РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гимн. у пензији

АЛГЕБРА

ЗА VII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 517 од 26-III-1938 и одобрен од Г. Министра просвете одлуком IV бр. 5470 од 17-IV-1938 год.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

ШТАМП. ГРАФИЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ „ДАВИДОВИЋ“ ПАВЛОВИЋА И ДРУГА

БЕОГРАД — ТАКОВСКА УЛИЦА

ПРВИ ОДЕЉАК

КВАДРАТНИ ТРИНОМИ, НЕЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА, ЈЕДНАЧИНЕ ВИШЕГ СТЕПЕНА КОЈЕ СЕ СВОДЕ НА КВАДРАТНЕ И СИСТЕМЕ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ И ВИШЕГ СТЕПЕНА

(Параграфи снабдевени звездицама нису за ученике класичних гимназија.)

§ 1. Квадратни триноми и њихово растављање на просте чинитеље.

Под квадратним триномом разумемо трином било облика

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bx + C}, \qquad \text{било облика} \qquad \boldsymbol{x^2 + px + q}.$$

Такав је трином лева страна потпуне квадратне једначине сведене на нулу.

Под *кореним чинитељем* разумемо разлику између непознате у једначини и њеног корена. Па како квадратна једначина има два корена, x_1 и x_2, то она има и два корена чинитеља: $x - x_1$ и $x - x_2$.

Теорема. *Трином квадратне једначине* $x^2 + px + q = 0$ *једнак је производу корених чинитеља те једначине.*

Доказ. — Како су корени ове једначине:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

то су њени корени чинитељи:

$$x - x_1 = x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x - x_2 = x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Тада је:

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = x^2 + px +$$

$+ q$, чиме је теорема доказана.

Трином облика Ax^2+Bx+C, који се дâ написати као $A\cdot\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$, или $A\cdot(x^2+px+q)$, где је $p=\frac{B}{A}$ а $q=\frac{C}{A}$, може се, на основу ове теореме, написати као производ

$$A(x-x_1)\ (x-x_2).$$

Корист од ове теореме је двојака: а) можемо, на основу ове теореме, да склопимо квадратну једначину ако су нам познати њени корени; и b) можемо квадратне триноме раставити на чинитеље.

а) *Једначину склапамо помоћу корена, када најпре од корена створимо оба корена чинитеља, а затим ставимо да је њихов производ једнак нули.*

Примери:

1) *Наћи једначину чији су корени $x_1=10$ и $x_2=5$.*

Овде је I к. ч. $=x-10$ а II к. ч. $=x-5$. Једначина је: $(x-10)\ (x-5)=0$, или $x^2-10x-5x+50=0$, или $x^2-15x+50=0$.

2) *Наћи једначину чији су корени $x_1=\frac{7}{3}$ и $x_2=-\frac{2}{3}$.*

Овде је I к. ч. $=x-\frac{7}{3}$ а II к. ч. $=x+\frac{2}{3}$. Једначина је: $\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$, или $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}x-\frac{14}{9}=0$, или $9x^2-15x-14=0$.

3) *Наћи једначину чији су корени $x_1=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt{2}-i\sqrt{3}$.*

Овде је I к. ч. $=x-\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ а II к. ч. $=x-\sqrt{2}+i\sqrt{3}$.

Једначина је:

$(x-\sqrt{2}-i\sqrt{3})\ (x-\sqrt{2}+i\sqrt{3})=0$, или множењем:

$$x^2-2x\sqrt{2}+5=0.$$

b) *Квадратни трином Ax^2+Bx+C растављамо на чинитеље када ставимо најпре да је једнак нули, затим добивену квадратну једначину решавамо да бисмо добили корене x_1 и x_2, па тражени чинитељи овога тринома биће: A и оба корена чинитеља, тј.*

$$Ax^2+Bx+C=A\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Примери:

1) *Раставити на чинитеље трином $3x^2-14x+8$.*

Решењем једначине $3x^2-14x+8=0$ добијамо $x_1=4$ и $x_2=\frac{2}{3}$. Стога је $3x^2-14x+8=3\,(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

2) *Раставити на чинитеље трином: $x^2+3x-88$.*

Решењем једначине $x^2+3x-88=0$ добијамо $x_1=8$ и $x_2=-11$. Стога је $x^2+3x-88=(x-8)\ (x+11)$. Овде је $A=1$, те се не пише.

3) *Раставити на чинитеље трином $abx^2+(a+b)x+1$.*

Решењем једначине $abx^2+(a+b)x+1=0$ добијамо $x_1=-\frac{1}{a}$ и $x_2=-\frac{1}{b}$. Стога је $abx^2+(a+b)x+1=ab\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x+\frac{1}{b}\right)$.

Напомена. *а)* Како је сваки производ дељив ма којим својим чинитељем, то је јасно да је сваки квадратни трином, као производ корених чинитеља и коефицијента уз x^2, дељив ма којим кореним чинитељем.

b) На основу исте ове теореме јасно је да корене квадратне једначине дате у облику производа:

$$r\,(mx+n)\,(sx+t)=0$$

лакше налазимо стављајући да су чинитељи $mx+n=0$ и $sx+t=0$, чиме добијамо једначине првог степена из којих добијамо:

$$x_1=-\frac{n}{m} \text{ и } x_2=-\frac{t}{s}.$$

Пример. Решити једначину $(2x-5)\ (3x+8)=0$.

Овде је $2x-5=0$ и $3x+8=0$, те је $x_1=\frac{5}{2}=2{,}5$ и $x_2=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$.

Задаци за вежбу:

Растави на чинитеље квадратне триноме:

1) $x^2-7x+12$;	8) $x^2-ax-6a^2$;
2) $x^2+3x-108$;	9) $abx^2-2ax+a^2-b^2$;
3) $6x^2+5x-6$;	10) $(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2-a^2$;
4) $30x^2+37x+10$;	11) $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$;
5) $x^2-6x+11$;	12) $x^2+\sqrt{b}\,x-a^2+a\sqrt{b}$;
6) $x^2+15x+44$;	13) $abx^2-2a\sqrt{ab}\,x+a^2b^2$;
7) $21x^2+22x-8$;	14) $a^2b^2x^2-2ab^2\sqrt{b}\,x+b^3-a^3$.

§ 2*. **Позитивност и негативност тринома Ax^2+Bx+C.** Трином Ax^2+Bx+C је *функција другог степена ($y=Ax^2+Bx+C$)* независно промењиве x, јер за различите вредности x-а, добијамо различите вредности y-а, које могу бити позитивне или негативне. Знак вредности функције y једино зависи од дискриминанте тринома B^2-4AC.

Теорема: 1) *Ако је дискриминанта* $B^2-4AC \leq 0$ (тј. ако је њена вредност негативна, или равна нули), *онда вредност функције y има знак као и коефицијенат A, за све вредност x-а од $-\infty$ до $+\infty$;* 2) *Ако је дискриминанта* $B^2-4AC>0$ (тј. ако је њена вредност позитивна), *онда вредност функције y има знак као коефицијенат A, за све вредности x-а које су веће од већег корена или мање од мањег корена једначине $Ax^2+Bx+C=0$. Вредност тринома Ax^2+Bx+C (функције y) биће противног знака коефицијента A, ако x-у дамо вредност која се налази између корена једначине $Ax^2+Bx+C=0$.*

Доказ. — Да је ова теорема тачна, уверавамо се испитивањем производа $A(x-x_1)(x-x_2)$, који нам претставља трином Ax^2+Bx+C.

1) Када је дискриминанта $B^2-4AC=0$, онда су корени x_1 и x_2 једнаки. Тада су једнаки и корени чинитељи $x-x_1$ и $x-x_2$, те производ $A(x-x_1)(x-x_2)$ добија облик $A(x-x_1)^2$. Чинитељ $(x-x_1)^2$ овога производа увек је позитиван за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, па стога и знак производа $A(x-x_1)^2$, односно тринома Ax^2+Bx+C (функције y), биће истоветан са знаком коефицијента A.

2) Ако је дискриминанта $B^2-4AC<0$, онда су корени x_1 и x_2 имагинарни. Тада је производ $(x-x_1)(x-x_2)$, као производ од два конјугована комплексна броја, увек позитиван, за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. Стога производ $A(x-x_1)(x-x^2)$, односно трином Ax^2+Bx+C (функција y), има знак истоветан с коефицијентом A.

3) Ако је дискриминанта $B^2-4AC>0$, онда су корени x_1 и x_2 стварни неједнаки. Ако претпоставимо да је корен x_1 већи од корена x_2, и ако x-у дамо вредност већу од x_1 (наравно и од x_2), онда су чинитељи $x-x_1$ и $x-x_2$ позитивни (или су истог знака), те је производ $(x-x_1)(x-x_2)$ увек позитиван. Стога производ $A(x-x_1)(x-x_2)$, односно трином Ax^2+Bx+C (функција y), има знак коефицијента A. Међутим, ако x-у дамо вредност између корена x_1 и x_2, онда су корени чинитељи $x-x_1$ и $x-x_2$ различитог знака, те је њихов производ негативан. Стога производ $A(x-x_1)(x-x_2)$, односно трином Ax^2+Bx+C (функција y) има супротан знак коефицијента A.

Примери:

1) Трином: $x^2+4x-32$ има дискриминанту $B^2-4AC=4^2-4\cdot1\cdot(-32)=+144$, т.ј. позитивну, а корени једначине $x^2+4x-32=0$ јесу $x_1=4$ и $x_2=-8$. Стога тај трином, код кога је $A=+1$, има позитивну вредност за све вредности x-а од $+\infty$ до $+4$ и од $-\infty$ до -8, а негативну, за све вредности x-а између -8 и $+4$. За $x=-8$ и $x=+4$, трином је $=0$.

2) Трином: $x^2-10x+25$ има дискриминанту $B^2-4AC=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=0$, те је његова вредност позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је код овога тринома $A=+1$.

3) Трином: x^2-5x+8 има дискриминанту $B^2-4AC=(-5)^2-4\cdot1\cdot8=-7$, тј. негативну, те је његова вредност увек позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је код овога тринома $A=+1$.

4) Трином: $2x^2-6x+9$ има дискриминанту $B^2-4AC=(-6)^2-4\cdot2\cdot9=-36$, тј. негативну, те је његова вредност увек позитивна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$, јер је $A=+2$.

5) Трином: $-2x^2-x+10$ има дискриминанту $B^2-4AC=(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot10=+81$, тј. позитивну, а корени једначине $-2x^2-x+10=0$, или $2x^2+x-10=0$ јесу $x_1=2$ и $x_2=-\frac{5}{2}$, те је вредност овога тринома негативна за све вредности x-а од $+\infty$ до $+2$ и од $-\infty$ до $-2\frac{1}{2}$, а позитивна, за све вредности x-а између $-2\frac{1}{2}$ и $+2$, пошто је $A=-2$. Трином је раван нули за $x=2$ и $x=-2{,}5$.

6) Трином: $12-x-6x^2$ (или $-6x^2-x+12$) има дискриминанту $B^2-4AC=(-1)^2-4(-6)\cdot12=+289$, тј. позитивну, а корени једначине $-6x^2-x+12=0$ јесу $x_1=-1\frac{1}{2}$, $ax_2=1\frac{1}{3}$, те је вредност овога тринома негативна за све вредности x-а од $+\infty$ до $1\frac{1}{3}$ и од $-\infty$ до $-1\frac{1}{2}$, а позитивна, за све вредности x-а између $-1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$, јер је овде $A=-6$. За $x=-1\frac{1}{2}$ и $x=1\frac{1}{3}$ трином се анулира.

§ 3*. **Неједначине другог степена.** Општи облик неједначине другог степена је

$$Ax^2+Bx+C>0 \quad (1).$$

Ако овај облик помножимо са -1 добијамо нов облик:

$$-Ax^2-Bx-C<0 \quad (2).$$

Да бисмо нашли услове за које је неједначина (1) могућна, узимамо у испитивање ова два случаја:

1) *Коефицијенат* $A>0$. Како је у овом случају коефицијенат A позитиван, а захтева се да и вредност тринома Ax^2+Bx+C буде позитивна, то ће, на основу теореме из претходног параграфа, овај случај наступити само онда, ако је дискриминанта $B^2-4AC\leq 0$, а за $B^2-4AC>0$, ако x-у дамо вредност већу од већега корена, или мању од мањега корена једначине $Ax^2+Bx+C=0$.

2. *Коефицијенат* $A<0$. Како се захтева и у овоме случају да буде вредност тринома позитивна, тј. да буде супротног знака од A, то ће ово бити могуће ако је само дискриминанта $B^2-4AC>0$ и, поред тога, ако x-у дамо вредности између корена квадратне једначине $Ax^2+Bx+C=0$. Ако је дискриминанта $B^2-4AP\leq 0$, вредност тринома (1) биће негативна за све вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$. Стога неједначина $Ax^2+Bx+C>0$ је немогућна за $A<0$ и $B^2-4AC\leqq 0$.

Примери:

1) Неједначина $x^2-4x+3<0$, код које је $A=+1$, а дискриминанта $B^2-4AC=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=+4$, могућна је само онда ако x-у дамо вредности између корена једначине $x^2-4x+3=0$, тј. ако x-у дамо вредност између 3 и 1, пошто је $x_1=3$ и $x_2=1$.

2) Неједначина $4x^2+5x-19<0$, код које је $A=+4$, а дискриминанта $B^2-4AC=5^2-4\cdot 4\cdot(-19)=+329$, могућна је само онда ако x-у дамо вредности између $x_1=\frac{-5+\sqrt{329}}{8}$ и $x_2=\frac{-5-\sqrt{329}}{8}$ једначине $4x^2+5x-19=0$.

3) Неједначина $7x^2-4x+1<0$, код које је $A=+7$, а дискриминанта $B^2-4AC=(-4)^2-4\cdot 7\cdot 1=-12$, је немогућна, јер је трином $7x^2-4x+1$ позитиван (тј. >0) за све могуће вредности x-а од $-\infty$ до $+\infty$.

4) Неједначина $x^2>25$, или $x^2-25>0$, код које је $A=+1$, а дискриминанта $B^2-4AC=0^2-4\cdot 1\cdot(-25)=+100$, могућна је само за вредности x-а од $+\infty$ до $+5$ (без $+5$) и од $-\infty$ до -5 (без -5), јер су корени једначине $x^2-25=0$ $x_1=5$ и $x_2=-5$

5) Неједначина $9x^2<2x$, или $9x^2-2x<0$, код које је $A=+9$, а дискриминанта $B^2-4AC=(-2)^2-4\cdot 9\cdot 0=+4$,

x, већ по неком изразу, у коме се налази непозната x. Таква је једначина нпр. $3(2x-1)+2\sqrt{2x-1}=33$. Те једначине решавамо, као и биквадратне, заменом израза по коме је дата једначина квадратна с новом непознатом y.

Решени примери:

1) *Решити једначину* $3(2x-1)+2\sqrt{2x-1}=33$. Заменом $\sqrt{2x-1}=y$, добијамо $3y^2+2y=33$. Одавде је $y_1=3$, $y_2=-\frac{11}{3}$. Стога је: a) $\sqrt{2x-1}=3$, $2x-1=9$, $x_1=5$; и b) $\sqrt{2x-1}=-\frac{11}{3}$, $2x-1=\frac{121}{9}$, $x_2=7\frac{2}{3}$.

2) *Решити једначину* $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$. Ова се једначина да̄ написати $[(2x^2-3x)+1]^2=11(2x^2-3x)+1$. Заменом $2x^2-3x=y$ добијамо $(y+1)^2=11y+1$, или $y^2-9y=0$. Одавде је $y_1=0$ и $y_2=9$. Стога је:

a) $2x^2-3x=0$, а $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; и

b) $2x^2-3x=9$, а $x_3=3$, $x_4=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$.

3) *Решити једначину* $\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}=54$.

Заменом $\sqrt[3]{x^2}=y$ добијамо: $y^2-3y=54$. Одавде је $y_1=9$ и $y_2=-6$. Стога је:

a) $\sqrt[3]{x^2}=9$, $x^2=729$, $x_{(1,2)}=\pm\sqrt{729}=\pm 27$; и

b) $\sqrt[3]{x^2}=-6$, $x^2=-216$, $x_{(3,4)}=\pm\sqrt{-216}=\pm 6i\sqrt{6}$.

Примери за вежбу:

1) $(2x-5)^2-5(2x-5)+4=0$;
2) $(6x+3)^2-16(6x+3)+15=0$;
3) $(ax-b)^2+b(ax-b)-a(a-b)=0$;
4) $(x^2+ax)^2+b(x^2+ax)=c$;
5) $(x^2-3)^2-7(x^2-3)+6=0$;
6) $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}=9$;
7) $2x^2-2x-3+3\sqrt{x^2-x+1}=0$;
8) $2\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{4x^2}-2=0$;
9) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$;
10) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;
11) $(x-\sqrt{3})^4-8(x-\sqrt{3})^2+4=0$;
12) $\sqrt{x^2+8}-(x^2+8)+12=0$;
13) $x^{\frac{1}{2}}-3x+30=0$; 14) $5x^{\frac{1}{2}}+3x-22=0$;

15) $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$;

16) $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30$ (Lyon);

17) $(x + \sqrt{x})^4 - (x + \sqrt{x})^2 = 159600$ (Београд, I м. 1922);

18) $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x} = \sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}$ (Београд, I мушка 1901);

19) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-3}\right)^4 - 6\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-3}\right)^2 = 27$;

20) $\frac{4}{x^2 - 3x} + \frac{3}{x^2 - 3x + 5} - \frac{8}{x^2 - 3x + 2} = 0$ (Загреб, II мушка 1931);

21) $\left(\frac{3x+4}{5x-2}\right)^2 - 67\left(\frac{3x+4}{5x-2}\right) = 6710$ (Београд, женска 1925);

22) $\sqrt{\frac{3x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+4}{3x}} = 2$ (Београд, I женска 1926);

23) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{142}{9}$ (Београд, Реалка 1921);

24) $3\sqrt[4]{\frac{x-40}{x+40}} + 3\sqrt[4]{\frac{x+40}{x-40}} = 10$ (Београд, I мушка 1922).

§ 6*. **Реципрочне (симетричне) једначине.** То су једначине облика:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots \pm Cx^2 \pm Bx \pm A = 0,$$

код којих су коефицијенти чланова подједнако удаљених од крајњих чланова једнаки по апсолутним вредностима, па било једнако или различито означени. Зову се тако, што и реципрочна вредност ма кога корена задовољава једначину. Заиста, ако је x_1 један корен реципрочне једначине, онда је:

$$Ax_1^n + Bx_1^{n-1} + Cx_1^{n-2} + \dots \pm Cx_1^2 \pm Bx_1 \pm A = 0,$$

Дељењем ове једначине са x_1^n добијамо:

$$A + B\left(\frac{1}{x_1}\right) + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \dots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} \pm B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \pm$$

$$\pm A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n = 0, \quad \text{или}$$

$$\pm A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n \pm B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} \pm \dots + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 +$$

$$+ B\left(\frac{1}{x_1}\right) + A = 0, \quad \text{или}$$

$$\pm \left[A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} + \dots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 \pm\right.$$

$$\left.\pm B\left(\frac{1}{x_1}\right) \pm A\right] = 0, \quad \text{или}$$

$$A\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + B\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + C\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2} + \dots \pm C\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 \pm B\left(\frac{1}{x_1}\right) \pm A = 0,$$

што показује да је и $\frac{1}{x_1}$ корен дате једначине.

а) **Реципрочне једначине трећег степена.** Њихов је облик:

$$Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A = 0.$$

Ове једначине решавамо најпре растављањем леве стране на чинитеље, а затим стављањем да су поједини чинитељи једнаки нули, добијамо једну једначину првог и једну другог степена, које најзад решавамо по ранијим упутствима. При растављању полинома једначине на чинитеље, узимамо у поступак најпре први и четврти, а затим други и трећи члан. Тако, $Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A = A(x^3 \pm 1) + Bx(x^2 \pm 1) =$ $= A(x \pm 1)(x^2 \mp x + 1) + Bx(x \pm 1) = (x \pm 1)[A(x^2 \mp x + 1) + Bx)]$.

1. *Пример.* Решити једначину $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$.

Решење: $5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$;
$5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$;
$(x + 1)(5x^2 - 5x + 5 - 21x) = 0$.

Одавде је: 1) $x + 1 = 0$ и 2) $5x^2 - 26x + 5 = 0$.

Из 1) је $x_1 = -1$, а из 2) је $x_2 = 5$ и $x_3 = \frac{1}{5}$.

2. *Пример. Решити једначину* $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решење: $2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0$;
$2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0$;
$(x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0$.

Одавде је: 1) $x - 1 = 0$ и 2) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Из (1) је $x_1 = 1$, а из (2) $x_2 = -\frac{1}{2}$ и $x_3 = -2$.

Напомена. По истом поступку решавају се и једначине: $x^3 + ax^2 \pm abx \pm b^3 = 0$ и $x^3 - ax^2 + abx - b^3 = 0$.

3. *Пример. Решити једначину* $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0$.

Решење: $(x^3 + 5^3) + 3x(x + 5) = 0$;
$(x + 5)(x^2 - 5x + 25) + 3x(x + 5) = 0$;
$(x + 5)(x^2 - 5x + 25 + 3x) = 0$.

Одавде је: 1) $x + 5 = 0$ и 2) $x^2 - 2x + 25 = 0$.

Из 1) је $x_1 = -5$, а из 2) $x_{(2,3)} = 1 \pm 2i\sqrt{6}$.

Примери за вежбу:

1) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; 2) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$;

3) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$;

5) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$; 6) $8x^3 + 73x^2 + 73x + 8 = 0$;

7) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$; 8) $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0$;

9) $7x - 3x^3 = 7x^2 - 3$; 10) $2x^{-3} - 7x^{-2} + 7x^{-1} = 2$.

b) **Реципрочне једначине четвртог степена**

Њихов је облик: 1) $AX^4 + Bx^3 \pm Cx^2 + Bx + A = 0$, или 2) $Ax^4 \pm Bx^3 + Cx^2 \pm Bx + A = 0$, или 3) $Ax^4 + Bx^3 - Bx - A = 0$.

Реципрочне једначине четвртог степена облика 3), од којих су коефицијенти једнаки али различито означени, а немају средњег члана, решавају се као и реципрочне једначине трећег степена растављањем на чинитеље.

Пример. 1 *Решите једначину* $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$.

Решење: $2\ (x^4 - 1) + 5x\,(x^2 - 1) = 0$;

$2\,(x^2 + 1)\,(x^2 - 1) + 5x\,(x^2 - 1) = 0$; $(x^2 - 1)\,(2x^2 + 2 + 5x) = 0$;

$(x + 1)\,(x - 1)\,(2x^2 + 5x + 2) = 0$. Одавде је:

1) $x + 1 = 0$, 2) $x - 1 = 0$, 3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Из 1) је $x_1 = -1$, из 2) је $x_2 = 1$, из 3) је $x_3 = -\frac{1}{2}$ и $x_4 = -2$.

Реципрочне једначине облика 1) и 2) решавамо по овоме поступку: Најпре једначину делимо са x^2, чиме добијамо:

$$Ax^2 + Bx + C + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} = 0, \text{ или}$$

$$A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0.$$

Затим у овој једначини вршимо замену $x + \frac{1}{x} = y$, а $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, чиме добијамо квадратну једначину:

$$A\,(y^2 - 2) + By + C = 0\text{, или } Ay^2 + By + (C - 2A) = 0.$$

Решењем ове једначине налазимо корене y_1 и y_2, а из једначина:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ и } x + \frac{1}{x} = y_2$$

налазимо, најзад, сва четири корена дате једначине.

Пример. 2 *Решити једначину:*

$$3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Решење: Дељењем са x^2 добијамо:

$3x^2 - 10x + 6 - \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$; $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$

Заменом $x + \frac{1}{x} = y$ имамо: $3\ (y^2 - 2) - 10y + 6 = 0$ или

$3y^2 - 10y = 0$. Одавде је $y_1 = 0$ и $y_2 = \frac{10}{3}$. Тада је:

a) $x + \frac{1}{x} = 0$ и b) $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, или a) $x^2 + 1 = 0$ и

b) $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Из a) $x_{(1,2)} = \pm i$, а из b) је $x_3 = 3$ и $x_4 = \frac{1}{3}$.

Напомена. Истим поступком решава се једначина облика: $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, ако њени коефицијенти задовољавају пропорцију $A : E = B^2 : D^2$.

Пример 3. *Решити једначину:* $4x^4 + 2x^3 + 10^2 + 3x + 9 = 0$.

Решење. Дељењем са x^2 добијамо: $4x^2 + 2x + 10 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$, или $\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + \left(2x + \frac{3}{x}\right) + 10 = 0$. Заменом $2x + \frac{3}{x} = y$, а $4x^2 + \frac{9}{x^2} = y^2 - 12$, добијамо квадр. једначину: $y^2 - 12 + y + 10 = 0$, или $y^2 + y - 2 = 0$. Одавде је $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Најзад из једначина:

a) $2x + \frac{3}{x} = 1$ и b) $2x + \frac{3}{x} = -2$, или

a) $2x^2 - x + 3 = 0$ и b) $2x^2 - 2x + 3 = 0$ налазимо:

$$x_{(1,2)} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4} \text{ и } x_{(3,4)} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}.$$

Примери за вежбу:

1) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;
2) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$;
3) $24x^4 - 110x^3 + 173x^2 - 110x + 24 = 0$;
4) $24x^4 + 110x^3 + 173x^2 + 110x + 24 = 0$;
5) $2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0$;
6) $x^4 + x^3 - 40x^2 + x + 1 = 0$;
7) $3x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0$;
8) $2x^4 + 9x^3 + 9x + 2 = 0$;
9) $5x^4 - 6x^3 + 6x - 5 = 0$;
10) $x^4 - x^3 + 4x - 16 = 0$;
11) $6x^4 - 32\frac{1}{2}x^3 + 53\frac{2}{3}x^2 - 32\frac{1}{2}x + 6 = 0$;
12) $x\left(19\frac{2}{3}x + 6\right) - 24 = 20x^3\,(1{,}2x + 0{,}3) - 40x^2$;
13) $2x^4\sqrt{5} + 9x^3 - 3{,}2x^2\sqrt{5} + 9x + 2\sqrt{5} + 0$;
14) $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$ (Панчево, 1932)
15) $8\sin^4 x - 14\sin^3 x\cos x - 69\sin^2 x\cos^2 x - 14\sin x\cos^3 x - {}$ $+ 8\cos^4 x = 0$
(Сарајево, I мушка 1929; *Упутство:* дели је најпре са $\cos^4 x$ и замени $tgx = y$.)
16) Поставити квадратну једначину чији су корени квадрати целих корена једначине $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$ (Цетиње, 1934)

17) $tg^4x + \frac{5}{6}tg^3x - 6\frac{1}{3}tg^2x + \frac{5}{6}tgx + 1 = 0$
(Загреб, III мушка 1934)

c) Реципрочне једначине петог степена

Њихов је облик: $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 \pm Cx^2 \pm Bx \pm A = 0$. И ове једначине решавамо, као и реципрочне једначине трећег степена, растављањем на чинитеље, чиме добијамо једну једначину првог и једну реципрочну једначину четвртог степена, које најзад решавамо по упутствима за решавање тих једначина.

Пример. Решити једначину:

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Решење. $6\,(x^5 + 1) + 11x\,(x^3 + 1) - 33x^2\,(x + 1) = 0;$
$6(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) + 11x(x+1)(x^2-x+1) - 33x^2(x+1) = 0;$
$(x+1)\,[6\,(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 11x\,(x^2 - x + 1) - 33x^2] = 0;$
$(x+1)\,(6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6) = 0$. Одавде је:
a) $x + 1 = 0$ и b) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.
Решењем прве имамо $x_1 = -1$, а решењем друге имамо:

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x_5 = -3.$$

Примери за вежбу:

1) $12x^5 - 8x^4 - 13x^3 + 8x - 12 = 0;$
2) $12x^5 + 16x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 16x + 12 = 0;$
3) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0;$
4) $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0;$ (Осијек, м. 1931)
5) $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0;$
6) $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0;$ (Бјељина, 1932)
7) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0;$ 8) $x^5 - x^3 + 4x^2 - 4x = 0;$
9) Како гласи квадратна једначина са једном непознатом чији су корени цели и позитивни корени једначине: $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0;$ (Београд, III ж. 1934)
10) $36x^5 - 15x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 15x + 36 = 0;$ (Панчево, 1934)
11) $x^5 + \frac{29}{6}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{11}{3}x^2 - \frac{29}{6}x - 1 = 0;$ (Панчево, 1930)
12) $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0;$ (Ср. Карловци, 1931)
13) $15x^5 + 43x^4 - 202x^3 - 202x^2 + 43x + 15 = 0;$ (Чачак, 1933)
14) $12x^5 - 23x^4 - 135x^3 + 135x^2 + 23x - 12 = 0;$ (Шибеник, 1932)

d) Реципрочне једначине шестог степена

Њихов је облик $Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 \pm Dx^3 \pm Cx^2 \pm Bx + A = 0$. Поступак њиховог решавања сличан је решавању реципрочних једначина четвртог степена. Овде једначину делимо са x^3,

израз $x + \frac{1}{x}$, односно $x - \frac{1}{x}$, замењујемо са y, а $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$, са $y\,(y^2 - 3)$, односно $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$ са $y\,(y^2 + 3)$, чиме добијамо једначину трећег степена.

1) *Пример. — Решити једначину:*

$$x^6 - 10x^5 + 27x^4 - 20x^2 + 27x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Решење: $x^3 - 10x^2 + 27x - 20 + \frac{27}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0;$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 27\left(x + \frac{1}{x}\right) - 20 = 0.$$

За $x + \frac{1}{x} = y$ биће $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, а $x^3 + \frac{1}{y^3} = y\,(x^3 - 3)$.

Стога је: $y\,(y^2 - 3) - 10\,(y^2 - 2) + 27y - 20 = 0$, или

$$y^3 - 10y^2 + 24y = 0.$$

Одавде је $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 4$.

Најзад из једначина: a) $x + \frac{1}{x} = 0$, b) $x + \frac{1}{x} = 6$ и c) $x + \frac{1}{x} = 4$ имамо: $x_{(1,2)} = \pm i$, $x_{(3,4)} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ и $x_{(5,6)} = 2 \pm \sqrt{3}$.

2) *Пример.* — Решити једначину:

$$2x^6 - x^5 - 8x^4 + 8x^2 + x - 2 = 0.$$

Решење: Овде су коефицијенти једнаки а различито означени, те се решава растављањем на чинитеље:
$2\,(x^6 - 1) - x\,(x^4 - 1) - 8x^2\,(x^2 - 1) = 0;$
$2\,(x^3 + 1)\,(x^3 - 1) - x\,(x^2 + 1)\,(x^2 - 1) - 8x^2\,(x^2 - 1) = 0;$
$2\,(x+1)\,(x^2-x+1)\,(x-1)\,(x^2+x+1) - x\,(x^2+1)\,(x^2-1) - 8x^2(x^2-1) = 0;$
$(x^2 - 1)\,[2\,(x^2 - x + 1)\,(x^2 + x + 1) - x\,(x^2 + 1) - 8x^2] = 0;$
$(x^2 - 1)\,(2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2) = 0.$
Одавде је:
a) $x^2 - 1 = 0$ и b) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$. Стога је из (a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, а из (b) $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = -1$ и $x_6 = -1$.

Примери за вежбу:

3) $x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ (Ср. Карловци, 1927);
4) $x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0;$
5) $3x^6 + 4x^5 - 17x^4 + 17x^2 - 4x - 3 = 0.$

§ 7*. **Биномне једначине.** Општи је њихов облик:

$$x^n \pm a = 0 \quad (1).$$

Овај се облик дâ свести на облик $y^n \pm 1 = 0$ (2), ако ставимо да је $x = y\sqrt[n]{a}$, јер је $x^n = ay^n$, те једначина (1) постаје $ay^n \pm a = 0$, или дељењем са a постаје $y^n \pm 1 = 0$. Једначину $y^n \pm 1 = 0$ лако решавамо растављањем њеног полинома на просте чинитеље, а на основу правила о растављању збирова и разлика степена са парним и непарним изложитељима. Стављајући да су поједини чинитељи равни нули, добијамо једначине првог и другог степена, које даље решавамо по ранијим упутствима.

Решени примери:

1) $x^3 + 27 = 0$. *Решење:* $x = y\sqrt[3]{27} = 3y$. Заменом добијамо: $27y^3 + 27 = 0$, или $y^3 + 1 = 0$, или $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$. Одавде је: a) $y + 1 = 0$ и b) $y^2 - y + 1 = 0$. Из (a) је $y_1 = -1$, а из (b) је $y_{(2,3)} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Стога је

$$x_1 = -3, \quad x_{(2,3)} = \frac{3(1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

2) $x^4 - 16 = 0$. *Решење:* $x = y\sqrt[4]{16} = 2y$. Заменом добијамо: $16y^4 - 16 = 0$, или $y^4 - 1 = 0$, или $(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0$, или $(y + i)(y - i)(y + 1)(y - 1) = 0$. Одавде је: $y + i = 0$, $y - i = 0$, $y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, а $y_1 = -i$, $y_2 = i$, $y_3 = -1$ и $y_4 = 1$. Стога је: $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2$ и $x_4 = 2$.

