АЛГЕБРА

ЗА

СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

ПО

ХАБЕРЛУ

ИЗРАДИО

Ст. Марковић

ДИРЕКТОР ВАЉЕВСКЕ НИЖЕ ГИМНАЗИЈЕ

БЕОГРАД

У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1881

УВОД

Сваки предмет, који је сложен из делова или који замишљамо само да је тако сложен, зове се *количина*.

Количине могу бити *равнородне* (хомогене) на пр. 2 килограма и 4 ектограма и *разнородне* (хетерогене) на пр. 3 динара и 5 декаграма. Равнородне количине можемо да меримо, и то: јединицом узетом из истог рода; а размера задате количине према овој јединици зове се, *број*.

Број може бити *цео*, ако се јединица у задату количину налази једанпут или више пута; или је *разломљен број*, ако задата количина садржи само делове јединице, једанпут или више пута.

Цели и разломљени бројеви двојаки су: *свршени, срачуњени* (рационални) и *несвршени*, *несрачуњени* (ирационални). Свршени су они, који имају опредељену вредност; а несвршени који имају само приближну вредност. И свршени и несвршени бројеви су стварне (реелне) количине; од ових се разликују *уображене* (имагинарне) количине.

Треба количине разликовати још на оне, које се могу произвољно разложити т. ј. *савезне* (континуирне) и на оне, које се не могу даље разложити т. ј. *несавезне* (дискретне). Тако су линије, време, простор и т. д. савезне, а динари, људи и т. д. несавезне количине.

Бројеви, који садрже у себи опредељену множину јединица, зову се *особени бројеви*. Ове бројеве бележимо са особеним *знацима* (цифрама); по томе сваки број означава извесну множину јединица, дакле 4 не може имати ни више ни мање до 4 јединице.

Бројеви, који представљају произвољну множину јединица зову се општи бројеви и ове бележимо са писменима латинске азбуке. Тако општи број a представља ма коју множину јединица. Количина a може дакле вредити: 1, 2, 3, 4, 5, 6.... 30 и т. д.; али ако узмемо да у једном задатку вреди $a=24$, то ће свако a у том истом задатку вредити 24; а у неком другом задатку може вредити a ма колико више или мање.

У рачунима са непознатим количинама бележимо ове непознате са последњим писменима, x, y, z, u, v, w.

Количине које имају једнаку множину јединица зову се *једнаке* или *равне*; а које немају једнаку множину јединица зову се *неједнаке, неравне* количине; број са већим бројем јединица зове се *већи*, а онај с мањим бројем јединица *мањи*. Знак за једнаке бројеве је ($=$), зато кажемо $2 = 2$, $a = b$, т. ј. два равно два или a равно b. Знак неједнаких бројева јест ($>$) и ($<$), већи број пише се са отворене а мањи са шиљате стране на пр. $7 > 4$, $3 < 5$ и чита се, седам веће од четир, три мање од 5 или у опште $a \gtrless b$, a је веће или мање од b.

Наука о количинама зове се, *Математика*, коју делимо на *Аритметику* и *Геометрију*; у првој се учи о бројним количинама, а у другој о просторним количинама.

Кад се рачуна у аритметици са особеним бројевима, онда је *особена аритметика*, а кад се ради са општим бројевима, онда је *општа аритметика* или *алгебра*

У математици зову се *основни појмови* они, који се не изводе из других појмова, него се постављају без икаквих објаснена као познати у напред.

Тачно и јасно опредељавање неког математичког појма из других познатих појмова, каже се *одредба* или *дефиниција*.

Математичка правила делимо на *теоријска* и *практична*, како се кад каже и тврди, да нешто постоји или бива, или да нешто треба да постане или да буде. Теоријска су правила обично теореме или аксиоми.

Ставови постоје из *предпоставке* и из *последице* (закључака) (конклузије). Ставови се постављају онда, кад изречена истина не може одма да се увиди, него се мора помоћу познатих истина да докаже; напротив кад се истина увиђа и несумњиво може да изведе сљедство по здравом разуму, онда постаје *аксиома*.

Најважније су аксиоме:

1) *Да је свака количина сама себи равна.*

2) *Једнаке количине могу једна другу заменути.*

3) *Цело је свагда веће од једног свог дела.* Јер ако је

$$a = b + c + d. \text{ то је извесно}$$

$$a > b,\ a > c,\ a > d.$$

4) *Кад су две количине једнаке трећој једнаке су и међусобом.* Ако је $a = m$ и $b = m$, то је и $a = b$.

5) *Кад једнаке количине једнако примењујемо, једнаке ће количине изаћи*, т. ј. једнаке количине кад сабирамо, од једнаких одузимамо са једнакима множимо или с једнакима делимо изаћи ће једнаке количине у резултату.

Кад је $a = b$ и $c = d$

то је
$$a + c = b + d$$
$$a - c = b - d$$
$$a \times c = b \times d$$
$$a : c = b : d$$

Кад се неувиђа, да се неко практично правило може извести по извесном начину, него да се мора доказивати истинитост предузетог пословања, онда је то *задатак* или *проблема*

Ако се на против истинитост пословања или могућност сљедства може да у види без доказа, онда је практично правило *постулат*,

Правило доказати значи његову истинитост *основима* посведочити.

Ако при доказивању пођемо са појединим основима ка сљедству, онда је правило *синтетично*; или ако пођемо са сљедствима ка основима, онда је правило *аналитично*. Најпосле разликујемо непосредне и посредне доказе; непосредни су онда, кад у правилу изречена истина може да се изведе правим путем; а посредни су кад се то врши противним путем.

Примедба. Још стари народи признавали су финићанима да су пронашли цифре за писање бројева и прве рачунске операције. Финићани спомињу се као нај јачи трговачки народ па ваљда су због потребе код њих произашли ови проналасци. А почетци геометрије вели се да су прво нађени код египћана.

Међу старим народима опет зато заузимају прво место грци, који су врло ревносно учили математику, па зато и јесу први који су у тој науци нашли знатне проналаске. Прве вести у том погледу налазимо код *тала* из милета и *питагоре* са самоса (у 6. столећу пре хр.) који су своја прва знања примили из египта па после тога то знање ширили у грчкој: Око 300 год. пре хр. изађе *Евклид* са својих 13. књига, од којих се 4 баве искључиво са аритметиком, а остале са геометријом. Ове нам књиге показују тадање стање научно, зато су и данас још споменици грчке културе. За време Евклида Александрија у египту је била главно средиште наука, а особито математичких наука које су ту скоро 1.000 година најбоље цветале, Евклид је и сам био један од нај отличнији учитеља александријске школе, из које је изашао највећи математичар старог века, *Архимед* (312. год. пре хр.).

Грци су пренели знање математичких наука арапима, који су примљени овај матаријал сачували, сем тога се зна извесно, да су осим грка и инђијанци учили арапе у тој науци, јер велика држава арапска стотинама је година у додир била са инђијанцима.

Западна Европа примила је знање математичких наука, једно од арапа који су имали у власти шпанску, и који су одприлике у 10. столећу после хр. на врху своје културе стајали: друго од грка који су после пада цариграда (1453). пребегли у западну европу.

Овде се после та наука на оном темељу што су грци поставили брижљиво неговала па је тако у последња столећа трудом читавог низа генијални људи ова наука достигла врло велики степен свога савршенства.

ПРВИ ОДСЕК

НАЧИНИ РАЧУНАЊА СА АПСОЛУТНО ЦЕЛИМ БРОЈЕВИМА,

1. Поједини чланови природног реда бројева 1. 2, 3, 4, 5 зову се апсолутно цели бројеви; ми ји означавамо са цифрама или писменима.

2. *сабирање.* Бројеве a и b. сабрати значи, изнаћи један број који има толико јединица, колико a и b скупа имају; ово се бележи са знаком више (+) и пише се између оба задата броја a и b који се зову *сабирци*; а број који по свршеном рачуну изађе јесте *збир* или *сума.*

С погледом на природан ред бројева можемо рећи, $3 + 4$ значи, кад почнемо бројати од три на даље редом док не пређемо са 4 јединице, то ће број до којег овако долазимо бити раван сбиру од 3 и 4, овде раван 7. Сада је излишно доказивати, да је $a + b = b + a$; исто се тако могу више сабирака $a + b + c + d$ по произвољном реду скупити у један сбир.

Кад нека количина више пута долази, онда се ова у сбиру једанпут напише, а пред њом се ставља број који показује, колико пута речена количина стоји као сабирак. Тако се н. пр. краће пише за $a + a + a + a + a = 5a$. Ови особени бројеви што се пишу пред писменим изразом, зову се сачинитељи (којефицијенти).

Ово означавање први је завео францески математичар Vieta (1540 — 1603). Он је први, не само непознате него и познате бројеве бележио са писменима па зато се и сматра као прави оснивач рачунања са писменима.

3. *одузимање.* Кад је задат неки сбир a и један његов део b онда се зове рачун којим се налази онај други део *одузимање*,

У овом рачуну долази знак *мање* (—), и чита се a мање b; сада треба изнаћи c јединица које ако додамо количини b, да је $b + c = a$. Ово се обично казује: да се a јединица смање у онолико, колико има јединица у количини b. Разумевајући овде $a > b$ (a веће од b).

С погледом на природан ред бројева ако хоћемо да смањимо 7 са 4 јединице, то значи, да треба поћи од 7 (умалимак, минуенд), с толико јединица назад, колико показује 4 (умалитељ, субтрахенд), број који се овим рачуном добија јест, *остатак, разлика*, (диференција).

Множење. a помножено са b значи: да поставимо a толико пута као део, колико b има јединица. Овде је a *множеник* (мултипликанд), b *множитељ* (мултипликатор), a оба броја зову се једним именом чинитељи (фактори). Број који по свршеном множењу изађе зове се *производ* (продукт). Знак множењења ($\times$), (.) пише се између чинитеља н. пр. a помножено са b написаћемо $a \times b$ или $a \,.\, b$ или просто $a\, b$. Тако се разуме у $a\, b\, c\, m$ да има 4 чинитеља a, b, c и m.

5, Делење. Ако узмемо a као производ од два чинитеља и b као једног од та два чинитеља, онда називамо рачун којим изналазимо оног другог чинитеља, *делење.* Овде је a дељеник (дивиденд), b *дељитељ* (дивизор), а број који после дељења изађе јест, *количник* (квоцијент).

a подељено са b пише се $a : b$ или a/b.

Појам о дељењу казује нам, да је $a/b \times b = a$.

6, *Подизање на степен*, *излагање* (потенцирање). a подићи на степен b значи: кад су a и b апсолутно цели бројеви да треба a толико пута као чинитеља ставити, колико има b јединица. Ово се пише a^b, а чита се a подигнуто на степен b или a на b-ни степен; овде је a *основица* (базис), b *изложитељ* (експонент), а посљедак, резултат овога рачуна зове се *степен, излог* (потенција).

Дакле је $a^b = a.\, a.\, a.\, a, \ldots\ldots$ (b пута).

7. *Извлачење корена.* Кад је задат степен и изложитељ, а тражи се основица, онда се овакав рачун зове, *извлачење корена* (радицирање).

Број из којег извлачимо корен зове се, *степен* (радиканд) а задати изложитељ, зове се *корени изложитељ.* Ако је н. пр. задато, да из количине A извучемо n-ни корен, онда ово пишемо $\sqrt[n]{A}$, корени знак $\sqrt{\ }$ узет је од првог писмена речи *радикс.* Ако сада ставимо $\sqrt[n]{A} = w$, то је онда $w^n = A$.

Извлачење корена противно је подизању на степен: сем тога, још један је рачун противан подизању на степен а то је *тражење изложитеља* т. ј. *тражење логаритма.*

8 Тражење логаритма састоји се у томе, да се изнађе изложитељ кад је задат степен и основица. Изложитељ који се добија овим рачуном зове се *логаритам задатог броја.*

Ако је степен A, основица a а изложитељ кога смо нашли $= b$; то је $a^b = A$, а одавде $b = \log_a A$.

ДРУГИ ОДСЕК

ПОЛОЖНЕ И ОДРЕЧНЕ КОЛИЧИНЕ.

9. Из досадањих аритметичних рачуна видимо, да је одузимање донекле ограничено и да остаје такво све донде, док се природан ред бројева не у саврши, што бива кад га продужимо у назад од јединице и даље т. ј, у том истом поретку да наставимо ред бројева који ће сљедовати као и бројеви у природном реду. Број који добијамо кад од један пођемо у лево с једном јединицом назад, зове се нула после се долази опет на бројеве 1, 2, 3, 4, 5, . . . који се сада зову одречни бројеви док се напротив они чланови пређашњег бројевног реда зову положни бројеви. Ако сада обележимо ове прве са знаком — мање (минус), а последње са + више (плус), то је вид овако продуженог реда

$$-4, -3, -2, -1 \qquad 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$$

10. Бројеви овог реда зову се алгебарски цели бројеви, јер нас је алгебра прво упутила на ове бројеве. Па како сада можемо рачунати са положним и одречним бројевима то је добила аритметика пространији обим. Оно ограничење да при одузимању мора умалитељ бити мањи него умалимак овим је редом сасвим уништено.

Јер н. пр. ако треба да изнађемо разлику од $4 - 6$, то можемо у реченом реду бројева поћи од умалимка у назад са 6 јединица (које можемо рећи: „поћи у одречном правцу" пањемо доћи до броја -2, који број показује тражену разлику: или да пођемо од умалитеља у правцу к умалимку (т. ј. у правцу положном за четир једнице), па ћемо опет доћи до броја -2, зато је као што оба случаја показују $4 - 6 = -2$.

11 Сваки број сам по себи нити је положан нити одречан зато је нужно, па да се овај појам може дозволити, да међу собом сравнимо бројеве или ствари. Све оне ствари, које дозвољавају и нешто противно условљавају примену одречних бројева. Такви противни односи налазе се у великом броју у самој природи а често и у случајима практичног живота. Н. пр. кад станемо пред термометар који показује 5 степени (над 0) и који постепено падне за 8 степена, онда ћемо она два места до којих је долазила висина живиног стуба обележити са $+5$ и -3. Неки пође од каквог места, које има север. ширине 15 миља, и пређе 40 миља даље на север, а затим се врати у јужни правац и начини 74 миље; зато ћемо означити географске ширине са $+15$, $+55$ и -19, овај последњи број казује, да се путник налази на јужној половини кугле у ширини за 19 миља.

Исто су тако противни односи, примање и издавање кретање од неке тачке у десно и лево, горе и доле, напред и назад и т. д.

12. Ако су a и b алгебарски бројеви које хоћемо да саберемо, треба да пођемо од броја a у оном правцу који нам показује знак броја b, па да идемо у толико јединица *даље*, колико b показује. Број који овако добијамо зове се, *сбир*.

Овде има више случајева, јер количине a и b могу имати разне знаке.

Да би определили $(+a) + (+b)$, треба поћи од $+a$ у положном правцу па ћи са b јединица *даље*, и онда ћемо доћи до броја $+(a+b)$. Овај начин рачунања видимо, да није ништа друго но сабирање апсолутних бројева a и b.

13. Исто тако налазимо $(-a) + (-b) = -(a+b)$, кад пођемо од јединица $-a$ у одречном правцу и пређемо у том правцу b јединица, то ћемо доћи до броја $(a+b)$, пред којим бројем стављамо знак —, јер се налази на одречној страни бројног реда.

14. Кад би хтели да нађемо $(+a) + (-b)$, треба да пођемо од $+a$ у одречном правцу и да пређемо b јединица, онда је број до кога овако долазимо алгебарски сбир бројева $+a$ и

$- b$. Овај начин као што видимо одговара одузимању апсолутних бројева a и b.

Ако је $a > b$, то лежи $a - b$ на положној страни бројног реда; зато је $(+a) + (-b) = + (a - b)$.

Ако је на против $b > a$, онда долазимо до броја $b - a$, који лежи на одречној страни бројног реда, зато је

$$(+a) + (-b)$$

или $$= + (a - b)$$

или $$= - (b - a)$$

исто је тако $$(-a) + (+b) = - (a - b)$$

или $$= + (b - a).$$

15. Из овога можемо извести:

а) Кад сабирамо два алгебарска израза којих су знаци једнаки, треба сабрати њихове сачинитеље и пред сбиром ставити њихов заједнички знак; напротив кад су знаци различити треба мању количину одузети од веће и ставити пред разлику знак оне веће количине.

б) Једнаки бројеви са разним знацима дају нулу као сбир, тако је $(+a) + (-a) = 0$. Овакви бројеви зову се *супротни*.

в) Исто тако видимо, да се једнаки резултат добија у рачуну кад напишемо $(+a) + (-b)$ или $(-b) + (+a)$, т. ј. чланови алгебарског сбира могу се у ма ком реду сабирати, које вреди и онда кад су више од два члана.

16. Изнаћи алгебарски сбир каже се *свести* (редуцирати) количине, и кад има више количина са разним знацима, то ћемо сабрати све положне и све одречне количине засебно, па ћемо онда изнаћи *разлику* (диференцију) пред којом долази знак.

Тако је $$+4a - 7a + 9a - 8a =$$

$$= (+4a + 9a) + (-7a - 8a) =$$

$$= (+13a) + (-15a) = -2a$$

Кад писмене количине нису *равнородне* т. ј. ако немају једнака писмена са једнаким изложитељима у алгебарском сбиру, онда се могу свести само оне што су равнородне.

на пр. $$+5a - 3b + 6a + 2b =$$

$$= (5a + 6a) + (-3b + 2b) = 11a - b.$$

17. Поједини чланови алгебарског сбира, ма из колико писмена да се састоје само ако су ова везана једна за друго без икаквог знака, па била писмена ма с каквим изложитељом, сачинитељом и пред њима знаком, зову се, *једночлани изрази* (моном); напротив онај израз који се састоји из више оваквих чланова, зове се *сложен израз*; ако овај има два члана зове се нарочито, *бином*, тричлана *трином*, а од више чланова *полином*.

ТРЕЋИ ОДСЕК

РАЧУНАЊЕ СА АЛГЕБАРСКИМ КОЛИЧИНАМА

САБИРАЊЕ

18. Кад рачунамо са општим количинама то се узима да је сабирање већ извршено ако задате количине напишемо у ред са њиховим знацима + или —.

Кад су у задатку равнородне количине, треба ји свести, тако је на пр. $3a + 7b + 4c$ сбир троструког броја a, седмоструког броја b и четвороструког броја c.

Сабирањем количина $(a^2 + b^2)$ и $(3a^2 - 2b^2)$ добијамо

$$(a^2 + b^2) + (3a^2 - 2b^2) =$$

$$a^2 + b^2 + 3a^2 - 2b^2 = 4a^2 - b^2.$$

Ако треба да саберемо $(2a - 3b)$, $(5c + 4d)$ и $(2e - 4f)$

то је сбир $= (2a - 3b) + (5c + 4d) + (2e - 4f) = 2a - 3b +$

$$+ 5c + 4d + 2e - 4f.$$

Овде видимо да су поједине количине стављене са својим знацима једне до других; овакав ред количина са положним и одречним знацима, зове се *алгебарски збир*.

Примери:

1) Да саберемо

$(5a - 8b + 3c - 4)$, $(- 6a + 2b + 4c + 2)$, $(6a - 4b + c)$

дакле

$$\begin{array}{r} 5a - 8b + 3c - 4 \\ -6a + 2b + 4c + 2 \\ 6a - 4b + c \\ \hline 5a - 10b + 8c - 2 \end{array}$$

2) $(3a + 5b + 7c) + (6a + 9b + 11c) = 9a + 14b + 18c.$

3) $(20b + (7a + 14b) + (- 4a + 5c) =$

$$= 20b + 7a + 14b - 4a + 5c = 3a + 34b + 5c.$$

4) $20m + (6m + n) = 26m + n$

5) $6x + [8z + (3z + 4x)] + 2x = 6x + 8z + 3z +$

$$+ 4x + 2x = 12x + 11z$$

6) $9m + 6n + 7p + (13m - 11n - 8p) +$

$$+ (-5n - 6p + 7m) + (8n + 13m - 9p) +$$

$$+ (17p - 16n + 12m) = 9m + 6n + 7p +$$

$$+ 13m - 11n - 8p - 5n - 6p + 7m +$$

$$+ 8n - 13m - 9p + 17p - 16n + 12m = 54m - 18n + p$$

Да се саберу и ови изрази:

7) $(6a^2b - 5abc + 6b^2c) + (4abc + 9a^2b - 6c^3)$;

8) $(17x + 75y + 39z + 25u) + (19x + 18y + 38z) +$

$$+ (23x - 25y + 49u);$$

9) $(6x^3 - 4x^2 - 5x + 9) + (2x^3 + 7x^2 + x + 1) +$
$+ (-3x^3 - 3x^2 + 6x + 6)$;

10) $(18a - 22b + 31c) + (28b - 13c - 16a)$;

11) $(3x + 5 + [-3y - 5x + (4y + 6)]$;

12) $3a + 6b + 7c + (9a + 2c - 4b) + (-7c - 12a - 8b)$;

13) $5x + [8y + (3y - 4x)] - 2y$;

14) $135m + 578n - 212p + 5139 + 817z + (982p +$
$+ 79m + 59z) + (-325p - 21n) + (85m - 49q +$
$+ 781n - 35z) + (422n + 486p + 63q)$;

ОДУЗИМАЊЕ

19. Кад две количине одузимамо треба да ставимо пред умалитељем знак — (мање), ако дакле од $(a - b)$ хоћемо да одузмемо $(2a - 3b + 4c)$. То ћемо написати

$$(a - b) - (2a - 3b + 4c)$$

Сложени израз одузимамо од умалимка био овај прост или сложен израз, кад свима члановима умалитеља променимо знаке и кад ји тако после умалимка напишемо.

У горњем случају биће разлика

$$a - b - 2a + 3b - 4c$$

Ово се може објаснити из појма о одузимању, јер знамо да одузимати значи, *из сбира два броја и из једног од та два броја онај други број изнаћи*, зато је после сбир из умалитеља и разлике раван умалимку.

У горњем случају нашли смо разлику

$a - b - 2a + 3b - 4c$ и кад се овој дода умалитељ

$2a - 3b + 4c$, то је онда

$$a - b - 2a + 3b - 4c + (2a - 3b + 4c) = a - b \text{ умалимак.}$$

У опште је:

$$\pm a - (+b) = \pm a - b$$

Зато је $(\pm a - b) + b = \pm a$

а тако исто $\pm a - (-b) = \pm a + b$

јер је $(\pm a + b) - b = \pm a$

Примери

1)
$$\begin{array}{rl} 5ab & \text{умалимак} \\ 6bc & \text{умалитељ} \\ \text{променут знак } - & \\ \hline 5ab - 6bc & \text{разлика.} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rl} 3m - 5n & \text{умалимак} \\ m - 2n & \text{умалитељ} \\ - \quad + & \\ \hline 2m - 3n & \text{разлика.} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 16a - 6ab + 3c - 4d \\ 12a + 7ab - 5c - 2d \\ - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 4a - 13ab + 8c - 2d \end{array}$$

4) $(3x^2 - 4x + 5) - (3x^2 - 3x + 4) =$
$= 3x^2 - 4x + 5 - 3x^2 + 3x - 4 = -x + 1 = 1 - x$

5) $(a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + b^3) - (a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - b^3) =$
$= a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + b^3 - a^3 + 4a^2b - 5ab^2 +$
$+ b^3 = 8a^2b + 2b^3$.

6) $5x^4 - 6x^3y^2 + 3x^2y^2 + xy^3 - 16y^4 - (3x^4 - 16x^3y +$
$+ 7x^2y^2 - 2xy^3 + 14y^4) = 5x^4 - 6x^3y^2 + 3x^2y^2 +$
$+ xy^3 - 16y^4 - 3x^4 + 16x^3y - 7x^2y^2 + 2xy^3 - 14y^4 =$
$= 2x^4 + 10x^3y - 4x^2y^2 + 3xy^3 - 30y^4$.

7) $a - b + c - (a - b) = a - b + c - a + b = c.$

8) $m - n + o + (p - q) - (m - n + o) + q = m - n +$

$+ o + p - q - m + n - o + q = p.$

Задатци:

9) $7a + 3b - (2a + b);$

10) $15a + 12b - (a - 3b) - (9a + 6b);$

11) $15g + 6x - [3y - (8z + 4x)];$

12) $37a - 45b - [16c - (12a + 3b) -$

$- (2c - 4b)] - 2bc;$

13) $6x - 8y - 3z - [4x - 8y - (2z - 5y) -$

$- (4x + 3y) + (8x + 2z)]$

14) $14a + [12b - (6c + 3b - 7a) + 4c] -$

$[22b - 8a + 2c - (4a + b)];$

16) $4x - [(a - 4x) + (3y + 17a) - (98x + 3y)];$

16) $13a - 36b - 27c - [7b + 5c - (7a + 35b - 28c) +$

$+ (15a + 7c)] - [6c - (11b + 9a) - (83c - 11a -$

$- 11b)] - (3a - 8b);$

17) $25a - 19b - [3b - \{4a - (5b - 6c)\} - 8a];$

18) $6m + [4m - \{8n - (2m + 4n) - 22n\} - 7n] -$

$- [7n + \{9m - (3n + 4m) + 8n\} + 6m];$

19) Да се нађе која количина мора изаћи, кад ставимо у овом изразу $m - (n - o)$ вредности

за $n = 7m - (8p + 3q)$ и

за $o = 2m - (8p + 3q);$

20) Коју количину треба додати изразу

$5p - [7q + 3p - (2p + q)]$, па

да изађе $4p - [14q + (2p - 7q) - 3p];$

МНОЖЕЊЕ

20. Производ из броја a помножено са b зове се онај број c, у коме се налази множина јединица b онолико пута, колико a показује.

Овде је a множитељ (мултипликатор) а b множеник (мултипликанд), а количина c зове се производ (продукт).

Два броја помножити значи, изнаћи њихов производ.

Можемо и више бројева множити, кад први помножимо с другим њихов производ с трећим бројем и т. д.

Кад узмемо да су a и b цели бројеви то ћемо добити њихов производ овако:

Кад је $b = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots b$ (пута)

Онда је производ:

$ab = a + a + a + a + \ldots\ldots\ldots b$ (пута)

променимо сада множеника и множитеља, па ћемо добити тај исти производ.

Ако је $a = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots a$ (пута)

то је $ba = b + b + b + b + b + \ldots\ldots a$ (пута)

и $a + a + a + a + \ldots\ldots b$ (пута) $=$

$= b + b + b + b + \ldots\ldots\ldots a$ (пута) будући је $a \cdot b = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad a$ пута

$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ „

$+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ „

$\ldots$

b (пута) „ „ „ „

и $b.a = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad b$ пута

$+ 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ „

$+ 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ „

$\ldots$

a (пута) „ „ „

Из чега видимо, да у b редова са a јединица има исто онолико јединица, колико има у a редова са b јединица, дакле је

$$a.b = b.a$$

Множеник и множитељ зову се једним именом *чинитељи* фактори).

Тако се исто могу и више од два чинитеља помножити ма у ком реду; тако је на пр.

$$a.b.c = a.c.b = b.a.c = b.c.a = c.a.b = c.b.a.$$

Кад једна иста количина више пута долази као чинитељ; то ћемо написати у производу ову количину само једанпут, а са изложитељем ћемо показати колико пута речени чинитељ долази у производу.

Тако је $\qquad a^2 \,.\, a^3 = a^5$

јер је $\qquad a^2 \,.\, a^3 = aa \,.\, aaa = aaaaa = a^5$

или $\qquad a^2 \,.\, a^3 = a^{2+3} = a^5$

исто је тако $\qquad a^4 \,.\, a^5 = a^{4+5} = a^9$

и у опште $\qquad a^m \,.\, a^n = a^{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$

Овакав производ из самих једнаких чинитеља зове се *степен* (потенција) a^m изговарамо m-ни степен од a или a на m-ни. Израз под (1 изговара се речима овако:

Степене с једнаким основицама множимо, кад основицу напишемо једанпут и ову подигнемо на сбир изложитеља.

Приметба. Само се по себи разуме, да горе речено правило важи само за целе и положне бројеве у изложитељу. Доцније ће бити говор за све бројеве у опште. Други степен неког броја зовемо *квадрат*, а трећи степен *куб*.

Сачинитеље при множењу треба међу собом помножити а различита писмена једно поред другог написати.

н. пр. $\qquad 5a \,.\, 3b = 15ab.$

Сачинитеља треба строго разликовати од изложитеља. За што?

Односно знакова множимо алгебарске количине: н. пр. ако има да се помножи $+ a \times + b$, овде треба $+ a$ да ставимо b (пута) као сабирак, зато је производ

$$= + a + a + a + \ldots \quad b \text{ (пута)} = + ab.$$

Ако има $(- a) \times (+ b) = (- a) + (- a) + (- a) + \ldots\ldots b$ пута

или $\qquad = - a - a - a - a - \ldots b$ пута $= - ab$

Ако има $+ a \times (- b)$ ово значи, да треба множеник a толико пута ставити као сабирак, колико $(- b)$ има јединица; $(- b)$ састоји се из одречних јединица

$$- 1 - 1 - 1 - 1 \ldots\ldots b \text{ пута}$$

зато треба и a ставити као одречну количину b пута, тако

имамо за $+ a \times (- b) = - a - a - a \quad b$ пута $= - ab.$

Исто тако кад $(- a) \,.\, (- b)$, треба $(- a)$ ставити одречно b пута, али $(- a)$ кад се узме одречно, добија положан знак; зато је $(- a) \,.\, (- b) = + a + a + a + a + \ldots b$ (пута) $= + ab$

Из тога видимо да је:

$$(+a) \times (+b) = +ab$$

$$(-a) \times (+b) = -ab$$

$$(+a) \times (-b) = -ab$$

$$(-a) \times (-b) = +ab. \qquad \text{т. ј.}$$

Кад имају оба чинитеља једнаке знаке производ је положан, а кад су им неједнаки знаци производ је одречан.

Тако је $\quad 3a^3b^2 \times (-4abm) = -12a^4b^3m$

$$(-7x^m y^n) \times (-3x^2y^4z^3) = +21x^{m+2}y^{n+4}z^3.$$

Исто тако налазимо да је производ из парног броја одречних чинитеља положан; а из непарног броја одречних чинитеља одречан.

н. пр. $\quad (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = -abc$

и $\quad (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d) = +abcd.$

Производ неке количине $\pm a$ и 0, *свагда је* $= 0$.

т. ј. $\quad \pm a \cdot 0 = 0.$

јер је $\quad 0 \cdot (+a) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots a$ (пута) $= 0$

и $\quad 0 \cdot (-a) = -0 - 0 - 0 - 0 - \ldots a$ (пута) $= 0$

Производ из неке количине и јединице раван је свагда тој истој количини.

Тако је $\quad a \times 1 = a.$

21. *Множење полинома са простим изразом.*

Ако има да се помножи $(a + b + c)$ са m, то треба $(a + b + c)$ толико пута написати као сабирак, колико m јединица има

зато је $\quad (a + b + c) \cdot m = (a + b + c) +$

$(a + b + c) + \ldots . m$ (пута)

т. ј. овде долази $\quad a + a + a + \ldots\ldots . m$ (пута)

$+ b + b + b + b + \ldots\ldots . m$ (пута) $+$

$+ c + c + c + c + \ldots\ldots m$ (пута) $=$

$$= am + bm + cm.$$

Зато велимо: *Да се сложен израз множи са простим, кад сваки члан сложеног израза помножимо са оним простим.*

Да се помножи.

1) $(3a + 4b - 3c) \cdot 2f = 6af + 8bf - 6cf$

2) $(ax^2 - bxy + cy^2) \cdot abx^2y = a^2bx^4y - ab^2x^3y^2 + abcx^2y^3$

3) $(2a^nb^m - 7azb^p - 4a^3b^5) \cdot -6a^4b = -12a^{n+4}b^{m+1} +$

$$+ 42az^{+4}\, b^{p+1} + 24a^7b^6$$

Задатци.

4) $7a^4b \cdot (25ab^2)$

5) $(-13mn^2p) \cdot (8m^3np^2)$;

6) $6xy \cdot (-5x^2y^m) \cdot (-7xy^n)$;

Да се ови производи разложе у своје чинитеље.

7) $25a^2 + 30a^4 - 35a^6 = 5a^2\,(5 + 6a^2 - 7a^4)$.

8) $24a^2b^3c^5d^6 - 6a^4b^2c^7d^9 - 36a^3b^2c^9d^{11} - 6a^2b^2c^2d^2$;

9) $11x^2y^2 - 18x^3y^4z^5 - 27x^5y^3z^7 + 45x^2y^8z^5$.

С погледом на горња правила множимо

а) *Сбир или разлику са простим изразом, кад помножимо поједине чланове сбира или разлике.*

Н. пр. $\quad (a + c) \cdot p = ap + cp$

$$(a - c) \cdot p = ap - cp.$$

б) Производ множимо са простим изразом, кад само једног чинитеља помножимо.

$a^4b^3 \,.\, a^2 = a^6b^3$

$ab^5 \,.\, b^3 = ab^8$

$2 \,.\, a\,(b - c) = 2a\,(b - c)$

или $a\,(2b - 2c) = 2ab - 2ac.$

22. *Множење сложених израза.*

Производ чинитеља $(a + b + c)$ и $(d + f)$ пише се у овом виду $(a + b + c)\,(d + f)$

Множење ово радимо, кад са сваким чланом множитеља помножимо све чланове множеника, и почастне производе у једно скупимо.

Тако је $(a + b + c)\,(d + f) = ad + bd + cd + af + bf + cf.$

Јер кад узмемо да је сбир

$$(a + b + c) = s,$$

то је онда $(a + b + c)\,(d + f) = s\,(d + f)$

или $sd + sf,$

ако овде ставимо вредност за s, онда налазимо

$$(a + b + c)\,d + (a + b + c)\,f = ad + bd + cd + af + bf + cf$$

т. ј. онај горе означени производ.

Примери:

1) $(5a - 3b + c)\,(a + b - 2c) = 5a^2 - 3ab + ac + 5ab - 3b^2 + bc - 10ac + 6bc - 2c^2 = 5a^2 + 2ab - 9ac - 3b^2 + 7bc - 2c^2.$

2) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 4)\,(2x^2 + 4x - 3) = 6x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 8x^2 + 12x^4 - 20x^3 + 28x^2 - 16x - 9x^3 + 15x^2 - 21x + 12 = 6x^5 + 2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 37x + 12.$

3) $(a + b)\,(c - d) = ac + bc - ad - bd.$

4) $(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

5) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)\,(a + 1) = a^5 + 1$

6) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)\,(a - 1) = a^5 - 1$

Особиту важност заслужују ови примери:

7) $(a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

то ће рећи: *сбир помножен са сбиром, раван је квадрату првог члана, више двогубом производу из првог и другог члана више квадрату другог члана.*

8) $(a - b)\,(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

т. j. *разлика помножена са разликом даје квадрат првог члана мање двогуби производ из првог и другог члана и више квадрат другог члана.*

9) $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ т. ј.

сбир помножен са разликом даје, разлику квадрата.

10) $(3x + 4y)\,(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

11) $(a^2b^m + ab^nc)\,(a^2b^m - ab^nc) = a^4b^{2m} - a^2b^{2n}c^2.$

И обратно, кад се покаже разлика квадрата, можемо ову разложити на чинитеље из којих је она постала, н. пр.

$$4m^2 - 9n^2$$

постало је из ова два чинитеља

$$(2m + 3n)\,(2m - 3n)$$ дакле је

$$4m^2 - 9n^2 = (2m + 3n)\,(2m - 3n).$$

Кад ставимо бројне вредности за писмена ма у ком рачуну, то ћемо добити исте резултате; било да у *задатку* заменимо вредности за свако писмо, било да најпре свршимо алгебарски рачун, па после да заменимо вредности.

Тако је, кад у задатку

$$(3a + 2b)\ (a - 3b)$$

ставимо за $a = 7$, за $b = 2$,

то добијамо $(3 . 7 + 2 . 2)\ (7 - 3 . 2) = 25 . 1 = 25$;

или кад алгебарски рачун најпре свршимо, па онда ставимо вредности; онда је

$$(3a + 2b)\ (a - 3b) = 3a^2 - 7ab - 6b^2 =$$

$$= 3 . 7^2 - 7 . 7 . 2 - 6 . 2^2 = 25.$$

Задатци:

1) $(a + b - c)\ (p + q)$;

2) $(2a + 4b)\ (3a - b)$;

3) $(a + b - c)\ (a - b + c)$;

4) $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\ (1 - x)$;

5) $(p - 1)\ (p^2 - 1)\ (p^3 - 1)$;

6) $(a - 2)\ (a + 2)\ (a^2 + 4)$;

7) $(x + y)^2$;

8) $(x - y)^2$;

9) $(x^2 - y^2)$;

10) $(a + 1)^2 - a^2$

11) $(a + b + c)\ (a + b - c)$

12) $(a^2 + b^2)\ (a^2 - b^2)$

13) $(x^4 - a^4)$

14) $(z^6 - 1)$.

Сљедујућа производи. да се разложе у два чинитеља.

15) $5a - 5b + 5c = 5\ (a - b + c)$

16) $nx + mx - x = (n + m - 1)\ x$

17) $3x^2y + 3xy^2 = 3xy\ (x + y)$

18) $2a - 4b$;

19) $5z + xz - yz$;

20) $a^2b^3 - a^3b^2$;

21) $ac + bc$

22) $ac + bc + ad + bd$;

23) $8n^2m - 6nm^2 + 2n^2m^2$.

Израчунај и ове задатке

24) $(3a + 5b) \times [(7a + 6b)\ (3a - 5b)]$

25) $(a + b + c)\ (a + b - c)\ (a - b + c)\ (-a + b + c)$

26) $(ab + ac + bc)\ (ab + ac - bc)\ (ab - ac + bc) \times$

$$(-ab + ac + bc);$$

27) $(a - b + c + d)\ (a + b + c - d)\ (a + b - c + d) \times$

$$(-a + b + c + d)$$

28) $[x^3 + (a + 1)\ x^2 - (a^2 + 2a - 3)\ x +$

$+ (a^3 - 5a^2 + 8a - 7)] \times [(x^2 + (a - 1)\ x + (a^2 - 3a + 1)]$;

29) $[y^3 + (a + b)\ y^2 + (a^2 - b^2)\ y + (a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3)] \times$

$$[y^2 - (a - b)\ y + (a^2 - 2ab + b^2)];$$

30) Да се докаже, да је:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

ДЕЛЕЊЕ

23. Састављању чинитеља у један производ, противно је разлагање овога у чинитеље. Кад треба неки производ да разложимо у два чинитеља, од којих је један задат, то ће нам дељење представљати овакав начин рачунања.

По томе делити значи: *из производа два броја и из једног задатог чинитеља, другог чинитеља изнаћи*:

Ако је $a : b = q$, то је $a = bq$

Задати производ зове се, *дељеник* (дивиденд), задати чинитељ *делитељ* (дивизор), а чинитељ ког тражимо зове се, количник (квоцијент).

Сам појам о дељењу казује нам, да сваки број сам собом подељен даје јединицу у количнику, т. ј. $a : a = 1$, јер је $a \times 1 = a$; а из тога је и $a : 1 = a$ т. ј. сваки број подељен са 1 раван је самом себи.

Кад поделимо нулу са неком количином a, то је $0 : a = 0$, јер је $0.a = 0$. Даље је $0 : 0 =$ ма ком броју, јер ма који број помножен са 0 раван је нули.

$a : 0 = \infty$ што ће се доцније показати.

Приметба Кад се пита колико се пута садржи делитељ у дељеник, може се сматрати делење као мерење. На против као делење, кад се дељеник има да разложи у толико једнаких делова колико делитељ има јединица, овде се пита колико јединица дељеникови има у сваком од његових једнаких делова. По томе дакле наименовање количник (*Quotient*) има се сматрати у двогубом смислу.

24. *Кад неку количину с другом помножимо, а производ овај с тим истим бројем поделимо, или кад најпре делимо па количник множимо, то ће у оба случаја број остати непромењен.*

Ако је $a . b = p$, то је $\frac{p}{a} = b$ и ако сада помножимо обе стране једначине са a, то је

$$a . \frac{p}{a} = ab = p,$$

дакле $a . \frac{p}{a} = p$ . . . . (1

Даље је $\frac{p}{a} = \frac{ab}{a}$ и због $\frac{p}{a} = b$,

сљедује $\frac{ab}{a} = b$. . . . . (2

Из једначине (1 и (2 видимо да је горње правило истинито.

25. *Кад делимо производ који је постао из више чинитеља са производом у коме су неки од оних чинитеља, то ће изаћи количник у коме су сви други чинитељи дељеника.*

Тако је $abcd : ac = bd$,

јер је $ac . bd = abcd$.

исто тако $20xyz : 4xy$ т. ј.

$$4.5.x\,y.z : 4.x.y = 4xy.5z : 4xy = 5z$$

и $70mnpq : 14mq = 5np$.

26. При дељењу алгебарски количина морамо мотрити 1) на сачинитеља, (2 на изложитеља (3 на знаке.

1. Сачинитеље делимо као што се особени бројеви деле

н. пр $12a : 4 = 3a$; јер је

$$3a . 4 = 12\ a.$$

2. Дељење степена с једнаким основицама.

$$a^5 : a^2 = a^3,$$

јер је $\quad a^2 \,.\, a^3 = a^5$

али је $\quad 3 = 5 - 2,$

дакле је и $\quad a^5 : a^2 = a^3 = a^{5-2}$

исто је тако $\quad a^{12} : a^8 = a^{12-8}$

и у опште је $\quad a^m : a^n = a^{m-n}.$

Док су m и n положни цели бројеви и $m > n$ лако се увиђа истина горњих казивања. Али су могућа још два случаја, т. ј. кад је $m = n$ и $m < n$. За $m = n$ долазимо по горњем на a^0, па да би сада значај тога символа сазнали, узмимо дељење $a^m : a^m$ што нам даје количник 1, дакле је $a^0 = 1$.

Ако је $m < n$ рецимо $n = m + p$, онда је по пређашњем дељењу

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{m-(m+p)} = a^{-p}$$

или другчије $\quad a^m : a^{m+p} = a^m : a^m \,.\, a^p,$

па кад се дељеник и делитељ подели са a^m, добија се

$$1 : a^p = \frac{1}{a^p},$$

Зато је $\quad a^{-p} = \dfrac{1}{a^p},$

т. ј. *број са одречним изложитељем раван је 1, подељено са истим бројем и са положним изложитељем.*

Зато можемо у опште као правило поставити:

Да се степени са истим основицама деле, кад се њихова основица подигне на изложитеља, који је раван изложитељу дељеника мање изложитељу делитеља.

Приметба. Сад је дакле $1/a^p = a^{-p}$, а доцније ће се показати да се са степеним количинама које имају одречне изложитеље исто онако врше рачунске операције, као и степенима којих су изложитељи положни.

3. У дељењу је количник положан, кад имају дељеник и делитељ једнаке знаке; и одречан, кад су дељеник и делитељ неједнаких знакова.

$+a : +a = +1; \quad$ јер је $\quad (+1) \times (+a) = +a$

$-a : -a = +1; \quad$ „ $\quad (+1) \; (-a) = -a$

$-a : +a = -1; \quad$ „ $\quad (-1) \times (+a) = -a$

$+a : -a = -1; \quad$ „ $\quad (-1) \times (-a) = +a$

п. пр. $\quad -36ab : +9b = -4a \quad$ јер је

$$9b \times (-4a) = -36ab.$$

Примери:

1. $25a^4b^2 : 5a^3b = 5ab$

2. $x^6y^7z^{12} : x^5y^8z^9 = xy^{-1}z^3$

3. $-36a^mb^nc^r : -12a^pb^qc^s = 3a^{m-p}b^{n-q}c^{r-s}.$

4. $144ym^3n^4 : -72m^3n^3 = -2m^0n = -2n.$

5. $(3a^2b^2 - 12a^3bc^2) : 3a^2c^2 = \dfrac{b^2}{c^2} - 4ab.$

6. $(18a^mb^3x^n + 9a^nb^2x^q - 27a^rb^px^{10}) : -9a^4b^mx^p =$

$= -2a^{m-4}b^{3-m} - a^{n-4}b^{2-m}x^{-p} + 3a^{r-4}b^{p-m}x^{10-p}$

Да се израде и ови задатци:

1) $15n : 5n = \ldots$

2) $16ab : 8a = \ldots$

3) $4a^2b^2c^2q : 24a^2b^2c^2q = \ldots$

4) $19a^4x^3 : 5a^4x^3g = \ldots$

5) $a^5 : a = \ldots$

6) $6a^4x^3 : 3ax^2 = \ldots$

7) $75n^7g^5h : 25ng^7 = \ldots$

8) $18p^4q^5r^6 : 12pq^2r^3x^4 = \ldots$

9) $12ab^2 : -4ab = \ldots$

10) $-28abc^2 : -7ac = \ldots$

11) $15x^3y : -6x^2y^3 = \ldots$

27. *Сложен израз делимо са простим изразом, кад сваки члан сложеног израза поделимо са делитељем.*

$$(a+b+c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m) \text{ или}$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

јер ако поставимо $\frac{a}{m} = q_1$,

$$\frac{b}{m} = q_2$$

$$\frac{c}{m} = q_3$$

онда је

$$a = mq_1$$

$$b = mq_2$$

$$c = mq_3$$

Ово кад саберемо

$$a+b+c = m(q_1+q_2+q_3)$$

и $(a+b+c) : m = q_1+q_2+q_3$,

ако сада за q_1, q_2, q_3, заменимо вреднести то је

$$(a+b+c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

На пример:

$$(6ab+4ac-6ad) : 2a = (6ab : 2a) + (4ac : 2a) +$$
$$+ (-6ad : 2a) = 3b + 2c - 3d.$$

јер је $(3b+2c-3d) \times 2a = 6ab + 4ac - 6ad$

и обратно, кад се у сложеном изразу налази заједнички чинитељ може се као такав одвојити.

У опште је $\frac{a+b+c+d+\ldots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} + \ldots$

кад ставимо $b = c = d = \ldots\ldots = a$, а број делова $= p$,

онда је $\frac{p.a}{m} = p.\frac{a}{m}$

или $(p.a) : m = (a : m).p$

То јест, производ из два чинитеља дели се неким бројем, кад једног од његових чинитеља тим бројем делимо, а тако добивени количник с оним другим чинитељем помножимо.

Истим начином дели се производ састојећи се из више чинитеља са неким бројем, кад само једног чинитеља тим бројем поделимо а добивени количник са осталим чинитељима помножимо.

Тако је на пример

$$abcd = abc.d,\quad \frac{abcd}{m} = abc.\frac{d}{m}$$

Обратно због

$$p\cdot\frac{a}{m} = \frac{pa}{m}$$

сљедује, да се количник множи с неким бројем, кад се дељеник помножи, а овај производ са делитељем подели.

Примери :

1) $(8a+8b-16c):8 = a+b-2c$

2) $(ab-ac):a = b-c$

3) $(x^2y-xy^2):xy = x-y$

4) $(ab+ac+bc):abc = \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$.

Задатци :

5) $(32g^2h-40gh^2):4gh$;

6) $(6x^3y^4-8x^4y^3+12x^6y^4):2x^2y^2$

7) $(a+b):ab$;

8) $(x^6-x^2):x^2$;

9) $p(a-c)-q(a-c):(a-c)$;

1) $(125a^3-150a^2b+60ab^2-8b^3):(5a-2b) =$

$= 25a^2-20ab+4b^2$

2) $(a^5-x^5):(a-x) = a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$

3) $(a^4+1):(a+1) = a^3-a^2+a-1+\frac{2}{a+1}$

4) $(x^5+y^5):(x+y) =$ — — — —

5) $(1+x):(1-x) =$ — — — —

6) $(a^2-1):(a^2+1) =$ — — — —

7) $(a^6-5a^4+6a^2-1):(a^3-a^2+2a+1) =$ — — —

8) $(8x^3-1):(2x-1) =$ — — — —

9) $(12x^5-16x^4-20x^3-14x^2+11x+3):(2x^2-4x-1) =$

10) $(5x^5-7x^3+9x^2-12):(x^2+3) =$ — — —

11) $(4x^5-7x^4+7x^3-6x^2+3):$

$(x-2), (x-2), (x-1), +$ — — — —

12) $(a^7+b^7):(a+b)$

13) $(a^6b^6-x^6):(ab-x)$

14) $(7x^{10}-25x^8y^2+48x^6y^4-23x^4y^6+5x^2y^8):$

$(7x^4-4x^2y^2+y^4) =$ — — —

15) $(x^4+x^2y^2+y^4):(x^2-xy+y^2) =$ — — —

16) $(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4):$

$(a^2+2ab+b^2-c^2) =$ — — —

17) $(m^2+2mn+n^2):(m+n) =$ — — —

18) $(m^2 - 2mn + n^2) : (m + n)$

19) $(m^2 - 2mn + n^2) : (m - n) = - - -$

20) $(m^2 - n^2) : (m + n) = - - -$

21) $(m^2 - n^2) : (m - n) = - - -$

22) $(x^3 - y^3) : (x - y) = - - -$

23) $(x^3 - y^3) : (x + y) = - - -$

24) $(x^4 - y^4) : (x + y) = - - -$

25) $(x^4 - y^4) : (x - y) = - - -$

26) $(18x^4 + 38x^2 + 32 - 68x - 24x^3) : (6x - 4) -$

27) $(30x^4 - 130x^3 + 36 - 147x + 165x^2) :$

$(30x - 180) = - - -$

28) $(20x^4 + 32x - 51x^3 - 12x^2) : (4x^2 - 7x - 8) = - -$

29) $(60x^5 - 85x^4 + 86x^3 - 10 + 32x - 69x^2) :$

$(180x^2 - 120x + 60) = - - -$

30) $(27x^5y^4z^1 - 30x^4y^5z^5 - 77x^3y^6z^6 + 72x^2y^7z^7 -$

$- 55xy^8z^8) : (3x^2y^2z^3 - xy^3z^4 - 11y^4z^5) = -$

Кад је дељеник прост израз а дељитељ сложен, онда се дељење неможе никада свршити без остатка, и тако се количнику додаје остатак са потписаним дељитељем. Овде се дели исто онако као и код сложених израза.

Примери:

1 $1 : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + - -$

$$
\begin{array}{l}
1 - x \\
\underline{- \quad +} \\
x \\
x - x^2 \\
\underline{- \quad +} \\
x^2 \\
x^2 - x^3 \\
\underline{- \quad +} \\
x^3 \\
x^3 - x^4 \\
\underline{- \quad +} \\
+ x^4 \quad \text{и т. д.}
\end{array}
$$

2) $a : (1 + 3a - 4a^2) = a - 3a^2 + 13a^3 - 51a^4 +$

$+ \dfrac{205a^5 - 204a^6}{1 + 3a - 4a^2}$

3) $8xy : (2 - 4y) = 4xy + 8x^2y + 16x^3y + 32x^4y +$

$64x^5y + \dfrac{256x^6y}{2 - 4x}$

4) $1 : (1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - - -$

Задатци:

5) $32m^2 : (2 - m) = - - - -$

6) $3ab : (1 - ab) = - - - -$

7) $a : (1 - a) = ---$

8) $a : (1 + a) = ---$

9) $(a - 1) : (a + 1) = ---$

10) $(a + 1) : (a - 1) = ---$

Делење сложених израза.

§, 28. Најпре ћемо образовати производ из чинитеља

$(3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + 5b^3)$ и $(2a^2 + 3ab - b^2)$

Па ћемо наћи почастне производе

$$6a^5 - 8a^4b + 4a^3b^2 + 10a^2b^3$$
$$+ 9a^4b - 12a^3b^2 + 6a^2b^3 + 15ab^4$$
$$- 3a^3b^2 + 4a^2b^3 - 2ab^4 - 5b^5$$
$$\overline{6a^5 + a^4b - 11a^3b^2 + 20a^2b^3 + 13ab^4 - 5b^5}$$

Кад овде најпре полиноме које треба да множимо уредимо по падајућем степену једне исте писмене количине, онда највиши члан производа ($6a^5$) може се састојати само из први чланова оба чинитеља ($3a^3$ и $2a^2$); јер се лако увиђа, да како у овом тако и у свима подобним случајима неможемо добити у производу, кад друга која два члана множимо, редно писме са ономиким изложитељем, као што је то случај кад множимо највише степене.

Ако се узме сада овај производ као дељеник а онај први чинитељ као дељитељ, онда ће из дељења изаћи за^3 у $6a^5$ извесно први део количника т. ј. $2a^2$.

Пример 1.

$$6a^5 + a^4b - 11a^3b^2 + 20a^2b^3 + 13ab^4 - 5b^5) :$$
$$(3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + 5b^3) = 2a^2 + 3ab - b^2$$
$$6a^5 - 8a^4b + 4a^3b^2 + 10a^2b^3$$
$$- \quad + \quad - \quad -$$

1. Ост. „ $+ 9a^4b - 15a^3b^2 + 10a^2b^3 + 13ab^4 - 5b^5$

$$+ 9a^4b - 12a^3b^2 + 6a^2b^3 + 15ab^4$$
$$- \quad + \quad - \quad -$$

2. Ост. „ $- 3a^3b^2 + 4a^2b^3 - 2ab^4 - 5b^5$

$$- 3a^3b^2 + 4a^2b^3 - 2ab^4 - 5b^5$$
$$+ \quad - \quad + \quad +$$

3. Ост. 0

Ако сада помножимо с првим чланом количника целог дељитеља то ћемо добити кад се сетимо како је постао дељеник први почастни производ, а овај кад се одузме од дељеника даје нам остатак који је производ из дељитеља и осталих делова количника; као што видимо први члан првог остатка т. ј. $9a^4b$ није ништа друго но производ из првог члана дељитељевог и другог члана количника; зато се други члан количника добија кад први члан остатка поделимо са првим чланом дељитеља ($9a^4b : 3a^3 = 3ab$). Овај део количника помножен са дељитељем, даје, што је сасвим природно други почасни производ, па и овај кад се одузме даће нам нов остатак то је производ из дељитеља и осталих делова количника; кад поделимо први члан овога с првим чланом дељитеља ($- 3a^3b^2 : 3a^3 = - b^2$) то ће изаћи даљи део количника. Производ овога и дељитеља кад се одузме од остатка што је пред овим застао даје нулу у остатак, а то је знак, да је дељење свршено; и тако је $2a^2 + 3ab - b^2$ прави количник.

Овај ће пример довољан бити да покаже опште правило како ваља радити при дељењу полинома.

Треба најпре да уредимо оба полинома по падајућем изложитељу једне исте писмене количине, па онда да поделимо први део дељеника с првим делом дељитеља, пађемо добити први члан траженог количника. Овај део количника да помножимо с целим дељитељем и да одузмемо производ од дељеника; први члан овако поставшег остатка ваља опет поделити с првим чланом дељитеља, одкуда излази други члан количника. Производ из овога члана помноженог са дељитељем, кад се одузме од пређашњег остатка, даје нам нов остатак, кога први члан има опет да се дели са првим чланом дељитеља, па ће се добити сљедујући део количника и т. д.

Пример 2.

Да се подели:

$$x^6 - 3x^5y + 6x^4y^2 + 7x^4y - 9x^2 - 21x^3y^2 + 42x^2y^3 - 63y$$

са $\qquad x^2 + 7y.$

Да се уреди дељеник и дељитељ падајуће гледећи на количину x, то је:

$$(x^6 - 3y.x^5 + (6y^2 + 7y)x^4 - 21y^2.x^3 + (42y^3 - 9)x^2 - 63y) : (x^2 + 7y) = x^4 - 3y.x^3 + 6y^2.x^2 - 9$$

$$\begin{array}{lllll}
x^6 & + 7yx^4 & & & \\
- & - & & & \\
\hline
,, & - 3y.x^5 + 6y^2x^4 - 21y^2x^3 & & & \\
 & - 3y.x^5 \qquad - 21y^2x^3 & & & \\
 & + \qquad\qquad + & & & \\
\hline
 & ,, \; + 6y^2x^4 & ,, \; + (42y^3 - 9)\,x^2 & & \\
 & ,, \; + 6y^2x^4 & ,, \; + 42y^3x^2 & & \\
 & \quad - & \quad - & & \\
\hline
 & ,, & - 9x^2 - 63y & & \\
 & ,, & - 9x^2 - 63y & & \\
 & & + \qquad + & & \\
\hline
 & & ,, \qquad ,, & &
\end{array}$$

Горе наведено правило вреди и онда, кад се из више чланова састоје сачинитељи оног писмена по коме је полином уређен као што је случај у појединим члановима последњег примера. Јер ако има дељеник више пута једну исту степену количину оног писмена по ком је израз уређен, али с таквим сачинитељима који се немогу свести, онда се пише ова општа степена количина једанпут, а сачинитељ ове је алгебарски сбир поједини сачинитеља. Кад уредимо у последњем примеру по количини y, онда ће рачун овако ићи:

$$(42x^2y^3 + (6x^4 - 21x^3).y^2 + (-3x^5 + 7x^4 - 63).y + x^6 - 9x^2) : (7y + x^2)$$

$$\begin{array}{ll}
42x^2y^3 + 6x^4y^2 & \\
- \qquad\quad - & 6x^2y^2 - 3x^3y + x^4 - 9 \\
\hline
,, \qquad ,, \quad - 21x^3y^2 + (-3x^5 + 7x^4 - 63).y & \\
\qquad\qquad - 21x^3y^2 - 3x^5.y & \\
\qquad\qquad + \qquad\quad + & \\
\hline
,, \qquad ,, \qquad + (7x^4 - 63).y + x^6 - 9x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad + (7x^4 - 63).y + x^6 - 9x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad - \qquad\qquad - \quad + & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Приметба. Из наведени примера налазимо, да се неморају у остатак спустити сви чланови дељеника, довољан је један члан у осталом кад се мало извецбамо, можемо у напред знати које чланове дељеника ваља спустити у остатак.

Кад незнамо, дал је дељеник потпун производ из два полинома, онда је неизвесно, хоћели се изнаћи више члани количник, који кад се помножи са дељитељем даје дељеник С погледом на количник као цео број дељење се сматра за немогућно кад се у количнику морају узети разломљени бројеви, а овамо су и дељеник с погледом на њихова писмена и сачинитеље све само цели бројеви.

Може се у опште приметити: Кад су дељеник и дељитељ по падајућем изложитељу једне исте писмене количине уређени, и да су m и n относно последњи изложитељи дељеника и дељитеља; онда се дељење неможе извршити потпуно кад се дође до оног члана, ког је изложитељ мањи од $(m-n)$. Јер ако су последњи чланови дељеника и дељитеља Ax^m ax^n, то мора последњи члан количника такав бити, да кад се помножи са ax^n да изађе Ax^m, т. ј. последњи је део количника $\frac{A}{a}x^p$, где је $n+p=m$ или $p=m-n$. Кад би дошли на такав члан количника, ког редно писме има изложитеља мањег од p, онда је то знак известан, да се количник неможе да сврши.

Пример 3.

$$(4a^4+6a^3b+9a^2b^2+15ab^3+6b^4):(a^2+ab+3b^2)=$$
$$=4a^2+2ab-5b^2$$

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 4a^4 & +4a^3b & +12a^2b^2 & & \\
 & - & - & - & & \\
\hline
\text{1. Ост.} & & +2a^3b & -3a^2b^2 & +15ab^3 & \\
 & & +2a^3b & +2a^2b^2 & +6ab^3 & \\
 & & - & - & - & \\
\hline
\text{2. Ост.} & & & -5a^2b^2 & +9ab^3 & +6b^4 \\
 & & & -5a^2b^2 & -5ab^3 & -15b^4 \\
 & & & + & + & + \\
\hline
 & & & & +14ab^3 & +21b^4
\end{array}$$

Кад дођемо до трећег остатка, то се дељење неможе даље да продужи јер би сада односно писмене количине a дошли на a^{-1}, а по пређашњим примедбама морао би се свршити количник са a^0; па да се дељење у овом случају сврши. Непотпуни количник $4a^2+2ab-5b^2$ морао би се допунити још са оним недовршеним дељењем

$$(14ab^3+21b^4):(a^2+ab+3b^2) \qquad \text{или са}$$

$$\frac{14ab^3+21b^4}{a^2+ab+3b^2}$$

и онда је последак

$$=4a^2+2ab-5b^2+\frac{14ab^3+21b^4}{a^2+ab+3b^2}.$$

§. 29. Да се подели

$A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$ са $(x-\alpha)$.

(бројеви 0, 1, 2, 3, 4. . . уз A_0, A_1, A_2, A_3. . . . зову се сказаљке (indices), и често се примењују код полинома јер се овима у означењу поставља згодно сугласије између сачинитеља и изложитеља).

$$(A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4:(x-\alpha)=$$
$$=A_0x^3+K_1x^2+K_2x+K_3$$

$$\begin{array}{l}
A_0x^4-\alpha A_0x^3 \\
-\qquad + \\
\hline
(\alpha A_0+A_1)x^3+A_2x^2
\end{array}$$

или $K_1x^3+A_2x^2 \ldots\ldots (\alpha A_0+A_1)=K_1$

$$\begin{array}{l}
K_1x^3-\alpha K_1x^2 \\
-\qquad + \\
\hline
+(\alpha K_1+A_2)x^2+A_3x
\end{array}$$

или $K_2x^2+A_3x \ldots\ldots (\alpha K_1+A_2)=K_2$

$$\begin{array}{l}
K_2x^2-\alpha K_2x \\
-\qquad + \\
\hline
(\alpha K_2+A_3)x+A_4
\end{array}$$

или $$K_3x + A_4 \ldots\ldots (\alpha K_2 + A_3) = K_3$$

$$\begin{array}{r} K_3x - \alpha K_4 \\ - \qquad + \\ \hline \alpha K_4 + A_4 = K_4 = \text{остатак.} \end{array}$$

Ако сада посматрамо изнађени количник, то ћемо видити, да је овај као и дељеник уређен по падајућем степену количине x, само што је узложитељ првог члана за 1 мањи од изложитеља првог члана дељеника. Први сачинитељ је раван првом сачинитељу дељеника, поједини сачинитељи почевши од другог, тако ће се образовати да се најпосле добивени сачинитељ помножи са α, производу овом дода одговарајући сачинитељ дељеника. Зато можемо у овом случају са сачинитељем дељеника и бројем α овим путем оперирати.

$$\begin{array}{llllll} \text{Сачинитељ дељеника:} & & A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ & & \alpha A_0 & \alpha K_1 & \alpha K_2 & \alpha K_3 \\ \hline \text{Сачин. колич:} & A_0, & \underbrace{\alpha A_0 + A_1}_{K_1} & \underbrace{\alpha K_1 + A_2}_{K_2} & \underbrace{\alpha K_2 + A_3}_{K_3} & \underbrace{\alpha K_3 + A_4}_{K_4} \ \text{остатак.} \end{array}$$

Ово правило вреди и онда, кад је дељеник односно количине x још и са вишим степеном, што се може лако доказати.

Примери:

1. $(3x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 4x - 7) : (x - 2)$

$$\begin{array}{lllll} 3, & -7, & 9, & 4, & -7, \\ 3, & -1, & 7, & 18, & 29 \end{array}$$

Количник $= 3x^3 - x^2 + 7x + 18 + \dfrac{29}{x-2}$.

Кад би у количнику неки степен од x недостајао, онда треба овај да замислимо са сачинитељем нула.

2. $(x^5 + 7x^3 + 4x^2 - 5x) : (x - 3)$

$$\begin{array}{llllll} 1, & 0, & 7, & 4, & -5, & 0, \\ 1, & 3, & 16, & 52, & 151, & 453 \end{array}$$

Количник $= x^4 + 3x^3 + 16x^2 + 52x + 151x + \dfrac{453}{x-3}$.

Ми смо у општем примеру извели:

$$K_1 = \alpha A_0 + A_1$$
$$K_2 = \alpha K_1 + A_2$$
$$K_3 = \alpha K_2 + A_3$$
$$K_4 = \alpha K_3 + A_4 \quad \text{(Остатак).}$$

Кад ставимо K_1 у другу једначину, то је

$$K_2 = \alpha(\alpha A_0 + A_1) + A_2 = A_0\alpha^2 + A_1\alpha + A_2$$

по томе $$K_3 = \alpha(A_0\alpha^2 + A_1\alpha + A_2) + A_3 = A_0\alpha^3 + A_1\alpha^2 + A_2\alpha + A_3$$

и $$K_4 = \alpha(A_0\alpha^3 + A_1\alpha^2 + A_2\alpha + A_3) + A_4 = A_0\alpha^4 + A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4 = \text{остатак.}$$

т. ј. онај остатак који је произашо дељењем уједно је последак, који се добија; кад се у задатом дељенику у место x број α стави и сведе.

Тако је у последњем примеру

$$3^5 + 7.3^3 + 4.3^2 - 5.3 = \begin{array}{r} 243 \\ 189 \\ 36 \\ \hline 468 \\ -\ 15 \\ \hline 453 \end{array}$$

Да се развије $(x^n - a^n) : (x - a)$,

Овде налазимо непосредним дељењем:

$$
\begin{array}{l}
(x^n - a^n) : (x - a) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots\ldots \quad a^{n-2}x + a^{n-1} \\
x^n - ax^{n-1} \\
- \quad + \\
\hline
\quad ,, \quad + ax^{n-1} \\
\quad + ax^{n-1} - a^2x^{n-2} \\
\quad - \qquad + \\
\hline
\qquad ,, \quad + a^2x^{n-2} \\
\qquad + a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} \\
\qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\quad ,, \quad + a^3x^{n-3} \qquad \text{и т. д.}
\end{array}
$$

Дељење се овде свршава, јер

$(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \times (x - a)$

даје заиста $(x^n - a^n)$.

Речнма: *Разлика два равноимена степена разделива је са њиховим коренима:*

Јер кад би порицали, да је посљедак дељења цели број као количник, онда би било $(x^n - a^n) : (x - a) = Q + \frac{R}{x - a}$ где је Q цели број и R неки остатак, о коме се кад се већ нађе може у напред казати, да не садржи количину x. Зато би морало бити $(x^n - a^n) = Q\,(x - a) + R$. Једначина ових израза морала би постојати, па ма шта да ставимо за произвољну количину x; ако узмемо $x = a$, то је $o = o + R$, дакле $R = o$.

А пошто смо још пре споменули, да R мора по све независно бити од x, то је морало R још раније бити равно нули пре но што смо ставили $x = a$.

Подобни видови дељења су

$$(x^n - a^n) : (x + a),$$

Овде неостаје никакав остатак само онда, кад је n парни број;

$$(x^n - a^n) : (x - a)$$

неможе се ни у ком случају без остатка поделити,

$$a\ (x^n + a^n) : (x + a)$$

само онда кад је n непарни број.

Да бар један од ових случајева покажемо, узећемо:

$$(x^n - a^n) : (x + a) = Q + \frac{R}{x + a}$$

за $x = -a$, и n парно, сљедује $(-a)^n = +a^n$ (види множење)

$$a^n - a^n = Q\ (a - a) + R$$

$o = o + R$, дакле $R = o$, напротив кад је n непарно

$-2a^n = o + R$, дакле $R = -2a^n$

Тако се исто може показати и за она друга два случаја.

ЧЕТВРТИ ОДСЕК

СВОЈСТВА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА.

30, Кад се неки број с другим бројем може да подели без остатка, онда се каже, да је први број с другим *раздељив.*

Број који је раздељив са 2, зове се *иарни број;* и такав број има на месту где јединице стоје једну од ових пет цифара 0, 2, 4, 6, 8; на против ако није број раздељив са 2, зове се *непарни број*, и такав има на месту где јединице стоје једну од ових пет цифара 1, 3, 5, 7, 9.

Парни бројеви бележе се у опште са $2n$, а непарни са $2n \pm 1$.

Цели бројеви могу бити: *прости и сложени.*

Прости су бројеви они, који су раздељиви сами собом и јединицом; а сложени су они, који су осим сами собом и јединицом још и другим неким бројем раздељиви.

Прости су бројеви по реду; 2, 3, 5. 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и т. д.

Прости чинитељи неког броја.

31. Овде разумемо оне просте бројеве, који међу собно помножени дају задати број.

Да ове просте чинитеље изнађемо, треба да поделимо задати број са најмањим простим бројем с којим је задати број раздељив. Даље се дели количник опет са најмањим простим

бројем; са новим количником исто се то ради све дотле, док изађе количник који је и сам прост број.

Тако добијамо за 1260

$$1260 : 2 = 630$$
$$630 : 2 = 315$$
$$315 : 3 = 105$$
$$105 : 3 = 35$$
$$35 : 5 = 7$$

дакле је $1260 = 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 5.\ 7$

Да је овај начин рада истинит видимо, кад се узме да је

у последњем дељењу $35 = 5\ .\ 7$

у пред последњем $105 = 3\ .\ 35 = 3.5.7$

$315 = 3\ .\ 105 = 3.3.5.7$

$630 = 2\ .\ 315 = 2.3.3.5.7$ и најпосле

$1260 = 2\ .\ 630 = 2.2.3.3.5.7$

У сваком алгебарском простом изразу узимају се поједина писмена као прости чинитељи.

Тако је н: пр: $6ab^2c = 2.3.a\,b.b.c$

и $5x^3y^2z = 5.x.x.x.y.y.z.$

Тражење сложених чинитеља за неки задати број.

32. Показано је у §. 31. како се налазе прости чинитељи кад је задати број 1260; а да сада из ових изведемо сложене дељитеље, треба да помножимо другог чинитеља са првим, а трећег са предидућим простим и сложеним чинитељима, исто тако четвртог са свима предидућим чинитељима и т. д. но ако се прости чинитељи повраћају, онда се непишу у ред сложени истоветни чинитељи који се повраћају.

Тако у предходном постоји овај рачун ;

2,

2, 4

3, 6, 12

3, 9, 18, 36

5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180

7, 14, 28, 21, 42, 84, 63, 126, 252. 35

70. 140. 105, 210, 420, 315, 630, 1260

Да се изнађу сви могући дељитеља за $14x^3y$

2,

7, 14,

x, $2x$, $7x$, $14x$

x, x^2, $2x^2$, $7x^2$, $14x^2$

x, x^3, $2x^3$, $7x^3$, $14x^3$

y, $2y$, $7y$, $14y$, xy, $2xy$, $7xy$, $14xy$, x^2y,

$2x^2y$, $7x^2y$, $14x^2y$, x^3y, $2x^3y$, $7x^3y$, $14x^3y$,

33. *Сваки број N чија вредност лежи између простог броја* а *и овога квадрата* a^2, *и сам је прост број кад није раздељив са* а *нити с неким мањим бројем од* а.

Ово доказујемо, кад покажемо да N неможемо бити раздељиво ни са неким већим бројем од a,

Ако је $b > a$ (b веће од a) и $\frac{N}{b} = m$, то је $\frac{N}{b} < \frac{N}{a}$ (кад су једнаки дељеници количник је онде већи, где је мањи дељитељ). Знамо да је предпостављено $a < N < a^2$, зато је $\frac{N}{a} < a$, у толико пре $\frac{N}{b} < a$, но како је $\frac{N}{b} = m$, то је и $m < a$; али је сада $N = b.m$, дакле и $\frac{N}{m} = b$, т. ј. N је раздељиво са мањим бројем од a т. ј. са m, које противуречи нашој предпоставци.

34. Кад поделимо неки прост број N (који лежи између a и a^2) са a то је овако добивени количник мањи од a.

Поставимо $N : a = q + \frac{r}{a}$ где је извесно $r < a$, из овога је $N = aq + r$, и тако $aq < N$, а и $q < \frac{N}{a}$: због тога што је $N < a^2$ то је и $\frac{N}{a} < a$ дакле $q < \frac{N}{a} < a$, или $q < a$.

Ако напротив нађемо, да није раздељив број N са неким простим бројем **a**, *нити са неким мањим бројем од* a *и да је овим дељењем добивени количник мањи од* a; *то слeдује да је* $N < a^2$ *и по томе је прост број.*

Јер ако је $q < a$, то је $q + 1 \leqq a$, дакле и $aq + a \leqq a^2$. Али је $N = aq + r$ (где је $r < a$), дакле $N = aq+r < aq + a$, зато је и $N < a^2$

35. Ово нам помаже да можемо врло лако испитати, дали је неки број прост: Јер ако поделимо задати број са свима по реду простим бројевима па ако неможе ниједно делење без остатка да се сврши и кад овим начином најпосле изађе количник, који је мањи од дељитеља, то слeдује по пређашњем, да је заиста задати број прост.

Да се испита број 769.

1) $769 : 7 = 109 + {}^6/_7$

$769 : 11 = 69 + {}^{10}/_{11}$

$769 : 13 = 59 + {}^2/_{13}$

$769 : 17 = 45 + {}^4/_{17}$

$769 : 19 = 40 + {}^9/_{19}$

$769 : 23 = 33 + {}^{10}/_{23}$

$769 : 29 = 26 + {}^{15}/_{29}$

У последњем дељењу количник 26 мањи је од дељитеља 29, зато је задати број 769 прост број.

2) Да се определи, јели број 317 прост:

$317 : 7 = 45 + \frac{2}{7}$

$317 : 11 = 28 + \frac{9}{11}$

$317 : 13 = 24 + \frac{5}{13}$

$317 : 17 = 18 + \frac{11}{17}$

$317 : 19 = 16 + \frac{13}{19}$

ако у последњем делењу ставимо за 19 количину a за 16 количину q то је $q < a$, дакле $19 < 317 < 19^2$, па зато 317 прост број.

36. Кад се може количина a да подели без остатка са количином b, онда је ово дељење мерење, и количина b мера је од количине a.

Кад су више задатих бројева a, b, c, d раздељиви са m, то је m општа мера за a, b, c, и d. Тако је 3 општа мера за 6, 12, 21.

37. *Ако је a, раздељиво са b, и b раздељиво са c, то је и c, мера од a.*

Јер ако је $a : b = q$, $b : c = q_1$; то је $a = bq$ и $b = cq_1$ дакле $a = c\,qq_1$, и тако $a : c = qq_1$, цели број.

38. *Ако су два броја a и b трећим бројем c раздељиви, то је раздељив тим бројем c како сбир тако и разлика бројева a. и b.*

Нека је $a : c = q$, $b : c = q_1$

то је $a = cq$, $b = cq_1$

дакле $a + b = cq + cq_1 = c(q + q_1)$

а из тога $\frac{a + b}{c} = q + q_1$ цео број.

исто тако је $a - b = c(q - q_1)$.

и $\frac{a - b}{c} = q - q_1$ цео број.

Ако су бројеви a и b раздељиви са c, онда је и деобни остатак од $a : b$ раздељив са бројем c.

Нека је $a : b = q + \frac{r}{b}$, $a = bq + r$, а из тога $a - bq = r$.

Но пошто су a и b (дакле и bq) раздељиви са бројем c, то је и r раздељиво са c.

Исто тако можемо рећи, кад су дељитељ b и деобни остатак r раздељиви са c, то је и дељеник a раздељив са c.

Јер је $a = bq + r$.

Највећа општа мера.

39. *Највећа општа мера зове се, онај највећи број с којим су сви задати бројеви раздељиви.*

Највећу општу меру налазимо за два или више задата броја, кад разложимо задате бројеве у просте чинитеље; па ако оне просте чинитеље, који долазе у свима бројевима заједнички међусобно помножимо, добићемо највећу општу меру.

Примери

1) Ако су задати бројеви 132 и 360, њихови су прости чинитељи $2 . 2 . 3 = 12$, дакле је 12 највећа општа мера за бројеве 132 и 360.

2) 525 и 1144.

Овде је $525 = 3 . 5 . 5 . 7$

$1144 = 2 . 2 . 2 . 11 . 13.$

Ова два броја осим јединице немају никаквог заједничког чинитеља.

Зато кажемо, да су ови бројеви *относно прости бројеви.*

3) $4a^3b^2c^3$, $12a^2b^3c$, $10ab^3c^2$

$4a^3b^2c^3 = 2.2.a.a.a.b.b.c.c.c$

$12a^2b^3c = 2.2.3.a.a.b.b.b.c$

$10ab^3c^2 = 2.5.a.b.b.b.c.c$

Овде су заједнички чинитељи 2, a, b, b, c, дакле је највећа општа мера $= 2ab^2c$.

Онда се може лако познати, да код прости алгебарски израза највећа мера сачинитеља уједно је сачинитељ тражене опште мере, и да се од писмених количина узимају оне, које долазе у свима простим изразима са најнижим изложитељем.

Тако је у горњем примеру за 4, 12 и 10 највећа општа мера 2, а после долазе у свима деловима a, b и c, а њихови относно најмањи изложитељи 1, 2 и 1, то је за писмене изразе ab^2c општи чинитељ, дакле $2ab^2c$ највећа општа мера.

4. $15m^3n^2p^6$, $20m^2n^3p^5$, $35m^2n^2p^7$, $45m^3n^3p^4$.

Највећа је општа мера $5m^2n^2p^4$.

40. *Ако је m мера за бројеве A, B, C и D и ако количници $A : m = q_1$, $B : m = q_2$ и т. д. нису относно прости бројеви онда има и већи број од m који је мера за A, B, C и D.*

Нека је $\left.\begin{aligned} A : m &= q_1 \quad \text{и} \quad q_1 = x.y \\ B : m &= q_2 \quad \text{и} \quad q_2 = x.z \\ C : m &= q_3 \quad \text{и} \quad q_3 = x.v \\ D : m &= q_4 \quad \text{и} \quad q_4 = x.w \end{aligned}\right\}$ Нека је x за бројеве $q_1\ q_2\ q_3\ q_4$ општи чинитељ и > 1).

дакле
$$A = mq_1 = mx.y$$
$$B = mq_2 = mx.z$$
$$C = mq_3 = mx.v$$
$$D = mq_4 = mx.w.$$

Ако поставимо сада $mx = M$, то је

$$A : M = y, \quad B : M = z, \quad C : M = v, \quad D ; M = w$$

т. ј. $M = mx$ што је сада мера за A, B, C и D, а пошто је $x > 1$, то је и $M > m$.

Ако определимо x тако, да су y, z, v и w относно прости бројеви, то је $M = x \,.\, m$ највећа општа мера за A, B, C и D.

Исто тако сљедује, ако је M највећа општа мера за споменуте бројеве, да су количници y, z, v, w относно прости бројеви.

Најпосле сљедује и то, ако су m и M мере за A, B, C и D и ако је $M > m$, то је M раздељиво са m.

41. Сада можемо још и други начин показати, како се налази највећа општа мера.

Нека је $A > B$. Треба да делимо A са B, па ако изађе количник цео број, то је B највећа општа мера за A и B.

Ако пак заостане неки остатак, треба са овим да делимо дељитеља B, са новим остатком последњег дељитеља и тако даље непрестано да делимо, док заостане нула у остатку. Последњи дељитељ је највећа општа мера за A и B.

Рачун ће тећи овако:

$$A : B = Q_1 + \frac{R_1}{B}$$

$$B : R_1 = Q_2 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 : R_2 = Q_3 + \frac{R_3}{R_2}$$

$$R_2 : R_3 = Q_4$$

А пошто су R_2 и R_3 раздељиви са R_3, то је и R_1 раздељиво, дакле и B, а најпосле и А раздељиво са R_3. Тако је доказано, да је R_3 мера за A и B.

Кад би хтели тврдити, да има број који се садржи у A и B, и који је већи од R_3, то је лако ово порећи. Узмимо да је A и B раздељиво са m, и да је $m > R_3$.

Ако је A и B раздељиво са m, то сљедује, да је и R_1 раздељиво са m, а пошто је B и R_1 раздељиво са m, то је и R_2, а после због тога што је R_1 и R_2 раздељиво са m, сљедује да је и R_3 раздељиво са m, што је сасвим противно нашој предпоставци, јер је $m > R_3$; дакле је R_3 највећа општа мера за A и B.

Ако је $R_3 = 1$, то су A и B односно прости бројеви.

Примери:

1. Да се тражи највећа општа мера за бројеве 7123 и 5797

$$A)\ 7123 : 5797\,(B) = 1\,(Q_1) + \frac{1326\,(R_1}{5797}$$

$$B)\ 5797 : 1326\,(R_1) = 4\,(Q_2) + \frac{493\,(R_2}{1326}$$

$$R_1)\ 1326 : 493\,(R_2) = 2\,(Q_3) + \frac{340\,(R_3}{493}$$

$$R_2)\ 493 : 340\,(R_3) = 1\,(Q_4) + \frac{153\,(R_4}{340}$$

$$R_3)\ 340 : 153\,(R_4) = 2\,(Q_5) + \frac{34\,(R_5}{153}$$

$$R_4)\ 153 : 34\,(R_5) = 4\,(Q_6) + \frac{17\ R_6}{}$$

$$R_5)\ 34 : 17\,(R_6) = 2\,(Q_7)$$

17 је највећа општа мера

Сљедећи вид много је удобнији

7123	5797	1
1326	493	4
340	153	2
34	17	1
0		2
		4
		2

2. Да се тражи највећа општа мера за бројеве. 9614 и 3763

9614	3763	2
2083	1675	1
413	23	1
183	1	4
22		17
0		1
		22

Овде је највећа општа мера $= 1$ зато су задати бројеви односно прости бројеви,

42. Ако се тражи највећа општа мера за два сложена израза, то ћемо радити по оном већ показаном начину. Најпре ћемо оба сложена израза уредити падајуће, као и при обичном делењу. При самом дељењу више пута бива, да сачинитељ првог члана дељеника неможе да се подели без остатка са сачинитељем првог члана дељитељевог; па да би избегли рачунање са разломцима треба да се помножи дељеник с таквим бројем да први члан количника изађе цео број. Највећа општа мера овим се неће изменути, ако онај број, којим се дељеник множи није чинитељ дељитеља, што се лако разпознаје. А исто тако можемо све чланове дељитеља скратити, ако нађемо такву меру, која није чинитељ дељеника, дакле можемо оваквог чинитеља дељитељевог изкључити из дељења. Узмимо сада два броја $M = a^2bcx$ и $N = ab^2xy$, то је највећа општа мера њихова $= abx$. Ако сада помножимо M са z, то је опет највећа општа мера за $M\,z$ и N иста она количина abx, јер z није чинитељ броја N; или кад N скратимо са y, то је опет за M и $\frac{N}{y}$ т. ј. за a^2bcх и ab^2х та иста општа мера, дакле је као и пре највећа општа мера abx.

Примери :

1) Да се изнађе највећа општа мера за бројеве :

$$A = (a^3 - a^2 - 5a + 2),$$
$$B = (a^3 + 4a^2 + 6a + 4).$$

Пошто су овде оба сложена израза на једнаком степену, то је свеједно, ма који се узео као дељеник и ма који као дељитељ.

A.) $a^3 - a^2 - 5a + 2$	B.) $a^3 + 4a^2 + 6a + 4$	1
	$a^3 - a^2 - 5a + 2$	
	$- \quad + \quad + \quad -$	
$\times$ 25) $25a^3 - 25a^2 - 125a + 50$	R_1) $+ 5a^2 + 11a + 2$	$5a - 16$
$25a^3 + 55a^2 + 10a$	$+ 5a^2 + 10a$	
$- \quad - \quad -$	$- \quad -$	
$-80a^2 - 135a + 50$	$+ a + 2$	$5a + 1$
$-80a^2 - 176a - 32$	$+ a + 2$	
$+ \quad + \quad +$	$- \quad -$	
R_2) $+ 41a + 82$	0	
$: 41 \quad a + 2$		

Овде је подељено B са A, количник првих највиших чланова $= 1$. дакле је први остатак $R_1 = 5a^2 + 11a + 2$.

Сада ваља A поделити са R_1, али a^3 није раздељиво са $5a^2$, зато треба A помножити са 25, а ово се може зато, што тај број није чинитељ броја R_1. 25 A подељено сада са R_1, даје у количнику $(5a - 16)$ а остатак $41a + 82 = R_2$. Сада ваља делити R_1 са R_2, а пошто сви чланови од R_2 имају чинитеља 41, који се налази у R_1 то можемо пре но што би одпочели делити број R_2 скратити са 41, и онда се налазе R_2 у R_1 $(5a + 1)$ пута, без икаквог даљег остатка; зато је $(a + 2)$ највећа општа мера за оба задата полинома $(a^3 - a^2 - 5a + 2)$ и $(a^3 + 4a^2 + 6a + 4)$.

У овом је примеру A помножено са 25. Упрви ма довољно би било множити само са 5, па да изађе количник цео број, али, да би и други почастни количник био цео број, морали би и остатак опет множити са 5. То би дало један исти посљедак, што се врло лако увиђа. Даје даље остатак $41a + 82$ скраћен са 41, није чињено само ради угодности, него баш се морало скратити јер да би могли добити количник цео број морало би се R_1, са 41, односно са 41^2 помножити, одкуда би пошто је 41 чинитељ за R_2 и R_1, сигурно је и за највећу општу меру, што неможе бити истинито.

2) Да се определи највећа општа мера за бројеве

$$(x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4)$$

и $$(5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8)$$

A.) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$	B.) $5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$	$x + 1$ $(Q_1$
	$5x^4 + \quad - 15x^2 + 10x$	$5x + 4$ $(Q_2$
	$- \quad + \quad -$	
$\times$ 5) $5x^5 + 5x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 40x - 20$	$+ 4x^3 \quad - 12x + 8$	
$5x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 8x$	$+ 4x^3 \quad - 12x + 8$	
$- \quad - \quad + \quad + \quad -$	$- \quad + \quad -$	
$+ x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 32x - 20$	„ „ . „	
$\times$ 5) $5x^4 - 50x^3 - 15x^2 + 160x - 100$		
$5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$		
$- \quad - \quad + \quad + \quad -$		
R_1) $- 54x^3 \quad + 162x - 108$		
$: - 54$) $x^3 \quad - 3x + 2$		

Дакле је $x^3 - 3x + 2$ највећа општа мера.

3) Да се нађе највећа општа мера за

$$a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4 \quad \text{и} \quad 5a^3 + 15a^2b + a^2 +$$
$$+ 10ab^2 + 3ab + 2b^2.$$

Оба ова полинома уређена по количини a јесу:

$A = a^4 - 5b^2.a^2 + 4b^4$ и

$B = 5a^3 + (15b + 1)\, a^2 + (10b^2 + 3b)\, a + 2b^2$

A.) $a^4 - 5b^2.a^2 + 4b^4$

$$\times 5)\; 5a^4 - 25b^2.a^2 + 20b^4$$
$$5a^4 + (15b + 1)\, a^3 + (10b^2 + 3b)\, a^2 + 2b^2.a$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$-(15b+1)\, a^3 - (35b^2 + 3b)\, a^2 - 2b^2.a + 20b^4$$

$$\times 5)\; -5\,(15b+1)\, a^3 - 5\,(35b^2 + 3b)\, a^2 - 10b^2a + 100b^4$$
$$-5\,(15b+1)\, a^3 - (15b+1)^2.\, a^2 - (15b+1)$$
$$(10b^2 + 3b)\, a - (15b+1)\,.\, 2b^2$$
$$+ \quad + \quad + \quad +$$

$$R_1 \qquad +(50b^2+15b+1)\, a^2 + 3b(50b^2+15b+1)\, a +$$
$$+ 2b^2\,(50b^2 + 15b + 1)$$

$$:(50b^2 + 15b + 1) \qquad a^2 + 3b\,.\,a + 2b^2$$

B.)

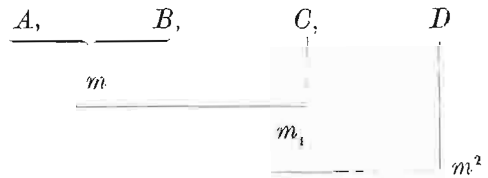
$$\begin{array}{l|l} 5a^3 + (15b+1)\, a^2 + (10b^2 + 3b)\, a + 2b^2 & a - (15b + 1) \\ \hline 5a^3 + 15b\,.\,a^2 + 10b^2\,.\,a & 5a + 1 \\ - \quad - \quad - & \\ \hline a^2 + 3b\,.\,a + 2b^2 & \\ a^2 + 3b\,.\,a + 2b^2 & \\ - \quad - \quad - & \\ \hline \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \end{array}$$

Дакле је за оба задата сложена израза највећа општа мера

$$(a^2 + 3ab + 2b^2)$$

Општи рад кад тражимо највећу општу меру за три или више броја.

Ако има да се изнађе највећа општа мера за бројеве A, B, C, *и* D, *најпре ћемо определити највећу општу меру за* A, *и* B. *и рецимо да је њихова највећа општа мера* $= m$, *а за* m *и следујући број највећа је општа мера* $= m_1$, *и најпосле за* m_1 *и* D *нека је највећа општа мера* $= m_2$, *то је ова уједно и највећа општа мера за све задате бројеве.*



Да то правило докажемо, показаћемо најпре, да је m_2 у опште мера за бројеве A, B, C и D, На сваки је начин m_1 и D раздељиво са m_2, а пошто су бројеви m и C раздељиви са m_1, то следује, да је како m тако исто и C раздељиво са m_2. А пошто су и даље бројеви A и B раздељиви са m, а m раздељиво са m_2, то су и бројеви A и B расдељиви са m_2; дакле је сваки од задатих бројева раздељив са m_2.

Рецимо да има још и већа општа мера као $M > m_2$ то би морало m раздељиво бити са M јер највећа општа мера за два броја свагда је раздељива са неком мером тих бројева дакле би било раздељиво и m и m_2, што је савршено немогуће. Зато је последња највећа општа мера као што смо показали, највећа општа мера за све задате бројеве.

Примедба. Нетреба дакле ни спомињати, да, ако се m садржи у C и D, да је m највећа мера свију бројева, а исто тако и m_1 кад је и овим D раздељиво.

Пример.

Да се изнађе највећа општа мера за бројеве

38934 (= A), 61182 (= B) и 56880 (= C).

A) 38934	B) 61182	1
16686	22248	1
„	5562	1
		3

За A и B највећа је општа мера 5562 = m.

m) 5562	C) 56880	10
522	1260	4
90	216	2
18	36	2
	„	2
		2
		2

18 је највећа општа мера за бројеве A, B и C.

Најмањи заједнички садржатељ.

44. *Сваки број, који је са два или више задатих бројева раздељив, зове се садржатељ ових бројева.*

Тако је V садржатељ броја A, B и C, ако је V раздељив са A, B и C; па *ако је V уједно и најмањи раздељив број, онда се зове најмањи заједнички садржатељ.* Тако је н. пр. број 60 сигурно садржатељ броја 12 и 30 и то, најмањи зајед. дељеник, јер нема мањег броја од 60, који би био раздељив са 12 и 30; већих бројева има небројно много који су раздељиви са 12 и 30.

45. Ако је V садржатељ броја A, B и C, и ако им количници

$$\frac{V}{A}, \frac{V}{B}, \frac{V}{C}$$

нису относно прости бројеви, то постоји још неки број $V_1 < V$, који је раздељив са бројевима A, B и C.

Нека је дакле

$$V : A = q_1, \; V : B = q_2 \text{ и } V : C = q_3.$$

Ако сада имају бројеви q_1, q_2, q_3, заједничког чинитеља $f > 1$, то је

$$q_1 = f\alpha, \; q_2 = f\beta, \; q_3 = f\gamma, \qquad \text{дакле}$$

$$V = Aq_1 = A \,.\, f \,.\, \alpha$$

$$V = Bq_2 = B \,.\, f \,.\, \beta$$

$$V = Cq_3 = C \,.\, f \,.\, \gamma$$

Види се да је V раздељиво са f.

