бисмо претпоставили да градијент зависи од избора координатног система, онда бисмо, на пр., у првом случају имали

$$dU = d\mathfrak{r}\cdot \operatorname{grad} U,$$

а у другом

$$dU = d\mathfrak{r}\cdot \operatorname{grad}_1 U,$$

где би grad U и $\operatorname{grad}_1 U$ били различити вектори. Одузимањем ових једначина добија се

$$0 = d\mathfrak{r}\cdot(\operatorname{grad} U - \operatorname{grad}_1 U).$$

Како ова једначина треба да важи за произвољно померање $d\mathfrak{r}$ из одређене тачке, јер градијент зависи само од положаја уочене тачке а никако од правца померања, мора бити

$$\operatorname{grad} U - \operatorname{grad}_1 U = 0,$$

тј.

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}_1 U.$$

Свакој тачки скаларног поља одговара, према томе, одређени вектор — градијент скалара. То значи да сваком скаларном пољу одговара увек векторско поље градијента. Обрнути закључак, како ћемо касније видети, није тачан, тј. не сме се свако векторско поље сматрати као поље градијента неког скалара.

У оним тачкама поља у којима је

$$\operatorname{grad} U = 0, \tag{20}$$

поље има нарочите особине и такве тачке зову се *стационарне* тачке поља. Ако се једначина (20) напише у скаларном облику

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

онда знамо да отуда следује да у таквој тачки функција U може имати максимум (или минимум), ако се сингуларне тачке искључе из посматрања. Геометриски то значи да кроз такве тачке не пролази ниједна еквискаларна површина (одн. ако је поље површинско ниједна еквискаларна линија).

Како образовање градијента претставља и диференцијалну операцију, може се лако доказати да за његову примену важе правила слична правилима диференцијалног рачуна, тј.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \operatorname{grad} C = 0, \quad (C = \text{const}), \\ \text{(II)} & \operatorname{grad}(U + V + \cdots) = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V + \cdots, \\ \text{(III)} & \operatorname{grad}(kU) = k \operatorname{grad} U, \ (k = \text{const}), \\ \text{(IV)} & \operatorname{grad} UV = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U, \\ \text{(V)} & \operatorname{grad} f(U) = f'_U \operatorname{grad} U, \\ \text{(VI)} & \operatorname{grad} f(U, V, \ldots) = f'_U \operatorname{grad} U + f'_V \operatorname{grad} V + \cdots, \end{array} \tag{22}$$

итд.

Доказ ових привила је једноставан и ми ћемо, само примера ради, показати како се доказује тачност, рецимо, петог правила.

По дефиницији су координате grad $f(U)$ парцијални изводи по x, y, z, тј.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z},$$

и према томе

$$\operatorname{grad} f(U) = \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial U}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k}\right) = f'_U \operatorname{grad} U,$$

што је и требало доказати.

При израчунавању градијента неке скаларне функције $U = U(\mathfrak{r})$, најбоље је, да не бисмо прелазили на координате, послужити се обрасцем (11) да се dU претстави као скаларни производ неког вектора $\mathfrak{F}$ (који зависи од $\mathfrak{r}$) и вектора $d\mathfrak{r}$, тј.

$$dU = \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}. \tag{23}$$

Тада је $\mathfrak{F} = \operatorname{grad} U$.

На пр., ако је $U(\mathfrak{r}) = r$, онда се према једначини (5), т. 36 добија $dU = dr = d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_0$. Отуда је одмах

$$\operatorname{grad} r = \mathfrak{r}_0. \tag{24}$$

Ако за две скаларне функције положаја U и V у свакој тачки посматраног простора важи

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} V, \tag{25}$$

онда је, на основу дефиниције градијента, очигледно

$$U = V + \text{const}, \tag{26}$$

тј. ако два скаларна поља имају исто поље градијента, посматрани скалари могу се разликовати за исту константну величину у свим тачкама тога простора.

Обрнуто, ако је за наше скаларно поље познато поље градијента, тј. вредности градијента у свима тачкама, скаларно поље је одређено изузев неке адитивне константе. Међутим, ако је поред поља градијента позната и вредност траженог скалара макар у једној тачки простора, онда је скаларно поље потпуно одређено, јер је тада поменута константа одређена.

Посматрајмо најзад неку скаларну функцију која зависи не само од положаја него и од времена, што је код физичких поља општи случај, тј. $U(\mathfrak{r}, t)$. У том случају је скаларна функција U за одређени тренутак t само функција положаја и према томе јој, при померању $d\mathfrak{r}$ у пољу, одговара *стационарна промена*

$$dU = d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U.$$

С друге стране, ако се посматра промена скаларне функције у некој одређеној тачки поља, онда прираштају времена dt одговара *локална промена* скаларне функције δU, тј.

$$\delta U = U(\mathfrak{r}, t + dt) - U(\mathfrak{r}, t).$$

Ако је U непрекидна функција положаја и времена, што као увек и претпостављамо, онда се локалне промене скаларне функције у две бесконачно блиске тачке поља разликују

само за бесконачно мале величине вишега реда, те се, према томе, може са довољном тачношћу узети да су локалне промене у двема бесконачно блиским тачкама једнаке. На тај начин се за *тоталну промену* dU скаларне функције при померању у нестационарном пољу добија коначно

$$dU = \delta U + d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U. \tag{27}$$

Ако се захтева брзина промене скалара у посматраном пољу, ову једначину треба поделити са dt, па се добија

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} U, \tag{28}$$

где је

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} \quad \text{и} \quad \frac{\delta U}{dt} = \frac{U(\mathfrak{r}, t + dt) - U(\mathfrak{r}, t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Тотална промена dU скаларне функције U зове се и *супстанцијална промена*, јер се може десити да функција U дефинише особину неког материјалног делића.

54. Хамилтонов оператор

Под појмом оператора разуме се сваки симбол који показује да треба извршити неки поступак или неку трансформацију, да се пређе од једног објекта на други објект неког одређеног скупа величина. Тако је симбол $+\sqrt{}$ оператор који, примењен на бројеве, сваком броју одређује други број на потпуно одређени начин, на пр. броју 16 – број 4 итд. Исто тако и симбол $\dfrac{\partial}{\partial x}$ је оператор који се примењује на функције. Он свакој функцији одређује другу функцију (или константу), на пр. функцији $u = xyz$ функцију $u_x' = yz$ итд. Исто тако се и орт неког вектора $\mathfrak{a}_0$ узет заједно са знаком скаларног множења, тј. $\mathfrak{a}_0 \cdot$ може сматрати као нарочити оператор. Овај оператор примењен ма на који вектор одређује му на потпуно одређен начин један скалар, и то пројекцију тог вектора на правац датог орта итд.

Иако су, како рекосмо, оператори само симболи – налози за извршивање одређених поступака – са њима се може, под извесним условима и у извесним границама, рачунати као са бројевима и функцијама. На тај начин могу се упростити извесна извођења и лакше доћи до извесних резултата и стога су практички најважнији они оператори који су подесни за такве узајамне композиције. Тако је за извесне операторе створен читав рачун са операторима.

Нас овде интересује да се

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k},$$

очигледно, са формалне стране може сматрати као примена оператора

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k} \tag{1}$$

на скаларну функцију U, тј. да је

$$\nabla U=\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k}=\operatorname{grad} U. \tag{2}$$

∇ се зове *Хамилтонов оператор* који олакшава и скраћује операције при одређивању градијента. За знак ∇ Хамилтонова оператора се најчешће употребљује реч „дел“, зато што тај знак у ствари претставља изврнуто грчко слово делта, али се из истог разлога понекад зове и „атлед“, а то је реч делта прочитана обрнутим редом. Врло често се у литератури тај знак зове и „набла“ јер личи на неки стари асирски музички инструмент истога имена.

Хамилтонов оператор је са формалне стране вектор, што се види из његове структуре. Ако се сматра као вектор, онда је очигледно да формално важе операције векторске алгебре, тј. да је

$$\nabla+\nabla+\nabla+\nabla\cdots\cdots=n\nabla, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Овај симбол претставља нови оператор који се зове *Лапласов оператор* или *Лапласијан* и бележи кратко знаком Δ, тј.

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta. \tag{5}$$

Лапласов оператор се по Белтрамију (Beltrami) зове и *диференцијални параметар* другог реда, а по Енгелу (Engel) *диференцијатор* другог реда. Њему као диференцијални параметар првог реда одн. диференцијатор првог реда одговара скаларни оператор $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$.

Очигледно је да ово скаларно множење Хамилтонова оператора са самим собом има само формалну аналогију са скаларним производом два вектора. Даље увек важи

$$\nabla\times\nabla=0. \tag{6}$$

С друге стране, ∇ је и диференцијални оператор, па се примењује као и сваки диференцијални оператор само на величине десно од њега и стога пише по правилу испред функције на коју се примењује. За њега важе

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \nabla C=0,\quad (C \text{ const.}),\\ \text{(II)} & \nabla(U+V+\cdots)=\nabla U+\nabla V+\cdots,\\ \text{(III)} & \nabla kU=k\nabla U,\quad (k=\text{const.})\\ \text{(IV)} & \nabla UV=U\nabla V+V\nabla U,\\ \text{(V)} & \nabla f(U)=f'_U\nabla U,\\ \text{(VI)} & \nabla f(U,V,\cdots)=\dfrac{\partial f}{\partial U}\nabla U+\dfrac{\partial f}{\partial V}\nabla V+\cdots, \end{array} \tag{7}$$

које су истоветне са једначинама (22) претходног параграфа.

Како grad U значи исто што и ∇U, ми ћемо се отсада служити са оба знака, према томе, како сматрамо да нам је кад згодније.

Једначина (11) претходног параграфа, која одређује промену скалара U при померању $d\mathfrak{r}$, може се сад помоћу оператора ∇ написати

$$dU=d\mathfrak{r}\cdot\nabla U=(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)U, \tag{8}$$

тако да наћи промену скалара dU значи применити на скалар U оператор

$$d\mathfrak{r}\cdot\nabla=dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}, \tag{9}$$

који је скаларни диференцијални оператор.

И извод скаларне функције U у неком правцу увођењем Хамилтонова оператора може се написати

$$\frac{dU}{ds}=\mathfrak{t}\cdot\nabla U=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)U, \tag{10}$$

где се опет формални скаларни производ $\mathfrak{t}\cdot\nabla$ може сматрати као нови оператор

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}, \tag{11}$$

чијом применом на скаларну функцију U добијамо њен извод у одређеном правцу.

Према томе оператор ∇ одређује свакој скаларној функцији U неку векторску функцију, оператори $\mathfrak{t}\cdot\nabla$ и $d\mathfrak{r}\cdot\nabla$, чијом се применом добија извод скаларне функције у неком правцу одн. њена промена при померању $d\mathfrak{r}$, одређују скаларној функцији опет скаларне функције.

Ако се промењиви скалар U посматра у функцији координата ξ, η и ζ неког косоуглог триједра одређена основним ортовима $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, за вектор положаја следује

$$\mathfrak{r} = \xi\,\mathfrak{e}_1 + \eta\,\mathfrak{e}_2 + \zeta\,\mathfrak{e}_3. \tag{12}$$

Према томе је

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}_1\,d\xi + \mathfrak{e}_2\,d\eta + \mathfrak{e}_3\,d\zeta. \tag{13}$$

На основу једначине (7-VI) може се написати

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \xi}\nabla\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta}\nabla\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\nabla\zeta. \tag{14}$$

Најзад из једначина

$$\begin{aligned} d\xi &= d\mathfrak{r}\cdot\nabla\xi,\\ d\eta &= d\mathfrak{r}\cdot\nabla\eta,\\ d\zeta &= d\mathfrak{r}\cdot\nabla\zeta, \end{aligned} \tag{15}$$

добијамо на основу Гибзова обрасца (15. 14, једн. 3)

$$d\mathfrak{r} = (\nabla\xi)^*\,d\xi + (\nabla\eta)^*\,d\eta + (\nabla\zeta)^*\,d\zeta, \tag{16}$$

где је

$$(\nabla\xi)^* = \frac{\nabla\eta\times\nabla\zeta}{[\nabla\xi\,\nabla\eta\,\nabla\zeta]},\quad (\nabla\eta)^* = \frac{\nabla\zeta\times\nabla\xi}{[\nabla\xi\,\nabla\eta\,\nabla\zeta]},$$

$$(\nabla\zeta)^* = \frac{\nabla\xi\times\nabla\eta}{[\nabla\xi\,\nabla\eta\,\nabla\zeta]}.$$

Упоређивањем једначина (13) и (16) добија се

$$\mathfrak{e}_1 = (\nabla\xi)^*,\quad \mathfrak{e}_2 = (\nabla\eta)^*,\quad \mathfrak{e}_3 = (\nabla\zeta)^*,$$

тј. триједар ортова $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ и триједар вектора $\nabla\xi$, $\nabla\eta$, $\nabla\zeta$ образују реципрочне триједре. Дакле, мора бити

$$\nabla\xi = \frac{\mathfrak{e}_2\times\mathfrak{e}_3}{[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3]} = \overset{*}{\mathfrak{e}}_1,\quad \nabla\eta = \frac{\mathfrak{e}_3\times\mathfrak{e}_1}{[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3]} = \overset{*}{\mathfrak{e}}_2,\quad \nabla\zeta = \frac{\mathfrak{e}_1\times\mathfrak{e}_2}{[\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3]} = \overset{*}{\mathfrak{e}}_3. \tag{17}$$

Према томе се једначина (14) може сад написати

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \xi}\overset{*}{\mathfrak{e}}_1 + \frac{\partial U}{\partial \eta}\overset{*}{\mathfrak{e}}_2 + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\overset{*}{\mathfrak{e}}_3. \tag{18}$$

Из ове једначине се одмах види израз за Хамилтонов оператор у косоуглим координатама. То је

$$\nabla = \overset{*}{\mathfrak{e}}_1\frac{\partial}{\partial \xi} + \overset{*}{\mathfrak{e}}_2\frac{\partial}{\partial \eta} + \overset{*}{\mathfrak{e}}_3\frac{\partial}{\partial \zeta}, \tag{19}$$

где су $\overset{*}{\mathfrak{e}}_1$, $\overset{*}{\mathfrak{e}}_2$, $\overset{*}{\mathfrak{e}}_3$ реципрочни вектори основним векторима $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ датога косоуглог система.

Већ смо показали да је grad U инваријанта скаларног поља у односу на положај координатног система, другим речима не мења се ако се изврши макаква трансформација координата. Сад ћемо показати да је и сам симболички вектор ∇ инваријантан у односу на положај координатног система.

Нека, дакле, буду дата два правоугла координатна система $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$, па уочимо тачку M у простору. Њен положај у односу на први триједар нека буде одређен вектором положаја $\overrightarrow{OM} = \mathfrak{r} = \{x, y, z\}$, а у односу на други триједар са $\overrightarrow{O_1M} = \mathfrak{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$. Нека буде најзад $\overrightarrow{OO_1} = \mathfrak{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$.

Према томе може се написати

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1, \tag{20}$$

или

$$x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k} = x_0\,\mathfrak{i} + y_0\,\mathfrak{j} + z_0\,\mathfrak{k} + x_1\,\mathfrak{i}_1 + y_1\,\mathfrak{j}_1 + z_1\,\mathfrak{k}_1, \tag{21}$$

где су $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ основни ортови првога триједра, а $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{k}_1$ основни ортови другога триједра. Ако се косинуси углова који чине осе једнога триједра са осама другога триједра означе према очигледној схеми

(22)

	$\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{j}_1$	$\mathfrak{k}_1$
$\mathfrak{i}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\mathfrak{j}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\mathfrak{k}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

за ортове новога триједра може се написати

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}_1 &= a_{11}\,\mathfrak{i} + a_{21}\,\mathfrak{j} + a_{31}\,\mathfrak{k},\\ \mathfrak{j}_1 &= a_{12}\,\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j} + a_{32}\,\mathfrak{k},\\ \mathfrak{k}_1 &= a_{13}\,\mathfrak{i} + a_{23}\,\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Множењем једначине (21) скаларно редом са ортовима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ добијају се познати обрасци за трансформацију координата, тј.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}\,x_1 + a_{12}\,y_1 + a_{13}\,z_1,\\ y &= y_0 + a_{21}\,x_1 + a_{22}\,y_1 + a_{23}\,z_1,\\ z &= z_0 + a_{31}\,x_1 + a_{32}\,y_1 + a_{33}\,z_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Нека буде дат израз за Хамилтонов оператор у односу на триједар $O_1 y_1 x_1 z_1$ као базу, тј.

$$\nabla_1 = \mathfrak{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{j}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathfrak{k}_1 \frac{\partial}{\partial z_1}. \tag{25}$$

Да бисмо га трансформисали на координате у односу на први триједар, треба поред ортова $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{k}_1$ одређених једначинама (23) одредити и назначене парцијалне изводе (операторе) помоћу назначених парцијалних извода преко променљивих x, y и z.

Дакле, с обзиром на једначине (24)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y_1} = a_{12}\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y} + a_{32}\frac{\partial}{\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z_1} = a_{13}\frac{\partial}{\partial x} + a_{23}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Заменом израза (23) и (26) у израз за Хамилтонов оператор (25) добија се

$$\begin{aligned}
\nabla_1 &= \mathfrak{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{j}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathfrak{k}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} =\\
&= (a_{11}\mathfrak{i} + a_{21}\mathfrak{j} + a_{31}\mathfrak{k})\left(a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z}\right) +\\
&+ (a_{12}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j} + a_{32}\mathfrak{k})\left(a_{12}\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y} + a_{32}\frac{\partial}{\partial z}\right) +\\
&+ (a_{13}\mathfrak{i} + a_{23}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k})\left(a_{13}\frac{\partial}{\partial x} + a_{23}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}\right) =\\
&= \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z} = \nabla,
\end{aligned} \tag{27}$$

јер, с обзиром на значење коефицијената a_{11}, a_{12} итд. и с обзиром да су оба триједра ортогонална, важи

$$\sum_s a_{is}\, a_{ks} = 1, \text{ за } i = k,$$

$$\sum_s a_{is}\, a_{ks} = 0, \text{ за } i \neq k.$$

55. Генералисане координате. Градијент у генералисаним координатама

Познато је да су за обраду специјалних проблема потребни, ради лакшег излагања, нарочити системи координата. Ми ћемо овде објаснити укратко најопштији систем

координата, тзв. генералисаних координата и показати како се одређује градијент скалара дефинисана таквим координатама.

На пр., нека вектор положаја $\mathfrak{r}$ сваке тачке простора буде једнозначно одређен једначином

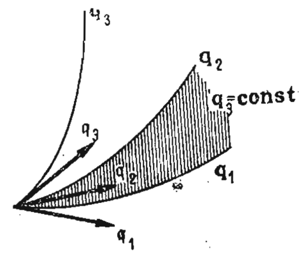
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(q_1, q_2, q_3), \tag{1}$$

одн. са три скаларне једначине

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{2}$$

Нека векторска функција (1), одн. скаларне функције (2) буду непрекидне и диференцијабилне. Како сваком скупу вредности q_1, q_2, q_3 одговара само један вектор положаја $\mathfrak{r}$, одн. само један потпуно одређени скуп вредности x, y, z Декартових правоуглих координата, те вредности једнозначно одређују положај тачке у простору. Са тог разлога и при тим условима могу се променљиви скаларни параметри q_1, q_2, q_3 сматрати као најопштије координате тачке у простору, тзв. *генералисане координате*. Примере таквих координата имали смо на стр. 11 у цилиндричним и сферним координатама.

Геометриски се генералисане координате могу протумачити у овом облику. Ако се узме $q_3 = \text{const.}$, а q_1 и q_2 променљиво, једначина (1) одн. једначине (2) дефинишу очигледно неку површину у простору помоћу параметара q_1 и q_2. Та површина се зове *координатна површина* q_3 (сл. 173) по аналогији са сличним називима у Декартову правоуглом координатном систему. При томе разним вредностима q_3 одговарају разне површине q_3. На исти начин добијају се координатне површине q_1 и q_2. Ако се за q_1, q_2, и q_3 изаберу одређене вредности, тиме се фиксира по једна од координатних површина из сваке породице. Те три површине се секу у тачки чије су координате q_1, q_2, q_3. С друге стране, ако је тачка дата, одређена је по једна површина сваке породице, а ове одређују вредности q_1, q_2, q_3. Јасно је при томе, да се ове површине морају пристојно понашати, на пр. сећи се само у једној тачки, иначе су потребни допунски услови. Ако се узме $q_2 = \text{const.}$ и $q_3 = \text{const.}$, онда је очигледно само q_1 променљиво и једначина (1), одн. једначине (2) дефинишу



Сл. 173

криву линију у простору у параметарском облику као пресек координатних површина $q_2=\text{const.}$ и $q_3=\text{const.}$ Та крива линија се зове *координатна линија* q_1 и разним вредностима q_1 одговарају разне тачке криве. Координатне линије q_1 образују за разне вредности $q_2=\text{const.}$ и $q_3=\text{const.}$ породицу кривих линија у простору. Исто тако се дефинишу породице координатних линија q_2 и q_3. Кроз сваку тачку M простора пролазе у општем случају три различите координатне линије – по једна од сваке породице q_1, q_2 и q_3. Тангенте на односне координатне линије образују триједар генералисаних координата, који може бити косоугли и правоугли.

Из овог геометриског разматрања следује потреба услова да генералисане координатне линије у свакој тачки простора чине триједар (који не дегенерише). Тај услов се састоји у томе да су једначине (2) независне и да се могу решити по q_1, q_2, и q_3, тј.

$$q_1=q_1(x,y,z),\quad q_2=q_2(x,y,z),\quad q_3=q_3(x,y,z). \tag{3}$$

Потребу овог услова показаћемо геометриским размишљањем. Наиме, ако се у једначини (1) сматра само q_1 као променљиво, ходограф такве векторске функције је, као што знамо, нека крива линија – генералисана координатна линија q_1. Тада је по геометриској дефиницији извода векторске функције

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}=\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\right|\mathfrak{q}_1=A_1\mathfrak{q}_1, \tag{4}$$

где смо са $\mathfrak{q}_1$ обележили орт тангенте на координатну линију q_1 у посматраној тачки, а

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\right|=A_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}. \tag{5}$$

Из истих разлога је

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}=\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\right|\mathfrak{q}_2=A_2\mathfrak{q}_2, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}=\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right|\mathfrak{q}_3=A_3\mathfrak{q}_3, \tag{7}$$

где су $\mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{q}_3$ ортови тангената генералисаних координатних линија q_2 и q_3, а

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\right|=A_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right|=A_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}. \tag{9}$$

Према томе су $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}$ и $\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}$ тангентни вектори координатних линија у посматраној тачки, па ако су линеарно независни, онда чине недегенеративан триједар. Тај услов је међутим испуњен када је мешовити производ тих тангентних вектора различит од нуле, тј.

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right]=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\\ \dfrac{\partial x}{\partial q_3} & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} & \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{10}$$

Детерминанта (10) се зове *Јакобијева функционална детерминанта* или кратко *Јакобијан* и обично бележи овако

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\\ \dfrac{\partial x}{\partial q_3} & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} & \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Дакле, да би сваком скупу вредности x, y, z одговарао само један скуп вредности q_1, q_2, q_3, потребно је да буде задовољен услов (10), и то је аналитички услов да се једначине (2) могу решити на одређени начин по q_1, q_2, q_3.

С друге стране, координатне површине за одређене константне вредности q_1, q_2, q_3, могу се протумачити као еквискаларне површине скалара q_1, одн. q_2 и q_3 и, према томе, услов да се у свакој тачки секу три различите површине (без поклапања), геометриски је јасно, идентичан је са условом да нормале на те површине у посматраној тачки образују недегенеративан триједар. Како су нормале одређене са градијентима односних скалара, услов који мора бити задовољен гласи

$$(12)\qquad [\nabla q_1 \nabla q_2 \nabla q_3] = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial z} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} & \frac{\partial q_2}{\partial z} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x} & \frac{\partial q_3}{\partial y} & \frac{\partial q_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (x, y, z)} \neq 0.$$

Овај услов, са своје стране, казује да и једначине (3) морају бити међусобно независне, те да се x, y и z из њих могу израчунати кад су q_1, q_2 и q_3 дати.

Из једначине (1) следује

$$(13)\qquad d\mathfrak{r} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3} dq_3$$

и, према томе, квадрат лучног елемента ма које криве дат је изразом

$$(14)\qquad \begin{aligned} ds^2 = d\mathfrak{r}^2 &= (A_1\, dq_1\, \mathfrak{q}_1 + A_2\, dq_2\, \mathfrak{q}_2 + A_3\, dq_3\, \mathfrak{q}_3) \cdot (A_1\, dq_1\, \mathfrak{q}_1 + \\ &+ A_2\, dq_2\, \mathfrak{q}_2 + A_3\, dq_3\, \mathfrak{q}_3) = A_1^2\, dq_1^2 + A_2^2\, dq_2^2 + A_3^2\, dq_3^2 + \\ &+ 2B_1\, q_2 q_3 + 2B_2\, q_3 q_1 + 2B_3\, q_1 q_2, \end{aligned}$$

где је

$$(15)\qquad \begin{aligned} B_1 &= A_2 A_3 (\mathfrak{q}_2 \cdot \mathfrak{q}_3) = A_2 A_3 \cos(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3) = \\ &= \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}, \\ B_2 &= A_3 A_1 (\mathfrak{q}_3 \cdot \mathfrak{q}_1) = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1}, \\ B_3 &= A_1 A_2 (\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2) = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

Ниједна од величина A_1, A_2 и A_3 не може бити једнака нули, јер би тада морали сви елементи једне врсте у Јакобијану (11) бити једнаки нули, па и сам Јакобијан, што се противи претпоставци. Даље из (15) следује да су, на пр., координатне линије q_2 и q_3 ортогоналне, ако је $B_1 = 0$ и, према томе, триједар генералисаних координата је ортогоналан, ако је испуњен услов

$$(16)\qquad B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Најважнији и најчешћи у примени системи генералисаних координата као цилиндрични и сферни систем, ортогонални су.

Из (14) се лако добијају лучни елементи појединих генералисаних координатних линија q_1, q_2 и q_3, тј.

$$(17)\qquad ds_1 = A_1 dq_1, \quad ds_2 = A_2 dq_2, \quad ds_3 = A_3 dq_3,$$

где је ds_1 лучни елемент генералисане координантне линије q_1 итд.

Триједри вектора $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}$ и ∇q_1, ∇q_2, ∇q_3 су узајамно реципрочни триједри вектора. То је готово геометриски очигледно и може се одмах доказати. Из једначина

$$(18)\qquad \begin{aligned} dq_1 &= d\mathfrak{r} \cdot \nabla q_1, \\ dq_2 &= d\mathfrak{r} \cdot \nabla q_2, \\ dq_3 &= d\mathfrak{r} \cdot \nabla q_3, \end{aligned}$$

које одређују промене скалара q_1, q_2 и q_3 при померању за $d\mathfrak{r}$ следује на основу Гибзова обрасца

$$(19)\qquad d\mathfrak{r} = (\nabla q_1)^* dq_1 + (\nabla q_2)^* dq_2 + (\nabla q_3)^* dq_3$$

где је, како знамо,

$$(20)\qquad (\nabla q_1)^* = \frac{\nabla q_2 \times \nabla q_3}{[\nabla q_1 \nabla q_2 \nabla q_3]}, \quad (\nabla q_2)^* = \frac{\nabla q_3 \times \nabla q_1}{[\nabla q_1 \nabla q_2 \nabla q_3]},$$
$$(\nabla q_3)^* = \frac{\nabla q_1 \times \nabla q_2}{[\nabla q_1 \nabla q_2 \nabla q_3]}.$$

Упоређивањем образаца (13) и (19) следује

$$(21)\qquad (\nabla q_1)^* = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}, \quad (\nabla q_2)^* = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}, \quad (\nabla q_3)^* = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3},$$

што је требало доказати.