3) $x^5 - 32 = 0$. *Решење:* $x = y\sqrt[5]{32} = 2y$. Заменом добијамо: $32y^5 - 32 = 0$, или $y^5 - 1 = 0$, или $(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$. Одавде је: a) $y - 1 = 0$ и b) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Из (a) је $y_1 = 1$, а из реципрочне једначине (b) имамо: $y_{(2,3)} = \dfrac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ и $y_{(4,5)} = \dfrac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$.

Стога је $x_1 = 2$, $x_{(2,3)} = \dfrac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$ и

$$x_{(4,5)} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{2}.$$

4) $x^6 + 64 = 0$. *Решење:* $x = y\sqrt[6]{64} = 2y$. Заменом добијамо: $64y^6 + 64 = 0$, или $y^6 + 1 = 0$, или $(y^2)^3 + 1 = 0$, или $(y^2 + 1)(y^4 - y^2 + 1) = 0$. Одавде је: a) $y^2 + 1 = 0$ и b) $y^4 - y^2 + 1 = 0$. Из (a) је $y_{(1,2)} = \pm i$, а из биквадратне једначине (b) је: $y_{(3,4)} = \sqrt{\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$ и $y_{(5,6)} = -\sqrt{\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$. Стога је: $x_{(1,2)} = \pm 2i$, $x_{(3,4)} = 2\sqrt{\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2 \pm 2i\sqrt{3}}$ и $x_{(5,6)} = -2\sqrt{\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{2 \pm 2i\sqrt{3}}$. Сви су, дакле, корени имагинарни.

5) $64x^6 - 729 = 0$. *Решење:* Ако ову једначину најпре напишемо у облику $x^6 - \dfrac{729}{64} = 0$ и заменимо $x = y\sqrt[6]{\dfrac{729}{64}} = \dfrac{3}{2}y$, добијамо $\dfrac{729}{64}y^6 - \dfrac{729}{64} = 0$, или $y^6 - 1 = 0$, или $(y^3 + 1)(y^3 - 1) = 0$, или $(y + 1)(y^2 - y + 1)(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$. Одавде је: a) $y + 1 = 0$, b) $y^2 - y + 1 = 0$, c) $y - 1 = 0$ и d) $y^2 + y + 1 = 0$. Из (a) је: $y_1 = -1$, из (b) $y_{(2,3)} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, из (c) $y_4 = 1$, а из (d) $y_{(5,6)} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Стога је: $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_{(2,3)} = \dfrac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$, $x_4 = \dfrac{3}{2}$ и $x_{(5,6)} = \dfrac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$.

6) $x^{10} - 1 = 0$. *Решење:* $(x^5 + 1)(x^5 - 1) = 0$; $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$. Одавде је: a) $x + 1 = 0$, b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, c) $x - 1 = 0$ и d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Из (a) је $x_1 = -1$, из (b) $x_{(2,3)} = \dfrac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$ и $x_{(4,5)} = \dfrac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$, из (c) $x_6 = 1$, а из (d) $x_{(7,8)} = \dfrac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}$ и $x_{(9,10)} = \dfrac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$. Има, дакле, два стварна корена $x_1 = -1$ и $x_6 = 1$, а остали су имагинарни.

Задаци за вежбу:

1) $x^3 - 1 = 0$;
2) $x^3 + 1 = 0$;
3) $x^4 - 1 = 0$;
4) $x^4 + 1 = 0$;
5) $x^5 - 1 = 0$;
6) $x^6 + 1 = 0$;
7) $x^4 + 16 = 0$;
8) $x^4 + 625 = 0$;
9) $x^6 - 729 = 0$;
10) $x^3 \pm a^3 = 0$;
11) $x^{10} + 1 = 0$;
12) $x^8 \pm 1 = 0$;
13) $x^{12} \pm 1 = 0$;
14) $x^3 - 27 = 0$;
15) $125x^3 + 8 = 0$;
16) $81x^4 + 4 = 0$;
17) $125x^3 - 27 = 0$;
18) $16x^4 - 25 = 0$;
19) $x^5 + 3 = 0$;
20) $3x^6 - 2 = 0$;
21) $x^5 - 243 = 0$.

§ 8*. **Триномне једначине.** То су једначине облика $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$ (1). Решење ових једначина своди се на решење квадратне једначине $Ay^2 + By + C = 0$ помоћу замене $x^n = y$ и $x^{2n} = y^2$, а из биномних једначина:

$$x^n = y_1 \quad \text{и} \quad x^n = y_2$$

налазимо сва решења дате једначине.

Напомена. За $n = 2$, једначина (1) постоје биквадратна, а за $n = 1$ квадратна.

Решени примери:

1) $3x^6 - 7x^3 - 6 = 0$. *Решење*. Заменом $x^3 = y$ имамо: $3y^2 - 7y - 6 = 0$. Одавде је: $y_1 = 3$ и $y_2 = -\frac{2}{3}$. Решењем биномних једначина a) $x^3 = 3$ и b) $x^3 = -\frac{2}{3}$ налазимо:

$$x_1 = \sqrt[3]{3},\ x_{(2,3)} = \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})\sqrt[3]{3}}{2},\ x_4 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\ x_{(5,6)} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$. *Решење*. Заменом $x^4 = y$ имамо: $y^2 - 17y + 16 = 0$. Одавде је: $y_1 = 16$ и $y_2 = 1$. Најзад решењем биномних једначина $x^4 = 16$ и $x^4 = 1$ добијамо:

$$x_{(1,2)} = \pm 2, \quad x_{(3,4)} = \pm 2i, \quad x_{(5,6)} = \pm 1, \quad x_{(7,8)} = \pm i.$$

Примери за вежбу:

1) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$;
2) $2x^6 + 5x^3 - 1323 = 0$;
3) $x^6 - 52x^3 - 768 = 0$;
4) $29x^3 + 24 + 8(x^3 - 5)(x^3 + 6) = 0$;
5) $1 + \frac{1014}{x^4 - 3} = \frac{1106}{x^4 - 2}$;
6) $2x^6 + 61a^3x^3 = 6(x^6 - 8a^6)$;
7) $(x-2)^6 - 19(x-2)^3 = 216$;
8) $x^{-6} + 4x^{-3} + 3 = 0$;
9) $\frac{a^3}{9x^{-3} + 7a^3} = \frac{3x^{-3}}{a^3 - 5x^{-3}}$;
10) $x^3 + 4\sqrt{x^3} = 32$;
11) $12(x^3 - 15) = (x^3 + 6)^2$;
12) $x^6 - 224x^3 + 1728 = 0$
13) $(x^3 - 6)(x^3 + 6) = 20(3x^3 + 11)$ (Панчево, 1926)
14) $\frac{x^2}{3} = \frac{2 + x^3}{x(x^3 - 2)}$ (Clermont)

§ 9*. **Једначине које се решавају растављањем на чинитеље** Има једначина чија је десна страна нула, а лева јој је страна полином који се дâ раставити на чинитеље. Те једначине решавамо стављајући да су поједини чинитељи полинома једнаки нули, чиме добијамо једначине нижег степена, које најзад решавамо по упутствима тих једначина.

Решени примери:

1) $x^3 + 3x^2 - (x+3)(2x+15) = 0$. *Решење*. $x^2(x+3) - (x+3)(2x+15) = 0$; $(x+3)(x^2 - 2x - 15) = 0$. Одавде је a) $x + 3 = 0$ и b) $x^2 - 2x - 15 = 0$. Из (a) је $x_1 = -3$; а из (b) је $x_2 = 5$ и $x_3 = -3$.

2) $x^3 - a^3 = a^2(a - x)$. *Решење*. $(x - a)(x^2 + ax + a^2) - a^2(a - x) = 0$; $(x - a)(x^2 + ax + 2a^2) = 0$. Одавде је a) $x - a = 0$ и b) $x^2 + ax + 2a^2 = 0$. Из (a) је $x_1 = a$, а из b) $x_{(2,3)} =$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{-7a^2}}{2} = \frac{-a \pm ai\sqrt{7}}{2}.$$

Примери за вежбање:

1) $x^3 - 8x^2 + (x-8)^2 + 6x(x-8) = 0$;
2) $(3-x)^3 - (x-3) = 0$; 3) $x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{16}$;
4) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x = 72$;
5) $x^5[3x - 2(x^2 - 1)] - x^2[3(x^2 + 1) - 2x] = 2x - 3$;
6) $x^3 + x^2 - \frac{(x+1)(1-x)}{20} = 1 + 20x - \frac{1}{x}$.

§ 10*. **Изложитељне и логаритамске једначине које се своде на квадратне.** Како изложитељне, тако и логаритамске једначине, решавамо по упутствима за решавање тих једначина.[1]) Међутим, има изложитељних једначина које не можемо одмах решити употребом логаритама, већ их морамо згодном заменом претходно претворити у алгебарске, па из добивених решења алгебарских једначина налазимо и вредности непознате дате једначине применом логаритама, или без њихове примене, доводећи нову једначину на једнаке степене с једнаким основама.

Решени примери:

1) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$. *Решење*. $3^{x+2} + 3^{2x+2} = 810$; $3^x \cdot 3^2 + 3^{2x} \cdot 3^2 = 810$; $9 \cdot 3^x + 3^{2x} \cdot 9 = 810$; $3^{2x} + 3^x = 90$. Заменом $3^x = y$, имамо $y^2 + y = 90$. Одавде је $y_1 = 9$ и $y_2 = -10$. Тада је $3^x = 3^2$, а $x = 2$. Друго решење $y_2 = -10$ не узимамо у обзир, јер једначину $3^x = -10$ не можемо решити нити употребом логаритама, пошто је логаритам десне стране имагиниран број, нити је можемо довести на једнаке степене с једнаким основама.

2) $3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 40$. *Решење*. $3x^{\log x} + \frac{100}{x^{\log x}} = 40$; $3x^{2\log x} - 40x^{\log x} + 100 = 0$. Заменом $x^{\log x} = y$ имамо: $3y^2 - 40y + 100 = 0$. Одавде је: $y_1 = 10$ и $y_2 = \frac{10}{3}$.

Тада је: a) $x^{\log x} = 10$ и b) $x^{\log x} = \frac{10}{3}$.

---

[1]) § 125 и 126 Алгебре за V и VI разред.

Решавајући једначину a) употребом логаритама имамо: $\log x \cdot \log x = 1$, или $\log^2 x = 1$, или $\log x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

Стога је $x_1 = 10$, а $x_2 = 0{,}1$. Решавајући једначину b) имамо: $\log x \cdot \log x = 1 - \log 3 = 1 - 0{,}47712 = 0{,}52288$, или $\log^2 x = 0{,}52288$. Одавде је $\log x = \pm\sqrt{0{,}52288}$, а
$x_{(3,4)} = N\overline{\pm\sqrt{0{,}52288}} = N\overline{\pm 0{,}72310}$; $x_3 = 5{,}2856$;
$x_4 = N\overline{1 - 0{,}72230 - 1} = N\overline{\bar{1},27770} = 0{,}1895 \ldots\ldots$

3) $\log(x-2)^3 + 3\log(x-5) = 3$. *Решење.* Лева је страна $\log[(x-2)^3\cdot(x-5)^3]$, а десна $\log 1000$. Стога је $\log[(x-2)^3 (x-5)^3] = \log 1000$, или $(x-2)^3(x-5)^3 = 1000$, $(x-2)(x-5) = 10$, или $x^2 - 7x = 0$. Одавде је $x_1 = 0$ и $x_2 = 7$.

Примери за вежбу:

1) $3^{x-1} = \sqrt[x]{9}$; 2) $8^{2(x+1)} = 32^{\frac{2}{x}-1}$;

3) $7^x \sqrt[x]{11^3} = 41503$; 4) $27^{x+1} = 5\sqrt[x]{0{,}6} \cdot 75^{6x-1}$;

5) $7^{2x} - 5\cdot 7^{x+1} + 300 = 0$; 6) $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$;

7) $25^{x-1} - 5^{x+1} + 24 = 0$; 8) $2\log x + \frac{1}{\log x} = 3$;

9) $x^{2+3\log x} = 10$; 10) $(0{,}55x^2)^{\log x} = 12898{,}5$;

11) $x^{\log x - 2} = 1\,000$; 12) $\sqrt{x^{\log x - 1}} = 100$;

13) $5^{2x-2} = 2\cdot 5^{x-2} + 3$; 14) $\left(\frac{1}{9}\cdot 9^x\right)^x = 3^{2x+6}$;

15) $2^{x^2-7{,}7x+16{,}5} = 8\sqrt{2}$; 16) $2^{x^2} = 0{,}25\cdot 2^{2(4x+11)}$;

17) $10^{12-x} = \sqrt[11-x]{100}$; 18) $\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$;

19) $\sqrt[1+x]{5^{2-x}} \cdot \sqrt[1-x^2]{25} - \sqrt[1-x]{5^{2+x}} = 0$; 20) $2\frac{1}{4}\cdot 4^{2x} - \frac{1}{2}\cdot 4^{4x} = 1$;

21) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} - 27 = 0$; 22) $x^{\log x} = 100x$;

23) $0{,}1\log^4 x - \log^2 x + 0{,}9 = 0$; 24) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$;

25) $\frac{1}{\log^2 x} + \frac{\log^2 x}{100} = 0{,}29$;

26) $\log 10 - \frac{1}{5 - \log x} = \frac{2}{1 + \log x} - \log 1$;

27) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log\frac{1}{2} - \log x$;

28) $\log(x + \sqrt{3}) = -\log(x - \sqrt{7})$;

29) $2\log x = -\mathrm{lop}\,(6 - x^2)$; 30) $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$;

31) $\frac{1}{2}\log(x-9) + \log\sqrt{2x-1} = 1$;

32) $\log\sqrt{x-30} + \frac{1}{2}\log(x+30) = 1 + 2\log 2$;

33) $7\cdot 2^{3x} - 2^{6x} = 10$; 34) $4^{2x} + 56\cdot 4^{-2x} = 15$;

35) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; 36) $12^{1+x} + 12^{1-x} = 25$;

37) $4(5^{x+2} - 25^{x+1}) = 9$;

38) $\log(x+2) + \log(x-1) = 2{,}47712$;

39) $x^{9\frac{1}{4}\log x - \log^3 x} = 177{,}82796$;

40) $20 - 3x^{\log x} = 30 \cdot x^{-\log x}$.

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

41) $10000 \cdot x^{\log^3 x - 5\log x} = 1$ (Солун, 1907);

42) $\log(35 - x^3) = 3\log(5 - x)$ (Београд, IV мушка 1914);

43) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} + \left(\frac{16}{81}\right)^{\cos^2 x} = \frac{26}{27}$ (Бијељина, 1933);

44) $2^{4\log x+3} - 27\cdot 2^{3\log x+1} + 101\cdot 2^{2\log x} - 216\cdot 2^{\log x-2} + 8 = 0$ (Лесковац, 1933);

45) $2\log(x-1) + \log(x^2+1) = \log 5 - \log 4 + 2\log x$ (Београд, II женска 1931);

46) $\frac{1}{20}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 8\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}\log x} + 300 = 0$ (Рума, 1934);

47) $3\cdot 2^{4\lg x} - 2^{3\lg x+4} + 13\cdot 2^{2\lg x+1} - 2^{4+\lg x} + 3 = 0$ (Сарајево, I мушка 1930);

48) $x^{\log x} - 96x^{\log\sqrt{x}} = 400$ (Смедерево, 1929);

49) $\frac{y^{\log y}}{y^3} = \frac{1}{100}$ (Скопље, мушка 1934);

50) $\log\left(5^{5\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-624{,}996}\right) = -2{,}39794$ (Ср. Карловци, 1932);

51) $2^{3x+5} + 4^{1\frac{1}{2}x+3} - 8^{x+1} = 352$ (Љубљана, I м. 1930);

52) $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{25}{2}$ (Котор, 1900)

53) $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$ (Београд, I женска, 1929);

54) $2^{4(x+2)}\cdot 5^{4(x+2)} = (10^{x^2})^4$ (Београд, I мушка, 1923);

55) $\log\sqrt[3]{12x(3x-1) + 5(x-6)} - \frac{2}{3}\log\sqrt{x-1} = \frac{2}{3}$ (Београд, I мушка, 1927)

Системе једначина другог и вишег степена

§ 11*. **Системе од две једначине другог степена.** Општи облик једне системе од две једначине другог степена је:

1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

2) $Mx^2 + Nxy + Py^2 + Qx + Ry + S = 0.$

Ако методом једнаких коефицијената елиминишемо било чланове са x^2, било са y^2, онда у првом случају добијамо једначину:

I) $(BM - AN)xy + (MC - AP)y^2 + (MD - AQ)x + (EM - AR)y + (MF - AS) = 0$;

или $axy + by^2 + cx + dy + e = 0$, а у другом:

II) $(AP - CM)x^2 + (BP - CN)xy + (DP - CQ)x + (FP - CR)y + (FP - CS) = 0$

или II) $mx^2 + nxy + px + qy + s = 0$.

Ако једначину I) решимо по x, добијамо:

a) $x = -\dfrac{by^2 + dy + e}{ay + c}$, а из II) имамо $y = -\dfrac{mx^2 + px + c}{nx + q}$ b).

Заменом у једној од датих једначина било x, било y, њиховим вредностима под a) или под b), добијамо најзад једначине четвртог степена, и то у првом случају једначину:

1) $A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + F' = 0$, а у другом:

2) $A''x^4 + B''x^3 + C''x^2 + D''x + F'' = 0$.

Сав овај труд био би нам узалудан, јер наилазимо на једначине 1) и 2), које нашим досадањим математичким знањем, не можемо у већини случајева решити. Стога систем од две једначине другог степена не можемо решити, ако су једначине потпуне. У случајевима када су једначине система непотпуне, могу се такви системи решити. При решавању непотпуних система, обично избегавамо познате методе елиминирања, које смо употребљавали при решавању једначина првог степена, већ погодним путем старамо се да од датих једначина система створимо једну једначину првог степена, па узимајући у поступак ту једначину и једну од датих једначина система, методом замене, налазимо вредности непознатих количина. Тим начинима старамо се често пута да добијемо збир и производ непознатих количина, или њихов збир и разлику, или збир (разлику) њихових квадрата и њихов збир, или њихову разлику, или њихов производ.

Напомена. При решавању многих система са непотпуним једначинама, врло често замењујемо у једначинама $x = ty$, где је t нова непозната, па једначине система делимо. Тиме добијамо квадратну једначину по t, а из које налазимо t_1 и t_2. Најзад узимамо у поступак једначину првог степена $x = t_1 y$, односно $x = t_2 y$, и једну од једначина датог система.

Решени примери:

1) $\mathbf{x^2 + y^2 = a}$, $\mathbf{xy = b}$ *Решење:* Другу најпре множимо са 2, а затим сабирамо и одузимамо од прве.

$$\left.\begin{aligned} 1)\ x^2+y^2&=a \\ 2)\ 2xy&=2b \end{aligned}\right\} \pm \quad \begin{aligned} &a)\ (x+y)^2=a+2b. \\ &b)\ (x-y)^2=a-2b. \end{aligned} \quad \text{Одавде је} \quad \left.\begin{aligned} x+y&=\pm\sqrt{a+2b} \\ x-y&=\pm\sqrt{a-2b} \end{aligned}\right\}$$

Сабирањем и одузимањем ових једначина добијамо:

$$x_{(1,2)} = \frac{\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}}{2} \text{ и } y_{(1,2)} = \frac{\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}}{2}.$$

2) $\mathbf{x^2 - y^2 = a}$, $\mathbf{xy = b}$. *Решење.* Заменом $x = ty$ добијамо: 1) $t^2y^2 - y^2 = a$ и 2) $ty^2 = b$. Дељењем ових једначина добијамо:

$$\frac{t^2 - 1}{t} = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad bt^2 - at - b = 0.$$

Одавде је $t_{(1,2)} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2b}$. Најзад, из $ty^2 = b$ налазимо вредност непознате y, а из $x = ty$ налазимо вредност непознате x.

3) $\mathbf{3x^2 + 7xy + 4y^2 = 0}$,
$\mathbf{5x^2 - 3xy + 4y^2 = 39}$.

Решење. Прва је једначина система *хомогена*, тј. она је једначина код које су сви чланови полинома истог степена. Ову једначину најпре делимо са y^2 чиме добијамо

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 7\left(\frac{x}{y}\right) + 4 = 0,$$

која је квадратна по $\dfrac{x}{y}$. Из ове једначине налазимо да је $\left(\dfrac{x}{y}\right)_1 = -1$ и $\left(\dfrac{x}{y}\right)_2 = -\dfrac{4}{3}$, или $x = -y$ и $3x = -4y$.

Заменом у другој једначини система добијамо:

a) $7y^2 = 35$, а $y_{(1,2)} = \pm\sqrt{5}$ и b) $y_{(1,2)} = \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{35}{33}}$, па је $x_{(1,2)} = \pm\sqrt{5}$ и $x_{(1,2)} = \pm 2\sqrt{\dfrac{35}{38}}$.

4) $\mathbf{x^2 + xy + y^2 = 3}$,
$\mathbf{2x^2 + 3xy + 4y^2 = 12}$.

Решење. Ако прву помножимо најпре са 4 и из добивене једначине одузмемо другу, добијамо хомогену једначину

$$2x^2 + xy = 0,$$

па је даљи рад као у претходном примеру. Овде бисмо могли да радимо и растављањем полинома хомогене једначине на просте чинитеље, чиме добијамо $x = 0$ и $x = -\dfrac{y}{2}$. Даљи је рад заменом.

5) $\mathbf{2x^2 + 3xy + y^2 = 70}$,
$\mathbf{6x^2 + xy - y^2 = 50}$.

Решење. Заменом $y = tx$ добијамо:

$$x^2(2 + 3t + t^2) = 70,$$
$$x^2(6 + t - t^2) = 50.$$

Дељењем ових једначина добијамо $3t^2 + 2t = 8$. Одавде је $t_1 = \frac{4}{3}$ и $t_2 = -2$. Стога је $y = \frac{4}{3}x$ и $y = -2x$. Даљи је рад заменом. Овај систем може да се реши, ако од датих једначина створимо хомогену множењем прве са 5 а друге са 7 и њиховим одузимањем, па је даљи рад као код претходног примера.

6) $\mathbf{x^2 + xy = ay}$,
$\mathbf{y^2 + xy = bx}$.

Решење. Претварамо најпре систем на облик:

$$\frac{x}{y}(x + y) = a, \quad \frac{y}{x}(y + x) = b.$$

Множењем и дељењем ових једначина добијамо:

I) $x + y = \pm\sqrt{ab}$ и II) $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$. Даљи је рад заменом.

7) $\mathbf{x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 14y - 8 = 0}$,
$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0}$.

Решење. Ако прву једначину сматрамо као квадратну само по непознатој x, онда је

$$x^2 - x(2y + 2) - (3y^2 - 14y + 8) = 0,$$

а $x_{(1,2)} = y + 1 \pm \sqrt{4y^2 - 12y + 9}$, или $x_{(1,2)} = y + 1 \pm (2y - 3)$.

Даљи рад своди се на решавање система:

$$x = 3y - 2,$$
$$2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0;$$

и

$$x = -y + 4,$$
$$2x^2 + 3y^2 + 5xy - 3x + 7y - 1 = 0,$$

методом замене. Овај се начин решавања примењује при решавању система од две потпуне квадратне једначине само онда ако се једна непозната да̄ изразити рационалним изразом у коме се налази друга непозната, тј. ако при решавању једне једначине система по једној непознатој добијамо радиканд из кога можемо извући квадратни корен.

8) $\mathbf{4(x^2 + y^2) - 7xy = 10}$,
$\mathbf{8(x^2 + y^2) - 9xy - 10(x + y) = 0}$.

Решење. Заменом $x + y = u$ и $xy = v$, биће $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$. Тада једначине система имају облик:

1) $4(u^2 - 2v) - 7v = 10$.
2) $8(u^2 - 2v) - 9v - 10u = 0$, или

1) $4u^2 - 15v = 10$,
2) $8u^2 - 25v - 10u = 0$. Из овога система, који се даје лако решити елиминирањем u^2, чиме се ствара једна једначина првог степена, налазимо $u_1 = 5$, $u_2 = \frac{5}{2}$, $v_1 = 6$ и $v_2 = 1$. Тада из система:

a) $x + y = 5$, $xy = 6$ и b) $x + y = \frac{5}{2}$, $xy = 1$ налазимо $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{2}$.

Напомена. Тако исто се решава систем $9x^2 + 9y^2 - 5(y - x) = 40$, $3xy + 7(x - y) + 1 = 0$. Овде је замена $y - x = u$ и $xy = v$, а $x^2 + y^2 = u^2 + 2v$.

§ 12*. **Системе од двеју једначина вишег степена.** Ако су обе или само једна једначина система вишег степена, онда се обично такав систем решава подесним путем.

Решени примери:

9) 1) $\boldsymbol{xy(x + y) = 30}$,
2) $\boldsymbol{x^3 + y^3 = 35}$.

Решење. Ако прву једначину помножимо са 3, добијамо $3x^2y + 3xy^2 = 90$. Сабирањем ове једначине с другом, добијамо: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 125$, или $(x + y)^3 = 125$, или 3) $x + y = 5$. Заменом у првој имамо $xy = 6$ (4). Из једначине (3) и (4) добијамо $x = 3$, $y = 2$.

10) 1) $\boldsymbol{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{5}} = 5}$,
2) $\boldsymbol{x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35}$.

Решење. Заменом $x^{\frac{1}{4}} = u$ и $y^{\frac{1}{5}} = v$ добијамо систему:

1) $u + v = 5$,
2) $u^3 + v^3 = 35$.

Тада, растављањем (2) на чинитеље имамо: $(u + v)(u^2 - uv + v^2) = 35$, или $5(u^2 - uv + v^2) = 35$, или $u^2 - uv + v^2 = 7$ (3). Решењем једначина $u + v = 5$ и $u^2 - uv + v^2 = 7$ методом замене, добијамо: $u_1 = 3$, $u_2 = 2$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$. Стога је: $x_1 = 81$, $x_2 = 16$, $y_1 = 32$ и $y_2 = 243$.

11) 1) $\boldsymbol{\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{15}}$,
2) $\boldsymbol{x^2y - xy^2 = 30}$.

Решење. Најпре дате једначине система доводимо на облик:

1) $\frac{x - y}{xy} = \frac{2}{15}$ 2) $xy(x - y) = 30$,

а затим њиховим множењем и дељењем добијамо: I) $(x-y)^2=4$, или $x-y=\pm 2$ и II) $(xy)^2=225$, или $xy=\pm 15$. Из I и II заменом налазимо: $x_1=5$, $x_2=-3$, $x_{(3,4)}=-1\pm i\sqrt{14}$; $y_1=3$, $y_2=5$, $y_{(3,4)}=1\pm i\sqrt{14}$.

12) $\boldsymbol{x^4+y^4=272}$,
$\boldsymbol{x+y=6}$.

Решење. Ако другу степенујемо са 4, добијамо: $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=1296$. Одузимањем ове једначине од прве налазимо: I) $2x^3y+3x^2y^2+2xy^3=512$, или $2xy(x^2+y^2)+3x^2y^2=512$. Заменом $xy=u$, и $x^2+y^2=36-2u$, једначина I) добија облик: $2u(36-2u)+3u^2=512$, или $u^2-72u=512$. Одавде је у $u_1=64$ и $u_2=8$. Најзад решењем система:

$$\alpha)\ \begin{matrix} x+y=6, \\ xy=64 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \beta)\ \begin{matrix} x+y=6 \\ xy=8 \end{matrix} \quad \text{добијамо:}$$

$$x_1=4,\ x_2=2,\ x_{(3,4)}=3\pm i\sqrt{55} \text{ и}$$
$$y_1=2,\ y_2=4,\ y_{(3,4)}=3\mp i\sqrt{55}.$$

13) $\boldsymbol{x^5-y^5=2882}$,
$\boldsymbol{x-y=2}$.

Решење. Ако другу степенујемо са 5 (степенуј најпре са 4, а затим множи леву страну са $x-y$), добијамо: $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5=32$. Одузимањем ове једначине од прве и скраћивањем са 5 добијамо:

I) $x^4y-2x^3y^2+2x^2y^3-xy^4=570$, или $xy(x^3-y^3)-2x^2y^2(x-y)=570$, или $xy(x-y)(x^2+xy+y^2)-3x^2y^2(x-y)=570$.

Заменом $xy=u$, $x-y=2$ и $x^2+y^2=4+2u$, добијамо $u^2+4u=285$.

Одавде је $u_1=15$ и $u_2=-19$.

Најзад решењем система:

$$\alpha)\ \begin{matrix} x-y=2, \\ xy=15 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \beta)\ \begin{matrix} x-y=2, \\ xy=19 \end{matrix} \quad \text{добијамо:}$$

$$\begin{cases} x_1=5,\ x_2=-3,\ x_{(3,4)}=1\pm 3i\sqrt{2}, \\ y_1=3,\ y_2=-5,\ y_{(3,4)}=-1\pm 3i\sqrt{2}, \end{cases}$$

14) $\boldsymbol{(x+y)(x^2+y^2)=160}$.
$\boldsymbol{(x-y)(x^2-y^2)=580}$.

Решење. Заменом $y=tx$ добијамо:
1) $x^3(1-t)(1-t^2)=160$ и 2) $x^3(1+t)(1+t^2)=580$. Дељењем ових једначина добијамо $21t^2-58t+21=0$. Одавде је $t'=\frac{7}{3}$ и $t''=\frac{3}{7}$. Стога је $y_1=\frac{7}{3}x$ и $y_2=\frac{3x}{7}$.

Заменом у другој једначини добијамо биномне једначине: $\alpha)\ x^3=27$ и $\beta)\ x^3=343$. Одавде је:

$$x=3,\frac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2},7,\frac{-7\pm 7i\sqrt{3}}{2}, \text{ а } y=7,\frac{-7\pm 7i\sqrt{3}}{2},3,\frac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}.$$

15) $\boldsymbol{xy+xy^3+10}$,
$\boldsymbol{x+xy^2+xy^4=2}$.

Решење. Дељењем ових једначина добијамо реципрочну једначину: $5y^4-y^3+5y^2-y+5=0$ из које налазимо сва четири решења. Даљи је рад заменом.

§ 13*. **Системе од три једначине са три непознате.** Ако ове системе радимо ма којом методом елиминирања, обично наилазимо на једначине вишег степена које не можемо даље решавати. Међутим, ако су једначине система непотпуне, подесним путем наилазимо врло често на једначине другог степена. Следећи примери показаће нам начине решавања ових система.

16) $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=14}$,
$\boldsymbol{x+y+z=6}$,
$\boldsymbol{xy=\frac{2}{3}z}$.

Решење. Ако најпре трећу помножимо са 2, а затим саберемо с првом, добијамо:

$$(x+y)^2+z^2=14+\frac{4z}{3}.$$

Заменом у овој једначини $x+y=6-z$ добијамо:

$$3z^2-20z+33=0, \text{ из које је } z_1=\frac{11}{3},\ z_2=3.$$

Заменом z нађеним вредностима у другој и трећој једначини, добијамо системе:

$$\text{a) } \begin{matrix} x+y=\frac{7}{3}, \\ xy=\frac{22}{9}. \end{matrix} \quad \text{и b) } \begin{matrix} x+y=3. \\ xy=2. \end{matrix}$$

Даљи је рад заменом.

17) $\boldsymbol{xy=a}$,
$\boldsymbol{xz=b}$,
$\boldsymbol{yz=c}$.

Решење. Множењем свих једначина система добијамо

$$x^2y^2z^2=abc, \quad \text{или} \quad xyz=\pm\sqrt{abc}.$$

Ако ову једначину поделимо са сваком једначином система, добијамо:

$$z = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}} \quad \text{и} \quad x = \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

18) $\boldsymbol{x^2 + \frac{z}{2} = 8,}$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 20,}$

$\boldsymbol{y^2 + z^2 = 80.}$

Решење. Ако најпре прву и трећу саберемо и од добивене једначине одузмемо другу, добијамо:

$2z^2 + z - 136 = 0$, из које је $z_1 = 8$ и $z_2 = -\frac{17}{2}$. Заменом у првој, добијамо $x_{(1,2)} = \pm 2$, $x_{(3,4)} = \pm \frac{7}{2}$, а заменом у трећој, добијамо $y_{(1,2)} = \pm 4$ и $y_{(3,4)} = \pm \frac{\sqrt{31}}{2}$.

19) $\boldsymbol{(x+y)\,(x+z) = 35,}$

$\boldsymbol{(y+z)\,(x+y) = 40,}$

$\boldsymbol{(x+z)\,(y+z) = 56.}$

Решење. Ради се као 17 задатак из овог параграфа.