Означимо сада

$$\frac{V}{f} \text{ са } V_1,$$

то је

$$V_1 : A = \alpha,$$

$$V_1 : B = \beta,$$

$$V_1 : C = \gamma,$$

а због $V = fV_1$, то је $V_1 < V$. Из тога произлази, докле год q_1, q_2, q_3 нису относно прости бројеви, да има и мањи садржатељ од V, а V може тек онда бити најмањи заједнички садржитељ, кад су q_1, q_2, q_3 относно прости бројеви. Ако је дакле V такав број према задатим бројевима A, B и C, да су q_1, q_2, q_3 относно прости бројеви, онда је V најмањи заједнички дељеник за бројеве A, B, и C.

Заједнички садржатељ за два и више броја, свагда је раздељив са најмањим заједничким садржатељем тих бројева.

Ако је V садржатељ, а v најмањи заједнички садржатељ бројева A, B и C, онда је $V : v =$ целом броју. Кад неби то било, онда би имали

$$V : v = Q + \frac{R}{v}, \text{ где је } R < v, \text{ дакле}$$

$$V - vQ = R.$$

А пошто су V и vраздељиви са A, B и C, онда вреди ово и за R, т. ј. R је садржатељ бројева A, B и C, што не може бити, јер је узето v као најмање, и по томе неби се R разликовало од нуле.

Тражење најмањег заједничког садржатеља.

46. Ми ћемо разложити сваки од задатих бројева у просте чинитеље. Па ако сада највише степене ових простих чинитеља помножимо у један производ, то је овај најмањи заједнички садржатељ задатих бројева.

1) Да се изнађе најмањи заједнички садржатељ за бројеве 300, 140 и 990

$$300 = 2.2.3.5.5$$

$$140 = 2.2.5.7$$

$$990 = 2.3.3.5.11$$

Овде долази чинитељ 2, (2 пута); 3, (2 пута); 5, (2 пута); 7, (1 пута); и 11, (1 пута); зато је најмањи заједнички садржатељ

$$2^2 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 = 69.300$$

Ради уверења имамо:

$$69.300 : 300 = 231$$

$$69.300 : 140 = 495$$

$$69.300 : 990 = 70$$

а пошто су ова три количника относно прости бројеви, то је 69.300 најмањи зајед. садржатељ за оне задате бројеве.

Да се определи најмањи зајед. садржатељ, кад су задате количине $3ab^2c$, $4abc^2$ и $12a^2bc$.

$$3ab^2c = 3.a.b.b.c$$

$$4abc^2 = 2.2.a.b.c.c.$$

$$12a^2bc = 3.2.2.a\,a.b.c$$

$$V = 3.2^2\, a^2.b^2.c^2 = 12a^2b^2c^2$$

Код простих алгебарских израза тражи се најмањи зајед. садржатељ само за њихове сачинитеље, а од свију писмена узима се свако писме са највишим степеном.

3.) $9ax^3y$, $4axy^2z$, $3abc^2x$, $2a^2bxz^2$ $\quad V = 36a^2bc^2x^3y^2z^2$.

4.) $3\,(x+y)$, $4\,(x^2-y^2)$, $5\,(x-y)$

Овде је $3\,(x+y) = 3\,.(x+y)$

$$4\,(x^2-y^2) = 2^2\,.\,(x+y)\,(x-y)$$

$$5\,(x-y) = 5\,.(x-y)$$

Дакле е

$$V = 60\,(x + y)\ (x - y) = 60\,(x^2 - y^2).$$

5.) Да се определи најмањи зајед. садржатељ кад су задате количине

$$3\,(a + b),\ 2\,(ab - b^2)\ \text{и}\ (a^3 - b^3).$$

Овде је $\quad ab - b^2 = b\,(a - b)$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2).$$

Зато је $\quad 3\,(a + b) = 3.\,(a + b)$

$$2\,(ab - b^2) = 2\,.\,b\,(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

Дакле

$$V = 6b\,(a + b)\ (a - b)\ (a^2 + ab + b^2) =$$

$$= 6b\,(a^4 + a^3b - ab^3 - b^4).$$

Ако сада тражимо најмањег зајед. садржатеља за два броја a и b, треба да поделимо њиов производ са највећом општом мером та два броја; рецимо да је ова мера $= m$, то је $v = \frac{a.b}{m}$; јер кад ставимо: за

$$a = \alpha\ .\ m,$$

$$b = \beta\ .\ m,$$

то је по пређашњем правилу

$$v = \alpha\ .\ \beta\ .\ m = \frac{ab}{m}.$$

Кад има више задатих бројева навешћемо као најудобнији начин за изтраживање најмањег зајед, садржитеља овај што слђедује. Треба да изоставимо од задатих бројева све оне мање

бројеве, који се у већима садрже без остатка, даље треба да тражимо, дали бар ова или више од задатих бројева имају општу меру и да дву прибележимо, па с њом да делимо све раздељиве бројеве. Овако да радимо све дотле, док најпосле заостану све сами относно прости бројеви. Сада треба све ове относно просте бројеве међу собом да помножимо, а њихов производ да помножимо са свима прибележним општим мерама па ће бити овај главни производ најмањи зајед. садржатељ.

1) Да нађе најмањи заједнички садржатељ

за бројеве 3, 12, 27, 48, 81	3
16 27	
$V = 16\,.\,27\,.\,3 = 1296$	

2)	2, 6, 9, 24, 28, 40, 56, 120		3
	3	56 40	8
	3	7 5	
	$V = 3\,.\,7\,.\,5 \times 3\,.\,8 = 2.520$		

Задатци:

1) Има да се испита, јесу ли следећи бројеви относно прости бројери

373, 421, 527, 6251, 16337.

2) Да се изнађу прости чинитељи за

720, 2160 и 1299.

3) Које су прости и сложени чинитељи за

$798,\ 1155,\ 4ab^3,\ 6x^2y^2,\ 14abc,\ 33ab^2cd,$

$6\,(a + b)^3,\ 5\,(a^2 - b^2)\ (a + b)^2,\ 9\,(a^4 - b^4)\ (a + b).$

Приметба. Овде се могу разложити

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2),$$

Али је $\quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$

$(a^2 + b^2)$ неможе се даље разложити зато ћемо написати

$$a^4 - b^4) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2).$$

4) Колико прости и сложени чинитеља дају бројеви:

$2250,\ 3456,\ 80a^2bc^3,\ 12a^4x^2z^3.$

5) Да се изнађе највећа општа мера за бројеве:

348 и 564. (највећа општа мера = 12.)

6) 581 и 1411 „ „ „ = 83

7) 8164 и 13.494 „ „ „ = 26

8) 2808, 1677 и 2561 „ „ „ = 13

9) 6348 и 7960

10) 4341 и 7970

11) 28026, 34254 и 5616

12) $5a^4b^3,\ 3a^6b^2$ (највећа општа мера a^4b^2

13) $6m^3n^3p^2,\ 4m^2p^2,\ 14mn^2p$ „ „ „ $2mp$

14) $3(a+b)^2,\ 5(a+b)^3,\ 3(a^2 - b^2)$ „ „ „ $(a + b)$

15) $5a^4x^n - 80x^n),\ (15a^nx^2y^4 - 60a^{n-2}x^2y^4),\ (4a^3x^3 - 32x^3).$

Овде је

$$5a^4x^n - 80x^n = 5x^n(a^4 - 16) = 5x^n(a^2 + 4)(a^2 - 4) =$$

$$= 5x^n(a^2 + 4)(a^2 + 2)(a^2 - 2).$$

$$15a^2x^3y^4 - 60a^{n-2}x^2y^4 = 15a^{n-2}x^2y^4(a^2 - 4) =$$

$$= 15a^{n-2}x^2y^4(a + 2)(a - 2)$$

$$4a^3x^3 - 32x^3 = 4x^3(a^3 - 8) = 4x^3(a - 2)(a^2 + 4a + 4)$$

Највећа општа мера $= x^2(a - 2).$

16) $16a^3bcf^2,\ 64ab^3cf^3,\ 128a^2b^2c^2f^4.$

17) $432x^3y^2z^2,\ 562x^2y^3z^2,\ 52\,x^2y^2z^3.$

18) $4(x - y)^3,\ 3(x^2 - y^2),\ 5(x - y)^3,\ 2(x^4 - y^4).$

19) $(ab^2 - b^3),\ (a^2 - b^2),\ 5(a - b)^3.$

20) $(x^8 - 16y^8)$ и $(x^2 - 2y^2)$ највећа општа мера $= x^2 - 2y^2$

21) $(6x^3 - 11x^2 + 6x - 1)$ и $(10x^2 + x - 3)$

највећа општа мера $= 2x - 1.$

22) $(a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3)$ и $(a^2 - 5ab + 4b^2)$

највећа општа мера $= (a - b)$

23) $(a^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4 + b^6)$ и $(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$

највећи општи делитељ $= 1.$

24) $(x^2 - xy - 6y^2 + 15x - 10y + 4)$ и

$(2x^2 - 7xy + 3y^2 - x + 8y - 3)$

највећи општи делитељ $= (x - 3y + 1).$

25) $(a^5 - 6a^4 + a^3 + 8a^2 - 2a)$ и $(a^3 - 4a^2 + a).$

26) $(-3x^3 + 3x^2y - xy^2 + y^3)$ и $(4x^2 - 5xy + y^2).$

27) $(a^4 - 5a^3 + 5a^2 + 5a - 6)$ и $(a^2 + 2a + 1).$

28) $(x^4 + 3x^3y + 4x^2y^2 - 6xy^3 + 2y^4)$ и $(4x^2y + 2xy^2 - 2y^3).$

Да се изнађе најмањи заједнички садржатељ за следујуће бројеве:

29) (123, 287 најмањи заjед. садрж. = 861

30) (3, 5, 6, 28, 84 „ „ „ = 420

31) 2, 3, 9, 27, 57, 408 „ „ „ = 3672

32) 525, 625.

33) 3, 7, 35, 63, 140, 180.

34) $3a^2$, $6ab$, $4a^2bc^3$ најмањи заjед. садрж. = $12a^2bc^3$

35) $2x^ny^r$, $6x^{2n}y^{3r}$, $9x^nyz^p$

најмањи заjед. садрж. = $18x^{2n}y^{3r}z^p$.

36) $54abc^2$, $108a^2bc$, $162ab^2c$.

37) $3(a+b)$, $2(a-b)$, $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

38) (x^3-1), $2(x+1)$, $3(x-1)^2$, (x^2-1).

39) $6x^3-11x^2+6x-1)$, $(10x^2+x+3)$.

С погледом на § 46.

40) $x^5+y^5)$, $(x+y)$.

ПЕТИ ОДСЕК

ПРОСТИ РАЗЛОМЦИ

47. Цели бројеви нису довољни да одговоре свима рачунским потребама у аритметици зато су у круг аритметичких рачуна уведени нови бројеви, који су нам познати под именом *„разломака“* или разломљених бројева.

Број који несадржи у себи јединицу неколико пута, или који је напротив мањи од један, може се са јединицом само онда сравнити, кад јединицу разложимо у мање делове. И тако ови делови, које предпостављамо као једнаке престављају оне количине, што вреде мање од јединице. Зато велимо: Један или више једнаких делова од јединице зове се разломак или разломљен брор.

48. Из тога видимо, да има у разломку два броја, од којих показује један какви су делови, а други колико је узето делова од јединице. Први број зове се именитељ што показује у колико је једнаких делова јединица подељена; а други бројитељ што показује, колико је таквих једнаких делова узето у рачун.

Ако је именитељ b, а бројитељ a онда ји пишемо a/b.

49. Ако се хоће 5 да подели са 6, то значи, да сваку јединицу дељеника разделимо у 6 једнаких делова, а овим би добили 30 делова, које ако поделимо са 6, то нам показује количник 5 шестине од јединице, па зато је вид количника $^5/_6$ (т. ј. 5 подељено са 6) онакав исти као и разломка $^5/_6$.

С тога велимо, да је разломак то исто што и дељење, где је бројитељ разломка дељеник, а именитељ разломка дељитељ.

Зато се сва она правила што смо навели у дељењу могу применути на разломке.

50. Сада знамо да је $\frac{ab}{b} = ab : b = a$ дакле кад је $a = \frac{ab}{b}$, то видимо, да се може сваки цели број написати у виду разломка.

Тако је $5 = \frac{5 \cdot 4}{4} = \frac{20}{4}$,

$$m = \frac{a^2 m}{a^2},$$

$$a + b = \frac{x\,(a+b)}{x} \quad \text{и т. д.}$$

51. Разломке делимо у *праве и неправе*, како је кад бројитељ мањи или већи од именитеља.

Тако су: $^3/_5$, $^{17}/_{23}$, $\frac{a}{a+b}$ прави

напротив $^7/_3$, $\frac{x+1}{x}$, $\frac{a}{a-b}$ неправи разломци.

52. Кад стоји до целог броја положан или одречан разломак, то се назива овакав израз *смешани број.*

Н. пр. $4 + {}^3/_5 = 4^3/_5$, $a \pm \frac{b}{c}$, $x - \frac{3}{4}$, и т. д.

Како је сада $\frac{ab+c}{b} = a + \frac{c}{b}$, то показује, да можемо сваки неправ разломак дељењем преобратити у смешан број; исто тако можемо смешан број написати у виду неправог разломка, кад цео број помножимо са именитељом разломка и производу додамо бротеља, па испод тога сбира напишемо именитеља разломка.

Тако је $\frac{29}{7} = 4 + \frac{1}{7} = 4\frac{1}{7}$,

$$\frac{5a^2 + 2b}{a} = 5a + \frac{2b}{a} \quad \text{и}$$

$$3^1/_2 = \frac{6+1}{2} = {}^7/_2,\ 2a + \frac{m}{3} = \frac{6a+m}{3},$$

$$xy + \frac{x}{y} = \frac{xy^2 + x}{y}.$$

Ако сада потражимо број $+ 3^2/_5$ у природном реду, треба да пођемо од 0 у положном правцу и да пређемо 3 јединице, а растојање између 3 и 4 да поделимо у 5 једнаких делова; и да узмемо два дела.

Ако у опште у природном реду поделимо растојање између два узастопце сљедујућа цела броја у 5 једнаких делова то ће бројевни ред узети овај вид:

$$-2,\ -1^4/_5,\ -1^3/_5,\ -1^2/_5,\ -1^1/_5,\ -1,\ -{}^4/_5,\ -$$

$$-{}^3/_5,\ -{}^2/_5,\ -{}^1/_5,\ 0\ +{}^1/_5,\ +{}^2/_5,\ +{}^3/_5,\ +{}^4/_5,\ +$$

$$+1,\ +1^1/_5,\ +1^2/_5,\ +1^3/_5,\ +1^4/_5,\ +2\ldots\ldots$$

и тако налази у овом смислу сваки цео или разломљен број своје место у бројевном реду,

53. *Кад помножимо броитеља и именитеља неког разломка с једним истим бројем, то ће вредност разломка остати непромењена.*

Тако је $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ или $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$.

Прво нам помаже, да два или више разломка преобратимо у равнодеочине; а друго да разломак скратимо немењајући његову вредност.

Тако можемо написати разломке :

$$\frac{a}{m}, \quad \frac{b}{n}, \quad \frac{c}{p}.$$

$$\frac{a\,.\,np}{m\,.\,np} = \frac{anp}{mnp},$$

$$\frac{b\,.\,mp}{n\,.\,mp} = \frac{bmp}{mnp},$$

$$\frac{c\,.\,mn}{p\,.\,mn} = \frac{cmn}{mnp}$$

Сада имају једнаке имените.ъе mnp;

у место $\frac{27}{36}, \quad \frac{ab^2}{ab + a^2b}, \quad \frac{m\,(x^2 - y^2)}{n\,(x + y)}$

можемо написати $3/4, \ \frac{b}{1+a}, \ \frac{m\,(x - y)}{n}$.

54. Већ у самој природи разломка лежи, да је између свију разломака којих су именитељи једнаки, онај разломак већи кога је бројитељ већи; тако је између разломка

$3/13$, $7/13$, $5/13$, $10/13$, највећи $10/13$.

Исто је тако између два или више разломка којих су бројитељи једнаки, онај разломак већи ког је именитељ мањи, јер у колико је у мање једнаких делова цело подељено, у толико су већи ови делови. Тако је $7/9$ извесно мање од $7/5$.

Или $7/5 > 7/9$, у опште $a/b > \frac{a}{b+m}$.

Два по све скраћења једнака разломка, морају имати једнаке бројитеље и именитеље. А ко је дакле $a/b = m/n$, и ако су a и b односно прости, а исто тако m и n прости бројеви, то мора бити и $a = m$, а $b = n$.

55. Овде ћемо још да испитамо, каквој промени подлежи разломак, кад му се бројитељ и именитељ с једним истим бројем помножи и подели.

Ако је $a/b < 1$, дакле $a < b$, онда се може показати да је

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

и

$$\frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

јер кад преобратимо разломке

$\frac{a}{b}$ и $\frac{a+m}{b+m}$ у равнодеоничне, то сљедује

$$\frac{a\,(b+m)}{b\,(b+m)} \quad \text{и} \quad \frac{b\,(a+m)}{b\,(b+m)}.$$

Како је сада $b\,(a+m) > a\,(b+m)$, пошто је $b > a$, то по § 54. сљедује да је

$$\frac{a\,(b+m)}{b\,(b+m)} < \frac{b\,(a+m)}{b\,(b+m)},$$

т. ј. $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

А да би сада доказали извештај (релацију) (2 поступаћемо по том истом начину.

Нека је $\frac{a}{b} = \frac{a\,(b-m)}{b\,(b-m)}$ и $\frac{a-m}{b-m} = \frac{b\,(a-m)}{b\,(b-m)}$.

Али је $ab - am > ab - bm$ због $a < b$, дакле и $am < bm$, по томе је и

$$\frac{a\,(b - m)}{b\,(6 - m)} > \frac{b\,(a - m)}{b\,(b - m)}$$

$$\text{или}\quad \frac{a}{b} > \frac{a - m}{b - m}.$$

Кад дакле у правом разломку броитељу и имениитељу један исти број додамо, то је нов разломак што овим постаје већи; напротив мањи, кад од броитеља и именитеља један исти број одузмемо.

Исто тако можемо показати, да, кад је

$$\frac{a}{b} > 1,$$

$$\text{да је и}\quad \frac{a}{b} = \frac{a + m}{b + m}$$

$$\text{или}\quad \frac{a}{b} < \frac{a - m}{b - m}.$$

Сабирање разломака.

56. Два или више разломка можемо сабрати кад су им делови истог рода т. ј. кад имају једнаке имениитеље. У овом случају броитеље сабирамо, а општи се именитељ потписује под сбир броитеља.

Н. пр. $^5/_9 + {^3/_9} + {^1/_9} + {^4/_9} = {^{13}/_9} = 1\,^4/_9$.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a + b + c}{n}.$$

Кад имају разломци разне именитеље, треба ји по § 53. преобратити у равнодеоничне и онда сабрати.

Да се саберу:

1) $\qquad {^2/_3} + {^3/_7} + {^4/_5}$.

Овде је заједнички именитељ $3 \,.\, 7 \,.\, 5 = 105$.

$$\text{Зато је}\ {^2/_3} = \frac{2\,.\,35}{3\,.\,35} = \frac{70}{105}$$

$$^3/_7 = \frac{3\,.\,15}{7\,.\,15} = \frac{45}{105}$$

$$^4/_5 = \frac{4\,.\,21}{5\,.\,21} = \frac{84}{105}$$

$$\frac{199}{105} = 1\,\frac{94}{105}$$

$$\text{дакле}\ {^2/_3} + {^3/_7} + {^4/_5} = 1\,\frac{94}{105}$$

2) $$\frac{4}{3a} + \frac{5}{4b} + \frac{2}{a} + \frac{3}{2b}.$$

За $3a$, $4b$, a, $2b$ најмањи је заједнички садржатељ $= 12\,ab$ т. ј. најмањи заједнички именитељ. Да одговарајуће броитеље добијемо ово је најудесније начин рачунања:

	12ab
$4b$	$16b$
$3a$	$15a$
$12b$	$24b$
$6a$	$18a$
	$40b + 33a$.

Заједнички именитељ мора се поделити са сваким именитељом задатих разломака, количници што се овим дељењем добију помножиће се са одговарајућим бројитељима и тако ћемо добити бројитеље нових разломака.

Тако је $\frac{4}{3a} + \frac{5}{4b} + \frac{2}{a} + \frac{3}{2b} = \frac{33a + 40b}{12ab}$.

3) $$\frac{x+1}{1-x^2} + \frac{2x}{(1+x)^2} + \frac{x-1}{x(1+x)}$$

$$x(1-x)(1+x)^2$$

$$\begin{array}{r|l}
x(1+x) & x(1+x)(x+1) = + x + 2x^2 + x^3 \\
x(1-x) & x(1-x) \cdot 2x = \dots\dots + 2x^2 - 2x^3 \\
1-x^2 & (1-x^2)(x-1) = -1 + x + x^2 - x^3 \\
\hline
 & -1 + 2x + 5x^2 - 2x^3
\end{array}$$

$$\frac{x+1}{1-x^2} + \frac{2x}{(1+x)^2} + \frac{x-1}{x(1+x)} =$$

$$= \frac{-1 + 2x + 5x^2 - 2x^3}{x + x^2 - x^3 - x^4}.$$

Ако су поједени сабирци смешани бројеви, то ће се разломци најпре сабирати па после цели бројеви.

Н. пр. $a + \frac{3a}{b} + b + \frac{4b}{a} + 2 + \frac{3}{4} =$

$$= (a + b + 2) + \frac{12a^2 + 16b^2 + 3ab}{4ab}.$$

Примери:

1) $1 + a + \frac{b}{2c} = \frac{2ac + b + 2c}{2ac}$

2) $\frac{a}{b} + \frac{2m}{3n} + \frac{5ab}{cn} = \frac{3acn + 2bcm + 15ab^2}{3bcn}$

3) $\frac{25a - 36b}{a-b} + \frac{12a - 56}{a-b} + \frac{2a+2b}{a-b} = 39.$

4) $\frac{x-n}{x+y+z} + \frac{y-z}{x+y+z} + \frac{2z+n}{x+y+z} = 1.$

5) $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$

6) $\frac{m}{xy} - \frac{n}{yz} = \frac{mz - nx}{xyz}$

7) $\frac{m}{ab} + \frac{n}{b}$;

8) $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$;

9) $6a + \frac{3b}{7a}$;

10) $\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1$; $\frac{(a-b)^2}{4ab} + 1$;

11) $\frac{9m}{8b} + \frac{7n}{36b} + \frac{11m}{28b} - \frac{7(m+n)}{4b} + \frac{117m}{252b}$;

12) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} + \frac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}$;

13) $\frac{3m}{7p^2qr^2} + \frac{11n}{3p^3rqs^2} + \frac{14n}{9pq^2r} - \frac{7q}{5r^2p}$;

14) $\frac{x^2}{3y^2} + \frac{x^2y^2}{3y^4 - x^4} + \frac{x^6}{3y^2(3y^4 - x^4)}$;

15) $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y}$;

16) $n + \frac{1}{1 + n} + \frac{1 + n^2}{1 - n}$;

17) $n + \frac{1}{1 + n} + \frac{1 + n^2}{1 - n^2}$;

18) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

19) $\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{1 + a}$;

20) $\frac{1 + a}{1 - a} - \frac{1 - a}{1 + a}$;

21) $\frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1 - x}{1 + x} - \frac{1 - x + x^2}{1 + x^2} -$

$$- \frac{1 + x + x^2}{1 - x^2} - 1;$$

Одузимање Разломака.

57. Кад су именитељи у два разломка једнаки, онда се налази њихова разлика, кад се одузме бројитељ умалитељев од бројитеља умалимковог, а заједнички именитељ једанпут подпише. Ако су именитељи различити, то се морају као и усабирању преобратити најпре у равнодеоничне, што бива кад нађемо најмање заејд. именитеља.

Примедба. Кад сабирамо и одузимамо алгебарске разломљене бројеве, придржаваћемо се истих оних закона као и при сабирању и одузимању алгебарских целих бројева.

Примери:

1) $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$.

2) $a - \frac{m}{n} = \frac{an}{n} - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$.

3) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

4) $\frac{a}{a + b} - \frac{b}{a - b} = \frac{a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$

5) $\frac{3a}{4b} + \frac{2a}{3b} + \frac{5}{c} - \left(\frac{2a}{b} + \frac{4}{3c} - \frac{a}{2b}\right) =$

$$= \frac{3a}{4b} + \frac{2a}{3b} + \frac{5}{c} - \frac{2a}{b} - \frac{4}{3c} +$$

$$+ \frac{a}{2b} = \frac{44b - ac}{12bc}$$

	$12bc$	
$3c$	$+9ac$	
$4c$	$+8ac$	
$12b$		$+6cb$
$12c$	$-24ac$	
$4b$		$-16b$
$6c$	$+6ac$	
	$+44b-ac$	

6) $$\frac{(b-1)^2-a}{b(b-1)}+\frac{b-a-1}{b}+\frac{a}{b-1}-\frac{2(b-1)}{b};$$

7) $$\left(\frac{a+b^2}{2b}\right)^2-\left(\frac{a-b^2}{2b}\right)^2;$$

8) $$\frac{b+3a}{a}-\frac{2a+3b}{b}+\frac{2}{ab}(a^2-b^2);$$

9) $$\frac{22a-9b}{15}-\frac{2b+4a}{5}+\frac{3b-2a}{3};$$

10) $$\frac{5y^2-7}{9y^2-1}+\frac{3y^2-2}{4y^2+1}-\frac{7y^2-1}{5y^2+2};$$

11) $$\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^3+2x^2+3x+4}-\frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^3-2x^2+3x+4};$$

12) $$\frac{5a^4-7a^3-9a^2+11}{2a^4-3a^3+2a^2-1}-\frac{x-1}{x+3};$$

13) $$\frac{4a-3b}{2a-11b}-\frac{6a+22b}{6a-33b}-\frac{1}{2a-11b}+1;$$

14) $$\frac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\frac{x+1}{(1-2x)^2}+\frac{1}{1-2x};$$

Приметба. Алгебарске разломљене бројеве сабирамо и одузимамо по истим законима, као што сабирамо и одузимамо целе бројеве.

Множење и дељење Разломака са целим бројевима.

58. *Разломак множимо са целим бројем кад броитеља са целим бројем помножимо а именитеља подпишемо; или напишемо одма броитеља и разделимо именитеља са целим бројем.*

a/b помножено са m значи, написати a/b толико пута као сабирак колико m има јединица, т. ј.

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots\ldots \quad (m \text{ пута})$$

јер знамо да је $a \cdot m = a + a + a \ldots\ldots$ (m пута)

дакле и $$\frac{a\cdot m}{b}=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots\ldots \quad (m \text{ пута})$$

Зато је $$\frac{a\cdot m}{b}=\frac{a}{b}\cdot m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Кад ово постоји, то сљедује да је и

$$\frac{a\cdot m}{b}=\frac{a}{b:m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

По оном другом правилу о множењу разломка са целим бројем.

Приметба. Ако a/b множитељ, то значи помножити m са a/b, да треба m поделити у b једнаки делова, и један од ових делова узети a пута.

Примери:

1) $5a \cdot \frac{3c}{b} = \frac{5a \cdot 3c}{b} = \frac{15ac}{b}.$

2) $5(x+1) \cdot \frac{4(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{20(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{20(x-1)}{x+1}$

3) $ab \cdot \frac{x-y}{a^2b^2} = \frac{ab(x-y)}{a^2b^2} = \frac{x-y}{ab}$

или по (2 $= \frac{x-y}{a^2b^2 : ab} = \frac{x-y}{ab}$

4) $\left(m + \frac{4p}{3q}\right) \cdot 3pq = m \cdot 3pq + \frac{4p}{3q} \cdot 3pq =$

$= 3mpq + 4p^2.$

Из $a/b \cdot b = \frac{ab}{b} = a$ види се; да сваки разломак помножен са својим именитељом даје бројитеља.

59. *Раломак делимо са целим бројем, кад броитеља разломка поделимо са целим бројем а именитеља подпишемо; или кад се напише непромењени броитељ и подпише производ из именитеља помноженог са задатим целим бројем.*

Ако треба да поделимо $1/b$ још у m једнаких делова, то лежи у самој природи разломка да је

$$1/b : m = \frac{1}{bm},$$

дакле и $a/b : m = \frac{a}{bm}$,

јер је и обратно $\frac{a}{bm} \times m = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$

Ако је сада $\frac{a}{bm}$ истинити количник, то је и $\frac{a:m}{b}$ истинито.

Примери:

1) $\frac{4x}{y} : 5 = \frac{4x}{5.y} = \frac{4x}{5y}.$

2) $\frac{m^3}{a+b} : (a-b) = \frac{m^3}{(a+b).(a-b)} = \frac{m}{a^2-b^2}$

3) $\left(a + \frac{b}{c} - \frac{d}{e}\right) : 2g = \frac{a}{2g} + \frac{b}{2cg} - \frac{d}{2eg}$

4) $\frac{12x^3z\,(a^2-b^2)}{5\,(a^2+1)} : 2x\,(a+b) = \frac{12x^3z\,(a^2-b^2)}{5\,(a^2+1)\,.\,2x\,(a+b)} =$

$= \frac{6x^2z\,(a-b)}{5\,(a^2+1)}$ или

количник $= \frac{12x^3z\,(a^2-b^2) : 2x\,(a+b)}{5\,(a^2+1)} = \frac{6x^2z\,(a-b)}{5\,(a^2+1)}$

Множење Разломака.

60. Кад множимо два разломка a/b са c/d значи, *да треба* a/b *поделити у* d *једнаких делова и један такав део узети* c *пута као сабирак.*

Али знамо да је d-ни део од $\frac{a}{b} = \frac{a}{bd}$, дакле је производ

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd} + \ldots\ldots \text{ (с пута) } =$$

$$= \frac{a}{bd} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \text{ т. ј.}$$

два разломка множимо, кад помножимо броитеље међу собом и имениитеље међу собом; производ броитеља даје нам новог броитеља а производ именитеља новог именитеља.

Примери:

1) $5^1|_7 \times 3^1|_4 = \frac{36}{7} \times \frac{13}{4} = \frac{36 \cdot 13}{7 \cdot 4} = \frac{468}{28} =$

$$= \frac{117}{7} = 16^5|_7.$$

2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{n} + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{n} =$

$$= \frac{a^2}{bn} + \frac{am}{n^2}.$$

3) $\frac{(g + h)}{3a} \times \frac{4f}{5gh} = \frac{4f\,(g + h)}{15agh}.$

4) $\frac{x}{x + 1} \cdot \frac{3x}{x - 1} \cdot \frac{2x}{2x - 1} = \frac{x \cdot 3x \cdot 2x}{(x + 1)(x - 1)(2x - 1)} =$

$$= \frac{6x^3}{2x^3 - x^2 - 2x + 1};$$

5) $\frac{11mno}{13pqr} \times \left(\frac{3}{4}\,\frac{pr}{mo} + \frac{3}{7}\,nq - \frac{5}{6}\,\frac{ra}{no}\right);$

6) $\frac{15pq}{11rs} - \frac{3r^2s}{4p^2}\left(\frac{7p^2}{11ry^2} + \frac{20p^3q}{11r^3s^2}\right);$

7) $\frac{2}{7c} - \frac{2}{a + b}\left(\frac{a + b}{7c} - a - b\right);$

8) $1 - \frac{a + b}{a - b}\left(\frac{a}{a + b} - \frac{a - b}{a} + \frac{a - b}{a + b}\right);$

9) $\left[\frac{a}{n} + 1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] - \frac{n^2}{a^2 + xn};$

10) $\left(\frac{a + x}{x} - \frac{2x}{x - 2}\right)\left(\frac{a - x}{a^2 + x^2}\right);$

11) $1 - \frac{2}{3}\,\frac{a^4}{b^4} - \left(1 + \frac{7}{11}\,\frac{a}{b}\right)\Big(\frac{7}{11}\,\frac{a}{b} +$

$$+ \frac{5}{6}\,\frac{a^2}{b^2} + \frac{7}{9}\,\frac{a^3}{b^3}\Big)$$

12) $\Big(1\,\frac{2}{3}\,\frac{x}{y} - 4\,\frac{5}{6}\,\frac{y}{x}\Big(\Big(7\,\frac{8}{9}\,\frac{y}{x} - 10\,\frac{11}{12}\,\frac{x}{y}\Big) -$

$$- \left(\frac{7}{9}\,\frac{x}{y} + \frac{5}{12}\,\frac{y}{x}\right)\left(\frac{7}{9}\,\frac{x}{y} - \frac{5}{12}\,\frac{y}{x}\right);$$

13) $\Big(\frac{1}{16}\,\frac{x^4}{z^8} + \frac{1}{12}\,\frac{x^3y}{z^6} + \frac{1}{9}\,\frac{x^2y^2}{z^4} + \frac{4}{27}\,\frac{xy^3}{z^2} +$

$$+ \frac{16}{81}\,y^4\Big)\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{z^2} - \frac{2}{3}\,y\right);$$

14) $\left(\frac{1}{3}\frac{ab}{c^2} - \frac{3}{5}\frac{bc}{a^2}\right)\left(\frac{5}{7}\frac{ac}{b^2} - \frac{7}{9}\frac{ab}{c^2}\right)$

$$\left(\frac{3}{5}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{ab}{c^2}\right);$$

Делење целог броја са разломком.

61. Кад цео број делимо са разломком н; пр: $a : c|d$, па ако узмемо да је количник x, онда је $a : c|d = x$. Овај количник мора такав бити, кад га с дељитељем помножимо да изађе дељеник, дакле је $x \times c/d = a$ и кад ову једначину помножимо са d са обе стране, то ће и производи бити једнаки т. ј. $x \cdot c = a \cdot d$ и кад ове количине поделимо са c, то ће бити и количници једнаки, дакле $x = \frac{a.d}{c}$ зато је.

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot d : c$$

Исто тако бива кад поделимо разломак са разломком

Н. пр. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times d\right) : c = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

а из тога сљедује:

Да се неки број (цео или разломак) *дели са разломком кад тај број помножимо са обрнутим разломком.*

Разломак можемо још и на други начин делити са разломком н: пр:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times d\right) : c = \frac{a : c}{b : d} \text{ т. ј.}$$

разломак делимо са разломком, кад броитеља поделимо са броитељом а именитеља саименитељом (ако може да се дели без остатка).

Примери:

1) $5 : 3\,{}^1|_4 = 5 : {}^{13}|_4 = {}^{20}|_{13} = 1{}^7|_{13}$.

2) $2ab : \frac{a}{b} = 2ab \times \frac{b}{a} = 2b^2$.

3) $(x^2 - y^2) : \frac{x-y}{x+y} = (x^2 - y)^2 \cdot \frac{x+y}{x-y} = (x+y)^2$

4) $\frac{3a}{2b} : \frac{5m}{4n} = \frac{3a}{2b} \times \frac{4n}{5m} = \frac{12an}{10bm} = \frac{6an}{5bm}$.

5) $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-c}{a}\right) : \frac{a^2+bc}{b^2} = \frac{a+b}{b} \times$

$$\times \frac{b^2}{a^2+bc} - \frac{a-c}{a} \times \frac{b^2}{a^2+bc} =$$

$$= \frac{(a+b)\,b}{a^2+bc} - \frac{(a-c)\,b^2}{a\,(a^2+bc)} = \frac{b}{a}.$$

6) $1 : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$;

7) $\left(\frac{2a^2c}{a+c}\right) : \left(\frac{2a^2c}{a+c} - a\right)$;

8) $(x^2 - y^2) : \frac{x+y}{x-y}$

9) $5a : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$.

10) $\left(\frac{7}{16} a^2 - \frac{33}{160} ab + \frac{13}{48} ac + \frac{23}{16} bc - \frac{27}{40} b^2 -\right.$

$\left. - \frac{55}{72} c^2\right) : \left(\frac{7}{8} a + \frac{9}{10} b - \frac{11}{12} c\right);$

11) $\left(64 \frac{m^6}{n^{12}} - 729 \frac{n^6 y^{12}}{m^6}\right) : \left(2 \frac{m}{n^2} - 3 \frac{ny^2}{m}\right);$

12) $\left(\frac{128}{2187} \frac{x^7 y^7}{z^7} - \frac{2178}{16384} \frac{z^7}{x^7 y^7}\right) :$

$: \left(\frac{2}{3} \frac{xy}{z} - \frac{3}{4} \frac{z}{xy}\right);$

13) $\left(\frac{1}{27} \frac{x^4}{y^4} - \frac{142}{5005} \frac{x}{y} + \frac{1}{91} +\right.$

$\left. + \frac{2689}{45049} \frac{x^2}{y^2} - \frac{26}{495} \frac{x^3}{y^3}\right) :$

$\left(\frac{1}{3} \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{5} \frac{x}{y} + \frac{1}{7}\right);$

14) $\left(\frac{16}{625} \frac{x^{12}}{y^8} - \frac{81}{2401} \frac{y^{12}}{x^8}\right) : \left(\frac{2}{5} \frac{x^3}{y^2} - \frac{3}{7} \frac{y^3}{x^2}\right) :$

$\left(\frac{4}{25} \frac{x^6}{y^4} + \frac{9}{49} \frac{y^6}{x^4}\right);$

ЗАДАТЦИ

I. Сабирање и одузимање.

1) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 3\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right) +$

$5\left(\frac{4}{a} - \frac{2}{b}\right);$

2) $\frac{1+y}{1+y^2} + \frac{1-y}{(1+y)^2} + \frac{y}{1-y^2};$

3) $a + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2y^2} + \frac{x^3}{3y^3} + \frac{x^4}{4y^4} + \frac{x^5}{5y^5};$

4) $\frac{5a-2b}{5x} + \frac{8bc+15dx}{20cx};$

5) $\frac{m}{n} - \frac{m^2-n}{mn} + \frac{n+2}{m} - \frac{3}{m};$

6) $\frac{1}{4x+4} - \frac{2x}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x+2} -$

$- \frac{x}{3x^2-12} + \frac{1}{x+2};$

7) $3 + x + \frac{2-x}{3};$

8) $\frac{x}{y} - \frac{2x}{3y} + \frac{7x}{5y} + \frac{4x}{y} - \frac{3x}{2y};$

9) $\frac{4}{a^2} - \frac{5}{a^3} + \frac{2}{a} - \left(\frac{5}{a} - \frac{12}{a^2} + \frac{3}{4a^3}\right)$

10) $\frac{16}{3(a+1)} + \frac{7}{5(a-1)} - \frac{4a-3}{(a+1)^2}.$

II. Множење.

11) $7a^2b \times \frac{5m^3}{4a^4b^2}$.

12) $\frac{x^m}{a^n y^p} \cdot \frac{2a^r y^3}{x^5}$;

13) $\frac{a-b}{c+d} \cdot \frac{a+b}{c-d}$;

14) $\left(\frac{m+n}{n} - \frac{2n}{n-m}\right) \cdot \frac{m-1}{m^2+n}$;

15) $\left(\frac{x}{3x+5} + 4\right) \left(\frac{2x}{x+y} + 2\right)$

16) $\left(\frac{ax^n}{by^m} + \frac{cx^p}{dy^r}\right) \cdot \left(\frac{ax^n}{by^m} - \frac{cx^p}{dy^r}\right)$;

17) $-3x^m \cdot \frac{4x}{x^n}$;

18) $\frac{x(x+y)}{y(x-y)} \cdot 2(x-y)^2$

19) $\frac{x(a^2-b^2)}{5(x^2-y^2)} \cdot \frac{x+y}{a+b}$;

20) $(3x - 5y + 4z) \cdot \frac{2x}{3y}$.

21) $\left(\frac{5x}{y+z} - 3xy\right) \left(\frac{5x}{y+z} + 3xy\right)$;

22) $\left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(\frac{a}{2} - 2\right) \left(\frac{a}{2} - 3\right) \left(\frac{a}{2} - 4\right)$;

23) $\left(\frac{x^5}{32} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{2} - 1\right)$.

III. Делење.

24) $\frac{16a^2b^3}{7mn} : 4am$;

25) $\left(\frac{a}{x} - \frac{5a^2b}{3x^3} + \frac{b^2}{4x^2}\right) : 2ax$.

26) $\frac{1}{x} : a\left(\frac{1}{x} + 1\right)$;

27) $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(\frac{x}{a} + b\right)$;

28) $\left(\frac{16a^6}{9x^4} - \frac{25b^8}{36y^2}\right) : \left(\frac{4a^3}{3x^2} - \frac{5b^4}{6y}\right)$;

29) $\left(\frac{2x^2}{a^2} - \frac{6x^3}{a^3} + \frac{10x^4}{a^4} - \frac{14x^5}{a^5} - \frac{8x^6}{a^6}\right) : \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)$;

30) $\left(\frac{6a}{x^2} - \frac{10ac}{3bx} - \frac{bd + 20ax}{bdx} + \frac{10ac}{3bx} + \frac{20a}{bd}\right) :$

$$: \left(\frac{6a}{x} - 1\right)$$

31) $\left(2 - \frac{5a}{x^2} + \frac{5ab^2x + 4a^2}{2x^4} - \frac{5a^2b^2}{2x^5}\right) :$

$$\left(1 - \frac{2a}{x^2} + \frac{5ab^2}{2x^3}\right);$$

32) $\frac{6x^n}{5a^2b} : 2x^{n-10};$

33) $\frac{m^4 - n^4}{ab} : (m+n)^2;$

34) $121a^2b^3c^4 : \frac{11ab^4c^2}{5m^2p};$

35) $\frac{5a(a^2+b^2)}{3cd^2} : \frac{4ab(a^2+b^2)^4}{9c^2d};$

36) $\frac{2p}{3q} - \frac{5p^2}{2q^2} + \frac{4p^3}{2q^2} : -\frac{2pq}{5};$

37) $\left(\frac{x}{4} - \frac{5}{6} - \frac{2}{5x} + \frac{7}{24x^2}\right) :$

$$:\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2x} - \frac{6}{5x^2} + \frac{7}{8x^3}\right);$$

38) $\left(\frac{a^6}{729b^6} - \frac{1}{c^6}\right) : \left(\frac{a}{3b} - \frac{1}{c}\right).$

ШЕСТИ ОДСЕК

62. Два израза којих је бројна вредност једнака, кад се вежу знаком једнакости (=) образоваће *једначину* (еквацију). н. пр: $a + 2x = b^2 - 4ac$.

Они изрази што су везани знаком једнакости зову се стране једначине, а количине што су на свакој страни са знаком + или — зову се чланови једначине.

Тако у једначини $a + 2x = b^2 - 4ac$, лева је страна $a + 2x$ а десна $b^2 - 4ac$, на левој су страни чланови a и $2x$, а на десној b^2 и $-4ac$.

Непознате количине бележимо са последњим писменима x, y, z, и w,

Једначина $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$ у математичком говору поставља задатак: *„да се изнађе број ког је половина за јединицу већа од њене трећине.*

Изказивање смисла неке једначине са обичним говором зове се *једначину разумети„* ; и обратно, кад је задатак изказан обичним говором па да се представи у виду једначине т. ј. да се пренесе у математички говор, каже се *поставити једначину* н. пр. Број 10 да се разложи у два дела (сабирка) којих производ износи 21; ово ћемо математичким говором изказати; $x(10 - x) = 21$, т. ј. ако је један део x, то је онај други $10 - x$, а производ је $= 21$; овим се тврди и горњи задатак.

Једначину разрешити значи: *непознате бројеве определити са познатима.* Ово постижемо тим, кад једначину тако изменемо да на једној страни (обично левој) стоји само непозната количина, а на другој (десној) стоје све само познати бројеви.

Вредност коју нађемо за непознату (непознате), зове се *корен* (корени) једначине,

У једначини $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$.

непознати вреди 6, зато велимо, да је 6, корен ове једначине. Тако су 3 и 7 корени једначине.

$$10x - x^2 = 21$$

Једначина у коју можемо ставити ма коју вредност за непознату количину, зове се *истоветна* (идентична) н. пр. $7+4 = 11$ или $\frac{12a}{6a} = 2$ или $p(r - s) = pr - ps$ и т. д.

Ако су у једначини чланови уређени по изложитељу непознатих количина, онда се управља *степен једначине* по највишем степеном изложитељу непознатог броја. Кад је овај изложитељ н. пр. 3, онда велимо за једначину да је *трећег степена*; ако је изложитељ 2, каже се *квадратна једначна* н. пр. $10x - x^2 = 21$, ако је 1, велимо да је једначина *првог степена*; овде морамо споменути, да је значајно што једначине првог степена могу имати само један корен; а једначине другог, трећег и т. д. степена два, три и т. д. корена.

Даље разликујемо *бројне* (нумеричне) и *алгебарске једначине*. Бројне (нумеричне) једначине зову се оне, кад су сачинитељи непознати колина *определени бројеви*, напротив алгебарске зовемо оне код којих су или сви сачинитељи или само неки *општи бројеви*.

По томе су:

$7x^2 + 8x = 29x$ (којих су корени 0 и 3)

и $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ (којих су корени 1, 2 и 3)

бројне (нумеричне) једначине:
а напротив $ax + b = c$ или

$px^2 - qx = 10$ алгебарске једначине.

Бројне (нумеричне) једначине ма да су ког степена могу се разрешити; напротив је доказано, да се алгебарске једначине немогу разрешити кад су више од 4-тог степена.

Разрешавање једначине првог степена са једном непознатом.

63 Једначину са једном непознатом разрешавамо, кад јој промененемо вид тако да дође на једну страну само непознати број, а на другу сви познати бројеви.

Ово се казује још и овако:

Једначину разрешити значи, изнаћи бројну вредност за непознату; коју ако заменемо у задату једначину, да ова исто ветна буде.

Тако је н. пр. у

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1 + x,$$

$$x = 12.$$

Ако сада ставимо за x број 12, па сведемо обе стране то ћемо добити истоветну једначину $13 = 13$.

Ово нам уједно показује и пробу, да видимо јели добро разрешена једначина.

Да можемо променути вид неке једначине, морамо се позвати на она основна правила, која смо у уводу навели.

Кад са једнаким бројевима извршимо једнаке рачунске примене‘ то ће и резултати бити једнаки. По томе дакле‘ кад једнаким бројевима једнаке бројеве додамо и сбирова су једнаки; кад од једнаких бројева једнаке одузмемо и разлике су једнаке; кад једнаке бројеве са једнакима помножимо производи су једнаки; исто тако добијамо једнаке количнике, кад једнаке бројеве са једнакима поделимо.

Зато ако је $a = b$
и $c = d$

то је
$$a + c = b + d \quad \ldots \quad (1$$
$$a - c = b - d \quad \ldots \quad (2$$
$$a \,.\, c = b \,.\, d \quad \ldots \quad (3$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \ldots \quad (4$$

64. Ова основна правила под (1 и (2 помажу нам, да ма који члан једначине, сједне стране преместимо на ону другу страну једначине што бива, кад јим променимо знаке, и то зовемо *пребацивање* чланова. Основно правило под (3 помаже нам, да ослободимо једначину од разломака, што бива, кад целу једначину т. ј. све чланове једначине помножимо са најмањим зајед. задржатељем њиових именитеља; а (4-то основно правило помаже нам, да непознату количину ослободимо од сачинитеља, кад поделимо са тим сачинитељем обе стране једначине.

Задате једначине разрешавамо дакле по овом реду;

I. Кад има у једначини разломака, треба да помножимо целу једначину са најмањим зајед. именитељом, па ћемо добити целе бројеве

II. Треба да пребацимо све чланове са непознатом количином налеву страну једначине

III. Треба да сведемо количине на обе стране једначине.

IV. Да поделимо једначину са сачинитељем непознате количине.

Примери:

1) $$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1 + x$$

Овде ћемо помножити са истоветном једначином $12 = 12$ па ћемо добити $6x + 4x + 3x = 12 + 12x$. И кад од ове одузмемо једначину $12x = 12x$,

то је

$$6x + 4x + 3x - 12x = 12 + 12x - 12x$$

и кад на обе стране једначине сведемо, то добијамо за $x = 12$,

2) $$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} - 4 = \frac{3 - x}{2} + \frac{19}{10}.$$

Да помножимо са једначином $30 = 30$;

то је $10x + 12x - 120 = 15\,(3 - x) + 57$

или $10x + 12x - 120 = 45 - 15x + 57$

кад пребацимо непознате чланове на леву, а познате на десну страну једначине и сведемо то је

$$37x = 222$$

подељено са $37 = 37$

$$x = \frac{222}{37} = 6$$

проба $\frac{6}{3} + \frac{2\,.\,6}{5} - 4 = \frac{3 - 6}{2} + \frac{19}{10}$

излази $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

3) $$4ab - \frac{mx}{d} = 1 - \frac{x}{b}$$

да помножимо са $bd = bd$

$$4ab^2d - bmx = bd - dx$$

Да додамо $dx - 4ab^2d = dx - 4ab^2d$

дакле $(d - bm)\,x = bd\,(1 - 4ab)$

да поделимо са $d - bm = d - bm$

$$x = \frac{bd\,(1 - 4ab)}{d - bm}$$

Проба $4ab - \frac{m}{d} \cdot \frac{bd\,(1 - 4ab)}{d - bm} =$

$$= 1 - \frac{1}{b} \cdot \frac{bd\,(1 - 4ab)}{d - bm}$$

т. j. $\frac{b\,(4ad - m)}{d - bm} = \frac{b\,(4ad - m)}{d - bm}$

4) $\frac{3a - x}{a + x} - b = \frac{a - x}{x} - \frac{bx}{a + x}$

Помножено са $x\,(a + x)$,

$$x\,(3a - x) - bx\,(a + x) =$$

$$= (a - x)\,(a + x) - bx^2$$

$$3ax - x^2 - abx - bx^2 = a^2 - x^2 - bx^2$$

Кад додамо $x^2 + bx^2$

$$3ax - abx = a^2$$

или $(3a - ab)\,x = a^2$

Кад поделимо са $(3a - ab)$ то je

$$x = \frac{a}{3 - b}$$

Проба:

$$\frac{3a - \frac{a}{3 - b}}{a + \frac{a}{3 - b}} - b = \frac{a - \frac{a}{3 - b}}{\frac{a}{3 - b}} - \frac{b \cdot \frac{a}{3 - b}}{a + \frac{a}{3 - b}}$$

даје $\frac{8 - 7b + b^2}{4 - b} = \frac{8 - 7b + b^2}{4 - b}$.

Задатци	*Разрешење*
1) $5x = 12 + 3x$	$x = 6$
2) $8x = 45 - x$	$x = 5$
3) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 35$	$x = 50$
4) $\frac{2x}{3} = 20 - \frac{4x}{9}$	$x = 18$
5) $ax + bx = c$	$x = \frac{c}{a + b}$
6) $ax = p + nx$.	$x = \frac{c}{a - n}$
7) $\frac{x - 2}{x - 3} = 2$	$x = 4$
8) $ax - h = x$	$x = \frac{h}{a - 1}$
9) $\frac{x}{a} + \frac{x}{29} = 9$	$x = 6a$
10) $\frac{x - a}{x - b} = \frac{b}{a}$	$x = a + b$
11) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11\frac{1}{2} - \frac{x}{8}$ . . .	$x = 12$
12) $ax + b^2 = a^2 - bx$	$x = a - b$
13) $a - \frac{a}{x} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{b}{x}\right)$ . . .	$x = 1$

Задатци | *Разрешење*

14) $\frac{x + 12}{x} - \frac{6}{x} = 5. \; . \; . \; .$ $\quad x = 1^{1}|_{2}$

15) $\frac{3x - 5}{8} + \frac{1 - 2x^2}{2} = 1 - x^2 \ldots\ldots$ $\quad x = 3$

16) $\frac{3}{c} + \frac{x^2 - ab}{bx} = \frac{4x - ac}{cx} \ldots$ $\quad x = \frac{b}{c}$

17) $\frac{ax}{b} + \frac{a(x - 1)}{2b} - \frac{3ax - 2b}{3b} = \frac{2}{3} \ldots.$ $\quad x = 1$

18) $am - 1 - ax + \frac{x}{m} = 0 \; . \; . \; . \; .$ $\quad x = m$

19) $(20 + x)(20 - x) = (x + 2)(46 - x) \ldots\ldots$ $\quad x = 7$

20) $2a - (a + c)\,x = (a - c)\,x. \ldots\ldots$ $\quad x = 1$

65. *Даљи примери.*

1) Који број ваља поделити са 8 а количника му помножити са 3, па да изађе 21 (разреш. $x = 56$

2) Који број има такво својство, да му је половина са 4 јединице већа од десетине? (разреш. $x = 10$).

3) Да се разреши једначина $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = 22$

(разреш. $x = 30$).

4) Да се изнађе број, кад му се 4 дода, а сбир са 10 раздели (т. ј, кад се од сбира једна нула изостави) и количник узме 9 пута па да изађе такав број који је само у 1 мањи од траженог броја. (разреш. 46)

5) Који је то разломак, кад му броитеља и са 4 јединице увећаног именитеља смањимо са 5 јединица да је раван $^3/_7$ (разреш. $^{11}|_{15}$).

6). Која прва на највишем месту лежећа цифра неког троцифреног броја смањеног у 396, има у остатку такав број, коме су цифре исте као и у задатом броју, но само у обрнутом реду; сем тога последње две цифре траженог броја да износе 71? (разреш. 5, дакле тражени бројеви 661).

7). Да се изнађе број ког је трећина, петина и седмина скупа равна 568. (разреш. 840).

8). Ако се неки број помножи по реду са $\frac{a}{c}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ и производи саберу, то се добија сбир k који је то број?

(разреш. $\frac{csqk}{asq + crq + csp}$

9). Рззложи број 80 у таква два дела, да, кад један део поделимо са 7, *а* други део са 8; да узађе први количник са 5 јединица већи од другог. (разреш. делови су: 56 и 24)

10) Кад од неког броја одузмем 1, а остатак поделим са 2, да то исто изађе, као кад би том броју 89 додао *а* сбир са 4 поделио, који је то број? (разреш. 91).

11.) Неки отац од 56 година има сина од 18 година, после колико година постаје отац трипута старији од сина? (разреш, после 1 године).

12). Неки син је сада 4 пута млађи од свог оца, који је сада 40 година. Пре колико година је био син 100 пута млађи од оца? (разреш. пре $9^{23}|_{33}$ год

13) Има таква 4 броја, кад поделимо други са првим, да изађе количник 1 и остатак 5; а кад 3-ћи са 2гим поделимо да изађе коичник 2 и остатак 3; и најпосле кад поделимо 4-ти са 3-ћим, да изађе количник 3 и остатак 13. А сбир сва четири броја да је раван 150. који су то бројеви? (разреш. 8, 13, 29. 100).

14.) Колико минута после 5 сати стоји на сату сказаљка што показује минуте тачно над сказаљком што показује сате? разреш. $27^{3}|_{11}$ минута после 5 сати).

15.) Да се најближим путем дође из Берлина у Париз треба 9·48 дана, ако се пређе дневно известан број миља; кад би сада дневно по 2·5 миља више прелазили, то би прешли речени пут за 7·9 дана. Колика је даљина између те две вароши?

Упутство, даљина је $= x$ миља; у првом случају начинили би дневно $\frac{x}{9 \cdot 48}$ миља, а у другом и т. д.

(разреш. 118·5 миља).

16). 18-тог Марта 1587. године од два брата један је имо двапут толико година колико је оном другом тада било; после 6 година рече старији млађем, имаћу једанпут и по толико година колико ти имаш, колико јим је онда година сваком било? (разреш. млађем 6 а старијем 12 год.)

17) Од два броја, један је у 87 јединица мањи од другог, али је шестоструки први у два већи од двоструког другог, Који су то бројеви? (разреш. 44 и 131).

18) Има један број с таким својством, кад му $^2/_3$ додамо и овај сбир са $^2|_3$ поделимо, а од количника $^2|_3$ одузмемо; да износи у остатку 2 пута $^2|_3$. Који је то број? (разеш. $^2|_3$).

19) 8 радника могу сазидати неки зид за 6 дана, а други 9 радника за 4 д на, Сада узме неки 6 радника од оних првих и 3 радника од оних других; за колико ће дана ови измешани радници речени зид сазидати? (разреш. за 4 $^4|_5$д.)

20) Да се изнађе такав број кад му додаш његову трећину да изађе 16.

Ако је захтевани број $= x$, то му је трећина $= \frac{x}{3}$, а пошто сбир из x и $\frac{x}{3}$ треба да буде $= 16$, то ће доћи уједначину $x + \frac{x}{3} = 16$, а одатле $x = 12$·

21) Четир лица A, B, C, и D имају да поделе 2000 # тако, да добије B у 20 # више од C, C у 48# више од D, а D у 64 # више од A колико ће добити свако лице?

Овде се поглавито тражи, колико ће добити A; да ставимо тога лица добит $=$ x #, то добијамо по смислу самога задатка.

D, (x + 64) #; C, (x + 64 + 48) = (x + 112) #;

и B, (x + 112 + 20) = (x + 132) #.

Овде су добитци појединих лица означени са непознатом x, а сбир колико сви добијају = 2000 #, зато постоји једначина:

$$x + (x + 64) + (x + 112) + (x + 132) = 2000$$

одкуда је $x = 423$

по томе добија $A = 423$

$B = 555$

$C = 535$

$D = 487$

2000

22) Један купи од неке робе известан број комада, сваки по $6f$ Пошто купац 25 комада остави за своју потребу, а остале комаде од те робе прода тако, да за сваки 4 комада добије $31f$; овим добије $25f$ преко целе куповне цене. Колико износи број купљених комада.

Кад ставимо број купљених комада = x, од којих је цена при куповини $6f$ од комада била; дакле цела куповна цена $6xf$.

25 комада употребио је купац за себе, зато му је остало још за продају (x — 25) комада свака 4 комада по $31f$. чини $\frac{x - 25}{4} \times 31$; а ово износи $25f$ више од куповне цене т. ј.

$6xf$. Зато је куповна цена

$\frac{x - 25}{4} \times 31 - 25$ а из тога тражена једначина.

Једначине првог степена са више непознатих.

$$6x = \frac{x - 25}{4} \times 31 - 25$$

$$x = 125$$

Једначина првог степена са више непознатих.

66 Једначине са 2, 3, 4 . непознате кажемо да су разрешене, кад за сваку непознату определимо вредност, а да би ово могли извршити треба да имамо онолико једначина, колико има непознатих количина. Једначине у овом случају морају имати то својство, да не зависе једна од друге и да не противу рече једна другој.

Да покажемо зашто морају ове једначине 1) бити независне једна од друге и 2) да не противу рече једна другој.

Ако су н. пр. задате једначине

$$x + y = 7$$

$$3x + 3y = 21$$

то би ове зависиле једна од друге ; јер кад,узмемо да је $x + y = 7$, то по себи сљедује, да је $3x + 3y = 3 . 7 = 21$.

Обе ове једначине показују једно исто : и тако представљају у строгом смислу само једну једначину. Исто то налазимо и кад ове 3 једначине

$$5x - 4y + 3z = 21$$

$$3x + 6y - z = 13$$

$$4x + y + z = 17$$

да су јим непознате x, y и z, неопредељена, јер је од ових једначина она 3-ћа изведена из две прве, које смо сабрали и од сбира узели половину. Овај други пример показује нам, да се неможе одма с првим погледом увидити ова зависност; но како почнемо једначине ове разрешавати ми ћемо одма ту зависност познати, јер ће нам показати истоветност, која недопушта никакав даљи рад, као п. пр. $2x - 3y = 2x - 3y$.

2) Једначине $2x - y = 3$

$$4x - 2y = 5$$

Ове једначине једна другој противу рече; јер кад знамо, да је $2x - y = 3$, то сљедује, да је

$$2 (2x - y) = 2 \cdot 3$$

т. ј. $4x - 2y = 6$.

Но и ово својство неможемо свагда одма да познамо, него нам се показује тек у даљем рачуну због недосљедних резултата, н. пр. кад се покаже, да је $0 = 4$ или том подобно.

Вештина, којом се једначине са више непознатих разрешавају, састоји се у томе, да изкључимо све непознате из рачуна осим једне, Ово се зове „*избацивање*“ (елиминирање).

Ово избацивање непознатих вршимо на разне начине, од којих ћемо овде навести:

I. Начин замене (супституције).

67 Ако су задате једначине:

$$5x + 6y = 27 \quad \ldots . (1$$

$$4x - 2y = 8 \quad \ldots . (2$$

Кад нађемо из оне (1 једначине.

$$x = \frac{27 - 6y}{5},$$

па ову вредност за x ставимо у једначину (2, то ћемо добити

$$4 \frac{27 - 6y}{5} - 2y = 8,$$

у којој једначини не долази непозната x.

Из ове једначине налазимо за $y = 2$.

Кад ову вредност за у заменемо у једну ма коју од задатих једначина, н. пр. у 2-гу, то је.

$$4x - 2 \cdot 2 = 8,$$

а из ове налазимо за $x = 3$.

Да је са овим вредностима за $x = 3$, $y = 2$, једначина добро разрешена, увериђемо се тако, кад видимо да су са овим бројним вредностима обе једначине истоветне.

II. Начин сравњивања (компарације).

68. Ако опет узмемо горњи пример:

$$5x + 6y = 27 \quad \ldots .. \quad (1$$

$$4x - 2y = 8 \quad \ldots .. \quad (2$$

Из обе ове једначине тражићемо ону непознату коју смо ради да избацимо, па ћемо узети вредности ове непознате као једнаке: тако ћемо добити само једну једначину с једном непознатом.

по томе је из 1) $y = \frac{27 - 5x}{6}$

„ 2) $y = \frac{4x - 8}{2}$

дакле и $\frac{27 - 5x}{6} = \frac{4x - 8}{2}$ а из тога је $x = 3$.

Да сада изнађемо вредност за y, треба ставити у једну ма коју једначину ону вредност за x што смо изнашли.

III. Начин сабирања или Одузимања.

69. Да избацимо y из обе једначине треба да помножимо јед. 1) са 2, а јед. 2) са 6, па ћемо добити

$$10x + 12y = 54$$

$$24x - 12y = 48$$

кад саберемо $34x = 102$

$$x = 3$$

или кад хоћемо да избацимо x, морамо помножити 1) са 4, и 2) са 5.

то је $20x + 24y = 108$

$$20x - 10y = 40$$

$$- \quad + \qquad -$$

одузето $34y = 68$

$$y = 2.$$

Кад овим начином разрешавамо једначине, треба ону непознату коју мислимо избацити, да множимо таквим бројем,

како ће у обе једначине добити једнаког сачинитеља. Па ако непозната коју желимо избацити има у обе једначине једнаке знаке, то ћемо једначине одузети. ако нема једнаке знаке, ми ћемо једначине сабирати.

Овај начин, осим што је најудобнији и најлепшије.

Да избацимо y морамо помножити 1) једначину са 2, а 2-гу са 6; осим тога могли би 1) једначину оставити као што је а другу помножити са 3. У опште треба да нађемо најмањег заједн. садржатеља за сачинитеља они непознати које смо ради избацити, па да тог садржитеља са сваким сачинитељем поделимо, а са одговарајућем количницима да помножимо једначине.

IV. Начин *Bézout*-ов

70. $5x + 6y = 27 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$

$4x - 2y = 8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$

Ако помножимо једну ма коју једначину н. пр, 1). са произвољним бројем m, и саберемо обе једначине, то је

$$(5m + 4) x + (6m - 2) y = 27m + 8$$

да сада y из једначине избацимо, треба да изберемо m тако, да је $6m - 2 = 0$, дакле овде $m = {}^1|_3$, онда остаје.

$$(5 . {}^1|_3 + 4) x = 27 \cdot {}^1/_3 + 8$$

или $x = 3$.

а кад би хтели да избацимо x морало би бити $5m + 4 = 0$, дакле би морали ставити

за $m = - {}^4/_5$,

и онда је $(6 \times (- {}^4|_5) - 2) y = 27 \times \left(- \frac{4}{5} \right) + 8$

или $y = 2$

71. примери са општим бројевима:

1) $$ax + by = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

$$a'x + b'y = c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2$$

Да по начину замене рачунамо налазимо из (1

$x = \dfrac{c - by}{a}$ и ово кад у једначину (2 заменимо

$$a' \cdot \frac{c - by}{a} + b'y = c'$$

$$a'c - a'by + ab'y = ac'$$

$$(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

кад се ово стави у једначину (1 онда је

$$ax + b \cdot \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = c$$

$$a\,(ab' - a'b)\, x = c\,(ab' - a'b) - b\,(ac' - a'c)$$

$$= ab'c - abc'$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Разрешено по III. начину:

$$ax + by = c. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

$$a'x + b'y = c'. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

Кад помножимо једначину (1 са b' и јед. (2 са b.

$$ab'x + bb'y = b'c$$

$$a'bx + b'by = bc'$$

$$- \qquad - \qquad\quad -$$

одузето $(ab' - a'b)\, x = b'c - bc'$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

или јед. (1 са a', а јед. (2 са a помножена,

$$aa'x + a'by = a'c$$

$$- \qquad - \qquad\quad -$$

$$aa'x + ab'y = ac'$$

одузето $(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2) $$\frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = {}^{1}/_{6} - 2x + 6.$$

Да разрешимо по начину *Bézout*-овом.

Кад обе једначине најпре уредимо

71. примери са општим бројевима:

1) $$ax + by = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

$$a'x + b'y = c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2$$

Да по начину замене рачунамо налазимо из (1

$x = \frac{c - by}{a}$ и ово кад у једначину (2 заменимо

$$a' \cdot \frac{c - by}{a} + b'y = c'$$

$$a'c - a'by + ab'y = ac'$$

$$(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

кад се ово стави у једначину (1 онда је

$$ax + b \cdot \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = c$$

$$a\,(ab' - a'b)\,x = c\,(ab' - a'b) - b\,(ac' - a'c)$$

$$= ab'c - abc'$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Разрешено по III. начину:

$$ax + by = c. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

$$a'x + b'y = c'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

Кад помножимо једначину (1 са b' и јед. (2 са b.

$$ab'x + bb'y = b'c$$

$$a'bx + b'by = bc'$$

$$- \quad - \quad -$$

одузето $(ab' - a'b)\, x = b'c - bc'$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

или јед. (1 са a', а јед. (2 са a помножена,

$$aa'x + a'by = a'c$$

$$- \quad - \quad -$$

$$aa'x + ab'y = ac'$$

одузето $(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2) $$\frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = {}^{1}/_{6} - 2x + 6.$$

Да разрешимо по начину *Bézout-овом.*

Кад обе једначине најпре уредимо

$$4x + 3y = 29 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \times m$$

то је $\quad 9x + y = 25.$

$$(4m + 9)\,x + (3m + 1)\,y = 29m + 25$$

$$3m + 1 = 0, \; m = -\,{}^1\!/_3.$$

$$(4 \,.\, -\,{}^1\!/_3 + 9)\,.\,x = 29\,.\,-\,{}^1\!/_3 + 25$$

$$x = 2$$

или за $\qquad 4m + 9 = 0, \quad m = -\,{}^9\!/_4.$

$$(3 \,.\, -\,{}^9\!/_4 + 1)\,.\,y = 29\,.\,-\,{}^9\!/_4 + 25$$

$$y = 7\,.$$

Кад би ове једначине у место сабирања, одузели, онда би изашло

$$(4m - 9)\,x + (3m - 1)\,y = 29m - 25$$

и за $\qquad 3m - 1 = 0, \quad m = {}^1\!/_3.$

$$(4\,.\,{}^1\!/_3 - 9)\,.\,x = 29\,.\,{}^1\!/_3 - 25\,,$$

из тога $\qquad x = 2$

или за $\qquad 4m - 9 = 0, \qquad m = {}^9\!/_4$

$$(3\,.\,{}^9\!/_4 - 1)\,y = 29\,.\,{}^9\!/_4 - 25$$

$$y = 7.$$

дакле исте вредности као и пре.

3) $\quad x + y = 50 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad$ (1

$$3^4\!/_5\,x + 4^1\!/_2\,y = 211 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2$$

по начину сравњивања.

Прво је $\qquad x + y = 50 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad$ (3

$$38x + 45y = 2110 \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (4$$

из $\quad$ (3 $\qquad x = 50 - y$

" $\quad$ (4 $\qquad x = \dfrac{2110 - 45y}{38}$

Зато је $\quad 50 - y = \dfrac{2110 - 45y}{38}$

а из тога $\quad y = 30\,,$

или из $\;$ (3 $\quad y = 50 - x$

" $\quad$ (4 $\quad y = \dfrac{2110 - 38x}{45}$

$$50 - x = \frac{2110 - 38x}{45}$$

$$x = 20.$$

Да би се о томе уверили можемо за $x = 20$ и $y = 30$ заменути у јед. (1.

$$20 + 30 = 50, \qquad \text{или} \qquad 50 = 50$$

$$3^4\!/_5\,.\,20 + 4^1\!/_2\,.\,30 = 211 \qquad \text{или} \qquad 211 = 211.$$

видимо да су обе једначине истоветне, зато велимо да су добро разрешене.

Примеба.

Кад би заменули изнађене вредности само у једну једначину, па и кад би истоветна једначина изашла, још неби могли тврдити да је истинита и добра. Зато морају бити обе једначине истоветне.

72. Задатци, који се своде на једначине с две непознате.

1) Да се нађу два броја, којих је сбир $= a$, и којих је разлика $= b$.

Ако означимо ове бројеве један са x,
а други са y,

то је $\quad x + y = a$

$$x - y = b$$

сабрано $\quad 2x = a + b$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

одузето $\quad 2y = a - b$

$$y = \frac{a - b}{2}$$

На једначине у горњем облику често долазимо, и код њих је значајно, да је већи број x раван половини суме више половини разлике.

2) Један чиновник прима своју плату у 910 талира из две различите касе, и то прима из једне за 5 месеца толико, колико из друге за 8 месеца, колико прима он из сваке касе особено?.

Кад означимо његову плату из обе касе са x и y, то је са свим јасно да је $x + y = 910$ тал. по првом услову.

Даље је месечна плата из једне касе $\frac{x}{12}$, дакле за 5 месеца $= 5 . \frac{x}{12}$, из друге касе месечно $\frac{y}{12}$, дакле за 8 месеца

$$= 8 \frac{y}{12},$$

који изрази треба да су једнаки по другом услову, дакле имамо ове две једначине.

$$x + y = 910$$

$$5 \frac{x}{12} = 8 . \frac{y}{12}$$

или $\quad x + y = 910$

$$5x - 8y = 0$$

разрешено по једном од показаних начина сљедује

$$x = 560, \; y = 350$$

Овде је заиста $560 + 350 = 910$.

Месечне плате из обе касе односно су

$46^2/_3$ т. и $29^1/_6$ т.

зато је $5 . \; 46^2/_3 = 233^1/_3$

и $8 . \; 29^1/_6 = 233^1/_3$;

које савршено одговара другом услову.

Једначине са више непознатих

73. Задатци са више непознати количина које треба да определимо, могу се само тако разрешити, кад можемо да поставимо исто толико једно од других независећи једначина. Кад мање једначина можемо да поставимо но што има непознати, то је задатак неопредељен.

Ако назовемо непознате x, y и z, то је

н. пр. $\quad 3x - 5y + 9z = 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$

једначина са 3 непознате скоро са свим неопредељена. И овде као и код једначина са две непознате има небројно много разрешења.

Ако са овом доведемо у свезу још једну једначину као

$$x - 15y + 2z = 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

то опет једначине (1 и (2 неће дати опредељене вредности за x, y и z, јер мора једна од непознатих остати произвољна, кад би хтели да изведемо оне две друге.

Сви начини што смо навели при разрешавању једначина са 2 непознате, остаће исти и при разрешавању једначина са три или више непознати. Да ово докажемо, навешћемо пример који ћемо разрешити на сва 4 начина.

74. По начињу замењивања.

$$5x - 6y + 4z = 15 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

$$7x + 4y - 3z = 19 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

$$2x + y + 6z = 46 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

из (1. сљедује је $\quad x = \dfrac{15 + 6y - 4z}{5}$

и кад ову вредност ставимо у (2 и (3 ,

$$7. \frac{15 + 6y - 4z}{5} + 4y - 3z = 19$$

$$2. \frac{15 + 6y - 4z}{5} + y + 6z = 46$$

или сведено

$$62y - 43z = -10$$

$$17y + 22z = 200$$

ове две једначине кад разрешимо по једном ма ком начину,

дају $\qquad y = 4$ и $z = 6$.

Кад поставимо ове вредности у једну од оне три једначине рецимо у (3 то је

$$2x + 4 + 6.6 = 46$$

$$x = 3$$

вредности $x = 3$, $y = 4$ и $z = 6$ чине задоста трима једначинама.

Кад има 3 једначине ми ји сводимо на резрешавање само са две непознате, што ће вредити за све начине.

75. По начину сравњивања.

$$5x - 6y + 4z = 15 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

$$7x + 4y - 3z = 19 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

$$2x + y + 6z = 46 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

Кад нађемо једну непознату н. пр. x из све три једначине, то је

из (1 $x = \dfrac{15 + 6y - 4z}{5}$

„ (2 $x = \dfrac{19 - 4y + 3z}{7}$

„ (3 $x = \dfrac{46 - y - 6z}{2}$

Кад сравнимо ове вредности то ћемо добити једначине,

$$\frac{15 + 6y - 4z}{5} = \frac{19 - 4y + 3z}{7}$$

$$\frac{15 + 6y - 4z}{5} = \frac{46 - y - 6z}{2}$$

или $\qquad 62y - 43z = -10$

$$17y + 22z = 200$$

Одкуда налазимо y и z, а помоћу горњи једначина налазимо и x.

Приметба. Овде видимо, да се овај начин разрешава с применом основног правила: две количине равне трећој, равне су међу собом.

76. Начин сабирања и одузимања.

$$5x - 6y + 4z = 15 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1$$

$$7x + 4y - 3z = 19 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2$$

$$2x + y + 6z = 46 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3$$

Да помножимо јед. (1 са 3 а (2 са 4,

$$15x - 18y + 12z = 45$$

$$28x + 16y - 12z = 76$$

сабирањем $43x - 2y \qquad = 121$

Ако сада помножимо једначину (2 са 2 и (3 непромениуту оставимо

$$14x + 8y - 6z = 38$$

$$2x + y + 6z = 46$$

Сабирано $\qquad 16x + 9y \quad - \quad = 84.$

Тако смо добили једначине:

$$43x - 2y = 121$$

$$16x + 9y = 84$$

Које имају непознате x и y. Из којих слeдује

за $\qquad x = 3, \qquad y = 4,$

и сада можемо изнаћи из једначина (1, (2, (3 количину z.

Сада ћемо истим начином из све три једначине избацити x.

Најпре из (1 и (2. једначина (1 помножена са 7, и (2 помножена са 5.

$$35x - 42y + 28z = 105$$

$$35x + 20y - 15z = 95$$

одузимањем $\qquad 62y - 43z = -10$

Из (2 и (3 . (2 јед. помнож. 2, (3 са 7.

$$14x + 8y - 6z = 38$$

$$14x + 7y + 42z = 322$$

одузимањем $\qquad y - 48z = -284;$

Зато је $\quad \begin{cases} 62y - 43z = -10 \\ y - 48z = -284 \end{cases}$

отуда $\qquad y = 4, \; z = 6.$

77. Начин *Bézout*-ов.

$$5x - 6y + 4z = 15 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1$$

$$7x + 4y - 3z = 19 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2$$

$$2x + y + 6z = 46 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3$$

Да помножимо две ма које једначине с произвољним бројевима m и n, рецимо јед. (1 са m, а (2 са n;

$$5mx - 6my + 4mz = 15m$$

$$7nx + 4ny - 3nz = 19n$$

$$2x + y + 6z = 46$$

Сабирањем $(5m + 7n + 2)\,x + (-6m + 4n + 1)\,y +$

$$+ (4m - 3n + 6)\,z = 15m + 19n + 46. \; . \; . \; . \qquad (4$$

Ако сада желимо, да определимо најпре x, то ћемо изабрати произвољне бројеве m и n тако, да буде

$$-6m + 4n + 1 = 0$$

и

$$4m - 3n + 6 = 0$$

или је

$$6m - 4n = 1$$

$$4m - 3n = -6$$

од куда је $m = {}^{27}/_{2}$ и $n = 20$.

Кад ставимо ове вредности у јед. (4, то је.

$$(5.{}^{27}/_{2} + 7.20 + 2).\, x = 15{}^{27}/_{2} + 19.20 + 46$$

т. j. $x = 3$

Кад ову вредност заменемо у јед. (1 и (2, добијамо ове две једначине

$$6y - 4z = 0$$

$$4y - 3z = -2$$

од куда налазимо $y = 4$ и $z = 6$, као што смо и пре нашли.

Да узмемо још и ове израђене примере:

1) $2x - 3y + 2z = 13 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1$

$4u - 2x = 30 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2$

$4y + 2z = 14 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3$

$5y + 3u = 32 \;.\;.\;.\;.\;.\; (4$

Овде су 4 једначине са 4 непознате количине. У овим једначинама видимо што се често догађа, да у свакој једначини

недолазе све непознате, што чини да се задатци оваквн много удобније разрешавају. Узмимо сада у овом примеру начин сабирања и одузимања, па избацимо најпре количину u, онда ћемо најпре узети у обзир јед. (2 и (4.

Кад помножимо јед. (2. са 3. а јед (4 са 4, то је

$$12u - 6x = 90$$

$$20y + 12u = 128$$

одизимањ $\quad 6x + 20y = 38$

или $\quad 3x + 10y = 19.$

даље ћемо узети ове 3 једначине:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4y + 2z &= 14 \\ 3x + 10y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Из прве и друге једначине кад избацимо z одузимањем

следује $\quad 2x - 7y = -1$

дакле
$$\left.\begin{aligned} 2x - 7y &= -1 \\ 3x + 10y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

одкуда је $x = 3$ и $y = 1$.
кад се $y = 1$ постави у $4y + 2z = 14$ добијамо $z = 5$.
и $y = 1$ „ у 4) једначину даје $u = 9$.

2) $\frac{5}{z} = \frac{7}{x-5}$; $\frac{9}{y} = \frac{11}{z-9}$; $\frac{13}{x} = \frac{15}{y-13}$

ове једначине кад уредимо:

$$\left.\begin{aligned} 5x \qquad - 7z &= 25 \\ + 11y - 9z &= -81 \\ 15x - 13y \qquad &= -169 \end{aligned}\right\}$$

Ако сада желимо, да определимо најпре x, то ћемо изабрати произвољне бројеве m и n тако, да буде

$$-6m + 4n + 1 = 0$$

и

$$4m - 3n + 6 = 0$$

или је

$$6m - 4n = 1$$

$$4m - 3n = -6$$

од куда је $m = {}^{27}/_{2}$ и $n = 20$.

Кад ставимо ове вредности у јед. (4, то је.

$$(5.{}^{27}/_{2} + 7.20 + 2).\, x = 15{}^{27}/_{2} + 19.20 + 46$$

т. ј. $x = 3$

Кад ову вредност заменемо у јед. (1 и (2, добијамо ове две једначине

$$6y - 4z = 0$$

$$4y - 3z = -2$$

од куда налазимо $y = 4$ и $z = 6$, као што смо и пре нашли.

Да узмемо још и ове израђење примере:

1) $2x - 3y + 2z = 13 \;.\;.\;.\;.\;.\;(1$

$4u - 2x = 30 \;.\;.\;.\;.\;.\;(2$

$4y + 2z = 14 \;.\;.\;.\;.\;.\;(3$

$5y + 3u = 32 \;.\;.\;.\;.\;.\;(4$

Овде су 4 једначине са 4 непознате количине. У овим једначинама видимо што се често догађа, да у свакој једначини

недолазе све непознате, што чини да се задатци овакви много удобније разрешавају. Узмимо сада у овом примеру начин сабирања и одузимања, па избацимо најпре количину u, онда ћемо најпре узети у обзир јед. (2 и (4.

Кад помножимо јед. (2. са 3. а јед (4 са 4, то је

$$12u - 6x = 90$$

$$20y + 12u = 128$$

одизимањ

$$6x + 20y = 38$$

или

$$3x + 10y = 19.$$

даље ћемо узети ове 3 једначине:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4y + 2z &= 14 \\ 3x + 10y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Из прве и друге једначине кад избацимо z одузимањем

сљедује $2x - 7y = -1$

дакле

$$\left.\begin{aligned} 2x - 7y &= -1 \\ 3x + 10y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

одкуда је $x = 3$ и $y = 1$.

кад се $y = 1$ постави у $4y + 2z = 14$ добијамо $z = 5$.
и $y = 1$ „ у 4) једначину даје $u = 9$.

2) $\frac{5}{z} = \frac{7}{x - 5};\quad \frac{9}{y} = \frac{11}{z - 9};\quad \frac{13}{x} = \frac{15}{y - 13}$

ове једначине кад уредимо:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 7z &= 25 \\ +11y - 9z &= -81 \\ 15x - 13y &= -169 \end{aligned}\right\}$$

избацимо z $\left.\begin{array}{l} 45x - 63z = 225 \\ 77y - 63z = -567 \end{array}\right\}$

одузимањем $45x - 77y = 792$

из $\left.\begin{array}{l} 45x - 77y = 792 \\ 15x - 13y = -169 \end{array}\right\}$

сљедује $x = -40\frac{509}{570}$; $y = -34\frac{7}{38}$

кад заменемо x у јед. $5x - 7z = 25$ добијамо $z = -32\frac{89}{114}$

3) Нека кућа у вредности од 3000# троици је понуђена на продају, али ниједан од тројице купаца неимаде довољно капитала за куповину те куће. A је требао још половину од B; B још $^1/_3$ од C; а C још $^1/_4$ од A. Колико је сваки од њи твојице имао капитала?

Ако означимо капитале ова три лица A, B и C, са x. y и z, онда ће по првом услову требати A још $^1/_2$ капитала што има B, па да изађе сума 3000#, одкуда сљедује једначина

$$x + {}^y/_2 = 3.000$$

исто је тако по другом услову $y + {}^z/_3 = 3000$
и по трећем „ $z + {}^x/_4 = 3000$

ове једначине уређене дају

$$2x + y = 6000$$

$$3y + z = 9.000$$

$$x + 4z = 12.000$$

Кад избацимо из друге и треће једначине z, то је:

$x - 12y = -24.000$ и кад ову једначину спојимо са
$2x + y = 6000$,

онда налазимо за

$$x = 1920,\ y = 2160 \text{ и } z = 2.520$$

које три вредности чине задоста горњем задатку.

Диофантови Задатци првог степена.

78. Кад кад бива да у задатцима налазимо више непознати (које ваља определити) по што има једначина, па ако у овом случају положимо још и тај услов, да треба изнаћи вредности за непознате у положним и целим бројевима, онда зовемо оваке задатке *Диофантови*[1] *задатци.*

Диофантове или неодређене једначине јесу оне, које дакле имају више од једне непознате, или су систем једначина којих је број мањи од броја у њима налазећих се непознати. Диофантове једначине делимо као и алгебарске у оне са 1, 2. и т. д. степеном. Тако је дакле диофантов задатак, да се изнађу вредности за непознате у целим бројевима (који ће задоста чинити једначинама) ако су сачинитељи једначина цели бројеви. Разрешавање оваквог питања предмет је неодређене аналитке, која је у најтешњој вези са вишом аритметиком.

Тако н. пр кад већ знамо, да је неки задатак неодређен и кад већ поставимо једначине које одговарају условима задатка, онда ћемо овако радити. Треба да из задатих једначина по оним познатим начинима избацимо толико непознати, колико се може; те да овим путем добијемо само једну једначину, са колико је могуће мањим бројем непознати. У овој једначини узећемо само једну количину као непознату, а за остале непознате да ставимо произвољне вредности, па ће овако бити одређена она непозната.

Ово ће нам сљедећи пример још боље објаснити.

Пример. Из једначине $ax + by = c$, да одредимо вредности за x и y. Из ове једначине налазимо

$$x = \frac{c - by.}{a}$$

---

[1] Диофант славни математичар Александријски, који је живео у столећу Антонине [150 — 200 год. после хр.] а по другима у другој половини IV. века т. ј. у времену цара Јулијана. Од његовог великог дела [13 књига) «*Аритметика*», налазе се још 6 књига (што је издао Bachet у паризу 1621. год.) и превео Schulz-e у Берлину 1821. год.); држи се да је диофант пронашао Алгебру, но ако му се баш и неможе та слава приписати, опет за служније он особито признање за врло многе проналаске у Аритметици.

I. Пошто се овде за y могу ставити небројне многе разне вредности, зато ћемо добити и за x небројно многе разне вредности, јер се у задатку никаква ближа условија нису поставила. —

II. Можемо још и овај услов ставити, да за x и y изнађемо само положне бројне вредности.

Овде ћемо по реду навести све могуће случајеве. Ако треба да изнађемо за x положне бројеве.

1) Ако су $a, b, c,$ у једначини положни бројеви. Онда мора овде бити $by < c$ или $y < \frac{c}{b},$ а вредности за y лежаће извесно између 0 и $\frac{c}{b}$.

2) Ако је у постављеној једначини задато b као одречно онда је $x = \frac{c + by}{a}$, где се могу ставити за y сви могући бројеви између 0 и ∞.

3) Ако су најпосле b и c одречни, онда би било $x = \frac{by - c}{a},$ где је извесно $by > c$ или $y > \frac{c}{b},$ кад би само положне вредности мораде за x да изађу. Вредности за y у овом случају налазе се између $\frac{c}{b}$ и ∞.

III. Да би овај задатак још више ограничили, ми ћемо предпоставити, да се изнађу за x и y само целе положне бројне вредности.

Овде је задатак само тако могућан, кад су a и b относно прости бројеви,

Ако узмемо, да a и b имају општег чинитеља $f > 1$ и кад би било $a = mf$ и $b = nf$, онда би добили по начину замене $mfx + nfy = c,$

и подељено са f

$$mx + ny = \frac{c}{f}.$$

А пошто су a, b и c относно прости бројеви, јер смо предпоставили, да је једначина $ax + by = c$ доведена у најпростији вид, то онда и c није раздељиво са f, што би требало да буде пошто x и y, па и $mx + ny$ треба да означе целе

бројеве. Ако дакле a и b имају заједничког чинитеља, онда се задатак у захтеваном смислу неможе разрешити.

Зато ћемо узети, да су a и b относно прости бројеви.

Овде су опет два случаја могућа, јер или је c с једним од сачинитеља н. пр. са a раздељиво или није раздељиво. У првом случају поставићемо $\frac{c}{a} = q$, где је q ма какав цео број, тако је

$$x = \frac{c - by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{by}{a} = q - \frac{by}{a}$$

Ако треба да је x цео број, онда би се могли заменути за y само садржатељи од a, па зато ћемо ставити $y = a\ r$, где се може узети за r сваки произвољни цео број, који је $< \frac{q}{b},$ па да x неиспадне одречно. Кад би овде било $q < b$, дакле $r < 1$, онда се задатак у постављеном смислу неби могао разрешити. У случају да је b задато одречно, дакле, даје

$$x = \frac{c + by}{a} = q + \frac{by}{a},$$

могли би поставити за r сваки могући цео број.

Ако c није раздељиво, ни са a ни са b, опет се може задатак разрешити подобним начином, као што неки примери показују.

Н. пр. једначину $8x + 12y = 17$ неможемо разрешити у положним и целим бројевима, него ћемо узети једначину $5x + 7y = 170$.

Са овом једначином треба овако поступати:

1) $\quad 5x = 170 - 7y$

$\quad x = 34 - y - {}^{2y}/_5$

Пошто су овде x и y цели бројеви, онда мора и ${}^{2y}/_5$ бити цео број, рецимо $= a$, дакле је ${}^{2y}/_5 = a$, а одатле

$$y = \frac{5a}{2} = 2a + \frac{a}{2},$$

истим је узроком и $\frac{a}{2}$ цео број, узмимо н. пр. $\frac{a}{2} = b$, т. ј. $a = 2b$; онда сљедује за $y = 5b$ и за $x = 34 - 7b$

Из $x = 34 - 7b$ и $y = 5b$ } сљедују све оне положне и целе бројне вредности за x и y које чине задоста једначини $5x + 7y = 170$ ако би узимали за b вредности по реду из природног реда бројева, све дотле, док је x и y положно.

узмимо да је $b = 1$ $\begin{cases} x = 27 \\ y = 5 \end{cases}$, $b = 2$ $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$,

$$b = 3 \begin{cases} x = 13 \\ y = 15 \end{cases}, \quad b = 4 \begin{cases} x = 6 \\ y = 20. \end{cases}$$

2) Да се разреши у целим и положним бројевима јед.

$$17x - 29y = 100.$$

Кад опет узмемо непознату с мањим сачинитељем, то је

$$x = \frac{29y + 100}{17} = y + 5 + \frac{12y + 15}{17}.$$

Па како морају бити x и y цели бројеви, онда мора и

$$\frac{12y + 15}{17} \text{ бити цео број.}$$

Ставимо $\dfrac{12y + 15}{17} = a$,

дакле $12y = 17a - 1$

а $y = a - 1 + \dfrac{5a - 3}{12}$.

Па исто тако $\dfrac{5a - 3}{12} = b$,

то је $5a = 12b + 3$ и $a = 2b + \dfrac{2b + 3}{5}$, $\dfrac{2b + 3}{5} = c$,

то је $2b = 5c - 3$. $b = 2c - 1 + \dfrac{c - 1}{2}$ и $\dfrac{c - 1}{3} = d$

даје напослетку $c = 3d + 1$.

Тако смо нашли по реду:

$$x = y + 5 + a$$
$$y = a - 1 + b$$
$$a = 2b + c$$
$$b = 2c - 1 + d$$
$$c = 2d + 1.$$

Кад овде од назади почнемо замењивати, то ћемо добити

$$x = 29d + 11$$
$$y = 17d + 3$$

Овде сљедује за d свака положна и цела вредност. И тако ће излазити за x свакад таке вредности, које ће задоста чинити задатој једначини.

Ако сада узмемо за $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$\begin{cases} x = 11, 40, 69, 98, 127, 157 \\ y = 3, 20, 37, 54, 71, 88. \end{cases}$$

3) Да се изнађе број раздељив са 11 тако, да буде количник цео број, а кад се подели са 7, да заостане остатак 3.

Узмимо да је тражени број N, па кад се подели

$$N : 11 = x \quad \text{и} \quad N : 7 = y + {}^3/_7$$

или $N = 11x$ и $N = 7y + 3$,

тако ће постати једначина

$$11x = 7y + 3 \quad \text{или}$$
$$11x - 7y = 3$$

Ако сада тражимо по пређашњем начину положне и целе бројне вредности што би задоста чиниле овој једначини, то је:

$$x = 6,\ 13,\ 20,\ 27,\ 34,\ 41.$$

$$y = 9,\ 20,\ 31,\ 42,\ 53,\ 64.$$

Па зато је по једном или другом услову,

$$N = 69,\ 143,\ 220,\ 297,\ 374,\ 451.$$

79. Да се вратимо на пређашње задатке, па да непосредним путем из $(n - 1)$ једначине определимо n непознати. У овом случају тражићемо да избацимо $(n - 2)$ непознате, и да заостане само једна једначина са две непознате. Ову добијамо по § 78 изражену са заједничком и произвољном писменом количином. Сада помоћу две опште вредности налазимо заменом неку трећу непознату опет изражену са помоћним бројем и т. д. док све непознате не буду изражене једном истом писменом количином.

Неколико примера ово ће боље објаснити.