Услед реципрочности може се одмах написати и

$$(22)\qquad \nabla q_1 = \frac{\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right]}, \quad \nabla q_2 = \frac{\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3} \times \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right]},$$
$$\nabla q_3 = \frac{\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}}{\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right]}.$$

На основу једначине (31) у т. 53 или једначине (10) у т. 54 следује за градијент у генералисаним координатама у општем случају израз

$$(23)\qquad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \nabla q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \nabla q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \nabla q_3.$$

У специјалном случају ортогоналног система генералисаних координата имамо из (22)

$$(24)\qquad \nabla q_1 = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\times\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}}{\left[\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_3}\right]} = \frac{A_2A_3\,\mathfrak{q}_1}{A_1A_2A_3} = \frac{1}{A_1}\mathfrak{q}_1,\qquad \nabla q_2 = \frac{1}{A_2}\mathfrak{q}_2,\qquad \nabla q_3 = \frac{1}{A_3}\mathfrak{q}_3$$

и према томе је тада

$$(25)\qquad \operatorname{grad} U = \nabla U = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\mathfrak{q}_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\mathfrak{q}_2 + \frac{1}{A_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\mathfrak{q}_3 = \left\{\frac{1}{A_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},\ \frac{1}{A_2}\frac{\partial U}{\partial q_2},\ \frac{1}{A_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right\}.$$

До овог истог резултата може се, у случају ортогоналних генералисаних координата, доћи и краћим, директним путем на овај начин. Како смо видели, градијент не зависи од избора координатних оса. Према томе може се узети да осе x, y, z Декартова правоуглог триједра имају положај тангената на генералисане координатне линије у посматраној тачки. У том случају је

$$(26)\qquad \nabla U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial U}{\partial s_1},\ \frac{\partial U}{\partial s_2},\ \frac{\partial U}{\partial s_3}\right\},$$

и стога, с обзиром на једначине (17),

$$(27)\qquad \nabla U = \left\{\frac{\partial U}{\partial q_1}\frac{dq_1}{ds_1},\ \frac{\partial U}{\partial q_2}\frac{dq_2}{ds_2},\ \frac{\partial U}{\partial q_3}\frac{dq_3}{ds_3}\right\} = \left\{\frac{1}{A_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},\ \frac{1}{A_2}\frac{\partial U}{\partial q_2},\ \frac{1}{A_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right\}.$$

Из једначина (24) следује у случају ортогоналних генералисаних координата, кад су q_i дати у функцији x, y, z, да је

$$(28)\qquad A_1 = \frac{1}{|\nabla q_1|},\qquad A_2 = \frac{1}{|\nabla q_2|},\qquad A_3 = \frac{1}{|\nabla q_3|}.$$

Као пример посматраћемо скаларну функцију $U = U(r, \vartheta, \varphi)$ одређену сферним координатама и одредити њен градијент. У том случају имамо

$$(29)\qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{i}\,r\cos\vartheta\cos\varphi + \mathfrak{j}\,r\cos\vartheta\sin\varphi + \mathfrak{k}\,r\sin\vartheta$$

и према томе је на основу образаца (5), (8) и (9)

$$A_1 = 1;\quad A_2 = r;\quad A_3 = r\cos\vartheta.$$

Отуда је

$$(30)\qquad \nabla U = \left\{\frac{\partial U}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta},\ \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right\}.$$

56. Генерализација појма градијента. Градијент у вишедимензионалном простору. Скаларне функције од више променљивих вектора. Парцијални градијенти

Ако је дата скаларна функција U од више од три скаларне променљиве, на пр.

$$(1)\qquad U = U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

онда је јасно да више не постоји могућност очигледног претстављања ове функције као функције положаја. То нам ипак не смета да формално схватимо ову функцију као функцију положаја у простору од n димензија, која дефинише n-димензионално скаларно поље. И за овакво поље може се дефинисати градијент по аналогији са једначином (6) у т. 53, која дефинише градијент помоћу Декартових правоуглих координата. Према томе, под градијентом скалара у пољу од n-димензија разумећемо вектор дефинисан са n координата једначином

$$(2)\qquad \nabla U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x_1},\ \frac{\partial U}{\partial x_2},\ \frac{\partial U}{\partial x_3},\ \ldots\ \frac{\partial U}{\partial x_n}\right\}.$$

До друге важне генерализације појма градијента долазимо посматрањем таквих функција положаја које зависе од два и више вектора положаја у односу на разне полове. Очигледно је да такви скалари постоје. На пр., ако се посматрају два тачкаста електрична товара, она одређују поље потенцијала. У свакој тачки тога поља вредност потенцијала зависи од вектора положаја у односу на оба товара, дакле, од две векторске променљиве. Али и у општем случају, како смо поменули код случаја скаларне функције једне векторске променљиве, могу се, у свакој скаларној функцији од више вектора, независно променљиви вектори формално сматрати као вектори положаја, јер такво тумачење има утицаја само са чисто физичке стране, а не са математичко-геометриске.

Замислимо неку такву функцију, која зависи од две или више промењљивих векторских величина, рецимо

(3) $$U = U(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2),$$

онда се може, по аналогији са уведеном дефиницијом градијента скаларне функције једне векторске промењљиве, увести поступком сличним парцијалном диференцирању и за овакве функције појам *делимичног* или *парцијалног градијента.*

Тако, ако се један од два промењљива вектора у изразу (3), рецимо $\mathfrak{r}_2$, сматра као константа, онда ће се имати посла само са скаларном функцијом од $\mathfrak{r}_1$. Тада се очигледно може за ту скаларну функцију одредити градијент у односу на први, сад једино промењљиви вектор. Тако образовани градијент се зове *парцијални градијент* скалара U у односу на први вектор $\mathfrak{r}_1$ и пише се $\text{grad}_{\mathfrak{r}_1} U$ или $\nabla_{\mathfrak{r}_1} U$. Наравно да се исто тако може образовати и парцијални градијент за вектор $\mathfrak{r}_2$, тј. $\text{grad}_{\mathfrak{r}_2} U$ или $\nabla_{\mathfrak{r}_2} U$. Ако скалар зависи од више од два вектора може се на сличан начин и са сличним ознакама формирати онолико парцијалних градијената колико има промењљивих вектора.

У случају да су независно промењљиви вектори одређени својим Декартовим правоуглим координатама, тј.

(4) $$\mathfrak{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathfrak{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\},$$

онда је

(5) $$\nabla_{\mathfrak{r}_1} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ \frac{\partial U}{\partial y_1}, \ \frac{\partial U}{\partial z_1}\right\}, \qquad \nabla_{\mathfrak{r}_2} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ \frac{\partial U}{\partial y_2}, \ \frac{\partial U}{\partial z_2}\right\}.$$

Појам парцијалног градијента, који је у примени разрадио А. Билимовић, врло је користан. Показаћемо начин одређивања парцијалног градијента у неким случајевима.

Нека, прво, посматрани скалар U буде одређен скаларним производом два промењљива вектора $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$, тј.

(6) $$U = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 .$$

Тада из

$$U = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

следује

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} = y_2, \quad \frac{\partial U}{\partial z_1} = z_2,$$

одн.

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y_2} = y_1, \quad \frac{\partial U}{\partial z_2} = z_1$$

и, према томе,

(7) $$\nabla_{\mathfrak{r}_1}(\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2) = \{x_2, y_2, z_2\} = \mathfrak{r}_2$$

одн.

$$\nabla_{\mathfrak{r}_2}(\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2) = \{x_1, y_1, z_1\} = \mathfrak{r}_1 .$$

Дакле, парцијални градијент скаларног производа по једном од вектора увек је једнак другом вектору.

До истог овог резултата бисмо дошли и на основу обрасца 11' у т. 53, да је промена скалара U при померању $d\mathfrak{r}_1$, кад је $\mathfrak{r}_2$ константно,

(8) $$dU = \mathfrak{r}_2 \cdot d\mathfrak{r}_1,$$

па како је

$$dU = \text{grad}_{\,\mathfrak{r}_1} U \cdot d\mathfrak{r}_1,$$

то је

$$\text{grad}_{\,\mathfrak{r}_1} U = \mathfrak{r}_2$$

итд.

Услов $\mathfrak{r}_2 = \text{const.}$ геометриски значи да се посматра промена скаларне функције U само у тачкама сфере одређене са $\mathfrak{r}_2 = \text{const}$.

Из

(9) $$U = \mathfrak{r}_1 \cdot (\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3),$$

на основу горњих извођења, следује

(10) $$\nabla_{\mathfrak{r}_1} U = \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 .$$

После извршене цикличке пермутације у (9) добија се на исти начин

(11) $$\nabla_{\mathfrak{r}_2} U = \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1,$$

(12) $$\nabla_{\mathfrak{r}_3} U = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 .$$

За скаларну функцију

(13) $$U = (\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2) \cdot (\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_4),$$

која се може написати и у облику

(14) $$U = \mathfrak{r}_1 \cdot [\mathfrak{r}_2 \times (\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_4)],$$

имамо опет, према горњим излагањима,

(15) $$\nabla_{\mathfrak{r}_1} U = \mathfrak{r}_2 \times (\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_4),$$

одн.

$$\nabla_{\mathfrak{r}_2} U = (\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_4) \times \mathfrak{r}_1,$$
$$\nabla_{\mathfrak{r}_3} U = \mathfrak{r}_4 \times (\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2),$$
$$\nabla_{\mathfrak{r}_4} U = (\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2) \times \mathfrak{r}_3,$$

где је начин формирања парцијалних градијената по појединим векторима очигледан.

57. Примена појма градијента у диференцијалној геометрији

Ми смо се у примени теорије вектора у диференцијалној геометрији, у IV глави, ограничили углавном на параметарски облик једначина кривих линија и површина. Међутим, ако је површина дата векторском једначином

(1) $$f(\mathfrak{r}) = 0,$$

или у скаларном облику

(2) $$f(x, y, z) = 0,$$

одн., ако је крива линија дата као пресек две површине, тј.

(3) $$f(\mathfrak{r}) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\mathfrak{r}) = 0,$$

или у скаларном облику

(4) $$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

може се појам градијента врло згодно искористити.

Наиме, у том случају услов

(5) $$\operatorname{grad} f = 0, \qquad \text{одн.}\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

одређује сингуларне тачке површине (1) одн. (2).

С друге стране, једначину (1) одн. (2) можемо увек схватити као еквискаларну површину скалара f за вредност $f = 0$, и, према томе, у свим оним тачкама те површине у којима је $\operatorname{grad} f \neq 0$, орт нормале $\mathfrak{N}_0$ на површини дат је изразом

(6) $$\mathfrak{N}_0 = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

Стога, ако се са $\mathfrak{R}$ означи вектор положаја ма које тачке на нормали површине (1) у тачки одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, једначина нормале дата је векторском једначином

(7) $$(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) \times \nabla f = 0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda \nabla f,$$

где је λ произвољни скалар. У овом случају ће једначина нормале на површину у скаларном облику изгледати

(8) $$\frac{X - x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Обележимо ли са $\mathfrak{R}$ вектор положаја ма које тачке у тангентној равни површине (1) у тачки одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, једначина тангентне равни може се написати у векторском облику

(9) $$(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) \cdot \nabla f = 0,$$

или у скаларном облику

(10) $$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Интересантно је на овом месту поменути како је векторска метода концизна. Једначине (7) и (9) претстављају истовремено и једначине нормале и тангенте криве линије у равни, ако вектор $\mathfrak{r}$ лежи увек у једној равни, па се једначина (2) своди на

(11) $$f(x, y) = 0,$$

тј. на једначину криве линије у равни.

Али не само за једначине тангентне равни и нормале површине већ и при свима осталим извођењима, кад је једначина површине дата у облику (1) згодније је употребити градијент. У систематско излагање свих примена градијента у диференцијалној геометрији не можемо се упуштати, већ ћемо само показати начин примене на појединим примерима.

На пр., геодезиска кривина ма у којој тачки површине (1), одн. (2) може се сад овако одредити с обзиром на једначину (6)

(12) $$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{g}}{R} = \frac{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{g})}{R} = \frac{\sin(\mathfrak{n}\,\mathfrak{N}_0)}{R} = \pm\frac{|\mathfrak{n} \times \mathfrak{N}_0|}{R} = \pm\frac{|\mathfrak{r}'' \times \operatorname{grad} f|}{|\operatorname{grad} f|},$$

где је према ранијем $\dfrac{\mathfrak{n}}{R} = \mathfrak{r}''$, а $\mathfrak{n}$ орт главне нормале посматране криве линије на површини.

У скаларном облику се за геодезиску кривину добија

(13) $$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{\frac{\left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d^2z}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d^2y}{ds^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Из једначине (12) добија се одмах једначина геодезиске линије на површини (1), одн. (2) у облику

(14) $$\mathfrak{r}'' \times \nabla f = 0,$$

а то је услов да је главна нормала тражене криве колинеарна са нормалом на површини у свакој тачки површине. У скаларном облику ова једначина може се овако написати

(14a) $$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x''} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{y''} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{z''} = 0.$$

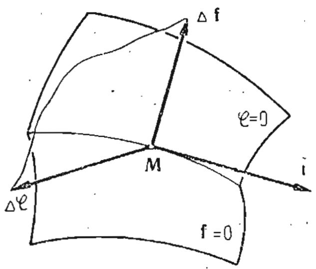
Ако се жели једначина геодезиске линије у општем случају, кад вектор положаја $\mathfrak{r}$ тачке посматране криве није одређен у зависности од лука криве, онда је довољно написати услов да нормала на површини лежи у оскулаторној равни криве, која је, како знамо, увек одређена векторима $d\mathfrak{r}$ и $d^2\mathfrak{r}$. Према томе се за једначину геодезиске линије тада може написати

(15) $$\nabla f \cdot (d\mathfrak{r} \times d^2\mathfrak{r}) = 0.$$

У скаларном облику имаћемо једначину

(16) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Посматрајмо сад неку криву линију у простору одређену једначинама површина (3), одн. (4). Ове површине се, опет, могу сматрати као еквискаларне површине скалара f и φ два разна скаларна поља (сл. 174).



Сл. 174

Нека се тражи једначина тангенте и нормалне равни ове криве линије. Нека $\mathfrak{R}$ буде вектор положаја ма које тачке на тангенти криве у тачки M одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$. Једначина тангенте је очигледно одређена из услова да мора бити тангента обе површине, одн. нормална на grad f и grad φ.

Према томе њена једначина гласи

(17) $$(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) \times (\nabla f \times \nabla \varphi) = 0,$$

или

(18) $$\mathfrak{R} - \mathfrak{r} = \lambda (\nabla f \times \nabla \varphi),$$

где је λ произвољни скалар.

У скаларном облику једначина тангенте криве линије у простору у случају криве одређене једначинама (4) изгледа

(19) $$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Једначина нормалне равни посматране криве одређена је условом да вектор $\mathfrak{R} - \mathfrak{r}$, где сад $\mathfrak{R}$ означује вектор положаја ма које тачке у нормалној равни, мора бити компланаран са ∇f и $\nabla \varphi$, тј.

(20) $$(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) \cdot (\nabla f \times \nabla \varphi) = 0,$$

или у скаларном облику

(21) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

58. Векторско поље. Векторске линије. Соленоид. Ламела

Векторско поље — простор у коме се посматра промена неког вектора $\mathfrak{v}$ као функције положаја — мора, као и скаларно, бити одређено у математичком облику, тј. мора бити познато

(1) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}).$$

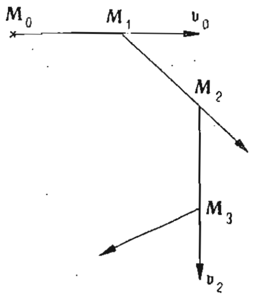
Дакле, сад имамо посла са векторском функцијом која зависи од векторске независно променљиве. Поред раније поменутих, у поља овакве врсте спадају и поља градијената скаларних функција.

Свака векторска функција облика (1) може се свести и изразити са три скаларне функције положаја у облику

(2) $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3\} = \mathfrak{i}\, v_1(x, y, z) + \mathfrak{j}\, v_2(x, y, z) + \mathfrak{k}\, v_3(x, y, z).$

Према томе, и проучавање векторског поља би се у овом облику могло свести на проучавање три скаларна поља. Наш циљ је, међутим, да, из већ више пута наведених разлога геометриске очигледности, нађемо начине за директно проучавање векторских поља.

Сам простор у коме се посматра променљиви вектор одређује се на исти начин као и у случају скаларног поља. Остаје нам да у том простору, дакле, и у векторском пољу конструишемо неке помоћне облике ради прегледније слике самога поља. У том циљу се у векторском пољу конструишу криве линије које имају особину да у свакој тачки такве криве посматрани вектор има правац тангенте. Такве се линије зову *вектoрске линије* или *линије поља*, а у специјалном случају поља силе зову се и *линије силе*. Са таквим линијама поља имали смо већ посла у пољу градијента. Конструкција таквих векторских линија у општем случају може се замислити на овај начин (сл. 175).



Сл. 175

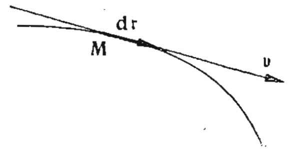
Пођимо од тачке M_0 у пољу вектора $\mathfrak{v}$ и нека његова вредност у тој тачки буде $\mathfrak{v}_0$. Ако на вектору $\mathfrak{v}_0$ узмемо тачку M_1, врло блиску тачки M_0, у којој је вредност посматраног вектора $\mathfrak{v}_1$, па затим на вектору $\mathfrak{v}_1$ узмемо тачку M_2, у којој вектор $\mathfrak{v}$ има вредност $\mathfrak{v}_2$, и тај поступак наставимо, добићемо изломљену линију $M_0M_1M_2\ldots$ Кад дужи M_0M_1, $M_1M_2\ldots$ теже нули изломљена линија постаје нека крива линија L, у чијој свакој тачки односна вредност вектора $\mathfrak{v}$ има правац тангенте.

У векторском пољу се може повући бесконачно много векторских линија. Кроз сваку тачку поља иде само једна векторска линија. Оне се не могу сећи, јер би иначе у тој тачки поља векторска функција имала две вредности и не би била једнозначна, што се противи претпоставци. Претпоставка о једнозначности је довољна при проучавању реалних физичких векторских поља. На пр., у магнетном пољу се опиљцима гвожђа могу очигледно показати магнетне линије сила.

Једначина векторске линије (сл. 176) следује одмах из дефиниције. Ако се са $d\mathfrak{r}$ обележи управљени елемент векторске линије, онда, како вредност вектора $\mathfrak{v}$ одређује правац тангенте, мора дуж векторске линије у свакој тачки бити

(3) $\mathfrak{v} \times d\mathfrak{r} = 0$ или $\mathfrak{v} = \lambda\, d\mathfrak{r}$,

где је λ произвољни скалар. Ово је једначина векторских линија у векторском облику.



Сл. 176

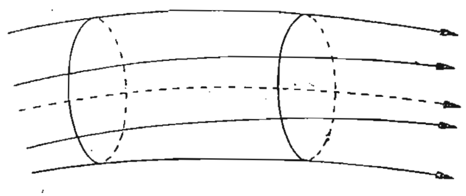
Иста та једначина написана у скаларном облику своди се на систем од две диференцијалне једначине првога реда,

$$(4) \qquad \frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{dz}{v_3} \left(= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{v} = \frac{ds}{v} \right).$$

Решењем овог система диференцијалних једначина добија се породица кривих линија које зависе од два параметра.

Подвлачимо да векторске линије дају неку претставу о векторском пољу, но не потпуну. Оне у суштини одређују само правац и смер вектора у свакој тачки поља. Интензитет није уопште одређен, те се о *јачини поља* у појединим тачкама (интензитету посматраног вектора у тим тачкама) не може ништа рећи. Ово је очигледно из чињенице да облик и положај векторске линије уопште и не зависе од интензитета посматраног вектора. Заиста, ако се, место векторског поља вектора $\mathfrak{v}$, посматра поље вектора $k\mathfrak{v}$ који у свакој тачки поља има k пута већи интензитет, из $k\mathfrak{v} \times d\mathfrak{r} = 0$ следује да је векторска диференцијална једначина векторских линија истоветна са једначином (3), тј. $\mathfrak{v} \times d\mathfrak{r} = 0$ и да, према томе, оба поља имају исте векторске линије.

Услед непотпуног претстављања векторског поља помоћу векторских линија конструишу се у векторском пољу и други облици, на пр. *векторске цеви* или *соленоиди*. Векторска цев се конструише на овај начин. Ако се у векторском пољу уочи ма каква контура и кроз сваку



Сл. 177

тачку контуре (сл. 177) замисли односна векторска линија, добија се векторска цев или соленоид. Векторске линије које опасују цев не морају бити паралелне међу собом. Овде ћемо се задовољити само дефиницијом соленоида, а касније ћемо видети његову улогу при одређивању векторског поља и то баш његова интензитета у појединим тачкама.

Основна особина соленоида је у томе што вредност векторске функције за сваку тачку омотача лежи у његовој тангентној равни.

Ако је пресек соленоида врло мали, он се зове и *векторски конац*.

При геометриском претстављању скаларног поља ми смо конструисали ортогоналне трајекторије еквискаларних површина поља. У ствари то значи да у векторском пољу градијента постоје површине које секу све векторске линије (линије градијента) ортогонално. Код ма каквог векторског поља то није случај. Показаћемо касније да за свако векторско поље и не постоје површине ортогоналне на све векторске линије поља, већ само бесконачно мали елементи површина нормални на извесном скупу векторских линија.

У случају да такве површине ортогоналне на све векторске линије поља постоје, као што је то случај код поља градијента, просторни елемент поља између две такве ортогоналне површине зове се *ламела*, а само векторско поље — *ламеларно*. Поље градијента је ламеларно поље и у њему су ламеле ограничене еквискаларним површинама. На пр., у пољу вектора $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} r$ ламеле су сферне љуске.

У општој групи векторских поља нарочито су важни ови типови поља:

a) *Централно векторско поље*, у коме векторска функција има у свакој тачки поља такав правац који пролази кроз сталну тачку простора. Ако се та тачка (центар) узме за пол, таква векторска функција може се изразити у облику

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})\,\mathfrak{r}_0,$$

где је $f(\mathfrak{r})$ алгебарска вредност векторске функције у тачки одређеној вектором положаја $\mathfrak{r}$, а $\mathfrak{r}_0$ орт тог вектора положаја.

b) *Сферно векторско поље* је специјалан случај централног поља, кад алгебарска вредност векторске функције $\mathfrak{v}$ у свакој тачки поља зависи само од растојања од пола, а не и од правца,

тј. кад је

$$\mathfrak{v} = \varphi(r)\,\mathfrak{r}_0.$$

Такво је, на пр., поље Њутнове силе гравитације. Ако је равно, овакво поље се зове *кружно*.

c) *Цилиндрично векторско поље* је такво поље у коме векторска функција у свакој тачки поља има правац који пролази кроз неку осу нормално на њој, а њена алгебарска вредност за све тачке на истом растојању од осе је иста. У том случају, ако је пол узет на оси одређеној ортом $\mathfrak{e}_0$, такво поље је дефинисано обрасцем

$$\mathfrak{v} = \varphi(\rho)\,\frac{\mathfrak{e}_0 \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{e}_0)}{\rho},$$

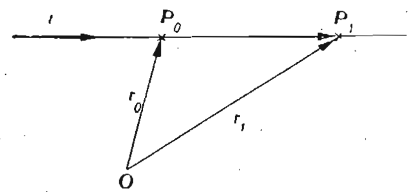
где је $\mathfrak{e}_0 \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{e}_0)$ пројекција вектора положаја $\mathfrak{r}$ на раван нормалну на осу, а ρ растојање посматране тачке од осе.

59. Извод векторске функције у одређеном правцу

Посматрајмо векторско поље вектора $\mathfrak{v}$ који је дат једначином

(1) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r}).$$

Нека у тачки $P_0(\mathfrak{r}_0)$ тога поља вредност вектора буде $\mathfrak{v}(\mathfrak{r}_0)$ а у тачки $P_1(\mathfrak{r}_1)$ нека буде $\mathfrak{v}(\mathfrak{r}_1)$ (сл. 178).



Сл. 178

Нека се тачка P_1 налази у односу на тачку P_0 у правцу орта $\mathfrak{t}$. Тада је

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \Delta s\,\mathfrak{t},$$

а извод вектора $\mathfrak{v}$ у правцу $\mathfrak{t}$ биће

(2) $$\frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{r}_1) - \mathfrak{v}(\mathfrak{r}_0)}{\Delta s}.$$

Како је

(3) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\,v_1 + \mathfrak{j}\,v_2 + \mathfrak{k}\,v_3$$

и ако узмемо да су основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ Декартова триједра непромењиви, може се написати

(4) $$\frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{i}\,\frac{dv_1}{ds} + \mathfrak{j}\,\frac{dv_2}{ds} + \mathfrak{k}\,\frac{dv_3}{ds}.$$

На тај начин, пошто су v_1, v_2 и v_3 скаларне функције положаја, то смо извод векторске функције $\mathfrak{v}$ у правцу орта $\mathfrak{t}$ свели на изводе скаларних функција у правцу тога орта које знамо да одредимо. С обзиром на једначину (10) у т. 54 биће

$$\frac{dv_1}{ds}=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,v_1,\quad \frac{dv_2}{ds}=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,v_2,\quad \frac{dv_3}{ds}=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,v_3,$$

и стога

(5) $$\frac{d\mathfrak{v}}{ds}=\mathfrak{i}\,(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,v_1+\mathfrak{j}\,(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,v_2+\mathfrak{k}\,(\mathfrak{t}\cdot\nabla)v_3\,.$$

Како је $\mathfrak{t}\cdot\nabla$ скаларни диференцијални оператор, а $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ константни вектори, може се десна страна једначине (5) написати у облику

(6) $$\frac{d\mathfrak{v}}{ds}=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,(v_1\,\mathfrak{i}+v_2\,\mathfrak{j}+v_3\,\mathfrak{k})=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}.$$

У скаларном облику извод векторске функције у правцу одређеном ортом $\mathfrak{t}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ изгледа

(7) $$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{v}}{ds}=&\left(\cos\alpha\frac{\partial v_1}{\partial x}+\cos\beta\,\frac{\partial v_1}{\partial y}+\cos\gamma\,\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathfrak{i}+\\ &+\left(\cos\alpha\frac{\partial v_2}{\partial x}+\cos\beta\,\frac{\partial v_2}{\partial y}+\cos\gamma\,\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathfrak{j}+\\ &+\left(\cos\alpha\frac{\partial v_3}{\partial x}+\cos\beta\,\frac{\partial v_3}{\partial y}+\cos\gamma\,\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\mathfrak{k}\,.\end{aligned}$$

Ако се за елементарно померање у правцу орта $\mathfrak{t}$ стави $d\mathfrak{r}=\mathfrak{t}\,ds$, за промену векторске функције у пољу при померању за $d\mathfrak{r}$ у одређеном правцу добија се из једначине (6)

(8) $$d\mathfrak{v}=(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v},$$

што у скаларном облику изгледа

(9) $$\begin{aligned}d\mathfrak{v}=&\left(dx\frac{\partial v_1}{\partial x}+dy\,\frac{\partial v_1}{\partial y}+dz\,\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathfrak{i}+\\ &+\left(dx\frac{\partial v_2}{\partial x}+dy\,\frac{\partial v_2}{\partial y}+dz\,\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathfrak{j}+\\ &+\left(dx\frac{\partial v_3}{\partial x}+dy\,\frac{\partial v_3}{\partial y}+dz\,\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\mathfrak{k},\end{aligned}$$

кад је $d\mathfrak{r}=\{dx,\ dy,\ dz\}$.

Из претходног излагања се види, да су извод векторске функције у одређеном правцу и њена промена при померању у пољу у одређеном правцу опет векторске величине, јер се добијају применом скаларних диференцијалних оператора на векторске функције. Дакле, оператори $(\mathfrak{t}\cdot\nabla)$ и $(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)$ примењеном на векторске функције дају опет векторске функције.

Ако се оператор $(\mathfrak{t}\cdot\nabla)$ примени на градијент неке скаларне функције U, одн. ако се нађе извод градијента у одређеном правцу, добиће се

(10) $$\begin{aligned}\frac{d\,(\operatorname{grad}U)}{ds}=&(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\operatorname{grad}U=\\ =&\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\right)\mathfrak{i}+\\ &+\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)\mathfrak{j}+\\ &+\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Извод градијента у одређеном правцу може се искористити при проучавању нормалне кривине кривих линија повучених на површини на овај начин.