20) $\boldsymbol{x\,(x+y+z) = a,}$

$\boldsymbol{y\,(x+y+z) = b,}$

$\boldsymbol{z\,(x+y+z) = c.}$

Решење. Сабирањем свих једначина система добијамо:

$$x + y + z = \pm\sqrt{a+b+c}. \quad \text{(I)}$$

Дељењем сваке једначине система једначином (I), добијамо:

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \quad y = \pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}} \text{ и } z = \pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}.$$

21) 1) $\boldsymbol{x + y + z = 1,}$

2) $\boldsymbol{xyz = -16,}$

3) $\boldsymbol{x^3 + y^3 + z^3 = 1.}$

Решење. Ако (1) степенујемо најпре са 3, а затим од добивене једначине одузмемо трећу и заменимо xyz са -16, добијамо:

(I) $x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + xz^2 + yz^2 = 32$, или I) $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) = 32$, или $x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) = 32$, или (I) $x^2 + y^2 + z^2 - (x^3 + y^3 + z^3) = 32$. Сабирањем ове једначине с трећом добијамо:

II) $x^2 + y^2 + z^2 = 33$.

Ако сада једначину (1) степенујемо са 2 и од добивене једначине одузмемо (II), добијамо:

III) $xy + xz + yz = -16$, или $x(y+z) + yz = -16$ или

$x(1-x) - \frac{16}{x} = -16$; $\quad x^2(1-x) - 16 + 16x = 0$; $\quad x^2(1-x) - 16(1-x) = 0$; $(1-x)(x^2 - 16) = 0$. Одавде је $x_1 = 1$, $x_{(2,3)} = \pm 4$.

Заменом у 1) и 2) добијамо системе:

a) $y + z = 0$, $yz = -16$, b) $y + z = -3$, $yz = -4$, и c) $y + z = 5$, $yz = 4$,

а начин њиховог решавања нам је познат.

22) 1) $\boldsymbol{x + y + z = 6,}$

2) $\boldsymbol{x^2 + y^2 - z^2 = 8,}$

3) $\boldsymbol{x^3 + y^3 + z^3 = 90.}$

Решење. Ако 1) доведемо најпре на облик $x + y = 6 - z$, а затим подигнемо на квадрат, добијамо:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36 - 12z + z^2.$$

Ако од ове једначине одузмемо другу, добијамо: I) $xy = 14 - 6z$. Најзад ако једначину 3) доведемо на облик $x^3 + y^3 = 90 - z^3$, или $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 90 - z^3$ и у њој заменимо: $x + y = 6 - z$, $x^2 + y^2 = 8 + z^2$ и $xy = 14 - 6z$, добијамо: $(6-z)(8 + z^2 - 14 + 6z) = 90 - z^3$, или $42z = 126$, а одавде $z = 3$. Заменом у 1) и 2) добијамо систем: $x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 17$.

Из овога је система: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Друга вредност z-а је -3.

§ 14*. Изложитељне и логаритамске једначине које се своде на квадратне

23) *Пример.* $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 425,}$

$\boldsymbol{\log x + \log y = 2.}$

Решење. Другу једначину система сводимо најпре на облик: $\log xy = \log 100$, или $xy = 100$. Даљи је рад као код првог примера § 11.

24) *Пример.* $\boldsymbol{xy = 400,}$

$\boldsymbol{x^{\log y} = 16.}$

Решење. Логаритмујући обе једначине система добијамо систем: $\log x + \log y = \log 400$, $\log y \cdot \log x = \log 16$.

Заменом $\log x = u$ и $\log y = v$ добијамо систем:

$u + v = \log 400 = 2{,}60206$,

$uv = \log 16 = 1{,}20412$. Одавде је $u = 2$ и $v = 0{,}60206$.

Најзад, из $\log x = 2$ имамо $x = 100$, а из $\log y = 0{,}60206$ имамо $y = 4$.

25) *Пример.* $\boldsymbol{\sqrt[y]{x^2} - 11\sqrt[y]{x} + 10 = 0,}$

$\boldsymbol{y + \log x = 1.}$

Решење. Решењем прве једначине система, која је квадратна по $\sqrt[y]{x}$, добијамо $\sqrt[y]{x} = 10$ и $\sqrt[y]{x} = 1$.

Затим имамо да решавамо системе:

a) $\begin{array}{l} \sqrt[y]{x} = 10, \\ y + \log x = 1 \end{array}$ и b) $\begin{array}{l} \sqrt[y]{x} = 1 \\ y + \log x = 1 \end{array}$

Логаритмовањем прве једначине система a) имамо:

$$\frac{\log x}{y} = 1, \text{ или } y = \log x.$$

Заменом у другој једначини добијамо:

$2y = 1$, а $y = \frac{1}{2}$. Тада је $\log x = \frac{1}{2}$, а $x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Исто тако решавамо систем под b).

§ 15. **Примери за вежбу**

1) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 89, \\ x^2 - y^2 = 39. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} ax^2 + by^2 = c, \\ mx^2 - ny^2 = r. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 2x^2 - 5xy = 100, \\ xy = 20. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} x + y + xy = 47, \\ (x + y)\, xy = 420. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 73, \\ xy = 24. \end{array}$

6) $\begin{array}{l} x^2 + 3xy + y^2 = 51, \\ xy = 30. \end{array}$

7) $\begin{array}{l} x^2 - 4xy + y^2 = 52, \\ 3xy = 72. \end{array}$

8) $\begin{array}{l} x + 2\sqrt{xy} + y^2 = 109, \\ xy = 36. \end{array}$

9) $\begin{array}{l} x^2 - 3\sqrt{xy} + y^2 = 2474. \\ xy = 100. \end{array}$

10) $\begin{array}{l} (x + y)^2 + (x - y)^2 = 436, \\ 4xy = 364. \end{array}$

11) $\begin{array}{l} x^2 + xy = 187, \\ y^2 + xy = 102. \end{array}$

12) $\begin{array}{l} x^2 + xy + y = 121, \\ x^2 + xy + x = 61. \end{array}$

13) $\begin{array}{l} xy + y^2 = 2a^2 - 6a; \\ xy - y^2 = 6a - 18. \end{array}$

14) $\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7, \\ \frac{1}{xy} = 12. \end{array}$

15) $\begin{array}{l} 3x^2 - 4x + y^2 = 40, \\ 2x^2 + 3x + y^2 = 52. \end{array}$

16) $\begin{array}{l} xy + x^2 = 18, \\ 2xy - x^2 = x + 6. \end{array}$

17) $\begin{array}{l} 2x + 3xy - 6y = 8, \\ x - 2xy - 3y = -3. \end{array}$

18) $\begin{array}{l} 8(x + y) - 7(xy + 1) = 0, \\ 4(x - y) - (xy - 1) = 0. \end{array}$

19) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x + y = 68, \\ x^2 - y^2 + x - y = 44. \end{array}$

20) $\begin{array}{l} 2x^2 + 2y^2 - ax - ay = 7a^2, \\ x^2 + y^2 - ax + ay = 4a^2. \end{array}$

21) $\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{36}, \end{array}$

22) $\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2, \\ \frac{2}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 4. \end{array}$

23) $\begin{array}{l} 2x + 5y = xy, \\ \frac{15}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 0{,}4. \end{array}$

24) $\begin{array}{l} \frac{x + y}{a} = xy, \\ \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 5x^2y^2. \end{array}$

25) $\begin{array}{l} 9x^2 + y^2 = 1396, \\ xy = -120. \end{array}$

26) $\begin{array}{l} a^2x^2 + y^2 = 2a^4, \\ xy - a^3 = 0. \end{array}$

27) $\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 44, \\ xy - y^2 = 20. \end{array}$

28) $\begin{array}{l} x^2 - y^2 + 2(x - y) = 160, \\ (x + 2y)(x - y) - 4x + 4y = 120. \end{array}$

29) $\begin{array}{l} (x + 3y - 6)\, y - 2x = 0, \\ (2x + y - 12)\, y - 2x = 0. \end{array}$

30) $\begin{array}{l} 6(x + 2y) = xy, \\ 5(x - y) = y^2. \end{array}$

31) $\begin{array}{l} xy + (x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 - (x + y) = 42. \end{array}$

32) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x - y = 44, \\ \frac{y}{2} - \frac{2}{x} = 1 - \frac{y}{x}. \end{array}$

33) $\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{5}, \\ x^2 + y^2 = 104. \end{array}$

34) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x + y = a^2(a^2 + 1), \\ xy + a^2 = 0. \end{array}$

35) $\begin{array}{l} x(x + y) = 40, \\ y(x + y) = 24. \end{array}$

36) $\begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 = 45, \\ xy = 3. \end{array}$

37) $\begin{array}{l} \sqrt{\frac{5x}{x - y}} - \sqrt{\frac{x - y}{5x}} = \frac{21}{10}, \\ xy + x + y = 11. \end{array}$

38) $\begin{array}{l} x - y + \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} = \frac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{array}$

39) $\begin{array}{l} x + y - \sqrt{\frac{x + y}{x - y}} = \frac{30}{x - y}, \\ xy = 80. \end{array}$

40) $\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 152, \\ xy = 15. \end{array}$

41) $\begin{array}{l} x^4 + y^4 = 280, \\ xy = 24. \end{array}$

42) $\begin{array}{l} x^5 + y^5 = 275, \\ xy = 6. \end{array}$

43) $\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \\ xy = 144. \end{array}$

44) $\begin{array}{l} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \\ \sqrt{yx} = 16\sqrt{2}. \end{array}$

45) $\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 441, \\ x + y = 11. \end{array}$

46) $\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 37, \\ xy = 12. \end{array}$

47) $\begin{array}{l} x^4 - y^4 = 65, \\ xy = 6. \end{array}$

48) $\begin{array}{l} x^5 - y^5 = 1023, \\ xy = 4. \end{array}$

49) $\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 61, \\ xy(x - y) = 20. \end{array}$

50) $\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 279, \\ x - y = 3. \end{array}$

51) $\begin{array}{l} x + xy - y = 43, \\ xy = 40. \end{array}$

52) $\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 79, \\ (x + y) : (x - y) = 5 : 2. \end{array}$

53) $\begin{array}{l} (x^2 + y^2)(x + y) = 1080, \\ (x^2 + y^2)(x - y) = 540. \end{array}$

54) $\begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 154, \\ 2x^2 - 3y^2 = 23. \end{array}$

55) $\begin{array}{l} x^2 + 3xy - 5y^2 = 208, \\ xy - 2y^2 = 16. \end{array}$

56) $\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 300, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 100. \end{array}$

57) $\begin{array}{l} (x^2 - xy + y^2)(2x - y) = 1456, \\ (x^2 - xy + y^2)(2y - x) = 91. \end{array}$

58) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + z^2 = 34, \\ y^2 + z^2 = 41. \end{array}\right.$

59) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 30, \\ 2x^2 - y^2 + z^2 = 47, \\ 3x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 83. \end{array}\right.$

60) $\left\{\begin{array}{l} xy = 56, \\ xz = 24, \\ yz = 21. \end{array}\right.$

61) $\left\{\begin{array}{l} x(y + z) = 55, \\ y(x + z) = 63, \\ z(x + y) = 48. \end{array}\right.$

62) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 30, \\ 3x - y + z = 34, \\ x^2 + 2y^2 - z^2 = 84. \end{array}\right.$

63) $\left\{\begin{array}{l} y^2 = xz, \\ xyz = 64, \\ x + y + z = 14. \end{array}\right.$

64) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 105, \\ xy + xz + yz = 74, \\ x + y = 9. \end{array}\right.$

65) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 117, \\ xy - xz + yz = 26, \\ x - y + z = 7. \end{array}\right.$

66) $\begin{cases} x + y = 6 - z, \\ x^2 + y^2 = 14 - z^2, \\ xy = 6z. \end{cases}$ 67) $\begin{cases} x + v = 5, \\ y + z = 9, \\ y^2 + v = 28, \\ z^2 + x = 18. \end{cases}$

68) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 65, \\ x + y = 7, \\ z + v = 8, \\ xy = vz. \end{cases}$ 69) $\begin{cases} xv = yz, \\ x - v = 6, \\ y - z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 164; \end{cases}$

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

70) $x + y = 20$
$x^3 + y^3 = 26\,(x^2 + y^2)$ (Београд, II мушка, 1930);

71) $x^3y + xy^3 = 300, \quad x^2y^2 = 144$ (Петровград, 1921);

72) $x^2y^2 - 52xy + 576 = 0, \quad (x - y)^2 + 100\sqrt{xy} = 625$
(Крушевац, 1934);

73) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 243, \quad x^2 - xy + y^2 = 27$ (В. Кикинда, 1926);

74) $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad x^2 - 3xy + 4y^2 = 18$ (Цетиње, 1931);

75) $12(x^2 + y\sqrt{xy}) = 27 + 2\sqrt{2}, \quad 36(y^2 + x\sqrt{xy}) = 4 + 27\sqrt{2}$
(Сомбор, 1930);

76) $\frac{4}{25}\sqrt{x + y} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x + y}}, \quad \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 6$
(Загреб, II мушка, 1932);

77) $x + \sqrt{xy + y^2} = 38, \quad x^2 + xy + y^2 = 964$
(Београд, III мушка, 1921);

78) $\sqrt{\frac{3x}{x + y}} + \sqrt{\frac{x + y}{3x}} = 2, \quad xy - (x + y) = 54$ (Београд, II женска, 1927);

79) $x + \sqrt{xy + y^2 - 5} = 8, \quad x^2 + xy + y^2 = 37$
(Београд, II женска, 1934);

80) $21\,(x + y)\sqrt{x + y} + \frac{30y^2}{\sqrt{x + y}} = 51y\sqrt{x + y}, \quad x - 1 = \sqrt{y - x}$
(Београд, I мушка, 1924);

81) $x^2 + y^2 - z^2 = 12, \quad xy + xz + yz = 11, \quad x + y + z = 6$
(Београд, II мушка, 1925);

82) $\begin{cases} log^2 x + log^2 y = 37, \\ log x - log y = 2{,}6. \end{cases}$

83) $\begin{cases} log\, x + log\, y = 1{,}47712, \\ log\,(x + 1) + log\,(x - 1) = 1{,}04139. \end{cases}$

84) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ log x + log y = 0{,}90309. \end{cases}$ 85) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 9744, \\ log y - log x = -0{,}39794. \end{cases}$

86) $\begin{cases} 2log x - log\,(5 - y) = log\,(y + 5), \\ 2log 5 - log\,(x - y) = log\,(x + y) + log\,(x^2 + y^2) - 0{,}84510. \end{cases}$

87) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 145. \end{cases}$ 88) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2log x + 2log y = 2. \end{cases}$

89) $\left.\begin{array}{l} log\,(4y + 16) = 1 - 2log\,2 + log x, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \end{array}\right\}$ (Београд, I мушка, 1932);

90) $\left.\begin{array}{l} 3^{log x} + 4^{log y} = 13, \\ 3^{log x} \cdot 4^{log y} = 36 \end{array}\right\}$ (Земун, 1932);

91) $x^y = 8, \quad \sqrt[y]{x^2} - 2\sqrt[y]{x} = 3$ (Н. Врбас, 1934);

92) $\left.\begin{array}{l} log\,(x + y) + log\,(x^2 + y^2) = 1{,}17609 \\ log\,(x + y) + log\, y = 0{,}77815 \end{array}\right\}$ (Шибеник, 1931);

93) $x^3 + y^3 = 35, \quad 2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224$ (Сисак, 1932).

§ 16*. Проблеми квадратних једначина с више непознатих

1) Наћи таква два броја да им је збир 30 а производ 189. (21 и 9).

2) Збир два броја је 20, а разлика њихових квадрата је 120; наћи та два броја. (13 и 7).

3) Разлика два броја је 6, а збир њихових квадрата је $2^1/_2$ пута већи од њиховог производа; наћи та два броја. (12; 6).

4) Отац и син имају заједно 40 година, а после 10 година биће производ њихових година 756; колико година има отац а колико син? (отац 32, син 8).

5) Одредити стране троугла, кад је његов обим 18 m, једна му страна половина збира других двеју, а да је производ тих двеју страна 32. (6 m, 4 m и 8 m).

6) Ако производу од два броја додамо мањи број, добијамо 54; ако истом производу додамо већи број, добијамо 56. Наћи та два броја. (6 и 8).

7) Која су то два броја, чији је збир једнак и њиховом производу и збиру њихових квадрата? $\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right.$ и $\left.\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right)$.

8) Обим правоуглог троугла је 132 m, а збир квадрата његових страна 6050. Наћи његове стране. (33 m, 44 m и 55 m).

9) Одредити пропорцију код које је збир спољашњих чланова 21, збир унутрашњих 19, а збир квадрата сва четири члана 442. (15 : 10 = 9 : 6).

10) Средња цифра једног троцифреног броја је 3; производ цифара је 36. Ако прва и трећа цифра измене своја места, па добивени број одузмемо од траженог броја, добијамо разлику 396. Наћи тај број. (632).

11) Производ од два броја је за 9 мањи од петоструког већег броја, а за 16 је већи од петоструког мањег броја. Наћи та два броја. (9 и 4).

12) Збир од два броја једнак је и њиховом производу и разлици њихових квадрата. Наћи та два броја.

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

13) Производ цифара једног двоцифреног броја је 3 пута

мањи од самог броја. Ако томе броју додамо 18, добијамо број од истих цифара, али у обрнутом реду. Наћи тај број. (24).

14) Збир од два броја је 8 пута већи од њихове разлике, а разлика квадрата тих бројева је 128. Наћи бројеве. (18 и 14).

15) Збир квадрата цифара једног двоцифреног броја је 34. Производ од овог броја и броја од истих цифара, али у обрнутом реду, је 1855. Наћи тај број. (35).

16) Збир четвртих степена два броја је 1921, а збир њихових квадрата 61. Наћи та два броја. (5 и 6).

17) Два путника полазе једновремено из два града, чије је отстојање 396 km, један другоме у сусрет. Путујући онолико дана колика је разлика њихових дневних брзина, сусрели су се и дознали су да је први прешао 216 km. Наћи њихове дневне брзине. (36 и 30 km).

18) Из тачака A и B, чије је отстојање 50 m, крећу се два тела правцем AB. Предње тело почиње кретање 7 секунада раније од задњег, а прелази 4 m у секунди. Кад би задње тело прелазило у секунди 1 m више него што прелази, онда би стигло предње тело 13 секунада раније. Наћи секундну брзину задњег тела и време његовог путовања. (5 m; 78 сек.).

19) Неки курир треба из A да стигне у B за одређено време, а путује одређеном брзином. Кад би прелазио 1 km више за час, стигао би у B за 1,5 часа раније. Кад би прелазио 1 km мање за час, онда би стигао у B за $11^1/_4$ часа. Колика је његова часовна брзина и отстојање AB. ($t = 9$ ч.; $AB = 45$ km; $C = 5$ km).

20) По крацима правог угла почињу једновремено кретање к темену два тела, са брзинама 1,5 m и 3 m у секунди. Првобитно отстојање тела је 29 m, а после 4 секунде њихово је отстојање 17 m. Наћи отстојања тела од темена угла. (21 m и 20 m).

21) По крацима правог угла почињу једновремено кретање два тела која се удаљују од темена. Њихова отстојања од темена пре кретања јесу 6 m и 7 m. После 3 секунде отстојање тела биће 41 m, а после још 4 секунде, њихово отстојање биће 85 m. Наћи брзине тела. (1 и 11 m).

22) По крацима правог угла крећу се једновремено к темену центри два круга полупречника 9 m и 4 m. Отстојања центара до темена пре кретања јесу 48 m и 14 m. После 9 секунада кругови се додирују споља, а после још 2 секунде они се додирују изнутра. Наћи брзине центара тих кругова. (4 и 1 m).

23) Обим једног правоугаоника је 178 cm а површина му је 1848 cm². Наћи његове стране. (56 и 33 cm).

24) Размера катета правоуглог троугла је 3 : 4, а његова је површина 54 cm². Наћи његове стране. (9, 12 и 15).

25) Суседне стране једног правоугаоника разликују се за 5 m, а другог једног правоугаоника за 3 m. Размера њихових површина је 21 : 22, а обими су им једнаки. Наћи њихове мање стране. (7 и 8).

26) Паралелне стране једног трапеза јесу 19 m и 15 m, а висина му је 8 m. Повучена је права паралелна с паралелним странама трапеза која гради два нова трапеза површина 72 m² и 64 m². Наћи дужину повучене паралелне и њено отстојање од веће паралелне стране. (17 и 4 m).

27) Један део капитала од 10000.— дин. даје годишњи интерес 300 дин., а остали део 240 дин. Проценат другог дела је за један већи од процента првог дела. С којим процентом је дат сваки део капитала? ($к_1 = 6000$; $p_1 = 5\%$; $p_2 = 6\%$).

28) Збир од производа два броја и њиховог збира је 23. Ако поделимо збир њихових квадрата њиховим производом, добијамо за количник 3 а за остатак 11. Наћи та два броја. (7 и 2).

29) Наћи она два броја чија је разлика 3, а разлика њихових кубова 117. (5 и 2).

30) Збир кубова два броја је 152. Њихов производ помножен њиховим збиром даје 120. Наћи та два броја. (5 и 3).

31) Од три броја други је аритметичка средина од друга два броја. Збир квадрата првог и другог броја је 25, а збир квадрата првог и трећег броја 20. Наћи та три броја. (4, 3 и 2).

32) Од три броја други је геометриска средина од друга два. Њихов је збир 19, а збир њихових квадрата 133. Наћи та три броја. (9, 6 и 4).

33) Површина једног правоуглог правог паралелопипеда је 252 m². Збир његових димензија је 21 m, а висина је средња геометриска пропорционала између основичиних ивица. Наћи његове димензије. (12, 3 и 6).

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

34) Одредити чланове непрекидне пропорције кад је сума сва три члана 126, а производ истих је 13824.

(Ужице, 1910) [96, 24, 6].

35) Три праве улице секу се тако да чине правоугли троугао са обимом 48 км. Два шетача пођу истовремено од темена правог угла и крећу се један по једној а други по другој катети. Док један пређе 130 m, други пређе 110 m. Они се на тај начин сретну на средини улице која претставља хипотенузу. Колико је дугачка свака од тих трију улица?

(Београд, Реалка, 1906).

36) Неко је дао свој капитал под прост интерес. Да му је капитал био 1000.— динара већи и да је био издат по $^1/_2\%$ мање, имао би годишње 34 динара мање интереса; а да је био капитал за 500 дин. мањи а издат по $^1/_2\%$ више, био би годишњи интерес за 50 дин. већи. Колики је капитал и колики проценат?

(Нови Сад, Мушка, 1930).

37) Име једне важне личности из наше историје има три слова. Ако место слова узмемо редне бројеве у азбуци (ћирилици), онда између тако добивених бројева постоји овакав однос: трећи број је за 6 већи од збира друга два броја; збир квадрата првог и другог броја је за 6 већи од самог трећег броја; најзад први број је трећина збира друга два броја. Нађи непознато име! (Крагујевац, Мушка, 1932).

38) Производ цифара двоцифреног броја умањен за 4 шестина је тога броја. Збир квадрата његових цифара умањен за 6 трећина је броја што се добија кад у траженом броју цифре измене своја места. Који је то број? (Ср. Митровица, 1933).

39) Која су та три броја која имају следеће особине: када се квадрат првог броја помножи с другим бројем, добија се 112; када се квадрат другог броја помножи с трећим, добија се 588; када се квадрат трећег броја помножи с првим бројем, добија се 576? (4, 7, 12). (Суботица, Мушка, 1931).

40) Један капитал доноси годишње интереса 6 дин. више него што је двадесети део његове вредности. Други капитал, који је уложен са истим процентом, већи је од првога 800 динара и доноси годишње 10 дин. мање него што је десети део првог капитала. Колики су ти капитали и колики је проценат? (Београд, III мушка, 1921).

41) У једној трци други коњ, који прелази у секунди 1 m мање него први, стигне 2 секунде после овога, а трећи коњ прелазећи 5 m мање у секунди него први, пређе 960 m у моменту кад је први коњ прешао целу стазу. Колика је дужина стазе? (Београд, III мушка, 1927).

42) Збир три броја је 48. Ако се први умањи за 3 а други за 7, па се тако промењени бројеви помноже, добија се као производ број 25 пута већи од трећег броја. Ако се први повећа за 1, онда се добија $1^1/_2$ пута већи број од онога броја који је за 1 мањи од другог броја. Нађи те бројеве! (Београд, II женска, 1930).

43) Обим правоуглог троугла је 60 cm а површина 120 cm²? Колике су стране? (Београд, III мушка, 1924).

44) Три реална броја чине непрекидну пропорцију. Њихов је збир 39 а производ 729. Који су ти бројеви? (Нови Сад, Женска, 1927).

ДРУГИ ОДЕЉАК

ПРОГРЕСИЈЕ И СЛОЖЕНИ ИНТЕРЕСНИ РАЧУН

§ 17. 1) **Аритметичке прогресије.** Низ или ред бројева уређен тако да је разлика између ма која два узастопна броја *стална,* зове се аритметичан ред или прогресија. Такви су редови:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .
2) a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, . . .
3) 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, . .
4) 100, 95, 90, 85, 80, 75, . . .

Бројеви који дају аритметичан ред, зову се члановима реда. Ако ред:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_n, \ldots$$

претставља аритметичну прогресију, онда је a_1 њен *први* или *почетни* члан, a_2 други, a_n *општи,* пошто n може да значи ма који цео број природног бројног реда. *Такав ред зове се аритметичан зато што је ма који члан аритметичка средина између својих суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.* Аритметичан ред можемо замислити да постаје додавањем истог броја сваком претходном члану. Тај стални број зове се *разлика (диференција)* реда и бележи се обично са d. Ако је разлика реда позитивна (цела или разломљена), онда чланови реда поступно расту. Такав ред зове се *растући.* Ако је разлика негативна, онда чланови реда поступно опадају. Такав је ред *опадајући.* Од горњих редова прва три су растући а четврти опадајући.

Код једне аритметичке прогресије *водимо рачуна* о првом члану a_1, разлици d, броју чланова n, општем члану a_n и збиру од n чланова, S_n. Кад су познате ма које три од тих количина, у стању смо да нађемо остале две, употребом обрасца за општи члан и збирног обрасца.

a) **Образац за општи члан.** Ако је ред:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

аритметички, чија је разлика d, онда је

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d; \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d; \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d; \\ a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d; \end{aligned}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

Из ових једначина увиђамо *да се ма који члан налази помоћу првог члана и разлике, кад се првом члану дода производ од разлике и броја чланова пред њим.* На основу ове констатације изводимо образац за општи члан:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

Помоћу овога обрасца налазимо ма коју од количина: a_1, n, d и a_n, ако су три од њих познате.

Примери:

1) *Наћи 10-ти члан реда 2, 4, 6, 8,...* Овде је $a_1 = 2$; $d = 2$ и $n = 10$, те је $a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$.

2) *Наћи први члан реда чији је 10-ти члан 20, а разлика 2.* Овде је $a_{10} = 20$, $d = 2$, $n = 10$, те је из обрасца за општи члан $a_1 = a_{10} - 9d = 20 - 9 \cdot 2 = 2$.

3) *Наћи разлику реда чији је први члан 5 а девети 29.* Овде је $a_9 = 29$, $a_1 = 5$, $n = 9$, те је из обрасца за општи члан

$$d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{29 - 5}{8} = 3\,.$$

4) *Аритметичка прогресија почиње са 100, разлика је —5, а 60 је један њен члан; који је по реду?* Овде $a_1 = 100$, $a_n = 60$, а $d = -5$, те је из обрасца за општи члан

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} = \frac{60 - 100}{-5} = 8, \text{ а } n = 9.$$

b) **Збирни образац.** Ако је a_1, a_2, $a_3, \ldots a_{n-2}$, a_{n-1}, a_n један аритметичан ред од n чланова, онда је његов збир $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$, или
$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \ldots (1)$, или написан у обрнутом реду:
$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \cdots (2)$.

Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots . + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n\,(a_1 + a_n)$. Одавде је:

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) \ldots . (I).$$

Ако у овом обрасцу заменимо $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, добијамо његов други облик:

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n - 1)\, d] \ldots (II),$$

чија је примена већа и који нас ослобођава рада за изналажење општега члана a_n, при тражењу збира од ма колико чланова неког познатог аритметичког реда.

Примери:

1) *Наћи збир 15 првих чланова реда: 1, 5, 9, 13, 17,....*
Овде је $a_1 = 1$, $d = 4$, и $n = 15$, те је $S_{15} = \frac{15}{2}[2 + 14 \cdot 4] = 435$.

2) *Колико чланова реда: 1, 5, 9, 13, 17,··· треба сабрати да би се добио збир 435?*

Овде је $a_1 = 1$, $d = 4$ и $S_n = 435$. Ако у другом збирном обрасцу извршимо замену познатих количина, добијамо квадратну једначину по n:

$$435 = \frac{n}{2}\,[2 + (n - 1)\ 4],$$

чијим решењем добијамо $n = 15$.

3) *Који је почетни члан реда чија је разлика 4, а збир од 15 његових првих чланова 435?*

Извршујући замену у другом збирном обрасцу познатих количина, добијамо једначину:

$$435 = \frac{15}{2}\,[2a_1 + 14 \cdot 4],$$

чијим решењем налазимо да је $a_1 = 1$.

4) *Која је разлика реда чији је први члан 3, а збир од 10 његових првих чланова 255?*

Заменом познатих количина у другом збирном обрасцу добијамо једначину:

$$255 = 5\ (6 + 9d),$$

одакле је $d = 5$.

c) **Образац за интерполацију.** Интерполовати једну аритметичку прогресију значи уметнути известан број нових чланова између свака два њена узастопна члана тако да нови чланови са пређашњим члановима дају нову аритметичку прогресију. Ако је број уметнутих чланова r, а два узастопна члана прогресије, чија је разлика d, a_n и a_{n+1}, онда се разлика d_1 нове прогресије добија применом обрасца за општи члан:

$$a_{n+1} = a_n + (r + 2 - 1)\, d_1,$$

пошто се a_n сматра као први, a_{n+1} као последњи члан, а број чланова је $r + 2$. Из ове једначине је:

$$d_1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{r + 1}, \text{ или } \boldsymbol{d_1 = \frac{d}{r + 1}}.$$

Овај нам образац пружа могућност да нађемо разлику нове прогресије само помоћу разлике старе прогресије и броја уметнутих чланова, а која је неопходно потребна ради изналажења нових чланова.

Пример. Између чланова прогресије: 1, 5, 9, 13, 17,· · · · уметни 6 нових чланова, да би се добила нова прогресија.

Овде је $d = 4$, $r = 6$, те је $d' = \frac{4}{7}$. Нова прогресија биће:

$$\mathbf{1},\ 1\tfrac{4}{7},\ 2\tfrac{1}{7},\ 2\tfrac{5}{7},\ 3\tfrac{2}{7},\ 3\tfrac{6}{7},\ 4\tfrac{3}{5},\ \mathbf{5},\ 5\tfrac{4}{7},\ 6\tfrac{1}{7},\ 6\tfrac{5}{7},\ 7\tfrac{2}{7},\ 7\tfrac{6}{7},\ 8\tfrac{3}{7},\ \mathbf{9},\ \dots$$

§ 18. Примери за вежбу[1])

1) Нађи 20-ти члан и збир од 20 чланова прогресије: 2, 5, 8, 11.· · ·

2) Нађи 15-ти члан и збир од 18 чланова прогресије: 3, 7, 11, 15,· · ·

3) Нађи 13-ти члан и збир од 13 чланова прогресије: — 2, — 6, —10, — 14,· · ·

4) Нађи збир свих двоцифрених бројева од 21 до 50 закључно.

5) Нађи збир свих двоцифрених бројева од 36 до 60 закључно.

6) Нађи збир свих парних бројева до 200 закључно.

7) Нађи збир свих непарних бројева до 175 закључно.

8) Нађи збир од n чланова прогресије: $a, 2a - b, 3a - 2b, \dots$

9) Први члан једне аритметичке прогресије је 3, разлика 5; нађи 25-ти члан и збир првих 25 чланова.

10) Дато: $a_1 = -5$, $d = 3$, $a_n = 100$; нађи S_n и n.

11) „ $a_1 = 5$, $d = -2$, $S = -27$; „ n и a_n.

12) „ $a_1 = 3^1/_2$, $a_n = -2$, $n = 23$; „ d и S.

13) „ $a_1 = -8$, $n = 19$, $S = 190$; „ d и a_{19}.

14) „ $a_1 = 8$, $a_n = -174$, $S = -2241$; „ d и n.

15) „ $d = \frac{2}{3}$, $n = 16$, $a_n = 10\frac{3}{4}$ нађи a_1 и S.

16) „ $d = \frac{1}{6}$, $n = 13$, $S = -29\frac{1}{4}$ „ a_1 и a_n.

17) „ $d = 5$, $a_n = 19$, $S = 861$; „ a_1 и n.

18) „ $n = 12$, $a_n = 0{,}575$, $S = -1{,}35$; нађи a_1 и d.