1. $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 40 \\ x + 2y - 5z &= 41 \end{aligned}\right\}$

избачено z, $16x - 3y = 386$, одавде је,

$$x = 3a + 2 \quad \text{и} \quad y = 16a - 118$$

кад се ове вредности ставе у једну од горњих једначина, то је $z = 7a - 53$.

Опште вредности у овом су случају

$$x = 3a + 2$$
$$y = 16a - 118$$
$$z = 7a - 53$$

Ако сада хоћемо да за x, y и z важе само положне вредности, то се мора одпочети са $a = 8$, и онда је $x = 26$, $y = 10$, $z = 3$ и т. д.

Ако је систем једначина само са две непознате, онда се немора ништа избацити, а у осталом се ради онако исто.

2)
$$11x - 9y = -1$$
$$9y - 7z = -2$$
$$7z - 5u = -2$$

Узмимо најпре $11x - 9y = -1$ за себе то је

$$\left.\begin{aligned} x &= 9b + 4 \\ y &= 11b + 5 \end{aligned}\right\}$$

ставимо y у другу једначину, то је

$$7z = 9y + 2 = 99b + 47,$$

$$z = 14b + 6 + \frac{b + 5}{7} = 14b + 6 + c.$$

$$\frac{b + 5}{7} = c, \quad b = 7c - 5; \quad \text{дакле } z = 99c - 64.$$

Ова вредност кад се стави у трећу једначину,

$$5u = 7z + 2 = 693c - 446,$$

$$u = 138c - 89 + \frac{3c - 1}{5} = 138c - 89 + d$$

$$\frac{3c - 1}{5} = d, \quad c = d + \frac{2d + 1}{3}$$

$$\frac{2d + 1}{3} = e, \quad d = e + \frac{e - 1}{2} \quad \text{и најпосле}$$

$$\frac{e - 1}{2} = f, \ e = 2f + 1$$

и тако је
$$d = 3f + 1$$
$$c = 5f + 2$$
$$b = 35f + 9$$

И кад ово заменимо у x, y, z и u,

$$\left.\begin{aligned} x &= 315f + 85 \\ y &= 385f + 104 \\ z &= 495f + 134 \\ u &= 693f + 188 \end{aligned}\right\}$$

Задатим једначинама учиниће се задоста ма коју вредност да поставимо за f, као што се то видити може из сљедујућих једначина:

$$11\,(315f + 85) - 9\,(385f + 104) = -1$$

$$9\,(385f + 104) - 7\,(495f + 134) = -2$$

$$7\,(495f + 134) - 5\,(693f + 188) = -2$$

80. Да разгледамо још један случај неодређеног задатка, узећемо сада још једначине у овом виду

$$ax + by + cz = d,$$

и потражимо да се положне и целе вредности изнађу за x, y и z које чине задоста једначини.

Како ваља овде поступати показаћемо примером.

Ако има да се разреши

$$7x - 18y - 4z = 3 \;.\;.\quad (1$$

За ову једначину сљедује $\quad x = 18c - 5 = g$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = 7c - 2 = h$

Кад помножимо $7g - 18h = 1$ са $3 + 4z$

то је: $\qquad 7g\,(3 + 4z) - 18h\,(3 + 4z) = 3 + 4z.$

Ова једначина постаје истоветна, кад ма коју вредност ставимо за z.

Ову последњу једначину пишемо још

$$7\,(3g + gz) - 18\,(3h + 4hz) - 4z = 3 \;.\;.\;.\;.\quad)\; 2$$

И кад се сравни са првом задатом једначином, то сљедује:

$$\left\{\begin{aligned} x &= g\,(3 + 4z) \\ y &= h\,(3 + 4z) \\ z &= z \end{aligned}\right.$$

Тако би имали н. пр. за

$$c = 1,\; g = 13,\; h = 5\,;$$

узмимо још за $\qquad z = 6$, то је

$$x = 13\,(3 + 4\,.\,6) = 351\,,$$

$$y = 5\,(3 + 4\,.\,6) = 135.$$

Једначина $7\,.\,351 - 18\,.\,135 - 4\,.\,6 = 3$ заиста је истоветна.

Можемо за x и y још и друге обрасце (формуле) поставити, јер кад додамо јед. (2. $18m$ и ову исту количину одузмемо,

то је $\qquad 7\,(3g + 4gz + 18m) - 18\,(3h + 4hz + 7m) - 4z = 3.$

Ова једначина остаје истоветна, ма коју вредност да ставимо за m, и тако добијамо за x и y ово:

$$x = g\,(3 + 4z) + 18m$$

$$y = h\,(3 + 4z) + 7m.$$

Тако добијамо н. пр. кад се узму пређашње вредности

$$g = 13,\; h = 5, \text{ и } z = 6, \text{ за } m = -10\,,$$

$$x = 171,\; y = 65 \text{ и } z = 6.$$

Примери:

(разреш.)

1) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{4} = 11 + \dfrac{x}{5}\;.\;.\quad x = 25\,\dfrac{5}{28}$

2) $ax + b = cx + d\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad x = \dfrac{d - b}{a - c}$

3) $46 + x = (11 + x) + (9 + x) \; \ldots \qquad x = 26$

4) $\dfrac{a}{a + x} = \dfrac{b}{a - x} \; \ldots\ldots \qquad x = \dfrac{a\,(a - b)}{a + b}$

5) $\dfrac{x}{m} + \dfrac{x}{2m} + \dfrac{x}{3m} + \dfrac{x}{4m} = x + a \ldots \qquad x = \dfrac{12am}{25 - 12m}$

6) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + 45 = 448 \ldots \qquad x = 76.$

7) $(x - a)\,(x - b) = (2a - x)\,(b - x) + c \ldots \quad x = b + \dfrac{c}{a}$

8) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 65 - \dfrac{x}{4} \; \ldots\ldots \qquad x = 60$

9) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{x + 1}{9} + 3 \; \ldots\ldots\ldots \qquad x = 70$

10) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{5} + 3x - 29 = \dfrac{5x}{6} - 2x + \dfrac{9x}{2} - 7.$ раз. $x = 60$

11) $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{2x}{3} + 20 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad x = 240$

12) $\dfrac{5x}{12} - \dfrac{4x}{3} - 13 = \dfrac{7}{8} - \dfrac{13x}{6} \; \ldots \qquad x = 11\frac{1}{10}$

13) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{7} + \dfrac{x}{12} + 9 = x \; \ldots \qquad x = 84$

14) $\dfrac{(5 - x)\,(6 + x) + x^2}{2} = \dfrac{15x}{4} - 3x. \; \ldots \qquad x = 12$

15) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{b} + \dfrac{x}{c} - d = mx + f \ldots$

$$x = \frac{abc\,(d + f)}{bc - ac + ab - abcm}$$

16) $\dfrac{4\,(3x - 7)}{2} - \dfrac{2\,(x + 3/2)}{5} = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{4}\,(x - 1/3) \ldots$

$$x = \frac{169}{361}$$

17) $\dfrac{ax}{b} - \dfrac{2m^2x}{ab} + 4a = \dfrac{4bm^2x}{a^3} - \dfrac{5a^3}{b^2} + \dfrac{2m^2}{a} - 3b.$

$$x = \frac{a^2\,(2b^2m^2 - 5a^4 - 3ab^3 - 4a^2b^2)}{b\,(a^4 - 2a^2m^2 - 4b^2m^2)}$$

18) $\dfrac{4ab}{a - b} + \dfrac{(2a - b)\,x}{a - b} + \dfrac{ab^2}{(a - b)^2} = 3x \; \ldots$

$$x = \frac{ab\,(4a - 3b)}{a^2 - 3ab + 2b^2}$$

19) $\dfrac{3\,(x - 1)}{7} + \dfrac{4\,(3 - x)}{5} = 6 - \frac{1}{2}\,(x + 6) \ldots \qquad x = 8$

20) $4x - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x}{2} + 2\right) = 1 - \dfrac{3}{5}\,(2 - 4x) \ldots \quad x = \dfrac{52}{49}$

21) $\dfrac{2a - b + 4x}{3x + a} = \dfrac{4x - b}{3x - b} \; \ldots\ldots \qquad x = \dfrac{b\,(a - b)}{2\,(a - 2b)}$

22) $\dfrac{2a - d + x}{3x + c} - \dfrac{d}{5n} + g = \dfrac{4x - d}{3x + c}.$

$$x = \frac{cd - 5cgn - 10an}{3\,(5gn - d - 5n)}$$

23) $\left.\begin{aligned} 13y - 5x &= 6 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$

24) $\left.\begin{aligned} x + y &= 360 \\ \frac{8x}{5} - \frac{y}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 85\frac{5}{7}$, $y = 274\frac{2}{7}$.

25) $\left.\begin{aligned} \frac{3}{2x + 7y} &= \frac{5}{6x + 9y} \\ 7x - 5y &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 1$, $y = 1$

26) $\left.\begin{aligned} \frac{x + 2}{y + 5} &= \frac{3}{4} \\ \frac{x - 2}{2y - 2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 4$, $y = 3$

27) $\left.\begin{aligned} \frac{x - y}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{x + 1}{3} - \frac{y}{4} \\ \frac{y + 2x}{3} - 1 &= \frac{3y + 1}{2} - \frac{5 + 2x}{4} \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 2$, $y = \frac{25}{14}$

28) $\left.\begin{aligned} a - \frac{bx}{2} &= c - \frac{dy}{2} \\ (a + b)\,x &= (c + d)\,y \end{aligned}\right\}$ $\quad x = \frac{2\,(a - c)\,(c + d)}{bc - ad}$, $y = \frac{2\,(a - c)\,(a + b)}{bc - ad}$

29) $\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= b \\ y + z &= c \end{aligned}\right\}$ $\quad x = \frac{1}{2}\,(a + b - c)$, $y = \frac{1}{2}\,(a - b + c)$, $z = \frac{1}{2}\,(b - a + c)$

30) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 8 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 6$, $y = 1$, $z = -1$

31) $\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 20 \\ x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 60$, $y = 50$, $z = 70$

32) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ 3x + 2y + z &= 16 \\ 4x + 3y + 5z &= 37 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

33) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 30 \\ x - 3y + z &= -60 \\ x + y - 7z &= -120 \end{aligned}\right\}$ $\quad x = 195$, $y = 105$, $z = 60$

34) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 3x + 2y - 2z &= 9 \\ 23x + 16y - 12z &= 78 \end{aligned}\right\}$ неопредељено.

35) $$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{b'c''d - b''c'd + b''cd' - bc''d' + bc'd'' - b'cd''}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}$$

подобно y и z.

36) $$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 40 \\ 2x + z + u &= 90 \\ x + y + 2u &= 60 \\ -2z + u &= 30 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 40 \\ y &= -40 \\ z &= -20 \\ u &= 30 \end{aligned}$$

37) $$\left.\begin{aligned} 9x + 8y + 7z + 6u &= 840 \\ 5x + 12y + 20z + 25u &= 925 \\ 3x + 4y + 5z + 10u &= 380 \\ 2x + 4y + 5z + 5u &= 295 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 60 \\ y &= 25 \\ z &= 10 \\ u &= 5 \end{aligned}$$

38) $$\left.\begin{aligned} 5x - 3y &= -1 \\ 2x + z &= 5 \\ 4y - 5z &= -7 \\ 2z + 3u &= 18 \\ 2u + v &= 13 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \\ u &= 4 \\ v &= 5 \end{aligned}$$

39) $9x - 35y = 282.$ формула $\left\{\begin{aligned} x &= 35b + 43 \\ y &= 9b + 3 \end{aligned}\right.$

40) $14x + 5y = 104$ „ $\left|\begin{aligned} x &= 1 - 5b \\ y &= 18 + 14b \end{aligned}\right.$

41) $4568x = 7145y + 47$ „ $\left|\begin{aligned} x &= 7145g - 2451 \\ y &= 4568g - 1567 \end{aligned}\right.$

42) $5x - 3y + 3z = 7.$ „ $\left|\begin{aligned} x &= (3b-1)(7-3z) \\ y &= (5b-2)(7-3z) \\ z &= \text{произвољно.} \end{aligned}\right.$

43) $4x - 5y - 7z = 2.$ „ $\left|\begin{aligned} x &= (5a-1)(2+7z) \\ y &= (4a-1)(2+7z) \\ z &= \text{произвољно.} \end{aligned}\right.$

44) $$\left.\begin{aligned} 5x - 4y + 2z &= 20 \\ x + 2y - 3z &= 30. \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x &= 8a \\ y &= 17a - 15 \\ z &= 14a - 20, \end{aligned}$$

45) $\frac{2x}{3} + x = 15.$

46) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 13.$

47) $5(x-1)+2(x+3)=\frac{x}{2}+14$

48) $\frac{2x - x/_2 + x/_3}{4 - 1^1|_2} = \frac{2x+3}{3}$

49) $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(x+100)\right\}\right]=5.$

50) $\frac{ax}{2}-\frac{bx}{3}=c$

51) $\frac{a-bx}{a}-\frac{b-ax}{b}=a-b$

52) $\frac{4abx}{a^2+b^2}-\frac{4abx}{a^2-b^2}=\frac{c}{b^4-a^4}$

53) $\frac{a^2-2ab+2b^2}{2a-3x}=\frac{4a^2+5ab-b^2}{8a+2x}$

54) $\left(\frac{ax}{b}-c\right)\left(\frac{bx}{c}-d\right)=\left(\frac{ax}{b}+e\right)\left(\frac{bx}{c}+g\right)$

55) $\left.\begin{aligned} 6x+5y&=3\\ x-2y&=9\end{aligned}\right\}$

56) $\left.\begin{aligned} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}&=-1\\ \frac{5}{2x}+\frac{3}{4y}&=\frac{13}{4}\end{aligned}\right\}$

57) $\left.\begin{aligned} \frac{3x-4y}{3}+\frac{3(x-y)}{2}&=17-2(x+y)\\ x+\tfrac{1}{2}(x-y)&=3\end{aligned}\right\}$

58) $\left.\begin{aligned} 3x-5y+\tfrac{2}{3}(3x-y/_4)&=x-y-\tfrac{3}{6}\\ 5(x+y/_3)-4(2x-y)&=\tfrac{1}{2}(x+y)-\\ &-5a+\tfrac{1}{3}(9x+11y)\end{aligned}\right\}$

59) $\left.\begin{aligned} 9x-4z&=9\\ 3x-2y&=1\\ 4y+z&=37\end{aligned}\right\}$

60) $\left.\begin{aligned} 13x+24y-12z&=-11\\ 9x-15y+4z&=24\\ 11x+y-3z&=10\end{aligned}\right\}$

61) $\left.\begin{aligned} x+2y-z&=4\\ 9x-13y+6z&=2\\ x-y&=z+4\end{aligned}\right\}$

62) $\left.\begin{aligned} 4x+\frac{3(y-5z)}{7}&=4y-5z+12\\ 8\left(x-y+\frac{2z}{3}\right)&=9(x-7y)-3\\ \frac{4(y+z)}{5}+\frac{2x}{3}&=4y+\frac{x}{3}+1\end{aligned}\right\}$

63) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2}-\frac{5y}{6}+u&=8\\ 2x-\frac{3y}{2}+5z&=45\\ x-2y+z-u&=-12\\ 3x-2y+\frac{u}{5}&=-3^3|_5\end{aligned}\right\}$

64) $$\left.\begin{aligned}
\frac{4}{x + 2y} + \frac{3}{2y - 4z} &= 1^5/_8 \\
\frac{8}{2x - u} + \frac{5}{x + 2y} &= -\,^1/_6 \\
\frac{3}{2y - 4z} + \frac{4}{x + 2y} &= ^1/_2 \\
\frac{2}{2x + u} + \frac{1}{2y - 4z} &= \frac{59}{84}
\end{aligned}\right|$$

65) $3x - 141y = 9$ да се нађу целе положне вредности за x и y.

66) $8x - 13y + 34z = 7$ „ „ „ „ „ „ x, y и z.

Задатци.

1) Да се изнађу два броја, којих је половина сбира s и половина разлике d

(разреш. $(s + d)$ и $(s - d.)$

2) Да се разложи број 23 у таква 3 дела, да буде сбир простог првог, двогубог другог и троструког трећег дела = 50, и на против сбир простог трећег, двогубог другог и троструког првог дела раван 39 *.

3) Да се из сљедујућих једначина израчунају x, y и z.

$$5x - 4y + 3z = 21$$

$$3x + 6y - z = 13$$

$$4x + y + z = 17$$

* Да су постављени услови у противуречију види се, кад све три једначине или две последње саберемо.

4) Има један разломак, кад му бројтеља и именитеља смањимо са један, он се претвара у $^3/_4$; a кад му бројтеља и именитеља увећамо са три јединице, он је $^{10}/_{13}$. који је тај разломак?

(разреш. $^{37}/_{49}$.)

5) $x - y = 18$ (разреш. $x = 24$, $y = 6$)

$\dfrac{x}{y} = 4$

6) Тражи два броја, којих је производ a пута већи од њиховог сбира и b пута већи од њиове разлике.

(разреш. $x = 2.\dfrac{ba}{b + a}$, $y = 2.\dfrac{ba}{b - a}$)

7) Два броја имају се као $2 : 5$, a њихов сбир има се спрам производа као $7 : 40$ који су то бројеви?

(разреш. $x = 8$, $y = 20$).

8) Кад се два броја имају као $5 : 3$, и кад одузмемо од већег 4 и додамо мањем 6, да се имају као $6 : 5$, који су то бројеви? (разреш. 40 и 24)

9) Тражи два таква броја, да је половина једног већа са 42 од $^1/_7$ оног другог; и да је двогуби други са 16 већи од првог (разреш. један је $100^2/_3$, а други $58^1/_3$.)

10) Три села A, B и C леже у троуглу. Кад се иде од A преко B до C има $1^1/_4$ миља: од B преко C до A има $1^5/_{12}$ миља; а од C преко A до B има $1^1/_6$ миља, колико су удаљена ова села једно од другог?

(разреш. од A до $B = {}^1/_2$ миље; од B до $C = {}^3/_4$ миље; а од A до $C = {}^2/_3$ миље).

11) Да се нађе такав број, ког је $^1/_5$ део толики, колики је $^1/_{25}$ део трипута већег и са 120 увећаног броја.

12) У неком друштву има трипута толико мушких колико жењскиња. Ако 4 човека са својим женама отиду из друштва, остаје још 4 пута толико мушких колико жењскиња. Колико је у том друштву било мушких а колико жењскиња? (36 муш. 12 жењских).

13) Да се нађе такав број, кад саберемо његову половину, трећину и четвртину да изађе са 4 јединице већи број од тога траженог. (разреш. = 48).

14) Из неког бурета извадимо неколико ока кафе а у бурету остану још 60 ока, Из другог бурета у коме су 90 ока извади се још једанпут толико колико из првог, и заостану у њему још толико, колико је с почетка у првом бурету свега било. Колико је ока било с почетка у првом бурету? (70. ока).

15) Једно буре може да се пуни водом кроз три цеви. Кроз прву цев може да се напуни буре за a сати, кроз другу цев за b сати и кроз трећу цев c сати. После колико сати можемо буре напунити водом кад пунимо кроз све три цеви наједанпут?

(разреш. за $\frac{abc}{ab + ac + bc}$ сати).

16) Неки путник одпутује из једног места пре 6 дана, дневно је путовао 3 миље. После њега пође из истог места истим путем други путник за њим, па науми првог да стигне после 9 дана. Колико миља мора овај други дневно прелазити, па да стигне првог.

(разреш. 5 миља).

17) По наредби једног има се његово имање да подели овако: његовој сестри оставља половину имања, брату трећину послужитељу дванајести део, а остатак од 1.000 динара сиротињи. Колико износи његово имање?

(разреш. 12.000 дин.)

18) 4.500 # да се поделе на три лица A, B и C сразмерно према њиховим годинама. Ако је B у пола старији од A, а C има двапут толико година колико a, колико дуката добија свако лице? (разреш. A добија 1.000,

$B = 1.500$, а $C = 2000$ #).

19) Неки трговац начини узастопце са својим капиталом у три пута сретан пазар, тако да је сваки пут био у добитку са $^1|_3$ од оног капитала који је у радњу улагао али је сваки пут давао у радњу и добит оном првом капиталу; сада је морао давати посредственику први пут 500 динара, други пут 600 д. а трећи пут 700 дин. После трећег сретног пазара нађе

да му је удвојен капитал према првом његовом капиталу Колико је био његов капитал у почетку?

(разреш. 6450 дин.)

20) Неки бегунац запитан је колико јевојника посело село и колико има кућа то село, он од говори; незнам ни једно ни друго, само то знам, да при улазу у село хтедоше у сваку кућу 8 војника поставити, и да су остали 6 кућа без војника; после су учинили другачију поделу и поставише у сваку кућу 7 војника па је остало 5 војника без квартира. Колико је кућа било у селу и колико свега војника?

(разреш. 53 куће 376 војника).

21) Колики мора да буде разломак, који даје, кад му се броитељ и именитељ увећа са јединицом $^1|_2$, а кад му се броитељ и именитељ смањи са јединицом даје $^1/_3$?

(разреш. $^3/_7$).

22) Број 50 има да се раздели у таква три дела, да кад други део поделимо с првим изађе количник 2, и кад трећи поделимо с другим да изађе количник 1 и остатак 10.

(разреш. делови : 8, 16, 26).

23) Да се изнађе број од три цифре, који одговара овим условима: 1) кад се подели захтевани број са сбиром цифара, да буде исто толики количкник 38 и остатак 1. 2). Да изнађе количник кад сбир крајњих цифара поделимо са средњом цифром колики је количник који добијамо кад са средњом цифром поделимо двоструку цифру што стоји на месту стотина увећану за 1. 3.) Кад напишемо цифре у обрнутом реду и од овог броја одузмемо онај захтевани број да буде разлика 9 пута већа од сбира две цифре с десна (разреш. Број = 647).

24) A, B и C имају свега 910 дана орања земље. Кад B уступи лицу A 100 дана, онда има A у 80 дана више но што има B; ако пак добије B од лица C 35 дана, онда имају ово двоје једнаки број дана. Колико дана земље има сваки?

(разреш. $A = 200$, $B = 320$, $C = 390$)

25) Неки је купио два различита штофа и морао је за ова издати 170 *fl* сваки риф од једног штофа стаје 5*f*, а од оног другог 7*f*. Колико је рифи сваки комад имао?

Овде су могућа разрешења по $5f$ и $7f$

по рифу $\begin{cases} 27, 20, 13, 6 \\ 5, 10, 15, 20 \end{cases}$ рифи.

26) Да се определи број кад га поделимо са 5 да буде у остатку 1, а подељен са 7 да има у остатку 2.

(разреш. 51, 86. 121, 156, ...).

27) Два лица имају укупно А динара капитала, и то: први има m пута толико, колико има други. Колико има сваки од њи?

28. Да се изнађе број, који је у 10 јединица мањи од сбира његове половине, трећине и четртине.

29) 1200 динара да поделимо на троје A, B и C тако, да трећи део од оногашто добија A и пети део од онога што добија B износе у сбиру 300 дин. Колико добија свако лице?

30) Неки капитал подељен је на четири лица A, B, C и D. А добије 1000 динара и $^1/_8$ остатка, B исто тако 1.000 динара и $^1/_5$ од новог остатка, C опет 1.000 динара и $^1/_2$ новог остатка, D добије последњи остатак у 2250 динара.

Колико је било капитала?

31) Кад се бронтељ и именитељ неког разломка увећа са један, то постаје $^1/_2$. а кад се бронтељ и именитељ смањи са 3. онда постаје $^1/_4$ који је то разломак?

32) Колико пута морамо узети број 7, а колико пута број 17, па да изађе као сбир 180.

СЕДМИ ОДСЕК

БРОЈНИ СИСТЕМИ У ОПШТЕ И ДЕСЕТНИ БРОЈНИ СИСТЕМ ОСОБЕНО.

81) Из аритметике знамо, како се помоћу извесни знакова (цифара) и основице 10, може по законим правилима да напише сваки могући број.

Овај начин, да се умесним састављањем може да напише са неколико цифара у опште сваки број, зове се *бројни строј* (бројна система). Наш бројни строј има за основицу 10, т. јг да сваки 10 јединица првог реда чине једну јединицу другог реда, па зато се и зове овај строј, *десетни* (текадни) *бројни строј* (од *δεκα* — десет) или *децимални* строј (од *decem* — десет.

82. Сваки декадни број можемо сматрати као сбир таквих делова, који су степени од 10, а њихови сачинитељи мањи су од 10.

Тако н. пр. можемо поставити за 5.428 = 5.000 + 400 + 20 + 8, што се може написати и овако, $5428 = 5.10^3 + 4.10^2 + 2.10 + 8$ или у опште $lk \ldots cba \ldots$ као n цифрени број у коме су a, b, c.... цифре што стоје на месту јединица, десетица, стотина и т. д. овај општи број можемо написати са

$$l \,.\, 10^{n-1} + k \,.\, 10^{n-2} + \;.\;\;.\;\;.\; + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a$$

83. *Кад помножимо два десетна броја, добићемо у производу исто толико цифара, колико имају оба чинитеља или с једном цифром мање*

Ово се може доказати, кад се узме да су чинитељи односно n и m цифрени бројеви.

$$A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1$$

$$B = b_m \cdot 10^{m-1} + b_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \ldots \; b_3 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + b_1$$

где су највиша места производа:

$$a_n b_m \cdot 10^{n+m-2} \quad \text{и} \quad (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) \cdot 10^{n+m-3}$$

Ако је сада $a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m = \alpha + \beta \cdot 10$,

где може да буде $\beta = 0$, једно или двоцифрени број, по томе су ова највиша места скупа узета

$$a_n b_m \cdot 10^{n+m-2} + (\alpha + \beta \cdot 10) \cdot 10^{n+m-3} =$$

$$= (a_n b_m + \beta) \cdot 10^{n+m-2} + \alpha \cdot 10^{n+m-3}.$$

Тако су сада само два случаја могућа, јер $a_n b_m + \beta$ или је једноцифрени или двоцифрени број.

У првом је случају највиша цифра у производу 10^{n+m-2} дакле је $(n + m - 1)$ цифрени број.

Ако би могли означити

$$a_n b_m + \beta \quad \text{са} \quad r + s \cdot 10,$$

онда је

$$(a_n b_m + \beta)\, 10^{n+m-2} = (r + s \cdot 10)\, 10^{n+m-2} =$$

$$= s \cdot 10^{n+m-1} + \quad \text{и т. д.}$$

т. ј. највиша цифра производа налази се на $(n + m)$-ном месту, дакле је производ $(n + m)$ цифрени број.

84. Ако би сада хтели да поставимо неки бројни строј' морали би узети за основицу положан и цео број и образовати по реду све застопно сљедујуће степене тога броја и то с целим изложитељима; тако ће се моћи сваки број разложити у своје делове, који ће бити степени од оне постављене основице, а сваки степен имаће свога сачинитеља мањег од саме основице

Узмимо н. пр. да се односи број 2536 на неки строј, кога је основица 7;

то је $\quad 2536 = 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 6.$

У овом се случају по себи разуме, да се тај број неможе читати као оно по десетном строју, две хиљаде пет стотина тридесет и шест, јер су овде 6 апсолутни јединица и 3, 5, 2, јединице относно првог, другог, трећег реда. Као што је постала основица 7 из јединице, исто тако постају и јединице ког вишег реда из непосредно предидуће јединице.

Према основици 2, 3, 4, 5, 6, 7. . . . 10, зовемо и строј диадни, тријадни, тетрадни, пентадни . . . . декадни.

Сваки број којег је основица ма ког строја позната може се врло лако преобратити у строј са основицом 10.

Тако је по пређашњем примеру

$$2536 = 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 6$$

И кад ову суму образујемо полазећи с десна по смислу десетног строја, то је:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \cdot 7 = 21 \\ 5 \cdot 7^2 = 245 \\ 2 \cdot 7^3 = 686 \\ \hline 958 \end{array}$$

Т. ј. број 2536 у хептадном строју износи по десетном строју 958.

85. *Неки број са основицом 10, има да се преобрати у бројни строј са основицом a.*

Ако узмемо M као десетни број, то је

$$\frac{M}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a} \quad \text{а из тога} \quad M = aq_1 + r_2$$

$$\frac{q_1}{a} = q_2 + \frac{r_2}{a} \qquad " \qquad q_1 = aq_2 + r_2$$

$$\frac{q_2}{a} = q_3 + \frac{r_3}{a} \qquad " \qquad q_2 = aq_3 + r_3$$

$$\frac{q_3}{a} = q_4 + \frac{r_4}{a} \qquad " \qquad q_3 = aq_4 + r_4$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$\frac{q_{n-1}}{a} = q_n + \frac{r_n}{a} \qquad " \qquad q_{n-1} = aq_n + r_n$$

Узмимо да је у оном последњем дељењу $q_n < a$, то ће сљедовати поступним замењивањем:

$$M = a(aq_2 + r_2) = r_1 = q_2a^2 = r_2a + r_1 =$$

$$= (aq_3 + r_3)\, a^2 + r_2a + r_1 = q_3a^3 + r_3a^2 +$$

$$+ r_2a + r_1 = (aq_4 + r_4)\, a^3 + r_3a^2 + r_2a + r_1 =$$

$$= q_4a^4 + r_4a^3 + r_3a^2 + r_2a + r_1$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$M = r_{n+1}\, a^n + r_na^{n-1} + r_{n-1}\, a^{n-2} + \dots + r_3a^2 + r_2a + r_1$$

гди је r_{n-1} узето у место q_n.

Из тога се види, да можемо број M показаним начином дељења преобратити у бројни строј са основицом a; уједно видимо, да су бројеви $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots \dots r_n, r_{n+1}$ мањи од a.

Кад поделимо десетни број са неком новом основицом и ово дељење продужимо тако, док не изађе количник = 0 то су по реду добивени остатци оне цифре, што су на 1-вом, 2-гом, 3-ћем, 4-том и т. д. месту.

Рецимо да се определи број 51.693 по пентадном строју, то би имали овако да радимо:

51.693 : 5	=	10.338	више	остатку	3
10.338 : 5	=	2.067	"	"	3
2.067 : 5	=	413	"	"	2
413 : 5	=	82	"	"	3
82 : 5	=	16	"	"	2
16 : 5	=	3	"	"	1
3 : 5	=	0	"	"	3

Тако би дакле имали да напишемо у место декадног броја 51.693 по пентадном строју број 3123233.

Да је овај рад истинит, уверавамо се овако:

$$3123233 = 3 \,.\, 5^6 + 1 \,.\, 5^5 + 2 \,.\, 5^4 + 3 \,.\, 5^3 + 2 \,.\, 5^2 + 3 \,.\, 5 + 3$$

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 3\cdot 5 &= 15 \\ 2\cdot 5^2 &= 50 \\ 3\cdot 5^3 &= 375 \\ 2\cdot 5^4 &= 1250 \\ 1\cdot 5^5 &= 3125 \\ 3\cdot 5^6 &= 46875 \\ \hline & \ 51693 \end{aligned}$$

Особени знаци о раздељивости декадни бројева.

86. *Ако је задат неки десетни број*

$$N = a_0 + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + a_3 . 10^3 + \quad . \quad . \quad . \quad a_m . 10$$

па да тражимо под којим је условима N *раздељиво са* z.

Нека је $10 : z = q_1 + \frac{r_1}{z}$

$$10^2 : z = q_2 + \frac{r_2}{z}$$

$$10^3 : z = q_3 + \frac{r_3}{z}$$

— — — —

— — — —

— — — —

$$10^m : z = q_m + \frac{r_m}{z}.$$

Поставимо сада за N поједине степене од 10 у један ред

$$N = a_0 + a_1 (zq_1 + r_1) + a_2 (zq_2 + r_2) + \ldots a_m (zq_m + r_m)$$

или $N = z (a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 + \ldots a_m q_m) +$

$$+ (a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots . a_m r_m);$$

Дакле $\frac{N}{z} = Q + \frac{S}{z}.$

Пошто је овде Q цео број, то зависи раздељивост броја N са z од тога, дал је

$$(a_0 + a_1 r_1 + \qquad + a_m r_m)$$

раздељиво са z

Ако дакле има да се изнађе знак по ком би се могло познати, дал је неки број раздељив са z, *треба са z поделити све степене 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, . . . по реду, а изнађене остатке с десна на лево помножити односно с првом, другом, трећом цифром.... Ако је сада сбир ових производа раздељив са z, то је и задати број* N *раздељив са z.*

87. 1) Ако је $z = 2$, онда ћемо наћи, да је

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 \ldots \qquad \ldots = r_m = 0;$$

зато је $\qquad S/_2 = a_0/_2$,

а то ће рећи: да је задати број раздељив са 2, кад је цифра на месту где јединице стоје парни број.

2) $z = 3$, $r_1 = r_2 = r_3 = \qquad . \; . \; r_m = 1$

дакле је $\frac{S}{3} = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \ldots + a_m}{3}$

зато је задати број раздељив са - кад је сбир цифара раздељив са 3.

3) $z = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = r_4 \ldots = r_m = 0$,

Зато је $S/_4 = \frac{a_0 + 2a_1}{4}$ а због

$$a_0 + 2a_1 = (a_0 + 10.a_1) - 8a_1$$

$$S/_4 = \frac{a_0 + 10a_1}{4} - 2a_1$$

дакле $\frac{N}{4} = Q - 2a_1 + \frac{a_0 + 10a_1}{4}$ т. ј.

Да је задати број раздељив са 4, кад су му две крајње цифре с десна као број узете, раздељиве са 4.

4.) $z = 5$ Овде је као и код $z = 2$, $r_1 = r_2 = r_3 \ldots = r_m = 0$

по томе зависи раздељивост од туда, ако је $\frac{a_0}{5}$ цео број, т.ј. a_0 *мора бити или 0 или 5.*

5) $z = 7$. Овде долазе по реду остатци који се повраћају 3, 2, 6, 4, 5, 1.

По томе је $s = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots$

Или $\frac{s}{7} = \frac{(a_0+3a_1+2a_2)+(6a_3+4a_4+5a_5)+(a_6+3a_7+2a_8)+\ldots}{7}$

Али је $a_0 + 3a_1 + 2a_2 = (a_0 + 10a_1 + 100a_2) - (7a_1 + 98a_2)$

$6a_3 + 4a_4 + 5a_5 = -(a_3 + 10a_4 + 100a_5) + 7a_3 + 14a_4 + 105a_5) -$

— — — — — — — — — — —

Дакле $\frac{s}{7} = \frac{(a_0+10a_1+100a_2) - (a_3+10a_4+100a_5) + \ldots}{7}$

$\ldots + $ целом броју.

$(a_0 + 10a_1 + 100a_2)$, $(a_3 + 10a_4 + 100a_5)$ и т. д.

то су они бројеви, које добијамо *кад задати број N с десна на лево поделимо у класе све по 3 цифре. Па кад узмемо ове цифре (у класама) наизменце положно и одречно, и одузмемо мањи бројни сбир од већег; то је задати број раздељив са 7, ако је и разлика горњих сбирова раздељива са 7.*

Н. пр. да се определи јели $N = 58548096236$ раздељив са 7.

$\underbrace{58}_{d}\ \underbrace{548}_{c}\ \underbrace{096}_{b}\ \underbrace{236}_{a}$

$a + c = 784$

$b + d = 154$

разлика $= 630$ овде је раздељива са 7, дакле је и задати број раздељив са 7.

6) $z = 8$, овде је $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = r_4 = r_5 = \ldots r_m = 0$

Зато је $\frac{s}{8} = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2}{8} =$

$$= \frac{a_0 + 10a_1 + 100a_2 - (8a_1 + 96a_2)}{8} =$$

$$= \frac{a_0 + 10a_1 + 100a_2}{8} - (a_1 + 12a_2).$$

Дакле је *задати број раздељив са 8, кад су последње три цифре с десна као број узете раздељиве са 8.*

7) *Сваки је број раздељив са 6, ако је парни број и раздељив са 3.*

8) *Сваки је број раздељив са 9, кад му је сбир цифара раздељив са 9.*

9) *Сваки је број раздељив са 10, кад има на крају с десна 0.*

10) $z = 11$, овде сљедују остатци 10 и 1 дакле је $\frac{z}{11} =$

$$= \frac{a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + a_4 + 10a_5 + \cdots}{11}$$

Кад поделимо N с десна на лево у бројеве све по 2 цифре то ћемо наћи

$(a_0 + 10a_1)$, $(a_2 + 10a_3)$ и т. д.

Ако је дакле сбир ових бројева од 2 цифре раздељив са 11 онда је и задати број раздељив са 11.

ОСМИ ОДСЕК

ДЕСЕТНИ РАЗЛОМЦИ

88. Разломци, којих су деоници степени од 10, зову се десетни разломци, и њихов је општи вид $\frac{a}{10^n}$. a и n произвољни су и цели бројеви, а сем тога n је још и положан број. Тако је, ако узмемо за $a = 324$ и $n = 3$, то је разломак $\frac{324}{1.000}$ или у познатом простијем виду 0·324.

Сад ћемо лако увидети, да се ово $\frac{324}{1.000}$ може написати и овако $\frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{4}{10^3}$, што је као сбир равно горњем разломку, а из тога можемо још извести, да ако су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, узастопце сљедећа n децималне цифре; то се може изразити десетни разломак овако:

$$\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots \frac{\alpha_n}{10^n} =$$

$$= \frac{\alpha_1 . 10^{n-2} + d_2 . 10^{n-3} + \ldots \alpha_n}{10^n}$$

ако сада овај десетни разломак са n цифара допишемо неком целом броју са m цифара; то ћемо добити

$$a_m 10^{m-1} + a_{m-1} 10^{m-2} + \ldots a_2 10 + a_1 + \frac{\alpha_1}{10} +$$

$$+ \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \ldots \frac{\alpha_n}{10^n}$$

као општи вид ма ког броја по десетном строју.

И кад све ово доведемо под један заједнички деоник 10^n, то ће бити

$$\frac{a_m 10^{m+n-1} + a^{m-1} 10^{m+n-2} + \ldots a_2 10^{n+1} + a_1 10^n + \alpha_1 10^{n-1} + \alpha_2 10^{n-2} + \ldots \alpha_{n-1} 10 + \alpha_n}{10^n}$$

$$= \frac{a}{10^n}.$$

Из тога изводимо и ово:

1, Да је вредност сваке цифре десетног разломка савршено опредељена са десетном тачком.

2) Да се преображава десетни разломак у прост, кад узмемо све десетне цифре као број и ставимо овај у броитеља простог разломка, а у именитељу пише се толики степен од 10, колико броитељ има десетних цифара.

3) Због $\frac{a . 10^r}{10^{n+r}} = \frac{a}{10^n}$,

можемо десетном разломку с десна написати колико хоћемо нула, па се вредност тог десетног разломка неће изменути.

4) Кад десетну тачку помичемо у десно са једним или два места, то ће се овим разломком помножити са 10 или 100, или у опште са оноликим степеном од 10 са колико смо места преместили тачку. Ово премештање десетне тачке у десно није ништа друго, но множење десетног разломка са 10, 100, 1000 и т. д.

5) Из тога сљедује и противно овоме, кад се десетна тачка у лево премести са 1 или 2 места, то значи, да је десетни разломак подељен са 10, 100, 1000 и. т. д.

Претварање простих разломака у десетне.

89. Кад узмемо такав чист разломак $\frac{z}{n}$ ког су броитељ z и именитељ n относно прости најмањи бројеви онда ћемо $\frac{z}{n}$ преобратити у разломак ког је именитељ ма какав степен од 10, ако напишемо $\frac{z}{n} = \frac{z.\ 10^r}{n\ \ 10^r} = \frac{z.\ 10^r : n}{10^r}$ т. ј.

дописује се броитељу произвољан број нула и дели се овако промењени броитељ са непромењеним именитељем, па се онда тражи да изађе овим дељењем количник са толико десетни места колико смо у броитељу нула дописали. Колико ће бити ово 10^r, или колико ћемо нула дописати у броитељу, неможесе лако у напред одредити, него се мора ово r поступно да определи, т. ј. кад год допишемо једну нулу, треба да изнађемо дељењем једну цифру количника и овако да чинимо све дотле, док се дељење не сврши или док недобијемо толико десетни цифара, колико у ком случају тражимо.

Пошто су z и n относно прости бројеви, то ће десетни разломак само онда одређени (крајни) број цифара имати, ако је 10^r раздељиво са n, што је наравно само тако могућно, ако је n постало из чинитеља броја 10, т.ј. мора n имати у овом случају овај вид $2^\alpha\ 5^\beta$, где су α и β цели положни бројеви, неизузимајући нулу.

Тако је н. пр. $^5/_8 = 5_0 : 8 = 0{\cdot}625$

2_0

4_0

$^{27}/_{625} = 27_{00} : 625 = 0{\cdot}0432$

200_0

125_0

Ако је n сложено још и из других чинитеља сем 2 и 5, то онда z неможе бити равно неком целом броју q, него је

$$z.\ 10^r : n = q + \frac{R}{n} \quad \text{т. ј.}$$

$$\frac{z}{n} = \frac{q}{10^r} + \frac{R}{n.\ 10^r}$$

А због $R < n$ у толико је пре $\frac{R}{n} < 1$,

или $\frac{R}{n.\ 10^r}$ па кад овако и даље делимо постаће

$\frac{R}{n\ 10^r}$ тако малено колико ми хоћемо. Ако сада за овај случај узмемо први r цифара десетног разломка, то је учињена погрешка $= \frac{R}{n\ .\ 10^r} < \frac{1}{10^r}$ т. ј. мања од јединице оног места код кога станемо код крајње десетне цифре.

У оваквом случају поправљамо често такве погрешке тим кад r-ној десетној цифри додамо једну јединицу; но и ово чинимо само онда, кад је $(r+1)$-во место 5 или већа каква цифра од 5; овим ће погрешка постати одречна и никад већа од пола јединице оне вредности коју означава последња десетна цифра.

90. *У свима другим случајима гди је именитељ разломка на спрам 10 односно прост број; постаће при обраћању простог разломка у десетни такве десетне цифре, које ће се непрестано истим редом аовраћати; а број ових цифара што се повраћају може бити само раван броју именитељеви јединица смањених за један.*

Ово ћемо показати кад узмемо разломак z/n (с предпоставком да је $z/n < 1$ и да су z и n относно прости бројеви). Сваки остатак који би заостао при делењу, извесно ће бити мањи од n, а број могући једно од друго разликујућих се остатака може бити само $= (n - 1)$. Ако су сви могући разликујући се остатци већ изашли то ће се и остатци повраћати по истом реду а први ће остатак бити $= z$.

Ово доказујемо овако:

Ако је $\quad z.\,10^0 = n.\,0 + z$

$$z.\,10^1 = n.\,q_1 + r_1$$

$$z.\,10^2 = n\,q_2 + r_2$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$z.\,10^m = n\,.\,q_m + r_m$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$z.\,10^p = n.\,q_p + r_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

Ако је r_p први остатак што се повраћа, то је $r_p = z$, јер кад би могло бити, да је $r_p = r_m$, онда би морало бити и

$$z.\,10^m = n.\,q_m + r_m$$

$z.\,10^p = n.\,q_p + r_m$ па зато и

$z.\,10^p - z.\,10^m = n\,(q_p - q_m)$ или

$$\frac{10^m\,(z\,10^{p-m} - z) = q}{n}$$

(где је q цео број пошто су n и 10 относно прости бројеви, то је онда $z.\,10^{p-m} - z$ раздељиво са n.

дакле $\quad z.\,10^{p-m} - z = q'$

или је $\quad z.\,10^{p-m} = p' + z/n$

Кад r_p т. ј. први остатак што се повраћа неби био $= z$, то би нашли да се повратио по ранијем делењу $(p - m < p)$ први остатак z, што би противу речило нашој предпоставци, да је r_p први остатак који се повраћа; из тога дакле изводимо да мора бити $r_p = z$. А како је сада најближи посебични дељеник $= z.\,10$, то је опет поново количник q_1 који је изашао при делењу, а остатак r_1; сада ће се при даљем дељењу повраћати познати остатци, и поједини количници по показаном реду.

91. Ако означимо ред цифара што се повраћају или периодни број узимајући га као број са P, а број периодних цифара са m, онда постаје (по §. 93. јед. (1)
једначина: $z\,.\,10^m = n\,.\,P + z$ . . . . . (2

или $\dfrac{z}{n} = \dfrac{P}{10^m} + \dfrac{z}{n.10^m}$, дакле $\dfrac{z}{n\,10^m} =$

$$= \frac{P}{10^{2m}} + \frac{z}{n.10^{2m}}$$

$\dfrac{z}{n.10^{2m}} = \dfrac{P}{10^{3m}} + \dfrac{z}{n.10^{3m}}$ дакле и

$$\frac{z}{n} = \frac{P}{10^m} + \frac{P}{10^{2m}} + \frac{P}{10^{3m}} + \; . \; . \; . \; .$$

Тако ћемо н. пр. добити за прост разломак.

$$^5/_7 = 0.714285714285 \ldots\ldots$$
$$= 0.\dot{7}1428\dot{5}$$

дакле $P = 714285$, а $m = 6$

Примедба. Обично се пишу периодне цифре само једанпут, а над првом и последњом поставља се тачка као знак за периоду.

92. Ако n и 10 нису относно прости бројеви, онда ће предходити цифре које се не повраћају (предпериодне цифре) о чему се можемо уверити.

Нека је $\frac{z}{n}$ разломак, који има да се преобрати у десетни разломак, и нека се чинитељи 2 и 5 садрже у n относно α и β пута. Аао ове раздвојимо, онда је $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n'$, где су n' и 10 относно прости бројеви.

Сада треба још знати јели $\alpha \gtrless \beta$. Ако је $\alpha > \beta$, онда ће изаћи α, а ако је $\beta > \alpha$, онда ће изаћи β предпериодни цифара.

Да би показали један определен случај, узмимо, да је

$$\alpha > \beta, \quad \text{т. ј.} \quad \alpha = \beta + k,$$

онда је
$$\frac{z}{n} = \frac{z}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n'} =$$
$$= \frac{z}{2^\alpha \cdot 5^{\alpha-k} \cdot n'} = \frac{z \cdot 5^k}{10^\alpha \cdot n'}.$$

Нека је сада
$$\frac{z \cdot 5^k}{n'} = Q + \frac{R}{n'}$$

где је
$$\frac{R}{n'} = \frac{P}{10^m} + \frac{P}{10^{2m}} + \frac{P}{10^{3m}} + \ldots$$

и тако је
$$\frac{z}{n} = \frac{1}{10^\alpha}\left(Q + \frac{R}{n'}\right) = \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{P}{10^{\alpha+m}} + \frac{P}{10^{\alpha+2m}} +$$

Периода почиње овде са $(\alpha + 1)$-вим десетним местом, дакле у овом случају има предпериода α десетни места.

Претварање периодни десетни разломака у просте.

93) 1) *Ако је задато, да чист периодан десетни разломак преобратимо у прост.*

Кад
$$\frac{z}{n} = \frac{P}{10^m} + \frac{P}{10^{2m}} + \frac{P}{10^{3m}} + \frac{P}{10^{4m}} + \ldots$$

онда је због $z \cdot 10^m = n \cdot P + z$ (§ 91. јед. (2.)
$$\frac{z}{n} = \frac{P}{10^m - 1}.$$

које изказујемо речима:

Чист периодан десетни разломак преобраћа се у прост, кад периодне цифре узмемо као број за броитеља, и потпишемо за именитеља толико деветица, колико периода има цифара

Н. пр. $0 \cdot \dot{5}4\dot{3} = \frac{543}{10^3 - 1} = \frac{543}{999} = \frac{181}{333}$

$7 \cdot \dot{0}05\dot{4} = 7\,\frac{54}{9999} = 7\,\frac{6}{1111}$

2) *Ако има да се преобрати предпериодан десетни разломак у прост.*

Кад је
$$\frac{z}{n} = \frac{Q}{10^\alpha} + \frac{P}{10^{m+\alpha}} + \frac{P}{10^{2m+\alpha}} + \ldots$$

Задати десетни разломак.

$$\text{То је } \frac{z}{n} = \frac{Q}{10^{\alpha}} + \frac{1}{10^{\alpha}}\left(\frac{P}{10^{m}} + \frac{P}{10^{2m}} + \frac{P}{10^{3m}} + \dots\right)$$

$$\text{Али је (по § 93) } \frac{P}{10^{m}} + \frac{P}{10^{2m}} + \frac{P}{10^{3m}} + \dots = \frac{P}{10^{m} - 1}$$

$$\text{дакле } \frac{z}{n} = \frac{Q}{10^{\alpha}} + \frac{P}{10^{\alpha}(10^{m}-1)} = \frac{(Q\,.\,10^{m} + P) - Q}{(10^{m} - 1)\,.\,10^{\alpha}}$$

$Q\,.\,10_m + P$ то је број, што је образован од предпериодни цифара и прве периоде; зато ћемо поставити ово правило за преображаваће предпериодни десетни разломака у просте:

Треба начинити броитеља простог разломка, одузимљући предпериоду (узету као број) од целог задатог предпериодног десетног разломка. А као имениоца потписујемо толико деветица, колико периода цифара има и овима дописујемо толико нула, колико има предпериода цифара.

Примери :

1) $0{\cdot}5987 = \frac{5987 - 59}{9900} = \frac{5928}{9900} = \frac{494}{825}$

2) $3{\cdot}2615 = \frac{2615 - 2}{9990} = 3\,\frac{2613}{9990} = 3\,\frac{871}{3330}$.

Сабирање и одузимање десетних разломака.

94. Познато нам је да се могу само равно деоничви разломци сабирати; зато ћемо замислити десетне разломке тако потписане једне под друге, да дођу десетине под десетине разломка стотините под стотините и т. д. *па ћемо онда сабирати као и целе бројеве.*

Оне десетне разломке који немају довољно десетни цифара, допуњавамо на крају с десна са нулама. У практичном рачунању могу се ове нуле замислити.

Пример.

6.31. .
17.0586
0.426.
80.03054
1.597. .
7.3026.
112.72574

Ако имају поједини сабирци више десетни цифара но што се тражи у сбиру, онда треба тако сабирати, да дође у сбиру једна десетна цифра више но што се тражи ако баш нема много сабирака у задатку; ако пак има много сабирака, треба узети у сбиру и две десетне цифре више но што се тражи, па ћемо добити колико је могуће тачнију последњу десетну цифру у сбиру.

Примери.

1)

5·6134	5617
9·1013	64
0 5982	7613
1·9100	376
17·2231	3

Овде је израчунат сбир са 4 десетна места.

Највећа изостављена цифра јест 3, зато је вредност у сбиру постала мања у нешто више од $^{3}/_{10}$ јединице 4-тог десетног места. Или у овом је случају погрешка, кад се прекинуо рачун код 4-те децимале $< \frac{4}{10^5}$, или она лежи између 3 и 4 сто хиљадите.

2) $4{\cdot}\dot{3}\dot{1}$
$0{\cdot}3\dot{7}$
$18{\cdot}463272$
$4{\cdot}01\dot{7}\dot{9}$
$38{\cdot}6\dot{2}$
$0{\cdot}5\dot{4}$

Овде ћемо тражити сбир са 5 децимала. А рачун ћемо свршити са 7 децимала:

4·31313	13
0·37777	77
18·46327	2
4·01797	97
38·62222	22
0·54444	44
66·33882	73

Како је овде највиша изостављена десетна цифра већа од $\frac{1}{2}$ јединице оне у сбиру последње цифре, то ће сбир тачнији бити, кад последњу десетну цифру увећамо са 1. Ово се казује, да је последња цифра поправљена (корегирана), па зато у горњем рачуну имамо приближну вредност = 66·33883; сад је учињена погрешка одречна и $< {}^{3}/10^{6}$.

Кад би у горњем примеру поједине сабирке све поправили, то би н. пр. могли са 6 децимала узети из разломка 0·3777777 . . . овако 0·377778 и онда би био овај рачун:

4·31313	1	
0·37777	8	. . због поправке (коректуре)
18·46327	2	
4·01798	0	. . због поправке (коректуре)
38·62222	2	
0·54444	4	
Сбир = 66·33882	7 или = 66·33883	

95. У опште исто тако и одузимамо десетне разломке.

Примери:

15·8376 (умалимак)
7·48579387 (умалитељ)

8·45180613 разлика (диференција).

Ако би хтели, да разлика има мање децимала, но што би само одузимање дозвољавало; онда се цео рад тако скраћује, кад изнађемо у разлици једну десетну цифру више но што се тражи.

Н. пр. има да се одузме од $9{\cdot}57\dot{3}$, $4{\cdot}3\dot{8}$ но тако, да буде у разлици 6 децимала.

Са 7 цифара је	9·573333	3	
	4·388888	9	. . због поправке.
	5·184444	4	

Дакле је разлика = 5·184444, погрешка је положна и мања од половине јединице 6. десетне цифре т. ј. погрешка $< \frac{5}{10^7}$

Множење десетних разломака.

96. Ако је задато, да помножимо $\frac{A}{10^n}$ са $\frac{B}{10^m}$, то је

производ $\frac{A}{10^n} \cdot \frac{B}{10^m} = \frac{A \,.\, B}{10^{n+m}}$, а овај производ као што

видимо опет је десетни разломак, у коме су $n + m$ десетних цифара. Из тога изводимо правило за множење десетних разломака: *Треба помножити десетне разломке без призрења на десетну тачку, као и целе бројеве а производу толико децимала с десна одсећи, колико имају оба чинитеља.*

Ово правило вреди и онда, кад је један чинитељ цео број.

Пример $21{\cdot}59 \times 0{\cdot}037$

треба помножити 2159×37

$$\begin{array}{r} 6477 \\ 15113 \\ \hline 79883 \end{array}$$

тако је $21{\cdot}59 \times 0{\cdot}037 = 0{\cdot}79883\cdot$

97. Ако производ има више десетних цифара но што би захтевали, онда треба множити скраћеним начином, које радимо овако:

Ако предпоставимо да има множитељ осим децимала и целе бројеве; као јединице, десетице, стотине и т. д. па да се израчуна производ са a десетних цифара: треба да помножимо са јединицама, десетицама, стотинама и т. д. односно од a-ног $(a+1)$-вог $(a+2)$-гог — — — места па на даље, све цифре множеника недостајуће цифре могу се попунити нулама); исто тако 1-ву, 2-гу 3-ћу, — — — десетну цифру множитеља

са $(a-1)$. $(a-2)$-гом, $(a-3)$-ћом — — — —

и свима вишим десетним цифрама множеника; а ове посебичне производе да подпишемо једно под друго вертикално и да ји саберемо.

Овде можемо споменути и то, кад би хтели да добијемо најнижу цифру сваког посебичног производа колико је могуће тачније, треба при множењу множеника, да у овом узмемо једну цифру с десна више но што је на реду т. ј. прву нижу десетну цифру и да је множимо ради поправке (коректуре).

Ако производ из кога узимамо поправку износи 5, то се додаје првој вишој десетној цифри 1; а кад је овај производ 15, додају се 2; а кад је 25, додају се 3 јединице и т. д.

98. Због сигурности за већу тачност производа, добро је да у постављању рачуна узмемо једну десетну цифру више па кад овако рачун изведемо, неће се последња децимала разлико-

вати од савршене вредности у производу ни у јединицу тог последњег десетног места.

Да би нам ово јасније било, помножићемо ова два чинитеља 5·7198426 и 43·85612 најпре са свим подпуно, а после скраћено са 5 децимала.

$5{\cdot}7198426 \times 43{\cdot}85612$

22879370	4
1715952	78
457587	408
28599	2130
3431	90556
57	198426
11	4306852
25085010	3446712

Са 5 децимала:

$5{\cdot}7198426 \times 43{\cdot}85612$

$$\begin{array}{r} 22879370 \\ 1715953 \\ 457587 \\ 28599 \\ 3431 \\ 57 \\ 11 \\ \hline 250{\cdot}85008 \end{array}$$

(погрешка положна и $< \frac{3}{10^5}$).

У Овом је рачуну рађено са 5 децимала и у 5. децимали нашли смо погрешку, т. ј. разлику у 2 јединице 5. децимале од прве вредности.

$$5·7198426 \times 43\,85612$$

228793704
17159528
4575874
285992
34319
572
114

2 0·85010(3

Овде је погрешка положна и $< \frac{5}{10^6}$ т. ј. мања од половине јединице 5 децимале.

Да се изнађе производ са 4 децимале из $0·54\dot{8} \times 317·\dot{5}$

Кад се иште да се изради рачун са 5 децимала, и кад имамо на уму да ће се множити јединице множитеља са 5-том т. ј. 6-том, дакле стотине множитеља са 7 т. ј. 8-осмом децималом множеника; а прва децимала множеника са 5-том децималом множитеља помножена има уплива на 5-ту децималу производа, из тога видимо, колико децимала треба узети кад множимо периодичне десетне разломке

$$0·54888889 \times 317\,5555$$

16466667
548889
384222
27444
2744
274
27
3

174·3027(0

(погрешка положна и мања од $\frac{2}{10^5}$ или мања од $\frac{1}{5}$ јединице што је на 4-том месту).

Делење десетних разломака.

99. Има више начина који показују како се деле десетни разломци: ми ћемо навести онај начин, по коме се налази вредеће место за прву цифру количника. Ту је онда свеједно ма колико десетни цифара да има дељеник и делитељ. Кад је већ опредељено вредеће место прве цифре, онда нам је лако све остале цифре количника изнаћи оним простим начином, као и код делења са целим бројевима.

Треба да делимо цифру дељеника што је на највишем месту, са цифром делитеља на највишем месту, нађемо добити прву цифру количника кад је највиша цифра дељеника мања од цифре делитељеве, то се узимају две цифре дељеника и деле се са највишом цифром делитељевом.

Неколико примера ово ће још боље објаснити.

1) да поделимо 0·3176 : 246

Овде ће се делити 2 у 3 садржи се 1. Највиша цифра дељеника показује десети део, а највиша цифра делитеља јест сто; ово даје у количнику хиљадити део, јер је 1/10 : 100 = $\frac{1}{1000}$, по томе мора се делити овако:

0·3176 : 246 = 0·00129
716
2240
26

2) Да се подели 26·4 : 0·09 5

У овом случају прва цифра 2 дељеника није раздељива са првом цифром 9 делитеља, зато делимо прве две цифре дељеника, и онда велимо 9 у 26 т. ј. сада делимо јединице са стотинитим делом што даје.

$(1 : \frac{1}{100} = 100)$ сто дакле

$$\begin{array}{l} 26\cdot4 : 0\cdot0925 = 285\cdot4 \\ 7900 \\ \hline \quad 5000 \\ \hline \quad 3750 \\ \qquad 50 \ . \ . \ . \end{array}$$

Примедба.

Овде као што видимо треба изнаћи најпре које значеће место у опште заузима прва цифра количника; ово споредно рачунање морају писати почетници особено, па тек онда, кад се добро извечбају могу значеће место прве цифре количника израчунати у глави.

Најпосле може се и ово дељење свести на просто одузимање овим начином: кад означимо првобитне јединице са значицом 0, десетице, стотине. хиљаде и. т. д. са редним цифрама 1 2, 3, ... а делове и то: десетне, стоте, хиљадите . . . . . .

$$\text{због } \frac{1}{10} = 10^{-1}, \ \frac{1}{100} = 10^{-2}, \ \frac{1}{1000} = 10^{-3} \ . \ . \ . \ .$$

са редним цифрама — 1, — 2, — 3, ... и с погледом на правило: $a^m : a^n = a^{m-n}$ може се одма одредити значеће место што ће да заузме прва цифра количника, кад само редну цифру највишег места дељитеља одузмемо од редне цифре највишег места у делимку, па ће нам ова разлика показати редну цифру највишег значећег места количника.

Тако је

У примеру 1.

$$\overset{-1}{0\cdot317} : \overset{+2}{264}$$

$-1-(+2) = -3$ т. ј. редна цифра прве значеће цифре количника износи — 3, дакле је прво значеће место у количнику хиљадите.

У примеру 2.

$$\overset{0}{26\cdot4} : \overset{-2}{0\cdot0925}$$

редна цифра првог значећег места у количнику је

$$= 0 - (-2) = +2,$$

која показује значеће место стотина.

За $\overset{+2}{4216\cdot81} : \overset{-1}{0\cdot421} = 5848$ . . . .

Овде је $+2-(-1) = +3$, а то је место хиљада, дакле прва редна цифра 5, заузима место хиљада.

100. Кад се унапред определи, колико десетни цифара треба да има количник, то се рачун скраћује; ако је н. пр. задато, повише цифара у дељенику и дељитељу. Онда рачун радимо овако:

1) Треба да изнађемо које ће место прва цифра количника заузети, а помоћу ове означићемо колико ће цифара у опште имати количник.

2) Колико цифара треба да буде у количнику, толико исто треба да узмемо у дељенику и дељитељу с лева на десно или у дељенику једну цифру више, кад је највиша цифра дељеника мања од дељитељеве.

3) Ако је прва цифра количника изнађена и остатак тога дељења познат, онда нећемо у даљем дељењу нову цифру из дељеника спуштати у остатак него ћемо одсећи у дељитељу једну цифру с десна и даље делити и. т. д.

4) Одсечена цифра дељитеља множиће се са ново изнађеном цифром количника ради поправке (коректуре) која се додаје слєдујућем производу исто онако као што смо чинили у множењу.

5) Кад је у дељитељу мање цифара но што се у количнику тражи, треба у дељењу обичним начином да спуштамо цифре из дељеника све допде, докле њихов број укупно са цифрама дељитеља непокаже толико цифара колико се тражи у количнику.

И тек после тога почињу да се изостављају цифре из дељитеља.

Ако дељеник врло мало цифара има, то ћемо недостајуће цифре попунити нулама.

1) Да се подели 7·359637 : 53·489 у три децимала.

Прва цифра количника показаће десете делове, а пошто количник треба да има 3 децимале, то ће рачун овако тећи:

7·35 : 53·4 = 0·137

201

41

ради сравнења израдићемо дељење потпуно са количником у три децимале.

7·35	9637 : 53·489 = 0·137
201	073
40	6067
3	1644

Погрешка коју ћемо учинити, кад количник престане код 3. децимале положна је и већа од половине јединице вредеће цифре на трећем месту, или погрешка $> \frac{5}{10^4}$. Ако узмемо да је количник = 0·138, онда је погрешка одречна и мања од половине јединице на трећем месту.

2) Да се подели 0·649847683 : 31·5 са 6 десетни цифара у количнику,

0·64984 : 31·5

1984 0·020629

94

31

3

погрешка положна и $> \frac{8}{10^7}$ или $< \frac{1}{10^6}$

Кад би хтели последњу цифру количника колико је могућно тачније да добијемо, треба као и код скраћеног множења да у количнику изнађемо једну цифру више.

Дакле у пређашњем примеру:

0·649847 : 31·5

1984 0·020630

947

2

погрешка одречна и $< \frac{2}{10^7}$ и $< \frac{1}{5}$ оне јединице која стоји на 6. месту.

ДЕВЕТИ ОДСЕК

ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ.

101 Разломци у виду $$1/a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cdots}}}}$$

зову се *верижни разломци* (континуирни). Њихов именитељ састоји се из целог броја и разломка, а овога именитељ опет из целог броја и разломка и т. д.

Разломци $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ . . . . зову се

наставци тога разломка. Кад је број ових наставака определен онда је разломак *крајни*, а кад није определен, то је *безкрајни* верижан разломак.

Ми ћемо овде имати посла само са крајним верижним разломцима и показаћемо, како ови постају.

Кад је $\frac{a}{b} < 1$, и кад поделимо броитеља и именитеља

са a, па нађемо $b : a = a_1 + \frac{r_1}{a}$; то је

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b : a} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_1}{a_1}}$$

исто је тако због

$$r_1 < a, \frac{r_1}{a} = \frac{1}{a : r_1} = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

Тако исто налазимо

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{r_1 : r_2} = \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}.$$

Ако овај рад продужимо, док се не сврши и свуда замењујемо то је:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Н. пр. $\frac{315}{719} = \frac{1}{719 : 315} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{89}{315}}$

$$315 : 89 = 3 + \frac{48}{89}$$

$$89 : 48 = 1 + \frac{41}{48}$$

$$48 : 41 = 1 + \frac{7}{41}$$

$$41 : 7 = 5 + \frac{6}{7}$$

$$7 : 6 = 1 + \frac{1}{6}$$

$$6 : 1 = 6$$

дакле је $\frac{315}{716} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6}$

кад пажљиво пропратимо како смо преобраћали прост разломак $\frac{315}{719}$ у верижан, видићемо, да се овде исто оно чинило, што смо чинили кад је тражена највећа општа мера за 315 и 719. (§. 41)

Количници, које овим путем добијамо биће именитељи поједини наставака. Тако смо добили врло лак начин да преобраћамо просте или десетне разломке у верижне разломке.

Има да се преобрати $\frac{4348}{7920}$ у верчжан разломак. Кад потражимо за бројитеља и именитеља тога разломка највећу општу меру добићемо:

4348	7920	1
776	3572	1
308	468	4
148	160	1
28	12	1
4		1
		1
		12
		3

дакле је $\frac{4348}{7920} = \frac{1087}{1980} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3}}}}}}}}}$

Да се преобрати $2 \cdot \dot{3}5\dot{7}$ у верижан разломак.

$2 \cdot \dot{3}5\dot{7} = 2 \frac{\dot{3}5\dot{7}}{999} = 2 \frac{119}{333}$

119	333	2
24	95	1
1	23	3
		1
		23

Дакле је $2 \cdot \dot{3}5\dot{7} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{23}}}}}$

Претварање верижног разломка у прост.

102. Верижан разломак преобраћамо у прост, кад исто оно чинимо што смо чинили при преобраћању смешаног разломка у неправ.

Рецимо да је задат разломак.

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{23}}}}}$$

Кад почнемо сводити одоздо, то је

$$1 + \frac{1}{23} = \frac{24}{23},$$

дакле је
$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{24}{23}}}}} \qquad \text{сада је } \frac{1}{\frac{24}{23}} = \frac{23}{24},$$

По томе
$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{23}{24}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{95}{24}}}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{24}{95}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{119}{95}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{95}{119}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{333}{119}} = 2\,\frac{119}{333}$$

103. У опште, кад треба преобратити верижан разломак у прост, ваља оно исто чинити што смо горе показали; из чега после изводимо правила, како се најлакше преобраћа верижан разломак у прост.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

и т. д.

Овде ћемо преобратити само први наставак, прва два, прва три и т. д. у опште прва n наставка у просте разломке.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Ове разломке што овако добијамо назваћемо *приближни разломци*. Сада можемо показати, да се ови по реду добивени прости разломци приближавају правој вредности задатог верижног разломка у толико више, колико се више наставака узму у рачун.

Ако узмемо сада ове знаке:

$$a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{z_0}{N_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{z_1}{N_1},\quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{z_2}{N_2},$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{z_3}{N_3} \text{ и т. д.}$$

Сада налазимо да је

$$\frac{z_1}{N_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n$$

и кад напишемо овде $a_1 + \frac{1}{a_2}$ у место a_2 то ћемо добити

за $\frac{z_2}{N_2}$, $\frac{z_2}{N_2} = \frac{a_0\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1} =$

$$= \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

Или с погледом на јед. (m и (n.

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_2 z_1 + z_0}{a_2 N_1 + N_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad p)$$

Даље је $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{(a_2 + {}^1/_{a_3})\, z_1 + z_0}{(a_2 + {}^1/_{a_3})\, N_1 + N_0} = \frac{(a_2 a_3 + 1)\, z_1 + a_3 z_0}{(a_2 a_3 + 1)\, N_1 + a_3 N_0} =$

$= \frac{a_3(a_2 z_1 + z_0) + z_1}{a_3(a_2 N_1 + N_0) + N_1}$ или с погледом на јед. (p.

$$\frac{z_3}{N_3} = \frac{a_3 z_2 + z_1}{a_3 N_2 + N_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (q$$

Истим путем добијамо

$$\frac{z_4}{N_4} = \frac{\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) z_2 + z_1}{\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) N_2 + N_1} = \frac{(a_3 a_4 + 1)\, z_2 + a_4 z_1}{(a_3 a_4 + 1)\, N_2 + a_4 N_1} =$$

$$= \frac{a_4(a_3 z_2 + z_1) + z_2}{a_4(a_3 N_2 + N_1) + N_2}$$

И помоћу једначине (q.

$$\frac{z_4}{N_4} = \frac{a_4 z_3 + z_2}{a_4 N_3 + N_2}.$$

По овом правилу изводимо сада у опште:

$$\frac{z_n}{N_n} = \frac{a_n z_{n-1} + z_{n-2}}{a_n N_{n-1} + N_{n-2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (r.$$

Ако је овај вид истинит, онда мора из њега произићи

$\frac{z_{n+1}}{N_{n+1}}$, ако напишемо

$\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ за a_n.

Тако је сада

$$\frac{z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) z_{n-1} + z_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) N_{n-1} + N_{n-2}} =$$

$$= \frac{(a_n a_{n+1} + 1)\, z_{n-1} + a_{n+1} z_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1)\, N_{n-1} + a_{n+1} N_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n z_{n-1} + z_{n-2}) + z_{n-1}}{a_{n+1}(a_n N_{n-1} + N_{n-2}) + N_{n-1}}$$

или с погледом на (r.

$$\frac{z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{a_{n+1} z_n + z_{n-1}}{a_{n+1} N_n + N_{n-1}}.$$

Ако дакле вреди извод тога правила за $\frac{z_n}{N_n}$, онда вреди и за $\frac{z_{n+1}}{N_{n+1}}$

Но знамо да је то правило изведено непосредним путем у

$$\frac{z_2}{N_2}, \quad \frac{z_3}{N_3}, \quad \frac{z_4}{N_4},$$

па зато мора вредити и за $\frac{z_5}{N_5}$, дакле и за $\frac{z_6}{N_6}$ и т. д. и по томе је истинито ово правило у опште.

Приметба. Горњи образаз у (*r.* извели смо закључком из неколико особено изведени случајева. Овакав начин доказивања кад се из поједини слчајева изводи закључак за опште правило, зове се неподпуна индукција. Правила која су овим начином изведена нису савршено несумњива, него имају извесни степен вероватноће. Овакво правило може се узети да је само онда несумњиво кад се може да покаже, да, кад је оно за неки опредељен случај истинито, да мора и за непосредно сљедујући случај бити истинито, као што је било у горњем случају.

Горе изнађено правило казујемо речима: *приближан разломак налазимо, кад именитеља наставка код кога станемо помножимо са броитељем непосредно предидућег приближног разломка и овом производу додамо броитеља предпредидућег приближног разломка, па овај сбир узмемо за броитеља. А именитеља добијамо кад именитеља наставка где стојимо помножимо са именитељем предидућег приближног разломка и овом производу додамо именитеља пред предидућег приближног разломка.*

Ово правило, као што видимо из једначине (*m*, (*n*, (*p*, почиње важити код $\frac{z_2}{N_2}$. А кад предпоставимо да је a_0 цео број, онда би могли речено правило применути и већ код $\frac{z_1}{N_1}$, јер се тада узима у појединим примерима помоћни разломак $^1/_0$; па ако сада ставимо $^1/_0$ пред првим приближним разломком и у осталом исто тако поступамо, као даје $^1/_0$ прави приближни разломак.

Ако пред наставним разломком нема целог броја, онда да би могли речено правило применути већ код другог приближног разломка т. ј. код $\frac{z_2}{N_2}$, треба употребти помоћни разломак $^0/_1$, који се узима као приближна вредност и поставља се пред првим приближним разломком $^1/a_1$.

Примери :

1) Разломак $= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$

Треба да мотримо на овај вид :

$$\begin{array}{cccccccc} & 2, & 3, & 4, & 2, & 5, & 1, & 2, \\ \frac{1}{0}\Big] & \frac{2}{1}, & \frac{3\cdot2+1}{3\cdot1+0}, & \frac{4\cdot7+2}{4\cdot3+1}, & \frac{2\cdot30+7}{2\cdot13+3}, & \frac{5\cdot67+30}{5\cdot29+13}, & \frac{1\cdot365+67}{1\cdot158+29}, & \frac{2\cdot432+365}{2\cdot187+158} \end{array}$$

или $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{30}{13}$, $\frac{67}{29}$, $\frac{365}{158}$, $\frac{432}{187}$, $\frac{1229}{532}$

Дакле је разломак $= \frac{1229}{532}$.

2) Разломак $= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}}}$

$\frac{0}{1}\Big)$ $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{30}{43}$, $\frac{157}{225}$, $\frac{972}{1393}$,

Дакле је разломак $= \frac{972}{1393}$.

Својства приближних разломака.

104. Напред смо показали, да се означавају приближни разломци са $\frac{z_0}{N_0}$, $\frac{z_1}{N_1}$, $\frac{z_2}{N_2}$ . . . . и у опште $\frac{z_n}{N_n}$ а права вредност верижног разломка са $\frac{z}{N}$.

I. Поједини приближни разломци су наизменце час већи час мањи од праве вредности верижног разломка $\frac{z}{N}$.

Знамо, да је $\frac{z_0}{N_0} = \frac{a_0}{1} < \frac{z}{N}$, јер је овде изостављен цео верижан разломак.

$$\frac{z_1}{N_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} > \frac{z}{N},$$

овде је у место свију наставака узето само $\frac{1}{a_1}$, дакле разломак с мањим именитељом, пошто је у именитељу изостављен део

$$\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

и по томе постаје већа вредност разломка.

Исто је тако $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} < a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$

т. ј. $\frac{z_2}{N_2} < \frac{z}{N}$ и т. д.

Ако се дакле налази цео број пред верижним разломком, онда је 1-ви, 3=ћи, 5=ти, ... у опште сваки посебични (парцијални) разломак на непарном месту мањи од праве вредности верижног разломка; и на против посебични разломци на парном месту већи су од њега. А кад нема целог броја пред разломком, онда је само по себи јасно, да је горње правило сасвим обрнуто.

У првом је случају $\frac{z_0}{N_0} < \frac{z}{N}$, $\frac{z_1}{N_1} > \frac{z}{N}$

$\frac{z_2}{N_2} < \frac{z}{N}$, $\frac{z_3}{N_3} > \frac{z}{N}$ и т. д,

Дакле права вредност верижног разломка лежаће свагда између два узастопце сљедујућа посебична разломка.

II. *Разлика два узастопна приближна разломка* $= \pm 1$, *(јединици) подељеној са производом оба имениоца.*

По томе је $\frac{z_0}{N_0} - \frac{z_1}{N_1} = \frac{z_0 N_1 - z_1 N_0}{N_0 N_1}$

$$z_0 N_1 - z_1 N_0 = a_0 a_1 - (a_0 a_1 + 1) . 1 = -1 \quad . \quad . \quad . \text{(α}$$

$$\frac{z_1}{N_1} - \frac{z_2}{N_2} = \frac{z_1 N_2 - z_2 N_1}{N_1 N_2}$$

Али је $z_1 N_2 - z_2 N_1 = z_1 (a_2 N_1 + N_0) - (a_2 z_1 + z_0) N_1 =$

$= z_1 N_0 - z_0 N_1 = +1$ по јед, (α.

даље је $\frac{z_2}{N_2} - \frac{z_3}{N_3} = \frac{z_2 N_3 - z_3 N_2}{N_2 N_3}$

$z_2 N_3 - z_3 N_2 = z_2 (a_3 N_2 + N_1) - (a_3 z_2 + z_1) N_2 =$

$= z_2 N_1 - z_1 N_2 = -1$. по оној прећашњој разлици

Исто тако налазимо $z_3 N_4 - z_4 N_3 = +1$

и у опште $z_{n-1} N_n - z_n N_{n-1} = \pm 1$ где ће вредити горњи или доњи знак, како је кад n парни или безпарни број.

Тако је дакле изнађено:

$$\frac{z_0}{N_0} - \frac{z_1}{N_1} = \frac{-1}{N_0 N_1}$$

$$\frac{z_1}{N_1} - \frac{z_2}{N_2} = \frac{+1}{N_1 N_2}$$

$$\frac{z_2}{N_2} - \frac{z_3}{N_3} = \frac{-1}{N_2 N_3}$$

$$\frac{z_3}{N_3} - \frac{z_4}{N_4} = \frac{+1}{N_3 N_4}$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$\frac{z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{zn}{Nn} = \frac{\pm 1}{N_{n-1}\, Nn}$$

И кад овај образац узмемо као истинит, то је $zn\, N_{n+1} - z_{n+1}\, Nn = \mp 1$ дакле

$$\frac{z_n}{N_n} - \frac{z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{\mp 1}{Nn\, N_{n+1}}$$, чиме је доказан општи образац.

По ономе I. закону како су постали поједини посебични разломци налазимо да је

$$N_0 < N_1 < N_2 < N_3 < N_4 < - - - - - - - -$$

дакле и $N_0 N_1 < N_1 N_2 < N_2 N_3 < N_3 N_4 < - - - -$

и тако је онда $\frac{1}{N_0 N_1} > \frac{1}{N_1 N_2} > \frac{1}{N_2 N_3} > \frac{1}{N_3 N_4} >$ — — — — т. ј. разлике два узастопце сљедујућа приближна разломка биваће бројно све мање, у колико се више у том реду удаљавамо. Али знамо, да права вредност верижног разломка лежи по (I. између два узастопце сљедујућа посебична разломка, и тако се дакле ови приближавају правој вредности све више и више, као што смо видели они одвећ мали што постају све већи, а они одвећ велики што постају све мањи.

А ово је управ узрок да су посебични разломци добили име „*Приближни разломци.*“

III. *Разлика између праве вредности и неког приближног разломка мања је од ± 1 подељено са квадратом именитеља тог приближног разломка.*

У опште је $\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} = \frac{\pm 1}{Nr\, N_{r+1}}$, а пошто права вредност $\frac{Z}{N}$ лежи између оба посебична разломка, то је извесно

$$\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z}{N} < \frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}$$

дакле и $\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z}{N} < \frac{\pm 1}{Nr\, N_{r+1}}$ Па ако сада напишемо Nr у место N_{r+1}, то је у толико пре.

$$\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z}{N} < \frac{\pm 1}{N_r^2}$$

Ако дакле при израчунавању неког верижног разломка прекинемо рачун код ма ког наставка, онда знамо према досадањем, како се определљава величина погрешке коју чинимо кад неке наставке изоставимо из рачуна.

IV. *Броитељ и именитељ неког приближног разломка свагда су односно прости бројеви.*

Кад би могли скратити $\frac{Zr}{Nr}$ са неким заједничким чинитељем $f > 1$, онда би морала и разлика $\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} =$

$$= \frac{Zr\ N_{r+1} - Z_{r+1}\ Nr}{Nr\ N_{r+1}}$$ (па и броитељ и именитељ) бити

раздељива са f, али због $Zr\ N_{r+1} - Z_{r+1}\ Nr =$

$= \pm 1$, морало би $\frac{\pm 1}{f}$ бити цео број, што је немогуће док се број f разликује од 1 и док је већи од јединице.

V *Између два узастопна приближна разломка* $\frac{Zr}{Nr}$ *и* $\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}$, *не може се уметнути никакав разломак, који би правој вредности разломка био ближи од оних задатих, и који би се могао бројевима тако написати, да су ови средње вредности између задати броитеља и именитеља.*

Узмимо да постоји овакав разломак и означимо га са $\frac{\alpha}{\beta}$ то би онда било.

$$Zr < \alpha < Z_{r+1} \text{ и } Nr < \beta < N_{r+1},$$

Али је и $\frac{Zr}{Nr} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} \quad . \ . \ . \ (p,$

јер је онда $\frac{\alpha}{\beta}$ ближе правој вредности но што је $\frac{Zr}{Nr}$ или

$$\frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}.$$

Али је $\frac{Zr}{Nr} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta\ .\ Zr - \alpha\ .\ Nr}{\beta\ .\ Nr} \gtreqless \frac{\pm 1}{\beta\ .\ Nr}$

А пошто су α, β, Zr и Nr цели бројеви, то је онда

$$\beta\ .\ Zr - \alpha\ .\ Nr \gtreqless \pm 1,$$

јер би $\beta\ .\ Zr - \alpha\ .\ Nr = 0$,

дакле $\frac{Zr}{Nr} = \frac{\alpha}{\beta}$, било противно нашој предпоставци.

Сада је $\pm \frac{1}{NrN_{r+1}} < \frac{\pm 1}{\beta\ .\ Nr} \lesseqgtr \frac{Zr}{Nr} - \frac{\alpha}{\beta}$,

а због $\pm \frac{1}{Nr\ N_{r+1}} = \frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}}$

а у толико пре

$$\frac{Zr}{Nr} - \frac{Z_{r+1}}{N_{r+1}} < \frac{Zr}{Nr} - \frac{\alpha}{\beta},$$

Дакле однос, који је са свим противан оном у (p, а то показује да $\frac{\alpha}{\beta}$ не може одговарати горњим условима.

105. У неким случајима имају верижни разломци овај општи вид:

$$A + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

Овде налазимо истим путем као у (§. 103) опште правило

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{b_n\ .\ Z_{n-1} + a_n\ .\ Z_{n-2}}{b_n\ .\ N_{n-1} + a_n\ .\ N_{n-2}}$$

Како се изказује речма ово правило?

Примене верижних разломка.

106. Једно доста важно примењивање састоји се у томе, да се неки на најмање наименовање доведени разломак, кога кога се бројитељ и именитељ састоји из великих бројева из-

рази приближно са мањим бројевима. Ово се може извршити кад разломак претворимо у верижан разломак и потражимо приближне вредности у којима налазимо разрешење тога задатка Степен приближења свагда ћемо определити по III. §. 104.

1. Ако је н. пр. 1 беч. фунта = 1·1201854 цол. фун.

Сада је $$\frac{11201854}{10000000} = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}$$

1, 8, 3, 8, 3, ...

$$\frac{1}{0}\Big)\frac{1}{1},\ \frac{9}{8},\ \frac{28}{25},\ \frac{233}{208},\ \frac{727}{649}\ \ldots\ldots$$

И тако постављамо ове приближне вредности:

1	цол	фун.	=	1	беч.	фун.
9	„	„	=	8	„	„
28	„	„	=	25	„	„
233	„	„	=	208	„	„
727	„	„	=	649	„	„

и т. д.

У размери $\frac{233}{208}$ налазимо погрешку према правој вредности $< \frac{1}{208^2}$ или погрешка < 0.000023. т. ј. приближна вредност слаже се са правом вредности још у 4 децимала подпуно, очему се лако можемо уверити.

2. Дужина времена сунчеве године (време обилажење земље окосунца)износи 365 дана, 5 сати, 48 минута и 50 секунда а грађанске године 365 дана, дакле је ова краћа од тропске године са 5 сахата, 48 мин. 50 сек. т. ј. 20930 секунда, или пошто 1 дан има 86400 секунда, са $\frac{20930}{86400}$ дана краћа од тропске године. Другим речима 86400 простих година заостаће за исто толико троски година са 20930 дана натраг. Да би сада могли изједначити тропску годину са простом годином, морамо после неколико година редовно по један или више дана додавати а да се ово може чинити на најудобнији начин тражићемо за $\frac{20630}{86400}$ приближне вредности.

Овде налазимо $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \frac{125}{516}, \frac{164}{677}, \frac{2093}{8640}$. т. ј. грађанска или проста година близу је $\frac{1}{4}$ дана, или тачније $\frac{7}{29}$, још тачније $\frac{8}{33}$ и т! д. дана заостала од тропске године.

Зато се може додати

	За	4	године	1	дан	Јулијански календар.
или	„	29	„	7	„	
„	„	33	„	8	„	
„	„	161	„	39	„	

и т. д.

107 Приближни разломци могу се врло удобно применути на разрешавање диофантови једначина.

Ако је н. п. задато $ax - by = c$, да се разреши. Треба да преобратимо a/b у верижан разломак и да определимо приближне разломке, а отуда је $\frac{p}{q}$ предпоследњи, и тако је (II.

§. 104). $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{b\,.\,q}$ дакле $aq - bp = \pm 1$,

Ако је α) $aq - bp = +1$, то је $acq - bcp = c$

или кад abr додамо и одузмемо

$$a.\,(cq + br) - b.\,(cp + ar) = c\,,$$

једначина којој одговара ма која произвољна вредност за r
Кад ову једначину сравнимо.

са $$ax - by = c,$$

добијамо за $x = cq + br$,

$y = cp + ar$.

Ако је β) $aq - bp = -1$;

то је $-aq + bp = +1$

$$-acq + bcp = c$$

па и овде кад се дода и одузме abr, то је:

$$a\,(br - cq) - b\,(ar - cp) = c$$

и ова сравњена са

$$ax - by = c,\ x = br - cq,\ y = ar - cp.$$

Тако је за $73x - 95y = 48$

$$\frac{73}{95} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}}}$$

предпоследња приближна вредност је $= \frac{10}{13} = \frac{p}{q}$

$$\frac{73}{95} - \frac{10}{13} = \frac{-1}{95\,.\,13}\,,$$

Дакле је по једначини β $\begin{cases} x = 95r - 48\,.\,13 \\ y = 73r - 48\,.\,10 \end{cases}$

или $\begin{cases} x = 95r - 624 \\ y = 73r - 480 \end{cases}$

Ако сада хоћемо да добијемо за x и y целе положне бројеве треба да ставимо за $r = 7, 8, 9, \ldots\ldots$

Примери за упражнење.

1. Да се редуцира $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7}}}}}}$

Последак $= \frac{9976}{6961}$.

2. $$\cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{\frac{3}{4} + \cfrac{1}{\frac{4}{5} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{2}}}}} = \cfrac{2}{1 + \cfrac{8}{3 + \cfrac{20}{4 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{3}{2}}}}}$$

По § 106 следује $\frac{318}{343}$.

3. $$\cfrac{1}{x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{4x + \cfrac{1}{5x}}}}}$$

4. Да се изнађу за 3.14159265 прости разломци, последак: $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, и т. д.

5. 1 метар = 3.163446 беч. стопа.

Просте размере : $\frac{3}{1}$. $\frac{19}{6}$, $\frac{155}{49}$, $\frac{329}{104}$, и т. д

6. Синодски месец има 29·53059 дана, сунчева година 365·24225 дана. Размере синодског месеца спрам сунчеве године:

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37} \text{ и т. д.}$$

ДЕСЕТИ ОДСЕК

СТЕПЕНЕ КОЛИЧИНЕ.

108 Степени са положним или одречним целим изложитељима.

У делењу познали смо овај вид $a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}$ а знамо да је

$$a^{+n} = a.\, a.\, a.\, a. \ldots (n \text{ пута})$$

дакле $a = \frac{1}{a.\, a.\, a.\, a. \ldots (n \text{ пута})} =$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \quad (n \text{ пута}) \text{ зато велимо}$$

Ако је изложитељ неког броја цео и одречан, онда треба преокренути корен толико пута узети као чинитеља, колико изложитељ има јединица.

Ово нам показује, да можемо из сваког рачуна искључити одречне изложитеље. Кад је броитељ неки број са одречним изложитељом, онда се може тај исти број написати у именитељу са преокренутим знаком изложитеља т. ј. кад положан знак изложитеља преокренемо у одречан, а одречан у положан. Исто тако преносимо количину са одречним изложитељем из именитеља у броитеља.

Примери :

1) $$\frac{a^{-3}b^2}{m^2} = a^{-3} \cdot \frac{b^2}{m^2} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{b^2}{m^2} = \frac{b^2}{a^3m^2}.$$

2) $$\frac{x^{-n}\,y^{-m}}{5z^{-p}} = x^{-n} \cdot y^{-m} \cdot {}^1/_5 \cdot \frac{1}{z^{-p}} =$$

$$= \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{y^m} \cdot \frac{1}{5} \cdot z^p = \frac{z^p}{5x^ny^m}$$

3) $$12a^m\, b^{-x}c^yd^{-z} = \frac{12a^mc^y}{b^xd^z}.$$

Правило наведено у §. 19. може се раширити у толико, да вреди за положне и одречне, али целе изложитеље.

Нађено је: $a^n \times a^m \times a^p = a^{n+m+p}$,

Али је н. пр. и $a^n \cdot a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{n-m-p}$,

јер је $$a^n \cdot a^{-m} \cdot a^{-p} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^n}{a^{m+p}} =$$

$$= a^{n-(m+p)} = a^{n-m-p}.$$

Исто тако налазимо, кад је предпостављено да су m и n цели и положни бројеви:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Овај начин писања може се проширити и за онај случај, кад су m или n, или m и n одречни:

Тако је дакле $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$

јер је $$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot \frac{a^n}{1} = a^{m+n};$$

Тако исто $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$,

јер је $$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} =$$

$$= a^n : a^m = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

Примедба. Кад н. пр. има при множењу или дељењу полинома са одречним изложитељима, то ћемо избећи писање количина у виду разломака, кад са степенима, којих су изложитељи одречни, у рачуну онако исто радимо као са степенима положних изложитеља. Кад уређујемо полиноме по једном писмену, треба да пишемо најпре положне изложитеље по падајућем реду, а после пишемо писмена са одречним изложитељима по растећем реду. Одречни изложитељи узимају се да су мањи од нуле; тако је онда,

$$0 > -1 > -2 > -3 \text{ и т. д.}$$

109. Сваки степен са изложитељем 0 раван је јединици; а степен са одречним изложитељем раван је јединици раздељеној са истим степеном по положним изложитељем.

Знамо да се може написати:

За $a^4 = \frac{a^5}{a}$

„ $a^3 = \frac{a^4}{a}$

„ $a^2 = \frac{a^3}{a}$

„ $a^1 = \frac{a^2}{a}$

Примери:

1) $$\frac{a^{-3}b^2}{m^2} = a^{-3}\cdot\frac{b^2}{m^2} = \frac{1}{a^3}\cdot\frac{b^2}{m^2} = \frac{b^2}{a^3m^2}.$$

2) $$\frac{x^{-n}\,y^{-m}}{5z^{-p}} = x^{-n}\cdot y^{-m}\cdot {}^1\!/_5\cdot\frac{1}{z^{-p}} =$$

$$= \frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{y^m}\cdot\frac{1}{5}\cdot z^p = \frac{z^p}{5x^ny^m}$$

3) $$12a^m\,b^{-x}c^yd^{-z} = \frac{12a^mc^y}{b^xd^z}.$$

Правило наведено у §. 19. може се разширити у толико, да вреди за положне и одречне, али целе изложитеље.

Нађено је: $a^n \times a^m \times a^p = a^{n+m+p}$,

Али је н. пр. и $a^n\,.\,a^{-m}\,.\,a^{-p} = a^{n-m-p}$,

јер је $$a^n\,.\,a^{-m}\,.\,a^{-p} = a^n\,.\,\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^p} = \frac{a^n}{a^{m+p}} =$$

$$= a^{n-(m+p)} = a^{n-m-p}.$$

Исто тако налазимо, кад је предпостављено да су m и n цели и положни бројеви:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Овај начин писања може се проширити и за онај случај, кад су m или n, или m и n одречни:

Тако је дакле $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$

јер је $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m\,.\,\frac{a^n}{1} = a^{m+n}$;

Тако исто $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$,

јер је $$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m}\times a^n = \frac{a^n}{a^m} =$$

$$= a^n : a^m = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

Примедба. Кад н. пр. има при множењу или дељењу полинома са одречним изложитељима, то ћемо избећи писање количина у виду разломака, кад са степенима, којих су изложитељи одречни, у рачуну опако исто радимо као са степенима положних изложитеља. Кад уређујемо полиноме по једном писмену, треба да пишемо најпре положне изложитеље по падајућем реду, а после пишемо писмена са одречним изложитељима по растећем реду. Одречни изложитељи узимају се да су мањи од нуле; тако је онда,

$$0 > -1 > -2 > -3 \text{ и т. д.}$$

109. Сваки степен са изложитељем 0 раван је јединици; а степен са одречним изложитељем раван је јединици раздељеној са истим степеном по положним изложитељем.