Израз (2) у т. 48 за нормалну кривину може се с обзиром на први Френеов образац и на једначину (6) у т. 57 написати у облику

(11) $$\kappa_n=\frac{1}{|\operatorname{grad}f|}\left(\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\operatorname{grad}f\right),$$

ако је површина дата једначином $f(\mathfrak{r})=0$. Али, како је

$$\left(\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\operatorname{grad}f\right)=\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad}f)-\mathfrak{t}\cdot\frac{d}{ds}(\operatorname{grad}f)=$$
$$=-\mathfrak{t}\cdot\frac{d}{ds}(\operatorname{grad}f)=-\mathfrak{t}\cdot[(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\operatorname{grad}f],$$

јер је $\mathfrak{t}\cdot\operatorname{grad}f=0$ и $\frac{d}{ds}(\operatorname{grad}f)=(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\operatorname{grad}f$, зато што је $\operatorname{grad}f$ функција само положаја, може се најзад за нормалну кривину криве на површини написати

(12) $$\begin{aligned}\kappa_n=&-\frac{\mathfrak{t}\cdot[(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\operatorname{grad}f]}{|\operatorname{grad}f|}=\\ =&-\frac{1}{|\operatorname{grad}f|}\left[\cos\alpha\left(\cos\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)+\right.\\ &+\cos\beta\left(\cos\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+\\ &\left.+\cos\gamma\left(\cos\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+\cos\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\cos\gamma\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Кад се поставља питање промене нормалне кривине при промени правца $\mathfrak{t}$, одн. при обртању орта $\mathfrak{t}$, онда се, ради упрошћења извођења и боље прегледности, за почетак координатног система узме посматрана тачка M, за осу z по правцу и по смеру оса одређена ортом $\mathfrak{N}_0$ нормале на површини у тој тачки, а за осе x и y две нормалне осе у тангентној равни површине. У том случају имамо $\mathfrak{t} = \{\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ 0\}$, ако је $\vartheta = \sphericalangle(\mathfrak{i}\mathfrak{t})$ па израз (12) постаје

$$\kappa_n = -\frac{1}{|\operatorname{grad} f|}\left(\cos^2\vartheta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\vartheta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \tag{13}$$

Ако се стави

$$k_{11} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{|\operatorname{grad} f|}, \qquad k_{12} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}{|\operatorname{grad} f|}, \qquad k_{22} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{|\operatorname{grad} f|},$$

онда се добија израз

$$k_n = k_{11}\cos^2\vartheta + 2k_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta + k_{22}\cos^2\vartheta, \tag{14}$$

који подлеже даљој дискусији на исти начин као и израз (14) у т. 48.

60. Примена Хамилтонова оператора на векторске функције. Дивергенција. Ротор

Обрасци (7) у т. 54 показују правила за примену Хамилтонова оператора на скаларне функције и њихове комбинације. При томе случај количника две скаларне функције није обухваћен, и ако се и на њега односи, зато што ми искључујемо из посматрања такве скаларне функције које у посматраном пољу постају бесконачне (које нису у свим тачкама поља дефинисане), што је случај са функцијом $\dfrac{U}{V}$ за све нуле скаларне функције V. Осим тога обрасцима (3), (4) и (6) у т. 54 дата су правила за рачунање са самим оператором ∇. Видели смо да су та правила резултат чињенице да је Хамилтонов оператор и вектор и диференцијални оператор.

Показаћемо сад општа правила примене Хамилтонова оператора на векторске функције. И сад треба строго водити рачуна на које се функције оператор примењује па их је стога најбоље писати десно од њега. У специјалним случајевима, где се оператор ∇ не примењује на неку од функција која је написана десно од њега, ми ћемо такву функцију обележити са *. Кад год се дозвољеним размештајем чланова може постићи, онда такву функцију у дефинитивном резултату треба написати испред оператора ∇.

За разлику од примене овог оператора на скаларне функције сад треба нарочито водити рачуна о томе да је

∇ вектор. Он се стога може применити на векторску функцију $\mathfrak{v}$, прво у облику скаларног производа, тј.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathfrak{v} &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_1\mathfrak{i} + v_2\mathfrak{j} + v_3\mathfrak{k}) = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1}$$

Овај израз се назива *дивергенција* векторске функције $\mathfrak{v}$ и обележава и са div $\mathfrak{v}$. Дакле,

$$\nabla\cdot\mathfrak{v} = \operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{2}$$

или речима: Дивергенција векторске функције једнака је збиру парцијалних извода пројекција те векторске функције на осе односних променљивих. Назив „дивергенција" потиче од Клифорда (Clifford).

Према томе, скаларном применом оператора ∇ на векторске функције добијају се скаларне функције, одн. сваком векторском пољу одговара скаларно поље дивергенције.

Зато што је ∇ диференцијални оператор, а не само вектор, у изразу $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ места чиниоцима не треба мењати. Изрази $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v}\cdot\nabla$ су потпуно различити. Други од тих израза може се замислити само као нов оператор.

Применимо ли оператор ∇ на векторску функцију у облику векторског производа, добићемо

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathfrak{v} &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_1\mathfrak{i} + v_2\mathfrak{j} + v_3\mathfrak{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathfrak{k}.\end{aligned} \tag{3}$$

Векторском применом Хамилтонова оператора ∇ на векторску функцију добили смо опет вектор. Овај вектор се зове *ротор* или *ротација* и бележи rot $\mathfrak{v}$, тј.

$$\nabla\times\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\mathfrak{k}. \tag{4}$$

Векторски производ оператора ∇ и вектора $\mathfrak{v}$ може се претставити и у облику симболичне детерминанте, тј.

$$\nabla\times\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Adresse: M.
Адреса Г.

ЛА НАЦИОНАЛ

АКЦИОНАРСКО ДРУШТВО ЗА ОСИГУРАЊЕ ЖИВОТА

Акционарско друштво са капиталом од 75,000.000.— француских франака

ДИРЕКЦИЈА ЗА ЈУГОСЛАВИЈУ У БЕОГРАДУ

Кнез Михаилова 32 — Чика Љубина 19

Police
Полица

No. Gal Општи број	Categorie Категорија	Prime nette Чиста премија	Frais de manipul. Манипул. трош.	Timbre Држ. такса	Coût du contrat Цена полисе

Reçu de M.
Примио сам од Г.

Assuré
Осигуран

la somme de
Суму од Дин.

Echéance
Плаћено од ....
до ....

montant de la prime afférente à la police ci-dessus mentionnée
као износ премије и таксе које се односе на горе означену полису

Државна такса обрачуната са Пореском влашћу члан 41 Правилника од 12-9-923 Бр. 37.884

....19.......

ЛА НАЦИОНАЛ
акционарско друштво за осигурање живота
Дирекција за Југославију у Београду

Adresse: M.
Адреса Г.

ЛА НАЦИОНАЛ

АКЦИОНАРСКО ДРУШТВО ЗА ОСИГУРАЊЕ ЖИВОТА
Акционарско друштво са капиталом од 75,000.000.— француских франака

ДИРЕКЦИЈА ЗА ЈУГОСЛАВИЈУ У БЕОГРАДУ
Кнез Михаилова 32 — Чика Љубина 19

	No. Gal Општи број	Catégorie Категорија	Prime nette Чиста премија	Frais de manipul. Манипул. тром.	Timbre Држ. такса	Coût du contrat Цена полисе
Police Полица						

Reçu de M.
Примио сам од Г.

Assuré
Осигуран

la somme de
Суму од Дин.

Echéance
Плаћено од ....
до ....

montant de la prime afférente à la police ci-dessus mentionnée
као износ премије и таксе које се односе на горе означену полису

Државна такса обрачуната са Пореском влашћу члан 41 Правилника од 12-9-923 Бр. 37.884

..............................19......

ЛА НАЦИОНАЛ
акционарско друштво за осигурање живота
Дирекција за Југославију у Београду

Adresse: M.
Адреса Г.

ЛА НАЦИОНАЛ

АКЦИОНАРСКО ДРУШТВО ЗА ОСИГУРАЊЕ ЖИВОТА
Акционарско друштво са капиталом од 75,000.000.— француских франака

ДИРЕКЦИЈА ЗА ЈУГОСЛАВИЈУ У БЕОГРАДУ
Кнез Михаилова 32 — Чика Љубина 19

	No. Gal Општи број	Categorie Категорија	Prime nette Чиста премија	Frais de manipul. Манипул. трош.	Timbre Држ. такса	Coût du contrat Цена полисе
Police Полица						

Reçu de M.
Примио сам од Г.

Assuré
Осигуран

la somme de
Суму од Дин.

Echéance
Плаћено од ....
до ....

montant de la prime afférente à la police ci-dessus mentionnée
као износ премије и таксе које се односе на горе означену полису

Државна такса обрачуната са Пореском влашћу члан 41 Правилника од 12-9-923 Бр. 37.884

.... 19 ......

ЛА НАЦИОНАЛ
акционарско друштво за осигурање живота
Дирекција за Југославију у Београду

Adresse: M. ....
Адреса Г. ....

ЛА НАЦИОНАЛ

АКЦИОНАРСКО ДРУШТВО ЗА ОСИГУРАЊЕ ЖИВОТА

Акционарско друштво са капиталом од 75,000.000.— француских франака

ДИРЕКЦИЈА ЗА ЈУГОСЛАВИЈУ У БЕОГРАДУ

Кнез Михаилова 32 — Чика Љубина 19

	No. Gal Општи број	Categorie Категорија	Prime nette Чиста премија	Frais de manipul. Манипул. трош.	Timbre Држ. такса	Coût du contrat Цена полисе
Police Полица						

Reçu de M.
Примио сам од Г.

Assuré
Осигуран

la somme de
Суму од Дин.

Echéance
Плаћено од ....
до ....

montant de la prime afférente à la police ci-dessus mentionnée
као износ премије и таксе које се односе на горе означену полису

Државна такса обрачуната са Пореском влашћу члан 41 Правилника од 12-9-923 Бр. 37.884

....19......

ЛА НАЦИОНАЛ
акционарско друштво за осигурање живота
Дирекција за Југославију у Београду

При развијању ове детерминанте по елементима прве врсте треба производе елемената друге и треће врсте заменити односним парцијалним изводима.

Видели смо (т. 54) да је Хамилтонов оператор инваријантан у односу на положај координатног система. Исто тако и сама векторска функција $\mathfrak{v}$ не зависи од координатног система. Најзад, како знамо, и операције скаларног и векторског множења су независне од координатног система. Према томе су и величине $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ инваријанте у односу на положај координатног система; оне су инваријанте векторског поља, као што је $\operatorname{grad} U$ инваријанта поља скалара U. Касније ћемо показати на још очигледнији начин инваријантност градијента, диверенције и ротора.

На основу једначина (2) и (4), одн. на основу чињенице да је ∇ диференцијални оператор, следује одмах

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = \nabla \cdot \mathfrak{c} = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{c} = \nabla \times \mathfrak{c} = 0, \tag{7}$$

ако је $\mathfrak{c} = \text{const}$.

Узмимо да треба ∇ применити на збир од више векторских функција. Тада се, пошто за скаларно и векторско множење важи дистрибутивни закон и с обзиром на начин примене диференцијације на збир, одмах добија

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2+\cdots) &= \nabla\cdot(\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2+\cdots) = \nabla\cdot\mathfrak{v}_1+\nabla\cdot\mathfrak{v}_2+\cdots = \\ &= \operatorname{div}\mathfrak{v}_1+\operatorname{div}\mathfrak{v}_2+\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2+\cdots) &= \nabla\times(\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2+\cdots) = \nabla\times\mathfrak{v}_1+\nabla\times\mathfrak{v}_2+\cdots = \\ &= \operatorname{rot}\mathfrak{v}_1+\operatorname{rot}\mathfrak{v}_2+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

На основу претходног и на основу једначина (2) и (4), применом оператора ∇ на производ $k\mathfrak{v}$ константе k и векторске функције $\mathfrak{v}$ следује

$$\operatorname{div} k\mathfrak{v} = \nabla\cdot k\mathfrak{v} = k(\nabla\cdot\mathfrak{v}) = k\operatorname{div}\mathfrak{v}, \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} k\mathfrak{v} = \nabla\times k\mathfrak{v} = k(\nabla\times\mathfrak{v}) = k\operatorname{rot}\mathfrak{v}, \tag{11}$$

што значи да се скаларна константа може изнети пред оператор ∇.

Посматрајмо сад производ $\mathfrak{c}U$ константног вектора $\mathfrak{c}$ и скаларне функције U, тј.

$$\mathfrak{c}U = (c_1\mathfrak{i}+c_2\mathfrak{j}+c_3\mathfrak{k})U = c_1U\mathfrak{i}+c_2U\mathfrak{j}+c_3U\mathfrak{k},$$

где је $\mathfrak{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Тада је на основу дефиниције

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathfrak{c}U &= \nabla\cdot(\mathfrak{c}U) = \frac{\partial c_1U}{\partial x}+\frac{\partial c_2U}{\partial y}+\frac{\partial c_3U}{\partial z} = \\ &= (c_1\mathfrak{i}+c_2\mathfrak{j}+c_3\mathfrak{k})\cdot\left(\mathfrak{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \mathfrak{c}\cdot\nabla U = \mathfrak{c}\cdot\operatorname{grad}U.\end{aligned} \tag{12}$$

Исто тако

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathfrak{c}U &= \nabla\times(\mathfrak{c}U) = \left(c_3\frac{\partial U}{\partial y}-c_2\frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \\ &+ \left(c_1\frac{\partial U}{\partial z}-c_3\frac{\partial U}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(c_2\frac{\partial U}{\partial x}-c_1\frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathfrak{k} = \\ &= -\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\end{vmatrix} = -\mathfrak{c}\times\operatorname{grad}U.\end{aligned} \tag{13}$$

Према томе, у производу векторске константе и скаларне функције може се векторска константа изнети пред оператор ∇ и онда се оператор примењује само на скаларну функцију и своди на градијент. Осим тога при извлачењу векторске константе испред оператора ∇ у изразу за ротор мења се знак према правилу да кад у векторском производу чиниоци размене места мора се променити знак производа.

Даљи корак у примени оператора ∇ учинићемо примењујући га на производ скаларне функције U и векторске функције $\mathfrak{v}$, тј. на вектор $U\mathfrak{v}$. Тада се, с обзиром да се диференцијација примењује посебно на сваки чинилац производа, добија, прво,

$$\operatorname{div}(U\mathfrak{v}) = \nabla\cdot(U\mathfrak{v}) = \nabla\cdot(\overset{*}{U}\mathfrak{v})+\nabla\cdot(U\overset{*}{\mathfrak{v}}) \tag{14}$$

$$\operatorname{rot}(U\mathfrak{v}) = \nabla\times(U\mathfrak{v}) = \nabla\times(\overset{*}{U}\mathfrak{v})+\nabla\times(U\overset{*}{\mathfrak{v}}). \tag{15}$$

Остаје још да се проуче производи на десној страни, у којима звездица означује који се од чинилаца сматра константним, те да се константни чиниоци изнесу пред знак оператора ∇. Како се на десној страни налазе производи скаларне константе и промењивог вектора и, обрнуто, константног вектора и скаларне функције, може се одмах, на основу правила (10), (11), (12) и (13), написати

$$\operatorname{div}(U\mathfrak{v}) = \nabla\cdot(U\mathfrak{v}) = U(\nabla\cdot\mathfrak{v})+\mathfrak{v}\cdot\nabla U = U\operatorname{div}\mathfrak{v}+\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}U. \tag{16}$$

$$\operatorname{rot}(U\mathfrak{v}) = \nabla\times(U\mathfrak{v}) = U(\nabla\times\mathfrak{v})-\mathfrak{v}\times\nabla U = U\operatorname{rot}\mathfrak{v}-\mathfrak{v}\times\operatorname{grad}U. \tag{17}$$

Пређимо сад на посматрање производа две векторске функције $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$. Ту ћемо имати посла са скаларом $U=\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ и вектором $\mathfrak{v}=\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}$ и, према томе, требаће да се одреди ∇U, $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ и $\nabla\times\mathfrak{v}$. Прво ћемо наћи обрасце за примену оператора ∇ на добијену векторску функцију. Тако је

$$(18)\qquad \operatorname{div}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\cdot(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\cdot(\overset{*}{\mathfrak{x}}\times\mathfrak{y})+\nabla\cdot(\mathfrak{x}\times\overset{*}{\mathfrak{y}}).$$

У мешовитим производима на десној страни могу се тренутно константни вектори избацити, помоћу цикличке пермутације, испред ∇, па се добија

$$\nabla\cdot(\overset{*}{\mathfrak{x}}\times\mathfrak{y})=-\mathfrak{x}\cdot(\nabla\times\mathfrak{y})\quad\text{и}\quad\nabla\cdot(\mathfrak{x}\times\overset{*}{\mathfrak{y}})=\mathfrak{y}\cdot(\nabla\times\mathfrak{x}).$$

Промена знака код првога производа уследила је зато што оператор ∇ мора бити лево од функције на коју се примењује и што се у формалном векторском производу морају стога променити места векторима. Дакле,

$$(19)\quad \operatorname{div}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\cdot(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\mathfrak{y}\cdot(\nabla\times\mathfrak{x})-\mathfrak{x}\cdot(\nabla\times\mathfrak{x})=\mathfrak{y}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{x}-\mathfrak{x}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{y}.$$

При одређивању ротора векторског производа две векторске функције добија се

$$(20)\qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\times(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\times(\overset{*}{\mathfrak{x}}\times\mathfrak{y})+\nabla\times(\mathfrak{x}\times\overset{*}{\mathfrak{y}}).$$

Ако се двоструки векторски производи на десној страни развију и пази да само векторска функција са звездицом може доћи испред ∇, јер се у односном члану сматра константном, добићемо

$$\nabla\times(\overset{*}{\mathfrak{x}}\times\mathfrak{y})=\mathfrak{x}(\nabla\cdot\mathfrak{y})-(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y},$$

$$\nabla\times(\mathfrak{x}\times\overset{*}{\mathfrak{y}})=(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}-\mathfrak{y}(\nabla\cdot\mathfrak{x}).$$

Стога најзад

$$(21)\quad \operatorname{rot}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\nabla\times(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})=\mathfrak{x}(\nabla\cdot\mathfrak{y})-\mathfrak{y}(\nabla\cdot\mathfrak{x})+(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}=$$
$$=\mathfrak{x}\operatorname{div}\mathfrak{y}-\mathfrak{y}\operatorname{div}\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}.$$

Изрази $(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}$ и $(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}$ могу се написати у облику $|\mathfrak{y}|(\mathfrak{y}_0\cdot\nabla)\mathfrak{x}$ и $|\mathfrak{x}|(\mathfrak{x}_0\cdot\nabla)\mathfrak{y}$, где су $\mathfrak{y}_0$ и $\mathfrak{x}_0$ ортови вектора $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{x}$. Према томе они претстављају производ интензитета вектора $\mathfrak{y}$ и извода вектора $\mathfrak{x}$ у правцу $\mathfrak{y}_0$, одн. интензитета вектора $\mathfrak{x}$ и извода вектора $\mathfrak{y}$ у правцу $\mathfrak{x}_0$. И сами изрази $(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}$ и $(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}$ зову се кратко изводи вектора $\mathfrak{x}$, одн. $\mathfrak{y}$ у правцу вектора $\mathfrak{y}$, одн. $\mathfrak{x}$.

При одређивању ∇U, тј. градијента скаларног производа $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}$ наилази се у први мах на тешкоће. Наиме, ако се скаларни производ изрази помоћу својих скаларних координата и

примени дефиниција градијента (т. 53, једн. 5), онда је рад прилично дуг. Осим тога, што је најважније, добија се резултат који је непрегледан и који се тешко може изразити помоћу наших инваријаната grad, div и rot. Кад се покуша формална примена Хамилтонова оператора добија се

$$(22)\qquad \nabla(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})=\nabla(\overset{*}{\mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{y})+\nabla(\mathfrak{x}\cdot\overset{*}{\mathfrak{y}}).$$

Иако се у оба производа на десној страни ∇ примењује само на један чинилац, сад нема начина да се онај други, који се при операцији сматра константним, избаци испред оператора ∇, јер се вектори у скаларном производу не могу раздвојити. До траженог резултата може се доћи на овај начин.

Посматрајмо формални двоструки векторски производ $\mathfrak{x}\times(\nabla\times\mathfrak{y})$ у коме се ∇ примењује само на векторску функцију $\mathfrak{y}$. Ако се тај двоструки векторски производ развије са свим потребним обзирима који важе за примену оператора ∇, добиће се

$$\mathfrak{x}\times(\nabla\times\mathfrak{y})=\nabla(\overset{*}{\mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{y})-(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y},$$

одакле

$$(23)\qquad \nabla(\overset{*}{\mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{y})=\mathfrak{x}\times(\nabla\times\mathfrak{y})+(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}.$$

На исти начин

$$\mathfrak{y}\times(\nabla\times\mathfrak{x})=\nabla(\mathfrak{x}\cdot\overset{*}{\mathfrak{y}})-(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}.$$

$$(24)\qquad \nabla(\mathfrak{x}\cdot\overset{*}{\mathfrak{y}})=\mathfrak{y}\times(\nabla\times\mathfrak{x})+(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}.$$

Према томе, ако се вредности из једначина (23) и (24) унесу у једначину (22) добиће се најзад за градијент скаларног производа две векторске функције израз

$$(25)\quad \operatorname{grad}(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})=\nabla(\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y})=\mathfrak{x}\times(\nabla\times\mathfrak{y})+\mathfrak{y}\times(\nabla\times\mathfrak{x})+(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}+(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}=$$
$$=\mathfrak{x}\times\operatorname{rot}\mathfrak{y}+\mathfrak{y}\times\operatorname{rot}\mathfrak{x}+(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}+(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{x}.$$

Најзад у вези са производом две векторске функције посматрајмо важан специјалан случај, кад је једна од њих константна и кад имамо посла са скаларом $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{v}$ и вектором $\mathfrak{c}\times\mathfrak{v}$, где је $\mathfrak{c}=\text{const}$. Тада из једначина (25), (19) и (21) добијамо

$$(26)\quad \operatorname{grad}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{v})=\nabla(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{v})=\mathfrak{c}\times(\nabla\times\mathfrak{v})+(\mathfrak{c}\cdot\nabla)\mathfrak{v}=\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}+(\mathfrak{c}\cdot\nabla)\mathfrak{v},$$

$$(27)\quad \operatorname{div}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{v})=\nabla\cdot(\mathfrak{c}\times\mathfrak{v})=-\mathfrak{c}\cdot(\nabla\times\mathfrak{v})=-\mathfrak{c}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v},$$

$$(28)\quad \operatorname{rot}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{v})=\nabla\times(\mathfrak{c}\times\mathfrak{v})=\mathfrak{c}(\nabla\cdot\mathfrak{v})-(\mathfrak{c}\cdot\nabla)\mathfrak{v}=\mathfrak{c}\operatorname{div}\mathfrak{v}-(\mathfrak{c}\cdot\nabla)\mathfrak{v}.$$

У случају $\mathfrak{r}=\mathfrak{v}$ имамо $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}=|\mathfrak{r}|^2$ и $\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}=0$. Стога на основу једначине (25)

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r})=\operatorname{grad}|\mathfrak{r}|^2=2\,[\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{r})+(\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{r}] \tag{29}$$

и ако је још $|\mathfrak{r}|=\text{const.}$

$$\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{r})+(\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{r}=0,$$

тј.

$$(\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{r}=-\mathfrak{r}\times\operatorname{rot}\mathfrak{r}. \tag{30}$$

Поступном применом досад изведених правила за примену оператора ∇ могу се без тешкоћа израчунати grad, div и rot за сложеније изразе у којима се јавља више од две векторске функције.

61. Операције II ступња са Хамилтоновим оператором

У овом параграфу посматраћемо резултате примене оператора ∇ два пута узастопце — тзв. операције другог ступња.

У скаларном пољу, дефинисаном функцијом U, примена оператора ∇ на функцију U даје, како смо видели, вектор ∇U, а примена оператора $(\mathfrak{t}\cdot\nabla)$ скалар $(\mathfrak{t}\cdot\nabla)U$ – извод функције U у правцу $\mathfrak{t}$.

На $\operatorname{grad} U$, одн. ∇U, као вектор, може се поново применити ∇ скаларно и векторски. Скаларном применом добијамо

$$\nabla\cdot\nabla U=(\nabla\cdot\nabla)U=\nabla^2 U=\Delta U,$$

тј.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Према томе скаларна примена оператора ∇ на градијент еквивалентна је примени Лапласова оператора Δ.

Векторском применом ∇ на ∇U добија се

$$\nabla\times\nabla U=(\nabla\times\nabla)U=0,$$

тј.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U=0. \tag{2}$$

Дакле, ротор градијента увек је једнак нули.

Најзад, за извод ∇U у правцу $\mathfrak{t}$ добија се вектор, одређен изразом (10) у т. 59.

У векторском пољу, дефинисаном векторском функцијом $\mathfrak{v}$, имамо две инваријанте: скалар $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ и вектор $\nabla\times\mathfrak{v}$. Осим тога имамо још и извод векторске функције $(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\mathfrak{v}$ у правцу $\mathfrak{t}$, која је вектор, иако се иза ње крију величине вишег реда.

Да избегнемо тешкоће које се појављују при формалној примени оператора ∇ на скалар $\nabla\cdot\mathfrak{v}$ према обрасцу (25) претходног параграфа, одредићемо прво скаларни и векторски производ оператора са вектором $\nabla\times\mathfrak{v}$. Тако је

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathfrak{v})=(\nabla\times\nabla)\cdot\mathfrak{v}=0,$$

с обзиром на важност правила о размени скаларног и векторског множења у мешовитом производу, тј.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v}=0. \tag{3}$$

Дакле, дивергенција ротора увек је једнака нули.

Формалном применом оператора ∇ из

$$\nabla\times(\nabla\times\mathfrak{v})=\nabla(\nabla\cdot\mathfrak{v})-(\nabla\cdot\nabla)\mathfrak{v}=\nabla(\nabla\cdot\mathfrak{v})-\Delta\mathfrak{v}$$

следује

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}-\nabla\mathfrak{v}, \tag{4}$$

где се под $\Delta\mathfrak{v}$ разуме израз

$$\Delta\mathfrak{v}=\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial x^2}=\mathfrak{i}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right)+ \tag{5}$$

$$+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}\right)=\mathfrak{i}\Delta v_1+\mathfrak{j}\Delta v_2+\mathfrak{k}\Delta v_3.$$

Израз (4) је вектор и из њега се одмах добија вредност за примену оператора ∇ на скалар $\nabla\cdot\mathfrak{v}$, тј.

$$\nabla(\nabla\cdot\mathfrak{v})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v}+\nabla\mathfrak{v}. \tag{6}$$

У скаларном облику вредност овог вектора се може овако написати

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}=\mathfrak{i}&\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial z\partial x}\right)+\\ +\mathfrak{j}&\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial y\partial z}\right)+\\ +\mathfrak{k}&\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Најзад може се одредити извод у правцу $\mathfrak{t}$ скалара $\nabla \cdot \mathfrak{v}$ и вектора $\nabla \times \mathfrak{v}$ према познатим правилима, па се добија скалар

$$(\mathfrak{t} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \mathfrak{v}) = \cos\alpha \frac{\partial(\nabla \cdot \mathfrak{v})}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial(\nabla \cdot \mathfrak{v})}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial(\nabla \cdot \mathfrak{v})}{\partial z} =$$

$$(8) \quad = \cos\alpha\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z \partial x}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial z}\right) +$$

$$+ \cos\gamma\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2}\right)$$

вектор

$$(\mathfrak{t} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathfrak{v}) = \cos\alpha \frac{\partial(\nabla \times \mathfrak{v})}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial(\nabla \times \mathfrak{v})}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial(\nabla \times \mathfrak{v})}{\partial z} =$$

$$= \mathfrak{i}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right)\right] +$$

$$(9) \quad + \mathfrak{j}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z}\right)\right] +$$

$$+ \mathfrak{k}\left[\cos\alpha\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial x}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z}\right)\right],$$

где је вредност оператора $(\mathfrak{t} \cdot \nabla)$ дата једн. 11, т. 54.