19) „ $a_1 = -7$, $d = -11$, $n = 18$; „ a_{18} и S.

[1]) Задаци снабдевени звездицом нису за ученике класичних гимназија.

20) Нађи први члан и разлику прогресије кад је:
a) $a_5 = 16$ и $a_{21} = 64$;
b) $a_9 + a_{12} = 67$ и $a_7 + a_2 = 85$;
c) $S_{10} = 230$ и $a_8 + a_{13} = 86$;
d) $a_{15} - a_8 = -21$ и $a_3 + a_9 = -26$;
e) $a_7 + a_{10} + a_{18} = 2\frac{1}{2}$ и $S_{21} = 21$;
f) $S_{15} - S_4 = 119\frac{5}{8}$ и $S_{26} - 2S_{10} = 223\frac{5}{8}$;
j)* $a_4 \cdot a_9 = -9$ и $a_{15} - a_6 = -18$;
k)* $a_{10} \cdot a_{17} + a_{10} + a_{17} = 1011$ и $S_{20} = 470$.

21)* Нађи a_1 и d, кад је $a_{18}^2 - a_{14}^2 = 160$ и $S_{19} = 38$.

22)* Нађи a_1, и d, кад је $a_5^2 + a_7 = 61$ и $a_{18} + a_{19} \dots + a_{22} = 62\frac{1}{2}$.

23)* Нађи a_1, d и n, кад је $a_3 + a_8 = -14$, $a_{15} - a_{12} = -6$ и $a_{n-1}^2 + a_n^2 = 1684$.

24)* Нађи a_1 и n, кад је $d = -4$, $S_n = -117$ и $a_4 \cdot a_{12} = -87$.

25) Између 3 и 24 уметни 6 бројева тако да се добије аритметичка прогресија.

26) Између 17 и 82 уметни 12 бројева тако да се добије аритметичка прогресија.

27) Између бројева 27 и —28 уметни 10 бројева тако да се добије аритметичка прогресија.

28) Између свака два члана прогресије: 1, 7, 13, 19, . . . уметни 7 бројева, да се добије нова аритметичка прогресија. Нађи 19-ти члан те прогресије и збир првих 19 чланова.

29)* Збир од четири броја који чине аритметичку прогресију је 30, а збир њихових реципрочних вредности $\frac{25}{36}$. Нађи те бројеве.

30) Један чиновник примио је прве године 18000 дин. плате, а сваке идуће године имао је по 1000 дин. више. Колика ће му бити плата у 35 години службе и колико ће свега примити за 35 година?

31) За копање бунара од 15 m дубине погођено је за први метар 20 динара, а за сваки потоњи по 2 дин. више. Колико је свега плаћено?

32) Једно лице уложило је у штедионицу на прост интерес 5000 динара са $5^0/_0$, а крајем сваке године улагало је још по 2000 дин. Колико је свега примило на име интереса у току 20 година?

33) Једно лице прима ренту, и то прве године 900,— дин., а сваке идуће године по 150 дин. више. Његов је трошак прве године 850 дин., а сваке идуће године по 155 дин. више. После колико година његов је приход једнак расходу?

34) Два путника полазе једновремено један другоме у сусрет из места А и В, чије је отстојање $29^3/_4$ миља. Први из А прелази првог дана 2 миље, а сваки идући дан по $1^1/_4$

миље више од претходног, а други из В прелази првог дана $1^1/_2$ миље, а сваки идући дан по $^1/_3$ миље више од претходног. После колико дана и на ком ће се отстојању од А срести путници?

35) Отстојање између два тела А и В која се крећу једно за другим је 20 km. Тело А креће се брзином прве секунде 25 km, а сваке идуће по $^1/_3$ km више од претходне. Тело В прелази прве секунде 30 km, а сваке идуће секунде по $^1/_2$ km мање од претходне. После колико секунада тело А стиже тело В?

36) Два тела, чије је отстојање 153 m крећу се једно другоме у сусрет. Прво тело креће се сталном брзином од 10 m у секунди, а друго прелази прве секунде 3 m, а сваке идуће секунде по 5 m више од претходне. После колико ће се секунада срести оба тела?

37) Два тела полазе из истог места и крећу се у истом правцу. Једно тело прелази прве секунде 1 m, а сваке идуће секунде по 3 m више од претходне. Друго тело, које почиње кретање 2 секунде доцније, прелази прве секунде 10 m, а сваке идуће секунде по 2 m више него у претходној. После колико секунада друго тело стиже прво?

38) По периферији једног круга крећу се два тела у супротном правцу. Прво прелази прве секунде 3^0, а сваке идуће секунде по 1^0 више од претходне. Друго тело прелази прве секунде $1^1/_2{}^0$, а сваке идуће секунде по 6^0 више него у претходној. После колико секунада сусрећу се први пут?

39) Два се тела крећу једно другоме у сусрет из два места чије је отстојање 200 m. Прво прелали по 12 m у минуту, а друго прелази 20 m прве минуте, а сваке идуће по 2 m више него у претходној минути. После колико се минута тела сусрећу?

40) Унутрашњи углови једног многоугла дају аритметичку прогресију, чија је разлика 10^0, а најмањи угао има 100^0. Нађи број страна тога многоугла.

41) Зна се да тело које слободно пада прелази прве секунде 4,9 m, а сваке следеће секунде по 9,8 m више него у претходној. Ако два тела почињу падати са исте висине, али једно почиње падање 4 секунде доцније, пита се: после колико секунада тела ће бити удаљена 274,4 m?

42) Нађи разлику прогресије, чији је први члан 100, а збир од првих шест чланова је 5 пута већи од збира следећих шест чланова.

43) Нађи први члан прогресије, чија је разлика 4, а збир од првих пет чланова је 3 пута мањи од збира следећих пет чланова.

44) Састави прогресије од 1 до 21 тако да се збир свих њених чланова има према збиру свих чланова између 1 и 21, као 11:9.

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

45) Из једне тачке A крећу се два тела, M и N, у правцу AX. Тело M креће се у првој секунди 11 m а сваке следеће секунде 1 m мање. Тело N отпочиње своје кретање 3 секунде доцније и креће се у првој секунди 10 m, а у свакој следећој 1 m више, тако да прво тело сустигне у тачци B. Да се израчуна дужина AB. (Ужице, 1911).

46) У више фиока има укупно 1368 дин. који су распоређени тако да поједине суме образују аритметички ред. У VII и XII фиоци има укупно 204 динара, а у II и XI 228 динара. У колико је фиока новац распоређен и колико има динара у првој и последњој фиоци? (Заечар, 1907).

47) Два су места A и B удаљена 870 km. Један путник полази из A и прелази првог дана 80 km, другог 75 km, трећег 70 km итд. Други полази из B 3 дана доцније на сусрет првоме и прелази првог дана 40, другог 46, трећег 52 km итд. Кад ће се и где срести? (Скопље, 1915).

48) Збир од три броја који стоје у аритметичкој прогресији износи 21, а збир I и II има се према збиру II и III као 3:4. Који су то бројеви? (Београд, II мушка, 1900).

49)* Нађи збир аритметичке прогресије чији је први члан једнак непознатој једначине $\sqrt[-x]{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[x-2]{\sqrt[5]{\sqrt{2}}}$, број чланова је 3 пута већи од $\log 32_{(2)}$, а разлика јој је $\sqrt[6]{4096}$. (Ница, 1917).

50) Први члан једне аритметичке прогресије једнак је броју чији логаритам за основу $\sqrt[3]{9}$ је 1,5. Производ од прва три члана прогресије подељен посебице са сваким од тих чланова добијају се количници чији је збир 299. Нађи збир од 10 првих чланова ове прогресије. (Скопље, 1910).

51)* Први члан једне аритметичке прогресије једнак је већем, а његова разлика мањем од стварних корена једначине $x^{2\log^3 x - 1,5\log x} = \sqrt{10}$. Колики број чланова ове прогресије треба да се узме, па да је збир тих чланова $\sqrt[3]{498677257}$ (Крушевац, 1921).

52)* Из тачке А креће се по правој линији неко тело прелазећи прве секунде 2 m а сваке потоње по 3 m више. Две секунде доцније из исте тачке и у истом правцу и смислу пође друго тело које прелази прве секунде онолико метара колико јединица има x из једначине $3^{x^2-17x-23} = 3^{5\left(\frac{x}{2}+4\right)}$, а сваке потоње секунде по 1 m више. После колико секунада од поласка првог тела имају бити оба тела подједнако удањена од тачке А? (Београд, III мушка, 1925).

53)* Корени система једначина $5x + 2y = 100$ и $\log x - \log y = \log 1,6$ јесу други и четврти чланови растуће аритметичке прогресије. Колико чланова те прогресије треба сабрати да њихов збир буде 420? (Петровград, 1932).

54)* Цео корен једначине $\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+2}=2\sqrt{x+3}$ је први члан аритметичке прогресије у којој је разлика квадрата петог и другог члана 264. Који члан те прогресије износи 181 ? (Београд, I женска, 1934).

55)* Збир негативних корена једначине $2^{4x+3}-27\cdot 2^{3x+1}+$ $+101\cdot 2^{2x}-216\cdot 2^{x-2}+8=0$ даје први члан аритметичке прогресије, а збир позитивних корена даје други члан. Наћи онај члан те прогресије који умањен за 4 једнак је трећини збира свих претходних чланова. (Бихаћ, 1932).

56) Између корена једначине $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x+19}$ уметнути четири броја тако да добивених 6 бројева чине аритметичку прогресију. (Бихаћ, 1931).

57) Један број је написан са 3 цифре које чине аритметичку прогресију. Поделимо ли тај број са збиром његових цифара, добијамо количник 26; додамо ли том броју 396, добијамо број са обрнутим редом цифара. Који је то број? (Лесковац, 1934).

58)* У једначини $x^4-(3m+5)\,x^2+(m+1)^2=0$ одредити коефицијенат m тако да њени корени чине аритметичку прогресију. (Крушевац, 1932).

59)* Девети и једанаести члан једне аритметичке прогресије задовољавају једначину $\frac{1}{2}\log 2+\log\sqrt{x^2+4x+5}=$ $=\frac{1}{2}[\log(x^2-4x+5)+1]$. Збир свију чланова, почев од првог, једнак је $10^{1-\log 0,08\dot{3}}$. Одредити број чланова те прогресије. (В. Кикинда, 1933).

60) Једна аритметичка прогресија даје се израдити помоћу корена једначине $\sqrt{\frac{8x}{x-6}}+\sqrt{\frac{x-6}{8x}}=6$ на следећи начин: Већи корен једначине једнак је збиру прогресије, мањи корен је за 5 мањи од од другог члана прогресије, збир коренова једнак је збиру трећег и петог члана. Како гласи прогресија? (В. Кикинда, 1927).

61)* Између решења једначина: $\sqrt{x+y}(x-y):\sqrt{x^2-y^2}=1$, $\sqrt{xy\left(\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2}:\sqrt{x+y}=3$ интерполовати аритметичку прогресију од толико чланова да збир целе прогресије постане $1\frac{1}{2}$ пута већи од збира решења. Написати ту прогресију. (Мостар, 1932).

62)* Производ од четвртог и једанаестог члана аритметичке прогресије је 18,5 а шести је члан 6. Како гласи прогресија и колика је сума од 53 члана оне прогресије која се добија када се између свака два узастопна члана интерполује по 9 чланова. (Сарајево, Шеријатска, 1931).

63)* Корени система једначина: $\sqrt[4]{x+7y}=3$, $(x+7y).2^x$ -

$=1296$ јесу шести и седми члан аритметичке прогресије. Колико се чланова мора сабрати да сума износи 5? (Сарајево, Женска, 1934).

64)* Корени једне једначине четвртог степена чине аритметички ред. Збир тих корена има вредност 0, а збир њихових квадрата је 20. Како гласи та једначина? (Сарајево, Женска, 1931).

65)* Наћи аритметичку прогресију од четири члана у којој производ првог и четвртог члана једнак је већем корену једначине $x^{1+\log x}=0{,}001^{\frac{-2}{3}}$, а збир квадрата другог и трећег члана је 65. (Приштина, 1932).

66)* Збир другог и четвртог корена једначине $3^{4x+3}-$ $-112\cdot 3^{3x+1}+874\cdot 3^{2x}-1008\cdot 3^{x-1}+27=0$ дају први члан аритметичке прогресије, а збир првог и трећег корена даје други члан. Који је члан те прогресије, умањен за 4, једнак трећини збира свих претходних чланова? (Сарајево, II мушка, 1931).

67)* Ако из једначина $\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{y-1}=11\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{y-1}-10$ и $10y=1000x$ сматрамо већи корен x као први члан аритметичке прогресије, а суму корена y_1+y_2 као диференцију тога реда, онда одредити број чланова тога реда које треба сабрати да се добије збир 286. (Сарајево, I мушка, 1934).

68)* Стране од 5 равностраних троуглова чине аритметички ред, а целокупна им дужина износи 40. Сума површина најмањег и највећег троугла за $10\sqrt{3}$ је мања од суме површина осталих троуглова. Колике су стране троуглова ? (Сарајево, I мушка, 1930).

69)* Разлика аритметичке прогресије је корен једначине $a^{2x}\cdot\sqrt{a^{x+3}}=\sqrt[3]{a^x}$, а разлика квадрата четвртог и трећег члана износи 51. Колико чланова тога реда треба сабрати да се добије збир 92 ? (Сомбор, 1933).

70)* Корени система једначина $2^{\log x}\cdot 3^{\log y}=12$, $\log x+\log y=3$ су други и четврти члан прогресије. Колико чланова те прогресије треба сабрати да добијемо збир 980 ? (Сомбор, 1931).

71)* Збир корена једначине $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+$ $+12x+4=0$ даје први члан неке аритметичке прогресије; њихов производ даје диференцију те прогресије. Колико чланова те прогресије треба сабрати да се добије сума 817 ? (Дубровник, 1934)

72)* Цели корени једначине: $6\left(\frac{4,3x}{3x+1}\right)^4-35\left(\frac{4,3x}{3x+1}\right)^3+$ $+62\left(\frac{4,3x}{3x+1}\right)^2-35\left(\frac{4,3x}{3x+1}\right)+6=0$ претстављају први и други члан једне растуће аритметичке прогресије. Колико чланова ове прогресије треба сабрати да се добије збир 45 ? (Сињ, 1934).

73)* У аритметичкој прогресији чији је број чланова једнак корену једначине $3^x-3^{x-1}-3^{x-2}=32805$ збир чланова на непарним местима износи 12,5, а збир чланова на парним местима износи 15. Који је то ред? (Котор, 1930).

§ 19. **II. Геометриске прогресије.** Низ или ред бројева тако уређен да је количник између ма која два узастопна броја сталан, зове се геометриска прогресија. Такви су редови:

1) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, . . .

2) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, . . .

3) 2, — 6, 18, — 54, 162, — 486, . . .

4) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \ldots$

5) $\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, -\frac{16}{81}, \frac{32}{243}, -\frac{64}{729}, \ldots$

Бројеви који дају геометриску прогресију, зову се члановима реда. Ако ред:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots \ldots a_{n-2},\ a_{n-1} \text{ и } a_n$$

претставља једну геометриску прогресију, онда је a_1 њен *први* или *почетни члан*, a_n њен *општи члан*, јер n може да значи ма који цео број природног бројног реда. *Овакав ред бројева зове се геометриска прогресија, јер је ма који члан геометриска средина између суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.* Сваки геометриски ред даје се замислити да постаје множењем сваког претходног члана једним сталним бројем. Тај стални број зове се *количник* реда и бележи се обично са q. Количник q може бити већи или мањи од јединице и може бити позитиван или негативан. Код горњих редова је количник: код првог 2, другог 3, трећег — 3, четвртог $\frac{1}{5}$, а петог $-\frac{2}{3}$. Ако је количник негативан, онда је ред наизменично уређен, тј. његови узастопни чланови јесу различитог знака. Ако је количник $q > 1$, онда је прогресија *растућа*, а за $q < 1$, прогресија је *опадајућа*. У првом случају чланови имају све веће и веће апсолутне вредности, а у другом све мање. Према броју чланова n, прогресија може бити *коначна* и *бесконачна*. Коначна прогресија има ограничен број чланова, а бесконачна има бесконачно много чланова. *И код геометриске прогресије водимо рачуна о првом члану* a_1, *колитнику* q, општем члану a_n, броју чланова n и збиру од n чланова S_n. Кад год знамо три од ових пет количина, у стању смо да нађемо остале две, употребом обрасца за општи члан и збирног обрасца.

a) **Образац за општи члан**

Ако је ред: $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ геометриски чији је количник q, онда је:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot q = a_1 q^3 \cdot q = a_1 q^4 \end{aligned}$$

— — — — — —

— — — — — —

Из горњих једначина увиђамо да се ма који члан реда добија помоћу првог члана a_1 и *количника* q, *кад се први члан помножи са степеном количника чији је изложитељ за 1 мањи од индекса тога члана.* На основу ове констатације изводимо образац за општи члан:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Помоћу овог обрасца налазимо једну од количина: a_n, a_1, q и n, ако су остале три познате.

Примери:

1) Наћи 7-ми члан реда: 1, 3, 9, 27, 81, . . . Овде је $a_1 = 1$ и $q = 3$, те је $a_7 = a_1 q^6 = 1 \cdot 3^6 = 729$.

2) Наћи први члан реда, чији је 6-ти члан — 486, а количник — 3.

Из $a_6 = a_1 \cdot q^5$ имамо $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = \frac{-486}{(-3)^5} = \frac{-486}{-243} = 2.$

3) Наћи количник реда, чији је први члан 1 а 5-ти $\frac{1}{625}$.

Из $a_5 = a_1 q^4$, имамо $q = \sqrt[4]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{1}{625}}{1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5}.$

4) Први члан једнога реда је 1, количник је 2, а 512 је један његов члан; који је по реду?

Заменом у $a_n = a_1 q^{n-1}$ имамо: $512 = 1 \cdot 2^{n-1}$, или $512 = 2^{n-1}$. Решавањем ове изложитељне једначине са или без употребе логаритама, добијамо да је $n = 10$ [$2^9 = 2^{n-1}$, $9 = n - 1$, $n = 10$].

b) **Збирни образац за коначну прогресију.** Ако је: a_1, a_2, $a_3, \cdots a_{n-2}$, a_{n-1}, a_n један геометриски ред (растући или опадајући) од n чланова, чији је количник q, онда је:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \text{ или}$$

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \cdots (1).$$

Ако ову једначину помножимо са q, добијамо:

$$Sq = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \cdots (2).$$

Одузимањем једначине (2) од (1), или обрнуто, добијамо у првом случају:
$S - Sq = a_1 - a_1q^n$, или $S(1-q) = a_1(1-q^n)$, а у другом:
$Sq - S = a_1q^n - a_1$ или $S(q-1) = a_1(q^n-1)$.

Одавде је:

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ или } S = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Напомена. Први образац је згоднији за опадајућу прогресију, а други за растућу. Ови обрасци нису различити, јер се други добија из првог, ако помножимо са — 1 и бројитељ и именитељ десне стране тога обрасца. Ови се обрасци дају претставити и овако:

$S = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^{n-1}q}{1-q} = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}$, или $S = \frac{a_nq - a_1}{q-1}$, а примењују се, када поред првог члана a_1 и количника q знамо и општи члан a_n.

Пример:

1) Наћи збир од 10 првих чланова прогресије чији је први члан 7, а количник 4.

Решење. $S = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{7\cdot(4^{10}-1)}{3} = \frac{7\cdot 1048575}{3} = 2446675.$

Напомена. A) Вредност степена 4^{10} налазимо помоћу логаритама. За $4^{10} = x$, биће $\log x = 10 \log 4 = 10\cdot 0{,}60206 = 6{,}02060$, а $x = N6{,}02060 = 1048576$.

B) Ако се тражи код овог задатка први члан a_1, а зна се количник $q = 4$, и $S_{10} = 2446675$, онда је

$$a_1 = \frac{S(q-1)}{q^n-1} = \frac{2446675\cdot 3}{1048575} = 7.$$

C) Ако се тражи број чланова n, које треба сабрати да би се добио збир $S = 2446675$, а први је члан $a_1 = 7$ и количник $q = 4$, онда се јавља изложитељна једначина:

$2446675 = \frac{7(4^n-1)}{3}$. Одавде је $7340025 = 7\cdot 4^n - 7$;
$7340032 = 7\cdot 4^n$; $4^n = 1048576$; $n \log 4 = \log 1048576$;

$$n = \frac{\log 1048576}{\log 4} = \frac{6{,}02060}{0{,}60206} = \frac{602060}{60206} = 10.$$

D) Количник q може се израчунати, ако су познате количине: S, a_1 и a_n, употребом обрасца $S = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}$. Тај се количник не може увек израчунати, ако су познате количине: S, a_1 и n, особито када је n већи број, јер се јавља једначина вишег степена $S = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, коју не можемо решити помоћу елементарне математике.

c) **Збирни образац за бесконачну опадајућу прогресију**

Бесконачна растућа геометриска прогресија је незбирљива, јер унапред знамо да је њен збир бесконачно велики. Ово увиђамо и из обрасца за ту прогресију. Како је овде $q > 1$ и $n = \infty$, то је

$$S = \frac{a_1(q^\infty - 1)}{q-1} = \frac{a_1\cdot\infty}{q-1} = \infty.$$

Међутим, бесконачна опадајућа прогресија збирљива је, јер је код ње $q < 1$ (на пр. $q = \frac{1}{b}$, а $b > 1$), те је:

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{q_1\left[1-\left(\frac{1}{b}\right)^n\right]}{1-q} = \frac{a_1\left(1-\frac{1}{b^\infty}\right)}{1-q} = \frac{a_1\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{1-q} = \frac{q_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Према овоме, $S = \frac{a_1}{1-q}$ јесте збирни образац за бесконачну опадајућу прогресију.

1) *Пример.* Наћи збир бесконачне прогресије: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\cdots$

Овде је $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, те је $S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

2) *Пример.* Наћи збир бесконачне прогресије:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$$

Овде је $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{2}{3}$, те је $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}$.

3) *Пример.* Чисто периодичан разломак $0{,}\overline{54}$ претвори у обичан.

Како је сваки чисто периодичан разломак у ствари једна бесконачна опадајућа геометриска прогресија, јер је

$$0{,}\overline{54} = \frac{54}{100} + \frac{54}{100^2} + \frac{54}{100^3} + \cdots, \text{ то је}$$

$$0{,}\overline{54} = \frac{\frac{54}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{54}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}.$$

4) *Пример.* Нечисто периодичан разломак $0{,}5\overline{36}$ претвори у обичан.

Овде је $0{,}5\overline{36} = \frac{5}{10} + \frac{36}{1000} + \frac{36}{100000} + \cdots = \frac{5}{10} + S = \frac{5}{10} +$

$$+\frac{\frac{36}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{5}{10}+\frac{\frac{36}{1000}}{\frac{99}{100}}=\frac{5}{10}+\frac{36}{990}=\frac{495+36}{990}=\frac{531}{990}=\frac{59}{110}.$$

d) **Образац за интерполацију.** Ако су a_n и a_{n+1} два узастопна члана геометриске прогресије чији је количник q, број уметнутих чланова r, а количник нове прогресије q_1, онда је, према обрасцу за општи члан:

$a_{n+1}=a_n\cdot q_1^{n-1}=a_n q_1^{r+2-1}=a_n q_1^{r+1}$, а одавде је:

$q_1=\sqrt[r+1]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\sqrt[r+1]{q}.$ Овај нам образац пружа могућност да нађемо количник нове прогресије само помоћу количника старе прогресије и броја уметнутих чланова, а који је количник неопходно потребан ради изналажења уметнутих чланова.

Пример. —

Између чланова прогресије: 3, 48, 768 уметни по 3 нова члана.

Решење. — Овде је $q=16$, $r=3$, а $q_1=\sqrt[4]{16}=2$. Нови ред биће **3,** 6, 12, 24, **48,** 96, 192, 384, **768.**

§ 20. Особине чланова геометриске прогресије

1) *Ма који члан је геометриска средина између суседних чланова, или између чланова подједнако удаљених од њега.*

Доказ. $a_6=a_5\cdot q$ и $a_6=\frac{a_7}{q}$. Одавде је $a_6^2=a_5q\cdot\frac{a_7}{q}=a_5a_7$, или $a_5:a_6=a_6:a_7$.

Тако исто је $a_6=a_4q^2$ и $a_6=\frac{a_8}{q^2}$. Множењем ових једначина добијамо: $a_6^2=a_4\cdot a_8$, а одавде је $a_4:a_6=a_6:a_8$.

2) *Производ од два члана једнако удаљених од крајњих чланова, једнак је производу крајњих чланова.*

Како је $a_3=a_1q^2$ и $a_{n-2}=\frac{a_n}{q^2}$, то је $a_3\cdot a_{n-2}=a_1q^2\cdot\frac{a_n}{q^2}=a_1\cdot a_n$.

3) *Производ од n чланова геометриске прогресије једнак је квадратном корену из производа крајњих чланова на n-том степену.*

Из $P=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$ и
$P=a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdots a_3\cdot a_2\cdot a_1$, биће:
$P^2=(a_1\cdot a_n)\cdot(a_2\cdot a_{n-1})\cdot(a_3\cdot a_{n-2})\cdots(a_{n-2}\cdot a_3)\cdot(a_{n-1}\cdot a_2)\cdot(a_1\cdot a_n)$ или на основу особине под 2):

$P^2=(a_1\cdot a_n)\cdot(a_1\cdot a_n)\cdot(a_1\cdot a_n)\cdots(a_1\cdot a_n)\cdot(a_1\cdot a_n)\cdot(a_1\cdot a_n)=(a_1\cdot a_n)^n$, а $P=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}$.

4) *Ма која четири узастопна члана геометриске прогресије јесу пропорционални, тј. дају геометриску пропорцију.*

Како је $a_4\cdot a_5=a_3\,q\cdot\frac{a_6}{q}=a_3\cdot a_6$, то је $a_3:a_4=a_5:a_6$.

5) *Чланови геометриске прогресије, узети сваки други, или сваки трећи итд. дају опет геометриску прогресију.*

Тако из прогресије: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, добијамо геометриске прогресије:

1, 9 81, 729, 6561;
1, 27, 729, 19683;
3, 27, 243, 2187;
3, 81, 2187.

§ 21. Примери за вежбу.*

1) Напиши 7 првих чланова геометриске прогресије чији је први члан 1 а количник 10.

2) Напиши 10 првих чланова геометриске прогресије чији је први члан 384 а количник $\frac{1}{2}$.

3) Напиши геометриску прогресију од 11 чланова чији је количник $1\frac{1}{2}$, а шести је члан 2.

4) У геометриској прогресији a) $\frac{2}{5}$, 1,$\cdots$ b) 0,1; 0,02$\cdots$ напиши још 4 члана.

5) Нађи шести члан геометриске прогресије чији је први члан 10, а количник је 2.

6) Нађи седми члан геометриске прогресије чији је први члан 1200, а количник 0,1.

7) Нађи први члан прогресије чији је количник 4, а осми члан 256.

8) Први члан прогресије је 2058 а четврти 6. Нађи њен количник.

9) 15 и 240 јесу крајњи чланови геометриске прогресије, а количник је $\frac{1}{2}$. Колико чланова има ова прогресија?

10) Нађи збир чланова геометриске прогресије чији је количник 3, а крајњи су јој чланови 20 и 131220.

11) Почетни и крајњи члан геометриске прогресије јесу 81920 и $1\frac{1}{4}$, а количник је 0,25. Нађи збир свих њених чланова.

12) Нађи први члан геометриске прогресије чији је количник 5, последњи члан 15625, а збир свих чланова 19531.

* Задаци снабдевени звездицом нису за ученике класичних гимназија.

13) Први члан геометриске прогресије је 7, а количник је 4. Наћи њен последњи члан, ако је збир свих чланова 9555.

14) Почетни и крајњи члан геометриске прогресије јесу 4 и 78732, а збир чланова 118096. Наћи њен количник.

15) Наћи збир од 10 првих чланова геометриске прогресије чији је први члан 3, а количник 2.

16) Збир првих 12 чланова геометриске прогресије је 797160, а количник је 3. Наћи први члан.

17) Први је члан геометриске прогресије $\frac{1}{3}$, а количник је 0,1. Наћи збир од првих 6 чланова.

18) Наћи збир од 8 првих чланова прогресије: 5, 15, 45, $\cdots$

19) Наћи збир од 7 првих чланова прогресије: -4, 16, $-64, \cdots$

20) Наћи збир од 10 првих чланова прогресије: $3, -1, \frac{1}{3}, \cdots$

21) Наћи збир од 5 првих чланова прогресије: $\sqrt{\frac{2}{3}},\ 1,\ \sqrt{\frac{3}{2}}, \cdots$

22) Наћи збир од 6 првих чланова прогресије $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \cdots$

23) Наћи производ од 9 првих чланова прогресије: $\frac{81}{8}, \frac{27}{4}, \frac{9}{2}, \cdots$

24) Наћи производ од 11 првих чланова прогресије: $\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}, \frac{b^3}{a^3}, \cdots$

25) Између чланова 31 и 496 уметни 3 члана да се добије нова геометриска прогресија.

26) Између бројева $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^2}$ уметни 5 чланова да се добије нова геометриска прогресија.

27) Између a^{15} и b^{15} уметни 5 чланова да се добије нова геометриска прогресија.

28) Између свака два члана прогресије: 1, 3, 9 27, $\cdots$ уметни по 4 члана да се добије нова геометриска прогресија.

29) Наћи збирове следећих бесконачних геом. прогресија:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$; 2) $1, \frac{2}{5}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^3, \cdots$;

3) $8, \frac{4}{5}, \frac{2}{25}, \frac{1}{125}, \cdots$; 4) $\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, -\frac{9}{50}, \cdots$;

5) 7; 2,1; 0,63; 0,189; $\cdots$ 6) $7, -\frac{7}{8}, \frac{7}{64}, -\frac{7}{512}, \cdots$;

7) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$; 8) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}, \cdots$;

9) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \cdots$; 10) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - 1 + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \cdots$;

30) Периодичне разломке: a) $0,\overline{45}$; b) $0,\overline{341}$; c) $5,\overline{0792}$; d) $0,6\dot{3}$; e) $0,3\overline{58}$; и f) $3,3\overline{027}$ претвори у обичне.

31) У којој је геометриској бесконачној прогресији: 1) $a_1 = 6$ а $S = 7$; 2) $q = \frac{2}{5}$ и $S = 5$?

32) Између 16 и $\frac{1}{4}$ уметни више чланова тако да са датим бројевима чине геометриску прогресију чији је збир $31\frac{3}{4}$. Наћи број уметнутих чланова.

33)* Наћи први члан и количник прогресије, кад је:

1) $a_{11} = 5120$ и $P_5 = 3200000$;

2) $a_4 \cdot a_7 = \frac{1}{3}$ и $a_{12} : a_8 = \frac{1}{81}$;

3) $a_5 - a_6 = \frac{80}{81}$ и $a_9 - a_{10} = \frac{1280}{6561}$;

4) $a_{15} = \frac{1}{512}$ и $P_{10} = 32$;

5) $a_1 + a_8 = 4376$ и $a_1 \cdot a_8 = 8748$;

6) $a_1 + a_4 = 196$ и $a_2 + a_3 = 84$;

7) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 729$ и $a_2 + a_3 = 12$;

8) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 156$ и $a_1{}^2 + a_4{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2 = 14976$.

34) Да се докаже да је

$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$, ако су a, b, c и d четири узастопна члана геометриске прогресије.

35)* У једној геом. прогресији има 7 чланова. Збир првих 6 чланова је 157,5 а збир последњих 6 чланова је два пута мањи од збира првих 6 чланова. Наћи ту прогресију.

36)* Збир прва три члана једне геометриске прогресије је 28, а збир следећа три члана $3^1/_2$. Наћи прогресију.

37)* Наћи четири броја, који чине геом. прогресију, кад се зна да је први број већи од другог за 36, а трећи број је већи од четвртог за 4.

38)* Наћи геометриску прогресију од 6 чланова, кад се зна да је збир непарних чланова 455, а збир парних 1365.

39)* Збир кубова прва три члана једне геометриске прогресије је 1971, а њихов је производ 216; наћи прогресију.

40)* Ако 4 првим члановима једне аритметичке прогресије додамо поступно бројеве 5, 6, 9 и 15, добија се једна геометриска прогресија; наћи аритметичку прогресију.

41)* Три броја, који чине геом. прогресију, дају збир 26. Ако овим бројевима додамо бројеве 1, 6 и 3, добијамо три броја који дају аритметичку прогресију. Наћи та три броја.

42)* Три броја, који чине аритм. прогресију, дају збир 15. Ако овим бројевима додамо бројеве 1, 4 и 19, добијамо три броја који дају геометриску прогресију. Наћи та три броја.

43) Проналазач игре шаха тражио је као награду од персиског шаха онолико пшеничних зрна колико би изашло кад би се на прво поље шаховске табле метнуло једно зрно, на друго 2, на треће 4 и тако редом, на свако идуће поље по

2 пута више од претходног. Колико вагона чини та сума, ако се узме да вагон хвата 10000 kg, а у 1 kg има 20000 зрна.