Знамо да се може написати:

За $a^4 = \frac{a^5}{a}$

„ $a^3 = \frac{a^4}{a}$

„ $a^2 = \frac{a^3}{a}$

„ $a^1 = \frac{a^2}{a}$

Дакле је неки степен од a раван првом вишем степену од a подељеном са кореном; тако је

$$\text{и}\quad a^0 = \frac{a^1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$„\quad a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$$

$$„\quad a^{-2} = \frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a\,.\,a} = \frac{1}{a^2}$$

$$„\quad a^{-3} = \frac{a^{-2}}{a} = \frac{1}{a^2\,.\,a} = \frac{1}{a^3}$$

— — — — — — — — —

$$„\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

110. Сваки положан број, подигнут на парног или непарног положног или одречног изложитеља има свагда положан резултат.

Тако је $(+\,a)^{2n} = +\,a^{2n}$

$$(+\,a)^{2n+1} = +\,a^{2n+1}$$

$$(+\,a)^{-2n} = +\,\frac{1}{a^{2n}}$$

$$(+\,a)^{-(2n+1)} = +\,\frac{1}{a^{2n+1}}$$

јер је $(+\,a)^{2n} = +\,a\,.+a\,.+a\,.\,.\,.\,.\,.\,.$

$$(2n\ \text{пута}) = +\,a^{2n}$$

$$(+\,a)^{2n+1} = +\,a\,.+a\,.+a\,.+a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$(2n+1\ \text{пута}) = +\,a^{2n+1}$$

$$(+\,a)^{-2n}\ \frac{+1}{a}\cdot\frac{+1}{a}\cdot\frac{+1}{a}\ .\ .\ .\ .$$

$$(2n+1\ \text{пута}) = \frac{1}{a^{2n}}$$

$$(+\,a)^{-(2n+1)}\ \frac{+1}{a}\cdot\frac{+1}{a}\cdot\frac{+1}{a}\cdots(2n+1)\ \text{пута} = \frac{1}{a^{2n+1}}$$

У свима овде наведеним случајима имамо све положне чинитеље, зато је и производ положан.

Ако је корен одречан, то је

$$(-\,a)^{2n} = +\,a^{2n}$$

$$(-\,a)^{2n+1} = -\,a^{2n+1}$$

$$(-\,a)^{-2n} = +\,\frac{1}{a^{2n}}$$

$$(-\,a)^{-(2n+1)} = -\,\frac{1}{a^{2n+1}}$$

Јер ако је изложитељ положан или одречан, али парни, то је производ из парног броја одречних чинитеља положан; напротив, ако је изложитељ безпарни, то је степен из безпарног броја одречних чинитеља, зато је производ њихов одречан,

111. Степене количине сабирамо и одузимамо исто онако као што сабирамо и одузимамо алгебарске количине. Само равнородне степене количине можемо сабирати; а ове су онда равнородне, кад су им и корени и изложитељи једнаки.

Примери:

1) $a^n + a^n = 2a^n$

2) $a^m + a^n = a^m + a^n$

3) $a^n - (b^n + a^n) = -\,b^n$

4) $a^n - b^n - 3a^n = -\,(2a^n + b^n)$.

5) $af^n + bf^n - cf^n - df^n = (a + b - c - d) f^n$.

6) $a^2 + 2a^2 + 3ab^n - 5b^n = 3a^2 + (3a - 5) b^n$.

7) $7a^3 + 5a^3 - 9a^3 - a^3 = (7 + 5) a^3 -$

$- (a + 1) a^3 = 12a^3 - 10a^3 = 2a^3$.

8) $5a^{-3} . a^{-1} + 3 a^{-2} - ca^{-4} - dca^{-2} = ;$

9) $\frac{5a^3}{b^4} - \frac{7a^3}{b^4} + \frac{11a^3}{b^4} + a^4 = ; \ldots$

10) $6a^nb^m - 5a^m + 3a^nb^m$.

112. Производ подижемо на степен, кад сваког чинитеља на тај степен подигнемо, па онда ове степене међусобно помножимо.

$$(abc)^n = a^n . b^n . c^n \quad \ldots\ldots \quad (1$$

јер је $(abc)^n = abc . abc . abc \quad \ldots\ldots \quad (n$ пута$) =$

$= a . a . a . a . \ldots . n$ (пута) $\times$

$\times\ b . b . b . b . \ldots . n$ (пута)

$\times\ c . c . c \ \ldots \ (n$ пута$) =$

$= a^n . b^n . c^n$

Кад ову једначину (1 обратно читамо са зади, онда можемо то правило изговорити овако:

„Степене са једнаким изложитељима, множимо, кад њихове корене међусобом помножимо, а производ подигнемо на заједнички степен.“

Примери:

1) $(35)^3 = 7^3 . 5^3$

2) $(a^2 - b^2)^3 = (a + b)^3 . (a - b)^3$.

3) $(ab)^4 = a^4 . b^4$

4) $(- 3b)^3 = - (3^3 . b^3)$

5) $(abcd)^n = a^n . b^n . c^n . d^n$.

6) $(2ax)^5 = 32a^5x^5$.

7) $(- 4ab)^2 \times (3a)^3 = 16a^2b^2 . 27a^3$.

8) $(3mx)^2 . (4mn)^3 = 9m^2x^2 . 64m^3n^3$

9) $(7a)^3 . (2a)^4 . (3a)^2 = 343a^3 \times 16a^4 \times 9a^2$

10) $a^4 . a^2 = a^{4+2} = a^6$

11) $a^3 . a^3 . a^3 = a^9$

12) $a^2 . b^2 = (ab)^2$

13) $a^n . a^0 = a^n . 1 = a^n$

14) $a^0 . a^{-0} = 1 . \frac{1}{a^0} = 1$.

15) $a^0 . a^{-n} = a^{0-n} = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

16) $a^n . a^{-m} = a^n . \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}$

17) $a^{-n} . b^{-n} = (ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n}$

18) $a^{-n} . b^n = \frac{1}{a^n} . b^n = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

или : $(a^{-1}b)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

19) $a^3 \cdot a^{-5} = a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

или: $= a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

20) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pq}{nq}}$

21) $a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$

22) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{-\frac{np-mq}{nq}}$

23) $-a^{-3} \cdot b^{-3} = -(ab)^{-3}$

24) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot b^3 = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^3 = a^3$

25) $-2^{-3} \cdot 3^{-3} = -6^{-3} = -\frac{1}{6^3}$

26) $\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right)^3 \cdot (a-b)^3 = 1.$

27) $(^1/_3)^2 \cdot (^6/_5)^2 = (^2/_5)^2 = \frac{4}{25}$

28) $\frac{a^{n-1}}{a^{-1}} \times (ab)^n = a^n b^n = (a^2 b)^n$

29) $3a^{-4} \cdot 4b^{-7} = 12a^{-4}\, b^{-4}\, b^{-3} = \frac{12\,(ab)^{-4}}{b^3}$

30) $-2x^{3n-1} \cdot y^{3n-m} = -\frac{2\,(xy)^{3n}}{xy^m}$

31) $-a^{m+n-1} \cdot -3a^{-(n+1)} \cdot -4ab^m = -\frac{12\,(ab)^m}{a}$

32) $\frac{a^4}{m^{-2}} \cdot \left(\frac{m}{a}\right)^4 = m^6.$

33) $-a^{(p-q)} \cdot -3a^{(3q-2)}\, g \cdot 5a^{(p+q)}\, cg = 15a^{2q+2p+5}\, cg^2$

34) $a^{-m}b^p c^q \cdot a^n b^{-r} c^3 \cdot (-a^{n+m})\, b = -a^{2n} b^{p-r+1}\, c^{q+3}.$

35) $3a^{-3}b : (-c)^5\, d^7 \cdot (-g)^4 \cdot (-c)^{-3} = \frac{3bc^2d^7g^4}{a^3}$

36) $5\,(a-b)^{-5} \cdot c^{-3} \cdot (b-a)^2 \cdot (-c)^{-7} = -\frac{5}{(a-b)^3\, c^{10}}$

37) $\frac{a^n \cdot b^{n-1}}{c^{-1}} \cdot \frac{a^n \cdot b}{c} = \frac{a^{2n}b^n}{c^0} = (a^2 b)^n$

38) $a^{-n}b^{-n} \cdot 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 4^2 = (ab)^{-n} \quad 2^{-2} \cdot (3 \cdot 4)^2 =$

$$= \frac{(3 \cdot 4)^2}{2^2 \cdot (ab)^n} = \frac{6^2}{(ab)^n}$$

39) $\frac{(a+x)^2}{(a+y)^{-4}} \cdot \frac{(a+y)^5}{(a+x)^{-3}} = \quad . \quad .$

40) $(a+b)^{-3}\, h^5 m^4 \cdot (a+b)^{n-1}\, g^{-4}\, h^{3n} m_{-}^{2}. = \ldots .$

41) $(-13a^{-1}\, c^{-3}) \cdot (-4a^{-2}\, b^5\, c^2) = \ldots .$

42) $\frac{a}{b^{1/2} \cdot c^{3/4}} \cdot \frac{a^{7/8} \cdot b}{c^{-1/2}} = \ldots$

118. Разломак подижемо на степен, кад бројитеља и именитеља на тај степен подигнемо.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

јер је $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots$ (n пута) $=$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \quad (n \text{ пута})}{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots\ldots \quad (n \text{ пута})} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ученици нека покажу, како се подиже на степен:

$(abc)^{-n}$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$

$a^m \cdot a^{-n}$

$a^{-m} \cdot a^{-n}$

$a^{-m} \cdot b^{-m}$

$a^m : a^{-n}$

$a^{-m} : a^n$

$a^{-m} : a^{-n}$

$a^{-m} : b^{-m}$

Из горе наведеног правила налазимо, да вредност чистог разломка постаје све мања, у колико се разломак на већи степен подиже.

Јер кад помножимо бројитеља и именитеља разломка a/b са b, то ће изаћи $\frac{ab}{b^2}$; ако сада узмемо, да је бројитељ помножен у место са b, са неким мањим бројем н. пр. a, то је онда

$$aa = a^2 < ab,$$

Зато је и $\frac{ab}{b^2} > \frac{a^2}{b^2}$.

Исто је тако $\frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$

и у опште $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{a^4}{b^4} \ldots\ldots$

А кад је напротив $a > b$, то је обратно

$$\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3} < \ldots\ldots\ldots$$

Примери:

1) $a^0 : a^0 = 1.$

2) $a^0 : a^m = a^{0-m} = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

3) $a^0 : a^{-m} = a^{0-(-m)} = a^{0+m} = a^m$

4) $a^{-n} : a^0 = a^{-n}$

5) $\frac{a^{3(n-1)}\, a^n}{a^3} = a^{4n-6}$

6) $\frac{36a^4b}{4a^2} = \frac{9a^2 \cdot a^2 \cdot b}{a^2} = 9a^2b$

7) $\frac{8a^2 - a^3b}{4a^2} = 2 - \frac{ab}{4}$

8) $\frac{12^2 \cdot b^5 \cdot m^{5-1}}{16 \cdot b^2 \cdot m^2} = \left(\frac{12}{4}\right)^2 \cdot b^3 \cdot m^2 = 9b^3\, m^2.$

9) $\dfrac{12^3}{144^2} = \dfrac{12^2 \cdot 12}{(12 \cdot 12)^2} = \dfrac{12^2 \cdot 12}{12^2 \cdot 12^2} = \dfrac{12}{12^2} = \dfrac{1}{12}$

10) $\dfrac{5 \cdot 75^2}{125^2} = 5\left(\dfrac{75}{125}\right)^2 = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 =$

$$= 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

11) $\dfrac{12a^4b^2c^3}{4a^3b^2c^2} = 3a^{4-3}\ b^{2-2}\ c^{3-2} = 3ac.$

12) $\dfrac{6\ (a+b)^{-8}}{12\ (a+b)^{-3}} = \dfrac{1}{2\ (a+b)^5}$

13) $\dfrac{18a^{-5}b^3}{7c^{-2}d^{-6}} : \dfrac{9a^{-6}b^5}{4c^{-3}d^{-9}} = \dfrac{18a^{-5}b^3 \cdot 4c^{-3}d^{-9}}{7c^{-2}d^{-6} \cdot 9a^{-6}b^5} = \dfrac{8a}{7b^2cd^3}$

14) $\dfrac{c^{-2}}{4a^{-p}b} : 3a^{-3} \cdot b^{-m} \cdot c = \dfrac{a^{p+3}b^{m-1}}{12c^3}$

15) $\dfrac{3a^3d}{2b^5} : \dfrac{b^3}{4a^2c^7} = \dfrac{6a^5c^7d}{b^8}$

16) $\dfrac{2x^{3n-5m}\ y^{2n-3}}{7a^mb^3c} : \dfrac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5} = \ \ldots$

17) $\dfrac{a_3}{b^{1/2}c^{3/4}} : \dfrac{a^{-7/8}b}{c^{1/2}} = \ \ldots$

18) $\dfrac{2m^{-1/3} \cdot n^{4/3}}{m^{n-1}} : \dfrac{m^{-1/2+4n}\,p}{n^{-1/6}} = \ \ldots$

19) $\dfrac{5c^2a^{-m}b^n}{8} : 3cd^5a^pb^{-4} = \ \ldots$

20) $\dfrac{2c^3\ (1+z^2)^2}{d^7z^9} : \dfrac{5c^8 \cdot (1+z^2)^{-6}}{2d^9z^5} = \ \ldots$

114. „Степену количину подижемо на степен, кад корен подигнемо на степен производа њихових изложитеља.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

јер је $(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n \ \ldots\ldots$ (m пута)

$= a^{n+n+n+n} \ \ldots$ (m пута) $= a^{mn} = a^{n \cdot m}$

Ово правило вреди, ма какве знаке да има m и n.

јер је $(a^{-n})^{+m} = a^{-n \cdot +m} = a^{-nm}$

$$(a^{+n})^{-m} = a^{+n \cdot -m} = a^{-nm}$$

$$(a^{-n})^{-m} = a^{-n \cdot -m} = a^{+mn}$$

Зато што је $(a^{-n})^{+m} = \left(\dfrac{1}{a^{+n}}\right)^{+m} = \dfrac{1^{+m}}{(a^{+n})^m} =$

$$\frac{1}{a^{+nm}} = a^{-nm}$$

$$(a^{+n})^{-m} = \frac{1}{(a^{+n})^{+m}} = \frac{1}{a^{+nm}} = a^{-nm}$$

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^{+m}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{+n}}\right)^{+m}} = \frac{1}{\dfrac{1}{a^{+nm}}} = a^{nm}.$$

Примери.

1) $(5ax^3y^{-2})^4 = 5^4 \,.\, a^4 \,.\, x^{12} \,.\, y^{-8} = \frac{625a^4x^{12}}{y^8}$.

2) $$\left(\frac{4a^m b^{-r} c^x}{3a^5b^4c^{-y}}\right)^3 = \frac{64a^{3m}b^{-3r}c^{3x}}{27a^{15}b^{12}c^{-3y}} = \frac{64a^{3m}\,.\,c^{3x}\,.\,c^{3y}}{27a^{15}b^{12}b^{3r}} =$$

$$= \frac{64a^{3m-15}c^{3x+3y}}{27b^{3r+12}}$$

3) $$\left(-\frac{6m^2xy^3}{5n^3z^4}\right)^{-2} = +\frac{6^{-2}m^{-4}x^{-2}y^{-6}}{5^{-2}n^{-6}z^{-8}} =$$

$$= \frac{5^2n^6z^8}{6^2m^4x^2y^6} = \frac{25n^6z^8}{36m^4x^2y^6}.$$

4) $$\left(-\frac{2x^a y^{-b} z^c}{3a^x b^{-y} c^z}\right)^{-3} = -\frac{2^{-3}x^{-3a}y^{3b}z^{-3c}}{3^{-3}a^{-3x}b^{3y}c^{-3z}} =$$

$$= -\frac{27a^{3x}c^{3z}y^{3b}}{8b^{3y}x^{3a}z^{3c}}$$

5) $[4\,(x+y)^{-2}]^3 = 4^3\,(x+y)^{-6} = \frac{64}{(x+y)^6}$

6) $$\left[\left(\frac{2a^4b^{-3}}{3\,(x-y)^2}\right)^3\right]^{-4} = \left(\frac{2a^4b^{-3}}{3\,(x-y)^2}\right)^{-12} =$$

$$= \frac{2^{-12}\,a^{-48}b^{36}}{3^{-12}(x-y)^{-24}} = \frac{3^{12}\,b^{36}\,(x-y)^{24}}{2^{12}\,a^{48}}.$$

Разни задачи.

1) $(3ab^2c^{-3} + 6a^{-2}\,b^3c - 12a^mb) +$

$+ (4ab^2c^{-3} - a^{-2}b^3c - a^mb) = \dots\dots$

2) $\left(2m^{-1}\,p^{-3} + \frac{a}{p^3}\right) + \left(q^{m-1} - \frac{n}{q^{1-m}}\right) = \dots$

3) $\left(\tfrac{1}{2}\,a^2x^3 - \frac{3x^4}{4a^{-1}}\right) + \left(\frac{x^3}{4\,(ax)^{-1}} - \frac{5a^3x^{-1}}{ax^{-4}}\right) = \dots\dots$

4) $\left[\frac{a^{n-1}b}{c} + \frac{a^2d^3c}{(bc)^{-1}} - \frac{(a^{1-n}\,d^{-1})^{-3}}{a^{2(n-1)}\,b^{-1}}\right] +$

$+\left[\left(\frac{4a^{-1}b}{a^{-n}c} - \frac{a^3bd^4}{a^{4-n}d}\right) + \frac{a^nd^2c^2}{a^{n-2}\,(db)^{-1}}\right] = \dots\dots$

5) $5a^m\,b^p + 3a^{-3}\,b^{m-1} - \frac{3a^3}{x^p} -$

$- \left(3ca^m\,b^p - 4g^2\,a^{-3}\,b^{m-1} - \frac{10a^3}{x^p}\right) +$

$+ (a^mb^p - 2g^2\,a^{-3}\,b^{m-1}) = \dots\dots$

6) $(a^6 + a^4 + a^2)\,(a^2 - 1) = \dots\dots\dots$

7) $\left(\frac{a^{4x}}{m^0} + b^{2n} + a^{2x}\,.\,b^n\right)\,.\,(a^{2x} - b^n) = \dots\dots$

8) $\left(a^{2x} + \frac{a^{6x}c^0}{a^{2x}} + (a^{-x})^{-6}\right)\,.\,\left((-a)^{2x} - m^0\right) = \dots\dots$

9) $\left[3a^{y} - \left(\frac{5b^{n-x}}{b^{-x}} - 4c^{m-n}\right)\right] \cdot$

$\cdot \left(\frac{3a^{y-n}}{a^{-n}} + \frac{5b^{n+1}}{bx^{0}} + 4c^{-(n-r)}\right) = \ldots\ldots\ldots$

10) $\left[a^{m-1} - \left(\frac{-b^{x}}{b^{-1}} + \frac{a^{m}}{a} - \frac{c}{b^{x}}\right)\right] \cdot \left(\frac{b^{x}}{b^{-1}} - cb^{-x}\right) = \ldots$

11) $\left[(4a^{2m})^{2} - \left(-\frac{8a^{5m}b^{n-1}}{(a^{2})^{m}b} - 2a^{m}b^{3n} - (4\,(a^{m}b^{n})^{2} +\right.\right.$

$\left.\left. + (b^{n})^{4})\right)\right] \times (2a^{m} - b^{n}) = \ldots\ldots$

12) $\left[\frac{a^{2}}{b^{3}} + \frac{2c^{2}}{b^{4}}\left(cb^{-1}d^{4} - \frac{7a^{-4}}{2b^{-1}}\right)\right] \cdot \left[\frac{a^{2}}{b^{3}} - \left(\frac{d}{a}\right)^{4} \times\right.$

$\left.\times \left(\frac{2c^{3}b^{-3}}{a^{-4}} + \frac{7c^{2}b^{-3}}{2d^{4}}\right)\right] = \ldots\ldots$

13) $(a^{4} - b^{4}) : (a - b) = \ldots\ldots$

14) $(a^{n} - b^{n}) : (a - b) = \ldots\ldots$

15) $(a^{6} + 2a^{3}z^{3} + z^{6}) : (a^{2} - az + z^{2}) = \ldots\ldots$

16) $\left[a^{3}b\,(a^{-1}x^{8} - x^{7}) + a^{5}x^{7} - \frac{a^{4}}{x^{-6}}\left(8a^{2} - \frac{7x^{-1}}{a^{-3}}\right)\right] :$

$x^{2}\,(a^{2} - a^{3}x^{-1}) = \ldots\ldots$

17) $\left(\frac{a^{3}c}{b^{5}} + \frac{a^{4}c}{b^{4}} - 7a^{5}cb^{-3} - \frac{a^{2}}{b^{2}}\,(3a^{4}c - c^{3}) -\right) -$

$- a^{4}c^{3} - 2a^{3}b^{-1}c^{3}) : \left[\frac{3a^{2}}{b^{3}}\left(\frac{a^{-1}}{3} + \frac{1}{b^{-1}}\right) + c^{2}\right] = \ldots$

18) $-a^{2} + 2ab - b^{2} = \ldots$

19) $a^{3} + b^{3} = \ldots\ldots$

20) $a^{3} - b^{3} = \ldots\ldots$

21) $\frac{1 - a^{4}}{a^{3} - a^{4}} = \ldots\ldots$

22) $\frac{a^{3} + a^{2}b - ab^{2} - b^{3}}{a^{2} - b^{2}} = \ldots\ldots$

23) $\frac{a^{4} - 2a^{2}b^{2} + b^{4}}{a^{2} - b^{2}} = \ldots\ldots$

24) $\frac{a^{3}n^{3} - 1}{an - 1} = \ldots\ldots$

25) $\frac{y^{4} - z^{4}}{(y^{2} + z^{2})\,(y - z)^{2}} = \ldots\ldots$

26) $\frac{a^{3} + (1 + a)\,ay + y^{2}}{a^{4} - y^{2}} = \ldots\ldots$

27) $\frac{a^{2} + b^{2} + c^{2} + 2ab + 2ac + 2bc}{a^{2} - b^{2} - c^{2} - 2bc} = \ldots\ldots$

28) $\frac{(a + b)\,(a + b + c)\,(a + b - c)}{2a^{2}b^{2} + 2a^{2}c^{2} + 2b^{2}c^{2} - a^{4} - b^{4} - c^{4}} = \ldots\ldots$

ПОДИЗАЊЕ СЛОЖЕНИ ИЗРАЗА НА СТЕПЕН.

Квадрат бинома.

115. Знамо да је $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$ или кад свршимо множење, $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ т. ј.

„Квадрат бинома састоји се из квадрата првог члана, двоструког производа оба члана и из квадрата другог члана."

Исто тако налазимо, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

дакле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Примери

1) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4\,x\,y + 4y^2$.

2) $(ab - c^2)^2 = a^2 b^2 - 2abc^2 + c^4$.

3) $(x^n + y^m)^2 = x^{2n} + 2x^n y^m + y^{2m}$.

4) $\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{3a}{2b} + \frac{a^2}{b^2}$.

5) $\left(\frac{1}{2} - \frac{5x}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{5x}{6} + \frac{25x^2}{36}$

6) $(a - 1)^2 + 2\,a - 1 = a^2$.

7) $3\,(a - 4)^2 + 16\,(7 - 2a)^2 = 832 - 472a + 67a^2$.

8) $\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$

Квадрат полинома

116 Да се изведе $(a + b + c)^2$

Ставимо најпре $a + b = s$, па је онда

$(s + c)^2 = s^2 + 2s\,c + c^2$,

или кад заменемо вредност за s, $(a + b + c)^2 =$

$(a + b)^2 + 2c\,(a + b) + c^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$,

Кад исто тако поставимо у $(a + b + c + d)^2$ за $a + b + c = s$, то ћемо добити $(a + b + c + d)^2 = a^2 +$ $+ 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$

„Овде видимо, да се састоји квадрат полинома из квадрата сваког члана и двогубог производа свака два члана."

Примери :

1) $(a - b - c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2\,(a - b)\,c + c^2$.

2) $(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2\,(a - b)\,c + c^2$,

3) $(a - a^2 - a^3)^2 = a^2 - 2a^3 + a^4 + 2a^5 + a^6$.

3) $(4 - 3x + 2x^2 - 7x^3)^2 = (16 - 24x + 25x^2 - 68y^3 +$

$+ 46x^4 - 28x^5 + 49x^6$.

5) $(5 - 2z - z^2 + 3z^3 - 5z^4)^2 = 25 - 20z - 6z^2 +$

$+ 34x^3 - 61z^4 + 14z^5 + 19z^6 - 30z^7 + 25z^8$.

6) $(a - b - c - d)^2 = - - - -$

7) $(a + b - c - d)^2 = - - - - -$

8) $(a - b + c - d)^2 = - - - - -$

9) $(a - b - c + d)^2 = - - - - -$

10) $(a + b - c + d)^2 = - - - - -$

117, *Трећи степен бинома*

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

кад помножимо ове чинитеље, то је

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 . b + 3b^2 . a + b^3$$

т. ј. „трећи степен бинома састоји се из куба првог члана тространог квадрата првог члана помноженог с другим чланом тространог квадрата другог члана помноженог с првим чланом и куба другог члана."

Исто је тако $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 . b + 3b^2 . a - b^3$,

дакле $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Примери:

1) $(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.

2) $(5a - 1)^3 = 125a^3 - 75a^2 + 15a - 1$).

3) $(2m^2 + 4n^3)^3 = 8m^6 + 48m^4n^3 + 96m^2n^6 + 64n^9$.

4) $(ax^{-m} - by^n)^3 = \frac{a^3}{x^{3m}} - \frac{3a^2 by^n}{x^{2m}} +$

$$+ \frac{3ab^2y^{2n}}{x^m} - b^3y^{3n}.$$

5) $\left(\frac{1}{3} + 5a^2\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{5a^2}{3} + 25a^4 + 125a^6$

118. *Трећи степен полинома.*

Да би подигли $(a + b + c)^3$, узмимо $a + b$ као први члан бинома, и онда је

$$(a + b + c)^3 = (a+b)^3 + 3(a + b)^2 . c + 3c^2 . (a + b) + c^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 +$$

$$+ 3bc^2 + c^2$$

Исто је тако $(a + b + c + d)^3 = (a + b + c)^3 +$

$$+ 3(a + b + c)^2 . d + 3(a + b + c) d^2 + d^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c$$

$$+ 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d +$$

$$+ 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3 =$$

$$= 3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 . c + 3(a + b) . c^2 + c^3 +$$

$$+ c^3 (a + b + c)^2, d + 3(a + b + c) d^2 + d^3.$$

„Овде видимо, да први корени члан даје свој сопствени куб; сваки сљедујући корени члан даје три саставна дела, т. ј. троструки крадрат суме свију предидући корени чланова помножен са сваким кореним чланом, троструку суму свију предидући чланова помножену квадратом тог кореног члана, и свој сопствени куб."

1) $(a - b - c)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3(a - b)^2 . c +$

$$+ 3(a - b) c^2 . - c^3.$$

2) $(a + b - c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 -$

$- 3(a - b)^2 \cdot c + 3(a - b) \cdot c^2 - c^3$

3) $(a - b - c + d)^3 = - - - -$

4) $(a - b + c - d)^3 = - - - -$

5) $(4 - x - 4x^2 + x^3)^3 = - - - -$

Да се образује други и трећи степен неког десетног броја.

119. Пошто се може сваки декадни број сматрати као какав полином, уређен по степенима од 10, то ћемо по горњим образцима §. §. 115 — 118 подизати и десетне бројеве на други и трећи степен.

а) Квадрат десетног броја.

Узмимо н. пр. 43 да подигнемо на квадрат, то је $(43)^2 =$

$= (40 + 3)^2 = 1600 + 24_0 + 9 = 1849.$

или $(40)^2 = 16_{00}$

$2(40 \cdot 3) = 24_0$

$3^3 = 9$

1849

$(465)^2 = (\overset{a}{4_{00}} + \overset{b}{6_0} + \overset{c}{5})^2$

$a^2 = 16_{0000}$	или кад изоставимо нуле
$2ab = 48_{000}$	$4^2 = 16$
$b^2 = 36_{00}$	$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$
$2(a + b)c = 460_0$	$6^2 = 36$
	$2 \cdot 46 \cdot 5 = 460$
$c^2 = 25$	$5^2 \quad 25$
216225	216225

$$(3726)^2 = (\overset{a}{3_{000}} + \overset{b}{7_{00}} + \overset{c}{2_0} + \overset{d}{6})^2$$

$a^2 = 9_{000000}$ или	$3^2 = 9$
$2ab = 42_{00000}$	$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
$b^2 = 49_{0000}$	$7^2 = 49$
$2(a + b)c = 148_{000}$	$2 \cdot 37 \cdot 2 = 148$
$c^2 = 4_{00}$	$2^2 = 4$
$2(a + b + c)d = 4464_0$	$2 \cdot 372 \cdot 6 = 4464$
$d^2 = 36$	$6^2 = 36$
13883076	13883076

из тога видимо, да се више цифрени број подиже на квадрат по оном истом правилу, као што смо показали како се подиже полином на квадрат.

Т. ј. десетни број подићићемо на квадрат овим начином:

1. Кад подигнемо прву или највишу цифру на квадрат.

2. Кад од сваке сљедујуће цифре начинимо два дела, кад узмемо најпре двоструки производ из предидући бројева, и из цифре, која је на реду, а после квадрат саме те цифре.

3. Ове поједине резултате треба да пишемо један под други тако, да сваки сљедујући у једно место на десно изван предидућега стоји; сума ови резултата даје нам захтевани квадрат.

Десетни разломци тако се исто подижу на квадрат, само што треба имати на уму да је $\left(\frac{A}{10^m}\right)^2 = \frac{A^2}{10^{2m}}$; зато ћемо у резултату двапут онолико десетни цифара одсећи с десна, колико има задати разломак.

Сваки n цифрени број подигнут на квадрат има цифара у резултату $2n$ или $2n - 1$.

б.) Куб десетних бројева.

Знамо из §. 118 како се подиже сложен израз на трећи степен; зато ћемо по том истом правилу подићи више цифрени број на трећи степен.

$$(72)^3 = (\overset{a}{70} + \overset{b}{2})^3 = 343_{000} = a^3$$
$$294_{00} = 3a^2b$$
$$84_0 = 3ab^2$$
$$\frac{8}{373248} = b^3$$

$(314)^3 = {}^2.$

$a^3 \ldots\ldots 3^3 = 27 \ldots\ldots\ldots$

$3a^2b \,.\,.\; 3 \,.\, 3^2 \,.\, 1 = 27 \ldots\ldots\ldots$

$3ab^2 \,.\,.\; 3 \,.\, 1^2 \,.\, 3 = 9 \ldots\ldots$

$b^3 \,.\,.\; 1^3 = 1$

$3(a+b)^2 . c \,.\,.\, 3 \,.\, (31)^2 \,.\, 4 = 11532 \,.\,.$

$3(a+b) c^2 \,.\,.\, 3 \,.\, 4^2 \,.\, 31 = 1488$

$c^3 \ldots\ldots\ldots 4^3 = 64$

$30959144 = (314)^3.$

1) $(27{\cdot}3)^2$

2) $(0{\cdot}37)^2$

3) $(5{\cdot}67)^2$

4) $(3{\cdot}005)^3$

Овде је као и код подизања на други степен, да се при подизању десетног разломка на трећи степен, овај подиже на тај степен као и други цели број; но само у резултату треба због $\left(\frac{A}{10^m}\right)^3 = \frac{A^3}{10^{3m}}$ трипут онолико десетни цифара с десна одсећи, колико има задати разломак.

Сваки n цифрени број даје, кад се подигне на куб $3n$ или $3n$-1ну $3n - 2$ цифре у резлултату.

Разни примери и задатици.

1) $\left(-\frac{5x}{8y}\right)^3 = \frac{-125x^3}{512y^3}.$

2) $(5x^n y^m z^{-p} v^{-q})^{-r} = \frac{z^{pr} v^{qr}}{5^r x^{nr} y^{mr}}$

3) $\left(\frac{a^m b^n c^p d^{-q}}{e^n g^{-m}}\right)^{-h} = \frac{e^{hn} d^{hq}}{a^{hm} b^{hn} c^{hp} g^{hm}}$

4) $\{[(a^m)^n]^p\}^r = a^{mnpr}$

5) $(a^{m-n}b^{m+n})^{m+n} = a^{m^2-n^2}\ b^{m^2+2mn+n^2}$

6) $\left(\dfrac{6x - 3y}{x + y}\right)^{-2} = \ldots\ldots$

7) $\dfrac{[2(a-b)]^{-1}}{[4(a-b)]^{-2}} = \ldots\ldots$

8) $[3(a+b)^2 - 2(a-b)^2]^2 = \ldots\ldots$

9) $(a - b + c)^{-2} = \ldots\ldots$

10) $[a(x+y)^3 - b(x-y)^3]^2 = \ldots\ldots$

11) $[2(a+b-c) - 3(a-b+c) + 4(b+c-a)]^3 = \ldots$

12) $\left(\dfrac{5a^3b^2}{c^4de^5}\right)^2 : \left(\dfrac{4a^2b^3}{5c^4de^2}\right)^3 = \ldots\ldots$

13) $\left[\dfrac{(2a^2b^{-2}c^{-6})^2}{5ab^4c^{-3}}\right]^{-3} : \left[\dfrac{(2ab^2)^{-1}}{2ab^4c^{-1}}\right]^4 = \ldots\ldots$

14) $349^2 = —————$

15) $16 \cdot 25^2 = —————$

16) $3176 \cdot 12^2 = ————$

17) $631^3 = —————$

18) $3 \cdot 298^3 = —————$

19) $594 \cdot 2^3 = —————$

20) $12 \cdot 46^3 = —————$

21) $6^{-4} = —————$

22) 2^{x-2y}, 5^{3y-2x}, 3^{3x-2y} за $x = 5$, $y = 2$.

23) $\left(\dfrac{2ab}{5mn^2}\right)^3 = —————$

24) $\left(\dfrac{a^x}{b^y}\right)^n \cdot (b^y)^m ————$

25) $\left(\dfrac{4a^{-2}b^3}{b^{-4}c^{-1}}\right)^{-2} =$;

26 $\left(\dfrac{6x^ny^m}{5z^r}\right)^1 \times \dfrac{3x^{-n}y^{2m}}{15z^r} = ———$

27) $\left(\dfrac{ab}{cd}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2ab^2}{5c^3d}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3a^2b}{4c^2d^2}\right)^{-1}$

28) $(x^{n-m} + y^{n^2-m^2})(y^{n^2-m^2} - x^{n-m}) = —$

29) $(1\tfrac{2}{3})^{10} \cdot (0 \cdot 3)^{10} =$;

$\left(\dfrac{x+y}{p+}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{p+q}{x+y}\right)^4 = ————$

30) $(729^m - 1) : (9^m - 1) = ————$

Корене количине

120. Под знаком $\sqrt[n]{a}$. (изговори n-ни корен из a) разумевамо онај број, који даје кад се подигне на n-ни степен

опет количину a. Ако је дакле $\sqrt[n]{a} = b$, то је $b^n = a$ и обратно: Кад је $b^n = a$, то је $b = \sqrt[n]{a}$,

Количина a из које извлачимо корен, зове се корењак *радиканд* (степен, број испод кореног знака), број n који нам показује који корен ваља извући, зове се *корени изложитељ*;
а $\sqrt[n]{a}$ или b зове се корен.

Кад је корени изложитељ јединица, то је вредност корена равна количини испод кореног знака (радиканду).

$$\left(\sqrt[1]{a} = a, \text{ јер је } a^1 = a\right):$$

ако је корени изложитељ 2, онда се овај непише и тако се чита $\sqrt{a}$, други корен из a, ове корене другог степена, зовемо квадратни корени. сви корени изложитељи који су већи од 2 морају се написати у отвору кореног знака; трећи корен, каже се и кубни корен.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ а исто тако } \sqrt[n]{a^n} = a.$$

из тога сљедује, *да можемо сваки број довести под корени знак кад га подигнемо на степен, којег је изложитељ једнак кореном изложитељу.*

121. *Кад из једнаких бројева извучемо једнаке корене и резултати су једнаки.*

Ако је $a = b$, то је $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

јер кад би био $\sqrt[n]{a} \lessgtr \sqrt[n]{b}$, то би сљедовало, да је

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \lessgtr \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \text{ или } a \lessgtr b$$ што би противу

речило нашој предпоставци.

122. „Из неког производа извлачимо корен, кад из сваког чинитеља извучемо корен."

Ако поставимо $\sqrt[n]{a} = x$, $\sqrt[n]{b} = y$,

то је $ab = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = x^n, y^n = (x\,y)^n$

или кад извучемо са обе стране n-ти корен

$$\sqrt[n]{ab} = xy$$

$$\text{или } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

а исто је тако

$$\sqrt[n]{abcd\ldots} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \;\ldots\ldots$$

„а кад ово обратно читамо са зади гласиће: корене са једнаким кореним изложитељима (равноимене корене количине) множимо, кад помножимо количине под кореним знаком и напишемо производ под општи корени знак."

123 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots\ldots m \text{ (пута)} =$

$$\sqrt[n]{a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ (пута)}} = \sqrt[n]{a^m},$$

дакле је $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, т. ј.

Корену количину подижемо на степен, кад количину под кореним знаком подигнемо на степен задатог изложитеља.

Ма који сачинитељ може се написати под корени знак.

тако је $k\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot k^n}$.

Како се ово казује речима?.

124. Исто тако доказујемо, *да се извлачи корен из неког розломка, кад извучемо корен из броитеља и именитеља.*

Тако је $$\frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^n$$

дакле и $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$$

из тога видимо, како ваља делити корене количине.

125. Корен извлачимо из степене количине, кад задржимо корен степене количипе, а степеног изложитеља поделимо са кореним изложитељом.

Ако је $\sqrt[n]{a^s} = a^x$; то је $(a^x)^n = a^s$ или $a^{xn} = a^s$, која нам једначина показује, да је $xn = s$. дакле је $x = \frac{s}{n}$; зато је

$$\sqrt[n]{a^s} = a^{s/n}.$$

Кад у овом случају степени изложитељ није садржатељ кореног изложитеља, онда налазимо разломљене степене изложитеље

По томе је $\sqrt[7]{a^5} = a^{5/7}$, $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$, $\sqrt[12]{n} = n^{1/12}$ итд.

Степене количине са разломљеним изложитељима рачунају се исто онако, као што се рачунају и са целим изложитељима

126. Корен извлачимо из корене количине кад количину под кореним знаком непромениту оставимо па из ње извучемо корен ког је изложител производ поједини корени изложитеља.

Ако је $\sqrt[n]{a} = x$ и $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{x} = y$,

то је $y^m = x$, дакле $y^{mn} = x^n = a$,

а из тога налазимо $y = \sqrt[mn]{a}$

т. ј. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Из тога налазимо још $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$;

јер је и један и други израз $= \sqrt[mn]{a}$

Сада дакле видимо, кад се извлачи корен из корене количине, да се могу измењати корени изложитељи. Ово се с ползом примењује највише онда, кад је корени изложитељ сложен број па се може да скрати.

Примери за досадања правила.

1) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

2) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

3) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

4) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

5) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

6) $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

7) $\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$

8) $\sqrt{1.000} = 10\sqrt{10}$

9) $\sqrt[3]{10.000} = 10\sqrt[3]{10}$

10) $7\sqrt{90} = 21\sqrt{10}$

11) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3.000} = 4\sqrt[3]{3}$

12) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$

13) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{18} = 21\sqrt{2}$

14) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} = 3\sqrt{3}$

15) $\sqrt{11} + 9\sqrt{44} = 19\sqrt{11}$

16) $8\sqrt{5} - \sqrt{245} = \sqrt{5}$

17) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} = 4\sqrt[3]{2}$

18) $4\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{192} = 0.$

19) $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$

20) $\sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a}$

21) $\sqrt[n]{a^{n+1}} = a\sqrt[n]{a}$

22) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

23) $\sqrt[7]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt[7]{\frac{ab^6}{b^7}} = \frac{\sqrt[7]{ab^6}}{\sqrt[7]{b^7}} = \frac{\sqrt[7]{ab^6}}{b}$

24) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

25) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

26) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{30}$

27) $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

28) $\sqrt{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

29) $\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{21}$

30) $\sqrt{0{\cdot}3} = 0{\cdot}1\sqrt{30}$

31) $\sqrt[3]{1/4} = 1/2 \sqrt[3]{2}$

32) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = 1/3 \sqrt[3]{6}$

33) $b \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \sqrt[3]{ab}$

34) $\sqrt[3]{0{\cdot}41} = 0{\cdot}1 \sqrt[3]{410}$

35) $1/2 \sqrt[3]{\frac{7}{8}} = 1/4 \sqrt[3]{7}$

36) $1/x \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

37) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$

38) $\frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1/2 \sqrt{6}$

39) $14 \sqrt[3]{1\,5/7} = 2 \sqrt[3]{588}$

40) $n \sqrt[4]{\frac{a}{b^5}} = \frac{n}{b} \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

41) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = 2$

42) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

43) $\frac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}} = -3$

44) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

45) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

46) $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1} = -\sqrt{3} - 1$

47) $\sqrt{4^4} = a^2$

48) $\sqrt{p^6} = p^3$

49) $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$

50) $\sqrt[5]{n^{20}} = n^4$

51) $\sqrt[8]{a^4} = \sqrt{a}$

52) $\sqrt[10]{a^6} = \sqrt[5]{a^3}$

53) $\sqrt[6]{3} \,.\, \sqrt[6]{72} = \sqrt{6}$

54) $\sqrt{a} \,.\, \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^3}$

55) $\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{5} \,.\, \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{600}$

56) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{1\cdot5}} = \sqrt[4]{6}$

57) $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$

58) $\sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$

59) $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

60) $\sqrt[9]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$

61) $\sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{6}$

62) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

63) $\sqrt[8]{100} = \sqrt[4]{10}$

64) $\sqrt[6]{54} = \sqrt{3\sqrt{2}}$

65) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} + \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

66) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$

67) $\sqrt[5]{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt[5]{\frac{p^4}{q} \cdot \sqrt[4]{q^2}} = p\sqrt[10]{\frac{1}{q^2}}$

68) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{147} + 3\sqrt{27} = 8\sqrt{3}$

69) $2\sqrt{1/8} - 4\sqrt{2} - \sqrt{4\,1/2} + 3\,1/2\,\sqrt{8} - 8\sqrt{1/2} +$

$+ 6\sqrt{\frac{2}{9}} = 0$

70) $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[6]{a^5}$

71) $\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = a + b$

72) $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) = 22$

73) $(3 - 2\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

74) $(3 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

75) $(\sqrt{3} + \sqrt{8} - \sqrt{5}\,(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{30}) = 30$

76) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{4^3}{9^3}}} + \sqrt{\sqrt[3]{\frac{27^2}{8^2}}} + \sqrt[n]{\sqrt{\frac{51^n}{16^n}}} = 4\,5/12$

77) $a\sqrt{\frac{b}{a}} - ab\sqrt{(ab)^{-1}} = 0$

78) $\left(\sqrt[9]{a^2b^7}\right)^5 \times \sqrt[9]{\frac{1}{(a^{-2}b^{-7})^4}} = a^2b^7$

79) $\sqrt[36]{144} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}$

80) $a\sqrt{\left(a\sqrt[3]{(a\sqrt[4]{a})}\right)} = \sqrt[24]{a^{41}}$

Задатци:

1) $\sqrt[3]{a^5b^4c^6} = \ . \ . \ .$

2) $\sqrt[m]{a^{m+r}\cdot b^{2m+p}\cdot c^{3m+q}} = \ldots\ldots$

3) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[4]{x^5}\cdot\sqrt[4]{x} = \ldots\ldots$

4) $\sqrt[6]{m^4n}\cdot\sqrt[6]{2m^2n^5}\cdot\sqrt[6]{32mn} = \ldots$

5) $5a^2\sqrt{b} = \ldots\ldots$

6) $(x+y)\sqrt[3]{\dfrac{(x-y)^2}{x+y}} = \ldots\ldots$

7) $\dfrac{4}{ab}\sqrt[3]{\dfrac{5a^4b^5}{128}} = \ldots\ldots$

8) $\sqrt{\dfrac{a^{2n}\,b^{4m}}{4m^6}} = \ldots\ldots$

9) $\sqrt[3]{2a^2} : \sqrt[3]{16a} = \ldots\ldots$

10) $\dfrac{9a}{4b}\sqrt[5]{\dfrac{2a^3b^2}{5xy^3}} : \dfrac{6b}{5a}\sqrt[5]{\dfrac{7a^2b^3}{9x^3y}}$

11) $(\sqrt[3]{5a^2b})^2 = \ldots,,$

12) $(3\sqrt[3]{7x^2})^3 = \ldots\ldots$

13) $(\sqrt[3]{2(a-b)^3(x+y)})^5 = \ldots\ldots$

14) $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}\cdot\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}} = \ldots$

127. Вредност корена постаје већа, кад је већи корени изложитељ, а количина испод кореног знака мања од јединице; и на против постаје мања, кад је већи корени изложитељ и количина испод кореног знака већа од јединице.

Овоме је узрок тај, што су степени правих разломака све мањи кад изложитељи постају већи, и они се у толико брже смањују у колико је даља вредност правог разломка од јединице- а на против степени целих бројева и неправих разломака у толико више и брже расту, у колико је већа вредност њихова од јединице. По томе ако у $(a/b)^x$ постаје x све веће и ако је $a < b$, то ће вредност степена бити све мања и приближаваће се нули; а вредност корена $\sqrt[x]{\dfrac{a}{b}}$ за исту предпоставку приближаваће се граници 1. Ако сада у $(a/b)^x$ где је $a > b$, узмемо да x постаје веће то ће се приближавати степена вредност граници ∞, $\sqrt[x]{\dfrac{a}{b}}$ за ту исту предпоставку приближаваће се корена вредност граници 1.

128. Парни корен из положне количине *може бити положан и одречан; непарни корен опредељен је, јер кад је количина под кореним знаком положна и корен је положан, а кад је одречна и корен је одречан.*

Кад узмемо, да је у опште $\sqrt[2n]{a} = k$ т. ј, кад је k таквог својства, да је $k^{2n} = a$, то се може ставити за $\sqrt[2n]{a} = +k$ тако исто $= -k$, јер је и $(+k)^{2n} = a$, а и $(-k)^{2n} = a$

напротив $\sqrt[2n+1]{(+a)}$ положно је

и $\sqrt[2n+1]{-a}$ одречно је

јер само положна количина на непарног изложитеља даје положан, а одречна количина даје одречан резултат,

Тако је

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3$$

$$\sqrt[10]{1} = \pm 1$$

$$\sqrt[3]{8} = +2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = +2$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[41]{+1} = +1$$

$$\sqrt[41]{-1} = -1$$

Одавде видимо, да је парни корен онда опредељен ако се зна како је постала количина под кореним знаком. Тако је н. пр. $\sqrt{(-a)^2} = -a$; јер само $-a$ има то својство, да кад га подигнемо на квадрат добије вид $(-a)^2$. Исто је тако

$$\sqrt[4]{(+5)^4} = +5, \sqrt[6]{(-1)^6} = -1, \text{ и т. д.}$$

Сасвим други однос постоји, кад извлачимо парни корен из одречне количине; тако н. пр. за $\sqrt{-16}$ неможемо наћи ниједан број, који би подигнут на други степен, дао количину -16; овакав вид $\sqrt{-16}$ или $\sqrt[4]{-1}$ представља символ немогућности, пошто такав број непостоји. Зато су добили име овакви изрази уображене или имагинарне количине док се међутим вредности стварних количина могу или сасвим тачно или колико хоћемо приближно средством положних и одречних бројева одредити.

Корена количина са одречним кореним изложитељем

129. Ако поставимо $\sqrt[-n]{a^m} = x$, то је $x^{-n} = a^m$, т. ј. $x^n = a^{-m}$, или $x = \sqrt[n]{a^{-m}}$, дакле је $\sqrt[-n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$

тако видимо, да се може изменути одречан знак кореног изложитеља у положан, кад уједно изменемо и онај знак изложитељев оне количине под кореним знаком.

Тако је $\sqrt[-2]{5} = \sqrt[2]{5^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\sqrt[-r]{x^{-p}} = \sqrt[r]{x^p}$$

Разломљени изложитељи.

130. Ако је у $\sqrt[n]{a^m}$ m раздељиво са n, то се може узети за $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; јер кад је $\frac{m}{n} = q$, то је $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a^q)^n = a^{nq} = a^m$; тако видимо да је $a^{\frac{m}{n}}$ заиста корена количина.

Ако $\frac{m}{n}$ није цео број, то би $a^{\frac{m}{n}}$ значило, да треба a разложити у толико једнаки чинитеља, колико n има јединица, па једног од ови чинитеља толико пута узети колико m показује.

Ово показујемо знацима овако;

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ \ldots\ldots \ (m \text{ пута})$$

или $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

сада знамо да је $\sqrt[-n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$, па тако

је и $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \ldots (m \text{ пута}) = a^{-\frac{m}{n}}$

Ако m није раздељиво са n, то се опет оваква степена количина броји у корене количине у којима је именитељ изложитељ корена, а броитељ тог разломљеног изложитеља степени изложитељ.

Од сада ћемо сматрати $\sqrt[n]{a^m}$ и $a^{\frac{m}{n}}$ као истоветне изразе.

131. *Корена количина немења се у вредности, кад и кореног и степеног изложитеља једним истим бројем помножимо.*

Знамо да је $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$

или $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$

Ово нам помаже, да скраћујемо корене и степене количине, или ако има више разноимени корени количина, да ји доведемо на једнаког кореног изложитеља.

Тако је $\sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^5}$, $\sqrt[4r]{a^{3r}} = \sqrt[4]{a^3}$

у место $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[4]{c^3}$, $\sqrt[5]{ad}$

можемо написати

$$\sqrt[2.30]{a^{30}},\ \sqrt[3.20]{a^{20}(b^2)^{70}}\ \sqrt[4.15]{(c^3)^{15}},\ \sqrt[5.12]{(ad)^{12}}$$

или $\sqrt[60]{a^{30}}$, $\sqrt[60]{a^{20}b^{40}}$, $\sqrt[60]{c^{45}}$, $\sqrt[60]{a^{12}\,d^{12}}$.

132. Ова до сада наведена правила о кореним количинама помажу нам, да још и ова сљедујућа правила за разломљене изложитеље докажемо.

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

3) $(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots.)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}} \ \ldots\ldots$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

т. ј. са степеним количинама којих су изложитељи разломљени рачунамо исто онако, као и са количинама којих су изложитељи цели бројеви.

Тако је н. пр. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} =$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} =$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Истим начином доказујемо и остала правила, а уједно се види, да могу бити изложитељи и одречни бројеви.

Знамо да је $\sqrt[n.m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

јер је $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n\cdot m} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m\cdot n}} =$

$$= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{nm}}} = \sqrt[n]{a^n} = a\text{, одкуда опет сљедује}$$

да је $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Исто је тако $\sqrt[nmp]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}$

Т. ј. ако се може корени изложитељ да разложи у чинитеље, то се може захтевани корен изнаћи повораваjућим извлачењем корена, тако, да су они добивени чинитељи по реду сљедујући корени изложитељи.

133. Ово нам помаже да докажемо једно опште правило о степенима:

Тако је $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$. Јер знамо да је

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Примери:

1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[m]{a}$

2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{8192}}} = 2\sqrt[12]{2}$

3) $\sqrt[5]{\sqrt{243}} = \sqrt{3}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^m}} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$

5) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{16}{25}a^2b^4c^6}} = c\sqrt[3]{\frac{4}{5}ab^2}$

6) $\sqrt[24]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}$

7) $\sqrt[12]{a^6b^9c^{15}} = c\sqrt[4]{a^2b^3c}$

8) $\sqrt[2(m+n)]{a^{3(m+n)}} = a\sqrt{a}$

9) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[4]{c^2} = \sqrt[6]{a^3b^4c^3}$

10) $\sqrt{\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{ab}{c}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{c^2}\sqrt{\frac{ab}{c}}} =$

$= \frac{ab}{c}\sqrt[12]{\frac{a^7b^7}{c^7}}$

11) $\sqrt{\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{ab}{c}}} : \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{c^2}\sqrt{\frac{ab}{c}}} = \sqrt[12]{\frac{c}{ab}}$

12) $\sqrt[-3]{a^{-4}} = a\sqrt[3]{a}$

13) $\sqrt[-1/2]{a\sqrt{b\cdot\sqrt[3]{c}}} = \frac{1}{a^2b\sqrt[3]{c^2}}$

14) $\sqrt[1\frac{2}{3}]{a^{2\frac{1}{4}}} = a\sqrt[20]{a^7}$

15) $\left(4\frac{21}{25}\right)^{-1\frac{1}{2}} = \frac{125}{1331}.$

16) $\left(\frac{49a^4b^8c^{12}d^4}{64e^8f^4g^{12}}\right)^{3/4} = \frac{7a^3b^6c^9d^3}{16e^6f^3g^9}\sqrt{\frac{7}{2}}$

17) $\left\{(2xy)^{1/4}\right\}^{4/9} = \sqrt[9]{2xy}$

18) $\sqrt{\sqrt[-1]{\sqrt[1/2]{xy}}} = \frac{1}{xy}$

19) $\sqrt[4]{\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{xy}}\right)^3} = \sqrt[8]{x^4y}$

20) $\sqrt[7]{(ab^2\sqrt[4]{ab^2c})^4} = b\sqrt[7]{a^5b^3c}$

134. Сбир или разлику равнородних корених количина добијамо, кад саберемо или одузмемо сачинитеље ови количина, а покрај ови напишемо општу корену количину.

Тако налазимо да је

$$4\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} = (4+3)\sqrt[3]{a} = 7\sqrt[3]{a}.$$

$$9\sqrt{b} - 5\sqrt{b} = (9-5)\sqrt{b} = 4\sqrt{b}$$

у опште је $a\sqrt{z} \pm b\sqrt{z} = (a \pm b)\sqrt{z}$

одкуда се јасно види, како ваља свести равнородне корене количине кад их има повише са положним и одречним знацима.

Н. пр. 1) $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50} =$

$= 2\sqrt{4\,.\,2} - 7\sqrt{9\,.\,2} + 5\sqrt{36\,.\,2} - \sqrt{25\,.\,2} =$

$= 4\sqrt{2} - 21\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

$= (4+30)\sqrt{2} - (21+5)\sqrt{2} =$

$= 34\sqrt{2} - 26\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$

2) $4\sqrt[5]{ax^5y} - 5\sqrt[5]{a^6y^6} + \frac{3}{2}\sqrt[5]{a^{11}x^{10}y} =$

$$= 4x\sqrt[5]{ay} - 5ay\sqrt[5]{ay} + \frac{3a^2x^2}{2}\sqrt[5]{ay} =$$

$$= \left(4x - 5ay + \frac{3a^2x^2}{2}\right)\sqrt[5]{ay}\,.$$

135. У множењу и дељењу сложени корени израза иста она правила вреде, која смо познали код множења и дељења целих бројева.

Примери.

1) $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a} = 2\sqrt[m]{a}$

2) $a\sqrt[m]{a} \pm b\sqrt[m]{a} = (a \pm b)\sqrt[m]{a}$

3) $b\sqrt[m]{a} \mp c\sqrt[m]{a} \pm d\sqrt[m]{a} = (b \mp c \pm d)\sqrt[m]{a}$

4) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{8} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2^2 . 2} =$

$= (5 - 4)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

5) $3\sqrt[4]{8^2} \pm 5\sqrt[4]{\frac{512}{2}} = 3\sqrt[4]{2^3} \pm 5\sqrt[4]{2^8} =$

$= 6\sqrt{2} \pm 20$

6) $\sqrt[15]{b^{10}} - \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{b^2} = 0$

7) $\sqrt[4]{a^{2n}} - \sqrt[5]{b^{15}} - \sqrt[6]{c^3} = \sqrt{a^n} -$

$- (b^3 + \sqrt{c})$

8) $a\sqrt[m]{\frac{a^{n-m-1}\,b^n}{a^{n-1}}} + 3\sqrt[m]{b^n} = 4\sqrt[m]{b^n}$

9) $3\sqrt[3]{\frac{2}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

10) $\sqrt[3]{8\,(a^2 - b^2)\,(a + b)^2} + \sqrt[6]{(a - b)^2} =$

$= (2\,(a + b) + 1)\sqrt[3]{a - b}$

11) $\sqrt{0{\cdot}09} + \sqrt[5]{0{\cdot}00032} = \frac{1}{2}$

12) $\frac{a}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{a + 1}{a}\sqrt{a} = (a + 1)\sqrt{\frac{1}{a}}$

13) $\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{2a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - b^2}$

14) $\sqrt{\sqrt{162} + \sqrt{512}} = 5\sqrt[4]{2}$

15) $(4 + 3\sqrt{2})\,(5 - 4\sqrt{2}) = 4 . 5 +$

$+ 3 . 5\sqrt{2} - 4 . 4\sqrt{2} - 3 . 4\,(\sqrt{2})^2 =$

$= 20 + 15\sqrt{2} - 16\sqrt{2} - 24 = -4 - \sqrt{2}$

16) $(a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} + c\sqrt[n]{x}) \cdot (d\sqrt[n]{x} + e\sqrt[n]{x} =$

$$= ad\sqrt[n]{x^2} + bd\sqrt[n]{x^2} + cd\sqrt[n]{x^2} + ae\sqrt[n]{x^2} + be\sqrt[n]{x^2} +$$

$$+ ce\sqrt[n]{x^2} = (ad + bd + cd + ae + be + ce)\sqrt[n]{x^2}$$

17) $(x^3y^2\sqrt[5]{a^3b^2} + x^2y^3\sqrt[5]{a^2b^3}) : x^2y^2\sqrt[5]{a^2b^2} =$

$$= (x^3y^3\sqrt[5]{a^3b^2} : x^2y^2\sqrt[5]{a^2b^2}) + (x^2y^3\sqrt[5]{a^2b^3} :$$

$$: x^2y^2\sqrt[5]{a^2b^2}) = x\sqrt[5]{a} + y\sqrt[5]{b}$$

18) $(6 + 3\sqrt[4]{x^3} + 13x\sqrt[4]{x} - x^2 - 5x^2\sqrt[4]{x^2}) :$

$6 - 2x\sqrt[4]{x}$ $\qquad : (3 - x\sqrt[4]{x})$

$-\quad +$ $\qquad 2 + \sqrt[4]{x^2} + 5x\sqrt[4]{x}$

$3\sqrt[4]{x^3} + 15x\sqrt[4]{x}$

$3\sqrt[4]{x^3} - x^2$

$-\qquad +$

$15x\sqrt[4]{x} - 5x^2\sqrt[4]{x^2}$

$15x\sqrt[4]{x} - 5x^2\sqrt[4]{x^2}$

$-\qquad +$

" "

Задатци за упражњавање.

1) $2\sqrt{12} + 8\sqrt{27} + 4\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = 12\sqrt{3}$

2) $2\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{24} - 10\sqrt{28} + 14\sqrt{63} =$

$$= 16\sqrt[3]{3} + 22\sqrt{7}$$

3) $7\sqrt{5} - 9\sqrt[3]{18} + 45\sqrt[4]{41} - (8\sqrt{5} -$

$$- 42\sqrt[3]{18} - 12\sqrt[4]{41}) = -\sqrt{5}$$

$$+ 33\sqrt[3]{18} + 57\sqrt[4]{41}$$

4) $a\sqrt{bx} - 7\sqrt{a^2bx} = 9\sqrt[3]{cy^4} -$

$$- 14\sqrt{a^2bx^3} - 5\sqrt[3]{cy^7} = y(9 - 5y)\times$$

$$\times\sqrt[3]{cy} - 2a(3 + 7x)\sqrt{bx}$$

5) $2\sqrt{a^{-3}} - 7\sqrt[4]{\frac{1}{a^6}} + \sqrt{(b^{1/2}x)^3} - 12x\sqrt{xb^{3/2}} +$

$$+ 19\sqrt{\frac{4}{a^3}} + 4\sqrt{x^3} + \sqrt[4]{b^3} = \frac{13}{a\sqrt{a}} - 7x\sqrt[4]{b^3x^2}$$

6) $(3\sqrt{12} + {}^1\!/_2\sqrt{2} - {}^3\!/_4\sqrt{3}) \cdot 8\sqrt{3} =$

$$= 126 + 4\sqrt{6}$$

7) $(ax^n\sqrt{ax} + by^m\sqrt[3]{bx} + cz^p\sqrt[4]{cx}) \, . \, abc\sqrt[3]{x} =$

$$= a^2bcx^n\sqrt[6]{a^3x^5} + ab^2cy^m\sqrt[3]{bx^2} + abc^2z^p\sqrt[12]{c^3x^7}.$$

8) $(5\sqrt{6} - 9\sqrt{3})(4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}) = -$

$$- 108 + 60\sqrt{2} + 40\sqrt{3} - 36\sqrt{6}$$

9) $(\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) = a^3 - b^3$

10) $\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}\sqrt[m]{x - y\sqrt{z}}} \cdot \sqrt[m]{2^{\frac{m}{2}}\sqrt[n]{x + y\sqrt{z}}} =$

$$2\sqrt[n\cdot m]{x^2 - y^2z}.$$

11) $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3})(\sqrt{x} - 1) =$

$$= x - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3} + x\sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x^5}$$

12) $\left(\frac{x}{a}\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{\frac{ax}{b}}\right) \left(5\sqrt[4]{\frac{b}{x}} + \frac{2}{a^2}\sqrt[3]{\frac{b}{ax}}\right) =$

$$= - 1{\cdot}6 + ax\sqrt[4]{bx} - 4a^2\sqrt[12]{\frac{a^4x}{b}} + \frac{2x}{5a}\sqrt[6]{\frac{b^2x}{a^2}}$$

13) $(6\sqrt[3]{54} - 9\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{108}) : 3\sqrt[3]{2} = \dots$

14) $(a - b) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = \dots$

15) $(\sqrt[5]{a^2x^2} - 5x\sqrt[5]{a^3} + 6x\sqrt[5]{a^4x} - 2ax\sqrt[5]{x^2}) :$

$$: \sqrt[5]{ax^2} - \sqrt[5]{a^2x^3}) = \dots,$$

16) $\left(\sqrt[7]{\frac{m^3}{n^3}} - 5\sqrt[7]{\frac{m^2y}{n^2}} + 11\sqrt[7]{\frac{my^2}{n}} - 10\sqrt[7]{y^3}\right) :$

$$: \left(\sqrt[7]{\frac{m}{n}} - 2\sqrt[7]{y}\right) = \dots$$

Несвршене (ирационалне) количине.

136. Сасвим је јасно, да се из свршеног n-ног степена може тачно извући n-ни корен; у овом случају кажемо, да је корен *свршен* (рационалан) или мерљив (комензурабл).

$$\text{Тако су } \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2,$$

$$\text{или } \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

мерљиви корени. И на против, кад неможемо да определимо корен тачно ни целим ни разломљеним бројевима, онда је корен *несвршен* (ирационалан) или *немерљив* (инкомензурабл).

Узмимо да је a/b разломак с најмањим наименовањем, онда $(a/b)^n$ неможе бити никад цео број; ако сада цео број A није n-ни степен неког другог целог броја, онда по горњем неможемо тачно определити $\sqrt[n]{A}$.

Али не само из целог броја, него и из разломка (правог или неправог), ако није савршено n-ни степен, неможемо извући n-ни корен, па да изађе било цео било разломљен број.

Узмимо да се може ставити $\sqrt[n]{\frac{z}{N}} = \frac{a}{b}$,

онда би морало бити (ако је $\frac{z}{N}$ са најмањим наименовањем) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{Z}{N}$ т. ј. $\frac{a^n}{b^n} = \frac{z}{N}$. А кад се узме да су два относно проста разломка једнака, то морају како бронтељи тако и именитељи њихови бити једнаки, т. ј. $Z = a^n$ и $N = b^n$; а то показује, да је броитељ и именитељ задатог разломка свршени степен, што противу речи нашој предпоставци. Ако је дакле број А цео или разломљен и несвршен n-ни степен, онда се неможе ни $\sqrt[n]{A}$ тачно определити, или можемо рећи

$\sqrt[n]{A}$ нема заједничке мере са јединицом; јер кад би то било, то би нам представљало неке јединице, или би представљало неке једнаке делове од јединице, дакле би био цео или разломљен број. Зато велимо да је $\sqrt[n]{A}$ несвршен број или немерљив.

Да нека корена количина показује немерљив или несвршен број, видимо тако, кад лежи $\sqrt[n]{A}$ између целих бројева a и $(a+1)$. Још можемо приметити, да означава А или цео број или смешан разломак.

137. *Сваки несвршен број можемо определити како год хоћемо тачно.*

Да се на пр. $\sqrt[n]{A}$ определи тачно са m десетних места.

Ако је $\sqrt[n]{A}$ несвршен број, онда је исти случај и код

$$\frac{10^m\sqrt[n]{A}}{10^m} = \frac{\sqrt[n]{A.10^{mn}}}{10^m}$$

Нека је $\sqrt[n]{A\,.\,10^{mn}} = a + \varepsilon$, где је a цео број, а ε нужна допуна к броју a дакле број мањи од 1. зато сљедује

$$\sqrt[n]{A\,.\,10^{mn}} = \frac{a}{10^m} + \frac{\varepsilon}{10^m},$$ али је због $\varepsilon < 1$ и $\frac{\varepsilon}{10^m} < \frac{1}{10^m}$ па ако сада изоставимо разломак

$\frac{\varepsilon}{10^m}$ то ћемо ставити приближно за $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m}$ где је учињена погрешка $< \frac{1}{10^m}$, дакле је корен заиста тачан са m децимала. У колико је овде веће m, у толико је мање $\frac{1}{10^m}$, т. ј. кад m, произвољно расте, то ће $\frac{1}{10^m}$ све мање бивати и тако може постати мање од сваког могућег броја. Ако сада броју A допишемо mn нула и ако определимо цео корен a (тачно до самих јединица), то ћемо добити из $\frac{a}{10^m}$ захтевани корен са m децимала.

Узмимо за број А овај вид $B + \frac{b}{c}$, па ако сада хоћемо за $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B + \frac{b}{c}}$ да добијемо тачно до самих јединица, треба само да определимо $\sqrt[n]{B}$ тачно до самих јединица. Јер ако лежи $\sqrt[n]{B}$ између целих бројева a и $(a + 1)$ то лежи B између a^n и $(a + 1)^n$ а пошто је $B < (a + 1)^n$ и то најмање за 1 мање од $(a + 1)^n$, то је и $\left(B + \frac{b}{c}\right) < (a + 1)^n$, само ако је $\frac{b}{c}$ прав разломак; по томе дакле лежи и $\sqrt[n]{B + \frac{b}{c}}$ између a и $(a + 1)$.

Примедба.

Пошто се по §. 136 несвршене корене количине могу заменути са разломцима којих је дељеник небројно велик, то се налази њихово место у оном реду бројева, кад интервалу између два и два застопна цела броја разделимо у небројно много једнаких делова. Свака тачка показује сада неки број и тако ред ових бројева прелази бројевну линију. А из тога још и ово сљедује, да други бројеви сем целих, разломљених и несвршених немају свога места на оној бројевној линији.

Из §. 136 произлази, да можемо поставити два мерљива броја који се у мало разликују један од другог, и међу којима лежи немерљив или несвршен број.

Јер ако је $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{10^m}$ корена вредност тачна са m десетни места, то је,

$$\sqrt[n]{A} > \frac{a}{10^m} \text{ али } \sqrt[n]{A} < \frac{a+1}{10^m}$$

Тако је $\sqrt{6} = 2\cdot4494899.\ \ldots\ldots$ дакле

$$\sqrt{6} > \frac{24494897}{10^7} \text{ и } \sqrt{6} < \frac{24494898}{10^7}$$

и онда лежи $\sqrt{6}$ између два мерљива броја т. ј. између

$$\frac{24494897}{10^7} \text{ и } \frac{24494898}{10^7}$$

И тако је у опште разлика граница за $\frac{a+1}{10^m} - \frac{a}{10^m} = \frac{1}{10^m}$. такав резултат., да се може смањити колико хоћемо.

Нека је x несвршен и a цео број, онда се могу изнаћи свагда за x две вредности ω' и ω, па ће бити разлика $a^{\omega'} - a^{\omega}$

произвољно мала. Јер ако је $\omega' = \omega + \frac{1}{n}$, то сљедује $a^{\omega'} - a^{\omega} = a^{\omega + \frac{1}{n}} - a^{\omega} = a^{\omega}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$.

Сада можемо лако разумети, да се $\sqrt[n]{a}$, ако n непрестано расте приближило јединици у толико у колико се хоће, па зато се може и $a^{\omega'} - a^{\omega}$ приближити произвољно малом броју.

На том §. 137 оснива се још и §. 135. у коме је речено како се могу множити несвршени бројеви т. ј. ако су a, b, c, и d немерљиви бројеви, онда се може извести производ $(a + b)\ (c + d)$ исто онако, као што је показано код свршених бројева.

Да ово покажемо узмимо да су a', b', c', d', мерљиви бројеви, који су односно мањи од a, b, c, и d, напротив a'', b'', c'', d'', мерљиви бројеви а односно већи од бројева a, b, c, d; и онда лежи и производ $(a + b)\ (c + d)$ између $(a' + b')\ (c' + d')$

$$= a'c' + a'd' + b'c' + b'd' = p \text{ и}$$

$$(a'' + b'')\ (c'' + d'') = a''c'' + a''d'' + b''c'' + b''d'' = P$$

због $a' < a < a''$ јест $a'c' < ac < a''c''$

$$b' < b < b'' \quad " \quad a'd' < ad < a''d''$$

$$c' < c < c'' \quad " \quad b'c' < bc < b''c''$$

$$d' < d < d'' \quad " \quad b'd' < bd < b''d''$$

зато лежи $(ac + ad + bc + bd)$ исто тако између p и P. Али сада можемо начинити, да су разлике $(a'' - a')$, $(b'' - b')$ .... дакле и $(a''c'' - a'c')$, $(a''d'' - a'd')$ . . . , мање, од најмањег броја, и онда се може замислити, да је $P - p$ безкрајно мало или да је граница којој се ова разлика у безкрајности приближава $= 0$, а по томе су бројеви који се налазе између p и P једнаке величине, па зато и

$$(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Примедба. Ово и њему подобна правила оснивају се у опште на. сљедећем:

Ако су G и g граничне вредности, између којих леже бројеви a и b, па ако се може разлика $G - g$ начинити произвољно мала, онда мора бити $a = b$.

Нека је $g < a < G$ и $g < b < G$. Кад би било $a > b$, онда се може начинити да је свагда $G - g$ мање од $a - b$, т, ј. онда постоји $G - g < a - b$.

због $a < Gb$, $b = b$ јест $a - b < G - b$, дакле $G - g < < G - b$ и $G + b < G + g$, или $b < g$, а то је противно нашој претпоставци.

За $b > a$ може се начинити $G - g < b - a$ и

због $\begin{cases} b < G \\ a = a, \end{cases}$ $b - a < G - a$, дакле и $G - g < G - a$ или

$G + a < G + g$ т. ј. $a < g$, што опет противу речи предпоставци, дакле мора бити $a = b$.

Да би показали још неколико примена овога правила, најпре ћемо показати, да је $a^x . a^y = a^{x+y}$, па и онда кад су изложитељи x и y несвршени или немерљиви бројеви. Изложити количину a, кад је изложитељ x несвршен број, значи, да се изнађе број, који постаје, кад се изложи a на вредност која граничи најближе броју x. Ако су α и α' они свршени бројеви, између којих x а исто тако β и β' бројеви, између којих y лежи, онда постоји

$$\alpha < x < \alpha'$$

и $\quad \beta < y < \beta'$

дакле $\quad (\alpha + \beta) < (x + y) < (\alpha' \times \beta')$

и $\quad a^{\alpha+\beta} < a^{x+y} < a^{\alpha'+\beta'} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1 \quad (a>1)$

Исто је тако $\quad a^{\alpha} < a^{x} < a^{\alpha'}$

$$\frac{a^{\beta} < a^{y} < a^{\beta'}}{a^{\alpha+\beta} < a^{x+y} < a^{\alpha'+\beta'} \; . \; . \; . \; . \; .} \qquad (2$$

Пошто бројеви α и α' исто тако β и β' могу да се произвољно приближе онда се исто тако и сбирови $(\alpha + \beta)$ и $(\alpha' + \beta')$ па и степени $a^{\alpha+\beta}$ и $a^{\alpha'+\beta'}$, дакле су с обзиром на речено правило оне ограђене вредности $a^x . a^y$ и a^{x+y} истоветне, зато постоји једначина $a^x . a^y = a^{x+y}$.

Са несвршеним бројевима излажемо (потенцирамо исто онако, као и са свршеним.

Ако су опет x и y несвршени бројеви, то је $(a^x)^y = a^{xy}$. Јер ако имају α, α', β и β' оно исто значење које и горе, то је $\alpha < x < \alpha'$ и $a^{\alpha} < a^x < a^{\alpha'}$, а због $\beta < y < \beta'$

$$(a^{\alpha})^{\beta} < (a^x)^y < (a^{\alpha'})^{\beta'} \text{ или } a^{\alpha\beta} < a^{xy} < a^{\alpha'\beta'}.$$

Даље је $\alpha\beta < xy < \alpha'\beta'$ па зато и $a^{\alpha\beta} < a^{xy} < a^{\alpha'\beta'}$ али пошто разлику $\alpha'\beta' - \alpha\beta$, дакле и $a^{\alpha'\beta'} - a^{\alpha\beta}$ можемо замислити да је произвољно мала, дакле да се може изгубити у 0, онда мора сљедовати $(a^x)^y = a^{xy}$

Дакле се може рећи, да се изложитељни рачуни са несвршеним бројевима изводе исто онако, као и са свршенима.

Ако су a и b несвршени или немерљиви бројеви, онда то вреди и за ma и b, где се замишља m као цео број. Јер кад ово неби било и кад би постојала за ma и b општа мера $= \mu$

дакле $ma = q . \mu$ и $b = q' . \mu$, онда би сљедовало $a = \frac{\mu}{m} q$

и $\quad b = \frac{\mu}{m} . m q'$, т. ј. $\frac{\mu}{m}$ била би општа мера за a и b, што противу речи нашој предпоставци.

Усавршавање именитеља.

I. Кад је именитељ прост израз

138. Кад би тражили да се усаврши именитељ разломка $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, треба да разликујемо, јели $m <$ или $>$ од n

За $m < n$ помножимо именитеља и бројитеља задатог разломка са $\sqrt[n]{b^{n-m}}$, то ће постати $a\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$.

А за $m > n$, дакле $m = \alpha n + p$, сљедује

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^{\alpha n+p}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^{\alpha n}\cdot b^p}} = \frac{a}{b\alpha\sqrt[n]{b^p}} =$$

$$= \frac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{b^{\alpha+1}}$$ дакле именитељ усавршен.

Ако је н. пр. $\frac{z}{3\sqrt[5]{a^2}}$ задати разломак.

Помножимо именитеља и бројитеља са

$$\sqrt[5]{a^{5-2}} = \sqrt[5]{a^3}$$ то је

$$\frac{Z}{3\sqrt[5]{a^2}} = \frac{z\sqrt[5]{a^3}}{3a}$$

$$\frac{Z}{m\sqrt[4]{a^3b^5}} = \frac{Z}{mb\sqrt[4]{a^3b}} = Z\frac{\sqrt[4]{ab^3}}{ab^2m}$$

II. Кад је именитељ бином.

Нека је $\frac{Z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ то је због $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$$\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b, \quad \frac{Z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{Z(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

У опште

$$\frac{Z}{m\sqrt{a}\pm n\sqrt{b}} = \frac{Z(m\sqrt{a}\mp n\sqrt{b})}{am^2-bn^2}$$

139. Да би усавршили именитеља разломка

$$\frac{Z}{\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}}$$

треба да се сетимо да је свагда

$$(x^m - y^m) = (x-y)\times(x^{m-1}+x^{m-2}y+$$
$$+x^{m-3}y^2+\dots\dots xy^{m-2}+y^{m-1}),$$

Напротив за m непарно налазимо овај однос:

$$x^m+y^m = (x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}y+$$
$$+x^{m-3}y^2\dots\dots-xy^{m-2}+y^{m-1}),$$

Ставимо сада $\sqrt[n]{a}=x$, $\sqrt[n]{b}=y$, и узмимо да је n непарно, то је

$$a+b = (\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})\times\Big[(\sqrt[n]{a})^{n-1}$$
$$-(\sqrt[n]{a})^{n-2}\sqrt[n]{b}+(\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^2-\dots\dots$$

$$\ldots - (\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b})^{n-2} + \sqrt[n]{b)^{n-1}}] = (\sqrt[n]{a} +$$

$$+ \sqrt[n]{b}) \times \sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})$$

дакле је

$$\frac{z}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} = \frac{z(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a+b}$$

Кад би n био парни број у виду $2p$, то је

$$\frac{Z}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} = \frac{Z}{\sqrt[2p]{a}+\sqrt[2p]{b}} = \frac{Z(\sqrt[2p]{a}-\sqrt[2p]{b})}{\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}}$$

па ако је p парно или непарно, то је

$$(a-b) = (\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b})(\sqrt[p]{a^{p-1}}+\sqrt[p]{a^{p-2}b}+$$

$$\sqrt[p]{a^{p-3}b^2}+\ldots+\sqrt[p]{b^{p-1}})$$

и тако

$$\frac{Z}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} = \frac{Z(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[p]{a^{p-1}}+\sqrt[p]{a^{p-2}b}+\ldots+\sqrt[p]{b^{p-1}})}{a-b}$$

Исто је тако, било n парно или непарно

$$\frac{Z}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = \frac{Z\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}$$

Тако је

$$\frac{Z}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{Z(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$

$$\frac{Z}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{Z(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$$

$$\frac{Z}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{Z\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}+\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}+\sqrt[6]{b^5}}{a-b}$$

Напротив за $\dfrac{Z}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ треба најпре да поставимо разлику именитеља, а да би ово постигли треба да помножимо бројитељ и именитељ са $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}$

Зато је

$$\frac{Z}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}} = \frac{Z\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} =$$

$$= \frac{Z\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$$

У опште нам је именитељ $\left(\sqrt[p]{a} \pm \sqrt[q]{b}\right)$.

$$\frac{Z}{\sqrt[p]{a}\pm\sqrt[q]{b}} = \frac{Z}{\sqrt[pq]{a^q}\pm\sqrt[pq]{b^p}} = \frac{Z}{\sqrt[n]{a'}\pm\sqrt[n]{b'}}$$

а овај се именитељ по пређашњем може да усаврши.

III. Кад је именитељ из три или више чланова.

Нека је задат разломак $\dfrac{Z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

онда је

$$\frac{Z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{Z\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-c} =$$

$$= \frac{Z'}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}} = \frac{Z'\left[(a+b-c)-2\sqrt{ab}\right]}{(a+b-c)^2-4ab}$$

Исто тако

$$\frac{Z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} =$$

$$= \frac{Z\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right]}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2} =$$

$$= \frac{Z'}{(a+b-c-d)+2\left(\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right)} =$$

$$= \frac{Z'}{f+2\left(\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right)}$$

кад поставимо за $a+b-c-d=f$.

$$\frac{Z'}{f+2\left(\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right)} = \frac{Z'\left[f-2\left(\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right)\right]}{f^2-4\left(\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right)^2} =$$

$$= \frac{Z''}{f^2-4(ab+cd)+8\sqrt{abcd}}$$

или кад ставимо за

$$f^2-4(ab+cd)=g,$$

то сљедује

$$\frac{Z''}{g+8\sqrt{abcd}} = \frac{Z''\left(g-8\sqrt{abcd}\right)}{g^2-64abcd}$$ дакле је именитељ усавршен.

Именитељ у виду:

$$\alpha + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{a^3} \text{ може се лако усавршити}$$

Да би н. пр. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ усавршили именитељ,

треба да помножимо броитељ и именитељ разломка са

$(1 + x\sqrt[3]{2} + y\sqrt[3]{4})$, па ћемо добити

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1+x\sqrt[3]{2}+y\sqrt[3]{4}}{(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(1+x\sqrt[3]{2}+y\sqrt[3]{4})}$$

производ именитеља изведен, даје

$$(1+2x+2y) + (1+x+2y)\cdot\sqrt[3]{2} + (1+x+y)\sqrt[3]{4}.$$

Да би овај производ био савршен, морамо изабрати x и y тако, да је $1 + x + 2y = 0$ и $1 + x + y = 0$, из чега сљедује за $x = -1$, $y = 0$.

По томе је

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{-1} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

За $\dfrac{1}{1+2\sqrt[5]{2}+3\sqrt[5]{4}+5\sqrt[5]{8}}$

има броитељ и именитељ да се помножи са

$$(1 + x\sqrt[5]{2} + y\sqrt[5]{4} + z\sqrt[5]{8} + u\sqrt[5]{16}),$$

и кад изведемо закључак као и горе, то добијамо вредности за x, y, z и u из једначина:

$$\left.\begin{aligned} 2 + x + 10z + 6u &= 0 \\ 3 + 2x + y + 10u &= 0 \\ 5 + 3x + 2y + z &= 0 \\ 5x + 3y + 2z + u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{из тога је} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1574}{85},\ y = -\frac{2513}{85} \\ z &= \frac{-121}{85},\ u = -\frac{89}{85} \end{aligned}$$

Са овим вредностима сљедује

$$\frac{1}{1+2\sqrt[5]{2}+3\sqrt[5]{4}+5\sqrt[5]{8}} =$$

$$= \frac{85 + 1574\sqrt[5]{2} - 2513\sqrt[5]{4} - 121\sqrt[5]{8} - 89\sqrt[5]{16}}{-26127}$$

Примедба

Овде наведени начини да именитеља неког разломка усавршимо, могу се применути исто тако, кад се тражи, да броитељ разломка усавршимо.

Ако постоји једначина

$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ и ако су $\sqrt{b}$ и $\sqrt{d}$ несвршени бројеви, то би морали свршени за себе т. ј. $a = c$, несвршени за себе једнаки бити т. ј.

$\sqrt{b} = \sqrt{d}$ дакле $b = d$. Јер кад би било $a > c$ то би могли узети да је $a = c + m$, па зато $c + m + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ или $m = \sqrt{d} - \sqrt{b}$ т. ј. свршени број m морао би бити раван разлици два несвршена броја, што је са свим противно појму таквих бројева; зато мора бити $d = b$, дакле $m = 0$ и сљедствено $a = c$.

Примери:

1) $$\frac{1}{4\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{20}$$

2) $$\frac{1}{5\sqrt{\sqrt[3]{xy^2}}} = \frac{\sqrt[6]{x^5y^4}}{5xy}$$

3) $$\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}} = \frac{m\sqrt[10]{a^7}}{a}$$

4) $$\sqrt[3]{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[6]{3888a^2}}{6}$$

5) $$\frac{2}{7 \pm 3\sqrt{5}} = \frac{(7 \mp 3\sqrt{5})}{2}$$

6) $$\frac{1}{\sqrt{a - 2\sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{b}}\,(a + 2\sqrt{b})}{a^2 - 4b}$$

7) $$\frac{1}{\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{13 + 4\sqrt{3}}\,(2\sqrt{3} - 1)}{11}$$

8) $$\frac{1}{a + \sqrt[4]{b}} = \frac{(a - \sqrt[4]{b})\,(a^2 + \sqrt{b})}{a^4 - b}$$

9) $$\frac{1}{3\sqrt{a} + 5\sqrt[8]{b}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{a} - 5\sqrt[8]{b})\,(9a + 25\sqrt[4]{b})\,(81a^2 + 625\sqrt{b})}{6561a^4 - 390625b}$$

10) $$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = (\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})\,(4 + 2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3})\,.$$

11) $$\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(1 + \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$$

12) $$\frac{1}{4 - \sqrt{2} + 3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 4\right)\left(8\left(\sqrt{2} - 9\right)\right.}{47}$$

Уображени (имагинарни или латерални бројеви).

140. Сваку уображењу количину која има општи вид $\sqrt[2n]{-A}$ можемо довести у овај вид $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, где означавају α и β доистне бројеве.

Кад се нађу у неком рачуну овакви бројеви, то ћемо јих по оним истим законима рачунати по којим смо рачунали са диостним количинама.

Овим бива често да се уображене количине из рачуна изгубе или ако баш ово не, *а* оно бива, да онај уображени резултат има свој опредељени смисао, као што имају цели или разломљени, одречни или несвршени бројеви.

Рачунање са уображеним количинама своди се у овај вид $\sqrt{-1}$, јер сваки уображен број може се у такав вид довести, зато се зове $\sqrt{-1}$ *уображена јединица.*

Кад означимо као што је у опште обичајно $\sqrt{-1}$ са i онда мора бити $i^2 = -1$ т. ј! $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Ова примедба од особите је важности у рачунима са уображеним количинама. Тако би погрешно било закључење: $\sqrt{-a}\times$

$\times\sqrt{-b} = \sqrt{+ab}$; јер кад замислимо, да је $\sqrt{-a}$ разложено у $\sqrt{a\times-1} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = i.\sqrt{a}$ исто је тако $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$ дакле $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} =$

$$= i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$ Даље је $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{b} =$

$$i\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = i\sqrt{ab} = \sqrt{-ab},$$

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = i\sqrt{a} : i\sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\sqrt{-a} : \sqrt{b} = i\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

и најпосле $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a} : i\sqrt{b} =$

$$\frac{1}{i}\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{i}{i^2}\sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{-1}.\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{-\frac{a}{b}}.$$

141. Уображене бројеве сабирамо и одузимамо; кад јим њихове сачинитеље сведемо исто онако, као што смо показали код несвршених бројева.

Тако је $(a + b\sqrt{-1}) \pm (c + d\sqrt{-1}) = (a \pm c)+$

$$+\left(b \pm d\sqrt{-1}\right).$$

Израз кога је вид $a + b\sqrt{-1}$ зове се *мешовит број* зато

можемо рећи, да је збир или разлика два мешовита броја опет мешовит број. Исто је тако производ два или више мешовита броја опет мешовит број т. ј. да је $(a + b\sqrt{-1}) \cdot \left(c + d\sqrt{-1}\right) =$

$$= (ac - bd)\ (ad + bc)\sqrt{-1}\ .$$

Мешовите изразе $\left(a + b\sqrt{-1}\right)$ и $\left(a - b\sqrt{-1}\right)$

зовемо *сиречнути бројеви*, њихов је производ $a^2 + b^2$.

даље је $\dfrac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \dfrac{\left(a + b\sqrt{-1}\right)\left(c - d\sqrt{-1}\right)}{\left(c + d\sqrt{-1}\right)\left(c - d\sqrt{-1}\right)} =$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\sqrt{-1}}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}$$

израз овога вида $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Дакле количник из два мешовита броја опет је мешовит број.

Кад су два мешовита броја једнака, као $a \pm b\sqrt{-1} =$ $= c \pm d\sqrt{-1}$, онда је и $a = c$, и $b = d$.

Јер из задате једначине сљедује,

$$a - c = \pm d\sqrt{-1} \mp b\sqrt{-1} = \pm (d - b)\sqrt{-1}$$

или кад подигнемо обе стране једначине на квадрат,

$$(a - c)^2 = -(d - b)^2 \quad \text{т. ј.} \quad (a - c)^2 + (d - b)^2 = 0$$

Збир два квадрата положних бројева, само је онда раван нули, кад се изгуби сваки квадрат за себе, а то је онда само могућно, ако је $a - c = 0$, и $d - b = 0$, дакле кад је

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d.$$

По томе морају доистне количине за себе, а уображене за себе т. ј. сачинитељи од $\sqrt{-1}$ бити једнаки..

Примедба. Стварни бројеви могу се сматрати као особеност уображених бројева, јер $a + b\sqrt{-1}$ може бити, ако су a и b засебно доистне количине, сваки доистни или побочни број, како се кад разликује b од нуле или неразликује.

Још можемо споменути и то како иду једно за другим степени од $\sqrt{-1} = i$. С погледом на то, да је $i^2 = -1$,

сљедује $i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2) = +1,$

$i^5 = i^4 \cdot i = +i,\ \ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = +1$ и т д.

Тако је $i^{4n} = +1, \qquad i^{4n+1} = +i,$

$$i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Примери како се рачуна са уображеним количинама.

1) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} +$

$+ 3\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$

2) $$\sqrt{-x^2}+\sqrt{-y^2}+\sqrt{-z^2}-\sqrt{-v^2}=$$

$$= x\sqrt{-1}+y\sqrt{-1}-z\sqrt{-1}-v\sqrt{-1}=$$

$$=(x+y-z-v).\sqrt{-1}$$

3) $$\sqrt{-m^3x}+\sqrt{-m^5x^3}+\sqrt{-m^7x^5}=$$

$$=(m+m^2x+m^3x^2)\sqrt{mx}\,.\sqrt{-1}$$

4) $$\sqrt[4]{-16a^4}+\sqrt[4]{-81b^4}+\sqrt[4]{625c^4}=$$

$$=(2a+3b+5c)\sqrt[4]{-1}$$

5) $$\left(4-5\sqrt{-1}\right)\left(6+2\sqrt{-1}\right)=$$

$$=24-30\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+10=$$

$$=34-22\sqrt{-1}$$

6) $$\left(\sqrt{a}+\sqrt{-b}\right)\left(a-\sqrt{-b}\right)=a+b,$$

7) $$\left(6\sqrt{-7}+\tfrac{2}{3}\sqrt{-4}\right)\left(6\sqrt{-7}-\right.$$

$$\left.-\tfrac{2}{3}\sqrt{-4}\right)=-250\tfrac{2}{9}.$$

8) $$\left(a-b\sqrt{-m}+c\sqrt{-n}\right)\left(a+b\sqrt{-m}-\right.$$

$$\left.-c\sqrt{-n}\right)=(a^2+b^2m+c^2n)-2bc\sqrt{mn}$$

9) $$\left(2x-y\sqrt{-1}\right)^2=4x^2-4xy\sqrt{-1}-y^2$$

10) $$\left(3a\sqrt{-b}+4b\sqrt{-a}\right)^2=-$$

$$-ab\left(9a+24\sqrt{ab}+16b\right).$$

11) $$\left(1-2\sqrt{-2}\right)^3=-23+10\sqrt{-2}$$

12) $$6\sqrt{-10}:3\sqrt{-2}=2\sqrt{5}$$

13) $$a^2b\sqrt{b}:a\sqrt{-b}=\frac{a^2b\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\times\sqrt{-1}}=$$

$$=\frac{ab}{\sqrt{-1}}=\frac{ab\sqrt{-1}}{\left(\sqrt{-1}\right)^2}=-ab\sqrt{-1}$$

14) $$(x-y):\left(\sqrt{-x}-\sqrt{-y}\right)=-$$

$$-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)$$

15) $$\left(\sqrt{32} - 4\right) : \left(-2 - \sqrt{-4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{-2}$$

Примери за упражнење.