62. Дивергенција, ротор и Лапласов оператор у генералисаним координатама

Показали смо раније (т. 55) како се градијент изражава у генералисаним координатама. Овде ћемо то учинити за дивергенцију, ротор и Лапласов оператор. При томе ћемо се ограничити само на ортогоналне генералисане координате, јер се оне најчешће употребљују, те није нужно компликовати рад општим излагањем. Одређивање дивергенције и ротора у генералисаним координатама је сложеније из простог разлога што су у пољу посматране векторске функције $\mathfrak{v}$ и сами ортови $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{q}_3$ генералисаних оса у општем случају променљиви. Стога ћемо прво одредити ротор и дивергенцију

за поље самих ортова неког ортогоналног генералисаног система координата.

На основу т. 55, једн. (25) могу се написати, ако се A_1, A_2, A_3, чија су значења тамо одређена, сматрају као скаларне функције положаја ови обрасци

$$\operatorname{grad} A_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1}\mathfrak{q}_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2}\mathfrak{q}_2 + \frac{1}{A_3}\frac{\partial A_1}{\partial q_3}\mathfrak{q}_3,$$

$$(1) \quad \operatorname{grad} A_2 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial q_1}\mathfrak{q}_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_2}\mathfrak{q}_2 + \frac{1}{A_3}\frac{\partial A_2}{\partial q_3}\mathfrak{q}_3,$$

$$\operatorname{grad} A_3 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_3}{\partial q_1}\mathfrak{q}_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_3}{\partial q_2}\mathfrak{q}_2 + \frac{1}{A_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_3}\mathfrak{q}_3.$$

Поред тога, како је ротор градијента увек једнак нули, имамо на основу једн. (24) у т. 55 и једначине (17) у т. 60

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathfrak{q}_1 = 0 = \frac{1}{A_1}\operatorname{rot}\mathfrak{q}_1 + \frac{1}{A_1^2}(\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} A_1),$$

$$(2) \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathfrak{q}_2 = 0 = \frac{1}{A_2}\operatorname{rot}\mathfrak{q}_2 + \frac{1}{A_2^2}(\mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} A_2),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathfrak{q}_3 = 0 = \frac{1}{A_3}\operatorname{rot}\mathfrak{q}_3 + \frac{1}{A_3^2}(\mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} A_3).$$

Из ових једначина и једначина (1) добијају се за роторе ортова $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{q}_3$ одмах ови обрасци

$$\operatorname{rot}\mathfrak{q}_1 = -\frac{1}{A_1}(\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} A_1) = \mathfrak{q}_2 \frac{1}{A_3 A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_3} - \mathfrak{q}_3 \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2},$$

$$(3) \quad \operatorname{rot}\mathfrak{q}_2 = -\frac{1}{A_2}(\mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} A_2) = \mathfrak{q}_3 \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_1} - \mathfrak{q}_1 \frac{1}{A_2 A_3}\frac{\partial A_2}{\partial q_3},$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{q}_3 = -\frac{1}{A_3}(\mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} A_3) = \mathfrak{q}_1 \frac{1}{A_2 A_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_2} - \mathfrak{q}_2 \frac{1}{A_3 A_1}\frac{\partial A_3}{\partial q_1}.$$

Како је услед ортогоналности $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 \times \mathfrak{q}_3$ итд. може се у вези са једначином (19) из т. 60 за дивергенцију ортова написати

$$\operatorname{div}\mathfrak{q}_1 = \operatorname{div}(\mathfrak{q}_2 \times \mathfrak{q}_3) = \mathfrak{q}_3 \cdot \operatorname{rot}\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}_2 \cdot \operatorname{rot}\mathfrak{q}_3$$

и још две сличне једначине, па најзад с обзиром на једначине (3)

$$\operatorname{div}\mathfrak{q}_1 = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{1}{A_3 A_1}\frac{\partial A_3}{\partial q_1},$$

$$(4) \quad \operatorname{div}\mathfrak{q}_2 = \frac{1}{A_2 A_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2},$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{q}_3 = \frac{1}{A_3 A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_3} + \frac{1}{A_2 A_3}\frac{\partial A_2}{\partial q_3}.$$

Обрасци (3) и (4) пружају нам могућност да изразимо дивергенцију и ротор неке векторске функције, чије су ортогоналне генералисане координате v_1, v_2, v_3 познате, тј.

$$\mathfrak{v} = v_1 \mathfrak{q}_1 + v_2 \mathfrak{q}_2 + v_3 \mathfrak{q}_3 . \tag{5}$$

Тако је на пр., на основу ових образаца и раније изведених правила

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{v} &= \operatorname{div} (v_1 \mathfrak{q}_1) + \operatorname{div} (v_2 \mathfrak{q}_2) + \operatorname{div} (v_3 \mathfrak{q}_3) = v_1 \operatorname{div} \mathfrak{q}_1 + \\ &+ \mathfrak{q}_1 \cdot \operatorname{grad} v_1 + v_2 \operatorname{div} \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{q}_2 \cdot \operatorname{grad} v_2 + v_3 \operatorname{div} \mathfrak{q}_3 + \mathfrak{q}_3 \cdot \operatorname{grad} v_3 .\end{aligned} \tag{6}$$

Уношењем потребних вредности и развијањем добија се

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{v} &= v_1 \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \\ &+ v_2 \left(\frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_3}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \\ &+ v_3 \left(\frac{1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_1}{\partial q_3} + \frac{1}{A_2 A_3} \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \right) + \frac{1}{A_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} ,\end{aligned} \tag{7}$$

одакле најзад имамо тражени израз за дивергенцију

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 A_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 A_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 A_2 v_3) \right] , \tag{8}$$

пошто је очигледно

$$\frac{v_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{v_1}{A_3 A_1} \frac{\partial A_3}{\partial q_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 A_3 v_1)$$

итд.

Одређивање ротора тече овим током. На основу образаца из ранијих и овог параграфа следује

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \operatorname{rot} (v_1 \mathfrak{q}_1) + \operatorname{rot} (v_2 \mathfrak{q}_2) + \operatorname{rot} (v_3 \mathfrak{q}_3) = \\ &= v_1 \operatorname{rot} \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} v_1 + v_2 \operatorname{rot} \mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} v_2 + \\ &+ v_3 \operatorname{rot} \mathfrak{q}_3 - \mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} v_3 = \\ &= -\frac{1}{A_1} [v_1 (\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} A_1) + A_1 (\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} v_1)] - \\ &- \frac{1}{A_2} [v_2 (\mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} A_2) + A_2 (\mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} v_2)] - \\ &- \frac{1}{A_3} [v_3 (\mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} A_3) + A_3 (\mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} v_3)] .\end{aligned} \tag{9}$$

Најзад, како је очигледно

$$v_1 (\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} A_1) + A_1 (\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} v_1) = \mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} (A_1 v_1)$$

итд., може се за ротор у ортогоналним генералисаним координатама написати

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\Big[&\frac{1}{A_1} (\mathfrak{q}_1 \times \operatorname{grad} A_1 v_1) + \frac{1}{A_2} (\mathfrak{q}_2 \times \operatorname{grad} A_2 v_2) + \\ &+ \frac{1}{A_3} (\mathfrak{q}_3 \times \operatorname{grad} A_3 v_3) \Big] .\end{aligned} \tag{10}$$

Скаларним множењем обе стране ове једначине ортовима $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ добијају се ортогоналне генералисане координате ротора у облику

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \frac{1}{A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 v_2) \right] , \\ \mathfrak{q}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \frac{1}{A_3 A_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 v_3) \right] , \\ \mathfrak{q}_3 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 v_1) \right] .\end{aligned} \tag{11}$$

Да бисмо најзад нашли израз за Лапласов оператор, израчунаћемо према обрасцу (8) дивергенцију векторског поља градијента неког скалара U одређена једначином (25) у т. 55. Тада је

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U &= \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{A_3 A_1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right] ,\end{aligned} \tag{12}$$

и према томе

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{A_3 A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right] . \tag{13}$$

На пример, за цилиндрично поларне координате r, ϑ, z које су ортогоналне имамо $A_1 = A_3 = 1$ и $A_2 = r$ и Лапласов оператор за те координате има облик

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \tag{14}$$

За сферне цилиндричне координате ρ, ϑ, φ које су такође ортогоналне имамо $A_1 = 1$, $A_3 = \rho \cos \varphi$ и $A_2 = \rho$. Према томе, на основу обрасца (13) следује

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\rho^2 \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\rho^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) .\end{aligned} \tag{15}$$

63. Примена оператора ∇ на вектор положаја $\mathfrak{r}$ и његов интензитет r

Како се у примени често срећемо са вектором положаја $\mathfrak{r}$ или са његовим интензитетом $|\mathfrak{r}|=r$, одредићемо div $\mathfrak{r}$, rot $\mathfrak{r}$ и grad r.

Очигледно је, према дефиницији,

(1) $$\operatorname{div}\mathfrak{r}=\nabla\cdot\mathfrak{r}=\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x\mathfrak{i}+y\mathfrak{j}+z\mathfrak{k})=3$$

и

(2) $$\operatorname{rot}\mathfrak{r}=\nabla\times\mathfrak{r}=\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0.$$

Како је $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где је испред корена увек знак плус, имамо

(3) $$\begin{aligned}\operatorname{grad} r=\nabla r&=\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)r=\\&=\frac{x\mathfrak{i}+y\mathfrak{j}+z\mathfrak{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\mathfrak{r}}{r}=\mathfrak{r}_0,\end{aligned}$$

јер је

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\quad\text{итд.}$$

Дакле, градијент интензитета вектора положаја је његов орт.

Вредност grad r израчунали смо и директно (т. 53, једн. 24), а до истог закључка се долази и простим геометриским посматрањем поља одређена скаларом $U=r$.

Уопште за сваку скаларну функцију која зависи од интензитета r вектора положаја $\mathfrak{r}$, тј. $U=U(r)$ важи, с обзиром на једначину (22-V) у т. 53, једначина

(4) $$\operatorname{grad} U(r)=\frac{\partial U}{\partial r}\operatorname{grad} r=\frac{\partial U}{\partial r}\mathfrak{r}_0.$$

На пр. за $U=\frac{1}{r}$ имамо

(5) $$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\nabla\mathfrak{r}=-\frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}=-\frac{\mathfrak{r}}{r^3}.$$

За извод вектора положаја $\mathfrak{r}$ у неком правцу $\mathfrak{t}$ добија се

(6) $$\begin{aligned}(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,\mathfrak{r}&=\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\mathfrak{i}+y\mathfrak{j}+z\mathfrak{k})=\\&=\mathfrak{i}\cos\alpha+\mathfrak{j}\cos\beta+\mathfrak{k}\cos\gamma=\mathfrak{t}.\end{aligned}$$

Уопште је увек

(7) $$(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,\mathfrak{r}=\mathfrak{v},$$

резултат вредан пажње, који је лако проверити.

За извод интензитета r вектора положаја $\mathfrak{r}$ у неком правцу имамо

(8) $$(\mathfrak{t}\cdot\nabla)\,r=(\mathfrak{t}\cdot\nabla\,r)=\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{r}_0=\cos\varphi,$$

ако се стави $\sphericalangle(\mathfrak{t},\mathfrak{r}_0)=\varphi$.

Од израза другог ступња треба углавном израчунати само дивергенцију градијента, јер су grad div $\mathfrak{r}$, div rot $\mathfrak{r}$ и rot rot $\mathfrak{r}$ једнаки нули. Како је grad $r=\mathfrak{r}_0$, то се, с обзиром на једн. 16 у т. 60, добија

(9) $$\operatorname{div}\operatorname{grad} r=\nabla\cdot\mathfrak{r}_0=\nabla\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}=\Delta\cdot\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathfrak{r})+\mathfrak{r}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right).$$

Дакле, најзад, с обзиром на једначину (1) и (5)

(10) $$\operatorname{div}\operatorname{grad} r=\frac{2}{r}.$$

До истог резултата бисмо дошли и применом скаларног Лапласова оператора Δ, јер је div grad $=\Delta$. Наиме

$$\Delta r=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r},$$

пошто је

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\quad\text{итд.}$$

Израчунаћемо најзад и дивергенцију градијента скаларне функције $U=\frac{1}{r}$ која је од необичне важности у примени. Наиме, за $r\neq 0$ имамо с обзиром на једначине (1) и (5)

(11) $$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}&=-\nabla\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r^3}=-\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^3}\mathfrak{r}\right)=-\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\mathfrak{r}-\frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\mathfrak{r})=\\&=\frac{3}{r^4}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}\cdot\mathfrak{r}-\frac{3}{r^3}=0.\end{aligned}$$

Другим речима, реципрочна вредност интензитета вектора положаја задовољава Лапласову парцијалну диференцијалну једначину, тј.

(12) $$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}=0.$$

Досад смо прећутно сматрали да је почетак вектора положаја у координатном почетку неког Декартова триједра који смо узимали као непокретан. Замислимо, међутим, неку скаларну функцију U која зависи од интензитета вектора положаја тачке Q у односу на тачку P као пол. У том случају, посматрана скаларна функција U зависи од положаја и једне и друге тачке, које могу бити променљиве. Прву тачку, P, назваћемо *изворна тачка*, а другу, Q, *посматрана тачка*. Разлог за ове називе лежи у томе што у првој тачки може лежати на пр., неки електрични товар (извор) који у тачкама простора које посматрамо ствара неки потенцијал. Баш у вези са проблемима теорије електрицитета важно је при одређивању градијента такве функције U обратити пажњу и разликовати: 1) случај, кад је изворна тачка P фиксирана и U се посматра као функција посматране тачке Q, и 2) случај, кад је посматрана тачка Q фиксирана и U се посматра као функција положаја изворне тачке P.

До резултата ћемо доћи одмах на овај начин. Нека вектор положаја изворне тачке P буде $\mathfrak{p}=\{\xi, \eta, \zeta\}$, а вектор положаја посматране тачке Q нека буде $\mathfrak{q}=\{x, y, z\}$. Тада је

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{q}-\mathfrak{p}=(x-\xi)\mathfrak{i}+(y-\eta)\mathfrak{j}+(z-\zeta)\mathfrak{k} \tag{13}$$

и

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2. \tag{14}$$

Према томе за утврђено P, тј. за ξ, η, ζ константно, следује

$$\nabla_Q r=\mathfrak{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{x-\xi}{r}\mathfrak{i}+\frac{y-\eta}{r}\mathfrak{j}+\frac{z-\zeta}{r}\mathfrak{k}, \tag{15}$$

где смо са ∇_Q назначили да је само Q променљиво. Међутим, за утврђено Q, тј. x, y, z константно, добијамо

$$\nabla_P r=\mathfrak{i}\frac{\partial r}{\partial \xi}+\mathfrak{j}\frac{\partial r}{\partial \eta}+\mathfrak{k}\frac{\partial r}{\partial \zeta}=-\frac{x-\xi}{r}\mathfrak{i}-\frac{y-\eta}{r}\mathfrak{j}-\frac{x-\zeta}{r}\mathfrak{k}, \tag{16}$$

где сад ∇_P означава променљивост само тачке P. Из једначина (15) и (16) је јасно да мора бити

$$\nabla_Q r=-\nabla_P r. \tag{17}$$

Према томе, како је

$$\nabla_Q U=\frac{\partial U}{\partial r}\nabla_Q r \quad \text{и} \quad \nabla_P U=\frac{\partial U}{\partial r}\nabla_P r,$$

имамо

$$\nabla_Q U=-\nabla_P U. \tag{18}$$

До истог резултата се може доћи и на овај начин. Како је U функција положаја тачке P и тачке Q, тј. од x, y, z и ξ, η, ζ, то се може написати

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial U}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial U}{\partial \zeta}d\zeta= \\ &= d\mathfrak{q}\cdot\nabla_Q U+d\mathfrak{p}\cdot\nabla_P U. \end{aligned} \tag{19}$$

Међутим, пошто ова једначина треба да важи за све вредности вектора $d\mathfrak{q}$ и $d\mathfrak{p}$, мора важити и за $d\mathfrak{q}=d\mathfrak{p}$ ма коју вредност имао вектор $d\mathfrak{q}$. Тада је, према једначини (13), $d\mathfrak{r}=0$ те је стога и $dU=0$. Дакле, добија се из (19) једначина

$$d\mathfrak{q}\cdot(\nabla_Q U+\nabla_P U)=0. \tag{20}$$

Пошто је, како рекосмо, $d\mathfrak{q}$ потпуно произвољно, мора бити

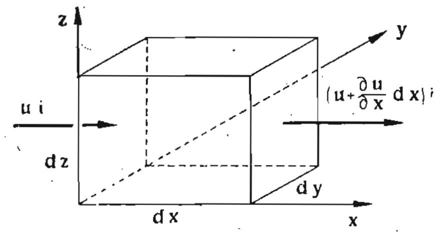
$$\nabla_Q U=-\nabla_P U,$$

што је требало доказати.

64. Механичко тумачење дивергенције и ротора

Досад смо примењивали формалну дефиницију дивергенције помоћу Хамилтонова оператора. Сад се поставља питање неког конкретног тумачења дивергенције, тј. поставља се питање да ли појам дивергенције има неко физичко тумачење. У том циљу посматраћемо векторско *поље струјања* идеалне течности. У том пољу се она места где се појављују нове количине течности називају — *извори*. Места где течност нестаје називају се *понори* (негативни извори). У некој течној маси извори могу бити само у појединим тачкама, а могу бити распоређени и непрекидно. Уочимо извор у некој тачки P. Количина течности коју у јединици времена даје јединица запремине течне масе непрекидно испуњена изворима јачине као у тачки P очигледно је мера за јачину тог извора и зове се *јачина* извора P у односу на јединицу запремине.

Уочимо сад запремински елемент dV течности. Замислимо га, ради лакшег тумачења, у облику елементарног паралелепипеда, тј. $dV = dxdydz$, са теменом у координатном почетку Декартова триједра (сл. 179). Нека поље брзине течности буде одређено са



Сл. 179

(1) $\quad \mathfrak{v} = v_1\mathfrak{i} + v_2\mathfrak{j} + v_3\mathfrak{k}$,

где су v_1, v_2, v_3 скаларне функције промењивих x, y, z, које одређују компоненте брзине у правцу појединих оса за сваку тачку поља. Према томе, за јединицу времена утече у посматрани запремински елемент у правцу x-осе количина течности

$$v_1\, dy\, dz,$$

при чему смо, ради олакшице, узели да је густина хомогене течности $\sigma = 1$. Скаларна функција положаја v_1 мења се у општем случају при померању за dx у правцу x-осе за величину која у првој апроксимацији одговара парцијалном диференцијалу те функције по x, тј. брзина течности у правцу x-осе при истицању из наше коцке биће одређена изразом

$$v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dx.$$

Дакле, у јединици времена из запреминског елемента истиче у правцу x-осе количнна течности

$$\left(v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz.$$

Према томе, из посматраног запреминског елемента је у правцу x-осе за јединицу времена више истекло (одн. у њега утекло, према знаку $\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$ него утекло течности

(2) $$\left(v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz - v_1\, dydz = \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dxdydz = \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dV.$$

На исти начин је вишак истицања (одн. утицања) у правцу y-осе одређен изразом

(3) $$\frac{\partial v_2}{\partial y}\, dV,$$

а у правцу z-осе

(4) $$\frac{\partial v_3}{\partial z}\, dV.$$

Укупна количина dQ у јединици времена из посматраног запреминског елемента више истекле него утекле течности износи

(5) $$dQ = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dV = \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV,$$

одн. израчунато на јединицу запремине

(6) $$I = \frac{dQ}{dV} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Овај израз даје за коначни елемент запремине само *просечну*, или *средњу* вредност јачине извора распоређених у јединици запремине. Само, ако се изврши гранични, прелаз, кад запремински елемент тежи нули и своди се на тачку, добија се јачина извора у одређеној тачки коју обухвата запремински елемент.

Дакле, изворна јачина у пољу струјања идеалне течности је диверегенција вектора брзине течности. Другим речима, дивергенција, израчуната за одређену тачку векторског поља струјања течности, претставља јачину извора у тој тачки.

Ако се ради о понору, дивергенција је негативна, тј. у том случају течност у посматраној тачки нестаје.

После овог тумачења јасно је порекло назива дивергенција (од латинске речи divergo, - ere = разилазити се). С друге стране, не стоји ништа на путу да се исто тумачење да и за векторска поља, где се не ради о течности, већ, рецимо, о струјању топлоте, електрицитета, или ма о ком вектору уопште.

Како је div $\mathfrak{v}$ скалар, а поред тога, у општем случају, такође функција положаја у посматраном векторском пољу, може се рећи да сваком векторском пољу одговара скаларно поље дивергенције. Ово се поље из горњих разлога назива *изворно поље*.

Да бисмо дали механичко тумачење ротора, посматрајмо ротацију чврстог тела око непокретне тачке. При оваквој ротацији, међутим, разне тачке тела имају различите брзине и, према томе, брзине тачака чврстог тела чине у одређеном тренутку поље брзина, које је одређено (т. 38) једначином

(7) $$\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \mathfrak{r}.$$

Израчунајмо сад ротор вектора $\mathfrak{v}$ брзине тачака чврстог тела. Тада је, с обзиром на једначину (28) у т. 60,

(8) $$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot}(\vec{\omega} \times \mathfrak{r}) = \nabla \times (\vec{\omega} \times \mathfrak{r}) = \vec{\omega} \operatorname{div} \mathfrak{r} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\mathfrak{r}.$$

Одавде, на основу једначина (1) и (7) претходног параграфа, следује

$$(9) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega},$$

тј. ротор брзине неке тачке чврстог тела при сферном кретању једнак је двострукој угаоној брзини. Односно, угаона брзина је половина ротора брзине тачке. Ротор брзине неке тачке чврстог тела и у најопштијем кретању има исту вредност двоструке угаоне брзине. Одавде је јасно порекло назива ротор или ротација.

У енглеској литератури употребљује се за ротор по Гибзу назив *curl* (=увојак, изговара се *kə : l*). У француској се литератури наилази и на реч *tourbillon* (=вихор, вртлог), а у рускої такође на реч *вихрь*.

Свакoм, дакле, векторском пољу одговара друго векторско поље — поље ротора — *вртложно поље*.

65. Криволиниски интеграли. Циркулација вектора

Посматрајмо неку скаларну функцију положаја U и у њеном пољу неку оријентисану криву C. У разним тачкама ове криве скалар U има разне вредности. Посматрајмо део криве од тачке A до тачке B и у тај део упишимо ма на који начин неки полигон од n страна, чије су стране вектори $\Delta\mathfrak{r}_1, \Delta\mathfrak{r}_2, \ldots, \Delta\mathfrak{r}_n$. Ови вектори су тетиве посматране криве и, при повећавању броја страна, теже управљеним елементима криве као граничним вредностима. Нека U_i буде вредност нашег скалара ма у којој тачки на страни $\Delta\mathfrak{r}_i$ полигона. Уколико се страна полигона приближује управљеном елементу криве, вредност U_i тежи вредности скаларне функције U у односној тачки посматране криве. Помножимо сад сваку вредност U_i односним вектором $\Delta\mathfrak{r}_i$ и образујмо збир.

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} U_i \,\Delta\mathfrak{r}_i.$$

Гранична вредност овога збира, кад $\Delta\mathfrak{r}_i \to 0$ или, што се своди на исто, кад $n \to \infty$, тј.

$$(2) \qquad \lim_{\Delta\mathfrak{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} U_i \,\Delta\mathfrak{r}_i$$

зове се *криволиниски интеграл скаларне функције* U *дуж оријентисане криве* C. При овоме се претпоставља: 1) да је овај lim одређен; 2) да не зависи од начина како је уписан полигон између тачака A и B; и 3) да не зависи ни од тога у којој се тачки стране полигона узме вредност скалара U.

Криволиниски интеграл (2) обично се обележава овако

$$(3) \qquad \lim_{\Delta\mathfrak{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} U_i \,\Delta\mathfrak{r}_i = \int_C U\, d\mathfrak{r},$$

где је $d\mathfrak{r}$ управљени елемент посматране криве C. Ако треба подвући у којим се границама интеграл узима дуж криве C, онда се пише и

$$(4) \qquad \int_{(AB)} U\, d\mathfrak{r} \quad \text{или} \quad \int_A^B U\, d\mathfrak{r}.$$

Најзад, ако је крива C затворена крива линија – нека оријентисана контура – а интеграли се дуж целе контуре у горњем смислу, пише се

$$(5) \qquad \oint_C U\, d\mathfrak{r},$$

где круг на знаку интеграла означује да се интеграли по целој контури C, а знак $+$ или $-$ испред C показује да ли се интеграција врши у директном или индиректном смеру. Очигледно је увек

$$(6) \qquad \oint_C = -\oint_{-C}.$$

Криволиниски интеграл (3) дуж оријентисане криве је вектор, пошто је сваки интегрални елемент $U\,d\mathfrak{r}$ вектор.

На сличан начин се може у неком векторском пољу посматрати вредност векторске функције $\mathfrak{v}$ у тачкама неке оријентисане криве C. Истим поступком долази се до формирања интегралних елемената помоћу производа управљеног елемента криве линије и односне вредности векторске функције. Постоје, међутим, два производа вектора: скаларни и векторски и, према томе, постоје *два криволиниска интеграла векторске функције* $\mathfrak{v}$ дуж оријентисане криве C и то

$$(7) \qquad \lim_{\Delta\mathfrak{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{v}_i \cdot \Delta\mathfrak{r}_i) = \int_C \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$$

и

$$(8) \qquad \lim_{\Delta\mathfrak{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{v}_i \times \Delta\mathfrak{r}_i) = \int_C \mathfrak{v} \times d\mathfrak{r}.$$

Први од ова два криволиниска интеграла је скалар и назива се *ток вектора* $\mathfrak{v}$ дуж криве C. Ако је крива C затворена, тај интеграл се назива *циркулација вектора* $\mathfrak{v}$.

Криволиниски интеграл (8) је вектор.

С обзиром да је

(9) $$d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\, dx + \mathfrak{j}\, dy + \mathfrak{k}\, dz$$

и да су основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ константни, може се криволиниски вектор интеграл (3) раставити у три скаларна интеграла у облику

(10) $$\int_C U\, d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\int_C U\, dx + \mathfrak{j}\int_C U\, dy + \mathfrak{k}\int_C U\, dz,$$

где је $U = U(x, y, z)$. Да бисмо, према томе, израчунали овај интеграл у границама од A до B, потребне су две ствари: 1) координате датих граничних тачака, тј. $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$; и 2) једначина криве дуж које се врши интеграција, рецимо, у облику

(11) $$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Тада се помоћу једначина (11) из $U = U(x, y, z)$ елиминишу y и z у првом од скаларних интеграла (10), z и x у другом и x и y у трећем. На тај начин се сва три интеграла своде на обичне, чије је израчунавање познато, тј.

(12) $$\int_A^B U\, d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\int_{x_0}^{x_1} U_1\, dx + \mathfrak{j}\int_{y_0}^{y_1} U_2\, dy + \mathfrak{k}\int_{z_0}^{z_1} U_3\, dz,$$

где смо са U_1, U_2 и U_3 обележили резултате елиминације односних координата из функције $U(x, y, z)$.

Ако је $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, може се скаларни интеграл (7) написати у облику

(13) $$\int_C \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \int_C (v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz),$$

одакле је очигледно да се тај интеграл може свести на обичан криволиниски интеграл. Треба само добро обратити пажњу да израз $v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz$, упркос свом облику, није увек тотални диференцијал, те је у општем случају за израчунавање интеграла (13) неопходно познавање једначине криве линије дуж које се врши интеграција. То је потребно стога да би се могле извршити потребне елиминације и интеграција свела на обичне интеграле. Наравно да се и у овом случају морају знати границе интеграције уколико је проблем одређен.

Криволиниски вектор интеграл (8) може се написати у облику

(14) $$\int_C \mathfrak{v}\times d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\int_C (v_2\, dz - v_3\, dy) + \mathfrak{j}\int_C (v_3\, dx - v_1\, dz) + \mathfrak{k}\int_C (v_1\, dy - v_2\, dx).$$

И овај се интеграл може на исти начин, као горе, свести на интеграцију три обична интеграла, ако је позната једначина криве дуж које се врши интеграција и границе интеграције.