44)* У једној геом. прогресији с непарним бројем чланова први је члан 7, средњи 56 а збир свих чланова 889. Колико има тих чланова и колики је количник?

45* У једној геом. прогресији од 8 чланова разлика између збира парних и непарних чланова је 150. Збир свих чланова је 250. Наћи ту прогресију.

46)* Једна аритметичка и једна геом. прогресија имају исти почетни члан. Свака има по 4 члана. Други чланови стоје у размери $3:2$, а трећи у размери $5:4$. Први и последњи члан геометриске прогресије дају збир 81. Које су те две прогресије?

47) Ако у један квадрат стране a упишемо други квадрат тиме што ћемо спојити средине страна датог квадрата, затим у други квадрат упишемо на исти начин трећи квадрат, у трећи истим начином четврти итд. до бесконачности, пита се: колики је збир површина свих тако добивених квадрата?

48) У једном кругу полупречника r уписан је квадрат, у квадрат уписан је круг, у други круг уписан је квадрат, у нови квадрат уписан је круг итд. до бесконачности. Наћи збир површина свих кругова и квадрата. (Крагујевац, 1898).

49) Дат је равностран троугао стране a. Од висина овога троугла нацртан је нов троугао; од висина новог троугла конструисан је трећи троугао; од висина трећег троугла конструисан је четврти троугао итд. до бесконачности. Наћи збир површина свих тако добивених троуглова.

50) Дат је круг полупречника r. У њему уписујемо концентричне кругове полупречницима: $\frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \ldots$ итд. до бесконачности. Наћи збир обима свих ових кругова.

51) У равностран троугао стране a, уписан је нов равностран троугао спајањем средине страна датог троугла; у нови троугао уписујемо нов равностран троугао спајањем средине страна другог троугла итд. до бесконачности. Наћи збир обима и површина свих троуглова.

52) У један круг полупречника r уписан је равностран троугао, у троугао уписан је круг, у овај круг нов равностран троугао итд. до бесконачности. Наћи збир обима и збир површина свих кругова и свих троуглова.

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

53* Има три броја што чине аритметички ред, а друга три броја што чине геометриски ред. Кад се члановима аритметичког реда додају чланови геометриског реда са истим индексима, добијају се редом бројеви 27, 39 и 87. Збир сва три члана аритметичког реда износи 36. Да се нађе аритметички и геометриски ред. (Београд, I мушка 1897).

54) Неки сиромашак затражи стан у једног тврдице. Кад му овај не даде, сиромашак учини овакав предлог: „Пристајете ли да вам за први дан платим 1 динар, за други 2, за трећи 3 итд., али да ви мени дате за први дан само $\frac{1}{1000}$ део паре (динарске), да други $\frac{2}{1000}$, за трећи $\frac{4}{1000}$ итд.?" Газда пристаде на овакву оригиналну погодбу за месец дана. Какав је био узајамни обрачун после овог времена? (Крагујевац, 1900).

Одг. Газда плаћа кирајџији 10272,32 динара.

55) Наследство од 6000 дин. требало је разделити подједнако између наследника. Пре деобе двојица од наследника умреше, те је сваки од осталих примио више него што је требало онолико колики је збир чланова бесконачне геометриске прогресије чији је први члан 150 а количник 0,7. Колико је било наследника? (Скопље, 1910).

56)* Један аритметички ред и један бескрајан геометриски ред имају заједнички први члан и једнаке збирове. Још се зна да аритметички ред има 9 чланова и да је други члан аритметичког реда за 1 већи, а други члан геометриског реда за 1 мањи од заједничког првог члана. Одредити заједнички први члан и заједнички збир та два реда. (Београд, III мушка, 1931).

57)* Два геометриска реда имају исти количник. Први члан првог реда је $a_1 = 6$, а први члан другог реда је $b_1 = 37$. Још се зна да је збир прва четири члана првог реда једнак збиру другог и трећег члана другог реда. Израчунати заједнички количник та два реда. (Београд, III мушка, 1934).

58)* Извесну суму новаца треба да поделе четири лица тако да њихови делови чине једну геометриску прогресију у којој је збир другог и трећег члана 2500, а збир првог и трећег члана 8500. Колико добива сваки од њих и колика је сума коју деле? (Београд, II женска, 1928).

59)* Корени једначине $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$ образују растући математички ред. Одредити који је члан тога реда број 6561. (Београд, I мушка, 1934).

60)* Дата је једначина $\lambda^3x^2 + (2\lambda - 52)\,x + 64 = 5$. a) Одредити λ тако да корени једначине буду прва два члана геометриског реда, код кога су први члан и количник једнаки; b) Наћи те корене и образовати једначину чији ће корени бити једнаки са реципрочним вредностима ових корена. (Београд, II мушка, 1934).

61)* Четири броја чине аритметички ред. Производ првог и четвртог броја једнак је већем корену једначине $x^{1+\log x} = 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$ а збир квадрата другог и трећег броја једнак је збиру $S = 20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \cdots\cdots$. Наћи та четири броја. (Битољ, 1932).

62)* Цифре једног троцифреног броја чине геометриски ред. Збир цифара јединица и стотина је већи 2,5 пута од цифре десетица. Кад цифре тога броја измењају места обрнутим редом, добија се број који је за 594 већи од траженог броја. Који је то број? (Битољ, 1930).

63)* Геометриска је прогресија састављена од 3 броја. Ако од трећег члана одузмемо 64, добијамо аритметичку прогресију. Ако од другог члана тако добивене аритметичке прогресије одузмемо 32, добијамо опет једну геометриску прогресију. Који су ти бројеви? (В. Кикинда, 1934).

64)* Збир геометриске прогресије са непарним бројем чланова за 5 је већи од целе вредности броја λ коју он мора имати да би у једначини $x^2 \log \lambda - (6 \log \lambda + 1)\, x + 15 = 0$ био задовољен услов $x^2_1 + x_2^2 = \frac{109}{4}$. У истој прогресији збир првог и последњег члана је 75, и средњи члан има вредност 30. Наћи број чланова у томе реду, као и сам ред. (Ниш, Мушка, 1933).

65)* Три броја чине аритметичку прогресију. Дода ли се првом броју 2, другоме 6, а трећем 22, онда они прелазе у геометриски ред. Наћи та три броја, ако је њихов збир за 1 мањи од броја λ, где λ има ону вредност за коју једначина: $x^2 - 6\,x \log \lambda + (8 + \log \lambda) = 0$ има оба решења једнака.
(Ниш, Мушка, 1931).

66)* Први члан једне геометриске прогресије која расте је корен једначине: $a^{1-x} \cdot \sqrt[3]{a^{4x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{x+2}} \cdot \sqrt[5]{a^{1-8x}} = 1$; разлика V и III члана је 12 пута већа од разлике III и II члана. Који је то ред? (Нови Сад, Женска, 1931).

67)* Тројица добију извесну суму новаца која је једнака оној вредности коефицијента λ у једначини $x^2 - 10\,x + \lambda = 0$ која чини да је једно решење за 4 веће од другог; добици њихови чине геометриски ред. Међутим, ако би трећи позајмио првој двојици по 1 динар, онда би њихови удели чинили аритметички ред. Треба одредити колико је сваком припало.
(Ниш, Женска, 1934).

68)* Већи корен једначине $2 \cdot x^{2 \log x} + 3 \cdot x^{\log x} + 3 \cdot x^{-\log x} + 2 \cdot x^{-2 \log x} = 230{,}32$ је први члан бесконачне геометриске прогресије, а мањи корен количник. Колика је сума те прогресије?
(Сарајево, Шеријатска, 1933).

69)* Збир од три броја једнак је позитивном корену једначине $\log(\sqrt{x} + 8) - 0{,}47712 = 1 - \frac{1}{2} \log(x - 3)$. Ова три броја чине I, II и IV члан растуће аритметичке прогресије, а у исто време I, II и III члан геометриске прогресије. Наћи те бројеве. (Приштина, 1933).

70)* Наћи број чланова аритметичке прогресије у којој је први члан једнак већем а разлика мањем корену једначине $2^{\frac{2x^2-12x+21}{2}} = 32^{\frac{1}{2}}$, а збир свих чланова аритметичке прогресије

једнак је првом члану оне геометриске прогресије код које је $a_3 + a_5 = \frac{55}{2}$ а $a_3 - a_4 = 11$. (Призрен, 1930).

71)* Наћи број чланова аритметичке прогресије у којој је први члан једнак мањем корену једначине $\log(x - 14) - \frac{1}{2} \log(3x - 26) = \log 2$, разлика аритметичке прогресије је једнака првом члану геометриске прогресије у којој разлика између IV и II члана стоји према разлици II и I члана као 6 : 1. Прва три члана геометриске прогресије дају збир 63. Збир чланова аритметичке прогресије је 195. (Призрен, 1934).

72)* У геометриској прогресији реалних чланова сума је трију чланова 35, а производ 1000; у аритметичкој прогресији сума је првих трију чланова 45 а производ 3000. Који се члан геометриског реда подудара са 63-им чланом аритметичког реда? (Сарајево, II мушка, 1929).

73)* Реални корени (x_1, y_1) једначина $\frac{x-y}{30} + \frac{\sqrt{x+y}}{30} = 1$, $x^3 + y^3 = 8125$ јесу први и други члан растућег геометриског реда (b_1 и b_2), а уједно су први и четврти члан растућег аритметичког реда (a_1 и a_4). Који је члан аритметичког реда једнак трећем члану геометриског реда?
(Сарајево, I мушка, 1933).

74) Из места A полази воз почетном брзином $c = 64\ m$ у минуту. Ова брзина стално расте и то тако да сваког следећег минута постаје 1,5 пута већа од претходне. После извесног времена воз достигне брзину 486 m у минуту и од тада иде једнаком брзином. За које ће време воз стићи у место B које је 23 km и 200m удаљено од A? (Ваљево, 1934).

75)* Колики је збир 10 првих чланова геометриске прогресије чији је први члан једнак мањем а други већем позитивном корену једначине: $2^{4x+3} - 27 \cdot 2^{3x+1} + 101 \cdot 2^{2x} - 216 \cdot 2^{x-2} + 8 = 0$.
(Ћуприја, 1933).

76)* Једначина $x^4 - \frac{10}{3} x^3 + 2x^2 - \frac{10}{3} x + 1 = 0$ има међу својим коренима два позитивна реална. Од тих реалних корена већи је први члан геометриске прогресије, а мањи трећи члан исте прогресије. Наћи збир прогресије кад број чланова бесконачно порасте. (Скопље, 1933).

III. Сложени интересни рачун

§ 22. **Сложени интерес и интересни чинитељ.** Ако се интерес неког капитала на крају једног тромесечја, полугођа или године придодаје капиталу, тако да у идућем тромесечју, полугођу или години вуче интерес заједно с капиталом, онда се каже да је капитал дат под *сложен интерес* или под *интерес на интерес*. Ако се интерес дадаје капиталу тромссечно, шестомесечно или годишње, онда се каже да се *капиталисање врши тромесечно, шестомесечно* или *годишње*.

Под *интересним* или *каматним чинитељем* разумемо ону вредност једног динара на коју он нарасте заједно с интересом за јединицу времена (тромесечје, полугође, година). Ако је годишњи интересни проценат (стопа) $p^0/_0$, онда је годишњи интересни чинитељ $q = 1 + \frac{p}{100}$, шестомесечни $q = 1 + \frac{p:2}{100}$, а тромесечни $q = 1 + \frac{p:4}{100}$, јер 100 дин. постају с интересом за једну годину $100 + p$, за полугође $100 + \frac{p}{2}$, а за тромесечје $100 + \frac{p}{4}$, а један динар постаје 100 пута мањи, тј. $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$, $\frac{100+\frac{p}{2}}{100} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{100}$ и $\frac{100+\frac{p}{4}}{100} = 1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}$. Тако, ако је интересна годишња стопа $p = 8^0/_0$, онда је годишњи интересни чинитељ 1,08, полугодишњи 1,04, а тромесечни 1,02. За годишње интересне стопе: $5^0/_0$, $7{,}5^0/_0$, $12^0/_0$ и $15^0/_0$ биће годишњи интересни чинитељи: 1,05, 1,075, 1,12 и 1,15, а шестомесечни: 1,025, 1,0375, 1,06 и 1,075. У пракси се најчешће врши капиталисање шестомесечно и годишње.

§ 23. **Увећани капитал (крајња вредност капитала).** Под увећаним капиталом, или под крајњом вредношћу једног капитала разумемо ону вредност неког капитала K, на коју он нарасте за n година (полугођа) заједно са интересом на интерес. Ако крајњу вредност капитала K, датог под интерес на интерес са годишњом стопом $p^0/_0$, а за n година, означимо са $K_{(n)}$, онда ту вредност налазимо из обрасца:

$$\boldsymbol{K_{(n)} = K \cdot q^n} \quad (1) \text{ јер}$$

1 динар постаје са интересом на крају прве године $1 + \frac{p}{100} = q$, а K динара постају са интересом на крају прве године K пута више, тј.

$$K_1 = K \cdot q.$$

Затим, 1 динар постаје са интересом од почетка до краја друге године q динара, а $K_{(1)}$ динара, односно Kq динара, постају Kq пута више, тј.

$$K_{(2)} = K_1 \cdot q = Kq \cdot q = Kq^2.$$

Затим, 1 динар постаје са интересом од почетка до краја

треће године q динара, а $K_{(2)}$ динара, односно Kq^2 динара постају Kq^2 пута више, тј.

$$K_3 = K_{(2)}\, q = Kq^2 \cdot q = Kq^3.$$

Продужујући овако налазимо да капитал са интересом на крају 4-те године постаје Kq^4, на крају 5-те Kq^5, итд., а на крају n-те године постаје Kq^n.

Помоћу обрасца (1) можемо наћи не само крајњу вредност капитала $K_{(n)}$, већ и првобитну његову вредност (садашњу вредност) $K = \frac{K_{(n)}}{q^n}$; број периода (година, полугођа) $n = \frac{log\, K_{(n)} - log\, K}{log\, q}$; и интересни чинитељ $q = \sqrt[n]{\frac{K_{(n)}}{K}}$, а затим и интересну стопу p из једначине $1 + \frac{p}{100} = q$.

Примери:

1) *На коју суму нарасте капитал од 10000,— дин. дат у штедионицу под интерес на интерес са $9^0/_0$ (p. a.)*[1], *а за 15 година, кад се капиталисање врши a) годишње; b) семестрално?*

a) $K_{(15)} = 10000 \cdot 1{,}09^{15}$; $log\, K_{(15)} = log\, 10000 + 15\, log\, 1{,}09 = 4 + 15 \cdot 0{,}03743 = 4{,}56145$, а $K_{15} = N\overline{4{,}56145} = 36429{,}16$ дин.

b) $K_{(30)} = 10000 \cdot 1{,}045^{30}$; $log\, K_{(30)} = log\, 10000 + 30\, log\, 1{,}045 = 4 + 30 \cdot 0{,}01912 = 4{,}57360$; а $K_{(30)} = N\overline{4{,}57360} = 37462{,}73$ д.

2) *На коју суму нарасте капитал од 20000,— дин. за $18^3/_4$ година са $6^0/_0$ (p. a.), кад се капиталисање врши полугодишње?*

Код овог задатка најпре ћемо наћи крајњу вредност капитала за $18^1/_2$ година, односно за 37 семестара са $3^0/_0$ (p. s.), а затим израчунаћемо још прост интерес од $K_{(37)}$ за 3 месеца са $6^0/_0$.

$K_{(37)} = 20000 \cdot 1{,}03^{37}$; $log\, K_{(37)} = log\, 20000 + 37\, log\, 1{,}03 = 4{,}30103 + 37 \cdot 0{,}01284 = 4{,}77611$; а $K_{(37)} = N\overline{4{,}77611} = 59718{,}57$.

Прост интерес $i = \frac{59718{,}57 \cdot 3 \cdot 6}{1200} = 895{,}80$.

Стога је $K_{\left(18\frac{3}{4}\right)} = K_{(37)} + i = 60614{,}37$

3) *На коју суму нарасте капитал од 12000,— дин. за 8 год. 7 мес. и 20 дана са $9^0/_0$ (p. a.), кад се капиталисање врши семестрално?*

[1] (p. a.) (pro anno) за годину; (p. s.) (pro semestri) значи за полугође; (p. tr.) (pro trimestri) значи за тромесечје.

Овде треба наћи најпре крајњу вредност за 17 семестара са $4{,}5\%$ (p. s.), а затим још прост интерес од те крајње вредности за 50 дана.

$K_{(17)} = 12000 \cdot 1{,}045^{17}$; $\log K_{(17)} = \log 12000 + 17 \log 1{,}045 =$ $= 4{,}07918 + 17 \cdot 0{,}01912 = 4{,}40422$, $K_{(17)} = N\overline{4{,}40422} = 25364{,}18$.

Прост интерес $i = \frac{25364{,}18 \cdot 9 \cdot 50}{36000} = 317{,}05$.

Стога је $K_{(8\text{ г. }7\text{ м. }20\text{ д.})} = 25364{,}18 + 317{,}05 = 25681{,}23$ дин.

4) *Наћи првобитну вредност капитала који је са 9% (p. a.) са полугодишњим капитализацијем за 15 година постао 37462,73 динара.*

Из једначине: $37462{,}73 = K \cdot 1{,}045^{30}$ имамо:

$K = \frac{37462{,}73}{1{,}045^{30}}$; $\log K = \log 37462{,}73 - 30 \cdot \log 1{,}045 =$ $= 4{,}57360 - 30 \cdot 0{,}01912 = 4$, а $K = 10^4 = 10000$.

5) *Наћи првобитну вредност капитала који за 8 година 7 месеци и 20 дана, са 9% (p. a.) при полугодишњем капитализацију постао 25681,23 динара.*

Овде је: $K_{(17)} + i = 25681{,}23$, или $K \cdot 1{,}045^{17} +$
$$+ \frac{K \cdot 1{,}045^{17} \cdot 9 \cdot 50}{36000} = 25681{,}23.$$

Одавде је: $K \cdot 1{,}045^{17}\left(1 + \frac{9 \cdot 50}{36000}\right) = 25681{,}23$, или

$K \cdot 1{,}045^{17} \cdot \frac{81}{80} = 25681{,}23$ а $K = \frac{25681{,}23 \cdot 80}{1{,}045^{17} \cdot 81}$.

Стога је: $\log K = \log 25681{,}23 + \log 80 - 17 \log 1{,}045 -$ $\log 81 = 4{,}40962 + 1{,}90309 - 0{,}32504 - 1{,}90849 = 4{,}07918$, а $K = N\overline{4{,}07918} = 12000$ дин.

6) *За које време капитал од 10000,— дин., при полугодишњем капитализацију, са $4{,}5\%$ (p. s.) постаје 37462,73 дин.*

Из једначине: $37462{,}73 = 10000 \cdot 1{,}045^{n}$ имамо:

$\log 37462{,}73 = \log 10000 + n \cdot \log 1{,}045$, а $n =$
$$= \frac{\log 37462{,}73 - \log 10000}{\log 1{,}045} = \frac{4{,}57360 - 4}{0{,}01912} = \frac{0{,}57360}{0{,}01912} =$$
$= 57360 : 1912 = 30$ семестара $= 15$ година.

7) *Под којом годишњом стопом капитал од 10000,— дин. при полугодишњем капитализацију, за 15 година, постаје 37362,73 динара?*

Из $37462{,}73 = 10000 \cdot q^{30}$, биће $q = \sqrt[30]{3{,}746273}$, $\log q =$ $= \frac{\log 3{,}746273}{30} = \frac{0{,}57360}{30} = 0{,}01912$; а $q = N\overline{0{,}01912} = 1{,}045$.

Најзад из једначине: $1 + \frac{p}{100} = 1{,}045$, а добијамо $p\,(p \cdot s) = 4{,}5$, а стопа *pro anno* $p = 9\%$.

Напомена. — Одређивање стопе p је немогуће, ако је време n дато као вишеименован број, тј. ако је $n = m$ год. и d дана, јер је у овом случају

$$K_n = K_m + \frac{K_m \cdot pd}{36000} = Kq^m + \frac{Kq^m \cdot pd}{36000}, \text{ или } K_n = Kq^m\left(1 + \frac{pd}{36000}\right) \ldots (1)$$

коју једначину (m-тог степена) не можемо решити помоћу елементарне алгебре.

Међутим, време n у овоме случају можемо одредити, иако имамо посла са две непознате m и d, јер је из једначине (1): $\log K_{(n)} = \log K + m \log q + \log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)$, а
$$m = \frac{\log K_{(n)} - \log K}{\log q} - \frac{\log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)}{\log q}.$$

Па ако је $\frac{\log K_n - \log K}{\log q} = Q + \frac{R}{\log q}$, то је
$$m = Q + \frac{R}{\log q} - \frac{\log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)}{\log q} \ldots (2).$$

Па како m и Q морају бити цели бројеви, а $\frac{R}{\log q}$ и $\frac{\log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)}{\log q}$ разломљени, то једначина (2) је могућа само ако је $m = Q$, и ако је $\frac{R}{\log q} = \frac{\log\left(1 + \frac{pd}{100}\right)}{\log q}$, или $R = \log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)$.

Из свега овога закључујемо *да целина количника* $\frac{\log K_{(n)} - \log K}{\log q}$ *претставља нам тражени број* година m (или полугођа, ако је капитализање шестомесечно), а остатак претставља $\log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)$. Најзад, из једначине $\log\left(1 + \frac{pd}{36000}\right) =$ $= R$, имамо: $1 + \frac{pd}{36000} = N\overline{R}$, а тражени број дана $d =$ $= \frac{36000\,(N\overline{R} - 1)}{p}$.

8. *Пример. За које време капитал од 12000,— дин., при полугодишњем капитализацију, са 9% (p. a.), постаје 25681,23 динара?*

У овом задатку m претставља полугођа, а семестрална је стопа $4{,}5^0/_0$. Овде је $\frac{\log K_{(n)} - \log K}{\log q} = \frac{\log 25681{,}23 - \log 12000}{\log 1{,}045} = \frac{4{,}40962 - 4{,}07918}{0{,}01911} = \frac{0{,}33044}{0{,}01912} = 33044 : 1912 = 17\frac{540}{1912} = 17 + \frac{0{,}00540}{0{,}01912}$. Стога је $m = 17$ семестара, $\log\left(1 + \frac{9\ d}{36000}\right) = 0{,}00540$;

$$1 + \frac{9\ d}{36000} = N\overline{0{,}00540} = 1{,}0125.$$

Одавде је $d = \frac{1{,}0125 \cdot 36000 - 36000}{9} = 50$ дана.

Према томе тражено време је 17 семестара и 50 дана, или 8 год. 7 месеци и 20 дана. (Види 5 задатак из овог параграфа.)

Н. 3. Готово исто време добијамо применом обрасца $K_{(n)} = K \cdot q^n$, сматрајући n као децималан број.

Код овог примера биће $25681{,}23 = 12000 \cdot 1{,}045^n$, а

$n = \frac{\log 25681{,}23 - \log 12000}{\log 1{,}045} = 17{,}28 \cdots$ семестара $=$ $= 17$ семестара и $0{,}28 \cdot 180$ дана $= 17$ сем. $50{,}4$ дана $= 8$ год. 7 мес. 20 дана.

§ 24. **Рачун улога.** Стална сума која се у почетку или при крају периоде (године, семестра) улаже у новчани завод под интерес на интерес у намери да се нека сума уштеди, зове се *улог*.

Ако означимо стални улог са a, интересну стопу са p ($p.\ a.$), а број година са n, онда је крајња вредност свих улога, према обрасцу за увећани капитал:

а) *За улагање у почетку године:*

$S_{(n)} = aq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \cdots + aq^3 + aq^2 + aq$, или

$S_{(n)} = aq\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$, или

$S_{(n)} = \frac{aq\ (q^n - 1)}{q - 1}$ **(I)**; а

b) *За улоге при крају године:*

$S'_n = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \cdots aq^2 + aq + a = a\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$, или

$$S'_n = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}\ \textbf{(II)}.$$

Помоћу образаца (I) и (II) израчунавамо ма коју од количина: $S_{(n)}$, a, q, односно p, и n, ако су нам познате три од тих количина. Разуме се, израчунавање процента p је немогуће помоћу елементарне математике, јер нас наводи на решавање једначина вишег степена. Ако се улози улажу полугодишње, онда употребљавамо исте обрасце, али узимамо двапут мањи проценат p, а двапут веће време n.

Ако се уложи у новчани завод запитал K, а затим у почетку или при крају године улаже стална сума a, за n година, са $p^0/_0$ *(p. a.)*, онда капитал K постаје Kq^n, а остали улози $\frac{aq\ (q^n - 1)}{q - 2}$, или $\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$, те је целокупна уштеда:

$$Y_{(n)} = K_{(n)} + S_{(n)} = Kq^n + \frac{aq\,(q^n - 1)}{q - 1} \cdots \text{(III)},\ \text{или}$$

$$Y'_{(n)} = K_{(n)} + S'_n = Kq^n + \frac{a\,(q_n - 1)}{q - 1} \cdots \text{(IV)}.$$

Најзад, ако у почетку или при крају n година улажемо у новчани завод сталну суму a, а по истеку n година престајемо са улагањем, али и даље остављамо стечене уштеде $S_{(n)}$, односно $S'_{(n)}$, у заводу још m година, онда су уштеђевине:

$$Y_{(n)} = S_{(n)} \cdot q^m = \frac{aq\,(q^n - 1)}{q - 1} \cdot q^m \cdots \text{(V)},\ \text{или}$$

$$Y'_{(n)} = S'_{(n)} \cdot q^m = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} \cdot q^m \cdots \text{(VI)}.$$

Примери:

1) *Који ћемо капитал имати после 19 година, ако у почетку сваке године уложимо по 1000,— динара са $8^0/_0$* (p. a.) *сложеног интереса?*

Овде је $a = 1000$,-- дин., $n = 18$, $q = 1{,}08$, те је

$S_{(18)} = \frac{1000 \cdot 1{,}08\,(1{,}08^{18} - 1)}{0{,}08} = \frac{100000 \cdot 1{,}08\,(1{,}08^{18} - 1)}{8} = 12500 \cdot 1{,}08(1{,}08^{18} - 1)$.

За $1{,}08^{18} = x$, биће $\log x = 18 \log 1{,}08 = 18 \cdot 0{,}03342 = 0{,}60156$, а $x = N\overline{0{,}60156} = 3{,}995 \cdots$, те је $S_{(18)} = 12500 \cdot 1{,}08 \cdot 2{,}995 = 125 \cdot 108 \cdot 3 = 40500$,— дин.

2) *Ако у току 15 година, а при крају сваке године улажемо под интерес на интерес, са $3^1/_4{}^0/_0$ (p.a.), суму од 2500,— дин., йита се, коју ћемо суму уштедети?*

Овде је $a = 2500$, $n = 15$ год., $q = 1{,}0325$, те је

$S'_{(15)} = \frac{2500\,(1{,}0325^{15} - 1)}{0{,}0325} = \frac{25000000 \cdot (1{,}0325^{15} - 1)}{325} = \frac{1000000\,(1{,}0325^{15} - 1)}{13}$.

За $1{,}0325^{15} = x$, биће $\log x = 15 \cdot \log 1{,}0325 - 15 \cdot 0{,}01389 = 0{,}20835$, а $x = N\overline{0{,}20835} = 1{,}61566667$, те је

$$s = \frac{1000000 \cdot 0{,}61566667}{13} = \frac{615666{,}67}{13} = 47358{,}96\ \text{дин.}$$

3) *Дат је капитал 15000,— дин. под интерес на интерес са $5^0/_0$ (p. a.), па се крајем сваке године улаже још по 2000,— дин. На коју суму нарасте капитал йосле 10 година са свима улозима заједно?*

Овде је $K = 15000$, $q = 1{,}05$, $a = 2000$ и $n = 10$, те је целокупна уштеда:

$$Y'_{(10)} = K_{10} + S'_{(10)} = 15000 \cdot 1{,}05^{10} + \frac{2000\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05}.$$

За $1{,}05^{10} = x$, биће $\log x = 10 \log 1{,}05 = 10 \cdot 0{,}02119 = 0{,}21190$, а $x = N\overline{0{,}21190} = 1{,}628926\ldots$ Стога је

$$Y'_{(10)} = 15000 \cdot 1{,}628926 + 40000 \cdot 0{,}628926 = 49590{,}93 \text{ дин.}$$

4) *Коју суму треба улагати у почетку сваког семестра под интерес на интерес, да бисмо за 10 год., са* $10\,^0/_0$ *(р. а.) уштедели 100000,— дин.?*

Овде је $S_{(20)} = 100000$, $q = 1{,}05$ а $n = 20$, те је:

$$100000 = \frac{a \cdot 1{,}05\,(1{,}05^{20} - 1)}{0{,}05} = 21a\,(1{,}05^{20} - 1).$$ Одавде је

$$a = \frac{100000}{21\,(1{,}05^{20} - 1)}.$$ За $1{,}05^{20} = x$, биће $\log x = 20 \cdot \log 1{,}05 = 20 \cdot 0{,}02119 = 0{,}42380$, а $x = N\overline{0{,}42380} = 2{,}653375$, те је

$$a = \frac{100000}{21 \cdot 1{,}65} = 2886 \text{ дин.}$$

5) *Колико година треба улагати у почетку сваког полугођа 2886 дин., са* $10\,^0/_0$ *(р. а.), да би се уштедело 100000,— динара?*

Овде је $S_{(n)} = 100000$, $a = 2886$, и $q = 1{,}05$, те је $100000 = \frac{2886 \cdot 1{,}05\,(1{,}05^n - 1)}{0{,}05} = 2886 \cdot 21 \cdot (1{,}05^n - 1)$, или $100000 = 60606 \cdot 1{,}05^n - 60606$, или $160606 = 60606 \cdot 1{,}05^n$.

Логаритмовањем ове једначине имамо:

$$\log 160606 = \log 60606 + n \cdot \log 1{,}05.$$

Одавде је $n = \frac{\log 160606 - \log 60600}{\log 1{,}05} = 20$ сем. $= 10$ год.

§ 25. **Рачун ренте.** Под рентом разумемо сталан приход r, годишњи или семестрални, који прима нека личност, која је сама, или неко други за њен рачун, уложила у новчани завод раније под интерес на интерес суму K. Право на примање ренте може се стећи и улагањем сталне суме a у току n периода (година или семестара), па после престанка улагања, настаје примање ренте r у току m година. Ако се уплата за право на ренту изврши наједанпут, онда се таква уплата K зове *миза* или *садашња вредност ренте.* Ако се право на ренту стиче сталним претходним уплаћивањем суме a у току n година, онда се таква уплата зове *премија.* Ако се рента прима крајем периоде, онда се она зове *декурзивна*, а ако се прима у почетку сваке периоде, назива се *антиципативна рента.* Према трајању ренте, може она бити *привремена, доживотна* и *вечита.* Доживотна рента зависи од трајања живота њеног сопственика и у вези је с рачуном вероватноће, те се са овом врстом ренте нећемо ни бавити.

a) *Садашња вредност декурзивне ренте.* Ако уложимо суму K са $p\,^0/_0$ *(p. a.)*, да бисмо стекли право на ренту r за n година, онда крајња вредност $K_{(n)}$ уложеног капитала K мора бити једнак суми $S'_{(n)}$ свију примљених рента у току n година. Биће, дакле, $K_{(n)} = S'_{(n)}$, или

$$K \cdot q^n = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ одавде је } K = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)} \quad (\mathrm{I})$$

b) *Садашња вредност антиципативне ренте.* Код ове ренте биће $K_{(n)} = S_{(n)}$ или $Kq^n = \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$, а $K = \frac{rq\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)}$ (II)

c) Ако се на ренту r за m година стиче право улагањем сталне суме a у току претходних n година, онда је:

α) За улагање премија почетком године и примање ренте почетком године:

$$\frac{aq\,(q^n - 1)}{q - 1}\,q^m = \frac{rq\,(q^m - 1)}{q - 1}, \text{ или } \boldsymbol{a\,(q^n - 1)\,q^m = r\,(q^m - 1)} \quad (\mathrm{III})$$

β) За улагање премија почетком године и примање ренте крајем године:

$$\frac{aq\,(q^n - 1)}{q - 1}\,q^m = \frac{r\,(q^m - 1)}{q - 1}, \text{ или } \boldsymbol{aq^{m+1}\,(q^n - 1) = r\,(q^m - 1)} \quad (\mathrm{IV})$$

γ) За улагање премија крајем године а примање ренте почетком године:

$$\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}\,q^m = \frac{rq\,(q^m - 1)}{q - 1}, \text{ или } \boldsymbol{a\,(q^n - 1)\,q^{m-1} = r\,(q^m - 1)} \quad (\mathrm{V})$$

δ) За улагање премије крајем године и примање ренте крајем године:

$$\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}\,q^m = \frac{r\,(q^m - 1)}{q - 1}, \text{ или } \boldsymbol{a\,(q^n - 1)\,q^m = r\,(q^m - 1)},$$ у ком се случају добија образац као за случај под α.

d) Вечита рента, тј. рента која траје вечито, једнака је годишњем интересу мизе K. Ово увиђамо из једначине:

$$K \cdot q^n = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Ако ову једначину поделимо са q^n, добијамо:

$$K = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)} = \frac{r\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)}{q - 1}.$$ Па како је $n = \infty$, то је $q^n = \infty$, а $\frac{1}{q^n} = 0$. Стога је $K = \frac{r}{q - 1}$. Одавде је $r = K\,(q - 1) = Kq - K = i$.