1) $$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}\right) =$$

$$= a - b - c - 2\sqrt{bc}$$

2) $$\left(\sqrt{a} - \frac{b}{\sqrt[2n]{ab}}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt[2n]{b^{2n-1}}}{\sqrt[2n]{a}}\right) =$$

$$= a - \frac{b^2}{\sqrt[n]{ab}}.$$

3) $$\left(r + \sqrt{(r^2 - x^2)}\right)\left(r - \sqrt{(r^2 - x^2)}\right) = x^2$$

4) $$\sqrt{\frac{4 - \sqrt{2}}{7}} \cdot \sqrt{\frac{4 + \sqrt{2}}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

5) $$\left(\frac{a}{b}\sqrt{c} + \sqrt{cd}\,.\,\sqrt{1}\right)\left(\frac{a^2}{b}\sqrt{c} - \right.$$

$$\left. - a\sqrt{cd}\,.\,\sqrt{-1}\right) = ac\left(\frac{a^2}{b^2} + d\right).$$

6) $$\left(c\sqrt[4]{a^3} + \frac{d}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^2 = c^2a\sqrt{a} + 2cd\sqrt[12]{a} +$$

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

7) $$\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{xy}\right)^3 = x\sqrt{x} - 3x\sqrt[3]{xy} +$$

$$+ 3x\sqrt[6]{xy^4} - xy$$

8) $$5\sqrt{(2 + \sqrt{8})}\,.\,3\sqrt{(4 + 6\sqrt{2})} =$$

$$= 30\sqrt{(8 + 5\sqrt{2})}$$

9) $$\sqrt{\left(a^2 - ab + \frac{b^2}{4}\right)} = \pm\left(a - \frac{b}{2}\right)$$

10) $$\sqrt{(x^2 + 2x + 1)} = \pm(x + 1)$$

11) $$3\sqrt[3]{(8 + 16\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{20})} =$$

$$= 4\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$$

12) $$\sqrt{ax} + \frac{ax}{a - \sqrt{ax}} = \frac{ax + a\sqrt{ax}}{a - x}$$

13) $$\frac{c\sqrt{(c+d)}}{\sqrt{(c-d)}} - \frac{d\sqrt{(c-d)}}{\sqrt{(c+d)}} - \frac{2d^2}{\sqrt{c^2-d^2)}} = \sqrt{(c^2-d^2)}$$

14) $$\frac{\sqrt{(a+bx)}}{ax^2} - \frac{(a+bx)^{-1/2}\, b}{2ax} - \frac{b}{2ax\sqrt{(a+bx}} = \frac{1}{x^2\sqrt{(a+bx)}}$$

15) $$\sqrt{\left(\frac{abc+1}{b} + 2\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)} + \sqrt{\frac{abc+1}{b} - 2\sqrt{\frac{ac}{b}}\Big)} = 2\sqrt{ac}$$

16) $$\sqrt{(a - b\sqrt{c})}\cdot\sqrt[6]{(a^2 + b^2c + 2ab\sqrt{c})} = \sqrt[6]{(a - b\sqrt{c})(a^2 - b^2c)^2},$$

17) $$r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2r}\right)\cdot\sqrt{\left[4r^2 - \frac{r^2}{4}(-1+\sqrt{5})^2\right]} = r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

18) $$\frac{2r\cdot\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})}{\sqrt{\left(4r^2 - \frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})\right)}} = 2r\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})}{5}}$$

19) $$\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-\sqrt{x}-6} = \frac{\sqrt{x^2}+2\cdot 2\sqrt{x}+2^2}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x}-6} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

20) $$\frac{x+4\sqrt{x}-5}{x+3\sqrt{x}-10} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

21) $$\frac{2x^2+2x+2}{2x+1+\sqrt{-3}} = x + 1/2 - 1/2\sqrt{-3}$$

22) $$\frac{a^2\sqrt{bc}+ab\sqrt{bc}}{(a+\sqrt{-ab})\,(\sqrt{ab}-b\sqrt{-1})}\,c = \sqrt{\frac{a}{c}}$$

23) $$\frac{x\sqrt[3]{x}+a\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x^2}+bx+ab\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x^2}+a\sqrt{x}.$$

24) $$(x+1)\frac{\sqrt{(x+2)}}{\sqrt{\left((x^2+3x+2)(x+1)\right)}} = 1$$

25) $$\frac{1}{x-2}\cdot\sqrt{[(x-2)(x^2+x-6)]} = \sqrt{(x+3)}$$

$$26)\quad \frac{1}{1+x}\cdot\frac{\sqrt{[(2x^2+3x+1)\,(x^2-x-2)]}}{\sqrt{(x-2)}} =$$

$$= \sqrt{(2x+1)}$$

$$27)\quad \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/3}} + \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{(1-x^2)^2}$$

$$28)\quad \frac{\sqrt[12]{27^8}\cdot\sqrt[5]{8^{-3}}}{\sqrt[8]{4^{-3}}} = {}^9\!/_2\sqrt{2}$$

$$29)\quad \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}} + \sqrt{(28+5\sqrt{12})} = 5^1\!/_3 + \sqrt{3}$$

$$30)\quad \sqrt{\left(\frac{15^7\,.\,231^9\,.\,5^{-3}}{98\,.\,77^9\,.\,26^3} : \frac{\sqrt[3]{5^6}\cdot\sqrt{5^{-1}}}{\sqrt[3]{5^{-21}}}\right)} =$$

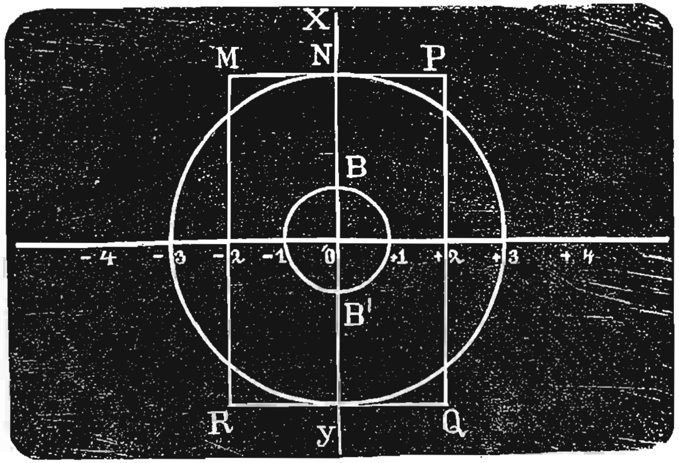
$$= 25\sqrt[10]{5}^{\;\frac{1}{}}$$

Примедба. Побочни (латерални) видови бројева од велике су потребе за математику према данашњем њеном стању, зато је од користи, да покажемо овде геометријско значење тих количина.

Казато је већ, да се алгебарски цели бројеви представљају уређеним редом тачака које леже у правој линији на једнаком растојању, исто тако одговара нека тачка из те бројевне линије *(Zahlen linie)* неком свршеном разломку па и сваком несвршеном броју; на против побочни (лателарни) бројеви немају свога места на самој бројевној линији, њихово место налази се у равнини положеној кроз ту бројевну линију и то са бока бројевне линије.

Да би $\sqrt{-1}$ истројили, треба да опишемо круг ког је пречник раван -1 и $+1$ на бројевној линији, онда ће се овај пресецати у B' са управном xy коју смо поделили кроз сред среду *o* тога круга на бројевној линији, па је сада *OB* по законима геометрије геометриска средина између линија, *o*—1 и *o*, +1, т. ј. овде је

$$-1 : OB = OB : +1 \qquad \text{или}$$



$OB = \pm\sqrt{-1} = \pm\, i$; дакле ове тачке *B* и *B'* показују бројеве $+i$ и $-i$ (како се кад узме, да је правац ox и oy относно у положном или одречном смислу), т. ј. ако изнађемо из средсреде бројевне линије управо на ову, за једну јединицу даље, онда ћемо добити од тачака што овако постају према њиховом положају значај побочне (латералне) јединице.

Исто је тако NO геометријска средина између о, $+3$. и о, -3, или $NO = 3\sqrt{-1}$. Ако сад повучемо кроз N неку равнотекућу праву са бројевном линијом, и у тачкама $+2$ и -2 оне бројевне линије повучемо управне на бројевну линију, онда показује у бројевној равнини положај тачака M, P, Q и R относно побочне (латерарне) количине.

$$(-2+3\sqrt{-1}),\ (+2+3\sqrt{-1}).\ (+2-3\sqrt{-1})$$
$$\text{и}\quad (-2-3\sqrt{-1})$$

Овим се путем увиђа у опште значај од $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$.

По предходном моћи ће се значај немогуће или уображене количине само у толико разумети, у колико бројеви овога вида $\sqrt{-a}$ недолазе у бројевној линији, по који се изналазе помоћу, побочног кретања, даље посматрање побочни количина нећемо овде предузимати, јер прелази обим елементарне математике.

ИЗВЛАЧЕЊЕ КОРЕНА ИЗ СЛОЖЕНИХ ИЗРАЗА.

Извлачење другог корена

142. Да изнађемо начин како се извлачи други корен, показаћемо најпре да је квадрат бинома

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

па ћемо сада противним путем ићи при извлачењу другог корена.

Кад је полином постао подизањем на квадрат, то ћемо овај најпре уредити по степенима једне писмене количине.

Означимо овај уређени полином са

$$A + B + C + D + \dots\dots\dots$$

и узмимо да је по тој истој количини x, уређени корен

$$a + b + c + d + \dots\dots\dots$$

т. ј. ако је $\sqrt{A + B + C + D + \dots\dots} =$

$$= a + b + c + d + \dots\dots\dots$$

то је и $(A + B + C + D + \dots\ ) = (a + b + c + d \dots)^2$

дакле $A = a^2$ или $a = \sqrt{A}$, т. ј. први део корена добијамо, кад извучемо други корен из првог дела полинома.

Али због $(a + b + c + d + \dots\dots\dots)^2 =$

$$= a^2 + 2a(b + c + d + \dots\dots\dots)$$
$$+ (b + c + d + \dots\dots\dots)^2$$

остаје, кад $a^2 = A$ одузмемо од полинома, разлика

$$B + C + D + \dots = 2a(b + c + d + \dots) +$$
$$+ (b + c + d + \dots\dots\dots)^2$$

Сада знамо да је a с односом на x вишег степена но што је b, па је зато и $2ab$ вишег степена од b^2 т. ј. у уређеном остатку налази се $2ab$ као највиши или први члан.

Сада B није ништа друго, но двоструки производ из a помножено с другим кореним делом b; ако дакле поделимо први члан остатка (т. ј. $2ab$) са двоструким кореном a, то ћемо добити b т. ј. други део корена.

Сада је $(a + b + c + \dots\dots\dots)^2$

још $= (a+b)^2 + 2(a+b)(c + d + \dots\dots) +$
$$+ (c + d + \dots\dots\dots\dots)^2$$

Одузмимо дакле од $A + B + C + \dots\dots)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или што је то исто од

$$B + C + D + \dots,\ (2ab + b^2).$$

па ће нам остати нов остатак, и кад поделимо први члан овога остатка т. ј. $2ac$ са $2a$, то ће изаћи као количник сљедујући корени део т. ј. c; $(a + b + c)^2$ кад се одузме од

$$A + B + C + \dots)\ \text{или}\ 2(a + b)c + c^2$$

одузето од последњег дељеника, даје нов остатак кога први члан т. ј. $2ad$ подељен са $2a$ даје сљедујући део корена, тако се могу сви делови корена поступно определити.

Да би ово још јасније било узећемо, да су од корена н. пр. изнађена прва четир саставна дела $(a + b + c + d) = a'$. Обележимо оне сљедујуће делове са b', онда се може полином означити са $(a' + b')^2 = a'^2 + 2a'b' + b'^2$, па кад одузмемо од полинома a'^2, то ће нам остати

$$2a'b + b'^2 = 2(a + b + c + d) \times (e + f + g + \dots) +$$

$$+ (e + f + g + \dots)^2.$$

где је опет $2ae$ с односом на x са највишим степеном, дакле $2ae$ први члан остатка кад поделимо са $2a$, добићемо e као даљи члан корена.

Из свега тога изводимо ово правило:

Да треба извући из првог члана задатог полинома квадратни корен, па поделити други члан са двоструким већ изнађеним кореним делом, паћемо добити други део корена. Од дељеника кад се одузме $(2ab + b^2)$ добићемо нов остатак којега први члан подељен опет двоструким првим делом корена даје нови део корена.

Од последњег дељеника треба одузети по ново двоструки производ из два прва саставна дела помножена с трећим, а исто тако квадрат трећег саставног дела, па поделити први члан новог остатка са двоструким првим делом корена, па ћемо добити четврти саставни део корена, и тако све даље радити, док се не сврши рачун, т. ј. да не заостане никакав остатак; или док не увидимо, да задати полином није савршени квадрат.

Примери:

1) $$\sqrt{4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 30x + 25} = \underbrace{2x^2}_{}^{a} + \underbrace{3x}^{b} - \underbrace{5}^{c}$$

$$4x^4$$

$$-$$

$$12x^3 - 11x^2 \quad : \quad \overbrace{4x^2}^{2a} + \overbrace{3x}^{b}$$

$$b(2a + b) \dots\ 12x^3 + 9x^2$$

$$- \quad -$$

$$-20x^2 - 30x + 25 \quad : \quad \overbrace{4x^2 + 6x}^{2(a+b)} - \overbrace{5}^{c}$$

$$c[2(a + b) + c] \dots -20x^2 - 30x + 25$$

$$+ \quad + \quad -$$

„ „ „

2) $$\sqrt{4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4} = 2x^2 + 2ax + 4b^2$$

$$4x^4$$

$$-$$

$$8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 \quad : \quad 4x^2 + 2ax$$

$$8ax^3 + 4a^2x^2$$

$$- \quad -$$

$$16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4 \quad : \quad 4x^2 + 4ax + 4b^2$$

$$16b^2x^2 + 16ab^7x + 16b^4$$

$$- \quad - \quad -$$

3) $\sqrt{[9x^2 - 30xy - 3xy^2 + 25^2 + 5y^3 + \frac{y^2}{4}]} =$

$= \pm [3x - 5y - \frac{y^2}{2}]$

4) $\sqrt{[x^4 - x^2y^2 + 4x^2z + \frac{y^4}{4} - 3y^2z + 4z^2]} =$

$= x^2 - \frac{y^2}{2} + 2z$

5) $\sqrt{[{}^4/_9\, a^2x^4 - {}^4/_3\, abx^3z + {}^8/_3\, a^2bx^2z^2 + b^2x^2z^2 -}$

$- 4ab^2xz^3 + 4a^2b^2z^4] = \ldots\ldots$

6) $\sqrt{[a^{2m}\, x^{2n} + 10a^{2m-2}\, cx^{2n+1} - 6a^{m+1}\, x^{n-1} +}$

$+ 25a^{2m-4}\, c^2x^{2n+2} - 30a^{m-1}\, cx^n + \frac{9a^2}{x^2}) = \ldots$

7) $\sqrt{[a^2\,(b^2 - x) + b^2\,(x^2 - b) +}$

$+ 2ab\sqrt{(b^2 - x)\,(x^2 - b)}] = \ldots$

8) $\sqrt{[9 - 2b^2]} = \ldots\ldots$

9) $\sqrt{[1 + x]} = \ldots\ldots$

ИЗВЛАЧЕЊЕ КВАДРАТНОГ КОРЕНА ИЗ ОСОБЕНИХ БРОЈЕВА.

143. Да би показали начин како се извлачи квадратни корен из особеног броја морамо се опоменути на §. 119 у ком је показано како се подиже неки број на други степен.

Н. пр. 3642^2 =

9			
3	6		
	3 6		
	2 8	8	
		1 6	
	1	4 5	6 4
13	2 6	4 1	6 4

Кад овај број квадрата разделимо у класе по две цифре, то ћемо видити, да у првој класи 13 долази подпуни квадрат прве корене цифре, двогуби производ прве две цифре долази до првог места друге класе, а квадрат друге корене цифре долази подпуно у класи 26, двогуби производ две прве цифре помножен с трећом долази до прве цифре сљедујуће класе 41, а квадрат корене цифре 4 долази подпуно у класу 41, и. т. д. из тога изводимо, да квадрат први *m* цифара корена, и никакав већи квадрат, долази у први *m* класа тако, да корен из први *m* класа извучен даје први *m* цифара корена.

144. Из тога можемо извести начин, како се извлачи квадратни корен из десетног броја.

1. Треба поделити број под кореним знаком корењак (радиканд) с десна у лево на редове или класе по две цифре, где прва класа с лева и једну цифру имати може. Код десетних разломака делимо у класе од десетне тачке у лево целе бројеве а у десно децимале; ако посљедња класа само једну децималу има, то ћемо недостајуће децимале попунити нулама.

2. Да тражимо ону цифру које се квадрат налази у првој класи и да ову цифру поставимо као прву корену, и да одбијемо квадрат ове прве корене цифре од прве класе.

3. К овом и сваком сљедујћем остатку треба да спустимо сљедујућу класу, а овај број да поделимо пошто најпре одсечемо посљедну цифру с десна, са двоструким већ изнађеним кореном; па ћемо добити другу цифру корена. Сада треба од дељеника разумевајући у њему и ону одсечену цифру, одузети два саставна дела, т. ј. двогуби производ од обе корене цифре и квадрат посљедње цифре. Ово се најлакше постиже, кад

дељитељу допишемо изнађену корену цифру, па овако промењеног дељитеља помножимо с посљедном кореном цифром и производ овај одузмемо.

(Због $2ab + b^2 = (2a + b).b$)

4. К новом остатку да спустимо опет сљедујућу класу, и ову да поделимо са изузетком последње цифре, двоструким изнађеним кореном, па ћемо добити трећу корену цифру; и кад овако продужимо радити све док не добијемо поступно поједине корене цифре.

5. Кад се деси, да је дељеник мањи од дељитеља, онда ћемо поставити нулу у корен а сљедујућу класу спустити.

Примедба. Кад би узели неку много већу корену цифру онда се то познати мора, јер делове $2ab + b^2$ неможемо одузети од делимка. Ако би узели мању корену цифру, онда треба да знамо, да остатак r мора мањи бити од кореног броја ког смо двогубо узели и јединицу додали.

Ако је овај корени број $= \alpha$ и α неки m цифрени број то је $r = A - \alpha^2$ кад показује A прве m класе корена. Ако узмемо корен $= \alpha + 1$ то је $(\alpha + 1)^2 > A$

дакле $2\alpha + 1 > A - \alpha^2 = r,$

т. ј. остатак може бити највише раван двогубом кореном броју, а свагда је мањи од двогубог кореног броја увећаног са један.

Примери

1) $\sqrt{13|24|96} = 364$

$-\ 9$

42(4 : 6 . . . . . (2a)

$2ab$ . . .

424 : 6 . . . . (2a)

$2ab$... 36

b^2... 36

289(6 : 72

288

16

или краће

$\sqrt{13 \mid 24 \mid 96} = 364$

42(4 : 66

2896 : 724

" "

145. Из десетног разломка извлачимо корен исто онако, као што смо извлачили корен из целих бројева.

3) $\sqrt{33 \mid 91 \cdot \mid 43 \mid 16 \mid 86} = 58{\cdot}236$

89(1 : 108

274(3 : 1162

4191(6 : 11643

69879(6 : 116466.

Кад корењак није подпуни квадрат, онда је корен несвршен број зато ћемо у последњи остатак дописати две нуле исто онако као да су десетне цифре, а у осталом чинићемо исто онако као што је горе показано. С погледом на § 137 можемо изнаћи квадратни корен онако тачно, како кад хоћемо.

4) $\sqrt{13} = 3 \cdot 605551$

40(0 : 66

40(0 : 72

4000(0 : 7205

39750(0 : 72105

369750(0 : 721105

919750(0 : 7211101

1986399

и т. д.

Ако се у овим случајима тражи да определимо већи број децимала, то можемо радити овим краћим начином.

Нека је већ опредељено $\sqrt{A} = \omega$ са m децимални места, то је изостављени део корена $\delta < \frac{1}{10^m}$, дакле

$$A = (\omega + \delta)^2 = \omega^2 + 2\omega\delta + \delta^2.$$

$$A - \omega^2 = 2\omega\delta + \delta^2.$$

Али је $A - \omega^2$ последњи остатак $= r$, зато је $r = 2\omega\delta + \delta^2$, и због $\delta^2 < \frac{1}{10^{2m}}$ приближно $r = 2\omega\delta$, зато је $\delta = r : 2\omega$.

Ако је дакле корен опредељен са m десетни места, и ако поделимо остатак са двоструким кореном, то ћемо простим дељењем моћи још једанпут толико децимала тражити, колико је већ добивено.

Да се определи н. пр. $\sqrt{13}$ са 10 десетни места, Ми ћемо определити најпре 5 децимала обичним начином.

$\sqrt{13} = 3 \cdot 6055512754$

40(0 : 66

40(0 : 72

4000(0 : 7205

39750(0 . 72105

369750(0 : 721105

91975 : 7(2(1(1(1(0

19864

5442

394

33

4

Овај начин може се употребити, кад у корену недолазе децимале, но само цели бројеви.

Тако је н. пр. $\sqrt{5948631764792} = 2438981$ до самих јединица.

Напротив $\sqrt{5 \cdot 948631764792} = 2 \cdot 438981$ т. ј. след цифара у корену у оба је случаја један исти.

Ако има да се определе из $\sqrt{5948631764792}$ три последња места скраћеним начином, онда је тај исти рад, као кад би из $\sqrt{5 \cdot 9486 \ldots\ldots}$ последња три места корена простим дељењем тражили.

$$\sqrt{5\,|\,94\,|\,86\,|\,31\,|\,76\,|\,47\,|\,92} = 2438(981$$

19(4 : 44

188(6 : 483

4373(1 : 4868

4787 : 4(8(7(6 = 981

399

9

4

Да се извуче трећи корен из задатог полинома.

146. Замислимо задати полином, за који предпостављамо да је потпуни трећи степен неког сложеног израза падајуће уређен по степену писмене количине н. пр. x.

Ако је полином $A + B + C + D + \dots\dots$ а тако исто уређени корен $a + b + c + d \dots\dots\dots$ онда је

$$\sqrt[3]{A + B + C + D + \dots} = a + b + c + d + \dots$$

$$\text{или } A + B + C + D + \dots = (a + b + c + d + \dots)^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2 (+ b + c + d + \dots) +$$

$$3a\,(b + c + d + \dots)^2 + (b + c + d + \dots)^3$$

Овде је дакле $a^3 = A$ или $a = \sqrt[3]{A}$ први члан траженог корена. т, ј. први део корена налазимо, кад из првог дела полинома корен извучемо.

Одузмимо сада $a^3 = A$ од полинома, то ће заостати разлика.

$$B + C + D + \dots = 3a^2\,(b + c + d + \dots) +$$

$$3a\,(b + c + d + \dots)^2 + (b + c + d + \dots)^3$$

Овде је a односно количине x на највишем степену, зато је у уређеном остатку $3a^2b$ највиши или први члан, дакле $3a^2\,b = B$ ако сада поделимо B са $3a^2$, то ћемо добити b т. ј други члан корена.

Но знамо да је и даље $(a + b + c + d + \dots)^3 =$

$$= (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,(c + d + \dots) + 3\,(a + b) \times$$

$$\times\,(c + d + \dots)^2 + (c + d + \dots)^3.$$

Одузмимо сада од $A + B + C + D + \dots$ израз $(a + b)^3$ или што је то исто од $B + C + D + \dots$, израз $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, то ће остати нов остатак, кога први члан $3a^2c$ подељен са $3a^2$ даје сљедујући члан корена c,

Ако су у опште делови корена $a + b + c + d = a'$ изнађени, и ако поставимо остале делове $e + f + g + \dots = b'$ то можемо изразити задати полином са $(a' + b')^3 = a'^3 + 3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3$ и кад одузмемо од тога израза количину a'^3,

то ће остати $3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3, = 3\,(a + b + c + d)^2 \times$

$$\times (e + f + g + \dots) + 3\,(a + b + c + d)\,(e + f + g + \dots)^2 +$$

$$+ (e + f + g + \dots)^3$$

У овом реду заиста је $3a^2e$ односно количине x највиши члан, дакле кад овај први члан остатка поделимо са $3a^2$, добићемо e као сљедујући члан корена.

Из тога изводимо ово правило:

147. Треба извући из првог члана уређеног полинома трећи корен, па ћемо добити први саставни део корена. Сљедујући члан полинома, поделићемо са троструким квадратом добивеног првог саставног дела корена (т. ј. са $3a^2$), количник овај биће други члан корена (b). Сада треба од полинома $A + B + C + \dots\dots$ одузети куб изнађеног бинома, затим први део остатка поделити са троструким квадратом првог кореног дела (дакле опет са $3a^2$) па ћемо добити количник, као нов саставни део

корена. Тако треба продужити рад овај, док се рачун не сврши т. j. док не буде нула у остатку, што je уједно знак да je савршен кубни корен.

Ако пак нађемо у корену такав члан кога je изложитељ редног писмена x мањи од $^1/_3$ најмањег изложитеља задатог полинома, то je онда знак, да тај полином није потпуни трећи степен.

1. Да се извуче трећи корен из

$$8x^6 + 36x^5 - 6x^4 - 153x^3 + 15x^2 + 225x - 125$$

по горњем правилу излази:

$$1)\quad \sqrt[3]{8x^6 + 36x^5 - 6x^4 - 153x^3 + 15x^2 + 225x - 125} =$$
$$= \overset{a}{2x^2} + \overset{b}{3x} - \overset{c}{5}$$

$$8x^6$$
$$\pm$$

$$36x^5 - 6x^4 - 153^3 : 12x^4 \ldots (36x^5 : 12x^4 = 3x$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a^2b \ldots\ldots \\ 3ab^2 \ldots\ldots \\ b^3 \ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{lll} 36x^5 & & \\ & + 54x^4 & \\ & & + 27x^3 \end{array}$$

$$- 60x^4 - 180x^3 + 15x^2 + 225x - 125 : 12x^4 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\,(a+b)^2.\ c \ldots \\ 3\,(a+b)c^2 \ldots\ldots \\ c^3 \ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{lll} - 60x^4 - 180x^3 - 135x^2 & & (-60x^4 : 12x^4 = -5: \\ & + 150x^2 + 225x & \\ & & - 125 \end{array}$$

„ „ „ „

$$\overset{a^1}{\overline{a \quad \underset{\smile}{b}}} \qquad \underset{\smile}{b^1}$$

$$2)\quad \sqrt[3]{x^3 + a} = x + \frac{a}{3x^2} - \frac{a^2}{9x^5} + \frac{5a^3}{81x^8} - \text{и т. д.}$$

$$- x^3$$

$$+ a$$

$$(3a^2b + 3ab^2 + b^3) \ldots\ldots + a + \frac{a^2}{3x^3} + \frac{a^3}{27x^6}$$
$$- \quad - \quad -$$

$$- \frac{a^2}{3x^3} - \frac{a^3}{27x^6}$$

$$(3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3) - \frac{a^2}{3x^2} - \frac{2a^3}{9x^6} + \frac{a^5}{81x^{12}} - \frac{a^6}{729x^{15}}$$
$$+ \quad + \quad - \quad +$$

$$\frac{5a^3}{27x^6} - \frac{a^5}{81x^{12}} + \frac{a^6}{729x^{15}}$$

и т. д.

$$3)\quad \sqrt[3]{[27x^{12} - 54x^8y^5 + 36x^4y^{10} - 8y^{15}]} = 3x^4 - 2y^5.$$

$$4)\quad \sqrt[3]{[ax\sqrt{ax} - 3ax\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ax} - ab\sqrt{ab}]} = \sqrt{ax} - \sqrt{ab}.$$

$$5)\quad \sqrt[3]{[8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 +}$$
$$+ 108c^5x - 27c^6] = 2x^2 + 4cx^6 - 3c^2.$$

6) $\sqrt[3]{(a+b)^{6m}x^3 + 6ca^p(a+b)^{4m}x^2 + 12c^2a^{2p} \times}$

$+ (a+b)^{2m}x + 8c^3a^{3p}) = (a+b)^{2m}x + 2ca^p.$

7) $\sqrt[3]{\left(\frac{c^3}{a^3} - \frac{386(c^2+a^2d^2)-48ac(c+ad)-9cd(3-8a)}{16d^2} - \right.}$

$\left. - \frac{27}{64} + \frac{27a}{16} + a^3\right) = \frac{c}{d} - \frac{3}{4} + a.$

8) $\sqrt[3]{[a^3b\sqrt{b} + 6a^2bc\sqrt{-d} - 12ac^2d\sqrt{b} - 8c^3d\sqrt{-d}]} =$

$= a\sqrt{b} + 2cd\sqrt{-1}.$

9) $\sqrt[3]{[27a\sqrt{a} + 108b\sqrt{a} + \frac{9c}{4}\sqrt{a} - 54a\sqrt{3b} -}$

$- 18\sqrt{3abc} - 24b\sqrt{3b} - \frac{3c}{2}\sqrt{3b} + 18b\sqrt{c} +$

$\frac{27a}{2}\sqrt{c} + \frac{c}{8}\sqrt{c}] = 3\sqrt{a} - 2\sqrt{3b} + \frac{1}{2}\sqrt{c}.$

10) $\sqrt[3]{[(x-1)\sqrt{x-1} + 3a^x(x-1) + 3(x-1) \times}$

$\times \sqrt{a} + 3a^{2x}\sqrt{x-1} + 6a^x\sqrt{a(x-1)} +$

$+ 3a\sqrt{(x-1)} + 3a^{2x}\sqrt{a} + a^{3x} + 3a^{x+1} + a\sqrt{a}] =$

$\sqrt{x-1} + a^x + \sqrt{a}.$

Извлачење кубног корена из десетних бројева.

148. Да би могли изнаћи начин, како се извлачи трећи корен из декадног броја, ми ћемо најпре образовати трећи степен неког задатог броја н. пр. 2564^3

то је 2564^3 =

8			
6	0		
1	5 0		
	1 2 5		
1	1 2 5	0	
	2 7	0 0	
		2 1 6	
	7 8	6 4 3	2
		1 2 2	8 8
			6 4
16	8 5 5	9 8 2	1 4 4

Кад поделимо овај број у класе с десна у лево све по три цифре, то ћемо добити ово правило:

Куб прве цифре лежи тачно у првој класи 16 куб друге цифре 5 лежи у другој класи, од 6 у трећој и најпосле куб броја 4 у четвртој класи.

Троструки квадрат прве цифре помножен с другом иде само до прве цифре друге класе, троструки квадрат друге цифре помножен са првом иде до друге цифре друге класе. Истим начином налазимо да иде троструки квадрат од 25 помножен са 6, до прве цифре треће класе а троструки квадрат од 6 помножен са 25 достиже до друге цифре треће класе и т. д.

У опште можемо узети, да куб први m цифара корена, а никада већи куб, долази у први m класа степена, тако, да и обратно, корен извучен из први m класа, даје први m цифара у корену.

149. Из тога сљедује правило, како треба извући трећи корен из задатог десетног броја:

1. Треба поделити број под кореним знаком у редове (класе) с десна у лево тако, да свака класа има 3 цифре, па ћемо добити, ако је број под кореним знаком савршен куб, у корену толико цифара, колико има класа задати број.

2. Пошто знамо, да се налази у првој класи прва цифра корена, то ћемо узети, ако нема броја који би дао подигнут на трећи степен подпуно прву класу, неки мањи број као прву корену цифру, а куб ове одузети од прве класе.

3 Остатку који би овако остао, дописаћемо сљедујућу класу, па ћемо тај број поделити пошто најпре с десна одсечемо две цифре, са троструким квадратом прве корене цифре и тако ћемо добити другу цифру корена.

Будући да куб из прве две корене цифре даје највише прве две класе, зато ћемо одузети од дељеника ова три дела: троструки квадрат прве корене цифре помножен са другом, троструки квадрат друге помножен с првом и куб друге корене цифре.

4. Кад би поново заостао какав остатак, треба му дописати сљедујућу класу и опет поделити пошто одсечемо две крајне цифре с десна са троструким квадратом изнађеног кореног *броја*, овај сматрати као први део, па ће изаћи трећа корена цифра. Сада ћемо образовати опет три дела, т. ј. $3a^2b$ $3ab^2$ и b^3 и одузети од дељеника.

5. Овако продужити рачун све донде, док не спустимо све класе, и ако изађе остатак нула значи, да је задати број подпуни трећи степен.

150. Ако количина под кореним знаком није потпуни трећи степен, онда можемо исто онако радити као што смо горе показали, и кад све класе спустимо, то ћемо последњем остатку дописати 3 нуле и радити као и пре. Ово дописивање нула продужићемо све донде док неизађе број захтевани децимала у корену.

Ако је A онај број, који показује први m класа и α први m цифара корена, то је $A > \alpha^3$, напротив $(\alpha + 1)^3 > A$, па

зато је и $3\alpha^2 + 3\alpha + 1 > A - \alpha^3$.

Али је $A - \alpha^3$ остатак па зато мора бити овај свагда мањи од збира

$$3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 3\alpha\,(\alpha + 1) + 1.$$

Ово нам показује како треба да знамо, да ли је напослетку определљена корена цифра узета у јединицу мања. Јер кад би узели корен мањи за један од прилике $= \beta$ где је $\beta + 1 = \alpha$, то би био остатак

$$R = A - \beta^3$$

и у овом случају је

$$R > 3\beta^2 + 3\beta + 1.$$

Дакле би био прави остатак

$$r = A - (\beta + 1)^3 = R - (3\beta^2 + 3\beta + 1),$$

па зато $\quad R = r + (3\beta^2 + 3\beta + 1)$

и тако $\quad R > 3\beta^2 + 3\beta + 1.$

Примери :

1)

$$\sqrt[3]{16 \mid 855 \mid 982 \mid 144} = \underset{2}{\underbrace{a}}\;\underset{5}{\underbrace{b}}\;\underset{6}{\underbrace{b'}}\;\underset{4}{\underbrace{b''}} \qquad \frac{a''}{a'}$$

8

88(55 : 12 . . . $(3a^2)$

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2b \\ 3ab^2 \\ b^3 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 60 \\ 150 \\ 125 \end{array}$$

12309(82 : 1875 . . . . $(3a'^2)$

$$\left.\begin{array}{r} 3a'^2b' \ldots \\ 3ab' \ldots \\ b'^3 \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{r} 11250 \\ 2700 \\ 216 \end{array}$$

787661(44 : 196608 . . . . $(3''^2)$

$$\left.\begin{array}{l} 3a''^2b'' \dots \\ 3a''b''^2 \dots \\ b''^3 \dots \end{array}\right\} \begin{array}{r} 786432 \\ 12288 \\ 64 \end{array}$$

„ „ „ „

2) $\sqrt[3]{2}$. Да би овде могли изнаћи у корену 3 десетна места, треба да напишемо по §. 137.

$$\sqrt[3]{2} = 10^3 \frac{\sqrt[3]{2}}{10^3} = \frac{1}{10^3} \sqrt[3]{2_{000000000}}$$

и сада извући трећи корен тачно из $2_{000000000}$ до самих јединица и најпосле одсећи 3 десетна места.

$$\sqrt[3]{2 \mid {}_{000} \mid {}_{000} \mid {}_{000}} = 1259$$

$1_{0(00}$

$$\left\{\begin{array}{l} 6 \\ 1 \quad 2 \\ \quad\quad 8 \end{array}\right.$$

$272_{0(00} : 432$

$$\left\{\begin{array}{l} 2160 \\ \quad 900. \\ \quad\quad 125. \end{array}\right.$$

$46875_{0(00} : 46875$

$$\left\{\begin{array}{r} 421875 \\ 30275 \\ 729 \end{array}\right.$$

4384021

дакле $\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}259 \;\; . \; . \; . \; . \; .$

Овај начин истоветан је са оним пређашњим.

Т. ј. $\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}259 \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$

10(00 : 3

6

128

$272_{0(00} : 432$

2160

900

125

$468750_{(00} : 46875$

421875

30375

729

4384021

и т. д.

151. Исто онако, као што при извлачењу квадратног корена, можемо добити последње цифре кубног корена простим дељењем.

Ако је $\sqrt[3]{A} = \alpha$ са m десетни места, то је $A - \alpha^3$ остатак. Назовимо непознату допуну са δ. онда је

$$A = (\alpha + \delta)^3$$

т. ј. $A - \alpha^3 = r = 3\alpha^2\delta + 3\alpha\delta^2 + \delta^3$

Због $\delta < \frac{1}{10^m}$ то је $\delta^2 < \frac{1}{10^{2m}}$ и $\delta^3 < \frac{1}{10^{3m}}$

Зато је приближно

$$r = 3\alpha^2\delta \quad \text{или} \quad \delta = r : 3\alpha^2.$$

Овај скраћени начин састоји се дакле у томе, да последњи остатак поделимо са троструким квадратом изнађеног кореног броја, па ћемо добити у количнику још и оне остале цифре корена.

Сравни са § 100.

Да се одреди $\sqrt[3]{2}$ са 8 десетни места

$$\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}2599 \ldots\ldots$$

$1_{0(00} : 3$
6
128

$272_{0(00} : 432$

2160
900
125

$46875_{0(00} : 46875$
421875
30375
729

$4383021_{0(00} : 4755243$
42797187
305937
729

100242201 : 47552(43
2108
5137
382
2

дакле $\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}25992108.$

Примери за упражнење:

1) $\sqrt{\frac{4x^2}{9} - \frac{20}{3}xy + \frac{4}{3}x + 25y^2 - 10y + 1} =$

$= \frac{2x}{3} - 5y + 1.$

2) $\sqrt{9a^2 + 30ab + 42ac + 25b^2 + 70bc + 49c^2} =$

$= 3a + 5b + 7c.$

3) $\sqrt{x^2 + a} = x + \frac{a}{2x} - \frac{a^2}{8x^3} + \frac{a^3}{16x^5}$ — и т. д.

4) $\sqrt{a^2 - b^2} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5}$ — и т. д.

5) $\sqrt{121801} = 349.$

6) $\sqrt{0{\cdot}357604} = 0{\cdot}598.$

7) $\sqrt{10106803{\cdot}9744} = 3179{\cdot}12$

8) $\sqrt{0{\cdot}0420824196} = 0{\cdot}20514.$

9) $\sqrt{6} = 2{\cdot}4494897$

10) $\sqrt[4]{91} = \sqrt{\sqrt{91}} = 3{\cdot}0885906\ldots$

11) $\sqrt[3]{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3} = 2x + 3y.$

12) $\sqrt[3]{x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1} = x^2 - x + 1.$

13) $\sqrt[3]{1 + x^3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \ldots$

14) $\sqrt[3]{a^3 - b^3} = a - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} - \frac{5b^9}{81a^8} - \ldots$

15) $\sqrt[3]{251239591} = 631$

16) $\sqrt[3]{209796356{\cdot}888} = 594{\cdot}2$

17) $\sqrt[3]{12821{\cdot}119155125} = 23{\cdot}405$

18) $\sqrt[3]{1934{\cdot}434936} = 12{\cdot}46$

19) $\sqrt[3]{572} = 8{\cdot}3010305005\ldots$

20) $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} = \sqrt[3]{0{\cdot}\dot{6}\dot{3}} = 0{\cdot}8601\ldots$

21) $\sqrt{a^4 - 6a^3 + 9a^2 + 10a^2b - 30ab + 25b^2} =$

22) $\sqrt{x^8 - 10x^6 + 2x^5 + 25x^4 - 10x^3 + x^2} =$

23) $\sqrt{x^4 - y^4} =$

24) $\sqrt{m^2 - m + 1} =$

25) $\sqrt[3]{216x^3 - 216x^2y + 72xy^2 - 7y^3} =$

26) $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2c - 6abc + 3b^2c - 3ac^2 + c^3} =$

27) $\sqrt[3]{m^3 + n^3} =$

28) $\sqrt[3]{1 + x + x^2} =$

29) $\sqrt{3415104} =$

30) $\sqrt{1024245 \cdot 2025} =$

31) У производу чинитеља $\sqrt{127} \times \sqrt{7954}$, да се определе 4 десетна места.

32) $7{\cdot}84\frac{1}{2} \,.\, \sqrt{13{\cdot}7}$ са 5 десатни места.

33) $\sqrt[3]{79507} =$

34) $\sqrt[3]{997{\cdot}002999} =$

35) Да се изведе производ са 3 десетна места из

$0{\cdot}3159876 \,.\, \sqrt[3]{26{\cdot}742} =$

36) $\sqrt{797} \,.\, \sqrt[3]{4{\cdot}015}$ са 4 дес. места.

ЈЕДАНАЈЕСТИ ОДСЕК

ГЕОМЕТРИЈСКЕ РАЗМЕРЕ И СРАЗМЕРЕ

Геометријске сразмере

152. Сравњивање два броја a и b да се види колико се пута један број у другим садржи, зове се *геометријска размера* која значи исто оно што и количник $\frac{a}{b}$ или $a{:}b$. Овде је количина a дељеник или *предњи члан размере*, а b дељитељ или *стражњи члан размере*; а прави количник оба члана зове се *изложитељ* који се обично бележи са q, и тако је сада $a : b = q$, а одавде $a = bq$.

Размеру ову $a : b$ читамо у кратко a према b.

Изложитељ размере показује величину размере; зато велимо да су две размере једнаке, кад имају једнаке изложитеље. Тако су $12 : 3$ и $20 : 5$ једнаке размере, јер имају обе изложитеља 4.

Свака размера може се сматрати као означено дељење по томе сва она правила која смо навели у дељењу о дељенику, и дељитељу и количнику вредиће и овде за предњи и стражњи члан и изложитеља размере. Сада ћемо навести још и ова нарочита правила за размере:

1) *Да је у свакој размери предњи члан раван производу из стражњег члана помноженог са изложитељем.*

Ако је $a : b = q$, то је $a = b\,q$

2). *Размера $a : b$ немења се, кад предњи и стражњи члан размере једним истим бројем помножимо или поделимо.*

Кад је $a : b = q$

то је и $am : bm = q$

или $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = q$; по томе

дакле можемо размеру у којој су чланови свршени разломљени бројеви преобратити у размеру, које су чланови цели бројеви; а често можемо размеру скратити, кад оба члана једним истим бројем поделимо.

3) *Геометрйјска размера зове се свршена, кад је количник размере свршен број.* Овака размера може се свагда целим бројевима изразити. Јер ако оба свршена броја a и b имају количник $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, где су p и q свршени бројеви, то сљедује да је

$$a : b = p : q.$$

4) *Размера два немерљива броја може се представити тако тачно, како се кад захтева.*

Кад су a и b немерљиви бројеви, онда вреди то исто и за бројеве $m\,a$ и b, кад узмемо да је m произвољан цео број, сада се може замислити, да лежи ma између два узастопце сљедујућа садржатеља од b. Ако је $nb < ma < (n+1)\,b$, то је $\frac{n}{m} < \frac{a}{b} < \frac{n+1}{m}$, по томе лежи $\frac{a}{b}$ између два броја којих је разлика $\frac{1}{m}$. Ако сада поставимо $a/b = \frac{n}{m}$ или $= \frac{n+1}{m}$, то би учинили у оба случаја погрешку, која би мања била од $\frac{1}{m}$: и у првом случају положна, а у другом одречна. А пошто се може узети m произвољно велико, то је и погрешка $\frac{1}{m}$ произвољно мала, а из тога сљедује, да се може извести размера $\frac{a}{b}$ приближно произвољно тачно.

Геометријска сразмера.

153. Кад две једнаке размере вежемо знаком једнакости постаје геометријска сразмера, или једначина размера.

Ако су $a : b$ и $c : d$ две једнаке геометријске размере, онда постаје сразмера $a : b = c : d$

У овој су сразмери a и d спољашњи, b и c унутрашњи чланови, и d зове се четврти геометријски сразмерак бројева a, b и c,

154. У свакој геометријској сразмери производ спољашњи чланова раван је производу унутрашњи чланова.

Из $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

сљедује, кад се са обе стране помножи са bd, даје $ad = bc$.

Ако су дакле у сразмери три члана позната, то можемо по горњем правилу определити четврти члан. Горе наведено правило показује уједно, да је сразмера правилно постављена.

Два једнака производа дају нам сразмеру; треба поставити чинитеље једног производа за унутрашње чланове сразмере а чинитеље другог производа за спољашње.

Примедба. Овим геометријским размерама и сразмерама са свим су потчињене аритметичне размере и сразмере

Аритметична размера бројева a и b зове се њихова разлика, дакле $a - b$. Размера се немења, кад предњи и стражњи члан за исти број увећамо или смањимо. (види одузимање)

Две једнаке аритметичне размере дају аритметичну сразмеру кад се вежу знаком једнакости, као $a - b = c - d$ одкуда сљедује, да је $a + d = b + c$ т. ј. сбир спољни чланови раван је сбиру унутрашњи чланова. Ако су унутарњи чланови b и c једнаки онда сразмера $a - b = b - d$ зове се савезна, и $b = \frac{a+d}{2}$ средњи аритметични сразмерак или аритметична средина за бројеве a и d.

Како је овде показан појам аритметичне размере и сразмере, то ћемо од сада говорити само о геометријским размерама и сразмерама, и свакад ћемо разумевати ове, кад се о сразмерама буде говорило.

155. Кад су унутрашњи чланови сразмере једнаки, постаје *саезна* сразмера; н. пр. $a : b = b : c$, у овој сразмери зове се c *трећи* геометријски сразмерак за a и b; члан b зове се, *средњи* геометријски сразмерак за количине a и c, а из сразмере налазимо $b = \sqrt{ac}.$ Осим тога $\frac{a+c}{2}$ зове сеа аритмечна средина за бројеве a и c, а кад се случајно a и c разликују, онда је *аритметична средина већа од средњег геометријског сразмерка.*

т. j $\frac{a+c}{2} > \sqrt{ac}.$ Јер је $(a-c)^2 > 0$

или је $a^2 - 2ac + c^2 > 0$,

а због $4ac = 4ac$

$$a^2 + 2ac + c^2 > 4ac$$

или $(a+c)^2 > 4ac$

$$a + c > 2\sqrt{ac}$$

дакле $\frac{a+c}{2} > \sqrt{ac}$.

156. *У свакој правилној сразмери можемо чланове из премештати па ћемо добити седам нови правилни сразмера.*

Тако н. пр. у сразмери $a : b = c : d$

Кад преместимо унутрашње чланове, добијамо:

$$a : c = b : d$$

кад преместимо спољашње чланове $d : b = c : a$

Кад испремештамо спољашње и унутрашње $d : c = b : a$

Ако сада поставимо спољашње за унутрашње и обратно, то је

$$b : a = d : c$$

и кад поновимо горња премештања

$$b : d = a : c$$

$$c : a = d : b$$

$$c : d = a : b$$

У првој сразмери казали смо, да је $ad = bc$, паће ово да вреди и за све остале наведене сразмере, које се види на први поглед. И по томе су све срасмере правилне.

157. *У свакој сразмери можемо чланове једне размере или оне од обе размере једним истим бројем помножити или поделити; овако постајућа нова сразмера биће опет правилна.*

Кад је $a : b = c : d$

то ће постојати и ове сразмере:

$$am : bm = cm : dm$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$$

$$am : bm = c : d$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$$

$$a : b = cm : dm$$

$$a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$$

$$am : bm = \frac{c}{m} : \frac{d}{m} \text{ и т. д.}$$

Да су све ове сразмере правилне види се отуда, што поједине размере нису промењене (§.152.) А пошто се могу (§. 156.) премештати чланови сразмере унутрашњи за спољашње и обратно, то можемо у правилној сразмери помножити или поделити једним истим бројем 1-ви и 3-ћи, 2-ги и 4-ти члан, па ћемо добити правилну сразмеру. Ако опет узмемо сразмеру

$a : b = c : d$, то ћемо добити:

$am : b = cm : d$

$a : bm = c : dm$

$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

$a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$

$am : \frac{b}{n} = cm : \frac{d}{n}$

$\frac{a}{n} : bm = \frac{c}{n} : dm$

Према овим примедбама можемо све чланове неке сразмере или само чланове једне размере скратити, а осим тога можемо чланове и од разломка ослободити,

Примери. Да се сљедујуће сразмере ослободе од разломка и да се скрате.

1.) $a : \frac{m}{n} = p : \frac{b}{q}$

кад други и четврти члан помножимо са nq, добијамо

$a : mq = p : bn,$

Јер можемо поставити $a : p = \frac{m}{n} : \frac{b}{q}$ у место $\frac{m}{n} : \frac{b}{q}$

можемо ставити $mq : bn$

дакле $a : p = mq : bn$ или,

$a : mq = p : bn,$

2.) $\frac{a}{m} : b = c : \frac{d}{n}$

Кад помножимо чланове прве размере са m, а друге са n добијамо $a : bm = cn : d$.

3.) $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$

из тога добијамо

$an : bm = cq : dp.$

4) $am^2 : bm^2 = ck : dk$

$a : b = c : d.$

158, Први члан неке сразмере има се спрам збира или разлике првог и другог члана, као што се има трећи члан спрам збира или разлике трећег и четвртог члана.

Ако постоји $a : b = c : d$, онда је и

$a : (a \pm b) = c : (c \pm d)$

због $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, дакле $a = bq$, $c = dq$, налазимо количник прве размере

$\frac{a}{a \pm b} = \frac{bq}{bq \pm b} = \frac{q}{q \pm 1}$; исто је тако

$\frac{c}{c \pm d} = \frac{dq}{dq \pm d} = \frac{q}{q \pm 1}$, дакле изведена

сразмера је правилна, јер су количници од обе размере изнађене сразмере једни исти т. ј. $\frac{q}{q \pm 1}$.

Исто тако можемо показати, да се има збир прва два члана спрам њихове разлике као што се има збир трећег и четвртог члана спрам њихове разлике.

Кад постоји $a : b = c : d$ то ће постојати и

$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d),$

јер је $\frac{a+b}{a-b} = \frac{bq+b}{bq-b} = \frac{q+1}{q-1}$

а исто тако $\frac{c+d}{c-d} = \frac{dq+d}{dq-d} = \frac{q+1}{q-1}$.

т. ј. количници су једнаки, дакле сразмера правилна.

159. *Кад су више једнаки размера, имаће се збир свију предњи чланова према збиру свију стражњи чланова, као сваки предњи члан спрам свог стражњег члана.*

Ако је $a : b = c : d = e : f = g : h$, онда постоји

$(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = a : b = c : d$ и т. д.

Кад је $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = q$ то

сљедује, $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{q(b+d+f+h)}{b+d+f+h} = q.$

Кад има више једнаки разломака па кад саберемо све бројитеље и именитеље добићемо опет тај исти разломак.

Тако је н. пр. $1/2 = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{15}{30} =$

$$= \frac{1+2+5+7}{2+4+10+14} = \frac{15}{30}.$$

Кад има више правилни сразмера као

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : b = e : f \\ a : b = g : h \\ a : b = k : l \end{array}\right\}$$ то ји можемо написати $a : c : e : g : k = b : d : f : h : l.$

160. *Производи чланова истог реда у две или више сразмера дају опет правилну сразмеру.*

$$a : b = c : d \ldots . \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$$

$$e : f = g : h \ldots . \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = q_1$$

$$i : k = l : m \ldots . \frac{i}{k} = \frac{l}{m} = q_2$$

$$\frac{aei}{bfk} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{i}{k} = qq_1q_2$$

и $$\frac{cgl}{dhm} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{l}{m} = qq_1q_2$$

Кад су у две сразмере први и трећи чланови једнаки, то ће се имати други чланови исто онако као и четврти.

Из $a : b = c : d$

и $a : m = c : n$

$b : m = d : n$

јер у место задати сразмера можемо написати,

$b : a = d : c$

и по томе множењем

$b : m = d : n$

исто би тако могли казати, кад би били једнаки односно други и четврти чланови.

Ако су у двема размерама једнаки први и четврти чланови, то је размера други чланова равна обрнутој размери трећих чланова.

Кад је $a : b = c : d$

$a : m = n : d$

сљедује $b : m = n : c$

јер је $a : b = c : d$

и $m : a = d : n$

$am : ab = cd : dn$

$$m : b = c : n$$

или $$b : m = n : c$$

Исто тако сљедује из сразмера

$$a : b = c : d$$

$$m : b = c : n$$

$$a : m = n : d$$

Из сразмера горњег §. сљедује још и $a^m : b^m = c^m : d^m$: где се подразумева m као цео број. Ово правило вреди и онда, кад би узели за изложатеља ма какав број:

Јер кад узмемо опет сразмеру

$a : b = c : d$, то сљедује

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}} : d^{\frac{m}{n}}$$

или $$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} : \sqrt[n]{d^m}$$

а количници ових размера су, кад је

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{q^m}$$

и $$\frac{\sqrt[n]{c^m}}{\sqrt[n]{d^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{c}{d}\right)^m} = \sqrt[n]{q^m}$$

161. *Кад се у двема сразмерама поделе чланови истог реда то ће постати од количника правилна сразмера.*

$$a : b = c : d$$

$$m : n = p : q$$

Сљедује $$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$$

али је $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ и } \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

зато је $$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{c}{d} : \frac{p}{q}$$

или $$\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{c}{d} \cdot \frac{q}{p}$$

и $$\frac{an}{bm} = \frac{cq}{dp} \; \ldots\ldots (\alpha$$

Али сада су количници сразмере

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm} \text{ и } \frac{c}{p} : \frac{d}{q} = \frac{cq}{dp},$$

који су с погледом на јед. (α једнаки

162. *Кад су бројеви a, b, c и d такви, да је* $(a - b) : (c - d) = a : d$ *то велимо да су они у хармонијској сразмери*, a и d зову се спољашни, b и c унутрашњи чланови. Кад су b и c једнаки бројеви, то постаје *савезна хармонијска сразмера*, као

$$(a - b) : (b - c) = a : c \; \ldots. (\alpha$$

163. *Кад се хоће да определи из бројева a, b c четврти хармонијски сразмерак*, то овај добијамо, кад га означимо са x из сразмере: $(a - b) : (c - x) = a : x$

Дакле $(a - b)\, x = a\,(c - x)$

из тога $$x = \frac{ac}{2a - b}$$

Тако је за бројеве 5, 9, 13 4-ти сугласни сразмерак $= 65$, јер заиста постоји.

$$(5 - 9) : (13 - 65) = 5 : 65$$

164 Кад тражимо за бројеве a и b трећи хармонијски сразмерак то је из јед. (a x узето за c

$$(a - b) : (b - x) = a : x \text{ и}$$

отуда $x = \dfrac{ab}{2a - b}$

Тако је за 12 и 16 трећи сугласни сразмерак,

$$12,\ 16,\ 16,\ x$$

$$(12 - 16) : (16 - x) = 12 : x$$

а из тога $x = 24$,

165. *Средњи хармонијски сразмерак* налазимо, кад ставимо у јед.

(a (§. 162) за $b = x$,

$$a,\ x,\ x,\ c,$$

$$(a - x) : (x - c) = a : c$$

из тога $(a - x)\,c = (x - c)\,a$

или $x = \dfrac{2ac}{a + c}$

Ако сада одначимо аритметичку средину за a и c са m, а средњи сугласни срасмерак $\dfrac{2ac}{a + c}$ са h, то сљедује $a : m = h : c$.

Како би изказали ово речима?

Пошто је $\dfrac{2ac}{a+c} = \dfrac{\sqrt{ac} \cdot \sqrt{ac}}{\frac{a + c}{2}}$, то сљедује

Сразмера $\dfrac{a+c}{2} : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : \dfrac{2ac}{a+c}$,

То ће речи, *средњи сугласни сразмерак два броја a и c јест трећи геометријски сразмерак к аритметичној средини и средњем геометријском сразмерку та иста два броја.*

166. Из сразмере $(a - b) : (c - d) = a : d$ можемо извести:

1). Ако су a, b, c и d сугласно сразмерени, онда вреди то исто и за бројеве ma, mb, mc, и md, а исто тако и за бројеве

$$\frac{a}{m},\quad \frac{b}{m},\quad \frac{c}{m} \text{ и } \frac{d}{m}$$

што се може врло лако доказати.

2) Бројеви d, c, b, a дају сугласну сразмеру, кад то дају и бројеви a, b, c, d т. j. сада постоји.

$$(d - c) : (b - a) = d : a$$

зато је $\dfrac{d - c}{b - a} = \dfrac{c - d}{a - b} = \dfrac{d}{a}$

а из $(a - b) : (c - d) = a : d$

сљедује $\dfrac{a - b}{c - d} = \dfrac{a}{d}$ или $\dfrac{c - d}{a - b} = \dfrac{d}{a}$

Овим је доказана истина горње сразмере.

3). Изврнуте вредности од a. b, c, d т. j.

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{b},\quad \frac{1}{c},\quad \frac{1}{d},$$

дају нам хармонијску сразмеру, кад претходно испремештамо спољне и унутрашње чланове, дакле.

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

јер из тога сљедују размере:

$$\frac{a - b}{ab} : \frac{c - d}{cd} \quad \text{и} \quad c : b,$$

а њихови су количници

$$\frac{cd\,(a - b)}{ab\,(c - d)} \quad \text{и} \quad \frac{c}{b}$$

из $(a - b : (c - d) = a : d$,

изводи се $\frac{d\,(a - b)}{a\,(c - d)} = 1$,

Па зато је $\frac{cd\,(a - b)}{ab\,(c - d)} = \frac{c}{b}$,

одкуда се види истинитост наведене срамере.

167 Ако постоји међу бројевима $a\ b\ c$, сразмера

$$(a - b) : (b - c) = c : a$$

Онда се ово зове *contra*-хармонијска сразмера b је овде средњи *contra* сугласни сразмерак који сљедује из:

$$a\,(a - b) = c\,(b - c),$$

$$a^2 + ab = bc - c^2$$

$$a^2 + c^2 = b\,(a + c)$$

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$$

Примене сразмера.

Просто тројно правило.

168, Многи се математички задатци разрешавају помоћу сразмера, зато ћемо испитати, како и под којим околностима можемо то чинити. Кад се н. пр. тражи један непознати број из три позната броја, онда већ имамо први услов да би могли поставити сразмеру; а ова нам помаже да из три позната члана определимо четврти непознати члан. Сада би требало, да се могу поставити из три задате количине a b и c и оне непознате x, две једнаке размере, а уз то се мора навести, да је једна од задатих количина равнородна са непознатом. Рецимо да су a и b од истог рода, и да је c равнородна са x, и да постоји између b и x онај исти однос, који је између a и c онда су ова два случаја могућа:

1. Да зависи количина c од a тако, да у осталом под једнаким другим околностима, ако a постаје веће да и c све веће бива, т. ј. кад се стави у место a, $2a$, $3a$, $4a$ . . . . ma, да сљедује односно и за c, $2c$, $3c$, $4c$ . . . mc. Па ако x тако исто зависи од b, као c од a, то мора x, прећи у mx, кад b пређе у mb, и онда постаје у том случају сразмера:

$$a : b = c : x$$

Зато кажемо, *да су ова два рода бројева управо сразмерна*

2 Ако на против зависи количина c од a тако, да кад a постаје 2, 3, 4, ... m пута веће, да сљедује за c 2-ги 3ћи, 4-ти . . . . m-ни део. т. ј. кад се претвори a у $2a$. $3a$, $4a$ . . . ma.

да сљедује за c, $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{3}$, $\frac{c}{4}$ . . . . $\frac{c}{m}$

Исто тако постаје $x/_m$ или mx, кад се постави за b, mb или $b/_m$; у овом случају кад поставимо сразмеру, мора једна размера доћи a : b или c : x у обрнутом реду и тако имамо сразмеру

$$a : b = x : c \qquad \text{или}$$

$a:b = \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$ зато велимо, *да су ове количине обрнуто сразмерне*

1 Пример

22 комада стају 35 дин. 75 дин. пара; колико ћемо динара платити за 45 комада;

У овом су задатку три познате количине, једна је 35 дин. 75 д. п. равнородна са непознатом. 45 комада односи се на непознату x, као 22 комада на 35·75 дин. овај услов казује, да вреди сваки поједини комад раван број динара за то ће вредити и 2 . 22, 3 . 22; 4 . 22, . . . комада 2. 35·75, 3. 35·75 4. 35·75 динара овај задатак разрешавамо кад поставимо сразмеру и бројимо га у рачуне правила тројног.

Сразмера је ова :

$$22 : 45 = 35{\cdot}75 : x$$

дакле $x = 73{\cdot}12$ дин.

2. Пример

Кад сврше 24 радника неки рад за 40 дана колико ће дана требати за тај исти рад 30 радника.

Овде се узима да сваки од они 24 радника, за дан једнаки рад свршава, замислимо сада, да треба за 2, 3, 4. више радника, само $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . времена; зато је извесно $x < 40$ (јер 30 радника мање ће дана требати од 24 рад.) и тако постаје ова сразмера

$$24 : 30 = x : 40$$

а одавде $x = 32$ дана.

Сложено тројно правило.

169. Овде долазе они задатци који имају више од три количине (5, 7. 9, . . .), а међу овима једна, која је истог рода са непознатом; од осталих бројева свака два истог су рода. Сада ћемо предпоставити, кад равнородан број од непознате сравнимо са ма које две количине истог рода, да ће постати задатак простог тројног правила.

Ако су a, b, c, d, . . . количине једног рода, а одговарајуће истог рода нека су a' b' c' d' . . . . . и најпосле s равнородна са x.

Узмимо да је у задатку s, a, b, c' d

$$x \quad a' \quad b' \quad c' \quad d'$$

за сада $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$, то ће требати да изнађемо још само за a, a' и s, сразмерни број; рецимо сада, да је овај са s равнородан број y, то сљедује сразмера

$$a : a' = s : y \qquad \text{или}$$

$$a' : a = s : y$$

како су кад управо или обрнуто сразмерени бројеви. Рецимо да постоји овде права сразмера, то би из $a : a' = s : y$, сљедовало y као изнађен и познат број т. ј. који би представљао вредност од x штоје постала под условом

$$b' = b,\ c' = c \text{ и } d' = d.$$

Ако узмемо да је само $c' = c$, $d' = d$, то би из оне три количине b, b' и y опет сразмеру добили, и нека је овде сразмерни број z.

и тако је $b : b' = y : z$, а овде је z она вредност од x, која је узета за случај $c' = c$, $d' = d$.

Ако тражимо сразмерни број за c, c' z (с предпоставком $d' = d$), то је $c' : c = z : u$ где је узето u као вредност за x.

Најпосле кад затражимо за d, d' и четврту количину. то је $d' : d = u : x$; посљедња сразмерна количина сада је она захтевана количина x.

Тако смо нашли :

$$a : a' = s : y$$

$$b : b' = y : z$$

$$c' : c = z : u$$

$$d' : d = u : x$$

По § 160. $abc'd' : a'b'cd = syzu : yzux$

или $abc'd' : a'b'cd = s : x$

$$a \quad x = \frac{s \ . \ a'b'cd}{abc'd'}$$

Ово можемо показати примером :

36 радника трбају 14 дана да начине 120 комада, ако дневно раде 10 сати; колико ће дана требати 35 радника да начине 90 комада радећи дневно 12 сати.

услов 36 рад. (a), 14 дана (s), 10 сати (b), 120 ком. (c).

питање 35 „ (a'), x „ —, 12 „ (b') 90 „ (c').

Кад узмемо најпре $b' = b$ и $c' = c$, то ће постати задатак

36 рад. 14 дан. 10 сат. 120 ком.

35 „ y „ 10 „ 120 „

т. ј кад требају 36 рад. 14 дана да начине 120 ком. а дневно раде 10 сати то ће требати 35 рад. под истим другим околностима (опет 10 сати дневно и 120 комада) y дана ;

ову количину y добијамо из сразмере

$35 : 36 = 14 : y$

Сада постоји овакав задатак :

35 рад., y дана, 10 сати 120 ком.

35 „ z „ 12 „ 120 „

т. ј, кад 35 радника за y дана радећи дневно 10 сати начине 120 комада ; колико ће дана требати исти радници кад раде дневно 12 сати па да опет начине 120 комада ?

z сљедује из сразмере :

$12 : 10 = y : z$

Са познатом вредности за z постоји задатак :

35 рад. z дана 12 сати 120 ком.

35 „ x „ 12 „ 90 „

т. ј. кад 35 рад. за z дана радећи дневно 12 сати начине 120 комада. Колико дана морају радити 35 рад. кад раде дневно 12 сати, па да израде 90 комада ?

x можемо определити из сразмере :

$120 : 90 = z : x \ldots\ldots$

нашло се : $35 : 36 = 14 : y$

$12 : 10 = y : z$

$120 : 90 = z : x$

Производ : $35 \ . \ 12 \ . \ 120 : 36 \ . \ 10 \ . \ 90 = 14 : x$

$$a \quad x = \frac{14 \ . \ 36 \ . \ 10 \ . \ 90}{35 \ . \ 12 \ . \ 120} = 9 \text{ дана.}$$

Задатци.

1) Неки пређе сваког сата $1 \frac{1}{2}$ миљу, а треба за изветан пут 8 сати; за које ће време он прећи тај пут, кад сваког сата пређе $1\frac{3}{4}$ миље ?

2) Колико износе 1000 прајски стопа у француским стопама, кад се има парвјска стопа спрам прајске = 14400 : 13913 ?

3) На неком плану нашли смо даљину имеђу 2 места = 5· 78″, што чини 1250 хвати, колико палаца иду по том плану на 100 хвати.

4) Неки план начињен је по размери 1:100000, па смо нашли на овом даљину између два места A и B 5·8″ ; колика је даљина AB у природној мери;

5) Акције неког жељезничког друштва стоје $95 \frac{1}{2}$; колико ће се готових новаца платити за вредност 8650 динара ?

6) Колико ће требати готових новаца за 3.000 f. у акцијама кад стоје акције 145 ?.

7) 5000 војника снабдевени су са израном на 12 недеља. После три недеље оду 1500 војника на другу страну; колико ће се дуго остатак војника са остатком хране моћи издржавати?

8) Баталион војника мора дневно 5 миља да пређе па да за 24 дана стигне у свој гарнизон. Колико би миља дневно морао прелазити, да по добивеној заповести стигне на опредељено место 5 дана раније, пошто је већ 3 дана на маршу био.

9) 8 радника повежу за 2 дана, радећи дневно 10 сати, 40 фашина: колико ће повезати 6 раденика за 3 дана кад раде дневно 12 сати?

10) За неко здање треба 25000 комада камена 12" дуг. 6" шир. 3" деб.; колико ће камена за тај рад требати, кад је камен 10" дуг. 5" шир. и $2^1/_2$" деб.?

Задатци сложеног тројног правила разрешавају се још и по тако званом *Рес-овом* правилу, које радимо овако:

Кад већ поставимо бројеве у два реда тако, да дођу равнородне количине једна под другу н. пр. у задатку

познати ред	36 рад.	14 дана,	10 сати,	120 ком.
непознати „	35 „	x „	12 „	90 „

Треба повући вертикалну црту и написати непознати број x горе с лева од црте (x може и с десна доћи), а десно до x њему равнородни број, даље треба, ако су бројеви управо сразмерни да се напише из познатог реда под x (лево); а кад су обрнуто сразмерени из непознатог реда број под x, одговарајући равнородни бројеви пишу се с друге стране од црте т. ј. десно.

Бројеви десно и лево од црте, дају два једнака производа из којих се налази x, кад поделимо обе стане једначине са чинитељем од x.

Прости интересни рачуни

170 Кад за 100 дин. капитала добијемо за 1 годину p дин. интереса (p процента), то се може изнаћи колико ће се добити за неко време (t) од капитала (k); узмимо овај задатак као сложено тројно правило па ће бити

100 дин. дају за 1 год. p дин.
k „ „ t год. x дин.

Ако је и $t = 1$, то сљедује: $100 : p = k : y$ рецимо да k дин. дају за 1 год y дин. онда ће k дин. дати за t год. x дин. и тако се x налази из срамере $1 : t = y : x$ ако сада ове две сразмере помножимо

$$100 : p = k : y$$
$$\frac{1 : t = y : x}{100 : pt = k : x}$$

$$\text{дакле } x = \frac{k \times p \times t}{100}$$

Узмимо сада за интерес уместо x пишме (J), то сљедује ова главна формула за интересне рачуне.

$$J = \frac{k \times p \times t}{100} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

т. ј. *Интерес је раван капиталу помноженом са процентом и временом, а производ подељен са 100.*

Из једначине (1 сљедује даље.

$$k \cdot p \cdot t = 100 \cdot J.$$

$$\text{дакле } k = \frac{100}{p \cdot t} \cdot J \quad \ldots (2$$

$$p = \frac{100.J}{k \times t} \quad \ldots\ldots\ldots (3$$

$$t = \frac{100.J}{k \times p} \quad \ldots\ldots\ldots (4$$

Верижно правило.

172. У сложено тројно правило може се уврстити још и овај начин рачунања под именом верижног правила.

Замислимо овакав задатак: *да се н. пр. а јединица неког опредељеног рода А одреде са (x) јединица задатог рода s. Може се узети као познато, да су:*

a' јединица рода А $= b$ јединица рода B,

b' „ „ B $= c$ „ „ C,

c' „ „ C $= d$ „ „ D,

d' „ „ D $= s$ „ „ S,

Ако најпре преобратимо (a) јединица рода (A), у јединице рода (B), то ћемо добити по (1. условy овy сразмерy:

$$a' : a = b : y$$

Овде показује (y) такав број, који определава, колико јединица сорте (B), можемо добити за (a) јединица сорте (А).

Да би сада могли преобратити (y) јединица рода (B) у јединице рода [С], морамо поставити по [2. условy овy сразмерy:

$$b' : c = y : z,$$

где показује [z], колико јединица сорте [С] има у [y], јединица сорте B.

Кад преобратимо [z] јединица сорте С у јединице [u] сорте D, то је по јед. [3. $c' : d = z : u$ а исто тако сљедује по

[4. Условy. кад преобратимо [u] јединица сорте D у јединице сорте s, $d' : d = u : x$, где показује [x] колико јединица сорте s има у [a] јединица сорте А.

Кад саставимо множењем ове сразмере то је!

$$\begin{aligned} a' &: a = b : y \\ b' &: c = y : z \\ c' &: d = z : u \\ d' &: s = u : x \end{aligned}$$

$$a'b'c'd' : acds = byzu : yzux$$

или $a'b'c'd' : acds = b : x$ а одавде следује

$$x = \frac{abcd.s}{a'b'c'd'}.$$

видимо да има броитељ број [a] који хоћемо да претворимо а до овога долази у именитељу као први чинитељ она количина која је по задатку истога рода са [a] т. ј. [a'], после долази у броитељу она количина која има исту вредност са [a'] т. ј. [b] даље иде у именитељу количина која је истог рода са [b] т. ј. [b'] после долази у броитељу број од једнаке вредности т. ј. [c] а затим у именитељу број истог имена [c'] и т. д. најпосле у броитељу број једноимени са x.

Пример

Да се нађе у каквој размерној вредности стоји злато и сребро у аустрији; т. ј. да се одреди, колико цол фун. чиста сребра иду на 1 цол фун. чиста злата.

Да би ово могли израчунати узмимо да је познато:

1 цол фун. = 500 грама, 1 келнска фун. = 233·87 грама.

На $23^2/_3$ келнске марке чиста злата узимају се за ков ц. кр. аустр. дуката 24 келенске марке смешаног злата.

Из једне келнске марке смешана злата могу се сковати 67 дуката, а 1 дук. вреди 4.725 *fl* а 45 *f* ав. вр. у сребрном новцу иду на 1 фун. чиста сребра.

По томе постоје ови односи;

1 (a) фун. злата = ? (x) фун. сребра

1 (a') фун. чиста злата = 500 (b) грама чиста злата

233·87 (b'] гр. чиста злата = 1 (c) келнска марка чиста злата

$23^2/_3$ (c') келн. мар. чис. злата = 24 (d) „ „ смешана злата

1 (d') „ „ смешана „ = 67 (e) дук.

1 (e') дук = 4·725 (f) *fl.* ав. вр.

45 (f) *fl.* ав. вр. = 1 (s) фун. чиста сребра

по горе наведеном правилу сљедује:

$$x = \frac{1.500.\ 1.\ 24.\ 67.\ 4{\cdot}725.1}{1.\ 233{\cdot}87.\ 23^2/_3.1,1.45} = 15{\cdot}25 \ldots \text{ т. ј.}$$

према задатим условима иду 15·25 цол фун. чиста сребра на 1 цол фун. чиста злата.

Деобно правило.

173. Деобно правило казује како треба поделити број А у делове који ће се имати исто онако, као што се имају задати бројеви α, β, γ, δ, ... Ако означимо сада поједине делове броја А са x, y, z, u . . . . онда ће постојати према задатку $x : \alpha = y : \beta = z : \gamma = u : \delta = \ldots$ што се може написати и овако (§ 159).

$$(x + y + z + u + \ldots\ldots) : (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] = x : \alpha$$
$$= y : \beta$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$

Али знамо, да је $x + y + z + u + \ldots\ldots = A$, па ако узмемо и за збир задатих размерних бројева т. ј. за $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots = s$, онда ће постојати сразмере:

$$A : s = x : \alpha$$
$$A : s = y : \beta$$
$$A : s = z : \gamma$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

дакле . . . . ,

$$x = \frac{A \cdot \alpha}{s}, \quad y = \frac{A \cdot \beta}{s}, \quad z = \frac{A \cdot \gamma}{s} \quad \ldots\ldots$$

„т. ј. делове налазимо кад помножимо раздељујући број са сваким размерним бројем, а сваки производ поделимо са збиром размерни бројева.

Ако н. пр. има да се подели 4.000 у 5 таква дела, који су у размери као $2 : 1\frac{3}{4} : \frac{5}{6} : 3\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; то ћемо најпре претворити размерне бројеве у целе бројеве, и онда налазимо $24 : 21 : 10 : 42 : 3$.

Из тога је $24 + 21 + 10 + 42 + 3 = 100 = s$, и кад означимо делове са x, y, z, u, v,

$$x = \frac{4000.24}{100} = 960$$

$$y = \frac{4000.21}{100} = 840$$

$$z = \frac{4000.10}{100} = 400$$

$$u = \frac{4000.42}{100} = 1680$$

$$v = \frac{4000.3}{100} = 120$$

сбир = 4.000

Сложено деобно правило.

174. Кад делови броја А које тражимо, т. ј. x. y, z, u . . . независе само од размерни бројева α, β, γ, δ, . . . него и од размерни бројева α', β', γ', δ', ... тако, да се има.

$$x : y : z : \ldots\ldots = \alpha : \beta : \gamma : \ldots\ldots$$

као и $x : y : z : ,, \ldots\ldots = \alpha' : \beta' : \gamma' : \ldots\ldots$

то следује $x : y : z \ldots = \alpha\,\alpha' : \beta\beta' : \gamma\,\gamma' \ldots\ldots$

Јер ако зависи x од α и α'

u „ y „ β „ β'

па ако исто тако зависи x' од α и β'
и ако је $\alpha = \beta$, онда је $x : y = \alpha' : \beta'$ а ако је $\alpha' = \beta'$, то ј

$x : y = \alpha : \beta$; зато је

$$x : x' = \alpha' : \beta'$$

и $$x' : y = \alpha : \beta$$

дакле $xx' : x'y = \alpha\alpha' : \beta\beta'$

или $x : y = \alpha\alpha' : \beta\beta'$

исто тако налазимо:

$$x : z = \alpha\alpha' : \gamma\gamma'$$

па зато и у опште $x : y : z \ldots = \alpha\alpha' : \beta\beta' : \gamma\gamma' \ldots$

Овим је сведено сложено деобно правило у просто; јер пошто помножимо на исти део односеће се размерне бројеве, сматраћемо ове производе као размерне бројеве простог деобног правила, па ћемо разрешити задатак као што је показано у §. 173.

Ако зависи A у опште од $a, b, c, d,$

и B од a', b', c', d' тако, да се има, кад је

$a = a'$, $b = b'$ и $c = c'$, $A:B = d : d'$ или кад је

$a = a'$, $b = b'$, $d = d'$, $A : B = c : c'$, и т. д

онда је и $A : B = abcd : a'b'c'd'$.

Јер ако зависи A од $a, b, c, d,$ то је $A : C = d : d'$

" " " " " " B " $a', b', c', d',$ $\quad C : D = c : c'$

" " " " " " C " a, b, c, d' $\quad D : E = b : b'$

" " " " " " E " $a, b', c', d',$ $\quad$ и $E : B = a : a'$

Зато $A : B = abcd : a'b'c'd$

Пример.

A, 3000 гр. на 5 година

B, 4000 гр. " 3 год.

C, 5400 гр " 4 год.

D, 6200 гр. " 2 "

Кад се заједнички рад сврши, показао се добит од 8316 гр; колико ће добити од тога сваки појединн, кад треба да се имају делови не само према улогу него и према времену колико је дуго који капитал у радњи лежао.

Кад означимо ове поједине делове са x, y, z и u. То се имају

$$x : y : z : u = 3000 : 4000 : 5400 : 6200$$

$$\text{и } x : y : z : u = 5 : 3 : 4 : 2$$

дакле $x : y : u : z : u = 15000 : 12000 : 21600 : 12400$

$$= 75 : 60 : 100 : 62$$

Дакле треба поделити број 8316 у ове размерне делове 75 : 60 :100 : 62

тако налазимо за A, 2100 гр.

" B, 1680 "

" C, 2800 "

" D, 1736 "

Збир: 8316 гр.

Примена науке о сразмерама.

(Праве и обрнуте размере. Просте сложене, квадратне и кубне размере. Правило верижно; правило деобно, правило смесе)

1) Ако 14 $^3/_4$ фунте неке робе коштају толико исто, колико 34 $^3/_8$ фунте неке друге робе, а килограм од оне прве робе ако кошта 2·45 динара (n динара), колико ће коштати килограм од оне друге робе?

2) Кад 1000 париски стопа износе 1035 прајски стопа. Колико ће износити париски стопа 7113 париски стопа?

3) Колико интереса доносе k динара по p процента за једну годину? а колико за n година?

4) Који капитал доноси после n година по p процента z динара интереса ?

5) Један трговац купи из фабрике неку робу за 12800 дин. и добије на сваки 100 динара плаћања, по $4\,{}^3\!/_4$ динара одпуштено од уговорене цене ($4\,{}^3\!/_4$ процента *рабат* од стотине). Колико износи рабат а колико плаћање у готовом новцу ?

6) Други трговац купи робу у вредности 12800 динара. и добије на сваки 100 динара $4\,{}^3\!/_4$ динара у роби додатка (т ј. он плати за сваки $104\,{}^3\!/_4$ динара робе само 100 динара готовог новца, дакле = $4\,{}^3\!/_4$ процента *рабат* на стотину), колико износи рабат, а колико плаћање у готовом новцу ?

7) Нека мјеница у вредности a динара, којој истиче рок плаћања после n месеци, има да се плати са годишњим *дисконтом* (одбитком) од p процента. Колико износи дисконт колико сума плаћања.

8). Неки има да плати капитал k динара у 4 рока после сваки n година. Колико би морао платити сада одма у готовом новцу, кад се на стотину годишње p процента дисконтирају ?

9) Неки трговац морао је своју робу тако продавати, да за $43\,{}^1\!/_2$ оке онолико исто добије, колико је платио за 36 ока. Колико ће процента имати штете ?

10) Кад је Ажијо Фридрихс — дора према сребру $13\,{}^1\!/_3$ процента, колико чине 10 талира злата у сребру? колико у сребру a талира злата ? колико у злату n талира сребра.

11) Кад је вредност неке државне обвезнице $97\,{}^3\!/_4$, колико ће се добити готовог новца за a динара у обвезницама ? Колико ће мо добити у обвезницама за b динара готовог новца ?

12) Кад вреде акције неке жељезнице 168, које доносе годишње 10 процента чисте добити, колико процента носи уложени новац који за оваке акције издамо ?

13) Неки радник заслужи за a дана исто толико колико други радник за b дана. Први заслужи за t дана s динара, колико заслужи онај други за то исто време. ?

14) Неки зидар који је радио дневно 9 сати, сазидао је за 17 дана један зид од 936 кубни стопа. Колико сати мора он дневно радити, да за то исто време сазида зид од 1144 кубни стопа. ?

15) Ако има предњи точак у колима p стопа у обиму, а стражњи 9 стопа. Колико се пута мора стражњи обрнути, кад се предњи n пута обрне?

16) У сваком кругу кад се узме обим 113 пута добија се скоро исто толико, колико се добија кад се узме пречник 355 пута. Колико износи обим земљинога пута, који замишљамо у виду круга, кад је нађено по најновијем испитивању, да је даљина земље од сунца 19846794 географских миља ?

17) Кад би неки торањ бацио сенку од 146 стопа дужине на хоризонталну површину земље; и кад би близу тога торња поставили један штап вертикално ког је дужина $2\,{}^2\!/_3$ париски стопа па овај баци сенку $10\,{}^1\!/_3$ париских палаца дужине. Како се може наћи из тога висина торња ?

18) Из неког шанца избачена земља може се за 12 дана са 20 радника однети на 2561 стопу даљине колико ће требати, да за то исто време ту земљу однесу на 3349 стопа даљине?

19) Неки диамант који има тежину $1\,{}^3\!/_4$ карата кошта 240 динара. Колико ће коштати неки други диамант од исте каквоће који је $3\,{}^1\!/_2$ карата тежак ?

Примедба. Цене диаманта стоје у квадратној размери према њиховим тежинама.

20) Неко тело при падању прође за 6 секунда пут од $562\,{}^1\!/_2$ стопе, колика је дубљина неког бунара, кад се пусти у њега камен који падне на дно после $3\,{}^1\!/_4$ секунда ?

Примедба. Код падајућих тела имају се даљине што тело с почетка прође у падању као квадрати времена.

21) Наша земља има у пречнику 1719 миља и 9261238 квадратних миља површине. Сунце има 190000 миља у пречнику. Колика је површина сунца ?

Примедба. Површине кругала имају се као квадрати њихови пречника.

22) У једној ливади привезан је коњ за уже од $8\,{}^1\!/_2$ стопа дужине, па је појео за 2 дана сву траву што је око себе дохватио. Колико ће му дана трајати она трава коју би могао дохватити кад би био привезан за уже од $12\,{}^3\!/_4$ стопа дужине ?

Примедба Кругови стоје у размери као квадрати њихови полупречника.

23) Јачина сунчане светлости на нашој земљи, која је удаљена од сунца 20 $^2/_3$ милиона миља, равна је јачини оне светлости коју нам дају 5000 воштаних свећа; колика је јачина сунчане светлости на планетама! Урану, који је далеко од сунца 396 милиона миља? Нептуну, који је далеко од сунца 620 милиона миља?

Примедба. Кад је даљина двапута, трипута, четири пута већа, светлост је 4 9, 16 и т. д. пута мања.

24) Топовско ђуле које има 24 цол фунте тежине, има у пречнику 5·5 прајских цолова. Колико има тежине топовска кругла која има у пречнику 3·46 прајс. цолова.

Примедба. Телесни садржаји кругала стоје у размери као кубови њихових пречника.

25) Два точка који имају на обиму зубце што једно у друго хватају, први је са 15 зубаца а други са 28. Кад се први за 7 $^1/_2$ секунда 17 пута обрне, колико ће се пута обрнути онај други за 20 секунда?

26) Колико прајских стопа чине 139 париских стопа кад 15 париских стопа износе 16 енглеских стопа, а 28 енглеских стопа, износе 27 аустријских стопа, а 139 аустријских стопа, износе 140 прајских стопа.

27) Неки учини оваку промену, дао је 512 рифи неке робе, па је добио за сваки 7 рифи од те робе 9 фунти кафе, кафу промене за шећер и добије за сваки 9 $^1/_2$ цол фуната кафе 12 $^3/_4$ цол фунте шећера; шећер промене за пиринач и да за сваки 8 $^1/_2$ килограма пиринча 3 $^1/_2$ килограма шећера; пиринач промене за дуван и добије за сваки 17 енглеских фуната пиринча 6 $^1/_4$ енглеских фуната дувана. Колико ће добити дувана за они 512 рифи робе?

28) Прајска миља стоји у размери спрам немачке миље, као 2000 : 1972, немачка миља спрам енглеске морске миље, као 1972 : 493 енглеска морска миља спрам француске *Lieue* као 493 : 1183, а француска *Lieue* спрам нидерландског сата, као 1183 : 1503.

У којој размери стоје сваке две и две од именованих миља?

29) По пречнику сљедећа небесна тела у овој су размери: Сунце спрам земље, као 561 : 5, Земља спрам Месеца, као 11 : 3, месец спрам Венуса, као 5:18, Венус спрам Јупитера, као 1 : 12, Јупитер спрам Сатурна као 11:9. У којој размери стоје свака два и два од именованих небесних тела?

30) У тако званом новом сребру што је најближе 12 лотном сребру, узима се 53·4 делова бакра, 29·1 делова цинка и 17·5 делова никела. Колико од сваког од наведених метала ваља узети, кад се хоће да начини 1200 фуната новог сребра и кад се при топљењу за спајање изгуби 1 $^1/_2$ процент?

31) Између једног оца и његовог сина била је размера по старости 9 : 5, колико је година оцу и сину, кад је први за 28 година старији од другог?

32) За разбијање камена у рудокопима употребљава се барут, у коме је шалитра спрам угљена у размери као 16:5, а шалитра спрам сумпора као 10 : 3. Колико од сваке ове материје ваља узети, па да добијемо 5934 оке барута.

ДВАНАЈСТИ ОДСЕК

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Квадратне једначине с једном непознатом.

175. Кад у једначини долази непозната на други степен, онда се зове *квадратна једначина.*

Сваку квадратну једначину можемо довести у овај општи вид $x^2 + px + q = 0$, гди су p и q произвољне определене количине. Тако н. пр. можемо у место једначине

$$\frac{5+x}{3-x} = \frac{6x - I}{3} + 4x.$$

Кад ову ослободимо од разломака и сведемо, добити.

$$3\,(5+x) = (3-x)\,(6\,x-1) + 3\,(3-x)\,4\,x$$

$$18x^2 - 52x + 18 = 0$$

$$\text{или } x^2 - \frac{26}{9}x + 1 = 0$$

Који, ако сравнимо са горњом једначином налазимо, да

је $p = -\dfrac{26}{9}$, $q = 1$

Квадратна једначина у којој се непозната само на други степен налази, зове се *чиста квадратна једначина*, као н. пр. $x^2 = a$; а на против кад се покрај непознате на квадрат налази још и непозната првог степена, зове се, *нечиста квадратна једначина* као н. пр. $x^2 + p\,x + q = 0$.

176. Кад из чисте квадратне једначине $x^2 = a$, извучемо други корен то је $x = \pm\sqrt{a}$. Овде налазимо за непознату пошто једначину разрешимо, два разна знака; дакле задата једначина

$x^2 = a$ има вредност за $x = +\sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$,

јер је $(+\sqrt{a})^2$ и $(-\sqrt{a})^2 = a$. Тако је за

$x^2 = 81$, $x = +9$, и $x = -9$.

Ове вредности за x, зову се *корени једначине,*

Да се изнађе x из једначине

$$\frac{5x^2 + 7}{9x - 3} = 9\,x + 3$$

Из тога сљедује $5\,x^2 + 7 = 81x^2 - 9$

$$76x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{76}$$

$$\text{или } x = \pm\sqrt{\frac{16}{76}} = \pm\, 0{\cdot}458\ \ldots$$

Задатци.

(Квадратне једначине с једном непознатом количином).

1) $12ab + x^2 = 4a^2 + gb^2$.

2) $11 - \dfrac{x+25}{x^2} = 3 - \dfrac{x-25}{x^2}$

3) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{2\,(a^2+1)}{(1+a)\,(1-a)}$

4) $\dfrac{x+1{\cdot}8}{x+0{\cdot}2} + \dfrac{x-1{\cdot}8}{x-0{\cdot}2} = 1{\cdot}8.$

5) $\sqrt{\frac{5}{x^2} + 49} - \sqrt{\frac{5}{x^2} - 49} = 7.$

6) $x + \sqrt{x^2 - 17} = 4 : \sqrt{x^2 - 17}$

7) $x + \sqrt{a + x^2} = [a^2 + a] : \sqrt{4a + 4x^2}$

8) $\sqrt{\frac{3m^2}{x^2} + m^2 - 3} = m + 1 - \sqrt{\frac{3m^2}{x^2} - 2}$

9) $\sqrt{a - \frac{b}{x^2}} + \sqrt{d - \frac{b}{x^2}} = c.$

10) $\sqrt{\frac{560}{x^2} + 29} - \sqrt{\frac{560}{x} - 34} = 7$

11) $\sqrt[3]{0\cdot125x^3 - 6x} = \sqrt{0\cdot25x^2 - 8}.$

12) $\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^{-1} - \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^{-1} = x^{-2}\sqrt{3}.$

13) $\left(x + \sqrt{2 - x^2}\right)^{-1} + \left(x - \sqrt{2 - x^2}\right)^{-1} = x$

14) $\frac{\sqrt[n]{m + x^2}}{m} + \frac{\sqrt[n]{m + x^2}}{x^2} = \sqrt[n]{x^2}$

15) $27\,[7 - x]^2 - 43 = 77 - 3\,[7 - x]^2.$

Примедба. Овде ћемо најпре узети $7 - x = y$, па изнаћи прво y па после x.

16) $\frac{49}{64}[\,x - {}^7\!/_9]^2 = \frac{25}{81}$

17) $\frac{2}{x - 10} + 10 - x = \frac{2}{10 - x}$

18) $\frac{a\,(a - b)}{x - a - b} + a + b - x = \frac{(b - a)\,b}{a + b - x}$

Примене квадратне једначина с једном непознатом количином (чисте квадратне једначине.)

1). Кад помножимо број динара што имам код себе с тим истим бројем, то ћу добити $132\,{}^1\!/_4$. Колико имам динара код себе? разреш. $11\,{}^1\!/_2$ динара.

2) Да се изнађе такав број, да, кад му петину помножимо са седмином, да изађе 4235 разреш. $\pm$ 385.

3) Да се изнађу два броја који се имају као 11 : 13, па кад се међу собом помноже, да изађе 7007. разреш. 77 и 91; и — 77 и — 91.

4) Кад помножим трећину неког броја с његовом четвртином, а производ с петином истог броја, то ћу добити шестину тога броја. Који је то број? разреш.

$$\pm\sqrt{10} = 3\cdot16227766\ \ldots\ldots$$

5) Нека њива у виду правоугалника која има у дужини 3367 стопа у ширини 37 стопа, има једнаку површину с неком другом њивом које је дужина спрам ширине као 13 : 7. Колика је дужина и ширина ове друге њиве? разреш. дужина = 481, шир. = 259.

6) Кад се неком броју дода 3 и од њега одузме 3, и кад већи од ова два броја поделимо с мањим, а овај мањи с оним већим, то ће изнети збир количника $3\,{}^1\!/_3$. Који је то број? разреш. 6.

7) С једним канапом од извесне дужине могу да обухватим један квадрат; ако сада овај канап скратим за 8 стопа, онда ћу с овим обухватити неки други квадрат, који износи ${}^{16}\!/_{25}$ части оног првог квадрата. Колко има дужине канап што обухваћа онај први квадват? разреш. 40 стопа.

8) У правоуглом троуглу, ког је један катет $3\ {}^3\!/_7$ пута већи од другог, а ипотенуза је 1000 стопа. Колики је сваки катет? разреш. један је 960 други 280 стопа.