66. Површински интеграли. Протицање (flux) вектора

Нека буде дата површина S на којој нема сингуларних тачака. Претпоставимо да је та површина поље неког скалара U и да у свакој тачки M_i те површине скалар U има одређену вредност $U(M_i)$. Поделимо ма на који начин ту површину на ситније делове и обележимо те делове са Δf_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При томе се тачка M_i налази на делу Δf_i, било унутра било на граници. На сваки од ових површинских делова ма у којој његовој тачки повуче се оријентисана нормала површине, чији је орт $\mathfrak{n}_{0i}$ и посматра вектор

(1) $$\mathfrak{n}_{0i}\, \Delta f_i = \Delta \mathfrak{f}_i.$$

Помножимо сваку вредност функције U_i односним вектором $\Delta \mathfrak{f}_i$ и образујмо збир свих тих производа, тј. нађимо израз

(2) $$\sum_{i=1}^{n} U_i\, \Delta \mathfrak{f}_i.$$

Гранична вредност збира (2): 1) ако је одређена; 2) ако не зависи од начина поделе површине на ситније делове; и 3) ако не зависи од тога у којој тачки површинског дела је узет орт нормале, кад $\Delta \mathfrak{f}_i \to 0$, или кад $n \to \infty$, тј.

(3) $$\lim_{\Delta \mathfrak{f}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} U_i\, \Delta \mathfrak{f}_i = \int_S U\, d\mathfrak{f}$$

зове се *површински интеграл скаларне функције* U по оријентисаној површини S. Овај интеграл је очигледно вектор.

Вектор

(4) $$d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}_0\, df$$

зове се *управљени елемент површине*. Сам површински елемент df може се због своје незнатне величине сматрати као раван.

После скаларног множења једначине (4) основним ортовима Декартова триједра добијају се пројекције управљеног елемента на координатне осе

$$
\begin{aligned}
& d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{i} = df(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{i}) = df\cos\alpha,\\
(5)\qquad & d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{j} = df(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{j}) = df\cos\beta,\\
& d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{k} = df(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{k}) = df\cos\gamma,
\end{aligned}
$$

где су α, β, γ углови између нормале посматраног површинског елемента и оса триједра.

Према томе је, пошто су основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ константни

$$(6)\qquad \int\limits_S U\,d\mathfrak{f} = \mathfrak{i}\int\limits_S U\cos\alpha\,df + \mathfrak{j}\int\limits_S U\cos\beta\,df + \mathfrak{k}\int\limits_S U\cos\gamma\,df,$$

где се интеграли на десној страни могу сматрати као површински интеграли узети по површинама пројекција S_1, S_2, S_3 дате површине S на координатне равни, па се може ставити

$$(7)\qquad d\mathfrak{f} = \mathfrak{i}\,dy\,dz + \mathfrak{j}\,dz\,dx + \mathfrak{k}\,dx\,dy$$

и

$$(8)\qquad \int\limits_S U\,d\mathfrak{f} = \mathfrak{i}\int\limits_{S_1} U\,dy\,dz + \mathfrak{j}\int\limits_{S_2} U\,dz\,dx + \mathfrak{k}\int\limits_{S_3} U\,dx\,dy.$$

На тај се начин израчунавање површинског интеграла (3) своди на израчунавање три двострука одређена интеграла. За извођење интеграције треба знати једначину површине по којој се врши интеграција и границе у којима се површина посматра. Из једначине површине се у сваком од три интеграла (8) елиминише по једна непозната и одреде границе интеграције да би се могла извести интеграција.

Кад је једначина површине одређена помоћу Гаусових параметара, тј. једначином

$$(9)\qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v),$$

може се узети да је управљени елемент површине одређен изразом

$$(10)\qquad d\mathfrak{f} = \left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v}\right)du\,dv = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Ако се површина S посматра као поље векторске функције $\mathfrak{v}$, могу се образовати *два површинска интеграла векторске функције* $\mathfrak{v}$ по површини S и то

$$(11)\qquad \lim_{\Delta\mathfrak{f}_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{v}_i\cdot\Delta\mathfrak{f}_i = \int\limits_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}$$

и

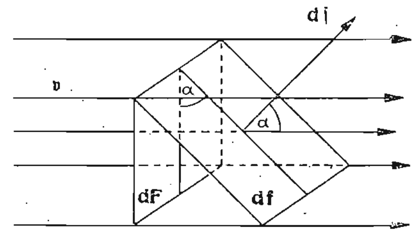
$$(12)\qquad \lim_{\Delta\mathfrak{f}_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{v}_i\times\Delta\mathfrak{f}_i = \int\limits_S \mathfrak{v}\times d\mathfrak{f}.$$

Интеграл (11) је скалар и зове се *протицање* или *флукс* вектора $\mathfrak{v}$ кроз површину S. С обзиром на једначину (9) и пошто је $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, он се може написати у облику

$$(13)\qquad \int\limits_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \int\limits_S (v_1\,dydz + v_2\,dzdx + v_3\,dxdy).$$

Овај интеграл је обичан скаларни површински интеграл, за чије је израчунавање, како је познато, потребно познавање једначине површине по којој се врши интеграција као и њених граница.

Разлог за назив протицање лежи у једном хидродинамичком тумачењу овог интеграла. Наиме, посматрајмо поље брзине струјања неке идеалне течности одређено векторском функцијом $\mathfrak{v}$. Уочимо у тој течности површински елемент величине dF, рецимо правоугаоног облика, који је нормалан на вектор брзине, тј. $dF\perp\mathfrak{v}$ (слика 180). Количина течности која протече у јединици времена кроз овај површински елемент очигледно је дата изразом



Сл. 180

$$v\,dF.$$

Посматрајмо затим други површински елемент величине df, који са првим чини угао α, само чија је пројекција на раван првог елемента овом елементу једнака, тј. за који важи

$$dF = df\cos\alpha.$$

Кроз овај други површински елемент протиче у јединици времена, иако је он већи, због његова косог положаја према правцу струјања, очигледно, иста количина течности као и кроз први, дакле

(14) $$v\,dF = v\,df\cos\alpha\,.$$

Ако се други површински елемент претстави помоћу вектора $d\mathfrak{f} = df\,\mathfrak{n}_0$, где је $\mathfrak{n}_0$ орт нормале на том елементу, тј. ако се други површински елемент сматра као управљени, може се написати

(15) $$v\,dF = v\,df\cos\alpha = \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\,.$$

Према томе, ако се ради о некој коначној површини S, у чијим појединим тачкама $\mathfrak{v}$ има разне вредности, укупно протицање J кроз ову површину биће одређено интегралом (11), тј.

(16) $$J = \int_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\,.$$

Назив протицање задржава се за интеграл (11) уопште и у случају сваког другог вектора, а не само брзине струјања течности.

Интеграл (12) је вектор и може се свести на израчунавање три двострука интеграла у општем случају, ако је позната једначина површине S и границе интеграције. Он се може написати у облику

(17) $$\int_S \mathfrak{v}\times d\mathfrak{f} = \mathfrak{i}\int_S (v_2\,dxdy - v_3\,dzdx) + \mathfrak{j}\int_S (v_3\,dydz - v_1\,dxdy) + \\ + \mathfrak{k}\int_S (v_1\,dzdx - v_2\,dydz),$$

јер су основни ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ константни.

67. Запремински интеграли

Најзад, ако се посматра простор V и у њему векторска функција положаја $\mathfrak{v}$, долази се само до једног вектор интеграла и то

(1) $$\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{v}_i\,\Delta V_i = \int_V \mathfrak{v}\,dV,$$

јер друге комбинације не долазе у обзир, пошто запремину не оријентишемо.

Посматрање скаларних функција положаја у нашем простору своди се на троструке интеграле обичне анализе.

И интеграција интеграла (1), који се зове *запремински интеграл* векторске функције $\mathfrak{v}$ у простору V, своди се на три скаларна трострука интеграла уколико су само одређене границе простора који се посматра. На пр., ако се запремински елемент dV изрази у Декартовим правоуглим координатама, тј. стави

$$dV = dxdydz,$$

може се интеграл (1) написати у облику

(2) $$\int_V \mathfrak{v}\,dV = \mathfrak{i}\int_V v_1\,dxdydz + \mathfrak{j}\int_V v_2\,dxdydz + \mathfrak{k}\int_V v_3\,dxdydz,$$

где је за израчунавање троструких интеграла потребно, поред познавања функције $\mathfrak{v}$, и познавање граница.

68. Претварање запреминских интеграла у површинске. Гаусова теорема

Уочимо у пољу промењљивог вектора $\mathfrak{v}$ запремински елемент dV и нека овај буде ограничен површином f. Посматрајмо протицање вектора $\mathfrak{v}$ кроз ову затворену површину, тј.

(1) $$\oint_f \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}$$

где опет $\oint$ обележава интеграцију по затвореној контури. Његова вредност ће очигледно бити позитивна ако се у том запреминском елементу налазе извори, негативна ако се налазе понори, а нула ако нема ни извора ни понора. С друге стране, протицање кроз површину f једнако је укупном истицању из тог запреминског елемента, одн. утицању у тај запремински елемент у јединици времена, што је, према т. 64, једн. 5, одређено изразом

(2) $$\operatorname{div}\mathfrak{v}\,dV.$$

Према томе за бесконачно мали запремински елемент dV ограничен површином f важи

(3) $$\operatorname{div}\mathfrak{v}\,dV = \oint_f \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}\,.$$

Посматрајмо сад коначан простор у коме је $\mathfrak{v}$ непрекидна функција положаја. Претпоставићемо да граница тог простора има највише коначан број рогљева и ивица и замислити га ма на који начин издељена у општем случају кривим површинама у запреминске елементе. Поставимо питање укупног истицања из те запремине.

Да бисмо добили укупно истицање из посматране запремине израчунаћемо истицање из сваког запреминског елемента посебно, према (2), па интегралити по целој запремини. Тако се добија

$$(4) \qquad \int_V \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV.$$

С обзиром на једначину (3), очигледно се до вредности укупног истицања из посматране запремине може доћи и израчунавањем протицања кроз површину сваког запреминског елемента и сабирањем тих протицања за све запреминске елементе. Све унутрашње површине елемената су, међутим, заједничке за по два суседна елемента, те, значи, њихови управљени елементи супротни. Стога су и вредности протицања кроз такве две површине супротне и потиру се при сабирању, те остаје само интеграл по спољашњој површини S посматране коначне запремине V, тј.

$$(5) \qquad \oint_S \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Изједначењем израза (4) и (5) следује

$$(6) \qquad \int_V \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV = \oint_S \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Став изражен овом једначином зове се *Гаусова теорема* и показује како се запремински интеграл претвара у површински. Због тога што се у њему појављује дивергенција зове се и *теорема дивергенције*. Неки аутори зову овај став и теорема Остроградског, а неки Гринова (Green) теорема.

У скаларном облику у Декартовим правоуглим координатама за $dV = dxdydz$ Гаусова теорема изгледа овако

$$(7) \qquad \int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dxdydz = \oint_S (v_1 dydz + v_2 dzdx + v_3 dxdy),$$

пошто је $\mathfrak{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$; $d\mathfrak{f} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$. Очигледно је да, како је $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ такође функција положаја, мора и она бити интеграбилна као и векторска функција $\mathfrak{v}$, да би став важио.

Према потреби, може се Гаусов став у скаларном облику изразити на разне начине. На пр., из

$$(8) \qquad \oint_S \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = \oint_S (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{n}_0)\, df,$$

где је $\mathfrak{n}_0 df = d\mathfrak{f}$, а $\mathfrak{n}_0$ орт нормале оријентисане у спољашњи простор у односу на посматрану запремину, следује

$$(9) \qquad \int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dxdydz = \oint_S (v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta + v_3 \cos\gamma)\, df$$

или, ако се узме у обзир да су косинуси правца нормале на површини једнаки односним изводима Декартових координата у правцу нормале, тј. $\frac{dx}{dn} = (\mathfrak{n}_0 \cdot \nabla) x = \cos\alpha$ итд., овај облик

$$(10) \qquad \int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dxdydz = \oint_S \left(v_1 \frac{dx}{dn} + v_2 \frac{dy}{dn} + v_3 \frac{dz}{dn}\right) df.$$

Гаусов став за коначне запремине није тешко доказати и у скаларном облику. Пођимо у том циљу од једначине

$$(11) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= dydz \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + dzdx \frac{\partial v_2}{\partial y} dy + dxdy \frac{\partial v_3}{\partial z} dz.$$

Замислимо да је простор подељен на елементарне делове, тако да нормале на координатне равни сваки такав елементарни део секу само у две тачке. Извршимо по једну интеграцију за сваки елементарни део и то тако да у првом интегралу десно интегралимо само по x, у другом само по y, а у трећем само по z, па саберимо све те интеграле. И на тај начин добићемо Гаусов став.

Овај скаларни поступак извођења Гаусове теореме навели смо укратко само за то што он чини нарочито јасном могућност генерализације става и за простор од више димензија. Наиме, замислимо да је $\mathfrak{v}$ векторска функција положаја у простору од n димензија, тј.

$$(12) \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

тада се може написати

$$(13) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

где су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ координате вектора $\mathfrak{v}$ у простору од n димензија.

За запремински елемент имамо тада

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n . \tag{14}$$

Израз за протицање добија облик

$$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = v_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n + v_2 dx_3 dx_4 \ldots dx_n dx_1 + \ldots + v_n dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} . \tag{15}$$

Ако се загледа Гаусов став (6) и постави обрнуто питање, претварања површинских интеграла у запреминске, види се да од три површинска интеграла (3), (11) и (12) у т. 66, тај став показује само како се површински интеграл (11) — протицање вектора — претвара у запремински интеграл.

Да бисмо показали претварање и двају осталих површинских интеграла у запреминске, посматрајмо поље вектора $\mathfrak{v}$ константног, а иначе потпуно произвољног правца, $\mathfrak{e}_0$, тј. $\mathfrak{v} = U\mathfrak{e}_0$. Тада је, с обзиром да је $\mathfrak{e}_0 = \mathrm{const.}$,

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} U\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \cdot \operatorname{grad} U. \tag{16}$$

Према томе Гаусов став (6) може се сад написати

$$\mathfrak{e}_0 \cdot \int_V \operatorname{grad} U\, dV = \mathfrak{e}_0 \cdot \oint_S U\, d\mathfrak{f}, \tag{17}$$

одакле следује, пошто је $\mathfrak{e}_0$ произвољни орт,

$$\int_V \operatorname{grad} U\, dV = \oint_S U\, d\mathfrak{f} . \tag{18}$$

Овај став показује претварање површинског интеграла (3), т. 66, у запремински и, зато што се у њему јавља градијент, зове се *теорема градијента*. Као што се види, он је само последица Гаусове теореме. За поједини запремински елемент dV за ову специјалну вредност векторске функције $\mathfrak{v}$ добија се из (3)

$$\operatorname{grad} U\, dV = \oint_f U\, d\mathfrak{f}. \tag{19}$$

Теорема градијента у скаларном облику изгледа

$$\int_V \left(\mathfrak{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S (\mathfrak{i}\, U\, dy dz + \mathfrak{j}\, U\, dz dx + \mathfrak{k}\, U\, dx dy), \tag{20}$$

одакле следује

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial x} dx dy dz = \oint_S U\, dy dz,$$

$$\int_V dx \frac{\partial U}{\partial y} dy dz = \oint_S U\, dz dx, \tag{21}$$

$$\int_V dx dy \frac{\partial U}{\partial z} dz = \oint_S U\, dx dy .$$

Теорема градијента важи под условом да су U и $\operatorname{grad} U$ интеграбилне функције.

Најзад, нека се посматра поље вектора $\mathfrak{w} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{e}_0$, где је $\mathfrak{v}$ неки други промењиви вектор, а $\mathfrak{e}_0$ произвољни константни орт. У том случају имамо

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = \nabla \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}_0) = (\nabla \times \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} . \tag{22}$$

С друге стране, може се написати

$$\mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{f} = (\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}_0) \cdot d\mathfrak{f} = -\mathfrak{e}_0 \cdot (\mathfrak{v} \times d\mathfrak{f}). \tag{23}$$

С обзиром на једначине (22) и (23) може се Гаусова теорема (6) примењена на промењиви вектор $\mathfrak{w}$ написати у облику

$$\mathfrak{e}_0 \cdot \int_V \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, dV = -\mathfrak{e}_0 \cdot \oint_S \mathfrak{v} \times d\mathfrak{f}, \tag{24}$$

одакле одмах следује *теорема ротора*

$$\int_V \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, dV = -\oint_S \mathfrak{v} \times d\mathfrak{f} = \oint_S d\mathfrak{f} \times \mathfrak{v}. \tag{25}$$

Она показује претварање површинског интеграла (12) из т. 66 у запремински интеграл, ако су $\mathfrak{v}$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ интеграбилне функције.

У односу на запремински елемент dV став добија изглед

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v}\, dV = -\oint_f \mathfrak{v} \times d\mathfrak{f} . \tag{26}$$

Теорема ротора изгледа у скаларном облику

$$\begin{aligned} &\int_V \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathfrak{k} \right] dx dy dz = \\ &= -\int_S [(v_2 dx dy - v_3 dz dx)\,\mathfrak{i} + (v_3 dy dz - v_1 dx dy)\,\mathfrak{j} + \\ &\qquad + (v_1 dz dx - v_2 dy dz)\,\mathfrak{k}]. \end{aligned} \tag{27}$$

Из теореме ротора следују скаларни ставови

$$\int_V \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) dxdydz = -\oint_S (v_2\, dxdy - v_3\, dzdx),$$

(28) $$\int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) dxdydz = -\oint_S (v_3\, dydz - v_1\, dxdy),$$

$$\int_V \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdydz = -\oint_S (v_1\, dzdx - v_2\, dydz).$$

Теорема ротора се не може просто генералисати на простор од више димензија. Потребно је прво генералисати векторски производ за простор од више димензија, у шта се овде нећемо упуштати.

69. Просторни изводи површинских интеграла. Јединствена дефиниција градијента, дивергенције и ротора

Посматрајмо непрекидну скаларну функцију положаја $U=U(x, y, z)$ и просторни интеграл

(1) $$\int_{\Delta V} U(x, y, z)\, dV$$

у запремини ΔV у којој се налази тачка $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Кад се овај интеграл подели запремином ΔV посматраног простора количник

(2) $$\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} U(x, y, z)\, dV,$$

очигледно, претставља неку средњу вредност функције U у посматраној запремини. Наиме, ако је у тој запремини M највећа а m најмања вредност функције U, тада је, на основу става о средњој вредности одређених интеграла,

(3) $$m \leq \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} U(x, y, z)\, dV \leq M.$$

Ако пречник области ΔV која опкољава тачку P_0 тежи нули, при чему и ΔV тежи нули, ова средња вредност тежи вредности скаларне функције у тачки P_0, тј.

(4) $$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} U(x, y, z)\, dV = U(x_0, y_0, z_0).$$

Нека сад буде дата нека непрекидна векторска функција $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}(x, y, z)$ и нека се у запремини ΔV око тачке P_0 посматра просторни интеграл

(5) $$\int_{\Delta V} \mathfrak{v}(x, y, z)\, dV,$$

тада се може написати

(6) $$\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\mathfrak{v}(x, y, z)\, dV = \mathfrak{i}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_1(x, y, z)\, dV + \mathfrak{j}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_2(x, y, z)\, dV + \mathfrak{k}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_3(x, y, z)\, dV.$$

Ако пречник запремине ΔV око тачке P_0 тежи нули, сваки од интеграла на десној страни, на основу једначине (4), тежи вредности односне скаларне функције у тачки P_0, тј.

(7) $$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\mathfrak{v}(x, y, z)\, dV = \mathfrak{i}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_1(x, y, z)\, dV + \mathfrak{j}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_2(x, y\, z)\, dV + \mathfrak{k}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} v_3(x, y, z)\, dV = \mathfrak{i}\, v_1(x_0, y_0, z_0) + \mathfrak{j}\, v_2(x_0, y_0, z_0) + \mathfrak{k}\, v_3(x_0, y_0, z_0).$$

Према томе је

(8) $$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\mathfrak{v}(x, y, z)\, dV = \mathfrak{v}(x_0, y_0, z_0).$$

Дакле, ако са $\mathcal{U}$ обележимо неку, било скаларну било векторску, непрекидну функцију положаја, важи

(9) $$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\mathcal{U}\, dV = \mathcal{U},$$

под условом да ова гранична вредност постоји и да не зависи од облика запремине ΔV као ни од начина како ова запремина тежи нули смањујући се на тачку P_0.

Овај гранични прелаз, који одговара појму извода, зове се *просторни* или *доменски извод*. На потпуно сличан начин он се може образовати и у случају површинског и линиског поља. Елементаран пример просторног извода је на пр., дефиниција густине неке непрекидно распоређене масе.

На основу ове дефиниције може се одмах, с обзиром на једначине (3), (19) и (26) претходног параграфа, ако grad U, div $\mathfrak{v}$ и rot $\mathfrak{v}$ задовољавају захтеване услове, написати

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{grad} U\, dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_f U\, d\mathfrak{f}}{\Delta V}, \\
\operatorname{div} \mathfrak{v} &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_f \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}}{\Delta V}, \qquad (10) \\
\operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_f d\mathfrak{f} \times \mathfrak{v}}{\Delta V}.
\end{aligned}
$$

Ови резултати су од нарочитог интереса из ових разлога:

1) Из ових израза види се одмах, и без икаквог доказивања, да су grad, div и rot инваријанте у односу на трансформације координатног система, и то grad за скаларно поље, а div и rot за векторско поље. Наиме, у овом облику поменути изрази су очигледно независни ма од каквих координата уопште.

2) Ова три обрасца дају јединствено тумачење инваријаната скаларног и векторског поља и показују њихову сродност. Наиме, све три инваријанте су просторни изводи површинских интеграла.

3) Ти обрасци могу се искористити и као полазна дефиниција за инваријанте grad, div и rot.

Показаћемо сад да се заиста, полазећи од ових образаца као дефиниције grad, div и rot, долази до оних раније постављених.

Израчунаћемо прво

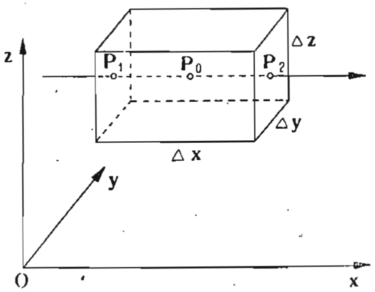
$$
\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_f \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} \qquad (11)
$$

и показати да се добија

$$
\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \qquad (12)
$$

те да су, према томе, обе дефиниције дивергенције, ова и она ранија, потпуно еквивалентне.

У том циљу посматрајмо неку коначну али малу запремину ΔV, ограничену површином f, облика правоуглог паралелепипеда у чијој је средини — тачки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — вредност посматране векторске функције дата са $\mathfrak{v}$ и потражимо граничну вредност (11), кад се ова запремина смањује на тачку P_0 (сл. 182). Нека су, поред тога, стране тог паралелепипеда паралелне координатним равнима Декартова триједра и нека су његове димензије Δx, Δy, Δz. Избор нарочитог облика и положаја запремине ΔV не сме, како смо рекли, да утиче на граничну вредност коју тражимо.



Сл. 182

Да бисмо израчунали површински интеграл

$$
\oint_f \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}, \qquad (13)
$$

уочимо, на пр., оне стране нашег паралелепипеда које су паралелне yOz равни. Њихова је величина $\Delta y\, \Delta z$, а као оријентисане одређене су изразима $-\mathfrak{i}\Delta y\, \Delta z$ (лева) и $\mathfrak{i}\Delta y\, \Delta z$ (десна), пошто је оријентација нормале у спољашњи простор.

При прелазу од тачке P_1 са леве од тих површина преко P_0 у правцу x-осе (нормално на равни yOz) до тачке P_2 на десној површини мења се само променљива x. Према томе, ако се у

$$
\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\, v_1(x, y, z) + \mathfrak{j}\, v_2(x, y, z) + \mathfrak{k}\, v_3(x, y, z) \qquad (14)
$$

функције v_1, v_2 и v_3 развију у Тејлоров ред у близини тачке P_0, за случај кад се само x мења, добиће се

$$
\begin{aligned}
& v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x} h + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\
& v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} h + \varepsilon_1' + \varepsilon_2', \qquad (15) \\
& v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x} h + \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'',
\end{aligned}
$$

где је h прираштај x-а и где ε_1, ε_1' и ε_1'' у овим редовима означују збир свих чланова са h на непарном степену вишем од јединице, а ε_2, ε_2' и ε_2'' означују збирове свих чланова са

h на парном степену почев од два. То значи да ће вредност ових функција у тачки $P_1\left(h=-\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ износити

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1+\varepsilon_2,\\
v_2^{(1)} &= v_2-\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1'+\varepsilon_2',\\
v_3^{(1)} &= v_3-\frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1''+\varepsilon_2''.
\end{aligned}
$$

Дакле, за вредност посматране векторске функције у тачки P_1 може се написати

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{i}\,v_1^{(1)}+\mathfrak{j}\,v_2^{(1)}+\mathfrak{k}\,v_3^{(1)} &= \mathfrak{i}\left(v_1-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+\\
&+\mathfrak{j}\left(v_2-\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1'+\varepsilon_2'\right)+\mathfrak{k}\left(v_3-\frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial x}\Delta x-\varepsilon_1''+\varepsilon_2''\right).
\end{aligned}
$$

Вредност функција v_1, v_2 и v_3 у тачки $P_2\left(h=\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ и у вези са њима векторске функције $\mathfrak{v}$ биће, очигледно,

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{i}\,v_1^{(2)}+\mathfrak{j}\,v_2^{(2)}+\mathfrak{k}\,v_3^{(2)} &= \mathfrak{i}\left(v_1+\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+\\
&+\mathfrak{j}\left(v_2+\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial x}\Delta x+\varepsilon_1'+\varepsilon_2'\right)+\mathfrak{k}\left(v_3+\frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial x}\Delta x+\varepsilon_1''+\varepsilon_2''\right).
\end{aligned}
$$

Ако, с обзиром на то да су те две површине врло мале, сматрамо да је вредност на целој левој страни иста као у тачки P_1, а на целој десној као у тачки P_2, што је утолико тачније, наравно, уколико је таква површина мања, може се израчунати удео површинског интеграла (13) од ових двеју површина. Тако се скаларним множењем вектора (17) са $-\mathfrak{i}\,\Delta y\,\Delta z$ и вектора (18) са $\mathfrak{i}\,\Delta y\,\Delta z$ и сабирањем добија се за удео површина паралелних yOz равни израз

$$
(19)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z+2\varepsilon_1\,\Delta y\,\Delta z.
$$

На исти се начин добија за удео површина паралелних координатној равни zOx у површинском интегралу израз

$$
(20)\qquad \frac{\partial v_2}{\partial y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z+2\varepsilon_1'\,\Delta z\,\Delta x.
$$

Најзад за удео површина паралелних координатној равни xOy добија се израз

$$
(21)\qquad \frac{\partial v_3}{\partial z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z+2\varepsilon_1''\,\Delta x\,\Delta y.
$$

Сабирањем израза (19), (20) и (21) следује за површински интеграл (13)

$$
(22)\qquad \oint_f \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta V+2\,\Delta V\left(\frac{\varepsilon_1}{\Delta x}+\frac{\varepsilon_1'}{\Delta y}+\frac{\varepsilon_2''}{\Delta z}\right),
$$

где је $\Delta V=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Према томе, кад $\Delta V\to 0$ добија се из (22) за граничну вредност (11)

$$
(23)\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z},
$$

што је требало доказати, јер изрази $\dfrac{\varepsilon_1}{\Delta x}$, $\dfrac{\varepsilon_1'}{\Delta y}$ и $\dfrac{\varepsilon_1''}{\Delta z}$ теже нули кад и Δx, Δy, Δz пошто су ε_1, ε_1', ε_1'' у односу на њих бесконачно мале вишег реда.

Ако већ доказану једначину (23) применимо на векторску функцију $\mathfrak{v}=U\mathfrak{e}_0$, где је $\mathfrak{e}_0$ ма који произвољни константни орт, тада следује за леву страну

$$
(24)\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f U\mathfrak{e}_0\cdot d\mathfrak{f}=\mathfrak{e}_0\cdot\left(\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f U\,d\mathfrak{f}\right),
$$

а за десну

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\cos\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial U}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial U}{\partial z}=\\
&=(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{i})\frac{\partial U}{\partial x}+(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{j})\frac{\partial U}{\partial y}+(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{k})\frac{\partial U}{\partial z}=\mathfrak{e}_0\cdot\left(\mathfrak{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Ако се изрази (24) и (25) изједначе и узме у обзир да је $\mathfrak{e}_0$ произвољни константни орт, добија се

$$
(26)\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f U\,d\mathfrak{f}=\mathfrak{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\mathfrak{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial U}{\partial z},
$$

чиме је доказана једнакост нове и старе дефиниције градијента.