Примери. 1) *Наћи садашњу вредност декурзивне ренте* *од 6000 дин. годишње, која се плаћа 10 година, кад је интересна стопа* $8^0/_0$.

Овде је $r = 6000$, $n = 10$ и $q = 1,08$, те је
$K \cdot 1,08^{10} = \frac{6000\,(1,08^{10} - 1)}{0,08}$. За $1,08^{10} = y$, биће $\log y =$
$= 10 \log 1,08 = 10 \cdot 0,03342 = 0,33420$, а $y = N\overline{0,33420} =$
$= 2,15875$. Стога је $K = \frac{6000 \cdot 1,15875}{2,15875 \cdot 0,08} = \frac{600000 \cdot 115875}{215875 \cdot 8} =$
$= 40254,45$ дин.

2) *Колика је годишња декурзивна рента обезбеђена, ако се уложи 150000 дин. са* $6^0/_0$ *(p. a.) за 30 година?*

Овде је $K = 150000$, $q = 1,06$, $n = 30$, те је
$150000 \cdot 1,06^{30} = \frac{r\,(1,06^{30} - 1)}{0,06}$, а $r = \frac{150000 \cdot 1,06^{30} \cdot 0,06}{1,06^{30} - 1}$.

За $1,06^{30} = x$, биће $\log x = 30 \cdot \log 1,06 = 30 \cdot 0,02531 =$
$= 0,75930$ а $x = N\overline{0,75930} = 5,745125$. Стога је
$r = \frac{150000 \cdot 5,745125 \cdot 0,06}{4,745125} = 10895$ дин.

3) *Антиципативна годишња рента од 6437,50 динара са* $5,5^0/_0$ *(p. a.) купљена је за 100000,— динара. Колико година траје та рента?*

Овде је $K = 100000$, $r = 6437,50$ и $q = 1,055$, те је
$100000 \cdot 1,055^n = \frac{6437,50 \cdot 1,055\,(1,055^n - 1)}{0,055}$.

Заменом $1,055^n = x$ у овој једначини добијамо: $100000\,x =$
$= \frac{6437,50 \cdot 1055\,(x - 1)}{55}$, а одавде је $x = \frac{103 \cdot 211}{4133} = 1,055^n$.
Стога је:

$n \log 1,055 = \log 103 + \log 211 - \log 4133$, а
$n = \frac{\log 103 + \log 211 - \log 4133}{\log 1,055} = 31$ год.

4) *Неко уплаћује 30 година, у почетку сваке године 200,55 дин. у једну банку, која плаћа* $4^0/_0$ *интереса на интерес. Колику ће му ренту признати банка од почетка прве идуће године, па кроз 25 година?*

Овде је уплата $a = 200,55$ дин., $n = 30$ год., $q = 1,04$ и $m = 25$ год., те је
$\frac{200,55 \cdot 1,04\,(1,04^{30} - 1)}{0,04} \cdot 1,04^{25} = \frac{r \cdot 1,04\,(1,04^{25} - 1)}{0,04}$.

Одавде је $r = \frac{200,55\,(1,4^{30} - 1) \cdot 1,04^{25}}{1,04^{25} - 1}$.

Пошто претходно израчунамо помоћу логаритама да је $1,04^{30} = 3,243398$ и $1,04^{25} = 2,665836$ и заменимо у горњем изразу, добијамо:

$$r = \frac{200,55 \cdot 2,243398 \cdot 2,665836}{1,665836};$$

$\log r = \log 200,55 + \log 2,243398 + \log 2,665836 - \log 1,665836 =$
$= 2,30222 + 0,35091 + 0,42583 - 0,22163 = 2,85733$;
а $r = N\overline{2,85733} = 720$ дин.

5) *Коју суму треба уплаћивати у почетку сваке године, а кроз 20 година, по* $4^1/_2{}^0/_0$, *да би се после тога времена могла примити антиципативна рента од 300 дин. у току 25 година?*

Овде је $n = 20$, $q = 1,045$, $r = 300$ дин. и $m = 25$, те је
$\frac{a \cdot 1,045\,(1,045^{20} - 1)}{0,045} \cdot 1,045^{25} = \frac{300 \cdot 1,045\,(1,045^{25} - 1)}{0,045}$.

Одавде је $a = \frac{300 \cdot (1,045^{25} - 1)}{(1,045^{20} - 1) \cdot 1,045^{25}} = \frac{300 \cdot 2,005434}{1,411714 \cdot 3,005434}$;
$\log a = \log 300 + \log 2,005434 - \log 1,411714 - \log 3,005434 =$
$= 2,15168$, а $a = N\overline{2,15168} = 141,80$ дин.

6) *Неко улаже крајем године за првих 10 година по 400 дин., затим за даљих 10 година по 500 дин. и најзад за наредних 10 година по 600 дин. у новчани завод са* $3^1/_2{}^0/_0$ *(p. a.). Колико година затим може да ужива декурзивну ренту од 1570,46 годишње?*

Једначина за решење овог задатка је:

$$\left[\frac{400\,(1,035^{10} - 1)}{0,035} \cdot 1,035^{20} + \frac{500\,(1,035^{10} - 1)}{0,035} \cdot 1,035^{10} + \frac{600\,(1,035^{10} - 1)}{0,035}\right] \cdot$$
$$\cdot 1,035^m = \frac{1570,46\,(1,035^m - 1)}{0,035},$$ или $100\,(1,035^{10} - 1)\,(4 \cdot 1,035^{20} +$
$+ 5 \cdot 1,035^{10} + 6) \cdot 1,035^m = 1570,46\,(1,035^m - 1)$.

Одавде је:
$1,035^m = \frac{1570,46}{707,71}$, а $m = \frac{\log 1570,46 - \log 707,71}{\log 1,035} = 24$ год.

Узми: $1,035^{20} = 1,989789$ и $1,035^{10} = 1,410599$.

§ 26. **Амортизација дугова.** Под *ануитетом* разумемо стални улог a, који се уплаћује у неки новчани завод или конзорцији банака у току n периода у намери да се учињени зајам K, са $p\,^0/_0$, поништи (амортизује, умртви, избрише — од француске речи *amortir*). Сваки ануитет садржава два дела; један његов део, звани *отплата* или *амортизациона квота* служи за смањивање (отплаћивање) учињеног дуга K, а други део служи за исплату интереса. Па како оба дела увек дају стални годишњи ануитет, то отплате поступно расту, а интереси поступно опадају. Прегледна табела, из које се види стање дуга, величина појединих интереса и величина појединих отплата у току n периода отплаћивања зајма, зове се *амортизациони план.*

Зајам од K динара са $p^0/_0$ (р. а.), има се амортизовати за n година анунтетом a. Кад се зајам не би амортизовао, нарастао би на $K_{(n)} = K \cdot q^n$. Али зајам се отплаћује сталним ануитетима a за n година са истим процентом $p^0/_0$. Збир крајњих вредности свих ануитета са интересом на интерес биће $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Како се зајам има тим ануитетима поништити, мора дакле бити: $K_{(n)} = S$ или $Kq^n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, а одавде је ануитет $a = \frac{Kq^n(q-1)}{q^n - 1}$.

Примери. 1) *Којим се ануитетом може одужити зајам од 10000,— дин. за 5 год. са $8^0/_0$ (р. а.). Начинити амортизациони план.*

$$10000 \cdot 1{,}08^5 = \frac{a(1{,}08^5 - 1)}{0{,}08}$$

Одавде је $a = \frac{10000 \cdot 1{,}08^5 \cdot 0{,}08}{1{,}08^5 - 1} = \frac{10000 \cdot 1{,}469333 \cdot 0{,}08}{0{,}469333}$

$x = 1{,}08^5,$
$log\ x = 5\ log\ 1{,}08$
$= 5 \cdot 0{,}03342$
$= 0{,}16710,$
$x = N0{,}16710 = 1{,}469333$

$= \frac{14693{,}33 \cdot 0{,}08}{0{,}469333} =$
$= \frac{1469333 \cdot 800}{469333} = \underline{2504{,}55}$

Амортизациони план биће:

$a = 2504{,}55$

n	д у г	$8^0/_0$ инт.	отплата
1	10000,—	800,—	1704,55
2	8295,45	663,64	1840,91
3	6454,54	516,36	1988,19
4	4566,35	357,31	2147,24
5	2319,11	185,53	2319,02

Свега: 9999,91 = 10000.

2) *Који се зајам може одужити за 5 година ануитетом $a = 2504{,}55$ са $8^0/_0$ (р. а.)?*

Из $K \cdot 1{,}085^5 = \frac{2504{,}55\,(1{,}08^5 - 1)}{0{,}08}$ биће

$$K = \frac{2504{,}55 \cdot 0{,}469333}{1{,}469333 \cdot 0{,}08} = \frac{250455 \cdot 469333}{1469333 \cdot 8};$$

$$log\,K = log\,250455 + log\,469333 - log\,146933 - log\,8 =$$
$$= 5{,}398740 + 5{,}67148 - 6{,}16712 - 0{,}90309 = 11{,}07022 -$$
$$- 7{,}07021 = 4, \text{ а } K = 10000 \text{ дин.}$$

3) *За које се време зајам од 10000,— дин. са $8^0/_0$ (р. а) може одужити ануитетом од 2504,55 дин.?*

Овде је: $10000 \cdot 1{,}08^n = \frac{2504{,}55\,(1{,}08^n - 1)}{0{,}08}$.

Одавде је $1{,}08^n = \frac{2504{,}55}{1704{,}55} = \frac{250455}{170455} = \frac{50091}{34091}$; $n\ log\ 1{,}08 = log\ 50091 - log\ 34091$, а $n = \frac{log\ 50091 - log\ 34091}{log\ 1{,}08} =$

$$= \frac{4{,}69976 - 4{,}53264}{0{,}03342} = \frac{0{,}16712}{0{,}03342} = \frac{16712}{3342} = 5 \text{ год.}$$

Напомена. — Амортизационе квоте за поједине године можемо наћи израђујући план отплаћивања, као код првог задатка. Али ове отплате можемо наћи и овим путем. Ако амортизационе квоте означимо са $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$, а ануитет са a, онда су интереси појединих година: $a - b_1$, $a - b_2$, $a - b_3$, ...$a - b_n$, а остаци дуга биће: $K - b_1$, $K - b_1 - b_2$, $K - b_1 - b_2 - b_3$, и т д. Како је ануитет за ма коју годину увек једнак збиру интереса и отплате дотичне године, то су ануитети:

За 1 годину $a = \frac{Kp}{100} + b_1$

„ 2 „ $a = (K - b_1)\frac{p}{100} + b_2$

„ 3 „ $a = (K - b_1 - b_2)\frac{p}{100} + b_3$

„ 4 „ $a = (K - b_1 - b_2 - b_3)\frac{p}{100} + b_4$

— — — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — — —

Узастопним одузимањем ових једначина добијамо:

$$b_2 = b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 q;$$

$$b_3 = b_2 + \frac{b_2 p}{100} = b_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_2 q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 + \frac{b_3 p}{100} = b_3\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_3 q = b_1 q^3;$$

— — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — —

Ма која амортизациона квота, $b_{(r)}$, према овоме биће:

$$\boldsymbol{b_{(r)} = b_1 \cdot q^{r-1}} \quad (1)$$

Како је збир свију отплата једнак зајму, то је
$K = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, или
$K = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}$, или
$K = b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$, или
$K = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Одавде је $b_1 = \frac{K(q-1)}{q^n - 1}$ (2).

Овај нам образац пружа могућност за израчунавање прве отплате b_1 непосредно из зајма а затим помоћу обрасца

(1) и ма коју отплату $b_{(r)}$. Ако желимо да знамо стање дуга после m година, треба претходно да нађемо збир отплата за m година $S_{(m)} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m = b_1 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots + b_1 q^{m-1} = b_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1}) = \frac{b_1 (q^m - 1)}{q - 1}$, а остатак дуга после m година биће $D_m = K - S_m = K - \frac{b_1 (q^m - 1)}{q - 1}$.

§ 27*. **Зајмови подељени на обвезнице.** Обични су велики зајмови, ради њиховог лакшег остварења, подељени на мање делове, на обвезнице или облигације, чија је номинална вредност 100, 500, 1000,— и више динара. Ови зајмови, које обично држава, општина, или какав велики новчани завод гради, отплаћује се поступним извлачењем појединих обвезница, годишње или семестрално, а које се после извлачења за одређени рок подносе на исплату, било по њиховој номиналној вредности, било са каквом великом ажијом. Број извучених обвезница сваке доцније године расте пошто се са сваком годином отплата дуга повећава, а интерес се смањује. Како је номинална вредност обвезнице округла сума, то се планом отплаћивања предвиђа унапред број извучених односно исплаћених обвезница појединим роковима који број мора бити цео.

Нека је начињени зајам од K динара, подељен на m обвезница, номиналне вредности од ω динара, који треба да се исплати за n година са $p^0/_0$ једнаким ануитетима a. Тада је $K = m\omega$, а $a = \frac{Kq^n (q-1)}{q^n - 1}$. Ако број обвезница којима се овај зајам отплађује на крају појединих година означимо са $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$, онда је $m = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, а поједини ануитети биће:

За прву годину $a = \frac{Kp}{100} + x_1 \omega$;

„ другу „ $a = \frac{(K - x_1 \omega) p}{100} + x_2 \omega$;

„ трећу „ $a = \frac{(K - x_1 \omega - x_2 \omega) p}{100} + x_3 \omega$;

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Поступним одузимањем ових једначина добијамо:

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 p}{100} = x_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1 q;$$

$$x_3 = x_2 + \frac{x_2 p}{100} = x_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_2 q = x_1 q^2;$$

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Према овоме, број обвезница r-те године биће $x_{(r)} = x_1 \cdot q^{r-1}$, а n-те године $x_{(n)} = x_1 q^{n-1}$.

Горње једначине показују нам да је лако наћи број обвезница друге и осталих година, ако знамо њихов број прве године. Број обвезница ове године налазимо на следећи начин:

Како је $m = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, то је

$m = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + x_1 q^3 + \cdots + x_1 q^{n-1}$, или

$m = x_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$, или

$m = \frac{x_1 (q^n - 1)}{q - 1}$, одавде је $x_1 = \frac{m (q - 1)}{q^n - 1}$.

Пример. Зајам од 1 000 000 дин. са $9^0/_0$ *(р. а), подељен на 1000 обвезница, отплатити за 6 година. Израдити план отплаћивања.*

Овде је $m = 1000$, $\omega = 1000$, $a = \frac{1000000 \cdot 1{,}09^6 \cdot 0{,}9}{1{,}09^6 - 1} = \frac{1000000 \cdot 1{,}677 \cdot 0{,}09}{0{,}677} = \frac{1677 \cdot 90000}{677} = 222919{,}78$ дин.

Тада је:

	тачно:	заокру-гљено:
$x_1 = \frac{1000 \cdot 0{,}09}{1{,}09^6 - 1} = \frac{90}{0{,}679} = \frac{90000}{679}$	$= 132{,}55 =$	133
$x_2 = 132{,}55 \cdot 1{,}09 =$	$= 144{,}48 =$	145
$x_3 = 144{,}48 \cdot 1{,}09$	$= 157{,}48 =$	158
$x_4 = 157{,}48 \cdot 1{,}09$	$= 171{,}65 =$	172
$x_5 = 171{,}65 \cdot 1{,}09$	$= 187{,}09 =$	187
$x_6 = 187{,}09 \cdot 1{,}09$	$= 204{,}92 =$	205
	Свега обвезница:	1000

План отплаћивања биће:

$$a = 222919{,}78$$

Год.	Дуг	Број обвезница за исплату	$9^0/_0$ дек. инт.	Отпл.	Потребна сума
1	1000000	133	90000	133000	223000
2	867000	145	78030	145000	223030
3	722000	158	64980	158000	222980
4	564000	172	50760	172000	222760
5	392000	187	35280	187000	222280
6	205000	205	18450	205000	223450
Свега		1000	337500	1000000	1337500

§ 28. **Задаци за вежбу.** [1]

1) На коју суму нарасте капитал од 12750 дин. дат под интерес на интерес за 20 год. са 8% (р. а.), кад је капиталисање a) годишње, b) полугодишње?

2) На коју суму нарасте капитал од 15000 дин. кад је најпре 10 година био по 6% (р. а.), а затим још 8 година са 8% (р. а.)?

3) На коју суму нарасте капитал од 50000 динара са $7\frac{3}{4}\%$ (р. а.) за 12 год. 8 мес. и 20 дана, кад је капиталисање a) годишње, b) семестрално?

4) На коју суму нарасте капитал од 10000 дин. од 1 августа 1870 год. до 1 марта 1910 год. дат са 6% (р. а.), кад је капиталисање годишње?

5) Колико ће донети интерес на интерес капитал од 25000 дин. дат под интерес са 10% (р. а.) за 12 год., кад је капиталисање a) годишње, b) семестрално, c) тромесечно?

6) При полугодишњем капиталисању, са 9% (р. а.), колики ће интерес на интерес донети капитал од 20000 за 18 семестара?

7) Капитал од 12000 дин. дат је под интерес на интерес са 12% (р. а.) за 56 тромесечја. На коју је суму нарастао и колико износи интерес на интерес, кад је капиталисање a) семестрално, b) тромесечно?

8) Неки град има данас 22000 становника. Колико ће бити становника у том граду после 20 година, ако је годишњи прираштај $1^1/_2\%$?

9) Неки забран има данас 10755 m^3 дрва. Колико ће m^3 дрва бити у томе забрану после $15^1/_2$ година, ако је годишњи прираштај $8,5\%$?

10) Нека држава има данас 25 000 000 становника. Колико ће бити становника у њој после 10 година, ако је годишњи прираштај $0,75\%$?

11) Капитал од 1000 дин. при полугодишњем капиталисању за 16 година донео је интерес на интерес 1382,40 дин.; под којим је процентом (р. а.), био капитал под интерес на интерес?

12) Са којим је процентом (р. а.) био капитал од 1 000 дин., кад је за 15 година, при полугодишњем капиталисању, постао двапут већи?

13) Који капитал нарасте за 10 година на 45000 дин. са процентом 9% (р. а.)?

14) За колико ће година један динар са $5^1/_2\%$ (р. а.) донети интерес на интерес 1,25 дин.?

15) Неко има да плати после 10 година 80000 дин. Са којом се сумом може данас да одужи овај дуг, ако је проценат $6^3/_4\%$?

[1] Задаци снабдевени звездицом нису за ученике класичних гимназија.

16) Нека сума дата под интерес на интерес порасла је за 20 година на 50750 дин. За првих 12 година проценат је био 8% (р. а.) а за остало време 9% (р. а.). Колика је била основна сума?

17) За куповину неког имања била су два купца. Први је нудио 120000 динара с погодбом да ту суму положи после $2^1/_2$ године, а други је нудио 39000 одмах да исплати а 75000 после 2 године. Која је понуда боља, кад се новац може дати по $4^1/_2\%$?

18) За које време 10000 динара $6^1/_2\%$ (р. а.) постају 70000 динара при a) годишњем капиталисању, b) полугодишњем капиталисању?

19) Сада има дрва у неком забрану 76000 m^3. Колико година не би требало сећи забран, па да у њему буде дрва 125000 m^3, ако је годишњи прираштај дрва $2^3/_4\%$?

20) Колико времена треба да стоје под интересом на интерес 12546 динара са $4^1/_2\%$ (р. а.), па да се добије сума 17596,25 динара?

21) Колико година треба да стоји неки капитал под интерес на интерес са $4^1/_2\%$ (р. а.), да би порастао онолико колико порасте за 8 година са $6^3/_4\%$?

22) За једну кућу има три понуде. *A* нуди 260000 динара одмах, *B* 310000 динара после 4 године, а *C* нуди 154000 дин. после 3, а толико исто после 6 година. Која је понуда најбоља, ако се новац може дати под интерес на интерес са 5% (р. а.)?

23) Неко лице уложи у банку извесну суму новаца са $3^1/_2\%$ (р. а.); после 7 година уложи исту суму, а после даљих 6 година примио је из банке 3965,96 дин. По колико је уложио у оба маха?

24) Који капитал за 15 година, са $3^1/_2\%$ (р. а.) нарасте на исту суму на коју нарасте 7600 динара за 11 година са 4% (р. а.)?

25) Збир од два капитала износи 11000 дин. Један је дат под интерес на интерес са $3^1/_2\%$ (р. а.), а капиталише се годишње, а други је дат са 4% (р. а.), али се капиталише семестрално. После 16 година оба капитала износе 19976,75 динара. Колико износи сваки капитал?

26) Разлика од два капитала је 1000 дин. Већи је био уложен по 4% (р. а.), а мањи по $4^1/_2\%$ (р. а.). После 20 година први капитал постаје двапут већи од другог. Наћи првобитне капитале.

27) Са којим процентом треба дати 18000 дин., да би за 5 година постао 22500 дин., ако се капиталише a) годишње, b) семестрално, c) четворомесечно, d) тромесечно, e) двомесечно, f) месечно?

28) Једна облигација од 3750 дин., чији је рок 15 јуна 1927 године, исплаћена је 1 августа 1920 године са шконтом од 403 дин. Наћи годишњи проценат.

29) Под којим процентом је дат неки капитал, који за 24 године постаје три пута већи, ако се капиталисање врши a) годишње, b) семестрално?

30) Један је дао 9300 динара са $3^1/_2{}^0/_0$ (р. а.), а други 7200 динара. После 18 година обојица имају једнаке суме. Под којим процентом је дат други капитал?

31) У неком граду било је: 1890 год. 34188 лица, 1895 год. 36982 лица, 1900 год. 39356 лица и 1905 год. 44388 лица. Колики су проценти приraштаја становника за поменуте интервале од 5 година?

32) Једно лице уложило је 4207,75 динара по $5^1/_2{}^0/_0$, а друго 4320 дин. са $3^0/_0$ (р. а.). После колико ће година прво лице имати двапут већи капитал од другог?

33) Неко жели да кроз 15 година уштеди 60000 дин. Колико би морао улагати почетком, а колико крајем године, кад се на улоге рачуна $6^0/_0$ интерес на интерес?

34) Отац уложи код Држ. хипотек. банке 2000 дин. оног дана кад му се кћи родила, а затим је продужио годишње улагати сваког рођендана своје кћери по 2000 дин., док није кћи навршила 21 годину. Којом сумом располаже његова кћи после 21 године, ако Држ. хипотекарна банка плаћа на улоге $6^0/_0$ (р. а.), а интерес капиталише семестрално?

35) Отац улаже у штедионицу за своје дете, коме је било 6 година, почетком сваке године по 1000 дин. Којом ће сумом располагати дете кад му буде 26 година, кад је интересна стопа $6^0/_0$ (р. а.), а капиталисање се врши a) годишње, b) полугодишње?

36) Колико треба улагати почетком сваке године под интерес на интерес са $8^0/_0$ (р. а.), па да се на крају 20 године прими 49421 дин.?

37) Колико треба улагати при крају сваке године да би се уштедело у току 30 година са $6^0/_0$ (р. а.) 29916 дин.?

38) За колико се година може уштедети капитал од 5865,65 дин., ако се почетком сваке године улаже по 1000 дин. у завод који плаћа $7^0/_0$?

39) Неко се осигура на 20000 дин. и тога ради плаћа почетком сваке године, а у току 24 године, по 720 дин. премије са $4^0/_0$ (р. а.). Да ли друштво губи или добија?

40) Један је улагао код штедионице, почетком сваког семестра, а кроз 10 година по 500 дин. са $6^0/_0$ (р. а.). Којом ће сумом располагати на крају 10 године, ако се капиталисање врши семестрално?

41) Колико треба улагати почетком сваког семестра под интерес на интерес, са $7^0/_0$ (р. а.), па да се на крају 10 године прими 20000 дин., ако се капиталисање врши семестрално?

42) Неко улаже у почетку сваке године по 450 дин. са $4^0/_0$ (р. а.). После колико ће година његова уштеђевина бити 10000 дин.?

43) Неки је човек наследио крајем 1921 године 240000 дин.; он заложи тај новац у штедионицу, па је крајем сваке године додавао тој суми још по 3000 дин. Кад штедионица плаћа $4^3/_4{}^0/_0$ (р. а.), колико је примио крајем 1927 год.?

44) Неко је наследио крајем 1915 год. 240000 дин.; он уложи тај новац у штедионицу, па је крајем сваке године узимао по 3000 дин. Колико ће му новаца остати крајем 1930 год., кад штедионица плаћа $6^0/_0$ (р. а), а интерес капиталише a) годишње, b) семестрално?

45) Неко је дао у почетку 1915 год. извесну суму на штедњу, па је крајем године узимао по 800 дин. У почетку 1927 год. примио је 20000 дин. Коју је суму уложио кад је процент $4^0/_0$?

46) Неко уложи на свој 30-ти рођендан 15000 дин. у штедионицу која плаћа $3^3/_4{}^0/_0$ (р. а.). Колико би морао додавати у почетку сваке следеће године, да би могао примити 60000 дин. о своме 60-том рођендану?

47) Неки је капитал дат под интерес на интерес по $6^0/_0$ (р. а.). Који проценат тога капитала треба додавати крајем сваке године, да би капитал постао 5 пута већи после 15 година?

48) Неко је унео у банку 10000 дин. по $4^0/_0$, а после једне године почео је да узима годишње по 1000 дин. После колико година ће изузети своју готовину?

49) У једној вароши има данас 13000 становника, а прираштај годишњи је $2^1/_2{}^0/_0$. Колико ће становника бити у тој вароши после 25 година, ако се из ње годишње исељава по 180 становника?

50) Неко остави наследство од 600000 дин. под интерес на интерес са $4^1/_2{}^0/_0$ (р. а.). Свака 3 месеца узима се по 7000 дин. за васпитање његово 6-ро деце. После 8 година остатак наследства подељен је на једнаке делове међу децу. Колико добива свако дете, ако се капиталисање врши тромесечно?

51) Колика је садашња вредност антиципативне ренте од 1500 дин., која би се примала 20 година рачунајући $8^0/_0$ (р. а.)?

52) Колико треба уложити са $4^1/_2{}^0/_0$ (р. а.) интерес на интерес, па да се кроз 25 година прима декурзивна рента од 3000 дин.?

53) Колико треба улагати са $5^0/_0$ (р. а.) интерес на интерес кроз 6 година, почетком сваке године, па да се за идућих 10 година прима декурзивна рента од 1000 дин.?

54) Колико треба улагати са $7^0/_0$ (р. а.) интерес на интерес кроз 6 година, почетком сваке године, па да се за идућих 8 година прима антиципативна рента од 3000 дин.?

55) Колико треба улагати крајем сваке године са $7^0/_0$ (р. а.) под интерес на интерес за 10 година, па да се за идућих 5 година прима декурзивна рента 2000 дин.?

56) Ако се 10 година улаже под интерес на интерес, почетком сваке године, по 1000 дин. са 12% (р. а.), колика би се декурзивна рента могла примати идућих 5 година?

57) Ако се улаже почетком сваке године, за 12 година, са 9% (р. а.) по 2000 дин. под интерес на интерес, колика би се антиципативна рента могла примати почев од 13 године а за 8 година?

58) Неко је уложио 6000 дин. са 6% (р. а.) интереса на интерес. Колику би декурзивну ренту могао примати за 20 година?

59) Да би се за 20 наредних година уживала декурзивна рента од 3000 дин. годишње, колико је требало пре 10 година уложити под интерес на интерес са $5^1/_2\%$ (р. а.)?

60) Уложено је 19797 дин. са 5% (р. а.) под интерес на интерес. Колико би се година могла примати декурзивна рента од 2000 динара?

61) Неко наследи 22500 дин.; он ту суму да под интерес на интерес, с тим да крајем сваке године узима ренту од 1500 дин., док цео капитал не потроши. Колико ће година примати ренту, кад је проценат 5%?

62) Неко је уплатио 36000 дин. за декурзивну ренту од 1628,14 дин. Колико година има да траје ова рента, ако је проценат $3^3/_4\%$ (р. а.)?

63) У једну банку, која плаћа 4% (р. а.), уложи неко 8000 дин. с погодбом да му се тек после 8 година почне исплаћивати почетком сваке године рента од 865,35 дин. Колико ће година трајати та рента?

64) Неко хоће своју декурзивну годишњу ренту од 3000 дин., коју би примао 30 година, да замени већом декурзивном рентом коју би примао 25 година. Колика би била друга рента, ако је проценат 6% (р. а.)?

65) Рента од 6000 дин., која би имала да се прима 25 година почетком сваке године, није примана 10 првих година. Колика ће сад бити годишња рента за наредних 15 година, ако је проценат 5%?

66) Антиципативна рента од 1000 дин., која би се примала 24 године, хоће да се исплати уједанпут сумом од 24000 дин. После колико година ће бити њена садашња вредност толика, ако је проценат $3^3/_4\%$ (р. а)?

67) Кад се 15 година улаже по 500 дин., годишње почетком сваке године са 4% (р. а), колико се година после тога може примати декурзивна рента од 800 дин.?

68) Неко је улагао у току 20 година, почеком сваке године по 1000 дин. са $4^1/_2\%$ (р. а), а 15 година после тога примао је атиципативну ренту. Колика је та рента?

69) Зајам од 50000 дин. са 10% (р.а.)интерес а на интерес отплатити за 6 година једнаким ануитетима. Начинити план отплаћивања.

70) Отплатити једнаким ануитетима за 10 година зајам од 300000 дин. са 6% (р. а). Колики је годишњи ануитет, прва отплата b_1 и седма отплата b_7?

71) Наћи девету отплату зајма од 30000 дин. начињеног са 6% (р. а) за 15 година у једнаким ануитетима.

72) Зајам од 80000 дин. отплатити за 12 година са 3% (р. а). Наћи отплаћени капитал за првих 5 год. и остатак дуга после 5 година.

73) Који се зајам са 4% (р. а) може отплатити ануитетом од 25000 дин. за 5 година (за нађени зајам начинити план отплаћивања)?

74) За које ће се време отплатити зајам од 20000 динара са 4% (р. а) ануитетом од 1471,60 динара?

75) За које ће се време отплатити зајам од 5000 дин. са 8% (р. а) ануитетом од 510 дин.?

76) За зајам, који је отплаћен за 5 год., са $6^1/_2\%$ (р. а), плаћено је на име четврте отплате 169,70 дин.; који је то зајам?

77)* Начинити амортизациони план за зајам од 600000 дин., са 7% (р. а) интереса, подељен на обвезнице номинале 500 динара, који треба отплатити за 6 година, исплаћујући обвезнице по номинали.

78)* Начинити план отплаћивања за зајам од 300000 дин. са 4% (р. а) подељен на обвезнице номинале 25 дин., који треба отплатити за 10 година.

79) Неко је дужан 24000 динара. Колики ануитет треба да плаћа кад је погодба да се за 5 година дуг сведе на половину и кад је проценат 5% (р. а)?

80) Отплаћивање дуга од 300000 динара са 9% (р. а) треба да почне 10 година доцније и да се сврши у 30 једнаких годишњих ануитета. Колики су ти ануитети?

Матурски задаци

(за домаћу вежбу ученика)

81) Нека општина узајми 500000 дин 6%, па хоће дуг да амортизује тиме што ће плаћати годишње ануитета једнак збиру геометриске прогресије од 3 члана, од којих је први 1000 дин. а количник 5. За колико година ће се дуг поништити?

(Београд, III мушка 1923)

82) Један град зида купатило и зато начини амортизациони зајам од 1000000 динара са 8%. Амортизације се врше за 60 година. Израдити амортизациони план за првих пет година и израчунати колики ће бити дуг после 30 година.