177. *Једначину* $x^2 + px + q = o$ *разрешити значи, изнаћи такве вредности за* **x**, *да кад ове заменемо у задату једначину да учине овој задоста, па да буде једначина истоветна.*

У овом ћемо случају овако чинити:

Нека је $$x^2 + px = -q,$$

кад овој додамо са обе стране $\frac{p^2}{4}$ то постаје $x^2 + px +$

$$+ \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q.$$

Али је $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

дакле $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

најпосле $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ . . . . [m

Ова два знака пред квадратним кореном показују два могућа разрешења. Ако ове означимо са x_1 и x_2, то је

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

Свака од горњи вредности задовољава једначину

$$x^2 + px + q = 0$$

јер је овде

$$\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) +$$

$$+ q = \frac{p^2}{4} - p\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \left(\frac{p^2}{4} - q\right) -$$

$$-\frac{p^2}{2} + p\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + q = \frac{2p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q = 0.$$

Исто је тако

$$\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} -\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + q = 0.$$

Ова хитрина да се изразу $x^2 + px$ дода $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ па да постане потпуни квадрат може се применути на сваку „уређену квадратну једначину“, т. ј. на сваку једначину под видом

$$x^2 + px + q = 0,$$

па нека су p и q ма какви бројеви.

Од сада можемо сваку квадратну једначину по том методу разрешити, или запамтити онај општи образац [m, и заменути вредности за p и q.

Овај образац [m, може се изговорити речима:

„Непозната уређене квадратне једначине равна је половини сачинитеља непознате првог степена с промењеним знаком, више или мање квадратном корену из квадрата ове половине сачинитеља и из познате количине, која се опет узима с промењеним знаком што јој припада у уређеној једначини.

Да се разреше једначине:

1] $x^2 + 2x - 24 = 0$

$$x^2 + 2x \qquad = 24$$

$$1^2 = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$[x+1]^2 = 25$$
$$x+1 = \pm 5$$
$$x = -1 \pm 5$$

Дакле су ове две корене вредности

$$x_1 = -1 + 5 = +4$$
$$x_2 = -1 - 5 = -6.$$

Овде се можемо лако уверити, да обе вредности $+4$ и -6 чине задоста задатој једначини, јер је

$$4^2 + 2 \,.\, 4 - 24 = 0$$

и $$[-6]^2 + 2\,[-6] - 24 = 0$$

2] $$x - \frac{x+2}{x+3} = 1 + \frac{x-1}{6}$$

уређено $x^2 + {}^4\!/_5\, x - \frac{24}{5} = 0$

одкуда је с погледом на једначину [*m*.

$$x = -\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{24}{5}}$$

$$= -\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4+135}{25}}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{139}}{5}$$

али је $\sqrt{139} = 11{\cdot}78982\ldots$

дакле $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-2 \pm 11{\cdot}78982\ldots.}{5}$

из тога $x_1 = 1{\cdot}95796\ldots..$

$$x_2 = -2{\cdot}75796\ldots.$$

3] $acx^2 - 2bcx - 3adx + 6bd = 0.$

или $x^2 - \frac{[2bc + 3ad]}{ac}\, x + \frac{6bd}{ac} = 0$

или $x^2 - \left(\frac{2b}{a} + \frac{3d}{c}\right) x + \frac{6bd}{ac} = 0$

дакле $x = + \left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c}\right)^2 - \frac{6bd}{ac}}$

$$x = + \left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c}\right) \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{3bd}{ac} + \frac{9d^2}{4c^2} - \frac{6bd}{ac}}$$

$$= + \left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c}\right) \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{3bd}{ac} + \frac{9a^2}{4c^2}}$$

$$= + \left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} - \frac{3d}{2c}\right)^2}$$

$$= + \left(\frac{b}{a} + \frac{3d}{2c} \pm \left(\frac{b}{a} - \frac{3d}{2c}\right)\right)$$

по томе $x_1 = \frac{2b}{a}$,

$$x_2 = \frac{3d}{c}$$

4. $2x = +\sqrt{5x+1} + 2$

Кад долази непозната под кореним знаком, онда велимо да је једначина несвршена, да одавде определимо x морамо једначину ослободити од корене количине, т. ј. морамо је усавршити.

Ако у горњем случају пребацимо 2 на леву страну, то је $2x - 2 = \sqrt{5x+1}$ а ова једначина подигнута на квадрат

даје, $[2x - 2]^2 = 5x + 1 \ldots\ldots\ldots$ [*n*

$$4x^2 - 8x + 4 = 5x + 1.$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0.$$

$$x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{3}{4} = 0.$$

$$\text{дакле } x = + \frac{13}{8} \pm \sqrt{\frac{169}{64} - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\pm 13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8}$$

$$= \frac{+13 \pm \sqrt{121}}{8} = \begin{cases} \dfrac{+13+11}{8} = {}^{24}/_8 = 3 \\ \dfrac{+13-11}{8} = {}^{2}/_8 = {}^{1}/_4 \end{cases}$$

Обе ове корене вредности задовољавају свршену једначину (*n*, а кад би узели једначину као што долази у задатку (4 и ставили у овој за $\sqrt{5x+1}$ положну вредност, то би задату једначину задовољавало само $x = 3$, и онда је.

$$2 \cdot 3 = \sqrt{15+1} + 2 \text{ или } 6 = 4 + 2,$$

а вредност $x = \frac{1}{4}$ напротив задовољава једначину.

$$2x = -\sqrt{5x+1} + 2.$$

Да морају у квадратној једначини (*n* обе вредности изаћи сасвим је јасно, јер свака од ових једначина $2x = +\sqrt{5x+1} + 2$ и $2x = -\sqrt{5x+1} + 2$ кад се усаврши води нас једначини (*n*.

5. $\pm\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7.$

на квадрат

$$(2x+1) \pm 2\sqrt{(2x+1)(3x+4)} +$$

$$+ (3x+4) = 49$$

$$\pm 2\sqrt{(2x+1)(3x+4)} = -5x + 44$$

још једанпут подигнуто на квадрат.

$$4(2x+1)(3x+4) = (-5x+44)^2$$

и сведено

$$x^2 - 484x + 1920 = o.$$

$$\text{а одавде } x = 242 \pm \sqrt{242^2 - 1920}$$

$$x = \begin{cases} 242 + \sqrt{56644} = 480 \\ 242 - \sqrt{56644} = 4, \end{cases}$$

$x_1 = 480.$ задовољава задату једначину кад се узме да је прва *радикална количина* одречна, на против $x_2 = 4$ задовољава кад је она положна.

178. Претрес нађених образаца. $x^2 + p x + q = o$; за ову једначину добивене корене вредности:

$$x = - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ако је q одречно, онда је количина под кореним знаком $\frac{p^2}{4} + q$ положна а једначина има по томе две доистне корене вредности, од којих је прва $\frac{p}{2}$ бројно мања од $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ положна, а друга известно је одречна; или обратно, како је кад p положно или одречно.

Ако је q положно, то може бити $\frac{p^2}{4} - q \gtreqless o$ (т. ј. $\frac{p^2}{4} - q$ веће, равно или мање од 0), кад је $\frac{p^2}{4} - q > o$ то су обе корене вредности доистне, а пошто је бројно $\frac{p}{2} > \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ то се обе слажу по знаку и положне су, кад је p одречно, и обе одречне, кад је p положно.

За $\frac{p^2}{4} - q = o$, нестаје радикална количина и остаје $- \frac{p}{2}$ т. ј. обе корене вредности доистне су и постају једнаке. Овде изгледа као да има квадратна једначина само један корен, зато ћемо доцније још боље да расветлимо овај случај.

Ако је $\frac{p^2}{4} - q < o$, то су обе вредности за x уображене а уједно су и спарене; јер кад поставимо $\frac{p^2}{4} - q =$

$$= - \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

и означимо бројну вредност од $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ са ω, то је

$x = - \frac{p}{2} \pm \omega \sqrt{-1}$, дакле су корене вредности $- \frac{p}{2} + \omega \sqrt{-1}$ и $- \frac{p}{2} - \omega \sqrt{-1}$.

Из тога се види да морају бити оба корена стварни или оба уображени.

Сем тога свагда се може показати по знацима сачинитеља p и q, какве ће знаке имати корени. Из предходног изводимо да имају корени једнаке знаке, кад је q положно, и напротив имају неједнаке знаке, кад је q одречно. У првом случају оба су корена положна, или оба одречна, ако су доистни, како је кад p одречан или положан број. Кад је вредност количине q одречна, онда је положни корен бројно већи од онога одречног, па и онда, ако би p имало знак $(-)$; и обратно је одречни корен бројно већи од положног, кад има p знак $(+)$.

179. *Односај међу кореном и сачинитељем неке квадратне једначине.*

Из $x^2 + p x + q$ нашли смо ове две вредности:

$$x = - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \omega_1$$

$$\text{и } x = - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \omega_2$$

Сабирањем ових једначина добијамо $w_1 + \omega_2 = - p$ т. ј. *у свакој уређеној на нулу сведеној квадратној једначини која има сачинитеља од x^2 јединицу налазимо да је збир два корена раван сачинитељу од x, и то са преокренутим знаком.*

Напротив добијамо множењем.

$$w_1 \, w_2 = \left(- \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \times$$

$$\times \left(- \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) = q$$

т. ј. „Производ оба корена квадратне једначине раван је оном члану што долази без x“.

180. „Разлагање тринома једначине у корене чинитеље. Због тога што је $p = -(\omega_1 + \omega_2)$ и $q = \omega_1 \omega_2$, може се поставити у место $x^2 + p\,x + q$, овај израз $x^2 - (\omega_1 + \omega_2)\,x \times \omega_1 \omega_2$; или пошто добијамо из овог производа $(x - \omega') \times (x - \omega_2)$ то исто, онда је $x^2 + p\,x + q = (x - \omega_1)\,(x - \omega_2)$.

Биноми $x - \omega_1$ и $x - \omega_2$, зову се корени чинитељи квадратне једначине.

А кад познајемо корене чинитеље неке квадратне једначине, онда знамо и вредности које ову задовољавају. Јер кад постоји $(x - \omega_1)\,(x - \omega_2) = 0$, то је јасно да овој једначини задоста чини кад је $x - \omega_1 = 0$, или $x - \omega_2 = 0$, то ј. едначина мора постојати кад је $x = \omega_1$ а исто тако $x = \omega_2$.

а). Кад су нам задати корени неке квадратне једначине, то ћемо лако једначину поставити.

Нека су н. пр. корени $^1/_2$ и $-\,^2/_3$, то су одговарајући корени чинитељи $(x - {}^1/_2)$ и $(x + {}^2/_3)$, дакле постоји једначина $[(x - {}^1/_2)\,(x + {}^2/_3) = 0$, или развијени $x^2 + {}^1/_6\,x - {}^1/_3 = 0$

б) Сада се лако увиђа, шта значи, кад су корени неке квадратне једначине једнаки. У овом случају састоји се трином-једначине из два истоветна корена-чинитеља.

Ако је $(x - \omega_1)\,(x - \omega_2) = 0$, онда је $x^2 - 2\omega_1\,x + \omega_1^2 = 0$, а из тога $x = \omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 - \omega_1^2}$ или $x = \omega_1$.

181. „Сваки је трином једначине раздељив са својим кореним чинитељем.“

Кад је у једначини $x^2 + p\,x + q = 0$, један корен $x = \omega$ познат, онда је $x^2 + p\,x + q$ раздељиво са $x - \omega$ без остатка

Дељењем добијамо.

$$(x^2 + p\,x + q) : (x - \omega) = x + (p + \omega)$$

$$\begin{array}{ll} x^2 - \omega x & \\ - \quad + & \\ \hline (p + \omega)\,x & + q \\ (p + \omega)\,x & - \omega\,(p + \omega) \\ - & + \\ \hline & \omega\,(p + \omega) + q = \text{разлици} = R \end{array}$$

или $R = \omega^2 + p\,\omega + q$.

А пошто је предпостављено ω као корен квадратне једначине, онда постоји $\omega^2 + p\,\omega + q = 0$, зато је $R = 0$, то ј. дељење је свршено без остатка.

182. „Свака квадратна једначина нити има више нити мање од два корена.“

Да никад мање од два корена недолазе (баш и онда, кад су једнаки), сазнајемо из начина о разрешавању квадратни једначина. Али да не може бити никад више од два разрешења, видимо из овога: кад нађемо за $x^2 + p\,x + q = 0$ две вредности ω_1 и ω_2, онда је извесно $x^2 + p\,x + q = (x - \omega_1) \times (x - \omega_2) = 0$.

Кад би могло постојати још и неко треће разрешење од прилике $x = \alpha$, које се разликује од ω_1 и ω_2, то би морало $(\alpha - \omega_1)\,(\alpha - \omega_2) = 0$ бити, што је немогућно, јер ниједна од ови разлика не може нестати, зато, што се α разликује од ω_1 и ω_2.

Ако су у $x^2 + p\,x + q = 0$, p или q или оба разломљени бројеви, онда се може множењем са најмањим иметељом довести једначина у овај вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Да би овде показали образац по ком се може непосредно написати x, следоваће дељењем са a.

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0, \text{ а из тога}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Исти посљедак налазимо још овим начином:

Нека је $ax^2 + bx = -c$

Кад се са обе стране помножи са $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Са обе стране додато b^2, даје

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

или $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots \ (p$$

Примери.

1) $3x^2 - 5x - 12 = 0,$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 3 \times 12}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$$

$$\text{Дакле } x = \begin{cases} \dfrac{5 + 13}{6} = 3 \\[2ex] \dfrac{5 - 13}{6} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) $3ax^2 + 5bmx + 4k = 0,$

$$x = \frac{-5bm \pm \sqrt{25b^2m^2 - 48ak}}{6a}$$

Задатци:

(Нечисте квадратне једначине).

1) $x^2 + 6x = 7.$

2) $x^2 + 10x = -27$

3) $x^2 + mx + n = 0$

4) $x^2 + 26x + 120 = 0.$

5) $x + \frac{1}{2} = \dfrac{1}{2x}$

6) $[5x]^2 - 33333x = 24x^2 + 11111x + 701060205.$

7) $\dfrac{15}{x} - \dfrac{72 - 6x}{2x^2} = 2.$

8) $x + \dfrac{3{\cdot}3512972}{x} = -3{\cdot}8259.$

9) $\dfrac{9}{16} + \dfrac{64}{81x^2} = \dfrac{4}{3x}$

10) $[\frac{1}{3}x]^2 + 1 = \left|\dfrac{5}{13}\right|^2 - \dfrac{10}{x}x - \left[\dfrac{1}{4}x\right]^2$

11) $ax^2 - a^2[x + b^2] = ab[x - ab].$

12) $[x - a]^2 - b[x - a - c] = bc.$

13) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{25}{x} = 3.$

14) $\frac{1}{x + {}^1/_x} = 1.$

15) $x^2 = 2x \sqrt{-1} - 1.$

16) $x^2 + 1 = x \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right] \sqrt{mn}.$

17) $2b^2 = 2x \sqrt{a^2 + b^2} - x^2.$

18) $\sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 + 4x} = 4 \sqrt{x}$

19) $\sqrt{2abx} - \sqrt{a^2 - bx} = \sqrt{a^2 + bx}$

20) $[x - \sqrt{-7}]\,[x - \sqrt{-11}] = 0.$

21) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{6}$

22) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4} = -\,{}^2/_3.$

23) $\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a + x} = \frac{3 + x^2}{a^2 - x^2}$

24) $x : [a + x] + [a + x] : x = 2^1/_2.$

25) $\frac{x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 7x + 1}{x^2 + 7x + 4} = x^2 + 5x - 4$

26) $\frac{170}{x} - \frac{170}{x+1} = \frac{51}{x+2}$

27) $25x^2 - \sqrt{x^4 - 6x^2} = 25x^2 - 3\sqrt{-1}$

29) $x + ab = [a + b] \sqrt{x} + 2\,[a - b]^2$

30) $x - [a + b] \sqrt{x} = 2a\,[a - b].$

31) $\frac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} + \frac{21 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2^1/_2.$

32) $\sqrt{2x + 2} + \sqrt{7 + 6x} = \sqrt{7x + 72}$

33) $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{4}{x^2 - x}$

34) $x + \sqrt{25 + x} = 157.$

35) $\sqrt{x^2 - 8x + 31} + [x - 4]^2 = 5.$

1) Неки број кад се подигне на квадрат и кад се тај исти број узме 13 пута, то ће бити = 264. Који је тај број разреш. 11 или — 24.

2) Величина површине неког правоугалника, ког је једна страна за 7 стопа дужа од оне друге, износи 494 квадратни стопа. Колика је свака страна? разреш. једна 26 друга 19.

3) Кад се овога производа 6×52 први чинитељ увећа с неким бројем, а други чинитељ у толико исто смањи, онда ћемо добити из ова два нова броја кад ји помножимо, такав производ, који толико исто износи, као кад би узели 35 пута онај број с којим смо првог чинитеља увећали. Који је тај број? разреш. 24.

4) Неки је купио једног коња и платио за њега извесну суму, па га после продао за 144 талира, а тим је добио оноликo

исто процента, колико је за коња платио. Колико је коштао тај коњ? разреш. 80 талира.

5) A и B уложе у једну радњу 3400 дуката, и то A на 12, а B на 16 месеци. Кад су се делили добије A 2070 дукасвега, а исто тако добије B свега 1920 дуката. Колко је сваки од обојице уложио капитала?

разреш. А је уложио 1800.
и B » „ 1600.

6) Од две вароши A и B које су удаљене једна од друге 26 миља, пођу два јахача један другом на сусрет и састану се после $10\frac{1}{2}$ часова. Један од њих требао је за сваку миљу $\frac{1}{8}$ сати више да ходи од оног другог. Колико је времена требало свакома да пређе једну миљу?

разреш. један $\frac{7}{8}$, а други $\frac{3}{4}$ сата

7) Колика је површина највећег правоугалника којег се обим може обухватити са канапом од 36 стопа дужине? разреш. 81 квадратну стопу.

183. Једначина у виду $ax^{2m} + bx^m + c = 0$ може се разрешити помоћу квадратне једначине. Јер ако узмемо x^m као непознату, то слѣдује непосредно [§ 182. Једначина [p].

$$x^m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{дакле } x = \sqrt[m]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Примери.

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x^2 = \begin{cases} 2, & \text{зато } x = \pm\sqrt{2} \\ 1 & \text{и } x = \pm 1. \end{cases}$$

Све вредности ове, $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $+1$, -1 задовољавају горњу једначину.

2. $x^6 - x^3 - 6 = 0,$

$$x^3 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x^3 = \begin{cases} +3, & \text{зато } x = \sqrt[3]{3} \\ -2 & \text{и } x = -\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Да се разреше још и ови Задатци

1) $x^2 - 4x - 13 = 0 \qquad x = [2 + \sqrt{17}], [2 - \sqrt{17}]$

2) $x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad x = [2 + 3\sqrt{-1}], [2 - 3\sqrt{-1}]$

3) $5x^2 - 7x + 2 = 0 \qquad x = 1, \ \frac{2}{5}.$

4) $[4x+1][2x-5] = 0 \qquad x = -\frac{1}{4}, \ \frac{5}{2}.$

5) $ax^2 = b[c - x]^2 \qquad x = \dfrac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{a}}$

6) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{1}{x} = 1, \quad x = 1, \ 2.$

7) $\frac{3x+7}{x+2} - 3[x-1] = 4[x+2] + \frac{x-2}{x+2}$

$x = -0{\cdot}12284\ldots, \quad -1{\cdot}16292\ldots$

8) $\frac{ax^2}{b} - [x^2 - c^2] = x^2 - d^2 \quad x = \pm\sqrt{\frac{b[c^2+d^2]}{2b-a}}$

9) $[x - \sqrt{106}]\,[x + \sqrt{106}] = 183, \quad x = \pm 17.$

10) $[x^2 - 2x]^2 - 7[x^2 - 2x] = 8.$

$x^2 - 2x = y, \quad y^2 - 7y = 8.$

$x = +4, \ -2, \ +1, \ +1.$

11) $ax + b = \pm\sqrt{cx}, \quad x = \frac{[c - 2ab] \pm \sqrt{c^2 - 4abc}}{2a^2}$

12) $\frac{\sqrt{m+x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{m-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x = \pm 2\sqrt{m-1}$

13) $\sqrt[4]{x} = a + \sqrt{x}$; кад ставимо $\sqrt[4]{x} = y.$

и $\sqrt{x} = y^2.$

14) Да се построји једначина, кад су јој корени $^2/_3$ и $-\,^4/_5$. $[15x^2 + 2x - 8]$.

15) Да се построји једначина, кад су корени $[2m + n]$ и $-[m + 2n]$.

16) $x^4 + 2x^2 = 3, \quad x = \pm 1, \ \pm\sqrt{-3}$

17) $x^2 + \frac{1}{11}x = \frac{180}{11}$

18) $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{[a-x]^2}$

19) $\frac{4x^2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{5x+6}{6} + 7 = \frac{x+5}{3} + 5x$

20) $b^2x^2 - b^2[x + a^2] = ab[x - ab].$

21) $x^2 - 2ax + [a^2 - b^2] = 0.$

22) $\frac{5x - 6a}{b} + 1 = \frac{2b + x}{a} - \frac{x^2}{ab}$

23) $\frac{mx^2 - np^2}{m - n} - \frac{2[x - p]}{2m + 3n} = 2x^2 - px.$

24) $2mnx^2 + n^2px - 2m^2qx - mnpq = 0.$

25) $[7x - 5]\,[9x - 6] = 0.$

26) $[3ax + b^2]\,[cd - 4ax] = 0.$

27) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[2n]{x} = a, \ \sqrt[2n]{x} = y.$

28) $\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} = 60.$

29) $[x^2 - 1] \pm \sqrt{x^2 - 1} = 6.$

30) $4\sqrt{2x + 5} = 2 - \sqrt{3x + 20}$

31) $\sqrt{ax^2 + bx + c} + k\,[ax^2 + bx + c] = m.$

32) $[ax^2 + bx + c]^{2m} + m\,[ax^2 + bx + c]^m = n.$

33) $3x : \sqrt{x^2 + 1} = 2 : 5$

34) $[4x - 7] : [2x + 1] = [x + 2] : 3x$.

Задатци о постављању квадратних једначина.

35) Неки је купио неколико комада и платио је за сваки комад толико динара колико је комада купио. За све комаде платио је 576 динара, колико је комада купљено? (24 комада).

36) Да се тражи такав број ког је квадрат у 12 већи од самог тог броја (број = 4).

37) Да се разложи број 60 у таква два дела, да збир квадрата ових делова буде раван 2600 (50 и 10).

38) Да се разложи број 40 у таква два дела, којих је размера квадрата равна броју 16 (делови 32 и 8).

39) Да се у једначини $x^2 + px + q = o$, изабере q тако да размера оба корена равна буде броју m. $\left(q = \frac{mp^2}{(m+1)^2}\right)$

40. У каквом односу стоји p и q у јед. $x^2 + px + q = o$, кад је разлика корена равна броју m. $(p^2 - 4b = m^2)$.

41) Величина површине правоугаоника износи 115 квадр. хв. и нека је једна страна тога правоугаоника за $1\frac{1}{2}$ хв. дужа од оне друге. Колико износи у дужини свака страна. (10 и $11\frac{1}{2}$ хвати).

42) Неки известан посао могла би два лица A и B свршити за a дана. А могао би тај посао свршити за b дана пре него што би га B свршио. Колико дана треба сваки од њи да изврши тај посао?

A треба $\dfrac{2a - b + \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$ дана

B треба $\dfrac{2a + b + \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$ дана

43) Да се изнађу три броја која су у размери као $2 : 3 : 4$ а збир њихових квадрата да буде = 2900.
(Бројеви = 20, 30, 40).

44) Два лица A и B уложе у неку радњу заједно 7000 динара, и то уложи A на 2, а B на три месеца; кад је радња престала добије A 516 дин., а B 3510 дин. колуко је сваки уложио? (A, 4300 дин. и B 2700 дин.)

184 Свођење периодних верижних разломака.

Има да се разреши задатак, кад се хоће вредност од

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}}}}}}}}$$

$$+ \cfrac{1}{a_n + \cdots}$$

да постави у сведеном округлом изразу. Ако означимо вредност верижног разломка са x, то је:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}}}$$

Ако сада три последња приближна разломка периоде

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

означимо са $\frac{Z_{n-2}}{N_{n-2}}$, $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$, $\frac{Z_n}{N_n}$, то је као што знамо

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{a_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{a_n N_{n-1} + N_{n-2}}$$

Али сада ће извесно $\frac{Z_n}{N_n}$ прећи у праву вредност свију наставака, ако поставимо у последњем изразу $[a_n + x]$ у место a_n.

Тако налазимо $x = \frac{[a_n + x]\, Z_{n-1} + Z_{n-2}}{[a_n + x]\, N_{n-1} + N_{n-2}} =$

$$= \frac{x \,.\, Z_{n-1} + Z_n}{x \,.\, N_{n-1} + N_n}$$

а из тога сљедује $N_{n-1} \,.\, x^2 - (Z_{n-1} - N_n)\, x = Z_n$

дакле $x = \frac{(Z_{n-1} - N_n) \pm \sqrt{(Z_{n-1} - N_n)^2 + 4 N_{n-1} Z_n}}{2 N_{n-1}}$

Од ове две вредности по самој природи ствари може одговарати једино она положна вредност, па је онда разрешење

$$x = \frac{(Z_{n-1} - N_n + \sqrt{(Z_{n-1} - N_n)^2 + 4 N_{n-1} Z_n}}{2 N_{n-1}}$$

дакле резултат овога вида $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$

Пример:

Да се сведе:

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cdots}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{13}{30}, & \frac{68}{157}, \end{array}$$

дакле $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{13}{30}$, $\frac{Z_n}{N_n} = \frac{68}{157}$

$$Z_{n-1} - N_n = 13 - 157 = -144,$$

$$[Z_{n-1} - N_n]^2 + 4 N_{n-1} Z_n = 144^2 + 4 \,.\, 30 \,.\, 68$$

Зато је $x = \frac{-144 + \sqrt{144^2 + 4 \,.\, 30 \,.\, 68}}{2 \,.\, 30} =$

$$= \frac{-36 + \sqrt{1806}}{15}$$

дакле $x = 0{\cdot}4331372 \ldots\ldots$

Ако има периодни верижан разломак овај вид

$$B = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}}}}}}}$$

гди је $\cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}$ ред наставака који предходи периоди.

Ако најпре сведемо $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}$ и означимо ову вредност са ω, то је

$$B = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \omega}}}}$$

А три последње приближне вредности

од $\cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m}}}$ $\dfrac{Z_{m-2}}{N_{m-2}}, \dfrac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}, \dfrac{Z_m}{N_m}$. кад ставимо

излази $\dfrac{Z_m}{N_m} = \dfrac{\alpha_m Z_{m-1} + Z_{m-2}}{\alpha_m N_{m-1} + N_{m-2}}$

и кад за α_m узмемо, $[\alpha_m + \omega]$, добијамо

$$B = \frac{[\alpha_m + \omega]\, Z_{m-1} + Z_{m-2}}{[\alpha_m + \omega]\, N_{m-1} + N_{m-2}} = \frac{\omega\, Z_{m-1} + Z_m}{\omega\, N_{m-1} + N_m}$$

Квадратне једначине с две непознате.

185) Општи је вид квадратне једначине с две непозн ате $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; овде ће се једначина онда звати квадратна ако се најмање један сачинитељ a, b или c разликују од нуле.

Тако су $4x^2 - 5y - 6 = 0$, $x^2 + y^2 + 5 = 0$, $2xy - 4x = 3$ квадратне једначине са непознатима x и y.

Кад разрешавамо две једначине с две непознате морамо разликовати јели само једна од задатих једначина с другим степеном, или су обе једначине квадратне. У првом случају разрешавају се једначине врло лако, јер се може једна непозната врло лако избацити (елиминирати). У другом случају постизавамо цељ удесним састављањем ти једначина; и кад овим путем неможемо то да постигнемо, онда можемо често довести једначину на 4 степен избацивањем једне непознате.

Овакве једначине нећемо овде наводити, јер непринадлеже ту; него ћемо само такве примере показати, који се своде на чисте квадратне једначине.

Примери.

1) Задате су једначине,

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 5xy + 4x + 10 &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Пошто је друга једначина првог степена, то је $y = 2x - 1$, које ако заменемо у прву једначину.

$$3x^2 - 5x\,[2x - 1] + 4x + 10 = 0$$

$$\text{или } 7x^2 - 9x - 10 = 0$$

Ова једначина кад се разреши даје за x вредности 2 и $-\,{}^5\!/_7$ $x = 2$ кад се стави у $2x - y = 1$; даје за $y = 3$ и

$x = -\,{}^5\!/_7$ „ „ „ „ $2x - y = 1$; „ $y = -\,{}^{17}\!/_7$

из тога видимо да имају задате једначине ова два разрешења:

$$\left\{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -\,{}^5\!/_7 \\ y &= -\,{}^{17}\!/_7 \end{aligned}\right.$$

Ове означене вредности за x и y одговарају потпуно горњим једначинама, о чему се лако уверити можемо.

$$x + y = a$$

$$xy = b$$

Из прве једначине сљедује за $x = a - y$ а ова разлика кад се постави у другу једначину, даје $(a - y)\,y = b$. или

$y^2 - ay + b = 0$, одкуда добијамо вредности за y

$\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ и $\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, па ако сада у $x = a - y$

ставимо изнађене вредности за y, то је

$$x = a - \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\text{и } x = a - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

За наведене једначине постоје дакле ова разрешења:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{aligned}\right.$$

Сада ћемо потражити за овај случај да изведемо избацивање другим начином. Из $xy = b$ налазимо $y = \dfrac{b}{x}$,

дакле $x + y = a$, $x - {}^b\!/_x = a$ или $x^2 - ax + b = 0$.

а одтуда је $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Зато је $\dfrac{b}{x} =$

$$= \frac{2b}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}} = \frac{2b\,(a \mp \sqrt{a^2 - 4b})}{4b} =$$

$$= \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

дакле као и пре $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \\ y = \dfrac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array}\right.$

где се знаци пред кореним количинама узимају оба горња или оба доња, одкуда после добијамо пређе наведена разрешења.

Најпосле да огледамо на истом примеру још једно треће разрешење т. ј. кад су задате једначине таквог својства, да се могу на много лепши начин разрешити. За тај посао ћемо прву једначину подићи на квадрат а другу помножити са 4,

онда је $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$

и $\quad 4xy = 4b$

одузето $x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b$

или $(x - y)^2 = a^2 - 4b$

зато $x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$

Таквим начином нашли смо разлику непознати, а пошто је и њихов збир задат, то ће сљедовати простим сабирањем и одузимањем

$$x + y = a$$

$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$$

$$2x = a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$2y = a \mp \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

дакле исте вредности за x и y,

3) Ако је задата разлика и производ два броја; да се изнађу та два броја·

Ако је разлика $= a$ а производ $= b$, онда имамо једначине.

$$x - y = a$$

$$xy = b,$$

прва једначина подигнута на квадрат $x^2 - 2xy + y^2 = a^2$
друга једначина помножена са 4, $4xy = 4b$;

кад саберемо $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 4b$

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b$$

$$x+y = \pm\sqrt{a^2 + 4b},$$

и тако добијамо ове посве просте једначине

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b} \\ x - y = a \end{array}\right.$$

из тога је $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pm\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2} \\ y = \dfrac{\pm\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2} \end{array}\right.$

4) $x^2 + y^2 = a$

$x - y = b$

Да би овде могли изнаћи збир морамо подићи другу једначину на квадрат, и одузети ову од оне прве, дакле

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & a \\ x^2 - 2xy + y^2 & = & b^2 \\ - \quad \pm \quad - & & \\ \hline 2xy & = & a - b^2 \end{array}$$

Кад се ова једначина дода оној $x^2 + y^2 = a$,

то је $x^2 + 2xy + y^2 = 2a - b^2$

зато $(x + y)^2 = 2a - {}^2$

$$x + y = \pm\sqrt{2a - b^2}$$

дакле $\left\{\begin{array}{l} x + y = \pm\sqrt{a - b^2} \\ x - y = b \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pm\sqrt{2a - b^2} + b}{2} \\[2ex] y = \dfrac{\pm\sqrt{2a - b^2} - b}{2} \end{array}\right.$$

5) $x^2 - y^2 = a$

$x + y = b$

Овде добијамо одма разлику $x - y$ кад поделимо прву са другом једначином.

тако слједује $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = \dfrac{a}{b}$ или $x - y = \dfrac{a}{b} = q.$

Зато $\left\{\begin{array}{l} x + y = b \\ x - y = q \end{array}\right.$ дакле $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{b + q}{2} \\[2ex] y = \dfrac{b - q}{2} \end{array}\right.$

6) $x^2 - y^2 = a$

$xy = b.$

Из друге једначине налазимо $y = \dfrac{b}{x}$, по томе

$$x^2 - \frac{b^2}{x^2} = a \quad \text{или} \quad x^4 - ax^2 = b^2$$

и $x^2 = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$, тако $y^2 = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$

зато су у овом случају ова разрешења:

1) $\left\{\begin{array}{l} x = +\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \\[3ex] y = +\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} x = +\sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \\[3ex] y = +\sqrt{\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \end{array}\right.$

$$3)\quad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}} \end{cases}$$

Овде се опет могло разрешити по 3. примеру; јер друга једначина подигнута на квадрат даје $x^2y^2 = b^2$.

Ако ставимо предходно $x^2 = x_1$ и $y^2 = y_1$, то ћемо добити једначине

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = a \\ x_1 y_1 = b^2 \end{cases}$$

одкуда се може изнаћи x_1 и y_1 истим начином као у примеру 3; и онда је $x = \pm\sqrt{x_1}$ и $y = \pm\sqrt{y_1}$.

186. Да би могли извући квадратни корен из бинома

$a + \sqrt{b}$, ставимо $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

где су x и y савршени бројеви. Да би сада нашли x и y, подићемо једначину на квадрат, и тако постаје

$$a + \sqrt{b} = x + 2\sqrt{xy} + y.$$

Кад предпоставимо да је $\sqrt{b}$ несвршен број, то мора и $\sqrt{xy}$ несвршен број бити, јер би иначе било

$$\sqrt{b} = 2\sqrt{xy} + x + y - a$$

т. ј. равно свршеном броју, дакле и сама та количина свршен број, што је противно нашој предпоставци.

Зато мора горња једначина прећи у ове две:

$$x + y = a$$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$$

Обе једначине подигнуте на квадрат

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

$$+ 4xy = b$$

одузето $\quad x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b$

или $\quad (x - y)^2 = a^2 - b$

$$x - y = \pm\sqrt{a^2 - b},$$

дакле $\quad \begin{cases} x + y = a \\ x - y = \pm\sqrt{a^2 - b} \end{cases}$

и тако $\quad \begin{cases} x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2} \\ y = \dfrac{a \mp \sqrt{a^2 - b}}{2} \end{cases}$

по томе је

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a\mp\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Оба ова знака своде се у један, јер су збирови једнаки

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \text{ и}$$

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

дакле

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

У осталом можемо се лако уверити о истинитости једначине:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \ldots \quad (m.$$

Кад је $a^2 - b$ потпуни квадрат $= c^2$, то је

$\sqrt{a^2-b} = c$ и у овом случају

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Примери:

1) Да се извуче квадратни корен из $6+2\sqrt{5}$

$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}}$ даје

$a = 6,\ b = 20,\ a^2 - b = 36 - 20 = 16,$

дакле $c = \sqrt{a^2-b} = \sqrt{16} = 4$, зато

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5} + 1$$

2) $\sqrt{10-\sqrt{19}} = ?$

$a = 10,\ b = 19,\ a^2 - b = 100 - 19 = 81 = c^2$

дакле $c = q$, и $\sqrt{10-\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{19}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{38} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Овде се може лако увидити, да се једначина (*m* може применути и онда, кад $a^2 - b$ неби био потпуни квадрат; али у оваквом случају само што се неби могао израз

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ упростити него би постао још замршенији.

187. Из предходнод §. наведени образац (m дозвољава, да се изрази овога вида $\sqrt{p \pm q\sqrt{-1}}$ представе са $x \pm y\sqrt{-1}$, где x и y означавају доистне бројеве. Јер кад ставимо у (m, $a = p$ и $b = -q^2$, онда ће сљедовати, због тога што је $a^2 - b = p^2 + q^2$

$$\sqrt{p \pm q\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{p-\sqrt{p^2+q^2}}{2}} = \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}} \times \sqrt{-1}.$$

1). Тако је н. пр. за $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$ пошто је

$p = 3$, и $q = 4$

дакле $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{25} = 5$.

$$\sqrt{3+4\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{3+5}{2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{5-3}{2}} \times \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1}$$

2) За $\sqrt{5+2\sqrt{-1}}$ износи $p = 5, q = 2,$

$\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{29}$ дакле

$$\sqrt{5+2\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{29}}{2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}} \times \sqrt{-1}$$

или $\sqrt{5+2\sqrt{-1}} = 2{\cdot}27872\ldots +$

$+ 0{\cdot}43884\ldots \times \sqrt{-1}$

горњи израз можемо добити без призрења на образац (m, кад непосредно ставимо $\sqrt{p \pm q\sqrt{-1}} = x \pm y\sqrt{-1}$

подизањем на квадрат добијамо

$$p \pm q\sqrt{-1} = x^2 \pm 2xy\sqrt{-1} - y^2$$

дакле $x^2 - y^2 = p$, а $2xy = q$, две једначине из којих налазимо x и y.

Тако је $\sqrt{3+4\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$

$3 + 4\sqrt{-1} = x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1}$, по томе

$x^2 - y^2 = 3$ и $xy = 2$; и кад ове једначине разрешимо излази

за $x = \pm 2$, а за $y = \pm 1$, тако је дакле и у опште

$$\sqrt{3+4\sqrt{-1}} = \pm 2 \pm \sqrt{-1} =$$

$$= \pm\left(2+\sqrt{-1}\right).$$

О истини ове једначине можемо се лако уверити, јер је

$$\left(\sqrt{3+4\sqrt{-1}}\right)^2 = \left(\pm 2 \pm \sqrt{-1}\right)^2 =$$

$$= 4 + 4\sqrt{-1} - 1 = 3 + 4\sqrt{-1}.$$

Неодређене једначине другог степена.

188· Пошто овде неможе бити говора о каквом поступку између x и y неке опште једначине другог степена, то ћемо само примерима показати, како се могу разсматрати овакве једначине.

1) Да се изнађу два цела броја, којих је збир њихови квадрата опет квадрат.

Писменима изказано $x^2 + y^2 = s^2$ или $s = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ако ставимо $\sqrt{x^2+y^2} = x - my$, где за сада означава m, неки цео неодређени број, онда је $x^2 + y^2 = x^2 - 2mxy + m^2y^2$ а из тога $y = \frac{2mx}{m^2-1}$

Ако треба да буду x и y цели бројеви, онда овом задатку чини задоста кад је $x = m^2 - 1$, а од туда $y = 2m$.

Али знамо, да је $(m^2-1)^2 + (2m)^2 = (m^2+1)^2$

И кад узмемо за m неки произвољан цео број н. пр. 7, то је $x = m^2 - 1 = 49 - 1 = 48$, а $y = 2m = 2\cdot 7 = 14$.

И тако је сада $48^2 + 14^2 = 2304 + 196 = 2500 = 50^2$ а кад би узели за $m = 12$, нашли би $x = 143$, а $y = 24$.

2). Да се определи x и y у целим бројевима тако, да буде $a^2 + bxy + c^2y^2$ потпуни квадрат; и нека су a, b и c цели бројеви.

Ако означимо овај квадрат са q^2, онда сљедује $ax^2 + bxy + c^2y^2 = q^2$, зато је и $ax^2 + bxy = q^2 - c^2y^2$, а одавде $x(ax + by) = (q + cy)(q - cy]$. И ако овде помножимо обе стране једначине са mn, то је $m.n.x[ax + by] = m.n[q + cy][q - cy]$, где су m и n два произвољна цела броја. Последњу једначину можемо разложити у ове две:

$$mx = n[q + cy]$$

$$n(ax + by] = m[q - cy]$$

или $ncy + nq = mx$

$$[bn + cm]y - mq = -anx$$

и кад се из ових једначина определи

y и q, сљедоваће

за $y = \frac{[m^2 - an^2]x}{n[2cm + bn]}$,

„ $q = \frac{[c(m^2 + an^2) + bmn]x}{n[2cm + bn]}$

y и q биће сада цели бројеви, кад ставимо

за $x = n[2cm + bn]$,

тако је онда $y = m^2 - an^2$, и $q =$

$= c \times [m^2 + an^2] + bmn.$

И тако налазимо, да је $ax^2 + bxy + c^2y^2 = an^2 \times$

$\times [2cm + bn]^2 + bn[2cm + bn] \times$

$\times [m^2 - an^2] + c^2[m^2 - an^2]^2 =$

$= [m^2c + bmn + acn^2]^2 = q^2$

По томе н. пр. налазимо у $5x^2 - 7xy + 4y^2$,

за $x = n(4m - 7n)$, $y = m^2 - 5n^2$

и кад узмемо за $m = 9$, а за $n = 2$,

то ће постати $x = 44$, а $y = 61$;

и овда прелази $ax^2 + bxy + c^2y^2$

у $5 \times 44^2 - 7 \times 44 \times 61 + 4 \times 61^2 = 5776 = 76^2$.

3). Да се разреши у целим бројевима $x^2 - y^2 = a^2$.

Да ставимо $x = my - a$, где се разумева за m произвољан цео број, сада је кад заменемо

$(my - a)^2 - y^2 = a^2$; а одавде

$m^2y^2 - 2amy + a^2 - y^2 = a^2$,

или $m^2y^2 - 2amy - y^2 = 0$

и скраћено са y, $m^2y - 2am - y = 0$

одкуда налазимо за $y = \frac{2am}{m^2 - 1}$, дакле $x = my -$

$- a = m\frac{2am}{m^2 - 1} - a = \frac{a(m^2 + 1)}{m^2 - 1}$.

Ма какав број да ставимо за m, чиниће задоста

вредности $\begin{cases} x = \dfrac{a(m^2 + 1)}{m^2 - 1} \\ y = \dfrac{2am}{m^2 - 1} \end{cases}$ задатој једначини

Ако треба x и y да буду цели бројеви, то ћемо ово постићи сигурно, кад изберемо m тако, да из $\frac{a}{m^2 - 1}$ изађе цео број.

н. пр. $x^2 - y^2 = 14400$

овде је $a = 120$

$$\begin{array}{l|l} m = 2,\ 3,\ 4,\ 5, & x = 200,\ 150,\ 136,\ 130 \\ m^2 - 1 = 3, 8, 15, 24 & y = 160,\ 90,\ 64,\ 50, \end{array}$$

4. Да се разреши једначина $xy + x + y = a$ у целим бројевима за x и y.

Ако ставимо за $y = -mx + a$, то је $x(-mx + a) +$

$+ x + (-mx + a) = a$,

кад сведемо $-mx^2 + ax + x - mx = 0$

или $-mx + a + 1 - m = 0$, то је $x = \frac{a + 1 - m}{m} =$

$= \frac{a + 1}{m} - 1$; дакле $y = m - 1$.

Ове вредности чине задоста, кад се узме за m ма која произвољна вредност у задату једначину. Кад изаберемо m тако да је $\frac{a + 1}{m}$ цео број, то ћемо добити вредности за x и y у целим бројевима.

Нека је $xy + x + y = 71$; $\frac{a + 1}{m} = \frac{72}{m}$

$m = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$,

$\frac{a + 1}{m} = 72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1$;

дакле је $x = 71, 35, 23, 17, 11, 8, 7, 5, 3, 2, 1, 0$,

$y = 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 17, 23, 35, 71$.

5. Да се разреши $x^2 + y^2 = 100(x + y)$ у целим бројевима за x и y.

За $y = mx$ долази $x^2 + m^2x^2 = 100(x + mx)$

или $x = \frac{100(1+m)}{1+m^2}$ и тако $y = \frac{100m(1+m)}{1+m^2}$.

Кад изаберемо m тако, да је $m^2 + 1$ један чинитељ од 100, дакле.

$m = 1, 2, 3, 7$, то је $\frac{100}{1+m^2} = 50, 20, 10, 2$

зато $x = 100, 60, 40, 16.$

$y = 100, 120, 120, 112$, а пошто се задата једначина не мења, кад заменомо x са y, то ће се додати горњим вредностима.

$x = 120, 120, 112, \; y = 60, 40, 16,$

6. Да се разреши $(x - y)^2 = 72(x + y)$.

$x = my$, сљедује $x = \frac{72m(m+1)}{(m-1)^2}$, $y = \frac{72(m+1)}{(m-1)^2}$.

Ако треба опет изнаћи вредности у целим бројевима за x и y, то можемо ово постићи ако је 72 садржатељ од $(m - 1)^2$ ово је случај за.

$m = 2, 3, 4, 7,$

$(m - 1)^2 = 1, 4, 9, 36,$

$\frac{72}{(m-1)^2} = 72, 18, 8, 2,$

дакле $x = 432, 216, 160, 112$

$y = 216, 72, 40, 16$

Кад изберемо m тако, да буде $\frac{m+1}{(m-1)^2}$ цео број, као

код $m = 2, 3$, где је $(m - 1)^2 = 1, 4,$

дакле $\frac{m+1}{(m-1)^2} = 3, 1$, то ће сљедовати за x и y вредности $x = 432, 216$, $y = 216, 72$, које су већ долазиле и у горњим слоговима.

Зато што је $(x - y)^2 = (y - x)^2$ то чине задоста постављеној једначина ове вредности.

$x = 216, 72, 40, 16,$

$y = 432, 216, 160, 112$

У осталом могу се за x и y вредности у целим бројевима изнаћи кад узмемо за m и разломљене вредности.

Тако је кад н. пр. узмемо

за $m = \frac{3}{5}$, $x = 432$ и $y = 720$,

које вредности чине задоста задатој једначини ;тако се види, да сваки разломљен број од m у виду $\frac{a}{a+1}$ даје за x и y целе бројеве.

189. Сада ћемо још показати са неколико примера, како се могу разрешити квадратне једначине са три и више непознати.

Кад узмемо:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a$

$x + y + z = b$

$x(y + z) = c$

Кад подигнемо другу једначину на квадрат и од ове прву одузмемо, то је

$2xy + 2xz + 2yz = b^2 - a$

$xy + xz + yz = \frac{1}{2}(b^2 - a)$

и од ове трећу једначину кад одузмемо, добијамо

$yz = \frac{1}{2}(b^2 - a) - c = w.$

Из треће једначине сљедује $y + z = \frac{c}{x}$ и кад ову вредност ставимо у другу једначину, излази

$$x + \frac{c}{x} = b \text{ или } x^2 - bx + c = 0$$

Из ове једначине сљедују непосредно за x вредности.

$$x_1 \text{ и } x_2 ; \left[x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right]$$

тако се могу определити y и z из једначина.

$$\left. \begin{array}{l} y + z = b - x_1 \\ y z = \omega \end{array} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} y + z = b - x_2 \\ y z = \omega \end{array} \right\}$$

Познати начини разрешавања дају нам за y и z из оба система относне вредности, y_1 z_1 ; y_2, z_2, и y_3, z_3 ; y_4, z_4 дакле имамо за наведене једначине:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_1, x_1, x_2, x_2, \\ y = y_1, y_2, y_3, y_4 \\ z = z_1, z_3, z_3, z_4 \end{array} \right.$$

Тако налазимо кад се узме за $a = 38$, $b = 10$ и $c = 16$ сљедујућа разрешења:

$$x = 2, 2, 8, 8.$$

$$y = 5, 3, \left(1 + \sqrt{-14}\right), \quad \left(1 - \sqrt{-14}\right)$$

$$z = 3. 5, \left(1 + \sqrt{-14}\right), \quad \left(1 + \sqrt{-14}\right)$$

2. Да се разрешу сљедеће једначине:

$$x + y + xy = a$$
$$x + z + xz = b$$
$$y + z + yz = c$$

Ако свакој од ове три једначине додамо

1, то сљедује

$$x + 1 + y(x + 1) = a + 1$$
$$x + 1 + z(x + 1) = b + 1$$
$$y + 1 + z(y + 1) = c + 1$$

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} (x + 1)(y + 1) = a + 1 \\ (x + 1)(z + 1) = b + 1 \\ (y + 1)(z + 1) = c + 1 \end{array} \right\} \text{ I.}$$

Множењем

$$(x + 1)^2 (y + 1)^2 (z + 1)^2 = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = \pm \sqrt{(a + 1)(b + 1)(c + 1)}$$

кад поделимо ову једначину по реду са сваком једначином системе I. то ће сљедовати збирови $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$

$$\text{зато} \left| \begin{array}{l} z = -1 \pm \sqrt{\frac{(b + 1)(c + 1)}{a + 1}} \\ y = -1 \pm \sqrt{\frac{(a + 1)(c + 1)}{b + 1}} \\ x = -1 \pm \sqrt{\frac{(a + 1)(b + 1)}{c + 1}} \end{array} \right.$$

3. $$\begin{aligned} x + y + z + u &= 8 \\ xy + zu &= 5 \\ xz + yu &= 10 \\ xu + yz &= 2 \end{aligned}$$

кад другу и трећу једначину саберемо,

добијамо $x(y + z) + u(y + z) = 15$

или $(x + u)(y + z) = 15$

Сада сљедује из прве једначине

$x + u = 8 - (y + z)$, коју ако спојимо са оном на послетку изнађеном једначином.

$$(y + z)^2 - 8(y + z) = -15 \text{ или } y + z = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

Зато је $x + y = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$

Истим начином добијамо кад саберемо другу и четврту једначину $(x + z)(y + u) = 7$, и с погледом на прву једначину

$$x + z = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}, \text{ и } y + u = \begin{cases} 1 \\ 7 \end{cases}$$ кад

задржимо најпре горње вредности,

то је $x = 3 - u$, $y = 1 - u$.

$z = 5 - y = 4 + u$.

зато ако н. пр. заменемо у другу једначину.

$$(3 - u)(1 - u) + (4 + u)u = 5.$$

одкуда налазимо $u = \pm 1$, и тако

$$x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, \quad z = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases},$$

Кад напротив узмемо доње вредности,

т. ј. $y + z = 3$, $x + u = 5$,
$x + z = 1$, $y + u = 7$,
то сљедује $x = 5 - u$, $y = 7, - u$,
$z = 3 - y = -4 + u$;

ове вредности кад заменемо у другу једначину добијамо

$$u^2 - 8u + 15 = 0. \text{ а одавде } u = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}.$$

За ове вредности сљедује односно

$$x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}, \quad z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

Тако смо за задати систем једначина нашли сљедујућа разрешења:

$x = 2$	$x = 4$	$x = 0$	$x = 2$
$y = 0$	$y = 2$	$y = 2$	$y = 4$
$z = 5$	$z = 3$	$z = 1$	$z = -1$
$u = 1$	$u = -1$	$u = 5$	$u = 3$

199. *Задатци квадратних једначина са две и више непознате, и неколико виших једначина које се могу свести на квадратне.*

1) $x^2 + y^2 = a$
$x + y = b$

2) $x + y = a$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$

3) $x^2 + y^2 = a$
$x - y = b$

4) $xy = x - y = x^2 + y^2$.

5) $x^2 + y^2 - x - y = a$
$xy + x + y = b$

6) $x^2 + y^2 + x - y = a$
$(x^2 + y^2)(x - y) = b$.

7) $x + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + y = \sqrt{x}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$

[треба имати на уму да је $x - 2\sqrt{xy} + y =$

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)^2$$

8] $x^2 + y^2 + x + y = a$

$xy + x^2 + y^2 = b$

9) $x^2y + xy^3 = a$

$1/x + 1/y = b$

10] $x^2 + y^2 = a$

$$\frac{x+y}{xy} = b.$$

11] $x^2y + xy^2 = a.$

$x^3y^2 + x^2y^3 = b.$

12]. $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{y^2} = a.$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{y} = b$$

[Треба ставити у прим. 12 за $\sqrt[3]{x^2} = u$ и за $\sqrt[5]{y} =$ $= v$, и тражити најпре u и v

13). $x^2y^3 = a$

$x^3y^4 = b.$

кад поделимо другу једначину са првом добијамо $xy = \frac{b}{a}$, и ово кад заменемо у прву једначину).

14). $x^m y^n = a$

$x^u y^v = b$

15]. $x^3 + y^3 = a$

$x + y = b$

(Треба подићи другу једначину зад. 15. на трећи степен, па од ове одузети прву једначину].

16]. $x^3 + y^3 = [x + y]\, xy$

$x^2y + xy^2 = 4xy$

подели прву једначину са $(x + y)$.

17]. $x^3 + y^3 = a$

$xy = b.$

може се довести у овај вид $\left.\begin{array}{r} u + v = a \\ uv = b \end{array}\right\}$

18). $x^4 + y^4 = a$

$x + y = b.$

треба подићи другу једначину на четврти степен и од ове одузети прву, то ће изаћи

$xy\,(4x^2 + 6xy + 4y^2) = b^4 - a$

или $xy\,[4(x^2 + 2xy + y^2 - 2xy)] = b^4 - a.$

или $xy\,(4b^2 - 2xy) = b^4 - a$

19.) $x + xz + yz = a$

$x - y = b$

$y - z = c.$

20). $x\,(y + z) = a$

$y\,(x + z) = b$

$z\,(x + y) = c.$

36.) $\sqrt{6 \pm 12\sqrt{-6}} = 3 \pm 2\sqrt{-1}$.

37). $\sqrt{39 - 12\sqrt{3}} = \ldots\ldots$

38). $\sqrt{88 \pm 6\sqrt{35}} = \ldots\ldots$

39.) $\sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}} =$

40). $\sqrt{-5 - \sqrt{-1}}$

ТРИНАЈЕСТИ ОДСЕК

О ЛОГАРИТМИМА

191. *Кад неки број подижемо узастопце на различите степене, то су изложитељи тих степена логаритми бројева што тако постају.*

Узмимо сада број 5 као основицу, то је $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, и т. д. тако је за основицу 5 2 логаритам од 25, који се пише $2 = log_5 25$, исто је тако $3 = log_5 125$ $4 = log_5 625$, и т. д.

У опште се разумева за $x = log_b a$, да треба подићи b на x ни степен па да изађе количина a т. ј. $b^x = a$.

Кад замислимо да су за одређену основицу (базис) b израчунати логаритми свију узастопних бројева онда скуп тих логаритама јесте логаритамски систем за основицу b; а пошто се може узети сваки број за основицу неког логаритамског система то онда само по себи сљедује, да има небројено много логаритамских система. Овде се изузима основица 1, јер јединица подигнута ма на који степен опет даје један.

Кад пођемо од основне размере $b : 1$, где је b уједно и количник, то је у $b^n : 1$, и b^n количник ове размере па ма n колико било. n показује степен размере $b^n : 1$; и кад узмемо b за основицу *basis* логаритамског строја, то је n логаритам неког броја, а по горњем у неком је смислу и размерни број, па зато су ови изложитељи и добили име Логаритми (од *λόγον ἄριθμος* размерни број).

Претрес једначине $b^x = a$.

Из $b^x = a$, сљедује $x = log_b a$. Предпоставимо да је овде $b > 1$, то ће и b^x у колико x постаје веће све веће бивати.

Кад је $x = 0$, то је $b^0 = 1$, и тако је *нула логаритам од 1* и то ма за који логаритмични строј.

За $x = 1$, имамо $b^1 = b$, дакле $log._b\ b = 1$ т. ј. *логаритам основице у односу на саму основицу свагда је раван 1*

Узмимо даље за $x = 2, 3, 4, \ldots n$, $2 = log\ b^2$, $3 = log\ b^3$, $\ldots\ n = log\ b^n$, или речима *логаритам степена ког је основица базис логаритамског система, раван је степеном изложитељу.*

Кад узмемо поступно за x све вредности 0 до 1, то ће ти бројеви бити редом логаритми бројева од 1 до b; а кад ставимо за x све вредности од 1 до 2, то ће се добити логаритми свију бројева од b до b^2, и т. д. из тога изводимо, *кад лежи а између* b^r и b^{r+1}, *то лежи и логаритам од а између бројева* r и $r + 1$.

Даље сљедује из $b^x = a$, да, ако је a безконачно велико да је и x безконачно велико, зато је једначина $log\ \infty = \infty$

Узмимо x као одречно то ће постојати једначина $b^{-x} = a$, или $1/_{b^x} = a$. У колико је овде x веће, у толико је већа вредност од b^x, па зато је у толико мање $1/b^x$.

За $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ сљедује

$1, 1/_b, 1/_{b^2}, 1/_{b^3}, 1/_{b^4} \ldots\ldots$

$= 1\ b^{-1}, b^{-2}, b^{-3}, b^{-4} \ldots\ldots\ldots\ldots$

т. ј. логаритам од 1 опет је 0, ...

од $1/_b, 1/_{b^2}, 1/_{b^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

односно $-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots$

и у опште $log\ 1/_{b^n} = -n$.

Логаритам свију бројева од 1 до $1/_b$, лежи по томе између 0 и -1, логаритам свију бројева од $1/_b$ до $1/_{b^2}$ лежи између -1 и -2; и у опште, *ако а лежи између* $1/_{b^r}$ и $1/_{b^{r+1}}$ *то лежи и њихов логаритам између* $-r$ и $-(r + 1)$.

Ако узмемо да је бројна вредност од x безконачно велика и одречна, то је $1/_{b^\infty} = 0$, дакле је логаритам 0 безконачно велики, али одречан т. ј. $log\ 0 = -\infty$.

Из досадањег увидили смо, кад је основица логаритма положан број и већи од јединице, да су логаритми свију бројева већих од јединице положни; на против свију бројева мањих од јединице одречни.

Кад би узели $b < 1$, то би били сасвим противни односи.

Да овде неможе бити говора о одречној основици видићемо из тога, што одречан број подигнут на степен, даје час положне, час одречне, а кад што и уображене последтке па се овим путем немогу произвести сви могући стварни бројеви.

Исто тако неће овде бити говор о логаритмима одречних бројева, јер су ови уображени, и немају за нас никакове вредности.

192. *Логаритми једних истих бројева или су једнаки или различити како се кад односе на један исти строј или на разне стројеве.*

Ако је $A = B$ и ако је b базис неког логаритмичног строја, то сљедује, кад је $x = log_b\ A$, а $y = log_b\ B$, да је $A = b^x$ и $B = b^y$, а одатле $b^x = b^y$, која једначина може постојати само онда, кад је $x = y$, зато је $log_b A = log_b B$.

Ако се односи логаритам од A на базис b, а онај од B на базис b_1, то је $A = b^x$ и $B = b_1{}^y$ дакле $b^x = b_1{}^y$.

Ако се разликују b и b_1, онда немогу изложитељи бити једнаки, т. ј. $x = log_b\ A$ и $y = log_{b_1}\ B$ међу собом су различити бројеви.

Ово изговорено правило може се обрнути: т. ј. *једнаким логаритмима одговарају у истим системима једнаки бројеви, а у разним системима разни бројеви.*

Кад је $log._b\ A = log_b B$ и $log_b\ A = x$, а $log_b B = y$, то је $A = b^x$ и $B = b^y$, а због $x = y$ сљедује и $A = B$.

Кад је $log._b A = x$, $log._{b_1}\ B = y$ а сем тога $log._b A = log_{b_1}\ B$, т. ј. $x = y$, то сљедује $A = b^x$, $B = b_1{}^y$, а пошто се b разликује од b_1 то се морају, ма да је $x = y$ степени b^x и $b_1{}^y$ разликовати, дакле ће бити A и B неједнаки бројеви.

193. „Логаритам производа раван је збиру логаритама поједини чинитеља

Ако је $b^x = A$, $b^y = B$,

то је $x = log._b A$. а $y = log._b B$,

$$A \cdot B = b^x \cdot b^y = b^{x+y},$$

зато је $log. (A \cdot B) = log_b b^{x+y} = x + y$.

Заменимо вредности за x и y то је

$$log (A \cdot B) = log._b A + log_b B.$$

Ово правило вреди па ма колико чинитеља да има задати; тако је $log\ ABC = log.\ AB.\ C. = log\ AB + log\ C = log.\ A + log\ B + log\ C$; $log\ 126 = log\ 2 + 2\ log\ 3 + log\ 7$, јер је $126 = 2.\ 3.\ 3 \cdot 7$.

194. *Логаритам количника раван је логаритму дељеника мање логаритму делитеља.*

С погледом на пређашњи §. знамо да је

$$\frac{A}{B} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, \text{ дакле}$$

$$log._b \frac{A}{B} = x - y = log_b A - log_b B.$$

Тако је $log.\ \frac{5m}{3n} = log.\ 5m - log.\ 3n = log.\ 5 +$

$$+ log.\ m - log.\ 3 - log.\ n.$$

$$log.\ \frac{14}{9} = log\ 14 - log\ 9 = log\ 2 + log\ 7 - log\ 3 -$$

$$- log\ 3 = log\ 2 + log\ 7 - 2\ log\ 3.$$

195. „Логаритам степене количине налазимо, кад помножимо изложитеља са логаритмом корена.

Ако је $x = log_b A$, то је $b^x = A$, ако сада подигнемо обе стране на n-ни степен, то је $b^{nx} = A^n$, дакле $log._b A^n = nx = n\ .\ log\ A$.

Ово правило вреди ма за коју вредност од n.

Тако је $log\ \frac{5a^4}{8b^3} = log\ 5 + log\ a^4 - log\ 2^3 - log\ b^3 =$

$$= log\ 5 + 4\ log\ a - 3\ log\ 2 - 3\ log\ b$$

Ако је n разломак у виду $\frac{1}{m}$, то је $log\ A^{1/m} =$

$$= log \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m}\ log\ A, \quad \text{т. ј.}$$

„Логаритам корена раван је логаритму броја под кореним знаком, подељеним са кореним изложитељем."

Тако је н. пр. $log.\ \sqrt[4]{3a^3b^5} = \frac{1}{4}\ log.\ 3a^3b^5 =$

$$= 1/_4\ (log.\ 3 + 3\ log.\ a + 5\ log.\ b)$$

196. *Примери за горња правила.*

1) $Log.\ (a^2 - b^2)^n = n\ log.\ (a^2 - b^2) = n\ log.\ (a + b) \times$
$\times (a - b) = n\ log.\ (a + b) + n\ log.\ (a - b)$.

2) $Log.\ \frac{14a^3b^2c^5}{9m^2n^3} = log.\ 14a^3b^2c^5 - log\ 9m^2n^3 = log.\ 2 +$
$+ log.\ 7 + 3\ log.\ a + 2\ log.\ b + 5\ log.\ c - 2\ log.\ 3 -$
$- 2\ log.\ m - 3\ log.\ n$.

3) $Log.\ 6ab \sqrt[3]{ab^2c} = log\ 2 + log.\ 3 + log.\ a + log.\ b +$
$+ 1/_3\ (log.\ a + 2\ log.\ b + log.\ c) = log.\ 2 + log.\ 3 +$
$+ 4/_3\ log.\ a + 5/_3\ log.\ b + 1/_3\ log.\ c.$

4) $Log. \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}\right)^3} = {}^1/_2\, log. \left(\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}\right)^3 =$

$= {}^3/_2\, log. (a^2 - x^2) - {}^3/_2\, log. (b^2 - y^2) = {}^3/_2\, log.$

$(a + x) + {}^3/_2\, log. (a - x) - {}^3/_2\, log. (b + y) - {}^3/_2\, log. (b - y).$

5.) $Log. \left(15a^n b^m \sqrt{\frac{x^3 y^4}{2c}}\right)^3 = 3\, log. 3 + 3\, log. 5 + 3n\, log. a +$

$+ 3m\, log. b + {}^9/_2\, log. x + 6\, log. y -$

$- {}^3/_2\, log. 2 - {}^3/_2\, log. c.$

6) $Log. x = log. a - 2\, log. b + {}^1/_2\, log. c.$

Да би одавде определили x треба да замислимо, да је

$2\, log. b = log. b^2\ log. a - log. b^2 = \frac{a}{b^2},\ {}^1/_2\, log. c = log. \sqrt{a}$

и најпосле $log. \frac{a}{b^2} + log. \sqrt{c} = log. \frac{a\sqrt{c}}{b^2}$

Зато је $log. x = log. \frac{a\sqrt{c}}{b^2}$, или $x = \frac{a\sqrt{c}}{b^2}$

197. „Из задатог логаритма неког броја, да се изнађе логаритам истог броја за неку другу основицу.

Нека је $x = log_b a$, онда постоји ова једначина $a = b^x$. Да би сада могли изнаћи логаритам од a за основицу b_1, нека је $log_{b_1} a = y$, дакле $a = b_1^{\,y}$, и тако $b^x = b_1^{\,y}$.

Ако узмемо сада са обе стране логаритам с односом па основицу b, то је $x = y\, log_b b_1$ . . . . (1. и на основицу b_1 налазимо $x\, log._{b_1} b = y$ . . . . . (2.

Али је $x = log._b a$ и $y = log_{b_1} a$, и кад заменемо ове вредности у једначину (1 или (2. то ће бити

$$log_{b_1} a = \frac{1}{log_b b_1} \cdot log_b a \text{ или}$$

$$log._{b_1} a = log._{b_1} b\ \ log_b a, \text{ и кад поделимо јед. (2}$$

са јед. (1 то ће изаћи $log_{b_1} b = \frac{1}{log._b b_1}$ и тако сљедује најпосле $log._{b_1} a = \frac{1}{log._b b_1} \cdot log._b a$ . . . . (3.

Ова једначина показује, „да се логаритам неког броја за опредељену основицу, претвара у логаритам за неку другу основицу, кад поделимо прво задати логаритам са логаритмом нове основице, с односом на прво задату основицу.

Овде зовемо $\frac{1}{log_b b_1}$ модул за преобраћање; и ако је овај познат т. ј. = М, то налазимо из $log_{b_1} a = M\, log._b a$, како се логаритми бројева неког опредељеног строја простим множењем са Модулом, преобраћају у логаритме, који одговарају другој основици.

По горе постављеној једначини је $log_{b_1} A = M . log_b A$, исто тако $log_b B = M . log._b B$, дакле $log_{b_1} A : log_{b_1} B = log._b A : log._b B$, т. ј. „да је размера логаритма два броја у сваком логаритмичном строју једнака.

Ово вреди и за више бројева.

Бригови или прости логаритми.

198. Овде се разуме онај логаритмични строј, ког је базис број 10. Зато су логаритми ових бројева 1, 10, 100, 1000, птд. т. ј. 0, 1, 2, 3, ... „дакле су логаритми савршених степена од 10 цели бројеви, и на против су логаритми свију други свршени бројева несвршени."

Ово можемо доказати кад узмемо да је a цео број, но тако, да није потпуни степен од 10. Кад би дакле могао бити $log. a = \frac{m}{n}$ т. ј. раван неком свршеном разломку који је доведен на најмање наименовање, онда би морала постојати једначина $m^{\frac{m}{n}} = a$ или $10^m = a^n$, а пошто је 10 сложено из чинитеља 2 и 5, дакле 10^m из 2^m и 5^m, то је и a исто тако сложено из простих чинитеља 2 и 5. Нека је дакле $a = 2^p . 5^q$, то је $2^m . 5^m = 2^{np} . 5^{nq}$, која једначина може постојати само онда, кад је $m = np = nq$, дакле $\frac{m}{n} = p = q$ т. ј. да показује цео број. „Зато неби било умесно, узимање, да може бити логаритам целог броја свршен разломак."

Исто тако неможе бити логаритам разломљених бројева свршен разломак. Јер кад би постојало, да је $log.\ \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, онда би морало постојати $10^{\frac{m}{n}} = \frac{a}{b}$, а то није могућно, кад се узме да су m и n относно прости бројеви, јер $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ неможе никада имати у резултату свршен разломак.

Примедба. Свршени разломци могу бити само логаритми бројева овога вида $\sqrt[n]{10^m}$, јер $log\ 10^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$

199. Знамо да је логаритам од 1 раван 0, а логаритам од 10 = 1; зато леже логаритми свију једноцифрени бројева између 0 и 1. Али је због $log.\ 10 = 1$ и $log.\ 100 = 2$, и по томе ће лежати логаритми свију двоцифрени бројева између 1 и 2, т. ј. логаритам неког двоцифреног броја = 1 више неком десетном разломку.

У опште лежи логаритам неког $(n+1)$ цифреног броја између цели бројева n и $(n+1)$, дакле раван n више неком десетном разломку, јер сваки $(n+1)$ цифрени број лежи између 10^n и 10^{n+1}.

Цео број што долази у логаритму зове се з н а ч и ц а (карактеристика). а десетни разломак мантиса или просто д е с е т н и д е о логаритма.

З н а ч и ц у (карактеристику) добијамо непосредно из самог задатог броја, којег се логаритам тражи.

„Значица је свагда мања у један од броја цифара задатог броја, којег се логаритам тражи"

Значица показује и обратно, колико цифара има број, коме одговара задати логаритам.

Све што смо до сада показали може се применити и на смешане бројеве, т. ј. целе бројеве и чисте разломке и онда се може из значице неког логаритма определити, колико цифара мора имати цео број.

200. Пошто већем броју одговара већи логаритам, то следује, „да су логаритми свију чисти разломака одречни."

Тако је $log.\ \frac{a}{b} = log. a - log. b$ = одречном броју, ако је $a < b$.

Знамо да је логаритам од 1 раван нули и логаритам од $^1/_{10} = -1$, $log.\ \frac{1}{10^2} = -2$, $log.\ \frac{1}{10^3} = -3$ и т. д. то следује, ако $\frac{a}{b}$ лежи између 1 и $\frac{1}{10}$, да лежи логаритам од $\frac{a}{b}$ између 0 и -1, за $\frac{1}{10} > \frac{a}{b} > \frac{1}{10^2}$, лежи логаритам од $\frac{a}{b}$ између -1 и -2, и ако је у опште

$$\frac{1}{10^n} > \frac{a}{b} > \frac{1}{10^{n+1}},$$ то лежи логаритам од $\frac{a}{b}$ између $-n$ и $-(n+1)$.

Ако тражимо као што је обично удобније, за логаритам чистог разломка да буде десетни део положан, дакле само значица одречна, то ћемо ово постићи овако:

Нека је $log.\ a = \alpha \cdot m$, $log.\ b = \beta \cdot m_1$, дакле

$$log.\ a - log.\ b = \alpha \cdot m - \beta \cdot m_1 = -\gamma \cdot m_2 =$$
$$= (\gamma + 1) - \gamma \cdot m_2 - (\gamma + 1) = 0 \cdot m_3 - (\gamma + 1);$$

Тако је $log.\ \frac{23}{4370} = log.\ 23 - log.\ 4370 = 1{\cdot}3617278 -$

$$-\ 3{\cdot}6404814 = \left\{ \begin{array}{l} 4{\cdot}3617278 - 3 \\ 3{\cdot}6404814 \\ \hline 0{\cdot}7212464 - 3 \end{array} \right.$$

$$= log.\ \frac{23}{4370}.$$

201. Ако је a $(r+1)$ цифрени број и да се изнађе логаритам од $\frac{a}{10^n}$, то је $log.\ \frac{a}{10^n} = log.\ a - n$.

Али је $log.\ a = r \cdot m$, где показује r значицу а m десетни део, зато је $log\ \frac{a}{10^n} = r \cdot m - n = (r - n) + 0 \cdot m$.

Ако је $r > n$, то је $(r - n)$ положно и ова значица показује, да у $\frac{a}{10^n}$, разломку предходи $(r - n + 1)$ место цели.

Ако је $r = n$ то сљедује да је у $\frac{a}{10^n}$ попуњено само место где јединице стоје са једном цифром, зато је

$$log.\ \frac{a}{10^n} = 0 \cdot m.$$

Но ако је $r < n$, и рецимо $r - n = -p$, онда ово показује, да у задатом десетном разломку почиње прва цифра на p-ом десетном месту.

Ово пишемо као што смо показали у предходном §.

$$log.\ \frac{a}{10^n} = 0 \cdot m - p.$$

1. Кад је обратно задат логаритам са одречном значицом, то је одговарајући број такав десетни разломак, за који знамо, да добија цифру тек на извесном десетном месту, и то на опом колико одречна значица има јединица.

2 Кад се у десетном броју текући ред цифара не мења, то ће остати та иста сказаљка за одговарајући логаритам, па и онда, кад се вредност десетног разломка промени премештањем десетне тачке на произвољно место.

Јер ако је $log.\ a = \alpha \cdot m = \alpha + 0 \cdot m$, то је $log.\ a \cdot 10^r =$

$$= log.\ a + r = (\alpha + r) m = (\alpha + r) + 0 \cdot m \quad \text{и}$$

$$log.\ \frac{a}{10^r} = log.\ a - r = (\alpha - r) + 0 \cdot m$$

Но како је предпостављено да је r цео број, то овај упливише само на значицу и никако на десетни разломак $0 \cdot m$ т. ј. на сказаљку, која по томе у свима случајима једна иста остаје,

Тако је н. пр. $log.\ 567 = 2{\cdot}7535831$

$log.\ 5{\cdot}67 = 0{\cdot}7535831$

$log.\ 0{\cdot}0567 = 0{\cdot}7535831 - 2$

$log.\ 5670 = 3{\cdot}7535831$

— — — — —

202. Што се тиче рачунања логаритма за основицу 10, треба да наведемо само то, да се овде гледа поглавито на разрешење једначине $10^x = a$. Да би се могло увидети, како се може определити x, кад је задата вредност за a, замислићемо две овакве вредности α и $\alpha + 1$, између који лежи x, т. ј. $\alpha < x < \alpha + 1$: зато се може узети за $x = \alpha + \frac{1}{y}$ а овде је $y > 1$.

И тако је $10^{\alpha + \frac{1}{y}} = a$ или $10^\alpha \cdot 10^{\frac{1}{y}} = a$, а кад означимо $a : 10^\alpha$ са b, то је $10^{\frac{1}{y}} = b$ или $b^y = 10$. Ако су сада β и $\beta + 1$ цели бројеви између којих стоји y, онда се може узети да је $y = \beta + \frac{1}{z}$, и тако је $b^\beta \cdot b^{\frac{1}{z}} = 10$, и $10 : b^\beta = c$, из тога сљедује $b^{\frac{1}{z}} = c$ или $c^z = b$. Ако сада z лежи између бројева γ и $(\gamma + 1)$, онда можемо ставити да је $z = \gamma + \frac{1}{u}$ па кад овако продужимо радити, то ћемо добити за x овај верижан разломак

$$x = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{ и т. д.}$$

а овај сведен даје вредности за x са опредељеним степеном тачности.

Логаритамске таблице.

203. Овде разумемо састављање логаритама узастопце сљедујућих бројева од 1 до 1.000, 10.000 или 100.000 па и преко тога. Од ових бројева у таблицама су заведене само мантисе и то са 5, 6 и 7 десетних; јер значице налазимо врло лако као што смо већ показали.

Узмимо сада таблице, у којима су израчунате сказаљке са 7 децимала, то ћемо у овима наћи логаритме (њихове сказаљке) свију цели бројева од 1 до 100.000 непосредно означене.

Тако је $log.$ 317 = 2·5010593

„ 3174 = 3·5016069

„ 31745 = 4·5016753

напротив логаритам неког шестцифреног броја, рецимо $log.$ 317452 неби могли у таблицама непосредно изнаћи, зато ћемо показати за овакав случај, како тражимо логаритам оних бројева који се неналазе потпуно у таблицама.

„Тражење логаритама оних бројева, који се неналазе тачно у таблицама.

204. Логаритми већих бројева мање се разликују једни од других, но што се разликују логаритми мањих бројева. Јер замислимо само да леже између 100 и 1.000 много више целих бројева, но што леже између 10 и 100, а пошто су значице свију двоцифрених бројева = 1; свију троцифрених бројева = 2, то сљедује да морају разлике логаритама узастопних троцифрених бројева бити мање, од логаритама узастопних двоцифрених бројева. Још мање ће бити разлике логаритама узастопних четвороцифрених или петцифрених бројева. Узмимо ове четвороцифрене бројеве.

2561. 2562, 2563, 2564, 2565, ... то су њихови логаритми:

$log.$ 2561	= 3·4084096)	. . .	$log.$ разлике
„ 2562	= 3·4085791)	. . .	0·0001695
„ 2563	= 3·4087486)	. . .	0·0001695
„ 2564	= 3·4089180)	. . .	0·0001694
„ 2565	= 3·4090874)	. . .	0·0001694

Исто тако

$log.$ 23593	= 4·3727832)	. . .	$log.$ разлике
„ 23594	= 4·3728016]	. . .	0·0000184
„ 23595	= 4·3728200)	. . .	0·0000184
23596	= 4·3728384)	. . .	0·0000184
„ 23597	= 4·3728568)	. . .	0·0000184
„ 23598	= 4·3728752)	. . .	0·0000184

види се из првог примера, да логаритми неких четири цифрених бројева који се само за једну јединицу разликују постају већи скоро са једнаком разликом (диференцијом.) Ово исто видимо у другом примеру још боље где су узети логаритми у застопних петцифрених бројева. Из тога можемо извести, да кад број неки за 1, 2, 3, 4, 5, . . . јединица постане већи да и одговарајући логаритми за 1, 2, 3, 4, 5, . . . струку разлику већи бивају (овде 0·0000184)

Ово правилно увећавање мантисе 4 или 5 цифрених бројева; показује се још уредније кад се узастопни бројеви за мање од целе јединице разликују, тако, да се за 7 цифрене мантисе ово правило поставити може:

Код узастопних 4 или више — цифрених бројева, имају се њихове разлике скоро исто онако, као разлике њиних логаритама."

Ако су н. пр. a, b, и c 4 или више цифрени бројеви који се врло мало разликују и ако је $a < b < c$, то ће стајати сразмера

$$c - a : b - a = log.\, c - log.\, a : log.\, b - log\ a.$$

Ако сада узмемо задате бројеве a и c којих су логаритми познати, то ће сљедовати из горе постављене сразмере:

$$log.\, b = log\, a + \frac{b - a}{c - a} \cdot \varDelta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m$$

Кад означимо $log\ c - log\, a$ са $\varDelta$.

Ово можемо објаснити, кад узмемо да определимо логаритам од 678454. Пошто има овде само мантиса да се изнађе то ћемо узети овај број 67845·4 (= b).

Логаритми оближњих целих бројева јесу,

$$log.\ 67845 = 4{\cdot}8315178\ (= log.a)$$
$$„\ \ 67846 = 4{\cdot}8315242\ (= log.c)$$

$$\varDelta = 0{\cdot}0000064$$

Због $b - a = 0{\cdot}4$, $c - a = 1$,

слједује $\dfrac{b - a}{c - a} \times \varDelta = 0{\cdot}4. \times 0{\cdot}0000064 = 0{\cdot}00000256$,

или са 7 децимала $0{\cdot}0000026$

Тако је $log.\ 67845{\cdot}4 = 4{\cdot}8315178 + 0{\cdot}0000026$

$= 4{\cdot}8315204$ и тако најпосле

$log.\ 678454 = 5{\cdot}8315204$.

Да би определили $log.\ 3426158$, узмимо најпре број

$34261{\cdot}58$, $(= b)$

Тако је $log.\ 34261 = 4{\cdot}5348000\ [= log.a)$

$$log.\ 34262 = 4{\cdot}5348127\ (= log c)$$

$$\varDelta = 0{\cdot}0000127$$

Овде је $b - a = 0{\cdot}58$, $c - a = 1$,

зато је $\dfrac{b - a}{c - a} \cdot \varDelta = 0{\cdot}58 \times 0{\cdot}0000127 = 0{\cdot}000007366$

или кад застанемо код 7 децимале $0{\cdot}0000074$.

Дакле $log.\ 34261{\cdot}58 = 4{\cdot}5348000$
$0{\cdot}0000074$

$4{\cdot}5348074$

или $log.\ 3426158 = 6{\cdot}5348074$,

Кад је дакле број већи но што има у таблицама, то ће мо изнаћи по горе наведеном начину за задати број врло приближан логаритам. Скоро у свима логаритамским таблицама израђени су ови рачуни под именом сразмерних делова (partes proportionales), тако, да се ови могу непосредно из таблица вадити и додати логаригму понајближег мањег броја како се ради са овим сразмерним деловима показано је у уводу свију логаритамски таблица, код већих бројева није нужно због показаног додавања да тражимо логаритме узастопних за јединицу разликујућих се бројева; размак оних бројева, којих се логаритми могу узети као познати може и већи бити, као што је у слједећем примеру

Нека је $log\ 67314 = 4{\cdot}8281054\ (= log\ a$

$$log.\ 67318 = 4{\cdot}8281312\ (= log.c)$$

да се определи $log.\ 67316\ (= log.b)$

Због $b - a = 2$, $c - a = 4$ и $\varDelta = 0{\cdot}0000258$

слједује $\dfrac{b - a}{c - a} \times \varDelta = 0{\cdot}0000129$, зато $log.\ 67316$

$= 4{\cdot}8281054 + 0{\cdot}0000129 = 4{\cdot}8281183$.

Да се нађе број кад му је задат логаритам.

205. Овде ћемо обратним путем ићи. Кад се налази логаритам тачно у таблици, то се налази у овој и одговајући број; ако пак неможе логаритам тачно да се нађе у таблици онда се по преходном §. има да мотри на ово: Нека је задат најпре логаритам неког непознатог броја x, $log.\ x = \beta$, а томе броју β најближи логаритми између који овај лежи нека су α и γ, а овима одговарајући бројеви a и $(a + 1)$; дакле по томе лежи и x између a и $(a + 1)$.

Сада постоји по предходном §. ова сразмера;

$$x - a : (a + 1) - a = log.\ x - log.\ a : log.(a + 1) - log.\ a$$

или x — a : 1 = β — α : γ — α а одавде

$$x = a + \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = a + \frac{\beta - \alpha}{\Delta}\ .$$

Ово исто добијамо кад нађемо x из једначине (m §. 204. јер је

$$\log b = \log. x = \log. a + \frac{x - a}{c - a}\cdot\Delta = \beta,$$ a одавде налазимо кад је $c - a = 1$, горњу вредност за x.

Примери.

1. Нека је $\log. x = 4\cdot5143216 = \beta$.

Тако налазимо да су први најближи логаритми

$4\cdot5143086\ [= \alpha]$ и $4\cdot5143219\ [= \gamma]$,

одговарајући бројеви $32682\ (= a)$ и $32683\ [= a + 1]$

Сада је $\beta - \alpha = 0\cdot0000130$, $\Delta = 0\cdot0000133$,

па зато $$\frac{\beta - \alpha}{\Delta} = \frac{0\cdot0000130}{0\cdot0000133} = \frac{130}{133} = 0\cdot977\ \ldots.$$

дакле $x = 32682 + 0\cdot977 \ldots. = 32682\cdot977 \ldots..$

2. Да се определи из $\log. x = 0\cdot6432147 - 3$ број x.

Пошто само сказаљка показује след цифара (§. 201. (2] то ћемо тражити y из $\log. y = 4\cdot6432147$.

Тако је $\alpha = 4\cdot6432058 \ldots.\ a = 43975$

$\gamma = 4\cdot6432157 \ldots.\ a + 1 = 43976$

$\Delta = 0\cdot0000099 = 0\cdot{}^{5}99$

$$a\ y = 43975 + \frac{0\cdot{}^{5}89}{0\cdot{}^{5}99} = 43975 + 0\cdot8989 \ldots.,$$

$= 43975\cdot8989 \ldots\ldots$

по томе $x = 0\cdot004397589 \ldots. \ldots$

Примена логаритама у рачунима.

206. Множење делење подизање на степен и извлачење корена из особених бројева врши се као што смо видели у §.§. 193 -- 195. по извесним правилима.

Све ове операције најлакше и најбрже вршимо помоћу логаритама Неколико примера показаће нам како се ово ради:

а. Множење

1. Да се помноже чинитељи 378 и 416.

Да узмемо овај производ од $378 \times 416 = x$,

то је $\log. x = \log. 378 + \log. 416$

$\log. 378 = 2\cdot5774918$

$\log. 416 = 2.6190933$

$\log. x = 5\cdot1965851$

Овом логаритму одговара скоро број $x = 157248$, зато је $378\cdot416 = 157248$.

2. Да се помножи $31\cdot54 \times 0\cdot0365 \times 117\cdot21 \times 3\cdot0196 = x$

$\log.$

$31\cdot54 = 1\cdot4988617$

$0\cdot0365 = 0\cdot5622929 - 2$

$117\cdot21 = 2\cdot0689647$

$3\cdot0196 = 0\cdot4769494$

$\log. x = 4\cdot6100687 - 2$

или $\log. x = 2\cdot6100687$

Овом логаритму одговара по таблици број $407\cdot4466$, који је производ од четири задата чинитеља.

Ови нам примери показују, да су узети логаритми поједини чинитеља из таблице и да се за збир њихов тражи одговарајући број. А овај је тражени производ.

б) Делење.

Треба да нађемо логаритам дељеника и дељитеља, па да одузмемо од првог овај други, а за ову разлику логаритама да тражимо одговарајући број, који је тражени количник.

1. $7{\cdot}4192 : 316{\cdot}54 = x.$

$log.\ 7{\cdot}4192 = 0{\cdot}8703571$

$log.\ 316{\cdot}54 = 2{\cdot}5004286.$

Да би могли овде разлику добити, најпрећемо додати умалимку 2 и одузети 2 јединице,

то је $log.\ 7{\cdot}4192 = 2{\cdot}8703571 - 2$

$log.\ 316{\cdot}54 = 2{\cdot}5004286$

$log.\ x = 0{\cdot}3699285 - 2.$

Овом логаритму одговара број

$x = 0{\cdot}02343843$, дакле је $7{\cdot}4192 : 316{\cdot}54 =$

$= 0{\cdot}02343843.$

2. Да се израчуна $x = \dfrac{33{\cdot}4 \times 0{\cdot}032}{0{\cdot}0059 \times 341{\cdot}7}$

$log.\ 33{\cdot}04 = 1{\cdot}5237465$

$log.\ 0{\cdot}032 = 0{\cdot}5051500 - 2$

$2{\cdot}0288965 - 2 \ldots\ldots [\alpha$

$log.\ 0{\cdot}0059 = 0{\cdot}7708520 - 3$

$log.\ 341{\cdot}7 = 2{\cdot}5336450$

$3{\cdot}3044970 - 3 \ldots\ldots\ldots (\beta$

Разлика логаритама у $(\alpha$ и $[\beta$.

$1{\cdot}0288965 - 1$

$0{\cdot}3044970$

$log\ x = 0{\cdot}7243995 - 1$

и $x = 0{\cdot}5301509$

в) Подизање на степен.

1. $(12{\cdot}34)^5 = x$

Одавде је $log.\ x = 5 \times log.\ 12{\cdot}34$

$= 5 \times 1{\cdot}0913152$

$= 5{\cdot}4565760.$

Овом логаритму одговара број $286138{\cdot}2$,

дакле је $(12{\cdot}34)^5 = 286138{\cdot}2 \ldots\ldots$

2. $\left(\dfrac{0{\cdot}0347}{0{\cdot}1262}\right)^3 = x.$

$log.\ x = 3\ (log.\ 0{\cdot}0347 - log.\ 0{\cdot}1262)$

$log.\ 0{\cdot}0347 = 0{\cdot}5403295 - 2$

$log.\ 0{\cdot}1262 = 0{\cdot}1010594 - 1$

$-\qquad +$

разлика $0{\cdot}4392701 - 1$

$$log. x = 3 \times (0{\cdot}4392701 - 1) =$$

$$= 1{\cdot}3178103 - 3$$

или $log. x = 0{\cdot}3178103 - 2$

дакле $x = 0{\cdot}0207879 \ldots\ldots = \left(\frac{0{\cdot}0347}{0{\cdot}1262}\right)^3$.

г.) Извлачење корена.

1. Да се определи $\sqrt[5]{798{\cdot}43} = x$.

$$log. x = \tfrac{1}{5}\, log.\ 798{\cdot}43 = \tfrac{1}{5} \,.\, 2{\cdot}9022368$$

$$log. x = 0{\cdot}5804474$$

овде је одговарајући број $3{\cdot}805813$. . . . . . .

Дакле је $\sqrt[5]{798{\cdot}43} = 3{\cdot}805813$. . . . .

2. $\sqrt[7]{0{\cdot}004698} = x$.

$$log. x = \tfrac{1}{7}\, log.\ 0{\cdot}004698 = \tfrac{1}{7} \,.\, (0{\cdot}6719130 - 3).$$

Да би овде у $0{\cdot}6719130 - 3$ могли делити са 7 па да изађе значица као цео број, што према нашим таблицама треба да буде, то ћемо додати и одузети толико јединица, да одречна значица буде раздељива са бројем 7.

Зато ћемо написати у место $0{\cdot}6719130 - 3$, $4{\cdot}6719130 - 7$ зато $log. x = \tfrac{1}{7}\,(4{\cdot}6719130 - 7) = 0{\cdot}6674161 - 1$ а овоме одговара број $0{\cdot}4649605$,

зато је $\sqrt[7]{0{\cdot}004698} = 0{\cdot}4649605$.

3. Да се израчуна $x = \dfrac{-\,0{\cdot}214\left(\sqrt[3]{16{\cdot}4}\right)^2}{5\sqrt{7{\cdot}1\,\sqrt[4]{0{\cdot}312}}}$

Ако ћемо овај израз у логаритмичном смислу да израдимо, то ћемо узети прво апсолутну вредност од x и тек после пред ову бројну вредност поставити знак (—).

Ако означимо апсолутну вредност броја x са a.

то је $x = -\,a$

$$log.\ a = log.\ 0{\cdot}214 + \tfrac{2}{3}\, log.\ 16{\cdot}4 - log.\ 5 -$$

$$- \tfrac{1}{2} \,.\, (log.\ 7{\cdot}1 + \tfrac{1}{4}\, log.\ 0{\cdot}312).$$

$$log.\ 0{\cdot}214 = 0{\cdot}3304138 - 1$$

$$\tfrac{2}{3}\, log.\ 16{\cdot}4 = 0{\cdot}8098958$$

$$1{\cdot}1403096 - 1$$

$$log.\ 5 = 0{\cdot}6989700$$

$$\tfrac{1}{2}\, log.\ 7{\cdot}1 = 0{\cdot}4256292$$

$$\tfrac{1}{8}\, log.\ 0{\cdot}312 = 0{\cdot}9367693 - 1$$

$$2{\cdot}0613685 - 1$$

$$= 1{\cdot}0613685$$

дакле $log.\ a = 1{\cdot}1403096 - 1$

$$-\ 1{\cdot}0613685$$

$$0{\cdot}0789411 - 1$$

дакле $\qquad a = 0{\cdot}1199336 \qquad$ и зато

$$x = -\,0{\cdot}1199336 \quad . \; . \; . \; . \; .$$

207. *Декадна допуна.* Кад неки број допунимо до понајближе више декадне јединице, онда се овај допуњујући број зове *декадна допуна.* Тако је за 37 декандна допуна = 63, јер је 37 + 63 = 100.

Декадна допуна неког логаритма јест допуна овога до 10. Тако је *log.* 519 = 2·7151674, дакле је декадна допуна

$$log.\ 519 = 7{\cdot}2848326.$$

Ова се декадна допуна примењује најкористније при одузимању, јер тада сабирамо у место да одузимамо. Зато можемо у место $a - b$ написати $a + (10 - b) - 10$,

јер је $\qquad 10 - b =$ дек. доп. b.