Најзад, ако се једначина (23) примени на векторску функцију $\mathfrak{w}=\mathfrak{v}\times\mathfrak{e}_0$, где је $\mathfrak{e}_0$ константни орт, добиће се на левој страни

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{f} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e}_0)\cdot d\mathfrak{f}=\\
&=\mathfrak{e}_0\cdot\left(\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f d\mathfrak{f}\times\mathfrak{v}\right)
\end{aligned}
$$

и на десној страни

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_2\cos\gamma - v_3\cos\beta)+\frac{\partial}{\partial y}(v_3\cos\alpha - v_1\cos\gamma)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(v_1\cos\beta - v_2\cos\alpha)=(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{i})\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+$$

$$(28)\qquad +(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{j})\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+(\mathfrak{e}_0\cdot\mathfrak{k})\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)=$$

$$=\mathfrak{e}_0\cdot\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathfrak{i}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathfrak{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathfrak{k}\right].$$

Изједначењем израза (27) и (28), с обзиром да је $\mathfrak{e}_0$ произвољни константни орт, следује

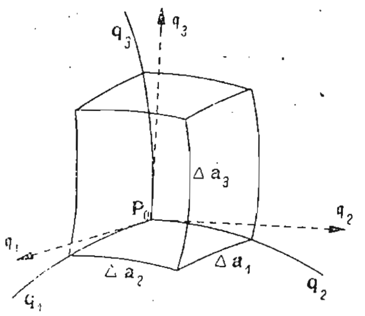
$$(29)\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_f d\mathfrak{f}\times\mathfrak{v}=\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Тиме смо доказали да су ранија и садашња дефиниција ротора еквивалентне.

И изрази за градијент, дивергенцију и ротор у генералисаним координатама могу се директно извести из просторних извода површинских интеграла (10). То се може постићи, на пр., само избором нарочитих облика запреминског елемента што, при учињеним претпоставкама, не утиче на вредност тражених интеграла. Тако, на пр., да бисмо одредили дивергенцију неке векторске функције

$$(30)\qquad \mathfrak{v}=v_1\,\mathfrak{q}_1+v_2\,\mathfrak{q}_2+v_3\,\mathfrak{q}_3$$

у ортогоналним генералисаним координатама q_1, q_2, q_3 чији су ортови $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, у некој тачки P_0 поља, поћи ћемо од запреминског елемента ΔV ограничена са три пара генералисаних координатних површина, и то: $q_1=0$, $q_1=\Delta a_1$, $q_2=0$, $q_2=\Delta a_2$, $q_3=0$, $q_3=\Delta a_3$ (сл. 183).



Сл. 183

За одређивање дивергенције израчунаћемо, прво, запремину ΔV. Она је дата на основу става о средњој вредности одређених интеграла, и с обзиром на ортогоналност система, изразом

$$(31)\qquad \Delta V=\int_0^{\Delta a_1}\int_0^{\Delta a_2}\int_0^{\Delta a_3}A_1A_2A_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\,\Delta a_1\Delta a_2\Delta a_3,$$

где смо са $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ означили неке средње вредности ових величина у посматраној запремини.

Да бисмо израчунали површински интеграл

$$(32)\qquad \oint_f \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=\oint_f(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}_0)\,df=\oint_f v_1(\mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{n}_0)\,df+ +\oint_f v_2(\mathfrak{q}_2\cdot\mathfrak{n}_0)\,df+\oint_f v_3(\mathfrak{q}_3\cdot\mathfrak{n}_0)\,df$$

по површини f посматраног запреминског елемента ΔV, уочимо, прво, интеграл нормалне компоненте поља по површини $q_3=0$, која је ограничена генералисаним координатним линијама q_1 и q_2 тј.

$$(33)\qquad \int_0^{\Delta a_1}\int_0^{\Delta a_2}v_3(\mathfrak{q}_3\cdot\mathfrak{n}_0)\,df.$$

За површину $q_3=0$ је, међутим, $\mathfrak{q}_3=-\mathfrak{n}_0$, јер је нормала површине оријентисана увек у спољашњи простор. Површински елемент на тој површини је, због ортогоналности система, $df=A_1A_2\,dq_1\,dq_2$. Према томе је вредност интеграла (33) на уоченој површини $q_3=0$ дата изразом

$$(34)\qquad -\int_0^{\Delta a_1}\int_0^{\Delta a_2}A_1A_2\,v_3\,dq_1\,dq_2.$$

Ако вредност истог интеграла (33) израчунамо за површину $q_3=\Delta a_3$, за коју је $\mathfrak{q}_3=\mathfrak{n}_0$ и оба израза саберемо, добићемо

$$(35)\qquad \int_0^{\Delta a_1}\int_0^{\Delta a_2}\left[(A_1A_2\,v_3)_{q_3=\Delta a_3}-(A_1A_2\,v_3)_{q_3=0}\right]dq_1\,dq_2,$$

где при интеграцији у првом члану треба у A_1, A_2 и v_3 ставити за $q_3=\Delta a_3$, а у другом члану $q_3=0$. Међутим, на основу познатог става о средњој вредности диференције може се за подинтегралну функцију у интегралу (35) написати

$$(36)\qquad (A_1A_2\,v_3)_{q_3=\Delta a_3}-(A_1A_2\,v_3)_{q_3=0}=\Delta a_3\,\frac{\partial}{\partial q_3}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{v}_3),$$

где су $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{v}_3$ неке средње вредности тих величина. Према томе се за удео обе површине q_3 у површинском интегралу добија најзад израз

$$(37)\qquad \frac{\partial}{\partial q_3}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{v}_3)\,\Delta a_1\,\Delta a_2\,\Delta a_3.$$

Ако се израчунају односни изрази за парове q_1 и q_2, сви ти изрази саберу и потражи гранична вредност количника тог збира и запремине елемента (31) кад се ΔV смањује на тачку P_0 добиће се познати израз (8), из т. 62, за дивергенцију векторске функције $\mathfrak{v}$ у генералисаним ортогоналним координатама, у тачки P_0 што смо и хтели да покажемо. Наравно, на сличан начин и по истом поступку могу се одредити и вредности градијента и ротора у генералисаним ортогоналним координатама.

70. Гринови ставови. Просторни угао

Ако се Гаусова теорема (т. 68, једн. 6) примени на специјално векторско поље одређено векторском функцијом $\mathfrak{v}$ облика

$$\mathfrak{v} = U_1 \nabla U_2, \tag{1}$$

добија се

$$\int_V (\nabla U_1 \cdot \nabla U_2)\,dV + \int_V U_1 \triangle U_2\,dV = \oint_S U_1(\nabla U_2 \cdot d\mathfrak{f}), \tag{2}$$

пошто је

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \nabla\cdot(U_1 \nabla U_2) = \nabla U_1 \cdot \nabla U_2 + U_1 \triangle U_2.$$

У случају $U_1 = U_2 = U$ из једначине (2) следује

$$\int_V (\nabla U)^2\,dV + \int_V U \triangle U\,dV = \oint_S U(\nabla U \cdot d\mathfrak{f}). \tag{3}$$

Посматрамо ли, међутим, поље одређено векторском функцијом $U_2 \nabla U_1$, у којој су у односу на први случај промењене улоге скаларних функција U_1 и U_2, добиће се одмах према (2) једначина

$$\int_V (\nabla U_1 \cdot \nabla U_2)\,dV + \int_V U_2 \triangle U_1\,dV = \oint_S U_2(\nabla U_1 \cdot d\mathfrak{f}), \tag{4}$$

у којој су такође улоге U_1 и U_2 размењене.

Одузимањем једначине (4) од једначине (2) добија се *главни Гринов став*

$$\int_V (U_1 \triangle U_2 - U_2 \triangle U_1)\,dV = \oint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1)\cdot d\mathfrak{f}. \tag{5}$$

Најзад за случај $U_1 = 1$, $U_2 = U$, тј. кад је $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} U$ и, према томе, векторско поље — поље градијента неког скалара U, важи

$$\int_V \triangle U\,dV = \oint_S \nabla U \cdot d\mathfrak{f}. \tag{6}$$

Ставови изражени једначинама (2), (3), (5) и (6) зову се *Гринови ставови*, од којих је, како смо рекли, главни став (5).

Ако се уведу Декартове правоугле координате, онда се с обзиром на раније дате вредности координата управљеног површинског елемента $d\mathfrak{f}$ може, на пр., за став (6) у скаларном облику написати

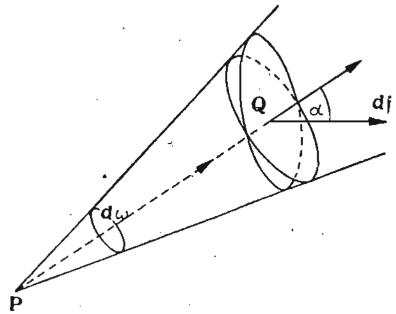
$$\begin{aligned} &\int_V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz = \\ &= \oint_S \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial U}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial U}{\partial z}\,dx\,dy\right) \end{aligned} \tag{7}$$

итд.

Гринови ставови важе под истим претпоставкама као и Гаусов став, ако је нормала оријентисана у спољашњи простор. Обе функције U_1 и U_2 морају бити униформне и непрекидне заједно са својим првим изводима.

Гринови ставови важе и за области које нису коначне под условом да функције U_1 и U_2 ишчезавају у бесконачности као бесконачно мале првога реда, а њихови изводи као бесконачно мале другог реда. Да је то тачно може се показати на овај начин.

Место конкретно дате области која се простире у бесконачност посматра се област ограничена сфером толиког полупречника R да обухвата стварну област. Тада се, под наведеним условима, може показати да површински интеграли на десној страни у Гриновим обрасцима теже нули, кад $R \to \infty$. У том циљу треба увести просторни угао $d\omega$ који одговара површинском елементу df, тј. ставити $d\mathfrak{f} = R^2 d\omega$.



Сл. 184

Под *просторним углом* $d\omega$ (сл. 184) разуме се угао под којим се неки површински елемент df у тачки Q, где је $d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}\,df$, види из тачке P. И стварно, ако се из тачке P повуку праве кроз тачке контуре посматраног елемента df, добија се просторни угао $d\omega$. Он се мери на овај начин. Из тачке P као центра опишемо сферу полупречника $r = PQ$ и пошто се обичан угао, одређен двема полуправама, мери односом дужине захваћеног лука и његова полупречника, то се просторни угао мери односом површинског елемента сфере df_1 и квадрата полупречника r^2, тј.

$$d\omega = \frac{df_1}{r^2}.$$

Према томе и просторни угао се мери апсолутним бројем.

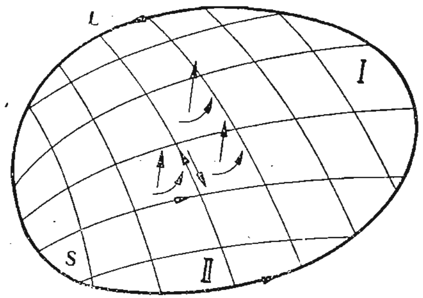
Како је очевидно у општем случају $df_1 = df\cos\alpha$, то је

$$d\omega = \frac{df}{r^2}\cos\alpha,$$

где је α угао који чини вектор $\overrightarrow{PQ} = \mathfrak{r}$ са у спољашњи простор оријентисаном нормалом. Просторни угао је позитиван за $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (види се позитивна страна површинског елемента) а негативан за $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (види се негативна страна површинског елемента).

71. Претварање криволиниских интеграла у површинске. Стоксова теорема

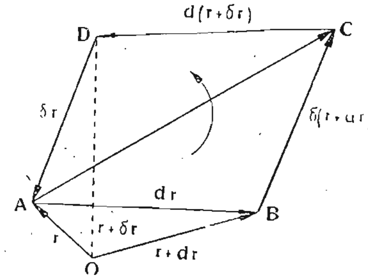
Посматрајмо неку просто конексну површину S оивичену контуром L (сл. 185). Нека та површина буде поље дате векторске функције $\mathfrak{v}$. Замислимо површину S издељену на површинске елементе са два система кривих линија I и II. Ако број кривих линија расте површински елементи постају врло мали, те се приближно могу сматрати као равни паралелограми, изузев остатака дуж контуре који се, у граничном случају, могу занемарити. Нека површина S буде оријентисана, тада и сваки површински елемент добија своју оријентацију и цела посматрана површина је подељена на управљене површинске елементе. Контуру L и контуре појединих површинских елемената оријентишимо у директном смеру. То значи, на пр., да се крива L оријентише тако да кад стојимо на површини S, главом у смеру оријентације површине и крећемо се дуж криве L, површина S нам стално остаје с леве стране.



Сл. 185

Уочимо на површини S тачку A одређену вектором положаја $\mathfrak{r}$ (сл. 186). Промену вектора положаја $\mathfrak{r}$ при елементарном померању дуж линија I из A у B обележићемо са $d\mathfrak{r}$. Према томе ће вектор положаја тачке B бити $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$. Исто тако,

елементарно померање на површини у смеру линија II од A до D обележићемо са $\delta\mathfrak{r}$, тј. вектор положаја тачке D биће $\mathfrak{r} + \delta\mathfrak{r}$. Промену вектора положаја тачке B при елементарном померању из тачке B у тачку C дуж система кривих II означићемо са $\delta(\mathfrak{r} + d\mathfrak{r})$, а прелаз из тачке D дуж линија I система у тачку C нека буде $d(\mathfrak{r} + \delta\mathfrak{r})$. На тај начин добили смо приближно паралелограм $ABCD$ који претставља површински елемент површине S. Очигледно је да, ако се при прелазу од B ка C и од D ка C долази до исте тачке, мора бити према слици



Сл. 186

$$d\mathfrak{r} + \delta\mathfrak{r} + \delta\, d\mathfrak{r} = \delta\mathfrak{r} + d\mathfrak{r} + d\,\delta\mathfrak{r}.$$

одн.

(1) $$\delta\, d\mathfrak{r} = d\,\delta\mathfrak{r}.$$

То је услов за затварање контуре управљена елемента површине S.

При томе, по договору, обележавамо сваку промену ма које функције положаја при померању посматране тачке A у пољу дуж кривих линија система I ознаком d, а дуж кривих система II ознаком δ.

Нека сад треба израчунати вредност циркулације векторске функције $\mathfrak{v}$ по контури $ABCD$, тј. криволиниски интеграл

(2) $$\oint_{(ABCD)} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}.$$

Нека вредност посматране векторске функције у тачки A буде $\mathfrak{v}$; тада се као удели циркулације — токови вектора $\mathfrak{v}$ дуж страна AB и AD — могу узети скаларни производи $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}$ одн. $\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r}$. Вредност тока векторске функције дуж стране BC треба да, у односу на вредност $\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r}$ дуж стране AD, због померања у смеру линија I система, према нашем договору, буде $\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} + d(\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r})$. Вредност тока дуж стране DC из истих разлога треба да износи $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} + \delta(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r})$. Према томе је вредност криволиниског интеграла (2), с обзиром на услов (1), дата изразом

$$\begin{aligned}\oint_{(ABCD)} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} &= \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} + \mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} + d(\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} - \delta(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} = \\ &= d(\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r}) - \delta(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} + \mathfrak{v}\cdot d\delta\mathfrak{r} - \delta\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} - \mathfrak{v}\cdot\delta d\mathfrak{r} = \\ &= d\mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} - \delta\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}.\end{aligned}\tag{3}$$

Како је $d\mathfrak{v}$ прираштај векторске функције у правцу $d\mathfrak{r}$, а $\delta\mathfrak{v}$ прираштај те исте векторске функције само у правцу $\delta\mathfrak{r}$, то је

$$d\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}, \quad \delta\mathfrak{v} = (\delta\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}.$$

Уношењем ових вредности у (3) добија се

$$\oint_{(ABCD)} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = (d\mathfrak{r}\cdot\nabla)(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{\delta\mathfrak{r}}) - (\delta\mathfrak{r}\cdot\nabla)(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{d\mathfrak{r}}),\tag{4}$$

где смо звездицама изнад $\delta\mathfrak{r}$ и $d\mathfrak{r}$ назначили да се Хамилтонов оператор примењује само на векторску функцију $\mathfrak{v}$, што из горњих разматрања следује. Пошто се оператор ∇ не примењује на $d\mathfrak{r}$ и $\delta\mathfrak{r}$, ови се могу ставити испред оператора и израз на десној страни једначине (4) овако трансформисати

$$\begin{aligned}(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{\delta\mathfrak{r}}) - (\delta\mathfrak{r}\cdot\nabla)(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{d\mathfrak{r}}) &= d\mathfrak{r}\cdot[\nabla(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{\delta\mathfrak{r}}) - (\delta\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}] = \\ &= d\mathfrak{r}\cdot[\delta\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v})] = (\nabla\times\mathfrak{v})\cdot(d\mathfrak{r}\times\delta\mathfrak{r}) = \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f},\end{aligned}$$

јер је увек

$$\delta\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v}) = \nabla(\mathfrak{v}\cdot\overset{*}{\delta\mathfrak{r}}) - (\delta\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v},$$

и где смо са $d\mathfrak{f} = d\mathfrak{r}\times\delta\mathfrak{r}$ обележили управљени површински елемент $ABCD$. На тај начин добијамо најзад за циркулацију векторске функције $\mathfrak{v}$ по контури посматраног управљеног елемента вредност

$$\oint_{(ABCD)} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}.\tag{5}$$

Ако циркулације за контуре свих управљених елемената на површини S саберемо, све циркулације дуж унутрашњих контура се потиру, услед супротних смерова, и остаје само криволиниски интеграл по контури L површине S, тј. циркулација по тој контури, на левој страни, а на десној се добија површински интеграл по површини S, тј.

$$\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}.\tag{6}$$

Овај став, који се речима може овако изразити: Циркулација векторске функције $\mathfrak{v}$ по контури L неке просто конексне површине S једнака је протицању ротора те векторске функције кроз површину S, зове се *Стоксова* (Stokes) *теорема*. Она нам даје начин за претварање криволиниских интеграла у површинске интеграле и обрнуто.

Ако се координате векторске функције $\mathfrak{v}$, управљеног елемента $d\mathfrak{r}$ контуре L и управљеног елемента $d\mathfrak{f}$ површине S у Декартовим координатама обележе на уобичајени начин, добиће се за Стоксову теорему у скаларном облику израз

$$\begin{aligned}\oint_L (v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz) = \int_S \Big[\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big) dy\,dz &+ \\ + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\Big) dz\,dx + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big) dx\,dy \Big]&.\end{aligned}\tag{7}$$

Поред циркулације векторске функције постоје још два криволиниска интеграла, тј.

$$\int_L U\,d\mathfrak{r} \quad \text{и} \quad \int_L \mathfrak{v}\times d\mathfrak{r}.\tag{8}$$

Показаћемо како се и они могу претворити у површинске интеграле применом Стоксове теореме на специјалне векторске функције. Тако, уочимо поље векторске функције $\mathfrak{v} = U\mathfrak{e}$, где је $\mathfrak{e} = \text{const.}$; тада се за циркулацију на левој страни Стоксове теореме (6) може одмах написати

$$\oint_L \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}\cdot\oint_L U\,d\mathfrak{r}.\tag{9}$$

Десна пак страна једначине (6) може се овако трансформисати

$$\int_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = -\int_S (\mathfrak{e}\times\nabla U)\cdot d\mathfrak{f} = \mathfrak{e}\cdot\Big(\int_S d\mathfrak{f}\times\nabla U\Big),\tag{10}$$

јер је с обзиром на једначину (17) у т. 60 и на константност вектора $\mathfrak{e}$

$$\operatorname{rot}(U\mathfrak{e}) = \nabla\times(U\mathfrak{e}) = -(\mathfrak{e}\times\nabla U).$$

Изједначењем израза (9) и (10) добија се једначина

$$\mathfrak{e}\cdot\oint_L U\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}\cdot\Big(\int_S d\mathfrak{f}\times\nabla U\Big),\tag{11}$$

одакле, пошто је $\mathfrak{e}$ произвољно, добијамо

$$\oint_L U\,d\mathfrak{r} = \int_S d\mathfrak{f}\times\nabla U = -\int_S \operatorname{grad} U\times d\mathfrak{f}.\tag{12}$$

Овај образац показује како се претварају криволиниски интеграли типа $\oint_L U\,d\mathfrak{r}$ у површинске.

У скаларном облику ова једначина изгледа

$$\begin{aligned}\oint_L (\mathfrak{i}\,U\,dx+\mathfrak{j}\,U\,dy+\mathfrak{k}\,U\,dz)=\int_S\Big[\,\mathfrak{i}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy\right)+\\ +\mathfrak{j}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy-\frac{\partial U}{\partial z}\,dy\,dz\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\,dy\,dz-\frac{\partial U}{\partial x}\,dz\,dx\right)\Big],\end{aligned}\tag{13}$$

одакле следује

$$\oint_L U\,dx=\int_S\left(\frac{\partial U}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy\right)\tag{14}$$

и још два слична обрасца.

Да бисмо нашли најзад и образац за претварање другог криволиниског интеграла из (8) у површински, применићемо Стоксову теорему на векторску функцију $\mathfrak{w}=\mathfrak{v}\times\mathfrak{e}$, где је $\mathfrak{v}$ нека друга векторска функција а $\mathfrak{e}=\mathrm{const}$. У том случају се лева страна једначина (6) може написати у облику

$$\oint_L(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e})\cdot d\mathfrak{r}=\mathfrak{e}\cdot\left(\oint_L d\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\right)=\mathfrak{e}\cdot\left(-\oint_L \mathfrak{v}\times d\mathfrak{r}\right).\tag{15}$$

Пошто је

$$\mathrm{rot}\,(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e})\cdot d\mathfrak{f}=[\nabla\times(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e})]\cdot d\mathfrak{f}=(d\mathfrak{f}\times\nabla)\cdot(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e})=\mathfrak{e}\cdot[(d\mathfrak{f}\times\nabla)\times\mathfrak{v}],$$

десна страна једначине (6) постаје

$$\int_S \mathrm{rot}\,(\mathfrak{v}\times\mathfrak{e})\cdot d\mathfrak{f}=\mathfrak{e}\cdot\left(\int_S[(d\mathfrak{f}\times\nabla)\times\mathfrak{v}]\right).\tag{16}$$

Изједначењем израза (15) и (16) добија се једначина

$$\mathfrak{e}\cdot\left(-\oint_L\mathfrak{v}\times d\mathfrak{r}\right)=\mathfrak{e}\cdot\left(\int_S[(d\mathfrak{f}\times\nabla)\times\mathfrak{v}]\right),\tag{17}$$

која важи за произвољно $\mathfrak{e}$ и, према томе, имамо

$$\oint_L\mathfrak{v}\times d\mathfrak{r}=-\int_S[(d\mathfrak{f}\times\nabla)\times\mathfrak{v}],\tag{18}$$

што смо и хтели да изведемо.

Ако све вредности неке векторске функције леже у равни, тј. ако је

$$\mathfrak{v}=v_1\,\mathfrak{i}+v_2\,\mathfrak{j},\tag{19}$$

једначина (7) се своди на

$$\oint_L(v_1\,dx+v_2\,dy)=\int_S\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)dx\,dy\,.\tag{20}$$

Овај образац даје претварање криволиниских интеграла у површинске и обрнуто, кад су v_1 и v_2 функције двеју променљивих x и y и познат је под именом *Риманов* (Riemann) *став*.

До Риманова става у нешто друкчијем облику може се лако доћи, при наведеним условима, и ако се пође од Гаусова става. Наиме, тада из једначине (7) у т. 68, за $v_3=0$, следује

$$\oint_S(v_1\,dy+v_2\,dx)\,dz=\int_V\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz\,.$$

Како изрази у заградама не зависе од z, после интеграције по z на обе стране, добијамо Риманов став у облику

$$\oint_L(v_1\,dy+v_2\,dx)=\int_S\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)dx\,dy.\tag{21}$$

72. Врсте векторских поља

Векторска поља могу се разликовати сем према карактеру самих векторских функција, и према вредностима инваријаната дивергенције и ротора. У том погледу разликоваћемо векторска поља овако:

1) Поља у чијим је свима тачкама

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\neq0,\quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0.$$

Она се зову углавном *потенцијална.*

2) Поља у чијим је свима тачкама

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}=0,\quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\neq0.$$

Она се зову *соленоидна.*

3) Поља у чијим је свима тачкама

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}=0,\quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0.$$

Таква се поља зову *Лапласова.*

4) Поља у чијим је бар неким тачкама

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\neq0,\quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\neq0.$$

Та се поља зову *сложена.*

72.1 Потенцијална поља. Ламеларна поља

У потенцијалном пољу је

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0,\tag{1}$$

па према томе у њему нема вртлога — нема ротације — и стога се такво поље зове и *безвртложно* или *безвихорно.*

С друге стране, како бар у неким тачкама овога поља може бити

(2) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} \neq 0,$$

у пољу постоје извори (било позитивни било негативни — понори), те се са тог разлога поље назива и *чисто изворно*.

Сви ови називи су, међутим, само синоними за исти појам.

Видели смо раније да је ротор градијента ма ког скалара увек једнак нули, тј.

(3) $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0,$$

и према томе се на основу услова (1) овакво векторско поље може увек сматрати као поље градијента неке скаларне функције положаја U, тј.

(4) $$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} U.$$

Негативна вредност такве скаларне функције положаја U, тј.

(5) $$\Pi = -U,$$

зове се *потенцијал* векторске функције $\mathfrak{v}$. Понекад се и сама скаларна функција положаја U зове потенцијал, и то *скаларни потенцијал* векторске функције $\mathfrak{v}$. Из овог разлога се оваква векторска поља зову потенцијална поља. Врло често се међутим, и само скаларно поље функције U — потенцијала — које одређује наше векторско поље зове потенцијално.

Потенцијална векторска поља имају своје нарочите особине. Тако, ако посматрамо ток вектора $\mathfrak{v}$ у потенцијалном пољу, на пр., од тачке A до тачке B, добићемо

(6) $$\int_A^B \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \int_A^B \operatorname{grad} U \cdot d\mathfrak{r} = \int_A^B dU = U(B) - U(A),$$

јер је $dU = \operatorname{grad} U \cdot d\mathfrak{r}$.

Дакле, ток вектора $\mathfrak{v}$ у потенцијалном пољу не зависи од пута интеграције већ само од крајњих тачака путање. Отуда следује да је циркулација вектора $\mathfrak{v}$ у потенцијалном пољу увек једнака нули, одн.

(7) $$\oint_L \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \oint_L dU = 0,$$

ако је U униформна функција.

Ово је врло важна особина потенцијалних векторских поља и то нарочито због механичког значења циркулације.

Наиме, ако се посматра поље неке променљиве силе $\mathfrak{F}$, израз $\mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}$ је њен елементарни рад на елементарном померању $d\mathfrak{r}$, а

(8) $$\int_A^B \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}$$

је укупни рад те силе на путу од тачке A до тачке B у пољу посматране силе. То значи ако је поље посматране силе потенцијално, рад зависи само од почетне и крајње тачке путање, а не од облика саме трајекторије, одн. рад је дуж сваке затворене контуре у пољу такве силе једнак нули, наравно ако је векторска функција $\mathfrak{F}$ једнозначна и простор поља просто конексан.

Ова разматрања нам показују да мора бити задовољен услов (1) да би елементарни ток, одн. елементарни рад могао да се претстави као тотални диференцијал неке скаларне функције положаја, тј.

(9) $$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = dU.$$

У скаларном облику све то значи ово. Да би линеарна диференцијална форма која у скаларном облику одговара левој страни једначине (9) била тотални диференцијал неке функције U, тј. да би било

(10) $$v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz = dU,$$

морају бити задовољена три скаларна услова који одговарају векторском услову (1). Дакле, мора бити

(11) $$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

Ови услови су познати под именом *услови интеграбилности* за линеарну диференцијалну форму облика (10).