(Петровград, 1924)

83)* Зајам у 350000 дин. са $p\%$ сложеног интереса има се исплатити једнаким годишњим отплатама крајем сваке године за n година. Колико износи годишња отплата, ако је $p=\frac{1}{20}$ целог корена једначине $x^{\log x+1}=10^6$, а n једнако броју чланова аритметичке прогресије у којој је први члан 2, збир V и IX члана 28, а збир свих чланова 420. (Битољ, 1934)

84)* Неко је тестаментом оставио за зидање школе 200000 дин. Ако трошкови по предрачуну износе 362340 динара, колико година мора да лежи под сложеним интересом завештана сума, кад банка плаћа толико % колико има јединица у корену једначине $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} - 3 \cdot 5^{x-2} = 300$, а интерес се капиталише полугодишње? (Шабац, 1933)

85)* Неки добротвор остави 100000 дин. својој општини за зидање школе и тај новац лежи у банци 5 година; после овог времена општина дода овом легату 50000 дин. и после три године приступа се зидању школе. Са којом се сумом располаже у почетку зидања, ако банка плаћа толико процената сложеног интереса колико је јединица у већем корену једначине $12^{2x+4} \cdot 1728 = 144^{4x}$. (Шабац, 1932)

86) Које је године требала нека држава да да̂ под интерес на интерес 1 пару по 5% да би се ослободила дуга који сада износи 33 милијарди динара? (Београд, Реалка, 1924)

87) Неко је улагао крајем сваке године по 580 дин. у току онолико година колико има чланова у геометриском реду чији је први члан 2, количник 3 и збир 6560. Колико је свега примио, када је интерес на интерес $5^3/_4$%, а капиталисање се врши свако пола године? (Београд, I мушка, 1923)

88) Три брата, од којих најстарији има 11 година, средњи 8 година а најмлађи 7 година, наследе после очеве смрти 320000 дин. Како треба разделити наслеђе да би сваки од наследника, давши свој део под интерес на интерес по 5%, на дан свога пунолетства примио исту суму новаца?

(Београд, II мушка, 1931)

89)* Неко узајми из штедионице 15000 дин. с погодбом да дуг исплати са 10 година, плаћајући крајем сваке године једнаке суме. Колика је свака отплата, кад је проценат једнак III члану аритметичке прогресије (цео број), чији је производ II и IV члана једнак 21, а збир та четири члана је 16.

(В. Кикинда, 1932)

90)* Отац улаже за свога сина сваке године по 1200 динара кроз 20 година, да би му син после 20 година могао уживати кроз 6 година ренту. Колику ће ренту син уживати, ако је проценат једнак корену једначине $\log x = \frac{1}{2}(2 - \log x)$.

(Нови Сад, Мушка, 1933)

91)* Неко дугује 220000 дин.; дуг исплаћује годишњим ануитетима од 23450 динара. За колико ће година исплатити дуг кад је проценат једнак првом члану растуће аритметичке прогресије у којој је збир I и IV члана 17, а њихов производ 52?

(Ниш, Мушка, 1934(

92)* Којим ануитетом се може амортизовати зајам од 2745000 динара, ако је број година једнак већем корену једначине $\log(x\text{-}10) - \frac{1}{2}\log(5x\text{-}75) = \log 2$, а проценат је једнак мањем корену исте једначине? (Ниш, Женска, 1932)

93)* Дато је под сложен интерес 22440 дин. и к томе се крајем сваке године додаје 2700 дин. У коју ће се суму претворити капитал кроз толико година колико је јединица у позитивном корену једначине $2(3 - \sqrt[3]{x^2}) + \sqrt[3]{x} = 0$, а проценат је једнак збиру бескрајног реда: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots$.

(Подгорица 1931)

94) Дато је под сложен интерес 125000 дин. по $4^1/_2$%. Томе се капиталу крајем сваке године додаје 3600 дин. Која ће се сума примити после толико година колико је јединица у позитивном корену једначине $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x+19}$?

(Пожаревац, 1934)

95) Отац улаже за свога сина најпре на дан рођења, па после навршене 3-ће, 6-те, 9-те, 12-те, 15-те, 18-те и 21-ве године сваки пут по 1000 дин. Колику ренту може уживати син кроз 10 година крајем сваке године а после навршене 24 године, кад је проценат 5%? (Ужице, 1933)

96)* На коју ће суму нарасти капитал од 360000 дин. за 10 година, ако је за прве 4 године уложен по x_1%, а после тога са x_2%, кад су x_1 и x_2 позитивни корени једначине $x^4 - 113x^2 + 3136 = 0$ и $x_1 > x_2$, а интерес се капиталише полугодишње? (Тузла, 1933)

97)* Сума од 1540 дин. порасла је са интересом на интерес на 6536,40 дин. за онолико година колико има јединица у целом и позитивном корену једначине $73(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) = 9(x + x^{-1})$. Колика је била процентна стопа? (Тетово, 1931)

98) Тестаменат гласи: „Од моје готовине уложене у банку уз $5^1/_2$% нека се исплаћује годишња рента од 25000 динара старатељу моје кћери док се она не уда; сав преостали новац нека буде њен мираз". После 15 година кћи се удала и добила је 130000 дин. мираза. Колика је била та готовина?

(Ср. Митровица, 1931)

99) Неко је купио шуму под следећим условима: *а*) отплаћиваће шуму у десет једнаких годишњих рата; *b*) прву ће рату положити 3 године по закључењу уговора; *c*) за ануитете му се има рачунати 8%. Колике ће бити годишње рате, ако је шума на дан закључења уговора процењена на 250000 дин. и ако њена вредност расте годишње 8%?

(Суботица, Мушка, 1933)

100) Неки човек науми да оснује фонд у добротворне сврхе. Да би то остварио, он уложи у две различите банке новац. У једној банци уложи 45000 дин. по 5%, а у другој 25000 дин. са 9%. У свом легату каже: „Из фонда ће се издавати 30 година помоћ по 14000 дин. годишње тек онда, када обе уложене суме по величини буду једнаке. На крају 30 го-

дине остатак, ако га буде било, употребити на зидање школе". Пита се да ли је што остало у фонду или не, кад од дана изједначења уложених сума интерес је био 7%? (Скопље, Женска, 1932)

101)* Неко је улагао n година уз $p\%$ крајем сваке године по 5000 дин., да би могао по истеку тих n година уживати декурзивну ренту у току идућих 10 година. Колика је та рента, ако је p мањи а n већи корен система једначина $\sqrt[4]{x+7y}=3$, $(x+7y) \cdot 2^x = 1296$. (Сомбор, 1931)

102) Неко је уложио почетком 1914 године у банку 156750 дин. и од почетка 1919 године до 1926 год. улагао је почетком сваке године по 4750 дин. Коју ренту ужива од почетка 1930 год., и то кроз 15 година, ако се уложене суме рачунају по $6\frac{1}{4}\%$? (Сушак, 1932)

103) У Сплиту је живело 1918 год. 23500 становника. Сваке године усели се 950 становника. Ако на 40 становника умире годишње просечно један, а на 25 се годишње просечно један роди, пита се које ће године Сплит имати 50000 становника? (Сплит, 1933)

104) А има да плати В-у од данас сваке три године, а у свему 10 пута, сваки пут 4000 дин.; колика је садашња вредност тога дуга, ако се рачуна $3,5\%$? (Загреб, II женска, 1933)

105) Отац хоће да улаже за свог сина крајем сваке године неку сталну своту од прве до навршене 18-те године синовљеве, да би син могао од почетка своје 19-те до почетка своје 24-те године дизати годишње 18000 дин. Колику своту мора уплатити отац, ако улаже у банку која рачуна сложене годишње камате уз 5%? (Загреб, II мушка, 1934)

ТРЕЋИ ОДЕЉАК[1]

I) КОМБИНАТОРИКА

§ 29. **О комбиновању уопште.** Од неколико датих предмета, слова или цифара, можемо образовати групе у које улазе или сви дати предмети, или само неки од тих предмета. Дати предмети (слова, цифре) зову се *елементима*, а свака образована група, засебно узета, зове се *слог* или *комплексија*. Дати елементи означавају се или словима: a, b, c, . . . или цифрама: 1, 2, 3, . . . , или истим словом, али снабдевеним индексима: a_1, a_2, a_3, . . . Према броју елемената у слоговима, имамо слогова II, III, IV итд. класе, а слогови са по једним елементом јесу I класе. Елементе делимо на *ниже* и *више*. Од два елемента виши је онај који је означен словом које доцније долази у азбуци, или цифром која је доцнија у природном бројном реду. Тако, од елемената: a, b, c и d, d је виши и од a, и од b и од c, елеменат b виши је од a. За један слог каже се да је *почетни или основни*, ако су његови елементи поређани или по азбучном, или по природном реду. Такви слогови од четири елемента јесу: $a\,b\,c\,d$, или 1 2 3 4. Од два слога *виши* је онај код кога се с лева надесно пре наилази на виши основак. Тако слог $a\,d\,b\,c$ виши је него слог $a\,c\,b\,d$. *Највиши* је онај слог у коме нема нижег елемента пре вишег. Такав је слог: 5 4 3 2 1. Ако су слогови такви да су сви њихови елементи различити, онда су такви слогови *без понављања*. Слогови у којима се неки елеменат два или више пута понавља, зову се слогови *с понављањем*. Код слогова вредност цифара не узима се у обзир, већ једино њихов различити положај и избор. Склапање слогова од датих елемената може се извршити на различите начине, те према томе имамо разних врста слогова. Главне су врсте три: *пермутације*, *комбинације* и *варијације*. Део математике који се бави испитивањем за-

[1] Само за ученике реалке.

кона и погодаба за размештање и везивање датих елемената зове се *комбинаторика.*

§ 30. **Пермутације.** I) **Пермутације без понављања**

Пермутације су слогови у којима се налазе сви дати елементи, а разликују се једна од друге само по различитом положају елемената. Пермутовати дате елементе значи, дакле, разместити их на све могуће начине.

a) *Грађење пермутација.*

1) Пермутације од елемената : a и b јесу :

$$ab \text{ и } ba;$$

2) Пермутације од елемената : a, b и c јесу :

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab \text{ и } cba.$$

Грађење : Сваки елеменат везује се са пермутацијама од осталих елемената.

3) Пермутације од елемената: a, b, c и d, односно 1, 2, 3 и 4 јесу :

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*	**1234**	2134	3124	4123
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*	1243	2143	3142	4132
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*	1324	2314	3214	4213
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*	1342	2341	3241	4231
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*	1423	2413	3412	4312
adcb	*bdca*	*cdba*	***dcba***	1432	2431	3421	**4321**

Грађење : Сваки елеменат везује се са пермутацијама од осталих елемената. Исто тако се граде и пермутације од n елемената.

Из горњих примера види се да се сваки елеменат налази на првом месту онолико пута колики је број пермутација од осталих елемената, на другом месту, колики је број пермутација од $n—2$ елемента, на трећем, колики је број пермутација од $n—3$ елемента итд. Најпре се пише *основна* пермутација, а последња ће бити *највиша.*

b) *Број пермутација.* Број пермутација од 1, 2, 3, 4,$\cdots$ n елемената означавамо са $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots P_n$. Па како се сваки елеменат налази на првом месту онолико пута колики је број пермутација од осталих $n—1$ елемената, а број пермутација од једног елемента $P_1 = 1$, то је јасно да ће бити:

$$P_{(n)} = n \cdot P_{(n-1)}.$$

Тако, $P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1$;

$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$;

$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$;

— — — — — — — — — — — — — —

број пермутација од n елемената раван је производу свих целих бројева од 1 закључно до n.

Израз : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots (n-2)(n-1) \cdot n$ означава се краће $n!$ а изговара се „*n факторијел*". Према овоме је $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ итд.

Примери: 1) На колико се начина могу разместити 8 лица око округлог стола?

Овде $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$

2) Колико се пермутација могу саставити од слова речи Београд?

$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Напомена. Образац $P_n = n \cdot P_{n-1}$ можемо написати: $n! = n \cdot (n-1)!$. Одавде је $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. За $n = 1$ биће $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$. Према томе, нула факторијел (0!) узима се у математици као јединица.

II) **Пермутације с понављањем**. То су пермутације у којима има једнаких елемената. Таква је пермутација aabbc. Дати елементи нису овде сви различити.

a) *Грађење пермутација* с понављањем врши се када претходно једнаке елементе снабдемо индексима, затим састављамо све пермутације без понављања, сматрајући све дате елементе као различите, и најзад, не обзирући се на индексе, бришемо све једнаке (поновљене) пермутације.

Тако,

1) Пермутације од елемената: a, a, b и c са индексима јесу:

$a_1\,a_2\,b\,c$	$a_2\,a_1\,b\,c$	$b\,a_1\,a_2\,c$	$c\,a_1\,a_2\,b$
$a_1\,a_2\,c\,b$	$a_2\,a_1\,c\,b$	$b\,a_1\,c\,a_2$	$c\,a_1\,b\,a_2$
$a_1\,b\,a_2\,c$	$a_2\,b\,a_1\,c$	$b\,a_2\,a_1\,c$	$c\,a_2\,a_1\,b$
$a_1\,b\,c\,a_2$	$a_2\,b\,c\,a_1$	$b\,a_2\,c\,a_1$	$c\,a_2\,b\,a_1$
$a_1\,c\,a_2\,b$	$a_2\,c\,a_1\,b$	$b\,c\,a_1\,a_2$	$c\,b\,a_2\,a_1$
$a_1\,c\,b\,a_2$	$a_2\,c\,b\,a_1$	$b\,c\,a_2\,a_1$	$c\,b\,a_2\,a_1$

Ако у овим пермутацијама претходно избацимо индексе и изоставимо сваку поновљену пермутацију, добијамо тражене пермутације од датих елемената:

a a b c	*b a a c*	*c a a b*
a a c b	*b a c a*	*c a b a*
a b a c	*b c a a*	*c b a a*
a b c a		
a c a b		
a c b a		

2) Пермутације од елемената: 1, 2, 3 и 3 јесу:

1 2 3 3	2 1 3 3	3 1 2 3
1 3 2 3	2 3 1 3	3 1 3 2
1 3 3 2	2 3 3 1	3 2 1 3
		3 2 3 1
		3 3 1 2
		3 3 2 1

b) *Број пермутација* с понављањем је мањи од броја пермутација без понављања, као што се види из претходна два примера. Код ових примера имамо 4 елемента од којих су два једнака. Кад би били сви елементи различити, онда би број пермутација био $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Како су два елемента једнака, то је број пермутација с понављањем $2!$ пута мањи од $4!$, јер се свака пермутација понавља онолико пута колико се пермутација могу начинити од једнаких елемената. Стога је број пермутација с понављањем од 4 елемента, од којих су два једнака

$$\frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12,$$

што се види из горња два примера.

Из елемената: a, a, a и b можемо начинити пермутације с понављањем

$$\frac{4!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4,$$

а те су пермутације: aaab, aaba, abaa baaa. Све остале пермутације су једнаке са овим пермутацијама и као такве изостављамо.

Од елемената: 1,1 и 2 имамо пермутације:

112, 121 и 211,

а до њиховог броја 3 долазимо по обрасцу $\frac{3!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$.

Уопште, ако имамо n елемената, од којих су α међу собом једнаки, β међу собом једнаки, онда је општи образац за број свих пермутација с понављањем:

$$P^1_{\alpha, \beta}\; n = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta!}.$$

Примери: 1) На колико се разних начина могу распоредити 2 беле, 3 црвене и 4 плаве руже?

Овде је свега ружа 9, те је број пермутација

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1260.$$

2) Колико има шестоцифрених бројева с цифрама 1, 1, 2, 2, 2 и 3?

Њихов је број $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 60$.

3) Колики је број пермутација од слова речи „Тетово".

Овде је број пермутација $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 180$.

§ 31. **Комбинације.** I) **Комбинације без понављања.** Комбинације су слогови у којима се не налазе сви дати елементи, већ по један, два, три и више елемената. Код комбинација не водимо рачуна о међусобном размештају елемената, већ само о њиховом избору. Према броју елемената у појединим слоговима, комбинације могу бити I, II, III, ... n-те класе (*unioni, ambi, terni, quaterni, quinterni* итд.). Ако у комбинацијама има само различитих елемената, онда имамо комбинације *без понављања*. Комбинације с понављањем биће оне у којима има једнаких елемената.

a) *Грађење комбинација.* За грађење комбинација постоје два начина: *поступни* и *независни*.

1) *Поступним начином* градимо комбинације стварањем најпре комбинација прве класе, који су у ствари дати елементи, затим стварамо *ambe* везивањем *uniona* свима осталим вишим елементима, *terne* добијамо везивањем свију *amba* свима осталим вишим елементима, који нису у њима итд.

Тако, комбинације од елемената: a, b, c, d и e јесу:

$C^1(abcde) = a, b, c, d, e;$

$C^2(abcde) = ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.$

$C^3(abcde) = abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.$

$C^4(abcde) = abcd, abce, abde, bcde.$ acde

$C^5(abcde) = abcde.$

2) *Независним начином* стварамо комбинације ма које класе, када за почетни слог узмемо онолико првих елемената по азбучном или природном реду, колики је редни број дотичне класе, а затим остале слогове стварамо поступном заменом сваког елемента с десне стране свима осталим вишим елементима, остављајући елементе с леве стране у непромењеном реду.

Тако, комбинације четврте класе од елемената:

1, 2, 3, 4, 5 и 6 јесу:

1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456 2345, 2346, 2356, 2456, 3456.

b) *Број комбинација.* Број комбинација ма које *r-те* класе од *n* елемената, који се означава са C_n^r, добијамо на следећи начин:

Број комбинација прве класе од *n* елемената раван је броју елемената, те је

$$C_n^1 = n.$$

Ако сваку комбинацију прве класе вежемо са свима осталим вишим и нижим елементима, чији је број $n-1$, онда би број *amba* био $n(n-1)$. Међутим, овај је број двапут већи од траженог, пошто оваквим везивањем добијамо по две једнаке *ambe* (*ab* и *ba*, *bc* и *cb*, итд.). Према томе тачан број амба је:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ако сада сваку комбинацију друге класе вежемо са свима осталим вишим и нижим елементима, чији је број $n-2$, онда би број *terna* био $\frac{n(n-1)}{2}\cdot(n-2)$.

Међутим, овај је број три пута већи од траженог, пошто оваквим везивањем добијамо по три једнаке *терне* (*abc, acb* и *bca; abd, adb* и *bda; acd, adc* и *cda; bcd, bdc* и *cdb* итд.)

Стога је тачни број *terna* трипут мањи и износи

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}.$$

Судећи истоветно нашли бисмо да је:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4};\quad C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5},\dots$$

и најзад

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\dots r}.$$

Разломак $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\dots r}$ означава се краће са $\binom{n}{r}$, а изговара се „*n над r*".

Тако, број комбинација из 5 елемената

За другу класу је $C^2_5 = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10.$

„ трећу „ „ $C^3_5 = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10;$

„ четврту „ „ $C^4_5 = \binom{5}{4} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5;$

„ пету „ „ $C^5_5 = \binom{5}{5} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 1$, што

се да̂ увидети и из примера из овога параграфа при стварању комбинација поступним начином.

Напомена. Израз $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, о чему се можемо уверити из ма ког посебног примера. Тако, a) за $n=7$ и $r=5$, биће: $\binom{7}{5} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 21$ а $\binom{7}{7-5}$ или $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot6}{1\cdot2} = 21$; b) за $n=9$ и $r=6$ биће: $\binom{9}{6} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 84$, а $\binom{9}{9-6}$ или $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 84.$

Одавде изводимо закључак да је $C_n^r = C_n^{n-r}$, *тј. да је број комбинација r-те класе од n елемената једнак броју комбинација (n-r)-те класе од истог броја елемената.* Ако у $C_n^r = C_n^{n-r}$ ставимо да је $r=0$, онда је $C_n^0 = C_n^{n-0} = C_n^n = 1$, или, што је све једно: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

Тако, $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$; $\binom{9}{0} = \binom{9}{9} = 1$; итд.

II) Комбинације с понављањем

a) *Грађење комбинација с понављањем* да̂ се извршити опет *поступним* и *независним* начином, као и комбинације без понављања.

1) *Поступним начином* стварамо најпре комбинације прве класе, које су у ствари дати елементи; затим стварамо *ambe*, везивањем сваког *uniona* самим собом и са свима осталим вишим елементима; *terne* добијамо из *amba*, кад се први елеменат веже са свима *амбама*, затим други елеменат веже са амбом у којој се налази само тај елеменат и са свима осталим амбама после те амбе, затим трећи елеменат веже са амбом у којој се налази само тај елеменат и са свима осталим амбама после те амбе итд.

Тако, комбинације с понављањем од елемената 1, 2, 3 и 4 јесу:

$C^1_{1(1234)} = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$

$C^2_{1(1234)} = 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 22,\ 23,\ 24,\ 33,\ 34,\ 44;$

$C^3_{1(1234)} = 111,\ 112,\ 113,\ 114,\ 122,\ 123,\ 124,\ 133,\ 134,\ 144,$
$222,\ 223,\ 224,\ 233,\ 234,\ 244,\ 333,\ 334,\ 344,\ 444;$

$C^{4}_{1(1234)}$ = 1111, 1112, 1113, 1114, 1122, 1123, 1124, 1133, 1134, 1144, 1222, 1223, 1224, 1233, 1234, 1244, 1333, 1334, 1344, 1444, 2222, 2223, 2224, 2233, 2234, 2244, 2333, 2334, 2344, 2444, 3333, 3334, 3344, 3444, 4444.

Сличним начином добили бисмо и комбинације 5-те, 6-те итд. класе.

2) *Независним начином* добијамо комбинације с понављањем ма које класе, када за почетни слог узмемо најнижи елеменат онолико пута колики је број дотичне класе, а из овога добијамо други, трећи итд. слогове, кад се први елеменат с десне стране, који се може заменити с вишим, замењује поступно најближим вишим основком, остављајући елементе с леве стране у непромењеном реду.

Тако, комбинације с понављањем 3 класе од елемената 1, 2, 3, 4 и 5 јесу:
111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155, 222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 344, 345, 355, 444, 445, 455, 555.

b) Број комбинација. Да бисмо нашли образац за број комбинација с понављањем *r*-те класе од *n* елемената, узимамо у посматрање пример из овог параграфа, у коме су поређане комбинације с понављањем I, II, III и IV класе од елемената: 1, 2, 3 и 4, добивених поступним начином.

1) Ако други елеменат у свакој комбинацији друге класе с понављањем увећамо за 1, добијамо комбинације: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 и 45, тј. добијамо комбинације друге класе од елемента 1, 2, 3, 4 и 5. Како је број ових комбинација 10 $\left[C^{2}_{5}=\binom{5}{2}=10\right]$, а број комбинација друге класе с понављањем од елемената 1, 2, 3 и 4 такође 10, то је

$$C'^{2}_{4}=C^{2}_{5}=\binom{5}{2}=\binom{4+2-1}{2} \cdots\cdot (1).$$

2) Ако сада у свакој комбинацији треће класе с понављањем од елемента 1, 2, 3 и 4 увећамо други елеменат с десна са 1 а трећи са 2, добијамо комбинације: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 и 456, тј. добијамо комбинације треће класе без понављања од елемената: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Како је број и једних и других комбинација 20, то је

$$C'^{3}_{4}=C^{3}_{6}=\binom{6}{3}=\binom{4+3-1}{3} \cdots\cdot (2).$$

3) Ако сада у свакој комбинацији четврте класе с понављањем од елемената: 1, 2, 3 и 4, увећамо други елеменат са 1, трећи са 2, а четврти са 3, добијамо комбинације: 1234, 1235, 1236, 1237, 1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267, 1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1361, 1456, 1457, 1467, 1567, 2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367, 2456, 2457, 2467, 2567, 3456, 3457, 3467, 3567 и 4567, тј. добијамо комбинације четврте класе без понављања од елемената 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Како је број и једних и других комбинација 35, то је

$$C'^{4}_{4}=C^{4}_{7}=\binom{7}{4}=\binom{4+4-1}{4} \cdots\cdot (3).$$

Уопште, ако у свакој комбинацији с понављањем *r*-те класе од елемената: 1, 2, 3, ... *n*, увећамо други елеменат са 1, трећи са 2, четврти са 3, ... *r*-ти са $r-1$, добијамо комбинације без понављања *r*-те класе од $n+r-1$ елемената.

Како је број и једних и других комбинација увек исти, то је

$$C'^{r}_{n}=C^{r}_{n+r-1}=\binom{n+r-1}{r},$$

што се види и из образаца под (1), (2) и (3). Тако, a) Број комбинација *треће* класе с понављањем од 5 елемената биће:

$$C'^{3}_{5}=C^{3}_{5+3-1}=C^{3}_{7}=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35;$$

b) Број комбинација *четврте* класе с понављањем од 7 елемената биће:

$$C'^{4}_{7}=C^{4}_{10}=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

§ 32. **Варијације.** 1) *Варијације без понављања.* Варијације, као и комбинације, јесу слогови у којима се не налазе сви дати елементи, већ по један, два, три и више елемената. Код варијација водимо рачуна и о избору елемената у слоговима и о њиховом међусобном положају. Оне су, дакле, пермутоване комбинације прве, друге, треће итд. класе. Према броју елемената у слоговима имамо варијације прве, друге, треће итд. класе.

a) *Грађење варијација* врши се опет на два начина: *поступним* и *независним*.

1) *Поступним начином* стварамо варијације, када најпре створимо *унионе*, који су у ствари дати елементи; затим стварамо амбе везивањем сваког униона са свима осталим елементима; *терне* стварамо од амба везивањем сваке амбе

свима елементима, које се не налазе у њој; *кватерне* стварамо из терна везивањем сваке терне са елементима који се не налазе у њој итд.

Тако, варијације од елемената: 1, 2, 3, 4 и 5, јесу:

$V^1_{(12345)} = 1, 2, 3, 4$ и 5;

$V^2_{(12345)} = 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, \cancel{44}, 45, 51, 52, 53$ и 54;

$V^3_{(12345)} = 123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145, 152, 153, 154, 213, 214, 215, 231, 234, 235, 241, 243, 245, 251, 253, 254, 312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354, 412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453, 512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542$ и 543.

На сличан начин добијамо варијације и осталих класа.

2) *Независним начином* добијамо варијације ма које класе, када од датих елемената формирамо најпре комбинације исте класе, а затим добивене комбинације пермутујемо.

Тако, варијације треће класе од елемената a, b, c и d добијамо, када најпре *створимо* комбинације те класе:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$$

а кад ове комбинације пермутујемо, добијамо варијације:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

b) *Број варијација.* Број варијација прве класе од n елемената је $V^1 = n$. Како амбе добијамо везивањем униона са свима осталим елементима, а чији је број $n-1$, то је број амба

$$V^2_n = n\,(n-1).$$

Како терне добијамо из амба везивањем амба елементима који не фигуришу у њима, а чији је број $n-2$, то је број терна

$$V^3_n = V^2_n \cdot (n-2) = n\,(n-1)\,(n-2).$$

Поступајући исто тако и даље, налазимо да је

$$V^4_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3);\quad V^5_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)(n-4);$$

$$\boldsymbol{V_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\dots(n-r+1).}$$

Тако, $V^3_5 = 5\cdot4\cdot3 = 60$; $V^3_4 = 4\cdot3\cdot2 = 24$; $V^4_5 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$.

Напомена Према независном начину грађења варијација налазимо образац за број варијација без понављања r-те класе од n елемената на следећи начин:

Овде је $V^r_n = C^r_n \cdot P_n = \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}\cdot r!$ или

$$\boldsymbol{V^r_n = n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-r+1).}$$

II) **Варијације с понављањем**

a) *Грађење варијација.* Варијације *прве класе* јесу сами дати елементи.

Тако, $V^1_{(1234)} = 1, 2, 3, 4$;

Амбе добијамо из униона, када сваки унион вежемо самим собом и свима осталим елементима. Тако,

$$V^2_{(1234)} = \left\{\begin{array}{cccc} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{array}\right.$$

Терне добијамо из амба, кад се свака амба веже са свима елементима. Тако,

$$V^3_{(1234)} = \left\{\begin{array}{cccc} 111 & 211 & 311 & 411 \\ 112 & 212 & 312 & 412 \\ 113 & 213 & 313 & 413 \\ 114 & 214 & 314 & 414 \\ 121 & 221 & 321 & 421 \\ 122 & 222 & 322 & 422 \\ 123 & 223 & 323 & 423 \\ 124 & 224 & 324 & 424 \\ 131 & 231 & 331 & 431 \\ 132 & 232 & 332 & 432 \\ 133 & 233 & 333 & 433 \\ 134 & 234 & 334 & 434 \\ 141 & 241 & 341 & 441 \\ 142 & 242 & 342 & 442 \\ 143 & 243 & 343 & 443 \\ 144 & 244 & 344 & 444 \end{array}\right.$$

Слично добијамо и варијације осталих класа.

b) *Број варијација.* Број варијација с понављањем r-те класе од n елемената лако је наћи узимајући у обзир начин њиховог формирања.

Тако, број варијација прве класе од n елемената $V^1_n = n$.

Како амбе добијамо из униона везивањем униона са свима n елементима, то је број амба:

$$V_n^2 = n \cdot n = n^2,$$

Како терне добијамо из амба њиховим везивањем са свима елементима, то је број терна:

$$V_n^3 = V_n^2 \cdot n = n^2 \cdot n = n^3.$$

Истим резоновањем налазимо да је

$$V_n^4 = n^4;\ V_n^5 = n^5 \text{ и } V_n^r = n^r.$$

$V_{27}^4 = 27^4$

Тако, $V_4^2 = 4^2 = 16$; $V_4^3 = 4^3 = 64$; $V_5^3 = 5^3 = 125$

§ 33. **Примери за вежбу**

a) **Пермутације**

1) Начини пермутације од елемената: a) 3, 4, 5, 6; *b)* a_1, a_2, a_3, a_4.

2) Начини пермутације од писмена речи: *a)* соба, *b)* кода; *c)* труба; *d)* слава; *e)* Авала; *f)* Мачва.

3) Колико има четвороцифрених бројева од цифара *a)* 5, 7, 8, 9; *b)* 4, 7, 0, 8; *c)* 2, 0, 0, 3?

4) Колико има шестоцифрених бројева који се могу написати од цифара: *a)* 3, 3, 6, 8, 8, 8; *b)* 2, 2, 4, 4, 5, 6?

5) Како гласи 42 пермутација од елемената 1, 2, 3, 4, 5?

6) На колико начина могу 6 лица измењати своја места за столом?

7) На колико се разних начина могу поређати 2 беле, 3 црвене и 1 плава лопта?

8) Број пермутација је 720, колики је број елемената?

9) На колико начина може број 480 да се претстави као производ својих простих чинитеља?

10) Напиши све пермутације од писмена свога имена и која је пермутација по реду име?

b) **Комбинације**

1) Одреди комбинације II, III и IV класе од елемената a, b, c, d, e, f без понављања и с понављањем.

2) Одреди комбинације III и IV класе од елемената 1, 2, 3, 4, 5 без понављања.

3) Колико комбинација могу се саставити од 7 елемената друге, треће и четврте класе без понављања и с понављањем?

4) Колико правих линија можемо повући кроз 4, 5, 6, 7 и 8 тачака, када ма које три не леже на једној правој линији?

5) Број комбинација треће класе без понављања од x елемената има се према броју комбинација четврте класе без понављања од $x+1$ елемената као 4 : 9. Нађи x.

6) Од колико различитих елемената можемо образовати 276 комбинација друге класе?

7) Провери тачност једначина: a) $C_9^3 = C_9^6$; b) $C_{12}^7 = C_{12}^5$; c) $C_6^4 + C_6^3 = C_7^4$; d) $C^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6$; e) $C_{12}^6 + C_{12}^5 = C_{13}^6$.

8) На колико начина могу бити изабрана четири лица за четири различите дужности од девет кандидата?

9) Нађи број дијагонала код 50-тоугла.

10) Колико круга можемо описати око 10 тачака распоређених тако да ма које четири не леже на једном кругу?

11) Од колико предмета можемо саставити a) 210 амба, b) 66 амба.

12) Колико елемената треба узети, да се број комбинација треће класе има према броју комбинација пете класе као 2 : 3.

13) Какве су везе по троје могућне из страна a, b, c и углова α, β, γ једног троугла?

c) **Варијације**

1) Начини варијације друге и треће класе са и без понављања од елемената:

a) 1, 2, 3, 4; b) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; c) a, b, c, d, e, f.

2) Колико четвороцифрених бројева могу се написати од свију арапских цифара (без нуле)?

3) Нађи број елемента, кад је број варијација четврте класе без понављања 1680.

4) Колики је број варијација шесте класе без понављања од елемената 1, 2, 3, 4, 5, 6?

5) Број варијација треће класе без понављања стоји према броју варијација истих елемената треће класе с понављањем као 5 : 9. Колики је број елемената?

6) Број варијација друге класе без понављања стоји према броју варијација треће класе без понављања као 1 : 20. Колики је број елемената?

7) Број елемената има се према броју варијација треће класе без понављања као 1 : 20. Нађи број елемената.

8) Број варијација од n елемената r-те класе има се према броју варијација од истог броја елемента $r-1$ класе као 10 : 1; а број комбинација истог броја елемената r-те класе има се према броју комбинација $r-1$ класе, као 5 : 3. Нађи n и r.

9) Број варијација од n елемената треће класе једнак је $\frac{5}{12}$ од броја варијација треће класе од $n+2$ елемента. Нађи n.