Зато је $\quad a - b = a +$ дек. доп. $b - 10$. . . . (*m*

Тако је $log.\ \dfrac{95}{213} = log.\ 95 - log.\ 213 = log.\ 95 +$ дек. доп.

$$log.\ 213 - 10 = \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}9777236 \\ 7{\cdot}6716204 \end{matrix} \right\} - 10$$

$$9{\cdot}6493440 \ - 10$$

или $= 0{\cdot}6493440 - 1$

Али је с погледом на једначину (*m*

$$log.\ \frac{ab}{cd} = log.\ a + log.\ b + \text{дек. доп. } log.\ c +$$

$$+ \text{ дек. доп. } log.\ d - 20.$$

Н. пр. за $log.\ \dfrac{19{\cdot}5\ .\ 0{\cdot}2354}{29{\cdot}31.16{\cdot}04.0{\cdot}312}$ имамо:

	log. 19·5	=	1·2900346
	log. 0·2354	=	0·3718065 — 1
дек. доп.	*log.* 29·31	=	8·5329842 — 10
дек. доп.	*log.* 16·04	=	8·7947956 — 10
дек. доп.	*log.* 0·312	=	10·5058454 — 10
			29·4954663 — 31

зато је *log.* разломка = 0·4954663 — 2.

208. *Гаусови логаритми.* Ми смо показали како се логаритамски изводе рачуни у виду производа, количника, подизања на степен и извлачења корена; али се није ништа споменуло о логаритамском рачунању збира и разлике. О чему ћемо овде у кратко ово навести.

Замислимо два ступца обележена са писменима A и B, у којима се налазе относно логаритми два за јединицу разликујућа се броја. Замислимо сада да су логаритми речени бројева $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a}{b} + 1$, у место који смо узели писмена A и B.

Ако је сада задат log. a и log. b па ако се тражи да изнађемо log. $(a + b)$ или log. $(a - b)$, то ћемо овако поступати:

Треба тражити у ступцу A, log. a — log. b = log. $\dfrac{a}{b}$,

онда означава до ове стојећи број у B, log. $\left(\dfrac{a}{b} + 1\right)$.

Али је log. $\left(\dfrac{a}{b} + 1\right)$ = log. $(a + b)$ — log. b = B,

зато је log. $(a + b)$ = log. $b + B$ . . . . . (α

Да сада изнађемо log. $(a - b)$, треба да нађемо

log. a — log. b = log. $\dfrac{a}{b}$ у ступцу B, и да узмемо до ове

стојећи из A, log. $\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)$.

Због $\log.\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log.(a - b) - \log. b$ налазимо

$$\log.(a - b) = \log. b + A \ldots (\beta$$

Из горње две једначине (α и (β нашли смо ово правило: „треба тражити $\log. a - \log. b$ у ступцу A или B, како се кад има да изнађе $\log.(a + b)$ или $\log.(a - b)$, и да узмемо до њега стојећи логаритам, (односно B или A) и овај да додамо $\log. b$

У *Vittstein*-овим логаритамским таблицама).

Изложитељне једначине.

209. „Једначина у којој долази непозната као степени или корени изложитељ зове се, изложитељна једначина.

1. Показано је у §. 191. како се налази x из једначине $b^x = a$. Помоћу логаритмичне таблице налазимо x кад је задато a и b, треба само узети логаритам са обе стране једначине, и онда је у овом примеру.

$$x \times \log. b = \log. a \quad \text{одкуда слједује}$$

$$x = \frac{\log. a}{\log. b}.$$

2. Да се разреши једначина $64 \cdot 7^{x-1} = 49 \cdot 8^{x-1}$.

Тако је $\log. 64 + (x - 1) \log. 7 = \log. 49 + (x - 1) \log. 8$

или $2 \log. 8 + (x - 1) \log. 7 = 2 \log. 7 + (x - 1) \log. 8$

$$3 \log. 8 + x \log. 7 = 3 \log. 7 + x \cdot \log. 8$$

$$x (\log. 7 - \log. 8) = 3 (\log. 7 - \log. 8)$$

дакле $x = 3$.

Ову смо једначину могли разрешити и овако:

$$8^2 \cdot 7^{x-1} = 7^2 \cdot 8^{x-1}$$

ако разделимо ову једначину са $8^2 \cdot 7^2$, то је

$$7^{x-3} = 8^{x-3}$$

$$\text{или } \left(\frac{7}{8}\right)^{x-3} = 1$$

$(x - 3) \log. \frac{7}{8} = 0$, и тако $x - 3 = 0$ или $x = 3$.

3. Ако је $\sqrt[x]{4} = \frac{2}{3}\sqrt[2x]{20}$.

Из тога је $\log. 3 + \frac{1}{x} \cdot \log. 4 = \log. 2 + \frac{1}{2x} \log. 20$

$$2x \log. 3 + 2 \log. 4 = 2x \log. 2 + \log. 20$$

$$2x (\log. 3 - \log. 2) = \log. 20 - 2 \log. 4$$

$$\log. 3 = 0{\cdot}4771213 \qquad \log. 20 = 1{\cdot}3010300$$

$$\log. 2 = 0{\cdot}3010300 \qquad 2 \log. 4 = 1{\cdot}2041200$$

$$0{\cdot}1760913 \qquad\qquad 0{\cdot}0969100$$

$$x = \frac{\log. 20 - 2 \log. 4}{2 (\log. 3 - \log. 2)} = \frac{0{\cdot}0969100}{0{\cdot}3521826} = 0{\cdot}27517\ldots\ldots$$

4. $a^{x^2+px+q} = b$.

$$(x^2 + px + q) \log. a = \log. b.$$

$$x^2 + px + q = \frac{\log. b}{\log. a}$$

$$x^2 + px = \frac{\log. b}{\log. a} - q$$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4\left(\frac{\log. b}{\log. a} - q\right)}}{2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2 \log. a + 4 \log. b - 4q \log. a}{\log. a}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p^2 - 4q) \log. a + 4 \log. b}{\log. a}}$$

5. $a^{\alpha x + \beta} = b . \sqrt[x]{c^{\gamma x + \delta}}$ из тога је:

$$(\alpha x + \beta) \log. a = \log b + {}^1/_x (\gamma x + \delta) \log. c,$$

$$x (\alpha x + \beta) \log. a = x \log. b + (\gamma x + \delta) \log. c,$$ и уређено

$$x^2 . \alpha \log. a + x . (\beta \log. a - \log. b - \gamma \log. c) = \delta \log. c$$

или

$$x^2 + \frac{\beta \log. a - \log. b - \gamma \log. c}{\alpha \log. a} x = \frac{\delta \log. c}{\alpha \log. a}$$

6. $a^{b^x} = c$,

Пошто је овде изложитељ од количине a, b^x, то сљедује

$$b^x . \log. a = \log. c,$$

и кад се још једанпут узме логаритам,

$$x \log. b + \log. \log. a = \log. \log. c$$

дакле $x = \dfrac{\log. \log. c - \log. \log. a}{\log. b}$

Примедба. Ако је логаритам неког броја положан, то неће сметати да од њега поново узмемо логаритам. У том смислу разумева се $\log. \log. m$, исто тако разумемо шта значи

$$\log. \log. \log. m.$$

210. Исто тако, као што је горе показано, радићемо, кад су задате две или више једначине са две или више непознате и кад ове у опште или од части долазе као изложитељи

Н. пр. $x + y = a$

$$b^{x+\alpha} = c^{y+\beta}.$$

Кад се из друге једначине узме логаритам добијамо,

$$(x + \alpha) \log. b = (y + \beta) \log. c,$$

или $x . \log. b - y . \log. c = \beta . \log. c - \alpha \log. b$.

Ова једначина кад се споји са $x + y = a$ даје x и y разрешено по једном од познатих метода.

Примери за логаритамско рачунање.

1. $\log. (2 . 3 . 13 . 17 . 7 . 9 . 11)$?
2. Да се нађе логаритам за бројеве 20, 200, 2000, 20000.
3. Да се нађе логаритам за бројеве 13, 130, 1300, 13000, 130000.
4. $3{\cdot}179 \times 0{\cdot}3148 \times 2{\cdot}314 = 2{\cdot}3157337 \ldots\ldots$
5. $\dfrac{17{\cdot}3159}{19{\cdot}014} = 0{\cdot}910692 \ldots\ldots$
6. $\dfrac{16{\cdot}215}{0{\cdot}063} \times \dfrac{1{\cdot}012}{14{\cdot}327} = 18{\cdot}18032 \ldots$
7. $3\frac{1}{2} \times 7\frac{5}{12} \times 6\frac{1}{3} = 164{\cdot}4028 \ldots$
8. $\log. (a . 10^n)$
9. $\log. (p + q) (r + s)$
10. $\log. (m^2 - n^2)$.
11. $\log. (1409 : 654)$,
12. $\log. {}^{11}/_3$; $\log. {}^{17}/_{11}$; $\log. 1{}^4/_9$.
13. $\log. 0{\cdot}1$, $\log. 0{\cdot}01$, $\log. 0{\cdot}001$, $\log. 0{\cdot}0001$,
14. $\log. 0{\cdot}7$, $\log. 0{\cdot}07$, $\log. 0{\cdot}007$, $\log. 0{\cdot}0007$,

15. $0{\cdot}19326^5 = 0{\cdot}0002695$ . . .

16. $0{\cdot}73419 \times 5{\cdot}014)^4 = 183{\cdot}6416$ . . . .

17. *log.* $(a : 10^n)$

18. *log.* (7^5), *log.* (11^9), *log.* (17^3).

19. Колики је логаритам од 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

20. $[(1{\cdot}125)^3]^7 = 11{\cdot}86322$ . . . . . .

21. *log.* 11^{-7}.

22. *log.* $\left(\frac{13}{7}\right)^{-3}$

23. *log.* $13^{-5/11}$

24. log. $\left[7^{4/7} \,.\, 19^{4/11}\right]$.

25. log. $\left(11^{-2/5} \,.\, 9^{-\frac{3}{11}}\right)$

26. log. $\{1 : (13^{-5} \,.\, 17^{-10})\}$.

27. log. $\left(\frac{9}{11 \,.\, 13 \,.\, 17}\right)^{17}$

28. log. $\left[\left(\frac{2}{7 \,.\, 13}\right)^{11} : \frac{9^{13}}{7^{25}}\right]$

29. log. $[(p+q)^x : (r+s)^{y-z}]$

log. $(1 : [(a - b)^{x-y} : (c - d)^{m-n}])$.

30. log. $\frac{a^{-x+y} \, b^z}{c^{-u} \, d^{-m-n}}$

31. log. $\frac{1}{m^{-x} n^{-y-z}}$

32. log. $[(a^x b^z \,.\, m^{np} \; r)] \; u$

33. log. $\sqrt[10]{10}$, log. $\sqrt[7]{7}$, log. $\sqrt[9]{9}$,

log. $\sqrt[11]{2}$, log. $\sqrt[25]{100}$.

34. log. $\sqrt[7]{\frac{9}{13}}$

35. $79{\cdot}4 \sqrt[5]{361} = 257{\cdot}8232$ . . . . . .

36. $\sqrt[3]{358{\cdot}25 \sqrt{2}} = 7{\cdot}971992$ . . . .

37) $(0{\cdot}317 \times \sqrt{4{\cdot}267})^5 = 0{\cdot}1218776$ . . . .

38) $\sqrt{\frac{314^2 \,.\, 0{\cdot}359^3}{2{\cdot}734}} = 40{\cdot}8481$ . . . . . .

39. $\sqrt[3]{5{\cdot}4 \sqrt[3]{0{\cdot}3617}} = 1{\cdot}566964$ . . . . . .

40 log. $\sqrt[-3]{\frac{2}{7000000}}$

41. log. $\frac{a \sqrt[x]{a}}{\sqrt[y]{ab}}$

42. log. $\sqrt{[c^2 - d^2]^{-3} \,.\, [c - d]^{-2/5} : [c^3 : d^5]}^{\,cd}$

43. $\log. \dfrac{\sqrt[x]{a+b} \,.\, \sqrt[x]{ab}}{\sqrt[x+n]{a-b} \,.\, \sqrt[xn]{a:b}}$

44. $\log. \sqrt[x]{\dfrac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{(a+b+c)\,(b+c-a)}}$

45. $\dfrac{\sqrt[4]{215\cdot43} \,.\, \sqrt[6]{31\cdot96}}{2\cdot74^3 \,.\, 0\cdot14^2} = 16\cdot92725\ldots$

46. $\sqrt[5]{\dfrac{3425\ \sqrt[7]{136}}{34}} = 2\cdot894639\ldots$

47. $\sqrt[3]{9\cdot17+\sqrt[3]{68\cdot1}} = 2\cdot366529\ldots$

48. $\left[\sqrt[3]{51\cdot9}+\sqrt[4]{3\cdot16}\right] = 5\cdot063398\ldots$

49. $0\cdot31459 \times 16\cdot265 \times 0\cdot1375 =$

50. $\dfrac{3\frac{1}{2} \times 4\cdot56 \times 7\frac{5}{12}}{0\cdot312 \times 16\cdot326} =$

51. $13\cdot001 \times 17\cdot4^3$ —

52. $\left[\dfrac{0\cdot143}{12\cdot163}\right]^5 =$

53. $27\cdot5\ \sqrt[3]{61\cdot429} =$

54. $\frac{3}{4}\left[\sqrt[7]{32\cdot194}\right]^5 =$

55. $\sqrt{7\cdot96 \cdot 3\cdot42 \times 0\cdot315 \times 2\cdot63} =$

56. $\sqrt[6]{915-\sqrt[5]{31\cdot26}} =$

57. $\left[\sqrt[9]{3\cdot17+\sqrt[3]{131}}\right]^4 =$

58. Да се изнађе логаритам броја 41·73 за основину 5 (да се разреши $5^x = 41\cdot73$).

59. Да се изнађу за базис 7 логаритми бројева: 12, 49, 318, 15·46, 431·6.

60. $\log. \dfrac{5a^3bc^n}{6d^3m} = \log. 5 + 3 \log. a + \log. b + n \log. c -$

$- \log. 2 - \log. 3 - 3 \log. d - \log. m$

61. $\log. [a^4b\ (c-d)^3]^{-4} = -16 \log. a -$

$4 \log. b - 12 \log. (c-d).$

62. $\log. 4m \sqrt[5]{\dfrac{2^2b}{cd^2}} = 2 \log. 2 + \log. m + \frac{2}{5} \log. a +$

$+ \frac{1}{5} \log. b - \frac{1}{5} \log. c - \frac{2}{5} \log. d.$

63. $\log. \sqrt[3]{\dfrac{15g}{16\sqrt{h^2k}}}$

64. $\log. \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{5a\sqrt{6b}}{2c\sqrt{3d}}}} =$

65]. $\log. \dfrac{(a-b)^3\ cd^3}{(a+b)^5 .\ gh} =$

66). $\log. \left[\ 3a^4 b^{-2} (m+2n)^2 \right]^p =$

67). $\log. \left(\dfrac{4a^{-1} b^2 c^{-3}}{9a^4 b^{-5} c^2}\right)^3 =$

68.) $\log. \dfrac{(a^2-b^2)^2}{(c^4-d^4)^m} =$

69). $\log. \left(3a\sqrt{bc}\right)^n =$

70). $\log. \sqrt[4]{\dfrac{xy^3}{zw^3}} =$

71). $\log. \dfrac{x^m y^n \sqrt{ab} . \sqrt[3]{xy^2}}{3z^p \sqrt[5]{ab \times y^2}}$

72. $\log. x = \log. a - 3 \log. b + 4 \log. c.$

$$x = \frac{ac^4}{b^3}$$

73. $\log. x = \frac{1}{2} \log. a + \frac{3}{5} \log. x - \frac{3}{4} \log. b.$

74, $n \log. x = 2 \log. a + 3 \log. b - \log. 5 -$

$- 2 \log. c - 2 \log. d.$

75. $\log. x = 2 \log. 3 + \log. m + \frac{2}{5} \log. a +$

$+ \frac{1}{5} \log b - \frac{1}{5} \log. c.$

76. $\alpha^{ax+b} . \beta^{cx+d} = \gamma,\ x = \dfrac{\log. \gamma - b \log. \alpha - d \log. \beta}{a \log. \alpha + c \log. \beta}$

77. $\log. \sqrt[x]{\left\{ a \sqrt[x]{b \sqrt[x]{c}} \right\}}$

78. $\log. 2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

79. $\log. \left[\log. \sqrt[m]{10^n}\right]$

80. $\log. (\log. 10^{xy})$

81. $\log. (\log. a^x)$

82. $\log. \log. \log. [10^{(10^{mn})}]$

83. $3^{2x} . 5^3 = 12,\ x = 0{\cdot}353696\ldots$

84, $(ab^x)^x = 3a^{x-1},\ x = \pm \sqrt{\dfrac{\log. 3 - \log. a}{\log. b}}$

85. $\sqrt[4]{2^{3x+1}} = 4 . 5^{x+6},\ x = - 9{\cdot}97601.$

86. $a^{x^2+2x} = b^{3x^2-4x+1}$, $x = -4$ и $\frac{10 \log. b}{\log. a - \log. b}$

87. $3 . 5^{2x} - 7 . 5^x = 20$, $x = 0{\cdot}86135 \ldots$

88. $a^{2x+\alpha} + a^{x+\beta} = b$

89. $m^x n^4 = m^{\alpha x+\beta}$

90. $\sqrt[x]{31{\cdot}79} = 3{\cdot}54$

91. $2{\cdot}4 . (5{\cdot}32)^{x^2} = \sqrt[3]{319}$

92. $\sqrt[2x]{3142} = (53{\cdot}19)^x$

93. $4^{2x+3} - 7 . 4^{x-5} = 3$

94. $3^{x+y} = 5$

$4^{x-y} = 3$

95. $a^x b^y = c$

$a^{x+y} = b$

96 $a^{x+y} + b^{xy} = c$

$a^{2(x+y)} + b^{2xy} = d$

Примедба. Логаритми су пронађени још с почетка 17. столећа. Napier (1550—1617, шотландезац, први је још 1614.

год. поставио логаритамски систем, који наравно није био још тако удесан за практичну употребу; но опет се има Napier-овом труду благодарити; да је Heinrich Briggs (1556—1630), најпосле професор у Oxford-у, још године 1618. издао логаритамске таблице, које су рачунате за основицу 10. Ови логаритми служили су као основа за даље и боље усавршење логаритамски таблица. Briggs-у у почаст и данас носи име наш обични логаритамски строј. А Vlacq холандски математичар први је био да је Briggs-ове логаритме знатно допунио Веле да је и Justus Byrg немац пронашао логаритме независно од Napier-a.

Сви су ови људи морали рачунати логаритме по врло неудесном начину; и тек доцније проналазци анализе научише нас да простијим путем своју цјел достижемо.

ЧЕТРНАЈЕСТИ ОДСЕК

Редови

Аритметичне постепености.

211. *Ред* или *постепеност* (прогресија) зове се један низ бројева, који постају по једном и истом закону. Бројеви што се палазе у таквом реду, зову се *чланови реда*. *А* број који показује, које место у реду какав члан заузима, зове се *сказаљка* (*index*) тога члана, чланови се једног реда уопште могу означити са ма каквим писменом; али је најобичније да се означавају истим писменом, а разликују се међу собом тиме што се томе писмену њихова сказаљка дописује с десна и оздо уз писме. Дакле на пр. $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots$

Кад је један ред такав, да је разлика између сваког члана његовог и оногa, који је одма за њим десно стална и непроменљива, онда се такав ред зове *аритметичан*.

Тако је

1, 3, 5, 7, 9	....	+ 2
17, 21, 25, 29, 33	аритметични	+ 4
	редови са раз-	
87, 80, 73, 66, 59	ликом	— 7
— 2, 0, 2, 4, 6, ...	....	+ 2
— 100, — 90, — 80, — 70, —,60 ..	....	+ 10
$^7/_8$, $^5/_8$, $^3/_8$, $^1/_8$	....	— $^1/_4$

Ако је ова разлика положна, то су чланови што даљи у реду све већи, а постепеност је растећа; и на против кад је разлика одречна, то су застопни чланови све мањи, а постепеност је велимо падајућа.

212. Из два узастопна члана неке аритметичне постепености можемо просто разлику израчунати, кад одузмемо предидући члан од сљедујућег.

Узмимо да се састоји аритметичан ред из n чланова и да су ови: a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, an, и кад обележимо разлику аритметичног реда са d. онда сљедује:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и уопште

$$a_r = a_{r-1} + d = a_1 + (r-1)\, d$$

а n-ии или посљедњи члан реда

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)\, d \ldots\ldots (\alpha$$

Сачинитељ разлике d свагда је са јединицом мањи од сказаљке захтеваног члана.

Из једначине (α, видимо, да се налази последњи члан аритметичног реда кад првом члану додамо производ из разлике и са јединицом смањене сказаљке.

У осталом можемо по овом општем образцу $a_r = a_1 + (r-1)\, d$ извести ма који *уопште* r-ни *члан* реда сасвим тачно из првог члана и разлике као што је горе показано.

Пример.

Да се определи 30-ти члан реда

$$5,\quad 3,\quad 1,\ -1,\ -3,\ -5, \text{ и т. д.}$$

Овде је $a_1 = 5,\ d = -2,$ и тако налазимо

$$a_{30} = 5 - (30 - 1) \times 2 = -53.$$

213, *Збир два члана подједнако удаљена од првог и последњег члана аритметичне постепености свагда је раван збиру првог и последњег члана тога реда.*

Ако је m-ни члан кад се броји од почетног $a_m = a_1 + (m - 1) d$; а m-ни члан од последњег је $(n - m + 1)$ члан од почетног; јер кад узмемо са зади m чланова, то ће пред овим стајати још $n - m$ чланова у задатом реду, по томе је захтевани члан $(n - m + 1)$-ви члан у реду.

И тако је $a_{n-m+1} = a_1 + (n - m).\ d.$

$$\text{зато и } a_m + a_{n-m+1} = 2a_1 + (n-1)\,d =$$

$$= a_1 + a_1 + (n-1)\,d = a_1 + a_n\,.$$

214. *Да се изнађе збир неког n цифреног аритметичног реда*

Кад означимо збир чланова

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \text{ са } s, \quad \text{то је}$$

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

или кад узмемо ове чланове обрнуто у ред то је

$$s = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots a_3 + a_2 + a_1$$

па кад ова два реда саберемо

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ (a_n + a_1)$$

Овакви сума има овде свега n, свака је равна сбиру

$(a_1 + a_n)$ (§. 213.), зато је

$$2s = n\,(a_1 + a_n)$$

$$\text{и } s = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \qquad (\beta$$

Дакле је збир аритметичног реда раван половини броја чланова помноженој са збиром првог и последњег члана

1.) Кад је задато $a_1 = -2,\ d = 3$, да се определи збир од 80 чланова.

Овде је $a_n = a_{80} = -2 + (80 - 1) \times 3 = 235$

$$\text{дакле } s = \frac{80}{2}\,(-2 + 235) = 9320,$$

2. „Неко тело пређе у првом секунду 2 стопе, а у сваком сљедујућем секунду за 1 стопу више; после колико секунда мора прећи речено тело пут од 495 стопа?“

Путови што ји пређе то тело у сљедујућим секундима образоваће аритметичан ред ког је први члан $a_1 = 2$. а разлика $d = 1$ и неодређени број секунда n. Најпосле количина стопа што је тело у путу свом за собом оставило, даје нам збир аритметичног реда, тако је

$$a_n = 2 + (n - 1).\ 1 = n + 1$$

па зато $s = 495 = \frac{n}{2}\,(2 + n + 1) = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}$, из ове једначине можемо определити n, јер је

$$n^2 + 3n = 990,$$

$$\text{одкуда је } n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4.990}}{2} = \begin{cases} 30 & \text{а од ове две врединости} \\ -33 & \end{cases}$$

одговара само она положна $n = 30$.

И по томе је речено тело прешло пут од 495 стопа за 30 секунда.

215. Ова пет елемента што долазе у аритметичној постепености налазимо да су у некој свези у оба горња образца која смо добили из последњег члана и збира аритметичног реда. А за ове 5 количине a_1, a_n, d, n, s изнађени су образци

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \quad . \quad . \quad (\alpha$$

$$s = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad . \quad . \quad . \quad (\beta$$

Тако ћемо имати да разрешимо ови 10 задатка, како су кад елементи задати:

a_1, a_n, d	a_1 n_1 s
a_1, a_n, n	a_n, d, n
a_1, a_n, s	a_n, d, s
a_1, d, n	a_n, n, s
a_1, d, s	d, n, s.

1.) Ако су задати елементи a_1, a_n, d; да се изнађе n и s.

Из једначине (α добијамо

$a_n - a_1 = dn - d$, а одавде

$$n = \frac{a_n - a + d}{d}, \text{ а } s = \frac{a_n - a_1 + d}{2d}(a_1 + a_n)$$

2.) Задате су количине a_1, a_n, n; да се изнађе d и s.

једначина (α даје нам $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$, а из јед. ($\beta$ налазимо

$$s = \frac{n}{2}(a, + a_n)$$

3). Задато је a_1, a_n, s; да се нађе d и n

Из (β сљедује $n = \frac{2s}{a_1 + a_n}$, а по овој вредности из једначине (α, налазимо $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n^2 - a_1^2}{2s - (a_1 + a_n)}$.

4.) Задато a_1, d, n; да нађе a_n и s.

a_n налазимо непосредно из (α, зато је

$$s = \frac{n}{2}\left(a_n + a_1\right) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n - 1) d\right]$$

5,) Задато a_1, d, s; да се нађе a_n и n.

a_n изнађено из једначине (α) кад се замене у (β — даје једначину за n

$d.\, n^2 - (d - 2a_1).\, n = 2s$, а из ове

$$n = \frac{d - 2a_1 \pm \sqrt{(d - 2a_1)^2 + 8ds}}{2d},$$

дакле $a_n = a_1 + \left[\frac{d - 2a_1 \pm \sqrt{(d - 2a_1)^2 + 8ds}}{2d} - 1\right].d =$

$$= \frac{-d \pm \sqrt{(d \; 2a_1)^2 + 8ds}}{2}.$$

6.) Задато a_1, n, s; да се нађе a_n и d.

$a_n = a_1 + (n - 1) d$ замењено у (β даје

$$s = \frac{n}{2}\left[2a_1 + [n - 1) d\right] \text{ а из тога } d = \frac{2[s - a_1 n]}{n(n - 1)}$$

Зато $a_n = a_1 - [n - 1].\frac{2(s - a_1 n)}{n(n - 1)} = \frac{2s}{n} - a_1$

7.) Задато a_n, d, n; изнаћи a_1 и s.

Из (α, $a_1 = a_n - (n-1)d$ $s = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] =$

$$= \frac{n}{2}\left(2a_n - (n-1)d\right]$$

8.) Задато a_n, d, s: да се тражи a_1 и n.

Из (β, $n = \frac{2s}{a_1 + a_n}$ замењено у (α,

$$a_n = a_1 + \left(\frac{2s}{a_1 + a_n} - 1\right). d,$$ а из тога

сљедује $a_1 = \dfrac{d \pm \sqrt{(2a_n + d)^2 - 8ds}}{2}$.

Кад ову вредност заменемо у (β,

то је $n = \dfrac{2a_n + d \mp \sqrt{(a_n + d)^2 - 8ds}}{2d}$

9). Задато a_n, n, s: да се нађе a_1 и d

Из (β сљедује $a_1 = \dfrac{2s - na_n}{n} = \dfrac{2s}{n} - a_n$

по овој вредности налазимо из (α,

$$d = \frac{2(na_n - s)}{n(n-1)}.$$

10, Задато d, n, s; да се изнађе a_1 и a_n.

Из (β $a_n + a_1 = \frac{2s}{n}$

Из (α $a_n - a_1 = (n-1)d$

$$a_n = \frac{2s + n(n-1)d}{2n}$$

$$a_1 = \frac{2s - n(n-1)d}{2n}$$

Интерполација (уметање).

216. „Аритметичан ред интерполирати значи: уметнути између свака два узастопна члана аритметичног реда један и исти број чланова тако, да задати чланови тога реда са овим уметнутим члановима чине опет једну аритметичну постепеност. Уметнути чланови зову се уметци".

Ако су a_r и a_{r+1} два узастопна члана неког аритметичног реда, између којих хоћемо да уметнемо још $(m-1)$ члан.

Кад означимо ове уметке са

$$\text{са } a_{r+\frac{1}{m}},\ a_{r+\frac{2}{m}},\ \ldots\ldots\ a_{r+\frac{m-1}{m}}$$

и узмимо a_r као први и a_{r+1} као последњи члан тога реда, дакле

$$a_r,\ a_{r+\frac{1}{m}},\ a_{r+\frac{1}{m}},\ \ldots\ldots\ a_{r+\frac{m-1}{m}},\ a_{r+1},$$

који ће ред имати сада извесно $[m+1]$ члан, зато је по образцу [α §. 212. $a_{r+1} = a_r + m.\delta$ а из тога

$\delta = \dfrac{a_{r+1} - a_r}{m}$, или пошто је $a_{r+1} - a_r = a$, разлици

задатог реда, $\delta = \dfrac{d}{m}$, т. ј. „разлику уметнутог реда налазимо, кад разлику задатог реда поделимо са бројем, који је за 1 већи од броја уметака.

Да се између свака два члана реда 2, 6, 10, 14, 18 . . . , уметну 5 чланова. Овде је $d = 4$, $m - 1 = 5$, и тако

$\delta = {}^4/_6 = {}^2/_3$, по томе је уметнути ред:

$$2,\ 2\tfrac{2}{3},\ 3\tfrac{1}{3},\ 4,\ 4\tfrac{2}{3},\ 5\tfrac{1}{3}\ 6,\ 6\tfrac{2}{3},\ 7\tfrac{1}{3},\ 8,\ 8\tfrac{2}{3},\ 9\tfrac{1}{3},$$
$$10\ 10\tfrac{2}{3}\ 11\tfrac{1}{3},\ 12,\ 12\tfrac{2}{3},\ 13\tfrac{1}{3}\ 14 \text{ и т. д.}$$

а ове је опет аритметична постепеност са разликом $d = {}^2/_3$.

217. „Изврнуте вредности три узастопна члана неког аритметичног реда, дају савезну хармонијску сразмеру".

Ако су a_{r-1}, a_r и a_{r+1} три узастопна члана аритметичног реда, то ће по § 162. постајати ова сразмера:

$$\left(\frac{1}{a_{r-1}} - \frac{1}{a_r}\right) : \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_{r+1}}\right) =$$

$$\frac{1}{a_{r-1}} : \frac{1}{a_{r+1}},$$

знамо да је $\dfrac{1}{a_{r-1}} - \dfrac{1}{a_r} =$

$$\frac{a_r - a_{r-1}}{a_{r-1}\, a_r} = \frac{d}{a_{r-1}\, a_r}$$

$$\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_{r+1}} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_r\, a_{r+1}} = \frac{d}{a_r\, a_{r+1}}$$

дакле заиста постоји сразмера:

$$\frac{d}{a_{r-1}\, a_r} : \frac{d}{a_r a_{r+1}} = \frac{1}{a_{r-1}} : \frac{1}{a_{r+1}} :$$

Тако ће образовати узајмичке вредности бројева 5, 7, 9, овог аритметичног реда 1, 3, 5, 7, 9, 11 и т д. савезни сугласни ред, т. ј.

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) : \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) = {}^1/_5 : \frac{1}{9}$$

дакле $\dfrac{2}{5\cdot7} : \dfrac{2}{7\cdot9} : \ = \dfrac{1}{5} : \dfrac{1}{9}$

правилну сразмеру

Ред, у коме три непосредно застопна члана образују савезну хармонијску сразмеру, зове се хармонијски ред.

Из предходног параграфа на сигурно изводимо, да ће изврнуте вредности чланова аритметичне постепености дати хармонијски ред.

Или у опште: кад делимо неки непромењиви број по реду са свима члановима аритметичне постепености, то ће постати хармонијски ред.

218. „Збирови или разлике чланова са једнаким сказаљкама у два произвољна аритметична реда, даће опет аритметичан ред, кој је разлика односно равна алгебарском збиру или разлици диференција задати редова".

Нека су $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots \ldots \ a_n$

и $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4, \ldots \ldots \ b_n$

два аритметична реда којих су разлике односно d и δ; то је

$(a_1 + b_1),\ (a_2 + b_2),\ (a_3 + b_3) \ \ldots \ldots \ (a_n + b_n)$ . . (1

аритметичан ред са разликом $(d + \delta)$,

и $(a_1 - b_1),\ (a_2 - b_2),\ (a_3 - b_3) \ \ldots \ (a_n - b_n)$ . . . (2

аритметичан ред са разликом $(d - \delta)$.

Али је $a_2 + b_2 = (a_1 + d) + (b_1 + \delta) =$

$$= (a_1 + b_1) + (d + \delta)$$

$$a_3 + b_3 = (a_1 + 2d) + (b_1 + 2\delta) = (a_1 + b_1) + 2\,(d + \delta)$$

. . . .

$$a_n + b_n = [a_1 + (n - 1)\, d] +$$
$$+ [b_1 + (n - 1)\delta] = (a_1 + b_1) + (n - 1)\,(d + \delta]$$

по томе је (1. аритметичан ред са разликом $[d + \delta]$.

Тако исто показујемо истинитост реда (2.

Ако су н. пр. редови

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

и 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

то ћемо добити из збира чланова са једнаким сказаљкама

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, ...

и разлика — 1. 0, 1, 2, 3, 4, 5. . . . . . .

или 1, 0, — 1, — 2, — 3 — 4, — 5 . . . .

Све само истините аритметичне редове, са односним разликама [3 + 2], (3 — 2) (2 — 3, или 5, 1, — 1.

Збирни редови.

219. Кад поставимо сасвим прост аритметичан ред,

$1, [1 + d), [1 + 2d), (1 + 3d), (1 + 4d), \dots$ (1, и ако

из озога узмемо збирове од 1, 2, 3, 4, 5, ..., члана. онда ће постати ред:

$1, (2 + d], (3 + 3d), (4 + 6b), [5 + 10d) \quad . \quad . \quad .$ (2.

а n-ни члан овога реда је збир од n чланова реда (1.

т. ј. по §. 213 $s = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$,

$$\frac{n}{2} [1 + 1 + (n - 1)\, d] = n + \frac{n\,(n - 1)}{2}\, d.$$

Ако сада у (2 ставимо за d вредности 1, 2, 3, . . . то ће постати редови, којих се бројеви зову полигонални бројеви.

Тако за d = 1, 1, 3, 6, 10, 15, 21 у опш. $\frac{n\,(n+1)}{2}$ . . . . . . (α

„ d = 2, 1, 4, 9, 16, 25, 36, „ „ n^2 . . . . . (β

„ d = 3, 1, 5, 12, 22, 35, 51, „ „ $\frac{n\,(3n - 1)}{2}$ . . . . (γ

и т. д.

И тако зовемо сада бројеве реда [α, бројеви троуглова [троугони бројеви], јер се толико тачака колико бројеви тога реда показују, могу да поставе у виду неког равностраног троугла, исто тако представљају бројеви реда [β, квадрате, па зато се зове (β ред четвороугоних (тетрагонални) бројева, у истом смислу показују бројеви реда (γ петоугоне (пентагоналне). бројеве и т. д.

Па ако исто тако радимо са редом (2, као и са редом (1, то постаје:

$1, (3 + d), (6 + 4d), (10 + 10d), [15 + 20d), \dots \dots$ (3

Овај ред представља, због својственог образовања његових чланова, пирамидне бројеве

Тако је за d = 1, 4, 10, 20, 35, ... тростране пирамидалне бројеве, јер се н. пр. четир, десет. двадесет и т. д. кругала могу сложити свагда у виду неке правилне тростране пирамиде.

Исто тако за d = 2, 1, 5, 14, 30, 55, 91 . . . . . добијамо четворостране пирамидне бројеве.

Примери:

(1. Ако је први члан аритметичне постепености = 2, разлика $1\frac{1}{2}$, а последњи члан = $30\frac{1}{2}$. колико износи збир свију чланова? (збир = 315

2]. Први је члан a, последњи $7a$ а збир свију чланова = 100; који је то ред и колико има члана?

[ред: $a, \frac{5a}{4}, \frac{3a}{2}, \frac{7a}{4}$, $2a$ и т. д. и n = 25).

3], Које ће бити разлика неког реда, који почиње са 4 и ког је 32-ги члан 97? (раз. 3).

4.) Да се изнађе образац збира за неопредељени број чланова природног бројног реда. $\left(\text{збир од } n \text{ чланова} = \frac{n^2 + n}{2} \right)$

5]. Први члан неке аритметичне постепености = — 4, а разлика = $4\frac{1}{2}$. Да се определи 40-ти члан и збир од 40 чланова.

6]. На једном крову има 40 редова црепа, који износе свега 5580 комада. Кад у сваком сљедујућем реду рачунајући од првог лежи по један цреп више; колико има црепа у првом а колико у посљедњем реду? (у првом 120, а у последњем 159).

7] Неко слободно падајуће тело пређе у првом секунду $15\frac{1}{2}$ стопа, а у сваком сљедујућем за 31 стопу више; после колико секунда може прећи речено тело 1550 стопа? (после 10 секунда).

8] Два тела A и B, која су спочетка стајала у растојању од 4050 стопа, приближују се једно другом по једној истој правој, тако, да начини A у првом секунду 1 стопу, а у сваком сљедујућем секунду за $\frac{1}{2}$ стопе више. B начини у првом секунду 2 стопе, а у сваком сљедујућем по једну стопу више. После ког ће се времена оба тела састати? (Ако узмемо да означава n број тражени секунда, то ћемо добити једначину

$$n^2 + 3n = 5400).$$

9]. Да се определи, јесу ли бројеви 79 140, 395 и 500 чланови реда — 1, 3, 7, 11, 15, ...

10] Други члан неког аритметичног реда = 7. а 14-ти члан = 32; који је то ред?

11]. Збир трећег и 5-тог члана неког аритметичног реда = 22, а разлика реда = 4; који је то ред?

12] 6-ти и 17-ти члан износи скупа 30, 4-ти и 23-ћи = =34; који је то ред?

13]. Збир 2-гог = 4-тог и 6-тог члана неког арит. реда = $10\frac{1}{2}$, 61-ви члан = 32, — који је то ред,

14], Збир од 40 чланова неког аритметичног реда износи 340, збир први 39 чланова = 325; који је то ред?

15]. Да се уметну (интерполирају) између чланова у реду 1, 6, 11, 16, 21, ... два члана (1, $2\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$. 6, $7\frac{2}{3}$, $9\frac{1}{3}$, 11 и т. д.)

16]. Тространа пирамида од кугала има 8 хоризонтални слојева: колико има кугала у базису?

Геометријске постепености.

220. „Геометријска постепеност зове се онај ред бројева, кога је сваки сљедујући члан постао из предидућег члана помноженог са неким сталним бројем".

Овај непроменљиви чинитељ зове се количник постепености, јер показује колико се пута садржи предидући члан у непосредно сљедујући.

Овај се количник бележи обично са q. Ако је сада $q < 1$, т. ј, кад је q чист разломак, то сљедују све мањи и мањи бројеви у реду, и ред је падајући: а кад је $q > 1$, чланови ће све већи и већи постајати, а ред ће бити растећи. На знак броја q ништа се овде негледа. (кад је q = 1. то су сви чланови реда једнаки; па би у том случају био ред уједно и аритметична постепеност са разликом = 0].

Остала наименовања она су иста као и у аритметичној постепености,

Тако је ред 2, 6, 18, 54, 162 . . . . ., геометријска постепеност са количником = 3.

Кад обележимо први члан са a, а количник са q, то је општи вид геометријске постепености:

a, aq, aq^2, aq^3, . , . . . , ... и кад је овај вид ограничен то је последњи или односно n-ни члан = aq^{n-1} јер први члан има q^0. 2-ги, q^1, 3-ћи, q^2, ... n-ни q^{n-1}, Кад обележимо последњи члан реда са z, то је $z = aq^{n-1}$ . . . (α

Ако је сада први члан реда = 3, а количник = 2, то је 10-ти члан = $3 \cdot 2^9 = 3 \times 512 = 1536$.

221. Да се определи збир геометријске постепености од n чланова.

Кад означимо збир са s, то је

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots . + aq^{n-1}$$

кад ову једначину помножимо са q, то је

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots . aq^n$$

и горња једначина одузета од доње даје $qs - s = aq^n - a$, дакле $s = \dfrac{aq^n - a}{q - 1} = a.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

или због $aq^{n-1} = z$, $s = \dfrac{qz - a}{q - 1}$ . . . . . . (β

Тако је за онај збир реда од 10 чланова

3, 6, 12, ... 1536

$$s = \frac{2 \times 1536 - 3}{2 - 1} = 3069.$$

Једначине (α и (β. помажу нам да из количина a, z, q, n и s изнађемо две кад су три познате.

Овде су могући ови случаји

Задато

a, z q	a, n, s
a, z, n	z, q, n.
a, z, s	z, q, s
a, q, n	z, n, s
a, q, s	q, n, s

Ако је задато:

1. a, z, q, тражи се n и s

n сљедује из [α јер кад је $z = aq^{n-1}$,

то је $\log. z = \log. a + (n - 1) \log. q$

дакле $n = \dfrac{\log. z - \log. a}{\log. q}$

s налазимо из (β.

2. a, z, n. тражи се q и s,

Из (α . $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{z}{a}}$, и $s = \dfrac{zq - a}{q - 1} =$

$$= \frac{z\sqrt[n-1]{\dfrac{z}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\dfrac{z}{a}} - 1} = \frac{z\sqrt[n-1]{z} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

3) a, z, s, q и n?

Из (β. $s(q - 1) = qz - a$

а из тога $(s - z)\, q = s - a$

$$q = \frac{s - a}{s - z},$$

кад ово q заменемо у (α. $z = a \cdot \left(\dfrac{s - a}{s - z}\right)^{n-1}$

$\log. z = \log. a + (n - 1)\, [\log. (s - a) - \log. (s - z)]$

$$n = \frac{\log. z - \log a}{\log. (s - a) - \log. (s - z)} + 1$$

4) a, q, n z и s?

z налазимо непосредно из (α опредељено са a, q и n.

$$s = \frac{qz - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

5) a, q s z и n?

Из (β . $s(q - 1) = qz - a$, $z = \dfrac{s(q - 1) + a}{q}$

Замењено у (α. $\dfrac{s(q - 1) + a}{q} = aq^{n-1}$

Из тога $n = \dfrac{\log.\,[s\,(q-1)+a] - \log.\,a}{\log.\,q}$

6 a, n, s. z и q?

Из (β. налазимо $z = \dfrac{(q-1)\,s + a}{q}$ а ово

замењено у (α. даје $\dfrac{(q-1)\,s + a}{q} = aq^{n-1}$

из чега произлази једначина за q:

$(q^n - 1)\,a = (q-1)\,s$ или скраћено са

$(q-1)$, $q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 = \dfrac{s}{a}$.

Даље налазимо из (α. количину z.

7) z, q, n. a и s?

Из (α. $a = \dfrac{z}{q^{n-1}}$, $s = \dfrac{qz - \dfrac{z}{q^{n-1}}}{q-1} = z \cdot \dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}\,(q-1)}$

8) z, q, s a и n?

Из (β. сљедује $a = qz - s\,(q-1)$

(α. даје $z = [qz - s\,(q-1)]\,.\,q^{n-1}$

$$n = \frac{\log.\, z - \log.\,[qz - s\,(q-1)]}{\log.\, q} + 1$$

9) z, n, s a и q?

Из (α. $a = \dfrac{z}{q^{n-1}}$ замењено у (β.

$$s = \frac{qz - \dfrac{z}{q^{n-1}}}{q-1}$$

или $(q-1)\,q^{n-1}\,.\,s = q^n z - z = z\,[q^n - 1]$

или кад скратимо са $q - 1$ и сведемо,

$$\left(1 - \frac{s}{z}\right) q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1 = 0$$

а из тога у овом случају има да се израчуна q.

Ако је q познато, то добијамо a из једначине

$z = aq^{n-1}$, дакле $a = \dfrac{z}{q^{n-1}}$

10) q, n, s. a и z?

$$s = \frac{qz - a}{q-1} = \frac{qaq^{n-1} - a}{q-1},$$

из тога налазимо $a = \dfrac{s\,[q-1]}{q^n - 1}$,

дакле $z = aq^{n-1} = \dfrac{s\,[q-1]\,q^{n-1}}{q^n - 1}$

Примедба. Једначине, наведене под бројем 6 и 9 немогу се разрешити по правилима показаним у овој књизи, кад n прелази број 3.

222. „Геометријски ред интерполисати значи: уметнути између свака два члана тога реда један и исти број чланова тако, да они пређашњи и ови уметнути чланови дају опет једну геометријску постепеност.“

Ако има у опште да се уметне $(m-1)$ члан између aq^r и aq^{r+1}.

Кад узмемо овде да је aq^{r+1} последњи члан тако постајућег реда, и да је овога реда количник q_1 то је $aq^{r+1} = aq^r.q_1^m$,

[јед, α §. 220) зато је $q_1 = \sqrt[m]{q}$; т. ј. „количник уметнутог реда добија се, кад из количника задатог реда извучемо корен ког је изложитељ за јединицу већи од броја уметака“.

Тако је:

$$aq^r,\ aq^{r+\frac{1}{m}},\ aq^{r+\frac{2}{m}} \dots\ aq^{r+\frac{m-1}{m}},\ aq^{r+1} \dots$$

н. пр. постепеност 4, 12, 36, 108, ... да се са три члана интерполира сада је $q = 3$, $m - 1 = 3$, дакле $m = 4$

дакле $q_1 = \sqrt[4]{3}$ зато

$$4,\ 4\sqrt[4]{3},\ 4\sqrt[4]{9},\ 4\sqrt[4]{27},\ 12,\ 12\sqrt[4]{3},\ =$$

$$12\sqrt[4]{9},\ 12\sqrt[4]{27},\ 36 \dots \text{или } \sqrt[4]{3} =$$

$= 1.316074$

4. 4 (1·316074), 4 (1·316074)², 4 (1·316074)³, 12. . , . .

223. „Збир [сумација] неког безконачног геометријског реда, ког је количник мањи од јединице“

Збир неке постепености са n чланова налази се, по §. 221

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \text{ или кад}$$

сваки члан бројитеља поделимо са именитељем $1 - q$.

$$s = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

Ако је $q < 1$, то је и $q^n < 1$ овде ће бити q^n у толико мање, у колико је веће n. Тако ће други члан збира т. ј.

$\frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \cdot q^n$ за n безкраја веће и веће све

мање и мање бивати, дакле мање од сваког могућег броја и за $n = \infty$, граница је за $q^n = 0$, дакле и $\frac{a}{1 - q}\, q^n = 0$

и тако је у горњем $s = \frac{a}{1 - q}$

Овај израз показује границу којој се падајући безкрајни ред све више и више приближава, у колико више чланова постепености сабирамо, до којег броја строго узето неможемо никада доћи.

Тако имамо за безкрајни ред

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64} \dots$$

онај део у огради = s, по томе

$a = 1$, $q = \tfrac{1}{2}$, дакле збир $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

За $4,\ 4.\tfrac{2}{3},\ 4\left(\tfrac{2}{3}\right)^2,\ 4.\left(\tfrac{2}{3}\right)^3,\ 4.\left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \dots$

или $4,\ \frac{8}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{32}{27},\ \frac{64}{81} \dots$

видимо да је $a = 4$, $q = \tfrac{2}{3}$, зато $s = \frac{4}{1 - \frac{2}{3}} = 12.$

Примедба. „Збир безкрајног реда $a + aq + aq^2 + \dots$ може се непосредно изнаћи.

Ако поставимо $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = s$, то је и $a + q\,(a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots) = s$. Али је овде онај део у огради = s, по томе

$a + q\,s = s$, одкуда је $s = \frac{a}{1 - q}$.

Периодни десетни разломци могу се сматрати као безкрајне геометријске постепености. Тако је н. пр. за 0·35 =

$$= \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \frac{35}{10^6} + \dots \text{ геометријски ред,}$$

ког је $a = \frac{35}{100}$, и ког је количник $\frac{1}{100}$ зато је вредност разломка $s = \frac{\frac{35}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{39}{99}$

Исто тако кад има предпериода.

Примери

(1. Први члан геом. реда = 1, десети чан = 512; који је тај ред и колики је збир од 20 чланова?

2.) Кад је први члан геом. реда = 2, количник = — 2, колико износи збир од 16 чланова?

3.) Да се определи m-ни члан и збир од m чланова реда $\frac{a}{b}$, a^3b, a^5b^3, a^7b^5 . . . , (m-ни члан = $m^{2m-1}\, b^{2m-3}$,

збир = $\frac{a^{2m+1}\, b^{2m} - a}{a^2b^3 - b}$)

4]. Да се скупи: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^n}$

$$\left(s = \frac{1 - a^n}{(1 - a)\, a^n}\right)$$

5). Да се саберу: $ab^2 + a^2b^4 + a^3b^6 + \dots + a^nb^{2n}$.

6), Први је члан = 2, количник = $\sqrt[3]{2}$: да се определи 36. члан.

7.] Први је члан неког реда = 1, последњичлан = 177147, а збир свију чланова = 265720; који је тај ред и колико има свега чланова?

8). Да се испита је су ли бројеви $4\frac{423}{4096}$, $5\frac{557}{12384}$ чланови реда $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{49}{64}$, $\frac{343}{256}$, ...

9], Четврти је члан неке геометријске постепености 385, седми члан 46875; који је тај ред?

10] Да се сабере: $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$ ћо безкрајност

11) Исто тако $\frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^6} + \dots$

12] Колико чланова има геометријска постепеност, кад је први члан 2, количник $\frac{3}{4}$, и збир = 8?

13]. Први члан безкрајног геометријског реда нека је 5; колики мора бити количник па да буде збир свију чланова = 16?

Збирљивост и незбирљивост

224. Узмимо нек је $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_n \dots a_{n+1} \dots$ неки безкрајни ред, ког су сви чланови једнако означени, онда можемо за овај рећи „да је збирљив кад се поступним сабирањем узастопних чланова постајући збир приближава све више и више једној одређеној крајњој граници."

Ако сада по овом означимо збир од n чланова са s_n а онај остали део реда са ε [допуна реда] онда је $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots, + a_n$ а $\varepsilon = a_{n+1} + a_{n+2} \dots$ и тако је сада $s = s_n + \varepsilon$.

По оном горе постављеном појму о збирљивости ако n без краја увећавамо, мора се она допуна ε приближавати без престанка нули као својој крајњој граници. Сада је по себи јасно да се ε може приближити нули само онда, кад се чланови $a_{n+1} + a_{n+2} \dots$ и т. д. појединце приближавају нули; кад безкрајни ред није овога својства, зове се незбирљив.

Безконачни редови имају велику улогу у математици, само што треба знати добро разликовати при служењу са истима дал' су они збирљиви или незбирљиви. Ми ћемо овде показати само један начин, по ком се ово испитује.

У §. 223 показано је, како се поставља збир неког безкрајњег геометријског реда кога је количник мањи од јединице. Тако постављамо ово правило: *да је сваки безкрајни геометријски ред збирљив кад му је количник мањи од јединице.*

Ма да чланови једног безконачног реда све мањи и мањи бивају, или све више теже нули опет то није довољно па да је ред збирљив које нам показује најбоље овај хармонијски ред $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \qquad + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$

Овде су чланови идући с' леве на десно све мањи, па зато можемо за произвољно велико n разломке $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}$ начинити да су мањи од сваког могућег малог броја па је опет тај ред незбирљив. Пошто је

$$\varepsilon = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \quad \text{и т. д.}$$

то је $\varepsilon > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, јер смо ограничили број чланова. А кад овде напишемо у сваком именитељу $2n$, то је у толико више $\varepsilon > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$,

дакле $\varepsilon > \frac{1}{2}$; и тако овде неможе допуна ε да се приближи у толико нули у колико би се хтело, зато је наведени ред незбирљив.

Ако је неки безконачни ред такав, да се почев од буди ког члана па надаље количник између свакога члана и онога који је пред њим приближава једном извесном и одређеном броју као својој крајњој граници, онда је ред збирљив, ако је тај број или та крајња граница мања од јединице.

Нека је g та граница и нека се почев од n-ног члана па на даље количник између сваког члана и онога који је пред њим њојзи све више приближава

$$\text{онда је } \frac{a_{n+1}}{a_n} < g$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < g.$$

$$\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < g.$$

$$\frac{a_{n+4}}{a_{n+3}} < g.$$

Примери:

1). Да се испита:

$$s = 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} \quad \ldots \quad \text{безкраја}$$

$$\text{или}: a_{n+1} < a_n\, g.$$

$$a_{n+2} < a_n\, g^2$$

$$a_{n+3} < a_n\, g^3$$

$$a_{n+4} < a_n\, g^4$$

Сабирањем:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots < a_n (g + g^2 + g^3 + \ldots).$$

или $\varepsilon < a_n.\frac{g}{1-g}$, јер је $g < 1$, дакле ред у загради падајућа геометријска постепеност.

Али је $\frac{g}{1-g}$ коначан број и како се a_n кад n расте приближава све више и више вредности нули онда сљедује да мора имати и $a_n \times \frac{g}{1-g}$ нулу као границу, а због тога што је $\varepsilon < a_n \frac{g}{1-g}$, то има и ε нулу као границу, одкуда сљедује конвергенција реда.

Ако је граница којој тежи количник од два и два узастопна члана 1, онда се неможе ништа рећи да је ред збирљив нити пак да је незбирљив. Тада би морали тражити друге знаке, по којима би се то могло дознати. Али то прелази границе положене у овоме делу.

Ако се количници узастопних чланова приближавају неком броју већем од јединице, онда је ред растећи незбирљив.

Још ћемо споменути, да је ред ког се знаци наизменце мењају, збирљив, ако је он збирљив пошто му се сви чланови узму са знаком +.

Примери:

1. Да се испита:

$$s = 1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{4\cdot 5^3} + \dots \quad \text{без краја.}$$

Општи или n-ни члан овога реда нека је $\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}} = a_n$, зато је

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,5^n} \text{ дакле и } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{5(n+1)}.$$

У колико веће постаје овде n, у толико се више приближава вредност овога количника броју $1/5$, јер је $\frac{n}{5(n+1)} =$

$$= \frac{1}{5\left(1+\frac{1}{n}\right)}\text{, таква вредност, која би за } n = \infty \text{ износила } 1/5$$

Граница, којој се количници приближавају у овом је реду $= 1/5$, дакле мања од јединице и онда је ред збирљив.

2. $$s = \frac{1}{2+1/2} + \frac{1}{2+1/3} + \frac{1}{2+1/4} + \frac{1}{2+1/5} + \dots$$

Пошто овде чланови реда не постају све мањи кад све даље и даље идемо у безкрајност, него се приближавају све више и више опредељеном броју $1/2$; јер именитељ $2 + 1/n$ најпосле мора имати границу 2, а онда је ред незбирљив.

3). $$s = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \dots$$

n-ни члан је $\frac{1}{nx^n}$, $(n+1)$-ви члан је $\frac{1}{(n+1)\,x^{n+1}}$,

$$\text{дакле је } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{nx^n}{(n+1)x^{n+1}} = \frac{n}{(n+1)\,x}$$

Да би сада овај ред био збирљив мора бити граница од $\frac{n}{(n+1)\,x}$ једнака неком броју мањем од 1, т. ј.

$\frac{n}{(n+1)\,x} < 1$, а пошто се $\frac{n}{n+1}$ све више и више приближава броју 1 то постаје $\frac{1}{x} < 1$ или $x > 1$, т. ј. наведени ред је збирљив, кад је $x > 1$, а x може бити положно или одречно.

4]. $$s = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots$$

Овде је $a_n = \frac{x^{n-1}}{n}$, $a_{n+1} = \frac{x^n}{n+1}$, дакле је $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \frac{nx}{(n+1)}$. А пошто је од $\frac{n}{n+1}$ граница 1, то се приближава $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ броју x, а због $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, мора бити $x < 1$, па да је задати ред збирљив. По томе је дакле наведени ред збирљив за сваку положну или одречну вредност од x, што је бројно мања од јединице.

Примери.

1. Колики ће постати капитал од 6800 динара с интересом на интерес по 5% за 12 година?

Овде је $k = 6800$, $p = 5$, $n = 12$, k_n?

Зато је по једначини (α.

$$\log. k = \log. 6800 = 3.8325089$$

$$n \log. \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 12 \log. 1.05 = 0.2542716$$

$$\log. k_n = 4.0687805.$$

Број $\log. k_n = 12212.82$ динара.

Дакле постаје од 6800 динара по 5% за 12 година

12212·82 динара.

Прави интерес је $12212.82 - 6800 = 5411.82$ динара.

2. Колико капитала треба уложити, да са интересом на интерес по $4\frac{1}{2}$ од сто за 5 година постане 10.000 динара?

Овде је $k_n = 10.000$, $p = 4\frac{1}{2}$, $n = 5$, $k = ?$

Сада је по једначини (β.

$$\log. k_n = \log. 10.000 = 4$$

$$n \log. \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 5 \log. 1.045 = 0.0955805$$

$$\log. k = 3.9044195$$

Овом логаритму одговара број 3024·51, т. ј. капитал k.

3. Капитал од 3500 динара нарасте по 4% до 4790 динара. Колико је година тај капитал лежао?

Овде је $k_n = 4790$, $k = 3500$, и $p = 4$, то је по једначини (γ.

$$\log. k_n = \log. 4790 = 3.6803355$$

$$\log. k = \log. 3500 = 3.5440680$$

$$\log. k_n - \log. k = 0.1362675$$

$$\log. \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log. 1.04 = 0.0170333$$

дакле $n = 0.1362675 : 0.0170333 = 8$.

4) Кад 24.000 динара за 10 година нарасту до 39093 динара 47 дин. пара; колико је процента тај капитал доносио?

Овде је $k_n = 39093.47$ $k = 24.000$ и $n = 10$.

По једначини (δ налазимо

$$\log. k_n = \log. 39093.47 = 4.5921042$$

$$\log. k = \log. 24000 = 4.3802112$$

$$\log. \frac{k_n}{k} = 0.2118930$$

$$\text{дакле } \log. \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} = 0.0211893$$

$$\text{и } \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} = 1.05, \text{ дакле } \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} - 1 = 0.05$$

т. ј. $p = 5$.

Дакле је доносио капитал 5 процента.

Ако се интереси не додају капиталу при концу сваке године него свагда после $\frac{1}{m}$ од године то по образцу I. ставља се $m.n$ у место n и $\frac{p}{m}$ у место p, и тако $k_n = k \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mn}$

н, пр. капитал од 4000 динара издат је по 5% интереса на интерес за 6 година са тромесечним плаћањем интереса; колики ће постати капитал од 4000 динара.

Због $k = 4000$, $p = 5$, $n = 6$ и $m = 4$

налазимо $k_6 = 4000 \left(1 + \frac{5}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 6} = 4000\,(1.0125)^{24}$

$$\log.\ 4000 = 3{\cdot}6020600$$

$$\log.\ (1{\cdot}025)^{24} = 0{\cdot}1294800$$

$$\log.\ k_6 = 3{\cdot}7315400$$

дакле $k_6 = 5389{\cdot}395$ динара,

227. Образац I. пређашњег параграфа условљава већ по самом његовом постанку, да је и цео број. Ако по овом обрасцу при израчуњавању времена нађемо разломљен број за n [у опште цео број и чист разломак], онда остаје још питање како ће се изнаћи тачна вредност за време.

Узмимо да се додају интереси капиталу при крају сваке године, онда ће се узети за неки део од године само прости интерес.

Сада ћемо образац I. да узмемо још у пространијем виду т. ј. да уложимо капитал k за n година и m месеци са $5^0/_0$:

При крају n-не године биће капитал k, $k_n = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$,

Прост интерес од k_n за 1 годину износиће $k_n.\frac{p}{100}$, и по томе долази на један месец т. ј $^1/_{12}$ године $k_n.\frac{p}{1200}$, дакле за m месеци $k_n.\frac{mp}{1200}$,

По томе је последњи капитал после n година и m месеци : $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{mp}{1200}$,

и ако назовемо ову вредност K, то је $K = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

$$\times\left(1+\frac{mp}{1200}\right.\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathrm{II}.$$

Из ове једначине сљедује.

$$\log.\ K = \log.\ k + n\ \log.\left(1+\frac{p}{100}\right) + \log\left(1+\frac{mp}{1.200}\right) \ldots\ldots \alpha^1,$$

а из тога

$$\log.\ k = \log.K - n\ \log.\left(1+\frac{p}{100}\right) - \log\left(1+\frac{mp}{1{\cdot}200}\right) \ldots,\ \beta^1,$$

Време од n година и m месеци неможе се непосредно из јед. II. изнаћи. Па ако сада означимо време са z, то је јасно да је $n < z < n+1$, па зато и

$$k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n < k\left(1+\frac{p}{100}\right)^z < k\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n+1};$$

исто тако сљедује

$$K > k\left[1+\frac{p}{100}\right]^n, \text{ и } K < k\left[1+\frac{p}{100}\right]^{n+1};$$

Ако сада узмемо $K = k\left[1+\frac{p}{100}\right]^z$, то је

из тога $z = \dfrac{\log.\ K - \log.\ k}{\log.\left[1+\frac{p}{100}\right]}$

Ако је z разломљен број, то је овоме броју z најближа и најмања вредност у целом броју број n, па кад ову познајемо, то сљедује из (α^1;

$$\log.\left[1+\frac{mp}{1200}\right] = \log.\ K - \log.k - n\ \log\left[1+\frac{p}{100}\right]$$

дакле и $1+\frac{mp}{1200}$ а из тога m.

Пример

5000 динара капитала по 4% нарасту до $6689{\cdot}31$ динара; за које време?

Овде је $K = 6689{\cdot}31$, $k = 5000$, $p = 4$

Да би могли изнаћи z имамо $\log. K = 3{\cdot}8253814$

$$\log. k = 3{\cdot}6989700$$

$$\log. K - \log. k = 0{\cdot}1264114$$

$$\log. \left[1 + \frac{p}{100}\right] = 0{\cdot}0170333$$

Зато је $z = 0{\cdot}1264114 : 0{\cdot}0170333 = 7{\cdot}4$ . . . . зато је број година у целом броју т. ј. $n = 7$

Да би могли изнаћи m, имамо $\log. k = 3{\cdot}6989700$

$$n \log. \left[1 + \frac{p}{100}\right] = 0{\cdot}1192331$$

$$\text{Зато је } \log. \left[1 + \frac{mp}{1200}\right] = 3{\cdot}8253814 - 3{\cdot}8182031 = 0{\cdot}0071783,$$

$$\text{Из тога сљедује } 1 + \frac{mp}{1200} = 1{\cdot}016666$$

$$\frac{4m}{1200} = 0{\cdot}016666$$

$$m = 5$$

Дакле је лежао капитал 7 година и 5 месеци.

Примери за упражњавање.

1.) Колика ће постати сума од 3600 динара по $4\frac{1}{2}$ % за 22 године са интересом на интерес?

(9481·2 дин.)

2.) Колики ће постати капитал од 500 # по $3\frac{1}{2}$ % за 8 година? (Број 658·4 #).

3.) А уложи у штедионицу 5·25 #; колико ће добити после 19 година по 4 % (11·06175 #).

4.) Неки купи за 60.000 динара вина; колико вреди то вино после 5 година кад узмемо да је капитал требао да се увећа са 6 % интереса на интерес (74.292·53 дин.)

5.) Нека штедионица примала је на зајам 1.500 по 3 %, па је издала овај капитал са 5 %; колико ће изнети добитак штедионице после 10 година са интересом на интерес? (437·31 дин.).

6.) Нека шума процењена је у 36800 кубни метара, годишњи вишак износи по искуству 2 %; колико ће та шума изнети кубни метара после 10 година? (44859 $\boxtimes$ *m*.).

7.) Колики ће постати капитал (a) од 4500 f по 4 % за 10 година, кад се интереси капиталишу *1)* сваке пола године (2 сваке четврт године

$$1)\ a = 4580 \times 1{\cdot}02^{20} = 6805{\cdot}66\ f$$

$$2)\ a = 4580 \times 1{\cdot}02^{40} = 6818{\cdot}16\ f$$

8.) Колики је био капитал (a), који је био по 4 % за 20 година (n) достигао суму 3456 динара? (1577 дин.).

9.) Неки има да плати после 5 година 2760 динара без интереса; колико има праве вредности ова сума, кад се узме у рачун инт. на интерес по 4 ½ % (2214·68).

10.) У вароши А има сада 100.000 обитника и зна се, да се умножио број обитника за последњи 20 година са 4 %; колико је обит. било пре20 година? (45641.

11) Неки коме је сада 27 година, хоће да остави свом насљеднику после своје смрти 2100 динара; колико би износила у једанпут наплаћена премија код осигуравајућег друштва, кад се рачуна 6 %, и кад је могућа вероватноћа, да ће дародавац живити још 30 година. (365·4 динара).

12.) 3600 динара издато по 4 ½ %, умножило се са интерес. на интерес до 9481·2 динара, колико је времена тај капитал лежао? [22 године].

13.] После колико година може износитикапитал од 8443 динара по 4 % исто толико колико износи 9.000 д. по 6 % после 9 година?

14.] За колико година може да се удвоји капитал по 4 % са интересом на интерес? [не потпуни 18 година).

228. *Дискотни рачуни*, казују како се рачуна вредност данашња или готова вредност x неког дуга s, који би се имао исплатити без интереса после n година.

Како треба овај рачун (дисконтирање) да радимо, има више начина, међу којима је најистинитији начин Лајбницов, који овако вели: дужник има поверитељу [кредитору] данас толико капитала да плати, који ће се ако га за n година издамо под интерес на интерес, умножити и бити раван дугујућој суми s. Сада знамо да се умножава капитал по рачуну интереса на интерес тако, да од x динара за n година постају $x\,p^n$ и зато је $xp^n = s$, дакле: $x = \frac{s}{p^n}$

(Лајбницов образац за дисконтне рачуне).

Примери:

1] Колико вреде данас 5943 динара, које би се имало исплатити после 12 година без интереса? рачунајући 4 % — разреш. 3711·59 дин.

2] Неки капитал који би имао да лежи без интереса до 1-вог Јануара 1883 год. има готову вреност 1-вог Јануара 1877. год. 4112 динара са одбитком (рабат, дисконто) 600 динара. Колико је % рабате дозвољено?

Овде је дугујућа сума $s = 4112 + 600 = 4712$ дин. и $x = 4112$ разреш. 2·29%.

3) А је дуговао лицу В 879 динара, тако, да му ји врати после *3* године. В затреба те паре одма и споразуме се са лицем А у том, да одбије од суме 6 % рабате. Колико ће имати А одма да плати? разреш. 738·(2 дин.

4.) Неки је купио једно имање и по куповном уговору имао би платити одма 16000 дин. а после 4 године опет 16000 динара и најпосле после 4 год. остатак од 9580 динара; и то ове две последње суме без икаква интереса до означеног времена.

Сада се уговорачи сложе да купац имања исплати целу суму одма са 4 ½ % шконтом. Колико ће свега платити?

229. Рачунање доодка (ренте).

Доодак или рента зове се она сума новаца, коју неко у једнакој количини узастопце за неколико година прима.

Кад су ове године у напред уговорене и опредељене и ако овај доодак после неколико година престаје онда се зове *годишња рента.*. Ако се на против мора овај доодак непрестано издавати, докле год лице живи које овај доодак ужива онда се зове *лична рента*. У овим последњим рачунима мора се по рачунима вероватноће, тражити вероватна могућност живота тога лица.

Рента је и то, кад се неки дуг исплаћује годишње у једнаким сумама.

Ово плаћање траје све дотле док се дуг неизмири или док се вероватно не исплати. Задатци са годишњим повратним плаћањем спадају у ову категорију.

„Капитал k издаје се по p процента са сложеним интересом за n година, сем тога да се сваке године и то при крају године додаје b динара задатом капиталу; ако сада рачунамо годишњи интерес, и последњи додатак да је уложен при крају n-не године; до које ће суме задати капитал порасти заједно са свима додатцима?“

k динара умножиће се за n година по p% са $k\left[1 + \frac{p}{100}\right]^n$

При крају прве год додало се b динава, онда ће ови при крају n године стајати под интерес само $\left(n - 1\right)$ годину,

зато ће постати $b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$ динара, додатак који је уложен при крају друге године биће $b\left[1 + \frac{p}{100}\right]^{n-2}$ динара и т. д.

Ако сада означимо због краћег писања $1 + \frac{p}{100}$ са ω, то је капитал при крају n-не године: $k\,\omega^n + b\omega^{n-1} + b\omega^{n-2} + \ldots +$

$+ b\omega + b$. Ако овај збир ставимо $= s$, а геометријски ред $b + b\omega + \ldots + b\omega^{n-2} + b\omega^{n-1} =$

$= b. \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$ (§. 221.) то сљедује најпосле једначина:

$$s = k\omega^n + b.\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} \ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

Из ове једначине сљедује:

$$k = \frac{s}{\omega^n} - b.\frac{\omega^n - 1}{\omega^n(\omega - 1)} \ldots\ldots\ldots (\alpha,$$

$$b = \frac{[s - k\omega^n][\omega - 1]}{\omega^n - 1} \ldots\ldots\ldots [\beta.$$

$$n = \frac{\log.[b + (\omega - 1)s] - \log[b + (\omega - 1)k]}{\log.\omega} \ldots [\gamma.$$

За p, т. ј. ω имамо једначину

$$k\omega^n + b\omega^{n-1} + b\omega^{n-2} + \ldots + b\omega + [b - s] = 0 \ldots [\delta$$

која у опште неможе да се разреши никако па и кад су познате задате вредности k, b, n и s према до сада показаном, ако само n пређе број 2.

231. *Ако се има од капитала к при крају сваке године b динара да одбију, а остатак да се остави под интерес по p; па да се определи колико је после n година од задатог капитала још заостало.*

k динара дају за 1. годину $k\,\omega$ динара, а кад од овога треба да одбијемо b динара, то ће заостати при крају прве године $(k\omega - b)$ динара, а ово је уједно количина која се у другој години даје под интерес. $(k\omega - b)$ динара при крају друге године дају $(k\omega - b).\,\omega = [k\omega^2 - b\omega]$ динара, и пошто се од тога има да одбије b динара, то ће заостати $(k\omega^2 - b\omega - b)$ динара које ће дати при крају треће године $(k\omega^2 - b\omega - b)\,\omega = = k\omega^3 - b\omega^2 - b\omega$ и са одбитком b динара, $k\omega^3 - b\omega^2 - b\omega - b$.

у опште заостаје при крају n-не године: $k\omega^n - b\omega^{n-1} - b\omega^{n-2} - \ldots\ldots - b = R$ динара или због $k\omega^n - b[1 + \omega + \omega^2 + \ldots\ldots \omega^{n-1}] = k\omega^n - b.\dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$

$$\text{дакле } R = k\omega^n - b.\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} \ldots\ldots \text{IV.}$$

Прямедба.

Овај образац смо могли добити непосредно из јед. III. кад би тамо било $-b$ у место b и кад би R заменули за s, относно количина k, b, n, и ω вреде оне исте једначине, као што су α, β. γ и δ.

Примери:

1). Неки уложи 1500 динара капитала по 4% са интересом на интерес. При крају сваке године додају се још 200, динара; колика ће сума бити после 8. година?

По образцу III. (§ 228) налазимо $k = 1500$, $b = 200$, $n = 8$, и $\omega = 1 + \dfrac{p}{100} = 1{\cdot}04$

Последњи капитал $= s = 1500\,(1{\cdot}04)^8 + \dfrac{1{\cdot}04^8 - 1}{0{\cdot}04}$

или због $\dfrac{200}{0{\cdot}04} = 5000$,

$$s = 1500.\,(1{\cdot}04)^8 + 5000\,[(1{\cdot}04)^8 - 1]$$

$$s = 6500.\,(1{\cdot}04)^8 - 5000$$

$$\log.\,6500 = 3{\cdot}8129134$$

$$\log.\,(1{\cdot}04)^8 = 0{\cdot}1362664$$

$$3{\cdot}9491798$$

за ово је одговарајући број $= 8895{\cdot}69$

зато је $s = 8895{\cdot}69 - 5000 = 3895{\cdot}69$ динара.

2). Неки дугује једну суму од 10.000 динара и обвезао се да ову суму исплати у 12 једнаки годишњи рокова по 5% интереса, и то да се први рок одплати на крају једне год. колико ће износити једна рата одплаћивања?
вредност за b налазимо из јед, IV. (§. 231), кад узмемо $R = 0$,

онда је $b = \dfrac{k\omega^n\,(\omega - 1)}{\omega^n - 1}$ или због $k = 10.000$.

$\omega = 1{\cdot}05$ и $n = 12$

$$b = \frac{10000.(1{\cdot}05)^{12}.\ 0{\cdot}05}{(1{\cdot}05)^{12} - 1} = \frac{500\,.\,(1{\cdot}05)^{12}}{(1{\cdot}05)^{12} - 1},$$

$\log.\ 500 = 2{\cdot}6989700$

$\log.\ (1{\cdot}05)^{12} = \begin{array}{l} 0{\cdot}2542716 \\ \hline 2{\cdot}9532416 \end{array}$ . . . . , (m

Због $[1{\cdot}05]^{12} = 1{\cdot}795856$ сљедује

$\log.\ [(1{\cdot}05)^{12} - 1] = 0{\cdot}9008345 - 1$,

и кад одузмемо овај логаритам од (m.

$\log.\ b = 3{\cdot}0524071$

дакле $b = 1128{\cdot}25$ динара што се има давати годишње.

3]. Један капиталиста троши од свога капитала т. ј. од 60000 динара који носи 5% годишње 5000 динара: после ког времена мора бити цео капитал утрошен?

Ако се ови 5000 динара свагда при крају године узимају то ћемо рачунати по обрасцу *IV.* кад узмемо

$R = 0$, то је $n = \dfrac{\log.b - \log.\ [b - k(\omega - 1)]}{\log.\ \omega}$

у задатку је $k = 60000.\ b = 5000,\ \omega = 1{\cdot}05$.

Зато је $n = \dfrac{\log.\ 5000 - \log.\ [5000 - 60000\ .\ 0{\cdot}05]}{\log.\ 1{\cdot}05}$

или $n = \dfrac{\log.\ 5000 - \log.\ 2000}{\log.\ 1{\cdot}05}$

$$\begin{array}{l} \log.\ 5000 = 3{\cdot}6989700 \\ \log.\ 2000 = 3{\cdot}3010300 \\ \hline \qquad 0{\cdot}3979400 \end{array}$$

$\log.\ 1{\cdot}05 = 0{\cdot}0211893$

$n = \dfrac{0{\cdot}3979400}{0{\cdot}0211893} = 18{\cdot}78$ . . . . година,

т. ј: уложени капитал потрошиће се за не пуни 19 година (По обрасцу *IV.* сљедује заиста, да после 18 година остаје од целе суме само 3067·96 динара, *а* то је сума која ће се утрошити у течају 19. године.

4), Једно лице жели у течају од 10 година при крају сваке године да добија 700 динара; колико капитала мора се уложити, кад постоји обвеза да се по $4\frac{1}{2}$ % капитал издаје?

Примедба.

Овај задатак истоветан је са сљедујућим: колики је капитал, који је по $4\frac{1}{2}$ % интереса на интерес уложен па се после 10. година утрошио, кад се при крају сваке године 700 динара узимало од капитала?

Из обрасца *IV.* сљедује, кад узмемо за $R = 0$,

$$k = b.\ \frac{\omega^n - 1}{\omega^n\ (\omega - 1)},$$

а због $b = 700,\ \omega = 1{\cdot}045$ и $n = 10$

$$k = 700.\ \frac{(1{\cdot}045)^{10} - 1}{(1{\cdot}045)^{10}\ .\ 0{\cdot}045} = \frac{700000\,[(1{\cdot}045)^{10} - 1]}{45\times(1{\cdot}045)^{10}}$$

$$\log. (1{\cdot}045)^{10} = 0{\cdot}1911630$$

дакле $(1{\cdot}045)^{10} = 1{\cdot}55297$.

$$\log. 700000 = 5{\cdot}8450980$$

$$\log. [(1{\cdot}045)^{10} - 1] = \frac{0{\cdot}7427016 - 1}{5{\cdot}5877996}$$

$$\log. 45 = 1{\cdot}6532125$$

$$\log. (1{\cdot}045)^{10} - 0{\cdot}1911630$$

$$\overline{1{\cdot}8443755}$$

дакле $\log. k = 3{\cdot}7434241$

$$k = 5538{\cdot}91 \text{ динара}$$

5). Неком новчаном заводу предато је 4000 дук. колико ренте може овај кроз 20 година исплаћивати, кад прва ислата одпоћиње при крају прве, *а* последња при крају 20-те године, и кад капитал $5^1/_2$ % носи?

(годишња рента износи 334·72 дуката)

6.) Нека општина узајми 40000 дук. и плаћа при крају сваке године суму од 3000 дук; после колико година ће се тај дуг одплатити, кад је условљено да се на остатак 5% плаћају?

(Овај ће се дуг исплатити за близу $22^1/_2$ године)

7). Колико капитала треба уложити, да по 6% за 20 година носи ренту од 500 динара? (улог износи 5734·96 динара),

8). Неки хоће после 18 година да прими суму 12000 *fl*; колико треба годишње да улаже, кад се рачуна $3^3/_4$ %, и кад се при крају 18-те године ништа неулаже? (треба годишње плаћати 461·45 *fl*).

9). Капиталу од 1000 динара додаје се при крају сваке четврт године 100 динара; колика ће сума изаћи после 50 година, по 5% рачунајући интерес сваке $^1/_4$ године?

(По обрасцу III слѣдује, кад је $k = 1000$, $b = 100$, $p = {}^5/_4$ и $n = 200$, $s = 99955$ динара).

232. „Да се разреши овај задатак: Неки дуг од (k) динара има да се исплати за n година у једнаким роковима; проценат нека је p. Колико ће се при крају сваке године одплаћивати и колика је годишња сума, која се враћа од дугујућег капитала.

Одплате — капитала при крају 1-ве, 2-ге, 3-ће. . . . . n-не године нека су односно b_1, b_2, b_3 . . . . b_n.

При крају прве године изнеће отплата капитала b_1 динара а осим тога и у напред интерес од $[k - b_1]$ динара, дакле свега $b_1 + (k - b_1)\frac{p}{100}$ динара.

При крају друге године исплати ће се од капитала $(k - b_1)$ сума b_2 динара и интерес остатка $(k - b_1 - b_2)$ дакле је рата при крају друге године $b_2 + [k - b_1 - b_2]\frac{p}{100}$.

При крају треће године има да се отплати: $b_3 + (k - b_1 - b_2 - b_3)\frac{p}{100}$ и т. д. најпосле при крају предпоследње године $b_{n-1} + (k - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots\ldots b_{n-1})\frac{p}{100}$ и при крају последње године: $b_n + (k - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots\ldots - b_n]\frac{p}{100} = b_n$ јер је $k = [b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n] \ldots (\alpha$

Ако треба да су све одплате једнаке, онда добијамо ове једначине:

$$b_1 + [k - b_1]\frac{p}{100} = b_2 + [k - b_1 - b_2)\frac{p}{100}$$

$$b_2 + (k - b_1 - b_2)\frac{p}{100} = b_3 + (k - b_1 - b_2 - b_3]\frac{p}{100}$$

$$b_3 + (k - b_1 - b_2 - b_3)\frac{p}{100} = b_4 + (k - b_1 - b_2 - b_3 - b_4(\frac{p}{100}$$

— — — — — — — — — — — — —

$$b_{n-1} + (k - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_{n-1})\frac{p}{100} = b_n + [k - b_1 - b_2 - b_3 \ldots\ldots - b_n)\frac{p}{100}.$$

Из прве од ових једначина излази $b_2 = \dfrac{b_1}{1 - \frac{p}{100}} = \dfrac{b_1}{v}$

кад означимо $1 - \dfrac{p}{100}$ са v, из друге једначине сљедује, $b_3 = \dfrac{b_2}{v}$. или због $b_2 = \dfrac{b_1}{v}$, $b_3 = \dfrac{b_1}{v^2}$, из треће једначине $b_4 = \dfrac{b_1}{v^3}$, и т. д. најпосле $b_n = \dfrac{b_1}{v^{n-1}}$,

Кад поједине количине b поставимо у једначину (α, то је

$$b_1 + \frac{b_1}{v} + \frac{b_1}{v_2} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{v^{n-1}} = k_1$$

зато је $b_1 v^{n-1} + b_1 v^{n-2} + \ldots\ldots + b_1 v + b1 = kv^{n-1}$

или $b_1 \ (1 + v + v^2 + \ldots\ldots + v^{n-2} + v^{n-1}) = kv^{n-1}$

$$\text{и } b_1 \frac{v^n - 1}{v - 1} = kv^{n-1}, \text{ дакле } b_1 = \frac{kv^{n-1} (v - 1}{v^n - 1}$$

Ова вредност показује ону суму од капитала, која се има платити при крају прве године, а по томе су опредељене и оне друге отплате капитала b_2, $b_3 \ldots\ldots b_n$.

Годишња рата која је свагда једнака добија се из

$$b_1 + [k - b_1] \frac{p}{100}$$

Ако ово означимо са a, то сљедује

$$a = b_1 + [k - b_1] \frac{p}{100} = b_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) +$$

$$+ k \frac{p}{100} = b_1 v + k [1 - v]$$

$\left[\text{због } 1 - \dfrac{p}{100} = v\right] \ldots\ldots$ (β. За b_1 горња изнађена вредност кад се овде замене, даје

$$a = \frac{k [1 - v]}{1 - v^n} \quad \ldots\ldots \quad V.$$

Пример.

Неко дружтво има 2 милиона динара капитала, овај дуг има да се исплати за 50 година са 5%. Колико треба при крају сваке године отплаћивати, кад се годишњи интереси у напред морају полагати?

Због $k = 2000000$, $n = 50$, $p = 5$, сљедује из јед. V.

$$a = \frac{2000000 \frac{5}{100}}{1 - [0{\cdot}95]^{50}} = \frac{100000}{0{\cdot}923055} = 108335{\cdot}89 \text{ динара}$$

Прва одплата налази се из (β. $b_1 = \dfrac{a - k\ (1 - v)}{v} =$

$$\frac{a - k \cdot \frac{p}{100}}{1 - \frac{p}{100}} \text{ и у овом случају}$$

$$b_1 = \frac{108335{\cdot}89 - 100000}{0{\cdot}95} = \frac{8335{\cdot}89}{0{\cdot}95} = 8774{\cdot}62 \text{ динара.}$$

Задатци као примена геометријских редова.

Интерес на интерес и рачуни ренте.

1.) Неки индијски краљ, по имену *Scheram*, затражи од *Sesa Ebn Daher-a* да овај за свој проналазак (игру шах) сам себи одреди награду. Он заиште од краља онолику суму зрна шенице, колико стаје на дашчици, кад се узме на прво поље дашчице 1 зрно, на друго поље 2 зрна, на треће поље 4 зрна и тако на свако сљедеће поље (свега има 64 поља) све двапут више зрна? Колико износи цела сума зрна?

разреш 18446744073709551615 зрна.

2.) Неки одпочне да игра на новце и предузме да уложи први пут 10. дин. пара и кад ово изгуби он се реши сваки идући пут трипута више да уложи, док му се срећа не окрене. После 9-тог улога уплашисе и види да му ваља престати играти; јер му је од новца што је са собом понео заостало само још

20. дин. пар. Колико је уложио 9-ти пут у ту игру и колика је цела сума што је са собом понео?

рарзеш. 9-ти пут уложио је 656·1 динара, а цела сума што је понео износи 984·3 динара.

3.) Други играч исто је тако покушао срећу у хазардној игри и предузме да му сваки сљедујући улог буде двапута већи од предходећег ако срећа непослужи; напротив ако га срећа послужи да само половину преходеће суме улаже. С почетка изгуби 8 улога, после добије 5 пута узастопце, и то свагда 12 пута онолико колики је био улог (т. ј. он добија 11 пута колики је улог и свој улог), па пошто даљој срећи неповерује, он престане играти са добитком од 949 $\frac{1}{2}$ фор.

Колико је уложио први пут,

разреш. $\frac{1}{6}$ форинте.

4) Између 1 и $\frac{1}{2}$ да се уметну 11 чланова по правилу геометријске сразмере. Који су то чланови*.

разреш. 0·9439; 0·8909; 0·8409; 0·7937; 0·7492; 0·7071

0·6674; 0·6300; 0·5946; 0·5612; 0·5297.

5.) Неки капитал од 1.200 динара дат је под интерес на интерес са 4 процента. Колико ће овај износити после 36 година.

разреш. 4924 $\frac{21}{30}$ динара.

6.) Неки је умро 1724. год. па је оставио 400 дуката у тестаменту тако, да стоји 60 година под интерес; после тога времена да се подигне школа у којој ће се моћи сместити 120 ученика; кад је 1784. год. ова штола основана, колики је био капитал.

разреш. 7471·67 дуката.

7.) Колики ће постати капитал од 2400 динара са 4 $\frac{3}{4}$ процента после 27 година.

разреш. 8401 $\frac{3}{4}$ динара.

8.) Неки капитал k дат је под интерес на интерес са процентом p, колико ће овај износити после n година?

разреш. $k\ (1 + 0{\cdot}01\ p)^n$.

* Овај задатак примењује се особито у акустици

9) У некој шуми има 13490 $\frac{3}{5}$ хвати дрва, која се годишње множе са 2 $\frac{1}{4}$ процента. Колико ће дрва бити у тој шуми после 80 година?

разреш. 80001 хват.

10) Колики ће постати капитал од 2400 динара после 27 година са 4 $\frac{3}{4}$ процента, кад се интерес сваке по године капитализира?

разреш. 8524 $\frac{3}{4}$ динара.

11) У некој вароши било је 32500 житеља, па је овај број умножен после 24 године са 33566 душа. Колико је износио годишњи вишак на сваки 100 душа? разреш. 3.

12) По *Rickmann-у* износио је број житеља у енглеској године 1760. 6479730, године 1800. 9187176, а године 1830 13840751 душа.

Дал је прираштај житељства у овом времену био правилан или не?

У првом времену износио је 9·12 у другом 14·64 процента.

13 На колико процента ваља да стоји неки капитал, па да се после 10 година удвоји.

разреш. 7·177 процента.

14) Јаков је прешо у египат са 69 душа, тако да јих је било свега 70. Кад су из египта излазили после 430 година бројали су 660000 душа.

Колики је годишњи прираштај, кад се узме да од 50 душа морају 3 годишње умрети.

разреш. 8·151 процент — или на 12 душа долази да је једна годишње рођена.

15) После колико година постаје капитал од 2739 динара исто толики, колики је постао и капитал од 3815 динара после 7 година, ако је био процент и једног и другог 3 $\frac{3}{4}$?

разреш за 16 година.

16) Пре колико година је био неки капитал који је доносио 4 процента, само за трећину његове садашње вредности?

разреш. пре 28 година и $\frac{1}{10}$ месеци.

17) Неки има годишње ренте (анунтет) од 700 талира да ужива за 10 година. Колико се може сада за ово платити кад се рачуна 4 $^1/_4$ процента?

разреш. 5607·7 талира.

18) Неки дуг од 3816 талира који је носио 4 процента треба да се исплати за 5 година а годишње да се плаћа једна иста сума. Колико треба давати годишње.

разреш. 857·18 талира,

19 Нека држава начини зајам од 3 милиона динара са 5 процента, па хоће да исплати за 25 година тако, да сваке године одређену суму плаћа рачунајући ту и интерес. Колика је ова сума.

разреш. 212857

ПЕТНАЈЕСТИ ОДСЕК

НАУКА О КОМБИНОВАЊУ

Општи појмови.

233 Кад код задатих предмета, негледамо на њихову количину нити на друга нека својства, но само на онај поредак по ком су они сложени; онда велимо, да је наука о *комбинацијама* (синтактика) онај део аритметике, који показује законе по којима се под задатим условима имају предмети у гомиле слагати.

Ови предмети који се слажу (комбинирају) зову се *основци* (елементи), и ми ове означавамо са бројевима што сљедују по природном реду или са писменима н. п. 1, 2, 3, 4, . . — или a, b, c, d, ... сваки основак (елемент) који у природном реду доцније долази зове се *виши*; а кад ове основке сложимо у гомиле, онда се зову *слогови* (комплексије).

Писмена или цифре што су овако сложене у гомиле, нетреба сматрати у аритметичном смислу као производе.

Слогове састављене из основака делимо још на више и ниже слогове.

Тако је од два слога онај виши у ком се (с лева у десно) налази најпре какав виши основак н. пр. a b d c виши је слог од a b c d, 1324 виши је слог од 1243 или 1234.

У истом смислу кажемо, да су слогови добро уређени кад сљедују један за другим тако, да је сваки сљедујући слог виши од предидућег.

Науку о комбиновању делимо на ове три главне операције:

1) на премештање (пермутације,
2) на свезивање (комбинације) и
3) на премењивање (варијације)

Премештање (пермутације)

234. „Ако слогови који се имају да начине, треба да имају све дане основке, али све у другом и другом положају, онда се ти слогови зову премештања (пермутације(а рад, којим се они добијају премештање или пермутовање задатих основака.

Дакле сва премештања или пермутације разликују се међу собом само тиме којим радом дани основици у њима један за другим долазе, и зато припадају једном истом реду, ако се узме да ред одређује број основака, који се у њима налазе.

Да би могли из задатих основака извести све могуће слогове или премештања, треба пазити на ово:

Најнижи слог добиће се кад су дати основци поређани с лева на десно од најнижег до највишег као што иду у природном реду. Ако су задати основци цифре то ће оне у овом правцу образовати растећи ред. Највиши слог биће са свим противног својства.

Ако сада желимо да пређемо од најнижег слога понајближем вишем, онда ћемо ићи с лева на десно до најдаљег места на ком се налази такав основак који се може повисити, т. ј. место којег се може од доцнијих основака метути понај ближи виши основак.

Кад смо нашли на такав основак ми ћемо основке лево од њега написати у слогу, који тек хоћемо да нађемо, онако, како су били написани, њега самог повисићемо, што је могуће мање, т. ј. од доцнијих основака метнућемо на његово место непосредно виши основак, а на остала празна места с' десна написаћемо остале основке у природном реду.

Кад овако одпочнемо са најнижим слогом и продужимо ово исто чинити са свима сљедујућим слоговима то ћемо добити све могуће добро уређене слогове или премештања; и

најпосле један слог на који се речено правило неможе више применути, а то је последњи слог у коме су основци с погледом на први слог у обрнутом реду.

Примери

1. Задати су основци 1, 2, 3, 4.
премештаји:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Горње правило вреди у опште било да су дани основци различни између себе, било да има међу њима и једнаких.

2. Да се начине премештаји од основака *a*, b, b, *c*.

премештаји:

abbc	b*bca*
*a*b*cb*	b*cab*
*ac*bb	b*cba*
babc	*cab*b
bacb	*cbab*
bbac	*cbba*

3.) Задато: 1, 2, 2, 3, 3.

премештаји

12233	22313	31322
12323	22331	32123
12332	23123	32132
13223	23132	32213
13232	23213	32231
13322	23231	32312
21233	23312	32321
21323	23321	33122
21332	31223	33212
22133	31232	33221.

Број премештаја

235 *Број премештаја кад су n различити основака.*

С погледом на 1. пример предходног параграфа видимо, да се могу добивени слогови разложити у толико исто гомила колики је број основака. Од задата 4 основка стоји свакад један с‘ лева на крају и то: 6 пута први основак, толико исто други, трећи и четврти основак.