Из услова (1) следује, како рекосмо, да је потенцијално поље увек поље градијента. Отуда опет следује, у вези са оним што смо раније (т. 58) рекли, да је потенцијално поље увек и *ламеларно поље*. Међутим може се поставити питање, да ли сем потенцијалних поља има и неких других векторских поља која су ламеларна, одн. за која постоје површине на које су све векторске линије поља нормалне.

Одговор на то питање може се добити из Стоксове теореме на овај начин. Нека, рецимо, S буде нека површина у чијим је свима тачкама орт нормале на површини $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{v}_0$, одн. $d\mathfrak{f} = \mathfrak{v}_0 df$. Према томе је за сваку линију на тој површини, па и за контуру $\mathfrak{v} \perp d\mathfrak{r}$, дакле,

(12) $$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = 0.$$

То значи, на основу Стоксове теореме, да је

(13) $$\int_S (\mathfrak{v}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v})\, df = 0.$$

Како овај услов важи за сваки произвољни елемент посматране површине S, мора бити

$$\mathfrak{v}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0,$$

односно, после множења интензитетом v вектора $\mathfrak{v}$,

(14) $$\mathfrak{v} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0.$$

Овај услов је, како видимо, потребан да би постојале површине нормалне на све векторске линије поља, али се може доказати, у шта се овде нећемо упуштати, да је он за то и довољан.

Услов (14) задовољава свака векторска функција $\mathfrak{v}$ облика

(15) $$\mathfrak{v} = \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} U,$$

где су μ и U скаларне функције положаја и $\mu \neq 0$ у тачкама посматраног поља. Да је ово тачно види се одмах из

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} U\right) = \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \times \operatorname{grad} U.$$

Према томе је

$$\mu \mathfrak{v} = \operatorname{grad} U,$$

па имамо

(16) $$\mu \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \operatorname{grad} U \cdot d\mathfrak{r} = dU,$$

или у скаларном облику,

(17) $$\mu(v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = dU.$$

То значи, ако је задовољен услов (14), који у скаларном облику изгледа

(18) $$v_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + v_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + v_3\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0,$$

за линеарну диференцијалну форму $v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ постоји интеграциони фактор $\mu(x, y, z)$. Из ових разматрања је јасно да за сваку линеарну диференцијалну форму не постоји интеграциони фактор.

Свако поље које задовољава услов (14) је ламеларно. Између таквог поља у општем случају и потенцијалног поља које такође задовољава тај услов постоје неке сродности. Тако се ово поље, истина, не може претставити у општем случају као поље градијента, али се може претставити као поље дефинисано производом неке скаларне функције и градијента неке друге скаларне функције. Затим је вредност циркулације и у овом пољу, бар за путање које леже на површинама нормалним на векторске линије, једнака нули. Из тих разлога се поља одређена векторском функцијом у облику (15) зову *квазипотенцијална*.

72.2 Соленоидна поља

Како је у свима тачкама таква поља

(1) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0,$$

поље се зове и *безизворно*, а пошто у појединим тачкама поља може бити

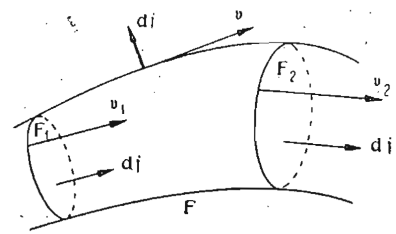
(2) $$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0,$$

поље се зове и *чисто вртложно* или *чисто вихорно*.

Разлог зашто се овакво поље зове соленоидно лежи у овоме. Ако се, наиме, у таквом пољу образују векторске цеви — соленоиди, протицање кроз сваки пресек неког таквог соленоида је исто.

Заиста, уочимо неки соленоид (сл. 187) и ма која два његова пресека F_1 и F_2. Применимо на тај део соленоидног простора Гаусову теорему. Како је $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ за све тачке простора, па и за простор соленоида, биће

(3) $$\int_S \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = 0,$$



Сл. 187

где је S површина посматраног дела соленоида. На бочној површини Q соленоида увек је $\mathfrak{v} \perp d\mathfrak{f}$ и стога

$$\int_Q \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} = 0.$$

Ако се оба пресека соленоида оријентишу на исту страну, на пр., у смеру вектора $\mathfrak{v}$, тада је један (F_1) оријентисан у унутрашњост а други (F_2) у спољашњост посматраног простора, на који примењујемо Гаусову теорему. Према томе биће

$$-\int_{F_1}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}+\int_{F_2}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0, \tag{4}$$

одн.

$$\int_{F_2}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=\int_{F_1}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{5}$$

при чему је испред интеграла по пресеку F_1 знак негативан, зато што је нормала на њему оријентисана у унутрашњост простора.

То значи да је вредност интеграла

$$\int_{F}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{6}$$

за све пресеке F неког соленоида, стална и показује протицање ма кроз који пресек соленоида. Вредност интеграла (6) зове се *напон* или *јачина* соленоида пресека F.

Посматрајмо врло танке соленоиде (векторске конце) тако да се на сваком њиховом пресеку вредност векторске функције може сматрати приближно константном. Нека буду F_1 и F_2, рецимо, два таква пресека, а $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ односне вредности векторске функције, тада једначина (5) постаје

$$\mathfrak{v}_1\cdot\mathfrak{F}_1=\mathfrak{v}_2\cdot\mathfrak{F}_2. \tag{7}$$

Ако још узмемо да су пресеци нормални на правац $\mathfrak{v}$, тј. да су вектори $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{F}_1$ као и $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{F}_2$ истога правца и смера, добиће се

$$v_1F_1=v_2F_2, \tag{8}$$

где смо са v_1 и v_2 обележили интензитете вектора $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$. Према томе, из једначине (8) следује

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{F_2}{F_1}, \tag{9}$$

одн. интензитет векторске функције $\mathfrak{v}$ обрнуто је пропорционалан нормалном пресеку соленоида. Дакле, интензитет векторске функције већи је тамо где се соленоид сужава а мањи где се шири.

Из ових разматрања следује за оваква поља могућност да се одреди распоред интензитета векторске функције помоћу

врло танких соленоида. Заиста, нека у целом пољу буду конструисани танки соленоиди. Они у свакој тачки одређују правац вектора $\mathfrak{v}$, јер омотач соленоида чине векторске линије које одређују тај правац. Интензитет је, како рекосмо, обрнуто пропорционалан величини нормалног пресека соленоида. Једино што се соленоидима у самом безизворном пољу не може одредити то је смер векторске функције у сваквој тачки. Он наиме зависи од тога где се у простору ван поља налазе извори (понори). У самом безизворном пољу векторске линије не могу ни почињати ни завршавати се.

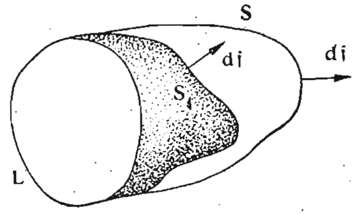
Ако се утврди соленоид јачине једнаке јединици — *јединични соленоид*, јачина поља ма у којој тачки очигледно се може одредити бројем таквих јединичних соленоида који пролазе нормално кроз јединицу површине на том месту поља. Тај број соленоида је тада и мера за протицање кроз јединицу површине на том месту.

Уобичајени начин одређивања јачине електричног и магнетног поља у техници помоћу броја „линија сила" кроз јединицу површине уствари се не односи на праве линије сила, јер њих и ма кроз како мали површински елемент има бесконачно много, већ на мале соленоиде чији је број коначан. Према томе у техничкој пракси реч „линија силе" односи се на соленоид.

Наравно, све ово важи само за безизворна поља. За свако друго поље овакве конструкције су могуће само у ограниченим областима поља око појединих извора.

За соленоидна поља важи и овај важан став: Протицање вектора $\mathfrak{v}$ кроз површину са датом граничном контуром не зависи од облика ове површине.

Заиста, ако је дата контура L (сл. 188) као граница површине S, па се узме ма која друга површина S_1 само са истом контуром L као границом, мора у безизворном пољу после примене Гаусове теореме бити



Сл. 188

$$\int_{S+S_1}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}=0. \tag{10}$$

Одавде следује, ако се обе површине S и S_1 оријентишу у истом смеру,

$$\int\limits_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} - \int\limits_{S_1} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = 0, \tag{11}$$

одн.

$$\int\limits_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \int\limits_{S_1} \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{12}$$

што смо и хтели да докажемо.

Протицање кроз сваку затворену површину у соленоидном пољу је, дакле, једнако нули. Протицања пак кроз све површине које обухватају један извор једнака су.

Најзад, како је увек

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{U} = 0, \tag{13}$$

може се, дакле, у случају соленоидног поља, поље претставити као векторско поље ротора неке друге векторске функције $\mathfrak{U}$, тј.

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\mathfrak{U}. \tag{14}$$

Векторска функција $\mathfrak{U}$ се зове каткад и *векторски потенцијал* векторске функције $\mathfrak{v}$. Векторски потенцијал није потпуно одређен из једначине (14), јер та једначина је задовољена очигледно и кад се функцији $\mathfrak{U}$ дода ма која безвртложна функција.

У оваквом пољу векторске линије су, дакле, *вртложне линије*, а соленоиди уједно и *вртложне цеви*.

72.3 Лапласова поља. Поље електричне силе

У Лапласову пољу мора бити

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \tag{1}$$

и, према томе, поље је безизворно. Али у Лапласову пољу је и

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0, \tag{2}$$

тј. оно је и безвртложно. Из услова (2) следује

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} U, \tag{3}$$

што, после замене у једначини (1), даје

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U = 0. \tag{4}$$

Према томе, ако су задовољени услови (1) и (2), постоји увек нека скаларна функција U, која задовољава Лапласову диференцијалну једначину. Такве функције U, ако су непрекидне и са непрекидним првим и другим изводима, зову се *Лапласове* или *хармониске функције*. Из овог разлога се оваква векторска поља зову Лапласова. Врло често се и само скаларно поље функције U које одређује наше векторско поље зове Лапласово. Лапласова векторска поља су најједноставнија. Она се могу претставити и помоћу ламела и помоћу соленоида.

Из једначине (4) у т. 61, с обзиром на услове (1) и (2), следује за векторску функцију $\mathfrak{v}$ одмах

$$\Delta\mathfrak{v} = 0 \tag{5}$$

и, како су основни ортови Декартова триједра $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ константни,

$$\mathfrak{i}\,\Delta v_1 + \mathfrak{j}\,\Delta v_2 + \mathfrak{k}\,\Delta v_3 = 0, \tag{6}$$

тј.

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \Delta v_3 = 0. \tag{7}$$

То значи да, ако нека векторска функција дефинише Лапласово поље, њене Декартове координате морају бити хармониске функције.

Векторска функција $\mathfrak{v}$ која дефинише Лапласово поље има и скаларни и векторски потенцијал.

Примера ради посматрајмо поље *електричне — Кулонове* (Coulomb) — *силе* у околини тачкастог товара у изворној тачки P. Према Кулонову закону је тада електрична сила у произвољној тачки Q простора, при подесно изабраним јединицама мерења и ако се занемари дијелектрично дејство средине, дата вектором

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3}\,\mathfrak{r}, \tag{8}$$

где је e позитивна или негативна величина тачкастог товара, $\mathfrak{r}$ вектор положаја посматране тачке Q у односу на изворну тачку P и ако се узме да се у тачки Q налази позитиван јединични товар електрицитета.

Ако се израчуна ротор електричног вектора добиће се

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \nabla\times\left(\frac{e}{r^3}\,\mathfrak{r}\right) = e\left(\frac{1}{r^3}\nabla\times\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\times\nabla\frac{1}{r^3}\right) = 0. \tag{9}$$

Према томе векторска функција $\mathfrak{E}$ има скаларни потенцијал чија је вредност

$$\Pi = \frac{e}{r}, \tag{10}$$

тј.

(11) $$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\frac{e}{r}.$$

Дакле, ово векторско поље је безвртложно.

Очигледно је да вредност потенцијала Π није у потпуности одређена, јер је једначина (11) задовољена и за

$$\Pi = \frac{e}{r} + C,$$

где је C произвољна константа. Тек после допунских услова постаје потенцијал Π електричне силе $\mathfrak{E}$ потпуно одређен, на пр., ако се да његова вредност у некој тачки поља или се захтева да у бесконачности ($r \to \infty$) буде $\Pi = 0$. У овом случају биће $C = 0$ и ми ћемо се у даљем посматрању задржати на њему.

У самој изворној тачки P, међутим, потенцијал има бесконачно велику вредност.

Потенцијална функција Π је хармониска функција, пошто је $e = \text{const.}$, а функција $\frac{1}{r}$ задовољава Лапласову једначину (т. 63, једн. 12), тј.

(12) $$\triangle\frac{e}{r} = \triangle\Pi = 0.$$

Одавде, међутим, следује, с обзиром на једначину (11),

(13) $$\triangle\frac{e}{r} = \nabla\cdot\left(\nabla\frac{e}{r}\right) = \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0,$$

што се, уосталом, може и директно израчунати одређивањем дивергенције вектора (8).

Тако видимо да је поље електричне силе тачкастог товара и безизворно у читавом простору изузев саме изворне тачке P. У тој тачки је $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ бесконачно велика, што се може лако на овај начин израчунати. Како је поље ван тачке P безизворно, мора протицање кроз све затворене површине које обухватају тачку P имати исту вредност. Замислимо стога тачку P окружену малом сфером полупречника ρ површине f и запремине ΔV. Протицање кроз ту и такву сферну површину биће одређено интегралом

(14) $$\oint_f \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{f}.$$

Вектор електричне силе имаће у свакој тачки те сфере правац и смер, као и односни управљени елемент, а интензитет ће му бити на целој површини константан и једнак $\frac{|e|}{\rho^2}$. Дакле, интеграл (14) може се овако израчунати

(15) $$\oint_f \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{f} = \frac{e}{\rho^2}\oint_f df = \frac{e}{\rho^2}4\pi\rho^2 = 4\pi e.$$

Према томе у тачки P кад $\rho \to 0$, имамо према дефиницији дивергенције

(16) $$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_f \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{f}}{\Delta V} = 3e\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3} = \pm\infty,$$

што је требало доказати, с обзиром да је

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Ако се у тачки P налази позитиван товар ($e > 0$), тачка P биће извор, а ако је у њој негативан товар ($e < 0$), она ће бити понор. У првом случају се узима да из тачке P извиру све векторске линије, а у другом да у њој све векторске линије увиру.

Сва ова разматрања се лако преносе и на поља силе која изазивају више тачкастих товара који су било у коначном броју дискретно распоређени било да у бесконачном броју чине непрекидну електричну масу.

Нека имамо прво више тачкастих товара $e_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ у тачкама P_i и нека вредности појединих товара e_i не зависе од присуства осталих. Нека тачка Q буде ма која тачка простора чији је вектор положаја у односу на извор P_i обележен са $\mathfrak{r}_i$. Тада се као електрична сила у тачки Q дефинише вектор

(17) $$\mathfrak{E} = \Sigma\mathfrak{E}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i^3}\mathfrak{r}_i.$$

Свуда у простору, изузев самих тачака P_i, овако дефинисана електрична сила има потенцијал

(18) $$\Pi = \Sigma\frac{e_i}{r_i},$$

јер је

(19) $$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Sigma\frac{e_i}{r_i}.$$

Потенцијал Π задовољава Лапласову једначину у свима тачкама простора изузев тачака P_i. Према томе је и поље коначног броја тачкастих товара Лапласово у целом простору изван изворних тачака.

Како је протицање сваког вектора $\mathfrak{E}_i$ кроз површину S која опкољава односни извор одређено једначином (15), протицање вектора $\mathfrak{E} = \Sigma\,\mathfrak{E}_i$ ма кроз коју површину која опкољава све изворе одређено је једначином

(20) $$\int_S \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi \Sigma e_i.$$

Најзад, посматрајмо и случај непрекидно распоређеног електрицитета по телу коначних димензија. Уведимо појам *густине електрицитета* σ и дефинишимо га просторним изводом

(21) $$\sigma = \frac{de}{dV}.$$

Густина електрицитета је углавном функција положаја. Из једначине (21) следује одмах

(22) $$e = \int_V \sigma\, dV.$$

За вектор електричне силе имаћемо сад, по аналогији са једначином (17), израз

(23) $$\mathfrak{E} = \int_V \frac{de}{r^3}\,\mathfrak{r} = \int_V \frac{\sigma\, dV}{r^3}\,\mathfrak{r},$$

при чему се за $\mathfrak{r}$ узима вектор положаја произвољне тачке Q у односу на тачку у којој се налази запремински елемент dV чија је електрична маса $de = \sigma dV$.

Електрична сила $\mathfrak{E}$ има опет потенцијал који је сад према једначини (18) одређен изразом

(24) $$\Pi = \int_V \frac{de}{r} = \int_V \frac{\sigma\, dV}{r}.$$

Вредност овог потенцијала је одређена у свима тачкама простора изузев тачака у којима се налазе електрични товари.

Посматрајмо запремину V, ограничену површином S, која обухвата цело наелектрисано тело; тада је протицање кроз ту површину које потиче од укупне електричне масе одређено према једначини (20) изразом

(25) $$\oint_S \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi \int_V \sigma\, dV,$$

тј.

(26) $$\oint_S \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi e.$$

Како је по Гаусовој теореми

$$\oint_S \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dV,$$

то се с обзиром на једначину (25) може написати

(27) $$\int_V 4\pi\sigma\, dV = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dV$$

и, пошто ова једначина важи за сваку запремину која опкољава наелектрисано тело, мора бити

(28) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\sigma.$$

Одавде, ако се стави $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Pi$, следује

(29) $$\Delta\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} = -4\pi\sigma.$$

Ова једначина је позната под именом *Поасонова* (Poisson) *диференцијална једначина*. Она према томе важи у пољу непрекидно распоређеног електрицитета у свима тачкама простора који обухвата електричне товаре и у том простору је поље само потенцијално. У сваком простору ван наелектрисаног тела имамо $\sigma = 0$ и, према томе, у таквом простору важи Лапласова диференцијална једначина, тј.

$$\Delta\Pi = 0$$

и, према томе, у таквом простору поље је Лапласово. Наравно, да вредност електричног вектора постаје бесконачна у свима тачкама у којима се налазе електрични товари.

Сва ова извођења и закључци важе и за *поље гравитације — Њутново* (Newton) *поље*. Тамо је дејство силе гравитације неке материјалне тачке масе m на јединичну масу одређено вектором

(30) $$\mathfrak{K} = -k^2 \frac{m}{r^3}\,\mathfrak{r},$$

где је $k^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,sec^{-2}\,g^{-1}}$ гравитациона константа.

72.4 Сложена поља

Векторска поља за која су бар у појединим тачкама задовољени услови

(1) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} \neq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0$$

зову се *сложена*.

Разлог за овај назив лежи у овоме. Свака векторска функција $\mathfrak{v}$ може се на бескрајно много начина претставити као збир две векторске функције $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, тј. увек се може удесити да буде

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2. \tag{2}$$

Очигледно је да се компонентне векторске функције могу тако одабрати да $\mathfrak{v}_1$ задовољава услове

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}_1 \neq 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v}_1 = 0 \tag{3}$$

и да, према томе, она сама дефинише неко безвихорно поље. Другу пак функцију $\mathfrak{v}_2$ можемо тако одабрати да дефинише безизворно поље, тј. да у целом пољу задовољава услове

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 \neq 0. \tag{4}$$

Према томе, првобитно поље дефинисано условима (1) може се сматрати као суперпозиција двају поља — једног безвихорног и једног безизворног. Ако су векторске функције које одређују та два поља познате, позната је у свакој тачки посматраног простора и функција $\mathfrak{v}$ и отуда назив сложено поље.

Читав ток проучавања оваквих поља и све његове особине могу се извести посматрањем и проучавањем компонентних поља, чије су нам особине већ познате.

73. Одређивање векторске функције помоћу дивергенције и ротора. Проблеми са граничним условима

Пре но што покажемо сам начин одређивања векторске функције у извесним случајевима помоћу њене дивергенције и њеног ротора доказаћемо два става:

1) Векторска функција $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ је у датом коначном простору једнозначно одређена ако је у свакој тачки датог простора дата дивергенција $\operatorname{div} \mathfrak{v} = i$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ и ако је у свакој тачки граничне површине позната вредност пројекције тражене векторске функције на правац нормале у тој тачки, тј. $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{n}_0$.

Овај став врло лако се доказује индиректно. Претпоставимо да решење проблема није једнозначно већ да постоје две векторске функције $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{v}'$ које задовољавају постављене услове. Тада њихова разлика $\mathfrak{d}$, очигледно, задовољава услове

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{d} &= \operatorname{div}(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') = 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{d} &= \operatorname{rot}(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') = 0, \\ \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{n}_0 &= (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') \cdot \mathfrak{n}_0 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Из друге од ових једначина следује одмах, на основу т. 72.1, да векторска функција дефинисана разликом $\mathfrak{d}$ има неки потенцијал Π, тј. да је

$$\mathfrak{d} = -\operatorname{grad} \Pi = \operatorname{grad} U. \tag{2}$$

Међутим, тада на основу прве од једначина (1) мора бити

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = 0, \tag{3}$$

а на основу треће од једначина (1)

$$\mathfrak{n}_0 \cdot \operatorname{grad} U = 0. \tag{4}$$

Ако се сад на функцију U, која задовољава услове (3) и (4), примени Гринов став у облику (3) из т. 70 добиће се

$$\int_V (\operatorname{grad} U)^2 dV = 0. \tag{5}$$

Како тај интеграл важи за целу област поља, мора бити

$$\operatorname{grad} U = \mathfrak{d} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = 0,$$

одакле је

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}',$$

те, дакле, постоји само једно решење које задовољава тражене услове, што је и требало доказати.

Овај став допуњује наредни став.

2) Векторска функција $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ је у целом безграничном простору једнозначно одређена својом дивергенцијом $\operatorname{div} \mathfrak{v} = i$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$, под условом да интензитет вектора $\mathfrak{v}$ при удаљавању у бесконачност тежи нули као $\frac{1}{r^2}$ или брже, где смо са r обележили интензитет вектора положаја тачке чије се удаљавање посматра.

У овом случају, под истом претпоставком, из једначине (2), после скаларног множења са $d\mathfrak{r}$, следује

$$\mathfrak{d} \cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U = dU. \tag{6}$$

Дакле, скаларна функција U одређена је интегралом

$$U = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \mathfrak{d} \cdot d\mathfrak{r}, \tag{7}$$

где је $\mathfrak{r}_0$ почетни услов.

Удаљавањем у бесконачност апсолутна величина скаларне функције U, при датим условима, тежи нули као $\frac{1}{r}$, а интеграл скаларног производа $U \operatorname{grad} U = U\mathfrak{b}$ као $\frac{1}{r^3}$. Дакле, у изразу (3) у т. 70 тежи $\oint\limits_S U(\nabla U \cdot d\mathfrak{f})$, нули као $\frac{1}{r}$, кад $r \to \infty$, пошто се помоћу просторног угла може написати $d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}_0 r^2 d\omega$. Како је, осим тога, на основу прве од једначина (1), у целом простору $\Delta U = 0$, то опет следује

$$\operatorname{grad} U = \mathfrak{b} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = 0$$

итд. што је и требало доказати.

Из разматрања у претходном параграфу очигледно је да се, у општем случају потребе за одређивањем поља у коме су дивергенција и ротор дати и различити од нуле, задатак може свести на одређивање једног чисто изворног поља и једног чисто вихорног поља. Стога ћемо показати како се одређује поље у та два случаја. При томе ћемо се ограничити углавном на одређивање таквих поља чије се границе простиру у бесконачност.

Први задатак гласи:

Одредити векторску функцију $\mathfrak{v}$ ако су у читавом бесконачном простору дате вредности $\operatorname{div} \mathfrak{v} = i$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$.

Из друге од ових једначина следује одмах да се може ставити

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} U,$$

где је U, као увек, нека скаларна функција положаја. Заменом у прву од датих једначина добија се

(8) $$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = i$$

за сваку поједину тачку простора. Једначина (8) има облик Поасонове једначине, па се по аналогији са њом може за U написати

(9) $$U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{i\,dV}{r}$$

и најзад

(10) $$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{i\,dV}{r}.$$

С обзиром на став о једнозначности решења оваквих проблема $\mathfrak{v}$ је тражена функција и U има особине потенцијала Кулонова или Њутнова поља.

Одређивање чисто изворног поља у случају поља коначних димензија је нешто сложеније и у то се овде нећемо упуштати.

Други задатак гласи:

Одредити векторску функцију $\mathfrak{v}$ ако су у читавом неограниченом простору дате вредности $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ у свакој тачки.

Одмах се види да $\mathfrak{w}$ не може бити произвољан вектор, јер увек мора бити

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0,$$

одн.

(11) $$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0.$$

Из првог услова следује да за векторску функцију $\mathfrak{v}$ постоји векторски потенцијал $\mathfrak{U}$, тј.

(12) $$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{U}.$$

Дакле, треба одредити $\mathfrak{U}$ тако да задовољава и другу од датих условних једначина, тј. да буде у свакој тачки

(13) $$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{U} = \mathfrak{w},$$

или после, развијања леве стране,

(14) $$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{U} - \triangle \mathfrak{U} = \mathfrak{w}.$$

Једначина (12) има бесконачно много решења која се сва једно од другог разликују за адитивни градијент неког скалара. То значи да се векторски потенцијал одређен векторском функцијом $\mathfrak{U}$ може подвргнути и неким даљим условима, на пр., може се захтевати да буде

(15) $$-\triangle \mathfrak{U} = \mathfrak{w},$$

одакле је на основу (11)

(16) $$\triangle \operatorname{div} \mathfrak{U} = 0.$$

Како ова једначина треба да важи у свим тачкама простора, кад $\mathfrak{U}$ у бесконачности тежи нули, мора у свим тачкама простора бити

(17) $$\operatorname{div} \mathfrak{U} = 0.$$

Према томе се проблем своди на интеграцију једначине (15) у вези са једначином (17). Ове једначине се, међутим, у скаларном облику своде на три једначине Поасонова облика. Из тог разлога функција $\mathfrak{U}$ као решење једначине (15) има облик

(18) $$\mathfrak{U} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathfrak{w}\,dV}{r},$$

тј. тражени вектор је дат обрасцем

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathfrak{w}\, dV}{r}, \tag{19}$$

одакле се због сличности облика (18) векторског потенцијала са изразом (9) за скаларни потенцијал види разлог овог назива.

Ни овај задатак нећемо овде решавати за ограничено поље.

Многи проблеми одређивања векторских поља, на пр., Лапласових поља своде се на тражење хармониске функције U која у неком коначном простору задовољава Лапласову једначину $\triangle U = 0$ и одређене граничне услове. То су основни проблеми теорије потенцијала и зову се проблеми са граничним условима. На пр., проблем: наћи хармониску функцију U која у неком ограниченом простору у свима тачкама граничне површине има неке одређене вредности, зове се *Dirihleov* (Dirichlet) *проблем* или *први проблем теорије потенцијала са граничним условима.*

Други такав проблем је: наћи хармониску функцију U која у неком ограниченом простору у свима тачкама задовољава Лапласову једначину, а на граничној површини је у свакој тачки дата вредност извода у правцу нормале тражене функције, одн. вредност интензитета градијента те функције. Овај проблем се зове *Нојманов* (Neumann) или *други проблем теорије потенцијала са граничним условима.*

Постоји и *трећи проблем теорије потенцијала са граничним условима,* само је његово формулисање нешто сложеније.

74. Примери

1. Равно скаларно поље одређено је једначином $U = \frac{r}{R}$, где су r и R растојања посматране тачке од две сталне тачке.

a) Наћи еквипотенцијалне линије;

b) Одредити grad U.

Еквипотенцијалне линије одређене су једначином $\frac{r}{R} = \text{const.}$ и према томе су геометриско место тачака чија су растојања

од две сталне тачке у сталном односу. То су, као што знамо из геометрије Аполонијеви кругови

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} \frac{r}{R} = r \operatorname{grad} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{grad} r =$$

$$= -\frac{r}{R^2}\mathfrak{R}_0 + \frac{1}{R}\mathfrak{r}_0 = \frac{R^2\mathfrak{r} - r^2\mathfrak{R}}{r R^3}.$$

2. Одредити $\operatorname{grad}(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{r})$, где је $\mathfrak{c}_0$ неки константни орт а $\mathfrak{r}$ вектор положаја.