II. Биномни образац

§ 34. Производ бинома са једнаким првим члановима

Множењем следећих бинома, код којих су први чланови једнаки, добијамо:

a) $(x+a)\,(x+b) = x^2 + x\,(a+b) + ab$;

b) $(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + x^2\,(a+b+c) + x\,(ab + ac + bc) + abc$;

c) $(x+a)(x+b)(x+c)\,(x+d) = x^4 + x^3\,(a+b+c+d) + x^2\,(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + x\,(abc+abd+acd+bcd) + abcd$.

d) $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+e) = x^5 + x^4\,(a+b+c+d+e) + x^3\,(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de) + x^2\,(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde) + x\,(abcd+abce+abde+acde+bcde) + abcde$; итд.

Из добивених резултата увиђамо да множењем таквих бинома добијамо за производе полиноме уређене по опадајућим изложитељима првог члана x, почевши од изложитеља једнаког броју бинома, а коефицијенти јесу 1 и збирови комбинација (без понављања) 1., 2., 3 . . . n-те класе других чланова.

Општи образац за производ таквих бинома биће, дакле:
$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) \ldots\ldots (x+k) = x^n + \sum C_n^1 x^{n-1} + \sum C_n^2 x^{n-2} + \sum C_n^3 x^{n-3} + \ldots + \sum C_n^{n-1} x + C_n^n$, (I) где нам грчко слово $\sum$ (сигма) значи збир, а $\sum C_n^1 = a+b+c+\ldots+k$; $\sum C_n^2 = ab+ac+ad+\ldots$; $\sum C_n^3 = abc+abd+abe+\ldots$ итд.

Производ бинома: $(x-a)\,(x-b)\,(x-c) \ldots (x-k)$ добијамо истим путем.

У овом случају:
$(x-a)\,(x-b)\,(x-c) \ldots (x-k) = x^n - \sum C_n^1 x^{n-1} + \sum C_n^2 x^{n-2} - \sum C_n^3 x^{n-3} + \ldots \pm C_n^n$.

Истим путем добијамо и производ бинома:

$$(x+a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x+d) \ldots (x \pm k).$$

Примери:

1) $P = (x+1)\,(x+2)\,(x+3)\,(x+4)\,(x+5) = x^5 + \sum C_5^1 x^4 + \sum C_5^2 x^3 + \sum C_5^3 x^2 + \sum C_5^4 x + C_5^5$.

Овде је:

$\sum C_5^1 = 1+2+3+4+5 = 15$; $\sum C_5^2 = 1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 + 1\cdot5 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 4\cdot5 = 85$; $\sum C_5^3 = 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot4 + 1\cdot2\cdot5 + 1\cdot3\cdot4 + 1\cdot3\cdot5 + 1\cdot4\cdot5 + 2\cdot3\cdot4 + 2\cdot3\cdot5 + 2\cdot4\cdot5 + 3\cdot4\cdot5 = 225$; $\sum C_5^4 = 1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1\cdot2\cdot3\cdot5 + 1\cdot2\cdot4\cdot5 + 1\cdot3\cdot4\cdot5 + 2\cdot3\cdot4\cdot5 = 274$; и $C_5^5 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

Стога је тражени производ $P = x^5 + 15\,x^4 + 85\,x^3 + 225\,x^2 + 274x + 120$.

2) $P = (x+6)\,(x-3)\,(x-4)\,(x+5) = x^4 + \Sigma C_4^1 x^3 + \Sigma C_4^2 x^2 + \Sigma C_4^3 x + C_4^4$;

Овде је: $\Sigma C_4^1 = 6 - 3 - 4 + 5 = 4$; $\Sigma C_4^2 = (-3)\cdot(-4) + (-3)\cdot5 + (-3)\cdot6 + (-4)\cdot5 + (-4)\cdot6 + 5\cdot6 = -35$; $\Sigma C_4^3 = (-3)\cdot(-4)\cdot5 + (-3)\cdot(-4)\cdot6 + (-3)\cdot5\cdot6 + (-4)\cdot5\cdot6 = -78$; и $C_4^4 + (-3)\cdot(-4)\cdot5\cdot6 = 360$.

Стога је $P = x^4 + 4x^3 - 35x^2 - 78x + 360$.

3) Наћи збир коефицијената производа $P = (x+2y)\cdot(x+3y)\,(x+4y)\,(x+5y) = x^4 + \Sigma C_4^1 x^3 + \Sigma C_4^2 x^2 + \Sigma C_4^3 x + C_4^4$.

Овде је: $\Sigma C_4^1 = 2y + 3y + 4y + 5y = 14y$;

$\Sigma C_4^2 = 2y\cdot3y + 2y\cdot4y + 2y\cdot5y + 3y\cdot4y + 3y\cdot5y + 4y\cdot5y = 71y^2$;

$\Sigma C_4^3 = 2y\cdot3y\cdot4y + 2y\cdot3y\cdot5y + 2y\cdot4y\cdot5y + 3y\cdot4y\cdot5y = 154y^3$; и

$C_4^4 = 2y\cdot3y\cdot4y\cdot5y = 120y^4$. Стога је производ $P = x^4 + 14x^3y + 71x^2y^2 + 154xy^3 + 120y^4$, и збир коефицијената је: $1 + 14 + 71 + 154 + 120 = 360$.

§ 35. **Њутонов образац.** Ако у обрасцу (I) у претходном параграфу ставимо да је $a = b = c = d = \ldots = k$, онда је лева страна $(x+a)^n$, а на десној страни је:

$\Sigma C_n^1 = a + a + a + \ldots = na = \binom{n}{1} a$; $\Sigma C_n^2 = a^2 + a^2 + \ldots = \frac{n\,(n-1)}{1\cdot2} a^2 = \binom{n}{2} a^2$;

$$\Sigma C_n^3 = a^3 + a^3 + a^3 + \ldots = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot2\cdot3} a^3 = \binom{n}{3} a^3; \ldots$$

$\sum C_n^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots = \binom{n}{n-1} a^{n-1} = \binom{n}{1} a^{n-1} = na^{n-1}$; и $C_n^n = a^n$.

Стога образац (I) добија облик:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + a^n \quad \text{(II)},$$

који се зове *биномни* или *Њутонов образац*, а служи за израчунавање ма ког степена једног бинома.

Тако исто је:

$$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \binom{n}{3} a^3 x^{n-3} + \ldots \ldots (\pm 1)^n a^n \quad \text{(III)}.$$

Код овога су обрасца, дакле, непарни чланови позитивни а парни негативни.

Напомена. — Посматрајући полином биномног обрасца II и III увиђамо: *a*) да је број чланова за 1 већи од изложитеља n којим се бином степенује; b) да је сваки члан бинома n-тог степена, јер је збир изложитеља од x и a једнак n; c) да у првом члану не постоји a, а у последњем x; d) да су коефицијенти појединих чланова бројеви комбинација нулте, прве, друге итд. класе од n елемената; и e) да је коефицијент ма кога члана једнак броју комбинација од n елемената оноликe класе колико је чланова пред њим.

Према овоме $(r+1)$ члан полинома биће:

$$T_{(r+1)} = \pm \binom{n}{r} a^r x^{n-r}.$$

Све досада изложено о биномном обрасцу вреди само ако је изложитељ n цео и позитиван број. Међутим тај образац вреди и када је изложитељ n *негативан* и *разломљен број*, али се то може доказати само вишом математиком.

Примери:

1) $$(x+a)^5 = x^5 + \binom{5}{1} ax^4 + \binom{5}{2} a^2x^3 = \binom{5}{3} a^3x^2 + \binom{5}{4} a^4x + \binom{5}{5} a^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

2) $$(x-a)^6 = x^6 - \binom{6}{1} ax^5 + \binom{6}{2} a^2x^4 - \binom{6}{3} a^3x^3 + \binom{6}{4} a^4x^2 - \binom{6}{5} a^5x + \binom{6}{6} a^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$$

3) $$(2x+5)^4 = (2x)^4 + \binom{4}{1}\cdot 5\cdot(2x)^3 + \binom{4}{2}\cdot 5^2\cdot(2x)^2 + \binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 2x + \binom{4}{4}\cdot 5^4 = 16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625.$$

§ 36. **Особине коефицијената.** 1) *Коефицијенти полинома биномног обрасца поступно расту од почетка до средине, а затим опадају од средине до краја, и то: a) ако је изложитељ n непаран број, онда коефицијенти дају две симетричне половине; b) ако је изложитељ n паран број, онда су коефицијенти симетрично положени према коефицијенту средњег члана.*

Примери:

a) $(x+a)^7 = x^7 + \underline{7}ax^6 + \underline{21}a^2x^5 + \underline{35}a^3x^4 + \underline{35}a^4x^3 + \underline{21}a^5x^2 + 7a^6x + a^7$;

b) $(x+a)^6 = x^6 + \underline{6}ax^5 + \underline{15}a^2x^4 + \underline{20}a^3x^3 + \underline{15}a^4x^2 + \underline{6}a^5x + a^6$.

2) *Од коефицијената n-тог степена неког бинома добијамо коефицијенте (n+1)-ог степена тога бинома, поступним сабирањем оближњих коефицијената n-тог степена.*

Тако, код примера под b) коефицијенти 6-ог степена бинома $x+a$ јесу: 1, 6, 15, 20, 15, 6 и 1, а из њих добијамо коефицијенте 7-ог степена тога бинома: $\mathrm{I}=1$, $\mathrm{II}=1+6=7$; $\mathrm{III}=6+15=21$; $\mathrm{IV}=15+20=35$; $\mathrm{V}=20+15=35$; $\mathrm{VI}=15+6=21$; $\mathrm{VII}=6+1=7$; и $\mathrm{VIII}=1$, тј. добијамо коефицијенте примера под a).

На основу ове особине склопљен је *Паскалов троугао*, у коме су поређани коефицијенти биномног обрасца за $n=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

1	$n=0$
1 1	$n=1$
1 2 1	$n=2$
1 3 3 1	$n=3$
1 4 6 4 1	$n=4$
1 5 10 10 5 1	$n=5$
1 6 15 20 15 6 1	$n=6$
1 7 21 35 35 21 7 1	$n=7$
1 8 28 56 70 56 28 8 1	$n=8$

итд.

3) *Збир коефицијената биномног обрасца једнак је* 2^n.

Ова се особина даје увидети из ма ког реда Паскаловог троугла.

4) *Збир коефицијената на непарним местима једнак је збиру коефицијената на парним местима.* И ова се особина да увидети из ма ког реда Паскаловог троугла.

§ 37. **Задаци за вежбу**

1) Наћи производ бинома:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)$; b) $(y+a)(y+2a)(y+3a)$;
c) $(x-1)(x-2)(x-3)$; d) $(x+3a)(+6a)(x+10a)$;
e) $(x-4)(x-5)(x+6)(x+7)$; f) $(x+3)^2(x+4)^2(x-5)$;
g) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$;

2) Наћи *четврти* и *пети* члан производа:

a) $(x+2)(x-3)(x+4)(x+5)(x-6)$;
b) $(x+1)(x-5)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)$.

3) Наћи коефицијенте уређених једначина чији су корени:

a) 3, -4, 5, -2. b) 1, -1, 2, -3, 4.

Напомена. Код прве су *корени чинитељи*: $(x-3)$, $(x+4)$, $(x-5)$ и $(x+2)$.

4) Одреди *трећи*, *четврти* и *пети* члан производа:

a) $\left(\frac{x}{2}+2\right)\left(\frac{x}{2}-4\right)\left(\frac{x}{2}+6\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{1}{7}\right)$.

5) Развиј степене:

a) $(1 \pm x)^7$; b) $(1+x)^{10}$; c) $(3a+4b)^5$;

d) $(5a-3b)^8$; e) $(b^3+c^3)^6$; f) $\left(\frac{m}{2}+\frac{2}{3}n\right)^7$;

g) $a^{-2}-b^{-2})^4$; k) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^5$; l) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^6$;

m) $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4a}\right)^5$; n) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^6$; p) $(2\sqrt{a}-b)^7$;

q) $(1+3i)^7$; r) $\sqrt{-2}-2)^5$; s) $(3a^2b-4ab^2)^6$;

t) $\left(\frac{2x}{3y^2}-\frac{3y}{4x^2}\right)^5$.

6) Наћи вредност израза:

a) $(2+\sqrt{5})^4+(2-\sqrt{5})^4$; b) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^5-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^5$.

7) Наћи коефицијенте чланова у развијеном степену од $(a+b)^n$, чије су главне количине:

a) a^7b^8; b) a^9b^6; c) a^4b^{11}; d) a^3b^{12}.

8) Одреди четврти, седми и десети члан степена:

a) $(a+b)^{13}$; b) $(4\sqrt{5}-2\sqrt{3})^{11}$; c) $\left(\frac{3x^2}{5a}+\frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$.

III. Рачун вероватноће

§ 38. **Општи појмови**. Узроци неких догађаја јесу *познати* а неких *случајни*. На случајне догађаје делују две врсте узрока: *стални* и *променљиви*. Тако, на температуру неког места у неко доба године утичу *стални узроци*: географски положај и облик површине дотичног места и сунчана топлота, а *променљиви узроци*: атмосферски притисак, влага, правац ветра итд. Због променљивих узрока, један догађај може се десити раније или доцније од другог догађаја, а због сталних узрока, дешавање једног догађаја је вероватније од другога. Различите комбинације ових узрока пружају нам или *повољне* или *неповољне* услове за збивање једног случајног догађаја. Све могуће комбинације узрока и за повољне и за неповољне услове збивања једног догађаја зовемо *свемогућим* комбинацијама тога догађаја. Тако, ако у једној урни имамо 12 белих и 4 црвене лопте једнаке величине, онда за вађење из урне беле лепте имамо: 12 повољних, 4 неповољна и 16 свемо-

гућих услова, а за вађење црвене лопте имамо: 4 повољна, 12 неповољних и 16 свемогућих услова.

Дешавање једног догађаја утолико је вероватније, уколико има више повољних услова, а утолико је невероватније, уколико има више неповољних услова. Тако, ако у урни имамо 12 белих и 4 црвене лопте, онда при првом вађењу лопти, већа је вероватноћа да ћемо извући белу лопту, а мања је вероватноћа за црвену лопту. Ако у урну уметнемо још 2 црвене лопте, онда је шанс за вађење беле лопте мањи, иако је њихов број остао исти, пошто се број свемогућих случајева попео од 16 на 18. Отуда имамо: *при једнаком броју повољних случајева, догађај је толико вероватнији, уколико је мањи број свемогућих случајева.*

Математичка или проста вероватноћа једног случајног догађаја је однос (размера) између повољних и свемогућих случајева тога догађаја. Тако, ако у урни има 12 белих и 4 црвене лопте, онда је математичка вероватноћа случајног догађаја за вађење беле лопте: $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

§ 39. **Проста вероватноћа.** Ако је a број повољних, b неповољних случајева, онда је број свемогућих случајева $(a+b)$. Тада је проста или математичка вероватноћа:

$$w=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{m},$$

где је $m=a+b$.

Па како је $a<m$, то је проста вероватноћа увек прав разломак. За $a=0$, тј. ако немамо повољних случајева, онда је

$$w=\frac{a}{m}=\frac{0}{m}=0.$$

За $a=m$, тј. ако су сви случајеви повољни, онда је

$$w=\frac{m}{m}=1.$$

Код вероватноће *0*, имамо *немогућност*, тј. догађај не може да се деси, а код вероватноће 1 имамо *сигурност*, тј. догађај се мора да деси.

Напомена. За $W<\frac{1}{2}$ каже се да је догађај *невероватан*, за $W>\frac{1}{2}$ догађај је *вероватан*, а за $W=\frac{1}{2}$ догађај је *сумњив*.

Размера између неповољних и свемогућих случајева зове се *супротна* или *обрнута вероватноћа*. Ако је број неповољних случајева b, повољних a, свемогућих $m = a + b$, онда је супротна вероватноћа:

$$W^1 = \frac{b}{m} = \frac{m-a}{m}.$$

Па како је $\frac{a}{m} + \frac{m-a}{m} = 1$, то је *збир просте и супротне вероватноће неког догађаја 1*. Стога је проста вероватноћа равна разлици између 1 и супротне вероватноће, и обрнуто. Тако, ако је проста вероватноћа неког догађаја $\frac{7}{9}$, онда је његова супротна вероватноћа $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

Примери:

1) У једној урни има 10 белих и 6 плавих лопта; са каквом вероватноћом може да се тврди да ће једна извучена лопта бити *a*) бела, *b*) плава?

$$a)\ W = \frac{10}{16} = \frac{5}{8};\quad b)\ W = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

2) Са каквом вероватноћом може да се тврди да ће се при бацању једне коцке у игри добити 6?

Решење. Сви могући случајеви јесу 6, јер је број страна у коцке 6; повољних случајева имамо само 1, јер само једна страна има 6. Стога је:

$$W = \frac{1}{6}.$$

3) Са каквом вероватноћом може да се тврди да ћемо при бацању двеју коцки у игри добити суму 5?

Решење. Број свих могућих случајева је 36, јер је:

11	21	31	**41**	51	61
12	22	**32**	42	52	62
13	**23**	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Број повољних случајева је 4 (види подвучене комбинације), те је $W = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

4) Кад у урни има 3 беле, 9 црвених и 12 плавих лоптица, онда је ветоватноћа да се извади:

a) бела $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$; b) црвена $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, и c) плава $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

§ 40. **Тотална вероватноћа.** Ако у m свих могућих случајева има a повољних случајева за догађај A, a_1 повољних случајева за догађај. A_1 и a_2 опет повољних случајева за догађај A_2, онда је вероватноћа да ће се догодити или догађај A, или догађај A_1, или догађај A_2:

$$W = \frac{a + a_1 + a_2}{m},$$

пошто је број повољних случајева $(a + a_1 + a_2)$. Вероватноћа, да ће се догодити ма који од више један од другог независних догађаја, зове се *тотална* или *савезна*.

Па како је $W = \frac{a+a_1+a_2}{m} = \frac{a}{m} + \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} = W_1 + W_2 + W_3$, *то је свака тотална вероватноћа једнака збиру простих вероватноћа појединих догађаја.*

Примери:

1) У једној урни има 6 белих, 8 плавих и 10 црвених лоптица; са каквом вероватноћом може да се тврди да ће једна од извађених лоптица бити: a) или бела, или плава? b) или бела, или црвена? c) или бела, или плава, или црвена?

$$a)\ W_1 = \frac{6+8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12};\quad b)\ W_2 = \frac{6+10}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3};$$

$$c)\ W_3 = \frac{6+8+10}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

Напомена. Тотална вероватноћа увек је *сигурна*, тј. $= 1$, ако се очекује један, ма који, од m догађаја. Тако, код овога примера под c) сигурни смо да ће једна од извучених лоптица бити или бела или плава, или црвена, јер је свега лоптица 24.

2) У шпилу од 32 карте има 4 краља, 4 даме и 4 пуба; са каквом вероватноћом може да се тврди да ће једна од извучених карата бити: a) или краљ, или дама?; b) или краљ, или дама, или пуб?

$$a)\ W_1 = \frac{4+4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4};\quad b)\ W_2 = \frac{4+4+4}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

§ 41. **Релативна вероватноћа.** Ако при одређивању вероватноће неког догађаја не узмемо у обзир број m свих могућих случајева, већ само m_1 од тих случајева, где је $m_1 < m$, а при том је m_1 збир свих повољних случајева једне групе догађаја, чија се вероватноћа тражи, онда се таква вероватноћа зове *релативна*, за разлику од просте вероватноће. Код релативне вероватноће, дакле, водимо рачуна само о збиру свих повољних случајева који припадају одређеној групи догађаја, а у коју групу спада и догађај чија се вероватноћа тражи.

Релативна ветоватноћа неког догађаја једнака је количнику од просте вероватноће тога догађаја и од збира простих вероватноћа свих догађаја исте групе, тј. групе догађаја у коју спада догађај чију вероватноћу тражимо.

Доказ. Нека су: A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ једна група догађаја са свега m_1 њихових повољних случајева и нека је m број свих могућих случајева ($m_1 < m$). Ако су: a_1, a_2, $a_3, \ldots a_n$ бројеви њихових повољних случајева $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = m_1)$, онда су њихове просте вероватноће:

$$W_1 = \frac{a_1}{m}, \quad W_2 = \frac{a_2}{m}, \quad W_3 = \frac{a_3}{m}, \ldots W_n = \frac{a_n}{m}.$$

Тада је релативна вероватноћа догађаја A_1:

$$W = \frac{a_1}{m} = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} = \frac{\frac{a_1}{m}}{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{m}} =$$

$$= \frac{\frac{a_1}{m}}{\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_3}{m} + \ldots + \frac{a_n}{m}} = \frac{W_1}{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n}.$$

Пример:

1) У урни има 4 беле, 6 плавих и 8 црвених лопти. Проста вероватноћа за вађење беле лопте је $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, за вађење плаве $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, а за вађење црвене $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. Стога је релативна вероватноћа да ће се извући: *a*) пре бела него плава $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; *b*) пре бела него црвена $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; *c*) пре плава него бела $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; *d*) пре плава него црвена $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$; *e*) пре црвена него бела $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; *f*) пре црвена него плава $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

До ових резултата дошли бисмо и помоћу простих вероватноћа. Тако, за:

a) пре белу него плаву $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2+3}{9}} = \frac{2}{5}$;

b) пре белу него црвену $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{4}{9}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

c) пре плаву него белу $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$;

d) пре плаву него црвену $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{9}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{7}$;

e) пре црвену него белу $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{2}{3}$; и

f) пре црвену него плаву $\dfrac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{4}{7}$.

2) У игри са две коцке *A* добива кад избаци „паш“ (дуплон), а лице *B* кад избаци збир 6. Колике су им релативне вероватноће за добит?

11	21	31	41	51	61
12	**22**	32	42	52	62
13	23	**33**	43	53	63
14	24	34	**44**	54	64
15	25	35	45	**55**	65
16	26	36	46	56	**66**

Овде је број свих могућих случајева $m = 36$, број повољних случајева за „паш“ 6, а за збир 6 је број повољних случајева 5, те је $m_1 = 6 + 5 = 11$.

Стога је релативна вероватноћа да добије пре *A* него $B = \frac{6}{11}$, а релативна вероватноћа да добије пре *B* него $A = \frac{5}{11}$.

До ових резултата долазимо и помоћу простих вероватноћа. Тако, узимајући да је проста вероватноћа лица $A = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, а лица $B = \frac{5}{36}$, то је релативна вероватноћа лица

$$A = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{5}{36}} = \frac{6}{11}, \text{ а лица } B = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{5}{11}$$

§ 42. Сложена вероватноћа

1) *Вероватноћа да се више догађаја десе заједно.*

Ако посматрамо два догађаја A_1 и A_2, који се догађају једновремено, или један за другим и ако за први догађај има m_1 свих могућих случајева, а за други m_2, а бројеви њихових повољних случајева јесу a_1 и a_2, онда је број свих могућих случајева за оба догађаја $m_1 \cdot m_2$, а број свих повољних случајева $a_1 \cdot a_2$, пошто сваки свемогућан (повољан) случај I догађаја може да се комбинира са сваким од осталих случајева II догађаја, и то свемогућан са свемогућим, а повољан са повољним.

Отуда је вероватноћа да ће се оба догађаја десити једновремено, или један за другим:

$$W = \frac{a_1 \cdot a_2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{a_1}{m_1} \cdot \frac{a_2}{m_2} = W_1 \cdot W_2, \text{ тј.}$$

једнака је производу простих вероватноћа одвојених догађаја. Исти је случај када је број догађаја већи од два. Отуда имамо опште правило:

Вероватноћа да се догоде више догађаја, међусобно независно, једновремено или један за другим, једнака је производу њихових простих вероватноћа.

Примери:

1) У једној урни има 6 белих и 8 црвених лопти, а у другој 5 белих и 6 црвених лопти; са каквом вероватноћом може да се тврди да кад извлачимо из оба суда по једну лопту, да се извуку: *a*) обе беле; *b*) бела из I а црвена из II; *c*) црвена из I и бела из II; *d*) обе црвене?

a) $W_1 = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{154} = \frac{15}{77}$; *b*) $W_2 = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{154} = \frac{18}{77}$;

c) $W_3 = \frac{8}{14} \cdot \frac{5}{11} = \frac{40}{154} = \frac{20}{77}$; *d*) $W_4 = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{48}{154} = \frac{24}{77}$.

2) Колика је вероватноћа да се двема коцкама први пут избаци збир 5, а други пут збир 7?

11	21	31	41	51	**61**
12	22	32	42	**52**	62
13	23	33	**43**	53	63
14	24	**34**	44	54	64
15	**25**	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Овде је: $a_1 = 4$, $m_1 = 36$

$a_2 = 6$, $m_2 = 36$

Вероватноћа да ће се десити оба догађаја је

$$W = \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}.$$

2) *Вероватноћа да се неки догађај поново деси.*

На основу раније реченог о сложеној вероватноћи од два или више догађаја, јасно је да је вероватноћа да се неки догађај понови по други, трећи и r-ти пут:

$$W_2 = W^2,\ W_3 = W^3,\ W_4 = W^4, \ldots\ W_r = W^r.$$

Примери:

1) Са каквом вероватноћом може да се тврди да ће се из једне урне у којој има 5 белих и 3 црвене лопте, извући три пута узастопно бела лопта, ако се извучена лопта враћа у урну?

$$W = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{125}{512}.$$

2) Колика је вероватноћа да ће се двема коцкама три пута узастопно избацити збир 7?

$$W = \left(\frac{6}{36}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

пошто је број повољних случајева 6 (16, 25, 34, 43, 52 и 61), а број свих могућих случајева 36.

Напомена. — Ако се неки догађај понавља, али се број његових и свих могућих и свих повољних случајева поступно умањује за 1, онда је његова вероватноћа за прву појаву $\frac{a}{m}$ (ако има a повољних а m свих могућих случајева), за другу појаву вероватноћа му је $\frac{a-1}{m-1}$, за трећу $\frac{a-2}{m-2}$, итд. а за r-ту $\frac{a-r+1}{m-r+1}$.

Стога је његова вероватноћа за r пута поновљену појаву:

$$W = \frac{a}{m} \cdot \frac{a-1}{m-1} \cdot \frac{a-2}{m-2} \cdots \frac{a-r+1}{m-r+1}.$$

Примери:

1) Са каквом вероватноћом може да се тврди да ће се из једне урне, у којој има 5 белих и 4 црвене лопте, извући три пута узастопно бела лопта, ако се извучена лопта не враћа у урну?

$$W = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{42}.$$

2) Колика је вероватноћа да се из урне са 5 белих и 7 плавих лопти четири пута узастопно извуче бела лопта, ако се извучена лопта не враћа у урну:

$$W = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{1}{99}.$$

§ 43. **Вероватноћа живота и смрти. — Таблица смртности**

Због смртности број једновремено рођених лица постепено се смањује. У овом опадању запажамо неку малу правилност, ако пажљиво испитујемо књиге рођења и умирања. Таблице, из којих се види постепено смањивање једновремено рођених лица, зову се *таблице смртности* или *морталне таблице*. Тих таблица има више врста, а употребљавају се код друштава за осигурање живота. Ниже наведена таблица је Сисмилх-Бауманова. Према овој таблици од 1000 једновремено рођених лица достижу 10 година живота 532 лица, 30 година 439 лица, 50 година 300 лица, 60 година 210 лица итд.

Употребом таблица смртности налазимо:

а) Вероватноћу, да ли ће неко лице од n година живети или не још m година; и

b) До које ће старости доћи неко лице од n година.

а) *Вероватност, да ће неко лице од n година живети још m година, налазимо помоћу таблица смртности, када број живих лица од $(n+m)$ година поделимо бројем живих лица од n година.* Формула је:

$$W = \frac{V_{n+m}}{V_n} \ldots (1)$$

Вероватност, да неко лице од n година неће живети после m година, налазимо као супротну вероватности (1), по формули:

$$W_1 = 1 - W = 1 - \frac{V_{n+m}}{V_n} \quad (2)$$

Примери:

1) Која је вероватноћа да ће лице од 40 година доживети 60-годишњу старост?

$$W = \frac{V_{60}}{V_{40}} = \frac{210}{374} = \frac{105}{187}.$$

2) Са којом вероватноћом може да се тврди да лице од 40 година неће дочекати 60-годишњу старост?

$$W_1 = 1 - \frac{V_{60}}{V_{40}} = 1 - \frac{105}{187} = \frac{82}{187}.$$

b) *Вероватну годину смрти некога лица од n година налазимо помоћу таблица смртности,* када узмемо број година који се односи на $\frac{V_n}{2}$, тј. број лица која доживе n година делимо са 2 и добивеној половини тражимо одговарајући број година у таблици смртности.

Вероватни остатак живота неког лица од n година налазимо, када од његових вероватних година живота одузмемо садање његове године.

Примери:

1) Наћи цео вероватан живот једног лица од 20 година.

Овде је: $\frac{V_{20}}{2} = \frac{491}{2} = 245{,}5$. Па како овом броју у таблици смртности одговарају године 56 или 57, то је целокупни вероватни живот једног лица од 20 година између 56 и 57 година.

2) Колико година има још да живи једно лице од 50 година?

$\frac{V_{50}}{2} = \frac{300}{2} = 150$, те је његов вероватан живот 66 или 67 година. Стога остатак његовог живота је 16 или 17 година.

Сисмилх-Бауманова таблица смтрности

0	1000	25	466	50	300	75	69
1	750	26	461	51	291	76	62
2	661	27	456	52	282	77	55
3	618	28	451	53	273	78	49
4	593	29	445	54	264	79	43
5	579	30	439	55	255	80	37
6	567	31	433	56	246	81	32
7	556	32	427	57	237	82	28
8	547	33	421	58	228	83	24
9	539	34	415	59	219	84	20
10	532	35	409	60	210	85	17
11	527	36	402	61	201	86	14
12	523	37	395	62	192	87	12
13	519	38	388	63	182	88	10
14	515	39	381	64	172	89	8
15	511	40	374	65	162	90	6
16	507	41	367	66	152	91	5
17	503	42	360	67	142	92	4
18	499	43	353	68	132	93	3
19	495	44	346	69	122	94	2
20	491	45	339	70	112	95	1
21	486	46	332	71	103	96	0
22	481	47	324	72	94	97	—
23	476	48	316	73	85	98	—
24	471	49	308	74	77	99	—

§ 44. **Задаци за вежбу**

1) Колика је вероватноћа, да се бацањем једног динара окрене глава?

2) У урни има 10 белих и 8 црвених куглица; колика је вероватноћа да ће се извући једна бела?

3) Колика је вероватноћа да се из 32 карте за игру извуче *a)* једна црвена карта, *b)* један краљ?

4) Једна лутрија има 300 лозова од којих само 1 добија. Колика је вероватноћа за добитак лица које има 10 лозова?

5) У једној урни има 8 белих, 6 црвених и 12 плавих лоптица; колика је вероватноћа да при првом извлачењу извучемо једну *a)* црвену, *b)* белу, *c)* плаву, *d)* или црвену или белу, *e)* или белу, или црвену, или плаву?

6) Колика је вероватноћа да се из 52 карте за игру извуче при првом извлачењу: *a)* две црвене карте, *b)* једна црвена и једна црна, *c)* две купе, *d)* једна купа и једна каро, *e)* две слике исте боје, *f)* две слике различите боје?

7) Ако у једној лутрији на 100 лозова добију 15, колика је вероватноћа да један лоз добије?

8) У једној урни има 10 белих, 8 црвених и 6 зелених лоптица. Колика је вероватноћа да при првом извлачењу извучемо: *a)* 3 беле, *b)* 2 црвене и 1 белу, *c)* 3 лопте различите боје, *d)* 2 зелене и 1 белу?

9) Неко жели да при бацању две коцке добије први пут збир 5 а други пут збир 7. Колика је вероватноћа?

10) Колика је вероватноћа да при бацању две коцке добијемо први пут највећи збир 4, а по други пут већи збир од 9.

11) Неко жели да бацањем две коцке добије збир 9. Колика је вероватноћа?

12) Од 20 лозова једне лутрије 5 добијају. *A* има 2 лоза, *B* 3, а *C* 5. Колика је вероватноћа да *a)* сваки добије по један добитак, *b)* *A* и *B* да добију а *C* да изгуби?

13) Колика је вероватноћа да се трима коцкама окрену једнака поља (паш)?

14) Колика је вероватноћа да ће се са 2 коцке бацити 8 окана?

15) Колика је вероватноћа да ће човек *a)* од 35 година доживети 50 годину, *b)* од 40 година доживети 60 годину, *c)* од 65 година доживети 80 годину, *d)* 70 година доживети 90 годину, *e)* 25 година доживети 50 годину.

16) Колика је вероватноћа да ће човек *a)* од 28 година живети још 22 године, *b)* од 40 година живети још 25 година, *c)* од 50 година живети још 30 година.

САДРЖАЈ

(Параграфи I и II одељка снабдевени звездицом нису за ученике класичних гимназија)

ПРВИ ОДЕЉАК

Квадратни триноми, неједначине другог степена, једначине вишег степена које се своде на квадратне и системе једначина другог и вишег степена.

ДРУГИ ОДЕЉАК

Прогресије и сложени интересни рачун

ТРЕЋИ ОДЕЉАК*

I. Комбинаторика

* За ученике реалке.