С погледом на сваку гомилу видимо, да кад се у сваком слогу исте гомиле изузме први основак с‘ лева, онда имамо сва премештања из остала 3 основка.

У опште ако премештамо n основака, то ћемо све слогове којих је број означен са P_n, моћи разложити на n гомила; тако, да сваки основак подједнако стоји на првом месту.

Кад се у слоговима једне исте гомиле изузме први основак с лева, онда нам остају сви слогови, или премештања, који се дају начинити из осталих $(n - 1)$ основака.

Ако означимо број премештаја од $(n - 1)$ основка са P_{n-1}, то сљедује једначина $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Али је $P_1 = 1$, јер један основак може само једанпут стајати.

$$P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1$$

$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 . 2 . 1.$$

$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 . 3 . 2 . 1.$$

— — — — — — —

— — — — — — —

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n - 1)\,(n - 2)\, . \, . \, . \, 3 . 2 . 1$$

одкуда сљедује. *да је број премештаја од различитих основака раван производу из реда природни бројева од 1 до оног броја који је једнак броју основака.*

Овај производ 1. 2. 3, 4. . . . $(n - 1)$. n, означавамо обично са $n!$ и читамо »*производно n*“

дакле је $P_2 = 2!$. $P_3 = 3!$. . . . $P_n = n!$.

236 *Број премештаја, кад се међу задатим основцима налазе и једнаки.*

Ако има између n основака α једнаки, онда је рецимо множина премештаја $x!$. сваки од ови x премештаја има α једнаки основака. Замислимо сада да су ови различити то ћемо добити, кад немењају први различити основци своја места, из сваког од ови x премештаја још $\alpha!$ и тако свега $n!$. слогова.

По томе добијамо једначину: $x \cdot \alpha! = n!$

$$\text{а одавде } x = \frac{n!}{\alpha!}$$

т. ј. у овом случају налазимо број премештања кад број који показује, колико се премештања може добити из n различтих основака поделимо са бројем који показује колико се слогова може добити из α различитих основака.

Из тога видимо, да је број премештања из n основака, међу којима има α једнаки, β други једнаки и γ трећи једнаки основака $= \dfrac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$ тако су н. пр. између ови 5 основака 1, 2, 2, 3, 3, два и два једнака т. ј. $n = 5$, $\alpha = \beta = 2$,

дакле број премештаја $= \dfrac{5!}{2!\ .\ 2!\ .} = \dfrac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}{1\ .\ 2\ .\ 1\ .\ 2} = 30.$

По себи се разуме да мора бити овај израз $\dfrac{n!}{\alpha!\ .\ \beta!\ .\ \gamma!}$ цео број, и да $\alpha + \beta + \gamma$ могу бити само равни, а у осталом свагда мањи од n.

Кад између α, β, γ. једнаки основака, основци γ престану бити једнаки т. ј. да се узму као различити, онда се поставља $\gamma = 0$, а разломак $\dfrac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$ прелази у $\dfrac{n!}{\alpha!\ \beta!\ 0!} =$

$$= \frac{n!}{\alpha!\ \beta!}$$

Овде можемо врло лако доказати шта значи 0! ако само замислимо, да је $n! = n\,(n - 1)!$ а одавде $[n - 1]! = \dfrac{n!}{n}$

или за $\qquad n = 1 \quad 0! = 1.$

Свезивање (комбиновање)

237. Кад је задато, да из n основака начинимо слогове у којима треба да има све по 1 или све по 2, по 3, . . . по n основака, али тако, да се сваки слог разликује од сваког другог бар једним основком, онда тако добивени слогови зову се и свезе односно 1г, 2г, 3г, . . . nг реда, а рад којим се они добијају свезивање или комбиновање (у тешњем смислу) даних основака.

Кад се у неком слогу један исти основак несме да постави више пута, онда имамо „свезу без понављања а у противном случају свезу с понављањем.“

Да се изданих основака имају начинити свезе 1г. 2г, 3г, . . . γног реда, означавамо тиме, што пишемо пред ограђеним а запетама одвојеним основцима односно: C^1, C^2, C^3, ...C^r. А кад има понављања

$$C^1_\omega,\ C^2_\omega\ .\ .\ .\ C^r_\omega.$$

Тако означава $C^r\,(a, b, c, d, \ .\ .)$ свеза r-не класе без понављања из основака a, b, c, d, . . . ; на против означава

$$C^r_\omega\ [a,\ b,\ c,\qquad .\qquad]$$

свезе rне класе са понављањем. Овде је r изложитељ реда.

Задате основке слажемо у извесну класу без понављања овим начином:

Најпре стављамо толико основака почињући од најнижег по природном реду једно до другог, колико редни изложитељ има јединица: тако добијамо најнижу свезу.

Сада треба у тој најнижој свези да изоставимо последњи основак с десна, а на његово место да ставимо понајближи виши основак из задатог реда, па ћемо добити нову свезу па кад у овој опет изоставимо последњи основак и на његово место поставимо као и пре понајближи виши основак из задатог реда и т. д. док не изађе такав слог у ком је последњи основак највиши из задатог реда, дакле такав, да неможе бити виши. Даље треба да ставимо на место предпоследњег члана понајближи виши од њега, а као последњи члан долази онај непосредно сљедујући по реду виши од предпоследњег. Кад овако и даље радимо, док и предпоследњи члан неможе бити виши, па продужимо овако радити и са предпоследњим основком, док и на ово место неможе да се постави који виши основак из задатог реда; па кад овако учинимо и са свима предходећим основцима, то ћемо добити најпосле такав слог, у ком се налазе толико од највиших основака задатог реда, колико показује изложитељ класе,

Ако су задати основци реда: 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7, и ако је свеза 12467, то се види, да за понајближи виши слог последња два основка немогу бити виши, него тек на треће место долази у место 4 основак 5. па је тако понајближа виша свеза 12567.

Тако исто можемо видити кад бројимо с десна у лево, да је 2 први основак који може и виши бити, па ако поставимо за овај понајближи виши основак 3, а остала места попунимо са цифрама што иду по природном реду то ћемо добити свезу 13456 и т. д.

Кад горњи пример т. ј. $\overset{5}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) потпуно изведемо, добићемо сљедујуће свезе

12345	13456
12346	13457
12347	13467
12356	13567
12357	14567
12367	23456
12456	23457
12457	23467
12467	23567
12567	24567
	34567

2] Да се образује $\overset{4}{C}$ (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*.)

abcd	*acdg*	*bceg*
abce	*acef*	*bcfg*
abcf	*aceg*	*bdef*
abcg	*acfg*	*bdeg*
abde	*adef*	*bdfg*
abdf	*adeg*	*befg*
abdg	*adfg*	*cdef*
abef	*aefg*	*cdeg*
abeg	*bcde*	*cdfg*
abfg	*bcdf*	*cefg*
acde	*bcdg*	*defg*
acdf	*bcef*	

238. При свезивању с повторавањем има да се пази, да је најнижи слог на сваком месту попуњен с најнижим основком, у осталом чинићемо даље све оно што смо показали код свезивања без повторавања: даље треба мотрити, да при прелазу с једног слога на понајближи виши, пошто већ увећамо место, да ставимо сваки виши основак ког узимамо из задатог реда на свако сљедујуће место новог слога.

1. Да се образује $\overset{3}{C_\omega}$ [*a*, *b*, *c*, *d*, *e*)

Овде налазимо ове комбинације:

aaa	*add*	*bec*
aab	*ade*	*ccc*
aac	*aee*	*ccd*
aad	*bbb*	*cce*
aae	*bbc*	*cdd*
abb	*bbd*	*cde*
abc	*bbe*	*cee*
abd	*bcc*	*ddd*
abe	*bcd*	*dde*
acc	*bce*	*dee*
acd	*bdd*	*eee*
ace	*bde*	

2.) Да се образује. $\overset{3}{C}_{\omega}$ (1, 2, 3, 4).

111	134	333
112	144	334
113	222	344
114	223	444
122	224	
123	233	
124	234	
133	244	

Број свеза.

239. *Број свеза без понављања кад има да свежемо n основака у r-ву класу.*

Овде означавамо по овом општем начину писања број свеза из n основака r-не класе, *симболом* $\binom{n}{r}$ и читамо „n над r", по томе значи $\binom{n}{r-1}$ број свеза $(r-1)$ класе. Замислимо сада образоване свезе понајближе ниже класе т. ј. оне $(r-1)$ ве класе, и сваку од ових свеза састављену са осталим $(n-r+1)$ основком што у њој нису; онда постају извесно $\binom{n}{r-1}(n-r+1)$ свеза r-не класе.

Сада можемо лако показати и то, да се све ове свезе неразликују једна од друге, него, да има r свеза једнаки. Узмимо једну од ових свеза па ћемо поступним избацивањем једног по једног основка добити r свеза $(r-1)$-ве класе, које се морају налазити у слоговима $(r-1)$ класе. Зато је образовано из r слогова $(r-1)$-ве класе r истоветни свеза r-не класе.

Замислимо сада ово тврђење примењено на сваки слог r-ног реда, то излази, да свакад r слогова прелазе у један једини. Тако налазимо оне разликујуће се свезе r-не класе кад производ $\binom{n}{r-1}(n-r+1)$ поделимо са r, и тако је главна једначина:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r} \quad \ldots\ldots (1.$$

Због $\binom{n}{1} = n$, јер у првој класи свеза стоји сваки основак засебно, а из тога налазимо даље:

$$\text{За } r = 2; \binom{n}{2} = \binom{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$\text{За } r = 3, \binom{n}{3} = \binom{n}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\text{За } r = 4, \binom{n}{4} = \binom{n}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

и у опште

$$\text{За } r = r, \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r} \quad \ldots (2$$

240. „Број свеза с понављањем, кад везујемо n основака у r-ву класу.

Кад су начињене свезе из n основака, онда можемо њихов број, ког означавамо симболом $\binom{n}{r}_w$ исто онако извести као и број свеза без повторавања али са $(n+r-1)$ основком, тако, да постане једначина: $\binom{n}{r}_w = \binom{n+r-1}{r}$.

Замислимо написане свезе с понављањем из оних n основака а ове замишљамо цифрама 1, 2, 3 . . . . представљене. У свакој добивеној свези повисимо сваки основак њен са бројем за 1 већим од сказаљке места тога основка; дакле 2-ги основак с лева са 1, 3-ћи основак са 2, 4-ти са 3 и т. д. и најзад последњи r-ни основак са $(r-1)$ јединица. Нових слогова биће дакле онолико исто, колико је и оних, одакле смо их извели. Али у новим слоговима, у којима ће осим даних n основака бити још $(r-1)$ нових: $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$ . . . . . $(n+r-1)$, неће више бити никаквих понављања, т. ј. сваки нови слог састојећи се из различитих основака. Ти нови слогови нису очевидно ништа друго већ свезе и то све r-га реда а без понављања из $(n+r-1)$ основака; 1, 2, 3. . . . . . . n, $(n+1)$ . . . . $(n+r-1)$.

Број тих нових слогова јесте дакле $(n+r-1)$ но како тај број мора бити = броју оних свеза, из којих смо их добили, то је: $\binom{n}{r}_\omega = \binom{n+r-1}{r}$

Из $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} n + r - 1 \\ r \end{bmatrix}$ сљедује по § 237. јед. (2.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_w = \frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\,(n+r-3)\ldots(n+1)\,.\,n}{1\;\,2\cdot 3\,.\,4\ldots\ldots(r-1)\cdot r}$$

241. Из $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\,(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots [r-1)\,.\,r}$

могу се извести ова важна закључења.

1] Тако налазимо кад је $r = n$

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{n\,[n-1]\,[n-2]\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots[n-2]\;n-1]\cdot n} = 1$$

За $r > n$ последњи чинитељ $n - r + 1 \lesseqgtr 0$,

а онда је $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = 0$.

2] Исто је тако кад се броитељ и именитељ од $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ помножи са $[n-r]!$ $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n\,[n-1]\ldots\ldots n-r+1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots r}\times$

$$\times\frac{[n-r]\,[n-r-1]\ldots\ldots\;3\,.\,2\,.\,1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots[n-r]} =$$

$$= \frac{n\,!}{r\,!\,[n-r]\,!}$$

Исто тако можемо предпоставити $\binom{n}{n-r}$ онда је

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n\,[n-1]\,,\ldots\ldots[r+1]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots[n-r)}\times$$

$$\times\frac{r\,[r-1]\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\,.\,.\,r} = \frac{n\,!}{[n-r]\,!\,r\,!}$$

дакле $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3] Из једначине $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ сљедује $r = n$,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,\ \text{а за}\ r = n + 1, \begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix} = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

и у опште кад је $r = n + m$

$$\begin{bmatrix} n \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n+m \end{bmatrix} = 0,\ \text{(исти §. тачка [1.)}$$

4] Даље је по једначини (1. §. 239.

$$p\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = (n - p + 1)\,.\,\begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix}$$

а исто тако $q\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = (m - q + 1)\;\begin{bmatrix} m \\ q-1 \end{bmatrix}$

Кад помножимо прву од ових једначина са $\binom{m}{q}$, а другу са $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ и саберемо, то је

$$(p+q)\,.\,\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = (n-p+1)\begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} +$$

$$+\,(m-q+1)\begin{bmatrix} m \\ q-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$$

ако узмемо за $p + q = \alpha$, то је $q = \alpha - p$, и онда је

$$\alpha\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ \alpha - p \end{bmatrix} = (n-p+1)\begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix}\binom{m}{\alpha - p} +$$

$$+\,(m-\alpha+p+1)\begin{bmatrix} m \\ \alpha - p - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$$

и кад овде узмемо у место p по реду 0, 1, 2, 3 . . . . . α и погледамо на 3. овога § где је

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{-1} = \binom{m}{-1} = 0.$$

то ћемо добити ове једначине:

$$\text{за } p = 0,\quad \alpha \cdot \binom{m}{\alpha} = +(m - \alpha + 1) \cdot \binom{m}{\alpha - 1}$$

$$\text{„ } p = 1,\quad \alpha \binom{n}{1} \binom{m}{\alpha - 1} = n \binom{m}{\alpha - 1} + (m - \alpha + 2) \binom{m}{\alpha - 2} \binom{n}{1}$$

$$\text{За } p = 2;\quad \alpha \binom{n}{2} \binom{m}{\alpha - 2} = (n - 1)\binom{n}{1} \binom{m}{\alpha - 2} + (m - \alpha + 3) \binom{m}{\alpha - 3} \binom{n}{2}$$

$$\text{За } p = 3,\quad \alpha \binom{n}{3} \binom{m}{\alpha - 3} = (n - 2) \binom{n}{2} \binom{m}{\alpha - 3} + (m - \alpha + 4) \binom{m}{\alpha - 4} \binom{n}{3}$$

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

$$\text{За } p = \alpha - 1,\quad \alpha \binom{n}{\alpha - 1} \binom{m}{1} = (n - \alpha + 2) \binom{n}{\alpha - 2} \binom{m}{1} + m \binom{n}{\alpha - 1}$$

$$\text{За } p = \alpha;\quad \alpha \binom{n}{\alpha} = [n - \alpha + 1] \binom{n}{\alpha - 1}.$$

И кад све ове једначине саберемо:

$$\alpha \left[\binom{m}{\alpha} + \binom{m}{\alpha - 1} \binom{n}{1} + \binom{m}{\alpha - 2} \binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{2}\binom{n}{\alpha - 2} + \binom{m}{1} \binom{n}{\alpha - 1} + \binom{n}{\alpha} \right] = (m + n - \alpha + 1) \left[\binom{m}{\alpha - 1} + \binom{m}{\alpha - 2} \binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{1} \binom{n}{\alpha - 2} + \binom{n}{\alpha -} \right]$$

Ако сада поставимо $\binom{m}{\alpha} + \binom{m}{\alpha - 1} \binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{1} \binom{n}{\alpha - 1} + \binom{n}{1} = S\alpha$, онда је

$$\binom{m}{\alpha - 1} + \binom{m}{\alpha - 2} \binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{1} \binom{n}{\alpha - 2} + \binom{n}{\alpha - 1} = S\alpha - 1,$$

и онда постоји једначина:

$$\alpha\, S\alpha = [m + n - \alpha + 1] .\ S\alpha - 1$$

$$S\alpha = \frac{m + n - \alpha + 1]}{\alpha} .\ S\alpha - 1$$

Али је

$$\binom{m}{1} + \binom{n}{1} = \binom{m + n}{1} = S_1 \quad \text{и тако}$$

$$S_2 = \frac{m + n - 1}{2} \cdot S_1 = \frac{[m + n - 1]\,[m + n]}{2 \cdot 1} = \binom{m + n}{2}$$

$$S_3 = \frac{m+n-2}{3}\cdot S_2 = \frac{[m+n-2]\,[m+n-1]\,[m+n]}{3\cdot 2\cdot 1} = \begin{bmatrix} m+n \\ 3 \end{bmatrix}$$

и у опште

$$Sa = \binom{m+n}{\alpha} = \binom{m}{\alpha}\binom{m}{\alpha-1} + \binom{n}{1} + \binom{m}{\alpha-2}\binom{n}{2} + \dots$$

$$\dots\dots + \binom{m}{1}\binom{n}{\alpha-1} + \binom{n}{\alpha}$$

Овај образац у опште вреди, па ма какве бројне вредности да узмемо за m и n.

Овде смо пошли од основне једначине,

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n-r+1}{r}\cdot\begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix}$$ за коју смо доказали

па је истинита, ако је узето за n цео и положан број. А ако је n разломљен број $\frac{p}{q}$, онда ово $\binom{p}{q}$ неће имати комбинаторско значење, али ће се опет моћи сваки пут израз овога вида $\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\dots\left[\frac{p}{q}-r+1\right]$ редставити овим символом $\begin{pmatrix} \frac{p}{q} \\ r \end{pmatrix}$

Предпостављајући то, можемо се уверити о истинитости једначине $\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r \end{bmatrix} = \frac{\frac{p}{q}-r+1}{r}\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r-1 \end{bmatrix}$; јер ако је

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r \end{bmatrix} = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\dots\left(\frac{p}{q}-r+2\right)\left(\frac{p}{q}-r+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots\dots(r-1)\cdot r}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r-1 \end{bmatrix} = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\dots\left(\frac{p}{q}-r+2\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ (r-1)}$$

онда ће сљедовати, кад обе једначине једну с другом поделимо

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r-1 \end{bmatrix} = \left(\frac{p}{q}-r+1\right) : r,$$ или

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r \end{bmatrix} = \frac{\frac{p}{q}-r+1}{r}\cdot\begin{bmatrix} \frac{p}{q} \\ r-1 \end{bmatrix}$$

Исто је тако проста ствар, кад би узели за n одречан број или најпосле несвршен број.

Свезивање у одређени збир.

242 Ово је онај случај кад се нетраже све свезе, него само оне, којих је збир сказаљака њихових основака опредељен број. Зато морају овакве свезе испунити неки задати услов.

Овде ћемо навести само оне свезе са опредељеним збиром, које припадлеже опредељевој класи.

Ако у опште има да се образује r-на класа са збиром n, па кад попунимо (гледајући само на сказаљке основака) сва прва $(r-1)$ места, свако са једаи (у опште са најнижим основком) а r-но место добија број $n-(r-1)$.

Сада ћемо постављати док се год може једну јединицу из последњег основка у предпоследњи, док у овом небуде толико исто јединица колико је у последњем или једну јединицу мање.

Од овде добивених слогова почињући од другог треба да додајемо јединицу из последњег члана оном $(r-2)$-гом члану (то је онај трећи с десна у лево), а исто тако у свима сљедујућим свезама, док се из последњег члана немогне ништа више додати $(r-2)$-гом основку, па да никада виши члан непредходи нижем, што би чинило, да слог не буде добро уређен. Ако сада гледамо на све оне већ добивене слогове у којима се може додавати из последњег члана у (r — 3-ћи) члан, па продужимо тако радити док недобијемо неки слог у ком се неможе из последњег члана дометати једном од предидућих чланова, па ћемо доћи до краја свезивања.

Неколико примера ће ово још боље објаснити.

1. Да се образује 4. класа свезивања са збиром 9.

Имаћемо ове свезе:

1116

1125

1134

1224

1233

2223

Овде смо почели од најнижег слога 1116, кад из последњег члана једну јединицу предамо предпоследњем, па ово поновимо, то ћемо доћи до слога 1134. Сада се више неможе из 4 члана додати трећем, јер би добили слог 1143, који морамо изоставити као хрђаво уређен. Тако ћемо сада одпочети додавати 2-гом члану из 4 члана, и то ћемо почети од другог слога, а исто тако можемо у трећем слогу једну јединицу из 4. члана додати 2-гом члану па ћемо добити 1233, и сада се више неможе из 4. члана додати 2-гом зато ћемо тражити да додајемо из 4-тог члана у први, што је могућно само у четвртом слогу чинити, па ћемо доћи до крајње свезе 2223.

2. Трећа класа свезивања са збиром 12.

11 $\overline{10}$	23 7
12 9	24 6
13 8	25 5
14 7	33 6
15 6	34 5
22 8	44 4

3.) Шеста класа свезивања са збиром 15.

11111$\overline{10}$	112236
111129	112245
111138	112335
111147	112344
111156	113334
111228	122226
111237	122235
111246	122244
111255	122334
111336	123333
111345	222225
111444	222234
112227	222333

III ПРЕМЈЕЊИВАЊЕ.

243. *Премјењивање* или *варирање*, то је у строгом смислу грађење слогова, у којима поједини основци долазе у свакојаком сљедовању. Ово можемо понајпрече извршити, кад основке најпре свезујемо па после премештамо. Тако имамо и овде као и код свезивања *премјењивање са и без понављања*, како је кад премјењивању предходило свезивање са или без понављања.

Од основака a, b, c и d начинити премене (варјације) трећег реда зове се: да се поставе свезе III. реда са или без понављања, а основке сваке свезе да премештамо. Овај рад означавамо симболом $\overset{3}{V}(a, b, c, d)$, кад се имају да начине премене без понављања, а код неограниченог понављања са

$$\overset{3}{V}(a, b, c, d)^3$$

При грађењу премена без понављања најнижа премена састоји се из најнижих природним редом написаних основака, и то у оном броју који је одређен редним изложитељем.

Из ове као и од сваке друге премене прелазимо на најближе више, кад последњи основак заменемо са понајближим вишим из задатог реда основака, предпостављајући, да овај недолази већ једанпут у слогу. Кад се овај последњи члан неможе даље да замене са каквим вишим, то ћемо тражити с десна на лево онај први основак, коме сљедује с десна неки виши, и онај ћемо изменути са понајближим вишим основком ако већ недолази у предходећим члановима. У овом последњем случају узећемо сљедујући и т. д. па ћемо пустити да на ово место сљедују они у природном реду налазећи се најнижи основци који се већ неналазе у слогу, и то у онолико колико је потребно за допуну реда (класе). Овим начином долазимо најпосле до последње премене, у којој се налазе највиши основци у падајућем поретку.

Ако је н. пр. 2314 једно такво премјењивање од $\overset{4}{V}(1,2,3,4,5)$, то је по горњем правилу 2315 понајближе сљедујуће, јер је на последње место у место 4 постављен понајближи виши основак задатог реда т. ј. 5; у 2315 с десна на лево први је основак 1, после којег долази с десна виши основак, у место 1 долази сада 4 јер се 2 и 3 у том слогу већ налазе овоме 4 мораће сљедовати 1, и тако је онда 2341, 2345, 2351, 2354, 2413, 2415 2431 и т. д.

1. да се образује $\overset{3}{V}(1, 2, 3, 4)$.

123	231	341
124	234	342
132	241	412
134	243	413
142	312	421
143	314	423
213	321	431
214	324	432

2. $\overset{4}{V}$(a, b, c, d, e,

abcd	acbd	adbc	и т. д. до edcb
abce	acbe	adbe	
abdc	acdb	adcb	
abde	acde	adce	
abec	aceb	adeb	
abed	aced	adec	
		aebc	

По самом значењу премена као испремештаних свеза сљедује, да

$$\overset{r}{Ur}\ (1,\ 2\text{'}3,\ \ldots\ n)$$

има толико слогова, колико казује израз$\binom{n}{r}\cdot r\,!$ Тако налазимо по (1. примеру то ј. у $\overset{3}{V}$ (1. 2, 3, 4| $\binom{4}{3}\cdot 3\,! = 24$ слогова.

244. Да би сада могли извести премјене неког одређеног реда са неограниченим понављањем вредиће у опште овај већ показани начин. Овде ће се налазити у најнижој премени најнижи основак(у опште јединица] онолико пута, колико показује изложитељ реда. Последње место повисићемо свагда са најближим вишим основком, па ма да се овај већ налази у премени. Даље ће се после сваког повишеног места сва остала места, у колико ред то захтева, попунити са најнижим основком.

По овом изведене су ове премене другог и трећег реда са основцима 1, 2, 3, 4 с понављањем:

[Премене другог реда, или $\overset{2}{V}(1,\ 2,\ 3,\ 4)$. [2]

11	31
12	32
13	33
14	34
21	41
22	42
23	43
24	44

Премјењивања трећег реда или $\overset{3}{V}$ (1, 2, 3, 4).[3]

111	211	311	411
112	212	312	412
113	213	313	413
114	214	314	414
121	221	321	421
122	222	322	422
123	223	323	423
124	224	324	424
131	231	331	431
132	232	332	432
133	33	333	433
134	234	334	434
141	241	341	441
142	242	342	442
143	243	343	443
144	244	344	444

245. „Број премена с понављањем из n основака r-ног реда $= n^r$".

Јер кад саставимо сваки од ови n чланова реда основака самим собом и свима другима, то ће постати премјењивања другог реда којих је број $n \cdot n = n^2$. (сравни прећашњи примерно).

Кад допишемо свакој премени другог реда сваки задати основак, то ћемо добити премене трећег реда, којих је број сада $n^2 \cdot n = n^3$; и тако вреди у опште у r-ном реду за збир премјењивања овај израз : n^r.

Премене са одређеним збиром

246. Овај је случај за неке рачуне од особите вредности а подобан је свезивању у опредељени збир, дакле условљењу премењивање, гдје треба да буде сбир сказаљака неки известан број

Премене у овом случају начинићемо по овом начину:

Треба да напишемо најнижи слог. Даље треба да постављамо из последњег члана јединицу све дотле у предпоследњи члан, докле ово може да буде. И сада почињемо опет са првим премењивањем и постављамо овде као и у свима сљедујућим свезама докле се год може из последњег члана јединицу у предпоследњи и т. д. и продужимо овако радити док се по себи не сврши.

Неколико примера објасниће ово још боље:

1.) Да се образује 3. ред премењивања са збиром 7

115	232
124	241
133	313
142	322
151	331
214	412
223	421
	511

2. Четврти ред. премењивања са збиром 6.

1113

1122

1131

1212

1221

1311

2112

2121

2211

3111

Примери за вежбање.

1. На колико начина могу шест лица, који седе око једног стола, своја места променути?

2. Да се начине премештаји писмена из речи Мати.

3. Колико разни места могу заузети 3 беле, 5 плаве, 4 црвене и 2 црне кругле?

4. Четир разна предмета могу се чувати у 6 кутија; која су положења овде могућа?

5. Колико износи број цифара свију премештаја ових основака 1222345?

6. Да се определи из основака 12345, 29, 67, 88-ми 94-ти и 104-ти премештај.

Примедба. Замислимо све премештаје у 5 група подељење, у којима односно 1, 2, 3, 4, 5 24 пута стоје на првом месту. Тако ће се н. пр. 67. премештај налазити у трећој групи, и у овој као 67 — 48 = 19. слог бити. Јер је 49. слог 31245, тако је односно основака. 1, 2, 3, 5, 19. слог 5124, дакле 67. слог 35124.

7. Од 10 различити нумера да се извуку 3; који различити случајеви могу овде случити се?

8. Да се из основака a, b, c, d, e, f, g, образују свезе 2, 3, 4. 5 и 6. реда са и без повторавања.

9. Колико се пута може производ $a\ b\ c\ d\ e\ f$ разложити у производе са три чинитеља?

10. Да се образују свезе 3, 4, и 5. реда са збиром 10.

11. У једном лонцу, у ком се налазе 6 кругала означени са 1 до 6. учинимо три вучења, и после сваког вучења круглу вратимо у лонац; који су овде случајеви могући?

12. На колико начина можемо 20 кругала у 3 гомиле по 4, 6 и 10 комада поставити?

13. Колико различити 6 цифрени бројева можемо написати са наши 9 цифара?

14. Колико различити хитаца можемо учинити са 4 коцке?

15. Да се образују $\overset{5}{V}(1, 2, 3,)$ и $\overset{2}{V}(1, 2, 3. 4)$ с повторавањем.

16. На колико се начина може са 4 коцке збир 16 бацити?

Примедба. Нетреба заборавити да је 6 највиша цифра на коцки.

Производ биномних чинитеља.

247. Кад би имали да помножимо ови n бинома $(x + a)$ $(x + b)$, $(x + c)$ . . . $(x + m)$, с предпоставком, да сви имају заједнички члан x; онда би добили поступним множењем поједини чинитеља

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab$$

$$(x+a)(x+b)(x + c) = x^3 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ acd \\ bcd \end{matrix}\right\} x + abcd$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) =$$

$$= x^5 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right\} x + abcde.$$

Кад с пажњом пропратимо ове производе, лако ћемо увидети слѣдујуће законе:

1. Да је први члан овако развијеног израза толики степен од x, колики је број умножених бинома.

2. У застопним члановима опадају идући с лева на десно степени од x поступно све са 1, тако да се крајњи члан овако развијеног израза множи са x^0, т. ј. у њему нема чинитеља x.

3. Сачинитељ првог члана свагда је јединица, сачинитељ другог члана је збиру свију других чланова бинома или другим речима, он је = збиру свију свеза 1 реда из других чланова у биномима. Сачинитељ трећег члана је збир свију свеза 2-ог реда из других чланова у биномима, али без понављања; исто је тако сачинитељ четвртог члана збир свију свеза 3г реда из других чланова али без понављања; петог

члана сачинитељ је збир свеза 4г реда из других чланова у биномима и т д.

4. Последњи је члан производ свију других чланова из задатих чинитеља,

5. Број чланова у производу с једним је чланом већи од броја бинома које множимо.

Да су у овом случају комбиновани основци бројеви, и да су поједини слогови производи, по себи се разуме.

Кад означимо све видове свеза по реду са

$$\overset{1}{\underset{n}{C}},\ \overset{2}{\underset{n}{C}},\ \overset{3}{\underset{n}{C}},\ \ldots\ldots\ \overset{r}{\underset{n}{C}}$$ и т. д., то ће слѣдовати:

$$[x+a]\ [x+b]\ [x+c]\ \ldots\ [x+m] =$$

$$= x^n + \overset{1}{\underset{n}{C}}x^{n-1} + \overset{2}{\underset{n}{C}}x^{n-2} + \ldots + \overset{r}{\underset{n}{C}}x^{n-r} + \ldots \overset{n-1}{\underset{n}{C}}x + \overset{n}{\underset{n}{C}}.$$

Примери:

1. Да се образује производ помоћу свезивања:

$$[x+1]\ [x+2]\ [x+3]\ [x+4].$$

По горњем правилу знамо да производ долази под видом,

$$x^4 + \overset{1}{\underset{4}{C}}x^3 + \overset{2}{\underset{4}{C}}x^2 + \overset{3}{\underset{4}{C}}x + \overset{4}{\underset{4}{C}}$$

и тако је $\overset{1}{\underset{4}{C}} = \left.\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right\} = 10,\quad \overset{2}{\underset{4}{C}} = \left.\begin{matrix} 1\cdot 2 \\ 1\cdot 3 \\ 1\cdot 4 \\ 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 \\ 3\cdot 4 \end{matrix}\right\} = 35,$

$$\overset{3}{\underset{4}{C}} = \left.\begin{array}{c} 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{array}\right\} = 50 \text{ и } \overset{4}{\underset{4}{C}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

дакле је $(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\,(x+4) =$

$$= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24.$$

2. Да се образује:

$$(x+3)\,(x-4)\,(x+2)\,(x-5)\,(x+6).$$

Производ ће имати овај вид

$$x^5 + \overset{1}{\underset{5}{C}}x^4 + \overset{2}{\underset{5}{C}}x^3 + \overset{3}{\underset{5}{C}}x^2 + \overset{4}{\underset{5}{C}}x + \overset{5}{\underset{5}{C}}.$$

Кад уредимо друге делове бинома ради бољег прегледа у растећем реду, 2, 3, — 4, — 5, 6, то је:

$$\overset{1}{\underset{5}{C}} = \left.\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -5 \\ 9 \end{array}\right| = +2, \quad \overset{2}{\underset{5}{C}} = \left.\begin{array}{r} 2.\ \ \ 3 \\ 2.-4 \\ 2.-5 \\ 2.\ \ \ 6 \\ 3.-4 \\ 3.-5 \\ 3.\ \ \ 6 \\ -4.-5 \\ -4.\ \ \ 6 \\ -5.\ \ \ 6 \end{array}\right| = -43$$

$$\overset{3}{\underset{5}{C}} = \left.\begin{array}{r} 2.\ \ \ 3.-4 \\ 2.\ \ \ 3.-5 \\ 2.\ \ \ 3.\ \ \ 6 \\ 2.-4.-5 \\ 2.-4.\ \ \ 6 \\ 2.-5.\ \ \ 6 \\ 3.-4.-5 \\ 3.-4.\ \ \ 6 \\ 3.-5.\ \ \ 6 \\ -4.-5.\ \ \ 6 \end{array}\right| = -68,$$

$$\overset{4}{\underset{5}{C}} = \left.\begin{array}{r} 2\cdot\ \ \ 3\cdot -4\cdot -5 \\ 2\cdot\ \ \ 3\cdot -4\cdot\ \ \ 6 \\ 2\cdot\ \ \ 3\cdot -5\cdot\ \ \ 6 \\ 2\cdot -4\cdot -5\cdot\ \ \ 6 \\ 3\cdot -4\cdot -5\cdot\ \ \ 6 \end{array}\right\} = +396, \quad \overset{5}{\underset{5}{C}} = 2\cdot 3\cdot -4\cdot -5\cdot 6 = +720$$

дакле захтевани производ $= x^5 + 2x^4 - 43x^3 -$

$$-\,68x^2 + 396x + 720.$$

Примедба. Кад би се захтевало да из $[x+a] \times (x+b)\,(x+c) \ldots\ldots$ израчунамо само $(r+1)$ члан, то је јасно да онда неморамо цео производ извести, јер $[r+1]$ члан има вид $\overset{r}{\underset{n}{C}}\,x^{n-r}$ а сачинитељ $\overset{r}{\underset{n}{C}}$ може се лако засебно израчунати.

248. У §. 247. показалисмо обичним множењем како се из производа може простим изводима поставити закон који ће у опште вредити за развијање од n биномних чинитеља. т. ј. узели смо да је $[x+a)\,[x+b)\,(x+c) \ldots\ldots (x+m) =$

$$= x^n + \overset{1}{\underset{n}{C}}\,x^{n-1} + \overset{2}{\underset{n}{C}}x^{n-2} + \ldots + \overset{n-2}{\underset{n}{C}}x^2 + \overset{n-1}{\underset{n}{C}}x + \overset{n}{\underset{n}{C}}.$$

Ако сумњамо у истину тога резултата онда ћемо лако показати да је горњи вид добар, тако званом вишом индукцијом Овде би морали овако радити:

Узмимо за тренут, да је добар горњи вид производа, па помножимо тај производ из n чинитеља још са $(x+p)$, то је $(x+a)\,(x+b]\,[x+c) \ldots\ldots (x+m)\,(x+p) =$

$$= \left[x^n + \overset{1}{\underset{n}{C}}x^{n-1} + \overset{2}{\underset{n}{C}}x^{n-2} + \ldots\ldots + \overset{n-2}{\underset{n}{C}}x^2 + \overset{n-1}{\underset{n}{C}}x + \overset{n}{\underset{n}{C}}\right].$$

$$(x+p) = x^{n+1} + \left(\overset{1}{\underset{n}{C}} + p\right)x^n + \left(\overset{2}{\underset{n}{C}} + p.\overset{1}{\underset{n}{C}}\right)x^{n-1} + \ldots\ldots +$$

$$+\left(\overset{r}{\underset{n}{C}}+p\overset{r-1}{\underset{n}{C}}\right)x^{n-r+1}+\ldots\ldots+\left\{\overset{n-1}{\underset{n}{C}}+p\overset{n-2}{\underset{n}{C}}\right\}x^2+$$

$$+\left\{\overset{n}{\underset{n}{C}}+p\overset{n-1}{\underset{n}{C}}\right\}x+p\overset{n}{\underset{n}{C}}.$$

Али је сада $\overset{1}{\underset{n}{C}}+p=a+b+c+\ldots+m+p=\overset{1}{\underset{n+1}{C}}$

и кад саставимо сваки од ови основака $a, b, c \ldots m$ са p,

то је $\overset{2}{\underset{n}{C}}+p\overset{1}{\underset{n}{C}}=\overset{2}{\underset{n+1}{C}}$

а исто тако $\overset{3}{\underset{n}{C}}+p\,.\,\overset{2}{\underset{n}{C}}=\overset{3}{\underset{n+1}{C}}$

и у опште $\overset{r}{\underset{n}{C}}+p\,.\,\overset{r-1}{\underset{n}{C}}=\overset{r}{\underset{n+1}{C}}$

по томе је дакле горњи производ оних $(n+1)$ чинитеља $=$

$$=x^{n+1}+\overset{1}{\underset{n+1}{C}}\,.\,x^n+\overset{2}{\underset{n+1}{C}}\,.\,x^{n-1}+\ldots\ldots+$$

$$+\overset{r}{\underset{n+1}{C}}\,.\,x^{n-r+1}+\ldots\ldots+\overset{r}{\underset{n+1}{C}}\,.\,x+\overset{n+1}{\underset{n+1}{C}}$$

Овај производ утврђује онај исти закон, који смо мало пре узели као истинит. Ако дакле вреди вид производа за n чинитеља то ће вредити и за $[n+1]$ чинитеља. И тако смо непосредним развијањем определили производ за 2, 3, 4, 5, чинитеља, дакле вреде горе изведени закони и за 6 чинитеља па и за 7 и т. д. и у опште за n чинитеља, па и онда ако n представља ма који цео број.

Биномни образац за целе и положне изложитеље.

249. Поставимо у § 247 све чинитеље као једнаке, дакле

$b=c=d$ и т. д. $=m=a$ то је

$$[x+a]\,[x+b]\,[x+c]\ldots[x+m]=[x+a]^n$$

Овде значи:

$$\overset{1}{\underset{n}{C}}=a+b+c+\ldots\ldots+m=a+a+a+a+\ldots$$

$$\ldots\ldots+a=n\,.\,a=\binom{n}{1}\,.\,a$$

$$\overset{2}{\underset{n}{C}}=ab+ac+ad+\ldots\ldots+lm=a^2+a^2+a^2+$$

$$+\ldots\ldots+a^2=\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^2=\binom{n}{2}\,a^2$$

$$\overset{3}{\underset{n}{C}}=abc+abd+abe+\ldots\ldots+klm=a^3+a^3+a^3+$$

$$+\ldots\ldots+a^3=n\,\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3=\binom{n}{3}\,a^3$$

и у опште

$$\overset{r}{\underset{n}{C}}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}\,.\,a^r=\binom{n}{r}\,.\,a^r$$

Зато добијамо у место $(x+a)^n=x^n+$

$$+\overset{1}{\underset{n}{C}}x^{n-1}+\overset{2}{\underset{n}{C}}x^{n-2}+\overset{3}{\underset{n}{C}}x^{n-3}+\ldots+\overset{n-2}{\underset{n}{C}}x^2+$$

$$+\overset{n-1}{\underset{n}{C}}\,.\,x+\overset{n}{\underset{n}{C}};\quad (x+a)^n=x^n+\left[\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right]x^{n-1}\,.\,a+$$

$$+\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}x^{n-2}.\ a^2+\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}x^{n-3}.\ a^3+\ldots.+\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}x^{n-r}.\ a+$$

$$+\binom{n}{n-2}x^2a^{n-2}+\binom{n}{n-1}xa^{n-1}+\binom{n}{n}a^n.$$

„Правило које изражава горњи образац зове се, по *Newton-у* који га је поставио *Newton-ово* правило, или биномно правило. Или образац.

Закон, по коме чланови биномног реда сљедују, гласи:

Први члан толики је степен првог дела (бинома) колико задати изложитељ јединица има.

Други члан има степен првог члана смањеног у 1, и тако трећи, четврти и т. д. члан све мањи бива до степена x^0; док напротив степени другог дела (бинома) у истој мери расту, тако, да је у сваком члану развијеног израза збир изложитеља оба дела (бинома), раван задатом изложитељу бинома. Најпосле долазе поједини чланови развијеног израза од првог до последњег односно помножени са бројевима

$$1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \ldots\ \binom{n}{r}\ \ldots\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n}$$

који се сачинитељи обично зову „биномни сачинитељи."

По томе изказујемо биномни образац овим речима:

n-ни степен бинома раван је *n*-ном степену првог члана и оним узастопним биномним сачинитељима, помноженим са производом из падајућих степена првог и на исти начин растећих степена другог члана.

250. Кад узмемо у $(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}.\ a+$

$$+\binom{n}{2}x^{n-2}.\ a^2+\ldots.\binom{n}{r}x^{n-r}.\ a^r+\ldots\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}xa^{n-1}+\binom{n}{n}a^n;$$ — а у место $+a$, т. ј. кад тражимо *n*-ни степен разлике $(x-a)^n$, то ћемо видити,

да само они чланови у реду добивају одречан знак, у којих је a са непарним изложитељем.

Тако је $(x-a)^n=x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}a+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2-$ и тако даље

$$\pm\binom{n}{r}x^{n-r}a^r\mp\ldots\ldots\pm\binom{n}{n-1}xa^{n-1}\mp\binom{n}{n}a^n$$

251. „Важна својства биномног реда и његових сачинитеља.

1. Најпре ћемо споменути, да се састоји биномни ред из $(n+1)$ члана, дакле се мора прекидати, што лежи у самој природи његовој како је постао, где смо узели за n само цео и положан број.

2. „Сваки биномни сачинитељ може се изразити са сачинитељем који је непосредно пред њим.

Видимо по самом склопу тога реда, да је $\binom{n}{r}$, $(n+1)$-ви сачинитељ реда, ако га означимо са k_{n+1}, дакле k_{n+1} $\binom{n}{r}$, даље r-ног сачинитеља са $k_r=\binom{n}{r-1}$, то је због

$$\binom{n}{r}=\frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}\ (\text{По § 237.})$$

$$k_{r+1}=\frac{n-r+1}{r}\cdot k_r.$$

Истим начином можемо сваки члан биномног реда изразити са непосредно предходећим.

Тако је $(r+1)$-ви члан

$$g_{r+1}=k_{r+1}\ .\ x^{n-r+1}\ a^{r-1}$$

$g_r=k_r\ .\ x^{n-r}\ a^r$, r-ни члан, дакле је

$$g_{r+1}:g_r=\frac{k_{r+1}}{k_r}\cdot\frac{x}{a}\quad \text{или}$$

$$g_{r+1}=g_r\cdot\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}$$

једначина за два непосредно застопна члана биномног реда. Ова нам помаже, да при развијању n-ног степена бинома сваки члан изведемо из непосредно предходећег.

3. „Свака два од крајева једнако удаљена члана имају једнаке сачинитеље."

У опште је сачинитељ $(r+1)$-вог члана кад се броји с почетка $= \binom{n}{r}$. Али је $(r+1)$-ви члан узет од краја (од сазади), извесно $= (n-r+1)$-ви члан узет од почетка (јер $(r+1)$-вом члану од краја претходе $n+1-(r+1) = n-r$ чланова), а сачинитељ овога члана је $= \binom{n}{n-r}$

Због §. 239. у опште је

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

па зато

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2},\ \binom{n}{3} = \binom{n}{n-3} \text{ и т. д.}$$

дакле

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 +$$

$$+ \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \ .\ .\ .\ + \binom{n}{3} x^3 a^{n-3} +$$

$$+ \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \binom{n}{1} x a^{n-1} + a^n.$$

„Из тога изводимо даље, да биномни сачинитељи према средини развијеног израза расту, а одавде према крају у истом поретку опадају."

Јер ако је $\binom{n}{r}$ сачинитељ пред средином развијеног израза, то је $r < \frac{n+1}{2}$, па зато и $2r < n+1$ и $r < n-r+1$, дакле $\frac{n-r+1}{r} > 1$.

Али је $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r}$, то је с погледом на предходеће, $\binom{n}{r} > \binom{n}{r-1}$.

4. „Често је потребно да познамо средњи члан развијеног израза."

Овде треба разликовати да ли је n парни или непарни број.

Ако је n парни број то је број свију чланова $= n+1$ и сада је овај број непарни, и онда је у овом случају средњи члан узет с почетка $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ви члан развијеног израза, па

$$\text{Зато} = \left[\frac{n}{\frac{n}{2}}\right] x^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}$$

Ако је на против n непарни број, то је број чланова развијеног израза парни број, и онда се у овом случају мора говорити о два средња члана. Први је $\frac{n+1}{2}$ ви члан (од почетка), дакле $= \left[\frac{n}{\frac{n-1}{2}}\right] x^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}}$ а други је $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-ви члан и по томе $= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}}$

5. „Збир свију биномних сачинитеља је $= 2^n$.

Јер кад поставимо у познати развијени израз $x = a = 1$,

то је $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .$

$$+ \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2\left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ .\ .\right.$$

$$+ \binom{n}{\frac{n}{2}-1} + \tfrac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\Bigg] \text{ ако је } n \text{ парно, а}$$

$$= 2\left\{1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right\}$$

кад је n непарно. Зашто?

6. Кад развијемо $\binom{n}{r-1}$ и $\binom{n}{r}$, то ћемо наћи сабирањем $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Што ће рећи: „Збир из r-ног и $(r+1)$-вог биномног сачинитеља n-ног степена раван је $(r+1)$-вом биномном сачинитељу $(n+1)$-вог степена.

Ако су дакле биномни сачинитељи за неки степен познати, то ћемо наћи из овог све сачинитеље за понајближи виши степен поступним сабирањем.

Кад н. пр. подигнемо $(x+a)$ на 4. степен,

$$\text{то је } (x+a)^4 = x^4 + \binom{4}{1}x^3a + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{1}xa^3 + a^4 =$$
$$= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4,$$

или, кад само посматрамо сачинитеље, 1, 4, 6, 4, 1, то су сачинитељи

За $(x+a)^5$ 1, 5, 10, 10, 5, 1

„ $(x+a)^6$ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

„ $(x+a)^7$ . . . . 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

и т. д.

Примери за развијање степена неког бинома.

1) $$(x+y)^6 = x^6 + \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}x^5y + \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}x^4y^2 + \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}x^3y^3 + \binom{6}{2}x^2y^4 + \binom{6}{1}xy^5 + y^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

2) $$(3+2x)^5 = 3^5 + \binom{5}{1} \cdot 3^4 \cdot 2x + \binom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot (2x)^2 + \binom{5}{2} 3^2 \cdot (2x)^3 + \binom{5}{1} \cdot 3\,(2x)^4 + (2x)^5 = 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$$

3) $$(1+z)^m = 1 + \binom{m}{1}z + \binom{m}{2}z^2 + \binom{m}{3}z^3 + \ldots + \binom{m}{3}z^{m-3} + \binom{m}{2}z^{m-2} + \binom{m}{1}z^{m-1} + z^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot z^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot z^{m-3} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot z^{m-2} + mz^{m-1} + z^m.$$

4) $$(5ab - 7a^2)^4 = a^4(5b-7a)^4 = a^4\left[(5b)^4 - 4\cdot(5b)^3\cdot 7a + 6\cdot(5b)^2\cdot(7a)^2 - 4\cdot(5b)\times\left[(7a)^3 + (7a)^4\right] = a^4\left[625b^4 - 3500ab^3 + 7350a^2b^2 - 6860a^3b + 2401a^4\right].$$

$$5)\quad \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 = \left(\sqrt{a}\right)^8 +$$

$$+ \binom{8}{1}\left(\sqrt{a}\right)^7 \cdot \sqrt{b} + \binom{8}{2}\left(\sqrt{a}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 +$$

$$+ \binom{8}{3}\left(\sqrt{a}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^3 + \binom{8}{4}\left(\sqrt{a}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^4 +$$

$$+ \binom{8}{3}\left(\sqrt{a}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^5 + \binom{8}{2}\left(\sqrt{a}\right)^2 \times$$

$$\times \binom{8}{1}\left(\sqrt{a}\right) \cdot \left(\sqrt{b}\right)^7 + \left(\sqrt{b}\right)^8 =$$

$$= a^4 + 8a^3\sqrt{ab} + 28a^3b + 56a^2b\sqrt{ab} +$$

$$+ 70a^2b^2 + 56ab^2\sqrt{ab} + 28ab^3 + 8b^3\sqrt{ab} + b^4$$

$$6)\quad \left(\frac{x}{y} + 2\sqrt{a}\right)^5 = \left(\frac{x}{y}\right)^5 + 10\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \sqrt{a} +$$

$$+ 40\left(\frac{x}{y}\right)^3 a + 80\left(\frac{x}{y}\right)^2 + a\sqrt{a} + 80\,\frac{x}{y}\cdot a^2 +$$

$$+ 32a^2\sqrt{a} = \frac{1}{y^5}\left[x^5 + 10^4y\sqrt{a} + 40x^3y^2a +\right.$$

$$\left. + 80x^2y^3 \cdot a\sqrt{a} + 80xy^4a^2 + 32y^5 \cdot a^2\sqrt{a}\right]$$

Доказ да биномни образац вреди у опште.

252. Ред који смо нашли за n-ни степен бинома, постао је пошто смо предпоставили да је изложитељ n цео и положан број. Сада се може доказати, да узастопни чланови n-ног степена бинома постају по истим законима, и онда, кад изложитељ није цео и положан број, које ћемо овде показати по упутству *Euler*-овом. Да би овај доказ што простији био узимамо овај прост вид $(1+x)^n$, зато, што можемо сваки бином $(a+b)$ написати и овако $a\left[1+\frac{b}{a}\right]$ или $= a(1+x)$, пошто узимамо да је $\frac{b}{a} = x$. Ако дакле развијемо образац за $(1+x)^n$, то ће овај важити и за $(a+b)^n$.

За сваку целу положну вредност за n нашли смо

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots.$$

$$+ \binom{n}{r}x^r + \ldots, \ldots\ldots$$

Ако n престаје бити цео и положан број, то можемо ред:

$$1 + \left[\begin{matrix} n \\ 1\end{matrix}\right]x + \left(\begin{matrix} n \\ 2\end{matrix}\right]x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots$$

означити са симболом $f(n)$, где нам ваља приметити, да ово f не представља чинитеља, него показује вид оног реда који зависи од изложитеља n. За сада знамо о $f(n)$ само толико, да кад n показује цео и положан број, да је $f(n) = (1+x)^n$, и кад је $n = 0$, да је $f(0) = 1$.

Ако је дакле

$$f(n) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots\ldots \quad (1.$$

то сљедује и

$$f(m) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots\ldots \quad (2.$$

где за $f(m)$ одговара ред, који исто тако постаје као онај за $f(n)$, само што је овде у место n постављен број m.

Кад редове (1. и (2. помножимо налазимо:

$$f(n) \cdot f(m) = 1 + \left\{\begin{matrix}\binom{n}{1}\\ \binom{m}{1}\end{matrix}\right\}x + \left\{\begin{matrix}\binom{n}{2}\\ \binom{n}{1}\binom{m}{1}\\ \binom{m}{2}\end{matrix}\right\}x^2 + \left\{\begin{matrix}\binom{n}{3}\\ \binom{n}{2}\binom{m}{1}\\ \binom{n}{1}\binom{m}{2}\\ \binom{m}{3}\end{matrix}\right\}x^3 +$$

$$+ \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k-2}\binom{m}{2} + \dots + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] x^k + \text{и т. д.}$$

Али је сада у опште по ₰. 239.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \dots + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{n+m}{r}$$

Зато је $f(n) \,.\, f(m) = 1 + \binom{n+m}{1} x +$

$$+ \binom{n+m}{2} x^2 + \binom{n+m}{3} x^3 + \text{ и т. д.}$$

Овај ред зависи од $(n + m)$ исто тако као што је зависио ред (1 од n, зато га можемо означити са $f(n + m)$.

Зато добијамо кад се узму произвољне вредности за n и m ову врло важну једначину $f(n) \,.\, f(m) = f(n + m)$ . . . (3

Ако овде поставимо $m + p$ у место m, то је

$$f(n) \,.\, f(m + p) = f(n + m + p),$$

а пошто је $f(m + p) = f(m) \,.\, f(p)$,

$$f(n) \,.\, f(m) \,.\, f(p) = f(n + m + p)$$

И ако је у опште број помножавајућих се редова $= \alpha$, то је

$$f(n) \,.\, f(m) \,.\, f(p) \,.\, f(q) \,.\,.\,.\,. = f(n + m + p + q \,.\,.\,.\,.)$$

За $n - m = p = q = \,.\,.\,.\,.\,.$ налазимо

$$[f(n)]^{\alpha} = f(\alpha n) \,.\, - \quad .\;.\;. \quad (4$$

Ако сада хоћемо да покажемо, да је развијени биномни ред постао и онда по оном познатом закону, кад је изложитељ разломљен број од прилике $\beta/_{\alpha}$, т. ј. ако треба да посведочимо да постоји једначина

$$(1 + x)^{\beta/\alpha} = 1 + \binom{\beta/\alpha}{1} x + \binom{\beta/\alpha}{2} x^2 + \;.\;.\;.\;.\;.$$

треба да поставимо у (4. $n = \beta/\alpha$, онда је $[f(\beta/\alpha)]^{\alpha} = f(\beta)$,

дакле $f[\beta/\alpha] = [f(\beta)]^{1/\alpha}$ . . . . . . (5.

а пошто је за само β претпостављено да је цео број,

$$f(\beta) = (1 + x)^{\beta}$$

$$\text{дакле } [f(\beta)]^{1/\alpha} = (1 + x)^{\beta/\alpha}$$

$$\text{зато и } f(\beta/\alpha) = (1 + x)^{\beta/\alpha}$$

а због

$$f(\beta/\alpha) = 1 + \binom{\beta/\alpha}{1} x + \binom{\beta/\alpha}{2} x^2 + \,.\,.\,. \text{ и т. д.}$$

налазимо

$$(1 + x)^{\beta/\alpha} = 1 + \binom{\beta/\alpha}{1} x + \binom{\beta/\alpha}{2} x^2 + \binom{\beta/\alpha}{3} x^3 + \,.\,.\,.$$

или

$$(1 + x)^{\beta/\alpha} = 1 + \beta/\alpha \,.\, x + \frac{\beta/\alpha\,(\beta/\alpha - 1)}{1 \,.\, 2} \,.\, x^2 +$$

$$+ \frac{\beta/\alpha\,(\beta/\alpha - 1)\,(\beta/\alpha - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, x^3 + \text{ и т д.}$$

253. Да би сада показали вредност биномног правила за одречне изложитеље, па било, да су ови цели или разломљени бројеви, треба да пођемо од једначине (3. пређ. §., и да поставимо за $m = -n$, то ће сљедовати

$$f(n) \cdot f(-n) = f(0) = 1,$$

зато је $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)}$

а пошто се сада разуме у $f[n]$ за n положан, цео или разломљен број, онда је по пређашњем $f[n] = [1 + x]^n$, зато и

$$f[-n] = \frac{1}{[1+x]^n} = [1+x]^{-n}.$$

Због

$$f(-n) = 1 + \begin{bmatrix}-n\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}-n\\1\end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix}-n\\3\end{bmatrix} x^3 +$$

и т. д.

налазимо за

$$(1+x)^{-n} = 1 + \begin{bmatrix}-n\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}-n\\2\end{bmatrix} x^2 + \quad \ldots$$

такав резултат, који се добија, кад се у познатом биномном реду узме $-n$ у место n.

254. Ако је изложитељ бинома несвршен број, то постоји и овде онај ред

$$(1+x)^n = 1 + \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix} x^3 + \ldots \quad \ldots$$

Јер кад неби $(1 + x)^n$ било равно $f(n)$, то би свагда могли поставити $(1 + x)^n = f(n) \pm z$, где означава ово z неки непромењливи опредељен број.

За несвршен број n може се изнаћи свршени број k, који би се к броју n тако могао приближити, колико год хоћемо, по томе дакле налазимо због $(1 + x)^k = f(k)$,

$$(1+x)^n - (1+x)^k = f(n) - f(k) \pm z.$$

У колико се више k приближава количини n, у толико ће бити мање разлике

$$(1+x)^n - (1+x)^k \text{ и } f(n) - f(k),$$

а због тога произвољног смањивања разлика не може бити z непромењљив број, што би сасвим основано било, кад неби $(1 + x)^n$ било равно $f(n)$, дакле је $z = o$, па тако је и за несвршен број n,

$$(1+x)^n = f(n).$$

А пошто у опште уображени (латерални) бројеви подлеже истим законима, којима подлеже и радикалне количине, то можемо извести, да биномни ред вреди и за уображене изложитеље.

Ако је сада n ма какав број, то ће вредити у опште:

$$[1+x]^n = 1 + \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix} x^3 + \ldots$$

Овде треб још и то приметити, да овај ред није свакад употребљив, него је везан за услов, да је збирљив т. ј. да је за израчуњавање довољан неки известан број чланова, па да се може определити вредност степена тога бинома доста тачно. Јер кад изложитељ није цео и положан број, то у опште $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$ није нула, дакле ред иде у безкрајност. Конвергирајући је услов у овом случају, да буде $x < 1$.

Количник двају узастопних чланова може се означити са

$$\begin{bmatrix}n\\r+1\end{bmatrix} x^{r+1} : \begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} x^r,$$

а овај је количник $\dfrac{n-r}{r-1} \cdot x$, а пошто се при непрестаном увећавању броја r, $\dfrac{n-r}{r+1}$ приближава јединици, то се мора узети $x < 1$, где је у осталом x положно или одречно, само кад је бројно мање од јединице.

Кад помножимо ред

$$[1 + x]^n = 1 + \left[{n \atop 1}\right] x + \left[{n \atop 2}\right] x^2 + \left[{n \atop 3}\right] x^3 + \dots$$

са a^n и кад се сетимо, да је узето x у место b/a, то ће слѣдовати овај по све општи развијени израз:

$$[a + b]^n = a^n + \left[{n \atop 1}\right] a^{n-1} b + \left[{n \atop 2}\right] a^{n-2} b^2 + \dots\dots$$

$$\dots + \left[{n \atop r}\right] a^{n-r} b^r + \dots$$

Примери:

1] $\sqrt{1 + x^2} = [1 + x^2]^{1/2} = 1 + \left[{1/2 \atop 1}\right] x^2 +$

$+ \left[{1/2 \atop 2}\right] x^4 + \left[{1/2 \atop 3}\right] x^6 + \left[{1/2 \atop r}\right] x^{2r} + \dots$

или $\sqrt{1 + x^2} = 1 + 1/2\, x^2 -$

$- \frac{1 . 1}{2^2 . 2!} x^4 + \frac{1 . 1 . 3}{2^3 . 3!} x^6 - \frac{1 . 1 . 3 . 5}{2^4 . 4!} x^8$ итд.

или $\sqrt{1 + x^2} = 1 + 1/2\, x^2 - 1/8\, x^4 +$

$+ \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \frac{7}{256} x^{10}$ и т. д.

2] $\frac{1}{[1 - 2x]^3} = [1 - 2x]^{-3} = 1 - \left[{-3 \atop 1}\right] 2x +$

$+ \left[{-3 \atop 2}\right] [2x]^2 - \left[{-3 \atop 3}\right] 2x^3$ и т. д.

$+ [-1]^r \left[{-3 \atop r}\right] [2x]^r \pm$ и т. д.

или $\frac{1}{[1 - 2x]^3} = 1 + 3 . 2x + \frac{-3 . -4}{1 . 2} [2x]^2 -$

$- \frac{-3 . -4 . -5}{1 . 2 . 3} [2x]^3$ и т. д.

$= 1 + 6x + 24x^2 + 80x^3 + 240x^4 + 672x^{10} + \dots$

$\dots + \left[{-3 \atop r}\right] [2x]^r +$ и т. д.

3] $\frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}} = [1 - x^2]^{-1/3} = 1 + 1/3\, x^2 +$

$+ 2/9\, x^4 + 7/54\, x^6 + [-1]^r . \left[{-1/3 \atop r}\right] x^{2r}$ и т. д.

4. Особито је важно развијање израза

$$\left(a + b\sqrt{-1^n}\right)$$

Тако налазимо:

$[a + b\sqrt{-1}]^n = a^n + \left[{n \atop 1}\right] a^{n-1} [b\sqrt{-1}] +$

$+ \left[{n \atop 2}\right] a^{n-2} [b\sqrt{-1}]^2 + \left[{n \atop 3}\right] a^{n-3} [b\sqrt{-1}]^3 +$

$+ \left[{n \atop 4}\right] a^{n-4} [b\sqrt{-1}]^4$ и т. д.

и кад доиста подигнемо $b\sqrt{-1}$ по реду на оне слѣдујуће степене, а узмимо оне делове, који су везани са $\sqrt{-1}$ уједно то је:

$$[a + b\sqrt{-1}]^n = [a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \quad \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \text{итд.}] +$$

$$+ \sqrt{-1} + \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \text{итд.}\right]$$

Овде видимо, да су доистни делови састављени из чланова непарних и парних места развијеног израза $[a + b]^n$, а сем тога и знаци се уредно мењају. Још је важнији вид изнађеног резултата. Кад означимо редове у заградама са A и B, то је

$$[a + b\sqrt{-1}]^n = A + B\sqrt{-1} \quad \text{одкуда је}$$

$$A = a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \text{и т. д.}$$

$$B = \binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 - \text{и т. д.}$$

Ако узмемо да су a, b и n доистне количине, то су A и B доистне, а n-ни степен имаће у резултату онај исти вид што има и бином.

За $[a - b\sqrt{-1}]^n$ налазимо врло лако резултат из горе наведеног кад поставимо у A и B, $- b$, у место $+ b$. Овако ће постати A непромењено, јер има све само парне степене од b, а на против B мора се претворити у $- B$, јер има само непарне степене од b; тако је

$$[a - b\sqrt{-1}]^n = A - B\sqrt{-1},$$

па зато је у опште

$$[a \pm b\sqrt{-1}]^n = A \pm B\sqrt{-1}$$

последак, који је од велике вредности у многим истраживањима.

255. Међу разним применама биномног обрасца да узмемо и ову:

Да се определи $\sqrt[n]{A}$.

Најпре ћемо разложити A у $(a + b)$, тако, да буде a што веће може бити од b а сем тога и да је a потпуни степен.

$$\text{Тако је } \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{1/n} =$$

$$= \sqrt[n]{a}\left[1 + \binom{1/n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{1/n}{2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{1/n}{3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \text{и т. д.}\right] =$$

$$= \sqrt[n]{a}\left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{a} - \frac{n-1}{2 \cdot n^2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3 \cdot n^3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \text{и т. д.}\right]$$

у колико је мањи разломак $\frac{b}{a}$, у толико мање чланова тога реда треба да израчунамо, па да је корен до неке извесности тачно определљен. Овим примером можемо то показати:

Да се определи $\sqrt[5]{1036}$.

У овом примеру налазимо врло лако, да је

$$1036 = 1024 + 12 = 4^5 + 12,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{12}{1024} = \frac{3}{256}.$$

$$\sqrt[5]{1036} = 4\left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{256} - \frac{4}{2 \cdot 25} \cdot \left(\frac{3}{256}\right)^2 + \text{ит.д.}\right]$$

ако израчунамо овде само прва три члана реда, то је
1·00233277.

$$\text{дакле } \sqrt[5]{1036} = 4 \times 1{\cdot}00233277 = 4{\cdot}009331$$

вредност, тачна до шестог децимала.

ШЕСНАЈЕСТИ ОДСЕК

Рачуни вероватноће

256. Кад је A број од једнако могућих случајева, у којима има a случаја који су неком догађају угодни; онда зовемо $\frac{a}{A}$ *математична вероватноћа* догађаја. Математична вероватноћа изражава се свагда размером два броја или правим разломком, тако, да именитељ тога разломка показује број свију могућих, а бројитељ број свију неком определеном догађају угодних случајева.

Ово казује доста јасно, да се рачунање вероватноће неког догађаја своди на одредбу и тачно сазнавање свију могућих и догађају угодних случајева; зато одма с почетка овог интересантног дела матемаматике велимо, да се овде врло удобно примењује наука о комбиновању.

257 По овом наведеном објашњењу вероватноћа је у толико већа да ће се неки догађај појавити, у колико се више број угодних случајева приближава броју свију могућих случајева. Кад постане размера између оних угодних и могућих случајева равна јединици, т. ј. ако међу свима могућим случајевима небуде ни један догађају неугодан или противан, то је ова *јединица символ извесности.*

Ако је за неки случај вероватноћа = $^1/_2$, то се увиђа лако, да је ово *символ неизвесности*, т. ј. могућност као и немогућност догађаја подједнако су вероватни.

Ако ниједан од могућих случајева није појаву догађаја удобан или ако је по наведеном знаку $a = 0$, то је вероватноћа $= \frac{0}{A} = 0$, а тоје *символ немогућности*,

258. Кад се између А могућих случајева налазе a угодни случајева, онда су за непојав догађаја $A - a$ угодни случаја. Означимо сада вероватноћу, да ће се догађај појавити са ω, а вероватноћу, да се догађај неће појавити са ω^1, то је

$$\omega = \frac{a}{A} \text{ и } \omega^1 = \frac{A - a}{A.}$$

Овде се назива ω' „супротна вероватноћа," а из пређашњег израза налазимо, да је $\omega' = 1 - \omega$, дакле $\omega + \omega^1 = 1$, т. ј. збир једне и друге вероватноће раван је јединици, или другим речима, сигурно је, да ће се или угодан или неугодан случај појавити.

Неколико примера објасниће ово још боље:

1.) У некој капи налазе се 8 белих и 2 црне кругле. Колика је вероватноћа, да ћемо извући белу круглу ?

Пошто у капи има свега 10 кругала то је 10 број свију могући случаја; догађају, да ћемо белу круглу извући, угодни су 8 случаја, зато је тражена вероватноћа $\omega = {}^8/_{10} = {}^4/_5$, а вероватноћа да ћемо црну круглу извући т. ј. $\omega' = {}^2/_{10} = {}^1/_5$

$$\omega' = 1 - {}^4/_5 = {}^1/_5$$

2.) Колика је вероватноћа, да бацимо са две обичне коцке збир 7 ?

Да сада добијемо број свију могући случаја, треба да замислимо да свака цифра једне коцке са сваком цифром друге коцке могу се појавити, што чини $6 \times 6 = 36$ могући случаја. Збир 7 можемо добити на 6 разна начина, јер се могу догодити ове комбинације 61, 52, 43, 34, 25, 16, разуме се да је овде свака прва цифра на првој коцки, а свака друга на другој коцки, дакле је вероватноћа да ће се збир 7 бацити $= {}^6/_{36} = {}^1/_6$

3. Ако су у опште од m могућих случаја,

a случаја догађају A

b „ „ B

c „ „ C и т. д. угодни;

то је вероватноћа

За догађај A, $w_1 = \frac{a}{m}$

„ „ B, $w_2 = \frac{b}{m}$

„ „ C, $w_3 = \frac{c}{m}$ и т. д.

Ако би сада требло изнаћи вероватноћу, да се између догађаја А или В један ма који појави, то се могу овде узети сви они случаји као угодни, који су угодни догађају А и В, дакле је вероватноћа, да ће се догађај А или В појавити $\frac{a+b}{m}$, а исто тако вероватноћа, да се у опште један од догђаја А, В или С појави,

$$\omega = \frac{a + b + c}{m} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

т. ј. збир вероватноћа појединих догађаја.

Ако је свеједно, да се ма који од свију догађаја појави, то мора бити $\frac{a + b + c + \ldots}{m} = 1.$

Кад би било н. пр. у једној капи 4 беле, 5 црвене, 3 зелене, и 3 црне, кругле, то је вероватноћа, да белу извучемо $\omega_1 = \frac{4}{20}$, исто тако

„ црвену „ $\omega_2 = {}^5/_{20}$,

„ зелену „ $\omega_3 = {}^8/_{20}$,

„ црну „ $\omega_4 = \frac{3}{20}$

За вероватноћу, да ће се извући једна бела или црвена кругла, то је $\omega = \frac{9}{20} = \omega_1 + \omega_2$; а да ће се извући црвена или црна кругла то је одговарајућа вероватноћа $= {}^8/_{20} = \omega_2 + + \omega_4$.

4. Да се изнађе вероватноћа, кад се хоће да баци са три коцке збир 6 или 9.

Број 6 можемо на 10 разна начина разложити у 3 основка и премештати, тако налазимо;

114, 123, 132, 141, 213, 222, 231, 312, 321 411.

и овде принадлеже прве цифре првој, друге другој и треће трећој коцки. У свему је могућно $6^3 = 216$ случаја (§ 243), зато је вероватноћа, да бацимо збир 6 $\frac{10}{216}$. Тако исто налазимо за збир 9 вероватноћу $= \frac{25}{216}$, па тако вероватноћу, да бацимо или збир 6 или 9 $= \frac{10 + 25}{216} = \frac{35}{216}$ или приближно ${}^1/_6$.

Односна вероватноћа

259 Ако су између $a + b + c + d = m$ могући случајева, a, b, c и d случаји, относно угодни догађајима A, B, C и D, то су просте вероватноће, да ће се појавити сваки од наведених догађаја по реду:

$$\omega_1 = \frac{a}{m}, \quad \omega_2 = \frac{b}{m}, \quad \omega_3 = \frac{c}{m}. \quad \omega_4 = \frac{d}{m}.$$

Поставимо сада ово питање: Колика је вероватноћа, да се између наведених догађаја појави н. пр. A пре него B?

Ако негледамо на појав догађаја C и D, то ћемо добити за догађаје A и B само $a + b$ могућих случаја, зато су относне вероватноће за ове догађаје $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$, т. ј. вероватноћа, да се A пре појави но B јест $\omega' = \frac{a}{a+b}$, и да се B пре појави но A $\omega'' = \frac{b}{a+b}$ и $\omega' + \omega'' = 1$, јер је сасвим сигурно, да се мора од оба овде наведена догађаја један пре појавити но онај други.

Сада можемо написати ω' и овако

$$\omega' = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{a}{m} + \frac{b}{m}} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

а исто тако

$$\omega'' = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

из тога се може извести, „да се налази односна вероватноћа неког догађаја, кад безусловну вероватноћу тог догађаја поделимо са збиром безусловни вероватноћа оба догађаја,

Примери.

1. У једној капи има 5 бели, 8 црвени, 9 плави и 4 зелени кругала. Колика је вероватноћа, да ћемо исвући пре црвену но белу круглу?

вероватноћа је да ћемо пре црвену но белу круглу извући $= \frac{8}{5+8} = \frac{8}{13}$ или пошто су безусловне вероватноће за извлачење белих и црвених кругала относно ${}^5/_{26}$ и ${}^8/_{26}$, то ће и по горњем правилу, пре црвена но бела кругла извући.

$$\frac{\frac{8}{26}}{\frac{5}{26}+\frac{8}{26}} = \frac{8}{13}$$ као и пре.

2. Два лица играју се са 2 коцке условно, даће прво лице добити, кад једним хитцем баци збир 8 а друго лице кад баци суму 9. које су односне вероватноће добитка за свако лице?

Да збир 8 бацимо безусловна је вероватноћа $\omega_1 = \frac{5}{36}$, а за збир 9 $\omega_2 = \frac{4}{36}$ зато је вероватноћа да ћемо пре бацити 8 но

$9 = \frac{5/36}{5/36 + 4/36} = 5/9$; и даћемо пре 9 бацити но $8 = \frac{4/36}{5/36 + 4/36} = 4/9$

Јер кад негледамо на друге збирове који се могу бацити сем 8 и 9, то се за горе означене догађаје само $5+4=9$ могући случаја, и од ових су угодни 5 збиру 8 и 4 збиру 9, дакле су односне вероватноће $5/9$ и $4/9$.

Сложена вероватноћа

260.« Ако су два једно од другог сасвим независна догађаја А и В. и ако су просте вероватноће за појав ових додогађаја односно ω^1 и ω^2; онда је вероватноћа, да ће се оба догађаја у једно исто време појавити, равна производу њихових простих вероватноћа, т. ј. $\omega_1 \times \omega_2$.

Ово важно правило можемо доказати, кад узмемо, да за догађај А од m могући случаја има угодни a и за догађај В од m_1 могући случаја има угодни случаја a_1.

вероватноће поједини догађаја су:

$$\omega_1 = \frac{a}{m} \text{ и } \omega_2 = \frac{a_1}{m_1}$$

Ако треба да се појаве оба догађаја у једно исто време онда има за овај случај $m.\ m_1$ могућих случаја, јер овде може сваки могући случај догађаја А, појавити се заједно са сваким догађаја В. Тако исто лају угодни случајеви догађаја А, са онима догађаја В aa_1 свеза, које показују угодне случајеве, да ће се у једно исто време појавити оба догађаја, и тако је вероватноћа за сложен догађај:

$$\omega = \frac{aa_1}{mm_1} = \frac{a}{m} \cdot \frac{a_1}{m_1} = \omega_1 \cdot \omega_2$$

Ако су исто тако $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3 \ldots$ вероватноће, које се односе на догађаје А, В, С ...., то ћемо као и горе истим путем изнаћи, да је вероватноћа за све ове састављене догађаје $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \ldots$

Ово ће нам боље објаснити неколико примера.

1] Да се определи вероватноћа, кад би хтели да бацимо са коцком неку опредељену цифру два пута узастопце.

Да опредељена цифра изађе на први хитац, вероватноћа је $= 1/6$, да ова и па други хитац изађе вероватноћа је опет $= 1/6$; али ако сада оба догађаја треба да се појаве у једно исто време, то је вероватноћа $= 1/6 \times 1/6 = 1/36$

Ако треба у опште нека опредељена цифра n пута да се баци, то је вероватноћа $= \frac{1}{6^n}$

2) У две капе има у првој 5 бели и 3 црне, а у другој 4 беле и 6 црне кругле; колика је вероватноћа, да ћемо у један ма из једне ма које капе извући белу круглу?

вероватноћа је, да ћемо најпре из прве капе вући $= 1/2$ и да ћемо из ове белу круглу извући, вероватноћа је $= 5/8$ дакле, да се оба ова догађаја појаве уједанпут $= 1/2 \times 5/8 = 5/16$. Исто је тако вероватноћа, да из друге белу круглу извучемо $= 1/2 \cdot 4/10 = \frac{1}{5}$

Оће ли сада извучена бити бела кругла из прве или из друге капе, одговараће сваки овај случај траженом догађају зато је вероватноћа $= 5/16 + 1/5 = \frac{41}{80}$.

3.) Да се изнађе вероватноћа, кад са две коцке хоћемо на први или бар на други хитац да погодимо збир 9.

вероватноћа је, да на први хитац бацимо збир 9 $\omega = 4/36 = 1/9$; вероватноћа је, да не бацимо на први хитац збир 9 $\omega' = 1 - \omega = 1 - 1/9$. А да ово буде на други хитац то је $\omega' = (1 - 1/9) \cdot 1/9$; и тако је вероватноћа за тај догађај

$$= 1/9 + (1 - 1/9)\ 1/9 = \frac{17}{81}$$

4) У малој лутрији са бројевима од 90 нумери, којих се свагда извлаче 5, тражимо једну определењу нумеру да извучемо у одређеном извлачењу. Колика је вероватноћа, да ће захтевана нумера бити извучена у 1, 2. 3. 4. или 5. извлачењу?

вероватноћа је, да извучемо ту нумеру у првом извлачењу $= \frac{1}{90}$, јер је овде само 1 угодно извлачење између 90 могућих случаја. А да ову нумеру извучемо у другом извлачењу, онда ова неможе изаћи у првом извлачењу и зато је вероватноћа $(1 - \frac{1}{90})$ Јер извучена нумера невраћа се натраг међу осталима, за то остају за друго вучење само 89 нумери, и вероватноћа је сада да определењу нумеру извучемо $= \frac{1}{89}$, и да се оба ова случаја у један ма појаве:

$$\left(1 - \frac{1}{90}\right) \times \frac{1}{89} = \frac{1}{90}.$$

Ако се тражи да на прво и друго извлачење захтевана нумера неизађе него на треће, то је вероватноћа за ово извлачење $= \left(1 - \frac{1}{90}\right) . \left(1 - \frac{1}{89}\right) . \frac{1}{88} = \frac{1}{90}$:

А да захтевана нумера изађе у четвртом извлачењу имамо

$$\left(1 - \frac{1}{90}\right) \left(1 - \frac{1}{89}\right) \left(1 - \frac{1}{88}\right) . \frac{1}{87} = \frac{1}{90}$$

Исто тако, кад се тражи да у петом извлачењу изађе захтевана нумера налазимо вероватноћу $= \frac{1}{90}$.

5.) Вероватноће што одговарају догађаима А и В нека су ω и ω'. Има да се определи вероватноћа:

а) да се појаве А и В,

б) само А, а никако В,

в) да се непојави А но само В,

г) да се непојави ни А, ни В,

д) да се непојаве оба догађаја, [један или други или ни један].

Да се од оба догађаја појави бар један.

а) вероват., да се појаве А и В $= \omega \times \omega'$

б) „ „ само А, но не В $= \omega (1 - \omega')$

в) „ „ не А но само В $= [1 - \omega) \omega'$

г] „ „ нити А нити В $= [1 - \omega) (1 - \omega')$

д) „ „ „ не оба догађаја $= 1 - \omega \omega'$

е) „ „ бар један $= 1 - (1 - \omega) (1 - \omega')$

Повторазајући покушаји

261. Ако су вероватноће, што одговарају догађајима А и В, односно ω и ω' то је на пример вероватноћа да ће се појавити догађај А два пута узастопце $= \omega^2$. и да се између два покушаја појави најпре А, па после В, $\omega\omega'$, или ако је свеједно, да се појави ма који догађај најпре, то је вероватноћа $= 2\,\omega\omega'$, и најпосле да се појави догађај В двапута узастопце $= \omega'^2$. Ове вероватноће, ω^2, $2\,\omega\omega'$, ω'^2, које одговарају кад двапута чинимо покушај претстављају чланове изведеног израза од $(\omega + \omega')^2$

Тако изражава вероватноћу истим начином образац ω^{n-m} ω'^m да се у n покушаја, најпре појави догађај А, $(n - m)$ пута, а после догађај В m пута.

Ако ништа нечини којим ће редом сљедовати оба догађаја, то ћемо пред овима написати сачинитеља $\binom{n}{m}$ По томе је јасно, шта показују чланови развијеног израза из $(\omega + \omega')^n$.

Сада ћемо споменути још и то, да сваки покушај треба да буде под истим околностима, т. ј. просте вероватноће догађаја А и В неће се изменути, па кад се најпосле и то утврди, да се од оба догађаја један бар мора појавити, онда вреди још и однос $\omega + \omega' = 1$.

Примери.

1.) Колика је вероватноћа, да једном коцком у три хитца једну цифру два пута бацимо?

Из развијеног израза

$(\omega + \omega')^3 = \omega^3 + 3\,\omega^2\,\omega' + 3\,\omega\omega'^2 + \omega'^3$, даје нам други члан $3\omega^2\,\omega'$ објашњење за овај случај.

Да ће једна опредељена цифра изаћи у бацању вероватноћа је $= {}^1/_6 = \omega$, а да ова неће изаћи вероватноћа је

$$= \frac{5}{6} = \omega',$$

тако налазимо за овај случај вероватноћу =

$$= 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}.$$

2) Колика је вероватноћа, да са коцком у четири бацања добијемо једну опредељену цифру бар два пута?

Пошто су појаву овога догађаја угодни и они случајеви дп у четири бацања речена цифра 3 пута или баш и четир вута изаће, то ће из развијеног израза

$$(\omega + \omega')^4 = \omega^4 + 4\omega^3\omega' + 6\omega^2\,\omega'^2 +$$
$$+ 4\omega\,\omega'^3 + \omega'^4$$

не само члан $6\omega^2\,\omega'^2$ показивати захтевану вероватноћу, него и збир прва три члана тога развијеног израза.

Тако је због

$$\omega = \frac{1}{6}\,, \quad \omega' = \frac{5}{6}$$
$$\omega = \frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6} +$$
$$+ 6 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{171}{1296} = 0{\cdot}13 \quad , \ . \ . \ .$$

3.) У неком лонцу има 3 беле и 5 црне кругле. Да се покаже, колико покушаја треба учинити, па да је вероватноћа $= {}^{11}/_{12}$, да ће се бела кругла најмање једанпут извући.

У развијеном изразу

$$(\omega + \omega')^n = \omega^n + \binom{n}{1}\omega^{n-1}\,\omega^1 + \ . \ . \ . \ .$$
$$+ \binom{n}{1}\omega\,\omega'^{\,n-1} + \omega'^{\,n}.$$

даје нам збир први n чланова, да ће се у n покушаја захтевани догађај бар једанпут показати.

Ако је овај збир $= {}^{11}/_{12}$, то је због $\omega + \omega' = 1$, једначина ${}^{11}/_{12} + \omega'^n = 1$, дакле $\omega'^n = 1 - {}^{11}/_{12}$ а одавде

$$n = \frac{log.\ (1 - {}^{11}/_{12})}{log.\ \omega'}$$

Сада нема вероватноће, да ће се извући бела кругла, него је вероватноћа да ће се црна кругла извући =

$$= {}^5/_8 = \omega'$$

$$\text{Зато је} \quad n = \frac{log.\ {}^1/_{12}}{log.\ {}^5/_8} = 5{\cdot}2$$

т. ј. у пет покушаја (разуме се, да се извучена кругла после сваког вучења враћа у лонац) вероватноћа је, да ћемо белу круглу извући бар једанпут у нешто мања од ${}^{11}/_{12}$, напротив биће вероватноћа већа од ${}^{11}/_{12}$, кад покушамо 6 пута.

262. Ако су догађајима А и В угодни случајеви односно a и b и нека је $a + b = s$ број могући случајева за оба догађаја.

„Ако после сваког покушаја број угодних као и број могућих случајева смањимо за један; онда ћемо определити вероватноћу, да се у n покушаја појави догађај A p пута.

$\frac{a}{s}$ показује вероватноћу, да ће се појавити А у првом покушају, па ако има да се појави и у другом, трећем итд. покушају, то су њихове вероватноће

$$\frac{a-1}{s-1}, \frac{a-2}{s-2},$$

и у опште је

$$\frac{a-p+1}{s-p+1}$$

вероватноћа, даће се појавити догађај A у p-ном покушају.

И тако је вероватноћа, да ће се догађај A појавити p пута узастопце равна производу

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a-1}{s-1} \cdot \frac{a-2}{s-2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{a-p+1}{s-p+1} = \omega.$$

И ако има догађај B да се појави у $(p+1)$ покушају, то је овога вероватноћа $= \frac{b}{s-p}$, у $(p+2)$ гом покушају вероватноћа је $= \frac{b-1}{s-p-1}$, у $(p+3)$ ћем покушају вероватноћа је $= \frac{b-2}{s-p-2}$ и т. д. и тако је за појав догађаја B у $p+(n-p)$ ном $= n$-ном покушају вероватноће

$$= \frac{b-n+p+1}{s-n+1}$$

Ако сада треба да се појави B узастопце $[n-p]$ пута, то ћемо наћи вероватноћу из производа:

$$\frac{b}{s-p} \cdot \frac{b-1}{s-p-1} \cdot \frac{b-2}{s-p-2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \frac{b-n+p+1}{s-n+1} = \omega^1$$

Ако треба да се појави A p пута, а после B $(n-p)$ пута, то је за овај случај вероват. $= \omega \cdot \omega^1$; или ако је свеједно по коме ће реду сљедовати догађаји, и ако је стало само

за тим, да се у n покушаја појаве догађаји A и B относно p и $(n-p)$ пута, онда треба да помножимо производ $\omega \cdot \omega^1$ са $\binom{n}{p}$ т. ј. вероват. =

$$= \binom{n}{p} \cdot \frac{a(a-1)(a-2) \ldots (a-p+1)}{s(s-1)(s-2) \ldots (s-p+1)} \times$$

$$\times \frac{b(b-1)(b-2) \ldots \ldots (b-n+p+1)}{(s-p)(s-p-1)(s-p-2) \ldots (s-n+1)}$$

Примедба.

Треба множити са $\binom{n}{p}$, јер између n застопних догађаја относно су p и $[n-p]$ једнаки, и тако је број премештаја $= \frac{n!}{p!\,[n-p]!} = \binom{n}{p}$ (§. 239.)

Пример.

У једном лонцу има 12 бели и 20 црни кругала. Па ако извучемо од ових 6 кругала, тако, да ји невраћамо у лонац; колика је вероватноћа да су међу овим извученим круглама 4 беле и 2 црне?

Овде је $a = 12$, $b = 20$, $s = 32$, $n = 6$, $p = 4$, дакле је вероватноћа $= \binom{6}{4} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \times \frac{20 \cdot 19}{28 \cdot 27}$

које износи приближно $\frac{3}{50}$.

263. Претходни §. примењује се и на овај задатак:

„У једној лутрији има s нумери, па се при сваком извлачењу вуку и нумере, које се невраћају натраг; колика је вероватноћа да од a намењени нумери погодимо p нумера?

Да ове нумере погодимо догађају угодни су a случаја а противном догађају $[s - a]$ угодни случаја. Овде је сасвим природно, да је $p \overline{\overline{<}} n$.

Вероватноћа се налази по образцу оппштем из §. 260, само што треба сада поставити $s - a$ у место b.

Кад хоћемо све намењене нумере, a да погодимо [где мора $p = a \overline{\overline{<}} n$ бити], онда налазимо из [§. 262.].

$$\text{Вероватноћа} = \binom{n}{a} \frac{a(a-1) \;.\;.\;.\; 3 \cdot 2 \cdot 1}{s(s-1) \;.\;.\;.\; (s-a+1)}$$

$$\text{или пошто је } \binom{n}{a} = \frac{n(n-1) \;.\;.\;.\; (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \;.\;.\;.\; (a-1) \cdot a}$$

$$\text{вероватн.} = \frac{n(n-1) \;.\;.\;.\; (n-a+1)}{s(s-1) \;.\;.\;.\; (s-a+1)} \quad .\;.\;(\alpha$$

Ако при извлачењу у n покушаја баш ни једну нумеру не извучемо, то је вероватн. =

$$= \frac{(s-a)(s-a-1) \;.\;.\; (s-a-n+1)}{s(s-1)(s-2) \;.\;.\;.\; (s-n+1)} \quad .\;.\;.\;(\beta$$

Пример.

Колика је вероватноћа, да од три намењене нумере у малој лутрији погодимо а] ни једну,

б] једну,

в] две и

г] све три нумере?

Вероватноћа за а $= \frac{9877}{11748}$

„ „ б $= \frac{1785}{11748}$

„ „ в $= \frac{85}{11748}$

„ „ г $= \frac{1}{11748}$

Збир ове четири вероватноће износи 1, јер се један од ових случаја мора појавити.

Математичко очекивање.

264. Кад неко има да очекује неку извесну суму као добитак, но тако, да му се ова изда пошто се појави неки догађај; онда ће вредност овог несигурног добитка у толико већа бити, у колико је већа сума добитка и колико је већа вероватноћа да ће се ово моћи добити.

Ако означимо вредност овог у питању стојећег добитка пре свога решења са h, а количину добитка са g, а вероватноћу која одговара жељеном догађају са ω, онда се ово правило изговара:

„Вредност добитка што је у питању има се спрам његове количине као вероватноћа да ће се добитак примити, на спрам извесности.

Тако постоји сразмера:

$$h : g = \omega : 1$$

$$\text{или} \qquad h = g\omega$$

т. ј. „количина очекиваног добитка равна је производу из количине намењеног добитка и веровотноће да ћемо га примити“.

Овај производ $g \cdot \omega$, зове се, „матеметично очекивање“ или „очекивана вредност“.

Рецимо да једно лице очекује добит од 10.000 динара за ово је вероватноћа $= \frac{1}{250}$, то је математичко очекивање, $= \frac{1}{250}$. 10. 000 = 40 динара.

Кад у неку игру уложе двојица e и e', и кад су относно вредности да ће игру добити ω и ω', то се може ова игра или оклада само онда назвати праведна ако постоји сразмера : $e : e' = \omega : \omega'$, а одавде је $e\,\omega' = e'\,\omega$.

Ови производи показују по предходном математичка очекивања или очекиване вредности, које морају бити једнаке у овом случају.

Примери за упражњавање.

1] У неком лонцу има 4 црне, 5 беле и 3 плаве кругле. Колика је вероватноћа, да ћемо извући:

а) једну црну

б) пре једну црну по једну белу круглу?

2.) колика је вероветноћа да од 32 карте (1 игра карата) извучемо краља, или у опште једну фигуру?

3.) Да се покаже вероватноћа. кад се може извући у малој лутрији (90 нумери) 2, 3, 4, 5, намењене нумере?

4.) Да се изнађе вероватноћа, да бацимо са три коцке:

а) збир 14

б) две једнаке цифре

в] пре збир 9, но 12.

5/ Да се изнађе вероватноћа, да с погледом на услове примера 1. извучемо у четири вучења *a*] најмање једанпут једну плаву круглу, б) две беле и две црне кругле.

6] У неком лонцу има 10 белих и 6 црни кругала. Да учинимо 8 покушаја.

Па да покажемо вероватноћу кад можемо извући:

а) пет белих

б) најмање 4 беле,

в) највише 2 црне кругле

Овде се претпоставља, да се кругле пошто се извуку враћају у лонац.

7.) Колико покушаја морамо учинити, кад је вероватноћа $= \frac{1}{2}$, да са две коцке бацимо најмање једанпут два једнака броја?

8.) Да се покаже вероватноћа, кад хоћемо са три коцке првим хитцем да бацимо збир 9, или кад ово непогодимо, да другим хитцем бацимо збир 12.

9.) Да се покаже вероватноћа, да у малој лутрији изађе бар једна нумера, кад две наменемо?

10.] *A*, *B* и *C* баце по једанпут три коцке а погоде се да ће онај од њи тројице добити игру, који баци од једанпут највећи број. *A* и *B* већ су бацили сваки појединце збир 12. колика је вероватноћа, да ће C игру добити?

11.) Два играча A и B учине погодбу, да онај добије постављене улоге који добије најпре 4 партије. A добије већ три партије и B две партије.

Ако сада игру ову прекину, колико ће сваки имати да прими од улога?

12.) A и B учине погодбу, да опкладу добије A, кад са две коцка најмање баци збир 7. Но ако изађе мањи збир од 7, да добија B. Ако се учини опклада да A уложи 2 динара, колико би морао уложити B?

13.) Да се изнађе вероватноћа, кад ће се између 10 намењени нумера извући три нумере.

14.) Колика је вероватноћа, да се у малој лутрији 3 намењене нумере извуку једанпут у 10 извлачења.

15.) Колика је вероватноћа да од 8 намењени нумери 5 погодимо.

16.) Кад из 32 карте вучемо 12, колика је вероватноћа да буду међу овим извученима три треф карте?