Овај се задатак може решити лако на разне начине. На пр., ако се стави $U = \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{r}$, тада је

$$dU = d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{c}_0 .$$

С друге стране увек је, како знамо,

$$dU = d\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} U,$$

одакле одмах следује

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{r}) = \mathfrak{c}_0 .$$

При решавању овог и сличних задатака може се поћи и од дефиниције градијента у Декартовим правоуглим координатама. Нека у том случају буде дато $\mathfrak{c}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и $\mathfrak{r} = \{x, y, z\}$, тј.

$$U = \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{r} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma .$$

Одавде се одмах добија

$$\operatorname{grad} U = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma = \mathfrak{c}_0 ,$$

као и на претходни начин.

Најзад, могли смо се у овом случају послужити и обрасцем (25) из т. 60, за одређивање градијента скаларног производа два вектора.

3. Нека векторска функција $\mathfrak{v}$ буде дата једначином

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathfrak{j}\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mathfrak{k}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

где је $f = f(x, y, z)$ нека дата функција.

Претставити $\mathfrak{v}$ као векторски производ два вектора и показати да је

$$\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} f = 0 .$$

Очигледно је да се може написати

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathfrak{j}\begin{vmatrix} z & x \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix} + \mathfrak{k}\begin{vmatrix} x & y \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathfrak{r} \times \operatorname{grad} f,$$

што је требало извести. Из овог резултата одмах следује тачност другог дела задатка.

4. Израчунати div $(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{c}_0$, где је $\mathfrak{c}_0$ неки константни орт а $\mathfrak{r}$ вектор положаја.

Прво ћемо развити двоструки векторски производ

$$(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{r}\,\mathfrak{c}_0^2 - \mathfrak{c}_0(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}_0) = \mathfrak{r} - \mathfrak{c}_0(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}_0),$$

па је онда с обзиром на 2. пример

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{c}_0 &= \operatorname{div}\mathfrak{r} - \operatorname{div}\mathfrak{c}_0(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}_0) = \\ &= 3 - [(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}_0)\operatorname{div}\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_0\operatorname{grad}(\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{r})] = 2.\end{aligned}$$

5. Израчунати rot $\mathfrak{b}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a})$, где су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ константни вектори а $\mathfrak{r}$ вектор положаја.

На основу обрасца (18) у т. 60 о одређивању ротора производа скаларне и векторске функције добија се у овом случају одмах

$$\operatorname{rot}\mathfrak{b}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}) = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a})\operatorname{rot}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\times\operatorname{grad}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{b},$$

јер је grad $(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$ с обзиром на пример (2).

6. Доказати да је

$$\oint_S \mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{f} = 3V, \tag{1}$$

где је V запремина ограничена површином S и геометриски објаснити.

Заиста, ако се послужимо Гаусовом теоремом одмах се добија

$$\oint_S \mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div}\mathfrak{r}\,dV = 3\int_V dV = 3V.$$

Ако се напише $\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{f} = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}_0)\,df$, где је $\mathfrak{n}_0$ орт нормале на граничној површини, горњи став показује да је збир производа површинских елемената и растојања тангентне равни у некој тачки таква елемента од пола једнак трострукој запремини, што је и са елементарне тачке гледишта очигледно.

Кад је у питању лопта, тада је $\mathfrak{n}_0=\mathfrak{r}_0$ и $r=\text{const.}$ па се добија

$$\oint_S \mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{f} = r\oint_S df = rP.$$

Ако се ова вредност површинског интеграла унесе у (1) добија се позната елементарна веза површине и запремине лопте, тј.

$$rP = 3V.$$

7. Одредити векторске линије у пољу вектора $\mathfrak{v}=\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r}$, где је $\mathfrak{c}_0$ константни орт а $\mathfrak{r}$ вектор положаја.

Мора се претпоставити да су $\mathfrak{c}_0$ и $\mathfrak{r}$ линеарно независни, јер би иначе били колинеарни и векторска функција би била идентички једнака нули. На основу те претпоставке из

$$\mathfrak{v}\times d\mathfrak{r} = (\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})\times d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{c}_0\cdot d\mathfrak{r}) - \mathfrak{c}_0(\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r}) = 0$$

следује

$$\mathfrak{c}_0\cdot d\mathfrak{r} = 0, \quad \mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r} = r\,dr = 0.$$

Интеграцијом прве од ових једначина добија се једначина

$$\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{r} = C_1,$$

где је C_1 нека произвољна константа, која у простору одређује равни нормалне на праву кроз пол са правцем вектора $\mathfrak{c}_0$.

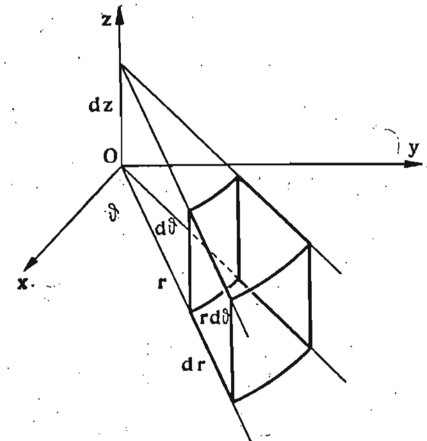
Из друге једначине добија се

$$r^2 = C_2,$$

а то су сфере са центром у полу.

Према томе векторске линије су кругови чији су центри на поменутој правој кроз пол, а који леже у поменутим равнима.

8. Изразити дивергенцију неке векторске функције $\mathfrak{v}$ у цилиндричким координатама r, ϑ и z директним одређивањем просторног извода.



Сл. 189

Цилиндричке координате вектора $\mathfrak{v}$ у правцу генералисаних оса обележићемо са v_r, v_ϑ, v_z. Други од образаца (10) у т. 69, који дефинише дивергенцију помоћу просторног извода, применићемо на запремински елемент $dV = r\,dr\,d\vartheta\,dz$ (сл. 189) који је ограничен са две цилиндричне површине полупречника r и $r+dr$, са две меридијанске равни ϑ и $\vartheta+d\vartheta$ и са две равни z и $z+dz$ нормалне на z-оси.

Како су цилиндричне координате ортогоналне, то је протицање векторске функције $\mathfrak{v}$ у правцу r кроз елемент цилиндричне површине полупречника r очигледно

$$-v_r\, r\, d\vartheta\, dz .$$

Кроз наспрамну цилиндричну површину $r+dr$ протицање је одређено са тачношћу до бесконачно малих другог реда, изразом

$$v_r\, r\, d\vartheta\, dz + \frac{\partial}{\partial r}(v_r\, r\, d\vartheta\, dz)\, dr .$$

Према томе укупно протицање кроз обе цилиндричне површине износи

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_r\, r)\, dr\, d\vartheta\, dz .$$

На сличан начин добија се за протицање кроз оба меридијанска површинска елемента

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta}\, dr\, d\vartheta\, dz ,$$

а кроз оба нормална на z-оси

$$r\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\, dr\, d\vartheta\, dz .$$

Тако је, дакле,

$$\oint_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f} = \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + r\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] dr\, d\vartheta\, dz ,$$

одакле се, најзад, с обзиром на вредност запреминског елемента у цилиндричким координатама, добија се тражени израз

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} .$$

9. Дата је векторска функција $\mathfrak{v} = f(r)\,\mathfrak{r}_0$, где је $\mathfrak{r} = r\,\mathfrak{r}_0$ вектор положаја промењиве тачке у односу на неки непокретни пол.

a) Одредити врсту векторског поља које у општем случају дефинише оваква векторска функција;

b) Наћи ону функцију $f(r)$ за коју ће посматрано поље бити Лапласово;

c) За нађену вредност $f(r)$ одредити потенцијал векторске функције.

Ради разврставања поља морамо израчунати дивергенцију и ротор дате векторске функције. Дакле

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \operatorname{div} f(r)\,\mathfrak{r}_0 = \operatorname{div}\frac{f(r)}{r}\,\mathfrak{r} =$$

$$= \mathfrak{r}\operatorname{grad}\frac{f(r)}{r} + \frac{f(r)}{r}\operatorname{div}\mathfrak{r} = f'(r) + \frac{2f(r)}{r} \neq 0 .$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{rot} f(r)\,\mathfrak{r}_0 = \operatorname{rot}\frac{f(r)}{r}\,\mathfrak{r} =$$

$$= \frac{f(r)}{r}\operatorname{rot}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\times\operatorname{grad}\frac{f(r)}{r} = 0 .$$

Према томе посматрано поље је, у општем случају, потенцијално.

Да би овакво поље било Лапласово мора бити, као што знамо, и $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$, а то ће у нашем примеру бити само онда кад буде

$$f'(r) + \frac{2f(r)}{r} = 0 ,$$

одн.

$$\frac{df(r)}{f(r)} = -\frac{2\,dr}{r} ,$$

одакле се интеграцијом одмах добија

$$f(r) = \frac{C}{r^2} ,$$

где је C произвољна константа. Према томе векторска функција

$$\mathfrak{v} = \frac{C\mathfrak{r}}{r^3}$$

дефинише Лапласово поље у читавом простору изузев тачке $r = 0$.

Најзад се за потенцијал добија

$$\Pi = -C\int\frac{dr}{r^2} = \frac{C}{r} .$$

10. Наћи решење Лапласове једначине $\triangle U = 0$ које зависи само од ρ, или само од ϑ или само од φ, где су ρ, ϑ, и φ сферне координате.

На основу израза (15) у т. 62 за Лапласов оператор $\triangle$ у сферним координатама следује:

a) за $U = U(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dU}{d\rho}\right) = 0, \text{ тј. } \rho^2\frac{dU}{d\rho} = A ,$$

где је C произвољна константа интеграције. После још једне интеграције добија се најзад

$$U = -\frac{A}{\rho} + B,$$

где је B нека друга произвољна константа интеграције.

b) за $U = U(\vartheta)$:

$$\frac{d^2 U}{d\vartheta^2} = 0,$$

одакле после интеграције одмах добијамо

$$U = C\vartheta + D,$$

где су C и D неке произвољне константе интеграције.

c) за $U = U(\varphi)$:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\varphi\frac{dU}{d\varphi}\right) = 0, \text{ тј. } \cos\varphi\frac{dU}{d\varphi} = E,$$

одакле још једном интеграцијом

$$U = E\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + F,$$

где су E и F произвољне константе интеграције.

Задаци

($\mathfrak{r}$ означава увек вектор положаја а $\mathfrak{c}_0$ неки константни орт)

1. Наћи извод функције $U = U(x, y, z) = xyz$ у тачки $P(5, 1, 2)$ у правцу ка тачки $Q(9, 4, 14)$.

2. За скаларну функцију $U(x, y, z) = y^2z - 2xyz + z^2$ наћи извод у тачки $M(3, 1, 1)$ у правцу који са осама чини углове 60^0, 45^0 и 60^0.

3. Одредити Декартове координате градијента скаларне функције $U = x^3y^3z$.

4. Наћи сингуларне тачке поља $U = x^2 - 4xy + 2yz + 3z^2 - 2y + 6z$.

5. Израчунати: *a*) $\operatorname{grad} r^2$, *b*) $\operatorname{grad} r^n$, *c*) $\operatorname{grad}\frac{1}{r^4}$.

6. Показати да је $\operatorname{grad} U$ поларни вектор.

7. Наћи вредност извода скаларне функције $U = 3x^4 - xy + y^3$ у тачки $M(1, 2)$ у правцу који са позитивном x-осом чини угао од 60^0.

8. Одредити координате градијента скалара $U = 5x^2 - 3xy^3 + y^4$.

9. У чему се разликује $\nabla(\overset{*}{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{b})$ од $\nabla_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} . \mathfrak{b})$? Објаснити.

10. Изразити градијент скаларне функције U: *a*) у цилиндричним координатама; *b*) у сферним поларним координатама.

11. Израчунати $2\mathfrak{r} - \operatorname{grad}(\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{r})^2$.

12. У некој течности су слојеви исте температуре ϑ одређени хоризонталним равнима тако да је на висини h температура

$$\vartheta = a + bh + ch^2.$$

Одредити $\operatorname{grad}\vartheta$.

13. Израчунати $\operatorname{grad}(x^n y^m)$, кад је $\operatorname{grad} y = \frac{n}{m}\operatorname{grad} x$.

14. Елипса $r_1 + r_2 = 2a$ је еквипотенцијална линија скаларне функције $U = r_1 + r_2$, где су r_1 и r_2 растојања променљиве тачке од жижа. Доказати на основу тога да нормала елипсе полови угао између потега.

15. На аналоган начин доказати да је код хиперболе $r_1 - r_2 = 2a$ тангента симетрала угла између потега.

16. За параболу $r - x = p$ са жижом у координатном почетку показати на горњи начин да је тангента симетрала угла између потега и праве паралелне оси параболе.

17. Нека буду дате три тачке P_1, P_2 и P_3. Помоћу градијента скаларне функције $U = r_1 + r_2 + r_3$, где је $r_1 = P_1Q$, $r_2 = P_2Q$, $r_3 = P_3Q$ одредити положај тачке Q тако да U има минималну вредност.

18. Наћи геометриски начин конструкције тангенте на Касинијеве (Cassini) овале, одређене једначином $r_1r_2 = a^2$, где су r_1 и r_2 растојања променљиве тачке од жижа, користећи чињеницу да су те криве еквипотенцијалне криве за скаларну функцију $U = r_1r_2$.

19. Нека U буде скаларна функција чија је вредност за сваку тачку простора збир растојања од две сталне тачке. Наћи еквискаларне површине.

20. Изразити $\operatorname{grad}(\mathfrak{v}_0 \times \mathfrak{c}_0)^2$ помоћу променљивог угла $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_0)$ ако је $|\mathfrak{v}| = v = \text{const}$.

21. Наћи градијенте функција: *a*) $U = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r} + r$; *b*) $U = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r})r$ где је $\mathfrak{a} = \text{const}$.

22. Одредити градијент поља $U = \mathfrak{c}_0 \cdot (\mathfrak{r} \times \mathfrak{c}_0)$.

23. Ако је $U = \rho$, где је ρ растојање посматране тачке од праве $\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \text{const}$. и $\mathfrak{b} = \text{const}$, наћи $\operatorname{grad} U$ и протумачити га геометриски.

24. Изразити $\operatorname{grad}(\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{v})^{2p}$ помоћу $(\mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{v})^2$.

25. Ако је $U = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{r}] + [\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{n}]$, где су $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ константни вектори, одредити еквипотенцијалне површине поља.

26. Под којим се условом елипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и хипербола $x^2/a_1^2 - y^2/b_1^2 = 1$ секу под правим углом?

(Упут: Ако се две криве $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ секу у некој тачки то се оне секу под углом који чине градијенти скалара φ и ψ у тој тачки).

27. Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки $A(1, 2, 3)$ површине

$$x^3 + xyz + z^2 - 3xz + 2y - 11 = 0.$$

28. Написати једначину тангентне равни и нормале елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

29. За круг (пресек сфере $x^2+y^2+z^2=169$ и конуса $16x^2+27y^2=4z^2$) написати једначине тангенте и нормалне равни у тачки $M(3, 4, 12)$.

30. Одредити векторске линије за поље вектора $\mathfrak{v}=\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$.

31. Изразити дивергенцију неке векторске функције у сферним поларним координатама.

32. Израчунати $\operatorname{div}(U\mathfrak{v})$, ако је $\operatorname{grad} U=\mathfrak{v}$.

33. Израчунати: *a)* $\operatorname{div}(r^n\mathfrak{r})$, *b)* $\operatorname{div}[\mathfrak{r}f(r)]$, *c)* $\operatorname{div}(r\mathfrak{v})$, кад је $\mathfrak{v}\perp\mathfrak{r}$; *d)* $\operatorname{div}(\mathfrak{r}^2\mathfrak{c}_0)$.

34. Израчунати $\operatorname{div}(\mathfrak{v}+n\mathfrak{w})$, ако је $\operatorname{div}\mathfrak{v}=m\operatorname{div}\mathfrak{w}$.

35. Одредити дивергенцију вектора $\mathfrak{v}=a\mathfrak{i}+b\mathfrak{j}$, где је a промењљиво а b константно.

36. Израчунати: *a)* Δr^2, *b)* $\operatorname{grad}\operatorname{div}(U\mathfrak{v})$, *c)* $\Delta(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w})$.

37. Из неке цилиндричне цеви дужине l испарава вода и струји на оба краја цеви брзином $\mathfrak{v}$. Наћи средњу вредност $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ у тој цеви.

38. Изразити ротор векторске функције: *a)* у цилиндричним координатама, и *b)* у сферним поларним координатама.

39. Израчунати $\operatorname{rot}(\mathfrak{v}+\mathfrak{i}U)$, ако је $\operatorname{grad} U=\mathfrak{i}x$.

40. Израчунати $\operatorname{rot}(U\mathfrak{c}_0)$, ако је $\operatorname{grad} U \parallel \mathfrak{c}_0$.

41. Развити израз $\operatorname{rot}(\mathfrak{v}\times\nabla)\times\mathfrak{w}$ и одредити његову вредност за случај $\mathfrak{w}=\mathfrak{r}$.

42. Израчунати $\mathfrak{c}_0\cdot\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{c})-\operatorname{rot}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{c}_0)$.

43. Израз $\mathfrak{c}_0\times\operatorname{grad} p$ претставити као ротор неког вектора, ако је p нека функција положаја.

44. Израчунати $\operatorname{rot} f(r)\mathfrak{r}$ и показати да је његова вредност увек једнака нули.

45. Развити израз $(\nabla\times\mathfrak{v})\times\mathfrak{w}$ и изразити га као функцију од $\operatorname{div}\mathfrak{w}$, ако је $\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w})=0$.

46. Вектор $\vec{r}(\omega\times\mathfrak{r})$ дефинише соленоидно поље. Написати га у облику ротора неког вектора.

47. Израчунати $(\nabla\cdot\mathfrak{x})\mathfrak{y}$ у случају да се $\mathfrak{y}$ не мења у правцу $\mathfrak{x}$.

48. Израчунати: *a)* $(\mathfrak{r}_0\cdot\nabla)\mathfrak{v}$; *b)* $(\nabla\times\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{w}$; *c)* $(\mathfrak{v}\times\nabla)\times\mathfrak{r}$.

49. Доказати тачност образаца:

a) $(\mathfrak{v}\cdot\nabla)U\mathfrak{w}=\mathfrak{w}(\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad} U)+U(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\mathfrak{w}$,

b) $\mathfrak{c}_0\cdot\nabla(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{c}_0\cdot\nabla)\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{c}_0\cdot\nabla)\mathfrak{a}$,

c) $(\mathfrak{c}_0\cdot\nabla)(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\times[(\mathfrak{c}_0\cdot\nabla)\mathfrak{b}]-\mathfrak{b}\times[(\mathfrak{c}_0\cdot\nabla)\mathfrak{a}]$

d) $(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{z}=\mathfrak{y}\cdot[(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{z}]-\mathfrak{x}\cdot[(\mathfrak{y}\cdot\nabla)\mathfrak{z}]$,

e) $(\nabla\times\mathfrak{x})\times\mathfrak{y}=(\mathfrak{x}\cdot\nabla)\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\times\operatorname{rot}\mathfrak{y}+\operatorname{rot}\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}-\mathfrak{x}\operatorname{div}\mathfrak{y}$.

50. Израчунати $\oint\limits_S \mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{f}$, где је $\mathfrak{v}=x^3\mathfrak{i}+y^3\mathfrak{j}+z^3\mathfrak{k}$ по површини сфере полупречника a са центром у координатном почетку.

51. Дато је поље скалара U дефинисано једначином

$$U=\frac{1}{2}(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})^2.$$

a) Одредити еквискаларне површине

b) Одредити вектор $\mathfrak{Q}=\operatorname{grad} U$

c) Одредити $\operatorname{div}\mathfrak{Q}$

d) Израчунати $\oint\limits_S(\mathfrak{Q}\cdot d\mathfrak{f})$ по некој затвореној површини.

52. Дато је поље вектора $\mathfrak{K}=\mathfrak{r}\times(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k})$.

a) Доказати да је поље безизворно

b) Одредити $\operatorname{rot}\mathfrak{K}$

c) Израчунати $\oint\limits_L \mathfrak{K}\cdot d\mathfrak{r}$ по кругу полупречника R који лежи у равни xOy а центар му је у координатном почетку.

53. Дата је векторска функција $\mathfrak{v}=x^2\mathfrak{i}+y^2\mathfrak{j}+z^2\mathfrak{k}$.

a) Одредити врсту поља, које она дефинише.

b) Наћи услов да поље буде Лапласово.

c) Израчунати протицање тог вектора кроз површину паралелепипеда чије су ивице a, b и c паралелне осама Декартова триједра.

54. Израчунати $\oint\limits_S(\mathfrak{c}_0\times\mathfrak{r})\cdot(\mathfrak{c}_0\times d\mathfrak{f})$ по некој затвореној површини.

55. Израчунати рад промењљиве силе $F=y\mathfrak{i}-x^2\mathfrak{j}+xyz\mathfrak{k}$ дуж криве L дате параметарским једначинама $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=2t^3$ од тачке $A(0, 0, 0)$ до тачке $B(1, 1/2, 2)$.

56. Израчунати интеграл $\int\limits_S \mathfrak{r}(\mathfrak{c}_0\cdot d\mathfrak{f})$ по површини правог ваљка чија је оса паралелна $\mathfrak{c}_0$.

57. Израчунати: *a)* $\int\limits_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2}(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{v}$; *b)* $\oint\limits_L(d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\mathfrak{v}$.

58. Доказати образац $\int\limits_S(\operatorname{grad} U_1\times\operatorname{grad} U_2)\cdot d\mathfrak{f}=\oint\limits_L U_1\,dU_2$.

59. Доказати обрасце:

a) $\oint\limits_L U(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r})=\int\limits_S(U\operatorname{rot}\mathfrak{v}+\operatorname{grad} U\times\mathfrak{v})\cdot d\mathfrak{f}$.

b) $\int\limits_S U_1U_2(\operatorname{grad} U_3\cdot d\mathfrak{f})=\int\limits_V\{U_1\operatorname{div}(U_2\operatorname{grad} U_3)+ U_2\operatorname{grad} U_1\cdot\operatorname{grad} U_3)\}\,dV$.

c) $\int\limits_S(\mathfrak{v}\times\operatorname{grad} U)\cdot d\mathfrak{f}=\int\limits_V(\operatorname{grad} U\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v})\,dV$.

d) $\int\limits_S(\mathfrak{v}\times\mathfrak{w})\cdot d\mathfrak{f}=\int\limits_V(\mathfrak{w}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v}-\mathfrak{v}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{w})\,dV$.

ГРЧКА АЗБУКА

Α	α	алфа	Ν	ν	ни
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гама	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	делта	Π	π	пи
Ε	ε	епсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	ета	Τ	τ	тау
Θ	ϑ	тхета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	јота	Φ	φ	фи
Κ	κ	капа	Χ	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	ми	Ω	ω	омега

ГОТИЦА

штампана	писана		штампана	писана	
𝔄 𝔞		а	𝔑 𝔫		ен
𝔅 𝔟		бе	𝔒 𝔬		о
ℭ 𝔠		це	𝔓 𝔭		пе
𝔇 𝔡		де	𝔔 𝔮		ку
𝔈 𝔢		е	ℜ 𝔯		ер
𝔉 𝔣		еф	𝔖 ſ 𝔰 ß		ес
𝔊 𝔤		ге	𝔗 𝔱		те
ℌ 𝔥		ха	𝔘 𝔲		у
ℑ 𝔦		и	𝔙 𝔳		фау
𝔍 𝔧		јот	𝔚 𝔴		ве
𝔎 𝔨		ка	𝔛 𝔵		икс
𝔏 𝔩		ел	𝔜 𝔶		ипсилон
𝔐 𝔪		ем	ℨ 𝔷		цет

ЛИТЕРАТУРА

Овде су наведена само она дела која је писац, поред предавања М. Миланковића и А. Билимовића, био у могућности да употреби при изради ове књиге.

Литература је наведена азбучним редом по имену писаца, а подељена је у две групе: прву — која се односи на дела уопште о теорији вектора, и другу – која се односи на дела у којима се обрађују само извесне области теорије вектора или третирају поједине примене теорије вектора.

1. Bouligand G. — Leçons de géométrie vectorielle. Paris: Viubert, 1924.
2. Bouligand G. et Rabaté G. — Initiation aux méthodes vectorielles. Paris: Viubert, 1926.
3. Bricard R. — Le calcul vectoriel. Paris: Colin, 1947.
4. Burali-Forti C. et Marcolongo R. — Éléments de calcul vectoriel. Paris: Herman, 1910.
5. Coffin J. G. – Calcul vectoriel, trad. francaise par Véronnet. Paris: Gauthier-Villars, 1914.
6. Дубнов Я. С. — Основы векторного исчисления, часть I. Москва: Огиз, 1939.
7. Duschek A. und Hochrainer A. — Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, I Teil; Tensoralgebra. Wien: Springer, 1946.
8. Gans R. — Einführung in die Vektoranalysis. Leipzig: Teubner, 1905.
9. Haas A. — Vektoranalysis. Berlin: de Gruyter, 1922.
10. Ignatowsky W. v. — Die Vektoranalysis, Bd. I und II. Leipzig: Teubner, 1926.
11. Il'Kovič D. — Vektorový počet. Bratislava: SVŠT, 1945.
12. Juvet G. — Leçons d'analyse vectorielle, I et II partie. Paris: Gauthier-Villars, 1935.
13. Кочин Н. Е. – Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Онти, 1934.
14. Lagally M. — Vektorrechnung. Leipzig: Akad. Verlag, 1928.
15. Lohr E. — Vektor-und Dyadenrechnung. Berlin: de Gruyter, 1939.
16. Lotze A. — Punkt-und Vektorrechnung. Berlin: de Gruyter, 1929.
17. Маневъ Г. Ив. — Уводъ въ векторното смѣтане. София: Университетски издания, 1934.
18. Nillus P. — Leçons de calcul vectoriel, tome I. Paris: Leon Eyrolles, 1931.

19. Runge C. — Vektoranalysis, Bd. I. Leipzig: Hirzel, 1919.
20. Silberstein L. — Éléments d'algèbre vectorielle et d' analyse vectorielle, trad. francaise par G. Matisse. Paris: Gauthier-Villars, 1921
21. Spielrein J. — Lehrbuch der Vektorrechnung. Stuttgart: Witwer, 1926.
22. Taylor J. H. — Vector Analysis. New York: Prentice-Hall, 1939.
23. Valentiner S. — Vektoranalysis. Berlin: de Gruyter, 1923.
24. Véronnet A. — Le calcul vectoriel. Paris: Gauthier-Vilars, 1933.

— — —

25. Abraham M. — Geometrische Grundbegriffe. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 2-Heft 1.
26. Abraham M. und Föppl A. — Theorie der Elektrizität, Bd. I. Leipzig: Teubner, 1907.
27. Appell P. — Éléments de la théorie des vecteurs et de la géométrie analytique. Paris: Payot, 1921.
28. Beck H. — Einführung in die Axiomatik der Algebra. Berlin: de Gruyter, 1926.
29. Bieberbach L. — Analytische Geometrie. Leipzig: Teubner, 1944.
30. Blaschke W. — Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I. Berlin: Springer, 1924.
31. Фиников С. П. — Дифференциальная геометрия. Москва: Учпедгиз, 1939.
32. Kellog O. D. — Foundations of Potential Theory. Berlin: Springer, 1929.
33. Kommerell K. — Das Grenzgebiet der elemetaren und höheren Mathematik. Leipzig: Koehler, 1936.
34. Kowalewski G. — Lehrbuch der höheren Mathemathik. Bd. I. Vektorrechnung und analytische Geometrie. Berlin: de Gruyter, 1933.
35. Lainé E. — Premières leçons de géométrie analytique et de géométrie vectorielle. Paris: Vuibert, 1929.
36. Nielsen J. — Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin: Springer, 1935.
37. Seeliger R. — Aufgaben aus der theoretischen Physik. Braunschweig: Vieweg, 1921.
38. Silberstein L. — Vectorial Mechanics. London: Macmillan, 1925.
39. Смирнов В. И. — Курс высшей математики, том II. Москва. Гостехиздат, 1940.
40 Суслов Г. К. — Теоретическая механика. Москва: Огиз, 1944.
41. Тамм И. Е. — Основы теории электричества. Москва: Огиз, 1946.

РЕГИСТАР